



**HAL**  
open science

# Limite thermodynamique pour un système de particules quantiques en interaction dans un milieu aléatoire

Nikolaj Veniaminov

► **To cite this version:**

Nikolaj Veniaminov. Limite thermodynamique pour un système de particules quantiques en interaction dans un milieu aléatoire. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2012. Français. NNT: . tel-00739096

**HAL Id: tel-00739096**

**<https://theses.hal.science/tel-00739096>**

Submitted on 5 Oct 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° attribué par la bibliothèque

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

## THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 13**

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement par

Nikolaj Veniaminov

le 28 septembre 2012

Titre :

# **Limite thermodynamique pour un système de particules quantiques en interaction dans un milieu aléatoire**

Directeur de thèse :

Frédéric Klopp

### JURY

|                      |                       |  |
|----------------------|-----------------------|--|
| <i>Président :</i>   | Alain Grigis          | Université Paris 13 Nord                         |
| <i>Rapporteurs :</i> | Mathieu Lewin         | Université de Cergy-Pontoise                     |
|                      | Valentin A. Zagrebnov | Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II) |
| <i>Examineurs :</i>  | Eric Cancès           | Ecole des Ponts ParisTech                        |
|                      | Jean-Marc Delort      | Université Paris 13 Nord                         |
|                      | Frédéric Klopp        | Institut de Mathématiques de Jussieu             |

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier mon directeur de thèse, Frédéric Klopp, pour m'avoir donné la possibilité de faire cette thèse, pour m'avoir proposé un sujet très intéressant et actuel et pour m'avoir guidé soigneusement tout au long de ces trois ans en me laissant toute la liberté nécessaire à ma formation scientifique. Je suis très reconnaissant à Frédéric pour l'enthousiasme, l'inspiration et l'énergie avec lesquels il s'occupait de moi et de ma thèse. Ce fut un vrai plaisir de travailler sous sa direction. En me faisant participer à de nombreuses conférences, colloques et séminaires, il m'a permis de découvrir la communauté scientifique de la Physique Mathématique.

Je suis très heureux d'exprimer mes remerciements à Mathieu Lewin et Valentin A. Zagrebnov pour avoir accepté de rapporter sur ce travail. Je remercie Mathieu Lewin pour les nombreuses discussions, commentaires et propositions. Je suis reconnaissant à Valentin A. Zagrebnov pour ses suggestions et observations. Toutes ses contributions m'ont permis d'améliorer le contenu et la présentation de mes résultats et d'aboutir à la forme finale de cette thèse.

C'est un grand honneur pour moi d'avoir Eric Cancès, Jean-Marc Delort, Alain Grigis, Frédéric Klopp, Mathieu Lewin et Valentin A. Zagrebnov parmi les membres du jury. Je les en remercie. Je suis spécifiquement heureux de compter Alain Grigis comme président du jury.

Je suis reconnaissant aux différents membres de la communauté de la physique mathématique et, plus spécifiquement, à ceux des opérateurs de Schrödinger aléatoires et de la théorie spectrale. Je remercie Shu Nakamura et Fumihiko Nakano pour avoir organisé la "Kochi school on random Schrödinger operators" à l'université de Kochi, ainsi que Frédéric Klopp et Peter Hislop pour avoir organisé le programme "Spectral and dynamical properties of quantum hamiltonians" au Centre Interfacultaire Bernoulli de l'EPFL à Lausanne et pour m'y avoir donné des cours. Ces cours ont eu une influence majeure sur mon initiation dans le domaine. Pendant ma thèse, j'ai pu également bénéficier d'un cours annuel de Frédéric sur les aspects avancés de la théorie des opérateurs aléatoires. J'étais heureux de pouvoir discuter et apprendre auprès Guiseppe de Nittis lors de son séjour post-doctoral au sein du laboratoire. Je suis reconnaissant à Alexandre Fedotov, Nicolas Filonov et Alexandre Pushnitski pour avoir organisé et m'avoir invité à faire un exposé sur une partie de ce travail à la Troisième conférence sur la théorie spectral à Saint-Petersbourg. Je remercie Günter Stolz et Robert Sims pour m'avoir donné l'opportunité de présenter la première partie de cette thèse lors de l'"Arizona school of analysis and mathematical physics" qu'ils ont organisée à l'université d'Arizona. Finalement, j'assistais régulièrement aux séminaires hebdomadaires de l'équipe de physique mathématique et équations aux dérivées partielles, dont je remercie tous les membres.

Mes déplacements ont été partiellement pris en charge par le projet ANR-08-BLAN-0261-01.

Lors de mon travail doctoral, j'ai passé trois années excellentes et pleines des souvenirs au Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications à l'Université Paris 13. Au LAGA, j'ai bénéficié non seulement d'excellentes conditions de travail, mais aussi de l'atmosphère ambiante très humaine et chaleureuse. J'en remercie tous les membre de laboratoire, avec une pensée particulière pour Isabelle Barbotin, Yolande Jimenez, Jean-Philippe Dru et

Philippe Fleurance.

J'étais heureux d'être parmi mes collègues doctorants. Je remercie particulièrement Binh, David, Anh Tuan et Liza pour l'ambiance qu'on a pu créer et soutenir en B 410. J'ai participé également avec un très grand plaisir au séminaire des doctorants organisé par David puis par Alexandre.

Je tiens à remercier tous les enseignants que j'ai eu à l'Université d'État de Saint-Petersbourg et à l'Université Paris 13 pour leur insistance, leur énergie et leur dévouement qui m'ont amené finalement à suivre un parcours scientifique.

J'ai une dette envers Nicolas Filonov sous la direction duquel j'ai commencé l'étude et la recherche en physique mathématique.

Je remercie ma famille et tous mes amis pour leurs soutien et conseils avec le plus grand merci à ma femme Yana qui a partagé avec moi toutes les difficultés et les victoires de ma thèse.

*À ma famille*



# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Notations</b>  | <b>1</b>  |
| <b>Introduction</b>   | <b>3</b>  |
| 0.1 Motivation . . . . .  | 3         |
| 0.2 Ce qui a déjà été fait . . . . .                                  | 4         |
| 0.3 Ce qu'on cherche . . . . .  | 5         |
| 0.4 Nos résultats . . . . .   | 5         |
| 0.5 Conclusion . . . . .  | 11        |
| <b>1 Le modèle général</b>  | <b>13</b> |
| 1.1 Définitions . . . . .   | 14        |
| 1.1.1 Opérateurs de Schrödinger aléatoires . . . . .                  | 14        |
| 1.1.2 Hamiltonien d'un système à plusieurs particules . . . . .       | 21        |
| 1.1.3 Entropie, énergie . . . . .                                     | 26        |
| 1.1.4 Limite thermodynamique . . . . .                                | 29        |
| 1.2 Théorèmes d'existence . . . . .                                   | 32        |
| 1.2.1 Inégalités du type sous-additif . . . . .                       | 33        |
| 1.2.2 Convergence $L^2$ sur une suite des cubes spéciale . . . . .    | 37        |
| 1.2.3 Densité critique . . . . .                                      | 41        |
| 1.2.4 Convexité et continuité . . . . .                               | 43        |
| 1.2.5 Convergence dans le cas général . . . . .                       | 46        |
| 1.3 Séries de perturbations en bas du spectre . . . . .               | 50        |
| 1.3.1 Approche générale . . . . .                                     | 51        |
| 1.3.2 Particules sans interactions . . . . .                          | 52        |
| 1.3.3 Structure des séries pour les interactions par paires . . . . . | 60        |
| 1.3.4 À quoi on s'attend dans le cas perturbé . . . . .               | 63        |



|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>2</b> | <b>Modèle des pièces pour fermions</b>  | <b>69</b>  |
| 2.1      | Définition et analyse de base . . . . .   | 70         |
| 2.1.1    | Choix du modèle . . . . .   | 70         |
| 2.1.2    | Analyse statistique du modèle de Poisson . . . . .                              | 71         |
| 2.2      | Séries de perturbations . . . . .   | 77         |
| 2.2.1    | Réduction des éléments matriciels . . . . .                                     | 77         |
| 2.2.2    | Éléments matriciels de potentiel d'interactions par paires . . . . .            | 79         |
| 2.2.3    | Interactions au fond du spectre . . . . .                                       | 87         |
| 2.3      | Décomposition par occupation . . . . .  | 94         |
| 2.4      | Séparation des états excités . . . . .  | 96         |
| 2.5      | Non dégénérescence de l'état fondamental . . . . .                              | 104        |
| 2.6      | Fonction d'autocorrélation . . . . .  | 106        |
| 2.7      | Quantification de l'influence des interactions sur l'état fondamental . . . . . | 113        |
| <b>A</b> | <b>Ensemble grand-canonique</b>   | <b>121</b> |
| A.1      | Espace de Fock et énergie libre . . . . .                                       | 121        |
| A.2      | Inégalités sous-additives et existence de la limite thermodynamique . . . . .   | 123        |
| A.2.1    | Énergie fondamentale . . . . .  | 123        |
| A.2.2    | Énergie libre . . . . .   | 124        |
| <b>B</b> | <b>Marginales, densité de charge, densité de courant et la localisation</b>     | <b>127</b> |
| B.1      | Marginales . . . . .  | 127        |
| B.2      | Localisation . . . . .  | 130        |
| B.3      | Densité de charge et densité de courant . . . . .                               | 132        |
|          | <b>Index</b>  | <b>135</b> |
|          | <b>Liste des symboles</b>   | <b>137</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>  | <b>139</b> |

# Notations

Dans ce texte on utilise les notations et les conventions suivantes. Pour la liste des symboles courants, qu'on essaye d'utiliser toujours pour désigner le même objet afin de faciliter la lecture, voir également la liste de symboles à la fin de la thèse.

- (a) Par  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  on note les ensembles des nombres naturels, entiers, réels et complexes respectivement.
- (b)  $\text{card } A = \sharp A$  est le cardinal (nombre des éléments si fini) d'un ensemble  $A$ .
- (c) Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .  $\mathfrak{S}_n$  est le groupe des permutations de  $\mathbb{N}_n$ , et  $\text{card } \mathfrak{S}_n = n!$ .
- (d)  $C$  avec et sans indices désignera différentes constantes. La valeur de ces constantes peut varier d'une ligne à une autre et d'une estimée à une autre.
- (e) Pour  $\rho \mapsto A(\rho)$  et  $\rho \mapsto B(\rho)$  deux fonctions, on utilisera les notions suivantes :
  - $A(\rho) \sim B(\rho)$ ,  $\rho \rightarrow \rho_0$ , signifie *l'égalité asymptotique* :  $A(\rho)/B(\rho) \rightarrow 1$  quand  $\rho \rightarrow \rho_0$ ,
  - $A(\rho) \asymp B(\rho)$ ,  $\rho \rightarrow \rho_0$ , signifie *l'équivalence asymptotique*, c'est-à-dire, qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $C^{-1} \leq A(\rho)/B(\rho) \leq C$  pour  $\rho$  suffisamment proche de  $\rho_0$ ,
  - $A(\rho) \ll B(\rho)$ ,  $\rho \rightarrow \rho_0$ , veut dire que  $A(\rho)$  est *asymptotiquement beaucoup plus petit* que  $B(\rho)$ , c'est-à-dire, que  $A(\rho)/B(\rho) \rightarrow 0$  quand  $\rho \rightarrow \rho_0$ .
- (f) Pour désigner les espaces de Hilbert on utilise des lettres majuscules gothiques comme  $\mathfrak{H}$ . Les opérateurs sont notés par des lettres majuscules comme  $A$  ou  $H$ . Le produit scalaire est noté par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et la norme par  $\| \cdot \|$ . L'opérateur unité est noté par  $\mathbb{1}$  ou  $\mathbb{1}_{\mathfrak{H}}$  si on veut indiquer l'espace explicitement.
- (g) Si  $A$  est un opérateur sur  $\mathfrak{H}$  avec le domaine de définition dense, son adjoint est noté par  $A^*$ .
- (h) Si  $A$  est un opérateur fermé, son spectre est noté par  $\sigma(A)$  ou  $\text{Spec}(A)$ .
- (i) Pour  $D \subset \mathbb{R}^d$ , son bord est noté par  $\partial D$  et sa fonction caractéristique par  $\mathbb{1}_D = \chi_D$ . Si de plus  $D$  est mesurable, on écrit  $|D| = \text{mes } D$  pour le volume/mesure. Pour l'ensemble  $D \subset \mathbb{Z}^d$  dans le cas discret, on utilise les mêmes notations. Le volume dans ce cas est simplement le nombre des points :  $|D| = \text{card } D$ .
- (j) Si  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ , on utilise la même notation  $f$  pour désigner l'opérateur de multiplication correspondant.



# Introduction

## 0.1 Motivation

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de deux grands domaines de la physique mathématique : la théorie des opérateurs de Schrödinger aléatoires et la physique statistique quantique. On étudie les propriétés macroscopiques dans le cadre de la physique statistique pour un modèle microscopique d'opérateurs de Schrödinger aléatoires.

Une des questions intéressantes et un des objectifs principaux de la physique des solides est de comprendre des phénomènes macroscopiques et de pouvoir calculer ou estimer des quantités macroscopiques à partir de la description microscopique. Il existe, par exemple, plusieurs modèles microscopiques de la physique mathématique qui décrivent des réseaux cristallins des matières métalliques ou des semi-conducteurs. À partir de travail [And58] d'Anderson en 1958, un intérêt important ainsi qu'un nombre croissant d'efforts ont été dédiés à la théorie des opérateurs aléatoires.

Dans la grosse majorité des travaux sur les opérateurs aléatoires, on étudie un opérateur de Schrödinger aléatoire qui décrit une particule (principalement un électron) dans un milieu désordonné. L'avantage du modèle aléatoire (par rapport, par exemple, au modèle du potentiel périodique) est qu'il possède certaines propriétés, comme l'existence des états localisés, qui sont observées expérimentalement, et qui sont absentes dans d'autres modèles.

Pour bien décrire le transport électronique dans un milieu désordonné, il faut tenir compte des interactions entre les électrons. La plupart des études mathématiques du transport des électrons dans les milieux aléatoires ont porté sur les modèles à une particule où on néglige les interactions entre les particules. Dans cette thèse, on considère le cas d'un grand nombre de particules quantiques en interaction dans un milieu aléatoire. On désire, en particulier, comprendre comment la présence des interactions modifie le comportement de particules dans ce milieu.

La deuxième particularité du modèle qu'on va étudier vient de la physique statistique. On va considérer le modèle restreint au volume  $V$  et on va supposer que le nombre de particules  $n$  est proportionnel à  $V$ , c.-à-d.,  $n = \rho V$  où  $\rho$  est une constante strictement positive, la densité de particules. Les échantillons étudiés dans des laboratoires ont des tailles macroscopiques : ils contiennent un très grand nombre de particules (nombre d'Avogadro =  $6,02 \times 10^{23}$ , voir [LL68], par exemple) et ont des dimensions très grandes par rapport à l'échelle quantique dans laquelle l'opérateur de Schrödinger est défini : la distance entre les ions les plus proches dans des métaux est de quelques  $\text{Å} = 10^{-10}\text{m}$  (voir [AM76]). Il est donc naturel de s'intéresser à la limite thermodynamique qui consiste à faire tendre  $n$

et  $V$  vers l'infini en gardant la relation de proportionnalité.

La limite thermodynamique est une des notions centrales de la physique statistique et son existence est l'une des premières questions auxquelles il faut répondre pour pouvoir décrire le modèle à plusieurs particules. C'est également une notion qui a un sens physique très clair et simple : il est tout à fait naturel que, dans un volume plus grand, il y ait plus des électrons.

Finalement, il serait aussi intéressant de comprendre comment la statistique quantique de particules (fermions ou bosons) va intervenir.

Pour résumer la motivation scientifique qui guide le déroulement de la thèse, c'est principalement de comprendre comment construire la physique statistique pour un grand nombre de particules en interaction dans des milieux aléatoires.

## 0.2 Ce qui a déjà été fait

À notre connaissance, le sujet et les questions abordés dans cette thèse sont originaux. Nous ne connaissons pas de travaux mathématiques sur la limite thermodynamique pour l'ensemble microcanonique d'un grand nombre de particules quantiques dans un milieu désordonné. Néanmoins, séparément, la physique statistique ainsi que la théorie des opérateurs de Schrödinger aléatoires ont fait et font toujours l'objet de recherches intensives. C'est grâce aux nombreux résultats de la théorie des opérateurs aléatoires, qu'on sera capable de construire notre théorie pour l'opérateur à plusieurs particules.

D'autre part, les modèles déterministes et, en particulier, la limite thermodynamique ont été beaucoup étudiés dans le cadre de la physique statistique depuis que dans leur travail [FR66], Fisher et Ruelle ont posé la question de la stabilité des systèmes quantiques au niveau macroscopique. Dans cette thèse, des méthodes qu'on utilise pour démontrer l'existence de la limite thermodynamique sont inspirées par plusieurs travaux sur ce sujet.

L'article [BL12] par Xavier Blanc et Mathieu Lewin, paru très récemment, traite une question très proche de celle de la thèse. Notamment, les auteurs démontrent l'existence de la limite thermodynamique pour des systèmes désordonnés en trois dimensions avec des interactions de Coulomb pour l'ensemble grand-canonique.

Pour un système des bosons dans milieux désordonnés dans l'ensemble grand-canonique, la limite thermodynamique a été considérée de point de vue de la condensation de Bose – Einstein par Thomas Jaeck, Joseph V. Pulé et Valentin A. Zagrebnov. Dans [JPZ09], les auteurs étudient le mécanisme derrière la condensation pour le gaz de Bose parfait (i.e., en absence des interactions entre bosons). Ensuite dans [JZ10], Thomas Jaeck et Valentin A. Zagrebnov prennent les interactions en compte et démontrent l'exactitude de l'approximation de Bogoliubov (voir, par exemple, [ZB01] pour l'introduction et la revue des résultats principaux ou [Bog47] pour l'article original).

Dans [KM11], Frédéric Klopp et Bernd Metzger ont étudié la condensation de Bose – Einstein pour un système de bosons dans un milieu aléatoire dans l'approximation du champ moyen, c'est-à-dire, la fonctionnelle de Gross – Pitaevskii.

### 0.3 Ce qu'on cherche

En toute généralité, dans cette thèse, on cherche à calculer la limite thermodynamique pour un système de particules quantiques en interaction dans un milieu aléatoire. Voici quelques questions formulées de façon assez vague qui vont nous occuper :

- (a) premièrement, on va s'intéresser à l'existence de la limite thermodynamique pour certaines quantités extensives ;
- (b) ensuite, on se demande quel est le rôle des interactions et ce qu'elles changent de point de vue qualitative et quantitative ; pour cela, il faudra aussi comprendre le cas sans interactions ;
- (c) on essaye d'étudier l'influence de la statistique quantique de particules sur le résultat ;
- (d) le rôle de la densité de particules  $\rho$  est aussi d'intérêt ;
- (e) finalement, il serait utile de comprendre des propriétés plus avancées que simplement l'existence de la limite : par exemple, la structure des fonctions propres à plusieurs particules dans la limite thermodynamique.

### 0.4 Nos résultats

Dans cette section, on présente des résultats clés de cette thèse. Pour en faciliter la lecture, on donne ici certaines définitions sous une forme raccourcie. Les définitions et les résultats complet ainsi que les discussions de ceux-ci se trouvent dans la partie principale de la thèse.

La thèse est composée de deux chapitres (et de deux annexes qu'on ne discute pas dans cette introduction) :

- (a) dans le Chapitre 1, on étudie un modèle général de particules quantiques en interaction dans milieux aléatoires ; les résultats obtenus sont aussi généraux mais ne donnent pas d'information détaillée ;
- (b) dans le Chapitre 2, on prend un modèle particulier qui permet d'obtenir une description assez fine de la structure de l'état fondamental dans la limite thermodynamique.

#### Modèle général de particules en interaction

Soit  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  une famille d'opérateurs ergodiques qui agissent sur  $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$  (on traitera également le cas discret qu'on omet ici par souci de simplicité). On suppose que cette famille ergodique satisfait la condition de l'indépendance à distance (voir **(IAD)** dans la Sous-section 1.1.1). Par  $H_\omega(\Lambda)$  on note la restriction de  $H_\omega$  à  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  avec les conditions au bord de Dirichlet. Cet opérateur agit sur  $\mathfrak{H}(\Lambda) = L^2(\Lambda)$ . On demandera ensuite certaines conditions de la régularité pour la densité d'état intégrée (voir la Hypothèse 1.1.11).

Pour  $n$  particules, l'espace de Hilbert varie selon la statistique quantique de particules :

$$\mathfrak{H}^n = \begin{cases} \bigotimes^n \mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^{nd}), & \text{particules de Maxwell - Boltzmann,} \\ \bigwedge^n \mathfrak{H} = L^2_-(\mathbb{R}^{nd}), & \text{fermions,} \\ \text{Sym}^n \mathfrak{H} = L^2_+(\mathbb{R}^{nd}), & \text{bosons,} \end{cases} \quad (1)$$

où  $L^2_{\pm}$  sont les sous-espace totalement symétrique et antisymétrique par permutations des variables. Le hamiltonien est construit de manière standard par :

$$H_{\omega}(n) = H_{\omega}^0(n) + \sum_{i < j} U(x^i - x^j), \quad (2)$$

où

$$H_{\omega}^0(n) = \sum_{i=1}^n (H_{\omega})_{x^i}$$

(consulter les formules (1.12) et (1.13)) et  $U$  est le potentiel d'interactions par paires. Pour la restriction de (1) et (2) à  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ , on écrit  $\mathfrak{H}^n(\Lambda)$  et  $H_{\omega}(\Lambda, n)$  respectivement. Cet opérateur décrit  $n$  particules dans  $\Lambda$  dans l'environnement désordonné décrit par  $H_{\omega}$ . Les définitions précises ainsi que la discussion des différentes propriétés des interactions sont données dans la sous-section 1.1.2. Sous certaines conditions, on sait également traiter le cas des interactions d'ordre plus grand que deux (voir la formule (1.14)).

La limite

$$\Lambda \rightarrow \infty, \quad \frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho > 0,$$

s'appelle *la limite thermodynamique*. Ici  $\Lambda \rightarrow \infty$  est compris dans le sens de Fisher (voir la sous-section 1.1.4). Le paramètre positif  $\rho$  est *la densité de particules*.

Sous les conditions pas trop restrictives, l'opérateur  $H_{\omega}(\Lambda, n)$  a un spectre discret borné inférieurement (voir la sous-section 1.1.3 pour les conditions suffisantes). On note alors l'énergie fondamentale par  $\mathfrak{E}_{\omega}(\Lambda, n)$ .

Le résultat principal du Chapitre 1 est l'existence de la limite thermodynamique pour l'énergie fondamentale.

**Théorème 0.0.1.** *Soit un opérateur à une particule  $H_{\omega}$  borné inférieurement  $\omega$ -presque sûrement par une constante fixée. Soient des interactions  $U$*

- (a) stables, *i.e.*,  $H_{\omega}(\Lambda, n) \geq -Bn$  (voir **(SI)**),
- (b) tempérées, *i.e.*,  $|U(x)| \leq A|x|^{-\lambda}$  pour  $|x| \geq R_0$  et  $\lambda > d$  (voir **(PTI)**).

*Alors l'énergie fondamentale de  $H_{\omega}(\Lambda, n)$  par particule  $\mathfrak{E}_{\omega}(\Lambda, n)/n$  admet une limite thermodynamique, *i.e.*, la limite suivante existe :*

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty, n/|\Lambda| \rightarrow \rho} \frac{\mathfrak{E}_{\omega}(\Lambda, n)}{n} =: \mathcal{E}(\rho).$$

*La convergence a lieu dans le sens  $L^2$  par rapport à la variable aléatoire  $\omega$  et la limite  $\rho \mapsto \mathcal{E}(\rho)$  est une fonction déterministe, croissante et convexe en  $\rho^{-1}$ .*

*Remarque 0.0.2.* Dans cette introduction, on utilise une notation un peu différente de celle du texte principale :  $\mathcal{E}(\rho)$  sera noté  $\mathcal{E}(\rho, 0)$  dans la suite.

Le Théorème 0.0.1 est un cas particulier (le plus important) du Théorème 1.2.17 où on traite non seulement l'énergie fondamentale, mais aussi d'autres valeurs propres de  $H_\omega(\Lambda, n)$  en utilisant l'entropie (voir la sous-section 1.1.3). La monotonie et la convexité de la limite sont discutées dans la sous-section 1.2.4. De plus, dans le Théorème 1.2.20, on démontre la convergence au sens  $L_\omega^1$  et  $\omega$ -presque sûr pour les interactions compactes (voir **(Comp)**) et dans le Théorème 1.2.21, on démontre l'existence de la limite thermodynamique pour l'entropie comme fonction de l'énergie.

Ayant démontré l'existence de la limite thermodynamique pour l'énergie interne par particule et l'entropie par particule, on s'intéresse ensuite aux propriétés de cette limite telles que :

- Quelle est l'asymptotique de  $\mathcal{E}(\rho)$  dans la limite de la densité de particules faible, i.e.,  $\rho \rightarrow 0$  ?
- Comment la statistique quantique intervient-elle ?
- Que peut-on dire de la fonction d'ondes associée à l'état fondamental dans la limite thermodynamique ?

Pour répondre à ces questions, on commence par établir une forme appropriée de la théorie des perturbations dans les sous-sections 1.3.1 et 1.3.3 et par étudier le cas sans interactions dans la sous-section 1.3.2. On établit la formule classique de l'énergie par particule pour des fermions sans interactions dans le Théorème 1.3.11 :

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{\int_{-\infty}^{E_\rho} E dN(E)}{\int_{-\infty}^{E_\rho} dN(E)}, \quad (3)$$

où l'énergie de Fermi  $E_\rho$  est une solution bien choisie de l'équation

$$N(E_\rho) = \rho,$$

et  $N$  est la densité d'états intégrée de  $H_\omega$ .

Selon l'analyse préliminaire faite dans la sous-section 1.3.4, on trouve que le cas des fermions est plus avantageux pour construire la théorie des perturbations : le nombre effectif d'interactions que créent les particules composant un état en bas du spectre est d'ordre  $n$  pour les fermions et d'ordre  $n^2$  pour les bosons.

La différence vient du principe d'exclusion de Pauli : les fermions ont la tendance de se répartir plus ou moins uniformément dans tout l'espace disponible  $\Lambda$ . Ceci veut dire que seuls des fermions qui sont proches l'un de l'autre contribuent de façon non négligeable dans les interactions. Cet argument explique que le nombre d'interactions à prendre en compte est proportionnel à celui de fermions en présence.

Remarquons que du point de vue physique, l'idée que les fermions occupent les positions plus ou moins uniformément distribuées dans l'espace et que seuls les voisins contribuent dans interactions se trouve à la fondation de nombreuses modèles et théories approchées décrivant le gaz électronique dans solides. Parmi les modèles et méthodes exploitant (de fois, d'une façon implicite) cette idée sont :

- (a) le modèle d'Ising,



- (b) le modèle des liaisons fortes (et ses dérivées comme le modèle de Hubbard),
- (c) la théorie de champ moyen, ses variations et dérivées (par exemple, l'approximation de Hartree – Fock).

Pour une introduction à différents modèles du transport électronique dans les corps solides, on pourra consulter, par exemple, [AM76].

Au contraire, des bosons sans interactions condensent tous dans l'état fondamental à une particule. Dans cette configuration, le nombre des paires des bosons en interaction est évidemment d'ordre  $n^2$ .

Afin de pouvoir développer ces idées, on considère un modèle très particulier relativement simple dans le deuxième chapitre de la thèse.

### Système de fermions en interaction. Modèle des pièces

Le *modèle des pièces* est unidimensionnel. Sa définition détaillée est donnée dans la sous-section 2.1.1. Considérons le processus aléatoire de Poisson de paramètre  $\mu$  sur  $\mathbb{R}$ . Plaçons des conditions de Dirichlet en chacun des points de ce processus tombant à l'intérieur de  $[0, L]$  ainsi qu'en 0 et en  $L$ . Ces points découpent  $[0, L]$  en  $m(\omega)$  pièces :

$$[0, L] = \bigcup_{j=1}^{m(\omega)} \Delta_j(\omega). \quad (4)$$

Ceci définit l'opérateur à une particule par :

$$H_\omega(L) = \bigoplus_{j=1}^{m(\omega)} \left( -\frac{d^2}{dx^2} \right) \Big|_{L^2(\Delta_j(\omega))}^D.$$

On construit l'opérateur à plusieurs fermions en interaction  $H_\omega(L, n)$  comme dans (2). Pour pouvoir faire des calculs explicites, on prend les interactions les plus simples possibles :  $U(x) = \mathbb{1}_{[-R_0, R_0]}(x)$ , et on s'intéresse au cas  $\rho$  petit.

L'analyse statistique de la répartition de longueurs des pièces de la sous-section 2.1.2 permet d'obtenir les expressions exactes pour la densité d'états intégrée (voir la Proposition 2.1.8) :

$$N(E) = \frac{\mu e^{-\mu \ell_E}}{1 - e^{-\mu \ell_E}}, \quad (5)$$

où  $\ell_E = \pi/\sqrt{E}$  est la longueur correspondante à l'énergie  $E$ , et pour l'énergie de Fermi (voir le Corollaire 2.1.10) :

$$E_\rho = \pi^2 \mu^2 (\log(\mu \rho^{-1} + 1))^{-2}. \quad (6)$$

Remarquons ensuite que les états propres d'un système de  $n$  fermions sans interactions sont donnés par les déterminants de Slater :

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \det (\psi_{\alpha_j}(x^i))_{i,j \in \mathbb{N}_n}, \quad (7)$$

où un indice  $\alpha$  numérote ces états de la manière suivante :  $\text{card } \alpha = n$  et chaque élément  $\alpha_j = (\Delta_{\alpha_j}, k_{\alpha_j}) \in \alpha$  est une paire d'intervalle de la décomposition (4) et le numéro de la fonction propre à une particule supportée dans cette pièce. Autrement,  $\psi_{\alpha_j}$  est la  $k_{\alpha_j}$ -ème fonction propre de  $H_\omega(L)$  dans l'intervalle  $\Delta_{\alpha_j}$ , qui est donnée par un sinus proprement normalisé.

Suivant la formule (3), dans l'état fondamental du système sans interactions, les fermions occupent tous les niveaux d'énergie jusqu'à environ l'énergie de Fermi. Cela avec les expressions exactes (5) et (6) décrit l'état fondamental de  $n$  fermions sans interactions de la manière suivante. Dans l'état fondamental sans interactions (qu'on va noter par  $\Psi_U$  dans la suite), la plupart de fermions occupent les niveaux fondamentaux dans les pièces de longueur environ  $\ell_\rho = \pi/\sqrt{E_\rho}$ . De plus, l'analyse du nombre d'interactions dans cet état permet d'estimer l'élément de matrice des interactions :

$$\frac{1}{n} \left\langle \sum_{i < j} U(x^i - x^j) \Psi_U, \Psi_U \right\rangle = O(\rho |\log \rho|^{-3})$$

pour  $n$  et  $L$  suffisamment grands,  $n/L$  proche de  $\rho$ . Donc, le premier terme de la théorie des perturbations converge dans la limite thermodynamique. Comme l'énergie de Fermi est d'ordre  $|\log \rho|^{-2}$ , ce terme n'intervient que comme terme de reste. Un résultat plus précis (avec l'asymptotique) est donné dans le Théorème 2.2.18.

Dans la suite, on démontre essentiellement que l'état fondamental de  $H_\omega(L, n)$  (donc, d'un système avec interactions) "ne diffère pas beaucoup" de  $\Psi_U$ . Ceci comporte trois arguments principaux.

Premièrement, pour un état propre de  $H_\omega^0(L, n)$  donné par (7), on peut définir l'*occupation* (voir également la Définition 2.3.1) :

$$Q(\Psi_\alpha) = (q_1, \dots, q_m),$$

où  $q_j$  est le nombre de particules que cet état possède dans la pièce  $\Delta_j$  de la décomposition (4). Soit  $\mathfrak{H}_Q$  un sous-espace engendré par toutes les fonctions  $\Psi_\alpha$  d'occupation  $Q$  fixée. Alors, comme les fonctions propres à une particule ont soit le même support ou alors des supports disjoints, des sous-espaces  $\mathfrak{H}_Q$  sont orthogonaux l'un à l'autre et sont des sous-espaces invariants de l'opérateur total  $H_\omega(L, n)$ . Celui ci se décompose comme

$$H_\omega(L, n) = \bigoplus_{Q \in \mathbb{N}_0^m, |Q|=n} H_Q,$$

où  $H_Q$  est sa partie dans  $\mathfrak{H}_Q$ . Ceci est la formule (2.63) qu'on démontre dans la Section 2.3.

Deuxièmement, dans la Section 2.4, on donne le sens précis dans lequel l'état fondamental de  $H_\omega(L, n)$  est proche de  $\Psi_U$ , l'état fondamental du système sans interactions, décrit par  $H_\omega^0(L, n)$ .

Fixons  $A_1 \geq 0$  et  $A_2 > 5$ . Soit  $\mathfrak{H}^-$  le sous-espace de  $\mathfrak{H}^n$  engendré par les fonctions propres de  $H_\omega^0(L, n)$  telles que :

- (a) il y a au maximum  $\rho |\log \rho|^{A_1 + A_2} n$  particules d'énergie plus grande que

$$\tilde{E} := (1 + |\log \rho|^{-A_1}) E_\rho,$$

(b) il n'y a pas plus de  $Bn\rho$  interactions entre ces particules, où  $B$  est une constante suffisamment grande,

et soit  $\mathfrak{H}^+$  son complément orthogonal, i.e.,

$$\mathfrak{H}^n = \mathfrak{H}^- \oplus \mathfrak{H}^+. \quad (8)$$

Bien que cette définition dépende de  $A_1$ ,  $A_2$  et  $B$ , on omet la référence à ces constantes dans la notation. Dans la sous-section 2.4, on discute des façons alternatives de définir  $\mathfrak{H}^-$ .

**Théorème 0.0.3** (séparation d'états excités). *Pour  $\rho$  suffisamment petit,  $n$  et  $L$  assez grands et  $n/L$  suffisamment proche de  $\rho$ , soit  $\Psi$  un état fondamental de  $H_\omega(L, n)$ . On le décompose selon (8) :  $\Psi = \Psi^- + \Psi^+$ . Alors  $\Psi$  met presque toute sa masse dans  $\mathfrak{H}^-$ , c.-à-d.*

$$\|\Psi^+\|/\|\Psi^-\| = O(|\log \rho|^{-(A_2-2)})$$

uniformément en  $n$ ,  $L$  et  $\rho$ .

Troisièmement, dans la Section 2.5, on démontre le théorème suivant.

**Théorème 0.0.4** (non dégénérescence de l'état fondamental). *Soient  $L$  et  $n$  fixés. Alors  $\omega$ -presque sûrement l'état fondamental de  $H_\omega(L, n)$  est non dégénéré.*

**Corollaire 0.0.5.** *Soient  $L$  et  $n$  fixés. Alors  $\omega$ -presque sûrement l'état fondamental de  $H_\omega(L, n)$ , ainsi que ses composantes dans  $\mathfrak{H}^\pm$ , possèdent une occupation bien précise, c.-à-d., ces vecteurs appartiennent au même sous-espace d'occupation constante  $\mathfrak{H}_Q$ .*

Les Théorèmes 0.0.3 et 0.0.4 et le Corollaire 0.0.5 donnent une description de l'état fondamental  $\Psi$  de  $H_\omega(L, n)$  dans la limite thermodynamique, qu'on utilise ensuite pour donner d'autres propriétés de  $\Psi$ . Notamment, dans la Section 2.6, on estime sa fonction d'autocorrélation (voir également la Définition 2.6.1 un peu plus générale) :

$$\mathcal{L}_\Psi(\mathbf{y}) = \int_{[0, L]^n} |\Psi(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{y})| d\mathbf{x},$$

où  $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n) \in [0, L]^n$ .

**Théorème 0.0.6** (fonction d'autocorrélation de l'état fondamental). *Pour tout  $\beta \in (0, 1/2)$  il existe  $\rho_0 > 0$  et une constante  $C = C(\beta)$  tels que pour  $0 < \rho < \rho_0$  et  $B(\rho) > C|\log \rho|^{-1}$ , si  $L$  et  $n$  sont suffisamment grands et  $n/L$  est suffisamment proche de  $\rho$ , alors avec probabilité au moins  $1 - e^{-L^\beta}$ , si le vecteur  $\mathbf{y} \in \mathcal{V}^n$  a au moins  $nB(\rho)$  coordonnées  $|y^k| > (1 + 1/C)\ell_\rho$ , alors la fonction d'autocorrélation de  $\Psi$ , l'état fondamental de  $H_\omega(L, n)$ , satisfait l'asymptotique suivante :*

$$\mathcal{L}_\Psi(\mathbf{y}) = O\left(\exp(-nB(\rho)|\log \rho|)\right).$$

Ceci est le Théorème 2.6.2 qui est suivi de la discussion sur le choix de la fonction  $B(\rho)$  et la condition imposée sur le vecteur  $\mathbf{y}$ .

Finalement, dans la Section 2.7, on quantifier l'influence des interactions sur l'état fondamental du système et sur l'énergie associée. Soient  $\Psi_{\cup}$  l'état fondamental sans interactions, c.-à-d., de  $H_{\omega}^0(L, n)$  et  $\Psi$  l'état fondamental de  $H_{\omega}(L, n)$ . On estime d'abord la différence entre les occupations de  $\Psi$  et  $\Psi_{\cup}$ .

**Définition 0.0.7.** Soit  $\omega$  fixé et soit  $m$  le nombre de pièces correspondant. Soient  $Q^1, Q^2 \in \mathbb{N}_0^m$ ,  $|Q^j| = n$ ,  $j \in \{1, 2\}$  deux occupations. Notons chaque  $Q^j = (Q_1^j, Q_2^j, \dots, Q_m^j)$  pour  $j \in \{1, 2\}$ . On définit la distance par

$$\text{dist}_0(Q^1, Q^2) = \sum_{j=1}^m \mathbb{1}(Q_j^1 = Q_j^2).$$

Cette distance donne le nombre de pièces sur lesquels  $Q_1$  diffère de  $Q_2$ .

Le théorème suivant est donné plus tard par le Lemme 2.7.2 (pour la majoration) et la Proposition 2.7.4 (pour la minoration).

**Théorème 0.0.8.** *Pour tout  $\beta \in (0, 1/2)$  il existe une constante  $C$  telle que pour  $n$  et  $L$  suffisamment grands et  $n/L$  suffisamment proche de  $\rho$ , avec la probabilité au moins  $1 - e^{-L^{\beta}}$ ,*

$$C^{-1}n\rho \leq \text{dist}_0(Q(\Psi), Q(\Psi_{\cup})) \leq Cn\rho.$$

À partir de cela, on trouve l'ordre asymptotique par rapport à  $\rho \rightarrow 0$  de la différence entre l'énergie fondamentale avec et sans interactions.

**Théorème 0.0.9** (quantification des interactions). *Il existe une constante  $C$  telle que pour  $\rho$  suffisamment petit,*

$$C^{-1}\rho |\log \rho|^{-3} \leq \mathcal{E}(\rho) - \mathcal{E}^0(\rho) \leq C\rho |\log \rho|^{-3},$$

où  $\mathcal{E}^0(\rho)$  est la limite thermodynamique de l'énergie fondamentale par particule pour le cas sans interactions, c.-à-d., pour le système décrit par  $H_{\omega}^0(L, n)$ .

Ceci est les Corollaires 2.2.19 et 2.7.5.

## 0.5 Conclusion

Dans cette thèse, on a pu répondre à plusieurs questions posées dans la Section 0.0.3 sur la limite thermodynamique pour un grand nombre de particules quantiques en interaction dans un milieu aléatoire. L'existence de la limite thermodynamique a été démontré dans les conditions assez générales. Ensuite, pour le modèle des pièces unidimensionnel, on a obtenu la description de l'état fondamental en termes de sa structure fonctionnelle. Ceci nous a permis de quantifier le rôle des interactions dans la formation de l'état fondamental. Pour développer ces résultats, on peut considérer plusieurs directions de recherche.

Premièrement, pour améliorer les résultats du premier chapitre, il serait intéressant de démontrer le meilleur type de convergence (mieux que  $L^2$ ) et pour une plus large classe

des potentiels d'interactions (y compris ceux qui décroissent à l'infini moins vite que  $|x|^{-d}$ ). Il reste également la question des conditions au bord : on aimerait démontrer que la limite thermodynamique existe aussi si on impose les conditions au bord de Neumann (rappelons, que dans le Théorème 0.0.1, on utilise les conditions au bord de Dirichlet) et que cette limite est égale à celle avec conditions au bord de Dirichlet.

Deuxièmement, en développant les résultats du deuxième chapitre, il faudrait généraliser la description de l'état fondamental pour le modèle des pièces unidimensionnel à des opérateurs de Schrödinger aléatoires plus réalistes (ceux d'Anderson, de déplacement, de Poisson, par exemple) dans une et plusieurs dimensions.

Finalement, les propriétés de régularité de la limite thermodynamique de l'énergie par particule  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$  sont d'un grand intérêt physique : les discontinuités de ses dérivées correspondent aux points de transition de phases.

# Chapitre 1

## Le modèle général

Dans ce chapitre, on étudie la limite thermodynamique pour un modèle général de particules quantiques en interaction dans un milieu aléatoire. On adopte une approche axiomatique : on suppose que le modèle à une particule satisfait un certain nombre des conditions et on construit la théorie pour le modèle à plusieurs particules en s'appuyant sur cette base axiomatique du modèle à une particule sous-jacent. On donne ensuite des exemples de modèles qui satisfont ces hypothèses.

Comme on demande peu des conditions sur le modèle, les résultats sont en conséquence assez généraux. Essentiellement, on démontre dans ce chapitre des théorèmes d'existence ainsi que certaines propriétés qu'en suivent directement. Afin de pouvoir faire quelque chose de plus concret, on sera obligé de prendre un modèle très particulier dans le Chapitre 2, qui nous permettra d'obtenir une description assez précise de l'état fondamental de ce modèle.

Ce chapitre est organisé d'une façon suivante.

Dans la Section 1.1, on définit d'abord l'opérateur de Schrödinger qui décrit une particule dans un milieu aléatoire. À partir de cela, on construit le hamiltonien d'un système de particules en interaction. Puis on introduit l'entropie et l'énergie comme une fonction de l'entropie, et on discute la notion de limite thermodynamique. À la fin de cette section, on pose le problème général (qu'on résout seulement partiellement dans le cadre de cette thèse) et on propose un ensemble de questions plus abordables, qu'on va essentiellement attaquer dans ce premier chapitre.

La majorité des résultats et des méthodes de ce chapitre sont présentés dans la Section 1.2. Notamment, on y démontre le résultat principal du premier chapitre sur l'existence de la limite thermodynamique pour l'énergie. Les démonstrations elles-mêmes sont aussi instructives que les méthodes ; des approches introduites servent ensuite pour l'obtention d'autres résultats. On discute également des phénomènes liés à la densité de particules critique et on établit, ensuite, des propriétés de base pour la limite thermodynamique de l'énergie par particule. Finalement, on discute des implications et des relations thermodynamiques qu'on pourrait en tirer.

La dernière Section 1.3 a pour but de commencer l'étude plus approfondie de l'état fondamental (et de l'énergie fondamentale associée). On propose une approche perturbative ayant pour base le système sans interactions. Il se trouve que les séries de perturbations ont la structure assez spéciale en cas des interactions par paires. On étudie ensuite les

particules quantiques sans interactions. Entre autre, on obtient des expressions “exactes” pour la limite thermodynamique de l’énergie pour ces systèmes. Finalement, on explique pourquoi le cas fermionique semble plus avantageux que les autres. On donne également l’image générale de ce qu’on s’attend à obtenir dans le chapitre qui suit.

## 1.1 Définitions

Dans cette section, on introduit d’une façon rigoureuse le modèle de particules quantiques en interaction dans un milieu aléatoire et le problème général qu’on étudie au long toute cette thèse. On commence par définir le modèle à une particule dans un milieu aléatoire dans la sous-section 1.1.1. On y discute, entre autre, certaines propriétés communes à ces opérateurs qu’on va supposer étant vraies dans la suite. Dans la sous-section 1.1.2, on définit le hamiltonien à plusieurs particules à partir du hamiltonien à une particule et on présente et discute différentes propriétés du potentiel d’interactions entre des particules. Les fonctions de l’énergie et l’entropie sont introduites dans la sous-section 1.1.3. Ce sont les principaux objets qu’on étudie dans ce chapitre. Dans la dernière sous-section 1.1.4, on définit la notion de limite thermodynamique qui est centrale pour toute la thèse. On discute sa signification pour la physique statistique et on passe en revue quelques résultats connus sur l’existence de la limite thermodynamique.

### 1.1.1 Opérateurs de Schrödinger aléatoires

Dans cette sous-section, on discute la théorie à une particule.

Dans la physique des solides et d’autres domaines connexes, on s’intéresse à des relations entre des quantités macroscopiques d’un corps solide (principalement, métallique ou semi-conducteur) et sa structure microscopique. Les principales quantités macroscopiques sont, par exemple, les conductivités électrique et thermique, la capacité calorifique et ainsi de suite. La structure microscopique est représentée par un certain modèle de la mécanique quantique. En particulier, les problèmes de transport électronique sont décrits généralement par l’opérateur de Schrödinger.

Une des approximations consiste à supposer qu’on peut négliger l’interaction entre les électrons (ou plus généralement, les particules quantiques) et donc considérer le problème à  $n$  particules comme la somme directe de  $n$  problèmes à une particule (ceci n’est entièrement vrai que pour la statistique de Maxwell – Boltzmann). On s’intéresse donc au problème à une particule.

La deuxième approximation cruciale est de penser que les ions sont des particules classiques avec ses positions dans l’espace étant “gelées”. Ceci nous mène à considérer un électron dans un champ électrique des ions à lequel on peut également ajouter le champ magnétique. Une seule variable qui reste est la fonction d’ondes d’un électron.

Soit maintenant  $d$  la dimension de l’espace physique. Alors, le hamiltonien résultant est donné par l’opérateur de Schrödinger magnétique suivant :

$$H = (-i\nabla - A)^2 + V, \tag{1.1}$$

qui agit sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  ou  $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$  ou sur un espace fonctionnel plus compliqué, et où  $A$  est le potentiel magnétique et  $V$  est le potentiel électrique. Dans la plupart des situations physiquement intéressantes,  $V$  décrit le potentiel engendré par des ions et  $A$  représente un champ magnétique externe. Pour simplifier on va oublier le champ magnétique :  $A = 0$ , ce qui donne l'opérateur de Schrödinger habituel :

$$H = -\Delta + V, \quad (1.2)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace continu ou discret. Remarquons que des résultats qu'on va obtenir ensuite dans la Section 1.2 restent vrais pour des modèles de type (1.1) avec  $A$  différent de zéro si les hypothèses à la fin de cette sous-section sur l'opérateur à une particule sont satisfaites.

La forme du potentiel  $V$  dans (1.2) varie selon le modèle de la physique des solides et milieux continus qu'on décrit. Un des plus simples est le modèle d'un cristal parfait représenté par le potentiel périodique. Dans le cas continu,

$$V(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} u(x - j), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (1.3)$$

où  $u$  est le potentiel engendré par chaque ion (qu'on appelle également le *potentiel à une site*). On a implicitement supposé ici que les ions sont organisés selon le réseau  $\mathbb{Z}^d$  mais d'autres réseaux peuvent être traités de la même façon.

L'analyse des opérateurs périodiques est assez directe et se fait en utilisant la transformée de Gelfand-Floquet dans le cadre de la théorie de Floquet-Bloch (pour une explication approfondie sur la théorie des opérateurs différentiels périodiques, on pourra consulter, par exemple, [YS75]). On montre entre autre que le spectre d'un opérateur de Schrödinger (1.2) avec un potentiel périodique pas trop irrégulier est une réunion des bandes de spectre absolument continu. De plus, la conductivité électrique dans ce modèle est soit nulle soit infinie ; ceci n'est pas du tout en accord avec l'expérience. Cette dernière remarque suggère de considérer des modèles autres que périodique pour la description du transport électronique.

À partir du célèbre travail [And58] de 1958 par P. W. Anderson sur la localisation (qu'on appelle maintenant la localisation d'Anderson), il est devenu évident que la présence de désordre peut influencer de façon décisive le comportement d'un système quantique. Physiquement, le désordre correspond à une certaine perturbation de potentiel périodique "parfait", qui peut représenter, par exemple, des impuretés dans un semi-conducteur de type alliage (comme le remplacement d'un atome de silicium par germanium, voir [AM76] pour plus des détails), la déformation du réseau cristallin ou même une structure vraiment désordonnée de type corps amorphe (voir le potentiel de Poisson (1.4)).

Après cet article d'Anderson, un nombre impressionnant des travaux ont été et sont toujours dédiés à l'étude mathématique des systèmes désordonnés sans interactions. Pour l'introduction aux opérateurs de Schrödinger aléatoires, on pourra consulter, par exemple, [His08], [Kir08] ou [Sto01].

**Notation 1.1.1.** Soit  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{Z}^d$  l'espace des configurations physiques : on dira que l'on considère respectivement le cas continu ou discret.



On va maintenant introduire les modèles de potentiel aléatoire les plus courants.

**Modèle d'Anderson.** On insère des constantes de couplage aléatoires devant chaque potentiel à simple site dans (1.3) :

$$V_\omega = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \omega_j u(\cdot - j), \quad x \in \mathcal{V},$$

où les variables aléatoires  $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{Z}^d}$ , sont indépendantes identiquement distribuées (iid). Le cas particulier quand  $\{\omega_j\}_j$  sont distribuées selon la loi de Bernoulli, s'appelle *le modèle de Bernoulli*. Physiquement le modèle d'Anderson correspond au remplacement d'un atome par un autre comme dans des semi-conducteurs de type alliage. Ce modèle peut également décrire des défauts de réseau comme l'absence d'atome. Pour le moment, c'est le modèle le mieux étudié. La plupart des résultats demandent que  $\{\omega_j\}_j$  soient à densité bornée de support compact, et que la fonction  $u$  soit non négative. Le cas des variables aléatoires de Bernoulli reste l'un des plus difficiles à cause de la singularité très forte de cette distribution (voir [BK05] pour la démonstration de la localisation dans le modèle de Bernoulli continu).

**Modèle de déplacement.** On déplace des ions aléatoirement hors ces positions d'équilibre :

$$V_\omega = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} u(\cdot - j - \omega_j), \quad x \in \mathcal{V},$$

où les variables aléatoires  $\{\omega_j\}_j$  sont également iid. Physiquement ce modèle décrit les déformations spatiales du réseau cristallin. Pour un des résultats les plus récents sur la localisation dans ce modèle, on pourra consulter [KLNS12].

**Modèle de Poisson.** Soient  $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  les points de processus de Poisson d'intensité  $\mu > 0$ . On pose :

$$V_\omega = \sum_{j \in \mathbb{N}} u(\cdot - \omega_j), \quad x \in \mathcal{V}. \quad (1.4)$$

Ceci représente des perturbations qui sont distribuées aléatoirement mais d'une façon uniforme dans l'espace et donc, décrit des milieu amorphes. Dans [GHK07], François Germinet, Peter Hislop et Abel Klein démontrent la localisation spectrale au fond du spectre pour ce modèle.

On peut également considérer des différents modèles mixtes avec deux familles des variables aléatoires responsables pour des amplitudes et positions d'équilibres comme, par exemple, le modèle mixte d'Anderson et de déplacement (voir [CH94]) ou le modèle mixte d'Anderson et de Poisson (voir [MS87]).

*Remarque 1.1.2.* Dans le cas discret,  $\mathcal{V} = \mathbb{Z}^d$ , la fonction d'un site  $u$  est juste la fonction indicatrice de l'origine :  $u = \chi_0$ .

Pour tous ces modèles, l'opérateur de Schrödinger aléatoire s'écrit comme :

$$H_\omega = -\Delta + V_\omega \quad (1.5)$$

et agit sur l'espace de Hilbert (à une particule)  $\mathfrak{H} = L^2(\mathcal{V})$ , avec le domaine de définition naturel. On peut aussi considérer plus généralement  $H_\omega = -\Delta + V_{per} + V_\omega$  avec  $V_{per}$  un potentiel périodique de type (1.3).

La théorie des opérateurs de Schrödinger aléatoires introduit et étudie non seulement une perturbation de l'opérateur périodique (1.2) mais considère toute une famille de ces perturbations ensemble en même temps. Les résultats sont formulés en termes de la mesure de probabilité introduite sur l'ensemble des perturbations. Il se trouve que l'analyse d'un représentant typique (en probabilité) de la famille d'opérateurs perturbés est possible, même si chaque opérateur  $H_\omega$  n'est pas en général facile à traiter.

Dans la suite, on présente la théorie d'opérateurs aléatoires sous sa forme abstraite. On verra que l'opérateur (1.5) où le potentiel aléatoire  $V_\omega$  est, par exemple, l'un des exemples présentés ci-dessus, rentre bien dans le cadre de cette description abstraite. Pour référence, on peut toujours penser au modèle d'Anderson sur le réseau  $\mathbb{Z}^d$  :

$$H_\omega = -\Delta + \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \omega_j u(\cdot - j). \quad (1.6)$$

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé avec un groupe discret  $\mathcal{I}$  qui agit sur  $\Omega$ , dont l'action on note par  $\tau_k$  pour  $k \in \mathcal{I}$ . On suppose que l'action du groupe préserve la mesure :

$$\mathbb{P}(\tau_k A) = \mathbb{P}(A), \quad \forall k \in \mathcal{I}, \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

et est ergodique :

$$\tau_k A = A, \quad \forall k \in \mathcal{I} \quad \text{implique} \quad \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}.$$

Soit maintenant  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  une famille mesurable d'opérateurs autoadjoints sur l'espace de Hilbert  $\mathfrak{H}$ . Cette famille est *ergodique* par rapport au groupe  $\mathcal{I}$  s'il existe une famille mesurable des opérateurs unitaires  $\{U_k\}_{k \in \mathcal{I}}$  sur  $\mathfrak{H}$  telle que

$$H_{\tau_k(\omega)} = U_k^* H_\omega U_k. \quad (1.7)$$

Dans le cas du modèle d'Anderson (1.6),  $\mathcal{I}$  est juste le groupe additif  $\mathbb{Z}^d$ . L'espace probabilisé  $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$  est muni de la  $\sigma$ -algèbre cylindrique  $\mathcal{A}$  et de la mesure de probabilité produit  $\mathbb{P} = \bigotimes_{j \in \mathbb{Z}^d} d\omega_0$ , où  $d\omega_0$  est la mesure de probabilité sur la site en zéro (en effet, c'est la mesure sur chaque site à cause de fait que les variables  $\omega_j$  sont iid). Le groupe  $\mathbb{Z}^d$  agit sur  $\Omega$  par les translations. Si on représente  $\omega = (\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}$ , alors :

$$(\tau_k(\omega))_j = \omega_{j-k}.$$

La relation de covariance (1.7) est donnée par des translations dans  $L^2(\mathcal{V})$  :

$$U_k f = f(\cdot - k), \quad f \in L^2(\mathcal{V}), \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Le théorème suivant est le résultat fondamental.

**Théorème 1.1.3** (Pastur, [Pas73]). *Soit  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  une famille des opérateurs ergodique. Alors il existe un ensemble  $\Sigma \subset \mathbb{R}$  tel que  $\mathbb{P}$ -presque sûrement*

$$\sigma(H_\omega) = \Sigma.$$

*L'ensemble  $\Sigma$  s'appelle le spectre presque sûr.*

La mesure spectrale d'un opérateur autoadjoint admet la décomposition de Lebesgue. Son spectre est naturellement décomposé en trois parties, les spectres absolument continu, singulier continu et purement ponctuel. Pour un opérateur aléatoire ergodique, comme le spectre lui-même, ces composantes sont déterministes.

**Théorème 1.1.4** (Kunz et Souillard, [KS81], Kirsch et Martinelli, [KM82]). *Soit  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  une famille d'opérateurs ergodiques. Alors il existe des ensembles  $\Sigma_{ac}$ ,  $\Sigma_{sc}$  et  $\Sigma_{pp}$ , et un ensemble  $\Omega_1 \subset \Omega$ , avec  $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ , tels que*

$$\sigma_\star(H_\omega) = \Sigma_\star \quad \forall \omega \in \Omega_1$$

pour  $\star \in \{ac, sc, pp\}$ .

On rappelle que l'espace de Hilbert sur lequel sont définis les opérateurs est  $\mathfrak{H} = L^2(\mathcal{V})$  avec  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{Z}^d$  (voir la Notation 1.1.1). On écrit  $H_\omega^\star(\Lambda)$  pour la restriction de l'opérateur  $H_\omega$  sur un sous-domaine  $\Lambda \subset \mathcal{V}$  avec la condition au bord  $\star \in \{D, N, P\}$ , qui peut être Dirichlet, Neumann ou périodique. Dans la suite, on omettra régulièrement l'indication de la condition au bord  $\star$  pour alléger les notations.

Fixons le domaine  $\Lambda \subset \mathcal{V}$  borné et supposons que l'opérateur  $H_\omega^\star(\Lambda)$  a un spectre discret et inférieurement borné pour presque tout  $\omega$ . Justifions cette hypothèse pour l'opérateur de Schrödinger (1.5).

Par [RS75, partie X], il suffit de demander que le potentiel  $V_\omega$  soit relativement borné par  $-\Delta$  avec la borne relative zéro pour que  $H_\omega(\Lambda) = (-\Delta + V_\omega)|_\Lambda$  n'ait que du spectre discret. En dimension  $d = 3$ , si  $V \in R + L^\infty(\mathbb{R}^d)$  alors  $V$  est relativement borné par  $-\Delta$  avec la borne relative zéro. Ici  $R$  est la classe de Rollnik.

**Définition 1.1.5.** Une fonction mesurable  $V$  sur  $\mathbb{R}^3$  est *un potentiel de Rollnik* si

$$\|V\|_R^2 = \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} d^3x d^3y < +\infty.$$

Remarquons, que pour le cas discret  $\mathcal{V} = \mathbb{Z}^d$ , le spectre d'un opérateur restreint à un domaine borné  $\Lambda$  est juste un ensemble de nombre fini des points, parce que  $\ell^2(\Lambda) \equiv \mathbb{C}^{|\Lambda|}$  et les opérateurs sont des matrices de taille finie. Par conséquence, dans le cas discret, le spectre est toujours discret et borné inférieurement.

