



**HAL**  
open science

# TRANSITION DE DÉPIÉGAGE DANS LES RÉSEAUX DE VORTEX SUPRACONDUCTEURS : ÉTUDE PAR SIMULATION NUMÉRIQUE

Nicolas Di Scala

► **To cite this version:**

Nicolas Di Scala. TRANSITION DE DÉPIÉGAGE DANS LES RÉSEAUX DE VORTEX SUPRA-  
CONDUCTEURS : ÉTUDE PAR SIMULATION NUMÉRIQUE. Systèmes désordonnés et réseaux  
de neurones [cond-mat.dis-nn]. Université François Rabelais - Tours, 2012. Français. NNT : . tel-  
00741545v1

**HAL Id: tel-00741545**

**<https://theses.hal.science/tel-00741545v1>**

Submitted on 13 Oct 2012 (v1), last revised 28 Nov 2012 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# UNIVERSITÉ FRANÇOIS-RABELAIS DE TOURS



École Doctorale EMSTU

Groupement de REcherche en Matériaux, Microélectronique,  
Acoustique et Nanotechnologies (GREMAN)

**THÈSE** présentée par :

**Nicolas di SCALA**

soutenance le : 12 Octobre 2012

pour obtenir le grade de : Docteur de l'université François-Rabelais - Tours

Discipline : Physique / Spécialité : Physique des Solides

## TRANSITION DE DÉPIÉGEAGE DANS LES RÉSEAUX DE VORTEX SUPRACONDUCTEURS : ÉTUDE PAR SIMULATION NUMÉRIQUE

THÈSE DIRIGÉE PAR :

OLIVE Enrick

Maître de Conférences, Université François-Rabelais - Tours

RAPPORTEURS :

LE DOUSSAL Pierre

Directeur de recherche, École Normale Supérieure de Paris

SCHEHR Gregory

Chargé de recherche, Université Paris-Sud XI

JURY :

LE DOUSSAL Pierre

Directeur de recherche, École Normale Supérieure de Paris

SCHEHR Gregory

Chargé de recherche HDR, Université Paris-Sud XI

SAINT-JEAN Michel

Directeur de recherche, Université Paris VII

SORET Jean Claude

Professeur, Université François-Rabelais - Tours

OLIVE Enrick

Maître de Conférences, Université François-Rabelais - Tours



# Remerciements

« *La plupart des remerciements ont pour but de dégager d'une obligation.* »

ROBERT SABATIER

J'exprime mes profonds remerciements à mon directeur de thèse Enrick Olive pour l'aide, les conseils précieux et la confiance qu'il m'a apportés tout au long de cette période de réflexion. Je ne saurais oublier la patience qu'il a eue pour répondre à toutes mes interrogations et n'omettons pas sa vive participation au cheminement de ce manuscrit.

Mes plus sincères remerciements vont à Pierre Le Doussal et Gregory Schehr qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse et qui ont accepté de relire et commenter mon manuscrit, ainsi qu'à Michel Saint-Jean qui a accepté de participer à mon jury de soutenance. Je tiens à remercier plus généralement tous les membres du jury qui ont aimablement accepté de participer au jury.

Je remercie également et je tiens à témoigner toute ma reconnaissance aux personnes suivantes, pour l'expérience enrichissante et pleine d'intérêt qu'elles m'ont fait vivre durant ces années de thèse au sein du laboratoire :

Jean-Claude Soret pour m'avoir fait profiter de ses connaissances pointues dans des domaines divers et variés lors de réunions de travail qu'il a bien voulu me consacrer.

Yves Lansac pour ses remarques pertinentes sur les difficultés techniques rencontrées lors de mes simulations numériques. Sa jovialité a toujours été un grand bol d'air lors de nos discussions.

Je tiens notamment à remercier toute l'équipe du pôle Electrodynamique des Matériaux Avancés EMA du GREMAN pour m'avoir si chaleureusement accueilli au sein du laboratoire, et ce depuis mon arrivée lors du stage de Master 2 jusqu'à cette thèse. Les conseils apportés par l'équipe pédagogique avec qui j'ai travaillé lors de mon activité complémentaire d'enseignement m'a beaucoup appris et m'a fait découvrir un merveilleux métier qu'est l'enseignement. Néanmoins je n'oublie pas les membres des équipes de recherche avec qui j'ai pu discuter de multiples sujets et qui m'ont fait part de leur point de vue sans retenue : en particulier et pour ne citer qu'eux, la liste n'étant pas exhaustive, j'exprime ma gratitude à Larbi Ammor et Antoine Ruyter qui ont fait partie des deux équipes citées ci-dessus.

## REMERCIEMENTS

---

D'autres personnes m'ont beaucoup aidé lors de ce travail et je leur suis reconnaissant des avis apportés et de m'avoir supporté au quotidien : Yaouen Fily, ancien doctorant au LEMA, pour ses explications et pour ses remarques précieuses avant qu'il ne parte vers de nouvelles aventures ; Cécile Autret-Lambert, Mustapha Zaghrioui, Sylvain Roger et Christophe Honstetter pour les nombreuses pauses café/détente que l'on a pu partager ; les collègues doctorants et post-doctorants Viacheslav Shaidiuk, Miriam Chligui, Seka Simplicie Kouassi, Tristan Barbier, Sonia Didry et Mohamed El amrani pour leur bonne humeur quotidienne, nos différentes discussions et leur avis précieux.

Enfin je ne saurais assez remercier ma famille, que ce soit mon frère Pascal ou ma soeur Emmanuella pour nos discussions scientifiques et leurs remarques avisées, et plus particulièrement mes parents pour leur soutien quotidien et à qui je dédie ce manuscrit.

## REMERCIEMENTS

---

## REMERCIEMENTS

---

# Résumé

Cette étude traite du dépiégeage et de la dynamique des systèmes élastiques désordonnés. Ce cadre regroupe une large classe de systèmes allant des interfaces (telles que les parois de domaines dans les systèmes magnétiques ou ferroélectriques) aux systèmes périodiques (comme les réseaux de vortex dans les supraconducteur de type II, les colloïdes ou encore les cristaux de *Wigner*). Dans ces systèmes, la compétition entre l'élasticité de la structure qui veut imposer un ordre parfait et le désordre induit une grande richesse dans le diagramme de phase.

L'étude est menée par simulations numériques à grande échelle, dans lesquelles nous nous intéresserons spécifiquement aux réseaux  $2D$  de vortex supraconducteurs. Deux types de dépiégeage sont observés lorsque l'on met en mouvement ces réseaux à l'aide d'une force extérieure : un dépiégeage plastique et un dépiégeage élastique. Nous portons notre attention sur la transition de dépiégeage élastique obtenue dans le cas d'un piégeage faible. A travers une analyse en loi d'échelle à température nulle et à température finie nous montrons le caractère continu de la transition. Divers exposants critiques sont déterminés dont l'exposant  $\beta$  et  $\delta$  caractérisant la dépendance en force et en température de la vitesse ou bien l'exposant  $\nu$  caractérisant la divergence de la longueur de corrélation du système.

Un modèle visco-élastique simple permettant de décrire la plasticité dans les systèmes périodiques évoluant sur un potentiel de piégeage en présence de désordre fort est également développé. Une grande variété de comportements dynamiques, similaires à ceux observés à plus grande échelle dans des systèmes périodiques, peuvent être extraits d'un tel modèle. Un dépiégeage élastique ou plastique est observé, de l'hystérésis est mesurée dans le cas du dépiégeage élastique, et du chaos est détecté pour le dépiégeage plastique.

## Mots clés :

vortex supraconducteurs, réseau de vortex, systèmes élastiques désordonnés, milieu désordonné.

# Abstract

In this work we study the depinning and the dynamics of disordered elastic systems which defines a broad class of systems from interfaces (like magnetic or ferroelectric domains walls) to periodic structures (like vortex lattices in type II superconductor, colloids or *Wigner* crystals). In these systems, the competition between the elasticity of the structure that wants to impose a perfect order and disorder produces a rich phase diagram.

We use large-scale numerical simulations, in which we specifically focus on  $2D$  superconductor vortex lattices. Two types of depinning are observed when the lattices are driven by a uniform force : plastic and elastic depinning. We mainly focus on the elastic depinning obtained when the pinning is weak. Using a scaling law analysis at both zero and nonzero temperature we show that the depinning transition is continuous near the depinning threshold. Various critical exponent are evaluated such as the  $\beta$  and  $\delta$  exponents characterizing the force and temperature dependances of the velocity or the  $\nu$  exponent characterizing the divergence of the correlation length of the system.

A simple viscoelastic model allowing to describe plasticity in periodic structures driven over a strong disordered medium is also developed. A wide variety of dynamical behaviors, similar to those observed on a larger scale in periodic systems, can be extracted from such a model. An elastic or plastic depinning is observed, hysteresis is measured in the case of elastic depinning, while chaos is detected for plastic depinning.

**Keywords :**

superconductor vortices, flux line lattice, disordered elastic systems, disordered medium.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>25</b>
<b>I Partie Théorique</b>	<b>27</b>
<b>1 Les systèmes élastiques désordonnés en général ...</b>	<b>29</b>
1.1 Introduction . . . . .	29
1.2 Deux types de structures . . . . .	30
1.2.1 Interfaces . . . . .	30
1.2.1.1 Parois de domaine ferromagnétique/ferroélectrique . . . . .	30
1.2.1.2 Ligne de contact d'un fluide sur un substrat désordonné . . . . .	34
1.2.1.3 Front de fracture dans les matériaux hétérogènes . . . . .	35
1.2.2 Structures périodiques . . . . .	35
1.2.2.1 Ondes de densité de charge . . . . .	36
1.2.2.2 Cristaux de Wigner . . . . .	38
1.2.2.3 Réseaux de vortex dans les supraconducteurs de type II . . . . .	39
1.3 Ingrédients d'un système élastique désordonné . . . . .	40
1.3.1 Dimensionnalité . . . . .	41
1.3.2 Elasticité . . . . .	41
1.3.3 Désordre . . . . .	43
1.4 Propriétés statiques et dynamiques des interfaces . . . . .	44
1.4.1 Point de vue statique . . . . .	44
1.4.1.1 Les systèmes élastiques désordonnés : des systèmes vitreux . . . . .	44
1.4.1.2 Fonction de corrélation des déplacements et rugosité . . . . .	45
1.4.1.3 Détermination expérimentale de la rugosité . . . . .	46
1.4.2 Dynamique et dépiégeage . . . . .	48
1.4.2.1 Point de vue dynamique . . . . .	49
1.4.2.2 Une histoire de dépiégeage . . . . .	50
1.4.2.3 Régime de creep . . . . .	51

<b>2</b>	<b>... et les réseaux de vortex dans les supraconducteurs en particulier</b>	<b>55</b>
2.1	Introduction . . . . .	55
2.2	Supraconductivité . . . . .	55
2.2.1	Historique . . . . .	55
2.2.2	Généralités . . . . .	58
2.2.2.1	Propriétés . . . . .	58
2.2.2.2	Différents types de supraconducteurs . . . . .	58
2.2.3	Théories de la supraconductivité - Réseau d'Abrikosov . . . . .	61
2.2.3.1	Description macroscopique - Equations de London . . . . .	61
2.2.3.2	Théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau . . . . .	63
2.2.3.3	Vortex et réseau d'Abrikosov . . . . .	65
2.2.3.4	Description microscopique - Théorie BCS . . . . .	70
2.2.4	Applications . . . . .	72
2.3	Statique des réseaux de vortex . . . . .	73
2.3.1	Description élastique du réseau . . . . .	74
2.3.2	Modèle de Larkin . . . . .	75
2.3.3	Verre de Bragg . . . . .	79
2.4	Dynamique des réseaux de vortex . . . . .	81
2.4.1	Equation de base de la dynamique . . . . .	81
2.4.2	Diagramme de phase dynamique . . . . .	82
<b>3</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>87</b>
3.1	Introduction . . . . .	87
3.2	Généralités sur les simulations de systèmes à plusieurs particules . . . . .	87
3.2.1	Préliminaires . . . . .	87
3.2.2	La dynamique moléculaire . . . . .	89
3.2.3	Cellule de simulation . . . . .	90
3.2.4	Troncature du potentiel et liste de voisins . . . . .	92
3.3	Modèle numérique des réseaux de vortex . . . . .	93
3.3.1	Équation du mouvement . . . . .	93
3.3.2	Types d'interactions . . . . .	94
3.4	Programme de dynamique moléculaire LAMMPS . . . . .	96
3.4.1	Caractéristiques de LAMMPS . . . . .	96
3.4.2	Paramètres utilisés . . . . .	97

<b>II</b>	<b>Résultats</b>	<b>99</b>
<b>4</b>	<b>Dépiégeage élastique des réseaux de vortex</b>	<b>101</b>
4.1	Introduction . . . . .	101
4.2	Transitions de phase et dépiégeage . . . . .	101
4.2.1	Généralités sur les transitions de phase . . . . .	101
4.2.2	Les phénomènes critiques . . . . .	103
4.2.3	Le dépiégeage comme phénomène critique . . . . .	107
4.3	Dépiégeage des vortex . . . . .	107
4.3.1	Dépiégeage plastique . . . . .	107
4.3.2	Dépiégeage élastique . . . . .	109
4.3.3	Le modèle à une particule . . . . .	110
4.4	Considérations numériques . . . . .	111
4.4.1	Limite sur-amortie . . . . .	111
4.4.2	Machine de calcul . . . . .	112
4.4.3	Tests de performance . . . . .	113
4.5	Étude à température nulle . . . . .	117
4.5.1	Crossover élastique - plastique . . . . .	118
4.5.2	Dynamique des vortex . . . . .	119
4.5.3	Réponse vitesse-force . . . . .	121
4.5.4	Exposant de dépiégeage $\beta$ . . . . .	123
4.5.5	Exposant de corrélation de taille finie $\nu_{\text{FS}}$ . . . . .	125
4.5.6	Exposant de corrélation $\nu$ . . . . .	127
4.5.7	Ordre et corrélations . . . . .	128
4.5.7.1	Ordre dans le réseau de vortex . . . . .	129
4.5.7.2	Fonctions de corrélation . . . . .	131
4.5.8	Finite-size scaling . . . . .	136
4.5.9	Autre exposant d'une fonction de réponse . . . . .	137
4.6	Température finie . . . . .	137
4.6.1	Fusion du réseau . . . . .	138
4.6.2	Exposant thermique $\delta$ . . . . .	139
4.6.3	Différentes intensités de piégeage . . . . .	142
4.6.4	Loi d'échelle reliant $(v, f, T)$ . . . . .	143
4.6.5	Classe d'universalité? . . . . .	145
4.7	Conclusion . . . . .	145
<b>5</b>	<b>Dépiégeage plastique : Modèle à deux couches</b>	<b>147</b>
5.1	Introduction . . . . .	147

TABLE DES MATIÈRES

---

5.2	Modèle visco-élastique multi-couches . . . . .	148
5.2.1	Système et dynamique . . . . .	148
5.2.2	Modèle à 2 particules . . . . .	148
5.3	Extension du modèle . . . . .	151
5.3.1	Description du modèle . . . . .	151
5.3.2	Système dynamique . . . . .	152
5.3.3	Modèle numérique - paramètres . . . . .	152
5.4	Résultats obtenus . . . . .	153
5.4.1	Types de dépiégeage : élastique ou plastique . . . . .	153
5.4.2	Dynamique . . . . .	154
5.4.3	Hystérésis . . . . .	156
5.4.4	Chaos . . . . .	157
5.4.4.1	Exposant de <i>Lyapunov</i> $\lambda$ et spectre de puissance $S(f)$ . . .	158
5.4.4.2	Régimes chaotiques . . . . .	161
5.5	Conclusion . . . . .	162
<b>Conclusion</b>		<b>165</b>
<b>Annexes</b>		<b>169</b>
<b>A Publications</b>		<b>169</b>
A.1	Publication I . . . . .	170
A.2	Publication II . . . . .	178
A.3	Publication III . . . . .	186
A.4	Publication IV . . . . .	191

# Table des figures

1.1	Représentation schématique de deux domaines magnétiques de différentes aimantations séparés par la paroi de domaine. . . . .	31
1.2	Image (d'une taille de $90 \times 72 \mu m^2$ ) montrant le déplacement magnétique obtenue par imagerie magnéto-optique Kerr dans un film ultra-fin bidimensionnel de Pt/Co/Pt [1]. La partie noire représente le domaine original et la partie grise montre la surface balayée par la paroi de domaine pendant $111 \mu s$ . . . . .	32
1.3	Image obtenue par microscopie à force piézoélectrique (PFM) de domaines ferroélectriques de largeur $(925 \pm 15) nm$ réalisés par microscopie à force atomique (AFM) [2]. . . . .	33
1.4	Image obtenue par une caméra CCD de la ligne de contact de l'eau sur un substrat désordonné réalisé à partir de défauts de chrome (de taille $10 \times 10 \mu m$ ) déposés sur une plaque de verre, et apparaissant en clair sur la partie sèche [7]. . . . .	34
1.5	Image enregistrée par une caméra rapide présentant la propagation d'un front de fracture interfacial entre deux blocs de plexiglas transparents. Le matériau intact apparaît en noir alors que la zone grise correspond à la partie fissurée, la ligne jaune représente l'interface séparant les deux régions [9]. . .	35
1.6	Représentation schématique de l'énergie $E(k)$ en fonction de la norme du vecteur d'onde pour un métal unidimensionnel dans l'état métallique (figure a) et dans l'état onde de densité de charge (figure b) avec l'ouverture du gap en énergie. A titre d'indication visuelle nous avons représenté la chaîne d'atomes et la densité électronique équivalente. . . . .	36
1.7	Représentation schématique du mouvement d'une onde de densité de charge suite à l'application d'un champ électrique. Différents instantanés de la densité électronique et de la position des atomes sont représentés : on observe un "glissement" de l'ODC avec le réseau résultant en un transport collectif de charge. . . . .	37
1.8	Résultat numérique obtenu pour un système de 19 électrons dans une couche $2D$ à basse température et confinés dans un potentiel à symétrie sphérique [15] : on observe un cristal de Wigner possédant 6 voisins. . . . .	38

TABLE DES FIGURES

---

1.9	Image de gauche : image du réseau de vortex dans un cristal de $MgB_2$ d'environ $T \approx 6K$ sous un champ magnétique de 200 $Oe$ obtenue par décoration Bitter. Le réseau est triangulaire comme le montre l'image de l'espace réel (figure principale) et de l'espace réciproque en insert, obtenue par FFT (transformée de Fourier rapide) [20]. Image de droite : image magnéto-optique du réseau de vortex dans un cristal de $NbSe_2$ refroidi à 4.3K sous champ magnétique de 3 $Oe$ [21] . . . . .	40
1.10	Représentation graphique des exemples de systèmes donnés dans le tableau 1.1. De gauche à droite, et de haut en bas : interface $d = 1$ en rouge dans un espace total $D = 2$ — vortex unique de dimension $d = 1$ dans $D = 3$ — réseau triangulaire de particules avec $d = 2$ dans l'espace $D = 2$ — interface $d = 2$ dans $D = 3$ — réseau triangulaire de vortex choisis droits avec $d = 3$ plongés dans $D = 3$ . . . . .	42
1.11	Représentation schématique de l'action de l'élasticité pour une interface (trait continu sur l'image de gauche) et pour un système périodique (réseau triangulaire sur l'image de droite). . . . .	42
1.12	Représentation schématique d'une interface (en ligne rouge continue) dans un milieu désordonné (impuretés en bleu) soumise à une force d'entraînement. Nous avons représenté le cas de l'interface en l'absence de désordre (en traits pointillés rouges) afin de mieux visualiser la distorsion de l'interface soumise au potentiel aléatoire. . . . .	44
1.13	Représentation du paysage énergétique pour un système "classique" tel qu'un ferromagnétique (à gauche), et pour un système vitreux (nombreux états métastables) (à droite). . . . .	45
1.14	Image de gauche : Fonction de corrélation des déplacements relatifs $B(L)$ en fonction de $L$ en échelle logarithmique (l'unité de $L$ est de $0.28\mu m$ , soit la taille du pixel de la caméra CCD). Image de droite : Exposant de rugosité $2\zeta$ pour différentes parois de domaines. Les images sont issues de [1]. . . . .	47
1.15	a) Fonction de corrélation des déplacements $B(L)$ versus $L$ en échelle log-log. b) Exposant de rugosité $\zeta$ , les lignes horizontales indiquent la valeur moyenne de $\zeta$ pour différentes épaisseurs d'échantillon. Les images sont issues de [4]. . . . .	48
1.16	Courbe schématique de la caractéristique vitesse-force d'un système élastique désordonné. La vitesse $v$ représente la vitesse moyenne de la structure élastique alors que $F$ correspond à la force extérieure uniforme exercée sur la structure. La valeur $F_c$ est la <i>force critique</i> à partir de laquelle le système subit un dépiégeage. . . . .	49
1.17	Représentation du phénomène de creep : une interface modélisée par une particule (cercle plein) se déplaçant par activation thermique dans le paysage énergétique incliné (en trait continu) par la présence de la force extérieure $F$ . En traits pointillés est représenté le potentiel périodique en absence de la force extérieure, avec ses caractéristiques $(a, \Delta)$ correspondant respectivement à sa période et à la hauteur de ses barrières. . . . .	51

TABLE DES FIGURES

---

1.18	Tracé de $\ln(v)$ en fonction de $(1/H)^{1/4}$ pour la paroi de domaine ferromagnétique de [1]. Pour $(1/H)^{1/4} > 1.6$ le champ (équivalent à la force extérieure) est suffisamment faible pour que le système soit dans le régime creep et permet de vérifier un comportement linéaire avec la valeur de $\mu = 0.25$ et ce pour dix ordres de grandeur pour la vitesse. . . . .	53
2.1	Image de gauche : Différentes prédictions théoriques du XIXème siècle quant à la résistivité électrique attendue des matériaux avec la température $\rho(T)$ . Image de droite : Mesures de la résistivité du mercure $Hg$ en fonction de la température $T$ (en cercles pleins) : une chute brutale à zéro est observée en dessous d'une température critique $T_c$ . . . . .	56
2.2	Evolution de la température critique $T_c$ de différents matériaux supraconducteurs au cours du siècle dernier. . . . .	57
2.3	Tracé de l'aimantation $M$ en fonction de l'excitation magnétique $H$ pour la supraconductivité de type I (figure a) et II (figure b). Nous avons indiqué dans quel état se trouve le matériau dans chaque zone. Diagramme de phase $H-T$ caractérisant les transitions entre état supraconducteur/mixte/normal pour les supraconducteurs de type I (figure c) et II (figure d). Nous avons également représenté le profil des lignes de champ magnétique autour d'une pastille supraconductrice dans chaque zone. . . . .	59
2.4	Représentation d'un échantillon supraconducteur en état mixte : les lignes de champ magnétique pénètrent le matériau sous la forme de vortex et sont entourés de supercourants qui écrantent le champ magnétique afin de garder l'échantillon dans l'état mixte. A la surface du matériau des supercourants se développent également et sont responsables de l'effet Meissner. . . . .	60
2.5	Représentation de la longueur de pénétration $\lambda_L$ pour un champ magnétique appliqué à un matériau supraconducteur. . . . .	62
2.6	Description des deux longueurs $\lambda$ et $\xi$ pour les vortex dans les supraconducteurs de type II. . . . .	66
2.7	Profil du champ magnétique $B_z(r)$ et du courant $j_\theta(r)$ circulant autour du cœur du vortex dans la limite de <i>London</i> . . . . .	67
2.8	Schéma de réseau de vortex en perspective isométrique. Un vortex quelconque (en vert) possède 6 voisins (en rouge) et le réseau est hexagonal. . .	69
2.9	Image de gauche : déformation du réseau cristallin (ions en bleus) lors du passage d'un électron (en rouge). Image de droite : a) l'électron 1 passe devant les ions, b) le réseau se déforme suite à son passage et c) la région polarisée positivement attire l'électron 2 qui forme ainsi avec l'électron 1 une paire de Cooper. . . . .	71
2.10	Exemple schématique d'un réseau de vortex avec les positions d'équilibre $\vec{R}_i$ en noir, le champ de déplacement $\vec{u}_i$ représenté par les vecteurs, et les positions $\vec{r}_i$ des vortex en gris. . . . .	74

TABLE DES FIGURES

---

2.11 Evolution de la fonction de corrélation  $C_K(r)$  et allure des pics au niveau des vecteurs réciproques dans le facteur de structure  $S(q)$  pour : un cristal parfait a-d), pour un verre très désordonné b-e) et dans un verre quasi-ordonné c-f). 77

2.12 Image de gauche : pics de Bragg de la diffraction de neutrons, les 6 pics du réseau triangulaire d'Abrikosov sont nettement visibles [46]. Images de droite et du milieu : représentation colorée du champ de déplacement pour une image contenant 37003 vortex sans dislocation (voir [47] pour plus d'informations) et exemple de triangulation de Delaunay d'une décoration sans défaut topologique. . . . . 79

2.13 Profil de la fonction de corrélation des déplacements relatifs  $B(r)$  pour les trois régimes possibles séparés par  $L_c$  et  $L_a$ , pour plus d'information se référer au texte. . . . . 80

2.14 Diagramme de phases statique désordre versus température pour le réseau de vortex. La transition de phase du verre de Bragg au liquide de vortex est prévue comme étant du 1er ordre, alors que la transition de phase du verre désordonné au liquide est prévue comme étant du 2nd ordre. . . . . 81

2.15 Image du haut : Diagramme de phase schématique en température  $T$ , désordre  $\Delta$  et force  $F$  pour  $d = 3$ . Image du bas : coupes du diagramme précédent suivant différents plans permettant d'afficher des phases intermédiaires non affichées sur le diagramme  $(T, \Delta, F)$ . Ces figures sont tirées de l'article [57]. 83

2.16 Représentation schématique d'une coupe bidimensionnelle d'un réseau de vortex  $3D$  où les points noirs correspondent aux vortex et les lignes aux canaux statiques : a) verre de Bragg en mouvement où les canaux sont couplés et où il n'existe pas de défaut topologique libre (une triangulation de Delaunay a été représentée en trait fin noir), b) verre transverse en mouvement où les canaux sont découplés et des défauts topologiques entre les canaux existent. La force d'entraînement est également dessinée. . . . . 84

TABLE DES FIGURES

---

2.17	a) Image expérimentale tirée de l'article [59] d'un réseau de vortex, pour différentes valeurs de champ magnétique (que l'on peut relier au désordre) et de vitesses. Le réseau est représenté dans l'espace réel (colonne RS), sa transformée de Fourier (colonne FT) et son filtrage par Fourier (colonne FF) sont également présentés. La flèche blanche indique la direction du mouvement. En fonction des paramètres appliqués on observe le verre transverse en mouvement au niveau des lignes <i>a</i> et <i>b</i> , alors que le verre de Bragg en mouvement est observé au niveau des lignes <i>c</i> et <i>d</i> . b) Image du facteur de structure $S(q)$ (a,c,e) et triangulation de Delaunay (en b,d,f) pour différentes interactions vortex-vortex et force d'entraînement, image extraite de la simulation [60]. Outre le flot plastique pour lequel le facteur de structure présente un comportement caractéristique d'un liquide avec un anneau autour du vecteur réciproque (a) et la multitude de défauts observables dans la triangulation sous la forme de cercles (b), on remarque en fonction des différents jeux de paramètres un régime de canaux découplés ( <i>i.e.</i> le verre transverse en mouvement) en (c-d) avec des pics sméctiques dans $S(q)$ , et un autre régime dans lequel les canaux sont couplés en (e-f) où la triangulation ne présente pas de défaut libre et où $S(q)$ présente 6 pics. . . . .	85
3.1	Schéma de l'interaction entre les expériences et la théorie, les simulations numériques permettant de faire un lien entre ces deux approches. . . . .	88
3.2	Schéma d'une cellule de simulation (au centre) et ses images par application des conditions aux limites périodiques : une particule sortant de la cellule initiale par la droite "réentre" par la gauche via une de ses images. Le cas à $2D$ est représenté pour plus de facilité, l'extension à $3D$ est immédiate. . . . .	91
3.3	Représentation visuelle d'une liste de voisin avec une particule test (en gris) et les deux quantités permettant de définir cette liste : $r_{\text{cut}}$ le cut-off du potentiel et $r_{\text{skin}}$ l'épaisseur de peau. . . . .	93
4.1	Diagramme de phase ( $P, T$ ) en pression et température de l'eau montrant le domaine d'existence des trois phases : solide, liquide et gazeux. Notons deux points remarquables : le point triple qui se situe à la jonction entre les trois domaines, et le point critique qui est le point d'arrêt de la frontière entre la phase liquide et gazeuse. . . . .	102
4.2	Schéma représentant les deux types de transitions de phase observables : PO signifie "paramètre d'ordre", PC "paramètre de contrôle" et $P_c$ est la valeur critique du paramètre de contrôle indiquant la transition. Dans le cas d'une transition du 1er ordre le paramètre d'ordre est discontinu à la transition, alors qu'il est continu pour celle du 2nd ordre. . . . .	103

TABLE DES FIGURES

---

4.3	a) Exemple de trajectoire des vortex, en rouge, au seuil de dépiégeage pour le cas plastique et un instantané des vortex est également représenté, en bleu (cette figure est issue de nos simulations). b) Allure de la courbe réponse vitesse-force $v(F)$ dans le cas du dépiégeage plastique, la vitesse augmente progressivement avec une tangente horizontale en $F_c$ (la vitesse obtenue sans désordre est représentée en pointillé). . . . .	108
4.4	a) Exemple de trajectoire des vortex, en rouge, au seuil de dépiégeage pour le cas élastique et un instantané des vortex est également représenté, en bleu (cette figure est issue de nos simulations). b) Allure de la courbe réponse vitesse-force $v(F)$ dans le cas du dépiégeage élastique, la vitesse augmente rapidement avec une tangente verticale en $F_c$ (la vitesse obtenue sans désordre est représentée en pointillé). . . . .	109
4.5	Photographie illustrant la machine de calcul, on peut voir les lames encastées dans leur châssis. Image issue de la présentation de F. Loulergue lors des Journées Informatique de la Région Centre (JIRC) 2009. . . . .	112
4.6	Accélération $A(P)$ (figure a) et Efficacité $E(P)$ (figure b) en fonction du nombre de processeurs $P$ pour différentes tailles de systèmes (la ligne en pointillée indique le cas théorique idéal). . . . .	115
4.7	Temps d'exécution CPU en secondes (sur la figure a) et quantité de mémoire requise en $MBytes$ /processeur (sur la figure b) en fonction du nombre de processeurs $P$ pour les tailles de systèmes définies précédemment. . . . .	116
4.8	Pourcentage du temps CPU d'exécution passé en fonction du nombre de processeurs $P$ pour le calcul de la force par paire de vortex (en orange), le calcul des voisins (en vert), la communication MPI (en bleu) et le temps restant étant regroupé dans la section "autres" (en rouge). Différentes tailles sont proposées. . . . .	117
4.9	Évolution de la force critique de dépiégeage $\overline{F}_c$ moyennée sur les réalisations de désordre en fonction de l'intensité de piégeage relative $\alpha_p/\alpha_v$ . La taille du système reste fixée à $(L_x, L_y) = (400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ soit $N_v = 8000$ vortex. . . . .	118
4.10	Trajectoire typique des vortex au seuil du dépiégeage élastique pour $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$ avec $N_v = 12000$ . a) Dans un souci de clarté, seulement une petite région de la boîte de simulation $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$ est affichée. b) Une région encore plus zoomée est présentée avec en surimpression un instantané des vortex à un temps donné (en cercle noir). . . . .	119
4.11	Taille de la boîte considérée $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$ , au seuil de dépiégeage : a) Évolution temporelle de la vitesse longitudinale du centre de masse des vortex $V_x^{cm}(t)$ . On voit bien que cette vitesse est périodique, nous avons agrandi une période afin de se rendre compte que ce n'est pas une fonction triviale. b) Histogramme de la vitesse individuelle des vortex moyennée temporellement $\langle (V_x^{cm})_i \rangle$ où l'on a considéré un vortex par canal, soit un total de 120 vortex. . . . .	120

TABLE DES FIGURES

---

- 4.12 a) Courbe de réponse vitesse-force du système  $\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle$  en fonction de  $F$  en échelle linéaire. b) Courbe de la vitesse  $\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle$  en fonction de la force réduite  $f$  en échelle logarithmique présentant les trois régions distinguables. Ces courbes sont représentatives de la situation obtenue quelque soit la taille de la boîte ou encore l'intensité relative de désordre (tant que nous sommes dans le régime élastique avec  $\alpha_p/\alpha_v < 10^{-2}$ ). Dans cet exemple particulier nous avons  $N_v = 8000$  vortex et  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$ . . . . . 121
- 4.13 a) Courbe typique de la vitesse moyenne  $\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle$  en fonction de  $F$  pour les quelques réalisations de désordre présentant un dépiégeage hystérétique. La courbe avec des cercles ouverts correspond à plusieurs descentes en force avec  $F_c^{\text{down}}$  comme force critique alors que celle avec des cercles pleins correspond à plusieurs montées en force avec  $F_c^{\text{up}}$  leur force critique. b) Évolution de la largeur relative de l'hystérésis  $(F_c^{\text{up}} - F_c^{\text{down}})/F_c^{\text{down}}$  en fonction de la taille  $L_x$  de la boîte de simulation (et donc de la taille du système via le nombre de vortex présents). . . . . 122
- 4.14 Courbes de la vitesse réduite  $v$  en fonction de la force réduite  $f$  pour les tailles : a)  $(100, 50\sqrt{3}/2)\lambda_L$  moyennée sur  $N = 21$  échantillons, et b)  $(400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$  moyennée sur  $N = 14$  échantillons. Les trois régimes décrits précédemment (cf section 4.5.3) sont affichés, ainsi que la pente 1/2 indiquant le régime *single-particle* avec la ligne en trait continu. . . . . 123
- 4.15 Exposant de dépiégeage  $\beta$  extrait de la régression du type loi de puissance  $v \sim f^\beta$  dans la région II des courbes de réponse  $v(f)$  moyennées sur le désordre. Les incertitudes liées à chaque valeur de  $\beta$  représentent l'erreur standard associée à la valeur de l'exposant extraite de la régression. Pour plus de détails voir le texte associé. . . . . 124
- 4.16 a) Évolution de la largeur de la distribution de la force critique  $\Delta F_c(L_x)$  en fonction de la taille longitudinale  $L_x$ . Nous avons représenté en trait continu une régression du type loi de puissance  $\Delta F_c(L_x) \sim L_x^{-1/\nu_{\text{FS}}}$  afin d'extraire l'exposant de taille finie  $\nu_{\text{FS}}$ . L'incertitude de chaque point correspond à l'erreur standard associée à la valeur de la largeur extraite des distributions. Pour plus d'informations voir le paragraphe se reportant à la figure. b) Exemple de distribution des forces critiques  $F_c^{\text{sample}}$  pour 39 échantillons différents à la taille fixée par  $L_x = 100\lambda_L$  (avec toujours  $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$ ). . . 126
- 4.17 a) Évolution de la largeur  $\Delta F_{\text{cross}}(L_x)$  avec la taille longitudinale  $L_x$ . Une régression en loi de puissance est affichée en trait continu et donne la pente  $-1/\nu_{\text{FS}}$ . L'incertitude de chaque point correspond à l'erreur standard associée à la valeur de la largeur extraite des distributions. Pour plus d'informations voir le paragraphe se reportant à la figure. b) Exemple de distribution des forces de crossover (entre région I et II des courbes  $v(f)$ )  $F_{\text{cross}}$  pour les mêmes échantillons que sur la figure 4.16b). . . . . 127

TABLE DES FIGURES

---

4.18 a) Évolution de la force critique moyenne  $\overline{F_c^{\text{sample}}}$  en fonction de la taille longitudinale  $L_x$ . La valeur de  $F_c^\infty$  est extraite de cette courbe en prenant sa valeur asymptotique. b) Tracé de  $\overline{F_{\text{cross}}} - F_c^\infty$  en fonction de la taille longitudinale  $L_x$ . Une régression du type loi de puissance est affichée en trait continu à partir de laquelle nous extrayons la valeur de  $\nu$ . Les incertitudes affichées sur les deux courbes correspondent aux erreurs standards de nos échantillons (les larges barres d'erreurs pour les deux plus grandes tailles de la figure b) proviennent des erreurs statistiques qui deviennent de la taille de  $\overline{F_{\text{cross}}} - F_c^\infty$ ). . . . . 128

4.19 a) Facteur de structure  $S(k_x, k_y)$  typique moyenné dans le temps, obtenu lors de nos simulations en piégeage faible à température nulle. b) Vue du dessus de  $S(k_x, k_y)$  mettant en avant un réseau triangulaire de pics marqués. La taille du système est de  $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$ . . . . . 129

4.20 Triangulation de Delaunay typique issue de nos simulations à température nulle dans le cas du piégeage faible. La figure représente un instantané de la position des vortex avec la triangulation en traits noirs et les vortex ayant six voisins en cercles pleins. La taille du système est  $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$ . . . . 130

4.21 Allure de la fonction de corrélation de la densité  $g(x, y)$  pour une taille  $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$  proche du dépiégeage : a) vue en perspective, b) suivant la direction  $x$  et c) suivant la direction  $y$ . . . . . 132

4.22 a) Champ de vitesse instantanée pour un système contenant  $N_v = 1920$  vortex loin du dépiégeage (les flèches représentent les vecteurs vitesses instantanés et la couleur indique la norme de ces vecteurs). b) Vue en perspective du champ de vitesse dans la direction  $x$  pour trois pas de temps différents. Les trajectoires sont visibles en couleur verte et seulement deux canaux affichent les vecteurs vitesses instantanés. . . . . 133

4.23 Allure de la fonction de corrélation de la composante  $v_x$  de la vitesse instantanée pour une taille  $(100, 18\sqrt{3}/2)\lambda_L$  dans le régime critique et moyennée sur une période de la vitesse moyenne du centre de masse des vortex : a) vue en perspective, b) vue de profil selon l'axe  $x$ . . . . . 134

4.24 a) Allure de l'enveloppe de  $C(x)$  pour des forces  $F_I$ ,  $F_{II}$  et  $F_{III}$  situant le système dans les trois régions identifiées sur les courbes  $v(f)$ . Une régression suivant la forme fonctionnelle  $C_0 x^{-\kappa} e^{-\frac{x}{\xi}}$  est superposée aux données. b) Évolution de la longueur de corrélation intrinsèque  $\xi$  en fonction de  $F - F_c^\infty$ . Une régression en loi de puissance (en vert) du type  $\xi \sim (F - F_c^\infty)^{-\nu}$  est affichée et permet de déterminer  $\nu = 1.2 \pm 0.2$ . Les barres d'erreurs représentent l'erreur standard associée à la valeur de  $\xi$  extraite de la régression de la figure a). La flèche noire indique la valeur de  $F_{\text{cross}} - F_c^\infty$  (où  $F_{\text{cross}}$  est la force de crossover séparant le régime critique et le régime du *single-particle* des courbes  $v(f)$ ). Pour ces deux figures la taille du système est  $(100, 18\sqrt{3}/2)\lambda_L$  et une seule réalisation de désordre est considérée. . . . . 135

TABLE DES FIGURES

---

4.25 Évolution de  $vL_x^{\beta/\nu}$  en fonction de  $fL_x^{1/\nu}$  pour différentes tailles de systèmes avec  $L_x = (40, 100, 200, 400)\lambda_L$ . Les valeurs des exposants critiques utilisées sont  $\beta = 0.29 \pm 0.03$  et  $\nu = 1.04 \pm 0.04$ . . . . . 136

4.26 a) Évolution de  $C_T L_x^{-\alpha/\nu}$  en fonction de  $fL_x^{1/\nu}$  avec  $\nu = 1.04 \pm 0.4$  pour les tailles de systèmes  $L_x = (40, 100, 200, 400)\lambda_L$  moyennées sur le désordre (respectivement  $N = (20, 16, 16, 12, 8)$  réalisations de désordres). La superposition des courbes est obtenue pour  $\alpha \approx 0.9$ . b) Autre mesure de  $\alpha \approx 0.9$  via l'évolution de  $(C_T)_{\max}$  avec la taille  $L_x$ . . . . . 138

4.27 Triangulation de Delaunay (en traits bleus) superposée à un instantané de la position des vortex, où les vortex ayant six voisins sont représentés en cercles pleins rouges et ceux dont le nombre de voisins est différent de six sont représentés via des carrés noirs : a) pour  $T = 3 \cdot 10^{-6} < T_{\text{fusion}}$  et b)  $T = 3 \cdot 10^{-4} > T_{\text{fusion}}$ . La taille du système est  $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$ . . . . . 139

4.28 Allure de la fonction  $g(x, y)$  pour différentes températures en dessous et au dessus de la température de fusion  $T_{\text{fusion}} = 10^{-5}$ . La température varie de façon croissante entre les figures a) et e). Des courbes de contour sont affichées dans le plan  $xy$  pour une meilleure visualisation de la fonction  $g(x, y)$ . 140

4.29 Evolution avec la température de différentes quantités : la fraction  $\langle n_6 \rangle$  de vortex ayant 6 voisins au cours du mouvement (carrés rouges), la chaleur spécifique  $C_v(T)$  (cercles oranges), la hauteur des pics des premiers voisins de  $g(x, y)$  (triangles bleus vers le haut) et la valeur moyenne de  $g(x, y)$  entre les pics au niveau du premier anneau (triangles vers vers le bas). Le système considéré ici est d'une taille de  $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$  et toutes ces quantités sont moyennées dans le temps. . . . . 141

4.30 Tracé de la vitesse réduite  $v$  en fonction de la température  $T$  moyennée sur  $N = 6$  échantillons pour des valeurs fixées de  $f = (10, 4, 3, 0, -2, -7) \times 10^{-4}$  et un système de taille  $(400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ . L'intensité de désordre relative est  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$ , les barres d'erreurs correspondent à l'erreur standard associée à chaque valeur moyennée. L'extrapolation au niveau de  $\bar{F}_c^*$  en traits pointillés permet d'obtenir l'exposant  $\delta^{-1}$  (voir le texte associé pour plus d'informations). Les lignes reliant les points ne sont qu'un guide visuel pour les différentes concavités observables. . . . . 141

4.31 Évolution des exposants critiques  $\beta$  (figure a) et  $\delta^{-1}$  (figure b) avec l'intensité de désordre relative  $\alpha_p/\alpha_v$ . Pour plus d'informations quant aux barres d'erreurs, se référer aux sections traitant de l'exposant  $\beta$  et  $\delta^{-1}$  afin de savoir comment elles sont mesurées habituellement. . . . . 142

4.32 Tracé de la loi d'échelle  $\tilde{v}_i |f|^{-\beta}$  en fonction de  $\tilde{T} |f|^{-\beta\delta}$  avec  $\beta = 0.29 \pm 0.03$  et  $\delta^{-1} = 0.28 \pm 0.05$  pour  $N = 14$  échantillons avec différentes intensités de piégeage relatives  $10^3 \times \alpha_p/\alpha_v \approx (2, 3, 5, 7)$ , différentes tailles de systèmes  $L_x = (100, 400, 1000)\lambda_L$  et pour différentes réalisations de désordre. Pour chaque échantillon la valeur de  $\beta$  et  $\delta^{-1}$  est autorisée à varier dans la barre d'erreur qui lui est liée. . . . . 144

TABLE DES FIGURES

---

5.1 Représentation de plusieurs trajectoires, issues de différentes conditions initiales, dans l'espace des phases  $(x, y)$ . Les valeurs de paramètres utilisés sont  $p_1 = 1$ ,  $a = 0.2$  et  $p_2 = 0.5$ , et la force appliquée correspond à  $F_c < F < F_c^1$ . La solution stable unique est représentée en jaune. Cette figure est issue de l'article [119]. . . . . 150

5.2 Courbe  $v(F)$  schématique obtenue lorsque : a)  $p_2 = 0$  (sinus pur), b)  $p_2 < 0$  et c)  $p_2 > 0$ . Voir le texte qui est relié à cette figure pour plus d'explications. 150

5.3 Représentation schématique du modèle simplifié à 4 particules : les canaux sont les lignes courbes noires, les particules sont modélisées par des sphères oranges, l'interaction élastique est représentée via un ressort alors que celle visqueuse est schématisée suivant une ligne sinueuse bleue. La force d'entraînement  $F$  est appliquée de gauche à droite. . . . . 151

5.4 Courbes de réponse vitesse-force  $v(F)$  représentative des différents dépiégeages obtenus dans le cadre du *Toy Model* à 4 particules : a) un dépiégeage élastique, b) et un dépiégeage plastique. En trait noir pointillé est représenté le cas obtenu sans piégeage que la vitesse atteint asymptotiquement lorsque  $F$  l'emporte sur les autres forces en présence, impliquant de ce fait  $\dot{u}_i \approx F$  au niveau de l'équation (5.4). . . . . 154

5.5 Dynamique des particules  $u_i(t)$  avec  $i = 1, 2, 3, 4$  : a) pour  $F < F_c$  les particules restent piégées, b) les 4 particules sont toutes dépiégées et possèdent une vitesse moyenne identique si l'on effectue une régression linéaire des courbes  $u_i(t)$ . L'insert montre la courbe vitesse-force du dépiégeage élastique avec le point indiquant la force d'entraînement appliquée aux particules. 155

5.6 Dynamique des particules  $u_i(t)$  avec  $i = 1, 2, 3, 4$ . a) Lorsque  $F \gtrsim F_c$ , la paire de particules dans le canal le plus piégeant (ici 2-4) reste piégée mais oscille, alors que l'autre paire (1-3) avance dans son canal. b) Quand la force augmente, toutes les particules sont dépiégées avec un mouvement saccadé, et les vitesses moyennes des canaux sont différentes. c-d) Lorsque  $F$  augmente, la différence de vitesse entre les 2 canaux tend à diminuer. L'insert montre la courbe vitesse-force du dépiégeage plastique, avec le point rouge indiquant la force d'entraînement appliquée aux particules. . . . . 156

5.7 Courbe  $v(F)$  dans le cas d'un dépiégeage élastique (avec  $A = 1$ ,  $p_2 = -0.5$ ,  $K = 0.1$  et  $\eta = 3$ ) et montrant un phénomène d'hystérésis marqué. En fonction de l'histoire, nous identifions deux forces critiques  $F_c^{\text{up}}$  et  $F_c^{\text{down}}$  (respectivement lors de la montée et de la descente de la force). . . . . 157

5.8 Diagramme de phase  $(\eta, K)$  pour le dépiégeage élastique  $A = 1$  et différentes harmoniques  $p_2$  : a)  $p_2 < 0$ , b)  $p_2 = 0$ , c)  $p_2 > 0$ . La frontière de séparation entre un dépiégeage sans hystérésis (zone blanche) et un dépiégeage avec hystérésis (zone colorée) est représentée. Chaque point de la courbe est identifiable à une valeur  $(\eta_c, K_c)$  de la frontière. Différentes courbes de contour de la largeur relative de l'hystérésis  $L_{\text{hyst}}$  sont représentées. . . . . 158

5.9 Évolution de  $d(t)$  en fonction du temps en échelle semi-logarithmique. Un exposant de *Lyapunov* positif peut être déterminé aux temps courts (avant la saturation due à la taille caractéristique de l'attracteur). Trois distances initiales  $d_0$  entre les trajectoires voisines sont affichées, montrant le même exposant de *Lyapunov*. La ligne pointillée verte sert de guide pour visualiser la pente  $\lambda$ . . . . . 159

5.10 Spectre de puissance  $S(f)$  en échelle logarithmique, obtenu lors d'un dépiégeage plastique, pour une force situant le système dans un régime : a) périodique, b) chaotique. En insert de la figure a) est représenté le spectre en échelle semi-logarithmique, afin de mieux visualiser les raies discrètes. Les figures c) et d) représentent le signal de la vitesse  $v(t)$  utilisé pour déterminer le spectre, correspondant respectivement au cas des figures a) et b). Pour plus d'informations, voir le texte associé. . . . . 160

5.11 a) Évolution de l'exposant de *Lyapunov*  $\lambda$  et de la résistance différentielle  $R_d$  avec la force. Voir le texte associé pour plus d'informations. b) Diagramme de phase  $(\eta, K)$  pour  $A = 2$  et différentes harmoniques  $p_2$ . Les différentes marques (cercles, disques ou carrés) correspondent aux valeurs de paramètres pour lesquelles des régimes chaotiques sont observés. La frontière de séparation entre les régimes chaotiques et non chaotiques est également représentée. La flèche indique le sens d'évolution des exposants de *Lyapunov*  $\lambda$  pour une force proche du point d'inflexion. Remarque : les valeurs de constante d'élasticité utilisées sont  $K = \{0.01; 0.1; 1; 10\}$ , alors que les valeurs du couplage visqueux  $\eta$  varient de 0.1 à 100. . . . . 162

## TABLE DES FIGURES

---

# Introduction

*« Le secret d'un bon discours, c'est d'avoir une bonne introduction et une bonne conclusion. Ensuite, il faut s'arranger pour que ces deux parties ne soient pas très éloignées l'une de l'autre. »*

George Burns

La physique des systèmes élastiques désordonnés regroupe une grande variété de systèmes qui peuvent se classer en deux catégories, d'une part les interfaces comme les parois de domaines dans les systèmes magnétiques ou ferroélectriques, le mouillage d'une ligne de contact ou la propagation des fronts de fracture dans les matériaux, et d'autre part les structures périodiques telles que les ondes de densité de charge dans les métaux, les colloïdes, les réseaux de vortex dans les supraconducteurs de type II ou encore les cristaux de *Wigner*.

Au sein de ces systèmes il existe une compétition entre l'élasticité de la structure, qui tend à imposer un ordre parfait au système, et le désordre induit par le substrat sur lequel évolue le système qui s'oppose à un tel équilibre et déforme la structure. Un enjeu majeur dans l'étude de ces systèmes est la compréhension de leur réponse à une force extérieure d'entraînement. Deux phases distinctes sont visibles de part et d'autre d'une valeur critique de la force  $F_c$  : le système demeure piégé par les défauts du substrat jusqu'à  $F_c$  puis se met en mouvement au dessus de  $F_c$  (on dit alors que le système se dépiège).

Nous étudions le dépiégeage et la dynamique des systèmes élastiques désordonnés en utilisant des simulations numériques à grande échelle. Nous nous concentrons sur les structures périodiques et principalement les réseaux de vortex dans les supraconducteurs de type II. Deux grands types de dépiégeage génériques sont observés : le dépiégeage plastique lorsque le désordre domine l'élasticité (piégeage fort) et le dépiégeage élastique lorsqu'à l'inverse l'élasticité domine le désordre (piégeage faible). D'un point de vue théorique seul le dépiégeage de structures pour lesquelles le champ de déplacement  $N = 1$  est correctement compris dans le cas élastique. Il n'existe pas de théorie satisfaisante pour  $N = 2$  décrivant le dépiégeage élastique ou plastique (c'est le cas des réseaux de vortex et des colloïdes notamment). L'approche par simulation numérique permet une étude détaillée de la dynamique hors équilibre de ces systèmes. Nos résultats concernent plus particulièrement la dynamique élastique.

Dans le chapitre 1 de cette thèse nous présentons la théorie des systèmes élastiques en milieu désordonné en effectuant un tour rapide des différents systèmes qui peuvent être

décrits par cette théorie. Les ingrédients communs à ces systèmes ainsi que les propriétés statiques et dynamiques des interfaces sont présentés. Au sein du chapitre 2 nous exposons un rappel des notions de supraconductivité qui seront utiles pour décrire la physique des réseaux de vortex. Lors du chapitre 3 nous nous concentrons sur l'approche par simulation numérique, en rappelant tout d'abord quelques généralités sur les simulations numériques, puis nous présentons le modèle numérique employé et enfin nous décrivons le programme de dynamique moléculaire utilisé. Le chapitre 4 est consacré à l'étude du dépiégeage élastique des réseaux de vortex en 2 dimensions obtenu en piégeage faible. Après un bref rappel quant au lien que l'on peut faire entre les transitions de phases et le dépiégeage de ces structures nous présentons nos résultats obtenus à température nulle et à température finie. Une transition de dépiégeage continue (du second ordre) est observée au seuil de dépiégeage et nous caractérisons divers exposants critiques et lois d'échelle.

Et enfin dans le chapitre 5, nous développons un modèle visco-élastique simple à seulement 4 degrés de libertés permettant de décrire les situations où le désordre est fort. Un tel modèle permet de retrouver une grande variété de comportements dynamiques observés à plus grande échelle dans des systèmes périodiques. Deux grands types de dépiégeage élastique ou plastique sont observés, de l'hystérésis est mesurée dans le cas du dépiégeage élastique, alors que du chaos n'est détecté que pour le dépiégeage plastique.

Première partie

Partie Théorique



# Chapitre 1

## Les systèmes élastiques désordonnés en général ...

*« L'ordre est le plaisir de la raison : mais le désordre est le délice de l'imagination. »*

PAUL CLAUDEL (Le Soulier de satin)

### 1.1 Introduction

Les systèmes élastiques désordonnés sont des systèmes physiques relativement différents en première approche, mais présentant en réalité des caractéristiques communes. Ces propriétés sont intimement liées au fait que tous ces systèmes sont décrits par les mêmes équations au niveau macroscopique. Les systèmes considérés peuvent se regrouper en deux grandes catégories : les interfaces (ou variétés) et les systèmes périodiques.

En ce qui concerne les interfaces, en voici une liste non exhaustive : les parois de domaines dans les ferromagnétiques et les ferroélectriques, la ligne de contact d'un fluide sur un substrat désordonné, le front d'imbibition d'un liquide dans un milieu poreux, la propagation de fronts de fracture. Pour ce qui est des systèmes périodiques nous pouvons citer les ondes de densité de charge, les réseaux de vortex dans les supraconducteurs de type II, les colloïdes, les bulles magnétiques, les cristaux de Wigner.

Dans tous ces systèmes il existe une structure interne élastique soumise aux effets du désordre existant dans le matériau. Cette structure "interne" est un objet unique dans le cas des interfaces alors que pour les systèmes périodiques elle correspond aux structures cohérentes se formant au sein des systèmes concernés. L'existence d'une énergie élastique au sein du système tend à ordonner la structure, pour une variété on aura alors un "lissage" de l'interface qui préfère être plate, alors que pour les systèmes périodiques nous aurons un réseau périodique des différents objets caractérisant le système. Le désordre quant à lui va s'opposer à cet équilibre en déformant la structure afin de minimiser l'énergie globale du système. Ce désordre peut être intrinsèque et provenir de défauts dans le matériau (impuretés, lacunes ...) ou bien extrinsèque en étant créé artificiellement par l'expérimentateur.

## 1.2. DEUX TYPES DE STRUCTURES

---

Une compétition entre l'élasticité du système et le désordre s'installe alors et conduit à un problème d'une grande richesse de par son aspect vitreux : le paysage énergétique du système n'est pas trivial et présente de nombreux états métastables. De plus, et pour compliquer encore un peu le problème, une caractéristique propre à tous ces systèmes élastiques désordonnés provient du fait qu'ils peuvent être mis en mouvement en leur appliquant une force extérieure : la présence du désordre va donc modifier leur mouvement naturel obtenu en absence de ce dernier.

Nous sommes naturellement amenés à nous demander quelles sont les propriétés statiques et dynamiques de tels systèmes ? Pour ce qui est des propriétés d'équilibre nous pouvons nous demander comment varient les déplacements d'une interface avec la distance, ou bien qu'en est-il de l'ordre translationnel concernant les structures périodiques ? Et lorsque le système est hors-équilibre comment se met-il en mouvement, quelle est la nature de la phase en mouvement, la température joue-t-elle un rôle important sur sa dynamique ? etc ...

Ces questions, en apparence anodines, sont essentielles d'un point de vue expérimental étant donné les applications industrielles possibles. Deux exemples pertinents sont la création et le contrôle des parois de domaines de différentes aimantations dans les ferromagnétiques, omniprésents dans les espaces de stockage magnétique (disques durs principalement), ou encore le contrôle des vortex dans les supraconducteurs de type II afin de les piéger et d'éviter ainsi toute dissipation d'énergie néfaste à l'état supraconducteur, avec pour application évidente le transport de courant sans perte par effet Joule.

## 1.2 Deux types de structures

Dans cette section nous allons présenter différents systèmes élastiques partageant les caractéristiques communes citées dans l'introduction. Nous tenterons d'avoir une approche principalement phénoménologique en insistant surtout sur les aspects microscopiques des différents systèmes présentant des observations expérimentales similaires.

### 1.2.1 Interfaces

Nous commençons par présenter diverses réalisations expérimentales pouvant être décrites par le modèle d'interfaces élastiques en milieu aléatoire. Nous nous intéresserons principalement aux parois de domaines dans les ferromagnétiques et ferroélectriques, puis la ligne de contact d'un fluide sur un substrat désordonné et enfin nous verrons les fronts de fracture dans les matériaux hétérogènes.

#### 1.2.1.1 Parois de domaine ferromagnétique/ferroélectrique

##### **Ferromagnétiques**

Un matériau ferromagnétique est un matériau possédant une aimantation spontanée, c'est-à-dire que son aimantation a une valeur finie même lorsque le champ magnétique appliqué est nul. Les matériaux ferromagnétiques les plus courants sont le fer, le cobalt,

## 1.2. DEUX TYPES DE STRUCTURES

---

le nickel et certains alliages. Selon la température du matériau une transition de phase est attendue théoriquement : en dessous d'une température "critique" appelée *température de Curie*  $T_c$ , une phase ferromagnétique apparaît où les moments magnétiques des atomes sont alignés parallèlement entre eux et créent ainsi une aimantation macroscopique spontanée. Pour des hautes températures avec  $T > T_c$  le matériau se trouve dans une phase paramagnétique où l'énergie thermique apportée est plus forte que l'interaction d'échange générant ainsi une orientation aléatoire des moments magnétiques et donc une aimantation macroscopique nulle. Pour avoir une idée de l'ordre de grandeur de la température de Curie on peut retenir que  $T_c = 1043 \text{ K}$  *i.e.* environ  $770^\circ\text{C}$  pour le fer.

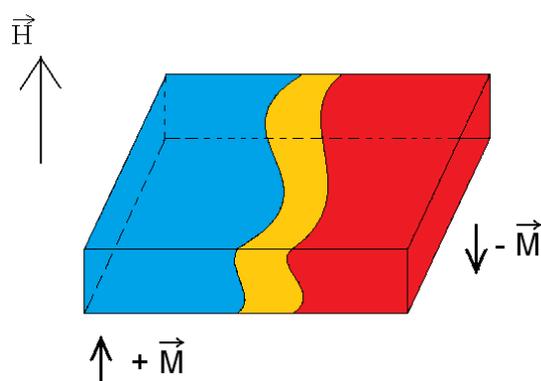


FIGURE 1.1 – Représentation schématique de deux domaines magnétiques de différentes aimantations séparés par la paroi de domaine.

En réalité dans la phase ferromagnétique des régions d'aimantation homogène, appelées *domaines de Weiss* existent, séparées par des interfaces que l'on nomme *parois de Bloch*. Imaginons deux domaines magnétiques d'un matériau ultramine à anisotropie uniaxiale (un seul axe de facile aimantation) ayant chacun une aimantation de même direction mais de sens opposé comme sur la figure 1.1. En appliquant un champ magnétique à cet échantillon nous aurons alors un retournement des moments magnétiques du domaine ayant une aimantation de sens opposé au champ magnétique. Le retournement des moments magnétiques va commencer au niveau de l'interface entre les deux domaines (ou par les bords de l'échantillon) afin de minimiser la variation d'énergie. Lorsque la valeur du champ magnétique appliqué augmente, les moments magnétiques s'orientent progressivement dans la direction du champ induisant ainsi un déplacement de la paroi de domaine. Ainsi en faisant varier le champ magnétique appliqué nous arrivons à contrôler le déplacement de la paroi des domaines magnétiques.

Comme on peut le voir sur l'exemple de paroi de domaine magnétique [1] de la figure 1.2, la paroi n'est pas plate mais présente une rugosité due à la présence de désordre magnétique (par exemple des défauts intrinsèques qui proviennent d'irrégularités dans la structure à l'échelle nanométrique du film, entre autres les cristallites et leurs frontières etc ... ou bien des défauts extrinsèques à une plus grande échelle (mésoscopique) tels que des impuretés ...). Cette frontière entre deux domaines d'aimantations différentes est un exemple expérimentalement accessible de la rugosité d'une interface élastique où la force

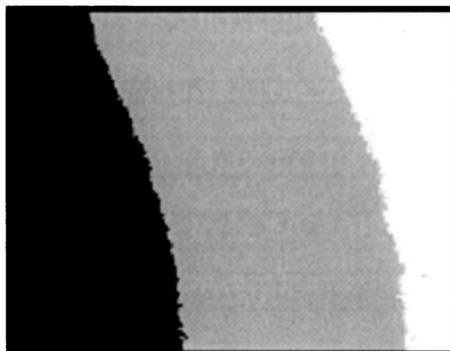


FIGURE 1.2 – Image (d’une taille de  $90 \times 72 \mu m^2$ ) montrant le déplacement magnétique obtenue par imagerie magnéto-optique Kerr dans un film ultra-fin bidimensionnel de Pt/Co/Pt [1]. La partie noire représente le domaine original et la partie grise montre la surface balayée par la paroi de domaine pendant  $111 \mu s$ .

élastique provient de l’interaction d’échange et le champ magnétique permet de déplacer la paroi dans le milieu désordonné. On se rend compte ici que la compréhension du phénomène de piégeage de l’interface, et donc de sa rugosité, possède un intérêt industriel évident : un lissage de la paroi qui sépare les différents domaines permettant de représenter les bits informatique optimiserait l’efficacité des supports magnétiques tels que les disques durs.

### Ferroélectriques

Les matériaux ferroélectriques présentent des caractéristiques qui ne sont pas sans rappeler celles des ferromagnétiques, c’est pourquoi le vocabulaire utilisé pour les ferroélectriques leur a été en majeure partie emprunté. Nous profiterons de cette analogie pour présenter brièvement les ferroélectriques.

Un matériau ferroélectrique est un matériau possédant un moment dipolaire électrique permanent. Tout comme pour les ferromagnétiques, il existe une transition de phase au sein de tels matériaux : à basse température ils présentent une polarisation macroscopique spontanée (somme vectorielle des moments dipolaires microscopiques) et le système se trouve dans la phase dite ferroélectrique, alors que pour des températures supérieures à une température dite de *Curie ferroélectrique*  $T_c$ , les moments dipolaires sont orientés de façon aléatoire et la polarisation est nulle, le système est dans la phase paraélectrique. Un champ électrique extérieur peut être appliqué pour orienter les moments dipolaires dans le même sens. La ferroélectricité ne se rencontre que dans quelques structures cristallines particulières telles que les pérovskites (par exemple  $BaTiO_3$  qui possède une température de *Curie* ferroélectrique  $T_c \simeq 400 K$ ). Lorsque le matériau est dans un état ferroélectrique les moments dipolaires s’ordonnent spontanément dans des directions déterminées par la structure cristalline et créent des domaines ferroélectriques présentant une polarisation spontanée et dont l’orientation varie d’un domaine à l’autre.

Prenons par exemple une couche mince de PZT ( $Pb(Zr, Ti)O_3$ ) orientée suivant l’axe cristallographique  $c$  dont la croissance a été réalisée par épitaxie sur un substrat conduc-

## 1.2. DEUX TYPES DE STRUCTURES

---

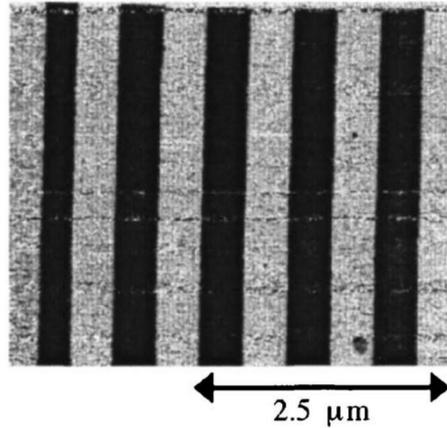


FIGURE 1.3 – Image obtenue par microscopie à force piézoélectrique (PFM) de domaines ferroélectriques de largeur  $(925 \pm 15)nm$  réalisés par microscopie à force atomique (AFM) [2].

teur. Ce matériau ferroélectrique est une pérovskite présentant une polarisation électrique spontanée pour  $T < T_c$ . Des défauts présents dans la couche mince génèrent du désordre dans l'échantillon et par là-même un potentiel désordonné pour le système. Dans cette couche mince la polarisation est alignée dans la direction de l'axe  $c$ , et peut être renversée en appliquant une différence de potentiel au travers d'une pointe AFM (Microscope à Force Atomique) appliquée la surface de l'échantillon et en utilisant le substrat comme électrode de masse : on polarise ainsi les différents domaines électriques du matériau ferroélectrique. La visualisation des domaines de polarisation à l'échelle nanométrique a été effectuée par microscopie à force piézoélectrique (PFM) qui est une technique de microscopie utilisant l'effet piézoélectrique inverse. On peut voir une image de plusieurs domaines ferroélectriques séparés par des parois de domaines sur la figure 1.3. En observant en détail l'interface séparant deux régions de polarisation différente on se rend compte qu'elle n'est pas plate mais présente une certaine rugosité. Ces parois de domaines ferroélectriques sont donc un autre exemple expérimental d'interfaces élastiques en milieu désordonné (voir par exemple les références [2, 3, 4]).

Les ferroélectriques présentent un large champ d'applications depuis les condensateurs grâce à leur forte constante diélectrique, au stockage de l'information dans les FRAM (Ferroelectric Random Access Memory) qui présentent un faible temps d'accès et une faible consommation électrique. En effet il est plus facile d'écrire des données grâce à un champ électrique plutôt qu'un champ magnétique de par la moindre énergie nécessaire à l'application du champ. De plus le champ électrique est plus localisé et permet de miniaturiser les composants électroniques en insérant plus d'éléments de mémoire en leur sein.

A titre de remarque nous précisons qu'une thématique de recherche est en plein essor sur ce sujet en utilisant à la fois les caractéristiques du ferromagnétisme et de la ferroélectricité dans des composés dit *multiferroïques* pour lesquels quatre états distincts (deux états

d'aimantation et deux états de polarisation) existent pour les éléments de mémoire au lieu des deux habituels. On pourrait ainsi imaginer des mémoires magnétiques contrôlables par application d'un champ électrique. Pour plus d'informations sur ce sujet nous conseillons au lecteur de se référer aux articles de revues et aux références associées [5, 6].

### 1.2.1.2 Ligne de contact d'un fluide sur un substrat désordonné

Un autre exemple pertinent d'interface pouvant être modélisé par un système élastique désordonné est le cas de la ligne de contact d'un fluide sur un substrat désordonné. Lorsque l'on dépose un liquide sur une surface solide, il peut "s'accrocher" de différentes façons sur cette dernière : soit il va s'étaler complètement sur la surface et on dit que le liquide est mouillant, soit il va former des gouttes plus ou moins sphériques caractérisées par un angle de contact  $\theta$  avec la surface et on parle de situation de mouillage partiel. Ainsi le mouillage est total si l'angle de contact est nul  $\theta = 0$ , le mouillage est partiel si  $\theta < 90^\circ$  et enfin le liquide est non mouillant si  $\theta > 90^\circ$  (c'est le cas typique du mercure qui présente un angle de contact sur le verre de  $140^\circ$  par exemple, ou encore des gouttes d'eau sur les plumes de canard qui possèdent une substance grasse hydrophobe à leur surface). La condition d'équilibre pour l'angle de contact dépend du liquide, du solide (la surface qui sert de support) et de l'air environnant : on pose  $\gamma$ ,  $\gamma_{sg}$  et  $\gamma_{sl}$ , définissant respectivement les tensions superficielles des interfaces liquide/gaz, solide/gaz et solide/liquide. On peut utiliser la relation de Young-Dupré pour relier l'angle de contact d'équilibre  $\theta_{eq}$  aux tensions superficielles :  $\gamma \cos(\theta_{eq}) = \gamma_{sg} - \gamma_{sl}$ . Cependant cette description n'est valable que pour le cas d'une surface lisse et homogène. En réalité une surface ordinaire présente des imperfections (rugosités ou inhomogénéités chimiques) générant ainsi du désordre pour l'interface.

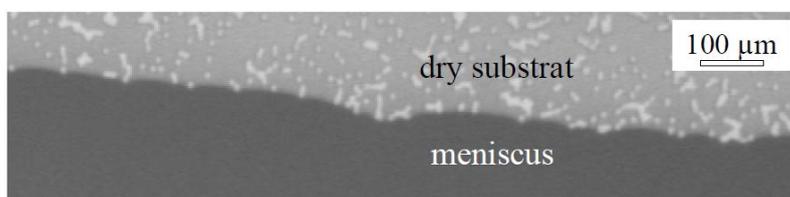


FIGURE 1.4 – Image obtenue par une caméra CCD de la ligne de contact de l'eau sur un substrat désordonné réalisé à partir de défauts de chrome (de taille  $10 \times 10 \mu m$ ) déposés sur une plaque de verre, et apparaissant en clair sur la partie sèche [7].

Une réalisation expérimentale du déplacement d'une telle interface sur un substrat désordonné peut être trouvée dans les références [7, 8]. L'image 1.4 présente l'expérience de la référence [7]. Le substrat utilisé est une plaque de verre recouverte de motifs de chrome déposés aléatoirement par un procédé de photolithographie. Les liquides utilisés sont de l'eau et une solution aqueuse de glycérol à 70% en masse, possédant tous les deux une tension superficielle similaire de  $\gamma = 70.10^{-3} N.m^{-1}$ . La plaque de verre a ensuite été plongée partiellement dans le liquide.

### 1.2.1.3 Front de fracture dans les matériaux hétérogènes

Un dernier exemple d'interface élastique dans un milieu aléatoire est donné par la propagation de fronts de fracture dans les matériaux hétérogènes. C'est un cas que l'on rencontre quotidiennement et ce à toutes les échelles. La propagation d'une fracture dans un matériau élastique idéal et homogène est décrit par la théorie "classique" de la mécanique de la rupture : dans cette situation le front de fracture reste rectiligne au cours de sa propagation et avance continument. Cependant cette description n'est pas toujours réaliste car tous les matériaux présentent des inhomogénéités (défauts ponctuels, microstructure non homogène etc ...). Au niveau de la zone d'endommagement du matériau on observe un front de fracture qui possède une rugosité et qui n'avance plus de façon continue mais par avalanches.

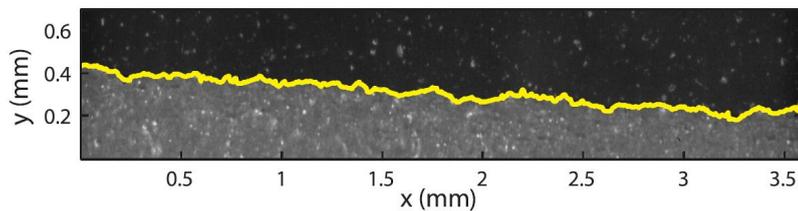


FIGURE 1.5 – Image enregistrée par une caméra rapide présentant la propagation d'un front de fracture interfacial entre deux blocs de plexiglas transparents. Le matériau intact apparaît en noir alors que la zone grise correspond à la partie fissurée, la ligne jaune représente l'interface séparant les deux régions [9].

Une expérience a été menée sur ce type de problème [9], dans laquelle un sablage de deux blocs de plexiglas transparents collés à chaud sous pression a été réalisé. Le sablage permet de générer un désordre dans le système par l'introduction de défaut aléatoires. En sollicitant le matériau afin de créer une zone d'endommagement et grâce à une caméra CMOS il a été possible de visualiser la propagation de la fracture générée. On voit bien sur la figure 1.5 que l'interface séparant la région fracturée de celle intacte présente de la rugosité et n'est pas plate. Pour plus d'informations sur ces systèmes nous conseillons au lecteur de se référer à [9, 10] et aux références associées.

Les applications de ces études sont multiples, on peut citer le blocage de micro-fissures dans des matériaux en plaçant des points forts à des endroits spécifiques en son sein, ou bien à une échelle plus grande une meilleure compréhension des déclenchements des tremblements de terre.

## 1.2.2 Structures périodiques

Nous allons dorénavant nous concentrer sur le cas des structures périodiques élastiques plongées dans des milieux désordonnés. En effet ces systèmes qui possèdent une structure interne élastique sont, tout comme les interfaces, plongés dans un désordre provenant de divers défauts apparaissant dans les composés, que ce soit naturellement lors de leur élaboration ou bien de par la volonté des expérimentateurs (pour certains systèmes cela présente alors un intérêt technologique). Nous allons présenter brièvement le cas des ondes de densité

## 1.2. DEUX TYPES DE STRUCTURES

de charge, les cristaux de Wigner et celui des réseaux de vortex dans les supraconducteurs de type II (comme notre étude portera sur ces derniers par la suite, nous n'entrerons pas dans les détails techniques pour le moment).

### 1.2.2.1 Ondes de densité de charge

Une onde de densité de charge (ODC) est un état possible d'un métal de faible dimensionnalité dans lequel la densité d'électrons de conduction et les positions atomiques sont modulées spatialement. La réalisation d'une onde de densité de charge se fait principalement dans les matériaux possédant une structure cristalline et électronique très anisotrope : le "bronze bleu"  $K_{0.3}MoO_3$  ou encore  $NbSe_3$ . Pour comprendre une onde de densité de charge on modélise un métal quasi-unidimensionnel par une chaîne d'atomes équidistants. Les états possibles pour les électrons de conduction forment une structure de bandes dans laquelle seuls les états jusqu'au niveau de Fermi  $\epsilon_F$  (et de vecteur d'onde  $k_F$ ) sont occupés (voir figure 1.6a).

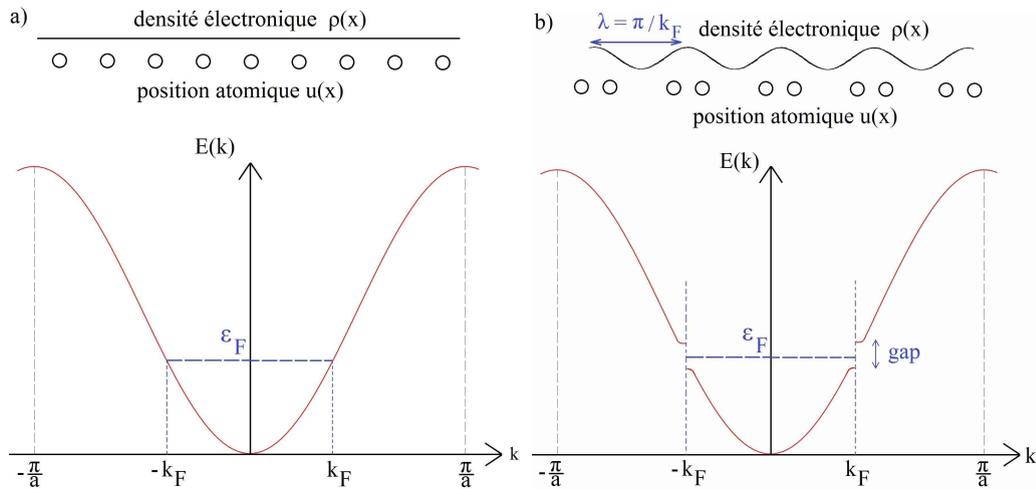


FIGURE 1.6 – Représentation schématique de l'énergie  $E(k)$  en fonction de la norme du vecteur d'onde pour un métal unidimensionnel dans l'état métallique (figure a) et dans l'état onde de densité de charge (figure b) avec l'ouverture du gap en énergie. A titre d'indication visuelle nous avons représenté la chaîne d'atomes et la densité électronique équivalente.

Cependant dans les métaux quasi-1D à basses températures, lorsque l'on prend en compte l'interaction électron-phonon, le coût en énergie élastique pour effectuer une modulation des positions atomiques est plus faible que le gain d'énergie des électrons de conduction : *Peierls* a montré qu'une modulation de la position des atomes dans le réseau sous la forme  $u(x) = u_0 \cos(2k_F x + \phi)$  avec le vecteur d'onde de valeur  $2k_F$  (et donc de longueur d'onde  $\lambda = \frac{\pi}{k_F}$ ) et  $u_0$  l'amplitude de déplacement des atomes, produit l'ouverture d'un gap d'énergie à  $k = \pm k_F$  résultant en une diminution d'énergie des états occupés en dessous de  $\epsilon_F$  et donc en une réduction de l'énergie électronique totale (voir figure 1.6b). On comprend alors que la distorsion du réseau d'atomes devient énergétiquement favo-

## 1.2. DEUX TYPES DE STRUCTURES

---

rable puisque l'énergie gagnée par le fait d'ouvrir d'un gap est plus importante que le coût énergétique pour réarranger les atomes. Il en résulte donc une modulation de la densité de charge électronique que l'on appelle onde de densité de charge. Lorsque la température devient importante le gain en énergie des électrons est réduit par l'excitation thermique électronique et donc le matériau retrouve son état métallique habituel. Cette transition de phase entre l'état ODC et l'état métallique est connue sous le nom de transition de *Peierls*. On peut décrire l'état onde de densité de charge par un paramètre d'ordre complexe  $\psi(x) = \Delta(x) \exp(i\phi(x))$  avec  $\Delta(x)$  précisant la taille du gap en énergie et la phase  $\phi(x)$  détermine la position de l'ODC par rapport au réseau sous-jacent.

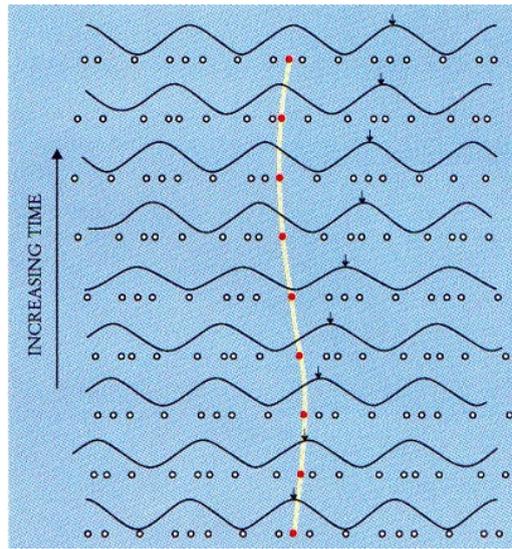


FIGURE 1.7 – Représentation schématique du mouvement d'une onde de densité de charge suite à l'application d'un champ électrique. Différents instantanés de la densité électronique et de la position des atomes sont représentés : on observe un "glissement" de l'ODC avec le réseau résultant en un transport collectif de charge.

Lorsqu'un champ électrique est appliqué à l'échantillon, l'onde de densité de charge va se mettre en mouvement (voir figure 1.7) en glissant sur le réseau d'atomes et créer un transport collectif de charges. Cependant les impuretés et les défauts du réseau génèrent du désordre qui va piéger l'onde de densité de charge jusqu'à une valeur "critique" du champ électrique  $E_c$  appliqué. Pour  $E > E_c$ , l'onde de densité de charge se dépiège pour se mettre en mouvement.

Les ODC sont d'un intérêt technologique avec différentes applications possibles dans l'industrie électronique telles que par exemple les condensateurs, ou encore les nouveaux processeurs basés sur les ODC à la place des courants électriques pour encoder les données permettant de ce fait de réduire la consommation électrique et d'augmenter la vitesse de la prochaine génération d'ordinateurs. *A. Balandin* et *R. Lake* du Riverside's Bourns College of Engineering de l'Université de Californie ont reçu récemment une subvention de 1.5 million de dollars pour cette étude. Les ODC sont également d'un grand intérêt théorique puisqu'elles permettent d'avoir un modèle relativement simple pour étudier les structures

## 1.2. DEUX TYPES DE STRUCTURES

---

périodiques en présence de désordre. Pour plus d'informations à ce sujet nous conseillons au lecteur de se référer à des articles tels que [11] ou bien encore [12] et les références associées.

### 1.2.2.2 Cristaux de Wigner

L'idée afférente aux cristaux est un arrangement d'atomes sur un réseau existant pour des températures suffisamment basses, et qui se transforme en liquide lorsqu'on augmente sa température. Des chercheurs se sont demandés si un tel système pouvait exister pour un arrangement d'électrons au lieu d'atomes. C'est en 1934 que *E. Wigner* a prédit théoriquement l'existence d'une cristallisation possible d'électrons à suffisamment basse densité [13], appelée *cristal de Wigner*. Il a cependant fallu attendre les années 1970 pour observer expérimentalement une telle configuration d'électrons à la surface de gouttes d'Hélium refroidies à très basses températures [14].

