



**HAL**  
open science

# Approche spectrale pour l'interpolation à noyaux et positivité conditionnelle

Bertrand Gauthier

► **To cite this version:**

Bertrand Gauthier. Approche spectrale pour l'interpolation à noyaux et positivité conditionnelle. Autre. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2011. Français. NNT : 2011EMSE0615 . tel-00739683

**HAL Id: tel-00739683**

**<https://theses.hal.science/tel-00739683>**

Submitted on 8 Oct 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre : 2011 EMSE 0615

## THÈSE

présentée par

Bertrand GAUTHIER

pour obtenir le grade de  
Docteur de l'École Nationale Supérieure des Mines de  
Saint-Étienne

Spécialité : Mathématiques Appliquées

### APPROCHE SPECTRALE POUR L'INTERPOLATION À NOYAUX ET POSITIVITÉ CONDITIONNELLE

soutenue à Saint-Étienne le 12 juillet 2011

#### **Jury :**

<i>President :</i>	Mario AHUES	-	Université de Saint-Étienne
<i>Rapporteurs :</i>	Stéphane CANU	-	INSA de Rouen
	Fabrice GAMBOA	-	Université de Toulouse
<i>Examineur :</i>	Francis BACH	-	ENS Paris
<i>Directeur :</i>	Laurent CARRARO	-	Telecom Saint-Étienne
<i>Co-encadrant :</i>	Xavier BAY	-	École des Mines de St-Étienne

**Spécialités doctorales :**

SCIENCES ET GENIE DES MATERIAUX  
 MECANIQUE ET INGENIERIE  
 GENIE DES PROCEDES  
 SCIENCES DE LA TERRE  
 SCIENCES ET GENIE DE L'ENVIRONNEMENT  
 MATHEMATIQUES APPLIQUEES  
 INFORMATIQUE  
 IMAGE, VISION, SIGNAL  
 GENIE INDUSTRIEL  
 MICROELECTRONIQUE

**Responsables :**

J. DRIVER Directeur de recherche – Centre SMS  
 A. VAUTRIN Professeur – Centre SMS  
 G. THOMAS Professeur – Centre SPIN  
 B. GUY Maître de recherche – Centre SPIN  
 J. BOURGOIS Professeur – Centre SITE  
 E. TOUBOUL Ingénieur – Centre G2I  
 O. BOISSIER Professeur – Centre G2I  
 JC. PINOLI Professeur – Centre CIS  
 P. BURLAT Professeur – Centre G2I  
 Ph. COLLOT Professeur – Centre CMP

**Enseignants-chercheurs et chercheurs autorisés à diriger des thèses de doctorat (titulaires d'un doctorat d'État ou d'une HDR)**

AVRIL	Stéphane	MA	Mécanique & Ingénierie	CIS
BATTON-HUBERT	Mireille	MA	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
BENABEN	Patrick	PR 1	Sciences & Génie des Matériaux	CMP
BERNACHE-ASSOLLANT	Didier	PR 0	Génie des Procédés	CIS
BIGOT	Jean-Pierre	MR	Génie des Procédés	SPIN
BILAL	Essaïd	DR	Sciences de la Terre	SPIN
BOISSIER	Olivier	PR 1	Informatique	G2I
BORBELY	Andras	MR	Sciences et Génie des Matériaux	SMS
BOUCHER	Xavier	MA	Génie Industriel	G2I
BOUDAREL	Marie-Reine	PR 2	Génie Industriel	DF
BOURGOIS	Jacques	PR 0	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
BRODHAG	Christian	DR	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
BURLAT	Patrick	PR 2	Génie industriel	G2I
COLLOT	Philippe	PR 1	Microélectronique	CMP
COURNIL	Michel	PR 0	Génie des Procédés	SPIN
DAUZERE-PERES	Stéphane	PR 1	Génie industriel	CMP
DARRIEULAT	Michel	IGM	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
DECHOMETS	Roland	PR 1	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
DESRAYAUD	Christophe	MA	Mécanique & Ingénierie	SMS
DELAFOSSÉ	David	PR 1	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
DOLGUI	Alexandre	PR 1	Génie Industriel	G2I
DRAPIER	Sylvain	PR 2	Mécanique & Ingénierie	SMS
DRIVER	Julian	DR 0	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
FEILLET	Dominique	PR 2	Génie Industriel	CMP
FOREST	Bernard	PR 1	Sciences & Génie des Matériaux	CIS
FORMISYN	Pascal	PR 1	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
FRACZKIEWICZ	Anna	DR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
GARCIA	Daniel	MR	Génie des Procédés	SPIN
GIRARDOT	Jean-Jacques	MR	Informatique	G2I
GOEURIOT	Dominique	MR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
GRAILLOT	Didier	DR	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
GROSSEAU	Philippe	MR	Génie des Procédés	SPIN
GRUY	Frédéric	MR	Génie des Procédés	SPIN
GUY	Bernard	MR	Sciences de la Terre	SPIN
GUYONNET	René	DR	Génie des Procédés	SPIN
HERRI	Jean-Michel	PR 2	Génie des Procédés	SPIN
INAL	Karim	PR 2	Microélectronique	CMP
KLÖCKER	Helmut	DR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
LAFOREST	Valérie	CR	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
LERICHE	Rodolphe	CR CNRS	Mécanique et Ingénierie	SMS
LI	Jean-Michel	EC (CCI MP)	Microélectronique	CMP
MALLIARAS	George Grégory	PR 1	Microélectronique	CMP
MOLIMARD	Jérôme	MA	Mécanique et Ingénierie	SMS
MONTHEILLET	Frank	DR 1 CNRS	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
PERIER-CAMBY	Laurent	PR 2	Génie des Procédés	SPIN
PIJOLAT	Christophe	PR 1	Génie des Procédés	SPIN
PIJOLAT	Michèle	PR 1	Génie des Procédés	SPIN
PINOLI	Jean-Charles	PR 0	Image, Vision, Signal	CIS
STOLARZ	Jacques	CR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
SZAFNICKI	Konrad	MR	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
THOMAS	Gérard	PR 0	Génie des Procédés	SPIN
TRIA	Assia		Microélectronique	CMP
VALDIVIESO	François	MA	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
VAUTRIN	Alain	PR 0	Mécanique & Ingénierie	SMS
VRICELLE	Jean-Paul	MR	Génie des procédés	SPIN
WOLSKI	Krzysztof	DR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
XIE	Xiaolan	PR 1	Génie industriel	CIS

**Glossaire :**

PR 0	Professeur classe exceptionnelle
PR 1	Professeur 1 <sup>ère</sup> classe
PR 2	Professeur 2 <sup>ème</sup> classe
MA(MDC)	Maître assistant
DR	Directeur de recherche
Ing.	Ingénieur
MR(DR2)	Maître de recherche
CR	Chargé de recherche
EC	Enseignant-chercheur
IGM	Ingénieur général des mines

**Centres :**

SMS	Sciences des Matériaux et des Structures
SPIN	Sciences des Processus Industriels et Naturels
SITE	Sciences Information et Technologies pour l'Environnement
G2I	Génie Industriel et Informatique
CMP	Centre de Microélectronique de Provence
CIS	Centre Ingénierie et Santé

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Sous-espaces hilbertiens et noyaux associés</b>	<b>10</b>
1.1 Définitions et Premières Propriétés . . . . .	10
1.2 Sous-espaces hilbertiens d'espaces "emboîtés" . . . . .	14
1.3 Espaces de Hilbert à noyau reproduisant . . . . .	16
1.4 Effet d'une application linéaire continue . . . . .	17
1.5 Exemple . . . . .	18
<b>2 Interpolation optimale dans les sous-espaces hilbertiens : une approche spectrale</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction . . . . .	21
2.2 Interpolation optimale dans les sous-espaces hilbertiens . . . . .	22
2.3 Opérateurs intégraux et problème d'interpolation . . . . .	26
2.4 Représentation et approximation de l'interpolateur optimal . . . . .	32
2.5 Cas classique : nombre fini de données . . . . .	35
2.6 Un exemple d'application . . . . .	37
2.6.1 Noyau gaussien et valeurs sur le cercle . . . . .	38
2.6.2 Contrainte sur la dérivée normale . . . . .	41
2.6.3 Contrainte double . . . . .	47
<b>3 Conditionnement des processus gaussiens</b>	<b>50</b>
3.1 Sous-espaces hilbertiens et processus gaussiens . . . . .	50

3.2	Conditionnement et interpolation optimale . . . . .	54
3.2.1	Projections orthogonales . . . . .	54
3.2.2	Lois conditionnelles et désintégrations de mesures . . .	55
3.2.3	Application de l'approche spectrale au conditionnement	57
3.3	Illustration : conditionnement du drap brownien . . . . .	61
3.3.1	Cas du quart-de-cercle . . . . .	62
3.3.2	Cas général . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Sous-espaces semi-hilbertiens et noyaux conditionnellement positifs</b>	<b>74</b>
4.1	Motivations et premières définitions . . . . .	74
4.2	Noyaux conditionnellement positifs . . . . .	76
4.3	Un exemple . . . . .	83
4.4	Interpolation optimale dans les sous-espaces semi-hilbertiens .	85
4.4.1	Existence, unicité et caractérisation . . . . .	85
4.4.2	Cas fini . . . . .	88
	<b>Conclusion et perceptives</b>	<b>92</b>
<b>A</b>	<b>Détail de certains calculs</b>	<b>94</b>
A.1	Décomposition spectrale de l'opérateur intégral apparaissant dans la Section 2.6.1 . . . . .	94
A.2	Décomposition spectrale de l'opérateur intégrale apparaissant dans la Section 3.3.1 . . . . .	95
A.3	Formulation équivalente du Théorème 3.3 . . . . .	96
<b>B</b>	<b>English version of Chapter 2</b>	<b>97</b>
B.1	Introduction . . . . .	97
B.2	Theoretical Background : Optimal interpolation in Hilbert subspaces . . . . .	98
B.3	Problem Adapted Integral Operator . . . . .	100
B.4	Representation and Approximation of the Optimal Interpolator	106

B.5	Finite Case . . . . .	109
B.6	Example of application . . . . .	111
B.6.1	Gaussian kernel and value on the circle . . . . .	112
B.6.2	Derivative Constraint . . . . .	114
B.6.3	Double Constraint . . . . .	117
<b>C</b>	<b>English version of Chapter 3</b>	<b>120</b>
C.1	Notations and recalls . . . . .	120
C.2	Spectral approach for conditioning . . . . .	121
C.3	A note on regular conditional probabilities . . . . .	123
C.4	Illustration: Conditioning the Brownian Sheet . . . . .	124
C.4.1	The quarter-circle case . . . . .	125
C.4.2	The general case . . . . .	130

# Introduction

## Contenu de ce manuscrit

Cette thèse est consacrée à l'étude des méthodes d'interpolation à noyaux dans le cadre général des espaces vectoriels topologiques. Nous nous intéressons plus particulièrement à la résolution de ce type de problèmes lorsque l'obtention d'une solution numérique n'est pas directement envisageable. Un tel cas de figure apparaît par exemple lorsque le nombre de données dont l'interpolateur doit rendre compte est infini. Nous proposons une approche spectrale permettant en pratique (sous certaines conditions) la construction exacte ou approchée d'éléments interpolants sans avoir à recourir à une discrétisation de l'ensemble des données ou à sa simplification.

Le formalisme adopté est identique à celui utilisé par L. Schwartz dans son article de 1964 [Sch64]. Un noyau sera ainsi pour nous une application linéaire faiblement continue du dual topologique d'un espace vectoriel topologique localement convexe (e.v.t.l.c.) quasi-complet sur lui même.

Dans un premier temps, c'est-à-dire aux Chapitres 1, 2 et 3, nous nous cantonnons au cas des noyaux symétriques et positifs (voir [Sch64, Bax76]). Nous présentons ainsi dans le Chapitre 1 les notions de sous-espaces hilbertiens d'un espace vectoriel topologique et les noyaux leur étant associés.

Le Chapitre 2 est dédié à l'étude des problèmes d'interpolation dans ces mêmes sous-espaces hilbertiens. Nous présentons le concept d'interpolation optimale dans un sous-espace hilbertien et en rappelons les principales propriétés, à savoir la caractérisation de tout élément interpolant dans l'espace de Hilbert considéré à partir de projections orthogonales. Nous exploitons alors le lien profond qui existe entre noyaux hilbertiens et opérateurs de Hilbert-Schmidt (à savoir qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt peut-être assimilé à un noyau hilbertien, voir par exemple [BTA04]) dans le but de caractériser les projections orthogonales associées à un problème d'interpolation à partir de

la décomposition spectrale d'opérateurs intégraux *adaptés au problème*. Nous donnons en particulier une formule de représentation spectrale pour l'interpolateur optimal et montrons qu'il est alors possible, en pratique, d'utiliser cette approche pour construire numériquement des interpolateurs rendant compte d'un nombre infini de données. Un premier exemple, constitué de trois parties, est alors développé dans le cadre d'un sous-espace hilbertien composé de fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Dans la première partie, nous appliquons notre méthodologie afin de résoudre le problème d'interpolation consistant à contraindre les valeurs d'une fonction sur un cercle (condition de Dirichlet). Dans la seconde, il s'agit de contraindre les dérivées normales au cercle d'une fonction sur ce même cercle (condition de Neumann). Les résultats des deux premières parties sont enfin combinés à l'aide de la décomposition spectrale d'un troisième opérateur (dont une partie du spectre est composée de valeurs propres négatives), ce afin d'obtenir un modèle dans lequel valeurs et dérivées normales sur le cercle sont contrôlées (condition de Robin).

Dans le Chapitre 3, nous rappelons les liens existants entre sous-espaces hilbertiens et processus gaussiens et plus particulièrement entre interpolation optimale et conditionnement. Nous montrons ensuite comment la démarche spectrale que nous avons développée au chapitre 2 peut être appliquée au conditionnement des processus gaussiens (nous supposons que les processus en question sont centrés, ou du moins de moyenne connue). A titre d'exemple, nous mettons en pratique notre approche dans le but de conditionner un drap brownien par rapport aux valeurs prises par ce dernier sur une *ligne de séparation*. Nous traitons tout d'abord le cas où la ligne de séparation est un quart de cercle que nous munissons de sa mesure de Lebesgue. Nous profitons ensuite de la liberté relative qui nous est laissée dans le choix des mesures pour étendre nos résultats à une plus large famille de lignes de séparation. Nous retrouvons ainsi, de façon différente, des résultats de prédiction pour le drap Brownien établis durant les années 1980.

Il est important de noter que les techniques et propriétés spectrales présentées et utilisées dans cette thèse sont connues de longue date et liées au Théorème de Mercer. On citera par exemple les articles [Wal67, Kue71, Raj72] dans lesquels des approches similaires sont appliquées à la représentation de processus aléatoires gaussiens. Citons également les travaux de E. Parzen (entre autres [Par62], voir également [BTA04, Chapter 4]), M. Nashed et G. Wahba [Nas74, NW74a] où des arguments théoriques proches des nôtres sont utilisés. Notre exposé vise ainsi à adapter ce type d'approches spectrales au cadre général de l'interpolation et à montrer son bien-fondé.

Le Chapitre 4 est enfin consacré à l'étude des noyaux symétriques *condition-*



*nellement positifs* et aux *sous-espaces semi-hilbertiens* leur étant associés. Nous présentons alors la théorie de l'interpolation optimale dans cette classe d'espaces. Précisons que ce Chapitre est en grande partie une synthèse de résultats déjà existants relatifs à ce sujet. Signalons qu'une traduction en Anglais des Chapitres 2 et 3 est proposée en annexe (Annexes B et C).

## Contexte et motivations

Les méthodes d'interpolations à noyaux sont de nos jours très largement utilisées par la communauté de l'apprentissage statistique et ce pour plusieurs raisons. La principale provient du fait que l'on peut regrouper sous ce nom une grande partie des méthodes d'apprentissage couramment utilisées que sont la régression linéaire, les splines et les modèles gaussiens (voir respectivement [AAC92, DB01, RW06] pour un aperçu de ces différentes techniques). Un des atouts majeurs des méthodes à noyaux est la très grande variété des modèles dont elles permettent la construction ainsi que leur large spectre d'application, le tout combiné à une relative simplicité de mise en oeuvre. Notons que la loi normale vérifie de nombreuses propriétés (voir [PR96]) dont la propriété d'*entropie maximale* parmi les lois de probabilité sur  $\mathbb{R}$  de variance fixée (notons qu'elle minimise également dans ce cas la quantité d'information de Fisher). Les prédictions établies à l'aide des modèles gaussiens se révèlent ainsi très satisfaisantes pour l'esprit (voir par exemple [Kap89]).

Une fois la méthode à noyau la plus adéquate sélectionnée (ce qui n'est déjà pas, pour une grande majorité de cas, un choix facile), la mise en oeuvre de cette dernière est en pratique sujette à de nombreuses précautions. La première est le choix du noyau. Ce choix se révèle d'une importance capitale, une grande partie des propriétés vérifiées par le modèle final en dépendant directement (voir par exemple [CL67, Dud10, Adl90, RW06] pour des résultats concernant la régularité des trajectoires des modèles gaussiens). S'il est laissé libre, le choix du plan d'expérience (voir [FH97]) est lui aussi primordial. Il est en pratique habile d'effectuer ces choix en concertation, le premier influençant le second et réciproquement, le problème étant qu'il n'existe la plus part du temps pas de "recette" permettant de s'assurer *a priori* du bien fondé de ces choix. Notons enfin qu'une grande partie des noyaux habituellement utilisés dépendent de paramètres, ces derniers devant alors être estimés (voir [Lin96]). Nous n'aborderons aucun de ces problèmes dans ce travail, nous focalisant uniquement sur l'étude de certains types de noyaux et la construction de modèles interpolants à noyau et plan d'expériences fixés.

Comme déjà mentionné, nous utilisons principalement la notion de noyaux introduite en particulier par L. Schwartz (applications linéaires faiblement continues du dual topologique d'un e.v.t.l.c. quasi-complet sur lui même), en lieu et place de la notion plus répandue de noyaux vus comme fonctions de deux variables à valeurs réelles ou complexes (noyaux reproduisants au sens de N. Aronszajn [Aro50] par exemple). Signalons que ces deux visions sont équivalentes, voir par exemple la Section 1.3 ainsi que la seconde partie de la Remarque 1.1 pour le cadre hilbertien. En plus du fait que la propriété de positivité des noyaux puisse sembler plus naturelle dans le cadre des noyaux hilbertiens, l'emploi de cette notion de noyaux est motivée par le fait que ces derniers permettent (par définition) la représentation de tout élément du dual topologique de l'espace de référence considéré alors que la notion de noyaux reproduisants peut dans un premier temps laisser penser que seules les fonctionnelles d'évaluation peuvent être représentées (ce qui n'est en général pas le cas, voir les Sections 1.2 et 1.3). Nous considérons ainsi des problèmes d'interpolation faisant intervenir des contraintes quelconques (qui pourront être, entre autres exemples, des contraintes sur la valeur de certaines dérivées en des points donnés ou sur la valeur de l'intégrale de l'interpolateur par rapport à certaines mesures, etc. . .) et non uniquement, comme c'est la plus part du temps le cas, des contraintes concernant la valeur des interpolateurs en des points donnés. Remarquons enfin que la notion de noyaux hilbertiens nous permet également d'assimiler tout opérateur de Hilbert-Schmidt d'un espace de Hilbert sur lui même à un noyau hilbertien relatif à ce même espace (voir Section 2.3, plus particulièrement la Remarque 2.3), et d'obtenir ainsi certaines propriétés de façon immédiate.

La plupart des problèmes d'interpolation font habituellement référence à un nombre fini de données, la résolution du problème d'interpolation ne posant dans ce cas aucun problème particulier, cette dernière pouvant en effet être par exemple ramenée à la résolution d'un système d'équations linéaires (voir [Wah90]). Un des principaux aspects de notre travail résident dans l'étude (Chapitres 2 et 3) de problèmes d'interpolation se rapportant à un *nombre infini de données*. Bien que d'un intérêt théorique indéniable (selon nous), ce type de problème peut à première vue sembler d'un intérêt pratique mineur, ce qui n'est en réalité pas le cas (selon nous encore une fois). On peut en effet imaginer de nombreux cas de figure réalistes rendant compte d'une telle situation. L'exemple nous semblant le plus représentatif est la prise en compte à l'aide de modèles d'interpolation d'information du type "condition aux limites". Si l'on souhaite par exemple contraindre les valeurs prises par une fonction sur la frontière d'un volume multidimensionnel, le nombre de points à considérer est alors infini et une approche classique du problème est,

au moins sur le plan numérique, vouée à l'échec (projection sur un espace de dimension infinie). Une parade possible serait la discrétisation du domaine en question, avec tous les inconvénients que cette dernière comporte : perte d'information, dépendance relative au choix de la discrétisation, possible apparition d'artefacts, etc. . . Nous proposons une approche spectrale permettant en pratique la résolution exacte ou approchée de ce type de problèmes dans le cadre de l'interpolation optimale dans les sous-espaces hilbertiens et ce sans recourir à une quelconque discrétisation du plan d'expérience. Le Théorème 2.1 donnent ainsi une *formule de représentation spectrale* pour l'interpolateur optimal. Précisons au passage le rôle centrale joué par l'opérateur  $\mathfrak{F}^{-1}$  (voir ainsi la Remarque 2.6). Le Théorème 2.2 décrit quant à lui une formule de représentation approchée pour ce même interpolateur avec majoration de l'erreur. Nous étendons ensuite nos résultats au cadre probabiliste des processus aléatoires gaussiens de moyenne connue (citons par exemple le Théorème 3.1).

Notre raisonnement consiste à décrire l'interpolateur optimal d'un problème donné à partir de l'ensemble au plus dénombrable des éléments propres associés aux valeurs propres strictement positives d'un certain opérateur de Hilbert-Schmidt, dit "opérateur adapté". Il est donc important de remarquer que nos résultats s'appliquent uniquement à des problèmes dans lesquels l'interpolateur optimal appartient à un sous-espace séparable du sous-espace hilbertien considéré (nous noterons par la suite  $\mathcal{H}_M$  le sous-espace en question).

Une grande partie de notre travail est ainsi consacrée à la notion de *noyaux symétriques positifs* et à son utilisation dans le cadre des méthodes d'interpolation. Nous présentons les concepts de *sous-espaces hilbertiens* et de *processus gaussiens* associés à cette classe de noyaux. Nous abordons également dans la dernière partie de notre exposé la notion de *noyaux symétriques conditionnellement positifs*, leurs *sous-espaces semi-hilbertiens* associés et l'interpolation optimale dans ces espaces. Nous nous basons sur la définition de sous-espaces semi-hilbertiens proposée par Jean Duchon dans [Duc77, §.2]. Dans cet article, J. Duchon se place dans un environnement similaire à celui introduit par L. Schwartz dans [Sch64] (sous-espaces semi-hilbertien d'un espace de référence) et considère des noyaux définis sur le polaire de l'espace nul de la semi-norme considérée et non sur la totalité du dual de l'espace de référence. Il énonce ensuite l'existence et la condition d'unicité pour les problèmes d'interpolation optimale dans ces espaces semi-hilbertiens (pour un nombre fini de données). Ses idées ont ensuite été largement reprises et développées, donnant par exemple naissance à la notion d'*espaces natifs* (voir entre autres [Mic86, MN90, Sch98, Sch00]). Néanmoins, ces différents travaux

ne se placent plus dans le contexte général des noyaux de L. Schwartz, lui préférant une notion de noyaux du même type que celle de N. Aronszajn (fonctions de deux variables). Ainsi, il n'existait pas, à notre connaissance, d'exposé détaillant les concepts introduits dans [Duc77] pour des noyaux assimilés à des applications linéaires faiblement continues du dual topologique d'un e.v.t.l.c. quasi-complet sur lui même.

Nous introduisons (Définition 4.2) la classe des noyaux relatifs à l'espace de référence (c'est-à-dire définis sur le dual tout entier) *symétriques conditionnellement positifs*. L'intérêt de cette définition réside dans le fait qu'un problème d'interpolation fait généralement référence à des éléments du dual de l'espace de référence, et pas à des éléments du polaire de l'espace nul, notre définition permettant ainsi de prendre directement ces éléments en considération. A l'aide de la notion de projection sur l'espace nul, nous montrons aux Théorèmes 4.1 et 4.2 que chacun de ces noyaux est associé à un unique sous-espace semi-hilbertien au sens de J. Duchon et que contrairement au cas hilbertien, un sous-espace semi-hilbertien est canoniquement associé à plusieurs noyaux symétriques conditionnellement positifs (et parmi l'ensemble de ces noyaux, certains sont positifs). En cas d'unicité, le Théorème 4.3 donne alors une caractérisation de l'interpolateur optimal pour les problèmes d'interpolation dans ces sous-espaces. Notons enfin que dans notre exposé la dimension de l'espace nul ainsi que le nombre de données sont supposés quelconques (et donc possiblement infinis).

# Chapitre 1

## Sous-espaces hilbertiens et noyaux associés

### 1.1 Définitions et Premières Propriétés

Les notions qui vont être présentées ici sont issues de l'article de Laurent Schwartz "*Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés*", [Sch64].

Soit  $E$  un espace vectoriel topologique localement convexe quasi-complet, par la suite nous nous restreindrons au cas d'espaces vectoriels réels, les notations y étant entre autres moins lourdes que dans le cas complexe.

Un bon rappel des notions d'e.v.t.l.c. pourra être trouver dans l'ouvrage de Walter Rudin "*Functional Analysis*" et dans sa traduction française "*Analyse Fonctionnelle*" [Rud91, Rud95]. Nous utiliserons les définitions introduites dans cette ouvrage; un e.v.t sera par exemple toujours considéré comme étant séparé. Un e.v.t. est quasi-complet si "tout fermé borné est complet" ([Sch64, page 124]).

#### **Définition 1.1**

Soit  $\mathcal{H}$  un sous-espace vectoriel de  $E$  muni d'une structure hilbertienne;  $\mathcal{H}$  est appelé **sous-espace hilbertien** de  $E$  si ce dernier s'injecte continûment dans  $E$ , i.e., sur  $\mathcal{H}$ , la topologie induite par le produit scalaire est plus fine que celle engendrée par  $E$ .

On note  $\mathbf{Hilb}(E)$  l'ensemble des sous-espaces hilbertiens de  $E$ . Lorsque cela ne prêterait pas à confusion, nous dirons simplement que " $\mathcal{H}$  appartient à

$Hilb(E)$ ", sans préciser dans la notation le produit scalaire défini sur  $\mathcal{H}$ . Nous appellerons enfin parfois  $E$  *espace de référence*.

On définit de manière analogue les **sous-espaces préhilbertiens** de  $E$  comme sous-espaces préhilbertiens s'injectant continûment dans  $E$ .

La topologie de  $\mathcal{H}$  étant plus fine que celle de  $E$  toute application linéaire continue sur  $E$  est continue sur  $\mathcal{H}$  : le dual topologique  $E'$  de  $E$  s'injecte naturellement dans  $\mathcal{H}'$ . En effet, soit  $\mathcal{H} \in Hilb(E)$ , on note  $j$  l'injection de  $\mathcal{H}$  dans  $E$ , on rappelle que par construction  $j$  est linéaire et que, par hypothèse, elle est continue. Sa transposée  ${}^tj : E' \rightarrow \mathcal{H}'$ , donnée par :

$$\langle jh, e' \rangle_{E, E'} = \langle h, {}^tj e' \rangle_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'}, \quad h \in \mathcal{H}, \quad e' \in E',$$

définit l'injection de  $E'$  dans  $\mathcal{H}'$  et est donc linéaire, faiblement continue.

Quand cela ne sera pas source d'erreur, nous identifierons directement les éléments de  $\mathcal{H}$  à des éléments de  $E$ , sans passer par l'injection  $j$  ; alors, nous nous autoriserons par exemple l'abus de notation  $\langle h, e' \rangle_{E, E'}$ ,  $h \in \mathcal{H}$  en lieu et place de  $\langle jh, e' \rangle_{E, E'}$ .

**Proposition 1.1** (*[Sch64], prop. 6*)

Soit  $\mathcal{H} \in Hilb(E)$ , il existe une unique application linéaire faiblement continue  $T_{\mathcal{H}}$  de  $E'$  dans  $\mathcal{H} \subset E$  vérifiant :

$$\forall e' \in E', \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \langle h, e' \rangle_{E, E'} = (h | T_{\mathcal{H}} e')_{\mathcal{H}}. \quad (1.1)$$

$T_{\mathcal{H}}$  est appelé le noyau hilbertien relatif à  $E$  associé à  $\mathcal{H}$ .  $T_{\mathcal{H}}$  est de plus symétrique est positif.

**Démonstration :** On note  $\theta$  l'isomorphisme canonique de  $\mathcal{H}'$  sur  $\mathcal{H}$  (isomorphisme de Riesz). On rappelle que  $\theta$  est l'application qui à un élément de  $\mathcal{H}'$  associe son **représentant** dans  $\mathcal{H}$  ; représentant dont l'existence et l'unicité sont assurées par le théorème de représentation de Riesz. En d'autres termes :

$$\langle h, \mu \rangle_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'} = (h | \theta \mu)_{\mathcal{H}}, \quad h \in \mathcal{H}, \quad \mu \in \mathcal{H}'.$$

Soit  $e' \in E'$  et  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$\langle jh, e' \rangle_{E, E'} = \langle h, {}^tj e' \rangle_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'} = (h | \theta {}^tj e')_{\mathcal{H}}.$$

Nous avons donc défini l'application suivante :

$$E' \xrightarrow{{}^tj} \mathcal{H}' \xrightarrow{\theta} \mathcal{H} \xrightarrow{j} E. \quad (1.2)$$

Par construction,  $j \circ \theta \circ {}^t j$  (que nous noterons  $j\theta^t j$ ) est linéaire, faiblement continue de  $E'$  dans  $E$  et vérifie (1.1) : on doit donc avoir  $T_{\mathcal{H}} = j\theta^t j$ . L'unicité du noyau  $T_{\mathcal{H}}$  est assuré par le fait que, pour tout  $e' \in E'$ , le produit scalaire de  $T_{\mathcal{H}}e'$  est défini de manière unique avec tout élément de  $\mathcal{H}$ . Enfin, pour  $e'$  et  $f' \in E'$ ,

$$\langle T_{\mathcal{H}}e', e' \rangle_{E, E'} = \|T_{\mathcal{H}}e'\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0,$$

i.e.  $T_{\mathcal{H}}$  est positif, et

$$\langle T_{\mathcal{H}}e', f' \rangle_{E, E'} = (T_{\mathcal{H}}e' | T_{\mathcal{H}}f')_{\mathcal{H}} = (T_{\mathcal{H}}f' | T_{\mathcal{H}}e')_{\mathcal{H}} = \langle T_{\mathcal{H}}f', e' \rangle_{E, E'},$$

i.e.  $T_{\mathcal{H}}$  est symétrique. ■

### Définition 1.2

Un **noyau relatif** à  $E$  est une application linéaire de  $E'$  dans  $E$  faiblement continue (i.e. continue de  $\sigma(E', E)$  vers  $\sigma(E, E')$ ). En fait, une telle application est alors fortement continue (i.e. continue de  $E'$  fort vers  $E$  initial, voir [Sch64, page 139]).

Soit  $T$  un noyau relatif à  $E$  et soit  $e'$  et  $f' \in E'$ , la transposée de  $T$ , notée  ${}^t T$  et donnée par :

$$\langle Te', f' \rangle_{E, E'} = \langle {}^t T f', e' \rangle_{E, E'},$$

est aussi un noyau relatif à  $E$ .

Soit  $T$  un noyau relatif à  $E$  :

- $T$  sera dit **symétrique** si  $T = {}^t T$ ,
- $T$  sera dit **positif** si

$$\forall e' \in E', \langle Te', e' \rangle_{E, E'} \geq 0.$$

**Remarque 1.1 :** Contrairement au cas complexe où tout noyau positif est hermitien, dans le cas réel, un noyau relatif à  $E$  positif n'est pas forcément symétrique.

Notons aussi que l'on peut identifier tout noyau  $T$  à une forme bilinéaire (dans le cas réel)  $\tilde{T} : E' \times E' \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\forall e' \text{ et } f' \in E', \tilde{T}(e', f') = \langle Te', f' \rangle_{E, E'}.$$
■

On introduit les notations suivantes :

- $\mathcal{L}(\mathbf{E}', \mathbf{E})$  l'ensemble des noyaux relatifs à  $E$ ,
- $\mathcal{L}_s^+(\mathbf{E})$  l'ensemble des noyaux relatifs à  $E$  symétriques et positifs.

**Proposition 1.2**

Soit  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$  et  $T_{\mathcal{H}}$  son noyau associé, alors  $\mathcal{H}_0 = T_{\mathcal{H}}(E')$  est un sous-espace dense de  $\mathcal{H}$ .

**Démonstration :** Soit  $h \in \mathcal{H}$ ,  $h \perp \mathcal{H}_0$ , pour tout  $e' \in E'$ , on a :

$$(h|T_{\mathcal{H}}e')_{\mathcal{H}} = \langle h, e' \rangle_{E, E'} = 0$$

et donc  $h = 0$  : en effet,  $\mathbf{E}'$  sépare  $\mathbf{E}$ , c'est un résultat capital pour notre étude, simple corollaire du théorème de Hahn-Banach appliqué à un e.v.t.l.c., voir [Rud95, page 59] ■

La Proposition 1.1 montre qu'à tout élément  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$  on peut associer un unique élément  $T_{\mathcal{H}} \in \mathcal{L}_s^+(E)$ . Un des principaux résultats de la théorie des sous-espaces hilbertiens est que l'on peut également associer un unique sous-espace hilbertien de  $E$  à tout noyau de  $\mathcal{L}_s^+(\mathbf{E})$ .

**Proposition 1.3 ([Sch64], prop. 10)**

L'application canonique de  $\text{Hilb}(E)$  dans  $\mathcal{L}_s^+(E)$  est une bijection.

**Démonstration :** (*éléments de preuve*) Pour prouver cette proposition, il ne nous resterait qu'à démontrer qu'à tout élément de  $\mathcal{L}_s^+(\mathbf{E})$  est associé un unique sous-espace hilbertien de  $E$ . Néanmoins cette partie est assez technique et la détailler ici ne nous est pas d'une grande utilité ; nous allons simplement donner les grandes idées de cette démonstration. On doit montrer qu'à tout  $T \in \mathcal{L}_s^+(E)$  on peut associer un unique  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$  l'admettant comme noyau ; pour cela, on s'intéresse tout d'abord à  $\mathcal{H}_0 = T(E')$ , cet espace vectoriel peut naturellement être muni de la structure préhilbertienne suivante, pour  $e'$  et  $f' \in E'$ ,

$$(Te'|Tf')_{\mathcal{H}_0} = \langle Te', f' \rangle_{E, E'} = \langle Tf', e' \rangle_{E, E'}.$$

Il faut alors montrer que  $\mathcal{H}_0$  est un sous espace préhilbertien de  $E$  et enfin, en utilisant la quasi-complétude de  $E$ , prouver que ce dernier admet un unique complété dans  $E$  (voir aussi la preuve de la Proposition 1.4). ■



**Remarque 1.2 :** Soit  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$  et  $\{h_i, i \in I\}$  une base hilbertienne de  $\mathcal{H}$ . Le noyau hilbertien  $T_{\mathcal{H}}$  de  $\mathcal{H}$  peut être écrit sous la forme :

$$T_{\mathcal{H}} = \sum_{i \in I} h_i \otimes h_i, \text{ au sens où}$$

$$\forall e' \text{ et } f' \in E', \langle T_{\mathcal{H}} e', f' \rangle_{E, E'} = \sum_{i \in I} \langle h_i, e' \rangle_{E, E'} \langle h_i, f' \rangle_{E, E'}.$$

En effet, on a bien, par exemple, si  $h \in \mathcal{H}$  et  $e' \in E'$ ,

$$\begin{aligned} \left( h \left| \sum_{i \in I} h_i \langle h_i, e' \rangle_{E, E'} \right. \right)_{\mathcal{H}} &= \left\langle \sum_{i \in I} h_i (h|h_i)_{\mathcal{H}}, e' \right\rangle_{E, E'} \\ &= \langle h, e' \rangle_{E, E'} \end{aligned}$$

■

Notons enfin que  $\text{Hilb}(E)$  et  $\mathcal{L}_s^+(E)$  possèdent une structure remarquable, on peut en effet munir ces derniers d'une loi de multiplication par des réels positifs, d'une loi d'addition et enfin d'une relation d'ordre; ces trois lois étant de plus "compatibles" (la somme  $\mathcal{H} + \mathcal{H}$  est par exemple égale à  $2\mathcal{H}$ ). Les ensembles  $\text{Hilb}(E)$  et  $\mathcal{L}_s^+(E)$  peuvent ainsi être muni d'une structure de cône convexe saillant possédant une relation d'ordre. La bijection canonique entre  $\text{Hilb}(E)$  et  $\mathcal{L}_s^+(E)$  peut alors être vue comme un isomorphisme entre ces deux structures (voir [Sch64, §2, pages 132-138]).

En plus leur intérêt théorique, ces lois de multiplication externe et d'addition (ainsi que la relation d'ordre) sont d'un grand intérêt en terme d'application. Nous citerons par exemple le lien qu'il existe entre certains problèmes de régularisation (au sens approximation) et l'interpolation dans les sous-espaces de hilbertiens de type "sommés" (voir par exemple [NW74b]).

## 1.2 Sous-espaces hilbertiens d'espaces "emboîtés"

Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  muni d'une structure d'e.v.t.l.c. séparé quasi-complet telle que l'injection naturelle de  $F$  dans  $E$  soit continue (i.e. la topologie de  $F$  est plus fine que celle engendrée par  $E$ ); on note  $i$  l'injection de  $F$  dans  $E$ .

Tout sous-espace hilbertien de  $F$  est un sous-espace hilbertien de  $E$  : en effet, soit  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(F)$ , on note  $j_F$  l'injection (continue) de  $\mathcal{H}$  dans  $F$ ; l'injection

de  $\mathcal{H}$  dans  $E$ , donnée par  $ij_F$ , est continue. Si on note  $T_{\mathcal{H}F}$  le noyau hilbertien de  $\mathcal{H}$  relativement à  $F$ , un calcul simple montre que le noyau  $T_{\mathcal{H}E}$  de  $\mathcal{H}$  relativement à  $E$  est (voir aussi Section 1.4)

$$T_{\mathcal{H}E} : E' \xrightarrow{^t i} F' \xrightarrow{T_{\mathcal{H}F}} F \xrightarrow{i} E. \quad (1.3)$$

**Remarque 1.3 :** Tout espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est sous-espace hilbertien de lui-même, son noyau associé étant dans ce cas l'isomorphisme canonique  $\theta : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$  (isomorphisme de Riesz, voir la preuve de la Proposition 1.1).

Si  $\mathcal{H}$  est aussi sous-espace hilbertien de  $E$ , on se trouve dans la configuration étudiée dans cette section :  $\mathcal{H}$  est sous-espace hilbertien de lui-même et  $\mathcal{H}$  s'injecte continument dans  $E$ . Ainsi, le noyau de  $\mathcal{H}$  relativement à  $E$ , dont l'expression est donnée par l'équation (1.2), correspond bien au cas décrit par l'équation (1.3) : on obtient l'équation (1.2), en remplaçant, dans l'expression (1.3),  $F$  par  $\mathcal{H}$  et  $T_{\mathcal{H}F}$  par  $\theta$ . ■

**Remarque 1.4 :** On peut se demander à quelles conditions un sous-espace hilbertien de  $E$  est aussi sous-espace hilbertien de  $F$ . La proposition suivante apporte une réponse topologique à cette question.

**Proposition 1.4**

Un sous-espace hilbertien  $\mathcal{H}$  de  $E$  est un sous-espace hilbertien de  $F$  si et seulement si la boule unité  $B_{0E}$  (fermée) de  $\mathcal{H}_{0E} = T_{\mathcal{H}E}(E')$  est faiblement bornée dans  $F$ .

**Démonstration :** Soit  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$ , nous savons (propriété 1.2) que  $\mathcal{H}_{0E}$  est dense dans  $\mathcal{H}$  et que  $B_{0E}$  est fermée dans  $\mathcal{H}_{0E}$  pour la topologie induite par  $E$  (voir [Sch64, page 155]).

Supposons  $B_{0E}$  faiblement bornée dans  $F$ . Comme toute partie faiblement bornée d'un e.v.t.l.c. est bornée pour sa topologie initiale (ce résultat est aussi connu sous le nom de *théorème de Mackey*, voir [Bou67, Chap.IV, §2, n°4, Théorème 3]),  $B_{0E}$  est aussi bornée dans  $F$  et  $\mathcal{H}_{0E}$  est donc un sous-espace préhilbertien de  $F$ . Comme  $B_{0E}$  est fermée dans  $\mathcal{H}_{0E}$  pour la topologie induite par  $F$  (car fermée pour celle induite par  $E$ ),  $\mathcal{H}_{0E}$  admet un unique complété  $\mathcal{H}_F \in \text{Hilb}(F)$  (voir [Sch64, Proposition 1]). Or,  $\mathcal{H}$  étant le complété de  $\mathcal{H}_{0E}$  dans  $E$  et comme  $\mathcal{H}_F \in \text{Hilb}(E)$ , on a forcément  $\mathcal{H}_F = \mathcal{H}$  et  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(F)$ .

Inversement, si  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(F)$ , i.e. la boule unité  $B_{\mathcal{H}}$  de  $\mathcal{H}$  est bornée dans  $F$ ; comme  $B_{0E} \subset B_{\mathcal{H}}$  on a  $B_{0E}$  bornée dans  $F$ . ■

On se place dans le cadre de la Proposition 1.4, il nous reste à caractériser le noyau hilbertien  $T_{\mathcal{H}F}$  de  $\mathcal{H}$  relativement à  $F$  à partir de  $T_{\mathcal{H}E}$ . On a

$$\forall f' \in F', \forall e' \in E', \quad \langle iT_{\mathcal{H}F}f', e' \rangle_{E, E'} = \langle T_{\mathcal{H}F}{}^t i e', f' \rangle_{F, F'}, \quad (1.4)$$

comme pour tout  $e' \in E'$ ,  $T_{\mathcal{H}E}e' = iT_{\mathcal{H}F}{}^t i e'$  on identifie, dans l'équation (1.4),  $T_{\mathcal{H}F}{}^t i e'$  à  $T_{\mathcal{H}E}e'$ . Pour tout  $f' \in F'$ ,  $T_{\mathcal{H}F}f'$  est ainsi correctement définie pour la topologie faible de  $E$  (qui sépare  $E$ ). ■

### 1.3 Espaces de Hilbert à noyau reproduisant

Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble et  $E = \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$  l'ensemble des fonctions sur  $\mathcal{X}$  à valeurs réelles, muni de la topologie de la convergence simple ; le dual topologique  $E'$  de  $E$  est l'espace des mesures à support fini sur  $\mathcal{X}$  (une telle mesure  $\mu$  est une "somme finie de Dirac", i.e.  $\mu = \sum_{x \in \mathcal{X}} c_x \delta_x$  avec  $\delta_x$  la mesure de Dirac au point  $x$ ,  $c_x \in \mathbb{R}$  et où seuls un nombre fini de  $c_x$  sont non nuls).

#### Définition 1.3

*Un espace de Hilbert à noyau reproduisant (Reproducing Kernel Hilbert Space en anglais, voir [Aro50]) est un sous-espace hilbertien de  $E = \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$  muni de la topologie de la convergence simple. Le **noyau reproduisant**  $K : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  d'un RKHS  $\mathcal{H}$  est alors lié au noyau hilbertien de  $\mathcal{H}$  par la relation*

$$K(x, y) = \langle T_{\mathcal{H}}\delta_x, \delta_y \rangle_{E, E'}, x \text{ et } y \in \mathcal{X}.$$

A première vue, la théorie des RKHS semble être un cas particulier assez restrictif de la théorie des sous-espaces hilbertiens : celui où  $E = \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$  muni de la topologie de la convergence simple. La notion de RKHS est en fait beaucoup plus générale. D'après la Section 1.2, elle permet de rendre compte de tous les sous-espaces hilbertiens d'un espace de fonctions sur un ensemble et ce dès lors que l'espace fonctionnel en question est muni d'une topologie plus fine que celle de la convergence simple. On peut en fait aller plus loin en remarquant que  $E$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^{E'}$ , espace des fonctions réelles sur  $E'$  et sa topologie est plus fine que celle de la convergence simple sur  $E'$ , voir [Sch64, page 190].

## 1.4 Effet d'une application linéaire continue

On se rapporte ici au paragraphe 8 de l'article de Laurent Schwartz [Sch64, §8, pages 174-188]. Nous étudions comment les structures de sous-espaces hilbertiens, et donc leur noyaux associés, peuvent être modifiées par l'intermédiaire d'applications linéaires continues.

Soit  $E$  et  $F$  deux e.v.t.l.c. quasi-complets et  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire faiblement continue. Soit  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$ ; on note  $\mathcal{N} = \text{Ker}(u) \cap \mathcal{H}$ , i.e.  $\mathcal{N}$  est le noyau de la restriction de  $u$  à  $\mathcal{H}$ . Cette restriction peut alors se "factoriser" sous la forme :

$$u : \mathcal{H} \xrightarrow{\pi} \mathcal{H}/\mathcal{N} \xrightarrow{u^\bullet} F$$

où  $u^\bullet$  est linéaire continue injective, donc une bijection de  $\mathcal{H}/\mathcal{N}$  sur  $u(\mathcal{H})$ . Nous appellerons  $u(\mathcal{H})$  le sous-espace hilbertien de  $F$  obtenu en transportant sur  $u(\mathcal{H})$ , par l'intermédiaire de  $u^\bullet$ , la structure hilbertienne de  $\mathcal{H}/\mathcal{N}$ . La norme de  $u(\mathcal{H})$  est simplement donnée par :

$$\|k\|_{u(\mathcal{H})} = \min_{u(h)=k} \|h\|_{\mathcal{H}}.$$

### Proposition 1.5 ([Sch64], prop. 21)

*Si  $u$  est une application linéaire faiblement continue de  $E$  dans  $F$  et si  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$ , le noyau hilbertien de  $u(\mathcal{H})$  (relativement à  $F$ ) est donnée par*

$$T_{u(\mathcal{H})} = uT_{\mathcal{H}}^t u.$$

*En outre, le sous-espace  $T_{\mathcal{H}}^t u(F')$  est un sous-espace dense de  $\mathcal{K}$ , orthogonal de  $\mathcal{N}$  dans  $\mathcal{H}$ .*

**Démonstration :** Cherchons tout d'abord l'orthogonal dans  $\mathcal{H}$  de  $T_{\mathcal{H}}^t u(F')$ . Soit  $h \in \mathcal{H}$  et  $f' \in F'$ ,

$$(h|T_{\mathcal{H}}^t u f')_{\mathcal{H}} = \langle h, {}^t u f' \rangle_{E, E'} = \langle u h, f' \rangle_{F, F'},$$

donc  $h$  est orthogonal à  $T_{\mathcal{H}}^t u(F')$  si et seulement si  $u h = 0$ , i.e.  $h \in \mathcal{N}$  et  $\mathcal{K}$  est bien l'adhérence de  $T_{\mathcal{H}}^t u(F')$  dans  $\mathcal{H}$ .

Ainsi, par définition du produit scalaire sur  $u(\mathcal{H})$ ,

$$\langle u h, f' \rangle_{F, F'} = (h|T_{\mathcal{H}}^t u f')_{\mathcal{H}} = (u h | u T_{\mathcal{H}}^t u f')_{u(\mathcal{H})},$$

ce qui prouve bien que  $u T_{\mathcal{H}}^t u$  est le noyau de  $u(\mathcal{H})$  dans  $F$ . ■

**Remarque 1.5 :** La situation étudiée dans la Section 1.2 entre de le cadre présenté ici, l'application linéaire continue considérée étant dans ce cas l'injection du "petit espace" dans le plus "grand".

Ce type de transformation peut se révéler très utile en terme d'application. Si l'on souhaite par exemple travailler dans des espaces dont les éléments vérifient certaines propriétés et que parallèlement on dispose d'une application linéaire continue transformant les éléments d'un certain espace en éléments vérifiant les propriétés requises, les éléments des sous-espaces hilbertiens "images" ainsi construits répondront alors aux contraintes souhaitées. On citera par exemple le cas où  $u$  associe à tout éléments son symétrisé par rapport à une certaine action de groupe, permettant au final la construction de sous-espaces hilbertiens dont les éléments sont invariants sous l'action de groupe considérée.

Notons enfin que, de manière générale, la modification des noyaux hilbertiens de  $E$  au travers de projections linéaire continues sur des sous-espaces de  $E$  s'avère souvent d'un grand intérêt. En particulier, on peut obtenir une grande partie des résultats de la théorie des sous-espaces semi-hilbertiens de  $E$  (voir le Chapitre 4 ainsi que [Duc77]) à partir des noyaux hilbertiens de  $E$  en considérant de telles projections (que nous appellerons dans ce cas projection sur l'espace nul). ■

## 1.5 Exemple

Soit  $E = C([0, 1])$ , espace des fonctions à valeurs réelles continues sur  $[0, 1]$ , muni de la topologie de la convergence uniforme.  $E$  est alors un espace de Banach, sa norme associée étant,

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Remarquons que  $E = C([0, 1])$  s'injecte continument dans  $\mathbb{R}^{[0, 1]}$ , espace des fonctions de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la topologie de la convergence simple. On se trouve donc dans le cas de la Section 1.2, un sous espace hilbertien de  $E$  sera donc un RKHS.

On considère l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = H_0^1$ ,

$$H_0^1 = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \exists f' \in L^2([0, 1]) \text{ tq } \forall x \in [0, 1], f(x) = \int_0^x f'(t) dt \right\}$$

muni du produit scalaire,

$$\forall f \text{ et } g \in H_0^1, (f|g)_{H_0^1} = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt \quad (= (f'|g')_{L^2}).$$

Notons que par définition, les fonctions de  $H_0^1$  prennent la valeur 0 en 0 et sont continues (absolument continues, et même höldérienne d'ordre  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ ).