On est prêt maintenant pour définir la densité d'états. Pour un système quantique c'est la mesure du nombre moyen d'états par unité de volume. Elle est définie par la procédure limite suivante. Si l'opérateur  $H_\omega(\Lambda)$  a un spectre discret borné inférieurement, on peut numéroter ses valeurs propres dans l'ordre de non décroissance (avec la multiplicité) :

$$-\infty < E_1(\Lambda; \omega) \leq E_2(\Lambda; \omega) \leq \dots \leq E_k(\Lambda; \omega) \leq \dots$$

On définit *la fonction de comptage* par

$$\mathcal{N}_\omega(E, \Lambda) = \text{card}\{k \text{ t.q. } E_k(\Lambda; \omega) \leq E\} \quad (1.8)$$

et *la densité d'états à volume fini* dans le domaine  $\Lambda$  par

$$N_\omega(E, \Lambda) = \frac{\mathcal{N}_\omega(E, \Lambda)}{|\Lambda|}. \quad (1.9)$$

Les fonctions définies en (1.8) et (1.9) sont mesurables par rapport à  $\omega$  et non décroissantes continues à droite en  $E$ . En utilisant le théorème ergodique sous-additif, on peut démontrer (par exemple, comme dans [Kir08]) que la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N_\omega(E, \Lambda_n) =: N(E)$$

existe  $\mathbb{P}$ -presque sûrement pour presque tout  $E \in \mathbb{R}$  (en fait sauf aux points de discontinuité de  $N(E)$ ) et qu'elle est indépendante des conditions au bord  $\star$ . Les domaines  $\Lambda_n = \Lambda_n(0)$  sont des cubes centrés en zéro de taille  $n$  :

$$\Lambda_n(x) = \{y \in \mathcal{V}, \|x - y\|_\infty \leq n/2\}.$$

La fonction limite  $N(E)$  s'appelle *la densité d'états intégrée*. Elle est monotone, croissante (pas nécessairement strictement) et continue à droite, elle définit donc *la mesure de densité d'états*  $dN$ . De plus, la densité d'états intégrée admet la représentation suivante :

$$N(E) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\omega N_\omega(E, \Lambda), \quad (1.10)$$

où  $\Lambda \rightarrow \infty$  dans le sens de Fisher (voir Définition 1.1.25).

Dans les applications, on est premièrement intéressé par la régularité de  $N(E)$ . Par exemple, si  $N(E)$  est localement Lipschitz continue :

$$|N(E_1) - N(E_2)| \leq C_E |E_1 - E_2|,$$

dans un voisinage de l'énergie  $E$ , alors la mesure  $dN$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Sa dérivée de Radon-Nikodym est *la densité d'états*. Pour la discussion presque exhaustive de l'existence et la régularité de la densité d'états intégrée, on pourra consulter, par exemple, [Ves08].

On va maintenant introduire quatre hypothèses auxquelles on fera référence plus tard dans le texte. On expliquera plus loin la validité de ces hypothèses pour des modèles concrets de type (1.5).

**Hypothèse 1.1.6** (borne inférieure uniforme). L'opérateur à une particule est borné inférieurement uniformément par rapport au paramètre aléatoire  $\omega$  :

$$\text{il existe } C > 0, \text{ tel que } H_\omega \geq -C \text{ pour presque tout } \omega \in \Omega. \quad (\mathbf{LB})$$

*Remarque 1.1.7.* Dans la suite, on va implicitement supposer que **(LB)** est vrai pour tout  $\omega$ , en excluant un ensemble de probabilité zéro.

**(LB)** est vérifiée, entre autre, si  $\omega$ -presque sûrement le potentiel  $V_\omega$  est relativement borné par rapport à  $-\Delta$ , de borne relative uniforme par rapport à  $\omega$ . Dans la dimension  $d = 3$ , on peut demander, par exemple, que l'application  $\omega \mapsto V_\omega$  soit de classe  $L^\infty(\Omega, R + L^\infty)$ , c'est-à-dire que les normes de la composante  $L^\infty$  et de la composante de la classe de Rollnik soient uniforme par rapport à  $\omega$ .

Pour le modèle d'Anderson (1.6), pour que cette hypothèse soit vraie, il suffit de demander, par exemple, que les supports de toutes les variables aléatoires  $\omega_j$  soient borné inférieurement par la même constante et que la fonction à un site  $u$  soit non négative. Dans

le cas des variables iid, il suffit de demander que  $\omega_0$  ait le support borné inférieurement. Autrement, si  $u$  est bornée et les supports des  $\omega_j$  sont aussi uniformément bornés, ceci garantit **(LB)**.

Au lieu de Hypothèse 1.1.6, on pourra considérer une condition plus forte que le potentiel  $V_\omega$  est positif (pas nécessairement strictement) dans le modèle de Schrödinger (1.5). Physiquement ceci se traduit que le milieu forme des obstacles pour les particules quantiques et non pas des pièges.

Dans la deuxième hypothèse, il s'agit du contrôle sur la décorrélation spatial de désordre.

**Hypothèse 1.1.8** (indépendance à distance). Le modèle satisfait la condition *d'indépendance à distance* s'il existe  $R_0 > 0$  tel que pour tous domaines  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{V}$  à distance au moins  $R_0$  l'un de l'autre les restrictions de  $H_\omega$  à  $A$  et  $B$  sont indépendantes, c'est-à-dire

$$A, B \subset \mathcal{V}, \text{dist}(A, B) > R_0 \quad \Rightarrow \quad H_\omega(A) \text{ et } H_\omega(B) \text{ indépendantes.} \quad \textbf{(IAD)}$$

Ici  $H_\omega(A)$  et  $H_\omega(B)$  sont des variables aléatoires à valeurs opérateurs.

Pour le modèle d'Anderson (1.6) cette hypothèse est satisfaite dans le cas discret si  $\omega_j$  sont iid et dans le cas continu si, de plus, la fonction  $u$  est de support compact. Clairement, en général, l'Hypothèse 1.1.8 permet une certaine corrélation entre les variables aléatoires.

Un autre ingrédient très important de la théorie des opérateurs de Schrödinger aléatoires est l'estimée de Wegner.

**Hypothèse 1.1.9** (estimée de Wegner). Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{E}_\omega [\text{Tr}(\mathbf{1}_I(H_\omega(\Lambda)))] \leq C|I||\Lambda|. \quad \textbf{(W)}$$

Autrement, cette hypothèse dit que l'espérance du nombre de valeurs propres de  $H_\omega(\Lambda)$  dans un intervalle  $I$  ne peut pas croître plus vite que linéairement avec  $\Lambda$  et que ces valeurs propres ne peuvent pas s'accumuler trop dans un intervalle  $I$  trop petit grâce à la borne linéaire en  $|I|$ .

**Corollaire 1.1.10.**

$$\mathbb{P}(H_\omega(\Lambda) \text{ a au moins une valeur propre dans } I) \leq C|I||\Lambda|.$$

Plus généralement, on peut parler d'une estimée de type Wegner avec  $|I|^\alpha |\Lambda|^\beta$ ,  $\alpha \leq 1$ ,  $\beta \geq 1$ , dans la partie à droite. Pour le modèle d'Anderson (1.6) sous la condition que les variables aléatoires sont iid et sa distribution est régulière, l'estimée de Wegner est vraie pour toutes les énergies dans les cas continu et discret (voir, par exemple, [CHK07]). Pour un résultat récent sur l'estimée de Wegner locale pour les opérateurs aléatoires de Schrödinger continu, on pourra également consulter [CGK11].

**Hypothèse 1.1.11** (régularité de la densité d'états). La densité d'états intégrée  $N(E)$  est une fonction continue et définit la mesure de densité d'états positive  $dN(E)$  telle que le spectre presque sûr est égale au support de cette mesure :

$$\text{supp } dN = \Sigma. \quad (1.11)$$

Cette hypothèse est sûrement vérifiée si l'estimée de Wegner (**W**) est satisfaite. La démonstration suit de la formule (1.10).

*Remarque 1.1.12.* En fait, l'estimée de Wegner est une condition courante mais trop forte pour assurer l'hypothèse 1.1.11. Dans [BK11], Bourgain et Klein montrent la continuité log-Hölder de la mesure de la densité d'états sous la conditions que le potentiel aléatoire  $V_\omega$  soit borné, pour les dimensions une, deux et trois dans le cas continu et pour toutes dimensions dans le cas discret (pour le dernier, on pourra également consulter [CS83]). La continuité log-Hölder est aussi démontrée dans [GK11a] pour des modèles d'Anderson généraux.

La relation (1.11) est plus générale : elle est vraie dès que la mesure de densité d'états existe : cela suit directement de l'égalité

$$dN = \text{Tr}(\chi dE_\omega \chi),$$

où  $\chi$  est la fonction indicatrice de cube unité dans  $\mathcal{V}$  et  $dE_\omega$  est la mesure spectrale de  $H_\omega$ .

### 1.1.2 Hamiltonien d'un système à plusieurs particules

Dans cette section, on construit le hamiltonien d'un système à plusieurs particules quantiques à partir du hamiltonien à une particule. On suppose que toutes les particules sont du même type et vivent dans le même environnement (elles sont décrites par le même hamiltonien à une particule).

Soient  $\mathfrak{H} = L^2(\mathcal{V})$  l'espace de Hilbert des fonctions d'ondes à une particule et  $H$  un opérateur autoadjoint de Hamilton qui décrit la dynamique d'une particule. L'espace de Hilbert pour  $n$  particules dépend de la statistique de celles-ci. On en considère trois. Pour motivation physique et plus de détails sur la physique de particules élémentaires, consultez, par exemple, [FW99]. Ce sont également les trois statistiques considérées dans [Rue99], où D. Ruelle étudie le cas des particules dans le vide.

**La statistique de Maxwell – Boltzmann.** Les particules sont physiquement distinguées et on impose aucune restriction sur la fonction d'ondes multiparticule. Cela s'applique pour décrire des particules classiques. L'espace de Hilbert correspondant est donné par :

$$\mathfrak{H}^n = \bigotimes^n \mathfrak{H} = L^2(\mathcal{V}^n).$$

**La statistique de Bose – Einstein,** dont les particules sont bosons<sup>1</sup>. La fonction d'ondes est obligée d'être symétrique par rapport aux permutations des variables :

$$\mathfrak{H}_+^n = \text{Sym}^n \mathfrak{H} = L_+^2(\mathcal{V}^n),$$

où  $\text{Sym}$  est un produit tensoriel symétrisé.

---

1. Dans la physique de particules, les bosons sont des particules subatomiques de spin entier. Ils peuvent être soit élémentaires comme les photons ou composé comme les mésons. Dans le Modèle Standard, il y a six bosons élémentaires : les bosons de jauge (photon  $\gamma$ , gluon  $g$ ,  $W^\pm$  boson et  $Z$  boson), le boson de Higgs  $H^0$  et le graviton  $G$ .

**La statistique de Fermi – Dirac.** Elle décrit les fermions<sup>2</sup>. Des fonctions d’ondes sont restreintes au sous-espace antisymétrique :

$$\mathfrak{H}_-^n = \bigwedge^n \mathfrak{H} = L_-^2(\mathcal{V}^n),$$

où  $\bigwedge$  est un produit extérieur.

Toutes les particules observées expérimentalement<sup>3</sup> pour le moment sont soit des bosons, soit des fermions. Par exemple, des noyaux atomiques (qui sont composées des protons et neutrons) peuvent être considérés comme des fermions ou bosons selon sa composition. Cette image est bonne si on regarde le noyau de loin comme une unité. En regardant de plus près, des propriétés des composantes élémentaires deviennent importantes.

**Notation 1.1.13.** Pour désigner l’espace de Hilbert de  $n$  particules d’une manière uniforme, on écrit

$$\mathfrak{H}_\#^n = L_\#^2(\mathcal{V}^n),$$

avec  $\# = \emptyset, +, -$ , correspondant à différentes statistiques ( $\# = \emptyset$  signifie la statistique de Maxwell – Boltzmann).

$\mathfrak{H}_+^n, \mathfrak{H}_-^n$  sont des sous-espaces de  $\mathfrak{H}^n$ . Par  $P_\#$  on note des projecteurs orthogonaux correspondants. Évidemment,  $P = P_\emptyset = \mathbb{1}_{\mathfrak{H}^n}$  est le projecteur trivial.

Si  $H$  est le hamiltonien à une particule, par  $H_\#^{(i)}$  on note l’opérateur correspondant dans  $\mathfrak{H}_\#^n$  qui agit seulement sur la  $i$ -ème particule. Plus précisément :

$$H_\#^{(i)} = \underbrace{\mathbb{1}_{\mathfrak{H}} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}_{\mathfrak{H}}}_{i-1 \text{ fois}} \otimes H \otimes \underbrace{\mathbb{1}_{\mathfrak{H}} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}_{\mathfrak{H}}}_{n-i \text{ fois}}. \quad (1.12)$$

Le générateur de l’évolution libre (sans interactions) de  $n$  particules est donnée par

$$H_\#^0(n) = \sum_{i=1}^n H_\#^{(i)}. \quad (1.13)$$

Alternativement, la partie libre (1.13) est la restriction de la deuxième quantification de  $H$  (notée  $\mathbb{H}$ ) sur le sous-espace à  $n$  particules de l’espace de Fock (consultez, par exemple, [BR97]) :

$$H_\#^0(n) = \mathbb{H}|_{\mathfrak{H}_\#^n},$$

où l’espace de Fock

$$\mathcal{F}_\#(\mathfrak{H}) = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{H}_\#^n.$$

2. Les fermions sont des particules subatomiques de spin demi-entier qui suivent le principe d’exclusion de Pauli. La matière ordinaire (électrons, protons, neutrino) dans l’Univers est fermionique. Dans le Modèle Standard, il y a deux type de fermions : les quarks et les leptons. Il y a 24 fermions différents : 6 quarks, 6 leptons (électron, muon, tau et ses neutrino) plus leurs 12 antiparticules.

3. De point de vue théorique, dans les dimensions inférieures à trois, d’autres statistiques sont possibles. Par exemple, certaines quasiparticules peuvent montrer le comportement décrit par la statistique anyonique : la fonction d’ondes est multipliée par  $e^{i\theta}$ , avec  $\theta$  général, après la permutation de particules.

Soit maintenant pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_n$  une fonction sur  $\mathcal{V}^n$ . On appelle toute la collection  $W = \{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  les interactions. Alors, le hamiltonien de  $n$  particules avec l'interaction  $W$  est donné par l'opérateur autoadjoint sur  $\mathfrak{H}_\#^n$  :

$$H_\#(n) = H_\#^0(n) + P_\# W_n P_\#. \quad (1.14)$$

*Remarque 1.1.14.* L'opérateur  $H_\#^0(n)$  agit de  $\mathfrak{H}_\#^n$  dans lui-même pour tout choix de la statistique  $\#$ , mais un potentiel d'interaction arbitraire  $W_n$  ne préserve pas nécessairement la (anti)symétrie. Donc, le projecteur  $P_\#$  agit d'une façon non triviale dans la formule (1.14). Néanmoins si le potentiel est symétrique par rapport aux permutations :

$$W_n(\mathbf{x}) = W_n(\sigma \mathbf{x}) \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad (1.15)$$

où  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ ,  $x^j \in \mathcal{V}$ , est le vecteur des coordonnées de toutes les particules, alors le projecteur devient obsolète dans (1.14) :

$$H_\#(n) = H_\#^0(n) + W_n.$$

L'algorithme de construction de l'opérateur à  $n$  particules à partir de l'opérateur à une particule peut être appliqué maintenant à des cas concrets de l'opérateur  $H$  de la sous-section 1.1.1. En gardant les notations, on écrit  $H_{\omega, \#}(n)$  pour l'opérateur à  $n$  particules sur l'espace entier qui est construit à partir de l'opérateur aléatoire  $H_\omega$  et  $H_{\omega, \#}(\Lambda, n)$  pour l'opérateur restreint au domaine  $\Lambda \subset \mathcal{V}$ . Afin d'alléger un peu les notations, on omet d'indiquer la statistique  $\#$  quand nos arguments s'appliquent à tous les cas. Pour l'uniformité des notations, on écrira également  $H_\omega(\Lambda, 1)$  et  $H_\omega(1)$  pour les opérateurs à une particule avec l'indication explicite du nombre de particules.

Dans notre modèle donné par  $H_\omega(n)$ , les interactions  $W$  sont déterministes et toutes les particules vivent dans le même milieu aléatoire décrit par  $H_\omega(1)$ .

Remarquons aussi, que l'opérateur restreint  $H_\omega(\Lambda, n)$  peut être défini par deux manières équivalentes : soit on prend d'abord la restriction  $H_\omega(\Lambda)$  de l'opérateur à une particule  $H_\omega$  et on construit ensuite sa deuxième quantification, soit on fait d'abord la deuxième quantification  $H_\omega(n)$  puis on restreint l'opérateur sur  $\Lambda^n$ .

On propose maintenant des différents modèles et propriétés des interactions  $W$  qu'on va utiliser ensuite dans les énoncés de nos résultats. On discutera également leur motivation physique et/ou mathématique.

**Interactions invariantes par translation.** Les interactions sont *invariantes par translation* si pour tout vecteur  $y \in \mathcal{V}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$W_n(x^1 + y, x^2 + y, \dots, x^n + y) = W_n(x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (\mathbf{I})$$

Ceci est une hypothèse de base pour toute théorie physique dans laquelle on suppose que l'espace est homogène, c'est-à-dire que les vraies propriétés physiques et les résultats des observations ne peuvent pas dépendre de la translation du système entier.

**Interactions par paires.** Les interactions  $W$  sont *par paires* s'il existe une fonction  $U : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , invariante par permutation des arguments,  $U(x, y) = U(y, x)$ , telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$W_n(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} U(x^i, x^j), \quad (\mathbf{P})$$



où, on rappelle,  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ .

Le fait que les interactions fondamentales sont par paires est largement accepté. Dans le Modèle Standard, les particules de la matière (fermions) interagissent à travers de champ médiateur de bosons. Dans l'approche perturbative, le terme principal d'interactions peut être interprété comme si les deux fermions échangent des bosons-médiateurs et agissent l'un sur l'autre par ce mécanisme. Par exemple, l'interaction électromagnétique entre deux électrons est assurée par des échanges de photons. C'est dans ce sens que les interactions sont par paires.

Bien que les interactions fondamentales soient toujours par paires, des interactions triples (ou d'ordres encore plus élevés) peuvent être utilisées pour la description efficace des interactions subatomiques dans certains modèles.

**Interactions par paires invariantes par translation.** Si les interactions sont en même temps par paires et invariantes par translation, on écrit

$$W_n(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} U(x^i - x^j), \quad (\mathbf{PI})$$

où pour le potentiel des interactions par paires  $U : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  on utilise la même notation que dans **(P)**, et on suppose que  $U(x) = U(-x)$  pour tout  $x \in \mathcal{V}$ .

Comme dit, ce modèle d'interactions est tout-à-fait naturel pour la description des interactions entre les particules quantiques du même type.

**Interactions tempérées.** Supposons que **(PI)** est vraie. Les interactions sont *tempérées* s'il existe  $R_0 > 0$ ,  $A$  et  $\lambda > d$  tels que pour tout  $|x| \geq R_0$ ,

$$|U(x)| \leq A|x|^{-\lambda}. \quad (\mathbf{PTI})$$

Cette condition ( $U$  est supposé localement intégrable) garantit que les interactions sont à courte portée, c.-à-d.,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |U(x)| dx < +\infty.$$

La condition **(PTI)** ou des conditions similaires sur le comportement des interactions à l'infini ont été utilisées par de nombreux auteurs tels que Léon van Hove, Joel L. Lebowitz, Robert B. Griffiths et, en particulier, Michael E. Fisher et David Ruelle dans ses travaux sur la stabilité de la matière et la limite thermodynamique. Le lecteur est invité à consulter [Fis64], [Rue99], [FR66], [Leb76], [Gri65]. D'autre part, on veut attirer l'attention sur les articles [LL69] par J. L. Lebowitz et Elliot H. Lieb, [Fef85] par C. Fefferman où les vraies interactions de Coulomb sont traitées. C. Hainzl, M. Lewin et J. P. Solovej ont généralisé ces résultats dans [HLS09a, HLS09b] qui a servi la base pour l'article récent [BL12] de X. Blanc et M. Lewin. Dans ce travail, les auteurs démontrent l'existence de la limite thermodynamique pour l'énergie libre d'un système des électrons dans le champ électrique aléatoire des ions. Dans un certain sens, les résultats de cet article sont complémentaires à la première partie de cette thèse. L'argument de Lieb et Lebowitz est réexpliqué dans le livre récent [LS10].

La condition de la décroissance tempérée des interactions **(PTI)** peut être physiquement motivée par un argument suivant. Considérons un électron dans un métal ou semi-conducteur comme un système physique de référence. Bien que des électrons interagissent

par le potentiel de Coulomb ( $\sim 1/r$ ) dans le vide, la description effective de la situation est différente dans un métal où chaque électron est entouré par un “nuage” d’autres électrons et vit dans un réseau d’ions. Cela implique ce qu’on appelle l’écrantage du potentiel de Coulomb dans métal (voir [AM76, Zag98]) et donne le potentiel d’interaction effectif de la forme

$$U(r) = \frac{Q}{r} \exp(-r/\lambda). \quad (1.16)$$

L’interaction a lieu entre des quasiparticules “électron+nuage” qu’on appelle plasmons<sup>4</sup>.

**Notation 1.1.15.** On rappelle que  $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$ . Si  $I = \{i_1, \dots, i_n\} \subset \mathbb{N}$  est un ensemble des indices, on écrit

$$x^I = (x^{i_1}, \dots, x^{i_n}) \in \mathcal{V}^n$$

pour le vecteur des coordonnées de particules numérotées par  $I$ , où les éléments sont ordonnés dans l’ordre croissant :  $i_p < i_q$  si  $p < q$ .

**Définition 1.1.16.** Supposons que les interactions sont invariantes par permutation de particules (1.15). Soit  $I_1 \cup I_2 = \mathbb{N}_{n_1+n_2}$ ,  $|I_j| = n_j$ , une partition de  $n_1 + n_2$  particules en deux parties disjointes. Le terme d’interaction entre les particules  $I_1$  et  $I_2$  est donné par

$$W_{I_1, I_2}(x^{\mathbb{N}_{n_1+n_2}}) = W_{n_1+n_2}(x^{\mathbb{N}_{n_1+n_2}}) - W_{n_1}(x^{I_1}) - W_{n_2}(x^{I_2}).$$

**Interactions répulsives.** Les interactions sont *répulsives* si pour tout  $I_1, I_2$  comme dans Définition 1.1.16 on a

$$W_{I_1, I_2} \geq 0. \quad (\mathbf{Rep})$$

Si on suppose **(Rep)** et qu’il n’y a pas d’interaction avec soi-même, i.e.,  $W_1 = 0$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$W_n(x^{\mathbb{N}_n}) \geq W_{n-1}(x^{\mathbb{N}_{n-1}}) + W_1(x^n) \geq W_{n-1}(x^{\mathbb{N}_{n-1}}) \geq \dots \geq 0, \quad x^{\mathbb{N}_n} \in \mathbb{R}^{nd}. \quad (1.17)$$

Si on suppose de plus que les interactions sont par paires **(P)**, alors **(Rep)** est équivalent à dire que

$$U \geq 0.$$

La condition  $W_1 = 0$  est juste une normalisation comme ce terme constant peut être toujours incorporé dans le potentiel aléatoire  $V_\omega$ .

De point de vue physique, l’interaction entre des particules quantiques élémentaires identiques est de caractère répulsif, donc cette condition est tout-à-fait naturelle.

**Interactions stables.** Les interactions  $W$  sont *stables* s’il existe  $B > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$W_n(\mathbf{x}) \geq -nB, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}^n. \quad (\mathbf{SI})$$

Par (1.17) les interactions répulsives sont stables avec  $B = 0$ .

La stabilité des interactions est l’une des questions du problème plus large de la stabilité de matière. La stabilité de la matière exige que l’énergie d’un système macroscopique

---

4. Le potentiel (1.16) est le potentiel de Yukawa. Il arrive naturellement dans le contexte de la physique nucléaire.

par particule soit bornée quand le nombre de particules (ou le volume, ce qui est équivalent) augmente. Mathématiquement cela veut dire que

$$\frac{H_\omega(n)}{n} \geq -C \quad (1.18)$$

pour une certaine constante  $C$  qui ne dépend pas de  $n$ . Cette question a été posée et résolue pour les interactions à courte portée par Fisher et Ruelle dans [FR66] en 1966. Pour les interactions de Coulomb la première démonstration est due à Dyson et Lenard [DL67, LD68]. Pour l'introduction à la stabilité de matière, on adresse le lecteur aux papiers [Lie76, Lie90] et surtout au livre [LS10]. Dans la suite, c'est la condition (1.18) qui est réellement utilisée et non pas la forme plus forte **(SI)**.

**Interactions à support compact.** En utilisant les notations de Définition 1.1.16, les interactions  $W$  sont à *support compact* s'il existe  $R_0 > 0$  tel que

$$W_{I_1, I_2}(x^{\mathbb{N}_{n_1+n_2}}) = 0 \quad (\mathbf{Comp})$$

pour tout  $x^{\mathbb{N}_{n_1+n_2}} \in \mathcal{V}^{n_1+n_2}$  tels que  $\text{dist}(x^{I_1}, x^{I_2}) \geq R_0$ .

*Remarque 1.1.17.* Évidemment, pour les interactions par paires, la compacité du support des interactions est une condition plus restrictive que la tempérance des interactions :

$$(\mathbf{PI}) + (\mathbf{Comp}) \implies (\mathbf{PTI}) \text{ avec } A = 0.$$

Pour nos résultats, la compacité des interactions est plutôt un outil technique qui nous permet d'obtenir la meilleure convergence (voir Théorème 1.2.20). En physique, les interactions fortes et faibles (on parle de la terminologie du Modèle Standard et non pas de la description quantitative) peuvent être vues comme des interactions à support compact avec une bonne approximation.

### 1.1.3 Entropie, énergie

Dans cette sous-section, on définit l'entropie et l'énergie qui seront les quantités principales étudiées tout au long de la première partie de cette thèse. Le sens de l'énergie comme elle sera définie bientôt est assez direct. Par contre, on donnera plus d'explications comment notre définition de l'entropie est liée à la définition usuelle de la physique statistique quantique.

Comme dans la sous-section 1.1.1 pour l'opérateur à une particule  $H_\omega(\Lambda)$ , on demande ici que l'opérateur à plusieurs particules  $H_{\omega, \#}(\Lambda, n)$  ait un spectre discret. Pour l'opérateur de Schrödinger aléatoire (1.5) avec les interactions par paires invariantes par translations **(PI)**, il suffit de demander que les potentiels  $V_\omega$  et  $U$  soient relativement bornés par  $-\Delta$  avec la borne relative zéro. Par exemple, si  $V_\omega, U \in R$ , alors  $H_{\omega, \#}(\Lambda, n)$  est autoadjoint, son spectre est discret et borné inférieurement (voir [RS75, Théorème X.19] et [RS78, Théorème XIII.76]).

Comme dans (1.8), on définit la fonction de comptage associée à cet opérateur par :

$$\mathcal{N}_{\omega, \#}(E, \Lambda, n) = \text{card}\{E_k(\Lambda, n, \omega; \#) \leq E\}, \quad (1.19)$$

où  $E_k(\Lambda, n, \omega; \sharp)$  sont des valeurs propres de  $H_{\omega, \sharp}(\Lambda, n)$  numérotées dans l'ordre non décroissant avec la multiplicité. Pour des raisons qui seront évidentes plus loin, il est plus utile de considérer *l'entropie* :

$$S_{\omega, \sharp}(E, \Lambda, n) = \log \mathcal{N}_{\omega, \sharp}(E, \Lambda, n). \quad (1.20)$$

*Remarque 1.1.18.* Comme la fonction de comptage  $\mathcal{N}$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ , l'entropie prend les siennes dans  $\log \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ .

On va expliquer maintenant comment (1.20) est reliée avec la définition usuelle de l'entropie en la physique statistique quantique (voir également Annexe A.1 pour les définitions plus complètes). Considérons une matrice densité  $\Gamma$  sur l'espace de Fock  $\mathcal{F}(\mathfrak{H})$ . Cette matrice définit un état normal si  $0 \leq \Gamma \leq 1$  et  $\text{Tr}_{\mathcal{F}(\mathfrak{H})} \Gamma = 1$ . Elle associe à une observable (opérateur autoadjoint sur l'espace de Fock)  $A$  un nombre (son moyen dans l'état  $\Gamma$ ) par le règle :

$$A \mapsto \text{Tr}_{\mathcal{F}(\mathfrak{H})}(\Gamma A).$$

L'entropie de l'état  $\Gamma$  est donnée alors par :

$$S(\Gamma) = -\text{Tr}_{\mathcal{F}(\mathfrak{H})}(\Gamma \log \Gamma). \quad (1.21)$$

Revenons maintenant à la motivation de la définition (1.20). Soient  $\Psi_k(\Lambda, n, \omega)$  des fonctions propres de l'opérateur  $H_{\omega}(\Lambda, n)$  associées aux énergies  $E_k(\Lambda, n, \omega)$ . Comme dans (1.19) et (1.20), fixons une énergie  $E$  et considérons tous les états à  $n$  particules dans le domaine  $\Lambda$  d'énergie au plus  $E$ . Par la définition (1.19), ce sont exactement les états  $\Psi_k(\Lambda, n, \omega)$  avec  $k = 1, \dots, \mathcal{N}_{\omega}(E, \Lambda, n)$ . Avec ces états propres, construisons un mélange statistique (un état mixte) :

$$\Gamma_{\omega}(E, \Lambda, n) = \frac{1}{\mathcal{N}_{\omega}(E, \Lambda, n)} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_{\omega}(E, \Lambda, n)} \langle \cdot, \Psi_k(\Lambda, n, \omega) \rangle \Psi_k(\Lambda, n, \omega),$$

qui est juste un mélange équiprobable de tous les états d'énergie au plus  $E$ . Alors un calcul direct montre que l'entropie quantique selon (1.21) est égale à l'entropie (1.20) :

$$S(\Gamma_{\omega}(E, \Lambda, n)) = S_{\omega}(E, \Lambda, n).$$

On va définir maintenant l'énergie comme une fonction de l'entropie.

**Observation 1.1.19.** *L'entropie  $E \mapsto S_{\omega}(E, \Lambda, n)$  est croissante (pas nécessairement strictement). De plus,  $S_{\omega}(\cdot, \Lambda, n)$  est une fonction en escalier, continue à droite.*

L'observation précédente, concernant la monotonie, permet d'inverser  $S_{\omega}(\cdot, \Lambda, n)$  pour définir une fonction  $E_{\omega, \sharp}(\Lambda, n, S)$ . Comme  $\mathcal{N}_{\omega}(\cdot, \Lambda, n)$  n'est nulle part une bijection locale, l'inverse n'existe pas d'une manière unique.

Pour  $S$  telle que  $\exp S \in \mathbb{N}$  on définit l'énergie par la formule :

$$E_{\omega, \sharp}(\Lambda, n, S) = E_{\exp S}(\Lambda, n, \omega; \sharp). \quad (1.22)$$

La fonction  $S \mapsto E_\omega(\Lambda, n, S)$  est l'inverse à droite de l'entropie (1.20) dans le sens suivant. Pour  $E \geq E_1(\Lambda, n, \omega)$ ,

$$E_\omega(\Lambda, n, S_\omega(E, \Lambda, n)) = E^-, \quad (1.23)$$

où  $E^-$  est l'énergie propre de  $H_\omega(\Lambda, n)$  la plus proche au-dessous de  $E$ . D'autre part, pour  $S \in \log \mathbb{N}$  :

$$S_\omega(E_\omega(\Lambda, n, S), \Lambda, n) = S. \quad (1.24)$$

Les relations (1.23) et (1.24) justifient ce choix de l'inverse.

En fait, on peut définir plusieurs fonctions inverses  $E_\omega(\Lambda, n, S)$  qui vérifient la propriété (1.20) pour  $S$  qui varie d'une façon continue, mais parmi ces fonctions, on peut distinguer la fonction minimale et la fonction maximale :

$$\begin{aligned} E_{\omega, \sharp}^{\min}(\Lambda, n, S) &= E_{[\exp S]_-}(\Lambda, n, \omega; \sharp), \\ E_{\omega, \sharp}^{\max}(\Lambda, n, S) &= E_{[\exp S]_+}(\Lambda, n, \omega; \sharp), \end{aligned}$$

avec la convention que  $E_n = -\infty$  pour  $n < 1$ , et où  $[\cdot]_\pm$  est l'arrondi à l'entier supérieur ou inférieur.

**Proposition 1.1.20.** *La fonction  $E_{\omega, \sharp}(\Lambda, n, S)$  vérifie les propriétés de monotonie suivantes. Pour  $\omega, n$  et  $\sharp$  fixés,*

- (a)  $S \mapsto E_{\omega, \sharp}(\Lambda, n, S)$  est une fonction croissante,
- (b)  $\Lambda \mapsto E_{\omega, \sharp}^D(\Lambda, n, S)$  est une fonction décroissante.

On rappelle, que l'indice  $D$  dans (b) signifie les conditions au bord de Dirichlet. La partie (a) est vraie pour toutes conditions au bord.

*Démonstration.* La partie (a) vient du fait que les valeurs propres de  $H_\omega(\Lambda, n)$  sont numérotées dans l'ordre croissant et de la définition (1.22). Autrement dit, l'inverse d'une fonction croissante est aussi une fonction croissante. La partie (b) est la conséquence directe de la monotonie par rapport au domaine des valeurs propres d'un opérateur avec les conditions au bord de Dirichlet. Cette propriété n'est pas vraie en général pour les conditions au bord de Neumann ou périodique.  $\square$

**Notation 1.1.21.** Par  $\mathfrak{E}_{\omega, \sharp}(\Lambda, n)$  on note l'énergie fondamentale :

$$\mathfrak{E}_{\omega, \varepsilon}(\Lambda, n) = \inf \text{Spec } H_{\omega, \sharp}(\Lambda, n) = \inf_{\substack{\Psi \in \text{Dom}(H_{\omega, \sharp}(\Lambda, n)) \\ \Psi \neq 0}} \frac{\langle H_{\omega, \sharp}(\Lambda, n)\Psi, \Psi \rangle}{\|\Psi\|^2}.$$

Rappelons aussi une notation standard.

**Notation 1.1.22.** Soit  $f$  une fonction sur  $\mathbb{R}$ . On écrit  $f(x+0)$  pour la limite à droite de  $f$  au point  $x$  et  $f(x-0)$  pour la limite à gauche.

On finit cette sous-section par deux caractérisations de l'énergie fondamentale.

**Proposition 1.1.23.**  $\mathfrak{E} \in \mathbb{R}$  est l'énergie fondamentale de  $H_\omega(\Lambda, n)$  si et seulement si

$$\mathcal{N}_\omega(\mathfrak{E} - 0, \Lambda, n) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_\omega(\mathfrak{E} + 0, \Lambda, n) > 0,$$

ou, d'une façon équivalente, en utilisant l'entropie,

$$S_\omega(\mathfrak{E} - 0, \Lambda, n) = -\infty \quad \text{et} \quad S_\omega(\mathfrak{E} + 0, \Lambda, n) \geq 0.$$

*Démonstration.* C'est la conséquence directe de la définition de fonction de comptage : elle saute de zéro à un pour la première fois exactement à la première valeur propre.  $\square$

**Proposition 1.1.24.** L'énergie fondamentale est aussi donnée par l'entropie zéro :

$$\mathfrak{E}_{\omega, \varepsilon}(\Lambda, n) = E_{\omega, \varepsilon}(\Lambda, n, 0).$$

*Démonstration.* Il suffit de poser  $S = 0$  dans la définition (1.22).  $\square$

Cette dernière caractérisation dépend essentiellement du choix de la fonction inverse  $S \mapsto E_\omega(\Lambda, n, S)$ , bien que la Proposition 1.1.23 soit universelle par rapport au choix particulier de la fonction inverse.

### 1.1.4 Limite thermodynamique

Dans cette sous-section, on introduit la notion de la limite thermodynamique et on discute ensuite différents enjeux de la physique statistique qui sont reliés avec cette limite. On pose finalement le problème général et entour des questions plus abordables qu'on va réellement traiter dans la suite.

Comme on l'a déjà indiqué dans la sous-section 1.1.2, une des questions clés de la physique statistique est d'expliquer des propriétés fondamentales de la composition de la matière au niveau macroscopique. La première condition nécessaire est la stabilité (voir aussi (1.18)). Si  $E(\Lambda)$  est l'énergie d'un système (sans vraiment préciser pour le moment la nature ainsi que la définition de cette énergie ; il peut s'agir de l'énergie interne ou de l'énergie libre, par exemple) dans le domaine  $\Lambda$ , on demande :

$$\frac{E(\Lambda)}{|\Lambda|} \geq -C$$

pour une certaine constante  $C$  qui ne dépend pas de  $\Lambda$ .

La stabilité de la matière justifie pourquoi un système ne s'effondre quand le nombre de particules croît. Une condition plus exigeante demande que non seulement l'énergie par unité de volume soit bornée inférieurement, mais qu'elle ait une limite quand le domaine tend (dans un sens à préciser) vers l'espace entier, i.e., que la limite suivante existe :

$$\lim_{|\Lambda| \rightarrow +\infty} \frac{E(\Lambda)}{|\Lambda|}. \quad (1.25)$$

La condition (1.25) est nécessaire pour expliquer le fait que les particules quantiques qui forment la matière restent ensemble et ne se dissocient pas. Supposons que (1.25) n'est pas vraie. Alors

$$|E(2\Lambda) - 2E(\Lambda)|,$$

devient grand quand  $\Lambda$  tend vers l'espace  $\mathbb{R}^d$  entier, où  $2\Lambda$  est le domaine deux fois plus grand que  $\Lambda$ . Mais cela veut dire que soit une grande quantité d'énergie est nécessaire pour diviser le système en deux parties, soit cette énergie est libérée. Ceci contredit l'observation que les objets macroscopiques sont stables.

Dans la thermodynamique, la propriété de type (1.25) est fortement liée au fait que certaines quantités physiques (telles que l'énergie interne, la capacité calorifique, l'énergie libre et ainsi de suite) sont supposées extensives, c'est-à-dire, additives par rapport au volume du système. De point de vue mathématique, ce n'est pas du tout évident ni automatique. La limite thermodynamique qu'on va introduire tout de suite est la manière mathématiquement rigoureuse de vérifier qu'une quantité est extensive.

Pour la définition de la limite thermodynamique, on suit essentiellement [Rue99]. La définition et la discussion des différentes propriétés de base de la limite thermodynamique peuvent être trouvées également dans des œuvres ou articles variés tels que [Rue99, LSSY05, Gri65, LL72].

Dans notre définition, on demande que le nombre de particules  $n$  qui se trouvent dans le domaine  $\Lambda$  soit proportionnel au volume. C'est une hypothèse raisonnable du point de vue physique. Cela correspond à l'ensemble microcanonique.

Un autre point de vue consiste à regarder l'ensemble grand-canonique. Dans ce cas, on ne fixe pas un nombre de particules  $n$  proportionnel au volume  $|\Lambda|$  mais on optimise par rapport à ce nombre. Pour l'énergie fondamentale, par exemple, on définit :

$$\mathfrak{E}_\omega(\Lambda) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{E}_\omega(\Lambda, n), \quad (1.26)$$

et on démontre ensuite que la limite de  $\mathfrak{E}_\omega(\Lambda)/|\Lambda|$  existe pour  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Afin de justifier l'hypothèse physique que le nombre de particules est proportionnel au volume, on démontre ensuite que le nombre de particules  $n$  qui minimise (1.26) est proportionnel à  $|\Lambda|$  dans la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ . C'est, en particulier, l'approche qui a été utilisé par C. Fefferman dans [Fef85], G. M. Graf et D. Schenker dans [GS95], C. Hainzl, M. Lewin et J. P. Solovej dans [HLS09a, HLS09b] et X. Blanc et M. Lewin dans [BL12], où ils considèrent la limite thermodynamique pour la densité de l'énergie libre dans l'ensemble grand-canonique. La comparaison entre l'ensemble canonique et grand-canonique pour les interactions de Coulomb est faite par E. H. Lieb et J. L. Lebowitz dans [LL72]. On traite le cas de l'ensemble grand-canonique dans Annexe A.

On passe maintenant aux définitions et on commence par la notion de suite des domaines qui tend vers l'infini.

**Définition 1.1.25.** Soient  $\text{diam}(\Lambda)$  le diamètre de  $\Lambda$  et  $\partial_h \Lambda$  le  $h$ -voisinage de  $\partial\Lambda$  :

$$\partial_h \Lambda = \partial\Lambda + B(0, h),$$

où  $B(0, h)$  est la boule ouverte de centre 0 et rayon  $h$ .

**Définition 1.1.26.** Les domaines  $\Lambda$  tendent vers l'infini *dans le sens de Fisher* (voir, par exemple, [Rue99]) si

$$\lim |\Lambda| = +\infty$$

et il existe une “fonction de la forme”  $\pi$  telle que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \pi(\alpha) = 0$$

et pour  $\alpha$  suffisamment petit et tout  $\Lambda$

$$|\Lambda_{\alpha \text{ diam}(\Lambda)}|/|\Lambda| \leq \pi(\alpha).$$

Dans la suite, on va toujours comprendre  $\Lambda \rightarrow \infty$  dans le sens de Fisher.

*Exemple 1.1.27.* Si on considère une suite des domaines parallélépipédiques, dire qu'ils tendent vers l'infini est la même chose que de dire que tous les côtés tendent vers l'infini à une vitesse comparable :

$$\prod_{j=1}^d [0, L_j] \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \min_j L_j \rightarrow \infty, \\ 1 \geq \min_j L_j / \max_j L_j > 1/C. \end{cases}$$

**Définition 1.1.28.** La limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ ,  $n/|\Lambda| \rightarrow \rho$  où  $\rho$  est une constante positive (densité de particules), s'appelle *la limite thermodynamique*.

D'habitude, en considérant la limite thermodynamique, on s'intéresse à une quantité par particule (ou par unité de volume, ce qui est la même chose à une constante près grâce à la Définition 1.1.28).

**Définition 1.1.29.** Soit  $X_\omega(\Lambda, n; \mathcal{P})$  une variable aléatoire qui dépend de la boîte  $\Lambda$ , du nombre de particules  $n$  et d'autres paramètres  $\mathcal{P}$ . On dit que  $X_\omega(\Lambda, n, \mathcal{P})$  admet une *limite thermodynamique* si la limite suivante existe

$$\lim_{\substack{\Lambda \rightarrow \infty \\ n/|\Lambda| \rightarrow \rho \\ \mathfrak{L}[\mathcal{P}]}} \frac{X_\omega(\Lambda, n, \mathcal{P})}{n}$$

dans un sens à préciser (presque sûr, en probabilité, dans  $L^2$ ). Ici  $\mathfrak{L}[\mathcal{P}]$  est une procédure limite pour les paramètres  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire, une description de comment les paramètres  $\mathcal{P}$  évoluent quand  $\Lambda$  et  $n$  tendent vers l'infini.

La question générale qu'on se pose est de comprendre le comportement dans la limite thermodynamique d'un système de  $n$  particules quantiques chacune décrite par le hamiltonien à une particule  $H_\omega$ , qui interagissent par le potentiel d'interactions  $W$  et qui sont restreintes dans un domaine  $\Lambda$ . Autrement dit, la question fondamentale s'écrit comme :

$$\boxed{\text{étudier } H_{\omega, \#}(\Lambda, n) \text{ dans la limite } \Lambda \rightarrow \infty, n/|\Lambda| \rightarrow \rho > 0.} \quad (1.27)$$

En particulier, on s'intéresse comment les différentes statistiques quantiques  $\#$  vont influencer ce comportement.

En ce qui concerne la limite thermodynamique de l'opérateur  $H_{\omega, \#}(\Lambda, n)$  lui-même, selon la connaissance de l'auteur, il n'y a pas de sens cohérent pour définir cette limite



(remarquons, que ces opérateurs sont définis sur les espaces de Hilbert différents de structure de plus en plus compliquée).

Par contre, ce qu'on peut faire, c'est étudier différentes fonctionnelles de cet opérateur dans la limite thermodynamique. Dans la suite de la première partie, on va démontrer l'existence de la limite thermodynamique pour l'énergie par particule  $E_\omega(\Lambda, n, S)/n$  avec  $S/n \rightarrow \sigma \geq 0$  et, en particulier, l'énergie fondamentale par particule  $\mathfrak{E}_\omega(\Lambda, n)/n$ , c'est-à-dire, pour  $\sigma = 0$ , et pour l'entropie par particule  $S_\omega(E, \Lambda, n)/n$  avec  $E/n \rightarrow \varepsilon$ . Ensuite, dans la deuxième partie de la thèse, on va décrire différentes propriétés asymptotiques de l'état fondamental pour un système des fermions.

## 1.2 Théorèmes d'existence

Dans cette section, on démontre les résultats principaux de la première partie de la thèse sur l'existence de la limite thermodynamique pour l'énergie par particule et l'entropie par particule. Dans la sous-section 1.2.1, on obtient des inégalités de type sous-additif pour l'énergie. Ceci est un ingrédient clé de toute la première partie qui permet finalement à l'aide d'un argument de type théorème ergodique sous-additif de Kingman (voir, par exemple, [Tem72]) de démontrer l'existence de la limite. Dans la sous-section 1.2.2, on introduit une procédure limite spéciale et on démontre l'existence de la limite thermodynamique pour cette procédure. Ces deux outils sont employés dans les sous-sections qui suivent. Plus précisément, dans la sous-section 1.2.3, on introduit la notion de la densité de particules critique et on explique sa signification physique. Ensuite, dans la sous-section 1.2.4, on démontre les principales propriétés de la limite de l'énergie par particule  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$ . Finalement, dans la sous-section 1.2.5, on donne la démonstration pour la convergence dans le cas général et déduit également le résultat réciproque sur l'existence de la limite thermodynamique pour l'entropie. À la fin, on discute pourquoi l'étude de la fonction limite  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$  est importante et on donne quelques relations thermodynamiques qu'on pourrait en tirer.

On travaille avec les conditions au bord de Dirichlet :

$$H_{\omega, \sharp}(\Lambda, n) = H_{\omega, \sharp}^D(\Lambda, n).$$

On suppose également que le groupe discret  $\mathcal{I}$  (qui intervient dans la relation de covariance (1.7)) est  $\mathbb{Z}^d$ . Tout au long de la section, on suppose que l'opérateur à une particule est borné inférieurement (**LB**) et satisfait la condition de décorrélation (**IAD**), que les interactions sont stables (**SI**) et également par paires et invariantes par translations (**PI**) :

$$W(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} U(x^i - x^j),$$

avec  $U$  une fonction sur  $\mathcal{V}$ . Dans les énoncés des principaux résultats, on va répéter toutes les conditions nécessaires pour faciliter de la lecture.

Les idées principales sont inspirées de [Rue99]. Plus précisément, dans la sous-section 1.2.2, on utilise la même suite des cubes que dans le livre de Ruelle pour démontrer l'existence de la limite. La difficulté nouvelle est la suivante. Dans [Rue99], l'évolution

libre est donnée purement par le laplacien et l'opérateur total avec les interactions est donc invariant par toutes les translations de  $\mathbb{R}^d$ . Par contre, dans notre cas, le hamiltonien à une particule satisfait seulement la condition de covariance (1.7) au lieu de l'invariance. Ceci nécessite un argument probabiliste supplémentaire.

### 1.2.1 Inégalités du type sous-additif

Des inégalités sous-additives jouent le rôle primordial dans nos démonstrations. L'idée de base de tous les théorèmes d'existence dans cette thèse (ainsi que d'autres travaux : consultez, par exemple, [Rue99, Gri65, LL72]) peut être résumée comme :

- trouver une inégalité de type sous-additif : l'inégalité ne doit pas être nécessairement strictement sous-additive ; il peut suffire qu'il y ait une restriction supplémentaire sur les domaines ou un terme d'erreur,
- utiliser ou démontrer un analogue du théorème ergodique sous-additif qui garantit la convergence.

Pour des renseignements variés sur le théorème ergodique sous-additif, on pourra consulter, par exemple, [Tem72, Smy76, Sch88, Ste89]. Dans [Tem72], le lien avec l'existence de la limite thermodynamique est mentionné.

Le prochain lemme est la clé pour la sous-additivité de l'énergie.

**Lemme 1.2.1** (construction de la fonction test). *Supposons que les interactions sont tempérées (PTI). Choisissons une statistique  $\sharp$  dans  $\{\emptyset, +, -\}$ . Soient  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  deux domaines, tels que  $\text{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq r \geq R_0$ , et soient  $\varphi_j \in \mathfrak{H}_{\sharp}^{n_j}(\Lambda_j)$ ,  $j = 1, 2$ , des fonctions à  $n_j$  particules d'énergie au-dessous des niveaux  $E_j$  :*

$$\langle H_{\omega, \varepsilon}(\Lambda_j, n_j)\varphi_j, \varphi_j \rangle \leq E_j \|\varphi_j\|^2, \quad j = 1, 2.$$

Alors à partir de  $\varphi_1, \varphi_2$ , on sait construire  $\zeta = \zeta(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathfrak{H}_{\sharp}^{n_1+n_2}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ , une fonction à  $n_1+n_2$  particules dans le domaine uni  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$  d'énergie inférieure à  $E_1 + E_2 + An_1n_2r^{-\lambda}$  :

$$\langle H_{\omega, \sharp}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1 + n_2)\zeta, \zeta \rangle \leq (E_1 + E_2 + An_1n_2r^{-\lambda})\|\zeta\|^2, \quad (1.28)$$

où  $\lambda$  est une exposante de la condition (PTI).

*Remarque 1.2.2.* La construction d'une telle fonction test est explicite dans la démonstration qui suit.

*Démonstration du Lemme 1.2.1.* On considère des extensions par zéro des fonctions  $\varphi_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , sur  $(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)^{n_j}$ , qu'on note aussi par  $\varphi_j$ . Ceci est possible grâce aux conditions au bord de Dirichlet et c'est exactement cet endroit dans la démonstration qui pose des problèmes pour les conditions au bord de Neumann ou périodiques. Remarquons, que ces extensions préservent (l'anti-)symétrie dans le cas de  $\sharp = +, -$ . Donc pour tout choix de  $\sharp$ , on a  $\varphi_j \in \mathfrak{H}_{\sharp}^{n_j}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ .

Maintenant, on étudie chaque statistique séparément.

**Statistique de Boltzmann.** On pose

$$\zeta = \varphi_1 \otimes \varphi_2.$$

Alors, en utilisant **(PTI)**,

$$\begin{aligned}
& \langle H_\omega(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1 + n_2)\zeta, \zeta \rangle \\
&= \left\langle \left\{ H_\omega(\Lambda_1, n_1) \otimes \mathbf{1}^{n_2} + \mathbf{1}^{n_1} \otimes H_\omega(\Lambda_2, n_2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + W^{inter}(\Lambda_1, n_1; \Lambda_2, n_2) \right\} \varphi_1 \otimes \varphi_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \right\rangle \\
&= \langle H_\omega(\Lambda_1, n_1)\varphi_1, \varphi_1 \rangle \|\varphi_2\|^2 + \langle H_\omega(\Lambda_2, n_2)\varphi_2, \varphi_2 \rangle \|\varphi_1\|^2 \\
&\quad + \left\langle \sum_{\substack{i=1\dots n_1 \\ j=n_1+1\dots n_1+n_2}} U(x^i - x^j) \varphi_1 \otimes \varphi_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \right\rangle \\
&\leq (E_1 + E_2 + An_1n_2r^{-\lambda})\|\zeta\|^2,
\end{aligned} \tag{1.29}$$

où  $W^{inter}$  est le potentiel d'interaction entre  $n_1$  particules dans  $\Lambda_1$  et  $n_2$  particules dans  $\Lambda_2$  (voir Définition 1.1.16). Dans la dernière inégalité, on a utilisé le fait que le potentiel des interactions par paires  $U$  est tempéré. Comme dans chacun de  $n_1n_2$  termes, on a  $x^i \in \Lambda_1$ ,  $x^j \in \Lambda_2$  et  $\text{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq r \geq R_0$ , par **(PTI)** on obtient

$$\int_{\Lambda_1^{n_1}} \int_{\Lambda_2^{n_2}} d\mathbf{x} U(x^i - x^j) |\zeta(\mathbf{x})|^2 \leq Ar^{-\lambda} \int_{\Lambda_1^{n_1}} \int_{\Lambda_2^{n_2}} d\mathbf{x} |\zeta(\mathbf{x})|^2 \leq Ar^{-\lambda} \|\zeta\|^2.$$

Ici on a utilisé la notation raccourcie  $\mathbf{x} = x^{\mathbb{N}_{n_1+n_2}}$  pour le vecteur des coordonnées de toutes les particules.

**Bosons.** On construit

$$\zeta(x^{\mathbb{N}_{n_1+n_2}}) = \sum_{\substack{I \subset \mathbb{N}_{n_1+n_2} \\ \text{card } I = n_1}} \varphi_1(x^I) \varphi_2(x^{\mathbb{N}_{n_1+n_2} \setminus I}). \tag{1.30}$$

Démontrons que cette fonction est symétrique par rapport aux permutations de coordonnées. Soient  $i_1, i_2 \in \mathbb{N}_{n_1+n_2}$ ,  $i_1 \neq i_2$  deux indices distincts. Regardons ce qui se passe avec la fonction  $\zeta$  si on permute  $x^{i_1}$  avec  $x^{i_2}$ . Comme  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des fonctions symétriques, les termes dans la somme (1.30) pour lesquels  $\{i_1, i_2\} \subset I$  ou  $\{i_1, i_2\} \subset \mathbb{N}_{n_1+n_2} \setminus I$  ne changent pas après cette permutation. Les autres termes vont toujours par paires : si  $i_1 \in I$  et  $i_2 \in \mathbb{N}_{n_1+n_2} \setminus I$ , alors il existe un terme avec l'indice  $\tilde{I} = I \cup \{i_2\} \setminus \{i_1\}$ , et la somme d'un terme avec  $I$  et d'un terme avec  $\tilde{I}$  est aussi invariant par cette permutation.

Remarquons maintenant que les termes de la somme (1.30) sont mutuellement orthogonaux dans  $L^2((\Lambda_1 \cup \Lambda_2)^{n_1+n_2})$ . Ainsi

$$\|\zeta\|^2 = \binom{n_1 + n_2}{n_1} \|\varphi_1\|^2 \|\varphi_2\|^2,$$

et l'opérateur  $H_{\omega,+}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1 + n_2)$  préserve cette orthogonalité :

$$H_{\omega,+}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1 + n_2) \varphi_1(x^I) \varphi_2(x^{\mathbb{N}_{n_1+n_2} \setminus I}) \perp \varphi_1(x^J) \varphi_2(x^{\mathbb{N}_{n_1+n_2} \setminus J}), \quad I \neq J.$$

Ensuite, en récrivant (1.29) pour  $\zeta$  donné par (1.30) et en utilisant l'orthogonalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle H_{\omega,+}(\Lambda_1 + \Lambda_2, n_1 + n_2)\zeta, \zeta \rangle &\leq \binom{n_1 + n_2}{n_1} \cdot (E_1 + E_2 + An_1n_2r^{-\lambda}) \cdot \|\varphi_1\|^2 \|\varphi_2\|^2 \\ &= (E_1 + E_2 + An_1n_2r^{-\lambda}) \|\zeta\|^2. \end{aligned}$$

**Fermions.** La construction pour des fermions est pareille à celle pour les bosons. On définit :

$$\zeta(x^{\mathbb{N}_{n_1+n_2}}) = \sum_{\substack{I \subset \mathbb{N}_{n_1+n_2} \\ \text{card } I = n_1}} (-1)^{\sum_{i \in I} i} \cdot \varphi_1(x^I) \varphi_2(x^{\mathbb{N}_{n_1+n_2} \setminus I}). \quad (1.31)$$

Cette fonction est antisymétrique par rapport aux permutations de coordonnées. La démonstration de l'antisymétrie suit avec des modification mineures celle pour le cas des bosons. La borne supérieure sur la forme quadratique (1.28) est obtenue exactement comme pour des bosons.  $\square$

*Remarque 1.2.3.* La construction (1.31) est une généralisation du déterminant de Slater. De plus, le déterminant de Slater peut être obtenu en appliquant cette procédure consécutivement à des fonctions propres à une particule et en construisant par cette méthode des fonctions antisymétriques à plusieurs particules.

À partir de ce moment, on omet la signe de statistique  $\sharp$  dans les notations. Tout ce qui suit est valable pour toutes statistiques étant donné que Lemme 1.2.1 est vrai. Néanmoins, il faut remarquer que les quantités (telles que des valeurs limites) peuvent dépendre de la statistique.

La proposition qui suit donne la supermultiplicité pour la fonction de comptage et la superadditivité pour l'entropie.

**Proposition 1.2.4.** *Supposons les interactions  $W$  tempérées (PTI). Si  $\text{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq r \geq R_0$ , alors pour tous  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ,  $E_1, E_2 \in \mathbb{R}$  et tout  $\omega \in \Omega$ ,*

$$\mathcal{N}_\omega(E_1 + E_2 + An_1n_2r^{-\lambda}, \Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1 + n_2) \geq \mathcal{N}_\omega(E_1, \Lambda_1, n_1) \cdot \mathcal{N}_\omega(E_2, \Lambda_2, n_2), \quad (1.32)$$

$$S_\omega(E_1 + E_2 + An_1n_2r^{-\lambda}, \Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1 + n_2) \geq S_\omega(E_1, \Lambda_1, n_1) + S_\omega(E_2, \Lambda_2, n_2). \quad (1.33)$$

*Démonstration.* La preuve de (1.32) se fait en utilisant le principe variationnel pour les valeurs propres de  $H_\omega(\Lambda, n)$  et la fonction du Lemme 1.2.1 comme fonction test. Plus précisément, par le principe variationnel

$$\mathcal{N}_\omega(E, \Lambda, n) = \sup_{\substack{K \text{ sous-espace de } \mathfrak{H}^n(\Lambda) \text{ t.q.} \\ \forall \varphi \in K, \langle H_\omega(\Lambda, n)\varphi, \varphi \rangle \leq E \|\varphi\|^2}} \dim K, \quad (1.34)$$

et ce supremum est atteint sur le sous-espace engendré par les fonctions propres de  $H_\omega(\Lambda, n)$  d'énergie au plus  $E$ . En appliquant ce principe pour  $E = E_j$ ,  $\Lambda = \Lambda_j$  et  $n = n_j$  avec  $j \in \{1, 2\}$ , on voit qu'il y a des fonctions  $\phi_k^j$ , avec  $k \in \{1, \dots, \mathcal{N}_\omega(E_j, \Lambda_j, n_j)\}$  et  $j \in \{1, 2\}$ , des fonctions propres de  $H_\omega(\Lambda_j, n_j)$  de l'énergie au plus  $E_j$ .