Considérons un système d'électrons à basse densité et posons  $r$  la distance moyenne entre ces derniers. L'énergie potentielle provenant de l'interaction Coulombienne décroît typiquement comme  $e^2/r$  avec  $e$  la charge de l'électron, alors que l'énergie cinétique est de l'ordre de  $\hbar^2/(2mr^2)$ . Ainsi pour des faibles densités d'électrons, et donc de grandes distances  $r$  entre eux, l'énergie potentielle est faible mais l'énergie cinétique est encore plus faible. Pour trouver l'état fondamental d'un tel système il faut alors minimiser l'énergie potentielle et un réseau cristallin d'électrons est naturellement attendu. On peut le comprendre également en se rappelant qu'à basses températures si la densité d'électrons n'est pas suffisamment faible, comme c'est le cas pour les électrons libres dans les métaux par exemple, alors leurs fonctions d'ondes se recouvrent de façon significative. En revanche pour des faibles densités d'électrons on peut négliger le recouvrement des fonctions d'ondes et les électrons peuvent être vus comme des objets classiques qui s'organisent pour former un cristal.

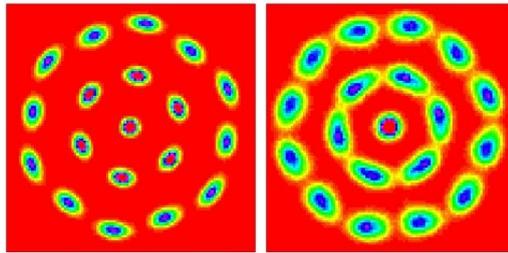


FIGURE 1.8 – Résultat numérique obtenu pour un système de 19 électrons dans une couche  $2D$  à basse température et confinés dans un potentiel à symétrie sphérique [15] : on observe un cristal de Wigner possédant 6 voisins.

Nous présentons en figure 1.8 un exemple d'image obtenue lors de simulations numériques sur les cristaux de Wigner [15]. Ce cristal est très compliqué à observer expérimentalement, il n'est stable qu'à de très faibles densités, si la densité augmente alors l'énergie cinétique également et le cristal peut alors fondre. De plus la présence de désordre via des impuretés chargées emmène les électrons en des positions différentes des sites du réseau afin de minimiser leur énergie et risque de détruire le réseau. Les observations expérimen-

## 1.2. DEUX TYPES DE STRUCTURES

---

tales ont été faites sur des systèmes d'électrons à la surface d'Hélium liquide refroidie à basses températures ne présentant pas de désordre, ou encore dans des hétérojonctions *GaAs/GaAlAs* sous fort champ magnétique où un gaz d'électrons bi-dimensionnel apparaît à la surface du semiconducteur. Une réalisation à l'échelle macroscopique d'un cristal de Wigner a été proposée [16, 17] où des billes millimétriques chargées électriquement sont dans un potentiel de piégeage contrôlé. De nombreuses études ont également été réalisées numériquement pour les cristaux de Wigner et nous renvoyons le lecteur intéressé sur des articles traitant de la thématique, tels que [18, 19].

Les études portées sur de tels systèmes d'électrons présentent un intérêt industriel en ce qui concerne la miniaturisation d'appareils électroniques : les électrons qui transportent le courant électrique pourraient ainsi être piégés en un réseau rigide de façon contrôlable et le système deviendrait un isolant, cela permettrait de créer des commutateurs ou des transistors de petite taille.

### 1.2.2.3 Réseaux de vortex dans les supraconducteurs de type II

Un supraconducteur est un matériau présentant des propriétés inattendues lorsqu'il est refroidi en dessous d'une température dite *critique*  $T_c$ . Les deux effets les plus flagrants sont la conduction d'électricité en leur sein avec une résistance nulle n'offrant ainsi pas de perte énergétique par effet Joule, et l'expulsion des champs magnétiques appliqués à l'échantillon permettant par exemple la lévitation magnétique. Les supraconducteurs peuvent être classés en deux catégories : les supraconducteurs "conventionnels" de type I regroupant principalement les corps purs et présentant une  $T_c$  très faible (de l'ordre de 4,2K pour le mercure *Hg* par exemple) ou bien les supraconducteurs de type II tels que les céramiques à base d'oxydes de cuivre, dites cuprates, avec des  $T_c$  bien plus élevées ( $T_c = 92K$  pour *YBaCuO*). Outre la température, il existe d'autres facteurs critiques permettant l'existence de la supraconductivité : le courant critique  $I_c$  passant dans l'échantillon et le champ magnétique critique  $H_c$  appliqué au matériau.

L'explication théorique de la supraconductivité pour les supraconducteurs classiques est bien comprise par la théorie BCS proposée en 1957 et pour laquelle ses auteurs *John Bardeen, Leon Neil Cooper et John Robert Schrieffer* obtinrent le prix Nobel de physique en 1972. Sans rentrer dans des explications techniques, il faut comprendre que les électrons du matériau se regroupent pour former des *paires de Cooper* et dont l'attraction est due à l'interaction électron-phonon. Pour ce qui est des supraconducteurs plus "exotiques" tels que les cuprates à hautes températures critiques l'origine de l'attraction des électrons n'est pas encore connue mais des indices indiquent une interaction magnétique entre les électrons (une interaction électron-magnon jouerait alors le même rôle que l'interaction électron-phonon dans les supraconducteurs conventionnels).

La particularité des supraconducteurs de type II est qu'ils présentent une zone supplémentaire par rapport aux type I dans leur diagramme de phase appelée état mixte (ou encore phase de Shubnikov), dans laquelle le champ magnétique extérieur réussit à pénétrer dans le matériau sous forme de tubes de flux magnétique que l'on appelle vortex (rappelons que sous certaines conditions les supraconducteurs de type I sont soit en phase *Meissner*

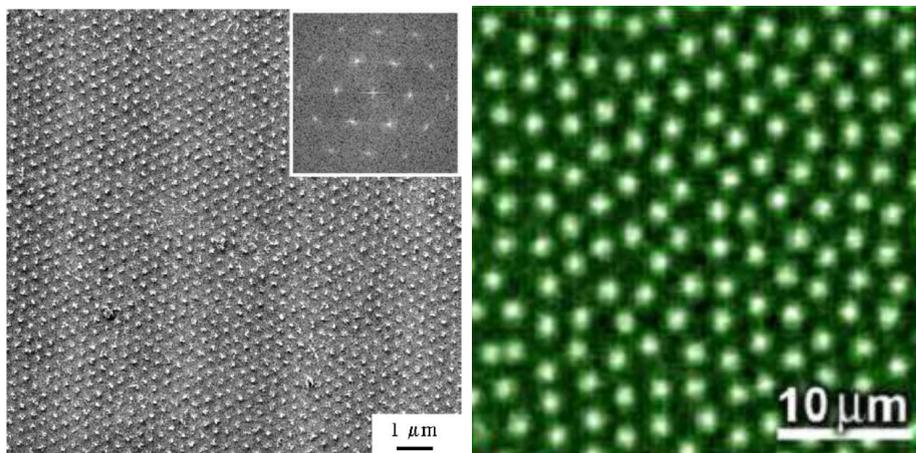


FIGURE 1.9 – Image de gauche : image du réseau de vortex dans un cristal de  $MgB_2$  d'environ  $T \approx 6K$  sous un champ magnétique de  $200 Oe$  obtenue par décoration Bitter. Le réseau est triangulaire comme le montre l'image de l'espace réel (figure principale) et de l'espace réciproque en insert, obtenue par FFT (transformée de Fourier rapide) [20]. Image de droite : image magnéto-optique du réseau de vortex dans un cristal de  $NbSe_2$  refroidi à  $4.3K$  sous champ magnétique de  $3 Oe$  [21]

avec exclusion totale du champ magnétique dans le matériau, soit en phase normale se comportant comme un métal classique). Si le matériau est parfait on s'attend théoriquement à un agencement des vortex sous la forme d'un réseau triangulaire provenant de l'interaction électromagnétique entre les vortex, cependant la présence de défauts dans les matériaux ou encore le bombardement aux ions lourds génèrent un désordre qui piège les vortex et déforme la structure périodique afin de minimiser l'énergie du système.

La figure 1.9 montre la structure triangulaire du réseau de vortex dans  $MgB_2$  [20] et  $NbSe_2$  [21] refroidis sous la  $T_c$  et soumis à un champ magnétique extérieur. Les applications des supraconducteurs sont nombreuses et d'un fort impact technologique, on peut citer entre autres l'imagerie par résonance magnétique IRM où le champ magnétique puissant est produit par une bobine supraconductrice, la détection de faibles champs magnétiques par l'utilisation de SQUID (Superconducting Quantum Interference Device), les trains à lévitation magnétique avec une vitesse record de  $581km/h$  pour le *MagLev* au Japon, les accélérateurs de particules ou encore les lignes de transmission sans perte énergétique.

### 1.3 Ingrédients d'un système élastique désordonné

Pour modéliser des systèmes élastiques désordonnés quelques éléments de base sont nécessaires : nous aborderons dans un premier temps les différents espaces existants, puis nous présenterons comment l'on peut modéliser l'élasticité et le désordre au sein de ces systèmes.

### 1.3.1 Dimensionnalité

Les variétés ou les structures périodiques sont considérées comme des systèmes élastiques dont l'espace interne est de dimension  $d$ , plongés dans un espace total plus grand de dimension  $D$ , et qui peuvent se déplacer le long de directions transverses d'un espace de dimension  $N$ . Notons  $\vec{r} \in \mathbb{R}^d$  les coordonnées internes du système, qui décrivent la position d'une particule dans le système périodique ou encore la position le long de la variété, et  $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$  les coordonnées transverses que peut parcourir le système. Afin de décrire ses déplacements par rapport à la position d'équilibre nous devons définir un champ de déplacement  $\vec{u}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^N$  comme une fonction des coordonnées internes et que nous considérons comme univalué, *i.e.* il n'y a pas de surplomb.

type de système	exemples	d	N	D
variétés	interface en 2D	1	1	2
	polymère orienté / vortex unique	1	2	3
	interface en 3D	2	1	3
structures périodiques	réseau de Wigner/vortex 2D	2	2	2
	réseau de vortex 3D	3	2	3

TABLE 1.1 – Différents systèmes élastiques et leurs dimensions associées, pour plus d'explications voir le texte associé.

Une variété de dimension  $d$  étant plongé dans un espace de dimension  $D$ , son déplacement se fait donc dans l'espace orthogonal à l'objet avec  $N = D - d$ . Les systèmes périodiques s'étendent dans tout l'espace et on a  $d = D$ . Nous présentons dans le tableau 1.1 et sur la figure 1.10 un exemple de différents systèmes et leurs dimensions associées.

### 1.3.2 Elasticité

L'élasticité des systèmes que l'on considère impose une configuration parfaitement ordonnée en absence de désordre afin de minimiser le coût en énergie dépensé par les possibles distorsions de la structure élastique. Cela se traduit pour les interfaces par l'absence de rugosité et donc une interface qui est parfaitement plate, alors que pour les systèmes périodiques on aura un réseau parfaitement périodique comme le montre la représentation schématique présentée sur la figure 1.11.

Soit l'Hamiltonien  $\mathcal{H}_{el}(u)$  décrivant l'énergie d'une configuration du système élastique qui va dépendre des déformations du champ de déplacement, et donc du gradient du champ de déplacement  $u$ . En utilisant l'approximation de la limite élastique  $\nabla u \ll 1$  pour laquelle les distorsions du champ de déplacement sont considérées comme petites, c'est-à-dire que l'on ne considère pas possible l'apparition de dislocations, alors nous pouvons linéariser l'énergie qui va se réduire en une forme quadratique du gradient du champ de déplacement,

$$\mathcal{H}_{el}(u) = \frac{c}{2} \int d^d r (\nabla u(r))^2 \quad (1.1)$$

avec  $c$  la constante élastique prise ici isotrope. Nous pouvons également définir l'hamiltonien

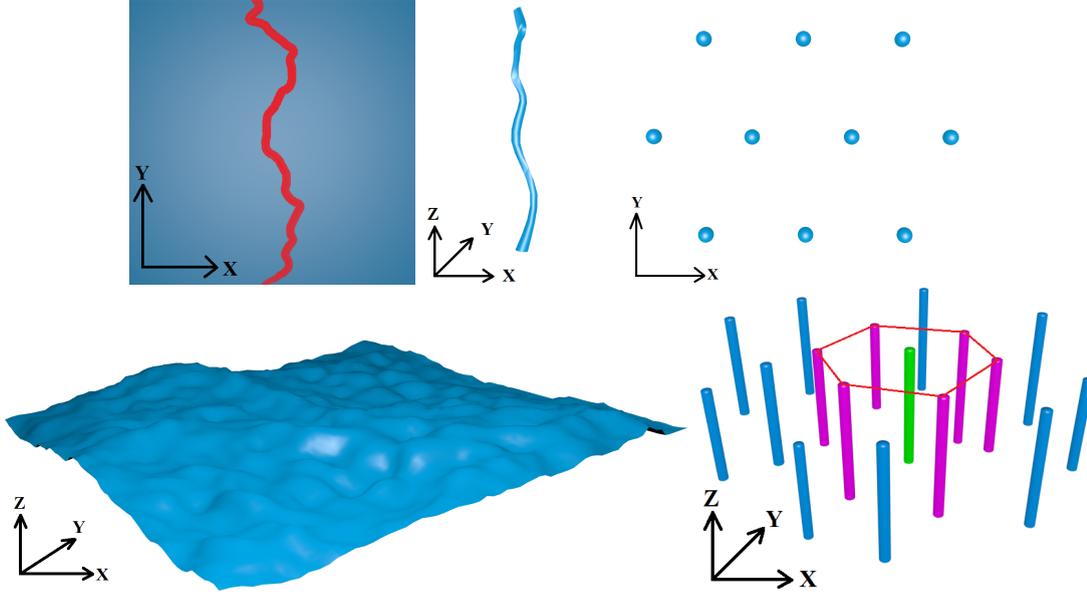


FIGURE 1.10 – Représentation graphique des exemples de systèmes donnés dans le tableau 1.1. De gauche à droite, et de haut en bas : interface  $d = 1$  en rouge dans un espace total  $D = 2$  — vortex unique de dimension  $d = 1$  dans  $D = 3$  — réseau triangulaire de particules avec  $d = 2$  dans l'espace  $D = 2$  — interface  $d = 2$  dans  $D = 3$  — réseau triangulaire de vortex choisis droits avec  $d = 3$  plongés dans  $D = 3$ .

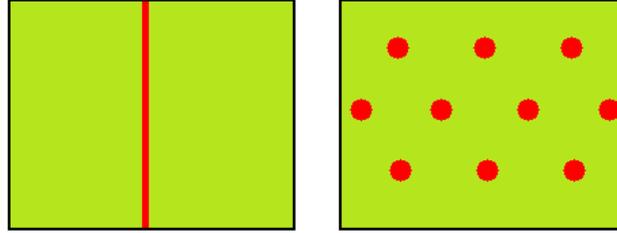


FIGURE 1.11 – Représentation schématique de l'action de l'élasticité pour une interface (trait continu sur l'image de gauche) et pour un système périodique (réseau triangulaire sur l'image de droite).

dans l'espace réciproque en posant  $u(q) = \int d^d r u(r) e^{iqr}$  la transformée de Fourier de  $u(r)$ . L'hamiltonien devient alors,

$$\mathcal{H}_{el}(u) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} c(q) u_q^* u_q \quad (1.2)$$

où  $c(q) = cq^2$  est l'énergie élastique par mode de Fourier  $u(q)$ .

### 1.3.3 Désordre

Les systèmes réels présentent des défauts et des inhomogénéités intrinsèques (ou extrinsèques, c'est-à-dire créés artificiellement) qui génèrent un désordre pour le système via l'introduction d'un potentiel extérieur aléatoire. Nous ne traiterons que du cas du désordre gelé (que l'on appelle *quenched disorder* dans la littérature) où les défauts présentent une évolution temporelle beaucoup plus lente que celle du système élastique, et nous ne parlerons pas du désordre recuit (*annealed disorder*) où les défauts peuvent évoluer en des temps caractéristiques du même ordre de grandeur que le système élastique plongé dans le désordre. Si l'on note  $V(r, u(r))$  le potentiel aléatoire représentant les impuretés dans l'espace total  $D$  alors l'hamiltonien  $\mathcal{H}_{des}(u)$  représentant l'énergie de piégeage s'écrit,

$$\mathcal{H}_{des}(u) = \int d^d r V(r, u(r)) \quad (1.3)$$

Par souci de simplicité nous parlerons seulement de désordre généré par des impuretés ponctuelles, et nous supposerons que le potentiel possède une distribution Gaussienne avec une moyenne nulle et une variance,

$$\overline{V(r, u)V(r', u')} = \delta^d(r - r')R(u - u') \quad (1.4)$$

où la barre représente la moyenne sur les configurations de désordre pour le corrélateur du potentiel  $V(r, u)$ .

Le désordre sera de courte portée dans la direction interne  $r$  à cause de la corrélation à courte portée des interactions entre les impuretés, alors que la corrélation du désordre dans la direction du déplacement, donnée par  $u$ , sera obtenue par la fonction  $R(u)$  et nous noterons  $r_f$  la longueur de corrélation du potentiel aléatoire. Il existe plusieurs classes d'universalités en fonction du type de désordre et donc du comportement de  $R(u)$  : pour un désordre du type *random bond*  $R(u)$  sera à courte portée et dans ce cas l'interface se couple localement aux impuretés tandis que pour un désordre de type *random field*  $R(u)$  sera à longue portée et l'interface est affectée par tous les défauts rencontrés lors de son mouvement. Pour les systèmes périodiques tels que les réseaux de vortex  $R(u)$  est une fonction périodique. Pour plus de détails voir par exemple la référence [22] et les références associées.

Les propriétés des systèmes élastiques désordonnés sont donc déterminées par l'Hamiltonien total défini comme étant la somme des énergies élastiques et de piégeage,

$$\mathcal{H}(u) = \mathcal{H}_{el}(u) + \mathcal{H}_{des}(u) = \int d^d r \left[ \frac{c}{2} (\nabla u(r))^2 + V(r, u(r)) \right] \quad (1.5)$$

Bien que ne présentant pas en apparence de difficulté, cet Hamiltonien est d'une incroyable richesse et complexité de par la présence du potentiel aléatoire qui varie de point en point dans le système.

## 1.4 Propriétés statiques et dynamiques des interfaces

Nous avons présenté dans la section précédente les différents ingrédients apparaissant dans la description des systèmes élastiques désordonnés. Ces derniers sont le siège d'une compétition entre l'ordre et le désordre provenant respectivement du terme  $\mathcal{H}_{el}$ , qui tend à annuler le champ de déplacement, et du terme  $\mathcal{H}_{des}(u)$  qui tend à distordre la structure afin de la faire passer par un maximum de défauts.

Dans cette partie nous allons traiter le cas d'interfaces d'épaisseur négligeable (par abus de langage nous parlerons également de variétés) et leurs propriétés statiques et dynamiques lorsqu'ils sont soumis à un potentiel désordonné de faible intensité (ne créant pas de dislocation). Le cas des structures périodiques sera traité dans le chapitre 2 en prenant l'exemple des réseaux de vortex comme ligne directrice. Nous nous contenterons d'introduire des notions générales qui seront utiles pour le reste de l'étude. La figure 1.12 rappelle schématiquement la problématique étudiée.

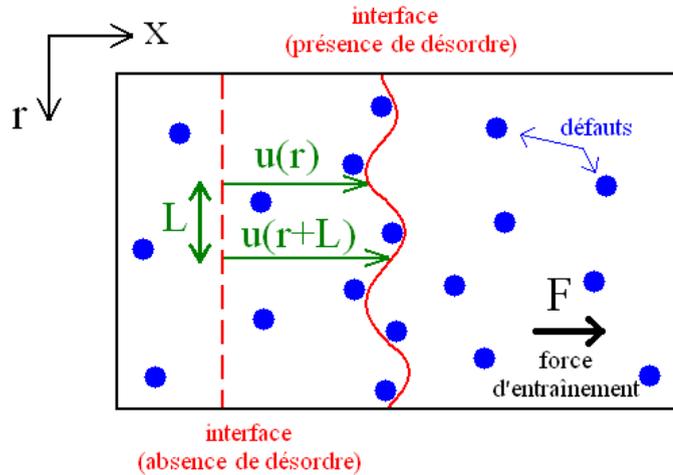


FIGURE 1.12 – Représentation schématique d'une interface (en ligne rouge continue) dans un milieu désordonné (impuretés en bleu) soumise à une force d'entraînement. Nous avons représenté le cas de l'interface en l'absence de désordre (en traits pointillés rouges) afin de mieux visualiser la distorsion de l'interface soumise au potentiel aléatoire.

### 1.4.1 Point de vue statique

#### 1.4.1.1 Les systèmes élastiques désordonnés : des systèmes vitreux

Lorsque l'interface évolue librement, le compromis entre l'énergie élastique et le désordre mène à un état fondamental similaire à celui d'un système vitreux caractérisé par un paysage énergétique développant de nombreux états métastables.

Nous avons représenté sur la figure 1.13 le paysage énergétique d'un système ferromagnétique "classique" et celui d'un système présentant de nombreux états métastables tel qu'on peut le trouver dans les systèmes élastiques désordonnés. Les différents états méta-

stables sont séparés de l'état fondamental par des barrières élevées en énergie. Passer d'un état à un autre, *i.e.* d'une organisation structurale de la variété à une autre, présente un coût énergétique.

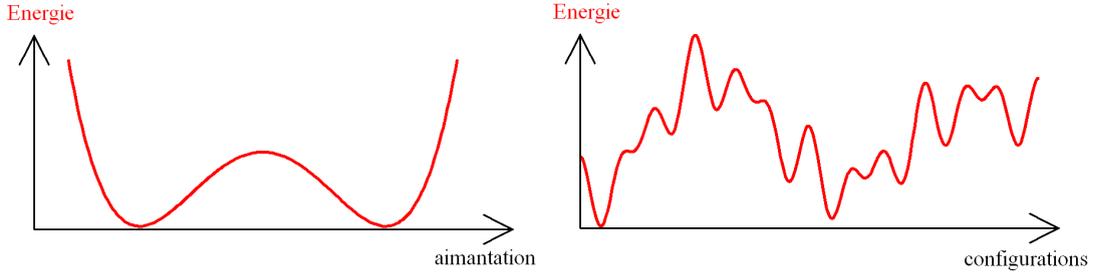


FIGURE 1.13 – Représentation du paysage énergétique pour un système "classique" tel qu'un ferromagnétique (à gauche), et pour un système vitreux (nombreux états métastables) (à droite).

#### 1.4.1.2 Fonction de corrélation des déplacements et rugosité

Les principaux outils analytiques utilisés pour l'étude de ces systèmes sont le Groupe de Renormalisation Fonctionnel *FRG* ou encore la Méthode Variationnelle Gaussienne impliquant l'utilisation de répliques. Pour comprendre le comportement à grande distance d'un système désordonné et pouvoir le comparer au comportement du système pur on utilise la réduction dimensionnelle : le comportement du système désordonné en dimension  $d$  est identique à celui du système pur (sans désordre) en dimension  $d - 2$ . Cette propriété a été prouvée en utilisant une approche supersymétrique dans le cas de systèmes de spins [23].

La réduction dimensionnelle est en réalité inexacte en "basse dimension". En effet lorsque l'on s'intéresse aux variétés plongées dans un potentiel aléatoire à température nulle  $T = 0$ , et que l'on veut caractériser la distorsion du système, on mesure pour ce faire la croissance des déplacements : c'est une quantité facilement accessible d'un point de vue expérimental et qui introduit un exposant de rugosité  $\zeta$  caractérisant la loi d'échelle de la fonction de corrélation des déplacements,

$$B(r) = \overline{\langle [u(r) - u(0)]^2 \rangle} \sim r^{2\zeta} \quad (1.6)$$

où la barre  $\overline{\phantom{x}}$  indique une moyenne sur le désordre et les bra-kets  $\langle \phantom{x} \rangle$  une moyenne thermique.

La réduction dimensionnelle prédit  $\zeta_{naive} = \frac{4-d}{2}$ , ce qui est faux pour les dimensions  $d < 4$  : en dessous de cette dimension critique  $d = 4$ , les perturbations liées au désordre deviennent pertinentes. Ainsi pour  $d > 4$  le système n'est pas contrôlé par le désordre mais plutôt par l'énergie élastique, les arguments de type champ moyen peuvent s'appliquer et la réduction dimensionnelle est valable. Pour être plus précis il existe également

une longueur en dessous de laquelle la réduction dimensionnelle est valide, et pour laquelle les déplacements deviennent de l'ordre de grandeur de la longueur caractéristique du système c'est-à-dire la longueur de corrélation du potentiel aléatoire. Elle porte le nom de longueur de *Larkin*  $L_c$  dans le contexte des réseaux de vortex, de *Fukuyama-Lee* lorsque l'on parle des ondes de densité de charge ou encore longueur de *Imry-Ma* pour les systèmes en champ aléatoire. Au delà de  $L_c$  le système va ressentir le désordre, faisant apparaître de la métastabilité et le comportement de l'interface à grande distance sera alors modifié. Nous déterminerons la longueur  $L_c$  par des arguments d'échelle dans le cadre du modèle de *Larkin* des réseaux de vortex (voir chapitre 2).

Pour résumer la variété est donc plate pour  $d > 4$  (puisque  $\zeta < 0$ ) et présente une rugosité pour  $d \leq 4$  (où l'on a  $\zeta \geq 0$ ). Cette analyse perturbative ne s'applique plus pour des échelles de longueur telles que  $r > L_c$  et ce à cause du paysage énergétique présentant plusieurs minima locaux empêchant la théorie de perturbation de décrire correctement les déplacements à grandes distances.

L'utilisation du Groupe de Renormalisation Fonctionnel (FRG) permet alors de tenir compte de la distribution du désordre dans sa totalité et des effets du désordre à grande échelle. L'étude du flot de renormalisation de façon fonctionnelle autour du point fixe de température nulle, avec un développement autour de  $d = 4$  contrôlé par l'écart  $\epsilon = 4 - d$  à la dimension critique supérieure montre qu'il existe une non analyticité de la distribution  $R(u)$  (plus précisément le corrélateur renormalisé de la force  $\Delta(u) = -R''(u)$ ) possède une singularité en coin dite *cusp*    $u = 0$ ) au delà de la longueur de *Larkin*  $L_c$ , expliquant ainsi pourquoi l'analyse perturbative réalisée par la réduction dimensionnelle est fautive. Cette non analyticité explique le caractère vitreux de tels systèmes. Des études diagrammatiques à 2 boucles ont été réalisées et une valeur de l'exposant de rugosité  $\zeta = 0.20829804\epsilon + 0.0068582\epsilon^2$  (pour le cas du désordre type *random bond*) et  $\zeta = \frac{\epsilon}{3}$  (pour le désordre *random field*)   l'ordre  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  a été trouvée.

Pour plus de détails nous incitons le lecteur à se référer par exemple aux articles [22, 24, 25, 26] et aux références à l'intérieur.

### 1.4.1.3 Détermination expérimentale de la rugosité

Nous avons vu que certaines méthodes permettent de déterminer d'un point de vue analytique la valeur de l'exposant de rugosité dans le cas d'interfaces. Nous présentons maintenant quelques résultats expérimentaux et numériques pour diverses interfaces. Nous traiterons dans un premier temps de l'exemple de la paroi de domaine ferromagnétique et d'une paroi de domaine ferroélectrique comme dans le paragraphe 1.2.1.1, et enfin d'une interface dans un modèle numérique d'Ising avec un désordre du type *random bond*.

La mesure de l'exposant de rugosité est effectuée à partir de la fonction de cor relation des déplacements relatifs, qui dans le cas d'une interface comme présentée schématiquement en 1.12 devient,

$$B(L) = \overline{\langle [u(r+L) - u(r)]^2 \rangle} \quad (1.7)$$

où  $u(r)$  est le champ de déplacement décrivant la déformation de l'interface par rapport à la configuration "plate" sans désordre. Il s'agit donc de prendre deux points séparés par une distance  $L$  et d'observer comment le déplacement  $u$  de l'interface va croître en fonction de cette distance  $L$ .

### Parois de domaines ferromagnétiques

Dans la partie 1.2.1.1 nous traitons le cas d'une paroi de domaine dans un matériau ferromagnétique et nous avons présenté une image obtenue par imagerie magnéto-optique Kerr dans un film ultra-mince bidimensionnel de Pt/Co/Pt (voir la figure 1.2). Dans ce système les dimensions internes et transverses sont respectivement  $d = 1$  et  $N = 1$  impliquant une dimension totale de  $D = 2$ . Nous affichons en figure 1.14 l'évolution typique de la fonction de corrélation des déplacements  $B(L)$  en fonction de  $L$ , et les différentes valeurs de l'exposant de rugosité mesurées. La figure de gauche montre un comportement en loi de puissance de la fonction  $B(L)$  qui est bien observé sur plusieurs décades, en omettant les grandes valeurs de  $L$  pour lesquelles un artefact lié au régime de taille finie est détecté. Des valeurs de l'exposant de rugosité  $2\zeta$  extraites il a été estimé une valeur moyenne de  $\zeta = 0.69 \pm 0.07$  qui est proche de la valeur théorique  $\zeta = \frac{2}{3}$  [27] (calculée pour un désordre de type *random bond* dans le cas d'une ligne) et de la valeur  $\zeta = 0.687$  obtenue dans les calculs à deux boucles de la FRG. Pour plus de détails sur cette expérience, voir l'article [1].

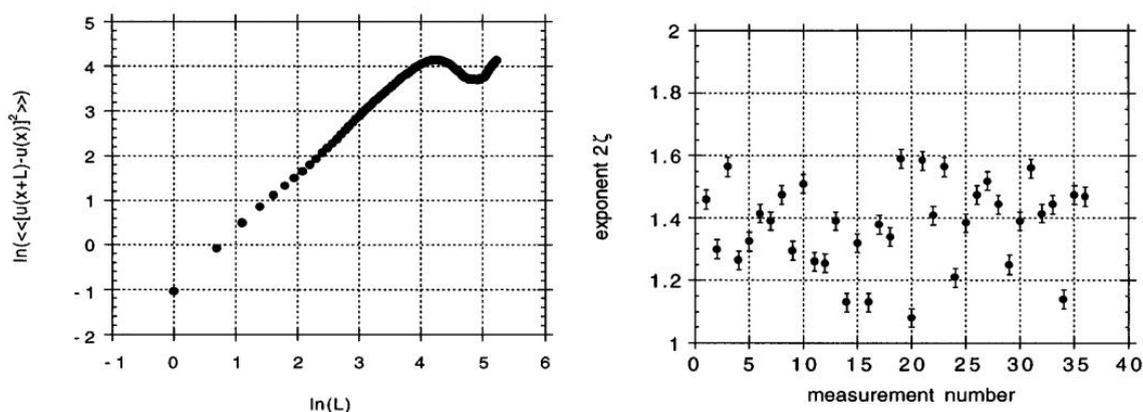


FIGURE 1.14 – Image de gauche : Fonction de corrélation des déplacements relatifs  $B(L)$  en fonction de  $L$  en échelle logarithmique (l'unité de  $L$  est de  $0.28\mu m$ , soit la taille du pixel de la caméra CCD). Image de droite : Exposant de rugosité  $2\zeta$  pour différentes parois de domaines. Les images sont issues de [1].

### Parois de domaines ferroélectriques

En ce qui concerne les parois de domaines dans les ferroélectriques, nous avons présenté dans la section 1.2.1.1 une image obtenue par microscopie de domaines ferroélectriques dans une couche mince de PZT. Dans une autre étude sur ces systèmes [4], il a été montré que la fonction de corrélation des déplacements avait un comportement en loi de puissance pour les petites valeurs de  $L$ , comme le montre la figure 1.15a. De cette observable a été extraite une valeur moyenne de l'exposant de rugosité  $\zeta \sim 0.26$  (visible sur la figure 1.15b). Cette valeur est en accord avec la valeur attendue pour une interface de dimension  $d = 2$  plongée dans un espace de dimension  $D = 3$  avec un désordre *random bond* et des interactions dipolaires à longue portée. Pour plus d'informations voir la référence [4].

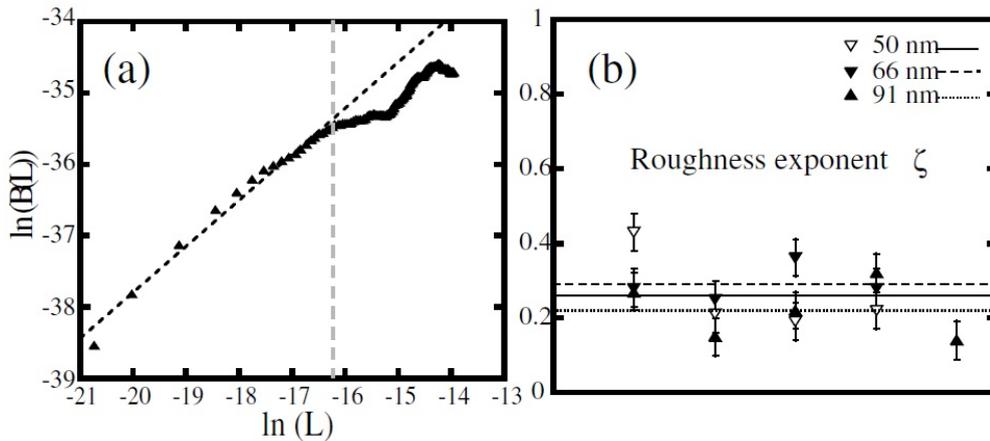


FIGURE 1.15 – a) Fonction de corrélation des déplacements  $B(L)$  versus  $L$  en échelle log-log. b) Exposant de rugosité  $\zeta$ , les lignes horizontales indiquent la valeur moyenne de  $\zeta$  pour différentes épaisseurs d'échantillon. Les images sont issues de [4].

### Interface dans un modèle d'Ising *random bond*

Dans cette partie nous discutons très brièvement du cas d'une interface dans un modèle d'Ising présentant un désordre de type *random bond*. Un tel modèle est utile pour décrire des ferromagnétiques présentant une variation aléatoire dans l'intensité de couplage (provenant du désordre spatial), l'interface sépare alors des régions de spin *up* et de spin *down*. Cette dernière a une dimension interne  $d$  et elle est plongée dans un espace total de dimension  $d + 1$ . Il a été montré numériquement [28] que la valeur de l'exposant de rugosité est  $\zeta = 0.41 \pm 0.01$  pour  $d = 2$  et  $\zeta = 0.22 \pm 0.01$  pour  $d = 3$ . On remarque que ces valeurs sont cohérentes avec celles déterminées analytiquement par les calculs à deux boucles de la FRG (rappelons que  $\zeta = 0.20829804\epsilon + 0.0068582\epsilon^2$ , avec  $\epsilon = 4 - d$ ).

#### 1.4.2 Dynamique et dépiégeage

Après avoir présenté les propriétés statiques des interfaces, nous nous intéressons maintenant à leurs propriétés dynamiques lorsqu'on les met en mouvement. La compréhension et le contrôle de leur dynamique est en effet d'un fort intérêt technologique. Nous allons

donc dans un premier temps décrire la dynamique de ces systèmes qui montre notamment l'existence d'un dépiégeage, puis nous aborderons la réponse du système à une petite force lorsque la température est non nulle (c'est le régime du creep ou bien de la réptation lente une fois francisé). Nous nous intéressons exclusivement à la dynamique en régime permanent, plus largement étudiée. Pour une approche des régimes transitoires dans ces systèmes, nous renvoyons le lecteur aux références [29, 30, 31, 32, 33].

### 1.4.2.1 Point de vue dynamique

Lorsque l'on met en mouvement l'interface à l'aide d'une force d'entraînement uniforme, une observable directement mesurable est la vitesse  $v$  de l'interface, conduisant à la caractéristique vitesse-force  $v(F)$  du système. La courbe typique obtenue est représentée schématiquement sur la figure 1.16 : à température nulle le système reste piégé (*i.e.*  $v = 0$ ) jusqu'à une *force critique*  $F_c$  au-delà de laquelle le système se met en mouvement. A température finie et pour  $F < F_c$  la vitesse n'est plus nulle étant donné que les fluctuations thermiques fournissent suffisamment d'énergie pour passer les barrières d'énergie locales. En traits pointillés noirs est représenté la vitesse attendue en absence de désordre (la structure élastique glisse simplement quelque soit la force extérieure  $F$  appliquée).

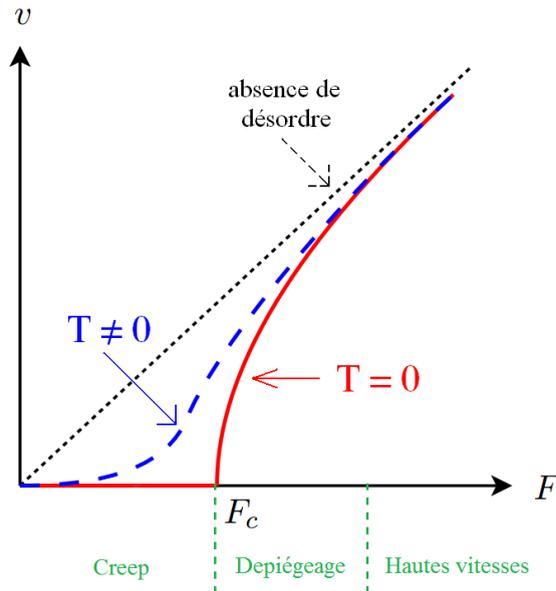


FIGURE 1.16 – Courbe schématique de la caractéristique vitesse-force d'un système élastique désordonné. La vitesse  $v$  représente la vitesse moyenne de la structure élastique alors que  $F$  correspond à la force extérieure uniforme exercée sur la structure. La valeur  $F_c$  est la *force critique* à partir de laquelle le système subit un dépiégeage.

Pour décrire analytiquement la dynamique de ces systèmes on étudie l'évolution temporelle de  $u(r, t)$ , le champ de déplacement qui dépend maintenant du temps. On choisit en général une dynamique sur-amortie pour étudier ces comportements aux temps longs, c'est-à-dire

$$\eta \frac{du(r, t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}(u)}{\partial u} + F + F^{th}(r, t) \quad (1.8)$$

où  $\mathcal{H}(u) = \mathcal{H}_{cl}(u) + \mathcal{H}_{des}(u)$  est l'Hamiltonien du système décrivant la contribution élastique et celle du désordre que nous avons vues précédemment (voir équation (1.5)),  $F$  est la force d'entraînement uniforme et  $F^{th}(r, t)$  est une force de Langevin décrivant le couplage du système avec un bain thermique et s'exprimant comme un bruit blanc gaussien de moyenne nulle  $\langle F^{th}(r, t) \rangle = 0$  et avec les corrélations suivantes,

$$\langle F^{th}(r, t) F^{th}(r', t') \rangle = 2\eta T \delta(r - r') \delta(t - t') \quad (1.9)$$

Le terme de gauche de l'égalité (1.8) traduit une dissipation d'énergie que nous décrivons phénoménologiquement par l'introduction d'un frottement de coefficient  $\eta$ .

La résolution de cette équation différentielle permet de décrire le comportement et les propriétés dynamiques du système. Le caractère aléatoire du désordre  $\mathcal{H}_{des}(u)$  rend la dynamique très riche et très compliquée. Les outils standards de la physique statistique ne peuvent être utilisés avec succès pour résoudre cette équation et c'est alors que les expériences et les simulations numériques deviennent pertinentes.

### 1.4.2.2 Une histoire de dépiégeage

Comme nous l'avons vu plus haut à température nulle, le système reste immobile jusqu'à une force critique  $F_c$  pour laquelle le système se met en mouvement et atteint un régime stationnaire caractérisé par une vitesse moyenne  $v$ . Le passage de cet état piégé à un état en mouvement se nomme *transition de dépiégeage*. Pour  $F \gtrsim F_c$ , bien que nous soyons hors équilibre, nous sommes tentés de considérer cette transition de dépiégeage comme un phénomène critique standard où la vitesse  $v$  joue le rôle du paramètre d'ordre et  $F$  représente le paramètre de contrôle. Cela amène alors un nouveau lot de questions : comment obtenir  $F_c$ , quel est l'ordre de cette transition de phase (premier ordre avec discontinuité ou second ordre continue), quels sont les exposants caractérisant la transition si cette dernière est du second ordre et présente-t-elle un comportement critique universel comme pour les transitions de phase continues à l'équilibre, etc ... ?

Une bonne estimation de la valeur de  $F_c$  peut être réalisée simplement à partir d'arguments d'échelle comme l'ont fait *Larkin* et *Ovchinnikov* [34], par d'autres méthodes comme par exemple l'utilisation de la FRG [35], ou encore via des simulations numériques. Puisque c'est à partir de la longueur de *Larkin*  $L_c$  que le piégeage apparaît dans le système, pour estimer la valeur de  $F_c$  il suffit d'égaliser l'énergie fournie par la force extérieure

$$\mathcal{H}_{ext}(u) = \int d^d r F_{ext} u(r) \quad (1.10)$$

à l'énergie du système  $\mathcal{H}(u)$  à cette échelle de longueur, et on trouve ainsi

$$F_c = \frac{c r_f}{L_c^2} \quad (1.11)$$

où  $c$  est la constante élastique et  $r_f$  la longueur de corrélation du potentiel aléatoire.

Nous reviendrons plus en détail sur les propriétés au voisinage de la transition de dépiégeage dans les chapitres 2 et 4 où nous traiterons spécifiquement les réseaux de vortex.

### 1.4.2.3 Régime de creep

Lorsque l'on se trouve sur la partie à basse force *i.e.* en dessous de  $F_c$  sur la courbe 1.16, nous avons vu qu'à température nulle le système restait piégé dans un minimum local du paysage énergétique. Cependant la présence d'une température finie fournit au système une énergie supplémentaire qui permet à la structure de se mettre en mouvement par activation thermique, et ce alors que la force n'est pas suffisante pour dépasser les barrières de piégeage. Cette activation thermique va permettre au système d'explorer le paysage énergétique et de sonder les barrières d'énergie.

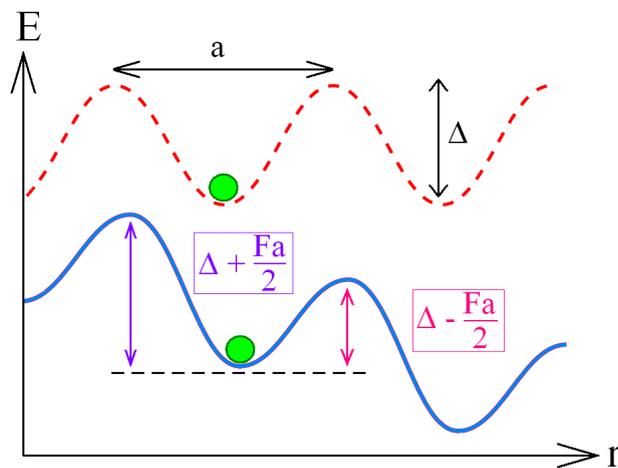


FIGURE 1.17 – Représentation du phénomène de creep : une interface modélisée par une particule (cercle plein) se déplaçant par activation thermique dans le paysage énergétique incliné (en trait continu) par la présence de la force extérieure  $F$ . En traits pointillés est représenté le potentiel périodique en absence de la force extérieure, avec ses caractéristiques  $(a, \Delta)$  correspondant respectivement à sa période et à la hauteur de ses barrières.

Il a été pensé initialement dans les années 1960 par *Anderson* et *Kim* pour expliquer le transport dans les supraconducteurs, que la réponse du système à de petites forces subcritiques devait être linéaire [36], c'est le régime TAFF (*Thermally Assisted Flux Flow*). En effet en supposant le potentiel périodique de période  $a$  et constitué de barrières de hauteur  $\Delta$ , alors l'interface se déplace dans un paysage énergétique incliné par la force extérieure comme on peut le voir sur la figure 1.17, permettant un mouvement vers la

droite de l'interface (les barrières vues par le système vers la droite  $\Delta - \frac{Fa}{2}$  sont plus petites que celles vues vers la gauche  $\Delta + \frac{Fa}{2}$ ). Ainsi pour des petites forces telles que  $\beta Fa \ll 1$ , les barrières sont franchies avec une loi de type Arrhenius,

$$v \propto e^{-\beta(\Delta - \frac{Fa}{2})} - e^{-\beta(\Delta + \frac{Fa}{2})} \propto e^{-\beta\Delta} \beta Fa \quad (1.12)$$

avec  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ . On observe donc une réponse linéaire exponentiellement petite du système lorsqu'on lui applique une faible force extérieure  $F$  pour  $T \neq 0$ .

Bien qu'esthétique et relativement simple, cet argument admis pendant environ 40 ans ne se vérifie pas pour des systèmes élastiques désordonnés étant donné leur caractère vitreux. Un système vitreux ne possède pas de barrière typique indépendante de la force comme proposé dans la situation précédente, bien au contraire, les barrières divergent entre les états métastables. Il faut alors prendre en compte la façon dont la transition entre les états métastables s'effectue. Nous donnons ici une détermination phénoménologique, cependant cette dernière a été vérifiée par une analyse avec le FRG [35] et a permis également de montrer la propagation d'avalanches dans ce régime.

Le comportement de  $B(r) \sim r^{2\zeta}$  suggère que les déplacements suivent la loi  $u(L) \sim L^\zeta$ , alors grâce à une description statique nous pouvons déterminer le comportement de l'énergie des états métastables (en utilisant  $\mathcal{H}_{el}$  vu en équation (1.1)) comme étant

$$E(L) \sim L^{d-2+2\zeta} \quad (1.13)$$

quant à l'énergie gagnée par la force extérieure (1.10), en supposant le mouvement de l'interface comme étant suffisamment lent pour que la description statique tienne toujours, elle donne

$$E_{F_{ext}}(L) \sim FL^{d+\zeta} \quad (1.14)$$

Ainsi lorsque la force extérieure décroît, la longueur minimale d'interface devant se déplacer jusqu'au prochain état métastable croît avec la dépendance :

$$L_{\text{minimal}} \sim \left(\frac{1}{F}\right)^{\frac{1}{2-\zeta}} \quad (1.15)$$

On suppose que les barrières d'énergie qui doivent être passées pour atteindre l'état métastable suivant suivent le même comportement que l'équation (1.13). Ainsi le fait que  $L_{\text{minimal}}$  augmente lorsque la force extérieure diminue signifie que la barrière minimale à dépasser diverge au fur et à mesure que la force devient de plus en plus petite,

$$\Delta(F) \sim \left(\frac{1}{F}\right)^{\frac{d-2+2\zeta}{2-\zeta}} \quad (1.16)$$

En utilisant cette valeur réévaluée de  $\Delta(F)$  nous avons la réponse du système vitreux à de petites forces,

$$v \propto e^{-\beta U_c (\frac{F_c}{F})^\mu} \quad \text{où} \quad \mu = \frac{d-2+2\zeta}{2-\zeta} \quad (1.17)$$

avec  $U_c$  une échelle caractéristique des barrières d'énergie au niveau de la longueur de *Larkin*. Cette réponse hautement non linéaire indique un comportement vitreux et se nomme *creep*. Il fait intervenir l'exposant de rugosité  $\zeta$  et la dimension interne du système, qui sont des quantités statiques.

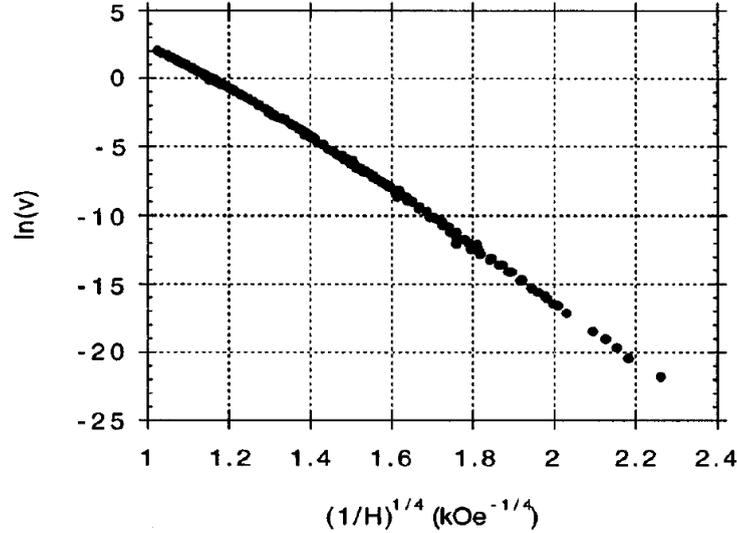


FIGURE 1.18 – Tracé de  $\ln(v)$  en fonction de  $(1/H)^{1/4}$  pour la paroi de domaine ferromagnétique de [1]. Pour  $(1/H)^{1/4} > 1.6$  le champ (équivalent à la force extérieure) est suffisamment faible pour que le système soit dans le régime *creep* et permet de vérifier un comportement linéaire avec la valeur de  $\mu = 0.25$  et ce pour dix ordres de grandeur pour la vitesse.

Cette vitesse a donc été trouvée phénoménologiquement et vérifiée également par des calculs plus théoriques, mais qu'en est-il d'un point de vue expérimental ? Des études dans plusieurs systèmes élastiques désordonnés ont permis de vérifier ce type de comportement, par exemple dans le verre de *Bragg* pour les réseau de vortex et pour les parois de domaines magnétiques et ferroélectriques. Nous présentons sur la figure 1.18 des résultats sur une paroi de domaine magnétique [1] vue précédemment, et montrant une cohérence entre la valeur attendue et la valeur mesurée sur plusieurs ordres de grandeur. Rappelons juste que pour le désordre de type *random bond* dans ce cas avec  $d = 1$  on s'attend à  $\mu = 0.25$ .



## Chapitre 2

# ... et les réseaux de vortex dans les supraconducteurs en particulier

« *Researchers in Fairbanks Alaska announced last week that they have discovered a superconductor which will operate at room temperature.* »

PHYSICS JOKES

### 2.1 Introduction

Au sein de ce chapitre nous allons discuter de la supraconductivité qui est une découverte marquante du début du XXème siècle et qui continue de tracasser les chercheurs du monde entier tant il reste à découvrir et à comprendre à son sujet. Nous aborderons une approche du phénomène de la supraconductivité plus phénoménologique que théorique préférant présenter les grandes idées qui nous seront utiles pour la suite de notre étude. Pour ce faire notre approche sera la suivante : dans un premier temps nous rappellerons comment la supraconductivité a été découverte, son intérêt et ses applications dans la vie de tous les jours au travers d'exemples, nous décrirons également le phénomène supraconducteur en présentant brièvement les théories macroscopiques et microscopiques ; puis nous terminerons en traitant les réseaux de vortex comme un système élastique désordonné pour faire apparaître leurs propriétés statiques et dynamiques.

### 2.2 Supraconductivité

#### 2.2.1 Historique

Nous commençons par effectuer un rappel historique de la supraconductivité. Alors que la liquéfaction de différents gazs en vue d'obtenir une température proche du zéro absolu avait été réalisée avec succès (l'air avec une température  $T \approx 90K$  en 1877 par *P. L. Cailletet* mais également *R. Pictet*, l'azote avec  $T \approx 77K$  en 1883 par *C. Olszewski* et *S. Wroblewski*, l'hydrogène avec  $T \approx 20K$  en 1898 par *J. Dewar*), le cas de l'hélium semblait impossible suite à l'échec de *J. Dewar* en 1901. Il a fallu attendre l'année 1908 pour

## 2.2. SUPRACONDUCTIVITÉ

qu'une équipe de recherche menée par *H. K. Onnes* réussisse à obtenir 60 centimètres cube d'hélium liquide, grâce à son installation au Laboratoire de Leyde au Pays Bas, permettant de ce fait d'atteindre des températures inférieures à  $T = 4.2K$  jamais atteintes auparavant.

*Onnes* était le seul à posséder des quantités suffisantes d'hélium pour le liquéfier et put ainsi s'atteler sans concurrence à porter ses recherches sur la résistivité électrique des matériaux à basses températures  $\rho(T)$ . Plusieurs hypothèses avaient été proposées durant le XIXème siècle comme on peut le voir sur la figure 2.1 de gauche : la prédiction de *Lord Kelvin* (théorie A sur le graphique) selon laquelle la résistivité devait passer par un minimum puis augmenter à basses températures, celle de *Matthiesen* (théorie B) proposant une saturation de la résistivité lorsque la température tend vers 0 à cause des impuretés, ou bien celle de *Dewar* (théorie C) supposant une simple diminution de la résistivité avec la température et telle que  $\rho(0) = 0$  (sans jamais pouvoir atteindre une résistivité nulle de par l'impossibilité technique d'atteindre le zéro absolu). Afin de tester expérimentalement ces hypothèses, le choix du matériau d'*Onnes* se porta sur le mercure qui est liquide à température ambiante et donc facile à distiller et à purifier. En 1911 *Gilles Holst*, étudiant d'*Onnes*, effectue des mesures de résistivité sur des fils de mercure solides dans l'hélium liquide et observe une chute brutale vers zéro de la résistivité en dessous d'une température dite critique  $T_c \approx 4K$  (voir figure 2.1 de droite) : c'est la première découverte de la supraconductivité. Bien que ces résultats soient surprenants, d'autres mesures identiques sur le plomb et l'étain (pour des températures respectivement en dessous de  $7.2K$  et  $3.7K$ ) les années suivantes confirmèrent un fait réel et tangible.

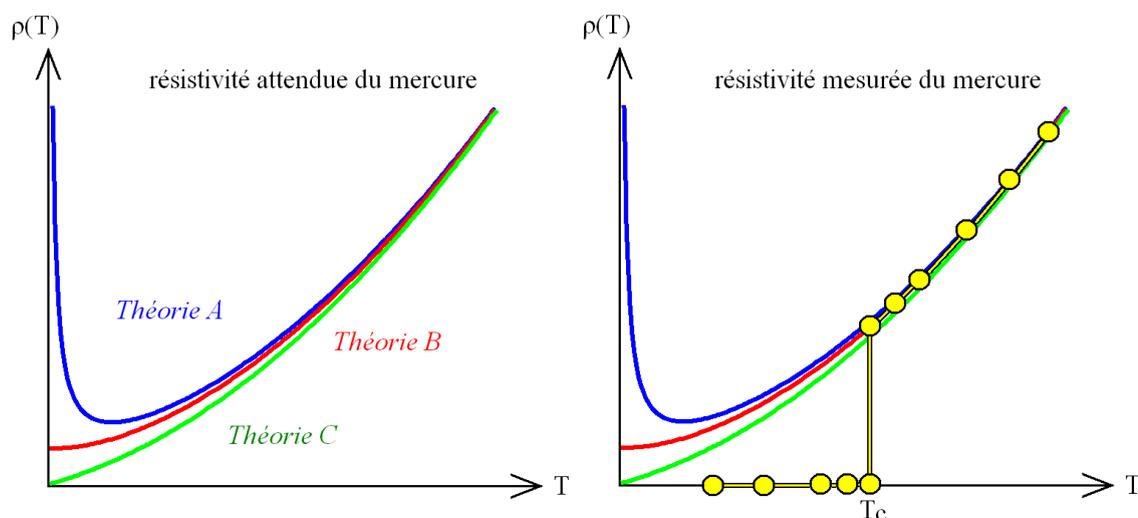


FIGURE 2.1 – Image de gauche : Différentes prédictions théoriques du XIXème siècle quant à la résistivité électrique attendue des matériaux avec la température  $\rho(T)$ . Image de droite : Mesures de la résistivité du mercure *Hg* en fonction de la température  $T$  (en cercles pleins) : une chute brutale à zéro est observée en dessous d'une température critique  $T_c$ .

En réalité beaucoup de matériaux peuvent être supraconducteurs. Nous avons cité le cas

## 2.2. SUPRACONDUCTIVITÉ

de corps purs tels que le mercure, l'étain et le plomb mais presque la moitié des éléments de base de la classification périodique peuvent devenir supraconducteurs pour de très faibles températures, voire même sous certaines conditions de pression pour quelques uns. Leurs températures critiques sont généralement inférieures à  $T_c < 9K$ . Plusieurs milliers d'alliages peuvent devenir supraconducteurs (citons par exemple le  $NbTi$  qui peut intervenir dans les IRM) avec en général une température critique  $T_c < 30K$  et ce alors que pris séparément les différents éléments ne sont pas forcément supraconducteurs, impliquant de ce fait un phénomène qui n'est pas d'origine atomique. Grâce à la théorie *BCS*, dont nous reparlerons un peu plus tard, la communauté scientifique avait réussi à comprendre l'origine de la supraconductivité dans les composés "simples" et supposait que la température critique d'un matériau supraconducteur ne pouvait pas dépasser les  $30K$ . Cependant une céramique supraconductrice de  $LaBaCuO$  a été découverte par *J. G. Bednorz* et *K. A. Müller* en 1986 avec une  $T_c = 35K$ , contredisant la valeur limite imposée par la théorie *BCS*. Très peu de temps après de nombreux autres composés à base de cuivre, appelés cuprates, ont été découverts avec des  $T_c$  beaucoup plus élevées, c'est le cas par exemple de  $YBaCuO$  avec  $T_c = 92K$  ou encore  $HgTlBaCaCuO$  avec  $T_c = 138K$ . Nous avons représenté sur la figure 2.2 l'évolution dans le temps de la  $T_c$  pour différents matériaux découverts au cours du XXème siècle.

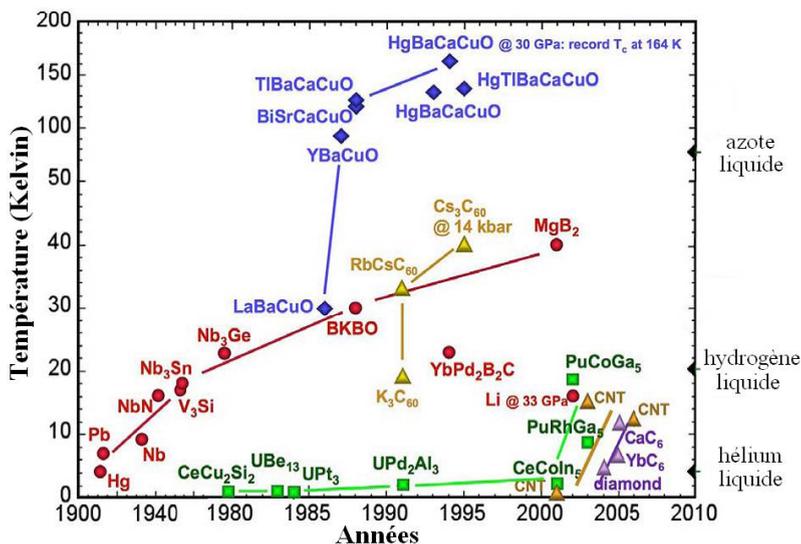


FIGURE 2.2 – Evolution de la température critique  $T_c$  de différents matériaux supraconducteurs au cours du siècle dernier.

Cette découverte de l' $YBaCuO$  a été très importante puisque c'était le premier composé permettant de dépasser la température de liquéfaction de l'azote. Cela représente un grand avantage technique pour la réalisation de matériaux supraconducteurs de par le plus faible coût et la plus grande facilité d'obtenir de l'azote liquide plutôt que de l'hélium liquide. Ces découvertes d'oxydes supraconducteurs à *hautes températures critiques*, ou *SHTC*, ont ouvert la voie à une étude de plus en plus détaillée de la supraconductivité dans ces nouveaux matériaux pour en comprendre les mécanismes. Notons qu'il existe également des composés supraconducteurs plus exotiques comme les

## 2.2. SUPRACONDUCTIVITÉ

---

supraconducteurs organiques, les fullerènes ou encore un composé de  $MgB_2$  découvert récemment avec une  $T_c = 40K$  et qui n'est pourtant pas un oxyde.

### 2.2.2 Généralités

#### 2.2.2.1 Propriétés

Plusieurs effets sont reliés plus ou moins directement à la supraconductivité, parmi ceux là nous pouvons citer les deux plus connus qui sont une résistivité nulle ou encore un phénomène de lévitation lié à l'*effet Meissner* en dessous d'une certaine température critique  $T_c$ .

Les électrons sont des particules quantiques pouvant être décrites à la fois comme des corpuscules et comme des ondes. Dans un métal les électrons libres permettant l'apparition du courant sont donc des ondes dont la forme s'adapte au réseau d'atomes. L'apparition d'une résistance provient des défauts dans la régularité du réseau d'atomes (lacunes, impuretés etc ...) mais également de l'agitation thermique qui va faire vibrer les atomes et qui perturbent l'électron en le "freinant". Dans un supraconducteur alors que la vibration des atomes et les défauts existent toujours on observe néanmoins une annulation totale de la résistivité en dessous de  $T_c$ . Cela s'explique par le fait que les électrons s'associent par paires et forment ainsi une onde quantique collective, la paire de Cooper, qui n'est plus sensible aux défauts du matériau : les électrons n'étant plus freinés la résistance s'annule alors.

Quant à la lévitation, une expérience classique permettant de l'observer peut être réalisée comme suit : prenons un aimant que l'on pose sur un supraconducteur de forme concave (en forme de bol) à température ambiante, rien d'extraordinaire ne se passe *i.e.* l'aimant reste à l'endroit où il a été posé. Refroidissons maintenant le supraconducteur à une température  $T < T_c$  nous allons alors voir l'aimant léviter au dessus du supraconducteur, c'est l'effet Meissner. En réalité des boucles de courants électriques apparaissent à la surface du matériau (appelés supercourants), du fait de l'état supraconducteur ces courants vont pouvoir exister indéfiniment sans perte d'énergie, et ces derniers vont donc générer un champ magnétique. Ces boucles sont réparties de façon à compenser exactement le champ magnétique intérieur du matériau. Ainsi le champ magnétique dans le volume du matériau supraconducteur est nul (un supraconducteur est donc un diamagnétique "parfait") et le champ magnétique créé par les supercourants va exercer une force sur l'aimant. Cette force va repousser l'aimant et le faire léviter à une distance qui va être celle pour laquelle il y a un équilibre entre le poids de l'aimant et la force de répulsion.

#### 2.2.2.2 Différents types de supraconducteurs

Nous avons vu qu'il existait une limite en température pour l'existence de l'état supraconducteur, cependant il existe également deux autres facteurs limitants : le courant critique  $I_c$  et le champ magnétique  $H_c$  appliqués au matériau. Un courant imposé avec une valeur  $I > I_c$  détruit la supraconductivité et l'échantillon présente alors une résistivité non nulle, nous en reparlerons un peu plus tard. Pour ce qui est du champ magnétique cri-

## 2.2. SUPRACONDUCTIVITÉ

tique, il existe deux possibilités pour les matériaux supraconducteurs. Nous classons alors les supraconducteurs en deux types en fonction de leur réponse à un champ magnétique extérieur : ceux de type I et ceux de type II.

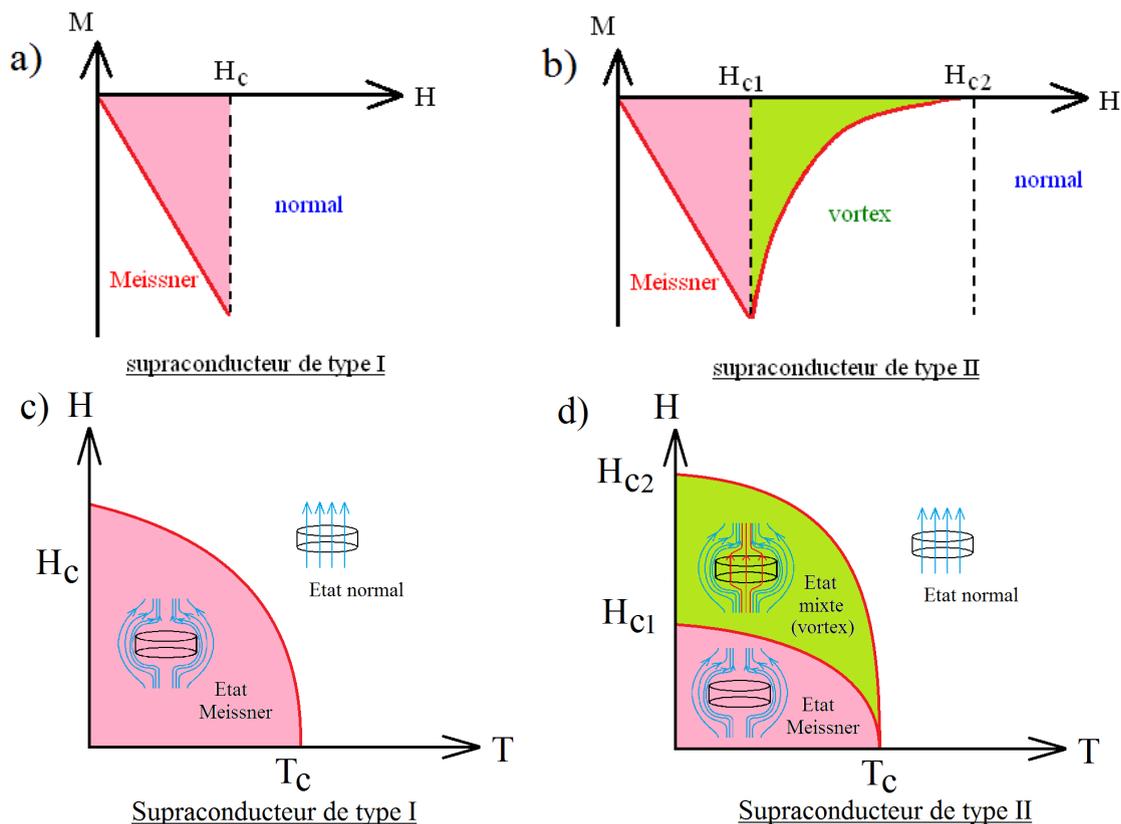


FIGURE 2.3 – Tracé de l'aimantation  $M$  en fonction de l'excitation magnétique  $H$  pour la supraconductivité de type I (figure a) et II (figure b). Nous avons indiqué dans quel état se trouve le matériau dans chaque zone. Diagramme de phase  $H - T$  caractérisant les transitions entre état supraconducteur/mixte/normal pour les supraconducteurs de type I (figure c) et II (figure d). Nous avons également représenté le profil des lignes de champ magnétique autour d'une pastille supraconductrice dans chaque zone.

Nous avons tracé sur les schémas 2.3)a et 2.3)b l'aimantation  $M$  en fonction de l'excitation magnétique  $H$  pour les supraconducteurs de type I et ceux de type II, rappelons que la formule reliant le champ magnétique  $B$  à l'excitation magnétique  $H$  est donnée par  $\vec{B} = \mu(\vec{H} + \vec{M})$ .

Ainsi un supraconducteur de type I est caractérisé par un état Meissner pour des valeurs de  $H < H_c$  avec un comportement linéaire entre  $M$  et  $H$ , et une pente donnée par la susceptibilité  $\chi = -1$  conduisant à un champ magnétique  $B$  nul au sein du volume de l'échantillon. Lorsque  $H > H_c$  le matériau devient un conducteur normal et l'aimantation est nulle (ou du moins tellement faible qu'on peut la considérer comme quasi-nulle par rapport à sa valeur dans la phase Meissner).

Lorsque le supraconducteur est de type II, il existe toujours un état Meissner et un

## 2.2. SUPRACONDUCTIVITÉ

---

état normal, mais ces deux états sont séparés par une nouvelle phase appelée état mixte ou phase de *Shubnikov* qui s'étend de  $H_{c1}$  à  $H_{c2}$  (avec généralement  $H_{c1} < H_c < H_{c2}$ ), et dans laquelle le flux magnétique commence à pénétrer au sein de l'échantillon sous la forme de tubes de flux appelés vortex. Ces vortex portent un quantum de flux magnétique  $\Phi_0 = h/2e = 2.07 \cdot 10^{-15} \text{ Tm}^2$  et traversent le matériau de part en part, l'échantillon est dans un état normal à l'intérieur de ces vortex. Des supercourants sont créés autour des vortex et empêchent le champ magnétique de détruire l'état supraconducteur impliquant la coexistence de phases normales (les vortex) et de phases supraconductrices (voir la figure 2.4 pour une représentation d'un échantillon en état mixte). La densité de ces vortex augmente avec l'excitation magnétique  $H$  impliquant ainsi une diminution progressive de  $|M|$  jusqu'à atteindre une valeur nulle pour  $H_{c2}$ . Dans cet état mixte les propriétés supraconductrices continuent d'exister jusqu'à ce que  $H > H_{c2}$ , suite à quoi le matériau redevient un conducteur normal.

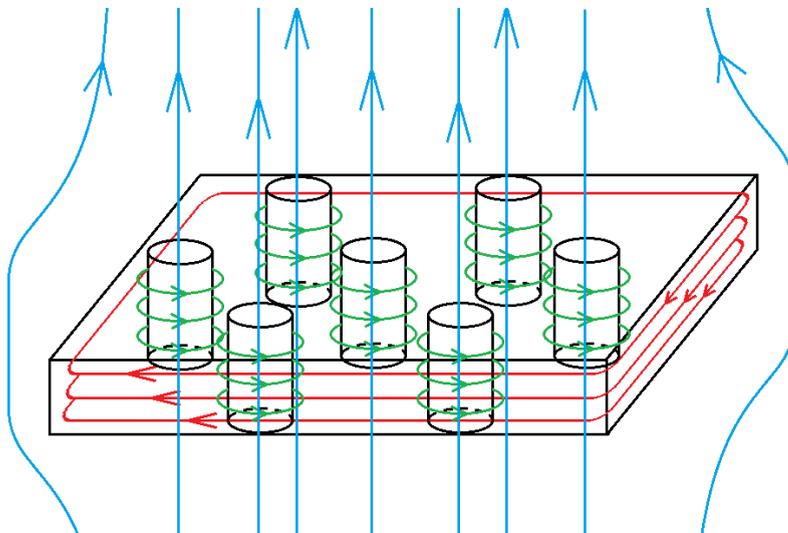


FIGURE 2.4 – Représentation d'un échantillon supraconducteur en état mixte : les lignes de champ magnétique pénètrent le matériau sous la forme de vortex et sont entourés de supercourants qui écrantent le champ magnétique afin de garder l'échantillon dans l'état mixte. A la surface du matériau des supercourants se développent également et sont responsables de l'effet Meissner.

Notons que pour effectuer une approche qualitative du phénomène supraconducteur nous avons omis quelques détails :

- La valeur du champ critique  $H_c$  dépend en réalité de la température : à température nulle sa valeur est maximale,
- Nous nous sommes concentrés sur le cas du matériau massif dans ces explications et nous n'avons pas précisé les effets de supraconductivité de surface qui peuvent exister jusqu'à une valeur de champ  $H_{c3} > H_{c2}$ ,
- La phase Meissner que l'on caractérise en règle générale comme étant un état pour lequel le diamagnétisme est "parfait" n'est pas totalement exact : comme précisé

## 2.2. SUPRACONDUCTIVITÉ

---

précédemment le champ magnétique pénètre sur une certaine épaisseur  $\lambda_L$  à la surface du matériau sur laquelle se développent les supercourants d'écrantage, nous en reparlerons plus en détail par la suite ( $\lambda_L$  est de l'ordre de la centaine d'angströms).

La lévitation est en fait souvent réalisée à l'aide de supraconducteurs de type II. Dans la phase mixte les vortex sont piégés par les défauts du matériau, ce qui rend stable la position de lévitation de l'aimant au dessus du supraconducteur. En règle générale les corps purs sont de type I alors que les alliages ou les oxydes supraconducteurs sont de type II. Les supraconducteurs de type I possèdent des valeurs de champs critiques trop faibles pour des applications industrielles, de l'ordre de  $80mT$  pour le plomb pur par exemple alors qu'à titre de comparaison un petit aimant de  $NdFeB$  (néodyme-fer-bore) de la taille d'une pièce peut créer un champ magnétique de l'ordre de  $1.3T$  (pour fixer les idées, rappelons que le champ magnétique terrestre est de l'ordre de  $0.5G = 5.10^{-5}T$ ). La phase mixte des supraconducteurs de type II est en revanche très étendue puisque  $H_{c1} \approx 0.01 T$  et  $H_{c2} \approx 100 T$  pour  $YBaCuO$  par exemple. Elle ouvre ainsi la voie aux applications puisque les propriétés supraconductrices sont maintenues dans cette phase mixte.

### 2.2.3 Théories de la supraconductivité - Réseau d'Abrikosov

Dans cette partie nous présenterons les différentes approches théoriques de la supraconductivité : nous commencerons par une première description macroscopique des frères *London*, nous parlerons ensuite de la théorie phénoménologique de Ginzbug-Landau, puis nous en profiterons pour décrire plus en détail les vortex et le réseau d'Abrikosov qui en découle et enfin nous terminerons en évoquant brièvement la description microscopique des supraconducteurs conventionnels (théorie BCS).

#### 2.2.3.1 Description macroscopique - Equations de London

La première théorie phénoménologique du comportement électromagnétique des supraconducteurs a été formulée par les frères *F.* et *H. London* en 1935 [37].

Supposons un conducteur parfait où la résistivité est nulle. En posant  $n_s$  le nombre d'électrons dans ce conducteur parfait se déplaçant avec une vitesse  $\vec{v}_s$ , et en se souvenant que le courant est défini par  $\vec{j}_s = n_s q \vec{v}_s$  avec  $q$  la charge électrique des électrons, alors la loi fondamentale de la dynamique donne la relation suivante appelée première équation de *London*

$$\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} = \frac{n_s q^2}{m} \vec{E} \quad (2.1)$$

où  $m$  est la masse des électrons et  $\vec{E}$  le champ électrique. De plus si l'on applique les lois fondamentales de l'électromagnétisme stipulées par les équations de *Maxwell* à ce conducteur, nous arrivons à la conclusion qu'un conducteur parfait s'oppose à toute variation de champ magnétique en son sein. Cela se traduit par l'équation suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \vec{B} - \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}) = \vec{0} \quad (2.2)$$

## 2.2. SUPRACONDUCTIVITÉ

avec  $\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s q^2}}$  ( $\mu_0$  étant la perméabilité du vide) l'épaisseur du matériau sur laquelle la variation va avoir lieu et qui sert de zone d'adaptation du matériau.

Or lorsque l'on effectue des mesures sur des supraconducteurs, on se rend compte que le champ magnétique  $\vec{B}$  est toujours nul à l'intérieur du supraconducteur. On voit qu'il manque alors quelque chose au modèle du conducteur parfait pour décrire le supraconducteur et donc l'effet *Meissner*. L'approche phénoménologique des frères *London* a été de choisir une solution particulière de l'équation (2.2) compatible avec les observations expérimentales, c'est-à-dire qu'ils ont supposé que cette équation ne s'appliquait pas seulement à la variation de  $\vec{B}$  mais au champ magnétique  $\vec{B}$  lui-même. Elle est appelée deuxième équation de *London*

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B} = \vec{0} \quad (2.3)$$

La conséquence de cette équation sur le champ magnétique dans le matériau est relativement simple : au niveau de la surface d'un supraconducteur, le champ magnétique pénètre dans le matériau tout en étant atténué exponentiellement sur une épaisseur caractéristique appelée longueur de *London*  $\lambda_L$  (voir figure 2.5).

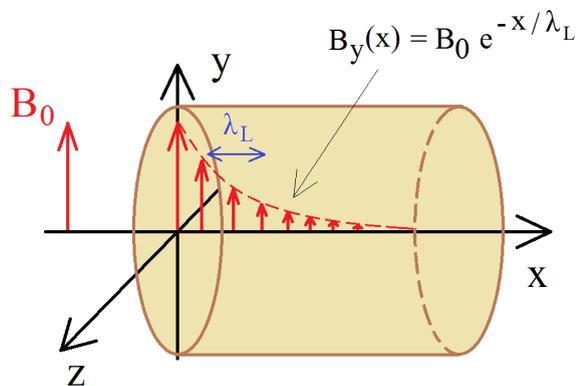


FIGURE 2.5 – Représentation de la longueur de pénétration  $\lambda_L$  pour un champ magnétique appliqué à un matériau supraconducteur.

Cette longueur théorique est en plutôt bonne adéquation avec les valeurs mesurées (par exemple dans des supraconducteurs de type I tels que *Pb*, *Al* etc ...), elle est de l'ordre de la centaine d'angström ( $10^{-8}m$ ). Elle dépend de la température et possède les comportements asymptotiques suivants : elle présente une valeur finie lorsque  $T$  tend vers 0, et elle diverge lorsque la température se rapproche de  $T_c$  puisque la densité de charges supraconductrices tend vers 0 lorsque  $T$  tend vers  $T_c$ .

Bien que n'expliquant pas la supraconductivité, les équations (2.1) et (2.3) sont de bonnes approximations puisqu'elles rendent compte des observations expérimentales, à savoir la résistance nulle et le diamagnétisme parfait (en dehors d'une zone d'épaisseur  $\lambda_L$ ).

### 2.2.3.2 Théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau

En 1950 *Ginzburg* et *Landau* ont proposé une alternative à la théorie de *London* en appliquant la théorie des transitions de phases de *Landau* à la supraconductivité [38]. Elle permet de décrire plusieurs observations expérimentales dont la transition entre l'état normal et supraconducteur, ou encore l'existence de l'état mixte au sein des supraconducteurs de type II. Néanmoins cette théorie est phénoménologique, c'est-à-dire que malgré sa description cohérente des phénomènes associés à la transition de phases, elle n'a pas de justification microscopique (tout du moins lors de son fondement, c'est une chose qui fut faite à postériori par la théorie BCS).

On introduit un paramètre d'ordre complexe décrivant la fonction d'onde macroscopique des électrons supraconducteurs  $\Psi(\vec{r})$ , dont le carré du module est égal à la densité de "supra-électrons"  $|\Psi|^2 = n_s$ . On émet l'hypothèse que le paramètre d'ordre possède une valeur finie dans la phase supraconductrice et nulle dans la phase normale, et on suppose ce paramètre d'ordre continu à la transition. Ainsi la transition de phase est du second ordre et la densité d'énergie libre de l'état supraconducteur s'écrit :

$$\mathcal{F}_{\text{supra}} = \mathcal{F}_{\text{norm}} + a(T)|\Psi|^2 + \frac{b(T)}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*}|(-i\hbar\vec{\nabla} - q^*\vec{A})\Psi|^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \quad (2.4)$$

où  $\mathcal{F}_{\text{supra}}$  représente l'énergie libre de l'état supraconducteur et  $\mathcal{F}_{\text{norm}}$  celle l'état normal. Le terme  $\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$  est la contribution de l'énergie magnétique au système, alors que  $\frac{1}{2m^*}|(-i\hbar\vec{\nabla} - q^*\vec{A})\Psi|^2$  provient des effets du champ magnétique  $\vec{B}$  sur l'impulsion, où  $\vec{A}$  est le potentiel vecteur. Les grandeurs  $m^* = 2m$  et  $q^* = 2q$  correspondent respectivement à la masse et à la charge effective des paires de Coopers avec  $m$  la masse d'un électron et  $q$  sa charge.

#### Equations de Ginzburg-Landau - Quantification du flux

La minimisation de  $\mathcal{F}_{\text{supra}}$  par une méthode variationnelle par rapport à  $\Psi$  et  $\vec{A}$  donne les deux équations de *Ginzburg-Landau* (respectivement (2.5) et (2.6))

$$a(T)\Psi + b(T)|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m^*}(-i\hbar\vec{\nabla} - q^*\vec{A})^2\Psi = 0 \quad (2.5)$$

$$\vec{j} = \frac{iq^*\hbar}{2m^*}(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*) - \frac{(q^*)^2}{m^*}|\Psi|^2\vec{A} \quad (2.6)$$

Ces deux équations contiennent l'existence d'un supercourant, l'effet *Meissner* (dans le cas où le paramètre d'ordre est uniforme) ou encore la quantification du flux. Cette dernière propriété par exemple se déduit de l'équation (2.6) dans laquelle on introduit le paramètre complexe comme  $\Psi = |\Psi_0|e^{i\theta}$ , et où on suppose que l'on a  $|\Psi_0| = \text{cste}$  et  $\vec{j} = \vec{0}$  sur un

## 2.2. SUPRACONDUCTIVITÉ

---

contour fermé  $\mathcal{C}$  dans le supraconducteur (cela revient à s'assurer que l'on est loin de la surface du matériau). En intégrant l'équation (2.6) sur le contour  $\mathcal{C}$  on a ainsi

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = -\frac{\hbar}{q^*} \oint_{\mathcal{C}} \vec{\nabla} \theta \cdot d\vec{l} \quad (2.7)$$

avec  $d\vec{l}$  l'élément infinitésimal de déplacement le long du contour. Ainsi on obtient le flux du champ magnétique à travers la surface  $S$  portant le contour  $\mathcal{C}$  en utilisant le théorème de Stokes,

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \pm n \frac{\hbar}{q^*} = \pm n \Phi_0 \quad (2.8)$$

La quantification du flux est obtenue : le flux magnétique à travers la surface est égale à un nombre entier  $n$  de fois le quantum de flux magnétique  $\Phi_0 = \frac{\hbar}{2e}$ . Ainsi lorsque les vortex pénètrent dans l'échantillon ces derniers possèdent un nombre entier de quantum de flux. Cependant il est énergétiquement favorable pour le système de créer  $n$  tubes de flux possédant un quantum de flux  $\Phi_0$  plutôt qu'un vortex avec  $n\Phi_0$ , c'est pourquoi chaque vortex porte un seul et unique quantum de flux  $\Phi_0$ .

