HAL open science

Morphologie Mathématique: de la Segmentation d'Images à l'Analyse Multivoque

Laurent Najman

To cite this version:

Laurent Najman. Morphologie Mathématique: de la Segmentation d'Images à l'Analyse Multivoque. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université Paris Dauphine - Paris IX, 1994. Français. NNT : . tel-00742889

HAL Id: tel-00742889

https://theses.hal.science/tel-00742889v1

Submitted on 18 Oct 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris Dauphine
U.F.R. Mathématiques de la Décision

THÈSE

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR EN SCIENCES
arrêté du 30 mars 1992

présentée par

Laurent Najman

Morphologie Mathématique : de la Segmentation d'Images à l'Analyse Multivoque

Directeurs de Recherche : **Jean-Pierre Aubin**
Michel Schmitt

soutenue le 6 avril 1994, devant le jury composé de :

Jean-Pierre	AUBIN	Examinateur
Serge	BEUCHER	Examinateur
Christine	GRAFFIGNE	Rapporteur
Thierry	FERRÉ	Examinateur
Henri	MAITRE	Président
Christian	LANTUÉJOUL	Rapporteur
Michel	SCHMITT	Examinateur

L'université n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.

Remerciements

La thèse qui suit est un travail que j'ai mené ces deux dernières années au sein du groupe Mathématiques et Informatique[1] du Laboratoire Central de Recherches (Thomson-CSF) et du groupe Viabilité et Contrôle du Ceremade (Université Paris-Dauphine).

Je tiens à remercier les membres de mon jury pour l'honneur qu'ils me font : Madame Christine Graffigne et Monsieur Christian Lantuéjoul, pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à ce travail en acceptant d'en être les rapporteurs, et à Messieurs Serge Beucher, Thierry Ferré et Henri Maitre[2], qui ont bien voulu être examinateurs.

J'ai eu la chance d'avoir été guidé au cours de cette thèse par deux directeurs d'expériences différentes.

- J'espère que les efforts de Jean-Pierre Aubin, qui a dirigé la deuxième partie de cette thèse, pour m'inculquer la rigueur mathématique n'auront pas été vains. Je le remercie de sa patience.

- De Michel Schmitt, qui a dirigé la première partie de cette thèse, je retiendrais la profonde intuition et une certaine manière géométrique d'aborder et de présenter les problèmes. Je lui suis reconnaissant d'avoir consacré une partie de son précieux temps dans les nombreuses et fructueuses discussions que nous avons eues.

De nombreux résultats n'auraient jamais vu le jour s'il n'y avait pas eu les longues discussions du lundi matin avec Juliette Mattioli, Luc Doyen, et moi-même. Une mention spéciale doit être faite pour Juliette Mattioli, sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est. Sa gentillesse, qui n'a d'égale que sa rigueur mathématique et sa constante bonne humeur, m'a été d'un constant secours tout au long de cette période.

J'aimerais remercier ici les membres de l'ex-laboratoire A.S.R.F.[3] qui ont su me procurer un environnement d'une grande qualité, à la fois scientifique et humaine, tout au long de mon séjour. Plus particulièrement, ma gratitude va à :

Richard Herzog, dont les compétences en langue anglaise ont été durement mises à l'épreuve.

Philippe Kerlirzin, pour sa disponibilité, pour ses compétences LaTeX et orthographique, qui m'ont grandement aidé.

[1] ancienne appellation du groupe aujourd'hui dénommé Informatique et Cognition.

[2] qui a permis mon initiation à l'analyse d'images en m'accueillant dans son laboratoire (Laboratoire IMAGES, Telecom Paris) lors de mon stage de D.E.A.

[3] maintenant dénommé Perception.

Étienne Pernot, qui, par ses commentaires frappant toujours juste, a contribué à créer une ambiance stimulante.

Régis Vaillant, qui sait tout sur tout.

Comme je ne peux citer tous les noms de ceux qui m'ont apporté, et pas seulement sur le plan mathématique (isn't it, Agnès ?), je demande à tous d'accepter un immense merci.

Cette thèse est dédiée à mes parents, qui ont su m'entourer de toute l'affection et la protection sans lesquelles je n'aurais jamais pu faire mes études, et plus particulièrement à ma mère, qui m'a appris à lire, à écrire, et à compter.

Dans leur vol, l'hirondelle et l'aigle ne laissent pas de traces ; l'homme de science laisse une trace, ainsi que tous les spécialistes. Vous pouvez les suivre pas à pas et ajouter quelques pas à ce qu'ils ont trouvé et accumulé ; et vous pouvez savoir plus ou moins où mène cette accumulation. Mais la vérité n'est pas ainsi ; c'est réellement une terre qui n'a pas de chemin ; elle peut se trouver au prochain tournant de la route ou à des milliers de lieues. Il vous faut continuer à marcher, et vous la trouverez à vos côtés. Mais si vous vous arrêtez et que vous tracez un chemin pour que quelqu'un le suive ou si vous élaborez le programme de l'existence que vous comptez mener, elle ne viendra jamais à vous.
[...] On doit être à la fois l'aigle et l'homme de science, tout en sachant qu'ils ne peuvent jamais se rencontrer.

Krishnamurti
La révolution du silence.

Introduction

Cette thèse se divise en deux parties. Les liens entre ces parties sont la morphologie mathématique, et les équations et inclusions différentielles. La première partie porte sur l'étude de la segmentation d'images au travers d'un outil développé dans le cadre de la morphologie mathématique : la ligne de partage des eaux. La seconde partie est un recueil d'articles utilisant conjointement la morphologie mathématique, l'analyse multivoque et la théorie de la viabilité.

Descriptif du contenu de la thèse

1.1 La ligne de partage des eaux

Au sens géographique du terme, la ligne de partage des eaux est le lieu d'où une goutte d'eau, s'écoulant sur la surface en suivant les lignes de plus grande pente, peut atteindre deux minima différents de la surface. Des implantations efficaces, tant du point de vue de la précision qu'au niveau de la rapidité d'exécution, avaient récemment vu le jour, permettant de populariser la ligne de partage des eaux. Cependant, un certain nombre de problèmes théoriques se posaient à propos de cet outil :

- Tout d'abord, il était défini de manière constructive, au travers d'un algorithme qui reposait sur des idées intuitives. Par conséquent, les défauts et les qualités intrinsèques de cet opérateur de segmentation n'étaient pas connus. En particulier, il était impossible de faire une comparaison avec des extracteurs de contours différentiels largement utilisés en analyse d'images. Le choix de l'un ou l'autre de ces opérateurs reposaient sur un *a priori* dépendant de la provenance (analyse d'images classique ou morphologie mathématique) de l'utilisateur.

- Ensuite, les "morphologues" avaient de fortes intuitions concernant les liens possibles entre la ligne de partage des eaux et le squelette par zones d'influence, lieu des points équidistants à une famille d'objets. En particulier, pouvait-on trouver une métrique pour laquelle la ligne de partage des eaux serait un squelette par zones d'influence ? Un squelette par zones d'influence pouvant se caractériser de manière locale, on aurait pu espérer une construction locale (point par point) de la ligne de partage des eaux, au lieu d'un algorithme global (qui doit examiner tous les points de l'image pour construire la ligne de partage des eaux).

Dans cette thèse, nous proposons une définition et une caractérisation de la ligne de partage des eaux pour des images régulières [84, 87, 85, 86, 90, 89]. Nous démontrons en particulier un théorème de convergence de la définition constructive de la ligne de partage des eaux (qui s'applique sur des images en escalier) vers cette définition sur des images régulières. Nous proposons une définition mathématique rigoureuse des lignes de plus grande pente (au travers

d'équations différentielles reposant sur la notion de gradient), et montrons que la ligne de partage des eaux est elle-même un sous-ensemble des lignes de plus grande pente. Cette caractérisation nous permet de comparer la ligne de partage des eaux avec les extracteurs de contours différentiels largement utilisés en analyse d'images. En particulier, les extracteurs de type Canny localisent mal les points multiples des contours d'une image, là où les objets se superposent. Nous montrons que la ligne de partage des eaux offre au contraire une localisation parfaite de ces points. Cependant, cette dernière ne propose que des contours fermés.

Nous démontrons que la caractérisation de la ligne de partage des eaux d'une image régulière peut s'écrire comme le squelette par zones d'influence pour une métrique particulière. Ce résultat nous permet de préciser les liens existant entre la ligne de partage des eaux et le squelette par zones d'influence euclidien. Si le squelette associé à la métrique de la ligne de partage des eaux possède des propriétés similaires à celles du squelette euclidien (comme la semi-continuité inférieure), la ligne de partage des eaux est une notion globale, qui n'offre aucune possibilité de caractériser de manière locale sa position.

En utilisant la métrique précédemment définie, nous avons pu montrer les rapports entre la ligne de partage des eaux et l'équation eikonale utilisée en *Shape from Shading*.

Nous proposons ensuite plusieurs algorithmes s'inspirant de la notion de ligne de partage des eaux.

- D'une part, nous donnons un algorithme de reconstruction géodésique (outil largement utilisé en conjonction avec la ligne de partage des eaux) fondé sur l'algorithme de ligne de partage des eaux. Ce résultat permet de montrer les liens naturels existant entre la reconstruction géodésique et la ligne de partage des eaux.

- D'autre part, nous proposons de nouveaux algorithmes de notre outil principal de segmentation, permettant l'ajout de points d'ancrage. Ceci nous autorise par exemple à retrouver les points multiples des contours en intégrant l'information en provenance des extracteurs de contours différentiels.

- Nous proposons finalement un nouveau concept de segmentation hiérarchique [88], à partir d'une notion de profondeur des bassins. Un algorithme fondé sur ce concept est donné. Il permet de valuer les contours de la ligne de partage des eaux en fonction d'un critère d'importance des contours.

1.2 Morphologie mathématique et analyse multivoque

Cette partie est un recueil d'articles utilisant à la fois la morphologie mathématique, l'analyse multivoque et la théorie de la viabilité.

1.2.1 Équations mutationnelles de la dilatation

Nous nous intéressons [32, 33] ensuite à la compréhension géométrique des déplacements infinitésimaux de la dilatation morphologique. De nombreux résultats avaient été publiés dernièrement, mais le problème était traité soit dans le cadre fonctionnel (équations ou inclusions différentielles), soit dans un cadre régulier. Nous proposons de le regarder en utilisant un nouvel outil de calcul différentiel, le calcul mutationnel, qui permet de dériver des tubes de déformations de formes. Nous prouvons alors de manière rigoureuse et sans hypothèse de régularité

sur la forme, l'intuition selon laquelle la dilatation transforme la forme dans la direction des normales à celle-ci en chacun de ses points. Nous prouvons également que ces déplacements sont équivalents à des déplacements dans la direction du gradient généralisé de la fonction distance à cette forme.

1.2.2 L'algorithme des Montagnes Russes

Nous donnons un algorithme (fondé sur la théorie de la viabilité), qui permet de converger vers le minimum global d'une fonction semi-continue inférieurement, bornée inférieurement, dont on connaît l'infimum [13, 12].

Pour ce faire, nous associons à la fonction originale une fonction auxiliaire dont les minima locaux sont les minima globaux de la fonction à minimiser. Cette fonction auxiliaire est approchée par une suite croissante de fonctions définies localement par récurrence à partir de la fonction à minimiser.

Au lieu d'utiliser la méthode du gradient sur la fonction originale ou des techniques de type recuit simulé qui ne convergent qu'en probabilité vers un minimum global, l'algorithme de descente appliqué à la fonction auxiliaire garantit la convergence vers un minimum global.

1.2.3 Propriétés algébriques des opérateurs induits par des systèmes dynamiques

De nombreux travaux ont montré que le cadre des treillis complets est le cadre adapté ainsi que la structure minimale permettant une bonne modélisation des transformations morphologiques opérant sur les images binaires ou à teintes de gris.

Nous avons parallèlement étudié le lien entre le cadre algébrique des treillis et les opérateurs induits par des systèmes dynamiques non déterministes [76]. Grâce à l'association de deux techniques (algèbre et théorie des inclusions différentielles), nous donnons des propriétés algébriques et de continuité d'applications agissant sur les ensembles fermés, comme l'ensemble atteignable, le noyau de viabilité...

Synopsis de la thèse

Cette thèse est séparée en deux parties. Les résultats principaux ont été rassemblés dans le chapitre 1, qui résume l'ensemble de la thèse. Ce chapitre est donc utile pour une lecture rapide. Certains termes n'ont pas été définis dans ce résumé, mais le lecteur pourra facilement se reporter au corps du texte grâce à l'utilisation de l'index placé en fin d'ouvrage.

La première partie forme un tout centré sur la ligne de partage des eaux, outil de segmentation en analyse d'images. Le chapitre 2, essentiellement bibliographique, présente les définitions nécessaires à la compréhension de cet outil, ainsi que la manière de l'utiliser pratiquement.

Le chapitre 3 étudie la définition continue de la ligne de partage des eaux. Il présente le théorème de convergence mentionné plus haut, ainsi que les liens de la ligne de partage des eaux avec le squelette par zones d'influence euclidien et l'équation eikonale. Il rassemble donc les résultats théoriques que nous avons obtenus sur la ligne de partage des eaux.

C'est au chapitre 4 que nous présentons la comparaison entre la segmentation par ligne de partage des eaux, et celle par extracteurs de contours différentiels. Ce chapitre est utile au

praticien de l'analyse d'images, qui cherche à savoir quel outil est à employer dans une situation donnée.

Dans le chapitre 5, nous donnons un nouveau concept de hiérarchie par dynamique. Nous proposons ainsi un nouveau moyen pour éliminer la sursegmentation inhérente à la ligne de partage des eaux.

Le praticien de l'analyse d'images trouvera dans le chapitre 6 les algorithmes de la première partie. Nous y décrivons en particulier un algorithme de ligne de partage des eaux avec points d'ancrage, et un algorithme réalisant le concept de segmentation hiérarchique par dynamique.

La deuxième partie de la thèse est un recueil d'articles, dans lesquels nous appliquons des outils de l'analyse multivoque et non régulière à la morphologie mathématique.

Le chapitre 7 présente les équations mutationnelles régissant l'évolution des tubes de dilatation. Il permet de justifier de manière rigoureuse que la dilatation transforme l'objet initial dans la direction de ses normales.

Le chapitre 8 présente l'algorithme des Montagnes Russes pour l'optimisation globale.

Le chapitre 9 présente les propriétés algébriques des opérateurs induits par les systèmes dynamiques. Il permet en particulier d'étudier les propriétés de continuité de certains de ces opérateurs.

Chapitre 1

Principaux résultats de la thèse

La dernière découverte détrône les précédentes et change nos sentiments à leurs égards.

Lucrèce, VI.v

Ce chapitre, qui peut se lire indépendamment du reste de la thèse, résume les résultats principaux que nous avons obtenus et définit que les principales notions nécessaires à leur compréhension.

La motivation principale des travaux de la première partie est la compréhension d'un algorithme de segmentation développé dans le cadre d'une technique d'analyse d'images utilisant des outils ensemblistes, la morphologie mathématique : la ligne de partage des eaux. Nous l'étudierons dans la section 1.

Les résultats de la deuxième partie, qui traite de la morphologie mathématique et de l'analyse multivoque et non régulière, sont exposés dans la section 2.

1 Première partie : la ligne de partage des eaux

La ligne de partage des eaux, utilisée en segmentation morphologique, repose sur une définition fonctionnant sur des fonctions en escalier. Dans la première partie de la thèse, nous proposons d'étendre cette définition aux fonctions régulières. Nous pouvons alors comparer la ligne de partage des eaux avec des extracteurs de contours classiques. Nous introduisons ensuite une métrique pour laquelle la ligne de partage des eaux est un squelette par zones d'influence, ce qui nous permet de montrer son comportement semi-continu. Cette approche théorique nous suggère un nouvel algorithme pour résoudre l'équation eikonale : trouver f telle que $\|\nabla f\| = g$. L'étude théorique de la ligne de partage des eaux trouve son aboutissement dans l'algorithmique. Nous proposons de nouveaux algorithmes de ligne de partage des eaux, présentant l'avantage de pouvoir inclure des marqueurs et des points d'ancrage, ouvrant ainsi la voie aux squelettes à teintes de gris. Enfin, nous développons un algorithme permettant de valuer les contours fournis par la ligne de partage des eaux en fonction de leur importance dans l'image.

1.1 Approche de la ligne de partage des eaux par immersion

La segmentation d'images en teintes de gris a pour but de trouver une partition de l'image (fonction à valeurs réelles) en régions homogènes selon un critère donné. Cette partition donne les contours des objets présents dans les images. Une des voies sur lesquelles elle repose est l'idée que les différents objets présent dans une image sont de teintes de gris (d'intensité) à peu près constantes. Par conséquent, l'ensemble des endroits où il y a une forte variation de l'intensité est un bon ensemble dans lequel chercher des contours. Il est alors usuel de penser à estimer cette variation à partir du gradient de l'image. Dans le but de segmenter une image, on cherche alors les lignes de crête du gradient. Une manière de faire est d'appliquer la ligne de partage des eaux sur l'image de gradient.

L'une des métaphores de la morphologie mathématique est de considérer les images (les fonctions) en termes géographiques : on considère que le niveau de gris est l'altitude d'une surface topographique. On parle alors de bassin versant, de ligne de plus grande pente, etc. Intuitivement, la ligne de partage des eaux est le lieu d'où une goutte d'eau descendant selon les lignes de plus grande pente peut atteindre plusieurs minima régionaux[1] différents.

1.1.1 Discrétisation des niveaux de gris

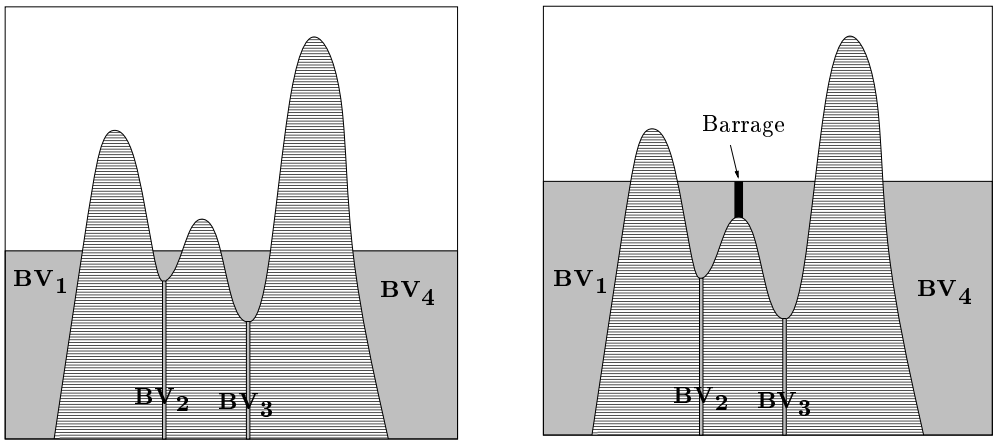
Cependant, les images numériques sont des fonctions en escalier. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{N}$ une fonction en escalier, définie sur $\mathbb{R}^2$ ou un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$. Nous appellerons plateaux de f l'ensemble des points au voisinage desquels f est constante. Rendre alors mathématique la notion d'une goutte d'eau qui descend selon la ligne de plus grande pente jusqu'à un minimum régional est délicat sur les fonctions en escalier : sur un plateau, la pente est nulle.

Le moyen le plus simple pour contourner cette difficulté est de procéder en immergeant progressivement dans l'eau la fonction f par le bas. Pour que l'eau monte partout de manière régulière, on supposera que les minima régionaux sont "percés", comme le montre la figure 1.1. Passant par les ouvertures que l'on a créées, l'eau progresse alors dans les bassins correspondant à chaque minimum (fig. 1.1.a). Lorsque deux eaux en provenance de minima différents se rencontrent, on place un barrage, de telle sorte que deux eaux différentes ne se mélangent pas (fig. 1.1.b). La ligne de partage des eaux est constituée par l'ensemble de ces barrages. Elle partage donc l'image en différentes zones, que l'on peut considérer comme les zones d'influence ou d'attraction des minima régionaux. On appelle ces zones les bassins versants de l'image.

En dimension un, le lieu des barrages se calcule naturellement. Ils sont localisés sur les maxima locaux de l'image. En dimension deux (cas des images classiques), il est beaucoup plus délicat de caractériser ces barrages directement. Comme les barrages sont les frontières des bassins versants, ce sont des lignes. Ces lignes contiennent bien plus que les maxima locaux.

Lorsque l'on travaille sur une fonction en escalier, le contact entre deux eaux provenant de deux bassins différents s'effectue sur un plateau. On suppose alors que cette rencontre a lieu au milieu (au sens géodésique) de ce plateau. Pour calculer le milieu géodésique sur les plateaux, on utilisera le squelette par zones d'influence (déf. 1.1.2) associé à la distance géodésique (déf. 1.1.1).

[1] Un minimum régional est un ensemble connexe de l'image d'altitude constante, tel qu'il est impossible d'atteindre un point d'altitude inférieure par un chemin continu sans passer par un point d'altitude supérieure.



(a) – Altitude h (b) – Altitude $h + \Delta$

FIG. 1.1. – *Construction de la ligne de partage des eaux pour une fonction monodimensionnelle. À l'altitude h, les quatre bassins versants sont encore séparés. Puis à l'altitude $h + \Delta$, on construit un barrage pour séparer les eaux de* $\mathbf{BV_2}$ *et de* $\mathbf{BV_3}$.

Définition 1.1.1 :

Soit A un ensemble inclus dans $\mathbb{R}^2$. La distance géodésique $d_A(a, b)$ entre deux points a et b de A est la borne inférieure des longueurs des chemins allant de a vers b totalement inclus dans A. S'il n'existe pas de tel chemin, alors la distance géodésique est infinie.

Définition 1.1.2 :

Soit $B = \cup_{i=1}^{k} B_i$ un ensemble formé de k composantes connexes disjointes deux à deux. La zone d'influence géodésique $iz_A(B_i)$ d'une composante connexe B_i de B dans A est le lieu des points de A dont la distance géodésique à la composante B_i est inférieure à la distance géodésique de toute autre composante connexe de B :

$$iz_A(B_i) = \{p \in A, \forall j \in [1, k] \setminus \{i\}, \quad d_A(p, B_i) < d_A(p, B_j)\}. \tag{1.1}$$

Les points de A qui n'appartiennent à aucune zone d'influence constituent le squelette par zone d'influence géodésique de B dans A, noté $SKIZ_A(B)$:

$$Skiz_A(B) = A \setminus IZ_A(B) \text{ avec } IZ_A(B) = \bigcup_{i \in [1,k]} iz_A(B_i). \tag{1.2}$$

La définition proposé dans [27] s'écrit alors :

Définition 1.1.3 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{N}$ une fonction en escalier que nous supposerons bornée. Notons :

1. $h_{min} = \inf f(x)$ et $h_{max} = \sup f(x)$,
2. f^h la section inférieure de f au niveau h : $f^h = \{x,\ f(x) \leq h\}$,
3. $Reg_Min_h(f)$ l'ensemble des minima régionaux de f d'altitude h.

L'ensemble des bassins versants de f est l'ensemble $X_{h_{max}}$ obtenu après la récurrence suivante :

$$\begin{array}{llll} (i) & X_{h_{min}} & = & f^{h_{min}} \\ (ii) & X_{h+1} & = & Reg_Min_{h+1}(f) \cup IZ_{f^{h+1}}(X_h),\ \forall h \in [h_{min}, h_{max} - 1] \end{array}$$

où $IZ_A(B)$ est l'union des zones d'influence géodésique de B dans A. La ligne de partage des eaux de f est alors le complémentaire de X_{max} (fig. 1.2).

Cette approche est historiquement la première [27]. Elle a permis la mise au point du premier algorithme efficace [114], rendant cet outil opérationnel.

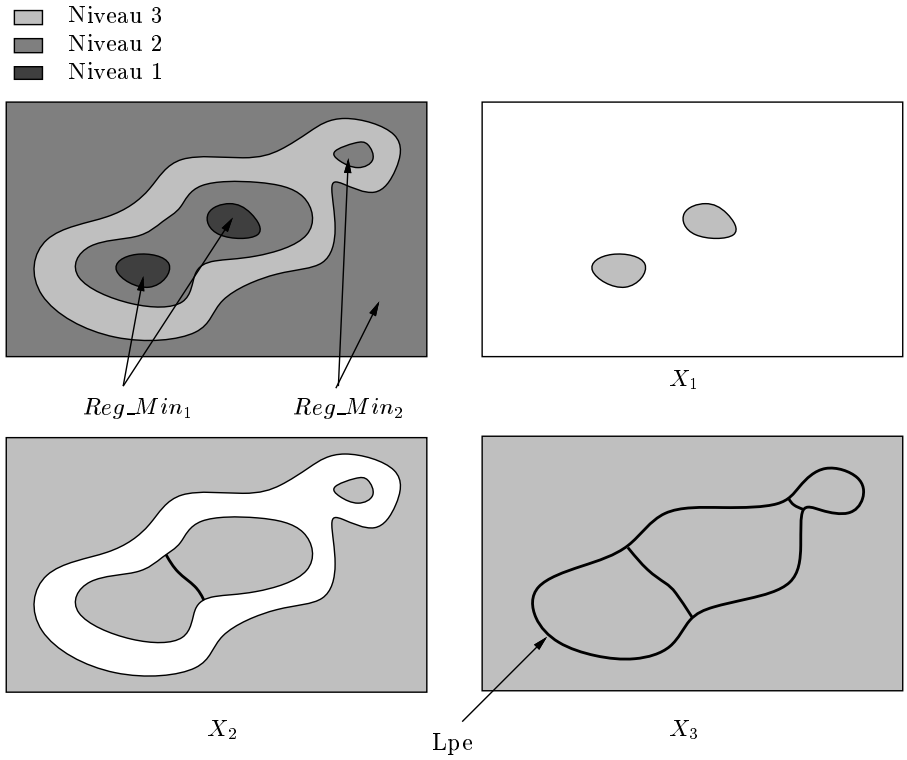


FIG. 1.2. – *Illustration du processus d'immersion.*

Notons que, dans cette définition, seuls les niveaux de gris sont discrétisés. D'autre part, cette définition s'étend trivialement (et est opérationnelle) dans $\mathbb{R}^n$. Cependant, le cadre classique

de l'analyse d'images s'adresse à des images planes. D'autre part, ce n'est que dans le plan que la ligne de partage des eaux est un réseau de lignes que nous allons maintenant caractériser.

Dans cette thèse, nous nous placerons dans un cadre de fonctions régulières, dans lequel nous adapterons la définition 1.1.3, afin de donner une définition et des propriétés de la ligne de partage des eaux d'une fonction régulière.

1.1.2 Ligne de partage des eaux d'une fonction régulière

Plaçons nous dans le plan et supposons que l'image f soit suffisamment régulière (de classe C^2) pour permettre l'application d'opérateurs différentiels. Le premier résultat original de cette thèse est la caractérisation de la ligne de partage des eaux de f, en faisant tendre vers 0 la distance entre deux sections inférieures de f et en passant à la limite dans l'algorithme de la définition 1.1.3. Pour une description détaillée des outils utilisés, voir par exemple [110, 3].

Dans ce paragraphe, nous essaierons, chaque fois que cela sera possible, de bien montrer en quoi la régularité C^2 est nécessaire pour avoir une caractérisation simple de la ligne de partage des eaux.

Le gradient ∇f est le vecteur des dérivées premières de f et le Hessien H_f est la matrice symétrique des dérivées secondes de f. Un point singulier est un point où le gradient de f s'annule ($\nabla f = 0$).

Nous étudions d'abord les lignes intégrales du gradient, *i.e.* les lignes de plus grande pente.

Définition 1.1.4 :

Un chemin $\gamma\ :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 est appelé ligne intégrale maximale du gradient ou simplement ligne maximale du gradient si

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \frac{d\gamma}{ds}(s) = \pm\nabla f(\gamma(s)) \neq 0 \text{ et } \lim_{s\to-\infty} \frac{d\gamma}{ds} = \lim_{s\to+\infty} \frac{d\gamma}{ds} = 0 \tag{1.3}$$

Nous dirons que la ligne maximale est descendante (resp. ascendante) si $\frac{d\gamma}{ds}(s) = -\nabla f(\gamma(s))$ (resp. $\frac{d\gamma}{ds}(s) = \nabla f(\gamma(s))$).

D'après les hypothèses de régularité faites sur f, par tout point a tel que $\nabla f(a) \neq 0$, il passe une et une seule ligne maximale descendante.

Ces lignes maximales relient deux points critiques de f et n'ont aucun point critique en dehors de leurs extrémités. Malheureusement, une ligne descendante n'aboutit pas toujours à un minimum régional. Il est donc nécessaire de recoller ces lignes pour aboutir effectivement à un minimum régional. Pour cela, nous allons munir l'ensemble des points singuliers de f d'une relation d'ordre partiel :

Définition 1.1.5 :

Soient a et b deux points singuliers de f. Nous dirons que b est au-dessus de a s'il existe une ligne maximale ascendante du gradient de a vers b. Cette relation étant anti-symétrique, en prenant la fermeture transitive de cette relation, nous obtenons la relation d'ordre "au-dessus".

Cette relation d'ordre permet de distinguer trois sortes de points singuliers :

- les minima régionaux,

- les points au-dessus d'un seul minimum,

- les points au-dessus de plusieurs minima.

Ces derniers devraient clairement appartenir à une définition de la ligne de partage des eaux d'une image continue.

Définition 1.1.6 :

Nous noterons $\mathcal{P}(f)$ le sous-ensemble des points singuliers a de f qui sont au-dessus de plusieurs minima régionaux.

Nous obtenons alors le théorème de convergence suivant, qui aurait pu être la définition directe de la ligne de partage des eaux d'une fonction régulière :

Théorème 1.1.7 :

Soit f une fonction C^2, telle que toutes ses lignes maximales du gradient soient de longueur bornée par une constante $C > 0$. Nous supposerons de plus que f n'a que des points singuliers isolés, et que, en ces points singuliers, le Hessien a deux valeurs propres non nulles. Approchons f par la suite de fonctions en escalier $f_n(a) = \frac{E(2^n f(a))}{2^n}$ où $E(\cdot)$ est la partie entière.
La limite au sens de la topologie en tout ou rien des lignes de partage des eaux des f_n, est l'ensemble des lignes maximales du gradient reliant deux points de $\mathcal{P}(f)$.

Sous les hypothèses du théorème, la ligne de partage des eaux est un graphe de type fini. Les arêtes de ce graphe sont des lignes intégrales du gradient reliant soit deux points selles (point où le Hessien a deux valeurs propres de signe contraire) soit un point selle à un maximum local. En particulier, par tout point de la ligne de partage des eaux (sauf pour les points singuliers) passe *une seule* ligne maximale descendante, qui se divise au niveau du point selle et non pas deux qui aboutissent à deux minima régionaux distincts. Les arcs de la ligne de partage des eaux se coupent au niveau des points singuliers, et plus précisément, au niveau des maxima.

Notons que pour définir $\mathcal{P}(f)$, il suffit de supposer que les points critiques de f sont isolés. Cependant, la convergence de l'algorithme discret vers les lignes du gradient joignant les points de $\mathcal{P}(f)$ nécessite un Hessien sans valeurs propres nulles.

Le graphe de la ligne de partage des eaux ne peut pas avoir de points terminaux. Ceci est dû au fait que nous avons supposé que le Hessien a deux valeurs propres non nulles. Sans cette hypothèse, la ligne de partage des eaux peut présenter des points terminaux. De même, les points triples ne peuvent être que des maxima régionaux. Ici encore si on ne suppose pas les deux valeurs propres du Hessien différentes, les points multiples sont des points critiques, puisque par un point non critique passe une seule ligne maximale descendante du gradient.

Le théorème 1.1.7 montre que la ligne de partage des eaux est une notion globale. En effet, par tout point non critique passe une seule ligne maximale du gradient. Le seul moyen de distinguer une ligne maximale faisant partie de la ligne de partage des eaux d'une n'en faisant pas partie est d'examiner ses extrémités. Il est même illusoire de trouver un critère local, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.1.8 :

> *Soit a un point du support de f tel que $\nabla f(a) \neq 0$. Soit $\mathcal{V}_a$ un voisinage de a ne contenant pas de point singulier. Soit γ la restriction à $\mathcal{V}_a$ de la ligne intégrale maximale du gradient passant par a. Il existe une fonction f_0, égale à f sur $\mathcal{V}_a$, telle que γ soit dans la ligne de partage des eaux de f_0.*

En d'autres termes, il n'y a pas de caractérisation locale de la ligne de partage des eaux. Ceci est dû à la régularité C^2 de f. Si f est moins régulière, il peut exister des critères locaux. En particulier, si f est la distance à un ensemble composé de plusieurs composantes connexes, la ligne de partage des eaux de f est incluse dans les points de non différentiabilité de f. En effet, la ligne de partage des eaux est dans ce cas le squelette par zones d'influence de X, sous-ensemble du squelette[2] de X^c, dont l'adhérence est l'adhérence des points de non différentiabilité de f. Cette remarque suggère une approche métrique de la ligne de partage des eaux où celle-ci serait un squelette par zones d'influence au sens d'une distance générale.

1.2 Approche métrique

Dans le cas continu, sous les hypothèses de régularité précédentes (C^2, points singuliers isolés et Hessien ayant ses deux valeurs propres non nulles), la ligne de partage des eaux est un graphe composé de lignes intégrales du gradient.

Toujours sous ces mêmes hypothèses, nous allons définir une métrique pour laquelle la ligne de partage des eaux est en fait un squelette par zones d'influences[3]. Utilisant cette métrique nous caractérisons la continuité du squelette associé. Nous montrons également les liens existant entre la segmentation par ligne de partage des eaux et le Shape from Shading, au travers de la résolution de l'équation eikonale.

Définition 1.1.9 :

La distance image d_f d'une fonction f de classe C^1 est définie par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, d_f(a,b) = \inf_{\gamma_{ab}} \int_\alpha^\beta \|\nabla f(\gamma_{ab}(s))\| \, ds \tag{1.4}$$

où γ_{ab} est un chemin de a à b, paramétré par son abscisse curviligne.

1.2.1 La ligne de partage des eaux est un Skiz

Sous nos hypothèses, d_f est alors une distance, et nous démontrons le théorème suivant :

[2] Le squelette d'un ouvert X est le lieu des centres des boules maximales ouvertes contenues dans X

[3] Cette métrique a été indépendamment introduite par F. Meyer [79] (sous le nom de distance topographique), qui l'utilise d'une maniére discrète pour définir la ligne de partage des eaux et pour donner un algorithme séquentiel de ligne de partage des eaux.

Théorème 1.1.10 :

Soit f une fonction C^2, telle que toutes ses lignes maximales du gradient soient de longueur bornée par une constante $C > 0$. Nous supposerons de plus que f n'a que des points singuliers isolés, et que, en ces points singuliers, le Hessien a deux valeurs propres non nulles. Soit $(a_i)_i$ la famille des minima de f. Posons

$$BV_i := \{b \mid d_f(a_i, b) + f(a_i) \leq d_f(a_j, b) + f(a_j) \ \forall j \neq i\} \tag{1.5}$$

Alors la ligne de partage des eaux $\mathcal{LPE}\{f\}$ de f s'écrit :

$$\mathcal{LPE}\{f\} = \bigcup_{i \neq j} \left(BV_i \bigcap BV_j \right) \tag{1.6}$$

Notons que les lignes intégrales du gradient sont des géodésiques de la métrique d_f. Cependant, pour un point a de la ligne de partage des eaux, les deux géodésiques joignant a à deux minima distincts ont une structure curieuse : si a n'est pas point critique, les deux géodésiques ont une partie commune entre a et un point critique extrémité de la ligne maximale du gradient passant par a. Ce n'est qu'après qu'elles se séparent. Ceci est profondément différent du cas du squelette par zones d'influence euclidien, où de tout point du squelette par zones d'influence partent au moins deux segments d'égale longueur intersectant deux composantes connexes différentes au moins.

Une approche utilisant une métrique plus complexe et difficilement manipulable à été donné dans [94].

1.2.2 Semi-continuité de l'ossature

Nous étendons les résultats de Matheron [67] correspondant à la semi-continuité inférieure du squelette à la métrique d_f.

Définition 1.1.11 :

On appelle ossature de f le lieu $\mathcal{S}(f)$ des centres des d_f-boules ouvertes maximales contenues dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ est l'ensemble des minima de f.

Il est clair que la ligne de partage des eaux de f est incluse dans l'ossature de f. Cependant, l'ossature peut contenir des arcs supplémentaires qui n'appartiennent pas à la ligne de partage des eaux.

Théorème 1.1.12 :

L'application $f \to \mathcal{S}(f)$ est semi-continue inférieurement si l'on munit l'ensemble des fonctions de classe C^2 de la convergence uniforme des deux premières dérivées et l'ensemble des fermés de la topologie en tout ou rien.

Ce résultat montre pourquoi la ligne de partage des eaux est très sensible au bruit et justifie d'une certaine manière les diverses techniques de marquage [114] (qui consistent à inonder non pas à partir de tous les minima, mais à partir d'un certain nombre de minima "significatifs") et de lissage [42] (qui consistent à supprimer les bassins trop peu contrastés).

1.2.3 L'équation eikonale

La caractérisation du théorème 1.1.10 sur la ligne de partage des eaux permet de résoudre une équation largement utilisée en Shape from Shading, l'équation eikonale [50] [52] :

$$\text{trouver } f \text{ tel que } \|\nabla f\| = g \tag{1.7}$$

où g est une fonction donnée.

Le théorème 1.1.10 repose sur le fait que, sur chaque bassin versant de f BV_i, nous avons pour tout $a \in BV_i$, $f(a) = d_f(a,b) + f(b)$, où b est le minimum du bassin versant. Notons que la détermination de $d_f(a,b)$ ne dépend que de la connaissance de g (voir la formule 1.4). Nous obtenons donc le résultat suivant : soit $\{b_i\}$ un ensemble de points avec leur valeur associée $f(b_i)$, qui correspondent aux conditions aux limites de l'équation différentielle eikonale. La solution continue de cette équation, ayant tous ses minima situés exactement sur les b_i, est donnée par :

$$f(a) = \inf_i \{d_f(a,b_i) + f(b_i)\}. \tag{1.8}$$

En fait, on peut montrer que cette solution est l'unique solution de viscosité admettant ces conditions aux limites [62].

1.3 Détecteurs de Canny

Comment comparer la ligne de partage des eaux avec des extracteurs de contours plus classiques ? La tâche est complexe, car les objets calculés ne sont pas inclus les uns dans les autres. Voici quelques pistes de comparaison avec l'extracteur de contours de type Canny-Deriche [24]. Pour une caractérisation détaillée des points extraits par l'extracteur de contours de type Canny, voir [57].

Généralement l'image de départ sera lissée par un noyau de convolution de type gaussien ou exponentiel décroissant pour obtenir la fonction f sur laquelle nous chercherons les lignes de contours. Le détecteur de Canny définit les contours comme les extrema de la norme du gradient dans la direction du gradient. Ces points sont donc l'ensemble des zéros de l'opérateur :

$$Q(f) = \langle H_f \nabla f, \nabla f \rangle \tag{1.9}$$

où le hessien H_f est la matrice symétrique des dérivées secondes de f. Comme les contours sont les zéros d'une fonction, les lignes obtenues ne présentent généralement pas de points triples[4] (sauf en des points singuliers dégénérés). C'est pourquoi des techniques de fermeture de contours [25] ont été développées. La ligne de partage des eaux fournit directement des contours fermés, ce qui en fait son intérêt.

De manière implicite, les extracteurs de contours cherchent des lignes telles que, selon la normale à ces lignes, les niveaux de gris varient le plus rapidement possible. Ceci mène à l'équation $\langle H_f \nabla f, \vec{n} \rangle = 0$ où $\vec{n}$ est le vecteur normal au contour. Les contours sont alors des lignes intégrales de $H_f \nabla f$. Or la ligne de partage des eaux fournit exactement ce type de lignes (théorème 1.1.7). Malheureusement, par tout point, il en passe au moins une ! La ligne de partage des eaux permet de choisir parmi ces lignes celles qui vérifient des conditions aux limites particulières. La technique Canny-Deriche, au contraire *estime* la normale au contour

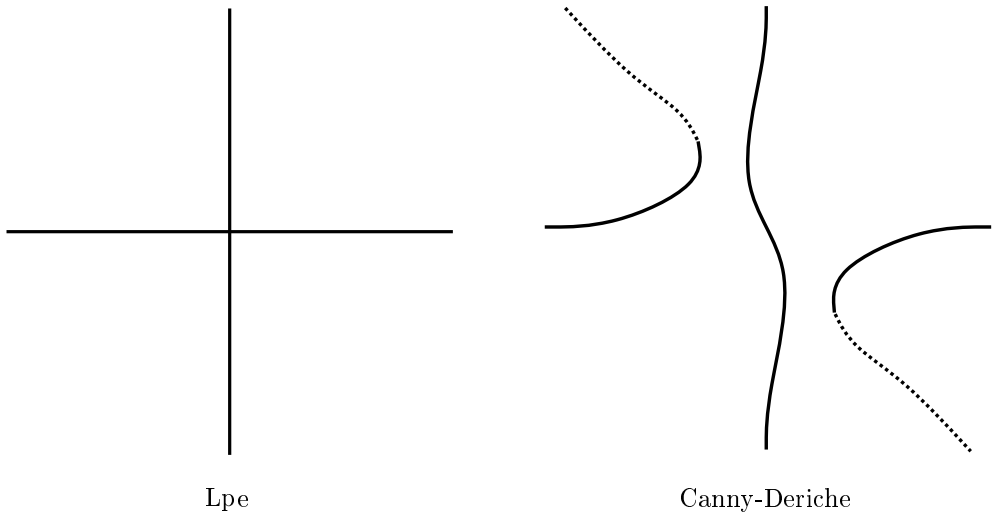


FIG. 1.3. – *Extraction des contours sur un exemple, une image composée de quatre quadrants de teintes de gris différentes. L'extracteur de Canny-Deriche ne trouve pas le point multiple.*

en posant $\vec{n} = \nabla f$, ce qui est la valeur exacte de $\vec{n}$ dans le cas d'une marche d'escalier. Ceci présente des effets "pervers" au niveau des points multiples du contour.

Nous présentons dans le chapitre 6 un algorithme de ligne de partage des eaux autorisant des points d'ancrage, ce qui permet par exemple de fermer les contours de Canny-Deriche tout en conservant les points multiples du contour (fig. 1.4).

1.4 Segmentation hiérarchique par dynamique

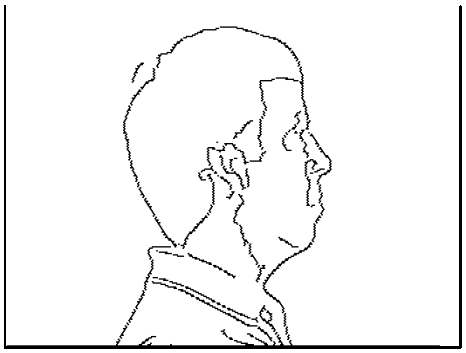
La segmentation par ligne de partage des eaux produit généralement une sursegmentation. Plutôt que d'empêcher cette sursegmentation [17], l'idée de la segmentation hiérarchique [15] est de calculer l'importance des contours par rapport à des critères donnés. Nous présentons un algorithme original basé sur le concept de dynamique [42] qui permet une description hiérarchique du résultat. Son principal avantage est qu'il calcule directement une segmentation hiérarchique dans laquelle tous les contours (et non pas les bassins versants) sont valués, permettant de choisir un niveau de dynamique donné après le processus de segmentation.

Par exemple, cet algorithme permet de répondre à la question "quels sont les n objets les plus contrastés dans l'image ?" par un simple seuillage de l'image résultante.

1.4.1 Le concept de dynamique

La dynamique est un critère de contraste. Un minimum régional est un ensemble connexe à partir duquel il est impossible d'atteindre un point d'altitude inférieure sans grimper plus haut. L'altitude minimale de cette ascension est la valeur du contraste de ce minimum.

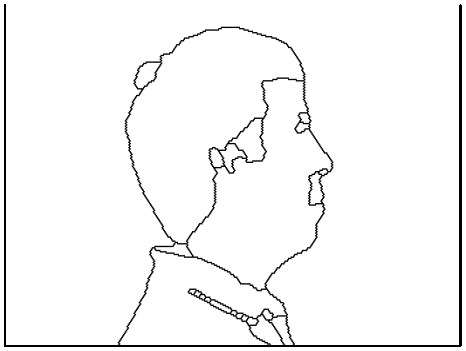
[4] Ils sont très rares sur des images réelles.



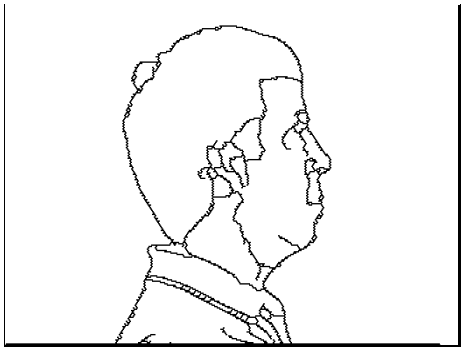
(a) Contours de Canny-Deriche

(b) Contour lpe

(c) Image originale



(d) Contours par ligne de partage des eaux sur une reconstruction géodésique du gradient de taille 10



(e) Contours par ligne de partage des eaux sur une reconstruction géodésique du gradient de taille 10, en utilisant les contours de Canny-Deriche comme points d'ancrage

FIG. 1.4. – *Comparaison de diverses possibilités de segmentation*

Définition 1.1.13 :

Soit M un minimum régional de la fonction f. La dynamique [42] de M est le nombre :

$$\inf_{\substack{\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \\ f(\gamma(1)) < f(\gamma(0)), \\ \gamma(0) \in M}} \left[\sup_{s \in \,]0,1]} \{f(\gamma(s)) - f(\gamma(0))\} \right] \tag{1.10}$$

Pour une valeur de contraste donnée t, l'algorithme standard pour supprimer les minima régionaux de f de dynamique inférieure à t, et par conséquent les bassins de la ligne de partage des eaux correpondants, calcule l'érosion géodésique $E_f^\infty(f_t)$ de f conditionnellement à f_t où $f_t(a) = f(a) + t$.

La dynamique est utilisée généralement soit pour obtenir des marqueurs, soit pour calculer une ligne de partage des eaux sur l'image simplifiée par l'érosion géodésique de taille correspondant à la valeur de la dynamique. Il existe un algorithme [42] qui calcule la carte des bassins versants valués par leur dynamique (fig. 1.5.c). Cependant, la localisation des bassins de dynamique donnée est de peu d'utilité directe : la taille et la localisation d'un bassin versant de dynamique donnée ne reflète pas le résultat final de la segmentation.

Nous pouvons en fait créer une hiérarchie sur les arcs de la segmentation initiale à partir du concept de dynamique. Si nous supposons que deux minima différents ne sont pas sur le même niveau (ce qui ne pose aucun problème en pratique), la reconstruction géodésique ne fait que supprimer des arcs de la ligne de partage des eaux sans déplacer les contours restants. Il est alors suffisant de valuer chaque arc de la segmentation par la valeur maximale t pour laquelle l'arc appartient à la ligne de partage des eaux de $E_f^\infty(f_t)$. Il est facile de voir que cela dépend seulement du point selle le plus bas sur les arcs qui séparent deux bassins. Soit a le point selle d'altitude la plus basse sur ces arcs, et posons

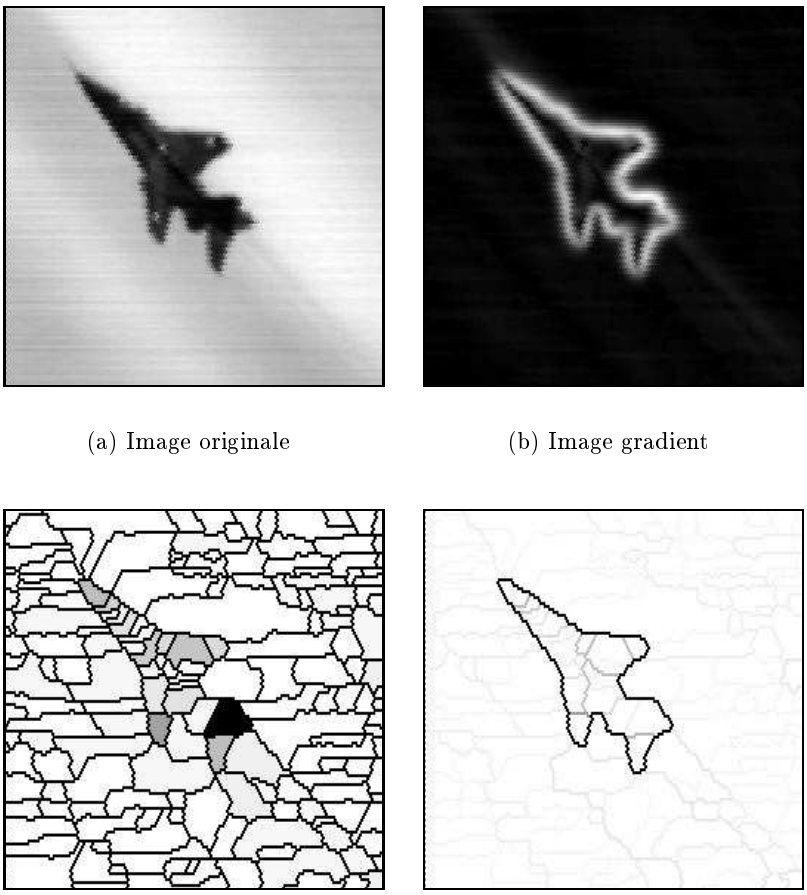
$$Bas(a) := \{b \mid \exists \gamma,\ \gamma(0) = a,\ \gamma(1) = b,\ f(\gamma(s)) < f(a)\ \forall s \in\ [0,1]\}$$

L'ensemble $Bas(a)$ est ouvert, et peut être divisé en plusieurs composantes connexes ouvertes B_i ($Bas(a) = \cup_i B_i$). Nous avons alors :

$$dyn(a) := \min_i \sup_{a_i \in B_i} \{f(a) - f(a_i)\} \tag{1.11}$$

Contrairement à la sensibilité au bruit de la dynamique d'un bassin, la dynamique d'un contour est beaucoup plus stable (bien que le contour lui même soit sensible au bruit).

Notons que le résultat de cette approche (fig. 1.5.d) donne toute l'information de contour que l'on peut extraire à partir du gradient de l'image, c'est-à-dire qu'un seuillage de l'image résultat à un niveau donné donnera la segmentation que l'on aurait obtenue par une reconstruction géodésique de même niveau. Un algorithme efficace pour calculer cette hiérarchie est présenté dans cette thèse.



(a) Image originale

(b) Image gradient

(c) Carte des bassins valués par leur dynamique (blanc=faible, noir = fort)

(d) Résultat de l'algorithme de segmentation hiérarchique par dynamique

FIG. 1.5. – *Différence entre un simple calcul de la dynamique des bassins et une application de l'algorithme.*

2 Deuxième partie : Morphologie Mathématique et Analyse non régulière

2.1 Dérivées mutationnelles de la dilatation

2.1.1 Introduction

Un grand effort a dernièrement été fourni pour essayer de traiter le problème de la caractérisation différentielle des opérateurs morphologiques, et plus spécialement de la dilatation. La plupart des travaux ont cependant été réalisés dans un contexte régulier [19] ou au travers d'équations [2] ou d'inclusions [72, 71, 73, 74] aux dérivées partielles.

Nous proposons de fournir un point de vue géométrique de ce problème. Pour cela, nous allons le considérer dans le nouveau cadre mathématique du calcul mutationnel [6], qui permet

d'étendre le concept de calcul différentiel à l'espace métrique $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$. Cela signifie que l'évolution $K(t)$ d'un compact $K = K(0)$ de $\mathbb{R}^n$ peut-être caractérisée d'une manière différentielle, sans hypothèse de régularité sur la forme géometrique de ce compact K. De plus, les théorèmes de base des systèmes différentiels, comme le théorème de Cauchy-Lipschitz, peuvent être adaptés au cadre des équations mutationnelles.

Dans le chapitre 7, nous prouvons que l'évolution du tube morphologique $K(t) = K \oplus tS$, qui correspond à la dilatation d'un ensemble compact K par un compact convexe symétrique d'intérieur non vide S, vérifie plusieurs équations mutationnelles, et en particulier

$$\overset{\circ}{K}(t) \ni N^S_{K(t)}(.) \bigcap S, \;\; K(0) = K$$

où $N^S_K(x)$ est le cône normal du compact K au point x pour la norme associée à l'élément structurant S. Ce résultat prouve, sans hypothèse de régularité sur le compact K, que la dilatation transforme en chacun de ses points le domaine initial K dans la direction des normales à l'ensemble. En effet, quand l'ensemble K est régulier, le cône normal est réduit à la demi-ligne engendrée par la normale extérieure à l'ensemble, et nous retrouvons les résultats obtenus dans le cadre régulier. Finalement, nous appliquons la version mutationnelle du théorème de Cauchy-Lipschitz pour comparer l'évolution de deux dilatations engendrées par deux éléments structurants différents.

2.1.2 Jauge et dilatation

Nous proposons ici de définir la dilatation par un élément structurant S compact convexe symétrique d'intérieur non vide en utilisant la jauge associée à cet élément structurant.

La jauge associée à l'élément structurant $S \subset \mathbb{R}^n$ est définie par

$$j_S(x) = \inf\{\lambda \mid \lambda \geq 0, \; x \in \lambda S\}$$

Nous supposons que S est un compact convexe symétrique d'intérieur non vide. Introduisons la distance $d^S_K(x)$ entre un domaine K et un point x, ainsi que la projection[5] $\Pi^S_K(x)$ de x sur K, associées à S par

$$d^S_K(x) = \inf_{y \in K} j_S(x-y) \text{ et } \Pi^S_K(x) = \{z \in K \mid j_S(x-z) = d^S_K(x)\}$$

La dilatation $K_S(t) = K \oplus tS$ à l'échelle $t > 0$ d'un fermé $K \subset \mathbb{R}^n$ par un élément structurant S est égale à

$$K_S(t) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid d^S_K(x) \leq t\right\}$$

2.1.3 Gradient généralisé de la fonction distance et cône normal

Les hypothèses sur S implique que l'application $x \mapsto d^S_K(x)$ est une fonction lipschitzienne. Par conséquent, nous pouvons considérer son gradient généralisé [10, 23, 98].

[5] Il s'agit d'une application multivoque, c'est à dire que $\Pi^S_K(x)$ peut contenir plusieurs éléments.
Nous appelerons application multivoque $F : X \rightsquigarrow Y$ une application qui à tout $x \in X$ associe un sous-ensemble de Y, *i.e.* $F(x) \subset X$. On dira que F est univoque si $F(x)$ est un singleton. On peut donc considérer F comme une application (univoque) de X dans l'ensemble $\mathcal{P}(Y)$ des sous-ensembles de Y.

Définition 1.2.14 :

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application lipschitzienne. Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

- L'épidérivée circatangente de f en x dans la direction v est

$$C_{\uparrow} f(x)(v) := \limsup_{h \to O^+,\, x' \to x} \frac{f(x' + hv) - f(x')}{h}.$$

- Le gradient généralisé de f en x est

$$\partial f(x) := \{p \in \mathbb{R}^n \mid C_{\uparrow} f(x)(v) \geq < p, v >,\ \forall v \in \mathbb{R}^n\}.$$

L'épidérivée de la fonction distance d_K^S permet également de définir les notions d'espace tangent à K et de normale à un domaine K en un point $x \in \mathbb{R}^n$ sans hypothèse de régularité sur K.

Définition 1.2.15 :

Soit K un fermé de $\mathbb{R}^n$, S un compact convexe symétrique d'intérieur non vide, et x un élément de $\mathbb{R}^n$.

- Le cône circatangent externe de K en x associé à S est

$$C_K^S(x) := \{v \mid C_{\uparrow} d_K^S(x)(v) \leq 0\}.$$

- Le cône normal externe de K en x associé à S est le cône polaire négatif de $C_K^S(x)$ *i.e.*

$$N_K^S(x) := C_K^S(x)^- = \{p \mid \forall v \in C_K^S(x),\ < p, v > \leq 0\}.$$

Précisons que, quand l'ensemble K est régulier, cet ensemble tangent correspond à la définition classique de demi-espace tangent.