Alors, d'après le Lemme 1.2.1 on peut construire  $\mathcal{N}_\omega(E_1, \Lambda_1, n_1) \cdot \mathcal{N}_\omega(E_2, \Lambda_2, n_2)$  fonctions distinctes  $\zeta_{k_1, k_2} = \zeta(\phi_{k_1}^1, \phi_{k_2}^2) \in \mathfrak{H}^{n_1+n_2}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ . Chacune de ces fonctions  $\zeta_{k_1, k_2}$  a l'énergie bornée par  $E_1 + E_2 + An_1n_2r^{-\lambda}$ . Soit maintenant  $\tilde{K}$  le sous-espace de  $\mathfrak{H}^{n_1+n_2}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$  engendré par les fonctions  $\zeta_{k_1, k_2}$ . En utilisant de nouveau (1.34) avec  $E = E_1 + E_2 + An_1n_2r^{-\lambda}$ ,  $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$  et  $n = n_1 + n_2$ , on obtient que

$$\mathcal{N}_\omega(E_1 + E_2 + An_1n_2r^{-\lambda}, \Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1 + n_2) \geq \dim \tilde{K},$$

qui démontre (1.32). En prenant le logarithme, on obtient (1.33).  $\square$

La proposition suivante donne la sous-additivité pour l'énergie qu'on va intensivement utiliser dans la suite.

**Proposition 1.2.5.** *Supposons les interactions  $W$  tempérées, c'est-à-dire, vérifiant la condition (PTI).*

(a) *Soient  $S_1, S_2 \in \mathbb{R}$  telles que  $\exp S_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, 2$ . Si  $\text{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq r \geq R_0$ , alors*

$$E_\omega(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1 + n_2, S_1 + S_2) \leq E_\omega(\Lambda_1, n_1, S_1) + E_\omega(\Lambda_2, n_2, S_2) + An_1n_2r^{-\lambda}. \quad (1.35)$$

(b) *Soient  $S_i$  telles que  $\exp S_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Soient  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$  de distances mutuelles supérieures à  $r \geq R_0$ . On a :*

$$E_\omega\left(\bigcup_{i=1}^m \Lambda_i, \sum_{i=1}^m n_i, \sum_{i=1}^m S_i\right) \leq \sum_{i=1}^m E_\omega(\Lambda_i, n_i, S_i) + \frac{A}{2} \left(\sum_{i=1}^m n_i\right)^2 r^{-\lambda}. \quad (1.36)$$

*Démonstration.* Dans (1.33), posons

$$E_j = E_\omega(\Lambda_j, n_j, S_j), \quad j \in \{1, 2\}.$$

Par la propriété d'inversion (1.24), on obtient

$$S_\omega(E_1 + E_2 + An_1n_2r^{-\lambda}, \Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1 + n_2) \geq S_1 + S_2.$$

Appliquons la fonction  $S \mapsto E_\omega(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1 + n_2, S)$  à la dernière inégalité. Le sens de l'inégalité reste le même parce que  $E_\omega(\Lambda, n, \cdot)$  est croissante. En utilisant l'autre propriété de l'inversion (1.23), on a donc :

$$(E_1 + E_2 + An_1n_2r^{-\lambda})^- \geq E_\omega(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1 + n_2, S_1 + S_2),$$

où dans la partie à gauche, on a la valeur propre de  $H_\omega(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1 + n_2)$  la plus proche de  $E_1 + E_2 + An_1n_2r^{-\lambda}$  par dessous. Ceci implique tout de suite (1.35).

L'inégalité (1.36) est obtenue en appliquant (1.35) consécutivement  $m - 1$  fois et en utilisant que

$$\prod_{1 \leq i < j \leq m} n_i n_j \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^m n_i\right)^2.$$

$\square$

*Remarque 1.2.6.* Par la monotonie de l'énergie par rapport au domaine (voir Proposition 1.1.20), L'union  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$  dans (1.35) ainsi que  $\bigcup_{i=1}^m \Lambda_i$  dans (1.36) peuvent être remplacés par un domaine contenant cet union.

### 1.2.2 Convergence $L^2$ sur une suite des cubes spéciale

Dans cette sous-section, on va utiliser la sous-additivité de l'énergie (Proposition 1.2.5) pour obtenir que l'énergie  $E_\omega(\Lambda, n, S)$  admet la limite thermodynamique sur une suite des domaines  $\Lambda$  qu'on va choisir de façon adéquate. La convergence obtenue sera au sens de  $L^2(\Omega)$ .

On commence par définir la suite des domaines  $\Lambda_N$ . L'idée est inspirée par [Rue99]. Soit  $\theta$  un nombre qui vérifie

$$1 < 2^{d/\lambda} < \theta < 2.$$

Ceci est possible parce que  $\lambda > d$ , grâce à la définition des interactions tempérées (**PTI**). Soit aussi

$$\tilde{L} > R = \frac{R_0 + \delta}{2 - \theta}, \quad (1.37)$$

où  $\delta > 0$  est une constante qu'on fixera plus loin. Pour un entier  $N \geq 0$ , on définit

$$L_N = 2 \left[ \frac{1}{2} \left( 2^N \tilde{L} - \theta^N R \right) \right], \quad (1.38)$$

de façon à ce que  $L_N \in 2\mathbb{Z}$ , et on définit le cube  $\Lambda_N$  par

$$\Lambda_N = [-L_N/2, L_N/2]^d \subset \mathcal{V}.$$

Remarquons que les sommets de  $\Lambda_N$  sont des points entiers. D'après (1.38), il est possible de placer  $2^d$  translatsés de  $\Lambda_N$  (des cubes  $\Lambda_N^{(i)}$ ) dans  $\Lambda_{N+1}$  à des distances mutuelles d'au moins

$$R_N = L_{N+1} - 2L_N = \theta^N (2 - \theta)R + \varepsilon = \theta^N (R_0 + \delta) + \varepsilon \geq R_0,$$

où  $\varepsilon \in [-4, 2]$  est une erreur due à l'arrondi. La constante  $\delta$  est choisie maintenant pour compenser le terme d'erreur  $\varepsilon$  qui peut aussi être négatif, afin que la dernière inégalité soit vraie. Il suffit, par exemple, de prendre  $\delta = 4$ .

Les cubes  $\Lambda_N^{(i)}$  sont donnés explicitement par

$$\Lambda_N^{(i)} = \Lambda_N + \gamma_i^{(N)},$$

où

$$\gamma_i^{(N)} = \frac{L_{N+1} - L_N}{2} \cdot e_i, \quad e_i = (\pm 1, \dots, \pm 1) \in \mathbb{R}^d, \quad i = 1, \dots, 2^d.$$

*Remarque 1.2.7.* Il est important que les vecteurs de translation  $\gamma_i^{(N)}$  soient entiers : ceci implique que les restrictions de l'opérateur de Schrödinger à une particule  $H_\omega$  à  $\Lambda_i^{(N)}$  pour les différents  $i$  sont reliées par la condition de covariance (1.7).

Par la Proposition 1.1.20 et la condition de presque sous-additivité (1.36), on obtient

pour  $S_i \in \log \mathbb{N}$  que :

$$\begin{aligned} E_\omega \left( \Lambda_{N+1}, \sum_{i=1}^{2^d} n_i, \sum_{i=1}^{2^d} S_i \right) &\leq E_\omega \left( \bigcup_{i=1}^{2^d} \Lambda_N^{(i)}, \sum_{i=1}^{2^d} n_i, \sum_{i=1}^{2^d} S_i \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{2^d} E_\omega(\Lambda_N^{(i)}, n_i, S_i) + \frac{A}{2} \left( \sum_{i=1}^{2^d} n_i \right)^2 R_N^{-\lambda} \\ &= \sum_{i=1}^{2^d} E_{\tau_{\gamma_i^{(N)}}(\omega)}(\Lambda_N, n_i, S_i) + \frac{A}{2} \left( \sum_{i=1}^{2^d} n_i \right)^2 R_N^{-\lambda}, \end{aligned}$$

où on rappelle que  $\{\tau_\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^d}$  est l'action ergodique du groupe  $\mathbb{Z}^d$  sur l'espace probabilisé  $\Omega$ . En particulier, pour  $S \in \log \mathbb{N}$  :

$$E_\omega(\Lambda_{N+1}, 2^d n, 2^d S) \leq \sum_{i=1}^{2^d} E_{\tau_{\gamma_i^{(N)}}(\omega)}(\Lambda_N, n, S) + \frac{A}{2} (2^d n)^2 R_N^{-\lambda}. \quad (1.39)$$

Remarquons que les conditions au bord de Dirichlet sont cruciales dans la dérivation de cette inégalité, comme on s'y appuie fortement sur la monotonie des valeurs propres par rapport au domaine.

Soient maintenant  $\rho$  et  $\sigma$  des nombres positifs tels que  $2^{N_0 d} \rho \tilde{L}^d$  et  $\exp(2^{N_0 d} \sigma \rho \tilde{L}^d)$  sont entiers pour  $N_0 \in \mathbb{N}$  suffisamment grand. Dans (1.39), on pose

$$n_N = 2^{N d} \rho \tilde{L}^d, \quad S_N = \sigma n_N = 2^{N d} \rho \sigma \tilde{L}^d \quad (1.40)$$

pour  $N \geq N_0$ . Remarquons, que

$$n_N / |\Lambda_N| \rightarrow \rho, \quad S_N / n_N = \sigma, \quad 2^{N d} \tilde{L}^d / |\Lambda_N| \rightarrow 1, \quad \text{quand } N \rightarrow +\infty.$$

Introduisons la suite des variables aléatoires

$$X_N(\omega) = 2^{-N d} (E_\omega(\Lambda_N, n_N, S_N) + (B + C)n_N), \quad (1.41)$$

où  $B$  est la constante de **(SI)** et  $C$  est la constante de **(LB)** (voir la sous-section 1.1.2). Selon (1.39), cette suite vérifie l'inégalité

$$X_{N+1}(\omega) \leq 2^{-d} \sum_{i=1}^{2^d} X_N(\tau_{\gamma_i^{(N)}}(\omega)) + G_N$$

avec

$$G_N = A \rho^2 \tilde{L}^{2d} 2^{(N+2)d-1} R_N^{-\lambda}.$$

Pour démontrer maintenant la convergence de la suite  $X_N(\omega)$ , on établit la proposition suivante.

**Proposition 1.2.8.** Soit  $X_N$  une suite des variables aléatoires positives sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ,  $X_N(\omega) \geq 0$ , telles que pour chaque  $N$  il y a une famille des transformations de  $\Omega$  préservant la probabilité,  $\tau_i^{(N)}$ ,  $i \in I_N$ , avec  $\text{card } I_N < +\infty$ , telles que les variables  $X_N \circ \tau_i^{(N)}$ ,  $i \in I_N$ , sont iid (indépendantes identiquement distribuées). Si la suite  $X_N$  vérifie :

$$X_{N+1}(\omega) \leq \frac{1}{\text{card } I_N} \sum_{i \in I_N} X_N(\tau_i^{(N)}\omega) + G_N, \quad \text{où} \quad \sum_{N=1}^{+\infty} |G_N| < +\infty, \quad (1.42)$$

alors il existe une constante  $\bar{X}$  (qui ne dépend pas de  $\omega$ ) telle que

$$X_N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{L^2} \bar{X}. \quad (1.43)$$

*Démonstration.* Comme les termes dans la somme à droite de (1.42) sont identiquement distribués, en prenant l'espérance on obtient

$$\mathbb{E}X_{N+1} \leq \mathbb{E}X_N + G_N. \quad (1.44)$$

Considérons la suite

$$c_N = \mathbb{E}X_N - \sum_{i=1}^{N-1} G_i.$$

Évidemment, (1.44) garantit que  $c_{N+1} \leq c_N$ . Donc, cette suite admet une limite :  $c_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} c_\infty$ . Mais comme la somme  $\sum_{i=1}^{+\infty} G_i$  converge aussi,  $\mathbb{E}X_N$  admet la limite également, qu'on va noter par  $\bar{X}$  :

$$\mathbb{E}X_N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} \bar{X}.$$

Considérons maintenant la variance de  $X_N$ ,  $\mathbb{E}(X_N - \mathbb{E}X_N)^2 = \mathbb{E}(X_N^2) - (\mathbb{E}X_N)^2$ . On va montrer qu'elle tend vers zéro quand  $N$  tend vers l'infini. Par (1.42),

$$\begin{aligned} (X_{N+1}(\omega))^2 &\leq \left( \frac{1}{\text{card } I_N} \sum_{i \in I_N} X_N(\tau_i^{(N)}\omega) + G_N \right)^2 \\ &= \frac{1}{(\text{card } I_N)^2} \sum_{i \in I_N} \left( X_N(\tau_i^{(N)}\omega) \right)^2 + \frac{1}{(\text{card } I_N)^2} \sum_{\substack{i, j \in I_N \\ i \neq j}} X_N(\tau_i^{(N)}\omega) X_N(\tau_j^{(N)}\omega) \\ &\quad + \frac{2G_N}{\text{card } I_N} \sum_{i \in I_N} X_N(\tau_i^{(N)}\omega) + G_N^2. \end{aligned}$$

En prenant l'espérance et en utilisant le fait que  $\left( X_N(\tau_i^{(N)}) \right)_{i \in I_N}$  sont iid pour  $N$  fixé, on



trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{N+1}(\omega))^2 &\leq \frac{1}{(\text{card } I_N)^2} \sum_{i \in I_N} \mathbb{E} \left( X_N(\tau_i^{(N)} \omega) \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{(\text{card } I_N)^2} \sum_{\substack{i, j \in I_N \\ i \neq j}} \mathbb{E} \left( X_N(\tau_i^{(N)} \omega) X_N(\tau_j^{(N)} \omega) \right) \\
&\quad + \frac{2G_N}{\text{card } I_N} \sum_{i \in I_N} \mathbb{E} X_N(\tau_i^{(N)} \omega) + G_N^2 \\
&= \frac{1}{(\text{card } I_N)^2} \sum_{i \in I_N} \mathbb{E}(X_N^2) + \frac{1}{(\text{card } I_N)^2} \sum_{\substack{i, j \in I_N \\ i \neq j}} (\mathbb{E} X_N)^2 \\
&\quad + \frac{2G_N}{\text{card } I_N} \sum_{i \in I_N} \mathbb{E} X_N + G_N^2 \\
&= \frac{1}{\text{card } I_N} \mathbb{E}(X_N^2) + \frac{(\text{card } I_N)(\text{card } I_N - 1)}{(\text{card } I_N)^2} (\mathbb{E} X_N)^2 + 2G_N \cdot \mathbb{E} X_N + G_N^2.
\end{aligned}$$

Alors, on a obtenu

$$\mathbb{E}(X_{N+1}^2) \leq \frac{1}{\text{card } I_N} \mathbb{E}(X_N^2) + \left(1 - \frac{1}{\text{card } I_N}\right) (\mathbb{E} X_N)^2 + 2G_N \cdot \mathbb{E} X_N + G_N^2. \quad (1.45)$$

Par l'inégalité de Schwarz,

$$(\mathbb{E} X_N)^2 \leq \mathbb{E}(X_N^2). \quad (1.46)$$

Donc, en utilisant (1.45), on obtient

$$\mathbb{E}(X_{N+1}^2) \leq \mathbb{E}(X_N^2) + 2G_N \sqrt{\mathbb{E}(X_N^2)} + G_N^2 = \left( \sqrt{\mathbb{E}(X_N^2)} + G_N \right)^2.$$

Finalement,

$$\sqrt{\mathbb{E}(X_{N+1}^2)} \leq \sqrt{\mathbb{E}(X_N^2)} + G_N.$$

En utilisant la même argumentation comme pour les espérances, ceci implique que la suite  $\mathbb{E}(X_N^2)$  converge. En prenant la limite dans (1.45) et en utilisant le fait que  $G_N \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow +\infty$ , on obtient que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_N^2) \leq \bar{X}^2,$$

mais l'inégalité de Schwarz (1.46) donne tout de suite l'estimée réciproque. On conclut que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_N^2) = \bar{X}^2$$

et la variance  $\mathbb{E}(X_N - \mathbb{E} X_N)^2$  tend vers 0 quand  $N$  tend vers l'infini. Ceci démontre (1.43) et achève la preuve de la Proposition 1.2.8.  $\square$

Comme la conséquence immédiate de cette proposition générale, on démontre l'existence de la limite thermodynamique pour l'énergie sur la suite spéciale de cubes  $\Lambda_N$ .

**Corollaire 1.2.9.** *Supposons que l'opérateur à une particule est uniformément inférieurement borné **(LB)** et que ses restrictions sont décorréllées **(IAD)**. Soient également les interactions par paires, invariantes par translations, tempérées **(PTI)** et stables **(SI)**. Alors il existe la limite thermodynamique pour l'énergie  $E_\omega$  sur la suite de cubes  $(\Lambda_N)_N$  dans le sens  $L^2(\Omega)$  :*

$$\frac{E_\omega(\Lambda_N, n_N, S_N)}{n_N} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{L^2} \mathcal{E}(\rho, \sigma),$$

où  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$  est définie par cette limite et s'appelle l'énergie par particule .

*Remarque 1.2.10.* L'énergie par particule  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$  est une fonction déterministe : elle ne dépend pas de  $\omega$ .

*Démonstration du Corollaire 1.2.9.* Il nous reste seulement à démontrer que la variable aléatoire  $X_N(\omega)$  introduite dans (1.41) est non négative. Rappelons que

$$H_\omega(\Lambda_N, n_N) = \sum_{i=1}^{n_N} H_\omega^{(i)}(\Lambda_N, n_N) + W_{n_N}.$$

De plus (voir aussi (1.12)),

$$H_\omega^{(i)}(\Lambda_N, n_N) \geq -C, \quad i = 1, \dots, n_N,$$

parce que le hamiltonien à une particule est borné inférieurement **(LB)** et

$$W_{n_N} \geq -Bn_N$$

par la stabilité des interactions **(SI)**. Alors

$$H_\omega(\Lambda_N, n_N) \geq -(B + C)n_N,$$

et donc

$$E_\omega(\Lambda_N, n_N, S_N) + (B + C)n_N \geq 0.$$

Finalement, la condition de l'indépendance à distance **(IAD)** donne l'indépendance des variables  $X_N(\tau_i^{(N)}\omega)$  pour différents  $i$ .  $\square$

Avant de donner la démonstration pour une suite de domaines générale, on a besoin d'étudier certaines propriétés de l'énergie par particule  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$ .

### 1.2.3 Densité critique

On se demande maintenant si la limite thermodynamique de l'énergie par particule qui existe par le Corollaire 1.2.9, est finie.

Par les conditions **(LB)** et **(SI)** il est évident que la limite thermodynamique est bornée inférieurement :

$$\mathcal{E}(\rho, \sigma) \geq -B - C,$$

où  $B$  et  $C$  sont deux constantes apparaissant dans ces conditions.

Par contre, l'existence de la borne supérieure est plus subtile. Comme la fonction  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$  est essentiellement la limite de la suite décroissante (1.41), elle est finie si et seulement si il y a des termes finis dans la suite  $\left( \mathbb{E} \left( \frac{E_\omega(\Lambda_N, n_N, S_N)}{n_N} \right) \right)_N$ , parce que c'est la décroissance de cette suite (décalée par une constante) qui est à l'origine de la démonstration de la Proposition 1.2.8. Autrement dit, si pour  $N$  suffisamment grand,  $\mathbb{E}(E_\omega(\Lambda_N, n_N, S_N))$  est finie, alors  $\mathcal{E}(\rho, \sigma) < +\infty$ .

Dans la situation contraire, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{E}(E_\omega(\Lambda_N, n_N, S_N)) = +\infty. \quad (1.47)$$

La situation (1.47) peut arriver, par exemple, s'il y a trop des configurations  $\omega$  singulières. Néanmoins, d'habitude ceci n'est pas le cas et l'espérance dans (1.47) est infinie à cause du potentiel d'interactions  $W$ .

Supposons que la famille des opérateurs à une particule  $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  possède un minorant et un majorant qui ne dépendent pas de  $\omega$  :

$$H_{min} \leq H_\omega \leq H_{max}, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (1.48)$$

avec  $H_{min}$  et  $H_{max}$  des opérateurs autoadjoints sur  $\mathfrak{H}$ . C'est, en particulier, vrai dans le modèle d'Anderson (1.6) si le support de  $\omega_0$  est borné et s'il existe une constante  $C$  telle que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |u(\cdot - j)| \leq C.$$

Pour cela, il suffit de demander que  $u$  soit une fonction bornée à support compact. Dans ce cas, (1.48) se transforme en :

$$-\Delta - C \leq H_\omega \leq -\Delta + C, \quad \forall \omega \in \Omega,$$

pour une certaine constante  $C > 0$ . Alors (1.47) est équivalent à

$$E_0(\Lambda_N, n_N, S_N) = +\infty,$$

c'est-à-dire, pour toutes  $\omega_j = 0, j \in \mathbb{Z}^d$ . Or,  $E_0(\Lambda_N, n_N, S_N)$  est la valeur propre numéro  $\exp S_N$  de  $-\Delta + W_{n_N}$  comme opérateur sur  $L^2_{\mathfrak{H}}(\Lambda_N^{n_N})$ .

La situation quand l'opérateur  $H_0(\Lambda_N, n_N) = -\Delta + W_{n_N}$  ne possède pas une suite croissante des valeurs propres finies peut arriver par le principe variationnel si et seulement si le sous-espace des fonctions  $\varphi \in L^2(\Lambda_N^{n_N})$  telles que  $\langle (H_0(\Lambda_N, n_N)\varphi, \varphi) < +\infty$  est de dimension finie.

Dans le cas continu,  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^d$ , cette dernière situation peut arriver seulement si le potentiel d'interactions  $W_n$  prend la valeur  $+\infty$  et qu'il y a trop peu des configurations pour lesquelles le terme d'interaction est fini :

$$\text{mes} \left\{ (x^1, \dots, x^{n_N}) \in \Lambda_N^{n_N} \text{ t.q. } W_n(x^1, \dots, x^{n_N}) < +\infty \right\} = 0. \quad (1.49)$$

Dans le cas discret,  $\mathcal{V} = \mathbb{Z}^d$ , le nombre des valeurs propres de  $H_\omega(\Lambda_N, n_N)$  est exactement  $\dim(\ell^2(\Lambda_N^{n_N})) = |\Lambda_N|^{n_N}$ . Par les définitions (1.38) et (1.40), à partir d'un certain  $N$  suffisamment grand,

$$\exp(S_N) < |\Lambda_N|^{n_N}.$$

Ceci veut dire que la dimension de l'espace de Hilbert total est suffisamment grande pour que la valeur propre numéro  $\exp(S_n)$  ait un sens, i.e., il y a assez de valeurs propres.

Alors, pour les deux cas, une seule possibilité pour ce que la limite thermodynamique de l'énergie soit infinie, est (1.49). En générale, on ne peut pas l'éviter. La monotonie par rapport à la densité  $\rho$  propose qu'il existe *la densité de particules critique*  $\rho_c$  telle que la densité de l'énergie  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$  est finie pour  $\rho < \rho_c$  et infinie pour  $\rho > \rho_c$ . Il peut arriver, en particulier, que  $\rho_c = +\infty$ , par exemple, si le potentiel des interactions admet seulement des valeurs finies.

Un exemple simple quand la densité critique  $\rho_c$  est finie, est donné par les noyaux durs. Soient les interactions par paires invariantes par translations **(PI)** et soit le potentiel  $U$  comme :

$$U(x) \begin{cases} = +\infty, & |x| \leq r_0, \\ < +\infty, & |x| > r_0. \end{cases}$$

Dans ce cas, la condition (1.49) est satisfaite si il y a trop peu de place pour mettre  $n_N$  boules de rayon  $r_0/2$  avec des centres dans un domaine  $\Lambda_N$ . Dans la limite  $N \rightarrow +\infty$  ceci correspond à la densité d'empilement compact.

### 1.2.4 Convexité et continuité

Dans cette sous-section, on démontre les propriétés de base pour l'énergie limite par particule  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$  dont l'existence a été démontrée dans le Corollaire 1.2.9.

À partir d'ici, on suppose toujours que  $\rho < \rho_c$ . Remarquons que, pour l'instant, la fonction  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$  est définie (comme la limite d'une suite) seulement pour les densités de particules  $\rho$  et les entropies par particule  $\sigma$  de la forme

$$\rho = \frac{m_1}{2^{N_0 d} \tilde{L}^d}, \quad \sigma = \frac{\log m_2}{m_1}, \quad (1.50)$$

avec  $m_1, m_2$  et  $N_0$  entiers positifs. Dans la suite de cette sous-section, on suppose implicitement que  $\rho$  et  $\sigma$  satisfont (1.50).

**Proposition 1.2.11** (monotonie de l'énergie par particule). *L'énergie par particule  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$  est une fonction croissante (pas nécessairement strictement) en  $\rho$  et  $\sigma$ .*

*Démonstration.* Les deux propriétés sont des conséquences immédiates des propriétés de monotonie de  $E_\omega(\Lambda, n, S)$  par rapport au domaine  $\Lambda$  et l'entropie  $S$  qui étaient démontrées dans Proposition 1.1.20.  $\square$

**Proposition 1.2.12** (convexité de l'énergie par particule). *l'énergie par particule est une fonction convexe dans le sens suivant :*

$$\mathcal{E} \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \frac{\sigma_1 \rho_1 + \sigma_2 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right) \leq \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \mathcal{E}(\rho_1, \sigma_1) + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \mathcal{E}(\rho_2, \sigma_2), \quad (1.51)$$

pour tout  $\rho_{1,2} \in (0, \rho_c)$  et  $\sigma_{1,2} \geq 0$ .

*Démonstration.* On utilise la presque sous-additivité (1.35) et (1.36). Comme la limite  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$  est définie maintenant seulement pour une suite de domaines  $\Lambda_N$  très particulière, on fait la chose suivante.

Considérons le cube  $\Lambda_{N+1}$ . Selon la procédure de la sous-section 1.2.2, ce cube comporte  $2^d$  cubes  $\Lambda_N^{(i)}$ , les translatés de  $\Lambda_N$ . Supposons que la moitié (donc,  $2^{d-1}$ ) de ces petits cubes sont à densité de particules  $\rho_1$  et entropie par particule  $\sigma_1$  et l'autre moitié à  $\rho_2$  et  $\sigma_2$  :

$$n_N^j \asymp \rho_j |\Lambda_N|, \quad S_N^j = \sigma_j n_N^j, \quad j \in \{1, 2\},$$

où l'indice  $j$  correspond à la première ou à la deuxième moitié des cubes. Par (1.36), on a :

$$\begin{aligned} E_\omega(\Lambda_{N+1}, 2^{d-1}(n_N^1 + n_N^2), 2^{d-1}(S_N^1 + S_N^2)) \\ \leq \sum_{i=1}^{2^{d-1}} E_\omega(\Lambda_N^{(i)}, n_N^1, S_N^1) + \sum_{i=2^{d-1}+1}^{2^d} E_\omega(\Lambda_N^{(i)}, n_N^2, S_N^2). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Remarquons, que la densité de particules de la partie à gauche est  $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$  et la entropie par particule est  $\frac{\sigma_1 \rho_1 + \sigma_2 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ . Elles admettent la forme (1.50). En divisant (1.52) par  $2^{d-1}(n_N^1 + n_N^2)$  et en faisant tendre  $N$  vers l'infini, on obtient (1.51).  $\square$

**Proposition 1.2.13.** *L'énergie par particule  $\mathcal{E}$  est localement bornée sur le plan des paramètres  $0 < \rho < \rho_c$  et  $\sigma \geq 0$ .*

*Démonstration.* Soient  $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_c$  et  $\sigma_0 > 0$  de la forme (1.50). On démontre que  $\mathcal{E}$  est bornée dans la région  $\Delta = \{\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2\} \times \{0 \leq \sigma \leq \sigma_0\}$ . Pour cela remarquons que le nombre de particules  $n_N = 2^{Nd} \tilde{L}^d \rho$  avec  $\rho \leq \rho_2$  peut s'écrire comme

$$n_N = \sum_{j=1}^{2^{Nd}} n_0^{(j)}, \quad (1.53)$$

avec  $n_0^{(j)} \in \left\{ \left[ \tilde{L}^d \rho \right], \left[ \tilde{L}^d \rho \right] + 1 \right\}$ . Évidemment, cette représentation dépend de  $\rho$ . Par contre, la borne supérieure  $n_0^{(j)} \leq \left[ \tilde{L}^d \rho_2 \right] + 1 =: n_0^{max}$  ne dépend que de  $\rho_2$ . Cette représentation peut être obtenue comme résultat de la division consécutive du domaine  $\Lambda_N$  en sous-domaines (chaque fois on divise le domaine en  $2^d$  parties) jusqu'à ce qu'on obtienne les domaines  $\Lambda_0^{(j)}$ . Dans (1.37), on choisit  $\tilde{L}$  suffisamment grand pour ce que  $\left[ \tilde{L}^d \rho \right] \geq 1$ .

Ceci garantit qu'il y a au moins une particule dans chaque sous-domaine  $\Lambda_0^{(j)}$ .

On note  $S^*$  le plus petit nombre dans  $\log \mathbb{N}$  qui est plus grand que ou égal à  $S$  :

$$S^* = \inf \{ Q \geq S, \exp Q \in \mathbb{N} \}. \quad (1.54)$$

On calcule :

$$E_\omega(\Lambda_N, n_N, S_N) \leq \sum_{j=1}^{2^{Nd}} E_\omega \left( \Lambda_0^{(j)}, n_0^{(j)}, (S_N / 2^{Nd})^* \right) + \frac{A}{2} n_N n_0^{max} \sum_{m=0}^{N-1} 2^{(m+1)d} R_m^{-2}. \quad (1.55)$$

Comme  $S_N/2^{Nd} \leq \tilde{L}^d \rho_2 \sigma_0$  et  $n_0^{(j)} \leq n_0^{max}$ , on sait que  $E_\omega \left( \Lambda_0^{(j)}, n_0^{(j)}, (S_N/2^{Nd})^\star \right)$  est uniformément bornée par rapport à  $N$  et  $\omega$ . La démonstration se fait par une grossière majoration du potentiel (comme le nombre de termes de potentiel est borné) et par l'application de l'asymptotique de Weyl. En divisant (1.55) par  $2^{Nd}$ , on finit la preuve de la Proposition 1.2.13.  $\square$

**Corollaire 1.2.14.** *l'énergie par particule  $\mathcal{E}$  s'étend par continuité à la région  $\{0 < \rho < \rho_c\} \times \{\sigma \geq 0\}$ .*

*Démonstration.* On applique un argument standard due à Jensen : une fonction convexe et bornée est continue (voir, par exemple, [PS98, Chapitre 3, problème 124]).  $\square$

Le prolongement de  $\mathcal{E}$  (qui était jusqu'à maintenant seulement définie pour  $\rho$  et  $\sigma$  de la forme (1.50)) par continuité selon Corollaire 1.2.14 est aussi noté par  $\mathcal{E}$ . Par la Proposition 1.2.11, c'est une fonction croissante de ses arguments et par la Proposition 1.2.12,  $\mathcal{E}$  est convexe en  $\sigma$  et  $\rho^{-1}$ . Cette dernière affirmation vient du fait que la convexité de l'application  $\rho^{-1} \mapsto \mathcal{E}(\rho, \sigma)$  est équivalente à la convexité de l'application  $\rho \mapsto \rho \mathcal{E}(\rho, \sigma)$ .

**Corollaire 1.2.15.** *Soient  $\rho < \rho_c$  de la forme (1.50),  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  fixés. Alors la limite dans  $L^2$*

$$n_N^{-1} E_\omega(\Lambda_N, 2^{Nd} \tilde{L}^d \rho, 2^{Nd} \tilde{L}^d \rho \sigma) \rightarrow \mathcal{E}(\rho, \sigma)$$

*est uniforme en  $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$ .*

*Démonstration.* La convergence point par point des fonctions monotones vers une fonction continue sur un intervalle compact implique la convergence uniforme (théorème de Dini).  $\square$

À partir de ces deux derniers corollaires, on obtient la proposition suivante, qui nous permet d'affaiblir la condition sur la façon dont l'entropie doit tendre vers l'infini dans la limite thermodynamique. Au lieu de la suite très particulière  $S_N$  utilisée dans le Corollaire 1.2.9, on demande seulement que l'entropie soit approximativement linéaire par rapport au nombre de particules.

**Proposition 1.2.16.** *Supposons les condition de Corollaire 1.2.9 satisfaites. Soient  $\rho > 0$  et  $\sigma \geq 0$ . Pareil comme dans (1.40), on construit une suite des entiers  $n_N = 2^{Nd} \tilde{L}^d \rho$ . Soit  $S_N$  une suite telle que  $\frac{S_N}{n_N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sigma$ . Alors*

$$n_N^{-1} E_\omega(\Lambda_N, n_N, S_N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(\rho, \sigma). \quad (1.56)$$

*Démonstration.* Fixons d'abord  $N_0 \in \mathbb{N}$ . Pour ce  $N_0$ , il existe deux constantes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  (qui dépendent de  $N_0$ ) telles que  $S_N \in [\sigma_1 n_N, \sigma_2 n_N]$  pour tout  $N > N_0$ . Évidemment,  $\sigma_j \rightarrow \sigma$  quand  $N_0 \rightarrow \infty$  pour  $j \in \{1, 2\}$ . Par Corollaire 1.2.15

$$n_N^{-1} E_\omega(\Lambda_N, n_N, \sigma_j n_N) \rightarrow \mathcal{E}(\rho, \sigma_j), \quad N \rightarrow +\infty, \quad j \in \{1, 2\},$$

et cette convergence est uniforme en  $\sigma$ . Mais par la monotonie de l'énergie

$$E_\omega(\Lambda_N, n_N, \sigma_1 n_N) \leq E_\omega(\Lambda_N, n_N, S_N) \leq E_\omega(\Lambda_N, n_N, \sigma_2 n_N),$$

d'une part, et par la continuité de l'énergie par particule on a

$$\mathcal{E}(\rho, \sigma_j) \rightarrow \mathcal{E}(\rho, \sigma), \quad N_0 \rightarrow +\infty,$$

ce qui démontre (1.56).  $\square$

### 1.2.5 Convergence dans le cas général

Dans cette sous-section, on démontre premièrement l'existence de la  $L^2$ -limite thermodynamique pour l'énergie en toute généralité, c'est-à-dire, pour des suites générales des domaines  $\Lambda$  qui tendent vers l'espace entier dans le sens de Fisher (voir Définition 1.1.25). Ensuite, on démontre que la convergence a lieu dans  $L^1(\Omega)$  et  $\omega$ -presque sûre si les interactions sont à support compact. Finalement, on renverse ces résultats pour obtenir l'existence de la limite thermodynamique pour l'entropie.

On commence par le théorème général sur la limite thermodynamique pour l'énergie. C'est le résultat principal de la première partie de la thèse.

**Théorème 1.2.17** (existence de la limite thermodynamique). *Soit un opérateur à une particule  $H_\omega$  borné inférieurement (LB) et décorrélé (IAD). Soient  $W$  des interactions stables (SI) et tempérées (PTI). Alors l'énergie par particule admet une limite thermodynamique :*

$$\frac{E_\omega(\Lambda, n, S)}{n} \rightarrow \mathcal{E}(\rho, \sigma), \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty, \quad \frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho, \quad \frac{S}{n} \rightarrow \sigma,$$

avec  $\rho > 0$  et  $\sigma \geq 0$ . La convergence a lieu dans  $L^2(\Omega)$ .

*Démonstration.* On va établir premièrement, que

$$\limsup_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{E_\omega(\Lambda, n, S)}{n} \leq \mathcal{E}(\rho, \sigma). \quad (1.57)$$

Soit  $\rho_0 > \rho$  proche de  $\rho$  de la forme (1.50) :

$$\rho_0 = \frac{n_0}{2^{N_0 d} \tilde{L}^d}, \quad (n_0, N_0) \in \mathbb{N}^2. \quad (1.58)$$

La représentation (1.58) n'est pas unique. Parmi toutes les représentations pour  $\rho_0$  fixé, il en existe une minimale (i.e., où  $n_0$  est minimal) :  $\rho_0 = n_{\min} 2^{-N_{\min} d} \tilde{L}^{-d}$ . On écrit :

$$n = mn_0 + r_0, \quad 0 \leq r_0 < n_0.$$

Pour  $\rho_0$  fixé, on choisit  $N_0$  dans (1.58) comme fonction de  $n$  tel que

$$L_{N_0}^d/n \rightarrow 0, \quad L_{N_0}^\lambda/n \rightarrow +\infty, \quad (1.59)$$

où  $\lambda$  est l'exposant de la condition **(PTI)** (rappelons que  $\lambda > d$ ). Par la Définition 1.1.25, si  $\Lambda$  est suffisamment grand, alors il contient  $m$  cubes disjoints de taille  $\xi L_{N_0}$  avec

$$1 < \xi < \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/d}.$$

Par conséquent,  $\Lambda$  contient des cubes translétés  $\Lambda_{N_0}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , distants d'au moins  $(\xi - 1)L_{N_0}$ . Par (1.36) on a

$$E_\omega(\Lambda, n, S) \leq \sum_{i=1}^{m-1} E_\omega(\Lambda_{N_0}^{(i)}, n_0, S/(m-1)) + E_\omega(\Lambda_{N_0}^{(N_0)}, n_0 + r_0, 0) + \frac{A}{2} n^2 (\xi - 1)^{-\lambda} L_{N_0}^{-\lambda}. \quad (1.60)$$

On va traiter maintenant le terme  $E_\omega(\Lambda_{N_0}^{(m)}, n_0 + r_0, 0)$ . Par une procédure de division de domaine similaire à celle de la sous-section 1.2.2, on peut réduire  $\Lambda_{N_0}^{(m)}$  à la réunion de  $2^{(N_0 - N_{min})d} = n_0/n_{min}$  (remarquons que ce quotient est entier) translétés de  $\Lambda_{N_{min}}$ . On obtient :

$$E_\omega(\Lambda_{N_0}^{(m)}, n_0 + r_0, 0) \leq \sum_{j=1}^{n_0/n_{min}} E_\omega(\Lambda_{N_{min}}^{(j)}, n_{min} + r_j, 0) + \frac{A}{2} (2n_0) \sum_{m=N_{min}}^{N_0-1} 2^{(m+1)d} R_m^{-2}, \quad (1.61)$$

où  $0 \leq r_j < n_{min}$  et  $j = 1, \dots, n_0/n_{min}$ . Clairement,

$$E_\omega(\Lambda_{N_{min}}^{(j)}, n_{min} + r_j, 0) \leq C_1 n_{min}^2$$

avec une constante  $C_1$  uniforme en  $j$  et  $\omega$ . Par (1.61) on obtient :

$$E_\omega(\Lambda_{N_0}^{(m)}, n_0 + r_0, 0) \leq \frac{n_0}{n_{min}} C_1 n_{min}^2 + C_2 n_0 \leq C_3 n_{min} n_0.$$

Finalement, à partir de (1.60) on déduit que :

$$n^{-1} E_\omega(\Lambda, n, S) \leq \frac{n_0}{n} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{n_0} E_\omega(\Lambda_{N_0}^{(i)}, n_0, S/(m-1)) + C_3 \frac{n_{min} n_0}{n} + \frac{A}{2} (\xi - 1)^{-\lambda} \frac{n}{L_{N_0}^\lambda}.$$

On remarque que  $n_0/n \leq 1/m \rightarrow 0$  et  $n/L_{N_0}^\lambda \rightarrow 0$  par (1.59). Donc :

$$\limsup_{\Lambda \rightarrow \infty} n^{-1} E_\omega(\Lambda, n, S) \leq \mathcal{E}(\rho_0, \sigma).$$

En approchant  $\rho$  au-dessus par  $\rho_0$ , on démontre (1.57).

La démonstration que

$$\liminf_{\Lambda \rightarrow \infty} n^{-1} E_\omega(\Lambda, n, S) \geq \mathcal{E}(\rho, \sigma)$$

se fait exactement comme dans [Rue99, pp. 47-48]. □



On va maintenant montrer comment il est possible d'améliorer la convergence  $L^2$  dans Théorème 1.2.17. Pour cela, on suppose que les interactions sont à support compact (**Comp**). Dans ce cas, on n'est pas restreint au seul cas des interactions par paires : la condition (**P**) n'est plus exigée.

Introduisons la variable aléatoire suivante. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S \in \mathbb{R}$  et domaine  $A \subset \mathcal{V}^d$ , on pose :

$$f_\omega(A, n, S) = E_\omega(\widehat{A}, n, S^*),$$

où  $\widehat{A}$  est le  $R_0/2$ -intérieur de  $A$  :

$$\widehat{A} = \{x \in A, \text{dist}(x, \partial A) > R_0/2\},$$

et  $S^*$  est défini dans (1.54). Avant d'établir le théorème sous-additif, on fait les observations suivantes.

**Lemme 1.2.18.** *Soient  $A$  et  $B$  deux domaines dans  $\mathcal{V}$ .*

- (a) *Si  $A \subset B$  alors  $\widehat{A} \subset \widehat{B}$ .*
- (b) *Si  $A \cap B = \emptyset$  alors  $\text{dist}(\widehat{A}, \widehat{B}) \geq R_0$ .*

*Soient aussi  $x, y \in \mathbb{R}$ .*

- (a) *Si  $x \leq y$  alors  $x^* \leq y^*$ .*
- (b)  *$(x + y)^* \leq x^* + y^*$ .*

*Démonstration.* La démonstration est immédiate à partir des définitions de ces deux opérations. □

On modifie maintenant l'inégalité sous-additive (1.35).

**Proposition 1.2.19.** *Soient  $W$  des interactions à support compact (**Comp**). Soient  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ . Si  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont deux domaines disjoints dans  $\mathcal{V}$ ,  $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ , alors :*

$$f_\omega(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1 + n_2, S_1 + S_2) \leq f_\omega(\Lambda_1, n_1, S_1) + f_\omega(\Lambda_2, n_2, S_2). \quad (1.62)$$

*Démonstration.* Comme les interactions sont à support compact de rayon  $R_0$ , et comme par le Lemme 1.2.18, les domaines  $\widetilde{\Lambda}_1$  et  $\widetilde{\Lambda}_2$  sont à distance au moins  $R_0$  l'un de l'autre, les particules qui vivent dans  $\widetilde{\Lambda}_1$  n'interagissent pas avec celles dans  $\widetilde{\Lambda}_2$ . Alors on obtient (1.62) par la même manière que l'on a obtenu (1.35) dans la Proposition 1.2.5 mais sans le terme d'interactions (donc, avec  $A = 0$ ). Dans la dernière étape de la démonstration, il faut utiliser de nouveau le Lemme 1.2.18 pour passer de  $S_1^* + S_2^*$  à  $(S_1 + S_2)^*$ . □

Maintenant grâce à la sous-additivité (1.62) on démontre la convergence dans le sens  $L^1$  et la convergence presque sûre.

**Théorème 1.2.20.** *Soient l'opérateur à une particule borné inférieurement (**LB**) et décorréolé (**IAD**). Soient les interactions  $W$  stables (**SI**) et à support compact (**Comp**). Alors pour  $\rho > 0$  et  $\sigma \geq 0$ ,*

$$\frac{E_\omega(\Lambda, n, S)}{n} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\rho, \sigma), \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty, \frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho \text{ et } \frac{S}{n} \rightarrow \sigma,$$

*dans  $L^1(\Omega)$  et  $\omega$ -presque sûrement. Ici, on comprend  $\Lambda \rightarrow \infty$  dans les sens plus restrictif que la convergence de Fisher. Notamment, la suite des domaines  $\Lambda_k \rightarrow \infty$  si*

- (a)  $\Lambda_k \rightarrow \infty$  dans le sens de Fisher (voir la Définition 1.1.26),
- (b) il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\Lambda_k \subset B_{c|\Lambda_k|^{1/3}},$$

où  $B_r$  est la boule de centre zéro et de rayon  $r$ .

*Démonstration.* Pour démontrer ce type de convergence plus forte que celle dans le Théorème 1.2.17, il suffit de modifier les preuves de la sous-section 1.2.2. À part cette modification, les autres étapes de la démonstration suivent celles du Théorème 1.2.17.

Dans la sous-section 1.2.2, on change la définition des cubes  $\Lambda_N$  en posant

$$L_N = 2 \left[ \frac{1}{2} \left( 2^N \tilde{L} - R_0 - \delta \right) \right]$$

au lieu de (1.38); ici  $\delta$  est une constante positive fixée. Ceci garantit que, dans un cube  $\Lambda_{N+1}$ , on peut mettre exactement  $2^d$  translatées de  $\Lambda_N$  à des distances mutuelles au moins  $R_0$  pour  $\delta$  proprement choisie. La borne inférieure est donnée par **(LB)** et **(SI)** :

$$\frac{f_\omega(A, n, S)}{n} \geq -B - C.$$

Ensuite, on applique le théorème ergodique sous-additif multidimensionnel (voir, par exemple, [Tem72] ou [Smy76]) pour obtenir la convergence  $L^1$  et presque sûre pour notre suite.  $\square$

En ayant établi les théorèmes sur l'existence de la limite thermodynamique pour l'énergie comme une fonction du domaine, du nombre de particules et de l'entropie, on veut maintenant obtenir un résultat réciproque sur l'existence de la limite pour l'entropie. Les idées sont inspirées par [Gri65].

Fixons la densité de particules  $\rho$  et considérons l'énergie limite par particule  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$  comme une fonction de l'entropie par particule  $\sigma$ . On sait que  $\sigma \mapsto \mathcal{E}(\rho, \sigma)$  est une fonction croissante (pas nécessairement strictement) et convexe. Donc, elle admet un inverse, qu'on note  $\sigma(\rho, \mathcal{E})$ , qui est une fonction croissante et concave de  $\mathcal{E}$  pour la densité de particules  $\rho$  fixée.

**Théorème 1.2.21.** *Supposons les conditions du Théorème 1.2.17 ou du Théorème 1.2.20 satisfaites. Si  $\Lambda \rightarrow \infty$ ,  $\frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho$  pour  $0 < \rho < \rho_c$  et  $\frac{E}{n} \rightarrow \mathcal{E}$  avec  $\mathcal{E} \in \text{Ran } \mathcal{E}(\rho, \cdot)$ , alors*

$$\frac{S_\omega(E, \Lambda, n)}{n} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \sigma(\rho, \mathcal{E}).$$

*La convergence est entendue au même sens que la convergence pour l'énergie (soit dans  $L^2$  pour le Théorème 1.2.17, soit dans  $L^1$  et  $\omega$ -presque sûrement pour le Théorème 1.2.20).*

*Démonstration.* La démonstration suit exactement celle dans [Gri65].  $\square$

*Remarque 1.2.22.* La condition que l'énergie par particule  $\mathcal{E}$  appartienne à l'image de la fonction  $\mathcal{E}(\rho, \cdot)$  est cruciale pour l'inversion.

Comme cela a été déjà annoncé, pour clore cette section, on va expliquer pourquoi l'étude de la fonction limite  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$  (ou équivalent,  $\sigma(\rho, \mathcal{E})$ ) est importante. Premièrement, les transitions de phases correspondent à des discontinuités dans les dérivées de l'énergie  $\mathcal{E}$  par rapport à ses arguments. Deuxièmement, des quantités thermodynamiques sont obtenue par la différentiation. Par exemple,

$$T = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \sigma}$$

est la température qui correspond à un système de particules à densité  $\rho$  et entropie par particule  $\sigma$ , et

$$p = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial (\rho^{-1})}$$

est la pression interne. Pour la discussion plus approfondie sur les transitions de phases dans des systèmes de particules quantiques en interaction dans le vide, consulter [Gri65]. Pour une référence plus générale sur les relations thermodynamiques, voir, par exemple, [LL68].

### 1.3 Séries de perturbations en bas du spectre

Dans la Section 1.2, on a principalement démontré l'existence de la limite thermodynamique pour l'énergie d'un système de particules quantiques en interaction dans un milieu aléatoire. À part les propriétés assez générales de la sous-section 1.2.4, on n'a aucune information quantitative ou qualitative sur l'énergie par particule limite  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$ . Alors une question assez naturelle se pose après avoir obtenu l'existence de la limite, celle des propriétés de cette limite et, finalement, la valeur de cette limite. D'autre part, l'énergie n'est la seule quantité d'intérêt ; les fonctions propres de  $H_\omega(\Lambda, n)$  le sont aussi. Notamment, une des questions à laquelle on va essayer de répondre dans le reste de cette thèse, est de comprendre à quoi ressemble l'état fondamental pour le système de particules quantiques que l'on considère.

Cette section est d'une part préparatoire pour ce qui suit dans le Chapitre 2 de la thèse. D'autre part, les résultats qu'on démontre ici, sont valables pour des modèles généraux introduits dans la Section 1.1 et pas seulement pour le modèle particulier du Chapitre 2.

La section est organisé d'une manière suivante. Dans la sous-section 1.3.1, on présente l'approche générale qu'on va employer pour étudier ces problèmes. On appliquera les idées de la théorie de perturbations en considérant le système sans interactions  $H_\omega^0(\Lambda, n)$  comme point de départ et les interactions  $W$  comme la perturbation. Dans la sous-section 1.3.3, on démontre que les séries de perturbations de la sous-section 1.3.1 ont une structure spéciale dans le cas où les interactions sont par paires. Ensuite, dans la sous-section 1.3.2 on établit la base pour notre théorie de perturbations : on étudie ce qui se passe sans interactions. Les résultats varient considérablement selon la statistique considérée. Finalement, dans la sous-section 1.3.4, on explique à quoi on peut s'attendre pour les séries de perturbations en se fondant sur l'analyse du cas sans interactions. En particulier, on donne la motivation

pour considérer, dans le cas des fermions, le modèle des pièces auquel le Chapitre 2 est consacré.

### 1.3.1 Approche générale

Dans la suite, on étudie les énergies propres de l'opérateur  $H_\omega(\Lambda, n)$  et les fonctions d'ondes associées dans le bas du spectre dans la limite thermodynamique  $\Lambda \rightarrow \infty$ ,  $n/|\Lambda| \rightarrow \rho$ . Remarquons que la considération de l'opérateur restreint sur le domaine  $\Lambda$  n'est pas seulement un moyen technique pour traiter l'opérateur  $H_\omega$  sur l'espace entier, mais provient plutôt du vrai contexte physique : un échantillon réel est toujours de taille finie. De point de vue physique l'opérateur sur  $\Lambda$  est plus naturel que l'opérateur total sur  $\mathcal{V}$ .

Une des questions est de comprendre comment les interactions changent l'énergie et l'état fondamental de  $H_\omega(\Lambda, n)$ . Pour répondre à cette question, on va employer la théorie des perturbations. Traçons ses idées générales.

Soit le hamiltonien total d'un système représenté sous la forme :

$$H = H(t) = H^0 + tW, \quad t \in \mathbb{C}, \quad (1.63)$$

et soient  $\zeta_0$  et  $\Psi_0$  une énergie propre et un état propre simple de  $H^0$ . La théorie régulière des perturbations (voir, par exemple, [RS78] ou [Kat95]) affirme que (sous certaines conditions) il existe des fonctions  $\zeta(t)$  et  $\Psi(t)$ , respectivement valeur propre et fonction propre de  $H(t)$ . Elles sont analytiques et admettent des développements en séries en  $t$  au voisinage (complexe) de zéro ;  $\zeta(0) = \zeta_0$ ,  $\Psi(0) = \Psi_0$ .

Le projecteur sur l'état de  $H(t)$  avec l'énergie  $\zeta(t)$  est donné par :

$$P(t) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - \zeta_0| = \varepsilon} (H^0 + tW - \zeta)^{-1} d\zeta, \quad (1.64)$$

où  $\varepsilon$  est tel que  $\zeta_0$  est une seule valeur propre de  $H^0$  dans  $|\zeta - \zeta_0| \leq \varepsilon$ . Donc,

$$\Psi(t) = P(t)\Psi_0, \quad (1.65)$$

et pour l'énergie, on trouve :

$$\zeta(t) = \zeta_0 + t \frac{\langle \Psi_0, WP(t)\Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0, P(t)\Psi_0 \rangle}. \quad (1.66)$$

La série de Neumann pour la résolvante  $(H^0 + tW - \zeta)^{-1}$  s'écrit comme :

$$(H^0 + tW - \zeta)^{-1} = \sum_{n \geq 0} (-t)^n (H^0 - \zeta)^{-1} [W(H^0 - \zeta)^{-1}]^n. \quad (1.67)$$

Les équations (1.64) - (1.67) donnent les séries de Rayleigh-Schrödinger pour  $\Psi(t)$  et  $\zeta(t)$ . En particulier, si

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \sum_{j \geq 1} \gamma_j t^j, \quad (1.68)$$

au voisinage de  $t = 0$ , le terme linéaire est donné par

$$\gamma_1 = W_{00},$$

où

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\langle \Psi_\alpha, W \Psi_\beta \rangle}{\|\Psi_\alpha\| \|\Psi_\beta\|}, \quad \alpha, \beta \in I, \quad (1.69)$$

sont des éléments matriciels de  $W$ , et  $\{\Psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$  sont les fonctions propres de  $H^0$ . Il est remarquable, que tous les autres coefficients  $\gamma_j$  dans la série (1.68) s'expriment aussi en terme des éléments matriciels  $W_{\alpha\beta}$ .

Alors dans le cadre de la théorie des perturbations, on est principalement intéressé par deux choses pour comprendre l'influence des interactions sur l'état et l'énergie fondamental de  $H_\omega(\Lambda, n)$  dans la limite thermodynamique. Premièrement, il faut décrire de la façon la plus précise possible les énergies et les états propres de  $H^0(\Lambda, n)$ . Deuxièmement, il faut calculer les éléments matriciels  $W_{\alpha\beta}$ .

Remarquons que le rayon de convergence de la série de perturbations (1.68) pour l'énergie fondamentale dépend en particulier de la distance de la première valeur propre à la suivante. Dans la limite thermodynamique, ce gap se resserre pour presque toutes les réalisations du potentiel aléatoire  $V_\omega$  dans la plupart des modèles aléatoires. Ceci représente la difficulté dans la construction de la théorie des perturbations.

On commence par la description du cas sans interactions.

### 1.3.2 Particules sans interactions

Dans cette sous-section, on étudie la limite thermodynamique pour  $H_{\omega, \sharp}(\Lambda, n)$  dans le cas de particules qui n'interagissent pas :

$$W \equiv 0. \quad (1.70)$$

Les limites thermodynamiques qu'on obtient dépendent de la statistique  $\sharp$ .

#### Bosons et particules classiques

On travaille ici soit avec les particules qui suivent la statistiques de Bose – Einstein,  $\sharp = +$ , soit avec les particules de la statistique de Maxwell – Boltzmann,  $\sharp = \emptyset$ , (voir la sous-section 1.1.2).

Fixons pour le moment la configuration du milieu aléatoire  $\omega$ , le domaine  $\Lambda$  et le nombre de particules  $n$ . Soient  $E_j = E_j(\Lambda, 1, \omega)$  et  $\psi_j = \psi_j(\Lambda, 1, \omega)$  les valeurs et les fonctions propres de l'opérateur à une particule  $H_\omega(\Lambda, 1)$ . Les valeurs et les fonctions propres à  $n$  particules sans interactions se construisent comme de suite. Soit  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , une collection de  $n$  indices d'états à une particule. On pose :

$$\zeta_\alpha = \sum_{j=1}^n E_{\alpha_j}, \quad (1.71)$$

et

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n \psi_{\alpha_j}(x^j) \quad (1.72)$$

pour les particules de Maxwell – Boltzmann, et

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{Sym}_{j=1}^n \psi_{\alpha_j}(x^j) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=1}^n \psi_{\alpha_{\sigma(j)}}(x^j) \quad (1.73)$$

pour bosons. Si les fonctions  $\psi_j$  à une particule dans (1.72) et (1.73) sont normalisées, alors les fonctions à  $n$  particules  $\Psi_\alpha$  qu'on y construit le sont aussi. L'application  $\mathbb{N}^n \ni \alpha \mapsto (\zeta_\alpha, \Psi_\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{H}_\#^n$  n'est pas injective, comme des permutations dans  $\alpha$  ne changent rien. Si on voulait construire une application injective, on pourrait, par exemple, considérer seulement les multiindices  $\alpha$  avec les éléments ordonnés dans l'ordre croissant. En particulier, (1.71) implique que

$$\text{Spec } H_\omega^0(\Lambda, n) = \sum_{j=1}^n \text{Spec } H_\omega(\Lambda, 1)$$

et pour l'énergie fondamentale :

$$\mathfrak{E}_\omega^0(\Lambda, n) = n\mathfrak{E}_\omega(\Lambda, 1).$$

On va maintenant traiter plus soigneusement les particules classiques qui suivent la statistiques des Maxwell – Boltzmann et on passera aux bosons plus tard. Pour des particules de Maxwell – Boltzmann (sans statistique) on établit le théorème suivant.

**Théorème 1.3.1** (particules classiques sans interactions). *Supposons, qu'il n'y a pas des interactions (1.70) et que les particules sont de la statistiques de Maxwell – Boltzmann. Soit l'opérateur à une particule borné inférieurement (LB). Soit  $\Sigma$  le spectre presque sûr d'un opérateur à une particule  $H_\omega(1)$  (voir le Théorème 1.1.4). Si la Hypothèse 1.1.11 est vérifiée, notamment, si*

$$\Sigma = \text{supp } dN, \quad (1.74)$$

et la densité d'états intégrée  $N$  est continue, alors

$$\mathcal{E}(\rho, \sigma) = \inf \Sigma \quad (1.75)$$

pour tous  $\rho > 0$  et  $\sigma \geq 0$ .

*Remarque 1.3.2.* Rappelons que la condition (1.74) est vérifiée sous les hypothèses assez faibles sur le potentiel aléatoire  $V_\omega$  du modèle de l'opérateur de Schrödinger (1.5), voir la discussion après la Hypothèse 1.1.11.

Pour démontrer le Théorème 1.3.1, on va se servir de deux lemmes suivants. On se place dans les conditions du Théorème 1.3.1.

**Lemme 1.3.3.** *Soit  $\omega$  tel que (1.74) est vérifiée. Alors pour tout  $N \in \mathbb{N}$  fixé,*

$$E_N(H_\omega(\Lambda, 1)) \rightarrow \inf \Sigma, \quad \Lambda \rightarrow \infty.$$

*Démonstration.* Comme d'habitude, on considère les conditions au bord de Dirichlet. Alors pour presque tout  $\omega$  et presque tout  $E \in \mathbb{R}$ ,

$$N_\omega(E, \Lambda) \nearrow N(E), \quad \Lambda \rightarrow \infty,$$

où on rappelle que  $N_\omega(\cdot, \Lambda)$  est la densité d'états à volume fini (1.9) et  $N$  est la densité d'états limite d'un opérateur à une particule  $H_\omega(1)$ .