Pour tout  $x \in [0, 1]$  et  $f \in H_0^1$ , on a

$$f(x) = \int_0^1 \mathbb{I}_{[0,x]}(t)f'(t)dt, \quad (1.5)$$

où  $\mathbb{I}_{[0,x]}(t)$  est l'indicatrice de  $[0, x]$  ( $\mathbb{I}_{[0,x]}(t)$  vaut 1 si  $t \in [0, x]$  et 0 sinon). Ainsi, par Cauchy-Schwarz,

$$|f(x)| \leq \sqrt{x} \|f\|_{H_0^1} \leq \|f\|_{H_0^1} \text{ et donc } (f \text{ continue}) \quad \|f\|_\infty \leq \|f\|_{H_0^1}.$$

$H_0^1$  s'injecte donc continûment dans  $C([0, 1])$ , i.e.  $H_0^1$  est un sous-espace hilbertien de  $C([0, 1])$  et, par la même, un RKHS. Soit  $K(\cdot, \cdot)$  le noyau reproduisant de  $H_0^1$ , on introduit la notation, pour  $x \in [0, 1]$ ,  $K_x(\cdot) = K(x, \cdot)$ . D'après l'équation (1.5), on obtient  $K'_x(t) = \mathbb{I}_{[0,x]}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , ce qui donne finalement,

$$\text{pour } x \text{ et } t \in [0, 1], K(x, t) = x \wedge t, \text{ avec } x \wedge t = \min(x, t).$$

Le dual topologique de  $E = C([0, 1])$  est l'espace des mesures signées sur  $[0, 1]$ , soit alors  $\mu \in E'$ , on a, pour tout  $s \in [0, 1]$  ( $\delta_s$  est la Dirac au point  $s$ ),

$$T_{\mathcal{H}}\mu(s) = \langle T_{\mathcal{H}}\mu, \delta_s \rangle_{E, E'} = \langle T_{\mathcal{H}}\delta_s, \mu \rangle_{E, E'} = \int_0^1 K(s, t)d\mu(t).$$

En appliquant le théorème de Fubini, on vérifie bien que pour tout  $f \in H_0^1$ ,

$$(f|T_{\mathcal{H}}\mu)_{H_0^1} = \int_0^1 f(t)d\mu(t) = \langle f, \mu \rangle_{E, E'}.$$

**Remarque 1.6 :** Dans ce qui précède, le point 0 joue un rôle particulier. On peut faire jouer ce rôle à tout point  $\alpha \in [0, 1]$ , on définit pour cela l'espace  $H_\alpha^1$ , composé des fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  absolument continue, vérifiant  $f(\alpha) = 0$  et telles que il existe  $f' \in L^2([0, 1])$ ,

- si  $x > \alpha$ ,  $f(x) = \int_\alpha^x f'(t)dt$ ,
- si  $x < \alpha$ ,  $f(x) = - \int_x^\alpha f'(t)dt$ ,

son produit scalaire étant le même que précédemment.

$H_\alpha^1$  est aussi un sous-espace hilbertien de  $C([0, 1])$ , son noyau reproduisant  $K_\alpha(\cdot, \cdot)$  est donné par

$$K_\alpha(x, t) = |x - \alpha| \wedge |t - \alpha| \mathbb{I}_{[0, +\infty[}((x - \alpha)(t - \alpha)).$$

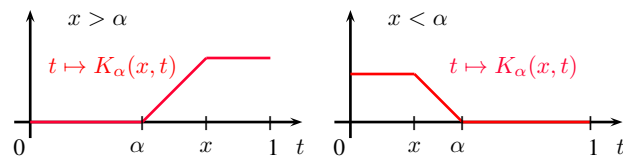


FIGURE 1.1 – Représentation graphique du noyau  $K_\alpha(\cdot, \cdot)$ .

Notons enfin que pour  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $H_\alpha^1$  est un sous-espace hilbertien de l'espace de Banach des fonctions continues sur  $[0, 1]$  s'annulant en  $\alpha$ , muni de la topologie de la convergence uniforme. L'ensemble de cette remarque nous sera d'une grande utilité dans la Section 4.3, consacrée à l'étude d'un exemple de sous-espace semi-hilbertien. ■

# Chapitre 2

## Interpolation optimale dans les sous-espaces hilbertiens : une approche spectrale

On pourra trouver une version anglaise de ce chapitre dans l'Annexe B.

### 2.1 Introduction

Soit  $E$  un espace vectoriel topologique séparé et  $E'$  son dual topologique. Soit  $M$  un sous-espace vectoriel de  $E'$  et  $\varphi \in E$ . On dit d'un élément  $f \in E$  qu'il *interpole*  $\varphi$  pour  $M$  si

$$\forall e' \in M, \langle f, e' \rangle_{E, E'} = \langle \varphi, e' \rangle_{E, E'}.$$

La théorie de l'interpolation consiste en l'étude, la caractérisation et la construction de tels éléments interpolant. Lorsque  $E$  est également localement convexe et quasi-complet, la théorie des sous-espaces hilbertiens de  $E$  proposée par L. Schwartz [Sch64] donne un cadre particulièrement bien adapté à la résolution de tels problèmes. En effet, si l'on se donne un sous-espace hilbertien  $\mathcal{H}$  de  $E$  et  $\varphi \in \mathcal{H} \subset E$ , il est alors très facile de décrire l'ensemble des éléments de  $\mathcal{H}$  interpolant  $\varphi$  pour  $M$ , et ce à partir de simples projections orthogonales de  $\mathcal{H}$  (voir la Section 2.2 pour un exposé détaillé). Remarquons également que l'interpolation optimale dans les sous-espaces hilbertiens est intrinsèquement liée au problème du conditionnement des processus gaussiens, les structures hilbertienne apparaissant dans chacun de ses problèmes étant isométriques (voir [Jan97, RW06, Wah90] ainsi que la



Section 3.2). Nous n'aborderons néanmoins pas le problème plus général du conditionnement dans ce chapitre, ou alors simplement à titre d'illustration.

Dans la grande majorité des cas usuellement présentés, le sous-espace  $M$  de  $E'$  est supposé être de dimension finie, traduisant au passage la connaissance d'un nombre finie d'information à propos de l'*élément objectif*  $\varphi$ . Pour être plus précis, on suppose connu les valeurs  $\langle \varphi, e'_i \rangle_{E, E'}$  pour  $1 \leq i \leq n$ , avec  $e'_i \in E'$  ( $M$  est alors le sous-espace de  $E'$  engendré par  $e'_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ). Le problème d'interpolation est alors associé à une projection orthogonal de  $\mathcal{H}$  sur un sous-espace  $\mathcal{H}_M$  de dimension finie. La construction d'interpolateur optimal peut alors, de part son caractère fini, être réalisée numériquement sans aucune difficulté.

Dans l'exposé qui suit, nous nous intéressons plus particulièrement aux cas dans lesquels le sous-espace  $\mathcal{H}_M$  est de dimension infinie. Nous exigerons cependant que ce dernier soit *séparable*, traduisant la connaissance d'une infinité dénombrable d'informations linéairement indépendantes du type  $\langle \varphi, e' \rangle_{E, E'}$ ,  $e' \in M \subset E'$  ( $M$  étant donc de dimension infinie).

La première partie de ce chapitre (Section 2.2) est consacrée à la présentation du cadre théorique de l'interpolation optimale dans les sous-espaces hilbertiens. Dans la Section 2.3, nous présentons une classe d'*opérateurs intégraux adaptés* à un problème d'interpolation donné et discutons de leurs propriétés. Nous montrons ensuite comment la décomposition spectrale de ces opérateurs peut être utilisée dans l'optique de résoudre le problème d'interpolation initialement posé. Dans la Section 2.5, nous considérons le cas classique où le nombre de données est finie et montrons que notre formule de représentation pour l'interpolateur optimal (donnée en Section 2.4) est équivalente à son expression usuelle. Nous concluons par un exemple d'application dans lequel nous considérons un sous-espace hilbertien composé de fonctions réelles continûment dérivable sur  $\mathbb{R}^2$  et montrons comment notre approche peut être utilisée pour contraindre les dérivées radiales ainsi que le valeurs prises par une fonction sur un cercle.

## 2.2 Interpolation optimale dans les sous-espaces hilbertiens

Soit  $E$  espace vectoriel topologique réel, séparé, localement convexe et quasi-complet (voir par exemple [Rud95]). On note  $E'$  son dual topologique. Soit  $\mathcal{H}$  un sous-espace hilbertien de  $E$  ( $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$ , notation introduite au

Chapitre 1). On note  $T_{\mathcal{H}}$  le noyau hilbertien de  $\mathcal{H}$ , rappelons que  $T_{\mathcal{H}} : E' \rightarrow \mathcal{H} \subset E$  est caractérisé par

$$\forall h \in \mathcal{H}, \forall e' \in E', \langle h, e' \rangle_{E, E'} = (h | T_{\mathcal{H}} e')_{\mathcal{H}},$$

avec  $(\cdot | \cdot)_{\mathcal{H}}$  le produit scalaire de  $\mathcal{H}$ .

Soit  $M$  un sous-espace vectoriel de  $E'$ , on note

$$M^0 = \left\{ e \in E : \forall e' \in M, \langle e, e' \rangle_{E, E'} = 0 \right\}.$$

$M^0$  est un sous-espace fermé de  $E$  (il peut par exemple s'écrire comme l'intersection de noyaux d'applications linéaires continues), il contient tous les éléments de  $E$  qui s'annulent sur  $M$ . On définit ensuite le sous-espace  $\mathcal{H}_0 = M^0 \cap \mathcal{H} = T_{\mathcal{H}}(M)^{\perp}$  de  $\mathcal{H}$ , où  $T_{\mathcal{H}}(M)^{\perp}$  représente l'orthogonal, dans  $\mathcal{H}$ , de  $T_{\mathcal{H}}(M)$ . Ainsi, pour un élément fixé  $\varphi \in \mathcal{H}$ ,

$$\varphi + (M^0 \cap \mathcal{H})$$

est l'ensemble de tous les interpolateurs, dans  $\mathcal{H}$ , de  $\varphi$  pour  $M$ . Nous allons voir que parmi l'ensemble de ces interpolateurs, un seul peut se prévaloir d'être de norme minimal.

**Proposition 2.1**

Soit  $\varphi \in \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$  et soit  $M$  un sous-espace vectoriel de  $E'$ . Il existe un unique élément interpolant, dans  $\mathcal{H}$ , de  $\varphi$  pour  $M$  dont la norme est minimale. On note  $h_{\varphi, M}$  cet élément, nous l'appellerons l'interpolateur optimal de  $\varphi$  pour  $M$ .  $h_{\varphi, M}$  est alors le projeté orthogonal, dans  $\mathcal{H}$  de 0 sur  $\varphi + (M^0 \cap \mathcal{H})$ .

**Démonstration :** Par définition,  $\varphi + (M^0 \cap \mathcal{H})$  est non vide.  $M^0$  étant fermée dans  $E$ ,  $(M^0 \cap \mathcal{H})$  est fermé dans  $\mathcal{H}$  pour la topologie induite par  $E$  et  $(M^0 \cap \mathcal{H})$  est donc fermé pour la topologie hilbertienne de  $\mathcal{H}$  (cette dernière étant plus fine que la topologie induite par  $E$ ). Enfin, en tant que sous-espace affine,  $\varphi + (M^0 \cap \mathcal{H})$  est convexe.  $\varphi + (M^0 \cap \mathcal{H})$  admet donc un élément de norme minimal, ce dernier étant le projeté orthogonal de 0 sur  $\varphi + (M^0 \cap \mathcal{H})$ . ■

Cette première caractérisation de  $h_{\varphi, M}$  est essentiellement non constructive, l'élément objectif  $\varphi$  étant en pratique inconnu (les seules informations dont nous disposons à son sujet étant ses valeurs sur  $M$ ). On peut cependant aller plus loin dans l'étude de  $h_{\varphi, M}$ , rappelons tout d'abord le lemme suivant.

### Lemme 2.1

Soit  $\mathcal{V}$  un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , soit  $\varphi \in \mathcal{H}$  et  $\mathcal{V}_\varphi = \varphi + \mathcal{V}$ . Un élément  $k$  de  $\mathcal{H}$  est le projeté orthogonal de  $h \in \mathcal{H}$  sur  $\mathcal{V}_\varphi$  si et seulement si

$$\forall v \in \mathcal{V}, (k - h|v)_\mathcal{H} = 0.$$

**Démonstration :** Si  $k$  est le projeté orthogonal de  $h$  sur  $\mathcal{V}_\varphi$ , on a par définition du projeté orthogonal (voir par exemple [Buc92]),

$$\forall g \in \mathcal{V}_\varphi, (k - h|k - g)_\mathcal{H} \leq 0.$$

Or, l'élément  $v = k - g$  est un élément arbitraire de  $\mathcal{V}$ , ainsi, la précédente expression se ré écrit :

$$\forall v \in \mathcal{V}, (k - h|v)_\mathcal{H} \leq 0,$$

on conclut alors en remplaçant  $v$  par  $-v$ . ■

### Proposition 2.2

Soit  $\varphi \in \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$  et soit  $M$  un sous-espace vectoriel de  $E'$ . On note  $\mathcal{H}_M$  l'adhérence dans  $\mathcal{H}$  du sous-espace engendré par les  $T_{\mathcal{H}}e'$ ,  $e' \in M$ , en d'autres termes

$$\mathcal{H}_M = \overline{T_{\mathcal{H}}(M)}^{\mathcal{H}} = \left(T_{\mathcal{H}}(M)^\perp\right)^\perp = \mathcal{H}_0^\perp. \quad (2.1)$$

$h_{\varphi,M}$  est alors le projeté orthogonal dans  $\mathcal{H}$  de  $\varphi$  sur  $\mathcal{H}_M$  ( $h_{\varphi,M}$  est d'ailleurs l'unique élément interpolant appartenant à  $\mathcal{H}_M$ ).

**Démonstration :** En appliquant le Lemme 2.1 ainsi que la Proposition 2.1, on obtient que  $h_{\varphi,M} - 0 = h_{\varphi,M}$  est orthogonal à  $\mathcal{H}_0$ , donc  $h_{\varphi,M} \in \mathcal{H}_0^\perp = \mathcal{H}_M$ . D'après la décomposition en somme directe orthogonale

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_M \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_0, \quad (2.2)$$

$h_{\varphi,M}$  est l'unique élément interpolant de  $\mathcal{H}_M$ . Notons  $P_{\mathcal{H}_M}$  la projection orthogonale de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{H}_M$ . On obtient alors que  $\varphi - P_{\mathcal{H}_M}[\varphi]$  est orthogonal à  $\mathcal{H}_M$ , donc  $\varphi - P_{\mathcal{H}_M}[\varphi] \in \mathcal{H}_0$  et donc  $P_{\mathcal{H}_M}[\varphi]$  interpole  $\varphi$  pour  $M$ . On a finalement

$$h_{\varphi,M} = P_{\mathcal{H}_M}[\varphi]. \quad (2.3) \quad \blacksquare$$

Les résultats que nous venons d'énoncer peuvent être schématiquement résumés à l'aide de la Figure 2.1.

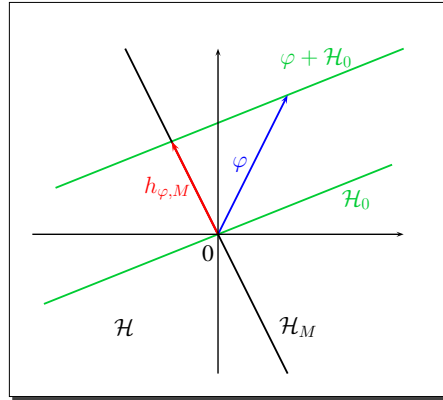


FIGURE 2.1 – Représentation graphique du problème d'interpolation optimale dans un sous-espace hilbertien.

En pratique, on présente la solution d'un problème d'interpolation par la donnée de  $h_{\varphi, M}$  et du noyau  $T_{\mathcal{H}_0}$ . La connaissance de ces deux éléments permet en effet (au moins sur un plan théorique) la construction de tous les éléments interpolant de  $\varphi$  pour  $M$  dans  $\mathcal{H}$ .

Notons que le noyau hilbertien  $T_{\mathcal{H}_M}$  du sous-espace hilbertien  $\mathcal{H}_M$ ,  $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}}$  de  $E$  est lié à la projection  $P_{\mathcal{H}_M}$  par la relation

$$T_{\mathcal{H}_M} = P_{\mathcal{H}_M} T_{\mathcal{H}},$$

ce résultat étant en fait valable pour tout sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{H}$ . La connaissance du noyau  $T_{\mathcal{H}_M}$  induit ainsi la connaissance de la projection  $P_{\mathcal{H}_M}$ , et réciproquement. Rappelons enfin l'équation (2.2) implique que

$$T_{\mathcal{H}} = T_{\mathcal{H}_M} + T_{\mathcal{H}_0}. \quad (2.4)$$

**Remarque 2.1 :** Les résultats qui vont suivre sont plus particulièrement motivés, dans le cadre de cet exposé, par l'exemple développé au long de la Section 2.6.3 mais son intérêt pratique n'en est pas pour autant négligeable. Nous montrons comment il est possible de résoudre le problème d'interpolation associé à un sous-espace vectoriel  $M$  de  $E'$  en décomposant  $M$  en plusieurs sous-espaces. Soit  $M_1$  et  $M_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E'$ . On introduit

$$\mathcal{H}_{M_1} = \overline{T_{\mathcal{H}}(M_1)}^{\mathcal{H}} \text{ et } \mathcal{H}_{01} = \mathcal{H}_{M_1}^{\perp}.$$

On note respectivement  $P_{\mathcal{H}_{M1}}$  et  $P_{\mathcal{H}_{01}}$  les projections orthogonales de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{H}_{M1}$  et  $\mathcal{H}_{01}$ . Soit alors  $T_{\mathcal{H}_{01}} = P_{\mathcal{H}_{01}}T_{\mathcal{H}}$  le noyau hilbertien associé à  $\mathcal{H}_{01}$ . Finalement, soit

$$\mathcal{H}_{01,M2} = \overline{T_{\mathcal{H}_{01}}(M2)}^{\mathcal{H}}.$$

Alors, pour  $\varphi \in \mathcal{H}$ , l'interpolateur optimal de  $\varphi \in \mathcal{H}$  pour  $M = M1 + M2$  est donné par

$$P_{\mathcal{H}_M}[\varphi] = P_{\mathcal{H}_{M1}}[\varphi] + P_{\mathcal{H}_{01,M2}}[\varphi - P_{\mathcal{H}_{M1}}[\varphi]],$$

et  $T_{\mathcal{H}_0} = P_{\mathcal{H}_{01,02}}P_{\mathcal{H}_{01}}T_{\mathcal{H}}$ , avec  $P_{\mathcal{H}_{01,02}}$  la projection orthogonale de  $\mathcal{H}_{01}$  sur  $\mathcal{H}_{01,M2}$  et  $\mathcal{H}_{01,02}$  l'orthogonal de  $\mathcal{H}_{01,M2}$  dans  $\mathcal{H}_{01}$ . ■

## 2.3 Opérateurs intégraux et problème d'interpolation

Soit  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$  et soit  $M$  un sous-espace vectoriel de  $E'$ . Nous utilisons les mêmes définitions et notations que dans la Section 2.2.

Nous allons exposer comment la décomposition spectrale de certains opérateurs intégraux peut être utilisée pour construire une base hilbertienne du sous-espace  $\mathcal{H}_M$  de  $\mathcal{H}$  (notons que  $\mathcal{H}_M$  se devra d'être séparable, voir par exemple le Corollaire 2.2).

Soit  $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \nu)$  un espace mesuré où  $\nu$  est une mesure  $\sigma$ -finie. On introduit l'application  $\gamma : \mathcal{S} \rightarrow E'$  supposée telle que, pour tout  $h \in \mathcal{H}$ , la fonction  $\mathfrak{F}h : s \in \mathcal{S} \mapsto \langle h, \gamma s \rangle_{E,E'} \in \mathbb{R}$  est mesurable et

$$\forall h \in \mathcal{H}, \int_{\mathcal{S}} \langle h, \gamma s \rangle_{E,E'}^2 d\nu(s) < +\infty. \quad (2.5)$$

On note enfin  $M$  le sous-espace vectoriel de  $E'$  engendré par les  $\gamma s$ ,  $s \in \mathcal{S}$ , en d'autres termes

$$M = \text{span} \{ \gamma s, s \in \mathcal{S} \}. \quad (2.6)$$

Soit  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrables par rapport  $\nu$  ( $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  est bien sûr un espace quotient). Notons que  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  ne doit pas nécessairement être séparable. Soit  $(\cdot|\cdot)_{L^2}$  et  $\|\cdot\|_{L^2}$  le produit scalaire et la norme de  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$ . On rappelle que

$$(f|g)_{L^2} = \int_{\mathcal{S}} f(s)g(s)d\nu(s).$$

L'équation (2.5) signifie que, pour tout  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\mathfrak{F}h \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$ . On définit alors l'application  $\mathfrak{F} : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathcal{S}, \nu)$ ,  $h \mapsto \mathfrak{F}h$ . Comme  $M = \text{span} \{\gamma(\mathcal{S})\}$ , on a  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_0) = 0$ , ainsi, en terme d'ensemble,  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}) = \mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$ .

Nous ajoutons alors les hypothèses suivantes (voir par exemple [For85] pour une discussion sur ces dernières) :

H-i. l'application  $(s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mapsto \langle T_{\mathcal{H}}\gamma s, \gamma t \rangle_{E, E'} = (T_{\mathcal{H}}\gamma s | T_{\mathcal{H}}\gamma t)_{\mathcal{H}}$  est mesurable,

H-ii.  $N = \int_{\mathcal{S}} \|T_{\mathcal{H}}\gamma s\|_{\mathcal{H}}^2 d\nu(s) < +\infty$ ,

H-iii. pour  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\|\mathfrak{F}h\|_{L^2} = 0$  si et seulement si  $h \in \mathcal{H}_0$ .

**Remarque 2.2 :** Les hypothèses H-i and H-ii impliquent, pour tout  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$\|\mathfrak{F}h\|_{L^2}^2 = \int_{\mathcal{S}} \langle h, \gamma s \rangle_{E, E'}^2 d\nu(s) = \int_{\mathcal{S}} (h | T_{\mathcal{H}}\gamma s)_{\mathcal{H}}^2 d\nu(s) \leq N \|h\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.7)$$

On introduit également la quantité (voir par exemple [Sch79, §10])

$$\|T_{\mathcal{H}}\|_{\gamma, \nu}^2 = \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} \langle T_{\mathcal{H}}\gamma s, \gamma t \rangle_{E, E'}^2 d\nu(s) d\nu(t) \quad (\leq N^2). \quad (2.8)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} \langle T_{\mathcal{H}}\gamma s, \gamma t \rangle_{E, E'}^2 d\nu(s) d\nu(t) &= \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} (T_{\mathcal{H}}\gamma s | T_{\mathcal{H}}\gamma t)_{\mathcal{H}}^2 d\nu(s) d\nu(t) \\ &\leq \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} \|T_{\mathcal{H}}\gamma s\|_{\mathcal{H}}^2 \|T_{\mathcal{H}}\gamma t\|_{\mathcal{H}}^2 d\nu(s) d\nu(t) = N^2. \end{aligned}$$

L'hypothèse H-iii est similaire à la notion de *plongement régulier* que l'on peut trouver entre autres dans [For85]. Si  $\mathcal{S}$  est un espace topologique (muni de sa tribu borélienne), elle est par exemple réalisée si  $\mathfrak{F}h$  est continue pour tout  $h \in \mathcal{H}$  et si  $\text{supp}(\nu) = \mathcal{S}$  (avec  $\text{supp}(\nu)$  le support de  $\nu$ ).

Enfin, notons que H-iii et l'équation (2.7) impliquent que  $\mathfrak{F} : \mathcal{H}_M \rightarrow L^2(\mathcal{S}, \nu)$  est une injection continue. ■

Munissons  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}) = \mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$  du produit scalaire suivant,

$$\forall f \text{ and } g \in \mathcal{H}_M, (\mathfrak{F}h | \mathfrak{F}g)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} = (h | g)_{\mathcal{H}}. \quad (2.9)$$

$\mathfrak{F}(\mathcal{H}) = \mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$ ,  $(\cdot | \cdot)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}$  est ainsi par construction un espace de Hilbert isométrique à  $\mathcal{H}_M$ ,  $(\cdot | \cdot)_{\mathcal{H}}$ . Il découle de plus de l'équation (2.7) que l'inclusion

de  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$  dans  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  est continue (et donc que, en particulier,  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M) \in \text{Hilb}(L^2(\mathcal{S}, \nu))$ , voir Remarque 2.3).

On introduit maintenant l'opérateur  $\mathcal{L}_\nu$ , qui est à cet instant correctement défini de  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  vers  $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$  (avec  $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$  l'espace des fonctions sur  $\mathcal{S}$  à valeurs réelles). On pose :

$$\forall s \in \mathcal{S} \text{ et } \forall f \in L^2(\mathcal{S}, \nu), \mathcal{L}_\nu[f](s) = \int_{\mathcal{S}} (T_{\mathcal{H}}\gamma t | T_{\mathcal{H}}\gamma s)_{\mathcal{H}} f(t) d\nu(t).$$

**Proposition 2.3**

L'espace vectoriel engendré par les  $\mathcal{L}_\nu[f]$ ,  $f \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$  est dense dans  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$ ,  $(\cdot | \cdot)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}$ . De plus, pour tout  $f \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$  et  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$(\mathfrak{F}h | \mathcal{L}_\nu[f])_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} = (\mathfrak{F}h | f)_{L^2}. \quad (2.10)$$

**Démonstration :** Pour un élément  $f \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$  fixé, on définit l'application  $I_f : L^2(\mathcal{S}, \nu) \rightarrow \mathbb{R}$  tel que, pour  $g \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$ ,  $I_f[g] = (f | g)_{L^2}$ . Alors, pour  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$|I_f[\mathfrak{F}h]| \leq \|f\|_{L^2} \|\mathfrak{F}h\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \sqrt{N} \|h\|_{\mathcal{H}} \quad \left( = \|f\|_{L^2} \sqrt{N} \|\mathfrak{F}h\|_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} \right).$$

$I_f$  est ainsi une application linéaire continue de l'espace de Hilbert  $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ ,  $(\cdot | \cdot)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}$  sur  $\mathbb{R}$ . Donc, pour tout  $h \in \mathcal{H}$  il existe un unique  $R_f \in \mathcal{H}_M$  tel que

$$I_f[\mathfrak{F}h] = (\mathfrak{F}h | \mathfrak{F}R_f)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} = (h | R_f)_{\mathcal{H}}. \quad (2.11)$$

De plus, pour tout  $s \in \mathcal{S}$ ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}R_f(s) &= \langle R_f, \gamma s \rangle_{E, E'} = (R_f | T_{\mathcal{H}}\gamma s)_{\mathcal{H}} = (f | \mathfrak{F}T_{\mathcal{H}}\gamma s)_{L^2} \\ &= \int_{\mathcal{S}} (T_{\mathcal{H}}\gamma t | T_{\mathcal{H}}\gamma s)_{\mathcal{H}} f(t) d\nu(t) = \mathcal{L}_\nu[f](s), \end{aligned}$$

ce qui montre bien que  $\mathcal{L}_\nu[f] \in \mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$ . Pour obtenir l'équation (2.10), il nous suffit simplement de remarquer que, pour tout  $f \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$  et  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$(\mathfrak{F}h | \mathcal{L}_\nu[f])_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} = (h | R_f)_{\mathcal{H}} = (\mathfrak{F}h | f)_{L^2}.$$

Finalement, si  $h \in \mathcal{H}_M$  vérifie

$$\forall f \in L^2(\mathcal{S}, \nu), (\mathfrak{F}h | \mathcal{L}_\nu[f])_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} = 0,$$

alors, d'après l'hypothèse H-iii,  $h = 0$ . ■

**Remarque 2.3 :** La Proposition 2.3 est en fait équivalente au résultat suivant :

### Corollaire 2.1

$\mathcal{L}_\nu$  est le noyau hilbertien du sous-espace hilbertien  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$  de  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$ .

En effet,  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  étant un espace de Hilbert, on peut l'identifier à son dual topologique.

$$\mathcal{L}_\nu : (L^2(\mathcal{S}, \nu))' = L^2(\mathcal{S}, \nu) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{H}_M) \subset L^2(\mathcal{S}, \nu)$$

vérifie (2.10), équation correspondant exactement à la propriété de représentation qui caractérise le noyau hilbertien de  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M) \in \text{Hilb}(L^2(\mathcal{S}, \nu))$ .

De la même façon, l'application  $f \mapsto R_f$  apparaissant dans la preuve de la Proposition 2.3 peut être vue comme le noyau hilbertien de  $\mathcal{H}_M$  relativement à  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  dans le sens où, pour tout  $h \in \mathcal{H}_M$  et  $f \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$ ,  $(f|\mathfrak{F}h)_{L^2} = (h|R_f)_{\mathcal{H}}$ . ■

La Proposition 2.3 nous autorise à voir  $\mathcal{L}_\nu$  comme un opérateur de  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  sur  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$ .

Le noyau hilbertien  $T_{\mathcal{H}}$  et l'application  $\gamma$  définissent le noyau symétrique et positif  $\mathcal{K}(\cdot, \cdot)$  sur  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$  :

$$\forall (s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, \mathcal{K}(s, t) = (T_{\mathcal{H}}\gamma t | T_{\mathcal{H}}\gamma s)_{\mathcal{H}}. \quad (2.12)$$

D'après l'équation (2.8),  $\mathcal{K}(\cdot, \cdot) \in L^2(\mathcal{S} \times \mathcal{S}, \nu \times \nu)$  (on a  $\|\mathcal{K}\|_{L^2} = \|T_{\mathcal{H}}\|_{\gamma, \nu}$ ),  $\mathcal{L}_\nu$  est ainsi un opérateur intégrale de Hilbert-Schmidt classique et est donc compact (voir par exemple [Sch79, §10]).

Comme  $\mathcal{K}(\cdot, \cdot)$  est symétrique,  $\mathcal{L}_\nu$  est auto-adjoint ;  $\mathcal{L}_\nu$  est de plus positif, il suffit pour s'en convaincre d'utiliser l'équation (2.10). On peut également remarquer que  $\mathcal{L}_\nu$  est continu :

$$\forall f \in L^2(\mathcal{S}, \nu), \|\mathcal{L}_\nu[f]\|_{L^2}^2 \leq \|T_{\mathcal{H}}\|_{\gamma, \nu}^2 \|f\|_{L^2}^2.$$

$\mathcal{L}_\nu : L^2(\mathcal{S}, \nu) \rightarrow L^2(\mathcal{S}, \nu)$  est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont positives.

**Remarque 2.4 :** Le fait que  $\mathcal{L}_\nu : L^2(\mathcal{S}, \nu) \rightarrow L^2(\mathcal{S}, \nu)$  soit un opérateur symétrique, positif et continu peut également être perçu comme une simple conséquence du Corollaire 2.1 et de la théorie des noyaux hilbertiens [Sch64].

Notons également que le noyau  $\mathcal{K}$  défini par l'équation (2.12) est naturellement associé à un RKHS  $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$  composé de fonctions de  $\mathcal{S}$  sur  $\mathbb{R}$  ( $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$  est un sous-espace hilbertien de  $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ , voir la Section 1.3). Le RKHS  $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$  est alors isométrique à  $\mathcal{H}_M$ . ■



On note  $\lambda_i$ ,  $i \in \mathbb{I}$  les valeurs propres de  $\mathcal{L}_\nu$  et  $\tilde{\phi}_i \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$  les fonctions propres associées. On rappelle que  $\{\tilde{\phi}_i, i \in \mathbb{I}\}$  forme une base hilbertienne de  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$ . On note finalement  $\{\lambda_n, n \in \mathbb{I}_+\}$  l'ensemble au plus dénombrable (c'est-à-dire  $\mathbb{I}_+ \subset \mathbb{N}$ ) des valeurs propres *non nulles* (et donc strictement positives).

On tire de l'équation (2.10) que, pour tout  $n \in \mathbb{I}_+$ ,

$$\forall h \in \mathcal{H}, \left( \tilde{\phi}_n | \mathfrak{F}h \right)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} = \frac{1}{\lambda_n} \left( \mathcal{L}_\nu [\tilde{\phi}_n] | \mathfrak{F}h \right)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} = \frac{1}{\lambda_n} \left( \tilde{\phi}_n | \mathfrak{F}h \right)_{L^2}. \quad (2.13)$$

**Proposition 2.4**

La famille  $\{\sqrt{\lambda_n} \tilde{\phi}_n, n \in \mathbb{I}_+\}$  est une base hilbertienne de  $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ ,  $(\cdot | \cdot)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}$ .

**Démonstration :** Le fait que la famille  $\{\sqrt{\lambda_n} \tilde{\phi}_n\}$  soit un système orthonormal de  $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$  est conséquence de (2.13). Il nous reste alors simplement à montrer que l'espace  $\text{span} \{\sqrt{\lambda_n} \tilde{\phi}_n\}$  est dense dans  $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ , point correspondant à la Proposition 2.3. ■

**Remarque 2.5 :** Les deux espaces  $\overline{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}^{L^2}$ ,  $(\cdot | \cdot)_{L^2}$  et  $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ ,  $(\cdot | \cdot)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}$  sont isométriques. L'isométrie est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{I}_+, \tilde{\phi}_n \leftrightarrow \sqrt{\lambda_n} \tilde{\phi}_n.$$

Cette isométrie est en fait la restriction à  $\overline{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}^{L^2}$ , de la racine carrée de  $\mathcal{L}_\nu : L^2(\mathcal{S}, \nu) \rightarrow L^2(\mathcal{S}, \nu)$ ,

$$\mathcal{L}_\nu^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{i \in \mathbb{I}} \alpha_i \tilde{\phi}_i \right] = \sum_{i \in \mathbb{I}_+} \alpha_i \sqrt{\lambda_i} \tilde{\phi}_i \text{ où,}$$

pour  $i \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{I}_+$ , c'est-à-dire  $\lambda_i = 0$ ,  $\mathcal{L}_\nu^{\frac{1}{2}} [\tilde{\phi}_i] = 0$ . On a bien entendu,  $\mathcal{L}_\nu = \mathcal{L}_\nu^{\frac{1}{2}} \circ \mathcal{L}_\nu^{\frac{1}{2}}$ . ■

Comme nous venons de le voir,  $\mathfrak{F} : \mathcal{H}_M \rightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$  définit une isométrie entre les deux espaces de Hilbert  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$ ,  $(\cdot | \cdot)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)}$  et  $\mathcal{H}_M$ ,  $(\cdot | \cdot)_{\mathcal{H}_M}$ . On introduit alors  $\mathfrak{F}^{-1} : \mathfrak{F}(\mathcal{H}_M) \rightarrow \mathcal{H}_M$ , isométrie inverse de  $\mathfrak{F}$ .

Pour  $n \in \mathbb{I}_+$ , on note

$$\phi_n = \mathfrak{F}^{-1} \tilde{\phi}_n \in \mathcal{H}_M. \quad (2.14)$$

Nous appellerons  $\phi_n$  le *vecteur propre régularisé* associé à la valeur propre  $\lambda_n$ , nous dirons aussi parfois que  $\phi_n$  est le *régularisé* de  $\tilde{\phi}_n \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$ .

**Corollaire 2.2**

La famille  $\{\sqrt{\lambda_n}\phi_n, n \in \mathbb{I}_+\}$  est une base hilbertienne de  $\mathcal{H}_M (\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}}$  ( $\mathcal{H}_M$  est donc séparable).

La définition  $\phi_n = \mathfrak{F}^{-1}\tilde{\phi}_n$  caractérise correctement, d'un point de vue théorique, les vecteurs propres régularisés en tant qu'éléments de  $\mathcal{H}_M$ . Néanmoins, nous nécessiterons en pratique d'une formule explicite pour les  $\phi_n$  (afin de pouvoir par exemple les implémenter). Dans cette optique, considérons l'application  $f \mapsto R_f$  apparaissant dans la preuve de la Proposition 2.3 et que nous noterons dorénavant  $\mathfrak{F}^{-1}\mathcal{L}_\nu$  (notation cohérente).

Ainsi, pour tout  $f \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$ ,  $R_f = \mathfrak{F}^{-1}\mathcal{L}_\nu[f]$ . En appliquant l'équation (2.11) à  $h = T_{\mathcal{H}}e'$ , on obtient,  $\forall f \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$  et  $\forall e' \in E'$ ,

$$\langle \mathfrak{F}^{-1}\mathcal{L}_\nu[f], e' \rangle_{E, E'} = \int_{\mathcal{S}} f(t) \langle T_{\mathcal{H}}e', \gamma t \rangle_{E, E'} d\nu(t). \quad (2.15)$$

De là, on peut écrire  $\mathfrak{F}^{-1}\mathcal{L}_\nu[f]$ ,  $f \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$ , sous la forme d'une intégrale vectorielle (voir [Bou59]),

$$\mathfrak{F}^{-1}\mathcal{L}_\nu[f] = \int_{\mathcal{S}} f(t) T_{\mathcal{H}}\gamma t d\nu(t) \in \mathcal{H}_M. \quad (2.16)$$

On obtient finalement en utilisant la linéarité de  $\mathfrak{F}^{-1}$ , pour tout  $n \in \mathbb{I}_+$ ,

$$\phi_n = \mathfrak{F}^{-1}\tilde{\phi}_n = \frac{1}{\lambda_n} \mathfrak{F}^{-1}\mathcal{L}_\nu [\tilde{\phi}_n] = \frac{1}{\lambda_n} \int_{\mathcal{S}} \tilde{\phi}_n(t) T_{\mathcal{H}}\gamma t d\nu(t), \quad (2.17)$$

l'expression (2.17) devant être comprise au sens de l'équation (2.15).

**Une manière équivalente de procéder.** Au lieu de transporter, comme précédemment, la structure hilbertienne de  $\mathcal{H}_M$  sur le sous-espace  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$  de  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$ , on peut remarquer que l'équation (2.5) permet de définir sur  $\mathcal{H}$  la forme bilinéaire symétrique qui suit :

$$\forall h \text{ et } g \in \mathcal{H}, (h|g)_{\gamma, \nu} = \int_{\mathcal{S}} \langle h, \gamma s \rangle_{E, E'} \langle g, \gamma s \rangle_{E, E'} d\nu(s). \quad (2.18)$$

On note  $\|h\|_{\gamma, \nu}^2 = (h|h)_{\gamma, \nu}$ .

H-iii implique que l'espace nul de  $(\cdot|\cdot)_{\gamma, \nu}$  est  $\mathcal{H}_0$ , c'est-à-dire que pour  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\|h\|_{\gamma, \nu} = 0$  si et seulement si  $h \in \mathcal{H}_0$ . On a, pour tout  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\|h\|_{\gamma, \nu} = \|\mathfrak{F}h\|_{L^2}$

et  $\mathcal{H}_M, (\cdot|\cdot)_{\gamma, \nu}$  est un espace préhilbertien isométrique à  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M), (\cdot|\cdot)_{L^2}$ , l'isométrie étant l'application  $\mathfrak{F}$ . Le complété  $\overline{\mathcal{H}_M}^{\gamma, \nu}$  de  $\mathcal{H}_M$  pour la norme hilbertienne  $\|\cdot\|_{\gamma, \nu}$  est alors isométrique, en terme de structure hilbertienne, à l'espace  $\overline{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}^{L^2}$  apparaissant dans la Remarque 2.5. On a en particulier

$$\mathcal{H}_M \hookrightarrow \overline{\mathcal{H}_M}^{\gamma, \nu}. \quad (2.19)$$

On définit alors l'analogue  $L_\nu$  de  $\mathcal{L}_\nu$ , dans un premier temps sur  $\mathcal{H}_M$ , par

$$\forall h \in \mathcal{H}_M, \forall s \in \mathcal{S}, \langle L_\nu[h], \gamma s \rangle_{E, E'} = \mathcal{L}_\nu[\mathfrak{F}h](s), \text{ ou bien,} \quad (2.20)$$

de manière équivalente, par  $L_\nu[h] = \mathfrak{F}^{-1} \mathcal{L}_\nu[\mathfrak{F}h]$  (c'est-à-dire  $L_\nu = \mathfrak{F}^{-1} \mathcal{L}_\nu \mathfrak{F}$ ). Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'équation (2.16),  $L_\nu$  peut être écrit sous la forme d'une intégrale vectorielle

$$\forall h \in \mathcal{H}_M, L_\nu[h] = \int_{\mathcal{S}} \langle h, \gamma s \rangle_{E, E'} T_{\mathcal{H}} \gamma s \, d\nu(s). \quad (2.21)$$

$L_\nu$  est ensuite étendu à  $\overline{\mathcal{H}_M}^{\gamma, \nu}$  par continuité. On peut alors montrer que  $L_\nu$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur  $\overline{\mathcal{H}_M}^{\gamma, \nu}, (\cdot|\cdot)_{\gamma, \nu}$ .  $L_\nu$  symétrique et positif, ses valeurs propres sont  $\lambda_n, n \in \mathbb{I}_+$  et sont associées aux fonctions propres  $\phi_n$ .

On obtient finalement la même base hilbertienne  $\{\sqrt{\lambda_n} \phi_n, n \in \mathbb{I}_+\}$  de  $\mathcal{H}_M$   $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}}$  que celle obtenue dans le Corollaire 2.2.

Notons que l'on peut aussi directement montrer que  $L_\nu$ , vu comme opérateur de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{H}_M$ , est un opérateur de Hilbert-Schmidt symétrique et positif. Le sous-espace propre associé aux valeurs propres nulles est  $\mathcal{H}_0, \sqrt{\lambda_n} \phi_n, n \in \mathbb{I}_+$  étant les fonctions propres associées aux valeurs propres non nulles  $\lambda_n, n \in \mathbb{I}_+$ .

A titre d'illustration, nous utiliserons ce point de vue dans la Section 2.5.

## 2.4 Représentation et approximation de l'interpolateur optimal

Soit  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$  et  $M$  un sous-espace vectoriel de  $E'$ . Afin d'appliquer les résultats de la Section 2.3, nous supposons  $M$  tel que  $\mathcal{H}_M$  est séparable. On considère alors la base hilbertienne  $\{\sqrt{\lambda_n} \phi_n, n \in \mathbb{I}_+\}$  de  $\mathcal{H}_M, (\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}}$  définie par le Corollaire 2.2. Notons que la construction d'une telle base nécessite l'introduction préalable d'un espace mesuré  $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \nu)$  et d'une application  $\gamma : \mathcal{S} \rightarrow E'$  vérifiant les propriétés requises par la section précédente.

Connaissant une base hilbertienne de  $\mathcal{H}_M$ , on peut facilement exprimer la projection orthogonale de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{H}_M$ , et donc, pour un élément  $\varphi \in \mathcal{H}$  fixé, donner une expression de l'interpolateur optimal de  $\varphi$  pour  $M$  (voir la Section 2.2). Finalement, les propriétés de la base  $\{\sqrt{\lambda_n}\phi_n, n \in \mathbb{I}_+\}$  permettent de donner une expression de  $P_{\mathcal{H}_M}[\varphi]$  qui dépend explicitement et uniquement des valeurs  $\langle \varphi, \gamma s \rangle_{E, E'}$ ,  $s \in \mathcal{S}$ , et donc des valeurs  $\langle \varphi, e' \rangle_{E, E'}$ ,  $e' \in M$ .

**Théorème 2.1**

Soit  $\varphi \in \mathcal{H}$  avec  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$  et soit  $M$  un sous-espace de  $E'$  tel que  $\mathcal{H}_M$  est séparable. On considère la base hilbertienne  $\{\sqrt{\lambda_n}\phi_n, n \in \mathbb{I}_+\}$  de  $\mathcal{H}_M$  définie au Corollaire 2.2, on a alors

$$P_{\mathcal{H}_M}[\varphi] = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \phi_n \int_{\mathcal{S}} \langle \phi_n, \gamma s \rangle_{E, E'} \langle \varphi, \gamma s \rangle_{E, E'} d\nu(s). \quad (2.22)$$

**Démonstration :** C'est une simple conséquence de l'équation (2.13) :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{H}_M}[\varphi] &= \sum_n \sqrt{\lambda_n} \phi_n \left( \sqrt{\lambda_n} \phi_n | \varphi \right)_{\mathcal{H}} = \sum_n \lambda_n \phi_n \left( \tilde{\phi}_n | \mathfrak{F}\varphi \right)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} \\ &= \sum_n \phi_n \left( \tilde{\phi}_n | \mathfrak{F}\varphi \right)_{L^2}. \end{aligned}$$

Remarquons que par construction, la somme apparaissant dans l'équation (2.22) converge dans  $\mathcal{H}$ . Comme  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$ , la somme converge également pour la topologie initiale de  $E$  et pour sa topologie faible  $\sigma(E, E')$ . On a en particulier, pour  $e' \in E'$ ,

$$\langle P_{\mathcal{H}_M}[\varphi], e' \rangle_{E, E'} = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \langle \phi_n, e' \rangle_{E, E'} \int_{\mathcal{S}} \langle \phi_n, \gamma s \rangle_{E, E'} \langle \varphi, \gamma s \rangle_{E, E'} d\nu(s).$$

**Remarque 2.6 :** La projection orthogonale  $P_{\mathcal{H}_M}$  de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{H}_M$  peut être écrite sous la forme

$$P_{\mathcal{H}_M} = \mathfrak{F}^{-1} \mathfrak{F}, \quad (2.23)$$

cette expression étant en fait une formulation équivalente du Théorème 2.1. ■

Dans la Section 3.3, nous présentons un exemple dans lequel  $\mathcal{H}_M$  est de dimension infinie (i.e.  $\mathbb{I}_+ = \mathbb{N}$ ) et où la limite de la somme apparaissant dans l'expression (2.22) peut-être calculée analytiquement.

Néanmoins, dans certains cas, pour des raisons numériques par exemple, il ne sera pas possible de considérer l'ensemble des termes dans la série

$$\forall e' \text{ et } f' \in E', \langle T_{\mathcal{H}_M} e', f' \rangle_{E, E'} = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \lambda_n \langle \phi_n, e' \rangle_{E, E'} \langle \phi_n, f' \rangle_{E, E'}.$$

Supposons que l'on dispose d'un ensemble approché  $\mathbb{I}_{app}$  de  $\mathbb{I}_+$ . On hérite ainsi d'un noyau approché  $T_{\mathcal{H}_M^{app}}$  donné par

$$\forall e' \text{ et } f' \in E', \langle T_{\mathcal{H}_M^{app}} e', f' \rangle_{E, E'} = \sum_{n \in \mathbb{I}_{app}} \lambda_n \langle \phi_n, e' \rangle_{E, E'} \langle \phi_n, f' \rangle_{E, E'}.$$

Alors, pour  $\varphi \in \mathcal{H}$ , on obtient une approximation de l'interpolateur optimal  $P_{\mathcal{H}_M}[\varphi]$  que nous notons  $P_{\mathcal{H}_M^{app}}[\varphi]$  :

$$\begin{aligned} \forall e' \in E', \langle P_{\mathcal{H}_M^{app}}[\varphi], e' \rangle_{E, E'} &= \left( \varphi \middle| T_{\mathcal{H}_M^{app}} e' \right)_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{I}_{app}} \langle \phi_n, e' \rangle_{E, E'} \int_{\mathcal{S}} \langle \phi_n, \gamma s \rangle_{E, E'} \langle \varphi, \gamma s \rangle_{E, E'} d\nu(s), \end{aligned} \quad (2.24)$$

où  $\mathcal{H}_M^{app}$  est l'adhérence, dans  $\mathcal{H}$  du sous-espace engendré par les  $\phi_n$ ,  $n \in \mathbb{I}_{app}$ .

On pose  $\mathbb{I}_{err} = \mathbb{I}_+ \setminus \mathbb{I}_{app}$ . On déduit ensuite une expression de l'erreur d'approximation, pour tout  $e' \in E'$ ,

$$\begin{aligned} \langle P_{\mathcal{H}_M}[\varphi] - P_{\mathcal{H}_M^{app}}[\varphi], e' \rangle_{E, E'} &= \left( \varphi \middle| T_{\mathcal{H}_M} e' - T_{\mathcal{H}_M^{app}} e' \right)_{\mathcal{H}} \\ &= \left( \varphi \middle| \sum_{n \in \mathbb{I}_{err}} \lambda_n \langle \phi_n, e' \rangle_{E, E'} \phi_n \right)_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à l'équation (2.25) nous permet alors de contrôler l'erreur d'approximation, comme le montre le résultat suivant.

### **Théorème 2.2**

$$\forall e' \in E', \left| \langle P_{\mathcal{H}_M}[\varphi] - P_{\mathcal{H}_M^{app}}[\varphi], e' \rangle_{E, E'} \right|^2 \leq \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 \sum_{n \in \mathbb{I}_{err}} \lambda_n \langle \phi_n, e' \rangle_{E, E'}^2 \quad (2.26)$$

$$\text{et } \left\| P_{\mathcal{H}_M}[\varphi] - P_{\mathcal{H}_M^{app}}[\varphi] \right\|_{\gamma, \nu}^2 \leq \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 \sum_{n \in \mathbb{I}_{err}} \lambda_n. \quad (2.27)$$

Nous appellerons  $\sum_{n \in \mathbb{N}_{err}} \lambda_n$  *terme d'erreur spectrale*.

**Remarque 2.7 :** Dans la plus part des cas pratiques, une expression analytique de la décomposition spectrale de  $\mathcal{L}_\nu$  ne sera sans doute pas disponible. On serait alors amené à utiliser une approximation numérique de la décomposition spectrale en question. Il serait alors intéressant d'étudier le comportement des Théorèmes 2.1 et 2.2 dans de tels cas.