2.1.4 Équations mutationnelles de la dilatation

Pour définir les équations mutationnelles, nous allons munir tout d'abord l'espace $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ de la distance de Hausdorff $\boldsymbol{d}$. Nous associons ensuite à toute application multivoque $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$, et à tout ensemble $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble atteignable de K au temps $h > 0$ pour F :

$$\vartheta_F(h, K) = \{\vartheta_F(h, x)\}_{x \in K}$$

où $\vartheta_F(h, x) = \{x(h)\}$ représente les valeurs au temps h de toutes les solutions à l'inclusion différentielle [10] :

$$x'(t) \in F(x(t)),\ x(0) = x$$

On adapte alors la notion de dérivée d'un tube $K : \mathbb{R}^+ \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ (*i.e.* $K : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, les "courbes" $h \mapsto \vartheta_F(h, K)$ jouant le rôle des demi-droites $h \mapsto x + hv$ utilisées pour définir les quotients différentiels :

Définition 1.2.16 :

Soit F une application multivoque de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Considérons un tube K : $\mathbb{R}^+ \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$. Si, pour $t \in \mathbb{R}^+$, l'application multi-valuée $K(\cdot)$ vérifie

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\boldsymbol{d}(\vartheta_F(h, K(t)), K(t+h))}{h} = 0,$$

nous dirons que F est une mutation au temps t du tube K et nous écrirons

$$\overset{\circ}{K}(t) \ni F.$$

Remarquons que l'unicité de la mutation n'est pas assurée, ce qui justifie la notation employée.

Si nous considérons à présent une application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ associant à un domaine K et un instant t l'ensemble $f(t, K; .)$, nous pouvons définir une équation mutationnelle pour tubes

$$\overset{\circ}{K}(t) \ni f(t, K(t); \cdot), \ \forall t \geq 0$$

Nous prouvons trois résultats traitant de la dilatation, le deuxième étant le plus précis, et le troisième le plus géométrique, insistant sur le rôle joué par le cône normal N_K^S.

Théorème 1.2.17 :

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et S un compact convexe symétrique d'intérieur non vide. Le tube de dilatation $K_S(t) = K \oplus tS$ associé à l'élément structurant S vérifie

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{K}_S(t) &\ni S \\
\overset{\circ}{K}_S(t) &\ni \frac{\partial d^S_{K_S(t)}(.)}{\alpha(t)} \\
\overset{\circ}{K}_S(t) &\ni N^S_{K_S(t)}(.) \bigcap S
\end{aligned}$$

avec $K_S(0) = K$, et où

$$\alpha(t) = j_S(\partial d^S_{K_S(t)}) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} j_S(\partial d^S_{K_S(t)}(x)) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{v \in \partial d^S_{K_S(t)}(x)} j_S(v).$$

2.2 Algorithme des Montagnes Russes

Les problèmes d'optimisation sont d'un intérêt fondamental dans de nombreuses branches des mathématiques appliquées. En analyse d'image en particulier, on peut citer les contours actifs [53, Kass, Witkin & Terzopoulos] ou les champs de Markov [38, Geman & Geman]. Mentionnons également ce domaine en plein développement que sont les réseaux de neurones [49, Hopfield] [48, Hertz, Krogh & Palmer]. La plupart des algorithmes qui atteigne le minimum global

d'une fonction donnée reposent sur des aspects probabilistes [55, 54, Kirkpatrick, Gelatt & Vecchi] [41, Goldberg] [22, Cerf]. Dans cette thèse, nous proposons un algorithme non-déterministe atteignant le minimum global d'une fonction donnée dont on connait la valeur au minimum.

Considérons le problème de minimisation

$$\text{Trouver } x_{\min} \text{ tel que } v_0 \ := \ \inf_{x \in X} V(x) = V(x_{\min})$$

où

$$V : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

est une fonction étendue semi-continue inférieurement supposée minorée, et où X est un espace vectoriel de dimension finie.

Lorsque V est différentiable, la fonction V est trivialement une fonction de Liapounov pour la méthode du gradient

$$x'(t) \ = \ -V'(x(t))$$

de telle sorte que $t \mapsto V(x(t))$ est décroissante. Malheureusement, comme les équilibres de cette équation différentielle sont les points critiques de V, l'algorithme du gradient, quand il converge, peut s'arrêter en n'importe quel point critique, et en particulier, en un minimum local.

Un moyen évident pour éviter cette difficulté est de vérifier que V est une fonction de Liapounov exponentielle, c'est-à-dire si V vérifie

$$\forall\, t \geq 0, \ \ V(x(t)) \ \leq \ (V(x_0) - v_0)e^{-at} + v_0 \tag{1.12}$$

Dans ce cas, la limite de la solution (si elle existe) atteint le minimum global de V et fournit un algorithme continu qui atteint un minimum global. Mais V n'est pas nécessairement une fonction de Liapounov exponentielle pour l'équation du gradient, hormis si V vérifie

$$\forall\, x, \ \ V(x) - v_0 \ \leq \ \frac{1}{a}\|V'(x)\|^2$$

Quand V est une fonction de Liapounov exponentielle, on peut remplacer l'équation du gradient par la simple inclusion différentielle

$$\forall\, t \geq 0, \ \ x'(t) \ \in \ B$$

où B est la boule unité de l'espace de dimension finie X, et chercher la direction dans la boule qui rende $V(x(t))$ décroissante. Cette approche ne requiert pas de propriétés de régularité sur V, puisqu'aucune propriété de régularité sur le gradient n'est demandée.

2.2.1 Algorithme continu

Cependant, quand V n'est pas une fonction de Liapounov exponentielle, un théorème de la théorie de la viabilité [10, Théorème 9.3.1] implique l'existence d'une fonction de Liapounov exponentielle optimale $V_\propto$, qui est la plus petite fonction de Liapounov exponentielle semi-continue inférieurement plus grande que (ou égale à) V.

En conséquence, pour n'importe quel état initial $x_0 \in \ \mathrm{Dom}(V_\propto) := \{x \mid V(x) \neq \pm\infty\}$, il existe (au moins) une solution à l'inclusion différentielle $x' \in B$ partant de x_0 et vérifiant

$$V(x(t)) \ \leq \ V_\propto(x(t)) \ \leq \ (V_\propto(x_0) - v_0)e^{-at} + v_0$$

Bien que nous sachions qu'alors $V(x(t))$ converge vers v_0 quand $t \to +\infty$, la fonction $t \mapsto V(x(t))$ n'est pas nécessairement décroissante. Le long d'une telle solution, la fonction V saute par dessus les maxima locaux, quitte les minima locaux, joue aux "Montagnes Russes" (appelées "Montagnes Américaines" en russe, et "Big Dipper" en Américain !), mais converge finalement vers son infimum.

2.2.2 Algorithme discret

Soit $h > 0$ un pas de discrétisation fixé.

Définition 1.2.18 :

Nous dirons qu'une fonction semi-continue inférieurement $U \geq V$ est une fonction de descente discrète si de n'importe quel $x_0 \in \mathrm{Dom}(U)$, il existe une suite définie par l'algorithme

$$x_{p+1}^h := x_p^h + hu^h \quad \text{où} \quad u^h \in B \tag{1.13}$$

vérifiant

$$U(x_p^h) \leq (1 - ah)^p (U(x_0) - v_0) + v_0 \tag{1.14}$$

La connaissance d'une telle fonction de descente discrète U plus grande ou égale à V fournit un "algorithme des Montagnes Russes" discret, puisque tout point d'accumulation de la suite x_p^h atteint un minimum global.

Nous allons donner une formule constructive qui fournira à la fois la plus petite fonction de descente discrète plus grande que V, et l'algorithme convergeant vers un minimum global.

Posons $V_0^h = V$, et définissons par récurrence la suite de fonctions V_n^h par

$$V_n^h(x) := \max\left(V_{n-1}^h(x), \frac{1}{1-ah}\left(\inf_{u \in B} V_{n-1}^h(x + hu) - ahv_0\right)\right) \tag{1.15}$$

Théorème 1.2.19 :

Soit V une fonction étendue semi-continue inférieurement non triviale, minorée. Alors il existe une fonction $V_\propto^h$ qui est la plus petite fonction de descente discrète plus grande que V, appelée la fonction de descente optimale de V.
Elle peut être calculée par l'algorithme suivant :

$$V_\propto^h(x) \ := \ \sup_{n\geq 0} V_n^h(x) \tag{1.16}$$

L'application multi-valuée R^h définie par

$$R^h(x) \ := \ \left\{ u \in B \mid V_\propto^h(x+hu) \ = \ \inf_{w\in B} V_\propto^h(x+hw) \right\} \tag{1.17}$$

définit l'"algorithme des Montagnes Russes" : de $x_0 \in \mathrm{Dom}(V_\propto^h)$, toute suite définie par

$$x_{p+1}^h \ := \ x_p^h + hu^h \ \text{ où } \ u^h \in R^h(x_p^h) \tag{1.18}$$

vérifie

$$V(x_p^h) \ \leq \ V_\propto^h(x_p^h) \ \leq \ (1-ah)^p(V_\propto^h(x_0) - v_0) + v_0$$

Cet algorithme est fondé sur les idées issus de la théorie de la viabilité [4, 35, 97, 101, Aubin, Frankowska, Quincampoix & Saint-Pierre].

La deuxième question que l'on peut se poser est la suivante : *la limite de la suite de fonctions de descente discrètes optimales est-elle une fonction de Liapounov exponentielle plus grande que V ?*

Cela dépend de ce que l'on entend par la notion de "limite" : le concept approprié est celui d'épilimite inférieure définie de la manière suivante

$$\lim\nolimits^\sharp_{\uparrow n\to\infty} V_n(x) := \liminf_{\substack{y \to x \\ n \to \infty}} V_n(y)$$

Nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 1.2.20 :

L'épilimite inférieure de la suite de fonctions de descente optimales discrètes $(V_\propto^h)_h$ est une fonction de Liapounov exponentielle plus grande que V.

2.3 Propriétés algébriques des opérateurs induits par des systèmes dynamiques

En morphologie mathématique, les transformations utilisées privilégient des transformations de type ensembliste qui commutent avec l'union et l'intersection. Le cadre des treillis complets permet la modélisation et l'étude de ce type de transformation opérant sur les images binaires ou à teintes de gris [69] [116] [70] [45] [46] [99]...

Dans ce chapitre, nous allons d'abord rappeler les différentes définitions relatives aux treillis, puis définir et étudier les propriétés algébriques des opérateurs induits par des inclusions différentielles de la forme :

$$x'(t) \in F(x(t))$$

où $F : X \rightsquigarrow X$ est une application multivoque. De manière intuitive, cette équation signifie qu'à chaque instant, un *choix* de directions est proposé à x', plutôt qu'une unique direction comme dans le cas univoque.

2.3.1 Rappels sur les treillis

Rappelons qu'un ensemble $\mathcal{L}$ est un treillis complet si :

1. L'ensemble $\mathcal{L}$ est ordonné.
2. Pour toute famille (x_i) finie ou non de $\mathcal{L}$, il existe :
   - un plus petit majorant $\vee x_i$ appelé sup (pour supremum),
   - un plus grand minorant $\wedge x_i$ appelé inf (pour infimum).

Par exemple, l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X est ordonné par l'inclusion. Le sup coïncide avec l'union et l'inf avec l'intersection. C'est un treillis complet pour les opérations $\cap$ et $\cup$.

On appellera opérateur toute application de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{M}$ où $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sont des treillis complets. On dira que $\psi : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{M}$ est :

- croissant si : $\forall x, y \in \mathcal{L},\ x \leq y \Rightarrow \psi(x) \leq \psi(y)$.
- extensif (resp. anti-extensif) si : $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ et $\forall x \in \mathcal{L},\ x \leq \psi(x)$ (resp. $x \geq \psi(x)$).
- idempotent[6] si : $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ et $\forall x \in \mathcal{L},\ \psi(x) = \psi\psi(x)$.
- dilatation algébrique (resp. une érosion algébrique) s'il commute avec le sup (resp. avec l'inf).
- ouverture algébrique si ψ est anti-extensif et idempotent.
- fermeture algébrique si ψ est extensif et idempotent.

2.3.2 Propriétés algébriques des opérateurs induits par des systèmes dynamiques

Dans ce paragraphe, nous allons étudier les propriétés algébriques et de continuité d'opérateurs $\psi : \mathcal{F}(X) \mapsto \mathcal{F}(X)$ (où $\mathcal{F}(X)$ est le treillis complets des fermés inclus dans X) définis à l'aide d'une inclusion différentielle $x'(t) \in F(x(t))$. Pour cela, nous devons dans un premier temps, donner les notions de convergence que l'on utilisera par la suite.

Pour toute suite de fermés K_n, il existe deux notions différentes de limites supérieures et inférieures :

[6] La relation $\circ$ des opérateurs sera la plupart du temps omise. On notera donc $\psi\phi$ pour $\psi \circ \phi$.

- celles induites par la structure de treillis de $\mathcal{F}(X)$, et définies par :

$$\limsup K_n := \bigcap_{N\geq 1}\left(\overline{\bigcup_{n\geq N} K_n}\right)$$

$$\liminf K_n := \overline{\bigcup_{N\geq 1}\left(\bigcap_{n\geq N} K_n\right)}$$

- celles introduites par l'analyse multivoque et définies par :

$$\operatorname*{Limsup}_{n\to\infty} K_n := \left\{x \in X \mid \liminf_{n\to\infty} d(x, K_n) = 0\right\}$$

est la limite supérieure de la suite K_n et le sous ensemble

$$\operatorname*{Liminf}_{n\to\infty} K_n := \left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} d(x, K_n) = 0\right\}$$

est sa limite inférieure. Un ensemble K est dit être la limite où l'ensemble limite de la suite K_n si

$$K = \operatorname*{Liminf}_{n\to\infty} K_n = \operatorname*{Limsup}_{n\to\infty} K_n =: \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} K_n$$

Définition 1.2.21 :

Soit $\psi : \mathcal{F}(X) \mapsto \mathcal{F}(X)$ un opérateur. On dit que ψ est semi-continu-supérieurement (s.c.s.) si $K_n \to K$ implique $\text{Limsup}_{n\to\infty} K_n \subseteq \psi(K)$ et ψ est semi-continu-inférieurement (s.c.i.) si $K_n \to K$ implique $\psi(K) \subseteq \text{Liminf}_{n\to\infty} K_n$. Si ψ est à la fois s.c.s. et s.c.i. alors $K_n \to K$ implique $\psi(K_n) \to \psi(K)$, et l'on dira que ψ est continu.

On peut alors monter [47, Heijmans-Serra] que toute érosion $\psi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ croissante est semi-continue supérieurement.

En étudiant de plus près les différents opérateurs construits à partir de l'inclusion $x'(t) \in F(x(t))$, nous montrons que l'application qui à un ensemble K associe :

- son ensemble atteignable $\vartheta_F(h, K)$ au temps h est une dilatation algébrique.

- son noyau de viabilité[7] $\text{Viab}_F(K)$ est une ouverture algébrique qui est semi-continue supérieurement. Nous donnerons une structure de l'ensemble de ses points fixes.

- son noyau d'invariance[8] $\text{Inv}_F(K)$ est une érosion algébrique et une ouverture algébrique qui est semi-continue supérieurement.

[7] Le noyau de viabilité est le plus grand fermé de K tel que de tout point x_0, il existe une solution à $x'(t) \in F(x(t))$, $x(0) = x_0$ viable dans K dans le sens où $x(t) \in K$, $\forall t \geq 0$.

[8] Le noyau d'invariance est le plus grand fermé de K tel que de tout point x_0, toute solution à $x'(t) \in F(x(t))$, $x(0) = x_0$ est viable dans K dans le sens où $x(t) \in K$, $\forall t \geq 0$.

3 Perspectives

De nombreuses extensions[9] possibles à ces travaux sont envisageables.
En ce qui concerne la ligne de partage des eaux, citons :

- la mise en œuvre de l'algorithme de valuation des contours (*tracking*, mise en correspondance, ...).
- l'étude de la ligne de partage des eaux dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^n$. Une ligne intégrale du gradient de $\mathbb{R}^2$ peut se traduire dans $\mathbb{R}^3$ comme la surface contenant certaines lignes intégrales du gradient. Comment caractériser ces "lignes" par rapport à f ? Une des applications en dimension n concerne la segmentation de densités de probabilité pour la classification non supervisée.
- l'étude de la ligne de partage des eaux d'une fonction non régulière. On peut penser en effet que l'utilisation des outils donnés par la théorie des inclusions différentielles permettra d'obtenir des caractérisations analogues à celles obtenues dans le cadre régulier. Plus généralement, l'utilisation de la théorie des systèmes dynamiques et de la théorie des attracteurs devraient amener de nouvelles propriétés.

Le cadre du calcul mutationnel est un nouvel outil mathématique qui permet d'envisager de nombreux débouchés. Citons par exemple :

- le calcul des dérivées mutationnelles des transformations morphologiques autres que la dilatation (en particulier l'érosion, l'ouverture ou la fermeture). Ceci permettrait alors sans doute de créer de nouveaux algorithmes.
- d'autre part, le développement d'une analyse numérique des équations mutationnelles, avec de très nombreuses applications possibles (asservissement visuel, contrôle, *tracking*, reconnaissance de formes, ...).

L'algorithme des Montagnes Russes demande une étude plus approfondie :

- tout d'abord, il faudrait le comparer aux autres algorithmes d'optimisation existant, en particulier au recuit simulé.
- dans l'état, cet algorithme est extrêment lent et coûteux en place mémoire. On peut envisager sa parallélisation, et regarder comment sauvegarder les calculs pour une utilisation ultérieure au cours de la recherche du minimum.
- dans le même ordre d'idée, il serait intéressant de trouver des théorèmes probabilistes pour calculer le noyau de viabilité. En les retraduisant pour l'algorithme des Montagnes Russes, on accélérerait sans doute sa convergence.

Enfin, les propriétés algébriques des opérateurs induits par des systèmes dynamiques devraient permettre de créer de nouveaux algorithmes pour calculer entre autre le noyau de viabilité.

[9] Comme le précise l'exergue de ce chapitre, les choses ne sont pas immuables...

Première partie

Segmentation et Morphologie Mathématique

Alternatively, this way of regularizing the world may be illustrated by the method of the matrix. Superimpose a transparent sheet of finely squared graph paper upon some complex natural image. The "formless" image can then be described with approximate precision in terms of the highly formal arrangement of squares. Seen through such a screen, the path of an object moving at random can be "plotted" in terms of so many squares up or down, left or right. Reduced to these terms, we can by statistical averages predict the approximate trend of its future motion - and then suppose that the object itself is obeying *statistical laws. The object, however, is doing nothing of the kind. The statistical laws are being "obeyed" by our regularized model of the object behavior.*

Allan W. Watts

Nature, man and woman.

Chapitre 2

La ligne de partage des eaux discrète

Dieu dit : "Qu'un espace s'étende au milieu des eaux, et forme une barrière entre les unes et les autres.".

Génèse, I, 6.

1 La ligne de partage des eaux : approche par immersion

La segmentation d'images a pour but de trouver une partition de l'image (fonction à valeurs réelles) en région homogène au sens d'un critère donné. Cette partition donne les contours des objets présents dans les images. Une des idées pour segmenter les images est de déterminer les lignes le long desquelles les niveaux de gris varient rapidement. Ces lignes représentent les contours des objets. On peut donc les modéliser par les lignes de crête du module du gradient de l'image.

Géographiquement, la notion de ligne de crête ne semble poser aucun problème. Le Lexis [dictionnaire de la langue française, Larousse, 1989] nous apprend en effet qu'une ligne de crête est une ligne joignant les points les plus élevés d'un terrain (syn. ligne de partage des eaux). Cependant, lorsque l'on veut traduire en termes mathématiques le concept de ligne de crête, on se rend compte qu'il y a plusieurs manières de le faire : maxima locaux du module du gradient dans la direction du gradient, zéros du Laplacien, attracteurs des minima, pour n'en citer que quelques unes. Chacune de ces définitions donne naissance à des objets qui sont, bien sûr, différents.

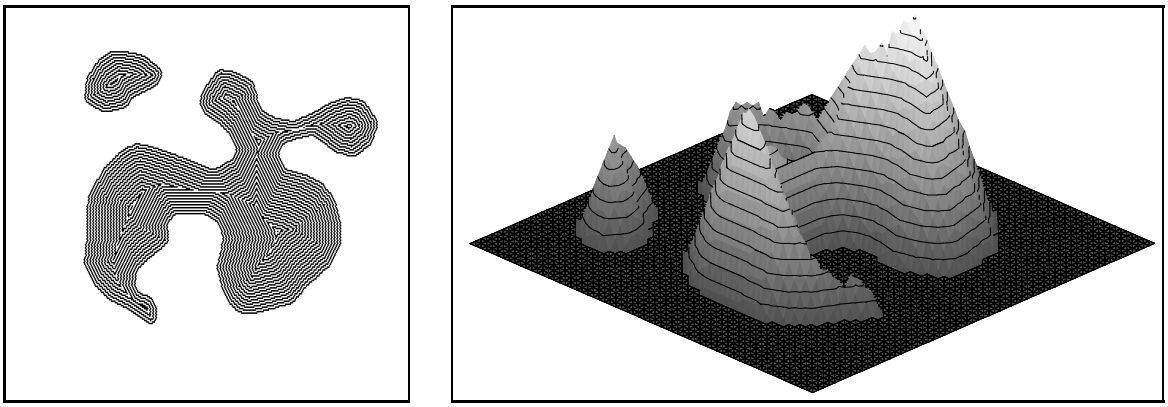
La morphologie mathématique est partie de la notion d'attracteur des minima, c'est à dire qu'à tout minimum sera associée la zone géographique d'où une goutte d'eau, suivant la ligne de plus grande pente, arrivera dans ce minimum. Le complémentaire des attracteurs est donc bien une ligne de partage des eaux.

1.1 Algorithme générique

Bien que la plupart des résultats et définitions s'étendent à $\mathbb{R}^n$, nous allons restreindre la présentation au cas du plan en nous plaçant dans $\mathbb{R}^2$. C'est en effet le cadre classique de l'analyse d'image.

Définition 2.1.1 :

Un chemin est une application continue d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Un arc est l'image d'un chemin dans $\mathbb{R}^2$. Nous dirons que les extrémités du chemin sont les extrémités de l'arc (qui sont les limites du chemin aux bornes de son intervalle de définition).
Une image est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Un niveau de gris d'un point de l'image est la valeur (l'intensité) de l'image en ce point.
Un plateau d'une image est un ensemble connexe de points de l'image d'altitude constante.
Un minimum régional d'une image est un plateau d'où il est impossible d'atteindre un point d'altitude inférieure par un chemin descendant.



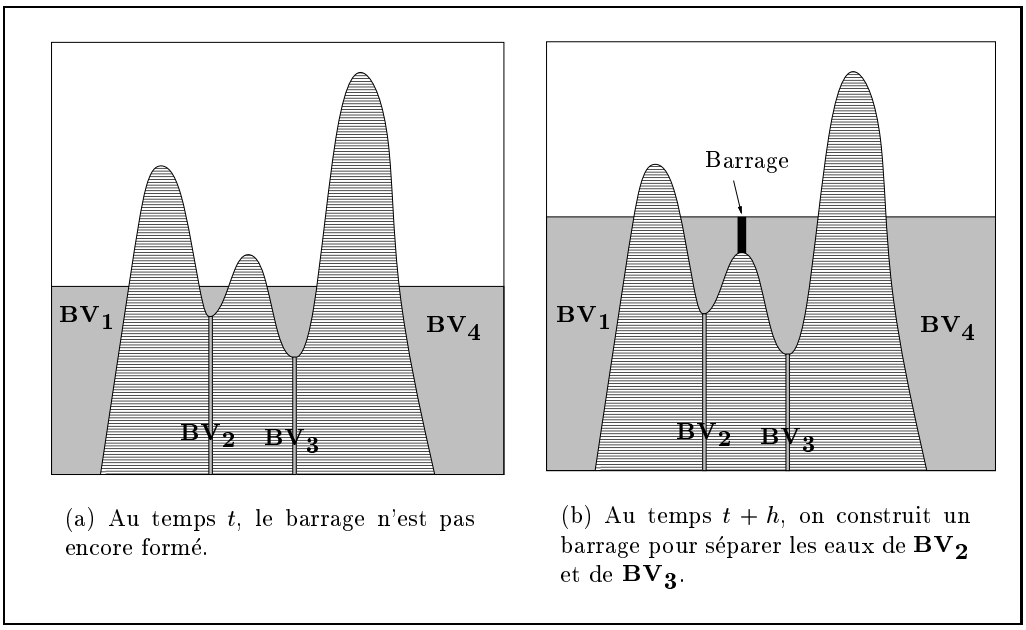
(a) Image originale (b) Vue tridimensionnelle

FIG. 2.1. – *Vue classique et tridimensionnelle d'une image en teintes de gris.*

En morphologie mathématique, on assimile souvent une image à un relief (fig. 2.1), ou à une surface topographique, en considérant le niveau de gris (l'intensité de l'image) comme une altitude. Les endroits de dénivelé important forment alors un bon ensemble dans lequel chercher des contours. L'idée sous-jacente à la ligne de partage des eaux est d'attribuer une zone d'influence à chacun des minima régionaux .

Diverses manières de calculer les zones d'influences ont été proposées, mais l'idée (fig. 2.2) qui semble la plus fructueuse (en ce sens qu'elle a donné vie aux algorithmes les plus rapides), est simple à décrire en dimension deux. On commence par percer les minima régionaux de la surface. Puis, on immerge lentement cette surface percée dans un plan d'eau. Passant par les ouvertures que l'on a créées, l'eau progresse alors dans les bassins correspondant à chaque minimum (fig. 2.2.a). Lorsque deux eaux en provenance de minima différents se rencontrent, on place un barrage, de tel sorte que deux eaux différentes ne se mélangent pas (fig. 2.2.b). La ligne de partage des eaux est constituée par l'ensemble de ces barrages. Elle partage donc l'image en différentes zones, que l'on peut considérer comme des zones d'influence ou comme des zones d'attraction des minima; on appelle ces zones les bassins versants de l'image.

En dimensions deux, le lieu des barrages se calcule immédiatement. En dimensions trois,



(a) Au temps t, le barrage n'est pas encore formé.

(b) Au temps $t + h$, on construit un barrage pour séparer les eaux de $\mathbf{BV_2}$ et de $\mathbf{BV_3}$.

FIG. 2.2. – *Construction de la ligne de partage des eaux : approche en deux dimensions.*

cette détermination n'est pas aussi facile (fig. 2.3). De manière informelle, nous pouvons dire que la ligne de partage des eaux est l'ensemble des lignes de crête d'une image.

En pratique, dans le but de la segmentation, on travaille sur l'image gradient[1] de l'image originale, et l'on cherchera les lignes de crêtes du gradient.

Donnons à présent l'algorithme classique ([27, Digabel & Lantuéjoul], [16, Beucher & Lantuéjoul], [114, Vincent] permettant de calculer la ligne de partage des eaux.

Il correspond à faire monter le niveau de l'eau dans chaque bassin, et à garder comme ligne de partage des eaux l'ensemble des points de contact entre deux eaux de bassins différents. Dans le cas où ce contact s'effectuerait sur un plateau, on conserve le milieu (au sens géodésique) de ce plateau. La ligne de partage des eaux ainsi définie est donc d'épaisseur unité.

Pour calculer le milieu géodésique sur les plateaux de contact, on utilise la distance géodésique. Il nous faut tout d'abord rappeler quelques définitions mathématiques sur la longueur d'un chemin.

Si l'on ne fait pas d'hypothèse de régularité des chemins, la mesure de leur longueur s'effectue par approximation avec des lignes polygonales. Soit $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ un chemin sur $\mathbb{R}^2$.

[1] Nous pourrions également travailler sur toute image de contrastes

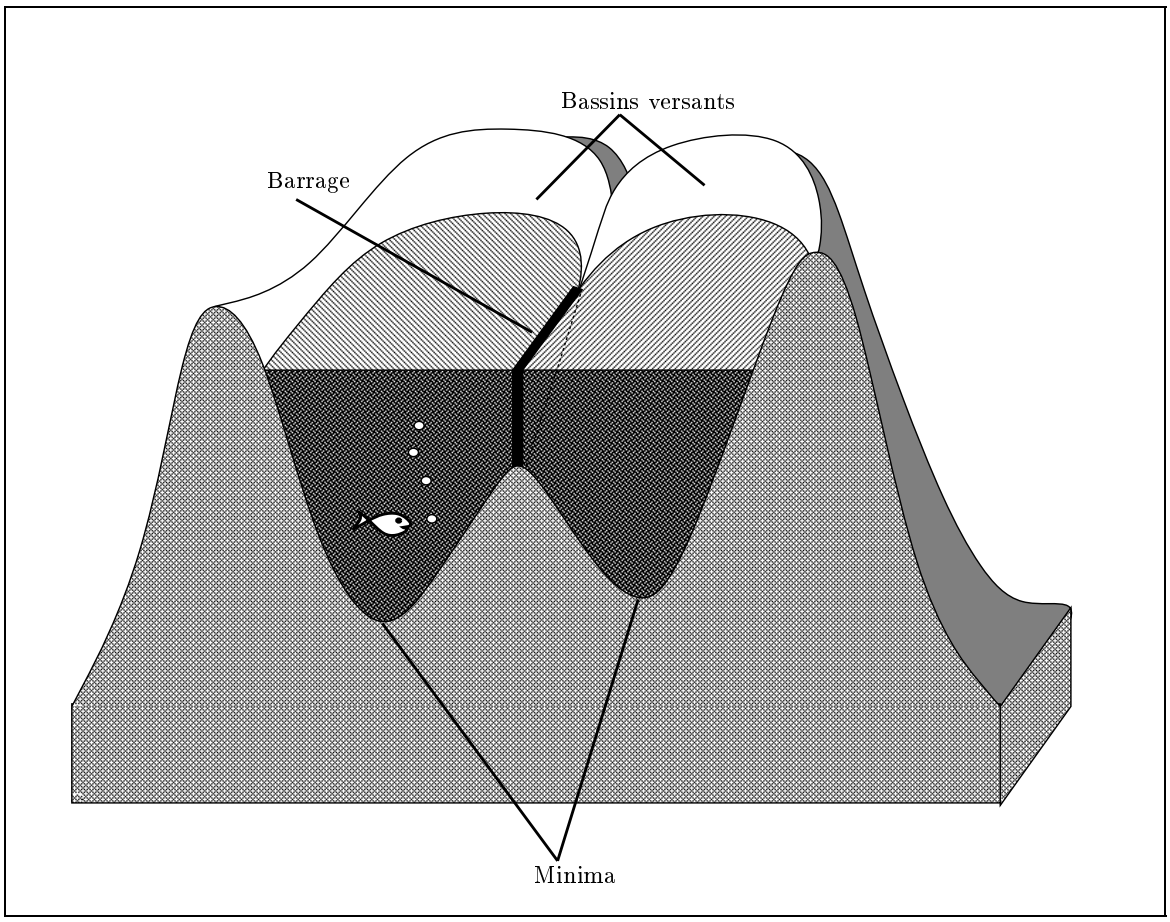


FIG. 2.3. – *Construction de la ligne de partage des eaux.*

Définition 2.1.2 :

On appelle ligne polygonale croissante sur γ, toute ligne polygonale

$$P = (\gamma(\lambda_i))_{i=0}^{n} \quad \text{avec} \quad \alpha = \lambda_0 < \lambda_1 ... < \lambda_n = \beta \tag{2.1}$$

La longueur de cette ligne polygonale est la somme des longueurs de ses segments :

$$\mathcal{L}(P) = \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(\lambda_{i-1}), \gamma(\lambda_i)). \tag{2.2}$$

On en déduit la longueur du chemin γ :

Définition 2.1.3 :

Soit γ un chemin dans $\mathbb{R}^2$. On dit que γ est rectifiable si et seulement si $\{ \mathcal{L}(P),$ P ligne polygonale croissante $\}$ est borné. Sa borne supérieure est appelée longueur du chemin γ.

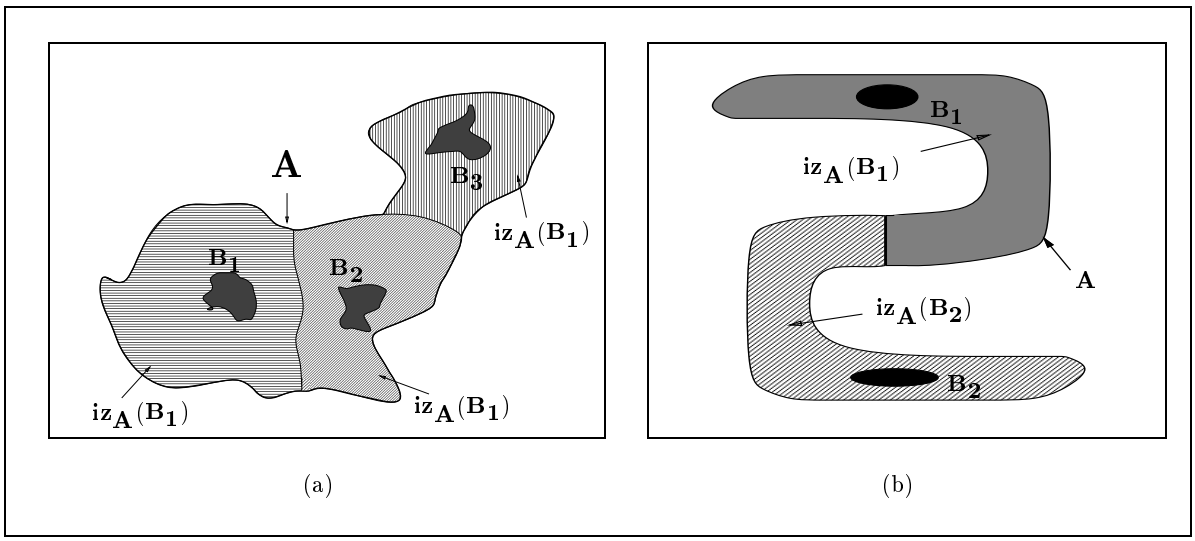


FIG. 2.4. – *Deux exemples de zones d'influence des composantes* $\mathbf{B_i}$ *dans un ensemble* $\mathbf{A}$.

Nous pouvons maintenant donner la définition de la distance géodésique[2] :

Définition 2.1.4 :

Soit A un ensemble inclus dans $\mathbb{R}^2$. La distance géodésique $d_A(a,b)$ entre deux points a et b de A est la borne inférieure des longueurs des chemins allant de a vers b totalement inclus dans A. S'il n'existe pas de tel chemin, alors la distance géodésique est infinie.

On suppose ici que l'ensemble A contient une famille B constituée de k composantes connexes $B_1, B_2, ..., B_k$.

Définition 2.1.5 :

La zone d'influence géodésique (fig. 2.4) $iz_A(B_i)$ d'une composante connexe B_i de B dans A est le lieu des points de A dont la distance géodésique à la composante B_i est inférieure à la distance géodésique de toute autre composante connexe de B :

$$iz_A(B_i) = \{p \in A, \forall j \in [1,k] \setminus \{i\}, \quad d_A(p, B_i) < d_A(p, B_j)\}. \tag{2.3}$$

Les points de A qui n'appartiennent à aucune zone d'influence constituent le squelette par zone d'influence géodésique de B dans A, noté $SKIZ_A(B)$:

$$SKIZ_A(B) = A \setminus IZ_A(B) \text{ avec } IZ_A(B) = \bigcup_{i \in [1,k]} iz_A(B_i). \tag{2.4}$$

L'algorithme de la ligne de partage des eaux par récurrence sur les niveaux de gris est alors

[2]Cette dénomination est un abus de langage, car cette notion ne mène pas toujours à une distance, mais seulement à un écart (deux points peuvent être à distance infinie)

le suivant :

Définition 2.1.6 : Ligne de partage des eaux, définition discrète

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{N}$ une fonction en escalier que nous supposerons bornée. Notons :

1. $h_{min} = \inf f(a)$ et $h_{max} = \sup f(a)$,
2. $[f]^h$ la section inférieure de f au niveau h : $[f]^h := \{a \mid f(a) \leq h\}$,
3. $Reg_Min_h(f)$ l'ensemble des minima régionaux de f d'altitude h.

L'ensemble des bassins versants de f est l'ensemble $X_{h_{max}}$ obtenu après la récurrence suivante :

$$\begin{array}{llll} (i) & X_{h_{min}} & = & [f]^{h_{min}} \\ (ii) & X_{h+1} & = & Reg_Min_{h+1}(f) \cup IZ_{f^{h+1}}(X_h), \ \forall h \in [h_{min}, h_{max} - 1] \end{array}$$

où $IZ_A(B)$ est l'union des zones d'influence géodésique de B dans A. La ligne de partage des eaux de f est alors le complémentaire de $X_{h_{max}}$.

Cet algorithme est illustré par la figure 2.5. Ses implantations les plus efficaces [117, 115, 17, 105] utilisent des techniques de piles FIFO pour le processus d'inondation (voir le chapitre 6).

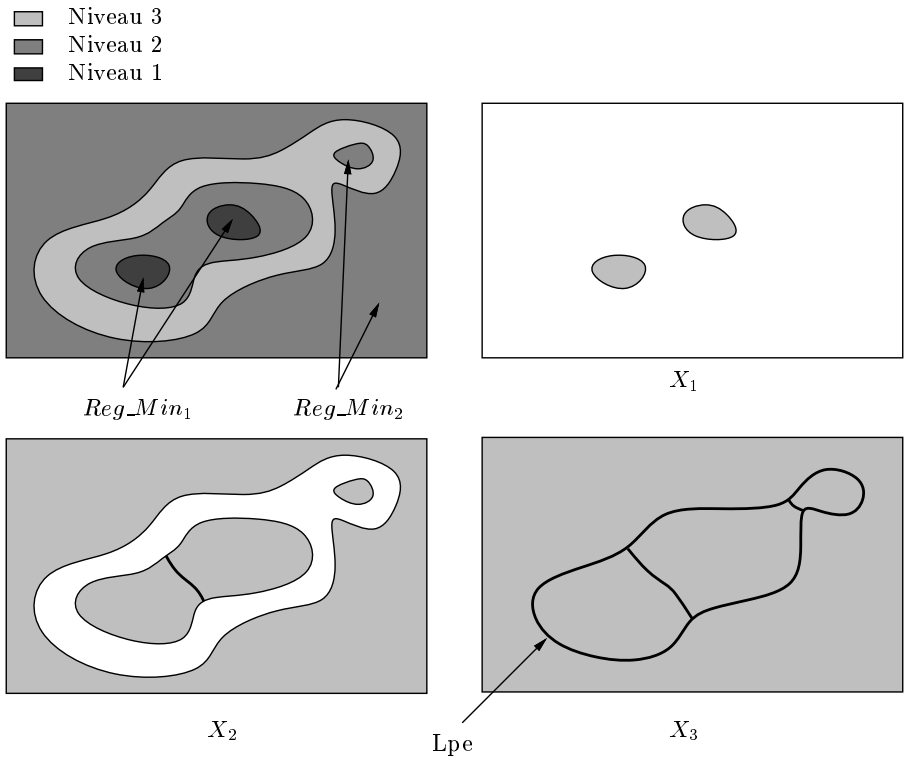
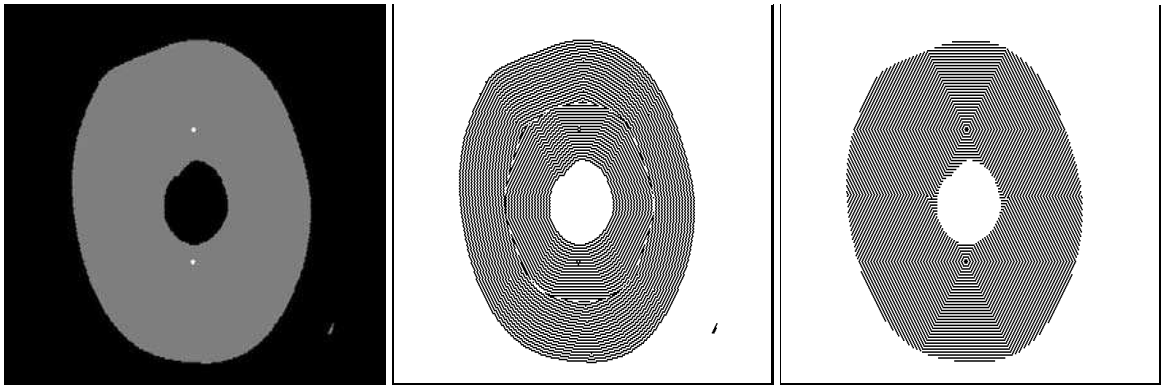


FIG. 2.5. – *Illustration du processus d'immersion par récurrence.*

D'autres approches ont été développées. Citons pour mémoire la ligne de partage des eaux déterminée par le biais de squelettes numériques ([78, Meyer], [14, Beucher]), les algorithme de propagation suivant des lignes de plus grande pente [36, 37, Friedlander], et des algorithmes reposant sur des notions de fléchage [15, Beucher]. Ces approches ne seront pas considérées dans cette thèse.

2 Le problème des plateaux

Dans la pratique, les images possèdent souvent des plateaux. Lorsque ceux-ci sont intérieurs à un bassin versant, ils ne posent pas de difficulté : de manière théorique, il est facile de modifier l'image de telle sorte que ces plateaux s'inclinent, et présentent ainsi une pente dirigée vers les lignes de crêtes. Cette opération s'effectue sans modifier la ligne de partage des eaux.



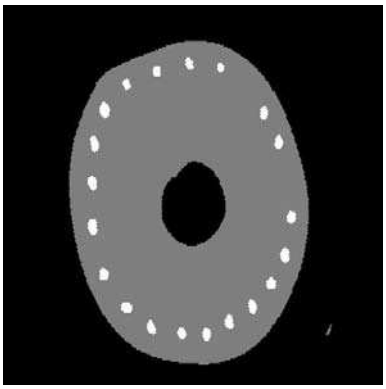
(a) Image originale (b) Distance au bord descendant (c) Distance au bord montant

FIG. 2.6. – *Distances aux bords sur un anneau ayant deux points surélevés proches du bord intérieur.*

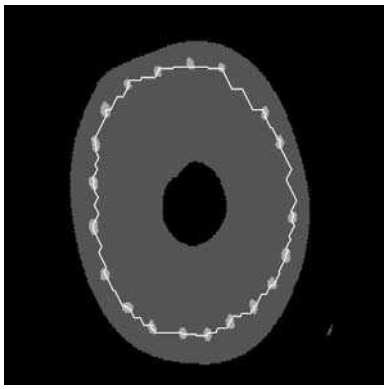
En revanche, si nous désirons une ligne de partage des eaux discrète d'épaisseur unité, nous sommes obligés de faire le choix d'une ligne dans les plateaux qui ne sont pas intérieurs à un bassin versant. L'algorithme par immersion de la définition 2.1.6 la détermine implicitement en calculant le "milieu géodésique" du plateau. Le principe est de munir chaque plateau d'une fonction distance. Deux choix sont possibles : la distance géodésique au bord descendant (fig. 2.6.b) et la distance au bord montant (fig. 2.6.c). Les deux choix fournissent des résultats différents. Le choix de l'une ou de l'autre est arbitraire et dépend des applications. Notons que l'algorithme 2.1.6 calcule implicitement la distance au bord descendant. Illustrons par des exemples les choix des distances.

Prenons une image représentant un anneau, correspondant aux contours d'un objet. La ligne de partage des eaux de cette image réduira le disque à une ligne médiane, créant ainsi deux parties égales, ce qui est raisonnable. Cependant, il peut arriver que nous désirions faire passer la segmentation par un autre endroit.

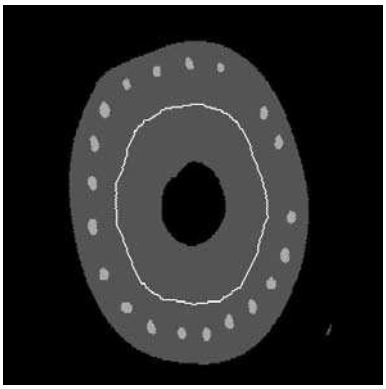
Considérons les figures 2.7.a et 2.7.d. Elles représentent cet anneau sur lequel nous avons placés des nouveaux points de contour, par lesquels nous voudrions que passe la ligne de partage



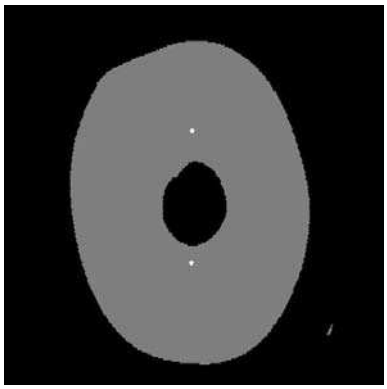
(a) Les sommets sont proches du bord extérieur



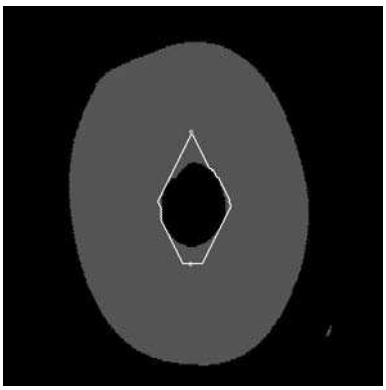
(b) Ligne de partage des eaux sur distance au bord montant



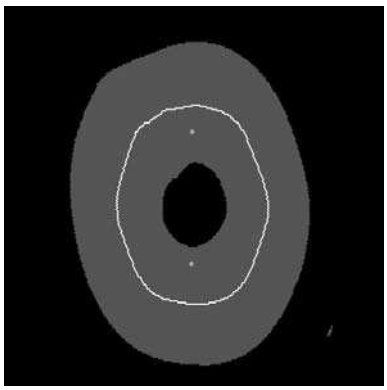
(c) Ligne de partage des eaux sur distance au bord descendant



(d) Les sommets sont proches du bord intérieur



(e) Ligne de partage des eaux sur distance au bord montant



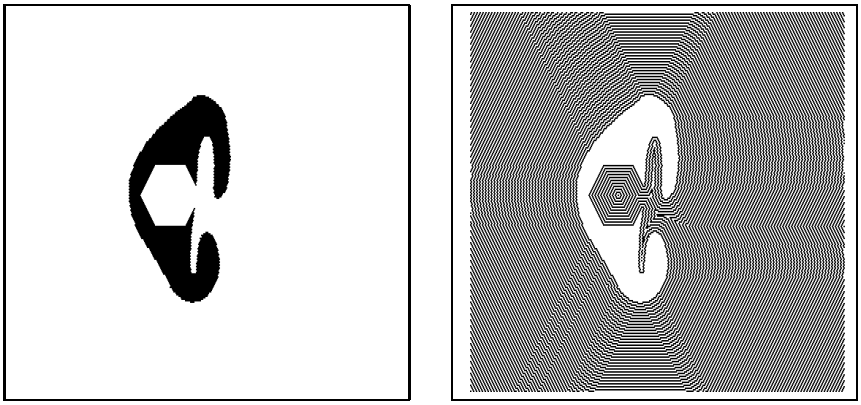
(f) Ligne de partage des eaux sur distance au bord descendant

FIG. 2.7. – *Le problème des plateaux : le choix d'un bon contour.*

des eaux. Dans le premier cas (fig. 2.7.a), ces points sont près du bord extérieur, et dans le second cas (fig. 2.7.d), ils sont placés près du bord intérieur. L'algorithme de la ligne de partage des eaux segmente l'image en inondant l'image de la distance au bord descendant (fig. 2.7.c et fig. 2.7.f) ce qui n'est pas judicieux pour cet exemple.

Si nous transformons l'image en calculant la distance au bord montant (la distance aux points), le résultat obtenu est alors situé de telle sorte qu'il corresponde à l'intuition pour la figure 2.7.b. Aucun critère raisonnable ne permet de choisir entre les figures 2.7.e et 2.7.f : il n'y a pas assez de points pour que le contour se place correctement.

Ces exemples illustrent bien que le choix implicite de la distance au bord descendant pour inonder les plateaux-sommets est arbitraire, puisqu'il peut être plus judicieux d'utiliser la distance au bord montant. La distance au bord descendant est le bon choix dans le cas où nous désirons faire passer la ligne de partage des eaux exactement au milieu des plateaux.



(a) Exemple d'arc de cercle non fermé

(b) La distance au bord montant crée un bassin central supplémentaire

FIG. 2.8. – *Exemple de création d'un bassin supplémentaire par la distance au bord montant.*

Remarquons néanmoins que la distance au bord montant est d'utilisation fragile : elle peut avoir le désagréable effet de créer des minima locaux supplémentaires, ajoutant ainsi des bassins supplémentaires, et modifiant la connectique de la ligne de partage des eaux. Elle a par exemple tendance à fermer les arcs de cercle (fig. 2.8). D'un autre coté, la distance au bord descendant a tendance à ajouter des maxima locaux supplémentaires, mais ceci ne gène en rien la ligne de partage des eaux. Cette particularité de la distance au bord montant est surtout intéressante si l'on cherche à connecter des objets (fig. 2.9) [77].

Il existe un algorithme qui calcule la ligne de partage des eaux en choisissant la distance au bord montant. Il s'agit de l'algorithme par ruissellement [15, Beucher] (où algorithme de descente de la goutte d'eau).

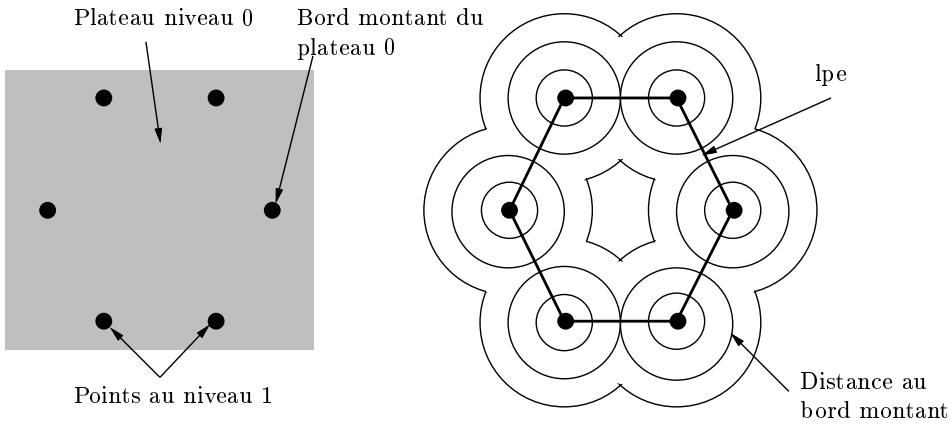


FIG. 2.9. – *Lorsque l'on munit les plateaux de la distance au bord montant des plateaux, la lpe peut connecter des objets. Ici, le plateau au niveau* 0 *est un unique minimum régional : la lpe est donc vide. Si l'on munit le plateau de la distance au bord montant, la lpe de l'image complétée par l'opposée de la distance au bord montant connecte les points sous forme d'un hexagone.*

3 Segmentation

Segmenter une image signifie la décomposer en différentes zones d'intérêt. Ces régions représentent souvent différents objets que l'on veut extraire. On va montrer que la ligne de partage des eaux discrète est un outil morphologique puissant de segmentation.

3.1 Quelques outils morphologiques

Nous allons commencer par présenter quelques outils morphologiques qui nous seront utiles pour la segmentation par ligne de partage des eaux.

3.1.1 Érosion géodésique

Pour traiter les minima dans une image, une transformation nous sera utile : l'érosion géodésique.

Soit $g < f$ deux images. L'érosion géodésique $E_g^\infty(f)$ de f au-dessus de g est la limite de la récurrence suivante :

$$\begin{cases} f_0 = f \\ f_{n+1} = (f_n \ominus B) \vee g \end{cases} \tag{2.5}$$

où B est la boule unité.

Soit $h \in \mathbb{R}$, et posons $f_h(a) := f(a) + h$. Le calcul des minima régionaux en termes de

transformations morphologiques[3] est le suivant :

$$Min_Reg(f) = \bigcap_{h>0} \overline{\left\{a \mid f(a) \neq E_f^{\infty}(f_h)\right\}} \tag{2.6}$$

La fonction $E_f^{\infty}(f_h)$ s'appelle aussi reconstruction numérique.

Notons que cette formule est opératoire sur des fonctions en escalier. Ainsi, pour des images ayant des niveaux de gris discrets, l'intersection sur h de la formule précédente se réduit à l'unique valeur $h = 1$. La traduction de la formule (2.6) montre qu'en fait les minima régionaux dépendent de deux paramètres : l'intersection sur h et l'érosion géodésique de taille ∞. L'utilisation de valeurs particulières de ces paramètres permet de définir des minima ayant une géométrie (contraste ou forme) particulière :

Définition 2.3.7 :

On appelle $h - \infty$ minima la fonction définie par :

$$f - E_f^{\infty}(f_h). \tag{2.7}$$

Deux ensembles peuvent se déduire des $h - \infty$ minima (fig. 2.10) :

1. Les points où la fonction est strictement négative. Il s'agit d'un sur-ensemble des minima régionaux dont un grand nombre seront connectés.

2. Les points où la fonction vaut $-h$. Il s'agit alors d'un sous-ensemble des minima régionaux.

Un choix menant à des minima "robustes" pourra être : les composantes connexes du premier contenant des points du second. Ce choix de "minima robustes" est important dans l'utilisation pratique de la ligne de partage des eaux. Nous reprendrons l'étude de la reconstruction numérique dans le chapitre 5.

[3]Soit B un compact de $\mathbb{R}^2$ et K un fermé de $\mathbb{R}^2$. Notons $\check{B} := \{-b \mid b \in B\}$. Les quatre opérateurs morphologiques de base sont :

- La dilatation : $K \oplus \check{B} := \{k + b \mid k \in K, b \in \check{B}\}$
- L'érosion : $K \ominus \check{B} := \mathbb{R}^n \setminus \left((\mathbb{R}^n \setminus K) \oplus \check{B}\right)$
- L'ouverture : $K_B := (K \ominus \check{B}) \oplus B$
- La fermeture : $K_B := (K \oplus \check{B}) \ominus B$

Le passage au cadre fonctionnelle se fait en utilisant l'hypographe $\mathcal{H}p(f) := \{(a, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid f(a) \geq \lambda\}$ ou l'épigraphe $\mathcal{E}p(f) := \{(a, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid f(a) \leq \lambda\}$.

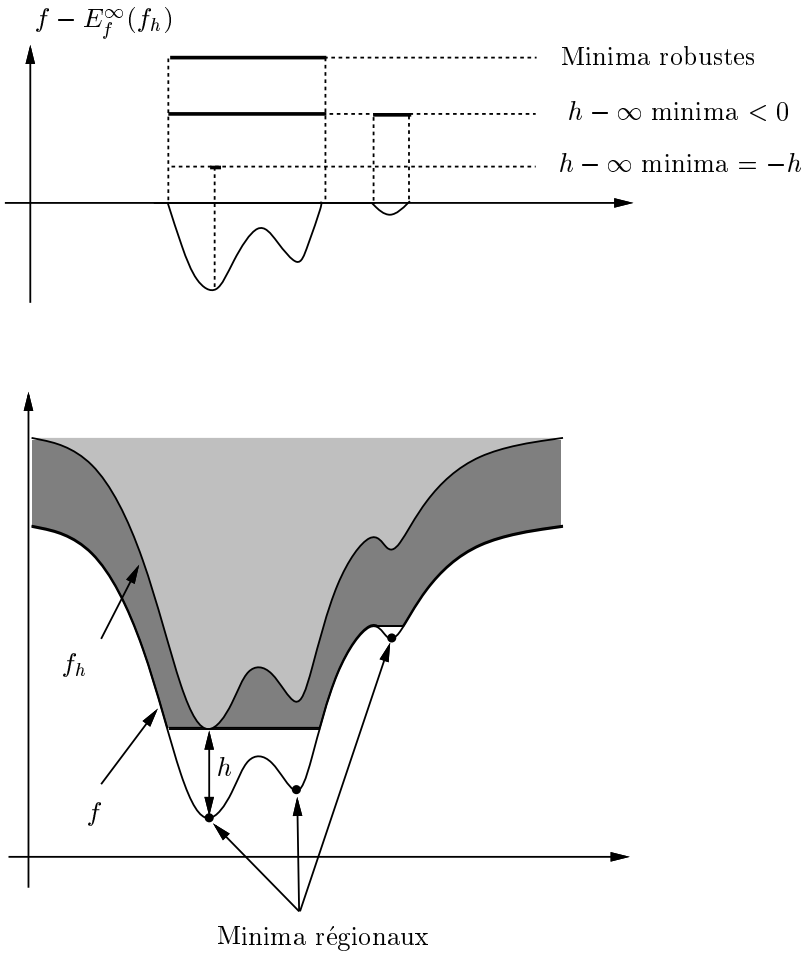


FIG. 2.10. – *Minima régionaux et leurs dérivés, les $h - \infty$ minima. Noter les différentes images binaires que l'on peut en tirer.*

3.1.2 Gradient morphologique

Définition 2.3.8 :

Le gradient morphologique d'une fonction f est défini par :

$$grad(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(f \oplus \varepsilon B) - (f \ominus \varepsilon B)}{2\varepsilon} \tag{2.8}$$

où εB désigne une boule de rayon ε.

