



**HAL**  
open science

# Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires. Application aux instruments de musique auto-oscillants

Sami Karkar

► **To cite this version:**

Sami Karkar. Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires. Application aux instruments de musique auto-oscillants. Acoustique [physics.class-ph]. Aix-Marseille Université, 2012. Français. NNT: . tel-00742651

**HAL Id: tel-00742651**

**<https://theses.hal.science/tel-00742651>**

Submitted on 16 Oct 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ  
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR :  
MÉCANIQUE, PHYSIQUE, MICRO ET NANOÉLECTRONIQUE (ED 353)

# THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

Discipline : Acoustique

Soutenue publiquement le 10 janvier 2012 par

**Sami KARKAR**

## Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires

### Application aux instruments de musique auto-oscillants

JURY :	Dr. Joël GILBERT	Président
	Pr. Gaëtan KERSCHEN	Rapporteur
	Dr. Cyril TOUZÉ	Rapporteur
	Pr. José ANTUNES	Examineur
	Pr. Marc MÉDALE	Examineur
	Pr. Bruno COCHELIN	Directeur de thèse
	Dr. Christophe VERGEZ	Co-directeur de thèse



# Résumé

Ces travaux s'articulent autour du calcul des solutions périodiques dans les systèmes dynamiques non linéaires, au moyen de méthodes numériques de continuation.

La recherche de solutions périodiques se traduit par un problème avec conditions aux limites périodiques, pour lequel nous avons implémenté deux méthodes d'approximation : - Une méthode spectrale dans le domaine fréquentiel : l'équilibrage harmonique d'ordre élevé, qui repose sur une formulation quadratique des équations. Nous proposons en outre une formulation originale permettant d'étendre cette méthode aux cas de non-linéarités non rationnelles. - Une méthode pseudo-spectrale par éléments dans le domaine temporel : la collocation à l'aide fonctions polynômiales par morceaux. Ces méthodes transforment le problème continu en un système d'équations algébriques non linéaires, dont les solutions sont calculées par continuation à l'aide de la méthode asymptotique numérique.

L'ensemble de ces outils, intégrés au code de calcul MANLAB et complétés d'une analyse linéaire de stabilité, sont alors utilisés pour l'étude des régimes périodiques d'une classe particulière de systèmes dynamiques non linéaires : les instruments de musique auto-oscillants.

Un modèle physique non-régulier de clarinette est étudié en détail : à partir de la branche de solutions statiques et ses bifurcations, on calcule les différentes branches de solutions périodiques, ainsi que leur stabilité et leurs bifurcations. Ce modèle est ensuite adapté au cas du saxophone, pour lequel on intègre une caractérisation acoustique expérimentale, afin de mieux tenir compte de la géométrie complexe de l'instrument. Enfin, nous étudions un modèle physique simplifié de violon, avec une non-régularité liée frottement de Coulomb. Cette dernière application illustre ainsi la polyvalence des outils développés face aux différents types de non-régularité.



# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>4</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>I Systèmes dynamiques et méthodes numériques</b>	<b>19</b>
<b>1 Systèmes dynamiques</b>	<b>21</b>
1.1 Système dynamique . . . . .	22
1.1.1 Définition . . . . .	22
1.1.2 Trajectoires, solutions . . . . .	22
1.2 Solutions statiques . . . . .	23
1.2.1 Définition . . . . .	23
1.2.2 Branche de solutions statiques . . . . .	23
1.2.3 Stabilité . . . . .	23
1.2.4 Bifurcations des solutions statiques . . . . .	24
1.3 Solutions périodiques . . . . .	26
1.3.1 Définition . . . . .	26
1.3.2 Branche de solutions périodiques . . . . .	26
1.3.3 Stabilité . . . . .	26
1.3.4 Analogie avec les systèmes discrets ou « cartes » . . . . .	28
1.3.5 Bifurcations . . . . .	28
1.4 Bifurcations des régimes instables . . . . .	29
1.4.1 Solutions statiques . . . . .	29
1.4.2 Solutions périodiques . . . . .	29
1.5 Systèmes non réguliers . . . . .	30
<b>2 Méthodes numériques de continuation</b>	<b>31</b>
2.1 La continuation . . . . .	32
2.1.1 Exemple simple . . . . .	32
2.2 Méthodes prédicteur-correcteur . . . . .	32
2.2.1 Principe . . . . .	32
2.2.2 Prédicteur tangent . . . . .	33
2.2.3 Correction . . . . .	34
2.2.4 Itération . . . . .	34

2.2.5	Pilotage des méthodes MPC . . . . .	35
2.3	Méthode Asymptotique Numérique . . . . .	35
2.3.1	Principe . . . . .	36
2.3.2	Systèmes linéaires en cascade . . . . .	36
2.3.3	Taille du pas . . . . .	37
2.3.4	Itération . . . . .	38
2.3.5	Correction éventuelle . . . . .	39
2.4	MANLAB : une implémentation originale de la MAN . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Méthodes de discrétisation des solutions périodiques</b>	<b>41</b>
3.1	Méthodes de discrétisation . . . . .	42
3.1.1	Du continu au discret . . . . .	42
3.1.2	Méthodes spectrales . . . . .	43
3.2	Méthode de l'Équilibrage Harmonique . . . . .	44
3.2.1	Fonctions de représentation . . . . .	45
3.2.2	Fonctions test . . . . .	45
3.2.3	Équation de phase . . . . .	45
3.2.4	Systèmes quadratiques . . . . .	46
3.2.5	Cas particulier des systèmes non autonomes . . . . .	46
3.2.6	Implémentation dans MANLAB . . . . .	47
3.3	Collocation orthogonale aux points de Gauss . . . . .	47
3.3.1	Fonctions de représentation . . . . .	47
3.3.2	Base de projection . . . . .	48
3.3.3	Implémentation dans MANLAB . . . . .	49
3.A	Annexes . . . . .	53
3.A.1	Matrice A . . . . .	53
3.A.2	Matrice B . . . . .	54
3.A.3	Matrice B' . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Optimisation des temps de calcul</b>	<b>55</b>
4.1	Temps de calcul peu optimisés . . . . .	56
4.1.1	Calcul de la matrice tangente . . . . .	56
4.2	Compilation d'une partie du code . . . . .	58
4.2.1	Principe . . . . .	58
4.2.2	Performances . . . . .	59
4.3	Approche tenseurs . . . . .	59
4.3.1	Principe . . . . .	60
4.3.2	Calcul des tenseurs L0, L, et Q . . . . .	60
4.3.3	Forme tensorielle des équations continues . . . . .	60
4.3.4	Tenseurs pour l'équilibrage harmonique . . . . .	61
4.3.5	Tenseurs pour la collocation polynômiale . . . . .	63
4.3.6	Écriture matricielle . . . . .	65
4.4	Comparaison des approches . . . . .	66

<b>5</b>	<b>Traitement des non-linéarités non polynômiales</b>	<b>69</b>
5.1	Introduction . . . . .	71
5.2	An introductive example . . . . .	72
5.2.1	First-order recast . . . . .	72
5.2.2	Quadratic recast of the exponential function . . . . .	72
5.2.3	Applying the harmonic balance method to the ODEs . . . . .	73
5.2.4	Recast of the non linear algebraic equation . . . . .	74
5.2.5	Periodic solutions of the regularised vibro-impact . . . . .	75
5.3	General treatment of nonlinear functions . . . . .	76
5.3.1	First order derivative . . . . .	76
5.3.2	Second order derivative . . . . .	76
5.4	Recast of a few common non-polynomial nonlinearities . . . . .	77
5.4.1	Natural logarithm . . . . .	77
5.4.2	Non-integer power . . . . .	77
5.4.3	Trigonometric functions . . . . .	77
5.5	Periodic solutions of the nonlinear pendulum . . . . .	78
5.6	Conclusion . . . . .	80
5.A	Vibro-impact system . . . . .	80
5.A.4	Model . . . . .	80
5.A.5	Recast of conservative systems . . . . .	81
5.B	Quadratic framework . . . . .	81
5.C	Extended framework . . . . .	81
5.C.6	Series computation . . . . .	81
5.C.7	Implementation in MANLAB . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Comparaison entre HBM et collocation</b>	<b>85</b>
6.1	Système non linéaire à deux ressorts . . . . .	86
6.1.1	Modélisation . . . . .	86
6.1.2	Paramètre de continuation . . . . .	87
6.1.3	Forme quadratique du premier ordre . . . . .	87
6.1.4	Étude de convergence . . . . .	88
6.1.5	Continuation des solutions périodiques . . . . .	89
6.2	Le système vibro-impact régularisé . . . . .	93
6.2.1	Modélisation . . . . .	93
6.2.2	Paramètre de continuation . . . . .	93
6.2.3	Étude de convergence . . . . .	93
6.2.4	Continuation des solutions périodiques . . . . .	99
6.3	Conclusion . . . . .	101
<b>II</b>	<b>Application à l'acoustique musicale</b>	<b>103</b>
<b>7</b>	<b>Modélisation des instruments de musique à anche simple</b>	<b>105</b>
7.1	Principe général de fonctionnement . . . . .	106
7.2	Mécanique de l'anche . . . . .	106
7.2.1	Modélisation du contact . . . . .	107
7.3	Acoustique du résonateur . . . . .	108

7.3.1	Modèle analytique du cylindre . . . . .	109
7.3.2	Modèle analytique du tronc de cône . . . . .	109
7.3.3	Caractérisation expérimentale . . . . .	109
7.3.4	Décomposition modale . . . . .	110
7.3.5	Équations dans le domaine temporel . . . . .	110
7.4	Couplage . . . . .	111
7.5	Équations adimensionnées . . . . .	112
7.6	Reformulation quadratique . . . . .	112
7.6.1	Équation du débit . . . . .	113
7.6.2	Effort de contact . . . . .	113
7.6.3	Système complet . . . . .	113
<b>8</b>	<b>Régimes périodiques de la clarinette</b>	<b>115</b>
8.1	Paramètres et régularisation du modèle . . . . .	116
8.1.1	Nombre de modes acoustiques . . . . .	116
8.1.2	Valeurs des paramètres . . . . .	117
8.2	Branche statique . . . . .	118
8.2.1	Calcul analytique . . . . .	118
8.2.2	Continuation de point fixe : équilibrage harmonique à l'ordre 0	120
8.2.3	Calcul à l'aide du logiciel AUTO . . . . .	121
8.2.4	Retour sur la modélisation du contact . . . . .	122
8.3	Régimes périodiques . . . . .	122
8.3.1	Premiers résultats . . . . .	122
8.3.2	Problèmes numériques liés au contact . . . . .	123
8.3.3	Influence des régularisations sur la stabilité . . . . .	127
8.3.4	Estimation du nombre d'harmoniques nécessaires . . . . .	128
8.3.5	Calcul du premier registre . . . . .	130
8.3.6	Stabilité . . . . .	130
8.4	Autres régimes périodiques . . . . .	139
<b>9</b>	<b>Régimes périodiques du saxophone</b>	<b>145</b>
9.1	Impédance d'entrée . . . . .	145
9.2	Rappels sur le modèle . . . . .	146
9.3	Branche statique : stabilité et bifurcations . . . . .	147
9.4	Régimes périodiques . . . . .	148
9.4.1	Première branche périodique . . . . .	148
9.4.2	Diagramme de bifurcation en pression et stabilité . . . . .	148
9.4.3	Fréquence de jeu . . . . .	150
<b>10</b>	<b>Régimes périodiques du violon</b>	<b>153</b>
10.1	Modèle simplifié de violon . . . . .	153
10.1.1	Régularisation du frottement de Coulomb . . . . .	154
10.1.2	Système du premier ordre . . . . .	156
10.1.3	Formulation quadratique . . . . .	156
10.1.4	Analyse du régime statique . . . . .	157
10.2	Analyse numérique . . . . .	158
10.2.1	Adimensionnement . . . . .	158

10.2.2	Branche statique . . . . .	159
10.3	Régime périodique du violon . . . . .	160
10.3.1	Calcul par équilibrage harmonique et MAN . . . . .	160
10.3.2	Calcul par collocation . . . . .	161
<b>11</b>	<b>Seuils d'oscillation de la clarinette : une approche par continuation</b>	<b>165</b>
11.1	Introduction . . . . .	167
11.2	Physical model of single reed instruments . . . . .	168
11.2.1	Dynamics of the reed . . . . .	168
11.2.2	Acoustics of the resonator . . . . .	169
11.2.3	Nonlinear coupling . . . . .	170
11.2.4	Reed motion induced flow . . . . .	170
11.2.5	Global flow . . . . .	170
11.2.6	Dimensionless model . . . . .	171
11.3	Methods : Theoretical principles and numerical tools . . . . .	172
11.3.1	Branch of static solutions . . . . .	172
11.3.2	Continuation of static solutions . . . . .	172
11.3.3	Hopf Bifurcation . . . . .	172
11.3.4	Branch and continuation of Hopf bifurcations . . . . .	173
11.4	Results . . . . .	173
11.4.1	Reed-bore interaction . . . . .	176
11.4.2	Simultaneous influence of reed damping and modal frequency .	177
11.4.3	Influence of the control parameter $\zeta$ . . . . .	183
11.4.4	Concurrent influence of $q_r$ and $\zeta$ . . . . .	186
11.4.5	Influence of the reed motion induced flow . . . . .	186
11.5	Conclusion . . . . .	189
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>193</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>197</b>



# Avant-propos

Ce document présente les travaux que j'ai réalisés au cours de mes trois années de thèse au sein de l'équipe Signaux Sonores et Musicaux d'une part, et de l'équipe Méthodes Numériques d'autre part, au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA), unité propre de recherche du CNRS. Ces travaux ont été dirigés conjointement par Bruno Cochelin et Christophe Vergez. Ils ont été financés à parts égales par le CNRS et la DGA.

“**IL** AVAIT DIT : – Tel jour cet astre reviendra.–  
[...]  
Il mourut.  
L’ombre est vaste et l’on n’en parla plus  
[...]  
On oublia le nom,  
L’homme, tout ; ce rêveur digne du cabanon,  
Ces calculs poursuivant, dans leur vagabondage  
Des astres qui n’ont point d’orbite et n’ont point d’âge,  
Ces Soleils à travers les chiffres aperçus ;  
Et la ronce se mit à pousser là-dessus. [...]  
On vivait. [...]  
Et depuis bien longtemps personne ne pensait  
Au pauvre vieux rêveur enseveli sous l’herbe.  
Soudain, un soir, on vit la nuit noire et superbe, [...]  
Blêmir confusément, puis blanchir, et c’était  
Dans l’année annoncée et prédite, et la cime  
Des monts eut un reflet étrange de l’abîme  
Comme lorsqu’un flambeau rôde derrière un mur,  
Et la blancheur devint lumière, et dans l’azur  
La clarté devint pourpre, et l’on vit poindre, éclore,  
Et croître on ne sait quelle inexprimable aurore  
Qui se mit à monter dans le haut firmament  
Par degrés et sans hâte et formidablement ; [...]  
Et soudain, comme un spectre entre en une maison,  
Apparut, par-dessus le farouche horizon,  
Une flamme emplissant des millions de lieues,  
Monstrueuse lueur des immensités bleues,  
Splendide au fond du ciel brusquement éclairci ;  
Et l’astre effrayant dit aux hommes : « Me voici ! »,,

Victor Hugo, « La Comète », La légende des siècles.

# Introduction Générale

## Périodicité et oscillations spontanées

Qu'est-ce qu'un phénomène périodique ? Est-ce, comme on le présente habituellement, « un phénomène qui se répète à intervalles de temps réguliers, et dont on peut mesurer la principale caractéristique : la période » ? Ou est-ce le phénomène périodique qui permet justement, par sa période, de *mesurer* le temps ?

De l'apparition tous les 76 ans de la comète de Halley aux oscillations à 4MHz d'un cristal de quartz, en passant par le rythme circadien des cyanobactéries, ou encore les différents cycles saisonniers du climat... Toutes ces horloges sont des oscillateurs qui mesurent le temps. Pour le physicien, ce sont des systèmes dynamiques.

Dans certains cas, les oscillations apparaissent spontanément, sans qu'aucun agent extérieur ne viennent imposer cette périodicité au système : on parle de système *autonome*. Ainsi, un objet cylindrique soumis à un écoulement uniforme provoque un sillage oscillant (allée de von Karmann) qui, en retour, interagit avec l'objet qui se met alors à osciller. De même, un frein à disque automobile soumis à un effort constant peut faire naître, du frottement, une oscillation audible : le crissement. C'est par ailleurs le même phénomène qui explique le son d'un violon dont on frotte une corde avec un archet. Enfin, une clarinette est capable d'émettre une note, c'est-à-dire une oscillation de pression, alors que le souffle du musicien est continu.

Dans tous ces exemples, l'apparition des oscillations est spontanée. Et dans chacun de ces exemples, c'est un phénomène *non linéaire* qui permet de l'expliquer. Ainsi, le caractère non linéaire joue un rôle prépondérant dans l'étude des oscillateurs, comme le sont les instruments de musique auto-oscillants.

## De la physique des instruments de musique...

Un instrument de musique peut se décomposer en un phénomène d'excitation (souffle du musicien dans l'embouchure d'un instrument à vent, frottement de l'archet sur la corde d'un violon, impact d'une baguette sur une peau...), couplé à un phénomène de résonance.

Le type d'excitation permet de distinguer deux catégories d'instruments :

- les instruments à oscillations libres, dont l'excitation est de type impulsif (percussions, cordes frappées ou pincées) ;
- les instruments à oscillations auto-entretenues, ou encore *auto-oscillants*, dont l'excitation est continue (comme les vents et les cordes frottées).

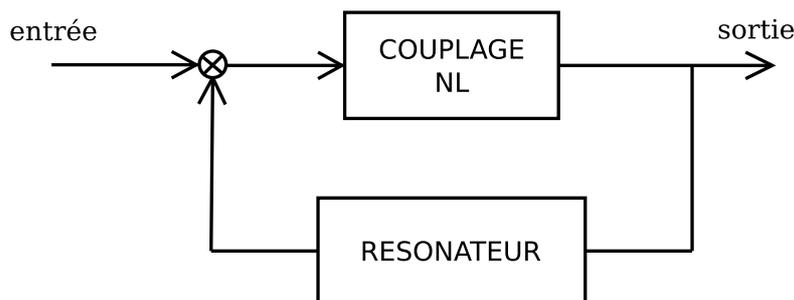


FIG. 1 – Schéma de principe du fonctionnement d'un instrument auto-oscillant.

La partie résonante de l'instrument est elle-même composée de deux éléments : le résonateur qui réalise un filtrage sélectif de cette excitation (colonne d'air, corde vibrante, caisse de résonance), et un élément qui permet de transmettre les vibrations dans le milieu ambiant sous forme de rayonnement acoustique (pavillon, table d'harmonie, membrane).

Les instruments auto-oscillants fonctionnent donc comme un oscillateur classique : l'énergie est injectée sous forme quasi-statique (à l'échelle de temps d'une note), un couplage à l'aide d'un élément non linéaire permet de transformer une partie de cette énergie sous forme d'oscillations, et un élément linéaire fortement résonant permet de « sélectionner » une fréquence particulière de fonctionnement (voir la figure 1).

Du point de vue de la physique, ce type d'instrument peut être modélisé par un système dynamique non linéaire. L'étude du régime statique (régime dans lequel aucune note n'est émise) est souvent possible analytiquement, et dans certains cas, le seuil d'instabilité de ce régime statique peut également être calculé analytiquement. Par contre, l'étude des régimes périodiques demande quant à elle, soit des hypothèses extrêmement simplificatrices afin de pouvoir être réalisée de manière analytique, soit l'aide d'outils numériques performants.

La clarinette, par exemple, a été l'objet de nombreuses études. D'une part sur la modélisation des différents éléments : le couplage aérodynamique du jet dans le canal d'anche (notamment par Hirschberg [42]), la mécanique de l'anche et de son contact avec le bec (voir Avanzini et van Walstijn [5], Dalmont *et al.* [20], Ducasse [28], van Walstijn et Avanzini [85]), ou l'acoustique du résonateur (Chaigne et Kergomard [11], voir chap.5 pp202–223 et chap.7 pp282–332). Et d'autre part sur le fonctionnement proprement dit du système complet : les interactions entre l'anche (résonateur mécanique, mais aussi acteur du couplage) et la colonne d'air (le résonateur acoustique). On citera notamment les travaux fondateurs de Backus [6], Benade et Gans [8], Wilson et Beavers [88], ou plus récemment Dalmont *et al.* [17, 18, 19], Grand *et al.* [37], Nederveen [63], et enfin les derniers travaux de Ricaud *et al.* [68], Silva *et al.* [79] au LMA.

Dans la thèse de Fabrice Silva [75], le modèle du résonateur et le couplage avec l'anche deviennent trop complexes pour résoudre analytiquement l'équation caractéristique permettant de déterminer le seuil d'oscillation. Or, des phénomènes subtils comme l'inertie de l'anche ou encore le débit pulsé par l'anche (très souvent négligé)

peuvent avoir une influence non négligeable sur le seuil d'oscillation ou la justesse de la note émise après ce seuil. Il n'est donc pas toujours souhaitable de simplifier d'avantage le modèle. On peut en revanche résoudre le problème à l'aide de méthodes numériques.

### ... aux méthodes numériques

Le premier outil numérique pour étudier les systèmes dynamiques est certainement la simulation, par intégration temporelle des équations. On peut citer par exemple les thèses récentes de Debut [22], Ducasse [28], Silva [75], ou les travaux de Guillemain *et al.* [38]. On soulignera à cette occasion une des principales contributions de Silva avec le logiciel MOREESC (Silva [76]). C'est également la méthode employée extensivement dans une étude récente de Takahashi *et al.* [81] sur les différents régimes périodiques et non périodiques de la clarinette. La communauté des mathématiques appliquées a par ailleurs développé de nombreux outils numériques pour l'intégration temporelle : citons par exemple la ODE SUITE de Shampine et Reichelt [74] sous Matlab, ou le ODEPACK de Hindmarsh [41] en Fortran.

Parallèlement, une méthode fréquentielle issue de l'étude des circuits électriques (voir Nakhla et Vlach [61]) a été adoptée au sein de la communauté scientifique de l'acoustique musicale : l'équilibrage harmonique (*Harmonic Balance Method*, ou HBM). Cette méthode permet de calculer une et une seule période d'un régime périodique, sans avoir à calculer toute la partie transitoire, comme dans le cas des simulations temporelles.

Deux problèmes se posent alors. D'abord, le spectre de ces sons étant relativement riche, il faut utiliser un nombre d'harmoniques suffisamment élevé, ce qui donne des systèmes à résoudre de taille conséquente. Ensuite, on souhaite étudier comment évolue cette solution lorsqu'un des paramètres de contrôle du modèle varie : par exemple, comment évolue le spectre de la clarinette lorsque le musicien souffle de plus en plus fort ?

Le premier problème est d'ordre pratique : il faut un outil suffisamment rapide et efficace pour traiter des systèmes de grande taille en un temps raisonnable. Initiée dans le domaine par Schumacher [70], puis reprise par Gilbert *et al.* [35], la formulation originale de l'HBM reste toutefois limitée à peu d'harmoniques. Kergomard *et al.* [51] ont proposé une version analytique approchée de l'HBM avec un ordre de troncature variable. Puis plus récemment, l'outil numérique HARMBAL (Farner *et al.* [30]) a été développé au LMA et permet d'atteindre des nombres d'harmoniques plus élevés. Toutefois, une étude paramétrique reste relativement coûteuse avec ce type de logiciel.

Le second problème évoqué suggère alors de résoudre les équations de l'HBM par une méthode particulière : la continuation. Cette méthode consiste à suivre l'évolution *continue* des solutions d'un système d'équations (pas forcément issues de l'HBM) lorsque l'on fait varier un des paramètres. Une approche analytique est rarement possible, en particulier en présence de non-linéarités, et on a le plus souvent recours à des outils numériques spécialisés. Divers logiciels de continuation ont ainsi été développés par la communauté, parmi lesquels on peut citer deux des plus utilisés aujourd'hui :

- AUTO (écrit par Doedel et Oldeman [27], dont la première version remonte au début des années 1980), qui utilise la collocation orthogonale associée à une méthode prédicteur-correcteur (prédicteur tangent et correcteur Newton-Chord) avec un schéma adaptatif de taille de pas ;
- MATCONT (écrit par Dhooge *et al.* [23]), un package Matlab, qui utilise également la collocation orthogonale et là encore une méthode prédicteur-correcteur (prédicteur tangent et correcteur Newton approché).

Ces deux outils sont aujourd’hui utilisés dans de nombreux domaines d’applications (de la biochimie à la dynamique planétaire, en passant par les circuits électroniques, voir les exemples proposés dans Doedel et Oldeman [27]), mais souffrent de quelques défauts. Ils sont peu conviviaux et nécessitent une certaine expertise pour pouvoir être utilisés convenablement, étant donné le nombre important de paramètres à régler. Par ailleurs, MATCONT cumule cet inconvénient avec un temps d’exécution relativement médiocre (du moins, comparé à AUTO, dont les routines écrites en Fortran et parallélisées sont extrêmement efficaces). Ainsi, certaines équipes de recherche développent leurs propres codes de continuation, associés à l’HBM, la collocation, ou encore le shooting (voir par exemple Peeters *et al.* [65]).

Récemment, la communauté de la mécanique des structures a mis au point des méthodes numériques alternatives aux prédicteurs-correcteurs. Parmi ces nouvelles méthodes relativement performantes, on peut notamment citer la méthode à grand incrément de temps LATIN (due à Ladevèze [54]) développée à Cachan, et la Méthode Asymptotique Numérique (due à Damil, Potier-Ferry *et al.*, détaillée dans l’ouvrage Cochelin *et al.* [15]) développée à Metz ainsi qu’au LMA.

Au cours de sa thèse, Rémi Arquier a développé en 2006 la première version du logiciel MANLAB (Arquier [4]), sur les bases des travaux de Cochelin [14]. Ce logiciel interactif de continuation est basé sur la MAN et programmé dans l’environnement MATLAB. Outre une interface graphique plus conviviale, ce logiciel tire parti de la facilité de pilotage et la robustesse de la continuation par la MAN. Arquier *et al.* [3] ont également montré que l’étude des régimes périodiques pouvait être réalisée avec MANLAB en lui associant un schéma d’intégration temporelle.

En 2008, Cochelin et Vergez [16] ont montré la possibilité d’utiliser l’HBM associée à MANLAB pour le calcul des régimes périodiques d’une clarinette, avec un nombre arbitrairement élevé d’harmoniques. C’est ici que les méthodes numériques développées au sein du laboratoire rejoignent les travaux menés en acoustique musicale sur les régimes périodiques des instruments de musique. Ces travaux le point de départ de la thèse présentée dans ce document.

Enfin, les modèles d’instruments de musique comportent des non-régularités (contact entre deux solides, frottement de Coulomb...) auxquelles les outils numériques traditionnels ne sont pas toujours adaptés. Nous avons choisi de résoudre ce problème par régularisation : les systèmes non réguliers sont remplacés par des systèmes réguliers mais avec des non-linéarités très fortes (systèmes dit « raides »). Il faut alors s’assurer que les méthodes développées soient robustes face à de telles non-linéarités.

## Objectifs et organisation du document

Ainsi replacés dans leur contexte, les travaux développés dans cette thèse de doctorat s'articulent donc autour de deux axes principaux : d'une part l'amélioration des méthodes numériques ainsi que des outils existants (implémentation, efficacité,...), afin d'être en mesure de traiter les problèmes issus de l'acoustique musicale ; d'autre part, proposer une approche originale de l'étude des instruments de musique auto-oscillants basée sur la continuation. Le document est donc structuré en deux parties, la première sur les méthodes numériques et la seconde sur les instruments auto-oscillants.

Aux premier et deuxième chapitres, nous rappelons les concepts de base sur les systèmes dynamiques et sur la théorie des bifurcations d'une part, ainsi que sur la continuation d'autre part. En particulier, nous présentons la méthode asymptotique numérique et l'implémentation de cette méthode dans le logiciel MANLAB. C'est sur cette base que nous présentons, dans la suite, notre travail.

Au chapitre 3, nous présentons d'un point de vue théorique deux méthodes de calcul des solutions périodiques, l'équilibrage harmonique et la collocation orthogonale, et en proposons une implémentation originale au sein de MANLAB. Au chapitre 4 nous proposons deux stratégies d'optimisation du temps de calcul, afin de pouvoir traiter les systèmes de grande taille issus de ces deux méthodes. Puis, on propose au chapitre 5, sous forme d'article, une extension de la méthode pour les non-linéarités non polynômiales. Enfin, les deux méthodes implémentées dans MANLAB sont l'objet d'une étude comparative au chapitre 6, où l'on s'intéressera particulièrement à leur robustesse vis à vis des systèmes non réguliers.

Dans la seconde partie du document, nous revenons dans un premier temps sur les modèles physiques d'instrument à anche simple au chapitre 7, afin d'exposer le modèle utilisé. Nous présentons ensuite nos résultats sur les régimes périodiques de la clarinette au chapitre 8, puis du saxophone au chapitre 9. Un exemple d'application à un modèle simplifié de violon est proposé au chapitre 10. Enfin, une étude multi-paramétrique du seuil d'oscillation de la clarinette est proposée au dernier chapitre sous forme d'article.



# Première partie

## Systemes dynamiques non linéaires et méthodes numériques associées



# Chapitre 1

## Les systèmes dynamiques non linéaires

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Système dynamique</b>	<b>22</b>
1.1.1	Définition	22
1.1.2	Trajectoires, solutions	22
<b>1.2</b>	<b>Solutions statiques</b>	<b>23</b>
1.2.1	Définition	23
1.2.2	Branche de solutions statiques	23
1.2.3	Stabilité	23
1.2.4	Bifurcations des solutions statiques	24
<b>1.3</b>	<b>Solutions périodiques</b>	<b>26</b>
1.3.1	Définition	26
1.3.2	Branche de solutions périodiques	26
1.3.3	Stabilité	26
1.3.4	Analogie avec les systèmes discrets ou « cartes »	28
1.3.5	Bifurcations	28
<b>1.4</b>	<b>Bifurcations des régimes instables</b>	<b>29</b>
1.4.1	Solutions statiques	29
1.4.2	Solutions périodiques	29
<b>1.5</b>	<b>Systèmes non réguliers</b>	<b>30</b>

---

### Introduction

Loin de vouloir couvrir le vaste champ des systèmes dynamiques non linéaires, l'objectif de ce premier chapitre est de poser les quelques bases nécessaires à la compréhension de ce document. Il s'agit en ce sens d'un chapitre bibliographique, bien qu'il ne s'agisse en aucun cas d'une étude bibliographique extensive.

Pour une présentation plus complète, le lecteur est renvoyé à la littérature classique sur le sujet, parmi laquelle on peut citer les ouvrages de Bergé *et al.* [9], Nayfeh et Balachandran [62], Perko [67], Wiggins [87].

## 1.1 Système dynamique

### 1.1.1 Définition

Nous nous intéressons ici, et dans à peu près tout ce qui suit, aux systèmes continus, déterministes, et de type causal, décrits par un vecteur d'état  $x \in \mathbb{R}^n$  dont l'évolution obéit à une loi de la forme :

$$x' = f(x, \lambda), \quad (1.1)$$

où le signe ' signifie la dérivée par rapport à une variable indépendante  $t \in \mathbb{R}$  (souvent amenée à représenter le temps),  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état (i.e. ses composantes sont les variables d'état du système),  $\lambda \in \mathbb{R}^p$  est un ensemble de  $p$  paramètres scalaires, et  $f$  est une application de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Les éventuelles propriétés particulières de  $f$  permettent de définir le type de système dynamique dont il s'agit. Par exemple, si  $f$  est non linéaire et non régulière, on parlera de système dynamique non linéaire et non régulier. Dans ce qui suit, sauf mention contraire, on supposera  $f$  non linéaire mais régulière (au moins  $C^1$ ).

La dépendance de  $f$  vis-à-vis de  $t$  n'est pas nécessairement explicite : elle peut par exemple intervenir uniquement à travers la dépendance en  $x$ . On parlera dans ce cas de système autonome. D'ailleurs, un système non autonome (parfois qualifié de *forcé*) peut se ramener à un système autonome par ajout du temps  $t$  aux variables d'état, et de l'équation :  $t' = 1$ .

### 1.1.2 Trajectoires, solutions

Une trajectoire  $x(t)$  de ce système est une application de  $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$x : \begin{array}{l} \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ t \rightarrow x(t), \end{array}$$

qui vérifie à tout instant  $t \in \mathbf{I}$  la relation (1.1). C'est en d'autres termes une *solution* des équations du système<sup>a</sup>.

#### Existence et unicité

La question de l'existence et de l'unicité d'une solution dépend de conditions sur  $f$ . Notamment, un résultat majeur (voir Perko [67]) est le suivant, pour  $\lambda$  fixé :

**Théorème** (Existence et Unicité des solutions). *Si  $f$  est  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) dans un voisinage  $\mathcal{V}(x_0)$ , alors il existe un réel  $a > 0$  tel que le problème :*

$$\begin{array}{l} x' = f(x, \lambda) \\ x(0) = x_0 \end{array}$$

*admet une solution unique  $x(t)$  sur  $[-a, a]$ .*

---

<sup>a</sup>En toute rigueur il faudrait noter une trajectoire  $(x(t), x_0)$ , de manière à ce qu'elle soit définie comme la solution de l'équation d'évolution qui passe en  $x_0$  à  $t=0$ .

L'existence et l'unicité d'une solution, dans le cas où l'application  $f$  n'est pas continûment différentiable, restent des problèmes ouverts. Un cas particulier, celui où la fonction  $f$  et sa matrice jacobienne sont Lipschitziennes<sup>b</sup>, est toutefois résolu : le théorème des fonctions implicites peut être appliqué, et on retrouve les résultats d'existence et d'unicité.

On parlera indistinctement dans la suite de la *trajectoire*  $x(t)$ , au sens du trajet parcouru dans l'espace des phases au cours du temps, ou de la solution  $x(t)$  (sous-entendu : des équations du système).

## 1.2 Solutions statiques

### 1.2.1 Définition

Une solution statique (ou point d'équilibre, ou encore point fixe) est une solution stationnaire du système (1.1), c'est-à-dire une solution indépendante du temps, pour une valeur particulière des paramètres. Ainsi  $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  est un point fixe de (1.1) si et seulement si :

$$f(x_0, \lambda_0) = 0. \quad (1.2)$$

Par abus de langage, on parlera dans la suite de solution statique (ou point d'équilibre) *du système*, ou de point fixe *de*  $f$ .

### 1.2.2 Branche de solutions statiques

Un résultat très important, que permet d'établir le théorème des fonctions implicites (voir notamment Doedel [26], di Bernardo *et al.* [24], p.67), est le suivant :

**Théorème** (Existence d'une branche de solutions statiques). *Si*

- $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  est un point fixe de  $f$
  - $f$  est continûment différentiable dans un voisinage de  $x_0$ ,
  - la matrice jacobienne de  $f : J = [\partial f_i / \partial x_j]$  prise en  $x_0$  est inversible,
- alors il existe une fonction unique  $x(\lambda)$  telle que

- $x(\lambda_0) = x_0$ ,
- $f(x(\lambda), \lambda) = 0$  pour tout  $\lambda$  dans un voisinage de  $\lambda_0$ .

On appelle alors  $(x(\lambda), \lambda)$  une *branche de solutions statiques*. C'est la branche qui passe par  $(x_0, \lambda_0)$ . Elle existe tant que  $f$  est continûment dérivable et  $J$  inversible.

### 1.2.3 Stabilité

Dans ce qui suit, on fixe  $\lambda = \lambda_0$ , et on omettra alors la dépendance en  $\lambda$  afin d'alléger les notations.

---

<sup>b</sup>Une application  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite  $k$ -Lipschitzienne,  $k \in \mathbb{R}_+^*$ , si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

On détermine la *stabilité asymptotique* d'un point fixe  $x_0$  en étudiant le système linéarisé autour de ce point. Il s'agit donc d'une analyse linéaire (locale) de stabilité.

Considérons une solution  $x(t)$  dans un voisinage de  $x_0$  :  $x(t) = x_0 + y(t)$  (où  $|y(0)| = |y_0| \ll |x_0|$ ), et effectuons un développement en série de Taylor de  $f$  au point  $x_0$ , à l'ordre 1 en  $y(t)$  :

$$x'(t) = f(x_0) + J(x_0, \lambda_0)y(t) + \mathcal{O}(|y(t)|^2) \quad (1.3)$$

où  $J(x_0, \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \lambda_0)$  est la matrice jacobienne de la fonction  $f$  prise au point  $(x_0, \lambda_0)$ , qui est une matrice constante, et  $|\cdot|$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

En utilisant le fait que  $f(x_0) = 0$ , et en supposant la perturbation  $y(t)$  suffisamment petite (au moins au voisinage de  $t = 0$ ) pour négliger les termes d'ordre supérieurs, on obtient le système linéarisé :

$$y' = J(x_0, \lambda_0)y. \quad (1.4)$$

Un tel système linéaire est directement intégrable, et son unique solution est :

$$y(t) = e^{J(x_0, \lambda_0)t}y_0. \quad (1.5)$$

Il est alors évident que les valeurs propres de  $J(x_0, \lambda_0)$  jouent un rôle prépondérant :

- soit toutes les valeurs propres de  $J(x_0, \lambda_0)$  ont une partie réelle strictement négative, et (1.5) implique que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$  : le point fixe  $x_0$  est stable ;
- soit une valeur propre au moins de  $J(x_0, \lambda_0)$  a une partie réelle strictement positive, et alors la perturbation  $y$  est amplifiée au cours du temps : le point fixe  $x_0$  est instable.

Ainsi, toute l'information sur la stabilité asymptotique d'un point fixe est contenue dans le spectre de la matrice jacobienne de  $f$  calculée en ce point.

**Remarque** : pour chaque solution stationnaire, les coefficients de la matrice jacobienne de  $f$  étant réels, son spectre ne contient que des valeurs réelles ou des paires de complexes conjugués.

### 1.2.4 Bifurcations des solutions statiques

Le terme *bifurcation* est généralement défini (de manière assez vague!) comme un changement radical de comportement du système étudié. En ce qui concerne les points d'équilibres, un changement de stabilité lors de la variation d'un paramètre est une bifurcation. En effet, l'analyse linéaire de stabilité nous a permis de montrer que :

- dans le domaine où le point fixe  $x(\lambda)$  est stable, toute trajectoire passant proche de  $x(\lambda)$  converge vers ce point ;
- dans le domaine où le point fixe  $x(\lambda)$  est instable, toute trajectoire passant proche de  $x(\lambda)$  s'éloigne de ce point

Le comportement du système est alors qualitativement très différent dans les deux cas.

Le long d'une branche de solutions stationnaires, la matrice  $J(x(\lambda), \lambda) = J(\lambda)$  peut évidemment varier (continûment), et ses valeurs propres évoluent (également de manière continue). On considère alors le cas particulier où la partie réelle d'une ou plusieurs des valeurs propres de  $J$  s'annule pour une valeur particulière  $\lambda^*$ . On notera  $x^* = x(\lambda^*)$  ce point critique, que l'on appellera bifurcation.

### Un seul zéro

Si une seule valeur propre de  $J(\lambda)$  a une partie réelle qui s'annule en  $\lambda^*$ , alors il s'agit nécessairement d'une valeur propre réelle, et elle vaut zéro en ce point. Dans ce cas plusieurs scénarios sont possibles, en fonction du nombre de solutions statiques (pour une valeur donnée du paramètre  $\lambda$ ) avant et après la bifurcation :

- passage de deux à zéros solutions statiques : la branche de solutions statiques effectue un « virage » avant de revenir en arrière avec changement de stabilité, on qualifie alors la bifurcation de *point limite*, car elle correspond à une valeur extrême de  $\lambda$  (on parle également de bifurcation noeud-col) ;
- nombre de solutions statiques inchangé : deux branches de solutions statiques (l'une stable, l'autre non) se croisent au point de bifurcation et « échangent » leur stabilité, on parle alors de bifurcation *transcritique* ;
- passage de une à trois solutions statiques : une branche stable de solutions statiques est déstabilisée au passage du point critique par l'apparition de deux nouvelles branches stables, on parle alors de bifurcation *fourche*.

Le type de bifurcation, parmi les trois possibles dans le cas présent, peut être déterminé à partir des dérivées d'ordres supérieurs de  $f$  par rapport à  $x$ . Toutefois, nous laissons ici de côté ces considérations et renvoyons le lecteur aux ouvrages de références déjà mentionnés pour plus de détails à ce sujet.

### Un couple de valeurs propres imaginaires pures conjuguées

Si un (et un seul) couple de valeurs propres complexes conjuguées de  $J(\lambda)$  a sa partie réelle qui s'annule en  $\lambda^*$ , alors il s'agit d'une *bifurcation de Hopf* (parfois nommée Andronov-Hopf, ou encore Poincaré-Andronov-Hopf, selon les auteurs). Dans ce cas, la branche de solution statique devient instable au passage de cette bifurcation, et les trajectoires de phases au-delà du point critique ont une forme de spirale divergente (centrée sur le point d'équilibre instable), et peuvent tendre vers un *cycle limite*, qui est une solution périodique.

Deux scénarios sont ici possibles :

- les solutions périodiques au voisinage immédiat de la bifurcation sont asymptotiquement stables, on parle alors de bifurcation de Hopf *directe* (ou sur-critique) ;
- les solutions périodiques au voisinage immédiat de la bifurcation sont asymptotiquement instables, on parle alors de bifurcation de Hopf *indirecte* (ou sous-critique).

Là encore, le caractère direct ou inverse de la bifurcation de Hopf peut être déterminé à partir des dérivées d'ordres supérieurs de  $f$  par rapport à  $x$ , mais nous laisserons ce sujet de côté.

Il faut ici noter que des cas dégénérés existent, comme lorsque plusieurs valeurs propres réelles (resp. les parties réelles de plusieurs couples de valeurs propres complexes) s'annulent en même temps : il s'agit d'une bifurcation de codimension élevée (i.e.  $>1$ ), cas que nous ne traiterons pas ici. On pourra se reporter à l'ouvrage de Wiggins [87] pour un traitement rigoureux de ces cas.

## 1.3 Solutions périodiques

### 1.3.1 Définition

Une solution du système (1.1) passant au point  $x_0$  est appelée solution périodique (ou *orbite périodique*, ou encore *cycle limite*) de période  $T$  s'il existe  $T > 0$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = x_0, \forall t \in \mathbb{R}, \\ x(t+T) = x(t). \end{array} \right.$$

On prendra naturellement pour  $T$  la période minimale, bien que n'importe quel multiple entier de  $T$  vérifie également la définition.

### 1.3.2 Branche de solutions périodiques

On peut montrer, en appliquant le théorème des fonctions implicites, l'existence de branches de solutions périodiques, lorsque le paramètre  $\lambda$  varie continûment, de la même manière que pour les solutions statiques.

### 1.3.3 Stabilité

On étudie la stabilité asymptotique d'une solution périodique par analyse linéaire des trajectoires au voisinage de cette solution.

Soit  $x_0(t)$  une solution périodique de (1.1), de période  $T_0$ , pour une valeur donnée du paramètre  $\lambda_0$ . Construisons une solution perturbée  $x(t)$  arbitrairement proche de  $x_0(t)$  :  $x(t) = x_0(t) + y(t)$ ,  $|y(0)| \ll |x_0(0)|$ . On linéarise alors l'équation d'évolution du système autour de la trajectoire  $x_0(t)$ , par développement de Taylor à l'ordre 1 en chaque instant :

$$y'(t) = J(x_0(t), \lambda_0)y(t), \quad (1.6)$$

où l'on néglige les termes d'ordre supérieur en  $y$ . On obtient ainsi un système dynamique *linéaire* dont la matrice d'évolution  $J(x_0(t), \lambda_0)$  est périodique de période  $T_0$ , auquel s'applique donc la théorie de Floquet [33].

### Théorie de Floquet

Ainsi, les solutions du système (1.6) se mettent sous la forme :

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t) \quad (1.7)$$

où les  $y_i(t)$  forment une base de solutions linéairement indépendantes qui se décomposent ainsi :

$$y_i(t) = p_i(t)e^{\alpha_i t} \quad (1.8)$$

où les  $p_i(t)$  sont des fonctions périodiques, de période  $T_0$ , à valeur dans  $\mathbb{R}^n$ , et les  $\alpha_i$  sont des coefficients constants appelés exposants de Floquet. L'ensemble des exposants de Floquet est composé de coefficients réels et de paires d'exposants complexes conjugués.

Ainsi, la stabilité asymptotique de la solution périodique  $x_0(t)$  est déterminée par la partie réelle des exposants de Floquet :

- soit tous les  $\alpha_i$  ont une valeur réelle strictement négative, et alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \mathbf{0}$  : la perturbation initiale décroît exponentiellement au cours du temps et la trajectoire  $x(t)$  tend vers la solution périodique  $x_0(t)$ , qui est donc stable ;
- soit l'un des  $\alpha_i$  au moins a une partie réelle strictement positive, et alors  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \mathbf{0}$  : la perturbation initiale croît exponentiellement au cours du temps et la trajectoire  $x(t)$  s'écarte de la solution périodique  $x_0(t)$ , qui est donc instable.

Nous traitons un peu plus bas les cas intermédiaires où une ou plusieurs parties réelles des exposants s'annulent : il s'agit des bifurcations.

### Matrice de monodromie

La matrice de monodromie  $\Phi(x_0, \lambda_0)$  est définie telle que, notant  $Y(t)$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $y_i(t)$ , on peut écrire :

$$Y(T_0) = \Phi Y(0).$$

Étant donné que l'équation (1.6) s'applique à toute perturbation  $y_i(t)$ , la matrice  $Y$  est solution de l'équation matricielle (taille  $n \times n$ ) :

$$Y'(t) = J(x_0(t), \lambda_0) Y(t). \quad (1.9)$$

Posant comme condition initiale  $Y(0) = Id$ , on obtient la matrice de monodromie par intégration temporelle sur une période :

$$\Phi = Y(T_0). \quad (1.10)$$

Les multiplicateurs de Floquet  $\rho_i$  sont les valeurs propres de  $\Phi$ . Ils sont reliés aux exposants de Floquets par la relation :

$$\rho_i = e^{\alpha_i T_0}. \quad (1.11)$$

La stabilité de la solution périodique  $(x_0(t), \lambda_0, T_0)$  est alors déterminée à partir du module des  $\rho_i$ , selon qu'ils sont tous inférieurs à 1 (solution stable) ou non (solution instable).

Cette approche peut-être intéressante lorsque l'on calcule les solutions périodiques d'un système par une méthode temporelle : la matrice de monodromie peut alors être facilement déduite de ce calcul et ne nécessite pas nécessairement d'intégration temporelle supplémentaire.

### 1.3.4 Analogie avec les systèmes discrets ou « cartes »

On peut également transformer la solution périodique d'un système dynamique continu en point fixe d'une carte (système discret) par projection sur une section de Poincaré (voir Wiggins [87], p.122).

L'existence d'une branche de solution périodique pour le système continu est alors prouvée par l'existence d'une branche de points fixes de la carte ainsi définie, toujours à partir du théorème des fonctions implicites.

Étudier la stabilité asymptotique des solutions périodiques se réduit alors à l'analyse de stabilité linéaire des points fixes de la carte correspondante, dont le jacobien n'est autre que la matrice de monodromie.

### 1.3.5 Bifurcations

Les exposants de Floquet jouent ici le même rôle que les valeurs propres de la matrice Jacobienne dans le cas des solutions statiques. Plusieurs scénarios de changement de stabilité sont alors possibles suivant le type et le nombre d'exposants dont la partie réelle est nulle à la bifurcation  $(x^*, \lambda^*, T^*)$ .

#### Un seul exposant nul

Lorsqu'un (et un seul) exposant de Floquet réel s'annule et change de signe à la bifurcation, il s'agit d'une bifurcation « simple ». Elle peut être de type noeud-col (point limite), transcritique (deux branches se croisent avec échange de stabilité), ou fourche (perte de stabilité et naissance de deux branches supplémentaires). On se référera aux bifurcations des solutions statiques évoquées en 1.2.4 pour plus de détails.

#### Un couple d'exposants imaginaires purs conjugués

Lorsque c'est la partie réelle d'un (et un seul) couple d'exposants complexes conjugués qui s'annule et change de signe à la bifurcation ( $\alpha_i^\pm = \pm i\omega$ ), il s'agit d'une bifurcation de Neimark-Sacker, également appelée Hopf secondaire, par analogie avec la bifurcation de Hopf des solutions statiques.

La fréquence de l'instabilité associée à cette bifurcation est alors  $f_{NS} = \omega/2\pi$ . Dans le cas général, si le rapport  $f^*/f_{NS}$  (où  $f^* = 1/T^*$ ) n'est pas rationnel, une branche de solutions quasi-périodiques prend naissance à cette bifurcation. Sinon, quand le rapport des deux fréquences est rationnel, alors la bifurcation donne naissance à une nouvelle branche de solutions périodiques, dont la période minimale est donnée par la plus petite période commune aux deux composantes oscillantes<sup>c</sup>.

Il faut toutefois distinguer le cas particulier où  $f_{NS} = 1/2T^*$  : dans ce cas, la bifurcation donne naissance à une nouvelle branche de solutions périodiques de période double (par rapport à la branche que l'on analyse initialement), et il s'agit donc d'une bifurcation de type *doublement de période*.

---

<sup>c</sup>On pourrait élargir la condition de quasi-périodicité au cas où la période minimale est extrêmement grande (à l'échelle du temps d'une mesure, par exemple) : la dynamique du système aura alors « l'allure » d'une solution quasi-périodique.

On se référera à Wiggins [87] ou Bergé *et al.* [9] pour plus de détails sur ces bifurcations.

## 1.4 Bifurcations des régimes instables

### 1.4.1 Solutions statiques

Dans le cas d'une solution statique, l'espace des phases peut toujours être décomposé en trois parties (dont l'une au moins est de dimension non nulle, voir à ce sujet Wiggins [87], p.37) :

- un sous-espace stable, engendré par les vecteurs propres de la Jacobienne associés aux valeurs propres stables (i.e. à partie réelle strictement négative) ;
- un sous-espace instable, engendré par les vecteurs propres de la Jacobienne associés aux valeurs propres instables (i.e. à partie réelle strictement positive) ;
- et un sous-espace dit « central », engendré par les vecteurs propres de la Jacobienne associés aux valeurs propres à partie réelle nulle (dont la dimension est en général nulle, sauf dans le cas de bifurcations).

On peut alors appliquer systématiquement l'analyse de stabilité au sous-espace stable (sauf lorsqu'il est de dimension nulle) et ainsi définir une bifurcation de Hopf pour une solution statique déjà instable.

Cela a un intérêt car, même si une telle bifurcation ne modifie pas la stabilité de la branche statique (en ce sens, ce n'est pas tout à fait une bifurcation), elle donne naissance à une branche périodique dont la stabilité est, a priori, inconnue. Autrement dit, on peut ainsi mettre en lumière certains fonctionnements du système qui seraient qualitativement différents (des solutions périodiques qui peuvent, dans certains cas, être stables), et dont on ignorerait l'existence autrement.

### 1.4.2 Solutions périodiques

Dans le cas d'une solution périodique, on peut également décomposer l'espace engendré par les  $\{p_i(t)\}_{i=1,n}$ , vecteurs propres de l'analyse linéaire de stabilité, en trois parties :

- un sous-espace stable, engendré par les vecteurs propres stables :  $\{p_i(t), \Re\alpha_i < 0\}_{i=1,n}$  ;
- un sous-espace instable, engendré par les vecteurs propres instables :  $\{p_i(t), \Re\alpha_i > 0\}_{i=1,n}$  ;
- et un sous-espace dit « central », engendré par les vecteurs propres neutres :  $\{p_i(t), \Re\alpha_i = 0\}_{i=1,n}$ .

On peut alors appliquer l'analyse de stabilité au sous-espace stable et ainsi définir une bifurcation de type Neimarck-Sacker ou de type doublement de période pour une branche de solutions périodiques déjà instable (et qui le resterait au passage de cette bifurcation).

Dans le cas d'un doublement de période (ou par extension, dans le cas général où les solutions émergeant au point de bifurcation sont périodiques), cela permet de calculer la branche périodique associée et de révéler, le cas échéant, les parties

stables et donc des fonctionnements particuliers du système que l'on aurait ignorés sinon.

## 1.5 Systèmes non réguliers

Rappelons qu'en cas de Lipschitz-continuité de la fonction  $f$  et de ses dérivées premières, les résultats énoncés dans ce chapitre sont valables. Pour des non-régularités plus fortes, toutefois, certains résultats ne sont plus valables et l'analyse de tels systèmes est plus complexe. Nous recommandons à ce sujet l'ouvrage de di Bernardo *et al.* [24] qui traite du cas (plus général) des systèmes continus par morceaux.

Nous resterons, dans la suite de ce document, dans le cadre régulier où  $f$  est au moins  $C^1$ . Toutefois, les problèmes auxquels nous nous intéressons dans la seconde partie du document étant intrinsèquement non réguliers, nous opterons pour une approche par régularisation.

Ceci est un choix discutable dans la mesure où, si jamais la non-régularité détruit l'unicité (ou pire, l'existence!) d'une solution, ou simplement sa persistance lorsque l'on fait varier un paramètre, on ne sait pas a priori vers quoi converge la solution du problème régularisé.

Toutefois, les problèmes non réguliers résultent le plus souvent d'une idéalisation de la géométrie ou des propriétés physiques des objets considérés. La géométrie, ou bien les phénomènes physiques décrivant ces objets à une échelle plus petite sont souvent réguliers et une approche par régularisation est alors justifiée. Il reste à trouver une régularisation en accord avec cette physique, ou cette géométrie, afin de préserver les caractéristiques essentielles de l'objet d'étude.

## Conclusion

Ainsi munis des concepts théoriques nécessaires, nous pouvons désormais aborder sereinement le sujet qui est au centre des travaux de cette thèse : la continuation et les méthodes numériques associées.

# Chapitre 2

## Méthodes numériques de continuation

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>La continuation . . . . .</b>	<b>32</b>
2.1.1	Exemple simple . . . . .	32
<b>2.2</b>	<b>Méthodes prédicteur-correcteur . . . . .</b>	<b>32</b>
2.2.1	Principe . . . . .	32
2.2.2	Prédicteur tangent . . . . .	33
2.2.3	Correction . . . . .	34
2.2.4	Itération . . . . .	34
2.2.5	Pilotage des méthodes MPC . . . . .	35
<b>2.3</b>	<b>Méthode Asymptotique Numérique . . . . .</b>	<b>35</b>
2.3.1	Principe . . . . .	36
2.3.2	Systèmes linéaires en cascade . . . . .	36
2.3.3	Taille du pas . . . . .	37
2.3.4	Itération . . . . .	38
2.3.5	Correction éventuelle . . . . .	39
<b>2.4</b>	<b>MANLAB : une implémentation originale de la MAN .</b>	<b>39</b>

---

### Introduction

Nous rappelons au lecteur qu'il s'agit ici d'un second chapitre bibliographique. Toutefois, dans un but de concision, nous souhaitons uniquement rappeler ici les notions essentielles pour la compréhension de la suite du document.

Si le besoin détails se faisait sentir, le lecteur se reporterait avec profits à l'ouvrage de Krauskopf *et al.* [53], ainsi que Nayfeh et Balachandran [62], Seydel [73].

## 2.1 La continuation

On s'intéresse dans ce chapitre aux systèmes d'équations *algébriques* non linéaires à coefficients constants de la forme :

$$R(U, \lambda) = 0 \quad (2.1)$$

où  $U \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur d'inconnues,  $\lambda \in \mathbb{R}$  un paramètre des équations, et  $R$  une application de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Le concept de continuation intervient lorsque, partant d'une solution  $U_0$  de (2.1) pour une valeur donnée  $\lambda_0$  du paramètre, on s'intéresse à son devenir lorsque le paramètre  $\lambda$  varie.

Comme on l'a vu au chapitre précédent, sous conditions de régularité et continuité suffisantes de  $R$ , il existe dans le cas général une branche, c'est-à-dire un continuum (unique) de solutions  $(U(\lambda), \lambda)$  autour d'une solution donnée  $(U_0, \lambda_0)$ .

Tous les résultats obtenus précédemment sur les solutions statiques s'appliquent ici, puisque le système d'équations (2.1) est de la même forme que l'équation d'évolution d'un système dynamique autonome  $x' = f(x, \lambda)$  pour lequel on impose  $x' = 0$ .

La continuation consiste donc à calculer la ou les branches de solutions d'un système, à partir de la seule donnée d'un point solution de départ et des équations du système.

### 2.1.1 Exemple simple

L'équation  $ax^2 - \lambda = 0$  admet pour solution, en  $\lambda_0 = 1$  :  $x_0 = 1/\sqrt{a}$  (entre autres !). Il existe alors une demi-branche de solutions, pour tout  $\lambda > 0$  :  $x_+(\lambda) = x_0\sqrt{\lambda}$ . Au point  $(0, 0)$ , on rencontre une bifurcation de type point limite : le jacobien est scalaire et s'annule en ce point, avec une tangente verticale ( $\partial\lambda/\partial x = 0$ ). On rencontre en ce point l'autre demi-branche de solutions :  $x_-(\lambda) = -x_0\sqrt{\lambda}$ .

Dans cet exemple très simple, on trouve facilement la forme analytique de chaque demi-branche de solution, et on connaît ainsi la façon dont évolue la solution lorsque  $\lambda$  varie. Toutefois, dans le cas général, il est souvent difficile d'obtenir de telles formes analytiques et l'on s'aide alors de méthodes numériques.

## 2.2 Méthodes prédicteur-correcteur

Les méthodes de type prédicteur-correcteur (ou MPC) sont très largement utilisées pour la continuation numérique. Elle sont à la base de nombreux logiciels, parmi lesquels on peut citer : AUTO (Doedel et Oldeman [27]), MatCont (Dhooge *et al.* [23]), ainsi que DDE-BIFTOOL (Engelborghs *et al.* [29]) pour les équations différentielles à retards.

### 2.2.1 Principe

L'idée, simple, de ce type de méthode est d'utiliser le point solution courant et la « direction » de la branche en ce point pour effectuer une prédiction du prochain

point sur la branche : on avance d'une certaine distance (une longueur de pas) dans cette direction.

Si la branche est une droite, et si la direction est correctement calculée, on doit logiquement tomber sur un autre point solution de la branche. Si la branche est légèrement courbe, la prédiction tombera légèrement à côté. Si la branche est fortement courbée, la prédiction sera d'autant plus mauvaise, selon la taille du pas.

On peut éventuellement utiliser plusieurs des points précédemment calculés pour obtenir plus d'informations sur la forme locale de la branche et prendre en compte la courbure soit dans la prédiction, soit pour adapter la taille du pas.

Enfin, on termine le calcul par une correction qui, partant du point (non solution) prédit à la première étape, doit permettre de revenir sur la branche et donc trouver le point solution suivant.

## 2.2.2 Prédicteur tangent

### Paramétrisation naturelle

Partant d'un point solution  $(U_0, \lambda_0)$  de (2.1), on peut calculer la tangente à la branche en ce point  $\dot{U}_0 = \frac{\partial U}{\partial \lambda} \Big|_{U_0, \lambda_0}$  en résolvant le système linéaire suivant :

$$\frac{\partial R}{\partial U}(U_0, \lambda_0) \cdot \dot{U}_0 = -\frac{\partial R}{\partial \lambda}(U_0, \lambda_0) \quad (2.2)$$

où  $\frac{\partial R}{\partial U} = R_U$  est la jacobienne du système, et  $\frac{\partial R}{\partial \lambda} = R_\lambda$  sa dérivée par rapport au paramètre.

### Paramétrisation par pseudo-longueur d'arc

La paramétrisation naturelle en  $\lambda$  est parfois prise en défaut lorsque la branche atteint un point limite : la tangente devient alors verticale et l'on ne peut plus cheminer sur la branche car  $R_U$  n'est plus inversible. Il est alors préférable d'exprimer les inconnues ainsi que le paramètre  $\lambda$  en fonction d'un paramètre de chemin  $s$  indépendant.

Il existe de multiples façons de définir un tel paramètre, et nous utiliserons ici la pseudo-longueur d'arc de Keller ([49]).

Posons  $X(s) = (U(s), \lambda(s))$ . Connaissant une solution  $X_i$  et la tangente  $\dot{X}_i = \frac{dX}{ds}(X_i)$  en ce point, le paramètre de chemin  $s$  est défini localement, par projection sur  $\dot{X}_i$  :

$$s = (X - X_0)^T \cdot \dot{X}_0. \quad (2.3)$$

Partant d'une solution  $X_i$  régulière<sup>a</sup> et une tangente  $\dot{X}_i$  connues, et pour une longueur de pas  $\Delta s$  donnée, la prédiction tangente s'écrit alors :

$$X_{i+1}^{(0)} = X_i + \Delta s \dot{X}_i. \quad (2.4)$$

---

<sup>a</sup>Dans ce contexte, une solution est dite régulière si la jacobienne  $\partial R / \partial U$  est inversible, ou si  $\partial R / \partial X$  est de rang maximal (ici :  $n$ ). Cette seconde condition consiste en quelque sorte à échanger les rôles de  $\lambda$  et d'une composante de  $U$ , pour pouvoir passer les points limites.

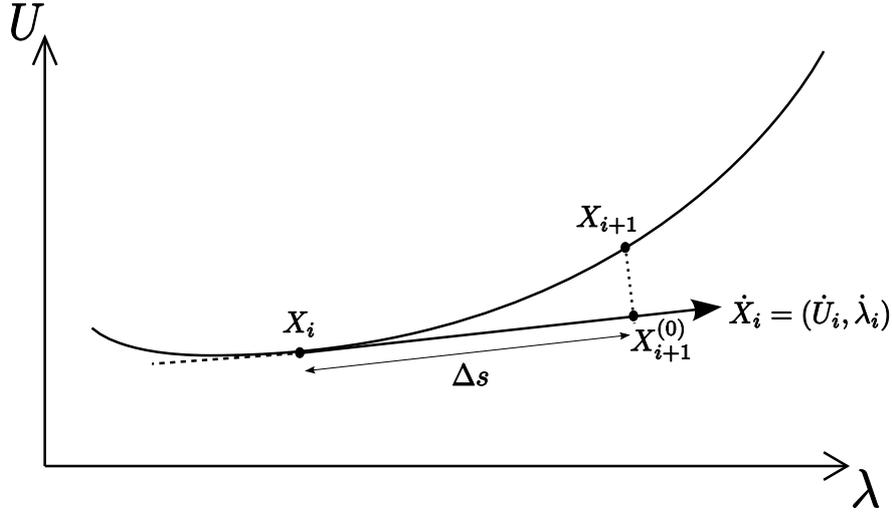


FIG. 2.1 – Principe de la MPC avec paramétrisation par pseudo-longueur d'arc de Keller : point de départ  $X_i$ , tangente à la branche en ce point  $\dot{X}_i$ , prédiction  $X_{i+1}^{(0)}$ , et point solution obtenu après corrections  $X_{i+1}$ .

### 2.2.3 Correction

On calcule ensuite des approximations successives  $X_{i+1}^{(k)}$  par une méthode de Newton, en résolvant itérativement (sur  $k$ ) le système linéaire étendu suivant :

$$\begin{cases} R_X(X_{i+1}^{(k)}) \cdot \Delta X^{(k)} &= -R(X_{i+1}^{(k)}) \\ \dot{X}_i^T \cdot \Delta X^{(k)} &= \Delta s - (X_{i+1}^{(k)} - X_i)^T \dot{X}_i \\ X_{i+1}^{(k+1)} &= X_{i+1}^{(k)} + \Delta X^{(k)} \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $R_X = [R_U, R_\lambda]$ .

Enfin, on arrête les corrections quand on a atteint, pour une certaine itération  $k^*$ , un certain critère de convergence  $\epsilon$  :

$$\|R(X_{i+1}^{(k^*)})\| < \epsilon \quad (2.6)$$

ou bien lorsque l'on a atteint le nombre maximal de corrections autorisé  $k_{max}$ .

La figure 2.1 illustre les deux étapes de la MPC. Avec la paramétrisation choisie, la correction se fait alors toujours perpendiculairement à la tangente du point de départ du pas. On remarque que, si  $\dot{U}_i=0$  (cas d'un point limite), la tangente  $\dot{X}_i$  est bien non nulle et on peut continuer à cheminer sur la branche.

### 2.2.4 Itération

On obtient alors le point de départ pour le pas suivant :  $X_{i+1} = X_{i+1}^{(k^*)}$ , et on détermine la nouvelle tangente en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} R_X(X_{i+1}) \cdot \dot{X}_{i+1} = 0 \\ \dot{X}_i^T \cdot \dot{X}_{i+1} = 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

Il ne reste plus qu'à normaliser cette nouvelle tangente :

$$\|\dot{X}_{i+1}\| = 1.$$

On dispose alors d'un point de départ et d'une tangente et l'on peut recommencer le calcul d'un nouveau pas.

### 2.2.5 Pilotage des méthodes MPC

Un point délicat dans les méthodes MPC est l'estimation de la taille de chaque pas  $\Delta s$ . En effet, une taille de pas trop grande peut faire diverger l'algorithme, ou encore sauter sur une autre branche de solution, alors qu'un pas trop petit mène à un nombre de points trop important et donc un cheminement trop lent.

Pour contrer ces problèmes, diverses stratégies de pilotage, c'est-à-dire d'adaptation de la taille du pas le long de la branche, sont envisageables. On peut par exemple estimer la courbure locale de la branche de solution, en considérant plusieurs des points précédents, et faire des pas d'autant plus petits que le rayon de courbure est petit.

On peut aussi se baser sur la convergence du correcteur au point précédent : si le correcteur a été très rapide, c'est que la prédiction tangente est suffisamment bonne (la courbure est donc faible) et on peut allonger le pas, alors que si l'on constate que sa convergence devient plus laborieuse, il faudrait diminuer la longueur du pas.

C'est cette seconde stratégie qui est mise en oeuvre dans les deux outils de référence AUTO [27] et MATCONT [23]. A partir du nombre d'itération au pas précédent  $k^*$ , on détermine s'il faut modifier la taille du pas :

- si  $k^* < k_{min}$ , alors  $\Delta s_{i+1} = C\Delta s_i$ ,
- si  $k_{min} < k^* < k_{max}$  alors  $\Delta s_{i+1} = \Delta s_i$ ,
- si  $k^* > k_{max}$  (non convergence) :  $\Delta s_{i+1} = c\Delta s_i$  et retour au point précédent  
 $X_{i+1} = X_i, \dot{X}_{i+1} = \dot{X}_i$ .

où  $0 < c < 1 < C$  sont deux constantes arbitraires (on prend en général  $c \simeq 1/2$  et  $C \simeq 1.5$ ).