Notons également qu'il serait intéressant de comparer précisément approche spectrale "tronquée" (équation (2.24)) et discrétisation de l'ensemble des données. ■

## 2.5 Cas classique : nombre fini de données

Supposons que  $M$  est de dimension finie,  $M = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose également, pour simplifier et sans perte de généralité, que les  $\mu_i \in E'$ , sont tels que la matrice de Gram  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , définie par, pour  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $\mathbf{T}_{i,j} = (T_{\mathcal{H}}\mu_i | T_{\mathcal{H}}\mu_j)_{\mathcal{H}}$  est inversible (on suppose donc que  $\mathbf{T}$  est définie positive).

On introduit la notation de type matriciel suivante :

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T \text{ et } \mathbf{T} = (T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu} | T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T)_{\mathcal{H}} = \langle T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}^T \rangle = \langle \boldsymbol{\mu}, T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T \rangle,$$

où  $T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu} = (T_{\mathcal{H}}\mu_1, \dots, T_{\mathcal{H}}\mu_n)^T$ . Pour  $\varphi \in \mathcal{H}$ , l'interpolateur optimal de  $\varphi$  pour  $M$  peut être écrit sous la forme :

$$h_{\varphi, M} = T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{T}^{-1} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle, \quad (2.28)$$

avec  $\langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle = \left( \langle \varphi, \mu_1 \rangle_{E, E'}, \dots, \langle \varphi, \mu_n \rangle_{E, E'} \right)^T$ . Remarquons que, selon notre notation,  $\langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle^T = \langle \varphi, \boldsymbol{\mu}^T \rangle$ , pour tout  $e \in E$  et  $e' \in E'$ ,  $\langle e, e' \rangle_{E, E'} = \langle e, e' \rangle = \langle e', e \rangle$ . Nous écrirons ainsi, pour  $e' \in E'$ ,

$$\langle h_{\varphi, M}, e' \rangle_{E, E'} = \langle e', T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T \rangle \mathbf{T}^{-1} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle.$$

L'objectif de cette section est de démontrer, par calcul direct, que l'expression de l'interpolateur optimal donnée par le Théorème (2.1) et égale à son expression usuelle correspondant à l'équation (2.28).

Un opérateur intégral adapté  $L_\nu$  d'un type similaire à celui de l'équation (2.20) est défini par

$$\forall h \in \mathcal{H}, L_\nu[h] = \sum_{i=1}^n w_i \langle h, \mu_i \rangle_{E, E'} T_{\mathcal{H}}\mu_i, \quad (2.29)$$

avec  $w_i > 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . En introduisant la matrice diagonale  $\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$ ,  $L_\nu$  peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\forall h \in \mathcal{H}, L_\nu[h] = T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, h \rangle.$$

Le caractère fini de la somme (2.29) nous assure que  $L_\nu$  vérifie l'ensemble des propriétés requises par la Section 2.3. La forme bilinéaire symétrique  $(\cdot | \cdot)_{\gamma, \nu}$  sur  $\mathcal{H}$  associée à  $L_\nu$  par l'équation (2.18) est alors, pour  $h$  et  $g \in \mathcal{H}$ ,

$$(h|g)_{\gamma, \nu} = \sum_{i=1}^n w_i \langle h, \mu_i \rangle_{E, E'} \langle g, \mu_i \rangle_{E, E'} = \langle h, \boldsymbol{\mu}^T \rangle \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, g \rangle.$$

**Remarque 2.8 :** On peut retrouver de façon directe les propriétés de symétrie et de positivité de  $L_\nu$  :

$$\begin{aligned} \forall h \text{ et } k \in \mathcal{H}, (h|L_\nu[k])_{\mathcal{H}} &= (h|T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, k \rangle)_{\mathcal{H}} \\ &= (h|T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W} (T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}, k)_{\mathcal{H}})_{\mathcal{H}} \\ &= (h|T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T)_{\mathcal{H}} \mathbf{W} (T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}, k)_{\mathcal{H}} = (L_\nu[h]|k)_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall h \text{ et } k \in \mathcal{H}, (h|L_\nu[k])_{\gamma, \nu} &= (h|T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, k \rangle)_{\gamma, \nu} \\ &= \langle h, \boldsymbol{\mu}^T \rangle \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, k \rangle \rangle \\ &= \langle h, \boldsymbol{\mu}^T \rangle \mathbf{W} \langle T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}^T \rangle \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, k \rangle \\ &= (L_\nu[h]|k)_{\gamma, \nu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall h \text{ et } k \in \mathcal{H}, (h|L_\nu[k])_{\mathcal{H}} &= (h|T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T) \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, k \rangle \\ &= \langle h, \boldsymbol{\mu}^T \rangle \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, k \rangle = (h|k)_{L^2}. \end{aligned}$$

■

Pour  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ , soit  $\widehat{\phi}_{\boldsymbol{\alpha}} = T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{H}_M$ . On a

$$L_\nu \left[ \widehat{\phi}_{\boldsymbol{\alpha}} \right] = T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \rangle \boldsymbol{\alpha} = T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W} \mathbf{T} \boldsymbol{\alpha}.$$

Ainsi les valeurs propres de  $L_\nu$  sur  $\mathcal{H}_M$  sont les mêmes que celles de la matrice  $\mathbf{W} \mathbf{T}$ . Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$  les valeurs propres en question (le fait que ces dernières soient strictement positives provient de la définie positivité de

$\mathbf{T}$ ) et soit  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  leur vecteur propre associé. On a ainsi  $\mathbf{W}\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$  où  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_n)$ . Donc, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$L_\nu \left[ \widehat{\phi}_{\mathbf{v}_i} \right] = \lambda_i \widehat{\phi}_{\mathbf{v}_i}.$$

On définit

$$\widehat{\phi} = \left( \widehat{\phi}_{\mathbf{v}_1}, \dots, \widehat{\phi}_{\mathbf{v}_n} \right)^T = \mathbf{P}^T T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left( \widehat{\phi} | \widehat{\phi}^T \right)_{\mathcal{H}} &= \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{P} \\ \text{et } \left( \widehat{\phi} | \widehat{\phi}^T \right)_{\gamma, \nu} &= \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{W} \mathbf{T} \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

De l'équation (2.30), on déduit que la matrice  $\mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{P}$  est diagonale, ce qui est alors également le cas pour  $\mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{W} \mathbf{T} \mathbf{P}$ . Comme attendu, la relation  $\left\| \widehat{\phi}_{\mathbf{v}_i} \right\|_{\gamma, \nu}^2 = \lambda_i \left\| \widehat{\phi}_{\mathbf{v}_i} \right\|_{\mathcal{H}}^2$  est vérifiée (équation (2.13)).

Ainsi, les fonctions propres (normées) de  $L_\nu$  sur  $\mathcal{H}_M$ ,  $(\cdot | \cdot)_{\gamma, \nu}$  sont les composantes du vecteur

$$\boldsymbol{\phi} = \left( \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{W} \mathbf{T} \mathbf{P} \right)^{-\frac{1}{2}} \widehat{\phi}.$$

On obtient finalement comme il se doit

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{T}^{-1} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle &= T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{T}^{-1} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle = T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle \\ &= T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{P}^{-T} \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle \\ &= T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{P} \left( \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{W} \mathbf{T} \mathbf{P} \right)^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle \\ &= \widehat{\phi}^T \left( \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{W} \mathbf{T} \mathbf{P} \right)^{-1} \left\langle \widehat{\phi}, \boldsymbol{\mu}^T \right\rangle \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \phi_k \int_{\mathcal{S}} \langle \phi_k, \gamma s \rangle_{E, E'} \langle \varphi, \gamma s \rangle_{E, E'} d\nu(s). \end{aligned}$$

## 2.6 Un exemple d'application

Soit  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$  et soit  $\mathcal{H}$  le RKHS des fonctions réelles sur  $\mathcal{X}$  (voir la Section 1.3) associé au noyau (noyau *gaussien* ou *carré-exponentiel*, voir [RW06]), pour  $x$  et  $y \in \mathcal{X}$ ,

$$K(x, y) = e^{-\frac{\|x-y\|^2}{\sigma^2}}, \quad \text{avec } \sigma > 0 \text{ et } \|\cdot\| \text{ la norme euclidienne de } \mathbb{R}^2.$$



Pour  $m \in \mathbb{N}$ , on considère  $\mathcal{E}^m \subset \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$ , espace des fonctions réelles sur  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$  de classe  $C^m$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de  $\mathcal{X}$  de toutes les dérivées d'ordre  $\leq m$  (d'ordre quelconque pour  $m = +\infty$ ). Alors, d'après [Sch64, Proposition 25], pour tout  $m \in \mathbb{N}$  (et également pour  $m = +\infty$ ),  $\mathcal{H}$  est un sous-espace hilbertien de  $\mathcal{E}^m$ . Dans ce qui va suivre, nous considérons  $\mathcal{H}$  comme sous-espace hilbertien de  $E = \mathcal{E}^1$ .

Soit  $x = (x_1, x_2)$  un point de  $\mathcal{X}$ , par simplicité, nous utiliserons parfois un système de coordonnées polaires, on notera ainsi  $x = (r_x \cos \alpha_x, r_x \sin \alpha_x)$  avec  $r_x \in \mathbb{R}_+$  et  $\alpha_x \in [0, 2\pi]$ . Pour  $x \in \mathcal{X}$ , on définit  $\eta_x \in E'$  tel que, pour  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$\langle h, \eta_x \rangle_{E, E'} = \frac{\partial}{\partial r_x} h(x),$$

$\eta_x$  correspond ainsi l'évaluation de la *dérivée radiale* au point  $x$ .

Soit  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  le cercle de centre 0 et de rayon  $R > 0$ . On considère

$$M_N = \text{span} \{ \eta_t, t \in \mathcal{C} \} \text{ et } M_D = \text{span} \{ \delta_t, t \in \mathcal{C} \}$$

et on pose  $M = M_N + M_D$  ( $N$  et  $D$  signifient *conditions de Neumann et de Dirichlet*). Nous allons montrer comment notre méthodologie peut être utilisée pour résoudre, dans  $\mathcal{H}$ , le problème d'interpolation associé à  $M$ . Dans un premier temps (Sections 2.6.1 et 2.6.2), nous considérerons de manière indépendante les problèmes associés à  $M_D$  et  $M_N$ . Enfin, en nous basant sur la Remarque 2.1, nous combinerons nos résultats afin d'obtenir un modèle dans lequel les dérivées radiales ainsi que les valeurs sur le cercle sont contrôlées (*condition de Robin*, notons que dans notre étude, les dérivées radiales correspondent aux dérivées normales au cercle).

On introduit  $\mathcal{S} = [0, 2\pi]$  muni de sa mesure de Lebesgue (à la constante multiplicative  $R$  près). On identifie alors  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  à  $L^2([0, 2\pi])$ , espace des fonctions de carré intégrables (par rapport à la mesure de Lebesgue) sur  $[0, 2\pi]$ , muni de la norme hilbertienne

$$\forall f \in L^2([0, 2\pi]), \|f\|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} f(\theta)^2 R d\theta.$$

### 2.6.1 Noyau gaussien et valeurs sur le cercle

On s'intéresse dans un premier temps au problème d'interpolation associé à  $\mathcal{H}$  et  $M_D = \text{span} \{ \delta_t, t \in \mathcal{C} \}$ . On pose (voir la Section 2.2)

$$\mathcal{H}_{M_D} = \mathcal{H}_{0_D}^\perp = \overline{\text{span} \{ K_t(\cdot), t \in \mathcal{C} \}}^{\mathcal{H}} \text{ avec (notation) } K_x(\cdot) = K(x, \cdot).$$

L'application  $\gamma_D$  implicitement considérée est  $\gamma_D : [0, 2\pi] \rightarrow E'$ ,  $\theta \mapsto \delta_{s_{R,\theta}}$  avec  $s_{R,\theta} = (R \cos \theta, R \sin \theta)$ , on note également  $\mathfrak{F}_D$  l'application correspondante. Des arguments de continuité et de compacité nous assure de la séparabilité de  $\mathcal{H}_{M_N}$ , l'ensemble de nos hypothèses de travail étant également vérifié. Alors, pour  $x_{R,\alpha} = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$  et  $f \in L^2([0, 2\pi])$ , un opérateur  $M_D$ -adapté est donné par

$$\mathcal{L}_\nu^D[f](\alpha) = \int_0^{2\pi} K(x_{R,\alpha}, s_{R,\theta}) f(\theta) R d\theta.$$

Après calcul (voir A.1), on obtient que les valeurs propres de  $\mathcal{L}_\nu^D$  sont :

$$n \geq 0, \lambda_n^D = R e^{-\frac{2R^2}{\sigma^2}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2R^2}{\sigma^2} \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta.$$

$\lambda_0^D$  est de multiplicité 1 et est associée à  $\tilde{\phi}_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$ .

Pour  $n \geq 1$ ,  $\lambda_n^D$  est de multiplicité 2 et est associée à, pour  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,

$$\tilde{\phi}_n^c(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \cos n\alpha, \text{ et } \tilde{\phi}_n^s(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sin n\alpha.$$

Les éléments de  $\mathcal{H}$  étant des fonctions continues, les fonctions de  $\mathfrak{F}_D(\mathcal{H})$  sont  $2\pi$ -périodiques. Ainsi, les fonctions propres  $\tilde{\phi}_0$ ,  $\tilde{\phi}_n^c$  et  $\tilde{\phi}_n^s$ ,  $n \geq 1$  correspondant à la *base de Fourier discrète* classique, ces dernières engendrent  $\overline{\mathfrak{F}_D(\mathcal{H})}^{L^2}$  et la décomposition spectrale de  $\mathcal{L}_\nu^D$  est donc terminée.

Remarquons qu'une généralisation de ce résultat à la dimension quelconque ainsi que d'autres exemples peuvent être trouvés dans [HQMY06].

On définit ensuite les fonctions propres régularisées  $\phi_0^D$ ,  $\phi_n^{cD}$  et  $\phi_n^{sD}$ ,  $\forall n \geq 1$  de  $\mathcal{L}_\nu^D$  (voir équation (2.17)). On a par exemple

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathcal{X}, \phi_n^{sD}(x) = \frac{1}{\lambda_n^D} \int_0^{2\pi} K(s_{R,\theta}, x) \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{\pi R}} R d\theta.$$

**Application numérique.** On pose  $R = 3$  et  $\sigma^2 = 2$ . On calcule alors les valeurs propres et fonctions propres régularisées de  $\mathcal{L}_\nu^D$ . Les Figures 2.2 et 2.3 représentent une partie du spectre de  $\mathcal{L}_\nu^D$  ainsi qu'une de ses fonctions propres régularisées.

Comme suggéré dans la Section 2.4, on approche le noyau  $K_{M_D}(\cdot, \cdot)$  de  $\mathcal{H}_{M_D}$  à l'aide des 31 fonctions propres régularisées associées aux valeurs propres les

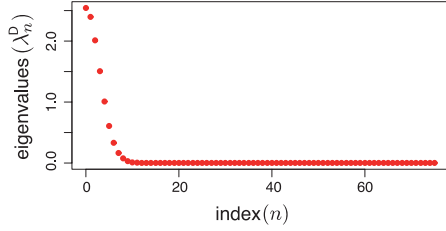


FIGURE 2.2 – Représentation graphique du spectre de  $\mathcal{L}_\nu^D$  pour  $0 \leq n \leq 74$ ,  $R = 3$  et  $\sigma^2 = 2$ .

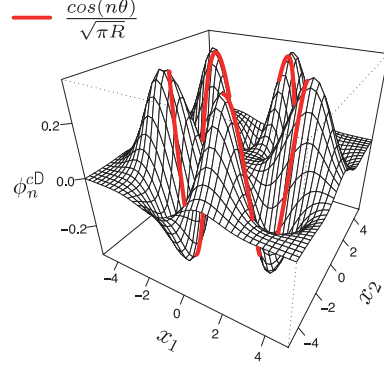


FIGURE 2.3 – Fonction propre régularisée  $\phi_n^{cD}$  sur  $[-5, 5]^2$  pour  $n = 5$ .

plus grandes. En d'autres termes, pour tout  $x$  et  $y \in \mathbb{R}^2$  :

$$K_{M_D}^{app}(x, y) = \lambda_0^D \phi_0^D(x) \phi_0^D(y) + \sum_{n=1}^{15} \lambda_n [\phi_n^{cD}(x) \phi_n^{cD}(y) + \phi_n^{sD}(x) \phi_n^{sD}(y)].$$

On calcule

$$Trace(\mathcal{L}_\nu^D) = 2\pi R = 18.84956 \text{ et } \sum_{k \in \mathbb{I}_{app}} \lambda_k^D = \lambda_0 + 2 \sum_{n=1}^{15} \lambda_n = 18.84953.$$

On obtient ainsi pour le terme d'erreur spectrale :

$$\sum_{k \in \mathbb{I}_{err}} \lambda_k^D = 2.643289\text{e-}05. \quad (2.31)$$

On approche ensuite le noyau  $K_{0_D}(\cdot, \cdot) = K(\cdot, \cdot) - K_{M_D}(\cdot, \cdot)$  du sous-RKHS  $\mathcal{H}_{0_D}$  par, pour tout  $x$  et  $y \in \mathbb{R}^2$ ,

$$K_{0_D}^{app}(x, y) = K(x, y) - K_{M_D}^{app}(x, y).$$

$\mathcal{H}_{0_D}$  est le sous-espace des fonctions de  $\mathcal{H}$  qui s'annulent sur  $\mathcal{C}$ . Ceci implique en particulier que pour  $t \in \mathcal{C}$ ,  $K_{0_D}(t, t) = 0$ . On obtient dans notre cas la valeur constante  $K_{0_D}^{app}(t, t) \approx 1.402309\text{e-}06$  pour  $t \in \mathcal{C}$  (signalons que le spectre de  $\mathcal{L}_\nu^D$  été calculé à l'aide d'algorithmes de Monte-Carlo).

La Figure 2.4 représente la simulation d'une trajectoire d'un processus gaussien centré de covariance  $K_{0_D}^{app}(\cdot, \cdot)$ . Ce processus est une approximation d'un processus gaussien centré de covariance  $K_{0_D}(\cdot, \cdot)$ , processus correspondant quant à lui à un processus de covariance  $K(\cdot, \cdot)$  conditionné être nul sur  $\mathcal{C}$ .

Nous utilisons finalement le noyau  $K_{0_D}^{app}(\cdot, \cdot)$  dans un modèle gaussien classique (ou modèle de krigeage, c'est-à-dire un processus gaussien de covariance donnée que l'on conditionne par un nombre fini d'observation, ici sa valeur en certains points). Le modèle obtenu rend compte de manière exacte de l'ensemble classique de données et approche de façon contrôlée la condition sur  $\mathcal{C}$  (dans notre cas, de s'annuler sur le cercle). La Figure 2.5 représente le meilleur prédicteur du modèle en  $K_{0_D}^{app}(\cdot, \cdot)$  (c'est-à-dire l'espérance conditionnelle, correspondant également dans ce cas à un interpolateur optimal, voir la Section 3.2) et la Figure 2.6 représente une réalisation conditionnelle de ce même modèle gaussien (c'est-à-dire une simulation rendant compte des données).

## 2.6.2 Contrainte sur la dérivée normale

On considère maintenant  $M_N = \text{span} \{ \eta_t, t \in \mathcal{C} \}$ .  $\gamma_N : [0, 2\pi] \rightarrow M_N \subset E'$  est ici donnée par  $\gamma_N \theta = \eta_{s_{R,\theta}}$  et comme précédemment, des arguments de continuité et de compacité nous assure de la séparabilité de  $\mathcal{H}_{M_N}$ . On rappelle que

$$\mathcal{H}_{M_N} = \mathcal{H}_{0_N}^\perp = \overline{\text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial r_s} K(s, \cdot), s \in \mathcal{S} \right\}}^{\mathcal{H}}.$$

On a

$$K(x, y) = e^{-\frac{1}{\sigma^2}(r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_y \cos(\alpha_x - \alpha_y))}, \text{ alors}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_x} K(x, y) = -\frac{2}{\sigma^2}(r_x - r_y \cos(\alpha_x - \alpha_y))K(x, y) \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r_y \partial r_x} K(x, y) &= \frac{2}{\sigma^2} \cos(\alpha_x - \alpha_y) K(x, y) \\ &\quad + \frac{4}{\sigma^4} (r_x - r_y \cos(\alpha_x - \alpha_y)) (r_y - r_x \cos(\alpha_x - \alpha_y)) K(x, y). \end{aligned}$$

Pour  $f \in L^2([0, 2\pi])$ , notre opérateur  $M_N$ -adapté est ici, pour  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,

$$\mathcal{L}_\nu^N[f](\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial r_s \partial r_x} K(x_{R,\alpha}, s_{R,\theta}) f(\theta) R d\theta, \quad (2.32)$$

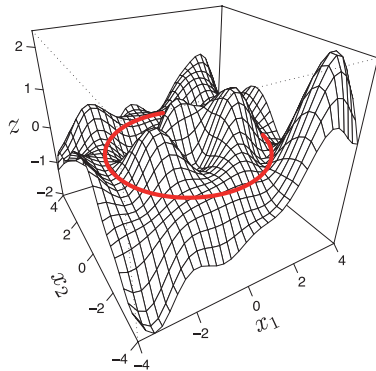


FIGURE 2.4 – Simulation sur  $[-4, 4]^2$  d'une réalisation d'un processus gaussien centré de covariance  $K_{0_D}^{app}(\cdot, \cdot)$ .

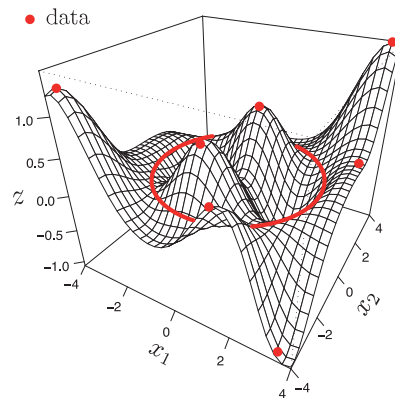


FIGURE 2.5 – Meilleur prédicteur d'un modèle gaussien centré de covariance  $K_{0_D}^{app}(\cdot, \cdot)$ .

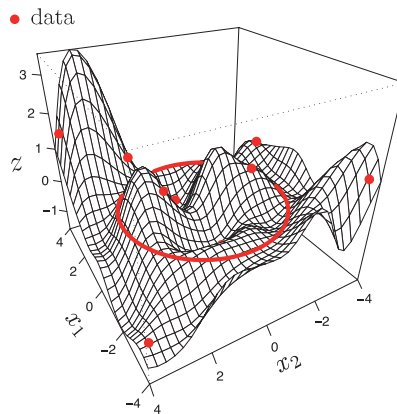


FIGURE 2.6 – Réalisation conditionnelle d'un modèle gaussien centré de covariance  $K_{0_D}^{app}(\cdot, \cdot)$ .

avec  $s_{R,\theta} = (R \cos \theta, R \sin \theta)$  et  $x_{R,\alpha} = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ .

Posons  $A = \frac{2}{\sigma^2} - \frac{8R^2}{\sigma^4}$  et  $B = \frac{4R^2}{\sigma^4}$ . Après calculs (les arguments utilisés sont similaires à ceux avancés dans A.1) on obtient que les valeurs propres de  $\mathcal{L}_\nu^N$  sont

$$\text{pour } n \geq 0, \lambda_n^N = \int_0^{2\pi} [A \cos \theta + B(1 + \cos^2 \theta)] e^{-\frac{2R^2}{\sigma^2}(1-\cos \theta)} \cos(n\theta) R d\theta.$$

Pour  $n = 0$ ,  $\lambda_0^N$  est de multiplicité 1 et est associée à, pour  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,  $\tilde{\phi}_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$ .

Pour  $n \geq 1$ ,  $\lambda_n^N$  est de multiplicité 2 et est associée à, pour  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,

$$\tilde{\phi}_n^c(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \cos n\alpha, \text{ et } \tilde{\phi}_n^s(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sin n\alpha.$$

Un argument similaire à celui utilisé dans le cas précédent nous assure que l'opérateur en question n'admet pas d'autre valeur propre.

**Remarque 2.9 :** Les deux opérateurs  $\mathcal{L}_\nu^D$  et  $\mathcal{L}_\nu^N$  possèdent donc les mêmes fonctions propres et sont donc diagonalisables dans la même base. ■

On définit ensuite les fonctions propres régularisées  $\phi_0^N, \phi_n^{cN}$  et  $\phi_n^{sN} \in \mathcal{H}_{M_N}$  (voir l'équation (2.17)). Dans notre cas on a par exemple

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathcal{X}, \phi_n^{cN}(x) = \frac{1}{\lambda_n^N} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r_s} K(s_{R,\theta}, x) \frac{\cos(n\theta)}{\sqrt{\pi R}} R d\theta. \quad (2.33)$$

Considérons les valeurs prises par les fonctions propres  $\phi_0^N, \phi_n^{cN}$  et  $\phi_n^{sN}$  sur le cercle  $\mathcal{C}$ . D'après l'équation (2.33), il apparaît que les valeurs en question sont associées à l'opérateur intégral, pour  $x_{R,\alpha} = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$  et  $f \in L^2([0, 2\pi])$ ,

$$J_\nu[f](\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r_s} K(x_{R,\alpha}, s_{R,\theta}) f(\theta) R d\theta. \quad (2.34)$$

$J_\nu$  est auto-adjoint mais n'est pas positif. On remarque que, pour  $n \geq 0$ ,

$$\rho_n = \int_0^{2\pi} \frac{-2R}{\sigma^2} (1 - \cos \theta) e^{-\frac{2R^2}{\sigma^2}(1-\cos \theta)} \cos(n\theta) R d\theta, \quad (\text{avec } \rho_n \in \mathbb{R})$$

sont des valeurs propres de  $J_\nu$ . Pour  $n = 0$ ,  $\rho_0$  est associé à la même fonction propre que  $\lambda_0^N$  (et donc aussi à la même que  $\lambda_0^D$ ), qui est, pour  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,  $\tilde{\phi}_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$  (remarquons que  $\rho_0 < 0$ ).

Pour  $n \geq 1$ ,  $\rho_n$  est aussi associée aux mêmes fonctions propres que  $\lambda_n^N$ ,  $\rho_n$  est donc de multiplicité 2 et est associée à, pour  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,

$$\tilde{\phi}_n^c(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \cos n\alpha, \text{ et } \tilde{\phi}_n^s(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sin n\alpha.$$

Comme dans les deux cas précédents, les fonctions propres de  $J_\nu$  formant une base hilbertienne de  $\overline{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}^{L^2}$ , l'opérateur  $J_\nu$  est diagonalisable sur  $\overline{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}^{L^2}$ , son spectre est composé des valeurs propres  $\rho_n$  associées à  $\tilde{\phi}_0$ ,  $\tilde{\phi}_n^c$  et  $\tilde{\phi}_n^s$  ( $J_\nu$  est donc diagonalisable dans la même base que  $\mathcal{L}_\nu^N$  et  $\mathcal{L}_\nu^D$ ).

Le spectre de l'opérateur  $J_\nu$  a un comportement intéressant, son apparence générale (nombre de valeurs propres négatives par exemple) dépend du rapport entre  $R$  et  $\sigma^2$ . La Figure 2.7 montre les valeurs de  $\rho_n$ , pour  $0 \leq n \leq 30$ ,  $R = 3$  et  $\sigma^2 = 2$ .

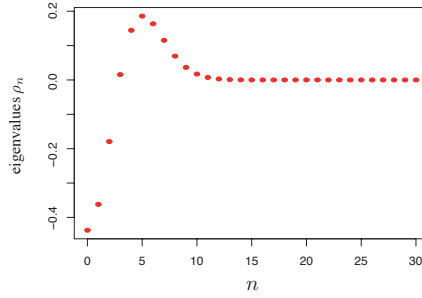


FIGURE 2.7 – Représentation graphique des valeurs propres  $\rho_n$  pour  $0 \leq n \leq 30$ ,  $R = 3$  et  $\sigma^2 = 2$ .

Nous obtenons finalement que les valeurs sur le cercle  $\mathcal{C}$  des fonctions propres régularisées associées à  $\mathcal{L}_\nu^N$  sont données par, pour  $x_{R,\alpha} = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ ,

$$\phi_0^N(x_{R,\alpha}) = \frac{\rho_0}{\lambda_0^N} \tilde{\phi}_0(\alpha), \quad \phi_n^{cN}(x_{R,\alpha}) = \frac{\rho_n}{\lambda_n^N} \tilde{\phi}_n^c(\alpha) \text{ et } \phi_n^{sN}(x_{R,\alpha}) = \frac{\rho_n}{\lambda_n^N} \tilde{\phi}_n^s(\alpha).$$

**Remarque 2.10 :** Notons que les valeurs prises sur le cercle  $\mathcal{C}$  par les dérivées radiales des fonctions propres régularisées  $\phi_0^D$ ,  $\phi_n^{cD}$  et  $\phi_n^{sD}$ ,  $n \geq 1$ , peuvent également être exprimées à l'aide des valeurs propres  $\rho_n$ ,  $n \geq 0$ , de  $J_\nu$ . On obtient ainsi facilement pour  $x_{R,\alpha} \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \langle \phi_0^D, \eta_{x_{R,\alpha}} \rangle_{E,E'} &= \frac{\rho_0}{\lambda_0^D} \tilde{\phi}_0(\alpha), \text{ and for } n \geq 1, \\ \langle \phi_n^{cD}, \eta_{x_{R,\alpha}} \rangle_{E,E'} &= \frac{\rho_n}{\lambda_n^D} \tilde{\phi}_n^c(\alpha), \quad \langle \phi_n^{sD}, \eta_{x_{R,\alpha}} \rangle_{E,E'} = \frac{\rho_n}{\lambda_n^D} \tilde{\phi}_n^s(\alpha). \end{aligned} \quad (2.35)$$



**Application numérique.** On fixe  $R = 3$  et  $\sigma^2 = 2$ , on peut alors calculer les valeurs propres ainsi que les fonction propres régularisées associées à  $\mathcal{L}_\nu^N$ . Les Figures 2.8 et 2.9 représentent respectivement une partie du spectre de  $\mathcal{L}_\nu^N$  et le graphe de l'une de ses fonctions propres régularisées.

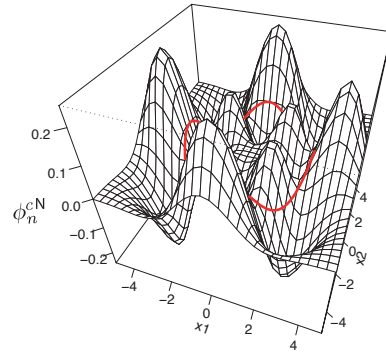
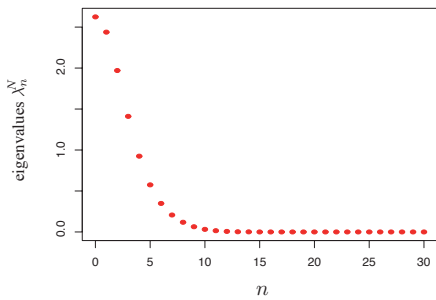


FIGURE 2.8 – Représentation graphique du spectre de  $\mathcal{L}_\nu^N$  pour  $0 \leq n \leq 30$ ,  $R = 3$  et  $\sigma^2 = 2$ .

FIGURE 2.9 – Fonction propre régularisée  $\phi_n^{cN}$  sur  $[-5, 5]^2$  pour  $n = 4$ .

A la manière de la Section 2.4, on approche ensuite le noyau  $T_{\mathcal{H}_{M_N}}$  à l'aide des 31 fonctions propres régularisées associées aux valeurs propres les plus grandes. Ainsi, pour  $x$  et  $y \in \mathbb{R}^2$  on définit

$$K_{M_N}^{app}(x, y) = \lambda_0^N \phi_0^N(x) \phi_0^N(y) + \sum_{n=1}^{15} \lambda_n^N [\phi_n^{cN}(x) \phi_n^{cN}(y) + \phi_n^{sN}(x) \phi_n^{sN}(y)],$$

avec  $K_{M_N}^{app}(x, y) = \left\langle T_{\mathcal{H}_{M_N}}^{app} \delta_x, \delta_y \right\rangle_{E, E'}$ . On a

$$\text{Trace}(\mathcal{L}_\nu^N) = \frac{4\pi R}{\sigma^2} = 18.84956 \text{ et } \sum_{k \in \mathbb{I}_{app}} \lambda_k^N = \lambda_0 + 2 \sum_{n=1}^{15} \lambda_n^N = 18.84928.$$

On obtient ainsi pour le second terme d'erreur spectrale :

$$\sum_{k \in \mathbb{I}_{err}} \lambda_k^N = 2.797111\text{e-}04. \quad (2.36)$$



On approche ensuite le noyau  $K_{0_N}(\cdot, \cdot) = K(\cdot, \cdot) - K_{M_N}(\cdot, \cdot)$  du sous-RKHS  $\mathcal{H}_{0_N}$  par, pour tout  $x$  et  $y \in \mathbb{R}^2$ ,

$$K_{0_N}^{app}(x, y) = K(x, y) - K_{M_N}^{app}(x, y). \quad (2.37)$$

On rappelle que  $\mathcal{H}_{0_N}$  est le sous-espace des fonctions  $h \in \mathcal{H}$  telles que  $\frac{\partial}{\partial r_t} h(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathcal{C}$ .

La Figure 2.10 représente la simulation d'une trajectoire d'un processus gaussien centré de covariance  $K_{0_N}^{app}(\cdot, \cdot)$ . Comme nous l'attendions, ce dernier approche efficacement un processus gaussien centré de covariance  $K(\cdot, \cdot)$  dont les dérivées normales au cercle sur ce même cercle sont contraintes à être nulles. Dans notre exemple, au lieu d'être nulle, les dérivées normales sur  $\mathcal{C}$  suivent une loi normale centrée de variance

$$\frac{1}{2\pi R} \sum_{k \in \mathbb{I}_{err}} \lambda_k^N = 1.483913e-05.$$

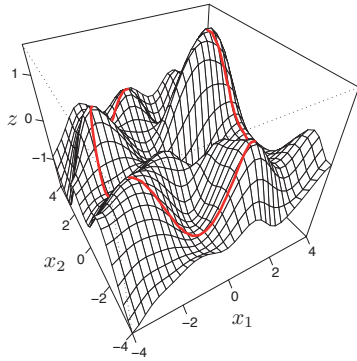


FIGURE 2.10 – Simulation d'une réalisation d'un processus gaussien centré de covariance  $K_{0_N}^{app}(\cdot, \cdot)$ .

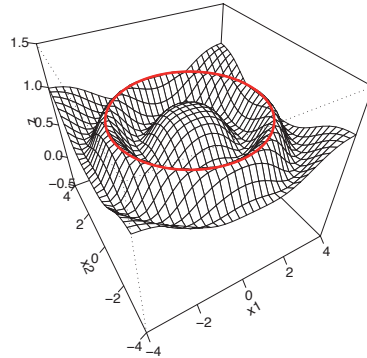


FIGURE 2.11 – Tracé de  $x \mapsto K_{0_N}^{app}(x, x)$  sur  $[-4, 4]^2$ .

**Remarque 2.11 :** Pour  $t \in \mathcal{C}$ , on a

$$K_{0_N}^{app}(t, t) = 1 - \frac{\rho_0^2}{\lambda_0^N 2\pi R} - \sum_{n=1}^{15} \frac{\rho_n^2}{\lambda_n^N \pi R} = 0.9568043. \quad \blacksquare$$

### 2.6.3 Contrainte double

Dans cette dernière partie, les résultats des deux précédentes sections sont combinés afin d'obtenir un modèle rendant à la fois compte de la valeur et de la dérivée normale d'une fonction sur le cercle  $\mathcal{C}$ . Notons au passage le rôle central joué par que les valeurs propres  $\rho_n$ ,  $n \geq 0$ , de l'opérateur  $J_\nu$  étudié dans la Section 2.6.2. Nous présentons une méthode permettant d'approcher le noyau  $K_{00}(\cdot, \cdot)$  du sous-espace  $\mathcal{H}_{00}$  des fonctions  $h \in \mathcal{H}$  telles que

$$\forall t \in \mathcal{C}, \langle t, \eta_t \rangle_{E, E'} = 0 \text{ et } \langle t, \delta_t \rangle_{E, E'} = 0.$$

Néanmoins, on peut trouver dans les résultat qui suivent l'ensemble des éléments nécessaires à la résolution générale du problème d'interpolation associé à  $M = M_N + M_D$ .

Nous procédons d'une manière similaire à celle présentée dans la Remarque 2.1. On considère dans un premier temps le problème associé à la dérivée normale sur le cercle, c'est-à-dire au problème d'interpolation associé à  $M_N$  (problème étudié dans la Section 2.6.2) puis ensuite le problème de la valeur, ce dernier étant quant à lui associé à  $M_D$  (choix arbitraire, voir la Remarque 2.12).

Considérons le noyau  $K_{0_N}(\cdot, \cdot)$  (voir la Section 2.6.2) de  $\mathcal{H}_{0_N}$ , sous-espace des fonctions  $h \in \mathcal{H}$  telles que  $\frac{\partial}{\partial r_t} h(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathcal{C}$ . On rappelle que

$$K_{0_N}(x, y) = K(x, y) - K_{M_N}(x, y) \text{ avec}$$

$$K_{M_N}(x, y) = \lambda_0^N \phi_0^N(x) \phi_0^N(y) + \sum_{n \geq 1} \lambda_n^N [\phi_n^{cN}(x) \phi_n^{cN}(y) + \phi_n^{sN}(x) \phi_n^{sN}(y)].$$

On considère l'opérateur intégral sur  $L^2([0, 2\pi])$  associé au noyau  $K_{0_N}(\cdot, \cdot)$  et au sous-espace vectoriel  $M_D$  de  $E'$ ,

$$\mathcal{L}_\nu^R[f](\alpha) = \int_0^{2\pi} K_{0_N}(x_{R,\alpha}, s_{R,\theta}) f(\theta) R d\theta, \text{ (} R \text{ pour Robin).}$$

On tire de l'étude de l'opérateur  $J_\nu$  (voir la Section 2.6.2), que les valeurs propres  $\lambda_n^R$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , de  $\mathcal{L}_\nu^R$  sont données par

$$\lambda_n^R = \lambda_n^D - \frac{\rho_n^2}{\lambda_n^N}.$$

$\lambda_0^R$  est de multiplicité 1 et est associée à  $\tilde{\phi}_0$ , pour  $n \geq 1$ ,  $\lambda_n^R$  est de multiplicité 2 et est associé à  $\tilde{\phi}_n^c$  et  $\tilde{\phi}_n^s$ .

On introduit alors les fonctions propres régularisées de  $\mathcal{L}_\nu^R$  notées respectivement  $\phi_0^R$ ,  $\phi_n^{cR}$  et  $\phi_n^{sR}$ . Après calcul, on obtient, pour  $x \in \mathcal{X}$ ,

$$\phi_0^R(x) = \frac{1}{\lambda_0^R} (\lambda_0^D \phi_0^D(x) - \rho_0 \phi_0^N(x)),$$

$$\forall n \geq 1, \phi_n^{cR}(x) = \frac{1}{\lambda_n^R} (\lambda_n^D \phi_n^{cD}(x) - \rho_n \phi_n^{cN}(x)) \text{ et}$$

$$\phi_n^{sR}(x) = \frac{1}{\lambda_n^R} (\lambda_n^D \phi_n^{sD}(x) - \rho_n \phi_n^{sN}(x)).$$

A titre d'illustration, nous avons calculé le noyau  $K_{0R}^{app}(\cdot, \cdot)$  défini par, pour  $x$  et  $y \in \mathcal{X}$ ,

$$K_{0R}^{app}(x, y) = K_{0N}^{app}(x, y) - \lambda_0^R \phi_0^R(x) \phi_0^R(y) - \sum_{n=1}^{15} \lambda_n^R [\phi_n^{cR}(x) \phi_n^{cR}(y) + \phi_n^{sR}(x) \phi_n^{sR}(y)].$$

La Figure 2.12 représente la simulation d'une trajectoire d'un processus gaussien centrée de covariance  $K_{0R}^{app}(\cdot, \cdot)$ .

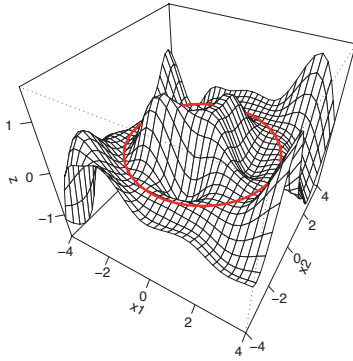


FIGURE 2.12 – Simulation d'une réalisation d'un processus gaussien centré de covariance  $K_{0R}^{app}(\cdot, \cdot)$ .

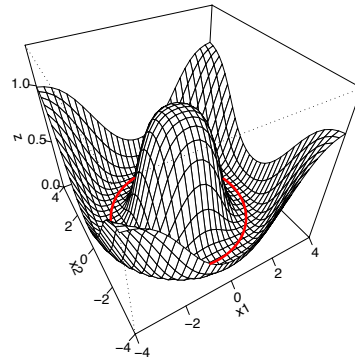


FIGURE 2.13 – Tracé de  $x \mapsto K_{0R}^{app}(x, x)$  sur  $[-4, 4]^2$ .

Comme dans les cas précédents (Sections 2.6.2 et 2.6.1), au lieu d'être nulles, les dérivées radiales sur le cercle suivent une loi normale centrée de variance

1.483913e-05. Pour ce qui est des valeurs sur  $\mathcal{C}$ , ces dernières suivent une loi normale centrée de variance, pour  $t \in \mathcal{C}$ ,

$$\begin{aligned} K_{0_R}^{app}(t, t) &= K_{0_N}^{app}(t, t) - \frac{1}{2\pi R} \left( \lambda_0^R + 2 \sum_{n=0}^{15} \lambda_n^R \right) = K_{0_D}^{app}(t, t) \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi R} \left( \lambda_0^D + 2 \sum_{n=0}^{15} \lambda_n^D \right) \approx 1.402309\text{e-}06. \end{aligned}$$

**Remarque 2.12 :** Au lieu de considérer dans un premier temps le problème associé à  $M_N$  puis celui associé à  $M_D$ , on peut très bien procéder de manière inverse. On est alors amené à étudier l'opérateur

$$\mathcal{L}_\nu^{R2}[f](\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial r_s \partial r_x} K_{0_D}(x_{R,\alpha}, s_{R,\theta}) f(\theta) R d\theta,$$

associé au noyau  $K_{0_D}(\cdot, \cdot)$  et à  $M_N$ . A l'aide de la Remarque 2.10 (équation (2.35)), on déduit que les valeurs propres  $\lambda_n^{R2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , de  $\mathcal{L}_\nu^{R2}$  sont

$$\lambda_n^{R2} = \lambda_n^N - \frac{\rho_n^2}{\lambda_n^D}.$$

$\lambda_0^{R2}$  est de multiplicité 1 et est associée à  $\tilde{\phi}_0$ . Les  $\lambda_n^{R2}$  pour  $n \geq 1$  étant quant à elles de multiplicité 2, associées à  $\tilde{\phi}_n^c$  et  $\tilde{\phi}_n^s$ . On obtient finalement l'expression des fonctions propres régularisées, par exemple

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathcal{X}, \phi_n^{cR2}(x) = \frac{1}{\lambda_n^{R2}} (\lambda_n^N \phi_n^{cN}(x) - \rho_n \phi_n^{cD}(x)). \quad \blacksquare$$

# Chapitre 3

## Conditionnement des processus gaussiens

On pourra trouver une version anglaise de ce chapitre dans l'Annexe C

### 3.1 Sous-espaces hilbertiens et processus gaussiens

Tout espace de Hilbert séparable  $\mathcal{H}$  peut être assimilé à l'espace de Hilbert gaussien  $\mathbf{H}$  (voir [Jan97]) canoniquement associé à un processus gaussien  $Y$ . Lorsque  $\mathcal{H}$  est un sous-espace hilbertien d'un espace de référence  $E$ , on est alors naturellement amené à se demander si le processus gaussien centré  $Y$  associé à  $\mathcal{H}$  est à valeurs dans  $E$ . Notons que cette question n'a réellement d'intérêt que lorsque  $\mathcal{H}$  est de dimension infinie. En effet, si  $\mathcal{H}$  est de dimension finie, le processus gaussien centré  $Y$  lui étant associé est à valeurs dans  $\mathcal{H}$  lui-même (voir Remarque 3.2).

Soit  $E$  un espace de Banach (voir entre autre [DFLC71, Tal83] pour un exposé plus général) et  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$  un espace de Hilbert séparable. On note  $\overline{\mathcal{H}}^E$  l'adhérence de  $\mathcal{H}$  dans  $E$  et  $j$  l'injection de  $\mathcal{H}$  dans  $E$ .

**Remarque 3.1 :** L'espace  $\overline{\mathcal{H}}^E$ , muni de la topologie induite par  $E$  est un espace de Banach séparable. En particulier, tribu cylindrique et tribu borélienne sur  $E$  sont alors identiques, voir [IN68, Proposition 2.1]. Notons également que d'après le théorème de Banach-Mazur,  $\overline{\mathcal{H}}^E$  est isométrique à un sous-espace fermé de l'espace des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs

réelles. ■

### Définition 3.1

$\mathcal{H}$  définit un processus gaussien centré  $Y$  à valeurs dans  $E$  si le triplet  $(j, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{H}}^E)$  est un **espace de Wiener abstrait** (voir [Gro67]), dans ce cas,  $\mathcal{H}$  est parfois appelé espace de Cameron-Martin associé au processus  $Y$  et  $T_{\mathcal{H}}$  est son noyau de covariance,

$$\forall f' \in E', \mathbb{E}(Y_{e'} Y_{f'}) = \langle T_{\mathcal{H}} e', f' \rangle_{E, E'} \quad (= (T_{\mathcal{H}} e' | T_{\mathcal{H}} f')_{\mathcal{H}}), \quad (3.1)$$

avec la notation  $Y_{e'} = \langle Y, e' \rangle_{E, E'}$ .

Dans [Bax76], on trouve un exposé détaillé sur les processus gaussiens utilisant une définition similaire pour le noyau de covariance (équation (3.1), voir aussi [TV07] par exemple). Notons que si on note  $\mu_Y$  la mesure gaussienne sur  $E$  définie par le processus  $Y$ , alors  $\text{supp}(\mu_Y) = \overline{\mathcal{H}}^E$  (avec  $\text{supp}(\mu_Y)$  le support de la mesure  $\mu_Y$ ), voir par exemple [Raj72]. En d'autres termes,  $Y$  est, avec probabilité 1, à valeurs dans un sous-espace dense de  $\overline{\mathcal{H}}^E$ . Le noyau de covariance  $T_{\mathcal{H}}$  du processus  $Y$  est lié à la mesure  $\mu_Y$  par la relation

$$\forall e' \in E', T_{\mathcal{H}} e' = \int_E \langle e, e' \rangle_{E, E'} e d\mu_Y(e). \quad (3.2)$$

Soit  $Y$  un processus gaussien centré de covariance  $T_{\mathcal{H}}$  à valeurs dans  $E$ . Si  $Y$  est assimilé à une application mesurable

$$Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (E, \mathcal{B}_E),$$

on rappelle que l'espace de Hilbert gaussien associé à  $Y$  (voir [Jan97, Adl90]) est le sous-espace vectoriel fermé  $\mathbf{H}$  de  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  engendré par les v.a. gaussiennes centrées  $Y_{e'}$ ,  $e' \in E'$ . On note alors  $\mathcal{I}$  l'isométrie entre  $\mathcal{H}$  et  $\mathbf{H}$ , plus précisément,  $\mathcal{I} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{H} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  associe respectivement à tout couple  $h$  et  $g \in \mathcal{H}$  les variables aléatoires gaussiennes centrées  $\mathcal{I}h$  et  $\mathcal{I}g$  telles que

$$\mathbb{E}(\mathcal{I}h \mathcal{I}g) = (h|g)_{\mathcal{H}}.$$

On a entre autre

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \quad \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbf{H} \\ T_{\mathcal{H}} e' &\longmapsto \langle Y, e' \rangle. \end{aligned}$$

**Représentation des processus gaussiens.** Soit  $\mathcal{H}$  un sous-espace hilbertien séparable de  $E$ , avec  $E$  un espace de Banach. Soit  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une base hilbertienne de  $\mathcal{H}$ , on pose  $\zeta_n = \mathcal{I}(h_n)$ . Les  $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  forment ainsi une base hilbertienne de  $\mathbf{H}$ ,  $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille de variables aléatoires indépendantes gaussiennes, centrées et de variance 1, une telle famille est parfois appelée **famille orthogaussienne** (on trouve par exemple cette appellation dans [Dud10]).