On peut montrer que le gradient morphologique est égal, quand B est la boule euclidienne unité et quand f est supposée continûment différentiable, au module du gradient de f défini

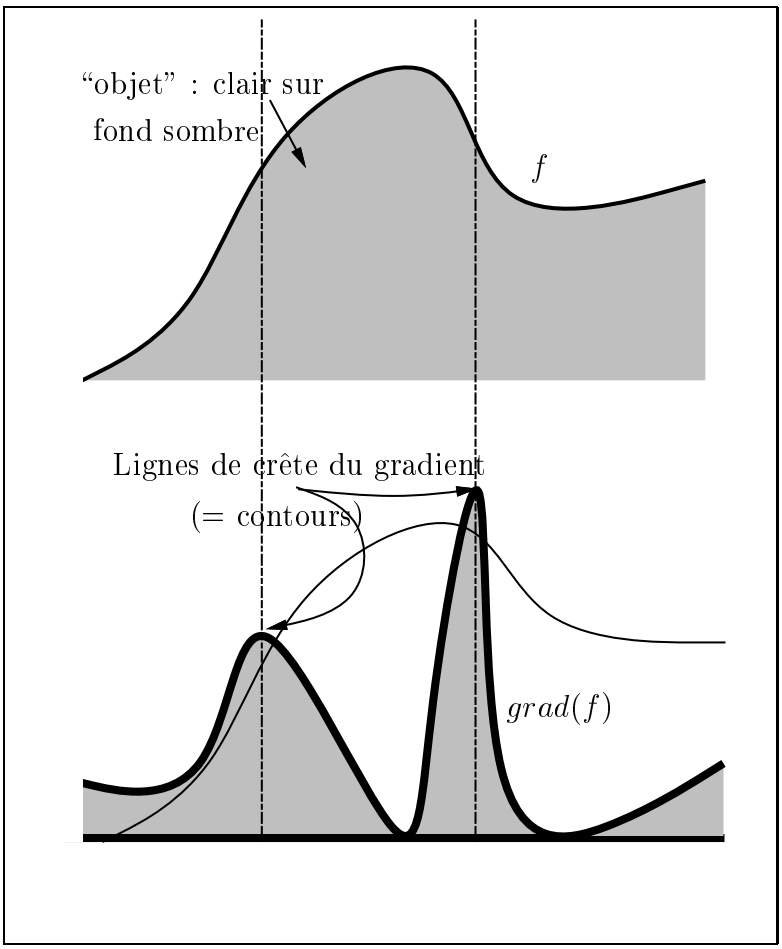


FIG. 2.11. – *Idée de la segmentation par ligne de partage des eaux : les lignes de crêtes du gradient correspondent à des contours de l'image originale.*

classiquement par :

$$\|\nabla f\| = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.9}$$

On remarque alors que les valeurs élevées du module du gradient se situent sur les zones à fort contraste de l'image (fig. 2.11). Un exemple de gradient est donné sur une peinture du peintre Gervex[4] (fig. 2.12). Cette propriété sera utilisée par la suite pour détecter les contours

[4]Le gradient morphologique est utilisé ici pour contraster le tableau *Rolla* du peintre Henri Gervex (1852-1929), décroché pour immoralité au salon de 1878. Ce tableau est inspiré d'un poème de Musset se terminant par ces vers :

Rolla se détourna pour regarder Marie.
Elle se trouvait lasse, et s'était endormie.
Ainsi tous deux fuyaient les cruautés du sort,
L'enfant dans le sommeil, et l'homme dans la mort.

Ce qui a tant choqué les critiques de la Troisième République n'est pas le nu, considéré comme réussi, mais le corset, le haut de forme, la jarretière émergeant de l'enchevêtrement de lingerie du premier plan, les plis d'un lit défait révélant le "matin d'une orgie d'amour".

des objets présents dans l'image numérique.

En trame hexagonale, une approximation digitale de la formule 2.8 est donnée par :

$$grad(f) = \frac{(f \oplus H) - (f \ominus H)}{2} \tag{2.10}$$

où H est l'hexagone élémentaire.

Admiré par Maupassant, Proust et Zola, traitant ses sujets avec une technique et une esthétique abandonnées par les impressionnistes, Henri Gervex (dont le nom ne figure pas dans l'Encyclopædia Universalis) a connu l'enfer des sous-sols des musées de province. Une exposition a récemment tenté de corriger cette injustice.

(a) Image originale

(b) Gradient morphologique

FIG. 2.12. – *Exemple de gradient morphologique.*

3.1.3 Chapeau haut-de-forme

Le chapeau haut-de-forme permet d'extraire d'une image numérique les zones claires et étroites qui disparaissent après ouverture.

Définition 2.3.9 :

Soit B un élément structurant donné, le chapeau haut-de-forme HdF_B d'une fonction f est défini par :

$$HdF_B(f) = f - \gamma_B(f) \tag{2.11}$$

où $\gamma_B(f) = (f \ominus \check{B}) \oplus B$ est l'ouvert de f par B.

Par dualité, on peut vouloir extraire les zones sombres et étroites d'une image par le biais du chapeau haut-de-forme conjugué HdF_B^* défini par :

$$HdF_B^*(f) = \phi_B(f) - f \tag{2.12}$$

où $\phi_B(f) = (f \oplus \check{B}) \ominus B$ est le fermé de f par B.

3.2 Séparation d'objets se recouvrant

Observons la figure 2.13, représentant un ensemble de grains de café qui se recouvrent partiellement. Comment découper les amas de grains, correspondant aux composantes connexes de l'image originale, pour que chaque composante connexe de l'image résultat corresponde à un seul grain de café ? Pour cela, nous allons d'abord transformer l'image binaire en une image numérique où les lignes de crête sont précisément les séparations désirées.

Lorsque l'on érode X progressivement avec l'élément structurant unité H (carré ou hexagone), les différents objets ont tendance à se séparer au niveau des étranglements. La fonction cherchée est donc l'inverse de la fonction distance, *i.e.* $-\rho_X(x) = -d(x, X^c)$. Les minima régionaux de cette fonction sont les érodés ultimes de X, *i.e.* les composantes connexes de $X \ominus nH$ qui disparaissent par érosion de taille $n+1$.

Les résultats, présentés dans la figure 2.13 montrent que l'on a les bonnes séparations. Cependant quelques grains sont coupés en deux alors qu'ils ne le devraient pas. L'explication est la suivante : par construction, chaque minimum régional donne naissance à un bassin versant. Ainsi, les objets ayant fourni deux érodés ultimes vont être séparés. Or il est possible que suite à des fluctuations d'un pixel d'épaisseur, l'érodé ultime se sépare par erreur en deux (fig. 2.14). Le moyen d'y remédier est d'utiliser non pas la fonction distance telle quelle, mais :

$$E_{-\rho_X}^{\infty} \ (1 - \rho_X) \tag{2.13}$$

comme pour la détection des $1 - \infty$ minima. Les résultats (fig. 2.14) sont, cette fois-ci, corrects. En résumé, il faut toujours s'assurer que la fonction sur laquelle on calcule la ligne de partage des eaux ne possède qu'un seul minimum pour chaque objet.

Il faut noter que le calcul de la ligne de partage des eaux ne s'est pas effectué sur un gradient, mais sur une fonction mathématique que l'on peut calculer à l'aide des outils morphologiques.

3.3 Segmentation numérique

La segmentation numérique est souvent assimilée au problème de détection des contours des différents objets de l'image.

Les objets présents dans une image numérique apparaissent souvent comme des régions à niveau de gris relativement homogène. Ces régions sont mises en évidence par le gradient morphologique dont les minima en définissent des marqueurs, donc délimiter les objets consiste à calculer la ligne de partage des eaux discrète de ce gradient morphologique.

Cependant, cette transformation peut conduire à une sur-segmentation importante (voir fig.2.15). On cherchera donc, soit à supprimer les éléments d'arcs de la ligne de partage des eaux discrète qui correspondent à des lignes de trop faible altitude, soit à faire appel à un marquage plus fin (i.e. à une fonction dont les extrema devront marquer exactement les objets à extraire).

On peut construire cette fonction f de marquage plus "fine", en partant du gradient morphologique avec les contraintes suivantes :

1. Imposer comme minima ceux choisis précédemment. (On notera M l'ensemble de ces minima-marqueurs)

2. Supprimer les minima du gradient morphologique non désirés.

Voici comment faire pour imposer des minima M à une image f. Construisons l'image :

$$g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \notin M \\ 0 & \text{si } x \in M \end{cases} \tag{2.14}$$

Cette image a les minima régionaux voulus. Pour garder les informations de l'image de départ pour positionner la lpe sur le plateau à ∞ de g, il suffit d'éroder g géodésiquement selon $f \wedge g$: $E^{\infty}_{f \wedge g}(g)$. Il ne reste alors plus qu'à calculer la lpe de cette nouvelle image. La figure 2.17 illustre cette méthode et la figure 2.16 montre les résultats sur l'image d'une cuisinière.

Dans le chapitre 5, nous décrirons d'autres méthodes pour segmenter des images en utilisant la ligne de partage des eaux.

Remarque 2.3.1 :

> Toute cette méthode peut s'appliquer sur n'importe quelle image de contraste, en particulier sur un chapeau haut-de-forme (fig. 2.18).

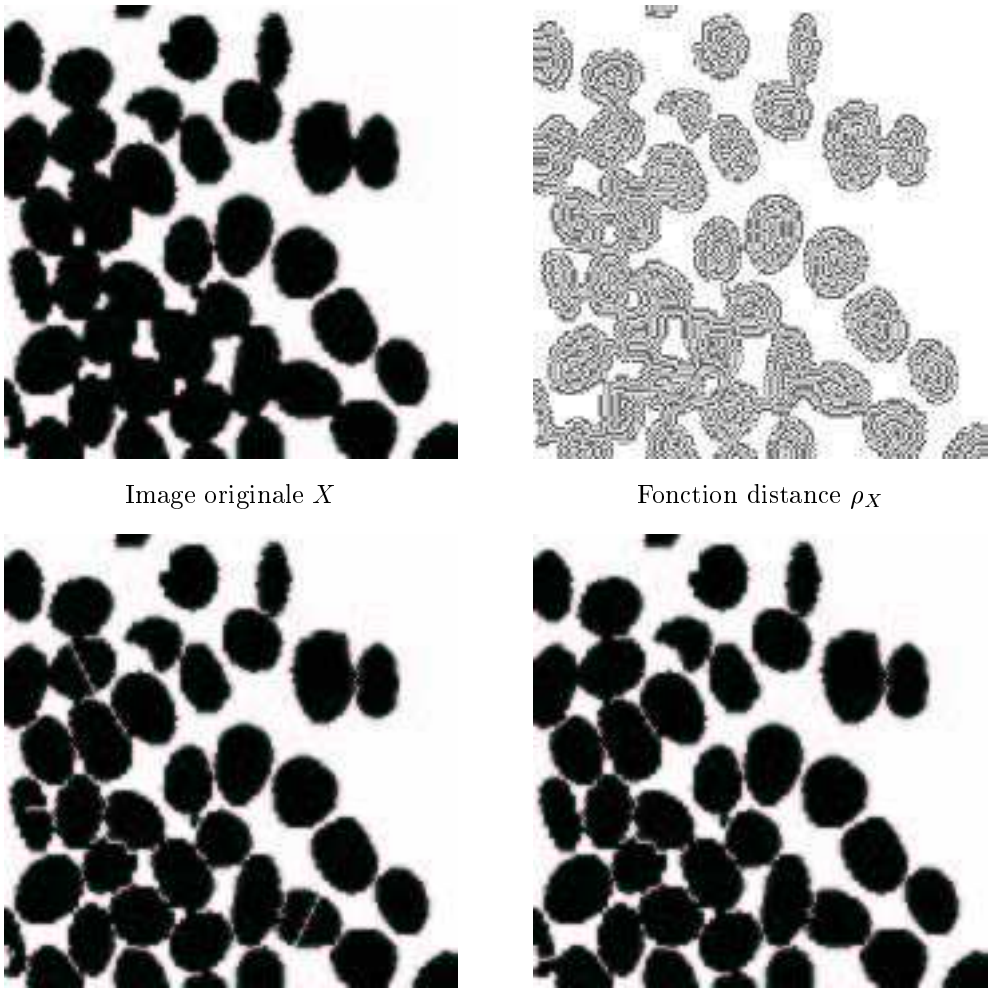


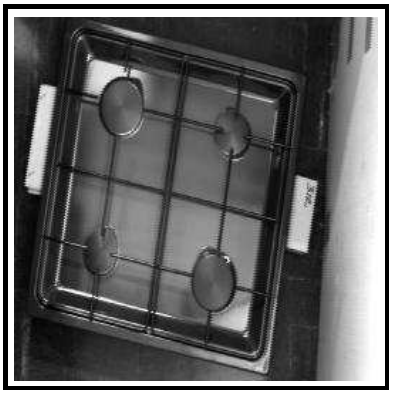
FIG. 2.13. – *Séparation d'objets par la ligne de partage des eaux de la fonction distance. Noter la façon de rendre robuste cette séparation par filtrage des minima régionaux de l'opposée de la fonction distance.*

X

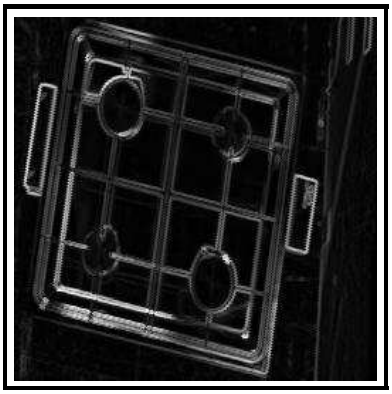
					3		3		3		
			3		3		2		2		3
		3		2		2		1		2		3
	3		2		1		2		2		3
		3		2		2		3		3	
			3		3		3				

Érodés ultimes

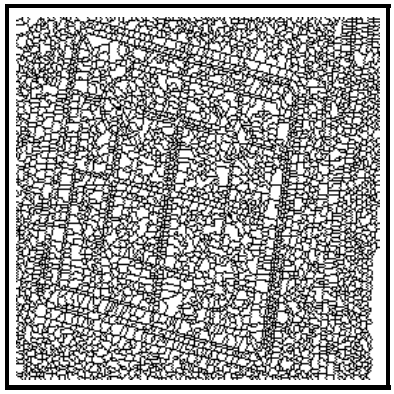
FIG. 2.14. – *Pourquoi une particule convexe peut générer un érodé ultime en plusieurs morceaux : l'épaisseur de l'objet varie entre* 4 *et* 5 *pixels.*



Original



Gradient morphologique



Ligne de partage des eaux

FIG. 2.15. – *Ligne de partage des eaux calculée directement sur une image réelle présente une sur-segmentation importante, due au bruit qui crée de nombreux minima parasites.*

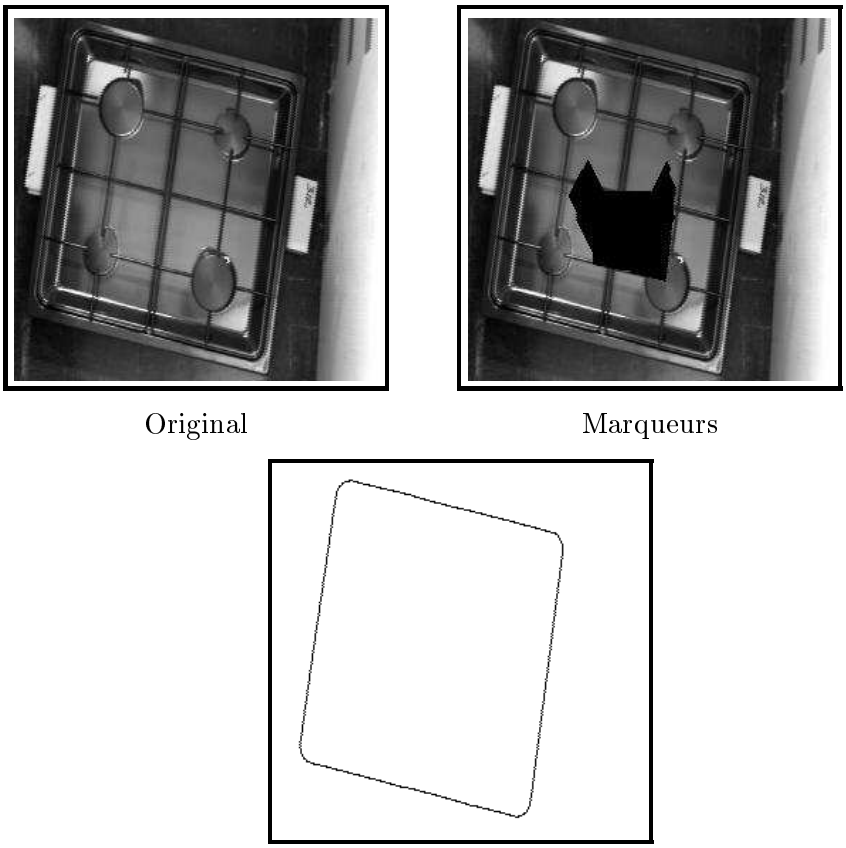


FIG. 2.16. – *Ligne de partage des eaux contrainte : les marqueurs sont imposés comme minima régionaux du gradient morphologique.*

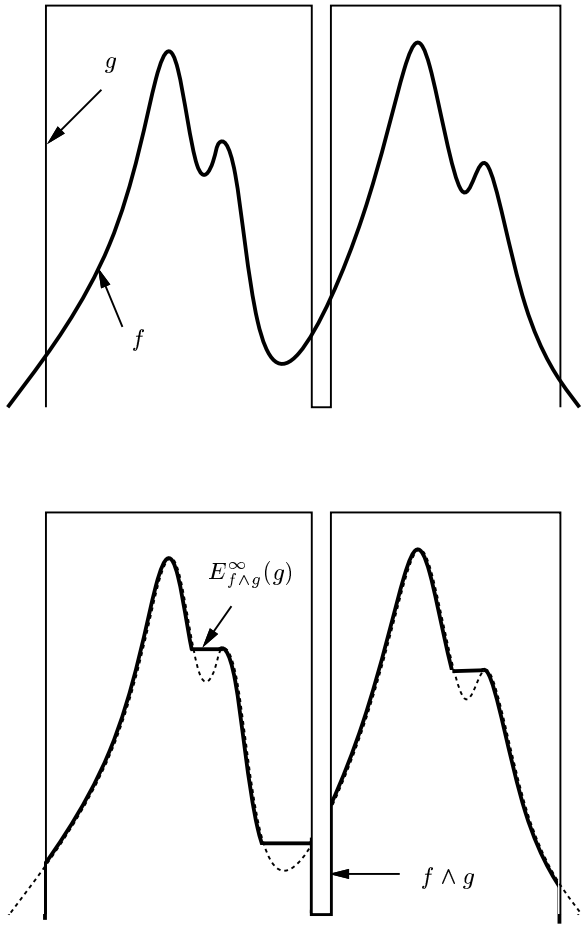


FIG. 2.17. – *Illustration de la manière d'imposer les minima régionaux de g à l'image f.*

Image originale f

Chapeau $HdF_{5H}(f) - f$

lpe de $HdF_{5H}(f) - f$

FIG. 2.18. – *La ligne de partage des eaux calculée sur un chapeau haut de forme.*

Chapitre 3

La ligne de partage des eaux continue

But in the martial ethics of Bushido, the main watershed dividing the good and the bad was sought elsewhere.

Inazo Nitobe

Bushido, the soul of Japan.

Dans ce chapitre, nous allons chercher à caractériser la ligne de partage des eaux discrète. En particulier, nous allons démontrer un théorème de convergence de la ligne de partage des eaux discrète dans un cadre régulier. Cette caractérisation nous permettra de montrer les liens existants entre la ligne de partage des eaux et le squelette par zones d'influence. Utilisant cette caractérisation, nous pourrons (dans le chapitre 4) comparer la segmentation par ligne de partage des eaux avec des extracteurs de contours différentiels utilisés en analyse d'images.

1 Convergence de la ligne de partage des eaux

1.1 Quelques rappels sur les systèmes dynamiques

Pour le cadre de notre étude, nous nous restreindrons à $\mathbb{R}^2$, bien que les résultats que nous énonçons s'étendent à des variétés différentiables. Pour une revue plus complète des systèmes dynamiques, le lecteur est renvoyé à [3, Arrowsmith & Place].

Définition 3.1.1 :

Un flot sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ est une fonction continûment différentiable ϕ : $\mathbb{R} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la restriction $\phi(t, .) =: \phi_t(.)$ vérifie :

$$\phi_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{U}} \tag{3.1}$$

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}, \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

où $\circ$ est la loi de composition usuelle, et où $\mathrm{id}_{\mathcal{U}}$ est l'application identité sur $\mathcal{U}$.

Définition 3.1.2 :
Un champ de vecteurs X sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ est une application régulière qui associe à chaque point a de $\mathcal{U}$ un vecteur $X(a)$.

À tout flot ϕ, nous pouvons associer un champ de vecteurs par l'équation :

$$X(a) = \frac{d\phi_t}{dt}(a)\Big|_{t=0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\phi_\varepsilon(a) - \phi_0(a)}{\varepsilon} = \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, a)$$

Remarquons que ce champ de vecteurs existe car le flot est continûment différentiable.

Définition 3.1.3 :
On appelle courbes intégrales d'un champ de vecteurs X sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ les courbes $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ solutions de l'équation différentielle

$$\dot{\gamma}(s) = \frac{d}{dt}\gamma(s) = X(\gamma(s)) \tag{3.3}$$

pour tout $s \in I$.
Une courbe intégrale est dite maximale si elle n'est contenue strictement dans aucune autre courbe intégrale.

L'existence et l'unicité des courbes intégrales proviennent du théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 3.1.4 : Cauchy-Lipschitz
Pour tout champ de vecteurs et tout point a_0 d'un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$, il existe une unique courbe intégrale maximale passant par a_0.
De plus, si nous notons $(\phi_t(a_0), t \in I(a_0))$ cette courbe intégrale maximale, alors

1. *l'ensemble $\mathcal{V} := \cup_{a_0 \in \mathcal{U}} I(a_0) \times \{a_0\}$ est ouvert dans $\mathbb{R} \times \mathcal{U}$,*

2. *l'application suivante, appelée* flot local,

$$(t, a) \in \mathcal{V} \to \phi_t(a_0) \in \mathcal{U} \tag{3.4}$$

est régulière, et satisfait à

$$\frac{d}{dt}\phi_t(a) = X(\phi_t(a)) \tag{3.5}$$

3. *pour tout $a_0 \in M$ et pour tout $t, s \in I(a_0)$ tels que $t + s \in I(a_0)$, nous avons :*

$$\phi_{t+s}(a_0) = \phi_t(\phi_s(a_0)) \tag{3.6}$$

Un tel flot est dit *local* car il ne forme pas *a priori* une famille d'applications $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$. En effet, l'intervalle de temps $I = I(a_0)$ sur lequel est définie la courbe intégrale maximale passant par un point a_0 dépend de ce point.

Définition 3.1.5 :

Un champ de vecteurs tel que toute courbe intégrale maximale soit paramétrée par $I = \mathbb{R}$ est dit complet.

Des points particuliers d'un champ de vecteurs sont remarquables. Ce sont les équilibres du champ.

Définition 3.1.6 :

Soit X un champ de vecteurs. Un point a tel que $X(a) = 0$ sera dit singulier. Un point a tel que $X(a) \neq 0$ sera dit régulier.

1.2 Champ de gradient

Commençons par préciser quelques notations. Le gradient ∇f est le vecteur plan des dérivées premières de f et le Hessien H_f est la matrice symétrique des dérivées secondes de f.

Nous allons nous intéresser à l'allure du champ de gradient d'une image de Morse. Définissons tout d'abord le cadre de régularité dans lequel nous travaillerons.

Rappelons la définition suivante :

Définition 3.1.7 :

Une fonction de Morse [80, Milnor] est une fonction $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles, telle que, au point où son gradient s'annule, son hessien ait deux valeurs propres non nulles.

En particulier, le gradient d'une fonction de Morse n'a que des zéros isolés. Dans la pratique, nous pouvons toujours supposer qu'une fonction f suffisamment régulière est de Morse : si f ne vérifie pas les hypothèses de Morse, alors nous pouvons construire une petite perturbation qui rend f adéquate. L'espace des fonctions de Morse est en effet (uniformément) dense dans l'espace des fonctions continues, et constitue donc un bon cadre d'étude.

Définition 3.1.8 :

Une image de Morse sera une fonction de Morse de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Intuitivement, les lignes intégrales du gradient sont les lignes de plus grande pente d'une fonction f. La compréhension de ce qu'est une ligne de plus grande pente est fondamentale pour notre propos, puisqu'intuitivement, la ligne de partage des eaux est le lieu des points d'où partent plusieurs lignes de plus grande pente vers des minima différents.

Nous allons voir que le champ de gradient d'une image de Morse est complet (au sens de la définition 3.1.5), ce qui justifiera la définition suivante. Un exemple de champ de gradient est représenté sur la figure 3.1.

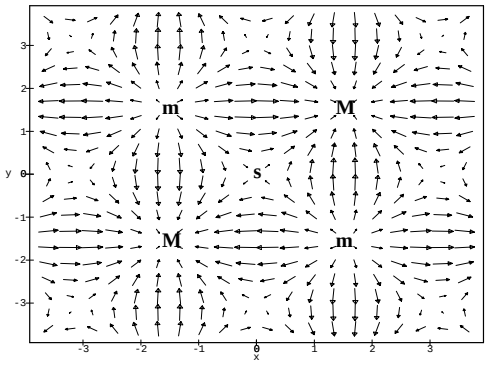


FIG. 3.1. – *Champ de gradient de* $\sin(x)\sin(y)$ *(M : maxima - m: minima - s: point selle).*

Définition 3.1.9 :

Soit f une image de Morse. Un chemin $\gamma\ :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ est appelé ligne intégrale maximale du gradient de l'image f ou simplement ligne maximale du gradient si

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{d\gamma}{ds}(t) = \pm\nabla f(\gamma(t)) \tag{3.7}$$

Nous dirons que la ligne maximale est descendante si

$$\frac{d\gamma}{ds}(t) = -\nabla f(\gamma(t)),\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$

et ascendante si

$$\frac{d\gamma}{ds}(t) = \nabla f(\gamma(t)),\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.9}$$

Définition 3.1.10 :

Soit f une image de Morse. Nous appellerons point critique de f tout point singulier de ∇f, *i.e.*, tout point a tel que $\nabla f(a) = 0$.

D'après la définition d'une image de Morse f, par tout point a tel que $\nabla f(a) \neq 0$, il passe une et une seule ligne maximale du gradient descendante. En effet, l'existence d'une unique solution locale à $\dot{\gamma}(t) := \frac{d\gamma}{ds}(t) = \nabla f(\gamma(t))$ est donné par le théorème 3.1.4 de Cauchy-Lipschitz des équations différentielles en un point où $\nabla f(a_0) \neq 0$. Cette solution peut être prolongée à tout intervalle borné de $\mathbb{R}$. Il reste à voir ce qui se passe en $\pm\infty$, c'est-à-dire regarder les points a où $\nabla f(a) = 0$. D'un tel point, il existe bien sûr une unique solution, la solution constante $\gamma(t) = a$ pour tout t. La question qui se pose est donc de savoir si nous pouvons atteindre (à la limite) ces points par une ligne maximale du gradient. Nous aurons ainsi montré que le champ de gradient est complet.

Soit X un champ de vecteurs, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $a^* \in \mathcal{U}$ tel que $X(a^*) = 0$. La

linéarisation de l'équation différentielle

$$\dot{\gamma} = X(\gamma) \tag{3.10}$$

en a^* est l'opération qui à (3.10) associe l'équation différentielle linéaire

$$\dot{g} = DX(a^*)g \tag{3.11}$$

où

$$DX(a^*) := \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right]_{i,j}\Bigg|_{a=a^*} \tag{3.12}$$

et $g = (g_1, g_2)^T$ sont des coordonnées locales en a^*.

Définition 3.1.11 :

Un point singulier a^* d'un champ de vecteurs X est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de $DX(a^*)$ n'a de partie réelle nulle.

Définition 3.1.12 :

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Deux difféomorphismes $f, g : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ sont dits topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme $h : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ tel que

$$h \circ f = g \circ h \tag{3.13}$$

De même, deux flots $\phi_t, \psi_t : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ seront dits topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme $h : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ tel que

$$h \circ \phi_t = \psi_t \circ h, \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.14}$$

Théorème 3.1.13 : Hartman-Grobman

Soit a^* un point singulier hyperbolique de $\dot{\gamma} = X(\gamma)$ de flot $\phi_t : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a^* sur lequel ϕ est topologiquement conjugué au flot linéaire $\exp(DX(a^*)t)\gamma$, où $\exp(.)$ représente la fonction exponentielle.

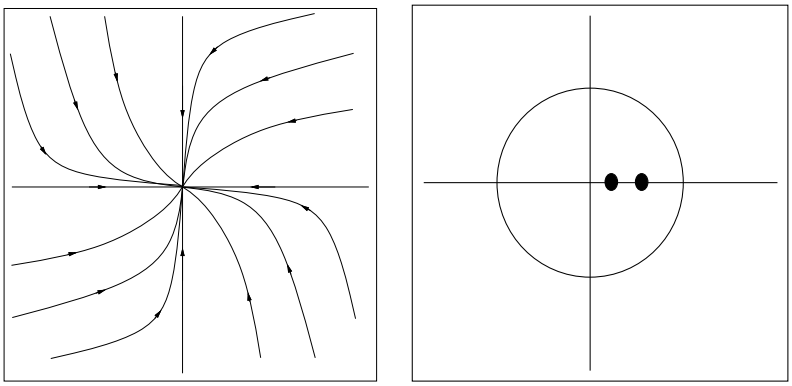
Soit f une image de Morse. Son hessien (qui est une matrice symétrique réelle, donc qui a des valeurs propres réelles) a donc deux valeurs propres non nulles. Appliquons ce théorème à l'équation :

$$\dot{\gamma} = \nabla f(\gamma)$$

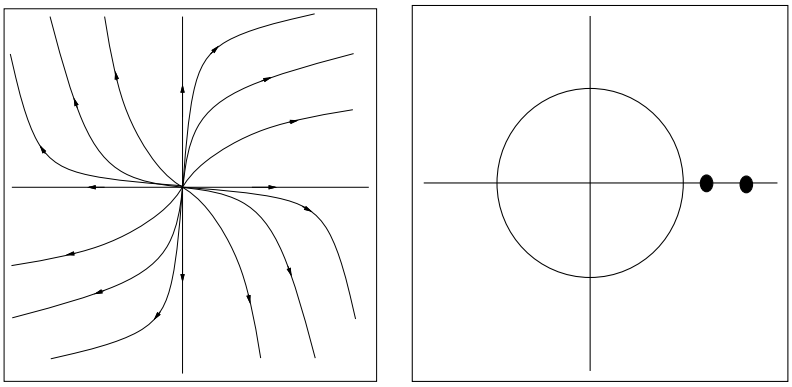
en un point singulier a^* de ∇f. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que $a^* = 0$.

Le flot ϕ est alors topologiquement conjugué à $\exp(H_f(0)t)a$. Soit λ_1 et λ_2 les valeurs propres du hessien $H_f(0)$ de f en 0. Le flot au voisinage de 0 est topologiquement conjugué à

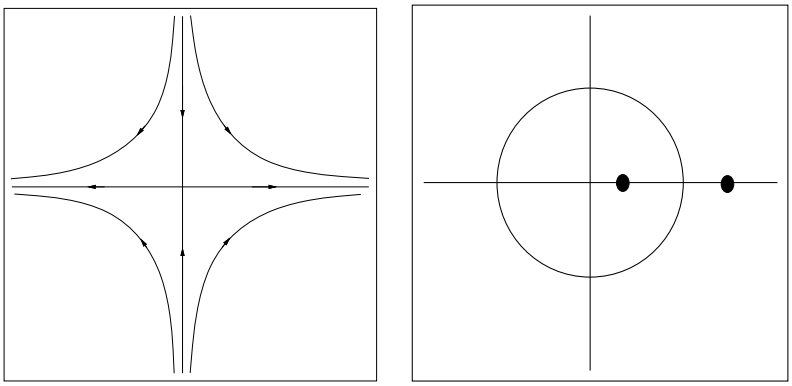
$$\exp\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} t\right) a = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} a$$



(a) O est un maximum (deux valeurs propres négatives)



(b) O est un minimum (deux valeurs propres positives)



(c) O est un point selle (une valeur propre positive, et une négative)

FIG. 3.2. – *Trajectoires typiques du champ de gradient (images de gauche) suivant la position de l'exponentielle des valeurs propres du hessien dans le plan complexe (images de droite).*

Les valeurs propres du hessien fournissent l'allure du champ de gradient au voisinage de 0. La figure 3.2 montrent des trajectoires typiques du champ de gradient, suivant la position de l'exponentielle des valeurs propres dans le plan complexe.

Ainsi, la définition 3.1.9 des lignes maximales du gradient est justifiée, et nous avons :

Proposition 3.1.14 :

Le champ de gradient est complet. De plus, toute ligne intégrale maximale du gradient de longueur non nulle vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{d\gamma}{ds}(t) = \pm\nabla f(\gamma(t)) \ \textit{avec}\ \nabla f(\gamma(t)) \neq 0$$

et

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{d\gamma}{ds}(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{d\gamma}{ds}(t) = 0$$

1.3 Théorème de convergence

Les lignes maximales du gradient relient deux points critiques de f et n'ont aucun point critique sauf en leurs extrémités. Malheureusement, une ligne descendante n'aboutit pas toujours à un minimum régional (notons que les notions de minimum (ou de maximum) local et régional coïncident). Il est donc nécessaire de concaténer ces lignes pour aboutir effectivement à un minimum régional. Pour cela, nous allons munir l'ensemble des points critiques de f d'une relation d'ordre partiel :

Définition 3.1.15 :

Soient a et b deux points critiques de f. Nous dirons que b est au-dessus de a s'il existe une ligne maximale ascendante du gradient de a vers b. Nous définirons la relation d'ordre "au-dessus" en prenant la fermeture transitive de la relation précédente.

Cette relation est bien anti-symétrique et réflexive, et est donc par fermeture effectivement une relation d'ordre partiel.

Elle permet de distinguer quatre sortes de points singuliers :

- les minima régionaux (a n'est au dessus d'aucun autre point que lui-même),
- les maxima régionaux (il n'existe pas de b au-dessus du maximum a),
- les points au-dessus d'un seul minimum,
- les points au-dessus de plusieurs minima.

Ces derniers devraient clairement appartenir à une définition de la ligne de partage des eaux d'une image de Morse.

Définition 3.1.16 :

Nous noterons $\mathcal{P}(f)$ le sous-ensemble des points critiques a de f qui sont au-dessus de plusieurs minima régionaux.

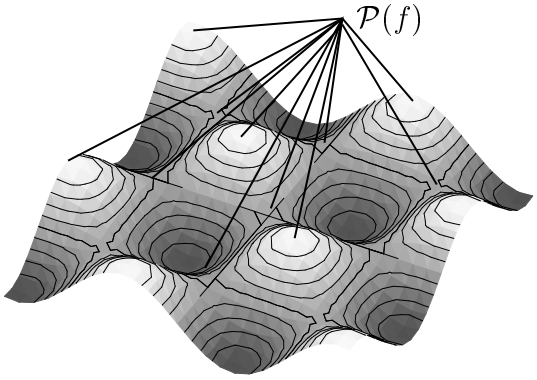


FIG. 3.3. – *Quelques exemples de points de $\mathcal{P}(f)$.*

La figure 3.3 montre quelques exemples de points de $\mathcal{P}(f)$.

Un minimum régional ne peut pas appartenir à $\mathcal{P}(f)$, car il ne peut-être au-dessus d'un autre minimum que lui-même ; cela impliquerait en effet que $\nabla f(\gamma(s)) = 0$ sur tout le chemin γ le reliant à l'autre minimum, ce qui est impossible par définition des images de Morse.

Nous obtenons alors le théorème de convergence suivant, dont nous aurions pu prendre le résultat comme définition de la ligne de partage des eaux d'une fonction régulière :

Théorème 3.1.17 : Ligne de partage des eaux, définition continue

Soit f une image de Morse, telle que toutes ses lignes maximales du gradient soient de longueur bornée par une constante $C > 0$. Approchons f par la suite de fonctions en escalier $f_n(a) = \frac{E(2^n f(a))}{2^n}$ où $E(t) := \sup_{n\in\mathbb{Z}}\{n \mid n \leq t\}$ est la fonction partie entière.
La limite au sens de la topologie en tout ou rien des lignes de partage des eaux des f_n, est l'ensemble des lignes maximales du gradient reliant deux points de $\mathcal{P}(f)$.

Posons

$$L_p^n := \{a \mid 2^{-n}(p-1) \leq f(a) \leq 2^{-n}p\}$$

Remarquons que pour a donné et n fixé, $a \in L_p^n$ si $p = E(2^n f(a)) + 1$ (le point a appartient également à L_{p-1}^n si $2^n f(a) \in \mathbb{Z}$). L'ensemble L_p^n est une "zone de niveau" de f qui admet comme bord inférieur

$$L_p^{n-} := \{a \mid f(a) = 2^{-n}(p-1)\}$$

et comme bord supérieur

$$L_p^{n+} := \{a \mid f(a) = 2^{-n}p\}$$

Démontrer le théorème 3.1.17 revient à regarder ce qui ce passe dans les zones de niveau L_p^n, puisque l'application de la construction de la ligne de partage des eaux de f_n (définition 2.1.6) s'effectue par récurrence sur p sur chacun des L_p^n.

Nous allons commencer par démontrer quelques lemmes concernant ces zones de niveau. Dans la suite, nous appellerons ligne de partage des eaux de f l'ensemble des lignes maximales du gradient reliant entre eux deux points de f, et ligne de partage des eaux de f_n (notée $\mathcal{LPE}\{f_n\}$) l'ensemble des chemins construits par l'algorithme de la définition 2.1.6.

Soit $\mathcal{R}_\kappa(a_0)$ le rayon de courbure à la ligne $\{a \mid f(a) = f(a_0)\}$ en a_0.

Rappelons que nous pouvons distinguer trois sortes de points critiques d'une image de Morse f :

1. les minima de f : le hessien $H_f(a)$ admet deux valeurs propres strictement positives.
2. les maxima de f : le hessien $H_f(a)$ admet deux valeurs propres strictement négatives.
3. les points selles de f : le hessien $H_f(a)$ admet une valeur propre strictement positive, et une valeur propre strictement négative.

Lemme 3.1.18 :

Soit $a \in \mathcal{LPE}\{f_n\} \cap L_p^{n-}$ tel que $\nabla f(a) \neq 0$. Alors nous avons :

$$\left[\{a\} \oplus [0, \mathcal{R}_\kappa(a)[\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}\right] \bigcap L_p^n \subset \mathcal{LPE}\{f_n\} \tag{3.15}$$

Démonstration :

Puisque $\nabla f(a) \neq 0$, le théorème d'inversion locale indique qu'il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sur lequel il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\{(x, y) \mid y = f(x, g(x))\} \bigcap \Omega = L_p^{n-} \bigcap \Omega$$

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que $a = O = (0, 0)$, et que

$$\begin{cases} g(0) & = & 0 \\ g'(0) & = & 0 \\ g''(0) & = & k \end{cases}$$

Cela revient à se placer dans le repère orthonormé direct formé par τ, ν, où τ est la tangente à la ligne de niveau L_p^{n-}, et où la normale ν à la ligne de niveau est proportionnelle à $\nabla f(a)$.

Si $k < 0$, alors la concavité de g est dirigée dans le sens de $-\nabla f(a)$ et donc $(\{a\} \oplus [0, \infty[\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}) \bigcap \Omega$ est inclus dans $\mathcal{LPE}\{f_n\}$. Supposons que $k \geq 0$. Nous avons alors $\mathcal{R}_\kappa(a) = \frac{1}{k}$.

Soit h la fonction définie par

$$\forall x,\ h(x) = g(x) - \frac{k}{2}x^2$$

Alors, pour tout x nous avons

$$g(x) = (\frac{k}{2} + \varepsilon)x^2 + (h(x) - \varepsilon x^2)$$

Remarquons que $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$, donc nous avons

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } |x| < \eta \Rightarrow |h(x)| \leq \varepsilon x^2$$

Nous en déduisons que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que pour } |x| < \eta,\ g(x) \leq (\frac{k}{2} + \varepsilon)x^2$$

Donc g est en dessous de la courbe d'équation $y = (\frac{k}{2} + \varepsilon)x^2$.
Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(0, \frac{1}{k+2\varepsilon})$ et de rayon $\frac{1}{k+2\varepsilon}$ vérifie donc

$$\mathcal{C} \bigcap L_p^{n-} \bigcap]-\eta, \eta[\times \mathbb{R} \bigcap \Omega = \{a\}$$

et ainsi nous avons

$$\forall \varepsilon > 0,\ \left[\{a\} \oplus [0, \frac{1}{k+2\varepsilon}[\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} \bigcap \Omega \bigcap L_p^n\right] \subset \mathcal{LPE}\{f_n\}$$

Maintenant, le théorème des fonctions implicites nous dit que ceci est valable pour tout ouvert Ω connexe où

$$\frac{d}{dx}g(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

est défini. Ceci est donc vrai pour tout ouvert connexe où $\nabla f(a) \neq 0$, ce qui démontre le lemme. ■

Lemme 3.1.19 :

Soit $a \in \mathcal{P}(f)$ un point selle de f. Il existe une suite de points $(a_n)_n$ de limite a, vérifiant pour tout n, $a_n \in \mathcal{LPE}\{f_n\}$. De plus, la tangente $Tg(a_n)$ en a_n à la ligne de partage des eaux de f_n a pour limite la droite engendrée par un des deux vecteurs propres unitaires de $H_f(a)$ associés à la valeur propre positive de $H_f(a)$.

Démonstration :

Commençons par regarder un point selle $a \in \mathcal{P}(f)$, et écrivons un développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de a. Soit h la fonction $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$\lim_{b \to a} \left| \frac{h(b)}{\|b-a\|^2} \right| = 0$$

définie par

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}\langle H_f(a)(b-a), b-a\rangle + h(b)$$

Soit $\lambda_+ > 0$ et $\lambda_- < 0$ les deux valeurs propres de $H_f(a)$, et soit u_+ et u_- deux vecteurs propres unitaires de $H_f(a)$ associés respectivement à chacune de ces valeurs propres.

Ces deux vecteurs propres étant orthogonaux, nous pouvons les choisir de telle sorte que (a, u_+, u_-) forme une base orthonormée directe (fig. 3.4). Dans ce repère, le vecteur $(b-a)$ s'écrit $\alpha u_+ + \beta u_-$. Considérons la ligne de niveau $L := \{b \mid f(b) = k\}$ (avec $k < f(a)$). Dans le repère choisi, elle s'écrit

$$L = \{(\alpha, \beta) \mid k = f(a) + \frac{1}{2}(\lambda_+\alpha^2 + \lambda_-\beta^2) + h(b)\}$$

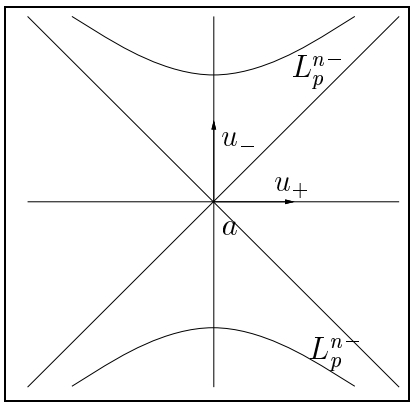


FIG. 3.4. – *Repère considéré.*

et donc un point (α, β) de L vérifie

$$\beta = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\alpha^2 + \frac{2}{\lambda_-}\left(k - f(a) - h(b)\right)}$$

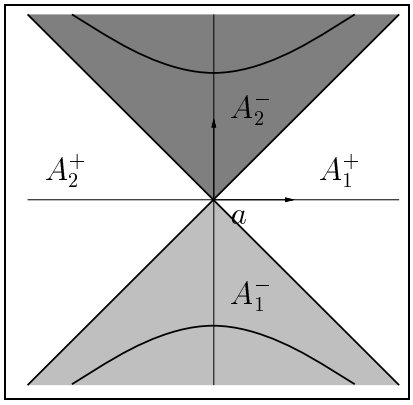


FIG. 3.5. – *Choix de A_1^- et de A_2^-.*

Soit $B(a, \varepsilon)$ la boule de taille $\varepsilon > 0$ centrée en a. Comme a est un point selle de f appartenant à $\mathcal{P}(f)$, la ligne $L_a := \{b \mid f(b) = f(a)\}$ sépare $B(a, \varepsilon)$ en quatre parties (voir la figure 3.5) : deux parties A_1^- et A_2^- où les points b sont tels que $f(b) \leq f(a)$ et deux parties A_1^+ et A_2^+ où les points b sont tels que $f(b) \geq f(a)$. Pour n donné, soit p tel que $a \in L_p^n$, et $a \notin L_p^{n+}$. Posons

$$\begin{aligned} B_1 &:= A_1^- \bigcap L_p^{n-} \\ B_2 &:= A_2^- \bigcap L_p^{n-} \end{aligned}$$

Nous avons deux possibilités :

- soit nous avons $f(a) = 2^{-n}(p-1)$. Alors $a \in L_p^{n-}$, donc $B_1 \cap B_2 = \{a\}$. Alors a est à égale distance de B_1 et B_2, il appartient donc à la ligne de partage des eaux de f_n,

et la tangente à la ligne de partage des eaux de f_n en a est la droite engendrée par u_+.

- soit $f(a) \neq 2^{-n}(p-1)$. Soit $b_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ un point du bord de B_1 et $b_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ un point du bord de B_2. Posons $k = 2^{-n}(p-1)$. Nous avons (au choix de A_1^- et A_2^- près),

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -\sqrt{-\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\alpha_1^2 + \frac{2}{\lambda_-}(k - f(a) - h(b_1))}\\ \beta_2 &= +\sqrt{-\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\alpha_2^2 + \frac{2}{\lambda_-}(k - f(a) - h(b_2))}\end{aligned}$$

Nous voulons prouver que l'ensemble des points à égale distance de B_1 et de B_2 contient un point proche de a. Nous allons pour cela calculer l'intersection de la courbe des points à égale distance de B_1 et de B_2 avec l'axe $\alpha_0 = 0$. Les points à égale distance de B_1 et B_2 sont de la forme :

$$(\alpha_1 - \alpha)^2 + (\beta_1 - \beta)^2 = (\alpha_2 - \alpha)^2 + (\beta_2 - \beta)^2$$

soit

$$\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - 2\alpha(\alpha_1 - \alpha_2) + \beta_1^2 - \beta_2^2 - 2\beta(\beta_1 - \beta_2) = 0$$

Cherchons la valeur β_0 correspondant à $\alpha_0 = 0$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}&\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \frac{\lambda_+}{\lambda_-}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \frac{2}{\lambda_-}(h(b_2) - h(b_1))\\ &+2\beta\left(\sqrt{-\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\alpha_1^2 + \frac{2}{\lambda_-}(k - f(a) - h(b_1))} + \sqrt{-\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\alpha_2^2 + \frac{2}{\lambda_-}(k - f(a) - h(b_2))}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

et donc

$$\beta_0 = -\frac{1}{2}\frac{\left(\left(1 - \frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{2}{\lambda_-}\frac{h(b_2) - h(b_1)}{\alpha_1 - \alpha_2}\right)(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{-\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\alpha_1^2 + \frac{2}{\lambda_-}(k - f(a) - h(b_1))} + \sqrt{-\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\alpha_2^2 + \frac{2}{\lambda_-}(k - f(a) - h(b_2))}}$$

avec

$$\lim_{\substack{b_1 \to a\\ b_2 \to a}} \frac{h(b_2) - h(b_1)}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} = 0$$

Quand n est suffisamment grand, nous avons donc $(\alpha_0, \beta_0) \in B(a, \varepsilon)$. Par conséquent, il existe bien une suite $(a_n)_n$ avec $a_n = (\alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{LPE}\{f_n\}$ de limite a. Cherchons un vecteur tangent en (α_0, β_0) à la ligne de partage des eaux de f_n. Pour cela, écrivons un développement limité à l'ordre 2 de β_i $(i = 1, 2)$ au voisinage de a. Comme $h(a) = 0$ et $\nabla h(a) = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -\sqrt{\frac{2(k - f(a))}{\lambda_-}} + o(b_1^2)\\ \beta_2 &= +\sqrt{\frac{2(k - f(a))}{\lambda_-}} + o(b_2^2)\end{aligned}$$

ou $o(b_i^2)$ tend vers 0 à la même vitesse que $(b_i - a)^2$. Nous avons à résoudre

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha) + 2\beta\sqrt{\frac{2(k - f(a))}{\lambda_-}} = -o(b_1^2) - o(b_2^2)$$

Dans un voisinage de a, les points de la forme $(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, 0)$ (qui correspondent aux points de la forme $a + (\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}u_+)$) sont donc proches de la ligne de partage des eaux de f_n. Par conséquent, le vecteur u_+ est proche du vecteur tangent en (α_0, β_0) à la ligne de partage des eaux de f_n.

Le lemme est ainsi démontré. ■

Lemme 3.1.20 :

Si un point critique a n'appartient pas à $\mathcal{P}(f)$, il n'appartient pas à la limite des $\mathcal{LPE}\{f_n\}$.

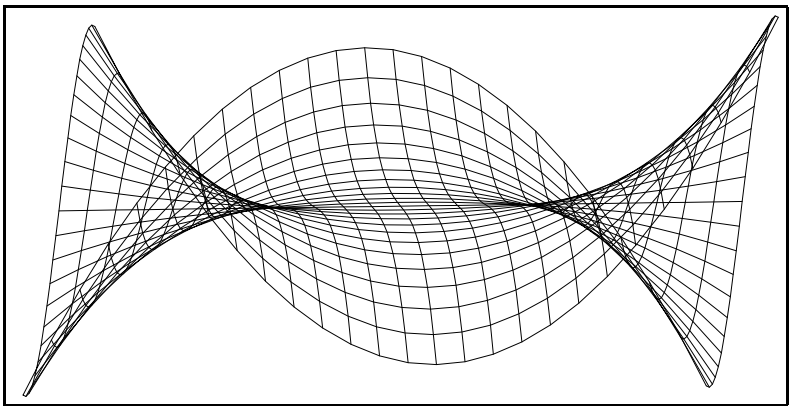


FIG. 3.6. – *Selle de singe.*

Le fait que le hessien admette deux valeurs propres non nulles assure qu'il n'existe que deux lignes maximales descendantes issues de a et que deux lignes maximales ascendantes issues de a. Dans le cas où le hessien est dégénéré, a peut par exemple être une selle de singe (voir figure 3.6) de laquelle est issue trois lignes maximales ascendantes. Une de ces lignes peut monter vers un maximum intérieur à un bassin versant. Or, par seuillage et zone d'influence, cette ligne sera incluse dans un bassin versant par l'algorithme de la ligne de partage des eaux. Nous ne pouvons alors avoir qu'une semi convergence de l'algorithme, puisqu'alors le maximum intérieur au bassin n'est pas dans la ligne de partage des eaux.

Par ailleurs, même s'il n'y a pas de barbules (qui sont des arcs avec un point terminal), la ligne de partage des eaux continue, si nous affaiblissons les hypothèses sur f, peut être épaisse[1]. Par exemple, nous pouvons regarder ce que Beucher [15] appelle une boutonnière (voir la figure 3.7). Choisir une ligne de gradient particulière dans la boutonnière est de toute manière totalement arbitraire. Remarquons que sur la boutonnière, $\nabla f(a) = 0$ implique $H_f(a) = 0$.

Démonstration : du lemme 3.1.20

[1] Dans le cas discret, on dit que la ligne de partage des eaux est épaisse si son épaisseur n'est pas égale à l'unité sur la trame. Dans le cas continue, il faut plutôt parler de surface non nulle

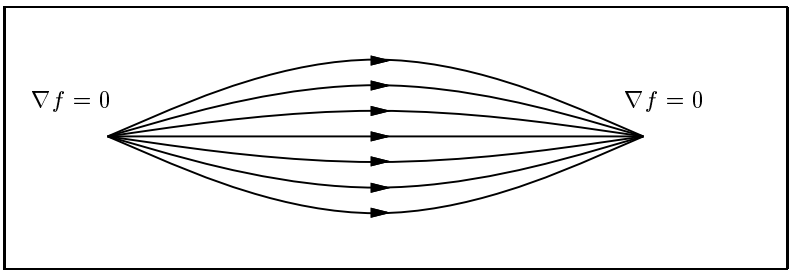


FIG. 3.7. – *Champ de gradient d'une boutonnière.*

Si le point critique a n'est au-dessus que d'un seul minimum, alors il n'appartient pas à la limite des lignes de partage des eaux des f_n. En effet, dans le cas contraire, il existe a_n dans la ligne de partage des eaux de f_n avec $\lim_n a_n = a$. Soit $\varepsilon > 0$ et n suffisamment grand pour que $a_n \in B(a, \varepsilon)$. La boule $B(a, \varepsilon)$ est partagée en deux parties par la ligne de partage des eaux de f_n, il existe donc un chemin γ_1^n descendant vers un minimum m_1 et un chemin γ_2^n toujours descendant (si $s \leq t$, $f(\gamma_i(s)) \geq f(\gamma_i(t))$) vers un minimum $m_2 \neq m_1$. Par passage à la limite (quitte à extraire une sous-suite), il existe donc deux chemins γ_1 et γ_2 toujours descendants vers deux minima distincts. Nous pouvons remplacer chacun de ces chemins par une union de lignes maximales du gradient descendantes, puisque $\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ est la vitesse unitaire de descente la plus rapide : pour $\varepsilon > 0$ petit,

$$\forall b \text{ tel que } \nabla f(b) \neq 0,\ \forall v \text{ tel que } \|v\| = 1,\ f(b - \varepsilon \frac{\nabla f(b)}{\|\nabla f(b)\|}) \leq f(b - \varepsilon v)$$

Par conséquent, il existe deux unions de lignes maximales du gradient issues de a terminant en deux minima distincts, ce qui est impossible.

Le lemme est ainsi démontré. ■

Lemme 3.1.21 :

Considérons f vérifiant les hypothèses du théorème 3.1.17. Soit γ une trajectoire telle que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \gamma(0) & = & a \\ \forall t \in [0,T], \quad \dot{\gamma}(t) & = & \nabla f(\gamma(t)) \end{array}\right. \tag{3.16}$$

avec $\nabla f(\gamma(t)) \neq 0$. Par hypothèse sur f, la trajectoire γ est incluse dans un compact K. Soit $L := \sup_{d\in K} \|\nabla f(d)\|$. Soit $(b_i)_{0\leq i\leq n}$ une suite de points de $\mathbb{R}^2$, $(h_i)_{0\leq i\leq n}$ une suite de $\mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla f(b_0) & \neq & 0 \\ b_{i+1} & := & b_i + h_i \nabla f(b_i) \end{array}\right. \tag{3.17}$$

Posons $t_i := \sum_{k<i} h_k$, $h := \sup_i h_i$, et

$$\gamma_h(t) := b_i + (t - t_i)\nabla f(b_i), \ \forall t \in [t_i, t_{i+1}[\tag{3.18}$$

Alors

$$\sup_k \|\gamma_h(t_k) - \gamma(t_k)\| \leq e^{hL} d(a, b_0) + \frac{ch}{2L}(e^{hL} - 1) \tag{3.19}$$

où $c := \sup_{d\in K} \|H_f \nabla f(d)\|$.

Démonstration :

En effet, par la formule de Taylor, il existe $s_n \in [t_n, t_n + 1]$ tel que

$$\gamma(t_{n+1}) = \gamma(t_n) + h_n \nabla f(\gamma(t_n)) + \frac{h_n^2}{2} H_f \nabla f(\gamma(s_n))$$

Posons $e_n := \|\gamma_h(t_n) - \gamma(t_n)\|$. Alors nous avons :

$$e_{n+1} \leq e_n + h_n L e_n + \frac{h_n^2}{2} c$$

et par récurrence,

$$\begin{array}{rcl} e_{n+1} & \leq & (1 + hL)^{n+1} d(a, b_0) + \dfrac{ch^2}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (1 + hL)^k \\ & \leq & e^{hL} d(a, b_0) + \dfrac{ch^2}{2} \left(\dfrac{(1 + hL)^{n+1} - 1}{hL} \right) \\ & \leq & e^{hL} d(a, b_0) + \dfrac{ch}{2}(e^{hL} - 1) \end{array}$$

ce qui démontre le lemme. ■

Lemme 3.1.22 :

Soit f vérifiant les hypothèses du théorème 3.1.17. Alors l'ensemble de tous les points critiques au-dessus d'un minimum est inscriptible dans un compact. En particulier, il existe une ligne maximale du gradient reliant tout minimum aux points au-dessus de ce minimum.