## 2.3 Méthode Asymptotique Numérique

La méthode asymptotique numérique (MAN) peut être considérée comme une extension des méthodes de type MPC où l'on remplace le prédicteur tangent (ordre 1 en  $\Delta s$ ) par un prédicteur d'ordre élevé. Il faut alors résoudre un nombre plus important de systèmes linéaires pour chaque prédiction. Toutefois, les avantages sont nombreux :

- une seule inversion de matrice tangente par pas, donc le temps de calcul n'est pas beaucoup plus long que pour un prédicteur tangent ;
- la taille du pas est auto-adaptative ;
- la description des branches est continue (analytique) par morceaux, et non pas un simple échantillonnage comme pour les MPC ;
- en général la prédiction est suffisamment bonne et l'étape de correction n'est pas nécessaire.

La principale contrainte est que la fonction  $R$  doit être analytique. C'est une contrainte beaucoup plus forte que dans le cas des MPC où la fonction  $R$  peut être simplement Lipschitz-continue, et qui impose alors de régulariser toute formulation non continûment différentiable.

Cette méthode, encore relativement jeune, est toutefois décrite dans de nombreux articles, et dans un ouvrage de référence de Cochelin *et al.* [15], auquel on se reportera pour plus de détails.

### 2.3.1 Principe

La MAN est une technique de perturbation. Le principe est de chercher les solutions de l'équation (2.1) sous la forme de série entière d'un paramètre de chemin  $s$ . Posant  $X = (U, \lambda)$ , on écrit ainsi :

$$X(s) = X^{(0)} + \sum_{p=1}^{\infty} s^p X_p^{(0)} \quad (2.8)$$

où  $X^{(0)} = (U^{(0)}, \lambda^{(0)})$  est une solution de départ connue.

### 2.3.2 Systèmes linéaires en cascade

Si  $X(s)$  est la branche de solution, alors  $\forall s, R(X(s)) = 0$ , ou encore, en utilisant (2.8) et en développant  $R$  en série de Taylor :

$$\begin{aligned} R(X(s)) &= R(X^{(0)} + \sum_{p=1}^{\infty} s^p X_p^{(0)}) \\ &= R(X^{(0)}) + \left. \frac{\partial R}{\partial X} \right|_{X^{(0)}} (sX_1^{(0)} + s^2X_2^{(0)} + \dots) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 R}{\partial X^2} \right|_{X^{(0)}} (sX_1^{(0)} + s^2X_2^{(0)} + \dots)(sX_1^{(0)} + s^2X_2^{(0)} + \dots) \\ &\quad + \dots \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

En ordonnant suivant les puissance de  $s$  et en utilisant le fait que  $R(X^{(0)}) = 0$  (puisque  $X^{(0)}$  est solution), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= s \left[ \left. \frac{\partial R}{\partial X} \right|_{X^{(0)}} X_1^{(0)} \right] \\ &\quad + s^2 \left[ \left. \frac{\partial R}{\partial X} \right|_{X^{(0)}} X_2^{(0)} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 R}{\partial X^2} \right|_{X^{(0)}} X_1^{(0)} X_1^{(0)} \right] \\ &\quad + s^3 \left[ \left. \frac{\partial R}{\partial X} \right|_{X^{(0)}} X_3^{(0)} + \text{termes dépendants de } X_1^{(0)} \text{ et } X_2^{(0)} \right] \\ &\quad + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + s^p \left[ \left. \frac{\partial R}{\partial X} \right|_{X^{(0)}} X_p^{(0)} + \underbrace{\text{termes dépendants de } X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_{p-1}^{(0)}}_{\text{terme qu'on notera } -F_p^{\text{nl}}} \right] \\ &\quad + \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (2.10)$$

que l'on peut résumer sous la forme :

$$R(X(s)) = sR_1 + s^2R_2 + \dots = 0. \quad (2.11)$$

Comme cette relation doit être vérifiée pour toute valeur de  $s$ , on en déduit que :

$$\forall p \geq 1, \quad R_p = 0. \quad (2.12)$$

Pour chaque ordre  $p$ , cette équation est un système linéaire en  $X_p^{(0)}$  :

$$\left. \frac{\partial R}{\partial X} \right|_{X^{(0)}} X_p^{(0)} = F_p^{\text{nl}} \quad (2.13)$$

où le second membre ne dépend que des ordres précédents. C'est donc un ensemble de systèmes linéaires en cascade. On remarque que la matrice (au membre de gauche) est toujours la même.

Toutefois, les systèmes ainsi définis sont sous-déterminés :  $\dim R = n$  alors que  $\dim X = n + 1$ . Il manque donc une équation pour fermer chaque système. C'est là qu'intervient la définition du paramètre de chemin. Si l'on utilise la pseudo-longueur d'arc, dont on rappelle la définition (locale) :

$$s = (X - X^{(0)})^T \cdot X_1^{(0)}, \quad (2.14)$$

alors l'équation supplémentaire à l'ordre 1 est :

$$\|X_1^{(0)}\|^2 = 1 \quad (2.15)$$

et à l'ordre  $p > 1$  :

$$\left[ X_1^{(0)} \right]^T \cdot X_p^{(0)} = 0 \quad (2.16)$$

Ainsi, en tronquant les séries à un ordre  $N$ , on obtient un ensemble de  $N$  systèmes linéaires ayant une solution unique (à la seule condition que  $\partial R / \partial X$  soit de rang  $n$ ), et que l'on résout l'un après l'autre car chacun dépend de la solution du précédent. La (seule) matrice à inverser est :

$$K = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial R}{\partial X} \right|_{X^{(0)}} \\ \left[ X_1^{(0)} \right]^T \end{bmatrix}.$$

On calculera donc d'abord l'ordre 1 indépendamment, puis les ordres  $1 < p < N$  après avoir inversé cette matrice.

### 2.3.3 Taille du pas

On souhaite définir la taille du pas  $s_{\max}$  de façon à ce que le critère de tolérance suivant soit vérifié :

$$\forall s \in [0, s_{\max}], \quad R(X(s)) < \epsilon \quad (2.17)$$

En reprenant la série entière du résidu (2.11) et en utilisant le fait que tous les termes jusqu'à l'ordre  $N$  sont nuls, il vient :

$$R(s) = s^{N+1}R_{N+1} + s^{N+2}R_{N+2} + \dots \quad (2.18)$$

On suppose maintenant que le résidu est dominé par le premier terme de cette série. Il vient donc, pour  $s > 0$  :

$$\begin{aligned} \|R(s)\| &\sim s^{N+1}\|R_{N+1}\| \\ \|R(s)\| < \epsilon &\Leftrightarrow s^{N+1}\|R_{N+1}\| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow s < \left(\frac{\epsilon}{\|R_{N+1}\|}\right)^{\frac{1}{N+1}}. \end{aligned}$$

Or, comme on tronque la série de  $X$  à l'ordre  $N$ , cela revient à supposer que  $X_{N+1}^{(0)} = 0$  et on a alors :

$$\begin{aligned} R_{N+1} &= \left.\frac{\partial R}{\partial X}\right|_{X^{(0)}} X_{N+1}^{(0)} - F_{N+1}^{\text{nl}} \\ &= -F_{N+1}^{\text{nl}}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient une estimation de la longueur du pas :

$$s_{\max} = \left(\frac{\epsilon}{\|F_{N+1}^{\text{nl}}\|}\right)^{\frac{1}{N+1}}. \quad (2.19)$$

En pratique, on observe avec cette définition que  $R(s_{\max}) \sim \epsilon$ .

### 2.3.4 Itération

On dispose alors d'un nouveau point de départ  $X^{(1)} = X(s_{\max})$ . On dispose également d'une tangente  $dX/ds(s_{\max})$ . Toutefois, ce point n'est qu'une solution approchée et l'approximation de la tangente ainsi obtenue est encore moins bonne. On peut donc calculer une meilleure approximation du vecteur tangent en ce point en résolvant le système :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial X}(X^{(1)}) \\ A \end{bmatrix} \cdot \dot{X}^{(1)} = 0 \quad (2.20)$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n+1}$  est un vecteur aléatoire.

Enfin, on normalise cette nouvelle tangente ainsi :

$$X_1^{(1)} = \frac{\dot{X}^{(1)}}{\|\dot{X}^{(1)}\|}. \quad (2.21)$$

On dispose alors des deux premiers termes de la série du pas suivant, que l'on peut calculer en résolvant les systèmes linéaires des ordres  $1 < p < N$ .

### 2.3.5 Correction éventuelle

On a vu que, dans le cas d'un point de départ exact, le résidu en fin de pas est de l'ordre de  $\epsilon$ . Par ailleurs, si le point de départ  $X^{(i)}$  n'est pas exact avec par exemple  $R(X^{(i)}) \sim \epsilon$ , on observe là aussi un résidu du même ordre de grandeur en fin de pas. Ainsi, il n'est en général pas nécessaire d'effectuer une correction en fin de pas, ou au début du pas suivant.

Toutefois, lorsqu'on enchaîne un grand nombre de pas (typiquement plusieurs dizaines), il arrive parfois que les résidus s'accumulent et qu'on obtienne, en fin de pas, un résidu un ou deux ordres de grandeur au-dessus de la tolérance  $\epsilon$ . Dans ce cas, il peut être utile d'effectuer une correction en fin de pas, à l'aide d'un correcteur du type Newton par exemple (on peut aussi utiliser un correcteur d'ordre élevé).

## 2.4 MANLAB : une implémentation originale de la MAN

Il s'agit de la version 1.0 du logiciel MANLAB, écrite par Arquier [4] pendant sa thèse : une application graphique interactive qui permet de piloter la continuation par la MAN à partir de la définition des équations du système algébrique, distribuée librement avec son code source.

Le logiciel a été programmé au sein de l'environnement de calcul scientifique Matlab [58], et repose sur un formalisme quadratique : le système algébrique doit être de la forme

$$R(U) = L0 + L(U) + Q(U,U) = 0 \quad (2.22)$$

où  $U$  est le vecteur d'inconnues (dont fait partie le paramètre  $\lambda$ ) de taille  $n + 1$ ,  $L0$  est un vecteur constant de taille  $n$ ,  $L$  est un opérateur linéaire à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $Q$  est un opérateur bilinéaire également à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

Ce formalisme permet une écriture relativement simple, et surtout automatique, des seconds membres  $F_p^{\text{nl}}$  pour chaque système linéaire à l'ordre  $1 < p < N$ , quelques soient les équations et quelque soit l'ordre des séries  $N$ .

Ainsi, l'utilisateur n'a besoin que de définir ces trois opérateurs ainsi qu'un point de départ, et ensuite toute la continuation se fait par l'intermédiaire de l'interface graphique. Ainsi, il s'agit d'un outil de continuation interactif, et dont le pilotage est extrêmement simplifié (comparé aux outils basés sur les MPC) et très robuste.

## Conclusion

MANLAB 1.0 est l'outil dont on disposait au début de ces trois années de thèse. Conçu comme un laboratoire d'expérimentation numérique autour de la MAN, le choix de l'environnement de programmation ainsi qu'une implémentation générique (plutôt qu'optimisée) permettent cependant une grande souplesse d'utilisation et une grande facilité quant aux possibilités d'extensions. Toutefois, ces avantages sont obtenus au prix d'une rapidité d'exécution médiocre.

Sur cette base, nous avons alors travaillé aux différentes extensions et améliorations que nous présentons dans les trois chapitres qui suivent, afin d'une part de permettre le calcul des solutions périodiques, d'autre part d'améliorer la rapidité d'exécution du code, compte tenu de la taille des systèmes à résoudre, et enfin de permettre l'utilisation de ces méthodes à des systèmes aux non-linéarités non polynômiales.

# Chapitre 3

## Méthodes de discrétisation des solutions périodiques

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Méthodes de discrétisation . . . . .</b>	<b>42</b>
3.1.1	Du continu au discret . . . . .	42
3.1.2	Méthodes spectrales . . . . .	43
<b>3.2</b>	<b>Méthode de l'Équilibrage Harmonique . . . . .</b>	<b>44</b>
3.2.1	Fonctions de représentation . . . . .	45
3.2.2	Fonctions test . . . . .	45
3.2.3	Équation de phase . . . . .	45
3.2.4	Systèmes quadratiques . . . . .	46
3.2.5	Cas particulier des systèmes non autonomes . . . . .	46
3.2.6	Implémentation dans MANLAB . . . . .	47
<b>3.3</b>	<b>Collocation orthogonale aux points de Gauss . . . . .</b>	<b>47</b>
3.3.1	Fonctions de représentation . . . . .	47
3.3.2	Base de projection . . . . .	48
3.3.3	Implémentation dans MANLAB . . . . .	49
<b>3.A</b>	<b>Annexes . . . . .</b>	<b>53</b>
3.A.1	Matrice A . . . . .	53
3.A.2	Matrice B . . . . .	54
3.A.3	Matrice B' . . . . .	54

---

### Introduction

Après les deux chapitres de rappels théoriques concernant les systèmes dynamiques d'une part et les méthodes numériques de continuation d'autre part, nous allons nous attacher à lier les concepts de ces deux chapitres : il s'agit d'utiliser des méthodes numériques de continuation pour explorer les solutions (points fixes, régimes périodiques) des systèmes dynamiques.

Nous nous intéressons plus particulièrement dans ce chapitre aux régimes périodiques, c'est-à-dire aux couples  $(u(t), T)$ , où  $u \in \mathbb{R}^{N_{\text{eq}}}$  et  $T \in \mathbb{R}_+$ , solutions de

$$\begin{cases} u' - f(u, \lambda) = 0 \\ u(t+T) = u(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

On notera  $N_{\text{eq}}$  la dimension de  $u$ .

Le calcul d'une branche de solutions périodiques  $(u(t), \lambda)$  peut s'aborder de diverses manières.

D'un côté la « force brute » : on échantillonne en un nombre arbitraire de points l'intervalle d'intérêt pour les valeurs du paramètre étudié  $\lambda$ , puis pour chacune de ces valeurs on utilise un algorithme de résolution (intégration temporelle ou autre). D'une part cela peut s'avérer très long, et d'autre part dans le cas où plusieurs solutions coexistent pour une même valeur du paramètre, il est pratiquement impossible de les calculer.

D'un autre côté, la continuation : on part d'une bifurcation de Hopf ou d'une solution périodique connue pour une certaine valeur de  $\lambda$ , et on calcule la branche de solution de proche en proche, par une méthode comme la MPC ou la MAN.

C'est évidemment cette seconde approche qui nous intéresse ici. Les premiers résultats sur les solutions périodiques à l'aide du logiciel MANLAB ont été initiés par Cochelin et Vergez [16], dans une version assez « générique » de ce logiciel destinée aux systèmes quadratiques et de taille modeste. Nous présentons et étendons ici ces travaux sur l'équilibrage harmonique, puis présentons une seconde méthode, également intégrée dans MANLAB, qui est celle utilisée dans la plupart des logiciels de continuation : la collocation orthogonale aux points de Gauss.

## 3.1 Méthodes de discrétisation

### 3.1.1 Du continu au discret

Dans le cas de solutions périodiques, les solutions de (3.1) qu'on cherche à suivre sont des fonctions du temps. Or les méthodes numériques ne permettent que de suivre des solutions de systèmes d'équations algébriques à coefficients constants, dont les inconnues sont également indépendantes du temps.

Il faut donc un moyen d'obtenir une représentation discrète de l'inconnue périodique  $u(t)$ , et d'écrire un certain nombre d'équations algébriques sur les coefficients de cette représentation.

Il existe des méthodes dites de « tir », qui consiste à définir uniquement la condition initiale  $u_0$  et la période supposée  $T$  (c'est une forme de discrétisation), à intégrer en temps le système d'équations différentielles et à résoudre ensuite l'équation :

$$u(T, u_0) - u_0 = 0$$

d'inconnues  $(u_0, T)$ . Ces méthodes sont largement traitées dans la littérature : voir par exemple Keller [50], Nayfeh et Balachandran [62], Seydel [72] ou encore Peeters *et al.* [65] pour une application plus récente de ce type de méthode. Leur principal désavantage est qu'elles dépendent étroitement de la précision du schéma d'intégration numérique choisi, et donc de son adéquation au problème étudié.

Arquier *et al.* [3] ont également proposé une méthode alternative, basée sur un schéma d'intégration de Newmark modifié formulé directement sur l'ensemble de la période (plutôt que de façon itérative comme la plupart des solveurs habituellement utilisés dans les méthodes de *shooting*), aboutissant ainsi à un système qui contient l'ensemble des équations sur toute la période, dont les solutions sont ensuite calculées par la MAN.

De notre côté, nous avons choisi les méthodes dites *spectrales*, dans lesquelles on n'effectue pas d'intégration temporelle des équations. Le principal revers de ces méthodes est en revanche l'augmentation importante de la taille des systèmes à traiter.

### 3.1.2 Méthodes spectrales

Il s'agit de représenter la solution comme une combinaison linéaire de fonctions connues, définies sur l'ensemble du domaine d'étude. Elles peuvent remplir les conditions aux limites (ici périodiques), ou bien celles-ci peuvent être ajoutées au système d'équation algébrique final. Les coefficients de cette combinaison linéaire sont obtenus par projection.

On parle de méthode spectrale *par élément* si les fonctions utilisées sont définies par morceaux (les éléments finis en sont un cas particulier très répandu), et de méthode *pseudo-spectrale* quand la projection utilise des distributions.

Devant la diversité des vocables employés dans la littérature, on utilisera dans ce qui suit le vocabulaire issu de l'ouvrage de Karniadakis et Sherwin [48].

#### Principes

Pour définir une méthode spectrale, il faut définir :

1. un espace  $\mathcal{E}_n$ , de dimension finie  $n$ , auquel on restreint la recherche de la solution ;
2. un ensemble de fonctions de représentation  $\{\phi_i(t)\}_{i=1..n}$  linéairement indépendantes, aussi appelées fonctions de décomposition (*expansion functions*), permettant de chercher une approximation de la solution périodique, à  $\lambda$  fixé, sous la forme :

$$\hat{u}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(t) \quad (3.2)$$

où  $n$  est la dimension de ce sous-espace,

3. un ensemble de fonctions test  $\{\psi_j(t)\}_{j=1..n}$ , appartenant à ce même sous-espace, sur lesquelles projeter les équations du système.

On annule alors la projection du *résidu*, c'est-à-dire la différence entre les membres de gauche et de droite des équations, par projection sur les fonctions tests, aussi appelées fonctions poids (d'où l'appellation anglophone de *method of weighted residuals*) :

$$\mathcal{R}(\hat{u}, \lambda) = \{ \langle \hat{u}' - f(\hat{u}, \lambda), \psi_j \rangle \}_{j=1..n} \quad (3.3)$$

où  $\langle . \rangle$  représente le produit scalaire associé à l'espace choisi.

On obtient ainsi un système de  $nN_{\text{eq}}$  équations algébriques couplées, dont les inconnues sont les  $n$  vecteurs  $\alpha_i$  (chacun de taille  $N_{\text{eq}}$ ) de la représentation spectrale  $\hat{u}$ .

Le choix de l'espace  $\mathcal{E}_n$  est lié au type de problème abordé et à la précision désirée de l'approximation. Notamment, pour une recherche de solution périodique, cet espace doit logiquement contenir des fonctions périodiques, voire être composé uniquement de telles fonctions, pour une convergence optimale.

Un choix naturel pour les fonctions de représentation est souvent une base orthogonale de  $\mathcal{E}_n$ .

Le choix des fonctions poids dépend du type de méthode utilisé. Toutefois, il faut s'assurer que les fonctions test soient linéairement indépendantes. De plus, si l'on veut rendre l'erreur  $e = u - \hat{u}$  orthogonale à  $\mathcal{E}_n$ , il faut s'assurer que  $\{\psi_j(t)\}_{j=1..n}$  engendre  $\mathcal{E}_n$ .

Les méthodes de Galerkin sont, par définition, un cas particulier des méthodes spectrales où les fonctions test sont identiques aux fonctions de représentation.

Pour une présentation détaillée et une analyse de la convergence de ces méthodes, le lecteur est renvoyé à la littérature classique sur le sujet. On citera notamment l'ouvrage de Gottlieb et Orszag [36], et l'on rappellera celui de Karniadakis et Sherwin [48] déjà cité.

Dans ce qui suit, nous présentons deux de ces méthodes, ainsi que leur implémentation dans le logiciel MANLAB. Nous avons choisi une méthode purement fréquentielle et une méthode purement temporelle. Leur implémentation au sein de MANLAB permettra par la suite de comparer ces deux méthodes au sein d'un même outil de continuation (voir chapitre 6).

## 3.2 Méthode de l'Équilibrage Harmonique

L'équilibrage harmonique est une méthode de Galerkin basée sur l'approximation en séries de Fourier tronquées. On parle parfois de méthode Fourier-Galerkin (voir [36, 66, 84]).

Elle est essentiellement utilisée en mécanique, en particulier pour l'étude des machines tournantes, et en électricité, en particulier pour l'études des oscillateurs (voir par exemple Nakhla et Vlach [61], ou plus récemment Kacem *et al.* [45], Lazarus et Thomas [56], Pauzin *et al.* [64]). Elle présente l'avantage, aux ordres peu élevés, de demander beaucoup moins d'inconnues qu'une méthode temporelle, ce qui en fait une méthode de choix pour les systèmes à nombreux degrés de liberté, à condition que les oscillations (vibrations forcées ou auto-oscillations) ne soient pas trop riches en harmoniques.

Elle peut toutefois se prêter à l'analyse de systèmes de taille réduite, fortement non-linéaires, grâce à des méthodes qui permettent d'automatiser la mise en équation et d'utiliser ainsi des ordres très élevés.

### 3.2.1 Fonctions de représentation

On choisit ici l'espace  $\mathcal{E}_{(\omega,H)}$  engendré par la base de Fourier des fonctions périodiques, de période<sup>a</sup>  $T = 2\pi/\omega$ , tronquée à l'ordre  $H$  :

$$\mathcal{F}_H = \{1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(2\omega t), \sin(2\omega t), \dots, \cos(H\omega t), \sin(H\omega t)\} \quad (3.4)$$

muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \int_0^{2\pi} u(t)v(t)dt \quad (3.5)$$

On cherche alors une approximation de la solution  $u$  de la forme de sa série de Fourier tronquée à l'ordre  $H$  :

$$\hat{u}(t) = u_0 + \sum_{k=1}^H [u_{2k-1} \cos(k\omega t) + u_{2k} \sin(k\omega t)]. \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Fonctions test

Les fonctions tests sont ici identiques aux fonctions de représentation.

Introduisons alors la définition (3.6) dans l'équation du système (3.1), pour obtenir une forme approchée des équations continues :

$$\mathcal{R}(\hat{u}, \lambda) = \hat{u}' - f(\hat{u}, \lambda) = 0. \quad (3.7)$$

Écrivant alors la série de Fourier de  $\mathcal{R}(\hat{u}, \lambda)$ , on « équilibre » chaque harmonique en annulant successivement le terme en facteur de 1, puis de  $\cos(\omega t)$ , puis de  $\sin(\omega t)$ , etc jusqu'à l'harmonique  $H$ .

On montre, par orthogonalité de la base, que cela revient à annuler chacun des produit  $\langle \mathcal{R}(\hat{u}, \lambda), \psi_i \rangle$  pour l'ensemble des fonctions tests  $\psi_i$  de la base  $\mathcal{F}_H$ , c'est-à-dire à orthogonaliser le résidu à l'espace  $\mathcal{E}_{(\omega,H)}$ .

On obtient ainsi un système de  $(2H + 1)N_{\text{eq}}$  équations algébriques du type  $R(\hat{u}, \lambda) = 0$  dont les  $(2H + 1)N_{\text{eq}} + 2$  inconnues sont :  $\mathbf{U} = (\{u_i\}_{i=0..2H}, \omega, \lambda)$ .

### 3.2.3 Équation de phase

Le système est alors sous-déterminé. Ceci s'explique par l'invariance par changement de phase : si  $u(t)$  est une solution périodique de (3.1), alors  $u(t + t_0)$  est aussi une solution. Il faut donc fixer une condition de phase, ce qui est l'équivalent d'une condition initiale.

On peut par exemple choisir de fixer l'un des coefficients de Fourier à 0. Notamment, si l'on souhaite que la composante fondamentale de la solution ait une phase nulle (on annule la partie en  $\sin(\omega t)$ ) :

$$u_2 = 0.$$

---

<sup>a</sup>Notons que la période, ou de manière équivalente la pulsation, est ici une des inconnues car on se place dans le cadre des systèmes dynamiques autonomes. Le cas particulier des systèmes non autonomes, c'est-à-dire forcés, est néanmoins traité un peu plus loin.

On peut aussi choisir une condition initiale du type  $u'(0) = 0$  ce qui se traduit alors par :

$$\sum_{h=1}^H hu_{2h} = 0.$$

(Il existe bien d'autres conditions de phase, notamment la condition *intégrale* de phase, voir Doedel [25].)

On obtient ainsi un système étendu :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = 0$$

avec  $\dim(\mathbf{R}) = (2H + 1)N_{\text{eq}} + 1$  et  $\dim(\mathbf{U}) = (2H + 1)N_{\text{eq}} + 2$ , système qui admet donc des familles de solutions de dimension 1, c'est-à-dire des branches de solutions, que l'on calcule par continuation.

### 3.2.4 Systèmes quadratiques

Selon le type de non-linéarité de la fonction  $f$ , il peut être difficile d'écrire explicitement la série de Fourier de  $f(\hat{u}, \lambda)$  à partir de celle de  $\hat{u}$ . Toutefois, dans le cas où le système d'équations continues est sous la forme quadratique :

$$m(Z') = c_0 + \lambda c_1 + l_0(Z) + \lambda l_1(Z) + q(Z, Z) \quad (3.8)$$

où  $c_0$  et  $c_1$  sont des vecteurs constants,  $l_0$  et  $l_1$  sont des opérateurs linéaires,  $q$  est un opérateur bilinéaire, et  $Z$  est un vecteur qui contient les composantes de  $u$  ainsi que d'éventuelles variables additionnelles, on peut écrire explicitement chaque terme de la série de Fourier correspondante en fonction des coefficients de Fourier de  $u$  (voir [16]). Ainsi, pour un ordre de troncature  $H$  donné, on peut automatiser ce calcul. Le système algébrique obtenu est alors quadratique, sous la forme :

$$\mathbf{L}0 + \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = 0 \quad (3.9)$$

directement utilisable dans le logiciel MANLAB.

On trouve dans la littérature de nombreux exemples de non-linéarités qui s'écrivent facilement sous forme quadratique à l'aide de changements de variables, notamment toutes les fonctions rationnelles, ce qui rend le cadre de ce formalisme quadratique moins restrictif qu'il n'y paraît (voir [10, 15, 16, 64]).

### 3.2.5 Cas particulier des systèmes non autonomes

Dans le cas d'un système non autonome, on peut soit se ramener à un système autonome par extension du système (voir le 1.1.1), soit traiter le système non autonome directement comme suit.

Prenons le cas d'un système soumis à une excitation périodique sinusoïdale :

$$u' - f(u, \lambda) = F \cos(\omega t) \quad (3.10)$$

dont on cherche à calculer la réponse en fréquence. La pulsation est ici le paramètre libre :  $\lambda = \omega$ . Le vecteur d'état contient alors une inconnue de moins :  $\dim(\mathbf{U}) = (2H + 1)N_{\text{eq}} + 1$ .

Si c'est l'amplitude de forçage que l'on souhaite faire varier, alors on pose  $\lambda = F$  et on fixe la pulsation. Le vecteur  $\mathbf{U}$  contient, dans ce cas aussi, une inconnue de moins.

Toutefois, la phase du système étant complètement déterminée par l'excitation, l'équation de phase n'a pas lieu d'être (et elle surdéterminerait même le système). On a alors :

$$\begin{aligned}\dim(\mathbf{R}) &= (2H + 1)N_{\text{eq}} \\ \dim(\mathbf{U}) &= (2H + 1)N_{\text{eq}} + 1\end{aligned}$$

et on retrouve bien un système qui admet des familles de solutions de dimension 1.

### 3.2.6 Implémentation dans MANLAB

Une première implémentation dans le logiciel MANLAB de l'équilibrage harmonique a été réalisée par Cochelin et Vergez [16], pour les systèmes de petite taille et dont les non-linéarités sont polynômiales. Au cours de la thèse, nous avons repris cette formulation et l'avons adaptée au cas de systèmes de grande taille (voir le chapitre 4), et étendue aux systèmes dont les non-linéarités ne sont pas polynômiales (voir le chapitre 5).

## 3.3 Collocation orthogonale aux points de Gauss

La collocation orthogonale est une méthode purement temporelle. Elle est plutôt utilisée dans la communauté des mathématiques appliquées et des systèmes dynamiques.

Nous nous sommes inspiré de la formulation utilisée dans le logiciel AUTO [25, 27] qui, après 30 ans de développement, fait autorité en matière d'outil numérique de continuation, en particulier pour la continuation de solutions périodiques, dans la communauté des systèmes dynamiques.

Toutefois, cet outil étant basé sur un algorithme de continuation de type MPC (méthode prédicteur-correcteur), il nous a paru pertinent de transposer la discrétisation des orbites périodiques utilisée à notre outil de continuation basé sur la MAN (méthode asymptotique numérique). Nous en proposons ainsi une implémentation originale, particulièrement bien adaptée à l'environnement de calcul Matlab.

### 3.3.1 Fonctions de représentation

Une autre façon, temporelle cette fois-ci, de représenter la solution  $u(t)$  est d'utiliser des fonctions périodiques, polynômiales par morceaux. On choisit alors un sous-espace des fonctions périodiques, de période  $T = 2\pi/\omega$  (connue ou non), polynômiales d'ordre  $m$  par morceaux.

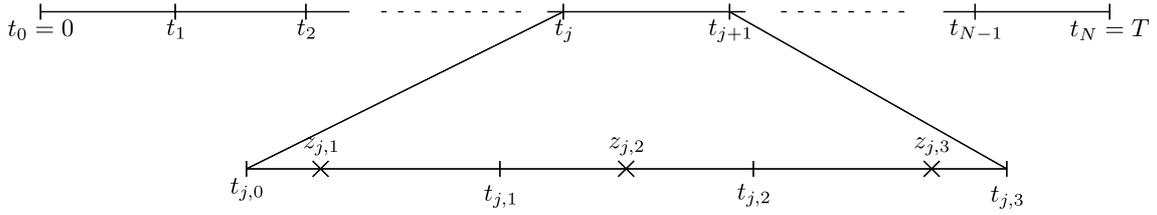


FIG. 3.1 – Illustration de la division de la période en sous-intervalles, puis de l'échantillonnage de chaque sous-intervalle, ainsi que les points de Gauss pour  $m = 3$ .

Pour cela on partitionne la période (là encore, inconnue) en  $N$  intervalles (ou éléments) :

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T.$$

Chaque intervalle  $[t_j, t_{j+1}]$ , de longueur constante  $\Delta t$ , est lui-même échantillonné en  $m+1$  points équi-répartis :

$$\{t_{j,i} = t_j + \frac{i}{m}\Delta t\}_{i=0..m}.$$

Notant  $u_{j,i} = u(t_{j,i})$  la valeur de la solution au temps  $t_{j,i}$ , on cherche alors une solution approchée  $\hat{u}(t)$  telle que :

$$\forall t \in [t_{j-1}, t_j] \quad \hat{u}(t) = \sum_{i=0}^m u_{j,i} \ell_{j,i}(t), \quad (3.11)$$

où  $\{\ell_{j,i}\}_{i=0..m}$  sont les polynômes de Lagrange d'ordre  $m$  basés sur les points  $\{t_{j,i}\}_{i=0..m}$ .

Il s'agit donc d'une interpolation polynomiale d'ordre  $m$ , qui passe par les points  $(t_{j,i}, u_{j,i})$ . Les inconnues sont donc ici les valeurs  $u_{j,i}$  de la solution aux points nodaux.

### 3.3.2 Base de projection

La collocation orthogonale est une méthode pseudo-spectrale. C'est un cas limite des méthodes spectrales (par éléments, dans le cas présent), au sens où les fonctions tests sont en réalité des distributions :  $\psi_{j,i}(t) = \delta(t - z_{j,i})$ .

Cela revient donc à trouver une fonction  $\hat{u}$  de la forme (3.11) vérifiant l'équation (3.1) exactement en chacun des points de collocations.

Dans le cas de la collocation aux points de Gauss on définit, sur chaque intervalle  $[t_j, t_{j+1}]$ , les points de collocations  $\{z_{j,i}\}_{i=1..m}$  comme étant les  $m$  points de Gauss-Legendre, qui sont les racines<sup>b</sup> du polynôme de Legendre d'ordre  $m$ .

On écrit alors  $mN_{\text{eq}}$  équations de collocation pour chaque élément, auxquelles il faut ajouter la condition de périodicité ( $N_{\text{eq}}$  équations) ainsi qu'une équation de phase.

Les inconnues, comme on l'a dit, sont les valeurs de la solution aux points nodaux  $u_{j,i}$ , mais aussi le paramètre  $\lambda$  et la pulsation  $\omega$ . Comme on souhaite satisfaire la

<sup>b</sup>Les polynômes de Legendre sont habituellement définis sur  $[-1,1]$ , il faut donc traduire et dilater les racines sur  $[t_j, t_{j+1}]$  : c'est le changement de coordonnées locales  $\rightarrow$  globales (ou "parametric mapping", voir [48], p.38).

$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$
$\frac{1-\sqrt{3/5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3/5}}{2}$

TAB. 3.1 – Position des points de Gauss pour  $m=3$ , quand on ramène l'intervalle d'étude à  $[0,1]$ .

continuité de la solution, on a nécessairement  $u_{j+1,0} = u_{j,m}$ , et le vecteur d'état global  $\mathbf{U}$  s'écrit alors de façon optimale :

$$\mathbf{U} = [u_{0,0}\{u_{j,i}\}_{j=0..N-1,i=1..m}, \lambda, \omega] \quad (3.12)$$

L'ensemble des équations se met donc sous la forme d'un système algébrique non linéaire de la forme :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = 0$$

où  $\dim(\mathbf{R}) = N_{\text{eq}}(mN + 1) + 1$  et  $\dim(\mathbf{U}) = N_{\text{eq}}(mN + 1) + 2$ , qui devrait admettre des familles 1D de solutions.

Cette formulation allie la simplicité d'une représentation nodale, c'est-à-dire où les inconnues sont directement les valeurs de la fonction en certains points, à une convergence en  $\mathcal{O}(N^{-(m+1)})$  uniformément (et même en  $\mathcal{O}(N^{-2m})$  aux points  $t_j$ ) sous conditions de régularité suffisante de  $f$  et de la solution qu'on cherche à approcher (voir [21]).

### 3.3.3 Implémentation dans MANLAB

Après des tests sur différents exemples à l'aide du logiciel AUTO, nous avons choisi une interpolation polynômiale à l'ordre  $m = 3$  (fixée), ce qui semble suffisant dans beaucoup de cas. Notamment lorsque la fonction  $f$  et la solution cherchée ne sont pas nécessairement très régulières, la convergence optimale n'est plus assurée et il devient plus intéressant d'augmenter le nombre d'intervalles  $N$  en gardant des polynômes interpolants d'ordre modeste.

La figure 3.1 illustre la partition de la période, les points nodaux, ainsi que les points de collocation, dans le cas  $m = 3$ .

Afin d'écrire les équations de collocation de la même manière sur chaque intervalle, on paramétrise la coordonnée globale  $t$  en fonction de l'indice de l'intervalle  $j$  et d'une coordonnée locale  $\xi$  qui évolue sur l'intervalle  $[0,1]$  de la façon suivante :

$$t(\xi) = t_j + \xi * \Delta_t.$$

Les points de Gauss sont alors ramenés sur l'intervalle  $[0,1]$  (voir le tableau 3.1).

#### Équations locales

On travaille désormais sur  $[0,1]$ .

Les polynômes de Lagrange locaux sont ainsi définis :

$$\ell_k(\xi) = \frac{\prod_{\substack{i \neq k \\ i=0..3}} (\xi - i/3)}{\prod_{\substack{i \neq k \\ i=0..3}} (k/3 - i/3)} \quad (3.13)$$

et la matrice locale d'interpolation aux points de collocation  $P$  s'écrit :

$$P = \begin{bmatrix} \ell_0(\xi_1) & \ell_0(\xi_2) & \ell_0(\xi_3) \\ \ell_1(\xi_1) & \ell_1(\xi_2) & \ell_1(\xi_3) \\ \ell_2(\xi_1) & \ell_2(\xi_2) & \ell_2(\xi_3) \\ \ell_3(\xi_1) & \ell_3(\xi_2) & \ell_3(\xi_3) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Notant  $U_j = [u_{j,k}]_{k=0..3}$  la matrice (de taille  $N_{\text{eq}} \times 4$ ) des inconnues de l'intervalle  $j$  et  $U_{\text{col}}^{(j)}$  la matrice (de taille  $N_{\text{eq}} \times 3$ ) des valeurs de  $\hat{u}$  aux points de collocation  $\{z_{j,i}\}_{i=1..3}$ , le passage de l'un à l'autre s'écrit simplement :

$$U_{\text{col}}^{(j)} = U_j P. \quad (3.15)$$

La dérivée des polynômes de Lagrange locaux s'écrit alors :

$$\ell'_k(\xi) = \sum_{l=0..3}^{l \neq k} \frac{\prod_{i=0..3}^{i \neq k,l} (\xi - i/3)}{\prod_{i=0..3}^{i \neq k} (k/3 - i/3)}. \quad (3.16)$$

On définit la matrice locale d'interpolation de la dérivée aux points de collocation  $P'$  :

$$P' = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \ell'_0(\xi_1) & \ell'_0(\xi_2) & \ell'_0(\xi_3) \\ \ell'_1(\xi_1) & \ell'_1(\xi_2) & \ell'_1(\xi_3) \\ \ell'_2(\xi_1) & \ell'_2(\xi_2) & \ell'_2(\xi_3) \\ \ell'_3(\xi_1) & \ell'_3(\xi_2) & \ell'_3(\xi_3) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

où le facteur  $1/\Delta t$  vient de l'adimensionnement du temps<sup>c</sup>.

Le calcul de  $U'_{\text{col}}{}^{(j)}$ , la matrice (de taille  $N_{\text{eq}} \times 3$ ) des valeurs de  $\hat{u}'$  aux points de collocation, s'écrit alors simplement :

$$U'_{\text{col}}{}^{(j)} = U_j P' \quad (3.18)$$

Une fois effectuée cette interpolation, les 3 équations de collocation relatives à l'élément  $j$  s'écrivent alors, sous forme matricielle :

$$U'_{\text{col}}{}^{(j)} - f(U_{\text{col}}^{(j)}, \lambda) = 0 \quad (3.19)$$

où  $f$  est appliquée à chaque colonne de  $U_{\text{col}}^{(j)}$ .

### Assemblage et interpolation globale

On définit la matrice (globale) des inconnues nodales  $U_{\text{nod}}$ , de taille  $N_{\text{eq}} \times 4N$ , comme la concaténation horizontale des  $U_j$  définis ci-avant.

Elle se calcule à partir du vecteur d'état mis sous forme de matrice :

$$\tilde{U} = \text{reshape}(\mathbf{U}(1 : \text{end} - 2), N_{\text{eq}}, 3N + 1)$$

---

<sup>c</sup>Une variation de 1 sur  $[0,1]$  correspond ainsi à un taux de variation de  $1/\Delta t$  sur l'intervalle  $[t_j, t_j + \Delta t]$ .

et de la matrice d'assemblage  $\mathbf{A}$  par la relation :

$$U_{\text{nod}} = \tilde{U}\mathbf{A} \quad (3.20)$$

où la matrice  $\mathbf{A}$  est explicitée en annexe à la fin de ce chapitre (voir section 3.A).

Alors, la matrice  $U_{\text{col}}$ , de taille  $N_{\text{eq}} \times 3N$ , contenant les valeurs de  $\hat{u}$  en tous les points de collocation s'obtient par :

$$U_{\text{col}} = U_{\text{nod}}\mathbf{B}$$

où la matrice globale d'interpolation  $\mathbf{B}$  est une matrice diagonale par blocs, constituée de  $3N$  blocs identiques : la matrice d'interpolation locale  $P$  (définie ci-avant). Une représentation de  $\mathbf{B}$  est donnée en annexe de ce chapitre, (voir section 3.A).

De la même manière, on obtient la matrice  $U'_{\text{col}}$  des valeurs de  $\hat{u}'$  aux  $3N$  points de collocation de la période par :

$$U'_{\text{col}} = U_{\text{nod}}\mathbf{B}'$$

où la matrice globale de dérivation  $\mathbf{B}'$  est diagonale par blocs, avec  $3N$  blocs identiques : la matrice locale de dérivation  $P'$ .

On peut alors écrire l'ensemble des équations de collocation comme une seule et unique équation matricielle :

$$\frac{\omega}{2\pi}U'_{\text{col}} - f(U_{\text{col}},\lambda) = 0 \quad (3.21)$$

où la fonction  $f$  est appliquée chaque colonne de la matrice  $U_{\text{col}}$ , et où le facteur  $\omega/2\pi$  permet de tenir compte de la longueur de la période  $T = 2\pi/\omega$  (la dérivée  $U'_{\text{col}}$  correspond à une période réduite  $T=1$ ).

### Forme quadratique

On suppose maintenant que le système est mis sous la forme quadratique :

$$m(u') = c_0 + \lambda c_1 + l_0(u) + \lambda l_1(u) + q(u,u). \quad (3.22)$$

Alors, l'équation matricielle de collocation devient :

$$-m\left(\frac{\omega}{2\pi}U'_{\text{col}}\right) + c_0 + \lambda c_1 + l_0(U_{\text{col}}) + \lambda l_1(U_{\text{col}}) + q(U_{\text{col}},U_{\text{col}}) = 0. \quad (3.23)$$

Il reste à insérer la condition de périodicité  $u(0) = u(T)$ , ainsi qu'une équation de phase du type  $\phi(u(0)) = 0$  où  $\phi : \mathbb{R}^{N_{\text{eq}}} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application linéaire.

On obtient au final un système qui se met alors sous la forme :

$$\mathbf{L}0 + \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U},\mathbf{U}) = 0$$



seul qui regroupe ces deux méthodes radicalement opposées et rarement utilisées par les même communautés.

On dispose ainsi à la fois d'une palette d'outils complémentaires, mais aussi d'une occasion unique pour comparer ces deux méthodes dans un cadre commun de continuation.

## 3.A Annexes : Matrices utilisées pour la collocation

### 3.A.1 Matrice d'assemblage $\mathbf{A}$

Dans le cas d'un vecteur  $u = (x, y)$  de dimension 2, le vecteur d'état  $\mathbf{U}$  est composé ainsi :

$$\mathbf{U} = [x_{0,0}, y_{0,0}, \{x_{j,i}, y_{j,i}\}_{\substack{j=0..N-1 \\ i=1..3}}, \lambda, \omega]^T$$

Mis sous forme de matrice  $N_{\text{eq}} \times 3N + 1$  (on a enlevé les deux dernières composantes  $\lambda$  et  $\omega$ ), on obtient la matrice  $\tilde{U}$  :

$$\tilde{U} = \left[ \begin{array}{c} [x_{0,0}] \\ [y_{0,0}] \\ [x_{j,i}] \\ [y_{j,i}] \end{array} \Big|_{\substack{j=0..N-1 \\ i=1..3}} \right]$$

On souhaite alors calculer la matrice des inconnues nodales  $U_{\text{nod}}$  :

$$U_{\text{nod}} = \left[ \begin{array}{ccc} [x_{0,i}] & [x_{1,i}] & \dots [x_{N-1,i}] \\ [y_{0,i}]_{i=0..3} & [y_{1,i}]_{i=0..3} & [y_{N-1,i}]_{i=0..3} \end{array} \right]$$

où les échantillons à la frontière entre deux éléments sont répliqués :  $u_{j,3}$  et  $u_{j+1,0}$  apparaissent explicitement, contrairement au cas de  $\tilde{U}$ .

On obtient  $U_{\text{nod}}$  par la relation :

$$U_{\text{nod}} = \tilde{U} \mathbf{A}$$

où la matrice d'assemblage  $\mathbf{A}$ , est composée ainsi :

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \end{array} \right] \quad (3.25)$$

Note : par souci de lisibilité, seuls les termes non nuls sont représentés.

### 3.A.2 Matrice globale d'interpolation $\mathbf{B}$

La matrice globale d'interpolation  $\mathbf{B}$  est définie telle que :  $U_{\text{col}} = U_{\text{nod}}\mathbf{B}$ . Elle est simplement constituée de blocs sur sa diagonale égaux à  $P$ , la matrice locale d'interpolation. Elle est de taille  $4N \times 3N$ .

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} P & & & \\ & P & & \\ & & \ddots & \\ & & & P \end{bmatrix} \begin{array}{l} \} \text{intervalle 1} \\ \} \text{intervalle 2} \\ \vdots \\ \} \text{intervalle N} \end{array} \quad (3.26)$$

Note : par souci de lisibilité, seuls les blocs non nuls de la matrice sont représentés.

### 3.A.3 Matrice globale de dérivation $\mathbf{B}'$

La matrice globale de dérivation  $\mathbf{B}'$  est définie telle que :  $U'_{\text{col}} = U_{\text{nod}}\mathbf{B}'$ . Elle est simplement constituée de blocs sur sa diagonale égaux à  $P'$ , la matrice locale de dérivation. Elle est de taille  $4N \times 3N$ .

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} P' & & & \\ & P' & & \\ & & \ddots & \\ & & & P' \end{bmatrix} \begin{array}{l} \} \text{intervalle 1} \\ \} \text{intervalle 2} \\ \vdots \\ \} \text{intervalle N} \end{array} \quad (3.27)$$

Note : par souci de lisibilité, seuls les blocs non nuls de la matrice sont représentés.

# Chapitre 4

## Optimisation des temps de calcul

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Temps de calcul peu optimisés</b>	<b>56</b>
4.1.1	Calcul de la matrice tangente	56
<b>4.2</b>	<b>Compilation d'une partie du code</b>	<b>58</b>
4.2.1	Principe	58
4.2.2	Performances	59
<b>4.3</b>	<b>Approche tenseurs</b>	<b>59</b>
4.3.1	Principe	60
4.3.2	Calcul des tenseurs L0,L, et Q	60
4.3.3	Forme tensorielle des équations continues	60
4.3.4	Tenseurs pour l'équilibrage harmonique	61
4.3.5	Tenseurs pour la collocation polynômiale	63
4.3.6	Écriture matricielle	65
<b>4.4</b>	<b>Comparaison des approches</b>	<b>66</b>

---

On se réfère dans ce chapitre essentiellement à l'équilibrage harmonique. Toutefois, l'optimisation des temps de calcul s'applique aussi bien à la collocation (l'implémentation a été réalisée pour les deux méthodes).

### Introduction

Comme on l'a vu au chapitre précédent, la taille totale  $N_{\text{tot}}$  des systèmes linéaires à résoudre peut vite devenir considérable<sup>a</sup> : elle est linéaire en  $N_{eq}$  d'un côté, et en  $H$  de l'autre (respectivement  $N$  dans le cas de la collocation). La complexité, et donc le temps de calcul, étant polynomiaux en  $N_{\text{tot}}$ , il convient de s'interroger sur l'ordre de cette dépendance polynomiale en fonction de la méthode utilisée et de son implémentation.

---

<sup>a</sup>En pratique, pour un système dynamique à 15 DDL et un nombre d'harmonique de l'ordre de 15, la taille des systèmes est de l'ordre du millier.

## 4.1 Temps de calcul peu optimisés

L'environnement de programmation et de calcul Matlab est fort appréciable pour sa facilité d'utilisation, sa modularité, et ses interfaces graphiques, et par le fait qu'il soit multi-plateformes. Cependant, comme beaucoup de langages interprétés, il n'est pas renommé pour sa rapidité. En particulier, l'usage des boucles et les appels de fonctions externes sont réputés pour considérablement ralentir l'exécution de programmes Matlab.

Or, la façon la plus naturelle d'écrire les équations de l'équilibrage harmonique, telles qu'elles sont présentées dans [16], est de traiter itérativement chaque harmonique au sein d'une boucle, où l'on remplace les sommes également par des boucles dans lesquelles il est chaque fois fait appel aux diverses fonctions définies par l'utilisateur : les « petits opérateurs »  $c_0, c_1, l_0, l_1, q$  et  $m$ , qui ne dépendent que du problème traité. On comprend aisément que cette façon de programmer n'est pas adaptée à un programme en langage Matlab, dès lors que l'on aura affaire à des systèmes de grande taille.

De la même façon, il est naturel de programmer la collocation à l'aide de boucles : l'une sur l'indice du sous-intervalle courant, l'autre sur le point de collocation courant, puis de calculer la valeur de la solution par interpolation et enfin d'appeler les petits opérateurs avec cette valeur interpolée. Là encore, l'usage de boucles imbriquées et le grand nombre d'appels aux petits opérateurs, codés comme des fonctions externes (puisque fournies par l'utilisateur), montrent rapidement leurs limites.

Enfin, il faut souligner le parti pris des concepteurs du logiciel MANLAB, qui a été d'une part d'utiliser cet environnement de programmation, mais aussi d'écrire un code le plus générique possible, afin de favoriser les possibilités d'extension, de laisser le champ d'application le plus large possible, et de limiter l'entrée de l'utilisateur au minimum possible. En conséquence, la matrice jacobienne est calculée de façon peu optimale, plutôt que d'être donnée explicitement par l'utilisateur.

### 4.1.1 Calcul de la matrice tangente

La matrice tangente est, pour l'essentiel, composée de la jacobienne :  $\partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{U}$ . Elle est ainsi calculée colonne par colonne (voir Cochelin [14]). Pour chaque colonne (il y en a autant que  $\mathbf{U}$  compte de composantes), il est fait appel à des fonctions externes qui calculent les grands opérateurs  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{Q}$ .

Pour l'équilibrage harmonique, la fonction  $\mathbf{Q}$  comporte deux boucles imbriquées dont le nombre d'itérations dépend linéairement de  $H$ , le nombre d'harmoniques, et au sein desquelles on appelle plusieurs fois d'autres fonctions externes (notamment la fonction  $\mathbf{pQ}$ , qui effectue le calcul du petit opérateur bilinéaire  $q$ , voir Cochelin et Vergez [16] pour le détail de l'implémentation).

Dans le cas de la collocation, la fonction  $\mathbf{Q}$  ne contient qu'une seule boucle dont le nombre d'itérations est linéaire en  $N$ , le nombre d'intervalles.

Au final, le nombre total d'appels à la fonction  $\mathbf{pQ}$  pour le calcul de la matrice tangente croît comme  $H^3$  pour l'HBM et comme  $N^2$  pour la collocation. C'est cette étape qui domine le temps de calcul d'un pas MAN.

La figure 4.1 montre le temps de calcul de la matrice tangente et d'un pas MAN

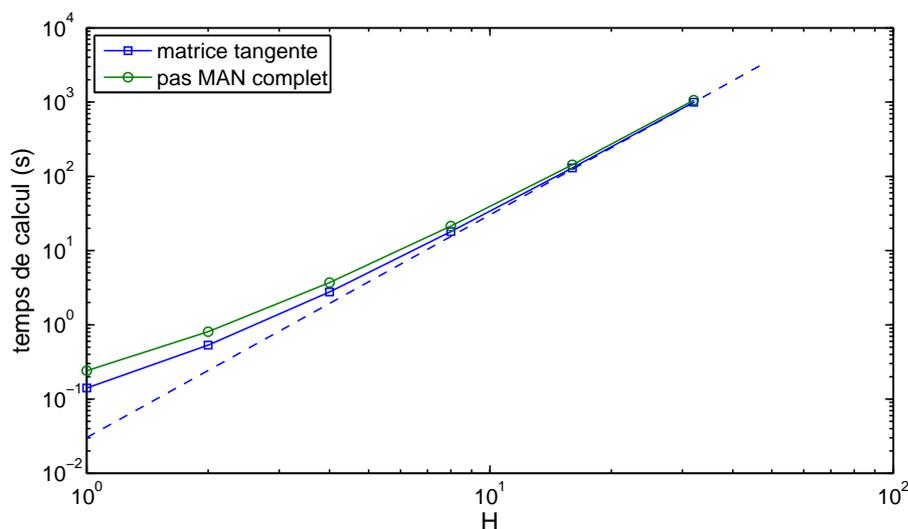


FIG. 4.1 – Equilibrage harmonique et méthode asymptotique numérique : temps de calcul de la matrice tangente et d’un pas MAN complet en fonction du nombre d’harmoniques  $H$ , pour un modèle de clarinette à 32 équations. La droite en pointillés montre la tendance asymptotique en  $H^3$ . Configuration matérielle : CPU Intel Core Duo P8400, 2268MHz, 3072Ko de cache L2, RAM 4Go. Configuration logicielle : Matlab R2008b.

complet, pour un modèle physique de clarinette à 32 équations (voir les chapitres 7 et 8, en partie 2 de ce document), en fonction du nombre d’harmoniques retenues dans le calcul par équilibrage harmonique. Il est clair que c’est la construction de la matrice tangente qui tend à dominer complètement le temps de calcul de chaque pas MAN.

On voit par ailleurs que le temps de calcul tend progressivement vers une dépendance en  $H^3$  (ligne pointillée), due à la dépendance en  $H$  du nombre total de colonnes de la matrice tangente, et à la double récursion en  $H$  dans le calcul de l’opérateur  $Q$ .

La figure 4.2 montre, quant à elle, le temps de calcul pour le même modèle, mais résolu par collocation orthogonale. La tendance asymptotique est cette fois-ci en  $N^2$  (droite pointillée), et c’est toujours la construction de la matrice tangente qui domine le temps de calcul.

Ce cas illustre bien notre problème : dès lors que la taille totale du système atteint quelques centaines, le temps de calcul pour un pas de continuation dans MANLAB devient prohibitif (typiquement plus de deux minutes par pas pour  $H = 16$  ou  $N = 65$ ), et toute l’interactivité est perdue. Or l’interactivité, et donc la simplicité d’utilisation, est justement l’un des points forts de MANLAB, face à ses concurrents basés sur les MPC.

C’est un inconvénient majeur, puisque l’on a besoin d’un nombre assez important d’harmoniques (ou de façon équivalente, de points par période) pour pouvoir décrire des phénomènes aussi peu réguliers que l’anche battante ou le frottement sec.

Enfin, l’analyse linéaire de stabilité que nous avons intégrée à MANLAB<sup>b</sup> est

<sup>b</sup>Résultat d’une collaboration avec Arnaud Lazarus et Olivier Thomas (LMSSC, CNAM, Paris)

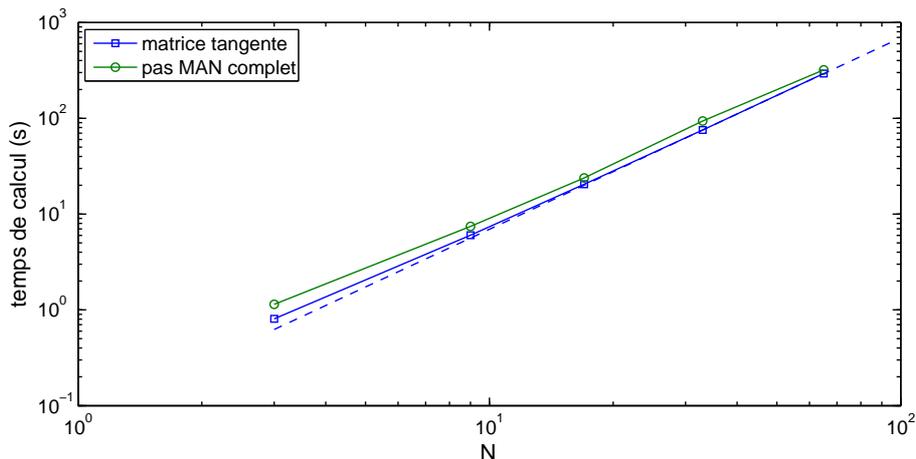


FIG. 4.2 – Collocation polynômiale et méthode asymptotique numérique : temps de calcul de la matrice tangente et d’un pas MAN complet en fonction du nombre d’intervalles  $N$ , pour un modèle de clarinette à 32 équations. La droite en pointillés montre la tendance asymptotique en  $N^2$ .

calculée à chaque pas, ralentissant d’autant le temps d’exécution.

Deux stratégies d’optimisation du temps de calcul ont alors été développées.

## 4.2 Compilation d’une partie du code

Les différents constats précédents ont permis de montrer que c’est le calcul des « grands opérateurs » (tout particulièrement l’opérateur bilinéaire  $Q$ ), appelés un grand nombre de fois pour le calcul de la matrice tangente, qui prend le plus de temps.

### 4.2.1 Principe

Une stratégie ciblée consiste alors à réécrire toute la partie du code qui contient des boucles imbriquées (c’est-à-dire chaque grand opérateur) en Fortran. Ce code est alors compilé au lancement de Manlab, de manière à pouvoir être appelé en lieu et place de la fonction du même nom dans Matlab. Ainsi, aucun autre aménagement n’est nécessaire dans le code source de MANLAB. En outre, l’utilisateur a uniquement besoin d’écrire en Fortran les petits opérateurs. Le reste, qui ne dépend pas du problème traité, a été écrit une fois pour toutes et est inclus automatiquement à la compilation.

Cette stratégie offre l’avantage de s’appliquer aisément à l’analyse linéaire de stabilité par la méthode de Hill : on a réécrit en fortran le calcul de la matrice de Hill à partir de la jacobienne. L’utilisateur n’a alors qu’à écrire la jacobienne de son système en fortran, et tout le reste du code est inclus lors de la compilation.

---

pour la méthode de Hill (voir Lazarus et Thomas [56], et Cyril Touzé (UME, ENSTA, Palaiseau) pour l’intégration temporelle de la matrice de monodromie (communication personnelle).

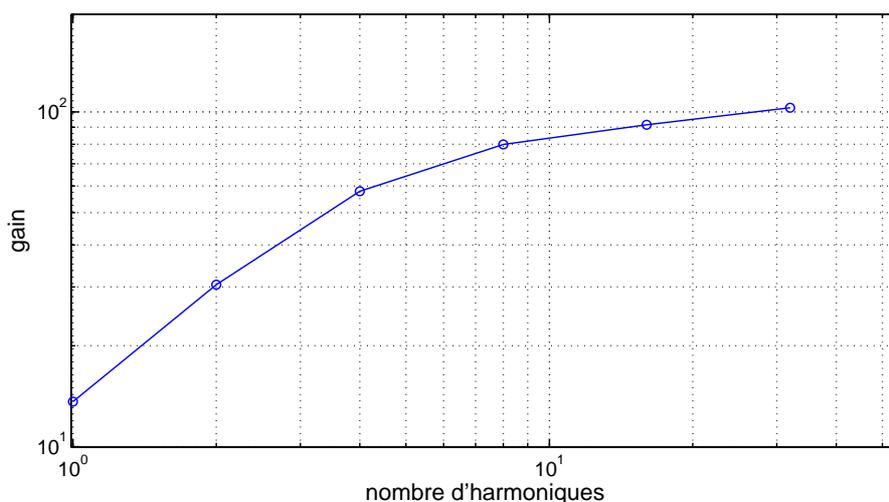


FIG. 4.3 – Accélération par compilation Fortran : rapport des temps de calcul d'un pas MAN complet en fonction du nombre d'harmoniques  $H$  entre version originale et version avec opérateurs compilés. Le modèle utilisé est le même que pour la figure 4.1.

### 4.2.2 Performances

La figure 4.3 montre le gain en temps de calcul obtenu par compilation d'une partie du code, en fonction du nombre d'harmoniques. L'efficacité du code compilé est très appréciable, avec des gains en temps d'exécution de plus de 100 à partir de  $H=30$ .

Certes, le gain est moindre pour un nombre d'harmonique inférieur : moins le nombre de boucles est élevé, moins le code compilé est rapide comparé à la version originale en langage Matlab. Mais c'est quand le nombre d'harmoniques devient considérable et que les temps de calcul deviennent incompatibles avec un outil interactif que toute l'efficacité du code compilé se fait ressentir. Il semblerait que le gain en temps de calcul tende vers une valeur plafond (un peu au-delà de 100) quand  $H$  devient suffisamment grand.

Ces améliorations ont été mises à disposition de la communauté au sein de la version 2.0 du logiciel Manlab.

## 4.3 Approche tenseurs

Une autre approche a été envisagée pour améliorer les temps de calcul tout en évitant l'utilisation du Fortran et donc l'installation d'un compilateur externe qui, selon le système d'exploitation et le type de machine, s'interface plus ou moins bien avec les bibliothèques de compilation de Matlab.

### 4.3.1 Principe

Cette seconde approche est basée sur une écriture du résidu sous une forme tensorielle :

$$\mathbf{R} = \mathbf{L0} + \underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{U}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\mathbf{U}} \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{R}$ ,  $\underline{\mathbf{U}}$  et  $\mathbf{L0}$  sont des tenseurs d'ordre 1,  $\underline{\mathbf{L}}$  est un tenseur d'ordre 2 et  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  un tenseur d'ordre 3, et où  $\cdot$  désigne le produit contracté de deux tenseurs (l'équivalent du produit matrice-vecteur pour des tenseurs d'ordres quelconques).

### 4.3.2 Calcul des tenseurs $\mathbf{L0}$ , $\mathbf{L}$ , et $\mathbf{Q}$

Notons  $N_{\text{tot}}$  le nombre total de composantes du vecteur d'état  $\underline{\mathbf{U}}$ , et  $e_i$  le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^{N_{\text{tot}}}$ . Voici comment on calcule les tenseurs  $\mathbf{L0}$ ,  $\mathbf{L}$ , et  $\mathbf{Q}$  à partir des opérateurs correspondants  $\mathbf{L0}$ ,  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{Q}$  :

$$\underline{\mathbf{L0}}_i = e_i \cdot \mathbf{L0} \quad (4.2)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}}_{i,j} = e_i \cdot \mathbf{L}(e_j) \quad (4.3)$$

$$\underline{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}}_{i,j,k} = e_i \cdot \mathbf{Q}(e_j, e_k) \quad (4.4)$$

pour  $(i,j,k) \in (1..N_{\text{tot}})^3$ .

Evidemment, mis sous cette forme, le code informatique correspondant fera intervenir des boucles imbriquées sur les indices  $i, j$  et  $k$ , ce qui rendra son exécution très lente dès lors que la taille du système  $N_{\text{tot}}$  sera conséquente. Toutefois, il est utile de rappeler que ces calculs ne seront effectués qu'une seule fois, au lancement de MANLAB, et non à chaque pas MAN.

On peut tout de même améliorer la façon dont sont calculés ces tenseurs si l'on connaît par avance leur structure, ce qui est le cas quand on utilise l'équilibrage harmonique ou la collocation. Pour cela, on se place dans le cas où les équations continues  $u' = f(u, \lambda)$  se mettent sous forme quadratique :

$$m(u') = c_0 + \lambda c_1 + l_0(u) + \lambda l_1(u) + q(u, u) \quad (4.5)$$

où  $c_0$  et  $c_1$  sont des constantes,  $l_0$ ,  $l_1$  et  $m$  sont des opérateurs linéaires, et enfin  $q$  est un opérateur bilinéaire.

### 4.3.3 Forme tensorielle des équations continues

On va exprimer le système 4.5 sous une forme tensorielle. Pour cela on définit :

$$c_0 \rightarrow \underline{\mathbf{c}}^0 := (\mathbf{c}_i^0)_{i=1..N_{\text{eq}}}$$

$$c_1 \rightarrow \underline{\mathbf{c}}^1 := (\mathbf{c}_i^1)_{i=1..N_{\text{eq}}}$$

$$l_0 \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{l}}}^0 := [\mathbf{l}_{i,j}^0]_{i,j=1..N_{\text{eq}}}$$

$$l_1 \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{l}}}^1 := [\mathbf{l}_{i,j}^1]_{i,j=1..N_{\text{eq}}}$$

$$m \rightarrow \underline{\underline{\underline{\mathbf{m}}}} := [\mathbf{m}_{i,j}]_{i,j=1..N_{\text{eq}}}$$

$$q \rightarrow \underline{\underline{\underline{\mathbf{q}}}} := \{\mathbf{q}_{i,j,k}\}_{i,j,k=1..N_{\text{eq}}}$$

de façon à avoir :  $\underline{\underline{\mathbf{l}}^0} \cdot \underline{\mathbf{u}} = l_0(u)$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{l}}^1} \cdot \underline{\mathbf{u}} = l_1()$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{m}}} \cdot \underline{\mathbf{u}}' = m(u')$ , ainsi que  $\underline{\mathbf{u}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}} \cdot \underline{\mathbf{u}} = q(u, u)$ .

Le système peut alors s'écrire à l'aide du vecteur  $\underline{\mathbf{u}}(t) := \left( \mathbf{u}_i(t) \right)_{i=1..N_{\text{eq}}}$  et sa dérivée  $\underline{\mathbf{u}}'(t)$  comme suit (on omettra dans ce qui suit la dépendance temporelle par souci de lisibilité) :

$$\underline{\underline{\mathbf{m}}} \cdot \underline{\mathbf{u}}' = \underline{\mathbf{c}}^0 + \lambda \underline{\mathbf{c}}^1 + \underline{\underline{\mathbf{l}}^0} \cdot \underline{\mathbf{u}} + \lambda \underline{\underline{\mathbf{l}}^1} \cdot \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{u}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}} \cdot \underline{\mathbf{u}}. \quad (4.6)$$

On peut vérifier qu'on retrouve bien le système 4.5 puisque chaque composante  $i$  de l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{N_{\text{eq}}} \mathbf{m}_{i,j} \mathbf{u}'_j = \mathbf{c}_i^0 + \lambda \mathbf{c}_i^1 + \sum_{j=1}^{N_{\text{eq}}} \mathbf{l}_{i,j}^0 \mathbf{u}_j + \lambda \sum_{j=1}^{N_{\text{eq}}} \mathbf{l}_{i,j}^1 \mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^{N_{\text{eq}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{eq}}} q_{i,j,k} \mathbf{u}_j \mathbf{u}_k. \quad (4.7)$$

A noter que les matrices  $\underline{\underline{\mathbf{l}}^0}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{l}}^1}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{m}}}$ , ainsi que le tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{q}}}$  sont souvent creux (surtout ce dernier). Une fois ces petits tenseurs calculés à partir de petits opérateurs, il devient aisé de calculer les grands tenseurs de façon efficace. Toutefois, la construction des grands tenseurs dépend alors de la méthode de discrétisation utilisée.

#### 4.3.4 Tenseurs pour l'équilibrage harmonique

On utilise ici l'équilibrage harmonique, qui a été décrit au chapitre précédent. On a montré que le nombre total d'inconnues du système algébrique final est alors :  $N_{\text{tot}} = (2H + 1)N_{\text{eq}} + 2$ .

##### Tenseur d'ordre 1 : $\underline{\underline{\mathbf{L}}^0}$

Les  $N_{\text{eq}}$  premières composantes du tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{L}}^0}$  correspondent à l'équilibrage de l'harmonique 0 de chacune des composantes du vecteur d'état  $u(t)$  et contiennent donc le tenseur  $\mathbf{c}^0$ .