On rappelle que le noyau  $T_{\mathcal{H}}$  de  $\mathcal{H}$  peut s'écrire sous la forme  $\sum_n h_n \otimes h_n$  au sens où

$$\forall e' \text{ et } f' \in E', \langle T_{\mathcal{H}} e', f' \rangle_{E, E'} = \sum_n \langle h_n, e' \rangle_{E, E'} \langle h_n, f' \rangle_{E, E'}.$$

Aussi, pour tout  $e' \in E'$ , la série  $\sum_n \langle h_n, e' \rangle_{E, E'} h_n$  est convergente dans  $\mathcal{H}$ , de limite  $T_{\mathcal{H}} e'$ , ce que nous notons

$$\sum_n \langle h_n, e' \rangle_{E, E'} h_n \xrightarrow{\mathcal{H}} T_{\mathcal{H}} e'.$$

On peut alors poser  $\zeta_n = \mathcal{I}(h_n)$ , on obtient ainsi par isométrie que

$$\sum_n \langle h_n, e' \rangle_{E, E'} \zeta_n \xrightarrow{\mathbf{H}} \mathcal{I}(T_{\mathcal{H}} e') = Y_{e'},$$

la convergence dans  $\mathbf{H}$  de la série  $\sum_n \langle h_n, e' \rangle_{E, E'} \zeta_n$  étant alors similaire à la convergence dans  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  (convergence en moyenne quadratique) de cette dernière série. Notons que la convergence a donc aussi lieu en probabilité.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $\omega \in \Omega$ ,  $h_n \zeta_n(\omega) \in \mathcal{H}$ . D'un autre coté,  $h \in \mathcal{H}$  si et seulement si  $h = \sum_n \alpha_n h_n$  avec  $\sum_n \alpha_n^2 (= \|h\|^2) < +\infty$ , ainsi

$$\text{si } \mathcal{H} \text{ est de dimension infinie, } \mathbb{P} \left( \left\{ \omega \text{ tq } \sum_n h_n \zeta_n(\omega) \in \mathcal{H} \right\} \right) = 0. \quad (3.3)$$

**Remarque 3.2:** Si  $\mathcal{H}$  est de dimension finie, la probabilité apparaissant dans l'équation (3.3) est automatiquement égale à 1. En d'autre terme, à tout espace de Hilbert de dimension finie on peut canoniquement associer un processus gaussien à valeurs dans "lui même" (c'est-à-dire dans l'espace de Hilbert considéré). Dans ce cas, la mesure gaussienne ainsi définie sur  $\mathcal{H}$  correspond en fait à la **mesure gaussienne cylindrique canonique** (*canonical cylinder set measure* en anglais) associée à  $\mathcal{H}$  (voir [Sat69]).

Comme l'indique l'équation (3.3), les choses ne se déroulent pas du tout de la même façon lorsque  $\mathcal{H}$  est de dimension infinie. On remarque en effet que

dans ce cas, voir par exemple [KLW72] et [Sat69, corollary 1], la mesure gaussienne cylindrique canoniquement associée à  $\mathcal{H}$  n'admet pas d'extension  $\sigma$ -additive sur la tribu borélienne de  $\mathcal{H}$  (qui est en fait, par séparabilité, sa tribu cylindrique, voir Remarque 3.1). Afin de définir correctement la mesure gaussienne associée à  $\mathcal{H}$  à partir de sa mesure gaussienne cylindrique, on est alors amené à considérer un espace "plus grand" que  $\mathcal{H}$  ( $\overline{\mathcal{H}}^E$  dans notre cas), espace dans lequel la **radonification** de la mesure gaussienne cylindrique canonique est possible. C'est ce mécanisme de construction qui est à la base de la notion d'espace de Wiener abstrait (voir par exemple [Mal97]).

On remarquera enfin que les résultats présentés dans cette section figurent par exemple dans [JK70]. ■

En pratique, on montre qu'un processus gaussien centré  $Y$  de covariance  $T_{\mathcal{H}}$  est à valeurs dans  $E$  en exhibant une base hilbertienne  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{H}$  pour laquelle on prouve que la série  $\sum_n h_n \zeta_n$  converge dans  $E$  avec probabilité 1. La représentation de  $Y$  sous la forme  $Y = \sum_n h_n \zeta_n$  est parfois appelé **décomposition de Karhunen-Loève** du processus  $Y$ .

On sait inversement que si  $Y$  est un processus gaussien centré de covariance  $T_{\mathcal{H}}$  à valeurs dans  $E$  (au sens où le triplet  $(j, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{H}}^E)$  est un espace de Wiener abstrait), avec  $\mathcal{H}$  sous-espace hilbertien séparable de  $E$ , alors quelle que soit  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  base hilbertienne de  $\mathcal{H}$ , la série  $\sum_n h_n \zeta_n$  converge dans  $E$  avec probabilité 1 (voir par exemple [IN68]).

**Exemple : le mouvement brownien standard.** On se place dans le cadre de l'exemple développé en Section 1.5. Soit  $E = C([0, 1])$  l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur  $[0, 1]$  (la topologie considérée étant celle de la convergence uniforme) et  $\mathcal{H} = H_0^1$ . On rappelle que  $\mathcal{H}$  est un sous-espace hilbertien de  $E$ ,  $\mathcal{H}$  étant en particulier un RKHS de noyau

$$\text{pour } x \text{ et } t \in [0, 1], K(x, t) = x \wedge t, \text{ avec } x \wedge t = \min(x, t).$$

Le mouvement brownien, ou processus de Wiener (voir par exemple [RY99]) est le processus gaussien centré associé à  $\mathcal{H} = H_0^1$ .

Le support de la mesure gaussienne associée au mouvement brownien vu comme processus à valeur dans  $E = C([0, 1])$  est alors l'espace des fonctions réelles continues sur  $[0, 1]$  et s'annulant en 0.

Les trajectoires d'un mouvement brownien standard sont plus précisément, avec probabilité 1,  $\alpha$ -höldériennes pour  $\alpha < \frac{1}{2}$ . Notons que l'espace engendré par de telles fonctions (nulles en 0 et höldériennes d'ordre  $\alpha < \frac{1}{2}$ ) est,



comme nous l'attendions, dense dans l'espace des fonctions continues sur  $[0, 1]$  s'annulant en 0.

Il est amusant de remarquer que l'une des principales différences qu'il existe entre les trajectoires d'un mouvement brownien et les fonctions de  $H_0^1$  réside dans le fait que ces dernières sont höldériennes d'ordre  $\alpha \leq \frac{1}{2}$  contre  $\alpha < \frac{1}{2}$  pour un mouvement brownien.

**Remarque 3.3 :** Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble et  $E = \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$  l'ensemble des fonctions sur  $\mathcal{X}$  à valeurs réelles, muni de la topologie de la convergence simple. Un sous-espace hilbertien  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{R}^{\mathcal{X}}$  est par définition un RKHS, voir la Section 1.3. Notons  $T_{\mathcal{H}}$  le noyau hilbertien de  $\mathcal{H}$ . Pour  $x \in \mathcal{X}$ , soit  $\delta_x \in E'$  la mesure de Dirac au point  $x$ . La variable aléatoire  $Y_x = \mathcal{I}(T_{\mathcal{H}}\delta_x)$  est donc parfaitement définie pour tout  $x \in \mathcal{X}$ . Ainsi, tout RKHS de fonctions sur  $\mathcal{X}$  définit un processus gaussien centré indexé par  $\mathcal{X}$ .

En d'autres termes, tout sous-espace hilbertien de  $\mathbb{R}^{\mathcal{X}}$  définit un processus gaussien centré à valeurs dans  $\mathbb{R}^{\mathcal{X}}$  (et réciproquement). Ce n'est par exemple pas le cas pour lorsque  $E$  est l'espace des fonctions continues sur un ensemble. ■

## 3.2 Conditionnement et interpolation optimale

### 3.2.1 Projections orthogonales

Soit  $\mathcal{H}$  un sous-espace hilbertien séparable d'un espace de Banach  $E$  et  $Y$  un processus gaussien centré de covariance  $T_{\mathcal{H}}$ . Dans tout ce qui suit (Sections 3.2.1 et 3.2.2), on suppose  $Y$  à valeurs dans  $E$ .

Soit  $M$  un s.e.v. de  $E'$ , on note  $\mathcal{H}_M$  l'adhérence dans  $\mathcal{H}$  de  $T_{\mathcal{H}}(M)$  (voir Section 2.2). Parallèlement, on introduit  $\mathbf{H}_M$ , adhérence dans  $\mathbf{H}$  du sous-espace engendré par les  $\langle Y, e' \rangle$ ,  $e' \in M$ . On a alors, par définition,

$$\mathbf{H}_M = \mathcal{I}(\mathcal{H}_M).$$

Soit  $P_{\mathcal{H}_M}$  la projection orthogonale de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{H}_M$ . Par analogie, on note  $P_{\mathbf{H}_M}$  la projection orthogonale de  $\mathbf{H}$  sur  $\mathbf{H}_M$  et on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\mathcal{I}} & \mathbf{H} \\ \downarrow P_{\mathcal{H}_M} & & \downarrow P_{\mathbf{H}_M} \\ \mathcal{H}_M & \xrightarrow{\mathcal{I}} & \mathbf{H}_M \end{array} \quad (3.4)$$

$T_{\mathcal{H}_M} = P_{\mathcal{H}_M} T_{\mathcal{H}}$  est le noyau hilbertien du sous-espace  $\mathcal{H}_M$  (muni de la structure hilbertienne induite par  $\mathcal{H}$ ). Ainsi, par isométrie,

$$\forall e' \in E', \mathcal{I}(T_{\mathcal{H}_M} e') = P_{\mathbf{H}_M}[Y_{e'}] \stackrel{\text{(notation)}}{=} \mathbb{E}(Y_{e'} | Y_{f'}, f' \in M). \quad (3.5)$$

Pour tout  $e' \in E'$ , la v.a.  $P_{\mathbf{H}_M}[Y_{e'}]$  est appelée **espérance conditionnelle de  $Y_{e'}$  sachant  $Y_{f'}$ ,  $f' \in M$** .

Le processus  $Y$ , de covariance  $T_{\mathcal{H}}$  est ainsi décomposé en 2 processus (gaussiens et centrés) indépendants, de covariance respective  $T_{\mathcal{H}_M}$  et  $T_{\mathcal{H}_0}$ . Cette décomposition est l'analogie de la décomposition en somme directe orthogonale  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_M \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_0$  apparaissant dans l'équation (2.2).  $T_{\mathcal{H}_0}$  est appelé **covariance conditionnelle** de  $Y$  sachant  $M$ .

**Remarque 3.4 :** Pour  $\varphi \in \mathcal{H}$  et  $e' \in E'$ , on peut d'ores et déjà établir un lien entre  $\langle h_{\varphi, M}, e' \rangle_{E, E'}$  (on rappelle que  $h_{\varphi, M} = P_{\mathcal{H}_M}[\varphi]$  est l'interpolateur optimal de  $\varphi$  pour  $M$ , voir Section 2.2) et l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(Y_{e'} | Y_{f'}, f' \in M)$ . On a en effet, par isométrie,

$$\begin{aligned} \langle P_{\mathcal{H}_M}[\varphi], e' \rangle_{E, E'} &= \mathbb{E}(\mathcal{I}(P_{\mathcal{H}_M}[\varphi]) Y_{e'}) \\ &= \mathbb{E}(P_{\mathbf{H}_M}[\mathcal{I}(\varphi)] Y_{e'}) = \mathbb{E}(\mathcal{I}(\varphi) P_{\mathbf{H}_M}[Y_{e'}]). \end{aligned} \quad (3.6)$$

On pourra aller plus loin dans l'interprétation de cette égalité à l'aide des notions présentées dans la section suivante (Sections 3.2.2, plus précisément la Remarque 3.8). ■

### 3.2.2 Lois conditionnelles et désintégrations de mesures

Comme son titre l'indique, la Section 3.2.1 fait uniquement référence à différentes projections orthogonales sur les structures hilbertiennes considérées et à leurs équivalences via l'isomorphisme  $\mathcal{I}$  entre  $\mathcal{H}$  et  $\mathbf{H}$ .

Dans le cas de l'interpolation optimale, l'élément "objectif", que nous avons noté  $\varphi$  dans la Section 2.2, est supposé appartenir à  $\mathcal{H}$ . Dans le cas du conditionnement, l'élément objectif est supposé être une réalisation du processus gaussien  $Y$  associé à  $\mathcal{H}$ , il appartient donc avec probabilité 1 à un sous-espace dense de  $\overline{\mathcal{H}}^E$  et n'est d'ailleurs pas dans  $\mathcal{H}$  avec probabilité 1 lorsque  $\mathcal{H}$  est de dimension infinie (voir Section 3.1). Ainsi, sauf cas particulier (dimension finie), les lois conditionnelles du processus étudié ne peuvent pas être déduites à partir des seules considérations hilbertiennes énoncées dans la Section 3.2.1.

Nous n'aborderons pas en détail le concept de *désintégration* (aussi appelé *probabilité conditionnelle régulière*). Signalons simplement, pour en donner une idée grossière, que le fait d'associer à chaque réalisation d'un processus une loi conditionnelle sachant un certain événement conduit à définir une *probabilité de transition*. On parle alors de probabilité conditionnelle régulière quand la famille de lois conditionnelles définie par la probabilité de transition considérée permet, par *mélange* (*mixture of a family of probability measures with respect to a mixing measure*), de retrouver la loi du processus initial. Voir par exemple [TV07, Par05] pour une présentation de ces concepts.

Par simplicité, nous supposons que  $\overline{\mathcal{H}}^E$  admet la décomposition en somme directe

$$\overline{\mathcal{H}}^E = \overline{\mathcal{H}}_M^E \oplus \overline{\mathcal{H}}_0^E \quad (3.7)$$

(voir la Remarque 3.5 pour une discussion sur cette hypothèse). Notons que cette condition est toujours réalisée lorsque  $\mathcal{H}_M$  est de dimension finie.

L'équation (3.7) nous permet ainsi de définir l'unique projection linéaire continue  $\mathfrak{P}$  de  $\overline{\mathcal{H}}^E$  sur  $\overline{\mathcal{H}}_M^E$  parallèlement à  $\overline{\mathcal{H}}_0^E$  (on a donc  $\mathfrak{P}[g] = 0$  pour tout  $g \in \overline{\mathcal{H}}_0^E$ ). En particulier, la projection  $\mathfrak{P}$  prolonge la projection orthogonale  $P_{\mathcal{H}_M}$  de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{H}_M$ .

Le Théorème [TV07, Theorem 3.11] nous assure alors de l'existence d'une désintégration de la mesure gaussienne  $\mu_Y$  sur  $\overline{\mathcal{H}}^E$  relativement à  $\mathfrak{P}$ . La désintégration en question consiste à associer à tout  $\Psi \in \overline{\mathcal{H}}^E$  (et donc en particulier, avec probabilité 1, à toute réalisation du processus  $Y$ ) la mesure gaussienne sur  $\overline{\mathcal{H}}^E$  de moyenne  $\mathfrak{P}[\Psi]$  et de covariance  $T_{\mathcal{H}_0}$ , cette dernière mesure correspondant à loi conditionnelle du processus  $Y$  sachant que sa réalisation "coïncide" avec  $\Psi$  sur  $M$ .

On rencontre souvent la notation suivante, pour  $\Psi \in \overline{\mathcal{H}}^E$ ,

$$\forall e' \in E', \langle \mathfrak{P}[\Psi], e' \rangle_{E, E'} \stackrel{\text{(notation)}}{=} \mathbb{E}(Y_{e'} | Y_{f'} = \langle \Psi, f' \rangle_{E, E'}, f' \in M). \quad (3.8)$$

**Remarque 3.5 :** En terme de structures hilbertiennes, le conditionnement revient à décomposer le processus  $Y$ , de covariance  $T_{\mathcal{H}}$ , en 2 processus (gaussiens et centrés) indépendants, de covariance respective  $T_{\mathcal{H}_M}$  et  $T_{\mathcal{H}_0}$ . La condition (3.7) donne un sens plus fort à cette décomposition en nous garantissant que toute réalisation du processus  $Y$  peut être décomposée de manière unique en la somme d'une réalisation du processus associé au noyau  $T_{\mathcal{H}_M}$  (à valeurs dans  $\overline{\mathcal{H}}_M^E$ ) et d'une réalisation du processus associé au noyau  $T_{\mathcal{H}_0}$  (à valeurs dans  $\overline{\mathcal{H}}_0^E$ ).

Notons que la condition (3.7) n'est évidemment pas nécessaire (elle est simplement suffisante) à l'établissement d'une probabilité conditionnelle régulière relative à la connaissance des valeurs prises par le processus sur un s.e.v.  $M$  de  $E'$ . ■

**Remarque 3.6 :** Si on identifie  $\mathcal{H}$  à un sous-espace hilbertien de  $\overline{\mathcal{H}}^E$  et  $\mathfrak{P}$  à une application linéaire continue de  $\overline{\mathcal{H}}^E$  sur lui même (voir les Sections 1.2 et 1.4), alors

$$T_{\mathcal{H}_M} = P_{\mathcal{H}_M} T_{\mathcal{H}} = \mathfrak{P} T_{\mathcal{H}} {}^t \mathfrak{P}. \quad (3.9) \quad \blacksquare$$

**Remarque 3.7 :** Par définition,  $\forall f' \in M$ ,  $\langle \mathfrak{P}[\Psi], f' \rangle_{E,E'} = \langle \Psi, f' \rangle_{E,E'}$ . Le terme  $\mathbb{E}(Y_{e'} | Y_{f'} = \langle \Psi, f' \rangle_{E,E'}, f' \in M)$  apparaissant dans l'équation (3.8) et ainsi parfois noté

$$\mathbb{E}(Y_{e'} | Y_{f'} = \langle \mathfrak{P}[\Psi], f' \rangle_{E,E'}, f' \in M),$$

au sens où la connaissance des valeurs prises par le processus sur  $M$  revient à connaître sa composante sur  $\overline{\mathcal{H}}_M^E$  (voir par exemple [TV07]). ■

**Remarque 3.8 :** Revenons sur l'égalité mentionnée dans la Remarque 3.4. Pour  $\varphi \in \mathcal{H}$  et  $e' \in E'$ , on a maintenant

$$\begin{aligned} \langle P_{\mathcal{H}_M}[\varphi], e' \rangle_{E,E'} &= \mathbb{E}(\mathcal{I}(\varphi) P_{\mathbf{H}_M} [Y_{e'}]) = \langle \mathfrak{P}[\varphi], e' \rangle_{E,E'} \\ &= \mathbb{E}(Y_{e'} | Y_{f'} = \langle \varphi, f' \rangle_{E,E'}, f' \in M). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Il faut néanmoins remarquer la famille  $\mathbb{E}(Y_{e'} | Y_{f'} = \langle \varphi, f' \rangle_{E,E'}, f' \in M)$  pour  $\varphi \in \mathcal{H}$  ne permet de définir à elle seule une probabilité conditionnelle régulière que lorsque  $\mathcal{H}_M$  est de dimension finie. ■

### 3.2.3 Application de l'approche spectrale au conditionnement

On se place maintenant dans le cadre étudié en Section 2.3. Nous allons utiliser la base hilbertienne de  $\mathcal{H}_M$  exhibée au Corollaire 2.2 pour représenter le processus associé au noyau  $T_{\mathcal{H}_M}$ . Pour tout  $e' \in E'$ ,

$$T_{\mathcal{H}_M} e' = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \lambda_n \langle \phi_n, e' \rangle_{E,E'} \phi_n,$$

la série considérée étant convergente dans  $\mathcal{H}$  (voir aussi la Remarque 1.2). D'après l'équation (3.5), on a

$$\mathcal{I}(T_{\mathcal{H}_M} e') = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \lambda_n \langle \phi_n, e' \rangle_{E, E'} \mathcal{I}(\phi_n). \quad (3.11)$$

On considère alors l'expression des fonctions propres régularisées donnée par l'équation (2.17),

$$\phi_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_{\mathcal{S}} \tilde{\phi}_n(t) T_{\mathcal{H}} \gamma t \, d\nu(t).$$

A la manière de [Raj72, theorem 4.4], on aimerait aller plus loin dans l'identification en écrivant

$$\mathcal{I}(\phi_n) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{\mathcal{S}} \tilde{\phi}_n(t) \mathcal{I}(T_{\mathcal{H}} \gamma t) \, d\nu(t) \quad (3.12)$$

$$= \frac{1}{\lambda_n} \int_{\mathcal{S}} \tilde{\phi}_n(t) Y_{\gamma t} \, d\nu(t). \quad (3.13)$$

Pour ce faire, on doit pouvoir garantir la  $\nu$ -mesurabilité de l'application  $t \mapsto Y_{\gamma t}$  ainsi que

$$\int_{\mathcal{S}} (Y_{\gamma t})^2 \, d\nu(t) < +\infty. \quad (3.14)$$

La proposition qui suit prouve que l'expression (3.13) est correctement définie.

**Proposition 3.1**

*Sous les hypothèses de la Section 2.3, le processus  $(Y_{\gamma s})_{s \in \mathcal{S}}$  admet la décomposition*

$$\forall s \in \mathcal{S}, Y_{\gamma s} = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \left\langle \sqrt{\lambda_n} \phi_n, \gamma s \right\rangle_{E, E'} \zeta_n,$$

*où les  $\zeta_n = \mathcal{I}(\sqrt{\lambda_n} \phi_n)$ ,  $n \in \mathbb{I}_+$ , forment une base orthonormale de  $\mathbf{H}_M$  (les  $\zeta_n$ ,  $n \in \mathbb{I}_+$ , sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et forment ainsi une famille orthogaussienne). Alors pour tout  $\omega \in \Omega$ , l'application  $t \mapsto Y_{\gamma t}(\omega)$  est  $\nu$ -mesurable (avec probabilité 1) et le processus  $(Y_{\gamma s})_{s \in \mathcal{S}}$  est à trajectoire dans  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  avec probabilité 1, en particulier,*

$$\int_{\mathcal{S}} (Y_{\gamma s})^2 \, d\nu(s) < +\infty \text{ (avec probabilité 1).}$$

**Démonstration :** Pour tout  $n \in \mathbb{I}_+$ , l'application  $t \mapsto \langle \sqrt{\lambda_n} \phi_n, \gamma t \rangle_{E, E'}$  appartient par hypothèse à  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  (en tant qu'élément de  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$ ). On a alors, d'après le théorème de Tonelli et H-ii,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \int_{\mathcal{S}} \mathbb{E} \left[ \left( \langle \sqrt{\lambda_n} \phi_n, \gamma t \rangle_{E, E'} \zeta_n \right)^2 \right] d\nu(t) &= \int_{\mathcal{S}} \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \langle \sqrt{\lambda_n} \phi_n, \gamma t \rangle_{E, E'}^2 d\nu(t) \\ &= \int_{\mathcal{S}} \|T_{\mathcal{H}} \gamma t\|_{\mathcal{H}}^2 d\nu(t) = N < +\infty. \end{aligned}$$

La série  $\sum_{n \in \mathbb{I}_+} \left\| \sqrt{\lambda_n} \tilde{\phi}_n \zeta_n \right\|_{L^2(\nu \otimes \mathbb{P})}^2$  est donc convergente et la série

$$(t, \omega) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \langle \sqrt{\lambda_n} \phi_n, \gamma t \rangle_{E, E'} \zeta_n(\omega)$$

converge donc dans  $L^2(\nu \otimes \mathbb{P})$ , ce qui suffit. ■

**Remarque 3.9 :** On obtient de plus, d'après la Proposition 3.1 et le théorème de Fubini, que

$$\mathbb{E} \left[ \int_{\mathcal{S}} (Y_{\gamma s})^2 d\nu(s) \right] = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \lambda_n. \quad \blacksquare$$

On peut finalement énoncer le théorème suivant :

**Théorème 3.1**

*Soit  $Y$  un processus gaussien centré à valeurs dans  $E$  et de covariance  $T_{\mathcal{H}}$ , soit  $M$  un s.e.v. de  $E'$ . Sous les hypothèses du Corollaire 2.2, on a pour tout  $e' \in E'$ ,*

$$\mathbb{E}(Y_{e'} | Y_{f'}, f' \in M) = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \langle \phi_n, e' \rangle_{E, E'} \int_{\mathcal{S}} \tilde{\phi}_n(t) Y_{\gamma t} d\nu(t). \quad (3.15)$$

*Le processus gaussien centré de covariance  $T_{\mathcal{H}_M}$  (processus correspondant à  $\mathbb{E}(Y_{e'} | Y_{f'}, f' \in M)$ ,  $e' \in E'$ ) est de plus à valeurs dans  $\overline{\mathcal{H}_M}^{\gamma, \nu}$  avec probabilité 1.*

**Démonstration :** C'est une simple conséquence du Théorème 2.1, du diagramme (3.4) et de la Proposition 3.1. ■

**Remarque 3.10 :** Il est normal que nous puissions énoncer le Théorème 3.1 sans ajouter d'hypothèses sur le processus  $Y$  (autres que les hypothèses concernant son sous-espace hilbertien associé  $\mathcal{H}$ ). Le Théorème 3.1 est en effet l'équivalent, par l'isométrie  $\mathcal{I}$ , du Théorème 2.1. L'espace de Hilbert gaussien  $\mathbf{H}$  associé au processus  $Y$  vérifie ainsi par hypothèse l'ensemble des propriétés requises. ■

Pour définir une probabilité conditionnelle régulière relative à la connaissance des valeurs prises par le processus  $Y$  sur  $M$ , nous supposons comme durant la Section 3.2.2 que la condition (3.7) est vérifiée, et donc que l'on a

$$\overline{\mathcal{H}}^E = \overline{\mathcal{H}}_M^{-E} \oplus \overline{\mathcal{H}}_0^{-E}.$$

Afin d'être en mesure d'exprimer la projection  $\mathfrak{P}$  de  $\overline{\mathcal{H}}^E$  sur  $\overline{\mathcal{H}}_M^{-E}$  à partir de la décomposition spectrale de l'opérateur adapté  $\mathcal{L}_\nu$  nous supposons également, à la manière de [Kue71], que  $E$  ainsi que la norme  $\|\cdot\|_{\gamma,\nu}$  définie par l'expression (2.18) sont tels que

$$\overline{\mathcal{H}}_M^{-E} \hookrightarrow \overline{\mathcal{H}}_M^{\gamma,\nu}. \quad (3.16)$$

On peut alors définir la désintégration de la mesure  $\mu_Y$  relativement à l'application  $\mathfrak{P}$  donnée par, pour  $\Psi \in \overline{\mathcal{H}}^E$ ,

$$\mathfrak{P}[\Psi] = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \langle \phi_n, e' \rangle_{E,E'} \int_S \tilde{\phi}_n(t) \langle \Psi, \gamma t \rangle_{E,E'} d\nu(t).$$

Notons que l'on suppose implicitement que  $\mathfrak{F}\Psi_0 = 0$  pour tout  $\Psi_0 \in \overline{\mathcal{H}}_0^{-E}$ . La loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $Y_{f'} = \langle \Psi, f' \rangle$  pour tout  $f' \in M$  est alors en particulier la loi normale sur  $\overline{\mathcal{H}}^E$  de covariance  $T_{\mathcal{H}_0}$  et dont la moyenne est donnée par, pour  $e' \in E'$ ,

$$\mathbb{E}(Y_{e'} | Y_{f'} = \langle \Psi, f' \rangle_{E,E'}, f' \in M) = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \langle \phi_n, e' \rangle_{E,E'} \int_S \tilde{\phi}_n(t) \langle \Psi, \gamma t \rangle_{E,E'} d\nu(t). \quad (3.17)$$

**Remarque 3.11 :** Comme nous l'avons déjà partiellement fait remarquer, les conditions (3.7) et (3.16) sont de simples conditions suffisantes à l'établissement d'une probabilité conditionnelle régulière rendant compte de la connaissance du processus sur  $M$  à partir de la décomposition spectrale d'un opérateur adapté. Il serait intéressant d'étudier dans quelle mesure ces conditions peuvent être affaiblies. ■

### 3.3 Illustration : conditionnement du drap brownien

Dans cette section, nous considérons la quadrant positif  $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ . On note  $x = (x_1, x_2)$  un élément de  $\mathcal{X}$ . On rappelle que le drap brownien est le processus gaussien centré  $(B_x)_{x \in \mathcal{X}}$  dont la covariance est donnée par, pour  $x$  et  $y \in \mathcal{X}$ ,

$$K(x, y) = (x_1 \wedge y_1)(x_2 \wedge y_2),$$

où  $x_i \wedge y_i$  ( $i = 1, 2$ ) désigne le minimum entre les deux réels positifs  $x_i$  et  $y_i$ . Notre objectif est d'établir une formule de prédiction pour le drap brownien traduisant son conditionnement par rapport aux valeurs prises par ce dernier sur une *ligne de séparation*, ligne de séparation que nous noterons  $\mathfrak{S}$ . Remarquons que des résultats similaires ont déjà été obtenus par différents auteurs à l'aide de techniques différentes, voir [Car86, DR88, Car90].

Comme précisé durant la Section 3.2, nous sommes ainsi amenés à considérer le problème d'interpolation optimale associé au noyau  $K(\cdot, \cdot)$  et à  $M = \{\delta_s, s \in \mathfrak{S}\}$ .

Dans la Section 3.3.1, nous traitons dans un premier temps le cas où  $\mathfrak{S}$  est le quart-de-cercle unité. En nous basant sur cette étude préliminaire, nous généralisons nos résultats à diverses lignes de séparation dans la Section 3.3.2 à l'aide d'un choix de mesure adapté à la paramétrisation de  $\mathfrak{S}$ .

**Remarque 3.12 :** On rappelle que le drap brownien est associé au RKHS  $\mathcal{H}$  des fonctions à valeurs réelles définies sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  et vérifiant, pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ,

$$h(x) = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} g(u_1, u_2) du_1 du_2 \text{ avec } g = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+),$$

le produit scalaire de  $\mathcal{H}$  étant, pour  $f$  et  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$(f|h)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}(x) dx_1 dx_2.$$

Notons enfin que les réalisations d'un drap brownien sont, entre autres, continues avec probabilité 1. ■



### 3.3.1 Cas du quart-de-cercle

Considérons le quart-de-cercle unité  $\mathfrak{S}$ , c'est-à-dire

$$\mathfrak{S} = \{x \in \mathcal{X} : x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

On pose alors  $\mathcal{S} = [0, \frac{\pi}{2}]$  munit de la mesure de Lebesgue et on considère  $L^2([0, \frac{\pi}{2}])$ , espace des fonctions de carré intégrables (par rapport à la mesure de Lebesgue) sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  muni de la norme hilbertienne

$$\forall f \in L^2([0, \frac{\pi}{2}]), \|f\|_{L^2}^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)^2 d\theta.$$

L'application  $\gamma$  implicitement considérée est donc  $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow M, \theta \mapsto \delta_{s_\theta}$  avec  $s_\theta = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathfrak{S}$ .

Tout au long de cette section (Section 3.3.1), nous utiliserons la notation

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], B_\theta = B_{(\cos \theta, \sin \theta)}.$$

On considère alors l'opérateur intégral, pour  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et  $f \in L^2([0, \frac{\pi}{2}])$ ,

$$\mathcal{L}[f](\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \alpha \wedge \cos \theta) (\sin \alpha \wedge \sin \theta) f(\theta) d\theta.$$

Sa décomposition spectrale (dans  $L^2([0, \frac{\pi}{2}])$ ) est composée des couples de valeur propre et vecteur propre (voir annexe A.2 pour le détail du calcul)

$$n \geq 1, \lambda_n = \frac{1}{4n^2 - 1}, \text{ associée à } \tilde{\phi}_n(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin(2n\theta),$$

les fonctions propres régularisées étant quant à elles, pour tout  $x \in \mathcal{X}$ ,

$$\lambda_n \phi_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x_1 \wedge \cos \theta) (x_2 \wedge \sin \theta) \tilde{\phi}_n(\theta) d\theta. \quad (3.18)$$

Comme le suggère la Figure 3.1, on définit  $\alpha_1$  et  $\alpha_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  tels que  $x_1 = \cos \alpha_1$  and  $x_2 = \sin \alpha_2$ . Deux cas s'offrent alors à nous

- $x$  se situe *en dessous* de la ligne de séparation, i.e.  $x$  est à l'intérieur du quart-de-disque, i.e.  $\|x\| \leq 1$  (avec  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne),
- $x$  se situe *au dessus* de la ligne de séparation, i.e.  $x$  est à l'extérieur du quart-de-disque, i.e.  $\|x\| \geq 1$ .

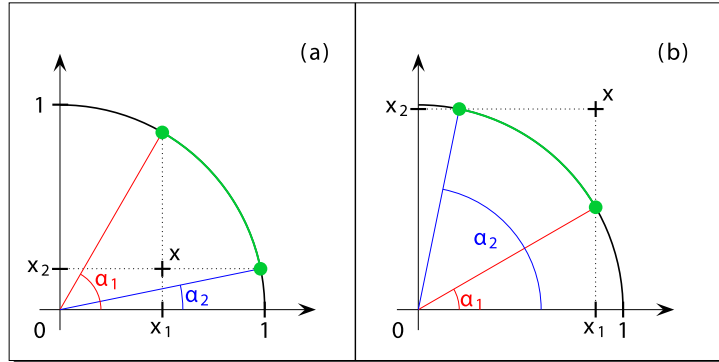


FIGURE 3.1 – Représentation graphique et paramétrisation de l'arc intercepté pour  $x$  à l'intérieur du quart-de-disque (a) et à l'extérieur du quart-de-disque (b).

**$x$  en dessous de la ligne de séparation.** Dans ce cas, on a  $\alpha_1 \geq \alpha_2$  et

$$K(x, (\cos \theta, \sin \theta)) = \begin{cases} x_1 \sin \theta, & \text{pour } \theta \leq \alpha_2, \\ x_1 x_2, & \text{pour } \alpha_2 \leq \theta \leq \alpha_1, \\ x_2 \cos \theta, & \text{pour } \alpha_1 \leq \theta. \end{cases}$$

En décomposant l'intégrale (3.18) en trois termes et en utilisant deux intégrations par parties, il vient

$$\begin{aligned} \lambda_n \phi_n(x) &= \frac{x_2}{4n^2} \sqrt{1 - x_1^2} \tilde{\phi}_n(\alpha_1) + \frac{x_1}{4n^2} \sqrt{1 - x_2^2} \tilde{\phi}_n(\alpha_2) \\ &\quad + \frac{x_1}{4n^2} \int_0^{\alpha_2} \sin \theta \tilde{\phi}_n(\theta) d\theta + \frac{x_2}{4n^2} \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \tilde{\phi}_n(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Comme  $\lambda_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$ , on obtient la relation

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= x_2 \sqrt{1 - x_1^2} \tilde{\phi}_n(\alpha_1) + x_1 \sqrt{1 - x_2^2} \tilde{\phi}_n(\alpha_2) \\ &\quad + x_1 \int_0^{\alpha_2} \sin \theta \tilde{\phi}_n(\theta) d\theta + x_2 \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \tilde{\phi}_n(\theta) d\theta - \lambda_n \phi_n(x). \quad (3.19) \end{aligned}$$

On rappelle la notation  $B_\theta = B_{(\cos \theta, \sin \theta)}$ . On déduit alors de la relation (3.19) et du Théorème 3.1 que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S}) &= x_2 \sqrt{1 - x_1^2} B_{\alpha_1} + x_1 \sqrt{1 - x_2^2} B_{\alpha_2} \\ &\quad + x_1 \int_0^{\alpha_2} \sin \theta B_\theta d\theta + x_2 \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta B_\theta d\theta \\ &\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n \geq 1} \lambda_n \phi_n(x) \tilde{\phi}_n(\theta) B_\theta d\theta. \end{aligned}$$

On sait que (voir Chapitre 2)

$$\forall x \in \mathcal{X} \text{ et } \forall s \in \mathfrak{S}, K(x, s) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n \phi_n(x) \phi_n(s),$$

ainsi,  $\forall x \in \mathcal{X}$  et  $\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,

$$\sum_{n \geq 1} \lambda_n \phi_n(x) \tilde{\phi}_n(\theta) = K(x, (\cos \theta, \sin \theta)) = \begin{cases} x_1 \sin \theta, & \text{pour } \theta \leq \alpha_2, \\ x_1 x_2, & \text{pour } \alpha_2 \leq \theta \leq \alpha_1, \\ x_2 \cos \theta, & \text{pour } \alpha_1 \leq \theta. \end{cases}$$

On obtient finalement après simplification

$$\mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S}) = x_2 \sqrt{1 - x_1^2} B_{\alpha_1} + x_1 \sqrt{1 - x_2^2} B_{\alpha_2} - x_1 x_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} B_\theta d\theta.$$

**x au-dessus de la ligne de séparation.** On a dans ce cas  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ,  $\alpha_1 = 0$  si  $x_1 \geq 1$  et  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$  si  $x_2 \geq 1$ . Pour tout  $x$  tel que  $\|x\| \geq 1$  et  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,

$$K(x, (\cos \theta, \sin \theta)) = \begin{cases} x_1 \sin \theta, & \text{pour } \theta \leq \alpha_1, \\ \cos \theta \sin \theta, & \text{pour } \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2, \\ x_2 \cos \theta, & \text{pour } \alpha_2 \leq \theta. \end{cases}$$

En procédant de la même façon que pour le cas précédent, on obtient que pour tout  $x$  tel que  $\|x\| \geq 1$ ,

$$\mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S}) = (1 - x_1^2)_+ B_{\alpha_1} + (1 - x_2^2)_+ B_{\alpha_2} + 3 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \theta \sin \theta B_\theta d\theta,$$

où pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t_+ = \max(0, t)$ .

On peut finalement énoncer le résultat qui suit :

### Théorème 3.2

Soit  $(B_x)_{x \in \mathbb{R}_+^2}$  un drap brownien et  $\mathfrak{S} = \{x \in \mathbb{R}_+^2, \|x\| = 1\}$ . Alors,

- pour  $x$  tel que  $\|x\| \leq 1$  ( $x_1 = \cos \alpha_1$ ,  $x_2 = \sin \alpha_2$ ,  $\alpha_2 \leq \alpha_1$ ) :

$$\mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S}) = x_2 \sqrt{1 - x_1^2} B_{\alpha_1} + x_1 \sqrt{1 - x_2^2} B_{\alpha_2} - x_1 x_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} B_\theta d\theta, \quad (3.20)$$

- pour  $x$  tel que  $\|x\| \geq 1$ , ( $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ,  $\alpha_1 = 0$  si  $x_1 \geq 1$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$  si  $x_2 \geq 1$ ) :

$$\mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S}) = (1 - x_1^2)_+ B_{\alpha_1} + (1 - x_2^2)_+ B_{\alpha_2} + 3 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \theta \sin \theta B_\theta d\theta, \quad (3.21)$$

où  $B_\theta = B_{(\cos \theta, \sin \theta)}$  pour tout  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

**Démonstration :** (*preuve directe*) Si on note  $Z_x = \mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S})$ , il nous suffit de montrer que pour tout  $x \in \mathcal{X}$  et tout  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$  :

$$\mathbb{E}\{B_\alpha (B_x - Z_x)\} = 0,$$

ou bien, de manière équivalente,

$$\mathbb{E}\{B_\alpha B_x\} = \mathbb{E}\{B_\alpha Z_x\}.$$

Fixons  $x$  tel que  $\|x\| \leq 1$ . Pour  $\alpha \leq \alpha_2$ , on a

$$\mathbb{E}(B_\alpha Z_x) = x_2 \sqrt{1 - x_1^2} \cos \alpha_1 \sin \alpha + x_1 \sqrt{1 - x_2^2} \cos \alpha_2 \sin \alpha - x_1 x_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \cos \theta \sin \alpha d\theta.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(B_\alpha Z_x) = x_1 x_2 \sqrt{1 - x_1^2} \sin \alpha + x_1 (1 - x_2^2) \sin \alpha - x_1 x_2 (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \sin \alpha.$$

Finalement, en utilisant la relation  $x_1 = \cos \alpha_1$ ,  $x_2 = \sin \alpha_2$ , il vient

$$\mathbb{E}(B_\alpha Z_x) = x_1 \sin \alpha = \mathbb{E}\{B_\alpha B_x\}.$$

Si  $\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_\alpha Z_x) &= x_2 \sqrt{1-x_1^2} \cos \alpha_1 \sin \alpha + x_1 \sqrt{1-x_2^2} \sin \alpha_2 \cos \alpha \\ &\quad - x_1 x_2 \left( \int_{\alpha_2}^{\alpha} \cos \alpha \sin \theta d\theta + \int_{\alpha}^{\alpha_1} \cos \theta \sin \alpha d\theta \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_\alpha Z_x) &= x_1 x_2 \sqrt{1-x_1^2} \sin \alpha + x_1 x_2 \sqrt{1-x_2^2} \cos \alpha \\ &\quad - x_1 x_2 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha) \cos \alpha - x_1 x_2 (\sin \alpha_1 - \sin \alpha) \sin \alpha, \end{aligned}$$

et  $\mathbb{E}(B_\alpha Z_x) = x_1 x_2 = \mathbb{E}(B_\alpha B_x)$ . Le cas  $\alpha_1 \leq \alpha$  est alors symétrique au cas que nous venons de traiter.

Le cas  $x$  tel que  $\|x\| \geq 1$  se traite de manière analogue. ■

**Remarque 3.13 :** Considérons la paramétrisation usuelle du quart-de-cercle  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (t, \sqrt{1-t^2})$  ( $t \in [0, 1]$ ). Soit  $a = \cos \alpha_1 = x_1$  et  $b = \cos \alpha_2 = \sqrt{1-x_2^2}$ . En utilisant une formule d'intégration par parties stochastique, [DR88, Théorème 4.2 (a)] implique, pour  $\|x\| \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{G}) &= \\ &\varphi_1(a) \varphi_2(b) \left( \frac{B_{\varphi(a)}}{\varphi_1(a) \varphi_2(a)} + \frac{b B_{\varphi(b)}}{\varphi_2(b)} - \frac{a B_{\varphi(a)}}{\varphi_2(a)} - \int_a^b \frac{B_{\varphi(t)}}{\sqrt{1-t^2}} dt \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{G}) = x_2 \sqrt{1-x_1^2} B_{\alpha_1} + x_1 \sqrt{1-x_2^2} B_{\alpha_2} - x_1 x_2 \int_a^b \frac{B_{\varphi(t)}}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Le changement de variable  $t = \cos \theta$ , conduit alors à remarquer que l'expression (4.4) de [DR88, theorem 4.2] est équivalente à l'expression (3.20) apparaissant dans le Théorème 3.2. De la même façon, l'expression (4.6) de [DR88, theorem 4.2] donne, pour  $0 < b \leq a < 1$

$$\mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{G}) = B_{\varphi(a)} - \left( \frac{a^3 B_{\varphi(a)}}{\varphi_1(a)} - \frac{b^3 B_{\varphi(b)}}{\varphi_1(b)} - \int_b^a 3t B_{\varphi(t)} dt \right).$$

Alors,

$$\mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{G}) = (1-x_1^2) B_{\alpha_1} + (1-x_2^2) B_{\alpha_2} + 3 \int_b^a t B_{\varphi(t)} dt \text{ et}$$

le même changement de variable  $t = \cos \theta$  permet d'obtenir la formule (3.21) du Théorème 3.2. ■

**Remarque 3.14 :** Considérons le mouvement brownien standard  $(W_t)_{t \geq 0}$ . Soit  $u$  un réel. Imposer le conditionnement  $W_1 = u$  conduit à la construction du processus gaussien de moyenne  $t \mapsto u \times t$  pour  $t \leq 1$  et  $t \mapsto u$  pour  $t \geq 1$ . Le Théorème 3.2 est un équivalent bidimensionnel de ce précédent résultat. Mais il existe une différence majeure entre ces deux cas. Dans le cas du mouvement brownien standard conditionné par sa valeur en  $t = 1$ , la covariance conditionnelle est donnée par  $t \wedge t' - tt'$  pour  $t$  et  $t' \leq 1$  (covariance du pont brownien standard),  $(t-1) \wedge (t'-1)$  pour  $t$  et  $t' \geq 1$  et enfin 0 dans les autres cas ( $t$  et  $t'$  de part et d'autre de 1). En d'autres termes, les deux "sous-processus"  $(W_t)_{t \leq 1}$  et  $(W_t)_{t \geq 1}$  sont indépendants conditionnellement à  $W_1$ , ce qui est d'ailleurs une simple conséquence de la propriété de Markov. Dans le cas du quart-de-cercle, les deux processus  $(B_x)_{\|x\| \leq 1}$  et  $(B_x)_{\|x\| \geq 1}$  ne sont pas indépendants conditionnellement à  $B_s$ ,  $s \in \mathfrak{S}$ . On pourra par exemple consulter l'article [Car90] pour une discussion à propos de ce phénomène. ■

La Figure 3.2 présente une réalisation d'un drap brownien contraint à être nul sur le quart-de-cercle. Cette dernière est obtenue en simulant un processus gaussien centré dont la covariance est la covariance conditionnelle du drap brownien sachant ses valeurs sur le quart-de-cercle  $\mathfrak{S}$ . La covariance conditionnelle est quant à elle calculée à partir des termes donnés par le Théorème 3.2.

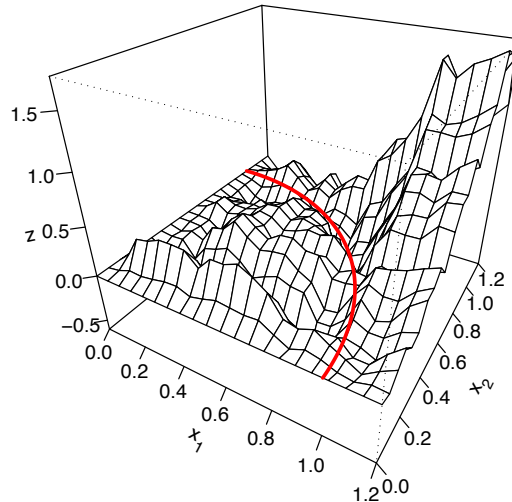


FIGURE 3.2 – Simulation d'une trajectoire d'un drap brownien nul sur  $\mathfrak{S}$ .

### 3.3.2 Cas général

Soit  $\mathfrak{S}$  une ligne de séparation. Dans ce qui suit, nous considérons par simplicité que la ligne de séparation  $\mathfrak{S}$  touche les axes (voir la Remarque 3.15). Une ligne de séparation sera ainsi pour nous une courbe définie par

$$\mathfrak{S} = \left\{ x \in \mathcal{X} : x = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta), \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

où  $\theta \mapsto r(\theta)$  est une fonction continue à valeur dans  $]0, +\infty[$  avec

$$\begin{cases} r(\theta) \cos \theta : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, +\infty[ \text{ décroissante,} \\ r(\theta) \sin \theta : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, +\infty[ \text{ croissante.} \end{cases} \quad (3.22)$$

**Remarque 3.15 :** Dans les cas où  $\theta \mapsto r(\theta) \cos \theta$  est strictement décroissante, une ligne de séparation peut être assimilée au graphe d'une fonction du type  $x_2 = f(x_1)$  avec  $f$  décroissante.

D'une manière plus générale, observons que notre définition d'une ligne de séparation inclut les cas dans lesquels la ligne  $\mathfrak{S}$  est composée de segments horizontaux ou verticaux.

Notons enfin que les résultats présentés dans cette section restent valables si la ligne de séparation ne touche pas les axes ou si elle n'en touche qu'un des deux. Dans chaque cas, seuls les énoncés doivent être légèrement modifiés. Ainsi, pour rendre compte d'une ligne  $\mathfrak{S}$  ne touchant par exemple aucun des axes, on suppose  $r(\cdot)$  définie sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  avec

$$\begin{cases} r(\theta) \cos \theta : ]0, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow ]0, +\infty[ \text{ décroissante,} \\ r(\theta) \sin \theta : ]0, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow ]0, +\infty[ \text{ croissante.} \end{cases} \quad (3.23)$$

Il faut également voir que si  $\mathfrak{S}$  touche les deux axes, alors lorsque  $x$  se trouve au-dessus de la ligne de séparation on a  $\alpha_1 = 0$  si  $x_1 \geq r(0)$  et  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$  si  $x_2 \geq r(\frac{\pi}{2})$  (voir la figure 3.1 et les Théorèmes 3.2 et 3.3). Si  $\mathfrak{S}$  ne touche que l'axe associé à  $x_1$  alors seule la condition relative à  $\alpha_1$  intervient ; seule celle relative à  $\alpha_2$  si  $\mathfrak{S}$  ne touche que l'axe associé à  $x_2$  et enfin aucune des deux si  $\mathfrak{S}$  ne touche pas les axes. ■

Les propriétés de monotonie de la ligne de séparation implique que (conditions (3.22)), pour tout  $\theta$  et  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$  :

$$(r(\alpha) \cos \alpha \wedge r(\theta) \cos \theta) (r(\alpha) \sin \alpha \wedge r(\theta) \sin \theta) = r(\alpha)r(\theta) (\cos \alpha \wedge \cos \theta) (\sin \alpha \wedge \sin \theta). \quad (3.24)$$

Dans tout ce qui suit (Section 3.3.2), nous utiliserons la notation  $B_\theta = B_{(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)}$ ,  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Pour simplifier, nous supposons que l'application  $\theta \mapsto r(\theta)$  est de classe  $C^2$ .

Comme précédemment, on pose  $\mathcal{S} = [0, \frac{\pi}{2}]$ , l'application  $\gamma$  implicitement considérée étant ici  $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow M$ ,  $\theta \mapsto \delta_{s_\theta}$  avec  $s_\theta = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta) \in \mathfrak{S}$ . Etant donné que le choix de la mesure sur  $\mathcal{S}$  est libre (la seule condition étant que le support de la mesure soit  $\mathcal{S}$  tout entier), nous choisissons la mesure  $\mu(d\theta) = \frac{1}{r(\theta)^2}d\theta$ . Nous considérons ainsi l'espace de Hilbert  $L^2([0, \frac{\pi}{2}], \mu)$ , espace des fonctions de carré intégrables (par rapport à  $\mu$ ) sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , muni de la norme hilbertienne

$$\forall f \in L^2([0, \frac{\pi}{2}], \mu), \|f\|_{L^2}^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)^2 \frac{1}{r(\theta)^2} d\theta.$$

Notons que l'on a bien

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} K(s_\theta, s_\theta) \mu(d\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{2} < +\infty.$$

Nous considérons alors l'opérateur intégral

$$\mathcal{L}_\mu[f](\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r(\alpha)\cos\alpha \wedge r(\theta)\cos\theta) (r(\alpha)\sin\alpha \wedge r(\theta)\sin\theta) f(\theta) \frac{1}{r(\theta)^2} d\theta.$$

La décomposition spectrale de  $\mathcal{L}_\mu$  se déduit aisément du cas du quart-de-cercle. Notons  $\lambda_n$  et  $\tilde{\phi}_n$ ,  $n \geq 1$  la décomposition spectrale de l'opérateur intégral étudié dans la Section 3.3.1, nous obtenons alors que les valeurs propres de  $\mathcal{L}_\mu$  sont également  $\lambda_n$ ,  $n \geq 1$ , associées aux fonctions propres (normalisées)

$$\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \tilde{\phi}_n^r(\theta) = r(\theta)\tilde{\phi}_n(\theta).$$

Il suffit en effet pour cela de remarquer que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu[\tilde{\phi}_n^r](\alpha) &= \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r(\alpha)\cos\alpha \wedge r(\theta)\cos\theta) (r(\alpha)\sin\alpha \wedge r(\theta)\sin\theta) \tilde{\phi}_n^r(\theta) \frac{1}{r(\theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\alpha)r(\theta) (\cos\alpha \wedge \cos\theta) (\sin\alpha \wedge \sin\theta) r(\theta)\tilde{\phi}_n(\theta) \frac{1}{r(\theta)^2} d\theta \\ &= \lambda_n r(\alpha)\tilde{\phi}_n(\alpha) = \lambda_n \tilde{\phi}_n^r(\alpha). \end{aligned}$$



Comme dans la section précédente (Section 3.3.1), l'étape suivante est la régularisation des fonctions propres, c'est-à-dire la calcul de, pour  $x \in \mathcal{X}$  et  $n \geq 1$ ,

$$\lambda_n \phi_n^r(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x_1 \wedge r(\theta) \cos \theta) (x_2 \wedge r(\theta) \sin \theta) \tilde{\phi}_n^r(\theta) \frac{d\theta}{r(\theta)^2}. \quad (3.25)$$

On pose  $x_1 = r(\alpha_1) \cos \alpha_1$  et  $x_2 = r(\alpha_2) \sin \alpha_2$  avec  $\alpha_1$  et  $\alpha_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . On doit alors, comme précédemment, différencier deux cas.