Par la définition de la fonction de comptage

$$N_\omega(E_N(\Lambda, 1, \omega), \Lambda) = \frac{N}{|\Lambda|} \rightarrow 0, \quad \Lambda \rightarrow \infty.$$

De plus, par la monotonie de valeurs propres de Dirichlet,  $E_N(\Lambda, 1, \omega)$  décroît quand  $\Lambda \rightarrow \infty$  avec  $N$  et  $\omega$  fixés. Donc elle converge nécessairement :

$$E_N(\Lambda, 1, \omega) \searrow \tilde{E}, \quad \Lambda \rightarrow \infty,$$

et la limite est finie parce que  $H_\omega(1)$  est uniformément borné par **(LB)**. En rassemblant ces arguments, on trouve que

$$N(\tilde{E}) \searrow N_\omega(\tilde{E}, \Lambda) \leq N_\omega(E_N(\Lambda, 1, \omega), \Lambda) \rightarrow 0, \quad \Lambda \rightarrow \infty,$$

qui implique

$$N(\tilde{E}) = 0.$$

Par conséquent,

$$\tilde{E} \leq \inf \Sigma.$$

Finalement,  $\tilde{E} < \inf \Sigma$  est impossible parce que nécessairement  $E_N(\Lambda, 1, \omega) \geq \inf \Sigma$  grâce à la condition (1.74).  $\square$

Le prochain lemme est une modification de Proposition 1.2.5 et exprime une condition du type sous-additif plus forte que (1.36). Ce lemme n'a pas d'analogue pour des bosons ou des fermions.

**Lemme 1.3.4.** *Si  $W \equiv 0$  et les particules sous considération sont sans statistique, alors*

$$E_\omega(\Lambda, n_1 + n_2, S_1 + S_2) \leq E_\omega(\Lambda, n_1, S_1) + E_\omega(\Lambda, n_2, S_2). \quad (1.76)$$

*Démonstration.* La démonstration se fait en suivant celle de la Proposition 1.2.5. Le seul changement concerne la construction des fonctions test dans le Lemme 1.2.1. Ici, comme les interactions sont absentes, on peut placer les deux groupes de particules dans le même domaine et, donc, on n'est pas obligé d'augmenter la taille de la boîte avec le nombre de particules.  $\square$

Cette idée ne marche pas pour des bosons ni des fermions, comme on ne peut pas garantir l'indépendance des fonctions test qu'on construit et l'orthogonalité des termes dans (1.30) ou (1.31) n'est pas assurée. Pour des fermions il peut même arriver que la fonction test construite soit nulle.

Essentiellement, ce qui pose problème avec les statistiques qui lèvent la dégénérescence des niveaux (comme les statistiques de Bose – Einstein et de Fermi – Dirac), c’est l’inégalité (1.32) sur le nombre d’états à  $n_1 + n_2$  particules de l’énergie au dessous de  $E_1 + E_2$  qu’on peut construire avec les états à  $n_j$  particules de l’énergie au dessous de  $E_j$  pour  $j = 1, 2$ . Pour illustrer cela, fixons le domaine  $\Lambda$  et considérons deux fois l’ensemble des fonctions à une particule  $\{\phi_1, \phi_2\}$  d’énergie plus petite que  $E$  (c’est le même ensemble pour  $j = 1$  et  $j = 2$ ). Combien d’états à deux particules peut on construire avec ? Dans le cas sans statistique, on a exactement quatre (égal à deux fois deux) fonctions :  $\phi_1 \otimes \phi_1$ ,  $\phi_1 \otimes \phi_2$ ,  $\phi_2 \otimes \phi_1$  et  $\phi_2 \otimes \phi_2$ . Pour les bosons à cause de la condition de symétrie des fonctions, ils nous reste que trois fonctions :  $\phi_1 \otimes \phi_1$ ,  $\phi_1 \otimes \phi_2 + \phi_2 \otimes \phi_1$  et  $\phi_2 \otimes \phi_2$ . Finalement, pour les fermions, il reste qu’une seule fonction  $\phi_1 \otimes \phi_2 - \phi_2 \otimes \phi_1$ . On voit clairement que dans les deux dernier cas, l’inégalité (1.32) n’est pas vérifiée. Dans le cas de deux domaines différentes  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$ , ce genre de situation ne pourrait pas arriver parce que les deux collections de fonctions sont toujours disjointes parce que ces fonctions sont définies sur des domaines différents.

*Démonstration du Théorème 1.3.1.* Grâce à la sous-additivité (1.76), par le théorème ergodique sous-additif la limite suivante existe :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ S/n \rightarrow \sigma \\ \Lambda \text{ fixé}}} \frac{E_\omega(\Lambda, n, S)}{n} =: \zeta(\Lambda, \sigma)$$

dans le sens  $L^1(\Omega)$  et  $\omega$ -presque sûrement.

La démonstration se fait exactement de la même manière que la démonstration de l’existence de  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$ . Comme les valeurs propre de Dirichlet sont monotones par rapport au domaine, la fonction  $\zeta$  est décroissante en  $\Lambda$  et croissante en  $\sigma$  (pour des raisons évidentes). Aussi par la monotonie en  $\Lambda$ , on trouve que pour tout  $\rho > 0$  :

$$\mathcal{E}(\rho, \sigma) \leq \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \zeta(\Lambda, \sigma). \quad (1.77)$$

On remarque également que, par (1.76), la fonction  $E_\omega(\Lambda, n, \sigma n)/n$  est aussi décroissante en  $n$ . Donc, on peut permuter les deux limites dans la partie à droite de (1.77) :

$$\mathcal{E}(\rho, \sigma) \leq \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ S/n \rightarrow \sigma}} \frac{E_\omega(\Lambda, n, S)}{n} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ S/n \rightarrow \sigma}} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{E_\omega(\Lambda, n, S)}{n} \leq \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ S/n \rightarrow \sigma}} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} E_\omega(\Lambda, 1, S/n),$$

où on a utilisé encore une fois (1.76) dans la dernière inégalité. Finalement, grâce au Lemme 1.3.3 on établit :

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} E_\omega(\Lambda, 1, S/n) \rightarrow \inf \Sigma,$$

avec  $S$  et  $n$  fixés. □

Théorème 1.3.1 exprime le fait que, sans interactions, la limite thermodynamique pour l’énergie  $\mathcal{E}(\rho, \sigma)$  est triviale pour la statistique de Maxwell – Boltzmann. Donc, ce sont vraiment les interactions qui pourraient intervenir pour que cette limite ne soit pas triviale.



À la fin de cette sous-section, on fait une observation sur le cas bosonique. Remarquons que les énergies pour un système des bosons sans interactions coïncident avec les énergies pour des particules de Maxwell – Boltzmann (voir, par exemple, [LL77, Gre07]). Par contre, c'est la dégénérescence combinatoire (la dégénérescence due à les événements comme  $E_2 + E_3 = E_1 + E_4$  reste) qui est enlevée par la symétrisation.

Néanmoins, l'énergie fondamentale reste la même que pour les particules classiques. Alors dans la limite thermodynamique, l'énergie par particule fondamentale converge vers le fond du spectre d'un opérateur à une particule. On établit donc la proposition suivante.

**Proposition 1.3.5** (bosons sans interactions). *Supposons que les particules sont les bosons,  $\sharp = +$ , et qu'il n'y a pas des interactions (1.70). Soit aussi l'opérateur à une particule borné inférieurement (LB). Si la condition (1.74) est satisfaite, alors*

$$\mathcal{E}(\rho, 0) = \inf \Sigma$$

pour tout  $\rho > 0$ .

*Démonstration.* C'est la conséquence immédiate de (1.75), comme  $\mathcal{E}_+(\rho, 0) = \mathcal{E}_\emptyset(\rho, 0)$ .  $\square$

## Fermions

La situation change radicalement si les particules sont fermions,  $\sharp = -$ . Pour l'information sur les propriétés de base d'un système des fermions sans interactions, on pourra consulter [LL77, Gre07].

Si comme précédemment  $E_j = E_j(\Lambda, 1, \omega)$  et  $\psi_j = \psi_j(\Lambda, 1, \omega)$  sont des valeurs et des fonctions propres à une particule, alors, pour  $n$  particules, on construit les valeurs et les fonctions propres (sans interactions) de la manière suivante. Soit  $\alpha \subset \mathbb{N}$ ,  $\text{card } \alpha = n$ , un ensemble de  $n$  indices distincts. L'énergie propre correspondante à  $n$  fermions numérotés par  $\alpha$  est donnée par la somme de ses énergies :

$$E_\alpha = \sum_{j \in \alpha} E_j, \quad (1.78)$$

et la fonction propre correspondante est donnée par le déterminant de Slater :

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \det (\psi_j(x^i))_{\substack{i \in \mathbb{N}_n \\ j \in \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^n} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \prod_{j=1}^n \psi_{\alpha_j}(x^{\sigma(j)}), \quad (1.79)$$

où  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  avec les éléments ordonnés dans l'ordre croissant. Rappelons la notation  $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$ .

Ici on voit tout de suite la première grande différence entre les fermions et les bosons : l'énergie fondamentale de  $n$  fermions qui n'interagissent pas est donnée par la somme des  $n$  premières énergies d'un problème à une particule :

$$E_1(\Lambda, n, \omega) = \sum_{k=1}^n E_k(\Lambda, 1, \omega), \quad (1.80)$$

et non par  $n$  fois l'énergie fondamentale d'une particule comme pour des bosons ou des particules de Maxwell – Boltzmann. Évidemment, l'état fondamental est toujours donné par le déterminant de Slater :

$$\Psi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \det (\psi_i(x^j))_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}. \quad (1.81)$$

Dans les notation des formules (1.78), (1.79), l'état fondamental correspond à l'indice  $\alpha = \mathbb{N}_n$ , quand tous les fermions occupent les états à une particules les plus bas possibles (donc, les  $n$  premiers).

Dans le cadre des formules (1.78) et (1.79) pour l'énergie et l'état propres à  $n$  fermions numérotés par l'indice  $\alpha$ , on va parler dans la suite des fonctions  $\psi_{\alpha_j}$  qui compose cet état comme des *particules* (même si on ne peut pas dire quelque chose du genre que la particule numéro  $i$  occupe un tel niveau énergétique parce que la fonction  $\Psi_\alpha$  est une superposition de permutations et chaque "particule" occupe en même temps tous les niveaux numérotés par  $\alpha$ ). Avec un léger abus de terminologie, on dira que l'état  $\alpha$  est composé de particules  $\alpha_j$ ,  $j \in \mathbb{N}_n$ . Remarquons que cette terminologie n'est pas applicable à tous les états à  $n$  particules dans  $\mathfrak{H}_-^n$  : une fonction quelconque antisymétrique de  $n$  variables n'a pas nécessairement de structure de déterminant de Slater et n'admet pas de notion de particules.

En ce qui concerne la limite thermodynamique, pour les fermions on sait seulement obtenir des résultats sur l'énergie fondamentale  $\mathcal{E}(\rho, 0)$ . Par contre, nos démonstrations n'utilisent pas d'arguments de type sous-additif et, donc, fonctionnent pour toutes les conditions au bord.

Un comparaison simple avec le laplacien et l'utilisation de l'asymptotique de Weyl permettent à démontrer que la limite  $\mathcal{E}(\rho, 0)$  est strictement positive pour  $\rho > 0$  si le potentiel  $V_\omega$  est non négatif.

**Proposition 1.3.6.** *Supposons que le potentiel aléatoire  $V_\omega \geq 0$ . Alors, il existe une constante  $\beta(d)$  telle que*

$$\mathcal{E}(\rho, 0) \geq \beta(d)\rho^{2/d}. \quad (1.82)$$

*Démonstration.* Par le principe variationnel, comme le potentiel est positif :

$$E_j(\Lambda, 1, \omega) \geq E_j^0(\Lambda, 1),$$

où  $E_j^0$  sont des valeurs propres de  $-\Delta$ . Ensuite, à l'aide de l'asymptotique de Weyl pour le laplacien, par (1.80) on a :

$$\begin{aligned} \frac{E_1(\Lambda, n, \omega)}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_k(\Lambda, 1, \omega) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_k^0(\Lambda, 1) \\ &\geq \frac{C_1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{|\Lambda|} \right)^{2/d} \geq \frac{C_2}{n|\Lambda|^{2/d}} \cdot n^{2/d+1} \geq C_3 \rho^{2/d}, \end{aligned}$$

qui démontre (1.82). □

*Remarque 1.3.7.* La généralisation pour le cas de potentiel  $V_\omega$  borné inférieurement est évidente.

On calcule maintenant une expression explicite pour la limite

$$\mathcal{E}(\rho, 0) = \lim_{\substack{\Lambda \rightarrow \infty \\ n/|\Lambda| \rightarrow \rho}} \frac{E_1(\Lambda, 1, \omega) + \dots + E_n(\Lambda, n, \omega)}{n}$$

en termes de la densité d'états intégrée du problème à une particule. On rappelle, que la densité d'états intégrée pour l'opérateur à une particule,  $H_\omega(1)$ , est notée par  $N(E)$ . Comme pour les bosons et les particules de Maxwell – Boltzmann, on aura besoin de l'Hypothèse 1.1.11 sur la régularité de la densité d'états intégrée.

**Définition 1.3.8.** Soit la densité de particules  $\rho$  fixée. L'énergie de Fermi  $E_\rho$  est une solution de l'équation

$$N(E_\rho) = \rho. \quad (1.83)$$

*Remarque 1.3.9.* Dans le cas discret,  $N(E) \leq 1$  et pour  $\rho > 1$  l'équation (1.83) n'a pas des solutions. Rappelons que, dans cette même situation,  $\rho_c \leq 1$  et il faut se restreindre au cas  $\rho < \rho_c$ . Cela n'arrive jamais dans le cas continu.

*Remarque 1.3.10.* L'équation (1.83) peut avoir plusieurs solutions si au niveau  $\rho$  la densité d'états intégrée est plate. Comme  $N(E)$  est une fonction non décroissante, l'ensemble des solutions est l'intervalle  $[E_\rho^{\min}, E_\rho^{\max}]$ . De point de vue spectral, l'intervalle ouvert  $(E_\rho^{\min}, E_\rho^{\max})$  ne joue aucun rôle, parce qu'il ne rencontre pas le spectre presque sûr  $\Sigma$ .

Dans cette situation on va aussi utiliser la notation introduite par Définition 1.3.8, dans le sens  $E_\rho \in [E_\rho^{\min}, E_\rho^{\max}]$ . On verra que cette convention est cohérente avec nos résultats.

Le résultat principal de cette partie est le théorème suivant.

**Théorème 1.3.11.** *Soit  $\rho > 0$ . Alors*

$$\mathcal{E}(\rho, 0) = \frac{1}{\rho} \int_0^{E_\rho} E dN(E). \quad (1.84)$$

*Remarque 1.3.12.* La formule (1.84) peut être réécrite comme :

$$\mathcal{E}(\rho, 0) = \frac{\int_0^{E_\rho} E dN(E)}{\int_0^{E_\rho} dN(E)},$$

donc l'énergie par particule limite est le moyen de l'énergie de zéro à l'énergie de Fermi par rapport à la densité d'états. On reproduit, donc, la formule classique pour l'énergie fondamentale de gaz de Fermi dans le vide (voir, par exemple, [AM76, Chapitre 2]).

Pour démontrer ce théorème on a besoin d'un lemme crucial, qui explique entre autre, pourquoi  $E_\rho$  donnée par (1.83) correspond exactement à la notion physique standard de l'énergie de Fermi.<sup>5</sup>

---

5. L'énergie de Fermi est l'énergie la plus haute occupée dans un système des fermions à la température zéro. Autrement, pour des fermions qui n'interagissent pas, c'est le surplus de l'énergie fondamentale d'un système de  $n$  fermions quand une particule est ajoutée au système. Pour plus des détails sur la notion de l'énergie de Fermi, voir [AM76].

**Lemme 1.3.13.**

$$E_n(\Lambda, 1, \omega) \xrightarrow[\substack{\Lambda \rightarrow \infty \\ n/|\Lambda| \rightarrow \rho}]{\omega\text{-p.s.}} E_\rho. \quad (1.85)$$

*Démonstration.* Soit  $N_\omega(E, \Lambda)$  la densité d'états pré-limite pour un opérateur à une particule défini dans (1.9). Alors par sa définition :

$$N_\omega(E_n(\Lambda, 1, \omega), \Lambda) = \frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho$$

dans la limite thermodynamique. D'autre part, par l'existence de la densité d'états intégrée on a :

$$N_\omega(E, \Lambda) \xrightarrow[\Lambda \rightarrow \infty]{\omega\text{-p.s.}} N(E) \quad \forall E \in \mathbb{R}.$$

On finit la démonstration en utilisant la monotonie de  $N(E)$ . Supposons, que

$$\liminf E_n(\Lambda, 1, \omega) < E_\rho^{\min}.$$

En passant à une sous-suite  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , on trouve qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $E_{n_k}(\Lambda, 1, \omega) < E_\rho^{\min} - \delta$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . On arrive à la contradiction :

$$N(E_\rho^{\min}) \leftarrow N_\omega(E_{n_k}(\Lambda, 1, \omega), \Lambda) \leq N_\omega(E_\rho^{\min} - \delta, \Lambda) \rightarrow N(E_\rho^{\min} - \delta) < N(E_\rho^{\min}).$$

La dernière inégalité est stricte parce que  $E_\rho^{\min}$  est la valeur d'énergie minimale telle que  $N(E) = \rho$ , donc pour toute valeur  $E$  au-dessous de ce niveau, la densité d'états  $N(E)$  est strictement plus petite.

Par le même argument, on démontre que  $\limsup E_n(\Lambda, 1, \omega) \leq E_\rho^{\max}$ , donc :

$$E_\rho^{\min} \leq \liminf E_n(\Lambda, 1, \omega) \leq \limsup E_n(\Lambda, 1, \omega) \leq E_\rho^{\max},$$

qui est équivalent à (1.85). □

*Démonstration du Théorème 1.3.11.* Pour démontrer (1.84), on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{E_1(\Lambda, n, \omega)}{n} &= \frac{E_1(\Lambda, 1, \omega) + \dots + E_n(\Lambda, 1, \omega)}{n} = \frac{1}{n} \text{Tr} [H_\omega(\Lambda, 1) \cdot \mathbf{1}_{[0, E_n(\Lambda, 1, \omega)]}(H_\omega(\Lambda, 1))] \\ &= \frac{|\Lambda|}{n} \int_0^{E_n(\Lambda, 1, \omega)} E dN_\omega(E, \Lambda) \xrightarrow[\substack{\Lambda \rightarrow \infty \\ n/|\Lambda| \rightarrow \rho}]{\omega\text{-p.s.}} \frac{1}{\rho} \int_0^{E_\rho} E dN(E), \end{aligned}$$

où la convergence est valable parce que la mesure  $dN_\omega^\Lambda$  converge vers  $dN$  faiblement, la limite d'intégration converge vers  $E_\rho$  par Lemme 1.3.13, et on peut appliquer le théorème de convergence dominée. □

### 1.3.3 Structure des séries pour les interactions par paires

Dans cette sous-section, on continue de construire la théorie des perturbations selon l'approche annoncée dans la sous-section 1.3.1. Ici, on étudie les éléments matriciels (1.69) seulement pour le cas des fermions ; le cas des bosons nécessite peu de modifications. On montre comment les expressions pour les éléments matriciels  $W_{\alpha\beta}$  peuvent être simplifiées si les interactions sont par paires (**P**), c'est-à-dire :

$$W_n(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} U(x^i, x^j),$$

avec  $U$  une fonction symétrique sur  $\mathcal{V}^2$ ,  $U(x, y) = U(y, x)$ . Remarquons, qu'on ne demande pas que le potentiel d'interactions par paires  $U$  soit invariant par translation (i.e., une fonction de la différence  $x^i - x^j$ ).

On commence par étudier le dénominateur de (1.69) où  $\Psi_\alpha$  et  $\Psi_\beta$  sont les fonctions propres d'un système de  $n$  fermions sans interactions données par (1.79).

**Lemme 1.3.14.** *Soit  $\alpha \subset \mathbb{N}$ ,  $\text{card } \alpha = n$ , un indice à  $n$  fermions. Si les fonction  $\psi_j$  à une particule sont normalisées, alors*

$$\|\Psi_\alpha\|_{L^2(\Lambda^n)} = 1. \quad (1.86)$$

*Démonstration.* Par la définition :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_\alpha, \Psi_\alpha \rangle &= \frac{1}{n!} \int_{\Lambda_L^n} d\mathbf{x} \left| \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \prod_{j=1}^n \psi_{\alpha(\sigma(j))}(x^j) \right|^2 \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\text{sign}(\sigma) + \text{sign}(\tau)} \prod_{j=1}^n \int_{\Lambda_L} dx^j \psi_{\alpha(\sigma(j))}(x^j) \overline{\psi_{\alpha(\tau(j))}(x^j)}. \end{aligned}$$

La dernière intégrale est différent de zéro seulement si  $\sigma(j) = \tau(j)$  par orthogonalité des fonctions propres. Donc, la double somme est réduite à une somme simple, d'où on obtient :

$$\langle \Psi_\alpha, \Psi_\alpha \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=1}^n \|\psi_{\alpha(\sigma(j))}\|^2 = \frac{1}{n!} \text{card } \mathfrak{S}_n = 1. \quad \square$$

**Notation 1.3.15.** Si  $\psi$  et  $\phi$  sont deux fonctions d'ondes à une particule, on note le déterminant de Slater construit sur ces deux fonctions par :

$$[\psi, \phi] = \psi \wedge \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \det(\psi, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi(x^1)\phi(x^2) - \phi(x^1)\psi(x^2)). \quad (1.87)$$

La notation reflète la nature antisymétrique du déterminant de Slater.

Comme  $U$  est un potentiel par paires, il définit les éléments matriciels entre des fonctions propres à deux particules de type (1.87). Pour les indices  $i, j, r, s \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$U_{(ij),(rs)} = \frac{\langle [\psi_i, \psi_j], U[\psi_r, \psi_s] \rangle}{\|[\psi_i, \psi_j]\| \|[\psi_r, \psi_s]\|}, \quad (1.88)$$

l'amplitude d'interaction entre les états à deux particules  $(ij)$  et  $(rs)$ . On rappelle que  $\psi_k$  sont les fonctions propres normalisées de l'opérateur à une particule  $H_\omega(\Lambda, 1)$ . On est prêt maintenant pour énoncer le théorème de réduction pour des éléments matriciels (1.69).

**Théorème 1.3.16.** *Supposons que les interactions sont par paires, i.e., vérifiant **(P)**. Soient  $\alpha, \beta \subset \mathbb{N}$ ,  $\text{card } \alpha = \text{card } \beta = n$ , deux indices à  $n$  fermions. Alors les éléments matriciels (1.69) sont donnés selon les cas suivants :*

(a) si  $\alpha = \beta$  (élément diagonal), alors

$$W_{\alpha\alpha} = \sum_{\substack{i < j \\ (i,j) \in \alpha^2}} U_{(ij),(ij)}; \quad (1.89)$$

(b) si  $|\alpha \setminus \beta| = |\beta \setminus \alpha| = 1$ ,  $|\alpha \cap \beta| = n - 1$ , donc les indices  $\alpha$  et  $\beta$  diffèrent seulement d'un élément, alors

$$W_{\alpha\beta} = \sum_{i \in \alpha \cap \beta} U_{(i\clubsuit),(i\diamond)}, \quad (1.90)$$

où  $\{\clubsuit\} = \alpha \setminus \beta$  est l'indice de l'état à une particule qui est dans  $\alpha$  mais pas dans  $\beta$ , et, à l'inverse,  $\{\diamond\} = \beta \setminus \alpha$ , donc  $\psi_{\clubsuit}$  et  $\psi_{\diamond}$  sont les fonctions distinctes dans  $\Psi_\alpha$  et  $\Psi_\beta$  respectivement;

(c) si  $|\alpha \setminus \beta| = |\beta \setminus \alpha| = 2$ ,  $|\alpha \cap \beta| = n - 2$ , donc les indices  $\alpha$  et  $\beta$  diffèrent par deux éléments, alors

$$W_{\alpha\beta} = U_{(\clubsuit\spadesuit),(\diamond\heartsuit)}, \quad (1.91)$$

où  $\{\clubsuit, \spadesuit\} = \alpha \setminus \beta$  sont les indices qui sont dans  $\alpha$ , mais pas dans  $\beta$ , et, à l'inverse,  $\{\diamond, \heartsuit\} = \beta \setminus \alpha$ , donc  $\{\psi_{\clubsuit}, \psi_{\spadesuit}\}$  et  $\{\psi_{\diamond}, \psi_{\heartsuit}\}$  sont les fonctions distinctes dans  $\Psi_\alpha$  et  $\Psi_\beta$  respectivement;

(d) si  $|\alpha \setminus \beta| \geq 3$ , alors

$$W_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.92)$$

*Remarque 1.3.17.* Dans (1.91), l'ordre des indices exceptionnels doit être le même que celui dans lequel ils apparaissent dans les déterminants de Slater correspondants  $\Psi_\alpha$  et  $\Psi_\beta$ .

*Remarque 1.3.18.* Le Théorème 1.3.16 donne la simplification de la complexité combinatoire pour le calcul des éléments matriciels  $W_{\alpha\beta}$  dans deux sens.

- La structure compliquée reliée au déterminant de Slater d'ordre  $n$  s'exprime en déterminants d'une matrice deux fois deux. C'est essentiellement du au fait que les interactions sont par paires **(P)**. Les formules obtenues peuvent être généralisées au cas des interactions de plus grand ordre (triple, et ainsi de suite).
- Seuls les états à  $n$  particules qui ont la plupart (au moins  $n - 2$ ) des particules en commun donnent un terme d'interaction qui ne s'annule pas. On peut interpréter ceci comme le fait que la matrice  $(W_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$  a seulement un nombre bien contrôlé de diagonales non nulles.

*Démonstration de Théorème 1.3.16.* Pour se débarrasser de notations assez lourde, dans la suite, on désigne par  $\xi_j$  des fonctions entrant dans le déterminant  $\Psi_\alpha$  et par  $\phi_j$  celles dans  $\Psi_\beta$  :

$$\xi_j = \psi_{\alpha(j)}, \quad \phi_j = \psi_{\beta(j)}.$$

Le dénominateur de (1.69) est déjà calculé dans le Lemme 1.3.14. On passe au numérateur. Comme dans Lemme 1.3.14, on a :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_\alpha, W\Psi_\beta \rangle &= \int_{\Lambda^n} d\mathbf{x} \sum_{i < j} U(x^i, x^j) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \prod_{k=1}^n \xi_{\sigma(k)}(x^k) \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\text{sign}(\tau)} \prod_{k=1}^n \overline{\phi_{\tau(k)}}(x^k) \\ &= \sum_{i < j} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\text{sign}(\sigma) + \text{sign}(\tau)} \int_{\Lambda^n} d\mathbf{x} \prod_{k=1}^n \xi_{\sigma(k)}(x^k) \overline{\phi_{\tau(k)}}(x^k) \cdot U(x^i, x^j) \\ &= \sum_{i < j} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\text{sign}(\sigma) + \text{sign}(\tau)} \int_{\Lambda^{n-2}} \prod_{k \neq i, j} dx^k \xi_{\sigma(k)}(x^k) \overline{\phi_{\tau(k)}}(x^k) \\ &\quad \times \iint_{\Lambda^2} dx^i dx^j U(x^i, x^j) \xi_{\sigma(i)}(x^i) \overline{\phi_{\tau(i)}}(x^i) \xi_{\sigma(j)}(x^j) \overline{\phi_{\tau(j)}}(x^j). \end{aligned} \tag{1.93}$$

Comme les fonctions  $\xi_j$  et  $\phi_j$  sont tirées de la même collection de fonctions propres  $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  de l'opérateur  $H_\omega(\Lambda, 1)$  qui sont orthogonales l'une à l'autre, la dernière expression est différente de zéro seulement si  $\xi_{\sigma(k)} = \phi_{\tau(k)}$  pour tout  $k \neq i, j$ . Ceci implique nécessairement, que pour qu'on obtienne un résultat non nul, il faut que  $\alpha$  et  $\beta$  aient au moins  $n - 2$  éléments communs. Ce dernier argument démontre le cas (d) du théorème.

Pour démontrer le cas (a), on pose  $\alpha = \beta$  et, donc,  $\xi_j = \phi_j$  pour  $j = 1, \dots, n$ . Alors un terme dans la somme (1.93) est différent de zéro seulement si  $\sigma$  et  $\tau$  ne diffèrent pas plus que par la permutation des indices  $i$  et  $j$ . On obtient :

$$\begin{aligned} (\Psi_\alpha, W\Psi_\beta) &= \sum_{i < j} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \iint_{\Lambda^2} dx^i dx^j U(x^i, x^j) \\ &\quad \times \left[ \xi_{\sigma(i)}(x^i) \xi_{\sigma(j)}(x^j) \overline{\xi_{\sigma(i)}(x^i)} \overline{\xi_{\sigma(j)}(x^j)} - \xi_{\sigma(i)}(x^i) \xi_{\sigma(j)}(x^j) \overline{\xi_{\sigma(j)}(x^i)} \overline{\xi_{\sigma(i)}(x^j)} \right]. \end{aligned}$$

Remarquons que les variables  $x^i, x^j$  sont juste des variables muettes d'intégration et la somme  $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$  apporte simplement le facteur combinatoire  $n!$ . Cela donne :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_\alpha, W\Psi_\beta \rangle &= n! \sum_{i < j} \iint_{\Lambda^2} dt ds U(t, s) \left[ |\xi_i(t)|^2 |\xi_j(s)|^2 - \xi_i(t) \xi_j(s) \overline{\xi_i(s)} \overline{\xi_j(t)} \right] \\ &= \frac{n!}{2} \sum_{i < j} \iint_{\Lambda^2} dt ds U(t, s) |\xi_i(t) \xi_j(s) - \xi_j(t) \xi_i(s)|^2 = \frac{n!}{2} \langle [\xi_i, \xi_j], U[\xi_i, \xi_j] \rangle. \end{aligned}$$

Pour finir la démonstration, il reste à remarquer que, par le Lemme 1.3.14,

$$\|[\xi_i, \xi_j]\| = \sqrt{2}.$$

Les cas (b) et (c) sont démontrés par la même façon, seulement l'argument combinatoire doit être modifié d'une manière évidente. On remarque que, pour obtenir le signe correct,

l'ordre des indices distingués  $\clubsuit$ ,  $\spadesuit$  doit être celui dans lequel ils apparaissent dans le déterminant  $\Psi_\alpha$ , et la même chose doit être vraie pour  $\diamond$ ,  $\heartsuit$  et le déterminant  $\Psi_\beta$ .  $\square$

Pour conclure l'analyse générale des éléments matriciels  $W_{\alpha\beta}$ , faisons une remarque sur les statistiques différentes de celle de Fermi – Dirac qu'on a traitée dans le Théorème 1.3.16. Selon l'expression (1.71) pour l'énergie et les formules (1.72), (1.73) pour les fonctions propres correspondantes dans les cas sans statistique et bosonique respectivement, la différence la plus importante est que l'indice à  $n$  particules  $\alpha$  peut numérotter des particules avec des répétitions (ce qui n'est jamais possible pour les fermions à cause du principe d'exclusion de Pauli).

Néanmoins, le Théorème 1.3.16 peut être transféré sur le cas bosonique et celui de particules de Maxwell – Boltzmann. Essentiellement, les formules (1.89)-(1.92) restent vraies en faisant la remarque que maintenant les indices  $\alpha$  et  $\beta$  sont juste des collections de  $n$  nombres naturels (répétitions non exclues) et il faut compter le nombre de particules par lesquelles ils diffèrent y compris la multiplicité.

En particulier, si les deux états propres sans interactions  $\Psi_\alpha$  et  $\Psi_\beta$  diffèrent par plus que deux particules, ces deux états n'interagissent pas  $W_{\alpha\beta} = 0$ .

### 1.3.4 À quoi on s'attend dans le cas perturbé

On s'intéresse principalement à la description quantitative des états et des énergies de l'opérateur  $H_\omega(\Lambda, n)$  dans la limite thermodynamique. Plus précisément, on va étudier la limite thermodynamique pour l'état fondamentale de cet opérateur. Dans cette sous-section, on explique à quelle image pour l'état fondamentale on s'attend pour les différentes statistiques quantiques. Entre autre, on verra que c'est dans le cas fermionique où on a plus des chances avec notre approche. Heureusement, c'est aussi le cas le plus intéressant de point de vue physique comme les électrons sont des fermions.

Considérons premièrement les statistiques de Bose – Einstein et de Maxwell – Boltzmann. Soit  $\Psi_0(\Lambda, n, \omega)$  l'état fondamental à  $n$  particules sans interactions ( $W \equiv 0$ ) dans le domaine  $\Lambda$  et soit  $\zeta_0(\Lambda, n, \omega)$  l'énergie correspondante. Selon la sous-section 1.3.2, dans le cas de bosons ou de particules classiques, l'énergie est égale à  $n$  fois l'énergie fondamentale à une particule :

$$\zeta_0(\Lambda, n, \omega) = nE_1(\Lambda, 1, \omega)$$

et la fonction d'ondes est l'état fondamental tensorisé  $n$  fois avec lui même :

$$\Psi_0(\Lambda, n, \omega) = \bigotimes^n \psi_1(\Lambda, 1, \omega).$$

Ceci veut dire que toutes les particules occupent le même état. Alors, la question est essentiellement réduite à une description suffisamment précise de l'état fondamental à une particule.

Pour simplifier considérons le modèle d'Anderson (1.6) et donnons une idée assez vague de ce à quoi ressemble l'état fondamental dans ce cas. Pour un  $\omega$  fixé, le potentiel  $V_\omega$  donne le profil des obstacles (on dit "obstacles" dans le cas le plus simple de potentiel positif,  $V_\omega \geq 0$ ). Ces obstacles, dans le cas général, forment des clairières (zones connexes vastes où le potentiel est petit). Pour une explication de ce phénomène dans le cas du



modèle des obstacles distribués selon la loi du Poisson et l'application au problème de la diffusion brownienne, on pourra consulter [Szn98]. Le mécanisme de formation des clairières supportant les états propres en bas du spectre est également expliqué dans [PF92]. Par exemple, il est bien connu qu'avec probabilité proche de un, la clairière la plus grande qui émerge est de volume d'ordre  $\log |\Lambda|$ .

Cette clairière porte essentiellement l'état fondamental de  $-\Delta + V_\omega$ . On peut la considérer comme étant isolé. L'approximation de Dirichlet peut être justifié si la clairière est suffisamment isolé. Dans ce cas, cette approximation est proche de vraies fonctions propres essentiellement (mais pas complètement !) supportées dans une pièce correspondante. Rappelons, que dans le cas de localisation d'Anderson, les fonctions propres sont exponentiellement décroissantes en dehors des voisinages des centres de localisation (voir [GK11b]).

Suivant la théorie générale des perturbations partiellement décrite dans la sous-section 1.3.1, calculons le terme linéaire de la série (1.68) pour la branche analytique de l'énergie qui commence en  $\zeta_0$  pour  $t = 0$ . Remarquons que il n'est pas garanti que cette branche donne toujours l'énergie fondamental pour  $t > 0$  ni même une valeur propre. Néanmoins, ceci reste vrai dans un petit voisinage autour de  $t = 0$ . Si les interactions sont par paires ( $\mathbf{P}$ ), on a pour le coefficient linéaire :

$$\begin{aligned} \gamma_1 = W_{00} &= \langle \Psi_0, W_n \Psi_0 \rangle = \frac{n(n-1)}{2} U_{(11),(11)} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \iint_{\Lambda^2} dx dy U(x, y) |\psi_1(x)|^2 |\psi_1(y)|^2. \end{aligned} \tag{1.94}$$

Faisons une estimation de la partie à droite. Selon notre discussion précédente,  $\psi_1$  est une fonction supportée essentiellement sur la zone  $\lambda \subset \Lambda$  de volume d'ordre  $\log |\Lambda|$ . Pour l'estimation on peut penser que  $\psi_1$  est d'ordre  $(\log |\Lambda|)^{-1/2}$  sur  $\lambda$  et zéro en dehors. Si les interactions sont de support compact :

$$\text{dist}(x, y) > R_0 \quad \Rightarrow \quad U(x, y) = 0,$$

alors la zone d'intégration dans (1.94) a la taille d'ordre  $R_0 \text{ mes } \lambda \asymp \log |\Lambda|$ . Dans la limite thermodynamique  $\Lambda \rightarrow \infty$ ,  $n/|\Lambda| \rightarrow \rho$ , on obtient :

$$\gamma_1 \asymp n^2 (\log |\Lambda|)^{-1} \asymp n^2 (\log n)^{-1} \gg n$$

et donc  $\gamma_1$  diverge dans cette limite.

La divergence est essentiellement due au fait que toutes les particules occupent exactement le même niveau en absence des interactions et que la fonction propre correspondante est localisée dans la zone beaucoup plus petite que le domain total. Alors, quand les interactions sont allumées, toutes ces particules se mettent en interaction qui produit  $n^2$  d'interactions avec l'amplitude la plus grande possible (comme chaque particule interagit avec elle même). À cause de la localisation de l'état fondamental dans la zone d'espace beaucoup plus petite que le domaine  $\Lambda$ , le coefficient de normalisation n'est pas suffisamment petit pour battre au moins un  $n$ .

Soulignons que ce type de comportement est spécifique au cas du potentiel aléatoire. Si on considèrait les particules dans le vide :  $V_\omega \equiv 0$ , alors la première fonction propre du

Laplacien serait essentiellement constante d'ordre  $|\Lambda|^{-1/2}$  sur le domain entier  $\Lambda$ . On voit que dans ce cas,  $\gamma_1$  serait d'ordre  $n$ .

Cette analyse propose que cela n'est pas raisonnable d'essayer de décrire l'état fondamental pour  $n$  bosons ou particules classiques en interaction en utilisant la théorie des perturbations par rapport à l'état fondamental sans interactions, comme la fonction d'ondes à  $n$  bosons est très *corrélée*. Dès qu'on allume les interactions, la configuration deviendra trop différente et ne va pas ressembler le cas sans interactions.

Regardons comment l'image change dans le cas fermionique. L'état fondamental à  $n$  fermions est donné par (1.81). Tous les  $n$  premiers niveaux à une particule participent dans cet état. Remarquons que ce sont les états qui occupent l'intervalle macroscopique des énergies par le Lemme 1.3.13 jusqu'à environ l'énergie de Fermi  $E_\rho$ .

Alors, cette dernière question est directement reliée à la description des énergies d'un système à une particule : on veut obtenir le comportement des énergies  $E_j(\Lambda, 1, \omega)$  et surtout des états  $\psi_j(\Lambda, 1, \omega)$  avec  $j = 1, \dots, n$  pour la plupart des  $\omega$ . C'est-à-dire, pour un  $\omega$  caractéristique, on veut une description du type, que les  $n$  premiers états (ou presque) de  $H_\omega(\Lambda, 1)$  s'organisent d'une telle manière. De façon équivalente on peut dire, qu'on veut comprendre le comportement des états et des énergies d'une particule jusqu'à l'énergie de Fermi  $E_\rho$ .

L'image qu'on a pour le moment, est la suivante. On pense qu'il y a toujours des clairières qui supportent essentiellement les états bas. Évidemment, dans le cas fermionique de nombreuses clairières entrent en jeu comme toutes les particules ne se condensent pas dans un seul état. Supposons maintenant, qu'on a  $m$  clairières (sous-domaines  $\lambda_j$ ) avec des volumes  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Dans chaque  $\lambda_j$ , on considère les conditions au bord de Dirichlet et on s'intéresse aux  $k_j$  premiers niveaux d'énergies dans chaque clairière. Dans la clairière numéro  $j$ , les énergies peuvent être approximées par la loi de Weyl :

$$E_i(v_j) \asymp \left( \frac{i}{v_j} \right)^{2/d}.$$

Alors, la somme de toutes les  $n$  énergies dans les  $m$  clairières est donnée par :

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{k_j} E_i(v_j) \asymp \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{k_j} \left( \frac{i}{v_j} \right)^{2/d} \asymp \sum_{j=1}^m \left( \frac{k_j}{v_j} \right)^{2/d} k_j \asymp \sum_{j=1}^m E_{k_j}(v_j) k_j.$$

Remarquons, que dans la formule précédente  $E_{k_j}$  est l'énergie la plus haute dans la clairière  $\lambda_j$ .

Si on suppose, que le mécanisme décrit ci-dessus donne l'approximation pour des niveaux d'énergie d'un système de  $n$  fermions, on trouve :

$$\frac{E_q(\Lambda, n)}{n} \underset{\sim}{\asymp} \frac{\sum_{j=1}^m E_{k_j}(v_j) k_j}{\sum_{j=1}^m k_j}, \quad (1.95)$$

où on a mis l'indice  $q$  pour désigner le fait que c'est une approximation qui peut être valable pas seulement pour l'énergie fondamentale ( $q = 1$ ), mais également pour d'autres énergies de taille d'ordre constant (ici on parle, évidemment, de l'énergie par particule).

Si on s'intéresse vraiment à l'énergie fondamentale, il faut remarquer que (1.95) est une moyenne des énergies les plus hautes (parmi celles qu'on considère) sur toutes les clairières. Donc, si on veut minimiser cette quantité, il est évident que toutes les énergies  $E_{k_j}$  doivent être de la même taille. Sinon, on pourrait toujours enlever quelques niveaux dans une clairière qui était trop remplie et ajouter des niveaux dans les clairières qui sont moins remplies.

On pense que c'est effectivement le mécanisme qui donne les énergies de  $n$  fermions jusqu'au niveau de l'énergie par particule d'ordre d'énergie de Fermi  $E_\rho$ . Remarquons, que comme  $n \approx \rho|\Lambda|$ , pour des petites densités de particules  $\rho$ , on a besoin de moins de niveaux à une particule. Cette dernière observation peut être utile pour la justification de l'approximation de Dirichlet, parce que ce sont des niveaux énergétiques assez bas pour lesquels l'approximation de Dirichlet est bonne.

La deuxième idée importante dans ce modèle est que les états qui sont essentiellement supportés par des clairières différentes interagissent très faiblement. À cause de la localisation, la taille de l'interaction est exponentiellement petite et dans la suite on va compter dans nos estimations seulement les interactions entre les états à une particule dans la même clairière.

Estimons un élément diagonal (1.89) pour l'état décrit par (1.95). Le nombre de paires d'indices  $(ij)$  pour lesquelles l'interaction  $U_{(ij),(ij)}$  n'est pas exponentiellement petite est donné par le nombre des paires des états qui vivent dans la même clairière :

$$\sum_{j=1}^m k_j^2.$$

S'il y a assez des clairières, le nombre des interactions est déjà beaucoup mieux que la majoration brute par  $n^2$ .

Supposons de nouveau, que le potentiel des interactions par paires  $U$  est à support compact :  $U(x^1, x^2) = 0$  pour  $\text{dist}(x^1, x^2) > R_0$ . Soient  $\psi_1, \psi_2$  deux fonctions propres à une particule qui interviennent dans l'argument précédant et qui vivent (sont essentiellement supportées) dans la même clairière  $\lambda \subset \Lambda$  de volume  $v$ . Alors, le terme d'interaction est donné par :

$$U_{(12),(12)} = \frac{\iint_{\Lambda^2} U(x^1, x^2) |\psi_1(x^1)\psi_2(x^2) - \psi_2(x^1)\psi_1(x^2)|^2 dx^1 dx^2}{\iint_{\Lambda^2} |\psi_1(x^1)\psi_2(x^2) - \psi_2(x^1)\psi_1(x^2)|^2 dx^1 dx^2}.$$

Par l'argument de la localisation, on peut remplacer :  $\iint_{\Lambda^2} \approx \iint_{\lambda^2}$ . Ensuite, dans le numérateur, on intègre par  $\{(x^1, x^2) \in \lambda^2, \text{ t. q. } |x^1 - x^2| \leq R_0\}$ . Ceci propose, qu'on gagne le facteur de volume :

$$U_{(12),(12)} \asymp 1/v. \quad (1.96)$$

On ne prétend pas avoir démontré la dernière approximation, mais on va donner néanmoins une heuristique. Pour obtenir (1.96), il faut que les fonctions propres  $\psi_1$  et  $\psi_2$  soient assez étalées. Si on considère, par exemple,  $\lambda$  comme étant un cube (ou une rectangle avec des côtes comparables), les fonctions propres de  $-\Delta$  sont des sinus. Ce sont des fonctions étalées sur tout  $\lambda$ . Finalement, on donne une approximation pour un élément diagonal

(1.89) avec  $\alpha \subset \mathbb{N}$ ,  $\text{card } \alpha = n$ , qui correspond à  $n$  fermions distribuées par  $m$  clairières comme c'était décrit au-dessus :

$$\frac{W_{\alpha\alpha}}{n} \asymp \frac{\sum_{j=1}^m k_j^2/v_j}{\sum_{j=1}^m k_j} = \frac{\sum_{j=1}^m k_j \frac{k_j}{v_j}}{\sum_{j=1}^m k_j} \asymp \frac{\sum_{j=1}^m k_j (E_{k_j}(v_j))^{d/2}}{\sum_{j=1}^m k_j}.$$

De plus,  $k_j/v_j$  doit être d'ordre de grandeur de  $\rho$ . On voit, que  $W_{\alpha\alpha}$  pour des états donnés par le mécanisme décrit ci-dessus, est bien borné dans la limite thermodynamique. Des éléments hors diagonaux  $W_{\alpha\beta}$  doivent se comporter encore mieux comme il y a moins de termes d'interaction. Cette observation suggère, que les séries des perturbations pour les fermions dans la limite thermodynamique doivent converger avec un rayon de convergence de taille constante (qui va dépendre de  $\rho$ ).

Dans le chapitre qui suit, on va développer les idées de cette sous-section sur les états propres pour un système des fermions en bas du spectre. Notamment, on va introduire les clairières d'une façon artificielle et absolument explicite. Ceci va nous permettre de donner la description mathématiquement rigoureuse de l'état fondamental. On attend que les mêmes phénomènes restent vrais pour la grande variété des modèles aléatoires qui exhibe la région localisée au fond du spectre, mais cela fait l'objet de recherche ultérieure et non pas de cette thèse.



# Chapitre 2

## Modèle des pièces pour fermions

Dans ce chapitre, on analyse la limite thermodynamique pour un système de particules quantiques en interactions dans un milieu aléatoire pour un modèle particulier. On considérera uniquement le cas des fermions qui obéissent la statistique quantique de Fermi – Dirac (voir la sous-section 1.1.2) et on va utiliser l’approche de la théorie de perturbations (voir la sous-section 1.3.1) pour construire l’état fondamental à  $n$  fermions en interaction.

La plupart des résultats qu’on présente dans la suite sont valables pour une densité de particules faible. Si ce n’est pas indiqué explicitement, dans des relations asymptotiques il faut toujours supposer que  $\rho \ll 1$ . La densité joue le rôle d’un petit paramètre et permet d’approcher le cas avec interactions par le cas sans interactions comme les interactions sont “peu nombreuses”. Dans ce travail, il n’est pas nécessaire que les interactions soient faibles sous la forme d’une petite constante de couplage devant les interactions.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante.

Le modèle des pièces qu’on introduit dans la Section 2.1 est l’implémentation de l’idée des clairières introduites dans la sous-section 1.3.4 comme des zones assez grandes (mais beaucoup plus petites que le domaine total), où les fonctions propres de fond du spectre à une particule sont supportées. Dans ce modèle on fait abstraction des effets de décroissance exponentielle des fonctions en dehors de voisinage de centre de localisation : notre approche consiste à séparer des clairières l’une de l’autre par des murs de hauteur infinie. Pour simplifier l’analyse statistique, le modèle choisi est unidimensionnel. On expliquera également pourquoi on étudie ce modèle pour la densité des particules  $\rho$  faible. À la fin de cette section, on démontre l’asymptotique de Lifshitz pour la densité d’états intégrée dans ce modèle et on trouve l’énergie de Fermi. Cela nécessite, entre autre, l’analyse statistique de la distribution des pièces selon leurs longueurs.

Dans la Section 2.2, on précise la structure des séries de perturbations de la sous-section 1.3.3 dans le cas du modèle des pièces. Ensuite, en utilisant le Théorème 1.3.16, on calcule les éléments matriciels des interactions par paires pour ce modèle.

Dans la Section 2.3, on prouve que le hamiltonien total  $H_\omega(\Lambda, n)$  a une structure par blocs qui correspondent aux projections sur des sous-espaces de nombre de particules fixé dans chaque pièce.

Cette observation clé nous permet de décrire un sous-espace de l’espace total à  $n$  fermions  $\mathfrak{H}^n$  où l’état fondamental vit essentiellement dans la Section 2.4. Pour cela on sépare les états trop excités et on démontre, entre autre, le Théorème 0.0.3. Puis, on démontre

la non dégénérescence de l'état fondamental (le Théorème 2.5.2) dans la Section 2.5.

Dans la Section 2.6, on donne une description de l'état fondamental de  $n$  fermions en interaction par sa fonction d'autocorrélation. On y démontre le Théorème 0.0.6.

Finalement, dans la Section 2.7, on démontre les Théorèmes 0.0.8 et 0.0.9 qui quantifient la différence entre l'état fondamental avec et sans interactions, ainsi montrant un effet que les interactions ont sur le système.

## 2.1 Définition et analyse de base

Dans cette section, on introduit d'abord des différents modèles de référence unidimensionnels dans la sous-section 2.1.1 et on explique notre choix de modèle ainsi que la motivation pour considérer cette classe des modèles. Ensuite, dans la sous-section 2.1.2, on étudie les propriétés de base du modèle des pièces. Entre autre, on trouve des fonctions propres à une particule, démontre l'asymptotique de Lifshitz et calcule l'expression explicite pour l'énergie de Fermi  $E_\rho$  (voir la Définition 1.3.8).

### 2.1.1 Choix du modèle

On s'intéresse dans cette partie d'une classe des modèles à une dimension, i.e.,  $d = 1$ . Le domaine  $\Lambda$  devient maintenant l'intervalle  $[0, L] \subset \mathbb{R}$  où  $\mathbb{Z}$  selon si on considère le cas continu ou discret. Dans *le modèle des pièces* (qu'on appelle également *le modèle de murs*), le potentiel aléatoire  $V_\omega$  est remplacé par la collection aléatoire de points  $v_1, \dots, v_m \in (0, L)$ . On impose les conditions de Dirichlet (on met un mur infiniment haut) en ces points, alors le problème à une particule se décompose en  $m + 1$  problèmes de Dirichlet indépendants. Remarquons que sur chaque sous-intervalle  $[v_j, v_{j+1}]$ , l'opérateur à une particule est  $-\Delta_1 = -\frac{d^2}{dx^2}$  avec les conditions au bord de Dirichlet.

On peut considérer des modèles des pièces suivants :

**Géométrique ou Bernoulli.** Soit  $\mu \in (0, 1)$ . Considérons la variable aléatoire  $X_1$  distribuée selon la loi géométrique avec le paramètre  $\mu$  :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mu(1 - \mu)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

La longueur du premier intervalle est donnée par  $X_1$  : donc on met un mur à la distance  $X_1$  de zéro. Ensuite, on considère une nouvelle variable aléatoire  $X_2$ , distribuée selon la même loi et indépendante de  $X_1$ . Elle donne la longueur du deuxième intervalle. On continue jusqu'au moment quand on dépasse  $L$  (dans ce cas, on coupe l'intervalle correspondant à  $L$ ).

D'une façon équivalent, on peut considérer une suite des variables aléatoires distribuées selon la loi de Bernoulli suivante. À chaque point  $n \in \{1, \dots, [L]\}$ , on met le mur avec la probabilité  $\mu$  ou on fait rien avec la probabilité  $1 - \mu$ . Le choix se fait indépendamment pour chaque site.

**Poisson.** Ce modèle est défini et partiellement étudié dans [GMS83, Section 2]. Considérons le processus de Poisson sur  $\mathbb{R}$  de l'intensité  $\mu > 0$ . Des points de ce processus qui tombent dans  $(0, L)$  définissent des positions des murs, où les conditions au bord

de Dirichlet sont imposées. Dans certains travaux, ce modèle est appelé *le modèle de Luttinger – Sy* (voir, par exemple, [LZ07]).

Le modèle de Poisson est l’analogie continue du modèle géométrique : tous les deux modèles se ressemblent beaucoup et donnent les mêmes résultats avec des modifications mineures. Un des avantages du modèle de Poisson est qu’on peut partiellement réutiliser les résultats de [GMS83]. Ce modèle est également considéré dans le livre [LGP88, Chapitre 2]. Remarquons, qu’une partie de l’analyse statistique de ce modèle est aussi faite dans [LZ07, Chapitre 6.3] et [JPZ09, Lemme 6.1] où la statistique des sous-intervalles les plus grands est étudiée.

Dans la suite, on travaillera seulement avec le modèle de Poisson qu’on va appeler modèle des pièces, modèle des murs ou modèle des morceaux tout court. On appelle *les pièces* les intervalles  $[v_j, v_{j+1}]$  de la division.

On va également supposer que les interactions sont de la forme assez particulière.

**Hypothèse 2.1.1.** Les interactions sont par paires invariantes par translations (**PI**) de support compact (**Comp**). De plus, il existe des constantes  $C_2 \geq C_1 > 0$  et  $R_2 \geq R_1 > 0$  telles que

$$C_1 \mathbb{1}_{[-R_1, R_1]} \leq U \leq C_2 \mathbb{1}_{[-R_2, R_2]}. \quad (2.1)$$

Pour nos calculs et démonstrations, on va supposer de plus, que

$$U = \mathbb{1}_{[-R_0, R_0]} \quad (2.2)$$

pour une constante  $R_0 > 0$ . Des résultats pour  $U$  général satisfaisant (2.1) suivront trivialement par monotonie.

La motivation de point de vue physique pour considérer le modèle des pièces de Poisson avec les interactions (2.2) provient toujours de l’idée que des fermions ont tendance à occuper des sites différents dans un grand domaine  $\Lambda$  dont les longueurs sont relativement petites par rapport au volume total (voir la sous-section 1.3.4). Plus concrètement, des sous-intervalles de découpage  $[v_j, v_{j+1}]$  gardent l’idée essentielle des clairières des modèles plus réalistes (comme modèle d’Anderson, par exemple), mais sont en même temps donnés explicitement ce qui facilite l’analyse. Les interactions (2.2) ont juste la forme la plus simple possible qu’on pourrait imaginer mais elles ne sont pas triviales.

Finalement, on va étudier le cas  $\rho \ll 1$  : cela correspond à de nombreuses situations physiques (voir [AM76] ou [LL60]). Notamment, si on reprend notre exemple physique de référence du semi-conducteur pour lequel on s’intéresse au problème de transport électronique, on verra que la densité des électrons de conductivité (ce sont seulement les électrons qui se trouvent dans la bande de conduction) est relativement petite. Il ne faut pas confondre cela avec le nombre (et la densité associée) total des électrons : ils sont aussi nombreux que la charge totale (exprimé en unités atomiques) de tous les noyaux, sauf que la plupart de ces électrons sont rattachés à ces noyaux en formant des ions et donc ne participent pas à la conduction.

## 2.1.2 Analyse statistique du modèle de Poisson

L’avantage évident du modèle des pièces est que la description des “clairières” de la sous-section 1.3.4 est exacte. Les fonctions propres peuvent être écrites explicitement. Soit



une configuration des murs  $\omega$  fixée. Alors, pour un intervalle de longueur  $l$  (donc, entre deux murs, on a la distance  $l$ ), les fonctions et les valeurs propres sont données par :

$$\psi_k(l) = \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right), \quad E_k(l) = \frac{\pi^2 k^2}{l^2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

à une translation en  $x$  près.

On va maintenant étudier le comportement statistique de la répartition des longueurs de pièces dans le modèle de Poisson.

On s'intéresse aux points du processus de Poisson d'intensité  $\mu$  qui tombent dans l'intérieur de l'intervalle  $[0, L]$ . Le nombre de ces points  $\nu = \nu_L$  est une variable aléatoire de Poisson :

$$\mathbb{P}(\nu_L = k) = e^{-\mu L} \frac{(\mu L)^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (2.3)$$

Soient  $\{\tau_i\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$  les points de processus de Poissons dans  $(0, L)$ . Ils divisent l'intervalle  $[0, L]$  en  $k + 1$  sous-intervalles de longueurs  $\Delta_i$ . La proposition suivante peut être trouvée dans [GMS83, page 113].

**Proposition 2.1.2.** *Sous la condition  $\nu_L = k$ , la distribution d'un vecteur  $(\Delta_1, \dots, \Delta_{k+1})$  coïncide avec la distribution d'un vecteur aléatoire*

$$\left( L \cdot \frac{\eta_1}{\eta_1 + \dots + \eta_{k+1}}, L \cdot \frac{\eta_2}{\eta_1 + \dots + \eta_{k+1}}, \dots, L \cdot \frac{\eta_{k+1}}{\eta_1 + \dots + \eta_{k+1}} \right), \quad (2.4)$$

où  $\eta_i$ ,  $i = 1, \dots, k + 1$ , sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (iid) selon la loi exponentielle de paramètre  $\mu$  :

$$f_{\eta_i}(x) = \mu e^{-\mu x} \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(x),$$

où  $f$  est la densité de la loi de distribution.