Les  $2HN_{\text{eq}} + 1$  autres composantes sont toutes nulles.

##### Tenseur d'ordre 2 : $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$

Le tenseur d'ordre 2  $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ , de taille  $(N_{\text{tot}} - 1) \times N_{\text{tot}}$  est composé en trois parties (seules les composantes non nulles sont données explicitement) :

– les  $N_{\text{eq}}$  premières lignes correspondent à l'équilibrage de l'harmonique 0 :

$$\forall (i,j) \in (1..N_{\text{eq}})^2 \quad \mathbf{L}[i,j] = \mathbf{I}^0[i,j], \quad \mathbf{L}[i, N_{\text{tot}} - N_{\text{eq}} - 1 + j] = \mathbf{c}^1; \quad (4.8)$$

– les  $2HN_{\text{eq}}$  lignes suivantes correspondent à l'équilibrage des harmoniques 1 à  $H$  :

$$\forall (h,i,j) \in (1..H) \times (1..N_{\text{eq}})^2, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{L}[2(h-1)N_{\text{eq}} + i, N_{\text{eq}} + 2(h-1)N_{\text{eq}} + j] = \mathbf{I}^0[i,j] \quad (\text{pour les cosinus}) \quad (4.10)$$

$$\mathbf{L}[2hN_{\text{eq}} + i, N_{\text{eq}} + 2hN_{\text{eq}} + j] = \mathbf{I}^0[i,j] \quad (\text{pour les sinus}); \quad (4.11)$$



$$\begin{aligned}
& \forall (h, l, i, j, k) \in (1..H)^2 \times (1..N_{\text{eq}})^3, \\
& \text{pour } l < h : \\
& \quad \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2(h-l-1)N_{\text{eq}} + i, & 2(l-1)N_{\text{eq}} + j \\ 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2(h-l)N_{\text{eq}} + i, & 2lN_{\text{eq}} + j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2(h-l-1)N_{\text{eq}} + i, & 2lN_{\text{eq}} + j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2(h-l)N_{\text{eq}} + i, & 2(l-1)N_{\text{eq}} + j \end{bmatrix} = \mathbf{q}[k, i, j]/2, \\
& \quad \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2(h-l)N_{\text{eq}} + i, & 2lN_{\text{eq}} + j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2(h-l-1)N_{\text{eq}} + i, & 2lN_{\text{eq}} + j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2(h-l)N_{\text{eq}} + i, & 2(l-1)N_{\text{eq}} + j \end{bmatrix} = -\mathbf{q}[k, i, j]/2, \\
& \quad \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2(h-l-1)N_{\text{eq}} + i, & 2lN_{\text{eq}} + j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2(h-l)N_{\text{eq}} + i, & 2(l-1)N_{\text{eq}} + j \end{bmatrix} = \mathbf{q}[k, i, j]/2, \\
& \quad \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2(h-l)N_{\text{eq}} + i, & 2(l-1)N_{\text{eq}} + j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2(h-l-1)N_{\text{eq}} + i, & 2lN_{\text{eq}} + j \end{bmatrix} = \mathbf{q}[k, i, j]/2, \\
& \text{pour } l > h : \\
& \quad \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2(l-1)N_{\text{eq}} + i, & 2(l-h-1)N_{\text{eq}} + j \\ 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2lN_{\text{eq}} + i, & 2(l-h)N_{\text{eq}} + j \\ 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2(l-h-1)N_{\text{eq}} + i, & 2(l-1)N_{\text{eq}} + j \\ 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2(l-h)N_{\text{eq}} + i, & 2lN_{\text{eq}} + j \end{bmatrix} = \mathbf{q}[k, i, j]/2, \\
& \quad \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 2hN_{\text{eq}} + k, & 2lN_{\text{eq}} + i, & 2(l-h-1)N_{\text{eq}} + j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2(l-1)N_{\text{eq}} + i, & 2(l-h)N_{\text{eq}} + j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2(l-h)N_{\text{eq}} + i, & 2(l-1)N_{\text{eq}} + j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2(l-h-1)N_{\text{eq}} + i, & 2lN_{\text{eq}} + j \end{bmatrix} = \mathbf{q}[k, i, j]/2, \quad (4.14) \\
& \quad \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2(h-1)N_{\text{eq}} + i, & j \\ 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & j, & 2(h-1)N_{\text{eq}} + i \\ 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2(h-1)N_{\text{eq}} + i, & N_{\text{tot}} - 1 \\ 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2hN_{\text{eq}} + i, & N_{\text{tot}} \end{bmatrix} = \mathbf{q}[k, i, j], \\
& \quad \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2(h-1)N_{\text{eq}} + i, & j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2hN_{\text{eq}} + i, & j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & j, & 2hN_{\text{eq}} + i \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2hN_{\text{eq}} + i, & N_{\text{tot}} - 1 \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2(h-1)N_{\text{eq}} + i, & N_{\text{tot}} \end{bmatrix} = \mathbf{l}^1[k, i], \\
& \quad \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2(h-1)N_{\text{eq}} + i, & j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2hN_{\text{eq}} + i, & j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & j, & 2hN_{\text{eq}} + i \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2hN_{\text{eq}} + i, & N_{\text{tot}} - 1 \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2(h-1)N_{\text{eq}} + i, & N_{\text{tot}} \end{bmatrix} = -\mathbf{hm}[k, i], \\
& \quad \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2(h-1)N_{\text{eq}} + i, & j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2hN_{\text{eq}} + i, & j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & j, & 2hN_{\text{eq}} + i \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2hN_{\text{eq}} + i, & N_{\text{tot}} - 1 \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2(h-1)N_{\text{eq}} + i, & N_{\text{tot}} \end{bmatrix} = \mathbf{q}[k, i, j], \\
& \quad \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2(h-1)N_{\text{eq}} + i, & j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2hN_{\text{eq}} + i, & j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & j, & 2hN_{\text{eq}} + i \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2hN_{\text{eq}} + i, & N_{\text{tot}} - 1 \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2(h-1)N_{\text{eq}} + i, & N_{\text{tot}} \end{bmatrix} = \mathbf{l}^1[k, i], \\
& \quad \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 2(h-1)N_{\text{eq}} + k, & 2(h-1)N_{\text{eq}} + i, & j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2hN_{\text{eq}} + i, & j \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & j, & 2hN_{\text{eq}} + i \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2hN_{\text{eq}} + i, & N_{\text{tot}} - 1 \\ 2hN_{\text{eq}} + k, & 2(h-1)N_{\text{eq}} + i, & N_{\text{tot}} \end{bmatrix} = \mathbf{hm}[k, i]
\end{aligned}$$

3) L'équation de phase ne fait intervenir aucun terme dans le tenseur  $\mathbf{Q}$  (sauf cas particuliers, voir la note c). La sous-matrice  $\mathbf{Q}[N_{\text{tot}} - 1, 1 : N_{\text{tot}}, 1 : N_{\text{tot}}]$  est alors nulle.

### 4.3.5 Tenseurs pour la collocation polynômiale

On utilise ici la collocation polynômiale par éléments (fonctions polynômiales par morceaux, collocation effectuée aux points de Gauss) telle que décrite au chapitre précédent. Dans ce cas, on a vu que le nombre total d'inconnues du système algébrique final est :  $N_{\text{tot}} = (3N + 1)N_{\text{eq}} + 2$ .

#### Tenseur d'ordre 1 : $\mathbf{L0}$

Les composantes non nulles du tenseur  $\mathbf{L0}$  d'ordre 1, de taille  $N_{\text{tot}} - 1$ , sont définies comme suit :

$$\forall (i, j) \in (1..N_{\text{eq}}) \times (0..3N - 1) \quad \mathbf{L0}[jN_{\text{eq}} + i] = \mathbf{c}_i^0. \quad (4.15)$$

#### Tenseur d'ordre 2 : $\mathbf{L}$

Les composantes non nulles du tenseur d'ordre 2  $\mathbf{L}$ , de taille  $N_{\text{tot}} - 1 \times N_{\text{tot}}$ , se décomposent en trois parties :

- d'une part les termes qui concernent les équations de collocation :

$$\begin{aligned} \mathbb{L}[(3(j-1) + i - 1)N_{\text{eq}} + m, \quad (3(j-1) + k - 1)N + n] &= P[k, i] \cdot \mathbf{1}_{m, n}^0 \\ \mathbb{L}[(3(j-1) + i - 1)N_{\text{eq}} + m, \quad 3NN_{\text{eq}} + 1] &= \mathbf{c}_m^1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

pour

$$\begin{aligned} i \in (1..3) \quad j \in (1..N_{\text{eq}}) \quad k \in (1..4) \\ (m, n) \in (1..N_{\text{eq}})^2; \end{aligned}$$

- d'autre part, ceux qui concernent les équations de périodicité :

$$\begin{aligned} \mathbb{L}[3NN_{\text{eq}} + n, \quad n] &= -1 \\ \mathbb{L}[3NN_{\text{eq}} + n, \quad 3NN_{\text{eq}} + n] &= +1 \end{aligned} \quad (4.17)$$

pour  $n \in (1..N_{\text{eq}})$  ;

- et enfin la dernière composante non nulle est liée à la condition de phase :

$$\mathbb{L}[3NN_{\text{eq}} + N_{\text{eq}} + 1, n^*] = 1. \quad (4.18)$$

où  $n^*$  désigne l'indice d'une composante du vecteur d'état que l'on décide d'annuler pour fixer la phase (voir la note c à ce sujet).

### Tenseur d'ordre 3 : Q

Les composantes non nulles du tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  d'ordre 3, de taille  $N_{\text{tot}} - 1 \times N_{\text{tot}} \times N_{\text{tot}}$ , se décomposent également en 3 parties :

- d'une part ce qui concerne les équations de collocation :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}[(3j + i)N_{\text{eq}} + n_1, \quad (3j + k_1)N_{\text{eq}} + n_2, \quad (3j + k_2)N_{\text{eq}} + n_3] \\ = P[k_1 + 1, i + 1]P[k_2 + 1, i + 1]q_{n_1, n_2, n_3} \\ \mathbf{Q}[(3j + i)N_{\text{eq}} + n_1, \quad (3j + k_1)N_{\text{eq}} + n_2, \quad 3NN_{\text{eq}} + N_{\text{eq}} + 1] \\ = P[k_1 + 1, i + 1]\mathbf{1}_{n_1, n_2}^1 \\ \mathbf{Q}[(3j + i)N_{\text{eq}} + n_1, \quad (3j + k_1)N_{\text{eq}} + n_1, \quad 3NN_{\text{eq}} + N_{\text{eq}} + 2] \\ = -P'[k_1 + 1, i + 1]\mathbf{m}_{n_1} \end{aligned} \quad (4.19)$$

pour

$$\begin{aligned} (i, j) \in (0..2) \times (0..N - 1) \\ (k_1, k_2) \in (0..3)^2 \\ (n_1, n_2, n_3) \in (1..N_{\text{eq}})^3 \end{aligned}$$

- d'autre part, les composantes liées à la condition de périodicité sont toutes nulles ;
- enfin, la partie liée à la condition de phase est nulle (sauf cas particuliers, voir la note c).

### 4.3.6 Écriture matricielle

$\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{L0}$  étant des vecteurs, et  $\mathbf{L}$  une matrice, leur implémentation sous Matlab ne pose aucun problème.

Toutefois, le calcul à l'aide de tenseurs d'ordre 3 et plus n'est pas très bien géré dans matlab, et il est utile de se ramener au cas des matrices. On écrit alors le tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  sous forme de matrice en juxtaposant les différentes sous-matrices  $\mathbf{Q}_i$  définies par :

$$\mathbf{Q}_i[j,k] = \mathbf{Q}_{i,j,k}$$

On obtient ainsi une grande matrice, qui représente le tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  :

$$\mathbf{Q}_{\text{tens}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 & \cdots & \mathbf{Q}_{N_{\text{tot}}-1} \end{bmatrix},$$

Ainsi, on accède directement à l'élément  $\mathbf{Q}_{i,j,k}$  par :

$$\mathbf{Q}_{i,j,k} = \mathbf{Q}_i[j,k] = \mathbf{Q}_{\text{tens}}[j, (i-1)N_{\text{tot}} + k].$$

Le calcul du terme quadratique  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}^T \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \underline{\underline{\mathbf{U}}}$  s'écrit alors en deux temps :

- le produit à gauche par  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}^T$  :  
il se calcule matriciellement par  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}^T \mathbf{Q}_{\text{tens}}$ , à la différence près que ce dernier est un vecteur colonne de taille  $N_{\text{tot}}(N_{\text{tot}} - 1)$ , dont chaque portion de  $N_{\text{tot}}$  coefficients est une colonne de la matrice de taille  $N_{\text{tot}} \times N_{\text{tot}} - 1$  dont on a besoin. On obtient cette matrice, de façon peu coûteuse, à l'aide de la fonction **reshape** de Matlab ;
- le produit à droite par  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$  :  
il s'écrit matriciellement comme le produit à droite par  $\mathbf{U}$ , après transposition de la matrice obtenue lors de l'étape précédente.

Tout ceci permet d'écrire le calcul du résidu en une seule ligne de commande Matlab, ne faisant intervenir que des sommes vectorielle et matricielle, des produits matrice-vecteur, la transposition  $'$ , et la fonction **reshape** :

$$\mathbf{L0} + (\mathbf{L} + \text{reshape}(\mathbf{U}' * \mathbf{Q}_{\text{tens}}, N_{\text{tot}}, N_{\text{tot}} - 1)') * \mathbf{U}.$$

La transposition est appliquée aux plus petites matrices possibles, plutôt qu'à la matrice  $\mathbf{Q}_{\text{tens}}$ , et ceci afin d'économiser du temps de calcul. Par ailleurs, la matrice  $\mathbf{L}$  et la matrice  $\mathbf{Q}_{\text{tens}}$  sont susceptibles d'être (très) creuses, si bien que le stockage de ces matrices sous forme creuse (le type **sparse** de Matlab) permet à la fois un gain de mémoire et surtout un gain très substantiel de temps de calcul lors des produits matrice-vecteur. Enfin, il est à noter que l'utilisation de la fonction **reshape** sur des matrices creuses est légèrement plus coûteuse que sur des matrices pleines, mais les gains obtenus sur les produits matrice-vecteur compensent très largement ce surcoût.

Il faut également noter que, bien qu'équivalent sur le plan théorique, une concaténation verticale (plutôt qu'horizontale) de la matrice  $\mathbf{Q}_{\text{tens}}$  conduit à effectuer le premier produit matrice-vecteur avec  $\mathbf{Q}_{\text{tens}}$  à gauche et  $\mathbf{U}$  à droite, calcul que Matlab effectue beaucoup plus lentement dans ce sens là.

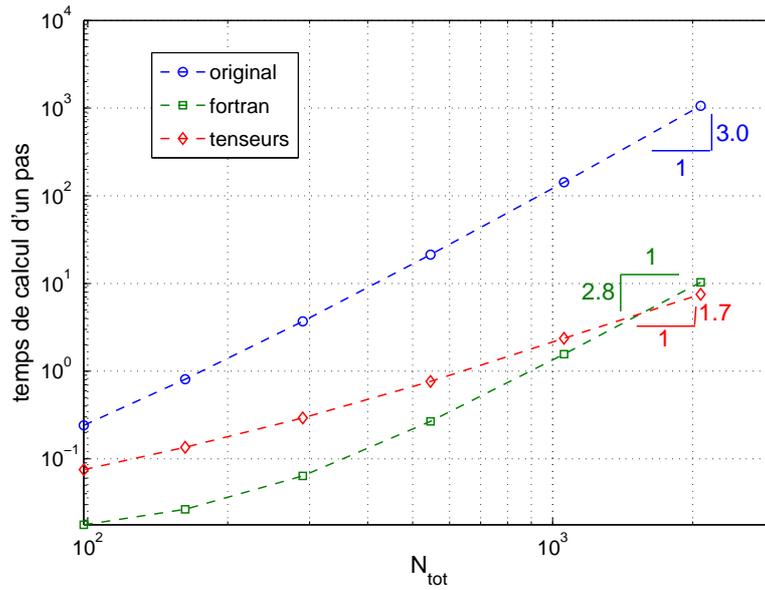


FIG. 4.4 – Comparaison des temps de calcul des différentes implémentations : temps de calcul (en secondes) d’une série MAN à l’ordre 20, en fonction de la taille du système algébrique résultant de la discrétisation. Modèle de clarinette à 32 équations en temps, résolu par équilibrage harmonique. La taille du système algébrique croît avec le nombre d’harmoniques prises en compte.

## 4.4 Comparaison des approches

La figure 4.4 montre l’évolution des temps de calcul pour un pas de continuation (une série MAN à l’ordre 20), dans le cas du modèle de clarinette dont le système (dans le domaine continu) possède 32 équations. Les calculs ont été réalisés par équilibrage harmonique, en faisant varier le nombre d’harmoniques  $H$  de 1 à 32 par puissance de 2. Les trois implémentations sont comparées : la version originale (boucles imbriquées en programmation Matlab), la version Fortran, et la version tenseurs. Les pentes asymptotiques observées sur les courbes sont indiquées sur la figure.

On observe qu’à partir d’une trentaine d’harmoniques (soit  $N_{\text{tot}} = 2000$ ), les temps de calcul des deux implémentations décrites dans ce chapitre sont comparables, et inférieurs au temps de calcul de l’implémentation initiale d’un facteur 100. Par contre, il est clair que la progression des temps de calcul en fonction de la taille du système favorisera la formulation tenseur pour les systèmes plus grand, ou pour un nombre d’harmoniques supérieur.

Pour mieux s’en rendre compte, on a tracé à la figure 4.5 le *gain* en temps de calcul, par rapport à l’implémentation initiale, de chacune des deux nouvelles implémentations proposées. Il est clair que le gain de la version Fortran tend à plafonner autour de 100 (la progression des temps de calcul est alors la même que dans l’implémentation initiale, mais avec un facteur 100 de différence), alors que le gain de la formulation tensorielle croît de façon polynômiale en  $N_{\text{tot}}$ . Pour les grands systèmes, ou bien les calculs nécessitant beaucoup d’harmoniques (ou d’éléments, dans le cas de la collocation orthogonale), la formulation tensorielle sera la plus

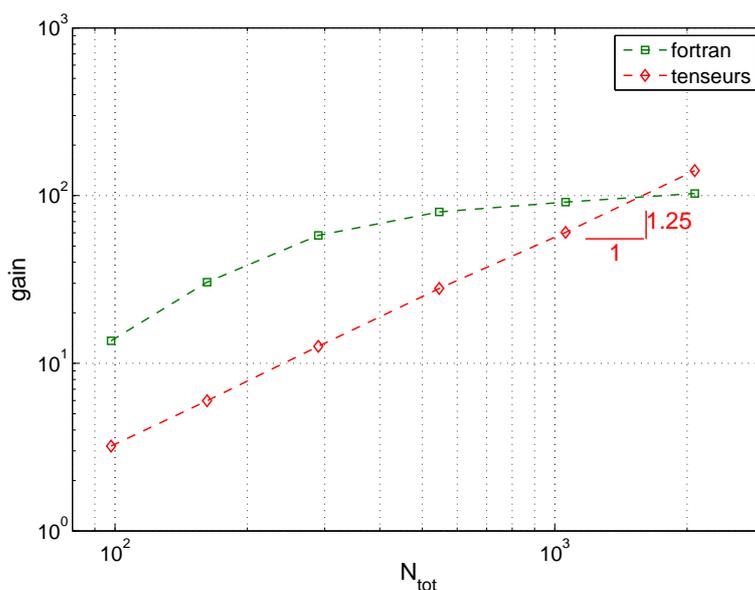


FIG. 4.5 – Comparaison du gain en temps de calcul des deux implémentations proposées : temps de calcul dans l’implémentation initiale divisé par le temps de calcul de chacune des deux nouvelles implémentations, pour une série MAN à l’ordre 20, sur le même système que la figure précédente, en fonction de la taille du système algébrique (HBM pour différentes valeurs de  $H$ ).

efficace.

## Conclusion

Nous disposons maintenant de deux méthodes distinctes et complémentaires pour calculer les branches de solutions périodiques des systèmes dynamiques aux non-linéarités polynômiales, au sein d’un même outil de continuation numérique. De plus, grâce aux deux nouvelles formulations proposées dans ce chapitre, il est désormais possible de traiter des systèmes de taille moyenne, comme notre modèle de clarinette, en un temps raisonnable. On peut désormais s’attaquer aux applications visées : les instruments de musique auto-oscillants. Ce sera l’objet de la seconde partie du manuscrit.

Notons toutefois que l’accélération par fonctions compilées en Fortran présente l’avantage de permettre d’accélérer également le calcul de stabilité par méthode de Hill. Une formulation tensorielle de cette fonction reste à développer.

Enfin, dans le but de rendre notre outil numérique le plus généraliste possible, nous souhaitons pouvoir traiter des systèmes dont les équations possèdent des non-linéarités quelconques, c’est-à-dire non nécessairement polynômiales. C’est l’objet du chapitre suivant.



# Chapitre 5

## Traitement des non-linéarités non polynômiales

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>71</b>
<b>5.2</b>	<b>An introductive example</b>	<b>72</b>
5.2.1	First-order recast	72
5.2.2	Quadratic recast of the exponential function	72
5.2.3	Applying the harmonic balance method to the ODEs	73
5.2.4	Recast of the non linear algebraic equation	74
5.2.5	Periodic solutions of the regularised vibro-impact	75
<b>5.3</b>	<b>General treatment of nonlinear functions</b>	<b>76</b>
5.3.1	First order derivative	76
5.3.2	Second order derivative	76
<b>5.4</b>	<b>Recast of a few common non-polynomial nonlinearities</b>	<b>77</b>
5.4.1	Natural logarithm	77
5.4.2	Non-integer power	77
5.4.3	Trigonometric functions	77
<b>5.5</b>	<b>Periodic solutions of the nonlinear pendulum</b>	<b>78</b>
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>80</b>
<b>5.A</b>	<b>Vibro-impact system</b>	<b>80</b>
5.A.4	Model	80
5.A.5	Recast of conservative systems	81
<b>5.B</b>	<b>Quadratic framework</b>	<b>81</b>
<b>5.C</b>	<b>Extended framework</b>	<b>81</b>
5.C.6	Series computation	81
5.C.7	Implementation in MANLAB	82

---

Dans ce chapitre, nous reproduisons un article actuellement soumis au *Journal of Sound and Vibration*. Il concerne une généralisation de la méthode, présentée aux chapitres précédents, qui consiste à utiliser l'équilibrage harmonique à un ordre élevé pour rechercher les solutions périodiques d'un système dynamique et ensuite d'utiliser la méthode asymptotique numérique pour effectuer la continuation et ainsi calculer les branches de solutions périodiques.

## Résumé étendu

Dans cet article, nous proposons une extension de la méthode associant l'équilibrage harmonique (EH) à la méthode asymptotique numérique (MAN) afin de calculer les branches de solutions périodiques de systèmes dynamiques non linéaires avec non-linéarité non polynomiale (ni rationnelle).

La méthode associant EH à l'ordre élevé et MAN, initialement proposée par Cochelin et Vergez dans [A high order purely frequency based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions, *J. Sound. Vib.*, **324** :243–262, 2009], repose sur une formulation quadratique des équations qui permet alors d'écrire de manière automatique, par des relations de récurrence, les équations de l'équilibrage harmonique à un ordre arbitrairement élevé dans un formalisme qui permet d'utiliser la MAN pour la continuation.

La généralisation présentée ici permet d'élargir le cadre de travail à un ensemble de non-linéarités beaucoup plus vaste, permettant notamment de traiter les fonctions trigonométriques, ainsi que les fonctions exponentielle et logarithme. Cette généralisation est basée sur la dérivation des variables additionnelles par rapport au temps : on transforme ainsi l'équation algébrique dépendante du temps qui contient la non-linéarité non polynômiale en une équation différentielle ordinaire quadratique et une nouvelle équation algébrique contenant la non-linéarité polynômiale, mais indépendante du temps (condition initiale). Cette dernière équation algébrique est alors traitée par dérivation par rapport au paramètre de chemin de la branche de solutions.

L'article présente un exemple de système vibro-impact régularisé à l'aide d'une fonction exponentielle, puis expose la méthode générale d'un point de vue théorique, avant de montrer concrètement comment on l'applique à quelques non-linéarités courantes, et enfin les solutions périodiques du pendule simple non linéaire en régime libre non amorti sont calculées en utilisant cette méthode et avec l'aide de MANLAB.

### **A high-order, purely frequency based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions : the case of non polynomial nonlinearities**

Sami Karkar, Bruno Cochelin et Christophe Vergez

## Abstract

In this paper, we extend the method proposed by Cochelin and Vergez in [A high order purely frequency based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions, *Journal of Sound and Vibration*, 324:243–262, 2009] to the case of non polynomial non-linearities. This extension allows for the computation of branches of periodic solutions of a broader class of nonlinear dynamical systems.

The generalised method is based on the differentiation of variables with respect to the time variable, moving the non polynomial non-linearity to a time-independent, initial condition equation. This equation is then treated using differentiation with respect to the path parameter, leading to a system of algebraic equations that is compatible with the Asymptotic Numerical Method used for the continuation.

A vibro-impact system is used to illustrate how an exponential non-linearity is handled. Various cases of nonlinear functions are also treated. Finally, the nonlinear free pendulum is addressed and its periodic solutions are computed using the MANLAB software and a high-order harmonic balance method.

## 5.1 Introduction

In a previous issue, Cochelin et Vergez presented *A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions* [5], targeting nonlinear dynamical systems. The technique addresses autonomous or forced nonlinear dynamical systems, using an arbitrary high order Harmonic Balance Method (HBM, see [12, 14]) together with the asymptotic numerical method (ANM, see [4, 6] for details) for the continuation.

From the initial dynamical system equations, the proposed method automatically derives the HBM set of algebraic equations to the desired order, provided the initial equations are given in a quadratic formalism: dynamical systems must be expressed as a set of first order nonlinear ordinary differential equations and nonlinear algebraic equations, all with purely quadratic polynomial nonlinearities at most (see eq. (3) in [5]).

The method has been used in various applications, such as the analysis of microbubbles in liquids by Pauzin et al. [13], or the nonlinear oscillations of nano- and micro-electromechanical devices by Kacem et al. [8]. A purely frequency-based stability analysis was also proposed by Lazarus and Thomas [10], as a companion to the method presented in [5].

Whereas classical harmonic balance technique is often limited to very few harmonics, the proposed method has the advantage of allowing an arbitrary high order of the Fourier series. The drawback is the need to recast the equations to comply with the quadratic framework. The recast of polynomial, square root, and rational functions has been treated in the cited paper, defining intermediate variables using quadratic polynomial algebraic equations. The authors also set up the basis for the recast of a sine nonlinearity, as encountered in the simple, free pendulum equation  $\theta''(t) + \sin(\theta(t)) = 0$  (where the prime sign denotes time-derivation). They obtained a set composed of 4 nonlinear ordinary differential equations and 2 time-independent, nonlinear algebraic equations. But, the calculation was not carried out.

In this paper, we propose a generalisation of the method proposed in [5] for the treatment of ODE with non polynomial nonlinearities. This generalisation greatly enlarges the field of application by overcoming the need for strictly quadratic reformulation. Therefore, the method can be used to compute periodic solutions families of most nonlinear dynamical systems, as well as the stability of these solutions.

The present paper is organised as follows : first, in section 5.2, the case of the exponential function is discussed and the periodic solutions of a vibro-impact system are calculated using the MANLAB software ; then, in section 5.3, the method is generalised to a wider class of nonlinearities ; then, in section 5.4, we show how this generalisation applies to the natural logarithm, trigonometric functions, as well as

non-integer power functions ; and last, in section 5.5, we use the proposed method to compute the periodic solutions of the simple free pendulum.

## 5.2 An example using the exponential function: a regularised vibro-impact oscillator

We consider a one-degree-of-freedom, mass-spring oscillator which is limited to the half-plane  $x < 1$  by a rigid wall. The rigid wall reaction is modelled by an exponential function, with a coefficient  $\alpha$  to tune the wall stiffness.

Let  $x(t)$  denote the mass position, we look for periodic solutions of :

$$x''(t) = -x(t) - \lambda x'(t) - e^{\alpha(x(t)-1)}, \quad (5.1)$$

where  $\lambda$  is a free parameter (see 5.A for details on this equation).

Before embarking in the treatment of (5.1), we recall that two numerical methods are used in [5] : a high-order HBM technique and a high order Taylor series expansion for the continuation. The automation of these two techniques rely on the quadratic form of the nonlinearities. To comply with this framework, the method proposed by Cochelin et Vergez in [5] uses the following formalism:

$$\mathbf{m}(\mathbf{Z}'(\mathbf{t})) = \mathbf{c}_0 + \lambda \mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0(\mathbf{Z}(\mathbf{t})) + \lambda \mathbf{l}_1(\mathbf{Z}(\mathbf{t})) + \mathbf{q}(\mathbf{Z}(\mathbf{t}), \mathbf{Z}(\mathbf{t})) \quad (5.2)$$

where  $\mathbf{Z}(t)$  is the unknown vector composed of time-dependent state variables,  $\lambda$  is the continuation parameter,  $(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1)$  are constant vectors,  $(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1, \mathbf{m})$  are linear vector-valued operators, and  $\mathbf{q}$  is a bilinear vector-valued operator.

We will now present the successive recasts of system (5.1) needed to obtain the required general form (5.2).

### 5.2.1 First-order recast

We introduce an additional variable  $y(t) = x'(t)$  and rewrite equation (5.1) as:

$$x'(t) = y(t) \quad (5.3a)$$

$$y'(t) = -x(t) - \lambda y(t) - e^{\alpha(x(t)-1)} \quad (5.3b)$$

### 5.2.2 Quadratic recast of the exponential function

Introducing the additional variable  $e$  and its definition equation

$$e(t) = \exp \left[ \alpha(x(t) - 1) \right] \quad (5.4)$$

we differentiate it with respect to the time variable to obtain

$$e'(t) = \alpha x'(t) \exp \left[ \alpha(x(t) - 1) \right]$$

or equivalently

$$e'(t) = \alpha e(t)y(t) \quad (5.5)$$

Note that for equation (5.5) to be exactly equivalent to (5.4), the following initial condition must be added:

$$e(0) = \exp \left[ \alpha (x(0) - 1) \right] \quad (5.6)$$

We can now recast (5.3a)-(5.3b) into the following set of differential and algebraic equations:

$$x'(t) = y(t) \quad (5.7a)$$

$$y'(t) = -x(t) - \lambda y(t) - e(t) \quad (5.7b)$$

$$e'(t) = \alpha e(t)y(t) \quad (5.7c)$$

$$e(0) = e^{\alpha(x(0)-1)} \quad (5.7d)$$

At this point, the authors wish to underline the fact that the non polynomial nonlinearity has “moved” from a time-dependent equation (here: 5.3b) to a time-independent equation (here: 5.7d): this is the key point of the method.

### 5.2.3 Applying the harmonic balance method to the ODEs

We will now apply the harmonic balance method (HBM) to the equations (5.7a)-(5.7c).

Denote  $\mathbf{Z}(t) = [x(t), y(t), e(t)]^T$ , and the following operators:

$$\mathbf{m}(\mathbf{Z}'(t)) = [x'(t), y'(t), e'(t)]^T$$

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_1 = [0, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{l}_0(\mathbf{Z}(t)) = [y(t), -x(t) - e(t), 0]^T$$

$$\mathbf{l}_1(\mathbf{Z}(t)) = [0, -y(t), 0]^T$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{Z}(t), \mathbf{Z}(t)) = [0, 0, \alpha e(t)y(t)]^T$$

The ODEs (5.7a-5.7c) now take the required form:

$$\mathbf{m}(\mathbf{Z}') = \mathbf{c}_0 + \lambda \mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0(\mathbf{Z}) + \lambda \mathbf{l}_1(\mathbf{Z}) + \mathbf{q}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}).$$

Eq. (5.7a-5.7b) are treated classically, using the method proposed by Cochelin and Vergez in [5], by balancing for the  $H+1$  harmonics  $0 \leq h \leq H$  of  $\mathbf{Z}(t)$ , where  $H$  is the chosen truncation order of the Fourier series of the vector of (time-dependent) variables  $\mathbf{Z}(t)$ :

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}_0 + \sum_{h=1}^H \left( \mathbf{Z}_{2h-1} \cos(k\omega t) + \mathbf{Z}_{2h} \sin(k\omega t) \right) \quad (5.8)$$

For equation (5.7c), only harmonics  $1 \leq h \leq H$  need to be balanced. The reason is that the balance of the harmonic zero, which consists in equating the mean value of each side over a period, is not suitable here: both sides of the equation result

from time-differentiation of a periodic quantity (namely  $e(t)$ ), and has mean value which is therefore null. Thus, we only apply the HBM for harmonics  $1 \leq h \leq H$ , where  $H$  is the truncation order.

The unknown (time-independent) variables are gathered in the state vector  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{U} = [\{\mathbf{Z}_i\}_{i=0..2H}, \lambda, \omega],$$

whose size is  $N_u = 3(2H + 1) + 2$ .

The resulting algebraic equations, are then automatically put into the standard ANM form:

$$\mathbf{L}\mathbf{0} + \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = 0 \quad (5.9)$$

with a constant vector  $\mathbf{L}\mathbf{0}$ , a linear vector-valued operator  $\mathbf{L}$ , and a quadratic vector-valued operator  $\mathbf{Q}$ .

Now counting the number of algebraic equations:

- $2(2H + 1)$  for the full HBM applied to (5.7a)-(5.7b)
- $2H$  for the partial HBM applied to (5.7c)
- 1 for the time-independent equation (5.7d)
- 1 for an additional phase equation (for instance:  $y(0) = 0$ )

we reach a total number of  $N_e = 3(2H + 1) + 1$  equations.

Thus, we get  $N_e = N_u - 1$ , as is needed for a 1D family of solutions.

The reader shall notice that the system is now suitable for the continuation of periodic orbits using a classical predictor-corrector method. However, because we aim at using an ANM-based continuation method, an additional step is necessary.

#### 5.2.4 Recast of the algebraic equation (5.7d)

We will now address the last recast that concerns the time-independent, non polynomial, nonlinear, *algebraic* equation (5.7d). We follow the usual procedure presented in [6] and [1] for non polynomial equations.

For sake of clarity, let us define two new variables,  $e_{t0}$  and  $x_{t0}$ , that represent  $e(0)$  and  $x(0)$  respectively:

$$e_{t0} = e_0 + \sum_{h=1}^H e_{2h-1} \quad x_{t0} = x_0 + \sum_{h=1}^H x_{2h-1}.$$

where  $e_i$  (respectively  $x_i$ ) denotes the  $i$ -th coefficient of the Fourier series of  $e(t)$  (resp.  $x(t)$ ) as defined for  $\mathbf{Z}$  in the equation (5.8).

By differentiation, equation (5.7d) is strictly equivalent to:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad de_{t0}(a) = \alpha e_{t0}(a) dx_{t0}(a) \quad (5.10a)$$

$$e_{t0}(a=0) = e^{\alpha(x_{t0}(a=0)-1)} \quad (5.10b)$$

where the dependence on the path parameter  $a$  along the branch of solutions has been explicitly written.

Equation (5.10a) is now quadratic in  $(\mathbf{U}, \mathbf{dU})$  and is suitable for an easy and efficient computation of the Taylor series used for the continuation. The reader is referred to appendix 5.C for details on the formalism used to enter (5.10a–5.10b) in the MANLAB software.

### 5.2.5 Periodic solutions of the regularised vibro-impact

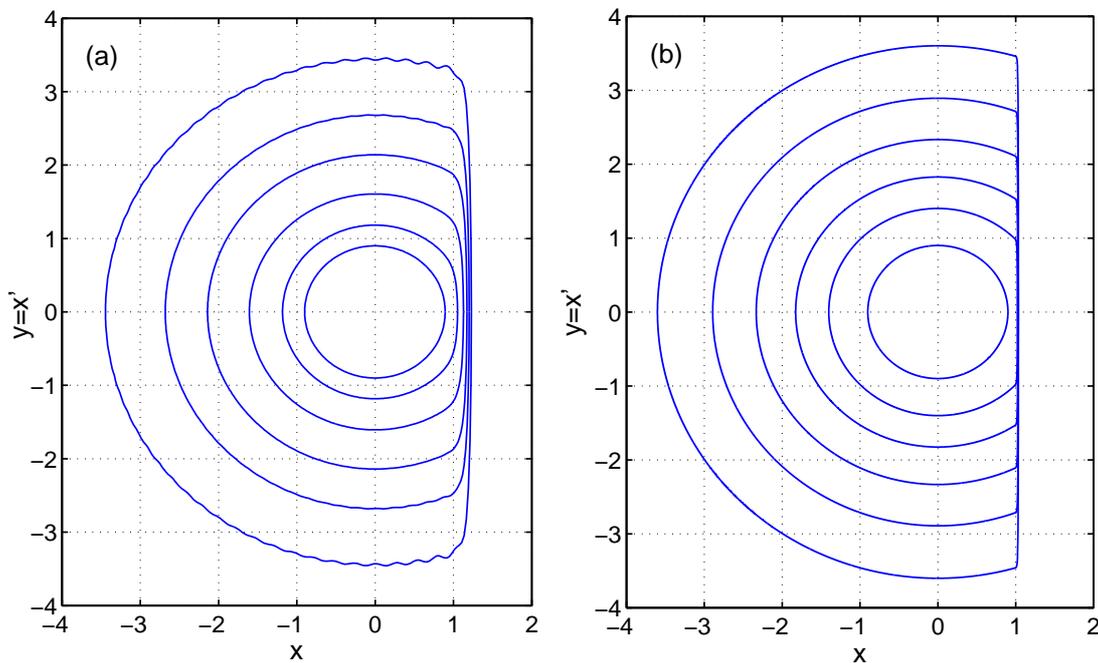


Figure 5.1: **Phase portrait of the regularised vibro-impact:** family of periodic solutions in the phase plane  $(u, v)$ . (a): non stiff regularisation ( $\alpha = 20$ ) with  $H = 50$  harmonics. (b): stiff regularisation ( $\alpha = 200$ ) with  $H = 1000$  harmonics.

Figure 5.1 shows samples from the family of periodic solutions computed for two cases: a non stiff regularisation, with  $\alpha = 20$ , using  $H = 50$  harmonics (a) ; and a stiff regularisation, with  $\alpha = 200$ , using  $H = 1000$  harmonics (b). In both cases, the continuation was run with a threshold of  $10^{-10}$  on the residue.

The phase portrait cycles are to be compared with those of a free, conservative non-regular vibro-impact system, i.e. a wall modelled with an impact law using a restitution coefficient equal to unity : the family of periodic solutions is composed of origin-centered circles, when the amplitude is less than unity, and origin centered arc of circles closed by a vertical segment along the line  $x = 1$ , when the amplitude is higher than unity.

### 5.3 General treatment of nonlinear functions

Here, we discuss the general method for the recast of most nonlinearities into quadratic formulation. Note that the quadratic recast of rational functions has been given by Cochelin and Vergez in [5].

Let us consider a set of differential and algebraic equations:

$$F(u, v, g(u)) = 0 \quad (5.11)$$

where  $v=u'$ ,  $F$  is at most quadratic in its arguments, and  $g$  is any nonlinear function of  $u$ .

#### 5.3.1 First order derivative

We add a new variable  $w$  defined by  $w=g(u)$ . By time-derivation, we obtain:

$$w' = \frac{\partial g}{\partial u}(u)v \quad (5.12a)$$

$$w(0) = g(u(0)) \quad (5.12b)$$

If  $\partial g/\partial u$  can be written as a rational function of  $(u, v, w)$ , then the equation  $x = \partial g/\partial u$  can be recast into quadratic equations (possibly using additional variables). Consequently, the time-dependent equation (5.12a) becomes  $w' = xv$ , which is quadratic in  $x$  and  $v$ .

We apply the HBM to this equation, but only for harmonics  $1 \leq h \leq H$ , while the mean value (harmonic zero) will be constrained by the initial condition (5.12b). The equation count is then equal to  $2H + 1$ , as in a standard HBM applied to a unique equation, which matches the number of variables : the  $2H + 1$  coefficients of the Fourier series of  $w(t)$  up to harmonic  $H$ . In the case of autonomous systems, the period (or equivalently the angular frequency) is also unknown and one need to add a phase equation, as explained by Doedel in [7] as well as Cochelin and Vergez in [5].

If additional variables were to be used for the quadratic recast of  $x$ , all corresponding algebraic equations will be treated with full HBM, including the balance of the harmonic zero (the mean values).

#### 5.3.2 Second order derivative

If  $x = \partial g/\partial u$  cannot be expressed as a quadratic polynomial of the current variables, we differentiate it with respect to  $t$ :

$$x' = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u)v \quad (5.13a)$$

$$x(0) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(0)) \quad (5.13b)$$

If  $\partial^2 g/\partial u^2$  can be expressed as a rational function of  $(u, v, w, x)$ , then we define  $y=\partial^2 g/\partial u^2$  and the previous results apply: the time-dependent equation in (5.13a) is quadratic in  $y$  and  $v$ .

We then have two differential equations, namely  $w'=xv$  and  $x'=yv$ , with two associated initial conditions. The differential equations are treated using HBM for harmonics 1 and higher, while the initial conditions will constrain the mean values of  $w$  and  $x$  (the nonpolynomial, nonlinear, algebraic equation is addressed by differentiation, as explained in section 5.2.4).

If additional variables were used for the recast of the rational function  $y$ , all corresponding algebraic equations will be treated with full HBM, including the balance of the harmonic 0 (the mean values).

## 5.4 Recast of a few common non-polynomial nonlinearities

For the quadratic recast of the exponential function, the reader is referred to section 5.2.

### 5.4.1 Natural logarithm

Given  $w$  defined as  $w(t) = \ln(u(t))$  (assuming  $u > 0$ ). For sake of simplicity, we do not write explicitly the time dependence in the following. Differentiating with respect to the time variable, the definition equation becomes  $w' = u'/u$ , or equivalently, using  $x = w'$ :

$$\begin{cases} u' = xu \\ w(t=0) = \ln(u(t=0)) \end{cases}$$

which is quadratic in  $u$  and  $x$ .

### 5.4.2 Non-integer power

Given  $w(t) = u(t)^\alpha$  where  $\alpha \in \mathbb{R}$  is a constant, then  $w' = \alpha u^{\alpha-1}u'$ . Using  $v = u'$  and  $x = w'$ , one gets:

$$\begin{cases} ux = \alpha wv \\ w(t=0) = u(t=0)^\alpha \end{cases}$$

which is quadratic in  $(u, v, w, x)$ .

### 5.4.3 Trigonometric functions

Given  $s(t) = \sin(u(t))$  and  $c(t) = \cos(u(t))$ , we introduce  $v(t) = u'(t)$  and time-derivation of the definition equations of  $s$  and  $c$  gives:

$$\begin{cases} s' = cv \\ c' = -sv \\ s(t=0) = \sin(u(t=0)) \\ c(t=0) = \cos(u(t=0)) \end{cases}$$

which are obviously quadratic in  $(c, v)$  and  $(s, v)$  respectively.

As for  $w(t) = \tan(u(t))$ , time-differentiation leads to  $w' = (1 + w^2)v$ . Using an additional variable  $x = 1 + w^2$ , one gets the quadratic equation:

$$\begin{cases} w' = xv \\ w(t=0) = \tan(u(t=0)). \end{cases}$$

## 5.5 Periodic solutions of the simple, free, nonlinear pendulum

Denoting  $\theta$  the angle between the current position and the lower, rest position, the equation of motion of the free pendulum writes:

$$\theta''(t) + \sin[\theta(t)] = 0 \quad (5.14)$$

Adding a damping parameter  $\lambda$ , that will vanish along the family of periodic solutions, as explained in section 5.A, the equation of motion becomes:

$$\theta''(t) + \lambda\theta'(t) + \sin[\theta(t)] = 0 \quad (5.15)$$

Using three additional variables,  $v(t)=\theta'(t)$ ,  $s(t)=\sin[\theta(t)]$  and  $c(t)=\cos[\theta(t)]$ , we recast the equation (5.15) into the following quadratic, differential-algebraic system:

$$\theta'(t) = v(t) \quad (5.16a)$$

$$v'(t) = -s(t) - \lambda v(t) \quad (5.16b)$$

$$s'(t) = c(t)v(t) \quad (5.16c)$$

$$c'(t) = -s(t)v(t) \quad (5.16d)$$

$$s(0) = \sin(\theta(0)) \quad (5.16e)$$

$$c(0) = \cos(\theta(0)) \quad (5.16f)$$

Using the proposed method, we apply:

- the full HBM to equations (5.16a-5.16b)
- the balance of the harmonics 1 and higher to equations (5.16c-5.16d)

and since the frequency is also unknown, we add a phase equation:

$$v(0) = 0. \quad (5.17)$$

Finally, the initial conditions (5.16e-5.16f) are treated by differentiation.

These equations are then in the right form for applying the ANM continuation:

$$\begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{0} + \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{L}h(d\mathbf{U}) = \mathbf{Q}h(\mathbf{U}, d\mathbf{U}) \end{cases}$$

The total number of equation is then:

$$\begin{aligned} N_e &= \underbrace{2(2H+1)}_{\text{full HBM}} + \underbrace{2(2H)}_{\text{HBM } h>0} + \underbrace{1}_{\text{phase eq.}} + \underbrace{2}_{\text{in Lh/Qh}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{in L0/L/Q}} \\ &= 4(2H+1) + 1 \end{aligned}$$

while the number of variables is

$$\begin{aligned} N_u &= \underbrace{4(2H+1)}_{\text{Fourier components of } \theta, v, s, c} + \underbrace{1}_{\lambda} + \underbrace{1}_{\omega} \\ &= 4(2H+1) + 2 \end{aligned}$$

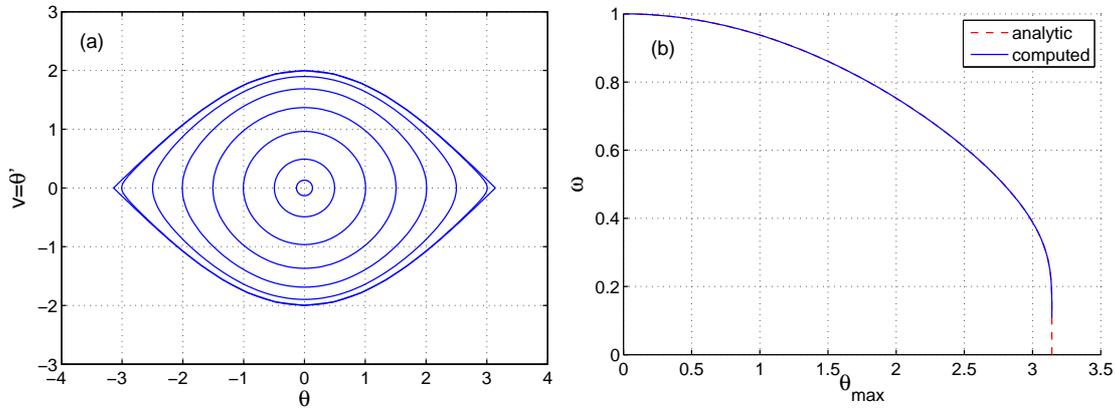


Figure 5.2: **Periodic solutions of the nonlinear free pendulum.** (a): phase portrait  $(\theta, v)$  showing a few samples of the periodic solution family. (b): amplitude-frequency diagram, the computed curve is superimposed on that of the analytic formula. HBM using  $H = 100$  harmonics, ANM-threshold:  $10^{-15}$ , the residue  $\|\mathbf{R}\|$  was kept under  $10^{-14}$ .

Figure 5.2 shows the phase portrait and the amplitude-frequency diagram of the periodic solutions family of the nonlinear, free pendulum system, computed with  $H = 100$  harmonics. The theoretical amplitude-frequency diagram of this system (dashes) corresponds to the following analytic formula:

$$T(\theta_{max}) = \frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left( \sin^2(\theta_{max}/2) \right),$$

where  $\mathbf{K}$  is the complete elliptic integral of the first kind (see [2] for instance). The computed curve (plaine line) is superimposed on the theoretical one.

The branch was computed with 29 portions. Each portion of the branch was sampled in 20 control points. The computation was stopped when the relative error between the computed angular frequency and its theoretical value (given the amplitude) reached 0.1%, which occurs at the solution point:

$$\begin{pmatrix} \theta_{max} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.999998\pi \text{ rad} \\ 0.112801 \text{ rad/s} \end{pmatrix}$$

where the norm of the residual vector is  $\|\mathbf{R}\|=2.76 \cdot 10^{-15}$ . Increasing the number of harmonics only leads to a closer approach to the limit point  $(\theta_{max}, \omega)=(\pi, 0)$ , where the period is infinite<sup>a</sup>.

## 5.6 Conclusion

In this paper, we extended the works of Cochelin and Vergez presented in [5] to the case of general nonlinearities.

A vibro-impact with regularisation was presented, and its periodic solutions were computed with the MANLAB software. The case of a very stiff regularisation demonstrated the capabilities of this numerical tool to deal with a very high number of harmonics in the harmonic balance method.

Finally, we showed how to apply the method for the continuation of the periodic solutions of the simple, free, nonlinear pendulum. Our results confirm that the harmonic balance method with a high number of harmonics is both affordable and well suited to the ANM continuation framework.

To this end, the use of the MANLAB software proved to be extremely helpful, combining efficient numerical techniques, an interactive graphical user interface, and a widely used programming environment.

The principal limitation is due to the need of an algebraic relation between the nonlinear function and its derivative, or its primitives and the state variables. However, the numerous examples treated in the one but last section of the paper show a variety such functions that might appear in nonlinear dynamical systems.

Automatic differentiation, such as the DIAMANT package proposed by Charpentier et al. in [3], gives means to simplify the user input to the bare nonlinear functions, letting the user free of any recast. Furthermore, recent works (see [9]) showed that automatic differentiation also provides means for sensitivity analysis of the computed solutions.

## 5.A Vibro-impact with exponential wall reaction

### 5.A.4 Model

We consider a one-degree-of-freedom, mass-spring oscillator which is limited to the half-plane  $x < 1$  by a rigid wall, where  $x(t)$  denotes the position of the mass.

The rigid wall reaction is modelled by an exponential function, with a coefficient  $\alpha$  to tune the wall stiffness :

$$F_w(x) = -e^{\alpha(x-1)},$$

Thus, the regularised vibro-impact system is governed by the following equation:

$$x''(t) = -x(t) - e^{\alpha(x(t)-1)}, \quad (5.18)$$

---

<sup>a</sup>This corresponds to a heteroclinic connection between the two saddle-nodes  $(\theta_{SN}, v_{SN}) \in \{(-\pi, 0), (\pi, 0)\}$

where the prime sign denotes time-differentiation. The force  $F_w(x)$  that reflects the wall effect derives from a potential energy so that problem (5.18) keeps the property of being energy-conservative.

### 5.A.5 Dissipative recast for continuation

Muñoz-Almaraz et al. [11] showed that, in conservative Hamiltonian systems, periodic orbits generally belong to a one-dimensional family of periodic solutions, parametrised by the value of the first integral (here, the total energy), which is not an explicit parameter of the system. To compute this family of periodic solutions in the standard continuation framework  $R(x(t), \lambda) = 0$ , we perturb the initial equation with a damping term added to the right-hand side of (5.18). The system is then embedded into a general, dissipative system:

$$x''(t) = -x(t) - \lambda x'(t) - e^{\alpha(x(t)-1)}, \quad (5.19)$$

where  $\lambda$  is a free parameter of the continuation.

The perturbed system (5.19) possesses periodic solutions that are exactly those of the unperturbed, conservative system (5.18), if and only if  $\lambda = 0$ . This way, the additional parameter  $\lambda$  allows us to compute the periodic solutions of the conservative system (5.18) using the classical framework for dissipative systems possessing an explicit control parameter.

## 5.B Classical ANM: quadratic framework

The reader is referred to Cochelin and Vergez [5] (sections 2.4 and 2.5, pp.248-250), for the details concerning the principle and the implementation of the ANM in the classical, quadratic framework.

## 5.C Extended ANM framework

### 5.C.6 Principle of the series computation

Given a nonlinear system  $\mathbf{f}(\mathbf{U}) = 0$  with  $N_d$  equations and  $N_u$  unknowns, whose differentiated form reads:

$$\mathbf{Lh}(\mathbf{dU}) = \mathbf{Qh}(\mathbf{U}, \mathbf{dU}) \quad (5.20)$$

where  $\mathbf{Lh} : \mathbb{R}^{N_u} \rightarrow \mathbb{R}^{N_d}$  is a linear, vector-valued operator ;  $\mathbf{Qh} : \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}^{N_u} \rightarrow \mathbb{R}^{N_d}$  is a bilinear, vector-valued operator.

Assuming a known regular solution  $\mathbf{U}_0$  of this system, we write the branch of solutions passing through this point as a Taylor series expansion:

$$\mathbf{U}(a) = \mathbf{U}_0 + a\mathbf{U}_1 + a^2\mathbf{U}_2 + a^3\mathbf{U}_3 + \cdots + a^n\mathbf{U}_n. \quad (5.21)$$

where the branch is parametrised using the pseudo-arclength parameter  $a$  defined as:

$$a = (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0)^t \mathbf{U}_1. \quad (5.22)$$

Differentiating  $\mathbf{U}$  reads:

$$d\mathbf{U} = \{\mathbf{U}_1 + 2a\mathbf{U}_2 + 3a^2\mathbf{U}_3 + \dots + na^{n-1}\mathbf{U}_n\}da. \quad (5.23)$$

Then, substituting both (5.21) and (5.23) in system (5.20) and equating each power of  $a$  (up to order  $n$ ) to zero gives:

- power 0:  $\mathbf{Lh}(\mathbf{U}_1) - \mathbf{Qh}(\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1) = 0$ , which can also be written  $\mathbf{Jh}_{\mathbf{U}_0} \cdot \mathbf{U}_1 = 0$  where  $\mathbf{Jh}_{\mathbf{U}_0} \in \mathbb{R}^{N_d \times N_d+1}$  is the jacobian matrix of  $f$  evaluated at  $\mathbf{U}_0$ . This linear equation in  $\mathbf{U}_1$  thus gives the term of *order* 1 of (5.21).
- power  $1 \leq p \leq n - 1$ :  $\mathbf{Jh}_{\mathbf{U}_0} \cdot \mathbf{U}_{p+1} = \sum_{i=1}^p \frac{p+1-i}{p+1} \mathbf{Qh}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{p+1-i})$ . This linear equation gives the term of *order*  $p + 1$  of (5.21).

The original nonlinear problem is thus replaced by a cascade of  $n$  linear systems, which all share the same matrix:  $\mathbf{Jh}_{\mathbf{U}_0}$ .

However, at each order, the linear systems have  $N_d + 1$  unknowns and only  $N_d$  equations. For each linear system, the additional equation is obtained by substituting the series (5.21) into the definition (5.22) of the path parameter  $a$ :

- **order 1** :  $\mathbf{U}_1^t \mathbf{U}_1 = 1$
- **order  $2 \leq p \leq n$**  :  $\mathbf{U}_1^t \mathbf{U}_p = 0$

### 5.C.7 Implementation in MANLAB: the example of the vibro-impact

As for the classical framework, the only user input to the MANLAB software consists in M-functions for the operators  $\mathbf{Lh}$  and  $\mathbf{Qh}$ , as well as for  $f$  (for the residue computation only), and a starting point  $\mathbf{U}_0$ .

In the case of the vibro-impact system presented in section 5.2, some equations are quadratic (those resulting from the HBM and those for the definition of  $e_{t0}$  and  $x_{t0}$ ) while the last one is not. We thus separate the equations in two parts: those resulting from the HBM, that will appear in the  $\mathbf{L0}$ ,  $\mathbf{L}$  and  $\mathbf{Q}$  operators, and the last one, that will appear in the  $\mathbf{Lh}$ ,  $\mathbf{Qh}$  operators.

For the present problem, the state vector is:

$$\mathbf{U} = \left( \underbrace{x_0, y_0, e_0}_{\mathbf{z}_0}, \underbrace{x_1, y_1, e_1}_{\mathbf{z}_1}, \underbrace{x_2, y_2, e_2}_{\mathbf{z}_2}, \dots, \underbrace{x_{2H-1}, y_{2H-1}, e_{2H-1}}_{\mathbf{z}_{2H-1}}, \underbrace{x_{2H}, y_{2H}, e_{2H}}_{\mathbf{z}_{2H}}, \lambda, \omega, e_{t0}, x_{t0} \right)$$

and its size is  $N_u = 3(2H + 1) + 4$ .

For the quadratic part of the problem, the subsystem contains the following number of equations:

$$N_e = \underbrace{2(2H + 1)}_{\text{full HBM}} + \underbrace{2H}_{\text{HBM } h \neq 0} + \underbrace{2}_{\text{def. of } e_{t0}, x_{t0}} + \underbrace{1}_{\text{phase eq.}} = 3(2H + 1) + 2.$$

The content of `L0.m`, `L.m` and `Q.m` are not listed here, as it is the direct result of the harmonic balance as presented in [5]. These three functions return a vector of size  $N_e - 1$ .

For the non quadratic part, the subsystem contains  $N_d = 1$  equation. The content of `Lh.m`, `Qh.m` and `f.m` is listed below, with  $\alpha = 200$ :

```
function [Lh] = Lh(dU)
Lh=zeros(1,1);
Lh = dU(end-1);

function [Qh] = Qh(U,dU)
Qh = zeros(1,1);
Qh = 200*U(end-1)*dU(end);

function [f] = f(U)
f = zeros(1,1);
f = exp(200*(U(end)-1));
```

## Bibliography

- [1] R. Arquier, B. Cochelin, S. Karkar, A. Lazarus, O. Thomas, and C. Vergez. *MANLAB 2.0, an interactive continuation software*, 2010. URL <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr>. (last visited 28/06/2011).
- [2] A. Belendez, C. Pascual, D. I. Mendez, T. Belendez, and C. Neipp. Exact solution for the nonlinear pendulum. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29(4):645–648, Between October and December 2007. ISSN 1806-1117.
- [3] I. Charpentier and M. Potier-Ferry. Différentiation automatique de la méthode asymptotique numérique typée : l’approche diamant. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(3):336 – 340, 2008. ISSN 1631-0721. doi: 10.1016/j.crme.2007.11.022. (Automatic differentiation of asymptotic numerical method : the DIAMANT approach).
- [4] B. Cochelin. A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers and Structures*, 53:1181–1192, 1994.
- [5] B. Cochelin and C. Vergez. A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 324:243–262, 2009.
- [6] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. *Méthode Asymptotique Numérique*. Lavoisier, Paris, 2007. ISBN 978-2-7462-1567-2. (Asymptotic Numerical Method).

- 
- [7] E. J. Doedel. Lecture notes on numerical analysis of nonlinear equations, 2010. URL <http://indy.cs.concordia.ca/auto/notes.pdf>. (last visited 28/06/2011) 391 slides.
- [8] N. Kacem, S. Baguet, S. Hentz, and R. Dufour. Computational and quasi-analytical models for non-linear vibrations of resonant mems and nems sensors. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(3):532 – 542, 2011. ISSN 0020-7462. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2010.12.012.
- [9] K. Lampoh, I. Charpentier, and E. M. Daya. A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. part iii: Sensitivity computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, In Press, 2011. doi: 10.1016/j.cma.2011.06.009.
- [10] A. Lazarus and O. Thomas. A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus de Mécaniques*, 338:510–517, 2010. doi: doi:10.1016/j.crme.2010.07.020.
- [11] F. J. Muñoz-Almaraz, E. Freire, J. Galán, E. Doedel, and A. Vanderbauwhede. Continuation of periodic orbits in conservative and hamiltonian systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 181(1-2):1 – 38, 2003. doi: 10.1016/S0167-2789(03)00097-6.
- [12] M. Nakhla and J. Vlach. A piecewise harmonic balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 23(2):85 – 91, feb 1976. ISSN 0098-4094. doi: 10.1109/TCS.1976.1084181.
- [13] M.-C. Pazuzin, S. Mensah, B. Cochelin, and J.-P. Lefebvre. High order harmonic balance formulation of free and encapsulated microbubbles. *Journal of Sound and Vibration*, 330(5):987 – 1004, 2011. ISSN 0022-460X. doi: 10.1016/j.jsv.2010.09.014.
- [14] M. Urabe. Periodic solutions of differential systems, galerkin’s procedure and the method of averaging. *Journal of Differential Equations*, 2(3):265 – 280, 1966. ISSN 0022-0396. doi: 10.1016/0022-0396(66)90068-4.

# Chapitre 6

## Comparaison des méthodes de discrétisation : équilibrage harmonique et collocation orthogonale

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Système non linéaire à deux ressorts . . . . .</b>	<b>86</b>
6.1.1	Modélisation . . . . .	86
6.1.2	Paramètre de continuation . . . . .	87
6.1.3	Forme quadratique du premier ordre . . . . .	87
6.1.4	Étude de convergence . . . . .	88
6.1.5	Continuation des solutions périodiques . . . . .	89
<b>6.2</b>	<b>Le système vibro-impact régularisé . . . . .</b>	<b>93</b>
6.2.1	Modélisation . . . . .	93
6.2.2	Paramètre de continuation . . . . .	93
6.2.3	Étude de convergence . . . . .	93
6.2.4	Continuation des solutions périodiques . . . . .	99
<b>6.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>101</b>

---

### Introduction

Comme on l'a mentionné au chapitre 3, le choix de la méthode de discrétisation est très dépendant des usages des différentes communautés scientifiques. L'équilibrage harmonique (HBM) est souvent utilisé dans le cas de systèmes forcés, mais plus rarement dans le cas de systèmes autonome. Par ailleurs, cette méthode est souvent employée avec très peu d'harmoniques (typiquement 1 à 5), probablement à cause des temps de calculs. Il existe ainsi très peu d'études comparatives confrontant, sur un même problème, l'équilibrage harmonique à l'ordre élevé et la collocation orthogonale.

Après avoir intégré ces deux méthodes au sein d'un même outil (chapitre 3), ayant pris soin d'améliorer les temps de calcul (chapitre 4) afin de rendre cet outil utilisable en pratique, et enfin après avoir étendu le domaine d'application de la méthode à des non-linéarités non polynômiales (chapitre 5), nous sommes alors en mesure de mener une étude comparative sur deux systèmes particuliers :

- un système à deux degrés de libertés avec non-linéarités géométriques et raideurs de type coques parfaitement régulières,
- et un système à un seul degré de liberté de type vibro-impact, régularisé par une non-linéarité très raide.

## 6.1 Système non linéaire à deux ressorts

### 6.1.1 Modélisation

On considère ici le mouvement 2-D d'une masse ponctuelle  $m$ , liée à deux ressorts perpendiculaires de raideurs respectives  $k_1$  et  $k_2$ , de longueur au repos  $l_0$ , en grandes déformations. On utilise alors la déformation de Green-Lagrange.

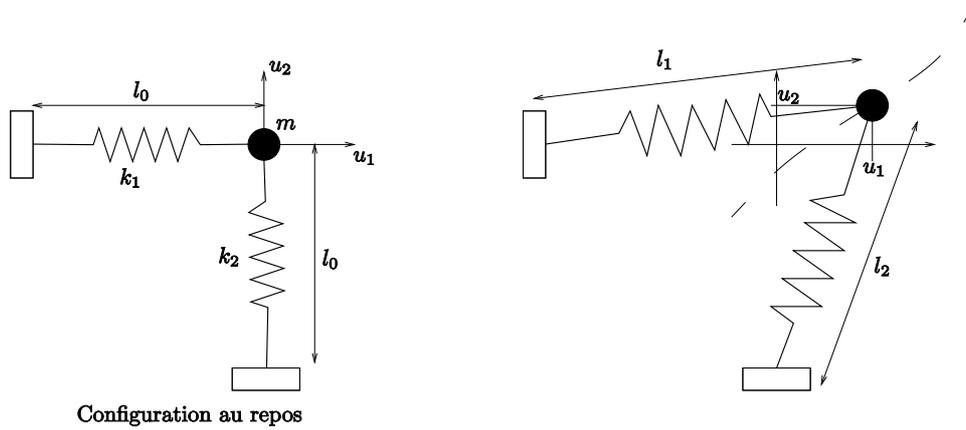


FIG. 6.1 – Schéma et notations du système à deux degrés de liberté composé d'une masse  $m$  reliée à deux ressorts de raideur  $k_1$  et  $k_2$  en grandes déformations.

Si  $(u_1, u_2)$  sont les coordonnées (respectivement horizontale et verticale) du vecteur déplacement de la masse dans le plan, et pour une longueur au repos unitaire ( $l_0=1$ ), les déformations des ressorts s'écrivent :

$$e_1 = u_1 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) \quad (6.1a)$$

$$e_2 = u_2 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) \quad (6.1b)$$

et les équations du mouvement s'écrivent :

$$mu_1'' + \frac{\partial W}{\partial u_1} = 0 \quad (6.2a)$$

$$mu_2'' + \frac{\partial W}{\partial u_2} = 0 \quad (6.2b)$$

L'énergie de déformation élastique  $W$  vaut :

$$W = \frac{1}{2}(k_1 e_1^2 + k_2 e_2^2). \quad (6.3)$$

Le lecteur est renvoyé à Chaigne et Kergomard [11] (chap.8, pp395–399) pour plus de précisions. Ce modèle très simple est néanmoins représentatif des modèles de structures minces de type coques en grands déplacements et petites déformations.

### 6.1.2 Paramètre de continuation

Sepulchre et MacKay [71], repris par Muñoz-Almaraz *et al.* [59], ont montré que dans les systèmes Hamiltoniens conservatifs, les orbites périodiques sont en général des familles 1-D de solutions, dont le paramètre implicite est l'énergie mécanique totale du système (l'intégrale première). Pour pouvoir calculer ces familles de solutions dans le cadre standard de continuation  $R(U, \lambda) = 0$ , on ajoute un terme perturbateur de dissipation. Le système résultant est alors dissipatif :

$$m u_i'' = -\frac{\partial W}{\partial u_i} - \lambda u_i', \quad (6.4)$$

où  $\lambda$  est un paramètre explicite de continuation (voir également la section 5.A.5 au chapitre précédent).

Le système perturbé (6.4) possède exactement les mêmes solutions périodiques que celles du système conservatif (6.7), si et seulement si  $\lambda = 0$ . Ainsi, l'ajout du paramètre  $\lambda$  permet de calculer les solutions périodiques du système conservatif (6.2a-6.2b) de la même manière que pour les systèmes dissipatifs classiques ayant un paramètre de contrôle explicite.