### Longueurs caractéristiques

La théorie de *Ginzburg-Landau* introduit deux longueurs caractéristiques importantes qui sont la longueur de pénétration  $\lambda$  et la longueur de cohérence  $\xi$ . La longueur  $\lambda$  décrit la distance caractéristique sur laquelle le champ magnétique varie dans le supraconducteur. On la détermine en écrivant que loin des bords du matériau  $B = 0$  et  $\Psi = \text{cste}$ . En remplaçant  $|\Psi|^2$  par sa valeur d'équilibre via l'équation (2.5), alors la longueur de pénétration s'écrit

$$\lambda = \sqrt{\frac{m^* b}{\mu_0 (q^*)^2 |a|}} \quad (2.9)$$

Quant à la longueur  $\xi$  elle caractérise l'échelle de variation de la densité d'électrons supraconducteurs  $n_s$ , ou plus précisément la variation du paramètre d'ordre  $\Psi$ . Plaçons nous en champ nul, nous avons  $\vec{A} = \vec{0}$ , si l'on se trouve suffisamment proche de la température de transition nous pouvons alors négliger le terme  $b|\Psi|^2\Psi$  de l'équation (2.5), ce qui conduit alors à écrire cette même équation comme  $\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta\Psi = a\Psi$  et cela amène à poser la longueur de cohérence comme étant,

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2 m^* |a|}} \quad (2.10)$$

Les deux longueurs  $\xi(T)$  et  $\lambda(T)$  dépendent de la température et possèdent le même comportement  $A(T) \sim A(0) \sqrt{\frac{T_c}{T_c - T}}$ . Dans un supraconducteur de type I l'ordre de grandeur

## 2.2. SUPRACONDUCTIVITÉ

---

de ces deux quantités à  $T = 0K$  est  $\xi \approx 10^{-6}m$  et  $\lambda \approx 10^{-8}m$ , alors que pour un supraconducteur de type II nous avons  $\xi \approx 10^{-9}m$  et  $\lambda \approx 10^{-8}m$ .

Le modèle de *Ginzburg-Landau* ne s'applique pas à toutes les situations. En effet le développement de l'énergie libre n'est valide qu'au voisinage de la transition normal-supraconductrice. Il ne permet pas non plus de décrire le système lorsqu'il se trouve trop proche de la transition puisque c'est à cet endroit que les fluctuations sont importantes et le développement de *Landau* n'en tient pas compte. Bien qu'il faille utiliser ce modèle avec précaution il reste une assez bonne approximation pour décrire la supraconductivité et en particulier la dynamique des réseaux de vortex que nous traiterons par la suite.

### 2.2.3.3 Vortex et réseau d'Abrikosov

Avant de continuer notre présentation des diverses théories sur la supraconductivité, nous allons faire un détour et décrire un peu plus en détail les vortex et le réseau qu'ils peuvent former au sein des supraconducteurs de type II : le réseau d'*Abrikosov*.

#### Présentation des vortex

Le vortex est un tube de flux permettant au champ magnétique de traverser l'échantillon sans avoir à le contourner. Lorsque les vortex pénètrent dans le matériau, les supercourants qui écrantent le champ magnétique dans le cœur du supraconducteur existent toujours à la surface de ce dernier, cependant le fait que le champ magnétique puisse passer au sein du matériau à travers ces tubes de flux nécessite qu'il existe également des supercourants autour des vortex afin de garder le reste de l'échantillon dans un état supraconducteur. On observe ainsi deux types de boucles de courants qui écrantent le champ magnétique à l'intérieur du matériau : une à la surface du matériau et une autre autour de chaque vortex (ces supercourants circulent ainsi en des sens opposés, voir la figure 2.4). Notons également que l'existence des vortex peut être comprise d'un point de vue énergétique : il est favorable pour le système d'augmenter la surface de contact entre les régions normales et supraconductrices afin d'abaisser son énergie de surface qui devient ainsi négative (une énergie de surface positive implique une interface de séparation la plus faible possible). On comprend alors pourquoi le matériau se fragmente de plus en plus en vortex lorsque le champ appliqué augmente.

Le profil de la densité  $n_s$  et du champ magnétique  $\vec{B}$  autour des vortex est représenté sur la figure 2.6.

Comme précisé auparavant on observe une zone de transition pour le champ magnétique entre le cœur du supraconducteur et le vortex sur une épaisseur  $\lambda$  (où l'on a respectivement  $B = 0$  et  $B \neq 0$ ), c'est aussi dans cette région que vivent les courants supraconducteurs. Le passage entre la zone normale où  $n_s = 0$  et la zone supraconductrice avec  $n_s = \text{cste}$  se fait sur une épaisseur  $\xi$ . Cette longueur de cohérence représente donc la taille du cœur du vortex mais aussi la taille de la paire de Cooper.

Sur ces échelles de longueurs la contribution apportée à l'énergie de surface sera différente, et en fonction de la prépondérance d'une de ces deux longueurs par rapport à

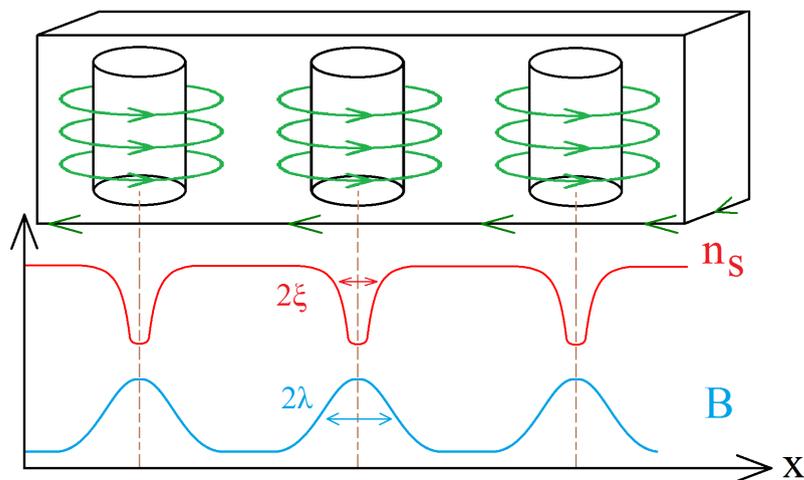


FIGURE 2.6 – Description des deux longueurs  $\lambda$  et  $\xi$  pour les vortex dans les supraconducteurs de type II.

l'autre l'énergie de surface du système sera négative ou positive. Cela amène donc naturellement à poser le paramètre adimensionnel de *Ginzburg-Landau*  $\kappa = \frac{\lambda}{\xi}$ . On observe que pour  $\kappa < 1/\sqrt{2}$  l'énergie de surface est positive et le supraconducteur est de type I, alors que pour  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  l'énergie de surface est négative et le supraconducteur est de type II. La valeur de ce ratio  $\kappa$  permet par conséquent de distinguer les deux types de supraconducteurs.

Nous pouvons maintenant déterminer l'ordre de grandeur des valeurs des champs critiques  $H_{c1}$  et  $H_{c2}$  qui caractérisent l'état mixte des supraconducteurs de type II. Nous allons les définir par rapport à la valeur du champ critique  $H_c$  des supraconducteurs de type I qui peut se calculer à partir de la différence d'énergie libre entre la phase normale et la phase supraconductrice  $F_{\text{norm}} - F_{\text{supra}} = \frac{a^2}{2b} = \frac{H_c^2}{2\mu_0}$ .

La présence de vortex dans l'échantillon crée une augmentation locale de l'énergie libre, par unité de longueur du vortex, d'une quantité  $\pi\xi^2\frac{\mu_0 H_c^2}{2}$ ; mais aussi une décroissance locale de l'énergie magnétique de  $\pi\lambda^2\frac{\mu_0 H^2}{2}$ . L'état mixte apparaît lorsque  $H = H_{c1}$  et cela se traduit par  $H_{c1} \approx \frac{H_c}{\kappa}$ .

À la borne  $H_{c2}$  tous les vortex portant un quantum de flux fusionnent et on montre que  $H_{c2} \approx \kappa H_c$ . Ainsi pour un matériau qui est fortement de type II (*i.e.*,  $\kappa \gg 1$ ) nous retrouvons bien le fait que  $H_{c1} < H_c$  et  $H_{c2} > H_c$ .

### Description des vortex et réseaux

Une description plus détaillée des vortex nécessite la résolution de l'équation décrivant la valeur du champ magnétique en présence des supercourants induits par ce dernier, soit

## 2.2. SUPRACONDUCTIVITÉ

l'équation  $\Delta \vec{B} - \vec{B}/\lambda = \vec{0}$ . Vu la symétrie cylindrique du problème et le fait que le champ magnétique soit suivant l'axe ( $Oz$ ), cela amène à écrire,

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{B_z}{\lambda} = 0 \quad (2.11)$$

qui n'est rien d'autre qu'une équation différentielle de *Bessel* modifiée avec  $n = 0$ . La solution de cette équation est donnée par la fonction de *Bessel* modifiée  $K_0(x)$  de deuxième espèce d'ordre 0,

$$B_z(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad (2.12)$$

où la valeur de la constante a été déterminée par la condition de quantification du flux  $\Phi_0 = \int B(\vec{r}) d^2 \vec{r}$ . Le comportement asymptotique de la fonction de *Bessel* pour  $\xi \ll r \ll \lambda$  donne la relation  $B_z(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln\left(\frac{\lambda}{r}\right)$ . Lorsque  $r < \xi$ , le champ magnétique ne va pas diverger (le cœur du vortex est dans un état normal) et on peut supposer qu'il va atteindre une valeur de saturation proche de celle obtenue pour  $B_z(r = \xi)$ . De plus pour  $r \gg \lambda$  la forme asymptotique de la fonction de *Bessel* donne  $B_z(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2r}} e^{-\frac{r}{\lambda}}$ . Ainsi le champ magnétique est grand et à peu près constant dans le cœur du vortex puis décroît de façon logarithmique jusqu'à  $r \approx \lambda$  pour finir par décroître de façon exponentielle. Les courants persistants qui circulent autour du cœur du vortex et qui maintiennent ce champ se déduisent de  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  pour donner la relation  $j_\theta(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\lambda^3} K_1\left(\frac{r}{\lambda}\right)$ , avec  $j_\theta(r)$  la composante tangentielle des courants dans le plan ( $xOy$ ) (voir les profils représentés sur la figure 2.7).

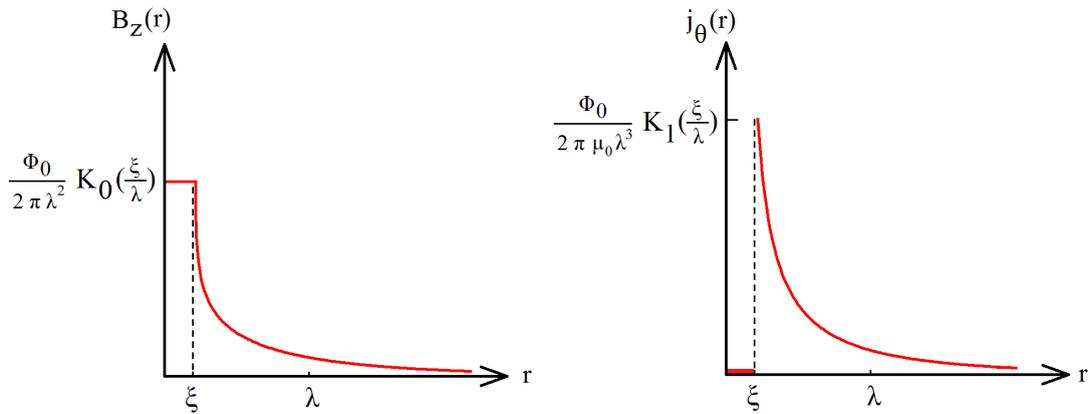


FIGURE 2.7 – Profil du champ magnétique  $B_z(r)$  et du courant  $j_\theta(r)$  circulant autour du cœur du vortex dans la limite de *London*.

Avant de décrire la formation du réseau de vortex que l'on observe expérimentalement, regardons les interactions entre vortex. Pour ce faire nous introduisons la limite de *London* qui est un cas limite du modèle de *Ginzburg-Landau* avec  $\kappa \gg 1$  et  $H \ll H_{c2}$ . Dans cette

## 2.2. SUPRACONDUCTIVITÉ

---

limite, les vortex sont considérés comme ponctuels et éloignés les uns des autres puisque  $\kappa = \frac{\lambda}{\xi} \gg 1$ .

En présence de vortex l'équation de *London* est modifiée en rajoutant un terme source de champ qui est choisi comme une fonction de *Dirac* dans cette limite, et devient

$$\vec{B} - \lambda^2 \Delta \vec{B} = \vec{\Phi}_0 \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.13)$$

où  $\vec{\Phi}_0$  est le vecteur le long du vortex possédant un quantum de flux magnétique et  $\vec{r}_i$  représente la position des vortex. L'énergie libre d'un vortex par unité de longueur peut ainsi s'écrire

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2\mu_0} \int d\vec{r} \left\{ \vec{B}^2 + \lambda^2 (\vec{\nabla} \times \vec{B})^2 \right\} \quad (2.14)$$

En utilisant l'identité vectorielle  $(\vec{\nabla} \times \vec{B})^2 = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}))$  et le fait que  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\vec{B}/\lambda^2$ , alors en appliquant le théorème de *Green-Ostrogradski* nous arrivons à la relation suivante pour l'énergie libre

$$\mathcal{F} = \frac{\lambda^2}{2\mu_0} \oint \left\{ \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right\} \cdot d\vec{S} \quad (2.15)$$

où l'intégrale est prise sur la surface de la région supraconductrice et  $d\vec{S}$  est l'élément de surface pointant dans la direction normale du supraconducteur. Il existe deux contributions pour cette intégrale surfacique, et puisque le champ magnétique décroît exponentiellement à grande distance, alors l'intégrale s'annule à l'infini et seule la contribution provenant de  $r = \xi$  persiste. En utilisant la forme asymptotique de  $B(\xi)$  définie précédemment, nous avons alors l'énergie par unité de longueur d'un vortex qui est égale à

$$\mathcal{F} = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^2} \ln\left(\frac{\lambda}{\xi}\right) \quad (2.16)$$

Considérons à présent deux vortex droits et parallèles, aux positions  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$ , dans un supraconducteur infini. Le champ magnétique total au point  $\vec{r}$ , par linéarité des équations de *Maxwell*, est le suivant

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_1(\vec{r}) + \vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left[ K_0 \left( \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1|}{\lambda} \right) + K_0 \left( \frac{|\vec{r} - \vec{r}_2|}{\lambda} \right) \right] \quad (2.17)$$

En utilisant l'équation (2.15) on peut montrer que l'énergie libre par unité de longueur du système de deux vortex s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{1+2} &= \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_{12} \\ &= \frac{\Phi_0}{2\mu_0} B_1(\vec{r}_1) + \frac{\Phi_0}{2\mu_0} B_2(\vec{r}_2) + \frac{\Phi_0}{\mu_0} B_1(\vec{r}_2) \end{aligned} \quad (2.18)$$

## 2.2. SUPRACONDUCTIVITÉ

où  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  représente l'énergie libre des deux vortex pris séparément, alors que  $\mathcal{F}_{12}$  est le terme d'énergie d'interaction entre les deux vortex. Ce dernier vaut

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{\Phi_0^2}{2\pi\mu_0\lambda^2} K_0 \left( \frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{\lambda} \right) \quad (2.19)$$

et on se rend compte que l'interaction entre les vortex est répulsive. Notons que cette démarche s'applique aisément à un système de  $n$  vortex et l'on trouve que l'énergie d'un système à  $n$  vortex est la somme des énergies de chaque vortex et de l'énergie de paire de chaque couple de vortex. Les vortex se repoussant, ils vont donc former une structure périodique. En 1957 *Abrikosov* a prédit l'arrangement des vortex dans les supraconducteurs de type II en réseaux [39], que l'on nomme maintenant *réseaux d'Abrikosov* (suite à des erreurs de calculs il avait conclu que la configuration permettant de minimiser l'énergie était le réseau carré, cependant *Kleiner et al.* [40] ont montré qu'en réalité c'était le réseau triangulaire, dit aussi hexagonal, et qui est observé expérimentalement qui minimise l'énergie). Le pas du réseau est donné par  $a_0 = \left( \frac{2\Phi_0}{\sqrt{3}B} \right)^{1/2}$ , ce qui donne pour des supraconducteurs de type II comme les SHTC une variation allant de  $a_0 \sim \lambda$  pour  $B \sim H_{c1}$  à  $a_0 \sim \xi$  pour  $B \sim H_{c2}$ . *Abrikosov* a reçu le prix Nobel en 2003 pour cette découverte.

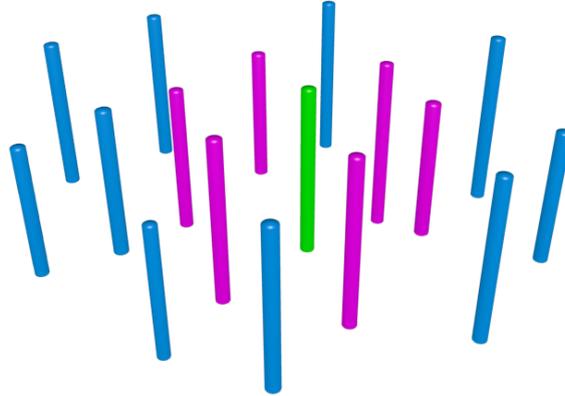


FIGURE 2.8 – Schéma de réseau de vortex en perspective isométrique. Un vortex quelconque (en vert) possède 6 voisins (en rouge) et le réseau est hexagonal.

De plus nous pouvons expliciter la force agissant par unité de longueur sur le vortex 2 par

$$\vec{F}_2 = -\frac{\partial \mathcal{F}_{12}}{\partial \vec{r}_2} = -\frac{\Phi_0}{\mu_0} \frac{\partial B_1(\vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_2} \quad (2.20)$$

Cependant en utilisant la relation de *Maxwell-Ampère* reliant le champ magnétique  $\vec{B}_1$  du vortex 1 à sa densité de courant  $\vec{j}_1$ , et donnée par  $\vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_1$ , nous pouvons réécrire la force  $\vec{F}_2 = \vec{j}_1(\vec{r}_2) \times \vec{\Phi}_0$  où  $\vec{\Phi}_0$  est le vecteur portant le quantum de flux magnétique du vortex 2. En sommant les forces provenant de toutes les sources de courants on trouve ainsi que la force s'appliquant par unité de longueur sur un vortex est égale à

$$\vec{F} = \vec{j} \times \vec{\Phi}_0 \quad (2.21)$$

avec  $\vec{j}$  la densité de courant supraconducteur existant aux abords du vortex considéré. Cette expression est valable pour tous les vortex placés dans un champ de courant, et en particulier pour un courant imposé à l'échantillon supraconducteur de type II dans lequel le courant circulera dans tout le volume du matériau (en évitant tout de même les cœurs de vortex). Ainsi les vortex subissent une force perpendiculaire à la fois au courant appliqué donné par  $\vec{j}$  et au champ magnétique appliqué donné par  $\vec{\Phi}_0$ . Cette force met en mouvement les vortex, créant un travail et une dissipation de l'énergie qui sera prise au courant injecté. Le supraconducteur redevient alors résistif et perd ainsi une de ses propriétés les plus intéressantes. De plus cette dissipation de chaleur risque de réchauffer le matériau au point de perdre l'état supraconducteur lorsque  $T > T_c$ .

L'état mixte des supraconducteurs de type II est assez paradoxal : c'est dans ce régime que fonctionnent principalement tous les supraconducteurs actuels qui fournissent de forts champs magnétiques, mais c'est également dans ce régime que le courant appliqué risque de faire perdre la propriété de résistivité nulle. Il faut alors trouver un moyen de contrer cette mise en mouvement des vortex, c'est ce qu'on appelle le piégeage. Il est réalisé par les défauts du matériau. Le paramètre d'ordre supraconducteur est supprimé au passage d'une imperfection du réseau cristallin et il est énergétiquement favorable pour le système d'avoir un vortex placé dans un défaut. Ces défauts peuvent être de différentes natures : ils peuvent être intrinsèques comme c'est le cas pour les défauts cristallins tels que les lacunes d'oxygène dans les SHTC, les joints de grains, les dislocations, les substitutions d'atomes ou bien les atomes interstitiels ; ou bien extrinsèques tels que les défauts colonnaires créés artificiellement par irradiation du matériau avec des ions lourds.

### 2.2.3.4 Description microscopique - Théorie BCS

Dans cette partie nous présenterons une brève description qualitative de la première théorie microscopique décrivant les supraconducteurs.

En 1950 *Frölich* avait émit l'hypothèse que l'interaction électron-phonon est importante pour la supraconductivité. Mais c'est en 1957 que *Bardeen J.*, *Cooper L.* et *Schrieffer J.* ont proposé leur théorie dite *BCS* qui explique le phénomène supraconducteur [41, 42]. Dans cette théorie l'interaction des électrons avec le réseau, appelée interaction électron-phonon peut entraîner une attraction effective entre électrons et ce malgré la répulsion Coulombienne. Cela peut se comprendre qualitativement de la façon suivante : lorsqu'un électron se déplace à travers la structure cristalline du matériau, ce dernier va la déformer en attirant les ions positifs sur son passage (cette onde de déformation se traduit par un phonon). Cette région se polarise positivement et il est alors intéressant pour un deuxième électron de passer par le chemin déjà frayé par le premier, ainsi une attraction effective entre les deux électrons se réalise et ces derniers forment une paire appelée *paire de Cooper* (voir le schéma 2.9).

Cette paire constitue une nouvelle "particule" quantique de spin entier (boson) et ce malgré le spin 1/2 des électrons (fermions). Un grand nombre de telles paires existent

## 2.2. SUPRACONDUCTIVITÉ

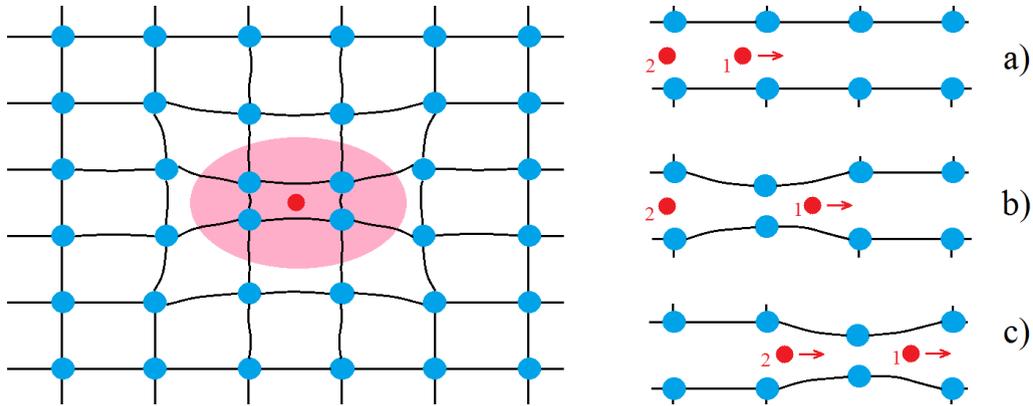


FIGURE 2.9 – Image de gauche : déformation du réseau cristallin (ions en bleus) lors du passage d'un électron (en rouge). Image de droite : a) l'électron 1 passe devant les ions, b) le réseau se déforme suite à son passage et c) la région polarisée positivement attire l'électron 2 qui forme ainsi avec l'électron 1 une paire de Cooper.

dans le supraconducteur, elles se superposent alors fortement et forment un condensat de *Bose-Einstein* leur permettant de se rassembler dans un état quantique unique et cohérent, d'énergie plus basse que pour des électrons non appariés dans un métal normal, et ainsi de présenter un comportement quantique macroscopique analogue à une seule particule. L'énergie de cette paire est inférieure à la somme des énergies des deux électrons indépendants, et cela est réalisé pour deux électrons qui ont des spins opposés. Les deux électrons de la paire de *Cooper* sont liés avec une énergie  $2\Delta$  appelé gap d'énergie. Cette paire de *Cooper* reste stable tant que l'énergie fournie ne dépasse pas la valeur du gap. Tant que l'énergie requise pour détruire la paire n'est pas atteinte, les électrons restent appariés et aucune résistance n'existe dans le matériau. Le comportement collectif des paires de *Cooper* qui se regroupent en un condensat avec le même état fondamental est la cause des propriétés spectaculaires de la supraconductivité.

Cette théorie permet de retrouver et d'expliquer beaucoup de résultats exposés précédemment par des approches phénoménologiques tels que : les conditions pour qu'un composé soit supraconducteur, déterminer sa température de transition  $T_c$ , retrouver les longueurs caractéristiques  $\xi$  et  $\lambda$ , le champ critique  $H_c$ , la densité de courant critique  $j_c$  ... Comme nous en avons parlé au chapitre 1, la théorie *BCS* permet également de définir une limite théorique pour la température critique des supraconducteurs  $T_c \approx 30K$ . Les SHTC sont au-delà de cette limite avec des températures maximales à l'heure actuelle de l'ordre de  $T_c \approx 130K$ . Il convient souvent alors d'appeler "conventionnels" les supraconducteurs qui sont décrits par la théorie *BCS* (c'est en général le cas des supraconducteurs de type I), et comme "non conventionnels" ceux qui ne le sont pas (les supraconducteurs de type II par exemple). L'étude détaillée de cette théorie *BCS* sortant du cadre de notre étude nous invitons le lecteur intéressé à se référer à des livres traitant de ce sujet [43].

### 2.2.4 Applications

Pour finir la description de la supraconductivité nous allons parler des applications possibles des supraconducteurs. Elles sont nombreuses et présentes dans des domaines variés en passant par le domaine médical, la physique théorique ou encore l'ingénierie.

L'application médicale la plus dépendante des supraconducteurs est sans conteste la technique de l'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM). Cette technique d'imagerie médicale permet d'obtenir des représentations multidimensionnelles (2D ou 3D) du corps humain en se basant sur la résonance magnétique nucléaire (RMN) : un champ magnétique puissant va aligner les moments magnétiques de spin et par la même occasion créer une aimantation des tissus que l'on pourra ainsi observer. L'IRM, basée sur l'utilisation de champs magnétiques, présente alors un plus grand intérêt que la tomographie qui utilise des rayonnements ionisants (rayons X) pour la représentation interne du corps humain. Sans la mise en place d'aimants supraconducteurs, il faudrait des électroaimants nécessitant des centaines de kilowatts afin de générer le champ magnétique requis dans l'IRM.

La découverte par *B. D. Josephson* de l'*effet Josephson*, qui lui valu le prix Nobel en 1973, montrant qu'un courant électrique peut apparaître entre deux matériaux supraconducteurs séparés par un isolant, a permis la création de SQUIDS (Superconducting Quantum Interference Device). Le SQUID est un dispositif formé d'un circuit supraconducteur contenant deux jonctions Josephson et permettant de détecter de très faibles champs magnétiques. Les SQUIDS peuvent être utilisés dans le domaine de la santé dans le but de mesurer l'activité neuronale au sein du cerveau : les champs magnétiques induits par l'activité électrique des neurones sont de l'ordre du femtoTesla ( $10^{-15}T$ , soit une valeur bien plus faible que le champ magnétique terrestre), on utilise alors un magnétoencéphalographe (MEG) qui est essentiellement un maillage de plusieurs centaines de SQUIDS. Une technique analogue peut être utilisée pour la détection de champs magnétiques provenant du cœur humain, c'est la magnéto-cardiographie (MCG). Les SQUIDS étant des magnétomètres ils sont couramment utilisés en physique, mais également dans des domaines totalement différents tels que par exemple la géophysique pour la prospection par méthode magnétique afin de caractériser en détail les sous-sols.

Une autre propriété des jonctions Josephson est la suivante : lorsqu'on la soumet à un courant continu il apparaît un courant alternatif de très haute fréquence. Cette propriété peut être utilisée afin de créer des transistors beaucoup plus rapides que les transistors classiques, et ainsi ouvrir la voie à des ordinateurs beaucoup plus rapides en terme d'opérations à virgule flottante par seconde (flops).

Une autre application possible des supraconducteurs se trouve dans le domaine de la recherche théorique en Physique au sein des accélérateurs de particules. Bien qu'il en existe une quantité notable répartie dans plusieurs pays à travers le monde, l'un de ceux qui a fait le plus parler de lui ces derniers temps (avec un budget avoisinant les 9 milliards de dollars) est le grand collisionneur de hadrons LHC, se trouvant en partie en France et en Suisse. Son but est de tenter de répondre à des questions que posent les modèles de la physique des particules et de la cosmologie, en essayant par exemple de prouver l'existence

du boson de Higgs ou encore la détection plus ou moins directe de matière noire, de dimensions supplémentaires etc ... Son fonctionnement est basé sur celui du synchrotron, qui rappelons le permet d'accélérer des particules chargées à hautes énergies via l'utilisation d'électro-aimants. Le LHC accélère des hadrons, en particulier des protons, jusqu'à une énergie de  $7\text{ Tev}$  et les fait entrer en collision. Le champ magnétique nécessaire à la courbure du faisceau de protons ne serait possible avec des électro-aimants que pour des valeurs de courants électrique considérables, ce qui entraînerait un échauffement énorme du matériau. C'est pourquoi l'utilisation de supraconducteurs est incontournable dans la réalisation de cette expérience (plusieurs milliers d'aimants supraconducteurs y sont utilisés).

Beaucoup d'autres exemples d'utilisation de supraconducteurs existent et nous ne tentons pas d'en faire une liste exhaustive, cependant nous pouvons en citer brièvement quelques-uns qui sont plus ou moins connus du grand public. L'application de la supraconductivité aux moyens de transport avec les trains à sustentation magnétique est une de ces réalisations. L'idée est d'appliquer le phénomène de lévitation des supraconducteurs en présence d'aimants afin de supprimer les frottements du train avec les rails et de n'avoir plus que les frottements avec l'air ambiant. Avec le *JR-MagLev* les Japonais ont ainsi réussi à réaliser l'exploit d'atteindre les  $581\text{ km/h}$  en 2003.

La production d'énergie nucléaire à travers les Tokamaks représente aussi une utilisation possible des supraconducteurs. La fusion d'atomes "légers" se fait au sein de plasmas qui présentent des températures de plusieurs millions de degrés et qui sont confinés dans un anneau torique par de forts champs magnétiques ( $\approx 5T$ ) réalisés grâce à des aimants supraconducteurs. Le dernier exemple en date est le projet *ITER* (pour International Thermonuclear Experimental Reactor) qui fait beaucoup parler de lui et dont le budget avoisine les 15 à 17 milliards d'euros actuellement.

Et enfin l'application phare du transport de courant électrique : dans les lignes à haute tension l'utilisation de câbles supraconducteurs, en remplacement des câbles en cuivre ou en alliage d'aluminium, permettrait de faire passer une quantité beaucoup plus grande de courant électrique sans perte d'énergie par effet Joule. Un exemple de réalisation industrielle a été effectué aux Etats-Unis en 2008 avec six cents mètres de câble supraconducteur permettant de transporter environ  $500\text{ MW}$  pour une faible tension (un projet nommé "AmpaCity" va bientôt tenter de battre le record de la plus longue liaison supraconductrice en Allemagne).

## 2.3 Statique des réseaux de vortex

Dans le matériau supraconducteur, le réseau de vortex est plongé dans un potentiel perturbateur crée par les défauts du matériau. Pour garder la propriété supraconductrice de résistivité nulle, le réseau de vortex doit rester figé dans ce potentiel. Il est donc primordial de comprendre comment le réseau élastique de vortex s'adapte au potentiel de piégeage. Nous commencerons donc par considérer les phases statiques observées dans l'état mixte des supraconducteurs (les aspects dynamiques seront étudiés dans la section suivante).

La matière vortex présente une grande richesse résultant de la compétition entre la structure élastique du réseau de vortex, le piégeage et les fluctuations thermiques. Le diagramme de phase 2.3, tiré d'une analyse de champ moyen, va être modifié pour les SHTC. En effet leur caractère fortement de type II, ou encore leur forte anisotropie, va rendre les fluctuations thermiques importantes. Le piégeage va également augmenter la richesse du diagramme. Par exemple en absence de piégeage et à température nulle le réseau de vortex forme un cristal, cependant lorsque la température est suffisamment élevée, comme pour n'importe quel solide, le cristal de vortex peut fondre en un liquide de vortex. La température de fusion peut être grossièrement estimée par le critère de *Lindemann* qui explique que le cristal va fondre lorsque l'écart quadratique moyen des déplacements des vortex aura atteint une fraction du pas du réseau, soit  $\langle u^2(T_{\text{fusion}}) \rangle \approx c_L^2 a_0^2$  où  $\langle \dots \rangle$  est une moyenne thermique et  $c_L \simeq 1/10$  est la constante de *Lindemann*. Nous renvoyons le lecteur à la référence [44] pour plus de détails sur la fusion du réseau de vortex. Nous restons ici au contraire dans une description élastique du réseau de vortex plongé dans un potentiel désordonné.

### 2.3.1 Description élastique du réseau

Le réseau de vortex est une structure périodique qui peut être décrite par le même type d'hamiltonien élastique que dans l'équation (1.1) introduite dans le cas particulier des interfaces. La position des vortex peut être décrite par la relation  $\vec{r}_i = \vec{R}_i + \vec{u}_i$  où  $\vec{R}_i$  représente les positions d'équilibre (ce sont les positions de références du réseau de *Bravais* parfait, correspondant ici au réseau triangulaire) et  $\vec{u}_i$  est le champ de vecteur de déplacement qui donne l'écart du vortex  $i$  par rapport à sa position d'équilibre (voir la figure 2.10 pour avoir une représentation schématique). Afin de pouvoir utiliser une description élastique pour les vortex nous supposons le champ de déplacement  $\vec{u}_i$  univalué, ce qui correspond à la situation où il n'y a pas de défaut topologique (c'est-à-dire aucune discontinuité dans la structure cristalline du matériau).

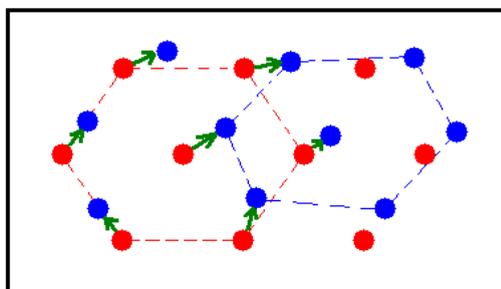


FIGURE 2.10 – Exemple schématique d'un réseau de vortex avec les positions d'équilibre  $\vec{R}_i$  en noir, le champ de déplacement  $\vec{u}_i$  représenté par les vecteurs, et les positions  $\vec{r}_i$  des vortex en gris.

Si le déplacement de deux vortex voisins est suffisamment petit par rapport au pas du réseau  $|\vec{u}_i - \vec{u}_{i+1}| \ll a_0$ , alors en prenant la limite continue nous obtenons une énergie élastique quadratique en  $u$  comme dans l'équation (1.1). Dans cette équation nous considé-

### 2.3. STATIQUE DES RÉSEAUX DE VORTEX

---

rions le cas d'une structure élastique isotrope, *i.e.* le coefficient élastique  $c$  avait été choisi constant. Cependant en appliquant cette démarche au réseau de vortex tridimensionnel cela nous donne l'énergie élastique en terme du champ continu  $u$ ,

$$\mathcal{H}_{el}(u) = \frac{1}{2} \int d^3r \left[ c_{11} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right)^2 + c_{66} \left( \vec{\nabla} \times \vec{u} \right)^2 + c_{44} \left( \partial_z \vec{u} \right)^2 \right] \quad (2.22)$$

Cela correspond à une situation expérimentale dans un supraconducteur à haute température critique anisotrope (comme les cuprates) avec des vortex droits et alignés suivant l'axe  $z$  (axe d'application du champ magnétique) et les dérivées notées par  $\vec{\nabla}$  ont lieu dans le plan  $xy$  perpendiculaire (c'est-à-dire les plans  $CuO_2$  permettant la supraconductivité). Le coefficient élastique est un tenseur avec  $c_{11}$  le module de compression,  $c_{66}$  le module de cisaillement et  $c_{44}$  le module de torsion. En général nous avons  $c_{11} \gg c_{66}$  et les modes transverses (cisaillement et torsion) sont dominants. Notons qu'en présence de matériaux très fortement anisotropes, le vortex n'est plus représenté sous forme d'une ligne mais sous forme de *pancakes* vivant dans les différentes couches du matériau et couplés entre eux par un couplage électromagnétique ou Josephson. Par la suite nous parlerons exclusivement de SHTC présentant une anisotropie modérée et pour laquelle le vortex peut être vu comme une ligne élastique.

On voit tout naturellement qu'en absence de désordre la configuration permettant d'avoir une énergie minimale est le cristal parfait avec un champ de déplacement nul (soit  $u_i = 0$  lors d'une description discrète). Plongé dans un désordre externe, le cristal va se déformer. Le couplage entre le réseau de vortex et le potentiel désordonné  $V(\vec{r})$  se traduit par un hamiltonien

$$\mathcal{H}_{des}(u) = \int d^d r V(\vec{r}) \rho(\vec{r}) \quad (2.23)$$

où  $\rho(\vec{r}) = \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{R}_i - \vec{u}_i)$  représente la densité des vortex. On appellera  $r_f$  la longueur de corrélation du désordre, et on supposera  $r_f \sim \xi$  où  $\xi$  est la longueur de cohérence des vortex. Ainsi à température nulle et à l'équilibre l'hamiltonien total du système est la somme des termes (2.22) et (2.23).

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3r \left[ c_{11} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right)^2 + c_{66} \left( \vec{\nabla} \times \vec{u} \right)^2 + c_{44} \left( \partial_z \vec{u} \right)^2 \right] + \int d^d r V(\vec{r}) \rho(\vec{r}) \quad (2.24)$$

#### 2.3.2 Modèle de Larkin

Le couplage au désordre étant hautement non linéaire il est alors très difficile de résoudre le problème décrit par l'hamiltonien (2.24) et c'est là que les méthodes du Groupe de Renormalisation ou la théorie des Répliques sont très utiles. A partir d'arguments simples nous pouvons néanmoins, dans un premier temps, décrire le piégeage et ses effets. C'est ce qu'à fait *Larkin* [45] en remplaçant le couplage avec un potentiel désordonné par des forces

aléatoires agissant indépendamment sur chaque vortex. L'hamiltonien de désordre devient alors

$$\mathcal{H}_{\text{Larkin}}(u) = \int d^d r f(\vec{r}) u(\vec{r}) \quad (2.25)$$

Le fait que ce couplage au désordre soit dorénavant linéaire vis à vis des déplacements permet une résolution de l'hamiltonien global défini comme la somme de (2.22) et (2.25). Avant de présenter les résultats que l'on peut en déduire, nous rappelons comment se caractérise l'ordre d'un réseau.

### Fonction de corrélation des déplacements

Pour caractériser le degré d'ordre d'une structure périodique on définit une fonction de corrélation des déplacements relatifs qui mesure les déplacements relatifs de deux objets (en l'occurrence ici deux vortex) séparés par une distance  $r$ .

$$B(\vec{r}) = \frac{1}{N} \overline{\left[ \vec{u}(\vec{r}) - \vec{u}(\vec{0}) \right]^2} \quad (2.26)$$

où  $\vec{u}(\vec{r})$  est le champ de déplacement,  $N$  est la dimension du champ de déplacement,  $\langle \dots \rangle$  et  $\overline{\dots}$  représentent respectivement une moyenne sur les fluctuations thermiques et sur les réalisations du désordre. Nous pouvons relier cette quantité à une grandeur définie précédemment dans le chapitre 1, la rugosité  $\mathcal{W}(r) = \sqrt{B(r)}$  et qui se comporte en loi de puissance avec l'exposant de rugosité  $\zeta$  tel que  $\mathcal{W}(r) \sim r^\zeta$ . Le comportement de  $B(r)$  donne des indications sur la déformation de la structure périodique et il est relié à la nature de l'ordre : pour un liquide  $B(r)$  diverge quelque soit  $r$  à cause du déplacement incessant sur de grandes distances des particules constituant le liquide, dans un verre le réseau peut se réorganiser et provoquer ainsi des déplacements relatifs arbitrairement grands à grandes distances et donc  $B(r)$  diverge lorsque  $r \rightarrow \infty$ , dans un solide cristallin les constituants élémentaires ne se déplacent qu'autour de leur position d'équilibre et  $B(r)$  reste borné, et enfin pour un cristal parfait nous avons  $B(r) = 0$ . Notons que pour  $d \geq 3$  l'ordre cristallin survit à une température finie alors qu'il est détruit pour des dimensions  $d \leq 2$ .

### Facteur de structure

Expérimentalement la détermination de l'ordre d'une structure périodique s'effectue par diffraction de neutrons ou de rayons X à travers la mesure du facteur de structure  $S(\vec{q}) = \overline{|\rho(\vec{q})|^2}$ , qui n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de la densité  $\rho(\vec{r})$ . En s'intéressant à l'allure des pics au niveau des vecteurs du réseau réciproque  $\vec{K}$  nous avons ensuite une mesure de l'ordre du réseau. Cela se traduit mathématiquement par la fonction de corrélation de l'ordre translationnel  $C_K(r)$

$$C_{\vec{K}}(\vec{r}) = \overline{e^{i\vec{K} \cdot [\vec{u}(\vec{r}) - \vec{u}(\vec{0})]}} \quad (2.27)$$

### 2.3. STATIQUE DES RÉSEAUX DE VORTEX

cette quantité permettant de caractériser la forme des pics dans l'espace réel en effectuant une transformée de Fourier inverse d'un seul pic autour du vecteur réciproque  $\vec{K}$ . La forme et la largeur des pics donne donc une mesure du degré d'ordre translationnel dans la structure périodique. Notons également que dans le cas de fluctuations Gaussiennes (telles que les fluctuations thermiques) on peut montrer que la fonction de corrélation de l'ordre translationnel et celle des déplacements relatifs sont liées par la relation  $C_K(r) \sim e^{-K^2 B(r)/2}$ . Sur la figure 2.11 nous avons représenté l'allure du facteur de structure  $S(q)$  et le comportement de  $C_K(r)$  nous informant sur le profil des pics dans le facteur de structure pour plusieurs cas.

Pour un cristal parfait la fonction de corrélation  $C_K(r)$  présente une limite non nulle

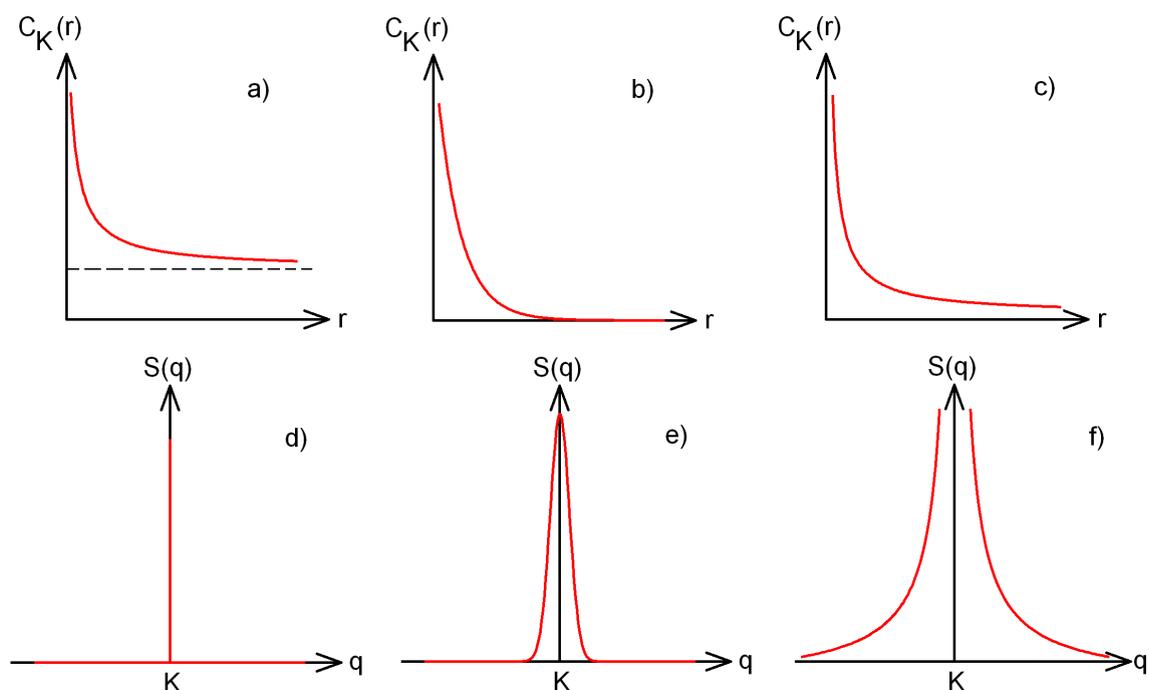


FIGURE 2.11 – Evolution de la fonction de corrélation  $C_K(r)$  et allure des pics au niveau des vecteurs réciproques dans le facteur de structure  $S(q)$  pour : un cristal parfait a-d), pour un verre très désordonné b-e) et dans un verre quasi-ordonné c-f).

(figure 2.11a) et des pics de Bragg (fonction  $\delta$  de *Dirac*) apparaissent au niveau des vecteurs réciproques  $K$  (figure 2.11d). Dans un verre très désordonné  $C_K(r) \rightarrow 0$  rapidement et l'ordre parfait est perdu (décroissance exponentielle par exemple, voir figure 2.11b), les pics dans le facteur de structure ont une hauteur finie (leur largeur à mi-hauteur est liée à la vitesse de la décroissance de  $C_K(r)$  et donc à la longueur caractéristique au delà de laquelle l'ordre translationnel est perdu) comme le montre la figure 2.11e. Dans un verre quasi-ordonné  $C_K(r)$  décroît en loi de puissance (figure 2.11c) et les pics dans  $S(q)$  sont divergents mais ne sont plus des fonctions de *Dirac*  $\delta$  (figure 2.11f) : c'est ce que l'on appelle un *quasi-ordre à grande distance*.

### Retour au modèle de Larkin

Revenons maintenant au modèle de *Larkin* défini plus haut, nous obtenons pour la fonction de corrélation des déplacements relatifs

$$B(r) = r_f^2 \left( \frac{r}{L_c} \right)^{4-d} \quad (2.28)$$

où la longueur de *Larkin*  $L_c$  représente la distance entre deux vortex dont le déplacement relatif est de l'ordre de la longueur de corrélation du potentiel aléatoire  $r_f$ , *i.e.*  $u(L_c) - u(0) \sim r_f$ . On peut déterminer la valeur de cette longueur  $L_c$  par des arguments d'échelle en égalant l'énergie élastique  $E_{el} \sim c L_c^{d-2} r_f^2$  à l'énergie liée au désordre  $E_{dis} \sim \epsilon L_c^{d/2}$  où  $\epsilon$  est une énergie potentielle caractéristique et  $c$  la constante élastique. On trouve alors

$$L_c = \left( \frac{c^2 r_f^4}{\epsilon^2} \right)^{\frac{1}{4-d}} \quad (2.29)$$

A partir de la longueur de *Larkin* nous pouvons également retrouver la valeur de la force critique  $F_c$  (cf. équation (1.11)) qu'il est nécessaire d'appliquer au réseau afin de le dépiéger. Il suffit d'égaliser l'énergie élastique d'un domaine de *Larkin* de taille  $L_c$  au travail  $\int d^d r F_{ext} u(r)$  fourni par la force extérieure  $F_{ext}$  qui équivaut alors à  $F_c$ . On trouve alors

$$F_c \sim \frac{c r_f}{L_c^2} \quad (2.30)$$

A partir de l'équation (2.28) on voit que pour  $d < 4$  les déplacements relatifs augmentent comme une puissance de la distance et on en déduit donc que la présence d'un faible désordre détruit l'ordre translationnel à grande distance du réseau de vortex en dessous d'une dimension  $d = 4$ . Ainsi dès qu'on plonge un cristal parfait (tel que le réseau d'Abrikosov) dans un désordre extérieur, ce dernier détruit l'ordre parfait du cristal et il ne peut plus exister en tant que tel : le désordre est donc pertinent en dessous de  $d < 4$ . Le fait que les expériences soient réalisées exclusivement pour  $d < 4$  amène donc à se poser la question essentielle de la nature de cette phase désordonnée.

Suite à ce modèle de *Larkin* et pendant longtemps il a été pensé que cette croissance algébrique des déplacements relatifs impliquait la destruction du cristal sous la forme de cristallites de taille  $L_a$  au delà desquelles l'ordre positionnel était perdu (où  $L_a$  est définie comme étant la longueur pour laquelle les déformations relatives deviennent du même ordre de grandeur que le pas du réseau  $a_0$ , *i.e.*  $|u(L_a) - u(0)| \sim a_0$ ), avec l'apparition de défauts topologiques au niveau de  $L_a$ . Bien que séduisante cette idée a été mise à mal par diverses expériences effectuées par la suite : nous pouvons citer par exemple le fait que la diffusion de neutrons présentait un ordre positionnel plus intense que prévu avec l'apparition de pics de Bragg (voir image de gauche de la figure 2.12), ou encore les expériences de décorations de Bitter présentant de très grandes régions sans aucune dislocation (l'ordre y est topologiquement parfait mais pas parfaitement cristallin, c'est-à-dire que les déformations par rapport au cristal parfait sont relativement faibles, voir les images du milieu et de droite de la figure 2.12).

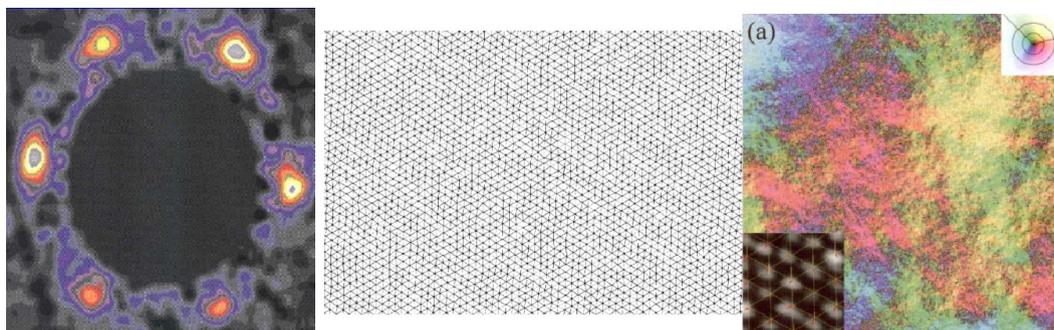


FIGURE 2.12 – Image de gauche : pics de Bragg de la diffraction de neutrons, les 6 pics du réseau triangulaire d’Abrikosov sont nettement visibles [46]. Images de droite et du milieu : représentation colorée du champ de déplacement pour une image contenant 37003 vortex sans dislocation (voir [47] pour plus d’informations) et exemple de triangulation de Delaunay d’une décoration sans défaut topologique.

L’image du cristal brisé en cristallites n’est alors plus possible et les effets du désordre sur le réseau de vortex ne sont pas correctement pris en compte. Le modèle de *Larkin* n’est pas valide lorsque l’on commence à sonder des grandes distances.

### 2.3.3 Verre de Bragg

Si l’on veut décrire de façon correcte les réseaux de vortex, les arguments d’échelle et la vision naïve du modèle de *Larkin* ne suffisent plus et il faut utiliser des outils de physique statistique tels que le groupe de renormalisation fonctionnelle (FRG) ou la méthode des répliques couplée à une approche variationnelle. C’est ce qui a été fait par *T. Giamarchi* et *P. Le Doussal* dans [48, 49] où les résultats ont été obtenus dans le cadre d’une théorie élastique en présence d’un désordre de faible intensité pour  $d = 3$ . Il a été trouvé que la fonction de corrélation des déplacements relatifs  $B(r)$  présente en fait trois régimes en fonction de la distance, comme représenté sur la figure 2.13.

Lorsque l’on considère des régions de taille  $0 < r \ll L_c$  le modèle de *Larkin* développé précédemment reste valide, la fonction de corrélation se comporte en loi de puissance telle que  $B(r) \sim r^{4-d}$ , et il n’existe pas d’état métastable dans ce régime qui porte le nom de *régime de Larkin*. Puis lorsque l’on atteint des tailles  $L_c \ll r \ll L_a$ , les déplacements relatifs des vortex varient de  $r_f$  à  $a_0$ . Les vortex explorent alors un potentiel aléatoire indépendant, c’est ce que l’on appelle le *régime de la variété aléatoire* (en référence au cas d’une interface dans un système désordonné). La fonction de corrélation se comporte ici comme  $B(r) \sim r^{2\zeta}$  avec  $\zeta$  l’exposant de rugosité, et les états métastables apparaissent. Et enfin lorsque  $r \gg L_a$  la périodicité du réseau de vortex joue un rôle fondamental, les déplacements relatifs étant du même ordre de grandeur que le pas du réseau  $a_0$ . Deux vortex voisins entrent en compétition pour tirer parti du désordre, cependant il est énergétiquement favorable pour le système de ne pas induire de déplacements plus grands que le pas du réseau sans quoi le coût élastique dépasserait le gain obtenu par le piégeage. Ainsi les déplacements relatifs ne croissent plus en loi de puissance mais bien au contraire très faiblement avec  $B(r) \sim A_d \ln|r|$  où  $A_d$  est une constante dépendant de la dimension

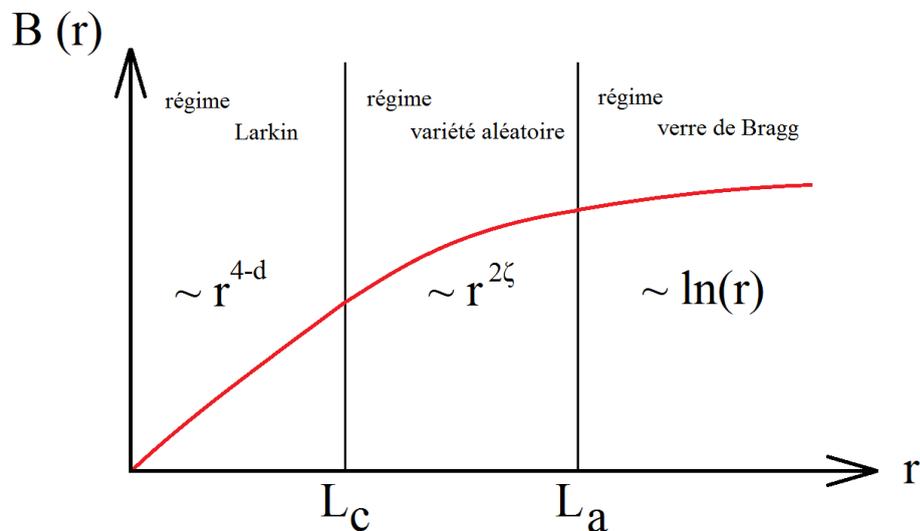


FIGURE 2.13 – Profil de la fonction de corrélation des déplacements relatifs  $B(r)$  pour les trois régimes possibles séparés par  $L_c$  et  $L_a$ , pour plus d'information se référer au texte.

seulement. Ainsi, puisque les déplacements restent de l'ordre de grandeur de  $a_0$  les dislocations n'ont pas lieu d'être et la fonction de corrélation de l'ordre translationnel  $C_K(r)$  décroît non plus exponentiellement mais algébriquement, ce qui implique un *quasi-ordre* à grande distance. Le facteur de structure de cette phase présente des pics de Bragg qui divergent en loi de puissance (cf la figure 2.11f). Il s'agit d'une structure vitreuse possédant de nombreux états métastables séparés par des barrières d'énergie divergentes et appelée par ses auteurs le *verre de Bragg*. Pour plus d'informations et de plus amples détails nous conseillons la lecture de l'article original [49].

Cette phase est donc assez inattendue dans le sens où il s'agit d'une phase vitreuse très ordonné. Cette spécificité vitreuse est détectable notamment dans les propriétés dynamiques comme nous le verrons dans la partie sur le creep par la suite. Elle possède un quasi-ordre à grande distance (à la fois positionnel et orientationnel), et elle ne présente pas de défaut topologique libre (chaque vortex a 6 voisins et le verre de Bragg apparait comme un réseau hexagonal déformé). Le verre de Bragg a été vérifié théoriquement [50, 51, 52], numériquement [53] et expérimentalement [46, 47].

Comme le montre la figure 2.14, le verre de Bragg obtenu en piégeage faible devient un verre désordonné avec des défauts topologiques en piégeage fort, et la fusion de ces deux phases vitreuses vers un liquide de vortex présente des différences, notamment sur l'ordre de la transition. Notons enfin que pour un piégeage colonnaire (un désordre corrélé crée par irradiation du matériau aux ions lourds), la phase vitreuse obtenue est appelée *verre de Bose* [54].

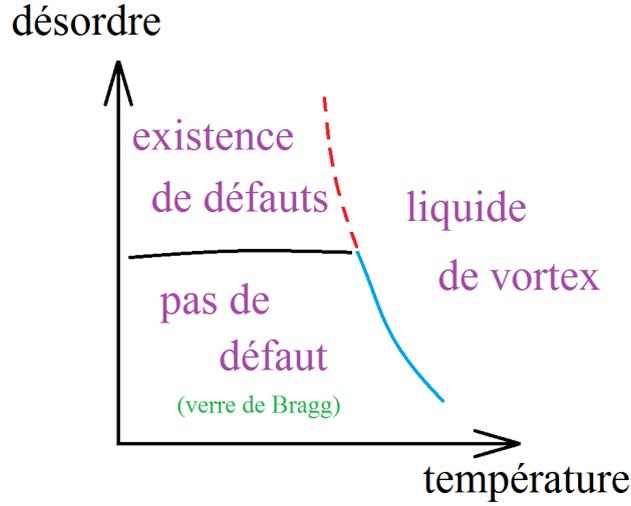


FIGURE 2.14 – Diagramme de phases statique désordre versus température pour le réseau de vortex. La transition de phase du verre de Bragg au liquide de vortex est prévue comme étant du 1er ordre, alors que la transition de phase du verre désordonné au liquide est prévue comme étant du 2nd ordre.

## 2.4 Dynamique des réseaux de vortex

Dans cette partie nous allons nous intéresser à la dynamique des réseaux de vortex mis en mouvement par une force extérieure notée  $F_{\text{ext}}$  que l'on peut relier au courant électrique  $j$  injecté dans l'échantillon supraconducteur et qui va générer une force de Lorentz sur chaque vortex. Nous commençons par une description qualitative de cette dynamique qui est commune avec celle d'autres systèmes élastiques désordonnés comme les interfaces que nous avons déjà décrites en section 1.4.2 du chapitre 1. Puis nous décrirons les différentes phases dynamiques attendues pour les réseaux de vortex.

### 2.4.1 Equation de base de la dynamique

La dynamique est en général choisie sur-amortie (bien que l'on puisse rajouter un terme inertiel) avec un coefficient de friction microscopique  $\eta$ , et l'équation du mouvement du champ de déplacement  $u_i$  de la  $i$ -ème particule par rapport à la position d'équilibre d'un réseau parfait en mouvement est décrit par l'équation

$$\eta \frac{du_i(t)}{dt} = -\frac{\delta \mathcal{H}_{el}}{\delta u_i} - \frac{\delta \mathcal{H}_{des}}{\delta u_i} + F_{\text{ext}} + F_i^{th} \quad (2.31)$$

avec  $F^{th}$  un bruit thermique choisi comme étant un bruit blanc Gaussien,  $\mathcal{H}_{el}$  et  $\mathcal{H}_{des}$  sont les hamiltoniens élastique et de désordre décrits précédemment.

Lorsque l'on trace la courbe vitesse-force à température nulle on peut distinguer trois régimes différents suivant la valeur de la force. Pour une force inférieure à une force critique

$F_c$  le réseau de vortex reste piégé avec une vitesse moyenne nulle  $v = 0$ , lorsque  $F \gtrsim F_c$  le réseau se dépiège et sa mise en mouvement se traduit par une vitesse non nulle (le passage de l'état piégé à celui en mouvement peut être vu comme une transition de phase, cf chapitre 4), et enfin pour des valeurs élevées de force un régime d'écoulement à haute vitesse apparaît.

Lorsque la température présente une valeur finie, le réseau de vortex peut être mis en mouvement pour des valeurs de force  $F < F_c$  grâce à l'activation thermique (c'est ce que l'on nomme le *creep*, voir la section 1.4.2.3). La figure 1.16 représente la courbe  $v(F)$  obtenue et les trois régimes dont nous avons discuté.

### 2.4.2 Diagramme de phase dynamique

Nous avons vu pour le cas statique les phases qui pouvaient exister pour  $d = 3$ . Nous nous intéressons ici à la mise en mouvement des phases vitreuses vues plus haut (verre de Bragg et verre désordonné). Le réseau de vortex une fois mis en mouvement ne se comporte pas comme un cristal parfait, ainsi que cela avait été prédit par des calculs de perturbation en  $1/v$  [55], mais bien au contraire le désordre continue de rester pertinent quelque soit la vitesse et la périodicité dans la direction transverse au mouvement génère un autre type de phase : le verre en mouvement. Dans ce modèle [56, 57] le mouvement des vortex se produit le long de canaux statiques qui présentent une certaine rugosité et le long desquels les vortex se déplacent comme des perles sur un collier.

Nous avons représenté sur la figure 2.15 du haut le diagramme de phase schématique à  $d = 3$  en variables  $(T, \Delta, F)$  (respectivement température, intensité de désordre et force appliquée), et sur la figure du bas différents plans de coupe du diagramme : sur 2.15a)  $T = 0$ , pour 2.15b)  $F$  a été choisie de telle sorte que la valeur de la vitesse soit finie, quant à 2.15c) une faible valeur de désordre a été choisie. Toutes ces figures ont été extraites de l'article [57].

Comme nous pouvons le voir sur la figure 2.15a), pour de faibles valeurs du désordre et de la force d'entraînement la phase résultante est le verre de Bragg décrit précédemment. Lorsque la force appliquée augmente le système se dépiège et devient un verre de Bragg en mouvement. Quand l'intensité du désordre est plus élevée, le verre de Bragg (pour des faibles valeurs de  $F$ ) se transforme en un verre désordonné où des défauts topologiques apparaissent. Lorsque la force appliquée augmente ce verre désordonné va passer par différentes phases en fonction de  $F$  : tout d'abord un flot plastique filamentaire (où les dislocations sont très nombreuses et rendant ainsi la description élastique du réseau de vortex invalide) puis un verre transverse en mouvement. Il n'y a pas encore de prédiction définitive pour la zone carrée proche de  $F_c$ .

Nous ne tentons pas de décrire en détail toutes ces phases, et renvoyons le lecteur à la lecture de l'article pour de plus amples informations, néanmoins nous allons préciser brièvement deux phases en particulier : le verre de Bragg en mouvement et le verre transverse en mouvement.

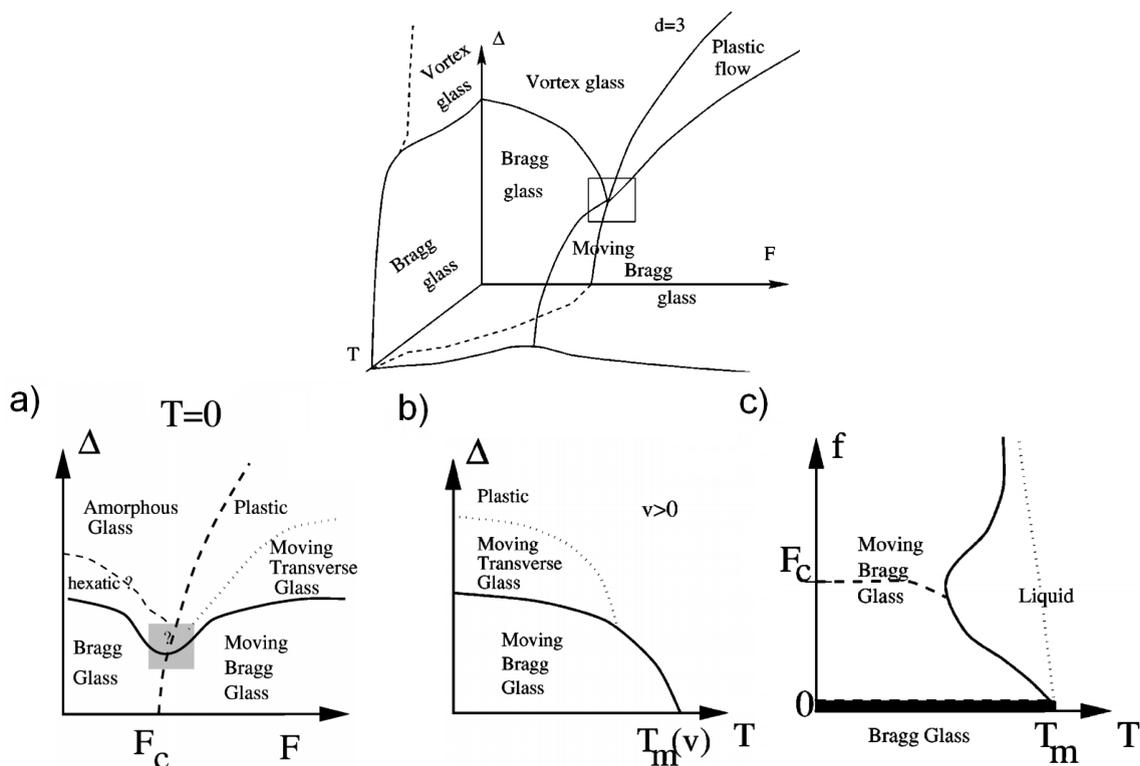


FIGURE 2.15 – Image du haut : Diagramme de phase schématique en température  $T$ , désordre  $\Delta$  et force  $F$  pour  $d = 3$ . Image du bas : coupes du diagramme précédent suivant différents plans permettant d'afficher des phases intermédiaires non affichées sur le diagramme  $(T, \Delta, F)$ . Ces figures sont tirées de l'article [57].

### Verre de Bragg et verre transverse en mouvement

Faisant suite à l'existence du verre de Bragg statique, montré dans la section précédente, le verre de Bragg en mouvement est donc la phase obtenue pour le système lorsque ce dernier présente un désordre ponctuel de faible intensité et que la force d'entraînement dépasse la valeur critique  $F_c$  de dépiégeage. Au sein de ce verre la fonction de corrélation des déplacements transverses croît logarithmiquement au-delà d'une certaine longueur caractéristique et un quasi-ordre à grande distance survit dans le verre de Bragg en mouvement comme pour le cas statique. Les vortex se déplacent le long de canaux statiques rugueux (*i.e.* la trajectoire des vortex au sein d'un même canal n'évolue pas au cours du temps et ce canal n'est pas une ligne droite) dans la direction de la force d'entraînement et ces canaux sont corrélés dans la direction perpendiculaire au mouvement ce qui veut dire que les vortex de deux canaux voisins se déplacent avec la même vitesse moyenne. L'ordre topologique dans ce verre de Bragg en mouvement y est donc conservé.

Quant au verre transverse en mouvement il apparaît pour une intensité de désordre plus élevée que dans le cas du verre de Bragg en mouvement. Les vortex se déplacent toujours au sein de canaux statiques cependant ces derniers sont découplés impliquant de ce fait

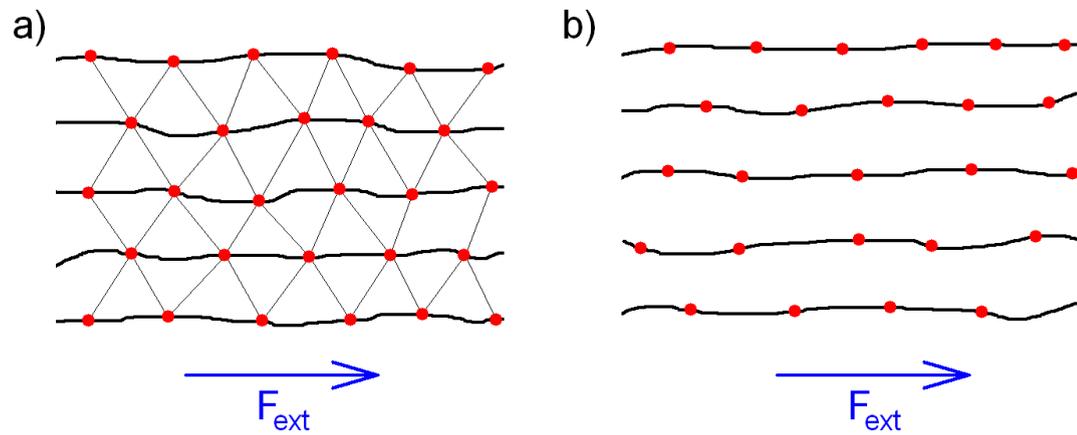


FIGURE 2.16 – Représentation schématique d’une coupe bidimensionnelle d’un réseau de vortex  $3D$  où les points noirs correspondent aux vortex et les lignes aux canaux statiques : a) verre de Bragg en mouvement où les canaux sont couplés et où il n’existe pas de défaut topologique libre (une triangulation de Delaunay a été représentée en trait fin noir), b) verre transverse en mouvement où les canaux sont découplés et des défauts topologiques entre les canaux existent. La force d’entraînement est également dessinée.

une vitesse moyenne différente d’un canal à un autre. Un ordre transverse smectique existe mais des défauts topologiques vont être créés et détruits au cours du mouvement à cause de ce découplage des canaux.

Ces situations ont pu être observées expérimentalement [58, 59] et numériquement [60, 61]. Deux images illustrant ces observations sont présentées sur les figures 2.16 et 2.17.

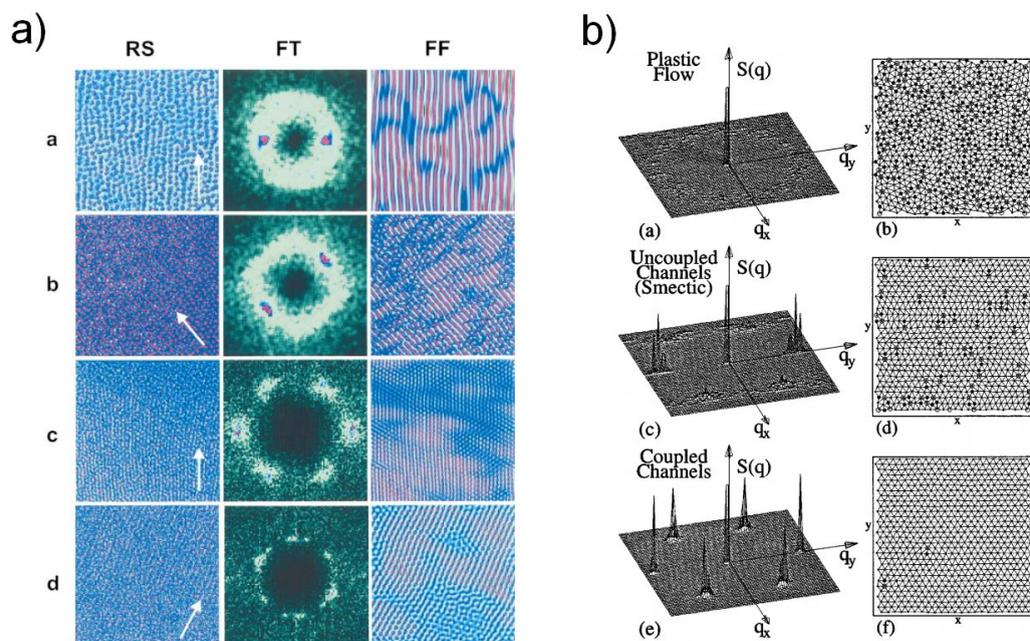


FIGURE 2.17 – a) Image expérimentale tirée de l'article [59] d'un réseau de vortex, pour différentes valeurs de champ magnétique (que l'on peut relier au désordre) et de vitesses. Le réseau est représenté dans l'espace réel (colonne RS), sa transformée de Fourier (colonne FT) et son filtrage par Fourier (colonne FF) sont également présentés. La flèche blanche indique la direction du mouvement. En fonction des paramètres appliqués on observe le verre transverse en mouvement au niveau des lignes *a* et *b*, alors que le verre de Bragg en mouvement est observé au niveau des lignes *c* et *d*. b) Image du facteur de structure  $S(q)$  (a,c,e) et triangulation de Delaunay (en b,d,f) pour différentes interactions vortex-vortex et force d'entraînement, image extraite de la simulation [60]. Outre le flot plastique pour lequel le facteur de structure présente un comportement caractéristique d'un liquide avec un anneau autour du vecteur réciproque (a) et la multitude de défauts observables dans la triangulation sous la forme de cercles (b), on remarque en fonction des différents jeux de paramètres un régime de canaux découplés (*i.e.* le verre transverse en mouvement) en (c-d) avec des pics smectiques dans  $S(q)$ , et un autre régime dans lequel les canaux sont couplés en (e-f) où la triangulation ne présente pas de défaut libre et où  $S(q)$  présente 6 pics.



## Chapitre 3

# Simulations numériques

*« If builders built buildings the way programmers write programs, then the first woodpecker that came along would destroy civilization. »*

WEINBERG'S SECOND LAW, Gerald M. Weinberg

*« It's not a bug, it's an undocumented feature. »*

MURPHY'S COMPUTERS LAWS

*« It is easier to change the specification to fit the program than vice versa. »*

EPIGRAMS ON PROGRAMMING - 57TH, Alan J. Perlis

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous décrivons les moyens numériques utiles à notre étude du dépiégeage des réseaux de vortex. Nous rappelons dans un premier temps des généralités sur les simulations numériques pour des systèmes à grand nombre de particules, puis nous présenterons les ingrédients nécessaires à notre étude du réseau de vortex à travers une description des différentes forces s'exerçant sur les vortex, et enfin nous parlerons brièvement du programme de dynamique moléculaire choisi pour intégrer les équations du mouvement.

### 3.2 Généralités sur les simulations de systèmes à plusieurs particules

#### 3.2.1 Préliminaires

Par le passé le domaine des sciences physiques a joui de l'interaction mutuelle entre la théorie d'une part, où le système que l'on veut décrire est modélisé par des équations mathématiques basées sur des hypothèses ou des postulats, et les expériences d'autre part permettant ainsi d'effectuer des mesures sur le système et par la même occasion de confirmer ou d'infirmer la validité du modèle théorique. Les modèles théoriques ne peuvent être en général testés de façon exacte que sur des cas relativement simples, et dès lors que la

### 3.2. GÉNÉRALITÉS SUR LES SIMULATIONS DE SYSTÈMES À PLUSIEURS PARTICULES

---

situation physique commence à sortir des sentiers battus des approximations plus ou moins drastiques sont nécessaires pour arriver à décrire correctement le comportement du système physique.

Cependant avec l'arrivée des ordinateurs depuis la seconde moitié du *XX*<sup>ème</sup> siècle, un nouveau moyen d'étudier les systèmes complexes est apparu. Les approximations faites aux modèles théoriques sont moins brutales qu'auparavant et dépendent principalement de la puissance de calcul des machines construites. En effet d'un point de vue théorique lorsque l'on connaît tous les ingrédients nécessaires à la description du phénomène (interactions, potentiels, etc ...), alors l'algorithme de calcul permet de connaître à tout instant la position, la vitesse et l'accélération de tous les constituants du système. Une représentation exacte du phénomène est ainsi théoriquement possible (du moins pour le cas de systèmes déterministes), néanmoins lorsque l'on traite des systèmes comportant une immense quantité de particules (n'oublions pas que dans une mole il y a  $\mathcal{N}_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  atomes, soit six cent mille milliards de milliards d'atomes) alors les temps de calculs vont rendre toute tentative de simulation impossible à moins d'utiliser des approximations raisonnables et de faire attention à la complexité de l'algorithme utilisé.

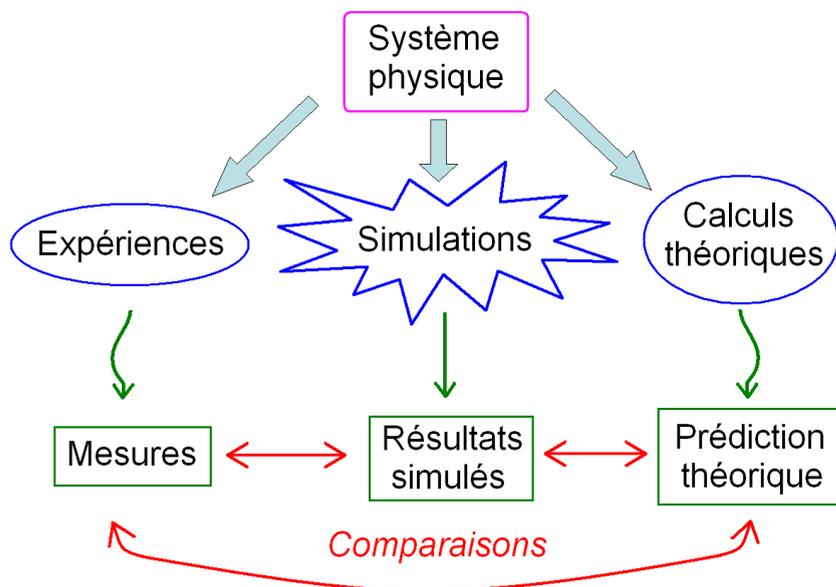


FIGURE 3.1 – Schéma de l'interaction entre les expériences et la théorie, les simulations numériques permettant de faire un lien entre ces deux approches.

Les simulations sont à mi-chemin entre le modèle théorique, qu'il peut valider ou invalider suivant les résultats simulés, et l'expérience dont il peut se rapprocher en introduisant des valeurs physiques réalistes aux paramètres du modèle testé. Les simulations numériques sont donc un pont entre les expériences et les théories, comme illustré schématiquement sur la figure 3.1.

Les simulations numériques regroupent différentes techniques numériques. Nous trai-

## 3.2. GÉNÉRALITÉS SUR LES SIMULATIONS DE SYSTÈMES À PLUSIEURS PARTICULES

---

tons les vortex comme des particules (par abus de langage nous parlerons même parfois d'atomes) pouvant interagir entre elles. La technique utilisée fera donc partie du cadre des simulations atomistiques, cette dernière regroupant plusieurs types de simulations dont par exemple les méthodes de dynamique moléculaire, les méthodes de Monte-Carlo, les méthodes *ab-initio*, etc ...

### 3.2.2 La dynamique moléculaire

Notre choix se porte sur la dynamique moléculaire qui permet de simuler le mouvement de nombreuses particules et de suivre leur évolution dans le temps. Pour cela il faut intégrer les équations du mouvement de chaque atome repéré par sa position  $\vec{r}_i$ . En dynamique moléculaire les lois de la mécanique classique décrites par *Newton* sont utilisables et il faut donc intégrer le jeu des  $N$  équations suivantes (avec  $i = 1, \dots, N$  et  $N$  le nombre de particules)

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i(\vec{r}_i, t) \quad (3.1)$$

où  $\vec{F}_i$  correspond à la force totale exercée sur la particule  $i$ . Numériquement nous ne pouvons pas traiter des éléments infinitésimaux et il est donc nécessaire d'intégrer sur des pas de temps finis. Le choix du pas de temps  $\Delta t$  est important puisque s'il est pris trop grand les déplacements des particules risquent d'être grands par rapport aux longueurs caractéristiques du problème. Si le pas de temps est choisi trop petit alors les temps de calcul deviennent trop importants. Le pas de temps à choisir est donc un compromis entre ces deux possibilités et notre critère de choix sera typiquement le suivant : la distance parcourue par un vortex en un pas de temps doit être inférieure à la plus petite distance caractéristique du système (correspondant au rayon des pièges  $r_p$  par la suite). A paramètres fixés, le pas de temps optimal sera donc affiné à la main en effectuant plusieurs essais avec des valeurs différentes de  $\Delta t$ .