**x en dessous de la ligne de séparation.**  $\alpha_1 \geq \alpha_2$  et

$$K(x, (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)) = \begin{cases} x_1 r(\theta) \sin \theta, & \text{pour } \theta \leq \alpha_2, \\ x_1 x_2, & \text{pour } \alpha_2 \leq \theta \leq \alpha_1, \\ x_2 r(\theta) \cos \theta, & \text{pour } \alpha_1 \leq \theta. \end{cases}$$

En décomposant l'intégral et en utilisant une double intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned} \lambda_n \phi_n^r(x) &= \frac{x_2}{4n^2} \sin \alpha_1 \tilde{\phi}_n(\alpha_1) + \frac{x_1}{4n^2} \cos \alpha_2 \tilde{\phi}_n(\alpha_2) \\ &+ \frac{x_2}{4n^2} \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \tilde{\phi}_n(\theta) d\theta + \frac{x_1}{4n^2} \int_0^{\alpha_2} \sin \theta \tilde{\phi}_n(\theta) d\theta \\ &+ \frac{x_1 x_2}{4n^2} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\alpha_1) \tilde{\phi}_n(\alpha_1) - \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\alpha_2) \tilde{\phi}_n(\alpha_2) \right] \\ &- \frac{x_1 x_2}{4n^2} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\theta) \tilde{\phi}_n(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

En notant  $B_\theta = B_{(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)}$  pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S}) &= x_2 \left[ \frac{\sin \alpha_1}{r(\alpha_1)} + \cos \alpha_1 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\alpha_1) \right] B_{\alpha_1} \\ &+ x_1 \left[ \frac{\cos \alpha_2}{r(\alpha_2)} - \sin \alpha_2 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\alpha_2) \right] B_{\alpha_2} \\ &- x_1 x_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\theta) + \frac{1}{r(\theta)} \right] B_\theta \frac{d\theta}{r(\theta)}. \end{aligned}$$

**x au-dessus de la ligne de séparation.** On a maintenant  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  et

$$K(x, (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)) = \begin{cases} x_1 r(\theta) \sin \theta, & \text{pour } \theta \leq \alpha_1, \\ r(\theta)^2 \cos \theta \sin \theta, & \text{pour } \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2, \\ x_2 r(\theta) \cos \theta, & \text{pour } \alpha_2 \leq \theta. \end{cases}$$

Les calculs et raisonnements étant similaires au cas déjà traité, nous ne les détaillerons pas à nouveau.

### Théorème 3.3

Soit  $(B_x)_{x \in \mathcal{X}}$  le drap brownien sur  $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^2$  et soit  $\mathfrak{S}$  vérifiant les conditions (3.22) avec  $\theta \mapsto r(\theta)$  de classe  $C^2$ . Alors,

- pour  $x$  en dessous de la ligne de séparation ( $x_1 = r(\alpha_1) \cos \alpha_1$ ,  $x_2 = r(\alpha_2) \sin \alpha_2$ ,  $\alpha_2 \leq \alpha_1$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S}) &= x_2 \left[ \frac{\sin \alpha_1}{r(\alpha_1)} + \cos \alpha_1 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\alpha_1) \right] B_{\alpha_1} \\ &+ x_1 \left[ \frac{\cos \alpha_2}{r(\alpha_2)} - \sin \alpha_2 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\alpha_2) \right] B_{\alpha_2} \\ &- x_1 x_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) + \frac{1}{r(\theta)} \right] B_\theta \frac{d\theta}{r(\theta)}, \end{aligned}$$

- pour  $x$  au-dessus de la ligne de séparation ( $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ,  $\alpha_1 = 0$  si  $x_1 \geq r(0)$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$  si  $x_2 \geq r(\frac{\pi}{2})$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S}) &= \left[ \cos^2 \alpha_1 - \frac{1}{r(\alpha_1)} \frac{d}{d\theta} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) (\alpha_1) \right] B_{\alpha_1} \\ &+ \left[ \sin^2 \alpha_2 + \frac{1}{r(\alpha_2)} \frac{d}{d\theta} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) (\alpha_2) \right] B_{\alpha_2} \\ &- \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) + r(\theta) \cos \theta \sin \theta \right] B_\theta \frac{d\theta}{r(\theta)}, \end{aligned}$$

avec  $B_\theta = B_{(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)}$  pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

Une formulation équivalente de ce théorème (Théorème 3.3) est donnée dans l'annexe A.3. Notons également que le Théorème 3.3 appliqué au cas  $r \equiv 1$  permet bien de retrouver les résultats du Théorème 3.2.

**Démonstration :** Avec  $Z_x = \mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S})$ , une vérification directe de ce théorème consiste à montrer que

$$\forall \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{E}\{B_\alpha B_x\} = \mathbb{E}\{B_\alpha Z_x\}.$$

Le calcul étant relativement long, nous ne le détaillons pas ici, signalons que les résultats se déduisent des égalités suivantes :

- (pour  $x$  en dessous de la ligne de séparation)

$$\begin{aligned}\cos \theta \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) + \frac{1}{r(\theta)} \right) &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\sin \theta}{r(\theta)} + \cos \theta \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) \right), \\ -\sin \theta \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) + \frac{1}{r(\theta)} \right) &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\cos \theta}{r(\theta)} - \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) \right),\end{aligned}$$

- (pour  $x$  au-dessus de la ligne de séparation)

$$\begin{aligned}\cos \theta \left( \frac{d^2}{d\theta^2} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) + r(\theta) \cos \theta \sin \theta \right) &= \\ \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) + \cos \theta \frac{d}{d\theta} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) \right), \\ -\sin \theta \left( \frac{d^2}{d\theta^2} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) + r(\theta) \cos \theta \sin \theta \right) &= \\ \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) - \sin \theta \frac{d}{d\theta} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) \right). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**Remarque 3.16 :** Supposons pour simplifier que la ligne de séparation  $\mathfrak{S}$  est telle que cette dernière rencontre les axes du quadrant  $\mathcal{X}$ .

Notons  $C^0(\mathfrak{S})$  l'espace des fonctions réelles  $f$  sur  $\mathfrak{S}$  telles que  $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$  (on conserve toujours la notation  $f(\theta) = f((r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta))$  pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ). Pour tout  $f \in C^0(\mathfrak{S})$ , on définit la fonction de  $\mathcal{X}$  sur  $\mathbb{R}$  suivante :

$$x \longmapsto \mathbb{E} \left( B_x \middle| B_\theta = f(\theta), \theta \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \right), \text{ avec} \quad (3.26)$$

- pour  $x$  en dessous de la ligne de séparation,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left( B_x \middle| B_\theta = f(\theta), \theta \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \right) &= \\ &= x_2 \left[ \frac{\sin \alpha_1}{r(\alpha_1)} + \cos \alpha_1 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\alpha_1) \right] f(\alpha_1) \\ &+ x_1 \left[ \frac{\cos \alpha_2}{r(\alpha_2)} - \sin \alpha_2 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\alpha_2) \right] f(\alpha_2) \\ &\quad - x_1 x_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) + \frac{1}{r(\theta)} \right] f(\theta) \frac{d\theta}{r(\theta)},\end{aligned}$$

- pour  $x$  au-dessus de la ligne de séparation,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(B_x \middle| B_\theta = f(\theta), \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) &= \\ &= \left[ \cos^2 \alpha_1 - \frac{1}{r(\alpha_1)} \frac{d}{d\theta} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta)(\alpha_1) \right] f(\alpha_1) \\ &+ \left[ \sin^2 \alpha_2 + \frac{1}{r(\alpha_2)} \frac{d}{d\theta} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta)(\alpha_2) \right] f(\alpha_2) \\ &- \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) + r(\theta) \cos \theta \sin \theta \right] f(\theta) \frac{d\theta}{r(\theta)}. \end{aligned}$$

La famille, indexée par  $f \in C^0(\mathfrak{S})$ , des lois gaussiennes (sur l'espace des fonctions continues de  $\mathcal{X}$  sur  $\mathbb{R}$ ) dont les moyennes sont les fonctions définies par l'équation (3.26) et de covariance  $T_{\mathcal{H}_0}$  définie une probabilité conditionnelle régulière du drap brownien connaissant ses valeurs sur la ligne de séparation  $\mathfrak{S}$ .

Notons de plus, voir [DR88, Car90], que la fonction

$$x \longmapsto \mathbb{E}\left(B_x \middle| B_\theta = f(\theta), \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

est solution de l'équation aux dérivées partielles définie respectivement par les opérateurs

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{F(x_1, x_2)}{x_1 x_2} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(x_1, x_2) = 0,$$

selon que le point  $x$  se trouve en dessous ou au-dessus de la ligne de séparation, l'équation étant associée à la condition  $F = f$  sur  $\mathfrak{S}$ . ■

# Chapitre 4

## Sous-espaces semi-hilbertiens et noyaux conditionnellement positifs

### 4.1 Motivations et premières définitions

La notion de sous-espace semi-hilbertien apparaît pour la première fois en 1977 dans un article de Jean Duchon consacré aux splines [Duc77, §.2]. L'idée étant d'utiliser la notion de noyaux afin de résoudre des problèmes d'interpolation optimale associés non pas à des normes (comme nous l'avons vu au Chapitre 2) mais à des **semi-normes**. Les modèles d'interpolation obtenus héritent ainsi de la propriété d'être construits *modulo* un élément de l'espace nul de la semi-norme considérée (la *tendance*).

Soit  $E$  un espace vectoriel topologique localement convexe quasi-complet et  $E'$  son dual topologique. Comme précédemment, nous nous restreignons au cas des espaces vectoriels réels.

Soit  $\mathcal{N}$  un s.e.v. fermé de  $E$  admettant un supplémentaire topologique,  $\mathcal{N}$  sera appelé **espace nul**. On note  $\pi$  l'application quotient canonique de  $E$  dans  $E/\mathcal{N}$ ,

$$E \xrightarrow{\pi} E/\mathcal{N},$$

et on munit  $E/\mathcal{N}$  de la topologie quotient. On suppose  $\mathcal{N}$  tel que  $E/\mathcal{N}$  hérite d'une topologie d'e.v.t.l.c quasi-complet.

#### **Définition 4.1**

Un sous-espace vectoriel  $\mathcal{S}$  de  $E$  muni d'une structure d'espace semi-

hilbertien d'espace nul  $\mathcal{N}$  (on note  $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{S}}$  son semi-produit scalaire) est appelé **sous-espace semi-hilbertien** de  $E$  d'espace nul  $\mathcal{N}$  si  $\mathcal{S}/\mathcal{N} \in \text{Hilb}(E/\mathcal{N})$ .

On note  $\mathbf{Hilb}(\mathbf{E}; \mathcal{N})$  l'ensemble des sous-espaces semi-hilbertiens de  $E$  d'espace nul  $\mathcal{N}$ . L'ensemble  $\text{Hilb}(E)$  des sous-espaces hilbertiens de  $E$  correspond au cas  $\mathcal{N} = \{0\}$  et ainsi à l'ensemble  $\text{Hilb}(E; \{0\})$ . Nous écrirons parfois *espace  $\mathcal{N}$ -semi-hilbertien* pour *espace semi-hilbertien d'espace nul  $\mathcal{N}$* , ou plus simplement *espace semi-hilbertien* sans préciser, s'il n'y a pas de confusion possible, l'espace nul considéré.

Au Chapitre 1, nous avons rappelé comment on pouvait associer à tout sous-espace hilbertien  $\mathcal{H}$  de  $E$  un unique noyau  $T_{\mathcal{H}}$  relatif à  $E$ . Le lien primordial existant entre ces deux entités étant la propriété de représentation (1.1), c'est-à-dire

$$\forall e' \in E', \forall h \in \mathcal{H}, \quad \langle h, e' \rangle_{E, E'} = (h | T_{\mathcal{H}} e')_{\mathcal{H}}.$$

L'objectif de la Section 4.2 est de montrer dans quelle mesure de tels résultats peuvent être étendus aux sous-espaces semi-hilbertiens et, plus particulièrement, de déterminer quelle classe de noyaux relatifs à  $E$  peut être naturellement associée aux structures considérées. Un premier diagnostic nous apprend rapidement que, du fait de la structure semi-hilbertienne d'espace nul  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{S}$ , il sera difficile de pouvoir représenter, toujours au sens de l'équation (1.1), l'ensemble des éléments de  $E'$ . En fait, on se rend facilement compte que les seuls éléments de  $E'$  qu'il semble raisonnable de vouloir représenter sont ceux de  $\mathcal{N}^0$ , avec

$$\mathcal{N}^0 = \left\{ e' \in E' \text{ tq } \forall n \in \mathcal{N}, \langle n, e' \rangle_{E, E'} = 0 \right\}.$$

On rappelle en particulier que  $(E/\mathcal{N})'$  est isomorphe à  $\mathcal{N}^0$ , l'isomorphisme en question étant l'application  ${}^t\pi$ .

Définissons dans un premier temps la notion de projection sur l'espace nul, notion qui nous sera d'une grande utilité par la suite. Ces projections nous permettront en effet, via un simple diagramme commutatif, de choisir un représentant pour les classes d'équivalence de  $E/\mathcal{N}$  (voir Remarque 4.4).

**Projection sur l'espace nul.** Soit  $\mathfrak{p}$  une projection linéaire continue de  $E$  sur  $\mathcal{N}$  (l'existence d'une telle projection est assurée par le fait que  $\mathcal{N}$  est fermé et admet un supplémentaire topologique), nous nommerons  $\mathfrak{p}$  *projection sur l'espace nul*. Il est important de noter que le choix de  $\mathfrak{p}$  est arbitraire : il existe une infinité de choix possibles pour  $\mathfrak{p}$ .

**Remarque 4.1 :** Supposons  $\mathcal{N}$  de dimension finie et soit  $\{g_1, \dots, g_p\}$  une base de  $\mathcal{N}$ . Afin de définir une projection linéaire continue sur  $\mathcal{N}$ , on considère une famille  $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$  d'éléments de  $E'$  tels que la matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  définie par

$$\text{pour tout } 1 \leq i, j \leq p, \mathbf{A}_{i,j} = \langle g_j, \xi_i \rangle_{E,E'}$$

est inversible (une telle famille existe toujours, la topologie faible de  $E$  étant séparée). Pour simplifier, on introduit la notation

$$\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{g}^T \rangle \quad (\text{et } \mathbf{A}^T = \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}^T \rangle)$$

avec  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_p)^T$  et  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_p)^T$  (vecteurs colonnes). On peut alors définir une projection sur l'espace nul en posant

$$\forall e \in E, \mathbf{p}e = \mathbf{g}^T \mathbf{A}^{-1} \langle \boldsymbol{\xi}, e \rangle,$$

où  $\langle \boldsymbol{\xi}, e \rangle$  est le vecteur des  $\langle e, \xi_i \rangle_{E,E'}$ .  ${}^t\mathbf{p} : E' \rightarrow E'$  est alors donnée par, pour tout  $e' \in E'$ ,

$${}^t\mathbf{p}e' = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{A}^{-T} \langle \mathbf{g}, e' \rangle,$$

avec la notation  $\mathbf{A}^{-T} = (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ . ■

On définit maintenant la projection de  $E$   $\mathbf{q} = id_E - \mathbf{p}$ , où  $id_E$  est l'identité de  $E$ .

**Proposition 4.1**

${}^t\mathbf{q}$  est une projection de  $E'$  sur  $\mathcal{N}^0$ .

**Démonstration :**  ${}^t\mathbf{q}$  est évidemment une projection de  $E'$ . Soit  $e' \in E'$  et  $n \in \mathcal{N}$ ,  $\langle n, {}^t\mathbf{q}e' \rangle_{E,E'} = \langle \mathbf{q}n, e' \rangle_{E,E'} = 0$ , car  $\mathbf{q}n = 0$ . Ainsi,  $\forall e' \in E'$ ,  ${}^t\mathbf{q}e' \in \mathcal{N}^0$ , i.e.  ${}^t\mathbf{q}(E') \subset \mathcal{N}^0$ . Soit alors  $e' \in \mathcal{N}^0$ , pour tout  $e \in E$ ,  $\langle \mathbf{p}e, e' \rangle_{E,E'} = \langle e, {}^t\mathbf{p}e' \rangle_{E,E'} = 0$ , donc  ${}^t\mathbf{p}e' = 0$ , i.e.  ${}^t\mathbf{q}e' = e'$  et donc  $\mathcal{N}^0 \subset {}^t\mathbf{q}(E')$ . ■

Nous allons maintenant introduire la famille des noyaux relatifs à  $E$  symétriques  $\mathcal{N}$ -conditionnellement positifs, ces derniers se révélant être le type de noyaux relatifs à  $E$  adaptés à l'étude des sous-espaces semi-hilbertiens de  $E$ .

## 4.2 Noyaux conditionnellement positifs

### Définition 4.2

Un noyau symétrique  $\mathcal{N}$ -conditionnellement positif est une application linéaire faiblement continue  $\Gamma$  de  $E'$  dans  $E$ , (un noyau relatif à  $E$  donc)

- symétrique :  $\forall e', f' \in E', \langle \Gamma e', f' \rangle_{E, E'} = \langle \Gamma f', e' \rangle_{E, E'}$ ,
- $\mathcal{N}$ -conditionnellement positive :  $\forall e' \in \mathcal{N}^0, \langle \Gamma e', e' \rangle_{E, E'} \geq 0$ .

On note  $\mathcal{N}\text{-}\mathcal{L}_s^+(E)$  l'ensemble des noyaux relatifs à  $E$  symétriques et  $\mathcal{N}$ -conditionnellement positifs (voir également la Remarque 1.1). Notons que tout noyau de  $\mathcal{L}_s^+(E)$  est également élément de  $\mathcal{N}\text{-}\mathcal{L}_s^+(E)$ .

### Proposition 4.2

Soit  $\Gamma$  un noyau symétrique  $\mathcal{N}$ -conditionnellement positif et  $\mathfrak{p}$  une projection linéaire continue sur  $\mathcal{N}$ , soit  $\mathfrak{q} = id_E - \mathfrak{p}$ . Le noyau  $\Gamma^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}\Gamma^t\mathfrak{q}$  est un noyau hilbertien relatif à  $E$ , i.e. l'application  $\Gamma^{\mathfrak{q}} : E' \rightarrow E$  est linéaire, faiblement continue, symétrique et positive (ou encore  $\Gamma^{\mathfrak{q}} \in \mathcal{L}_s^+(E)$ , pour reprendre les notations du Chapitre 1).

**Démonstration :** Les propriétés de linéarité et de continuité sont évidentes (composition d'applications linéaires continues). Quant aux propriétés de symétrie et de positivité de  $\Gamma^{\mathfrak{q}}$ , ces dernières découlent directement des propriétés de symétrie et de positivité conditionnelle de  $\Gamma$  : soit  $e'$  et  $f' \in E'$  :

$$\begin{aligned} \langle \Gamma^{\mathfrak{q}} e', f' \rangle_{E, E'} &= \langle \mathfrak{q}\Gamma^t\mathfrak{q}e', f' \rangle_{E, E'} = \langle \Gamma^t\mathfrak{q}e', {}^t\mathfrak{q}f' \rangle_{E, E'} \\ &= \langle \Gamma^t\mathfrak{q}f', {}^t\mathfrak{q}e' \rangle_{E, E'} = \langle \Gamma^{\mathfrak{q}} f', e' \rangle_{E, E'} \text{ et} \\ \langle \Gamma^{\mathfrak{q}} e', e' \rangle_{E, E'} &= \langle \mathfrak{q}\Gamma^t\mathfrak{q}e', e' \rangle_{E, E'} = \langle \Gamma^t\mathfrak{q}e', {}^t\mathfrak{q}e' \rangle_{E, E'} \geq 0, \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant valable car  $\forall e' \in E', {}^t\mathfrak{q}e' \in \mathcal{N}^0$ . ■

Il existe donc un unique sous-espace hilbertien  $\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$  de  $E$  associé à  $\Gamma^{\mathfrak{q}} : \mathcal{H}^{\mathfrak{q}} \in \text{Hilb}(E)$  et  $\Gamma^{\mathfrak{q}}$  est son unique noyau hilbertien associé. On note  $(\cdot | \cdot)_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}}$  le produit scalaire de  $\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$ . Remarquons que  $\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$  peut également être assimilé à un sous-espace hilbertien de  $\mathfrak{q}(E)$ , au sens de la Section 1.4 (et on peut alors par la suite, comme pour la Section 1.2, considérer que  $\mathfrak{q}(E)$  s'injecte continument dans  $E$ ).

### Proposition 4.3

Soit  $\Gamma$  un noyau symétrique  $\mathcal{N}$ -conditionnellement positif et  $\mathfrak{p}$  une projection linéaire continue sur  $\mathcal{N}$ . Quel que soit  $M$  s.e.v. de  $E'$ , on a, en



termes d'ensembles,

$$\mathcal{N} + \Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M) = \mathcal{N} + \Gamma^{\mathfrak{q}}(M). \quad (4.1)$$

**Démonstration :** Soit  $f \in \mathcal{N} + \Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M)$ , i.e.  $f = n + g$  où  $n \in \mathcal{N}$  et  $g \in \Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M)$ , on a alors  $\mathfrak{q}f = \mathfrak{q}g$ . De plus,  $\mathcal{N}^0 \cap M \subset \mathcal{N}^0$ , donc  ${}^t\mathfrak{q}(\mathcal{N}^0 \cap M) = \mathcal{N}^0 \cap M$ . Ainsi  $g \in \Gamma^{{}^t\mathfrak{q}}(\mathcal{N}^0 \cap M)$  et donc  $\mathfrak{q}g \in \Gamma^{\mathfrak{q}}(M)$ . On obtient ainsi

$$\mathcal{N} + \Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M) \subset \mathcal{N} + \Gamma^{\mathfrak{q}}(M).$$

On obtient l'inclusion inverse en remarquant que  $\mathfrak{q}$  est une surjection de  $\Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M)$  sur  $\Gamma^{\mathfrak{q}}(M)$ , comme  $\ker(\mathfrak{q}) = \mathcal{N}$ , on a bien

$$\mathcal{N} + \Gamma^{\mathfrak{q}}(M) \subset \mathcal{N} + \Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M). \quad \blacksquare$$

**Remarque 4.2 :** Intéressons-nous d'un peu plus près à l'équation (4.1). Par construction, le terme  $\mathcal{N} + \Gamma^{\mathfrak{q}}(M)$  est une somme directe, ce que nous noterons d'ailleurs  $\mathcal{N} \oplus \Gamma^{\mathfrak{q}}(M)$ . Par contre, la somme  $\mathcal{N} + \Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M)$  n'a quant à elle, *a priori*, aucune raison de l'être. On pourrait alors contraindre le noyau  $\Gamma$  afin de garantir que cette somme soit bien directe, il faudrait pour cela supposer que  $\mathcal{N} \cap \Gamma(\mathcal{N}^0) = \{0\}$ , mais cette hypothèse supplémentaire n'est en fait d'aucune utilité. \blacksquare

#### Proposition 4.4

Soit  $\Gamma$  un noyau symétrique  $\mathcal{N}$ -conditionnellement positif. Quel que soit  $\mathfrak{p}$  projection sur l'espace nul,

$$\mathcal{N} \cap \mathcal{H}^{\mathfrak{q}} = \{0\}. \quad (4.2)$$

**Démonstration :** Nous savons déjà, en combinant la Proposition 4.3 appliquée à  $M = E'$  et la Remarque 4.2, que la somme  $\mathcal{N} + \Gamma^{\mathfrak{q}}(E')$  est directe.

Le Hilbert  $\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$  est le complété de l'espace préhilbertien  $\Gamma^{\mathfrak{q}}(E')$ . Il nous faut donc nous assurer qu'il est possible de compléter  $\Gamma^{\mathfrak{q}}(E')$  sans "déborder" sur  $\mathcal{N}$ .

Pour tout  $e' \in E'$ ,  $\mathfrak{p}\Gamma^{\mathfrak{q}}e' = 0$ , donc  $\Gamma^{\mathfrak{q}}(E') \subset \ker(\mathfrak{p})$ . Or, la topologie hilbertienne de  $\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$  est plus fine que la topologie induite par  $E$ . Ainsi,  $\mathfrak{p}$  étant continue sur  $E$ ,  $\mathcal{H}^{\mathfrak{q}} \subset \ker(\mathfrak{p})$  et donc  $\mathcal{N} \cap \mathcal{H}^{\mathfrak{q}} = \{0\}$ . \blacksquare

### **Théorème 4.1**

Soit  $\Gamma$  un noyau symétrique  $\mathcal{N}$ -conditionnellement positif. Il existe un unique sous-espace semi-hilbertien  $\mathcal{S} \in \text{Hilb}(E; \mathcal{N})$  vérifiant

$$\forall s \in \mathcal{S}, \forall e' \in \mathcal{N}^0, \langle s, e' \rangle_{E, E'} = (s | \Gamma e')_{\mathcal{S}}, \quad (4.3)$$

où  $(\cdot | \cdot)_{\mathcal{S}}$  représente le semi-produit scalaire associé à  $\mathcal{S}$ .

De plus, quel que soit  $\mathfrak{p}$  projection sur l'espace nul et  $\mathfrak{q} = id_E - \mathfrak{p}$ , la propriété (4.3) (propriété de représentation  $\mathcal{N}$ -conditionnelle) est également vérifiée par le noyau  $\Gamma^{\mathfrak{q}}$  et ce dernier est donc, au même titre que  $\Gamma$ , également associé au sous-espace semi-hilbertien  $\mathcal{S}$ .

Nous dirons alors que  $\mathcal{S}$  est le sous-espace semi-hilbertien de  $E$  associé au noyau  $\Gamma$ . Notons que  $\mathcal{S}$  est également associé à  $\Gamma^{\mathfrak{q}}$ . Inversement, nous dirons de  $\Gamma$  qu'il est l'un des noyaux semi-hilbertiens associés au sous-espace semi-hilbertien  $\mathcal{S}$  de  $E$ , le noyau  $\Gamma^{\mathfrak{q}}$  en étant par exemple un autre.

Le précédent résultat (Théorème 4.1) nous montre donc qu'à tout élément de  $\mathcal{N}\text{-}\mathcal{L}_s^+(E)$ , on peut naturellement associer un unique élément de  $\text{Hilb}(E; \mathcal{N})$ , mais que différents noyaux symétriques  $\mathcal{N}$ -conditionnellement positifs peuvent être associés au même sous-espace  $\mathcal{N}$ -semi-hilbertien (voir aussi le Théorème 4.2).

**Démonstration :** *Existence :* Soit  $\Gamma$  un noyau  $\mathcal{N}$ -semi-hilbertien et  $\mathfrak{p}$  une projection sur l'espace nul. D'après la Proposition 4.4, on peut définir la somme directe  $\mathcal{S} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$ .

Soit  $s_1 = n_1 + h_1$  et  $s_2 = n_2 + h_2$  deux éléments de  $\mathcal{S}$ , avec  $n_1$  et  $n_2 \in \mathcal{N}$  ainsi que  $h_1$  et  $h_2 \in \mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$ . On munit  $\mathcal{S}$  d'une structure semi-hilbertienne d'espace nul  $\mathcal{N}$  en posant :

$$(s_1 | s_2)_{\mathcal{S}} = (h_1 | h_2)_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}} = (\mathfrak{q}s_1 | \mathfrak{q}s_2)_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}}.$$

Ainsi, pour  $s \in \mathcal{S}$  et  $e' \in \mathcal{N}^0$ ,

$$\begin{aligned} \langle s, e' \rangle_{E, E'} &= \langle s, {}^t \mathfrak{q} e' \rangle_{E, E'} = \langle \mathfrak{q}s, e' \rangle_{E, E'} \\ &= (\mathfrak{q}s | \Gamma^{\mathfrak{q}} e')_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}} = (\mathfrak{q}s | \mathfrak{q} \Gamma^t \mathfrak{q} e')_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}} = (\mathfrak{q}s | \mathfrak{q} \Gamma e')_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}} \\ &= (s | \Gamma e')_{\mathcal{S}}. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que  $\mathcal{S}/\mathcal{N} \in \text{Hilb}(E/\mathcal{N})$ , ce qui revient à montrer que l'inclusion  $j$  de  $\mathcal{S}/\mathcal{N}$  dans  $E/\mathcal{N}$  est continue. Pour cela, on note  $\pi$  l'application quotient canonique de  $E$  dans  $E/\mathcal{N}$ . Par définition de la topologie quotient sur  $E/\mathcal{N}$ ,  $\pi$  est continue. Comme  $\ker(\mathfrak{q}) = \ker(\pi)$  il existe un

unique isomorphisme continu  $\iota : \mathcal{S}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$  tel que  $\iota\pi = \mathfrak{q}$ . On note enfin  $j_{\mathcal{H}}$  l'inclusion continue de  $\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$  dans  $E$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{S}/\mathcal{N} & \xrightarrow{j} & E/\mathcal{N} \\
 \uparrow \pi & \searrow \iota & \uparrow \pi \\
 \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathfrak{q}} & \mathcal{H}^{\mathfrak{q}} \xrightarrow{j_{\mathcal{H}}} E
 \end{array} \tag{4.4}$$

Ainsi,  $j = \pi j_{\mathcal{H}} \iota$  étant la composée d'applications continues (et linéaires),  $j$  est continue (et linéaire).

*Unicité* : On doit simplement montrer que la construction du sous-espace semi-hilbertien associé à  $\Gamma$  présentée dans la première partie de notre preuve (la partie *existence*) ne dépend pas du choix de la projection sur l'espace nul. En effet, tout sous-espace semi-hilbertien associé à  $\Gamma$  se doit par exemple de pouvoir être inclus dans un diagramme analogue à celui de l'équation (4.4) et doit donc admettre une décomposition en somme directe du type  $\mathcal{S} = \mathcal{N} + \mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$  avec  $\mathfrak{p}$  projection sur  $\mathcal{N}$  et  $\mathfrak{q} = id_E - \mathfrak{p}$ .

Ainsi, soit  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{p}'$  deux projections sur l'espace nul, on considère alors les deux sous-espaces semi-hilbertiens

$$\mathcal{S} = \mathcal{N} + \mathcal{H}^{\mathfrak{q}} \text{ et } \mathcal{S}' = \mathcal{N} + \mathcal{H}^{\mathfrak{q}'}$$

Par construction,  $\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$  et  $\mathcal{H}^{\mathfrak{q}'}$  sont respectivement les complétés (pour les structures préhilbertiennes induites) de  $\mathfrak{q}\Gamma(\mathcal{N}^0)$  et  $\mathfrak{q}'\Gamma(\mathcal{N}^0)$  (on rappelle que  $\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$  et  $\mathcal{H}^{\mathfrak{q}'}$  sont évidemment isomorphes). Or,

$$\forall e' \in \mathcal{N}^0, \quad \mathfrak{q}\Gamma e' - \mathfrak{q}'\Gamma e' = (\mathfrak{p}' - \mathfrak{p})\Gamma e' \in \mathcal{N}, \tag{4.5}$$

$\mathcal{N}$  est fermé dans  $E$  et les topologies préhilbertiennes sur  $\mathfrak{q}\Gamma(\mathcal{N}^0)$  et  $\mathfrak{q}'\Gamma(\mathcal{N}^0)$  sont plus fines que les topologies induites par  $E$  (la preuve de la Proposition 4.4 utilise des arguments similaires). On obtient ainsi que pour tout  $h' \in \mathcal{H}^{\mathfrak{q}'}$ , il existe  $h \in \mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$  et  $n \in \mathcal{N}$  tels que  $h' = h + n$ , ce qui prouve que les ensembles  $\mathcal{S} = \mathcal{N} + \mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$  et  $\mathcal{S}' = \mathcal{N} + \mathcal{H}^{\mathfrak{q}'}$  sont identiques et nous assure de l'unicité du sous-espace semi-hilbertien de  $E$  associé à  $\Gamma$ .

Enfin, soit  $\mathfrak{p}$  une projection sur l'espace nul, pour  $s \in \mathcal{S}$  et  $e' \in E'$  on a

$$\begin{aligned}
 \langle s, e' \rangle_{E, E'} &= (s|\Gamma e')_{\mathcal{S}} = (\mathfrak{q}s|\mathfrak{q}\Gamma e')_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}} \\
 &= (\mathfrak{q}s|\Gamma^{\mathfrak{q}} e')_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}} = (\mathfrak{q}s|\mathfrak{q}\Gamma^{\mathfrak{q}} e')_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}} \\
 &= (s|\Gamma^{\mathfrak{q}} e')_{\mathcal{S}}.
 \end{aligned}$$

La propriété de représentation  $\mathcal{N}$ -conditionnelle (4.3) est donc effectivement vérifiée par le noyau  $\Gamma^{\mathfrak{q}}$ , ce qui termine la preuve. ■

Soit  $\Gamma \in \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L}_s^+(E)$  et  $\mathcal{S}$  son sous-espace semi-hilbertien associé, on note  $T_{\mathcal{S}/\mathcal{N}}$  le noyau hilbertien associé à  $\mathcal{S}/\mathcal{N}$  et  $\pi$  l'application quotient canonique de  $E$  dans  $E/\mathcal{N}$ .

On rappelle que  ${}^t\pi : (E/\mathcal{N})' \rightarrow E'$  vérifie entre autres  $\forall \eta \in (E/\mathcal{N})'$ ,  ${}^t\pi\eta \in \mathcal{N}^0$ , les espaces  $(E/\mathcal{N})'$  et  $\mathcal{N}^0$  étant en fait isomorphes (l'isomorphisme en question est  ${}^t\pi$ ). Précisons que par la suite, notamment durant la Section 4.4, nous serons amenés à considérer l'isomorphisme  ${}^t\pi^{-1} : \mathcal{N}^0 \rightarrow (E/\mathcal{N})'$ .

On note enfin  $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{S}/\mathcal{N}}$  le produit scalaire de  $\mathcal{S}/\mathcal{N}$ .

**Proposition 4.5**

Soit  $\Gamma \in \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L}_s^+(E)$  et soit  $\mathcal{S}$  son sous-espace semi-hilbertien associé alors

$$T_{\mathcal{S}/\mathcal{N}} = \pi\Gamma{}^t\pi.$$

**Démonstration :** Soit  $s \in \mathcal{S}$  et  $\eta \in (E/\mathcal{N})'$ . On a donc  ${}^t\pi\eta \in \mathcal{N}^0$  et ainsi

$$\begin{aligned} (\pi\Gamma{}^t\pi\eta|\pi s)_{\mathcal{S}/\mathcal{N}} &= (\Gamma{}^t\pi\eta|s)_{\mathcal{S}} = \langle s, {}^t\pi\eta \rangle_{E,E'} \\ &= \langle \pi s, \eta \rangle_{E/\mathcal{N},(E/\mathcal{N})'} = (T_{\mathcal{S}/\mathcal{N}}\eta|\pi s)_{\mathcal{S}/\mathcal{N}}. \end{aligned}$$

■

On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & E' \supset \mathcal{N}^0 & \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{S} \subset E \\ & \nearrow {}^t\pi & \searrow \pi \\ (E/\mathcal{N})' & \xrightarrow{T_{\mathcal{S}/\mathcal{N}}} & \mathcal{S}/\mathcal{N} \subset E/\mathcal{N} \end{array}$$

**Théorème 4.2**

Soit  $\mathcal{S} \in \text{Hilb}(E; \mathcal{N})$ . Il existe  $\Gamma \in \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L}_s^+(E)$  tel que

$$\forall s \in \mathcal{S}, \forall e' \in \mathcal{N}^0, \langle s, e' \rangle_{E,E'} = (s|\Gamma e')_{\mathcal{S}}. \quad (4.6)$$

$\Gamma$  est alors appelé **noyau semi-hilbertien associé** à  $\mathcal{S}$ . Un tel noyau n'est en général pas unique.

**Démonstration :** Soit  $\mathcal{S} \in \text{Hilb}(E; \mathcal{N})$ , on note  $T_{\mathcal{S}/\mathcal{N}}$  le noyau hilbertien associé à  $\mathcal{S}/\mathcal{N}$ . Soit  $\mathfrak{p}$  une projection sur l'espace nul et  $\mathfrak{q} = id_E - \mathfrak{p}$ , on a

alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{S} \subset E & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{S}/\mathcal{N} \subset E/\mathcal{N} \\
 & \searrow \mathfrak{q} & \uparrow \iota^{-1} \\
 & & \mathcal{H}^{\mathfrak{q}} \subset E
 \end{array}
 \quad (4.7)$$

On rappelle que l'on munit  $\mathcal{H}^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}(\mathcal{S})$  d'une structure hilbertienne en posant, pour  $u$  et  $v \in \mathcal{S}$ ,

$$(\mathfrak{q}u|\mathfrak{q}v)_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}} = (u|v)_{\mathcal{S}}.$$

$\mathcal{H}^{\mathfrak{q}} \in \text{Hilb}(E)$ , en effet :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H}^{\mathfrak{q}} & \xrightarrow{\quad} & E \\
 \downarrow \iota^{-1} & & \uparrow \iota \\
 \mathcal{S}/\mathcal{N} & \xrightarrow{\quad} & E/\mathcal{N}
 \end{array}$$

On note  $T_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}}$  le noyau hilbertien de  $\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$ .  $T_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}} \in \mathcal{N}\text{-}\mathcal{L}_s^+(E)$  et  $\forall s \in \mathcal{S}, \forall e' \in \mathcal{N}^0$ ,

$$\begin{aligned}
 (s|T_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}}e')_{\mathcal{S}} &= (\mathfrak{q}s|\mathfrak{q}T_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}}e')_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}} = (\mathfrak{q}s|T_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}}e')_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}} \\
 &= \langle \mathfrak{q}s, e' \rangle_{E,E'} = \langle s, {}^t\mathfrak{q}e' \rangle_{E,E'} = \langle s, e' \rangle_{E,E'}.
 \end{aligned}$$

$T_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}}$  vérifie donc les propriétés requises et le fait que la projection sur l'espace nul  $\mathfrak{p}$  soit choisie de façon arbitraire nous assure déjà du caractère non-unique d'un tel noyau. Pour finir d'argumenter en ce sens, remarquons que si  $\Gamma$  est un noyau semi-hilbertien associé à  $\mathcal{S}$ , alors pour  $n \in \mathcal{N}$ , le noyau  $\Gamma^n$  défini par

$$\forall e' \in E', \Gamma^n e' = \Gamma e' + n \langle n, e' \rangle_{E,E'} \quad (4.8)$$

est aussi un noyau semi-hilbertien associé à  $\mathcal{S}$  (noyau symétrique et  $\mathcal{N}$ -conditionnellement positif). Nous discutons des raisons de ce choix dans la Remarque 4.3. ■

**Remarque 4.3 :** Soit  $\mathcal{S} \in \text{Hilb}(E; \mathcal{N})$  et  $\Gamma$  un noyau semi-hilbertien lui étant associé. Pour tout  $\eta \in E''$  et  $n \in \mathcal{N}$ , l'application

$$\forall e' \in E', \Gamma^{\eta,n} e' = \Gamma s e' + n \langle e', \eta \rangle_{E',E''}$$

est un noyau relatif à  $E$  (application linéaire continue de  $E'$  sur  $E$ ) et vérifie la propriété de représentation pour les éléments de  $\mathcal{N}^0$ , c'est-à-dire l'équation (4.6), cette condition assurant d'ailleurs la condition de  $\mathcal{N}$ -conditionnelle positivité. Néanmoins,  $\Gamma^{\eta,n}$  n'est en général pas symétrique (les cas  $\eta = 0$

ou  $n = 0$  n'ont évidemment aucun intérêt), par contre elle le sera pour  $\eta = n \in E \subset E''$ , d'où l'expression (4.8).

Pour encore illustrer la très grande variété de noyaux associés à un même sous-espace semi-hilbertien, remarquons par exemple que si  $\mathcal{H}_{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}$  est un sous-espace hilbertien de  $E$  de noyau  $T_{\mathcal{H}_{\mathcal{N}}}$ , alors  $\Gamma + T_{\mathcal{H}_{\mathcal{N}}}$  est un noyau semi-hilbertien associé à  $\mathcal{S}$ . ■

**Remarque 4.4 :** L'application  $\iota : E/\mathcal{N} \rightarrow E$  apparaissant dans le diagramme (4.7) associe à tout élément de  $E/\mathcal{N}$  un *représentant de la classe d'équivalence* considérée. Notons que l'on peut identifier l'application  $\iota^{-1}$  à la restriction de  $\pi$  à  $\mathfrak{q}(E)$ . Remarquons que  $\iota$  apparaît également dans l'équation (4.4) de la preuve du Théorème 4.1. ■

### 4.3 Un exemple

Soit  $E = \mathbb{R}^{[0,1]}$  muni de la topologie de la convergence simple, on rappelle que le dual topologique  $E'$  de  $E$  est l'espace des mesure à support finie sur  $[0, 1]$ .  $E'$  est alors engendré par les  $\delta_x$ ,  $x \in E'$  avec  $\delta_x$  la mesure de Dirac au point  $x$  définie par, pour  $f \in E$ ,  $\langle f, \delta_x \rangle_{E, E'} = f(x)$ .

Soit  $\mathcal{S} = H^1$ , où

$$H^1 = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \exists f' \in L^2([0, 1]), \right. \\ \left. \exists \varkappa \in \mathbb{R}, \text{ tq } \forall x \in [0, 1], f(x) = \varkappa + \int_0^x f'(t)dt \right\}, \quad (4.9)$$

(la fonction  $f$  considérée vérifie alors  $f(0) = \varkappa$ ). On munit  $\mathcal{S} = H^1$  du semi-produit scalaire

$$\forall f \text{ et } g \in \mathcal{S}, (f|g)_{\mathcal{S}} = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

$\mathcal{S}$ ,  $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{S}}$  est un espace semi-hilbertien dont l'espace nul  $\mathcal{N}$  est l'ensemble des fonctions constantes sur  $[0, 1]$  (ensemble des fonctions dont la dérivée est partout nulle). On notera  $\mathbf{1}$  la fonction constante égale à 1,  $\mathcal{N}$  est donc l'espace vectoriel réel engendré par  $\mathbf{1}$ .

$\mathcal{N}^0$  est alors l'espace vectoriel engendré par les *mesures d'accroissement*, c'est-à-dire par les éléments du type  $\delta_x - \delta_t$ , avec  $x$  et  $t \in [0, 1]$ .

Pour  $\alpha \in [0, 1]$  et  $\delta_\alpha \in E'$  la Dirac en  $\alpha$ , on définit la projection sur l'espace nul  $\mathfrak{p}$  suivante,

$$\forall f \in E, \mathfrak{p}f = \mathbf{1} \langle f, \delta_\alpha \rangle_{E, E'}.$$

Soit  $\mathfrak{q} = id_E - \mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{q}$  est la projection de  $E$  sur le s.e.v. des fonctions de  $E$  s'annulant en  $\alpha$ . L'espace de Hilbert  $\mathfrak{q}(\mathcal{S}) = \mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$  est ainsi l'espace  $H_\alpha^1$  étudié dans la Remarque 1.6 de la Section 1.5.

$\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$  étant un sous-espace hilbertien de  $\mathfrak{q}(E)$ ,  $\mathcal{S} = H^1 \in \text{Hilb}(E; \mathcal{N})$ . Les noyaux  $T_{H_\alpha^1}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , sont donc des noyaux semi-hilbertiens associés à  $\mathcal{S}$ .

Un autre exemple de noyau semi-hilbertien associé à  $\mathcal{S} = H^1$  est le noyau  $\Gamma$  donné par

$$\forall x \text{ et } t \in [0, 1], \langle \Gamma \delta_x, \delta_t \rangle_{E, E'} = -\frac{1}{2} |x - t|.$$

$\Gamma$  est symétrique et vérifie la propriété de représentation pour les éléments de  $\mathcal{N}^0$  (ce qui garantit donc sa  $\mathcal{N}$ -conditionnelle positivité). On a bien en effet pour tout  $x$  et  $t \in [0, 1]$ ,

$$\forall f \in H^1, (\Gamma(\delta_x - \delta_t)|f)_{\mathcal{S}} = f(x) - f(t).$$

$\Gamma$  est donc bien un noyau semi-hilbertien associé à  $\mathcal{S} = H^1$ .

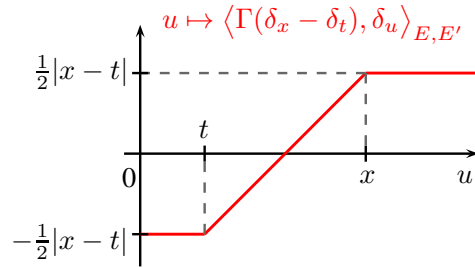


FIGURE 4.1 – Tracé de  $u \mapsto \langle \Gamma(\delta_x - \delta_t), \delta_u \rangle_{E, E'}$ .

**Remarque 4.5 :** Contrairement aux noyaux  $T_{H_\alpha^1}$ ,  $\Gamma$  n'est pas un noyau hilbertien, c'est-à-dire  $\Gamma \notin \mathcal{L}_s^+(E)$ . On remarque en effet que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $\langle \Gamma \delta_x, \delta_x \rangle_{E, E'} = 0$ . Ainsi, si  $\Gamma$  était le noyau hilbertien d'un élément de  $\text{Hilb}(E)$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz impliquerait que les éléments du Hilbert en question soient tous identiquement nuls. ■

**Remarque 4.6 :** On remarque que, pour  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$\forall x \in [0, 1], \forall f \in \mathcal{S}, (T_{H_\alpha^1} \delta_x | f)_{\mathcal{S}} = f(x) - f(\alpha).$$

Quant au noyau  $\Gamma$ , ce dernier vérifie

$$\forall x \in [0, 1], \forall f \in \mathcal{S}, (\Gamma\delta_x|f)_{\mathcal{S}} = f(x) - \frac{1}{2}(f(0) + f(1)).$$

■

## 4.4 Interpolation optimale dans les sous-espaces semi-hilbertiens

Nous nous intéressons maintenant au problème de l'interpolation optimale dans un sous-espace semi-hilbertien. La Section 4.4.1 aborde les questions d'existence et d'unicité de tels interpolateurs optimaux (voir [Duc77, §.2] pour le cas où  $M$  et  $\mathcal{N}$  sont de dimension finie) et en donne également une caractérisation. La Section 4.4.2 traite du cas fini ( $M$  et  $\mathcal{N}$  de dimension finie), on construit l'interpolateur optimal (dans le cas où il est unique) à partir de la résolution d'un système d'équations linéaires.

### 4.4.1 Existence, unicité et caractérisation

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -e.v.t.l.c. quasi-complet et  $E'$  sont dual topologique.

#### Proposition 4.6

*Soit  $M$  un sous-espace vectoriel de  $E'$  et soit  $\varphi \in \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S} \in \text{Hilb}(E; \mathcal{N})$ . Il existe un (ou plusieurs) interpolateur de  $\varphi$  pour  $M$  de **semi-norme minimale**, l'ensemble de ces interpolateurs appartenant à la même classe d'équivalence.*

*Plus précisément, si on note  $\pi(\Sigma_{\varphi, M})$  la classe optimale considérée, alors  $\pi(\Sigma_{\varphi, M})$  est l'interpolateur optimal, dans le Hilbert  $\mathcal{S}/\mathcal{N}$ , de  $\pi(\varphi)$  pour le s.e.v.  ${}^t\pi^{-1}(M \cap \mathcal{N}^0)$  de  $(E/\mathcal{N})'$ . Ainsi, si  $\Gamma$  est un noyau semi-hilbertien associé à  $\mathcal{S}$ , alors  $\pi(\Sigma_{\varphi, M})$  est le projeté orthogonal, dans  $\mathcal{S}/\mathcal{N}$ , de  $\pi(\varphi)$  sur*

$$\overline{T_{\mathcal{S}/\mathcal{N}}{}^t\pi^{-1}(M \cap \mathcal{N}^0)}^{\mathcal{S}/\mathcal{N}} = \overline{\pi\Gamma(M \cap \mathcal{N}^0)}^{\mathcal{S}/\mathcal{N}}. \quad (4.10)$$

**Démonstration :** L'ensemble des éléments interpolants de  $\mathcal{S}$  est  $\varphi + (M^0 \cap \mathcal{S})$ . Alors,  $\pi(\varphi + (M^0 \cap \mathcal{S}))$  est l'ensemble des classes d'équivalences contenant au moins un élément interpolant. On a :

$$\pi(\varphi + (M^0 \cap \mathcal{S})) = \pi(\varphi) + \pi(M^0 \cap \mathcal{S}) \text{ et}$$



$$\pi(M^0 \cap \mathcal{S}) = \pi(M^0) \cap \pi(\mathcal{S}) = \pi(M^0) \cap \mathcal{S}/\mathcal{N}.$$

$M^0$  est fermé dans  $E$ , donc, par définition de la topologie quotient,  $\pi(M^0)$  est fermé dans  $E/\mathcal{N}$  et  $\pi(M^0) \cap \mathcal{S}/\mathcal{N}$  est alors fermé dans  $\mathcal{S}/\mathcal{N}$ . Ainsi,  $\pi(\varphi) + \pi(M^0 \cap \mathcal{S})$  est convexe, fermé et non vide dans le Hilbert  $\mathcal{S}/\mathcal{N}$ , et admet alors un élément (une classe d'équivalence) de norme minimale. Les éléments de  $\mathcal{S}$  interpolants de semi-norme minimale sont alors le ou les éléments interpolants appartenant à cette classe d'équivalence (on rappelle que par construction, la classe en question contient au moins un élément interpolant).