L'ensemble de tous les points critiques au-dessus d'un minimum est donc un ensemble fini.

Démonstration :

Comme toutes les lignes intégrales maximales sont de longueur bornée par une constante C, il suffit pour démontrer ce lemme, de vérifier que pour tout minimum a, et pour tout point b maximum local de f au-dessus de a, il existe une ligne maximale du gradient reliant b à un minimum a.

En effet, le champ de gradient de f est complet (proposition 3.1.14), donc toutes les lignes intégrales du gradient ayant le maximum b comme une de leurs extrémités ont un point critique c à l'autre extrémité. Supposons que ce point c soit un point selle de f. Alors, comme le hessien de f en c admet deux valeurs propres non nulles de signes opposés, il existe une ligne intégrale du gradient partant de b descendant au-dessous de c. Cette nouvelle ligne se termine soit en un autre point selle, et on réitère l'opération, soit en un minimum. Par transitivité de la relation d'ordre "au-dessus", ce minimum peut-être choisi en a (car le point selle est au-dessus de a).

L'ensemble de tous les points critiques au-dessus d'un minimum est donc inscriptible dans un compact. ■

Nous pouvons à présent démontrer le théorème 3.1.17.

Démonstration : du théorème 3.1.17

Soit $\varepsilon > 0$. Soit K un compact contenant deux minima distincts m_1 et m_2, et tous les points critiques au-dessus de m_1 et m_2, ce qui est possible car les lignes maximales du gradient sont de longueur bornée (lemme 3.1.22). Soit B l'union (finie, puisque l'ensemble des points critiques de f sur K est fini) des boules ouvertes de taille $\varepsilon > 0$ centrées en des points critiques de K. Posons $D := K \backslash B$. Soit

$$\eta := \inf_{b \in D} \mathcal{R}_\kappa(b)$$

où $\mathcal{R}_\kappa(b)$ est le rayon de courbure de la ligne de niveau $\{a \mid f(a) = f(b)\}$ en b. Puisque D est compact et que $\mathcal{R}_\kappa(b) \neq 0$ sur les points réguliers du gradient ∇f de f, nous avons $\eta > 0$. Soit n suffisamment grand pour que, pour tout p, $d(L_p^{n-}, L_p^{n+}) < \eta$.

Considérons un point selle $a \in \mathcal{P}(f) \cap K$ (par le lemme 3.1.20, nous savons que de tels a sont les seuls points selles dans la ligne de partage des eaux de f). Par le lemme 3.1.19, il existe une suite $a_n \in \mathcal{LPE}\{f_n\}$ de limite a. Soit γ une ligne maximale du gradient ascendante issue de a. Ces notations et les suivantes sont résumées sur la figure 3.8. Prenons n suffisamment grand pour que $a_n \in B(a, \varepsilon)$. Soit L_p^n une zone de niveau telle que $f(a) + \varepsilon < 2^{-n}p < f(a) + 2\varepsilon$. Soit $b_0 \in \mathcal{LPE}\{f_n\} \cap L_p^{n+}$, et $a_0 \in \Gamma \cap L_p^{n+}$, où Γ est l'image de γ. Puisque la tangente en a_n à la ligne de partage des eaux de f_n est peu différente de la droite engendrée par le vecteur propre unitaire u_+ de $H_f(a)$ (lemme 3.1.19), ces deux points sont uniques au choix d'une direction près, et $d(a_0, b_0) \leq 2\varepsilon$.

Posons $\gamma|_{[0,T]}$ la trajectoire restriction de γ sur $[0, T]$ telle que

$$\begin{aligned} \gamma|_{[0,T]}(0) &= a_0 \\ \dot{\gamma}|_{[0,T]}(0) &= \nabla f(\gamma|_{[0,T]}(s)) \end{aligned}$$

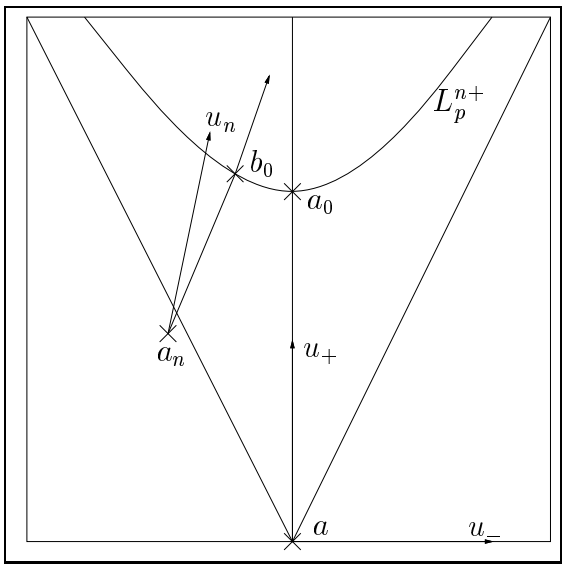


FIG. 3.8. – *Choix de a_0 et de b_0.*

Soit $(b_i)_i$ définie par

$$b_{i+1} = b_i + h_i \frac{\nabla f(b_i)}{\|\nabla f(b_i)\|}$$

avec $h_i := d(b_i, L_i^n)$, et soit γ_n défini par

$$\forall t \in [h_i, h_{i+1}[,\ \gamma_n(t) = b_i + (t - h_i)\frac{\nabla f(b_i)}{\|\nabla f(b_i)\|}$$

Par application du lemme 3.1.18, et puisque $d(L_p^{n-}, L_p^{n+}) < \inf_{b\in D} \mathcal{R}_\kappa(b)$, la trajectoire γ_n est dans la ligne de partage des eaux de f_n pour n suffisamment grand. Par application du lemme 3.1.21, et avec les notations de ce lemme, nous avons

$$\sup_k \|\gamma_n(t_k) - \gamma|_{[0,T]}(t_k)\| \leq e_{\max}(a_0, b_0)$$

où $e_{\max} := e^{hL} d(a_0, b_0) + \frac{ch}{2L}(e^{hL} - 1)$.

Par conséquent, si γ_n^* est la trajectoire de la ligne de partage des eaux de f_n contenant a_n et γ_n, nous avons

$$\sup_{t\in]-\infty,T[} d(\gamma_n^*(t), \gamma(t)) \leq \max(e_{\max}(a_0, b_0), 2\varepsilon) \tag{3.20}$$

Regardons à présent le maximum $a_* \in \mathcal{P}(f)$ correspondant à la limite de γ en $+\infty$

$$a_* = \lim_{s\to+\infty} \gamma(s)$$

Nous avons $a_* \in \mathcal{P}(f)$ puisque a_* est au-dessus du point selle a lui-même au dessus de deux minima distincts. Pour T suffisamment grand, nous avons $d(\gamma|_{[0,T]}(T), a_*) \leq \varepsilon$, et, grâce à l'équation (3.20), nous avons :

$$d(\gamma_n(T), a_*) \leq \varepsilon + \max(e_{\max}(a_0, b_0), 2\varepsilon)$$

ce qui prouve le théorème. ■

Corollaire 3.1.23 :

Les points triples de la ligne de partage des eaux d'une image f sont situés sur les maxima de f appartenant à $\mathcal{P}(f)$

Démonstration :

En effet, la ligne de partage des eaux de f admet une tangente sur les points selles d'après le lemme 3.1.19. ■

Le théorème 3.1.17 et le corollaire 3.1.23 suggèrent la possibilité d'ajouter des lignes dans la ligne de partage des eaux, en ajoutant des points dans $\mathcal{P}(f)$. Si nous choisissons correctement ces nouveaux points, le résultat montrera des points terminaux, et nous avons donc ainsi une manière d'introduire la notion de squelette en teinte de gris. Dans le chapitre 6, nous présenterons un algorithme permettant d'effectuer cet ajout.

2 Aspect métrique de la ligne de partage des eaux

Dans cette partie, nous allons définir une métrique pour laquelle la ligne de partage des eaux sera un squelette par zones d'influence, ce qui nous permettra de mettre en évidence les forts liens existants entre la ligne de partage des eaux et le squelette par zones d'influence euclidien, ainsi que de caractériser la continuité du squelette associée à la ligne de partage des eaux.

2.1 La distance image continue

Définition 3.2.24 :

Soit f une image de Morse. La distance image est l'application de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$d_f(a,b) := \inf_{\{\gamma_{ab} \mid \|\dot{\gamma}_{ab}\|=1\}} \left| \int_{\gamma_{ab}} \|\nabla f(\gamma_{ab}(s))\| ds \right| \tag{3.21}$$

où γ_{ab} est un chemin tel que son image relie les points a et b.

Proposition 3.2.25 :

La distance image continue est une distance sur le domaine connexe de la fonction f.

Démonstration :

- L'inégalité triangulaire

$$d_f(a,b) \leq d_f(a,c) + d_f(c,b)$$

est immédiate, puisque l'ensemble des chemins de a à c et des chemins de c à b est un sous-ensemble des chemins de a à b.

- Il est également évident que $d_f(a,b) = d_f(b,a)$.

- Comme l'ensemble des points vérifiant $\nabla f(a) = 0$ est discret, $d_f(a,b) = 0$ implique $a = b$.

Le fait que $d_f(a,b) < +\infty$ provient de ce que $x \to \|\nabla f(x)\|$ appartient à l'ensemble des fonctions localement intégrables. ■

Dans la suite, nous noterons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions vérifiant les hypothèses du théorème 3.1.17, c'est-à-dire l'ensemble des images de Morse f, telle que toutes les lignes maximales du gradient de f soient de longueur bornée.

Proposition 3.2.26 :

Pour $f \in \mathcal{F}$ donnée, la distance image continue est localement lipschitzienne.

Démonstration :

En effet, soit $B(a,\eta)$ la boule euclidienne centrée en a et de rayon $\eta > 0$. Alors, pour tout $b \in B(a,\eta)$,

$$d_f(a,b) = \inf_{\{\gamma_{ab} \mid \|\dot{\gamma}_{ab}\|=1\}} \left| \int_{\gamma_{ab}} \|\nabla f(\gamma_{ab}(s))\| ds \right| \leq \sup_{c \in B(a,\eta)} \|\nabla f(c)\| d(a,b)$$

(où d est la distance euclidienne) ce qui démontre la proposition. ■

Nous allons à présent étudier la topologie engendrée par la métrique d_f.

2.2 La topologie de la distance image continue

2.2.1 Existence des géodésiques de d_f

L'existence des géodésiques provient d'une théorie plus générale sur les espaces de longueurs [43, Gromov].

Définition 3.2.27 :

Nous appellerons espace de longueur $(\mathcal{X}, d)$ tout espace $\mathcal{X}$ dans lequel la distance d entre deux points quelconques est toujours égale à la borne inférieure des longueurs des courbes qui les joignent.

Remarquons que, pour la métrique induite par la distance euclidienne, $\mathbb{R}^2$ privé d'un point est un espace de longueur, mais que $\mathbb{R}^2$ privé d'un segment ne l'est pas.

Définition 3.2.28 :

Nous appellerons géodésique minimisante d'un espace de longueur $(\mathcal{X}, d)$ tout chemin réalisant le minimum de la longueur et géodésique tout chemin dont la restriction à un intervalle assez petit est une géodésique minimisante.

Théorème 3.2.29 : [43, Gromov]

Si $(\mathcal{X}, d)$ est un espace de longueur complet et localement compact, alors :

- *les boules fermées sont compactes, ce qui est équivalent à : toute partie fermée bornée est compacte.*
- *on peut toujours joindre deux points arbitraires par une géodésique minimisante.*

La preuve de la première partie du théorème est assez technique, et de peu d'intérêt pour la suite de notre exposé [43, p1-10,Gromov]. Nous nous intéresserons à la seconde partie.

Lemme 3.2.30 :

Si $(\mathcal{X}, d)$ est un espace de longueur compact, et si a et b sont deux points de $\mathcal{X}$, il existe une courbe de longueur $d(a, b)$ reliant a et b.

Démonstration :

Considérons les chemins $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{X}$ tels que leur paramétrage soit proportionnel à la longueur : nous utilisons l'abscisse curviligne. D'après la définition 3.2.27 des espaces de longueurs, il existe pour tout n un tel chemin γ_n reliant a et b, et de longueur inférieure à $d(a, b)+1/n$. L'ensemble des γ_n est alors équicontinu, et, d'après le théorème d'Ascoli [26, théorème 7.5.7], il existe une sous suite γ_{n_k} uniformément convergente. Si γ est le chemin limite, la longueur étant semi-continue inférieurement, nous avons :

$$l(\gamma) \leq \liminf l(\gamma_{n_k}) = d(a, b)$$

■

Dans le cas d'un espace de longueur complet localement compact, il suffit de remarquer que les chemins γ_n qui interviennent ci-dessus ont leur image contenue dans la boule compacte $B(a, 2d(a, b))$. Le théorème 3.2.29 est alors démontré.

Proposition 3.2.31 :

Soit $f \in \mathcal{F}$. Il y a équivalence entre les topologies engendrées par la métrique euclidienne et la métrique de la distance image.

Démonstration :

Comme on a toujours $d_f(a, b) \leq \sup_{c \in B(a,\eta)} \|\nabla f(c)\| d(a, b)$ (proposition 3.2.26), les deux métriques engendrent la même topologie si et seulement si pour tout a de $Dom(f)$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un d_f-voisinage $\mathcal{V}(a)$ dont tout point est relié à a par une courbe de longueur euclidienne inférieure à ε.

En tout point où le gradient de f ne s'annule pas, c'est évident, puisque les métriques sont alors localement équivalentes :

$$\inf_{c \in \mathcal{V}(a)} \|\nabla f(c)\| d(a, b) \leq d_f(a, b) \leq \sup_{c \in \mathcal{V}(a)} \|\nabla f(c)\| d(a, b)$$

En un point a où $\nabla f(a) = 0$, le hessien de f admet deux valeurs propres non nulles $|\lambda_2| \geq |\lambda_1| > 0$ puisque $f \in \mathcal{F}$. Nous pouvons alors écrire, pour b suffisamment proche de a,

$$\nabla f(b) = \nabla f(a) + H_f(a)(a-b) + o(\|b-a\|)$$

Par conséquent,

$$\frac{|\lambda_1|}{2} d(a,b) \leq \|\nabla f(b)\| \leq 2|\lambda_2| d(a,b)$$

et par intégration,

$$\frac{|\lambda_1|}{4} d^2(a,b) \leq d_f(a,b) \leq |\lambda_2| d^2(a,b) \tag{3.22}$$

Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta = \frac{|\lambda_1|}{4}\varepsilon^2 \text{ tel que } d_f(a,b) < \eta \Rightarrow d(a,b) < \varepsilon \tag{3.23}$$

Les deux topologies sont donc équivalentes. ■

Théorème 3.2.32 :

Il existe une géodésique minimisante pour la métrique image reliant entre eux deux points du domaine de f.

Démonstration :

Les inégalités (3.22) assurent que $(\mathbb{R}^2, d_f)$ est un espace de longueur complet et localement compact. En effet, cette équation montre que toute suite de Cauchy pour $\mathbb{R}^2$ muni d'une des deux distances est une suite de Cauchy pour $\mathbb{R}^2$ muni de l'autre distance (et réciproquement). De même, toute suite convergente pour l'une des topologies est convergente pour l'autre. Comme $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne est localement compact, $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique image est localement compact.

Le théorème 3.2.29 affirme alors l'existence d'une géodésique minimisante. ■

Cette géodésique n'est pas forcément unique : si nous cherchons à relier deux points selles d'un même bassin, il peut arriver que les deux contours du bassin soient de même longueur pour la distance d_f (fig. 3.9).

Caractérisons à présent les géodésiques de la métrique d_f.

2.2.2 Caractérisation des géodésiques de d_f

Posons $\gamma(s) = (h(s), g(s))$, et

$$J(\gamma) \ := \ \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{h}^2(s) \ + \ \dot{g}^2(s)} \ \|\nabla f(h(s), g(s))\| ds \tag{3.24}$$

Nous voulons résoudre le problème :

$$\text{trouver } \gamma_0 \text{ tel que } \gamma_0 = \arg \inf_{\gamma=(h,g)} J(\gamma) \tag{3.25}$$

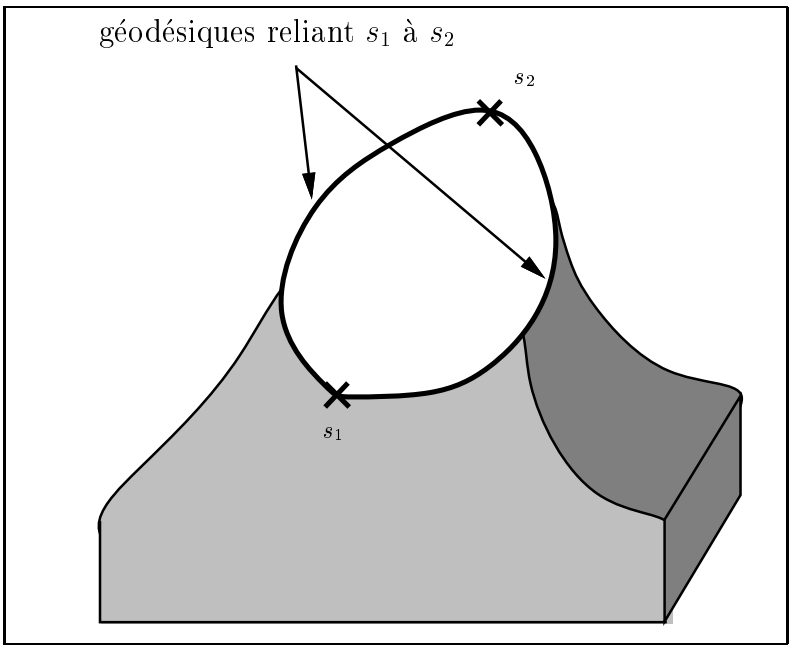


FIG. 3.9. – *Il existe deux géodésiques reliant s_1 à s_2.*

où γ_0 est un chemin de classe $\mathcal{C}^2$.

Posons

$$L(h, g, \dot{h}, \dot{g}, s) = \sqrt{\dot{h}^2(s) \ + \ \dot{g}^2(s)} \ \|\nabla f(h(s), g(s))\|$$

et écrivons les équations d'Euler:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{ds} L_{\dot{h}} \ + \ L_h \ = \ 0 \\[2ex] -\dfrac{d}{ds} L_{\dot{g}} \ + \ L_g \ = \ 0 \end{cases}$$

On obtient

$$L_g \ = \ \frac{\sqrt{\dot{h}^2 \ + \ \dot{g}^2}}{\|\nabla f\|} \Big\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial y} \nabla f \Big\rangle$$

et

$$L_{\dot{g}} \ = \ \frac{\dot{g}}{\sqrt{\dot{h}^2 \ + \ \dot{g}^2}} \|\nabla f\|$$

d'où

$$\frac{d}{ds} L_{\dot{g}} \ = \ \frac{\dot{g}}{\sqrt{\dot{h}^2 + \dot{g}^2} \|\nabla f\|} \Big\langle \nabla f, \dot{h}^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla f \ + \ \dot{g} \frac{\partial}{\partial y} \nabla f \Big\rangle \ + \ \frac{\|\nabla f\|}{\sqrt{\dot{h}^2 + \dot{g}^2}} \left(\ddot{g} - \dot{g} \frac{\dot{h}\ddot{h} + \ddot{g}\dot{g}}{\dot{h}^2 + \dot{g}^2} \right)$$

soit

$$\frac{d}{ds} L_{\dot{g}} \ = \ \frac{\dot{g}}{\sqrt{\dot{h}^2 + \dot{g}^2} \|\nabla f\|} \Big\langle \nabla f, \dot{h} \frac{\partial}{\partial x} \nabla f \ + \ \dot{g} \frac{\partial}{\partial y} \nabla f \Big\rangle + \frac{\dot{h} \|\nabla f\|}{(\dot{h}^2 + \dot{g}^2) \sqrt{\dot{h}^2 + \dot{g}^2}} \left(\ddot{g} \dot{h} - \ddot{h} \dot{g} \right)$$

et, g et h jouant le même rôle, les équations d'Euler se réduisent donc à

$$\left\langle \nabla f, \dot{h}\frac{\partial \nabla f}{\partial y} \; - \; \dot{g}\frac{\partial \nabla f}{\partial x} \right\rangle \; = \; \|\nabla f\|^2 \frac{\ddot{g}\dot{h} - \ddot{h}\dot{g}}{\dot{h}^2 + \dot{g}^2}$$

ce qui se réécrit par

$$\left\langle H_f \nabla f - \frac{\|\nabla f\|^2}{\|\dot{\gamma}\|^2}\ddot{\gamma}, \dot{\gamma}^{\perp} \right\rangle = 0$$

où $\dot{\gamma}^{\perp} = (-\dot{g}, \dot{h})$ et $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$.

Proposition 3.2.33 :

Les géodésiques de classe $\mathcal{C}^2$ de la métrique d_f vérifient nécessairement l'équation

$$\left\langle H_f \nabla f - \frac{\|\nabla f\|^2}{\|\dot{\gamma}\|^2}\ddot{\gamma}, \dot{\gamma}^{\perp} \right\rangle = 0 \tag{3.26}$$

Intéressons nous à présent à l'allure des boules de la distance d_f au voisinage d'un point critique.

2.2.3 Allure des boules de la métrique d_f

Cherchons à présent quelle peut bien être l'allure d'une boule de cette métrique. Si la boule est centrée sur un minimum (ou un maximum) de f, la réponse est immédiate, car la géodésique est connue.

Proposition 3.2.34 :

Une solution particulière au problème de relier deux points par le plus court chemin au sens de d_f est de choisir $\dot{\gamma}$ parallèle au ∇f

Démonstration :

Il suffit de poser $\dot{\gamma} = \nabla f$, alors $\ddot{\gamma} = H_f \nabla f$, et l'équation (3.26) est donc satisfaite. ■

Qui plus est, s'il existe un chemin parallèle au gradient qui relie deux points entre eux (si tant est que ∇f ne s'annule pas sur ce chemin), alors leur distance au sens de d_f est leur différence d'altitude. La différence d'altitude est par ailleurs clairement la borne inférieure pour la distance entre deux points. En effet,

$$|f(\gamma(\alpha)) - f(\gamma(\beta))| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \gamma)'(t) dt \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \langle \nabla f, \dot{\gamma} \rangle (t) dt \right| \tag{3.27}$$

donc

$$|f(\gamma(\alpha)) - f(\gamma(\beta))| \leq \left| \int_{\alpha}^{\beta} \|\nabla f\| \|\dot{\gamma}\| dt \right| = \left| \int_{\gamma} \|\nabla f(\gamma(s))\| ds \right| \tag{3.28}$$

À proximité d'un minimum, la boule de rayon r est donc simplement l'ensemble des points x tel que $|f(x)| \leq r$. Regardons ce qui ce passe lorsque nous atteignons un point selle (fig. 3.10). Du côté du point selle le plus proche du minimum centre de la boule, la frontière de la boule est en tout point orthogonale au gradient de f. Il y a donc formation d'un angle pour la boule de rayon égal à l'altitude du point selle. Lors du franchissement du point selle, la boule continue à se développer comme la boule centrée au point selle. Pour voir ce développement, nous devons écrire un modèle.

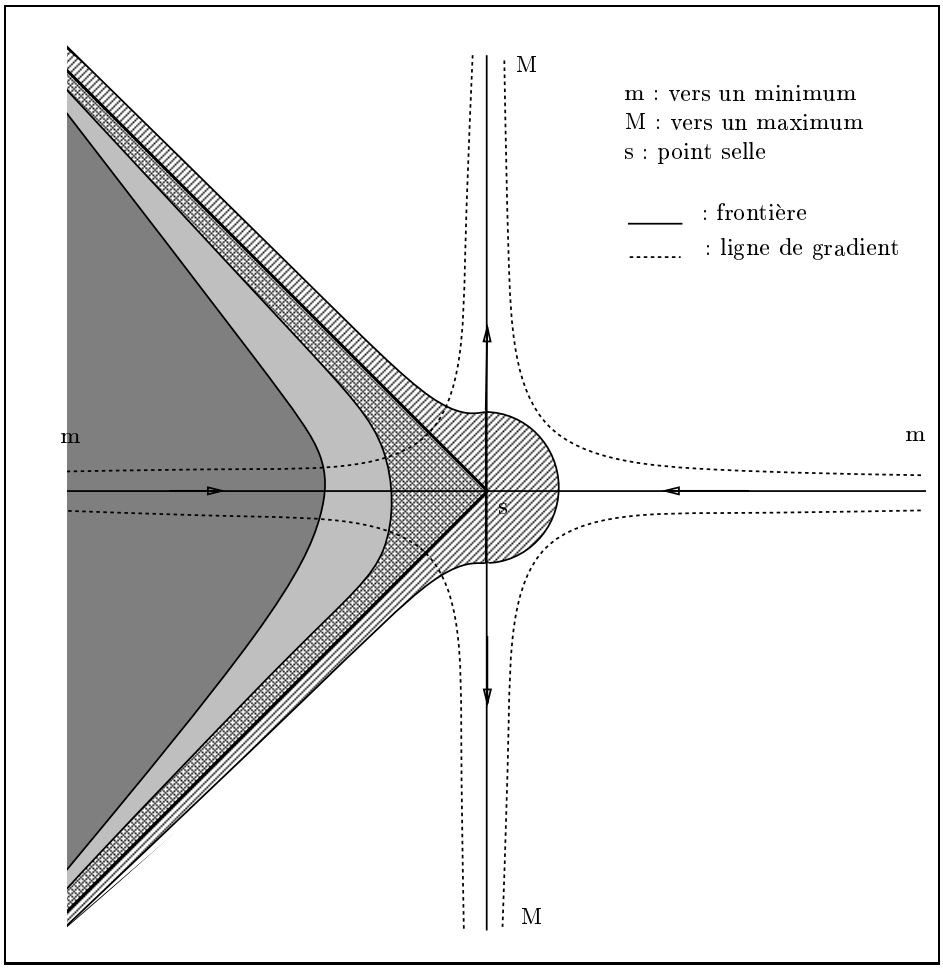


FIG. 3.10. – *Frontières au voisinage d'un point selle de boules centrées sur un minimum.*

Localement, à une transformation près, la géométrie du point selle s permet d'écrire en première approximation : $f(x,y) = x^2 - y^2$. Par conséquent, toujours en première approximation, $\|\nabla f(x,y)\|^2 = 4(x^2+y^2)$: la métrique autour d'un point selle est la même que celle autour d'un minimum[2]. Dans le disque (euclidien) centré en s et de rayon $\varepsilon > 0$ petit, la norme du gradient de f est donc peu différente de deux fois la distance euclidienne entre s et le point considéré. En intégrant, la boule euclidienne centrée en s de rayon ε et la boule au sens de d_f centrée en s de rayon ε^2 sont identiques.

[2]Localement, et à une transformation près, la géométrie d'un minimum (*resp.* maximum) permets d'écrire $f(x,y) = -(x^2+y^2)$ (*resp.* $f(x,y) = +(x^2+y^2)$)

2.2.4 La ligne de partage des eaux est un squelette par zones d'influence

L'application des propositions 3.2.33 et 3.2.34 nous fournit le théorème suivant :

Théorème 3.2.35 :

Soit f une image de Morse, telle que toutes ses lignes maximales du gradient soient de longueur bornée par une constante $C > 0$. Soit $(a_i)_i$ la famille des minima de f. Posons

$$BV_i := \{b \mid d_f(a_i, b) + f(a_i) \leq d_f(a_j, b) + f(a_j) \ \forall j \neq i\} \tag{3.29}$$

Alors la ligne de partage des eaux $\mathcal{LPE}\{f\}$ de f s'écrit :

$$\mathcal{LPE}\{f\} = \bigcup_{i \neq j} \left(BV_i \bigcap BV_j \right) \tag{3.30}$$

Démonstration :

- Soit $a \in \mathcal{LPE}\{f\} \cap \mathcal{P}(f)$. Alors, par le théorème 3.1.17, a est au-dessus de deux minima a_1 et a_2 distincts. Il existe donc une (union de) ligne(s) maximale(s) du gradient reliant a à a_1 (resp. a_2). Grâce aux propositions 3.2.33 et 3.2.34, nous avons donc $d_f(a_1, a) = f(a) - f(a_1)$, et $d_f(a_2, a) = f(a) - f(a_2)$, ce qui montre que $a \in BV_1 \cap BV_2$.

  Si $a \in \mathcal{LPE}\{f\}$, mais $a \notin \mathcal{P}(f)$, alors il existe $a_0 \in \mathcal{P}(f)$ et un chemin γ vérifiant $\gamma(0) = a$, $\gamma(+\infty) = a_0$, et $\dot{\gamma}(s) = -\nabla f(\gamma(s))$ pour tout $s > 0$. Comme a_0 est au-dessus de deux minima a_1 et a_2 distincts, nous avons donc, pour $i = 1, 2$, $d_f(a_i, a) = d_f(a_i, a_0) + d_f(a_0, a)$, ce qui montre que $a \in BV_1 \cap BV_2$.

- Pour démontrer la réciproque, nous allons d'abord prouver que BV_i est l'union de toutes les images des lignes ascendantes du gradient partant de a_i. Soit a un point critique de f situé dans BV_i. En effet, il existe un chemin descendant de a vers a_i, et donc, par le lemme 3.1.22, il existe une ligne maximale du gradient reliant a à a_i.

  Si a n'est pas un point critique de f, alors il appartient à une ligne maximale du gradient ascendante partant de a_i. Soit b l'autre extrémité de cette ligne maximale. Montrons que $b \in BV_i$. Il suffit pour cela de remarquer que $f(b) = f(a_i) + d_f(a_i, b)$, ce qui est le cas puisque b est sur une ligne maximale du gradient ascendante partant de a_i. La d_f-distance de a_i à b est donc minimale. Donc $b \in BV_i$.

  Nous avons donc montré que BV_i est l'union de toutes les images des lignes ascendantes du gradient partant de a_i. Par conséquent, si $a \in BV_i \cap BV_j$, alors

  - si a est un point critique de f, a est au-dessus de deux minima distincts,
  - si a n'est pas un point critique de f, il est "au-dessus" d'un point critique de f (dans le sens qu'il existe une ligne intégrale du gradient descendante partant de a en $t = 0$ et ayant pour limite ce point critique) au-dessus de deux minima distincts.

Donc $a \in \mathcal{LPE}\{f\}$.

Le théorème est donc démontré. ■

Remarquons que le théorème 3.2.35 revient à supposer que f a tous ses minima au même niveau. Il est facile de voir qu'une transformation permettant à f de vérifier cette hypothèse peut être effectuée sans modifier la ligne de partage des eaux de f :

Démonstration :

Supposons $f \geq 0$. Soit a un minimum régional et $BV(a)$ le bassin versant associé. Soit u le minimum de f sur la frontière du bassin versant. Considérons les points à d_f-distance de a inférieure ou égale à $(u - f(a))/2$. C'est un ensemble connexe par arcs, inclus dans $BV(a)$, puisque $d_f(x, a) \geq f(x) - f(a)$. Notons V cet ensemble. Transformons maintenant f en f_0 sur V de la manière suivante : $f_0(x) = \phi(f(x))$ où ϕ est une fonction strictement croissante, indéfiniment dérivable vérifiant : $\phi(f(a)) = 0$, $\phi(u) = u$ et $\phi'(u) = 1$. La même construction est appliquée sur chaque minimum régional. La fonction f_0 obtenue a tous ses minima à 0 et son gradient admet les mêmes lignes intégrales, puisque f_0 a les mêmes points critiques que f et même direction du gradient quand il est non nul. ■

Le résultat du théorème 3.2.35 affirme donc que la ligne de partage des eaux est un squelette par zones d'influence pour la métrique d_f. Un résultat similaire a été donné dans [94, 93, Preteux & Merlet], mais avec une métrique complexe utilisée dans une définition de la ligne de partage des eaux continue. L'avantage de notre métrique est de permettre d'établir de nouveaux résultats que nous présentons ci-après.

Remarquons que si nous affaiblissons les hypothèses sur f, la ligne de partage des eaux que l'on obtient ainsi, bien qu'exprimée sous la forme d'un squelette par zone d'influence, peut n'être cependant pas dépourvue de barbules[3] (arcs avec un point terminal). Ainsi, ce n'est pas forcément un ensemble de contours fermés. Il suffit de regarder l'exemple déjà cité de la selle de singe (fig. 3.6) pour s'en convaincre. En effet, si l'on annule les dérivées en un point jusqu'à l'ordre n, il peut exister n chemins parallèles à ∇f partant de ce point.

2.2.5 Le problème de la caractérisation locale

Historiquement, une des premières applications de l'algorithme de ligne de partage des eaux a été la séparation d'objets compacts convexes inclus dans le plan. Pour cela, on calcule la distance au bord $d(., Front(X))$, où X est un objet binaire, et où $Front(X)$ est la frontière de X. Nous obtenons ainsi une image I en teinte de gris. La ligne de partage des eaux discrète de l'opposé de I fournit alors la séparation désirée.

Le cas particulier des images de fonction distance à un ensemble $f = d(., X)$ a été pleinement étudiée par G. Matheron [108, chapitre 11], qui cherchait à caractériser le squelette d'un objet.

Il existe plusieurs définitions non équivalentes du squelette. La définition donnée par Matheron indique que le squelette d'un ouvert G est l'ensemble des centres des boules ouvertes maximales inscrites dans G. En particulier, Matheron a montré que l'adhérence de ces centres est

[3] Comme d'ailleurs celle définie dans [94, 93, Preteux & Merlet]. Mais les auteurs de ces articles ne le mentionnent pas.

l'ensemble des points de non-différentiabilité de la fonction $d(x, G^c)$, distance au complémentaire de G.

La fonction f n'est pas partout dérivable[4], mais le module de son gradient est presque partout égal à l'unité, et ∇f est orienté suivant la pente maximale dirigée vers les lignes de crête de la fonction distance. Autrement dit, les lignes maximales du gradient terminent en un point du squelette de X^c, et non pas en un maximum de f.

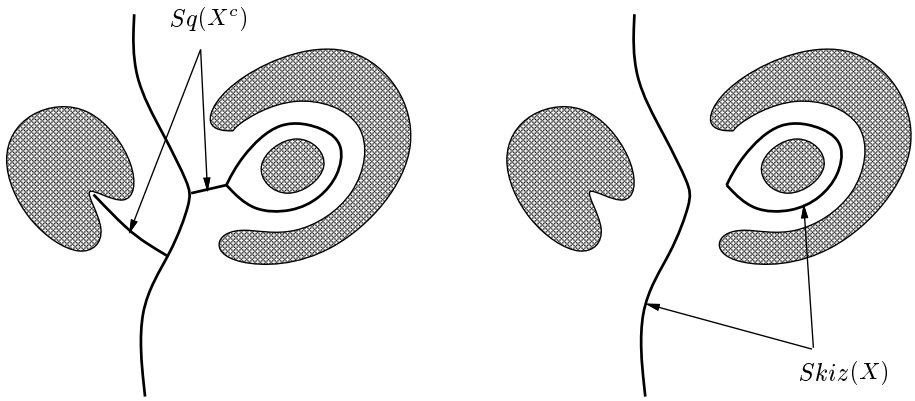


FIG. 3.11. – *Différence entre le squelette par zone d'influence et le squelette du complémentaire. Noter que le squelette par zone d'influence n'est pas connexe dans cet exemple.*

Dans les cas non pathologiques (voir un exemple de cas pathologique sur la figure 3.11), le squelette par zone d'influence de X correspond au squelette du fond ébarbulé[5], et coïncide avec la ligne de partage des eaux de la fonction $-d(., Front(X))$, où $Front(X)$ est la frontière de X. Or, dans ce cas, nous disposons d'une caractérisation locale de ces lignes : la non-différentiabilité.

Remarquons que la ligne de partage des eaux continue d'une fonction suffisamment dérivable ne peut en aucun cas avoir de caractérisation locale, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.2.36 :

Soit a un point de la fonction $f \in \mathcal{F}$ tel que $\nabla f(a) \neq 0$, et $\mathcal{V}_a$ un voisinage de ce point ne contenant pas de point critique. Prenons un chemin γ, parallèle à ∇f sur $\mathcal{V}_a$. Alors, il existe une fonction f_0 suffisamment régulière, égale à f sur $\mathcal{V}_a$, et telle que le chemin γ soit inclus dans la ligne de partage des eaux continue de f_0.

Démonstration :

En effet, d'après le théorème 3.1.17, la ligne de partage des eaux est parallèle au gradient. Étant donné un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a, nous pouvons toujours raccorder le voisinage $\mathcal{V}_a$ de façon suffisamment régulière de telle sorte que la ligne maximale passant par a ait pour extrémités deux points critiques. Nous pouvons construire ce prolongement f_0 de

[4]La fonction $\rho_G : x \to d(x, G^c)$ est appelée fonction d'étanchéité de G. Elle est lipschtzienne de rapport 1 (comme fonction distance), donc presque partout différentiable.

[5]L'ébarbulation correspond à retirer du squelette les arcs possédant un point terminal.

manière à ce que ces deux points critiques appartiennent à l'ensemble $\mathcal{P}$ de f_0. Le point a est alors dans la ligne de partage des eaux de continue f_0. ■

Les points selles et les maxima de l'image sont les seuls points pour lesquels nous soyons sûr (sauf exception) de leur appartenance à la ligne de partage des eaux. Pour les autres points, il faut connaître l'image dans son entier.

Nous pouvons dire qu'il n'existe pas de caractérisation locale de la ligne de partage des eaux continue[6]. La recherche de la ligne de partage des eaux continue doit plutôt se voir comme un problème aux limites de solution d'équations différentielles : la ligne de partage des eaux est l'ensemble des courbes intégrales du gradient de l'image passant par certains points particuliers, à savoir, les maxima locaux et les points selles de l'image.

L'idée intuitive que l'on a des lignes de crêtes, leur non-différentiabilité, fait qu'il semble absurde de décrire de telles lignes comme dépendant d'un processus global. Le fait est, cependant, que si la fonction est suffisamment continue, une telle caractérisation n'existe pas.

2.2.6 Semi-continuité de l'ossature

Nous allons munir $\mathcal{F}$ d'une topologie (qui est d'ailleurs l'une des topologies utilisées dans la théorie des distributions [106, Schwartz]).

Définition 3.2.37 :

Nous définirons la topologie $\mathcal{D}$ comme étant la topologie de la convergence uniforme de $(f_n,\ \nabla f_n,\ H_{f_n})$ vers $(f,\ \nabla f,\ H_f)$.

Proposition 3.2.38 :

L'application

$$f \longrightarrow d_f \tag{3.31}$$

est positivement homogène :

$$d_{\lambda f} = |\lambda| d_f,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathcal{F} \tag{3.32}$$

sous-linéaire :

$$d_{f+g} \leq d_f + d_g,\ \forall f, g \in \mathcal{F} \tag{3.33}$$

et compatible avec les translations :

$$d_{f+\lambda} = d_f,\ \forall f \in \mathcal{F},\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.34}$$

Elle est par conséquent continue pour la topologie $\mathcal{D}$.

[6] Il est à noter que la non-caractérisation locale de la ligne de partage des eaux va dans le sens des connaissances actuelles sur le problème de la détection de courbe par le cortex cérébral. À partir des travaux de Hubel et de Wiesel [51] sur les neurones sensibles à l'orientation dans le cortex visuel, il est maintenant largement admis que la détection de courbe est simplement affaire d'"intégrer" la réponse de ces cellules. Plus spécifiquement, les biologistes pensent que le processus d'intégration est global alors que les estimations initiales sont locales. Les relations entre ces deux parties deviendront claires lorsque nous disposerons d'une compréhension plus approfondie des circuits corticaux.

Démonstration :

Pour $f \in \mathcal{F}$, l'homogénéité et la compatibilité avec les translations sont triviales. Montrons que, pour f et $g \in \mathcal{F}$, on a $d_{f+g} \leq d_f + d_g$. Pour tout chemin γ reliant a à b,

$$\left| \int_\gamma \|\nabla f(\gamma(s)) + \nabla g(\gamma(s))\| ds \right| \leq \left| \int_\gamma (\|\nabla f(\gamma(s))\| + \|\nabla g(\gamma(s))\|) ds \right|$$

et la proposition se démontre par passage à l'infimum. ■

Notons $\mathrm{d}\!\!\mathrm{l}_f$ la distance de Hausdorff pour la distance d_f.

$$\mathrm{d}\!\!\mathrm{l}_f(K_1, K_2) := \max \left\{ \sup_{a \in K_1} \inf_{b \in K_2} d_f(a,b), \sup_{a \in K_2} \inf_{b \in K_1} d_f(a,b) \right\} \tag{3.35}$$

Proposition 3.2.39 :

L'application

$$a \longrightarrow \mathrm{d}\!\!\mathrm{l}_f(B_f(a,r); B_f(a_o,r)) \tag{3.36}$$

où $B_f(a,r) = \{b \mid d_f(a,b) \leq r\}$, *est continue.*

Démonstration :

$d_f(.,b)$ est continue car lipschtzienne. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $d(a_0, a_1) < \eta$, alors $|d_f(a_0,b) - d_f(a_1,b)| < \varepsilon$. Donc, pour $b \in B_f(a,r)$, pour $\varepsilon > 0$, et v de norme unité, il existe $\eta > 0$ tel que

$$d_f(a,b) - \varepsilon < d_f(a + \eta v, b) < r + \varepsilon$$

ce qui signifie

$$B_f(a + \eta v, r + \varepsilon) \supset B_f(a,r)$$

De même,

$$B_f(a, r + \varepsilon) \supset B_f(a + \eta v, r)$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ \mathrm{d}\!\!\mathrm{l}_f(B_f(a + \eta v, r), B_f(a,r)) \leq \varepsilon$$

■

Proposition 3.2.40 :

Si la suite $B_f(a_n, r_n) = \{b \mid d_f(a_n, b) \leq r_n\}$, *où* $a_n \in \Omega$ *et* $r_n \in \mathbb{R}$ *converge pour la distance de Hausdorff* $\mathrm{d}\!\!\mathrm{l}_f$ *vers* B *compact* $\neq \Omega$, *la limite s'écrit de manière unique* $B_f(a,r)$, *où* $a \in \Omega$ *et* $r \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

Puisque $B \neq \Omega$, il existe un compact K tel que, pour n suffisamment grand, $a_n \in K$. De même, les r_n sont bornés dans $\mathbb{R}$. On peut donc extraire une sous suite (a_{n_k})

convergeant vers $a \in \Omega$, et une sous suite (r_{n_k}) convergeant vers $r \in \mathbb{R}$. Montrons que $B_f(a,r) \supset B$.

Soit $c \in B$. Il existe une suite (c_n) telle que $c_n \in B_f(a_n, r_n)$ et telle que $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ pour la convergence au sens de la distance de Haussdorff. On a par définition $d_f(a_n, c_n) \leq r_n$. D'où, en extrayant une sous suite, pour n suffisamment grand,

$$d_f(a,b) \leq d_f(a, a_{n_k}) + d_f(a_{n_k}, c_{n_k}) + d(c_{n_k}, c) \leq r_{n_k} + 2\varepsilon$$

et, par passage à la limite, $c \in B_f(a,r)$.

Par ailleurs, il est évident que $B_f(a,r) \subset B$. En effet, soit $c \in B_f(a,r)$. Il existe une suite (c_n) de limite c, avec $c_n \in B_f(a_n, r_n)$. Comme $B_f(a_n, r_n)$ converge vers B, on a, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour n suffisamment grand, $B_f(a_n, r_n) \subset \{b / d_f(b, B_f(a,r)) < \varepsilon\}$, et donc $c = \lim_n c_n \in B$.

Suppossons à présent que B s'écrive de deux manières différentes $B_f(a,r)$ et $B_f(b, r_*)$. On a déjà $r_* = r$ puisque pour tout $c_1 \in Front(B)$, $r = d_f(c_1, a) = d_f(c_1, b) = r_*$, Prolongeons à présent la géodésique reliant a à b jusqu'à un point c appartenant à la frontière de B. Alors

$$r = d_f(a,c) = d_f(a,b) + d_f(b,c) = d_f(a,b) + r$$

et donc $d_f(a,b) = 0$, ce qui signifie, puisque la distance d_f est séparante, que $a = b$. ■

Il est alors trivial que $B_{f_n}(a_n, r_n)$ ne peut converger que vers $B_f(a,r)$.

Nous allons montrer que, comme dans le cas du squelette [67, 68, Matheron], la ligne de partage des eaux est une application semi-continue inférieurement. La démonstration reposera d'ailleurs sur celle de la semi-continuité du squelette.

En aucun cas nous ne pourrons obtenir de continuité, comme le montre la figure 3.12.

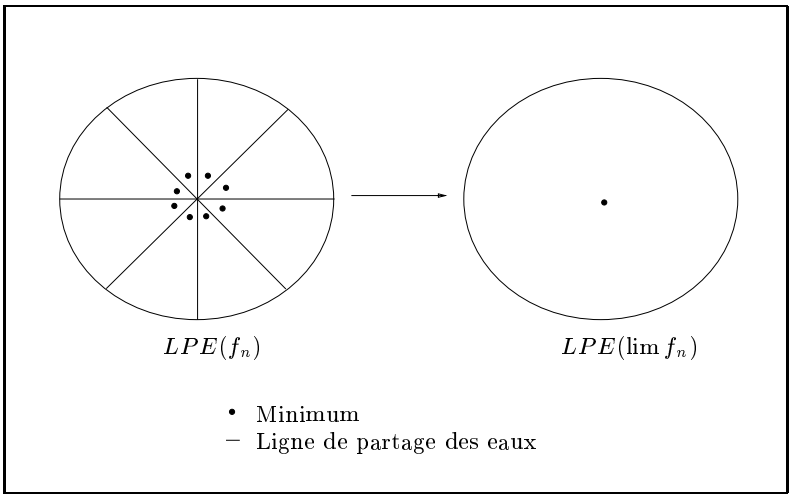


FIG. 3.12. – *Non continuité de la ligne de partage des eaux.*

Plus précisément, nous avons vu que la ligne de partage des eaux s'écrit sous la forme d'un squelette par zone d'influence. Sur une image binaire, le squelette du fond contient le squelette

par zone d'influence. Par analogie, nous allons définir l'ossature d'une image et montrer la semi-continuité de cette application.

Donnons nous une suite de fonctions (f_n) de $\mathcal{F}$ convergeant au sens de $\mathcal{D}$ (définition 3.2.37) vers $f \in \mathcal{F}$.

Proposition 3.2.41 :

> *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}$ convergeant vers $f \in \mathcal{F}$ au sens de $\mathcal{D}$. Alors l'ensemble $\mathcal{S}(f_n)$ des points singuliers de f_n converge vers l'ensemble $\mathcal{S}(f)$ des points singuliers de f.*

Démonstration :

limsup : Soit a_n tel que $\nabla f_n(a_n) = 0$. Toute sous-suite convergente de (a_n) a pour limite un point a tel que $\nabla f(a) = 0$, car ∇f_n converge uniformément vers ∇f.

liminf : Soit a tel que $\nabla f(a) = 0$. Supposons pour simplifier que $f(a) = 0$. Comme les points singuliers sont isolés (le hessien est non dégénéré en ces points), il existe une boule B de centre a et de de rayon $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $b \in Front(B)$, $|f(b)| > \varepsilon$. Donc, pour tout $b \in Front(B)$, et pour n suffisamment grand, $|f_n(b)| > \frac{\varepsilon}{2}$ et $|f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit b_n tel que $|f_n(b_n)| = \inf_{b \in B} |f_n(b)|$. Le point b_n existe car B est compacte, et b_n vérifie $\nabla f_n(b_n) = 0$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que b_n converge vers une limite b vérifiant $\nabla f(b) = 0$, et donc $b = a$.

■

Corollaire 3.2.42 :

> *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}$ convergeant vers $f \in \mathcal{F}$ au sens de $\mathcal{D}$. Les minima (resp. les maxima, les points selles) de f_n converge vers les minima (resp. les maxima, les points selles) de f.*

Démonstration :

En effet, soit λ^n une des valeurs propres du hessien $H_{f_n}(b_n)$ de la suite précédement construite. Par définition de $\mathcal{F}$, nous pouvons supposer que $\lambda^n > 0$. Sa limite λ vérifie donc $\lambda \geq 0$, et donc $\lambda > 0$. ■

Dans toute la section, nous utiliserons la notation $\mathcal{M}$ pour l'ensemble des minima de f et $\mathcal{M}_n$ pour l'ensemble des minima de f_n :

$$\mathcal{M} = \mathrm{Min}\,\{f\} \quad \mathcal{M}_n = \mathrm{Min}\,\{f_n\} \tag{3.37}$$

Définition 3.2.43 :

Nous dirons que $V_f^{\mathcal{M}}$ est une boule maximale de f, où f est une fonction à domaine $Dom(f)$ compact, si elle vérifie les conditions suivantes :

- $V_f^{\mathcal{M}}$ est une boule ouverte pour la distance d_f,
- $V_f^{\mathcal{M}}$ est incluse dans $Dom(f)\backslash\mathcal{M}$,
- si $W_f^{\mathcal{M}}$ est une boule de f incluse dans $Dom(f)\backslash\mathcal{M}$ contenant $V_f^{\mathcal{M}}$, alors $W_f^{\mathcal{M}} = V_f^{\mathcal{M}}$.

Définition 3.2.44 :

L'ossature d'une fonction f sera définie par le lieu des centres des boules maximales de f inscrites dans $Dom(f)\backslash\mathcal{M}$.

Comme dans le cas binaire, l'ossature de f contient la ligne de partage des eaux de f.

Lemme 3.2.45 :

Soit f_n une suite de fonctions de $\mathcal{F}$ de limite $f \in \mathcal{F}$ pour la topologie $\mathcal{D}$, telle que $Dom(f) = Dom(f_n)$ soit compact. Pour toute boule maximale $V_f^{\mathcal{M}}$ de f, il existe une suite $V_{f_n}^{\mathcal{M}_n}$ de boules maximales pour la distance d_{f_n} qui converge vers $V_f^{\mathcal{M}}$ pour $\mathcal{G}$

Démonstration :

Soit $V_f^{\mathcal{M}}$ une boule maximale de f. Il existe une suite croissante de boules (pour la distance d_f) compactes K_p (vide ou de rayon fini) telle que

$$K_p \subset Int(K)_{p+1} \text{ et } V_f^{\mathcal{M}} = \cup K_p = \cup Int(K)_p$$

où $Int(K)$ représente l'intérieur de K (i.e., le plus grand ouvert topologique contenu dans K). Posons

$$G = Dom(f)\backslash\mathcal{M}$$

et

$$G_n = Dom(f)\backslash\mathcal{M}_n$$

Comme K_p est compact, et parce que G_n converge dans l'ensemble des ouverts topologiques $\mathcal{G}$ vers G, il existe, pour chaque p, un entier N_p telle que pour $n \geq N_p$, $K_p \subset G_n$. Prenons alors

$$W_n = Int(K)_p \text{ pour } n = N_p, 1 + N_p, \ldots, N_{p+1} - 1,$$

Quitte à réindicer, la suite de boules ouvertes $(W_n)_n$ satisfait pour tout n à :

$$W_n \subset \overline{W}_n \subset G_n, \quad V_f^{\mathcal{M}} = \cup W_n$$

Comme W_n est contenue dans G_n, il existe une boule maximale $V_f^{\mathcal{M}_n}$ dans G_n qui contient W_n :

$$W_n \subset V_f^{\mathcal{M}_n} \subset G_n$$

Dans l'espace compact $\mathcal{G}$, la suite $V_f^{\mathcal{M}_n}$ a un point d'accumulation $V_f^{\mathcal{M}_0}$ qui est encore une boule maximale. Par passage à la limite dans les inclusions $W_n \subset V_f^{\mathcal{M}_n} \subset G_n$, et en prenant en compte le fait que la suite croissante W_n converge vers $V_f^{\mathcal{M}} = \cup W_n$ dans $\mathcal{G}$, on trouve

$$V_f^{\mathcal{M}} \subset V_f^{\mathcal{M}_0} \subset G$$

Mais, comme par hypothèse, $V_f^{\mathcal{M}}$ est maximale dans G, $V_f^{\mathcal{M}_0} = V_f^{\mathcal{M}}$. Comme la suite $V_f^{\mathcal{M}_n}$ a un unique point d'accumulation dans l'espace compact $\mathcal{G}$, cette suite doit également converger dans $\mathcal{G}$ vers cette valeur unique $V_f^{\mathcal{M}}$.

Maintenant, d'après la proposition 3.2.38, d_{f_n} converge vers d_f. Toutes les d_{f_n} étant équivalentes, on peut parler d'ouvert sans préciser la métrique. Pour toute boule B_f ouverte, il existe une suite de boules ouvertes B_{f_n} de limite B_f. En particulier, pour tout n, comme $V_f^{\mathcal{M}_n}$ est une boule maximale ouverte de f, il existe une suite de boules maximales ouvertes $(V_{f_k}^{\mathcal{M}_n})_k$ de f_k, de limite $V_f^{\mathcal{M}_n}$. Posons alors

$$V_{f_n}^{\mathcal{M}_n} = (V_{f_n}^{\mathcal{M}_n})_n$$

$V_{f_n}^{\mathcal{M}_n}$ est une boule ouverte maximale de f_n, de limite $V_f^{\mathcal{M}}$. La proposition est donc établie. ■

Théorème 3.2.46 :

L'application $f \to \mathcal{O}(f)$, où $\mathcal{O}(f)$ est l'ossature de f, est semicontinue inférieurement.

Démonstration :

Soit f_n une suite de fonctions qui converge vers une fonction f, et soit a un point de l'ossature $\mathcal{O}(f)$. Soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des minima de f_n. On doit montrer qu'il existe dans chaque $\mathcal{O}(f_n)$ (pour $n \geq N$ suffisammemt grand) un point a_n tel que $a = \lim a_n$. Comme a est dans $\mathcal{O}(f)$, soit $V_f^{\mathcal{M}}$ la boule ouverte maximale contenue dans $Dom(f) \backslash \mathcal{M}$, de rayon fini ρ et de centre a. Le lemme précédent 3.2.45 nous dit qu'il existe une suite $V_{f_n}^{\mathcal{M}_n}$ de boules ouvertes maximales contenues dans $Dom(f) \backslash \mathcal{M}_n$ et telles que $V_f^{\mathcal{M}} = \lim V_{f_n}^{\mathcal{M}_n}$. Comme $V_f^{\mathcal{M}}$ est non vide et de rayon fini, pour n suffisamment grand, $V_{f_n}^{\mathcal{M}_n}$ est non vide, de rayon fini ρ_n et de centre a_n. La convergence de $V_{f_n}^{\mathcal{M}_n}$ vers $V_f^{\mathcal{M}}$

implique la convergence de a_n vers a et de ρ_n vers ρ. Comme $a_n \in \mathcal{O}(f_n)$, ceci prouve le théorème. ■

Ce résultat montre pourquoi la ligne de partage des eaux est très sensible au bruit, et justifie d'une certaine manière les diverses techniques de marquage [114, Vincent] (qui consiste à inonder non pas à partir de tous les minima, mais à partir d'un certains nombre de minima "significatifs") et de lissage [42, Grimaud] (qui consiste à supprimer les bassins de dynamique inférieure à un seuil donné).

3 Une application aux équations différentielles : l'équation eikonale

3.1 Résolution de l'équation eikonale

Par effet de bord, l'algorithme de ligne de partage des eaux peut être adapté pour résoudre une équation largement utilisée en Shape from Shading, l'équation eikonale [50, 52] :

$$\text{trouver } f \text{ telle que } \|\nabla f\| = g \tag{3.38}$$

Nous avons vu que sur chaque bassin versant de f, nous avons $f(a) = d_f(a,b) + f(b)$, où b est le minimum du bassin versant. Notons que la détermination de $d_f(a,b)$ ne dépend que de la connaissance de g (voir la formule 3.21). Nous obtenons le résultat suivant : soit $\{b_i\}$ un ensemble de points avec leur valeur associée $f(b_i)$, qui correspondent aux conditions aux limites de l'équation différentielle. La solution continue à l'équation eikonale, ayant tous ses minima situé sur les b_i exactement, est donnée par :

$$f(a) = \inf_i \{d_f(a,b_i) + f(b_i)\} \tag{3.39}$$

Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 3.3.47 :

Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$, n'ayant que des points singuliers isolés. Soit $\{a_i\}$ un ensemble de points et $\{\alpha_i\}$ des valeurs associées aux a_i. Alors

$$f(b) = \inf_i \{\inf_{\gamma_{a_i b}} \int_{\gamma_{a_i b}} g(\gamma_{a_i b}(s))ds + \alpha_i\} \tag{3.40}$$

est l'unique solution continue vérifiant

$$\|\nabla f(a)\| = g(a) \tag{3.41}$$

partout où f est dérivable, ayant tout ses minima en $\{a_i\}$ exactement.