Dans (2.4), on écrira

$$\Delta_i = L \cdot \frac{\eta_i}{S_{k+1}},$$

où  $S_k = \eta_1 + \dots + \eta_k$  et  $\eta_i$  sont décrites dans la Proposition 2.1.2. Par le théorème de la limite centrale (voir, par exemple, [Dur96]) :

$$\frac{S_k - \mu^{-1}k}{\mu^{-1}\sqrt{k}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad (2.5)$$

où  $\mathcal{N}(a, \sigma)$  désigne la distribution normale de l'espérance  $a$  et variance  $\sigma^2$  et  $\Rightarrow$  est la convergence en probabilité. De plus, les résultats de Leonard E. Baum et Melvin Katz sur le taux de convergence dans la loi des grands nombres [BK65] donnent que pour tout  $A > 0$  et tout  $0 < \beta < 1/2$  il existe une constante  $C = C_{A, \beta}$  telle que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_k}{k} - \mu^{-1}\right| > k^{-1/2+\beta}\right) < Ck^{-A}. \quad (2.6)$$

On pourrait également utiliser le théorème du type Berry – Esseen (voir, par exemple, [DZ10] pour les différentes techniques des grandes déviations ou [Ber41] et [Ess42] pour les travaux originaux) pour obtenir qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_k}{k} - \mu^{-1}\right| > k^{-1/2}\right) < Ck^{-1/2}.$$

Dans la suite, on préfère la forme (2.6). Pour chaque  $i$  et pour  $0 < a < b$ , on a

$$\mathbb{P}(\eta_i \in [a, b]) = e^{-\mu a} - e^{-\mu b}. \quad (2.7)$$

Alors, sachant qu'on a  $k$  points en total, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\Delta_i \in \left[\frac{L}{k+1} \cdot \frac{a}{\mu^{-1} + k^{-1/2+\beta}}, \frac{L}{k+1} \cdot \frac{b}{\mu^{-1} - k^{-1/2+\beta}}\right] \mid \nu_L = k\right) \\ = e^{-\mu a} - e^{-\mu b} + O(k^{-\infty}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

où  $O(k^{-\infty})$  signifie un terme borné par la puissance arbitrairement négative de  $k$  (avec une constante qui dépend de cette puissance) exactement comme dans (2.6). En écrivant l'égalité précédente sous la forme raccourcie

$$\mathbb{P}(\Delta_i \in A_{k+1} \mid \nu_L = k) = q_{k+1},$$

où

$$A_k = \left[\frac{L}{k} \cdot \frac{a}{\mu^{-1} + (k-1)^{-1/2+\beta}}, \frac{L}{k} \cdot \frac{b}{\mu^{-1} - (k-1)^{-1/2+\beta}}\right]$$

et

$$q_k = e^{-\mu a} - e^{-\mu b} + O((k-1)^{-\infty}),$$

on obtient que le nombre d'intervalles qui vérifient cette propriété suit une loi binomiale :

$$\mathbb{P}(\text{il y a } m \text{ parmi } k+1 \text{ intervalles } \Delta_i \in A_{k+1} \mid \nu_L = k) = \binom{k+1}{m} q_{k+1}^m (1 - q_{k+1})^{k+1-m}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{le nombre des intervalles } \Delta_i \in A_{k+1} \text{ appartient à } [kq_{k+1} - m, kq_{k+1} + m] \mid \nu_L = k) \\ \geq 1 - e^{-\frac{m^2}{2q_{k+1}(k+1)}}, \end{aligned}$$

et il suffit de poser  $m = \sqrt{q_{k+1}} k^{1/2+\beta}$  avec  $0 < \beta < 1/2$ , pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{le nombre des intervalles } \Delta_i \in A_{k+1} \text{ appartient à} \\ [kq_{k+1} - \sqrt{q_{k+1}} k^{1/2+\beta}, kq_{k+1} + \sqrt{q_{k+1}} k^{1/2+\beta}] \mid \nu_L = k) \geq 1 - e^{-k^{2\beta}}. \end{aligned}$$

En rassemblant cela avec (2.8), on obtient la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{l} \text{le nombre des intervalles } \Delta_i \in \frac{L}{k+1} \cdot \left[ \frac{a}{\mu^{-1} + k^{-1/2+\beta}}, \frac{b}{\mu^{-1} - k^{-1/2+\beta}} \right] \\ \text{appartient à } \left[ k(e^{-\mu a} - e^{-\mu b}) \pm k^{1/2+\beta}(e^{-\mu a} - e^{-\mu b})^{1/2} + O(k^{-\infty}) \right] \mid \nu_L = k \end{array}\right) \geq 1 - e^{-k^{2\beta}}. \quad (2.9)$$

La distribution (2.3) de nombre des points  $k$  dans l'intervalle  $[0, L]$  donne que son espérance est égale à  $\mu L$  et pour  $L$  suffisamment grand

$$\mathbb{P}(\nu_L \in [\mu L - L^{1/2+\beta}, \mu L + L^{1/2+\beta}]) \geq 1 - e^{-L^{2\beta}}. \quad (2.10)$$

C'est une conséquence directe du théorème de la limite centrale et du fait que la variable aléatoire de Poisson de paramètre  $m \in \mathbb{N}$  peut être représentée comme la somme de  $m$  variables iid de Poisson de paramètre 1. En mettant (2.9) et (2.10) ensemble, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{l} \text{le nombre des } i \text{ t.q. } \Delta_i \in [a(1 - L^{-1/2+\beta}), b(1 + L^{-1/2+\beta})], \\ \text{appartient à } [\mu L(e^{-\mu a} - e^{-\mu b}) \pm L^{1/2+\beta}(e^{-\mu a} - e^{-\mu b})^{1/2} + O(L^{-\infty})] \end{array}\right) \geq 1 - e^{-L^{2\beta}}.$$

Finalement, on peut facilement incorporer l'erreur de l'intervalle  $[a, b]$  dans l'erreur de nombre des intervalles dans la dernière formule. On résume tous ces arguments dans la proposition suivante.

**Proposition 2.1.3.** *Avec une probabilité exponentiellement proche de 1 (i.e., supérieure à  $1 - e^{-L^\beta}$ ,  $\beta \in (0, 1/2)$ ), le nombre des intervalles de longueur comprise entre  $a$  et  $b$  (avec  $0 < a < b$ ) est égal à*

$$\mu L(e^{-\mu a} - e^{-\mu b}) + O(L^{1/2+\beta}(e^{-\mu a} - e^{-\mu b})^{1/2}) + O(L^{-\infty}).$$

Les constantes dans les termes de reste sont uniformes en  $a$  et  $b$ .

*Remarque 2.1.4.* Le terme principal dans une expression pour le nombre d'intervalles dans la Proposition 2.1.3 est plus grand que le terme de reste si

$$a \leq \mu^{-1}(1 - \varepsilon) \log L \quad (2.11)$$

et  $\beta$  est choisi suffisamment petit en fonction de  $\varepsilon$ .

*Remarque 2.1.5.* Le dernier terme  $O(L^{-\infty})$  ne peut pas être omis par rapport au deuxième terme seulement si  $a$  et  $b$  sont superpolynomialement dans l'échelle  $L$  proches l'un à l'autre (i.e.,  $|a - b| = O(L^{-\infty})$ ) ou si  $a$  est d'ordre plus grand que  $\log L$ .

On aura également besoin de l'analyse statistique sur le nombre de paires des pièces voisins des longueurs données. On commence par la définition des sous-intervalles voisins.

**Définition 2.1.6.** On dit que deux sous-intervalles distincts  $[a, b]$  et  $[c, d]$  dans  $[0, L]$  sont *voisins* ou *interagissent* si le potentiel des interactions par paires  $U$  n'est pas trivialement zéro sur  $L^2(a, b) \otimes L^2(c, d)$ .

Si on considère le potentiel des interactions par paires de la forme (2.2), qu'on répète ici :

$$U = \mathbb{1}_{[-R_0, R_0]},$$

alors la Définition 2.1.6 signifie juste que les intervalles sont à une distance inférieure à  $R_0$  l'un de l'autre.

**Proposition 2.1.7.** *Il existe une constante  $C(\mu, R_0)$  telle que avec probabilité au moins  $1 - e^{-L^\beta}$  le nombre de paires d'intervalles voisins tels que le premier intervalle est de longueur comprise entre  $a$  et  $b$  et le deuxième est de longueur comprise entre  $c$  et  $d$ , est donné par*

$$C(\mu, R_0)L(e^{-\mu a} - e^{-\mu b})(e^{-\mu c} - e^{-\mu d}) + O(L^{1/2+\beta}(e^{-\mu a} - e^{-\mu b})^{1/2}(e^{-\mu c} - e^{-\mu d})^{1/2}) + O(L^{-\infty}).$$

Toutes les constantes sont uniformes en  $a, b, c$  et  $d$ .

*Démonstration.* La démonstration suit celle de la Proposition 2.1.3. La seule différence concerne l'analyse autour de la formule (2.7).

La probabilité que  $\eta_i \in [a, b]$  est égale à  $e^{-\mu a} - e^{-\mu b}$ . Comment peut-on avoir un autre intervalle voisin de la longueur voulue ? En général, on peut avoir  $k \geq 0$  intervalles entre ces deux intervalles qui nous intéressent de somme de longueurs inférieure à  $R_0$ . La probabilité d'avoir d'abord un intervalle de longueur  $\in [a, b]$ , ensuite  $k$  intervalles de somme de longueurs inférieure à  $R_0$  et finalement l'intervalle de longueur  $\in [c, d]$  est donnée par

$$(e^{-\mu a} - e^{-\mu b})p_k(\mu, R_0)(e^{-\mu c} - e^{-\mu d}), \quad (2.12)$$

où  $p_k(\mu, R_0)$  est la probabilité que  $k$  intervalles consécutifs ont une somme de longueurs inférieure à  $R_0$ . Pour trouver la probabilité qu'il y ait un intervalle de longueur dans  $[a, b]$  et son voisin de longueur dans  $[c, d]$ , il reste à sommer (2.12) pour  $k$  allant de zéro à l'infini. La somme est finie parce qu'elle donne une probabilité qui est toujours bornée par 1.  $\square$

La Proposition 2.1.3 nous permet d'obtenir une expression exacte pour la densité d'états intégrée pour ce modèle. Ce résultat justifie entre autre l'asymptotique de Lifshitz pour le modèle des pièces.

**Proposition 2.1.8.** *Pour tout  $E > 0$ ,*

$$N(E) = \frac{\mu e^{-\mu \ell_E}}{1 - e^{-\mu \ell_E}}, \quad (2.13)$$

où

$$\ell_E = \pi/\sqrt{E}$$

est la longueur correspondant à l'énergie  $E$ .

*Remarque 2.1.9.* Le calcul de la densité d'états intégrée est fait aussi dans [LGP88, Chapitre 2]. Le même résultat est obtenu par une méthode un peu différente dans [LZ07, Proposition 3.2]. Dans [GMS83, Théorème 2], les auteurs étudient la valeur propre la plus basse sur  $[0, L]$  dans la limite  $L \rightarrow +\infty$  qui est aussi équivalent à l'asymptotique du résultat de la Proposition 2.1.8 pour  $E \rightarrow 0$ .

*Démonstration de la Proposition 2.1.8.* Remarquons d'abord qu'une pièce de longueur  $l$  dans  $[k\ell_E, (k+1)\ell_E)$  génère exactement  $k$  niveaux d'énergie inférieure ou égale à  $E$ . Si on veut compter les énergies inférieures à  $E$ , il suffit de s'intéresser aux pièces de longueur  $l \geq \ell_E$ . Les autres pièces ne génèrent aucun niveau inférieur à  $E$ .

Deuxièmement, la probabilité d'avoir un intervalle assez grand est petite. Plus précisément,

$$\mathbb{P}(\text{un intervalle donné a la longueur } \geq \mu^{-1}(1+\varepsilon)\log L) = L^{-(1+\varepsilon)},$$

pour tout  $\varepsilon > 0$ . La probabilité d'avoir plus de  $2\mu L$  intervalles au total est exponentiellement petite : d'après (2.10), on obtient que

$$\mathbb{P}(\text{il y a au moins un intervalle de longueur } \geq \mu^{-1}(1+\varepsilon)\log L) \leq L^{-\varepsilon}. \quad (2.14)$$

En utilisant Proposition 2.1.3, on voit qu'avec une probabilité au moins  $1 - e^{-L^\beta}$ , il y a

$$\mu L(e^{-\mu k \ell_E} - e^{-\mu(k+1)\ell_E}) + O(L^{1/2+\beta}(e^{-\mu k \ell_E} - e^{-\mu(k+1)\ell_E})^{1/2}) + O(L^{-\infty}) \quad (2.15)$$

intervalles qui génèrent  $k$  niveaux d'énergie. Les constantes dans les termes de reste ne dépendent pas de  $k$ .

On va maintenant calculer la densité d'états pour l'intervalle  $[0, L]$ . Les intervalles de longueur plus grande que  $\mu^{-1}(1+\varepsilon)\log L$  sont négligés en utilisant l'estimée (2.14), comme ils sont peu nombreux. Des intervalles plus petits seront traités avec (2.15). Ces intervalles seront divisés en deux types : ceux de longueur vérifiant (2.11) vont donner le terme principal, et pour ceux qui restent, on va utiliser la formule (2.15) comme une estimée grossière. Alors, avec une probabilité au moins égale à  $1 - L^{-\varepsilon} - \mu^{-1}(1+\varepsilon) \cdot \log L \cdot \ell_E^{-1} \cdot e^{-L^\beta}$ , on a :

$$\begin{aligned} N_L^D(E) &= L^{-1} \sum_{k=1}^{\lceil \mu^{-1}(1+\varepsilon) \cdot \log L \cdot \ell_E^{-1} \rceil} k \cdot \left\{ \mu L(e^{-\mu k \ell_E} - e^{-\mu(k+1)\ell_E}) \right. \\ &\quad \left. + O(L^{1/2+\beta}(e^{-\mu k \ell_E} - e^{-\mu(k+1)\ell_E})^{1/2}) + O(L^{-\infty}) \right\} \\ &= L^{-1} \sum_{k=1}^{\lceil \mu^{-1}(1-\varepsilon) \cdot \log L \cdot \ell_E^{-1} \rceil} + \sum_{\lceil \mu^{-1}(1-\varepsilon) \cdot \log L \cdot \ell_E^{-1} \rceil + 1}^{\lceil \mu^{-1}(1+\varepsilon) \cdot \log L \cdot \ell_E^{-1} \rceil} k \cdot \left\{ \dots \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\lceil \mu^{-1}(1-\varepsilon) \cdot \log L \cdot \ell_E^{-1} \rceil} \left\{ \mu k (e^{-\mu k \ell_E} - e^{-\mu(k+1)\ell_E}) + O(L^{-1/2+\beta} \log L) \right\} \\ &\quad + O((\log L)^2 (e^{-(1-\varepsilon) \log L} + L^{-1/2+\beta} e^{-(1-\varepsilon) \log L/2})) \\ &= \mu \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\mu k \ell_E} + O(L^{-0}) \\ &\rightarrow \frac{\mu e^{-\mu \ell_E}}{1 - e^{-\mu \ell_E}}, \quad L \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

qui démontre (2.13). □

**Corollaire 2.1.10.** *L'énergie de Fermi est donnée par :*

$$E_\rho = \pi^2 \mu^2 (\log(\mu\rho^{-1} + 1))^{-2} \sim \pi^2 \mu^2 |\log \rho|^{-2}, \quad \rho \rightarrow 0, \quad (2.16)$$

et la longueur de Fermi (longueur d'intervalle correspondante à  $E_\rho$ ) est donnée par :

$$\ell_\rho = \frac{\log(\mu\rho^{-1} + 1)}{\mu} \sim \mu^{-1} |\log \rho|, \quad \rho \rightarrow 0. \quad (2.17)$$

*Démonstration.* Par la définition de l'énergie de Fermi (1.83) et par l'expression exacte (2.13) pour la densité d'états intégrée, on a :

$$\rho = N(E_\rho) = \frac{\mu \exp(-\mu\ell_\rho)}{1 - \exp(-\mu\ell_\rho)}.$$

La résolution de cette équation par rapport à  $\ell_\rho$  donne (2.17), d'où (2.16) suit immédiatement.  $\square$

## 2.2 Séries de perturbations

Dans cette section, on développe les idées de la Section 1.3 pour le cas particulier du modèle des pièces de Poisson. Il s'agit de la réduction des éléments matriciels  $W_{\alpha\beta}$  en des éléments  $U_{(ij),(rs)}$  encore plus simple que dans le Théorème 1.3.16 ; on l'obtient dans la sous-section 2.2.1. Ensuite, dans la sous-section 2.2.2, on calcule ces éléments du potentiel d'interactions par paires. Ceci nous permet, entre autre, dans la sous-section 2.2.3 d'estimer l'élément matriciel  $W_{00}$  sur l'état fondamental du hamiltonien libre (sans interactions)  $H^0$  ; ceci donne une majoration de l'énergie fondamentale par particule  $\mathcal{E}(\rho, 0)$ .

### 2.2.1 Réduction des éléments matriciels

Dans cette sous-section, on se place dans le cadre de la sous-section 1.3.3 et on précise davantage la structure des séries de perturbations pour le modèle des pièces de Poisson.

On rappelle que les états à  $n$  fermions sans interaction dans  $[0, L]$  sont numérotés par des ensembles d'indices  $\alpha \subset \mathbb{N}$ ,  $|\alpha| = n$ . L'énergie est donnée par la somme (1.78) et la fonction propre par le déterminant de Slater (1.79). Les éléments matriciels  $W_{\alpha\beta}$  permettent la réduction aux éléments matriciels d'interaction par paires  $U_{(ij),(rs)}$  (définies dans (1.88)) grâce au Théorème 1.3.16.

*Remarque 2.2.1.* Avec la probabilité une, il n'y a pas deux sous-intervalles de la même longueur et les niveaux du hamiltonien à une particule sont simples. Ceci veut dire que la base des fonctions propres à une particule  $\{\psi_i\}_i$  est telle que chaque fonction est supportée exactement sur un sous-intervalle. Avec un léger abus des notations, on écrit  $\Delta(\psi_i) = \text{supp } \psi_i$  pour la pièce, où cette fonction est supportée.

Le lemme suivant donne la condition nécessaire pour qu'un élément  $U_{(ij),(rs)}$  soit différent de zéro.

**Lemme 2.2.2.** *Supposons que chacune des fonctions  $\psi_\star$ , avec  $\star \in \{i, j, r, s\}$ , est supportée sur la pièce  $\Delta_\star = \Delta(\psi_\star)$ . Alors  $U_{(ij),(rs)}$  est différent de zéro seulement si*

- (a)  $\{\Delta_i, \Delta_j\} = \{\Delta_r, \Delta_s\}$ ,
- (b) ces quatre intervalles soit coïncident, soit sont voisins dans le sens de la Définition 2.1.6, qui équivaut à dire que  $\text{dist}(\Delta_i, \Delta_j) < R_0$ .

*Démonstration.* Le lemme est juste une conséquence du fait que  $U(x, y) = \mathbb{1}_{[0, R_0]}(|x - y|)$  est l'opérateur de multiplication supporté sur le  $R_0$ -voisinage de la diagonale  $x = y$ . Ceci implique, en particulier, que les états à deux particules  $[\psi_i, \psi_j]$  et  $[\psi_r, \psi_s]$  doivent avoir des supports ayant une intersection de mesure positive. Mais une intersection de mesure positive signifie que ces support coïncident. Finalement, ce support commun doit évidemment rencontrer le  $R_0$ -voisinage de la diagonale.  $\square$

Dans le cadre du Théorème 1.3.16 et à l'aide du lemme précédent, on peut préciser maintenant la structure de la matrice d'interaction  $W$  dans la base des fonctions propres de l'opérateur libre (sans interactions)  $\{\Psi_\alpha\}_\alpha$ , voir (1.79).

**Corollaire 2.2.3.** *On utilise les notations du Théorème 1.3.16. Un élément matriciel  $W_{\alpha\beta}$  est différent de zéro seulement dans les cas suivants.*

- (a) *Élément diagonal :  $\alpha = \beta$ .*
- (b) *Une seule fonction à une particule dans  $\alpha$  doit être changée pour obtenir  $\beta$ , mais cette nouvelle fonction est nécessairement supportée sur le même sous-intervalle :*

$$|\alpha \setminus \beta| = 1 \quad \text{et} \quad \Delta(\psi_\clubsuit) = \Delta(\psi_\diamond),$$

où on rappelle que  $\psi_\clubsuit$  et  $\psi_\diamond$  sont des fonctions à une particules distinctes dans  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement (voir le cas (b) du Théorème 1.3.16).

- (c) *Deux états à une particule dans  $\alpha$  sont changés pour obtenir  $\beta$  :*

$$|\alpha \setminus \beta| = 2.$$

Deux cas sont possibles :

- toutes les quatre particules distinguées sont dans la même pièce :

$$\Delta(\psi_\clubsuit) = \Delta(\psi_\spadesuit) = \Delta(\psi_\diamond) = \Delta(\psi_\heartsuit),$$

- deux particules dans deux pièces voisines différents sont remplacées par deux particules dans les mêmes deux pièces :

$$\Delta(\psi_\clubsuit) = \Delta(\psi_\diamond) \neq \Delta(\psi_\spadesuit) = \Delta(\psi_\heartsuit) \quad \text{et ces deux pièces sont voisines.}$$

On rappelle qu'ici  $\{\psi_\clubsuit, \psi_\spadesuit\}$  sont des fonctions distinctes dans  $\alpha$  et  $\{\psi_\diamond, \psi_\heartsuit\}$  sont des fonctions distinctes dans  $\beta$  (voir le cas (c) du Théorème 1.3.16).

*Démonstration.* Pour  $\star \in \{a, b, c\}$ , chaque cas ( $\star$ ) de ce corollaire correspond exactement au cas ( $\star$ ) du Théorème 1.3.16. Les précisions sur la coïncidence ou le voisinage des sous-intervalles qui supportent les fonctions distinctes sont des conséquences du Lemme 2.2.2.  $\square$

## 2.2.2 Éléments matriciels de potentiel d'interactions par paires

Dans cette section, on va calculer les éléments matriciels du potentiel d'interactions par paires  $U_{(ij),(rs)}$  qui peuvent être non nul selon le Corollaire 2.2.3.

Pour ne pas rendre la numérotation des états propres à une particule trop complexe, on fait le réarrangement suivant. Dans la suite, on numérote un état propre à une particule  $\psi$  de l'opérateur  $H_\omega(L, 1)$  par deux indices : la pièce  $\Delta = [a, b] \subset [0, L]$  où il est supporté et le numéro  $i$  de niveau dans cette pièce. Selon la Remarque 2.2.1, on peut toujours le faire avec la probabilité 1, comme toutes les fonctions propres à une particule associées à une énergie fixée sont supportées sur exactement une pièce et l'espace propre correspondant est de dimension 1. Les longueurs des pièces sont notées par  $l$  sans ou avec des indices supplémentaires. Par conséquent, les fonctions propres à une particule ont la forme :

$$\psi_{\Delta,i}(x) = \sin\left(\frac{\pi i(x-a)}{l}\right) = \sin(\hat{i}(x-a)),$$

où  $l = |\Delta| = b-a$ . La norme  $\|\psi_{\Delta,i}\|^2 = l/2$ . Pour raccourcir des notations, dans la formule précédente, on a défini

$$\hat{i} = \frac{\pi i}{l}. \quad (2.18)$$

On omettra souvent des indices dans la notation  $\psi_{\Delta,i}$ . Dans la suite,  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{r}$  et  $\hat{s}$  sont des paramètres petits : on s'intéressera de quelques premiers niveaux dans des sous-intervalles de longueur d'ordre  $|\log \rho|$  (voir (2.17) pour la longueur de Fermi  $\ell_\rho$ , i.e.,  $i$ ,  $j$ ,  $r$ ,  $s$  sont typiquement bornés et  $l$  est typiquement grand. On fera alors des développements limités par rapport aux paramètres  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{r}$ ,  $\hat{s}$ .

Remarquons maintenant, que selon le Lemme 2.2.2, les éléments matriciels  $U_{(ij),(rs)}$  sont de deux types : soit toute l'intégration se fait dans une seule pièce, soit les deux pièces voisines se touchent (deuxième partie du cas (c)). Sans préciser le domaine d'intégration, on écrit selon la formule (1.88) :

$$\begin{aligned} & \tilde{U}_{(ij),(rs)} \\ &= \iint dx dy (\sin(\hat{i}x) \sin(\hat{j}y) - \sin(\hat{j}x) \sin(\hat{i}y)) (\sin(\hat{r}x) \sin(\hat{s}y) - \sin(\hat{s}x) \sin(\hat{r}y)) \\ &= \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{r}, \hat{s}\} - \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{s}, \hat{r}\} - \{\hat{j}, \hat{i}, \hat{r}, \hat{s}\} + \{\hat{j}, \hat{i}, \hat{s}, \hat{r}\}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

où  $\tilde{U}$  désigne le numérateur de la partie à droite de la formule (1.88) (on laisse le dénominateur pour plus tard). On a aussi introduit la notation

$$\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{r}, \hat{s}\} = \iint dx dy \sin(\hat{i}x) \sin(\hat{j}y) \sin(\hat{r}x) \sin(\hat{s}y). \quad (2.20)$$

Remarquons que  $U$  intervient implicitement dans (2.19) dans le domaine d'intégration (qui



n'était pas précisé). Considérons maintenant l'intégral (2.20). Le calcul direct donne :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{i}, \hat{j}, \hat{r}, \hat{s} \rangle &= \iint dx dy \sin(\hat{i}x) \sin(\hat{j}y) \sin(\hat{r}x) \sin(\hat{s}y) \\
&= \frac{1}{8} \iint dx dy \left[ \cos(\hat{i}x + \hat{j}y - \hat{r}x - \hat{s}y) + \cos(\hat{i}x - \hat{j}y - \hat{r}x + \hat{s}y) \right. \\
&\quad - \cos(\hat{i}x + \hat{j}y - \hat{r}x + \hat{s}y) - \cos(\hat{i}x - \hat{j}y - \hat{r}x - \hat{s}y) \\
&\quad - \cos(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{r}x - \hat{s}y) - \cos(\hat{i}x - \hat{j}y + \hat{r}x + \hat{s}y) \\
&\quad \left. + \cos(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{r}x + \hat{s}y) + \cos(\hat{i}x - \hat{j}y + \hat{r}x - \hat{s}y) \right].
\end{aligned} \tag{2.21}$$

On va maintenant calculer l'intégral

$$\langle \hat{i}, \hat{j}, \hat{r}, \hat{s} \rangle_{\Omega} = \iint_{\Omega} dx dy \cos(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{r}x + \hat{s}y) \tag{2.22}$$

Le domaine d'intégration  $\Omega$  varie suivant que  $x$  et  $y$  sont dans la même pièce ou non :

(a) **cas diagonal**

$$\Omega = D(l) = \{(x, y) \in [0, l]^2, \text{ t.q. } |x - y| \leq R_0\},$$

quand on intègre sur la même pièce,

(b) **cas résiduel**

$$\Omega = R(l_1, l_2) = \{(x, y) \in [0, l_1] \times [-l_2, 0], \text{ t.q. } |x - y| \leq R_0\},$$

quand les pièces sont voisines.

Notre écriture des domaines  $D(l)$  et  $R(l_1, l_2)$  tient compte du décalage en  $x$  et est en accord avec le fait qu'on écrit sinus sans la phase pour les fonctions propres.

*Remarque 2.2.4.* C'est facile à voir que si les pièces voisines ne se touchent pas, ceci équivaut à diminuer  $R_0$  de la distance entre les sous-intervalles. Pour nos estimées on peut donc se restreindre aux deux cas ci-dessus.

On suppose que les pièces qu'on considère sont plus grandes que la longueur d'interactions par paires, i.e.,  $l, l_1, l_2 > R_0$ . Remarquons aussi que

$$\begin{aligned}
D(l) &= \{x \in [0, l], y \in [x - R_0, x + R_0]\} \\
&\quad \setminus \{(x, y) \in [0, l] \times [-l, 0], \text{ t.q. } |x - y| \leq R_0\} \\
&\quad \setminus \{(x, y) \in [0, l] \times [l, 2l], \text{ t.q. } |x - y| \leq R_0\}.
\end{aligned}$$

La dernière observation réduit l'intégration dans (2.21) et (2.22) aux deux types de domaines suivants :

$$\mathcal{M} = \{0 \leq x \leq l\} \times \{x - R_0 \leq y \leq x + R_0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{R} = \{0 \leq x \leq R_0\} \times \{x - R_0 \leq y \leq 0\}, \tag{2.23}$$

dans le sens que si  $l \geq R_0$  alors

$$\langle \hat{i}, \hat{j}, \hat{r}, \hat{s} \rangle_{D(l)} = \langle \hat{i}, \hat{j}, \hat{r}, \hat{s} \rangle_{\mathcal{M}} - 2 \langle \hat{i}, \hat{j}, \hat{r}, \hat{s} \rangle_{\mathcal{R}}, \tag{2.24}$$

et si  $\min(l_1, l_2) \geq R_0$  alors

$$\langle \hat{i}, \hat{j}, \hat{r}, \hat{s} \rangle_{R(l_1, l_2)} = \langle \hat{i}, \hat{j}, \hat{r}, \hat{s} \rangle_{\mathcal{R}}$$

où  $\langle \dots \rangle$  peut signifier  $\{ \dots \}$  ou  $[ \dots ]$ .

**Lemme 2.2.5.** *Le terme d'interaction entre deux pièces voisines est borné par :*

$$|[\hat{i}, \hat{j}, \hat{r}, \hat{s}]_{\mathcal{R}}| \leq R_0^2/2. \quad (2.25)$$

*Démonstration.* L'expression sous l'intégrale dans (2.22) est bornée par 1 et l'aire d'intégration pour  $\Omega = \mathcal{R}$  est  $R_0^2/2$ .  $\square$

Les deux lemmes suivants donnent les expressions exactes pour les termes d'interactions sur la diagonale de la même pièce et au bord de deux pièces voisines.

**Lemme 2.2.6.** *Pour le terme "principal" :*

$$[\hat{i}, \hat{j}, \hat{r}, \hat{s}]_{\mathcal{M}} = \int_0^l dx \int_{x-R_0}^{x+R_0} dy \cos(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{r}x + \hat{s}y)$$

$$= \begin{cases} 2R_0l, & \hat{i} + \hat{r} = \hat{j} + \hat{s} = 0, \\ 2l \frac{\sin((\hat{i} + \hat{r})R_0)}{\hat{i} + \hat{r}}, & \hat{i} + \hat{j} + \hat{r} + \hat{s} = 0, \hat{i} + \hat{r} \neq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Se fait par un calcul direct en utilisant la représentation (2.18) pour  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{r}$  et  $\hat{s}$ .  $\square$

**Lemme 2.2.7.** *Pour le terme "résiduel" :*

$$[\hat{i}, \hat{j}, \hat{r}, \hat{s}]_{\mathcal{R}} = \int_0^{R_0} dx \int_{x-R_0}^0 dy \cos(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{r}x + \hat{s}y)$$

$$= \begin{cases} R_0^2/2, & \text{si } \hat{i} + \hat{r} = \hat{j} + \hat{s} = 0, \\ \frac{1 - \cos((\hat{i} + \hat{r})R_0)}{(\hat{i} + \hat{r})^2}, & \text{si } \hat{i} + \hat{r} \neq 0, \hat{j} + \hat{s} = 0, \\ \frac{1 - \cos((\hat{j} + \hat{s})R_0)}{(\hat{j} + \hat{s})^2}, & \text{si } \hat{i} + \hat{r} = 0, \hat{j} + \hat{s} \neq 0, \\ R_0 \frac{\sin((\hat{i} + \hat{r})R_0)}{\hat{i} + \hat{r}} - \frac{1 - \cos((\hat{i} + \hat{r})R_0)}{(\hat{i} + \hat{r})^2}, & \\ & \text{si } \hat{i} + \hat{j} + \hat{r} + \hat{s} = 0, \hat{i} + \hat{r} \neq 0, \\ \frac{1}{\hat{i} + \hat{j} + \hat{r} + \hat{s}} \left[ \frac{1 - \cos((\hat{i} + \hat{r})R_0)}{\hat{i} + \hat{r}} + \frac{1 - \cos((\hat{j} + \hat{s})R_0)}{\hat{j} + \hat{s}} \right], & \\ & \text{si } \hat{i} + \hat{j} + \hat{r} + \hat{s} \neq 0, \hat{i} + \hat{r} \neq 0, \hat{j} + \hat{s} \neq 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

*Démonstration.* Se fait par un calcul direct en utilisant la représentation (2.18) pour  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{r}$  et  $\hat{s}$ .  $\square$

Le lemme suivant donne un contrôle sur le terme de reste (du type  $\mathcal{R}$  comme défini dans (2.23)) pour  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{r}$  et  $\hat{s}$  petits.

**Lemme 2.2.8.** *Le terme résiduel admet l'estimation suivante :*

$$\tilde{U}_{(ij),(rs)}^{\mathcal{R}} = O(\hat{i}\hat{j}(\hat{i}^2 + \hat{j}^2)\hat{r}\hat{s}(\hat{r}^2 + \hat{s}^2)R_0^{10}).$$

*Démonstration.* On utilise directement la première partie de la formule (2.19). L'aire du domaine d'intégration donne le facteur  $R_0^2$ . Ensuite, on remarque que

$$\begin{aligned} & \sin(\hat{i}x) \sin(\hat{j}y) - \sin(\hat{j}x) \sin(\hat{i}y) \\ &= (\hat{i}x - \hat{i}^3 x^3/6 + O(\hat{i}^5 x^5)) (\hat{j}y - \hat{j}^3 y^3/6 + O(\hat{j}^5 y^5)) \\ & \quad - (\hat{j}x - \hat{j}^3 x^3/6 + O(\hat{j}^5 x^5)) (\hat{i}y - \hat{i}^3 y^3/6 + O(\hat{i}^5 y^5)) \\ &= O(\hat{i}\hat{j}(\hat{i}^2 + \hat{j}^2)R_0^4) \end{aligned}$$

et la même chose est vraie pour  $\hat{r}$  et  $\hat{s}$ . Ceci démontre l'énoncé.  $\square$

Maintenant, on applique l'analyse préliminaire des Lemmes 2.2.6 et 2.2.7 au calcul des éléments matriciels concrets. Premièrement, pour les éléments diagonaux, on s'intéresse au cas  $i = r$ ,  $j = s$ , c'est-à-dire, qu'on considère  $U_{(ij),(ij)}$ .

**Lemme 2.2.9.** *Supposons que  $\psi_i$  et  $\psi_j$  sont supportées sur la même pièce de longueur  $l$ . Alors*

$$U_{(ij),(ij)} = \frac{1}{l} \left( R_0 - \frac{\sin((\hat{i} - \hat{j})R_0)}{2(\hat{i} - \hat{j})} - \frac{\sin((\hat{i} + \hat{j})R_0)}{2(\hat{i} + \hat{j})} \right) + O\left(\frac{1}{l^2}\right). \quad (2.27)$$

*En particulier, ceci implique*

$$U_{(ij),(ij)} = \frac{R_0^3}{6l} (\hat{i}^2 + \hat{j}^2) + O\left(\frac{R_0^5}{l} (\hat{i}^4 + \hat{j}^4)\right), \quad (2.28)$$

si  $\hat{i} \ll 1$ ,  $\hat{j} \ll 1$  et

$$U_{(ij),(ij)} = O\left(\frac{1}{l}\right)$$

*en général.*

*Démonstration.* Pour calculer le dénominateur dans la formule (1.88), on trouve :

$$\|\sin(\hat{i}x) \wedge \sin(\hat{j}y)\|_{L^2([0,l]^2)} = 2\|\sin(\hat{i}x)\|_{L^2(0,l)}\|\sin(\hat{j}y)\|_{L^2(0,l)} = 2\left(\sqrt{l/2}\right)^2 = l.$$

Comme en (2.24), on écrit le numérateur comme la somme du terme principal et le reste. Le terme de reste est majoré soit par (2.25) afin d'obtenir la formule (2.27), soit par le Lemme 2.2.8 parce que l'asymptotique (2.28) nécessite plus de la précision.

Pour le terme principal  $\mathcal{M}$ , on applique la représentation (2.19) :

$$\tilde{U}_{(ij),(ij)}^{\mathcal{M}} = \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{i}, \hat{j}\}_{\mathcal{M}} - \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{j}, \hat{i}\}_{\mathcal{M}} - \{\hat{j}, \hat{i}, \hat{i}, \hat{j}\}_{\mathcal{M}} + \{\hat{j}, \hat{i}, \hat{j}, \hat{i}\}_{\mathcal{M}}.$$

Pour chaque terme dans la dernière expression, on utilise (2.21). Ceci donne une grande somme de termes  $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]_{\mathcal{M}}$ , où la collection des indices  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  coïncide avec la collection  $\pm\hat{i}, \pm\hat{j}, \pm\hat{i}, \pm\hat{j}$ . Le signe devant ce terme est choisi selon la parité de permutation et le nombre de signes moins devant  $\hat{i}$  et  $\hat{j}$ .

Pour calculer chaque  $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]_{\mathcal{M}}$  on utilise le Lemme 2.2.6. On voit que les seuls termes non nuls sont :

$$\begin{aligned}
\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{i}, \hat{j}\} &\rightarrow [\hat{i}, \hat{j}, -\hat{i}, -\hat{j}] + [\hat{i}, -\hat{j}, -\hat{i}, \hat{j}] &\rightarrow & 2R_0l + 2R_0l \\
-\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{j}, \hat{i}\} &\rightarrow -[\hat{i}, \hat{j}, -\hat{j}, -\hat{i}] - [\hat{i}, -\hat{j}, \hat{j}, -\hat{i}] &\rightarrow & -2l \frac{\sin((\hat{i} - \hat{j})R_0)}{\hat{i} - \hat{j}} - 2l \frac{\sin((\hat{i} + \hat{j})R_0)}{\hat{i} + \hat{j}} \\
-\{\hat{j}, \hat{i}, \hat{i}, \hat{j}\} &\rightarrow -[\hat{j}, \hat{i}, -\hat{i}, -\hat{j}] - [\hat{j}, -\hat{i}, \hat{i}, -\hat{j}] &\rightarrow & -2l \frac{\sin((\hat{j} - \hat{i})R_0)}{\hat{j} - \hat{i}} - 2l \frac{\sin((\hat{j} + \hat{i})R_0)}{\hat{j} + \hat{i}} \\
\{\hat{j}, \hat{i}, \hat{j}, \hat{i}\} &\rightarrow [\hat{j}, \hat{i}, -\hat{j}, -\hat{i}] + [\hat{j}, -\hat{i}, -\hat{j}, \hat{i}] &\rightarrow & 2R_0l + 2R_0l.
\end{aligned}$$

Ceci donne (2.27) après addition et normalisation. La formule (2.28) suit immédiatement par le développement limite de sinus au voisinage de zéro et la dernière formule dans l'énoncé du lemme est trivial.  $\square$

Le corollaire suivant est très important dans la suite. Il réalise un cas particulier du lemme précédant : on considère les deux états les plus bas ( $i = 1, j = 2$ ) dans un sous-intervalle assez grand ( $l \gg 1$ ).

**Corollaire 2.2.10.** *Soient  $\psi_1$  et  $\psi_2$  les deux états les plus bas dans une pièce de longueur  $l$ . Alors*

$$U_{(12),(12)} = \frac{5R_0^3}{6l^3} + O(R_0^5/l^5). \quad (2.29)$$

Le prochain lemme décrit des éléments diagonaux de l'interaction entre des particules qui se trouvent dans des pièces voisines.

**Lemme 2.2.11.** *Supposons que  $\psi_i$  et  $\psi_j$  sont supportées dans les pièces voisines de longueurs respectives  $l_1$  et  $l_2$ . Alors, il existe  $R_1 \leq R_0$ , tel que*

$$U_{(ij),(ij)} = \frac{1}{4l_1l_2} \left( R_1^2 - \frac{1 - \cos(2\hat{i}R_1)}{2\hat{i}^2} - \frac{1 - \cos(2\hat{j}R_1)}{2\hat{j}^2} + \frac{\cos(2\hat{j}R_1) - \cos(2\hat{i}R_1)}{2(\hat{i} - \hat{j})^2} \right). \quad (2.30)$$

Ceci implique, en particulier, que

$$U_{(ij),(ij)} = \frac{R_1^6}{90l_1l_2} (\hat{i}^2\hat{j}^2 + O(\hat{i}^6 + \hat{j}^6))$$

si  $\hat{i} \ll 1, \hat{j} \ll 1$  et

$$U_{(ij),(ij)} = O\left(\frac{1}{l_1l_2}\right)$$

en général.

*Démonstration.* On suppose que les pièces sont  $[-l_2, 0]$  et  $[0, l_1]$ . Si les pièces étaient à une certaine distance  $0 < d < R_0$  l'une de l'autre cela changerait seulement la valeur de  $R_0$ . C'est-à-dire, ces particules interagissent à travers un potentiel de rayon  $R_1 = R_0 - d$ . Cet argument n'est vrai que pour  $U$  de type (2.2) mais peut être facilement adapté pour le potentiel plus général (2.1).

On utilise le même principe que pour la démonstration du lemme précédent. D'après la formule (1.88), on a :

$$U_{(ij),(ij)} = \frac{2\tilde{U}_{(ij),(ij)}^{R(l_1, l_2)}}{l_1 l_2}. \quad (2.31)$$

Pour le numérateur on écrit :

$$\tilde{U}_{(ij),(ij)}^{R(l_1, l_2)} = \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{i}, \hat{j}\}_{\mathcal{R}} - \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{j}, \hat{i}\}_{\mathcal{R}} - \{\hat{j}, \hat{i}, \hat{i}, \hat{j}\}_{\mathcal{R}} + \{\hat{j}, \hat{i}, \hat{j}, \hat{i}\}_{\mathcal{R}} = \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{i}, \hat{j}\}_{\mathcal{R}}.$$

Ici on a utilisé le fait que d'autres termes sont nuls comme  $\sin(\hat{i}x)$  vit seulement sur l'intervalle  $x \in [0, l_1]$  et la fonction  $\sin(\hat{j}y)$  sur  $y \in [-l_2, 0]$ . Le terme  $\{\hat{j}, \hat{i}, \hat{j}, \hat{i}\}_{\mathcal{R}}$  contribue dans le domaine symétrique à  $R$  par rapport à  $(x, y) = (0, 0)$  : c'est l'origine du coefficient 2 dans (2.31). Ensuite, pour  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{i}, \hat{j}\}_{\mathcal{R}}$  on utilise le développement (2.21) :

$$\begin{aligned} \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{i}, \hat{j}\}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{8} & \left[ [\hat{i}, \hat{j}, -\hat{i}, -\hat{j}]_{\mathcal{R}} + [\hat{i}, -\hat{j}, -\hat{i}, \hat{j}]_{\mathcal{R}} - [\hat{i}, \hat{j}, -\hat{i}, \hat{j}]_{\mathcal{R}} - [\hat{i}, -\hat{j}, -\hat{i}, -\hat{j}]_{\mathcal{R}} \right. \\ & \left. - [\hat{i}, \hat{j}, \hat{i}, -\hat{j}]_{\mathcal{R}} - [\hat{i}, -\hat{j}, \hat{i}, \hat{j}]_{\mathcal{R}} + [\hat{i}, \hat{j}, \hat{i}, \hat{j}]_{\mathcal{R}} + [\hat{i}, -\hat{j}, \hat{i}, -\hat{j}]_{\mathcal{R}} \right]. \end{aligned}$$

Puis, le Lemme 2.2.7 appliqué à chaque terme donne (2.30).  $\square$

Les Lemmes 2.2.9 et 2.2.11 donnent les éléments matriciels diagonaux du potentiel d'interactions par paires  $U$ . Supposons maintenant que les paires  $(ij)$  et  $(rs)$  diffèrent par un seul élément, i.e.,  $i = r$ , mais  $j \neq s$ . Ceci correspond au cas (b) du Corollaire 2.2.3. On considère, donc,  $U_{(ij),(is)}$ . Selon le Lemme 2.2.2, il y a deux cas dans lesquels un élément  $U_{(ij),(is)}$  est différent de zéro : si toutes les (trois) fonctions à une particule sont supportées par la même pièce ou si  $\psi_i$  est dans une pièce et  $\psi_j$  et  $\psi_s$  dans une pièce voisine. Nous traitons ces cas dans les deux lemmes suivants.

**Lemme 2.2.12.** *Supposons que  $\psi_i$ ,  $\psi_j$  et  $\psi_s$  sont toutes supportées dans la même pièce de longueur  $l$ . Alors,*

– si  $s = 2i + j$ ,

$$U_{(ij),(is)} = \frac{1}{2l} \left( \frac{\sin(2\hat{i}R_0)}{2\hat{i}} - \frac{\sin((\hat{i} + \hat{j})R_0)}{\hat{i} + \hat{j}} \right) + O\left(\frac{1}{l^2}\right), \quad (2.32)$$

ce qui donne

$$U_{(ij),(is)} = \frac{R_0^3}{12l} (\hat{j} - \hat{i})(\hat{j} + 3\hat{i}) + O\left(\frac{\hat{i}^4 + \hat{j}^4}{l}\right)$$

quand  $\hat{i} \ll 1$ ,  $\hat{j} \ll 1$ , et

$$U_{(ij),(is)} = O\left(\frac{\min(1, (\hat{i}^{-1} + \hat{j}^{-1}))}{l}\right)$$

en général;

– si  $s = |2i - j| > 0$ ,

$$U_{(ij),(is)} = \frac{1}{2l} \left( \frac{\sin(2iR_0)}{2i} - \frac{\sin((\hat{i} - \hat{j})R_0)}{\hat{i} - \hat{j}} \right) + O\left(\frac{1}{l^2}\right), \quad (2.33)$$

ce qui donne

$$U_{(ij),(is)} = \frac{R_0^3}{12l} (\hat{j} + \hat{i})(\hat{j} - 3\hat{i}) + O\left(\frac{\hat{i}^4 + \hat{j}^4}{l}\right)$$

quand  $\hat{i} \ll 1$ ,  $\hat{j} \ll 1$ , et

$$U_{(ij),(is)} = O\left(\frac{\min(1, (\hat{i}^{-1} + \hat{j}^{-1}))}{l}\right)$$

en général ;

– autrement

$$U_{(ij),(is)} = O\left(\frac{1}{l^2}\right). \quad (2.34)$$

*Remarque 2.2.13.* Dans le dernier cas (2.34), des expressions explicites peuvent être écrites en utilisant les Lemmes 2.2.6 et 2.2.7, mais ces expressions sont assez lourdes et on n'en aura pas besoin.

*Démonstration du lemme.* On étudie le numérateur  $\tilde{U}_{(ij),(is)}$  de la formule (1.88). On le développe selon (2.19) et on réécrit chaque terme comme  $\{\cdot, \cdot, \cdot, \cdot\}_D = \{\cdot, \cdot, \cdot, \cdot\}_{\mathcal{M}} - 2\{\cdot, \cdot, \cdot, \cdot\}_{\mathcal{R}}$  par la formule (2.24). On va se concentrer sur l'étude des termes  $\mathcal{M}$  comme le terme  $\mathcal{R}$  est estimé par (2.25) et rentre dans le terme de reste. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{(ij),(is)} &= \tilde{U}_{(ij),(is)}^{\mathcal{M}} - 2\tilde{U}_{(ij),(is)}^{\mathcal{R}}, \\ \tilde{U}_{(ij),(is)}^{\mathcal{M}} &= \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{i}, \hat{s}\}_{\mathcal{M}} - \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{s}, \hat{i}\}_{\mathcal{M}} - \{\hat{j}, \hat{i}, \hat{i}, \hat{s}\}_{\mathcal{M}} + \{\hat{j}, \hat{i}, \hat{s}, \hat{i}\}_{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

Par le Lemme 2.2.6, les quatre termes de type  $\mathcal{M}$  ci-dessus peuvent donner une contribution non nulle seulement si l'une des relations

$$2i \pm j \pm s = 0 \quad (2.35)$$

est vérifiée (les  $\pm$  dans cette formule sont indépendants), c'est-à-dire, comme les termes sont positifs, si

$$s = 2i + j \quad \text{ou} \quad s = |2i - j| > 0.$$

Supposons que  $s = 2i + j$ . Alors

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{(ij),(is)}^{\mathcal{M}} &= \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{i}, \hat{s}\}_{\mathcal{M}} - \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{s}, \hat{i}\}_{\mathcal{M}} - \{\hat{j}, \hat{i}, \hat{i}, \hat{s}\}_{\mathcal{M}} + \{\hat{j}, \hat{i}, \hat{s}, \hat{i}\}_{\mathcal{M}} \\ &= \frac{1}{8}[\hat{i}, \hat{j}, \hat{i}, -\hat{s}]_{\mathcal{M}} - \frac{1}{8}[\hat{i}, \hat{j}, -\hat{s}, \hat{i}]_{\mathcal{M}} - \frac{1}{8}[\hat{j}, \hat{i}, \hat{i}, -\hat{s}]_{\mathcal{M}} + \frac{1}{8}[\hat{j}, \hat{i}, -\hat{s}, \hat{i}]_{\mathcal{M}} \\ &= \frac{2l}{8} \left( \frac{\sin(2iR_0)}{2i} - \frac{\sin((\hat{i} - \hat{s})R_0)}{\hat{i} - \hat{s}} - \frac{\sin((\hat{j} + \hat{i})R_0)}{\hat{j} + \hat{i}} + \frac{\sin((\hat{j} - \hat{s})R_0)}{\hat{j} - \hat{s}} \right) \\ &= \frac{l}{2} \left( \frac{\sin(2iR_0)}{2i} - \frac{\sin((\hat{i} + \hat{j})R_0)}{\hat{i} + \hat{j}} \right). \end{aligned}$$

Ceci démontre (2.32). De même, si  $s = |j - 2i| > 0$ , alors

$$\tilde{U}_{(ij),(is)}^{\mathcal{M}} = \frac{l}{2} \left( \frac{\sin(2\hat{i}R_0)}{2\hat{i}} - \frac{\sin((\hat{j} - \hat{i})R_0)}{\hat{j} - \hat{i}} \right).$$

Ceci implique (2.33).

Finalement, si aucune relation de type (2.35) n'est vérifiée, tous les termes  $\{\cdot, \cdot, \cdot, \cdot\}_{\mathcal{M}}$  s'annulent et il ne reste que les termes de type  $\mathcal{R}$  qui peuvent être traités par (2.25).  $\square$

On traite maintenant le deuxième cas des pièces voisines.

**Lemme 2.2.14.** *Supposons que  $\psi_i$  est supportée dans une pièce de longueur  $l_1$  et que  $\psi_j$  et  $\psi_s$  sont supportées dans une pièce voisine de longueur  $l_2$ . Alors*

$$U_{(ij),(is)} = O\left(\frac{1}{l_1 l_2}\right). \quad (2.36)$$

*Démonstration.* L'égalité (2.36) est une application directe de (2.25).  $\square$

Il nous reste à comprendre ce qui se passe si les paires  $(ij)$  et  $(rs)$  sont complètement différentes : les indices  $i, j, r$  et  $s$  correspondent à quatre fonctions propres à une particule distinctes. Comme d'habitude, il y a deux possibilités : soit toutes les particules vivent dans le même sous-intervalle, soit elles vivent par paires dans deux pièces voisines. Ces deux cas sont traités dans les lemmes suivants.

**Lemme 2.2.15.** *Supposons que  $\psi_i, \psi_j, \psi_r$  et  $\psi_s$  sont supportées dans une seule et même pièce de longueur  $l$ . Alors*

– si une relation de type

$$i \pm j \pm r \pm s = 0 \quad (2.37)$$

est satisfaite, alors

$$U_{(ij),(rs)} = O\left(\frac{1}{l}\right), \quad (2.38)$$

par exemple, si  $i + j = r + s$ , alors

$$U_{(ij),(rs)} = \frac{1}{2l} \left( \frac{\sin((\hat{i} - \hat{r})R_0)}{\hat{i} - \hat{r}} - \frac{\sin((\hat{i} - \hat{s})R_0)}{\hat{i} - \hat{s}} \right) + O\left(\frac{1}{l^2}\right), \quad (2.39)$$

ce qui donne

$$U_{(ij),(rs)} = O\left(\frac{R_0^3}{l} \cdot (\hat{s} - \hat{r})(\hat{i} - \hat{j})\right)$$

si  $\hat{i} \ll 1, \hat{j} \ll 1$ ,

– sinon

$$U_{(ij),(rs)} = O\left(\frac{1}{l^2}\right). \quad (2.40)$$

*Remarque 2.2.16.* Des formules de type (2.39) peuvent être écrites de la même façon pour d'autres cas quand l'une des relations "résonantes" (2.37) est satisfaite.

*Démonstration du lemme.* Considérons le cas où  $i + j - r - s = 0$ . Suivant la stratégie des lemmes précédents, on calcule le terme principal :

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{(ij),(rs)}^{\mathcal{M}} &= \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{r}, \hat{s}\}_{\mathcal{M}} - \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{s}, \hat{r}\}_{\mathcal{M}} - \{\hat{j}, \hat{i}, \hat{r}, \hat{s}\}_{\mathcal{M}} + \{\hat{j}, \hat{i}, \hat{s}, \hat{r}\}_{\mathcal{M}} \\
&= \frac{1}{8}[\hat{i}, \hat{j}, -\hat{r}, -\hat{s}]_{\mathcal{M}} - \frac{1}{8}[\hat{i}, \hat{j}, -\hat{s}, -\hat{r}]_{\mathcal{M}} - \frac{1}{8}[\hat{j}, \hat{i}, -\hat{r}, -\hat{s}]_{\mathcal{M}} + \frac{1}{8}[\hat{j}, \hat{i}, -\hat{s}, -\hat{r}]_{\mathcal{M}} \\
&= \frac{l}{4} \left( \frac{\sin((\hat{i} - \hat{r})R_0)}{\hat{i} - \hat{r}} - \frac{\sin((\hat{i} - \hat{s})R_0)}{\hat{i} - \hat{s}} - \frac{\sin((\hat{j} - \hat{r})R_0)}{\hat{j} - \hat{r}} + \frac{\sin((\hat{j} - \hat{s})R_0)}{\hat{j} - \hat{s}} \right) \\
&= \frac{l}{2} \left( \frac{\sin((\hat{i} - \hat{r})R_0)}{\hat{i} - \hat{r}} - \frac{\sin((\hat{i} - \hat{s})R_0)}{\hat{i} - \hat{s}} \right),
\end{aligned}$$

ce qui démontre (2.39).  $\square$

**Lemme 2.2.17.** *Supposons que  $\psi_i, \psi_r$  sont supportées dans une pièce de longueur  $l_1$  et  $\psi_j, \psi_s$  dans une pièce voisine de longueur  $l_2$ . Alors*

$$U_{(ij),(rs)} = O\left(\frac{1}{l_1 l_2}\right). \quad (2.41)$$

*Démonstration.* L'égalité (2.41) est une application directe de (2.25).  $\square$

### 2.2.3 Interactions au fond du spectre

Dans cette sous-section, on applique des résultats précédents à l'estimation de  $\mathcal{E}(\rho, 0)$  l'énergie fondamentale par particule en présence des interactions. À la fin de cette sous-section, on montrera par un argument simple que l'état fondamental d'un système avec interactions est nécessairement différent de celui sans interactions en construisant une fonction test appropriée.

On calcule d'abord un élément diagonal  $W_{\alpha\alpha}$  pour un état  $\alpha$  "proche" de l'état fondamental. La démonstration de ce théorème est instructive également : dans la suite de la thèse, des résultats nontriviaux seront démontrés en utilisant les mêmes idées.

**Théorème 2.2.18.** *Soit  $\Psi_\alpha$  un état propre du système à  $n$  particules sans interactions tel que chaque particule de l'état  $\Psi_\alpha$  est d'énergie bornée par*

$$\tilde{E} = E_\rho(1 + \delta(\rho)), \quad (2.42)$$

où  $\delta(\rho) = o(\rho/\log \rho)$ . Alors l'élément diagonal de la matrice des interactions  $W$  sur cet état admet la limite thermodynamique :

$$\frac{\langle W \Psi_\alpha, \Psi_\alpha \rangle}{n \|\Psi_\alpha\|^2} = \frac{W_{\alpha\alpha}}{n} \rightarrow \frac{5R_0^3}{6\ell_\rho^3} \cdot \frac{\rho}{\mu} \cdot (1 + O(|\log \rho|^{-1})), \quad \Lambda \rightarrow \infty, n/|\Lambda| \rightarrow \rho > 0. \quad (2.43)$$

*Démonstration.* À l'énergie (2.42) correspond la longueur d'intervalle

$$\tilde{\ell} = \frac{\pi}{\sqrt{\tilde{E}}} = \ell_\rho(1 + \delta(\rho))^{-1/2} = \ell_\rho \left( 1 - \frac{1}{2}\delta(\rho) + O(\delta^2(\rho)) \right). \quad (2.44)$$



On ne s'intéresse qu'aux intervalles de longueur plus grande que  $\tilde{\ell}$ ; en effet les autres intervalles ne portent aucun état à une particule d'énergie inférieure à  $\tilde{E}$ . Les termes dans  $W_{\alpha\alpha}$  arrivent par deux façons : soit il y a au moins deux états dans la même pièce (dans ce cas là,  $U_{(ij),(ij)}$  est donné par le Lemme 2.2.9), soit il y a deux pièces voisines de longueur plus grande que  $\tilde{\ell}$  (voir le Lemme 2.2.11).

Dans la suite, on va montrer que ce sont les pièces qui possèdent exactement deux états, qui donne le terme principal dans (2.43). La démonstration s'appuie sur les deux idées suivantes.

Premièrement, la plupart des pièces de longueur au moins  $2\tilde{\ell}$  doivent être occupés par au moins deux états, parce que le nombre total des pièces (de longueur plus grande que  $\tilde{\ell}$ ) qui peuvent être occupés est seulement légèrement supérieur à  $n$  (c'est ici qu'on se sert de notre définition de la marge  $\delta(\rho)$ ).

Deuxièmement, parmi toutes les pièces plus grandes que  $2\tilde{\ell}$ , la majorité ont une longueur très proche de  $2\tilde{\ell}$ . Les autres pièces sont beaucoup moins nombreuses et, donc, donnent un terme de reste. D'autre part, les paires des pièce voisines de longueur environ  $\tilde{\ell}$  sont aussi nombreuses que les pièces de longueur environ  $2\tilde{\ell}$  (comparer les Propositions 2.1.3 et 2.1.7). Ainsi ces deux cas donnent les facteurs combinatoires du même ordre de grandeur. Néanmoins, l'amplitude des interactions entre des pièces voisines de longueur environ  $\tilde{\ell}$  est beaucoup plus petite que celle entre deux états au fond d'une pièce de longueur environ  $2\tilde{\ell}$  (voir les Lemmes 2.2.9 et 2.2.11).

En résumé, ce sont des pièces de longueur environ  $2\tilde{\ell}$  (voire, environ  $2\ell_\rho$ ) dont les deux états les plus bas contribuent le terme principal dans  $W_{\alpha\alpha}$ . La démonstration détaillée suit.

On fait d'abord l'observation suivante. Selon la formule exacte (2.17) pour la longueur de Fermi, on a :

$$e^{-\mu\ell_\rho} = \frac{\rho}{\mu}(1 + \rho/\mu)^{-1} \leq \frac{\rho}{\mu}.$$

On analyse ensuite ce à quoi ressemblent les états propres à  $n$  fermions sans interactions caractérisés par (2.42). L'état fondamental est caractérisé par le fait évident : on considère l'ensemble des pièces disponibles et on les remplit à partir des états les plus bas. Autrement, il est caractérisé par l'énergie  $E_n(L, 1, \omega)$ , c'est-à-dire, la  $n$ -ème énergie d'un système à une particule sur  $[0, L]$ . On rappelle que par le Lemme 1.3.13,

$$E_n(L, 1, \omega) \xrightarrow{\omega\text{-p.s.}} E_\rho \tag{2.45}$$

dans la limite thermodynamique. De plus, en considérant les conditions au bord de Dirichlet, et utilisant le fait que dans ce cas la densité d'états pré-limite est inférieure à la densité limite :  $N_L^D(E) \leq N(E)$ , on obtient que la convergence dans (2.45) se fait par au-dessus,  $E_n(L, 1, \omega) \geq E_\rho$  sous la condition que  $n/L$  converge vers  $\rho$  également par au-dessus,  $n/L \geq \rho$ . Donc, en particulier, les particules qui composent l'état fondamental occupent *tous* des niveaux d'énergie sous  $E_\rho$  ou, autrement, *toutes* les pièces de longueur plus grande que  $\ell_\rho$  sont occupés au moins jusqu'au niveau  $E_\rho$ .