Remarquons alors que

$$\pi(M^0) = \left( {}^t\pi^{-1}(M \cap \mathcal{N}^0) \right)^0. \quad (4.11)$$

Ainsi,

$$\pi(\varphi) + \left( \pi(M^0) \cap \mathcal{S}/\mathcal{N} \right) = \pi(\varphi) + \left( ({}^t\pi^{-1}(M \cap \mathcal{N}^0))^0 \cap \mathcal{S}/\mathcal{N} \right), \quad (4.12)$$

ce qui, d'après les résultats de la Section 2.2, nous montre bien que  $\pi(\Sigma_{\varphi, M})$  est l'interpolateur optimal, dans le Hilbert  $\mathcal{S}/\mathcal{N}$ , de  $\pi(\varphi)$  pour le s.e.v.  ${}^t\pi^{-1}(M \cap \mathcal{N}^0)$  de  $(E/\mathcal{N})'$ .  $\pi(\Sigma_{\varphi, M})$  est donc, toujours d'après les propriétés de l'interpolation optimale dans les sous-espaces hilbertiens, le projeté orthogonal, dans  $\mathcal{S}/\mathcal{N}$ , de  $\pi(\varphi)$  sur  $\overline{T_{\mathcal{S}/\mathcal{N}} {}^t\pi^{-1}(M \cap \mathcal{N}^0)}^{\mathcal{S}/\mathcal{N}}$ , le second terme de l'équation (4.10) provenant de la relation  $T_{\mathcal{S}/\mathcal{N}} = \pi\Gamma^t\pi$  (Proposition 4.5). ■

La Proposition 4.6 nous permet en fait d'aller plus loin dans l'étude des interpolateurs optimaux, en nous indiquant le s.e.v. de  $\mathcal{S}$  dans le quel ces interpolateurs se trouvent. Simplement, étant donné que nous considérons, comme au Chapitre 2, des s.e.v.  $M$  de  $E'$  qui ne sont pas nécessairement de dimension finie, certains ensembles se doivent d'être complétés.

Soit  $\mathcal{S} \in \text{Hilb}(E; \mathcal{N})$ ,  $\Gamma$  un de ses noyaux semi-hilbertiens associés et  $M$  un s.e.v. de  $E'$ . Enfin, soit  $\mathfrak{p}$  une projection sur l'espace nul et  $\mathfrak{q} = id_E - \mathfrak{p}$ . D'après la Proposition 4.3

$$\mathcal{N} + \Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M) = \mathcal{N} \oplus \Gamma^{\mathfrak{q}}(M).$$

On note  $\mathcal{H}_M^{\mathfrak{q}} = \overline{\Gamma^{\mathfrak{q}}(M)}^{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}}$  l'adhérence de  $\Gamma^{\mathfrak{q}}(M)$  dans le Hilbert  $\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}$ . La Proposition 4.4 nous assure que le terme

$$\mathcal{N} \oplus \mathcal{H}_M^{\mathfrak{q}} \subset \mathcal{S} \quad (4.13)$$

définit bien une somme directe. On notera alors

$$\overline{\mathcal{N} + \Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M)}^{\mathcal{S}} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{H}_M^q. \quad (4.14)$$

Notons que, pour les mêmes raisons que celles entraînant l'unicité du sous-espace semi-hilbertien associé à un noyau de l'ensemble  $\mathcal{N}\text{-}\mathcal{L}_s^+(E)$  (voir le Théorème 4.1, plus particulièrement la partie de la preuve consacrée à l'unicité ainsi que les Propositions 4.4 et 4.3), la définition apparaissant dans l'équation (4.14) ne dépend pas du choix de la projection  $\mathfrak{p}$ .

#### Corollaire 4.1

*On se place dans le cadre de la Proposition 4.6 et on considère la notation introduite par l'équation (4.14). Les interpolateurs optimaux de  $\varphi$  pour  $M$  sont les éléments interpolants du s.e.v. de  $\mathcal{S}$*

$$\overline{\mathcal{N} + \Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M)}^{\mathcal{S}}.$$

**Démonstration :** Il suffit de remarquer que, par définition de la topologie quotient et par isométrie entre  $\mathcal{S}/\mathcal{N}$  et  $\mathcal{H}^q$ ,

$$\pi \left( \overline{\mathcal{N} + \Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M)}^{\mathcal{S}} \right) = \overline{\pi \Gamma(M \cap \mathcal{N}^0)}^{\mathcal{S}/\mathcal{N}}. \quad \blacksquare$$

#### Proposition 4.7

*Soit  $M$  un sous-espace vectoriel de  $E'$  et, soit  $\varphi \in \mathcal{S}$  avec  $\mathcal{S} \in \text{Hilb}(E; \mathcal{N})$ ; l'interpolateur de semi-norme minimale de  $\varphi$  pour  $M$  est unique si et seulement si  $M^0 \cap \mathcal{N} = \{0\}$ .*

**Démonstration :** Il faut simplement remarquer que d'après la proposition qui précède (Proposition 4.6), deux éléments interpolants de semi-norme minimale appartiennent à la même classe d'équivalence et diffèrent donc d'un élément de  $\mathcal{N}$ . De plus, deux éléments interpolants diffèrent également obligatoirement d'un élément de  $M^0$ .

On obtient ainsi que deux interpolateurs optimaux diffèrent nécessairement d'un élément de  $M^0 \cap \mathcal{N}$ , d'où le résultat. ■

#### Définition 4.3

*Un sous-espace  $M$  de  $E'$  vérifiant  $M^0 \cap \mathcal{N} = \{0\}$  est dit  $\mathcal{N}$ -**unisolvant**.*

Par la suite, lorsque  $M$  sera un ensemble  $\mathcal{N}$ -unisolvant, on notera  $\Sigma_{\varphi, M}$  l'unique interpolateur optimal de  $\varphi$  pour  $M$ .

### Proposition 4.8

Soit  $\mathcal{S} \in \text{Hilb}(E; \mathcal{N})$  et  $M$  un sous-espace  $\mathcal{N}$ -unisolvant de  $E'$ , soit  $\Gamma$  un des noyaux semi-hilbertiens associés à  $\mathcal{S}$ . Tout élément  $s \in \overline{\mathcal{N} + \Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M)}^{\mathcal{S}}$  est défini de manière unique par ses valeurs sur  $M$ . En d'autres termes, si  $f$  et  $g \in \overline{\mathcal{N} + \Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M)}^{\mathcal{S}}$  sont tels que  $f - g \in M^0$ , alors  $f = g$ .

**Démonstration :** Soit  $f$  et  $g \in \overline{\mathcal{N} + \Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M)}^{\mathcal{S}} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{H}_M^{\mathfrak{q}}$  où  $\mathfrak{p}$  est une projection sur l'espace nul. On a donc  $f - g \in \mathcal{N} \oplus \mathcal{H}_M^{\mathfrak{q}}$  et il existe ainsi un unique couple  $(n, h)$  avec  $n \in \mathcal{N}$  et  $h \in \mathcal{H}_M^{\mathfrak{q}}$  tel que  $f - g = n + h$ . Par hypothèse, on a également  $f - g \in M^0$ . Or, comme  $M$  est  $\mathcal{N}$ -unisolvant, on a  $M^0 \cap \mathcal{N} = \{0\}$  et donc

$$f - g = h \in \mathcal{H}_M^{\mathfrak{q}} = \left( \Gamma^{\mathfrak{q}}(M)^{\perp_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}}} \right)^{\perp_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}}}.$$

On conclut en remarquant que  $M^0 \cap \mathcal{H}^{\mathfrak{q}} = \Gamma^{\mathfrak{q}}(M)^{\perp_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}}}$ , ce qui implique que  $f - g = 0$ . ■

### Théorème 4.3

Soit  $\varphi \in \mathcal{S}$  avec  $\mathcal{S} \in \text{Hilb}(E; \mathcal{N})$ , soit  $M$  un sous-espace  $\mathcal{N}$ -unisolvant de  $E'$  et soit  $\Gamma$  un des noyaux semi-hilbertiens associés à  $\mathcal{S}$ . L'interpolateur optimal  $\Sigma_{\varphi, M}$  de  $\varphi$  pour  $M$  est l'unique élément interpolant  $\varphi$  pour  $M$  de l'ensemble  $\overline{\mathcal{N} + \Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M)}^{\mathcal{S}}$ .

**Démonstration :** Il suffit simplement de combiner les résultats du Corollaire 4.1 et de la Proposition 4.8. ■

**Remarque 4.7 :** Soit  $\mathcal{S} \in \text{Hilb}(E; \mathcal{N})$  et  $M$  un sous-espace  $\mathcal{N}$ -unisolvant de  $E'$ . Soit  $\mathfrak{p}$  une projection sur l'espace nul et  $\mathcal{H}^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}(\mathcal{S})$ . Notons  $\mathcal{H}_0^{\mathfrak{q}} = \mathcal{H}^{\mathfrak{q}} \cap M^0$  et  $\mathcal{H}_M^{\mathfrak{q}} = (\mathcal{H}_0^{\mathfrak{q}})^{\perp_{\mathcal{H}^{\mathfrak{q}}}}$ . On a alors

$$\mathcal{S} \cap M^0 = \mathcal{H}_0^{\mathfrak{q}} \oplus^{\perp} \left( (\mathcal{N} \oplus \mathcal{H}_M^{\mathfrak{q}}) \cap M^0 \right) \text{ (orthogonalité dans } \mathcal{H}^{\mathfrak{q}}). \quad (4.15) \quad \blacksquare$$

#### 4.4.2 Cas fini

Lorsque  $M$  et  $\mathcal{N}$  sont de dimension finie, on peut aisément donner une expression de l'interpolateur optimal (on suppose que  $M$  est  $\mathcal{N}$ -unisolvant) à

partir du Théorème (4.3), le problème d'interpolation se ramenant dans ce cas à la résolution d'un système d'équations linéaires. C'est ce que nous allons illustrer dans ce qui suit. Notons aussi que le mode de construction que nous allons présenter montre l'intérêt de considérer les noyaux semi-hilbertiens comme application définie sur  $E'$ , et non simplement sur  $\mathcal{N}^0$ .

Soit  $\{g_1, \dots, g_p\}$ ,  $p \in \mathbb{N}$  une base de  $\mathcal{N}$  et soit  $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , une base de  $M$ , avec  $M$  un ensemble  $\mathcal{N}$ -unisolvant. On a ainsi en particulier  $n \geq p$  (condition nécessaire pour que  $M$  soit  $\mathcal{N}$ -unisolvant). On reprend les notations de type matriciel que nous avons déjà utilisées durant la Section 2.5 ainsi que dans la Remarque 4.1. On note  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_p)^T$ ,  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$  et on pose

$$\mathbf{K} = \langle \Gamma \boldsymbol{\mu} | \boldsymbol{\mu}^T \rangle \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{X} = \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{g}^T \rangle \in \mathbb{R}^{n \times p} \text{ et } \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^T & 0 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que  $\Gamma \boldsymbol{\mu} = (\Gamma \mu_1, \dots, \Gamma \mu_n)^T$ .

Soit  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ , on a  $\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\alpha} \in M$  et on remarque facilement que

$$\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{N}^0 \text{ ssi } \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\alpha} \rangle = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\alpha} = 0. \quad (4.16)$$

D'après le Théorème 4.3,  $\Sigma_{\varphi, M}$  est l'unique interpolateur de  $\varphi$  pour  $M$  appartenant à  $\overline{\mathcal{N} + \Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M)}^{\mathcal{S}}$  (qui dans notre cas est égal à  $\mathcal{N} + \Gamma(M \cap \mathcal{N}^0)$ ,  $M$  étant de dimension finie).

Considérons alors  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$ . L'élément  $\mathbf{g}^T \boldsymbol{\beta} + \Gamma \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\alpha} \in \overline{\mathcal{N} + \Gamma(\mathcal{N}^0 \cap M)}^{\mathcal{S}}$  interpole  $\varphi$  pour  $M$  ssi

$$\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{g}^T \boldsymbol{\beta} + \Gamma \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\alpha} \rangle = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle. \quad (4.17)$$

Ainsi, en regroupant les équations (4.16) et (4.17), on obtient que la construction de l'interpolateur optimal de  $\varphi$  pour  $M$  est équivalente à la résolution du système

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Admettons que la matrice  $\mathbf{Q}$  soit inversible (pour cela,  $\mathbf{K}$  doit être inversible et  $\mathbf{X}$  de rang plein). Une formule d'inversion par bloc donne alors :

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} & \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \\ (\mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} & -(\mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \end{pmatrix}$$

On note  $\mathbf{y} = \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle$ . On obtient ainsi les solutions

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{y} \text{ et } \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}), \quad (4.19)$$

ce qui nous donne finalement

$$\Sigma_{\varphi,M} = \mathbf{g}^T \boldsymbol{\beta} + \Gamma \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\alpha}, \quad (4.20)$$

où les valeurs de  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\beta}$  sont données par l'équation (4.19).

**Un cas particulier.** Restons dans le cadre étudié précédemment (interpolation optimale dans un sous-espace semi-hilbertien  $\mathcal{S}$ ), mais supposons de plus que le noyau semi-hilbertien  $\Gamma$  associé à  $\mathcal{S}$  et tel que  $\Gamma \in \mathcal{L}_s^+(E)$  (la matrice  $\mathbf{K}$  étant ainsi symétrique et définie positive). On souhaite plus précisément que  $\Gamma$  soit un noyau hilbertien associé à un sous-espace hilbertien de  $E$  de type  $\mathcal{H}^q$  (voir la Remarque 4.7), ainsi,  $\mathcal{S} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{H}^q$ .

Pour tout  $\tilde{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbb{R}^p$ ,

$$h_{\tilde{\boldsymbol{\beta}}} = \mathbf{g}^T \tilde{\boldsymbol{\beta}} + \Gamma \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \tilde{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{g} - \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} \Gamma \boldsymbol{\mu})^T \tilde{\boldsymbol{\beta}} + \Gamma \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{y} \quad (4.21)$$

interpole  $\varphi$  pour  $M$ . En effet, le terme  $\Gamma \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{y}$  correspond à un interpolateur optimal classique (du même type que ceux étudiés par exemple en Section 2.5) et

$$\forall \tilde{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbb{R}^p, (\mathbf{g} - \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} \Gamma \boldsymbol{\mu})^T \tilde{\boldsymbol{\beta}} \in M^0. \quad (4.22)$$

Le minimum de

$$\left\| \Gamma \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \tilde{\boldsymbol{\beta}}) \right\|_{\mathcal{H}^q}^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{X} \tilde{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \tilde{\boldsymbol{\beta}}) \quad (4.23)$$

est atteint pour  $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{y}$ .

Le second terme de l'équation (4.23) montre que le vecteur

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{y}$$

correspond à une estimation par moindres carrés généralisés (voir [AAC92]).

L'interpolateur optimal  $\Sigma_{\varphi,M}$  de l'équation (4.20) coïncide avec le meilleur prédicteur du modèle de *krigeage universel* correspondant, voir [Mat69]. Comme l'indique l'équation (4.21), on peut récrire  $\Sigma_{\varphi,M}$  sous la forme

$$\Sigma_{\varphi,M} = (\mathbf{g} - \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} \Gamma \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\beta} + \Gamma \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{y}.$$

Le terme

$$(\mathbf{g} - \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} \Gamma \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\beta}$$

est appelé *correcteur de dérive* (on trouve ce terme ainsi qu'une discussion sur la décomposition en question dans [Mat69, page 33]).

L'espace vectoriel engendré par les composantes du vecteur  $\mathbf{g} - \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} \Gamma \boldsymbol{\mu}$  correspond à  $(\mathcal{N} \oplus \mathcal{H}_M^q) \cap M^0$ . La covariance conditionnelle des modèles de krigage universel se déduit de constatations analogues à celles faites dans la Remarque 4.7.

# Conclusion et perceptives

Cette thèse est consacrée à l'étude des méthodes d'interpolation à noyaux dans le cadre général des espaces vectoriels topologiques. Nous proposons un rappel de certains résultats de la théorie des *sous-espaces hilbertiens* de L. Schwartz et étudions le problème de l'*interpolation optimale* dans cette classe d'espaces. Nous présentons également la théorie des processus gaussiens en nous basant sur la notion d'*espaces de Wiener abstraits* et décrivons alors les liens qui existent entre l'interpolation optimale et le conditionnement des processus gaussiens.

En plus de ce travail de synthèse, nous apportons d'un point de vue pratique et théorique deux contributions originales. La première vise à montrer la possibilité d'élargir les champs d'applications des méthodes à noyaux à l'aide de techniques spectrales. Nous montrons ainsi qu'il est en pratique possible d'aborder des problèmes d'interpolation relatifs à un nombre infini de données (le sous-espace  $\mathcal{H}_M$  devant néanmoins être séparable), ouvrant ainsi la voie à la prise en compte d'informations de type "conditions aux limites". La troncature du spectre introduit plus généralement une technique originale pour la construction d'éléments interpolants approchés. Le choix de la mesure (ainsi que la paramétrisation) utilisée pour la définition de l'opérateur intégral induit une fonction d'importance sur l'ensemble des données. Elle permet un contrôle local de la précision de l'approximation dans le rendu des données. Les exemples développés aux sections 2.6 et 3.3 tendent à renforcer le bien fondé de notre raisonnement. Ces derniers sont de plus en eux-mêmes également théoriquement intéressants.

Notons que la généralisation de l'utilisation de notre approche est encore sujette à de nombreuses études, comme par exemple celle du comportement des formules de représentations spectrales des Théorèmes 2.1 et 2.2 quand ces dernières sont basées sur des *éléments propres numériquement approchés*. Il n'est en effet pas réaliste de penser que la décomposition spectrale des opérateurs utilisés soit en pratique toujours connue de manière analytique. Les questions concernant les techniques d'approximation spectrale à privilégier en

vue de les combiner à notre approche doivent donc être abordées. Une comparaison des résultats obtenus à l'aide de techniques spectrales ou de diverses méthodes de discrétisation de l'ensemble des données doit enfin être menée afin de déterminer dans quels cas privilégier une approche à l'autre. Un autre problème est celui de l'estimation des paramètres du noyau (et plus généralement du choix du noyau lui-même) quand ce type de données ("conditions aux limites") est considéré. Citons aussi l'étude des protocoles de mélange entre données représentées spectralement et données classiques (un tel couplage est par exemple présenté à titre d'illustration dans la figure 2.6) ainsi que l'utilisation de l'approche spectrale pour des modèles d'approximation. L'utilisation d'arguments spectraux semble également susceptible d'amener vers des résultats en planification d'expériences.

Le dernier apport de notre travail est la tentative de proposer un exposé relativement complet autour de la notion de sous-espaces semi-hilbertiens de J. Duchon. Nous établissons les résultats qui lient ces espaces à la classe des noyaux symétriques conditionnellement positifs. Nous rappelons et précisons alors les résultats concernant l'interpolation optimale dans les sous-espaces semi-hilbertiens. Comme le fait par exemple remarquer la preuve du théorème 4.2, l'ensemble des noyaux symétriques conditionnellement positifs associés à un sous-espace semi-hilbertien donné contient toujours des noyaux symétriques positifs, on pourrait dès lors s'interroger sur le réel intérêt pratique de cette classe plus générale de noyaux. Nous pensons que leur intérêt peut en partie résider dans le fait qu'à problème d'interpolation dans un sous-espace semi-hilbertien donné, un choix judicieux du noyau à utiliser (*noyau  $M$ -adapté* ou même  $\{M, \varphi\}$ -*adapté* construit à partir des données) est susceptible de diminuer le coût numérique de la construction de l'interpolateur en permettant de ne pas avoir à estimer le terme de tendance. Remarquons pour terminer que l'adaptation de notre approche spectrale au cas semi-hilbertien ainsi que l'étude détaillée des processus aléatoires associés à la notion de noyaux symétriques conditionnellement positifs (processus aléatoires intrinsèques) sont également de possibles sujets à approfondir.



# Annexe A

## Détail de certains calculs

### A.1 Décomposition spectrale de l'opérateur intégral apparaissant dans la Section 2.6.1

Soit  $x = (r_x \cos \alpha_x, r_x \sin \alpha_x)$ , et  $y = (r_y \cos \alpha_y, r_y \sin \alpha_y)$  deux point du quadrant  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ ,

$$K(x, y) = e^{-\frac{\|x-y\|^2}{\sigma^2}} = e^{-\frac{1}{\sigma^2}(r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_y \cos(\alpha_x - \alpha_y))}.$$

Considérons l'opérateur intégrale suivant, pour  $x_{R,\alpha} = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$  et  $f \in L^2([0, 2\pi])$ ,

$$\mathcal{L}_\nu^D[f](\alpha) = \int_0^{2\pi} K(x_{R,\alpha}, s_{R,\theta}) f(\theta) R d\theta.$$

A l'aide d'un argument de périodicité, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} K(x, s_{R,\theta}) R d\theta &= R e^{-\frac{2R^2}{\sigma^2}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2R^2}{\sigma^2} \cos(\theta-\alpha)} d\theta \\ &= R e^{-\frac{2R^2}{\sigma^2}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2R^2}{\sigma^2} \cos \theta} d\theta, \end{aligned}$$

quantité ne dépendant pas de  $\alpha$ . Ainsi, la fonction  $\tilde{\phi}_0 : \alpha \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$  est fonction propre de  $\mathcal{L}_\nu^D$  et est associée à la valeur propre  $\lambda_0^D = R e^{-\frac{2R^2}{\sigma^2}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2R^2}{\sigma^2} \cos \theta} d\theta$ .

De la même façon, et en utilisant de plus un argument de parité, on obtient

$$\int_0^{2\pi} K(x, s_{R,\theta}) \cos(n\theta) R d\theta = R e^{-\frac{2R^2}{\sigma^2}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2R^2}{\sigma^2} \cos(\theta-\alpha)} \cos(n\theta) d\theta \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{\frac{2R^2}{\sigma^2} \cos(\theta-\alpha)} \cos(n\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} e^{\frac{2R^2}{\sigma^2} \cos(\omega)} \cos(n(\omega + \alpha)) d\omega \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\frac{2R^2}{\sigma^2} \cos(\omega)} (\cos(n\omega) \cos(n\alpha) - \sin(n\omega) \sin(n\alpha)) d\omega \\
&= \cos(n\alpha) \int_0^{2\pi} e^{\frac{2R^2}{\sigma^2} \cos(\omega)} \cos(n\omega) d\omega.
\end{aligned}$$

La fonction  $\tilde{\phi}_n^c : \alpha \mapsto \frac{\cos(n\alpha_x)}{\sqrt{\pi R}}$  est ainsi fonction propre de  $\mathcal{L}_\nu^D$  associée à la valeur propre  $\lambda_n^D = Re^{-\frac{2R^2}{\sigma^2}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2R^2}{\sigma^2} \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta$ .

Finalement, l'expression

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{\frac{2R^2}{\sigma^2} \cos(\theta-\alpha)} \sin(n\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} e^{\frac{2R^2}{\sigma^2} \cos(\omega)} \sin(n(\omega + \alpha)) d\omega \\
&= \sin(n\alpha) \int_0^{2\pi} e^{\frac{2R^2}{\sigma^2} \cos(\omega)} \cos(n\omega) d\omega
\end{aligned}$$

montre que  $\lambda_n^D$  est également associé à la fonction propre

$$\tilde{\phi}_n^s : \alpha \mapsto \frac{\sin(n\alpha_x)}{\sqrt{\pi R}}.$$

## A.2 Décomposition spectrale de l'opérateur intégrale apparaissant dans la Section 3.3.1

On reprend les notations introduites dans la Section 3.3.1. On a pour  $f \in L^2([0, \frac{\pi}{2}])$  et  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,

$$\begin{aligned}
L_\nu[f](\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \alpha \wedge \cos \theta) (\sin \alpha \wedge \sin \theta) f(\theta) d\theta \\
&= \int_0^\alpha \cos \alpha \sin \theta f(\theta) d\theta + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \cos \theta f(\theta) d\theta. \quad (\text{A.1})
\end{aligned}$$

Soit  $\phi \in L^2([0, \frac{\pi}{2}])$  et  $\lambda > 0$  tel que

$$L_\nu[\phi](\alpha) = \lambda \phi(\alpha). \quad (\text{A.2})$$

En combinant les équations (A.1) et (A.2), on obtient

$$\lambda \phi(\alpha) = \cos \alpha \int_0^\alpha \sin \theta \phi(\theta) d\theta + \sin \alpha \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \phi(\theta) d\theta. \quad (\text{A.3})$$

On remarque que l'on doit nécessairement avoir  $\phi(0) = \phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  et que  $\phi$  est dérivable, ainsi

$$\lambda\phi'(\alpha) = -\sin\alpha \int_0^\alpha \sin\theta\phi(\theta)d\theta + \cos\alpha \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\phi(\theta)d\theta.$$

Finalement,  $\phi$  est de classe  $C^\infty$  et est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante :

$$\text{for } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \lambda\phi''(\alpha) + (\lambda + 1)\phi(\alpha) = 0 \text{ avec } \phi(0) = \phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

### A.3 Formulation équivalente du Théorème 3.3

Soit  $(B_x)_{x \in \mathcal{X}}$  le drap brownien sur le quadrant  $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^2$  et soit  $\mathcal{S}$  une ligne de séparation vérifiant l'équation (3.22) avec  $\theta \mapsto r(\theta)$  de classe  $C^2$ ,

- pour  $x$  en dessus de la ligne de séparation, ( $x_1 = r(\alpha_1) \cos \alpha_1$ ,  $x_2 = r(\alpha_2) \sin \alpha_2$ ,  $\alpha_2 \leq \alpha_1$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathcal{S}) &= x_2 \left[ \frac{\sin \alpha_1}{r(\alpha_1)} - \cos \alpha_1 \frac{r'(\alpha_1)}{r(\alpha_1)^2} \right] B_{\alpha_1} \\ &\quad + x_1 \left[ \frac{\cos \alpha_2}{r(\alpha_2)} + \sin \alpha_2 \frac{r'(\alpha_2)}{r(\alpha_2)^2} \right] B_{\alpha_2} \\ &\quad - x_1 x_2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\theta) + \frac{1}{r(\theta)} \right] B_\theta \frac{d\theta}{r(\theta)}. \end{aligned}$$

- pour  $x$  au-dessus de la ligne de séparation ( $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ,  $\alpha_1 = 0$  si  $x_1 \geq r(0)$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$  si  $x_2 \geq r\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathcal{S}) &= \left[ \sin^2 \alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 \frac{r'(\alpha_1)}{r(\alpha_1)} \right] B_{\alpha_1} \\ &\quad + \left[ \cos^2 \alpha_2 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha_2 \frac{r'(\alpha_2)}{r(\alpha_2)} \right] B_{\alpha_2} \\ &\quad - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[ -\frac{3}{2} \sin 2\theta + 2 \cos 2\theta \frac{r'(\theta)}{r(\theta)} + \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{r''(\theta)}{r(\theta)} \right] B_\theta d\theta, \end{aligned}$$

avec, pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $r'(\theta) = \frac{d}{d\theta} r(\theta)$  et  $r''(\theta) = \frac{d^2}{d\theta^2} r(\theta)$ .

# Annexe B

## English version of Chapter 2

### B.1 Introduction

Let  $E$  be a separated topological real vector space and let  $E'$  be its topological dual. Let  $M$  be a linear subspace of  $E'$  and fixed  $\varphi \in E$ . An element  $f \in E$  is said to be an interpolator of  $\varphi$  for  $M$  if

$$\forall e' \in M, \langle f, e' \rangle_{E, E'} = \langle \varphi, e' \rangle_{E, E'}.$$

The interpolation theory is consisted of the characterization and the construction of such interpolators. If  $E$  is also locally convex and quasi-complete, L. Schwartz theory of Hilbert subspaces of  $E$  (see [Sch64]) gives an interesting and efficient framework for interpolation. Giving a Hilbert subspace  $\mathcal{H}$  of  $E$  and  $\varphi \in \mathcal{H} \subset E$ , one can easily characterize the set of all interpolators, in  $\mathcal{H}$ , of  $\varphi$  for  $M$  from orthogonal projections in  $\mathcal{H}$  (see Section B.2 for details). Let us also remark that interpolation in Hilbert subspaces and conditioning of Gaussian processes are intrinsically linked since the Hilbert structures appearing in each case are isometric (see [Jan97, RW06, Wah90] and Section 3.2). Nevertheless, we will not address the more general problem of conditioning in this chapter (we will however use Gaussian processes for illustration purposes).

In the most part of application cases, the set  $M$  is of finite dimension, which traduces the knowledge of a finite number of information about the unknown target element  $\varphi$ . To be more precise, we assume that we know the values  $\langle \varphi, e'_i \rangle_{E, E'}$  for  $1 \leq i \leq n$ , with  $e'_i \in E'$  ( $M$  is the linear subspace of  $E'$  spanned by the  $e'_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ). The interpolation problem is then associated with an orthogonal projection of  $\mathcal{H}$  onto a linear subspace  $\mathcal{H}_M$  of finite dimension.

Due to its finite character, the construction of interpolators can in this case be numerically achieved.

In the present work, we are particularly interested in cases in which the subspace  $\mathcal{H}_M$  is of infinite dimension (but separable), traducing the knowledge of an infinite number of (linearly independent) informations of type  $\langle \varphi, e' \rangle_{E, E'}$ ,  $e' \in M \subset E'$  ( $M$  is then necessarily of infinite dimension). For instance, if  $\mathcal{H}$  is composed of real-valued functions on a subspace  $\mathcal{X}$  of  $\mathbb{R}^d$ , such a situation would appear if one assumes that informations about the target function  $\varphi$  are known on continuous subsets of  $\mathcal{X}$  (for example, boundary values). Our aim is to give a way to numerically construct interpolators that take account of an infinite number of informations, or at least to approximate such interpolators (but without discretize the data set).

The first part (Section B.2) of this chapter is devoted to the description of the theoretical background of interpolation in Hilbert subspaces. In Section B.3, we present interpolation-adapted integral operators and discuss their properties. We next use the spectral decomposition of the those operators in order to construct interpolators. In Section B.5, we consider the case of a finite number of informations. We prove that the spectral representation formula for the optimal interpolation given in Section B.4 is equivalent to its usual expression. We conclude with an example of application, we consider a Hilbert subspace composed of continuously derivable real-valued functions on  $\mathbb{R}^2$  and show how one can enforce constraints to the normal derivatives and the values of interpolators on a circle. We illustrate our results with an example of their potential application in Gaussian process models (kriging models).

## B.2 Theoretical Background : Optimal interpolation in Hilbert subspaces

Let  $E$  be a quasi-complete, locally convex, separated topological real-vector space (see for instance [Rud95]) and denote  $E'$  its topological dual space. Let  $\mathcal{H}$  be a Hilbert subspace of  $E$ , we use the notation  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$ . We denote  $T_{\mathcal{H}}$  the Hilbert kernel naturally associated with  $\mathcal{H}$ . We remind that  $T_{\mathcal{H}} : E' \rightarrow \mathcal{H} \subset E$  verify

$$\forall h \in \mathcal{H}, \forall e' \in E', \langle h, e' \rangle_{E, E'} = (h | T_{\mathcal{H}} e')_{\mathcal{H}},$$

where  $(\cdot | \cdot)_{\mathcal{H}}$  is the inner product of  $\mathcal{H}$ .

Let  $M$  be a linear subspace of  $E'$  and denote

$$M^0 = \left\{ e \in E : \forall e' \in M, \langle e, e' \rangle_{E, E'} = 0 \right\}.$$

$M^0$  is a closed linear subspace of  $E$ , it contains all the elements of  $E$  that vanish on  $M$ . We then define the closed linear subspace  $\mathcal{H}_0 = M^0 \cap \mathcal{H} = T_{\mathcal{H}}(M)^\perp$  of  $\mathcal{H}$ , where  $T_{\mathcal{H}}(M)^\perp$  denotes the orthogonal, in  $\mathcal{H}$ , of  $T_{\mathcal{H}}(M)$ . Hence, for a fixed  $\varphi \in \mathcal{H}$ ,

$$\varphi + (M^0 \cap \mathcal{H})$$

is the set of all interpolators, in  $\mathcal{H}$ , of  $\varphi$  for  $M$ .

By definition,  $\varphi + (M^0 \cap \mathcal{H})$  is a non-empty, closed affine subspace of  $\mathcal{H}$ , hence convex. Thus  $\varphi + (M^0 \cap \mathcal{H})$  admits a minimal norm element, which we denote  $h_{\varphi, M}$  and call minimal norm interpolator, or optimal interpolator.  $h_{\varphi, M}$  is the orthogonal projection of 0 onto  $\varphi + (M^0 \cap \mathcal{H})$ . This previous result is essentially non-constructive : in practice, the ‘‘target element’’  $\varphi$  is unknown and the only available information (the data) is the values taken by  $\varphi$  on  $M$ , i.e. the  $\langle \varphi, e' \rangle_{E, E'}$  for  $e' \in M$ . So, in order to be able to construct the optimal interpolator from the data, we need an other characterization of  $h_{\varphi, M}$ .

By definition of the orthogonal projection,  $h_{\varphi, M}$  is orthogonal to  $\mathcal{H}_0$ , i.e.

$$h_{\varphi, M} \in \mathcal{H}_0^\perp = \left( T_{\mathcal{H}}(M)^\perp \right)^\perp = \overline{T_{\mathcal{H}}(M)}^{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_M,$$

with  $\mathcal{H}_M$  the closure, in  $\mathcal{H}$ , of the linear space spanned by  $T_{\mathcal{H}}e'$ ,  $e' \in M$ . Because of the orthogonal decomposition  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_M$ ,  $h_{\varphi, M}$  is the only interpolator, in  $\mathcal{H}_M$ , of  $\varphi$  for  $M$ .

Finally, let  $P_{\mathcal{H}_M}$  be the orthogonal projection of  $\mathcal{H}$  onto  $\mathcal{H}_M$ .  $\varphi - P_{\mathcal{H}_M}[\varphi]$  is orthogonal to  $\mathcal{H}_M$ , thus  $\varphi - P_{\mathcal{H}_M}[\varphi] \in \mathcal{H}_0$ , i.e.  $P_{\mathcal{H}_M}[\varphi]$  interpolates  $\varphi$  for  $M$ , which means that

$$h_{\varphi, M} = P_{\mathcal{H}_M}[\varphi].$$

In practice, the set of all interpolators is characterized by  $h_{\varphi, M}$  and the kernel  $T_{\mathcal{H}_0}$  (the knowledge of those two objects allows the construction of all the interpolators, in  $\mathcal{H}$ , of  $\varphi$  for  $M$ ). Let us remark that optimal interpolation in Hilbert subspaces is often schematized by Figure 2.1.

The Hilbert kernel  $T_{\mathcal{H}_M}$  of the Hilbert subspace  $\mathcal{H}_M$ ,  $(\cdot | \cdot)_{\mathcal{H}}$  is linked with  $P_{\mathcal{H}_M}$  by the relation

$$T_{\mathcal{H}_M} = P_{\mathcal{H}_M} T_{\mathcal{H}},$$

this result being true for all closed linear subspace of  $\mathcal{H}$ . Hence, the knowledge of  $T_{\mathcal{H}_M}$  defines the orthogonal projection  $P_{\mathcal{H}_M}$  and reciprocally.

**Remark B.1 :** The following result is specially motivated by the example treated in Section B.6.3. It shows how to solve the interpolation problem associated with a linear subspace  $M$  of  $E'$  by splitting  $M$  in several linear subspaces.

Let  $M1$  and  $M2$  be two linear subspaces of  $E'$ . We introduce

$$\mathcal{H}_{M1} = \overline{T_{\mathcal{H}}(M1)}^{\mathcal{H}} \text{ and } \mathcal{H}_{01} = \mathcal{H}_{M1}^{\perp}.$$

Let us denote  $P_{\mathcal{H}_{M1}}$  and  $P_{\mathcal{H}_{01}}$  the orthogonal projection of  $\mathcal{H}$  onto respectively  $\mathcal{H}_{M1}$  and  $\mathcal{H}_{01}$  and let  $T_{\mathcal{H}_{01}} = P_{\mathcal{H}_{01}}T_{\mathcal{H}}$  be the Hilbert kernel of  $\mathcal{H}_{01}$ . Finally, let

$$\mathcal{H}_{01,M2} = \overline{T_{\mathcal{H}_{01}}(M2)}^{\mathcal{H}}.$$

Then, for  $\varphi \in \mathcal{H}$ , the optimal interpolator of  $\varphi$  for  $M = M1 + M2$  is given by

$$P_{\mathcal{H}_M}[\varphi] = P_{\mathcal{H}_{M1}}[\varphi] + P_{\mathcal{H}_{01,M2}}[\varphi - P_{\mathcal{H}_{M1}}[\varphi]],$$

and  $T_{\mathcal{H}_0} = P_{\mathcal{H}_{01,02}}P_{\mathcal{H}_{01}}T_{\mathcal{H}}$ , with  $P_{\mathcal{H}_{01,02}}$  the orthogonal projection of  $\mathcal{H}_{01}$  onto  $\mathcal{H}_{01,M2}$ , and  $\mathcal{H}_{01,02}$  the orthogonal of  $\mathcal{H}_{01,M2}$  in  $\mathcal{H}_{01}$ . ■

## B.3 Problem Adapted Integral Operator

Let  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$  and let  $M$  be a linear subspace of  $E'$ . We use the same notations and definitions than in Section B.2.

In this section, we will show how, from compact integral operators spectral decomposition, one can build a Hilbert basis of the linear subspace  $\mathcal{H}_M$  of  $\mathcal{H}$  (note that such a  $\mathcal{H}_M$  would then be necessarily separable, see for instance Corollary B.2).

Let  $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \nu)$  be a measurable space endowed with  $\nu$  a  $\sigma$ -finite measure on  $\mathcal{S}$ . Let  $\gamma : \mathcal{S} \rightarrow E'$  be such that, for all  $h \in \mathcal{H}$ , the function  $\mathfrak{F}h : s \in \mathcal{S} \mapsto \langle h, \gamma s \rangle_{E,E'} \in \mathbb{R}$  is measurable and

$$\forall h \in \mathcal{H}, \int_{\mathcal{S}} \langle h, \gamma s \rangle_{E,E'}^2 d\nu(s) < +\infty. \quad (\text{B.1})$$

We denote by  $M$  the linear space spanned by the  $\gamma s$ ,  $s \in \mathcal{S}$ , that is

$$M = \text{span} \{ \gamma(\mathcal{S}) \}. \quad (\text{B.2})$$

Let  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  be the Hilbert space of square-integrable real-valued functions with respect to  $\nu$  ( $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  is obviously a quotient space), note that  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$

is not necessarily separable. Let  $(\cdot|\cdot)_{L^2}$  and  $\|\cdot\|_{L^2}$  be its inner product and norm. We remind that

$$(f|g)_{L^2} = \int_{\mathcal{S}} f(s)g(s)d\nu(s).$$

Equation (B.1) means that, for all  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\mathfrak{F}h \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$ . We then define the application  $\mathfrak{F} : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathcal{S}, \nu)$ ,  $h \mapsto \mathfrak{F}h$ . Because  $M = \text{span} \{\gamma(\mathcal{S})\}$ , we have  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_0) = 0$ , i.e. in terms of set,  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}) = \mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$ .

We add the following hypotheses (see for instance [For85] for a background discussion on these hypotheses):

- H-i. the application  $(s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mapsto \langle T_{\mathcal{H}}\gamma s, \gamma t \rangle_{E, E'} = (T_{\mathcal{H}}\gamma s | T_{\mathcal{H}}\gamma t)_{\mathcal{H}}$  is measurable,
- H-ii.  $N = \int_{\mathcal{S}} \|T_{\mathcal{H}}\gamma s\|_{\mathcal{H}}^2 d\nu(s) < +\infty$ ,
- H-iii. for  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\|\mathfrak{F}h\|_{L^2} = 0$  if and only if  $h \in \mathcal{H}_0$ .

**Remark B.2:** Hypothesis H-i and H-ii imply that, for all  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$\|\mathfrak{F}h\|_{L^2}^2 = \int_{\mathcal{S}} \langle h, \gamma s \rangle_{E, E'}^2 d\nu(s) = \int_{\mathcal{S}} (h | T_{\mathcal{H}}\gamma s)_{\mathcal{H}}^2 d\nu(s) \leq N \|h\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (\text{B.3})$$

Furthermore, from Cauchy-Schwarz inequality :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} \langle T_{\mathcal{H}}\gamma s, \gamma t \rangle_{E, E'}^2 d\nu(s)d\nu(t) &= \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} (T_{\mathcal{H}}\gamma s | T_{\mathcal{H}}\gamma t)_{\mathcal{H}}^2 d\nu(s)d\nu(t) \\ &\leq \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} \|T_{\mathcal{H}}\gamma s\|_{\mathcal{H}}^2 \|T_{\mathcal{H}}\gamma t\|_{\mathcal{H}}^2 d\nu(s)d\nu(t) = N^2. \end{aligned}$$

We will call  $\|T_{\mathcal{H}}\|_{\gamma, \nu}^2$  this quantity, i.e.

$$\|T_{\mathcal{H}}\|_{\gamma, \nu}^2 = \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} \langle T_{\mathcal{H}}\gamma s, \gamma t \rangle_{E, E'}^2 d\nu(s)d\nu(t) \quad (\leq N^2). \quad (\text{B.4})$$

Hypothesis H-iii is similar to the notion of regular embedding that can be found in [For85]. When  $\mathcal{S}$  is a topological space (endowed with its Borel  $\sigma$ -algebra), it will be for instance realized if  $\mathfrak{F}h$  is continuous for all  $h \in \mathcal{H}$  and if  $\text{supp}(\nu) = \mathcal{S}$  (with  $\text{supp}(\nu)$  the support of  $\nu$ ).

Finally, note that H-iii and equation (B.3) imply that  $\mathfrak{F} : \mathcal{H}_M \rightarrow L^2(\mathcal{S}, \nu)$  is a continuous injection. ■



We endowed  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}) = \mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$  of the following inner-product,

$$\forall f \text{ and } g \in \mathcal{H}_M, (\mathfrak{F}h|\mathfrak{F}g)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} = (h|g)_{\mathcal{H}}. \quad (\text{B.5})$$

From H-iii,  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}) = \mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$ ,  $(\cdot|\cdot)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}$  is a Hilbert space and, by construction, it is isometric to  $\mathcal{H}_M$ ,  $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}}$ . In addition, from equation (B.3), the inclusion of  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$  into  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  is continuous (i.e.  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M) \in \text{Hilb}(L^2(\mathcal{S}, \nu))$ ), see Remark B.3).

We now introduce the operator  $\mathcal{L}_\nu$ , which is at this moment correctly define from  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  onto  $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$  (with  $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$  the space of real-valued functions on  $\mathcal{S}$ ). We pose :

$$\forall s \in \mathcal{S} \text{ and } \forall f \in L^2(\mathcal{S}, \nu), \mathcal{L}_\nu[f](s) = \int_{\mathcal{S}} (T_{\mathcal{H}}\gamma t|T_{\mathcal{H}}\gamma s)_{\mathcal{H}} f(t) d\nu(t).$$

### Proposition B.1

The linear space spanned by the  $\mathcal{L}_\nu[f]$ ,  $f \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$  is dense in  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$ ,  $(\cdot|\cdot)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}$ . Furthermore, for all  $f \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$  and  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$(\mathfrak{F}h|\mathcal{L}_\nu[f])_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} = (\mathfrak{F}h|f)_{L^2}. \quad (\text{B.6})$$

**Proof:** For a fixed  $f \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$ , we define the linear application  $I_f : L^2(\mathcal{S}, \nu) \rightarrow \mathbb{R}$  such that, for  $g \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$ ,  $I_f[g] = (f|g)_{L^2}$ . Thus, for  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$|I_f[\mathfrak{F}h]| \leq \|f\|_{L^2} \|\mathfrak{F}h\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \sqrt{N} \|h\|_{\mathcal{H}} \quad \left( = \|f\|_{L^2} \sqrt{N} \|\mathfrak{F}h\|_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} \right).$$

$I_f$  is a linear and continuous application from the Hilbert  $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ ,  $(\cdot|\cdot)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}$  onto  $\mathbb{R}$ , thus, for all  $h \in \mathcal{H}$  there exists a unique  $R_f \in \mathcal{H}_M$  such that

$$I_f[\mathfrak{F}h] = (\mathfrak{F}h|\mathfrak{F}R_f)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} = (h|R_f)_{\mathcal{H}}. \quad (\text{B.7})$$

Nevertheless, for all  $s \in \mathcal{S}$ ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}R_f(s) &= \langle R_f, \gamma s \rangle_{E, E'} = (R_f|T_{\mathcal{H}}\gamma s)_{\mathcal{H}} = (f|\mathfrak{F}T_{\mathcal{H}}\gamma s)_{L^2} \\ &= \int_{\mathcal{S}} (T_{\mathcal{H}}\gamma t|T_{\mathcal{H}}\gamma s)_{\mathcal{H}} f(t) d\nu(t) = \mathcal{L}_\nu[f](s), \end{aligned}$$

which proves that  $\mathcal{L}_\nu[f] \in \mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$ . To obtain equation (B.6), we just have to remark that for  $f \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$  and  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$(\mathfrak{F}h|\mathcal{L}_\nu[f])_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} = (h|R_f)_{\mathcal{H}} = (\mathfrak{F}h|f)_{L^2}$$

Finally, if  $h \in \mathcal{H}_M$  verify

$$\forall f \in L^2(\mathcal{S}, \nu), (\mathfrak{F}h | \mathcal{L}_\nu[f])_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} = 0,$$

then, from hypothesis H-iii,  $h = 0$ . ■

**Remark B.3:** Proposition B.1 is similar to

**Corollary B.1**

$\mathcal{L}_\nu$  is the Hilbert kernel of the Hilbert subspace  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$  of  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$ .

In fact,  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  being a Hilbert space, one can identify its topological dual to itself.

$$\mathcal{L}_\nu : (L^2(\mathcal{S}, \nu))' = L^2(\mathcal{S}, \nu) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{H}_M) \subset L^2(\mathcal{S}, \nu)$$

verify equation B.6, which is exactly the characterization of the Hilbert kernel associated to  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M) \in \text{Hilb}(L^2(\mathcal{S}, \nu))$ .

In a same way, the application  $f \mapsto R_f$  appearing in the proof of Proposition B.1 could be seen as the Hilbert kernel of  $\mathcal{H}_M$  relatively to  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  in the sense that, for all  $h \in \mathcal{H}_M$  and  $f \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$ ,  $(f | \mathfrak{F}h)_{L^2} = (h | R_f)_{\mathcal{H}}$ . ■

Proposition B.1 authorizes us to see  $\mathcal{L}_\nu$  as an operator from  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  onto  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$ .

The Hilbert kernel  $T_{\mathcal{H}}$  and the application  $\gamma$  define a symmetric and positive-definite kernel  $\mathcal{K}(\cdot, \cdot)$  on  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$  :

$$\forall (s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, \mathcal{K}(s, t) = (T_{\mathcal{H}}\gamma t | T_{\mathcal{H}}\gamma s)_{\mathcal{H}}. \quad (\text{B.8})$$

From equation (B.4),  $\mathcal{K}(\cdot, \cdot) \in L^2(\mathcal{S} \times \mathcal{S}, \nu \times \nu)$  (we have  $\|\mathcal{K}\|_{L^2} = \|T_{\mathcal{H}}\|_{\gamma, \nu}$ ), hence  $\mathcal{L}_\nu$  can be seen as a classic Hilbert-Schmidt integral operator and is therefore compact (see for instance [Sch79, §10]).

Because  $\mathcal{K}(\cdot, \cdot)$  is symmetric,  $\mathcal{L}_\nu$  is self-adjoint ; further  $\mathcal{L}_\nu$  is positive, apply for example equation (B.6). One also can note that  $\mathcal{L}_\nu$  is continuous :

$$\forall f \in L^2(\mathcal{S}, \nu), \|\mathcal{L}_\nu[f]\|_{L^2}^2 \leq \|T_{\mathcal{H}}\|_{\gamma, \nu}^2 \|f\|_{L^2}^2.$$

So  $\mathcal{L}_\nu : L^2(\mathcal{S}, \nu) \rightarrow L^2(\mathcal{S}, \nu)$  is diagonalizable and its eigenvalues are positive.

**Remark B.4:** The fact that  $\mathcal{L}_\nu : L^2(\mathcal{S}, \nu) \rightarrow L^2(\mathcal{S}, \nu)$  is a symmetric, positive and continuous operator can also be seen as a trivial consequence of Corollary B.1 and theory of Hilbert subspaces [Sch64]. ■

We denote  $\lambda_i$  those eigenvalues and  $\tilde{\phi}_i \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$  their associated eigenfunctions,  $i \in \mathbb{I}$ . We remind that  $\{\tilde{\phi}_i, i \in \mathbb{I}\}$  form an orthonormal basis of  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$ . Finally, we will denote by  $\{\lambda_n, n \in \mathbb{I}_+\}$  the countable set (i.e.  $\mathbb{I}_+ \subset \mathbb{N}$ ) of all **strictly positive** eigenvalues with multiplicity.