Remarque 3.3.2 :

En fait, on peut montrer [62, P.L. Lions, E. Rouy & A. Tourin] que f donné par l'équation (3.40) est l'unique solution de viscosité de l'équation (3.41) sur l'intérieur Ω:=Int($Dom(g)$) de g qui est une sur-solution de viscosité de (3.41) sur $\overline{\Omega}$, et qui vérifie $f(a_i) = \alpha_i$ pour tout i.

L'implantation que nous proposons reprend l'algorithme développé pour la ligne de partage des eaux par Luc Vincent [114]. L'algorithme de Vincent se décompose en :

1. une étape de tri des pixels par niveau de gris croissant,

2. une étape d'inondation progressive et seuil à seuil des bassins versants de l'image.

L'étape 1 permet d'avoir accès à l'image originale seuil à seuil, ce qui facilite l'implantation de l'étape 2 d'inondation, par des techniques de type files d'attente.

Dans le cas qui nous occupe, nous ne pouvons évidemment pas faire d'étape de tri initial. Nous proposons donc d'effectuer le tri au fur et à mesure de l'inondation. En effet, ce qui importe dans l'étape d'inondation, c'est de pouvoir avoir accès aux pixels dans l'ordre de leur niveau de gris. Il existe une structure de donnée parfaitement adaptée à l'insertion d'un élément et la suppression de l'élément de plus petite clef. Cette structure est celle de maximier, où l'on représente les arbres en tas [1] (heap en anglais). Cette structure permet une réalisation de ces opérations d'insertion et de suppression en $O(\log n)$, où n est le nombre d'éléments contenus dans le tas.

L'algorithme que nous proposons se décrit alors simplement :

1. Initialisation du tas par les conditions initiales.

2. Extraction du pixel d'altitude la plus basse.

3. Calcul de l'altitude des voisins de ce pixel, et mise dans le tas de ces pixels.

4. Retour à l'étape 2 tant que le tas n'est pas vide.

Nous obtenons alors un algorithme similaire á celui développé par Verwer et Verbeek [113, 112].

3.2 Discussion de la régularité de la solution

L'équation (3.40) propose une solution f de l'équation (3.41). Quelle est la régularité de la fonction f ainsi créée? Elle dépend évidemment de la position des points de $\{a_i\}$. Pour obtenir une fonction régulière, ces points doivent être situés aux endroits où $g(a) = 0$. L'exemple suivant, bien connu en morphologie mathématique [67, 69], est caractéristique.

Posons $g \equiv 1$ p.p., alors la distance d_f est équivalente à la distance euclidienne classique[7] Si nous posons $f(a_i) = 0$ pour tout a_i, nous retrouvons le *squelette* du complémentaire de $\{a_i\}$, dont l'adhérence est caractérisée comme l'ensemble des points de discontinuité de ∇f.

Nous disposons en fait d'un certain nombre de "degrés de liberté". Ces degrés de liberté sont situés sur les points a où $g(a) = 0$, points singuliers de f. Sur ces points, nous pouvons dans une certaine mesure choisir le sens du gradient. Cependant, supposer par exemple que si $g(a) = 0$, alors $f(a)$ est un minima, implique également que ∇f est discontinue. Les choix ne sont donc pas indépendants les uns des autres. Nous allons examiner cette dépendance.

La notion fondamentale qui va intervenir est celle de voisinage des points critiques :

[7] La fonction f est la distance aux a_i, et f est dérivable sur $(\mathbb{R}^2 \setminus (\cup_i \{a_i\})) \setminus \overline{Sq(\mathbb{R}^2 \setminus (\cup_i \{a_i\}))}$.

Définition 3.3.48 :

Nous dirons que deux points critiques a et b de $f \in \mathcal{F}$ sont voisins s'il existe une ligne maximale du gradient reliant a et b.

Deux minima de f ne peuvent pas être voisins. Si il existe une ligne maximale du gradient reliant deux minima, cela implique une discontinuité sur ∇f. Nous remarquons donc que le sens du gradient n'intervient pas, mais sa direction est importante. Cette direction est connue : c'est le plus court chemin (au sens de d_f) entre a et b.

Nous choisirons à présent les conditions aux limites de notre équation différentielle sur les points critiques. Nous nous limiterons à supposer que ces conditions sont les minima de la fonction f, mais il serait possible de faire l'étude en imposant uniquement les maxima, ou un mélange de maxima et de minima.

Proposition 3.3.49 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que f appartienne à $\mathcal{F}$ est qu'il n'existe pas de ligne maximale du gradient reliant deux minima de f, et que le nombre de minima soit le plus grand possible.

Démonstration :

Pour tout ligne maximale du gradient ascendante γ en provenance d'un minima, nous avons

$$\forall s \in]-\infty, +\infty[,\ \langle \nabla f(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle = \|\nabla f(\gamma(s))\|^2 > 0$$

Si deux minima étaient reliés par une ligne maximale du gradient, il y aurait un changement de signe du produit scalaire $\langle \nabla f(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle$ pour un $s \in]-\infty, +\infty[$, ce qui est impossible.

Cette condition est par ailleurs clairement suffisante. Supposons que deux minima possèdent trois voisins en commun. Parmi ces voisins, celui qui est le plus proche au sens de d_f des deux minima devient un point selle de f. Les deux autres deviennent des maxima de f. Imposer que le nombre de minima soit le plus grand possible revient à imposer aux autres points critiques d'être des maxima ou des points selles. Nous imposons par la même occasion aux points selles d'avoir quatre voisins (deux minima et deux maxima). Le Hessien de f possède donc la condition nécessaire pour que f soit dans $\mathcal{F}$. ■

Chapitre 4

Comparaisons de la segmentation par ligne de partage des eaux

L'image se découpe ; elle est pure et nette comme une lettre : elle est la lettre de ce qui me fait mal. Précise, complète, fignolée, définitive, elle ne me laisse aucune place : j'en suis exclu comme de la scène primitive, qui n'existe peut-être que pour autant qu'elle est découpée par le contour de la serrure. Voici donc, enfin, la définition de l'image, de toute image : l'image c'est ce dont je suis exclu. Au contraire de ces dessins rébus, où le chasseur est secrètement dessiné dans le fouillis d'une frondaison, je ne suis pas dans la scène : l'image est sans énigme.

Roland Barthes

Fragments d'un discours amoureux

1 Comparaison avec les extracteurs de contours

L'idée sous-jacente aux extracteurs de contours est de modéliser les lignes de crêtes. Il n'existe pas de définition classique de telles lignes. Pour montrer la difficulté d'une telle modélisation, nous allons en explorer une des voies possibles.

La première idée qu'on peut avoir est de dire qu'une ligne de crête est un arc Γ_{ab} de $\mathbb{R}^3$ d'extrémités a et b tel que l'on soit sur un maximum si on se déplace dans la direction perpendiculaire à la projection $\dot{\gamma}_{ab}$ de son gradient dans $\mathbb{R}^2$. Autrement dit, la fonction

$$g(t) = f(x_0 + t\dot{\gamma}_{ab}^{\perp}) \tag{4.1}$$

est maximale en $t = 0$.

Or la condition nécessaire

$$\frac{\partial}{\partial t} g(0) = \left\langle \nabla f, \dot{\gamma}_{ab}^{\perp} \right\rangle = 0 \tag{4.2}$$

est toujours vérifiée si $\dot{\gamma}_{ab}$ est parallèle à ∇f.

Devant cette difficulté, le processus classique des méthodes d'extraction de contours consiste essentiellement à trouver les zéros d'un opérateur différentiel déterminé sur une image préalablement filtrée pour la rendre suffisamment dérivable. Sous des conditions idéales, les zéros formeront des courbes que l'on appellera les contours abstraits de l'image.

À l'origine, l'opérateur linéaire du second ordre laplacien [1]

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}, \tag{4.3}$$

a été utilisé dans ce but. Marr et Hildreth [65] ont supposé que le laplacien de l'image I convoluée à une gaussienne G

$$\Delta(G * I) \tag{4.4}$$

était en fait le détecteur naturel de la vision. Plus récemment, Canny [21], Torre et Poggio [111], Nagel [83], et Deriche [24] ont appliqué des opérateurs différentiels non linéaires pour construire différents détecteurs de contours et de points caractéristiques. La morphologie mathématique utilise quant à elle la ligne de partage des eaux du gradient de l'image originale pour extraire des contours [114, 15]

Introduisons ici quelques notations.

Soit $\mathcal{U}$ un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction "suffisamment régulière". Nous noterons $\mathcal{C}$ l'ensemble de ces fonctions. Le gradient de f est le vecteur du plan

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

et le Hessien de f, H_f est la matrice symétrique

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

L'image par la rotation de $\pi/2$ de ∇f est le vecteur plan

$$\tilde{\nabla} f = \begin{pmatrix} -f_y \\ f_x \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

L'idée originale de Canny était de définir les contours de l'image comme étant des maxima du gradient de l'image dans la direction du gradient (fig. 4.1). Cela revient à résoudre l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2} G * I = 0 \tag{4.8}$$

où $n = \nabla G * I / \|\nabla G * I\|$. Il remarque que l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial n^2}$ a les mêmes passages par zéro que

$$Q(f) = \langle H_f \nabla f, \nabla f \rangle \tag{4.9}$$

où $f = G * I$.

[1] Nous noterons $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

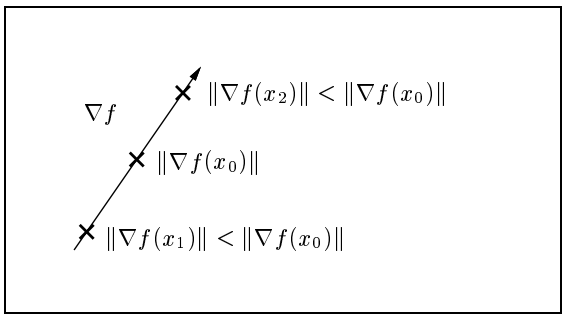


FIG. 4.1. – *Description du détecteur de contours de Canny.*

L'idée derrière la détection de contour est qu'un contour est un chemin sur lequel la variation de l'intensité f est maximum dans la direction normale à ce chemin. Mathématiquement, cela donne donc

$$\langle H_f \nabla f, n \rangle = 0 \tag{4.10}$$

où n est le vecteur normal. Implicitement, cette équation mène à une équation différentielle pour le chemin de contour :

$$\dot{\gamma} = H_f \nabla f \tag{4.11}$$

Comme nous avons vu dans le chapitre 3, l'union des solutions de cette équation différentielle couvre entièrement le domaine de f, et nous devons faire un choix pour trouver un contour. La ligne de partage des eaux choisit les chemins en imposant des conditions aux limites. D'un autre coté, le détecteur de Canny résout le problème en estimant la normale n à partir de la direction du gradient, *i.e.* en posant $n := \nabla f$.

W.M. Krueger et K. Phillips [57] ont étudié la famille $\mathcal{O}$ d'opérateurs pouvant servir pour détecter des points caractéristiques, dont le premier est en fait le détecteur de Canny. La famille $\mathcal{O} = \{Q, R, S\}$ est définie, pour $f \in \mathcal{C}$, par

$$Q(f) = \langle H_f \nabla f, \nabla f \rangle \tag{4.12}$$

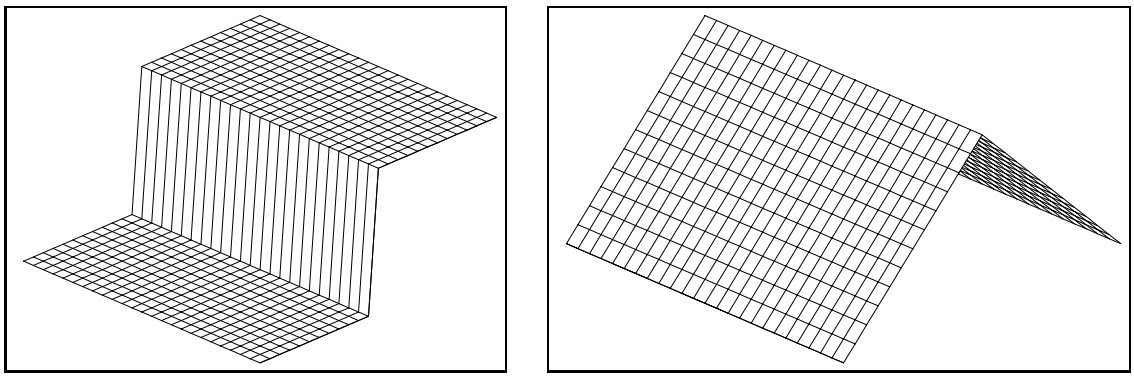
$$R(f) = \left\langle H_f \tilde{\nabla} f, \tilde{\nabla} f \right\rangle \tag{4.13}$$

$$S(f) = \left\langle H_f \tilde{\nabla} f, \nabla f \right\rangle \tag{4.14}$$

Krueger et Phillips ont donné un arbre de décision pour Q qui offre une analyse complète de sa géométrie locale. Le résultat essentiel de leur étude est qu'il y a deux archétypes de structure annulant l'opérateur Q, à savoir la marche d'escalier et le toit en pente. Ces deux objets sont présentés sur la figure 4.2, avant convolution avec une gaussienne régularisante. Ils ont ensuite appliqué leurs résultats à une image approchée par une B spline, c'est-à-dire qu'ils ont résolu l'équation $Q(f) = 0$ sur l'image interpolée. Ils ont remarqué d'une manière pratique que, pour avoir une analyse correcte de l'image, chaque pixel de l'image devait être divisé, au minimum, en 25 sous-pixels, servant de points de contrôle pour une spline d'ordre six.

Nous ne reprendrons pas l'étude de Krueger et Phillips. Nous allons en revanche montrer de manière géométrique le fonctionnement des opérateurs de la famille $\mathcal{O}$. Dans la pratique,

- Q, l'opérateur de Canny, cherche les contours,



(a) Marche d'escalier (b) Toit en pente

FIG. 4.2. – *Structures idéales de contours détectées par l'opérateur de Canny.*

- R est utilisé pour détecter les coins,
- et S est appliqué pour détecter la symétrie.

D'après le lemme de Schwarz, le Hessien, matrice des dérivées secondes, est une matrice symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable dans la base de ses vecteurs propres u et v. Dans cette base, le Hessien s'écrit :

$$H_f = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

et le gradient de f

$$\nabla f = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Pour éliminer les cas triviaux, nous supposerons que $\nabla f \neq 0$ et que les valeurs propres ρ_1 et ρ_2 ne sont pas toutes les deux nulles. Nous avons alors :

$$\tilde{\nabla} f = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

d'où

$$H_f \nabla f = \begin{pmatrix} \rho_1 a \\ \rho_2 b \end{pmatrix} \text{ et } H_f \tilde{\nabla} f = \begin{pmatrix} -\rho_1 b \\ \rho_2 a \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

Par conséquent,

$$Q(f) = \langle H_f \nabla f, \nabla f \rangle = \rho_1 a^2 + \rho_2 b^2 \tag{4.19}$$

$$R(f) = \left\langle H_f \tilde{\nabla} f, \tilde{\nabla} f \right\rangle = \rho_1 b^2 + \rho_2 a^2 \tag{4.20}$$

$$S(f) = \left\langle H_f \tilde{\nabla} f, \nabla f \right\rangle = ab(\rho_2 - \rho_1) \tag{4.21}$$

Il est alors facile de voir pourquoi S détecte la symétrie : cet opérateur s'annule en effet lorsque $\rho_1 = \rho_2$. Il s'annule donc lorsque $f(x)$ présente une structure symétrique.

Le cas intéressant pour Q se présente lorsque ∇f est proportionnel à l'un des vecteurs propres de H_f (par exemple si $\rho_2 = 0$ et si $a = 0$). Alors $H_f \nabla f = 0$. C'est ce qui arrive sur une marche d'escalier (fig. 4.2.a) ou sur un toit en pente (fig. 4.2.b).

Nous obtenons un résultat dual pour R, qui s'annule lorsque ∇f est orthogonal à l'un des vecteurs propres de H_f. Ceci explique pourquoi cet opérateur détecte les coins.

L'étude de Krueger et Phillips ne signale rien de ce qui se passe lorsque l'on est autour d'un croisement ou d'un coin de l'image. En fait, le comportement de ces opérateurs au voisinage de tels points est très mauvais, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant. Récemment, Giraudon et Deriche [39, 40] ont proposé un processus multi-échelle de détection des coins et des intersections. Il consiste à extraire ces points comme maxima du déterminant du Hessien de l'image convoluée avec une gaussienne. On effectue ce processus à deux échelles (deux écarts-type) différentes, ce qui donne deux localisations différentes. On corrige ensuite la position en choisissant le premier zéro du laplacien sur le segment joignant les deux localisations précédemment trouvées.

De telles approches sont fondamentalement différentes de l'approche ligne de partage des eaux. En fait,

Proposition 4.1.1 :

> *Les* lignes de Canny*, pas plus que les* zéros du laplacien*, n'ont de relation directe avec la* ligne de partage des eaux *du gradient.*

Cela est évidemment dû à leur caractérisation locale, une telle caractérisation étant, comme nous l'avons vu, impossible pour la ligne de partage des eaux. L'intersection de ces lignes n'est cependant pas vide. Un exemple simple d'intersection possible de ces deux ensembles nous est fourni par l'équation

$$H_f \nabla f = 0 \tag{4.22}$$

En effet, la fonction sur laquelle nous calculons la ligne de partage des eaux est la fonction $g = \|\nabla f\|$. La ligne de partage des eaux se place sur des lignes parallèles à $\nabla g = H_f \nabla f$. En particulier, des points vérifiant $\nabla g = 0$ sont de bons candidats.

L'intérêt de la ligne de partage des eaux réside dans le fait qu'elle localise avec précision les points multiples de l'image qui sont les points de $\mathcal{P}(f)$ (définition 3.1.16).

On peut résumer cette étude en disant que les lignes de Canny résultent d'un modèle (suppression des maxima locaux) plaqué sur l'image, offrant une caractérisation locale des contours de l'image. De tels processus recherchent en fait les lignes de crêtes de l'image, qui, contrairement à l'intuition, relèvent plutôt d'une recherche globale, et donc d'un processus de type ligne de partage des eaux.

2 Comparaison dans un cas pratique

Nous avons calculé exactement le comportement de la ligne de partage des eaux du gradient, des zéros du laplacien et de l'algorithme de Canny pour une image simple, définie par (fig. 4.3.a)

$$I(x, y) = a\chi_{\{x>0\}}(x, y) + b\chi_{\{y>0\}}(x, y) \tag{4.23}$$

où a et b sont deux constantes positives données [2] . Cette figure représente par exemple le "coin" où plusieurs objets posés côte-à-côte se rejoignent.

Convoluons avec une gaussienne G, on obtient (fig. 4.3.b)

$$f = G * I = a\Psi(x) + b\Psi(y) \tag{4.24}$$

où $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-s^2} ds$

La norme du gradient s'écrit (fig. 4.3.c)

$$\|\nabla f\| = \sqrt{\frac{a^2 e^{-2x^2}}{\pi} + \frac{b^2 e^{-2y^2}}{\pi}} \tag{4.25}$$

De même, le laplacien de l'image s'exprime par (fig. 4.3.d)

$$\Delta f = \frac{2axe^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2bye^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} \tag{4.26}$$

et le filtre de Canny par (fig. 4.3.e, 4.3.f)

$$Q(f) = \langle H_f \nabla f, \nabla f \rangle = \frac{2a^3 xe^{-3x^2}}{\pi^{3/2}} + \frac{2b^3 ye^{-3y^2}}{\pi^{3/2}} \tag{4.27}$$

L'étude des zéros du laplacien se ramène donc à l'étude des zéros de $Q(f)$ par changement de variables. En particulier, leurs courbes auront même allure.

La figure 4.4.a présente le résultat de la segmentation par ligne de partage des eaux, et la figure 4.4.b montre celui obtenu par les zéros du laplacien (ou ceux de $Q(f)$).

La présence de la droite diagonale sur la figure 4.4.b s'explique sur la figure 4.5, qui représente la carte des signes de cet opérateur. Nous remarquons en effet que, pour $|y|$ grand et pour x voisin de 0, $Q(f)$ est du signe de x. De même, pour $|x|$ grand et pour y voisin de 0, $Q(f)$ est du signe de y. Les axes des coordonnées sont donc asymptotiquement solution de $Q(f) = 0$.

Nécessairement, $Q(f) = 0$ admet une solution supplémentaire dans les quadrants $xy < 0$. Écrivons le développement en série de cet opérateur :

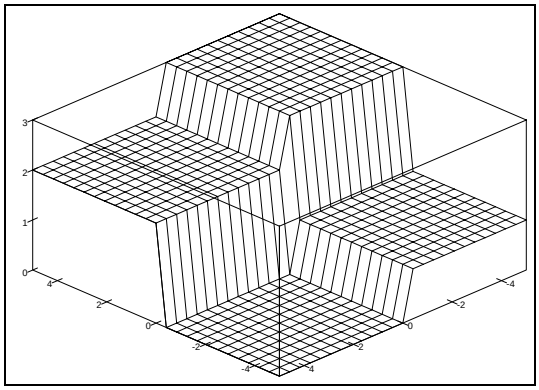
$$Q(f) = \frac{2a^3 x}{\pi^{3/2}} + \frac{2b^3 y}{\pi^{3/2}} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-3)^n}{n!} \left(\frac{2a^3 x^{2n+1}}{\pi^{3/2}} + \frac{2b^3 y^{2n+1}}{\pi^{3/2}} \right) \tag{4.28}$$

Effectuons le changement de repère suivant :

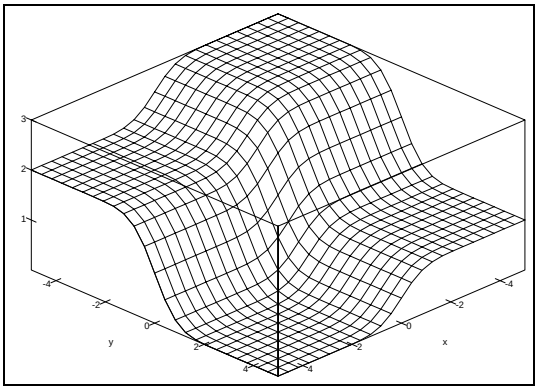
$$\left\{ \begin{array}{rcl} X & = & a^3 x + b^3 y \\ Y & = & a^3 x - b^3 y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{X+Y}{2a^3} \\ y & = & \dfrac{X-Y}{2b^3} \end{array} \right. \tag{4.29}$$

[2] χ_A est la fonction caractéristique de l'ensemble A. Elle vaut

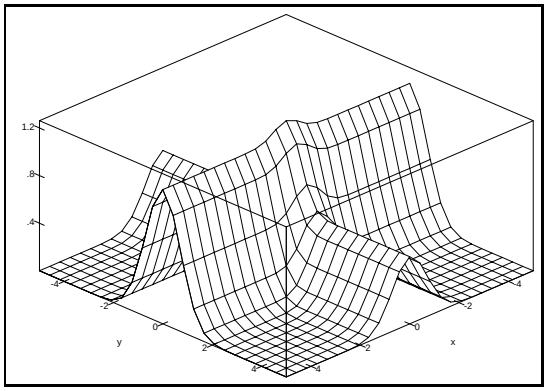
$$\begin{array}{rcll} \chi_A(x) & = & 1 & \text{si } x \in A \\ \chi_A(x) & = & 0 & \text{si } x \notin A \end{array}$$



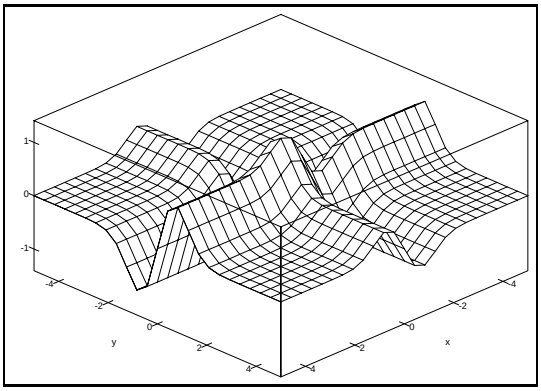
(a) Image Idéale



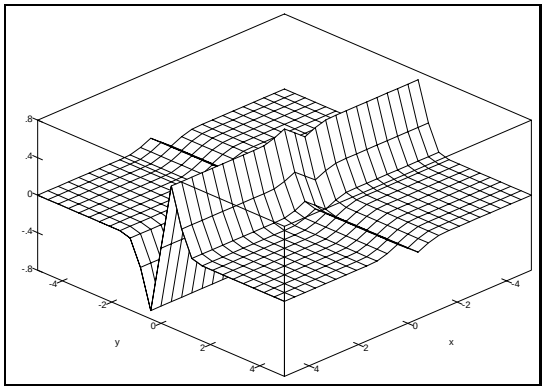
(b) Image convoluée avec une gaussienne



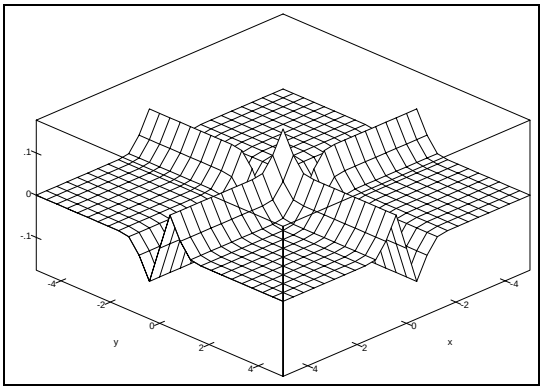
(c) Norme du gradient



(d) Graphe du laplacien

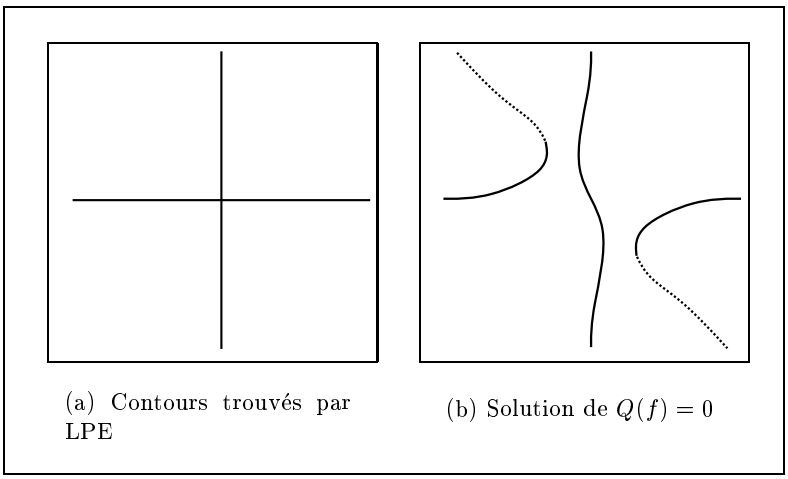


(e) Graphe de $\langle H_f \nabla f, \nabla f \rangle$ $(a < b)$



(f) Graphe de $\langle H_f \nabla f, \nabla f \rangle$ $(a = b)$

FIG. 4.3. – *Comparaison des algorithmes de segmentation.*



(a) Contours trouvés par LPE

(b) Solution de $Q(f) = 0$

FIG. 4.4. – *Contours trouvés par les algorithmes.*

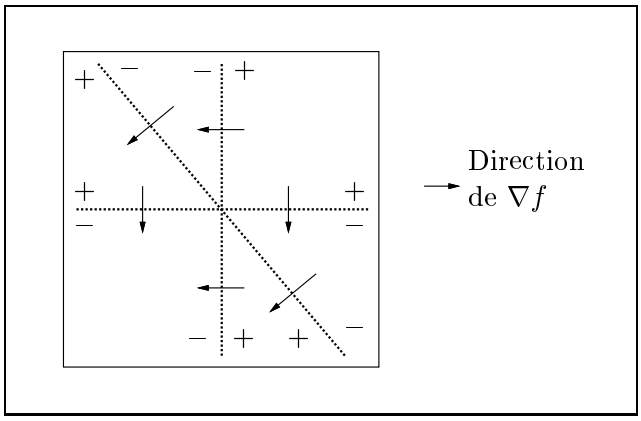


FIG. 4.5. – *Carte des signes de l'opérateur $Q(f)$.*

$Q(f)$ se réécrit alors

$$\frac{\pi^{3/2}}{2}Q(f) = \frac{X+Y}{2}e^{-3\left(\frac{X+Y}{a^3}\right)^2} + \frac{X-Y}{2}e^{-3\left(\frac{X-Y}{b^3}\right)^2} \tag{4.30}$$

Au voisinage de $X = 0$, le développement limité de $Q(f)$ donne

$$\frac{\pi^{3/2}}{2}Q(f) = \frac{Y}{2}\left(\frac{e^{\frac{-Y^2}{4a^6}}}{a^3} - \frac{e^{\frac{-Y^2}{4b^6}}}{b^3}\right) + O(X) \tag{4.31}$$

avec $O(X) \to 0$ quand $X \to 0$. Si $b > a > 0$, cette équation montre qu'au voisinage de $X = 0$, $Q(f)$ est du signe de $-Y$. La droite $a^3x + b^3y = 0$ est donc asymptotiquement solution de $Q(f) = 0$. Traçant sur la carte des signes de $Q(f)$ la direction du vecteur ∇f, nous nous rendons compte que cette droite représente les minima de la norme du gradient dans la direction du gradient.

En conclusion, l'algorithme d'extraction de contours que nous choisirons dépendra du problème posé. L'algorithme de la ligne de partage des eaux est très sensible aux minima, et est donc

relativement instable numériquement. Nous préférerons donc des extracteurs de type Canny dans les cas où nous recherchons essentiellement des contours non nécessairement fermés.

Si nous nous focalisons sur les points multiples, nous préférerons la ligne de partage des eaux. Il est en effet difficile de trouver de tels points par des méthodes de type Canny ou zéros du laplacien : ils n'existent théoriquement pas. Pratiquement, cependant, nous trouvons des points terminaux. Nous pouvons alors imaginer des procédures qui fermeront les contours, faisant ainsi apparaître des points multiples.

Une manière de faire serait par exemple d'extraire les contours de Canny, puis de les fermer en calculant une ligne de partage des eaux sur la fonction distance au contour de Canny. Nous éviterons ainsi l'apparition de minima parasites gènant considérablement la ligne de partage des eaux.

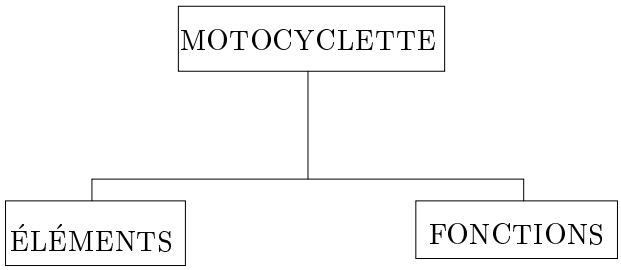
Nous présenterons au chapitre 6 un algorithme de ligne de partage des eaux permettant l'ajout de points d'ancrage. En particulier, nous pourrons ajouter les contours de Canny dans la ligne de partage des eaux, et ainsi fermer ces contours de telle sorte que l'on ait les points multiples "intéressants" dans le résultat final.

Chapitre 5

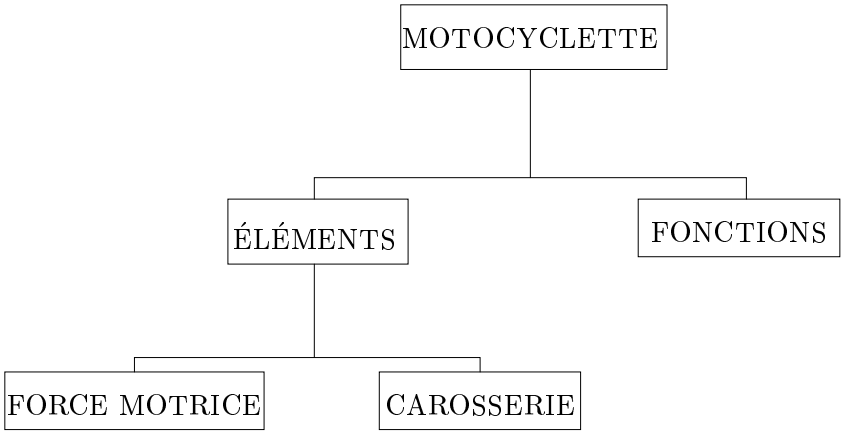
Segmentation hiérarchique

Les instruments de précision ont pour but la réalisation d'une idée, d'une idée de perfection, une réalisation en vérité impossible. Aucune pièce de la moto n'a une forme parfaite, mais quand on arrive au point de perfection atteint par ces instruments, ce qui se passe est remarquable. On s'envole à travers la campagne, mû par une puissance qu'on pourrait qualifier de magique si elle n'était aussi étroitement soumise au contrôle de la raison. Ce qui est fondamentale, c'est de comprendre cette idée *toute rationnelle. Lorsque John regarde sa moto, il ne voit que des morceaux d'acier, qui lui inspirent des sentiments négatifs, et qu'il rejette en bloc. Moi, je regarde les mêmes pièces, et ce sont des* idées *que je vois. Je travaille sur des* concepts.

C'est de ces concepts que je parlais hier quand je disais qu'on peut décomposer une moto de deux façons : selon ses différents éléments, ou selon ses différentes fonctions. C'est comme si j'avais inventé un système de tiroirs, ainsi étiquetés :



Et quand j'ai dit qu'on pouvait distinguer, parmi les éléments, les parties motrices et la carosserie, j'ai fait apparaître de nouveaux tiroirs :



Ainsi, à chaque fois que je procède à de nouvelles distinction, j'ouvre de nouveaux tiroirs. Et j'obtiens de la sorte une immense pyramide. Finalement, au fur et à mesure que je décompose la motocyclette en une multitude d'éléments infimes, c'est une nouvelle structure que je bâtis.

On convient d'appeler cette structure de concepts une hiérarchie. Voilà, depuis l'Antiquité, l'une des structures de base de la pensée occidentale. Les empires, les royaumes, les Églises, les armées ont toujours reposé sur une structure hiérarchique. De même les schémas d'utilisation des ordinateurs. bref, tout le savoir scientifique et technique. À tel point que dans certains domaines comme la biologie, la hiérarchie embranchement-ordre-classe-genre-espèce prend valeur de dogme.

Robert M. Pirsig

Traité du zen et de l'entretien des motocyclettes

Dans ce chapitre, nous proposons un nouveau concept de segmentation hiérarchique reposant sur une notion de profondeur de bassin, la dynamique. Ce concept est fondé sur l'érosion géodésique, dont nous donnons une présentation qui nous permettra de mettre en évidence les liens naturels entre cet opérateur et la ligne de partage des eaux.

1 Supprimer la sursegmentation

Nous avons vu dans les chapitres précédents que la ligne de partage des eaux produit une sursegmentation des images, mais contient toujours les bons contours. Le principal problème est de choisir ces "bons" contours. La technique retenue pour le choix est de "régulariser" l'image gradient $\|\nabla f\|$. Nous ne travaillons donc pas directement sur la ligne de partage des eaux, mais nous revenons à l'information de départ contenu dans l'image gradient. Par exemple, nous pouvons supprimer des minima tout en préservant la position de la ligne de partage des eaux. Nous avons vu dans le chapitre 2 qu'on utilise pour cela des marqueurs. Nous pouvons encore choisir les contours en leur donnant une valeur déduite à partir par exemple du gradient et/ou de la ligne de partage des eaux. C'est sur ce principe que se fonde notre approche de la segmentation hiérarchique. Les méthodes de lissages en morphologie mathématique se fonde sur un outil puissant : la reconstruction géodésique.

1.1 Reconstruction géodesique

Nous suivons la présentation de [104, Schmitt& Mattioli].

Cadre binaire : Soit M et N deux ensembles fermés du plan. Nous noterons d_M la distance géodésique dans M, *i.e.* la borne inférieure des chemins reliant a à b dans M, et par $B_M(a,r) := \{b \mid d_M(a,b) \leq r\}$ la boule géodésique de centre a et de rayon r.

Définition 5.1.1 :

La dilatation géodésique de M dans N de taille r est définie par :

$$D_M^r(N) := \{a \mid B_M(a,r) \cup N \neq \emptyset\} = \{a \mid d_M(a,N) \leq r\} \tag{5.1}$$

De façon duale, l'érosion géodésique de N dans M de taille r est définie par :

$$E_M^r(N) := \{a \mid B_M(a,r) \subset N\} = M \backslash D_M^r(M \backslash N) \tag{5.2}$$

La dilatation géodésique de taille r fournit toujours un résultat plus petit que la dilatation euclidienne de même taille. Le lien formel entre les deux s'exprime par :

$$D_M^r(N) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[(N \oplus \frac{r}{n} B) \cap M \right]^n \tag{5.3}$$

où la puissance n consiste à itérer l'opération n fois, et où B est la boule euclidienne.

Portons une attention particulière à la dilatation géodésique de taille infinie de M dans N. Il s'agit en fait des composantes d_M-connexes (*i.e.* pour tout a et b dans la composante, $d_M(a,b) < \infty$) de N qui contiennent au moins un point de N.

Définition 5.1.2 :

On appelle reconstruction de N dans M la transformation $D_M^\infty(N)$. L'ensemble N est appelé ensemble des marqueurs.

Extension aux fonctions à teinte de gris : La façon la plus simple d'étendre une transformation du cadre binaire au cadre des fonctions, c'est-à-dire aux images à teinte de gris, est de décrire une fonction f à l'aide de ses sections supérieures $[f]_\lambda := \{a \mid f(a) \geq \lambda\}$. Cette approche est possible car si $M_1 \subset M_2$ et $N_1 \subset N_2$, alors nous avons $D_{M_1}^r(N_1) \subset D_{M_2}^r(N_1) \subset D_{M_2}^r(N_2)$.

Considérons deux fonctions $f \leq g$, la dilatation géodésique de f dans g sera définie au moyen de ses sections supérieures :

$$\left[D_g^r(f)\right]_\lambda := D_{[g]_\lambda}^r([f]_\lambda) \tag{5.4}$$

Pour une taille de dilatation infinie $D_g^\infty(f)$, on parlera, comme dans le cas binaire, de reconstruction (numérique) de f dans g. La fonction f est souvent appelée fonction de marquage ou marqueurs. En fait, nous nous intéresserons au dual de la dilatation géodésique de taille infinie, l'érosion géodésique de taille infinie, où reconstruction (numérique) de g sur f. L'érosion géodésique se regarde par complémentarité, c'est-a-dire que nous devons écrire les fonctions à

l'aide de leur section inférieure $[f]^\lambda := \{a \mid f(a) \leq \lambda\}$. Nous avons alors la formule suivante :

$$\left[E_f^\infty(g)\right]^\lambda := D_{[f]^\lambda}^\infty([g]^\lambda) \tag{5.5}$$

Ici, la fonction de marquage est g. Utilisant cette formule, nous avons un nouvel algorithme pour l'érosion géodésique, qui fonctionne par inondation. Il est décrit dans le chapitre 6. Cette formule est fondamentale pour la compréhension de la ligne de partage des eaux. En effet, éroder g sur f revient à remplir progressivement les bassins versants de f sous réserve de ne pas rencontrer g. Ainsi, nous comprenons pourquoi le lissage par érosion géodésique est d'une telle aide pour la segmentation : en calculant une reconstruction géodésique, on construit implicitement une ligne de partage des eaux.

Nous présentons dans le chapitre 6 un algorithme de reconstruction géodésique fondé sur l'algorithme de ligne de partage des eaux de Vincent et sur la formule (5.5).

1.2 La technique des marqueurs : une reconstruction géodésique de la fonction de marquage sur le gradient

La sursegmentation produite par l'application brutale de la ligne de partage des eaux est du au fait que chaque minimum régional devient le centre d'un bassin versant. Cependant, tous les bassins n'ont pas la même importance. Certains sont fondamentaux, mais d'autres sont simplement dûs au bruit, ou encore représentent des structures mineures dans l'image.

Le premier type d'information que l'on peut introduire est de nature géométrique. Supposons que nous connaissions un ensemble connexe de points faisant partie de l'objet (ou un ensemble connexe par objets, s'il y a plusieurs objets à segmenter), ainsi qu'un ensemble de points de l'extérieur. On appellera ces composantes connexes de points des marqueurs. Si l'on parvenait à modifier l'image sur laquelle on calcule la ligne de partage des eaux en lui imposant ces ensembles comme minima régionaux, on obtiendrait une ligne de partage des eaux présentant une boucle autour de chacun des objets, chaque bassin versant correspondant soit à un unique objet soit au fond de l'image.

Nous avons vu dans le chapitre 2 la manière d'imposer des minima M à une image f. Il suffit de construire l'image :

$$g(a) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a \notin M \\ 0 & \text{si } a \in M \end{cases} \tag{5.6}$$

qui a les minima régionaux voulus, et d'éroder g géodésiquement selon $f \wedge g$, c'est-à-dire que nous calculons $E_{f\wedge g}^\infty(g)$. Cette nouvelle image a les mêmes minima régionaux[1] que g et tous les points qui ne sont suffisamment haut et qui ne sont pas dans un des marqueurs sont les mêmes. Il ne reste alors plus qu'à calculer la ligne de partage des eaux de cette nouvelle image. La figure 5.1 illustre cette méthode et la figure 5.2 montre les résultats sur l'image d'une cuisinière.

[1] Soit $h_1 > h_2$ deux fonctions. Soit m un minimum de $E_{h_2}^\infty(h_1)$, et posons $\lambda = E_{h_2}^\infty(h_1)(m)$. Alors il existe un point p tel que $h_2(p) < \lambda$ et qui est dans la même composante connexe de $[h_2]^\lambda$ que m, car nous avons

$$[E_{h_2}^\infty(h_1)]^\lambda = D_{[h_2]^\lambda}^\infty([h_1]^\lambda) = \bigcup_{n=1}^\infty \left[([h_1]^\lambda \oplus \frac{r}{n}B) \cap [h_2]^\lambda\right]^n$$

ce qui montre que l'érosion géodésique n'ajoute pas de nouveaux minima.

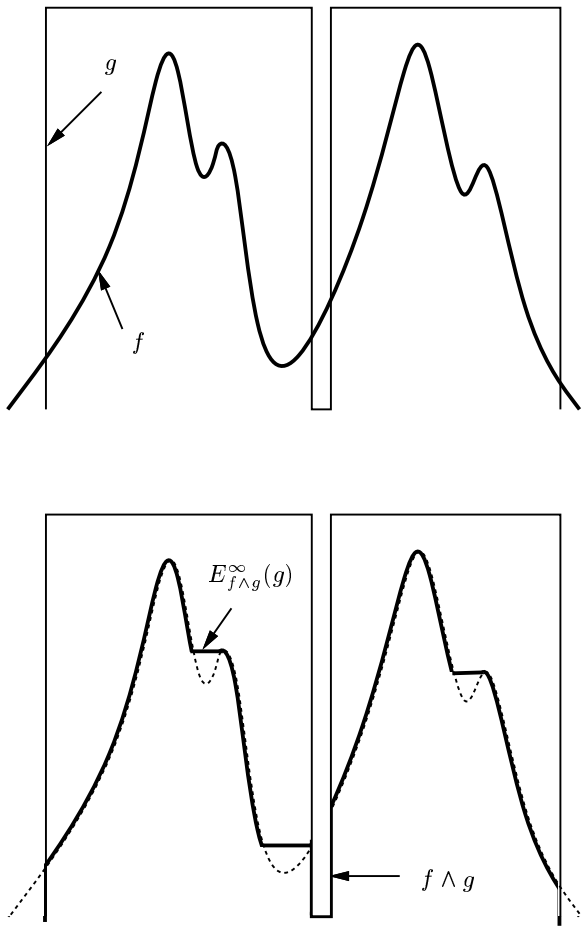


FIG. 5.1. – *Illustration de la manière d'imposer les minima régionaux de g à l'image f.*

Remarquons que nous pouvons choisir l'image de contraste : ici nous avons remplacé le gradient usuel par une transformation chapeau-haut-de-forme $f - f_B$, où $f_B = f \ominus B \oplus B$.

Notons que nous n'avons pas dit comment nous avons déterminé les marqueurs. C'est en général la partie délicate. La technique de ligne de partage des eaux contrainte par des marqueurs permet de s'affranchir de la recherche exacte des contours et garantit le nombre de contours que l'on trouvera : un autour de chaque objet s'il a été marqué par une seule composante connexe. La difficulté a été reportée sur la détermination des marqueurs, permettant de localiser grossièrement les objets.

En résumé :

Segmentation par ligne de partage des eaux contrainte

1. trouver les marqueurs, *i.e.* une composante connexe par objet et une composante connexe pour le fond de l'image,
2. déterminer l'image sur laquelle on calcule la ligne de partage des eaux (gradient ou autre),

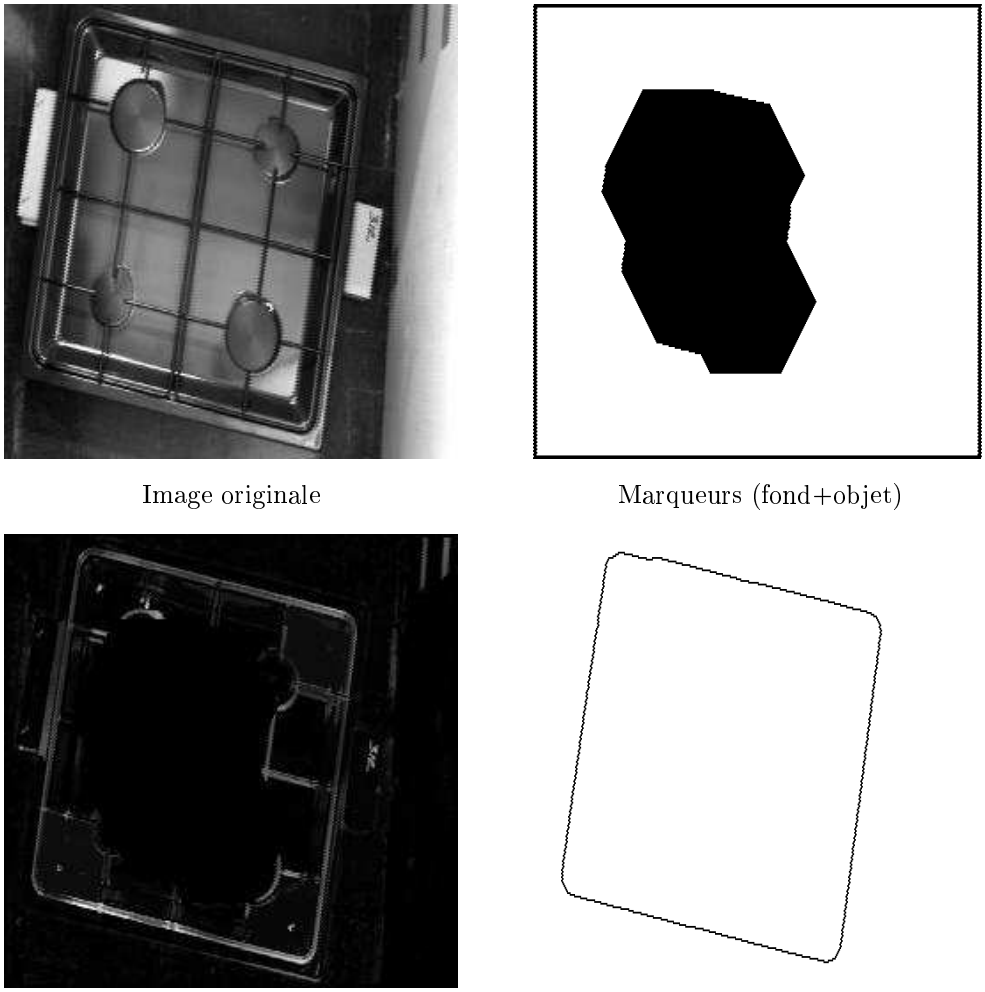


FIG. 5.2. – *Ligne de partage des eaux contrainte : les marqueurs sont imposés comme minima régionaux du chapeau haut-de-forme.*

3. imposer les minima par érosion géodésique numérique,

4. calculer la ligne de partage des eaux.

1.3 La technique de la dynamique : érosion géodésique de f_t sous f

La dynamique est un critère de contraste. Souvenons nous qu'un minimum régional est un ensemble connexe depuis lequel on ne peut atteindre un point d'altitude inférieure par un chemin qui ne monte pas. La quantité dont on est obligé de monter sera notre évaluation du contraste du minimum régional.

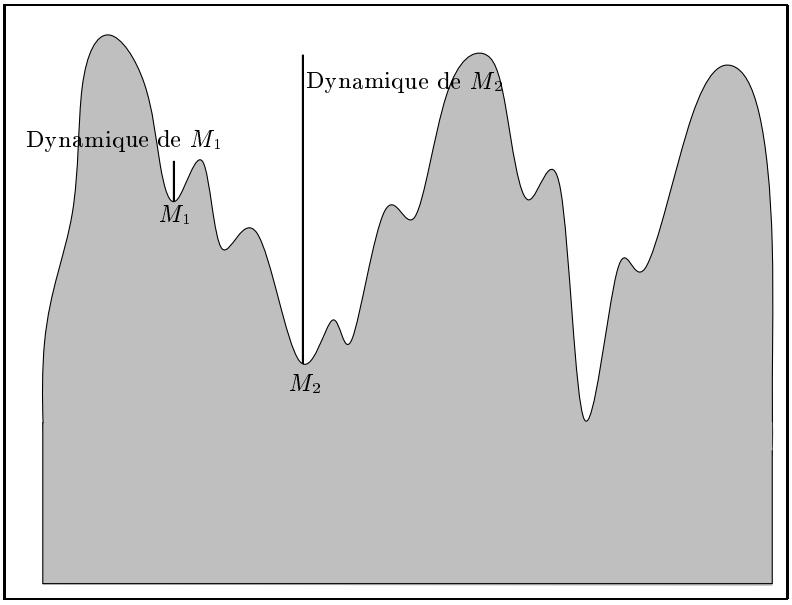


FIG. 5.3. – *Illustration du concept de dynamique.*

Définition 5.1.3 :

Soit M un minimum régional de la fonction f. La dynamique [42] de M est le nombre :

$$\min_{\substack{\gamma, \\ \gamma(1) < \gamma(0), \\ \gamma(0) \in M}} \left[\max_{s \in [0,1]} \{f(\gamma(s)) - f(\gamma(0))\} \right] \tag{5.7}$$

La dynamique est illustrée par la figure 5.3.

Soit donc t la valeur du contraste que l'on souhaite imposer. Pour éliminer les minima régionaux de f de dynamique inférieure à t, il suffit de calculer :

$$E_f^{\infty}\ (f_t) \tag{5.8}$$

où $f_t(a) := f(a) + t$.

La dynamique est utilisée généralement soit pour obtenir des marqueurs (des bassins de dynamique élevée), soit pour garder les contours les plus "significatifs" en calculant la ligne de partage des eaux sur l'image simplifiée par érosion géodésique de taille correspondant à une dynamique donnée (fig 5.4).

Cependant, la localisation des bassins de dynamique donnée est de peu d'utilité directe : la taille et la localisation d'un bassin versant de dynamique donnée ne reflètent pas le résultat final de la segmentation. Nous montrerons dans la suite de ce chapitre une manière d'utiliser totalement l'information contenue dans la carte des bassins valués par leur dynamique.

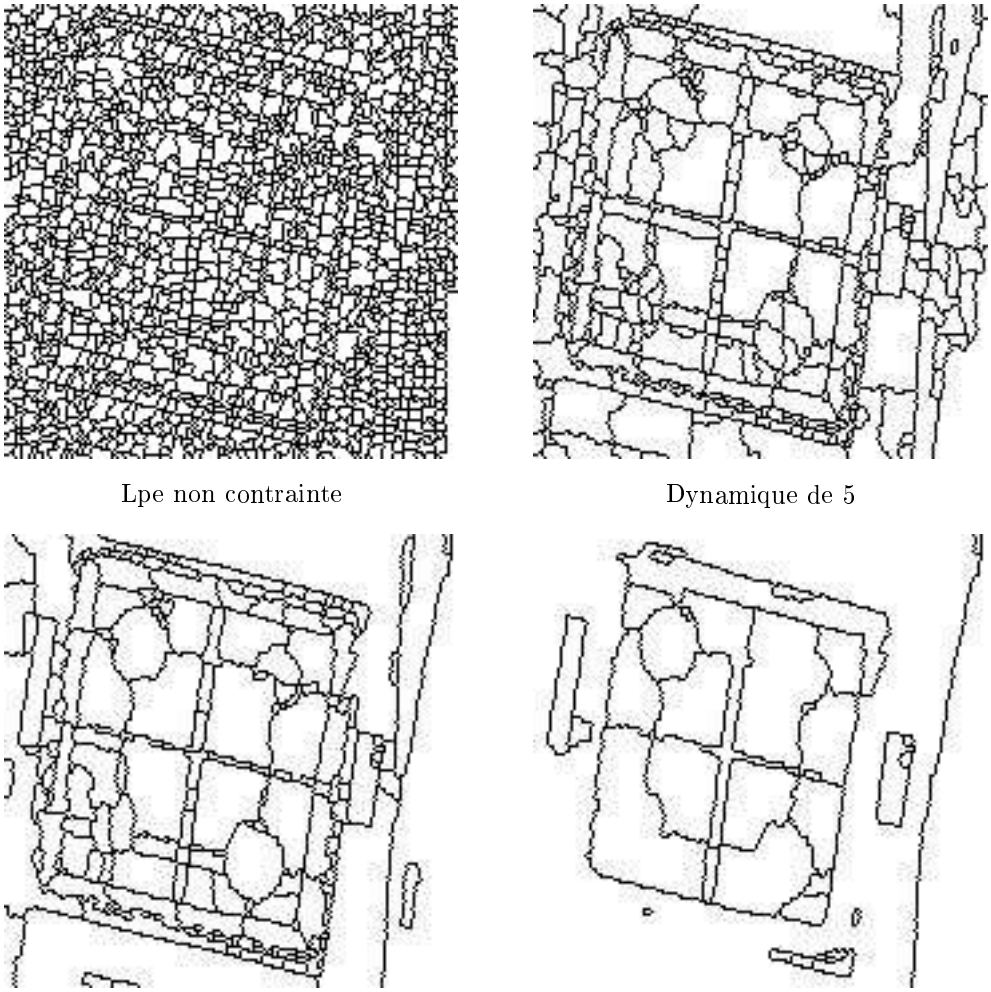


FIG. 5.4. – *Ligne de partage des eaux contrainte par le critère de contraste : la dynamique.*

2 Segmentation hiérarchique

Dans la section précédente, notre but était d'empêcher la sursegmentation en choisissant des marqueurs et, en utilisant des modifications homotopiques, de laisser autant de bassins versants qu'il y a d'objets présents dans l'image. Dans cette section, nous donnons quelques principes de segmentation hiérarchique qui, plutôt que d'empêcher la sursegmentation, calcule l'importance des contours par rapport à un critère donné, et donne des relations d'inclusions entre les bassins versants de l'image.

2.1 La segmentation hiérarchique de S. Beucher

La segmentation hiérarchique a été introduite en morphologie mathématique par S. Beucher [15]. La manière la plus simple de présenter l'approche originale repose sur la notion d'image mosaïque

L'image mosaïque est une image constante par morceaux approchant l'image originale. Elle est obtenue en calculant la ligne de partage des eaux du gradient de l'image, et en valuant chacun des bassins de la ligne de partage des eaux avec la valeur de l'image initiale correspondant par exemple au minimum du gradient ayant initié le bassin, ou bien à la valeur moyenne de niveau de gris de l'image initiale sur le bassin.

Lorsque l'on regarde l'image mosaïque, quelques régions semblent quasiment homogènes. Cela est dû à ce que la variation d'intensité entre deux régions voisines peut-être basse. Inversement, il existe des régions où cette variation est importante. Nous disposons là d'un critère qui nous permet de décider quand fusionner deux régions.

En morphologie mathématique, on essaie le plus souvent de supprimer l'arbitraire. Ainsi, dans le cas présent, nous n'effectuerons pas la fusion en fixant plus où moins au hasard une valeur minimale de variation. Au contraire, la segmentation hiérarchique consiste à fusionner les régions suivant un processus de ligne de partage des eaux sur un graphe fabriqué à partir de l'image mosaïque. Les sommets de ce graphe sont construits à partir des transitions entre les régions. Ils sont valués avec la valeur absolue de la variation d'intensité correspondante. La relation de voisinage entre ces sommets nous est donnée par le graphe de la ligne de partage des eaux : deux sommets sont voisins s'ils entourent le même bassin versant. Nous définissons ainsi les arcs de notre graphe.