### 6.1.3 Forme quadratique du premier ordre

À l'aide de variables additionnelles, on peut réécrire les équations du mouvement sous la forme d'un système algébro-différentiel du premier ordre, aux non-linéarités purement quadratiques :

$$u_1' = v_1 \quad (6.5a)$$

$$u_2' = v_2 \quad (6.5b)$$

$$m v_1' = -\lambda u_1' - N_1 - u_1(N_1 + N_2) \quad (6.5c)$$

$$m v_2' = -\lambda u_2' - N_2 - u_2(N_1 + N_2) \quad (6.5d)$$

$$0 = N_1 - k_1 u_1 - \frac{1}{2} k_1 (u_1^2 + u_2^2) \quad (6.5e)$$

$$0 = N_2 - k_2 u_2 - \frac{1}{2} k_2 (u_1^2 + u_2^2) \quad (6.5f)$$

où  $(v_1, v_2)$  sont les vitesses horizontale et verticale de la masse  $m$ , et  $(N_1, N_2)$  sont les forces de rappel de chacun des deux ressorts<sup>a</sup>.

Dans ce qui suit, nous avons choisi les valeurs numériques suivantes :

---

<sup>a</sup>Dans un modèle de coques, c'est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff qui joue le rôle de  $N_1$  et  $N_2$ .

- $m = 1$ ,
- $k_1 = 1$ ,
- $k_2 = 2$ .

### 6.1.4 Étude de convergence

Le premier mode non linéaire est une famille d'orbites périodiques paramétrable par l'énergie mécanique totale  $E_m = \frac{1}{2}(m(v_1^2 + v_2^2) + k_1 e_1^2 + k_2 e_2^2)$ . Sur ce mode, on retient l'orbite correspondant à  $E_m = 0,5$  pour l'analyse de convergence.

Pour caractériser les différentes approximations de cette solution, on utilise l'erreur relative en norme 2 par rapport à une solution de référence, calculée sur les séries temporelles.

Si  $X(t_i) = [u_1(t_i), u_2(t_i), v_1(t_i), v_2(t_i)]^T$  est la série temporelle de l'approximation que l'on cherche à caractériser (calculée aux instants  $t_i = i * T/2000$ ,  $i = 0..2000$ ), alors l'erreur relative en norme 2 par rapport à la solution de référence  $X_{ref}$  s'écrit :

$$\epsilon_r = \frac{\| [X(t_i) - X_{ref}(t_i)]_{i=0..2000} \|_2}{\| [X_{ref}(t_i)]_{i=0..2000} \|_2} \quad (6.6)$$

### Equilibrage harmonique

Dans le cas d'un système faiblement non linéaire et parfaitement régulier comme le système à deux ressorts présenté ici, la série de Fourier de n'importe quelle solution converge très vite, si bien qu'on peut se contenter d'un calcul de référence par équilibrage harmonique avec un grand nombre d'harmoniques.

Nous avons ici calculé une solution de référence avec  $H_{ref} = 128$  harmoniques<sup>b</sup>.

Les séries temporelles sont obtenues par sommation des séries de Fourier.

La figure 6.2, partie gauche, montre bien la convergence exponentielle typique des méthodes spectrales (droite en échelle semi-logarithmique), comme l'ont démontré Gottlieb et Orszag [36]. Par ailleurs, la non-linéarité étant paire, les solutions ne comportent pas de composantes aux harmoniques impaires (sauf l'harmonique 1, bien évidemment), si bien que la courbe de convergence est en marches d'escalier jusqu'à  $H = 10$ . Au-delà, on n'a effectué que les calculs avec  $H$  pair, si bien que les marches n'apparaissent plus sur la figure.

La partie droite de cette même figure illustre le diagramme de phase, projeté dans le plan des configurations  $(u_1, u_2)$ , de quelques-unes des solutions approchées ainsi que de la solution de référence. On voit que dès 8 harmoniques, l'approximation est déjà très bonne.

### Collocation polynômiale par éléments

Dans le cas de la collocation, la convergence étant moins rapide, nous avons utilisé comme solution de référence le calcul par intégration temporelle précise (pour chaque composante, la tolérance relative est :  $1.10^{-10}$ , et la tolérance absolue :  $1.10^{-12}$ ).

<sup>b</sup>Une vérification à l'aide d'un intégrateur temporel comme la routine `ode45` de Matlab montre que cette solution à 128 harmoniques et la solution obtenue par intégration temporelle sous contrainte de tolérance très exigeante sont quasiment identiques ( $\epsilon_r \simeq 1.10^{-10}$ ).

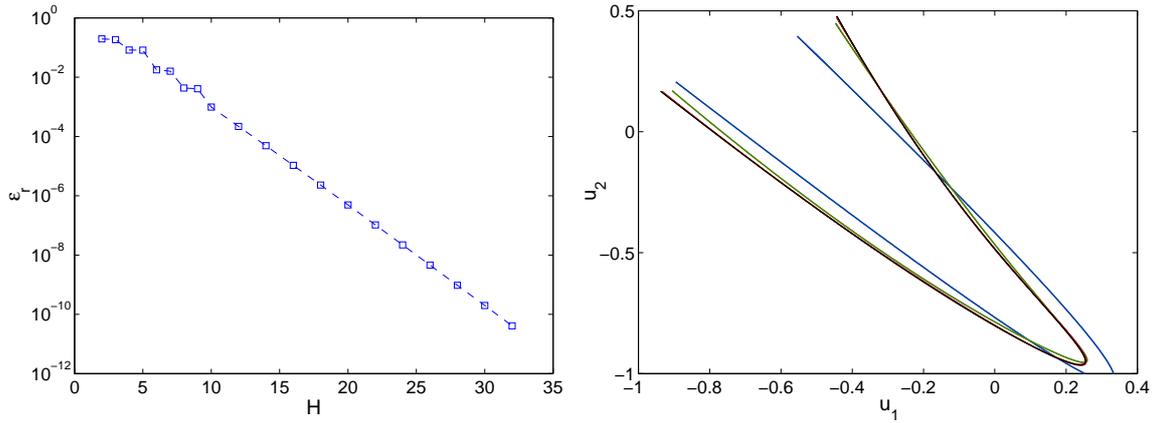


FIG. 6.2 – Convergence de l'équilibrage harmonique pour un problème avec non-linéarités polynômiales : masse ponctuelle soumise au rappel élastique de deux ressorts en grandes déformations. La solution choisie, au sein de la famille de solutions périodiques, a une énergie mécanique de 0,5. À gauche : l'erreur relative en norme 2, calculée par rapport à une solution de référence, tracée en échelle semi-logarithmique. À droite : le diagramme de phase des solutions calculées avec  $H=2$  (bleu), 4 (vert), 6 (rouge), et 8 (orange) ainsi que la solution de référence (trait fin, noir).

La figure 6.3 illustre la convergence de la collocation par fonctions polynômiales par morceaux. Tracée en échelle logarithmique, l'erreur d'approximation  $\epsilon_r$  en fonction du nombre d'éléments par périodes  $N$  progresse d'abord de façon à peu près exponentielle jusqu'à  $N = 33^c$ , puis suit une progression polynômiale (droite en échelles logarithmiques), avant d'atteindre une valeur plancher proche de  $1.10^{-8}$ .

D'après Gottlieb et Orszag [36] et Karniadakis et Sherwin [48], pour un problème suffisamment régulier (c'est le cas ici), la convergence de ce type de méthode est polynômiale en  $N$ .

## Comparaison

Afin de comparer les deux méthodes de discrétisation, on a tracé sur une même figure les courbes de convergence correspondante. Toutefois, afin d'avoir une abscisse commune, nous avons utilisé le nombre total d'équations résultant de la discrétisation  $N_{\text{tot}}$ , qui vaut :

- $(2H + 1)N_{\text{eq}} + 1$  pour l'équilibrage harmonique ;
- $(3N + 1)N_{\text{eq}} + 1$  pour la collocation.

Comme attendu, la figure 6.4 met en avant l'équilibrage harmonique qui converge bien plus rapidement que la collocation, même pour des systèmes de faible taille.

### 6.1.5 Continuation des solutions périodiques

Le calcul de la branche périodique par continuation est illustré à la figure 6.5, où l'on a tracé les coefficients du cosinus de la première harmonique de  $u_1$  et de

<sup>c</sup>Un tracé en échelle semi-log (non reproduit ici) fait apparaître une droite sur les cinq premiers points.

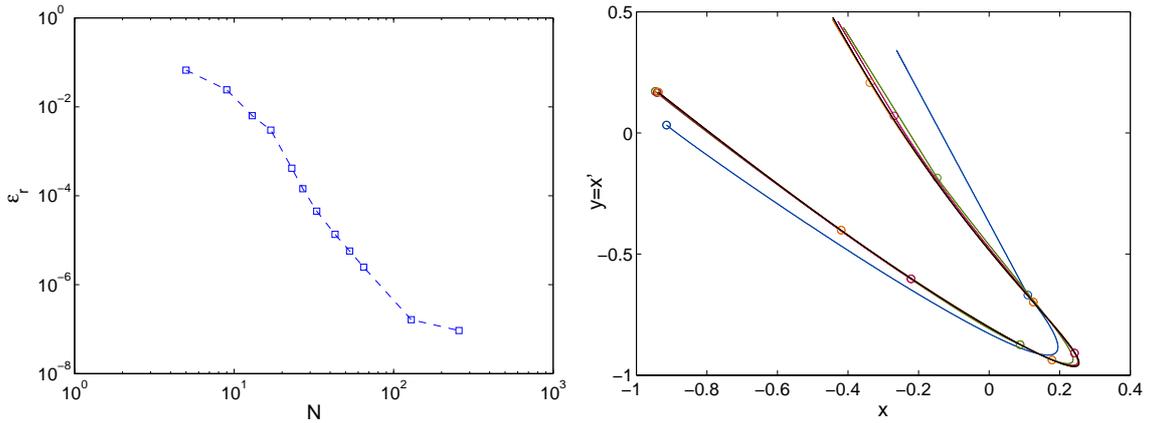


FIG. 6.3 – Convergence de la collocation polynômiale par éléments pour un problème avec non-linéarités polynômiales : masse ponctuelle soumise au rappel élastique de deux ressorts en grandes déformations. La solution est choisie avec une énergie mécanique qui vaut 0,5. À gauche : l’erreur relative en norme 2, calculée par rapport à une solution de référence, tracée en échelle logarithmique. À droite : le diagramme de phase des solutions calculées avec  $N_{int}=3$  (bleu), 5 (vert), 9 (rouge), et 17 (orange) ainsi que la solution de référence (trait fin, noir).

la seconde harmonique de  $u_2$  en fonction de la pulsation. À faibles amplitudes, la branche est tangente au mode linéaire (1,0). Le long de la branche, on voit comment le couplage non linéaire « injecte » de l’énergie dans l’harmonique 2 de la composante  $u_2$ .

Avec  $H = 128$  harmoniques, c’est-à-dire  $N_{tot} = 1543$ , on atteint le point d’énergie mécanique  $E_m = 0,5$  en 12 pas de continuation depuis le point  $(\omega, u_{1,1}) = (0.995, 0.1)$ . La longueur des pas semble essentiellement liée à la courbure de la branche.

La figure 6.6 illustre la même branche de solutions périodiques, dans le cas de la collocation polynômiale par éléments. Le nombre d’éléments par période est ici  $N = 85$ , ce qui correspond à  $N_{tot} = 1537$ , soit à peu près autant que pour la figure précédente. On atteint le point d’énergie mécanique  $E_m = 0,5$  en 14 pas de continuation depuis le point  $(\omega, u_1(0)) = (.995, -0.1)$ . Comme pour l’équilibrage harmonique, la taille des pas semble surtout liée à la courbure de la branche. Le diagramme obtenu pour différentes valeurs de  $N$  est à peu près semblable et la longueur des pas varie peu.

En conclusion de ce premier exemple, on peut dire que l’équilibrage harmonique et la collocation ne posent ni l’un ni l’autre de problème particulier pour la continuation. Par contre, l’approximation des solutions par séries de Fourier est meilleure que par fonction polynômiale par morceaux, à nombre de variables équivalent. Toutefois, ce qu’il en est dans le cas de systèmes plus raides reste à déterminer : c’est l’objet de notre second exemple.

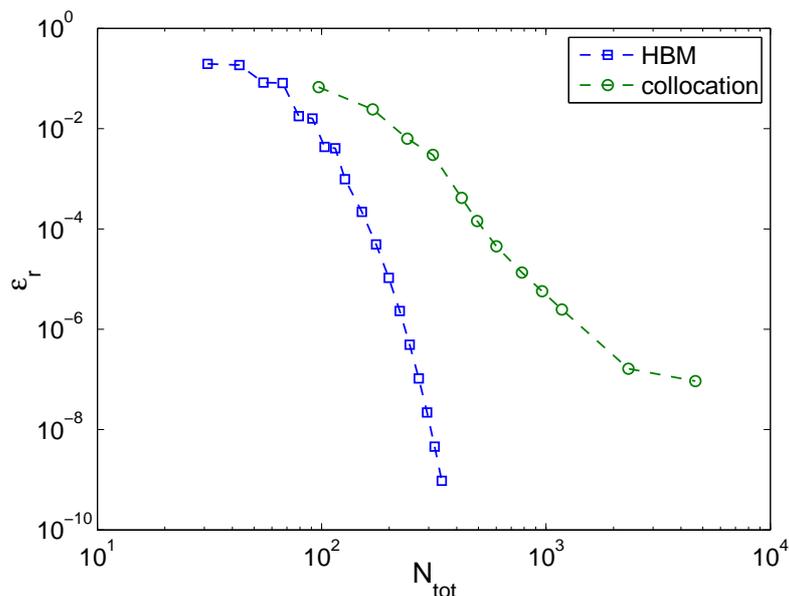


FIG. 6.4 – Erreur relative en norme 2, par rapport à une solution de référence, en fonction du nombre total d'équations du système algébrique résultant de la discrétisation : comparaison entre équilibrage harmonique (carrés) et collocation polynomiale par éléments (ronds).

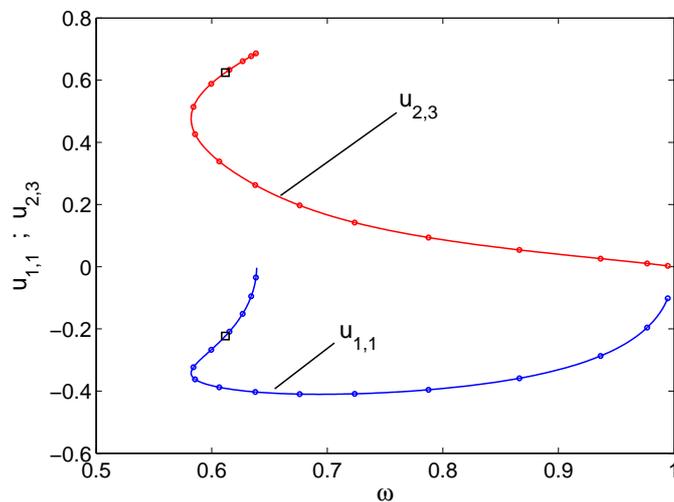


FIG. 6.5 – Branche de solutions périodiques du système à une masse et deux ressorts : coefficients  $u_{1,1}$  et  $u_{2,3}$  (coefficient du premier cosinus de la série de Fourier de  $u_1(t)$  et du second cosinus de celle de  $u_2(t)$  respectivement) en fonction de la pulsation  $\omega$ . Le carré noir indique la position du point solution utilisé pour le calcul de convergence. Calcul par équilibrage harmonique avec  $H = 128$ . Seuil MAN :  $1.10^{-12}$ . Seuil de correction :  $1.10^{-9}$ .

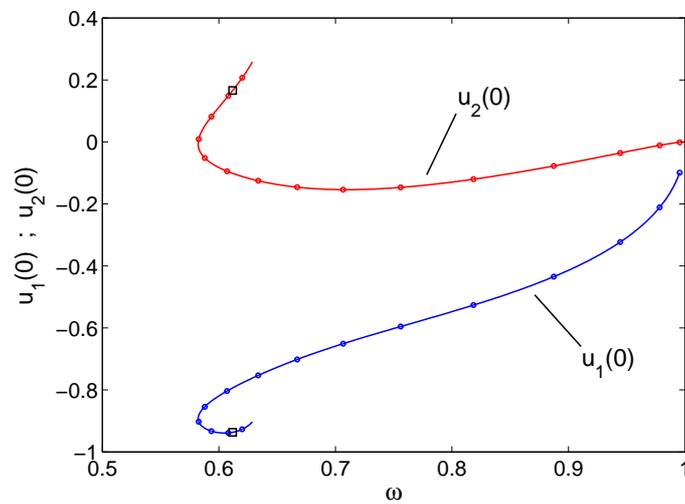


FIG. 6.6 – Branche de solutions périodiques du système à une masse et deux ressorts : composantes du déplacement initial  $u_1(0)$  et  $u_2(0)$  en fonction de la pulsation  $\omega$ . Le carré noir indique la position du point solution utilisé pour le calcul de convergence. Calcul par collocation avec  $N = 85$ . Seuil MAN :  $1.10^{-12}$ . Seuil de correction :  $1.10^{-9}$ .

## 6.2 Le système vibro-impact régularisé

### 6.2.1 Modélisation

On considère un système à un degré de liberté du type masse-ressort, dont le mouvement est contraint dans le demi-plan  $x < 1$  par un mur parfaitement rigide, où  $x(t)$  est la position de la masse ponctuelle.

La réaction du mur est régularisée à l'aide d'une fonction exponentielle de la position, avec un coefficient  $\alpha$  permettant d'ajuster la raideur de cette régularisation :

$$F_r(x) = -e^{\alpha(x-1)},$$

Le système vibro-impact régularisé obéit alors à l'équation du mouvement suivant :

$$x''(t) = -x(t) - e^{\alpha(x(t)-1)}, \quad (6.7)$$

où le signe ' représente la dérivée temporelle. La force  $F_r(x)$  de réaction du mur utilisée dérive d'un potentiel, si bien que le problème (6.7) est bien conservatif. Dans ce qui suit, la valeur du paramètre de régularisation est fixée à  $\alpha = 200$ , ce qui correspond à une régularisation très raide.

Grâce à la méthode proposée au chap5]chapitre précédent, nous pouvons traiter ce type de non-linéarité<sup>d</sup>.

### 6.2.2 Paramètre de continuation

Comme précédemment, pour pouvoir calculer ces familles de solutions dans le cadre standard de continuation  $R(x(t), \lambda) = 0$ , on ajoute un terme perturbateur de dissipation. Le système résultant est alors dissipatif :

$$x''(t) = -x(t) - \lambda x'(t) - e^{\alpha(x(t)-1)}, \quad (6.8)$$

où  $\lambda$  est un paramètre explicite de continuation.

Le système perturbé (6.8) possède exactement les même solutions périodiques que celles du système conservatif (6.7), si et seulement si  $\lambda = 0$ . Ainsi, l'ajout du paramètre  $\lambda$  permet de calculer les solutions périodiques du système conservatif (6.7) de la même manière que pour les systèmes dissipatifs classiques ayant un paramètre de contrôle explicite.

### 6.2.3 Étude de convergence

On choisit ici l'orbite périodique correspondant à une énergie mécanique totale de  $E_m = \frac{1}{2}(1, 5)^2 = 1, 125$ , qui possède une amplitude  $x_{\min} = -1, 5$  dans la phase de vol libre.

L'étude de la convergence est, dans le cas présent, moins aisée : étant donnée la raideur du problème, on souhaite s'assurer que les deux méthodes convergent bien vers la « bonne » solution du système, et il faut donc calculer la solution de référence indépendamment des deux méthodes proposées, contrairement au cas précédent.

---

<sup>d</sup>L'exemple utilisé dans la section du chapitre précédent est le même système.

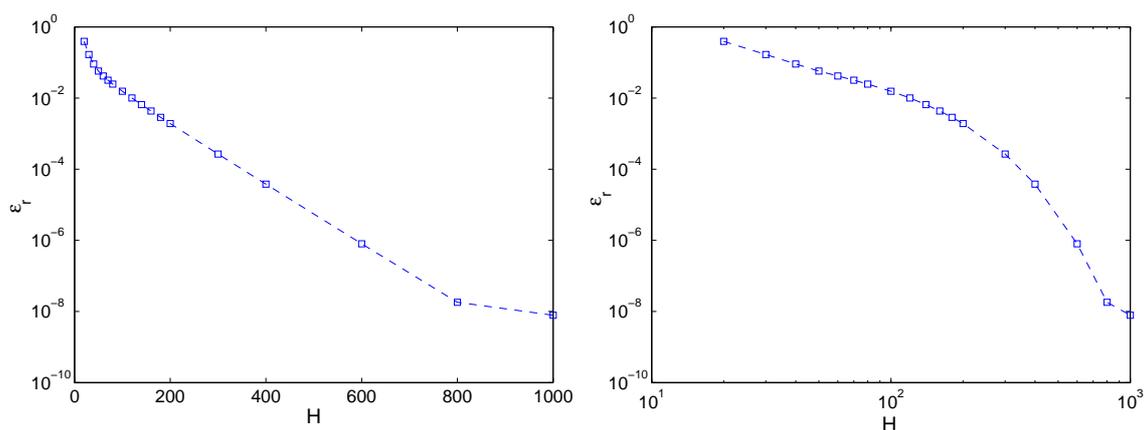


FIG. 6.7 – Convergence de l'équilibrage harmonique pour le vibro-impact régularisé avec une exponentielle raide ( $\alpha=200$ ) : erreur relative  $\epsilon_r$ , calculée en norme 2 par rapport à une solution de référence (intégration temporelle). À gauche : échelle semi-logarithmique. À droite : échelle logarithmique. Solution choisie pour  $x_{\min}=-1.5$ .

### Solution de référence

Il nous faut alors une méthode éprouvée, qui dispose d'un contrôle d'erreur, afin de construire la solution de référence avec précision.

Nous avons choisi l'intégration temporelle, pour laquelle de nombreux outils numériques sont disponibles, et qui rend possible un certain contrôle d'erreur tout au long de l'intégration.

La solution a été calculée à partir du point  $(x, x') = (-1.5, 0)$ , sur un horizon temporel suffisamment long pour obtenir plus d'une période. La période est ensuite détectée de manière précise par le passage suivant au même point.

L'intégrateur utilisé est l'outil `ode23s` de Matlab, spécialement conçu pour les résolutions précises de problèmes raides. Il s'agit d'un intégrateur mono-pas, à taille de pas adaptative, basé sur une formule Rosenbrock modifiée d'ordre 2 (voir Shampine et Reichelt [74]). La tolérance relative sur chaque composante du résidu a été fixée à  $1.10^{-10}$  et la tolérance absolue a été fixée à  $1.10^{-12}$  sur chaque composante également.

### Équilibrage harmonique

La figure 6.7 montre la convergence de la méthode de l'équilibrage harmonique (HBM) en fonction du nombre d'harmoniques retenues. L'erreur relative  $\epsilon_r$  est calculée en norme 2, par rapport à la solution de référence.

Pour chaque valeur de  $H$ , nous avons effectué un calcul de la branche périodique jusqu'à une amplitude suffisante, puis nous avons extrait le point solution ayant l'amplitude  $x_{\min} = -1,5$  avec une précision de  $1.10^{-12}$ . Nous avons pour cela utilisé la représentation analytique en série entière de la branche et déterminé la valeur du paramètre de chemin  $a$  correspondant à la solution cherchée par dichotomie.

Pour chaque solution approchée  $X = [x(t), x'(t)]^T$ , nous avons reconstruit sa série temporelle  $[X(t_i)]$ , calculée en 2001 instants équi-répartis sur une période :  $t_i = iT/2000$ ,  $i = 0..2000$ . Nous avons ensuite comparé cette série temporelle point

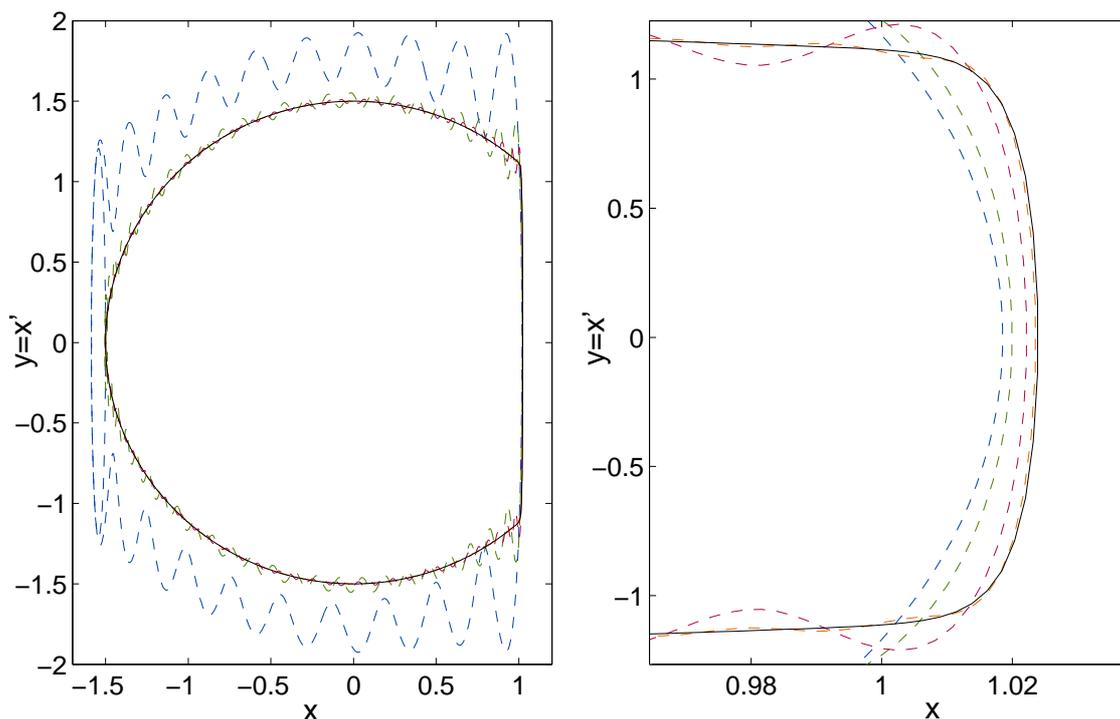


FIG. 6.8 – Diagramme de phase des solutions calculées avec  $H=20$  (bleu), 50 (vert), 100 (rouge), 200 (orange) ainsi que la solution de référence (trait plein, noir). À gauche : portrait de phase complet (la courbe orange est confondue avec la solution de référence). À droite : agrandissement de la zone près de l'impact ( $x=1$ ), où la courbe orange apparaît plus clairement.

par point à la solution de référence  $X_{\text{ref}}$  évaluée aux mêmes instants. L'erreur relative en norme 2 est alors définie par :

$$\epsilon_r = \frac{\| [X(t_i) - X_{\text{ref}}(t_i)]_{i=0..2000} \|_2}{\| [X_{\text{ref}}(t_i)]_{i=0..2000} \|_2} \quad (6.9)$$

La courbe de convergence met en évidence trois régimes :

- à faible nombre d'harmoniques, jusqu'à  $H = 50$  environ (quatre premiers points), on observe une convergence polynômiale (droite en échelle logarithmique), assez rapide, ce qui correspond au fait qu'à nombre d'harmoniques trop faible on ne « capture » pas la variation rapide de courbure lors de l'impact, mais que le raffinement en  $H$  permet rapidement de la capturer ;
- ensuite, jusqu'à  $H=800$ , la convergence suit une loi exponentielle (droite en échelle semilogarithmique), ce qui correspond à la convergence typique des méthodes spectrales, comme le démontre Gottlieb et Orszag [36].
- enfin, au-delà de  $H=800$ , l'erreur tend vers une valeur plancher d'environ  $1.10^{-8}$ .

Le diagramme de phase de la figure 6.8 illustre bien le phénomène observé dans le premier régime de convergence : la solution est très grossière pour  $H=20$ , mais converge assez rapidement vers la solution de référence, du moins à l'échelle du mouvement dans son ensemble. Le raffinement au-delà de 100 harmoniques ne produit

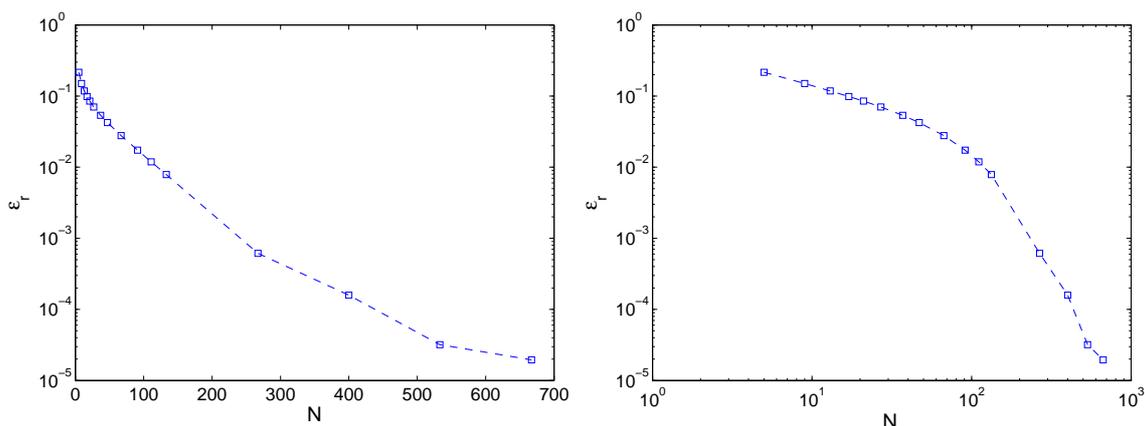


FIG. 6.9 – Convergence de la collocation polynômiale par éléments pour un problème raide : le système vibro-impact régularisé avec une exponentielle raide ( $\alpha=200$ ). Solution choisie en  $x_{\min} = -1,5$ . Erreur relative en norme 2 par rapport à une solution de référence. À gauche : échelle semi-logarithmique. À droite : échelles logarithmiques.

d'effets visibles que très près de la zone à forte courbure, autour de  $x=1$ , où l'on distingue alors la solution à 200 harmoniques de la solution de référence. On note une légère pénétration (de l'ordre de 2%) à l'intérieur du « mur », qu'autorise la régularisation. En jouant sur le paramètre  $\alpha$  (on pourrait également ajouter une constante multiplicative devant l'exponentielle), on peut contrôler cette pénétration en fonction de l'amplitude du mouvement.

### Collocation polynômiale par éléments

On effectue maintenant la même analyse pour la collocation polynômiale par éléments.

L'erreur relative est calculée de la même façon que précédemment. Les valeurs de  $(x, y)$  aux instants  $t_i$  sont obtenues par interpolation, à l'aide des polynômes de Lagrange<sup>e</sup>.

La figure 6.9 illustre la convergence de la collocation polynômiale par éléments : l'erreur relative décrit à peu près une droite en échelles logarithmiques, ce qui indique une décroissance polynômiale avec le nombre d'éléments, avec une nette amélioration de la convergence pour  $N$  supérieur à 50 environ<sup>f</sup>.

Pour un problème suffisamment régulier, la convergence optimale d'une méthode spectrale par éléments est polynômiale dans le cas d'un raffinement en nombre d'éléments, et l'ordre de cette convergence est fixé par l'ordre des polynômes utilisés pour l'interpolation sur chaque élément. Ainsi Karniadakis et Sherwin [48] démontrent qu'il est plus « rentable » d'augmenter l'ordre des polynômes interpolants que le nombre d'éléments, même dans le cas d'une précision peu exigeante.

<sup>e</sup>Par définition, les éléments utilisés sont des polynômes d'ordre 3, décomposés sur les polynômes de Lagrange définis en 4 points équi-répartis sur l'élément, incluant les bornes. Voir le chapitre 3.

<sup>f</sup>D'après le graphe de gauche, la convergence semble exponentielle entre  $N=50$  et  $N=128$ . Elle semble à nouveau polynômiale, mais avec un ordre plus élevé qu'au début, pour les valeurs de  $N$  très élevées.

Cependant, la régularité du problème n'est ici assurée qu'à partir d'un nombre suffisant d'éléments, et c'est donc cette pseudo-irrégularité (du point de vue de l'approximation) qui domine l'ordre de cette convergence polynômiale (de l'ordre de 1) jusqu'à  $N=50$ . Ce n'est qu'à partir de  $N=128$  la convergence semble atteindre l'ordre optimal (environ 3, soit l'ordre des polynômes interpolants).

Ainsi, augmenter le nombre d'éléments par périodes sera plus efficace dans le cas présent, du moins jusqu'à  $N=128$ . Certaines remarques de Doedel et Oldeman [27] dans le manuel du logiciel AUTO vont également dans ce sens, bien qu'aucune justification ne soit avancée.

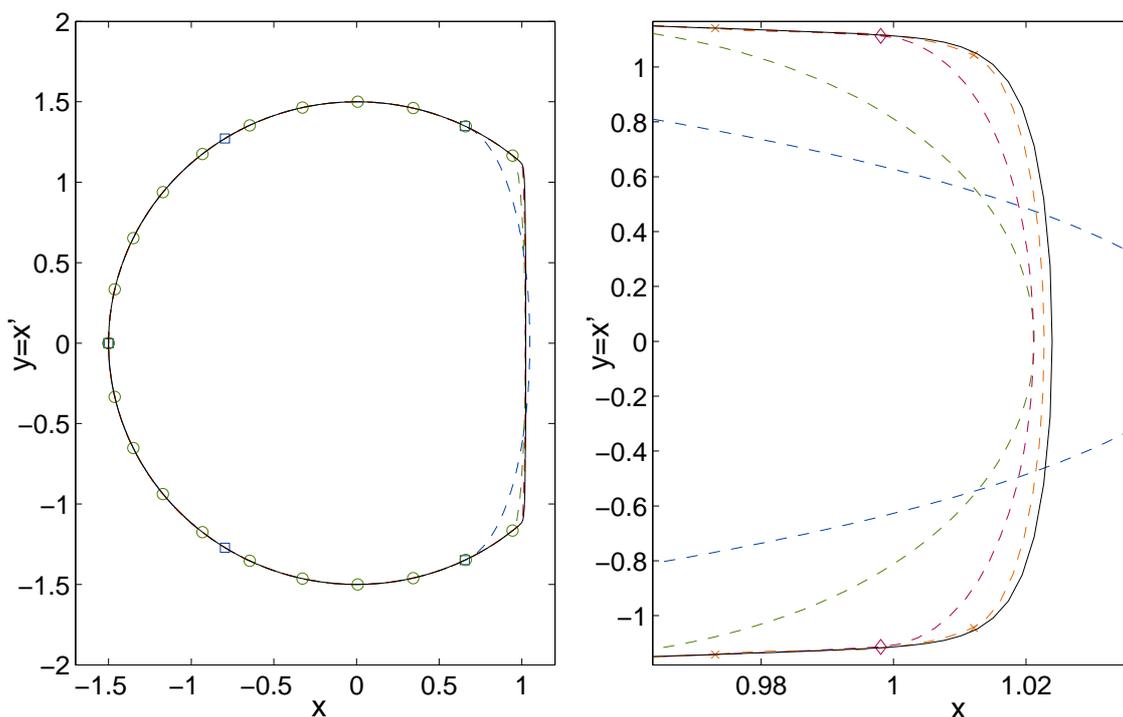


FIG. 6.10 – Diagramme de phase des solutions calculées avec  $N=5$  (bleu), 21 (vert), 67 (rouge), et 133 (orange) ainsi que la solution de référence (trait fin, noir). À gauche : portrait de phase complet ; les symboles (carrés, ronds) marquent les frontières entre éléments pour les deux premières solution (5 et 21 éléments respectivement). À droite : agrandissement de la zone près de l'impact ( $x=1$ ) ; les symboles (losanges et croix) marquent les frontières entre éléments pour les solutions avec 67 et 133 éléments.

La figure 6.10 illustre le diagramme de phase  $(x, x')$  de quelques-unes des solutions. Les points frontières entre éléments sont matérialisés par des marqueurs. On voit que jusqu'à  $N=67$ , le nombre d'éléments est insuffisant pour que la partie raide du cycle (l'impact) soit représentée par au moins un élément entier. En revanche, à partir de  $N=133$ , il existe au moins un élément qui se situe entièrement dans la zone  $x > 1$ , permettant ainsi de « découpler » partiellement les deux parties du cycle, ce qui explique l'accélération de la convergence constatée précédemment<sup>g</sup>.

<sup>g</sup>On entend ici par « découpler » le fait que seule la continuité de la solution est imposée

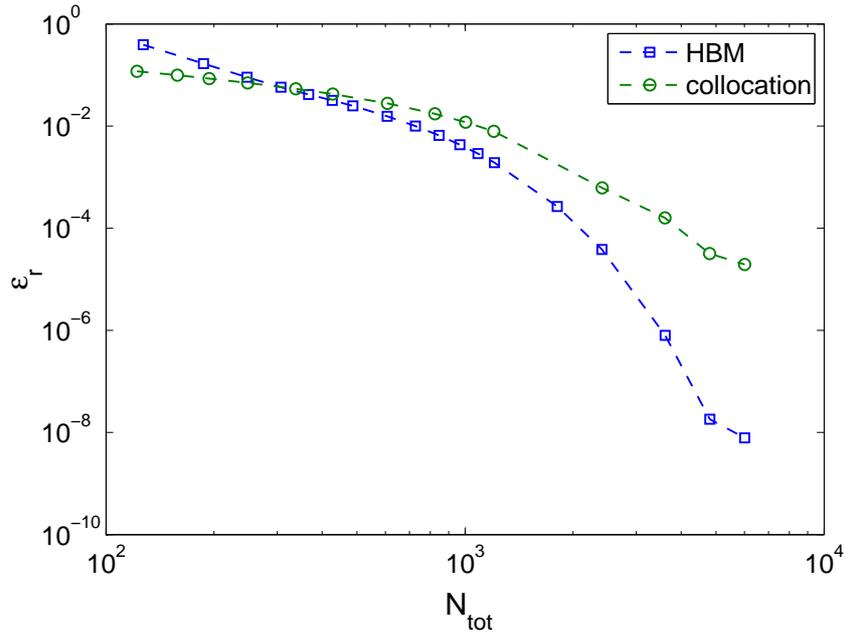


FIG. 6.11 – Comparaison entre HBM et collocation : erreur relative (en norme 2) par rapport à la solution de référence en fonction de la taille totale du système algébrique résultant. Le cas test est celui du vibro-impact régularisé par une exponentielle raide ( $\alpha=200$ ), et la solution est choisie à amplitude fixée :  $x_{\min}=-1, 5$ .

## Comparaison

La figure 6.11 permet de comparer la vitesse de convergence des deux méthodes : on a tracé les deux courbes  $\epsilon_r = f(N_{\text{tot}})$  correspondantes, où cette fois-ci l'abscisse  $N_{\text{tot}}$  est la taille totale du système algébrique, et est donc directement liée au temps de calcul<sup>h</sup> :

- pour l'équilibrage harmonique,  $N_{\text{tot}} = (2H + 1)N_{\text{eq}} + 3$  ;
- pour la collocation,  $N_{\text{tot}} = (3N + 1)N_{\text{eq}} + 1$ .

Bien que l'approximation du cycle solution par une série de Fourier avec peu d'harmoniques (jusqu'à  $H=50$ ) soit relativement mauvaise, la comparaison avec une approximation par une fonction polynômiale par morceaux met en évidence une vitesse de convergence bien meilleure pour l'équilibrage harmonique que pour la collocation. Ainsi, pour obtenir une erreur relative d'environ  $3 \cdot 10^{-5}$ , il faut résoudre un système algébrique environ deux fois plus grand en collocation qu'avec l'équilibrage harmonique, et le temps de calcul de chaque pas de continuation sera très certainement plus long.

---

entre deux éléments. Cela permet, par une discontinuité des dérivées, d'obtenir une meilleure approximation la courbure très élevée dans cette partie de la période.

<sup>h</sup>Avec l'approche tensorielle développée au chapitre précédent, le temps de calcul d'un pas de continuation est sensiblement identique, quelque soit la méthode de discrétisation utilisée, à nombre total d'inconnues égal. Seul le temps de calcul pour initialiser les tenseurs au lancement du programme peut s'avérer différent, mais il n'est effectué qu'une seule fois, et non à chaque pas. En effet, pour les tailles de matrice tangente considérées (de l'ordre de 6000), leur décomposition LU prend à peu près autant de temps dans un cas que dans l'autre, temps qui est d'ailleurs négligeable au regard du temps de calcul complet d'un pas de continuation (de l'ordre de 1/1000).

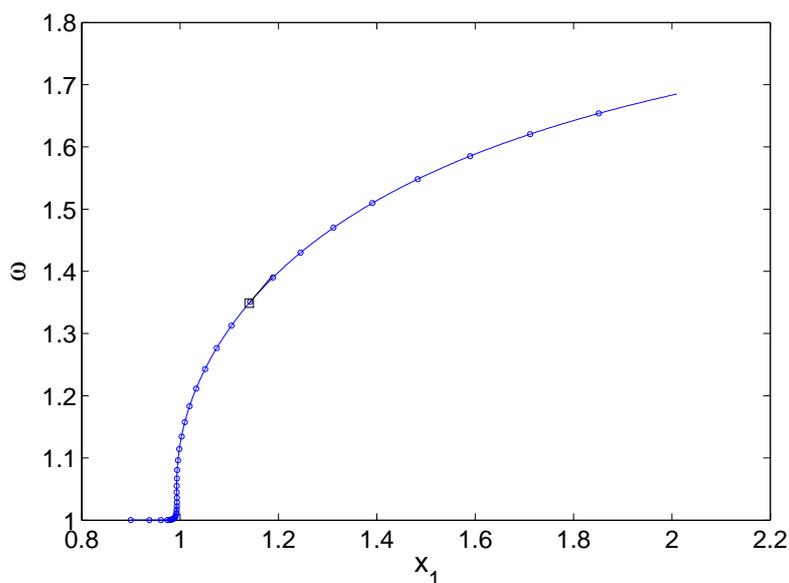


FIG. 6.12 – Branche des solutions périodiques du système vibro-impact avec régularisation raide, calculée par HBM : pulsation  $\omega$  en fonction du coefficient  $x_1$  (premier cosinus de la série de Fourier du déplacement  $x$ ) ; les cercles marquent le début des pas de continuation ; le carré marque l'emplacement, sur la branche, du point solution utilisé pour l'étude de convergence. Ordre des séries de Fourier :  $H=1000$  harmoniques. Régularisation :  $\alpha=200$ . Ordre des séries MAN : 20. Seuil MAN :  $1.10^{-12}$ . Seuil de correction :  $1.10^{-10}$ .

Toutefois, en ce qui concerne la collocation, des calculs menés à l'aide du logiciel AUTO montrent qu'il suffit de beaucoup moins d'éléments par période pour arriver à la même précision, dans le cas où le maillage des éléments est adaptatif (taille des éléments non uniforme et répartition actualisée d'un pas à l'autre le long de la branche). C'est également ce que rapportent Engelborghs *et al.* [29] dans le cas d'équations différentielles à retards.

L'implémentation d'un schéma adaptatif pour la collocation dans MANLAB améliorerait alors grandement la précision et la convergence de la méthode par collocation, et réduirait ainsi les temps de calcul à précision donnée.

Enfin, la méthode de l'équilibrage harmonique pourrait, elle aussi, être améliorée en adaptant le nombre d'harmoniques pour chaque variable : toutes les variables d'état n'ont pas le même spectre, et il faut par exemple beaucoup plus d'harmoniques pour décrire correctement la variable  $e(t)$  que pour la variable  $x(t)$ , dans le cas de notre exemple vibro-impact.

#### 6.2.4 Continuation des solutions périodiques

La figure 6.12 montre la branche de solutions périodiques dans le cas de l'HBM. Il faut 26 pas, depuis le point  $x_{\min} = -0,9$ , avec des séries MAN à l'ordre 20, pour atteindre le point ( $x_{\min} = -1,5$ ). Le calcul a été effectué avec une régularisation raide ( $\alpha=200$ ) et un nombre élevé d'harmoniques :  $H=1000$ . La taille totale du système

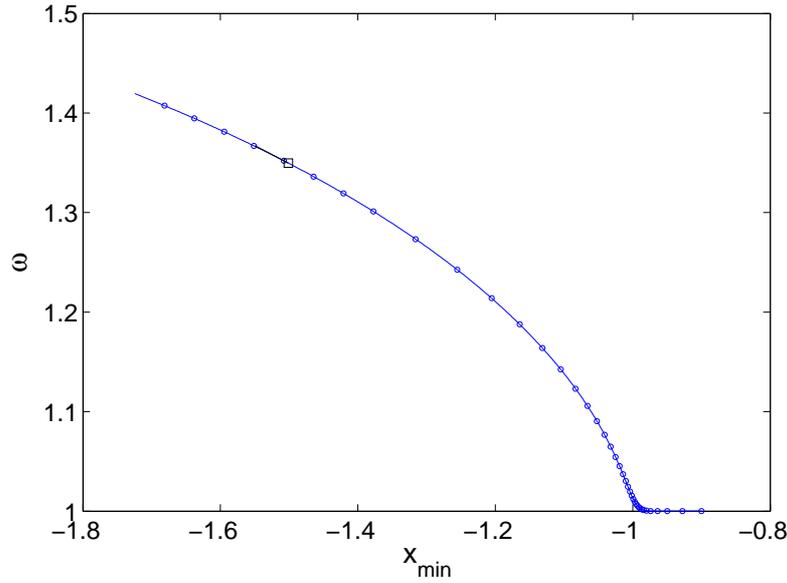


FIG. 6.13 – Branche des solutions périodiques du système vibro-impact avec régularisation raide : pulsation  $\omega$  en fonction de l’amplitude du cycle  $x_{\min}$  ; les cercles marquent le début des pas de continuation ; le carré marque l’emplacement, sur la branche, du point solution utilisé pour l’étude de convergence. Nombre d’éléments par périodes :  $N=667$ . Régularisation :  $\alpha=200$ . Ordre des séries MAN : 20. Seuil MAN :  $1.10^{-12}$ . Seuil de correction :  $1.10^{-10}$ .

à résoudre à chaque pas est alors de :

$$N_{\text{tot}} = (2H + 1)N_{\text{eq}} + 4 = 6007$$

Mis à part le raccourcissement des pas à l’approche de la transition entre régime linéaire et régime non linéaire (légèrement avant  $x_1=1$ ), la méthode fonctionne bien : les pas redeviennent assez longs loin de la bifurcation (ou pseudo-bifurcation), même en régime non linéaire. On tire ainsi pleinement parti de la formulation MAN de la continuation : avec une formulation MPC classique (*à la* AUTO) où il faudrait effectuer beaucoup plus de pas pour obtenir un échantillonnage équivalent de la branche.

La figure 6.13 montre la branche de solutions périodiques dans le cas de la collocation polynômiale par éléments. Il faut 35 pas, depuis le point  $x_{\min} = -0,9$ , avec des séries MAN à l’ordre 20, pour atteindre le point ( $x_{\min}=-1,5$ ). Le calcul a été effectué avec une régularisation raide ( $\alpha=200$ ) et un nombre élevé d’éléments par période :  $N=667$ . La taille totale du système à résoudre à chaque pas est alors de :

$$N_{\text{tot}} = (3N + 1)N_{\text{eq}} + 2 = 6008$$

soit quasiment la même taille que la branche calculée par équilibrage harmonique (à 1 près).

Le rallongement des pas une fois passée la transition n’est pas aussi rapide que dans le cas de l’équilibrage harmonique : la taille des pas augmente jusqu’à un

certain point, puis semble stagner. Cela explique le nombre de pas plus important à effectuer.

Une explication possible vient du fait que, lorsque l'amplitude du cycle augmente, le nombre d'éléments dans la zone d'impact diminue. Ainsi, à chaque fois qu'un élément « sort » de cette zone, la continuation rencontre une quasi-bifurcation (au sens où le système algébrique des équations de collocation devient presque singulier), ce qui réduit la taille du pas. Comme ces quasi-bifurcations sont à peu près régulièrement espacées le long de la branche, on obtient ainsi des pas de longueur à peu près constante, même loin de la discontinuité principale (entre régime linéaire et régime non linéaire).

## 6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons comparé les deux méthodes de discrétisation implémentées dans Manlab, d'une part en tant que méthode d'approximation de solutions périodiques de système dynamique, et d'autre part en tant qu'outil au service de la continuation des branches de telles solutions.

Au regard de ces deux exemples, certes simples mais représentatifs, l'équilibrage harmonique semble l'outil à la fois le plus précis et le plus efficace pour la continuation des solutions périodiques.

On peut toutefois nuancer légèrement cette conclusion qui pourrait paraître sans appel :

- L'exemple du logiciel AUTO montre qu'un maillage adaptatif permet d'augmenter considérablement la précision de l'approximation des solutions par des fonctions polynômiales par morceaux. L'implémentation d'une version de la collocation avec maillage auto-adaptatif dans MANLAB serait alors d'un grand secours. Toutefois, il n'est pas certain que dans le cas de système fortement non réguliers comme un vibro-impact avec forçage, le maillage adaptatif puisse résoudre le problème du raccourcissement des pas.
- Une méthode de calcul purement fréquentielle de stabilité des solutions périodiques obtenue par équilibrage harmonique a été intégrée à MANLAB, et semble moins coûteuse qu'une intégration temporelle de la matrice de monodromie avec une précision comparable (voir Lazarus et Thomas [56]). Cependant elle reste le calcul de stabilité basé sur la collocation faisant intervenir uniquement une sous-matrice de la Jacobienne du système algébrique global, et il serait donc probablement moins coûteux encore. Il reste à l'implémenter pour vérifier cette hypothèse.



## Deuxième partie

# Applications aux instruments de musique auto-oscillants



# Chapitre 7

## Modélisation des instruments de musique à anche simple

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Principe général de fonctionnement</b>	<b>106</b>
<b>7.2</b>	<b>Mécanique de l'anche</b>	<b>106</b>
7.2.1	Modélisation du contact	107
<b>7.3</b>	<b>Acoustique du résonateur</b>	<b>108</b>
7.3.1	Modèle analytique du cylindre	109
7.3.2	Modèle analytique du tronc de cône	109
7.3.3	Caractérisation expérimentale	109
7.3.4	Décomposition modale	110
7.3.5	Équations dans le domaine temporel	110
<b>7.4</b>	<b>Couplage</b>	<b>111</b>
<b>7.5</b>	<b>Équations adimensionnées</b>	<b>112</b>
<b>7.6</b>	<b>Reformulation quadratique</b>	<b>112</b>
7.6.1	Équation du débit	113
7.6.2	Effort de contact	113
7.6.3	Système complet	113

---

### Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle physique utilisé pour les instruments de musique à anche simple. Il ne s'agit pas ici de nouveaux développements sur les modèles physiques, mais bien d'un rappel de l'existant, et d'une mise en forme des équations de façon à pouvoir utiliser les outils développés dans la première partie. Pour une revue bibliographique exhaustive sur les différents modèles physiques existants, on se reportera à Silva [75].

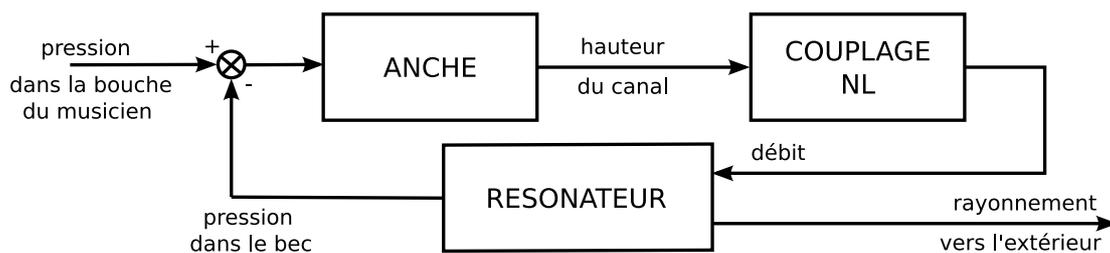


FIG. 7.1 – Schéma-bloc du fonctionnement d'un instrument à vent : il s'agit d'un oscillateur, composé d'un élément non linéaire (couplage), d'un filtre linéaire (résonateur) et d'une boucle de rétroaction (avec à nouveau filtrage du résonateur).

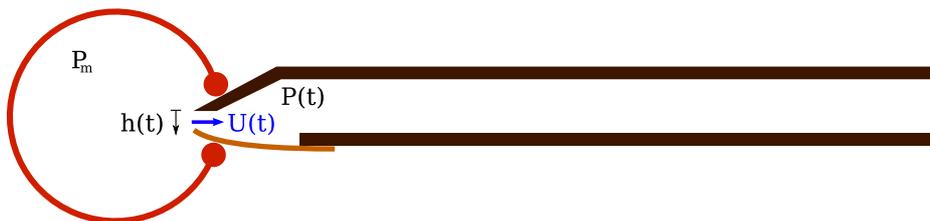


FIG. 7.2 – Schéma simplifié d'une clarinette en coupe.

## 7.1 Principe général de fonctionnement

Le fonctionnement des instruments à vent est typique d'un oscillateur, comme illustré sous forme de schéma-bloc à la figure 7.1 : une source d'énergie (l'instrumentiste) alimente le système sous forme statique (ou quasi-statique), et le système est composé d'un élément linéaire, le résonateur, qui joue le rôle de filtre en fréquence, et d'un élément non linéaire, le couplage mécanique entre l'anche et l'aérodynamique du jet à la sortie du canal d'anche, qui joue le rôle de résistance négative contrôlée par l'entrée. La boucle de rétroaction inclut un élément linéaire : le résonateur, qui joue là encore le rôle de filtre fréquentiel.

Pour illustrer ces notions sur un exemple, la figure 7.2 propose un schéma simplifié de clarinette en coupe. La position de l'anche est notée  $h(t)$ , avec comme référence une valeur nulle lorsque l'anche est plaquée contre le bec :  $h(t)$  correspond ainsi à la hauteur du canal d'anche (partie ouverte entre l'anche et le bec). Le débit à travers le canal d'anche est noté  $U(t)$ , et par conservation du débit c'est aussi celui à l'entrée du résonateur. La pression dans le bec est notée  $P(t)$  et, supposée uniforme, est égale à celle à l'entrée du résonateur (cette approximation est justifiée par les petites dimensions du bec devant les longueurs d'ondes). La pression de souffle dans la bouche du musicien est notée  $P_m$ .

## 7.2 Mécanique de l'anche

En première approximation, l'anche joue le rôle de valve : elle module le débit  $U$  qui passe à travers le canal d'anche. Sa position dépend directement de la différence de pression entre ses deux faces ( $P_{\text{bouche}}$  et  $P_{\text{bec}}$ ).

Ainsi, dans un modèle minimaliste où l'anche est une simple valve contrôlée

instantanément par cette différence de pression, on a :

$$K_r(h(t) - h_0) = P_m - P(t)$$

où  $h_0$  est la position de l'anche au repos et  $K_r$  une raideur équivalente (par unité de surface).

Toutefois, l'anche est en réalité un corps solide déformable tridimensionnel. L'une des dimensions (l'épaisseur) est très petite devant les deux autres, donc on peut éventuellement réduire son étude à un modèle de plaque mince (mais d'épaisseur variable). En outre, une autre dimension (la largeur) est assez faible devant la longueur et l'on peut alors se restreindre à un modèle de poutre à section variable.

Ce type d'étude (voir Avanzini et van Walstijn [5]) met en avant le rôle du premier mode de flexion de l'anche, dont la fréquence est certes élevée comparée aux fréquences de jeu, mais pas assez pour négliger les effets d'inertie comme c'est le cas dans le modèle simpliste de l'anche instantanée. En revanche, les modes supérieurs sont peu utiles car relativement peu sollicités<sup>a</sup>. On peut alors réduire la modélisation de l'anche à son premier mode de flexion, c'est-à-dire par un oscillateur amorti à un degré de liberté, dont le mouvement est régi par l'équation :

$$\frac{1}{\omega_r^2} \frac{d^2h}{dt^2} + \frac{q_r}{\omega_r} \frac{dh}{dt} + h(t) - h_0 = -\frac{1}{K_r}(P_m - P(t)) \quad (7.1)$$

où  $\omega_r$  est la pulsation propre de l'anche (celle du premier mode),  $q_r$  l'amortissement associé,  $h_0$  la position d'équilibre (lorsque le membre de droite est nul), et  $K_r$  la raideur surfacique équivalente<sup>b</sup>.

### 7.2.1 Modélisation du contact

Le contact possible entre l'anche et le bec impose une condition supplémentaire de non pénétration :  $h(t) \geq 0$ .

Une des manières d'imposer (faiblement) la condition de non pénétration dans les équations est la méthode dite de pénalisation (voir Silva [75]) : on ajoute au membre de droite de l'équation 7.1 la quantité  $-K_p h(t)$ , uniquement lorsque  $h(t) < 0$ , où la raideur de pénalité  $K_p$ , représente en quelque sorte la raideur élastique du bec en flexion, très grande devant la raideur mécanique de l'anche, autorisant de ce fait des positions  $h$  négatives mais de très faible amplitude.

Notons que la table du bec est en partie courbe<sup>c</sup>, comme on peut le voir sur la figure 7.3, et l'anche s'enroule sur celle-ci : il y a donc une partie de l'anche en contact, dont la longueur augmente au cours de l'enroulement, et une partie de l'anche libre, dont la longueur diminue jusqu'à l'enroulement complet. Cela revient à introduire une dépendance des propriétés mécaniques du mode  $\omega_r$ ,  $q_r$  et  $K_r$  (et

<sup>a</sup>Cela reste toutefois une question ouverte du point de vue du musicien : il semblerait que les modes de torsion soient impliqués dans l'évaluation de la qualité des anches.

<sup>b</sup>La raideur équivalente  $K_r$  est liée à la raideur mécanique  $K$  du mode et à la surface de l'anche soumise à la différence de pression  $S_r$  par la relation :  $K_r = K/S_r = m\omega_r^2$  où  $m$  est la masse de la partie de l'anche qui participe au mouvement.

<sup>c</sup>Plus précisément ce sont les rails, c'est-à-dire les deux parties latérales sur lesquelles l'anche vient se poser quand elle ferme le canal d'anche, qui sont courbés.

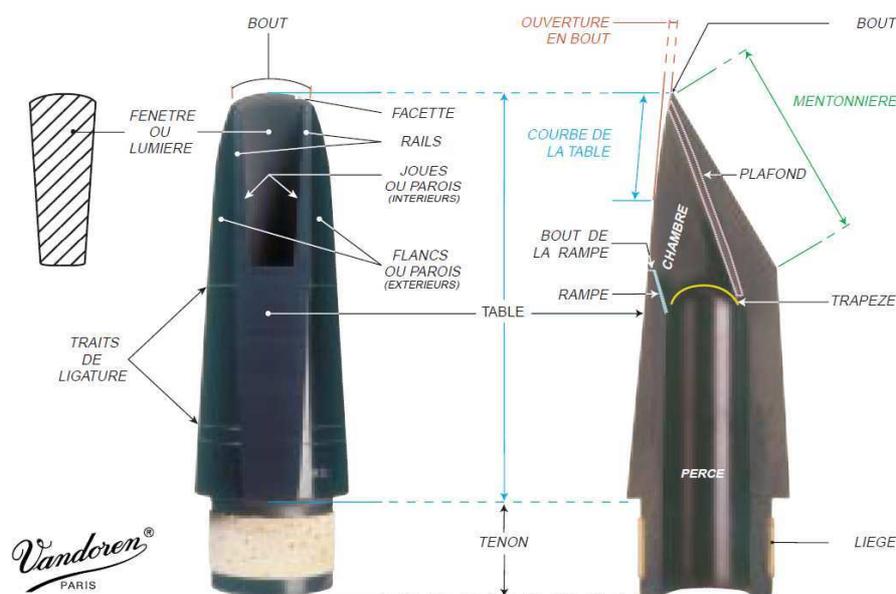


FIG. 7.3 – Vues de dessous et en coupe d’un bec de clarinette Vandoren. D’après *Vandoren Magazine*, vol.2 (2001).

donc nécessairement  $m$ ,  $K$  et  $S_r$ , voir la note b) en fonction de la coordonnée  $h$ , comme le proposent van Walstijn et Avanzini [85].

De notre côté, afin d’obtenir des expressions analytiques, nous avons choisi de régulariser la loi de contact entre l’anche et la table du bec. Une régularisation simple, et compatible avec la MAN (voir Aggoune *et al.* [1]), est l’hyperbole obtenue par perturbation sous la forme :  $F_c h = \eta F_0 h_0$ , où  $\eta$  est un petit paramètre (sans dimension) et  $F_0 = K h_0$  une valeur permettant de dimensionner l’effort de contact.

Cette formulation tend vers la loi non régulière quand  $\eta$  tend vers 0. Toutefois, elle présente un inconvénient majeur lorsqu’on l’utilise en numérique : si jamais, à un instant de la période, l’anche atteint une position  $x < 0$  aussi petite soit-elle (commettant de ce fait, une erreur relativement faible si elle devait se trouver en  $x=0$ ), la force de réaction change de signe et l’anche peut alors traverser complètement le bec.

Pour circonvenir à ce problème, nous avons choisi une formulation légèrement différente qui permet de garder une force de réaction toujours positive, et ce tout en restant dans un cadre quadratique : nous utiliserons  $F_c^2/F_0$  au lieu de  $F_c$ , c’est à dire une loi de contact proportionnelle à  $1/h^2$ .

Dans notre modèle, le mouvement de l’anche obéit donc à la loi suivante :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_r^2} \frac{d^2 h}{dt^2} = -\frac{g_r}{\omega_r} \frac{dh}{dt} - (h(t) - h_0) - \frac{1}{K_r} (P_m - P(t)) + \frac{1}{K F_0} F_c^2(t) \\ F_c(t) = -F_0 h_0 \frac{\eta}{h(t)}. \end{cases} \quad (7.2)$$

### 7.3 Acoustique du résonateur

Nous nous plaçons dans le cadre de l’acoustique linéaire. Étant données les fréquences et longueurs d’onde mises en jeu, nous considérerons uniquement la propa-

gation suivant la plus grande dimension du résonateur, sa longueur, selon le mode plan.

### 7.3.1 Modèle analytique du cylindre

Dans le cas d'un cylindre simple (sans trous latéraux), de rayon  $r$  et de longueur  $L$ , dont l'extrémité de sortie rayonne dans l'air ambiant, on dispose d'une formule analytique pour l'impédance d'entrée  $Z_e(\omega)$  qui relie la pression  $P_e(\omega)$  et le débit  $U_e(\omega)$  acoustiques à l'entrée du résonateur :

$$Z_e(\omega) = \frac{P_e(\omega)}{U_e(\omega)} = Z_c \tanh [\Gamma(\omega)L + \operatorname{arctanh}(Z_R(\omega)/Z_c)] \quad (7.3)$$

où  $Z_c$  est l'impédance caractéristique<sup>d</sup>,  $\Gamma = \sqrt{Z_v Y_t}$  est la constante de propagation,  $Z_v(\omega)$  est l'impédance linéique en série due aux effets visqueux,  $Y_t(\omega)$  est l'admittance linéique en parallèle due aux effets de conduction thermique, et  $Z_R(\omega)$  est l'impédance de rayonnement. C'est ce modèle qui est implémenté dans le logiciel Moreesc (Silva [76]), que nous avons utilisé pour calculer l'impédance d'entrée dans le cas de la clarinette (voir le chapitre 8).

Notons que le rayonnement de l'extrémité de sortie du tuyau peut être assimilée en basse fréquences ( $\lambda \gg r$ ) à celui d'un monopôle. Des expressions plus précises peuvent toutefois être obtenues : citons notamment les travaux de Levine et Schwinger [57] ou plus récemment de Silva *et al.* [78].

### 7.3.2 Modèle analytique du tronc de cône

Le cas d'un résonateur conique est légèrement différent. Sans entrer dans les détails, nous reproduisons ici la formule utilisée par Ricaud *et al.* [68] pour l'impédance d'entrée d'un tronc de cône de longueur  $L$  et de longueur manquante  $x_e$  (partie manquante au sommet), dans le cas d'une embouchure dont le volume compense celui de la partie manquante du sommet du cône :

$$Z_e(\omega) = Z_c \left( \frac{1}{j \tan [k(\omega)L + \operatorname{arctan}(Z_R(\omega)/Z_c)]} + \frac{c}{j\omega x_e} + \frac{j\omega x_e}{3c} \right)^{-1} \quad (7.4)$$

où le nombre d'onde  $k(\omega)$  est éventuellement complexe afin de prendre en compte les effets viscothermiques : on peut par exemple le remplacer par la constante de propagation du cylindre  $\Gamma(\omega)$  (au facteur  $j$  près), en prenant un rayon moyen entre le rayon d'entrée et de sortie du tronc de cône.

### 7.3.3 Caractérisation expérimentale

Pour obtenir l'impédance d'entrée d'un instrument donné de façon plus réaliste, c'est à dire en prenant en compte tous les effets qui rendent le calcul délicat (entre

<sup>d</sup>En toute rigueur, on a  $Z_c(\omega) = \sqrt{\frac{Y_t(\omega)}{Z_v(\omega)}}$ , mais en pratique, l'approximation à l'ordre 0 en  $\omega$  est assez bonne :  $Z_c = \rho c / \pi r^2$

autres : trous latéraux, variations de section, et pavillon), on peut utiliser directement une impédance d'entrée mesurée. Il s'agira donc d'une impédance d'entrée échantillonnée, et il sera nécessaire d'interpoler ces valeurs d'une façon ou d'une autre.

### 7.3.4 Décomposition modale

L'impédance d'entrée d'un résonateur peut se décomposer comme une somme infinie de « modes » :

$$Z_e(\omega) = Z_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z_n(\omega) \quad (7.5)$$

Chaque mode, qui représente un pôle de l'impédance, s'écrit sous forme suivante :

$$Z_n(\omega) = \frac{C_n}{j\omega - s_n} \quad (7.6)$$

où  $s_n$  est le  $n$ -ième pôle (complexe) de l'impédance d'entrée, dont la partie imaginaire correspond à la pulsation de la  $n$ -ième résonance et la partie réelle à son amortissement, et  $C_n$  le résidu associé. Par symétrie hermitienne, on a  $s_{-n} = s_n^*$  et  $C_{-n} = C_n^*$ .

Ainsi, la décomposition modale complexe s'écrit :

$$Z_e(\omega) = Z_c \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_n}{j\omega - s_n} + \frac{C_n^*}{j\omega - s_n^*}. \quad (7.7)$$

On notera qu'en mettant chaque paire de termes au même dénominateur, on retrouve la décomposition en modes réels (voir Silva [75, 76], Silva *et al.* [77]) :

$$Z_e(\omega) = Z_c \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n j\omega/\omega_n}{1 + q_n j\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2}. \quad (7.8)$$

Un des avantages de la décomposition modale complexe (7.7) est qu'on peut ajuster ses coefficients  $s_n$  et  $C_n$  sur une impédance connue analytiquement aussi bien que sur une impédance mesurée. Une illustration de cette seconde méthode sera donnée au chapitre 9 sur le saxophone.