Ainsi l'intégration numérique permet d'accéder à la quantité  $\Delta \vec{r}$  dont s'est déplacée chaque particule pendant le temps  $\Delta t$ . Le temps évolue de façon discrète dans la simulation et l'erreur commise entre la solution exacte et la solution numérique va dépendre de la façon dont on intègre l'équation du mouvement, c'est-à-dire de l'algorithme. Le choix d'un algorithme stable et efficace est nécessaire afin d'optimiser le temps de calcul. Pour cela nous utilisons l'algorithme de *Velocity-Verlet* : basé sur l'algorithme de *Verlet* [62], il en est une version améliorée où les positions, les vitesses et les accélérations au temps  $t + \Delta t$  sont obtenues à partir des mêmes quantités au temps  $t$  de la façon suivante,

## 3.2. GÉNÉRALITÉS SUR LES SIMULATIONS DE SYSTÈMES À PLUSIEURS PARTICULES

---

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t + \frac{\vec{a}(t)}{2}(\Delta t)^2 \quad (3.2a)$$

$$\vec{v}(t + \frac{\Delta t}{2}) = \vec{v}(t) + \frac{\vec{a}(t)}{2}\Delta t \quad (3.2b)$$

$$\vec{a}(t + \Delta t) = \frac{\vec{F}(\vec{r}(t + \Delta t))}{m} \quad (3.2c)$$

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t + \frac{\Delta t}{2}) + \frac{\vec{a}(t + \Delta t)}{2}\Delta t \quad (3.2d)$$

La nouvelle position  $\vec{r}(t + \Delta t)$  est calculée selon (3.2a), puis la vitesse à mi-pas de temps est calculée via (3.2b) et enfin on calcule la nouvelle vitesse  $\vec{v}(t + \Delta t)$  en (3.2d) en utilisant l'accélération définie par (3.2c). Il suffit donc de connaître les conditions initiales pour commencer à intégrer l'équation du mouvement. Notons que le schéma d'intégration est du second ordre, c'est-à-dire que l'erreur associée à la vitesse est  $\mathcal{O}((\Delta t)^3)$ . Dans une simulation de dynamique moléculaire la partie qui consomme le plus de temps du processeur (appelé temps CPU, *i.e.* le temps passé par le programme sur le processeur) est le calcul des forces, *i.e.* le calcul de l'accélération. Cependant avec notre schéma d'intégration pour chaque pas de temps on n'évalue qu'une seule fois l'accélération, c'est pourquoi cet algorithme est l'un des plus utilisés en dynamique moléculaire.

Un code de dynamique moléculaire est une procédure qui se boucle de la façon suivante : on commence par se donner des conditions initiales  $\vec{r}(t = 0)$  et  $\vec{v}(t = 0)$ , on choisit ensuite le pas de temps  $\Delta t$ , puis on calcule les forces au temps  $t$  et on en déduit l'accélération au temps  $t$ , après quoi on applique l'algorithme choisi pour faire avancer les particules (c'est-à-dire résoudre numériquement les équations du mouvement), et enfin on incrémente le temps pour calculer la force à ce nouveau temps  $t + \Delta t$ , et on boucle autant de fois que nécessaire.

### 3.2.3 Cellule de simulation

#### Conditions aux limites périodiques

L'intérêt d'une simulation est souvent de tenter de simuler les propriétés de volume d'un système macroscopique, cependant ce dernier contient un nombre de particules proche de la valeur de  $\mathcal{N}_A \approx 10^{23}$  : quelque soit la quantité de particules que nous incorporons dans une simulation (jusqu'à  $10^6$  pour certaines simulations de dynamique moléculaire) nous n'arriverons jamais à reproduire un système physique réel. Dans un système macroscopique les particules sont situées principalement en volume et elles sont beaucoup moins nombreuses près de la surface, néanmoins plus le nombre de particules simulées est faible et plus les effets de surface induits par les particules proches de la surface seront prédominants sur les effets de volume qui nous intéressent. Ainsi pour résoudre ce double problème de faible nombre de particules et d'effets de bords, nous utilisons des conditions aux limites périodiques.

### 3.2. GÉNÉRALITÉS SUR LES SIMULATIONS DE SYSTÈMES À PLUSIEURS PARTICULES

---

En effet dans une simulation on définit l'espace dans lequel les particules se déplacent par une cellule de simulation dont les axes sont en général orthogonaux (bien qu'on puisse les choisir non orthogonaux en fonction de ce que l'on veut simuler, ce ne sera pas notre cas ici). Prenons l'exemple d'une simulation à 3 dimensions, les particules existent dans une boîte définie par 3 axes et de volume  $V = L_x L_y L_z$  où  $(L_x, L_y, L_z)$  représentent respectivement la longueur de la boîte dans les directions  $(x, y, z)$ . L'application des conditions aux limites périodiques sur cette cellule de simulation a pour effet de reproduire dans les 3 directions de l'espace cette boîte par translation afin de paver tout l'espace. Dans cette situation les particules des boîtes reproduites sont considérées comme des images des particules de la boîte initiale, et elles se déplacent à l'identique par rapport à ces dernières. Ainsi pour toute particule sortant de la cellule initiale par un côté, une de ses images rentre par l'autre côté (voir le schéma 3.2).

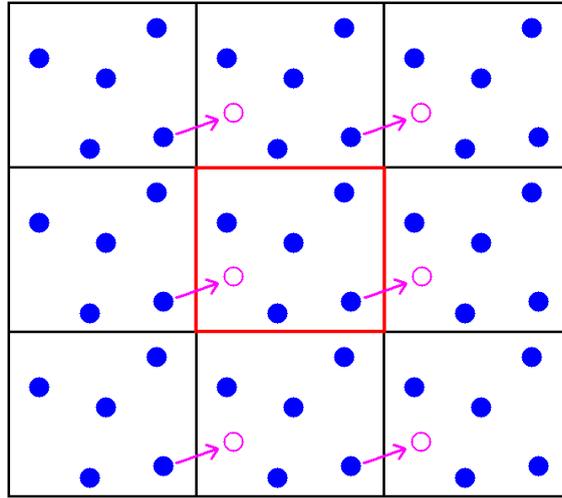


FIGURE 3.2 – Schéma d'une cellule de simulation (au centre) et ses images par application des conditions aux limites périodiques : une particule sortant de la cellule initiale par la droite "réentre" par la gauche via une de ses images. Le cas à  $2D$  est représenté pour plus de facilité, l'extension à  $3D$  est immédiate.

Par cette méthode, du point de vue de la cellule initiale aucune particule n'est perdue et les effets de bords ne sont pas pertinents, par conséquent on représente de façon relativement correcte les propriétés de volume d'un système physique avec peu de particules. Certains effets de taille finie continuent néanmoins d'exister et des méthodes de lois d'échelles peuvent être utilisées pour s'en débarrasser comme nous le verrons dans le chapitre 4.

#### Convention d'image minimale

Ces conditions aux limites périodiques entraînent par contre une difficulté au niveau du calcul des interactions. Chaque particule va interagir avec ses voisines au sein de la boîte de simulation mais va également interagir avec les images des particules et le nombre de paires de particules en interaction va devenir très grand. En réalité, et comme nous le verrons

## 3.2. GÉNÉRALITÉS SUR LES SIMULATIONS DE SYSTÈMES À PLUSIEURS PARTICULES

---

pour notre cas, les potentiels d'interaction sont souvent de courte portée et en posant  $r_{\text{cut}}$  le rayon de cut-off du potentiel (indiquant la distance au-delà de laquelle les interactions entre deux particules sont suffisamment négligeables pour ne plus être considérées) alors il suffit d'avoir une boîte de simulation qui soit plus grande que  $2r_{\text{cut}}$  dans toutes les directions de l'espace afin de s'affranchir de ce problème. En effet cette astuce implique que pour une particule dans la cellule de simulation il n'est nécessaire que de calculer l'interaction avec les images les plus proches et d'oublier les autres images, réduisant de ce fait le niveau de complexité introduit par les conditions périodiques. Notons que dans le cas d'interactions à longue portée il existe des techniques pour calculer ces interactions telle que la sommation d'*Ewald*.

### 3.2.4 Troncature du potentiel et liste de voisins

#### Cut-off du potentiel

Comme précisé auparavant lorsque le potentiel d'interaction est de courte portée il est utile de limiter la région de l'espace dans laquelle on évalue les interactions afin de ne pas gaspiller du temps de calcul. Pour cela on a introduit le rayon de cut-off  $r_{\text{cut}}$  au-delà duquel les interactions sont considérées comme nulles, l'énergie d'interaction subit donc une discontinuité à  $r_{\text{cut}}$  et la force présente alors une divergence. Cette soudaine accélération que subissent les particules entraîne une instabilité lors de la résolution des équations du mouvement. L'idée est alors d'introduire des fonctions adoucies qui vont annuler continûment le potentiel et la force à zéro : on décale le potentiel et la force d'une certaine quantité ce qui va garantir la nullité de l'énergie potentielle et de la force à  $r_{\text{cut}}$  et donc permettre une transition douce entre les régions à l'intérieur et à l'extérieur du rayon de cut-off. Mathématiquement cela s'écrit de la façon suivante,

$$U^{(sfp)}(r_{ij}) = \begin{cases} U(r_{ij}) - U(r_{\text{cut}}) + (r_{ij} - r_{\text{cut}})F(r_{\text{cut}}) & r_{ij} < r_{\text{cut}} \\ 0 & r_{ij} \geq r_{\text{cut}} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$F^{(sfp)}(r_{ij}) = \begin{cases} F(r_{ij}) - F(r_{\text{cut}}) & r_{ij} < r_{\text{cut}} \\ 0 & r_{ij} \geq r_{\text{cut}} \end{cases} \quad (3.4)$$

avec  $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  la distance séparant deux particules,  $U(r_{ij})$  le potentiel entre deux corps, et la force est définie par  $F(r) = -\frac{dU(r)}{dr}$ .

#### Liste de voisins

Toujours dans l'optique de diminuer le temps de calcul des simulations, et en se souvenant que calculer les forces entre les paires de particules est la partie la plus chronophage, il existe une technique couramment utilisée dans les codes de dynamique moléculaire qui se nomme la liste de voisins. Puisque relativement peu de particules doivent être considérées lors du calcul d'interaction grâce au cut-off du potentiel, il est inutile de tester à chaque pas de temps les paires telles que  $r_{ij} < r_{\text{cut}}$  parmi toutes les paires possibles, et ce d'autant plus lorsque la simulation contient une grande quantité de particules. Développée à l'origine dans [62], la technique de la liste de voisins consiste à créer une liste de paires de particules

### 3.3. MODÈLE NUMÉRIQUE DES RÉSEAUX DE VORTEX

dans laquelle à un pas de temps donné sont conservées les paires avec  $r_{ij} < r_{\text{cut}} + r_{\text{skin}}$ , où  $r_{\text{skin}}$  est l'épaisseur de peau qui sert de "réservoir" de particules pouvant interagir aux pas de temps suivants (c'est-à-dire se trouver à une distance inférieure à  $r_{\text{cut}}$ ). Ainsi seules les particules contenues dans cette liste sont testées afin de savoir si  $r_{ij} < r_{\text{cut}}$ , et la liste est remise à jour lorsque des particules se trouvant en dehors de l'épaisseur de peau ( $r > r_{\text{skin}}$ ) sont rentrées dans le rayon du cut-off ( $r < r_{\text{cut}}$ ). La valeur de  $r_{\text{skin}}$  dépendra des paramètres de la simulation et sa valeur optimale résulte d'un compromis entre une plus rare actualisation de la liste lorsque  $r_{\text{skin}}$  est grande, et un plus grand nombre de calculs d'interaction à cause du nombre de particules à prendre en compte qui est plus important (en règle générale  $r_{\text{skin}} < r_{\text{cut}}$ ). On peut remarquer que lorsque les particules conservent un voisinage assez constant dans le temps (c'est par exemple le cas pour les vortex dans une dynamique élastique où les vortex voisins ne changent pas) alors la fréquence de mise à jour de la liste peut être réduite et donc un gain de temps est possible. Nous avons représenté sur la figure 3.3 les différentes quantités apparaissant dans une liste de voisins.

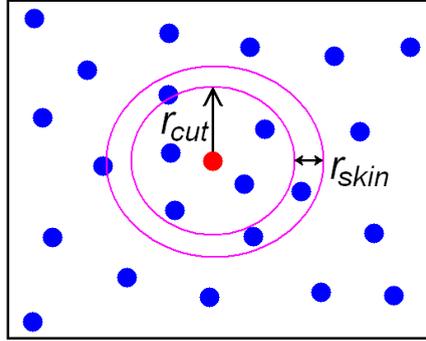


FIGURE 3.3 – Représentation visuelle d'une liste de voisin avec une particule test (en gris) et les deux quantités permettant de définir cette liste :  $r_{\text{cut}}$  le cut-off du potentiel et  $r_{\text{skin}}$  l'épaisseur de peau.

Nous avons présenté les grandes lignes directrices utilisées dans les codes de dynamique moléculaire et ne tentons pas d'en faire une étude détaillée, pour plus d'informations nous conseillons la lecture des livres [63, 64] portant sur ce sujet.

## 3.3 Modèle numérique des réseaux de vortex

### 3.3.1 Équation du mouvement

Nous nous intéressons à la dynamique élastique des réseaux de vortex supraconducteurs à  $2D$ . Modélisons à température finie les vortex comme  $N_v$  particules ponctuelles interagissant entre elles et avec  $N_p$  pièges représentant les défauts répartis aléatoirement au sein du matériau dans le plan  $(x, y)$ . Les forces s'exerçant sur chaque vortex sont donc :

- la force d'interaction vortex-vortex, notée  $\vec{F}^{\text{v-v}}$
- la force d'interaction vortex-piège, notée  $\vec{F}^{\text{v-p}}$
- la force extérieure d'entraînement, notée  $\vec{F}^{\text{L}}$
- la force de frottement, notée  $\vec{F}^{\text{frot}}$

### 3.3. MODÈLE NUMÉRIQUE DES RÉSEAUX DE VORTEX

---

– la force de *Langevin* modélisant la température, notée  $\vec{F}^{\text{th}}$

La dynamique newtonienne du réseau de vortex est donc décrite par les  $N_v$  équations suivantes,

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^{\text{rot}} + \vec{F}_i^{\text{v-v}} + \vec{F}_i^{\text{v-p}} + \vec{F}_i^{\text{th}} + \vec{F}_i^{\text{L}} \quad (3.5)$$

Pour l'interaction entre vortex nous utiliserons la limite de *London* du modèle de *Ginzburg-Landau* définie au chapitre précédent en prenant  $\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi_s} = 90$  (pour rappel, dans cette limite  $\kappa \gg 1$  i.e.  $\lambda_L \gg \xi_s$  avec  $\lambda_L$  la longueur de pénétration et  $\xi_s$  la longueur de cohérence, les vortex sont ainsi traités comme des particules ponctuelles et nous prendrons comme distance moyenne entre les vortex  $a_0 = \lambda_L$ ).

#### 3.3.2 Types d'interactions

##### Interaction vortex-vortex

Le potentiel d'interaction de paire entre deux vortex rigides est donné par une interaction de *Bessel* modifiée (voir chapitre 2),

$$U^{\text{v-v}}(r_{ij}) = \alpha_v K_0 \left( \frac{r_{ij}}{\lambda_L} \right) \quad (3.6)$$

où  $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  est la distance entre les vortex  $i$  et  $j$  placés respectivement en  $\vec{r}_i$  et  $\vec{r}_j$ , et  $\alpha_v$  l'intensité de l'interaction choisie par la suite telle que  $\alpha_v = 2.83 \cdot 10^{-3} \lambda_L \epsilon_0$  avec  $\epsilon_0 = \left( \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L} \right)^2$  une énergie caractéristique par unité de longueur, comme dans [65]. Notons que cette interaction est répulsive quelque soit la distance et que l'énergie diverge à l'origine impliquant que deux vortex ne peuvent pas s'interpénétrer.

Ce potentiel à deux corps peut donc s'écrire comme une somme d'interactions de paires entre les particules  $i$  et  $j$  situées en  $\vec{r}_i$  et  $\vec{r}_j$ , et la force subie par le vortex  $i$  s'écrit

$$\vec{F}_i^{\text{v-v}} = - \sum_{j \neq i}^{N_v} \vec{\nabla}_i U^{\text{v-v}}(r_{ij}) \quad (3.7)$$

Le terme  $\vec{\nabla}_i$  est le gradient à deux dimensions agissant dans le plan  $(x, y)$  sur la position  $\vec{r}_i$ .

##### Interaction vortex-piège

Le potentiel d'interaction vortex-piège (ou potentiel de piégeage), est choisi comme étant un potentiel attractif Gaussien,

$$U^{\text{v-p}}(r_{ip}) = -\alpha_p e^{-\left(\frac{r_{ip}}{R_p}\right)^2} \quad (3.8)$$

### 3.3. MODÈLE NUMÉRIQUE DES RÉSEAUX DE VORTEX

---

où  $r_{ip} = |\vec{r}_{ip}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_p|$  est la distance entre le vortex  $i$  et le piège se trouvant en  $\vec{r}_p$ , et  $R_p$  est le rayon des pièges choisi tel que  $R_p = 0.22\lambda_L$ . Le préfacteur  $\alpha_p$  est un paramètre que l'on pourra faire varier librement afin d'obtenir différentes intensités de piégeage. La force d'interaction vortex-piège est donc obtenue en sommant les contributions possibles provenant des  $N_p$  pièges,

$$\vec{F}_i^{\text{v-p}} = - \sum_p^{N_p} \vec{\nabla}_i U^{\text{v-p}}(r_{ip}) \quad (3.9)$$

La position des  $N_p$  pièges est choisie au hasard et de façon indépendante. Notons que la génération de nombres aléatoire n'est jamais réellement possible puisque basée sur une méthode algorithmique et nous allons utiliser des nombres pseudo-aléatoires obtenus par des générateurs congruentiels linéaires. Ces générateurs créent une série de nombres à partir d'une valeur initiale, appelée *graine*, et où chaque terme dépend du précédent par la relation de récurrence  $I_{j+1} = aI_j + c \pmod{m}$  avec  $m$  le module,  $a$  le multiplicateur et  $c$  l'incrément. Le choix de ces paramètres est crucial puisque les termes de cette série sont compris entre 0 et  $m - 1$  et vont donc être rapidement périodiques si  $m$  est faible. Notons également que cette série sera toujours identique pour chaque valeur de graine fixée. Nous utilisons ainsi une fonction introduite dans [66] appelée *ran2()* qui permet de nous retourner des valeurs (entre 0 et 1) avec une égale probabilité, et qui possède une période longue (supérieure à  $2 \times 10^{18}$ ).

#### Force extérieure d'entraînement

En faisant passer un courant dans le supraconducteur, et en supposant que la densité de courant  $\vec{j}$  appliquée est homogène, il existe alors une force par unité de longueur (appelée force de *Lorentz*) qui est appliquée de façon identique sur chaque vortex et donnée par l'expression suivante

$$\vec{F}^{\text{L}} = \vec{j} \times \vec{\Phi}_0 \quad (3.10)$$

avec  $\vec{\Phi}_0$  le vecteur le long du vortex possédant un quantum de flux magnétique.

#### Force de frottement

La mise en mouvement des vortex par la force de *Lorentz* induit une dissipation due aux cœurs des vortex que l'on modélise par une force de frottement visqueux

$$\vec{F}_i^{\text{frot}} = -\eta \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad (3.11)$$

#### Température

Afin de modéliser la température nous introduisons une force fluctuante aléatoire  $\vec{F}_i^{\text{th}}(t)$  décrivant le couplage du système avec un bain thermique. Ce bruit thermique est choisi comme étant un bruit blanc Gaussien c'est-à-dire que la force possède une distribution Gaussienne avec une moyenne nulle

$$\langle F_{i,\lambda}^{\text{th}}(t) \rangle = 0 \quad (3.12)$$

et un second moment

$$\langle F_{i,\lambda}^{\text{th}}(t) F_{j,\mu}^{\text{th}}(t') \rangle = 2\eta k_B T \delta_{ij} \delta_{\lambda\mu} \delta(t - t') \quad (3.13)$$

où les indices latins représentent les vortex, les indices grecs sont les composantes cartésiennes de la force stochastique  $\vec{F}_i^{\text{th}}(t)$  dans le plan  $(x, y)$ ,  $k_B$  est la constante de *Boltzmann* et  $T$  est la température du bain thermique avec lequel le système est couplé. L'ajout de ces deux derniers termes dans l'équation du mouvement amène à une équation différentielle stochastique du type *Langevin*.

### Retour à l'équation du mouvement

Les équations (3.5) donnent donc les équations du mouvement suivantes

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} + \eta \frac{d \vec{r}_i}{dt} = - \sum_{j \neq i}^{N_v} \vec{\nabla}_i U^{v-v}(r_{ij}) - \sum_p^{N_p} \vec{\nabla}_i U^{v-p}(r_{ip}) + \vec{F}^L + \vec{F}_i^{\text{th}}(t) \quad (3.14)$$

Il s'agit d'un modèle  $2D$  de vortex avec des interactions à courtes portées. Ce modèle décrit également des vortex droits  $3D$  dans un paysage de défauts colonnaires. Afin que ces vortex restent rigides et ne puissent par trop fluctuer il faut que la tension de ligne des vortex, identifiée au coefficient de courbure  $c_{44}$  de l'équation (2.22), soit suffisamment grande pour que ces derniers restent alignés avec le champ magnétique lors de leur déplacement. Il faut également que les fluctuations thermiques ne soient pas trop importantes, et que le piégeage ne soit pas trop fort afin de ne pas déformer le vortex.

## 3.4 Programme de dynamique moléculaire LAMMPS

Dans le but d'appliquer un code de dynamique moléculaire pour simuler le dépiégeage des réseaux de vortex à  $2D$  notre choix s'est porté sur le programme *LAMMPS* [67, 68] ("Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator") distribué par *Sandia National Laboratories*, un laboratoire national de recherche dépendant du Département de l'Énergie des États-Unis. Nous présentons rapidement les caractéristiques de cette suite logicielle et les raisons de ce choix.

### 3.4.1 Caractéristiques de LAMMPS

Ce programme est un code de dynamique moléculaire classique qui permet de simuler un ensemble de particules (dans des états solides, liquides ou gazeux, et sur différentes échelles de longueur dont par exemple l'échelle atomique ou mésoscopique) en intégrant les équations de la dynamique Newtonienne. Il permet également de modéliser divers systèmes

dont par exemple des systèmes d'atomes, de polymères, de métaux, granulaires ... Les systèmes modélisables peuvent être  $2D$  ou  $3D$ , différentes conditions aux bords peuvent être appliquées, tout comme une grande variété de forces déjà préexistantes ou à introduire soit même. LAMMPS est distribué comme un code open-source sous les termes GNU Public License (GPL), écrit initialement en Fortran F77 puis F90, il est maintenant développé en C++, il est portable et peut être lancé sur des machines utilisant un système d'exploitation du type Unix, Linux, Mac OS ou Microsoft Windows. Il peut également être facilement modifié suivant les volontés de l'utilisateur.

Ce programme peut être exécuté de façon séquentielle sur des machines de bureau ne possédant qu'un seul processeur, mais également en parallèle sur des machines de calculs lorsque la simulation le demande : en effet LAMMPS peut modéliser des systèmes allant de quelques particules à des millions (voire des milliards) de particules. Quand la quantité de particules devient gigantesque il peut être intéressant d'utiliser le code GPU LAMMPS qui permet d'avoir des résultats plus rapides en exploitant les capacités de calcul des processeurs graphiques (GPU) : en effet le calcul des forces est porté sur les GPU, qui sont beaucoup plus performants que les CPU multi-cœurs de par leur très grande quantité de cœurs, et le processeur peut ainsi s'occuper du reste du code sans être surchargé par ce calcul des forces.

Pour la communication en parallèle LAMMPS utilise la librairie MPI (Message Passing Interface) qui est un standard de communication pour des noeuds exécutant des programmes parallèles sur des systèmes à mémoire distribuée. La technique utilisée pour la parallélisation est de décomposer spatialement le domaine de la simulation en petits sous-domaines qui seront attribués à chaque processeur. Les processeurs communiquent entre eux et stockent les différentes informations concernant les particules se trouvant en bordure de leurs sous-domaines afin d'intégrer correctement les équations du mouvement et de suivre les particules au cours du temps.

Le lancement d'une simulation se fait à travers un script d'entrée qui permet de définir les différents paramètres qui vont être utilisés au sein la simulation (système d'unités, dimension et taille de la cellule de simulation, pas de temps, conditions initiales  $\vec{r}_0$  et  $\vec{v}_0$ , potentiels et forces à appliquer etc ...), mais qui permet aussi de définir les quantités qui devront être sorties à différents moments de la simulation (positions et vitesses des particules, énergies etc ...).

Outre une grande quantité de spécificités liées à la dynamique moléculaire déjà introduite en son sein, LAMMPS possède également une large communauté d'utilisateurs et de développeurs dans différentes branches des sciences physiques mettant à jour continuellement le code source.

#### 3.4.2 Paramètres utilisés

Lors de nos futures simulations concernant le dépiégeage des réseaux de vortex à  $2D$  et dont nous présenterons les résultats dans le chapitre 4, les paramètres suivants seront appliqués : la force extérieure d'entraînement est choisie suivant l'axe  $x$  du plan  $(x, y)$  et s'écrit donc  $\vec{F}^L = F\vec{e}_x$ , la densité de pièges est la même que celle des vortex *i.e.*  $N_p = N_v$

et leur rayon est  $R_p = 0.22\lambda_L$ , le pas du réseau de vortex est  $a_0 = \lambda_L$ .

La position des pièges est fixe, c'est-à-dire qu'ils n'évoluent pas au cours du temps, alors que les vortex pourront se mouvoir librement au sein de la cellule de simulation au gré de leurs différentes interactions. Lors du calcul de l'interaction vortex-vortex, on prend pour la liste de voisins un rayon de cut-off  $r_{\text{cut}} = 6.5\lambda_L$  et une épaisseur de peau  $r_{\text{skin}} = 0.3\lambda_L$ . Pour l'interaction vortex-pièges le cut-off est  $r_{\text{cut}} = 1.1\lambda_L$ . En ce qui concerne la masse des vortex, nous la choisissons de telle sorte que  $\frac{\eta}{m} = 0.1$  ce qui permet à la dynamique Newtonienne du second ordre de se comporter de façon identique à la limite sur-amortie de la dynamique choisie habituellement dans la littérature (nous en reparlerons plus tard au niveau des résultats). Nous prenons un système d'unités dans lequel les quantités apparaissant dans la simulation sont sans dimension et nous posons  $\lambda_L = 1$ ,  $\epsilon_0 = 1$  et  $k_B = 1$ . L'intégration de l'équation du mouvement (3.14) se fait en utilisant un algorithme de Velocity-Verlet. La position initiale des vortex et des pièges ainsi que la taille de la boîte de simulation à  $2D$  sont effectuées en pré-traitement, et la vitesse initiale des vortex est choisie comme étant nulle. La valeur de la force appliquée  $F$  ainsi que la température du bain thermique  $T$  sont également définies dans le script d'entrée. Le pas de temps est pris tel que la distance  $\Delta r$  parcourue par un vortex pendant un pas de temps  $\Delta t$  soit inférieure à la plus petite distance caractéristique du système, *i.e.* le rayon  $R_p$  des pièges. De plus, le choix du pas de temps doit satisfaire à un compromis entre une intégration correcte de la dynamique et un temps de calcul raisonnable.

Pour ce qui est de l'intensité de piégeage nous nous limiterons au cas du piégeage faible, ce qui implique dans notre cas des valeurs de  $\alpha_p$  proches de  $1.5 \cdot 10^{-5}$  (nous verrons en détail les différentes intensités étudiées dans le chapitre suivant). Cependant en ce qui concerne le potentiel entre vortex au lieu d'évaluer l'interaction de *Bessel* qui consomme une quantité de temps non négligeable, nous préférons effectuer une interpolation par intervalles du potentiel qui est plus rapide à évaluer. Cette méthode est couramment appliquée en simulation numérique mais reste une approximation qui sera plus ou moins correcte en fonction du choix des polynômes pris dans chaque subdivision de l'intervalle de définition du potentiel. Nous prendrons des splines cubiques où les polynômes sont de degrés 3, c'est un choix communément adopté puisqu'il permet d'avoir des polynômes de faibles degrés et de limiter le phénomène de *Runge*. Nous subdivisons l'intervalle de définition  $r \in ] 0 ; r_{\text{cut}} [$  en 50000 sous-intervalles.

Deuxième partie

Résultats



## Chapitre 4

# Dépiégeage élastique des réseaux de vortex

### 4.1 Introduction

Nous présentons dans cette partie les résultats concernant notre étude du dépiégeage élastique des réseaux de vortex dans les supraconducteurs de type II. Nous décrivons dans un premier temps le phénomène de dépiégeage et son lien avec les transitions de phase, puis nous discutons des différents types de dépiégeage rencontrés dans les systèmes élastiques désordonnés, et enfin nous exposons nos différents résultats sur les réseaux de vortex à  $2D$  à température nulle et finie.

### 4.2 Transitions de phase et dépiégeage

Dans cette section nous rappelons brièvement en quoi consiste une transition de phase (pour plus d'informations voir par exemple [69]), et le lien avec le dépiégeage. Cet aperçu sera utile lorsque nous présenterons nos résultats.

#### 4.2.1 Généralités sur les transitions de phase

Les transitions de phase sont des phénomènes qui ont lieu couramment dans divers systèmes physiques, elles interviennent lorsque le système subit une transformation provoquée par la variation d'un paramètre extérieur faisant passer le système d'une phase à une autre (ce paramètre dépend du système étudié, il peut être la température, la pression, le champ magnétique, ...). Ces transformations sont variées et peuvent être des changements d'états comme pour le cas de l'eau (fusion, ébullition, ...), de structures cristallines (comme c'est le cas pour le fer  $\alpha$  et le fer  $\gamma$ ), de comportements magnétiques comme on peut en observer dans les ferromagnétiques etc ... Pour chaque système on peut représenter les domaines des différentes phases observées sur un diagramme de phase dont les axes représentent les différents paramètres pertinents (voir la figure 4.1 qui représente le diagramme  $(P, T)$  de

l'eau).

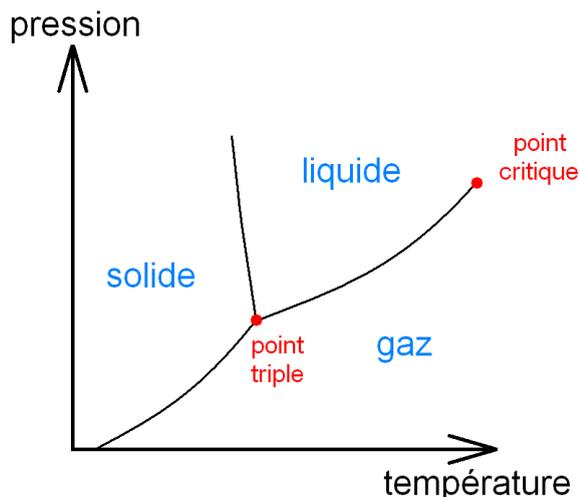


FIGURE 4.1 – Diagramme de phase  $(P, T)$  en pression et température de l'eau montrant le domaine d'existence des trois phases : solide, liquide et gazeux. Notons deux points remarquables : le point triple qui se situe à la jonction entre les trois domaines, et le point critique qui est le point d'arrêt de la frontière entre la phase liquide et gazeuse.

Les paramètres qui pilotent une transition de phase se nomment paramètres de contrôle. Pour un système subissant différentes transitions il y a un paramètre de contrôle associé à chaque transition. Le changement de comportement du système est caractérisé par des observables que l'on nomme paramètres d'ordre. Les transitions de phase présentent des singularités dans les fonctions thermodynamiques, et deux grandes catégories de transitions apparaissent suivant le comportement du paramètre d'ordre.

Les transitions dites de premier ordre présentent des discontinuités dans les grandeurs physiques reliées aux dérivées premières du potentiel thermodynamique (par exemple l'entropie) et ont une chaleur latente. Le paramètre d'ordre présente une discontinuité à la transition ce qui indique que le système est dans les deux phases : il y a coexistence de phase.

Les transitions de phase ne présentant pas de discontinuité au niveau des dérivées premières du potentiel thermodynamique mais au niveau des dérivées secondes, et donc sans chaleur latente, sont appelées transitions du second ordre. Dans ce type de transition il y a un passage continu d'une phase à l'autre sans coexistence des deux. Ce type de transition apparaît au niveau du point critique de la transition liquide/gaz de l'eau (autour duquel il y a passage continûment entre l'état liquide et gazeux), ou bien encore au point de *Curie* de la transition ferromagnétique/paramagnétique.

La classification des différentes transitions en fonction du comportement des potentiels thermodynamiques a été initialement introduite par *P. Ehrenfest*. Elle permet de décrire phénoménologiquement les transitions à partir de concepts thermodynamiques, mais est

insuffisante pour une bonne compréhension de la physique sous-jacente. *L. Landau* a parachevé cette classification en introduisant la notion de symétrie et de paramètre d'ordre, ce dernier étant nul dans la phase la plus désordonnée et non nul dans la phase ordonnée. Le paramètre d'ordre est discontinu pour une transition du premier ordre (au sens d'*Ehrenfest*) et continu sinon (cf la figure 4.2). Dans ce cas les deux phases sont de symétries différentes, on dit qu'il y a brisure spontanée de symétrie du système, d'une phase de haute symétrie (paramètre d'ordre nul) vers une phase de plus basse symétrie (paramètre d'ordre non nul).

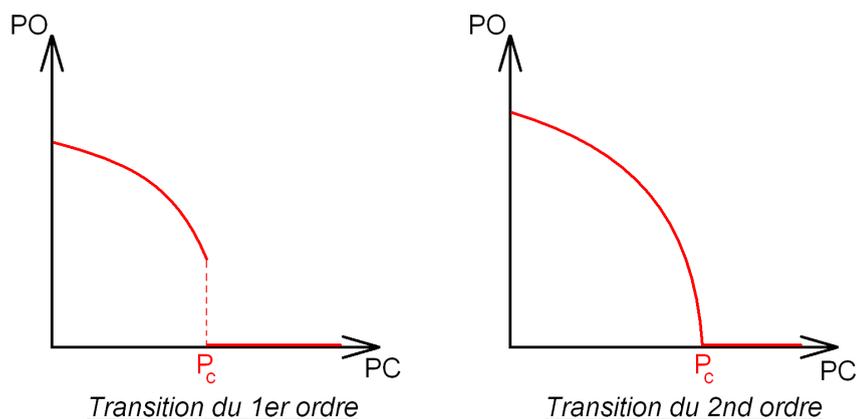


FIGURE 4.2 – Schéma représentant les deux types de transitions de phase observables : PO signifie "paramètre d'ordre", PC "paramètre de contrôle" et  $P_c$  est la valeur critique du paramètre de contrôle indiquant la transition. Dans le cas d'une transition du 1er ordre le paramètre d'ordre est discontinu à la transition, alors qu'il est continu pour celle du 2nd ordre.

### 4.2.2 Les phénomènes critiques

Comme nous avons vu dans la section 1.4.2 consacrée aux systèmes élastiques désordonnés (en particulier les interfaces), et dans la section 2.4 pour le cas des vortex, le dépiégeage d'une interface ou d'un réseau de vortex peut-être analysé dans le cadre de la théorie des transitions de phase. *D. S. Fisher* [70] proposa initialement cette approche pour les ondes de densité de charge (CDW), puis elle fut appliquée avec succès à de nombreux autres systèmes connexes. D'après l'allure des courbes vitesse-force  $v(F)$  des réseaux de vortex, on est tenté d'aborder le dépiégeage des vortex (*i.e.* un passage d'un état piégé du réseau avec une vitesse moyenne nulle à un état dépiégé du réseau où la vitesse moyenne est finie) dans le cadre de la théorie des transitions de phase de *Landau*. Suivant cette analogie la force d'entraînement  $F$  du système est considérée comme le paramètre de contrôle (PC), la vitesse moyenne du réseau  $v$  correspond alors au paramètre d'ordre (PO) et nous notons  $F_c$  la valeur critique de la force nécessaire pour dépiéger le réseau de vortex.

Plusieurs questions se posent alors sur cette "transition de dépiégeage". Comme nous le démontrerons à partir de nos résultats, la transition de dépiégeage des réseaux de vortex

dans le cas d'un piégeage faible est du second ordre. Nous allons donc rappeler les bases élémentaires des transitions de phase continues. On pourra s'appuyer sur le cas de la transition de phase ferromagnétique-paramagnétique, cependant les résultats se généralisent aux transitions du second ordre. Les transitions de phase du 2nd ordre sont plus faciles à étudier numériquement que celles du 1er ordre pour lesquelles existent des états métastables. Des propriétés remarquables apparaissent, comme les lois d'échelles et l'universalité des "phénomènes critiques" au voisinage des points critiques [71, 72].

### Phénomènes critiques

L'étude des phénomènes critiques est motivée par la prédiction exacte des quantités intervenant dans le système. La théorie de champ moyen, qui néglige les fluctuations du paramètre d'ordre, permet de calculer les exposants critiques caractérisant le comportement de différentes observables loin du point critique. Un autre intérêt d'étudier les phénomènes critiques est la similarité des comportements aux abords des points critiques pour des systèmes physiques qui sont pourtant sensiblement différents : c'est ce que l'on appelle l'universalité. Les valeurs numériques des exposants critiques peuvent être regroupées dans différentes classes d'universalité réalisées par différents systèmes physiques présentant les mêmes valeurs d'exposants critiques. Ces classes d'universalités ne dépendent que de peu de paramètres, principalement la dimension du système  $d$ , la dimension du paramètre d'ordre et la portée des interactions.

Dans le cas de la transition ferromagnétique-paramagnétique le paramètre d'ordre est l'aimantation  $m$  et le paramètre de contrôle est la température  $T$  du système de spins. En dessous de la température de *Curie*  $T_c$  le matériau est ferromagnétique et au dessus de  $T_c$  il est paramagnétique (cf 1.2.1.1). Nous posons la température réduite adimensionnelle  $\tau$  qui sert de variable pour mesurer la différence en température par rapport à la température critique  $T_c$ ,

$$\tau = \frac{T - T_c}{T_c} \quad (4.1)$$

Aux abords de la transition les quantités physiques présentent des comportements en lois de puissances que l'on caractérise par des exposants critiques. Soit  $f(\tau)$  une observable, son exposant critique  $\kappa$  qui lui est associé est défini par

$$\kappa = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln f(\tau)}{\ln |\tau|} \quad (4.2)$$

de sorte que  $f(\tau) \sim \tau^\kappa$  lorsque  $\tau \rightarrow 0$ . En réalité, il existe souvent des termes de corrections à rajouter à cette expression impliquant plutôt la forme fonctionnelle suivante  $f(\tau) = A\tau^\kappa(1 + B\tau^\lambda + \dots)$ . Cependant, suffisamment proche du point critique le monôme dominant l'emporte sur les autres et donc seul l'exposant critique  $\kappa$  est mesurable et non la fonction complète.

### Exposants critiques

Le comportement des observables au voisinage du point critique est décrit par des exposants critiques, dont la liste usuelle est :

$$C_h(\tau) \sim |\tau|^{-\alpha} \quad (4.3a)$$

$$m(\tau) \sim (-\tau)^\beta \quad (4.3b)$$

$$m(h) \sim |h|^{1/\delta} \quad (4.3c)$$

$$\chi(\tau) \sim |\tau|^{-\gamma} \quad (4.3d)$$

$$\xi(\tau) \sim |\tau|^{-\nu} \quad (4.3e)$$

Dans ces équations  $h$  est le champ magnétique et  $m$  l'aimantation du système. L'exposant  $\alpha$  est défini à partir de la chaleur spécifique à  $h = 0$  notée  $C_h(\tau)$ ,  $\beta$  est relié à l'aimantation à  $h = 0$ ,  $\delta$  est mesuré au niveau de l'isotherme critique  $\tau = 0$  et l'exposant  $\gamma$  est déterminé par la susceptibilité  $\chi(\tau)$  à  $h = 0$ . La longueur de corrélation du système  $\xi$ , qui mesure la taille caractéristique des fluctuations du paramètre d'ordre, diverge au niveau de  $T_c$  avec l'exposant  $\nu$  à  $h = 0$ . Ces comportements proviennent de l'hypothèse d'une singularité au niveau de l'énergie libre du système qui s'écrit alors  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_R + \mathcal{F}_S$ , avec  $\mathcal{F}_R$  la partie régulière et  $\mathcal{F}_S$  la partie singulière ; les exposants critiques sont en fait associés aux grandeurs physiques singulières. Remarquons également la supposition des exposants critiques identiques de chaque côté de la transition, c'est-à-dire pour  $\tau > 0$  et  $\tau < 0$ . En effet, on pourrait imaginer des exposants différents pour chacun de ces deux cas (tel que par exemple  $\chi(\tau) \sim \tau^{-\gamma}$  pour  $\tau > 0$  et  $\chi(\tau) \sim (-\tau)^{-\gamma'}$  pour  $\tau < 0$ ).

Au voisinage du point critique des fluctuations apparaissent à toutes les échelles ( $\xi$  tendant vers l'infini). Le système "oublie" alors les détails microscopiques et ne restent pertinents que la dimension de l'espace et le type de paramètre d'ordre. Le groupe de renormalisation (développé par *K. Wilson* et récompensé du prix Nobel de Physique en 1982 pour sa contribution) permet de réduire le grand nombre de degrés de liberté et d'échelles de longueur du système. Une introduction à cette approche qui dépasse le cadre de cette étude est disponible par ailleurs, par exemple [73].

### Lois d'échelle

Des arguments d'homogénéité sur la partie singulière de l'énergie libre  $\mathcal{F}_S$  (découlant du fait que le système est invariant par changement d'échelle) permettent de réécrire  $\mathcal{F}_S$  lorsque la température est suffisamment proche de  $T_c$  en faisant intervenir une fonction d'échelle  $\mathcal{G}$  ne dépendant pas de  $\tau$  de façon indépendante

$$\mathcal{F}_S(\tau, h) = |\tau|^{2-\alpha} \mathcal{G}(h|\tau|^{-\Delta}) \quad (4.4)$$

avec  $\Delta = \beta + \gamma$  l'exposant de gap. Cette formulation permet d'écrire les grandeurs thermodynamiques telles que la chaleur spécifique, la susceptibilité, ou bien l'aimantation en termes de fonctions d'échelles. Cela amène à différentes relations d'égalité entre les exposants critiques (citons par exemple celle de *Rushbrooke*  $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$ , de *Widom*

$\beta + \gamma = \beta\delta$  ou encore de *Josephson*  $\alpha = 2 - \nu d$ ) impliquant qu'il n'y a seulement que deux exposants indépendants.

### Effets de taille finie - FSS

Les systèmes étudiés par simulation sont de tailles finies, ils ne peuvent alors pas présenter de transition de phase au sens propre du terme puisque c'est seulement à la limite thermodynamique (c'est-à-dire lorsque le volume  $V$  et le nombre de particules  $N$  tendent vers l'infini avec la densité  $\rho = N/V$  finie) que les singularités des grandeurs physiques apparaissent. Dans un système de taille finie, la longueur de corrélation  $\xi$  est limitée par la taille  $L$  du système et ne peut diverger. En posant  $\xi_\infty$  la longueur de corrélation du système infini, lorsque  $L \gg \xi_\infty$  aucun effet de taille finie significatif n'est observable, alors que pour  $L \leq \xi_\infty$  le système tronque les corrélations à longue distance et un "arrondissement" des singularités au niveau du point critique apparaît (les divergences de  $\xi$ ,  $C_h$  ou  $\chi$  n'existent plus).

Il est néanmoins possible de déduire les propriétés du système infini à partir de celles du système de taille finie à partir des lois d'échelles en taille finie (*finite size scaling* en anglais, ou encore *FSS*) [74, 75]. Les effets de taille finie sont gouvernés par le rapport entre la taille  $L$  et la longueur de corrélation  $\xi$ . En supposant que la partie singulière de l'énergie libre  $\mathcal{F}_S$  reste une fonction homogène, on obtient

$$\mathcal{F}_S(L, \tau) = L^{-(2-\alpha)/\nu} \mathcal{G}(\tau L^{1/\nu}) \quad (4.5)$$

où les exposants critiques  $\alpha$  et  $\nu$  sont ceux du système infini. Les quantités thermodynamiques associées suivent des lois d'échelles, soient par exemple :

$$C_h(\tau, L) \sim L^{\alpha/\nu} \mathcal{C}(\tau L^{1/\nu}) \quad (4.6a)$$

$$m(\tau, L) \sim L^{-\beta/\nu} \mathcal{M}(\tau L^{1/\nu}) \quad (4.6b)$$

$$\chi(\tau, L) \sim L^{\gamma/\nu} \mathcal{X}(\tau L^{1/\nu}) \quad (4.6c)$$

où  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{X}$  sont des fonctions d'échelles. Cette hypothèse d'échelle s'applique pour des tailles de systèmes suffisamment grandes et pour des températures suffisamment proches de  $T_c$ . Lorsque ces conditions ne sont pas vérifiées alors des corrections sont à apporter à ces lois d'échelles. Nous pouvons avoir une approche plus pragmatique pour comprendre le comportement des quantités thermodynamiques avec la taille  $L$  au niveau de la transition : nous savons que  $\xi(\tau) \sim |\tau|^{-\nu}$  alors une quantité telle que par exemple la susceptibilité  $\chi(\tau) \sim |\tau|^{-\gamma}$  peut être réécrite comme  $\chi \sim \xi^{\gamma/\nu}$ , et puisque dans un système de taille finie au niveau du point critique nous avons  $\xi \approx L$  alors finalement  $\chi \sim L^{\gamma/\nu}$ . On trouve que les quantités thermodynamiques sont gouvernées par la taille du système au voisinage du point critique, *i.e.*  $C_h \propto L^{\alpha/\nu}$ ,  $m \propto L^{-\beta/\nu}$  et  $\chi \propto L^{\gamma/\nu}$ . Ces prédictions sont utiles pour déterminer le rapport de certains exposants critiques avec une précision raisonnable. La théorie de la FSS est utile également pour montrer l'existence d'une transition de phase ou encore pour déterminer la valeur de  $T_c$  à partir du décalage de la température critique  $T_c(L)$  pour

le système de taille finie par rapport à celle du système infini,  $T_c(L) - T_c \sim L^{-1/\nu}$ . Notons que seul le cas du champ nul  $h = 0$  a été considéré ici pour ne pas surcharger les écritures. Cependant, sa prise en compte n'apporte pas de complication supplémentaire.

### 4.2.3 Le dépiégeage comme phénomène critique

La transition de dépiégeage à  $T = 0$  peut être vue comme une transition de phase du second ordre. Le tableau 4.1 présente la correspondance entre les quantités pertinentes pour le dépiégeage et celles de la transition ferromagnétique/paramagnétique.

	Transition ferro/para	Transition dépiégeage
paramètre d'ordre	aimantation $m$	vitesse $v$
paramètre de contrôle	température $T$	force extérieure $F$
champ conjugué	champ magnétique $h$	température $T$

TABLE 4.1 – Table de correspondance entre la transition de dépiégeage et une transition du second ordre classique ferromagnétique/paramagnétique.

Nous nous attendons donc à ce que les grandeurs mesurées au seuil du dépiégeage se comportent de la façon suivante

$$v_{T=0} \sim (F - F_c)^\beta \quad (4.7)$$

$$v_{f=0} \sim T^{1/\delta} \quad (4.8)$$

$$\xi \sim (F - F_c)^{-\nu} \quad (4.9)$$

## 4.3 Dépiégeage des vortex

Deux types de dépiégeage génériques sont observés expérimentalement dans les systèmes élastiques désordonnés, et en particulier dans les réseaux de vortex. Ces deux types de dépiégeage sont différenciés par les paramètres du piégeage (intensité et/ou densité de pièges). Seul le cas du dépiégeage élastique avec un champ de déplacement  $N = 1$  est correctement compris ( $N = 1$  correspond au cas des ondes de densité de charge, le modèle XY ou encore les réseaux de jonctions Josephson). Dans le cas  $N > 1$  (par exemple les réseaux de vortex, les cristaux de Wigner ou encore les colloïdes) il n'existe pas encore de théorie décrivant convenablement le dépiégeage élastique ou plastique. Nous allons présenter dans cette section les deux types de dépiégeage, puis nous terminerons sur le régime appelé *single-particle* qui joue un rôle important dans la suite de cette étude.

### 4.3.1 Dépiégeage plastique

Lorsque le désordre domine l'élasticité et que la structure se déforme de manière importante, le piégeage est fort. Il en résulte un dépiégeage doux caractérisé par un écoulement

### 4.3. DÉPIÉGEAGE DES VORTEX

plastique où des vortex en mouvement coexistent avec ceux qui sont piégés. Deux vortex proches peuvent avoir des vitesses différentes et des défauts topologiques sont créés et détruits en permanence (voir la figure 4.3a). Une description élastique de ces régimes n'est pas réaliste et différents modèles ont été proposés afin de tenter de décrire ce type de dépiégeage, citons par exemple les modèles de grains couplés par des interactions visco-élastiques (dits *coarse-grain*) [76, 77] permettant une description effective des défauts topologiques ou bien des modèles d'écoulement de particules sur un réseau décrivant l'apparition de canaux [78, 79, 80]. Lors d'un dépiégeage plastique la courbe de réponse vitesse-force  $v(F)$  présente une forme particulière : un point d'inflexion apparaît en dessous duquel la concavité est tournée vers le haut alors qu'elle reste tournée vers le bas au dessus de ce dernier (voir la figure 4.3b).

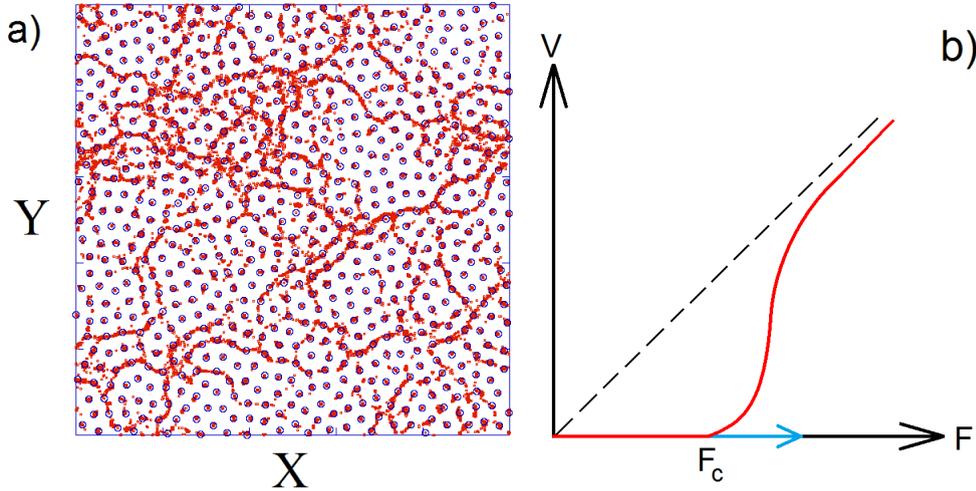


FIGURE 4.3 – a) Exemple de trajectoire des vortex, en rouge, au seuil de dépiégeage pour le cas plastique et un instantané des vortex est également représenté, en bleu (cette figure est issue de nos simulations). b) Allure de la courbe réponse vitesse-force  $v(F)$  dans le cas du dépiégeage plastique, la vitesse augmente progressivement avec une tangente horizontale en  $F_c$  (la vitesse obtenue sans désordre est représentée en pointillé).

La nature de cette transition reste une question ouverte : certaines expériences sur les ondes de densité de charge [81] semblent suggérer une transition discontinue avec une courbe  $v(F)$  présentant de l'hystérésis et des sauts entre états en mouvement et états piégés, cela est également observé dans des simulations de vortex [82]. Pourtant d'autres résultats semblent suggérer une transition continue (avec un exposant de dépiégeage  $\beta > 1$ ), c'est le cas par exemple d'expériences sur les vortex [83] et de simulations numériques pour des colloïdes [84], des cristaux de *Wigner* [85] ou encore des réseaux de vortex [65]. La modélisation du dépiégeage plastique est difficile et les résultats expérimentaux et numériques ne permettent pas encore un large consensus sur la nature de la transition.

### 4.3.2 Dépiégeage élastique

Lorsque le piégeage est faible, l'élasticité domine le désordre et les déformations de la structure périodique sont faibles par rapport à la situation d'équilibre. Le dépiégeage est brutal avec un écoulement élastique des particules : les vortex se mettent en mouvement en bloc à partir de  $F_c$  en suivant des canaux statiques présentant une certaine rugosité (voir la figure 4.4a). Le dépiégeage brusque se manifeste sur la courbe  $v(F)$  par une tangente verticale à  $F_c$  (voir la figure 4.4b).

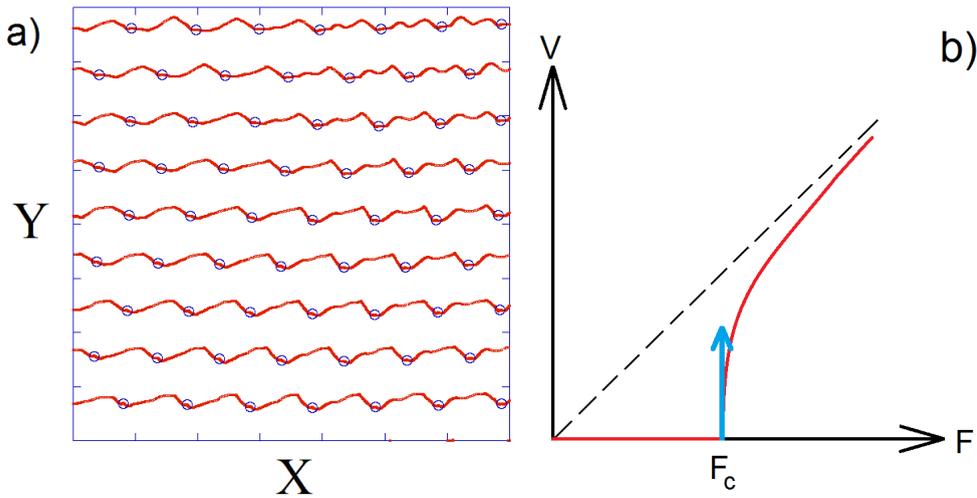


FIGURE 4.4 – a) Exemple de trajectoire des vortex, en rouge, au seuil de dépiégeage pour le cas élastique et un instantané des vortex est également représenté, en bleu (cette figure est issue de nos simulations). b) Allure de la courbe réponse vitesse-force  $v(F)$  dans le cas du dépiégeage élastique, la vitesse augmente rapidement avec une tangente verticale en  $F_c$  (la vitesse obtenue sans désordre est représentée en pointillé).

Les exposants critiques de dépiégeage dans le cas élastique ont pu être calculés par le groupe de renormalisation fonctionnel en dimension  $4 - \epsilon$  (voir par exemple [86] pour les ondes de densité de charge ou [87] pour les interfaces). Une étude plus récente [88] a montré qu'il n'existe que deux classes d'universalité (une pour les interfaces et une pour les systèmes périodiques) pour les systèmes élastiques désordonnés dans le cas du dépiégeage élastique. La valeur de l'exposant  $\beta$  calculée au premier ordre en  $\epsilon$  est  $\beta = 1 - \frac{\epsilon}{9}$  pour les interfaces et  $\beta = 1 - \frac{\epsilon}{6}$  pour les systèmes périodiques. Un calcul de renormalisation à deux boucles a été mené récemment dans l'article [89] où les valeurs des exposants à l'ordre  $\epsilon^2$  sont présentés. La comparaison détaillée entre les valeurs théoriques des exposants critiques et celles obtenues par simulations numériques montre une bonne adéquation. D'autres contributions numériques sont également disponibles pour la détermination des classes d'universalité et des exposants critiques associés (voir [90] et les références à l'intérieur).

Des exposants critiques ont été déterminés numériquement pour différents systèmes.

L'exposant  $\beta$  est le plus facile à déterminer et il apparaît souvent dans la littérature. Les simulations numériques réalisées en dimension  $D = 2$  montrent des transitions du second ordre pour les interfaces avec  $\beta \approx 1/3$  [91, 92, 93]. Cependant dans le cas des systèmes périodiques des exposants variés sont trouvés pour : les ondes de densité de charge  $\beta = 0.65 \pm 0.05$  [94] et  $\beta = 0.64 \pm 0.03$  [95], les cristaux de Wigner  $\beta \sim 0.66$  dans [96], les colloïdes avec  $\beta = 0.66 \pm 0.02$  pour [84],  $\beta \approx 0.5$  dans [97] et  $\beta = 0.92 \pm 0.01$  chez [98], ou encore dans des systèmes de type *stripes* [33] avec  $\beta = 0.35$ . Notons qu'une étude du réseau de vortex à  $D = 3$  a évalué  $\beta = 0.65 \pm 0.01$  [99], alors que pour un réseau de vortex à  $D = 2$  une valeur surprenante de exposant  $\beta = 1.11 \pm 0.05$  ( $\beta > 1$ ) a été mesurée [100].

Nos simulations numériques sur les réseaux de vortex à  $D = 2$  tentent d'apporter une contribution à la compréhension du dépiégeage élastique dans ces systèmes.

#### 4.3.3 Le modèle à une particule

Un modèle simple permettant de rendre compte du dépiégeage est réalisé à partir du modèle à une particule (*i.e.* le *single-particle* modèle) dans lequel une particule, représentant un vortex dans notre cas, se déplaçant dans un potentiel périodique sinusoïdal unidimensionnel noté  $V$  (et représentant le potentiel de piégeage effectif) est soumise à une force d'entraînement  $F$ . A l'origine ce modèle a été appliqué au cas des ondes de densité de charge [70]. L'équation sur-amortie de la dynamique s'écrit :

$$\eta \frac{dx}{dt} = F - \frac{dV}{dx} \quad (4.10)$$

où  $\eta$  est le coefficient de viscosité. En terme de système dynamique nous avons à faire à un flot du premier ordre avec une bifurcation nœud-col contrôlée par  $F$ . En supposant que  $F_c$  est la valeur maximale de  $\frac{dV}{dx}$ , alors pour  $F < F_c$  le système présente deux points fixes, l'un stable et l'autre instable. La particule reste piégée au niveau du point d'équilibre stable qui est attracteur. Lorsque  $F$  tend vers  $F_c$  les deux points fixes se rapprochent et fusionnent au niveau de  $F = F_c$  en un seul point fixe semi-stable : le point attracteur disparaît et le système est déstabilisé. Finalement pour  $F > F_c$  il y a disparition de tout point fixe et la particule avance constamment.

Un calcul du temps  $T$  mis par la particule pour parcourir une période du potentiel peut s'effectuer à partir de l'intégration de l'équation (4.10). On obtient ainsi  $T \propto (F - F_c)^{-1/2}$ , et donc une vitesse moyenne de la particule :

$$v \propto (F - F_c)^{1/2} \quad (4.11)$$

Ainsi, la vitesse au seuil de la transition de dépiégeage est caractérisée par un exposant critique  $\beta = \frac{1}{2}$  et le dépiégeage est continu. Ce modèle est très utile dans la suite pour caractériser des effets de taille finie de la simulation.

## 4.4 Considérations numériques

Dans cette partie nous revenons sur le choix des paramètres de simulation afin d'obtenir une équation de la dynamique qui corresponde à l'équation sur-amortie utilisée couramment pour les vortex. Nous présentons également la machine de calcul utilisée pour nos simulations. Quelques tests de performances sont aussi exposés.

### 4.4.1 Limite sur-amortie

Nous ne pouvons pas poser  $m = 0$  afin d'éliminer le terme inertiel  $m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$  sans faire diverger les solutions de l'équation (cela se comprend aisément à partir de la relation (3.2c) du schéma d'intégration), et nous devons alors choisir correctement les paramètres  $m$  et  $\eta$  afin d'avoir le terme inertiel qui soit très inférieur au terme frictionnel  $\eta \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ . Comme précisé dans le paragraphe 3.4.2 concernant les paramètres utilisés lors de nos simulations, nous avons pris  $\frac{\eta}{m} = 0.1$ . Ce choix permet à l'équation du mouvement disponible dans le code de dynamique moléculaire (*i.e.* l'équation de Newton du second ordre) d'atteindre la limite sur-amortie de la dynamique telle qu'elle est utilisée dans la littérature (équation du premier ordre).

Dans le programme LAMMPS il apparaît que la définition de la viscosité  $\eta$  fait intervenir la masse des vortex  $m$  et un paramètre d'amortissement (*damping* et noté *damp* en anglais) suivant le rapport  $\eta = \frac{m}{damp}$ . Nous avons effectué plusieurs tests afin de savoir quel était le meilleur choix à prendre pour  $m$  et *damp* afin d'obtenir la limite attendue. Nous avons observé que pour  $m$  fixé la diminution du paramètre *damp* fait diminuer le rapport inertiel sur frictionnel, néanmoins le temps de la simulation augmente (en effet à pas de temps  $\Delta t$  fixé  $\eta$  va modifier la vitesse des vortex et donc le temps de la simulation). À l'inverse, lorsque *damp* est fixé et  $m$  diminue le rapport inertiel sur frictionnel augmente mais le temps de simulation diminue. Il faut donc faire un compromis entre un rapport du terme inertiel sur le terme frictionnel le plus faible possible et le meilleur temps de simulation réalisable : la valeur de  $\eta = 10^{-3}$  (avec  $m = 10^{-2}$  et *damp* = 10) correspond à cette valeur optimale. Pour des valeurs supérieures  $\eta \geq 10^{-3}$  l'équation différentielle du second ordre donne la même physique que l'équation sur-amortie mais c'est pour la valeur  $\eta = 10^{-3}$  que le temps de simulation est le plus rapide, et quand  $\eta < 10^{-3}$  la physique simulée ne correspond plus du tout à celle que l'on obtient avec l'équation du premier ordre.

Afin de contrôler la physique simulée nous avons comparé nos simulations effectuées sous LAMMPS à un code de dynamique intégrant les équations du mouvement sur-amorties des vortex via un algorithme de *Runge-Kutta* d'ordre 2 (comme dans [65] et où nous avons pris soin d'intégrer correctement les équations en prenant un pas de temps suffisamment petit par rapport aux temps caractéristiques du système) pour une taille de boîte de simulation fixée  $(L_x, L_y) = (50, 60)\lambda_L$  et en prenant un piégeage faible tel que  $\alpha_p \approx 1.5 \cdot 10^{-5}$ . Lorsque  $\eta = 10^{-3}$  dans LAMMPS nous n'observons pas de différence avec le code séquentiel (où  $\eta = 1$ ) que ce soit en ce qui concerne la vitesse moyenne des vortex ou en ce qui concerne les

## 4.4. CONSIDÉRATIONS NUMÉRIQUES

---

trajectoires des vortex au cours du temps, de plus nous avons trouvé des valeurs identiques de l'exposant critique  $\beta$ .

### 4.4.2 Machine de calcul

Nos simulations à grandes échelles des réseaux de vortex ont été lancées sur le cluster du *Centre de Calcul Scientifique de la Région Centre* (CCSC) qui est une des actions du projet du Programme Pluri-Formations de Calcul Scientifique et Modélisation des universités d'Orléans et de Tours (PPF CaSciModOT). Nous remercions généreusement l'accès qui nous a été fourni à ce cluster afin de faire tourner nos simulations dans le cadre de cette étude. Ce projet réunit différents laboratoires de recherche des campus des universités d'Orléans et de Tours, et leur permet d'accéder à une machine de calcul parallèle haute performance dotant ainsi les membres du projet CaSciModOT d'un méso-centre de calcul (à mi chemin entre des stations de travail et des grands centres nationaux de calcul). La machine de calcul est installée physiquement dans les locaux de l'Institut des Sciences de la Terre d'Orléans (ISTO).



FIGURE 4.5 – Photographie illustrant la machine de calcul, on peut voir les lames encastées dans leur châssis. Image issue de la présentation de F. Loulergue lors des Journées Informatique de la Région Centre (JIRC) 2009.

La machine est une machine IBM utilisant la technologie Blade, elle comporte un serveur frontal (nommé Phoebus) qui assure la liaison entre les nœuds et les utilisateurs, deux serveurs qui assurent les différents services et un espace de stockage de 5 *To*. Elle est composée de 56 lames réparties de la façon suivante : 3 groupes de 14 lames possédant un

#### 4.4. CONSIDÉRATIONS NUMÉRIQUES

---

biprocasseur quadricœur, 1 groupe de 14 lames avec un biprocasseur hexacœur et 32 *Go* de mémoire RAM par lame. Cela porte à un total de 504 cœurs utilisable pour le calcul et une puissance crête de calcul estimée à 6 *TFlops* (1 *TFlops* =  $10^{12}$  *flops* ou opérations à virgule flottante par seconde, pour se fixer les idées un ordinateur de bureau a une puissance crête de l'ordre du gigaflops  $10^9$  *flops* alors que les supercalculateurs se mesurent en petaflops  $10^{15}$  *flops*). Deux réseaux existent dans la machine de calcul : un réseau d'administration en Ethernet 1 *Gb/s* et un réseau de calcul Infiniband caractérisé par une latence de 1.7  $\mu$ s et une bande passante de 1.5 *Go/s* (Infiniband est une technologie de réseau qui fournit une interface haut débit, la latence correspondant au temps passé entre l'envoi d'une requête et la réception de la réponse correspondante, alors que la bande passante correspond au débit maximal obtenu).

##### 4.4.3 Tests de performance

Nous effectuons ici des tests de performance sur nos simulations numériques (appelés couramment *benchmarking* en anglais) pour diverses tailles de systèmes qui sont représentatives de celles que nous allons utiliser par la suite. Nous nous fixons toujours  $\alpha_p \approx 1.5 \cdot 10^{-5}$  correspondant à un piégeage faible (nous allons voir dans la section suivante quelles sont les valeurs des paramètres à prendre pour être en piégeage faible ou fort) et nous simulons différentes tailles rectangulaires  $(L_x, L_y)\lambda_L$  que l'on référencera dans cette section par le nombre de vortex  $N_v$  qui leur est associé, voir tableau 4.2 (nous disposons initialement nos vortex selon un réseau triangulaire parfait avec  $L_x = N_x a_0$  et  $L_y = N_y a_0 \sqrt{3}/2$  où  $N_x$  est le nombre de vortex dans la direction  $x$  et  $N_y$  suivant la direction  $y$ , le nombre de vortex total est donné par  $N_v = N_x N_y$ ).

$(L_x, L_y)\lambda_L$	Nombre de vortex $N_v$
(15, 18)	270
(40, 48)	1920
(100, 50)	5000
(200, 30)	6000
(400, 20)	8000
(100, 120)	12000

TABLE 4.2 – Tableau indiquant le nombre de vortex pour chaque taille de système simulé.

Comme nous pouvons le voir les tailles vont d'une boîte presque carrée à des formes très allongées, nous parlerons dans la section 4.5.4 des conséquences possibles de cette anisotropie sur les propriétés critiques du système. Pour nos tests de performance cela nous importe peu pour l'instant étant donné que nous nous intéressons à la qualité de la parallélisation et non à la physique sous-jacente du système. Deux quantités importantes pour caractériser et mesurer l'efficacité du parallélisme sont l'accélération  $A(P)$  et l'efficacité  $E(P)$  où  $P$  indique le nombre de processeurs et/ou de cœurs sur lequel est exécuté le programme. Elles sont définies de la façon suivante

$$A(P) = \frac{T_1}{T_p} \quad (4.12a)$$

$$E(P) = \frac{A(P)}{P} \quad (4.12b)$$

avec  $T_1$  et  $T_p$  les temps d'exécution pour respectivement 1 et  $P$  processeurs. On s'attend à ce que la valeur théorique maximale de  $A$  et  $E$  soit obtenue lorsque  $T_p = \frac{T_1}{P}$  ce qui implique une accélération et une efficacité théorique de  $A(P) = P$  et  $E(P) = 100\%$ . Sans rentrer dans les détails du code et de son architecture parallèle qui sortent du cadre de cette étude, nous allons utiliser ces deux quantités et d'autres grandeurs qui vont caractériser nos simulations afin d'étudier leurs performances en fonction du nombre de processeurs utilisés. Cela nous permettra de savoir quel est le nombre optimal de processeurs que nous aurons à utiliser pour chaque nombre de particules (c'est-à-dire chaque taille de système). Le but de cette évaluation est double : dans un premier temps optimiser le temps de calcul de nos simulations (un trop grand nombre de processeurs pouvant pénaliser la simulation comme nous le verrons) et dans un second temps ne pas consommer une quantité inutile de ressources sur le cluster CCSC afin de ne pas pénaliser les autres utilisateurs.

Les évaluations suivantes ont été effectués pour différentes tailles de boîtes avec à chaque fois un nombre de pas de temps à évaluer fixé à  $10^4$ , tous les autres paramètres de la simulation demeurent inchangés et seul le nombre de processeurs exécutant la simulation varie. Notons juste que pour chaque taille nous n'avons effectué qu'une seule simulation à un nombre de processeurs fixé. Cette manière de procéder est suffisante pour avoir la tendance générale de l'efficacité de la simulation en fonction du nombre de processeurs. Cependant si l'on souhaite une étude plus précise, il faut au moins moyennner les grandeurs à déterminer sur plusieurs simulations pour chaque nombre  $P$  de processeur. En effet d'autres tâches pouvant tourner simultanément sur le cluster, des facteurs tels que la répartition de charge ou encore la communication entre les nœuds peuvent influencer légèrement les mesures effectuées.

Nous représentons sur la figure 4.6a) l'accélération  $A(P)$  et sur la figure 4.6b) l'efficacité  $E(P)$  obtenues pour les différentes tailles de systèmes précisées au dessus. Comme nous pouvons le voir sur ces deux figures lorsque le système contient peu de vortex (c'est-à-dire les plus petites tailles telles que  $(15, 18\sqrt{3}/2)\lambda_L$  ou  $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$ ) alors la simulation est efficace du point de vue du parallélisme tant que le nombre de processeurs n'est pas trop important. Par exemple, pour 270 vortex une valeur de  $P \approx 6$  est suffisante alors que pour 1920 vortex nous pouvons prendre  $P \approx 20$ . Lorsque le nombre de vortex devient plus important (et donc des systèmes plus grands) nous pouvons exécuter nos simulations sur une plus grande quantité de processeurs,  $P \approx 40$  par exemple pour 8000 vortex. Le choix de la valeur précise du nombre de processeurs à utiliser peut être pris en choisissant une efficacité d'au moins 60% à 70%, cette valeur est prise de façon arbitraire néanmoins elle nous paraît suffisante. Notons que l'accélération (et donc l'efficacité qui en découle) ne suit pas la valeur théorique maximale, c'est-à-dire qu'elle n'a pas un comportement linéaire (ou une constante en ce qui concerne l'efficacité). Cela peut s'expliquer entre autres par le

#### 4.4. CONSIDÉRATIONS NUMÉRIQUES

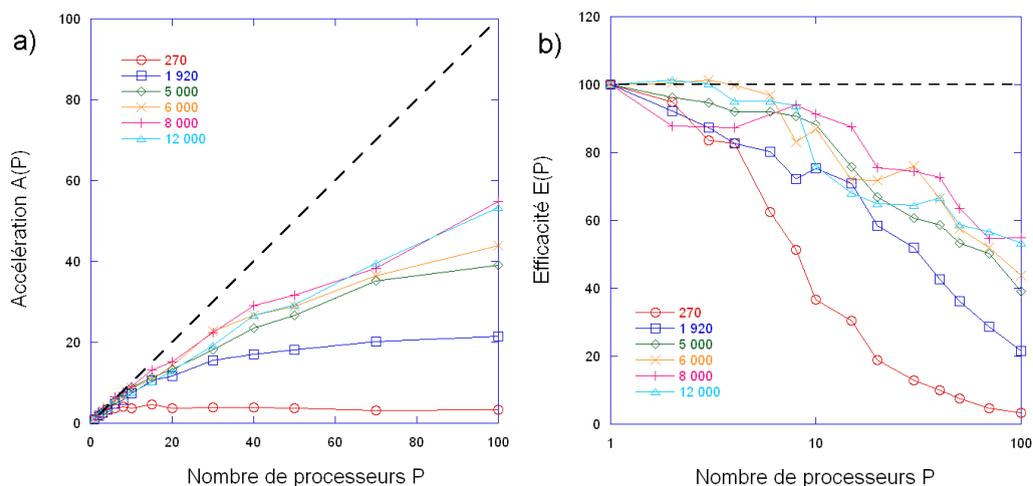


FIGURE 4.6 – Accélération  $A(P)$  (figure a) et Efficacité  $E(P)$  (figure b) en fonction du nombre de processeurs  $P$  pour différentes tailles de systèmes (la ligne en pointillée indique le cas théorique idéal).

fait que l'accélération est limitée par la partie non-parallélisée du code (cf la loi d'*Amdahl*).

D'autres quantités permettent de choisir le nombre optimal  $P$  de processeurs adapté à chaque taille. Citons le temps d'exécution de la simulation sur le CPU qui nous a été utile pour définir l'accélération et l'efficacité, ou encore la quantité de mémoire utilisée par processeur lors de notre simulation (ces deux grandeurs, ainsi que d'autres statistiques, sont affichées par LAMMPS dans un fichier qui sert de journal d'événements). Nous affichons en figure 4.7a) le temps CPU d'exécution (en secondes) en fonction du nombre  $P$  et en figure 4.7b) la quantité de mémoire requise par nos simulation (en *MBytes*/processeur) en fonction de  $P$ .

Sur la figure 4.7a) on voit pour les grandes tailles que l'on peut gagner un peu plus d'un ordre de grandeur en vitesse d'exécution pour des valeurs de  $P$  supérieures à 10, cependant pour les petites tailles (et c'est encore plus visible pour la plus petite taille avec 270 vortex) à partir d'un certain nombre de processeurs  $P$  nous n'arrivons plus à gagner en vitesse d'exécution. En ce qui concerne la figure 4.7b) on se rend compte également que la quantité de mémoire utilisée par processeur décroît jusqu'à tendre vers une constante.

Finissons cette section de benchmarking en donnant le détail du temps CPU d'exécution des simulations que nous venons de citer. Nous allons présenter les grandeurs les plus chronophages en pourcentage du temps d'exécution en fonction du nombre de processeurs utilisées. Nous observons l'évolution de ces grandeurs : le calcul de la force par paire de vortex, le calcul des voisins et la communication par MPI (la catégorie "autres" comprend les différentes opérations, calculs et sorties effectués par LAMMPS). Nous affichons sur la figure 4.8 ces différentes quantités pour les différentes tailles utilisées précédemment,

Pour les petites tailles on observe une très nette diminution du temps passé à calculer

#### 4.4. CONSIDÉRATIONS NUMÉRIQUES

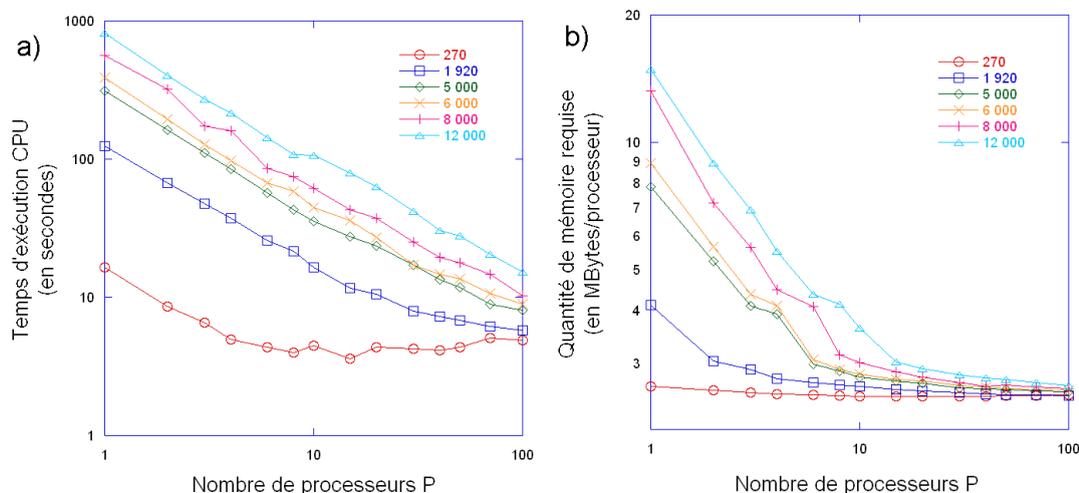


FIGURE 4.7 – Temps d'exécution CPU en secondes (sur la figure a) et quantité de mémoire requise en *MBytes*/processeur (sur la figure b) en fonction du nombre de processeurs  $P$  pour les tailles de systèmes définies précédemment.

les forces au profit du temps passé à la communication entre les nœuds qui augmente, ce qui explique pourquoi il est préférable d'utiliser un faible nombre de processeurs pour ces tailles. Le temps lié au calcul des voisins tend à diminuer avec le nombre de processeurs reflétant le fait qu'il y ait très peu de vortex dans la cellule de simulation.

Lorsque l'on s'intéresse aux grandes tailles de système le temps associé au calcul de la force diminue encore une fois mais cette réduction est bien moins brusque qu'auparavant et le temps passé à la communication entre les nœuds, bien qu'augmentant ici aussi, ne tire pas profit de cette baisse. Cependant le temps passé au calcul des voisins n'est pas trop impacté par cet accroissement du nombre de processeur (il diminue tout de même légèrement). La fraction du temps passé aux diverses opérations augmente quant à lui lorsque l'on choisit un trop grand nombre de processeurs, et ce quelque soit le nombre de vortex utilisés (ceci pouvant entre autres s'expliquer par des parties du code non parallélisées qui vont faire augmenter le temps d'exécution).

Grâce à tous ces tests de performance nous avons pu visualiser l'évolution de nos simulations avec le nombre de processeurs alloués à l'exécution du code. Nous nous rendons compte que le choix du nombre optimal de processeurs à utiliser découle d'un compromis entre : une trop grande quantité de processeurs pouvant avoir un effet négatif sur la parallélisation de la simulation, et un nombre trop faible de processeurs exécutant le programme qui peut ne pas présenter un grand avantage par rapport à une version séquentielle du code. Toutes les simulations que nous allons utiliser par la suite de l'étude prendront en compte ces résultats et nous aurons toujours à l'idée le souci d'optimiser le temps d'exécution de nos simulations.

## 4.5. ÉTUDE À TEMPÉRATURE NULLE

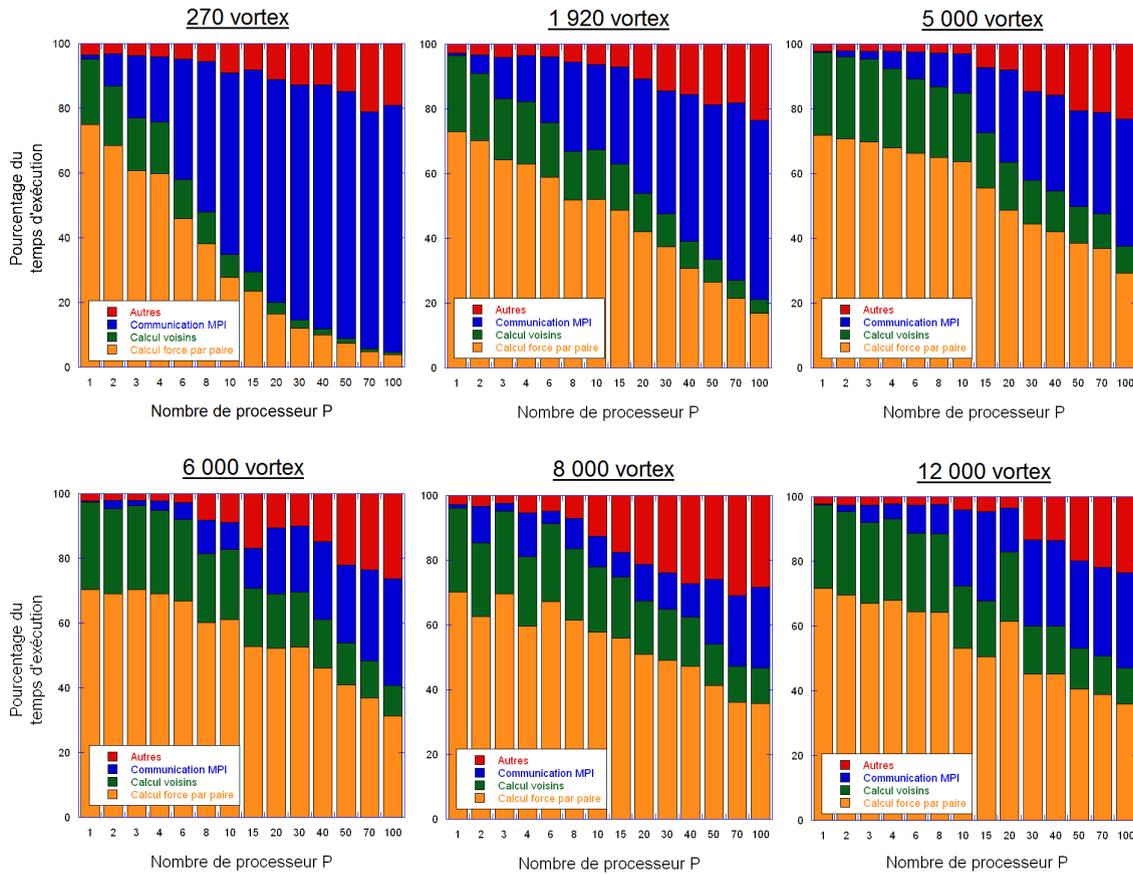


FIGURE 4.8 – Pourcentage du temps CPU d'exécution passé en fonction du nombre de processeurs  $P$  pour le calcul de la force par paire de vortex (en orange), le calcul des voisins (en vert), la communication MPI (en bleu) et le temps restant étant regroupé dans la section "autres" (en rouge). Différentes tailles sont proposées.