On adopte le point de vue suivant : on regarde les états à  $n$  particules en les comparant à l'état fondamental à  $n$  particules. Notamment, un état plus élevé peut être considéré

comme étant fait à partir de l'état fondamental en déplaçant certain nombre des états à une particules vers des états avec l'énergie plus haute.

Calculons combien des niveaux énergétiques disponibles sont ajoutés quand on permet aux particules d'avoir des énergies bornées par  $\tilde{E}$  définie en (2.42). Les nouveaux niveaux d'énergie arrivent par le mécanisme suivant : une pièce avait exactement  $k - 1$  niveaux d'énergie sous  $E_\rho$  (en remplaçant  $E_n(L, 1)$  par  $E_\rho$ , on obtient une majoration sur le nombre des états qui sont ajoutés) et le  $k$ -ème niveau tombe entre  $E_\rho$  et  $\tilde{E}$  (il est possible que cet état ne soit pas le seul qui ait été ajouté dans cette pièce).

Par la Proposition 2.1.3, avec une probabilité plus grande que  $1 - e^{-L^\beta}$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} \# \left( \text{intervalles} \in [k\tilde{\ell}; k\ell_\rho] \right) &= \mu L \left( e^{-\mu k\tilde{\ell}} - e^{-\mu k\ell_\rho} \right) + O \left( L^{1/2+\beta} e^{-\mu k\tilde{\ell}/2} + L^{-\infty} \right) \\ &= \mu L e^{-\mu k\ell_\rho} \left( e^{kO(\ell_\rho\delta(\rho))} - 1 \right) \leq L\rho k \left( \frac{\rho}{\mu} \right)^{k-1} O(\ell_\rho\delta(\rho)) \quad (2.46) \\ &= L\rho \cdot k \left( \frac{\rho}{\mu} \right)^{k-1} \cdot o(\rho). \end{aligned}$$

Alors, on calcule

$$\#(\text{états ajoutés}) \leq L\rho \cdot o(\rho) \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} k \left( \frac{\rho}{p} \right)^{k-1} = L\rho \cdot o(\rho). \quad (2.47)$$

Remarquons, que le calcul précédent tient compte du fait qu'il peut arriver que certaines pièces ont plus de deux états entre  $E_\rho$  et  $\tilde{E}$ . La probabilité que (2.47) ne soit pas vrai est majorée par  $O \left( L e^{-L^\beta} \right)$  parce qu'il y a  $O(L)$  différents  $k$  dans (2.46).

D'autre part, regardons combien il y a des pièces avec au moins deux états. Avec une probabilité exponentiellement proche de 1, le nombre d'intervalles de longueur au moins  $2\tilde{\ell}$  est donné par :

$$\begin{aligned} \# \left( \text{intervalles} \geq 2\tilde{\ell} \right) &= pL e^{-p2\tilde{\ell}} + O \left( L^{1/2+\beta} e^{-p\tilde{\ell}} + L^{-\infty} \right) \\ &= pL \left( p^{-1}\rho(1 + \rho/p)^{-1} \right)^{2(1-\delta(\rho)/2+O(\delta^2(\rho)))} \quad (2.48) \\ &= L\rho \cdot \frac{\rho}{p} (1 + O(\rho)). \end{aligned}$$

Le comparaison de (2.47) avec (2.48) montre que, quand  $\rho$  est petit,

$$\# \left( \text{intervalles} \geq 2\tilde{\ell} \right) \gg \#(\text{états ajoutés}).$$

Ainsi, seule une petite partie des états qui se trouvent dans des pièces occupées par au moins deux particules peuvent être déplacés dans d'autres pièces (ou vers de nouveaux états dans la même pièce). Le nombre de ces états peut même être bien contrôlé en imposant une condition plus restrictive sur  $\delta(\rho)$ .

Comme nous l'avons indiqué au début de la démonstration, on s'intéresse aux intervalles de longueur supérieure à  $\tilde{\ell}$ . On les répartit dans les groupes suivants :

- Des pièces de longueur entre  $\tilde{\ell}$  et  $2\tilde{\ell}$  : ils peuvent contribuer dans  $W_{\alpha\alpha}$  seulement à travers l'interaction avec une pièce voisine suffisamment grande. Ce cas sera traité ultérieurement.
- Des pièces de longueur entre  $2\tilde{\ell}$  et  $2\ell_\rho + \Delta$  où  $\Delta = o(\ell_\rho)$  mais croît quand  $\rho$  tend vers zéro (il suffit de prendre  $\Delta = |\log \rho|^\beta$  avec  $\beta \in (0, 1)$ ) : ces pièces portent chacune au plus deux états (la plupart portent exactement deux états); elles donneront le terme principal.
- Des pièces de longueur entre  $2\ell_\rho + \Delta$  et  $3\tilde{\ell}$  : elles ne peuvent pas avoir plus de deux états mais elles sont beaucoup moins nombreuses que des pièces du groupe précédent.
- Pour  $k \geq 3$ , des pièces de longueur  $l \in [k\tilde{\ell}, (k+1)\tilde{\ell})$  apportent  $k$  états, mais sont encore moins nombreuses.

Considérons maintenant une pièce de longueur  $l \in [2\tilde{\ell}, 2\ell_\rho + \Delta]$  telle que  $\alpha$  possède exactement deux états dans ce sous-intervalle. Par (2.29) la contribution de cette pièce à l'interaction est

$$U_{(12),(12)} = \frac{5R_0^3}{6l^3} + O(R_0^5/l^5) = \frac{5R_0^3}{6\ell_\rho^3} + O\left(R_0^3\left(\frac{\delta(\rho)}{\ell_\rho^3} + \frac{\Delta}{\ell_\rho^4}\right)\right). \quad (2.49)$$

Plus généralement, supposons qu'une pièce de longueur  $l$  est remplie par  $m$  niveaux, du premier jusqu'au  $m$ -ème. Remarquons, que si l'énergie la plus haute est bornée par  $\tilde{E}$ , alors

$$\hat{m} = \frac{m}{l} = O\left(\tilde{E}^{1/2}\right) = O(\ell_\rho^{-1}).$$

Calculons la contribution de ce sous-intervalle à  $W_{\alpha\alpha}$ . En utilisant (2.28), on obtient :

$$\begin{aligned} W_{\alpha(l)\alpha(l)} &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m \left\{ \frac{R_0^3}{6l} (i^2 + j^2) + O\left(\frac{R_0^5}{l} (i^4 + j^4)\right) \right\} \\ &= \frac{R_0^3}{6l} \cdot \frac{(m-1)m(m+1)(2m+1)}{6l^2} + O\left(\frac{R_0^5 m^5}{l^5}\right) \\ &= (m-1) \cdot O(R_0^3 \ell_\rho^{-3}). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Il reste maintenant à calculer le nombre de pièces de chaque type. Premièrement, par la Proposition 2.1.3, avec une probabilité au moins égale à  $1 - e^{-L^\beta}$ , le nombre d'intervalles de longueur comprise entre  $2\tilde{\ell}$  et  $2\ell_\rho + \Delta$  est donné par :

$$\begin{aligned} \#(l \in [2\tilde{\ell}, 2\ell_\rho + \Delta)) &= \mu L \left( e^{-2\mu\tilde{\ell}} - e^{-\mu(2\ell_\rho + \Delta)} \right) + O\left(L^{1/2+\beta} e^{-\mu\tilde{\ell}} + L^{-\infty}\right) \\ &= \mu L e^{-2\mu\ell_\rho} \left( 1 + O(\delta(\rho)) - e^{-\mu\Delta} \right) + O(\dots) \\ &= L\rho \cdot \frac{\rho}{\mu} (1 + O(\rho)) \left( 1 + O(\delta(\rho)) - e^{-\mu\Delta} \right) + O(\dots) \\ &= L\rho \cdot \frac{\rho}{\mu} \cdot (1 + O(\rho)). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Nous avons déjà démontré que la plupart de ces pièces doivent être nécessairement occupées par exactement deux états (voir la formule (2.47)). De même, on a

$$\#(l \in [2\ell_\rho + \Delta, 3\tilde{\ell})) \leq \mu L e^{-\rho(2\ell_\rho + \Delta)} + O(\dots) = \#(l \in [2\tilde{\ell}, 2\ell_\rho + \Delta)) \cdot O(\ell_\rho^{-\infty}). \quad (2.52)$$

Ceci indique que la majorité des pièces avec deux états sont de longueur environ  $2\ell_\rho$ . Finalement, pour des pièces comportant  $k \geq 3$  états, on a :

$$\# \left( l \in [k\tilde{\ell}, (k+1)\tilde{\ell}) \right) = L\rho \cdot O(\rho^{k-1}). \quad (2.53)$$

La dernière (mais très importante) remarque, afin de sommer tous ces termes, consiste à dire que des interactions entre les pièces voisines ne vont influencer que le terme de reste. En effet, le nombre des pièces voisines de longueur proche de  $\ell_\rho$  chacun est du même ordre de grandeur que le nombre des pièces de longueur proche de  $2\ell_\rho$  (comparer les Propositions 2.1.3 et 2.1.7). Mais le terme d'interaction  $U_{(11)(11)}$  pour les voisins (où chaque "1" désigne le premier état dans sa pièce) à un facteur  $1/\ell_\rho$  par rapport à  $U_{(12)(12)}$  pour la même pièce. Les autres voisins sont encore moins nombreux et rentrent dans le terme de reste.

On rassemble les expressions pour les termes apportés par des pièces différentes (2.49), (2.50) avec les estimées sur le nombre de pièces des différents types (2.51), (2.52), (2.53) :

$$\begin{aligned} W_{\alpha\alpha} &= L\rho \cdot \frac{\rho}{\mu} \cdot (1 + O(\rho)) \left\{ \frac{5R_0^3}{6\ell_\rho^3} + O\left( R_0^3 \left( \frac{\delta(\rho)}{\ell_\rho^3} + \frac{\Delta}{\ell_\rho^4} \right) \right) \right\} + L\rho^2 \cdot O(\ell_\rho^{-\infty}) \cdot O(\ell_\rho^{-3}) \\ &+ \sum_{k \geq 3} L\rho \cdot O(\rho^{k-1}) \cdot (k-1) \cdot O(R_0^3 \ell_\rho^{-3}) + \{\text{termes d'interactions entre voisins}\} \\ &= L\rho \cdot \frac{\rho}{\mu} \cdot \frac{5R_0^3}{6\ell_\rho^3} (1 + O(\ell_\rho^{-1})), \end{aligned}$$

qui démontre (2.43). □

Par le principe variationnel, ce théorème nous permet de majorer l'énergie fondamentale par particule  $\mathcal{E}(\rho, 0)$  par rapport à celle du cas sans interactions  $\mathcal{E}^0(\rho, 0)$ .

**Corollaire 2.2.19.** *Il existe une constante  $C > 0$  et la densité  $\rho_0 > 0$  telles que pour  $\rho < \rho_0$ , on a :*

$$\mathcal{E}^0(\rho) \leq \mathcal{E}(\rho) \leq \mathcal{E}^0(\rho) + C\rho |\log \rho|^{-3}, \quad (2.54)$$

où  $\mathcal{E}^0(\rho)$  est l'énergie fondamentale par particule pour des fermions libres, qui peut être calculée par (1.84) et les formules exactes (2.13) pour la densité d'états intégrée  $N(E)$  et (2.16) pour l'énergie de Fermi  $E_\rho$ . En particulier, on a :

$$\mathcal{E}(\rho) = E_\rho - 2E_\rho^{3/2} + O(|\log \rho|^{-4}). \quad (2.55)$$

*Démonstration.* La minoration dans (2.54) est évidente parce que les interactions sont répulsives,  $U \geq 0$ ; donc, l'énergie fondamentale avec les interactions est supérieure ou égale à l'énergie fondamentale du problème libre :

$$E_1^0(L, n) \leq E_1(L, n, \omega).$$

Notons maintenant par  $\Psi_{\mathcal{U}} = \Psi_{\mathbb{N}_n}$  l'état fondamental d'un système de  $n$  fermions sans interaction. Cet état satisfait la condition (2.42), comme toutes les particules ont une énergie bornée par  $E_n(L, 1, \omega)$  qui tend presque sûrement vers l'énergie de Fermi  $E_\rho$ . Par

conséquent, le Théorème 2.2.18 est applicable; en utilisant le principe variationnel, on obtient :

$$\begin{aligned} \inf \text{Spec } H_\omega(L, n) &\leq \langle (H_\omega^0(L, n) + W_n)\Psi_{\mathcal{U}}, \Psi_{\mathcal{U}} \rangle \\ &= \inf \text{Spec } H_\omega^0(L, n) + W_{\mathcal{U}\mathcal{U}} \\ &= \inf \text{Spec } H_\omega^0(L, n) + n \cdot O(\rho \ell_\rho^{-3}), \end{aligned}$$

où dans la dernière égalité on a utilisé l'asymptotique (2.43). En divisant par  $n$  et en prenant la limite thermodynamique, on obtient la borne supérieure de (2.54).

Finalement, dans (2.55) on a simplement les deux premiers termes du développement de l'énergie par particule sans interactions en puissances de  $E_\rho$  : ceci suit directement de (1.84) et de l'asymptotique de Lifshitz (2.13). Remarquons que les interactions vont contribuer dans ce développement au plus à l'ordre infini en  $E_\rho$ , comme  $\rho$  est exponentiellement petit par rapport au  $E_\rho \asymp |\log \rho|^{-2}$ .  $\square$

Pour finir cette sous-section, on propose une configuration d'états à une particule (c'est-à-dire, répartition par pièces)  $\beta$  différente de la configuration de l'état fondamental sans interactions  $\mathcal{U} = \mathbb{N}_n$  telle que pour l'opérateur total on ait :

$$\langle \Psi_{\mathcal{U}}, (H^0 + W)\Psi_{\mathcal{U}} \rangle = \zeta_{\mathcal{U}} + W_{\mathcal{U}\mathcal{U}} > \zeta_\beta + W_{\beta\beta} = \langle \Psi_\beta, (H^0 + W)\Psi_\beta \rangle.$$

Autrement, on démontre que, peu importe la taille des interactions, dès qu'elles sont présentes, l'état fondamental va nécessairement changer par rapport à l'état fondamental d'un système sans interactions. On ne prétend pas que le nouvel état  $\beta$  qu'on construit dans la suite est l'état fondamental pour le hamiltonien avec interactions. Au contraire, on dit juste que c'est un état qui minimise l'énergie mieux que l'état fondamental sans interactions  $\mathcal{U}$ .

L'état fondamental  $\mathcal{U}$  consiste à remplir tous les pièces par les énergies les plus petites possibles. De cette manière, les pièces sont remplis jusqu'à à peu près l'énergie de Fermi  $E_\rho$  et les pièces les plus petites sont de longueur environ  $\ell_\rho \asymp |\log \rho|$ . De plus, il y a  $\asymp L\rho^2 \sim n\rho$  pièces avec deux états et plus. On remarque que la plupart de ces pièces sont de longueur environ  $2\ell_\rho$ .

Maintenant, on va construire un nouvel état  $\beta$ . On prend l'état fondamental sans interactions  $\mathcal{U}$  et on déplace certaines particules (sauf la première dans chaque pièce) qui sont dans des pièces avec plus d'une seule particule vers d'autres pièces. Alors on obtient l'état qui est reparti dans un plus grand nombre des pièces que  $\mathcal{U}$ . Bien sûr, en faisant ces déplacements, à chaque fois, on pose la particule déplacé dans la pièce la plus grande disponible parmi les pièces qui ne sont pas encore occupées par d'autres particules, le but étant de minimiser l'énergie.

La différence essentielle entre les énergies de  $\mathcal{U}$  et de  $\beta$  est que, dans  $\mathcal{U}$  il y a plus d'interactions entre les états à une particule mais les états eux-mêmes sont plus bas. Par contre, dans  $\beta$  il y a moins des interactions entre les états à une particule (on oublie les interactions entre des pièces voisines pour le moment, ceci sera traité ultérieurement) mais les états sont plus élevés.

Pour estimer cette différence, il suffit de comprendre comment l'énergie change quand on déplace l'état excité dans une pièce de longueur environ  $2\ell_\rho$  vers un autre sous-intervalle qui n'était pas occupé avant.

Évidemment, l'interaction dans un tel sous-intervalle contribue

$$U_{(12),(12)} \asymp R_0^3 \ell_\rho^{-3}, \quad (2.56)$$

où les indices 1 et 2 désignent le premier (dont la particule reste sur ce niveau) et le deuxième (dont on déplace la particule) niveau énergétique.

On va maintenant estimer la variation d'énergie due au déplacement d'un état excité vers une pièce plus petite. Considérons les pièces de longueur  $l \in [2\ell_\rho, 2\ell_\rho + A]$ , où on va prendre des particules pour nos déplacements. Le nombre de ces pièces est donné par :

$$\sharp(l \in [2\ell_\rho, 2\ell_\rho + A]) \sim \mu L e^{-2\mu\ell_\rho} (1 - e^{-\mu A}) \asymp n\rho (1 - e^{-\mu A}). \quad (2.57)$$

Il est facile de calculer que le deuxième niveau dans une telle pièce vérifie :

$$E_2 \geq E_\rho \left(1 - \frac{A}{2\ell_\rho}\right). \quad (2.58)$$

De même, on considère les pièces vers lesquelles on déplace des particules :

$$\sharp(l \in [\ell_\rho - B, \ell_\rho]) \sim n(1 - e^{-\mu B}), \quad (2.59)$$

et le premier niveau dans une telle pièce vérifie :

$$E_1 \leq E_\rho \left(1 + \frac{B}{\ell_\rho}\right). \quad (2.60)$$

Par conséquent, en rassemblant (2.58) et (2.60), on obtient que la différence des énergies est d'ordre :

$$E_\rho \ell_\rho^{-1} (A + B) \asymp \ell_\rho^{-3} (A + B).$$

En faisant le comparaiso de cette formule avec (2.56), on déduit qu'il suffit de prendre  $A \asymp \text{const}$ , suffisamment petite,  $B \asymp \rho$  (le nombre des états retiré de ces positions initiales doit être égal au nombre des nouveaux niveaux qu'on occupe : comparez (2.57) et (2.59)). Ce choix garantit que l'énergie totale est diminuée. Entre autre, cela implique par (2.57), qu'on déplace un nombre macroscopique (c'est-à-dire, proportionnel à  $n$ ) de particules hors des pièces avec au moins deux états.

Finalement, on doit tenir compte des interactions entre les pièces voisines (le nombre de ces interactions pourrait augmenter à cause de notre modification de la configuration de particules). Mais comme seulement environ  $n\rho$  nouvelles pièces étaient occupées par des particules, il y a au plus d'ordre  $n\rho$  interactions significatives (c'est-à-dire, entre deux pièces de longueur au moins  $\ell_\rho$ ) qui pourraient émerger. Chacune de ces interactions contribue  $O(\ell_\rho^{-4})$  qui rentre dans le terme de reste par l'argument ci-dessus. Ceci finit la construction du nouvel état  $\beta$ .

On voit clairement que l'état fondamental sans interactions n'est plus l'état fondamental si on allume les interactions. Remarquons que  $\mathcal{U}$  et  $\beta$  diffèrent par  $nO(\rho)$  états à une particule, qui fait une partie petite mais macroscopique de l'ensemble de toutes les  $n$  particules.

Malheureusement, cette analyse ne dit pas directement qui est l'état fondamental, mais propose un candidat (qui est meilleur que l'état fondamental du problème non perturbé). Il est raisonnable de penser que la construction décrite ci-dessus est relativement proche du vrai mécanisme de formation de l'état fondamental dans le système avec les interactions.

## 2.3 Décomposition par occupation

Dans cette section, on approfondit l'étude de la structure de la matrice des interactions  $W_n$  dans la base des fonctions propres  $\{\Psi_\alpha\}_\alpha$  (voir (1.79)) du hamiltonien sans interactions  $H^0$ . Cette étude a débuté par le Théorème 1.3.16 et le Corollaire 2.2.3, où on a décrit des conditions nécessaires pour qu'un élément  $W_{\alpha\beta}$  soit différent de zéro. Dans cette section, on développe ces idées. Remarquons, qu'en un certain sens, les résultats de la présente section sont implicitement contenus dans le Théorème 1.3.16. Ces résultats sont cruciaux dans la suite pour l'estimation du terme d'erreur (2.73) dans la Section 2.4 et pour l'analyse de la fonction d'autocorrélation pour l'état fondamental dans la Section 2.6. Cela donne aussi une idée de la structure de l'état fondamental pour le hamiltonien total  $H^0 + W$ .

Introduisons la notion clé de cette section.

**Définition 2.3.1.** Soit  $\omega$  une configuration de murs fixée et soit  $\Psi_\alpha \in \mathfrak{H}^n$  une fonction propre du hamiltonien non perturbé  $H^0$ , où comme d'habitude,  $\alpha \subset \mathbb{N}$ ,  $\text{card } \alpha = n$ , est l'indice à  $n$  fermions. L'occupation correspondante à  $\Psi_\alpha$  est la suite des nombres de particules que  $\Psi_\alpha$  met dans chaque pièce définie par  $\omega$ . Formellement, si  $\{\Delta_j(\omega)\}_{j \in \{1, \dots, m(\omega)\}}$ , sont des pièces,  $\bigcup_{j=1}^m \Delta_j = [0, L]$  et  $\Delta_j \cap \Delta_k = \emptyset$  pour  $j \neq k$ , alors la suite des nombres d'occupation  $Q_\omega(\alpha) = (q_1^\omega(\alpha), \dots, q_m^\omega(\alpha))$  est définie par

$$q_j(\alpha) = \text{card} \{k \in \alpha : \text{supp } \psi_k = \Delta_j\}.$$

*Remarque 2.3.2.* Ainsi, une occupation  $Q$  est juste un multiindice de longueur  $m$  et de module  $n$ .

*Remarque 2.3.3.* Selon la Remarque 2.2.1, les niveaux du hamiltonien à une particule sont simples avec la probabilité une. Ceci est crucial pour la Définition 2.3.1.

**Lemme 2.3.4** (décomposition par occupation). *Soit  $\omega$  fixé et soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux indices à  $n$  fermions. Si ses occupations sont différentes, alors les états à  $n$  particules correspondants n'interagissent pas :*

$$Q(\alpha) \neq Q(\beta) \Rightarrow W_{\alpha\beta} = 0.$$

*Démonstration.* Le lemme est un corollaire direct du Théorème 1.3.16. Il peut également être démontré par l'argument direct suivant.

Si  $\alpha$  et  $\beta$  ont des occupations différentes, ceci implique que les supports de  $\Psi(\alpha)$  et  $\Psi(\beta)$  dans  $\Lambda^n$  ne se rencontrent qu'en un ensemble de mesure nulle parce que ces supports sont des symétrisations des collections différents des pièces (avec des répétitions pour des pièces qui sont occupées plus d'une seule fois) :

$$Q(\alpha) \neq Q(\beta) \Rightarrow \text{mes}(\text{supp } \Psi(\alpha) \cap \text{supp } \Psi(\beta)) = 0.$$

Or, ceci implique que  $\Psi(\alpha) \cdot \Psi(\beta) = 0$  comme un élément de  $L^2(\Lambda^n)$ . Alors, évidemment, par la définition des éléments matriciels (1.69) :

$$W_{\alpha\beta} = c \int_{\Lambda^n} W_n(\mathbf{x}) \Psi_\alpha(\mathbf{x}) \Psi_\beta^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0,$$

comme on intègre la fonction nulle. La constante  $c$  est un facteur de normalisation qui n'est pas important ici.  $\square$

**Définition 2.3.5.** Soit  $\omega$  fixé et supposons qu'il y a  $m = m(\omega)$  pièces. Pour une occupation  $Q \in \mathbb{N}_0^m$ ,  $\sum_{j=1}^m Q_j = n$ , on définit le *sous-espace d'occupation constante* correspondant,  $\mathfrak{H}_Q \subset \mathfrak{H}^n$ , comme le sous-espace engendré par toutes les fonctions propres  $\Psi_\alpha$  d'occupation  $Q$  :

$$\mathfrak{H}_Q = \text{Span}\{\Psi_\alpha \in \text{Dom}(H) \text{ telle que } Q(\alpha) = Q\}.$$

**Corollaire 2.3.6.** Dans le cadre de la Définition 2.3.5, les sous-espaces  $\mathfrak{H}_Q$  sont invariants sous l'action du hamiltonien total  $H = H^0 + W$  :

$$H\mathfrak{H}_Q \subset \mathfrak{H}_Q, \quad (2.61)$$

et l'espace de Hilbert à  $n$  fermions est décomposé en somme orthogonale :

$$\mathfrak{H}^n = \bigoplus_{Q \in \mathbb{N}_0^m, \sum_{j=1}^m Q_j = n}^\perp \mathfrak{H}_Q. \quad (2.62)$$

*Démonstration.* L'invariance (2.61) suit directement du Lemme 2.3.4, parce que la partie libre  $H^0$  est diagonale dans la base des fonctions  $\{\Psi_\alpha\}_\alpha$  et que  $W_n$  a une structure par blocs selon ce lemme. La décomposition (2.62) vient alors du fait que les sous-espaces  $\mathfrak{H}_Q$  sont engendrés par des vecteurs distincts de la base orthonormée.  $\square$

*Remarque 2.3.7.* Le Corollaire 2.3.6 signifie que le hamiltonien  $H$  est partiellement diagonalisé dans la base des fonctions propres de  $H^0$ , c.-à-d., sa représentation matricielle dans cette base a une structure par blocs qui correspond aux sous-espaces d'occupation constante  $\mathfrak{H}_Q$ .

Finalement, en utilisant la notion d'occupation et, plus précisément, par le Corollaire 2.3.6, on trouve que le hamiltonien total  $H$  est décomposé selon (2.62) dans la somme directe de ses parties  $H_Q$  sur les sous-espaces d'occupation constante :

$$H = \bigoplus_{Q \in \mathbb{N}_0^m, \sum_{j=1}^m Q_j = n} H_Q, \quad (2.63)$$

où  $H_Q = H|_{\mathfrak{H}_Q}$ . Remarquons que tous les termes de cette décomposition ainsi que le nombre des pièces  $m$  dépendent du paramètre aléatoire  $\omega$ , c.-à-d., de la configuration des murs.

Des résultats de cette section sont essentiellement dus à notre choix très spécifique pour l'opérateur à une particule  $H_\omega(L, 1)$  (voir la sous-section 2.1.1), qui admet une décomposition en somme directe d'opérateurs de Laplace avec des conditions au bord de Dirichlet sur chaque pièce. L'invariance (2.61) est l'héritage du fait que des fonctions propres à une particule valent exactement zéro en dehors de ses "clairières". En visant généraliser cet argument aux modèles plus élaborés (le modèle d'Anderson (1.6), par exemple), il faut tenir compte du fait que les fonctions propres d'un opérateur à une particule essentiellement supportées sur des clairières différentes peuvent interagir (exponentiellement faible dans le cas de localisation forte, par exemple). Alors, l'opérateur à  $n$  fermions avec interactions,  $H_\omega(\Lambda, n)$ , dans la représentation des fonctions propres du hamiltonien libre, aura la structure par blocs (correspondants à peu près à nos sous-espace d'occupation constante) plus des éléments hors de ces blocs qui seront exponentiellement petits.



## 2.4 Séparation des états excités

Dans cette section, on continue le développement de la théorie des perturbations pour l'opérateur  $H = H^0 + tW$  qui a été introduit dans la Section 1.3 et, en particulier, dans la sous-section 1.3.1. On veut montrer que l'état fondamental d'un système avec interactions ressemble à l'état fondamental sans interactions dans un certain sens lorsque la densité de particules  $\rho$  est faible. Plus précisément, on verra que les états à  $n$  fermions qui sont "suffisamment excités" interviennent d'une façon négligeable dans la série de Rayleigh-Schrödinger (voir équations (1.64) – (1.67)) pour les états en bas du spectre.

L'idée de base est de soustraire un sous-espace dans  $\mathfrak{H}^n$  des fonctions à  $n$  fermions qui ressemblent à l'état fondamental  $\Psi_{\mathcal{U}}$  de  $H^0$  et qui, comme on le pense, jouent le rôle dominant dans la formation de l'état fondamental du hamiltonien total  $H$ .

L'analyse liée au Théorème 2.2.18 et aux remarques qui le suivent, donne l'image suivant de l'état fondamental sans interactions. Toutes les particules ont une énergie presque bornée par l'énergie de Fermi  $E_\rho$  (en réalité, par  $E_n(L, 1, \omega)$  qui tend vers  $E_\rho$  presque sûrement), la majorité de ces particules occupent les pièces de longueur environ  $\ell_\rho \asymp |\log \rho|^{-2}$ , et les interactions sont principalement assurées par les particules qui vivent par paires sur les deux premiers niveaux dans les pièces de longueur environ  $2\ell_\rho$  et qui sont environ du nombre de  $n\rho/\mu$ . Cela suggère la définition suivante.

**Définition 2.4.1.** Fixons les paramètres suivants :

- (a)  $h(\rho)$  pour contrôler le décalage relatif de l'énergie d'une particule par rapport au niveau de référence  $E_\rho$ ,
- (b)  $A(\rho)$  pour contrôler le nombre relatif (par rapport à  $n$ ) de particules qu'on ne contrôle pas,
- (c)  $B$  pour contrôler le nombre relatif (par rapport à  $n\rho$ ) des paires de particules qui interagissent.

$A(\rho)$  et  $h(\rho)$  sont supposés petits pour  $\rho$  petit, et  $B$  est une constante. On dit que l'état propre de  $H^0$ ,  $\Psi_\alpha$ , appartient à  $\mathfrak{H}^-$  si et seulement si dans cet état,

- au plus  $M = [nA(\rho)]$  particules ont une énergie supérieure à

$$\tilde{E} = E_\rho(1 + h(\rho)),$$

- il n'y a pas plus de

$$S = [Bn\rho]$$

– paires de particules qui interagissent.

On note  $\mathfrak{H}^-$  le sous-espace de  $\mathfrak{H}^n$  engendré par les états propres qui vérifient le critère ci-dessus. Formellement,

$$\mathfrak{H}^- = \text{Span} \left\{ \Psi_\alpha \text{ t.q. } \text{card}\{k \in \alpha \mid \langle \psi_k, H_\omega(L, 1)\psi_k \rangle > \tilde{E} \|\psi_k\|^2\} \leq nA(\rho) \right. \\ \left. \text{et } \text{card}\{(i, j) \in \alpha^2, i < j \mid U_{(ij), (ij)} > 0\} \leq Bn\rho \right\}.$$

On décompose maintenant l'espace de Hilbert à  $n$  fermions en somme directe de la partie "basse" et la partie "haute" :

$$\mathfrak{H}^n = \mathfrak{H}^- \oplus \mathfrak{H}^+, \quad (2.64)$$

où  $\mathfrak{H}^-$  est défini dans la Définition 2.4.1 et  $\mathfrak{H}^+$  est son complément orthogonal.

L'idée de cette décomposition est de garder dans  $\mathfrak{H}^-$  les états qui peuvent avoir une influence importante (dans le sens où les coefficients de la série de perturbations sont plus grands) sur la composition de l'état fondamental de l'opérateur avec interactions et de jeter dans  $\mathfrak{H}^+$  tous les états qui sont suffisamment excités.

Sous la décomposition (2.64), l'opérateur sans interactions  $H^0$  se décompose également en somme directe :

$$H^0 = H^- \oplus H^+,$$

parce que  $\mathfrak{H}^\pm$  sont engendrés par des vecteurs propres de  $H^0$  et, donc, sont des espaces propres. Suivant la décomposition orthogonale (2.64), on va adopter la notation suivante :

$$H\Psi = (H^0 + W)\Psi = \begin{pmatrix} H^- + W^{--} & W^{-+} \\ W^{+-} & H^+ + W^{++} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^- \\ \Psi^+ \end{pmatrix}.$$

Alors, sous la condition que  $\zeta \notin \text{Spec}(H^+ + W^{++})$ , le problème spectral  $H\Omega = \zeta\Omega$  se réécrit comme un autre problème spectral sur la partie "basse" de  $\Psi$  :

$$(H^- + W^{--} - \zeta - W^{-+}(H^+ + W^{++} - \zeta)^{-1}W^{+-})\Psi^- = 0, \quad (2.65)$$

et la partie "haute" est rétablit par la relation :

$$\Psi^+ = -(H^+ + W^{++} - \zeta)^{-1}W^{+-}\Psi^-. \quad (2.66)$$

Dans la suite, on veut montrer que les solutions du problème spectral (2.65) sont bien approchées par des solutions du problème simplifié :

$$(H^- + W^{--} - \zeta)\Psi^- = 0. \quad (2.67)$$

Ce dernier est avantageux au sens qu'on se restreint au sous-espace  $\mathfrak{H}^-$ , où la description des éléments de  $W^{--}$  est plus facile que dans  $\mathfrak{H}^n$ . Par exemple, par le Théorème 2.2.18, on sait déjà que certains éléments diagonaux sont d'ordre  $n\rho R_0^3\ell_\rho^{-3}$ .

Tout d'abord, on veut que la résolvante  $(H^+ + W^{++} - \zeta)^{-1}$  existe pour des valeurs de  $\zeta$  proches de l'état fondamental. Comme on s'intéresse premièrement à ce qui se passe en bas du spectre de l'opérateur  $H$ , il faut qu'on puisse correctement écrire (2.65) et passer à (2.67), y compris pouvoir définir la résolvante de la partie "haute", pour  $\zeta$  au voisinage de l'énergie fondamentale de  $H$ . Pour répondre à cette question, on établit premièrement le lemme suivant qui donne une majoration sur l'énergie fondamentale du hamiltonien total  $H$ .

**Lemme 2.4.2.** *Il existe une constante  $C_1$  positive telle que*

$$\max(\inf \text{Spec } H, \inf \text{Spec } (H^- + W^{--})) \leq \inf \text{Spec } H^- + C_1 n \rho \ell_\rho^{-3}. \quad (2.68)$$

Remarque 2.4.3.

$$\inf \text{Spec } H^0 = \inf \text{Spec } H^-.$$

*Démonstration du lemme.* L'énoncé du lemme a été démontré dans le Corollaire 2.2.19. Il suffit de prendre pour fonction test  $\Psi_{\mathcal{U}}$ , l'état fondamental de  $H^0$ , et d'utiliser le principe variationnel. Il reste à remarquer que  $\Psi_{\mathcal{U}} \in \mathfrak{H}^-$ .  $\square$

Deuxièmement, on va trouver où commence le spectre de la partie "haute"  $H^+ + W^{++}$ . Comme les interactions sont répulsives,  $W^{++} \geq 0$ , on a :

$$\inf \text{Spec}(H^+ + W^{++}) \geq \inf \text{Spec } H^+,$$

et on sépare  $H^+$  du fond de spectre de  $H^0$  à l'aide de proposition suivante qui explique, entre autre, dans quel sens les états de  $H^+$  sont excités.

**Proposition 2.4.4.** *Soit  $\Psi \in \mathfrak{H}^+$  un état propre de  $H^0$ . Alors, pour tout  $C_2 > 0$  il existe  $h(\rho)$ ,  $A(\rho)$  et  $B$  telles que*

$$\frac{\langle \Psi, H^0 \Psi \rangle}{\|\Psi\|^2} \geq \inf \text{Spec } H^- + C_2 n \rho \ell_\rho^{-3}. \quad (2.69)$$

*Démonstration.* Pour que l'état propre  $\Psi$  soit dans  $\mathfrak{H}^+$ , on doit violer une des deux conditions qui décrivent  $\mathfrak{H}^-$  :

- soit il y a plus que  $M = [nA(\rho)]$  particules avec l'énergie plus grande que  $\tilde{E} = E_\rho(1 + h(\rho))$ ,
- soit il y a plus que  $S = [Bn\rho]$  paires de particules en interaction.

Dans le premier cas, chaque particule "non contrôlée" par l'énergie  $\tilde{E}$  apporte un supplément d'énergie d'au moins  $E_\rho h(\rho)$  par rapport à une particule dans l'état fondamental de  $H^-$ . Donc, il suffit de demander

$$nA(\rho)E_\rho h(\rho) > Cn\rho\ell_\rho^{-3},$$

qui est équivalent à

$$A(\rho)h(\rho) > \tilde{C}\rho\ell_\rho^{-1}. \quad (2.70)$$

Dans le deuxième cas, il y a plus de  $Bn\rho$  paires de particules interagissant. Expliquons d'abord l'idée de base. Sous le niveau  $E_\rho$ , il y a seulement d'ordre  $n\rho$  interactions en tout. Si  $B$  est suffisamment grand, pour que ces particules créent  $Bn\rho$  interactions, elles doivent nécessairement occuper beaucoup de positions plus hautes ( $\approx E_\rho(1 + \delta\ell_\rho^{-1})$ ) que l'énergie de Fermi  $E_\rho$  : ceci va donner l'excès d'énergie. La démonstration plus détaillée suit.

On va compter ici seulement les interactions dans la même pièce : les interactions entre les voisins sont traitées de la même manière avec une seule différence : ce sont les premiers niveaux dans des pièces voisines (et pas les deuxièmes comme pour le cas des interactions dans une même pièce) qui donnent le surplus d'énergie ; la complexité combinatoire reste la même (comparer les Propositions 2.1.3 et 2.1.7).

Dans la suite, on adopte la stratégie suivante : on va essayer de minimiser le plus possible l'énergie totale sur l'ensemble des configurations de particules de nombre d'interactions fixé. Néanmoins, on va montrer que le nombre d'interactions linéaire en  $n\rho$  peut

être suffisant (même en minimisant l'énergie sur toutes les configurations de particules) pour accumuler un surplus d'énergie d'ordre  $n\rho\ell_\rho^{-3}$  par rapport à l'énergie fondamentale de l'opérateur sans interactions.

On introduit deux constantes  $\Delta > \delta > 0$ , qu'on fixera plus loin. On divise toutes les pièces disponibles en groupes selon la longueur  $l$  :

- si  $l < 2\ell_\rho - \Delta$  : on verra que les pièces de ce groupe sont trop petites et ne portent aucune interaction dans les configurations de particules qui minimise l'énergie pour un nombre d'interactions d'ordre  $n\rho$ ,
- si  $l \in [2\ell_\rho - \Delta, 2\ell_\rho - \delta)$  : les pièces de ce groupe vont porter la majorité des interactions,
- si  $l \in [2\ell_\rho - \delta, 3\ell_\rho)$  et  $l \in [k\ell_\rho, (k+1)\ell_\rho)$  pour  $k \geq 3$  : ces pièces sont très peu nombreuses et en même temps pas suffisamment grandes pour accumuler beaucoup d'interactions sans avoir énormément augmenté l'énergie totale.

On fait aussi l'observation suivante. Considérons une pièce de longueur  $l$  contenant  $m$  particules. Pour minimiser l'énergie, il faut mettre toutes les particules dans les niveaux les plus bas possibles : supposons qu'elles occupent les niveaux de 1 jusqu'à  $m$ . Alors, l'énergie totale apportée par cette pièce est

$$E_1(l) + \dots + E_m(l) = \sum_{j=1}^m \frac{j^2\pi^2}{l^2} = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \asymp m^3 l^{-2},$$

et le nombre d'interactions est  $m(m-1)/2 \asymp m^2$ .

Ensuite, s'il y a  $q$  pièces de longueur  $l$  avec des occupations  $m_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , ces pièces tous ensemble apportent une énergie d'ordre  $\sum_{j=1}^q m_j^3 l^{-2}$  et des interactions au nombre d'ordre de  $\sum_{j=1}^q m_j^2$ . Si on se pose le problème de la minimisation de l'énergie en fixant le nombre des interactions ou (ce qui est équivalent) de la maximisation du nombre des interactions en fixant l'énergie, on voit que pour optimiser, il faut répartir les particules d'une façon équilibrée entre les pièces :

$$m_1 = m_2 = \dots = m_q.$$

Considérons maintenant des pièces de longueur  $l \in [k\ell_\rho, (k+1)\ell_\rho)$  avec  $k \geq 3$ . Le nombre de ces pièces est donné par la Proposition 2.1.3 :

$$\sharp(l \in [k\ell_\rho, (k+1)\ell_\rho)) = n(\mu\rho)^{k-1} (1 + O(\rho)).$$

On va diminuer l'énergie en supposant que chaque pièce de ce groupe a la longueur  $l = (k+1)\ell_\rho$ . Par l'observation précédente on voit, qu'il est énergétiquement plus avantageux de répartir les particules d'une façon équilibrée entre les pièces.

Ensuite, on remarque, que chaque particule qui occupe dans sa pièce un niveau  $j$  plus haut que  $2k$ , apporte un surplus d'énergie proportionnel à  $j\ell_\rho^{-2}$  (la constante ne dépend ni de  $k$  ni de  $j$ ) et  $j-1$  interactions avec des niveaux plus bas. Cela veut dire que cette particule apporte en moyenne un surplus d'énergie proportionnel à  $\ell_\rho^{-2}$  par interaction qu'elle crée.

À part ces particules, il reste des particules sous le niveau numéro  $2k$ , qui apportent de l'ordre de  $n\rho^{k-1}k^2$  interactions. En sommant sur  $k \geq 3$ , ensemble ces particules créent

seulement de l'ordre de  $n\rho^2$  interactions. Donc, si on met suffisamment de particules dans des pièces plus grandes que  $3\ell_\rho$ , de façon qu'il y ait de l'ordre de  $n\rho$  interactions, la plupart de ces particules vont apporter l'ordre de  $\ell_\rho^{-2}$  de surplus d'énergie; tout cela ensemble, donnera un surplus d'énergie de l'ordre de  $n\rho\ell_\rho^{-2} \gg Cn\rho\ell_\rho^{-3}$  pour une constante  $C$  arbitraire si  $\rho$  est assez petit.

En ce qui concerne des pièces de longueur  $l \in [2\ell_\rho - \delta, 3\ell_\rho)$ , l'analyse est identique à l'analyse pour des pièces plus grandes à quelques modifications près. Plus précisément, le nombre de ces pièces est donné par :

$$\sharp(l \in [2\ell_\rho - \delta, 3\ell_\rho)) = \mu^{-1}n\rho e^{\mu\delta}(1 + O(\rho)).$$

Chacun de ces pièces génère les niveaux d'énergie  $\frac{\pi^2}{9\ell_\rho^2}, \frac{4\pi^2}{9\ell_\rho^2}, \frac{\pi^2}{\ell_\rho^2}, \frac{16\pi^2}{9\ell_\rho^2}, \dots$ . Il est facile à voir qu'à partir du quatrième niveau, le surplus d'énergie par rapport à l'énergie de Fermi  $E_\rho = \frac{\pi^2}{\ell_\rho^2}$  par interaction est aussi de l'ordre  $\ell_\rho^{-2}$ .

Finalement, on considère des pièces de longueur  $l \in [2\ell_\rho - \Delta, 2\ell_\rho - \delta)$ . Si une telle pièce a au moins une interaction, cela veut dire qu'au moins le deuxième niveau est occupé. On remarque que pour le deuxième niveau :

$$E_2(l) \geq E_2(2\ell_\rho - \delta) = \frac{4\pi^2}{(2\ell_\rho - \delta)^2} = E_\rho \left( 1 + \frac{\delta}{2\ell_\rho} + O(\ell_\rho^{-2}) \right).$$

Le nombre de ces pièces est donné par approximativement  $n\rho e^{\mu\Delta}$ . Il suffit maintenant de choisir  $\Delta$  et  $\delta$  tels que

$$e^{\mu\Delta}\delta > C,$$

où la constante  $C$  est linéaire en fonction de la constante  $C_2$  de l'énoncé de la Proposition 2.4.4, et on pose  $B = e^{\mu\Delta}$ . L'analyse précédente montre qu'avec ce choix de  $B$ , on aura toujours suffisamment de surplus d'énergie pour obtenir (2.69).  $\square$

Ainsi, si on veut minorer la distance entre la partie dite "haute" et l'énergie fondamentale, dans la Proposition 2.4.4, il suffit de choisir la constante de façon que  $C_2 > C_1$  du Lemme 2.4.2. Ceci garantit :

$$\inf \text{Spec } H^+ \geq \inf \text{Spec}(H^- + W^{--}) + (C_2 - C_1)n\rho\ell_\rho^{-3}, \quad (2.71)$$

et que les résolvantes  $(H^+ + W^{++} - \zeta)^{-1}$  et  $(H^+ - \zeta)^{-1}$  sont bien définies et bornées pour

$$\zeta < \inf \text{Spec } H^- + C_1n\rho\ell_\rho^{-3}. \quad (2.72)$$

Dans la suite, on va supposer que  $\zeta$  satisfait la condition (2.72).

Bien que les objets soient correctement définis, pour passer de (2.65) à (2.67), on doit estimer la norme :

$$\|W^{-+}(H^+ + W^{++} - \zeta)^{-1}W^{+-}\|. \quad (2.73)$$

En utilisant encore une fois que les interactions sont répulsives,  $W^{++} \geq 0$ , on sait que

$$(H^+ + W^{++} - \zeta)^{-1} \leq (H^+ - \zeta)^{-1}.$$

Comme  $W^{-+} = (W^{+-})^*$ , on a

$$W^{-+}(H^+ + W^{++} - \zeta)^{-1}W^{+-} \leq W^{-+}(H^+ - \zeta)^{-1}W^{+-}. \quad (2.74)$$

On va estimer la norme de la partie de droite.

Pour les arguments qui suivent, la décomposition par occupation (voir la Section 2.3) du hamiltonien total  $H$  est l'ingrédient essentiel.

**Notation 2.4.5.** Si  $\alpha \subset \mathbb{N}$ ,  $|\alpha| = n$ , est un multiindice qui décrit un état à  $n$  particules, on utilisera la notation  $\alpha \in +$  (respectivement  $\alpha \in -$ ) pour dire que  $\Psi_\alpha \in \mathfrak{H}^+$  (respectivement  $\Psi_\alpha \in \mathfrak{H}^-$ ).

Grâce au Lemme 2.3.4 et au Corollaire 2.3.6, on va étudier plus attentivement les éléments matriciels  $W_{\alpha\beta}^{-+}$  avec  $\alpha \in -$ ,  $\beta \in +$ . Par le Corollaire 2.2.3,  $W_{\alpha\beta}^{-+}$  est différent de zéro seulement si  $|\alpha \setminus \beta| \in \{1, 2\}$ . Comme l'opérateur  $W$  préserve l'occupation, on a  $Q(\alpha) = Q(\beta)$ . D'autre part,  $\alpha$  décrit un état avec au plus  $M = [nA(\rho)]$  particules d'énergie supérieure à  $\tilde{E}$  et au plus  $S = [Bn\rho]$  interactions;  $\beta$  doit violer l'un de ces deux critères. Mais comme  $\alpha$  et  $\beta$  ont la même occupation, ceci implique nécessairement qu'ils ont le même nombre d'interactions.

Donc c'est la première condition qui est violée pour  $\beta$  (et non la deuxième). Alors  $\beta$  caractérise un état à  $n$  particules avec pas plus de  $S$  interactions et plus de  $M + 1$  particules d'énergie supérieure à  $\tilde{E}$ . Finalement, comme  $\alpha$  et  $\beta$  diffèrent d'au maximum deux particules, dans  $\alpha$ , il y a au moins  $M - 1$  particules d'énergie plus grande que  $\tilde{E}$ .

**Notation 2.4.6.** On note

- (a) par  $\tilde{P}_-$  le projecteur orthogonal sur le sous-espace de  $\mathfrak{H}^-$  engendré par les états propres de  $H^0$  avec  $M - 1$  ou  $M$  particules d'énergie  $\geq \tilde{E}$  et pas plus de  $S$  interactions,
- (b) par  $\tilde{P}_+$  le projecteur orthogonal sur le sous-espace de  $\mathfrak{H}^+$  engendré par les états avec  $M + 1$  ou  $M + 2$  particules "excitées" et pas plus de  $S$  interactions.

Les sous-espaces correspondants à ces projecteurs,  $\text{Ran } \tilde{P}_\pm$ , sont invariants sous l'action de  $H$  grâce à l'invariance (2.61).

Alors, l'analyse précédente des éléments  $W_{\alpha\beta}^{-+}$  peut être résumée sous la forme :

$$W^{-+} = \tilde{P}_- W^{-+} \tilde{P}_+,$$

qui implique la représentation :

$$W^{-+}(H^+ - \zeta)^{-1}W^{+-} = \left(\tilde{P}_- W^{-+} \tilde{P}_+\right) \cdot \left(\tilde{P}_+(H^+ - \zeta)^{-1} \tilde{P}_+\right) \cdot \left(\tilde{P}_+ W^{+-} \tilde{P}_-\right).$$

On étudie d'abord  $\tilde{P}_+(H^+ - \zeta)^{-1} \tilde{P}_+$ . En révisant la démonstration de la Proposition 2.4.4, on remarque que, grâce aux  $M + 1$  ou  $M + 2$  particules d'énergie au moins  $\tilde{E}$ , pour des états dans  $\tilde{P}_+ \mathfrak{H}^n$ , le surplus d'énergie par rapport à l'énergie fondamentale de  $H^-$  est :

$$\inf \text{Spec} \left( H^+ \tilde{P}_+ \right) \geq \inf \text{Spec} H^- + nA(\rho)E_\rho h(\rho).$$

Pour  $\zeta \leq \inf \text{Spec } H^- + C_1 n \rho \ell_\rho^{-3}$ , comme proposé par (2.72), la condition (2.70) donne que  $H^+ - \zeta$  est inversible d'inverse borné et permet d'avoir la borne :

$$\left\| \tilde{P}_+ (H^+ - \zeta)^{-1} \tilde{P}_+ \right\| \leq \frac{1}{C n A(\rho) h(\rho) \ell_\rho^{-2}} \leq \frac{1}{\tilde{C} n \rho \ell_\rho^{-3}}. \quad (2.75)$$

Si on impose une condition sur  $A(\rho)h(\rho)$  plus restrictive que (2.70), comme par exemple

$$A(\rho)h(\rho) > C \rho \ell_\rho^A, \quad (2.76)$$

où  $A$  est un nombre positive suffisamment grand, ou alors

$$A(\rho)h(\rho) > C \rho^\gamma, \quad (2.77)$$

avec  $0 < \gamma < 1$ , on obtient une meilleure estimée, i.e., une norme plus petite dans (2.75).

On traite les facteurs contenant  $W$  à l'aide du lemme suivant.

**Lemme 2.4.7.**

$$\left\| \tilde{P}_- W^{-+} \tilde{P}_+ \right\| \leq B \rho n \|U\|, \quad (2.78)$$

où  $\|U\|$  est la norme de  $U$  comme un opérateur de multiplication dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

*Démonstration.* Rappelons d'abord que, par le Corollaire 2.3.6, l'opérateur  $W$  est partiellement diagonalisé par les sous-espaces d'occupation constante. On peut aller encore plus loin et trouver des sous-espaces invariants encore plus fins que  $\mathfrak{H}_Q$ . Considérons des sous-espaces engendrés par les états propres du hamiltonien sans interactions  $H^0$  qu'on sélectionne en attribuant à chaque particule une pièce fixée. Ce sont des sous-espaces des espaces d'occupation constante et ils en diffèrent dans l'absence de la symétrie par permutations. Autrement, ici, on précise également exactement quelle particule se trouve dans quel sous-intervalle. Remarquons, que ce ne sont pas des sous-espaces de l'espace des fonctions antisymétriques  $\mathfrak{H}^n$ , mais seulement de  $L^2(\Lambda^n)$ . Cet inconvénient n'a aucune importance pour cette démonstration. Alors, comme dans la preuve du Corollaire 2.3.6, les sous-espaces décrits ci-dessus sont invariants par  $W$  (et, par conséquent,  $H$ ). Il suffit de comprendre ce qui se passe si on fixe une pièce pour chaque particule (bien sûr, plusieurs particules peuvent se retrouver dans le même sous-intervalle).

Bien qu'il y ait  $n(n-1)/2 \asymp n^2$  termes dans  $W_n$ , mais

$$\tilde{P}_- W_n(\mathbf{x}) \tilde{P}_+ = \sum_{i < j} \tilde{P}_- U(x^i, x^j) \tilde{P}_+,$$

et seuls  $B n \rho$  termes à droite sont différents de zéro. En effet, les états sélectionnés par  $\tilde{P}_-$  et/ou  $\tilde{P}_+$  n'ont pas plus de  $Q = [B \rho n]$  interactions.  $\square$

On est prêt maintenant pour démontrer le Théorème 0.0.3, qu'on répète ici pour faciliter la lecture.

**Théorème 2.4.8** (séparation d'états excités). *Soient  $\rho$  suffisamment petit,  $n$  et  $L$  assez grands et  $n/L$  suffisamment proche à  $\rho$ . Soit  $\Psi$  un état fondamental de  $H_\omega(L, n)$ , qu'on décompose selon (2.64) :  $\Psi = \Psi^- + \Psi^+$ . Alors  $\Psi$  met presque toute sa masse dans  $\mathfrak{H}^-$ , c.-à-d.*

$$\|\Psi^+\|/\|\Psi^-\| = o(1) \quad (2.79)$$

uniformément en  $n$ ,  $L$  et  $\rho$ .

*Remarque 2.4.9.* Une estimée plus précise que (2.79) est donnée dans la preuve. Sa forme varie selon le choix entre (2.76) et (2.77).

*Démonstration du Théorème 2.4.8.* En rassemblant (2.75) et (2.78), on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| W^{-+} (H^+ + W^{++} - \zeta)^{-1} W^{+-} \right\| &\leq \frac{(B\rho n \|U\|)^2}{Cn\ell_\rho^{-2}A(\rho)h(\rho)} \\ &\leq \begin{cases} \tilde{C}\|U\|^2 \rho \ell_\rho^{-(A-2)} n, & A > 5, \text{ dans le cas (2.76)} \\ \tilde{C}\|U\|^2 \rho^{2-\delta} n, & \gamma < \delta < 1, \text{ dans le cas (2.77)} \end{cases} \\ &\ll \rho \ell_\rho^{-3} n. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Rappelons que selon le Théorème 2.2.18, un élément diagonal  $W_{\alpha\alpha}$  sur les états  $\Psi_\alpha$  en bas du spectre du hamiltonien non perturbé  $H^0$  est d'ordre exactement  $n\rho\ell_\rho^{-3}$ . Évidemment pour  $\alpha$  choisi comme dans le Théorème 2.2.18, on a  $\Psi_\alpha \in \mathfrak{H}^-$ . Alors dans l'équation (2.65), le dernier terme peut être considéré comme un reste pour  $\zeta$  voisin du fond du spectre de l'opérateur total  $H$  (ces valeurs de  $\zeta$  sont décrites dans (2.68)) : sa norme est beaucoup plus petite que les éléments diagonaux de  $W$  typiques. Ceci explique le sens dans lequel le problème spectral réduit (2.67) donne une approximation du problème complet (2.65).

Remarquons ensuite que, pour  $\zeta$  qui satisfait la condition (2.72), le même type de argument donne :

$$\begin{aligned} \left\| (H^+ + W^{++} - \zeta)^{-1} W^{+-} \right\| &\leq \frac{B\rho n \|U\|}{Cn\ell_\rho^{-2}A(\rho)h(\rho)} \\ &\leq \begin{cases} \tilde{C}\|U\| \ell_\rho^{-(A-2)}, & A > 5, \text{ dans le cas (2.76)} \\ \tilde{C}\|U\| \rho^{1-\delta}, & \gamma < \delta < 1, \text{ dans le cas (2.77)} \end{cases} \\ &\ll \ell_\rho^{-3} \ll 1. \end{aligned}$$

En utilisant cette estimée dans (2.66), on voit que pour les états propres du hamiltonien avec interactions  $H$  dont l'énergie satisfait (2.72), donc en particulier pour l'état fondamental de  $H$  (voir (2.68)), la fonction est essentiellement contenue dans l'espace  $\mathfrak{H}^-$  parce qu'on a

$$\|\Psi^+\| \ll \|\Psi^-\|. \quad (2.81)$$

Cette dernière observation démontre le Théorème 0.0.3 et justifie le choix de la décomposition en sous-espaces "bas"  $\mathfrak{H}^-$  et "haut"  $\mathfrak{H}^+$ .  $\square$



## 2.5 Non dégénérescence de l'état fondamental

Dans cette section, on va démontrer que,  $\omega$ -presque sûrement, l'état fondamental de  $H_\omega(\Lambda, n)$  est non dégénéré, c'est-à-dire simple. Comme dans la section précédente, on utilise de manière intensive les idées de la Section 2.3 sur la décomposition par occupation.

**Lemme 2.5.1.** *Soit  $\omega$  fixé et soit  $m = m(\omega)$  le nombre total des pièces. Soit une occupation  $Q \in \mathbb{N}_0^m$  fixée,  $|Q| = n$ . Alors, l'état fondamental de  $H_Q$  est non dégénéré. Rappelons que  $H_Q$  est la partie de  $H$  dans  $\mathfrak{H}_Q$  (voir (2.63)).*

*Démonstration.* Soit  $\{\Delta_j\}_{j \in \{1, \dots, n\}}$  les pièces qui correspondent à l'occupation  $Q$  (où l'on répète le même sous-intervalle si  $Q$  met plusieurs particules dans ce sous-intervalle). Pour faciliter les notations dans ce qui suit, supposons également que les pièces  $\Delta_j$  sont numérotées dans l'ordre croissant de leur centre, du sous-intervalle le plus à gauche dans  $[0, L]$  jusqu'au sous-intervalle le plus à droite. Alors l'opérateur  $H_Q$  est le laplacien de Dirichlet sur l'espace de fonctions antisymétriques définies sur le domaine symétrisé :

$$\Delta_Q = \text{Sym} \prod_{j=1}^n \Delta_j = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=1}^n \Delta_{\sigma(j)}. \quad (2.82)$$

Mais les fonctions antisymétriques du domaine (2.82) qui s'annulent sur le bord sont en bijection avec des fonctions définies sur le polyèdre (cette fois, sans aucune conditions de symétrie)

$$\delta_Q = \{(x^1, \dots, x^n), \text{ t.q. } x^j \in \Delta_j \text{ and } x^i \leq x^j \text{ for } i < j\},$$

qui s'annulent au bord de  $\delta_Q$ . En effet,  $\delta_Q$  est une partie de  $\Delta_Q$  à partir de laquelle on peut reconstruire  $\Delta_Q$  par symétrie. Alors, trouver l'état fondamental de  $H_Q$  est équivalent à trouver l'état fondamental du laplacien de Dirichlet défini sur  $L^2(\delta_Q)$  sans ajouter une condition de symétrie. Or, le domaine  $\delta_Q$  est connexe : ceci implique que l'état fondamental de l'opérateur  $-\Delta|_{\delta_Q}^D$  est simple (par des théorèmes généraux sur la non dégénérescence de l'état fondamental des opérateurs de Schrödinger ; consultez, par exemple, [RS78, Section XIII.12]).  $\square$

En reprenant la décomposition (2.63), on peut conclure que la seule source possible de dégénérescence de l'état fondamental est que différentes occupations (c.-à-d., distributions de particules par pièces) donnent la même énergie fondamentale.