### 7.3.5 Équations dans le domaine temporel

Après troncature à un ordre  $N_m$ , cette décomposition modale permet de décrire le comportement acoustique du résonateur à partir d'un nombre fini de variables, les modes (complexes) de pression  $P_n$ , définis dans le domaine fréquentiel par :

$$P_n(\omega) = Z_c Z_n(\omega) U(\omega).$$

En repassant dans le domaine temporel, on obtient alors :

$$P_n'(t) = s_n P_n(t) + Z_c C_n U(t), \quad n = 1..N_m \quad (7.9)$$

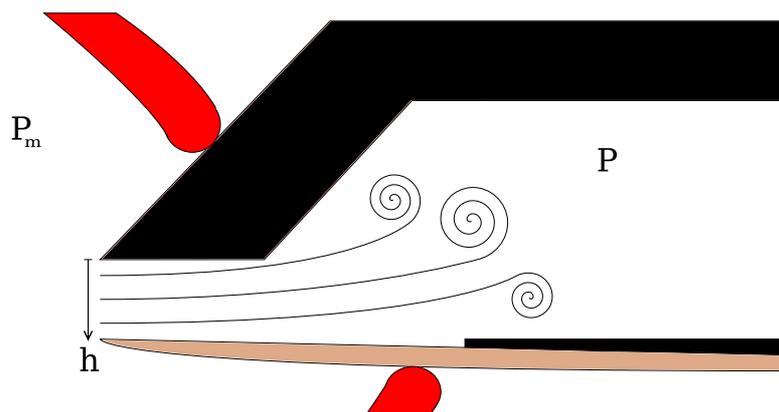


FIG. 7.4 – Schéma de fonctionnement du bec : formation d'un jet libre à la sortie du canal d'anche.

et, utilisant  $P_{-n}=P_n^*$ , on retrouve la pression acoustique à l'entrée du résonateur grâce à la relation :

$$P(t) = 2 \sum_{n=1}^{N_m} \Re(P_n). \quad (7.10)$$

## 7.4 Couplage : aérodynamique du jet

L'élément non linéaire qui permet de coupler les deux éléments linéaires précédents est le jet libre qui est créé à la sortie du canal d'anche, comme illustré à la figure 7.4. Faisant les hypothèses :

- d'un écoulement quasi-stationnaire,
- que l'énergie cinétique du jet est entièrement dissipée par turbulence sans recouvrement de pression,
- que la pression est uniforme dans le bec (en dehors du jet), égale à celle à l'entrée du résonateur,
- et que la vitesse de l'air à l'intérieur de la bouche du musicien est négligeable devant celle de l'air dans le jet,

Hirschberg [42] montre qu'on peut appliquer le principe de Bernoulli le long d'une ligne de courant entre la bouche du musicien et le jet libre (juste avant la formation des tourbillons) et l'on obtient ainsi l'équation non linéaire suivante :

$$\frac{1}{2} \rho v_{\text{jet}}^2(t) = P_m - P(t),$$

d'où il vient, notant  $W$  la largeur du canal d'anche :

$$U(t) = \text{sign}(P_m - P(t)) W h(t) \sqrt{\frac{2|P_m - P(t)|}{\rho}}. \quad (7.11)$$

**Note** : Il faut souligner que l'anche induit un débit supplémentaire, en déplaçant avec elle une partie de l'air dans le bec : la partie comprise dans le volume balayé par son mouvement. Ce débit d'anche n'est pas inclus dans les études du chapitre 8 sur

la clarinette et du chapitre 9 sur le saxophone. Il sera toutefois utilisé au chapitre 11 où l'on montre son influence sur le seuil d'oscillation, sur la sélection de régime ainsi que sur la fréquence de jeu au seuil pour la clarinette.

## 7.5 Équations adimensionnées

Nous allons ré-écrire l'ensemble des équations du modèle sous une forme sans dimension, afin de gagner en généralité d'une part, et d'éviter les problèmes numériques de conditionnement<sup>e</sup> d'autre part.

Nous utiliserons ainsi les notations suivantes :

$$\begin{aligned} x(t) &= h(t)/h_0 \\ y(t) &= h'(t)/v_0 \\ p_n(t) &= P_n(t)/P_M \quad n = 1..N_m \\ p(t) &= P(t)/P_M \\ u(t) &= U(t)Z_c/P_M \end{aligned}$$

où l'on rappelle que  $h_0$  est la hauteur du canal d'anche au repos (lorsque  $P_m=P$ ), et où  $v_0 = h_0\omega_r$  est l'ordre de grandeur de la vitesse de l'anche en régime libre, et  $P_M = K_r h_0$  est la pression de placage statique<sup>f</sup>.

Le système algébro-différentiel s'écrit alors (après reformulation au premier ordre de l'équation du mouvement de l'anche) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\omega_r} x'(t) = y(t) \\ \frac{1}{\omega_r} y'(t) = 1 - x(t) + p(t) - \gamma - q_r y(t) + -\eta/x^2(t) \\ p'_n(t) = C_n u(t) + s_n p_n(t) \quad n = 1..N_m \\ p(t) = 2 \sum_{n=1}^{N_m} \Re(p_n(t)) \\ u(t) = \zeta \text{sign}(\gamma - p(t)) x(t) \sqrt{|\gamma - p(t)|}, \end{array} \right. \quad (7.12)$$

où  $\gamma = P_m/P_M$  est le paramètre sans dimension qui représente la pression dans la bouche du musicien<sup>g</sup>, et  $\zeta = Z_c W h_0 \sqrt{\frac{2}{\rho P_M}}$  est le paramètre sans dimension qui représente la « pince » des lèvres du musicien sur l'embouchure<sup>h</sup>.

## 7.6 Reformulation quadratique

Dans cette section, nous reformulons le système algébro-différentiel (7.12) afin de pouvoir l'utiliser directement avec la MAN. Cela implique l'utilisation de variables additionnelles, définies au moyen d'équations algébriques additionnelles qui devront être quadratiques.

<sup>e</sup>Les pressions, exprimées en  $Pa$ , et les débits exprimés en  $m^3/s$  sont d'ordres de grandeurs très différents, par le simple fait que ce sont des grandeurs physiques différentes.

<sup>f</sup>I.e. la différence de pression statique nécessaire pour fermer le canal d'anche

<sup>g</sup>Ce paramètre décrit la quantité d'énergie qui entre dans le système.

<sup>h</sup>Ce paramètre est directement relié au débit maximal autorisé par le couplage, décrit par l'équation 7.11, et reflète donc le contrôle de ce couplage par le musicien.

On commence par définir la variable additionnelle  $\Delta p$  par :

$$\Delta p(t) = \gamma - p(t) \quad (7.13)$$

### 7.6.1 Équation du débit

On note que la variable  $v(t) = \text{sign}(\Delta p(t))\sqrt{|\Delta p(t)|}$  peut être définie implicitement par l'équation :

$$v(t)|v(t)| = \Delta p(t). \quad (7.14)$$

Cette équation n'est pas tout à fait quadratique en  $(v(t), \Delta p(t))$ , car elle fait intervenir la fonction valeur absolue. On définit alors une variable additionnelle  $w(t) = |v(t)|$  par l'équation suivante, quadratique en  $(v(t), w(t))$  :

$$w^2(t) = v^2(t) + \epsilon \quad (7.15)$$

où  $0 < \epsilon \ll 1$  est une perturbation qui permet à la fois de régulariser la discontinuité de la dérivée première en 0, et de s'assurer de toujours rester sur la même branche de solution (par exemple  $w > 0$ ) au cours de la période.

On peut alors réécrire l'équation (7.14) sous la forme quadratique suivante :

$$v(t)w(t) = \Delta p(t). \quad (7.16)$$

### 7.6.2 Effort de contact

On introduit l'effort de contact à l'aide d'une variable supplémentaire  $f(t) = F_c/F_0 = -\eta/x(t)$  définie par la relation quadratique suivante :

$$f(t)x(t) = -\eta. \quad (7.17)$$

### 7.6.3 Système complet

Le système algèbro-différentiel quadratique complet s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} p'_n = C_n u + s_n p_n \quad n = 1..N_m \\ \frac{1}{\omega_r} x' = y \\ \frac{1}{\omega_r} y' = 1 - x + p - \gamma - q_r y + f^2 \\ f x = -\eta \\ u = \zeta x v \\ v w = \Delta p \\ w^2 = v^2 + \epsilon \\ \Delta p = \gamma - p \\ p = 2 \sum_{n=1}^{N_m} \Re(p_n(t)) \end{array} \right. \quad (7.18)$$

On notera enfin que ce système se met aisément sous la forme requise pour MANLAB (voir Cochelin et Vergez [16]) :

$$m(Z') = c_0 + \gamma c_1 + l_0(Z) + \gamma l_1(Z) + q(Z, Z)$$

où le vecteur d'état est défini par

$$Z = [\Re(p_1), \Im(p_1), \dots, x, y, u, v, w, p, \Delta p]^T.$$

Il suffit pour cela de poser :

$$\begin{aligned} m(Z') &= [\Re(p'_1), \Im(p'_1), \dots, x'/\omega_r, y'/\omega_r, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ c_0 &= [0, 0, \dots, 0, 1, \eta, 0, 0, \epsilon, 0, 0]^T \\ c_1 &= [0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]^T \\ l_0(Z) &= [\Re(C_1 u + s_1 p_1), \Im(C_1 u + s_1 p_1), \dots, \\ &\quad y, -x + p - q_r y, 0, u, \Delta p, 0, -\Delta p - p, -p + 2 \sum_{n=1}^{N_m} \Re(p_n)]^T \\ l_1(Z) &= \mathbf{0} \\ q(Z, Z) &= [0, 0, \dots, 0, f^2, fx, -\zeta xv, -vw, v^2 - w^2, 0, 0]^T \end{aligned}$$

## Conclusion

Nous disposons maintenant d'un modèle non linéaire d'instrument à anche simple, exprimé sous une forme quadratique. Nous allons ainsi pouvoir utiliser l'équilibrage harmonique pour le calcul des solutions périodiques de ce système, et MANLAB pour le calcul des branches de solutions périodiques.

On notera que, pour l'instant, nous n'avons pas inclus le débit d'anche dans ce modèle. Il sera toutefois intégré au modèle dans le dernier chapitre, lorsqu'on étudiera son effet sur les seuils d'oscillation.

# Chapitre 8

## Régimes périodiques de la clarinette

### Sommaire

---

<b>8.1 Paramètres et régularisation du modèle . . . . .</b>	<b>116</b>
8.1.1 Nombre de modes acoustiques . . . . .	116
8.1.2 Valeurs des paramètres . . . . .	117
<b>8.2 Branche statique . . . . .</b>	<b>118</b>
8.2.1 Calcul analytique . . . . .	118
8.2.2 Continuation de point fixe : équilibrage harmonique à l'ordre 0120	
8.2.3 Calcul à l'aide du logiciel AUTO . . . . .	121
8.2.4 Retour sur la modélisation du contact . . . . .	122
<b>8.3 Régimes périodiques . . . . .</b>	<b>122</b>
8.3.1 Premiers résultats . . . . .	122
8.3.2 Problèmes numériques liés au contact . . . . .	123
8.3.3 Influence des régularisations sur la stabilité . . . . .	127
8.3.4 Estimation du nombre d'harmoniques nécessaires . . . . .	128
8.3.5 Calcul du premier registre . . . . .	130
8.3.6 Stabilité . . . . .	130
<b>8.4 Autres régimes périodiques . . . . .</b>	<b>139</b>

---

### Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les régimes périodiques de la clarinette. Nous utilisons pour cela le modèle présenté dans le chapitre précédent, dont l'impédance d'entrée correspond à un cylindre simple, de longueur  $L=57\text{cm}$ , proche de celle d'une clarinette en Sib pour sa note la plus basse le Ré 2, dont la fréquence est de 146,8Hz

Nous utiliserons le logiciel MANLAB avec l'équilibrage harmonique, et nous comparerons nos résultats avec ceux obtenu par collocation avec le logiciel AUTO.

Il s'agit d'un cas « test », d'où le fait qu'on utilise une géométrie simplifiée, sans trou (même fermé) ni pavillon. Le but est ici surtout de valider la méthode et de mettre en avant les possibilités qu'elle offre.

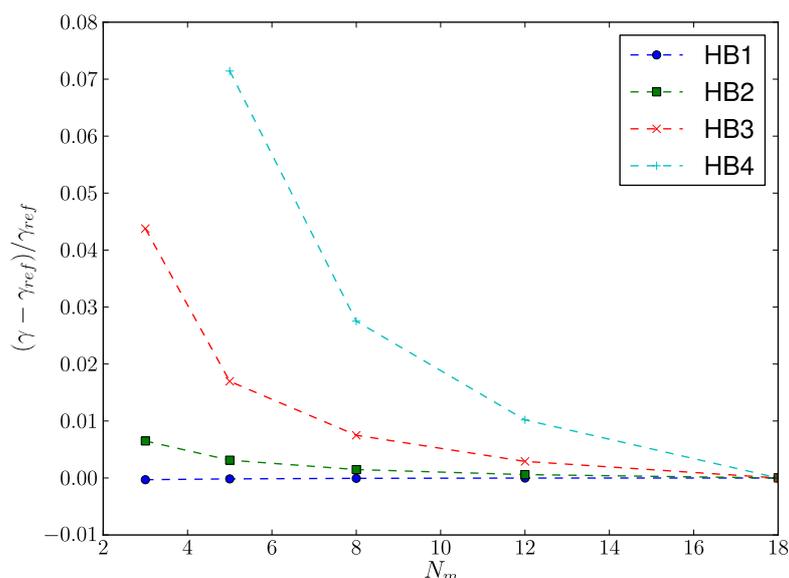


FIG. 8.1 – Convergence de la détection des bifurcations de Hopf sur la branche statique en fonction du nombre de modes acoustiques retenus : écart relatif entre les valeurs de pression d’alimentation à la bifurcation  $\gamma$  et celles de référence en fonction du nombre de modes, pour les différentes bifurcations. (Référence calculée avec 18 modes acoustiques).  $\zeta = 0,318$ .

## 8.1 Paramètres et régularisation du modèle

### 8.1.1 Nombre de modes acoustiques

On a étudié la convergence de la détection des bifurcations de Hopf sur la branche statique en fonction du nombre de modes acoustiques retenus dans la décomposition modale du résonateur : pour différents nombres de modes, on a comparé la valeur de  $\gamma$  de chaque bifurcation de Hopf à celle obtenue par un calcul de référence avec 18 modes.

Comme le montre la figure 8.1, il faut plus de trois modes pour voir apparaître toutes les bifurcations de Hopf (ici, il y en a quatre). Par ailleurs, il faut au moins 12 modes pour ramener l’écart relatif en  $\gamma$  en-dessous d’un pourcent pour la bifurcation la « moins convergée » (dans notre cas, la quatrième).

On montre également (voir Chaigne et Kergomard [11], chap.9 pp.400–468) que seuls les modes dont la fréquence propre est inférieure à celle de l’anche peuvent déstabiliser le régime statique. Pour une fréquence d’anche de  $f_r = 1500\text{Hz}$ , et un cylindre dont les modes ont des fréquences à peu près harmoniques, avec une fréquence fondamentale proche de  $147\text{Hz}$ , les cinq ou six premiers modes (selon l’inharmonicité) peuvent donc potentiellement donner lieu à un régime périodique, éventuellement stable selon les paramètres de contrôle de l’instrument.

Enfin, la décomposition modale de l’impédance d’entrée réalisée dans MOREESC [76] ne tient pas compte des minimums d’impédance : leur position en fréquence ainsi que leur amplitude est d’autant moins bien reproduite par la décomposition qu’il

$L$	57cm
$r$	7mm
$\rho$	1,185kg/m <sup>3</sup>
$c$	346,2m/s
$N_m$	12
$W$	1,5cm
$h_0$	0,3mm
$f_r$	1500Hz
$q_r$	1,0
$K_r$	8.10 <sup>6</sup> N/m <sup>3</sup>
$\eta$	1.10 <sup>-4</sup>

TAB. 8.1 – Valeurs des paramètres du modèle utilisés. Les coefficients  $s_n$  et  $C_n$  de la décomposition modale complexe de l'impédance d'entrée sont calculés à l'aide du logiciel Moreesc [76], à partir de la géométrie et du nombre de modes indiqués ici (avec prise en compte du rayonnement).

y a peu de modes<sup>a</sup>. Il faut donc utiliser un nombre suffisant de modes pour que les premiers minimums au moins soient correctement restitués, afin de ne pas trop influencer le spectre du débit  $u$  à l'entrée du résonateur, duquel dépend aussi le son émis à l'extérieur de l'instrument.

Afin de tenir compte de ces différentes contraintes, nous utilisons dans ce qui suit 12 modes acoustiques.

### 8.1.2 Valeurs des paramètres

Le tableau 8.1 récapitule l'ensemble des valeurs des paramètres utilisés pour le modèle. La taille du cylindre correspond à la longueur d'une clarinette tous trous fermés. Les paramètres d'anche ( $f_r$ ,  $q_r$ ,  $K_r$ ) correspondent à des valeurs moyennes constatées dans la littérature pour une anche bien amortie, l'amortissement étant renforcé par la lèvre inférieure du musicien (voir Avanzini et van Walstijn [5], Gatzengel *et al.* [34] et Silva [75]).

La valeur du paramètre de régularisation  $\eta$ , identique pour la régularisation du contact et pour la régularisation de la valeur absolue<sup>b</sup>, a été ajustée afin de perturber le moins possible la physique du système, sans toutefois résulter en un système trop raide.

<sup>a</sup>D'après les résultats de Guillemain et Silva [39], il suffirait d'un simple terme correctif pour « corriger » les minimums, mais cette amélioration n'est pas encore implémentée.

<sup>b</sup>La fonction valeur absolue est également régularisée par perturbation. On peut éventuellement utiliser un paramètre différent pour chaque régularisation

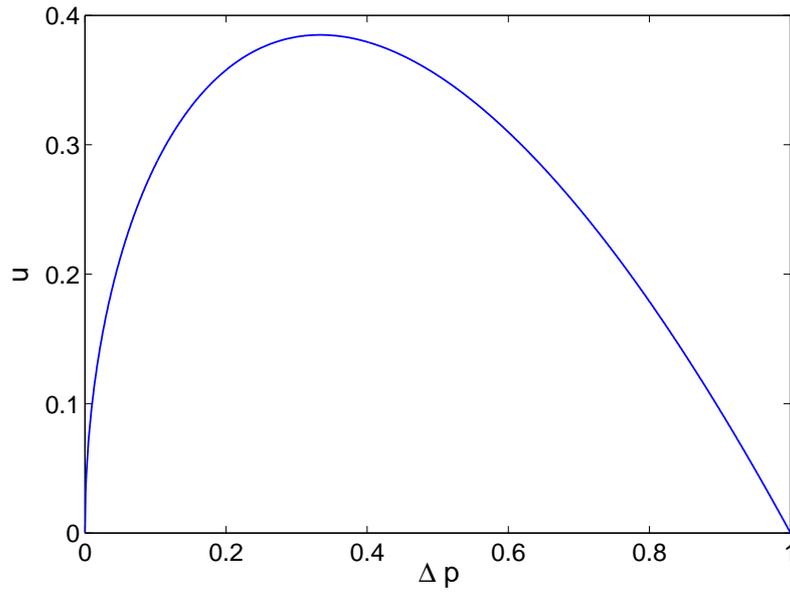


FIG. 8.2 – Caractéristique statique du modèle de clarinette (eq. 8.2) : débit à travers le canal d’anche  $u$  en fonction de la différence de pression  $\Delta p = \gamma - p$  entre la bouche du musicien et l’entrée du résonateur. Toutes les grandeurs sont sans dimension (voir le chapitre 7 pour les définitions).

## 8.2 Branche statique

### 8.2.1 Calcul analytique

La branche de solutions statiques peut être obtenue analytiquement : on reprend pour cela les équations du modèle et on annule tous les termes dépendants du temps. Il vient alors :

$$u = \zeta \operatorname{sign}(\gamma - p)x\sqrt{|\gamma - p|} \quad (8.1a)$$

$$x = 1 - \gamma + p \text{ si } \gamma < 1, \quad x = 0 \text{ sinon.} \quad (8.1b)$$

En reportant (8.1b) dans (8.1a), on obtient alors une équation unique pour  $u$  en fonction de  $\Delta p = \gamma - p$  :

$$u = \zeta \operatorname{sign}(\Delta p)(1 - \Delta p)\sqrt{|\Delta p|} \text{ si } \Delta p < 1, \quad u = 0 \text{ sinon.} \quad (8.2)$$

La figure 8.2 illustre la caractéristique statique  $u(\Delta p)$ .

### Approximation

Pour simplifier le problème, on peut supposer  $p = 0$ . En effet, à fréquence nulle, la relation  $P(\omega) = Z(\omega)U(\omega)$  n’est plus vérifiée<sup>c</sup> : il faudrait en réalité la remplacer par un calcul de perte de charge le long de la colonne d’air, c’est-à-dire la différence

<sup>c</sup>L’impédance d’entrée  $Z(\omega)$  de l’instrument est définie dans le cadre de l’acoustique linéaire, c’est à dire pour  $\omega > 0$  uniquement. La pression dans le bec  $p$  n’est en ce sens pas une pression acoustique, puisqu’elle comporte une partie constante, mais cette partie constante reste négligeable.

entre la valeur constante de la pression statique à l'entrée du résonateur et la pression ambiante au repos (en sortie de l'instrument) lorsque le corps de l'instrument est parcouru par un débit d'air constant. Un calcul de ce type, basé sur des formules empiriques issues de la littérature technique (non reproduit dans ce mémoire) montre qu'à l'échelle des débits considérés, cette perte de charge est négligeable. Il vient donc :  $p = P/P_M = 0$ .

Ainsi, l'abscisse de la figure précédente devient simplement  $\gamma$ , la pression dans la bouche du musicien. Hirschberg [42], repris par Ricaud *et al.* [68], proposent d'ailleurs d'intégrer la partie statique de la pression dans  $\gamma$ , de façon à compenser cet artéfact de l'impédance d'entrée à fréquence nulle, ce qui revient au même changement d'abscisse (pour le cas statique).

On se propose toutefois de vérifier que la valeur statique de la pression de bec est bien négligeable, même en prenant en compte la valeur de l'impédance à fréquence nulle donnée par la décomposition modale, car ce sera celle-là qui interviendra nécessairement dans le calcul des régimes périodiques.

Pour cela on échantillonne  $\gamma$  en un certain nombre de points entre 0 et 1 et on calcule les valeurs de  $u$  correspondantes à l'aide de l'équation (8.2), en prenant  $p = 0$ . Ensuite, on suit l'algorithme itératif suivant :

- on calcule les valeurs de  $p$  données par l'équation  $p = Z_0 u$ , où  $Z_0 = -2 \sum \Re(C_n/s_n)$  est l'impédance à fréquence nulle donnée par la décomposition modale,
- on calcule les nouvelles valeurs de  $u$  avec l'équation (8.2).

Quand l'algorithme converge, c'est à dire quand, après un certain nombre d'itérations, les valeurs des différentes composantes ne varient plus d'une itération à l'autre (à la précision numérique près), on peut alors comparer les nouvelles valeurs de  $u$  avec celles obtenues pour  $p = 0$ .

Cette comparaison montre alors que la différence relative est inférieure à 3% sur tout l'intervalle, et inférieure à 1% sur l'intervalle  $[1/3, 1]$  qui nous intéresse particulièrement : on peut en effet montrer que, dans le cas d'une anche avec une fréquence de résonance et un amortissement suffisamment grand, une bifurcation de Hopf ne peut exister que pour  $\gamma > 1/3$ , la limite étant atteinte en cas de pertes nulles (cas où les pics d'impédance seraient d'amplitude infinie), et pour une anche « instantannée » (ayant une fréquence de résonance infinie). (Voir Dalmont *et al.* [17, 18, 19] ainsi que Silva [75] et Ricaud *et al.* [68] pour les études de seuil d'oscillation.)

L'approximation est donc justifiée, a posteriori.

## Stabilité et bifurcations

Le calcul analytique de la matrice Jacobienne est également faisable. Par contre, celui de ses valeurs propres est plus délicat : même avec un seul mode acoustique, il faut résoudre le polynôme caractéristique d'une matrice 4x4... Quelques essais à l'aide d'un logiciel de calcul formel ont montré que, même avec cette aide précieuse, le travail n'est pas aisé, et les cas avec plus d'un mode acoustique sont hors de portée d'un calcul analytique.

Une étude numérique s'impose donc.

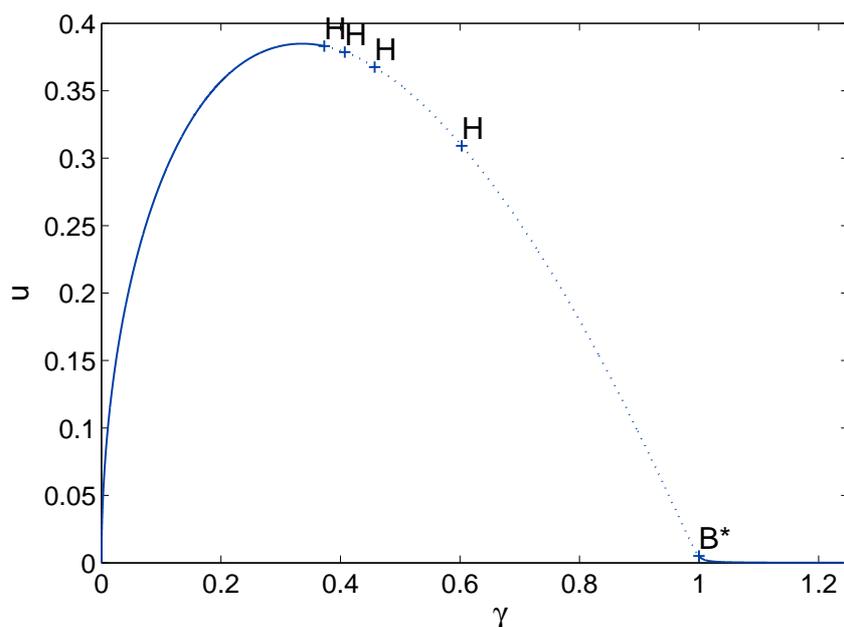


FIG. 8.3 – Branche de solutions statiques de la clarinette obtenu par MANLAB : débit à travers le canal d’anche (adimensionné)  $u$  en fonction de la pression dans la bouche du musicien (adimensionnée)  $\gamma$ . Les parties stables apparaissent en trait plein, les parties instables en trait discontinu. Les lettres ‘H’ marquent l’emplacement des bifurcations de Hopf détectées, et la lettre ‘B\*’ indique une bifurcation de codimension  $> 1$ . Valeurs des paramètres utilisés : voir le tableau 8.1.

### 8.2.2 Continuation de point fixe : équilibrage harmonique à l’ordre 0

On peut obtenir la branche statique par continuation, en utilisant l’équilibrage harmonique. Il suffit pour cela de poser  $H = 0$  et d’éliminer la variable  $\omega$  ainsi que l’équation de phase : on restreint la recherche aux solutions constantes.

On peut alors prendre comme point de départ une solution statique facile à calculer (le cas  $\gamma > 1$ , c’est-à-dire du placage statique, offre cette possibilité) et suivre la branche de solutions statiques (ou points fixes).

Pour détecter les bifurcations ainsi que les changements de stabilité le long de la branche, on utilise l’analyse de stabilité implémentée pour l’équilibrage harmonique

Bifurcation	$\gamma$	$f$	registre
1	0,373	146,1Hz	1
2	0,407	441,0Hz	2
3	0,457	735,0Hz	3
4	0,603	1027Hz	4

TAB. 8.2 – Liste des bifurcations de Hopf détectées sur la branche statique par MANLAB : valeur de la pression de bouche adimensionnée  $\gamma$ , de la fréquence émergente  $f$ , et du registre correspondant.

Bifurcation	$\gamma$	$f$	registre
1	0,373	146,1Hz	1
2	0,408	441,0Hz	2
3	0,458	735,0Hz	3
4	0,603	1027Hz	4

TAB. 8.3 – Liste des bifurcations de Hopf détectées sur la branche statique par AUTO : valeur de la pression de bouche adimensionnée  $\gamma$ , de la fréquence émergente  $f$ , et du registre correspondant.

(methode de Hill, voir Lazarus et Thomas [56]) qui se résume, pour le cas  $H=0$ , à l'étude des valeurs propres de la matrice jacobienne, que nous avons calculée analytiquement à partir des équations initiales non régulières.

Nous utilisons également un script ad hoc de détection et classification des bifurcations<sup>d</sup>.

La figure 8.3 illustre le résultat obtenu : la branche de solutions statiques est représentée dans le plan  $(\gamma, u)$ .

Quatre bifurcations de Hopf, repérées par la lettre 'H', ont été détectées dans la zone  $1/3 < \gamma < 1$ . Avec la fréquence associée à chacune de ces bifurcations, on peut en déduire à quel registre chacune correspond. La position précise, la fréquence émergente et le registre de la clarinette correspondant à chacune de ces bifurcations sont reportées au tableau 8.2.

Une bifurcation de codimension élevée est détectée en  $\gamma = 1$ . En ce point, les valeurs propres du Jacobien ne sont plus des fonctions continues de  $\gamma$  et les parties réelles des valeurs propre instables sautent alors toutes en même temps de valeurs strictement positives à strictement négatives (pour  $\gamma$  croissant), car nous avons utilisé le Jacobien du système non-régularisé. Il s'agit en quelque sorte d'une bifurcation de Hopf dégénérée cinq fois, provoquée par la non-régularité. En effet, à cause de la condition de placage, le Jacobien associé à la solution statique est discontinu en  $\gamma = 1$ .

### 8.2.3 Calcul à l'aide du logiciel AUTO

À titre de comparaison, nous avons effectué un calcul de cette branche par continuation à l'aide du logiciel AUTO. Le résultat est illustré à la figure 8.4.

Les quatre bifurcations de Hopf détectées sont marquées d'un symbole 'H', comme pour la figure précédente. Pour chacune de ces bifurcations, on a relevé la fréquence émergente, et déterminé le registre concerné. Ces données sont présentées au tableau 8.3, qui montre que les résultats de MANLAB et d'AUTO sont identiques.

<sup>d</sup>Il s'agit d'une adaptation au cas du point fixe d'un script écrit par O.Thomas pour la détection et la classification des bifurcations des orbites périodiques

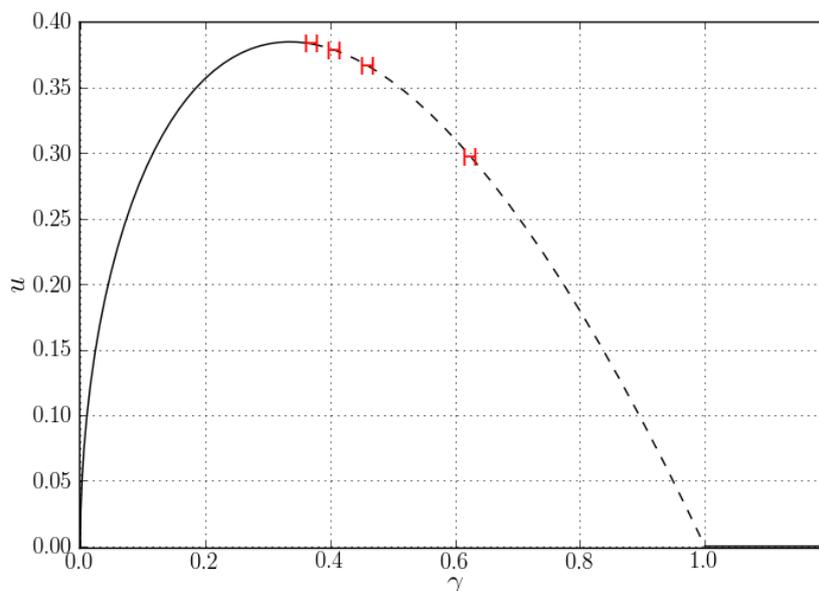


FIG. 8.4 – Branche de solutions statiques de la clarinette obtenue par AUTO : débit à travers le canal d’anche (adimensionné)  $u$  en fonction de la pression dans la bouche du musicien (adimensionnée)  $\gamma$ . Les parties stables apparaissent en trait plein, les parties instables en trait discontinu. Le symbole ‘H’ marque l’emplacement des bifurcations de Hopf détectées.

### 8.2.4 Retour sur la modélisation du contact

Les résultats expérimentaux de Dalmont *et al.* [20], Silva [75] mettent en avant un phénomène de placage « incomplet » de l’anche sur le bec, laissant alors passer un débit de fuite non négligeable au-delà de la valeur dite de placage statique.

Ceci peut être facilement intégré au modèle en faisant en sorte que la force de contact intervienne pour une valeur seuil  $x_s > 0$ . Ainsi, quand l’anche est virtuellement entièrement plaquée contre le bec, la hauteur du canal d’anche est non nulle et on obtient un débit résiduel.

## 8.3 Régimes périodiques

Nous allons maintenant calculer les branches de solutions périodiques de notre modèle clarinette par continuation, en prenant comme point de départ chacune des bifurcations de Hopf détectées sur la branche statique.

### 8.3.1 Premiers résultats

La figure 8.5 montre le morceau de branche périodique calculée par HBM dans MANLAB. Des calculs avec moins d’harmoniques s’étant avérés infructueux, nous sommes allés jusqu’à  $H=50$  harmoniques. Cependant, les pas deviennent très petits autour de  $\gamma=0,5$  puis le cheminement devient impossible (retour en arrière) : le calcul « piétine », même avec autant d’harmoniques.

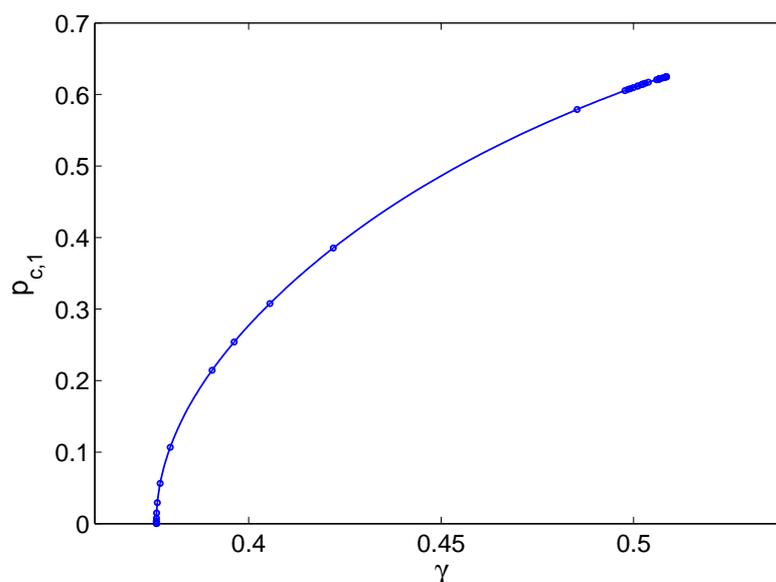


FIG. 8.5 – Calcul avec MANLAB de la première branche périodique de la clarinette, par équilibrage harmonique avec  $H=50$  harmoniques : valeur du coefficient  $p_{c,1}$  (premier cosinus de la série de Fourier de  $p$ , la pression dans le bec) en fonction de la pression d'alimentation  $\gamma$ .

Un calcul semblable sous AUTO (en collocation, donc) pose le même problème. À la différence près que, grâce à la rapidité de ce dernier, on peut facilement raffiner d'un facteur 100 la discrétisation temporelle (on passe alors à 10 000 points par période) et on arrive alors à calculer le reste de la branche. Mais les pas restent très petits jusqu'à la fin de la branche et le calcul est alors très long.

L'examen des séries temporelles (notamment celle de la variable  $x$ , la position de l'anche) montre que le point d'arrêt se situe juste après le régime d'anche battante. Le problème paraît donc lié au placage de l'anche.

### 8.3.2 Problèmes numériques liés au contact

#### Chattering

On a pu voir au chapitre 6 qu'un contact régularisé (même de façon très raide) conduit à un problème, dans le cas d'un vibro-impact conservatif et autonome, que l'on peut tout à fait résoudre en équilibrage harmonique, à condition de prendre en compte suffisamment de termes dans les séries de Fourier. Nous avons ici choisi une formulation où la réaction de l'obstacle suit une loi en  $1/x^2$ , donc moins raide encore que l'exponentielle utilisée dans l'exemple qu'on cite.

Toutefois, le cas du vibro-impact en régime *forcé* est notoirement plus compliqué (voir par exemple l'ouvrage de di Bernardo *et al.* [24]). Dans notre cas, la fréquence du forçage étant largement inférieure à la fréquence propre de l'oscillateur, le phénomène de *chattering* risque d'apparaître, c'est-à-dire un grand nombre de rebonds (éventuellement un nombre infini, dans un temps fini) avant d'arriver à l'état où l'anche est plaquée et immobile contre le bec, jusqu'à ce que la différence de pres-

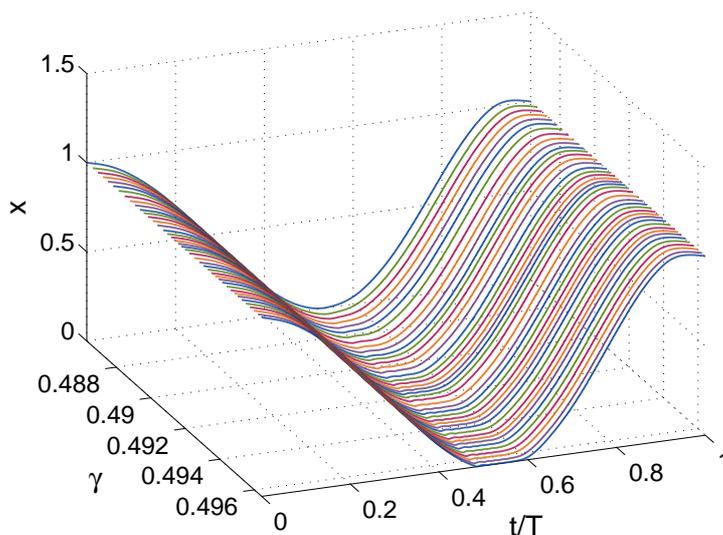


FIG. 8.6 – Apparition du placage lorsque  $\gamma$  augmente : allure temporelle de  $x(t)$  sur une période pour quelques points solutions issus de la branche périodique. Calcul par équilibrage harmonique (300 harmoniques, résonateur à un seul mode).

sion lui permette à nouveau de se décoller<sup>e</sup>.

Ce phénomène, qui met déjà à rude épreuve les algorithmes d'intégration temporelle, rend la continuation numérique impossible, sinon extrêmement difficile (et lente) : le problème devient relativement mal posé.

Afin d'illustrer ce phénomène, nous avons effectué un calcul avec MANLAB sur un modèle « réduit » de résonateur ne comprenant qu'un seul mode acoustique, avec 300 harmoniques. La continuation fait alors des pas de plus en plus petits dès que l'on atteint le régime d'anche battante, atteignant parfois un point d'accumulation. Pourtant, à l'échelle du mouvement de l'anche sur une période, le placage semble bien calculé et les solutions évoluent de façon très continue, comme le montre la figure 8.6.

C'est lorsqu'on fait un agrandissement de la zone où se passe le placage que l'on comprend pourquoi les pas sont très petits : le calcul doit « résoudre » tous les rebonds. L'apparition de chaque rebond supplémentaire, à mesure que l'épisode où l'anche est plaquée s'élargit en temps, lorsque l'on chemine sur la branche suivant une pression d'alimentation  $\gamma$  croissante, ne peut être une prolongation analytique d'une solution précédente qui aurait un rebond de moins. Le nombre et la taille des rebonds évoluant très rapidement le long de la branche, il faut alors un grand nombre de pas pour décrire le continuum entre ces solutions, comme on peut le voir à la figure 8.7.

<sup>e</sup>On peut imaginer une bille de métal, lâchée d'une certaine hauteur, qui rebondit un grand nombre de fois sur une surface rigide. Puis, après avoir atteint une position de repos, on remonte la bille jusqu'à la même hauteur initiale et on recommence : voilà à quoi ressemble le mouvement de l'anche

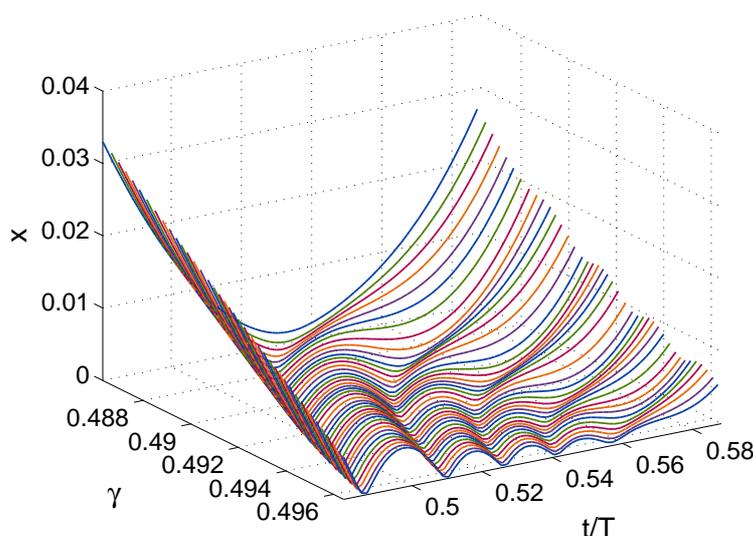


FIG. 8.7 – Agrandissement de la figure 8.6 autour de la zone d’anche battante mettant en évidence le phénomène de « chattering », ou rebonds répétés. Lorsque  $\gamma$  augmente (même très peu), le nombre de rebonds au cours de l’épisode où l’anche est plaquée augmente rapidement. Il faut alors de nombreux pas intermédiaires pour cheminer sur la branche. Calcul par équilibrage harmonique (300 harmoniques, résonateur à un seul mode).

Le même problème apparaît d’ailleurs avec la collocation, et c’est seulement en augmentant considérablement le nombre de points par période que l’on peut cheminer sur la branche : avec le logiciel AUTO, profitant de sa rapidité d’exécution, on peut mettre plusieurs milliers de points par période, et on arrive alors à calculer une partie de la branche. On retrouve également des points d’accumulation qui font que le calcul s’arrête en un point de la branche, sans parvenir à continuer : la branche n’est peut-être pas continue en ce point.

Face à ces difficultés, nous avons décidé de modifier le modèle de contact, afin de faciliter le cheminement le long de la courbe.

### Modèle d’anche « fantôme »

Une des approximations qui est utilisée pour la synthèse temps-réel (voir Guillemain *et al.* [38]) consiste à ne pas modéliser le contact avec le bec dans l’équation du mouvement de l’anche, mais à annuler le débit dès que l’anche passe en-deça de la position limite  $x = 0$ . Ainsi, au cours d’une période, l’anche peut traverser le bec tel un « fantôme », mais le débit restera nul durant tout l’intervalle où la position virtuelle de l’anche est ainsi négative.

Cette approximation, que rien ne justifie physiquement a priori, revient à supposer que l’anche s’arrête instantanément, dès lors qu’elle atteint la position de contact  $x = 0$  lors de la phase descendante de son mouvement, et qu’elle redémarre instantanément (i.e. avec un saut de vitesse) dès que la différence de pression entre ses deux faces n’est plus suffisante pour la maintenir contre le bec. En effet, plutôt

que d'annuler le débit lui-même, on peut tout simplement annuler la position et la vitesse instantanément, dès que la différence de pression devient trop grande. Les équations du mouvement de l'anche s'écrivent alors, notant  $\tilde{x}$  sa position :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_r} x'(t) = y \\ \frac{1}{\omega_r} y'(t) = 1 - x - q_r y(t) - (\gamma - p) \\ \tilde{x} = \frac{1}{2}(x + |x|) \end{cases} \quad (8.3)$$

On notera que l'on obtient la valeur absolue par une équation quadratique en introduisant une variable additionnelle, comme on l'a déjà fait au chapitre précédent :

$$z^2 = x^2 + \eta^2 \quad (8.4)$$

où  $\eta$  est un petit paramètre qui permet de s'assurer que  $z$  reste toujours du même signe<sup>f</sup>.

Une autre façon de voir l'anche fantôme est de considérer un vibro-impact *non-régularisé*, avec une loi de restitution en vitesse ayant un coefficient nul. On supprime alors complètement le phénomène de *chattering*.

On néglige alors les différents rebonds que pourrait faire l'anche contre le bec. C'est en quelque sorte une anche semi-instantanée : durant sa phase de mouvement, elle conserve les propriétés dynamiques du modèle à un mode mécanique (modèle de type masse-ressort-amortisseur unidimensionnel), mais durant la phase de contact, elle se comporte comme une anche instantanée (ou sans masse).

Il faudra alors justifier, au moins à postériori, cette approximation : elle est acceptable si elle ne dénature pas le spectre du son émis, ni le comportement général de l'instrument (bifurcations).

### Validation de l'approximation

Il est évident qu'avec cette anche « fantôme », l'approximation n'a d'influence que sur le régime périodique, et seulement dans le régime d'anche battante (c'est à dire pour des niveaux de pression suffisamment élevés). Il n'y aura donc aucune influence sur les bifurcations du régime statique.

Quant au régime périodique, il semble que l'influence de cette approximation soit négligeable : nous avons calculé quelques solutions périodiques dans le régime d'anche battante, pour un modèle réduit avec un seul mode acoustique et 300 harmoniques, d'abord avec le modèle de contact régularisé, puis avec le modèle d'anche fantôme en utilisant les eq. (8.3-8.4). Les valeurs du paramètre de contrôle  $\gamma$  correspondants se situent entre 0,4945 et 0,4965, zone accessible pour les deux modèles d'anche.

Les signaux de pression  $p$  et débit  $u$  à l'entrée du résonateur, et de la position de l'anche  $x$  sont reproduits à la figure 8.8, où l'on a agrandi la partie de la période où a lieu le placage. L'approximation a une influence plus visible sur le débit, mais l'échelle des ordonnées est très dilatée, donc ces différences restent relativement faibles à l'échelle du signal sur une période entière. L'approximation ne semble pas

---

<sup>f</sup>Il s'agit là d'une forme régularisée de la fonction valeur absolue, et il faudra choisir une valeur de  $\eta$  suffisamment petite pour que cette régularisation supplémentaire n'influence pas le résultat.

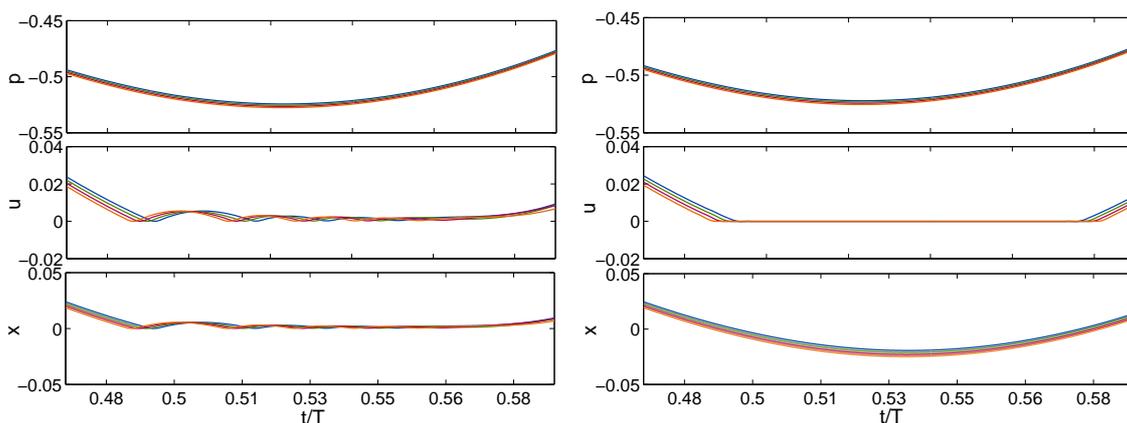


FIG. 8.8 – Solutions périodiques en régime d’anche battante : allure temporelle des grandeurs  $p$ ,  $u$  et  $x$  au moment du placage. À gauche : modèle d’anche battante avec régularisation du contact en  $1/x^2$ . À droite : modèle d’anche fantôme avec annulation du débit.

modifier les signaux de pression de façon visible. L’erreur relative en norme  $2^{\text{e}}$  entre les solutions issues des deux modèles pour  $\gamma = 0,5$  vaut  $1,09 \cdot 10^{-5}$  pour la pression et  $6,15 \cdot 10^{-4}$  pour le débit. On peut donc considérer que l’approximation n’est pas préjudiciable.

Par ailleurs, le gain sur la longueur des pas de continuation est très important : les pas ne raccourcissent qu’au niveau de la transition entre régime d’anche non battante et régime d’anche battante, puis s’agrandissent à nouveau, contrairement au cas du modèle de contact régularisé où le chattering impose des longueurs de pas très courtes tout au long du régime d’anche battante.

Des calculs similaires, sur le modèle complet (avec 12 modes acoustiques), menés à l’aide du logiciel AUTO, utilisant la collocation plutôt que l’équilibrage harmonique (mais avec une précision similaire : maillage fixe de 600 points par période equi-répartis), mènent aux mêmes conclusions : pour une solution prise en  $\gamma = 0,5$ , l’écart relatif entre les deux modèles d’anche sur le signal de pression à l’entrée du résonateur  $p$  est de  $1,12 \cdot 10^{-5}$ , et elle est de  $4,13 \cdot 10^{-5}$  pour le débit  $u$ . Les périodes obtenues avec les deux modèles sont aussi sensiblement égales, avec un écart relatif de  $1,18 \cdot 10^{-4}$ . L’utilisation du modèle d’anche fantôme paraît donc justifié, même pour le modèle complet (i.e. résonateur à 12 modes).

### 8.3.3 Influence des régularisations sur la stabilité

Nous avons effectué, avec AUTO, les calculs de stabilité du régime statique en utilisant les mêmes régularisations que dans MANLAB pour les fonctions valeur absolue et racine carrée, pour un modèle sans contact (mais avec annulation du débit dès que la position de l’anche prend des valeurs négatives). Les valeurs propres du Jacobien associé à ce système régularisé sont alors parfaitement continues et

<sup>§</sup>Il s’agit de la norme 2 de l’écart absolu entre les solutions de chacun des modèles, rapportée à la norme 2 de la solution du modèle sans cette approximation :  $\epsilon_r(p) = \|p_{\text{fant}}(t) - p_{\text{plac}}(t)\|_2 / \|p_{\text{plac}}(t)\|_2$  pour la pression.

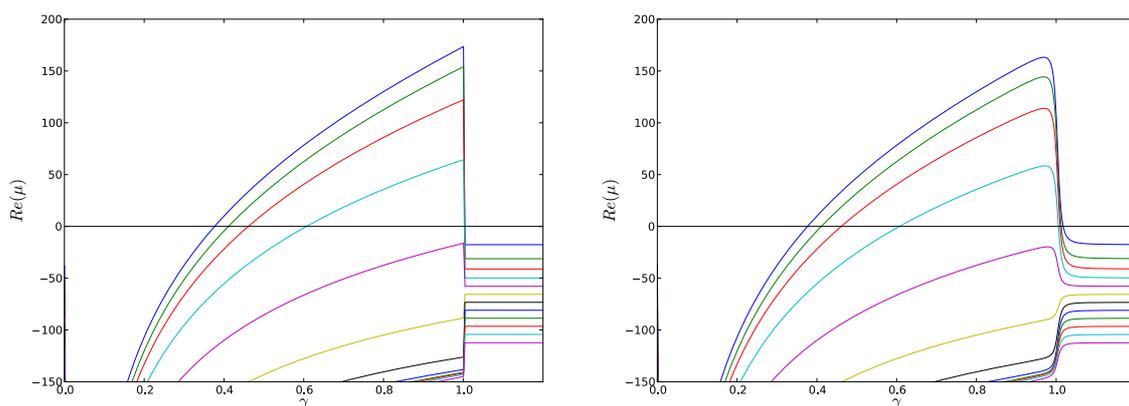


FIG. 8.9 – Influence des régularisations (valeurs absolues et racine carrée) sur les valeurs propres du Jacobien : partie réelle des valeurs propres  $\mu$  en fonction de  $\gamma$  le long de la branche statique. À gauche : sans régularisation. À droite : avec régularisation ( $\eta = 1.10^{-4}$ ). Modèle avec 12 modes acoustique et anche fantôme. Chaque courbe correspond à un couple de valeurs propres complexes conjuguées.

plusieurs bifurcations de Hopf inverses « supplémentaires » apparaissent pour  $0,99 < \gamma < 1,01$  : les différentes valeurs propres instables redeviennent stables une à une dans cette zone, contrairement au cas non régularisé où elles « sautent » toutes exactement en  $\gamma=1$ , comme le montre la figure 8.9.

Ainsi, afin d'éviter ce genre d'artefacts, nous utilisons pour les calculs de stabilité la matrice jacobienne déduite des équations non-régulières, bien que les solutions soient calculées pour les équations régularisées.

### 8.3.4 Estimation du nombre d'harmoniques nécessaires

Le système d'équations continues du modèle de clarinette complet (avec 12 modes acoustiques) contient déjà un nombre d'équations important. Le nombre total d'inconnues du système algébrique issu de l'équilibrage harmonique augmente alors très rapidement avec le nombre d'harmoniques retenues :  $N_{\text{tot}} = N_{\text{eq}}(2H + 1) + 2$ , où  $N_{\text{eq}}$  est le nombre d'équations du modèle continu plus le nombre d'équations de définition des variables additionnelles. Les temps de calcul peuvent alors devenir très longs. On souhaite donc déterminer le nombre minimal d'harmoniques nécessaires pour calculer les régimes périodiques de la clarinette par équilibrage harmonique.

À cette fin, nous avons effectué quelques calculs préliminaires : sachant que c'est le mouvement de l'anche qui est le moins régulier<sup>h</sup>, nous avons là aussi utilisé le modèle réduit à un seul mode acoustique.

On peut alors comparer à une solution de référence les spectres de pression et débit à l'entrée du résonateur, en fonction du nombre d'harmoniques prises en compte, pour un point de fonctionnement donné. Nous avons choisi le point de fonctionnement du premier registre défini par  $\gamma = 1$ , de façon à se placer à peu près au milieu du régime d'anche battante (dans le cas présent, uniquement, car la plage

<sup>h</sup>Même en anche fantôme, il subsiste une variable  $w(t) = |x|(t)$  qui est peu régulière et dont la régularisation reste relativement raide

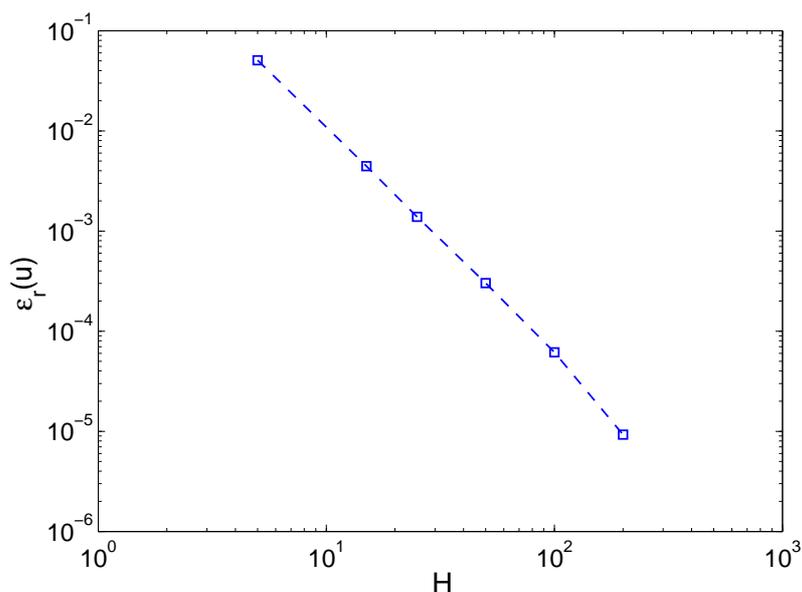


FIG. 8.10 – Convergence de l'équilibrage harmonique pour le modèle réduit de clarinette à un seul mode acoustique : erreur relative en norme 2 sur la variable  $u$  (débit acoustique à l'entrée du résonateur) par rapport à un calcul de référence à 300 harmoniques. Solution en régime d'anche battante :  $\gamma = 1$ .

de valeurs de  $\gamma$  du premier régime périodique dépend des paramètres  $h_0$ ,  $K_r$  et  $q_r$ ). La solution de référence a été calculée avec  $H=300$  harmoniques, ce qui nous a paru suffisant étant donnée la décroissance du spectre des différentes grandeurs.

Le spectre de la pression dans le bec  $p$  est relativement pauvre, car il n'y a qu'un seul mode acoustique<sup>i</sup>. Ainsi, une approximation avec seulement 5 harmoniques donne, pour la grandeur  $p$ , une erreur relative (en norme 2) de l'ordre de seulement  $1 \cdot 10^{-4}$  par rapport à un calcul de référence (avec 300 harmoniques).

Le spectre du débit est quant à lui plus riche, résultat de l'annulation brutale lorsque le placage « virtuel » entre en jeu. Plutôt que de tracer les spectres pour différentes valeurs de  $H$  (ce qui ne laisse pas apparaître de différence notable « à l'oeil nu »), on a calculé l'erreur relative en norme 2 sur la composante  $u$ , en fonction du nombre d'harmoniques retenues, par rapport à la solution de référence. On peut ainsi voir sur la figure 8.10 que l'approximation à 25 harmoniques donne déjà une erreur relative de l'ordre de  $1 \cdot 10^{-3}$ , ce qui nous semble acceptable.

On pourra donc effectuer, dans ce qui suit, les calculs avec  $H = 25$  harmoniques. Cependant, il faudra vérifier que cette limite reste valable pour le modèle complet comprenant 12 modes acoustiques, dont le spectre sera nécessairement plus riche. Pour cela, on surveillera le spectre du débit  $u$ , afin de s'assurer qu'il est suffisamment décroissant et ne fait pas apparaître de composante haute fréquence trop importante.

<sup>i</sup>Rappelons qu'un mode acoustique agit comme un filtre sélectif passe bande sur le signal de débit  $U$ , par la relation  $P = ZU$  (dans le domaine fréquentiel), où l'impédance d'entrée  $Z$  est la somme des contributions des modes acoustiques.

### 8.3.5 Calcul du premier registre

On considère maintenant le modèle de résonateur « complet » à 12 modes acoustiques, avec l'approximation d'anche dite « fantôme ».

La première bifurcation de Hopf donne naissance à une branche de solutions périodiques dont la fréquence vaut 146,1 Hz, c'est-à-dire une fréquence très proche de celle du premier mode acoustique. Il s'agit donc du premier registre de la clarinette. C'est celui qui est attendu pour le mode de jeu normal<sup>j</sup>.

Nous avons calculé la branche de solutions périodiques correspondante par équilibrage harmonique, avec 25 harmoniques. Les résultats sont illustrés dans les quelques figures qui suivent.

#### Diagramme de bifurcation $(\gamma, p)$

La figure 8.11 montre la branche périodique correspondant au premier registre dans le plan  $(\gamma, p)$ . Comme, en chaque point de la courbe, la pression dans le bec  $p(t)$  dépend du temps, on a tracé la courbe de sa valeur moyenne quadratique (RMS) et de sa valeur maximale au cours d'une période.

L'ensemble des valeurs des paramètres du modèle utilisés pour ce calcul sont donnés au tableau 8.1.

On peut lire sur cette figure plusieurs caractéristiques importantes de l'instrument simulé, dans cette configuration :

- le seuil d'anche battante, point où le mouvement de l'anche atteint une amplitude suffisante pour qu'elle touche le bec au cours de la période, situé en  $\gamma = 0,505$  ;
- le seuil de saturation, où l'on obtient une pression dans le bec ayant le maximum d'énergie, situé en  $\gamma = 1,742$  ;
- la dynamique de jeu, c'est à dire la valeur de ce maximum :  $\max(p_{rms}) = 1,328$  ;
- le seuil d'extinction (en crescendo), situé en  $\gamma = 1,914$ .

Il faut ici remarquer que ce genre de résultats n'apparaissent dans la littérature que pour des modèles analytiques très simplifiés (voir par exemple : Dalmont *et al.* [18, 19]).

### 8.3.6 Stabilité

Nous avons calculé la stabilité de ce premier régime périodique avec MANLAB, par intégration temporelle de la matrice de monodromie à partir de la matrice jacobienne du système dynamique initial (à seulement 26 variables, à partir des équations non régulières, comme expliqué à la section 8.3.3), à raison de 20 points par tronçon, et avec 1000 échantillons par période pour l'intégration.

Toutefois, le calcul à partir de solutions avec  $H=25$  harmoniques ne permet pas de calculer les multiplicateurs de Floquets avec une précision suffisante. Afin d'obtenir une meilleure précision, nous avons effectué un nouveau calcul de la branche avec 50 harmoniques, ce qui semble alors suffisant dans le cas présent.

---

<sup>j</sup>Nous avons justement pris soin de nous placer dans un cas où les valeurs des différents paramètres de contrôle (notamment  $h_0, f_r, q_r$ ) permettent d'obtenir ce régime périodique.

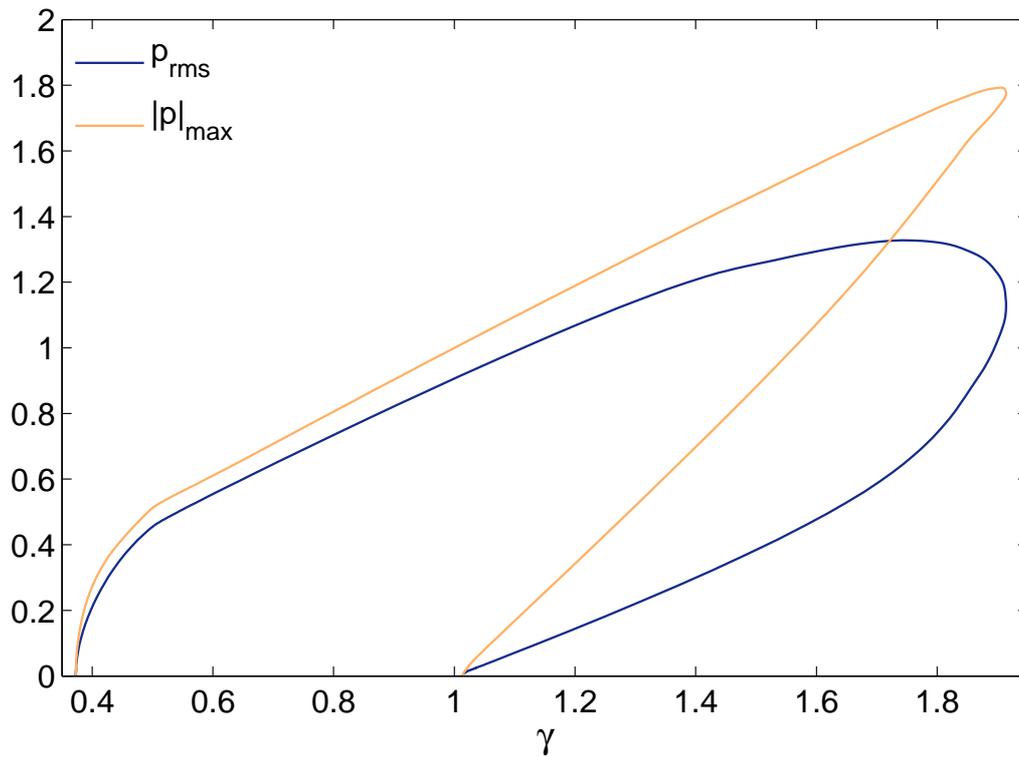


FIG. 8.11 – Régime périodique de la clarinette : premier registre, calculé par équilibre harmonique avec  $H=25$  harmoniques. En bleu : valeur moyenne quadratique de la pression dans le bec, calculée sur une période. En vert : valeur maximale du module de la pression dans le bec au cours d'une période.

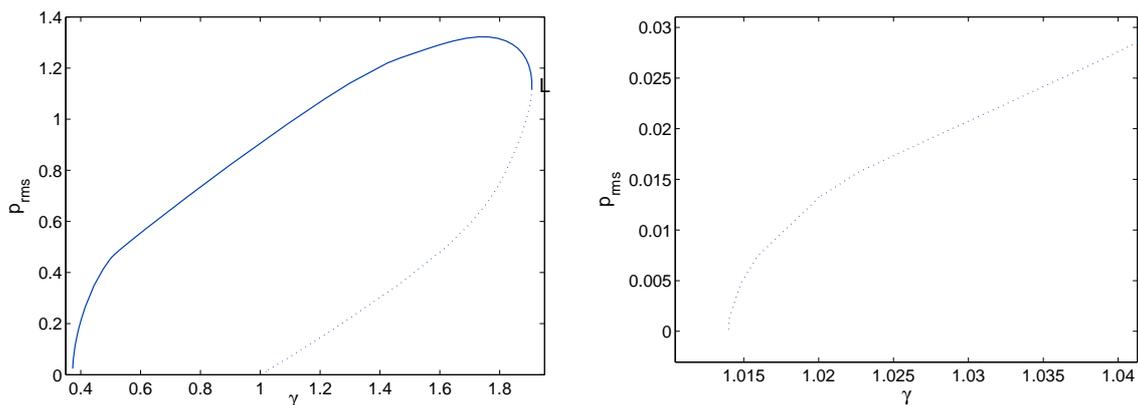


FIG. 8.12 – Stabilité de la première branche périodique :  $p_{rms}$  en fonction de  $\gamma$ . Parties stables (—), parties instables ( $\cdots$ ). La lettre 'L' symbolise une bifurcation de type point limite, situé au changement de stabilité. Calcul par intégration temporelle de la matrice de monodromie sur 1000 échantillons par période, à partir de solutions à 50 harmoniques. À gauche : branche complète. À droite : zoom sur la bifurcation inverse en fin de branche.