## 4.5 Étude à température nulle

Cette partie est consacrée aux résultats que nous avons obtenus pour le dépiégeage des vortex en piégeage faible à température nulle. Notre développement s'articule autour de plusieurs points. Nous présentons la dynamique des vortex, la réponse du système à une force extérieure et la détermination de l'exposant critique  $\beta$ . Nous déterminons la longueur de corrélation du système et des effets de taille finie, et nous mesurons les exposants associés (respectivement  $\nu$  et  $\nu_{FS}$ ). L'étude de cette transition à température nulle est faite en utilisant une loi d'échelle de taille finie, et enfin nous déterminons l'exposant critique  $\alpha$  associé à l'équivalent de la chaleur spécifique.

### 4.5.1 Crossover élastique - plastique

Comme nous l'avons précisé précédemment (section 4.3) la dynamique du système peut être dominée soit par l'élasticité soit par le désordre, suivant le rapport de l'intensité des interactions vortex-pièges et vortex-vortex noté  $\alpha_p/\alpha_v$ . Afin de déterminer les valeurs d'intensité d'interactions qui génèrent telle ou telle dynamique nous sélectionnons une taille de système  $(400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$  (ce choix de taille sera justifié à posteriori). A paramètres du système fixés nous faisons évoluer seulement l'intensité de piégeage, *i.e.* la valeur de  $\alpha_p$ , et pour chaque valeur d'intensité de piégeage différente nous réalisons plusieurs réalisations de désordre. Par *réalisation de désordre* nous sous-entendons que la taille du système reste fixe et seule la répartition aléatoire des pièges change au sein de la cellule de simulation de la manière expliquée en section 3.3.2, nous emploierons indifféremment le mot d'*échantillon* ou de réalisation de désordre par la suite.

Nous partons d'un réseau triangulaire parfait à haute vitesse que nous laissons relaxer, puis la force d'entraînement est lentement diminuée jusqu'à atteindre la force critique de dépiégeage  $F_c^{\text{sample}}$  en dessous de laquelle le système complètement piégé possède une vitesse moyenne nulle. Nous présentons sur la figure 4.9 l'évolution de la valeur moyenne de la force critique de dépiégeage  $\overline{F_c}$  en fonction de l'intensité de piégeage relative  $\alpha_p/\alpha_v$  (la moyenne définie par l'overline  $\overline{\quad}$  représente la moyenne sur les réalisations de désordre).

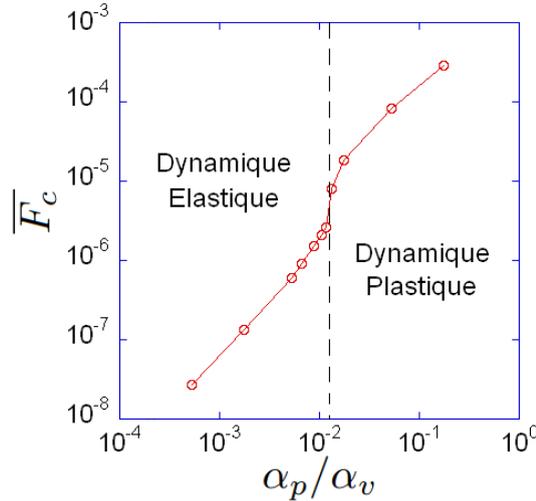


FIGURE 4.9 – Évolution de la force critique de dépiégeage  $\overline{F_c}$  moyennée sur les réalisations de désordre en fonction de l'intensité de piégeage relative  $\alpha_p/\alpha_v$ . La taille du système reste fixée à  $(L_x, L_y) = (400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$  soit  $N_v = 8000$  vortex.

Nous observons sur la figure 4.9 une diminution de la force critique lorsque  $\alpha_p/\alpha_v$  diminue, ce phénomène est logique puisqu'il traduit le fait qu'il faut appliquer une force extérieure plus faible pour mettre en mouvement le système lorsque l'intensité du piégeage diminue (la profondeur des puits de piégeage diminuant, il faut "tirer" moins fortement sur le réseau de vortex pour le dépiéger). Autour de  $\alpha_p/\alpha_v \approx 10^{-2}$  se situe un brusque décrochage de la force critique qui représente la frontière de séparation entre une dynamique

élastique régie par l'élasticité et une dynamique plastique dominée par le désordre. Cette soudaine diminution coïncide avec le changement de forme de la courbe vitesse-force et la perte d'ordre observée dans les trajectoires (comme expliqué dans la section 4.3), elle traduit donc la transition entre un régime plastique (pour  $\alpha_p/\alpha_v > 10^{-2}$ ) et un régime élastique (pour  $\alpha_p/\alpha_v < 10^{-2}$ ). Un tel comportement a déjà été observé dans d'autres simulations de réseaux de vortex [101] et de systèmes de colloïdes [84].

### 4.5.2 Dynamique des vortex

Afin d'avoir un aperçu de la dynamique des vortex dans le régime élastique nous représentons sur la figure 4.10 les trajectoires typiques des vortex au seuil du dépiégeage élastique pour une boîte de taille  $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$ , présentant  $N_v = 12000$  vortex, pour une valeur d'intensité de piégeage relative de  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$ .

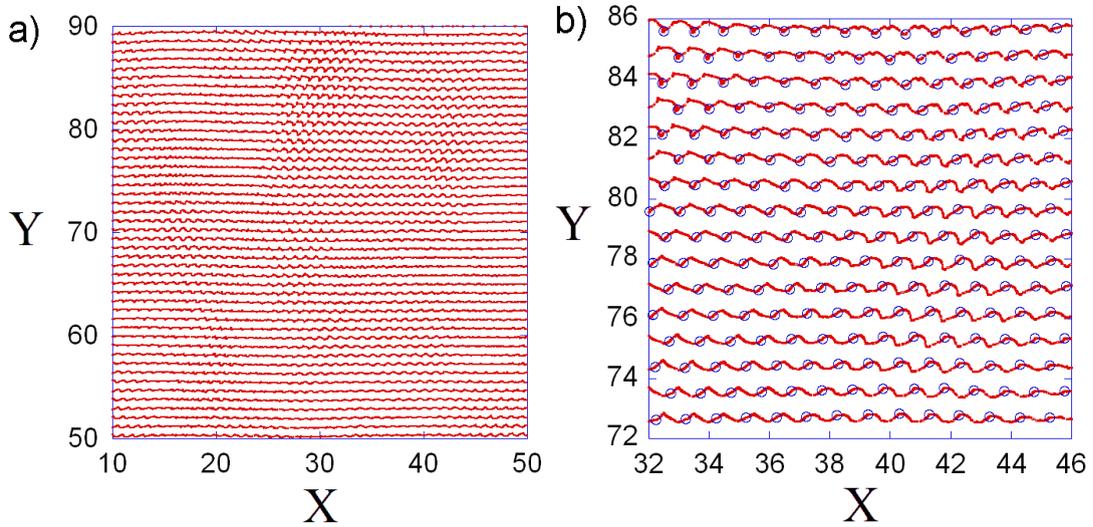


FIGURE 4.10 – Trajectoire typique des vortex au seuil du dépiégeage élastique pour  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$  avec  $N_v = 12000$ . a) Dans un souci de clarté, seulement une petite région de la boîte de simulation  $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$  est affichée. b) Une région encore plus zoomée est présentée avec en surimpression un instantané des vortex à un temps donné (en cercle noir).

Sur les figures 4.10a) (où une région seulement de la cellule de simulation est affichée pour la clarté du propos) et 4.10b) (correspondant à une région encore plus zoomée avec en surimpression un instantané des vortex) nous observons que tous les vortex se dépiègent simultanément et avec la même vitesse, impliquant que chaque vortex garde les mêmes voisins au cours du mouvement. On constate également que la structure est topologiquement ordonnée et les vortex s'écoulent le long de canaux statiques rugueux et élastiquement couplés. En effet aucun défaut topologique n'est visible et le réseau triangulaire n'est que légèrement déformé : les vortex se déplacent le long de canaux statiques présentant une rugosité. La dynamique associée est très saccadée près du seuil et la vitesse du centre de masse des vortex présente une périodicité temporelle avec une période correspondant au

## 4.5. ÉTUDE À TEMPÉRATURE NULLE

temps mis par chaque vortex pour remplacer son voisin le précédant sur le même canal.

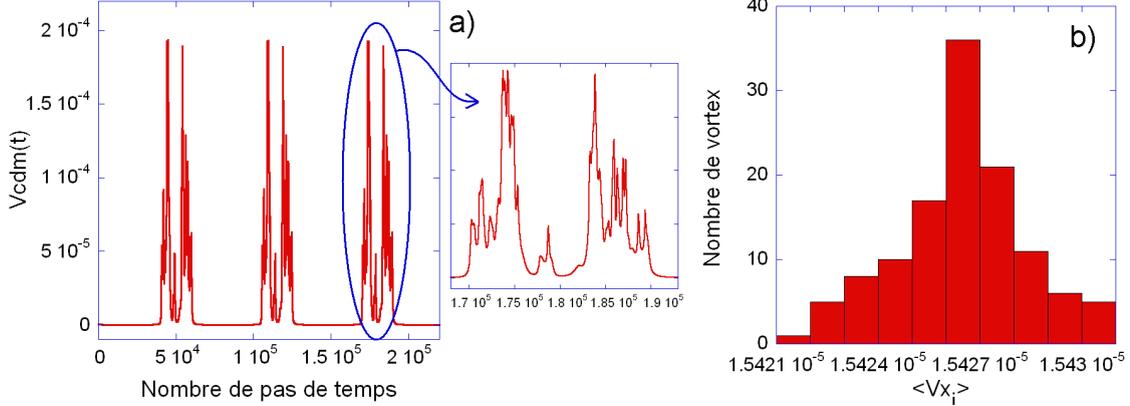


FIGURE 4.11 – Taille de la boîte considérée  $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$ , au seuil de dépiégeage : a) Évolution temporelle de la vitesse longitudinale du centre de masse des vortex  $V_x^{cm}(t)$ . On voit bien que cette vitesse est périodique, nous avons agrandi une période afin de se rendre compte que ce n'est pas une fonction triviale. b) Histogramme de la vitesse individuelle des vortex moyennée temporellement  $\langle (V_x^{cm})_i \rangle$  où l'on a considéré un vortex par canal, soit un total de 120 vortex.

Comme on l'observe sur la figure 4.11a) la vitesse longitudinale du centre de masse en fonction du temps est périodique mais n'est pas triviale. On observe de longs intervalles de temps où la vitesse est très faible suivis par de brusques augmentations de cette dernière. Cette dépendance temporelle de la vitesse reflète le mouvement saccadé des vortex au seuil de dépiégeage. Ces longues périodes de temps où la vitesse est quasi-nulle peuvent s'expliquer par le fait que nous sommes proche de la force critique de dépiégeage  $F_c$  et donc proche de la bifurcation nœud-col, du point de vue du système dynamique un goulot d'étranglement apparaît alors dont l'origine provient du fantôme du point fixe stable.

Les canaux élastiquement couplés sont directement mis en évidence par la visualisation de la trajectoire des vortex qui indique qu'aucun défaut n'est créé et que les vortex conservent toujours les mêmes voisins (deux canaux se déplacent donc avec une vitesse moyenne semblable). Nous pouvons également le constater quantitativement à partir de la distribution des vitesses des canaux, obtenue en considérant un vortex par canal (c'est-à-dire 120 vortex pour une boîte de taille  $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$ ) et en déterminant la vitesse moyenne des vortex  $\langle (V_x)_i \rangle$  ( $i = 1, \dots, 120$ ) pour chacun des canaux. La figure 4.11b) représente l'histogramme des vitesses dans le cas où  $N_v = 12000$  au niveau du seuil de dépiégeage. Nous remarquons que la distribution des vitesses est bien décrite par une gaussienne avec un écart type relatif inférieur à  $10^{-3}$  indiquant que les vitesses individuelles dans chacun des canaux sont très proches. Ce résultat accrédite ainsi le fait que les canaux sont couplés.

### 4.5.3 Réponse vitesse-force

Intéressons nous maintenant à la réponse du système en fonction de la force appliquée. Nous évaluons la vitesse longitudinale moyenne  $\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle$  du centre de masse des vortex en fonction de la force  $F$  et de la force réduite  $f$

$$f = \frac{F - F_c^{\text{sample}}}{F_c^{\text{sample}}} \quad (4.13)$$

avec  $F_c^{\text{sample}}$  la force critique pour une réalisation de désordre donnée. Par la suite de l'étude, et tant que nous n'indiquerons pas le contraire, nous posons l'intensité relative du désordre telle que  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$ . La courbe de réponse vitesse-force typique que nous obtenons pour une réalisation de désordre est présentée en figure 4.12a) en échelle linéaire pour  $N_v = 8000$  vortex. Elle correspond bien au comportement attendu dans le cas d'un régime élastique (avec un dépiégeage rapide des vortex).

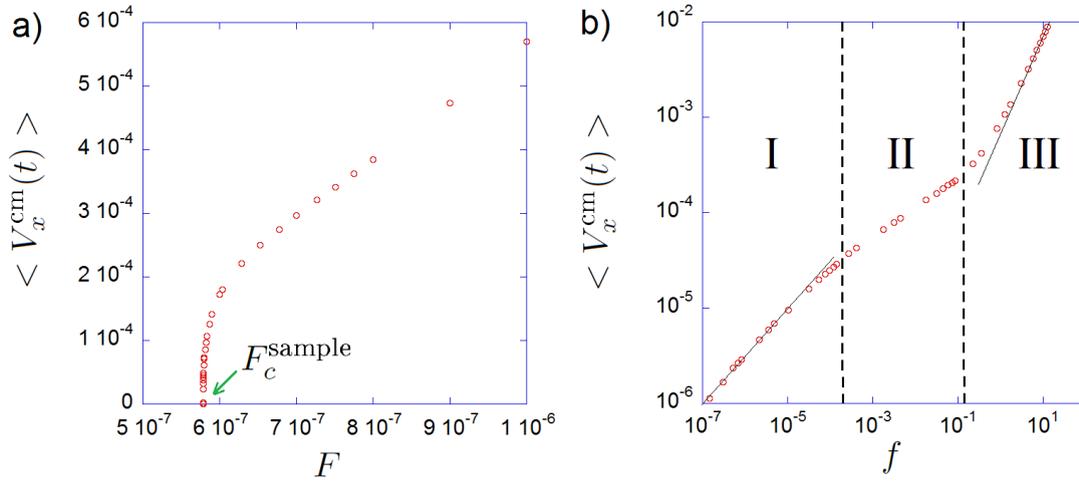


FIGURE 4.12 – a) Courbe de réponse vitesse-force du système  $\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle$  en fonction de  $F$  en échelle linéaire. b) Courbe de la vitesse  $\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle$  en fonction de la force réduite  $f$  en échelle logarithmique présentant les trois régions distinguables. Ces courbes sont représentatives de la situation obtenue quelque soit la taille de la boîte ou encore l'intensité relative de désordre (tant que nous sommes dans le régime élastique avec  $\alpha_p/\alpha_v < 10^{-2}$ ). Dans cet exemple particulier nous avons  $N_v = 8000$  vortex et  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$ .

Nous représentons sur la figure 4.12b) la courbe typique que l'on obtient pour une réalisation de désordre pour la vitesse en fonction de la force réduite  $f$  en échelle logarithmique, toujours pour  $N_v = 8000$  vortex. Nous pouvons distinguer trois régions en fonction de  $f$  :

- la région I est la manifestation des effets de taille finie dans le système simulé dont la signature est le régime à une particule [65] (cf la section 4.3.3) avec un comportement tel que  $\langle V_x^{\text{cm}} \rangle \sim f^{1/2}$  comme l'indique la ligne en trait continu. En effet dans ce régime la longueur de corrélation le long des canaux est plus grande que la taille de la boîte, le système se comporte alors comme une particule unique à un degré de liberté placée dans un potentiel périodique.

## 4.5. ÉTUDE À TEMPÉRATURE NULLE

- la région II est identifiée comme étant le régime critique de la transition de dépiégage continue où la loi de puissance  $\langle V_x^{\text{cm}} \rangle \sim f^\beta$  est mesurée (avec  $\beta < 1$ ).
- la région III est celle où le système se situe loin du dépiégage et approche asymptotiquement le régime linéaire  $\langle V_x^{\text{cm}} \rangle \sim f$  indiqué par la ligne en trait continu obtenu sans désordre.

Nous pouvons remarquer que dans la région I (*single-particle regime*) un dépiégage avec hystérésis a été observé pour quelques réalisations de désordre, avec différentes valeurs de force critique  $F_c^{\text{up}}$  et  $F_c^{\text{down}}$  suivant que la force était respectivement augmentée ou diminuée (dans cette situation la vitesse mesurée dépendait de l'histoire du système et des pas de force utilisés lors de la variation de la force). Nous avons représenté sur la figure 4.13a) un exemple d'une telle situation pour un système de taille  $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$ , soit  $N_v = 1920$  vortex, où les courbes avec des cercles ouverts et pleins correspondent respectivement à plusieurs descentes et montées de force autour des valeurs  $F_c^{\text{up}}$  et  $F_c^{\text{down}}$ . Cependant il faut noter que la largeur  $F_c^{\text{up}} - F_c^{\text{down}}$  diminue lorsque la taille du système augmente, ce qui indique que le phénomène d'hystérésis est lié à un effet de taille finie et non à une transition de phase discontinue (voir la figure 4.13b qui présente la largeur relative  $(F_c^{\text{up}} - F_c^{\text{down}})/F_c^{\text{down}}$  en fonction de la taille de boîte).

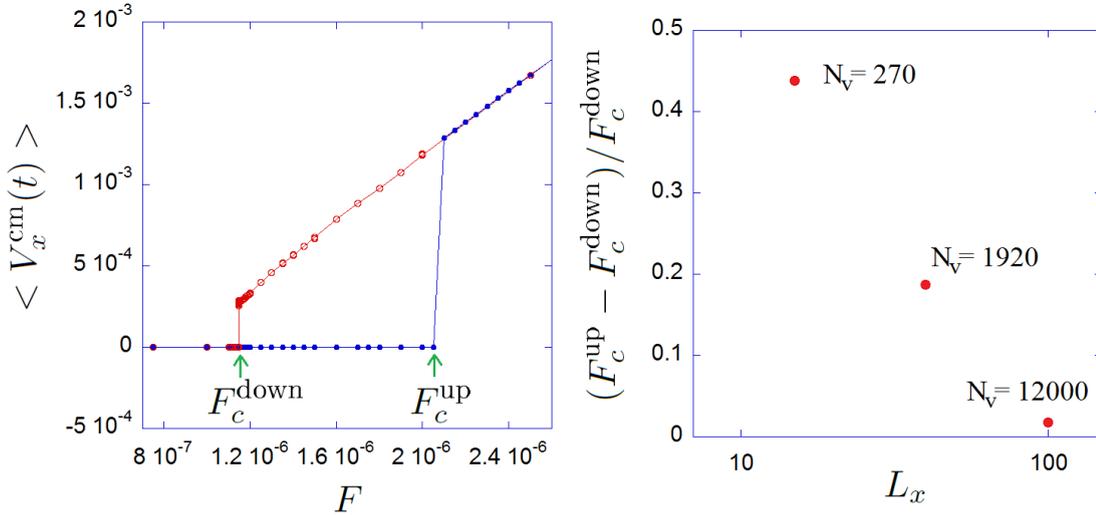


FIGURE 4.13 – a) Courbe typique de la vitesse moyenne  $\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle$  en fonction de  $F$  pour les quelques réalisations de désordre présentant un dépiégage hystérétique. La courbe avec des cercles ouverts correspond à plusieurs descentes en force avec  $F_c^{\text{down}}$  comme force critique alors que celle avec des cercles pleins correspond à plusieurs montées en force avec  $F_c^{\text{up}}$  leur force critique. b) Évolution de la largeur relative de l'hystérésis  $(F_c^{\text{up}} - F_c^{\text{down}})/F_c^{\text{down}}$  en fonction de la taille  $L_x$  de la boîte de simulation (et donc de la taille du système via le nombre de vortex présents).

#### 4.5.4 Exposant de dépiégeage $\beta$

Nous déterminons l'exposant critique de dépiégeage  $\beta$  à partir d'un ensemble de simulations obtenues en faisant varier la taille du système. Plusieurs réalisations permettent de déterminer une statistique des valeurs de  $\beta$  pour une taille donnée. Afin d'étudier les propriétés critiques des systèmes simulés nous définissons, en plus de la force réduite  $f$ , une vitesse réduite  $v$

$$v = \left( \frac{\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle}{F_c^{\text{sample}}} \right) \quad (4.14)$$

où  $\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle$  est la vitesse longitudinale moyenne du centre de masse des vortex et  $F_c^{\text{sample}}$  la force critique déterminées pour une réalisation de désordre donnée. L'overline  $\overline{\dots}$  représente une moyenne sur toutes les réalisations de désordre réalisées pour une valeur fixée de  $f$ . Cette procédure a été utilisée dans des simulations numériques d'interfaces élastiques en milieu désordonné [102]. Elle présente l'avantage de mieux superposer les courbes provenant de différentes réalisations de désordre, ce qui n'est pas toujours le cas avec l'utilisation de  $\langle V_x^{\text{cm}}(t) \rangle$  puisque la vitesse dépend assez fortement de  $F_c^{\text{sample}}$  au voisinage du dépiégeage.

En utilisant cette définition de  $v$  nous pouvons tracer la vitesse en fonction de  $f$  pour différentes tailles de système. Nous affichons sur les figures 4.14a) et 4.14b) la courbe  $v(f)$  en échelle logarithmique pour deux tailles de systèmes  $(L_x, L_y)$ , soit respectivement  $(100, 50\sqrt{3}/2)\lambda_L$  moyennée sur  $N = 21$  échantillons et  $(400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$  moyennée sur  $N = 14$  échantillons.

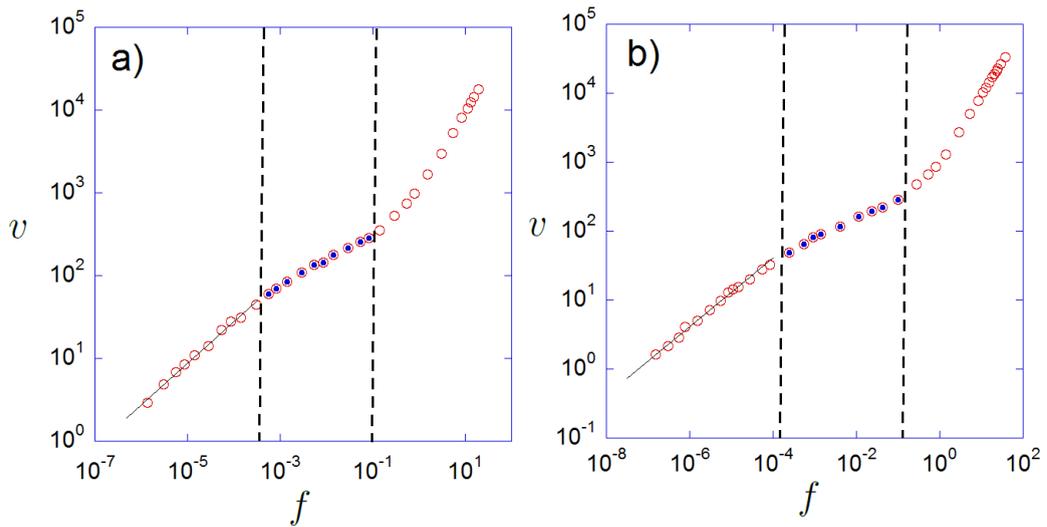


FIGURE 4.14 – Courbes de la vitesse réduite  $v$  en fonction de la force réduite  $f$  pour les tailles : a)  $(100, 50\sqrt{3}/2)\lambda_L$  moyennée sur  $N = 21$  échantillons, et b)  $(400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$  moyennée sur  $N = 14$  échantillons. Les trois régimes décrits précédemment (cf section 4.5.3) sont affichés, ainsi que la pente  $1/2$  indiquant le régime *single-particle* avec la ligne en trait continu.

## 4.5. ÉTUDE À TEMPÉRATURE NULLE

Les trois régions décrites précédemment sont visibles pour chacune des tailles étudiées. L'exposant de dépiégeage  $\beta$  est déterminé à partir d'une régression du type loi de puissance  $v \sim f^\beta$  appliquée dans la région critique II des courbes  $v(f)$  (les cercles pleins sur les graphiques). A chaque valeur de  $\beta$  obtenue pour différentes tailles, nous associons une incertitude donnée par l'erreur standard sur la valeur de  $\beta$  déduite de la régression. Afin d'étudier les effets de la taille de la cellule de simulation sur les propriétés critiques et en particulier sur la valeur de  $\beta$  nous utilisons différentes formes rectangulaires (allant d'une taille presque carrée à une forme rectangulaire très allongée présentant une anisotropie dans la géométrie de la boîte). La figure 4.15a) présente l'évolution de l'exposant  $\beta$  en fonction de la taille transverse  $L_y$  pour une taille longitudinale fixée à  $L_x = 100\lambda_L$ , et la figure 4.15b) montre l'évolution de  $\beta$  en fonction de la taille longitudinale  $L_x$  pour diverses tailles transverses  $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$ .

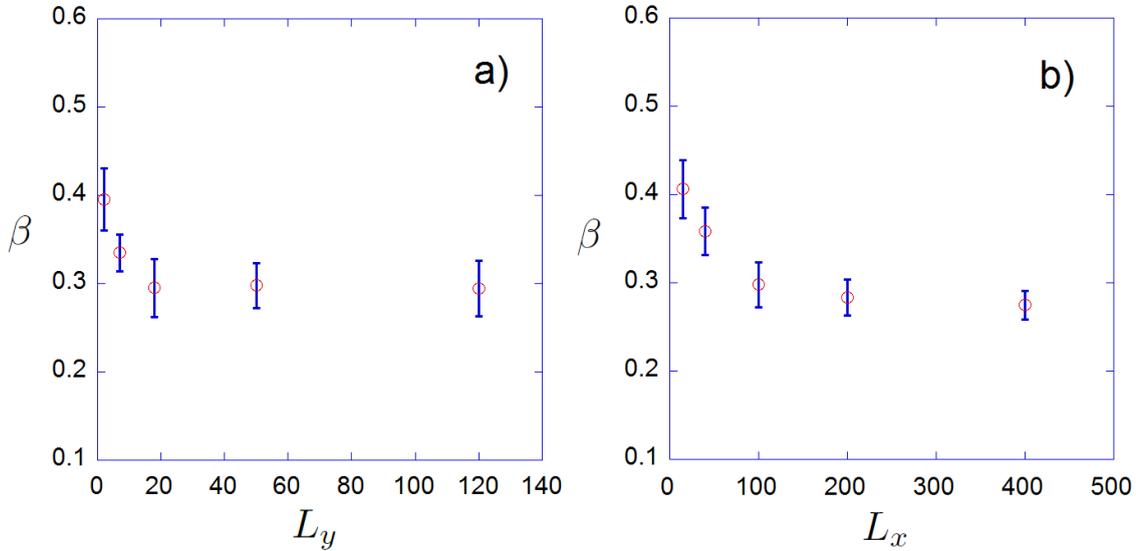


FIGURE 4.15 – Exposant de dépiégeage  $\beta$  extrait de la régression du type loi de puissance  $v \sim f^\beta$  dans la région II des courbes de réponse  $v(f)$  moyennées sur le désordre. Les incertitudes liées à chaque valeur de  $\beta$  représentent l'erreur standard associée à la valeur de l'exposant extraite de la régression. Pour plus de détails voir le texte associé.

Sur la courbe de 4.15a) les moyennes sont réalisées sur  $N = (9, 7, 4, 21, 4)$  échantillons pour respectivement  $L_y = (2, 7, 18, 50, 120)\sqrt{3}/2\lambda_L$ . On observe que la valeur de l'exposant  $\beta$  mesurée pour des valeurs de  $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$  devient indépendante de la taille transverse  $L_y$ . En particulier elle ne dépend pas de l'anisotropie de la boîte de simulation puisque nous relevons des valeurs identiques de l'exposant lorsque le système est de forme carrée avec  $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$ . Quant à la courbe de 4.15b) les moyennes sont réalisées sur  $N = (44, 47, 39, 12, 27)$  échantillons pour respectivement  $L_x = (15, 40, 100, 200, 400)\lambda_L$ . On en déduit une valeur constante de  $\beta$  pour  $L_x \geq 100\lambda_L$ . Ainsi  $\beta$  est indépendant de la taille et de la forme du système pourvu que,

$$\begin{cases} L_x \geq 100\lambda_L \\ L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L \end{cases} \quad (4.15)$$

Finalement en prenant la valeur moyenne des exposants  $\beta$  réalisant ces deux conditions (soit 78 réalisations de désordre), nous mesurons :

$$\boxed{\beta = 0.29 \pm 0.03} \quad (4.16)$$

Notons que la moyenne des valeurs individuelles  $\beta_i$  obtenues pour chaque réalisation de désordre conduit à un résultat très similaire, soit  $\beta = 0.27 \pm 0.04$ .

#### 4.5.5 Exposant de corrélation de taille finie $\nu_{\text{FS}}$

L'utilisation de systèmes finis en simulations numériques implique des effets notables sur l'étude des transitions de phase du second ordre. En effet les divergences dans les fonctions de réponse du système sont "arrondies", voire également décalées par rapport au système de taille infinie. Ces effets sont généralement étudiés dans le cadre de la théorie des lois d'échelles en taille finie comme nous l'avons rappelé en section 4.2.2. Outre son apport à la compréhension du comportement à la limite thermodynamique de la transition de phase à partir de systèmes de taille finie, cette approche permet également d'extraire de plus amples informations concernant les longueurs caractéristiques du système.

A partir d'un théorème général développé pour les systèmes désordonnés [103] une longueur de taille finie  $\xi_{\text{FS}}$  peut être définie à partir des propriétés statistiques d'un grand nombre d'échantillons de taille finie. L'exposant  $\nu_{\text{FS}}$  caractérisant la divergence d'une telle longueur au seuil du dépiégeage  $\xi_{\text{FS}} \sim f^{-\nu_{\text{FS}}}$  doit satisfaire à l'inégalité  $\nu_{\text{FS}} \geq 2/d$ .

#### Distribution des forces critiques

Nous commençons par examiner la distribution des forces critiques pour chaque taille de système et leur largeur  $\Delta F_c(L_x)$ . De cette mesure nous pourrions extraire l'exposant  $\nu_{\text{FS}}$  associé à  $\xi_{\text{FS}}$ .

Sur la figure 4.16b) nous montrons à titre d'exemple la distribution des forces critiques pour les 39 échantillons présentés en section 4.5.4 avec la taille  $L_x = 100\lambda_L$  (la condition  $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$  étant toujours considérée). A partir de cette distribution typique obtenue pour toutes les tailles, et que nous décrivons par une distribution gaussienne, nous estimons une largeur  $\Delta F_c$ . La figure 4.16a) montre l'évolution des largeurs  $\Delta F_c$  en fonction de la taille longitudinale  $L_x$  des systèmes. Cette largeur peut être vue comme étant l'échelle de force au delà de laquelle la probabilité que le réseau se dépiege change significativement. Les tailles et le nombre de réalisations de désordre pour chaque taille sont ceux considérés dans la figure 4.15b) de la section 4.5.4. De façon analogue au cas des ondes de densité de charge étudié dans le papier [104], la largeur se comporte avec la taille de la façon suivante

$$\Delta F_c(L_x) \sim L_x^{-1/\nu_{\text{FS}}} \quad (4.17)$$

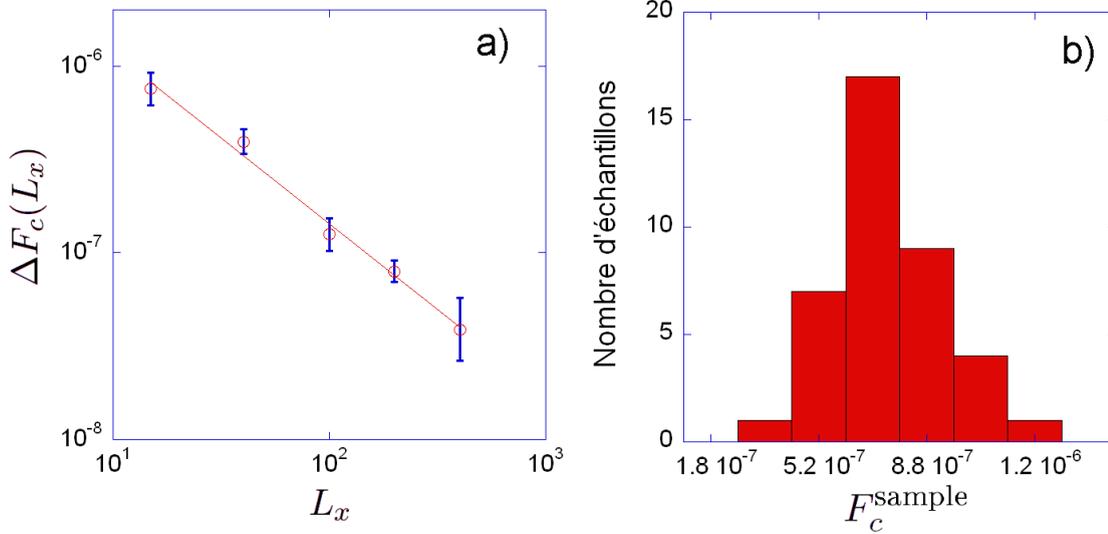


FIGURE 4.16 – a) Évolution de la largeur de la distribution de la force critique  $\Delta F_c(L_x)$  en fonction de la taille longitudinale  $L_x$ . Nous avons représenté en trait continu une régression du type loi de puissance  $\Delta F_c(L_x) \sim L_x^{-1/\nu_{\text{FS}}}$  afin d’extraire l’exposant de taille finie  $\nu_{\text{FS}}$ . L’incertitude de chaque point correspond à l’erreur standard associée à la valeur de la largeur extraite des distributions. Pour plus d’informations voir le paragraphe se reportant à la figure. b) Exemple de distribution des forces critiques  $F_c^{\text{sample}}$  pour 39 échantillons différents à la taille fixée par  $L_x = 100\lambda_L$  (avec toujours  $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$ ).

avec un exposant  $\nu_{\text{FS}}$  égal à :

$$\boxed{\nu_{\text{FS}} = 1.09 \pm 0.07} \quad (4.18)$$

### Distribution de la force de crossover

Une autre quantité intéressante est la force de crossover  $F_{\text{cross}}$  séparant le régime critique (région II) et le régime du *single-particle* (région I) des courbes  $v(f)$ . Nous pouvons identifier  $F_{\text{cross}}$  à la force en deçà de laquelle des effets de taille finie apparaissent dans le système. De façon similaire à la distribution des forces critiques nous avons déterminé la largeur des distributions des forces de crossover en fonction de la taille du système  $\Delta F_{\text{cross}}(L_x)$ .

Un exemple de la distribution typique des forces de crossover  $F_{\text{cross}}$  est présenté sur la figure 4.17b) pour  $L_x = 100\lambda_L$ . Sur la figure 4.17a) est affichée l’évolution de la largeur de ces distributions  $\Delta F_{\text{cross}}(L_x)$  avec la taille longitudinale  $L_x$ . Les données utilisées pour ces deux graphiques correspondent à celles de la distribution des forces critiques. On obtient la loi de puissance  $\Delta F_{\text{cross}}(L_x) \sim L_x^{-1/\nu_{\text{FS}}}$  avec,

$$\boxed{\nu_{\text{FS}} = 1.09 \pm 0.02} \quad (4.19)$$

Nous observons qu’un seul exposant  $\nu_{\text{FS}}$  contrôle la distribution des forces critiques et

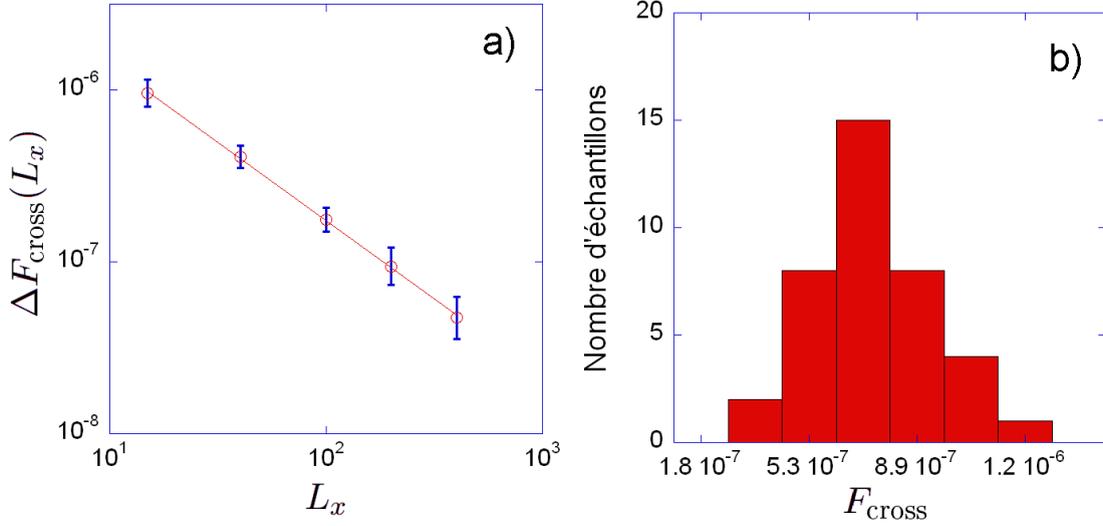


FIGURE 4.17 – a) Évolution de la largeur  $\Delta F_{\text{cross}}(L_x)$  avec la taille longitudinale  $L_x$ . Une régression en loi de puissance est affichée en trait continu et donne la pente  $-1/\nu_{\text{FS}}$ . L’incertitude de chaque point correspond à l’erreur standard associée à la valeur de la largeur extraite des distributions. Pour plus d’informations voir le paragraphe se reportant à la figure. b) Exemple de distribution des forces de crossover (entre région I et II des courbes  $\nu(f)$ )  $F_{\text{cross}}$  pour les mêmes échantillons que sur la figure 4.16b).

celle des forces de crossover de taille finie. Cet exposant caractérise une longueur caractéristique dont il est légitime de se demander le lien avec la longueur de corrélation  $\xi$  du système infini. Pour répondre à cela il est utile de déterminer l’exposant intrinsèque  $\nu$  de la longueur de corrélation  $\xi$  et de comparer les valeurs de  $\nu$  et  $\nu_{\text{FS}}$ .

#### 4.5.6 Exposant de corrélation $\nu$

Lorsque la longueur de corrélation est plus petite que la taille de la boîte  $\xi < L_x$  nous nous attendons à ce que

$$\xi \sim (F - F_c^\infty)^{-\nu} \quad (4.20)$$

avec  $\nu$  l’exposant intrinsèque de la longueur de corrélation et  $F_c^\infty$  la force critique pour le système infini. Par contre,  $\xi \sim L_x$  lorsque  $F \rightarrow F_{\text{cross}}^+$ . Il s’ensuit que

$$F_{\text{cross}} - F_c^\infty \sim L_x^{-1/\nu} \quad (4.21)$$

$F_c^\infty$  peut être déterminée à partir de la valeur moyenne sur le désordre de la force critique en fonction de la taille longitudinale  $L_x$ . La figure 4.18a) montre que  $\overline{F_c^{\text{sample}}}$  tend vers une constante que l’on identifie à  $F_c^\infty$ . La figure 4.18b) montre la différence  $\overline{F_{\text{cross}}} - F_c^\infty$  en fonction de la taille longitudinale  $L_x$ , où  $\overline{F_{\text{cross}}}$  correspond à la force de crossover moyennée sur le désordre. Les données utilisées ici sont les mêmes que celles

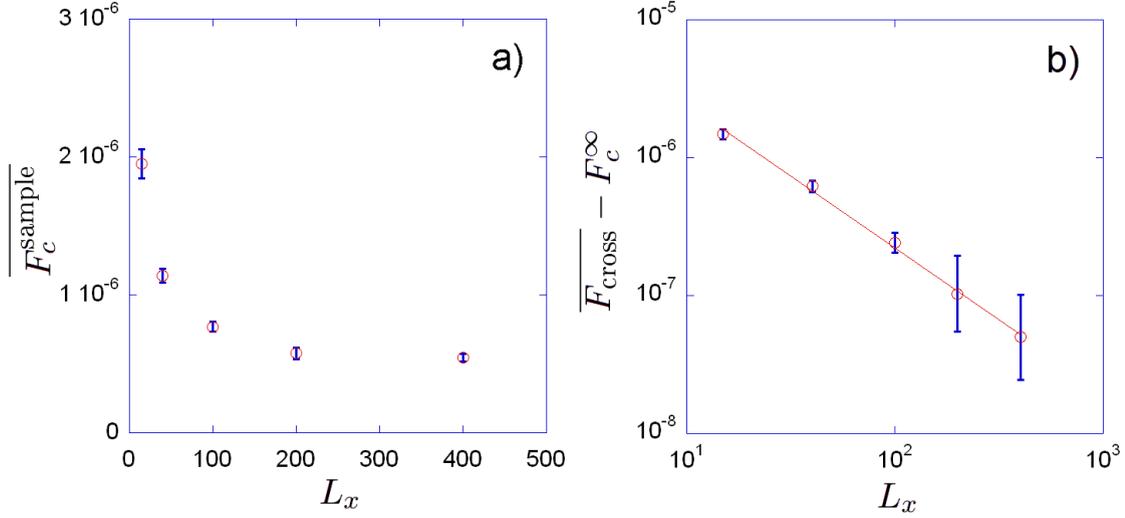


FIGURE 4.18 – a) Évolution de la force critique moyenne  $\overline{F_c^{\text{sample}}}$  en fonction de la taille longitudinale  $L_x$ . La valeur de  $F_c^{\infty}$  est extraite de cette courbe en prenant sa valeur asymptotique. b) Tracé de  $\overline{F_{\text{cross}}} - F_c^{\infty}$  en fonction de la taille longitudinale  $L_x$ . Une régression du type loi de puissance est affichée en trait continu à partir de laquelle nous extrayons la valeur de  $\nu$ . Les incertitudes affichées sur les deux courbes correspondent aux erreurs standards de nos échantillons (les larges barres d'erreurs pour les deux plus grandes tailles de la figure b) proviennent des erreurs statistiques qui deviennent de la taille de  $\overline{F_{\text{cross}}} - F_c^{\infty}$ ).

employées pour mesurer  $\nu_{\text{FS}}$ . A partir d'une régression en loi de puissance sur ces données nous obtenons,

$$\boxed{\nu = 1.04 \pm 0.04} \quad (4.22)$$

Cette valeur de  $\nu$  est très proche de celle déterminée pour l'exposant  $\nu_{\text{FS}}$ . On peut conclure que  $\nu = \nu_{\text{FS}}$ , de sorte qu'une seule longueur caractéristique existe au seuil de dépiégeage, gouvernant à la fois les effets de taille finie et les corrélations entre les vortex. Nous reviendrons sur ce résultat plus loin dans la section 4.5.7.2.

### 4.5.7 Ordre et corrélations

Nous faisons un aparté par rapport à la détermination des divers exposants critiques caractérisant le dépiégeage des vortex pour nous intéresser à l'ordre du réseau de vortex et aux corrélations en son sein. Nous présentons dans un premier temps le facteur de structure et la triangulation de *Delaunay* afin de caractériser l'ordre de la structure, puis nous introduisons une fonction de corrélation de paires pour déterminer  $\xi$ , et ainsi déduire directement  $\nu$ .

## 4.5.7.1 Ordre dans le réseau de vortex

## Facteur de structure

Afin de caractériser l'ordre dans la structure une quantité utile peut être mesurée : le facteur de structure,

$$S(\vec{k}) = \frac{1}{N_v} \left| \sum_{i=1}^{N_v} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} \right|^2 \quad (4.23)$$

qui correspond au module au carré de la transformée de *Fourier* de la densité de vortex. À partir de la visualisation du facteur de structure il est possible de distinguer un liquide d'un solide ordonné. En effet pour une configuration liquide il n'existe pas de réseau régulier pour la position des vortex et le facteur de structure ne présente pas de pics (un liquide étant isotrope nous observerons un anneau autour de l'origine). Au contraire une configuration cristalline présente un arrangement périodique des vortex dans l'espace et  $S(\vec{k})$  est également périodique et possède des pics marqués (situés au niveau du réseau réciproque pour un réseau de bravais).

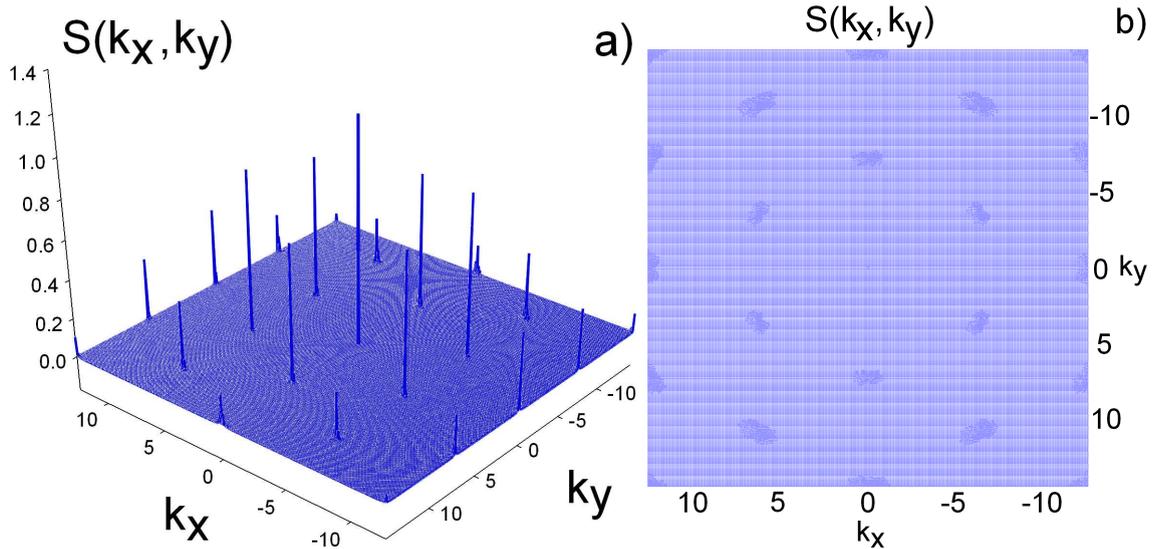


FIGURE 4.19 – a) Facteur de structure  $S(k_x, k_y)$  typique moyenné dans le temps, obtenu lors de nos simulations en piégeage faible à température nulle. b) Vue du dessus de  $S(k_x, k_y)$  mettant en avant un réseau triangulaire de pics marqués. La taille du système est de  $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$ .

Nous représentons sur les figures 4.19a) et 4.19b) le facteur de structure  $S(k_x, k_y)$  pour une taille de  $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$  moyenné dans le temps pour une force proche de la force critique de dépiégeage (la moyenne temporelle a été effectuée en moyennant  $S(k_x, k_y)$  sur plusieurs pas de temps). Cette courbe est représentative de ce que nous obtenons pour les autres tailles dans nos simulations à température nulle pour le cas du piégeage faible. Une vue en perspective et une du dessus permettent d'observer le comportement typique d'une structure cristalline avec un réseau triangulaire.

### Triangulation de Delaunay - Dislocations

Un autre moyen de mesurer qualitativement l'ordre dans la structure est d'effectuer une triangulation de *Delaunay*. C'est une triangulation dans laquelle chaque triangle formé a trois vortex comme sommets et tel que son cercle circonscrit ne contient aucun autre vortex. Cette triangulation permet de rendre compte visuellement de la présence de défauts topologiques dans le réseau en fournissant des informations sur le nombre de premiers voisins de chaque vortex. En effet dans le cas du réseau triangulaire parfait chaque vortex possède six voisins, s'il existe des vortex possédant plus ou moins de six voisins, par exemple cinq ou sept voisins alors des dislocations sont présentes dans la structure.

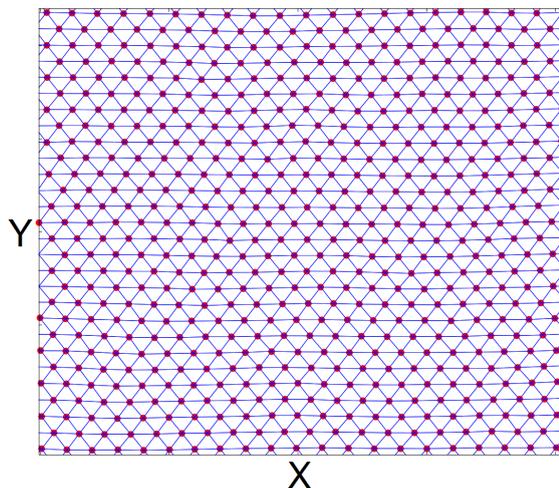


FIGURE 4.20 – Triangulation de Delaunay typique issue de nos simulations à température nulle dans le cas du piégeage faible. La figure représente un instantané de la position des vortex avec la triangulation en traits noirs et les vortex ayant six voisins en cercles pleins. La taille du système est  $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$ .

Nous affichons sur la figure 4.20 une triangulation de *Delaunay* pour une taille de système  $(100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$  représentative des simulations que nous effectuons dans le cas du piégeage faible à température nulle. La triangulation est représentée en traits noirs sur un instantané de la position des vortex (issue de la trajectoire de ces derniers pour une force proche de la force critique de dépiégeage), et les vortex possédant six voisins sont représentés en cercles pleins. Comme nous pouvons le voir le réseau de vortex ne présente pas de défauts topologiques et tous les vortex possèdent six voisins.

Ces aspects structurels sont compatibles avec la phase verre de Bragg en mouvement attendue dans le cas du piégeage faible à  $3D$ . Cependant on attend des dislocations à grandes échelles à  $2D$ , c'est-à-dire à des échelles plus grandes que la taille de nos boîtes de simulation, et l'analogie avec le verre de Bragg doit être prise avec précaution.

### 4.5.7.2 Fonctions de corrélation

#### Fonction de corrélation de la densité

L'étude du comportement des fonctions de corrélation de paires apporte des renseignements sur l'ordre dans la structure et les corrélations qui existent en son sein. La fonction de corrélation de la densité  $g(\vec{r})$  permet de confirmer visuellement l'ordre présent dans le réseau en mouvement. Cette fonction de corrélation de la densité est donnée par

$$g(\vec{r}) = \langle \rho(\vec{r}') \rho(\vec{r}' + \vec{r}) \rangle \quad (4.24)$$

avec la densité définie par  $\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N_v} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$  et  $\langle \dots \rangle$  représentant une moyenne sur le temps et l'espace  $(x, y)$ . Puisque numériquement nous ne pouvons pas utiliser de fonction de *Dirac*, nous choisissons une fonction gaussienne avec une portée  $r_0 = 0.1 a_0$  (mathématiquement cela revient à convoluer la fonction de corrélation avec une fonction de lissage gaussienne). Nous avons vérifié que les résultats obtenus sont indépendants du choix de  $r_0$  tant que la fonction reste suffisamment étroite. Nous obtenons ainsi l'expression suivante pour la fonction de corrélation de la densité implémentée numériquement (où  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ )

$$g(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi r_0^2 L_x L_y} \sum_t \left( \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} e^{-|\vec{r} - \vec{r}_{ij}|^2 / (2r_0^2)} \right) \quad (4.25)$$

Nous présentons sur les figures 4.21a-b-c) l'allure de la fonction  $g(x, y)$  pour une taille de système  $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$  avec une force appliquée proche du dépiégeage. Ce choix de taille peut paraître étrange compte tenu de ce que nous avons expliqué précédemment à propos des tailles longitudinales et transverses minimales à utiliser afin de s'affranchir d'effets de tailles finies pour la détermination du régime critique. Cependant, le calcul de la fonction de corrélation s'effectuant en post-traitement séquentiel avec un temps de calcul variant grossièrement comme  $\mathcal{O}(N_v^2)$ , la taille présentée ici nécessite déjà un temps de calcul important. En fait, les tests indiquent que l'allure de la courbe ne change pas avec des tailles plus importantes.

A partir de ces graphiques nous observons une structure cristalline avec un réseau triangulaire de pics marqués en accord avec les résultats présentés au-dessus. De plus, on constate que la portée de l'ordre est un peu plus faible dans la direction transverse que dans la direction longitudinale. Notons également l'impossibilité d'obtenir des informations sur la fonction de corrélation au delà d'une distance égale à  $\frac{L_i}{2}$  ( $i = x$  ou  $y$ ) à cause de la périodicité spatiale issue des conditions aux bords périodiques appliquées à la simulation.

#### Fonction de corrélation des vitesses

Intéressons nous maintenant à la fonction de corrélation des vitesses. Celle-ci permet de déterminer directement la longueur de corrélation  $\xi$  du système dans la phase en mou-

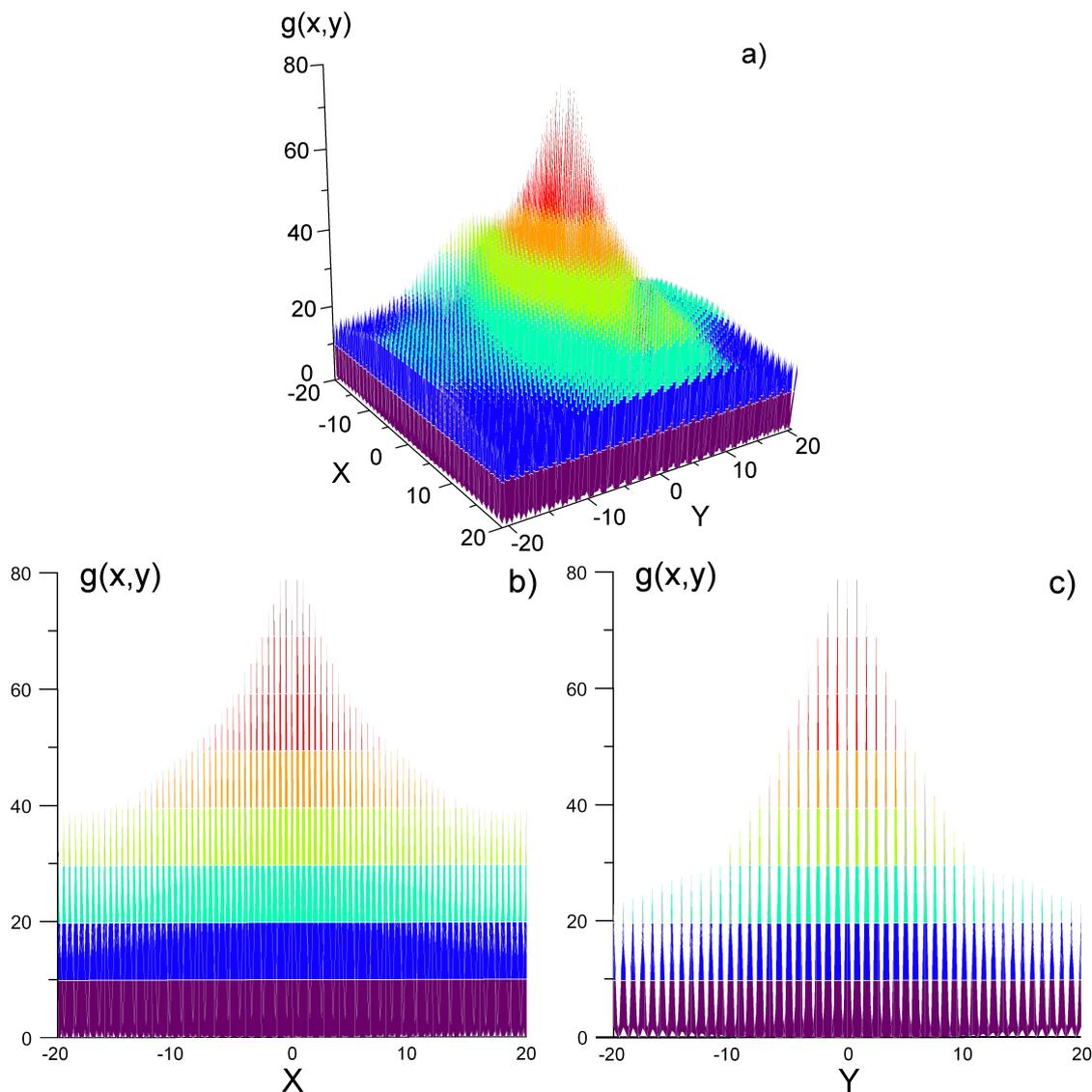


FIGURE 4.21 – Allure de la fonction de corrélation de la densité  $g(x,y)$  pour une taille  $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$  proche du dépiégeage : a) vue en perspective, b) suivant la direction  $x$  et c) suivant la direction  $y$ .

vement. Nous commençons par présenter le champ de vitesse instantané  $\vec{v}(x,y)$  obtenu lors de nos simulations et qui est à la base du calcul de la fonction de corrélation des vitesses. Sur la figure 4.22a) on observe le champ de vitesse instantané pour  $N_v = 1920$  vortex avec une force loin du dépiégeage (ce choix permet de ne pas surcharger la figure et reste pour autant représentatif de ce que l'on obtient pour des plus grands systèmes tels que  $N_v = 12000$ ). Les flèches représentent les vecteurs vitesses instantanés alors que le code couleur indique la norme de ces vecteurs (allant de la couleur bleue pour une faible intensité, à la couleur rouge pour une intensité plus élevée).

Afin de mieux visualiser ce champ de vecteur nous affichons sur la figure 4.22b) une

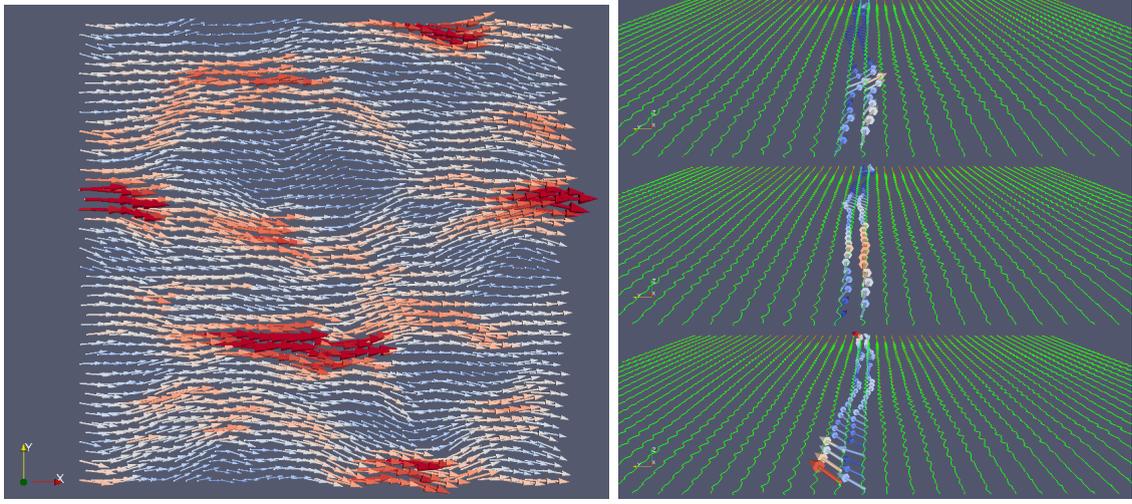


FIGURE 4.22 – a) Champ de vitesse instantané pour un système contenant  $N_v = 1920$  vortex loin du dépiégeage (les flèches représentent les vecteurs vitesses instantanés et la couleur indique la norme de ces vecteurs). b) Vue en perspective du champ de vitesse dans la direction  $x$  pour trois pas de temps différents. Les trajectoires sont visibles en couleur verte et seulement deux canaux affichent les vecteurs vitesses instantanés.

vue en perspective du champ de vitesse dans la direction  $x$  de la force appliquée pour différents pas de temps : les trajectoires sont représentées en vert (les vortex correspondent aux points rouges) et nous présentons seulement les vecteurs vitesses pour deux canaux côte à côte. Cette représentation permet par ailleurs d'observer visuellement le couplage des canaux. Ces résultats ainsi que ceux déduits de la fonction de corrélation de la densité nous conduisent à nous intéresser aux corrélations le long de l'axe  $x$  (dans le sens de la force d'entraînement), soit :

$$C(\vec{r}) = \langle v_x(\vec{r}^j) v_x(\vec{r}^j + \vec{r}) \rangle \quad (4.26)$$

avec  $\langle \dots \rangle$  une moyenne sur le temps et l'espace  $(x, y)$ . Similairement à l'implémentation numérique de la fonction de corrélation de la densité, l'équation (4.26) peut s'écrire sous la forme

$$C(\vec{r}) \propto \sum_t \left( \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} v_x^i v_x^j e^{-|\vec{r} - \vec{r}_{ij}|^2 / (2r_0^2)} \right) \quad (4.27)$$

Nous présentons sur les figures 4.23a) et 4.23b) l'allure de  $C(\vec{r})$  selon une vue en perspective permettant un aperçu général de la fonction, et une vue de profil selon l'axe  $x$  qui est intéressante pour l'identification de  $\xi$ . Pour quantifier la valeur de la longueur de corrélation il est nécessaire de choisir une taille de boîte ne causant pas d'effets de taille finie. Le calcul de cette fonction de corrélation s'effectuant en post-traitement séquentiel nous choisissons la taille longitudinale et transverse minimale qui offrent le meilleur rapport

#### 4.5. ÉTUDE À TEMPÉRATURE NULLE

"qualité/temps". Ainsi, nous considérons la taille  $(100, 18\sqrt{3}/2)\lambda_L$ , soit  $N_v = 1800$  vortex, pour les résultats concernant  $C(\vec{r})$  jusqu'à la fin de cette section. La moyenne temporelle est prise sur une période de la vitesse moyenne du centre de masse des vortex afin de minimiser le temps de calcul (rappelons que cette période correspond au temps mis par chaque vortex pour remplacer le vortex qui le précède sur le même canal) et la force extérieure est choisie telle que le système se situe dans le régime critique (région II des courbes  $v(f)$ ).

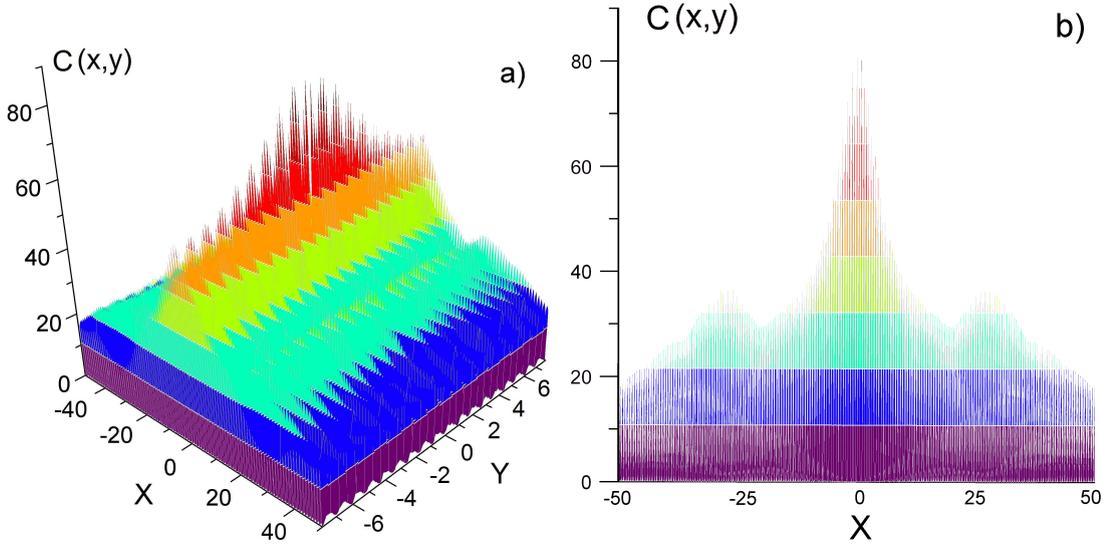


FIGURE 4.23 – Allure de la fonction de corrélation de la composante  $v_x$  de la vitesse instantanée pour une taille  $(100, 18\sqrt{3}/2)\lambda_L$  dans le régime critique et moyennée sur une période de la vitesse moyenne du centre de masse des vortex : a) vue en perspective, b) vue de profil selon l'axe  $x$ .

Notons que similairement à la fonction de corrélation de la densité,  $C(\vec{r})$  ne peut être évaluée au delà de la taille de la boîte divisée par 2. Dans la suite, nous nous restreignons aux corrélations selon le sens de l'écoulement  $x$  des vitesses longitudinales en effectuant une coupe selon le plan  $y = 0$ , c'est-à-dire  $C(x) \equiv C(x, 0)$ . Nous exposons sur la figure 4.24a) l'allure de l'enveloppe de la fonction  $C(x)$  pour une réalisation de désordre au niveau de la région I, II et III et que l'on identifie avec les forces  $F_I$ ,  $F_{II}$  et  $F_{III}$  (indiquant respectivement le régime *single-particle*, le régime critique et le régime ohmique). Afin d'extraire de ces résultats la longueur de corrélation  $\xi$  nous effectuons une régression non linéaire suivant l'équation [93],

$$C(x) \sim C_0 x^{-\kappa} e^{-\frac{x}{\xi}} \quad (4.28)$$

Cette forme fonctionnelle permet de prendre en compte à la fois la décroissance exponentielle à longue distance caractérisée par l'échelle de longueur  $\xi$  et le comportement algébrique à courte portée mesuré par l'exposant  $\kappa$ . Pour les mesures réalisées à différentes forces  $F$  nous trouvons que les deux paramètres  $C_0$  et  $\kappa$  demeurent presque constants lorsque  $F - F_c^\infty$  varie (avec  $\kappa \approx 0.30$ ). Nous traçons sur la figure 4.24b) la longueur de

#### 4.5. ÉTUDE À TEMPÉRATURE NULLE

corrélation  $\xi$  extraite de cette simulation en fonction de  $F - F_c^\infty$ . La flèche noire indique la valeur de  $F_{\text{cross}} - F_c^\infty$  avec  $F_{\text{cross}}$  la force de crossover séparant le régime critique et le régime du *single-particle* des courbes  $v(f)$ .

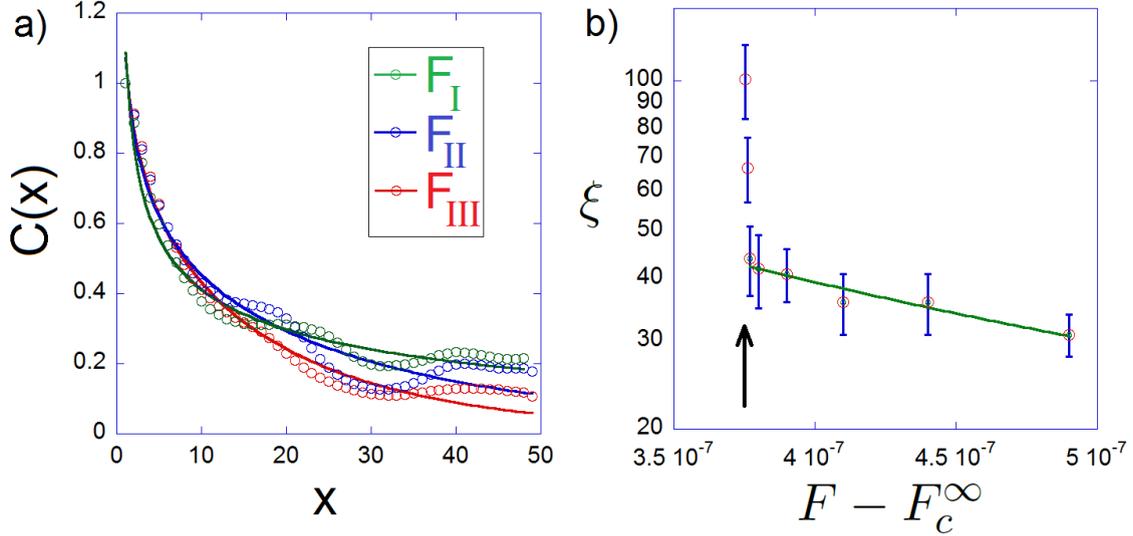


FIGURE 4.24 – a) Allure de l’enveloppe de  $C(x)$  pour des forces  $F_I$ ,  $F_{II}$  et  $F_{III}$  situant le système dans les trois régions identifiées sur les courbes  $v(f)$ . Une régression suivant la forme fonctionnelle  $C_0 x^{-\kappa} e^{-\frac{x}{\xi}}$  est superposée aux données. b) Évolution de la longueur de corrélation intrinsèque  $\xi$  en fonction de  $F - F_c^\infty$ . Une régression en loi de puissance (en vert) du type  $\xi \sim (F - F_c^\infty)^{-\nu}$  est affichée et permet de déterminer  $\nu = 1.2 \pm 0.2$ . Les barres d’erreurs représentent l’erreur standard associée à la valeur de  $\xi$  extraite de la régression de la figure a). La flèche noire indique la valeur de  $F_{\text{cross}} - F_c^\infty$  (où  $F_{\text{cross}}$  est la force de crossover séparant le régime critique et le régime du *single-particle* des courbes  $v(f)$ ). Pour ces deux figures la taille du système est  $(100, 18\sqrt{3}/2)\lambda_L$  et une seule réalisation de désordre est considérée.

Comme attendu, des effets de taille finie apparaissent pour  $F \rightarrow F_{\text{cross}}^+$ , lorsque la longueur  $\xi$  devient de l’ordre de la taille longitudinale de la boîte, *i.e.*  $\xi \sim L_x$  (où  $L_x = 100\lambda_L$ ). Ce résultat confirme l’hypothèse utilisée pour déterminer indirectement l’exposant  $\nu$  dans la section 4.5.6. De plus nous obtenons un comportement de la longueur de corrélation tel que  $\xi \sim (F - F_c^\infty)^{-\nu}$  pour  $F > F_{\text{cross}}$  dans le régime critique (cf sur la figure 4.24b) la régression représentée en couleur verte) d’où l’on tire :

$$\boxed{\nu = 1.2 \pm 0.2} \quad (4.29)$$

Bien que n’ayant été effectué que sur une seule réalisation de désordre et pour une taille donnée, ce résultat est en bon accord avec la valeur de  $\nu$  déterminée dans la section 4.5.6. Une étude plus exhaustive avec une moyenne sur le désordre est nécessaire pour une détermination plus précise de cet exposant. Nous constatons néanmoins que ce résultat suggère fortement que la longueur de corrélation intrinsèque contrôle la distribution des forces critiques et celle des forces de crossover liées aux effets de taille finie. Ce résultat est assez

surprenant par rapport au cas des ondes de densité de charge, où il a été montré numériquement et par calculs du groupe de renormalisation [86, 89, 104, 105] que les exposants  $\nu$  et  $\nu_{\text{FS}}$  sont différents, impliquant ainsi plusieurs échelles de longueurs divergentes.

#### 4.5.8 Finite-size scaling

Dans cette section nous mettons à profit la théorie des lois d'échelles en taille finie rappelée en section 4.2.2. Une loi d'échelle relie la vitesse  $v$ , la force  $f$  et la taille du système  $L_x$  à température nulle  $T = 0$  telle que

$$v(f, L_x) \sim L_x^{-\beta/\nu} \mathcal{V}(fL_x^{1/\nu}) \quad (4.30)$$

avec  $\mathcal{V}$  une fonction d'échelle. Cette relation n'est pertinente qu'au voisinage de la transition de dépiégeage et pour des tailles  $L_x$  suffisamment grandes. Considérons les courbes  $v(f)$  moyennées sur le désordre pour différentes tailles de systèmes avec  $L_x = (40, 100, 200, 400)\lambda_L$  et diverses tailles transverses variant de  $L_y = 18\sqrt{3}/2\lambda_L$  à  $L_y = 120\sqrt{3}/2\lambda_L$  (le nombre d'échantillons pour la moyenne est le même que pour la détermination de l'exposant  $\beta$ ). Nous traçons sur la figure 4.25 la quantité  $vL_x^{\beta/\nu}$  en fonction de  $fL_x^{1/\nu}$  en utilisant la valeur  $\beta = 0.29 \pm 0.03$  et  $\nu = 1.04 \pm 0.04$  et en ne retenant que les points des régions I et II.

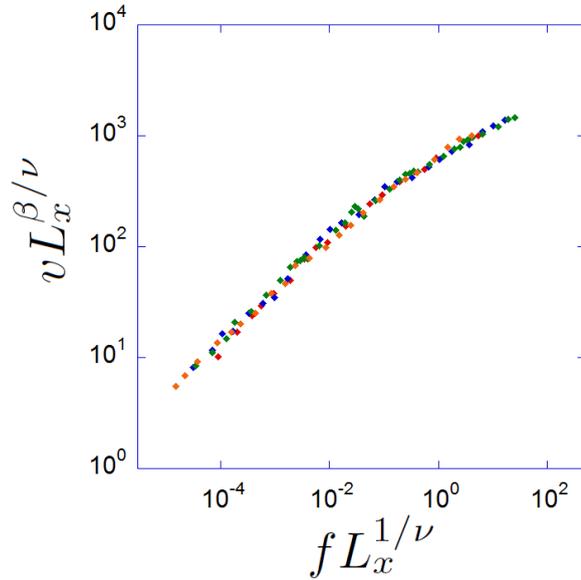


FIGURE 4.25 – Évolution de  $vL_x^{\beta/\nu}$  en fonction de  $fL_x^{1/\nu}$  pour différentes tailles de systèmes avec  $L_x = (40, 100, 200, 400)\lambda_L$ . Les valeurs des exposants critiques utilisées sont  $\beta = 0.29 \pm 0.03$  et  $\nu = 1.04 \pm 0.04$ .

On observe une superposition des données en une courbe unique en accord avec l'hypothèse de la loi d'échelle (4.30) et confirmant les valeurs des exposants critiques obtenues précédemment. Le comportement asymptotique de la fonction d'échelle  $\mathcal{V}(x)$  est  $\mathcal{V}(x) \sim x^\beta$  pour  $x \gg 1$ , alors que  $\mathcal{V}(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . Cette dernière propriété semble anormale

puisque l'on attend  $\mathcal{V}(x) \sim \text{constante}$  pour  $x \rightarrow 0$ . Un tel comportement inhabituel a cependant été observé dans des simulations numériques de la transition de dépiégeage d'interfaces [106]. Son origine provient du régime *single-particle* qui peut partiellement cacher les effets de taille finie habituels.

#### 4.5.9 Autre exposant d'une fonction de réponse

Nous avons déterminé les deux exposants  $\beta$  et  $\nu$ , le premier étant très présent dans la littérature alors que le second l'est un peu moins. Nous allons nous intéresser maintenant à l'exposant  $\alpha$  associé à la chaleur spécifique. Nos mesures vont nous donner l'ordre de grandeur de cette quantité, nous ne tentons cependant pas d'évaluer précisément l'incertitude associée.

La chaleur spécifique est reliée à la variation de l'énergie moyenne du système avec la force, et s'écrit

$$C_T(F) = \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{N_v F^2} \quad (4.31)$$

où nous avons divisé par le nombre de vortex  $N_v$  dans un souci de comparaison entre différentes tailles. En exploitant la théorie d'échelle en taille finie comme utilisée au-dessus, nous traçons sur la figure 4.26a) la quantité  $C_T L_x^{-\alpha/\nu}$  en fonction de  $f L_x^{1/\nu}$ , où  $\nu = 1.04 \pm 0.4$  est fixé et  $\alpha$  est recherché de manière à réunir les points sur une même courbe. Les tailles considérées sont  $L_x = (40, 100, 200, 400)\lambda_L$  et les tailles transverses varient de  $L_y = 18\sqrt{3}/2\lambda_L$  à  $L_y = 50\sqrt{3}/2\lambda_L$  avec respectivement une moyenne sur  $N = (20, 16, 16, 12, 8)$  échantillons, seuls les points des régions I et II sont pris en compte.

Nous observons une coalescence des points sur une courbe pour la valeur de  $\alpha \approx 0.9$ . Afin de confirmer cette valeur nous représentons sur la figure 4.26b) le maximum de la chaleur spécifique en fonction de  $L_x$ . Conformément à la théorie des lois d'échelle en taille finie nous trouvons  $(C_T)_{\max} \sim L_x^{\alpha/\nu}$ , d'où l'on tire  $\alpha \approx 0.9$ . La plus grande dispersion des points obtenue sur la courbe de la loi d'échelle en taille finie résulte à la fois de la plus faible quantité de désordres utilisés pour la moyenne et du nombre de points d'échantillonnage autour du maximum de la fonction de réponse.

## 4.6 Température finie

Dans cette partie nous présenterons les résultats obtenus pour le dépiégeage des vortex en piégeage faible à température finie. Nous commençons par présenter la fusion du réseau de vortex, puis nous déterminons l'exposant thermique  $\delta$  de la transition de dépiégeage. Nous examinons l'effet de l'intensité du piégeage sur les exposants critiques, et enfin nous proposons une loi d'échelle permettant de relier les grandeurs  $\nu$ ,  $f$  et  $T$  entre elles.

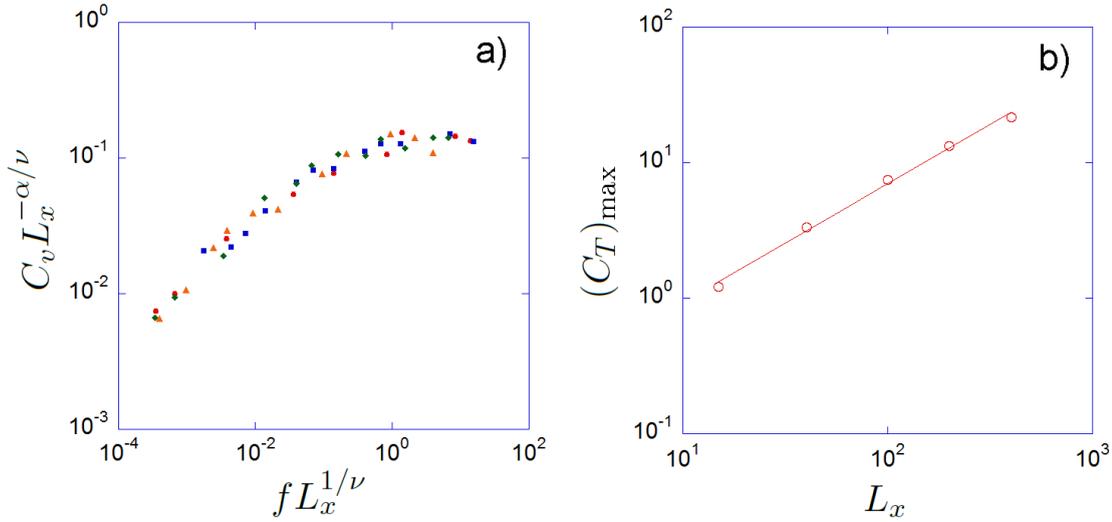


FIGURE 4.26 – a) Évolution de  $C_T L_x^{-\alpha/\nu}$  en fonction de  $f L_x^{1/\nu}$  avec  $\nu = 1.04 \pm 0.4$  pour les tailles de systèmes  $L_x = (40, 100, 200, 400)\lambda_L$  moyennées sur le désordre (respectivement  $N = (20, 16, 16, 12, 8)$  réalisations de désordres). La superposition des courbes est obtenue pour  $\alpha \approx 0.9$ . b) Autre mesure de  $\alpha \approx 0.9$  via l'évolution de  $(C_T)_{\max}$  avec la taille  $L_x$ .

#### 4.6.1 Fusion du réseau

Nous attendons une température  $T_{\text{fusion}}$  au delà de laquelle le réseau fond en un liquide de vortex. L'examen de la structure du réseau à différentes températures pour une force d'entraînement nulle montre qu'en dessous d'une température  $T_{\text{fusion}} = 10^{-5}$  le réseau paraît ordonné alors qu'au dessus il est désordonné. La figure 4.27a) et 4.27b) montre une triangulation de *Delaunay* sur un instantané de la position des vortex pour un système de taille  $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$  à une température en dessous et au dessus de  $T_{\text{fusion}}$ .

On observe pour  $T < T_{\text{fusion}}$  un très faible nombre de dislocations et la structure est ordonnée. Lorsque  $T > T_{\text{fusion}}$  les défauts prolifèrent et la structure est déstabilisée. L'allure de la fonction de corrélation de la densité permet de mettre en évidence la perte de l'ordre à  $T = T_{\text{fusion}}$ . Nous avons tracé sur les figures 4.28a-e)  $g(x, y)$  pour différentes températures autour de  $T_{\text{fusion}}$  pour une taille  $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$ .