Nous pouvons alors calculer le gradient morphologique de ce graphe, et appliquer une ligne de partage des eaux sur ce gradient. Après cette étape, seul un certain nombre de sommets (d'arc de la segmentation de l'image initiale) sont restés. Nous pouvons répéter cette opération jusqu'à ce que tous les sommets aient disparus. Chaque arc de la segmentation initiale peut alors être valué par le nombre de fois qu'il est apparu au cours de ce processus.

2.2 Segmentation hiérarchique par dynamique

La notion de dynamique exposée dans la section précédente permets de créer un autre concept de hiérarchie. Considérons une image f. Si nous supposons que deux minima différents de f ne sont pas sur le même niveau (ce qui ne pose aucun problème dans la pratique), l'application de l'érosion géodésique de f_t au-dessus de f supprime des bassins versants de f sans déplacer les contours. Par conséquent, il est suffisant de valuer chaque arc de la ligne de partage des eaux par la borne supérieure des dynamiques t pour lesquelles l'arc fait partie de la ligne de partage des eaux de $E_f^\infty\ (f_t)$. Il est facile de voir que cela dépend seulement du point selle le plus bas sur les arcs qui séparent deux bassins. Soit a le point selle d'altitude la plus basse sur ces arcs, et posons

$$Bas(a) := \{b \mid \exists\gamma,\ \gamma(0) = a,\ \gamma(1) = b,\ f(\gamma(s)) < f(a)\ \forall s \in\ ]0,1]\}$$

L'ensemble $Bas(a)$ est ouvert, et peut être divisé en plusieurs composantes connexes ouvertes B_i ($Bas(a) = \cup_i B_i$). Nous avons alors :

$$dyn(a) := \min_i \sup_{a_i \in B_i} \{f(a) - f(a_i)\} \tag{5.9}$$

Dans le chapitre 6, nous présentons un algorithme efficace pour calculer directement la ligne de partage des eaux ainsi valuée.

Contrairement à la sensibilité au bruit de la dynamique d'un bassin, la dynamique d'un contour est beaucoup plus stable (bien que le contour lui même soit sensible au bruit). Cette

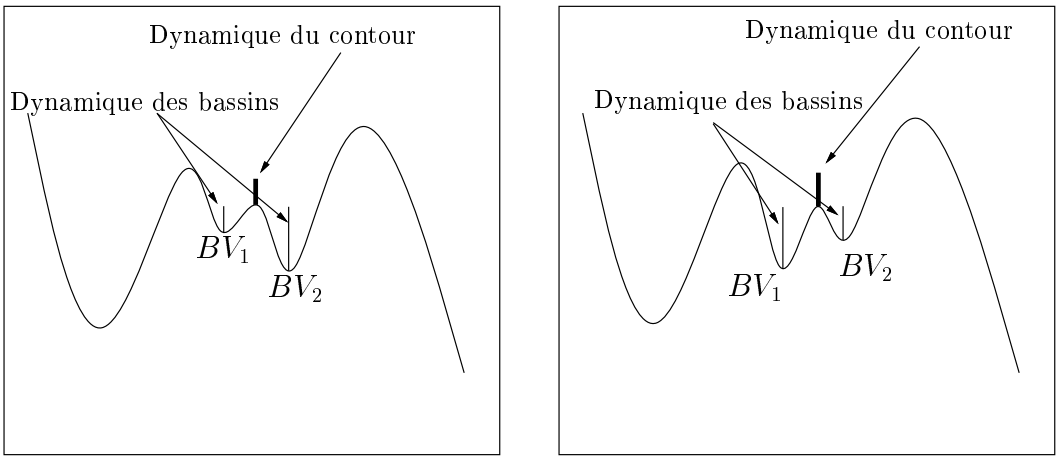


FIG. 5.5. – *Entre la figure de droite et celle de gauche, les deux bassins BV_1 et BV_2 ont inversés leur dynamique. La dynamique du contour les séparant est par contre restée la même.*

assertion est illustrée par la figure 5.5.

La figure 5.6 montre la différence entre un simple calcul de la dynamique des bassins et une application de l'algorithme de valuation des contours. Notons que le résultat de cette approche (fig. 5.6.d) donne toute l'information de contour que l'on peut extraire à partir du gradient de l'image, c'est-à-dire qu'un seuillage de l'image résultat à un niveau donné fournira la segmentation que l'on aurait obtenue par une reconstruction géodésique de même niveau. La seule manière d'obtenir d'autre contours est d'ajouter de l'information extérieure, soit par l'utilisation de marqueurs, soit en utilisant d'autre extracteurs de contours (comme celui de Canny) que l'on combine à la ligne de partage des eaux à l'aide de l'algorithme de ligne de partage des eaux avec points d'ancrage décrit dans le chapitre 6.

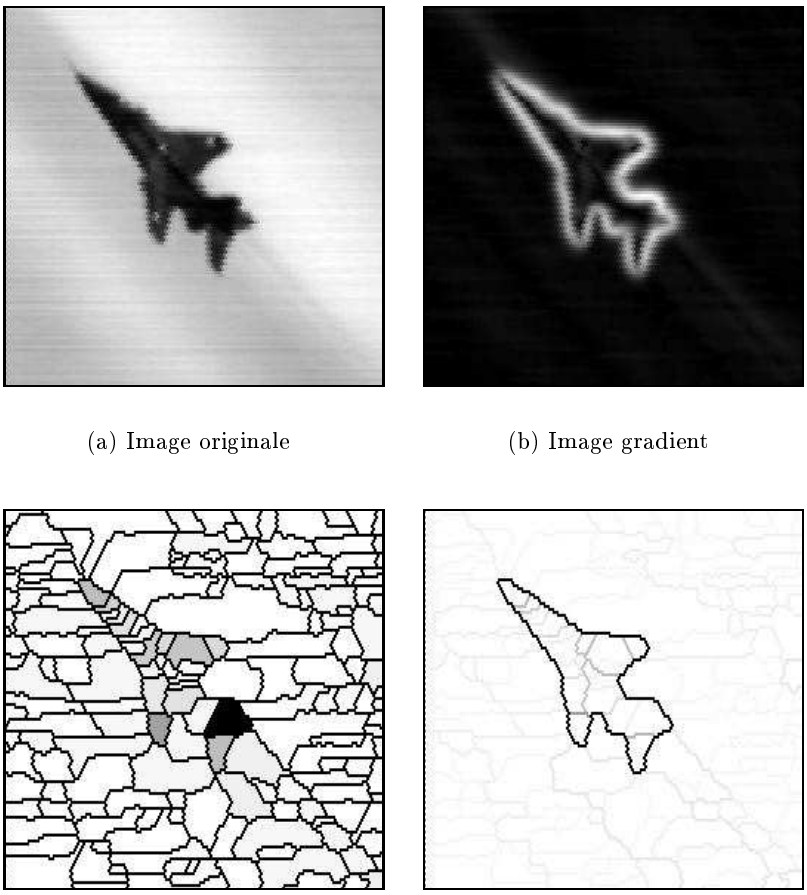
3 Un regard vers les "structures en forme de blob dans l'espace d'échelle"

Dans [61], T. Lindeberg présente une représentation multi-échelle des formes en teintes de gris, appelée en anglais the scale-space primal sketch, qui rend explicite à la fois les caractéristiques dans un espace d'échelle, et les relations entre les structures à différentes échelles.

Cette représentation donne une description *qualitative* des structures présentes dans l'image. L'idée maîtresse est un concept de blob ayant une similitude frappante avec la notion de bassin versant. Dans cette section, nous allons effectuer une comparaison entre la segmentation hiérarchique par dynamique, et les structures en forme de blob.

Nous commencerons par citer la définition des blobs de [61] :

"Imagine the image function as a flooded grey-level landscape. If the water levels sinks gradually, peaks will appear. At some instances, two different peaks become connected. The corresponding elevation levels or grey-levels are called the base-levels of the blobs, and are used for delimiting the spatial extent of the blobs. The support region of the blob is defined to consist



(a) Image originale

(b) Image gradient

(c) Carte des bassins valués par leur dynamique (blanc=faible, noir = fort)

(d) Résultat de l'algorithme de segmentation hiérarchique par dynamique

FIG. 5.6. – *Différence entre un simple calcul de la dynamique des bassins et une application de l'algorithme.*

of those points that have a grey-level exceeding the base level and can be reached from the local maximum point without descending below the base-level of the blob."

Mathématiquement, nous pouvons traduire cette formulation intuitive de la manière suivante (fig. 5.7) :

Considérons une image de Morse f, et soit a un maximum local de f. Pour tout $z < f(a)$, posons

$$X_z(a) := \Big\{\text{la composante connexe de } \Big[(b,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z \leq t \leq f(b)\Big] \text{ qui contient } (a, f(a))\Big\}$$

Définissons les ensembles $G_z(a)$ et $H_z(a)$ comme suit : un point $(b, t_0) \in X_z(a)$ appartient à $G_z(a)$ (resp. $H_z(a)$) si il existe un chemin γ_{ab} de a à b ($\gamma_{ab}(0) = a,\ \gamma_{ab}(1) = b$) vérifiant

(i) pour tout $s \in [0,1]$, $(\gamma_{ab}(s), f(\gamma_{ab}(s))) \in X_z(a)$,

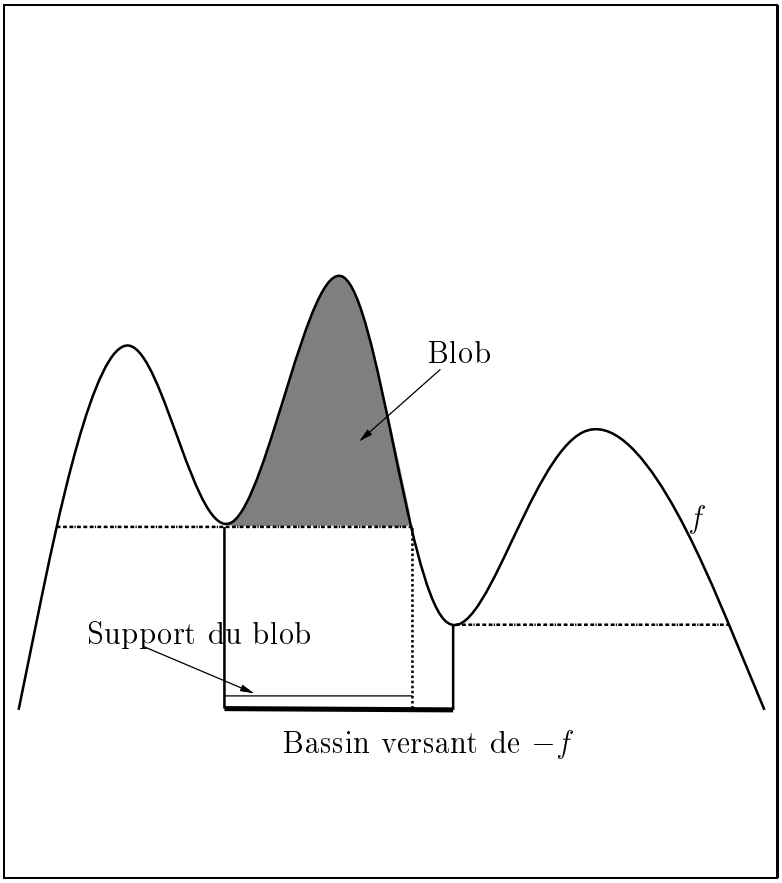


FIG. 5.7. – *Illustration du concept de blob. Nous voyons que le blob est contenu dans un bassin versant de $-f$.*

(ii) pour tout $s \in [0,1]$, $\langle \dot{\gamma}_{ab}(s), \nabla f(\gamma_{ab}(s)) \rangle < 0$ (resp. $\langle \dot{\gamma}_{ab}(s), \nabla f(\gamma_{ab}(s)) \rangle \leq 0$).

L'altitude de la base du blob $z_{base}(a)$ est donnée par

$$z_{base}(a) := \max_{z<f(a)} \left\{ z \mid \overline{G_z}(a) \neq H_z(a) \right\}$$

où $\overline{A}$ est la fermeture topologique de l'ensemble A.

Le blob associé au maximum local a de f est l'ensemble

$$G_{blob}(a) := \overline{G_{z_{base}(a)}(a)}$$

Nous voyons immédiatement que la projection de chaque blob dans le plan est incluse dans un des bassins versants de $-f$ (fig. 5.7).

On peut alors créer une hiérarchie entre ces blobs, en laissant l'eau descendre au-dessous de l'altitude de la base du blob, ce qui fusionnera le blob considéré avec le blob adjacent au même point selle. En considérant toutes les fusions possibles sous la variation du niveau d'eau,

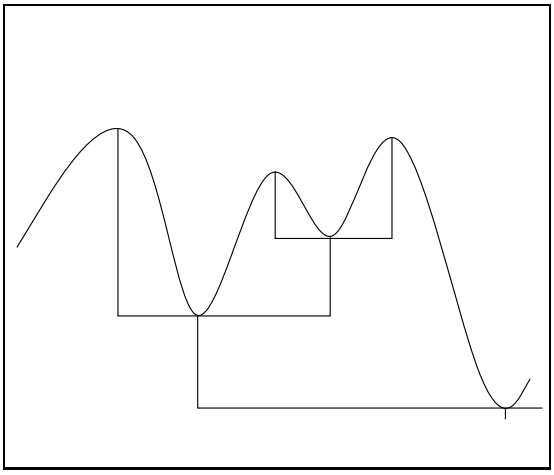


FIG. 5.8. – *Exemple de la structure en arbre sur les blobs.*

une structure en arbre peut-être définie par inclusions successives (fig. 5.8). Notons la similarité entre cette structure d'arbre et la structure hiérarchique obtenue par la dynamique.

Deux caractéristiques mesurant l'importance peuvent être calculées facilement sur chaque blob : son extension spatiale (une mesure de la largeur de la projection du blob dans le plan), et son contraste (une mesure de la hauteur du blob). Cependant, elles sont insuffisantes en elle-même pour donner une idée précise de l'importance de chaque blob en tant que structure de l'image : l'arbre relationnel des blobs est en effet sensible au bruit, puisqu'il est fondé sur l'inclusion des blobs les uns dans les autres. Cette sensibilité est donc très similaire à celle de la dynamique (fig. 5.5).

L'utilisation d'un espace d'échelle est la solution proposée par T. Lindeberg pour dépasser cette limitation du concept de blob. Il suggère, conformément à Witkin [118], d'utiliser l'équation de diffusion

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta g$$

avec condition initial $g(x,0) = f(x)$ pour obtenir une famille de signaux lissés à partir de l'image initiale. Il est connu que la solution de cette équation de diffusion est le produit de convolution de f avec un noyau gaussien :

$$g(x,t) = f(x) * \frac{1}{2\pi t} \exp \frac{-\|x\|^2}{2t}$$

La limite de g quand t tend vers l'infini étant une fonction constante, on peut espérer que les détails les moins importants présents dans f vont disparaître avec t pour laisser seulement les structures importantes. T. Lindeberg propose de calculer alors les blobs sur chaque image obtenue au travers de cet espace d'échelle. Les blobs les plus importants apparaîtront alors naturellement.

Plusieurs remarques importantes peuvent être faites. Tout d'abord, les blobs sont calculés directement sur l'image, et non pas sur le gradient : l'idée est de repérer les structures saillantes dans l'image. Seule une localisation grossière des objets peut alors être espérée. Cette localisation est d'autre part rendue encore moins précise par la convolution avec la gaussienne, qui

à une forte tendance à déplacer les contours. L'intérêt des travaux de T. Lindeberg est d'être un traitement servant en conjonction avec l'extraction de contours. Une des applications possibles est de pouvoir obtenir les points multiples de l'image, une information importante dans l'image [64, Mallik], puisque ce sont les endroits où les objets se superposent ; il suffit pour cela de combiner l'information grossière obtenue par les blobs avec celle obtenue par les extracteurs de contour différentiels[2]. Mais ces informations sont obtenues avec un espace d'échelle, c'est-à-dire par convolution avec une gaussienne. Or cette opération à tendance à déplacer les points multiples[39, 40, Giraudon & Deriche].

La comparaison entre la technique des blobs et celle de la segmentation hiérarchique par dynamique est riche d'enseignements. D'une part, il est facile de voir que la segmentation par dynamique est beaucoup moins sensible au bruit que la structure d'arbre associé au blob. L'utilisation d'un espace d'échelle ne s'impose donc pas. Nous avons déjà dit par ailleurs que la ligne de partage des eaux donne une image dans laquelle toutes les structures importantes sont présentes [114], et que les points multiples sont localisés parfaitement dans cette image (chapitre 4). La segmentation hiérarchique par dynamique est la procédure qui permet de calculer l'importance des structures de l'image. Elle offre donc une alternative beaucoup plus performante au concept de blob.

4 Application à la reconnaissance des formes

Nous présentons dans cette section un exemple d'utilisation de l'algorithme de segmentation hiérarchique par dynamique pour la reconnaissance des formes.

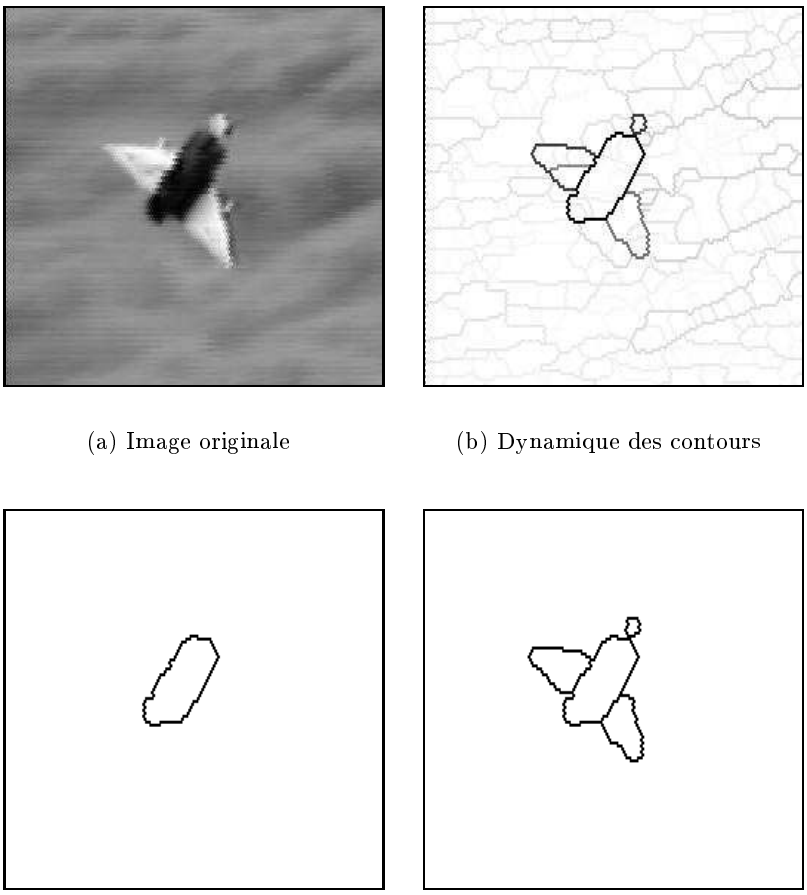
La figure 5.9 est la photographie d'un avion. Pour les systèmes militaires, un des problèmes clé est l'identification de cet avion. Pour ce faire, on peut envisager d'en reconstruire un modèle tridimensionnel qui sera alors comparé à une base de donnée de modèle tridimensionnel. Nous pourrions plus simplement comparer le contour de cet avion à une base de donnée de contours, en extrayant des quantités remarquables sur ces contours [91, 92, Najman, Vaillant & Pernot].

La première étape est donc de trouver les contours de l'avion. Les marqueurs sont ici d'une utilisation délicate : il faut en trouver un qui ait la forme de l'avion, et qui soit inclus dans celui-ci. De même, utiliser la dynamique la plus forte pour trouver un seul objet ne permet d'extraire que le corps de l'avion (fig. 5.9.c). Nous proposons d'utiliser la segmentation hiérarchique par dynamique pour extraire les bons contours.

En effet, l'image de la dynamique des contours (fig. 5.9.b) montre clairement que tous les contours intéressants sont présents dans l'image de la segmentation par ligne de partage des eaux[3]. Il faut alors introduire de l'information supplémentaire pour pouvoir extraire les contours de l'avion. Par exemple, on peut penser à la surface de l'objet : on seuille alors l'image de dynamique des contours à une altitude correspondant à n bassins de la surface attendu. On peut également appliquer des critères de fusion de régions [82, Monga], en partant d'un seuillage

[2]L'une des idées qu'il propose pour cela est de calculer un squelette par zones d'influence des blobs (qu'il appelle d'ailleurs *diagramme de Voronoï*), puis de regarder quels sont les contours les plus proches de la séparation entre les blobs. Il ne "reste qu'à" fermer ces contours pour obtenir les points multiples. Encore une fois, cette idée est proche de celle de la ligne de partage des eaux.

[3]Les emports (réservoirs ou autre) sur les ailes de l'avion ont disparu par le lissage que nous avons effectué pour calculer le gradient de Deriche. En utilisant une image avec plus de précision (image plus grande), ou un autre gradient, on peut espérer retrouver ces emports.



(a) Image originale

(b) Dynamique des contours

(c) Seuil au maximum de dynamique

(d) Les quatre régions de dynamiques les plus élevées

FIG. 5.9. – *Différents seuillages de l'image de dynamique des contours.*

de l'image de dynamique des contours.

Cependant, trouver le contour de l'avion directement est illusoire. Par contre, on peut garantir que dans un nombre restreint d'hypothèses se trouve la segmentation recherchée. Un système à base de connaissances (possédant un modèle de l'avion) permet de retrouver la bonne hypothèse (quatre régions, fig. 5.9.d) et d'identifier l'avion.

Chapitre 6

Algorithmique

'He sent it by the usual means,' Iff shrugged. 'A P2C2E.'
'And what is that?'
'Obvious,' said the Water Genie with a wicked grim.
'It's a Process Too Complicated To Explain.'

Salmon Rushdie

Haroun and the Sea of Stories

Tous les algorithmes présentés dans ce chapitre sont fondés sur l'algorithme de ligne de partage des eaux créé par L. Vincent [114]. C'est pourquoi nous commencerons par le rappeler.

Les algorithmes de ce chapitre sont présentés en un pseudo-langage, à mi-chemin entre le *pascal* et le *C*. Nous utiliserons par convention

- des opérateurs sur les files d'attente[1] de type FIFO (first in, first out : premier entré, premier sorti) : fifo_add pour insérer un élément dans la file, fifo_first pour dépiler le premier élément entré dans la file, et fifo_empty pour tester si la file est vide.
- la notation $N_G(p)$ pour l'ensemble des voisins sur la trame d'un pixel p.
- la notation $I(p)$ pour la valeur dans l'image I du pixel p.

1 L'algorithme de ligne de partage des eaux

Cet algorithme [114, Vincent] fait en sorte de ne considérer à tout instant que les pixels susceptibles de subir des modifications. Conformément à la définition discrète de la ligne de partage des eaux 2.1.6, le principe retenu est par conséquent de considérer les seuils successifs de l'image et de calculer des zones d'influence géodésiques d'un niveau dans le suivant le plus rapidement et le plus exactement possible.

Pour avoir un accès direct aux pixels d'un niveau de seuil donné, un tri initial des pixels dans l'ordre des niveaux de gris croissants est effectué. Cette première étape est accomplie très rapidement grâce à la procédure décrite dans la section 1.1, qui exploite le fait que le nombre de niveaux de gris possibles dans l'image est fixe : le tri est ainsi effectué en temps linéaire par

[1] Une file d'attente est une liste de pixels qui permet de traiter les entrées dans leur ordre d'arrivée.

rapport au nombre de pixels. La deuxième étape, l'inondation, met en jeu des calculs successifs de zones d'influence géodésiques et est le terrain d'action privilégié des techniques à base de files d'attente. Elle est expliquée dans la section 1.2.

1.1 L'étape de tri

Parmi la grande variété de techniques de tri existantes [56, 63], l'une est particulièrement bien adaptée au problème présent. Il s'agit d'un algorithme de tri distributif [63] qui fait appel à des calculs d'adresses. Il a été proposé par E.J. Isaac et R.C. Singleton. Contrairement à la plupart des algorithmes existants, qui sont en $O(n\log(n))$, celui-ci est *linéaire* par rapport au nombre d'éléments à trier, mais en contrepartie, il nécessite une connaissance initiale sur les données qu'on peut lui donner en entrée. Plus précisément, les valeurs possibles de ces données doivent constituer un ensemble fini. C'est tout à fait le cas ici, où les niveaux de gris d'une image sont stockés sur un nombre fini de bits, ce qui fait que les valeurs possibles sont elles-même en nombre fini. Dans les exemples présentés plus loin, les images sont représentées sur 8 bits, ce qui fait que les valeurs possibles sont entières et comprises entre 0 et 255.

Cet algorithme de tri peut être décomposé en trois étapes :

1. Détermination du tableau de distribution en fréquence des niveaux de gris de l'image I, noté H_I (ce n'est autre que l'histogramme de I) :

$$\forall h,\ \ H_I(h) = \text{nombre de pixels de } I \text{ au niveau de gris } h.$$

2. Détermination de l'histogramme cumulé HC_I de I (encore appelé fonction de répartition) :

$$\forall h,\ \ HC_I(h) = \text{nombre de pixels de } I \text{ de niveau de gris} \leq h.$$

3. Parcours exhaustif de l'image I, au cours duquel tout pixel est mis directement à sa place dans le tableau trié, cette place étant aisément repérée grâce à l'histogramme cumulé.

Il est détaillé ci-dessous en pseudo-langage :

<u>Algorithme</u>: Tri des pixels par niveaux de gris croissants

- - Entrée : I, image numérique ;
  - Sortie : $\begin{cases} HC_I, & \text{histogramme cumulé ;} \\ I_t, & \text{tableau trié de (pointeurs de) pixels défini sur } D_I \text{ ;} \end{cases}$
- Initialisations :
  - $h_{\min}, h_{\max}$: extrema de gris dans I ;
  - H_I : tableau à valeurs entières indexé sur $[h_{\min}, h_{\max}]$;
    $\forall h \in [h_{\min}, h_{\max}]$, $H_I[h] \leftarrow 0$;
  - $HC_I[h_{\min}] \leftarrow 0$;
- Pour tout pixel $p \in D_I$ { /⋆ Histogramme ⋆/
  $H_I[I(p)] \leftarrow H_I[I(p)] + 1$;
  }
- Pour $h = h_{\min} + 1$ à $h_{\max}$ { /⋆ Histogramme cumulé ⋆/
  $HC_I[h] \leftarrow HC_I[h-1] + H_I[h-1]$;
  }
- Pour tout pixel $p \in D_I$ { /⋆ Tri proprement dit ⋆/
  $I_t(HC_I[I(p)]) \leftarrow$ *pointeur vers* p ;
  /⋆ Mise à jour de l'histogramme cumulé : ⋆/
  $HC_I[I(p)] \leftarrow HC_I[I(p)] + 1$;
  }

Notons alors n le nombre de pixels de l'image I, et $h_{\min}$ et $h_{\max}$ le plus petit et plus grand niveau de gris respectivement. L'algorithme décrit ci-dessus a l'immense avantage de ne nécessiter que $2n$ opérations élémentaires, c'est-à-dire deux uniques parcours de I. A ceci il faut ajouter les $h_{\max} - h_{\min} - 1$ additions nécessaires à la détermination de l'histogramme cumulé. Cependant, le temps d'exécution de ces additions ainsi que l'espace mémoire supplémentaire nécessité par le stockage de l'histogramme cumulé sont en général tout à fait négligeables, excepté pour des images stockées sur un nombre de bits très important (24 par exemple). Le couple constitué du tableau trié de pointeurs de pixels (I_t) et de l'histogramme cumulé permet, au cours de la phase d'immersion, un accès direct aux pixels d'un niveau donné.

1.2 L'étape d'immersion

Une fois le tri effectué, on passe à l'inondation progressive des bassins versants de l'image. Supposons que cette inondation ait été accomplie jusqu'à un niveau donné h. Chacun des bassins versants découverts—chaque bassin dont le minimum associé a une altitude inférieure ou égale à h—est supposé avoir été doté d'un label. Deux bassins versants différents ont bien entendu des labels différents. Faisant usage de l'accès direct dont il dispose vers les pixels d'altitude $h + 1$, l'algorithme leur affecte une valeur particulière, que l'on notera MASK. Cette valeur est par définition différente de tout label.

Parmi ces pixels à la valeur MASK, ceux qui ont un pixel déjà étiqueté dans leur voisinage sont placés sur la file d'attente. A partir de ceux-ci, on peut donc se propager en largeur d'abord dans les régions à la valeur MASK. Ce faisant, on étend progressivement les bassins versants déjà obtenus à l'intérieur des plateaux de pixels à l'altitude h. Ceci revient à un calcul de zones d'influence géodésiques. Au cours de cette propagation dans les plateaux au niveau $h+1$, seuls les pixels appartenant aux minima d'altitude $h+1$ ne peuvent pas être atteints. En effet, ils ne sont connexes à aucun des bassins versants déjà déterminés. C'est pourquoi il est nécessaire de parcourir une nouvelle fois les pixels de niveau $h+1$ afin de détecter ceux parmi eux qui ont encore la valeur MASK, et de donner un nouveau label aux bassins versants ainsi découverts.

Remarque 6.1.3 :

> Dans la version de l'algorithme proposée ci-dessous, une valeur particulière notée WSHED est affectée aux pixels situés aux endroits où deux bassins versants pourraient entrer en contact. L'ensemble de ces pixels correspond très exactement aux "digues". Cette méthode ne produit pas des résultats aussi exacts que ceux que nous serions en droit d'attendre et L. Vincent a proposé [114] une deuxième version de l'algorithme où ces inexactitudes seront évitées. Nous nous contenterons de la première version, mais tous les algorithmes développés par la suite peuvent être adaptés à cette deuxième version.

Algorithme: Ligne de partage des eaux

```
# define WSHED    0   /* valeur finale des pixels de la LPE */
# define INIT    -1   /* valeur initiale des pixels de J */
# define MASK    -2   /* valeur initiale affectée à chaque niveau */
# define INQUEUE -3   /* valeur d'un pixel lors de son insertion dans la file */
```

- – entrée : I, image numérique ;
  – sortie : J, image des bassins versants étiquetés ;
  labels : 1, 2, 3, etc. Les pixels de la LPE sont mis à WSHED = 0.

- Initialisations :
  – $\forall p \in D_J, J(p) \leftarrow$ INIT ;
  – *label_courant* $\leftarrow 0$;
  – *flag :* variable booléenne ;

- Tri des pixels de I par ordre croissant de niveau de gris.
  Soit $h_{\min}$ et $h_{\max}$ les valeurs extrémales de I ;

- Pour $h = h_{\min}$ à $h_{\max}$ {
  /⋆ *SKIZ* géodésique du niveau $h-1$ dans le niveau h ⋆/
  – Pour tout pixel p tel que $I(p) = h$ {
  /⋆ Ces pixels sont accessibles directement grâce au tri initial ⋆/
  $J(p) \leftarrow$ MASK ;
  Si $\exists p' \in N_G(p)$ tel que $J(p') > 0$ ou $J(p') =$ WSHED {
  $J(p) \leftarrow$ INQUEUE ; *fifo_add*(p) ;
  }
  }

Algorithme: Ligne de partage des eaux (suite)

```
– Tant que fifo_empty() = faux {
    p ← fifo_first() ;
    Pour tout pixel p' ∈ N_G(p) {
        Si J(p') > 0 {
                /* p' appartient à un bassin déjà étiqueté */
            Si (J(p) = INQUEUE ou (J(p) = WSHED et flag = vrai))
                J(p) ← J(p') ;
            sinon si (J(p) > 0 et J(p) ≠ J(p')) {
                J(p) ← WSHED ;    flag ← faux ;
            }
        }
        sinon si J(p') = WSHED {
            si J(p) = INQUEUE {
                J(p) ← WSHED ;    flag ← vrai ;
            }
        }
        sinon si J(p') = MASK {
            J(p') ← INQUEUE ;    fifo_add(p') ;
        }
    }
}
            /* De nouveaux minima sont-ils apparus ? */
– Pour tout pixel p tel que I(p) = h {
    Si J(p) = MASK {
        label_courant ← label_courant + 1 ;
        fifo_add(p) ;    J(p) ← label_courant ;
        Tant que fifo_empty() = faux {
            p' ← fifo_first() ;
            Pour tout pixel p'' ∈ N_G(p') {
                Si J(p'') = MASK {    fifo_add(p'') ;    J(p'') ← label_courant ;    }
            }
        }
    }
}
}
```

Cette version de l'algorithme de ligne de partage des eaux va nous servir de point de départ pour créer de nouveaux algorithmes.

2 Reconstruction géodésique

Après un bref rappel des algorithmes classiques, nous proposons ici un nouvel algorithme pour la reconstruction géodésique, dont nous avons vu l'importance pour le lissage de la ligne de partage des eaux au cours des chapitres précédents.

2.1 Reconstruction séquentielle

Il existe des algorithmes séquentiels [60, 114, 115] pour la reconstruction géodésique qui fonctionnent en propageant l'information dans le sens du balayage vidéo (de haut en bas et de gauche à droite) et du balayage anti-vidéo (sens inverse du précédent). On itère généralement les balayages jusqu'à stabilité. Dans la pratique, il n'y a dans la majorité des cas pas plus de dix balayages complets de l'image. Ces algorithmes sont donc très rapides.

2.2 L'algorithme de Beucher-Meyer

Le principe de cet algorithme [17] est simple. Il réclame en entrée les minima régionaux de $g > f$. Partant de ces minima, il érode g progressivement, en restant au-dessus de f. L'implantation de cet algorithme est réalisée à l'aide d'une inondation effectuée avec une pile ordonnée (une pile qui introduit un nouvel élément en restant triée) : il s'agit de regarder les pixels par ordre de niveau de gris de g croissant. De manière graphique, on peut avoir l'impression que la fonction g agit comme un film qui se contracte sur un paquet qui est la fonction f. Cet algorithme est optimal dans le sens où chaque point est mis dans la pile une seule fois.

2.3 Un nouvel algorithme

Nous présentons un nouvel algorithme d'érosion géodésique qui "dilate" f sous g, et qui fonctionne par inondation. Il est optimal dans le même sens que celui de Beucher-Meyer présenté ci-dessus : chaque point est mis dans la pile une seule et unique fois. Mais qui plus est, il ne réclame pas les minima régionaux en entrée. L'algorithme les calcule lui-même au fur et à mesure de l'inondation, comme dans l'algorithme de ligne de partage des eaux classique.

L'idée de base est d'utiliser le principe d'inondation développé par L. Vincent. Ce principe est adapté à l'érosion géodésique de g au-dessus de f.

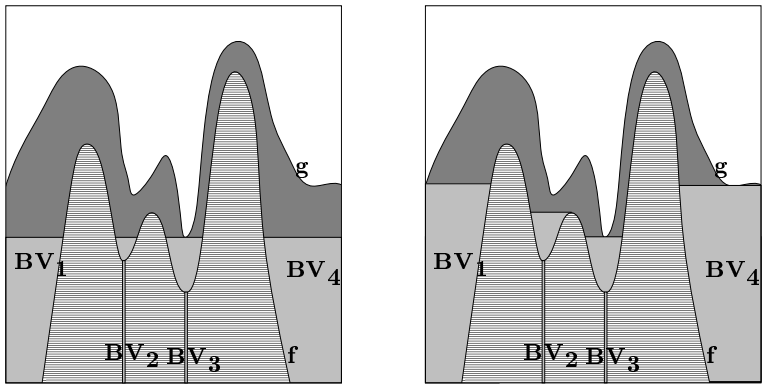
En effet, éroder g au-dessus de f revient à remplir les bassins versants de f jusqu'à plus soif, sous réserve de ne pas rencontrer g (fig. 6.1.b) (voir la formule 5.5 du chapitre 5). Lorsque l'on remplit les bassins de f, deux cas peuvent se produire :

- Soit le minimum de g sur le bassin considéré est égal à l'altitude de remplissage que l'on a atteinte. Dans ce cas, on arrête de remplir ce bassin (le bassin $\mathbf{BV_3}$ de la figure 6.1.a).

- Soit on a rempli le bassin jusqu'à un de ses points selles (point de contact entre deux bassins). Ce cas se divise également en deux branches :

  i. soit le bassin voisin correspondant au point selle a déjà arrêté de se remplir. On bloque alors le bassin considéré à l'altitude actuelle (le bassin $\mathbf{BV_2}$ de la figure 6.1.b);

  ii. soit le bassin voisin n'est pas bloqué. On fusionne alors les deux bassins.



(a) Au temps t, le bassin $\mathbf{BV_3}$ arrête de se remplir.

(b) Étape finale de la reconstruction.

FIG. 6.1. – *Érosion géodésique de g au-dessus de f.*

L'algorithme par inondation s'adapte facilement à cette procédure, dont on a vu (chapitre 2 et 5) qu'elle était fondamentale pour le calcul des ligne de partage des eaux contrainte et pour le calcul des minima régionaux sous contraintes [105, Schmitt&Vincent]. Nous la présentons en pseudo-langage.

<u>Algorithme</u>: Reconstruction numérique de f sous h, version lpe

```
# define MASK     -2   /* valeur initiale affectée à chaque niveau */
# define WSHED     0   /* valeur finale des pixels de la LPE */
# define INIT     -1   /* valeur initiale des pixels de J */
# define INQUEUE  -3   /* valeur d'un pixel lors de son insertion dans la file */
```

- – entrée : I_1, I_2, images numériques ;
  – sortie : J, image de la reconstruction de I_1 sous I_2 ;
- Initialisations :
  – $\forall p \in D_J, J(p) \leftarrow$ INIT ;
  – *label_courant* $\leftarrow 0$;
  – *flag :* variable booléenne ;
  – *maxim :* maximum de I_2 ;
- Tri des pixels de I par ordre croissant de niveau de gris.
  Soit $h_{\min}$ et $h_{\max}$ les valeurs extrémales de I_1 ;
- Pour $h = h_{\min}$ à $h_{\max}$ {
  /* *SKIZ* géodésique du niveau $h-1$ dans le niveau h */
  – Pour tout pixel p tel que $I(p) = h$ {
  /* Ces pixels sont accessibles directement grâce au tri initial */
  $J(p) \leftarrow$ MASK ;
  Si $\exists p' \in N_G(p)$ tel que $J(p') > 0$ ou $J(p') =$ WSHED {
  $J(p) \leftarrow$ INQUEUE ; *fifo_add*(p) ;
  }
  }

<u>Algorithme</u>: Reconstruction numérique de f sous h, version lpe (suite)

```
– Tant que fifo_empty() = faux {
  p ← fifo_first() ;
  Pour tout pixel p' ∈ N_G(p) {
     Si J(p') > 0 {
              /* p' appartient à un bassin déjà étiqueté */
        Si J(p) = INQUEUE                          J(p) ← J(p') ;
        sinon si (J(p) > 0 et J(p) ≠ J(p'))
           flag ← vrai ;
     }
     sinon si J(p') = MASK {
        J(p') ← INQUEUE ;    fifo_add(p') ;
     }
  }
  Si ((val ← J(p)) > 0) {
        Tant que (val ≠ bassin[val].fs)
           (val ← bassin[val].fs) ;
        bassin[val].min ← max(bassin[val].min, I_2(p)) ;
  }
  Si flag = 1 {
        flag← 0;                    Pour tout pixel p' ∈ N_G(p) {
           Si ((label= J(p')) > 0) {
              Tant que (label≠bassin[label].fs)
                 label ← bassin[label].fs ;
              Si h < bassin[label].min
                 bassin[label].bloque ← TRUE ;
           }
        }
        Pour tout pixel p' ∈ N_G(p) {
           Si ((label= J(p')) > 0) {
              Tant que (label≠bassin[label].fs)
                 label ← bassin[label].fs ;
              Si ((attente ← bassin[label].bloque) = FALSE)
                 Pour tout pixel p'' ∈ N_G(p')
                    fusionne_region(p'', label) ;
           }
        }
  }
}
```

Algorithme: Reconstruction numérique de f sous h, version lpe (suite)

```
            /* De nouveaux minima sont-ils apparus ? */
  – Pour tout pixel p tel que I(p) = h {
      Si J(p) = MASK {
          label_courant ← label_courant + 1 ;
          fifo_add(p) ;    J(p) ← label_courant ;
          bassin[label_courant].fs ← label_courant ;
          bassin[label_courant].min ← I2(p) ;
          bassin[label_courant].bloque ← FALSE ;
          Tant que fifo_empty() = faux {
              p' ← fifo_first() ;
              bassin[label_courant].min ← max(bassin[label_courant].min, I2(p)) ;
              Si (h < bassin[label_courant].min)
                  bassin[label_courant].bloque ← TRUE ;
              Pour tout pixel p'' ∈ NG(p') {
                  Si J(p'') = MASK {    fifo_add(p'') ;    J(p'') ← label_courant ;    }
  } } } }
                  /* Mise de J a la valeur de la reconstruction */
  Pour tous les pixels p de J {
      val ← J(p);              Tant que val ≠ bassin[val].fs
          val ← bassin[val].fs ;
      J(p)  ← min(min(bassin[val].min, I2(p)), maxim) ;
  }
}

                  /* Procedure fusionne_region */
fusionne_region(p, label) {
  Si ((val ← J(p)) > 0) {
      Tant que (val ≠ bassin[val].fs)
          (val ← bassin[val].fs) ;
      Si (val≠label) {
          Si (bassin[val].bloque = FALSE) {
              bassin[val].fs ← min(val, label) ;
              bassin[label].fs ← bassin[val].fs
              bassin[label].min ← max(bassin[label].min, bassin[val].min) ;
              bassin[val].min ← bassin[label].min
          }
          sinon {
              attente ← TRUE ;
              bassin[label].min ← max(h, bassin[label].min) ;
} } } }
```

3 Algorithmes de ligne de partage des eaux avec points d'ancrage et marqueurs

Le théorème de caractérisation de la ligne de partage des eaux (théorème 3.1.17) suggère la possibilité d'ajouter des points d'ancrages (*i.e.* de rajouter des points dans $\mathcal{P}(f)$; voir la définition 3.1.16 et le théorème 3.1.17) qui engendreront de nouveau arcs dans la ligne de partage des eaux, ajoutant ainsi des contours intérieurs aux régions. Nous proposons un nouvel algorithme qui permet cet ajout[2].

Cet algorithme est fondé sur celui du squelette avec points d'ancrage développé par Vincent [114, Vincent]. Nous calculons le squelette par zones d'influence du niveau $h-1$ dans le niveau h par amincissement homotopique [105, Schmitt & Vincent]. Nous obtenons ainsi une ligne de partage des eaux.

Cette implantation présente deux avantages. Le premier est la facilité avec laquelle nous pouvons inclure des points d'ancrage, simplement en interdisant de toucher à certains points. Le deuxième est la facilité avec laquelle nous pouvons remplacer le choix des minima de l'image comme marqueurs de la ligne de partage des eaux par d'autres points. Il suffit en effet de ne pas se préoccuper des minima, mais de commencer par imposer comme minimum les points choisis comme marqueurs.

Nous présentons en pseudo-langages deux versions de cet algorithme (avec points d'ancrage, et avec points d'ancrage et marqueurs). Notons que, comme dans l'algorithme de squelette avec points d'ancrages [114, Vincent], nous pouvons inverser le sens de parcours de la file d'attente à chaque passage pour obtenir des lignes plus droites et mieux localisées. Cet ajout supplémentaire ne sera pas considéré ici.

[2] L'intérêt de cet ajout a par ailleurs été discuté dans le chapitre 4.

<u>Algorithme</u>: Ligne de partage des eaux, version points d'ancrage

```
# define LABEL      0   /* label des régions */
# define INQUEUE    1   /* pixel dans la file */
# define FORBIDDEN  2   /* pixel non examinable actuellement */
# define ANCHOR     3   /* point d'ancrage */
# define INIT       4   /* valeur initiale affectée à chaque niveau */
# define WAS_INQ    5   /* pixel qui a été dans la file */
```

- – entrée : I, image numérique ;
  I_a, image binaire des points d'ancrage ;
  mode : prise en compte du bord si $\neq 0$;
  – sortie : J, image de la LPE
  Les pixels de la LPE sont mis à 1.
- Initialisations :
- `tab_homo` : tableau codant les configurations de voisinage homotopiques ;
- Tri des pixels de I par ordre croissant de niveau de gris.
- Initialisation de J :
  Soit $h_{\min}$ et $h_{\max}$ les valeurs extrémales de I ;
  – $\forall p \in D_J$,
  Si $I_a(p) \neq 0$ alors $J(p) \leftarrow$ ANCHOR ;
  sinon si $I(p) = h_{min}, J(p) \leftarrow$ LABEL ;
  sinon $J(p) \leftarrow$ FORBIDDEN ;
- Pour $h = h_{\min} + 1$ à $h_{\max}$ {
  /* *SKIZ* géodésique du niveau $h-1$ dans le niveau h */
  – Pour tout pixel p tel que $I(p) = h$ {
  /* Ces pixels sont accessibles directement grâce au tri initial */
  Si $J(p) \neq$ ANCHOR {
  /* Points qui ne sont pas des points d'ancrage : */
  Si $\exists q \in N_G(p), I(q) =$ LABEL {
  $J(p) \leftarrow$ INQUEUE ;
  fifo_add(p) ;
  }
  sinon $J(p) \leftarrow$ INIT ;
  }
  }

<u>Algorithme</u>: Ligne de partage des eaux, version points d'ancrage (suite)

- Propagation :
  - Répéter tant que la queue n'est pas vide {
    $p \leftarrow$ *fifo_first*() ;
    /⋆ Calcul du code de la configuration de voisinage de p : ⋆/
    Pour $i = 0$ à 5 faire {
    Si $J(p + \vec{u}_i) > 0$ alors `index` $\leftarrow$ `index` $+ 2^i$;
    }
    Si `tab_homo`[`index`] $= 0$ {
    $J(p) \leftarrow$ LABEL;
    /⋆ Mise des voisins de p sur la file d'attente ⋆/
    Si ($J(p + \vec{u}_i) =$ INIT) ou ($J(p + \vec{u}_i) =$ WAS_INQ) {
    fifo_add$(p + \vec{u}_i)$;
    $J(p + \vec{u}_i) \leftarrow$ INQUEUE ;
    }
    }
    sinon $J(p) \leftarrow$ WAS_INQ;
  }
  /⋆De nouveaux minima sont-ils apparus ? ⋆/
  - Pour tout pixel de niveau h, faire {
    Si $J(p) =$ INIT alors $J(p) \leftarrow$ LABEL;
    Sinon si $J(p) =$ WAS_INQ alors $J(p) \leftarrow$ INIT;
  }
}
/⋆Mise à 1 de la LPE ⋆/
- Pour tout pixel p de J, faire
  Si $J(p) \neq 0$, alors $J(p) \leftarrow 1$

<u>Algorithme</u>: Ligne de partage des eaux, version points d'ancrage et marqueurs

```
# define LABEL      0   /* label des régions */
# define INQUEUE    1   /* pixel dans la file */
# define FORBIDDEN  2   /* pixel non examinable actuellement */
# define ANCHOR     3   /* point d'ancrage */
# define INIT       4   /* valeur initiale affectée à chaque niveau */
```

- – entrée : I, image numérique ;
  I_a, image binaire des points d'ancrage ;
  I_m, image binaire des points de marquage ;
  mode : prise en compte du bord si $\neq 0$;
  – sortie : J, image de la LPE
  Les pixels de la LPE sont mis à 1.
- Initialisations :
- `tab_homo` : tableau codant les configurations de voisinage homotopiques ;
- Tri des pixels de I par ordre croissant de niveau de gris.
- Initialisation de J :
  Soit $h_{\min}$ et $h_{\max}$ les valeurs extrémales de I ;
  – $\forall p \in D_J$,
  si $I_a(p) \neq 0, J(p) \leftarrow$ ANCHOR ;
  sinon si $I_m(p) \neq 0, J(p) \leftarrow$ LABEL ;
  sinon $J(p) \leftarrow$ FORBIDDEN ;
- Pour $h = h_{\min} + 1$ à $h_{\max}$ {
  /* *SKIZ* géodésique du niveau $h-1$ dans le niveau h */
  – Pour tout pixel p tel que $I(p) = h$ {
  /* Ces pixels sont accessibles directement grâce au tri initial */
  Si $J(p) \neq$ ANCHOR et $J(p) \neq$ LABEL {
  si $\exists q \in N_G(p), I(q) =$ LABEL {
  $J(p) \leftarrow$ INQUEUE ;
  fifo_add(p) ;
  }
  sinon $J(p) \leftarrow$ INIT ;
  }
  }

<u>Algorithme</u>: Ligne de partage des eaux, version points d'ancrage et marqueurs (suite)

- Propagation :
  - Répéter tant que la queue n'est pas vide {
    $p \leftarrow$ *fifo_first*() ;
    /⋆ Calcul du code de la configuration de voisinage de p : ⋆/
    Pour $i = 0$ à 5 faire {
    Si $J(p + \vec{u}_i) > 0$ alors `index` $\leftarrow$ `index` $+ 2^i$;
    }
    Si `tab_homo`[`index`] $= 0$ {
    $J(p) \leftarrow$ LABEL;
    /⋆ Mise des voisins de p sur la file d'attente ⋆/
    Si $J(p + \vec{u}_i) =$ INIT {
    fifo_add$(p + \vec{u}_i)$;
    $J(p + \vec{u}_i) \leftarrow$ INQUEUE ;
    }
    }
    sinon $J(p) \leftarrow$ INIT;
  }
}
  /⋆Mise à 1 de la LPE ⋆/
  - Pour tout pixel p de J, faire
    Si $J(p) \neq 0$, alors $J(p) \leftarrow 1$

Reste le problème du choix des points d'ancrages. Une première idée est d'utiliser les contours engendrés par un des détecteurs de contours classique (comme celui de Canny). Nous obtenons ainsi les points multiples que ne trouvent pas ces algorithmes, tout en gardant les contours intérieurs aux bassins.

Une autre idée est de généraliser la notion de squelette binaire. Une classe de points d'ancrage intéressante est formée par les centres des cercles osculateurs au bord descendant des plateaux. Sur une image binaire, ces centres sont en effet dans le squelette de la forme. Si donc nous transformons notre image en calculant la distance au bord descendant des plateaux, l'ensemble des points de configuration (en trame hexagonale) suivante :

$$\begin{array}{ccccc} & < & & < & \\ < & & . & & < \\ & ? & & ? & \end{array}$$

(où $<$ signifie que la valeur du pixel considéré est inférieure à la valeur du pixel central, et où ? signifie que cette valeur est indifférente) contient ces centres, et représente donc un bon choix pour des points d'ancrage. En particulier, cette procédure effectuée sur la fonction distance au bord d'une image binaire fournit le squelette d'épaisseur unité traditionnel.

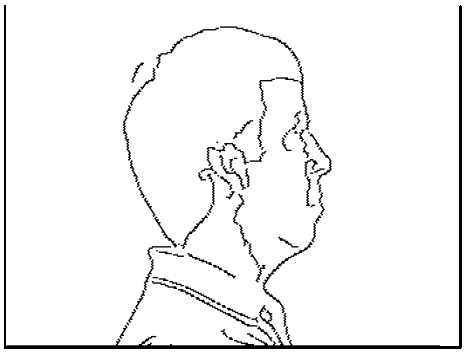
La figure 6.2 montre diverses possibilités de segmentation d'une image d'un profil de visage (fig. 6.2.b). La première (fig. 6.2.a) est une segmentation classique par le détecteurs de contours de Canny-Deriche [24] (avec filtrage par hystérésis). La deuxième (fig. 6.2.b) est obtenue par l'algorithme de ligne de partage des eaux appliqué sur l'image gradient. Le resultat est très bruité, mais contient toute l'information utile. La troisième (fig. 6.2.d) est obtenue par l'algorithme de ligne de partage des eaux appliqué à une reconstruction géodésique du gradient de dynamique 10, ce qui est une technique utile pour supprimer de nombreux minima sans importance (voir chapitre 2). La quatrième et dernière (fig. 6.2.e) est obtenue par le nouvel algorithme de ligne de partage des eaux, appliqué sur une reconstruction géodésique du gradient de dynamique 10, en utilisant les contours de Canny-Deriche comme points d'ancrages.

4 Algorithme de segmentation hiérarchique par dynamique

Nous donnons ici un algorithme qui calcule la valuation des contours dont le principe est décrit dans le chapitre 5. Rappelons qu'il consiste à affecter à chaque point de la ligne de partage des eaux une valeur correspondant à la plus grande valeur pour laquelle le contour auquel appartient le point existe lors d'une érosion géodésique de f_t au-dessus de f, où $f_t(a) := f(a) + t$.

Nous commençons par appliquer l'algorithme de Grimaud [42] pour calculer la ligne de partage des eaux, les bassins versants et leur dynamique. Cet algorithme est construit à partir de celui de Vincent pour calculer la ligne de partage des eaux. Il consiste à inonder l'image à partir de ses minima, niveau après niveau, jusqu'à ce que deux bassins se rencontrent. Ce point de rencontre est un point selle, et c'est de ce point que nous pouvons calculer la dynamique d'un des deux bassins. La valeur de dynamique, égale à la différence entre l'altitude de rencontre et l'altitude du bassin le moins profond, est affectée à ce dernier. Le bassin le plus profond "absorbe" alors l'autre bassin. On poursuit cette procédure jusqu'à ce que tous les bassins aient fusionné.

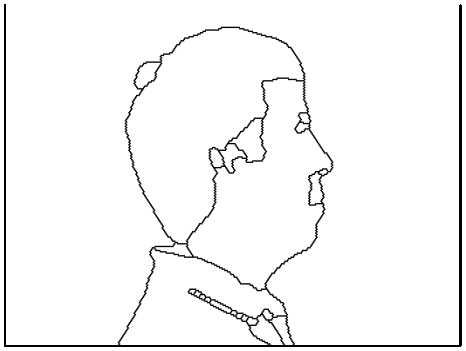
Nous calculons ensuite, pour chaque point de la ligne de partage des eaux, une valuation, en effectuant une sorte de "propagation sur le graphe" des bassins versants. Il est difficile de



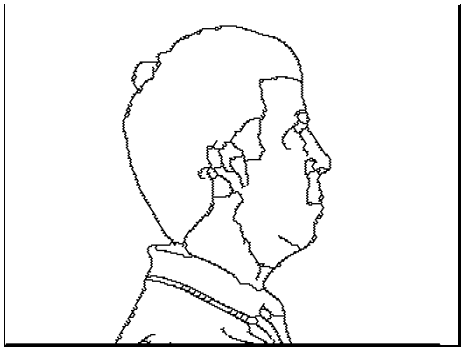
(a) Contours de Canny-Deriche

(b) Contour lpe

(c) Image originale



(d) Contours par ligne de partage des eaux sur une reconstruction géodésique du gradient de taille 10



(e) Contours par ligne de partage des eaux sur une reconstruction géodésique du gradient de taille 10, en utilisant les contours de Canny-Deriche comme points d'ancrages

FIG. 6.2. – *Comparaison de diverses possibilités de segmentation.*

calculer directement la valuation du point durant la construction de la ligne de partage des eaux parce qu'au moment où un point de cette dernière est créé, nous ne disposons pas de toute la liste complète des voisins du point. En particulier, les points triples pourront rester à une valeur inadéquate. Plus grave, l'algorithme de Vincent peut décider qu'un point est dans la ligne de partage des eaux simplement parce qu'un de ses voisins l'est ; tous les bassins voisins ne sont à cette étape de la construction pas forcément arrivés jusque là : il est alors impossible d'affecter une valeur correcte à ce point.

En fait, un seul point sur chaque arc est d'intérêt : le point selle. Nous aurions pu faire une propagation de la valeur de ce point selle, mais ce n'est pas la solution que nous avons choisie.

Notre algorithme consiste à affecter à l'arc de la ligne de partage des eaux contenant ce point selle la valeur de dynamique du bassin absorbé. Remarquons que si dans l'algorithme de dynamique de Grimaud un choix arbitraire doit être fait lors de la rencontre entre deux bassins ayant la même valeur de minimum, ce choix *ne change pas la valeur de l'arc de séparation.* Cette remarque est une des autres raisons qui nous laissent penser que la dynamique d'un arc est une bien meilleure notion que la dynamique d'un bassin versant.

Montrons à présent comment valuer l'arc de ligne de partage des eaux. La meilleure manière de comprendre l'algorithme est de regarder un exemple (fig. 6.3). Supposons que nous avons appliqué l'algorithme de dynamique de Grimaud sur la fonction de la figure 6.3.a. Au cours du processus d'inondation, nous pouvons construire une liste de bassins versants.