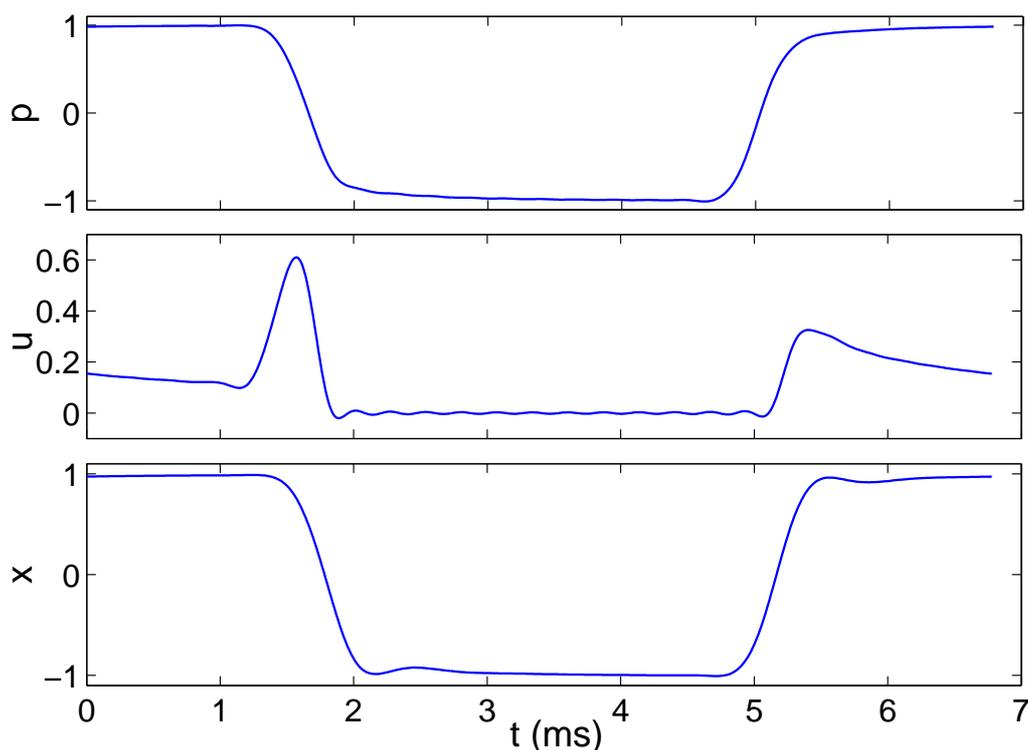


FIG. 8.13 – Signaux de la pression dans le bec, du débit à travers le canal d’anche et de la position de l’anche obtenus par sommation des séries de Fourier ( $H=25$ ). Premier régime périodique (voir figure précédente), solution en  $\gamma=1,0$ .

La branche périodique et sa stabilité (partie stable en ligne continue, instable en pointillés) sont illustrées à la figure 8.12 : la branche est stable depuis le point de départ, jusqu’à un point limite noté ‘L’ (valeur maximale de  $\gamma$ ), puis est instable sur la partie qui « revient » vers la branche statique au niveau du placage, près de  $\gamma = 1$  (le décalage est dû à la régularisation de la valeur absolue), où la bifurcation est alors indirecte.

### Forme temporelle des solutions

La figure 8.13 illustre l’allure temporelle des signaux de pression et débit acoustiques à l’entrée du résonateur ainsi que de la position de l’anche, au point solution  $\gamma=1$ . L’anche est alors plaquée contre le bec pendant à peu près la moitié de la période. Les petites oscillations autour de  $u=0$ , pendant cet épisode de placage, sont liées au nombre d’harmoniques relativement faible. On reconnaît bien le mouvement de Helmholtz, avec des signaux assez proches (pour la pression et la position de l’anche) de signaux carrés.

La figure 8.14 montre en effet qu’un nombre d’harmonique plus élevé permet de mieux rendre compte de l’annulation brutale du débit lors du placage.

On notera qu’en ce point où la solution est assez raide (du moins la composante  $u$ ), un correcteur de type Newton-Raphson est capable d’annuler le résidu du

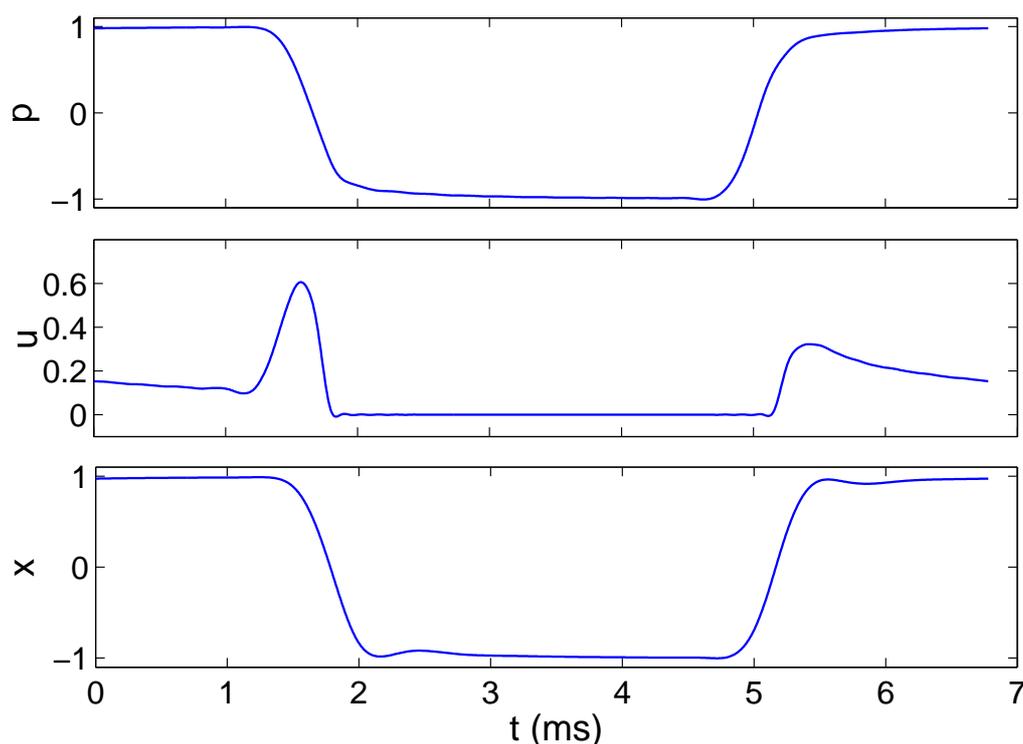


FIG. 8.14 – Signaux temporels identiques à la figure 8.13 mais avec  $H=50$  harmoniques.

système algébrique résultant de l'équilibrage harmonique, à la précision numérique près. Autrement dit il n'y a pas de problème de convergence particulier, à condition que le point de départ en entrée du correcteur ne soit pas trop mauvais (au sens de ce résidu).

En revanche, une fois le résidu ramené en dessous d'une certaine tolérance arbitrairement petite (toujours dans la limite de la précision machine), l'approximation obtenue n'est pas nécessairement très bonne, du point de vue des équations continues.

Avec 25 harmoniques elle n'est d'ailleurs pas excellente, comme en témoignent les petites oscillations évoquées à propos du débit lors du placage de l'anche. On retrouve là toute la difficulté d'estimer la validité (physique) d'une solution approchée lorsqu'on ne dispose que du résidu des équations discrétisées. Différents estimateurs d'erreur a posteriori, basés sur les équations continues du modèle (les petits opérateurs), ont été testés mais jusqu'ici aucun ne donne de résultat satisfaisant. La question d'un estimateur d'erreur robuste reste donc entièrement ouverte.

Les mêmes signaux temporels, mais correspondant à la solution prise au seuil d'extinction ( $\gamma=1,91$ ), sont tracés en figure 8.15. Le débit est nul pendant près de 75% de la période, et le signal de pression ne ressemble alors plus au mouvement de Helmholtz.

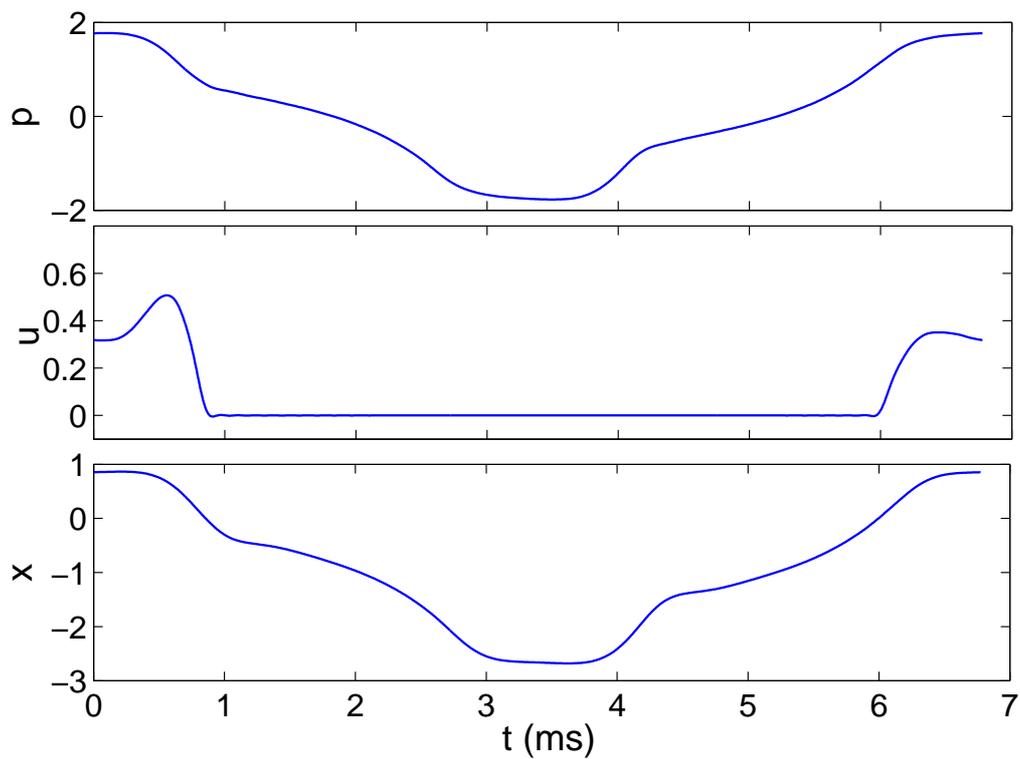


FIG. 8.15 – Signaux de la pression dans le bec, du débit à travers le canal d’anche et de la position de l’anche obtenus par sommation des séries de Fourier ( $H=50$ ). Premier régime périodique (voir figure 8.11), solution en  $\gamma=1,91$ , c’est-à-dire au point limite.

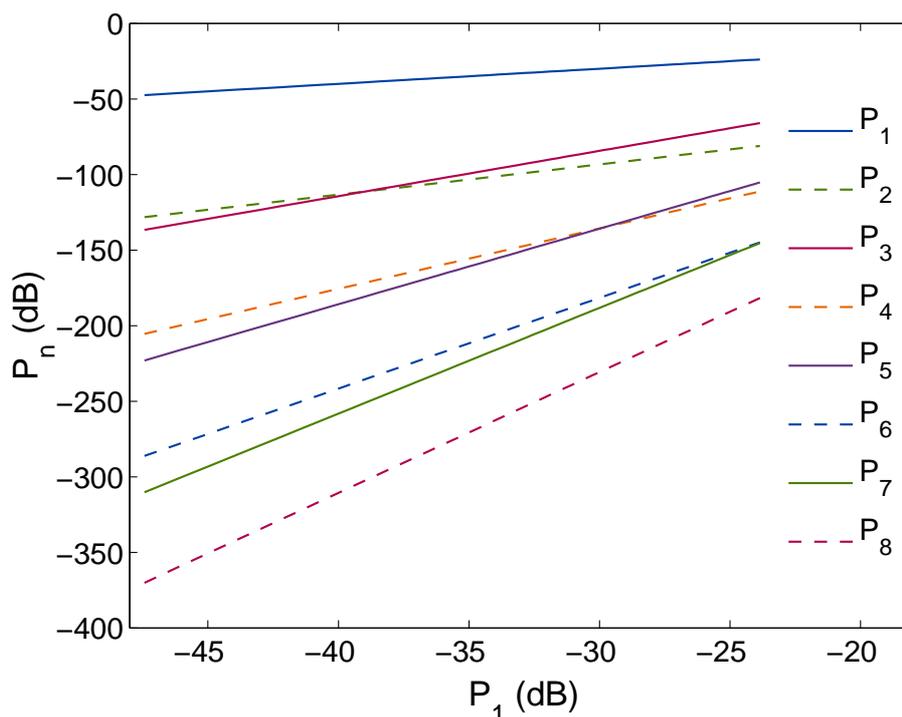


FIG. 8.16 – Illustration de la « loi de Worman » : amplitude de chaque harmonique  $P_n$  en fonction de l'amplitude de la première  $P_1$ . Zone d'étude : très près du seuil d'oscillation ( $0,376 < \gamma < 0,393$ ). Échelle logarithmique. (Les harmoniques apparaissent par ordre croissant, de haut en bas, à très faible niveau).

### Spectre

La figure 8.16 illustre le comportement du spectre très près du seuil d'oscillation : chaque harmonique  $P_n$  évolue alors comme l'harmonique fondamentale à la puissance  $n$ . Tout à gauche de la figure, les harmoniques sont donc ordonnées de haut en bas par ordre croissant. Chaque harmonique  $n$  suit alors une droite de pente  $n$ , en échelle logarithmique, dans le plan  $(P_1, P_n)$ . Cette loi, conjecturée par Worman [89] et sur laquelle repose la plupart des travaux (voir par exemple Ricaud *et al.* [68]), est ici bien vérifiée. Elle n'est toutefois valable que très près du seuil d'oscillation, ce qui en limite l'intérêt pour caractériser le spectre de la clarinette sur l'ensemble de la dynamique.

La figure 8.17 montre quant à elle l'évolution du spectre sur l'ensemble du premier registre : on a tracé l'amplitude (en dB) de chacun des neuf premiers harmoniques en fonction de la pression de bouche  $\gamma$ . Hormis à très faible niveau, les harmoniques impairs sont largement plus importants que les harmoniques pairs. Sur une large plage de valeur de  $\gamma$ , entre 0,6 et 1,2 environ, les harmoniques impairs sont en rapport quasiment constant les uns des autres : les rapports  $P_3/P_1$ ,  $P_5/P_1$ , et  $P_7/P_1$  valent respectivement entre  $-10,5$  et  $-11,1$  dB, entre  $-16,5$  et  $-17,7$  dB, et entre  $-21,9$  et  $-23,7$  dB environ.

Ces valeurs sont sensiblement inférieures à celles que l'on obtiendrait pour un signal carré (respectivement  $-9,5$  dB,  $-14$  dB et  $-17$  dB), forme d'onde souvent utilisée pour les instruments de type clarinette. Cette différence provient notamment des

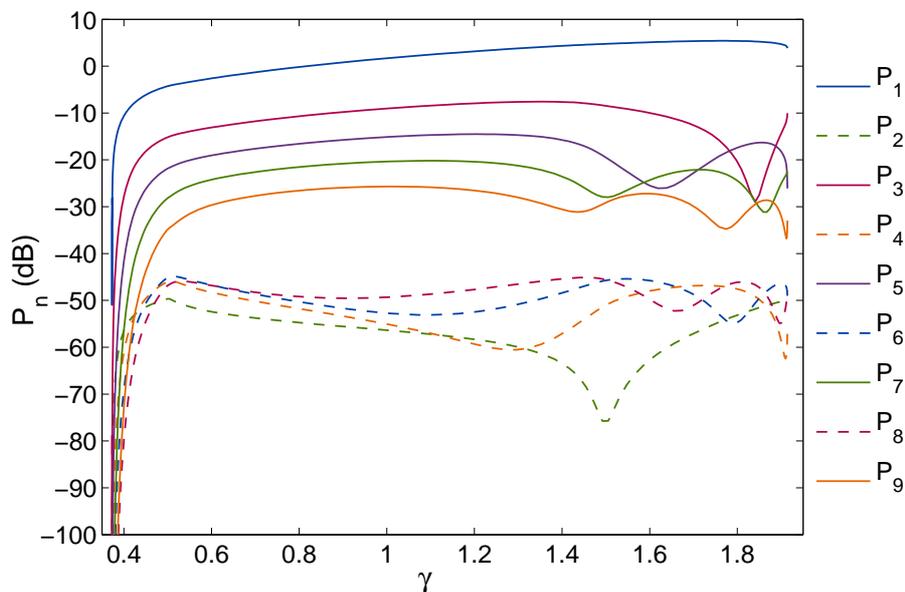


FIG. 8.17 – Évolution du spectre le long du premier régime périodique : amplitude de chaque harmonique  $P_n$  en fonction de la pression dans la bouche du musicien  $\gamma$  (échelle semi-logarithmique).

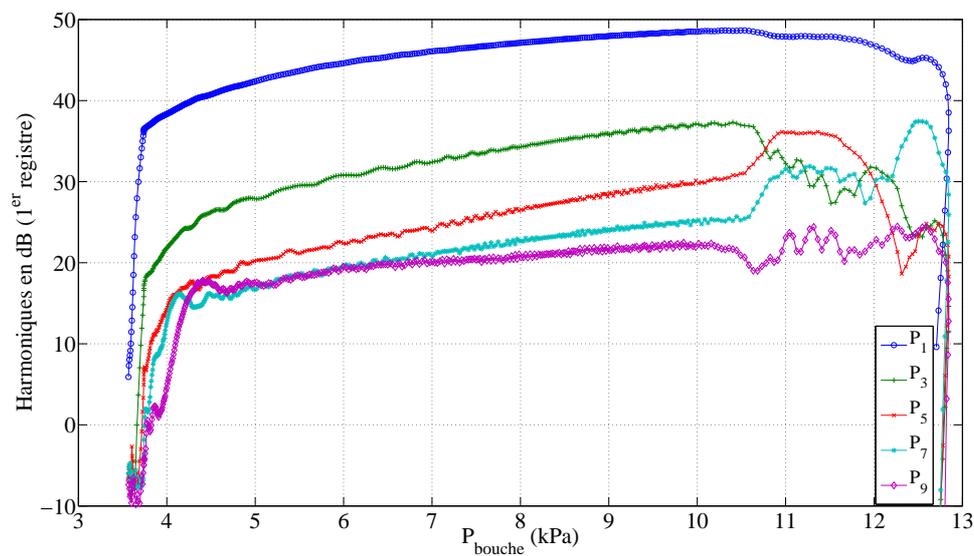


FIG. 8.18 – Évolution du spectre de la clarinette : mesure sur bouche artificielle (D.Ferrand, 2010).

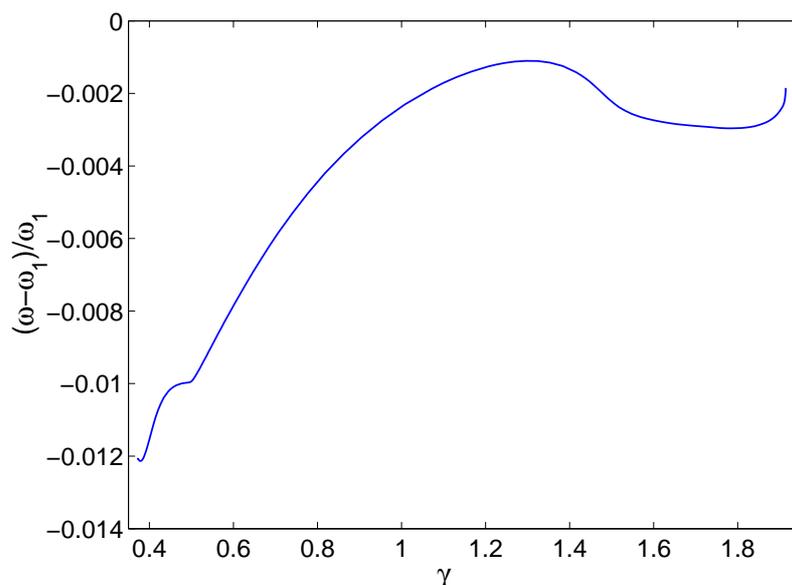


FIG. 8.19 – Évolution de la fréquence de jeu le long de la première branche périodique : écart relatif à la fréquence de la première résonance  $\delta_r f = \frac{f-f_0}{f_0}$  en fonction de la pression dans la bouche du musicien  $\gamma$ .

pertes dans le résonateur et de la dynamique d'anche (le signal carré correspondant à un modèle de résonateur sans pertes, ou avec pertes indépendantes de la fréquence, et une anche instantannée). Mais il faut souligner que l'effet de l'anche battante, qui aurait plutôt tendance à enrichir le spectre, n'est pas connu analytiquement : les calculs analytiques concernant les instruments à anches sont restreints soit au domaine où l'anche est non battante (petites oscillations comme dans [68]), soit à un modèle de signaux carrés (voir Chaigne et Kergomard [11], chap.9 p.437 et 448 respectivement).

Le comportement du spectre à forts niveaux, c'est à dire vers la droite de la figure 8.17, est moins évident à interpréter : les oscillations visibles de certaines harmoniques peuvent très bien correspondre aux oscillations « parasites » de la branche liées au manque d'harmonique de notre calcul. Toutefois, des mesures effectuées sur bouche artificielle exhibent un comportement similaire, comme le montre la figure 8.18. Ce comportement « chaotique » du spectre près de la saturation reste une question relativement ouverte.

### Fréquence de jeu

Les variations de la fréquence de jeu avec la pression d'alimentation (voir la figure 8.19) sont relativement importantes : quand la pression dans la bouche du musicien évolue entre le seuil d'oscillation (valeur minimale sur la branche) et le seuil d'extinction (valeur maximale), la fréquence de jeu varie jusqu'à 1,2% (20 cents), ce qui est largement suffisant pour être perçu.

On peut expliquer ces variations par le fait que le spectre s'enrichit lorsque le musicien souffle de plus en plus fort : les modes supérieurs du résonateur étant

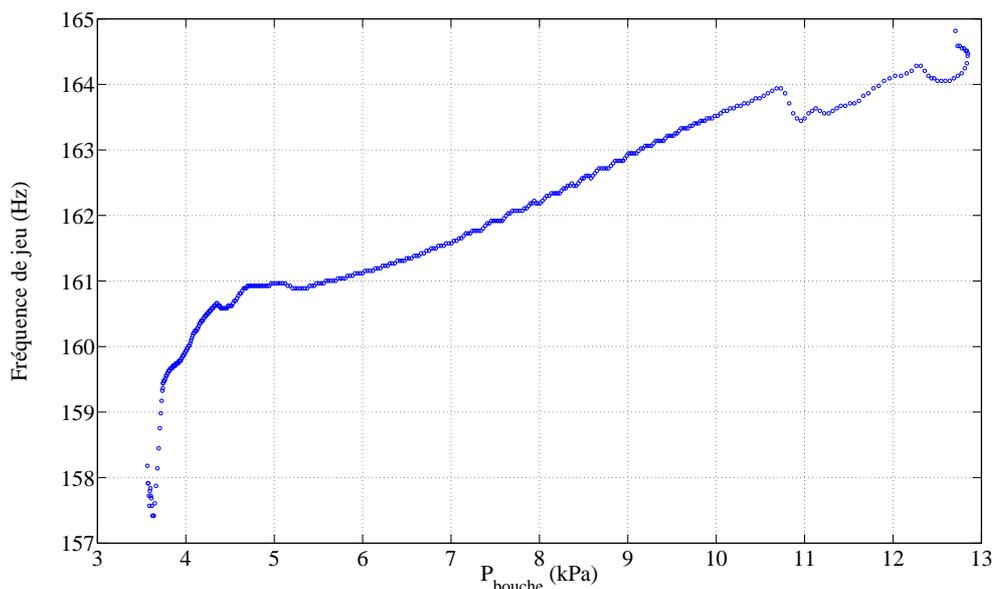


FIG. 8.20 – Évolution de la fréquence de jeu de la clarinette : mesure sur bouche artificielle (D.Ferrand). Fréquence de jeu en fonction de la pression d'alimentation.

légèrement inharmoniques (de +0,9% à +1,6%, du deuxième au douzième mode), cet enrichissement spectral permet aux modes supérieurs de « tirer » la fréquence de jeu vers le haut. Encore une fois, bien qu'un calcul analytique de cette déviation en fréquence basé sur ces considérations soit possible (voir Chaigne et Kergomard [11], chap.9 p.441), les hypothèses nécessaires sont telles que la déviation ainsi calculée concorde mal avec ce que l'on obtient ici : on calculerait ainsi une déviation en fréquence nulle au seuil d'oscillation, puis positive de l'ordre de +0,5% pour des niveaux plus forts.

Par ailleurs, en situation de jeu, le musicien ne garde certainement pas tous les autres paramètres constants lorsqu'il souffle plus fort, et un bon musicien compense nécessairement ces variations en ajustant les autres paramètres de contrôle (la pince et l'amortissement que la lèvre inférieure apporte à l'anche) en cours de jeu<sup>k</sup>.

Là encore, une comparaison avec l'expérience permet de conforter le modèle dans sa capacité à prédire l'évolution de la fréquence de jeu. Ainsi, bien que l'identification au modèle n'ait pas été réalisée (c'est un problème délicat), on peut observer à la figure 8.20 une évolution similaire de la fréquence avec le niveau de jeu. Toutefois, l'amplitude des variations de fréquence sur cette mesure est bien plus grande : de l'ordre de 5% (84 cents), soit presque un demi-ton.

Il faut tout de même noter que nous n'avons pas inclus le débit d'anche dans le modèle utilisé ici, phénomène qui influence notamment la fréquence de jeu.

<sup>k</sup>L'instrument n'étant, en règle générale, pas parfaitement juste pour toutes les notes, le musicien doit déjà compenser les éventuelles disparités de justesse en fonction des notes.

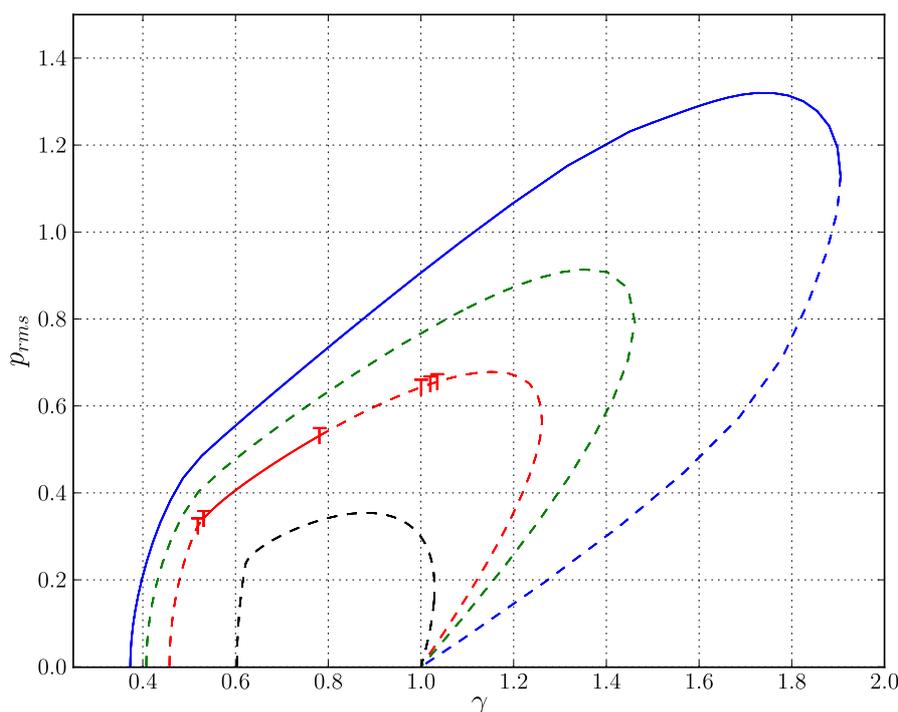


FIG. 8.21 – Diagramme de bifurcation complet de la clarinette : les quatre branches périodiques issues des bifurcations de Hopf du régime statique. La lettre ‘T’ (pour *torus*) symbolise une bifurcation de type Neimark-Sacker.

## 8.4 Autres régimes périodiques

Afin de déterminer si d’autres régimes périodiques peuvent être stables pour la même configuration, nous avons effectué le calcul des trois autres branches périodiques sous AUTO (par souci de rapidité), avec 600 points de collocation par période.

Le résultat est un diagramme de bifurcation complet du système dans la configuration étudiée, illustré figure 8.21. On peut y voir que le premier régime périodique (celui qui déstabilise le régime statique) reste stable jusqu’à une valeur maximale de  $\gamma$ , puis est instable sur la partie qui revient en arrière jusqu’à la bifurcation inverse en  $\gamma = 1$ .

Les autres régimes sont tous instables à l’exception d’une partie du troisième régime. Ce troisième régime fait également curieusement apparaître des bifurcations de type Neimark-Sacker (notées ‘T’ sur la figure) : c’est théoriquement le point de branchement d’un régime quasi-périodique (ou *tore* invariant). L’examen des multiplicateurs de Floquets, le long de la branche périodique correspondante, montre cependant que le calcul n’est pas assez précis : certains d’entre eux oscillent de manière non négligeable, dont le multiplicateur qui doit être toujours exactement égal à 1. Ceci conduit à des détections erronées de bifurcation.

Il faut alors examiner soi-même ces multiplicateurs. Après un tri par module et argument complexes, on peut suivre l’évolution (théoriquement continue) de chaque multiplicateur dans le plan complexe, ou bien en module et en argument comme à la

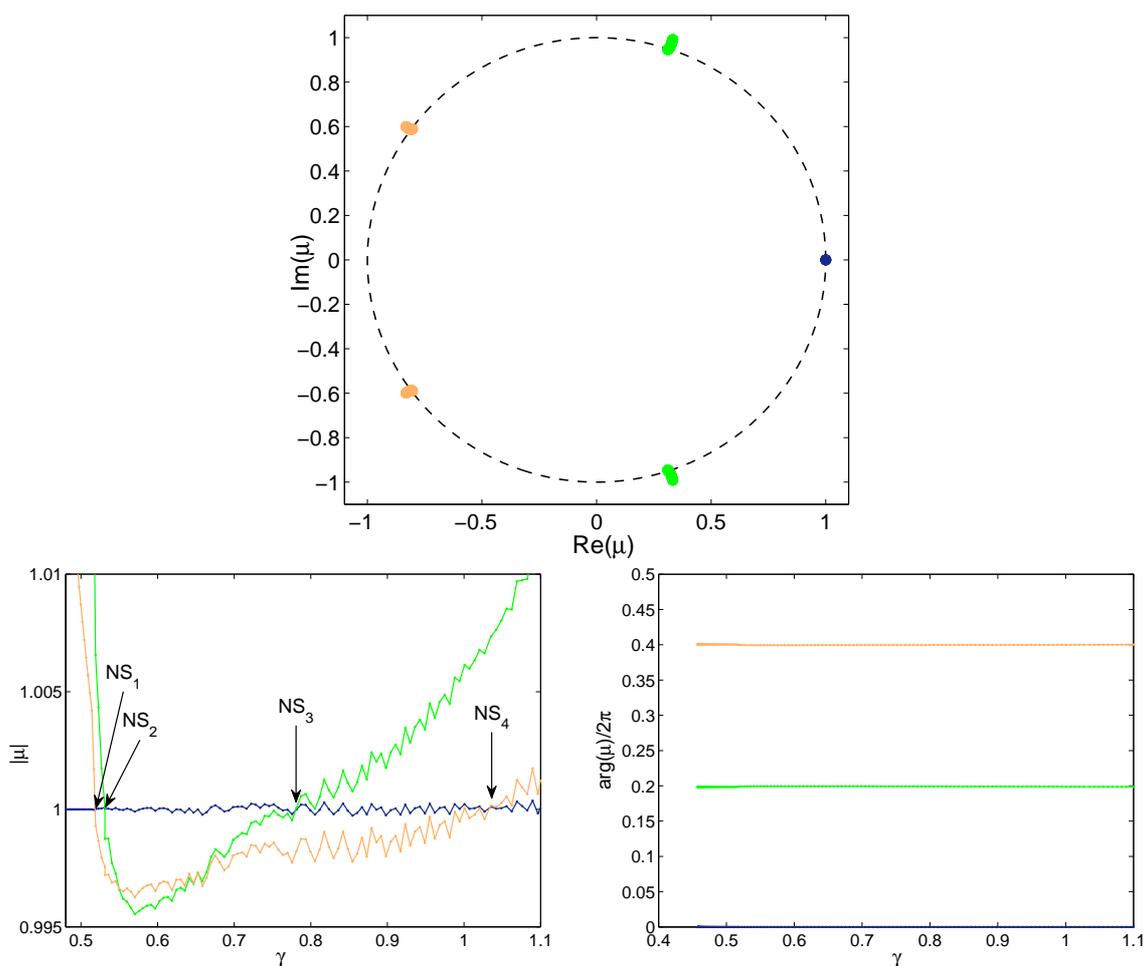


FIG. 8.22 – Examen détaillé des cinq plus grands multiplicateurs de Floquet (en module) le long d’une portion du troisième régime périodique. En haut : position dans le plan complexe. En bas : module (à gauche) et argument (à droite, partie positive uniquement) en fonction de  $\gamma$ . Calcul des multiplicateurs effectué lors de la continuation avec le logiciel AUTO, avec 200 éléments par période et 3 points de collocation par élément (avec jacobien explicite et maillage fixe). Les bifurcations de Neimark-Sacker sont repérées par les lettre ‘NS’.

figure 8.22. Les oscillations observées sur le module de ces multiplicateurs expliquent pourquoi le logiciel a du mal à les détecter et localiser correctement.

Toutefois, en lissant « à vue » les branches, on peut clairement identifier quatre bifurcations. Mis à part la branche du multiplicateur autour de 1, chacune des deux autres branches représente une paire de complexes conjugués (voir la partie du haut de la figure), non confondue en -1. Il s'agit donc de bifurcations de Neimark-Sacker qui déstabilise (resp. stabilise) le régime périodique, lorsque le module correspondant sort du (resp. rentre dans le) cercle unité.

Les deux premières bifurcations se situent en  $\gamma = 0,519$  et  $\gamma = 0,531$ , puis les deux dernières vers  $\gamma = 0,78$  et  $\gamma = 1,02$  (valeurs moins précises, car la pente est moindre et les courbes assez bruitées). La branche est donc instable partout, sauf entre la deuxième et la troisième bifurcation.

La fréquence de l'instabilité liée aux bifurcations de Neimark-Sacker 2 et 3 vaut environ  $0,2f$ , où  $f$  est la fréquence principale de la solution, comme le montre la partie gauche de la figure 8.22. Cette fréquence est assez proche de la fréquence du premier régime périodique (premier registre), qui est environ cinq fois inférieure à celle du troisième. Il s'agit en quelque sorte d'un quintuplement de période.

Les bifurcations 1 et 4 sont moins intéressantes, en ce sens qu'elles n'influencent pas la stabilité de la branche périodique. On peut tout de même remarquer qu'elles correspondent à des instabilités de fréquence proche de  $0,4f$ , soit deux cinquièmes de la fréquence de jeu de la branche périodique.

Il pourrait donc exister une branche quasi-périodique correspondant à l'excitation simultanée du premier et du troisième registre. Toutefois, n'ayant pas détecté de bifurcation de ce type sur le premier régime périodique, et celui-ci étant stable jusqu'au point limite, une telle branche quasi-périodique ne serait pas reliée au premier registre.

## Conclusion

On a étudié l'ensemble des branches périodiques pour la configuration étudiée, ce qui a permis de montrer que le premier régime est celui qui déstabilise le régime statique. Il est d'ailleurs stable jusqu'à l'extinction (à  $\gamma$  croissant) au point limite. La branche se prolonge ensuite par une portion instable jusqu'à la bifurcation indirecte près de  $\gamma=1$ .

Parmi les autres régimes périodiques, seul celui qui correspond au troisième registre ( $f \simeq 735\text{Hz}$ , soit un Fa#4 un peu bas) possède une portion stable. Cette partie stable semble « isolée », en ce sens qu'aucun parcours quasi-statique de branches stables ne permet d'y arriver, mais rien n'indique qu'elle ne pourrait pas être explorée par le musicien en cours de jeu, puisque les variations des paramètres sont alors dynamiques, et non quasi-statiques. Une étude des bassins d'attraction respectifs de cette portion stable du troisième régime et de la partie stable du premier régime permettrait peut-être de valider ou d'infirmer cette possibilité.

Les calculs présentés dans ce chapitre ne correspondent toutefois pas à une situation de jeu typique : tous les paramètres de contrôle liés à l'embouchure (la hauteur

du canal d'anche au repos  $h_0$  et l'amortissement modal de l'anche  $q_r$  – ainsi que, dans une moindre mesure, sa fréquence propre  $\omega_r$  –) sont ici nécessairement fixes. Des variations de ces paramètres peuvent induire des changements importants sur le diagramme de bifurcation. En guise d'exemples, nous présentons les bifurcations de Hopf détectées sur le régime statique pour deux configurations différentes :

- Pour un amortissement d'anche plus faible, ici  $q_r = 0,5$ , les bifurcations sont détectées dans l'ordre suivant :

HB n°	$\gamma$	$f$
1	0.368	1031.8 Hz
2	0.371	147.0 Hz
3	0.376	739.9 Hz
4	0.386	443.9 Hz
5	0.558	1312.4 Hz

C'est ici aussi le régime périodique issu de la première bifurcation de Hopf qui déstabilise le régime statique, avec une bifurcation directe, si bien que le registre sélectionné lors d'une montée quasi-statique de la pression dans la bouche du musicien  $\gamma$  sera le quatrième, avec une fréquence de 1031 Hz, soit environ sept fois la fréquence du premier registre, quasiment inutilisé par les clarinettes<sup>1</sup>.

- Par ailleurs, on prend en compte l'influence d'une embouchure lâche (quand le musicien relâche l'appui de sa lèvre inférieure sur l'anche) à la fois sur l'amortissement et sur la hauteur du canal d'anche au repos, ici respectivement pris à  $q_r = 0,6$  et  $h_0 = 1\text{mm}$ , les bifurcations apparaissent alors ainsi :

HB n°	$\gamma$	$f$
1	0.352	733.0 Hz
2	0.356	145.9 Hz
3	0.360	440.5 Hz
4	0.362	1019.8 Hz
5	0.576	1296.2 Hz

Les mêmes remarques que pour l'exemple précédent s'appliquent ici, si ce n'est que le registre sélectionné est le troisième, avec une fréquence de 733 Hz, soit environ 5 fois la fréquence du premier registre.

On voit donc que l'ensemble des comportements possible de la clarinette (du moins, du modèle physique utilisé) est relativement riche. Il faudrait alors pouvoir calculer la variété tridimensionnelle correspondant à chaque régime périodique en fonction de  $\gamma$ ,  $q_r$  et  $h_0$  pour dresser un portrait plus complet, calcul actuellement impossible.

On pourrait éventuellement échantillonner les deux paramètres supplémentaires  $h_0$  et  $q_r$  et ensuite calculer la branche (1D) de chaque régime périodique pour chaque couple de valeur  $(h_0(i), q_r(j))$ , mais cela semble extrêmement fastidieux. En terme de mémoire, cela impliquerait un ensemble de variables dont la taille serait le produit :

---

<sup>1</sup>À l'exception de quelques notes comme le Si5, note la plus aigüe, qui se joue sur la septième harmonique du Ré3, mais le trou de registre étant alors ouvert, les premiers pics d'impédance n'ont plus la même amplitude...

- du nombre d'équations continues,
- par le « pas » de discrétisation ( $2H + 1$  pour l'équilibrage harmonique),
- par le nombre de pas par courbes 1D
- par nombre d'échantillons pour  $h_0$
- par nombre d'échantillon pour  $q_r$ .

Ce que l'on peut faire, en revanche, est l'étude des limites de chaque régime périodique, notamment des bifurcations qui leur donne naissance, en fonction de ces paramètres supplémentaires. C'est l'objet du chapitre 11.



# Chapitre 9

## Régimes périodiques du saxophone

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Impédance d'entrée . . . . .</b>	<b>145</b>
<b>9.2</b>	<b>Rappels sur le modèle . . . . .</b>	<b>146</b>
<b>9.3</b>	<b>Branche statique : stabilité et bifurcations . . . . .</b>	<b>147</b>
<b>9.4</b>	<b>Régimes périodiques . . . . .</b>	<b>148</b>
9.4.1	Première branche périodique . . . . .	148
9.4.2	Diagramme de bifurcation en pression et stabilité . . . . .	148
9.4.3	Fréquence de jeu . . . . .	150

---

### Introduction

Dans ce chapitre, nous allons utiliser le même modèle que pour l'étude de la clarinette, mais appliqué au saxophone : c'est en réalité un modèle d'instruments à anche simple qui peut s'appliquer à n'importe quel résonateur du moment que l'on connaît son impédance d'entrée.

Par ailleurs, afin d'illustrer les possibilités de notre méthode, nous allons utiliser une impédance d'entrée mesurée, qui caractérise donc parfaitement le comportement acoustique de cet instrument, du moins jusqu'à la fréquence maximale mesurée. On s'affranchit ainsi du problème de modélisation acoustique du résonateur, et de la complexité introduite par la conicité d'une part, le bec d'autre part et enfin par les trous latéraux (fermés ou ouverts).

### 9.1 Impédance d'entrée

Nous utilisons l'impédance d'entrée mesurée sur un saxophone ténor en Sib pour la note Ré2 (même note que pour la clarinette au chapitre précédent). Cette impédance est ensuite décomposée sous forme modale, en ajustant les coefficients modaux sur les différentes résonances, de façon à respecter au mieux l'amplitude, la fréquence centrale, et la largeur du pic (mesures et algorithme de décomposition gracieusement mis à disposition par P.Guillemain).

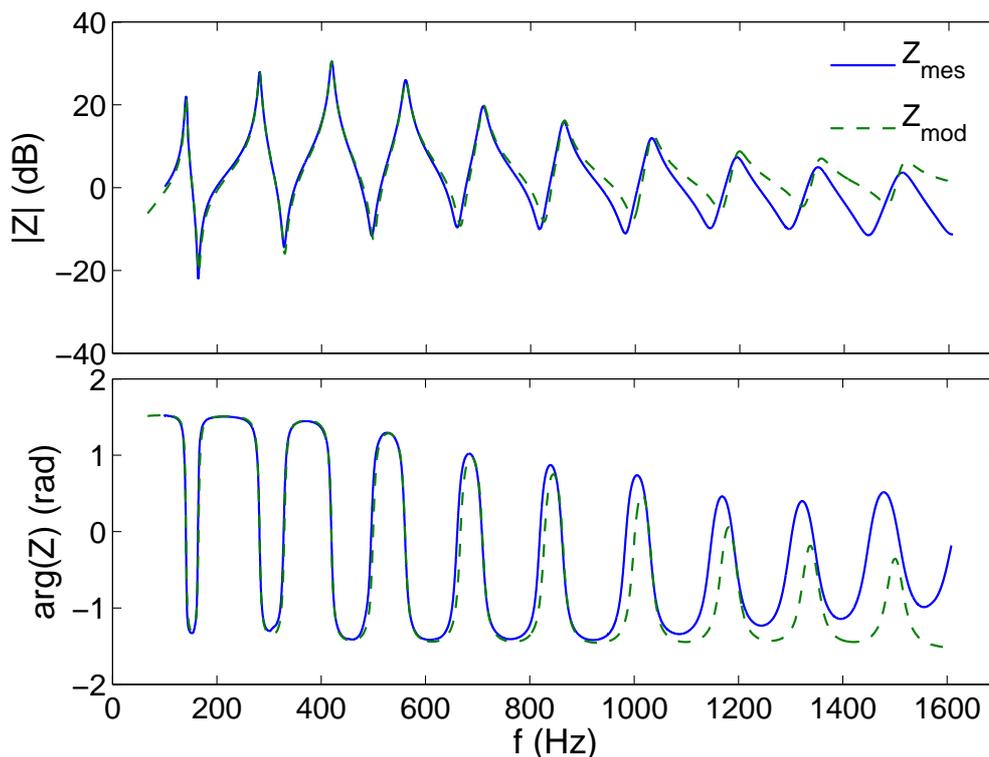


FIG. 9.1 – Spectre de l'impédance d'entrée du saxophone utilisé : impédance mesuré (—), et reconstruction modale (---). En haut : module. En bas : argument.

Comme on peut le voir à la figure 9.1, les cinq premières résonances sont très bien reconstruites par cette décomposition modale. En revanche, les résonances six à dix sont moins bien ajustées. Cela s'explique par la façon dont les coefficients sont ajustés, car l'algorithme est basé sur certaines hypothèses sur les résonances qui sont moins bien vérifiées pour celles à hautes fréquences.

Notons que, bien que les seuils d'oscillation détectés seront probablement peu précis, cette décomposition a été utilisée en synthèse (à partir du même modèle d'anche et de couplage) et les résultats sont convaincants, ce qui laisse à penser que ces résonances d'ordre supérieur sont peu importantes quant aux éléments caractéristiques de la dynamique du système.

## 9.2 Rappels sur le modèle

Rappelons ici brièvement les variables du modèle :

- $p$  est la pression adimensionnée à l'entrée du résonateur,
- $u$  est le débit adimensionné en ce même point,
- $x$  est la position adimensionnée de l'anche (=1 au repos),
- $y$  est la vitesse adimensionnée de l'anche,
- les  $p_n$  représentent les modes complexes sur lesquels on décompose la pression.

Les paramètres, adimensionnés pour la plupart, sont les suivants :

- $s_n, C_n$  sont respectivement les pôles et les résidus de la décomposition modale

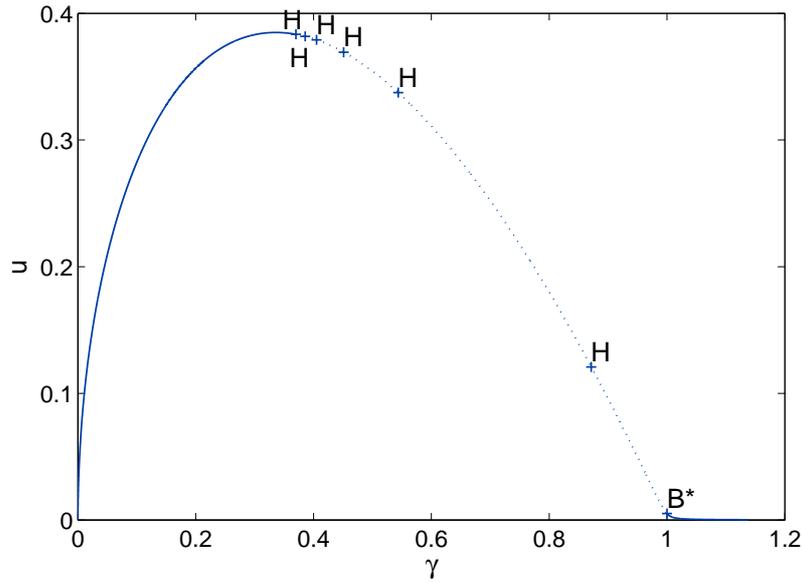


FIG. 9.2 – Branche de solutions statiques du saxophone, avec stabilité et bifurcations. — : stable,  $\dots$  : instable, ‘H’ : bifurcation de Hopf, ‘B\*’ : bifurcation de codimension  $> 1$ . Paramètres :  $\omega_r/2\pi=1500\text{Hz}$ ,  $q_r=0,8$  et  $\zeta=0,3$ .

de l’impédance,

- $\gamma$  représente la pression adimensionnée dans la bouche du musicien,
- $\zeta$  est le paramètre adimensionné de « pince », essentiellement lié à l’ouverture du canal d’anche au repos,
- et enfin  $\omega_r$  et  $q_r$  sont respectivement la pulsation propre et l’amortissement modal de l’anche.

Utilisant le modèle d’anche « fantôme », le comportement du système est alors décrit par les équations suivantes :

$$p'_n = C_n u + s_n p_n \quad \forall n \in (1..N_m) \quad (9.1a)$$

$$p = 2 \sum_{n=1}^{N_m} \Re(p_n) \quad (9.1b)$$

$$\frac{1}{\omega_r} x' = y \quad (9.1c)$$

$$\frac{1}{\omega_r} y' = 1 - \gamma + p + q_r y \quad (9.1d)$$

$$u = \zeta \frac{1}{2} (x + |x|) \text{sign}(\gamma - p) \sqrt{|\gamma - p|} \quad (9.1e)$$

La formulation quadratique et l’implémentation sous MANLAB sont alors identiques à celles utilisées pour la clarinette au chapitre précédent.

### 9.3 Branche statique : stabilité et bifurcations

Utilisant la méthode du point fixe (i.e. équilibrage harmonique à l’ordre zéro), on effectue le calcul de la branche statique, illustré à la figure 9.2. Le calcul de la

$\gamma$	$f$ (Hz)	registre
0,370	414,1	3
0,386	279,6	2
0,405	553,7	4
0,451	140,3	1
0,544	701,5	5
0,871	852,8	6

TAB. 9.1 – Bifurcations de Hopf détectées sur la branche statique pour le saxophone (ténor, note Ré2) : position en  $\gamma$ , fréquence associée et registre correspondant.

stabilité de la branche et la détection des bifurcations reposent, comme au chapitre précédent, sur le calcul des valeurs propres de la matrice jacobienne du système.

Les valeurs des paramètres utilisés sont les suivantes :

$\omega_r/2\pi$ (Hz)	$q_r$	$\zeta$
1500	0,8	0,3

On a ainsi détecté 6 bifurcations de Hopf, dont la position, la fréquence associée, et le registre correspondant sont reportés au tableau 9.1.

## 9.4 Régimes périodiques

Nous nous restreignons ici au premier régime périodique, c'est à dire à la branche de solutions périodiques issue de la première bifurcation de Hopf. La branche est calculée de la même façon qu'au chapitre précédent, par équilibrage harmonique et continuation à l'aide de la MAN d'un côté (logiciel MANLAB), et par collocation polynômiale par éléments et continuation à l'aide de la MPC d'un autre côté (logiciel AUTO).

### 9.4.1 Première branche périodique

### 9.4.2 Diagramme de bifurcation en pression et stabilité

La branche issue de la première bifurcation de Hopf, qui correspond ici au troisième registre de l'instrument, est tracée à la figure 9.3. Le calcul de stabilité n'est pas satisfaisant, malgré le nombre d'harmonique relativement élevé ( $H=50$ ) et une résolution temporelle fine lors de l'intégration de la matrice de monodromie (1000 échantillons par période) : les multiplicateurs de Floquet (non reproduits ici) présentent de fortes oscillations parasites. En particulier, le multiplicateur qui doit être égal strictement à 1 tout au long de la branche est très rarement proche de cette valeur, ce qui est le signe d'un calcul erroné ou pas assez précis, et qui provoque ainsi la détection de « fausses » bifurcations.

La bifurcation au seuil est directe, contrairement à ce que l'on peut souvent trouver à ce sujet dans la littérature (on retrouve là les résultats de Ricaud *et al.* [68] qui obtenaient, eux aussi, des bifurcation directes avec un modèle assez proche de celui utilisé ici).

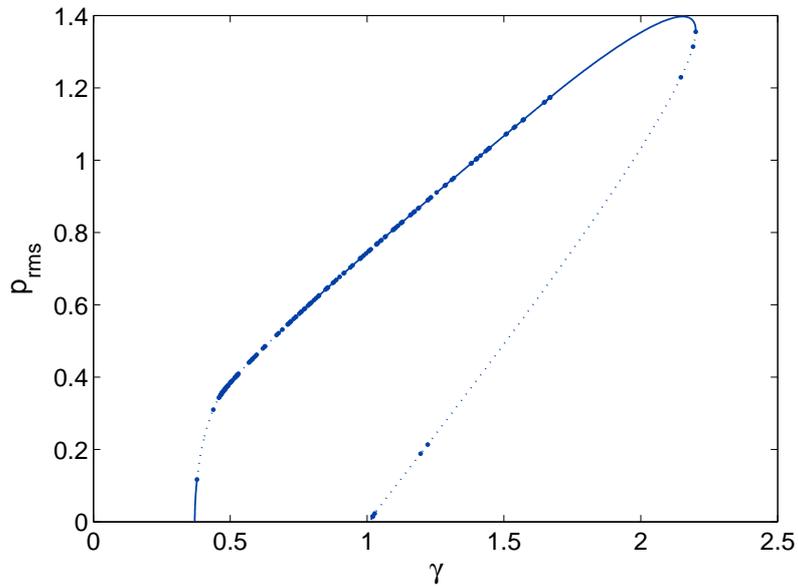


FIG. 9.3 – Première branche périodique du modèle de saxophone et sa stabilité : moyenne quadratique (sur une période) de la pression adimensionnée  $p$  dans le bec en fonction de la pression adimensionnée dans la bouche du musicien  $\gamma$ . Les bifurcations sont marquées d'un point. Calcul avec  $H=50$  harmoniques pour  $q_r=0,8$  et  $\zeta=0,3$ .

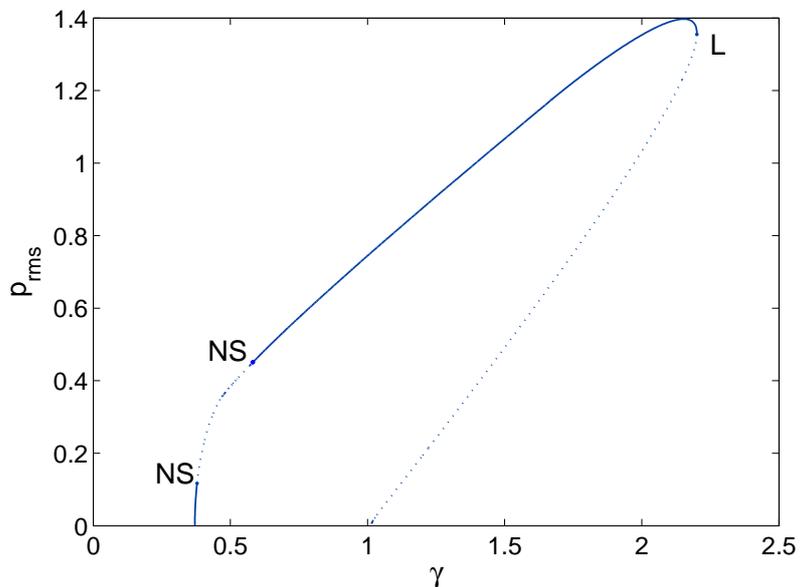


FIG. 9.4 – Stabilité de la première branche périodique après « filtrage » des multiplicateur de floquet. Les bifurcations sélectionnées sont marquées d'un point et leur nature est identifiée par des lettres : 'NS' (Neimark-Sacker) et 'L' (point limite). Calcul avec  $H=50$  harmoniques pour  $q_r=0,8$  et  $\zeta=0,3$ .

Afin de « régulariser » l'analyse de stabilité, on a effectué un « filtrage » manuel, qui consiste à supprimer toutes les bifurcations qui semblent fortuites (car induites par des oscillations non physiques des multiplicateurs de Floquet). On peut alors retracer la branche et analyser sa stabilité : voir la figure 9.4.

Qualitativement, la branche a la même allure que celle obtenue au chapitre précédent pour la clarinette, mais elle n'est pas stable sur toute la partie qui va jusqu'au point limite : il existe une petite zone instable, pour  $0,38 < \gamma < 0,46$  environ, délimitée par deux bifurcations de Neimark-Sacker, dont la fréquence associée est très proche de 140Hz, soit celle du premier registre. On en déduit que c'est le premier registre qui déstabilise le troisième sur cette courte zone.

Cette analyse est bien entendu sujet à caution, car rien ne permet d'affirmer que ce filtrage donne les bons résultats concernant la stabilité, et il faudrait refaire le calcul avec un nombre d'harmoniques plus élevé afin de pouvoir la confirmer ou l'infirmer.

Au lieu de cela, pour des raisons de temps de calcul, nous avons réalisé un second calcul de la branche par collocation, avec le logiciel AUTO. L'analyse des multiplicateurs de Floquet ainsi calculés confirme que notre filtrage donne de bons résultats, bien que l'emplacement des deux bifurcations de Neimark-Sacker soit peu précis. Il existe en réalité quatre bifurcations NS, toutes associées à une fréquence proche de celle du premier registre (environ 140Hz) : la première déstabilise le premier régime périodique en  $\gamma = 0,375$ , puis la deuxième et la troisième (en  $\gamma = 0,385$  et vers  $\gamma = 0,56$ ) ne modifient pas la stabilité de la branche, et enfin la dernière restabilise la branche en  $\gamma = 0,58$ .

### 9.4.3 Fréquence de jeu

L'évolution de la fréquence de jeu le long de la première branche périodique est illustrée à la figure 9.5, où la stabilité de la branche est apparente, puisque seules les parties stables de la branche sont théoriquement accessibles en cours de jeu. La courbe est qualitativement semblable à celle obtenue pour la première branche périodique de la clarinette. La fréquence de jeu descend jusqu'à 28 cents au-dessous la fréquence de résonance du troisième registre, avant de remonter jusqu'à seulement 5 cents de cette dernière.

L'inharmonicité est quasiment nulle jusqu'au cinquième pic d'impédance, mais elle est positive à partir du sixième, ce qui pourrait expliquer l'augmentation de la fréquence avec le niveau de jeu (voir Chaigne et Kergomard [11], chap.9 pp.400–468).

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré comment appliquer notre méthode à un instrument de type cône d'une part, et en utilisant une impédance mesurée d'autre part. Ce chapitre ne prétend pas être une étude très détaillée des régimes périodiques du saxophone mais plutôt une étude préliminaire, et nous n'avons donc pas poussé l'analyse aussi loin que nous l'avons fait pour la clarinette dans le chapitre précédent (notamment : évolution du spectre, signaux temporels, calcul et analyse des autres branches).

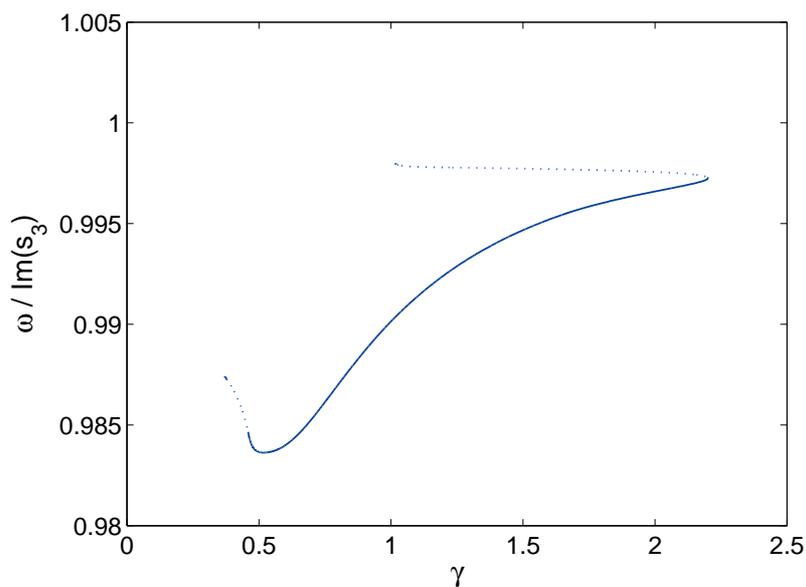


FIG. 9.5 – Évolution de la fréquence de jeu du premier régime périodique (troisième registre) : fréquence de jeu adimensionnée par la troisième fréquence de résonance en fonction de  $\gamma$ . Même paramètres que pour les figures précédentes. Version « filtrée ».

Toutefois, la littérature est bien moins riche sur le saxophone que sur la clarinette, et il semble que le calcul d'une branche périodique *complète* dans le cas du saxophone soit une première (à titre d'exemple, Dalmont *et al.* [18] obtiennent le début de la branche uniquement, en simplifiant les signaux temporels).

Les résultats présentés ici mettent en avant un contenu spectral plus riche pour le saxophone, ce qui pose toutefois une difficulté lorsque l'on utilise l'équilibrage harmonique : un calcul suffisamment précis pour une bonne analyse de stabilité nécessite alors un nombre très élevé d'harmoniques (50 ne semble pas suffisant), ce qui donne des temps de calculs relativement longs, malgré toutes les améliorations apportées au logiciel à ce sujet (voir le chapitre 4).



# Chapitre 10

## Régimes périodiques du violon

### Sommaire

---

<b>10.1</b>	<b>Modèle simplifié de violon</b>	<b>153</b>
10.1.1	Régularisation du frottement de Coulomb	154
10.1.2	Système du premier ordre	156
10.1.3	Formulation quadratique	156
10.1.4	Analyse du régime statique	157
<b>10.2</b>	<b>Analyse numérique</b>	<b>158</b>
10.2.1	Adimensionnement	158
10.2.2	Branche statique	159
<b>10.3</b>	<b>Régime périodique du violon</b>	<b>160</b>
10.3.1	Calcul par équilibrage harmonique et MAN	160
10.3.2	Calcul par collocation	161

---

### Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus sur un modèle simplifié de violon, dans le cadre du stage de première année de Master de Pierre Vigué, que j'ai co-encadré avec Christophe Vergez et Bruno Cochelin. Le but était d'appliquer les méthodes de continuation à une classe différente d'instruments auto-oscillants : les cordes frottées.

Ces travaux ont donné lieu à un rapport Vigué [86] que nous reprenons en partie ici.

### 10.1 Modèle simplifié de violon

Alors que la plupart des études sur les cordes frottées utilisent la simulation temporelle directe (comme Inácio *et al.* [44]), cette étude s'inspire des travaux de Kim et Perkins [52], qui proposaient une étude analytique et numérique, la seconde s'inspirant de l'équilibrage harmonique.

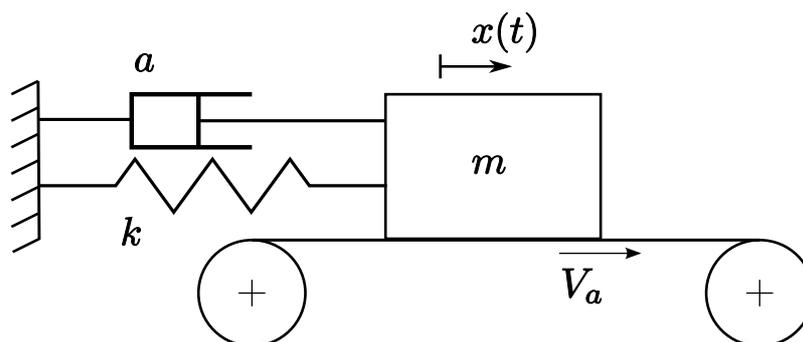


FIG. 10.1 – Schéma du modèle de corde frottée

Dans leur modèle, la corde de violon est représentée par un oscillateur harmonique, correspond au premier mode propre de vibration transverse (c'est l'analogie du modèle réduit de clarinette avec un seul mode acoustique). Nous avons « simplement » ajouté de la dissipation par un terme d'amortissement, faible, mais qui rend toutefois certaines analyses nettement plus compliquées (voir plus bas, l'analyse de stabilité du régime statique).

Nous utilisons par ailleurs le frottement de Coulomb pour décrire l'interaction entre l'archet, supposé avancer avec une vitesse constante  $V_a$ , et c'est cette vitesse qui sera le paramètre de continuation.

On note  $x$  la position de la corde,  $x'$  sa vitesse, et  $V_r = x' - V_a$  la vitesse relative entre la corde et l'archet. L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$mx'' = -ax' - kx + F_T \quad (10.1)$$

$$F_T = \begin{cases} ax' + kx & \text{si } \begin{cases} \text{et } V_r = 0 \\ |ax' + kx| < \mu_s F_N \end{cases} & \text{(adhérence)} \\ -\mu_d \text{sign}(V_r) F_N & \text{sinon} & \text{(glissement)} \end{cases} \quad (10.2)$$

où  $m$ ,  $a$ , et  $k$  sont respectivement la masse, l'amortissement et la raideur associés au premier mode de la corde,  $\mu_s$  et  $\mu_d$  sont les coefficients de frottement statique et dynamique, et  $F_N$  est la force normale d'appui de l'archet sur la corde.

Ce système non régulier peut être étudié analytiquement, en distinguant les deux états d'adhérence et de glissement, et le portrait de phase peut être alors calculé, ce qui en fait un bon système pour tester la robustesse des méthodes numériques face aux phénomènes de friction.

### 10.1.1 Régularisation du frottement de Coulomb

D'après la littérature, l'effort tangent est défini comme  $F_T = \mu F_N$ , où le coefficient de frottement  $\mu$  n'est pas nécessairement constant en phase de glissement, mais dépend de la vitesse relative. De nombreux auteurs utilisent une formulation en exponentielle décroissante (pour chaque demi plan, selon le signe de  $V_r$ ), qui passe par  $\pm\mu_s$  en  $V_r = 0^\mp$  et qui tend asymptotiquement vers la constante  $\mu_d$  quand  $|V_r| \rightarrow \infty$ . Récemment, Smith et Woodhouse [80] ont mis en évidence expérimentalement un comportement hystérétique dans l'effort tangent du frottement entre l'archet et la corde du violon, effet qu'ils attribuent à la thermodynamique de la

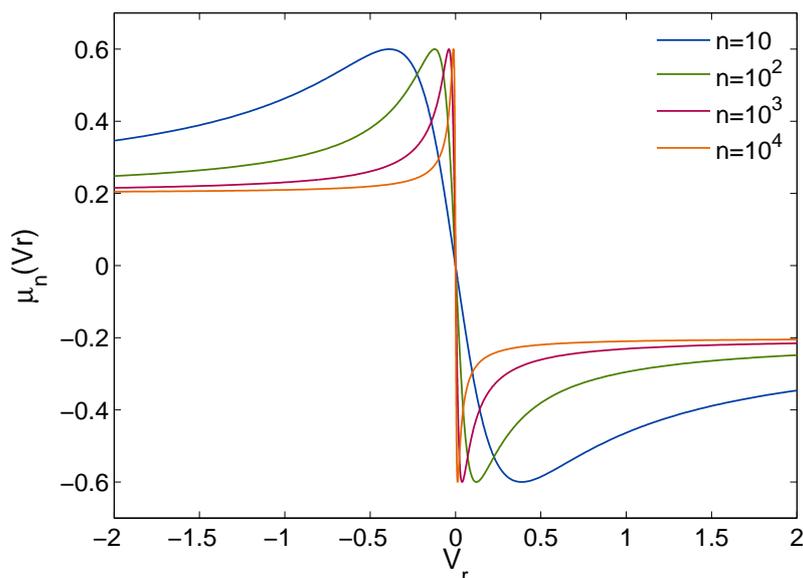


FIG. 10.2 – Régularisation de la loi de Coulomb : coefficient de frottement  $\mu_n$  en fonction de la vitesse relative  $V_r$  pour quelques valeurs de  $n$ . Valeurs des autres paramètres utilisés :  $\mu_d = 0,2$  et  $\mu_s = 0,6$ .

résine. Ils proposent un modèle qui prend en compte les échauffements locaux de la résine pour rendre compte de ces effets.

Il nous paraît alors physiquement acceptable de régulariser le coefficient de frottement de façon à ce qu'il soit défini comme une fonction  $\mu(V_r)$ , sous contrainte de conserver les caractéristiques suivantes :

- $\mu(0^\pm)$  doit tendre vers  $\mp\mu_s$ ,
- $|\mu|$  doit être monotone décroissante pour  $V_r \neq 0$ ,
- $\mu \rightarrow \pm\mu_d$  pour  $V_r \rightarrow \mp\infty$ .

Afin d'obtenir une formulation quadratique propice à l'utilisation de la MAN et de l'équilibrage harmonique avec un nombre suffisamment élevé d'harmoniques, nous avons choisi la régularisation suivante :

$$\mu_n(V_r) = -\frac{\mu_d V_r |V_r| + \alpha_n V_r}{V_r^2 + 1/n} \quad (10.3)$$

où  $\alpha_n = 2\sqrt{\frac{\mu_s(\mu_s - \mu_d)}{n}}$ , et  $n$  est un entier que l'on prendra aussi grand que l'on souhaite la régularisation raide.