Au fur et à mesure que la température augmente, la hauteur des pics marqués du réseau diminue tandis que la valeur de  $g(x, y)$  entre les pics augmente formant des anneaux à partir de  $T_{\text{fusion}}$ . Nous pouvons utiliser d'autres grandeurs quantitatives afin de déterminer la température de fusion. Sur la figure 4.29 nous en présentons diverses. Nous montrons la hauteur des pics correspondants aux premiers voisins et la valeur moyenne de  $g(x, y)$  entre les pics (au niveau du premier anneau). Ces deux courbes se rejoignent lorsque les pics disparaissent en un anneau indiquant la valeur de la température pour laquelle la transition a lieu. Nous exposons également la fraction  $\langle n_6 \rangle$  de vortex, dont le nombre de voisin est égal à six, en fonction de la température. On observe une valeur égale à l'unité en dessous de  $T = 10^{-5}$ , et dès que cette température est dépassée  $\langle n_6 \rangle$  chute brutalement et tend vers une valeur constante non nulle représentant un état du système complète-

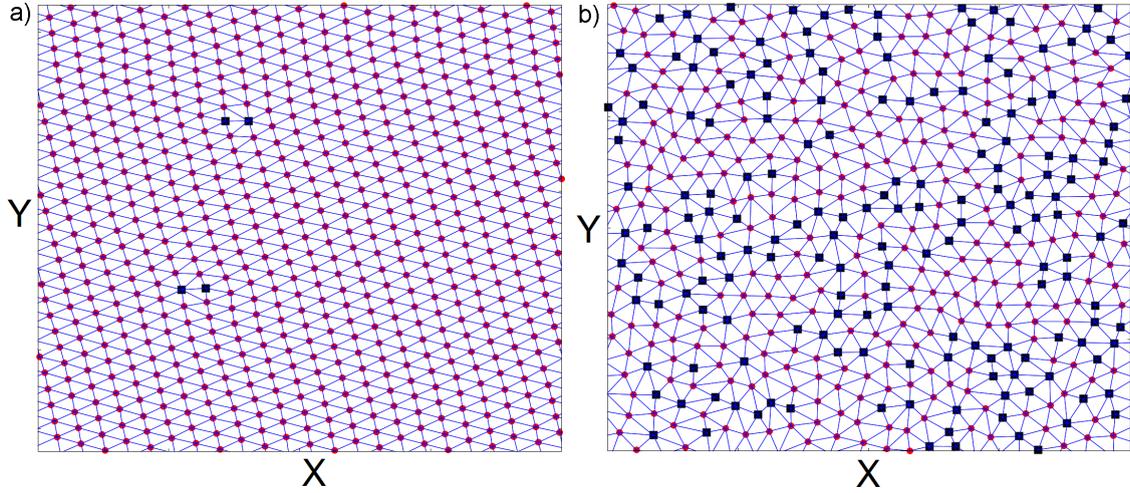


FIGURE 4.27 – Triangulation de Delaunay (en traits bleus) superposée à un instantané de la position des vortex, où les vortex ayant six voisins sont représentés en cercles pleins rouges et ceux dont le nombre de voisins est différent de six sont représentés via des carrés noirs : a) pour  $T = 3 \cdot 10^{-6} < T_{\text{fusion}}$  et b)  $T = 3 \cdot 10^{-4} > T_{\text{fusion}}$ . La taille du système est  $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$ .

ment désordonné où seulement certains vortex possèdent six voisins. Enfin, nous calculons  $C_v(T) \propto \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{T^2}$  qui présente un pic au niveau de  $T = 10^{-5}$ . Toutes ces informations indiquent une transition solide/liquide de vortex à  $T_{\text{fusion}} = 10^{-5}$  (représentée sur la figure 4.29 par une ligne en traits pointillés).

### 4.6.2 Exposant thermique $\delta$

Nous déterminons dans cette partie l'exposant thermique  $\delta$  de la transition de dépiégeage à température finie. Nous avons vu qu'à température nulle le système est piégé en dessous de la force critique  $F_c$ , impliquant une valeur nulle de la vitesse moyenne du centre de masse des vortex. À  $T \neq 0$ , les vortex sont en mouvement pour des valeurs de force  $F < F_c$  à cause des fluctuations thermiques qui procurent suffisamment d'énergie aux vortex pour leur permettre de passer les barrières locales d'énergie. Ainsi la vitesse des vortex est toujours  $v \neq 0$  quelque soit la force appliquée (bien que très faible pour les faibles valeurs de  $F$ ), entraînant un arrondissement de la transition de dépiégeage. En utilisant encore une fois l'analogie avec les phénomènes critiques standards nous pouvons prédire la réponse du système en température suivant une loi de puissance à  $F = F_c$  telle que

$$v_{F=F_c} \sim T^{1/\delta} \quad (4.32)$$

Nous représentons sur la figure 4.30 la réponse typique observée pour la vitesse réduite  $v$  en fonction de la température en échelle logarithmique. Le cas affiché correspond à une taille de système de  $(400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$  pour une intensité de désordre relative de  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$

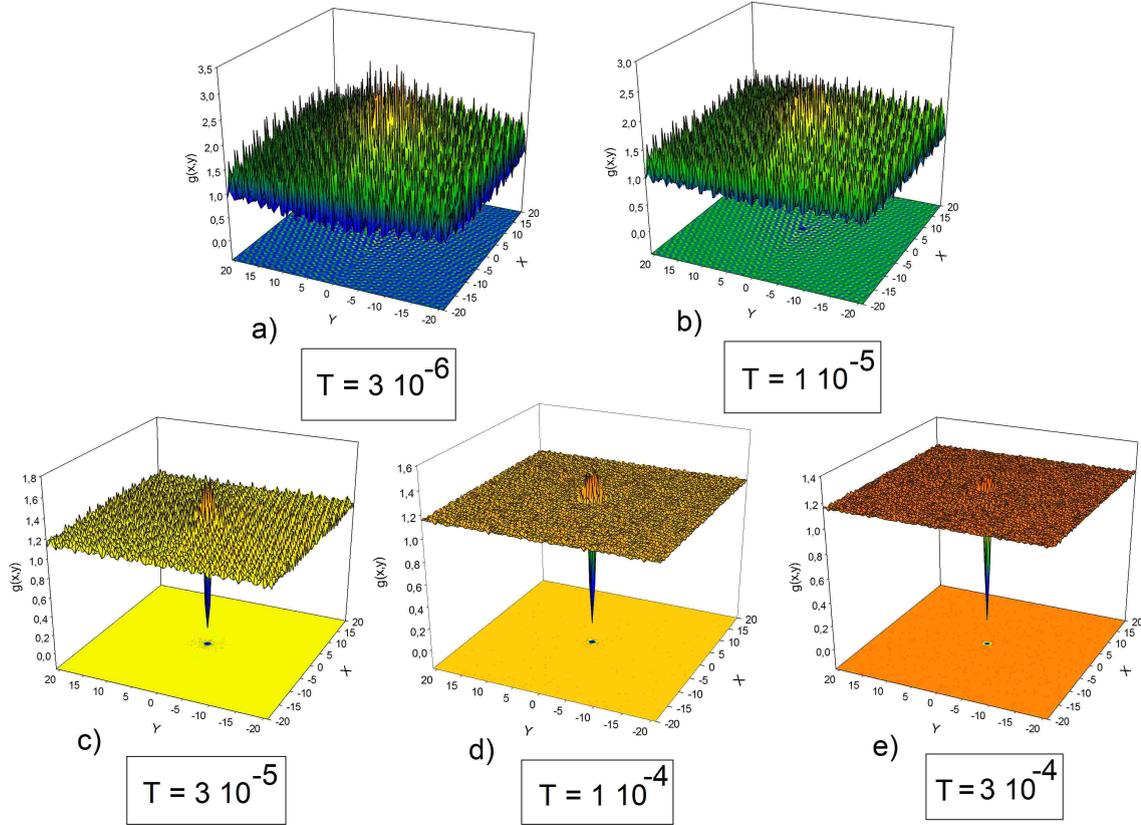


FIGURE 4.28 – Allure de la fonction  $g(x, y)$  pour différentes températures en dessous et au dessus de la température de fusion  $T_{\text{fusion}} = 10^{-5}$ . La température varie de façon croissante entre les figures a) et e). Des courbes de contour sont affichées dans le plan  $xy$  pour une meilleure visualisation de la fonction  $g(x, y)$ .

où la moyenne est réalisée sur  $N = 6$  échantillons pour des valeurs fixées de force réduite de  $f = (10, 4, 3, 0, -2, -7) \times 10^{-4}$ .

Deux comportements sont clairement visibles sur les courbes  $v(T)$ . En dessous de la force critique, *i.e.* pour  $f < 0$ ,  $v(T) \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$  plus rapidement qu'une loi de puissance. Ce comportement résulte en une courbe  $v(T)$  concave dans une échelle log-log. Au dessus de  $F_c$ ,  $v(T = 0) \rightarrow \text{cste}$  ce qui se traduit sur le graphique par une courbe convexe avec une asymptote horizontale lorsque  $T \rightarrow 0$ . Entre ces deux comportements nous pouvons définir la force critique effective,  $\overline{F}_c^*$ , qui représente la force pour laquelle  $v_{F=\overline{F}_c^*} \sim T^{1/\delta}$ . Ce comportement en loi de puissance est représenté en traits pointillés sur la figure 4.30. La détermination de l'exposant critique  $\delta$  a été faite sur  $N = 8$  réalisations de désordre pour différentes tailles  $L_x = (100, 400)\lambda_L$  et avec des tailles transverses  $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$ . Nous obtenons ainsi

$$\boxed{\delta^{-1} = 0.28 \pm 0.05} \quad (4.33)$$

où l'incertitude est déduite des différentes droites que l'on peut tracer au niveau de  $\overline{F}_c^*$

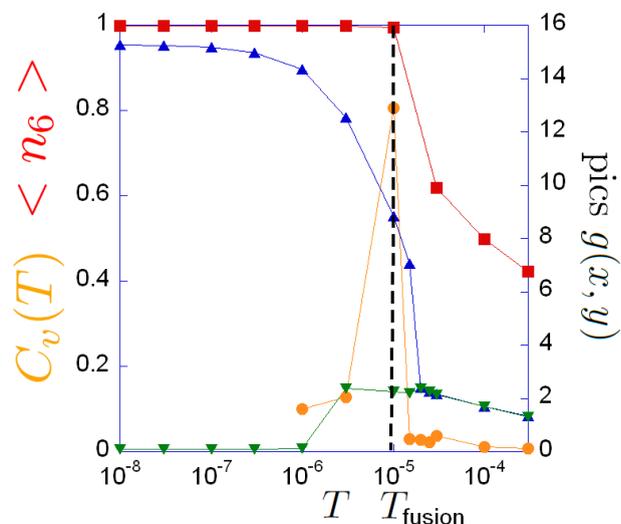


FIGURE 4.29 – Evolution avec la température de différentes quantités : la fraction  $\langle n_6 \rangle$  de vortex ayant 6 voisins au cours du mouvement (carrés rouges), la chaleur spécifique  $C_v(T)$  (cercles oranges), la hauteur des pics des premiers voisins de  $g(x, y)$  (triangles bleus vers le haut) et la valeur moyenne de  $g(x, y)$  entre les pics au niveau du premier anneau (triangles vers le bas). Le système considéré ici est d'une taille de  $(40, 48\sqrt{3}/2)\lambda_L$  et toutes ces quantités sont moyennées dans le temps.

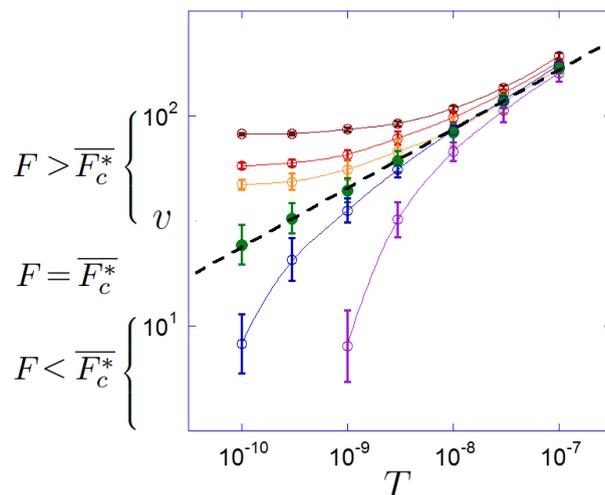


FIGURE 4.30 – Tracé de la vitesse réduite  $v$  en fonction de la température  $T$  moyennée sur  $N = 6$  échantillons pour des valeurs fixées de  $f = (10, 4, 3, 0, -2, -7) \times 10^{-4}$  et un système de taille  $(400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ . L'intensité de désordre relative est  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$ , les barres d'erreurs correspondent à l'erreur standard associée à chaque valeur moyennée. L'extrapolation au niveau de  $\overline{F}_c^*$  en traits pointillés permet d'obtenir l'exposant  $\delta^{-1}$  (voir le texte associé pour plus d'informations). Les lignes reliant les points ne sont qu'un guide visuel pour les différentes concavités observables.

pour extrapoler la loi de puissance. Remarquons que les valeurs de température utilisées sont très inférieures à la température de fusion  $T_{\text{fusion}}$ .

Notons également qu'une nouvelle force critique effective est ainsi introduite. Sa valeur est en parfait accord avec la valeur de la force critique  $\overline{F}_c$  obtenue à température nulle. Un traitement des courbes  $v(f)$  obtenues à  $T = 0$  en utilisant  $\overline{F}_c^*$  conduit à un exposant de dépiégeage  $\beta = 0.28 \pm 0.05$ , en très bon accord avec la valeur  $\beta = 0.29 \pm 0.03$  déterminée à  $T = 0$ . L'incertitude plus importante provient du plus faible nombre d'échantillons traités à température finie (le temps de simulation nécessaire à l'obtention d'une moyenne temporelle correcte de la vitesse augmentant lorsque l'on diminue la température).

Enfin, il convient de noter que la procédure de moyenne des valeurs individuelles  $\delta_i^{-1}$  (où  $i = 1, \dots, N$  échantillons) obtenue pour chaque réalisation de désordre, conduit à un résultat identique *i.e.*  $\delta^{-1} = 0.28$ .

La relation d'échelle  $2 - \alpha = \beta(\delta + 1)$  semble être vérifiée à partir des exposants critiques déterminés. Cependant aucune justification théorique ne permet d'utiliser ces relations d'échelles dans le cas d'une transition hors-équilibre.

### 4.6.3 Différentes intensités de piégeage

Nous venons de déterminer divers exposants critiques, dont ceux caractérisant le dépiégeage à température nulle ( $\beta$ ) et finie ( $\delta$ ), pour une valeur d'intensité de désordre relative  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$  correspondant à une dynamique élastique. Nous présentons l'évolution de ces exposants avec l'intensité de piégeage.

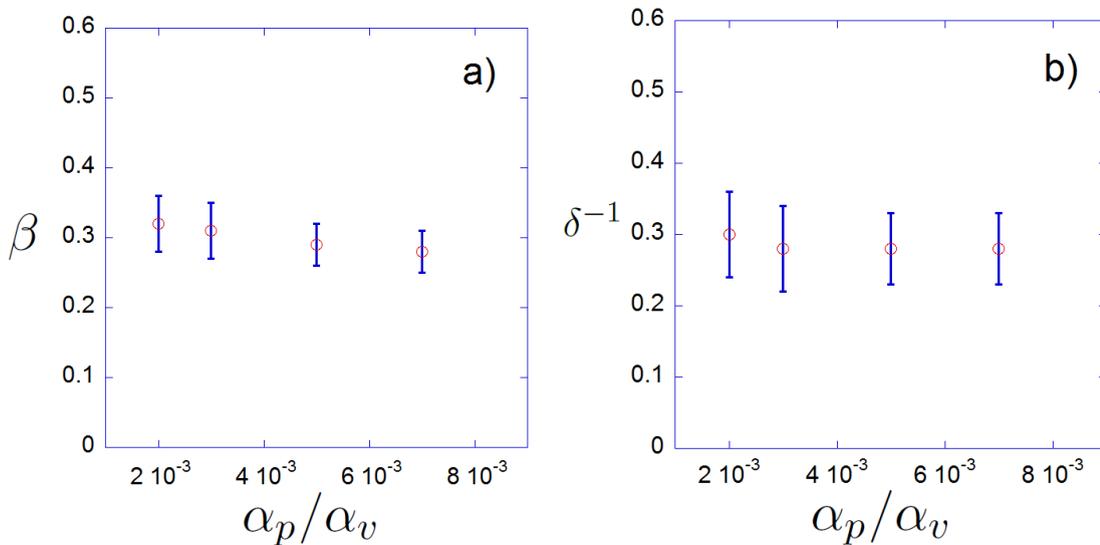


FIGURE 4.31 – Évolution des exposants critiques  $\beta$  (figure a) et  $\delta^{-1}$  (figure b) avec l'intensité de désordre relative  $\alpha_p/\alpha_v$ . Pour plus d'informations quant aux barres d'erreurs, se référer aux sections traitant de l'exposant  $\beta$  et  $\delta^{-1}$  afin de savoir comment elles sont mesurées habituellement.

Pour différentes tailles de systèmes telles que  $L_x \geq 100\lambda_L$  et  $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$  nous choisissons différentes intensités de désordre relatives  $\alpha_p/\alpha_v \approx (2, 3, 5, 7) \times 10^{-3}$ . Notons

que lorsque l'intensité de piégeage diminue, le temps de calcul peut devenir déraisonnable au voisinage de la force critique, et il est nécessaire de simuler des tailles de systèmes plus grandes.

Le nombre d'échantillons pour chaque intensité de piégeage a été réparti de la façon suivante :  $N = 1$  pour  $\alpha_p/\alpha_v \approx 2 \cdot 10^{-3}$  et une taille  $L_x = 1000\lambda_L$ ,  $N = 2$  pour  $\alpha_p/\alpha_v \approx 3 \cdot 10^{-3}$  et  $L_x = 400\lambda_L$ ,  $N = 8$  pour  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$  et  $L_x = (100, 400)\lambda_L$  et enfin  $N = 4$  pour  $\alpha_p/\alpha_v \approx 7 \cdot 10^{-3}$  et  $L_x = 400\lambda_L$ . Les figures 4.31a) et 4.31b) montrent les valeurs des exposants  $\beta$  et  $\delta^{-1}$  obtenues pour différentes intensités de désordre. On trouve que  $\beta$  et  $\delta^{-1}$  sont indépendants de l'intensité de piégeage utilisée.

#### 4.6.4 Loi d'échelle reliant $(v, f, T)$

Le comportement critique de la vitesse au seuil de dépiégeage nous conduit à exprimer  $v$  sous la forme d'une fonction homogène généralisée des variables  $f$  et  $T$ . Afin d'exprimer la relation liant  $v, f, T$  en termes de quantités sans dimensions, nous définissons  $v_0$  et  $T_0$  tels que

$$v_{f>0} = v_0 f^\beta \quad (4.34a)$$

$$v_{f=0} = v_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1/\delta} \quad (4.34b)$$

ce qui revient à définir une vitesse adimensionnelle  $\tilde{v}$  et une température adimensionnelle  $\tilde{T}$

$$\tilde{v} = \frac{v}{v_0} \quad (4.35a)$$

$$\tilde{T} = \frac{T}{T_0} \quad (4.35b)$$

Nous postulons l'ansatz suivant pour la loi d'échelle :

$$\tilde{v}|f|^{-\beta} = S_\pm(\tilde{T}|f|^{-\beta\delta}) \quad (4.36)$$

où  $S(x)$  est la fonction d'échelle avec deux branches,  $S_+$  correspond à  $f > 0$  et  $S_-$  à  $f < 0$ . Les lois de puissances à température nulle et à force réduite nulle que nous avons obtenues  $\tilde{v}_{f>0} = f^\beta$  et  $\tilde{v}_{f=0} = \tilde{T}^{1/\delta}$  impliquent pour la fonction d'échelle les comportements asymptotiques suivants,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} S_+(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} S_\pm(x) = x^{1/\delta} \\ \lim_{x \rightarrow 0} S_-(x) = 0 \end{array} \right. \quad (4.37)$$

La branche  $S_+$  présente une asymptote horizontale lorsque  $\tilde{T} \rightarrow 0$  définissant ainsi un régime dominé par la force d'entraînement alors que les branches  $S_{\pm}$  possèdent une asymptote oblique de pente  $1/\delta$  pour  $f \rightarrow 0$  définissant un régime dominé par la température. Le changement de variables  $(v, T) \rightarrow (\tilde{v}, \tilde{T})$  va translater (dans une échelle logarithmique) la courbe  $y = S_{\pm}(x)$  et est équivalent à choisir l'intersection des deux asymptotes (celle horizontale et celle oblique de pente  $\delta^{-1}$ ) comme étant l'origine du système de coordonnées  $x = \tilde{T}|f|^{-\beta\delta}$ ,  $y = \tilde{v}|f|^{-\beta}$ .

La figure 4.32 montre  $\tilde{v}_i|f|^{-\beta}$  en fonction de  $\tilde{T}|f|^{-\beta\delta}$  avec  $\beta = 0.29 \pm 0.03$  et  $\delta^{-1} = 0.28 \pm 0.05$ , où les valeurs de ces deux exposants peuvent varier dans la barre d'erreur pour chaque échantillon. Ici  $\tilde{v}_i$  correspond à la vitesse obtenue pour chacune des réalisations de désordre, pour les différentes tailles  $L_x = (100, 400, 1000)\lambda_L$  contenant  $N_v = (5000, 8000, 20000)$  vortex, et les différentes intensités de désordre  $10^3 \times \alpha_p/\alpha_v \approx (2, 3, 5, 7)$ . On observe une superposition de toutes les courbes individuelles en une courbe unique présentant deux branches associées aux comportements asymptotiques attendus. Rappelons que la valeur de  $F_c$  utilisée pour calculer la force réduite  $f$  dépend de chaque échantillon. Les deux préfacteurs  $v_0$  et  $T_0$  ne sont pas universels et leur valeur varie d'un échantillon à l'autre, cependant la fonction d'échelle  $S_{\pm}(x)$  demeure inchangée. Notons que l'utilisation de la méthode de moyenne sur le désordre utilisée précédemment conduit au même résultat.

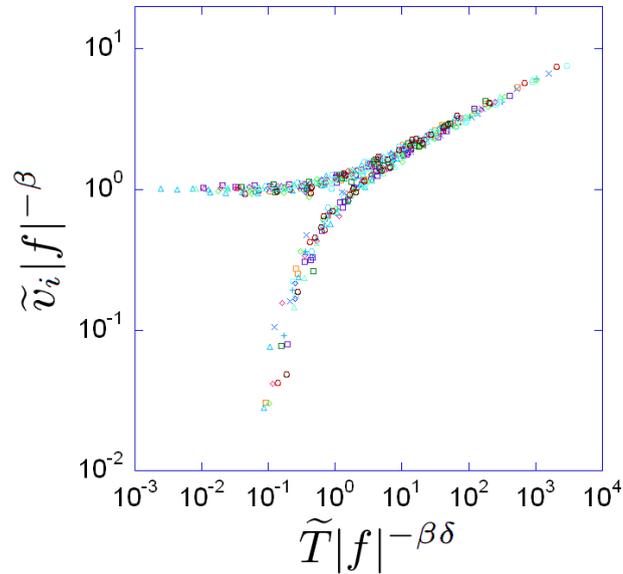


FIGURE 4.32 – Tracé de la loi d'échelle  $\tilde{v}_i|f|^{-\beta}$  en fonction de  $\tilde{T}|f|^{-\beta\delta}$  avec  $\beta = 0.29 \pm 0.03$  et  $\delta^{-1} = 0.28 \pm 0.05$  pour  $N = 14$  échantillons avec différentes intensités de piégeage relatives  $10^3 \times \alpha_p/\alpha_v \approx (2, 3, 5, 7)$ , différentes tailles de systèmes  $L_x = (100, 400, 1000)\lambda_L$  et pour différentes réalisations de désordre. Pour chaque échantillon la valeur de  $\beta$  et  $\delta^{-1}$  est autorisée à varier dans la barre d'erreur qui lui est liée.

Ces résultats sont en faveur de l'existence d'un régime critique au seuil de dépiégeage avec des exposants critiques qui ne dépendent pas de l'intensité du piégeage.

### 4.6.5 Classe d'universalité ?

Comme nous venons de le montrer, la transition de dépiégeage élastique est analogue à une transition de phase du second ordre (continue) avec des exposants de dépiégeage  $\beta$  et thermique  $\delta$  présentant un certain degré d'universalité par rapport au désordre.

Néanmoins la question de l'existence d'une classe d'universalité pour le dépiégeage élastique reste ouverte. En effet, une grande variété d'exposant  $\beta$  a été trouvée dans la littérature comme nous l'avons déjà remarqué dans le paragraphe 4.3.2. La valeur de l'exposant de dépiégeage obtenu dans ce travail est proche de la valeur  $\beta \approx 1/3$  déterminée pour les interfaces dans un espace de dimension  $D = 2$  [91, 92, 93]. Cependant il convient de comparer nos résultats à ceux obtenus pour les systèmes périodiques avec un champ de déplacement  $N = 2$  dans un espace de dimension  $D = 2$ . C'est le cas par exemple des systèmes de type stripes [33] (qui sont des systèmes périodiques anisotropes) pour lesquels  $\beta = 0.35$ . Notons également le résultat obtenu pour un système de vortex supraconducteurs [99] dans un espace de dimension  $D = 3$  avec  $\beta = 0.65 \pm 0.01$  et  $\delta = 2.3 \pm 0.1$ , ou encore l'exposant thermique  $\delta^{-1} = 0.15 \pm 0.01$  pour les interfaces [93].

D'autre part, la grande variété d'exposants répertoriée dans la section 4.3.2 pour d'autres systèmes périodiques similaires suggère que le type d'interaction entre les particules constituant le système périodique, ainsi que le type de désordre jouent un rôle important, ce qui implique l'absence d'une grande classe d'universalité pour les systèmes périodiques.

## 4.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les résultats de simulations numériques à grandes échelles concernant la dynamique de réseaux  $2D$  de vortex supraconducteurs mis en mouvement dans un potentiel désordonné. Un changement de régime a été trouvé entre une dynamique élastique et une dynamique plastique montrant le passage d'un régime dominé par le désordre à un régime dominé par l'élasticité. Notre étude s'est portée sur la transition de dépiégeage des vortex dans le régime élastique obtenu en désordre faible. Notons que les phases haute vitesse de vortex  $3D$  en désordre faible [107] et les phases au seuil de dépiégeage plastique en désordre fort [65, 108, 109, 110] ont été étudiées précédemment dans notre équipe.

Au dessus du seuil de dépiégeage tous les vortex se dépiègent simultanément et s'écoulent dans des canaux statiques rugueux couplés élastiquement. Trois régimes dynamiques ont été observés. Le premier est contrôlé par la taille finie de la boîte de simulation et amène au régime *single-particle*. Dans le second régime, une analogie avec les transitions de phase du second ordre a été mise en évidence pour lequel  $v \sim f^\beta$  à  $T = 0$  avec l'exposant critique  $\beta = 0.29 \pm 0.03$ , alors que le dernier régime est linéaire. A température nulle une analyse en loi d'échelle en taille finie suggère, à contrario des ondes de densité de charge, qu'il existe une seule longueur caractéristique au dessus du seuil de dépiégeage  $\xi \sim f^{-\nu}$ , avec  $\nu = 1.04 \pm 0.04$ . Cette longueur contrôle les corrélations entre vortex et également les propriétés statistiques du système, comme la distribution des forces critiques et des forces de crossover de taille finie. L'exposant  $\alpha \approx 0.9$  associé à l'analogie de la chaleur spécifique a été déterminée. L'analyse à température finie a permis de déterminer l'exposant ther-

## 4.7. CONCLUSION

---

mique  $\delta^{-1} = 0.28 \pm 0.05$  défini par  $v \sim T^{1/\delta}$  à  $F = F_c$ . Une relation indépendante de  $f$  entre les variables  $\frac{v}{|f|^\beta}$  et  $\frac{T}{|f|^{\beta\delta}}$  a été observée. Cette relation d'échelle est indépendante du désordre (son intensité et sa répartition spatiale) dans la gamme du diagramme des paramètres explorés, indiquant ainsi l'existence d'un certain degré d'universalité. Cependant la comparaison avec d'autres systèmes périodiques similaires suggère qu'une vaste classe d'universalité n'existe pas pour la transition de dépiégeage élastique à  $2D$ , comme cela semble être le cas pour la transition de dépiégeage plastique [65].

## Chapitre 5

# Dépiégeage plastique : Modèle à deux couches

« *Le chaos n'est pas que le contraire de l'ordre, il en est aussi le ferment.* »

LA RÉVOLUTION PARALLÈLE, Pierre Emmanuel

« *Les lois claires en théorie sont souvent un chaos à l'application.* »

Napoléon Bonaparte

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions par simulations numériques la dynamique et le dépiégeage d'un modèle visco-élastique simple permettant une approche simplifiée de la plasticité dans les systèmes périodiques évoluant sur un potentiel de piégeage désordonné. Comme nous l'avons rappelé dans le chapitre 4 la compréhension des phases élastiques des réseaux de vortex est bien avancée malgré de nombreuses questions qui restent toujours d'actualité. Il n'en est pas de même pour les phases plastiques dont la modélisation est plus délicate à cause de la présence de défauts topologiques. Dans le cas d'un fort désordre ponctuel, les déformations plastiques induisent de nombreuses dislocations. La plasticité se traduit par un dépiégeage filamentaire où des vortex en mouvement coexistent avec des régions piégées [60, 61, 65, 111], la dynamique peut être alors chaotique [108, 109]. Avec l'augmentation de la force extérieure, une phase smectique en mouvement s'établit caractérisée par des canaux d'écoulement alignés avec la force, bien que de grandes excursions transverses restent possibles. Les déformations à l'intérieur des canaux sont élastiques mais les déplacements entre les canaux peuvent être arbitrairement grands (canaux découplés).

La compréhension théorique du dépiégeage et des phases plastiques demeure un problème ouvert. Différents modèles ont été développés pour décrire ces déformations plastiques où les degrés de liberté sont les domaines de *Larkin* [76, 79, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118]. Une approche simplifiée de la plasticité, motivée par l'observation des phases smectiques en mouvement, consiste à considérer un modèle de canaux élastiques couplés visqueusement entre eux [119, 120]. Il s'agit d'un modèle générique représentatif d'une classe de systèmes dissipatifs mis en mouvement dans un désordre fort. Un modèle à deux

canaux unidimensionnels présentant un degré de liberté par canal a été proposé dans [119] permettant une approche par le groupe de renormalisation fonctionnelle. C'est dans ce cadre que nous étudions dans ce chapitre un modèle à deux canaux et quatre particules avec un couplage élastique entre les deux particules de chaque canal. L'objectif est de caractériser la dynamique en fonction de divers paramètres (interactions, viscosité, désordre, ...) et de tenter de faire un lien avec les simulations à grandes échelles des réseaux de vortex.

Dans un premier temps nous rappellerons brièvement le modèle à deux canaux et deux particules, et son extension à 4 particules, puis nous terminerons par une présentation des résultats obtenus par simulations numériques.

## 5.2 Modèle visco-élastique multi-couches

### 5.2.1 Système et dynamique

Considérons le modèle multi-canaux unidimensionnels élastiques couplés entre eux par des interactions visqueuses dans la direction orthogonale au mouvement des particules (par la suite nous parlerons indifféremment de degré de liberté ou de particule). Les particules sont entraînées par une force extérieure  $f$  dans la direction des canaux. En discrétisant l'espace dans les directions longitudinale et transverse au mouvement, le déplacement local au temps  $t$  de la  $l$ -ième particule dans le  $i$ -ème canal est noté  $u_l^i(t)$ . En considérant la dynamique sur-amortie, l'équation de la dynamique s'écrit :

$$\gamma \dot{u}_l^i(t) = \sum_j \eta (\dot{u}_l^j(t) - \dot{u}_l^i(t)) + \sum_m K [u_m^i(t) - u_l^i(t)] + h_l^i Y(u_l^i(t) - \beta_l^i) + f \quad (5.1)$$

où  $\gamma$ ,  $\eta$  et  $K$  sont des coefficients constants, et les sommes se font entre voisins les plus proches. Les deux premiers termes du membre de droite décrivent l'interaction visqueuse entre les couches et les interactions élastiques entre les particules de chaque couche, tandis que le troisième terme représente le piégeage où  $Y(u)$  est une fonction périodique avec  $h_l^i$  et  $\beta_l^i$  des variables aléatoires. Enfin,  $f$  est une force d'entraînement appliquée aux particules. Ce modèle visco-élastique résolu en champ moyen prédit un changement qualitatif d'un dépiégeage continu à un dépiégeage discontinu avec hystérésis en augmentant le désordre ou le couplage visqueux.

### 5.2.2 Modèle à 2 particules

Un aperçu général de la dynamique de canaux élastiques couplés visqueusement entre eux peut être obtenu au travers d'un modèle simple considérant seulement deux canaux  $1D$  contenant chacun une particule et couplés entre eux par une interaction visqueuse. La situation consiste en deux particules entraînées par une force extérieure dans un potentiel  $1D$ , ce qui correspond au cas  $K = 0$  de l'équation (5.1) avec une force de piégeage  $h^i Y(u^i - \beta^i)$ . Le plus simple est de choisir  $h^1 = h^2$  et  $\beta^i = 0$ . Les équations régissant la dynamique d'un tel système se réduisent alors à :

$$\gamma \dot{u}_1 = \eta(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + \Phi(u_1) + f \quad (5.2a)$$

$$\gamma \dot{u}_2 = \eta(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + \Phi(u_2) + f \quad (5.2b)$$

En effectuant un changement de coordonnées avec  $x = u_1 - u_2$  représentant la distance relative et  $y = \frac{u_1 + u_2}{2}$  la coordonnée du centre de masse, les équations du mouvement deviennent,

$$\dot{y} = F - \frac{1}{2} \left( \phi\left(y + \frac{x}{2}\right) + \phi\left(y - \frac{x}{2}\right) \right) \quad (5.3a)$$

$$\dot{x} = a \left( \phi\left(y - \frac{x}{2}\right) - \phi\left(y + \frac{x}{2}\right) \right) \quad (5.3b)$$

avec  $a = \frac{\gamma}{\gamma + 2\eta}$ ,  $\phi = -\frac{\Phi}{\gamma}$  et  $F = \frac{f}{\gamma}$ . La fonction de piégeage périodique est prise telle que  $\phi(u) = C [p_1 \sin(2\pi u) + p_2 \sin(4\pi u)]$  où  $C$  est choisie pour que la force critique de dépiégeage d'une particule soit  $F_c^1 = \pm 1$  avec  $p_1 = 1$ . Le cas d'une harmonique unique étant non générique, on inclut au moins une autre harmonique ( $p_2 \neq 0$ ).

Effectuons un brève description des résultats obtenus pour un tel système dynamique [119]. Lorsque  $a = 1$  et que  $\phi(u)$  est purement sinusoïdal, le système possède une bifurcation noeud-col à  $F = F_c^1$ . Ainsi pour  $F < F_c^1$  il existe deux points fixes dont l'un est stable et l'autre instable, qui se situent le long des axes  $x = 0$  et  $x = 1$ , et qui vont entrer en collision pour  $F = F_c^1$  et se transformer en un point fixe mi-stable. Quand  $F > F_c^1$  le point fixe mi-stable disparaît et le flot est périodique dans l'espace des phases.

Lorsque  $a < 1$ , ce qui correspond à la situation où les 2 particules sont couplées via l'interaction visqueuse, les équations du mouvement restent inchangées le long des axes  $x = 0$  et  $x = 1$  et les mêmes points fixes sont présents quand  $F < F_c^1$ . Cependant pour  $F_c < F < F_c^1$  (où  $F_c$  correspond à la force critique du système couplé) un mouvement non borné est possible hors de ces axes. L'espace des phases se sépare en une région piégée et une autre où le flot est périodique. Dans le cas où  $p_2 = 0$  ce flot est constitué d'une infinité de trajectoires neutres périodiques, alors que pour le cas plus générique  $p_2 \neq 0$  la région contient une seule trajectoire périodique qui est soit attractive quand  $p_2 > 0$ , soit répulsive quand  $p_2 < 0$ . Notons que dans le cas où la trajectoire périodique est attractive ( $p_2 > 0$ ), la phase en mouvement disparaît pour laisser une phase piégée quand  $F < F_c$ .

Nous présentons à titre d'exemple sur la figure 5.1 plusieurs trajectoires dans l'espace des phases  $(x, y)$  pour les valeurs des paramètres  $p_1 = 1$ ,  $a = 0.2$  et  $p_2 = 0.5$ . Les points fixes sur les axes  $x = 0$  et  $x = 1$  sont les points vers lesquels convergent les différentes trajectoires issues de leur bassin d'attraction, et nous observons la solution périodique stable au centre de l'espace des phases.

Nous traçons schématiquement la courbe vitesse-force  $v(F)$  qui résulte d'un tel système pour le cas du piégeage purement sinusoïdal, et le cas avec une harmonique. Les courbes types représentées sur les figures 5.2 correspondent à un dépiégeage élastique.

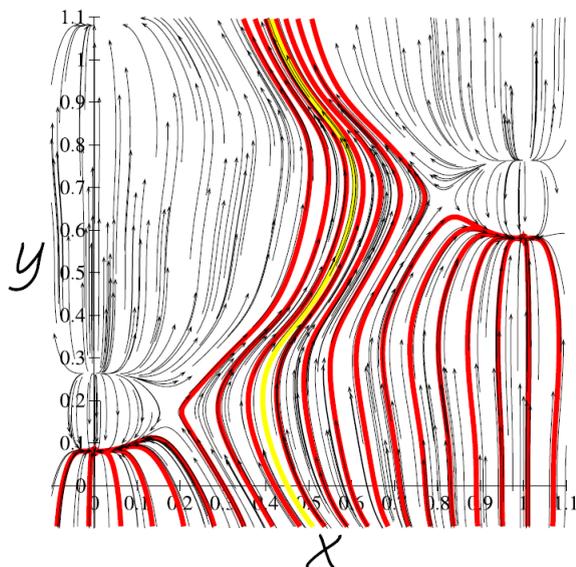


FIGURE 5.1 – Représentation de plusieurs trajectoires, issues de différentes conditions initiales, dans l'espace des phases  $(x, y)$ . Les valeurs de paramètres utilisés sont  $p_1 = 1$ ,  $a = 0.2$  et  $p_2 = 0.5$ , et la force appliquée correspond à  $F_c < F < F_c^1$ . La solution stable unique est représentée en jaune. Cette figure est issue de l'article [119].

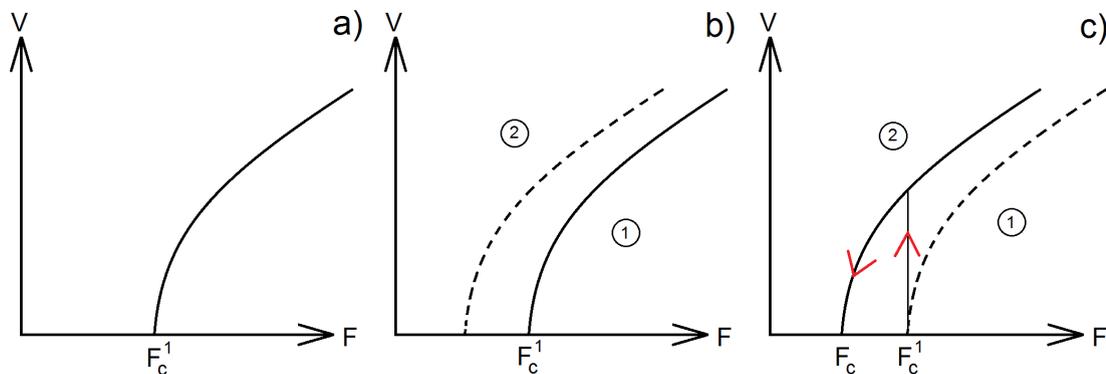


FIGURE 5.2 – Courbe  $v(F)$  schématique obtenue lorsque : a)  $p_2 = 0$  (sinus pur), b)  $p_2 < 0$  et c)  $p_2 > 0$ . Voir le texte qui est relié à cette figure pour plus d'explications.

Quand  $p_2 \neq 0$ , il existe alors deux branches dans la courbe  $v(F)$  correspondant aux deux situations possibles. L'une correspond aux trajectoires le long des axes  $x = 0$  et  $x = 1$ , c'est-à-dire le cas de la particule seule (branche numérotée 1), et l'autre correspond à l'orbite périodique (branche numérotée 2) comme nous pouvons le voir respectivement sur les figures 5.2b) et 5.2c). Lorsque  $p_2 < 0$ , l'orbite périodique est répulsive et la trajectoire le long des axes  $x = 0$  et  $x = 1$  est attractive, la courbe coïncide donc avec celle obtenue pour le dépiégeage d'une seule particule et aucune hystérésis n'est observée. Cependant lorsque  $p_2 > 0$ , l'orbite périodique devient attractive et de l'hystérésis apparaît. En effet, en partant de valeurs élevées de force et en diminuant cette dernière, le système suit la

trajectoire périodique et se piège au niveau de  $F_c$ . Lorsque l'on augmente la force à partir d'une valeur plus petite que  $F_c$ , le système se piège d'abord sur les points fixes le long des axes  $x = 0$  et  $x = 1$  et ce jusqu'à  $F_c^1$ , à partir de laquelle les points fixes disparaissent et le système "saute" alors dans l'état en mouvement donné par l'orbite périodique attractive.

On constate que ce modèle très simplifié à deux degrés de liberté permet de retrouver des comportements caractéristiques des systèmes périodiques à plus grande échelle, comme par exemple le dépiégeage élastique ou encore l'hystérésis. Cependant, l'identification des trajectoires périodiques et des attracteurs dans l'espace des phases nécessite une étude systématique minutieuse. En particulier l'existence d'attracteurs chaotiques est une question ouverte.

### 5.3 Extension du modèle

#### 5.3.1 Description du modèle

Reconsidérons à présent le modèle simplifié présenté ci-dessus en y ajoutant un degré de liberté supplémentaire au sein de chaque canal, afin d'introduire un couplage élastique possible au sein des canaux. Cela correspond au cas de l'équation (5.1) avec le coefficient  $K \neq 0$ . Nous représentons sur la figure 5.3 le schéma de ce modèle à 4 particules, qui permet de décrire des situations comme les phases smectiques obtenues dans la cadre des réseaux de vortex.

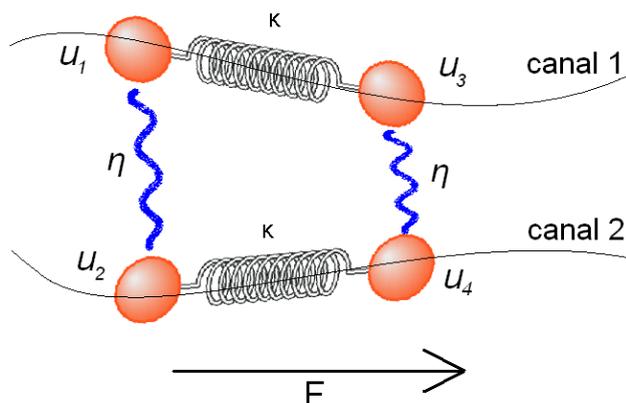


FIGURE 5.3 – Représentation schématique du modèle simplifié à 4 particules : les canaux sont les lignes courbes noires, les particules sont modélisées par des sphères oranges, l'interaction élastique est représentée via un ressort alors que celle visqueuse est schématisée suivant une ligne sinusoïdale bleue. La force d'entraînement  $F$  est appliquée de gauche à droite.

### 5.3.2 Système dynamique

La force de piégeage est choisie telle que  $Y(u) = p_1 \sin(2\pi u) + p_2 \sin(4\pi u)$ , et le coefficient de frottement  $\gamma$  est pris égal à l'unité. A partir de l'équation (5.1), nous obtenons alors le système d'équations du mouvement suivant,

$$\begin{cases} \gamma \dot{u}_1 = \eta(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + K \cdot (u_3 - u_1 - 1) + Y(u_1) + F \\ \gamma \dot{u}_2 = \eta(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + K \cdot (u_4 - u_2 - 1) + A \cdot Y(u_2) + F \\ \gamma \dot{u}_3 = \eta(\dot{u}_4 - \dot{u}_3) + K \cdot (u_1 - u_3 + 1) + Y(u_3 + \phi_3) + F \\ \gamma \dot{u}_4 = \eta(\dot{u}_3 - \dot{u}_4) + K \cdot (u_2 - u_4 + 1) + A \cdot Y(u_4 + \phi_4) + F \end{cases} \quad (5.4)$$

avec  $A = \text{cste}$  le rapport d'intensité de piégeage du canal 2 par rapport au canal 1,  $\phi_{3,4}$  sont des déphasages pour les degrés de libertés ajoutés. La signification physique est que les deux canaux n'ont pas la même intensité de piégeage, et les particules ne sont pas en phase dans les potentiels de piégeage. Les termes d'interactions élastiques sont tels que les deux particules d'un même canal ne peuvent pas se trouver simultanément dans un même puits. Ceci interdit aux particules de se croiser au cours de leur mouvement dans le canal (la périodicité spatiale du potentiel étant de  $u = 1$ ).

Le changement de variables

$$\begin{cases} S = u_1 + u_2 \\ D = u_1 - u_2 \\ S' = u_3 + u_4 \\ D' = u_3 - u_4 \end{cases} \quad (5.5)$$

permet de réécrire le système d'équations (5.4) :

$$\begin{cases} \dot{S} = K \cdot (S' - S - 2) + Y\left(\frac{S+D}{2}\right) + A \cdot Y\left(\frac{S-D}{2}\right) + 2F \\ \dot{D} = a \left[ K \cdot (D' - D) + Y\left(\frac{S+D}{2}\right) - A \cdot Y\left(\frac{S-D}{2}\right) \right] \\ \dot{S}' = K \cdot (S - S' + 2) + Y\left(\frac{S'+D'}{2} + \phi_3\right) + A \cdot Y\left(\frac{S'-D'}{2} + \phi_4\right) + 2F \\ \dot{D}' = a \left[ K \cdot (D - D') + Y\left(\frac{S'+D'}{2} + \phi_3\right) - A \cdot Y\left(\frac{S'-D'}{2} + \phi_4\right) \right] \end{cases} \quad (5.6)$$

où le paramètre  $a$  est défini par  $a = \frac{1}{\gamma+2\eta}$ .

### 5.3.3 Modèle numérique - paramètres

Nous avons choisi de résoudre le système d'équations différentielles ordinaires (5.6) par un algorithme de *Runge-Kutta* d'ordre 4 (RK4). Ce choix permet d'obtenir une bonne précision (l'erreur totale est d'ordre  $\mathcal{O}((dt)^5)$ , avec  $dt$  le pas de l'itération de l'algorithme)

## 5.4. RÉSULTATS OBTENUS

---

sans pour autant occuper ou surcharger le temps processeur. Le choix du pas d'intégration est essentiel puisque la précision de la solution numérique dépend de cette quantité, tout comme le temps de calcul. Plus le pas est grand, plus le calcul est rapide mais moins il est précis, et inversement. Par la suite nous fixons  $dt = 10^{-2}$  qui est un bon choix "précision/temps" de calcul.

Certains paramètres au cours des simulations sont fixés définitivement :  $p_1 = 1$ ,  $\phi_3 = 0.11$  et  $\phi_4 = 0.42$  (ces 2 valeurs étant choisies d'une manière aléatoire). Les positions initiales des particules sont  $u_1 = 0.5$ ,  $u_2 = 0$  et  $u_{i+2} = u_i + 1$  avec  $i = \{1, 2\}$  (c'est-à-dire que les particules ajoutées 3 et 4 au sein de chaque canal, sont éloignées d'un puits d'écart par rapport aux particules initiales 1 et 2).

Les valeurs des paramètres  $K$ ,  $A$  et  $\eta$  restent libres pour explorer les différents régimes dynamiques. Les gammes de variations de ces paramètres sont les suivantes :  $10^{-1} \leq A \leq 10$ ,  $10^{-2} \leq K \leq 10$  et  $10^{-1} \leq \eta \leq 10^2$ . L'évolution de ces trois paramètres est étudiée pour différentes harmoniques de la force de piégeage  $Y(u)$  :  $p_2 = \{-0.5; 0; 0.5\}$  afin d'analyser l'influence de l'harmonique par rapport au cas du piégeage dans un potentiel purement sinusoïdal.

## 5.4 Résultats obtenus

Cette section aborde les différents régimes dynamiques observés. Une attention particulière est portée sur les paramètres qui conduisent à ces régimes. Nous présentons dans un premier temps les deux types de dépiégeage obtenus, nous étudions la dynamique de ces régimes, puis nous abordons l'aspect hystérétique et nous finissons par la dynamique chaotique.

### 5.4.1 Types de dépiégeage : élastique ou plastique

Notons que nos simulations se déroulent toujours de la même manière : nous laissons relaxer les particules à hautes vitesses avant de commencer à réaliser une descente en force jusqu'à une valeur de  $F = 0$ , suite à quoi nous effectuons plusieurs remontées et descentes en faisant varier la force autour du dépiégeage (au total nous réalisons 4 cycles de descentes/montées) afin de tester l'existence possible d'hystérésis et d'éviter de rester dans un état métastable.

Pour caractériser les différents régimes nous calculons la vitesse moyenne  $v$  des particules, définie par :

$$v = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \dot{u}_i \quad (5.7)$$

et nous pouvons ainsi mesurer la réponse vitesse-force du système. En fonction des jeux de paramètres utilisés ( $A$ ,  $K$  et  $\eta$ ) nous observons deux grands types de dépiégeage : un

dépiégeage élastique et un dépiégeage plastique (voir respectivement les figures 5.4a et b).

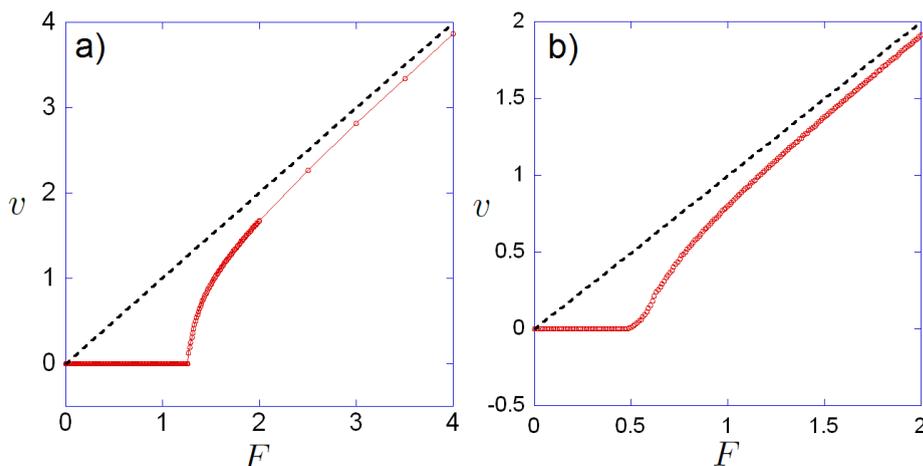


FIGURE 5.4 – Courbes de réponse vitesse-force  $v(F)$  représentative des différents dépiégeages obtenus dans le cadre du *Toy Model* à 4 particules : a) un dépiégeage élastique, b) et un dépiégeage plastique. En trait noir pointillé est représenté le cas obtenu sans piégeage que la vitesse atteint asymptotiquement lorsque  $F$  l'emporte sur les autres forces en présence, impliquant de ce fait  $\dot{u}_i \approx F$  au niveau de l'équation (5.4).

La figure 5.4a) est un exemple représentatif du dépiégeage élastique obtenu dans nos simulations où la courbe  $v(F)$  présente une concavité tournée vers le bas. La figure 5.4b) présente la courbe type  $v(F)$  du dépiégeage plastique que nous obtenons et qui présente une forme en S et d'inflexion.

Le dépiégeage élastique est obtenu exclusivement pour  $A = 1$ , *i.e.* lorsque l'intensité de piégeage est identique dans les deux canaux, alors que le dépiégeage plastique est obtenu lorsque  $A \neq 1$ .

### 5.4.2 Dynamique

Nous décrivons dans cette partie la dynamique des particules pour chacun des deux types de dépiégeage.

#### Dépiégeage Élastique : dépiégeage simultané

Les positions  $u_i(t)$  des particules représentées sur la figure 5.5 correspondent au cas particulier, mais représentatif, où  $A = 1$ ,  $p_2 = 0$ ,  $K = 0.4$  et  $\eta = 1$ . Lorsque  $F \leq F_c$ , toutes les particules finissent par se piéger, donnant ainsi  $v = 0$  (figure 5.5a). Lorsque  $F > F_c$ , les particules se mettent en mouvement dans leur canal, et les paires de particules 1-2 et 3-4 présentent les mêmes équations horaires  $u_i(t)$  (au déphasage induit près), cf figure 5.5b). Les vitesses moyennes des 4 particules, issues d'une régression linéaire du type  $u_i(t) \sim v_i t$ , sont identiques et toutes les particules se sont dépiégées simultanément. Cela caractérise le dépiégeage élastique.

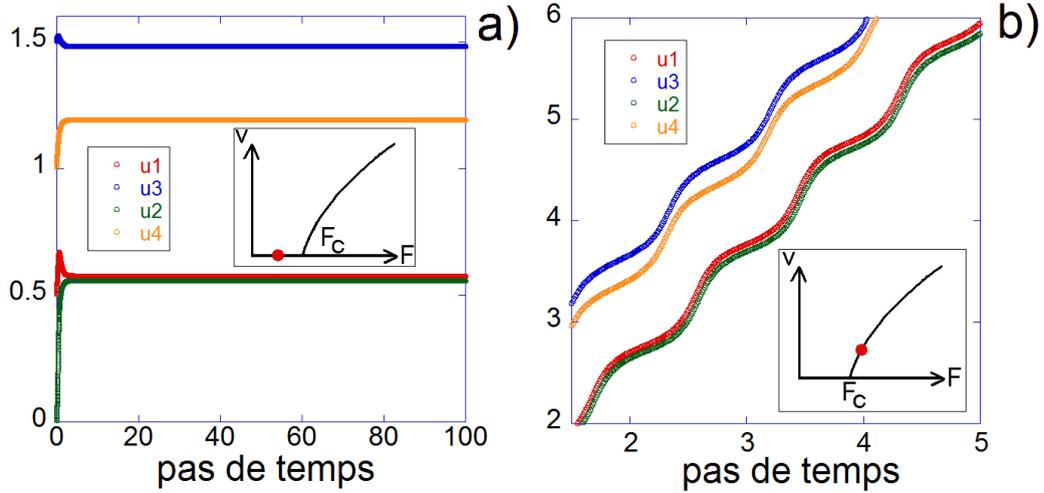


FIGURE 5.5 – Dynamique des particules  $u_i(t)$  avec  $i = 1, 2, 3, 4$  : a) pour  $F < F_c$  les particules restent piégées, b) les 4 particules sont toutes dépiégées et possèdent une vitesse moyenne identique si l'on effectue une régression linéaire des courbes  $u_i(t)$ . L'insert montre la courbe vitesse-force du dépiégeage élastique avec le point indiquant la force d'entraînement appliquée aux particules.

### Dépiégeage Plastique : dépiégeage séquentiel

Les positions  $u_i(t)$  des particules sur la figure 5.6 correspondent au cas où  $A = 4$ ,  $p_2 = 0$ ,  $K = 1$  et  $\eta = 10$ . Lorsque  $F \leq F_c$ , de façon similaire au dépiégeage élastique, les particules demeurent immobiles. Lorsque  $F \gtrsim F_c$ , les particules du canal le plus piégeant oscillent en restant piégées dans un puits, pendant que les deux autres particules sont en mouvement le long de leur canal (cf figure 5.6a). Ceci se traduit sur la courbe  $v(F)$  par un "décrochage" de la vitesse correspondant au dépiégeage du premier canal. Quand  $F$  augmente, le deuxième canal se dépiège, provoquant un nouveau décrochage sur la courbe  $v(F)$ . Toutes les particules ont un mouvement saccadé (cf figure 5.6b). La vitesse moyenne des canaux est différente et les 2 paires de particules, 1-3 et 2-4, se déplacent à des vitesses différentes : les canaux sont ainsi découplés. Lorsque la force appliquée augmente, l'écart relatif entre les vitesses moyennes des différents canaux diminue pour tendre vers un couplage des 2 canaux (cf figure 5.6c-d).

Le "décrochage" de la vitesse dans la courbe vitesse-force est plus ou moins marqué suivant la valeur du rapport d'intensité de piégeage  $A$ . En effet quand  $A \gg 1$ , la force nécessaire à appliquer pour que la vitesse moyenne des canaux soit similaire est plus faible que dans le cas où  $A \approx 1$  (comme dans l'exemple présenté ci-dessus). Cela signifie qu'une fois le deuxième canal dépiégé, sa vitesse moyenne se rapproche très rapidement de celle du canal qui s'est dépiégé en premier.

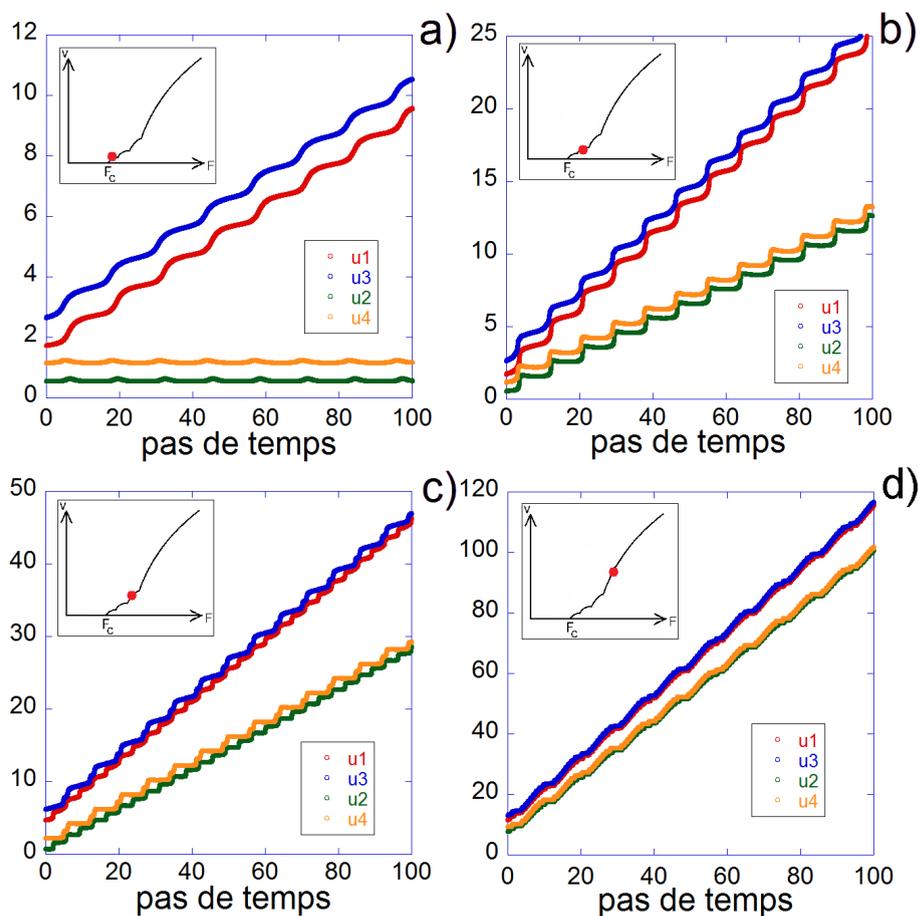


FIGURE 5.6 – Dynamique des particules  $u_i(t)$  avec  $i = 1, 2, 3, 4$ . a) Lorsque  $F \gtrsim F_c$ , la paire de particules dans le canal le plus piégeant (ici 2-4) reste piégée mais oscille, alors que l'autre paire (1-3) avance dans son canal. b) Quand la force augmente, toutes les particules sont dépiégées avec un mouvement saccadé, et les vitesses moyennes des canaux sont différentes. c-d) Lorsque  $F$  augmente, la différence de vitesse entre les 2 canaux tend à diminuer. L'insert montre la courbe vitesse-force du dépiégeage plastique, avec le point rouge indiquant la force d'entraînement appliquée aux particules.

### 5.4.3 Hystérésis

Les résultats exposés jusqu'à présent représentaient des situations non hystérétiques. Cependant nous avons observé de l'hystérésis pour certains jeux de paramètres.

La présence d'hystérésis se traduit par l'existence de deux forces critiques  $F_c^{\text{up}}$  et  $F_c^{\text{down}}$  suivant que nous augmentons ou diminuons la force. La figure 5.7 présente un exemple montrant une hystérésis pour un dépiégeage élastique, avec  $A = 1$ ,  $p_2 = -0.5$ ,  $K = 0.1$  et  $\eta = 3$ .

L'hystérésis est observée quelque soit l'harmonique de la force de piégeage  $p_2$  (que cette dernière soit positive, négative ou bien nulle). Dans le cas du dépiégeage plastique  $A \neq 1$ ,

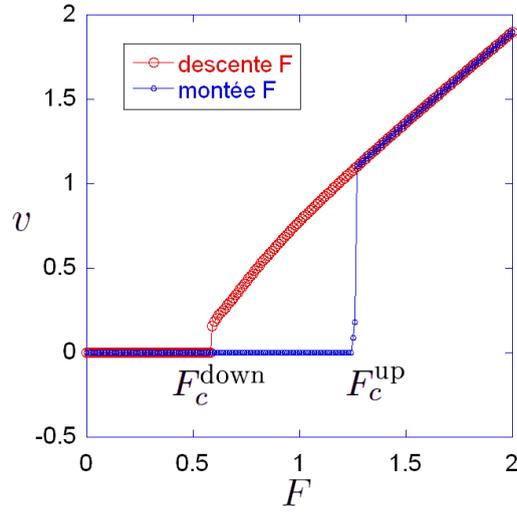


FIGURE 5.7 – Courbe  $v(F)$  dans le cas d’un dépiégeage élastique (avec  $A = 1$ ,  $p_2 = -0.5$ ,  $K = 0.1$  et  $\eta = 3$ ) et montrant un phénomène d’hystérésis marqué. En fonction de l’histoire, nous identifions deux forces critiques  $F_c^{\text{up}}$  et  $F_c^{\text{down}}$  (respectivement lors de la montée et de la descente de la force).

nous pouvons observer de l’hystérésis très faible, c’est à dire  $L_{\text{hyst}} = \frac{F_c^{\text{up}} - F_c^{\text{down}}}{F_c^{\text{up}}} \leq 10\%$ , et très peu marquée sur la courbe vitesse-force  $v(F)$ .

Cependant pour  $A = 1$ , *i.e.* lors du dépiégeage élastique, le phénomène d’hystérésis peut être très marqué. Nous représentons en échelle logarithmique sur la figure 5.8, la frontière de séparation entre les états avec et sans hystérésis dans le diagramme de phase  $(\eta, K)$ , pour  $A = 1$  et différentes harmoniques de piégeage  $p_2$ . La zone blanche correspond à un dépiégeage sans hystérésis, alors que la zone colorée correspond à un dépiégeage avec hystérésis. Différentes courbes de contour de la largeur relative de l’hystérésis  $L_{\text{hyst}}$  sont représentées. Quand la valeur de  $p_2$  augmente (en passant d’une valeur négative jusqu’à une valeur positive) et pour la gamme de paramètres explorée, le comportement de la frontière  $(\eta_c, K_c)$  pour des valeurs élevées de  $K$  évolue peu. Néanmoins pour de faibles valeurs de  $K$ , un couplage visqueux plus important est nécessaire pour obtenir un dépiégeage hystérétique. On remarque également que  $L_{\text{hyst}}$  est plus important pour  $p_2 < 0$  par rapport au cas  $p_2 \geq 0$ .

Ainsi, l’hystérésis est principalement observée lors du dépiégeage élastique. De plus, elle est fortement présente dans le diagramme de phase  $(\eta, K)$  lorsque  $p_2 < 0$ , et moins pour  $p_2 \geq 0$ .

#### 5.4.4 Chaos

Les équations qui régissent la dynamique du modèle sont fortement non-linéaires avec un nombre de degrés de liberté supérieur à trois. Il est alors légitime de s’interroger sur l’existence d’une possible dynamique chaotique. Les outils pour mettre en évidence le chaos

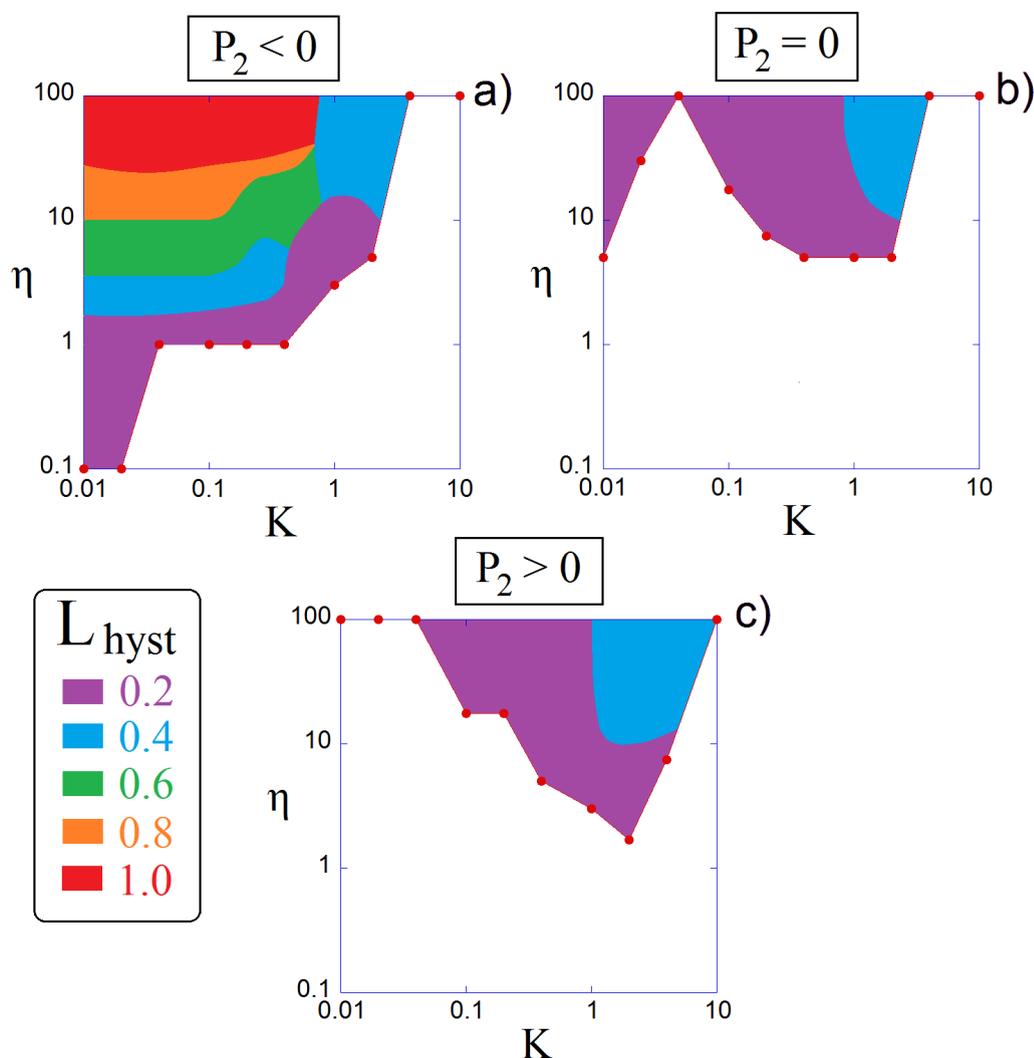


FIGURE 5.8 – Diagramme de phase  $(\eta, K)$  pour le dépiégeage élastique  $A = 1$  et différentes harmoniques  $p_2$  : a)  $p_2 < 0$ , b)  $p_2 = 0$ , c)  $p_2 > 0$ . La frontière de séparation entre un dépiégeage sans hystérésis (zone blanche) et un dépiégeage avec hystérésis (zone colorée) est représentée. Chaque point de la courbe est identifiable à une valeur  $(\eta_c, K_c)$  de la frontière. Différentes courbes de contour de la largeur relative de l'hystérésis  $L_{\text{hyst}}$  sont représentées.

sont la détermination du plus grand exposant de *Lyapunov*  $\lambda$  et des spectres de puissance  $S(f)$ .

#### 5.4.4.1 Exposant de *Lyapunov* $\lambda$ et spectre de puissance $S(f)$

Rappelons brièvement qu'un système dynamique est chaotique s'il présente la propriété de sensibilité aux conditions initiales (SCI). Cela signifie que la distance dans l'espace des

## 5.4. RÉSULTATS OBTENUS

phases entre deux conditions initiales arbitrairement proches diverge exponentiellement dans le temps, jusqu'à atteindre une distance limite qui est de l'ordre de la taille de l'attracteur chaotique. La mesure de la "vitesse" de la divergence de ces trajectoires dans chaque direction  $i$  de l'espace des phases se fait par un exposant  $\lambda_i$ , dit de *Lyapunov*, et défini par  $d_i(t) \sim e^{\lambda_i t}$ . Si la dynamique possède au moins un exposant positif, alors il existe au moins une direction pour laquelle la propriété de SCI se manifeste.

Un exposant  $\lambda > 0$  est donc une signature non ambiguë du chaos. Notons qu'un point fixe ne possède que des exposants de *Lyapunov* négatifs, les cycles limites présentent un exposant nul, les autres étant négatifs.

Pour chacun des jeux de paramètres utilisés précédemment, nous définissons deux conditions initiales infiniment proches séparées par une distance  $d_0$  dans l'espace des phases. En utilisant l'algorithme de *Runge-Kutta* d'ordre 4 nous avons obtenu les trajectoires dans l'espace des phases. Plusieurs valeurs de la distance initiale  $d_0$  ont été choisies (de  $10^{-6}$  à  $10^{-12}$ ), ainsi que différentes directions  $S$ ,  $D$ ,  $S'$  ou  $D'$ . Au cours de chaque itération temporelle, la distance euclidienne séparant les deux trajectoires  $\vec{X}_1$  et  $\vec{X}_2$  est calculée en fonction du temps :  $d(t) = \sqrt{|\vec{X}_2 - \vec{X}_1|^2}$ . La figure 5.9 montre un exemple typique de régime chaotique obtenu pour le dépiégeage plastique présenté dans la section 5.4.2 avec  $A = 4$ ,  $p_2 = 0$ ,  $K = 1$  et  $\eta = 10$ . Le comportement  $d(t) \sim e^{\lambda t}$  avec  $\lambda > 0$  montre le caractère chaotique de la dynamique. Ce comportement est bloqué par un effet de saturation lorsque  $d(t)$  devient de la taille de l'attracteur chaotique.

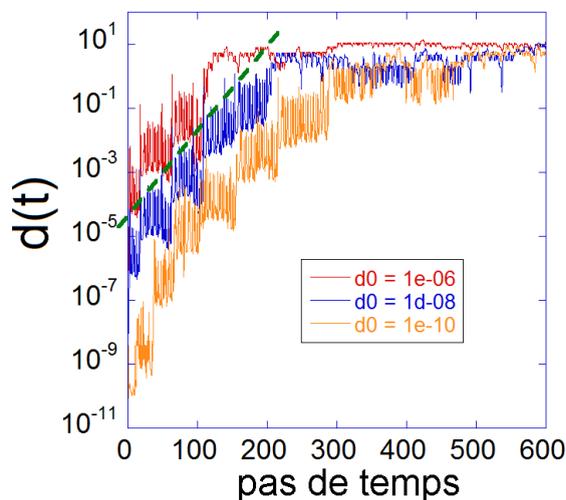


FIGURE 5.9 – Évolution de  $d(t)$  en fonction du temps en échelle semi-logarithmique. Un exposant de *Lyapunov* positif peut être déterminé aux temps courts (avant la saturation due à la taille caractéristique de l'attracteur). Trois distances initiales  $d_0$  entre les trajectoires voisines sont affichées, montrant le même exposant de *Lyapunov*. La ligne pointillée verte sert de guide pour visualiser la pente  $\lambda$ .

La valeur de  $\lambda$  ne varie pas avec l'écart initial  $d_0$  entre les deux conditions initiales, et avec la direction suivant laquelle cet écart est effectué. Ces résultats indiquent que  $\lambda$  est une quantité intrinsèque caractéristique de la dynamique chaotique à une force donnée.

## 5.4. RÉSULTATS OBTENUS

On considère le spectre de puissance  $S(f)$  de la vitesse moyenne, défini par :

$$S(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N v_k e^{-2i\pi f \frac{k}{N}} \right|^2 \quad (5.8)$$

où la vitesse a été discrétisée avec un intervalle entre deux valeurs successives pris comme unité de temps. Un algorithme de transformée de fourier rapide (FFT : Fast Fourier Transform en anglais) a été utilisé pour calculer  $S(f)$ .

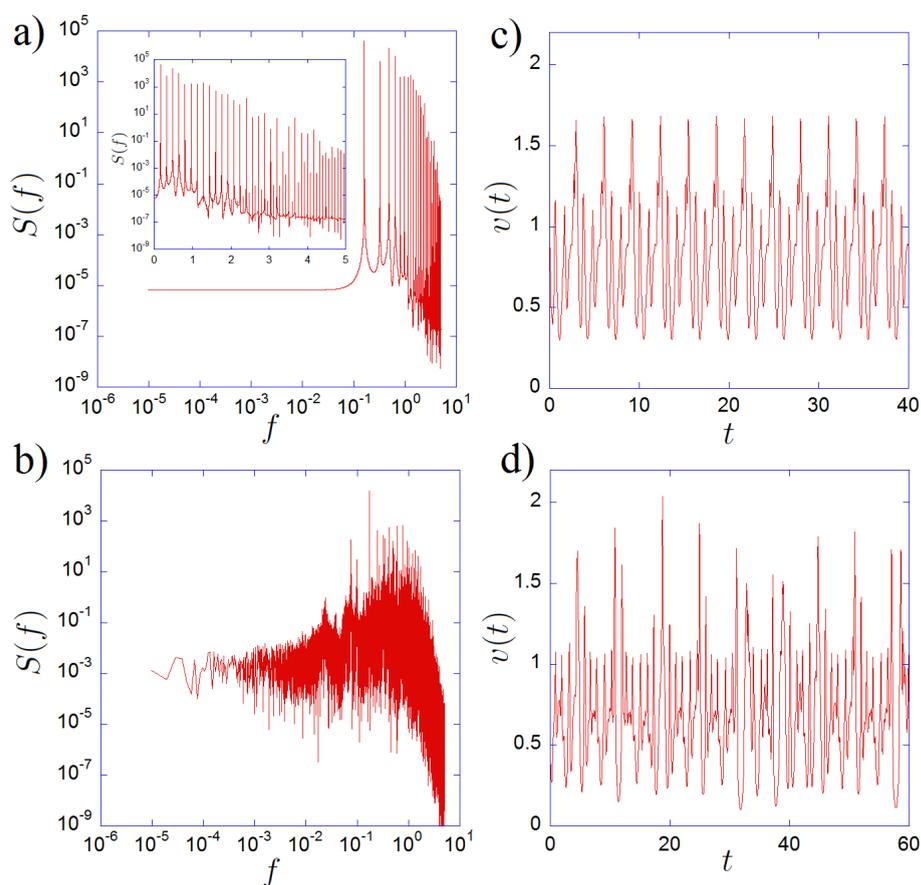


FIGURE 5.10 – Spectre de puissance  $S(f)$  en échelle logarithmique, obtenu lors d'un dépiégeage plastique, pour une force situant le système dans un régime : a) périodique, b) chaotique. En insert de la figure a) est représenté le spectre en échelle semi-logarithmique, afin de mieux visualiser les raies discrètes. Les figures c) et d) représentent le signal de la vitesse  $v(t)$  utilisé pour déterminer le spectre, correspondant respectivement au cas des figures a) et b). Pour plus d'informations, voir le texte associé.

Les figures 5.10a) et b) représentent le spectre de puissance  $S(f)$  typique, pour un dépiégeage plastique (avec  $A = 2$ ,  $p_2 = 0$ ,  $K = 0.1$  et  $\eta = 1$ ). La figure 5.10a) correspond

à une force pour laquelle aucun exposant de *Lyapunov* positif n'a été mesuré, alors que la figure 5.10b) correspond à une force où un exposant  $\lambda > 0$  est observé. Nous représentons également sur les figures 5.10c) et d) le signal de la vitesse moyenne  $v(t)$  relatif respectivement aux figures a) et b).

La vitesse obtenue dans le cas non chaotique présente un comportement périodique, et son spectre de puissance présente des raies à la fréquence fondamentale ainsi qu'à celles des harmoniques (cf l'insert de la figure 5.10a). Pour le cas chaotique, le signal de la vitesse ne présente pas un comportement régulier et le spectre de puissance ne contient pas de raies discrètes, mais un continuum de fréquences. Ce résultat est signe d'une grande richesse dans la dynamique. De plus, un large bruit à basses fréquences est mesuré (d'environ deux ordres de grandeur plus important que dans le régime périodique). Ce bruit, qui indique la perte de cohérence sur de longues périodes de temps, est caractéristique d'un régime chaotique.

### 5.4.4.2 Régimes chaotiques

Pour les jeux de paramètres testés, aucun régime chaotique n'a été détecté pour  $A = 1$  correspondant au dépiégeage élastique. De plus, lorsque le piégeage d'un canal par rapport à l'autre est trop important (par exemple  $A = 0.1$  ou  $A = 10$ ), nous ne mesurons pas d'exposant  $\lambda > 0$ , ce qui signifie qu'aucun régime chaotique n'est détecté. Tout se passe comme si les canaux se découplent et que seuls deux degrés de liberté au lieu de quatre sont actifs, de sorte qu'aucun chaos n'est alors possible. En revanche, lorsque les rapports des intensités de piégeage des canaux sont du même ordre de grandeur (par exemple  $A = 0.3$  ou encore  $A = 2$ ), des régimes chaotiques sont observés. Le couplage des canaux permet ainsi à la dynamique d'exhiber du chaos. Nous affichons sur la figure 5.11a) l'évolution type de  $\lambda$  avec la force appliquée. Nous représentons également sur le même graphique la résistance différentielle  $R_d = dv/dF$  associée (le pic au niveau de  $R_d$  correspond au point d'inflexion situé sur la courbe  $v(F)$ ). On remarque que  $\lambda$  diminue avec la force au delà du pic de  $R_d$ . Pour les jeux de paramètres testés, nous n'avons pas mesuré de chaos en dessous du pic de  $R_d$ .

Ces résultats sont compatibles avec ceux obtenus dans le cadre du réseau de vortex  $2D$  à  $T = 0$  [109]. Un dépiégeage plastique, caractérisé au niveau de la courbe vitesse-force par un point d'inflexion a été observé, et aucune hystérésis n'y a été mesurée. Des régimes chaotiques y ont été mesurés autour du point d'inflexion de  $v(F)$ , avec une valeur d'exposant  $\lambda$  qui est maximale au point d'inflexion.

Cependant dans le modèle simplifié, et pour les jeux de conditions initiales testés, les valeurs de force pour lesquelles du chaos apparaît ne forment pas un intervalle de force continu, mais au contraire sont réparties de manière discrète. Entre deux valeurs de force présentant du chaos, des régimes périodiques ont été observés. Il est possible qu'avec d'autres jeux de conditions initiales, des régimes chaotiques puissent être observés pour les forces présentant des régimes périodiques. Une analyse détaillée de l'espace des phases serait nécessaire pour étudier la coexistence possible ou non d'attracteurs chaotiques avec des attracteurs périodiques.