Nous disposons alors d'une liste de points de la ligne de partage des eaux et d'une liste de bassins versants. Chaque bassin versant garde en mémoire :

- sa dynamique,

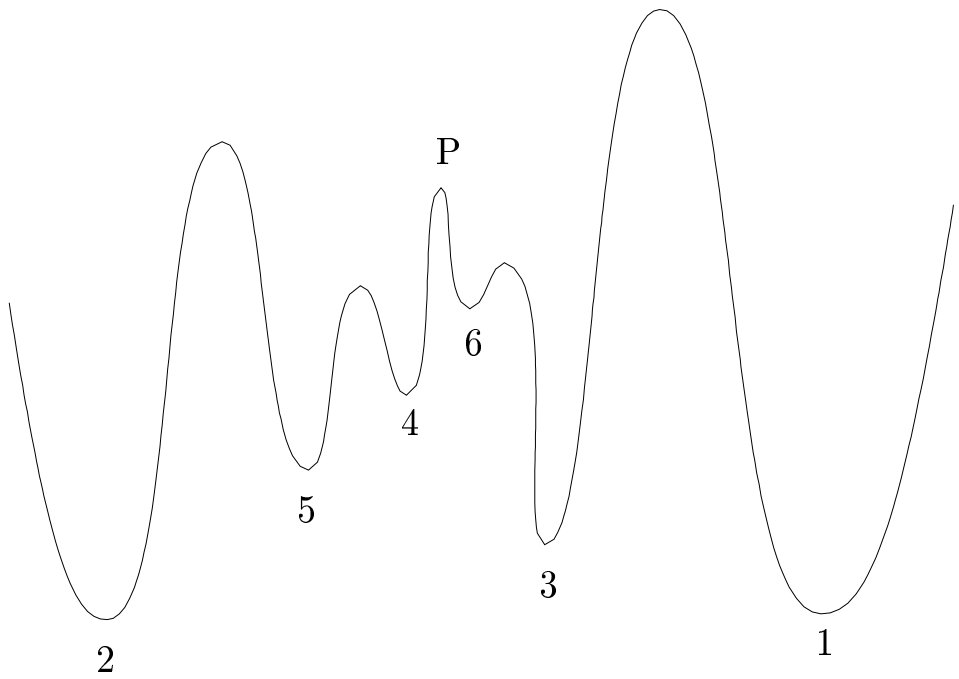
- un pointeur sur le bassin versant qui l'a inondé.

Regardons le point P de la ligne de partage des eaux (fig. 6.3.a). Ce point est le point de jonction entre deux (ou plus, trois au maximum sur la grille hexagonale) bassins versants. Sur notre exemple, il s'agit des bassins 6 et 4.

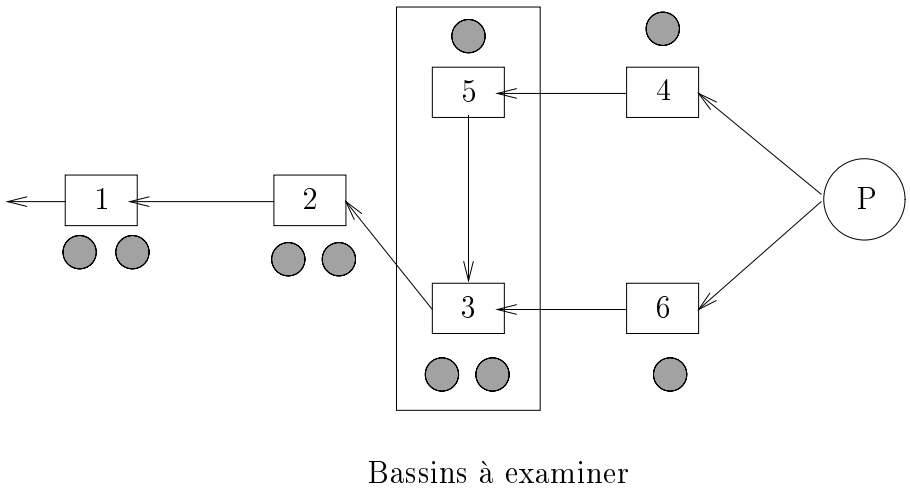
Mais le bassin 4 a été inondé par le bassin 5, qui à lui-même été inondé par le bassin 3, lui-même inondé par le bassin 2. Le bassin qui inonde tous les autres est le bassin 1, qui est le bassin contenant le minimum d'altitude la plus basse. De l'autre coté, le bassin 6 a été inondé par le bassin 3.

Cette liste d'inondation est représenté sur la figure 6.3.b.

L'instant réel d'inondation du point P est le moment où les bassins 3 et 5 se rencontrent. Un autre moyen pour choisir la dynamique de P est de s'apercevoir que ce point appartient à l'intérieur du bassin 3. Nous pouvons ainsi dire que la dynamique du point P est la plus grande des dynamiques des bassins qui précédent le bassin 3 dans la liste d'inondation. Toute la difficulté réside donc dans la détermination du bassin 3. Nous proposons une procédure simple pour effectuer cette opération. Elle consiste à parcourir la liste d'inondation des bassins, et de marquer les bassins par lesquels nous passons. Le premier bassin qui est marqué plus d'une fois contient le point P en son intérieur. C'est le bassin 3 sur notre exemple. Ainsi, la dynamique du point P est la plus grande des dynamiques entre le bassin 5 et le bassin 6, ces deux bassins précédant le bassin 3 dans la liste d'inondation. Ici, la dynamique du point P est donc la dynamique du bassin 5.



(a) Exemple de fonction



(b) Liste d'inondation

FIG. 6.3. – *Détermination du bassin qui value le contour auquel appartient le pixel P.*

On peut vérifier facilement que l'arc de la ligne de partage des eaux qui contient le point P disparaît dans une reconstruction géodésique de taille égale à la dynamique du bassin 5.

Nous présentons en pseudo-langage cet algorithme. Notons que, pour qu'un seuillage de l'image donne effectivement des contours fermés, nous terminons par une procédure de propagation et une procédure d'amincissement que nous n'avons pas décrites. Ce sont en effet des procédures standards en morphologie mathématique [105].

Algorithme: Ligne de partage des eaux, calcul de la carte dynamique des bassins, et valuation des contours

```
# define WSHED    -1   /* valeur finale des pixels de la LPE */
# define INIT     -2   /* valeur initiale des pixels de J */
# define MASK     -3   /* valeur initiale affectée à chaque niveau */
# define INQUEUE  -4   /* valeur d'un pixel lors de son insertion dans la file */

# define TRIPLE   -1   /* marque les points triples */
# define IP       -1   /* Valeur initiale du pointeur "Inondé par"*/
typedef struct /* Structure des bassins */
{
 PIX alt;                    /* Altitude du minimum du bassin */
 PIX dyn;                    /* Dynamique du bassin */
 PIX ip;          /* Label de la nappe ayant absobé ce minimum */
 PIX pt_selle                /* Altitude du point selle */
 int flag;       /* Drapeau pour la recherche de l'ancetre commun */
} BASSIN;
```

- – entrée : I, image numérique ;
  – sortie : J_1, carte des bassins valués par la dynamique ;
  J_2, carte des contours valués par la dynamique ;
- Initialisations :
  – $\forall p \in D_{J_1}, J_1(p) \leftarrow$ INIT ;
  – $\forall p \in D_{J_2}, J_2(p) \leftarrow 0$;
  – *label_courant* $\leftarrow 0$;
  – *flag :* variable booléenne ;
- Tri des pixels de I par ordre croissant de niveau de gris.
  Soit $h_{\min}$ et $h_{\max}$ les valeurs extrémales de I ;
- Initialisation des bords :

bassin[0].alt	←	-1
bassin[0].dyn	←	0
bassin[0].ip	←	IP
bassin[0].flag	←	0
bassin[0].pt_selle	←	0

<u>Algorithme</u>: Ligne de partage des eaux, calcul de la carte dynamique des bassins, et valuation des contours (suite)

```
• Pour h = h_min à h_max {
            /* SKIZ géodésique du niveau h − 1 dans le niveau h */
  – Pour tout pixel p tel que I(p) = h {
            /* Ces pixels sont accessibles directement grâce au tri initial */
    J1(p) ← MASK ;
    Si ∃p' ∈ N_G(p) tel que J1(p') > 0 ou J1(p') = WSHED {
      J1(p) ← INQUEUE ;   fifo_add(p) ;
    }
  }         – Tant que fifo_empty() = faux {
          p ← fifo_first() ;
          Pour tout pixel p' ∈ N_G(p) {
            Si J1(p') > 0 {
                    /* p' appartient à un bassin déjà étiqueté */
              Si (J1(p) = INQUEUE ou (J1(p) = WSHED et flag = vrai))
                J1(p) ← J(p') ;
              sinon si (J1(p) > 0 et J1(p) ≠ J1(p')) {
                J1(p) ← WSHED ;   flag ← faux ;
              }
            }
            sinon si J1(p') = WSHED {
              si J1(p) = INQUEUE {
                J1(p) ← WSHED ;   flag ← vrai ;
              }
            }
            sinon si J1(p') = MASK {
              J1(p') ← INQUEUE ;   fifo_add(p') ;
            }
          }
          Si J1(p) = WSHED {
            fifo_wshed_add(p) ;
          /* Calcul de la dynamique */
          minim← +∞
          Pour tout pixel p' ∈ N_G(p) {
          /* Trouver le label de la nappe inondant ce pixel */
            val← J1(p') ;
            Si (val≥ 0) {
              Tant que (bassin[val].ip ≠ IP) val ← bassin[val].ip ;
              Si (minim>bassin[val].alt) {
              minim ← bassin[val].alt ;
              label_minim ← val ;
          }}}
```

<u>Algorithme</u>: Ligne de partage des eaux, calcul de la carte dynamique des bassins, et valuation des contours (suite)

```
        Pour tout pixel p' ∈ N_G(p) {
        /* Calculer la dynamique */
            val ← J_1(p') ;
            Si (val≥ 0) {
                Tant que (bassin[val].ip ≠ IP) val ← bassin[val].ip ;
                Si (val ≠ label_minim) {
                bassin[val].dyn ← h - bassin[val].alt ;
                bassin[val].pt_selle ← h ;
                bassin[val].ip ← label_minim ;
    }}}}
                /* De nouveaux minima sont-ils apparus ? */
    – Pour tout pixel p tel que I(p) = h {
        Si J_1(p) = MASK {
            label_courant ← label_courant + 1 ;
             bassin[label_courant].alt ← h ;
             bassin[label_courant].dyn ← 0 ;
             bassin[label_courant].pt_selle ← 0 ;
             bassin[label_courant].ip ← IP ;
             bassin[label_courant].flag ← 0 ;
             fifo_add(p) ;    J_1(p) ← label_courant ;
            Tant que fifo_empty() = faux {
                p' ← fifo_first() ;
                Pour tout pixel p'' ∈ N_G(p') {
                    Si J_1(p'') = MASK {    fifo_add(p'') ;    J_1(p'') ← label_courant ;    }
                }
            }
        }
    }
}
```

Algorithme: Ligne de partage des eaux, calcul de la carte dynamique des bassins, et valuation des contours (suite et fin)

```
                /⋆ Mise du contour à la valeur de la dynamique
                Il s'agit de parcourir les pixels de la ligne de partage des eaux
                et de parcourir le graphe des bassins versants
                pour récupérer la dynamique du pixel considéré ⋆/
fifo_wshed_add(pixel_fictif) ;
fifo_wshed_first(p) ;
Tant que (p ≠ pixel_fictif) {
   nb_vois ← 0 ;

                /⋆ Parcourir les voisins du pixel pour recuperer (dans
                le tableau vois[]) la liste des voisins, et le nombre de voisins ⋆/
   Pour tout les pixel p' ∈ N_G(p) {
      Si, pour i allant de 0 à nb_vois − 1, (vois[i] ≠ J_1(p')) {
         vois[nb_voisin++]← J_1(p') ; }
   }

                /⋆ Parcourir la liste des bassins voisins en
                incrementant le flag ⋆/
   Pour i allant de 0 à nb_vois − 1 {
      val ← vois[i]
      Tant que (val ≠ IP) {
         bassin[val].flag++ ;
         val ← bassin[val].ip ;
   }}

                /⋆ Parcourir une succession de bassin pour récupperer celui qui
                à inondé tout le monde ⋆/
   last ← vois[0] ;
   Tant que (bassin[last].flag ≠ nb_vois) {
      last ← bassin[last].ip ;
   }

                /⋆ Rechercher la dynamique ⋆/
   maxim ← 0 ;
   Pour i allant de 0 à nb_vois − 1 {
      val ← vois[i]
      Tant que (val ≠ last) {
         maxim ← MAX(bassin[val].dyn, maxim) ;
         val ← bassin[val].ip ;
   }}

   J_2(p) ← maxim ;
```

Algorithme: Ligne de partage des eaux, calcul de la carte dynamique des bassins, et valuation des contours (suite)

```
                /⋆ Remise à zéro des flags ⋆/
    Pour i allant de 0 à nb_vois − 1 {
        val ← vois[i]
        Tant que (val ≠ IP) {
            bassin[val].flag ← 0 ;
            val ← bassin[val].ip ;
        }
    }

    fifo_wshed_first(p) ;
} /⋆ Tant que (p ≠ pixel_fictif) ⋆/

                /⋆ Il reste à présent à s'occuper des points
                triples et quadruples. Il faut propager le max sur
                les points multiples de la lpe, et amincir le résultat
                pour obtenir une lpe d'épaisseur unité sur la trame.
                Ce sont des procédures standard.⋆/

    propag_max(J2) ;
    amincit(J2) ;
```

Les figures 6.4 et 6.5 donnent quelques exemples d'application de l'algorithme sur des avions. Pour compléter, nous avons donné des seuillages de l'image de dynamique sur l'aéroport d'Orly (fig. 6.6, 6.7 et 6.8), fournissant différentes segmentations.

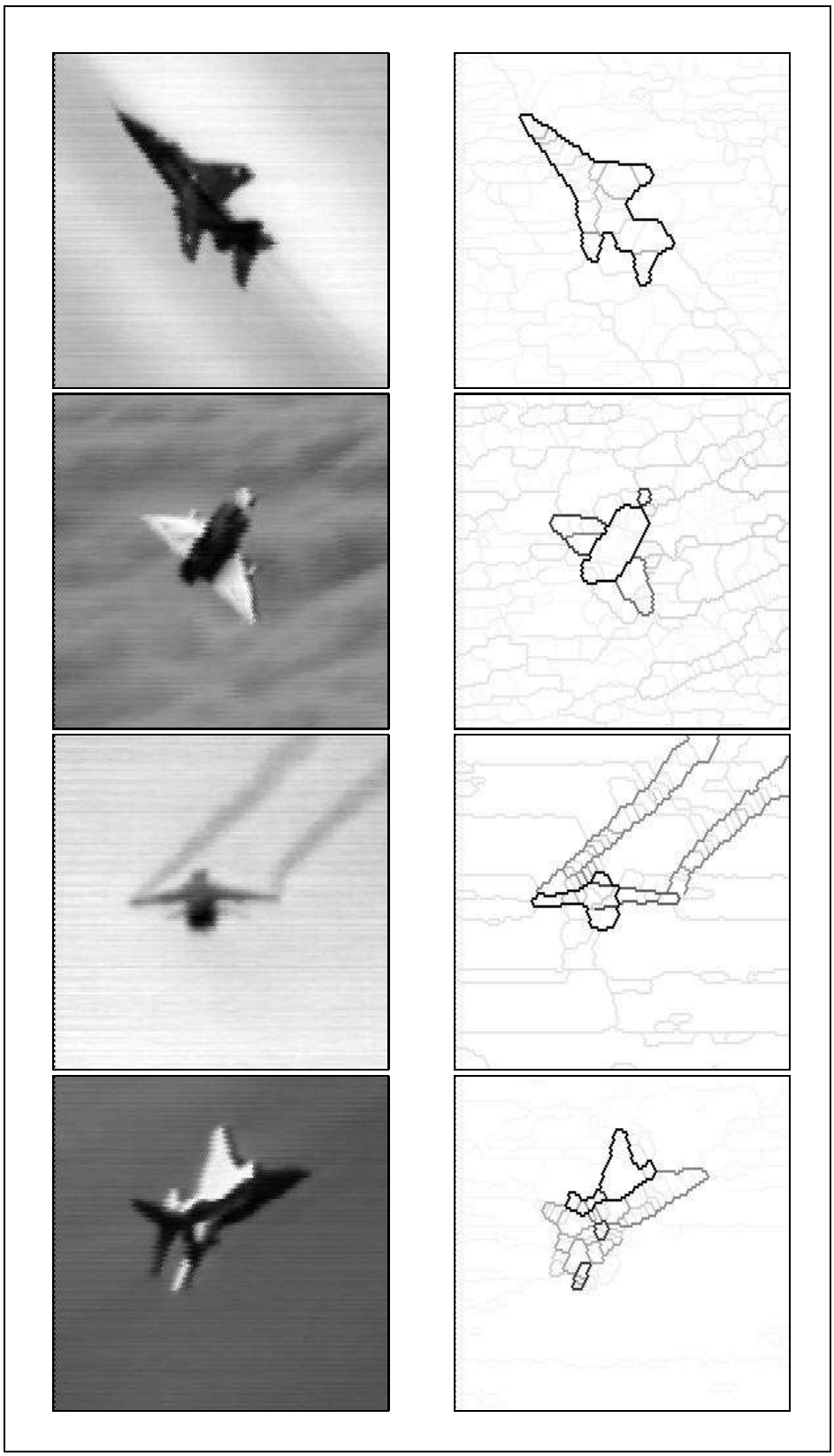


FIG. 6.4. – *Exemples de segmentation hiérarchique par dynamique sur des avions.*

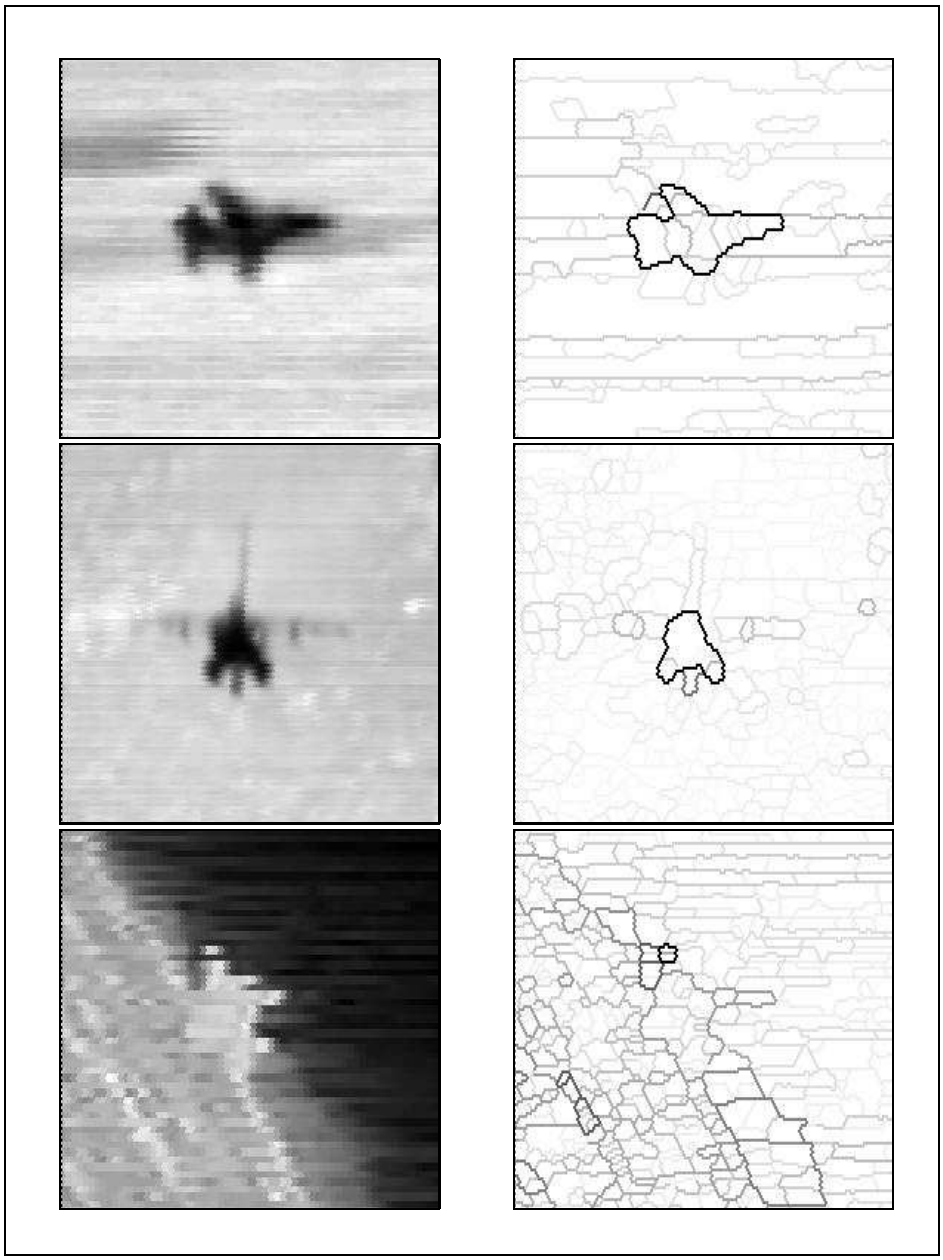
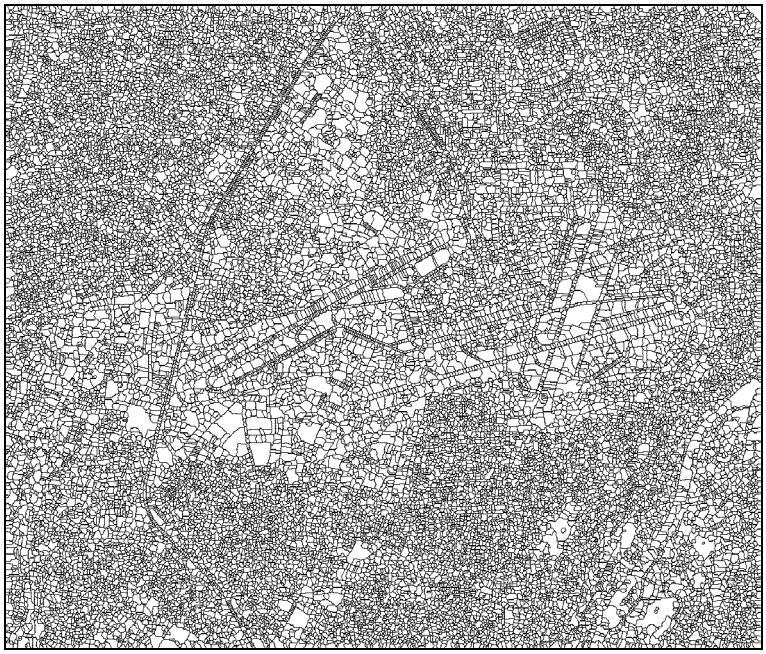


FIG. 6.5. – *Autres exemples de segmentation hiérarchique par dynamique sur des avions.*

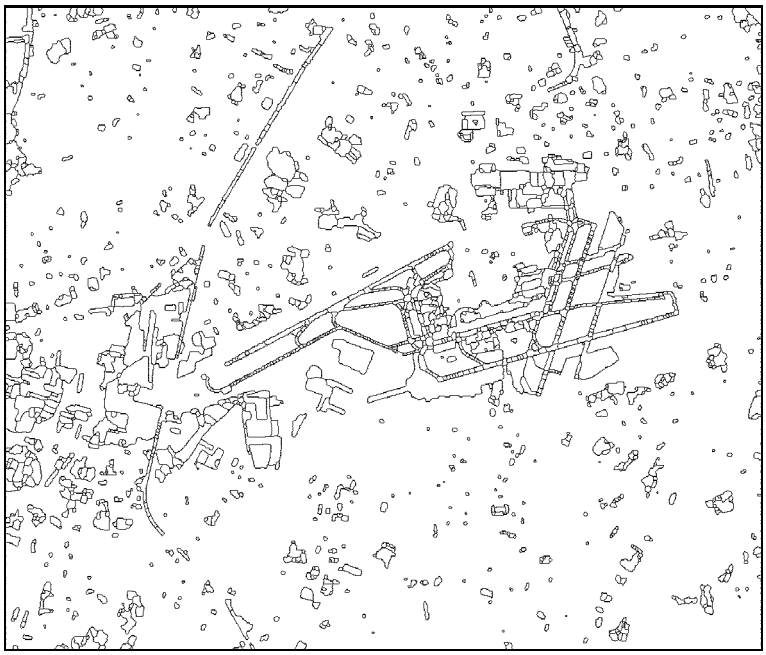
(a) L'aéroport d'Orly

(b) Segmentation hiérarchique par dynamique

FIG. 6.6. – *Application de l'algorithme de hiérarchie par dynamique sur une image de l'aéroport d'Orly.*

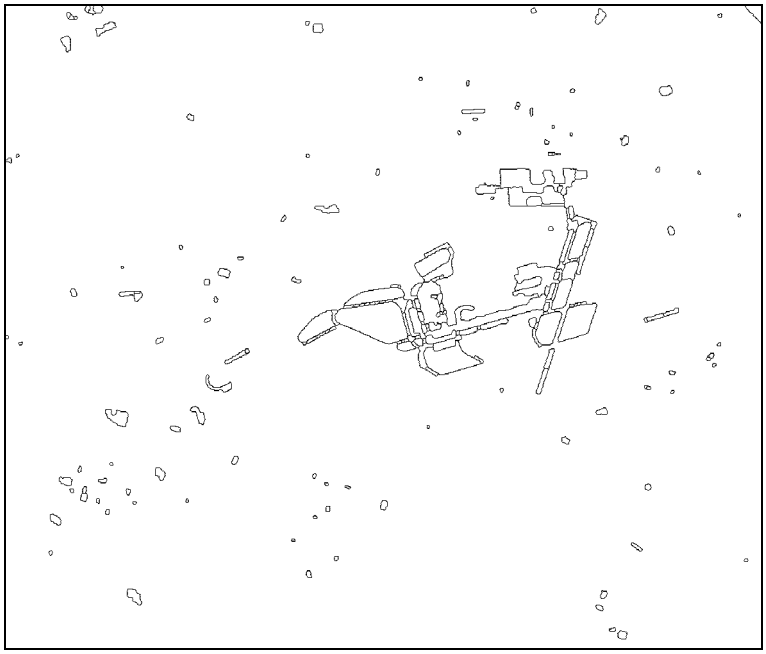


(a) Segmentation hiérarchique seuillée à une dynamique de 1



(b) Segmentation hiérarchique seuillée à une dynamique de 10

FIG. 6.7. – *Application de l'algorithme de hiérarchie par dynamique sur une image de l'aéroport d'Orly (suite).*



(a) Segmentation hiérarchique seuillée à une dynamique de 20

(b) Segmentation hiérarchique seuillée à une dynamique de 25

FIG. 6.8. – *Application de l'algorithme de hiérarchie par dynamique sur une image de l'aéroport d'Orly (suite et fin).*

Deuxième partie

Morphologie mathématique et analyse multivoque

Chapitre 7

Mutational Equations of Morphological Dilation Tubes

L. Doyen [1] & L. Najman [1,2] & J. Mattioli [2]
[1] CEREMADE, Université Paris-Dauphine,
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny,
75775 Paris Cedex 16, France
[2] L.C.R., Thomson-CSF, Domaine de Corbeville, 91401
Orsay, France

Abstract

The present paper provides some differential results dealing with the morphological dilation of a compact set in the nonregular case. Indeed the evolution of dilated sets with respect to time is characterized through mutational equations which are new mathematical tools extending the concept of differential equations to the metric space of all nonempty compact sets of $\mathbb{R}^n$. Using this new tool, we prove that the mutation of the dilation is the normal cone which is a generalization of the classical notion of normal. This result clearly establishes that the dilation transforms this initial set in the direction of the normal at any point of the set. Furthermore, it does not require any regularity assumptions on the compact set.

Résumé

Cet article traite de quelques résultats différentiels de la dilatation morphologique d'un ensemble compact dans le cas non régulier. L'évolution des ensembles dilatés par rapport au temps est caractérisé au travers d'équations mutationnelles qui sont de nouveaux outils mathématiques prolongeant le concept d'équations différentiels à l'espace métrique des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$. Utilisant ces nouveaux outils, nous prouvons que la mutation de la dilatation est le cône normal qui est une généralisation de la notion classique de normale. Ce résultat établit clairement que la dilatation transforme l'ensemble de départ dans la direction de la normale tout point de l'ensemble. De plus, il ne requiert aucune hypothèse de régularité sur l'ensemble compact.

1 Introduction

The first class of problems raised in mathematical morphology ([66, Matheron], [104, Schmitt-Mattioli], [107, Serra]) deals with ways of comparing a given shape with a known one, called a structuring element, and to construct and study "morphological operators", such as "dilations", "erosions", "openings", "closings" and morphological filters. The multiscale morphological analysis leads to induce the study of the evolution of morphological tubes which are set-valued maps $K : t \in \mathbb{R}^+ \rightsquigarrow K(t) \subset \mathbb{R}^n$. In this work, we examine the evolution of the dilation tube: $K(t) = K \oplus tS$ where K (resp. S) is a subset (resp. a compact convex subset) included in $\mathbb{R}^n$, and $\oplus$ represents the addition of Minkowski [81, Minkowski].

Several studies have investigated the problem of a differential characterization of these operators and especially the dilation. But most of these studies have been done in a regular context [19, Boomgaard] or through partial differential equations ([20, Brocket-Maragos], [2, Alvarez *et Al*]) or through partial differential inclusions ([71, 72, 73, 74, Mattioli]).

Let us recall these previous results in the functional case. The use of the hypograph allows us to consider the functional case in the same way as the set case. We can characterize every function $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ by its hypograph $\mathcal{H}p(f) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \geq t\}$, also called in mathematical morphology subgraph or umbra. In [2, 20], the authors have shown that if the following map $(t,x) \mapsto W_\oplus(t,x) = (f \oplus tS)(x)$, defined by $\mathcal{H}p(f \oplus tS) = \mathcal{H}p(f) \oplus t\,(S \times [-\infty, 0])$, is differentiable, then it is solution of the non-linear parabolic equations:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_\oplus}{\partial t}(t,x) = \sigma(S, \dfrac{\partial W_\oplus}{\partial x}(t,x)) \\ \\ \text{with } W_\oplus(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{7.1}$$

where $\sigma(S,x) = \sup_{y \in S} < x, y >$ is the support function of S.

Here, we wish to establish a more *geometrical* result on the dilation. To this aim, we propose to consider this problem in the mathematical framework of mutational equations ([5, 6, Aubin], [28, 29, Doyen]) which allows one to extend the concept of differential equations to the metric space $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ of all non-empty compact subsets of $\mathbb{R}^n$. This means that we can characterize the evolution $K(t)$ of a compact geometric set K in a differential manner, without any regularity assumptions on the shape that we deal with, through a kind of differential equation (mutation) of the type

$$\overset{\circ}{K}(t) \ni f(K(t)).$$

Furthermore, basic theorems of classical differential systems, as the Cauchy-Lipschitz and Lyapunov ones, can be adapted to mutational equations [30, 31, Doyen]. This provides powerful tools to study the evolution of sets.

In the present paper, we show that the morphological tube $K(t) = K \oplus tS$, which corresponds to the dilation with respect to a structuring element S compact, convex, symmetric with respect to the origin and with non-empty interior, satisfies the following mutational equation

$$\begin{cases} \overset{\circ}{K}(t) \ni N^S_{K(t)}(\cdot) \cap S, \\ K(0) = K \end{cases}$$

where $N_K^S(x)$ represents the subnormal cone of the set K at the point x for the norm obtained through the structuring element S. This result clearly establishes, without any regularity assumptions on the compact set K, the intuitive idea that the dilation transforms the initial set K in the direction of the normal at any point of the set. Indeed, when the set K is a regular manifold, and when S is the Euclidean ball of $\mathbb{R}^n$, the subnormal cone $N_K^S(x)$ is reduced to the half-line spanned by the outward normal $n(x)$ and we rediscover results obtained in the regular case.

Finally, we apply the mutational version of the Cauchy-Lipschitz theorem to compare the evolution of the dilations with two different structuring elements.

2 Dilation

Specialists of morphological mathematics study shapes or images through a structuring element which allows to compare these shapes present in the images. A basic morphological operator is the dilation. There exists several ways to define the dilation by a structuring element S. Here we propose to introduce this notion using the gauge associated with the structuring element.

2.1 Structuring Element and Gauge

The gauge associated to a structuring element $S \subset \mathbb{R}^n$ is defined as follows

$$j_S(x) := \inf_{\lambda \geq 0,\ x \in \lambda S} \lambda.$$

We can see at once the following characterization of S as follows

$$x \in S \Longleftrightarrow j_S(x) \leq 1.$$

If S is equal to the Euclidean unit ball B of $\mathbb{R}^n$, the gauge appears to be the Euclidean norm. More generally, when the set S is compact, convex, with non-empty interior and symmetric with respect to the origin, then it defines a norm (see [7, Aubin]). In this case, we can introduce a distance associated with the S defined by

$$d^S(x, y) := j_S(x - y).$$

One can check that these distances are equivalent to the usual one (Euclidean) which corresponds to the choice of $S = B$, the Euclidean unit ball of $\mathbb{R}^n$.

Through the gauge, we can also define a distance between a set K and a point x by

$$d_K^S(x) := \inf_{y \in K} j_S(x - y),$$

and the projection $\Pi_K^S(x)$ of x on K associated with S as follows

$$\Pi_K^S(x) := \{z \in K \mid j_S(x - z) = d_K^S(x)\}.$$

We can easily state that

$$\| d_K^S(x) - d_K^S(y) \| \leq j_S(x - y).$$

Furthermore, when the set S has a non-empty interior, we can check that the map

$$x \mapsto d_K^S(x)$$

is Lipschitz.

2.2 Dilation by a structuring element S

The dilation at scale $t > 0$ of a closed set $K \subset \mathbb{R}^n$ by a structuring element S is defined as follows (fig. 7.1)

$$K_S(t) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_K^S(x) \leq t\}$$

and is equal to

$$K_S(t) = K \oplus tS.$$

Original shape Dilation by the unit Euclidean ball

FIG. 7.1. – *Dilation by the unit Euclidean ball in* $\mathbb{R}^2$

3 Generalized gradient and sub-normal cone

In the sequel, we assume that S is a compact convex symmetric set with non-empty interior. Generally, the distance function $x \mapsto d_K^S(x)$ is not differentiable in the classical sense (except when K is convex). But, since it is a Lipschitz map, we can consider its generalized gradient.

3.1 Generalized gradient

A Lipschitz map is almost everywhere differentiable. But we can extend, in several set-valued ways called the subdifferential and the generalized gradient respectively, the notion of gradient at any point of the domain of f (see for instance [10, Aubin-Frankowska], [23, Clarke], or [98, Rockafellar-Wets]) as follows.

Definition 3.1 *Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a Lipschitz map. Let x be in $\mathbb{R}^n$.*

- *The circatangent epi-derivative of f at x in the direction v is*

$$C_{\uparrow}f(x)(v) := \limsup_{h \to O^+,\ x' \to x} \frac{f(x' + hv) - f(x')}{h}.$$

- *The generalized gradient of f at x is*

$$\partial f(x) := \{p \in \mathbb{R}^n \mid C_{\uparrow}f(x)(v) \geq < p, v >,\ \forall v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Remark: We can see at once that, if f is $\mathcal{C}^1$, then the generalized gradient $\partial f(x)$ is reduced to a singleton, and we have $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

As described in [10, Aubin-Frankowska], the set-valued map[1]

$$x \rightsquigarrow \partial f(x)$$

satisfies some nice properties that we list below.

Proposition 3.2 *Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a Lipschitz map and x be in $\mathbb{R}^n$. Then*

$$\partial f(x) = \overline{co}(\partial^* f(x))$$

where

$$\partial^* f(x) = \limsup_{x_n \to x} \{\nabla f(x_n)\}$$

and $\overline{co}$ represents the closed convex hull.

We can characterize the continuity of a set-valued map in several ways. We recall here the concept of upper-semicontinuity of a set-valued map.

Definition 3.3 (Upper-semicontinuity) *Let F be a set valued map from $\mathbb{R}^n$ into $\mathbb{R}^n$. The map F is said to be* upper-semicontinuous *in x_0 if*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ such that } \forall x \in \{x_0\} \oplus \eta B,\ F(x) \subset F(x_0) \oplus \epsilon B,$$

where B is the unit ball of $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.4 *Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a Lipschitz map. The set-valued map*

$$x \rightsquigarrow \partial f(x)$$

is upper semicontinuous with convex compact values.

In the case of a convex map f, we obtain the following proposition

Proposition 3.5 *Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a continuous and convex function. The generalized gradient is the set*

$$\partial f(x) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid f(x) - f(y) \leq < p, x - y >\}.$$

[1] A set-valued map F from a space X to a space Y is characterized by its graph Graph(F) defined as follows

$$\text{Graph}(F) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}.$$

3.2 Distance function and normal cone

The distance function $x \mapsto d_K^S(x)$ is a Lipschitz map. Hence we can consider its circatangent derivative and its generalized gradient. We obtain the following proposition.

Proposition 3.6 *Consider a compact convex symmetric set $S \subset \mathbb{R}^n$ with non empty interior. For any $x \in \mathbb{R}^n$ and $z \in \Pi_K^S(x)$, we have*

$$\partial j_S(x-z) \subset \partial d_K^S(x)$$

Proof: Consider, for $x' \in \mathbb{R}^n$ and for any $v \in \mathbb{R}^n$, the differential quotient

$$\Delta(h, x') = \frac{d_K^S(x'+hv) - d_K^S(x')}{h}.$$

For any $z \in \Pi_K^S(x)$, we have

$$\liminf_{h \to 0^+,\, x' \to x} \Delta(h, x') \leq \liminf_{h \to 0^+} \Delta(h, x) \leq \frac{j_S(x-z+hv) - j_S(x-z)}{h}.$$

Now let us take $p \in \partial j_S(x-z)$. Since j_S is a norm, it is convex and we can apply proposition (3.5) to claim that

$$j_S(x-z+hv) - j_S(x-z) \leq < p, hv > .$$

Consequently, for any v,

$$C_\uparrow d_K^S(x)(v) \geq < p, v >$$

This implies that $p \in \partial d_K^S(x)$.□

Remark: In the case of the unit ball, we can compute exactly the generalized gradient of $d_K(x)$. We can check that

$$\partial d_K^B(x) = co\left(\frac{x - \Pi_K^B(x)}{d_K^B(x)}\right).$$

The sub-differential of the distance function allows us also to define the notions of tangent and normal spaces of a set K at a point x without any regularity assumptions on K.

Definition 3.7 (Tangent and normal spaces) *Let K be a closed subset of $\mathbb{R}^n$, S a compact convex symmetric set with non-empty interior and x an element of $\mathbb{R}^n$.*

- *The* external circatangent cone *of K at x associated with S is*

$$C_K^S(x) := \{v \mid C_\uparrow d_K^S(x)(v) \leq 0\}.$$

- *The* external normal cone *of K at x associated with S is the negative polar cone of $C_K^S(x)$ i.e.*

$$N_K^S(x) := C_K^S(x)^- = \{p \mid \forall v \in C_K^S(x),\ < p, v > \leq 0\}.$$

Examples of these cones are represented on figure 7.2.

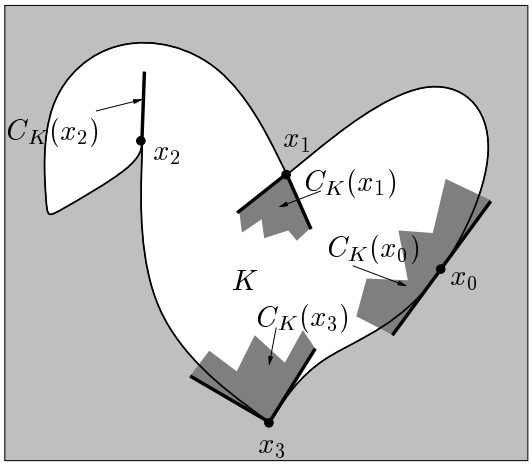
Remark: We denote by $C_K(x)$, $N_K(x)$ the cones associated with the Euclidean norm (*i.e.* $S = B$).

Let us point out that, when x belongs to K and when the structuring element is the Euclidean unit ball, the external circatangent cone coincides with the usual Clarke cone *i.e.*

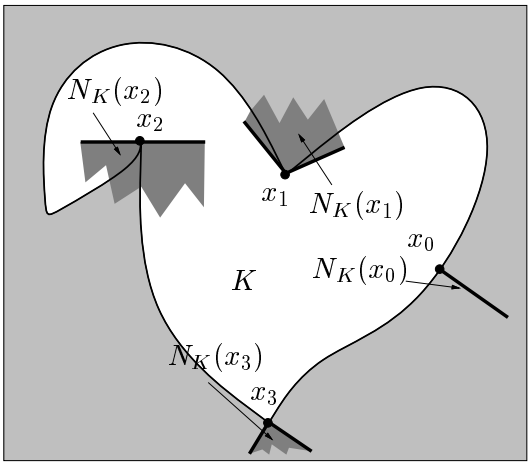
$$C_K(x) = \left\{ v | \lim_{h \to 0^+,\ x' \to x} \frac{d_K^B(x' + hv)}{h} = 0 \right\}.$$

Let us also make precise that, when the set K is regular, this tangent cone corresponds to the classical definition of the tangent space, and when K is convex, it is the definition of convex analysis.

Let us mention a link between the generalized gradient of the distance functions to K and the subnormal cone. To do this, let us recall respectively the definitions of the polar set S^* of a structuring element S.



(a) Circatangent Cones at different points of a shape K



(b) Normal Cones at different points of a shape K

FIG. 7.2. – *Circatangent and Normal cones associated with the Euclidean norm.*

Proposition 3.8 *Let K be a compact subset of $\mathbb{R}^n$ and S a compact, convex and symmetric set with non empty interior. For any $x \in \mathbb{R}^n$, we have*

$$\partial d_K^S(x) \subset N_K^S(x) \cap S^*$$

where

$$S^* := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \sup_{x \in S} < p, x > \leq 1\}$$

is called the polar set of S.

Corollary 3.9 *Let K be a compact subset of $\mathbb{R}^n$ and B the Euclidean unit ball of $\mathbb{R}^n$. For any $x \in \mathbb{R}^n$, we have*

$$\partial d_K^B(x) \subset N_K(x) \cap B.$$

Proof of the corollary: Let us indicate that, if S is equal to the Euclidean unit ball B, we obtain that $S = S^*$ since $\sup_{x \in B} < p, x >= \| p \|$. The proof ensues.

Proof of the proposition: Take $p \in \partial d_K^S(x)$. Obviously, for any $v \in C_K^S(x)$, we can write

$$< p, v > \leq C_\uparrow d_K^S(x)(v) \leq 0.$$

Therefore $p \in N_K^S(x)$.

On the other hand, we have

$$C_\uparrow d_K^S(x)(v) \leq \limsup_{h \to O^+,\, x' \to x} \frac{d_K^S(x' + hv) - d_K^S(x')}{h} \leq \partial j_S(v).$$

Consequently, for any v, we obtain

$$< p, v > \leq j_S(v).$$

Hence, since for any $v \in S$ we have $j_S(x) \leq 1$, this yields

$$\sup_{v \in S} < p, v > \leq 1.$$

Therefore $p \in S^*$. This completes the proof.□

4 Differential Inclusions

4.1 Definition

Let us describe the (non deterministic) dynamics of a system by a set-valued map F from the state space $\mathbb{R}^n$ to itself. We consider initial value problems (or Cauchy problems) associated to differential inclusion

$$\text{for almost all } t \in [0, T], \quad x'(t) \in F(x(t)) \tag{7.2}$$

satisfying the initial condition $x(0) = x_0$.

Definition 4.1 [9] *Let F be a set-valued map from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$. A map $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ is a solution of the differential inclusion*

$$x' \in F(x)$$

if $x(\cdot)$ is absolutely continuous and

$$x'(t) \in F(x(t)) \text{ almost everywhere on } [0, T].$$

4.2 Marchaud Maps

We denote by

$$\|F(x)\| := \sup_{y \in F(x)} \|y\|$$

and we say that F has linear growth if there exists a positive constant c such that

$$\forall\, x \in \mathrm{Dom}(F), \quad \|F(x)\| \;\leq\; c(\|x\| + 1)$$

Definition 4.2 (Marchaud Map) *We shall say that F is a* Marchaud map *if it is nontrivial (i.e* $\mathrm{Dom}(f) \neq \emptyset$*), upper semicontinuous, has compact convex images and linear growth.*

We have the following characterization :

Proposition 4.3 *Let $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$. To say that a nontrivial set-valued map F is a Marchaud map amounts to saying that*

$$\begin{cases} i) & \textit{the graph and the domain of } F \textit{ are closed} \\ ii) & \textit{the values of } F \textit{ are convex} \\ iii) & \textit{the growth of } F \textit{ is linear} \end{cases}$$

We observe that the only truly restrictive condition is the convexity of the images of these set-valued maps, since the continuity requirements are kept minimal. But we cannot dispense with it, as the following counter example shows.

Example — Let us consider $n = 1$, $K := [-1, +1]$ and the set-valued map $F : K \rightsquigarrow \mathbb{R}$ defined by

$$F(x) \;:=\; \begin{cases} -1 & \text{if} \quad x > 0 \\ \{-1, +1\} & \text{if} \quad x = 0 \\ +1 & \text{if} \quad x < 0 \end{cases}$$

Obviously, no solution to the differential inclusion $x'(t) \in F(x(t))$ can start from 0, since 0 is not an equilibrium of this set-valued map!

We note however that

- The graph of F is closed
- F is bounded
- K is convex and compact
- K is a viability domain of F.

But the value $F(0)$ of F at 0 is not convex. Observe that if we had set $F(0) := [-1, +1]$, then 0 would have been an equilibrium.

This example shows that upper semicontinuity is not strong enough to compensate the lack of convexity fo the images[2].

[2]Stronger continuity or differentiability requirements allow to relax this assumption.

4.3 Solution Map

We set $\mathrm{Dom}(F) := \{x \mid F(x) \neq \emptyset\}$. We denote by $\mathcal{S}(x_0)$ or by $\mathcal{S}_F(x_0)$ the (possibly empty) set of solutions to differential inclusion (7.2).

Definition 4.4 (Solution Map) *We shall say that the set-valued map $\mathcal{S}$ defined by* $\mathrm{Dom}(F) \ni x \mapsto \mathcal{S}(x)$ *is the* solution map *of F (or of differential inclusion* (7.2)*.)*

4.4 Reachable Map

We associate with the solution map $\mathcal{S}_F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathcal{C}(0, \infty; \mathbb{R}^n)$ of the differential inclusion (7.2) the reachable map, (or flow, or set-valued semi-group) defined in the following way:

Definition 4.5 *For any $t \geq 0$, we denote by $\vartheta_F(t, x) := (\mathcal{S}_F(x))(t)$ the set of states $x(t)$ reached from x through differential inclusion (7.2) and by*

$$\vartheta_F(t, K) := (\mathcal{S}_F(K))(t)$$

the set of states $x(t)$ reached from K by solutions $x(\cdot) \in \mathcal{S}_F(x)$. It is called the reachable map.

The reachable map $\vartheta_F(t, x)$ enjoys the semigroup property:

$$\forall\, t, s \;\geq\; 0, \;\; \vartheta_F(t + s, x) \;=\; \vartheta_F(t, (\vartheta_F(s, x))$$

For the time, let us mention that these maps are closed.

Proposition 4.6 *Assume that $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ is a Marchaud map and that a closed subset K is contained in the domain of $\mathcal{S}_F$. Then the graph of the map $t \rightsquigarrow \vartheta_F(t, K)$is closed.*

4.5 Viability Definitions

Definition 4.7 (Viability Properties) *Let K be a subset of the domain of F. A function $x(\cdot) : I \mapsto \mathbb{R}^n$ is said to be* viable in K on the interval I *if and only if*

$$\forall\, t \in I, \;\; x(t) \;\in\; K$$

We shall say that K is locally viable under F *(or enjoys the* local viability property for the set-valued map F*) if for any initial state x_0 in K,* there exist $T > 0$ *and a solution on $[0, T]$ to differential inclusion (7.2) starting at x_0 which is* viable *in K. It is said to be* (globally) viable under F *(or to enjoy the* (global) viability property*) if we can take $T = \infty$.*

Definition 4.8 (Viability Domain) *Let $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ be a nontrivial set-valued map. We shall say that a subset $K \subset \mathrm{Dom}(F)$ is a* viability domain *of F if and only if*

$$\forall\, x \in K, \quad F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset$$

where $T_K(x) := \{v \mid \liminf_{h \to 0+} \frac{d_K^B(x+hv)}{h} = 0\}$ is the contingent cone *to K at x.*

Since the contingent cone to a singleton is obviously reduced to 0, we observe that a singleton $\{\overline{x}\}$ is a viability domain if and only if $\overline{x}$ is an equilibrium of F, *i.e.*, a stationary solution to the differential inclusion, which is a solution to the inclusion

$$0 \in F(\overline{x}) \tag{7.3}$$

In other words, the equilibria of a set-valued map provide the first examples of viability domains, actually, the minimal viability domains.

4.6 The Viability Theorem

The main viability theorems hold true for the class of Marchaud maps:

Theorem 4.9 (Viability Theorem) *Consider a* Marchaud map $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ *and a* closed *subset* $K \subset \mathrm{Dom}(F)$ *of the finite dimensional vector space* $\mathbb{R}^n$.

If K *is a* viability domain, *then for any initial state* $x_0 \in K$, *there exists a* viable *solution on* $[0, \infty[$ *to differential inclusion* (7.2). *More precisely, if we set*

$$c := \sup_{x \in \mathrm{Dom}(F)} \frac{\|F(x)\|}{\|x\| + 1}$$

then every solution $x(\cdot)$ *starting at* x_0 *satisfies the estimates*[3]

$$\begin{cases} \forall\, t \geq 0, \ \ \|x(t)\| \ \leq \ (\|x_0\| + 1)e^{ct} \\ \text{and} \\ \text{for almost all } t \geq 0, \ \ \|x'(t)\| \ \leq \ c(\|x_0\| + 1)e^{ct} \end{cases}$$

When F is a single-valued map f, this theorem has been proved by the japanes mathematician Nagumo in 1942 in a paper written in german[4]. It is then known under the name of Nagumo Theorem.

If a closed subset K is not a viability domain, the question arises whether there are closed viability subsets of K viable under F and even, whether there exists a largest closed subset of K viable under F. The answer is positive for Marchaud maps, and we call viability kernel of a closed subset K the largest closed subset viable under F contained in K.

Consider a closed subset K of the domain of F. There exists the largest closed subset of K viable under F.

Definition 4.10 (Viability Kernel) *Let* K *be a subset of the domain of a set-valued map* $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$. *We shall say that the largest closed subset of* K *viable under* F *(which may be empty) is the* viability kernel of K for F *and denote it by* $\mathrm{Viab}_F(K)$ *or, simply,* $\mathrm{Viab}(K)$.

If the viability kernel of K *is empty, we say that* K *is a* repeller.

Theorem 4.11 *Let us consider a Marchaud map* $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$. *Let* $K \subset \mathrm{Dom}(F)$ *be closed. Then the viability kernel of* K *exists (possibly empty) and is equal to the subset of initial states such that at least one solution starting from them is viable in* K:

$$\mathrm{Viab}_F(K) \ = \ \mathcal{S}_F^{-1}\left\{x(\cdot) \mid \forall\, t \in [0, T], \ \ x(t) \in K\right\}$$

[3] and thus belongs to the weighted Sobolev space $W^{1,1}(0, \infty; X; e^{-bt}dt)$ for $b > c$.

[4] and has been rediscovered at least 14 times since.

4.7 Viability Tubes

We consider a set-valued map $F : [0,\infty[\times\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ which associates with every (t,x) the subset $F(t,x)$ of velocities of the system at time t when its state is $x \in \mathbb{R}^n$. We now study the differential inclusion

$$\text{for almost all } t \in [0,T], \quad x'(t) \in F(t,x(t)) \tag{7.4}$$

From now on, we regard a set-valued map P from $[0,\infty[$ to $\mathbb{R}^n$ as a "tube".

Definition 4.12 *We say that a tube P* is viable under *F (or enjoys the* viability property*) if for any initial time $t_0 \in [0,\infty[$ and any initial state $x_0 \in P(t_0)$, there exists a solution $x(\cdot)$ to (7.4) starting from x_0 at time t_0 which is "viable" in the sense that*

$$\forall\, t \in [t_0,\infty[, \quad x(t) \in P(t)$$

Remark that a subset K is viable under a time independent set-valued map $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ if and only if the "constant tube" $t \rightsquigarrow P(t) := K$ is viable under F.

Our first task is to characterize tubes enjoying the viability property thanks to its "contingent derivative".

Definition 4.13 *A tube $P : [0,\infty[\rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ is called a* viability tube *of a set-valued map $F : [0,\infty[\times\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ if its graph is contained in the domain of F and if*

$$\forall\, t \in [0,T[, \forall\, x \in P(t), \quad F(t,x) \cap DP(t,x)(1) \neq \emptyset$$

where

$$DP(t,x)(1) \;=\; \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{h\to 0+} d\left(v, \frac{P(t+h)-x}{h}\right) = 0 \right\}. \tag{7.5}$$

A tube is said to be closed *if its graph is closed.*

Viability Theorem 4.9 for autonomous (*i.e.*, time independent) systems can be easily translated in the time dependent case and yield the following summary:

Theorem 4.14 *Assume that the $F : [0,\infty[\times\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ is a Marchaud map. Then*

1. — A necessary and sufficient condition for a closed tube to be viable under F is that it is a viability tube.

2. — There exists a largest closed viability tube $P_\star$ contained in any given closed tube P, called the viability kernel *of the tube P.*

3. — If P_n is a sequence of closed viability tubes, then the graphical upper limit P, which is the tube defined by the

$$\mathrm{Graph}(P) \;:=\; \limsup_{n\to\infty} \mathrm{Graph}(P_n)$$

is also a (closed) viability tube.

Proof: We introduce the set-valued map G from $\mathrm{Graph}(P)$ to $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ defined by

$$G(s,x) \;:=\; \{1\} \times F(s,x)$$

We observe that $(s(\cdot), x(\cdot))$ is a solution to the differential inclusion

$$\text{for almost all } t, \quad (s'(t), y(t)) \in G(s(t), y(t))$$

starting at $(s(0), x(0)) = (t_0, x_0)$ if and only if the function $x(\cdot)$ defined by $x(t) := y(t - t_0)$ is a solution to differential inclusion (7.4) starting at x_0 at time t_0. We also note that the tube P is viable under F if and only if its graph is viable under G and that P is a viability tube if and only if its graph is a viability domain of G. It thus remains to translate the time independent results. $\square$

We shall denote by $\mathcal{S}_F(t_0, x_0)$ the set of solutions $x(\cdot)$ to the differential inclusion (7.4) and by $\mathrm{Graph}(P_F)$ its closed domain, which is the graph of the largest viability tube of F.

Let us recall the following theorem

Theorem 4.15 [5, Aubin] *Let us consider the finite dimensional vector space $\mathbb{R}^n$ and a Marchaud map $F : [0, \infty[\times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$. Then the solution map $\mathcal{S}_F$ is upper semicontinuous with compact images from* $\mathrm{Graph}(P_F)$ *to the space $\mathcal{C}(0, \infty; \mathbb{R}^n)$ supplied with the compact convergence topology.*

Remark — We deduce from the properties of the viability kernel that if an initial state $x_s \in P(s)$ at time s does not belong to $P_\star(s)$, then any solution $x(\cdot)$ to the differential inclusion starting at x_s satisfies

$$\begin{cases} i) & \forall\, t \geq s, \;\; x(t) \notin P_\star(t) \text{ as long as } x(t) \in P(x(t)) \\ ii) & \exists\, T \geq s \quad \text{such that } x(T) \notin P(T) \quad \square \end{cases}$$

We may regard the condition involved in the definition of viability tubes as a "set-valued differential inclusion", the solutions to which are "viability tubes".

We consider now a Marchaud map $F : [0, \infty[\times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ and its largest closed viability tube $P_F : [0, \infty[\rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ (which is the viability kernel of the domain of F).

Let $K \subset P_F(0)$ be a closed subset. We are looking for viability tubes which satisfy the initial condition $P(0) = K$, which is the Cauchy problem for tubes.