La figure 10.2 illustre le comportement de cette régularisation pour différentes valeurs du paramètre  $n$ .

### 10.1.2 Système du premier ordre

L'équation différentielle du second ordre dans (10.2) peut se réécrire sous la forme :

$$x' = V_r + V_a \quad (10.4a)$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} V_r' = -\frac{q}{\omega_0} (V_r + V_a) - x - \frac{F_N}{k} \mu(V_r) \quad (10.4b)$$

où  $q = \frac{a\omega_0}{k}$  est le coefficient d'amortissement adimensionné.

### 10.1.3 Formulation quadratique

Les équations du mouvement doivent alors être reformulées comme un système algébro-différentiel quadratique du premier ordre pour pouvoir utiliser la MAN et l'équilibrage harmonique. Le système doit être mis sous la forme :

$$m(Z') = c_0 + \lambda c_1 + l_0(Z) + \lambda l_1(Z) + q(Z, Z)$$

où  $Z(t)$  est le vecteur d'inconnues et  $\lambda = V_a$  le paramètre de continuation.

Les deux équations différentielles (10.4a–b) sont déjà sous cette forme, mis à part la fonction  $\mu(V_r)$  que l'on doit exprimer dans ce formalisme. On utilise alors les variables additionnelles  $r$ ,  $s$ , et  $t$  définies ainsi :

$$r^2 = V_r^2 + \epsilon, \quad R > 0 \quad (10.5)$$

$$s = V_r^2 + 1/n \quad (10.6)$$

$$ts = V_r, \quad (10.7)$$

où  $\epsilon$  est un petit paramètre, permettant de régulariser la fonction valeur absolue.

On peut alors réécrire le terme  $\mu(Y, \lambda)$  sous la forme :

$$\mu(Y, \lambda) = -(\mu_d t r + \alpha_n t). \quad (10.8)$$

Notant  $Z = (x, V_r, r, s, t)^T$ , le système algébro-différentiel quadratique et du premier ordre auquel on appliquera l'équilibrage harmonique s'écrit :

$$\begin{array}{rcccccc} m(Z') & = & c_0 & +\lambda c_1 & +l_0(Z) & +\lambda l_1(Z) & +q(Z, Z) \\ x' & = & \lambda & & +V_r & & \\ \frac{1}{\omega_0^2} V_r' & = & -\lambda q/\omega_0 & -q/\omega_0 V_r & -x & -\frac{F_N}{k} \alpha_n t & -\frac{F_N}{k} \mu_d t r \\ 0 & = & \epsilon & & & & +V_r^2 - r^2 \\ 0 & = & 1/n & & -s & & +V_r^2 \\ 0 & = & & & & V_r & -ts \end{array} \quad (10.9)$$

### 10.1.4 Analyse du régime statique

Il existe un point d'équilibre évident :  $(x = x_0, x' = 0)$ , où

$$x_0 = \frac{F_N}{k} \mu(V_r(x_0)).$$

où  $V_r(x_0) = -V_a$ .

Pour déterminer sa stabilité, on repart des équations (10.4a–b) et on écrit le Jacobien du système

$$J(Y, \lambda) = \begin{bmatrix} J_{1,1} & J_{1,2} \\ J_{2,1} & J_{2,2} \end{bmatrix}.$$

évalué au point  $(x = x_0, V_r = -V_a)$ , avec :

$$J_{1,1} = 0 \quad (10.10a)$$

$$J_{1,2} = 1 \quad (10.10b)$$

$$J_{2,1} = -\omega_0^2 \quad (10.10c)$$

$$J_{2,2} = -q\omega_0 + \frac{F_N \omega_0^2}{k} \frac{\partial \mu}{\partial V_r}. \quad (10.10d)$$

Les valeurs propres de  $J(-1, \lambda)$  sont données par :

$$\rho^\pm(V_a) = (J_{2,2}/2 \pm \sqrt{J_{2,2}^2/4 - \omega_0^2}) \quad (10.11)$$

où  $J_{2,2}$  dépend de  $V_a$ .

On rappelle que la stabilité du point d'équilibre dépend du signe de la partie réelle des deux valeurs propres  $\rho^\pm$ . Si  $J_{2,2}^2/4 - \omega_0^2 \geq 0$ , alors  $J_{2,2}/2 > \sqrt{J_{2,2}^2/4 - \omega_0^2}$  et donc les deux valeurs propres sont réelles et du même signe que  $J_{2,2}$ . Sinon, le terme en racine carrée est imaginaire pur et la partie réelle des deux valeurs propres est  $J_{2,2}$ . Donc dans tous les cas, la stabilité du point d'équilibre est donnée par le signe de  $J_{2,2}$ .

#### Cas non amorti

Si l'on néglige l'amortissement, alors  $q = 0$  et on obtient :

$$J_{2,2}(x_0, -V_a) = \frac{F_N \omega_0^2}{k} \frac{\partial \mu}{\partial V_r} \Big|_{V_r = -V_a}$$

On note ici que la dérivée de la fonction  $\mu(V_r)$  peuvent être déduites de la figure 10.2.

Par le calcul, on trouve :

$$\begin{aligned} J_{2,2}(x_0, -V_a) &= \frac{F_N}{k} \left[ \frac{\alpha_n V_r^2 - 2\mu_d |V_r|/n - \alpha_n/n}{(V_r^2 + 1/n)^2} \right]_{V_r = -V_a} \\ &= \frac{F_N}{k} \frac{n\alpha_n V_a^2 - 2\mu_d |-V_a| - \alpha_n}{n(V_a^2 + 1/n)^2} \end{aligned}$$

Comme le dénominateur est toujours strictement positif, le signe de  $J_{2,2}$  est celui de son numérateur, ou plus simplement celui de :

$$\chi(V_a) = n\alpha_n V_a^2 - 2\mu_d |V_a| - \alpha_n.$$

Posons  $V_a > 0$ . Ce polynôme de degré 2 en  $V_a$  a deux racines réelles dont une positive :

$$V_c = \frac{1}{n\alpha_n} \left( \mu_d + \sqrt{\mu_d^2 + n\alpha_n^2} \right)$$

Son signe est négatif entre 0 et  $V_c$ , et positif au-delà.

Ainsi, le point d'équilibre est stable pour  $0 \leq V_r < V_c$  et instable pour  $V_r > V_c$ .

Au point critique, on a :  $\rho^\pm = 0 \pm \sqrt{(O - \omega_0^2)} = \pm i\omega_0$ . Il s'agit donc d'une bifurcation de Hopf, dont la pulsation associée est  $\omega_0$ , et qui déstabilise le régime statique.

Pour  $V_a < 0$ , on a simplement (par parité) :  $V_c^- = -V_c$ .

### Cas amorti

L'étude du cas amorti amène à résoudre un polynôme d'ordre 4 en  $V_a$  pour chercher les changements de signe des parties réelles des valeurs propres, ce qui est très fastidieux. Le terme d'amortissement, s'il est suffisamment faible, agit alors comme un terme perturbateur qui fait apparaître une racine  $V_{c,2} \gg V_c$  et déplace très légèrement  $V_c$ .

On peut alors montrer que le point d'équilibre est stable entre 0 et  $V_c$ , puis instable entre  $V_c$  et  $V_{c,2}$ , et redevient stable ensuite.

Les deux points critiques sont des bifurcations de Hopf, de pulsation associée  $\omega_0$ .

Dans les faits, l'amortissement étant faible, la racine  $V_{c,2}$  correspond à des vitesses d'archet irréalistes, si bien que l'approximation sans amortissement est peut-être suffisante (pour l'étude de stabilité).

## 10.2 Analyse numérique

On se propose maintenant d'appliquer les méthodes numériques de continuation à ce modèle, afin d'en calculer la branche de solutions statiques et la (ou les) branche(s) de solutions périodiques, ainsi que leur stabilité.

### 10.2.1 Adimensionnement

Afin d'éviter les problèmes de conditionnement des matrices, on souhaite s'assurer que les différentes inconnues du modèle sont à peu près du même ordre de grandeur. Ainsi, on effectue le changement de variable suivant :

$$X = x/x_0 \tag{10.12a}$$

$$Y = V_r/V_a = x'/V_a - 1, \tag{10.12b}$$

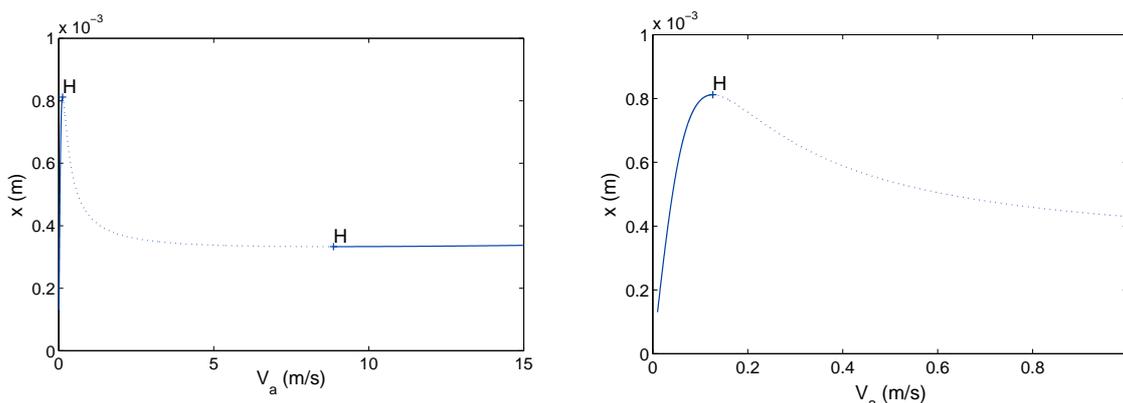


FIG. 10.3 – Point d'équilibre  $(x_0, 0)$  du violon : position  $x$  en fonction de la vitesse d'archet  $V_a$ , avec calcul de stabilité. A gauche : vue d'ensemble. A droite : agrandissement de la partie autour de la première bifurcation. Parties stables (—), parties instables (---), bifurcations de Hopf ('H').

où  $x_0 = V_a/\omega_0$  est un déplacement typique du système. En divisant les deux équations différentielles (10.4a-10.4b) par  $V_a$ , et multipliant la seconde par  $\omega_0$ , on obtient alors le système adimensionné suivant :

$$\frac{1}{\omega_0} X' = Y + 1 \quad (10.13a)$$

$$\frac{1}{\omega_0} Y' = -q(Y + 1) - X + \beta\lambda\mu(V_r) \quad (10.13b)$$

où  $Y$  est la valeur adimensionnée de la vitesse relative,  $\beta = F_N\omega_0/k$  est un paramètre sans dimension qui caractérise l'effort normal de l'archet, et  $\lambda = 1/V_a$  sera notre paramètre de continuation (il peut être considéré comme sans dimension, dans la mesure où 1m/s est une vitesse d'archet typique et peut donc servir d'adimensionnement en vitesse).

### 10.2.2 Branche statique

On a calculé la branche statique, dans le cas amorti, par continuation de point fixe (équilibrage harmonique à  $H=0$ ) et analyse de stabilité. La figure 10.3 correspond au cas d'une corde de violon en Sol, pour laquelle :  $\omega_0/2\pi=196\text{Hz}$ ,  $q=2.10^{-3}$ ,  $k=985,8\text{N/m}$  (d'après Müller et Müller [60]), et en prenant  $F_N=1\text{N}$ ,  $\mu_s=0,8$  et  $\mu_d=0,3$ .

Les deux bifurcations détectées sont :

- première bifurcation à  $V_a=12,6\text{cm/s}$ , fréquence associée :  $f=196,0\text{Hz}$ ,
- seconde bifurcation à  $V_a=886\text{cm/s}$ , fréquence associée :  $f=196,0\text{Hz}$ .

D'après la littérature, les vitesses d'archet mesurées dans différentes conditions sont plutôt de l'ordre de 1m/s, et rarement beaucoup plus. Cela signifie que l'on risque très peu de dépasser 2 ou 3m/s en situation de jeu, ce qui permet de confirmer que cette seconde bifurcation n'intervient que pour les « très grandes » vitesses d'archet, concrètement peu intéressantes.

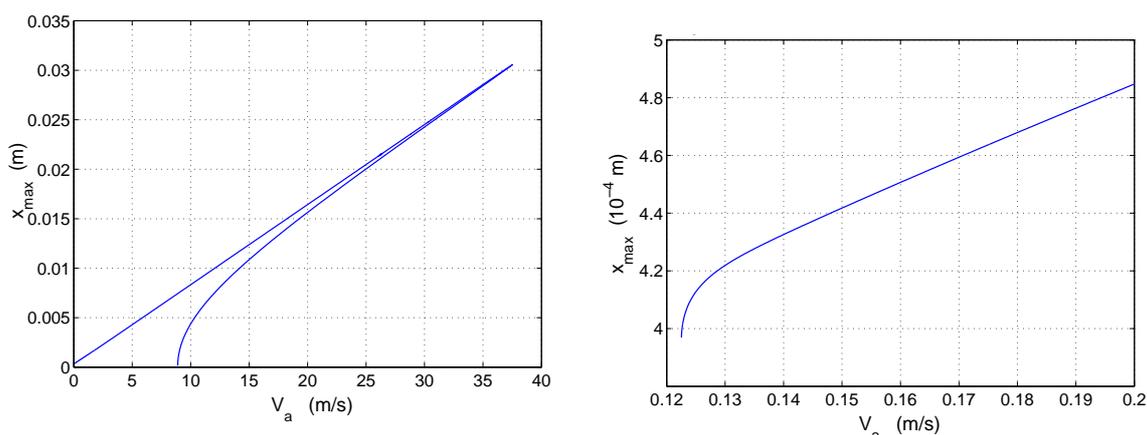


FIG. 10.4 – Branche périodique du violon calculée par équilibrage harmonique avec 125 harmoniques : valeur maximale du déplacement de la corde au cours d’une période en fonction de la vitesse d’archet. À gauche : branche complète. À droite : agrandissement autour du début de la branche.

### Notes :

- Rappelons ici qu’il s’agit d’un modèle à seulement 2 degrés de liberté (correspondant à un seul mode pour la corde). Il ne peut donc y avoir qu’un seul régime périodique. Étant donnée la déstabilisation du régime statique à la première bifurcation, et la restabilisation de celui-ci à la seconde, il est fort probable que la première bifurcation soit directe, la seconde inverse, et enfin qu’elles soient toutes les deux reliées par la même branche périodique. C’est ce qu’il nous reste à vérifier en calculant cette branche.
- Nous avons effectué le même calcul avec le logiciel AUTO, ce qui a conduit à un résultat identique.

## 10.3 Régime périodique du violon

### 10.3.1 Calcul par équilibrage harmonique et MAN

#### Diagramme de bifurcation

Le calcul par équilibrage harmonique de la branche de solutions périodiques issue de la première bifurcation de Hopf a été effectué avec  $H=125$  harmoniques. La branche périodique dans le domaine  $(V_a, ||x||)$  est tracé à la figure 10.4 (résultats du stage de P.Vigué, paramètres du modèle :  $n=100$ ,  $\omega_0/2\pi=196\text{Hz}$ ,  $q=1.10^{-3}$ ,  $F_N=1\text{N}$ ,  $\mu_s=0,6$  et  $\mu_d=0,2$ ). Elle rejoint, à son autre extrémité, la seconde bifurcation de Hopf sur la branche statique.

On retrouve ainsi la même forme de branche que pour les instruments à vent à anche simple : un « lobe » avec bifurcation directe au seuil d’oscillation (faible excitation) et indirecte à l’extinction (grande excitation). La stabilité n’a pas été calculée ici, mais étant donnée la taille du système et la forme de la branche, on peut raisonnablement penser que la branche est stable jusqu’au point limite, et instable sur la partie qui revient en arrière.

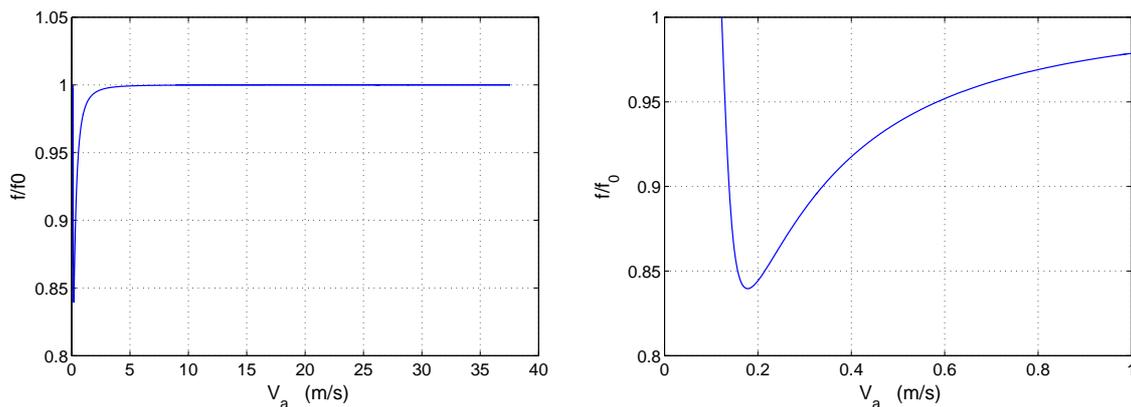


FIG. 10.5 – Évolution de la fréquence (ou plutôt, ici, la pulsation) de jeu avec la vitesse d'archet. Calcul par équilibrage harmonique avec  $H=125$ .

### Évolution de la fréquence

Nous montrons également les résultats obtenus concernant l'évolution de la fréquence avec la vitesse d'archet en figure 10.5. Les variations de fréquence de grande amplitude (jusqu'à 3 demi-tons en dessous de la fréquence propre de la corde) au tout début de la branche sont ici difficiles à interpréter, et seraient à confronter à un calcul tenant compte de plusieurs modes de vibration de la corde. La littérature ne semble pas très disert sur le sujet.

### 10.3.2 Calcul par collocation

Les mêmes calculs ont été effectués par collocation<sup>a</sup>, avec 50 éléments par période et 3 points de collocation par élément. L'analyse de stabilité a ici été ajoutée. Les résultats sont donnés ci-dessous, pour les mêmes valeurs de paramètres que celles de la branche statique.

### Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est tracé en figure 10.6, où l'on a tracé la valeur maximale du déplacement de la corde  $x$  au cours d'une période, en fonction de la vitesse d'archet. Ce diagramme montre, comme on s'y attendait, que la branche périodique est stable jusqu'à un point limite (pour une vitesse d'archet extrêmement grande), et au-delà duquel la branche effectue un retour jusqu'à rejoindre la branche statique à la seconde bifurcation de Hopf. La branche statique a été ici superposée afin de mieux montrer la coïncidence entre les deux extrémités de la branche périodique et les deux bifurcations de Hopf de la branche statique.

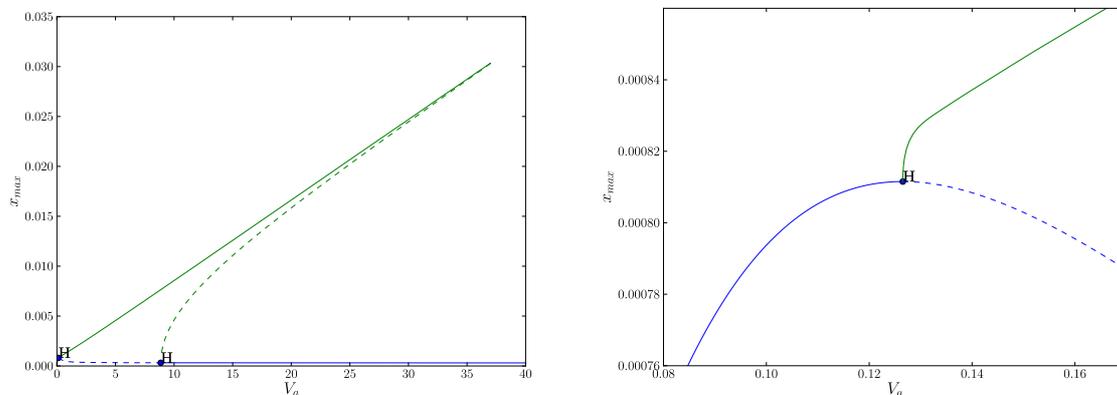


FIG. 10.6 – Diagramme de bifurcation du violon : position  $x$  (ou sa valeur maximale au cours d’une période, en  $m$ ) en fonction de la vitesse d’archet  $V_a$  (en  $m/s$ ), avec calcul de stabilité. A gauche : vue d’ensemble. A droite : agrandissement de la partie autour de la première bifurcation. Branche statique (bleu) et périodique (vert). Parties stables (—), parties instables (– –), bifurcations de Hopf (‘H’).

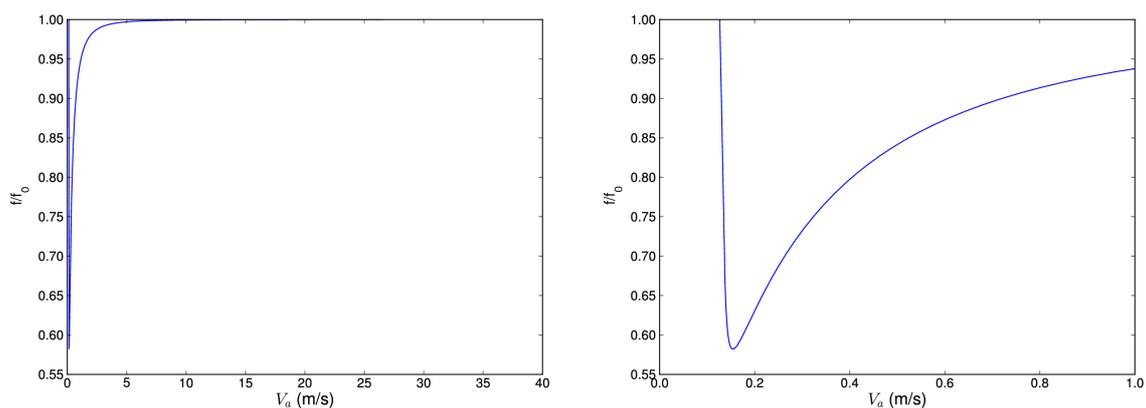


FIG. 10.7 – Fréquence de jeu en fonction de la vitesse d’archet (calcul par collocation). À gauche : branche complète. À droite : agrandissement du début de la branche.

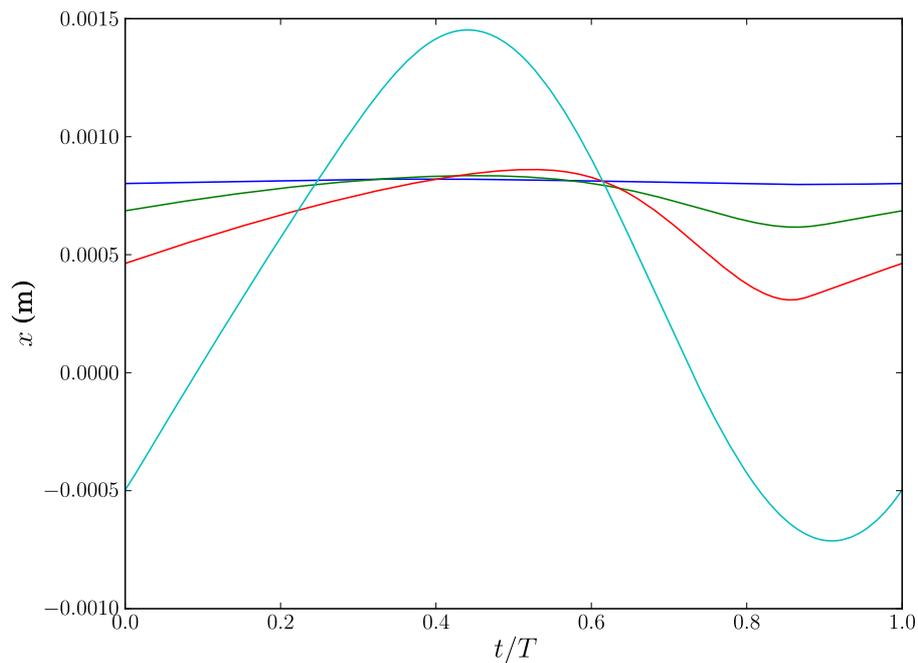


FIG. 10.8 – Formes d’onde pour le déplacement de la corde  $x$ , pour différentes vitesses d’archet : 12,7cm/s (bleu foncé), 13,8cm/s (vert), 16,7cm/s (rouge), 98,8m/s (bleu clair).

### Fréquence de jeu

L’évolution de la fréquence de jeu avec la vitesse d’archet est conforme au calcul par équilibrage harmonique : pour des vitesses d’archet légèrement supérieures à la vitesse critique (c’est-à-dire pour un jeu *pianissimo*), la fréquence diminue très rapidement jusqu’à 115Hz (soit plus de 9 demi-tons en dessous du Sol<sub>2</sub>!), avant de remonter très progressivement vers 196Hz. On a donc une fréquence de jeu qui varie essentiellement entre 115 et 183Hz, quand la vitesse d’archet se situe entre 15 et 100cm/s.

### Notes :

- Les différences quantitatives avec le calcul précédent, par équilibrage harmonique, sont simplement dues aux valeurs des paramètres légèrement différentes.
- Ici encore, nous rappelons que ce résultat est à interpréter avec précaution, étant donnée la simplicité du modèle qui ne fait intervenir qu’un seul des modes de vibration transverse de la corde, et aucun couplage avec la table d’harmonie, la caisse de résonance et son rayonnement. Toutefois, pour le modèle étudié, le résultat obtenu est robuste, bien que surprenant.

## Formes d'ondes

On a tracé à la figure 10.8 quelques solutions périodiques au tout début de la branche, ainsi qu'une solution proche de  $V_a=1\text{m/s}$ . Les premières, très proches du seuil, font apparaître une forme d'onde en "N", comme on trouve souvent dans la synthèse pour ce type d'instruments, mais pour de plus grandes vitesses d'archet la forme d'onde est alors quasi-sinusoidale.

## Conclusion

La non-régularité du modèle est ici mise en jeu bien plus tôt que dans les cas précédents, quasiment dès qu'il y a mouvement : on le voit sur le diagramme de bifurcation, dès que la non-régularité est en jeu, la pente de la branche périodique devient constante, ce qui est ici le cas pour de très faibles amplitudes. En effet, on a vu pour la clarinette et le saxophone que la pente devient constante quand on entre en régime d'anche battante, c'est-à-dire quand la non-régularité entre en jeu.

Cela s'explique par le fait qu'il n'existe pas d'autre mouvement périodique stable, pour ce modèle, que le « stick-slip », même à faibles amplitudes (sauf aux limites de la régularisation). Or, nous n'avons pas ici utilisé d'approximation équivalente à l'anche fantôme, qui simplifiait la prise en compte du contact dur entre l'anche et le bec, et la continuation peut parfois ralentir le long de cette branche périodique, sans raison apparente.

Toutefois, la non-régularité en question est de degré moindre : elle est liée au frottement solide et c'est donc l'accélération qui est discontinue (ou dans notre cas, puisque l'on a régularisé le frottement, elle est simplement très raide), contrairement aux instruments à vent à anche simple où c'est la vitesse de l'anche qui était discontinue. Ce modèle de violon est donc moins difficile à traiter numériquement.

Vigué [86] a par ailleurs comparé ces résultats à ceux d'un solveur classique par intégration temporelle. Cette comparaison confirme la validité des résultats obtenus par HBM et par collocation. L'ensemble des résultats présentés montre ainsi la pertinence de la méthode pour un modèle d'instrument auto-oscillant très différent des deux précédents.

---

<sup>a</sup>Pour des raisons de rapidité, nous avons ici utilisé le logiciel AUTO, mais des résultats préliminaires obtenus avec d'autres valeurs de paramètres ont montré que la méthode fonctionnait également avec MANLAB.

# Chapitre 11

## Seuils d'oscillation de la clarinette : une approche par continuation

### Sommaire

---

<b>11.1 Introduction</b>	<b>167</b>
<b>11.2 Physical model of single reed instruments</b>	<b>168</b>
11.2.1 Dynamics of the reed	168
11.2.2 Acoustics of the resonator	169
11.2.3 Nonlinear coupling	170
11.2.4 Reed motion induced flow	170
11.2.5 Global flow	170
11.2.6 Dimensionless model	171
<b>11.3 Methods : Theoretical principles and numerical tools</b>	<b>172</b>
11.3.1 Branch of static solutions	172
11.3.2 Continuation of static solutions	172
11.3.3 Hopf Bifurcation	172
11.3.4 Branch and continuation of Hopf bifurcations	173
<b>11.4 Results</b>	<b>173</b>
11.4.1 Reed-bore interaction	176
11.4.2 Simultaneous influence of reed damping and modal frequency	177
11.4.3 Influence of the control parameter $\zeta$	183
11.4.4 Concurrent influence of $q_r$ and $\zeta$	186
11.4.5 Influence of the reed motion induced flow	186
<b>11.5 Conclusion</b>	<b>189</b>

---

Dans ce chapitre, nous reproduisons un article **accepté** au *Journal of the Acoustical Society of America* sur les seuils d'oscillation des instruments à anche simple, et plus particulièrement de la clarinette (sous presse).

## Résumé

Dans cet article, nous nous intéressons aux seuils d'oscillation des instruments de musique à anche simple : il s'agit de la pression minimale à établir dans la bouche du musicien pour déclencher la mise en auto-oscillation, et donc une note.

Plusieurs grandeurs caractéristiques comme cette pression au seuil, le régime sélectionné, et la fréquence de jeu au seuil peuvent subir d'importantes variations lorsque l'on prend en compte la dynamique de l'anche ainsi que le débit d'anche. Les travaux précédents ont réussi à montrer des tendances, à partir d'expressions analytiques approchées sur des modèles simplifiés.

Dans cette étude, nous utilisons au contraire un modèle physique relativement élaboré et faisons le moins possible d'hypothèses susceptibles de « simplifier » la dynamique. On étudie alors l'influence de divers paramètres, liés aux propriétés mécaniques de l'anche, ou au contrôle du musicien.

Dans un premier temps, nous retrouvons ainsi des résultats déjà connus sur l'influence de la fréquence de résonance de l'anche. Ensuite, nous présentons et discutons de nouveaux résultats sur l'influence conjointe de deux paramètres du modèle sur le seuil d'oscillation, ainsi que sur le régime sélectionné et la fréquence de jeu au seuil.

Nous utilisons pour cela une approche numérique à l'aide d'outils de continuation : il s'agit de suivre l'évolution des composantes d'une solution à un système d'équations algébriques lorsque certains paramètres varient. Considérant l'instrument comme un système dynamique, l'étude du seuil d'oscillation est alors formulée comme le suivi des bifurcations de Hopf, une formulation qui généralise la méthode de « l'équation caractéristique », utilisée dans les travaux précédents.

Cette nouvelle approche est complémentaire aux études analytiques ainsi qu'aux simulations directes, temporelles ou fréquentielles. Elle permet d'obtenir des informations difficilement accessibles par la simulation, et sans les simplifications nécessaires aux approches analytiques.

### **Oscillation threshold of a clarinet model : a numerical continuation approach**

Sami Karkar, Christophe Vergez et Bruno Cochelin

## Abstract

This paper focuses on the oscillation threshold of single reed instruments. Several characteristics such as blowing pressure at threshold, regime selection, and playing frequency are known to change radically when taking into account the reed dynamics and the flow induced by the reed motion. Previous works have shown interesting tendencies, using analytical expressions with simplified models. In the present study, a more elaborated physical model is considered. The influence of several parameters, depending on the reed properties, the design of the instrument or the control operated by the player, are studied. Previous results on the influence of the reed resonance frequency are confirmed. New results concerning the simultaneous influence of two model parameters on oscillation threshold, regime selection and playing

frequency are presented and discussed. The authors use a numerical continuation approach. Numerical continuation consists in following a given solution of a set of equations when a parameter varies. Considering the instrument as a dynamical system, the oscillation threshold problem is formulated as a path following of Hopf bifurcations, generalising the usual approach of the characteristic equation, as used in previous works. The proposed numerical approach proves to be useful for the study of musical instruments. It is complementary to analytical analysis and direct time-domain or frequency-domain simulations since it allows to derive information that is hardly reachable through simulation, without the approximations needed for analytical approach.

## 11.1 Introduction

Woodwind instruments have been intensively studied since Helmholtz in the late 19<sup>th</sup> century. In particular, the question of the oscillation threshold has been the focus of many theoretical, analytical, numerical and experimental studies[5, 6, 8, 14, 15, 21, 24]. Following the works of Backus and Benade, Worman[28] founded the basis of the small oscillation theory for clarinet-like systems, and Wilson and Beavers[27] (W&B) greatly extended his work on the oscillation threshold.

Thompson[25] mentioned the existence of an additional flow, related to the reed motion, and the importance of the reed resonance on intonation as early as 1979, but only recent literature such as Kergomard and Chaigne[7] (chap. 9), Silva et al.[23] and Silva[22] extended the previous works of Wilson and Beavers to more complex models, taking into account the reed dynamics and the reed-induced flow.

Whereas the static regime of the clarinet (i.e. when the player blows the instrument but no note is played) can be derived analytically, the stability of this regime and the blowing pressure threshold at which a stable periodic solution occurs is not always possible to write analytically, depending on the complexity of the model under consideration. In the latter two references, authors analyse the linear stability of the static regime through a characteristic equation. It is a perturbation method based on the equations written in the frequency domain, that suppose an arbitrarily small oscillating perturbation (with unknown angular frequency  $\omega$ ) around the static solution. Substituting the linear expressions of the passive components – involving the acoustical impedance  $Z$  defined as:  $P(\omega)=Z(\omega)U(\omega)$  and the reed's mechanical transfer function  $D$  defined as:  $X(\omega)=D(\omega)P(\omega)$ , where  $P(\omega), U(\omega)$  are the acoustical pressure and volume flow at the input end of the resonator and  $X(\omega)$  is the reed tip displacement – into the coupling equation linearised around the static solution ( $U = f^{lin}|_{static}(X, P)$ ) and balancing the first harmonic of the oscillating perturbation, one gets the characteristic equation that the angular frequency  $\omega$  and the blowing pressure  $\gamma$  must satisfy at the instability threshold.

As pointed out by Silva[22], the convergence towards an oscillating regime with angular frequency  $\omega$  after destabilisation of the static regime is not certain and requires to consider the whole non linear system and compute periodic solutions beyond the threshold, in order to determine the nature of the Hopf bifurcation (direct or inverse). However, in the case of a direct bifurcation, the oscillation threshold (for a slowly increasing blowing pressure) corresponds to the solution of

the characteristic equation with the lowest blowing pressure  $\gamma_{th}$ . Periodic oscillations emerge at this point with an angular frequency  $\omega_{th}$  that depends only on the other model parameters values.

In the present paper, we propose a different method for computing the oscillation threshold that proves to be faster, more general and more robust: numerical continuation. Numerical continuation consists in following a given solution of a set of equations when a parameter varies. To the authors knowledge, it is the first time this numerical method is applied to the physics of musical instruments. While time-domain or frequency-domain simulations allow to study complex physical models with at most one varying parameter, the method proposed in this work allows to investigate the simultaneous influence of several parameters on the oscillation threshold.

The general principle of the method is the following : we first follow the static regime while increasing the blowing pressure, all other parameters being kept constant, and detect the Hopf bifurcations. Then, we follow each Hopf bifurcation when a second parameter  $\mu$  is allowed to vary ( $\mu$  being, for instance, the reed opening parameter or the reed resonance frequency). Finally, the resulting branch of each bifurcation is plotted in the plane  $(\mu, \gamma_{th})$  for determination of the oscillation threshold and of the selected regime, and in the plane  $(\mu, \omega_{th})$  to determine the corresponding playing frequency.

The paper is structured as follows. In section 11.2, a physical model of a clarinet is reviewed. The method is described in section 11.3, defining the continuation of static solutions and Hopf bifurcations. In section 11.4, the results are reviewed. First, basic results on the reed-bore interaction are compared with the previous works (W&B[27] and Silva et al.[23]). Then, extended results are presented, showing how the control of the player and the design of the maker influence the ease of play and the intonation.

## 11.2 Physical model of single reed instruments

The model used in this study is similar to the one used in Silva et al.[23]. It is a three-equation physical model that embeds the dynamical behaviour of the single reed, the linear acoustics of the resonator, and the nonlinear coupling due to the air jet in the reed channel. It assumes that the mouth of the player (together with the vocal tract and lungs) provides an ideal pressure source, thus ignoring acoustic behaviour upstream from the reed.

### 11.2.1 Dynamics of the reed

The reed is indeed a three-dimensional object. However, due to its very shallow shape, it can be reduced to a 2D-plate or even, considering the constant width, a 1D-beam with varying thickness. Detailed studies of such models have been conducted (see for instance Avanzini and van Walstijn[4] for a distributed 1D-beam model) and lumped models have been proposed. Mainly, two lumped models are widely used:

- a one degree of freedom mass-spring-damper system, accounting for the first bending mode of the reed,

- a simpler one degree of freedom spring, assuming a quasi-static behaviour of the reed.

Most papers studying clarinet-like systems use the second model. This kind of simplification is made assuming that the reed first modal frequency is far beyond the playing frequency, thus acting as a low-pass filter excited in the low frequency range, almost in phase. However, some authors (see for instance W&B[27] or Silva[22]) showed that the reed dynamics, even rendered with a simple mass-spring-damper oscillator, cannot be ignored because of its incidence on the physical behaviour of the dynamical system.

Thus, in the present study, the reed dynamics is rendered through a lumped, one-mode model. It reflects the first bending mode of a beam-like model with a reed modal angular frequency  $\omega_r$ , a modal damping  $q_r$ , and an effective stiffness per unit area  $K_a$ .

The reed is driven by the alternating pressure difference  $\Delta P = P_m - P(t)$  across the reed, where  $P_m$  is the pressure inside the mouth of the player and  $P(t)$  is the pressure in the mouthpiece. Given the rest position of the tip of the reed  $h_0$  and the limit  $h = 0$  when the reed channel is closed, the tip of the reed position  $h(t)$  satisfies the following equation:

$$\frac{1}{\omega_r^2} h''(t) = h_0 - h(t) - \frac{q_r}{\omega_r} h'(t) - \frac{\Delta P}{K_a} \quad (11.1)$$

Contact with the mouthpiece could also be modelled, using a regularised contact force function (as presented by the authors in a conference paper[19]). It will not be discussed or used in this paper, as large amplitude oscillations will not be discussed. However, it is important to note that such phenomenon cannot be ignored when the whole dynamic range of the system is under study.

### 11.2.2 Acoustics of the resonator

The acoustic behaviour of the resonator of a clarinet is here assumed to be linear. It is modelled through the input impedance  $Z_{in} = P/U$ , where  $P$  is the acoustical pressure and  $U$  the acoustical volume flow at the reed end of the resonator. To keep a general formulation, we use a (truncated) complex modal decomposition of the input impedance (as described by Silva[22]) of the form:

$$Z_{in}(\omega) = \frac{P(\omega)}{U(\omega)} = Z_c \sum_{n=1}^{N_m} \left( \frac{C_n}{j\omega - s_n} + \frac{C_n^*}{j\omega - s_n^*} \right). \quad (11.2)$$

This leads, in the time domain, to a system of  $N_m$  differential equations, each governing a complex mode of pressure at the input of the resonator :

$$P'_n(t) = C_n Z_c U(t) + s_n P_n(t), \quad (11.3)$$

where  $Z_c = \rho c/S$  is the characteristic impedance of the cylindrical resonator, whose cross-sectional area is  $S$ . The total acoustic pressure is then given by :

$$P(t) = 2 \sum_{n=1}^{N_m} \Re(P_n(t)). \quad (11.4)$$

In practice, the modal coefficients  $(C_n, s_n)$  can be computed in order to fit any analytical or measured impedance spectrum to the desired degree of accuracy (depending on the total number of modes  $N_m$ ).

In the present study, we use an analytical formulation for a cylinder of length  $L = 57\text{cm}$  (if not stated otherwise), radius  $r = 7\text{mm}$ , taking into account the radiation at the output end and the thermoviscous losses due to wall friction, as given by Silva[22]. The effect of tone holes is not considered in this work.

### 11.2.3 Nonlinear coupling

As described by Hirschberg[18] and further confirmed experimentally by Dalmont et al.[11] and Almeida et al.[3], the flow inside the reed channel forms a jet that is dissipated by turbulence in the larger part of the mouthpiece leading to the following nonlinear equation:

$$U_j(t) = \text{sign}(\Delta P)Wh(t)\sqrt{\frac{2|\Delta P|}{\rho}} \quad (11.5)$$

where  $W$  is the width of the reed channel, assumed to be constant, and  $U_j$  has the sign of  $\Delta P$ . According to this model, the direction of the flow depends on the sign of the pressure drop across the reed  $\Delta P$ .

### 11.2.4 Reed motion induced flow

Moreover, when an oscillation occurs (a note being played), the reed periodic motion induces an acoustic volume flow in addition to the one of the jet, as early described by Thompson[25] and lately studied by Silva et al.[23]. Writing  $S_r$  the reed effective area  $S_r$ , the resulting flow  $U_r$  reads:

$$U_r(t) = -S_r \frac{dh}{dt}(t). \quad (11.6)$$

Notice the negative sign, due to the chosen representation where the reed tip position  $h$  is positive at rest and null when closing the reed channel.

Some authors[7, 9] use another notation, the equivalent length correction  $\Delta L$ , related to  $S_r$  as:

$$\Delta L = \frac{\rho c^2}{K_a S} S_r.$$

We prefer to stick with the notation  $S_r$  but we will give the corresponding values of  $\Delta L$  for comparison, when necessary.

### 11.2.5 Global flow

The global flow entering the resonator then reads:

$$U(t) = \text{sign}(\Delta P)Wh(t)\sqrt{\frac{2|\Delta P|}{\rho}} - S_r \frac{dh}{dt} \quad (11.7)$$

### 11.2.6 Dimensionless model

The above-described multi-physics model involves several variables. Expressed in SI units, their respective values are of very different orders of magnitude. However, as we will use numerical tools to solve the algebro-differential system composed of eq. 11.1, 11.3, 11.4 and 11.7, it is a useful precaution to use a dimensionless model.

In the dimensionless model, each variable should be divided by a typical value, in order to scale the range of possible values for that variable as close as possible to  $[0, 1]$ .

Choosing the static difference of pressure necessary to close the reed channel  $P_M = K_a h_0$  to scale all pressures, and the reed tip opening at rest  $h_0$  to scale the reed tip position, the following new dimensionless variables and parameter are defined:

$$\begin{aligned} x(t) &= h(t)/h_0 \\ y(t) &= h'(t)/v_0 \\ p_n(t) &= P_n(t)/P_M \quad \text{for } n = 1, 2, \dots, N_m \\ p(t) &= P(t)/P_M \\ u(t) &= U(t)Z_c/P_M \end{aligned}$$

where  $v_0 = h_0 \omega_r$  is a characteristic velocity of the reed.

The system of algebraic and differential equations (11.1,11.3,11.4,11.7) can be rewritten as follows (time-dependence is omitted, for a more concise writing):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\omega_r} x' = y \\ \frac{1}{\omega_r} y' = 1 - x + p - \gamma - q_r y \\ p'_n = C_n u + s_n p_n \quad \text{for } n = 1, 2, \dots, N_m \\ p = 2 \sum_{n=1}^{N_m} \Re(p_n) \\ u = \text{sign}(\gamma - p) \zeta x \sqrt{|\gamma - p|} - \frac{v_0 Z_c}{P_M} S_r y, \end{array} \right. \quad (11.8)$$

where  $\gamma = P_m/P_M$  is the dimensionless blowing pressure and  $\zeta = Z_c W \sqrt{2h_0/\rho K_a}$  is the dimensionless reed opening parameter. The reader will notice that the parameter  $\zeta$ , related to the maximum flow through the reed channel, mainly depends on the geometry of the mouthpiece, the reed mechanical properties, as well as the player's lip force and position on the reed that control the opening.

In the following sections we will compute the minimal mouth pressure  $\gamma_{th}$  necessary to initiate self-sustained oscillations from the static regime and show how this threshold is modified when a second parameter of the model varies. When players change the way they put the mouthpiece in their mouth, several parameters of our model are assumed to vary : the control parameter  $\zeta$ , the reed modal damping  $q_r$ , its modal angular frequency  $\omega_r$ , as well as the effective area  $S_r$  of the reed participating to the additional flow. We will first investigate the influence of the dimensionless parameter  $k_r L = \omega_r L/c$ , comparing with previous works. Then the influence of  $\zeta$ ,  $q_r$  and  $S_r$  will also be investigated.

## 11.3 Methods : Theoretical principles and numerical tools

In this section, the method used is briefly reviewed from a theoretical point of view. Practical application of the method will be carried out in section 11.4.

### 11.3.1 Branch of static solutions

We consider an autonomous nonlinear dynamical system of the form:

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t), \lambda) \quad (11.9)$$

where  $\mathbf{u}(t)$  is the state vector and  $\lambda$  is a chosen parameter of the system equations.

Let  $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$  be a fixed point of this system for  $\lambda_0$ :  $\mathbf{F}(\mathbf{u}_0, \lambda_0) = 0$ . Under the hypothesis that  $\mathbf{u}_0$  is a regular solution, there exists a unique function  $\mathbf{u}(\lambda)$  that is solution of the previous equation for all  $\lambda$  close to  $\lambda_0$ , with  $\mathbf{u}(\lambda_0) = \mathbf{u}_0$ . (See Doedel[12] for formal definitions, as well as for more details about regular solutions and what is meant by “close”.)

In other words, for  $\lambda$  close to  $\lambda_0$ , there is a continuum of equilibrium points that passes by  $\mathbf{u}_0$  and the *branch* of solutions is represented by the graph  $u_i = f(\lambda)$ , where  $u_i$  is a component of the state vector  $\mathbf{u}$ .

### 11.3.2 Continuation of static solutions

Considering the differential equations in system (11.8), it can be rewritten in the form  $\mathbf{u}' = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda)$  where  $\mathbf{u}$  is the state vector and  $\lambda$  is one of the equations parameters (for instance the blowing pressure  $\gamma$ ). Thus, a static solution is given by the algebraic system:  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda) = 0$ , where the algebraic equations of system (11.8) can now be included.

The branch of static solutions is computed numerically using a classical path following technique based on Keller’s pseudo-arc length continuation algorithm[20] as implemented in the softwares AUTO (Doedel and Oldeman [13]) and MANLAB (Karkar et al. [1]), both freely available online. For comprehensive details about continuation of static solutions using these two numerical tools, please refer to the conference article [19].

### 11.3.3 Hopf Bifurcation

Let us consider a static solution  $\mathbf{u}$  of system (11.9). The stability of this equilibrium point is given by eigenvalues of the jacobian matrix of the system:

$$\mathbf{F}_u(\mathbf{u}, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{u}_j} \end{bmatrix}$$

. If all the eigenvalues of  $\mathbf{F}_u$  have a strictly negative real part, then the equilibrium is stable. If any of its eigenvalues has a strictly positive real part, then the equilibrium is unstable.

Several scenarios of loss of stability, along the branch  $\mathbf{u} = f(\lambda)$  are possible. One of them is the following : a unique pair of complex conjugate eigenvalues crosses the imaginary axis at  $(i\omega_{th}, -i\omega_{th})$  for  $\lambda = \lambda_{th}$ .

In that case, the system is said to undergo a *Hopf Bifurcation*. It means that a family of periodic orbits starts from this point  $\mathbf{u}(\lambda_{th})$ , with an angular frequency  $\omega_{th}$ . As for the clarinet model, choosing the blowing pressure  $\gamma$  as the varying parameter, the first Hopf bifurcation encountered when  $\gamma$  is increased from 0 is the oscillation threshold: it is the minimal blowing pressure  $\gamma_{th}$  needed to initiate self-sustained oscillations (i.e. to play a note) when starting from zero and increasing quasi-statically the blowing pressure.

### 11.3.4 Branch and continuation of Hopf bifurcations

This definition of a Hopf bifurcation can be written as an extended algebraic system  $\mathbf{G} = 0$  where  $\mathbf{G}$  reads:

$$\begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda, \mu) \\ \mathbf{F}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \lambda, \mu)\phi - j\omega\phi \\ \phi^T\phi - 1 \end{cases} \quad (11.10)$$

$\lambda$  and  $\mu$  are two parameters of interest (for instance the blowing pressure  $\gamma$  and the reed opening parameter  $\zeta$ ), and  $\phi$  is the normed eigenvector associated with the purely imaginary eigenvalue  $j\omega$ .

Assuming that a given solution  $X_0 = (u_0, \phi_0, \omega_0, \lambda_0, \mu_0)$  is a regular solution of  $\mathbf{G} = 0$ , there exists a continuum of solutions  $X(\mu) = (u(\mu), \phi(\mu), \omega(\mu), \lambda(\mu), \mu)$  near  $X_0$ . Thus, the function  $X(\mu)$  is a branch of Hopf bifurcations of our initial dynamical system.

Using the same continuation techniques as in 11.3.2, this branch of Hopf bifurcations can be computed. The reader is kindly referred to classical literature on the subject for proper theoretical definitions and other details about the continuation of Hopf bifurcations (see for instance Doedel[12]).

## 11.4 Results

In the current section, the method described in the previous section is applied to the physical model presented in section 11.2 to investigate the oscillation threshold of a purely cylindrical clarinet. The resonator modal decomposition has been computed with the MOREESC[2] software, using 18 modes. The corresponding input impedance spectrum is shown on figure 11.1. For comparison, the impedance spectrum given by the analytical formulae of Backus[5] and used in Wilson and Beavers[27] is also plotted. Important differences appear concerning frequency dependent damping (peaks heights) and harmonicity (peaks positions).

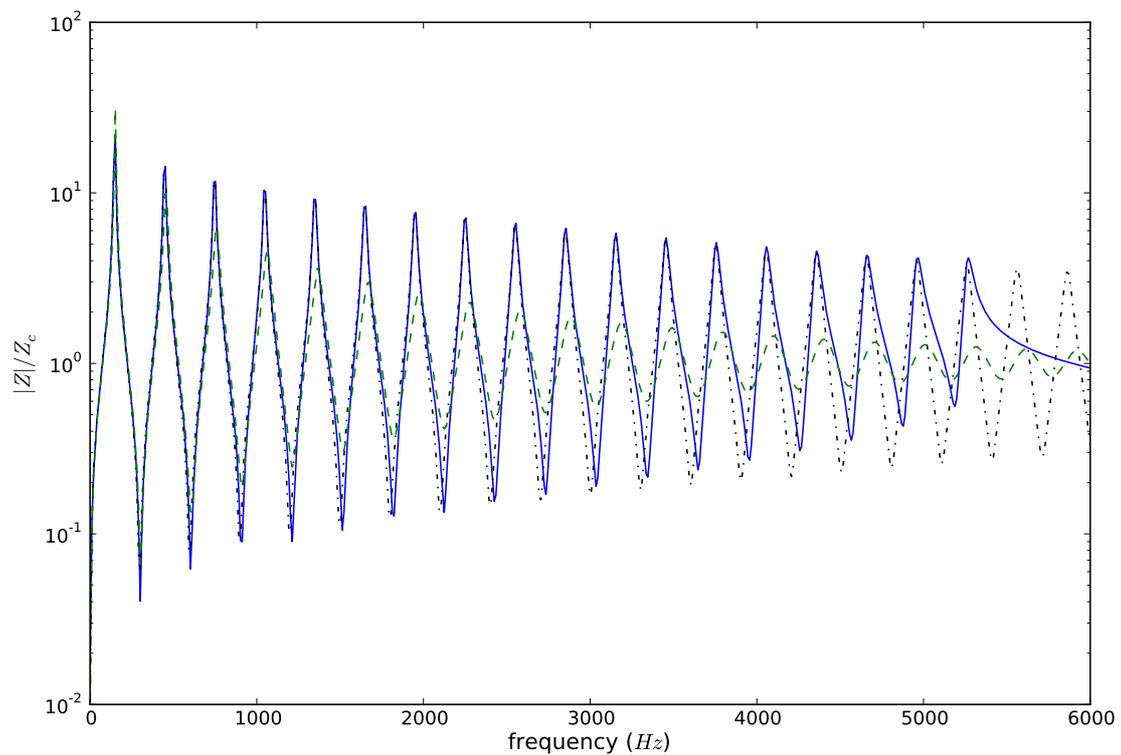


Figure 11.1: Impedance spectrum (reduced modulus) of a purely cylindrical bore of length  $L=57\text{cm}$  taking into account thermoviscous losses and radiation and truncated to 18 modes as used in this study (—), analytical impedance spectrum without modal decomposition ( $-\cdot-$ ), impedance spectrum used in Wilson and Beavers[27]. (—).

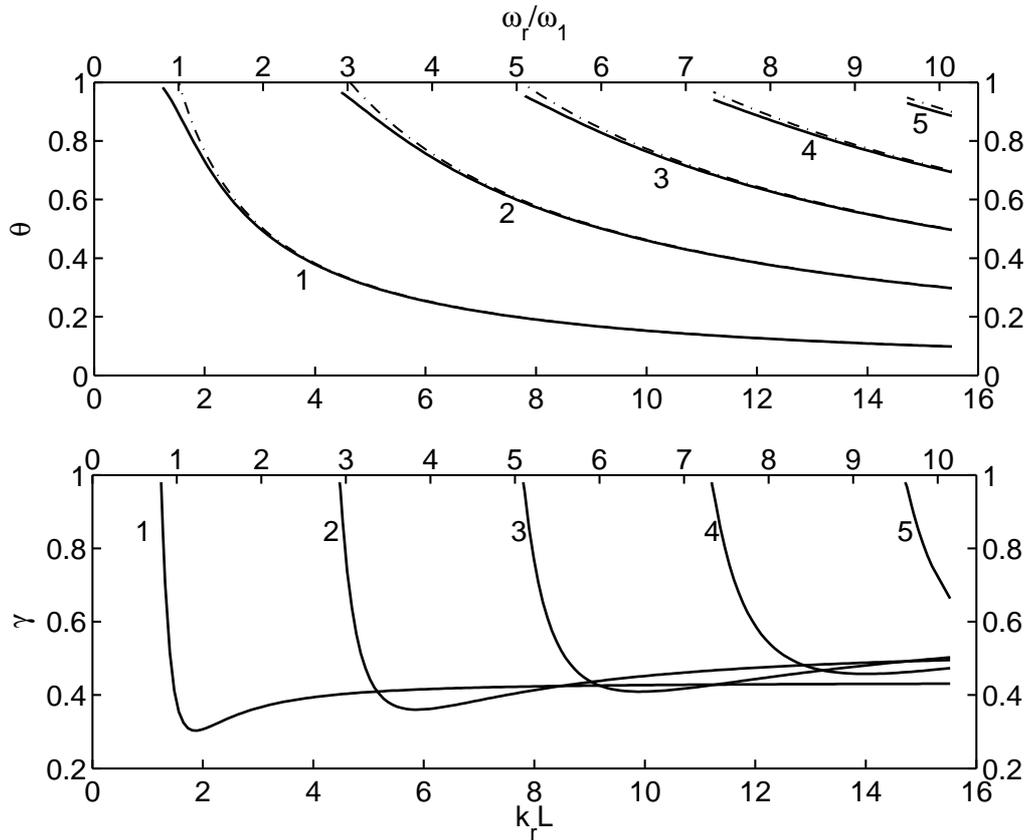


Figure 11.2: Critical blowing pressure and frequency of each Hopf bifurcation (labelled from 1 to 5) as a function of the “tube parameter”  $k_r L$  (as used in W&B), or the frequency ratio  $\omega_r/\omega_1$  (secondary x-axis on top). Lower plot: critical blowing pressure  $\gamma$ . Upper plot: frequency ratio  $\theta = \omega/\omega_r$  of the oscillations; passive resonances of the bore  $\theta_n = \omega_n/\omega_r$  are plotted for comparison (— · —). Physical constants and parameters of the model were chosen according to fig. 1 in Silva et al.[23]:  $\rho=1.185\text{g/L}$ ,  $c=346\text{m/s}$ ,  $L=57\text{cm}$ ,  $r=7\text{mm}$ ,  $q_r=0.4$ ,  $\zeta=0.13$ ,  $S_r=0$ , varying  $\omega_r$ .

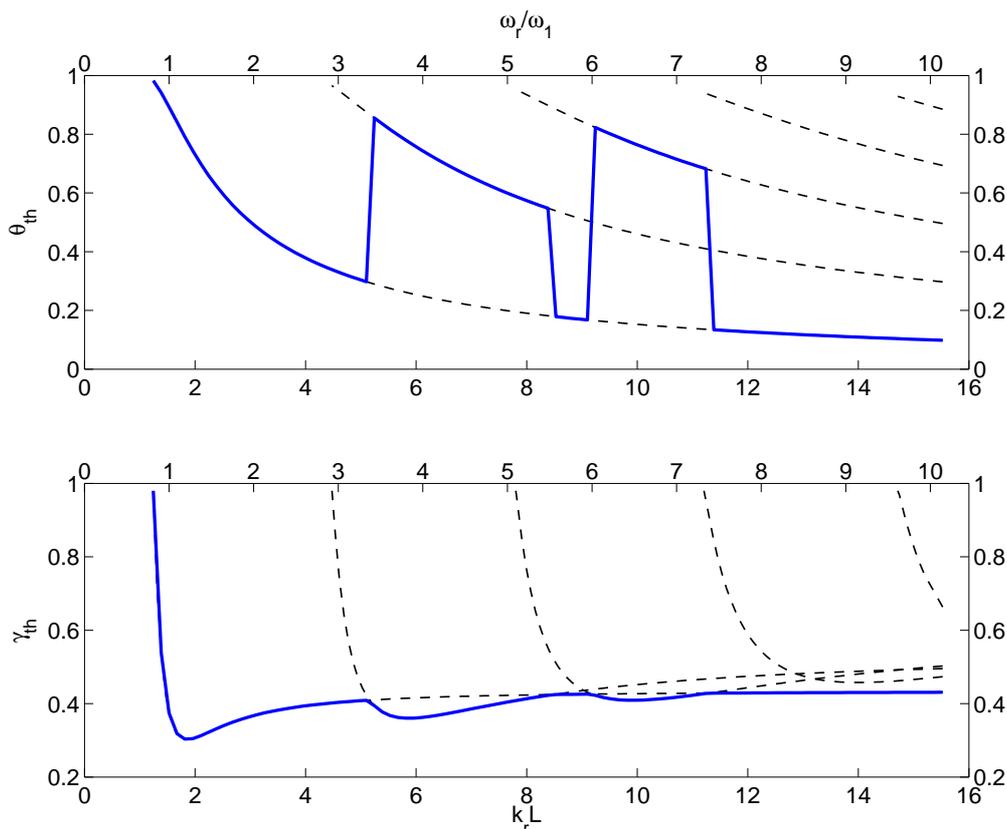


Figure 11.3: Oscillation threshold : blowing pressure, regime selection and frequency with respect to  $k_r L$ . The oscillation threshold, for a given abscissa, is given by the lowest blowing pressure of the five Hopf bifurcation branches (thick line). Lower plot: blowing pressure threshold  $\gamma_{th}$ . Upper plot: frequency ratio  $\theta_{th} = \omega_{th}/\omega_r$  of the oscillations. Complete branches of the five bifurcations are reminded (dashed lines). Same model parameters were used as fig. 11.2. A secondary x-axis on top of each plot gives the value of the frequency ratio  $\omega_r/\omega_1$ .

### 11.4.1 Reed-bore interaction

#### Comparison with previous results

Previous works of Wilson and Beavers[27] and Silva et al.[23] showed how the resonance of the reed competes with the acoustical modes of the resonator for the existence of self-sustained oscillations: oscillation thresholds and emergent frequencies were then measured and numerically computed, for different values of the dimensionless product  $k_r L$  ( $k_r = \omega_r/c$  is the corresponding wavenumber of the reed modal frequency, and  $L$  is the length of the bore –which is approximately the quarter of the first acoustical mode wavelength) called “tube parameter” in W&B. Notice that in these studies, the parameter  $k_r$  was kept constant and  $L$  was varied. These results showed that several regimes can be selected, depending on the product  $k_r L$ , only if the reed damping is very small.

Figure 11.2 shows similar computations using our method, with the same model parameters as was used for the figure 1 of Silva et al.[23], only using a different

impedance (as explained above). A secondary x-axis, on top of each plot, shows the corresponding ratio of the reed natural frequency  $\omega_r$  to the first resonance frequency of the bore  $\omega_1 = \Im(s_1)$ . Note that instead of varying  $L$  for a given  $\omega_r$ , the figure was computed by varying  $\omega_r$  for a given  $L$ . The method advantage, here, is that no analytical development of the impedance spectrum is needed, unlike what was done by W&B to derive the characteristic equation. Thus, any other impedance could be used, for instance a measured one.

Figure 11.3 illustrates how the oscillation threshold is deduced from the previous figure: for a given abscissa, it corresponds to the lowest of the five Hopf bifurcation branches, each corresponding to a register. In contrast with W&B, this figure clearly shows that even in the case of a strongly damped reed ( $q_r = 0.4$ ), a regime selection occurs with varying  $\omega_r$ . The term “strongly damped” was used by W&B for that value of  $q_r$ , but it seems to be a realistic value for a clarinet reed coupled to the player’s lip (see van Walstijn and Avanzini[26] and Gazengel et al.[16] for numerical and experimental studies of the reed-lip system). A minimum of the threshold blowing pressure (lower plot) appears a little above  $\omega_r = \omega_1$ , i.e. when the first air column resonance frequency is close to the reed one. The frequency of a given mode (upper plot) is close to the corresponding passive resonance frequency  $\omega_n = \Im(s_n)$ , for medium and high values of  $k_r L$ , but tends to the reed modal frequency for low values of  $k_r L$ .

### Relevance of the tube parameter $k_r L$

While results of the previous figure are in good agreement with Silva’s results (when thermoviscous losses are taken into account, as in figure 3 of Silva et al.[23]), several differences lead to question the relevance of the representation: if  $k_r L$  is a characteristic parameter of the model, varying  $L$  for a given  $\omega_r$  should be equivalent to varying  $\omega_r$  with a fixed value of  $L$ .

To answer this question, we recomputed the first regime for the same values of  $k_r L$  but with  $L=14.69\text{cm}$  (one then needs to recompute the modal coefficients of the input impedance). The results are plotted in figure 11.4: considering the upper plot, the frequency seems to be independent of  $L$ , as long as the product  $k_r L$  is kept constant (the plain line and dashed line are exactly superimposed); however, considering the lower plot, the blowing pressure does not behave in the same way, for identical values of  $k_r L$ , depending on the value of  $L$ . Therefore, the tube parameter  $k_r L$  is not a characteristic invariant parameter of the model.

One good reason for that is that in our impedance spectrum, the peaks are inharmonic and have a frequency dependent quality factor and magnitude. Then varying  $L$  does not preserve the impedance peaks height and width, nor their spacing, which leads to a different balance in the competition with the reed resonance.

### 11.4.2 Simultaneous influence of reed damping and modal frequency

In previous works[22, 27], figures similar to figure 11.2 were plotted for two cases, small and large values of the reed damping  $q_r$ , which revealed very different be-

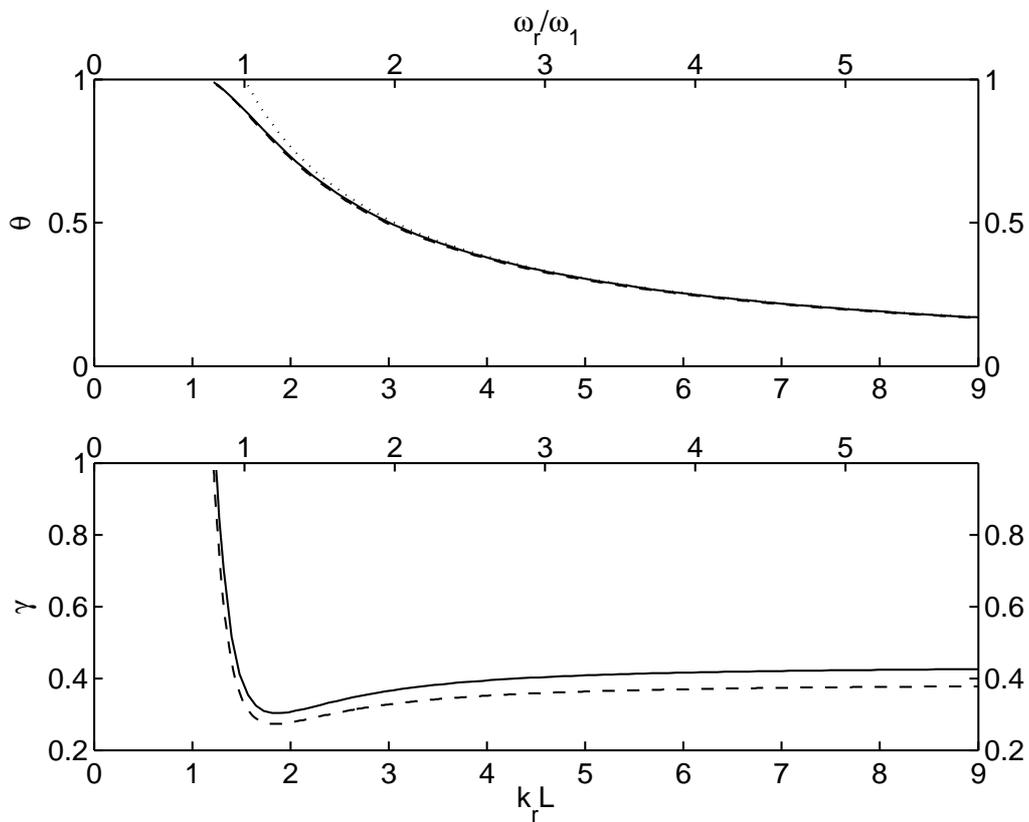


Figure 11.4: Comparison of the first regime for  $L=57\text{cm}$  (—) and  $L=14.69\text{cm}$  (---). Lower plot: dimensionless blowing pressure  $\gamma$  of the bifurcation. Upper plot: corresponding dimensionless frequency ratio  $\theta = \omega/\omega_r$ ; the first passive resonance of the bore is reminded ( $\cdots$ ).

haviours.

Because the method proposed in this paper leads to very short computation time, it is quite easy to loop the computation for a series of  $q_r$  values. For sufficiently close values of  $q_r$ , this allows to draw a tridimensional plot in which the surface represents the critical value of the dimensionless blowing pressure  $\gamma$  corresponding to a given Hopf bifurcation as a function of two parameters, the reed damping  $q_r$  and the frequency ratio  $\omega_r/\omega_1$ , as illustrated figure 11.5 for the Hopf bifurcation of the first register. The plotted surface corresponds to a Hopf bifurcation locus when two parameters are varied (conversely to figure 11.2 where only one parameter is varied). The two plain, thick curves correspond to the limits of the domain considered:  $q_r = 0.05$  and  $q_r = 1$ .