Nous affichons sur la figure 5.11b) les valeurs de paramètres dans le diagramme de phase  $(\eta, K)$  pour lesquelles des régimes chaotiques ont été détectés, lorsque  $A = 2$  et

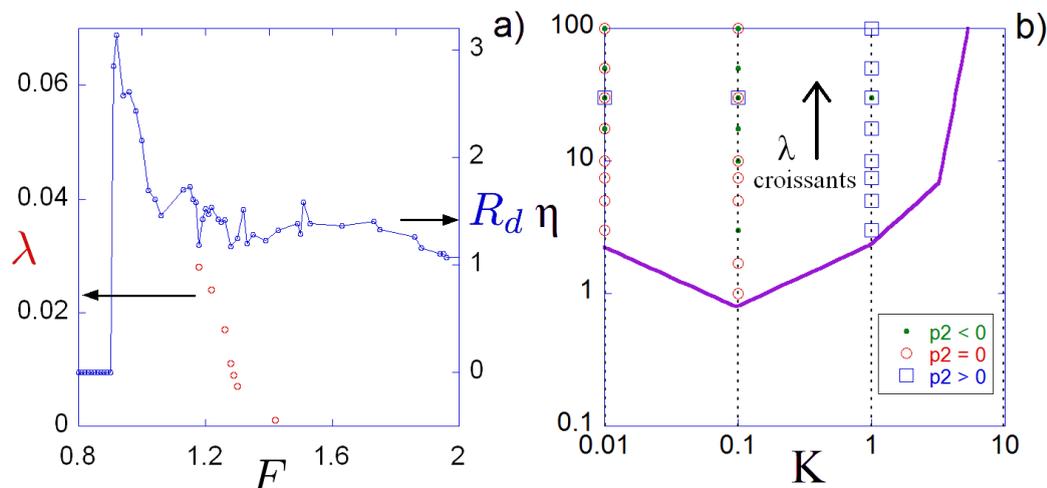


FIGURE 5.11 – a) Évolution de l'exposant de *Lyapunov*  $\lambda$  et de la résistance différentielle  $R_d$  avec la force. Voir le texte associé pour plus d'informations. b) Diagramme de phase  $(\eta, K)$  pour  $A = 2$  et différentes harmoniques  $p_2$ . Les différentes marques (cercles, disques ou carrés) correspondent aux valeurs de paramètres pour lesquelles des régimes chaotiques sont observés. La frontière de séparation entre les régimes chaotiques et non chaotiques est également représentée. La flèche indique le sens d'évolution des exposants de *Lyapunov*  $\lambda$  pour une force proche du point d'inflexion. Remarque : les valeurs de constante d'élasticité utilisées sont  $K = \{0.01; 0.1; 1; 10\}$ , alors que les valeurs du couplage visqueux  $\eta$  varient de 0.1 à 100.

pour différentes harmoniques  $p_2$ . On remarque que les valeurs des exposants de *Lyapunov*  $\lambda$ , pour une force proche du point d'inflexion de  $v(F)$ , augmentent lorsque  $\eta$  augmente à  $K$  fixée. Les exposants  $\lambda$  mesurés à  $\eta$  fixé sont semblables quelque soit les harmoniques  $p_2$ .

Ainsi, des régimes chaotiques sont observés dans le cas du dépiégeage plastique (*i.e.*  $A \neq 1$ ), cependant la coexistence de régimes chaotiques et périodiques reste une question ouverte.

## 5.5 Conclusion

A partir d'un modèle visco-élastique simple avec un faible nombre de degrés de liberté (ici 4 particules), nous obtenons une grande variété de comportements dynamiques. Deux grands types de dépiégeage sont observés, similairement à ce que l'on mesure dans des systèmes périodiques variés comme les colloïdes, les cristaux de *Wigner*, les ondes de densité de charge, les réseaux de vortex, etc ... L'intensité de piégeage relative  $A$  d'un canal par rapport à un autre joue un rôle important sur le type de dépiégeage, et sur les différents régimes dynamiques obtenus. Un dépiégeage élastique des particules est observé pour des valeurs de  $A = 1$  alors qu'un dépiégeage plastique est réalisé pour des valeurs de  $A \neq 1$  avec une dynamique riche. En effet, des particules piégées peuvent coexister avec d'autres en mouvement, ou bien les particules peuvent être toutes dépiégées avec des vitesses moyennes

différentes (situations similaires à des phases smectiques). La richesse qu'offre un tel modèle visco-élastique ne s'arrête pas là puisque de l'hystérésis est mesurable, quelque soit l'harmonique dans le paysage de piégeage. Seule dans le cas du dépiégeage élastique de l'hystérésis marquée est observable. Lors du dépiégeage élastique, et pour les valeurs de paramètres utilisés, aucun régime chaotique n'a pu être détecté. Des régimes chaotiques ont pu être observés dans le cas du dépiégeage plastique : des exposants de *Lyapunov* positifs ont été mesurés. Ces derniers sont une signature non ambiguë de l'existence de chaos au sein du système. L'étude du spectre de puissance  $S(f)$  a mis en avant l'existence d'un large bruit à basses fréquences dans les régimes chaotiques.

Les résultats obtenus sur ce modèle simplifié indiquent que la dynamique plastique de systèmes périodiques entraînés sur un milieu désordonné peut être approchée par un modèle avec un très faible nombre de degrés de libertés. Une étude détaillée semble nécessaire quant à la caractérisation du chaos dans un tel modèle. Ces résultats sont similaires à ceux obtenus pour des systèmes plus compliqués comme les réseaux de vortex  $2D$  à  $T = 0$  [109]. En effet, un dépiégeage plastique caractérisé au niveau de la courbe vitesse-force par un point d'inflexion, l'absence d'hystérésis pour le cas plastique, ou encore l'existence de chaos avec un exposant de *Lyapunov*  $\lambda$  maximal au niveau du point d'inflexion, et diminuant avec la force, sont des éléments communs à ces différents systèmes.

Notons que ces résultats sont également à comparer avec ceux obtenus pour des simulations numériques dans un modèle simple de dépiégeage :  $N \geq 2$  canaux  $1D$  de particules se repoussent et sont sujet à une force d'entraînement dans un milieu désordonné [121]. Des comportements dynamiques similaires sont observés, citons par exemple une transition entre un dépiégeage élastique et plastique, la coexistence de particules piégées et en mouvement, des canaux découplés avec des vitesses moyennes différentes, ou encore la possibilité d'hystérésis. Dans ce modèle, il n'existe cependant aucun couplage visqueux entre les canaux.

Une modification possible du modèle serait maintenant de fixer non plus la force d'entraînement  $F$  uniforme, mais la vitesse des canaux à travers une force extérieure du type  $F(t) \sim vt - u(t)$ . Cela permettrait ainsi de modéliser le fait que les particules soient "tirées" par un ressort à vitesse constante. Ce modèle a pu être étudié analytiquement, il a été utile pour déterminer les forces critiques et la fonction calculée dans la théorie du groupe de renormalisation fonctionnel [122, 123].

## 5.5. CONCLUSION

---

# Conclusion

« *Une conclusion, c'est quand vous en avez assez de penser.* »

Herbert Albert Fisher

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à la dynamique et au dépiégeage des systèmes élastiques désordonnés. Cette thématique regroupe une grande variété de systèmes dans des sujets aussi divers que la physique des solides avec les ondes de densité de charge, les cristaux de *Wigner*, les parois de domaines magnétiques ou les réseaux de vortex dans la supraconducteurs de type II, et la mécanique des matériaux ou des fluides avec le propagation de fronts de fracture et le mouillage de surface rugueuse avec un liquide. Nous avons principalement étudié le dépiégeage de réseaux de vortex soumis à une force d'entraînement et plongés dans un milieu où le désordre est faible.

Cette étude est menée à l'aide de simulations numériques à grande échelle. En variant l'intensité du piégeage un changement de régime a été trouvé entre une dynamique élastique et une dynamique plastique montrant le passage d'un régime dominé par le désordre à un régime dominé par l'élasticité. L'objectif de notre étude a été de caractériser la nature de la transition de dépiégeage des vortex dans le régime élastique obtenu en désordre faible.

La dynamique des vortex a été explorée au dessus du seuil de dépiégeage et l'on observe que tous les vortex se dépiègent simultanément et s'écoulent dans des canaux statiques rugueux couplés élastiquement. Une analogie avec les transitions de phase à l'équilibre du second ordre a été mise en évidence avec la vitesse moyenne des vortex  $v$  comme paramètre d'ordre et la force d'entraînement  $f$  comme paramètre de contrôle. Nous avons mis en évidence le caractère continu de la transition et nous avons évalué divers exposants critiques qui la caractérise. Pour cela une analyse en terme de loi d'échelle a été employée à température nulle et à température finie permettant d'extraire les exposants  $\beta$  et  $\delta$  caractérisant la réponse de la vitesse en fonction de la force et de la température (exposants issus respectivement des lois de puissance  $v_{T=0} \sim f^\beta$  et  $v_{f=0} \sim T^{1/\delta}$ ), mais également l'exposant  $\nu$  caractérisant la divergence au dessus du dépiégeage de la longueur de corrélation du système ( $\xi \sim f^{-\nu}$  à  $T = 0$ ). Nous avons établi l'existence d'une loi d'échelle reliant la vitesse  $v$  avec la force  $f$  et la température  $T$  en accord avec la théorie des transitions de phase continues. Les exposants critiques  $\beta$ ,  $\delta$  et la fonction d'échelle sont indépendants du désordre (son intensité et sa répartition spatiale) dans la gamme des paramètres utilisés indiquant ainsi l'existence d'un certain degré d'universalité. Cependant la comparaison avec d'autres systèmes périodiques similaires suggère qu'une vaste classe d'universalité n'existe pas pour la transition de dépiégeage élastique à  $2D$ .

L'étude d'un modèle simple visco-élastique avec un faible nombre de degrés de libertés permet de décrire les situations où le désordre est fort. Une grande variété de comportements dynamiques sont observés en fonction de plusieurs paramètres qui jouent un rôle important dans la détermination de ces régimes dynamiques : l'intensité de piégeage, les interactions élastiques et visqueuses. Deux grands types de dépiégeage élastique et plastique sont observés, et sont similaires à ce que l'on mesure dans les systèmes périodiques désordonnés. Outre la richesse dynamique que l'on peut tirer d'un tel modèle, d'autres caractéristiques sont observées, comme par exemple de l'hystérésis dans le cas du dépiégeage élastique. Du chaos a été détecté dans le cas du dépiégeage plastique, avec des exposants de *Lyapunov* positifs et un large bruit à basses fréquences. En revanche dans le cas du dépiégeage élastique, aucun régime chaotique n'a été mesuré. Ces résultats indiquent que la dynamique plastique de systèmes périodiques entraînés sur un milieu désordonné peut être approchée par un modèle avec un très faible nombre de degrés de libertés.

# Annexes



## Annexe A

# Publications

*« Chaque publication scientifique ne sert qu'à poser 10, 20 questions. Chaque découverte scientifique est passionnante parce qu'elle ouvre un univers de questions. Si les questions vous angoissent, ne soyez pas scientifique. »*

BORIS CYRULNIK

## A.1 Publication I

Y. Fily, E. Olive, N. Di Scala, and J. C. Soret

*Critical behavior of plastic depinning of vortex lattices in two dimensions : Molecular dynamics simulations*

*Phys. Rev. B* **82**, 134519 (2010)

### Critical behavior of plastic depinning of vortex lattices in two dimensions: Molecular dynamics simulations

Y. Fily,<sup>1,2</sup> E. Olive,<sup>1</sup> N. Di Scala,<sup>1</sup> and J. C. Soret<sup>1</sup><sup>1</sup>LEMA, UMR 6157, Université F. Rabelais-CNRS-CEA, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France<sup>2</sup>Department of Physics, Syracuse University, Syracuse, New York 13244, USA

(Received 20 December 2009; published 13 October 2010)

Using molecular dynamics simulations, we report a study of the dynamics of two-dimensional vortex lattices driven over a disordered medium. In strong disorder, when topological order is lost, we show that the depinning transition is analogous to a second-order critical transition: the velocity-force response at the onset of motion is continuous and characterized by critical exponents. Combining studies at zero and nonzero temperature and using a scaling analysis, two critical exponents are evaluated. We find  $v \sim (F - F_c)^\beta$  with  $\beta = 1.3 \pm 0.1$  at  $T=0$  and  $F > F_c$ , and  $v \sim T^{1/\delta}$  with  $\delta^{-1} = 0.75 \pm 0.1$  at  $F = F_c$ , where  $F_c$  is the critical driving force at which the lattice goes from a pinned state to a sliding one. Both critical exponents and the scaling function are found to exhibit universality with regard to the pinning strength and different disorder realizations. Furthermore, the dynamics is shown to be chaotic in the whole critical region.

DOI: 10.1103/PhysRevB.82.134519

PACS number(s): 74.25.Uv, 64.60.Ht

#### I. INTRODUCTION

Due to the competition between interactions and randomness, the dynamics of coherent structures driven over a disordered medium exhibit a great variety of phases. In particular, the transition from a pinned state to a sliding one occurring at a critical driving force  $F_c$ , known as the *depinning transition*, is both a great theoretical challenge and relevant for numerous systems: superconductor vortices, colloids, Wigner crystals, magnetic bubbles, charge-density waves (CDWs), magnetic domain walls, etc. It has been suggested on phenomenological grounds by Fisher<sup>1</sup> that the depinning transition could be regarded as a critical phenomenon in which the velocity and the driving force would, respectively, be the order parameter and the control parameter. Though it was originally intended to describe the depinning of CDWs, this idea has proven very useful in many other domains. In the elastic limit, it has been shown theoretically that for most manifolds and for CDW the depinning does behave like a second-order transition with a power-law response  $v \sim (F - F_c)^\beta$  at the onset of motion and  $\beta < 1$ .<sup>2</sup> When it comes to situations in which an elastic description is no longer valid, however, the theoretical description of the phenomenon is much more difficult. In particular, the nature of the depinning transition (continuous or discontinuous) remains an open problem. A continuous depinning transition (second order) with  $\beta > 1$  is observed in experiments<sup>3-5</sup> and numerical simulations.<sup>6-10</sup> On the other hand, experiments on CDW (Ref. 11) and three-dimensional (3D) numerical simulations of vortices<sup>12</sup> suggest a discontinuous (first-order) depinning transition where the velocity-force curve displays hysteresis and jumps between pinned and unpinned states. On the theoretical side, various models have been developed to describe nonelastic dynamics. A coarse-grained model has been proposed<sup>13</sup> in which a viscoelastic coupling is used as an effective description of topological defects or phase slips. In the mean-field limit, it predicts two kinds of depinning: a continuous one, belonging to the universality class of elastic depinning, and an hysteretic one. The existence of an hyster-

etic depinning in a special case of this model has been confirmed using functional renormalization.<sup>14</sup> Other phase-slip models also predict hysteresis for CDW.<sup>15</sup> Conversely, numerical studies of a model focusing on the filamentary nature of the flow in two dimensions (2D) show a continuous depinning with  $\beta = 1.5$ .<sup>16</sup> Other phase-slip models based on the XY model also suggest the absence of hysteresis at the thermodynamic limit<sup>17</sup> (in 3D) and a continuous second-order plastic depinning transition with an exponent  $\beta = 1.7$  (Ref. 18) [in one dimensions (1D)]. Another approach is to introduce inertia in the equation of motion.<sup>19</sup> In this case a continuous depinning transition is found for small inertial parameter, otherwise a discontinuous transition with hysteresis is found. In periodic systems with a displacement field of dimension  $N=2$  (e.g., superconductor vortices, colloids, and Wigner crystals), simulations have established that strong disorder leads to dislocations and plasticity. At the depinning threshold, regions of pinned particles (zero velocity) coexist with particles flowing around the pinned regions.<sup>7,8,20-22</sup> Besides, the transition seems to be continuous and smooth ( $\beta > 1$ ) in 2D ( $d=2$  is here the dimension of the embedding space).<sup>7-10</sup> Simulations on 2D colloids also indicate that the relaxation time near depinning obeys a power law, as expected in a second-order transition.<sup>23</sup> However, most studies in which critical exponents are evaluated are carried out in the case of a 1D displacement field ( $N=1$ , e.g., Josephson-junction arrays, metallic dots, and CDW) while there are very few such studies for  $N=2$ . In particular, there is to the best of our knowledge no available study on superconductor vortices giving the  $\beta$  exponent in the 2D plastic regime [it should be noted though that  $\beta$  has been numerically evaluated for superconductor vortices in 3D (Ref. 24)].

In this paper, we perform molecular dynamics simulations of 2D vortex lattices with strong random pinning and study the depinning transition induced by an external driving force. Our system belongs to the category of 2D periodic systems with a 2D displacement field and short-range interactions. It could model 3D superconductors (either conventional or layered) in an effective 2D regime, i.e., when the vortex line

FILY *et al.*

PHYSICAL REVIEW B **82**, 134519 (2010)

tension is high enough for the lines to remain straight.

The behavior of the system near the depinning transition is studied at both zero and nonzero temperature, which allows an accurate measurement of the critical driving force. At zero temperature, the depinning is continuous and highly plastic. The static channels observed at the onset of motion are identified with the so-called *single-particle regime* and considered as a finite-size effect. In the intermediate range of driving force, the motion is chaotic whereas at high driving force, the lattice reorders and chaos disappears. In the threshold vicinity, a study of the temperature dependence of the velocity allows us to determine the true critical force despite the single-particle regime. Moreover, it is shown that the velocity scales as a power law of temperature  $v_{F=F_c} \sim T^{1/\delta}$  at  $F=F_c$  and the associated critical exponent  $\delta$  is determined. At  $T=0$ , a second power law  $v \sim (F-F_c)^\beta$  is found with an exponent  $\beta > 1$ . Varying simultaneously the driving force and the temperature, we then find evidence of the existence of a scaling law, which confirms the values of  $\beta$  and  $\delta$  evaluated, respectively, at  $T=0$  and  $F=F_c$ . This analysis has been performed for various system sizes, disorder realizations, and pinning strengths, indicating that both  $\beta$ ,  $\delta$ , and the scaling function exhibit some degree of universality.

## II. NUMERICAL MODEL

As in Ref. 10, we study  $N_v$  Abrikosov vortices interacting with  $N_p$  random pins in the  $(x, y)$  plane. We consider the London limit  $\lambda_L \gg \xi$ , where  $\lambda_L$  is the penetration length and  $\xi$  is the coherence length, i.e., we treat vortices as point particles. The overdamped equation of motion of a vortex  $i$  at position  $\mathbf{r}_i$  reads

$$\eta \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = - \sum_{j \neq i} \nabla_i U^{vv}(r_{ij}) - \sum_p \nabla_i U^{vp}(r_{ip}) + \mathbf{F}^L + \mathbf{F}_i^{\text{th}}(t), \quad (1)$$

where  $r_{ip}$  is the distance between the vortex  $i$  and the pinning site located at  $\mathbf{r}_p$ ,  $r_{ij}$  is the distance between the vortices  $i$  and  $j$  located at  $\mathbf{r}_i$  and  $\mathbf{r}_j$ , and  $\nabla_i$  is the 2D gradient operator acting on  $\mathbf{r}_i$ .  $\eta$  is the viscosity coefficient.  $\mathbf{F}^L = F\hat{\mathbf{x}}$  is the Lorentz driving force due to an applied current.  $\mathbf{F}_i^{\text{th}}$  is the thermal Gaussian white noise with zero mean and variance,

$$\langle F_{i,\mu}^{\text{th}}(t) F_{j,\nu}^{\text{th}}(t') \rangle = 2\eta k_B T \delta_{ij} \delta_{\mu\nu} \delta(t-t'),$$

where  $\mu, \nu = x, y$  and  $k_B$  is the Boltzmann constant. The vortex-vortex repulsive interaction is given by a modified Bessel function,

$$U^{vv}(r_{ij}) = \alpha_v K_0(r_{ij}/\lambda_L)$$

and the attractive pinning potential is given by

$$U^{vp}(r_{ip}) = -\alpha_p e^{-(r_{ip}/R_p)^2},$$

where  $R_p$  the radius of the pins, and  $\alpha_v$  and  $\alpha_p$  are tunable parameters. Depending on the relative strengths of the vortex-vortex and vortex-pin interactions, the dynamics can be either dominated by elasticity or disorder. The strength of the vortex-vortex interaction is fixed by setting  $\alpha_v = 2.83 \times 10^{-3} \lambda_L \epsilon_0$ , where  $\epsilon_0$  is an energy per unit length. The rela-

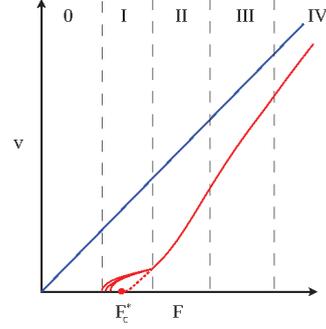


FIG. 1. (Color online) Schematic of the average velocity  $v$  versus driving force  $F$ . The vertical dashed lines separate the different kinds of flow observed: pinned static lattice (region 0), single-particle regime (region I), disordered chaos (region II), smectic chaos (region III), and decoupled channels (region IV). The dotted line crossing the horizontal axis at  $F=F_c$  is the prolongation of the curve from region II to region I (see text Sec. IV A).

tive disorder strength  $\alpha_p/\alpha_v$  is then chosen high enough for the depinning transition to exhibit plasticity (in our model, plasticity is found above  $\alpha_p/\alpha_v \sim 0.01$ ). Molecular dynamics simulation is used for  $N_v = 30n^2$  vortices in a rectangular basic cell  $(L_x, L_y) = (5, 6\sqrt{3}/2)n\lambda_L$  with  $n$  from 3 to 8, i.e.,  $N_v$  from 270 to 1080. Periodic boundary conditions are used in both directions. The vortex-vortex interaction is dealt with using a neighbor list method with a cut-off radius  $r_c = 7.1\lambda_L$ . The number of pins is set to  $N_p = 5N_v$ , and their radius is  $R_p = 0.22\lambda_L$ . The average vortex distance is  $a_0 = \lambda_L$ . We use a unit system in which  $\eta = 1$ ,  $\lambda_L = 1$ ,  $\epsilon_0 = 1$ , and  $k_B = 1$ .

## III. BEHAVIOR AT $T=0$

We start with a perfect lattice at high velocity and slowly decrease the driving force until the system reaches a pinned state. The force is then varied back and forth with various force steps in order to check for hysteresis. The whole process is done at  $T=0$ . In Fig. 1, we plot the typical shape of the average velocity-force curve, showing four distinct regions. These regions are better illustrated by the typical trajectories of vortices<sup>7,21</sup> displayed in Fig. 2.

Just above the depinning threshold (region I), the flow occurs along one or several noncrossing static channels while the rest of the system remains pinned (see Fig. 2). The velocity-force curve exhibits jumps and hysteresis. This is related to the existence of several sets of such channels for a given driving force. Each set corresponds to a hysteresis branch while jumps in velocity are in fact jumps from a branch to another one, i.e., from a set of channels to another one. Note that the branch chosen by the system depends on the force ramping rate. Moreover, on a given channel, the positions of vortices are fully determined by the position of one of them. Indeed, it can be verified by choosing one vortex at a given position on the channel, and plotting the posi-

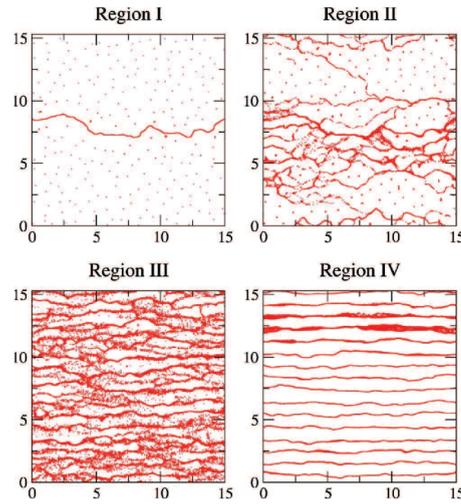


FIG. 2. (Color online) Typical trajectories of the vortices in the four moving regions shown in Fig. 1: single-particle regime (region I), disordered chaos (region II), smectic chaos (region III), and decoupled channels (region IV).

tions of all the other vortices. Since the channel is one dimensional, this means that the dynamics can be modeled by a single degree of freedom. Because of the periodic boundary conditions, this single degree of freedom sees a periodic potential, leading to the so-called *single-particle regime*: the system experiences a saddle-node bifurcation at the critical force  $F_c$ ; above  $F_c$ , the velocity is a periodic function of time and scales as  $v \sim (F - F_c)^{1/2}$ . We measure indeed this power law on each branch corresponding to a given configuration of the channels. Moreover, simulations of boxes shaped as long strips in the longitudinal direction show that the range of force in which region I is observed decreases when the longitudinal size is increased. At large sizes, the size of region I seems to shrink to zero. As a result, we assume that region I vanishes in the infinite size limit, and should not be taken into consideration for the study of the critical behavior.

In regions II and III, vortices flow along changing interconnected channels (see Fig. 2). The transition from region II to region III is defined by the appearance of transverse smectic order indicated by small peaks in the structure factor along the  $k_y$  axis while the sketch of the high velocity channels becomes visible. It occurs near the inflexion point in the velocity-force curve, also known as the *peak in differential resistance* in reference to the experimental tension-intensity curves. In region IV, vortices stop switching channels (see Fig. 2) and a linear behavior  $v \sim F - F_c$  is observed.

Following Ref. 22, we now show that the motion in regions II and III is chaotic by evaluating the sign of the maximum Lyapunov exponent  $\lambda$ . The existence of at least one positive Lyapunov exponent illustrates the sensitive dependence on initial conditions, which is a signature of chaos. In Fig. 3, we plot the distance

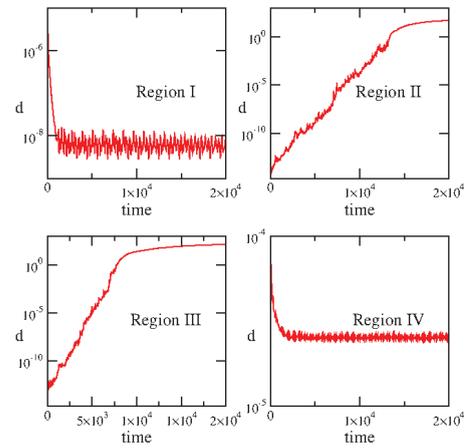


FIG. 3. (Color online) Distance  $d$  between two neighboring trajectories versus time in regions I, II, III, and IV.

$$d(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_v} |\mathbf{r}_i^1(t) - \mathbf{r}_i^2(t)|^2} \quad (2)$$

in the phase space between two neighboring trajectories  $[\mathbf{r}_1^1(t), \dots, \mathbf{r}_{N_v}^1(t)]$  and  $[\mathbf{r}_1^2(t), \dots, \mathbf{r}_{N_v}^2(t)]$ . Two distinct behaviors are found. In regions II and III,  $d(t)$  grows exponentially at first and then saturates. The exponential growth indicates the existence of at least one positive Lyapunov exponent, which proves the existence of chaos. A saturation effect appears when  $d(t)$  becomes on the order of the size of the chaotic attractor. On the other hand, in regions I and IV  $d(t)$  remains constant at large times (the largest Lyapunov exponent is zero) indicating a closed orbit in phase space while the decrease at short times is due to the transient regime associated with the existence of negative Lyapunov exponents.

#### IV. CRITICAL EXPONENTS AND SCALING

In the original approach of Fisher,<sup>1</sup> it is argued that the depinning transition is a critical phenomenon implying scaling laws and critical exponents near threshold. It is therefore expected that  $v_{F=F_c} \sim T^{1/\delta}$  and  $v_{T=0, F>F_c} \sim (F - F_c)^\beta$ , where  $\delta$  and  $\beta$  are critical exponents. In the following, we show that our data support the existence of such a critical phenomenon: the critical exponents  $\delta$  and  $\beta$  are determined, and a scaling relation is found between the velocity, temperature, and driving force. Note that the threshold behavior that we observe in our simulations is effectively continuous since hysteresis and jumps have only been observed in region I, which we believe vanishes in the infinite size limit.

##### A. Critical force and exponent $\delta$

First of all, we want to determine the critical force  $F_c$ . The main issue is that because of hysteresis in region I, there is

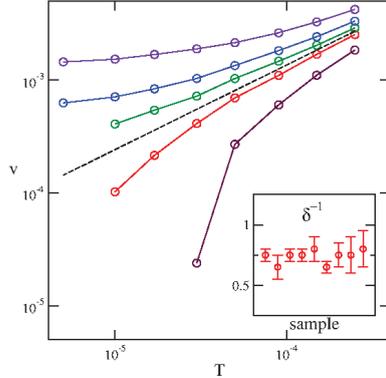


FIG. 4. (Color online) Average velocity  $v$  versus temperature  $T$  at low temperature for different forces around the critical force  $F_c^*$  (from bottom to top:  $10^3 \times F = 11; 12; 12.5; 13; 14$ ),  $\alpha_p/\alpha_v = 1.05$  and  $N_v = 270$ . The dashed black line is the extrapolation of  $v(T)$  at the critical force from which we extract  $\delta^{-1}$ . Inset: value of  $\delta^{-1}$  for different samples: two different disorder strengths  $\alpha_p/\alpha_v = 1.05$  and  $\alpha_p/\alpha_v = 0.35$ , three different sizes ( $N_v = 270$  for  $\alpha_p/\alpha_v = 1.05$ ,  $N_v = 270, 480$ , and  $1080$  for  $\alpha_p/\alpha_v = 0.35$ ), and different sets of positions of the pins (two sets for  $\alpha_p/\alpha_v = 1.05$  and  $N_v = 270$ , five sets for  $\alpha_p/\alpha_v = 0.35$  and  $N_v = 270$ ). The error bars correspond to the different lines one can draw to extrapolate a power-law behavior at the change in convexity.

no unique depinning force  $F_c$  directly accessible to measurements. Consequently, we have to evaluate an effective critical force  $F_c^*$  by prolongating the velocity-force curve from region II to region I. The intersection with the  $v=0$  axis defines  $F_c^*$  (see Fig. 1). This evaluation can be improved by studying the temperature dependence of the velocity close to the depinning threshold. As shown in Fig. 4, two different behaviors are observed, depending on which side of the transition the force is. Above the critical force,  $v$  approaches a nonzero limit as  $T$  goes to 0, leading to convex curves with an horizontal asymptote on the left in logarithmic scale. Below the critical force,  $v$  goes to 0 faster than a power law, resulting in concave curves in logarithmic scale. The change in convexity when the force is varied indicates that the effective critical force  $F_c^*$  has been crossed. The results obtained by these two methods are consistent, and combining both allows to improve the accuracy and precision of  $F_c^*$ .

Furthermore, in agreement with a second-order phase transition, we can extrapolate at  $F=F_c^*$  a power-law response<sup>1</sup> (a linear response in logarithmic scale at the change in convexity) from which we measure the critical exponent  $\delta$ ,

$$v_{F=F_c^*} \sim T^{1/\delta}. \quad (3)$$

As we shall see in Sec. IV C, this is consistent with the existence of a scaling relation, and the value of  $\delta$  obtained here allows to collapse all data available on a single curve,

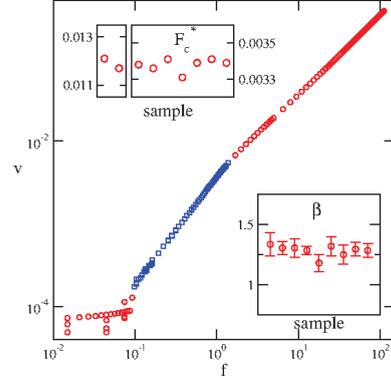


FIG. 5. (Color online) Average velocity  $v$  versus effective reduced driving force  $f = (F - F_c^*)/F_c^*$  (circles and squares), including the critical region (squares). Bottom right inset: value of  $\beta$  for different samples (same samples as Fig. 4:  $\alpha_p/\alpha_v = 1.05$  and  $0.35$ ,  $N_v = 270 - 1080$  and different sets of positions of the pinning centers). Top left inset: values of  $F_c^*$  for different samples (left side:  $\alpha_p/\alpha_v = 1.05$ , two samples; right side:  $\alpha_p/\alpha_v = 0.35$ , seven samples).

supporting the validity of extrapolating a power-law behavior at  $F=F_c^*$ . This analysis has been performed on nine samples with different pinning strengths ( $\alpha_p/\alpha_v = 1.05$  and  $0.35$ ), different system sizes ( $N_v = 270 - 1080$ ), and different realizations of the random positions of the pinning centers. The resulting values of  $\delta^{-1}$  are shown in the inset of Fig. 4, leading to  $\delta^{-1} = 0.75 \pm 0.1$ .

### B. Critical exponent $\beta$

We now go back to the  $T=0$  case to study the velocity-force curve using the values of  $F_c^*$  obtained in the previous section. The mean velocity  $v$  versus effective reduced force  $f = (F - F_c^*)/F_c^*$  is plotted in Fig. 5 for  $\alpha_p/\alpha_v = 0.35$ , showing the existence of a power-law regime in the critical region, which lies from the lower boundary of region II ( $f \sim 0.1$ ) to close to its upper boundary ( $f \sim 1$ ),

$$v_{T=0, f > 0} \sim f^\beta. \quad (4)$$

This power law results in a linear region in logarithmic scale, whose slope  $\beta$  has been measured on the nine samples of Sec. IV A. No significant differences between the samples were measured, leading to a unique value  $\beta = 1.3 \pm 0.1$  (see bottom right inset of Fig. 5). The precision of  $\beta$  is limited by the precision of  $F_c^*$ . Note that using only the  $T=0$  results (see Sec. IV A) to determine the critical force gives a similar result, except that the uncertainty on  $\beta$  is greater.

### C. Scaling law

The power-law dependence of  $v$  versus both  $f$  and  $T$  strongly suggests to go on with the identification of the depinning transition with a critical phenomenon and to look for

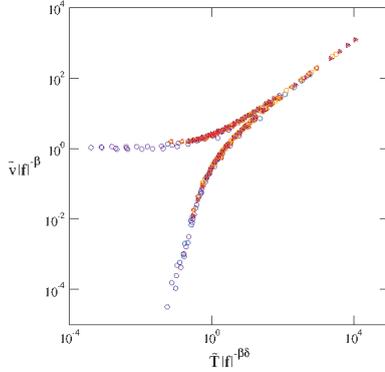


FIG. 6. (Color online) Scaling plot  $\tilde{v}|f|^{-\beta}$  versus  $\tilde{T}|f|^{-\beta\delta}$  with  $\beta=1.3$  and  $\delta^{-1}=0.75$  featuring the nine samples shown in the insets of Figs. 4 and 5 ( $\alpha_p/\alpha_v=1.05$  and  $0.35$ ,  $N_v=270-1080$ , and different sets of positions of the pinning centers).

evidence of a scaling relation between the velocity, driving force, and temperature. First of all, we want this relation to be expressed in terms of dimensionless quantities, and to be independent of the prefactors in the two power laws mentioned before. We thus define  $v_0$  and  $T_0$  such as

$$v_{f>0,T=0} = v_0 f^{\beta}, \quad v_{f=0} = v_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1/\delta}. \quad (5)$$

Considering dimensionless velocity  $\tilde{v} = v/v_0$  and temperature  $\tilde{T} = T/T_0$ , we define the scaling function  $S$  as follows:

$$\tilde{v}|f|^{-\beta} = S_{\pm}(\tilde{T}|f|^{-\beta\delta}), \quad (6)$$

where the unknown branches  $S_+$  and  $S_-$  of the scaling function correspond, respectively, to  $f>0$  and  $f<0$ . Moreover, the observed power-law dependences  $\tilde{v}_{f>0,T=0} = f^{\beta}$  and  $\tilde{v}_{f=0} = \tilde{T}^{1/\delta}$  imply that  $S_{\pm}(x)$  satisfies

$$\lim_{x \rightarrow 0} S_+(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1/\delta} S_+(x) = 1. \quad (7)$$

Graphically, it means (in logarithmic scale) that  $S_+$  is asymptotic to the horizontal axis for  $T \rightarrow 0$  (driving dominated regime) while both  $S_+$  and  $S_-$  have an oblique asymptote with slope  $\delta^{-1}$  for  $f \rightarrow 0$  (temperature dominated regime). The intersection of these two asymptotes occurs at  $x=1$ , defining a force-dependent crossover temperature  $T = T_0 |f|^{\beta\delta}$  between the two regimes. Note that the change in variables  $(v, T) \rightarrow (\tilde{v}, \tilde{T})$  is equivalent to choosing the intersection of the asymptotes as the origin of coordinates.

We check for the existence of the scaling by plotting in Fig. 6  $\tilde{v}|f|^{-\beta}$  versus  $\tilde{T}|f|^{-\beta\delta}$ . We observe a collapsing of data to a single curve (with two branches) for the same values of  $F_c^*$ ,  $\beta$ , and  $\delta$  obtained in Secs. IV A and IV B. To be more specific, the data from all the samples are plotted using the same couple of values for  $\beta$  and  $\delta$ , chosen equal to the av-

erage values obtained in previous sections ;  $F_c^*$  on the other hand varies from sample to sample as shown in the inset of Fig. 5. For a given disorder strength  $v_0$  and  $T_0$  are constant, whatever the system size ( $N_v=270-1080$ ) and the positions of the pins. When the disorder strength is changed,  $v_0$  and  $T_0$  change ( $v_0=3.3 \times 10^{-3}$  and  $T_0=8 \times 10^{-4}$  for  $\alpha_p/\alpha_v=0.35$ ;  $v_0=1.3 \times 10^{-2}$  and  $T_0=1.4 \times 10^{-3}$  for  $\alpha_p/\alpha_v=1.05$ ) but  $S_{\pm}$  remains unchanged.

The collapsing of all the available data indicates that: (i) the size effects are not relevant, i.e., the system studied is large enough for a true critical regime to be observed and (ii) neither the critical exponents  $\beta$  and  $\delta$  nor the scaling function  $S_{\pm}$  depend on the disorder (strength and positions of the pins). Our results therefore show some degree of universality within our model. The question of larger universality classes for plastic depinning of periodic objects with  $N=2$  displacement fields will be addressed in Sec. V.

## V. DISCUSSION

A large variety for the values of the  $\beta$  exponent can be found in the literature, and the question of the existence of universality classes is still open for the plastic depinning transition. In some cases no scaling fit can even be found or hysteresis suggesting first-order depinning transition has been reported. Our present results strongly suggest a second-order depinning transition with well identified critical exponents  $\beta$  and  $\delta$  and scaling relations exhibiting some universality with regard to the disorder strengths, and disorder realizations are found. We therefore try to compare our results and, in particular, the depinning critical exponents to those reported in similar studies.

In the case of a displacement field of dimension  $N=1$  (e.g., Josephson-junction arrays, XY model, metallic dots, and CDW) in an embedding space of dimension  $d=2$ , the value  $\beta=5/3$  has been predicted theoretically.<sup>25</sup> Moreover, many studies are available, both experimental and numerical, and a large variety of  $\beta$  values can be found (e.g.,  $1.4 < \beta < 2.25$  for arrays of metallic dots,<sup>3</sup> and  $1.3 < \beta < 2.6$  for Josephson junction and XY model<sup>6</sup>).

In the case of a displacement field of dimension  $N=2$  (e.g., superconductor vortices, colloids, and Wigner crystals), there are to the best of our knowledge only a few numerical studies proposing critical exponents for the plastic depinning transition (see Table I). Reference 9 uses a  $N=2$  model to describe arrays of metallic dots, and the nature of the disorder's randomness is different from the other studies (regular array of pins with random strength vs identical pins with random positions). The same study also considers the case of random positions by removing random sites on the array, however no unique value of  $\beta$  is measurable in that case. In Wigner crystals and colloids,  $\beta$  is found to be independent of the pinning strength.<sup>7,8</sup> In 3D superconductors ( $d=3$ ) with well-defined vortex lines, it is shown that one can measure two critical exponents  $\beta$  and  $\delta$ , both independent of the disorder strength, and that a scaling relation involving these two exponents exists.<sup>24</sup> However, an hysteretic discontinuous transition is found if the superconductor is layered and the layers are allowed to decouple, i.e., when there are no more

TABLE I. Depinning exponents (simulation results) in the plastic case for periodic systems with a displacement field of dimension  $N=2$ .  $d$  is the dimension of the embedding space.

Study	$d$	Particle-particle interaction	Pinning	$\beta$	$\delta^{-1}$
Ref. 7	2	Coulomb	Coulomb, random positions	$1.61 \pm 0.10$ , $1.71 \pm 0.10$	
Ref. 8	2	Screened Coulomb	Parabolic, random positions	$1.94 \pm 0.03$	
Ref. 9	2	Coulomb	Parabolic, random strength	$1.94 \pm 0.15$	
Ref. 24	3	Modified Bessel	Gaussian, random positions	$0.754 \pm 0.010$	$0.754 \pm 0.010$
Our results	2	Modified Bessel	Gaussian, random positions	$1.3 \pm 0.1$	$0.75 \pm 0.1$

vortex lines.<sup>12</sup> Finally in experiments on depinning in superconductors,  $\beta \sim 1.2$  or  $1.4$  is found above the peak effect,<sup>4</sup> where the depinning is considered to be plastic.

In the present paper, we propose the determination of both exponents  $\beta$  and  $\delta$ , along with evidence of a scaling relation, for plastic depinning in the case  $N=2$  and  $d=2$  by studying effective 2D vortex lines. First, we note that the value  $\beta = 1.3 \pm 0.1$  is in agreement with vortex experiments above the peak effect.<sup>4</sup> Second, we find some degree of universality with regard to the pinning strength and different realizations of the disorder, in agreement with previous results.<sup>7,9</sup> However, the variety of the values of the  $\beta$  exponent reported above suggests that the type of particle-particle interaction as well as the type of disorder plays an important role. In the light of these results, it seems therefore difficult to define large universality classes for the plastic depinning of periodic objects in 2D.

## VI. CONCLUSION

In this paper, we studied the plastic depinning of vortex lattices in 2D with strong disorder. Above the pinned region,

we find four dynamical regimes: periodic, disordered chaotic, smectic chaotic, and decoupled channels. The first one is controlled by the finite size of the simulation box, leading to the so-called *single-particle regime*. A continuous (second-order) phase transition is found at the depinning threshold. The critical regime associated to the depinning transition is found to be chaotic. A careful analysis at  $T=0$  and finite temperature allows an accurate determination of the critical force. Scaling laws for the force and temperature dependence of the velocity are found and two critical exponents are determined. Both critical exponents and the scaling function are independent of the disorder (strength and positions of the pins) in the range of parameters we have studied, indicating some degree of universality. However, the comparison with similar systems may suggest that large universality classes do not exist for the plastic depinning in 2D.

## ACKNOWLEDGMENT

We wish to thank Pierre Le Doussal, Alberto Rosso, Cristina Marchetti, and Alan Middleton for helpful discussions.

<sup>1</sup>D. S. Fisher, *Phys. Rev. B* **31**, 1396 (1985).

<sup>2</sup>T. Nattermann, S. Stepanow, L.-H. Tang, and H. Leschhorn, *J. Phys. II* **2**, 1483 (1992); O. Narayan and D. S. Fisher, *Phys. Rev. B* **46**, 11520 (1992); **48**, 7030 (1993); D. Ertas and M. Kardar, *Phys. Rev. E* **49**, R2532 (1994); P. Chauve, T. Giamarchi, and P. Le Doussal, *Phys. Rev. B* **62**, 6241 (2000); P. Chauve, P. Le Doussal, and K. Wiese, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1785 (2001); P. Le Doussal, K. J. Wiese, and P. Chauve, *Phys. Rev. B* **66**, 174201 (2002).

<sup>3</sup>C. I. Duruöz, R. M. Clarke, C. M. Marcus, and J. S. Harris, Jr., *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3237 (1995); A. J. Rimberg, T. R. Ho, and J. Clarke, *ibid.* **74**, 4714 (1995); C. Kurdak, A. J. Rimberg, T. R. Ho, and J. Clarke, *Phys. Rev. B* **57**, R6842 (1998); R. Parthasarathy, X.-M. Lin, and H. M. Jaeger, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 186807 (2001).

<sup>4</sup>M. J. Higgins and S. Bhattacharya, *Physica C* **257**, 232 (1996); A. Ruyter, D. Plessis, C. Simon, A. Wahl, and L. Ammor, *Phys. Rev. B* **77**, 212507 (2008); L. Ammor, A. Ruyter, V. A. Shaidiuk, N. H. Hong, and D. Plessis, *ibid.* **81**, 094521 (2010).

<sup>5</sup>S. Mohan, J. Sinha, S. S. Banerjee, A. K. Sood, S. Ramakrish-

nan, and A. K. Grover, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 167001 (2009).

<sup>6</sup>D. Domínguez, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3096 (1994); Q.-H. Chen, J.-P. Lv, and H. Liu, *Phys. Rev. B* **78**, 054519 (2008); Q.-H. Chen, *ibid.* **78**, 104501 (2008); H. Liu, W. Zhou, and Q.-H. Chen, *ibid.* **78**, 054509 (2008); F. Guo, Y. L. Peng, and Q. H. Chen, *Eur. Phys. J. B* **72**, 591 (2009); J.-P. Lv, H. Liu, and Q.-H. Chen, *Phys. Rev. B* **79**, 104512 (2009).

<sup>7</sup>C. Reichhardt, C. J. Olson, N. Grønbech-Jensen, and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4354 (2001).

<sup>8</sup>C. Reichhardt and C. J. Olson, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 078301 (2002).

<sup>9</sup>C. Reichhardt and C. J. Olson Reichhardt, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 046802 (2003).

<sup>10</sup>E. Olive, Y. Fily, and J.-C. Soret, *J. Phys.: Conf. Ser.* **150**, 052201 (2009).

<sup>11</sup>A. Maeda, M. Notomi, and K. Uchinokura, *Phys. Rev. B* **42**, 3290 (1990).

<sup>12</sup>C. J. Olson, C. Reichhardt, and V. M. Vinokur, *Phys. Rev. B* **64**, 140502 (2001).

<sup>13</sup>M. C. Marchetti, A. A. Middleton, and T. Prellberg, *Phys. Rev.*

- Lett. **85**, 1104 (2000); M. C. Marchetti and K. Saunders, *Phys. Rev. B* **66**, 224113 (2002); M. C. Marchetti and K. A. Dahmen, *ibid.* **66**, 214201 (2002); M. C. Marchetti, A. A. Middleton, K. Saunders, and J. M. Schwarz, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 107002 (2003); M. Marchetti, *Pramana* **64**, 1097 (2005).
- <sup>14</sup>P. Le Doussal, M. C. Marchetti, and K. J. Wiese, *Phys. Rev. B* **78**, 224201 (2008).
- <sup>15</sup>S. H. Strogatz, C. M. Marcus, R. M. Westervelt, and R. E. Mirollo, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2380 (1988); J. Levy, M. S. Sherwin, F. F. Abraham, and K. Wiesenfeld, *ibid.* **68**, 2968 (1992).
- <sup>16</sup>J. Watson and D. S. Fisher, *Phys. Rev. B* **54**, 938 (1996); **55**, 14909 (1997).
- <sup>17</sup>T. Nogawa, H. Matsukawa, and H. Yoshino, *Physica B* **329-333**, 1448 (2003).
- <sup>18</sup>T. Kawaguchi, *Phys. Lett. A* **251**, 73 (1999).
- <sup>19</sup>J. M. Schwarz and D. S. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 096107 (2001); *Phys. Rev. E* **67**, 021603 (2003); A. Sengupta, S. Sengupta, and G. I. Menon, *Phys. Rev. B* **81**, 144521 (2010).
- <sup>20</sup>H. J. Jensen, A. Brass, and A. J. Berlinsky, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1676 (1988a); H. J. Jensen, A. Brass, Y. Brechet, and A. J. Berlinsky, *Phys. Rev. B* **38**, 9235 (1988b); A. Koshelev, *Physica C* **198**, 371 (1992); S. Ryu, M. HELLERQVIST, S. DONIACH, A. KAPITULNIK, and D. STROUD, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5114 (1996); K. Moon, R. T. Scalettar, and G. T. Zimányi, *ibid.* **77**, 2778 (1996); M. C. Faleski, M. C. Marchetti, and A. A. Middleton, *Phys. Rev. B* **54**, 12427 (1996); S. Spencer and H. J. Jensen, *ibid.* **55**, 8473 (1997); C. J. Olson, C. Reichhardt, and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3757 (1998); A. B. Kolton, D. Domínguez, and N. Grønbech-Jensen, *ibid.* **83**, 3061 (1999); Y. Cao, Z. Jiao, and H. Ying, *Phys. Rev. B* **62**, 4163 (2000); H. Fangohr, S. J. Cox, and P. A. J. de Groot, *ibid.* **64**, 064505 (2001); J. Chen, Y. Cao, and Z. Jiao, *Phys. Lett. A* **318**, 146 (2003); M. Chandran, R. T. Scalettar, and G. T. Zimányi, *Phys. Rev. B* **67**, 052507 (2003).
- <sup>21</sup>N. Grønbech-Jensen, A. R. Bishop, and D. Domínguez, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2985 (1996).
- <sup>22</sup>E. Olive and J. C. Soret, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 027002 (2006); *Phys. Rev. B* **77**, 144514 (2008).
- <sup>23</sup>C. Reichhardt and C. J. Olson Reichhardt, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 168301 (2009).
- <sup>24</sup>M.-B. Luo and X. Hu, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 267002 (2007).
- <sup>25</sup>A. A. Middleton and N. S. Wingreen, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3198 (1993).

## A.2 Publication II

E. Olive, N. Di Scala, Y. Lansac, Y. Fily and J. C. Soret  
*Transition de dépiégeage élastique de vortex supraconducteurs*  
*ESAIM : Proc.* **35**, 167 (2012)

ESAIM: PROCEEDINGS, March 2012, Vol. 35, p. 167-173  
 Fédération Denis Poisson (Orléans-Tours) et E. Trélat (UPMC), Editors

### TRANSITION DE DÉPIÉGEAGE ÉLASTIQUE DE VORTEX SUPRACONDUCTEURS \*

ENRICK OLIVE<sup>1</sup>, NICOLAS DI SCALA<sup>1</sup>, YVES LANSAC<sup>1</sup>, YAOUEN FILY<sup>2</sup> ET JEAN-CLAUDE  
 SORET<sup>1</sup>

**Résumé.** Nous présentons des résultats de simulations numériques à deux dimensions sur des réseaux de vortex dans les supraconducteurs que l'on met en mouvement dans un potentiel aléatoire. On étudie la dynamique des vortex au seuil de dépiéage  $F_c$  dans le cas d'un faible désordre à température nulle. Les régimes élastiques au seuil de dépiéage sont analysés dans le cadre des transitions de phase continues (transitions du second ordre). La réponse en vitesse  $v$  à la force d'entraînement  $F$  se comporte comme  $v \sim (F - F_c)^\beta$  au voisinage immédiat du seuil de dépiéage. Dans la région critique obtenue pour différentes grandes tailles du système simulé, nous mesurons l'exposant critique  $\beta = 0.27 \pm 0.04$ .

**Abstract.** We present 2D numerical simulation results of superconductor vortex lattices driven over a random disorder. The vortex dynamics at the depinning threshold  $F_c$  is studied at zero temperature in the case of weak disorder. The dynamics is elastic and the depinning transition is analysed in the framework of a second order phase transition where the velocity response  $v$  to the driving force  $F$  behaves like  $v \sim (F - F_c)^\beta$ . The analysis of the critical region of several large lattice sizes leads to the result that  $\beta = 0.27 \pm 0.04$ .

#### INTRODUCTION

On s'intéresse à une large classe de systèmes qui présentent les caractéristiques communes suivantes : l'existence d'un état d'équilibre stable ordonné en l'absence de désordre, l'existence d'un domaine élastique (force de rappel proportionnelle aux déplacements par rapport à l'équilibre) pour de faibles déplacements, et l'irrégularité du milieu ambiant caractérisée par l'existence d'un potentiel désordonné gelé, c'est-à-dire figé aux échelles de temps caractéristiques du système. Il se joue donc une compétition entre l'élasticité de la structure qui tend à imposer un ordre parfait et le potentiel aléatoire qui tend à piéger et donc à déformer à plus ou moins grande échelle cet ordre parfait. Les systèmes considérés sont soit des structures périodiques qui peuvent être les réseaux de vortex dans les supraconducteurs, les ondes de densité de charge dans les métaux, le cristal de Wigner, ou les colloïdes, soit des variétés (appelées aussi interfaces) qui peuvent être les parois de domaine magnétique, la propagation de fracture dans les matériaux ou la dynamique d'une ligne de contact. Nous nous concentrons ici sur les structures périodiques (essentiellement les réseaux de vortex dans les supraconducteurs). Selon l'intensité et/ou la concentration des pièges on distingue qualitativement le piéage dit *faible* du piéage dit *fort*. En piéage faible l'élasticité domine le désordre et les déformations du système sont faibles par rapport

\* Nous remercions vivement le Cluster CaSciModOT d'Orléans-Tours pour le temps de calcul dont nous avons pu disposer sur le Centre de Calcul Scientifique de la Région Centre - France

<sup>1</sup> LEMA, UMR 6157, Univ. F. Rabelais-CNRS-CEA, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France; e-mail : olive@phys.univ-tours.fr

<sup>2</sup> Department of Physics, Syracuse University, Syracuse, New York 13244, USA

à l'équilibre. Au contraire, on parle de piégeage fort si le désordre domine l'élasticité amenant la structure à se déformer de manière importante pour optimiser son énergie. Des déchirures dans la structure périodique peuvent alors se produire et l'approximation élastique de l'énergie du système n'est plus pertinente. Des modèles introduisant des déformations plastiques deviennent alors nécessaires. Pour illustrer ces deux régimes de piégeage nous présentons Fig.1 les configurations obtenues par simulation numérique à température nulle d'un réseau 2D de vortex. La triangulation de Delaunay laisse apparaître qu'en désordre faible (Fig. 1a) l'ordre topologique du

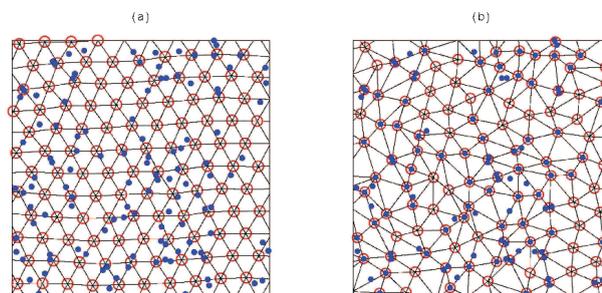


FIGURE 1. Configuration d'un réseau 2D de vortex : a) en présence d'un désordre faible - ordre topologique conservé; b) en présence d'un désordre fort - ordre topologique détruit. Les cercles rouges représentent les vortex, les points bleus les pièges; la triangulation de Delaunay est représentée en noir pour aider à visualiser les défauts.

réseau est conservé tandis qu'il est détruit en piégeage fort (Fig. 1b).

Lorsque ces systèmes sont soumis à une force extérieure  $F$ , il existe une valeur critique  $F_c$  séparant deux phases distinctes : une phase piégée (pour  $F < F_c$ ) où la vitesse moyenne du système est nulle, et une phase en mouvement dite dépiégée (pour  $F > F_c$ ) avec une vitesse moyenne finie. Pour les structures périodiques, deux types de dépiégeage génériques sont alors observés : le dépiégeage plastique lorsque le désordre domine l'élasticité (piégeage fort), caractérisé par un dépiégeage doux du système avec un écoulement plastique montrant notamment la coexistence de particules piégées et en mouvement, et le dépiégeage élastique lorsque l'élasticité domine le désordre (piégeage faible) qui est caractérisé par un dépiégeage brutal du système avec un écoulement élastique (en bloc) des particules. Fig. 2 illustre ces caractéristiques dynamiques. D'un point de vue théorique seul le dépiégeage de structures pour lesquelles le champ de déplacement est de dimension  $N = 1$  est correctement compris, et uniquement dans le cas élastique. En effet, dans le contexte des ondes de densité de charge le dépiégeage au seuil a été analysé [1] dans le cadre des phénomènes critiques à l'équilibre où la vitesse  $v$  de la structure est le paramètre d'ordre et la force réduite  $f = (F - F_c)/F_c$  est le paramètre de contrôle. Des travaux analytiques et numériques ultérieurs ont développé cette analogie pour définir des classes d'universalité et des exposants critiques (voir par exemple la Ref. [2] et les références qu'elle contient). Dans l'analogie avec une transition de phase continue (dite du second ordre) la vitesse de la structure élastique à température nulle s'annule à la force critique  $F_c$  comme  $v \sim f^\beta$  avec  $\beta < 1$ . A l'heure actuelle, il n'existe pas de théorie satisfaisante pour  $N = 2$  (cas des réseaux de vortex et des colloïdes notamment) décrivant le dépiégeage élastique ou plastique. En particulier, la nature de la transition de dépiégeage plastique reste encore débattue : transition discontinue du premier ordre avec hystérésis, ou transition continue du second ordre avec lois d'échelle et exposants critiques.

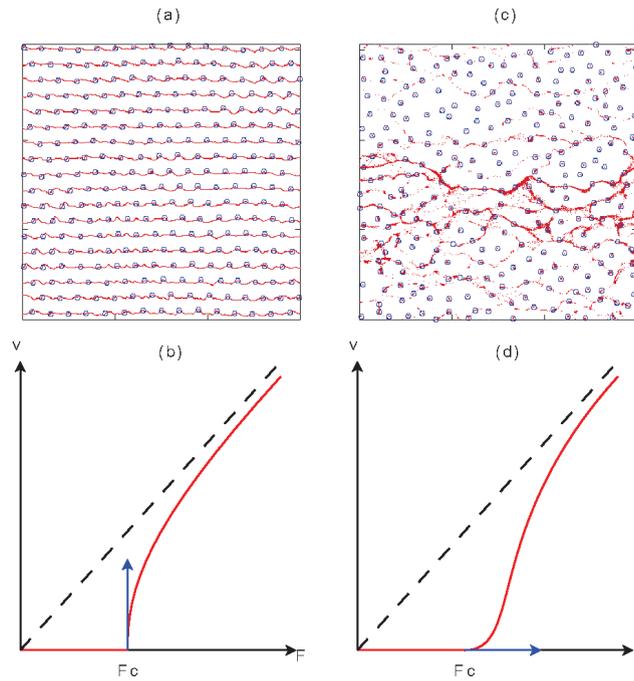


FIGURE 2. Dépiégeages élastique et plastique : trajectoires (en rouge) au seuil de dépiégeage et instantané des positions des vortex (cercles bleus) dans le cas élastique (a) et dans le cas plastique (c). Courbe vitesse-force : (b) dépiégeage brutal en  $F_c$  dans le cas élastique; (d) dépiégeage doux en  $F_c$  dans le cas plastique.

Concernant la transition de dépiégeage élastique, les simulations numériques dans un espace de dimension  $d = 2$  montrent des transitions du second ordre avec pour les interfaces  $\beta \approx 1/3$  [3], tandis que pour les structures périodiques des exposants très variés ont été trouvés.  $\beta \approx 2/3$  est mesuré pour les ondes de densité de charge [4], le cristal de Wigner [5] et pour les colloïdes [6], tandis que d'autres travaux ont trouvé  $\beta \approx 0.5$  [7] et  $\beta = 0.92 \pm 0.01$  [8] pour des colloïdes, et  $\beta = 0.35$  [9] pour des systèmes de type *stripes*.

Dans ce papier nous abordons la complexité de ces systèmes à travers des simulations numériques à grande échelle de la dynamique à température nulle de réseaux 2D de vortex dans les supraconducteurs (donc  $N = 2$  et  $d = 2$ ) entraînés dans un potentiel désordonné. Nous étudions le dépiégeage élastique obtenu en désordre faible – pour les phases haute vitesse de vortex 3D en désordre faible voir Ref. [10], et pour les phases au seuil de dépiégeage plastique en désordre fort voir Refs. [11,12]. Plusieurs tailles de système ont été étudiées au voisinage du seuil de dépiégeage et les résultats montrent une transition de phase continue (second ordre). L'exposant

critique  $\beta$  de la vitesse est mesuré et est comparé aux valeurs trouvées dans des systèmes similaires.

### 1. MODÈLE NUMÉRIQUE

Nous étudions  $N_v$  vortex dits d'Abrikosov dans les supraconducteurs de type II et interagissant avec  $N_p$  pièges placés aléatoirement dans le plan  $(x, y)$ . Nous considérons la limite de London  $\lambda_L \gg \xi$ , où  $\lambda_L$  est la profondeur de pénétration magnétique et  $\xi$  la longueur de cohérence du supraconducteur, c'est-à-dire que nous traitons les vortex comme des particules ponctuelles. A température nulle nous intégrons les équations du second ordre de Newton pour chaque vortex  $i$  à la position  $\mathbf{r}_i$ . La force totale sur chaque vortex inclut un terme de frottement visqueux  $\eta \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$  où  $\eta$  est le coefficient de viscosité, une force d'entraînement  $\mathbf{F}^L = F\hat{\mathbf{x}}$  dans la direction  $x$  (force dite de Lorentz due à un courant appliqué aux bornes du supraconducteur), ainsi que les forces conservatives issues des interactions vortex-vortex  $U^{vv}(r_{ij})$  et vortex-piège  $U^{vp}(r_{ip})$  où  $r_{ip}$  est la distance entre le vortex  $i$  et le site de piégeage situé en  $\mathbf{r}_p$ , et  $r_{ij}$  est la distance entre les vortex  $i$  et  $j$  situés à  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}_j$ . L'interaction de paire répulsive vortex-vortex est donnée par la fonction de Bessel modifiée  $U^{vv}(r_{ij}) = \alpha_v K_0(r_{ij}/\lambda_L)$ , générant ainsi à l'équilibre un réseau triangulaire de vortex. Le potentiel de piégeage attractif est donné par  $U^{vp}(r_{ip}) = -\alpha_p e^{-(r_{ip}/R_p)^2}$  où  $R_p$  est le rayon des pièges.  $\alpha_v$  et  $\alpha_p$  sont des paramètres réglables. L'intensité de l'interaction vortex-vortex est fixée en posant  $\alpha_v = 2.83 \cdot 10^{-3} \lambda_L \epsilon_0$  où  $\epsilon_0$  est une énergie par unité de longueur. Plusieurs valeurs de l'intensité relative du désordre  $\alpha_p/\alpha_v$  ont été étudiées. Les équations du mouvement sont intégrées par le code classique de dynamique moléculaire LAMMPS [13] avec un algorithme de type Verlet-vitesses. Nous faisons varier la taille du système de  $N_v = 270$  à  $N_v = 12000$  vortex. Diverses formes rectangulaires de la cellule de base de taille  $(L_x, L_y)$  ont été étudiées, allant de la forme presque carrée  $(L_x, L_y) = (5, 6\sqrt{3}/2)n\lambda_L$  avec  $n = 3, 8, 20$ , à des formes très allongées  $(L_x, L_y) = (400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ . La géométrie allongée de la cellule de base dans la direction de la force d'entraînement permet l'étude des propriétés critiques au seuil de dépiégeage pour de grands systèmes. Nous avons vérifié qu'une telle anisotropie de la cellule de base ne modifie pas les propriétés critiques et en particulier la détermination de l'exposant critique  $\beta$  de la vitesse. Les conditions de bords périodiques sont appliquées dans les deux directions  $x$  et  $y$ . L'interaction vortex-vortex est traitée en utilisant la méthode de la liste de voisins avec un rayon de coupure  $r_c = 6.5 \lambda_L$ . Le nombre de pièges est tel que  $N_p = N_v$ , et leur rayon est  $R_p = 0.22 \lambda_L$ . Le pas du réseau triangulaire est  $a_0 = \lambda_L$ . On utilise un système d'unités dans lequel  $\lambda_L = 1$  et  $\epsilon_0 = 1$ . On fixe  $\eta/m = 0.1$  où  $m$  est la masse du vortex, ce qui permet de retrouver des comportements analogues entre la dynamique du second ordre de Newton et la limite suramortie souvent utilisée pour les vortex supraconducteurs.

### 2. DÉPIÉGEAGE ÉLASTIQUE : RÉSULTATS

Pour différentes réalisations du désordre, on part du réseau triangulaire de vortex à haute vitesse, avant de décroître lentement la force d'entraînement jusqu'à atteindre la valeur critique du dépiégeage  $F_c$  en dessous de laquelle les vortex sont tous piégés de manière permanente. Fig. 3 montre l'évolution de la force critique de dépiégeage moyenne mesurée en fonction de l'intensité relative du désordre  $\alpha_p/\alpha_v$  pour  $N_v = 8000$  vortex dans une cellule de base de taille  $(L_x, L_y) = (400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ . Comme cela a déjà été montré dans des études de systèmes similaires (voir par exemple Ref. [6]), l'accroissement rapide de la force de dépiégeage indique un changement de régime entre une dynamique élastique dominée par l'élasticité et une dynamique plastique dominée par le désordre.

Nous étudions maintenant le comportement critique à 2D du dépiégeage élastique. Dans la suite du papier, on choisira l'intensité relative du désordre  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$  pour étudier la dynamique critique élastique. Fig. 2a montre les trajectoires typiques des vortex au seuil de dépiégeage élastique. Tous les vortex se dépiègent simultanément et avec la même vitesse ce qui implique que chaque vortex garde les mêmes voisins au cours du mouvement. La structure est topologiquement ordonnée et les vortex s'écoulent le long de canaux statiques rugueux et élastiquement couplés. La dynamique correspondante est très saccadée près du seuil et la vitesse du centre de masse des vortex est périodique dans le temps où la période correspond au temps mis par chaque

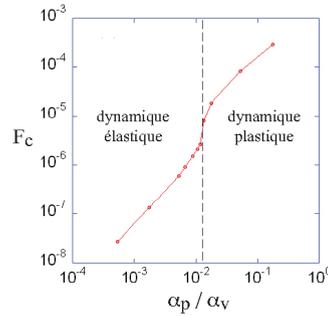


FIGURE 3. Transition entre les régimes dynamiques élastique et plastique mise en évidence par l'évolution de la force critique de dépiégeage moyenne  $F_c$  en fonction de l'intensité relative du désordre  $\alpha_p/\alpha_v$  pour  $N_v = 8000$  vortex dans une cellule de base de taille  $(L_x, L_y) = (400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ .

vortex pour remplacer le vortex qui le précède sur le même canal. Fig. 4 représente la vitesse longitudinale moyenne  $v$  du centre de masse des vortex en fonction de la force réduite  $f = (F - F_c)/F_c$  pour plusieurs tailles de réseau, où  $F_c$  est la force critique de dépiégeage mesurée pour chaque réalisation du désordre. Trois régions

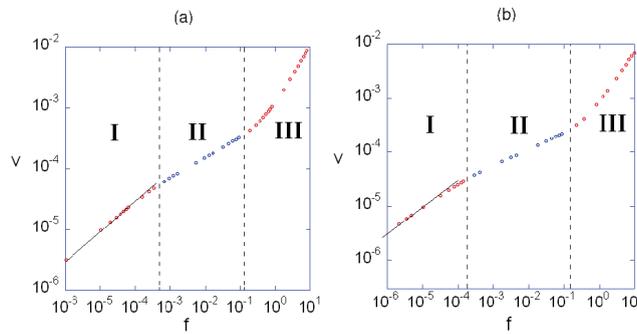


FIGURE 4. Vitesse  $v$  des vortex en fonction de la force réduite  $f$  pour différentes tailles de réseau : a)  $N_v = 5000$  vortex dans une cellule de base de taille  $(L_x, L_y) = (100, 50\sqrt{3}/2)\lambda_L$  ; b)  $N_v = 8000$  vortex dans une cellule de base de taille  $(L_x, L_y) = (400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ .

apparaissent Fig. 4. La région I est la manifestation des effets de taille finie dans le système simulé dont la signature est le *single particle regime* [12] où  $v \sim f^{1/2}$  comme le montrent les lignes de pente 1/2. Dans ce régime, le système se comporte comme une seule particule placée dans un potentiel périodique. Pour  $F < F_c$  le système possède un point fixe stable (et un instable) correspondant au réseau de vortex piégé. Pour  $F = F_c$  les deux points fixes entrent en collision lors d'une bifurcation noeud-col et disparaissent pour  $F > F_c$  pour

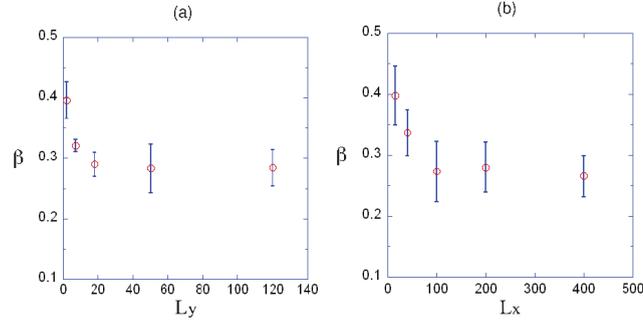


FIGURE 5. Exposant  $\beta$  pour la vitesse : a) en fonction de  $L_y$  pour  $L_x = 100\lambda_L$  b) en fonction de  $L_x$  pour diverses tailles transverses de  $L_y = 18\lambda_L$  à  $L_y = 120\lambda_L$ . Les barres d'erreurs représentent la déviation standard sur les différentes réalisations du désordre.

donner une dynamique périodique de période  $T$  telle que  $T \sim f^{-1/2}$  lorsque  $F \rightarrow F_c^+$ , c'est-à-dire  $v \sim f^{1/2}$ . Dans cette région, un dépiégeage avec hystérésis peut être observé avec différentes valeurs  $F_c^{cr}$  et  $F_c^{decr}$  du seuil de dépiégeage quand la force croît ou décroît. Néanmoins, la largeur  $F_c^{cr} - F_c^{decr}$  de l'hystérésis décroît quand la taille du système simulé augmente, confirmant ainsi que ce phénomène d'hystérésis n'est qu'un effet de taille finie de la simulation numérique et non lié à une transition de phase discontinue (du premier ordre). La région II est celle où une loi puissance  $v \sim f^\beta$  avec  $\beta < 1$  est mesurée. Nous identifions donc cette région comme le régime critique de la transition de dépiégeage continue (second ordre). Finalement, dans la région III le système est loin du seuil de dépiégeage et approche asymptotiquement le régime linéaire  $v \sim f$  obtenu sans désordre.

Pour renforcer cette image de transition de dépiégeage du second ordre plusieurs tailles du système ont été simulées et pour chaque taille différentes réalisations du désordre sont effectuées à partir desquelles on extrait une valeur moyenne de l'exposant  $\beta$  de dépiégeage. Fig. 5a représente l'évolution de  $\beta$  en fonction de la taille transverse  $L_y$  pour une taille longitudinale  $L_x = 100\lambda_L$  fixée. Il apparaît que la valeur de  $\beta$  mesurée pour  $L_y \geq 18\lambda_L$  devient indépendante de la taille transverse  $L_y$ . En particulier, elle ne dépend pas de l'anisotropie de la cellule de base puisque des valeurs identiques sont mesurées pour des cellules de base de forme carrée  $(L_x, L_y) = (100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$ . Fig. 5b montre l'évolution de  $\beta$  en fonction de la taille longitudinale  $L_x$  pour diverses tailles transverses  $L_y \geq 18\lambda_L$ . Il apparaît que  $\beta$  atteint une valeur constante pour  $L_x \geq 100\lambda_L$ . En prenant la valeur moyenne de  $\beta$  sur 68 réalisations du désordre obtenues pour  $L_x \geq 100\lambda_L$  et  $L_y \geq 18\lambda_L$ , nous obtenons le résultat  $\beta = 0.27 \pm 0.04$ .

Notons que la valeur que nous mesurons est proche de la valeur  $\beta \approx 1/3$  mesurée pour les interfaces [3] dans un espace de dimension  $d = 2$ . Comparons maintenant nos résultats aux autres systèmes périodiques ayant un champ de déplacement de dimension  $N = 2$  dans un espace de dimension  $d = 2$ . Par exemple, nos résultats sont proches de la valeur  $\beta = 0.35$  mesurée récemment dans des systèmes périodiques anisotropes du type *stripes* [9]. Néanmoins, la variété d'exposants mesurée dans d'autres systèmes périodiques (voir introduction) semble suggérer que les formes précises des interactions particule-particule et particule-piège jouent un rôle important, ce qui impliquerait que de vastes classes d'universalité n'existent pas pour la transition de dépiégeage élastique. Des conclusions similaires émergent pour la transition de dépiégeage plastique [12]. Finalement, notons que les mesures à température non nulle confirment notre résultat  $\beta = 0.27 \pm 0.04$ . Notons également qu'un travail précédent sur les vortex dans les supraconducteurs en dimension  $d = 3$  [14] trouvait un exposant

$$\beta = 0.65 \pm 0.01.$$

### 3. CONCLUSION

Nous avons présenté des résultats de simulation numérique sur la dynamique de réseaux 2D de vortex supraconducteurs mis en mouvement sur un potentiel désordonné. Un changement de régime entre une dynamique élastique et une dynamique plastique a été mise en évidence, montrant le passage d'un régime dominé par l'élasticité à un régime dominé par le désordre. Dans la phase élastique, nous avons étudié la dynamique au seuil de dépiégeage. Une analogie avec les transitions de phase à l'équilibre du second ordre a été mise en évidence où le paramètre d'ordre est la vitesse et le paramètre de contrôle est la force appliquée. La valeur que nous mesurons pour l'exposant critique  $\beta$  associé à la vitesse est  $\beta = 0.27 \pm 0.04$ .

### RÉFÉRENCES

- [1] D. S. Fisher, *Sliding charge-density waves as a dynamic critical phenomenon*, *Phys. Rev. B* **31** 1396 (1985).
- [2] S. Bustingorry, A.B. Kolton and T. Giamarchi, *Random-manifold to random-periodic depinning of an elastic interface*, *Phys. Rev. B* **82** 094202 (2010)  
A. A. Fedorenko, P. Le Doussal and K. J. Wiese, *Universal distribution of threshold forces at the depinning transition*, *Phys. Rev. E* **74** 041110 (2006).
- [3] O. Duenemer and W. Krauth, *Critical exponents of the driven elastic string in a disordered medium*, *Phys. Rev. E* **71** 061601 (2005)  
U. Nowak and K. D. Usadel, *Influence of temperature on the depinning transition of driven interfaces*, *Europhys. Lett.* **44** 634 (1998)  
L. A. N. Amaral, A. L. Barabasi and H. E. Stanley, *Universality classes for interface growth with quenched disorder*, *Phys. Rev. Lett.* **73** 62 (1994).
- [4] C. R. Myers and J. P. Sethna, *Collective dynamics in a model of sliding charge-density waves. I. Critical behavior*, *Phys. Rev. B* **47** 11171 (1993)  
A. A. Middleton, O. Biham, P. B. Littlewood and P. Sibani, *Complete mode locking in models of charge-density waves*, *Phys. Rev. Lett.* **68** 1586 (1992).
- [5] G. Piacente and F. M. Peeters, *Pinning and depinning of a classic quasi-one-dimensional Wigner crystal in the presence of a constriction*, *Phys. Rev. B* **72** 205208 (2005).
- [6] C. Reichhardt and C. J. Olson, *Colloidal dynamics on disordered substrates*, *Phys. Rev. Lett.* **89** 078301 (2002).
- [7] A. Pertsinidis and X. S. Ling, *Effects of a random pinning potential on the structure and driven dynamics of two-dimensional colloidal crystals*, *Bull. Am. Phys. Soc.* **46** 181 (2001).
- [8] J. Chen, Y. Cao and Z. Jiao, *Dynamics of two-dimensional colloids on a disordered substrate*, *Phys. Rev. E* **69** 041403 (2004).
- [9] C. J. Olson Reichhardt, C. Reichhardt and A. R. Bishop, *Anisotropic sliding dynamics, peak effect, and metastability in stripe systems*, *Phys. Rev. E* **83** 041501 (2011).
- [10] E. Olive, J.C. Soret, P. Le Doussal, T. Giamarchi, *Numerical simulation evidence of dynamical transverse Meissner effect and moving Bose glass phase*, *Phys. Rev. Lett.* **91** 37005 (2003).
- [11] E. Olive, J.C. Soret, *Chaotic dynamics of superconductor vortices in the plastic phase*, *Phys. Rev. Lett.* **96** 027002 (2006)  
E. Olive, J.C. Soret, *Chaos and plasticity in superconductor vortices : Low-dimensional dynamics*, *Phys. Rev. B* **77** 144514 (2008).
- [12] Y. Fily, E. Olive, N. Di Scala and J. C. Soret, *Critical behavior of plastic depinning of vortex lattices in two dimensions : Molecular dynamics simulations*, *Phys. Rev. B* **82** 134519 (2010)  
E. Olive, Y. Fily and J. C. Soret, *Plastic depinning of superconductor vortices*, *J. Phys. : Conf. Series* **150** 052201 (2009).
- [13] S. Plimpton, *Fast parallel algorithms for short-range molecular dynamics*, *J. Comput. Phys.* **117** 1 (1995).
- [14] M. B. Luo and X. Hu, *Depinning and creep motion in glass states of flux lines*, *Phys. Rev. Lett.* **98** 267002 (2007).

### A.3 Publication III

N. Di Scala, E. Olive, Y. Lansac, Y. Fily and J. C. Soret

*Elastic depinning transition for superconductor vortices*

accepté à *J. Phys. : Conf. Series* (Proceedings of The 26th International Conference on Low Temperature Physics, August 10 -17, 2011, Beijing, China)

## Elastic depinning transition for superconductor vortices

N Di Scala<sup>1</sup>, E Olive<sup>1</sup>, Y Lansac<sup>1</sup>, Y Fily<sup>2</sup> and JC Soret<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LEMA, UMR 6157, Univ. F. Rabelais-CNRS-CEA, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France

<sup>2</sup>Department of Physics, Syracuse University, Syracuse, New York 13244, USA

E-mail: olive@phys.univ-tours.fr

**Abstract.** We present 2D numerical simulation results of vortex lattices driven over a random disorder. We study the vortex dynamics at the depinning threshold  $F_c$  for weak disorder at zero temperature. Elastic regimes are analysed in the framework of a second order phase transition where the velocity response  $v$  to the driving force  $F$  behaves like  $v \sim (F - F_c)^\beta$ . The exponent  $\beta \sim 0.27 \pm 0.04$  is extracted from the critical region of several large lattice sizes.

### 1. Introduction

Driven ordered objects in disordered media display a threshold force  $F_c$  across which the system goes from a pinned phase to a sliding state. These systems may be interfaces like magnetic domain walls, contact lines of liquid menisci or crack propagation in solids, or periodic structures like charge-density waves (CDWs), vortex lattices in type II superconductors, colloids or Wigner crystals. When the pinning of the underlying substrate is weak the statics and dynamics are dominated by the system elasticity which favors order. In the context of CDWs the depinning at the threshold force was analysed some time ago [1] as a standard equilibrium critical phenomenon where the velocity  $v$  is the order parameter and the reduced force  $f = (F - F_c)/F_c$  is the control parameter. Further analytical and numerical works developed this analogy to define universality classes and critical exponents (see e.g. Refs. [2] and references therein). In the second order transition analogy the velocity of the elastic object at zero temperature vanishes at the critical force  $F_c$  as  $v \sim f^\beta$  with  $\beta < 1$ . Numerical simulations for interfaces in a space dimension  $d = 2$  show  $\beta \sim 1/3$  [3] while for periodic objects in  $d = 2$  various exponents have been found.  $\beta \sim 2/3$  is found for CDWs [4], Wigner crystals [5], and colloids [6], while other works found  $\beta \sim 0.5$  [7] and  $\beta = 0.92 \pm 0.01$  [8] on colloids, and  $\beta = 0.35$  [9] in stripe systems.

We report in this paper zero temperature numerical simulation results on 2D superconductor vortex lattices driven over weak random disorder. Several lattice sizes have been investigated close to the elastic depinning threshold and the results agree with a second order phase transition. The velocity depinning exponent  $\beta$  is measured and compared to similar systems.

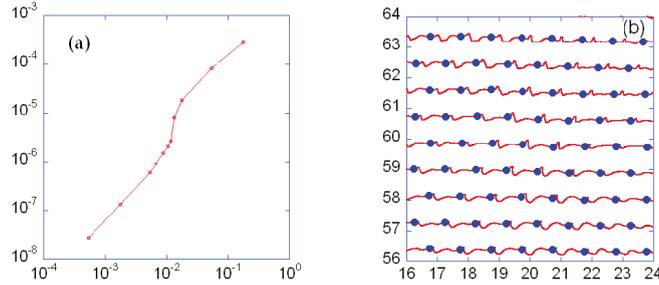
### 2. Numerical model

We study  $N_v$  Abrikosov vortices interacting with  $N_p$  pins randomly placed in the  $(x, y)$  plane. We consider the London limit  $\lambda_L \gg \xi$ , where  $\lambda_L$  is the penetration length and  $\xi$  is the coherence length, *i.e.* we treat superconductor vortices as point particles. At zero temperature we integrate the second order Newton's equations of motion of each vortex  $i$  at position  $\mathbf{r}_i$ . The total force on each vortex includes a viscous damping term  $\eta \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$  with  $\eta$  the viscosity coefficient, the Lorentz driving force  $\mathbf{F}^L = F \hat{\mathbf{x}}$  in the  $x$  direction due to an applied current, and the conservative vortex-vortex  $U^{vv}(r_{ij})$  and vortex-pin  $U^{vp}(r_{ip})$

interactions where  $r_{ip}$  is the distance between the vortex  $i$  and the pinning site located at  $\mathbf{r}_p$ , and  $r_{ij}$  is the distance between the vortices  $i$  and  $j$  located at  $\mathbf{r}_i$  and  $\mathbf{r}_j$ . The vortex-vortex pairwise repulsive interaction is given by a modified Bessel function  $U^{vv}(r_{ij}) = \alpha_v K_0(r_{ij}/\lambda_L)$  and the attractive pinning potential is given by  $U^{vp}(r_{ip}) = -\alpha_p e^{-(r_{ip}/R_p)^2}$  where  $R_p$  is the radius of the pins, and  $\alpha_v$  and  $\alpha_p$  are tunable parameters. We fix the strength of the vortex-vortex interaction by setting  $\alpha_v = 2.83 \cdot 10^{-3} \lambda_L \varepsilon_0$  where  $\varepsilon_0$  is an energy per unit length. Several values of the relative disorder strength  $\alpha_p/\alpha_v$  have been investigated. The LAMMPS classical molecular dynamics code [10] with a velocity Verlet algorithm is used for several system sizes, from  $N_v = 270$  up to  $N_v = 12000$  vortices. Various rectangular shaped basic cells of size  $(L_x, L_y)$  have been investigated, from the almost square  $(L_x, L_y) = (5, 6\sqrt{3}/2)n\lambda_L$  with  $n = 3, 8, 20$ , up to very elongated strips  $(L_x, L_y) = (400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ . The strip geometry elongated in the driving force direction allowed the study of the critical depinning properties for large system sizes. Care has been taken to check that the basic cell anisotropy induced by the strip geometry does not alter the critical properties, and in particular the determination of the velocity critical exponent  $\beta$ . Periodic boundary conditions are used in both  $x$  and  $y$  directions. The vortex-vortex interaction is dealt with using a neighbor list method with a cutoff radius  $r_c = 6.5 \lambda_L$ . The number of pins is set to  $N_p = N_v$ , and their radius is  $R_p = 0.22 \lambda_L$ . The average vortex distance is  $a_0 = \lambda_L$ . We use a unit system in which  $\lambda_L = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 1$  and  $k_B = 1$ . We fix  $\eta/m = 0.1$  where  $m$  is the vortex mass, which ensures that the second order Newton's vortex dynamics is identical to the overdamped dynamics limit usually computed for superconductor vortices.