On va maintenant démontrer le Théorème 0.0.4, qu'on répète ici.

**Théorème 2.5.2** (non dégénérescence de l'état fondamental). *Soient  $L$  et  $n$  fixés. Alors  $\omega$ -presque sûrement l'état fondamental de  $H_\omega(L, n)$  est non dégénéré.*

*Démonstration.* On fait la démonstration par l'absurde. Avec la probabilité 1, le nombre des pièces est fini. Si la probabilité que l'état fondamental est dégénéré est strictement positive, alors il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que la probabilité conditionnelle que l'état fondamental est dégénéré si il y a exactement  $m$  pièces est aussi strictement positive, parce que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\text{état fondamental est dégénéré}) \\ &= \sum_{m \geq 1} \mathbb{P}(\text{état fondamental est dégénéré} \mid \text{il y a } m \text{ pièces}). \end{aligned}$$

Pour un nombre de pièces  $m$  fixé, on introduit la topologie sur les configurations des murs  $\{\omega\}$ , engendrée par la topologie standard de  $[0, L]^m$ . Donc, il existe un ouvert

$$\Omega_0 \subset \Omega \cap \{\text{configurations de } m \text{ pièces}\}$$

de mesure positive, tel que pour chaque  $\omega \in \Omega_0$ , il y a au moins deux occupations différentes  $Q_1(\omega)$  et  $Q_2(\omega)$  qui donne la même énergie fondamentale de  $H_\omega(L, n) \Big|_{Q_j(\omega)}$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , qui est en même temps la plus petite possible parmi toutes les occupations. On note ces branches de l'énergie par  $E_1(\omega)$  et  $E_2(\omega)$  respectivement.

Pour un nombre de pièces fixé, il y a un nombre fini d'occupations différentes possibles et ce nombre de pièces change seulement quand l'un des murs traverse 0 ou  $L$ . Donc, il existe un sous-ensemble  $\Omega_1 \subset \Omega_0$  de mesure positive (on peut prendre  $\Omega_1$  ouvert) tel que  $Q_1(\omega)$  et  $Q_2(\omega)$  sont constantes sur  $\Omega_1$ .

Fixons maintenant  $\omega_0 \in \Omega_1$  initial et commençons à le déplacer d'une façon continue dans cet ensemble exceptionnel  $\Omega_1$ . Ceci correspond à bouger des murs à l'intérieur de l'intervalle  $(0, L)$ . Comme  $Q_1$  et  $Q_2$  sont deux occupations différentes, il existe une pièce  $[a, b] \subset [0, L]$  tel que  $Q_1$  et  $Q_2$  mettent un nombre différent de particules dans cette pièce :  $Q_1([a, b]) \neq Q_2([a, b])$ .

On va maintenant regarder ce qui se passe si on commence à déplacer  $a$  vers  $b$  d'une façon continue (si  $a = 0$  est l'extrémité gauche de notre intervalle, on déplacera  $b$  vers  $a$ ). Ce déplacement est une des possibilités pour changer (toujours d'une façon continue) la configuration des murs  $\omega$ . Les énergies fondamentales correspondant aux deux occupations  $Q_1$  et  $Q_2$  sont analytiques en  $a$  dans un petit voisinage de sa valeur initiale  $a_0$  (qui correspond à  $\omega_0$ ). De plus, dans un petit voisinage,

$$E_1(a) = E_2(a)$$

par l'hypothèse.

Comme l'état fondamental sur un sous-espace d'occupation fixée est toujours non dégénéré par le Lemme 2.5.1, les fonctions  $E_1$  et  $E_2$  sont analytiques sur un intervalle ouvert  $(c, b)$ , où  $c$  est l'extrémité de la pièce  $[c, a]$  qui précède  $[a, b]$ . On va expliquer ce dernier argument dans plus de détails. Supposons que  $E_1(a)$  perde l'analyticité quelque part dans  $(c, b)$ . Cela signifie que la branche analytique correspondant à la valeur propre de  $H_{Q_1}$  croise une autre branche analytique (qui donne un niveau excité pour  $a = a_0$ ). Cette situation est impossible, sinon au point de croisement l'état fondamental serait dégénéré.

On détient ainsi deux fonctions analytiques sur  $(c, b)$  qui sont égales dans un petit voisinage de  $a$  à l'intérieur de cet intervalle. Elles sont donc égales sur  $(c, b)$ , i.e.,  $E_1(a) = E_2(a)$  pour tout  $a \in (c, b)$ .

Finalement, il reste à remarquer que si  $Q_1$  met  $k_1$  particules dans la pièce  $[a, b]$ , et  $Q_2$  met  $k_2$  particules avec  $k_1 \neq k_2$ , alors les fonctions  $E_1$  et  $E_2$  ont des asymptotiques différentes :

$$E_i(a) \sim k_i^3 / (b - a)^2, \quad a \rightarrow b,$$

qui contredit le fait que les deux fonctions sont égales sur l'intervalle entier. On a donc établi le Théorème 2.5.2.  $\square$

Remarquons, qu’au moins dans le cas sans interactions,  $W \equiv 0$ , l’état fondamental est dégénéré pour certaines configurations de murs  $\omega$  (de mesure zéro). Pour illustrer ceci, construisons un exemple simple. S’il arrive qu’il y ait deux pièces de la même longueur et que l’état fondamental de  $H_\omega^0(L, n)$  pose des nombres différents de particules dans ces deux pièces, alors en permutant les nombres d’occupations de ces pièces, on ne change pas l’énergie fondamentale, mais on change nécessairement l’état.

La question si cette dégénérescence est levée ou non par les interactions non triviales reste ouverte.

**Corollaire 2.5.3.** *Soient  $L$  et  $n$  fixés. Alors  $\omega$ -presque sûrement l’état fondamental de  $H_\omega(L, n)$ , ainsi que ses composantes dans  $\mathfrak{H}^\pm$ , possèdent une occupation bien précise, c.-à-d., ces vecteurs appartiennent aux mêmes sous-espaces d’occupation constante  $\mathfrak{H}_Q$ .*

Ceci est le Corollaire 0.0.5 de l’introduction.

*Démonstration du Corollaire 2.5.3.* Soit  $\omega$  tel que l’énoncé de Théorème 2.5.2 est vrai. Alors, l’état fondamental  $\Psi$  de  $H_\omega(L, n)$  est simple, mais grâce à la décomposition (2.63), cet état doit appartenir à un sous-espace d’occupation fixée, comme toutes les projections  $P_Q\Psi$  donnent soit un état fondamental, soit zéro.  $\square$

Avant de passer à la prochaine section, faisons encore un commentaire. Dans le Théorème 2.5.2, on peut introduire une constante de couplage devant les interactions. On a donc aussi démontré que

$$\forall t \geq 0, \omega\text{-p.s. l'état fondamental de } H_\omega^0(L, n) + tW_n \text{ est simple,} \quad (2.83)$$

et on peut également définir l’occupation pour cet état.

Malheureusement, cela ne nous dit pas grande chose sur ce à quoi ressemble cette occupation, sauf qu’elle satisfait aux critères de la définition du sous-espace  $\mathfrak{H}^-$ ; par l’analyse de la Section 2.4, l’état fondamental a une composante non nulle sur ce sous-espace. Remarquons, d’ailleurs, que le Corollaire 2.5.3 implique que les composantes  $\Psi^\pm \in \mathfrak{H}^\pm$  de l’état fondamental ont la même occupation; donc la partie “excitée”  $\Psi^+$  consiste en des niveaux excités dans les pièces occupées par  $\Psi^-$ . La plupart de ces pièces ont une longueur d’ordre  $\ell_\rho$ .

Si dans (2.83) on pouvait remplacer  $\forall t$   $\omega$ -p.s. par  $\omega$ -p.s.  $\forall t$  cela permettrait de dire que l’état fondamental pour  $t$  positif est donné par la même branche analytique (en  $t$ ) de l’énergie que pour  $t = 0$ , qu’on sait très bien décrire. Entre autre, cela devrait dire quelles pièces exactement sont occupées par l’état fondamental avec les interactions et donner le vrai deuxième terme pour l’asymptotique de l’énergie par particule  $\mathcal{E}(\rho, 0)$ , et pas seulement la borne supérieure (2.54).

On ne pense pas que ce genre de permutation soit possible et qu’il soit vrai en général que les fermions ne changent pas de pièces malgré l’effet des interactions.

## 2.6 Fonction d’autocorrélation

Dans cette section, on continue à caractériser l’état fondamental d’un système de fermions en interaction dans un milieu aléatoire donné par le modèle des pièces. No-

tamment, on étudie la fonction d'autocorrélation qui décrit les propriétés de localisation/délocalisation d'un système. Les résultats s'appuient fortement sur tout ce qui vient d'être fait et, en particulier, sur la décomposition par occupation de la Section 2.3, sur la caractérisation de l'état fondamental dans les terme des espaces fonctionnels de la Section 2.4 et sa non dégénérescence de la Section 2.5.

**Définition 2.6.1.** Soit  $\Psi \in \mathfrak{H}^n(\Lambda)$ . La fonction d'autocorrélation correspondante est définie par :

$$\mathcal{L}_\Psi(\mathbf{y}) = \int_{\Lambda^n} |\Psi(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{y})| d\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{V}^n, \quad (2.84)$$

où des fonctions sont (trivialement) prolongées par zéro en dehors de  $\Lambda^n$ .

Dans la suite,  $\Psi = \Psi_\omega(L, n)$  est l'état fondamental du hamiltonien  $H_\omega(L, n)$ . On va omettre régulièrement les paramètres  $\omega$ ,  $L$  et  $n$  dans les notations pour le hamiltonien, l'état fondamental et ainsi de suite. On étudie la fonction d'autocorrélation  $\mathcal{L}_\Psi$  pour  $n$  et  $L$  grands tels que  $n/L \rightarrow \rho$  où la densité de particules  $\rho$  est petite. Notamment, on démontre le Théorème 0.0.6 dont l'énoncé on répète ici.

**Théorème 2.6.2** (fonction d'autocorrélation de l'état fondamental). *Pour tout  $\beta \in (0, 1/2)$  il existe  $\rho_0 > 0$  et une constante  $C = C(\beta)$  tels que pour  $0 < \rho < \rho_0$  et  $B(\rho) > C|\log \rho|^{-1}$  il existe  $L_0 > 0$  et  $\delta_0 > 0$  tels que si  $L \geq L_0$  et  $|n/L - \rho| < \delta_0$  alors avec probabilité au moins  $1 - e^{-L^\beta}$ , si le vecteur  $\mathbf{y} \in \mathcal{V}^n$  a au moins  $nB(\rho)$  coordonnées  $|y^k| > (1 + 1/C)\ell_\rho$ , alors la fonction d'autocorrélation de  $\Psi$ , l'état fondamental de  $H_\omega(\Lambda, n)$ , satisfait l'asymptotique suivante :*

$$\mathcal{L}_\Psi(\mathbf{y}) = O\left(\exp(-nB(\rho)|\log \rho|)\right). \quad (2.85)$$

*Démonstration.* Tout d'abord, on explique les idées principales de l'analyse de la fonction d'autocorrélation (2.84).

- (a) L'état fondamental  $\Psi$  est non dégénéré et appartient à l'un des sous-espaces d'occupation fixée (le Corollaire 2.5.3), qu'on note par  $\mathfrak{H}_Q$  dans la suite.
- (b) Selon la décomposition (2.64),  $\Psi = \Psi^- + \Psi^+$  où  $\Psi^\pm \in \mathfrak{H}^\pm$  et  $\Psi^-$  et  $\Psi^+$  appartiennent au même  $\mathfrak{H}_Q$ .
- (c) Par l'estimée (2.81),  $\|\Psi^-\| \gg \|\Psi^+\|$  et alors la composante basse  $\Psi^-$  est différente de zéro.
- (d) Ce dernier argument implique que l'occupation de  $\Psi$  a la structure suivante :
  - la majorité de particules occupent presque toutes les pièces des longueur environ  $\ell_\rho$  et plus large, et la plupart de ces pièces ont une longueur proche de  $\ell_\rho$ ,
  - les autres particules ne sont pas contrôlées mais elles sont beaucoup moins nombreuses.
- (e) La fonction d'onde  $\Psi$  est supportée sur le symétrisé de la "cellule élémentaire" (2.5), c.-à-d., son support est de type (2.82).

- (f) Pour obtenir une majoration de la fonction d'autocorrélation, on va estimer le nombre de fois que les différentes permutations de la cellule élémentaire (le produit de tous les  $n$  intervalles où vivent les particules) intersectent ses mêmes permutations décalées par le vecteur  $\mathbf{y}$ . En faisant ceci, on va maximiser sur le vecteur  $\mathbf{y}$ , en essayant d'obtenir autant de recouvrements que possible.
- (g) La possibilité d'intersections multiples de l'ensemble des permutations d'une cellule élémentaire et ses translatées est essentiellement donnée par le mécanisme suivant. Supposons qu'il y a une paire de pièces  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  à distance  $r$  (remarquons, que ceci peut être le même sous-intervalle avec  $r = 0$ ) et une autre paire des pièces  $\tilde{\Delta}_1$  et  $\tilde{\Delta}_2$  à peu près à la même distance. Pour simplifier l'explication, considérons seulement deux particules et oublions les autres. Le translaté de  $\Delta_1 \times \tilde{\Delta}_1$  par  $(r, r)$  rencontre  $\Delta_2 \times \tilde{\Delta}_2$  et le translaté de  $\tilde{\Delta}_1 \times \Delta_1$  par  $(r, r)$  rencontre  $\tilde{\Delta}_2 \times \Delta_2$  :

$$\begin{aligned} (\Delta_1 + r) \times (\tilde{\Delta}_1 + r) \cap \Delta_2 \times \tilde{\Delta}_2 &\neq \emptyset, \\ (\tilde{\Delta}_1 + r) \times (\Delta_1 + r) \cap \tilde{\Delta}_2 \times \Delta_2 &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Dans les deux cas le vecteur de translation est  $(r, r)$  ; ce n'est pas le seul qui garantit l'intersection non vide dans les relation ci-dessus : on peut toujours permuter deux paires de pièces en gardant le même vecteur qui translate les l'une sur l'autre si la distance minimale (c.-à-d., la distance entre les extrémités les plus proches) entre les pièces d'une paire est plus petite que la distance maximale (c.-à-d., la distance entre les extrémités les plus éloignées) d'une autre paire et vice versa. En effet, la seule chose qu'on compte est s'il y a ou non d'intersection.

- (h) Plus généralement, s'il y a  $k$  paires de pièces qui sont à peu près à la même distance, le mécanisme de (g) engendre un facteur  $k!$  pour le nombre total des recouvrements possibles entre le support de  $\Psi$  et son translaté par  $\mathbf{y}$ . On a alors besoin d'une analyse statistique du nombre de pièces à une distance donnée à une erreur donnée près.
- (i) Dans notre cas, les pièces de longueur  $\ell_\rho$  (comme ce sont ces pièces qui nous intéressent le plus) sont distribués sur  $[0, L]$  approximativement uniformément. Ceci donne immédiatement la statistique des distances entre les pièces et nous permet de donner l'estimée sur le nombre total des recouvrements. Il faudra considérer ici deux cas différents : si la distance  $r$  entre les pièces est plus petite que  $\ell_\rho$ , alors chaque pièce de longueur à peu près  $\ell_\rho$  intersecte sa propre  $r$ -translatée. Au contraire, dès qu'on considère les distances suffisamment grandes (pour exclure ce cas trivial d'intersection par soi-même), l'argument statistique devient non trivial.
- (j) Ensuite, on tient compte des autres pièces "exceptionnelles" par une estimée brute qui dit juste que ces pièces (qui sont relativement peu nombreuses) ne peuvent pas changer d'une façon importante l'argument combinatoire. Essentiellement, on peut exclure certain nombre de pièces en supposant qu'elles donnent toujours une intersection avec n'importe quelle autre pièce peu importe la valeur réelle de la coordonnée de  $\mathbf{y}$  associée.
- (k) Finalement, on donne une condition sur  $\mathbf{y}$  qui garantit la validité de notre analyse et qui suffit pour éviter que la plupart des cellules élémentaires ne recouvrent pas

leurs propres translatées (ce qui est, évidemment, le cas, par exemple, pour  $\mathbf{y} = 0$ ). Malheureusement, cette condition ne s'exprime pas sous la forme d'une certaine inégalité sur une norme de  $\mathbf{y}$ , comme on verra dans la suite.

Premièrement, en utilisant ensemble les faits que l'état fondamental est  $\omega$ -presque sûrement non dégénéré par le Théorème 2.5.2 et que les sous-espaces  $\mathfrak{H}_Q$  (voir la Définition 2.3.5) sont invariants pour  $H$  par (2.61), on obtient que l'état fondamental  $\Psi$  appartient à un de ces sous-espaces d'occupation fixée (voir également le Corollaire 2.5.3).

De ce point de vue, le support de  $\Psi$  est donné par le domaine à  $n$  dimensions (2.82). On appelle chaque

$$\Delta_\sigma(Q) = \prod_{j=1}^n \Delta_{\sigma(j)}, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad (2.86)$$

une *cellule élémentaire*. Alors,  $\Psi$  est supportée sur la réunion de toutes les permutations possibles des intervalles composants d'une cellule élémentaire. Rappelons maintenant que sur chaque cellule élémentaire,  $\Psi$  est un produit des fonctions sinus normalisées tout ceci normalisé  $1/\sqrt{n!}$  correspondant au nombre total de permutations. Alors

$$\mathcal{L}_\Psi(\mathbf{y}) = \int_{\Lambda^n} |\Psi(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{y})| d\mathbf{x} \leq \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{v} \int_{\Lambda^n} \mathbb{1}_{\Delta(Q)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbb{1}_{\Delta(Q)}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) d\mathbf{x} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{v} \cdot \mathcal{L}_{\mathbb{1}_{\Delta(Q)}}(\mathbf{y}), \quad (2.87)$$

où  $v = |\Delta_\sigma(Q)|$  est le volume d'une cellule élémentaire ( $\sigma$  est arbitraire ici parce que des cellules élémentaires diffèrent seulement par une permutation des certaines coordonnées et ont, donc, toutes le même volume). L'inégalité (2.87) signifie juste qu'on peut remplacer  $\Psi$  par la fonction caractéristique de son support normalisée pour obtenir une majoration de la fonction d'autocorrélation. De plus,

$$\frac{1}{v} \cdot \mathcal{L}_{\mathbb{1}_{\Delta(Q)}}(\mathbf{y}) \leq \text{card} \{(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_n^2 \text{ t.q. } \Delta_\sigma(Q) \cap (\Delta_\tau(Q) - \mathbf{y}) \neq \emptyset\}, \quad (2.88)$$

qui est le nombre des intersections de cellules élémentaires de  $\Delta(Q)$  avec des cellules de  $\Delta(Q) - \mathbf{y}$ . Dans cette inégalité, on a négligé le fait que l'intersection de deux cellules élémentaires peut ne pas avoir le volume total  $v$  et on a compté chacun de ces événements d'intersection comme s'il avait l'amplitude maximale, qui est  $v$ .

On va maintenant expliquer comment des intersections multiples peuvent arriver dans la partie droite de (2.88). Si, dans deux paires différentes d'intervalles sélectionnés par l'occupation  $Q$ , les intervalles sont approximativement à la même distance l'un de l'autre, alors ils peuvent être permutés de façon que les cellules élémentaires correspondantes restent toujours connectées par le même vecteur  $\mathbf{y}$ . Plus précisément, supposons que pour des indices  $j$  et  $k$ , les pièces sont données par  $\Delta_{\sigma(j)} = [a_1, b_1]$ ,  $\Delta_{\tau(j)} = [c_1, d_1]$ ,  $\Delta_{\sigma(k)} = [a_2, b_2]$ ,  $\Delta_{\tau(k)} = [c_2, d_2]$ . Supposons également (pour fixer l'ordre) que  $[a_1, b_1]$  est à gauche de  $[c_1, d_1]$ , c.-à-d.,  $c_1 \geq a_1$ . Si

$$c_1 - b_1 < d_2 - a_2 \quad \text{et} \quad c_2 - b_2 < d_1 - a_1, \quad (2.89)$$

alors pour tout  $y \in (\max(c_1 - b_1, c_2 - b_2), \min(d_1 - a_1, d_2 - a_2))$

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] + (y, y) \cap [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \neq \emptyset$$

et

$$[a_2, b_2] \times [a_1, b_1] + (y, y) \cap [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \neq \emptyset$$

La condition (2.89) signifie tout simplement que la distance minimale entre les points de la première paire des intervalles est plus petite que la distance maximale entre les points de la deuxième paire et que la même chose est vraie dans l'autre sens. Donc, la question est essentiellement réduite à l'analyse de la distribution statistique des distances entre les pièces qui font le support de l'état fondamental  $\Psi$ .

Fixons  $\beta \in (0, 1/2)$ . La décomposition orthogonale en sous-espaces bas et haut (voir (2.64)) et le fait que la composante basse  $\Psi^-$ , où  $\Psi = \Psi^- + \Psi^+$ , est différente de zéro, nous permet de décrire l'occupation  $Q = Q(\Psi) = Q(\Psi^-)$ . Par la Définition 2.4.1, au moins  $n(1 - A(\rho))$  particules ont une énergie plus petite que  $\tilde{E} = E_\rho(1 + h(\rho))$ . La longueur d'une pièce correspondant à cette énergie est donnée par le calcul (2.44) :

$$\tilde{\ell} = \ell_\rho \left( 1 - \frac{1}{2}h(\rho) + O(h^2(\rho)) \right).$$

Par conséquent, avec une probabilité au moins  $1 - e^{-L^\beta}$ ,  $\beta \in (0, 1/2)$ , le nombre des sous-intervalles au-dessus de cette longueur, c.-à-d., des sous-intervalles qui peuvent accommoder au moins une particule d'énergie sous  $\tilde{E}$ , est donné par la Proposition 2.1.3 :

$$\# \left( \text{pièces} \geq \tilde{\ell} \right) = \mu L e^{-\mu \tilde{\ell}} + O \left( L^{1/2+\beta} e^{-\mu \tilde{\ell}/2} + L^{-\infty} \right) = n(1 + O(\ell_\rho h(\rho))).$$

Alors, la grande majorité de ces pièces est occupée par des particules comme il y a  $n(1 - A(\rho))$  particules pour ces sous-intervalles. Pour simplifier l'argument qui suit, on va supposer que toutes les pièces de longueur plus grande que  $\tilde{\ell}$  sont occupées par le nombre correspondant de particules jusqu'au niveau d'énergie  $\tilde{E}$ . Comme on compte seulement les intersections des supports de  $\Psi(\mathbf{x})$  et  $\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ , ceci va donner une majoration de la fonction d'autocorrélation  $\mathcal{L}_\Psi$ .

D'autre part, il y a au plus  $nA(\rho)$  particules qu'on ne contrôle pas et qui peuvent a priori occuper des pièces arbitraires et en même temps il n'y a pas plus que  $Bn\rho$  particules qui peuvent occuper des pièces avec plus d'une particule. Soit maintenant  $C > 0$  une constante suffisamment grande. Comme d'habitude, avec une probabilité exponentiellement proche de 1, il y a  $O(n\rho^{1/C})$  sous-intervalles plus grands que  $\ell_\rho(1 + 1/C)$ . On appelle ces trois types (les particules qu'on ne contrôle pas, celles qui ne vivent pas toute seule et celles qui vivent dans des pièces trop grandes) de particules/pièces "exceptionnelles", dans le sens où le nombre total de ces exceptions est beaucoup plus petit que  $n$ .

On va estimer l'influence de toutes ces particules exceptionnelles de la manière suivante. Pour un vecteur de déplacement  $\mathbf{y}$  fixé, on obtient une majoration du nombre de permutations possibles dans lesquelles un sous-intervalle donné peut participer si on suppose que ce sous-intervalle peut être permuté avec n'importe quel autre intervalle. S'il y a  $m$  sous-intervalles de ce type, ils apportent le facteur total de  $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1) = n!/(n-m)!$ . Ceci réduit tout simplement le problème à  $n-m$  sous-intervalles différents de longueur proche de  $\ell_\rho$ . Remarquons, que le nombre total des pièces qu'on exclut comme ceci est beaucoup plus petit que le nombre total de pièces :  $m \ll n$ .

Pour résumer l'argument précédent, on a pu réduire le problème à la considération de tous les sous-intervalles de longueur

$$l \in [\tilde{\ell}, \ell_\rho(1 + 1/C)] \quad (2.90)$$

et à l'analyse de la distribution statistique de distances entre ces intervalles.

Remarquons premièrement, que la distribution des telles pièces est uniforme sur  $[0, L]$  grâce à l'invariance par translation du processus de Poisson. Plus précisément, pour tout point du processus de Poisson  $x_0 \in [0, L - \ell_\rho(1 + 1/C)]$ , la probabilité que ce point soit l'extrémité gauche d'une pièce de longueur  $l$  qui satisfait (2.90) ne dépend pas du choix de  $x_0$ . Il en va de même pour des extrémités droites des pièces.

Considérons maintenant les  $n - m$  ( $m$  est le nombre de particules exclues,  $m \ll n$ ) extrémités gauches de ces intervalles qui sont uniformément distribués sur  $[0, L - \delta]$ ,  $\delta = \ell_\rho(1 + 1/C)$ . Fixons  $a > \delta$ . Pour l'extrémité gauche  $x_0$  de l'ensemble qu'on étudie, combien y a-t-il d'autres points (parmi ces  $n - m$  distribués uniformément) qui se trouvent à la distance (ici, la distance est algébrique) entre  $a$  et  $a + da$ ? Avec une probabilité exponentiellement proche de 1, ce nombre est donné par :

$$\frac{n - m + O((n - m)^{1/2+\beta})}{L - \delta} da = \frac{n}{L} (1 + O(\rho^{1/C})) da.$$

Ici, il est important que  $a$  soit plus grand que  $\delta$ ; ceci garantit qu'on compte des pièces distinctes (ses extrémités gauches). Alors, le nombre total des paires des sous-intervalles (toujours parmi ceux qu'on considère maintenant), tels que ses extrémités gauches sont à distance  $\in [a, a + da]$  est égale à

$$(n - m)nL^{-1} (1 + O(\rho^{1/C})) da = n\rho (1 + O(\rho^{1/C})) da. \quad (2.91)$$

Finalement, comme nos intervalles ont une longueur majorée par  $\delta$  et comme on s'intéresse aux translations qui superposent deux intervalles, l'erreur  $da$  qu'on peut admettre est majorée par  $2\delta$ . Le coefficient 2 est due au fait qu'après le déplacement, l'extrémité droite de l'intervalle déplacé peut toucher l'extrémité gauche de l'intervalle fixé ou vice versa qui explique la différence de la longueur maximale double d'un intervalle.

On peut résumer les arguments développés ci-dessus sous la forme suivante. Soit un vecteur  $\mathbf{y}$  fixé. Supposons que sa coordonnée  $y^k$  pour  $k \in \mathbb{N}_n$  fixé est supérieure à  $\delta$  ( $= O(\log^{-2} \rho)$ ). Selon notre stratégie, on compte le nombre des permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telles qu'il existe encore une autre permutation  $\tau \in \mathfrak{S}_n$  telle que  $\Delta_\sigma(Q)$  intersecte  $\Delta_\tau(Q) - \mathbf{y}$ , où  $Q$  est l'occupation de l'état fondamental  $\Psi$ . Quelle pièce peut-on mettre sur la position numéro  $k$  dans  $\Delta_\sigma$ ? On observe que toutes les pièces n'ont pas une pièce correspondante à la distance  $y^k$ . Notamment, sur la  $k$ -ème position, on peut retrouver soit une des pièces exceptionnelles (dont le nombre total est borné par  $2A(\rho)n$  pour tout choix de  $A(\rho)$  selon (2.76) ou (2.77)), soit une pièce exceptionnelle doit se retrouver à cette position dans  $\Delta_\tau(Q) - \mathbf{y}$ , soit ceci doit être l'une des  $n\rho O(\ell_\rho)$  pièces régulières par (2.91). Le dernier cas correspond à la situation quand dans  $\Delta_\sigma$  et  $\Delta_\tau$  ce ne sont pas des pièces exceptionnelles sur la  $k$ -ème position.

Adoptons la formulation suivante un peu plus abstraite. Supposons que le vecteur  $\mathbf{y}$  a  $2nB$  coordonnées  $y^k$  tels que au moins  $nB$  parmi eux (mais on ne sait pas lesquels)



peuvent être occupés seulement par au plus  $nA$  pièces. Ici,  $A$  et  $B$  sont petits en  $\rho$ . Selon l'analyse ci-dessus, on peut prendre  $A = 5A(\rho)$  et  $B \geq A$ , comme ceci garantit que parmi ces  $2nB$  coordonnées, on peut occuper au plus la moitié soit par des pièces exceptionnelles ( $2A(\rho)n$  pièces exceptionnelles dans  $\Delta_\sigma$  et  $2A(\rho)n$  dans  $\Delta_\tau$ ) soit par des pièces régulières à la bonne distance, dont le nombre est beaucoup plus petit que  $A(\rho)n$ .

Comptons maintenant le nombre des permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  admissibles selon cet argument. Pour choisir  $nB$  positions parmi  $2nB$ , on a  $\binom{2nB}{nB}$  possibilités. Ensuite, pour chacune des  $nB$  positions, on a seulement  $nA$  pièces possibles qui donne  $(nA)^{nB}$  possibilités, et on suppose que d'autres pièces peuvent occuper des positions arbitraires. Tout ensemble, par l'approximation de Stirling, ceci apporte :

$$\begin{aligned} \frac{\binom{2nB}{nB} (nA)^{nB} (n(1-2B))!}{n!} &\sim \frac{\frac{\sqrt{4\pi nB} \left(\frac{2nB}{e}\right)^{2nB}}{\left(\sqrt{2\pi nB} \left(\frac{nB}{e}\right)^{nB}\right)^2} \cdot (nA)^{nB} \cdot \sqrt{2\pi n(1-2B)} \left(\frac{n(1-2B)}{e}\right)^{n(1-2B)}}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \\ &\asymp n^{-1/2} [(2e)^2(1-2B)^{1-2B} A^B]^n \\ &< \exp\left(-n(B|\log A| + c) - \frac{1}{2} \log n\right), \end{aligned} \tag{2.92}$$

avec  $c = 2 + 2\log 2$ , une constante absolue. Pour que le premier terme soit le terme principal, on va demander que

$$B > \frac{C}{|\log A|} = O(|\log \rho|^{-1})$$

pour une constante  $C$  suffisamment grande, où on a utilisé encore une fois les conditions (2.76) et (2.77). Entre autre, ceci garantit que  $B \geq A$  (en réalité  $B \gg A$ ). Ceci conclut la démonstration du Théorème 2.6.2.  $\square$

Remaquons maintenant que l'énoncé du Théorème 2.6.2 laisse du choix concernant la fonction  $B(\rho)$ . Évidemment, plus on choisit  $B(\rho)$  grand, meilleure est l'estimée pour la fonction d'autocorrélation dans (2.85), mais en même temps, il y a moins de vecteurs  $\mathbf{y} \in \mathcal{V}^n$  satisfaisant la condition du théorème. Regardons quel partie du volume total occupent les vecteurs  $\mathbf{y}$  qui satisfont la condition du théorème. On compte seulement la partie du volume que occupent les vecteurs qui ont exactement les premières  $nB(\rho)$  coordonnées plus grandes que  $(1 + 1/C)\ell_\rho$ . Ces vecteurs forment seulement une partie de l'ensemble total des vecteurs admissibles. Alors, chacune des  $nB(\rho)$  coordonnées ne peut plus occuper d'un sous-intervalle de la longueur d'ordre  $O(|\log \rho|)$  sur l'intervalle total de la longueur  $L \asymp n/\rho$ , ceci apporte la proportion du volume :

$$\frac{(L - C|\log \rho|)^{nB(\rho)}}{L^{nB(\rho)}} \rightarrow \exp(-C|\log \rho|\rho B(\rho)), \quad n \rightarrow +\infty, \tag{2.93}$$

mais selon les conditions du théorème,

$$C < B(\rho)|\log \rho| < |\log \rho|,$$

qui implique immédiatement, que l'exponentielle dans (2.93) est égale à  $1 + O(\rho |\log \rho|)$ . Alors, pour tout choix de  $B(\rho)$  dans Théorème 2.6.2, les vecteurs  $\mathbf{y}$  satisfaisant la condition du théorème, occupent presque tout le volume, c.-à-d., la fonction d'autocorrélation est presque partout (sauf des bandes relativement fines) exponentiellement petite.

Remarquons, que dans l'un des cas limite,  $B(\rho) = B = \text{const}$  qui ne dépend pas de  $\rho$ , les vecteurs  $\mathbf{y}$  satisfaisant la condition du théorème ont la norme  $L^1$  :

$$\|\mathbf{y}\|_1 \geq C_1 n \ell_\rho, \quad (2.94)$$

avec  $C_1$  une autre constante, et la borne (2.85) se réécrit comme :

$$\mathcal{L}_\Psi(\mathbf{y}) = O\left(\exp(-C_2 \|\mathbf{y}\|_1)\right), \quad L \rightarrow \infty, n/L \rightarrow \rho, \quad (2.95)$$

avec  $C_2$  encore une autre constante.

Malheureusement, (2.94) n'implique pas nécessairement (2.95). Le contre-exemple est construit comme ceci. Supposons qu'il y ait deux particules non contrôlées qui occupent les sous-intervalles aux extrémités de l'intervalle  $[0, L]$ . Alors, la distance entre elles est de l'ordre  $L \sim n/\rho \gg n |\log \rho|$ . Choisissons un vecteur  $\mathbf{y} = (L, 0, \dots, 0)$  qui translate l'un de ces sous-intervalles dans l'autre et garde le reste intacte. Alors, comme il y a  $n - 1$  paires des intervalles à la même distance zéro, on peut faire  $(n - 1)!$  permutations selon la stratégie ci-dessus, qui explique pourquoi dans cet exemple,  $\mathcal{L}_\Psi(\mathbf{y}) = O(1/n)$ .

Finalement, expliquons pourquoi dans le Théorème 2.6.2, on ne voit pas vraiment la décroissance de la fonction d'autocorrélation avec la longueur de vecteur  $\mathbf{y}$ , mais plutôt un effet discontinu : dès que  $\mathbf{y}$  est suffisamment grand (dans le sens précis du théorème),  $\mathcal{L}_\Psi(\mathbf{y})$  est petite. Ce comportement est due au fait que les fonctions propres à une particule sont parfaitement localisées sur des intervalles correspondants et ressemblent essentiellement à des fonctions indicatrices. Or, ceci implique que l'état fondamental à  $n$  fermions  $\Psi$  joue également le rôle d'une fonction indicatrice dont le support est le symétrisé d'une cellule élémentaire. Donc, dès que le vecteur  $\mathbf{y}$  est suffisamment grand pour ce que ce support soit essentiellement découplé de sa propre translatée, la fonction d'autocorrélation tombe immédiatement presque à zéro.

## 2.7 Quantification de l'influence des interactions sur l'état fondamental

Dans cette section, on quantifie la différence entre les états fondamentaux sans (noté  $\Psi_\emptyset$ , voir la sous-section 2.2.3) et avec (noté juste  $\Psi$ ) interactions. On étudie d'abord comment les occupations correspondantes  $Q(\Psi_\emptyset)$  et  $Q(\Psi)$  diffèrent. Ceci nous permet ensuite d'obtenir l'ordre du terme principal de la contribution des interactions  $W$  dans l'asymptotique de l'énergie fondamentale par particule  $\mathcal{E}(\rho)$ . On va démontrer que la borne supérieure dans l'inégalité (2.54) donne l'ordre correct quand  $\rho$  est petit. Le mécanisme est effectivement celui de la construction de l'état  $\Psi_\beta$  à la fin de la sous-section 2.2.3 et est du au fait que, sous l'effet des interactions, il est énergétiquement plus avantageux de répartir les particules dans un plus grand nombre de pièces que dans l'état fondamental sans interactions  $\Psi_\emptyset$ .

Pour estimer la différence entre les différentes occupations, introduisons la distance discrète.

**Définition 2.7.1.** Soit  $m$  le nombre de pièces. Soient  $Q^1, Q^2 \in \mathbb{N}_0^m$ ,  $|Q^j| = n$ ,  $j \in \{1, 2\}$  deux occupations. Écrivons que  $Q^j = (Q_1^j, Q_2^j, \dots, Q_m^j)$  pour chaque  $j \in \{1, 2\}$ . On écrit

$$\text{dist}_0(Q^1, Q^2) = \sum_{j=1}^m \mathbb{1}(Q_j^1 = Q_j^2).$$

Ceci donne le nombre de pièces sur lesquels  $Q_1$  diffère de  $Q_2$ .

On démontre d'abord la borne supérieure sur la différence entre  $Q(\Psi)$  et  $Q(\Psi_{\mathcal{U}})$ .

**Lemme 2.7.2.** *Pour tout  $\beta \in (0, 1/2)$  il existe une constante  $C$  telle que pour tous  $n$  et  $L$  suffisamment grands et tels que  $n/L$  soit suffisamment proche de  $\rho$ , si  $\Psi$  est l'état fondamental de  $H_\omega(L, n)$  et  $\Psi_{\mathcal{U}}$  est l'état fondamental de  $H_\omega^0(L, n)$ , alors avec une probabilité au moins  $1 - e^{-L^\beta}$ ,*

$$\text{dist}_0(Q(\Psi), Q(\Psi_{\mathcal{U}})) \leq Cn\rho.$$

*Démonstration.* Rappelons que selon le Corollaire 2.5.3 et la Définition 2.4.1, l'occupation est bien définie pour l'état fondamental  $\Psi$  et il y a au plus  $Bn\rho$  interactions dans l'état fondamental  $\Psi$ . Cela implique qu'au moins  $(1 - 2B\rho)n$  particules dans  $\Psi$  n'interagissent pas avec d'autres particules et, donc, vivent toutes seules dans des pièces isolées (c.-à-d., à distance d'au moins  $R_0$  d'autres pièces occupées).

Remarquons maintenant que ces particules, qui sont isolées des autres particules, doivent nécessairement occuper le niveau fondamental dans leur pièce. De plus, il ne peut pas arriver qu'il y ait quelque part une pièce isolée de longueur plus grande qu'une pièce déjà occupée par une de particules isolées (parce que sinon le déplacement d'une particule résulterait en diminution de l'énergie totale).

D'autre part, dans l'état fondamental sans interactions  $\Psi_{\mathcal{U}}$ , avec la probabilité au moins  $1 - e^{-L^\beta}$ , il y a moins que  $2\mu^{-1}n\rho$  pièces qui sont occupées par plus d'une particule. Les autres  $(1 - 2\mu^{-1}\rho)n$  particules sont isolées comme pour  $\Psi$  et obéissent au même principe de maximisation de la longueur des pièces qu'elles occupent. Alors, en rejetant au maximum  $2(B + \mu^{-1})\rho n$  sous-intervalles, on voit que  $\Psi$  et  $\Psi_{\mathcal{U}}$  coïncident sur le reste.  $\square$

Passons maintenant à la minoration de l'énergie fondamentale. L'intuition derrière tous les résultats précédents ainsi que l'exemple de l'état  $\Psi_\beta$  qu'on a donné à la fin de la sous-section 2.2.3 suggèrent que les interactions sont essentiellement portées par les pièces de longueur environ  $2\ell_\rho$  occupées par exactement deux particules. Pour cela, étudions le problème à deux particules de plus près.

**Proposition 2.7.3.** *Considérons deux fermions dans l'intervalle  $[0, \ell]$  avec les conditions au bord de Dirichlet qui interagissent à travers le potentiel  $U(x^1, x^2) = \mathbb{1}_{\{|x^1 - x^2| \leq R_0\}}$ . Soit  $\mathfrak{E}(\ell, 2)$  l'énergie fondamentale de ce système. Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que pour  $\ell$  suffisamment grand*

$$\frac{5\pi^2}{\ell^2} + C^{-1}\ell^{-3} \leq \mathfrak{E}(\ell, 2) \leq \frac{5\pi^2}{\ell^2} + C\ell^{-3}. \quad (2.96)$$

*Démonstration.* On considère l'opérateur

$$H(\ell, 2) = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dy^2} + \mathbb{1}_{\{|x-y| \leq R_0\}}$$

qui agit sur  $L^2([0, \ell]^2)$  avec les conditions au bord de Dirichlet. Étudier le problème de Dirichlet sur  $[0, \ell]^2$  avec la condition d'antisymétrie équivaut à étudier le problème de Dirichlet sur le triangle  $T = \{0 \leq y \leq x \leq \ell\}$  (parce que les fonctions antisymétriques s'annulent nécessairement sur la diagonale  $\{x = y\}$ ).

Introduisons une constante de couplage devant les interactions (on va s'en servir plus tard dans cette démonstration) et simplifions les notations. Soit  $H$  l'opérateur  $H(\ell, 2)$  agissant sur  $L^2(T)$ . Il s'écrit comme

$$H = H^0 + W,$$

où  $H^0 = -\Delta_2$ ,  $W = \lambda U = \lambda \mathbb{1}_{\{|x-y| \leq R_0\}}$  et  $\lambda$  est la constante de couplage. Tous ces opérateurs dépendent de  $\ell$  et  $\lambda$ , mais on omet cela dans les notations. Les opérateurs  $H^0$  et  $H$  ont un spectre discret pour tout  $\ell$ . L'énergie fondamentale de  $H^0$  est  $E_0 = 5\pi^2/\ell^2$  et la fonction propre normalisée associée est

$$\begin{aligned} \Psi_0(x, y) &= \sqrt{\frac{2}{\ell}} \left( \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{\ell}\right) - \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{\ell}\right) \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\ell}} (\sin(\hat{1}x) \sin(\hat{2}y) - \sin(\hat{2}x) \sin(\hat{1}y)), \end{aligned}$$

où on a utilisé la notation introduite dans (2.18). Remarquons que selon (2.29),

$$W_{00} = \langle W\Psi_0, \Psi_0 \rangle = \lambda U_{(12), (12)} = O(\lambda\ell^{-3}).$$

On obtient par conséquent la majoration dans (2.96) par le principe variationnel. En fixant  $\lambda = 1$ , on obtient :

$$\mathfrak{E}(\ell, 2) \leq \langle H\Psi_0, \Psi_0 \rangle = 5\pi^2\ell^{-2} + \langle W\Psi_0, \Psi_0 \rangle = 5\pi^2\ell^{-2} + O(\ell^{-3}).$$

Donnons ensuite la minoration. Soient  $\{\Psi_1, \Psi_2, \dots\}$  des états propres excités de  $H^0$ ,  $\|\Psi_j\| = 1$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Les énergies associées sont toutes minorées par  $10\pi^2/\ell^2$  : il est facile de voir que le deuxième niveau énergétique de  $H^0$  correspond à la fonction propre

$$\Psi_1(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} (\sin(\hat{1}x) \sin(\hat{3}y) - \sin(\hat{3}x) \sin(\hat{1}y))$$

d'énergie  $E_1 = 10\pi^2\ell^{-2}$ . Considérons le problème spectral

$$H\Psi = E\Psi \tag{2.97}$$

avec  $E < 6\pi^2\ell^{-2}$ . Si ce problème n'a pas des solutions, la borne inférieure dans (2.96) est automatiquement satisfaite. Sinon, on sépare l'état fondamental de  $H^0$  :

$$L^2(T) = \{\alpha\Psi_0, \alpha \in \mathbb{C}\} \perp \text{Span}\{\Psi_1, \Psi_2, \dots\}$$

et on réécrit (2.97) selon cette décomposition sous la forme

$$\begin{pmatrix} 5\pi^2\ell^{-2} + W_{00} & \widetilde{W} \\ \widetilde{W}^* & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \widetilde{\Psi} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \widetilde{\Psi} \end{pmatrix}, \quad (2.98)$$

où

$$\widetilde{W} = \frac{\lambda}{2} \widetilde{U} = (W_{01}, W_{02}, \dots)$$

avec

$$W_{ij} = \langle W\Psi_i, \Psi_j \rangle,$$

les éléments matriciels de  $W$ , et la partie de  $H$  dans  $\text{Span}\{\Psi_1, \Psi_2, \dots\}$ ,

$$A \geq 10\pi^2\ell^{-2},$$

parce que  $W \geq 0$  pour  $\lambda > 0$  et  $H^0|_{\text{Span}\{\Psi_1, \Psi_2, \dots\}} \geq E_1 = 10\pi^2\ell^{-2}$ . Alors pour  $E < 6\pi^2\ell^{-2}$  l'opérateur  $A - E$  est inversible borné et (2.98) donne le problème spectral :

$$\left( 5\pi^2\ell^{-2} + \frac{\lambda}{2} U_{(12),(12)} - \frac{\lambda^2}{4} \widetilde{U} (A - E)^{-1} \widetilde{U}^* \right) \Psi_0 = E\Psi_0. \quad (2.99)$$

Les coefficients  $1/2$  devant le deuxième terme et  $1/4$  devant le troisième sont dû au fait que dans un élément matriciel des interactions  $U$ , on intègre seulement sur la moitié du carré  $[0, \ell]^2$ . Il reste maintenant à borner la norme du troisième terme dans (2.99). Soit

$$E_{(ij)} = \frac{\pi^2}{\ell^2} (i^2 + j^2) = \hat{i}^2 + \hat{j}^2$$

l'énergie de l'état propre  $\sin(\hat{i}x) \wedge \sin(\hat{j}y)$  de  $H^0$  (voir également la notation (1.87)). Alors,

$$\widetilde{U} (A - E)^{-1} \widetilde{U}^* \leq \widetilde{U} (H^0 - E)^{-1} \widetilde{U}^* = \sum_{(ij) \neq (12)} \frac{U_{(12),(ij)}^2}{E_{(ij)} - E} \leq \frac{\ell^2}{\pi^2} \sum_{(ij) \neq (12)} \frac{U_{(12),(ij)}^2}{i^2 + j^2 - 6}.$$

On écrit ensuite les sommes de termes de différents types (selon l'analyse de la sous-section 2.2.2) :

$$\begin{aligned} \sum_{(ij) \neq (12)} \frac{U_{(12),(ij)}^2}{i^2 + j^2 - 6} &= \sum_{i \geq 2} \frac{U_{(12),(i,i+1)}^2}{i^2 + (i+1)^2 - 6} + \sum_{i \geq 1} \frac{U_{(12),(i,i+3)}^2}{i^2 + (i+3)^2 - 6} \\ &+ \sum_{i \geq 3, i \neq 4} \frac{U_{(12),(1i)}^2}{i^2 - 5} + \sum_{i \geq 4, i \neq 5} \frac{U_{(12),(2i)}^2}{i^2 - 2} \\ &+ \sum_{i < j, j - i \notin \{1,3\}, i \geq 3} \frac{U_{(12),(ij)}^2}{i^2 + j^2 - 6}. \end{aligned} \quad (2.100)$$

La première et la deuxième somme dans la partie à droite de (2.100) sont des sommes des termes "résonants" selon la terminologie de la sous-section 2.2.2. Traitons la première somme. Évidemment, il suffit de borner

$$\sum_{i \geq 2} \frac{U_{(12),(i,i+1)}^2}{i^2}.$$

Le numérateur du élément matriciel  $U_{(12),(i,i+1)}$  peut être représenté par le combinaison de  $\mathcal{M}$ - et  $\mathcal{R}$ -termes (voir (2.24)), ce qui donne :

$$U_{(12),(i,i+1)} = \frac{\tilde{U}_{(12),(i,i+1)}^{\mathcal{M}} + \tilde{U}_{(12),(i,i+1)}^{\mathcal{R}}}{\ell^2/2}$$

En faisant le développement limité, on voit que, pour la partie résiduelle, on a

$$\sin(\hat{1}x) \sin(\hat{2}y) - \sin(\hat{2}x) \sin(\hat{1}y) = O(\ell^{-4}),$$

parce que dans l'intégrale  $\tilde{U}^{\mathcal{R}}$ , on a  $|x| \leq R_0$  et  $|y| \leq R_0$ . Ceci implique

$$\tilde{U}_{(12),(i,i+1)}^{\mathcal{R}} = O(\ell^{-4}),$$

comme l'aire d'intégration est d'ordre constant. Par le Lemme 2.2.15, la partie principale donne :

$$\tilde{U}_{(12),(i,i+1)}^{\mathcal{M}} = \ell \left( \frac{\sin(\hat{i} - \hat{1})}{\hat{i} - \hat{1}} - \frac{\sin(\hat{i} + \hat{2})}{\hat{i} + \hat{2}} \right).$$

En rassemblant tous ces arguments, on obtient :

$$\sum_{i \geq 2} \frac{U_{(12),(i,i+1)}^2}{i^2 + (i+1)^2 - 6} \leq C\ell^{-2} \sum_{i \geq 2} \frac{\left( \frac{\sin(\hat{i} - \hat{1})}{\hat{i} - \hat{1}} - \frac{\sin(\hat{i} + \hat{2})}{\hat{i} + \hat{2}} \right)^2}{i^2} \quad (2.101)$$

On sépare la somme en deux parties :  $\sum_{i \geq 2} = \sum_{2 \leq i \leq \ell} + \sum_{i > \ell}$ . Si  $i \leq \ell$ , alors  $\hat{i} \leq \pi$ . On estime :

$$\frac{\sin(\hat{i} - \hat{1})}{\hat{i} - \hat{1}} - \frac{\sin(\hat{i} + \hat{2})}{\hat{i} + \hat{2}} = -\frac{(\hat{i} - \hat{1})^2}{6} + \frac{(\hat{i} + \hat{2})^2}{6} + O(\hat{i}^4) = O\left(\frac{i}{\ell^2}\right),$$

ce qui donne

$$\sum_{2 \leq i \leq \ell} \frac{\left( \frac{\sin(\hat{i} - \hat{1})}{\hat{i} - \hat{1}} - \frac{\sin(\hat{i} + \hat{2})}{\hat{i} + \hat{2}} \right)^2}{i^2} \leq C \sum_{2 \leq i \leq \ell} \frac{(i\ell^{-2})^2}{i^2} \leq C\ell^{-3}. \quad (2.102)$$

En faisant l'autre développement limité, pour  $i > \ell$ , on obtient

$$\frac{\sin(\hat{i} - \hat{1})}{\hat{i} - \hat{1}} - \frac{\sin(\hat{i} + \hat{2})}{\hat{i} + \hat{2}} = O(\ell^{-1}),$$

ce qui donne

$$\sum_{i > \ell} \frac{\left( \frac{\sin(\hat{i} - \hat{1})}{\hat{i} - \hat{1}} - \frac{\sin(\hat{i} + \hat{2})}{\hat{i} + \hat{2}} \right)^2}{i^2} \leq C\ell^{-2} \sum_{i > \ell} i^{-2} \leq \tilde{C}\ell^{-3}. \quad (2.103)$$

En mettant (2.102) et (2.103) dans (2.101), on obtient l'estimée pour le premier terme dans (2.100) :

$$\sum_{i \geq 2} \frac{U_{(12),(i,i+1)}^2}{i^2 + (i+1)^2 - 6} \leq C\ell^{-5}.$$

Par les mêmes arguments, on obtient la même estimée pour le deuxième terme dans (2.100). Passons au troisième et au quatrième terme. Il suffit de remarquer que les parties principales  $U^{\mathcal{M}}$  valent zéro comme ces termes sont non résonants (la même chose est vraie pour le dernier et cinquième terme de la partie à droite de (2.100)). Mais pour tout  $i$  et  $j$ ,

$$U_{(12),(ij)}^{\mathcal{R}} = O(\ell^{-6}). \quad (2.104)$$

Ceci implique

$$\sum_{i \geq 3, i \neq 4} \frac{U_{(12),(1i)}^2}{i^2 - 5} + \sum_{i \geq 4, i \neq 5} \frac{U_{(12),(2i)}^2}{i^2 - 2} \leq C\ell^{-12} \sum_{i \geq 1} i^{-2} \leq \tilde{C}\ell^{-12}.$$

Il reste le dernier terme. De nouveau, comme tous les cas résonants ont déjà été considérés, il y a que la partie  $\mathcal{R}$  à estimer :

$$\sum_{i < j, j - i \notin \{1,3\}, i \geq 3} \frac{U_{(12),(ij)}^2}{i^2 + j^2 - 6} \leq C \cdot \sum_{(ij) \text{ non résonant avec } (12)} \frac{(\ell^{-2} \tilde{U}_{(12),(ij)}^{\mathcal{R}})^2}{i^2 + j^2} \quad (2.105)$$

Dans (2.105), on sépare :

$$\sum_{(ij)} = \sum_{\min(i,j) > \ell^2} + \sum_{\min(i,j) \leq \ell^2}$$

Pour la somme sur  $i$  et  $j$  tels que soit  $i$ , soit  $j$  est plus petit que  $\ell^2$ , en utilisant le fait que chaque terme est borné par  $C\ell^{-12}$  selon (2.104), on calcule :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\ell^2} \frac{(\tilde{U}_{(12),(ij)}^{\mathcal{R}})^2}{i^2 + j^2} \leq C\ell^2 \cdot \ell^{-12} \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} i^{-2} \leq \tilde{C}\ell^{-10}.$$

Pour  $i > \ell^2$  et  $j > \ell^2$ , en utilisant le dernier cas de (2.26) et le fait que  $\tilde{U}^{\mathcal{R}}$  est toujours borné par une constante, on obtient que

$$\tilde{U}_{(12),(ij)}^{\mathcal{R}} = O(i^{-1} + j^{-1}).$$

Ceci donne immédiatement la convergence de la somme dans (2.105) avec l'estimée :

$$\sum_{\substack{(ij) \text{ non résonant avec } (12) \\ \min(i,j) > \ell^2}} \frac{(\tilde{U}_{(12),(ij)}^{\mathcal{R}})^2}{i^2 + j^2} \leq C \sum_{i \geq j > \ell^2} \frac{i^{-2} + j^{-2}}{i^2 + j^2} \leq \tilde{C} \sum_{i \geq j > \ell^2} \frac{1}{i^2 j^2} = O(\ell^{-4})$$

et démontre que la dernière somme dans la partie à droite de (2.100) est au plus d'ordre  $\ell^{-6}$ . Ceci conclut la démonstration que (2.100) est  $O(\ell^{-5})$ , qui implique

$$\tilde{U}(A - E)^{-1}\tilde{U}^* = O(\ell^{-3}).$$

En revenant au problème spectral (2.99), on voit que le deuxième et le troisième termes de la partie à gauche sont de l'ordre  $\ell^{-3}$ . Ceci implique qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour  $\lambda > 0$  suffisamment petit

$$5\pi^2\ell^{-2} + \frac{\lambda}{2}U_{(12),(12)} - \frac{\lambda^2}{4}\tilde{U}(A - E)^{-1}\tilde{U}^* \geq 5\pi^2\ell^{-2} + C\ell^{-3}.$$

On a démontré la minoration de l'énoncé de la Proposition 2.7.3. pour la constante  $\lambda$  suffisamment petite. Mais si c'est vrai pour  $\lambda$  petit, alors c'est aussi vrai pour tout  $\lambda > 0$  par la monotonie.  $\square$

La Proposition 2.7.3 permet d'obtenir une minoration sur la différence entre les occupations de l'état fondamental sans interactions  $\Psi_{\cup}$  et avec interactions  $\Psi$ . Ce résultat est complémentaire à celui du Lemme 2.7.2. Remarquons aussi que le Lemme 2.7.2 avec la Proposition 2.7.4 font ensemble le Théorème 0.0.8.

**Proposition 2.7.4.** *Pour tout  $\beta \in (0, 1/2)$  il existe une constante  $C$  telle que pour tous  $n$  et  $L$  suffisamment grands et tels que  $n/L$  est suffisamment proche de  $\rho$ , si  $\Psi$  est l'état fondamental de  $H_{\omega}(L, n)$  et  $\Psi_{\cup}$  est l'état fondamental de  $H_{\omega}^0(L, n)$ , alors avec la probabilité au moins  $1 - e^{-L^{\beta}}$ ,*

$$\text{dist}_0(Q(\Psi), Q(\Psi_{\cup})) \geq \frac{1}{C}n\rho.$$

*Démonstration.* On fait la démonstration par l'absurde. Le contraire de l'affirmation de la proposition soit que pour tout  $C > 0$  il existe  $L$  et  $n$  arbitrairement grands et tels que  $n/L$  est arbitrairement proche de  $\rho$ , tels que

$$\text{dist}_0(Q(\Psi), Q(\Psi_{\cup})) < \frac{1}{C}n\rho.$$

Dans l'état fondamental sans interactions  $\Psi_{\cup}$ , il y a d'ordre  $n\rho$  pièces qui sont occupées par exactement deux particules selon la formule (2.57). Évidemment, ces particules sont sur le premier et le deuxième niveau. Mais si au maximum  $C^{-1}n\rho$  parmi elles sont changées et d'autres restent intacte et au même temps de nouveau au plus  $C^{-1}n\rho$  nouvelles (par rapport à  $\Psi_{\cup}$ ) pièces sont occupées, alors l'argument de la fin de la sous-section 2.2.3 reste valable avec un seul changement : au lieu de dire que le terme d'interaction entre le premier et le deuxième niveaux d'un sous-intervalle de longueur d'ordre  $\ell_{\rho}$  apporte le surplus d'énergie d'ordre  $\ell_{\rho}^{-3}$ , il faut utiliser la minoration dans (2.96).  $\square$

La Proposition 2.7.4 nous permet d'améliorer la minoration dans l'estimée de l'énergie fondamentale par particule par rapport à celle du cas sans interactions du Corollaire 2.2.19. On trouve que la majoration dans (2.54) est d'ordre correct.



**Corollaire 2.7.5.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\mathcal{E}(\rho, 0) \geq \mathcal{E}^0(\rho, 0) + \frac{1}{C} \rho |\log \rho|^{-3}. \quad (2.106)$$

*Démonstration.* Par la Proposition 2.7.4 il y a au moins d'ordre  $n\rho$  particules qui doivent être déplacées pour obtenir  $\Psi$  à partir de  $\Psi_{\cup}$ . Mais en utilisant les estimées (2.58) et (2.60), on arrive à (2.106).  $\square$

*Remarque 2.7.6.* Les Corollaires 2.2.19 et 2.7.5 démontrent le Théorème 0.0.9.

# Annexe A

## Ensemble grand-canonique

La partie principale de la thèse s'occupe de la formulation du problème dans le formalisme de microcanonique. Cela consiste à considérer le système comme isolé avec un nombre fixé de particules à la température absolue zéro. Les objets les plus intéressants et les plus importants physiquement dans ce cadre sont l'énergie et la fonction d'ondes de l'état fondamental qu'on a étudiées dans les Chapitres 1 et 2.