This figure allows to investigate the transition between large and light damping. It appears that for large values of  $\omega_r/\omega_1$ , the critical blowing pressure is nearly independent of  $q_r$ : a closer look reveals a slight increase with  $q_r$ . This is not surprising since  $\omega_r/\omega_1 \gg 1$  corresponds to the case where the first resonance frequency of the resonator is very small compared to  $\omega_r$ . Hence, only very large values of  $q_r$  ( $q_r \gg 1$ ) would contribute significantly to an increase of the pressure threshold. However, for smaller values of  $\omega_r/\omega_1$ , the value of  $q_r$  becomes determinant. In the 2D manifold, there is a valley which becomes deeper when  $q_r$  decreases. For a given  $q_r$ , the bottom point of the valley (called  $\gamma_0$  in Silva et al.[23]) corresponds to the minimum threshold. It is plotted as a dot-dashed line on the plane ( $\omega_r/\omega_1 = 0$ ), whereas the corresponding abscissa  $\left. \frac{\omega_r}{\omega_1} \right|_0$  is plotted as a dot-dashed line in the plane  $\gamma = 0$ . It shows that the minimum value  $\gamma_0$  is an increasing function of  $q_r$ . The same conclusion holds for  $\left. \frac{\omega_r}{\omega_1} \right|_0$ .

Notice that the chosen range for the values of  $q_r$  seems quite realistic, according to literature on the subject: in a numerical model, van Walstijn and Avanzini[26] reported parameters values equivalent to  $q_r = 0.24$  for one playing condition, whereas Gazengel et al.[16] found experimental values going from  $q_r = 0.05$  for the bare reed to  $q_r = 1.54$  for a high lip pressure on the reed. Thus, the lower value  $q_r = 0.05$  corresponds to the limit case of a very resonant reed with no lip pressing on it, and the higher value  $q_r = 1.00$  is high enough to cover a fairly good range of lip pressures.

Now we illustrate that the results obtained on this model allow to estimate the range of validity of analytical formula obtained in approximated cases. For instance, in figure 11.6, the minimum  $\gamma_0$  obtained through numerical continuation (without approximation), is compared with two analytical formula from Silva[22] corresponding to different approximations: no losses in the cylindrical bore (here plotted with dotted line, corresponds to eq. (14) in Silva et al.[23]) and a single-mode resonator with losses (dot-dashed line, eq. (19) in Silva et al.[23]).

It appears that only one mode with viscothermal losses leads to a more precise result than the undamped formulation with all the modes. However, the relative deviation from our results still reaches 10%.

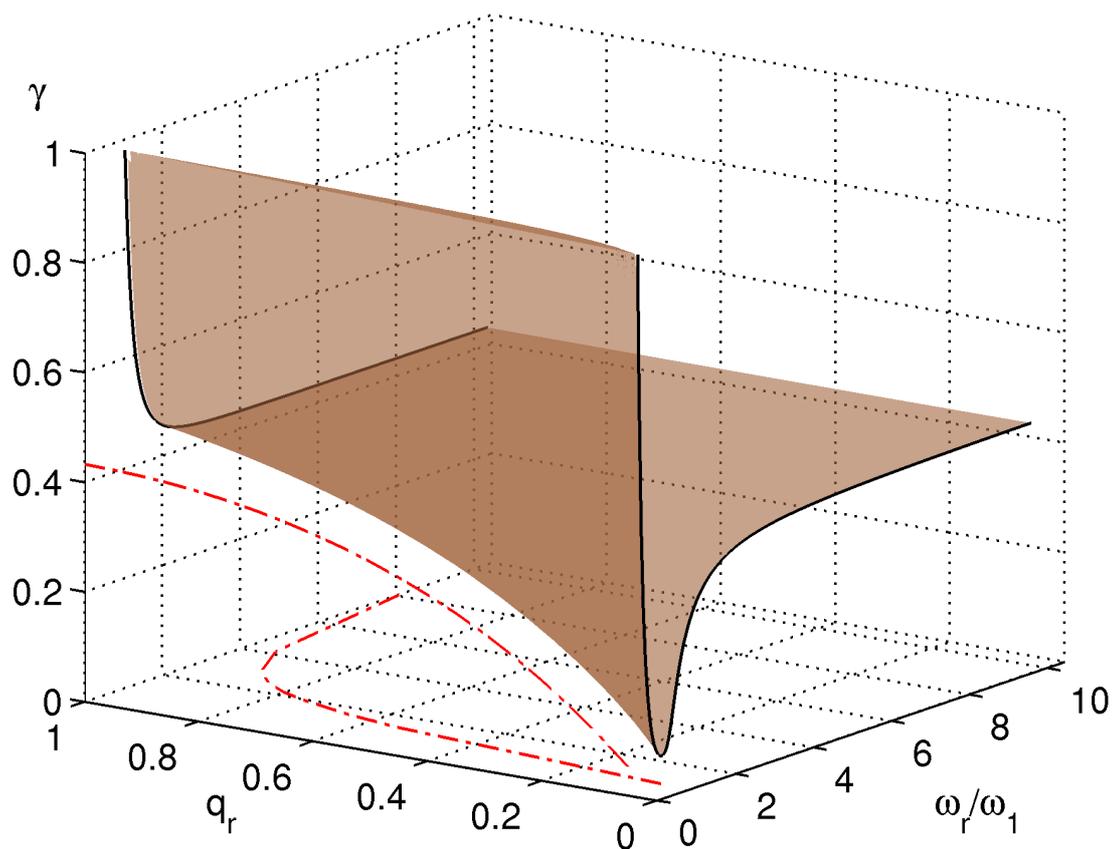


Figure 11.5: Surface giving the critical blowing pressure  $\gamma$  of the Hopf bifurcation corresponding to the first register, with respect to the reed damping parameter  $q_r$  and the reed modal frequency  $\omega_r$  (divided by the first bore resonance  $\omega_1$ ). The plain curves correspond to the limits of the chosen range for  $q_r$ , i.e.  $q_r = 0.05$  and  $q_r = 1$ . The dot-dashed curve in the plane  $\omega_r/\omega_1 = 0$  corresponds to the minimum  $\gamma_0$ , and the dot-dashed curve in the plane  $\gamma = 0$  corresponds to the value of  $\omega_r/\omega_1$  at which it occurs.

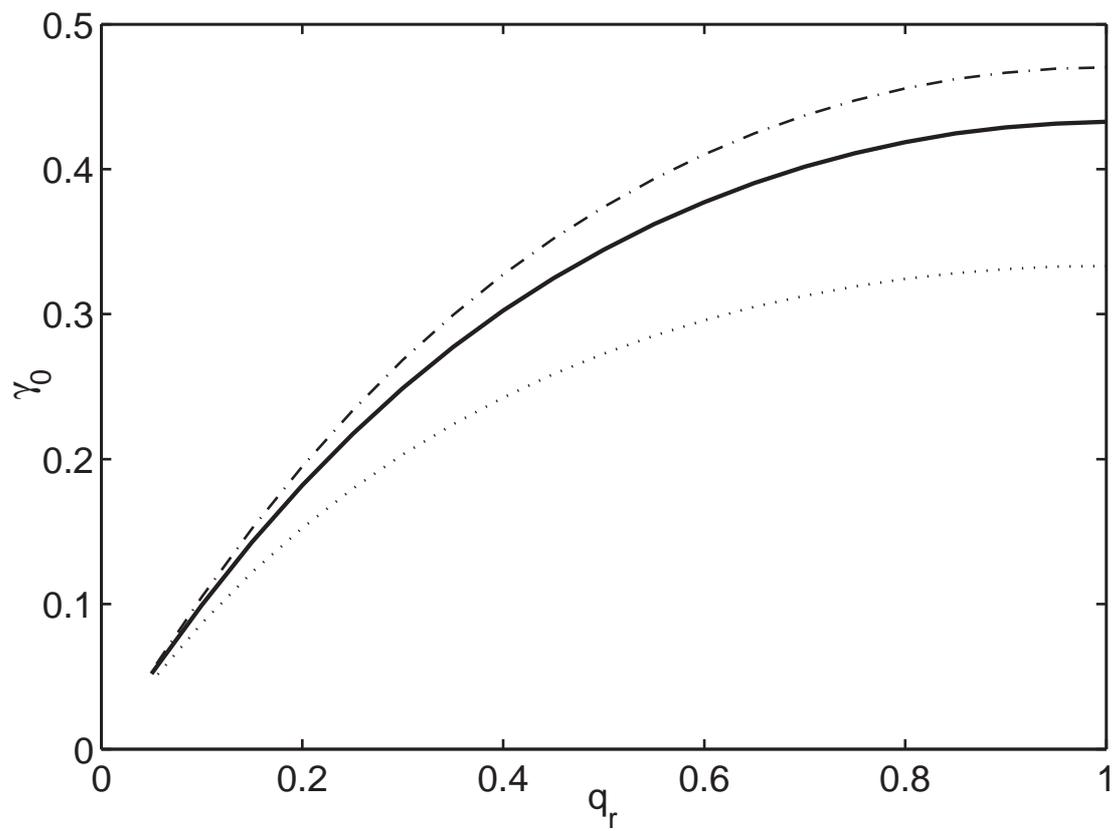


Figure 11.6: Minimum threshold  $\gamma_0$  as a function of  $q_r$ . Our numerical results (—), without approximation. Analytical results using two approximations: no loss (· · ·), single-mode resonator with losses (- · -).

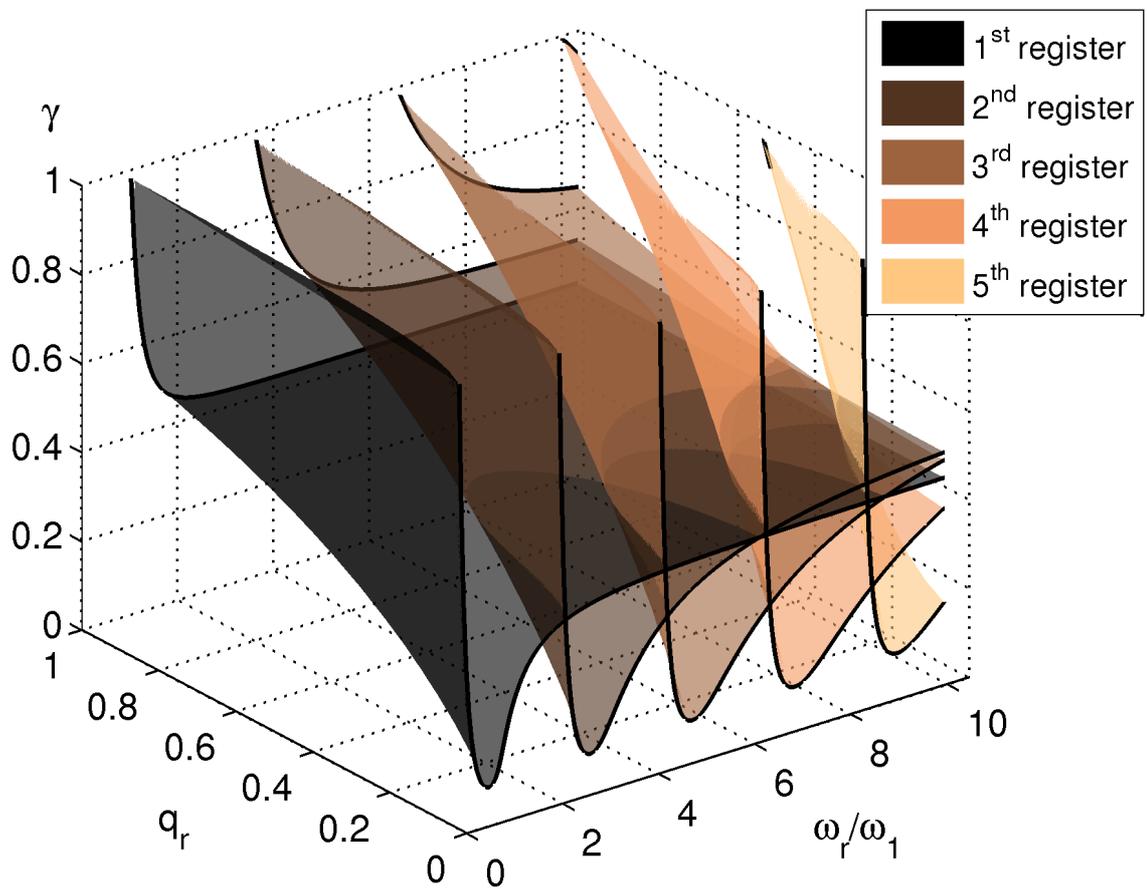


Figure 11.7: a) Similar plot as in figure 11.5 for the first five registers: the critical blowing pressure  $\gamma$  of each Hopf bifurcation is plotted with respect to the reed damping parameter  $q_r$  and frequency ratio  $\omega_r/\omega_1$ . The plain curves correspond to the smallest and highest  $q_r$  where a bifurcation occurs on the chosen range.

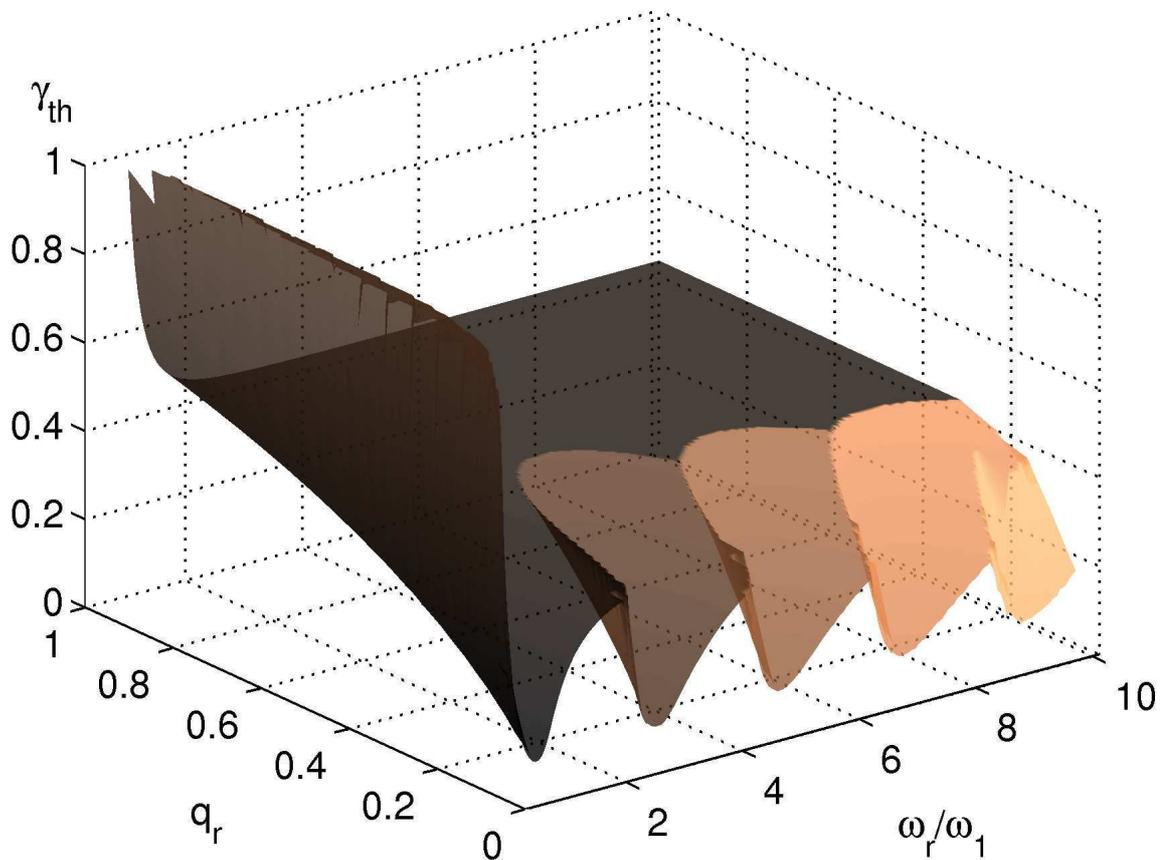


Figure 11.7: b) Extracted oscillation threshold: blowing pressure at threshold  $\gamma_{th}$ , defined by the lowest of the five surfaces plotted above.

However, the oscillation threshold is not always given by the Hopf bifurcation corresponding to the first register. Considering not only the first register, but the first five registers, leads to figure 11.7-a. Note that the number of registers is not arbitrary: at the right end of the figure, where  $\omega_r/\omega_1 \simeq 10$  ( $k_r L \simeq 16$ ), the sixth resonance ( $\omega_6 \simeq 11\omega_1$ ) is well beyond the reed resonance and thus cannot set up self-sustained oscillations because its Hopf bifurcation is beyond  $\gamma > 1$ . More registers should be considered if greater  $\omega_r$  values were to be explored. For sake of clarity,  $\gamma_0$  and  $\left.\frac{\omega_r}{\omega_1}\right|_0$  are not plotted. The plain lines in the plane ( $q_r = 0.05$ ) shows similar behaviour as in figure 11.2 and has already been discussed. The other black plain lines depict a very different situation where the first register always correspond to the lowest  $\gamma$ .

Figure 11.7-b shows the oscillation threshold, as defined by the first Hopf bifurcation encountered when increasing the blowing pressure  $\gamma$  from 0, as a function of the reed damping  $q_r$  and the frequency ratio  $\omega_r/\omega_1$ . It is deduced from the previous one the same way figure 11.3 was deduced from figure 11.2. Intersections between the five surfaces result in an oscillation threshold surface with several local minima.

It clearly shows how the reed damping, which can be control by the player with his lower lip, plays a key role in the register selection, as previously reported by W&B[27] and Silva et al.[23]. It is also clearly visible that the range of  $q_r$  for which a given register exists decreases with the index of this register. For instance, considering the fifth register, it can only be selected for  $q_r < 0.3$ .

The frequencies corresponding to the different registers are also calculated and plotted in figure 11.8. The frequency at threshold appears to be an increasing function of  $q_r$ , but the influence of  $q_r$  does not look significant in this 3D representation. When  $q_r$  goes from 0 to 1, the typical relative frequency deviations from the bore resonances are less than 1%. However, a frequency shift more than 4% can be observed for the first register around  $\omega_r/\omega_1 = 1.1$ . Such a ratio is quite unusual for a clarinet, but it is of great interest for reed organ-pipe manufacturer, where the reed natural frequency is close to the bore resonance, and the damping very small.

### 11.4.3 Influence of the control parameter $\zeta$

Let us remind here the definition of this parameter:  $\zeta = WZ_c\sqrt{2h_0/\rho K_a}$ . Its variations are mainly related to the changes of the reed opening parameter  $h_0$  during the play. Those are directly driven by changes of the player's lip pressure and position on the reed. Thus it is a very important control parameter of the model. Notice that players modify both  $q_r$  and  $\zeta$  when changing the embouchure.

Figure 11.9 shows the influence of  $\zeta$  on the blowing pressure and frequency at the oscillation threshold (expressed as the relative deviation to the corresponding bore resonance frequency). This control parameter happens to be critical for the regime selection : from very low values up to  $\zeta=0.17$ , the first regime (with a frequency close to the first acoustical mode of the bore  $f_0$ ) is selected, while the fourth regime ( $f \simeq 7f_0$ ) is selected for higher values.

The control parameter  $\zeta$  also has noticeable influence on the frequency of the oscillations at threshold: whereas the first regime frequency deviation is less than 0.3% (5 cents) in the range of  $\zeta$  where it is the selected regime, the fourth regime

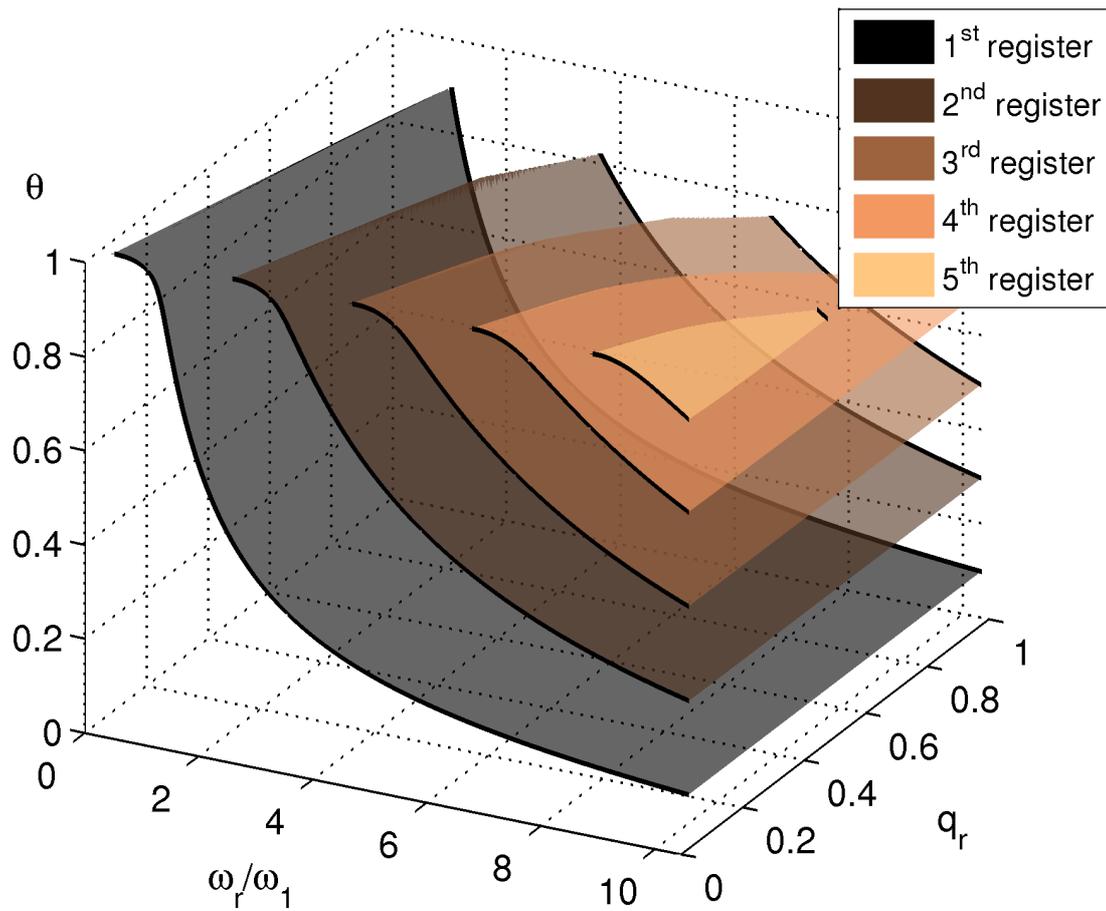


Figure 11.8: Dimensionless frequency  $\theta = \omega/\omega_r$  at the bifurcation for the first five registers, with respect to the reed damping  $q_r$  and the frequency ratio  $\omega_r/\omega_1$ .

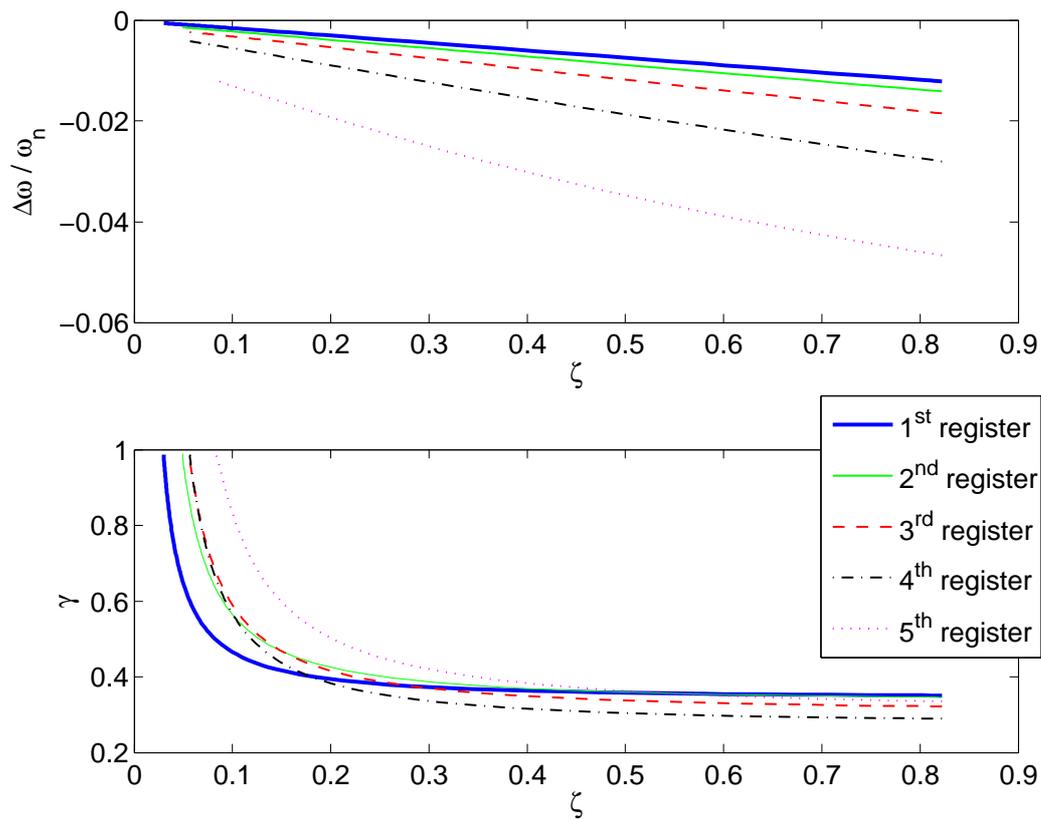


Figure 11.9: Variations of the oscillation threshold with respect to  $\zeta$ . Lower plot: critical, dimensionless blowing pressure  $\gamma$ ; the lowest curve defines the oscillation threshold  $\gamma_{th}$  at a given abscissa. Upper plot: relative frequency deviation  $\Delta\omega/\omega_n = (\omega - \omega_n)/\omega_n$  between the frequency at threshold  $\omega_{th}$  and the corresponding acoustical mode frequency  $\omega_n = \Im(s_n)$ . Model parameters:  $q_r=0.4$ ,  $fr=1500\text{Hz}$ ,  $S_r=0\text{cm}^2$ .

frequency deviation is as high as 2.7% (46 cents) for  $\zeta=0.8$ . This is a very important feature that has been highlighted in a paper by Guillemain et al.[17], where the lip stress on the mouthpiece of a saxophone were measured while a player was playing, showing an adjustment of the lip stress on the reed in order to correct the tone shortly after the beginning of the oscillations. It could also explain the difficult reproducibility of measurements when fitting a clarinet or saxophone mouthpiece in an artificial mouth.

The frequency deviations are monotoneous, decreasing functions of  $\zeta$ , almost linear on the range of interest. Also, when  $\zeta$  tends towards 0, the frequency at threshold tends to the corresponding bore passive resonance frequency. This result was to expect, since the boundary condition at the input end tends to a Neumann condition (infinite impedance). However, for very low values of  $\zeta$ , the blowing pressure threshold  $\gamma_{th}$  quickly increases, and eventually reaches 1 which is the also the static closing threshold. In the case where  $\gamma_{th} > 1$ , the reed channel is always closed and no sound is possible.

#### 11.4.4 Concurrent influence of $q_r$ and $\zeta$

Figure 11.10 shows the blowing pressure threshold with respect to the reed damping  $q_r$  and to the control parameter  $\zeta$ . For a given pair  $(q_r, \zeta)$ , the oscillation threshold is given by the lowest surface among the five 2D manifolds corresponding to the different registers.

Because the player's lower lip pressure and position on the reed, induce variations of both  $\zeta$  and  $q_r$  at the same time (the lip pressure being positively correlated with  $q_r$  and negatively with  $\zeta$ ), it is interesting to follow the oscillation threshold along the horizontal plane  $\zeta = 1 - q_r$ . On the one hand, for small values of  $\zeta$  and  $q_r$  close to unity (i.e. a high lip pressure) the first regime is clearly selected; on the other hand, for a high value of  $\zeta$  and small damping  $q_r$  (i.e. a relaxed lip on the reed), it is the fifth regime that is clearly selected. In between, all regimes are successively selected except the second regime that is noticeably absent of the figure.

#### 11.4.5 Influence of the reed motion induced flow

In the numerical results presented so far, the reed induced flow was not taken into account ( $S_r = 0$  in all previous figures). However, as pointed out by Silva et al. [23], it is important to take into account this additional flow, in order to predict accurately the emergent frequency at oscillation threshold.

Figure 11.11 shows the influence of the flow induced by the motion of the reed, through the value of the equivalent area  $S_r$  of the reed that participate to this flow. Previous works by Dalmont[9], Kergomard[7], or Silva[22, 23] report values around  $\Delta L=10mm$ , which corresponds, for a reed stiffness  $K_a=8.10^6 Pa/m$  and a bore of radius  $r=7mm$ , to  $S_r=0.86cm^2$ . Thus we scaled the variations of  $S_r$  between 0 and  $2cm^2$ , using parameters values corresponding to a relaxed embouchure, in order to well illustrate its influence.

An important frequency deviation is shown as  $S_r$  increases, as well as a regime selection "cascade": the selected register is successively the fifth, the fourth, the

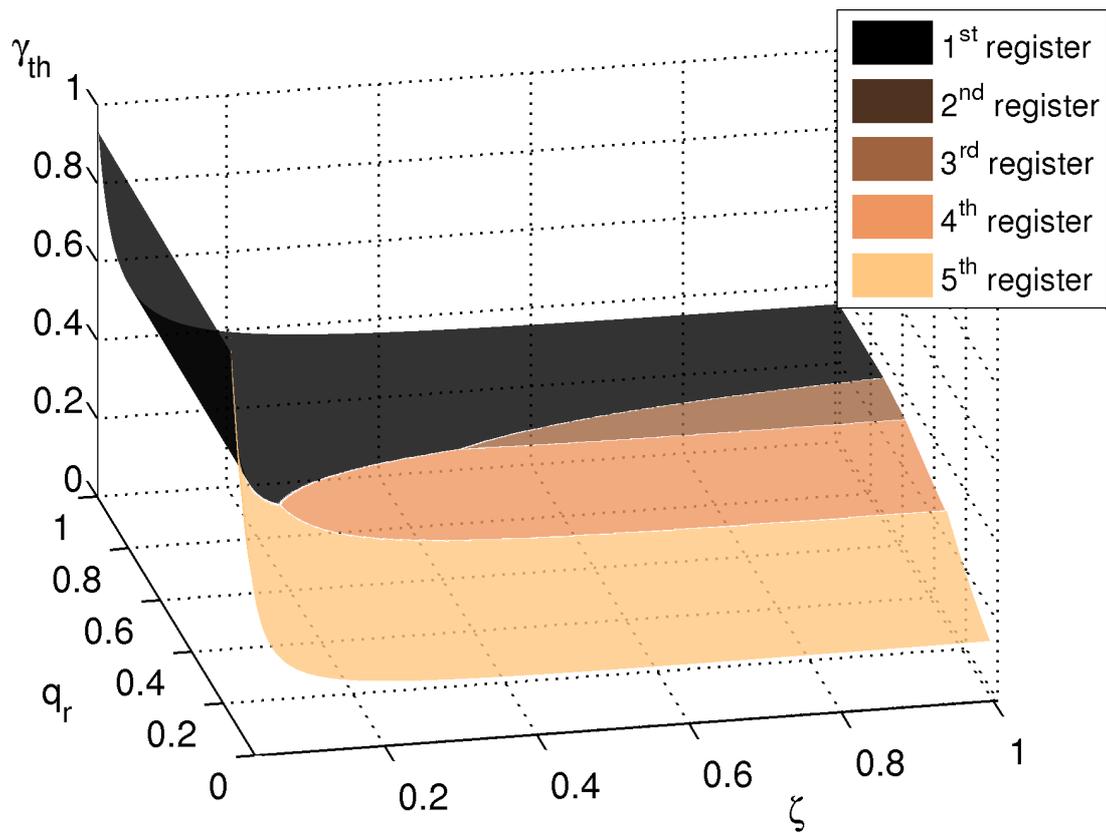


Figure 11.10: Oscillation threshold with respect to the reed damping parameter  $q_r$  and the control parameter  $\zeta$ . The blowing pressure threshold  $\gamma_{th}$  is calculated the same way as in figure 11.7-b. The surface shading indicate the selected regime.

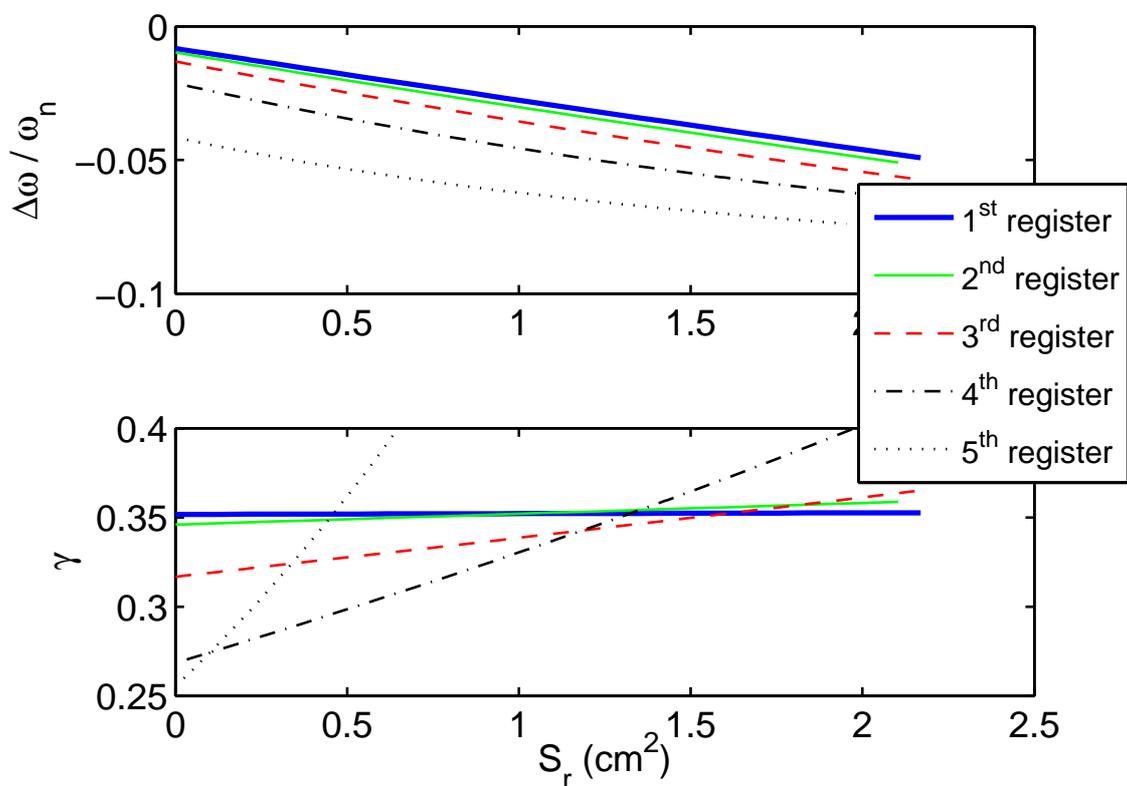


Figure 11.11: Variations of the oscillation threshold with respect to  $S_r$ : critical blowing pressure  $\gamma$  and relative frequency deviation from the bore resonances  $\Delta\omega/\omega_n$  for each of the five Hopf bifurcations. Parameters of the model:  $q_r = 0.3$ ,  $\zeta = 0.75$ ,  $f_r = 1500Hz$ .

third, and finally for high values of  $S_r$  the first. Finally, comparing with figure 11.10 (in the plane  $\zeta=.75$ ), the reed induced flow acts in a similar manner as the reed damping on the blowing pressure threshold and the regime selection.

## 11.5 Conclusion

In this paper, a clarinet physical model is investigated using numerical continuation tools. To the authors' knowledge, it is the first time that such method is used to compute the oscillation threshold variations with respect to several model parameters. The reed dynamics and its induced flow are shown to have critical influence on the regime selection and the minimal blowing pressure necessary to bifurcate from the static regime and establish a steady-state periodic oscillation: a note. Previous works already gave useful insights concerning the influence of some model parameters on ease of play and intonation. The present work confirm and extend these results to the case of a more complex model. Moreover, the method used allows to investigate variations of two parameters at the same time, instead of one, like in previous studies.

In this approach, the parameters of the model are assumed to be constant or to undergo quasi-static variations. However, in real situation, the player can modify some control parameters (e.g. blowing pressure, lip stress on the reed) at a timescale that might sometimes be comparable to the oscillations period. Guillemain[17] reported measured variations of  $\gamma$  on a time scale of a few milliseconds only, which is comparable to the period of an oscillation at  $150Hz$ . However, despite such a limitation, the results provided through numerical continuation are out of reach for direct time simulations.

Whereas the main results presented here concern a clarinet model, it should be noted that the method itself is very general. No hypotheses (other than linear behaviour) is made on the resonator. Thus, other resonators can be studied by fitting the modal decomposition to its input impedance spectrum. For instance, extending to the case of the saxophone or taking into account the tone holes only requires to compute the corresponding modal decomposition of the input impedance. Even the physical model can be modified. It only has to be written as a set of first order ordinary differential equations (and additional algebraic equations, if necessary). The method could also be used to compare models with each other.

In comparison with the method of the characteristic equation, the computations are much faster: Silva reported ten minutes of computation per branch, whereas it lasts only a few seconds in the present case. Moreover, the continuation algorithm used is very robust: strong variations (as variations of  $\gamma$  for low  $k_r L$  in fig. 11.2) do not require special care and are computed in a straightforward way.

The same continuation method applied to the continuation of periodic solutions, as described by the authors in a conference paper[19], also allows to compute the entire dynamic range of a given model of wind instrument, without any additional simplification, unlike previous works (see Dalmont[10] et al). From that perspective, the numerical continuation approach seems promising for the global investigation of the behaviour of a given physical model of musical instrument.

Applications of this work to instrument making are possible: for instance, modifications of the geometry of the resonator can be studied in terms of their influence on ease of play and intonation. Other applications concerning mapping strategies for sound synthesis are also of interest. Indeed, the estimation of the parameters of a model is a difficult task, especially when the parameters values should vary to reproduce through sound synthesis typical behaviours of the instrument modelled. On the one hand, direct measurements on a real player are most of the time highly complicated (for example,  $\omega_r$ ,  $q_r$  or even  $h_0$  when the lips of the player is pressed on the reed). On the other hand, inverse problems still appear to be limited to the estimation of parameter values from a synthesised sound.

Thus, the approach presented in this paper offers the possibility to know in advance the influence the parameter values on some key features of the model behaviour around the oscillation threshold : ease of play, regime selection and fine intonation. Therefore, mapping strategies could be developed for sound synthesis applications. They would consist in binding different parameters in order to let a player modify one of them while maintaining the same playing frequency (at threshold) for a given note for example, or while preserving the ease of play on a whole register.

## Bibliography

- [1] Manlab 2.0, an interactive continuation software. URL <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr>. (last viewed 3/16/2011) Software written by S. Karkar, R. Arquier, B. Cochelin, C. Vergez, O. Thomas and A. Lazarus.
- [2] Moreesc, modal resonator-reed interaction simulation code. URL <http://moreesc.lma.cnrs-mrs.fr>. (last viewed 3/16/2011) Software written by F. Silva.
- [3] A. Almeida, C. Vergez, and R. Caussé. Experimental investigation of reed instrument functioning through image analysis of reed opening. *Acta Acustica united with Acustica*, 93:645–658, Between July and August 2007.
- [4] F. Avanzini and M. van Walstijn. Modelling the mechanical response of the reed-mouthpiece-lip system of a clarinet. part I. a one-dimensional distributed model. *Acta Acustica united with Acustica*, 90:537–547, May 2004.
- [5] J. Backus. Small-vibration theory of the clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 35: 305–313, 1963.
- [6] A. H. Benade and D. J. Gans. Sound production in wind instruments. *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, pages 247–263, 1968.
- [7] A. Chaigne and J. Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*, chapter 5, pages 202–223. Belin, Paris, 2008. ISBN 978-2-7011-3970-8.
- [8] Y. M. Chang. Reed stability. *Journal of Fluids and Structures*, 8:771–783, 1994.

- 
- [9] J.-P. Dalmont, B. Gazengel, J. Gilbert, and J. Kergomard. Some Aspects of Tuning and Clean Intonation in Reed Instruments. *Applied Acoustics*, 46:19–60, 1995.
- [10] J.-P. Dalmont, J. Gilbert, and J. Kergomard. Reed instruments, from small to large amplitude periodic oscillations and the helmholtz motion analogy. *Acta Acustica*, 86(4):671–684, July 2000.
- [11] J.-P. Dalmont, J. Gilbert, and S. Ollivier. Nonlinear characteristics of single-reed instruments: Quasistatic volume flow and reed opening measurements. *Journal of the Acoustical Society of America*, 114(4):2253–2262, Oct. 2003.
- [12] E. J. Doedel. Lecture notes on numerical analysis of nonlinear equations, spring 2010. URL <http://indy.cs.concordia.ca/auto/notes.pdf>. (last viewed 3/16/2011).
- [13] E. J. Doedel and B. E. Oldeman. *AUTO-07P : Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations*. Concordia University, Montreal, Canada, Jan. 2009. URL <http://indy.cs.concordia.ca/auto/>. (last viewed 3/16/2011).
- [14] N. Fletcher and T. Rossing. *The Physics of musical instruments*, pages 345–494. Springer, Berlin, 1991.
- [15] N. H. Fletcher. Autonomous vibration of simple pressure-controlled valves in gas flows. *J. Acoust. Soc. Am.*, 93:2172–2180, 1993.
- [16] B. Gazengel, T. Guimezanes, J.-P. Dalmont, J.-B. Doc, S. Fagart, and Y. Léveillé. Experimental investigation of the influence of the mechanical characteristics of the lip on the vibrations of the single reed. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, Barcelona, Spain, Sept. 2007.
- [17] P. Guillemain, C. Vergez, D. Ferrand, and A. Farcy. An instrumented saxophone mouthpiece and its use to understand how an experienced musician plays. *Acta Acustica united with Acustica*, 96(4):622–634, 2010.
- [18] A. Hirschberg. *Mechanics of Musical Instruments*, chapter 7, pages 291–369. Number 355 in CISM Courses and Lectures. Springer, Wien - New York, 1995.
- [19] S. Karkar, C. Vergez, and B. Cochelin. Toward the systematic investigation of periodic solutions in single reed woodwind instruments. In *Proceedings of the 20th International Symposium on Music Acoustics (Associated Meeting of the International Congress on Acoustics)*. International Commission for Acoustics, Aug. 2010.
- [20] H. B. Keller. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. In *Applications of Bifurcation Theory*, pages 359–384, New York - San Francisco - London, 1977. Academic Press.
- [21] J. Saneyoshi, H. Teramura, and S. Yoshikawa. Feedback oscillations in reed woodwind and brasswind instruments. *Acustica*, 62:194–210, 1987.

- [22] F. Silva. *Emergence des auto-oscillations dans un instrument de musique à anche simple (Sound production in single reed woodwind instruments)*. PhD thesis, Aix-Marseille University, LMA - CNRS, 2009.
- [23] F. Silva, J. Kergomard, C. Vergez, and J. Gilbert. Interaction of reed and acoustic resonator in clarinet-like systems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 124(5):3284–3295, Nov. 2008.
- [24] A. Z. Tarnopolsky, N. H. Fletcher, and J. C. S. Lai. Oscillating reed valves – an experimental study. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108:400–406, 2000.
- [25] S. C. Thompson. The effect of the reed resonance on woodwind tone production. *Journal of the Acoustical Society of America*, 66(5):1299–1307, Nov. 1979.
- [26] M. van Walstijn and F. Avanzini. Modelling the mechanical response of the reed-mouthpiece-lip system of a clarinet. part II: A lumped model approximation. *Acta Acustica united with Acustica*, 93:435–446, 2004.
- [27] T. A. Wilson and G. S. Beavers. Operating modes of the clarinet. *Journal of the Acoustical Society of America*, 56(2):653–658, Aug. 1974.
- [28] W. E. Worman. *Self-sustained nonlinear oscillations of medium amplitude in clarinet-like systems*. PhD thesis, Case Western Reserve University, 1971.

# Conclusion générale

Les régimes périodiques, que ce soit en acoustique musicale ou en calcul de structures, jouent un rôle central. C'est ce qui a motivé l'ensemble des recherches entreprises dans cette thèse. Des travaux présentés dans ce document se dégagent alors plusieurs contributions, dans le domaine des méthodes numériques d'une part, et en acoustique musicale d'autre part.

Tout d'abord, nous avons amélioré un outil existant, le logiciel MANLAB. La version 2.0 mise à disposition de la communauté scientifique en novembre 2010 offre une méthode de calcul des solutions périodiques et leur stabilité, basée sur l'équilibrage harmonique. Elle offre également des performances améliorées permettant de traiter des systèmes de plus grande taille (plusieurs milliers d'inconnues sur un ordinateur portable standard).

D'autres développements plus récents, comme l'ajout de la méthode de collocation ou la reformulation en tenseurs, permettront par ailleurs de proposer une nouvelle version très bientôt. Nous avons également fait progresser la méthode elle-même, en proposant une formulation adaptée au cas de non-linéarités non polynômiales pour le calcul des solutions périodiques. Si des améliorations sont encore possibles, l'état d'avancement actuel de MANLAB en fait le seul outil qui propose l'équilibrage harmonique *et* la collocation dans un même cadre, tout en reposant sur une méthode de continuation alternative aux traditionnels prédicteurs-correcteurs.

Le fait que ce code, sous licence CeCILL, soit librement distribué<sup>a</sup> est d'ailleurs un vecteur de collaboration très appréciable (en témoigne la collaboration avec Olivier Thomas et Arnaud Lazarus du LMSSC pour le calcul de stabilité), ainsi qu'un moyen de diffusion efficace (15-20 téléchargements par mois au dernier trimestre).

Ensuite, nous avons montré l'adéquation de cet outil avec l'étude des régimes périodiques de différents instruments de musique. L'acoustique musicale s'est appropriée depuis longtemps la méthode de l'équilibrage harmonique pour étudier les régimes périodiques des instruments de musique. Toutefois, l'approche par continuation semble être nouvelle pour l'étude des instruments auto-oscillants. De même, l'approche temporelle est habituellement restreinte à la simulation directe (par intégration des équations), et la collocation propose alors une nouvelle alternative.

Dans son ensemble, l'approche proposée permet d'obtenir des diagrammes de bifurcation jusqu'alors inaccessibles avec de tels modèles. L'utilisation des outils développés, à la lumière des premiers résultats obtenus, nous paraît donc une nouvelle

---

<sup>a</sup>Disponible à l'adresse <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr>

voie prometteuse pour l'acoustique musicale.

## Perspectives

De nombreuses perspectives intéressantes pourraient permettre de poursuivre les travaux entrepris dans cette thèse, aussi bien du côté des méthodes que des applications.

Le logiciel MANLAB reste un « laboratoire d'expérimentation numérique » et de nombreux enrichissements sont encore possibles. La détection automatique des bifurcations (non pas en post-traitement, mais pendant la continuation) est sur le point d'aboutir, ce qui rendrait la continuation plus rapide et le branchement plus simple. L'utilisation de l'équilibrage harmonique sous sa forme originale (en alternant entre domaines temporel et fréquentiel par FFT et  $FFT^{-1}$ ) donne déjà des résultats prometteurs et sont l'objet d'une collaboration avec l'équipe SACADS du LMA. Par ailleurs, une version *totale* indépendante du cadre quadratique, où le calcul des séries serait basé sur la différentiation automatique, est également en gestation.

Du côté des méthodes de discrétisation, l'équilibrage harmonique pourrait être enrichi, à la manière de Kim et Perkins [52], de fonctions discontinues (ou aux dérivées discontinues) afin d'être plus adapté aux non-régularités de type contact solide et frottement de Coulomb. Une extension de l'HBM aux régimes quasi-périodiques à deux fréquences est également une piste possible. La collocation, quant à elle, bénéficierait grandement d'un schéma de maillage adaptatif, afin de concentrer les éléments dans les zones de forte variation des solutions, ainsi qu'un calcul de la matrice de monodromie directement à partir de la matrice tangente, ce qui permettrait un calcul de stabilité très rapide.

Par ailleurs, l'ajout de la collocation dans MANLAB permet de calculer les solutions de problèmes avec conditions aux limites quelconques, pas seulement périodiques. Parallèlement à l'extension aux non-linéarités non polynômiales, cette méthode ouvre donc des perspectives d'application intéressantes comme, par exemple, l'étude de structures soumises à des contacts localisés (avec régularisation exponentielle). La thèse de Jiang Wang au LMA sur le pompage énergétique, celle d'El Hadi Moussi entre le LMA et EDF sur les modes de vibration non linéaires de poutres avec contacts localisés, les travaux de Renaud Côte au LMA sur les systèmes forcés à retards, ou encore les travaux d'Olivier Thomas au LMSSC sur les NEMS montrent la richesse des applications possibles en mécanique.

Concernant les instruments auto-oscillants, l'étude proposée sur la clarinette et le saxophone pourrait être reprise avec des impédances d'entrée mesurées pour plusieurs doigtés, et avec prise en compte du débit d'anche. L'ajustement des coefficients de la décomposition modale sur les impédances mesurées est également un point à améliorer. Il faudrait par ailleurs prendre en compte l'effet du conduit vocal en intégrant son impédance d'entrée dans le modèle.

Une extension aux instruments de type cuivres est immédiate, et Hélie et Vergez [43] proposent notamment une approche intéressante de la propagation non linéaire

qui serait intéressant de tester dans un cadre de continuation.

Enfin, l'étude sur le violon a montré des résultats encourageants et pourrait également être poursuivie avec un modèle plus complet de l'instrument.

MANLAB étant devenu un outil mature, et proposant une interface de contrôle relativement simple, la communauté de l'acoustique musicale dispose désormais d'un outil de choix pour l'étude systématique des régimes périodiques des instrument auto-oscillants.



# Bibliographie

- [1] W. AGGOUNE, H. ZAHROUNI et M. POTIER-FERRY : High-order prediction-correction algorithms for unilateral contact problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168(1-2):1 – 9, 2004. ISSN 0377-0427. Selected Papers from the Second International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering (ACOMEN 2002).
- [2] A. ALMEIDA, C. VERGEZ et R. CAUSSÉ : Experimental investigation of reed instrument functioning through image analysis of reed opening. *Acta Acustica united with Acustica*, 93:645–658, Between July and August 2007.
- [3] R. ARQUIER, S. BELLIZZI, R. BOUC et B. COCHELIN : Two methods for the computation of the nonlinear modes of vibrating systems at large amplitudes. *Computers and Structures*, 84:1565–1576, 2006.
- [4] R. ARQUIER : *Une méthode de calcul des modes de vibrations non linéaires des structures*. Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II), 2007.
- [5] F. AVANZINI et M. van WALSTIJN : Modelling the mechanical response of the reed-mouthpiece-lip system of a clarinet. part I. a one-dimensional distributed model. *Acta Acustica united with Acustica*, 90:537–547, mai 2004.
- [6] J. BACKUS : Small-vibration theory of the clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 35:305–313, 1963.
- [7] A. BELENDEZ, C. PASCUAL, D. I. MENDEZ, T. BELENDEZ et C. NEIPP : Exact solution for the nonlinear pendulum. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29(4):645–648, Between October and December 2007. ISSN 1806-1117.
- [8] A. H. BENAÏE et D. J. GANS : Sound production in wind instruments. *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, p. 247–263, 1968.
- [9] P. BERGÉ, Y. POMEAU et C. VIDAL : *L'ordre dans le chaos*. Hermann, 5e tirage édn, 1998. ISBN 2-7056-5980-3.
- [10] J. M. CADOU, M. POTIER-FERRY, B. COCHELIN et N. DAMIL : Anm for stationary navier-stokes equations and with petrov-galerkin formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(4):825–845, 2001. ISSN 1097-0207.

- 
- [11] A. CHAIGNE et J. KERGOMARD : *Acoustique des instruments de musique*. Belin, Paris, 2008. ISBN 978-2-7011-3970-8.
- [12] Y. M. CHANG : Reed stability. *Journal of Fluids and Structures*, 8:771–783, 1994.
- [13] I. CHARPENTIER et M. POTIER-FERRY : Différentiation automatique de la méthode asymptotique numérique typée : l’approche diamant. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(3):336 – 340, 2008. ISSN 1631-0721.
- [14] B. COCHELIN : A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers and Structures*, 53:1181–1192, 1994.
- [15] B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY : *Méthode Asymptotique Numérique*. Lavoisier, Paris, 2007. ISBN 978-2-7462-1567-2.
- [16] B. COCHELIN et C. VERGEZ : A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 324:243–262, 2009.
- [17] J.-P. DALMONT, B. GAZENGEL, J. GILBERT et J. KERGOMARD : Some Aspects of Tuning and Clean Intonation in Reed Instruments. *Applied Acoustics*, 46:19–60, 1995.
- [18] J.-P. DALMONT, J. GILBERT et J. KERGOMARD : Reed instruments, from small to large amplitude periodic oscillations and the helmholtz motion analogy. *Acta Acustica*, 86(4):671–684, juil. 2000.
- [19] J.-P. DALMONT, J. GILBERT, J. KERGOMARD et S. OLLIVIER : An analytical prediction of the oscillation and extinction thresholds of a clarinet. *Journal of the Acoustical Society of America*, 118(5):3294–3305, nov. 2005.
- [20] J.-P. DALMONT, J. GILBERT et S. OLLIVIER : Nonlinear characteristics of single-reed instruments : Quasistatic volume flow and reed opening measurements. *Journal of the Acoustical Society of America*, 114(4):2253–2262, oct. 2003.
- [21] C. DE BOOR et B. SWARTZ : Collocation at gaussian points. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10(4), sept. 1973.
- [22] V. DEBUT : *Deux études d’un instrument de musique de type clarinette : Analyse des fréquences propres du résonateur et calcul des auto-oscillations par décomposition modale*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, 2004.
- [23] A. DHOOGHE, W. GOVAERTS et Y. A. KUZNETSOV : MATCONT : A MATLAB package for numerical bifurcation analysis of odes. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 29(2):141–164, juin 2003. ISSN 0098-3500.
- [24] M. di BERNARDO, C. J. BUDD, A. R. CHAMPNEYS et P. KOWALCZYK : *Piecewise-smooth dynamical systems : Theory and Applications*. Springer, 2007.

- 
- [25] E. J. DOEDEL : *Lecture Notes on Numerical Analysis of Nonlinear Equations*. Springer, Dordrecht, NL, 2007. ISBN 978-1-4020-6355-8.
- [26] E. J. DOEDEL : Lecture notes on numerical analysis of nonlinear equations, 2010. URL <http://indy.cs.concordia.ca/auto/notes.pdf>. (last visited 28/06/2011) 391 slides.
- [27] E. J. DOEDEL et B. E. OLDEMAN : *AUTO-07P : Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations*. Concordia University, Montreal, Canada, jan. 2009. URL <http://indy.cs.concordia.ca/auto/>. (last visited 1/11/2010).
- [28] E. DUCASSE : *Modélisation et simulation dans le domaine temporel d'instruments à vent à anche simple en situation de jeu : méthodes et modèles*. Thèse de doctorat, Université du Maine, 2001.
- [29] K. ENGELBORGHES, T. LUZYANINA, K. J. IN 'T HOUT et D. ROOSE : Collocation methods for the computation of periodic solutions of delay differential equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 22(5):1593–1609, 2000.
- [30] S. FARNER, C. VERGZE, J. KERGOMARD et A. LIZÉE : Contribution to harmonic balance calculations of self-sustained periodic oscillations with focus on single-reed instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 119, 2006.
- [31] N. FLETCHER et T. ROSSING : *The Physics of musical instruments*. Springer, Berlin, 1991.
- [32] N. H. FLETCHER : Autonomous vibration of simple pressure-controlled valves in gas flows. *J. Acoust. Soc. Am.*, 93:2172–2180, 1993.
- [33] G. FLOQUET : Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, 2e série(tome 12):47–88, 1883.
- [34] B. GAZENGEL, T. GUIMEZANES, J.-P. DALMONT, J.-B. DOC, S. FAGART et Y. LÉVEILLÉ : Experimental investigation of the influence of the mechanical characteristics of the lip on the vibrations of the single reed. *In Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, Barcelona, Spain, sept. 2007.
- [35] J. GILBERT, J. KERGOMARD et E. NGOYA : Calculation of the steady-state oscillations of a clarinet using the harmonic balance technique. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1989.
- [36] D. GOTTLIEB et S. A. ORSZAG : *Numerical Analysis of Spectral Methods : Theory and Applications*. S.I.A.M., Philadelphia, Pennsylvania, 6th printing édn, 1977. ISBN 978-0-898710-23-6.
- [37] N. GRAND, J. GILBERT et F. LALOE : Oscillation threshold of woodwind instruments. *Acta Acustica united with Acustica*, 83(1):137–151, 1997.

- [38] P. GUILLEMAIN, J. KERGOMARD et T. VOINIER : Real-time synthesis of clarinet-like instruments using digital impedance models. *Journal of the Acoustical Society of America*, 118(1):483–494, 2005.
- [39] P. GUILLEMAIN et F. SILVA : De l'utilisation de la décomposition modale pour la synthèse sonore temps réel : écueils et solutions. *In Actes du 10ème Congrès Français d'Acoustique*, 2010.
- [40] P. GUILLEMAIN, C. VERGEZ, D. FERRAND et A. FARCY : An instrumented saxophone mouthpiece and its use to understand how an experienced musician plays. *Acta Acustica united with Acustica*, 96(4):622–634, 2010.
- [41] A. HINDMARSH : *ODEPACK, a Systematized Collection of ODE Solvers*, in *Scientific Computing*. Elsevier, 1983. ISBN 978-0444866073.
- [42] A. HIRSCHBERG : *Mechanics of Musical Instruments*, chap. 7, p. 291–369. Num. 355 de CISM Courses and Lectures. Springer, Wien - New York, 1995.
- [43] T. HÉLIE et C. VERGEZ : Propagation non linéaire avec amortissement proportionnel : simulation entrée-sortie de solutions entropiques. *In Actes du 20e Congrès Français d'Acoustique*, 2010.
- [44] O. INÁCIO, J. ANTUNES et M. WRIGHT : Computational modelling of string-body interaction for the violin family and simulation of wolf notes. *J. Sound Vib.*, 310:260–286, 2007.
- [45] N. KACEM, S. BAGUET, S. HENTZ et R. DUFOUR : Computational and quasi-analytical models for non-linear vibrations of resonant mems and nems sensors. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(3):532 – 542, 2011. ISSN 0020-7462.
- [46] S. KARKAR, R. ARQUIER, B. COCHELIN, C. VERGEZ, A. LAZARUS et O. THOMAS : *MANLAB 2.0, an interactive continuation software*, 2010. URL <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr>. (last visited 28/06/2011).
- [47] S. KARKAR, C. VERGEZ et B. COCHELIN : Toward the systematic investigation of periodic solutions in single reed woodwind instruments. *In Proceedings of the 20th International Symposium on Music Acoustics (Associated Meeting of the International Congress on Acoustics)*. International Commission for Acoustics, août 2010.
- [48] G. E. KARNIADAKIS et S. J. SHERWIN : *Spectral/hp Element Methods For Computational Fluid Dynamics*. OXFORD University Press, 2005.
- [49] H. B. KELLER : Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. *In Applications of Bifurcation Theory*, Proceedings of an Advanced Seminar : Applications of Bifurcation Theory, p. 359–384. Mathematics Research Center, The University of Wisconsin at Madison, Academic Press, 1977.

- 
- [50] H. KELLER : *Numerical methods in bifurcation problems*. Springer, Berlin, 1987.
- [51] J. KERGOMARD, S. OLLIVIER et J. GILBERT : Calculation of the spectrum of self-sustained oscillations using a variable truncation method : application to cylindrical reed instruments. *Acustica – Acta acustica*, 86, 2000.
- [52] W.-J. KIM et N. PERKINS : Harmonic balance/galerkin method for non-smooth dynamic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 261(2):213 – 224, 2003. ISSN 0022-460X.
- [53] B. KRAUSKOPF, H. M. OSINGA et J. GALAN-VIOQUE, édés. *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems*. Springer, 2007. ISBN 978-1-4020-6355-8.
- [54] P. LADEVÈZE : *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag, 1999.
- [55] K. LAMPOH, I. CHARPENTIER et E. M. DAYA : A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. part iii : Sensitivity computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, In Press.
- [56] A. LAZARUS et O. THOMAS : A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus de Mécanique*, 338:510–517, 2010.
- [57] H. LEVINE et J. SCHWINGER : On the radiation of sound from an unflanged circular pipe. *Phys. Rev.*, 73(4):383–406, fév. 1948.
- [58] MATLAB : *version 7.7.0 (R2008b)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2008.
- [59] F. J. MUÑOZ-ALMARAZ, E. FREIRE, J. GALÁN, E. DOEDEL et A. VANDERBAUWHEDE : Continuation of periodic orbits in conservative and hamiltonian systems. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 181(1-2):1 – 38, 2003.
- [60] G. MÜLLER et H. MÜLLER : Choice of strings for the instruments of the violin family using simplified theoretical aspects. *In ISMA 98 Proceedings*, p. 29–34, 1998.
- [61] M. NAKHLA et J. VLACH : A piecewise harmonic balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 23(2):85 – 91, feb 1976. ISSN 0098-4094.
- [62] A. H. NAYFEH et B. BALACHANDRAN : *Applied Nonlinear Dynamics*. John Wiley and Sons, Inc., 1995. ISBN 0-471-59348-6.
- [63] C. J. NEDERVEEN : *Acoustical aspects of woodwind instruments*. Northern Illinois, DeKalb, 1998. ISBN 0-87580-577-9.

- [64] M.-C. PAUZIN, S. MENSAH, B. COCHELIN et J.-P. LEFEBVRE : High order harmonic balance formulation of free and encapsulated microbubbles. *Journal of Sound and Vibration*, 330(5):987 – 1004, 2011. ISSN 0022-460X.
- [65] M. PEETERS, R. VIGUIÉ, G. SERANDOUR, G. KERSCHEN et J. GOLINVAL : Nonlinear normal modes, part ii : practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23:195–216, 2009.
- [66] Z. PENG, Z. LANG, S. BILLINGS et G. TOMLINSON : Comparisons between harmonic balance and nonlinear output frequency response function in nonlinear system analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 311:56–73, 2008.
- [67] L. PERKO : *Differential Equations and Dynamical Systems*, vol. 7 de *Texts in Applied Mathematics*. Springer, 1993. ISBN 3-540-97443-1.
- [68] B. RICAUD, P. GUILLEMAIN, J. KERGOMARD, F. SILVA et C. VERGEZ : Behavior of reed woodwind instruments around the oscillation threshold. *Acta Acustica*, 95(4):733–743, 2009.
- [69] J. SANEYOSHI, H. TERAMURA et S. YOSHIKAWA : Feedback oscillations in reed woodwind and brasswind instruments. *Acustica*, 62:194–210, 1987.
- [70] R. SCHUMACHER : Self sustained oscillations of the clarinet : an integral equation approach. *Acustica*, 40, 1978.
- [71] J.-A. SEPULCHRE et R. S. MACKAY : Localized oscillations in conservative or dissipative networks of weakly coupled autonomous oscillators. *Nonlinearity*, 10(3):679, 1997.
- [72] R. SEYDEL : *Practical bifurcation and stability analysis. From Equilibrium to Chaos*. Springer, Berlin, 1994. 2nd ed.
- [73] R. SEYDEL : Nonlinear computation. *J. Franklin Inst.*, 334B(5/6):1015–1047, 1997.
- [74] L. F. SHAMPINE et M. W. REICHELDT : The matlab ode suite. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18(1):1–22, jan. 1997.
- [75] F. SILVA : *Emergence des auto-oscillations dans un instrument de musique à anche simple (Sound production in single reed woodwind instruments)*. Thèse de doctorat, Aix-Marseille University, LMA - CNRS, 2009.
- [76] F. SILVA : Moreesc, modal resonator-reed interaction simulation code, 2009. URL <http://moreesc.lma.cnrs-mrs.fr>. (last viewed 3/16/2011).
- [77] F. SILVA, V. DEBUT, J. KERGOMARD, C. VERGEZ, A. LIZÉE DEBLEVID et P. GUILLEMAIN : Simulation of single reed instruments oscillations based on modal decomposition of bore and reed dynamics. *In Proceedings of the International Congress of Acoustics*, Madrid, Spain, sept. 2007.

- [78] F. SILVA, P. GUILLEMAIN, J. KERGMARD, B. MALLARONI et A. N. NORRIS : Approximation formulae for the acoustic radiation impedance of a cylindrical pipe. *Journal of Sound and Vibration*, 322:255–263, 2008.
- [79] F. SILVA, J. KERGMARD, C. VERGEZ et J. GILBERT : Interaction of reed and acoustic resonator in clarinet-like systems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 124(5):3284–3295, nov. 2008.
- [80] J. SMITH et J. WOODHOUSE : The tribology of rosin. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(8):1633 – 1681, 2000. ISSN 0022-5096.
- [81] K. TAKAHASHI, H. KODAMA, A. NAKAJIMA et T. TACHIBANA : Numerical study on multi-stable oscillations of woodwind single-reed instruments. *Acta Acustica United with Acustica*, 95:1123–1139, 2009.
- [82] A. Z. TARNOPOLSKY, N. H. FLETCHER et J. C. S. LAI : Oscillating reed valves – an experimental study. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108:400–406, 2000.
- [83] S. C. THOMPSON : The effect of the reed resonance on woodwind tone production. *Journal of the Acoustical Society of America*, 66(5):1299–1307, nov. 1979.
- [84] M. URABE : Periodic solutions of differential systems, galerkin’s procedure and the method of averaging. *Journal of Differential Equations*, 2(3):265 – 280, 1966. ISSN 0022-0396.
- [85] M. van WALSTIJN et F. AVANZINI : Modelling the mechanical response of the reed-mouthpiece-lip system of a clarinet. part II : A lumped model approximation. *Acta Acustica united with Acustica*, 93:435–446, 2004.
- [86] P. VIGUÉ : Friction régularisée et continuation : analyse des solutions périodiques d’un modèle simple de corde frottée, 2011. Rapport de stage de Master 1.
- [87] S. WIGGINS : *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, vol. 2 de *Texts in applied mathematics*. Springer, 2003. ISBN 0-387-00177-8.
- [88] T. A. WILSON et G. S. BEAVERS : Operating modes of the clarinet. *Journal of the Acoustical Society of America*, 56(2):653–658, août 1974.
- [89] W. E. WORMAN : *Self-sustained nonlinear oscillations of medium amplitude in clarinet-like systems*. Thèse de doctorat, Case Western Reserve University, 1971.