### 3. Results

For several disorder realizations, we start from a triangular lattice at high velocity wherefrom the driving force is slowly decreased down to the so-called *critical depinning force*  $F_c$  below which the system is permanently pinned. We show in Fig. 1a the evolution of the mean critical depinning force with respect to the relative disorder strength  $\alpha_p/\alpha_v$  for  $N_v = 8000$  vortices in a basic cell of size  $(L_x, L_y) = (400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ . As already seen in previous works of similar systems (see for example Ref.



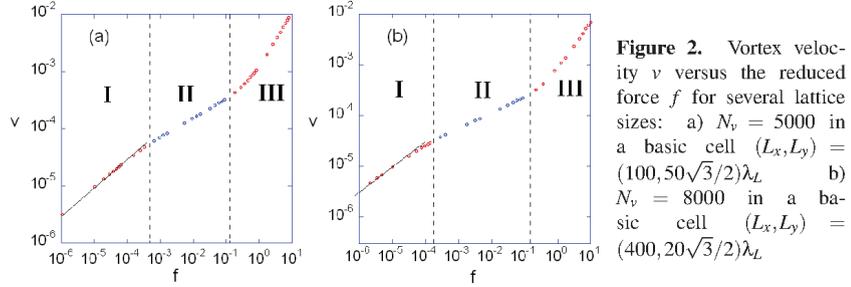
**Figure 1.** a) Transition from elastic to plastic dynamical regimes shown by the evolution of the mean critical depinning force  $F_c$  with respect to the relative disorder strength  $\alpha_p/\alpha_v$  for  $N_v = 8000$  vortices in a basic cell of size  $(L_x, L_y) = (400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$  b) Typical trajectories of vortices at the elastic depinning threshold obtained for  $N_v = 12000$  vortices. A snapshot of the vortex positions (filled circles) at a given time is superimposed to the trajectories. For clarity only a small part of the basic cell of size  $(L_x, L_y) = (100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$  is shown.

[6]), the rapid increase in the depinning force indicates a crossover from elastic dynamics dominated by elasticity to plastic dynamics dominated by disorder. After the study of the 2D critical behavior of *plastic*

depinning in superconductor vortices [11], we now study the 2D critical behavior of *elastic* depinning. In the following we choose the relative disorder strength  $\alpha_p/\alpha_v \sim 5 \cdot 10^{-3}$  for the elastic critical dynamics study.

Fig. 1b shows the typical trajectories of the vortices at the elastic depinning threshold. All vortices depin together and with the same mean velocity, which means that all vortices keep the same neighbors as they move. The structure is topologically ordered and vortices flow in elastically coupled rough static channels. The dynamics is jerky and the velocity of the center of mass is periodic in time where the period corresponds to the time for each vortex to replace its preceding neighbor in the same channel.

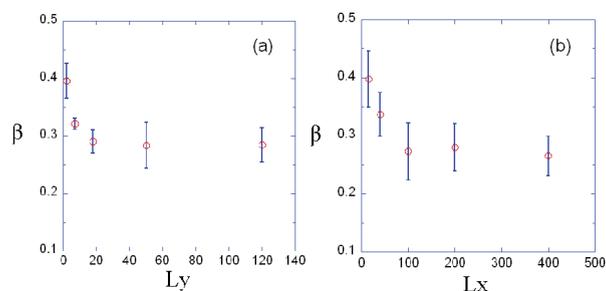
We plot in Fig. 2 the average longitudinal velocity  $v$  of the center of mass of the vortices with respect to the reduced force  $f = (F - F_c)/F_c$  for several lattice sizes, where  $F_c$  is the critical depinning force measured for each disorder realization. Three regions appear in Fig. 2. Region I is the manifestation



of the finite size effects in the system whose signature is the *single particle regime* [11] where  $v \sim f^{1/2}$  as shown by the lines of slope 1/2. In this region, possible hysteretic depinning may be measured with different values  $F_c^{up}$  and  $F_c^{down}$  of the threshold force when increasing or decreasing the force. However, the size  $F_c^{up} - F_c^{down}$  of the hysteresis decreases when the system size increases, which therefore confirms that such hysteresis phenomenon is just a finite size effect. Region II is the region where a power law regime  $v \sim f^\beta$  with  $\beta < 1$  is measured which we identify with the critical regime of the continuous depinning transition. Finally, in region III the system is far above the critical depinning threshold and approaches the asymptotic linear behavior  $v \sim f$  obtained in the absence of disorder.

To reinforce the second order elastic depinning transition scenario we compute several lattice sizes and for each size we compute several disorder realizations wherefrom we extract a mean value of the depinning exponent  $\beta$ . In Fig. 3a we show the evolution of  $\beta$  with respect to the transverse size  $L_y$  for a fixed longitudinal size  $L_x = 100\lambda_L$  which shows that the values of  $\beta$  that we measure for  $L_y \geq 18\lambda_L$  become independent of the transverse size  $L_y$ . In particular they do not depend on the basic cell anisotropy since we measure identical values in square basic cells  $(L_x, L_y) = (100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$ . In Fig. 3b we show the evolution of  $\beta$  with respect to the longitudinal size  $L_x$  for various transverse sizes  $L_y \geq 18\lambda_L$ . It shows that  $\beta$  has reached a constant value for  $L_x \geq 100\lambda_L$ . Taking the mean value of  $\beta$  over 68 realizations of disorder obtained for  $L_x \geq 100\lambda_L$ , we obtain the result  $\beta \sim 0.27 \pm 0.04$ .

Note that our value is close to the value  $\beta \sim 1/3$  measured for interfaces [3] in a space dimension  $d = 2$ . However, our result should rather be compared to other periodic systems with displacement field of dimension  $N = 2$  in a  $d = 2$  dimensional space. For example, our result is close to the value  $\beta = 0.35$  recently measured in anisotropic periodic objects (stripe systems) [9]. On the other hand, the variety of exponents found in the other similar periodic objects (see introduction) may suggest that the type of particle-particle interaction as well as the type of disorder plays an important role, which would imply that large universality classes cannot be found. Finally, note that we performed preliminary simulations at non-zero temperature which confirm our zero temperature measurement  $\beta \sim 0.27 \pm 0.04$ . Note also



**Figure 3.** Velocity exponent  $\beta$  a) versus  $L_y$  for  $L_x = 100\lambda_L$  b) versus  $L_x$  for various transverse sizes from  $L_y = 18\lambda_L$  to  $L_y = 120\lambda_L$ . The error bars are the standard deviation over the different disorder realizations.

that a previous work on superconductor vortices in  $d = 3$  [12] found the exponent  $\beta = 0.65 \pm 0.01$ .

#### 4. Conclusion

We have shown numerical simulation results on 2D superconductor vortex dynamics in random media. A crossover from elastic dynamics dominated by elasticity to plastic dynamics dominated by disorder is found. We investigated the depinning transition in the elastic regime. Our results are consistent with a second order phase transition with a velocity exponent  $\beta \sim 0.27 \pm 0.04$ .

#### Acknowledgments

We gratefully acknowledge a grant of computer time from the Orléans-Tours CaSciModOT at the *Centre de Calcul Scientifique de la Région Centre - France*.

#### References

- [1] Fisher D S 1985 *Phys. Rev. B* **31** 1396
- [2] Bustingorry S, Kolton A B and Giamarchi T 2010 *Phys. Rev. B* **82** 094202  
Fedorenko A A, Le Doussal P and Wiese K J 2006 *Phys. Rev. E* **74** 041110
- [3] Duemmer O and Krauth W 2005 *Phys. Rev. E* **71** 061601  
Nowak U and Usadel K D 1998 *Europhys. Lett.* **E 44** 634  
Amaral L A N, Barabasi A L and Stanley H E 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 62
- [4] Myers C R and Sethna J P 1993 *Phys. Rev. B* **47** 11171  
Middleton A A, Biham O, Littlewood P B and Sibani P 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 1586
- [5] Piacente G and Peeters F M 2005 *Phys. Rev. B* **72** 205208
- [6] Reichhardt C and Olson C J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 078301
- [7] Pertsinidis A and Ling X S 2001 *Bull. Am. Phys. Soc.* **46** 181
- [8] Chen J, Cao Y and Jiao Z 2004 *Phys. Rev. E* **69** 041403
- [9] Olson Reichhardt C J, Reichhardt C and Bishop A R 2011 *Phys. Rev. E* **83** 041501
- [10] Plimpton S 1995 *J. Comput. Phys.* **117** 1
- [11] Fily Y, Olive E, Di Scala N and Soret J C 2010 *Phys. Rev. B* **82** 134519  
Olive E, Fily Y and Soret 2009 *J. Phys.: Conf. Series* **150** 052201
- [12] Luo M B and Hu X 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 267002

## A.4 Publication IV

N. Di Scala, E. Olive, Y. Lansac, Y. Fily and J. C. Soret  
*Elastic depinning transition of vortex lattices in two dimensions*  
soumis à *New J. Phys.*

## Elastic depinning transition of vortex lattices in two dimensions

N Di Scala<sup>1</sup>, E Olive<sup>1</sup>, Y Lansac<sup>1</sup>, Y Fily<sup>2</sup> and JC Soret<sup>1</sup>

<sup>1</sup> GREMAN, UMR 7347, Université F. Rabelais, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France

<sup>2</sup> Department of Physics, Syracuse University, Syracuse, New York 13244, USA

**Abstract.** Large scale numerical simulations are used to study the dynamics of two-dimensional vortex lattices driven on a disordered medium. When decreasing the pinning strength of the substrate we find a crossover from plastic to elastic depinning. For weak disorder we show that the elastic depinning transition is analogous to a second order phase transition where three critical exponents are evaluated. The velocity-force response behaves like  $v \sim f^\beta$  with  $\beta = 0.29 \pm 0.03$  at  $T = 0$  and  $f > 0$ , where  $f = (F - F_c)/F_c$  and  $F_c$  is the depinning threshold force. The velocity-temperature response is  $v \sim T^{1/\delta}$  at  $f = 0$  with  $\delta^{-1} = 0.28 \pm 0.05$ . In contrast with charge-density waves, a finite-size scaling analysis suggests the existence of a unique diverging length above the depinning threshold with an exponent  $\nu = 1.04 \pm 0.04$ , which controls the critical force distribution, the finite-size crossover force distribution and the intrinsic correlation length  $\xi \sim f^{-\nu}$ . Finally, a scaling relation is found between velocity and temperature with the  $\beta$  and  $\delta$  critical exponents both independent with regard to pinning strength and disorder realizations.

### 1. Introduction

The physics of disordered elastic systems is relevant for numerous systems, *e.g.* interfaces like magnetic[1] or ferroelectric[2] domain walls, contact lines[3], crack propagation[4], or periodic structures like charge-density waves[5] (CDWs), vortex lattices in type II superconductors[6], colloids[7] or Wigner crystals[8]. It is essential to understand the response of these systems to an external driving force, such as current-induced Lorentz force for vortices, electric field for charge-density waves, or magnetic field for domain walls. The competition between elasticity and disorder in all these systems leads to a great variety of phases. In particular the system remains pinned up to a critical driving force  $F_c$  and starts sliding above  $F_c$ . The transition from a pinned state to a sliding one is known as the *depinning transition*. It has been suggested by Fisher [9], in the context of CDWs, that the depinning transition could be regarded as a standard equilibrium critical phenomenon where the reduced force  $f = (F - F_c)/F_c$  and the velocity  $v$  would respectively act as the control parameter and the order parameter. This idea has proven useful in many other systems. This analogy suggests the existence of critical exponents, in particular  $\beta$  which describes the power-law response of the velocity at zero temperature  $v \sim f^\beta$ .

When the strength of the disorder is strong, the theoretical description of the phenomenon is difficult and the question about the nature of the depinning transition remains an open problem. In periodic systems with a displacement field of dimension  $N = 2$  (*e.g.*, superconductor vortices, colloids and Wigner crystals), simulations[10, 11] have shown that this situation leads to dislocations and plasticity: at the depinning threshold regions of pinned particles coexist with particles flowing around them. In a previous work [12] we studied the plastic depinning of vortex lattices in 2D with strong disorder, and a second-order phase transition with  $\beta = 1.3 \pm 0.1$  was found at the depinning threshold.

When the pinning of the underlying substrate is weak the statics and dynamics are dominated by the system elasticity which favors order. After the work of Fisher, further analytical and numerical works have refined the analogy with equilibrium critical phenomena to define universality classes and critical exponents (see *e.g.* [13] and references therein). However numerical simulations for interfaces in a space dimension  $d = 2$  show  $\beta \approx 1/3$  [14] while for periodic systems in  $d = 2$  various exponents have been found.  $\beta \approx 2/3$  is found for CDWs [15], Wigner crystals [16], and colloids [11], while other works found  $\beta \approx 0.5$  [17] and  $\beta = 0.92 \pm 0.01$  [18] in colloids, and  $\beta = 0.35$  [19] in stripe systems. For superconductor vortices in  $d = 3$  the value  $\beta = 0.65$  is found [20], while in  $d = 2$  a surprising exponent  $\beta > 1$  has been reported [21].

In this paper, we show a detailed study of the critical behavior of superconductor vortices above the elastic depinning transition, including a finite-size scaling analysis and the determination of three critical exponents. We perform large scale molecular dynamics simulations of 2D superconductor vortex lattices driven over weak random disorder. Our model belongs to the category of 2D periodic systems with a 2D

displacement field and short-range interactions. It could model 3D superconductors (either conventional or layered) in an effective 2D regime, i.e., when the vortex line tension is high enough for the lines to remain straight. The numerical model is developed in section 2. The depinning transition at zero temperature is detailed in section 3 for different lattice sizes and disorder realizations. Above the depinning threshold a power law response  $v_{F>F_c} \sim f^\beta$  is found with  $\beta = 0.29 \pm 0.03$ , and the transition seems to be governed by the correlation length divergence with an exponent  $\nu = 1.04 \pm 0.04$ . The same exponent governs the finite-size effects. In section 4 we study the depinning transition at finite temperature. A power law response for the velocity  $v_{F=F_c} \sim T^{1/\delta}$  is found and the critical exponent  $\delta^{-1} = 0.28 \pm 0.05$  is determined. A scaling relation for the driving force and the temperature is established. Varying system size, disorder realization and pinning strength, the scaling function and both  $\beta$  and  $\delta$  critical exponents show some degree of universality.

## 2. Numerical model

We study  $N_v$  Abrikosov vortices interacting with  $N_p$  random pins in the  $(x, y)$  plane. Periodic boundary conditions are used in both  $x$  and  $y$  directions. We consider the London limit  $\lambda_L \gg \xi_s$ , where  $\lambda_L$  is the penetration length and  $\xi_s$  is the superconducting coherence length, i.e. we treat vortices as point particles. As in [22], the LAMMPS classical molecular dynamics code [23] is used to integrate the newtonian equations of motion with a velocity Verlet algorithm [24]. The time evolution of a vortex  $i$  at a position  $\mathbf{r}_i$  is described by

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} + \eta \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = - \sum_{j \neq i} \nabla_i U^{vv}(r_{ij}) - \sum_p \nabla_i U^{vp}(r_{ip}) + \mathbf{F}^L + \mathbf{F}_i^{\text{th}}(t) \quad (1)$$

where  $r_{ij}$  is the distance between the vortices  $i$  and  $j$  located at  $\mathbf{r}_i$  and  $\mathbf{r}_j$ ,  $r_{ip}$  is the distance between the vortex  $i$  and the pinning site located at  $\mathbf{r}_p$ , and  $\nabla_i$  is the 2D gradient operator acting on  $\mathbf{r}_i$ .  $\mathbf{F}^L = F\hat{\mathbf{x}}$  is the Lorentz driving force in the  $x$  direction induced by an applied current, and  $\eta$  is the viscosity coefficient. The Langevin force  $\mathbf{F}_i^{\text{th}}$  describes the coupling with a heat bath and can be expressed by a thermal gaussian white noise with zero mean and variance

$$\langle F_{i,\lambda}^{\text{th}}(t) F_{j,\mu}^{\text{th}}(t') \rangle = 2\eta k_B T \delta_{ij} \delta_{\lambda\mu} \delta(t - t')$$

where  $\lambda, \mu = x, y$  are the cartesian components of  $\mathbf{F}_i^{\text{th}}$  and  $k_B$  is the Boltzmann constant. The vortex-vortex pairwise repulsive interaction is given by a modified Bessel function

$$U^{vv}(r_{ij}) = \alpha_v K_0(r_{ij}/\lambda_L)$$

and the attractive pinning potential is given by

$$U^{vp}(r_{ip}) = -\alpha_p e^{-(r_{ip}/R_p)^2}$$

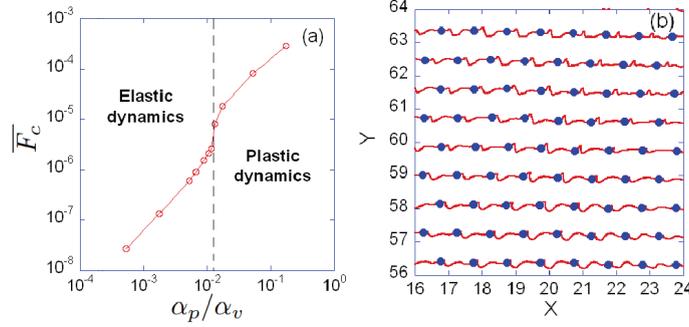
where  $R_p$  the radius of the pins, and  $\alpha_v$  and  $\alpha_p$  are tunable parameters. We fix the strength of the vortex-vortex interaction by setting  $\alpha_v = 2.83 \cdot 10^{-3} \lambda_L \epsilon_0$  where  $\epsilon_0$  is a characteristic energy per unit length. The number of pins is set to  $N_p = N_v$  and their radius is  $R_p = 0.22 \lambda_L$ . The positions of the pins are chosen from a uniform random distribution. Each random sampling will be referred to as one "sample" or one "disorder realization". The average vortex distance is  $a_0 = \lambda_L$ , and the vortex-vortex interaction is dealt with using a neighbor list method with a cutoff radius  $r_c = 6.5 \lambda_L$ . We fix  $\eta/m = 0.1$  where  $m$  is the vortex mass. Care has been taken to check that such ratio ensures that the second order Newton's vortex dynamics is identical to the overdamped dynamics limit usually computed for the superconductor vortices. In particular we found identical values of the critical exponents using overdamped dynamics. We use a unit system in which  $\eta = 1$ ,  $\lambda_L = 1$ ,  $\epsilon_0 = 1$  and  $k_B = 1$ .

Depending of the relative strengths of the vortex-pin and vortex-vortex interaction, the dynamics can be either dominated by elasticity or disorder. Several values of the relative disorder strength  $\alpha_p/\alpha_v$  have been investigated. In sections 3.1, 3.2 and 4.1 we choose the relative disorder strength  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$ , weak enough to enforce elastic behavior (plasticity is found above  $\alpha_p/\alpha_v \approx 0.01$ ). In section 4.2 we investigate several pinning strengths in the elastic regime, from  $\alpha_p/\alpha_v \approx 2 \cdot 10^{-3}$  to  $\alpha_p/\alpha_v \approx 7 \cdot 10^{-3}$ .

Molecular dynamics simulations are performed for several system sizes, from  $N_v = 270$  up to  $N_v = 20000$  vortices, but keeping fixed vortex and pin densities. Moreover, various rectangular shaped basic cells of size  $(L_x, L_y)$  have been investigated, from the almost square  $(L_x, L_y) = (5, 6\sqrt{3}/2)n\lambda_L$  with  $n = 3, 8, 20$  up to very elongated strips  $(L_x, L_y) = (400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ . The strip geometry elongated in the driving force direction allowed the study of the critical depinning properties for large system sizes. Care has been taken to check that the basic cell anisotropy induced by the strip geometry does not alter the critical properties, and in particular the value of the velocity critical exponent  $\beta$ .

### 3. Zero temperature

For several disorder realizations we start from a perfect triangular lattice at high velocity and the driving force is slowly decreased down to the sample-dependent critical depinning force  $F_c^{\text{sample}}$  below which the system is permanently pinned. We compute the mean critical depinning force  $\overline{F_c}$  where the overline indicates average over disorder realizations. We show in Fig.1a the evolution of  $\overline{F_c}$  with respect to the relative disorder strength  $\alpha_p/\alpha_v$  for  $N_v = 8000$  vortices in a basic cell of size  $(L_x, L_y) = (400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ . The rapid increase in the mean critical depinning force indicates a crossover from elastic dynamics dominated by elasticity to plastic dynamics dominated by disorder: such a sharp increase was for example found in a previous work on a similar system [11]. In Fig. 1b the typical trajectories of the vortices at the elastic depinning threshold are displayed for  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5 \cdot 10^{-3}$ . The vortices flow in elastically coupled rough static channels and



**Figure 1.** a) Transition from elastic to plastic dynamical regimes shown by the evolution of the mean critical depinning force  $\overline{F}_c$  with respect to the relative disorder strength  $\alpha_p/\alpha_v$  for  $N_v = 8000$  vortices in a basic cell of size  $(L_x, L_y) = (400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$ . b) Typical trajectories of vortices at the elastic depinning threshold obtained for  $N_v = 12000$  vortices and  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5.10^{-3}$ . A snapshot of the vortex positions (filled circles) at a given time is superimposed to their trajectories. For clarity only a small part of the basic cell of size  $(L_x, L_y) = (100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$  is shown.

the structure is topologically ordered: all vortices depin together with the same mean velocity, which means that all vortices keep the same neighbors as they move. The dynamics is jerky and the velocity of the center of mass is periodic in time where the period corresponds to the time for each vortex to replace its preceding neighbor in the same channel.

### 3.1. Velocity-force response

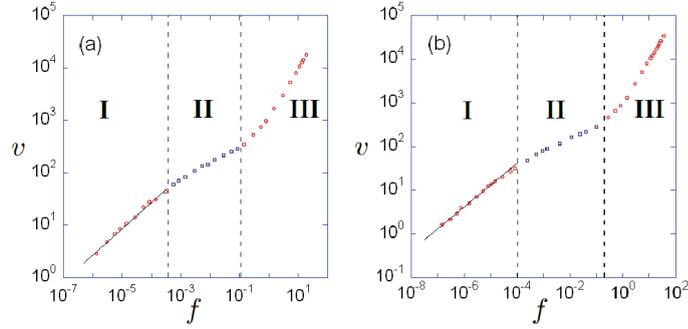
For each system size  $(L_x, L_y)$  we define the reduced velocity,

$$v = \overline{\langle V_x^{cm}(t) \rangle} / F_c^{\text{sample}}$$

and the reduced force  $f = (F - F_c^{\text{sample}}) / F_c^{\text{sample}}$  where  $\langle V_x^{cm}(t) \rangle$  is the time averaged longitudinal velocity of the center of mass of the vortices and  $F_c^{\text{sample}}$  is the critical force, both measured for a given disorder realization, and the overline is an average over all disorder realizations for a fixed value of  $f$ . This approach has been used for example in numerical simulations of elastic interfaces in a disordered medium [25].

We set the relative disorder strength  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5.10^{-3}$  and we plot in Fig. 2 the reduced velocity  $v$  with respect to the reduced force  $f$  for two different system sizes:  $(L_x, L_y) = (100, 50\sqrt{3}/2)\lambda_L$  averaged over  $N = 21$  samples in Fig. 2a, and  $(L_x, L_y) = (400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$  averaged over  $N = 14$  samples in Fig. 2b.

Three regions appear in Fig. 2. Region I is the manifestation of the finite size effects in the system whose signature is the *single-particle regime* [12], where  $v \sim f^{1/2}$  as



**Figure 2.** Plot of the vortex reduced velocity  $v$  versus the reduced force  $f$  for different system sizes: a)  $(L_x, L_y) = (100, 50\sqrt{3}/2)\lambda_L$  for  $N = 21$  samples b)  $(L_x, L_y) = (400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$  for  $N = 14$  samples. The solid lines indicate a slope of  $1/2$  corresponding to the single-particle regime.

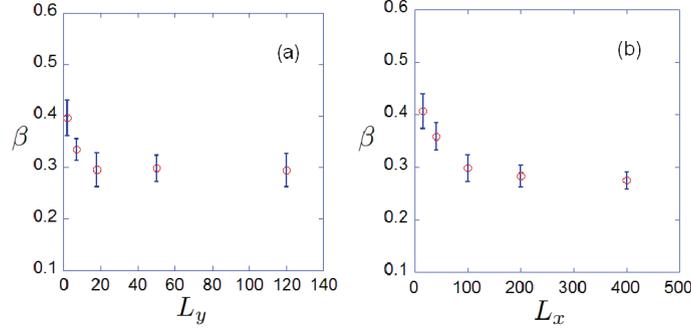
shown by the lines of slope  $1/2$ . Possible hysteretic depinning may be measured in this region for few disorder realizations, with different values  $F_c^{up}$  and  $F_c^{down}$  of the threshold force when increasing or decreasing the force. However, the width  $F_c^{up} - F_c^{down}$  of the hysteresis phenomenon is just a finite size effect, which therefore confirms that such hysteresis phenomenon is just a finite size effect. In region II a power law regime  $v \sim f^\beta$  with  $\beta < 1$  is measured, which we identify with the critical regime of the continuous depinning transition. Finally, in region III the system is far above the critical depinning threshold and approaches the asymptotic linear behavior  $v \sim f$  obtained in the absence of disorder.

For each system size we compute the depinning exponent  $\beta$  from a power law fit in the region II of the disorder averaged  $v$ - $f$  curves (see Fig. 2). Fig. 3a shows the evolution of  $\beta$  with respect to the transverse size  $L_y$  for a fixed longitudinal size  $L_x = 100\lambda_L$ . We see that the value of  $\beta$  for  $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$  becomes independant of the transverse size  $L_y$ . In particular  $\beta$  does not depend on the basic cell anisotropy since we measure identical values in square basic cells  $(L_x, L_y) = (100, 120\sqrt{3}/2)\lambda_L$ . In Fig. 3b we show the evolution of  $\beta$  with respect to the longitudinal size  $L_x$  for various transverse sizes  $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$ . It can be seen that  $\beta$  has reached a constant value for  $L_x \geq 100\lambda_L$ . Taking the mean value of  $\beta$  computed for both  $L_x \geq 100\lambda_L$  and  $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$ , we obtain the result  $\beta = 0.29 \pm 0.03$ .

Note that taking the mean of individual values  $\beta_i$  for each disorder realization, *i.e.* without averaging the velocity over disorder, gives a similar value  $\beta = 0.27 \pm 0.04$ .

### 3.2. Finite-size scaling

Finite-size systems used in numerical simulations lead to rounding and shifting effects in second-order phase transitions that can be analysed within the finite-size scaling



**Figure 3.** Depinning exponent  $\beta$  extracted from a power law fit in region II of the disorder averaged velocity-force response a) versus  $L_y$  for  $L_x = 100\lambda_L$ . Averages are computed over  $N = (9, 7, 4, 21, 4)$  samples for respectively  $L_y = (2, 7, 18, 50, 120)\sqrt{3}/2\lambda_L$  b) versus  $L_x$  for various transverse sizes from  $L_y = 18\sqrt{3}/2\lambda_L$  to  $L_y = 120\sqrt{3}/2\lambda_L$ . Averages are computed over  $N = (44, 47, 39, 12, 27)$  samples for respectively  $L_x = (15, 40, 100, 200, 400)\lambda_L$ . The error bars correspond to the standard error associated to the value of  $\beta$  extracted from the fit.

theory [26]. In addition to providing a clearer picture of the thermodynamic limit of the transition from finite size observations, this approach allows to extract further information about diverging lengths in the system. From a general theorem for disordered systems [27] a finite-size scaling length can be defined from the statistical properties of a large number of finite-size samples. The finite-size scaling exponent  $\nu_{\text{FS}}$  characterizing the divergence of such a length at the threshold should satisfy the inequality  $\nu_{\text{FS}} \geq 2/d$ .

We first examine the critical force distribution for each system size, and determine their width  $\Delta F_c(L_x)$  for the relative disorder strength  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5.10^{-3}$ . In Fig. 4a we display  $\Delta F_c(L_x)$  versus  $L_x$  which scales as [28],

$$\Delta F_c(L_x) \sim L_x^{-1/\nu_{\text{FS}}}$$

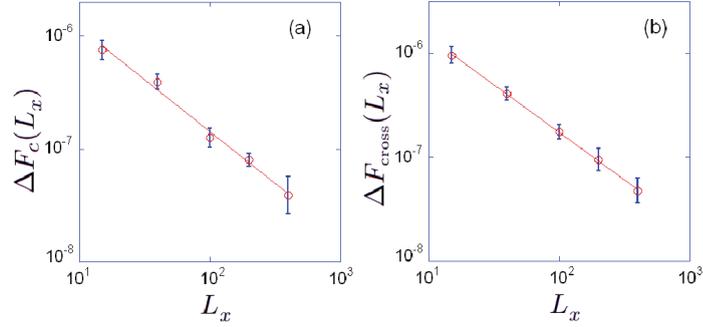
with  $\nu_{\text{FS}} = 1.09 \pm 0.07$ , in agreement with the inequality  $\nu_{\text{FS}} \geq 2/d$ .

Similarly, for each system size we identify the appearance of finite size effects with the crossover force  $F_{\text{cross}}$  between the critical regime and the *single-particle regime* (see regions I and II in Fig. 2). We plot in Fig. 4b the width  $\Delta F_{\text{cross}}(L_x)$  of the crossover force distribution, which behaves like

$$\Delta F_{\text{cross}}(L_x) \sim L_x^{-1/\nu_{\text{FS}}}$$

with the same exponent  $\nu_{\text{FS}} = 1.09 \pm 0.02$ .

Furthermore, we expect the correlation length  $\xi$  to behave in the critical regime as  $\xi \sim (F - F_c^\infty)^{-\nu}$  where  $\nu$  is the intrinsic correlation length exponent, and  $F_c^\infty$  is the



**Figure 4.** a) Width of the critical force distribution  $\Delta F_c(L_x)$  versus  $L_x$ . A power-law fit to the data gives the solid line of slope  $-1/\nu_{\text{FS}}$  from which we extract  $\nu_{\text{FS}} = 1.09 \pm 0.07$ ; b) Width of the crossover force distribution  $\Delta F_{\text{cross}}(L_x)$  versus  $L_x$ . A power-law fit to the data gives the solid line of slope  $-1/\nu_{\text{FS}}$  from which we extract  $\nu_{\text{FS}} = 1.09 \pm 0.02$ . The data are the same as those shown in Fig. 3b. The error bars indicate the standard error associated to the value of the width extracted from the distribution.

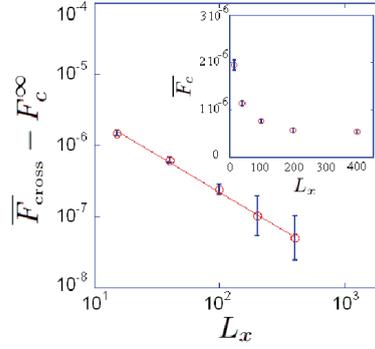
critical force for the infinite system. At the crossover force  $F_{\text{cross}}$  the correlation length becomes of the order of the system size  $L_x$ , so that the crossover force  $F_{\text{cross}}$  varies with the longitudinal size  $L_x$  as

$$F_{\text{cross}} - F_c^\infty \sim L_x^{-1/\nu}.$$

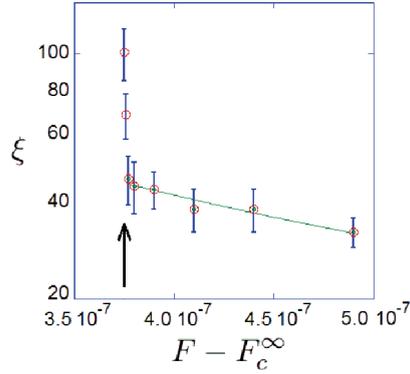
Fig. 5 shows  $\overline{F_{\text{cross}}} - F_c^\infty$  versus  $L_x$  where  $\overline{F_{\text{cross}}}$  is the disorder averaged crossover force. We determine  $F_c^\infty$  from the asymptotic behavior of the disorder averaged sample critical force  $\overline{F_c}$  for large  $L_x$  (see the inset of Fig. 5).

From a power law fit shown in Fig. 5, we extract the value  $\nu = 1.04 \pm 0.04$  which is consistent with  $\nu_{\text{FS}}$  computed previously. Therefore, a diverging length above the depinning threshold with an exponent  $\nu = \nu_{\text{FS}}$  seems to appear. Our results suggest that this length coincides with the intrinsic correlation length  $\xi$ . We show in Fig. 6 the direct computation of the correlation length  $\xi$  extracted from the velocity correlation function fit with the functional form  $\langle v_x(0)v_x(x) \rangle \sim C_0 x^{-\kappa} e^{-x/\xi}$  (see [14]). We find that both fit parameters  $C_0$  and  $\kappa$  are almost constant when  $F - F_c^\infty$  varies. For a given disorder realization and  $(L_x, L_y) = (100, 18\sqrt{3}/2)\lambda_L$ , Fig. 6 shows the evolution of  $\xi$  as a function of  $F - F_c^\infty$ .

As expected, when  $F \rightarrow F_{\text{cross}}^+$  finite size effects actually appear when  $\xi \sim L_x$  with  $L_x = 100\lambda_L$ . Furthermore the correlation length  $\xi$  diverges as  $\xi \sim (F - F_c^\infty)^{-\nu}$  for  $F > F_{\text{cross}}$  in the critical regime, and the power law fit exponent gives  $\nu = 1.2 \pm 0.2$  which nicely agrees with Fig. 5. Therefore, our results strongly suggest that, unlike CDWs [28, 29], the intrinsic correlation length controls both the critical force distribution and the finite-size crossover force.



**Figure 5.** Plot of  $\overline{F}_{\text{cross}} - F_c^\infty$  versus  $L_x$  for the same data as in Fig. 4. A power-law fit gives  $\nu = 1.04 \pm 0.04$ . Inset: Averaged sample critical force  $\overline{F}_c$  versus  $L_x$  from which we extract the asymptotic value  $F_c^\infty$  for large  $L_x$ . The error bars represent the standard error of our samples. The large error bars for the two largest system sizes in the main figure come from the statistical errors which become of the order of  $\overline{F}_{\text{cross}} - F_c^\infty$ .



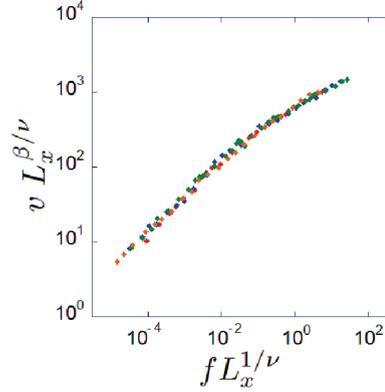
**Figure 6.** Plot of  $\xi$  versus  $F - F_c^\infty$  for a given disorder realization and for a system size  $(L_x, L_y) = (100, 18\sqrt{3}/2)\lambda_L$  at  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5.10^{-3}$ . The error bars indicate the standard error associated to the value of  $\xi$  extracted from the fit  $\langle v_x(0)v_x(x) \rangle \sim C_0 x^{-\kappa} e^{-x/\xi}$ . The black arrow indicates the value of  $F_{\text{cross}} - F_c^\infty$ .

We can now write a scaling relation between the velocity, the driving force and the system size  $L_x$  at  $T = 0$  as,

$$v \sim L_x^{-\beta/\nu} g(fL_x^{1/\nu})$$

This scaling relation is relevant only close enough to the depinning transition and at large enough  $L_x$ .

We take the disorder averaged response  $v(f)$  for different system sizes  $L_x = (40, 100, 200, 400)\lambda_L$  and various transverse sizes from  $L_y = 18\sqrt{3}/2\lambda_L$  to  $L_y =$



**Figure 7.** Plot of  $v L_x^{\beta/\nu}$  versus  $f L_x^{1/\nu}$  for different system sizes  $L_x = (40, 100, 200, 400)\lambda_L$  at  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5.10^{-3}$ . The value of the  $\beta$  and  $\nu$  exponent is  $\beta = 0.29 \pm 0.03$  and  $\nu = 1.04 \pm 0.04$ .

$120\sqrt{3}/2\lambda_L$ , and for the relative disorder strength  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5.10^{-3}$ . In Fig. 7 we plot  $v L_x^{\beta/\nu}$  versus  $f L_x^{1/\nu}$  using the value of  $\beta = 0.29 \pm 0.03$  and  $\nu = 1.04 \pm 0.04$ , retaining only the points of the region I and II. A good collapse of the data onto a single curve is obtained. The behavior of the scaling function  $g(x)$  is  $g(x) \sim x^\beta$  for  $x \gg 1$ , and in contrast to ordinary phase transitions  $g(x) \rightarrow 0$  for  $x \rightarrow 0$ . This unusual property has already been observed in numerical simulations of the depinning transition of driven interfaces [30]. It is due to the *single-particle regime* which can partially hides usual finite-size effects.

#### 4. Finite temperatures

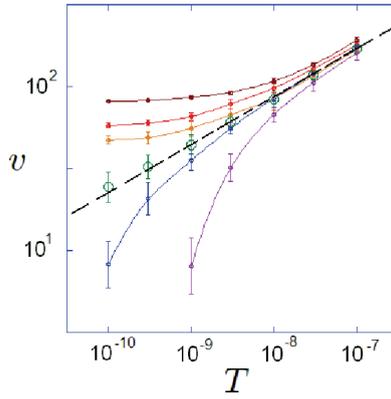
##### 4.1. Critical exponent $\delta$

In this section we study the finite temperature effects on the depinning transition. For  $F < F_c$  at  $T > 0$  the vortex mean velocity does not vanish since thermal fluctuations provide sufficient energy to overcome local energy barriers: this results in a rounded depinning transition. Using the analogy with standard critical phenomena, a power law response  $v_{F=F_c} \sim T^{1/\delta}$  can be defined at  $F = F_c$ . We show in Fig. 8 the typical reduced velocity-temperature response that we obtain. Two different behaviors can be seen in the  $v(T)$  response. Below the critical force,  $v$  goes to zero faster than a power law resulting in concave  $v(T)$  curves, while above the critical force  $v$  approaches a nonzero limit as  $T$  goes to zero resulting in convex  $v(T)$  curves with an horizontal asymptote on the left. The effective critical force  $\overline{F}_c^*$  is defined as the force at which the convexity changes. In agreement with a second-order phase transition, we can extrapolate at  $\overline{F}_c^*$

a power law response  $v_{F=\overline{F}_c^*} \sim T^{1/\delta}$  (dashed line in Fig. 8) from which we measure the critical exponent  $\delta^{-1} = 0.28 \pm 0.05$ , where the error bar is deduced from the different lines one can draw to extrapolate the power-law behavior.

We would like to emphasize that this new determination of the disorder averaged critical force is consistent with the value of  $\overline{F}_c$  analysed at  $T = 0$  for the same samples in section 3. Going back to the  $v(f)$  curves at  $T = 0$  and using the effective critical force  $\overline{F}_c^*$ , we find  $\beta = 0.28 \pm 0.05$  which nicely agrees with the value  $\beta = 0.29 \pm 0.03$  extracted from the zero temperature simulations of section 3. This larger uncertainty comes from the smaller number of samples simulated at finite temperatures.

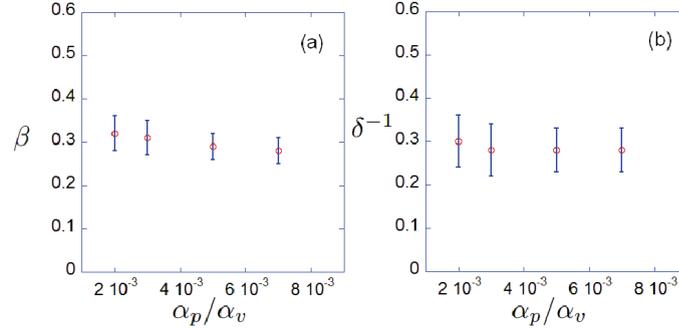
Finally, note that we observe an identical mean value  $\delta^{-1} = 0.28$  when taking the mean of individual values  $\delta_i^{-1}$  obtained from the velocity-temperature curves for each disorder realization.



**Figure 8.** Reduced velocity  $v$  versus temperature  $T$ , averaged over  $N = 6$  samples for fixed values of  $f = (10, 4, 3, 0, -2, -7) \times 10^{-4}$ . The system size is  $(L_x, L_y) = (400, 20\sqrt{3}/2)\lambda_L$  and the relative disorder strength is  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5.10^{-3}$ . The dashed line is the extrapolation of  $v(T)$  at the effective critical force  $\overline{F}_c^*$  from which we extract the value of  $\delta^{-1}$ . The error bars correspond to the standard error.

#### 4.2. Different pinning strengths - Scaling law

For different system sizes with  $L_x \geq 100\lambda_L$  and  $L_y \geq 18\sqrt{3}/2\lambda_L$ , we investigate several values of the relative pinning strength  $\alpha_p/\alpha_v \approx (2, 3, 5, 7) \times 10^{-3}$ . The number of samples is  $N = 1$  for  $\alpha_p/\alpha_v \approx 2.10^{-3}$  and  $L_x = 1000\lambda_L$ ,  $N = 2$  for  $\alpha_p/\alpha_v \approx 3.10^{-3}$  and  $L_x = 400\lambda_L$ ,  $N = 8$  for  $\alpha_p/\alpha_v \approx 5.10^{-3}$  and  $L_x = (100, 400)\lambda_L$ ,  $N = 4$  for  $\alpha_p/\alpha_v \approx 7.10^{-3}$  and  $L_x = 400\lambda_L$ . For each pinning strength, we compute both the critical exponents  $\beta$  and  $\delta^{-1}$  and we display their evolution respectively in Fig. 9a and Fig. 9b. The values of  $\beta$  and  $\delta^{-1}$  are found to be independent of the relative pinning strength.



**Figure 9.** Evolution with the relative pinning strength  $\alpha_p/\alpha_v$  of the critical exponent a)  $\beta$  and b)  $\delta^{-1}$ .

Because of the power law responses of the velocity with  $T$  and  $f$ , we assume that the velocity  $v$  is a generalized homogenous function of driving force  $f$  and temperature  $T$ . We want to express the relation between  $v$ ,  $f$ , and  $T$  in terms of dimensionless quantities and to make this relation independent of the prefactors in the two power law responses. We define  $v_0$  and  $T_0$  as

$$v_{f>0, T=0} = v_0 f^\beta, v_{f=0} = v_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/\delta}$$

and we introduce the dimensionless velocity  $\tilde{v} = v/v_0$  and the dimensionless temperature  $\tilde{T} = T/T_0$ . We can then define the following scaling ansatz,

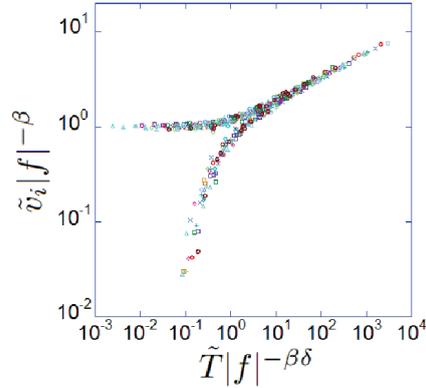
$$\tilde{v}|f|^{-\beta} = S_\pm(\tilde{T}|f|^{-\beta\delta})$$

where  $S(x)$  is the scaling function with two branches  $S_+$  and  $S_-$  corresponding to  $f > 0$  and  $f < 0$ , respectively. The power law dependencies  $\tilde{v}_{f>0, T=0} = f^\beta$  and  $\tilde{v}_{f=0} = \tilde{T}^{1/\delta}$  imply that  $S(x)$  has the following asymptotical behavior:

$$\lim_{x \rightarrow 0} S_+(x) = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1/\delta} S_\pm(x) = 1$$

The  $S_+$  branch goes asymptotically to the horizontal axis for  $\tilde{T} \rightarrow 0$  defining a driving dominated regime, while the  $S_\pm$  branches have both an oblique asymptote with slope  $\delta^{-1}$  for  $f \rightarrow 0$  defining a temperature dominated regime. The change of variables  $(v, T) \rightarrow (\tilde{v}, \tilde{T})$  is equivalent to choosing the intersection of the asymptotes as the origin of coordinates.

To show the existence of this scaling behavior, we compute the velocity without averaging over the disorder, *i.e.* we compute  $\tilde{v}_i$  for each of the  $N = 14$  samples that we have studied, with  $i = 1, \dots, N$ . This choice allows to better see if all data scale on a single



**Figure 10.** Scaling plot of  $\tilde{v}_i |f|^{-\beta}$  versus  $\tilde{T} |f|^{-\beta\delta}$  with  $\beta = 0.29 \pm 0.03$  and  $\delta^{-1} = 0.28 \pm 0.05$  for  $N = 14$  samples with different pinning strengths  $10^3 \times \alpha_p/\alpha_v \approx (2, 3, 5, 7)$ , system sizes  $L_x = (100, 400, 1000)\lambda_L$  and disorder realizations. Each sample value of  $\beta$  and  $\delta^{-1}$  is allowed to vary within the error bars.

curve. Different system sizes  $L_x = (100, 400, 1000)\lambda_L$  *i.e.*  $N_v = (5000, 8000, 20000)$ , different pinning strengths  $10^3 \times \alpha_p/\alpha_v \approx (2, 3, 5, 7)$  and different realizations of the random position of the pinning centers have been investigated. In Fig. 10 we plot  $\tilde{v}_i |f|^{-\beta}$  with respect to  $\tilde{T} |f|^{-\beta\delta}$  and a good collapse of all individual samples to a single curve with two branches is obtained. The values of  $F_c$  used to compute  $f$  are sample specific. The two prefactors  $v_0$  and  $T_0$  are not universal and their value varies for each sample, but the scaling functions  $S_{\pm}$  remain unchanged. We verified that averaging over disorder as previously defined, we obtain the same scaling functions.

The collapse of our data implies that a true critical regime is observed with power law responses for the velocity with respect to the driving force and to the temperature. Moreover the critical depinning exponent  $\beta$  and the thermal exponent  $\delta^{-1}$  do not depend on the strength and the positions of the pins. These results suggest some degree of universality of our model for the elastic depinning of vortices.

## 5. Discussion

In our study we found a continuous elastic depinning transition for weak pinning strength. Both the depinning exponent  $\beta$  and the thermal exponent  $\delta$ , and the scaling function linking velocity  $v$ , temperature  $T$  and driving force  $f$  show some degree of universality with respect to disorder. But the question of the existence of large universality classes for elastic depinning remains an open question. Indeed a large variety of  $\beta$  have been found in literature as cited in section 1. Our value is close to the value  $\beta \approx 1/3$  measured for interfaces [14] in a space dimension  $d = 2$ . However, our result should rather be compared to other periodic systems with displacement field

of dimension  $N = 2$  in a  $d = 2$  dimensional space. For example, our result is close to the value  $\beta = 0.35$  recently measured in anisotropic periodic systems (stripe systems) [19]. Note also that a previous work on superconductor vortices in  $d = 3$  [20] found the exponent  $\beta = 0.65 \pm 0.01$  and  $\delta = 2.3 \pm 0.1$ . On the other hand, the variety of exponents found in the other similar periodic systems may suggest that the type of particle-particle interaction as well as the type of disorder plays an important role, which would imply that large universality classes cannot be found.

## 6. Conclusion

In this paper we have numerically studied the 2D superconductor vortex dynamics in random media. A crossover from plastic dynamics dominated by disorder to elastic dynamics dominated by elasticity is found. We investigated the depinning transition in the elastic regime. Above the depinning threshold all the vortices depin together and flow in elastically coupled rough static channels. Three dynamical regimes are found: the first one is controlled by the finite-size of the simulation box leading to the so-called *single-particle regime*, the second one is the critical regime from which a power law response  $v \sim f^\beta$  at  $T = 0$  can be extracted with  $\beta = 0.29 \pm 0.03$ , while the third one is the recovery of the ohmic regime. A finite temperature analysis gives the thermal rounding exponent  $\delta^{-1} = 0.28 \pm 0.05$  defined by the power law response  $v \sim T^{1/\delta}$  at  $F = F_c^{\text{sample}}$ . A finite-size scaling analysis at zero temperature suggests (in contrast with CDWs) the existence of a unique diverging length above the depinning threshold with an exponent  $\nu = 1.04 \pm 0.04$ , which controls the critical force distribution, the finite-size crossover force distribution and the intrinsic correlation length. A scaling law for the temperature and the force dependence of the velocity is found, consistent with a second order phase transition. Both critical exponents and the scaling function are independent of the disorder (strength and position of the pins) in the range of parameters we studied, indicating some degree of universality. Nevertheless the comparison with other similar periodic systems may suggest that large universality can not be found for 2D elastic depinning.

## Acknowledgement

We gratefully acknowledge the generous grant of computer time from the Orléans-Tours *CaSciModOT Cluster* at the *Centre de Calcul Scientifique de la Région Centre* - France. We also wish to thank Pierre Le Doussal and Kay Wiese for helpful discussions.

## References

- [1] S. Lemerle, J. Ferre, C. Chapert, V. Mathet, T. Giamarchi, and P. Le Doussal, Phys. Rev. Lett. **80**, 849 (1998).
- [2] P. Paruch, T. Giamarchi, and J.-M. Triscone, Phys. Rev. Lett. **94**, 197601 (2005).
- [3] S. Moulinet, A. Rosso, W. Krauth, and E. Rolley, Phys. Rev. E **69**, 035103 (2004).

- [4] E. Bouchaud, J. P. Bouchaud, D. S. Fisher, S. Ramanathan, and J. R. Rice, *J. Mech. Phys. Solids* **50**, 1703 (2002).
- [5] G. Gruner, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 1129 (1988). S. Brazovskii and T. Nattermann, *Adv. Phys.* **53**, 177 (2004).
- [6] G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 1125 (1994). T. Nattermann and S. Scheidl, *Adv. Phys.* **49**, 607 (2000). T. Giamarchi and S. Bhattacharya, in *High magnetic fields: Applications in Condensed Matter Physics and Spectroscopy*, Lecture Notes in Physics, edited by C. Berthier, L. P. Lévy, and G. Martinez (Springer-Verlag, Berlin, 2002) p. 314.
- [7] A. Pertsinidis and X. S. Ling, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 028303 (2008).
- [8] T. Giamarchi, in *Quantum Phenomena in Mesoscopic Systems*, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi" (IOS Press, Bologna, 2003).
- [9] D. S. Fisher, *Phys. Rev. B* **31**, 1396 (1985).
- [10] S. Ryu, M. Hellerqvist, S. Doniach, A. Kapitulnik, and D. Stroud, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5114 (1996). C. Reichhardt, C. J. Olson, N. Gronbech-Jensen, and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4354 (2001). E. Olive and J. C. Soret, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 027002 (2006). E. Olive and J. C. Soret, *Phys. Rev. B* **77**, 144514 (2008). E. Olive, Y. Fily, and J.-C. Soret, *J. Phys.: Conf. Series* **150**, 052201 (2009).
- [11] C. Reichhardt and C. J. Olson, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 078301 (2002).
- [12] Y. Fily, E. Olive, N. Di Scala, and J. Soret, *Phys. Rev. B* **82**, 134519 (2010).
- [13] S. Bustingorry, A. Kolton, and T. Giamarchi, *Phys. Rev. B* **82**, 094202 (2010).
- [14] O. Duemmer and W. Krauth, *Phys. Rev. E* **71**, 061601 (2005).
- [15] C. R. Myers and J. P. Sethna, *Phys. Rev. B* **47**, 11171 (1993).
- [16] G. Piacente and F. Peeters, *Phys. Rev. B* **72**, 205208 (2005).
- [17] A. Pertsinidis and X. S. Ling, *Bull. Am. Phys. Soc.* **46**, 181 (2001).
- [18] J. Chen, Y. Cao, and Z. Jiao, *Phys. Rev. E* **69**, 041403 (2004).
- [19] C. Olson Reichhardt, C. Reichhardt, and A. Bishop, *Phys. Rev. E* **83**, 041501 (2011).
- [20] M.-B. Luo and X. Hu, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 267002 (2007).
- [21] Y. Cao, Z. Jiao, and H. Ying, *Phys. Rev. B* **62**, 4163 (2000).
- [22] N. Di Scala, E. Olive, Y. Lansac, Y. Fily, and J.-C. Soret, *J. Phys.: Conf. Series* (to be published).
- [23] S. Plimpton, *J. Comput. Phys.* **117**, 1 (1995).
- [24] M. P. Allen and D. J. Tildesley, *Computer Simulation of Liquids*, edited by C. Press (1987).
- [25] S. Bustingorry, A. B. Kolton, and T. Giamarchi, *EPL* **81**, 26005 (2008).
- [26] J. L. Cardy, *Finite-size scaling*, edited by A. North-Holland (1988).
- [27] J. T. Chayes, L. Chayes, D. S. Fisher, and T. Spencer, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2999 (1986).
- [28] A. A. Middleton and D. Fisher, *Phys. Rev. B* **47**, 3530 (1993).
- [29] O. Narayan and D. S. Fisher, *Phys. Rev. B* **46**, 11520 (1992). C. R. Myers and J. P. Sethna, *Phys. Rev. B* **47**, 11194 (1993). P. Le Doussal, K. J. Wiese, and P. Chauve, *Phys. Rev. B* **66**, 174201 (2002).
- [30] U. Nowak and K. D. Usadel, *EPL* **44**, 634 (1998).

# Bibliographie

- [1] S. LEMERLE, J. FERRE, C. CHAPPERT, V. MATHET, T. GIAMARCHI et P. LE DOUSAL : Domain Wall Creep in an Ising Ultrathin Magnetic Film. *Phys. Rev. Lett.*, 80:849, 1998.
- [2] P. PARUCH, T. GIAMARCHI, T. TYBELL et J.-M. TRISCONE : Nanoscale studies of domain wall motion in epitaxial ferroelectric thin films. *J. Appl. Phys.*, 100:051608, 2006.
- [3] T. TYBELL, P. PARUCH, T. GIAMARCHI et J.-M. TRISCONE : Domain Wall Creep in Epitaxial Ferroelectric  $\text{Pb}(\text{Zr}_{0.2}\text{Ti}_{0.8})\text{O}_3$  Thin Films. *Phys. Rev. Lett.*, 89:8, août 2002.
- [4] P. PARUCH, T. GIAMARCHI et J.-M. TRISCONE : Domain Wall Roughness in Epitaxial Ferroelectric  $\text{PbZr}_{0.2}\text{Ti}_{0.8}\text{O}_3$  Thin Films. *Phys. Rev. Lett.*, 94:197601, mai 2005.
- [5] M. FIEBIG : Revival of the magnetoelectric effect. *J. Phys.D : Appl. Phys.*, 38:R1–30, 2005.
- [6] W. EERENSTEIN, N. D. MATHUR et J. F. SCOTT : Multiferroic and magnetoelectric materials. *Nature*, 442:759, 2006.
- [7] S. MOULINET, C. GUTHMANN et E. ROLLEY : Roughness and dynamics of the contact line of a viscous fluid on a disordered substrate. *Eur. Phys. J. E*, 8:437, 2002.
- [8] E. ROLLEY, C. GUTHMANN, R. GOMBROWICZ et V. REPAIN : Roughness of the Contact Line on a Disordered Substrate. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2865, mars 1998.
- [9] K. MALOY, S. SANTUCCI, J. SCHMITTBUHL et R. TOUSSAINT : Local Waiting Time Fluctuations along a Randomly Pinned Crack Front. *Phys. Rev. Lett.*, 96:045501, janvier 2006.
- [10] J. SCHMITTBUHL : Direct Observation of a Self-Affine Crack Propagation. *Phys. Rev. Lett.*, 78:3888, mai 1997.
- [11] R. E. THORNE : Charge-Density-Wave Conductors. *Physics Today*, page 42.
- [12] G. GRUNER : The dynamics of charge-density. *Rev. Mod. Phys.*, 60:1129, 1988.
- [13] E. WIGNER : On the interactions of electrons in metals. *Phys. Rev.*, 46:1002, 1934.
- [14] C. C. GRIMES et G. ADAMS : Evidence for a liquid-to-crystal phase transition in a classical, two-dimensional sheet of electrons. *Phys. Rev. Lett.*, 42:795, 1979.
- [15] Focus : Electrons Crystallize and Melt. *Phys. Rev. Focus*, 7:18, 2001.

- [16] M. SAINT-JEAN, C. EVEN et C. GUTHMANN : Macroscopic 2D Wigner islands. *Eur. Phys. Lett. (EPL)*, 55:45, 2001.
- [17] P. GALATOLA, G. COUPIER, M. SAINT-JEAN, J. FOURNIER et C. GUTHMANN : Determination of the interactions in confined macroscopic Wigner islands : theory and experiments. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 50:549, 2006.
- [18] E. Y. ANDREI, G. DEVILLE, D. C. GLATTLI, F. I. B. WILLIAMS, E. PARIS et B. ETIENNE : Observation of a Magnetically Induced Wigner Solid. *Phys. Rev. Lett.*, 60:2765, 1988.
- [19] A. FILINOV, M. BONITZ et Y. LOZOVIK : Wigner Crystallization in Mesoscopic 2D Electron Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 86:3851, avril 2001.
- [20] L. VINNIKOV, J. KARPINSKI, S. KAZAKOV, J. JUN, J. ANDEREGG, S. BUDKO et P. CANFIELD : Vortex structure in MgB2 single crystals observed by the Bitter decoration technique. *Phys. Rev. B*, 67:092512, mars 2003.
- [21] P. E. GOA, H. HAUGLIN, M. BAZILJEVICH, E. ILYASHENKO, P. L. GAMMEL et T. H. JOHANSEN : Real-time magneto-optical imaging of vortices in superconducting NbSe2. *Supercond. Sci. Technol.*, 14:729, 2001.
- [22] P. LE DOUSSAL, K. J. WIESE et P. CHAUVE : Functional renormalization group and the field theory of disordered elastic systems. *Phys. Rev. E*, 69:026112, février 2004.
- [23] G. PARISI et N. SOURLAS : Random Magnetic Fields, Supersymmetry, and Negative Dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 43:744, 1979.
- [24] D. S. FISHER : Interface Fluctuations in Disordered Systems : 5-e Expansion and Failure of Dimensional Reduction. *Phys. Rev. Lett.*, 56:1964, 1986.
- [25] P. LE DOUSSAL et K. J. WIESE : Two-loop functional renormalization for elastic manifolds pinned by disorder in N dimensions. *Phys. Rev. E*, 72:035101, septembre 2005.
- [26] P. CHAUVE, P. LE DOUSSAL et K. J. WIESE : Renormalization of Pinned Elastic Systems : How Does It Work Beyond One Loop? *Phys. Rev. Lett.*, 86:1785, 2001.
- [27] Huse, Henley, and Fisher Respond. *Phys. Rev. Lett.*, 55:2924, 1985.
- [28] A. A. MIDDLETON : Numerical results for the ground-state interface in a random medium. *Phys. Rev. E*, 52:R3337, 1995.
- [29] G. SCHEHR et P. LE DOUSSAL : Functional Renormalization for pinned elastic systems away from their steady state. *Eur. Phys. Lett. (EPL)*, 71:290, 2005.
- [30] A. B. KOLTON, A. ROSSO, E. V. ALBANO et T. GIAMARCHI : Short time relaxation of a driven elastic string in a random medium. *Phys. Rev. B*, 74:140201, 2006.
- [31] C. REICHHARDT et C. J. OLSON REICHHARDT : Crossover from Intermittent to Continuum Dynamics for Locally Driven Colloids. *Phys. Rev. Lett.*, 96:028301, 2006.
- [32] A. B. KOLTON, G. SCHEHR et P. LE DOUSSAL : Universal Nonstationary Dynamics at the Depinning Transition. *Phys. Rev. Lett.*, 103:160602, 2009.
- [33] C. J. OLSON REICHHARDT, C. REICHHARDT et A. R. BISHOP : Anisotropic sliding dynamics, peak effect, and metastability in stripe systems. *Phys. Rev. E*, 83:041501, 2011.

- [34] A. I. LARKIN et Y. N. OVCHINNIKOV : Pinning in type II superconductors. *J. of Low Temp. Phys.*, 34:409, 1979.
- [35] P. CHAUVE, T. GIAMARCHI et P. LE DOUSSAL : Creep and depinning in disordered media. *Phys. Rev. B*, 62:6241, 2000.
- [36] P. W. ANDERSON et Y. B. KIM : Hard Superconductivity : Theory of the Motion of Abrikosov Flux Lines. *Rev. Mod. Phys.*, 36:39, 1964.
- [37] F. LONDON et H. LONDON : The Electromagnetic Equations of the Superconductor. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, A149:71, 1935.
- [38] V. GINZBURG et L. LANDAU : On the theory of superconductivity. *Journal of Experimental and Theoretical Physics (JETP)*, 20:1064, 1950.
- [39] A. A. ABRIKOSOV : On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group. *Soviet Physics (JETP)*, 5:1174, 1957.
- [40] W. H. KLEINER, L. M. ROTH et S. H. AUTLER : Bulk Solution of Ginzburg-Landau Equations for Type II Superconductors : Upper Critical Field Region. *Phys. Rev.*, 133:A1226, 1964.
- [41] J. BARDEEN, L. N. COOPER et J. R. SCHRIEFFER : Microscopic Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, 106:162, 1957.
- [42] J. BARDEEN, L. N. COOPER et J. R. SCHRIEFFER : Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, 108:1175, 1957.
- [43] M. TINKHAM : *Introduction to Superconductivity*. Dover Publications, second édition, 2004.
- [44] G. BLATTER, M. V. FEIGEL'MAN, V. B. GESHKENBEIN, A. I. LARKIN et V. M. VINOKUR : Vortices in high-temperature superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 66:1125, 1994.
- [45] A. I. LARKIN : Effect of inhomogeneities on the structure of the mixed state of superconductors. *Soviet Physics (JETP)*, 31:784, 1970.
- [46] T. KLEIN, I. JOUMARD, S. BLANCHARD, J. MARCUS, R. CUBITT, T. GIAMARCHI et P. LE DOUSSAL : Evidence of the Bragg glass phase by neutron scattering. *Nature*, 413:404, 2001.
- [47] P. KIM, Z. YAO, C. A. BOLLE et C. M. LIEBER : Structure of flux line lattices with weak disorder at large length scales. *Phys. Rev. B*, 60:R12589, 1999.
- [48] T. GIAMARCHI et P. LE DOUSSAL : Elastic theory of pinned flux lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 72:1530, 1994.
- [49] T. GIAMARCHI et P. LE DOUSSAL : Elastic theory of flux lattices in the presence of weak disorder. *Phys. Rev. B*, 52:1242, 1995.
- [50] J. KIERFELD, T. NATTERMANN et T. HWA : Topological order in the vortex-glass phase of high-temperature superconductors. *Phys. Rev. B*, 55:626, 1997.
- [51] D. CARPENTIER, P. LE DOUSSAL et T. GIAMARCHI : Stability of the Bragg glass phase in a layered geometry. *Eur. Phys. Lett. (EPL)*, 35:379, 1996.

- [52] T. GIAMARCHI et P. LE DOUSSAL : Phase diagrams of flux lattices with disorder. *Phys. Rev. B*, 55:6577, 1997.
- [53] A. van OTTERLO, R. SCALETTAR et G. ZIMANYI : Phase Diagram of Disordered Vortices from London Langevin Simulations. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1497, août 1998.
- [54] D. R. NELSON et V. M. VINOKUR : Boson localization and correlated pinning of superconducting vortex arrays. *Phys. Rev. B*, 48:13060, 1993.
- [55] A. E. KOSHELEV et V. M. VINOKUR : Dynamic Melting of the Vortex Lattice. *Phys.*, 73:3580, 1994.
- [56] T. GIAMARCHI et P. LE DOUSSAL : Moving Glass Phase of Driven Lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 76:3408, 1996.
- [57] P. LE DOUSSAL et T. GIAMARCHI : Moving glass theory of driven lattices with disorder. *Phys. Rev. B*, 57:11356, 1998.
- [58] M. MARCHEVSKY, J. AARTS, P. H. KES et M. V. INDENBOM : Observation of the Correlated Vortex Flow in NbSe<sub>2</sub> with Magnetic Decoration. *Phys. Rev. Lett.*, 78:531, 1997.
- [59] F. PARDO, F. DE LA CRUZ, P. L. GAMMEL, E. BUCHER et D. J. BISHOP : Observation of smectic and moving-Bragg-glass phases in flowing vortex lattices. *Nature*, 396:348, 1998.
- [60] C. J. OLSON, C. REICHHARDT et F. NORI : Nonequilibrium Dynamic Phase Diagram for Vortex Lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 81:3757, 1998.
- [61] H. FANGOHR, S. J. COX et P. A. J. de GROOT : Vortex dynamics in two-dimensional systems at high driving forces. *Phys. Rev. B*, 64:064505, 2001.
- [62] L. VERLET : Computer "Experiments" on Classical Fluids. I. Thermodynamical Properties of Lennard-Jones Molecules. *Phys. Rev.*, 159:98, 1967.
- [63] D. C. RAPAPORT : *The Art of Molecular Dynamics Simulation*. Cambridge University Press, 2nd édition, 2004.
- [64] M. P. ALLEN et D. J. TILDESLEY : *Computer Simulation of Liquids*. Clarendon Press, 1987.
- [65] Y. FILY, E. OLIVE, N. DI SCALA et J.-C. SORÉ : Critical behavior of plastic depinning of vortex lattices in two dimensions : Molecular dynamics simulations. *Phys. Rev. B*, 82:134519, octobre 2010.
- [66] W. H. PRESS, B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY et W. T. VETTERLING : Random Numbers. In *Numerical Recipes in Fortran 77 - The Art of Scientific Computing, volume 1*, chapitre 7. 2nd édition, 1992.
- [67] <http://lammmps.sandia.gov>.
- [68] S. PLIMPTON : Fast Parallel Algorithms for Short-Range Molecular Dynamics. *J. Comput. Phys.*, 117:1, 1995.
- [69] J. J. BINNEY, N. J. DOWRICK, A. J. FISHER et M. E. J. NEWMAN : *The Theory of Critical Phenomena : An Introduction to the Renormalization Group*. Clarendon Press, 1992.

- [70] D. S. FISHER : Sliding charge-density waves as a dynamic critical phenomenon. *Phys. Rev. B*, 31:1396, 1985.
- [71] H. E. STANLEY : *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 1987.
- [72] D. I. UZUNOV : *Introduction to the Theory of Critical Phenomena : Mean Field, Fluctuations and Renormalization*. World Scientific Publishing Company, 1992.
- [73] D. CHANDLER : *Introduction to Modern Statistical Mechanics*. Oxford University Press, 1987.
- [74] J. L. CARDY : Finite-Size Scaling. In *Current Physics, Sources and Comments, Vol 2*. North-Holland Publishing Company, 1988.
- [75] V. PRIVMAN : *Finite Size Scaling and Numerical Simulation of Statistical Systems*. World Scientific Publishing Company, 1990.
- [76] M. C. MARCHETTI, A. A. MIDDLETON et T. PRELLBERG : Viscoelastic Depinning of Driven Systems : Mean-Field Plastic Scallops. *Phys. Rev. Lett.*, 85:1104, 2000.
- [77] M. C. MARCHETTI et K. SAUNDERS : Viscoelasticity from a microscopic model of dislocation dynamics. *Phys. Rev. B*, 66:224113, 2002.
- [78] J. WATSON et D. S. FISHER : Collective particle flow through random media. *Phys. Rev. B*, 54:938, 1996.
- [79] J. WATSON et D. S. FISHER : Dynamic critical phenomena in channel flow of driven particles in random media. *Phys. Rev. B*, 55:14909, 1997.
- [80] K. E. BASSLER, M. PACZUSKI et E. ALTSHULER : Simple model for plastic dynamics of a disordered flux-line lattice. *Phys. Rev. B*, 64:224517, 2001.
- [81] A. MAEDA, M. NOTOMI et K. UCHINOKURA : Switching of K<sub>0.3</sub>MoO<sub>3</sub> at low temperatures. I. Response to the dc electric field. *Phys. Rev. B*, 42:3290, 1990.
- [82] C. J. OLSON, C. REICHHARDT et V. M. VINOKUR : Hysteretic depinning and dynamical melting for magnetically interacting vortices in disordered layered superconductors. *Phys. Rev. B*, 64:140502, 2001.
- [83] M. J. HIGGINS et S. BHATTACHARYA : Varieties of dynamics in a disordered flux-line lattice. *Physica C*, 257:232, 1996.
- [84] C. REICHHARDT et C. J. OLSON : Colloidal Dynamics on Disordered Substrates. *Phys. Rev. Lett.*, 89:078301, 2002.
- [85] C. REICHHARDT, C. J. OLSON, N. GRONBECH-JENSEN et F. NORI : Moving Wigner Glasses and Smectics : Dynamics of Disordered Wigner Crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 86:4354, 2001.
- [86] O. NARAYAN et D. S. FISHER : Critical behavior of sliding charge-density waves in  $4-\epsilon$  dimensions. *Phys. Rev. B*, 46:11520, 1992.
- [87] T. NATTERMANN, S. STEPANOW, L. H. TANG et H. LESCHHORN : Dynamics of interface depinning in a disordered medium. *J. Phys. II France*, 2:1483, 1992.
- [88] P. CHAUVE, T. GIAMARCHI et P. LE DOUSSAL : Creep and depinning in disordered media. *Phys. Rev. B*, 62:6241, 2000.

- [89] P. LE DOUSSAL, K. J. WIESE et P. CHAUVE : Two-loop functional renormalization group theory of the depinning transition. *Phys. Rev. B*, 66:174201, 2002.
- [90] S. BUSTINGORRY, A. B. KOLTON et T. GIAMARCHI : Random-manifold to random-periodic depinning of an elastic interface. *Phys. Rev. B*, 82:094202, 2010.
- [91] L. A. N. AMARAL, A. L. BARABASI et H. E. STANLEY : Universality classes for interface growth with quenched disorder. *Phys. Rev. Lett.*, 73:62, 1994.
- [92] U. NOWAK et K. D. USADEL : Influence of temperature on the depinning transition of driven interfaces. *Eur. Phys. Lett. (EPL)*, 44:634, 1998.
- [93] O. DUEMMER et W. KRAUTH : Critical exponents of the driven elastic string in a disordered medium. *Phys. Rev. E*, 71:061601, 2005.
- [94] C. R. MYERS et J. P. SETHNA : Collective dynamics in a model of sliding charge-density waves. I. Critical behavior. *Phys. Rev. B*, 47:11171, 1993.
- [95] A. A. MIDDLETON, O. BIHAM, P. B. LITTLEWOOD et P. SIBANI : Complete mode locking in models of charge-density waves. *Phys. Rev. Lett.*, 68:1586, 1992.
- [96] G. PIACENTE et F. M. PEETERS : Pinning and depinning of a classic quasi-one-dimensional Wigner crystal in the presence of a constriction. *Phys. Rev. B*, 72:205208, 2005.
- [97] A. PERTSINIDIS et X. S. LING : Effects of a random pinning potential on the structure and driven dynamics of two-dimensional colloidal crystals. *Bull. Am. Phys. Soc.*, 46:181, 2001.
- [98] J. CHEN, Y. CAO et Z. JIAO : Dynamics of two-dimensional colloids on a disordered substrate. *Phys. Rev. E*, 69:041403, 2004.
- [99] M.-B. LUO et X HU : Depinning and Creep Motion in Glass States of Flux Lines. *Phys. Rev. Lett.*, 98:267002, 2007.
- [100] Y. CAO, Z. JIAO et H. YING : Numerical study on the dynamics of a driven disordered vortex lattice. *Phys. Rev. B*, 62:4163, 2000.
- [101] A. E. KOSHELEV : Numerical simulation of thermal depinning for a two-dimensional vortex system. *Physica C : Superconductivity*, 198:371, 1992.
- [102] S. BUSTINGORRY, A. B. KOLTON et T. GIAMARCHI : Thermal rounding of the depinning transition. *Eur. Phys. Lett. (EPL)*, 81:26005, 2008.
- [103] J. T. CHAYES, L. CHAYES, D. S. FISHER et T. SPENCER : Finite-Size Scaling and Correlation Lengths for Disordered Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2999, 1986.
- [104] A. A. MIDDLETON et D. S. FISHER : Critical behavior of charge-density waves below threshold : Numerical and scaling analysis. *Phys. Rev. B*, 47:3530, 1993.
- [105] C. R. MYERS et J. P. SETHNA : Collective dynamics in a model of sliding charge-density waves. II. Finite-size effects. *Phys. Rev. B*, 47:11194, 1993.
- [106] U. NOWAK et K. D. USADEL : Influence of temperature on the depinning transition of driven interfaces. *Eur. Phys. Lett. (EPL)*, 44:634, 1998.
- [107] E. OLIVE, J.-C. SORET, P. LE DOUSSAL et T. GIAMARCHI : Numerical Simulation Evidence of Dynamical Transverse Meissner Effect and Moving Bose Glass Phase. *Phys. Rev. Lett.*, 91:037005, 2003.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [108] E. OLIVE et J.-C. SORET : Chaotic Dynamics of Superconductor Vortices in the Plastic Phase. *Phys. Rev. Lett.*, 96:027002, 2006.
- [109] E. OLIVE et J.-C. SORET : Chaos and plasticity in superconductor vortices : Low-dimensional dynamics. *Phys. Rev. B*, 77:144514, 2008.
- [110] E. OLIVE, Y. FILY et J.-C. SORET : Plastic depinning of superconductor vortices. *J. Phys. : Conf. Series*, 150:052201, 2009.
- [111] M. C. FALESKI, M. C. MARCHETTI et A. A. MIDDLETON : Vortex dynamics and defects in simulated flux flow. *Phys. Rev. B*, 54:12427, 1996.
- [112] S. H. STROGATZ, C. M. MARCUS et R. M. WESTERVELT : Simple Model of Collective Transport with Phase Slippage. *Phys. Rev. Lett.*, 61:2380, 1988.
- [113] J. LEVY, M. S. SHERWIN, F. F. ABRAHAM et K. WIESENFELD : Unified model of switching and nonswitching charge-density-wave dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 68:2968, 1992.
- [114] A. MONTAKHAB, J. M. CARLSON et J. LEVY : Mode-locking hysteresis in the globally coupled model of charge-density waves. *Phys. Rev. B*, 50:11227, 1994.
- [115] V. M. VINOKUR et T. NATTERMANN : Hysteretic Depinning of Anisotropic Charge Density Waves. *Phys. Rev. Lett.*, 79:3471, 1997.
- [116] M. C. MARCHETTI, A. A. MIDDLETON, K. SAUNDERS et J. M. SCHWARZ : Driven Depinning of Strongly Disordered Media and Anisotropic Mean-Field Limits. *Phys. Rev. Lett.*, 91:107002, 2003.
- [117] J. M. SCHWARZ et D. S. FISHER : Depinning with dynamic stress overshoots : A hybrid of critical and pseudohysteretic behavior. *Phys. Rev. E*, 67:021603, 2003.
- [118] K. SAUNDERS, J. M. SCHWARZ, M. C. MARCHETTI et A. A. MIDDLETON : Mean-field theory of collective transport with phase slips. *Phys. Rev. B*, 70:024205, 2004.
- [119] P. LE DOUSSAL, M. C. MARCHETTI et K. J. WIESE : Depinning in a two-layer model of plastic flow. *Phys. Rev. B*, 78:224201, 2008.
- [120] M. C. MARCHETTI : Depinning and plasticity of driven disordered lattices. In M.-C. MIGUEL et J. M. RUBII, éditeurs : *Jamming, Yielding, and Irreversible Deformation in Condensed Matter, Lecture Notes in Physics*. Springer Berlin, 2006.
- [121] C. REICHHARDT et C. J. OLSON REICHHARDT : Dynamically induced locking and unlocking transitions in driven layered systems with quenched disorder. *Phys. Rev. B*, 84:174208, 2011.
- [122] P. LE DOUSSAL et K. J. WIESE : How to measure Functional RG fixed-point functions for dynamics and at depinning. *Eur. Phys. Lett. (EPL)*, 77:66001, 2007.
- [123] P. LE DOUSSAL et K. J. WIESE : Driven particle in a random landscape : Disorder correlator, avalanche distribution, and extreme value statistics of records. *Phys. Rev. E*, 79:051105, 2009.



## Résumé :

Cette étude traite du dépiégeage et de la dynamique des systèmes élastiques désordonnés. Ce cadre regroupe une large classe de systèmes allant des interfaces (telles que les parois de domaines dans les systèmes magnétiques ou ferroélectriques) aux systèmes périodiques (comme les réseaux de vortex dans les supraconducteur de type II, les colloïdes ou encore les cristaux de *Wigner*). Dans ces systèmes, la compétition entre l'élasticité de la structure qui veut imposer un ordre parfait et le désordre induit une grande richesse dans le diagramme de phase. L'étude est menée par simulations numériques à grande échelle, dans lesquelles nous nous intéresserons spécifiquement aux réseaux  $2D$  de vortex supraconducteurs. Deux types de dépiégeage sont observés lorsque l'on met en mouvement ces réseaux à l'aide d'une force extérieure : un dépiégeage plastique et un dépiégeage élastique. Nous porterons notre attention sur le dépiégeage élastique obtenu dans le cas d'un piégeage faible. A travers une analyse en loi d'échelle à température nulle et à température finie nous montrons le caractère continu de la transition de dépiégeage au seuil de dépiégeage. Divers exposants critiques sont déterminés dont l'exposant  $\beta$  et  $\delta$  caractérisant la dépendance en force et en température de la vitesse ou bien l'exposant  $\nu$  caractérisant la divergence de la longueur de corrélation du système. Un modèle visco-élastique simple permettant de décrire la plasticité dans les systèmes périodiques évoluant sur un potentiel de piégeage en présence de désordre fort est également développé. Une grande variété de comportements dynamiques, similaires à ceux observés à plus grande échelle dans des systèmes périodiques, peuvent être extraits d'un tel modèle. Un dépiégeage élastique ou plastique est observé, de l'hystérésis est mesurée dans le cas du dépiégeage élastique, et du chaos est détecté pour le dépiégeage plastique.

**Mots clés :** vortex supraconducteurs, réseau de vortex, systèmes élastiques désordonnés, milieu désordonné.

## Abstract :

In this work we study the depinning and the dynamics of disordered elastic systems. This framework encompasses a broad class of systems from interfaces (like magnetic or ferroelectric domains walls) to periodic structures (like vortex lattices in type II superconductor, colloids or *Wigner* crystals). In these systems, the competition between the elasticity of the structure that wants to impose a perfect order and disorder produces a great variety of phases and transitions. The study is conducted by large-scale numerical simulations, in which we focus specifically on  $2D$  superconductor vortex lattices. Two types of depinning are observed when we set in motion these lattices using an external force : a plastic depinning and an elastic depinning. We will focus on the elastic depinning obtained when the pinning is weak. Using a scaling law analysis at both zero and nonzero temperature we show that the depinning transition is continuous near the depinning threshold. Various critical exponent are evaluated such as the  $\beta$  and  $\delta$  exponents characterizing the force and temperature dependances of the velocity or the  $\nu$  exponent characterizing the divergence of the correlation length of the system. A simple viscoelastic model allowing to describe plasticity in periodic structures driven over a strong disordered medium is also developed. A wide variety of dynamical behaviors, similar to those observed on a larger scale in periodic systems, can be extracted from such a model. An elastic or plastic depinning is observed, hysteresis is measured in the case of elastic depinning, while chaos is detected for plastic depinning.

**Keywords :** superconductor vortices, flux line lattice, disordered elastic systems, disordered medium.