Equation (B.6) implies that, for all  $n \in \mathbb{I}_+$ ,

$$\forall h \in \mathcal{H}, \left( \tilde{\phi}_n | \mathfrak{F}h \right)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} = \frac{1}{\lambda_n} \left( \mathcal{L}_\nu \left[ \tilde{\phi}_n \right] | \mathfrak{F}h \right)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} = \frac{1}{\lambda_n} \left( \tilde{\phi}_n | \mathfrak{F}h \right)_{L^2}. \quad (\text{B.9})$$

**Proposition B.2**

$\left\{ \sqrt{\lambda_n} \tilde{\phi}_n, n \in \mathbb{I}_+ \right\}$  is a Hilbert basis of  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}), (\cdot | \cdot)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}$ .

**Proof:** The fact that  $\left\{ \sqrt{\lambda_n} \tilde{\phi}_n \right\}$  is an orthonormal system of  $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$  is consequence of equation (B.9). We just have to show that  $\text{span} \left\{ \sqrt{\lambda_n} \tilde{\phi}_n \right\}$  is dense in  $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$  which is a consequence of Proposition B.1. ■

**Remark B.5:** The two spaces  $\overline{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}^{L^2}, (\cdot | \cdot)_{L^2}$  and  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}), (\cdot | \cdot)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}$  are isometric. The isometry is given by :

$$\forall n \in \mathbb{I}_+, \tilde{\phi}_n \leftrightarrow \sqrt{\lambda_n} \tilde{\phi}_n.$$

In fact, this isometry is the restriction, at  $\overline{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}^{L^2}$ , of the square-root of  $\mathcal{L}_\nu : L^2(\mathcal{S}, \nu) \rightarrow L^2(\mathcal{S}, \nu)$ ,

$$\mathcal{L}_\nu^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{i \in \mathbb{I}} \alpha_i \tilde{\phi}_i \right] = \sum_{i \in \mathbb{I}_+} \alpha_i \sqrt{\lambda_i} \tilde{\phi}_i \text{ with,}$$

for  $i \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{I}_+$ , i.e.  $\lambda_i = 0, \mathcal{L}_\nu^{\frac{1}{2}} \left[ \tilde{\phi}_i \right] = 0$ . Obviously,  $\mathcal{L}_\nu = \mathcal{L}_\nu^{\frac{1}{2}} \circ \mathcal{L}_\nu^{\frac{1}{2}}$ . ■

As we have seen,  $\mathfrak{F} : \mathcal{H}_M \rightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$  define an isometry between the two Hilbert spaces  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M), (\cdot | \cdot)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)}$  and  $\mathcal{H}_M, (\cdot | \cdot)_{\mathcal{H}_M}$ . We then introduce  $\mathfrak{F}^{-1} : \mathfrak{F}(\mathcal{H}_M) \rightarrow \mathcal{H}_M$ , the inverse isometry of  $\mathfrak{F}$ .

For  $n \in \mathbb{I}_+$ , we denote  $\phi_n = \mathfrak{F}^{-1} \tilde{\phi}_n \in \mathcal{H}_M$ . We call  $\phi_n$  the **regularized eigenfunctions** associated with the eigenvalue  $\lambda_n$ , we will also say that  $\phi_n$  is the *regularization* of  $\tilde{\phi}_n \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$ .

### Corollary B.2

$\{\sqrt{\lambda_n}\phi_n, n \in \mathbb{I}_+\}$  is a Hilbert basis of  $\mathcal{H}_M$   $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}}$  (and  $\mathcal{H}_M$  is obviously separable).

The definition  $\phi_n = \mathfrak{F}^{-1}\tilde{\phi}_n$ ,  $n \in \mathbb{I}_+$  correctly characterizes the regularized eigenfunctions as elements of  $\mathcal{H}_M$ . Nevertheless, in practice, we will need explicit formulas for the  $\phi_n$  (in order to compute them for example). So, we consider the application  $f \mapsto R_f$  appearing in the proof of Proposition B.1 and which we now denote  $\mathfrak{F}^{-1}\mathcal{L}_\nu$  (coherent notation). Thus, for all  $f \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$ ,  $R_f = \mathfrak{F}^{-1}\mathcal{L}_\nu[f]$ . From equation (B.7) applied with  $h = T_{\mathcal{H}}e'$ , we get,  $\forall f \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$  and  $\forall e' \in E'$ ,

$$\langle \mathfrak{F}^{-1}\mathcal{L}_\nu[f], e' \rangle_{E, E'} = \int_{\mathcal{S}} f(t) \langle T_{\mathcal{H}}e', \gamma t \rangle_{E, E'} d\nu(t). \quad (\text{B.10})$$

From this equation, one can write  $\mathfrak{F}^{-1}\mathcal{L}_\nu[f]$ ,  $f \in L^2(\mathcal{S}, \nu)$ , under a vectorial integral form (see [Bou59]),

$$\mathfrak{F}^{-1}\mathcal{L}_\nu[f] = \int_{\mathcal{S}} f(t) T_{\mathcal{H}}\gamma t d\nu(t) \in \mathcal{H}_M. \quad (\text{B.11})$$

Finally, we obtain (by using the linearity of  $\mathfrak{F}^{-1}$ ), for all  $n \in \mathbb{I}_+$ ,

$$\phi_n = \mathfrak{F}^{-1}\tilde{\phi}_n = \frac{1}{\lambda_n} \mathfrak{F}^{-1}\mathcal{L}_\nu [\tilde{\phi}_n] = \frac{1}{\lambda_n} \int_{\mathcal{S}} \tilde{\phi}_n(t) T_{\mathcal{H}}\gamma t d\nu(t), \quad (\text{B.12})$$

the expression (B.12) having to be understood in the sense of equation (B.10).

**An equivalent way to proceed.** Instead of transporting the Hilbert structure of  $\mathcal{H}_M$  onto the subspace  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$  of  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$ , one can remark that equation (B.1) allows us to define on  $\mathcal{H}$  the symmetric and positive bilinear form

$$\forall h \text{ and } g \in \mathcal{H}, (h|g)_{\gamma, \nu} = \int_{\mathcal{S}} \langle h, \gamma s \rangle_{E, E'} \langle g, \gamma s \rangle_{E, E'} d\nu(s). \quad (\text{B.13})$$

We denote  $\|h\|_{\gamma, \nu}^2 = (h|h)_{\gamma, \nu}$ .

H-iii, implies that the null space of  $(\cdot|\cdot)_{\gamma, \nu}$  is  $\mathcal{H}_0$ , i.e. for  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\|h\|_{\gamma, \nu} = 0$  if and only if  $h \in \mathcal{H}_0$ . We have, for all  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\|h\|_{\gamma, \nu} = \|\mathfrak{F}h\|_{L^2}$  and  $\mathcal{H}_M, (\cdot|\cdot)_{\gamma, \nu}$  is a pre-Hilbert space isometric to  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M), (\cdot|\cdot)_{L^2}$ , the isometry being the application  $\mathfrak{F}$ . The completed  $\overline{\mathcal{H}_M}^{\gamma, \nu}$  of  $\mathcal{H}_M$  for  $\|\cdot\|_{\gamma, \nu}$  is then isometric, in

terms of Hilbert structure, to the space  $\overline{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}^{L^2}$  of Remark B.5. In particular, we have

$$\mathcal{H}_M \hookrightarrow \overline{\mathcal{H}_M}^{\gamma, \nu}. \quad (\text{B.14})$$

We then define the analogous  $L_\nu$  of  $\mathcal{L}_\nu$ , in a first time on  $\mathcal{H}_M$ , by

$$\forall h \in \mathcal{H}_M, \forall s \in \mathcal{S}, \langle L_\nu[h], \gamma s \rangle_{E, E'} = \mathcal{L}_\nu[\mathfrak{F}h](s), \text{ or,} \quad (\text{B.15})$$

equivalently, by  $L_\nu[h] = \mathfrak{F}^{-1} \mathcal{L}_\nu[\mathfrak{F}h]$  (i.e.  $L_\nu = \mathfrak{F}^{-1} \mathcal{L}_\nu \mathfrak{F}$ ). As mentioned in equation (B.11),  $L_\nu$  can be written under the vectorial integral form

$$\forall h \in \mathcal{H}_M, L_\nu[h] = \int_{\mathcal{S}} \langle h, \gamma s \rangle_{E, E'} T_{\mathcal{H}} \gamma s \, d\nu(s). \quad (\text{B.16})$$

$L_\nu$  is next extended to  $\overline{\mathcal{H}_M}^{\gamma, \nu}$  by continuity. Then, one can proof that  $L_\nu$  is a Hilbert-Schmidt operator on  $\overline{\mathcal{H}_M}^{\gamma, \nu}$ ,  $(\cdot|\cdot)_{\gamma, \nu}$ .  $L_\nu$  is symmetric and positive definite, its eigenvalues are  $\lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{I}_+$  and each ones are associated with the eigenfunction  $\phi_n$ .

We finally obtain the same Hilbert basis  $\{\sqrt{\lambda_n} \phi_n, n \in \mathbb{I}_+\}$  of  $\mathcal{H}_M$   $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}}$  than in Corollary B.2.

Note that one can also directly proof that  $L_\nu$ , seen as an operator from  $\mathcal{H}$  onto  $\mathcal{H}_M$ , is a positive and symmetric Hilbert-Schmidt operator. The eigenspace associated with the null eigenvalues is  $\mathcal{H}_0$  and  $\sqrt{\lambda_n} \phi_n$ ,  $n \in \mathbb{I}_+$  are the (normed) eigenfunctions associated with the eigenvalues  $\lambda_n$ .

As an illustration, we will use this point of view in Section B.5.

## B.4 Representation and Approximation of the Optimal Interpolator

Let  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$  and let  $M$  be a linear subspace of  $E'$ . In order to apply Section B.3, we assume that  $M$  is such that  $\mathcal{H}_M$  is separable. We then consider the Hilbert basis  $\{\sqrt{\lambda_n} \phi_n, n \in \mathbb{I}_+\}$  of  $\mathcal{H}_M$ ,  $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}}$  which is defined in Corollary B.2. Knowing a Hilbert basis of  $\mathcal{H}_M$ , one can easily expressed, in terms of this basis, the orthogonal projection of  $\mathcal{H}$  onto  $\mathcal{H}_M$ , i.e. expressed, for a fixed  $\varphi \in \mathcal{H}$ , the optimal interpolator of  $\varphi$  for  $M$  (see Section B.2). Finally, the property of the basis  $\{\sqrt{\lambda_n} \phi_n, n \in \mathbb{I}_+\}$  allows us to give a formula for the optimal interpolator  $P_{\mathcal{H}_M}[\varphi]$  which explicitly depends of the values  $\langle \varphi, \gamma s \rangle_{E, E'}$ ,  $s \in \mathcal{S}$ , i.e. of the  $\langle \varphi, e' \rangle_{E, E'}$ ,  $e' \in M$ .

### Theorem B.1

Let  $\varphi \in \mathcal{H}$  and let  $M$  be a linear subspace of  $E'$  such that  $\mathcal{H}_M$  is separable. Let us consider the Hilbert basis  $\{\sqrt{\lambda_n}\phi_n, n \in \mathbb{I}_+\}$  of  $\mathcal{H}_M$  defined in Corollary B.2, then we have

$$P_{\mathcal{H}_M}[\varphi] = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \phi_n \int_{\mathcal{S}} \langle \phi_n, \gamma s \rangle_{E, E'} \langle \varphi, \gamma s \rangle_{E, E'} d\nu(s). \quad (\text{B.17})$$

**Proof:** It is a simple consequence of equation (B.9) :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{H}_M}[\varphi] &= \sum_n \sqrt{\lambda_n} \phi_n \left( \sqrt{\lambda_n} \phi_n | \varphi \right)_{\mathcal{H}} = \sum_n \lambda_n \phi_n \left( \tilde{\phi}_n | \mathfrak{f}_{\varphi} \right)_{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} \\ &= \sum_n \phi_n \left( \tilde{\phi}_n | \mathfrak{f}_{\varphi} \right)_{L^2}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Remark that, by construction, the sum appearing in equation (B.17) converges in  $\mathcal{H}$ . Since  $\mathcal{H} \in \text{Hilb}(E)$ , it also converges for the initial topology of  $E$  and for its weak topology  $\sigma(E, E')$ . Then, in particular, for all  $e' \in E'$ ,

$$\langle P_{\mathcal{H}_M}[\varphi], e' \rangle_{E, E'} = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \langle \phi_n, e' \rangle_{E, E'} \int_{\mathcal{S}} \langle \phi_n, \gamma s \rangle_{E, E'} \langle \varphi, \gamma s \rangle_{E, E'} d\nu(s).$$

**Remark B.6:** The orthogonal projection  $P_{\mathcal{H}_M}$  of  $\mathcal{H}$  onto  $\mathcal{H}_M$  can be written under the form

$$P_{\mathcal{H}_M} = \mathfrak{F}^{-1} \mathfrak{F}, \quad (\text{B.18})$$

which is an equivalent formulation of Theorem B.1. \blacksquare

In Section 3.3, we show examples where  $\mathcal{H}_M$  is of infinite dimension (i.e.  $\mathbb{I}_+ = \mathbb{N}$ ) and where the expression (B.17) can be analytically expressed (i.e. the limit of the sum can be analytically calculated).

Nevertheless, in certain cases, for instance for numerical reasons, we will not be able to consider all the terms in

$$\forall e' \text{ and } f' \in E', \langle T_{\mathcal{H}_M} e', f' \rangle_{E, E'} = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \lambda_n \langle \phi_n, e' \rangle_{E, E'} \langle \phi_n, f' \rangle_{E, E'}.$$

We assume that we dispose of an approximated kernel defined from a subset  $\mathbb{I}_{app}$  of  $\mathbb{I}_+$ , i.e.

$$\forall e' \text{ and } f' \in E', \left\langle T_{\mathcal{H}_M^{app}} e', f' \right\rangle_{E,E'} = \sum_{n \in \mathbb{I}_{app}} \lambda_n \langle \phi_n, e' \rangle_{E,E'} \langle \phi_n, f' \rangle_{E,E'}.$$

Hence, for  $\varphi \in \mathcal{H}$ , we obtain an approximation of the optimal interpolator  $P_{\mathcal{H}_M} [\varphi]$  that we note  $P_{\mathcal{H}_M^{app}} [\varphi]$  :

$$\begin{aligned} \forall e' \in E', \left\langle P_{\mathcal{H}_M^{app}} [\varphi], e' \right\rangle_{E,E'} &= \left( \varphi \left| T_{\mathcal{H}_M^{app}} e' \right. \right)_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{I}_{app}} \langle \phi_n, e' \rangle_{E,E'} \int_{\mathcal{S}} \langle \phi_n, \gamma s \rangle_{E,E'} \langle \varphi, \gamma s \rangle_{E,E'} d\nu(s), \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

with  $\mathcal{H}_M^{app}$  the closure in  $\mathcal{H}$  of the subspace spanned by the  $\phi_n$ ,  $n \in \mathbb{I}_{app}$ .

We pose  $\mathbb{I}_{err} = \mathbb{I}_+ \setminus \mathbb{I}_{app}$ . Hence, we find the following expression for the approximation error, for all  $e' \in E'$ ,

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbb{P}_{\mathcal{H}_M} [\varphi] - \mathbb{P}_{\mathcal{H}_M^{app}} [\varphi], e' \right\rangle_{E,E'} &= \left( \varphi \left| T_{\mathcal{H}_M} e' - T_{\mathcal{H}_M^{app}} e' \right. \right)_{\mathcal{H}} \\ &= \left( \varphi \left| \sum_{n \in \mathbb{I}_{err}} \lambda_n \langle \phi_n, e' \rangle_{E,E'} \phi_n \right. \right)_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Finally, applying the Cauchy-Schwarz inequality to equation (B.20) allows us to control the error of approximation :

**Theorem B.2**

$$\forall e' \in E', \left| \left\langle \mathbb{P}_{\mathcal{H}_M} [\varphi] - \mathbb{P}_{\mathcal{H}_M^{app}} [\varphi], e' \right\rangle_{E,E'} \right|^2 \leq \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 \sum_{n \in \mathbb{I}_{err}} \lambda_n \langle \phi_n, e' \rangle_{E,E'}^2 \quad (\text{B.21})$$

$$\text{and } \left\| \mathbb{P}_{\mathcal{H}_M} [\varphi] - \mathbb{P}_{\mathcal{H}_M^{app}} [\varphi] \right\|_{\gamma, \nu}^2 \leq \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 \sum_{n \in \mathbb{I}_{err}} \lambda_n. \quad (\text{B.22})$$

We call  $\sum_{n \in \mathbb{I}_{err}} \lambda_n$  the **spectral error term**.

**Remark B.7 :** In the most part of application cases, the analytical spectral decomposition of  $\mathcal{L}_\nu$  would be unknown. Nevertheless, one should dispose

of a numerical approximation of this spectral decomposition. It should be interesting to study the behavior of Theorems B.1 and B.2 in such cases.

It would also be interesting to compare truncated spectral approach (equation (B.19)) with discretization of the data set. ■

## B.5 Finite Case

We suppose that  $M$  is of finite dimension, i.e.  $M = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . We also assume, for simplicity and without loss of generality, that the  $\mu_i \in E'$  are such that the Gram matrix  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , defined by, for  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $\mathbf{T}_{i,j} = (T_{\mathcal{H}}\mu_i | T_{\mathcal{H}}\mu_j)_{\mathcal{H}}$  is invertible. For convenience, we introduce the matricial type notations

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T \text{ and } \mathbf{T} = (T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu} | T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T)_{\mathcal{H}} = \langle T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}^T \rangle = \langle \boldsymbol{\mu}, T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T \rangle,$$

where  $T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu} = (T_{\mathcal{H}}\mu_1, \dots, T_{\mathcal{H}}\mu_n)^T$ . Hence, for  $\varphi \in \mathcal{H}$ , the optimal interpolator of  $\varphi$  for  $M$  can be written under the form :

$$h_{\varphi, M} = T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{T}^{-1} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle, \quad (\text{B.23})$$

with  $\langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle = \left( \langle \varphi, \mu_1 \rangle_{E, E'}, \dots, \langle \varphi, \mu_n \rangle_{E, E'} \right)^T$ . Remark for instance that, with our notation,

$$\langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle^T = \langle \varphi, \boldsymbol{\mu}^T \rangle, \text{ and for } e \in E \text{ and } e' \in E', \langle e, e' \rangle_{E, E'} = \langle e, e' \rangle = \langle e', e \rangle,$$

so, we will write, for  $e' \in E'$ ,  $\langle h_{\varphi, M}, e' \rangle_{E, E'} = \langle e', T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T \rangle \mathbf{T}^{-1} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle$ .

The aim of this section is to prove, by direct calculation, that the expression of the optimal interpolator given in equation (B.23) is equal to the one given in Theorem B.1.

A linear operator  $L_{\nu}$  of paragraph B.3 type can be defined by

$$\forall h \in \mathcal{H}, L_{\nu}[h] = \sum_{i=1}^n w_i \langle h, \mu_i \rangle_{E, E'} T_{\mathcal{H}}\mu_i, \quad (\text{B.24})$$

with  $w_i > 0$  for all  $1 \leq i \leq n$ . Introducing the matrix  $\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$ ,  $L_{\nu}$  can be written under the matricial form :

$$\forall h \in \mathcal{H}, L_{\nu}[h] = T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, h \rangle.$$



The finiteness of the sum (B.24) assures us that  $L_\nu$  verifies the whole properties required in Section B.3. The symmetric and positive bilinear form  $(\cdot|\cdot)_{\gamma,\nu}$  on  $\mathcal{H}$  and associated with  $L_\nu$  by equation (B.13) is, for  $h$  and  $g \in \mathcal{H}$ ,

$$(h|g)_{\gamma,\nu} = \sum_{i=1}^n w_i \langle h, \mu_i \rangle_{E,E'} \langle g, \mu_i \rangle_{E,E'} = \langle h, \boldsymbol{\mu}^T \rangle \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, g \rangle.$$

**Remark B.8:** We easily re obtain the properties of self-adjunction and symmetry of  $L_\nu$  by matricial calculations :

$$\begin{aligned} \forall h \text{ and } k \in \mathcal{H}, (h|L_\nu[k])_{\mathcal{H}} &= (h|T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, k \rangle)_{\mathcal{H}} \\ &= (h|T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W} (T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}, k)_{\mathcal{H}})_{\mathcal{H}} \\ &= (h|T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T)_{\mathcal{H}} \mathbf{W} (T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}, k)_{\mathcal{H}} = (L_\nu[h]|k)_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall h \text{ and } k \in \mathcal{H}, (h|L_\nu[k])_{\gamma,\nu} &= (h|T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, k \rangle)_{\gamma,\nu} \\ &= \langle h, \boldsymbol{\mu}^T \rangle \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, k \rangle \rangle \\ &= \langle h, \boldsymbol{\mu}^T \rangle \mathbf{W} \langle T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}^T \rangle \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, k \rangle \\ &= (L_\nu[h]|k)_{\gamma,\nu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall h \text{ and } k \in \mathcal{H}, (h|L_\nu[k])_{\mathcal{H}} &= (h|T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T) \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, k \rangle \\ &= \langle h, \boldsymbol{\mu}^T \rangle \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, k \rangle = (h|k)_{L^2}. \end{aligned}$$

■

For  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ , let  $\widehat{\phi}_\alpha = T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{H}_M$ . We have

$$L_\nu \left[ \widehat{\phi}_\alpha \right] = T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T \rangle \boldsymbol{\alpha} = T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W} \mathbf{T} \boldsymbol{\alpha}.$$

Hence, the eigenvalues of  $L_\nu$  on  $\mathcal{H}_M$  and the ones of  $\mathbf{W} \mathbf{T}$  are the same. Let  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$  be those eigenvalues (the strict positivity is a consequence of the hypothesis made on  $\mathbf{T}$ ) and let  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  their associated eigenvectors, i.e.  $\mathbf{W} \mathbf{T} = \mathbf{P} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{P}^{-1}$  with  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  and  $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_n)$ . We have, for all  $1 \leq i \leq n$ ,

$$L_\nu \left[ \widehat{\phi}_{\mathbf{v}_i} \right] = \lambda_i \widehat{\phi}_{\mathbf{v}_i}.$$

We define :

$$\widehat{\phi} = \left( \widehat{\phi}_{\mathbf{v}_1}, \dots, \widehat{\phi}_{\mathbf{v}_n} \right)^T = \mathbf{P}^T T_{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mu}.$$

We have :

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\phi}|\widehat{\phi}^T\right)_{\mathcal{H}} &= \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{P} \\ \text{and } \left(\widehat{\phi}|\widehat{\phi}^T\right)_{\gamma, \nu} &= \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{W} \mathbf{T} \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{P} \Lambda = \Lambda \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

From equation (B.25), the matrix  $\mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{P}$  is diagonal, which is then also the case for  $\mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{W} \mathbf{T} \mathbf{P}$ . As expected, the relation  $\left\|\widehat{\phi}_{\mathbf{v}_i}\right\|_{\gamma, \nu}^2 = \lambda_i \left\|\widehat{\phi}_{\mathbf{v}_i}\right\|_{\mathcal{H}}^2$  is verified.

Thus, the eigenfunctions (normalized) of  $L_\nu$  on  $\mathcal{H}_M$ ,  $(\cdot|\cdot)_{\gamma, \nu}$  are the components of the vector

$$\phi = (\mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{W} \mathbf{T} \mathbf{P})^{-\frac{1}{2}} \widehat{\phi}.$$

Finally, we obtain

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{T}^{-1} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle &= T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{T}^{-1} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle = T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{P} \Lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle \\ &= T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{P} \Lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{P}^{-T} \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle \\ &= T_{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{P} (\mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{W} \mathbf{T} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle \\ &= \widehat{\phi}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{W} \mathbf{T} \mathbf{P})^{-1} \langle \widehat{\phi}, \boldsymbol{\mu}^T \rangle \mathbf{W} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \phi_k \int_{\mathcal{S}} \langle \phi_k, \gamma s \rangle_{E, E'} \langle \varphi, \gamma s \rangle_{E, E'} d\nu(s). \end{aligned}$$

## B.6 Example of application

Let  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$  and  $\mathcal{H}$  be the RKHS of real-valued functions on  $\mathcal{X}$  (see Section 1.3) associated with the kernel (squared exponential or Gaussian kernel, see for example [RW06]), for  $x$  and  $y \in \mathcal{X}$ ,

$$K(x, y) = e^{-\frac{\|x-y\|^2}{\sigma^2}}, \quad \text{with } \sigma > 0 \text{ and } \|\cdot\| \text{ the euclidean norm.}$$

For  $m \in \mathbb{N}$ , we consider  $\mathcal{E}^m \subset \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$  the subspace of functions of class  $C^m$  endowed with the topology of the uniform convergence on the compact subsets of  $\mathcal{X}$  for all the derivatives of order  $\leq m$  (or of general order if  $m = +\infty$ ). Then, from [Sch64, Proposition 25], for all  $m \in \mathbb{N}$  (and also for  $m = +\infty$ ),  $\mathcal{H}$  is a Hilbert subspace of  $\mathcal{E}^m$ . In what follows, we will consider  $\mathcal{H}$  as a Hilbert subspace of  $E = \mathcal{E}^1$ .

Let  $x = (x_1, x_2)$  be a point of  $\mathcal{X}$ , for convenience, we will use a polar coordinates system, that is  $x = (r_x \cos \alpha_x, r_x \sin \alpha_x)$  with  $r_x \in \mathbb{R}_+$  and  $\alpha_x \in [0, 2\pi]$ . For  $x \in \mathcal{X}$ , let us define  $\eta_x \in E'$  such that, for all  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$\langle h, \eta_x \rangle_{E, E'} = \frac{\partial}{\partial r_x} h(x),$$

$\eta_x$  corresponds to the evaluation of the *radial derivative* at point  $x$ .

Let  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  be the circle of center 0 and radius  $R > 0$ . We consider

$$M_N = \text{span} \{ \eta_t, t \in \mathcal{C} \} \text{ and } M_D = \text{span} \{ \delta_t, t \in \mathcal{C} \}$$

and pose  $M = M_N + M_D$  ( $N$  and  $D$  stand for *Neumann* and *Dirichlet conditions*). We will show how our methodology can be used to solve, in  $\mathcal{H}$ , the interpolation problem associated with  $M$ . In a first time (Sections B.6.1 and B.6.2), we independently consider the interpolation problem associated with  $M_N$  and  $M_D$ . Following Remark B.1, we finally combine our results to obtain a model in which both value and radial derivative on the circle are controlled (*Robin condition*, note that in our study, radial derivatives correspond to normal derivatives on the circle).

We introduce  $\mathcal{S} = [0, 2\pi]$  endowed with its natural Lebesgue measure (up to the multiplicative constant  $R$ ). We identify  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  with  $L^2([0, 2\pi])$ , the space of squared integrable functions (with respect to the Lebesgue measure) on  $[0, 2\pi]$ , endowed with the Hilbert norm

$$\forall f \in L^2([0, 2\pi]), \|f\|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} f(\theta)^2 R d\theta.$$

### B.6.1 Gaussian kernel and value on the circle

We first focus on the interpolation problem associated with  $\mathcal{H}$  and  $M_D = \text{span} \{ \delta_t, t \in \mathcal{C} \}$ . We pose (see Section B.2)

$$\mathcal{H}_{M_D} = \mathcal{H}_{0_D}^\perp = \overline{\text{span} \{ K_s(\cdot), s \in \mathcal{S} \}}^{\mathcal{H}} \text{ with (notation) } K_x(\cdot) = K(x, \cdot).$$

The implicitly considered application  $\gamma_D$  is  $\gamma_D : [0, 2\pi] \rightarrow E'$ ,  $\theta \mapsto \delta_{s_{R, \theta}}$ , with  $s_{R, \theta} = (R \cos \theta, R \sin \theta)$ . Arguments of continuity and compactness assure us that  $\mathcal{H}_{M_N}$  is separable, all required hypotheses are also verified. Hence, for  $x_{R, \alpha} = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$  and  $f \in L^2([0, 2\pi])$ , our “ $M_D$ -adapted” operator is given by

$$\mathcal{L}_\nu^D[f](\alpha) = \int_0^{2\pi} K(x_{R, \alpha}, s_{R, \theta}) f(\theta) R d\theta.$$

Straightforward calculations (see A.1) give that the eigenvalues of  $\mathcal{L}_\nu^D$  are :

$$n \geq 0, \lambda_n^D = R e^{-\frac{2R^2}{\sigma^2}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2R^2}{\sigma^2} \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta.$$

$\lambda_0^D$  is of multiplicity one and is associated  $\tilde{\phi}_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$ .

For  $n \geq 1$ , the  $\lambda_n^D$  are of multiplicity two and associated with, for  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,

$$\tilde{\phi}_n^c(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \cos n\alpha \text{ and } \tilde{\phi}_n^s(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sin n\alpha.$$

Arguments of periodicity assure us that  $\mathcal{L}_\nu^D$  does not admit other eigenvalue (see Chapter 2). Remark that a generalization of this result to any dimension and other example of spectral decomposition can be found in [HQMY06].

We now define the regularized eigenfunctions  $\phi_0^D$ ,  $\phi_n^{cD}$  and  $\phi_n^{sD}$ ,  $\forall n \geq 1$  of  $\mathcal{L}_\nu^D$  (see equation (B.12)). We have for instance

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathcal{X}, \phi_n^{sD}(x) = \frac{1}{\lambda_n^D} \int_0^{2\pi} K(s_{R,\theta}, x) \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{\pi R}} R d\theta.$$

**Numerical application.** We set  $R = 3$  and  $\sigma^2 = 2$  and compute the eigenvalues and regularized eigenfunctions of  $\mathcal{L}_\nu^D$ . On Figures 2.2 and 2.3, one can find a representation of the eigenvalues of  $\mathcal{L}_\nu^D$  and the graph of a regularized eigenfunction.

Following Section B.4, we approximate the kernel  $K_{M_D}(\cdot, \cdot)$  of  $\mathcal{H}_{M_D}$  with the 31 eigenfunctions associated with the most important eigenvalues, that is, for all  $x$  and  $y \in \mathbb{R}^2$  :

$$K_{M_D}^{app}(x, y) = \lambda_0^D \phi_0^D(x) \phi_0^D(y) + \sum_{n=1}^{15} \lambda_n [\phi_n^{cD}(x) \phi_n^{cD}(y) + \phi_n^{sD}(x) \phi_n^{sD}(y)].$$

We compute

$$Trace(\mathcal{L}_\nu^D) = 2\pi R = 18.84956 \text{ and } \sum_{k \in \mathbb{I}_{app}} \lambda_k^D = \lambda_0 + 2 \sum_{n=1}^{15} \lambda_n = 18.84953.$$

Hence, we obtain for the spectral error term :

$$\sum_{k \in \mathbb{I}_{err}} \lambda_k^D = 2.643289e-05. \quad (\text{B.26})$$

We next approximate the kernel  $K_{0_D}(\cdot, \cdot) = K(\cdot, \cdot) - K_{M_D}(\cdot, \cdot)$  of the sub-RKHS  $\mathcal{H}_{0_D}$  with, for all  $x$  and  $y \in \mathbb{R}^2$ ,

$$K_{0_D}^{app}(x, y) = K(x, y) - K_{M_D}^{app}(x, y).$$

$\mathcal{H}_{0_D}$  is the subspace of functions of  $\mathcal{H}$  that vanish onto  $\mathcal{S}$ . In particular, this implies that, for all  $t \in \mathcal{C}$ ,  $K_{0_D}(t, t) = 0$ . In our application case, we obtain the constant value  $K_{0_D}^{app}(t, t) \approx 1.402309\text{e-}06$  for  $t \in \mathcal{C}$  (let us point out that the spectral decomposition of  $\mathcal{L}_\nu^D$  has been performed using Monte-Carlo algorithms).

Figure 2.4 shows the sample path of a centered Gaussian process with covariance  $K_{0_D}(\cdot, \cdot)$ . This approximates a centered Gaussian process of covariance  $K_{0_D}(\cdot, \cdot)$  which corresponds to a centered Gaussian process of covariance  $K(\cdot, \cdot)$  conditioned to be null on  $\mathcal{S}$ .

Finally, we use the kernel  $K_{0_D}^{app}(\cdot, \cdot)$  in a classical Gaussian process model (or kriging model, i.e. Gaussian process conditioning relatively to a finite number of data points). The resulting model interpolates exactly the set of classical data and approximates the condition on  $\mathcal{S}$  (here, to vanish on the circle). Figure 2.5 represents the best predictor of a Gaussian process model with kernel  $K_{0_D}^{app}(\cdot, \cdot)$  (i.e. a conditional expectation) and Figure 2.6 shows a conditional realization (i.e. a conditional simulation).

## B.6.2 Derivative Constraint

We consider  $M_N = \text{span} \{ \eta_t, t \in \mathcal{C} \}$ . Here,  $\gamma_N : [0, 2\pi] \rightarrow M_N \subset E'$  is given by  $\gamma_N \theta = \eta_{s_{R,\theta} = (R \cos \theta, R \sin \theta)}$  and compactness and continuity arguments also assure that  $\mathcal{H}_{M_N}$  is separable (all required hypotheses are also verified). We recall that

$$\mathcal{H}_{M_N} = \mathcal{H}_{0_N}^\perp = \overline{\text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial r_s} K(s, \cdot), s \in \mathcal{S} \right\}}^{\mathcal{H}}.$$

We have

$$\begin{aligned} K(x, y) &= e^{-\frac{1}{\sigma^2}(r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_y \cos(\alpha_x - \alpha_y))}, \text{ then} \\ \frac{\partial}{\partial r_x} K(x, y) &= -\frac{2}{\sigma^2}(r_x - r_y \cos(\alpha_x - \alpha_y))K(x, y) \text{ and} \\ \frac{\partial^2}{\partial r_y \partial r_x} K(x, y) &= \frac{2}{\sigma^2} \cos(\alpha_x - \alpha_y)K(x, y) \\ &\quad + \frac{4}{\sigma^4}(r_x - r_y \cos(\alpha_x - \alpha_y))(r_y - r_x \cos(\alpha_x - \alpha_y))K(x, y). \end{aligned}$$

For  $f \in L^2([0, 2\pi])$ , our  $M_N$ -adapted integral operator is, for  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,

$$\mathcal{L}_\nu^N[f](\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial r_s \partial r_x} K(x_{R,\alpha}, s_{R,\theta}) f(\theta) R d\theta, \quad (\text{B.27})$$

with  $s_{R,\theta} = (R \cos \theta, R \sin \theta)$  and  $x_{R,\alpha} = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ .

Let us pose  $A = \frac{2}{\sigma^2} - \frac{8R^2}{\sigma^4}$  and  $B = \frac{4R^2}{\sigma^4}$ . Then, straightforward calculations (using the same arguments than in Section B.6.1) show that the eigenvalues of  $\mathcal{L}_\nu^N$  are

$$\text{for } n \geq 0, \lambda_n^N = \int_0^{2\pi} [A \cos \theta + B(1 + \cos^2 \theta)] e^{-\frac{2R^2}{\sigma^2}(1 - \cos \theta)} \cos(n\theta) R d\theta.$$

For  $n = 0$ ,  $\lambda_0^N$  is associated with the eigenfunction, for  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,  $\tilde{\phi}_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$ .

For  $n \geq 1$ ,  $\lambda_n^N$  is of multiplicity 2, associated with, for  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,

$$\tilde{\phi}_n^c(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \cos n\alpha, \text{ and } \tilde{\phi}_n^s(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sin n\alpha.$$

Arguments of periodicity assure us that  $\mathcal{L}_\nu^N$  does not admit other eigenvalue (see Chapter 2).

**Remark B.9:** The two operators  $\mathcal{L}_\nu^D$  and  $\mathcal{L}_\nu^N$  have the same eigenfunctions ( $\mathcal{L}_\nu^N$  and  $\mathcal{L}_\nu^D$  are diagonalizable in the same basis). ■

We next define the regularized eigenfunctions  $\phi_0^N$ ,  $\phi_n^{cN}$  and  $\phi_n^{sN} \in \mathcal{H}_{M_N}$  (see equation (B.12)). In our case with have, for instance,

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathcal{X}, \phi_n^{cN}(x) = \frac{1}{\lambda_n^N} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r_s} K(s_{R,\theta}, x) \frac{\cos(n\theta)}{\sqrt{\pi R}} R d\theta. \quad (\text{B.28})$$

Let us consider the values of the eigenfunctions  $\phi_0^N$ ,  $\phi_n^{cN}$  and  $\phi_n^{sN}$  on the circle  $\mathcal{C}$ . From equation (B.28), it appears that those ones are linked with the integral operator, for  $x_{R,\alpha} = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$  and  $f \in L^2([0, 2\pi])$ ,

$$J_\nu[f](\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r_s} K(x_{R,\alpha}, s_{R,\theta}) f(\theta) R d\theta. \quad (\text{B.29})$$

$J_\nu$  is self-adjoint but not positive. We remark that for,  $n \geq 0$ ,

$$\rho_n = \int_0^{2\pi} \frac{-2R}{\sigma^2} (1 - \cos \theta) e^{-\frac{2R^2}{\sigma^2}(1 - \cos \theta)} \cos(n\theta) R d\theta, \quad (\text{with } \rho_n \in \mathbb{R})$$

are eigenvalues of  $J_\nu$ . For  $n = 0$ ,  $\rho_0$  is associated with the same eigenfunction than  $\lambda_0^N$  (and  $\lambda_0^D$ ), that is for  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,  $\tilde{\phi}_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$  (remark that  $\rho_0 < 0$ ).

For  $n \geq 1$ , the  $\rho_n$  are also associated with the same eigenfunctions than  $\lambda_n^N$ , so the  $\rho_n$  are of multiplicity 2 and associated with, for  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,

$$\tilde{\phi}_n^c(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \cos n\alpha, \text{ and } \tilde{\phi}_n^s(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sin n\alpha.$$

The eigenfunctions  $\tilde{\phi}_n$  of  $J_\nu$  form an Hilbert basis of  $L^2([0, 2\pi])$ , hence, the operator  $J_\nu$  is diagonalizable on  $L^2([0, 2\pi])$ , its spectrum is composed by the eigenvalues  $\rho_n$  associated with  $\tilde{\phi}_0$ ,  $\tilde{\phi}_n^c$  and  $\tilde{\phi}_n^s$  ( $J_\nu$  is diagonalizable in the same basis than  $\mathcal{L}_\nu^N$  and  $\mathcal{L}_\nu^D$ ).

The spectrum of the operator  $J_\nu$  has an interesting behaviour, its general appearance (number of negative eigenvalues for instance) depends of the ratio between  $R$  and  $\sigma^2$ . Figure 2.7 shows the values of  $\rho_n$ ,  $0 \leq n \leq 30$  for  $R = 3$  and  $\sigma^2 = 2$ .

We finally obtain that the values of the regularized eigenfunctions of  $\mathcal{L}_\nu^N$  on the circle  $\mathcal{C}$  are, for  $x_{R,\alpha} = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ ,

$$\phi_0^N(x_{R,\alpha}) = \frac{\rho_0}{\lambda_0^N} \tilde{\phi}_0(\alpha), \phi_n^{cN}(x_{R,\alpha}) = \frac{\rho_n}{\lambda_n^N} \tilde{\phi}_n^c(\alpha) \text{ and } \phi_n^{sN}(x_{R,\alpha}) = \frac{\rho_n}{\lambda_n^N} \tilde{\phi}_n^s(\alpha).$$

**Remark B.10:** Let us remark that the values of the radial derivatives on the circle  $\mathcal{C}$  of the regularized eigenfunctions  $\phi_0^D$ ,  $\phi_n^{cD}$  et  $\phi_n^{sD}$ ,  $n \geq 1$ , can also be expressed from the eigenvalues  $\rho_n$ ,  $n \geq 0$ , of  $J_\nu$ . Hence, we easily obtain, for  $x_{R,\alpha} \in \mathcal{C}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \phi_0^D, \eta_{x_{R,\alpha}} \rangle_{E,E'} &= \frac{\rho_0}{\lambda_0^D} \tilde{\phi}_0(\alpha), \text{ and for } n \geq 1, \\ \langle \phi_n^{cD}, \eta_{x_{R,\alpha}} \rangle_{E,E'} &= \frac{\rho_n}{\lambda_n^D} \tilde{\phi}_n^c(\alpha), \langle \phi_n^{sD}, \eta_{x_{R,\alpha}} \rangle_{E,E'} = \frac{\rho_n}{\lambda_n^D} \tilde{\phi}_n^s(\alpha). \end{aligned} \quad (\text{B.30}) \quad \blacksquare$$

**Numerical Applications.** We fix  $R = 3$  and  $\sigma^2 = 2$ , we next compute the eigenvalues and regularized eigenfunctions of  $\mathcal{L}_\nu^N$ . Figures 2.8 and 2.9 respectively show a representation of the eigenvalues of  $\mathcal{L}_\nu^N$  and the graph of a regularized eigenfunction.

Following Section B.4, we approximate the kernel  $T_{\mathcal{H}_{M_N}}$  with the 31 eigenfunctions associated with the most important eigenvalues, that is, for all  $x$

and  $x \in \mathbb{R}^2$

$$K_{M_N}^{app}(x, y) = \lambda_0^N \phi_0^N(x) \phi_0^N(y) + \sum_{n=1}^{15} \lambda_n^N [\phi_n^{cN}(x) \phi_n^{cN}(y) + \phi_n^{sN}(x) \phi_n^{sN}(y)],$$

with  $K_{M_N}^{app}(x, y) = \left\langle T_{\mathcal{H}_{M_N}^{app}} \delta_x, \delta_y \right\rangle_{E, E'}$ . We have

$$\text{Trace}(\mathcal{L}_\nu^N) = \frac{4\pi R}{\sigma^2} = 18.84956 \text{ and } \sum_{k \in \mathbb{I}_{app}} \lambda_k^N = \lambda_0 + 2 \sum_{n=1}^{15} \lambda_n^N = 18.84928.$$

Hence, we obtain for the spectral error term :

$$\sum_{k \in \mathbb{I}_{err}} \lambda_k^N = 2.797111\text{e-}04. \quad (\text{B.31})$$

We next approximate the kernel  $K_{0_N}(\cdot, \cdot) = K(\cdot, \cdot) - K_{M_N}(\cdot, \cdot)$  of the sub-RKHS  $\mathcal{H}_{0_N}$  with, for all  $x$  and  $y \in \mathbb{R}^2$ ,

$$K_{0_N}^{app}(x, y) = K(x, y) - K_{M_N}^{app}(x, y). \quad (\text{B.32})$$

We remind that  $\mathcal{H}_{0_N}$  is the subspace of functions  $h \in \mathcal{H}$  such that  $\frac{\partial}{\partial r_i} h(t) = 0$  for all  $t \in \mathcal{C}$ .

Figure 2.10 shows the sample path of a centered Gaussian process with covariance  $K_{0_N}^{app}(\cdot, \cdot)$ . As expected, this approximates a centered Gaussian process of covariance  $K(\cdot, \cdot)$  conditioned to have null normal derivative on  $\mathcal{S}$ . In this example, instead of being null, each normal derivative on  $\mathcal{S}$  follows a centered normal distribution with variance

$$\frac{1}{2\pi R} \sum_{k \in \mathbb{I}_{err}} \lambda_k^N = 1.483913\text{e-}05.$$

**Remark B.11 :** For  $t \in \mathcal{C}$ , we have

$$K_{0_N}^{app}(t, t) = 1 - \frac{\rho_0^2}{\lambda_0^N 2\pi R} - \sum_{n=1}^{15} \frac{\rho_n^2}{\lambda_n^N \pi R} = 0.9568043. \quad \blacksquare$$

### B.6.3 Double Constraint

In this last section, the results of the two preceding sections are combined in order to obtain a model that takes account of the values of the function and



of its radial derivatives on  $\mathcal{C}$ . We present an efficient way to approximate the kernel  $K_{00}(\cdot, \cdot)$  of the subspace  $\mathcal{H}_{00}$  of functions  $h \in \mathcal{H}$  such that

$$\forall t \in \mathcal{C}, \langle h, \eta_t \rangle_{E, E'} = 0 \text{ and } \langle h, \delta_t \rangle_{E, E'} = 0.$$

Nevertheless, in what follows, one can find the necessary informations allowing to treat the general problem (that is imposed constraints on the values and on the normal derivatives).

We proceed in a same way than in Remark B.1. We first consider the problem of the normal derivatives, in other words, the interpolation problem associated with  $M_N$  (problem studied in Section B.6.2) and next the problem of the values, problem associated with  $M_D$  (arbitrary choice, see Remark B.12).

Let us consider the kernel  $K_{0_N}(\cdot, \cdot)$  (see Section B.6.2) of  $\mathcal{H}_{0_N}$ , the subspace of functions  $h \in \mathcal{H}$  such that  $\frac{\partial}{\partial r_t} h(t) = 0$  for all  $t \in \mathcal{C}$ . We recall that

$$K_{0_N}(x, y) = K(x, y) - K_{M_N}(x, y) \text{ with}$$

$$K_{M_N}(x, y) = \lambda_0^N \phi_0^N(x) \phi_0^N(y) + \sum_{n \geq 1} \lambda_n^N [\phi_n^{cN}(x) \phi_n^{cN}(y) + \phi_n^{sN}(x) \phi_n^{sN}(y)].$$

We then consider the integral operator on  $L^2([0, 2\pi])$  defined by the kernel  $K_{0_N}(\cdot, \cdot)$  and by the subspace  $M_D$  of  $E'$ ,

$$\mathcal{L}_\nu^R[f](\alpha) = \int_0^{2\pi} K_{0_N}(x_{R, \alpha}, s_{R, \theta}) f(\theta) R d\theta, \text{ (R for Robin).}$$

From the study of the operator  $J_\nu$  (see Section B.6.2), we find that the eigenvalues  $\lambda_n^R$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , of  $\mathcal{L}_\nu^R$  are given by

$$\lambda_n^R = \lambda_n^D - \frac{\rho_n^2}{\lambda_n^N}.$$

$\lambda_0^R$  is associated with  $\tilde{\phi}_0$ , for  $n \geq 1$ ,  $\lambda_n^R$  is of multiplicity 2 and associated with  $\tilde{\phi}_n^c$  and  $\tilde{\phi}_n^s$ .

We finally introduce  $\phi_0^R$ ,  $\phi_n^{cR}$  and  $\phi_n^{sR}$  the regularized eigenfunctions of  $\mathcal{L}_\nu^R$ . Straightforward calculations give that, for all  $x \in \mathcal{X}$ ,

$$\phi_0^R(x) = \frac{1}{\lambda_0^R} (\lambda_0^D \phi_0^D(x) - \rho_0 \phi_0^N(x)),$$

$$\forall n \geq 1, \phi_n^{cR}(x) = \frac{1}{\lambda_n^R} (\lambda_n^D \phi_n^{cD}(x) - \rho_n \phi_n^{cN}(x)) \text{ and}$$

$$\phi_n^{sR}(x) = \frac{1}{\lambda_n^R} (\lambda_n^D \phi_n^{sD}(x) - \rho_n \phi_n^{sN}(x)).$$

As an illustration, we compute the kernel  $K_{0R}^{app}(\cdot, \cdot)$  given by, for  $x$  and  $y \in \mathcal{X}$ ,

$$\begin{aligned} K_{0R}^{app}(x, y) &= K_{0N}^{app}(x, y) - \lambda_0^R \phi_0^R(x) \phi_0^R(y) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{15} \lambda_n^R [\phi_n^{cR}(x) \phi_n^{cR}(y) + \phi_n^{sR}(x) \phi_n^{sR}(y)]. \end{aligned}$$

Finally, Figure 2.12 shows the sample path of an centered Gaussian process with covariance  $K_{0R}^{app}(\cdot, \cdot)$ .

As in Section B.6.2, instead of being null, the normal derivatives on the circle follow a centered normal distribution with variance  $1.483913\text{e-}05$ . For the values of the sample path on  $\mathcal{C}$ , those ones follow a centered normal distribution with variance, for  $t \in \mathcal{C}$ ,

$$\begin{aligned} K_{0R}^{app}(t, t) &= K_{0N}^{app}(t, t) - \frac{1}{2\pi R} \left( \lambda_0^R + 2 \sum_{n=0}^{15} \lambda_n^R \right) = K_{0D}^{app}(t, t) \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi R} \left( \lambda_0^D + 2 \sum_{n=0}^{15} \lambda_n^D \right) \approx 1.402309\text{e-}06. \end{aligned}$$

**Remark B.12:** Instead of first considering  $M_N$  and next  $M_D$ , one can operate in an inverse way. This leads to the study of the operator

$$\mathcal{L}_\nu^{R2}[f](\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial r_s \partial r_x} K_{0D}(x_{R,\alpha}, s_{R,\theta}) f(\theta) R d\theta,$$

which is associated with  $K_{0D}(\cdot, \cdot)$  and  $M_N$ . Using Remark B.10 (equation (B.30)), we deduce that the eigenvalues  $\lambda_n^{R2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , of  $\mathcal{L}_\nu^{R2}$  are

$$\lambda_n^{R2} = \lambda_n^N - \frac{\rho_n^2}{\lambda_n^D}.$$

$\lambda_0^{R2}$  is of multiplicity 1 and is associated with  $\tilde{\phi}_0$ .  $\lambda_n^{R2}$  for  $n \geq 1$  are of multiplicity 2 and associated with  $\tilde{\phi}_n^c$  and  $\tilde{\phi}_n^s$ . We finally obtain the expression of the regularized eigenfunctions, which is for instance

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathcal{X}, \phi_n^{cR2}(x) = \frac{1}{\lambda_n^{R2}} (\lambda_n^N \phi_n^{cN}(x) - \rho_n \phi_n^{cD}(x)). \quad \blacksquare$$

# Annexe C

## English version of Chapter 3

Optimal interpolation in Hilbert subspaces and Gaussian processes conditioning are intrinsically linked. The aim of this section is to apply Chapter 2 results to the conditioning problem. Note that this chapter is not an exact translation of Chapter 3. Interested readers can refer to the French version for additional details and considerations.