Une autre possibilité est de considérer un système ouvert à température positive  $T$ . Ce système peut échanger de l'énergie et des particules avec son environnement pour atteindre une configuration énergétiquement favorable. L'échange de particules est contrôlé par le potentiel chimique  $\mu \in \mathbb{R}$ . Une quantité physique la plus cohérente dans l'ensemble grand canonique est l'énergie libre (mais on peut également définir l'énergie fondamentale qui décrit le système ouvert à température zéro).

Dans la suite, on introduit le formalisme lié à l'ensemble grand-canonique dans la Section A.1. On définit notamment l'espace de Fock pour les trois statistiques quantiques discutées dans la sous-section 1.1.2 (Maxwell – Boltzmann, Bose – Einstein et Fermi – Dirac). Ensuite on définit l'énergie fondamentale dans l'ensemble grand-canonique et l'énergie libre. Puis, dans la Section A.2, on démontre des inégalités de type sous-additif pour l'énergie fondamentale et l'énergie libre dans le cas des interactions à support compact (voir la sous-section 1.1.2) et on en déduit l'existence de la limite thermodynamique dans ce cas là.

### A.1 Espace de Fock et énergie libre

Dans cette section, on introduit le formalisme grand-canonique. Plus précisément, on définit l'espace de Fock, les énergies fondamentale et libre, ainsi que les notions d'état et de matrice densité. Pour une introduction assez complète sur ce sujet, on pourra, par exemple, consulter [BR97], [Gre98] ou [Diu89].

On reprend la définition de l'espace de Fock de la sous-section 1.1.2. Soit une statistique  $\sharp \in \{\emptyset, +, -\}$  fixée et soient  $\{\mathfrak{H}_\sharp^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  les espaces de Hilbert à  $n$  particules quantiques. Alors, on définit l'espace de Fock par :

$$\mathcal{F}_\sharp(\mathfrak{H}) = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{H}_\sharp^n.$$

On note par  $\mathcal{F}_\sharp(\Lambda)$ ,  $\Lambda \subset \mathcal{V}$ , l'espace de Fock correspondant à l'espace à une particule  $\mathfrak{H} = L^2(\Lambda \cap \mathcal{V})$ , et on se permet d'omettre l'indication explicite de la statistique  $\sharp$  dans les notation pour le moment. Le hamiltonien restreint à  $\Lambda$  est défini par :

$$\mathbb{H}_\omega(\Lambda) = 0 \oplus \bigoplus_{n \geq 1} H_\omega(\Lambda, n),$$

où  $H_\omega(\Lambda, n)$  est le hamiltonien pour  $n$  particules quantiques dans le domaine  $\Lambda$  (voir la définition (1.14)). C'est un opérateur autoadjoint sur  $\mathcal{F}(\Lambda)$ , qui respecte les sous-espaces de nombre de particules fixé. L'opérateur de nombre (de particules) est l'opérateur de multiplication suivant :

$$\mathcal{N}(\Lambda) = 0 \oplus \bigoplus_{n \geq 1} n.$$

Les opérateurs  $\mathbb{H}_\omega(\Lambda)$  et  $\mathcal{N}(\Lambda)$  agissant sur l'espace de Fock  $\mathcal{F}(\Lambda)$  décrivent l'ensemble grand-canonique de particules quantiques dans un domaine  $\Lambda$ . Ils commutent.

Soit maintenant  $\mathfrak{U}$  une  $C^*$ -algèbre d'opérateurs sur l'espace de Fock  $\mathcal{F}(\Lambda)$ . On appelle les éléments de  $\mathfrak{U}$  les *observables*. Remarquons, que le choix et la description rigoureuse de cette algèbre ne sont pas évidents. Un *état normal*  $\gamma$  du système dans l'ensemble grand-canonique est une fonctionnelle sur  $\mathfrak{U}$  donnée par une *matrice densité* selon la règle suivante :

$$\gamma(A) = \text{Tr}_{\mathcal{F}(\Lambda)}(A\Gamma), \quad A \in \mathfrak{U}, \quad (\text{A.1})$$

où la matrice densité  $\Gamma$  est un opérateur positif sur  $\mathcal{F}(\Lambda)$  de trace unité :

$$\Gamma \geq 0, \quad \text{Tr}_{\mathcal{F}(\Lambda)} \Gamma = 1. \quad (\text{A.2})$$

La formule (A.1) donne la valeur moyenne de l'observable  $A$  dans l'état  $\Gamma$ . Par exemple,  $\text{Tr}_{\mathcal{F}(\Lambda)}(\mathbb{H}_\omega(\Lambda)\Gamma)$  et  $\text{Tr}_{\mathcal{F}(\Lambda)}(\mathcal{N}(\Lambda)\Gamma)$  donnent l'énergie et le nombre de particules moyens respectivement du système dans l'état  $\Gamma$ .

À la température zéro, l'énergie fondamentale d'un système appartenant à l'ensemble grand-canonique est obtenue en optimisant l'énergie d'un système à  $n$  particules par rapport à  $n$ . On reprend (1.26) :

$$\mathfrak{E}_\omega(\Lambda) = \inf_{n \geq 0} \mathfrak{E}_\omega(\Lambda, n). \quad (\text{A.3})$$

À la température  $T > 0$  positive et à potentiel chimique  $\mu \in \mathbb{R}$  fixé, l'énergie libre grand-canonique<sup>6</sup> est définie par la formule :

$$F_\omega(\Lambda) = -T \log \left( \sum_{n \geq 0} \text{Tr}_{\mathfrak{H}^n(\Lambda)} e^{-(H_\omega(\Lambda, n) - \mu n)/T} \right), \quad (\text{A.4})$$

où on a omis dans la notation la dépendance de l'énergie libre dans la température et le potentiel chimique. Il existe une autre définition de type variationnel équivalente à la précédente :

$$F_\omega(\Lambda) = \inf_{\substack{\Gamma \geq 0 \\ \text{Tr}_{\mathcal{F}(\Lambda)} \Gamma = 1}} \text{Tr}_{\mathcal{F}(\Lambda)} \left[ (\mathbb{H}_\omega(\Lambda) - \mu \mathcal{N} + T \log \Gamma) \Gamma \right]. \quad (\text{A.5})$$

Dans la suite, on veut démontrer l'existence d'une limite thermodynamique pour les densités  $\mathfrak{E}_\omega(\Lambda)/|\Lambda|$  et  $F_\omega(\Lambda)/|\Lambda|$ .

6. Dans certains livres (par exemple, [Diu89]) cette quantité porte le nom du *grand potentiel*.

## A.2 Inégalités sous-additives et existence de la limite thermodynamique

Dans cette section, on démontre l'existence de la limite thermodynamique pour les quantités définies dans (A.3) et (A.5) (ou alternativement, (A.4)).

Un état dans l'ensemble grand-canonique est donné par la matrice densité  $\Gamma$  qui vérifie (A.2) et donc, n'est pas en général caractérisé par un nombre des particule bien défini. Au contraire, c'est un mélange de différents états purs (un état  $\Gamma$  est pur si sa matrice densité est le projecteur orthogonal sur un vecteur  $\Psi$  appartenant à un des sous-espaces  $\mathfrak{H}^n(\Lambda)$ ).

Pour l'ensemble grand-canonique, la limite thermodynamique est la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  dans le sens de Fisher (voir Définition 1.1.25). Dans ce cas, la Définition 1.1.28 (qu'on a utilisée dans le cas de l'ensemble microcanonique) ne convient pas : le nombre de particules  $n$  n'a pas de valeur fixée pour un état dans l'ensemble grand-canonique.

Dans la suite, on va supposer que les interactions sont à support compact (**Comp**) de rayon  $R_0$ , mais on ne demande pas qu'elles soient par paires ou invariantes par translations. Pour plus de détails, voir la sous-section 1.1.2.

### A.2.1 Énergie fondamentale

On commence par l'énergie fondamentale (A.3). Soient  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  deux domaines dans  $\mathcal{V}$  à la distance l'un de l'autre plus grande que  $R_0$  :

$$\text{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) > R_0.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_\omega(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) &= \inf_{n \geq 0} \mathfrak{E}_\omega(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n) \\ &\leq \inf_{n \geq 0} \inf_{\substack{n_1, n_2 \geq 0 \\ n_1 + n_2 = n}} (\mathfrak{E}_\omega(\Lambda_1, n_1) + \mathfrak{E}_\omega(\Lambda_2, n_2)) \\ &= \inf_{n_1 \geq 0} \mathfrak{E}_\omega(\Lambda_1, n_1) + \inf_{n_2 \geq 0} \mathfrak{E}_\omega(\Lambda_2, n_2) \\ &= \mathfrak{E}_\omega(\Lambda_1) + \mathfrak{E}_\omega(\Lambda_2), \end{aligned}$$

où la première et la dernière égalités sont juste les définitions de l'énergie fondamentale pour l'ensemble grand-canonique, l'inégalité à la deuxième ligne est une conséquence immédiate de la sous-additivité (1.35) avec  $S_1 = S_2 = 0$  (pour avoir l'énergie fondamentale) et  $A = 0$  grâce à la compacité des interactions), et l'égalité au milieu est vraie parce que, optimiser en  $n_1$  et  $n_2$  en fixant leurs somme et ensuite optimiser cette somme, revient du même que optimiser séparément par  $n_1$  et  $n_2$ .

Bien sûr, l'énergie fondamentale est monotone par rapport au domaine :

$$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{E}_\omega(\Lambda_1) \geq \mathfrak{E}_\omega(\Lambda_2).$$

Ceci implique que, pour tout  $\Lambda \supset \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ ,  $\text{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) > R_0$ , on a

$$\mathfrak{E}_\omega(\Lambda) \leq \mathfrak{E}_\omega(\Lambda_1) + \mathfrak{E}_\omega(\Lambda_2), \tag{A.6}$$

qui nous permet d'établir l'existence de la limite thermodynamique pour l'énergie fondamentale.

**Théorème A.2.1.** *Supposons l'opérateur à une particule borné inférieurement **(LB)** et décorrélé **(IAD)**. Si les interactions  $W$  sont stables **(SI)** et de support compact **(Comp)**, alors il existe un nombre  $e \in \mathbb{R}$  tel que*

$$\frac{\mathfrak{E}_\omega(\Lambda)}{|\Lambda|} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} e.$$

La convergence est dans  $L^1(\Omega)$  et  $\omega$ -presque sûrement.

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser la sous-additivité (A.6) et de répéter la démonstration du Théorème 1.2.20.  $\square$

Remarquons que dans le cas où les interactions sont répulsives **(Rep)** et le potentiel  $V_\omega$  est positif (condition **(LB)** avec  $C = 0$ ), la limite thermodynamique qu'on discute devient triviale. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut écrire :

$$H_\omega(\Lambda, n+1) = H_\omega(\Lambda, n) \otimes \mathbf{1}_{\mathfrak{H}(\Lambda)} + \mathbf{1}_{\mathfrak{H}(\Lambda)}^n \otimes H_\omega(\Lambda, 1) + W_{n,1}^{inter} \geq H_\omega(\Lambda, n) \otimes \mathbf{1}_{\mathfrak{H}(\Lambda)},$$

où  $W_{n,1}^{inter} \geq 0$  est le potentiel d'interactions de  $n$  premières particules avec la dernière. Cela implique que

$$\inf \text{Spec } H_\omega(\Lambda, n+1) \geq \inf \text{Spec } H_\omega(\Lambda, n),$$

qui veut dire que énergétiquement c'est plus avantageux d'avoir le moins possible de particules. Alors,

$$\mathfrak{E}_\omega(\Lambda) \equiv 0,$$

et l'infimum dans (A.3) se réalise sur  $n = 0$ . Physiquement ceci veut dire que grâce à la nature répulsive des interactions et au fait qu'il n'y a pas de pièges créés par le potentiel aléatoire, les particules se repoussent l'une l'autre vers l'infini. Dans d'autres situations, la limite dans le Théorème A.2.1 ainsi que l'énergie fondamentale  $\mathfrak{E}_\omega(\Lambda)$  elle-même peuvent être non triviales.

## A.2.2 Énergie libre

On considère maintenant l'énergie libre  $F_\omega(\Lambda)$  à la température  $T > 0$  pour le potentiel chimique  $\mu \in \mathbb{R}$ . La formulation variationnelle (A.5) sera plus utile pour nous.

Soient, comme d'habitude,  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  deux domaines dans  $\mathcal{V}$  à la distance au moins  $R_0$  l'un de l'autre. Rappelons que l'espace de Hilbert à une particule est décomposé en :

$$\mathfrak{H}^1(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) = \mathfrak{H}^1(\Lambda_1) \oplus \mathfrak{H}^1(\Lambda_2).$$

Cette décomposition induit l'isomorphisme des espaces de Fock :

$$\mathcal{F}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) \simeq \mathcal{F}(\Lambda_1) \otimes \mathcal{F}(\Lambda_2).$$

L'application (par exemple, dans le cas fermionique,  $\sharp = -$ ) est donnée par :

$$\mathcal{F}_-(\Lambda_1) \otimes \mathcal{F}_-(\Lambda_2) \ni \bigwedge_{i=1}^n \psi_i \otimes \bigwedge_{j=1}^m \phi_j \mapsto \bigwedge_{i=1}^n \psi_i \wedge \bigwedge_{j=1}^m \phi_j \in \mathcal{F}_-(\Lambda_1 \cup \Lambda_2), \quad (\text{A.7})$$

et est prolongée par linéarité et continuité sur tout l'espace de Fock. Ici, on identifie un élément  $\psi_i \in \mathfrak{H}^1(\Lambda_1)$  avec son extension par zéro sur  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$  ou, autrement, avec  $\psi_i \oplus 0 \in \mathfrak{H}^1(\Lambda_1) \oplus \mathfrak{H}^1(\Lambda_2)$ , et pareille pour des éléments  $\phi_j \in \mathfrak{H}^1(\Lambda_2)$ .

On note  $J$  l'isométrie définie par (A.7). Faisons l'observation cruciale suivante. Supposons qu'il y ait une paire d'opérateurs  $A_1$  et  $A_2$  tels que  $A_j$  agit dans  $\mathfrak{F}(\Lambda_j)$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . Alors, à l'aide de l'isométrie  $J$ , on peut définir l'opérateur  $J(A_1 \otimes A_2)J^{-1}$  qui agit dans  $\mathcal{F}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ . Comme dans la suite, on va toujours travailler à travers l'application  $J$ , on écrira simplement  $A_1 \otimes A_2$  à la place de  $J(A_1 \otimes A_2)J^{-1}$ .

On remarque que, s'il n'y a pas des interactions entre  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  (ce qui est le cas si les interactions sont à support compact et, ces deux domaines sont à la distance au moins  $R_0$ ), alors le hamiltonien total admet une décomposition :

$$\mathbb{H}_\omega(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) = \mathbb{H}_\omega(\Lambda_1) \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{F}(\Lambda_2)} + \mathbb{I}_{\mathcal{F}(\Lambda_1)} \otimes \mathbb{H}_\omega(\Lambda_2), \quad (\text{A.8})$$

où  $\mathbb{I}_{\mathcal{F}(\Lambda)} = 1 \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\mathfrak{H}^n(\Lambda)}$  est l'opérateur identité dans l'espace de Fock. De même, pour l'opérateur de nombre,

$$\mathcal{N}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) = \mathcal{N}(\Lambda_1) \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{F}(\Lambda_2)} + \mathbb{I}_{\mathcal{F}(\Lambda_1)} \otimes \mathcal{N}(\Lambda_2). \quad (\text{A.9})$$

On rappelle encore une fois, que les parties à droite de (A.8) et (A.9), et les produit tensoriels, doivent être comprises à travers l'isométrie  $J$ .

Soient maintenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  les matrices densité qui résolvent le problème variationnel de l'énergie libre (A.5) pour  $\Lambda = \Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  respectivement. Alors,  $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$  donne une matrice densité sur  $\mathcal{F}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ , parce que  $\text{Tr}_{\mathcal{F}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)}(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) = \text{Tr}_{\mathcal{F}(\Lambda_1)}(\Gamma_1) \cdot \text{Tr}_{\mathcal{F}(\Lambda_2)}(\Gamma_2) = 1$  et, évidemment,  $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \geq 0$ . En remarquant également que

$$\log(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) = \log \Gamma_1 \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{F}(\Lambda_2)} + \mathbb{I}_{\mathcal{F}(\Lambda_1)} \otimes \log \Gamma_2,$$

on trouve :

$$\begin{aligned} F_\omega(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) &\leq \text{Tr}_{\mathcal{F}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)} \left\{ (\mathbb{H}_\omega(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) - \mu \mathcal{N}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) + T \log(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)) \cdot (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \right\} \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{F}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)} \left\{ \left[ (\mathbb{H}_\omega(\Lambda_1) - \mu \mathcal{N}(\Lambda_1) + T \log \Gamma_1) \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{F}(\Lambda_2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbb{I}_{\mathcal{F}(\Lambda_2)} \otimes (\mathbb{H}_\omega(\Lambda_1) - \mu \mathcal{N}(\Lambda_1) + T \log \Gamma_1) \right] \cdot (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \right\} \\ &= \sum_{j=1,2} \text{Tr}_{\mathcal{F}(\Lambda_j)} \left\{ (\mathbb{H}_\omega(\Lambda_j) - \mu \mathcal{N}(\Lambda_j) + T \log \Gamma_j) \cdot \Gamma_j \right\} \\ &= F_\omega(\Lambda_1) + F_\omega(\Lambda_2), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

qui nous donne le théorème suivant.

**Théorème A.2.2** (limite thermodynamique pour l'énergie libre). *Soit un opérateur à une particule borné inférieurement (LB) et décorrélé (IAD). Si les interactions  $W$  sont stables (SI) et de support compact (Comp), alors il existe une fonction  $f(T, \mu)$  telle que*

$$\frac{F_\omega(\Lambda)}{|\Lambda|} \xrightarrow[\Lambda \rightarrow \infty]{L^1(\Omega) \text{ et } \omega\text{-p.s.}} f(T, \mu).$$

La fonction  $f(T, \mu)$  est déterministe est s'appelle la densité de l'énergie libre.

*Remarque A.2.3.* L'énergie par particule libre dépend de la statistique  $\sharp$  même si on l'a omise dans les notations.

*Démonstration du théorème.* Comme dans la démonstration du Théorème A.2.1, il suffit d'utiliser la sous-additivité (A.10) pour appliquer le théorème ergodique sous-additif en suivant la méthode du Théorème 1.2.20.  $\square$

Pour rétablir l'idée que, dans la limite thermodynamique, le nombre de particules croît conjointement avec le volume, il reste à comprendre l'évolution de la valeur moyenne de l'opérateur de nombre. Soit  $\Gamma_\omega(\Lambda)$  la matrice densité qui réalise l'infimum dans (A.5) pour l'énergie libre  $F_\omega(\Lambda)$ . Alors, on calcule le nombre de particules moyen :

$$n_\omega(\Lambda) = \text{Tr}_{\mathcal{F}(\Lambda)}(\mathcal{N}\Gamma_\omega(\Lambda)).$$

On aimerait démontrer que  $n_\omega(\Lambda)/|\Lambda|$  admet la limite quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ . On pourrait appeler cette limite la densité de particules. Si cette limite existe :

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{n_\omega(\Lambda)}{|\Lambda|} =: \rho(T, \mu),$$

alors ce serait logique de penser que

$$\rho(T, \mu) = -\frac{\partial f(T, \mu)}{\partial \mu}.$$

La vraie difficulté est d'interchanger la limite thermodynamique avec la dérivation partielle. Ceci n'est pas fait dans cette thèse et il n'est pas clair sous quelle condition cela peut être fait.

# Annexe B

## Marginales, densité de charge, densité de courant et la localisation

Cette annexe sur les marginales est une démonstration de ce qu'on peut faire avec l'état actuel de notre connaissance sur l'opérateur  $H_\omega(\Lambda, n)$  en bas du spectre. On ne peut pas, par exemple, obtenir l'asymptotique de l'énergie fondamentale, qui nous semble quelque chose de beaucoup plus fin. Les questions les plus importantes sont décrites dans la partie sur la localisation. La partie sur la densité de charge et de courant donne une réponse partielle à ces questions.

On rappelle que les vecteurs  $x^i$  dans  $\mathbb{R}^d$  ou  $\Lambda$  sont les coordonnées spatiales de particules;  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$  dans  $\mathbb{R}^{nd}$  ou  $\Lambda^d$  est un vecteur dans l'espace configurationnel. Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on note par  $\bar{z} = z^*$  son complexe conjugué.

### B.1 Marginales

Soit  $\Psi \in \mathfrak{H}_\#^n(\Lambda)$  une fonction d'ondes à  $n$  particules. Dans la base des fonctions propres du hamiltonien non perturbé  $H_\omega^0(\Lambda, n)$ ,  $\Psi$  s'écrit sous la forme :

$$\Psi = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \Psi_{\alpha}, \quad (\text{B.1})$$

où

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\text{sign} \sigma} \prod_{i=1}^n \psi_{\alpha_i}(x^{\sigma(i)}),$$

avec  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{N}$ ,  $\text{card } \alpha = n$  et  $\psi_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , des fonctions propres à une particule. On suppose que toutes les fonctions propres sont normalisées :

$$\|\psi_k\| = 1, \quad \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 = 1.$$

Ceci implique que

$$\|\Psi\| = \|\Psi_{\alpha}\| = 1.$$



On va maintenant calculer quelques marginales. Plus précisément, on calcule la densité à une et à deux particules :

$$\begin{aligned}\rho_{\Psi}^2(x^1, x^2) &= \int_{\Lambda^{n-2}} \widehat{dx^1 dx^2} |\Psi(\mathbf{x})|^2, \\ \rho_{\Psi}^1(x^1) &= \int_{\Lambda^{n-1}} \widehat{dx^1} |\Psi(\mathbf{x})|^2 = \int_{\Lambda} dx^2 \rho_{\Psi}^2(x^1, x^2),\end{aligned}$$

où l'intégration avec le chapeau veut dire qu'on intègre toutes les variables sauf celles indiquées.

Après un calcul direct, on trouve que :

$$\begin{aligned}\rho_{\Psi}^2(x^1, x^2) &= \sum_{\alpha \in \Psi} |c_{\alpha}|^2 \cdot \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} |[\alpha_i, \alpha_j](x^1, x^2)|^2 \\ &+ \frac{2}{n} \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Psi \\ |\alpha \setminus \beta|=1}} c_{\alpha} c_{\beta}^* \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha_i = \beta_j \in \alpha \cap \beta} s(\clubsuit, i, \diamond, j) \cdot [\alpha_{\clubsuit}, \alpha_i](x^1, x^2) \cdot ([\beta_{\diamond}, \alpha_i](x^1, x^2))^* \\ &+ \frac{2}{n(n-1)} \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Psi \\ |\alpha \setminus \beta|=2}} c_{\alpha} c_{\beta}^* \cdot s(\clubsuit, \spadesuit, \diamond, \heartsuit) \cdot [\alpha_{\clubsuit}, \alpha_{\spadesuit}](x^1, x^2) \cdot ([\beta_{\diamond}, \beta_{\heartsuit}](x^1, x^2))^*,\end{aligned}\tag{B.2}$$

où, dans la deuxième somme,

- $\alpha_{\clubsuit}$  est le seul élément qui est dans  $\alpha$ , mais pas dans  $\beta$  :  $\{\alpha_{\clubsuit}\} = \alpha \setminus \beta$ ,
- $\beta_{\diamond}$  est le seul élément qui est dans  $\beta$ , mais pas dans  $\alpha$  :  $\{\beta_{\diamond}\} = \beta \setminus \alpha$ .

Pareille, dans la troisième somme,

- $\{\alpha_{\clubsuit}, \alpha_{\spadesuit}\} = \alpha \setminus \beta$ ,
- $\{\beta_{\diamond}, \beta_{\heartsuit}\} = \beta \setminus \alpha$ .

La notation  $\alpha \in \Psi$  veut dire juste que  $\Psi_{\alpha}$  donne le coefficient  $c_{\alpha}$  différent de zéro dans (B.1). La fonction  $s(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  donne le signe :

$$s(p, q, r, s) = (-1)^{p+q+\text{sign}(p,q)+r+s+\text{sign}(r,s)}.$$

Finalement,  $[k, j]$  désigne le déterminant de Slater deux fois deux :

$$[k, j] = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_k \otimes \psi_j - \psi_j \otimes \psi_k).$$

De même, on trouve que

$$\rho_{\Psi}^1(x^1) = \sum_{\alpha \in \Psi} |c_{\alpha}|^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\psi_{\alpha_i}(x^1)|^2 + \frac{1}{n} \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Psi \\ |\alpha \setminus \beta|=1}} c_{\alpha} c_{\beta}^* \cdot (-1)^{\clubsuit+\diamond} \cdot \psi_{\alpha_{\clubsuit}}(x^1) \psi_{\beta_{\diamond}}(x^1)^*,\tag{B.3}$$

où les notations sont celles définies ci-dessus.

Remarquons, que les premiers termes dans (B.2) et (B.3) sont juste des moyennisations des densités pour les états propres à deux et à une particule respectivement. La moyennisation se fait d'abord pour des états (à deux ou à une particule) qui constituent

un état propre à  $n$  particules  $\Psi_\alpha$  et après pour tous les  $\alpha$  avec des poids  $|c_\alpha|^2$ . Ceci donne la probabilité de trouver le système dans l'état propre  $\Psi_\alpha$  (voir (B.1)). Les autres termes sont pénalisés par des coefficients décroissants en  $n$ .

On se place maintenant dans le cas du modèle des pièces à une dimension. Supposons que  $\Psi \in \mathfrak{H}^-$ , un état à  $n$  particules “près” de l'état fondamental. Soit  $A > 0$  suffisamment grand. Le sous-espace  $\mathfrak{H}^-$  est engendré par les états propres de  $H^0(\Lambda, n)$ , tels que au plus  $\sim n\rho\ell_\rho^A$  particules ont une énergie inférieure à  $\sim E_\rho$  et tels que le nombre d'interactions est au plus d'ordre  $n\rho$ .

Concentrons nous sur la densité à une particule (B.3). Dans ce cas, si on croit vraiment, que c'est le premier terme qui est le plus important, ceci donne juste la fonction de densité qui est plus ou moins uniformément répartie par des pièces de longueur  $\sim \ell_\rho$  et qui s'annule presque en dehors de ses pièces. Sur chaque sous-intervalle occupé par  $\Psi$ , la densité  $\rho_\Psi^1$  vaut juste la moyenne des densités des fonctions à une particule qui sont supportées par cette pièce et d'énergie inférieure à environ  $E_\rho$ .

Plus rigoureusement, soit  $\Psi$  l'état fondamental à  $n$  fermions dans le modèle des pièces, comme discuté dans le Chapitre 2. Alors selon le Corollaire 2.5.3,  $\Psi$  appartient à un des sous-espaces  $\mathfrak{H}_Q$  d'occupation constante. Selon la formule (B.3), la densité à une particule  $\rho_\Psi^1$  est supportée exactement sur la réunion des pièces sélectionnées par  $Q$ .

Décomposons maintenant  $\Psi$  selon (2.64) :

$$\Psi = (1 - \varepsilon^2)^{1/2}\Psi^- + \varepsilon\Psi^+, \quad (\text{B.4})$$

où on peut choisir des paramètres de la Définition 2.4.1 de façon que  $\varepsilon = O(|\log \rho|^{-A}) \ll 1$  pour  $A \geq 3$  arbitraire fixé, et  $\|\Psi^-\| = \|\Psi^+\| = 1$ . Rappelons que  $\Psi^\pm \in \mathfrak{H}_Q$  pour la même occupation  $Q$ . Bien évidemment, l'occupation  $Q$  est fixé : c'est celle de  $\Psi^- \in \mathfrak{H}^-$ .

Dans  $\Psi^-$ , il y a au moins  $n(1 - A(\rho))$  particules de l'énergie bornée par  $\tilde{E} = E_\rho(1 + h(\rho))$ . Comme il n'y a pas plus que  $Bn\rho$  interactions et pas plus que  $nA(\rho)$  “mauvaises” particules, on déduit qu'au moins

$$n(1 - A(\rho) - B\rho) \geq n(1 - 2A(\rho)) \quad (\text{B.5})$$

particules n'interagissent avec d'autres particules (vivant toutes seules) et sont toujours d'énergie bornée par  $\tilde{E}$ . Suivant l'idéologie qu'on a déjà employée plusieurs fois dans cette thèse, on estime le nombre de pièces qui correspondent à cette énergie. Pour qu'une pièce crée une énergie inférieure à  $\tilde{E}$ , sa longueur doit être au moins

$$\tilde{\ell} = \pi/\sqrt{\tilde{E}} = \ell_\rho \left( 1 - \frac{1}{2}h(\rho) + O(h^2(\rho)) \right).$$

Le nombre de pièces de longueur au moins  $\tilde{\ell}$  est donné par la Proposition 2.1.3. Avec une probabilité au moins égale à  $1 - \exp(L^\beta)$ ,

$$\sharp(l \geq \tilde{\ell}) = \mu L e^{-\mu\tilde{\ell}} + O\left(L^{1/2+\beta} e^{-\mu\tilde{\ell}}\right) = n(1 + O(\ell_\rho h(\rho))). \quad (\text{B.6})$$

Par la même méthode on peut trouver que seuls  $nO(\rho)$  de ces pièces créent au moins deux niveaux inférieurs à  $\tilde{E}$ . En reprenant (B.5) pour le nombre de particules normales (qui

vivent toutes seules et qui ont une énergie bornée par  $\tilde{E}$ ), on voit qu'il n'y a pas tant de pièces (B.6) qui peuvent porter ces particules. Ceci implique que, exceptées au plus  $nO(A(\rho) + \ell_\rho h(\rho))$ , les pièces décrites par (B.6) sont occupées par ces particules "normales".

Ensuite, comme chaque particule "normale" est toute seule dans sa pièce et qu'elle doit occuper nécessairement le premier niveau, on sait exactement, quelle fonction propre à une particule lui correspond. En réécrivant (B.3) pour la densité de la composante basse  $\rho_{\Psi^-}^1$ , on remarque que selon l'analyse précédente, toutes les  $\psi_{\alpha_i}$  sur les pièces décrites ci-dessus sont égales pour les différentes composantes  $\alpha$ , et la deuxième somme s'annule sur ces pièces. Soient maintenant  $\Delta_i = [a_i, b_i]$ ,  $i \in \mathcal{T}$ , les pièces support de ces particules, c'est-à-dire, des particules qui n'interagissent pas, qui vivent dans les pièces de longueur proche de  $\ell_\rho$  et qui occupe le premier niveau dans ces pièces. Remarquons, que

$$\text{card } \mathcal{T} \geq n(1 - O(A(\rho)))$$

selon (B.5). Alors, (B.3) se réécrit comme :

$$\rho_{\Psi^-}^1(x) = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathcal{T}} \sqrt{\frac{2}{|\Delta_i|}} \cdot \sin^2 \left( \frac{\pi(x - a_i)}{|\Delta_i|} \right) + \text{un reste}, \quad (\text{B.7})$$

où le terme de reste est la somme (les deux sommes) dans (B.3), mais uniquement pour les pièces qui portent soit plus d'une seule particule, soit une particule excitée. Le nombre de ces pièces est relativement petit.

Finalement, expliquons comment la situation change si on considère non pas seulement la composante basse  $\Psi^-$ , mais également  $\Psi^+$  (voir (B.4)). Comme dans les pièces normales  $\Delta_i$ ,  $i \in \mathcal{T}$ , grâce à l'occupation constante,  $\Psi^+$  a également exactement une particule et l'amplitude relative  $\varepsilon$  est petite, alors, le terme principal dans (B.7) ne change pas beaucoup (on ne peut pas néanmoins donner une estimation uniforme, en norme  $L^\infty$ , comme, ponctuellement, la fonction d'ondes d'une particule excitée peut être arbitrairement grande). Sur les autres pièces qui interviennent dans le terme de reste dans (B.7), on a encore moins de contrôle et la seule interprétation qu'on peut en donner avec les outils qu'on possède, c'est que  $\Psi^+$  intervient peu dans le sens de la formule (B.4).

## B.2 Localisation

Dans cette section, on essaye de comprendre comment définir la localisation dans le cas de plusieurs particules et ce à quoi sert la notion de la localisation du point de vue physique.

La localisation du point de vue physique est le fait que des particules restent dans la zone bien bornée et ne portent pas de courant. La relation entre la localisation et l'absence de la conductivité est, à notre avis, la clé pour la compréhension de ces deux notions. Donc, chaque généralisation de la localisation à une particule pour le cas multi-particule doit vérifier la propriété, que, si dans une certaine zone d'énergie, le hamiltonien est localisé, alors, il n'y a pas de conductivité à ces énergies.

On va d'abord regarder ce que proposent Basko, Aleiner et Altshuler dans [BAA06].

Pour le modèle à une particule, ils proposent que la fonction propre  $\phi_k$  peut être classifiée comme localisée ou étendue si :

$$|\phi_k(x)|^2 \sim \begin{cases} \zeta_{loc}^{-d} \exp\left(\frac{|x-\rho_k|}{\zeta_{loc}}\right), & \text{localisée,} \\ 1/|\Lambda|, & \text{étendue.} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

C'est la définition standard qui repose sur la décroissance rapide d'une fonction propre. Ceci peut être traduit en terme des éléments matriciels d'un certain opérateur local  $A(R)$  :

$$A_{kj}(R) = \langle \phi_k | A(R) | \phi_j \rangle.$$

On introduit une fonction d'autocorrélation

$$\mathcal{L}_{kj}^A(r) = \int dR A_{kj}(R) A_{kj}(r+R).$$

On dit qu'il y a la localisation si

$$\mathcal{L}_{kj}^A(r) \lesssim \exp(-|r|/\zeta_{loc}). \quad (\text{B.9})$$

Pour le cas de plusieurs particules, la définition du genre de (B.8) n'est plus viable, comme les particules peuvent se trouver partout dans  $\Lambda$ , mais chaque une peut être bien localisée. Un tel état à  $n$  particules est d'une part pas localisé dans  $\Lambda$ , mais bien localisé dans l'espace configurationnel  $\Lambda^n$ . De plus, imaginons qu'il y a quelque particules parmi ces  $n$  qui sont pas localisées. D'une part, ceci ne doit rien changer, mais, d'autre part, cet état n'est pas localisé même dans  $\Lambda^n$  au sens strict de la formule (B.8).

Pour contourner cette difficulté, Basko, Aleiner et Altshuler proposent de généraliser plutôt la définition (B.9). Pour ceci, au lieu d'opérateur local  $A(R)$ , on prend sa deuxième quantification  $\mathbb{A}(R)$  :

$$\mathbb{A} = A \otimes \mathbb{1}^{n-1} + \mathbb{1} \otimes A \otimes \mathbb{1}^{n-2} + \dots + \mathbb{1}^{n-1} \otimes A. \quad (\text{B.10})$$

Remarquons que Basko, Aleiner et Altshuler n'utilisent pas exactement cette définition, mais une définition qui repose sur les opérateurs de création et d'annihilation. Néanmoins, pour notre cas, (B.10) est plus approprié, comme il n'y a pas des opérateurs de création et annihilation naturels pour notre modèle (il n'y a pas d'état qui pourrait être considéré comme vide!) dans le formalisme microcanonique. Remarquons, que  $R$  est toujours un vecteur de l'espace physique  $\Lambda$ .

Ensuite, on applique la même idée à l'opérateur  $\mathbb{A}(R)$ . Ces éléments matriciels sont donnés par :

$$\mathbb{A}_{\alpha\beta}(R) = \langle \Psi_\alpha | \mathbb{A}(R) | \Psi_\beta \rangle,$$

où  $\{\Psi_\alpha\}_\alpha$  sont les états propres à  $n$  particules. L'autocorrélation

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta}^{\mathbb{A}}(r) = \int dR \mathbb{A}_{\alpha\beta}(R) \mathbb{A}_{\beta\alpha}(r+R)$$

doit décroître exponentiellement dans le cas de localisation.

Regardons ce que cela donne pour notre cas modèle, notamment pour le modèle des pièces à une dimension. Supposons pour la simplicité, que  $\alpha = \beta = f$  est l'état propre de  $\mathfrak{H}^-$ . Pour l'opérateur local  $A(R)$  on prend la multiplication par la fonction caractéristique d'une boule de rayon fixé (disons, 1) au centre  $R$  :

$$A(R) = \chi_{B_1(R)}.$$

Alors, en changeant  $R$ , on va juste "scanner" l'état  $\Psi_f$  à côté du point  $R$ . Plus précisément, on prétend que

$$\mathbb{A}_{ff}(R) \sim \text{occupation d'une pièce où } R \text{ est tombé.}$$

Dans  $\Psi_f$ , on a environ  $n$  pièces de longueur caractéristique  $\asymp |\log \rho|$ . La plupart de ces pièces sont occupées par exactement une particule. D'autre part, le volume total occupé par ces pièces est d'ordre

$$n |\log \rho| \ll n \rho^{-1} = L.$$

Donc, la fonction  $\mathbb{A}_{ff}(R)$  est majoritairement zéro sur  $[0, L]$ , sauf la petite partie occupée par des particules, où elle doit être en correspondance avec le nombre de particules.

Ensuite, l'autocorrélation  $\mathcal{L}_{ff}^{\mathbb{A}}(r)$  est contrôlée premièrement par le nombre des paires de pièces occupées à distance approximativement  $r$ . Il n'y a aucune raison pour que ce nombre décroisse (exponentiellement) avec  $r$ .

Une autre idée sur comment définir la localisation dans le cas de plusieurs particules vient de la physique. Du point de vue physique, la localisation est l'absence de courant électrique. Notamment, c'est l'approche utilisé dans [BvESB94]. Bien sûr, comme dans ce papier les auteurs considèrent le problème à une particule, ils se servent de la définition de type (B.8) pour la localisation. Néanmoins, on peut commencer par définir la densité de charge et la densité de courant électrique.

### B.3 Densité de charge et densité de courant

Si un électron est décrit par sa fonction d'ondes  $\psi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , la densité de charge électrique est donnée par

$$\rho(x) = e|\psi(x)|^2, \tag{B.11}$$

où  $e$  est la charge d'un électron. Dans la suite, pour simplifier on va supposer que toutes nos particules ont la charge  $e = 1$ . La densité de courant électrique est donnée, donc, par

$$j(x) = 2 \operatorname{Im}(\psi^*(x) \nabla \psi(x)). \tag{B.12}$$

Ici, on a supposé également que  $m = 1/2$ ,  $\hbar = 1$ . Si la dynamique du système est décrite par l'équation de Schrödinger

$$i\partial_t \psi = H\psi,$$

alors, la densité de charge (B.11) et la densité de courant (B.12) vérifient l'équation de continuité :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} j = 0. \tag{B.13}$$

De même, on peut utiliser les formules (B.11) et (B.12) dans le cas de plusieurs particules. Si  $\Psi$  est une fonction d'ondes à  $n$  particules, on définit

$$P = |\Psi|^2, \quad J = 2 \operatorname{Im} (\Psi^* \nabla \Psi)$$

la densité de probabilité et la densité de courant de probabilité dans l'espace configurationnel  $\mathbb{R}^{nd}$  ou  $\Lambda^n$ . Malheureusement, ces grandeurs n'ont pas d'interprétation directe en terme des densité de charge et de courant physiques (dans l'espace de dimension  $d$ ).

Alors, pour  $x \in \Lambda$ , on pose

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^n \int_{\Lambda^{n-1}} \widehat{dx}^i P|_{x^i=x} = \sum_{i=1}^n \int_{\Lambda^{n-1}} \widehat{dx}^i \Psi^* \Psi|_{x^i=x}, \quad (\text{B.14})$$

où l'intégration se fait sur toutes les variables sauf  $x^i$ . Cette formule veut dire, qu'on somme les densités à une particule sur toutes les particules. Remarquons que la normalisation de  $\rho$  est bonne :

$$\int_{\Lambda} dx \rho(x) = n,$$

comme il y a  $n$  particules au total.

Soit  $B$  l'opérateur de  $\mathbb{R}^{nd}$  dans  $\mathbb{R}^d$  défini par

$$B(v^1, \dots, v^n) = v^1 + \dots + v^n, \quad v^j \in \mathbb{R}^d.$$

On pose, ensuite,

$$j(x) = \sum_{i=1}^n \int_{\Lambda^{n-1}} \widehat{dx}^i B(J)|_{x^i=x} = 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Lambda^{n-1}} \widehat{dx}^i B(\operatorname{Im}(\Psi^* \nabla \Psi))|_{x^i=x}. \quad (\text{B.15})$$

Par le calcul direct, on peut vérifier que l'équation de continuité  $\partial_t P + \operatorname{div} J = 0$  implique (B.13) pour cette nouvelle définition de  $\rho$  et de  $j$ .

Dernièrement, remarquons que pour le cas des fermions (donc,  $\Psi$  est totalement anti-symétrique), dans les deux formules pour  $\rho$  et  $j$ , tous les termes dans la somme sur  $i$  sont égaux et, donc, la somme est égale à  $n$  fois le premier terme.

À fin de donner la motivation pour les formules (B.14) et (B.15), on considère

$$\Psi = \psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \dots \otimes \psi_n.$$

Dans ce cas,  $\rho$  et  $j$  se réduisent aux sommes (sur toutes les particules) des densités de charge et de courant de chaque particule.

En revenant à notre modèle des pièces sur  $\mathbb{R}$ , la méthode utilisée pour le calcul de marginales peut être utile pour le calcul de ces densités. En effet, la densité de charge  $\rho$  est égale à la marginale  $n\rho_{\Psi}^1$ .



# Index

- Asymptotique de Lifshitz, 75
- Bosons, 21, 53, 63
- Clairière, 66, 71
- Conditions au bord, 18
  - de Dirichlet, 32, 66
- Convergence dans le sens de Fisher, 30
- Déterminant de Slater, 35, 56
- Densité
  - à une particule, 128
  - critique, 43
  - d'états, 19
    - intégrée, 19, 58
    - mesure de, 19
  - d'empilement compact, 43
  - de charge, 132
  - de courant, 132
  - de particules, 31
- Deuxième quantification, 22
- Éléments matriciels d'interactions, 52, 60
- Énergie, 27
  - de Fermi, 58
  - fondamentale, 28, 122
  - libre, 122
  - par particule, 41
    - continuité de, 45
    - convexité de, 43
    - fondamentale, 91
- Ensemble
  - grand-canonique, 4, 30, 121
  - microcanonique, 30
- Entropie, 27, 49
- Espace de Fock, 22, 27, 121
- Estimée
  - de Wegner, 20
- État fondamental
  - fonction d'autocorrélation de, 10, 107
  - non dégénérescence de, 10, 104
- Fermions, 22, 56, 65
- Fonction
  - d'autocorrélation, 107, 131
  - de comptage, 18, 26
- Hamiltonien, 14, 23, 122
- Inégalité
  - sous-additive, 36
- Interactions, 23
  - à courte portée, 24
  - à support compact, 26, 48
  - de Coulomb, 24
  - invariantes par translation, 23
  - par paires, 23, 61
  - répulsives, 25
  - stables, 25
  - tempérées, 24
  - triples, 24
- Limite thermodynamique, 31, 123
  - existence de, 41, 46, 48, 124, 126
- Localisation, 131
- Longueur de Fermi, 77
- Matrice densité, 27, 122
- Modèle
  - d'Anderson, 16, 17, 63
  - de Bernoulli, 16
  - de déplacement, 16
  - de Poisson, 16
  - des pièces, 70
  - Standard, 22, 24, 26
- Observable, 122
- Occupation, 94



décomposition par, 95

### Opérateur

de nombre, 122

de Schrödinger, 15

aléatoire, 16

magnétique, 14

multiparticule, 23

périodique, 15

### Potentiel

chimique, 122

de Coulomb, 25

écranage de, 25

de Rollnik, 18

de Yukawa, 25

des interactions par paires, 24

des noyaux durs, 43

Séries de perturbation, 51

### Spectre

absolument continu, 18

presque sûr, 17

purement ponctuel, 18

singulier continu, 18

Stabilité de matière, 29

Statistique quantique, 21

de Bose – Einstein, 21, 34, 52

de Fermi – Dirac, 22, 35, 71

de Maxwell – Boltzmann, 21, 33, 52

Température, 50, 122

# Liste des symboles

- $E$  énergie interne 27  
 $F$  énergie libre 122  
 $H$  l'Hamiltonien, l'opérateur de Schrödinger 14, 15  
 $L$  longueur d'un intervalle total dans le modèle des pièces 70  
 $Q$  occupation 94  
 $S$  entropie 27  
 $U$  potentiel des interactions par paires 23  
 $V$  potentiel externe 15  
 $W$  potentiel d'interaction entre les particules 23  
 $\Gamma$  matrice densité 27, 122  
 $\Lambda$  domaine dans  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{Z}^d$  18  
 $\Omega$  espace probabilisé 17  
 $\Psi$  fonction d'ondes à  $n$  particules 27  
 $\star$  condition au bord (Dirichlet, Neumann, périodique) 18  
 $\sharp$  statistique quantique 22  
 $\mathcal{F}$  espace de Fock 22, 121  
 $\mathcal{L}$  fonction d'autocorrélation 107  
 $\mathcal{N}$  fonction de comptage ou l'opérateur de nombre 18, 122  
 $\mathcal{E}$  énergie par particule 41  
 $\ell$  longueur d'un sous-intervalle 8, 75  
 $\mathfrak{E}$  énergie fondamentale 28  
 $\omega$  paramètre aléatoire 16  
 $\psi$  fonctions d'ondes à une particule 52  
 $\rho$  densité de particules 31  
 $\sigma$  entropie par particule 38  
 $d$  dimension de l'espace physique 14  
 $n$  nombre de particules 22



# Bibliographie

- [AM76] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin. *Solid state physics*. Holt-Saunders International Editions : Science : Physics. Holt, Rinehart and Winston, 1976.
- [And58] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109 :1492–1505, Mar 1958.
- [BAA06] D. M. Basko, I. L. Aleiner, and B. L. Altshuler. Metal-insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states. *Annals of Physics*, 321(5) :1126 – 1205, 2006.
- [Ber41] A. C. Berry. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 49 :122–136, 1941.
- [BK65] L. E. Baum and M. Katz. Convergence rates in the law of large numbers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120 :108–123, 1965.
- [BK05] J. Bourgain and C. E. Kenig. On localization in the continuous Anderson-Bernoulli model in higher dimension. *Invent. Math.*, 161(2) :389–426, 2005.
- [BK11] J. Bourgain and A. Klein. Bounds on the density of states for Schrödinger operators. *ArXiv e-prints*, December 2011.
- [BL12] X. Blanc and M. Lewin. Existence of the thermodynamic limit for disordered quantum coulomb systems. *Journal of Mathematical Physics*, 53(9) :095209, 2012.
- [Bog47] N. N. Bogolyubov. On the theory of superfluidity. *Izv. Akad. Nauk SSSR*, Ser. Fiz.(11) :77–90, 1947.
- [BR97] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 2*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1997. Equilibrium states. Models in quantum statistical mechanics.
- [BvESB94] J. Bellissard, A. van Elst, and H. Schulz-Baldes. The noncommutative geometry of the quantum Hall effect. *J. Math. Phys.*, 35(10) :5373–5451, 1994. Topology and physics.
- [CGK11] J.-M. Combes, F. Germinet, and A. Klein. Local Wegner and Minami estimates for continuous random Schrödinger operators. *ArXiv e-prints*, November 2011.
- [CH94] J.-M. Combes and P. D. Hislop. Localization for some continuous, random Hamiltonians in  $d$ -dimensions. *J. Funct. Anal.*, 124(1) :149–180, 1994.

- [CHK07] J.-M. Combes, P. D. Hislop, and F. Klopp. An optimal Wegner estimate and its application to the global continuity of the integrated density of states for random Schrödinger operators. *Duke Math. J.*, 140(3) :469–498, 2007.
- [CS83] W. Craig and B. Simon. Log Hölder continuity of the integrated density of states for stochastic Jacobi matrices. *Comm. Math. Phys.*, 90(2) :207–218, 1983.
- [Diu89] B. Diu. *Éléments de physique statistique*. Collection Enseignement des sciences. Hermann, 1989.
- [DL67] F. J. Dyson and A. Lenard. Stability of matter. I. *J. Math. Phys.*, 8(3) :423–434, 1967.
- [Dur96] R. Durrett. *Probability : theory and examples*. Duxbury Press, Belmont, CA, second edition, 1996.
- [DZ10] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*, volume 38 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2010. Corrected reprint of the second (1998) edition.
- [Ess42] C.-G. Esseen. On the Liapounoff limit of error in the theory of probability. *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 28A(9) :19, 1942.
- [Fef85] C. Fefferman. The thermodynamic limit for a crystal. *Comm. Math. Phys.*, 98(3) :289–311, 1985.
- [Fis64] M. E. Fisher. The free energy of a macroscopic system. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 17 :377–410, 1964.
- [FR66] M. E. Fisher and D. Ruelle. The stability of many-particle systems. *J. Mathematical Phys.*, 7 :260–270, 1966.
- [FW99] R. P. Feynman and S. Weinberg. *Elementary Particles and the Laws of Physics : The 1986 Dirac Memorial Lectures*. The 1986 Dirac Memorial Lectures. Cambridge University Press, 1999.
- [GHK07] F. Germinet, P. D. Hislop, and A. Klein. Localization for Schrödinger operators with Poisson random potential. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 9(3) :577–607, 2007.
- [GK11a] F. Germinet and A. Klein. A comprehensive proof of localization for continuous Anderson models with singular random potentials. *ArXiv e-prints*, May 2011.
- [GK11b] F. Germinet and F. Klopp. Enhanced Wegner and Minami estimates and eigenvalue statistics of random Anderson models at spectral edges. *ArXiv e-prints*, November 2011.
- [GMS83] L. N. Grenkova, S. A. Molčanov, and Ju. N. Sudarev. On the basic states of one-dimensional disordered structures. *Comm. Math. Phys.*, 90(1) :101–123, 1983.
- [Gre98] W. Greiner. *Quantum Mechanics : Special Chapters*. Theoretische Physik. Springer, 1998.

- [Gre07] W. Greiner. *Quantum Mechanics. an Introduction*. Theoretical physics. Springer, 2007.
- [Gri65] R. B. Griffiths. Microcanonical ensemble in quantum statistical mechanics. *J. Mathematical Phys.*, 6 :1447–1461, 1965.
- [GS95] G. M. Graf and D. Schenker. On the molecular limit of coulomb gases. *Communications in Mathematical Physics*, 174 :215–227, 1995. 10.1007/BF02099471.
- [His08] P. D. Hislop. Lectures on random Schrödinger operators. In *Fourth Summer School in Analysis and Mathematical Physics*, volume 476 of *Contemp. Math.*, pages 41–131. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [HLS09a] C. Hainzl, M. Lewin, and J. P. Solovej. The thermodynamic limit of quantum Coulomb systems. I. General theory. *Adv. Math.*, 221(2) :454–487, 2009.
- [HLS09b] C. Hainzl, M. Lewin, and J. P. Solovej. The thermodynamic limit of quantum Coulomb systems. II. Applications. *Adv. Math.*, 221(2) :488–546, 2009.
- [JPZ09] T. Jaeck, J. Pulé, and V. A. Zagrebnov. On the nature of bose-einstein condensation in disordered systems. *Journal of Statistical Physics*, 137 :19–55, 2009. 10.1007/s10955-009-9825-y.
- [JZ10] T. Jaeck and V. A. Zagrebnov. Exactness of the Bogoliubov approximation in random external potentials. *Journal of Mathematical Physics*, 51(12) :123306, 2010.
- [Kat95] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.
- [Kir08] W. Kirsch. An invitation to random Schrödinger operators. In *Random Schrödinger operators*, volume 25 of *Panor. Synthèses*, pages 1–119. Soc. Math. France, Paris, 2008. With an appendix by Frédéric Klopp.
- [KLNS12] F. Klopp, M. Loss, S. Nakamura, and G. Stolz. Localization for the random displacement model. *Duke Math. J.*, 161(4) :578–621, 2012.
- [KM82] W. Kirsch and F. Martinelli. On the spectrum of Schrödinger operators with a random potential. *Comm. Math. Phys.*, 85(3) :329–350, 1982.
- [KM11] F. Klopp and B. Metzger. The Gross-Pitaevskii Functional with a Random Background Potential and Condensation in the Single Particle Ground State. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 14 :321–341, 2011. 10.1007/s11040-011-9099-x.
- [KS81] H. Kunz and B. Souillard. Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires. *Comm. Math. Phys.*, 78(2) :201–246, 1980/81.
- [LD68] A. Lenard and F. J. Dyson. Stability of matter. II. *J. Math. Phys.*, 9(5) :698–711, 1968.
- [Leb76] J. L. Lebowitz. Statistical mechanics of equilibrium systems : some rigorous results. In *Critical phenomena (Sitges Internat. School Statist. Mech., Sitges, 1976)*, pages 215–248. Lecture Notes in Phys., Vol. 54. Springer, Berlin, 1976.

- [LGP88] I. M. Lifshits, S. A. Gredeskul, and L. A. Pastur. *Introduction to the theory of disordered systems*. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. Translated from the Russian by Eugene Yankovsky [E. M. Yankovskii].
- [Lie76] E. H. Lieb. The stability of matter. *Rev. Modern Phys.*, 48(4) :553–569, 1976.
- [Lie90] E. H. Lieb. The stability of matter : from atoms to stars. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 22(1) :1–49, 1990.
- [LL60] L. D. Landau and E. M. Lifshits. *Electrodynamics of continuous media*. Teoreticheskaia fizika. Pergamon Press, 1960.
- [LL68] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Course of theoretical physics. Vol. 5 : Statistical physics*. Translated from the Russian by J. B. Sykes and M. J. Kearsley. Second revised and enlarged edition. Pergamon Press, Oxford, 1968.
- [LL69] J. L. Lebowitz and E. H. Lieb. Existence of thermodynamics for real matter with coulomb forces. *Phys. Rev. Lett.*, 22 :631–634, Mar 1969.
- [LL72] E. H. Lieb and J. L. Lebowitz. The constitution of matter : Existence of thermodynamics for systems composed of electrons and nuclei. *Advances in Math.*, 9 :316–398, 1972.
- [LL77] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum mechanics : non-relativistic theory*. Teoreticheskaia fizika (Izd. 3-e) (Landau, L. D, 1908-1968). Butterworth-Heinemann, 1977.
- [LS10] E. H. Lieb and R. Seiringer. *The stability of matter in quantum mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [LSSY05] E. H. Lieb, R. Seiringer, J. P. Solovej, and J. Yngvason. *The mathematics of the Bose gas and its condensation*, volume 34 of *Oberwolfach Seminars*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
- [LZ07] O. Lenoble and V. A. Zagrebnov. Bose-Einstein Condensation in the Luttinger-Sy Model. *Markov Processes and Related Fields*, 13(2) :441–468, 2007.
- [MS87] F. Martinelli and E. Scoppola. Introduction to the mathematical theory of Anderson localization. *Riv. Nuovo Cimento (3)*, 10(10) :1–90, 1987.
- [Pas73] L. A. Pastur. Spectra of random selfadjoint operators. *Uspehi Mat. Nauk*, 28(1(169)) :3–64, 1973.
- [PF92] L. Pastur and A. Figotin. *Spectra of random and almost-periodic operators*, volume 297 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [PS98] G. Pólya and G. Szegő. *Problems and theorems in analysis. I. Classics in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Series, integral calculus, theory of functions, Translated from the German by Dorothee Aeppli, Reprint of the 1978 English translation.
- [RS75] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975.

- [RS78] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [Rue99] D. Ruelle. *Statistical mechanics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1999. Rigorous results, Reprint of the 1989 edition.
- [Sch88] K. Schürger. Almost subadditive multiparameter ergodic theorems. *Stochastic Process. Appl.*, 29(2) :171–193, 1988.
- [Smy76] R. T. Smythe. Multiparameter subadditive processes. *Ann. Probability*, 4(5) :772–782, 1976.
- [Ste89] J. M. Steele. Kingman’s subadditive ergodic theorem. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 25(1) :93–98, 1989.
- [Sto01] P. Stollmann. *Caught by disorder*, volume 20 of *Progress in Mathematical Physics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001. Bound states in random media.
- [Szn98] A.-S. Sznitman. *Brownian motion, obstacles and random media*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [Tem72] A. A. Tempel’man. Ergodic theorems for general dynamical systems. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 26 :95–132, 1972.
- [Ves08] I. Veselić. *Existence and regularity properties of the integrated density of states of random Schrödinger operators*, volume 1917 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [YS75] V. A. Yakubovich and V. M. Starzhinskii. *Linear differential equations with periodic coefficients. 1, 2*. Halsted Press [John Wiley & Sons] New York-Toronto, Ont., 1975. Translated from Russian by D. Louvish.
- [Zag98] A. M. Zagoskin. *Quantum theory of many-body systems*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer-Verlag, New York, 1998. Techniques and applications.
- [ZB01] V. A. Zagrebnov and J.-B. Bru. The Bogoliubov model of weakly imperfect bose gas. *Physics Reports*, 350(5-6) :291 – 434, 2001.





## Résumé

On étudie la limite thermodynamique pour un système de particules quantiques en interaction dans un milieu aléatoire dans le formalisme de l'ensemble microcanonique. L'existence de la limite est démontrée pour l'énergie interne ainsi que pour l'entropie sous des conditions assez générales sur le modèle à une particule. Ensuite, la limite thermodynamique est étudiée pour le modèle des pièces à une dimension dans le cas des fermions et pour une densité de particules faible. On donne une caractérisation de l'état fondamental en terme d'espaces fonctionnels, on démontre sa non dégénérescence presque sûre et on décrit sa fonction d'autocorrélation. Ces résultats permettent d'obtenir une estimée de l'énergie fondamentale par particule comme fonction de la densité de particules dans la limite thermodynamique.

**Mots-clés:** opérateur de Schrödinger aléatoire, limite thermodynamique, fermions en interaction, modèle des pièces.

## Abstract

The thermodynamic limit for the system of interacting quantum particles in random media under the microcanonical ensemble formalism is studied. The existence of the limit for the internal energy and the entropy is shown under very general assumptions on the one-particle model. Next, the thermodynamic limit is studied for the one-dimensional pieces model in the fermionic case and for a small particle density. The characterization of the ground state wave function in terms of functional spaces is provided, its almost sure non-degeneracy is established and its autocorrelation function is described. These results give an estimate on the ground state energy per particle as a function of the density of particles in the thermodynamic limit.

**Keywords:** random Schrödinger operator, thermodynamic limit, interacting fermions, pieces model.

---

veniaminov@math.univ-paris13.fr

LAGA - UMR 7539 - Institut Galilée - Université Paris 13 Nord

99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France