### C.1 Notations and recalls

Let  $\mathcal{H}$  be a *separable* Hilbert subspace of  $E$ . We assume that  $\mathcal{H}$  is the Cameron-Martin space of centered Gaussian process  $Y$  defined on a probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . We denote by  $\mathbf{H}$  the Gaussian Hilbert space associated with  $Y$  (see [Jan97]). We remind that  $\mathbf{H}$  is a closed linear subspace of the Hilbert space  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  of second order centered real random variables (r.v.) on  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

For the sake of simplicity, we assume that  $E$  is a Banach space (see [DFLC71, Tal83] for more general frameworks), and that  $Y$  takes its values in  $E$  with probability 1 (i.e. the triplet  $(j, \mathcal{H}, \overline{\mathcal{H}}^E)$  is an *abstract Wiener space*, with  $\overline{\mathcal{H}}^E$  the completed of  $\mathcal{H}$  in  $E$  and  $j$  the continuous injection of  $\mathcal{H}$  in  $\overline{\mathcal{H}}^E$ , see [Gro67]).

We denote by  $\mathcal{I} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{H}$  the isometry between  $\mathcal{H}$  and  $\mathbf{H}$ , it verifies

$$\mathbb{E}(\mathcal{I}h \mathcal{I}g) = (h|g)_{\mathcal{H}},$$

where  $\mathbb{E}(\mathcal{I}h \mathcal{I}g)$  represents the inner-product between the two random vari-

ables  $\mathcal{I}h$  and  $\mathcal{I}g \in \mathbf{H}$ . Let us also add, for  $e' \in E'$ ,

$$\langle Y, e' \rangle_{E, E'} \stackrel{\text{(notation)}}{=} Y_{e'} = \mathcal{I}(T_{\mathcal{H}}e').$$

One can consult, among others, [Bax76, TV07] and Chapter 3 for more details about the previous notions.

For a linear subspace  $M$  of  $E'$ ,  $P_{\mathcal{H}_M}$  denotes the orthogonal projection of  $\mathcal{H}$  onto  $\mathcal{H}_M$ . We then introduce the orthogonal projection  $P_{\mathbf{H}_M}$  of  $\mathbf{H}$  onto  $\mathbf{H}_M = \mathcal{I}(\mathcal{H}_M)$  and obtain the diagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\mathcal{I}} & \mathbf{H} \\ \downarrow P_{\mathcal{H}_M} & & \downarrow P_{\mathbf{H}_M} \\ \mathcal{H}_M & \xrightarrow{\mathcal{I}} & \mathbf{H}_M \end{array} \quad (\text{C.1})$$

$T_{\mathcal{H}_M} = P_{\mathcal{H}_M}T_{\mathcal{H}}$  is the Hilbert kernel of  $\mathcal{H}_M$ . Hence, by isometry,

$$\forall e' \in E', \mathcal{I}(T_{\mathcal{H}_M}e') = P_{\mathbf{H}_M}[Y_{e'}] \stackrel{\text{(notation)}}{=} \mathbb{E}(Y_{e'}|Y_{f'}, f' \in M). \quad (\text{C.2})$$

For all  $e' \in E'$ , the r.v.  $P_{\mathbf{H}_M}[Y_{e'}]$  is called the *conditional mean* of  $Y_{e'}$  knowing  $Y_{f'}$  for  $f' \in M$  (and  $T_{\mathcal{H}_0}$  is the *conditional covariance* kernel).

## C.2 Spectral approach for conditioning

We now consider the general framework of Chapter 2.

### Proposition C.1

*Under the assumptions of Chapter 2, the centered Gaussian process  $(Y_{\gamma_s})_{s \in \mathcal{S}}$  admits the Karhunen-Loève expansion*

$$\forall s \in \mathcal{S}, Y_{\gamma_s} = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \sqrt{\lambda_n} \tilde{\phi}_n(s) \zeta_n, \quad (\text{C.3})$$

*where the  $\zeta_n = \mathcal{I}(\sqrt{\lambda_n} \phi_n)$ ,  $n \in \mathbb{I}_+$ , form an orthonormal basis of  $\mathbf{H}_M$  (i.e. the  $\zeta_n$ ,  $n \in \mathbb{I}_+$ , are independent  $\mathcal{N}(0, 1)$  r.v., such a family is sometimes called orthogaussian, see [Dud10]). Then, for  $\omega \in \Omega$ , the application  $t \mapsto Y_{\gamma_t}(\omega)$  is  $\nu$ -measurable (with probability 1) and the sample paths of  $(Y_{\gamma_s})_{s \in \mathcal{S}}$  are in  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  with probability 1 (more precisely in  $\overline{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}^{L^2}$ ), in*

particular,

$$\int_{\mathcal{S}} (Y_{\gamma s})^2 d\nu(s) < +\infty \text{ (with probability 1).}$$

**Proof:** Expansion (C.3) is a direct consequence of proposition B.2. Next, for all  $n \in \mathbb{I}_+$ , the application  $t \mapsto \langle \sqrt{\lambda_n} \phi_n, \gamma t \rangle_{E, E'}$  belongs by hypothesis to  $L^2(\mathcal{S}, \nu)$  (as an element of  $\mathfrak{F}(\mathcal{H}_M)$ ). Then, from the Tonelli's theorem and H-ii,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \int_{\mathcal{S}} \mathbb{E} \left[ \left( \sqrt{\lambda_n} \tilde{\phi}_n(s) \zeta_n \right)^2 \right] d\nu(s) &= \int_{\mathcal{S}} \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \left\langle \sqrt{\lambda_n} \phi_n, \gamma s \right\rangle_{E, E'}^2 d\nu(s) \\ &= \int_{\mathcal{S}} \|T_{\mathcal{H}} \gamma s\|_{\mathcal{H}}^2 d\nu(s) = N < +\infty. \end{aligned}$$

So, the sum  $\sum_{n \in \mathbb{I}_+} \left\| \sqrt{\lambda_n} \tilde{\phi}_n \zeta_n \right\|_{L^2(\nu \otimes \mathbb{P})}^2$  is convergent which implies the convergence of

$$(t, \omega) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \left\langle \sqrt{\lambda_n} \phi_n, \gamma t \right\rangle_{E, E'} \zeta_n(\omega)$$

in  $L^2(\nu \otimes \mathbb{P})$  and the proof is completed. ■

**Remark C.1:** We also obtain, using proposition C.1 and Fubini's theorem, that

$$\mathbb{E} \left[ \int_{\mathcal{S}} (Y_{\gamma s})^2 d\nu(s) \right] = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \lambda_n. \quad \blacksquare$$

### Theorem C.1

Let  $Y$  be a centered Gaussian process with values in  $E$  and covariance kernel  $T_{\mathcal{H}}$ . Let  $M$  be a linear subspace of  $E'$ . Under the assumptions of theorem B.1, we have for all  $e' \in E'$ ,

$$\mathbb{E}(Y_{e'} | Y_{f'}, f' \in M) = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \langle \phi_n, e' \rangle_{E, E'} \int_{\mathcal{S}} \tilde{\phi}_n(s) Y_{\gamma s} d\nu(s). \quad (\text{C.4})$$

In addition, the centered Gaussian process with covariance kernel  $T_{\mathcal{H}_M}$  (that is the process corresponding to  $\mathbb{E}(Y_{e'} | Y_{f'}, f' \in M)$ ,  $e' \in E'$ ) takes its values in  $\overline{\mathcal{H}_M}^{\gamma, \nu}$  with probability 1.

**Proof:** From corollary B.2, we know that for all  $e' \in E'$ ,

$$T_{\mathcal{H}_M} e' = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \lambda_n \langle \phi_n, e' \rangle_{E, E'} \phi_n,$$

this series being convergent in  $\mathcal{H}$ . Hence,

$$\mathcal{I}(T_{\mathcal{H}_M} e') = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \lambda_n \langle \phi_n, e' \rangle_{E, E'} \mathcal{I}(\phi_n). \quad (\text{C.5})$$

For  $n \in \mathbb{I}_+$ , the expression of the regularized eigenvectors  $\phi_n$  is given by equation (B.12), that is

$$\phi_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_{\mathcal{S}} \tilde{\phi}_n(s) T_{\mathcal{H}} \gamma_s d\nu(s).$$

Now, proposition C.1 assures us that the expression

$$\mathcal{I}(\phi_n) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{\mathcal{S}} \tilde{\phi}_n(s) \mathcal{I}(T_{\mathcal{H}} \gamma_s) d\nu(s) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{\mathcal{S}} \tilde{\phi}_n(s) Y_{\gamma_s} d\nu(s) \quad (\text{C.6})$$

keeps sens under our working hypotheses.

The last point is consequence of the isometry between  $\overline{\mathfrak{F}(\mathcal{H})}^{L^2}$  and  $\overline{\mathcal{H}_M}^{\gamma, \nu}$ . ■

**Remark C.2:** In [Raj72, Theorem 4.4] for example (or in [Wal67, Kue71]), similar spectral arguments and same type's expressions can be found. Those are used to give Karhunen-Loève expansions for continuous sample paths centered Gaussian Processes. We also refer the reader to the works of E. Parzen (in particular [Par62], see also [BTA04, Chapter 4]), M. Nashed and G. Wahba [Nas74, NW74a]. ■

### C.3 A note on regular conditional probabilities

If one assume that

$$\overline{\mathcal{H}}^E = \overline{\mathcal{H}_M}^E \oplus \overline{\mathcal{H}_0}^E \text{ and that } \overline{\mathcal{H}_M}^E \hookrightarrow \overline{\mathcal{H}_M}^{\gamma, \nu} \quad (\text{C.7})$$

(the second point meaning that  $\overline{\mathcal{H}_M}^E$  can be continuously injected into  $\overline{\mathcal{H}_M}^{\gamma, \nu}$ , note that there always exists an Hilbertian structure which verifies that condition, see [Kue71]), then one can use spectral arguments in order

to define the unique continuous projection  $\mathfrak{P}$  of  $\overline{\mathcal{H}}^E$  onto  $\overline{\mathcal{H}_M}^E$  parallelly to  $\overline{\mathcal{H}_0}^E$  (i.e.  $\mathfrak{P}h_0 = 0$  for all  $h_0 \in \overline{\mathcal{H}_0}^E$ ). That gives

$$\forall \Psi \in \overline{\mathcal{H}}^E, \mathfrak{P}[\Psi] = \sum_{n \in \mathbb{I}_+} \langle \phi_n, e' \rangle_{E, E'} \int_{\mathcal{S}} \tilde{\phi}_n(s) \langle \Psi, \gamma s \rangle_{E, E'} d\nu(s),$$

let us remark that such a  $\mathfrak{P}$  is an extension of the orthogonal projection  $P_{\mathcal{H}_M}$  (we have to pose  $\mathfrak{F}h_0 = 0$  for all  $h_0 \in \overline{\mathcal{H}_0}^E$ ).

We next consider the family of Gaussian measures on  $\overline{\mathcal{H}}^E$  with mean  $\mathfrak{P}[\Psi] \in \overline{\mathcal{H}_M}^E$  for  $\Psi \in \overline{\mathcal{H}}^E$  and covariance kernel  $T_{\mathcal{H}_0}$ . Then, from [TV07, Theorem 3.11], such a family defines a *regular conditional probability* over  $\overline{\mathcal{H}}^E$  relative to the knowledge of  $Y$  on  $M$ . In such case, the following notation is usually used

$$\mathfrak{P}[\Psi] = \mathbb{E}(Y_{e'} | Y_{f'} = \langle \Psi, f' \rangle_{E, E'}, f' \in M). \quad (\text{C.8})$$

Note that if we denote by  $\mu_Y$  the Gaussian measure on  $\overline{\mathcal{H}}^E$  defined by  $Y$ , the preceding regular conditional probability corresponds to the *disintegration* of  $\mu_Y$  relatively to  $\mathfrak{P}$ .

**Remark C.3:** We have the well known equality, for  $\varphi \in \mathcal{H}$ ,

$$\langle P_{\mathcal{H}_M}[\varphi], e' \rangle_{E, E'} = \mathbb{E}(Y_{e'} | Y_{f'} = \langle \varphi, f' \rangle_{E, E'}, f' \in M). \quad (\text{C.9})$$

Let us just remark that in order to be able to define a regular conditional probability from the family  $\mathfrak{P}[\varphi]$  for  $\varphi \in \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}_M$  must be of finite dimension (and in such cases, it is possible). ■

## C.4 Illustration: Conditioning the Brownian Sheet

In this section  $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  will denote the positive quadrant in the plane,  $x = (x_1, x_2)$  will be a generic element of  $\mathcal{X}$ . We remind that the Brownian sheet is the centered Gaussian process  $(B_x)_{x \in \mathcal{X}}$  with covariance kernel, for  $x$  and  $y \in \mathcal{X}$ ,

$$K(x, y) = (x_1 \wedge y_1)(x_2 \wedge y_2),$$

where  $x_i \wedge y_i$  ( $i = 1, 2$ ) denotes the minimum between the two positive reals  $x_i$  and  $y_i$ . Following [Car86, DR88, Car90], our aim is to establish a prediction formula for the Brownian sheet, knowing its values on a *separation line*  $\mathfrak{S}$ .

Hence, we have to consider an interpolation problem associated with the kernel  $K(\cdot, \cdot)$  and  $M = \{\delta_s, s \in \mathfrak{S}\}$ .

In Section C.4.1, we first consider the case where  $\mathfrak{S}$  is the unit quarter-circle. By the choice of particular measures, we next deduce similar results for more general separation lines (Section C.4.2).

### C.4.1 The quarter-circle case

Let  $\mathfrak{S}$  be the unit quarter-circle, i.e.

$$\mathfrak{S} = \{x \in \mathcal{X} : x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

We consider  $\mathcal{S} = [0, \frac{\pi}{2}]$  endowed with its Lebesgue measure and denote by  $L^2([0, \frac{\pi}{2}])$  the space of squared integrable functions (with respect to the Lebesgue measure) on  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , endowed with the Hilbert norm

$$\forall f \in L^2([0, \frac{\pi}{2}]), \|f\|_{L^2}^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)^2 d\theta.$$

Hence, we implicitly consider the application  $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow M, \theta \mapsto \delta_{s_\theta}$  with  $s_\theta = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathfrak{S}$ .

Throughout Section C.4.1, we will use the notation

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}], B_\theta = B_{(\cos \theta, \sin \theta)}.$$

For  $f \in L^2([0, \frac{\pi}{2}])$ , we consider the integral operator

$$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], \mathcal{L}[f](\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \alpha \wedge \cos \theta) (\sin \alpha \wedge \sin \theta) f(\theta) d\theta.$$

Straightforward calculations (see appendix A.2) show that the spectral decomposition of  $\mathcal{L}$  (in  $L^2([0, \frac{\pi}{2}])$ ) is:

$$n \geq 1, \lambda_n = \frac{1}{4n^2 - 1}, \text{ associated with } \tilde{\phi}_n(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin(2n\theta).$$

The next step is the definition of the regularized eigenfunctions which are given by, for all  $x \in \mathcal{X}$ ,

$$\lambda_n \phi_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x_1 \wedge \cos \theta) (x_2 \wedge \sin \theta) \tilde{\phi}_n(\theta) d\theta. \quad (\text{C.10})$$

As suggested in figure C.1, we define  $\alpha_1$  and  $\alpha_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  such that  $x_1 = \cos \alpha_1$  and  $x_2 = \sin \alpha_2$ . We have to consider two different cases:



- $x$  lies below the separation line, i.e.  $x$  is inside the quarter-disc, i.e.  $\|x\| \leq 1$  (with  $\|\cdot\|$  the euclidean norm),
- $x$  lies above the separation line, i.e.  $x$  is outside the quarter-disc, i.e.  $\|x\| \geq 1$ .

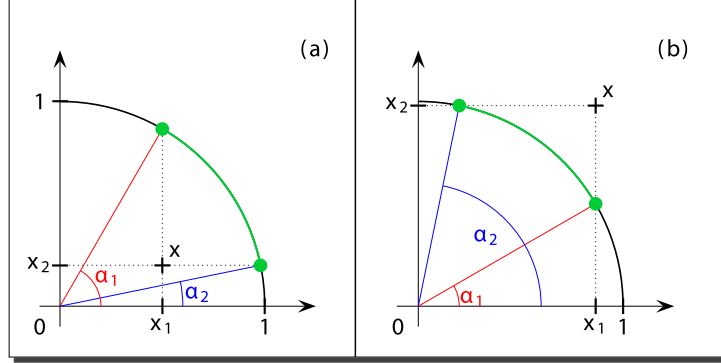


Figure C.1: Graphical representation and parametrization of the intercepted arc for  $x$  inside the quarter-disc (a) and outside the quarter-disc (b).

**x below the separation line.** In this case  $\alpha_1 \geq \alpha_2$  and

$$K(x, (\cos \theta, \sin \theta)) = \begin{cases} x_1 \sin \theta, & \text{for } \theta \leq \alpha_2, \\ x_1 x_2, & \text{for } \alpha_2 \leq \theta \leq \alpha_1, \\ x_2 \cos \theta, & \text{for } \alpha_1 \leq \theta. \end{cases}$$

By splitting the integral (C.10) into three terms and using integration by parts twice, we get:

$$\begin{aligned} \lambda_n \phi_n(x) &= \frac{x_2}{4n^2} \sqrt{1 - x_1^2} \tilde{\phi}_n(\alpha_1) + \frac{x_1}{4n^2} \sqrt{1 - x_2^2} \tilde{\phi}_n(\alpha_2) \\ &\quad + \frac{x_1}{4n^2} \int_0^{\alpha_2} \sin \theta \tilde{\phi}_n(\theta) d\theta + \frac{x_2}{4n^2} \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \tilde{\phi}_n(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Since  $\lambda_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$ , we have the interesting relation

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= x_2 \sqrt{1 - x_1^2} \tilde{\phi}_n(\alpha_1) + x_1 \sqrt{1 - x_2^2} \tilde{\phi}_n(\alpha_2) \\ &\quad + x_1 \int_0^{\alpha_2} \sin \theta \tilde{\phi}_n(\theta) d\theta + x_2 \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \tilde{\phi}_n(\theta) d\theta - \lambda_n \phi_n(x). \quad (\text{C.11}) \end{aligned}$$

Remind the notation  $B_\theta = B_{(\cos\theta, \sin\theta)}$  to deduce from relation (C.11) and Theorem C.1 that

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_x|B_s, s \in \mathfrak{S}) &= x_2\sqrt{1-x_1^2}B_{\alpha_1} + x_1\sqrt{1-x_2^2}B_{\alpha_2} \\ &\quad + x_1 \int_0^{\alpha_2} \sin\theta B_\theta d\theta + x_2 \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta B_\theta d\theta \\ &\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n \geq 1} \lambda_n \phi_n(x) \tilde{\phi}_n(\theta) B_\theta d\theta.\end{aligned}$$

From the orthogonal decomposition of the kernel, we have

$$\forall x \in \mathcal{X} \text{ and } \forall s \in \mathfrak{S}, K(x, s) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n \phi_n(x) \phi_n(s),$$

i.e.,  $\forall x \in \mathcal{X}$  and  $\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,

$$\sum_{n \geq 1} \lambda_n \phi_n(x) \tilde{\phi}_n(\theta) = K(x, (\cos\theta, \sin\theta)) = \begin{cases} x_1 \sin\theta, & \text{for } \theta \leq \alpha_2, \\ x_1 x_2, & \text{for } \alpha_2 \leq \theta \leq \alpha_1, \\ x_2 \cos\theta, & \text{for } \alpha_1 \leq \theta. \end{cases}$$

After two simplifications, we finally get

$$\mathbb{E}(B_x|B_s, s \in \mathfrak{S}) = x_2\sqrt{1-x_1^2}B_{\alpha_1} + x_1\sqrt{1-x_2^2}B_{\alpha_2} - x_1x_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} B_\theta d\theta.$$

**x above the separation line.** In this case,  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ,  $\alpha_1 = 0$  if  $x_1 \geq 1$  and  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$  if  $x_2 \geq 1$ . For all  $x$  such that  $\|x\| \geq 1$  and  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,

$$K(x, (\cos\theta, \sin\theta)) = \begin{cases} x_1 \sin\theta, & \text{for } \theta \leq \alpha_1, \\ \cos\theta \sin\theta, & \text{for } \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2, \\ x_2 \cos\theta, & \text{for } \alpha_2 \leq \theta. \end{cases}$$

In exactly the same way as in the previous case, we obtain for all  $x$  such that  $\|x\| \geq 1$ ,

$$\mathbb{E}(B_x|B_s, s \in \mathfrak{S}) = (1-x_1^2)_+ B_{\alpha_1} + (1-x_2^2)_+ B_{\alpha_2} + 3 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos\theta \sin\theta B_\theta d\theta,$$

where  $t_+ = \max(0, t)$  for  $t \in \mathbb{R}$ .

Now, we can state the following theorem:

### Theorem C.2

Let  $(B_x)_{x \in \mathbb{R}_+^2}$  be the Brownian sheet and  $\mathfrak{S} = \{x \in \mathbb{R}_+^2, \|x\| = 1\}$ . Then,

- for  $x$  such that  $\|x\| \leq 1$  ( $x_1 = \cos \alpha_1$ ,  $x_2 = \sin \alpha_2$ ,  $\alpha_2 \leq \alpha_1$ ):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S}) &= x_2 \sqrt{1 - x_1^2} B_{\alpha_1} + x_1 \sqrt{1 - x_2^2} B_{\alpha_2} \\ &\quad - x_1 x_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} B_\theta d\theta, \quad (\text{C.12}) \end{aligned}$$

- for  $x$  such that  $\|x\| \geq 1$  ( $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ,  $\alpha_1 = 0$  if  $x_1 \geq 1$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$  if  $x_2 \geq 1$ ):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S}) &= (1 - x_1^2)_+ B_{\alpha_1} + (1 - x_2^2)_+ B_{\alpha_2} \\ &\quad + 3 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \theta \sin \theta B_\theta d\theta, \quad (\text{C.13}) \end{aligned}$$

with the notation  $B_\theta = B_{(\cos \theta, \sin \theta)}$  for any  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

See Figure 3.2 for a simulation.

**Proof:** (*Direct proof*) With the notation  $Z_x = \mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S})$ , we only have to prove for any  $x \in \mathcal{X}$  and any  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ :

$$\mathbb{E}\{B_\alpha (B_x - Z_x)\} = 0,$$

or, equivalently,

$$\mathbb{E}\{B_\alpha B_x\} = \mathbb{E}\{B_\alpha Z_x\}.$$

Fix  $x$  such that  $\|x\| \leq 1$ . For  $\alpha \leq \alpha_2$ , we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{B_\alpha Z_x\} &= x_2 \sqrt{1 - x_1^2} \cos \alpha_1 \sin \alpha + x_1 \sqrt{1 - x_2^2} \cos \alpha_2 \sin \alpha \\ &\quad - x_1 x_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \cos \theta \sin \alpha d\theta. \end{aligned}$$

Hence,

$$\mathbb{E}\{B_\alpha Z_x\} = x_1 x_2 \sqrt{1 - x_1^2} \sin \alpha + x_1 (1 - x_2^2) \sin \alpha - x_1 x_2 (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \sin \alpha.$$

Finally, using the relations  $x_1 = \cos \alpha_1$ ,  $x_2 = \sin \alpha_2$ , we get

$$\mathbb{E}\{B_\alpha Z_x\} = x_1 \sin \alpha = \mathbb{E}\{B_\alpha B_x\}.$$

If  $\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1$ , we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{B_\alpha Z_x\} &= x_2 \sqrt{1-x_1^2} \cos \alpha_1 \sin \alpha + x_1 \sqrt{1-x_2^2} \sin \alpha_2 \cos \alpha \\ &\quad - x_1 x_2 \left( \int_{\alpha_2}^{\alpha} \cos \alpha \sin \theta d\theta + \int_{\alpha}^{\alpha_1} \cos \theta \sin \alpha d\theta \right). \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{B_\alpha Z_x\} &= x_1 x_2 \sqrt{1-x_1^2} \sin \alpha + x_1 x_2 \sqrt{1-x_2^2} \cos \alpha \\ &\quad - x_1 x_2 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha) \cos \alpha - x_1 x_2 (\sin \alpha_1 - \sin \alpha) \sin \alpha, \end{aligned}$$

and  $\mathbb{E} \{B_\alpha Z_x\} = x_1 x_2 = \mathbb{E} \{B_\alpha B_x\}$ . Finally, the last case  $\alpha_1 \leq \alpha$  is symmetric of the first one.

The case  $x$  such that  $\|x\| \geq 1$  is analogue. ■

**Remark C.4:** We have found in a different way and under a different form known results of prediction for the Brownian sheet. Let  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (t, \sqrt{1-t^2})$  be the usual parametrization of the quarter-circle ( $t \in [0, 1]$ ). Let  $a = \cos \alpha_1 = x_1$  and  $b = \cos \alpha_2 = \sqrt{1-x_2^2}$ . By a stochastic integration by parts, the Theorem 4.2 (a) in [DR88] implies, for  $\|x\| \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (B_x | B_s, s \in \mathfrak{G}) &= \\ &\varphi_1(a) \varphi_2(b) \left( \frac{B_{\varphi(a)}}{\varphi_1(a) \varphi_2(a)} + \frac{b B_{\varphi(b)}}{\varphi_2(b)} - \frac{a B_{\varphi(a)}}{\varphi_2(a)} - \int_a^b \frac{B_{\varphi(t)}}{\sqrt{1-t^2}} dt \right). \end{aligned}$$

Hence,

$$\mathbb{E} (B_x | B_s, s \in \mathfrak{G}) = x_2 \sqrt{1-x_1^2} B_{\alpha_1} + x_1 \sqrt{1-x_2^2} B_{\alpha_2} - x_1 x_2 \int_a^b \frac{B_{\varphi(t)}}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

By the usual change of variables  $t = \cos \theta$ , we see that the expression (4.4) of [DR88, Theorem 4.2] leads to the formula (C.12) in Theorem C.2. In the same way, the expression (4.6) of [DR88, Theorem 4.2] gives for  $0 < b \leq a < 1$

$$\mathbb{E} (B_x | B_s, s \in \mathfrak{G}) = B_{\varphi(a)} - \left( \frac{a^3 B_{\varphi(a)}}{\varphi_1(a)} - \frac{b^3 B_{\varphi(b)}}{\varphi_1(b)} - \int_b^a 3t B_{\varphi(t)} dt \right).$$

Thus,

$$\mathbb{E} (B_x | B_s, s \in \mathfrak{G}) = (1-x_1^2) B_{\alpha_1} + (1-x_2^2) B_{\alpha_2} + 3 \int_b^a t B_{\varphi(t)} dt.$$

Use the same change of variables  $t = \cos \theta$  to get the formula (C.13) in Theorem C.2. ■

## C.4.2 The general case

Let  $\mathfrak{S}$  be a separation line, i.e. any polar curve

$$\mathfrak{S} = \left\{ x \in \mathcal{X} : x = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta), \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

where  $\theta \mapsto r(\theta)$  is a continuous function with values in  $]0, +\infty[$  with

$$\begin{cases} r(\theta) \cos \theta : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, +\infty[ \text{ non-increasing,} \\ r(\theta) \sin \theta : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, +\infty[ \text{ non-decreasing.} \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

**Remark C.5:** In the case  $\theta \mapsto r(\theta) \cos \theta$  (strictly) increasing, a separation line can also be interpreted as the graph of a function of type  $x_2 = f(x_1)$  with  $f$  non-increasing.

Observe that our definition also includes cases when  $\mathfrak{S}$  contains horizontal or vertical segments, or both. For the sake of simplicity, we only deal with separation lines that meet the axes, see Remark 3.15. ■

The monotony-properties of a separation line imply the following relation for the Brownian sheet: for  $\theta$  and  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

$$(r(\alpha) \cos \alpha \wedge r(\theta) \cos \theta) (r(\alpha) \sin \alpha \wedge r(\theta) \sin \theta) = r(\alpha)r(\theta) (\cos \alpha \wedge \cos \theta) (\sin \alpha \wedge \sin \theta). \quad (\text{C.15})$$

Throughout Section C.4.2, we will use the notation  $B_\theta = B_{(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)}$ , for  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . For the sake simplicity, we assume that the function  $\theta \mapsto r(\theta)$  is of class  $C^2$ .

As in Section C.4.1, we consider  $\mathcal{S} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . The corresponding application is now  $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow M$ ,  $\theta \mapsto \delta_{s_\theta}$  with  $s_\theta = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \in \mathfrak{S}$ . We next choose  $\mu(d\theta) = \frac{1}{r(\theta)^2} d\theta$  as measure on  $\mathcal{S}$ . Hence, we consider the Hilbert space  $L^2\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \mu\right)$  of squared integrable functions (with respect to  $\mu$ ) on  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , endowed with the Hilbert norm

$$\forall f \in L^2\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \mu\right), \|f\|_{L^2}^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)^2 \frac{1}{r(\theta)^2} d\theta.$$

Note that we have

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} K(s_\theta, s_\theta) \mu(d\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} < +\infty.$$

We next consider the operator, for  $f \in L^2([0, \frac{\pi}{2}], \mu)$ ,

$$\mathcal{L}_\mu[f](\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r(\alpha) \cos \alpha \wedge r(\theta) \cos \theta) (r(\alpha) \sin \alpha \wedge r(\theta) \sin \theta) f(\theta) \frac{1}{r(\theta)^2} d\theta.$$

The spectral decomposition of  $\mathcal{L}_\mu$  can be easily deduce from the quarter-circle case. Denote by  $\lambda_n$  and  $\tilde{\phi}_n$ ,  $n \geq 1$  the spectral decomposition of Section C.4.1 integral operator, we then have that the eigenvalues of  $\mathcal{L}_\mu$  are  $\lambda_n$ ,  $n \geq 1$ , associated with the normalized eigenfunctions:

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \tilde{\phi}_n^r(\theta) = r(\theta) \tilde{\phi}_n(\theta).$$

Indeed, we remark by (C.15) that

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu[\tilde{\phi}_n^r](\alpha) &= \\ & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r(\alpha) \cos \alpha \wedge r(\theta) \cos \theta) (r(\alpha) \sin \alpha \wedge r(\theta) \sin \theta) \tilde{\phi}_n^r(\theta) \frac{1}{r(\theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\alpha) r(\theta) (\cos \alpha \wedge \cos \theta) (\sin \alpha \wedge \sin \theta) r(\theta) \tilde{\phi}_n(\theta) \frac{1}{r(\theta)^2} d\theta \\ &= \lambda_n r(\alpha) \tilde{\phi}_n(\alpha) = \lambda_n \tilde{\phi}_n^r(\alpha). \end{aligned}$$

As in Section C.4.1, the next step is the regularization of the eigenfunctions, that is the calculation, for  $x \in \mathcal{X}$  and  $n \geq 1$ , of:

$$\lambda_n \phi_n^r(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x_1 \wedge r(\theta) \cos \theta) (x_2 \wedge r(\theta) \sin \theta) \tilde{\phi}_n^r(\theta) \frac{d\theta}{r(\theta)^2}. \quad (\text{C.16})$$

We pose  $x_1 = r(\alpha_1) \cos \alpha_1$  and  $x_2 = r(\alpha_2) \sin \alpha_2$  with  $\alpha_1$  and  $\alpha_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  and consider the two cases "below-above".

**x below the separation line.**  $\alpha_1 \geq \alpha_2$  and

$$K(x, (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)) = \begin{cases} x_1 r(\theta) \sin \theta, & \text{for } \theta \leq \alpha_2, \\ x_1 x_2, & \text{for } \alpha_2 \leq \theta \leq \alpha_1, \\ x_2 r(\theta) \cos \theta, & \text{for } \alpha_1 \leq \theta. \end{cases}$$

By splitting the integral and using integration by parts twice, we find:

$$\begin{aligned}
\lambda_n \phi_n^r(x) &= \frac{x_2}{4n^2} \sin \alpha_1 \tilde{\phi}_n(\alpha_1) + \frac{x_1}{4n^2} \cos \alpha_2 \tilde{\phi}_n(\alpha_2) \\
&+ \frac{x_2}{4n^2} \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \tilde{\phi}_n(\theta) d\theta + \frac{x_1}{4n^2} \int_0^{\alpha_2} \sin \theta \tilde{\phi}_n(\theta) d\theta \\
&+ \frac{x_1 x_2}{4n^2} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\alpha_1) \tilde{\phi}_n(\alpha_1) - \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\alpha_2) \tilde{\phi}_n(\alpha_2) \right] \\
&- \frac{x_1 x_2}{4n^2} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\theta) \tilde{\phi}_n(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Following Section C.4.1 and with the notation  $B_\theta = B_{(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)}$  for  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , we get:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S}) &= x_2 \left[ \frac{\sin \alpha_1}{r(\alpha_1)} + \cos \alpha_1 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\alpha_1) \right] B_{\alpha_1} \\
&+ x_1 \left[ \frac{\cos \alpha_2}{r(\alpha_2)} - \sin \alpha_2 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\alpha_2) \right] B_{\alpha_2} \\
&- x_1 x_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\theta) + \frac{1}{r(\theta)} \right] B_\theta \frac{d\theta}{r(\theta)}.
\end{aligned}$$

**x above the separation line.** We have  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  and

$$K(x, (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)) = \begin{cases} x_1 r(\theta) \sin \theta, & \text{for } \theta \leq \alpha_1, \\ r(\theta)^2 \cos \theta \sin \theta, & \text{for } \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2, \\ x_2 r(\theta) \cos \theta, & \text{for } \alpha_2 \leq \theta. \end{cases}$$

### Theorem C.3

Let  $(B_x)_{x \in \mathcal{X}}$  be the Brownian sheet on  $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^2$  and let  $\mathfrak{S}$  be a separation line verifying conditions (C.14) with  $\theta \mapsto r(\theta)$  of class  $C^2$ . Then,

- for  $x$  below the separation line ( $\alpha_2 \leq \alpha_1$ ):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S}) &= x_2 \left[ \frac{\sin \alpha_1}{r(\alpha_1)} + \cos \alpha_1 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\alpha_1) \right] B_{\alpha_1} \\
&+ x_1 \left[ \frac{\cos \alpha_2}{r(\alpha_2)} - \sin \alpha_2 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) (\alpha_2) \right] B_{\alpha_2} \\
&- x_1 x_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) + \frac{1}{r(\theta)} \right] B_\theta \frac{d\theta}{r(\theta)},
\end{aligned}$$

- for  $x$  above the separation line ( $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ,  $\alpha_1 = 0$  if  $x_1 \geq r(0)$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$  if  $x_2 \geq r(\frac{\pi}{2})$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S}) &= \left[ \cos^2 \alpha_1 - \frac{1}{r(\alpha_1)} \frac{d}{d\theta} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta)(\alpha_1) \right] B_{\alpha_1} \\ &+ \left[ \sin^2 \alpha_2 + \frac{1}{r(\alpha_2)} \frac{d}{d\theta} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta)(\alpha_2) \right] B_{\alpha_2} \\ &- \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) + r(\theta) \cos \theta \sin \theta \right] B_\theta \frac{d\theta}{r(\theta)}, \end{aligned}$$

with  $B_\theta = B_{(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)}$  for  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

An equivalent formulation of Theorem C.3 is given in appendix A.3. Note that as expected, when  $r \equiv 1$ , Theorem C.3 is similar to Theorem C.2.

**Proof:** With  $Z_x = \mathbb{E}(B_x | B_s, s \in \mathfrak{S})$ , a direct proof of this theorem consists to verify

$$\forall \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{E}\{B_\alpha B_x\} = \mathbb{E}\{B_\alpha Z_x\}.$$

It is a straightforward but long calculation using the relations:

- (for  $x$  below)

$$\begin{aligned} \cos \theta \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) + \frac{1}{r(\theta)} \right) &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\sin \theta}{r(\theta)} + \cos \theta \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) \right), \\ -\sin \theta \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) + \frac{1}{r(\theta)} \right) &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\cos \theta}{r(\theta)} - \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) \right), \end{aligned}$$

- (for  $x$  above)

$$\begin{aligned} \cos \theta \left( \frac{d^2}{d\theta^2} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) + r(\theta) \cos \theta \sin \theta \right) &= \\ \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) + \cos \theta \frac{d}{d\theta} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) \right), \\ -\sin \theta \left( \frac{d^2}{d\theta^2} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) + r(\theta) \cos \theta \sin \theta \right) &= \\ \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) - \sin \theta \frac{d}{d\theta} (r(\theta) \cos \theta \sin \theta) \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$



# Table des figures

1.1	Représentation graphique du noyau $K_\alpha(\cdot, \cdot)$ . . . . .	20
2.1	Représentation graphique du problème d'interpolation optimale dans un sous-espace hilbertien. . . . .	25
2.2	Représentation graphique du spectre de $\mathcal{L}_\nu^D$ pour $0 \leq n \leq 74$ , $R = 3$ et $\sigma^2 = 2$ . . . . .	40
2.3	Fonction propre régularisée $\phi_n^{cD}$ sur $[-5, 5]^2$ pour $n = 5$ . . . . .	40
2.4	Simulation sur $[-4, 4]^2$ d'une réalisation d'un processus gaussien centré de covariance $K_{0D}^{app}(\cdot, \cdot)$ . . . . .	42
2.5	Meilleur prédicteur d'un modèle gaussien centré de covariance $K_{0D}^{app}(\cdot, \cdot)$ . . . . .	42
2.6	Réalisation conditionnelle d'un modèle gaussien centré de covariance $K_{0D}^{app}(\cdot, \cdot)$ . . . . .	42
2.7	Représentation graphique des valeurs propres $\rho_n$ pour $0 \leq n \leq 30$ , $R = 3$ et $\sigma^2 = 2$ . . . . .	44
2.8	Représentation graphique du spectre de $\mathcal{L}_\nu^N$ pour $0 \leq n \leq 30$ , $R = 3$ et $\sigma^2 = 2$ . . . . .	45
2.9	Fonction propre régularisée $\phi_n^{cN}$ sur $[-5, 5]^2$ pour $n = 4$ . . . . .	45
2.10	Simulation d'une réalisation d'un processus gaussien centré de covariance $K_{0N}^{app}(\cdot, \cdot)$ . . . . .	46
2.11	Tracé de $x \mapsto K_{0N}^{app}(x, x)$ sur $[-4, 4]^2$ . . . . .	46
2.12	Simulation d'une réalisation d'un processus gaussien centré de covariance $K_{0R}^{app}(\cdot, \cdot)$ . . . . .	48
2.13	Tracé de $x \mapsto K_{0R}^{app}(x, x)$ sur $[-4, 4]^2$ . . . . .	48

3.1	Représentation graphique et paramétrisation de <i>l'arc intercepté</i> pour $x$ à l'intérieur du quart-de-disque <b>(a)</b> et à l'extérieur du quart-de-disque <b>(b)</b> . . . . .	63
3.2	Simulation d'une trajectoire d'un brap brownien nul sur $\mathfrak{S}$ . . . . .	67
4.1	Tracé de $u \mapsto \langle \Gamma(\delta_x - \delta_t), \delta_u \rangle_{E, E'}$ . . . . .	84
C.1	Graphical representation and parametrization of the intercepted arc for $x$ inside the quarter-disc <b>(a)</b> and outside the quarter-disc <b>(b)</b> . . . . .	126

# Bibliographie

- [AAC92] J. Berruyer A. Antoniadis and R. Carmona. *Régression non linéaire et applications*. Broché, 1992.
- [Adl90] R. J. Adler. *An Introduction to Continuity, Extrema, and Related Topics for General Gaussian Processes*. IMS Lecture Notes-Monograph Series, 1990.
- [Aro50] N. Aronszajn. Theory of reproducing kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 63 :337–404, 1950.
- [Bax76] P. Baxendale. Gaussian measures on function spaces. *American Journal of Mathematics*, 98(4) :891–952, 1976.
- [Bou59] N. Bourbaki. *Eléments de mathématique : Chapitre 6, Intégration vectorielle*. Hermann, 1959.
- [Bou67] N. Bourbaki. *Espaces Vectoriels Topologiques*. Hermann, 1967.
- [BTA04] A. Berlinet and C. Thomas-Agnan. *Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics*. Springer Netherlands, 2004.
- [Buc92] H. Buchwalter. *Variations sur l'analyse en maîtrise de mathématiques*. Ellipses, 1992.
- [Car86] L. Carraro. Problèmes de prédiction pour le processus de Wiener à deux paramètres. *Probability Theory and Related Fields*, 72(4) :619–635, 1986.
- [Car90] L. Carraro. Etude de la covariance de quelques processus Gaussiens en liaison avec la propriété de Markov. *Stochastic Processes and their Applications*, 35(2) :251–265, 1990.
- [CL67] H. Cramér and M.R. Leadbetter. *Stationary and related stochastic processes : Sample function properties and their applications*. Wiley New York :, 1967.

- [DB01] C. De Boor. *A practical guide to splines*. Springer Verlag, 2001.
- [DFLC71] RM Dudley, J. Feldman, and L. Le Cam. On Seminorms and Probabilities, and Abstract Wiener Spaces. *Annals of Mathematics*, 93(2) :390–408, 1971.
- [DR88] R. C. Dalang and F. Russo. A Prediction Problem for the Brownian Sheet. *Journal of Multivariate Analysis*, 26 :16–47, 1988.
- [Duc77] J. Duchon. Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces. *Constructive theory of functions of several variables*, 571 :85–100, 1977.
- [Dud10] R. M. Dudley. *Sample functions of the Gaussian process*. Springer, 2010.
- [FH97] V.V. Fedorov and P. Hackl. *Model-oriented design of experiments*. Springer Verlag, 1997.
- [For85] R. M. Fortet. Les operateurs intégraux dont le noyau est une covariance. *Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa*, 36 :133–144, 1985.
- [Gro67] L. Gross. Abstract Wiener spaces. *Proc. Fifth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.*, 2 :31–42, 1967.
- [HQMY06] P. Niyogi H. Q. Minh and Y. Yao. *Learning Theory*, chapter Mercer’s Theorem, Feature Maps and Smoothing, pages 154–168. Springer Berlin / Heidelberg, 2006.
- [IN68] K. Itô and M. Nisio. On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables. *Osaka J. Math*, 5 :35–48, 1968.
- [Jan97] S. Janson. *Gaussian Hilbert Spaces*. Cambridge University Press, 1997.
- [JK70] N. C. Jain and G. Kallianpur. Norm convergent expansions for Gaussian processes in Banach spaces. In *Proc. Amer. Math. Soc*, volume 25, pages 890–895, 1970.
- [Kap89] J.N. Kapur. *Maximum-entropy models in science and engineering*. John Wiley & Sons, 1989.

- [KLW72] J. Kuelbs, F.M. Larkin, and J.A. Williamson. Weak probability distributions on reproducing kernel hilbert spaces. *Rocky Mountain J. Math*, 2 :369–378, 1972.
- [Kue71] J. Kuelbs. Expansions of vectors in a Banach space related to Gaussian measures. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 27(2) :364–370, 1971.
- [Lin96] J.K. Lindsey. *Parametric statistical inference*. Oxford University Press, USA, 1996.
- [Mal97] P. Malliavin. *Stochastic analysis*. Springer Verlag, 1997.
- [Mat69] G. Matheron. *Le krigeage universel*. École nationale supérieure des mines de Paris, 1969.
- [Mic86] C.A. Micchelli. Interpolation of scattered data : distance matrices and conditionally positive definite functions. *Constructive Approximation*, 2(1) :11–22, 1986.
- [MN90] W.R. Madych and S.A. Nelson. Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions II. *Math. Comp*, 54(189) :211–230, 1990.
- [Nas74] M. Nashed. Approximate regularized solutions to improperly posed linear integral and operator equations. *Constructive and Computational Methods for Differential and Integral Equations*, 430 :289–332, 1974.
- [NW74a] M.Z. Nashed and G. Wahba. Generalized inverses in reproducing kernel spaces : An approach to regularization of linear operator equations. *SIAM J. Math. Anal*, 5(6) :974–987, 1974.
- [NW74b] M.Z. Nashed and G. Wahba. Regularization and Approximation of Linear Operator Equations in Reproducing Kernel Spaces. *American Mathematical Society*, 80(6) :1213–1218, 1974.
- [Par62] E. Parzen. Extraction and detection problems and reproducing kernel hilbert spaces. *J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control*, 1 :35–62, 1962.
- [Par05] K.R. Parthasarathy. *Probability measures on metric spaces*. Chelsea Pub Co, 2005.

- [PR96] J.K. Patel and C.B. Read. *Handbook of the normal distribution*, volume 150. CRC, 1996.
- [Raj72] B.S. Rajput. On Gaussian measures in certain locally convex spaces. *Journal of Multivariate Analysis*, 2(3) :282–306, 1972.
- [Rud91] W. Rudin. *Functional Analysis*. second edition, McGraw-Hill, New York, 1991.
- [Rud95] Walter Rudin. *Analyse fonctionnelle*. Ediscience International, 1995.
- [RW06] C. E. Rasmussen and C. K. I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*. The MIT Press, 2006.
- [RY99] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer Verlag, 1999.
- [Sat69] H. Satô. Gaussian measure on a Banach space and abstract Wiener measure. *Nagoya Mathematical Journal*, 36 :65–81, 1969.
- [Sch64] L. Schwartz. Sous-espaces hilbertiens d’espaces vectoriels topologiques et noyaux associés. *J. Anal. Math.*, 13 :115–256, 1964.
- [Sch79] Laurent Schwartz. *Analyse Hilbertienne*. Hermann, 1979.
- [Sch98] R. Schaback. Native Hilbert spaces for radial basis functions I. In *New Developments in Approximation Theory : 2nd International Dortmund Meeting (IDoMAT)’98, Germany, February 23-27, 1998*, page 255. Birkhauser, 1998.
- [Sch00] R. Schaback. A unified theory of radial basis functions : Native Hilbert spaces for radial basis functions II. *Journal of computational and applied mathematics*, 121(1-2) :165–177, 2000.
- [Tal83] M. Talagrand. Mesures gaussiennes sur un espace localement convexe. *Probability Theory and Related Fields*, 64(2) :181–209, 1983.
- [TV07] V. Tarieladze and N. Vakhania. Disintegration of Gaussian measures and average-case optimal algorithms. *Journal of Complexity*, 23(4-6) :851–866, 2007.
- [Wah90] G. Wahba. *Spline Models for Observational Data*. SIAM, 1990.

- [Wal67] J. B. Walsh. A note on uniform convergence of stochastic processes. In *Proc. Amer. Math. Soc.*, volume 18, pages 129–132, 1967.

---

École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne

*N° d'ordre:* 2011 EMSE 0615

Bertrand GAUTHIER

**SPECTRAL APPROACH FOR KERNEL-BASED INTERPOLATION AND  
CONDITIONAL POSITIVITY**

*Speciality:* Applied Mathematics

*Keywords:* kernel-based interpolation, optimal interpolation, Gaussian processes, conditioning, RKHS, Hilbert and semi-Hilbert subspaces, integral operators, kriging, infinite data set, boundary conditions, conditionally positive kernels

*Abstract:* We propose a spectral approach for the resolution of kernel-based interpolation problems of which numerical solution can not be directly computed. Such a situation occurs in particular when the number of data is infinite.

We first consider optimal interpolation in Hilbert subspaces. For a given problem, an integral operator is defined from the underlying kernel and a parameterization of the data set based on a measurable space. The spectral decomposition of the operator is used in order to obtain a representation formula for the optimal interpolator and spectral truncation allows its approximation. The choice of the measure on the parameters space introduces a hierarchy onto the data set which allows a tunable precision of the approximation. As an example, we show how this methodology can be used in order to enforce boundary conditions in kernel-based interpolation models. The Gaussian processes conditioning problem is also studied in this context.

The last part of this thesis is devoted to the notion of conditionally positive kernels. We propose a general definition of symmetric conditionally positive kernels relative to a given space and exposed the associated theory of semi-Hilbert subspaces. We finally study the optimal interpolation problem in such spaces.

---



---

## École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne

*N° d'ordre* : 2011 EMSE 0615

Bertrand GAUTHIER

### APPROCHE SPECTRALE POUR L'INTERPOLATION À NOYAUX ET POSITIVITÉ CONDITIONNELLE

*Spécialité* : Mathématiques Appliquées

*Mots Clefs* : méthodes d'interpolation à noyaux, interpolation optimale, processus gaussiens, conditionnement, RKHS, sous-espaces hilbertiens et semi-hilbertiens, opérateurs intégraux, krigeage, ensemble infini de données, conditions aux limites, noyaux conditionnellement positifs

*Résumé* : Nous proposons une approche spectrale permettant d'aborder des problèmes d'interpolation à noyaux dont la résolution numérique n'est pas directement envisageable. Un tel cas de figure se produit en particulier lorsque le nombre de données est infini.

Nous considérons dans un premier temps le cadre de l'interpolation optimale dans les sous-espaces hilbertiens. Pour un problème donné, un opérateur intégral est défini à partir du noyau sous-jacent et d'une paramétrisation de l'ensemble des données basée sur un espace mesuré. La décomposition spectrale de l'opérateur est utilisée afin d'obtenir une formule de représentation pour l'interpolateur optimal et son approximation est alors rendu possible par troncature du spectre. Le choix de la mesure induit une fonction d'importance sur l'ensemble des données qui se traduit, en cas d'approximation, par une plus ou moins grande précision dans le rendu des données. Nous montrons à titre d'exemple comment cette approche peut être utilisée afin de rendre compte de contraintes de type "conditions aux limites" dans les modèles d'interpolation à noyaux. Le problème du conditionnement des processus gaussiens est également étudié dans ce contexte.

Nous abordons enfin dans la dernière partie de notre manuscrit la notion de noyaux conditionnellement positifs. Nous proposons la définition générale de noyaux symétriques conditionnellement positifs relatifs à une espace de référence donné et développons la théorie des sous-espaces semi-hilbertiens leur étant associés. Nous étudions finalement la théorie de l'interpolation optimale dans cette classe d'espaces.

---