The main example of a closed viability tube satisfying this initial condition is the *reachable tube* defined by $\vartheta_F(t, K)$ defined by

$$\vartheta_F(t, K) \;:=\; \{x(t)\}_{x(\cdot) \in \mathcal{S}_F(K)}$$

Proposition 4.6 can be adapted to the time-dependent case:

Theorem 4.16 *Assume that $F : [0, \infty[\times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ is a Marchaud map and that a closed viability domain K of $F(0, \cdot)$ is contained $P_F(0)$. Then the reachable tube $\vartheta_F(t, K)$ is the largest closed viability tube satisfying $\vartheta_F(0, K) = K$.*

Proof:

Let $P(\cdot)$ be a viability tube starting at K and y belong to $K(\tau)$ and prove that $P(\tau) \subset \vartheta_F(\tau, K)$. Let us set $\check{P}(s) := P(\tau - s)$. Since $P(\cdot)$ is a viability tube of $(t, x) \rightsquigarrow F(t, x)$ for any

$t \geq 0$ and that K is a viability domain of $F(0,\cdot)$, we deduce that $\mathrm{Graph}(\check{P}) \cap ([0,\tau] \times \mathbb{R}^n)$is a viability domain of the set-valued map G defined by

$$G(s,x) := \begin{cases} \{-1\} \times -F(\tau - s, x) & \text{if } s \in]0,\tau] \\ [-1,0] \times F(0,x) & \text{if } s = 0 \\ \{0\} \times F(0,x) & \text{if } s > \tau \end{cases}$$

Therefore, there exist

- a solution $y(\cdot)$ of $x' \in F(t,x)$ starting at y at time t and viable in $P(t)$ for all $t \geq \tau$,
- a solution $z(\cdot)$ of $z' \in -F(\tau - t, z)$ starting at y at time τ and viable in the tube $t \rightsquigarrow P(\tau - t)$.

By setting $y(t) := z(\tau - t)$ when $t \in [0,\tau]$, we infer that $y(\cdot)$ is a solution to the differential inclusion $x' \in F(t,x)$ starting at $x(0) = y(\tau) \in P(0) = K$ and satisfying $x(\tau) = y$. Hence $y \in \vartheta_F(\tau, K)$.□

Proposition 4.17 *Let K be a compact subset of $\mathbb{R}^n$ and S a compact, convex, and symmetric set. The dilation tube $K_S(t) = K \oplus tS$ associated with the structuring element S is a viability tube for $F(x) = \dfrac{\partial d_K^S(x)}{j_S(S^*)}$ where $j_S(S^*) = \sup_{p \in S^*} j_S(p)$.*

Proof: We first prove that, for any $z \in \Pi_K^S(x)$, we have $\frac{\partial j_S(x-z)}{j_S(S^*)} \in DK(t,x)(1)$.

Indeed, consider $x \in K_S(t)$ and $p \in \frac{\partial j_S(x-z)}{j_S(S^*)}$.

We have

$$\begin{cases} d_K^S(x+hp) & \leq j_S(x+hp-z) \\ & \leq j_S(x-z) + hj_S(p) \\ & \leq d_K^S(x) + hj_S(v)/j_S(S^*). \end{cases}$$

where $v \in \partial j_S(x-z)$.

By proposition (3.6), $\partial j_S(x-z) \subset S^*$, we deduce that

$$j_S(v) \leq j_S(S^*).$$

This yields

$$d_K^S(x+hp) \leq t + h.$$

Consequently, we obtain that for any $h > 0$,

$$x + hv \in K_S(t+h).$$

This means that p belongs to the contingent epiderivative $DK_S(t,x)(1)$.

Since, by proposition (3.6), $p \in \frac{\partial d_K^S(x)}{j_S(S^*)}$, we conclude that

$$\forall t,\ \forall x \in K_S(t), F(x) \cap DK_S(t,x)(1) \neq \emptyset.$$

This concludes the proof.□

Corollary 4.18 *Let K be a compact subset of $\mathbb{R}^n$ and S a compact, convex, and symmetric set. The dilation tube $K_S(t) = K \oplus tS$ associated with the structuring element S satisfies*

$$K_S(h) \subset \vartheta_F(h, K)$$

where $F(x) = \frac{\partial d_K^S(x)}{j_S(S^*)}$.

Proof: We use the proposition (4.17) and the theorem on viability tubes (4.16). □

5 Mutational equations of the dilation

5.1 Mutations of tube

The mathematical framework of mutational equations [6, Aubin] allows us to extend the concept of differential equations to the metric space $\mathcal{K}(E)$ of all non-empty compact subsets of $\mathbb{R}^n$.

For defining mutational equations, we supply the space $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ with a distance $d\!\!l$ (for instance the Hausdorff distance).

We next associate with any set-valued map $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$, a transition $\vartheta_F(h, x) := \{x(h)\}$, which denotes the values at time h of all solutions to the differential inclusion

$$\begin{cases} x' \in F(x) \\ x(0) = x. \end{cases}$$

We extend this transition to $\mathcal{K}(E)$ by introducing

$$\vartheta_F(h, K) := \bigcup_{x \in K} \{\vartheta_F(h, x)\},$$

the reachable set from K at time h of F. The "curve" $h \mapsto \vartheta_F(h, K)$ plays the role of the half lines $h \mapsto x + hv$ for defining differential quotients.

Definition 5.1 (Mutation) *Let F be a set-valued map from $\mathbb{R}^n$ into $\mathbb{R}^n$. Consider a tube $K : \mathbb{R}^+ \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$. If, for a given $t \in \mathbb{R}^+$, the set-valued map $K(\cdot)$ satisfies*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{d\!\!l(\vartheta_F(h, K(t)), K(t+h))}{h} = 0,$$

we shall say that F is a mutation at time t of the tube K *and we shall write*

$$\overset{\circ}{K}(t) \ni F.$$

Example: Let us point out, through a simple example, that the uniqueness of the mutation is not ensured, which justifies the notation. Indeed, consider the constant tube in $\mathbb{R}^2$

$$K(t) = B$$

where B is the Euclidean unit ball.

It is clear that

$$0 \in \overset{\circ}{K}(t), \ \forall t.$$

But we can also check that the Lipschitz map defined by

$$\varphi(x, y) = (-y, x)$$

satisfies

$$\varphi \in \overset{\circ}{K}(t).$$

5.2 Mutational equations for the dilation

We note $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ the family of set-valued maps from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$. Now, if we consider a map $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{K}(E) \mapsto \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ associating with a pair (t, K) a set-valued map $x \rightsquigarrow f(t, K; x)$, we can define a mutational equation for tubes

$$\overset{\circ}{K}(t) \ \ni \ f(t, K(t); \cdot) \ , \ \forall t \geq 0$$

As a first result, dealing with the dilation, we can check the following proposition:

Proposition 5.2 *Let K be a compact subset of $\mathbb{R}^n$ and S a compact, convex, and symmetric set. The dilation tube $K_S(t) = K \oplus tS$ associated with the structuring element S satisfies*

$$\begin{cases} \overset{\circ}{K}_S(t) \ni S \\ K(0) = K. \end{cases}$$

Proof: Take $y \in \vartheta_S(h, K)$. It is clear that there exists $x \in K$ such that

$$y = x + \int_0^h x'(s)ds \in x + hS$$

Consequently $y \in K_S(h)$.

Conversely, take $y \in K_S(h)$ and consider

$$y(t) = z + t\frac{y - z}{h}$$

where $z \in \Pi_K^S(x)$.

Obviously, we have

$$y(h) = y, \ y' \in S \text{ and } y(0) = z \in K.$$

Therefore $y \in \vartheta_S(h, K)$ and thus

$$\vartheta_S(h, K) = K_S(h). \square$$

But we can be more precise in the following way. Indeed we prove here that the dilation by a compact convex structuring element with non-empty interior satisfies the following mutational equation which describes that the evolution of the dilation can be reduced to the evolution in the normal directions.

Proposition 5.3 *Let K be a compact subset of $\mathbb{R}^n$ and S a compact, convex, and symmetric structuring element with non-empty interior. The dilation tube $K_S(t) = K \oplus tS$ associated with S satisfies*

$$\begin{cases} \overset{\circ}{K}_S\ (t) \ni \frac{\partial d_K^S(\cdot)}{j_S(S^*)} \\ K_S(0) = K. \end{cases}$$

In the case of the Euclidean unit ball, we deduce:

Corollary 5.4 *Let K be a compact subset of $\mathbb{R}^n$ and B be the Euclidean unit ball of $\mathbb{R}^n$. The dilation tube $K(t) = K \oplus tB$ satisfies*

$$\begin{cases} \overset{\circ}{K}\ (t) \ni \partial d_{K(t)}^B(\cdot) \\ K(0) = K. \end{cases}$$

Let us notice that in the case of the Euclidean ball, we can construct explicitely the solution to $\overset{\circ}{K}\ (t) \ni \partial d_{K(t)}^B(\cdot)$.

Using the previous proposition, we can prove the following theorem:

Theorem 5.5 *Let K be a compact subset of $\mathbb{R}^n$ and S a compact, convex, and symmetric structuring element with non-empty interior. The dilation tube $K_S(t) = K \oplus tS$ associated with S satisfies*

$$\begin{cases} \overset{\circ}{K}_S\ (t) \ni N_{K(t)}^S(\cdot) \cap S \\ K(0) = K. \end{cases}$$

The figure 7.2.b. gives the intuition of this statement.

Proof of theorem 5.5: It follows from the fact that

$$\frac{\partial d_K^S(\cdot)}{j_S(S^*)} \subset \frac{N_K^S(\cdot) \cap S^*}{j_S(S^*)} \subset N_K^S(\cdot) \cap S$$

since $N_K^S(x)$ is a cone. We then use the proposition 5.3.□

Proof of proposition 5.3: Let us take $h > 0$ and denote $F(x) = \frac{\partial d_K^S(x)}{j_S(S^*)}$. First, corollary (4.18) leads to

$$K_S(h) \subset \vartheta_F(h, K).$$

Moreover, corollary (3.9) implies that

$$K_S(h) \subset \vartheta_F(h, K) \subset \vartheta_S(h, K).$$

But, since we also have, by proposition 5.2,

$$\vartheta_S(h, K) = K_S(h) = K \oplus hS,$$

we obtain, for any $h > 0$,

$$K_S(h) = \vartheta_F(h, K).$$

Consequently, we obtain

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\boldsymbol{d}(\vartheta_F(h, K_S(0)), K_S(h))}{h} = 0,$$

which yields

$$\overset{\circ}{K}_S\ (0) \ni \frac{\partial d^S_{K(t)}(.)}{j_S(S^*)}.$$

Moreover, since S is convex, we have

$$K_S(t+h) = K_S(t) \oplus hS,$$

and by the semi-group property for the reachable map, we can generalize the result for any $t > 0$, applying the previous ideas iteratively.□

Recapitulatory: We have obtained three useful mutations of the dilation by S:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{K}\ (t) &\ni S \\ \overset{\circ}{K}\ (t) &\ni N^S_{K(t)}(.) \cap S \\ \overset{\circ}{K}\ (t) &\ni \frac{\partial d^S_{K(t)}(.)}{j_S(S^*)} \end{aligned}$$

5.3 Comparison between dilations

The mutational approach gives a formalism to represent the evolution of tubes. But within this framework, we can also adapt fundamental theorems of the ordinary differential equations as the Nagumo or Cauchy-Lipschitz ones ([6, Aubin], [31, Doyen]). We can also adapt Lyapunov method. We use here the Cauchy-Lipschitz version for tubes to estimate the difference between the evolution of dilations governed by distinct structuring elements S_1 and S_2.

We recall first the extension of the Cauchy-Lipschitz theorem for tubes which allows to compare the evolution of sets with respect to the initial conditions and to the dynamics. Let us state that we denote by $LIP(E, \mathbb{R}^n)$ the family of Lipschitzian set-valued map from E into $\mathbb{R}^n$.

For $\psi : [0,1] \times X \to X$, we note

$$\|\psi\|_\Lambda := \sup_{h \in [0,1],\ x \neq y} \frac{\boldsymbol{d}(\psi(h,x), \psi(h,y))}{\boldsymbol{d}(x,y)} < +\infty$$

and for a mutable tube H and a mutation σ, we set

$$d_{Lip}(\sigma, \overset{\circ}{H}\ (s)) := \inf_{\tau \in \overset{\circ}{H}(s)} \boldsymbol{d}(\sigma, \tau)$$

Theorem 5.6 (Cauchy-Lipschitz) *Let E be a compact subset of $\mathbb{R}^n$. Let $H : [0,T] \to \mathcal{K}(E)$ be a continuous tube having a mutation $\overset{\circ}{H}(\cdot) \in LIP(E, \mathbb{R}^n)$ and $f : \mathcal{K}(E) \rightsquigarrow LIP(E, X)$ be a map such that*

$$\begin{cases} i) & \forall K \in \mathcal{K}(E), \ \ f(K) \text{ is nonempty closed,} \\ ii) & f \text{ is } k\text{-Lipschitz,} \\ iii) & ||f|| = \sup\limits_{K \in \mathcal{K}(E)} \sup\limits_{\psi \in f(K)} ||\psi||_\Lambda < +\infty, \\ iv) & t \to \gamma(t) = d_{LIP}(\overset{\circ}{H}(t), f(H(t))) \text{ is integrable on } [0,T]. \end{cases} \tag{7.6}$$

Let us set

$$\eta(t) = e^{(||f||+k)t} \boldsymbol{d}(K_0, H(0)) + \int_0^t e^{(||f||+k)(t-s)} d_{Lip}(\overset{\circ}{H}(s), f(H(s)))ds.$$

Then, from any $K_0 \in \mathcal{K}(E)$, starts a unique solution $K(\cdot)$ to the mutational inclusion $\overset{\circ}{K} \ni f(K)$ and we have

$$\boldsymbol{d}(K(t), H(t)) \ \leq \ \eta(t).$$

We can apply this result to compare the evolution of two dilations

$$K_{S_1}(t) = K \oplus tS_1 \text{ and } K_{S_2}(t) = K \oplus tS_2.$$

Proposition 5.7 *Let S_1, S_2 be two compact, convex, and symmetric sets of $\mathbb{R}^n$. We obtain*

$$\boldsymbol{d}(K_{S_1}(t), K_{S_2}(t)) \ \leq t\boldsymbol{d}(S_1, S_2).$$

Examples:

1. Taking in $\mathbb{R}^2$, the structuring elements $S_1 = B$ and $S_2 = [-1,1] \times [-1,1]$, we obtain

$$\boldsymbol{d}(K_{S_1}(t), K_{S_2}(t)) \ \leq t(\sqrt{2} - 1).$$

2. Taking in $\mathbb{R}^2$, the structuring elements $S_1 = B$ and S_2 the unit hexagonal structuring element, we obtain

$$\boldsymbol{d}(K_{S_1}(t), K_{S_2}(t)) \ \leq t\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Chapitre 8

The "Montagnes Russes" Algorithm for Global Optimization

Jean-Pierre Aubin & Laurent Najman

L.C.R., Thomson-CSF,
Domaine de Corbeville, 91401 Orsay, France
CEREMADE, Université Paris-Dauphine,
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny,
75775 Paris Cedex 16, France

Abstract

The "Montagnes Russes" algorithm for finding the global minima of a lower semicontinuous function (thus involving state constraints) is a descent algorithm applied to an auxiliary function whose local and global minima are the global minima of the original function. Although this auxiliary function decreases along the trajectory of any of its minimizing sequences, the original function jumps above local maxima, leaves local minima, play "Montagnes Russes" (called "American Mountains" in Russian and "Big Dipper" in American !), but, ultimately, converges to its infimum. This auxiliary function is approximated by an increasing sequence of functions defined recursively at each point of the minimizing sequence.

Résumé

L'algorithme des Montagnes Russes pour trouver un minimum global d'une fonction semi-continue inférieurement (impliquant donc des contraintes sur l'état) est un algorithme de descente appliqué à une fonction auxiliaire dont les minima locaux ou globaux sont les minima globaux de la fonction à minimiser.
Bien que cette fonction auxiliaire décroisse le long d'une de ses suites minimisantes, la fonction originale saute au dessus des maxima locaux, quitte les minima locaux, joue en quelque sorte aux "Montages Russes", mais converge vers son infimum.
Cette fonction auxiliaire est approchée par une suite croissante de fonctions définies par récurrence en chaque point de la suite minimisante.

Introduction

Let us consider the minimization problem

$$v_0 \ := \ \inf_{x \in X} V(x)$$

where

$$V : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

is a nontrivial lower semicontinuous extended function assumed to be bounded from below.

When V is differentiable, it is obviously a Lyapunov function for the continuous gradient method

$$x'(t) \ = \ -V'(x(t))$$

so that $V(x(t))$ is not increasing. Since the equilibria of this differential equation are the critical points of the function V, the gradient algorithm, when it converges, may stop at such a critical point, and in particular, at a local minimum.

An obvious way to avoid this difficulty is to ask whether V is an exponential Lyapunov function in the sense that it satisfies:

$$\forall\, t \geq 0, \ \ V(x(t)) \ \leq \ (V(x_0) - v_0)e^{-at} + v_0 \tag{8.1}$$

In this case, the limit of the solution, if it exists, would achieve the global minimum of V and provide a continuous algorithm to achieve a global minimum. But, naturally, V is not necessarily an exponential Lyapunov function for the gradient equation, except in the exceptional case when property

$$\forall\, x, \ \ V(x) - v_0 \ \leq \ \frac{1}{a}\|V'(x)\|^2$$

holds true.

A way to overcome the fact that V is not necessarily a exponential Lyapunov function for the gradient equation is to replace the latter by the simple differential inclusion

$$\forall\, t \geq 0, \ \ x'(t) \ \in \ B$$

where B denotes the unit ball of the finite dimensional vector space X, leaving open the direction to be chosen by the algorithm, and to ask whether V can be an exponential Lyapunov function for this differential inclusion. This "viability approach" does not require any regularity properties of the function V, since it is not longer involved in the definition of the dynamics of the gradient, which is replaced by the simplest differential inclusion ($x' \in B$) one can think of. In this approach, the function V is involved only through its epigraph, assumed to be closed, and by the properties of the contingent cone at its points. Observing that the contingent cone to the epigraph of a function at a point of its graph is the epigraph of the contingent epiderivative[1],

[1] Let $V : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ be a nontrivial extended function and x belong to its domain $Dom(V) := \{x \mid V(x) \neq \pm\infty\}$. The contingent epiderivative $D_\uparrow V(x)(u)$ of v at x in the direction u is equal to

$$D_\uparrow V(x)(u) := \liminf_{h \to 0+, u' \to u} \frac{V(x + hu') - V(x)}{h}$$

one can characterize this property for lower semicontinuous extended functions: Theorem 9.2.2 of VIABILITY THEORY, [10, Aubin] states that property

$$\forall\, x \in \mathrm{Dom}(V), \quad \inf_{u \in B} D_{\uparrow}V(x)(u) + a(V(x) - v_0) \;\leq\; 0 \tag{8.2}$$

is necessary and sufficient for the existence of one solution $x(\cdot)$ to $x'(t) \in B$ satisfying (8.1) starting from any given initial state $x_0 \in \mathrm{Dom}(V)$.

Observe also that the Fermat rule states that at every local minimum x of V, $0 \leq \inf_{u \in B} D_{\uparrow}V(x)(u)$. Therefore, an exponential Lyapunov function satisfying

$$\forall\, x \quad \text{such that} \;\; V(x) > v_0, \;\; \inf_{u \in B} D_{\uparrow}V(x)(u) \;\leq\; -a(V(x) - v_0) \;<\; 0$$

does not have local minima when $V(x) > v_0$.

Remark — If the function $v \mapsto D_{\uparrow}V(x)(v)$ is convex, then it is the support function of its subdifferential $\partial_{-}V(x)$ of V at x, which is the closed convex subset defined by

$$\partial_{-}V(x) \;:=\; \{p \in X^{\star} \mid \forall\, u \in X, \;\; \langle p, u\rangle \leq D_{\uparrow}V(x)(u)\}$$

(see chapter 6 of SET-VALUED ANALYSIS, [4, Aubin & Frankowska], for instance.) In this case, the above property (8.2) can be written in the form

$$\forall\, x, \;\; V(x) - v_0 \;\leq\; \frac{1}{a} d(0, -\partial_{-}V(x))$$

thanks to the minimax theorem, because

$$\left\{\begin{array}{l} \inf_{u \in B} D_{\uparrow}V(x)(u) + a(V(x) - v_0) \\ \leq\; \inf_{u \in B} \sup_{p \in \partial_{-}V(x)} \langle p, u\rangle + a(V(x) - v_0) \\ \leq\; \sup_{p \in \partial_{-}V(x)} \inf_{u \in B} \langle p, u\rangle + a(V(x) - v_0) \\ \leq\; \sup_{p \in \partial_{-}V(x)} (-\|p\|_{\star}) + a(V(x) - v_0) \\ \leq\; d(0, -\partial_{-}V(x)) + a(V(x) - v_0) \end{array}\right.$$

□

1 The Continuous Algorithm

Unfortunately, even when V is differentiable, we observe that this condition (8.2) amounts to saying that V is still an exponential Lyapunov function of the gradient equation.

If we note $\mathcal{E}p(V) := \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} \mid V(x) \leq \lambda\}$ the epigraph of V, we have the following property :

$$\mathcal{E}p(D_{\uparrow}V(x)) = T_{\mathcal{E}p(V)}(x, V(x))$$

where $T_{\mathcal{E}p(V)}(x, V(x))$ is the contingent cone to $\mathcal{E}p(V)$ at $(x, V(x))$.

See for instance Chapter 6 of SET-VALUED ANALYSIS, [4, Aubin & Frankowska] for a presentation of epidifferentiable calculus.

However, if this is not the case, Theorem 9.3.1 of VIABILITY THEORY, [10, Aubin] implies[2] the existence of the optimal exponential Lyapunov function $V_\propto$, which is the smallest lower semicontinuous exponential Lyapunov function $V_\propto$ larger than or equal to V.

This exponential Lyapunov function can take infinite values.

Consequently, for any initial state $x_0 \in \mathrm{Dom}(V_\propto)$, there exists at least one solution to the differential inclusion $x' \in B$ starting from x_0 satisfying

$$V(x(t)) \ \leq \ V_\propto(x(t)) \ \leq \ (V_\propto(x_0) - v_0)e^{-at} + v_0$$

Although we know that $V(x(t))$ converges to v_0 when $t \to +\infty$, the function $t \mapsto V(x(t))$ is not necessarily decreasing. Along such a solution, the function V jumps above local maxima, leaves local minima, play "Montagnes Russes" (called "American Mountains" in Russian and "Big Dipper" in American !), but, ultimately, converges to its infimum.

The domain of this optimal exponential Lyapunov function describes the basin of attraction of the minima, which we define as follows: If $\mathcal{S}(x)$ denotes the set of solutions to the differential inclusion $x' \in B$ starting from x, we set

$$\rho^\flat_{V,a}(x) \ := \ \inf_{x(\cdot)\in\mathcal{S}(x)} \sup_{t\geq 0} \frac{V(x(t)) - v_0}{e^{-at}}$$

We thus define the a-basin of attraction of V as

$$\mathrm{Bas}_a(V) \ := \ \left\{x \in X \mid \rho^\flat_{V,a}(x) \ < \ +\infty\right\}$$

In other words, a state x_0 belongs to the a-basin of attraction if and only if there exist a solution $x(\cdot) \in \mathcal{S}(x_0)$ and a constant c such that

$$\forall\, t \geq 0, \ \ V(x(t)) \ \leq \ ce^{-at} + v_0$$

A theorem of [8, Aubin & Byrnes] implies that the domain of $V_\propto$ is actually the basin of exponential attraction of V.

This algorithm requires in principle an *a priori* knowledge of the infimum to guarantee the convergence to a global minimum.

Actually, we shall parametrize the problem by replacing v_0 by any $\lambda \in \mathbb{R}$. We denote by $V_\propto(\cdot,\lambda)$ the optimal exponential Lyapunov function larger than V, thus satisfying : for any initial state $x_0 \in \mathrm{Dom}(V_\propto(\cdot,\lambda))$, there exists at least one solution to the differential inclusion $x' \in B$ starting from x_0 satisfying

$$V(x(t)) \ \leq \ V_\propto(x(t)) \ \leq \ (V_\propto(x_0) - \lambda)e^{-at} + \lambda$$

If $\lambda < \inf_{x\in X} V(x)$, then it is easy to prove that $V_\propto(x,\lambda) = +\infty$ for every $x \in \mathrm{Dom}(V)$, because in this case, every solution of the algorithm leaves the epigraph of V in finite time.

[2]The epigraph of an exponential Lyapunov function U is the viability domain for the system of differential inclusions

$$\begin{cases} i) & x'(t) \ \in \ B \\ ii) & w'(t) \ = \ av_0 - aw(t) \end{cases}$$

and the epigraph of the optimal exponential Lyapunov function $V_\propto$ is the viability kernel (the largest closed subset of the epigraph viable under this system) of the epigraph of V for the above system of differential inclusions (see Chapter 9 of VIABILITY THEORY, [10, Aubin]).

If $\lambda > \inf_{x\in X} V(x)$, then we observe that $V_\propto(x,\lambda) = V(x)$ for every x in the level set $\{x \mid V(x) \leq \lambda\}$. Indeed, the pair $(x, e^{-at}(V(x)-\lambda)+\lambda)$ is a solution to $(x', w') \in B \times \{a(w-\lambda)\}$ starting from $(x, V(x))$ and which remains in the epigraph of V because $e^{-at}(V(x)-\lambda)+\lambda$ increases. Therefore, every x in this level set belongs to the viability kernel of the epigraph, which is the epigraph of $V_\propto$.

Proposition 1.1 *Let $V : Dom(V) = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a k-Hölderian function of parameter β, and $V_\propto$ be the smallest exponential Lyapunov function associated. If V achieves its minimum, then $V_\propto$ is finite.*

Proof — Assume that $\inf_{x\in X} V(x) = 0$. We have to show that

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n,\ V_\propto(x_0) := \inf_{x(.)\in\mathcal{S}(x_0)} \sup_{t\geq 0} \frac{V(x(t))}{e^{-at}} < +\infty$$

Consider $x_0,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ such that $\|x_1 - x_2\| > \frac{\beta}{a}$ and $V(x_2) = 0$. We put

$$\begin{aligned} l_1 &:= \|x_1 - x_0\| \\ l_2 &:= \|x_2 - x_1\| \end{aligned}$$

We parameterize the path $(x_0, x_1) \cup (x_1, x_2)$ in the following way

$$\begin{aligned} 0 \leq s \leq l_1 \quad x(s) &:= x_0 + s\frac{x_1 - x_0}{l_1} \\ l_1 \leq s \leq l_2 + l_1 - \frac{\beta}{a} \quad x(s) &:= x_1 + \frac{x_2 - x_1}{l_2}(s - l_1) \\ l_2 + l_1 - \frac{\beta}{a} \leq s < +\infty \quad x(s) &:= x_1 + \frac{x_2 - x_1}{l_2}(l_2 - \frac{\beta e^{\frac{a}{\beta}(l_2+l_1-s)-1}}{a}) \end{aligned}$$

It is clear that $\lim_{s\to+\infty} x(s) = x_2$ and that $x(.) \in S(x_0)$. In fact, $x(.)$ is clearly continuous and

$$\begin{aligned} 0 < s < l_1 \quad x'(s) &= \frac{x_1 - x_0}{l_1} \in B \\ l_1 < s < l_2 + l_1 - \frac{\beta}{a} \quad x'(s) &= \frac{x_2 - x_1}{l_2} \in B \\ l_2 + l_1 - \frac{\beta}{a} < s < +\infty \quad x'(s) &= \frac{x_2 - x_1}{l_2} e^{\frac{a}{\beta}(l_2+l_1-s)-1} \in B \end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned} \forall s \geq l_2 + l_1 - \frac{\beta}{a},\ \frac{V(x(s))}{e^{-as}} &\leq k\frac{\|x(s) - x_2\|^\beta}{e^{-as}} \\ &\leq ke^{as}\left(l_2 - (l_2 - \frac{\beta e^{\frac{a}{\beta}(l_2+l_1-s)-1}}{a})\right)^\beta \\ &\leq ke^{as}\frac{\beta^\beta}{a} e^{a(l_2+l_1-s)}e^{-\beta} \\ &\leq k\left(\frac{\beta}{a}\right)^\beta e^{a(l_2+l_1)}e^{-\beta} \end{aligned}$$

and finally

$$V_\propto(x_0) \leq \max\Bigg(\sup_{0\leq s\leq l_1} V\left(x_0 + s\frac{x_1-x_0}{l_1}\right)e^{as}, \sup_{l_1\leq s\leq l_1+l_2-\frac{\beta}{a}} V\left(x_1 + s\frac{x_2-x_1}{l_2}\right)e^{as},$$
$$k\left(\frac{\beta}{a}\right)^\beta e^{a(l_2+l_1)}e^{-\beta}\Bigg)$$

which proves the result. □

2 The Discrete Algorithm

Let discretization step $h > 0$ be fixed.

Definition 2.1 *We shall say that a lower semicontinuous function $U \geq V$ is a discrete descent function if from any $x_0 \in \mathrm{Dom}(U)$, there exists a sequence defined by the algorithm*

$$x^h_{p+1} := x^h_p + hu^h \text{ where } u^h \in B \tag{8.3}$$

satisfying

$$U(x^h_p) \leq (1-ah)^p(U(x_0)-v_0)+v_0 \tag{8.4}$$

The knowledge of such a discrete descent function U larger than or equal to V provides a discrete "Montagnes Russes algorithm", since any cluster point of the sequence x^h_p achieves a global minimum.

We shall provide a constructive formula providing both the smallest discrete descent function larger than V and the algorithm converging to a global minimum.

Let us set $V^h_0 := V$ and define recursively the sequence of functions V^h_n by

$$V^h_n(x) := \max\left(V^h_{n-1}(x), \frac{1}{1-ah}\left(\inf_{u\in B} V^h_{n-1}(x+hu) - ahv_0\right)\right) \tag{8.5}$$

Theorem 2.2 *Let V be a nontrivial lower semicontinuous extended function assumed to be bounded from below. Then there exists a function $V^h_\propto$ which is the smallest lower semicontinuous discrete descent function larger than V, called the optimal descent function of V.*

It can be computed by the "Viability Kernel Algorithm" which provides it as a supremum of an increasing sequence of the functions V^h_n:

$$V^h_\propto(x) := \sup_{n\geq 0} V^h_n(x) \tag{8.6}$$

The set-valued map R^h defined by

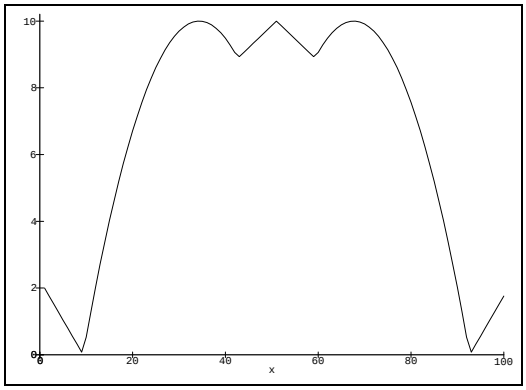
$$R^h(x) := \left\{u \in B \mid V^h_\propto(x+hu) = \inf_{w\in B} V^h_\propto(x+hw)\right\} \tag{8.7}$$

defines the "Montagnes Russes Algorithm": From any $x_0 \in \mathrm{Dom}(V^h_\propto)$, a sequence defined by the Montagnes Russes algorithm

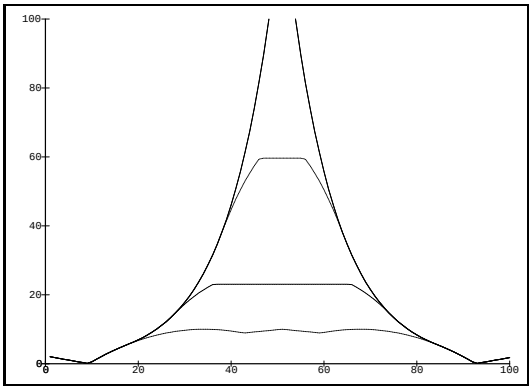
$$x^h_{p+1} := x^h_p + hu^h \text{ where } u^h \in R^h(x^h_p) \tag{8.8}$$

satisfies

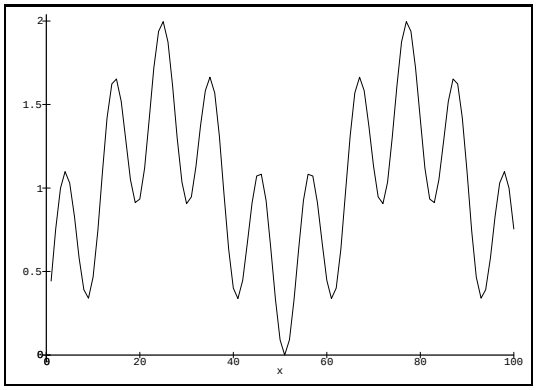
$$V(x^h_p) \leq V^h_\propto(x^h_p) \leq (1-ah)^p(V^h_\propto(x_0)-v_0)+v_0$$



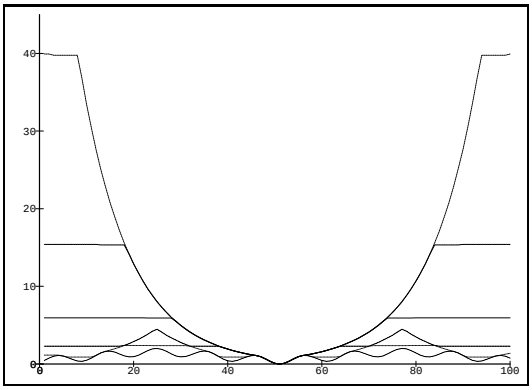
(a) Original function



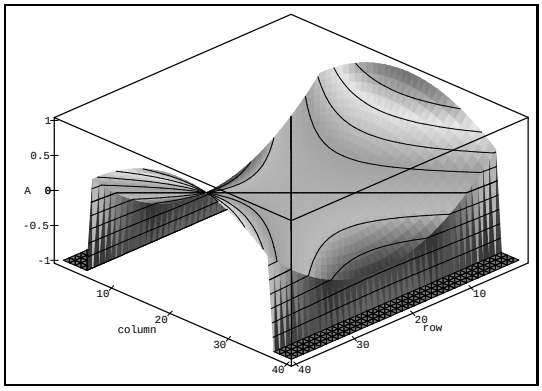
(b) Liapunov function at a different scale



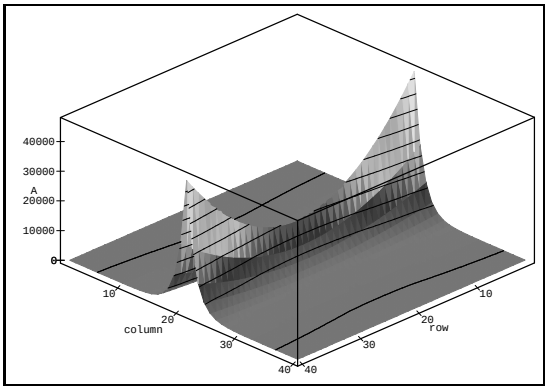
(c) Original function



(d) Liapunov function at a different scale



(e) Original function



(f) Liapunov function at a different scale

FIG. 8.1. – *Various examples of computation of Liapunov function. We show some intermediary steps of computation.*

Figure 8.1 shows some examples of computation of Liapunov functions for various original functions.

Proof — We consider the discrete set-valued dynamical system $G^h : X \times \mathbb{R} \rightsquigarrow X \times \mathbb{R}$ defined by

$$G^h(x,w) \ := \ (x+hB) \times \{w + ah(v_0 - w)\}$$

and the closed subset $\mathcal{K} \ := \ \mathrm{Ep}(V)$.

Any solution to the discrete set-valued dynamical system $(x^h_{p+1}, w^h_{p+1}) \in G^h(x^h_p, w^h_p)$ starting at $(x_0, U(x_0))$ viable in $\mathrm{Ep}(U)$ is obviously a solution to the algorithm (8.3) satisfying (8.4). Conversely, if U is a discrete descent function, then its epigraph is a discrete viability domain of G^h: Indeed, if $(x,w) \in \mathrm{Ep}(U)$, then

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+hu, w - ahw + ahv_0) \\ = \ (x+hu, (1-ah)V(x) + ahv_0) + (0, (1-ah)(w - V(x))) \\ \in \ \mathrm{Ep}(U) + \{0\} \times \mathbb{R}_+ \ = \ \mathrm{Ep}(U) \end{array} \right.$$

Since the unit ball is compact, to say that the epigraph of a lower semicontinuous extended function U is a viability domain of G^h amounts to saying that

$$\inf_{u \in B} U(x+hu) \ \leq \ (1-ah)U(x) + ahv_0$$

The solutions along which the function U decreases geometrically are given by $x^h_{p+1} = x^h_p + hu^h$ where $u^h \in R^h(x^h_p)$ where

$$R^h(x) \ := \ \left\{ u \in B \mid U(x+hu) \ = \ \inf_{w \in B} U(x+hw) \right\}$$

If V is not a discrete descent function, then its epigraph contains its (discrete) viability kernel, which is the largest closed (discrete) viable domain $\mathcal{K}_\propto$ of G^h contained in this epigraph. This viability kernel is actually the epigraph of the function $V^h_\propto$ defined by

$$V^h_\propto(x) \ := \ \inf_{(x,\lambda) \in \mathcal{K}_\propto} \lambda$$

Indeed, since

$$\mathcal{E}p(V^h_\propto) \ \subset \ \mathcal{K}_\propto + \{0\} \times \mathbb{R}_+$$

it is therefore enough to show that $\mathcal{K}_\propto + \{0\} \times \mathbb{R}_+ \subset \mathcal{K}_\propto$. In fact, we prove that *if* $\mathcal{M} \subset X \times \mathbb{R}_+$ *is a closed viability domain of* G^h*, then so is the subset*

$$\mathcal{M}_0 := \mathcal{M} + \{0\} \times \mathbb{R}_+$$

Let (x,w) belong to $\mathcal{M}_0$. To see that $G(x,w) \cap \mathcal{M}_0 \neq \emptyset$, let us set

$$U_\mathcal{M}(x) \ := \ \inf_{(x,\lambda) \in \mathcal{M}} \lambda$$

By assumption, there exists $u \in B$ such that $(x+hu, (1-ah)U_\mathcal{M}(x)) + ahv_0)$ belongs to $\mathcal{M}$ so that

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+hu, w - ahw + ahv_0) \\ = \ (x+hu, (1-ah)U_\mathcal{M}(x) + ahv_0 + (0, (1-ah)(w - U_\mathcal{M}(x))) \ \in \ \mathcal{M}_0 \end{array} \right.$$

It remains to prove formula (8.6), which is the "epigraphical version" of the finite-difference approximation of the viability kernel introduced in [11, Aubin & Saint-Pierre] (see also section 4.5 of VIABILITY THEORY, [10, Aubin]). Since $V_\propto^h$ is a discrete descent function larger than V, we see that we can associate with any x an element $u \in B$ such that $(x + hu, (1 - ah)V_\propto^h + ahv_0)$ belongs to the epigraph of V, so that

$$\frac{1}{1-ah}(\inf_{u\in B} V(x+hu) - ahv_0) \ \leq \ V_\propto^h(x)$$

and thus, such that $V_1^h(x) \leq V_\propto^h(x)$. We thus check recursively that $V_n^h(x) \leq V_\propto^h(x)$, so that

$$\sup_{n\geq 0} V_n^h(x) \ \leq \ V_\propto^h(x)$$

It remains to prove that $V^\sharp := \sup_{n\geq 0} V_n^h$ is a discrete descent function. If so, it will be larger than or equal to $V_\propto^h$, and thus, equal.

By construction of the functions V_n^h, we can associate with any x an element $u_n \in B$ such that

$$V_n(x + hu_n) \ \leq \ (1 - ah)V^\sharp(x) + ahv_0$$

Since the unit ball B is compact, there exists a subsequence (again denoted by) u_n converging to some $\widehat{u} \in B$. The sequence of functions V_n^h being nondecreasing, we deduce that

$$\liminf_{n\to\infty} V_n^h(x + hu_n) \ = \ \sup_n V_n^h(x + h\widehat{u}) \ = \ V^\sharp(x + h\widehat{u})$$

This implies that

$$\inf_{u\in B} V^\sharp(x + hu) \ \leq \ (1 - ah)V^\sharp(x) + ahv_0$$

which proves the claim. □

The second question we may ask is the following: *Is the limit of a sequence of discrete optimal exponential Lyapunov functions $V_\propto^h$ an exponential Lyapunov function larger than V?*

It depends on what we understand as "limit": the appropriate concept is the one of *lower epilimit* defined in the following way:

Definition 2.3 *The epigraph of the lower epilimit*

$$\lim\nolimits^\sharp_{\uparrow n\to\infty} V_n$$

of a sequence of extended functions $V_n : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is the upper limit of the epigraphs:

$$\mathcal{E}p(\lim\nolimits^\sharp_{\uparrow n\to\infty} V_n) \ := \ \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\mathcal{E}p(V_n)$$

One can check that

$$\lim\nolimits^\sharp_{\uparrow n\to\infty} V_n(x_0) \ = \ \liminf_{n\to\infty, x\to x_0} V_n(x)$$

and that if the sequence is increasing, that

$$\lim\nolimits^\sharp_{\uparrow n\to\infty} V_n(x_0) \ = \ \sup_{n\geq 0} V_n(x_0)$$

We refer to Chapter 7 of SET-VALUED ANALYSIS, [4, Aubin & Frankowska] for further details on *epigraphical convergence*.

Meanwhile, we deduce from Theorem 4.5.2 of VIABILITY THEORY, [10, Aubin] that

Theorem 2.4 *The lower epilimit of the sequence of optimal discrete descent functions $V^h_\propto$ is an exponential Lyapunov function larger than V.*

3 Implementation

Once the problem is discretized, we know that the algorithm

$$x^h_{p+1} \in x^h_p + hR^h(x^h_p)$$

starting from a state x_0 such that $V^h_\propto(x_0) < +\infty$ converges to the global minimum in the sense that

$$V(x^h_p) \;\leq\; V^h_\propto(x^h_p) \;\leq\; (1-ah)^p(V^h_\propto(x_0) - v_0) + v_0$$

As in the continuous case, this algorithm requires in principle an *a priori* knowledge of the infimum to guarantee the convergence to a global minimum. If $v_0 < \inf_{x\in X} V(x)$, then it is easy to prove that $V^h_\propto(x) = +\infty$ for every $x \in \mathrm{Dom}(V)$, and if $v_0 > \inf_{x\in X} V(x)$, then we observe that $V^h_\propto(x) = V(x)$ for every x in the level set $\{x \mid V(x) \leq v_0\}$.

In any case, if one does not the infimum v_0 of the function V in advance, we can replace in the definition of the function V^h_n at step $x^{h,n}_p$ the exact infimum v_0 by the smallest value v_p taken by the original function V on all the points which have been used up this time.

To implement this algorithm, we need also to compute $V^h_\propto$ at least at the points x^h_p. But the computation of the optimal discrete descent function at a point requires eventually the knowledge of every values of the original function V. This is natural because the knowledge of the global minimum requires some global knowledge of the function V.

Hence, we shall approximate further the problem by replacing the optimal discrete descent function $V^h_\propto$ by V^h_n and applying the algorithm

$$x^{h,n}_{p+1} \in x^{h,n}_p + hR^h_n(x^{h,n}_p)$$

where

$$R^h_n(x) \;:=\; \left\{u \in B \mid V^h_n(x+hu) \;=\; \inf_{w\in B} V^h_n(x+hw)\right\} \tag{8.9}$$

In this case, the knowledge of the function V^h_n at a given point x requires only the values of the original function V on a neighborhood $x + nhB$ of radius nh around x.

For simplicty, we assume from now on that $v_0 = 0$.

We observe that we always have the estimates

$$V^h_n(x) \;\leq\; V^h_{n+1}(x) \;\leq\; \frac{1}{1-ah}V^h_n(x)$$

and thus, that x *minimizes* V^h_n *on the ball* $x + hB$ *if and only if* $V^h_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1-ah}V^h_n(x)$.

If the function V^h_p is constant on the ball $x + nhB$, then we deduce that

$$V^h_{n+p}(x) \;=\; \frac{1}{(1-ah)^n}V^h_k(x)$$

We deduce by induction that:

$$\sup_{p=0,\dots,n} \frac{1}{(1-ah)^p} \inf_{u\in pB} V(x+hu) \;\le\; V_n^h(x) \;\le\; \frac{1}{(1-ah)^n} V(x)$$

We shall say that x is an a-local minimum of size nB for the discretization step h if $V_n^h(x) < V_{n+1}^h(x)$, because, in this case,

$$(1-ah)V_n^h(x) \;<\; \inf_{u\in B} V_n^h(x+hu)$$

We observe that if

$$\forall\, u \in nB,\;\; V_k^h(x+hu) \;=\; V_{k+1}^h(x+hu)$$

then

$$V_k^h(x) \;=\; V_{k+n}^h(x)$$

and that

$$\forall\, u \in nB,\;\; V_0^h(x+hu) \;<\; V_1^h(x+hu)$$

then we obtain recursively the formula

$$V_n^h(x) \;=\; \frac{1}{(1-ah)^n} \inf_{u\in nB} V(x+hu)$$

In this case, x is an a-local minimum of size nB for the discretization step h if

$$(1-ah) \inf_{u\in nB} V(x+hu) \;<\; \inf_{u\in (n+1)B} V(x+hu)$$

We can reformulate this remark by saying that if inequality

$$\frac{1}{(1-ah)^n} \inf_{u\in nB} V(x+hu) \;<\; V_n^h(x)$$

hods true, then there exists a point $y \in x + nhB$ such that $V_1^h(y) = V(y)$, at which there exists a descent direction u such that $V(y+hu) \le (1-ah)V(y)$.

If x is an a-local minimum, then we can write

$$V_{n+1}^h(x) - V_n^h(x) \;=\; \frac{1}{1-ah}(\inf_{u\in B} V_n^h(x+hu) - V_n^h(x)) + \frac{ah}{1-ah} V_n^h(x)$$

so that if x minimizes V_n^h on the ball $x + hB$, then

$$V_{n+1}^h(x) - V_n^h(x) \;=\; \frac{ah}{1-ah} V_n^h(x)$$

Assume that at the initial state x_0, we have $V_n^h(x_0) = V_{n+1}^h(x_0)$, we know that for any $x_1^h \in R_n^h(x_0)$, we have

$$\frac{1}{1-ah}(V_n^h(x_1^h) - v_0) \;\le\; V_n^h(x_0) - v_0$$

Therefore, as long as $V_n^h(x_p^h) = V_{n+1}^h(x_p^h)$, any $x_{p+1}^h \in R_n^h(x_p^h)$ satisfies

$$V_n^h(x_{p+1}^h) - v_0 \;\leq\; (1-ah)(V_n^h(x_p^h) - v_0) \;\leq\; (1-ah)^p(V_n^h(x_0) - v_0)$$

If for some q we have $0 < V_n^h(x_q^h) < V_{n+1}^h(x_q^h)$, we know that x_q^h is an a-local minimum of size nB for the discretization step h:

$$\forall\, u \in B,\;\; (1-ah)V_n^h(x_q^h) \;<\; V_n^h(x_q^h + hu) + ahv_0$$

The algorithm stops there in this case.

These two modifications of the theoretical algorithm do not guarantee anymore the convergence of the algorithm to a global minimum.

Figure 8.2 shows an example of a trajectory converging towards the minimum of a function.

4 Mathematical Morphological Tools

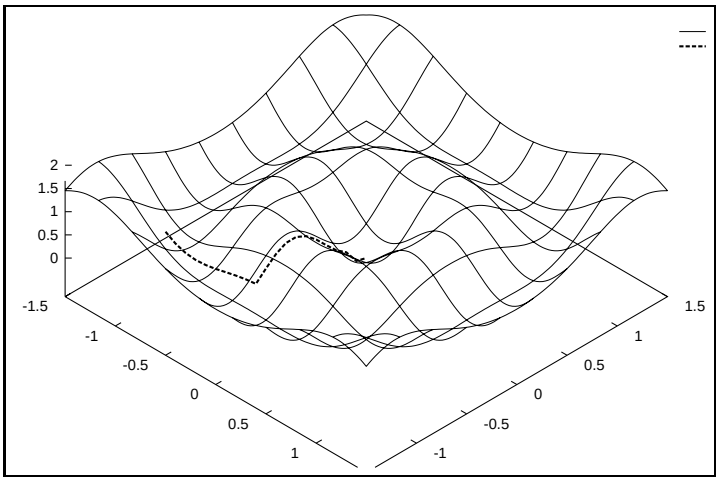
The recursive definition of the functions V_n^h involves the operation

$$\inf_{u \in B} V(x + hu)$$

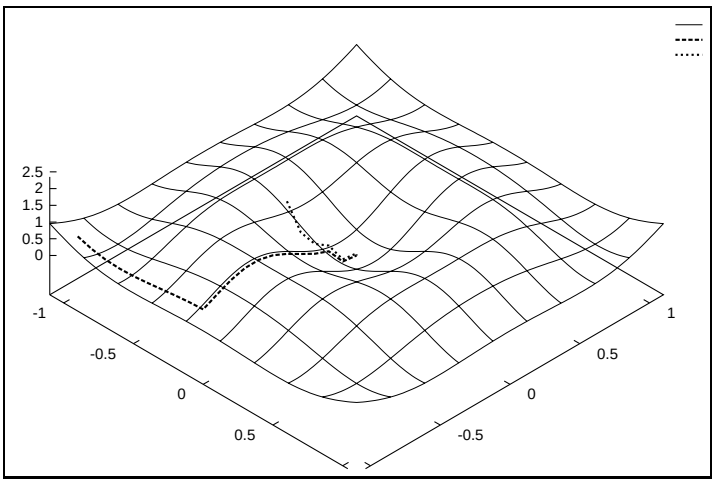
which is very familiar in mathematical morphology: this is the erosion of the function V by the structuring element B. If B is a digital ball (the cube $[-\alpha, +\alpha]^l$ when $X = \mathbb{R}^l$ for instance), this is an operation which can be easily digitalized.

Therefore, the "Montagnes Russes" algorithm uses a sequence of successive erosions, each being multiplied by factor $\eta := \dfrac{1}{1-ah}$.

Each erosion "erases" the basins of the local minima. The multiplication by the factor η raises the local minima except the global one. The domain of the optimal discrete descent function is then the basin of exponential attraction of the global minima.



(a) Trajectory towards minimum



(b) Value of Liapunov function along trajectory

FIG. 8.2. – *Example of a trajectory converging towards the minimum of the function V defined by $V(x_1, x_2) := 1 - \cos(2\sqrt{x_1^2 + x_2^2})\cos(3\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$. Note that for implementing this algorithm, we need to compute V_n^h at least at the points x_p^h. But the knowledge of the function V_n^h at a given point x requires only the values of the original function V on a neighborhood $x + nhB$ of radius nh around x.*

Chapitre 9

Lattice operators underlying dynamic systems

J. Mattioli [1], L. Doyen [2] & L. Najman [1,2]

[1] L.C.R., Thomson-CSF,
Domaine de Corbeville, 91401 Orsay, France
[2] CEREMADE, Université Paris-Dauphine,
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny,
75775 Paris Cedex 16, France

Abstract

This paper investigates algebraic and continuity properties of increasing operators underlying dynamic systems. We recall algebraic properties of increasing operators on complete lattices. The topologies used for the study of continuity properties are defined by lim sup and lim inf and $\uparrow$- and $\downarrow$-continuity of lattice operators. We apply these notions to several operators induced by differential equation or differential inclusion. We show the link between algebraic and continuity properties to dynamic systems. We can regard for instance, the operator Viab_F which with any closed subset K associated its viability kernel $\mathrm{Viab}_F(K)$ for a differential inclusion. We provide its algebraic properties, a structure of the set of its fixpoints and continuity properties.

Résumé

Cet article étudie les propriétés algébriques et de continuité d'opérateurs croissants induits par des systèmes dynamiques. On rappelera dans un premier temps les propriétés algébriques d'applications croissantes agissant sur un treillis complet. Les topologies utilisées par la suite seront définies à l'aide de lim sup et lim inf, ainsi que des $\uparrow$- et $\downarrow$- continuités, sur les treillis complets. On appliquera alors ces différentes notions à plusieurs opérateurs induits par une equation différentielle ou une inclusion différentielle. On montrera alors le lien entre les propriétés algébriques et de continuités avec les systèmes dynamiques. On étudiera par exemple, l'opérateur Viab_F qui à tout ensemble fermé K associe son noyau de viabilité $\mathrm{Viab}_F(K)$ pour une inclusion différentielle. On donnera ses propriétés algébriques, une structure de l'ensemble de ses points fixes, ainsi que ses propriétés de continuité.

1 Introduction

A complete lattice $(\mathcal{L}, \leq)$ is a partial ordered set such that every subset $\mathcal{H}$ of $\mathcal{L}$ has a supremum and and infimum denoted by $\vee\mathcal{H}$ and $\wedge\mathcal{H}$. As important examples for the following, we mention:

- The power space $\mathcal{P}(X)$, the set of all subsets of X supplied with the inclusion order $\subset$, $\mathcal{F}(X)$ the space of all closed subsets of X and $\mathcal{C}(X)$ the space of all closed convex subsets of X. The supremum and the infimum on $\mathcal{P}(X)$ and $\mathcal{C}(X)$ are given by:

$$\begin{cases} \forall\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X), & \vee\mathcal{H} = \bigcup\limits_{K\in\mathcal{H}} K \quad \textit{and} \quad \wedge\mathcal{H} = \bigcap\limits_{K\in\mathcal{H}} K \\ \forall\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(X), & \vee\mathcal{H} = \overline{\bigcup\limits_{K\in\mathcal{H}} K} \quad \textit{and} \quad \wedge\mathcal{H} = \bigcap\limits_{K\in\mathcal{H}} K \\ \forall\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X), & \vee\mathcal{H} = \overline{co}\left(\bigcup\limits_{K\in\mathcal{H}} K\right) \quad \textit{and} \quad \wedge\mathcal{H} = \bigcap\limits_{K\in\mathcal{H}} K \end{cases}$$

  where $\overline{co}(K))$ represents the closed convex hull of K.

- Every function $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ can be characterized by its hypograph $\mathcal{H}p(f)$, or by its epigraph $\mathcal{E}p(f)$. These two sets are defined by : $\mathcal{H}p(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \geq t\}$ and $\mathcal{E}p(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\}$. Then the space $\Phi^{usc}(X)$ (resp. $\Phi^{lsc}(X)$) of all upper (resp. lower) semicontinuous functions defined on X with extended values is a complete lattice for the order relationship $\forall f, g \in \Phi^{usc}(X),\ f \leq g \Leftrightarrow \mathcal{H}p(f) \subset \mathcal{H}p(g)$ (resp. $\forall f, g \in \Phi^{lsc}(X),\ f \leq g \Leftrightarrow \mathcal{E}p(f) \subset \mathcal{E}p(g)$), and the supremum and the infimum are defined by:

$$\forall f_i \in \Phi^{usc}(X), \quad \begin{cases} f = \vee f_i & \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}p(f) = \overline{\cup\mathcal{H}p(f_i)} \\ f = \wedge f_i & \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}p(f) = \cap\mathcal{H}p(f_i) \end{cases}$$

  and,

$$\forall f_i \in \Phi^{lsc}(X), \quad \begin{cases} f = \vee f_i & \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}p(f) = \overline{\cup\mathcal{E}p(f_i)} \\ f = \wedge f_i & \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}p(f) = \cap\mathcal{E}p(f_i) \end{cases}$$

The first part is devoted to algebraic properties of increasing operators (*i.e.* $\psi : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$ such that $x \leq y$ implies $\psi(x) \leq \psi(y)$ where $\mathcal{L}$ is a complete lattice for $\leq$ order. If we consider an operator $\psi\ : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$, we can classify it as a dilation, erosion, opening or closing. The main example of these characterisation is given by morphological operators in the lattice of closed subsets supply with the inclusion order. The morphological dilation of a closed subset K by a structuring element B is given by : $K \oplus \check{B} = \{k - b \mid k \in K,\ b \in B\}$. Furthermore, the study of continuity property of these operators on lattice can be done with the $\limsup$ and $\liminf$ topologies.

In this paper, we focus on operators defined on a complete lattice (in particular on the power space $\mathcal{P}(X)$, or on the space $\mathcal{F}(X)$ of closed subsets of X), induced by a differential inclusion. This paper links algebraic and continuity properties to operators underlying dynamic systems.

A differential inclusion $x'(t) \in F(x(t))$ is a generalisation of the notion of differential equation $x'(t) = f(x(t))$ where the dynamic is multivalued and non deterministic. The main example is given by control system : $F(x) = \{f(x,u)\}_{u\in U(x)}$. Many set operators can be deduced from

the framework of differential inclusions. The operator Viab_F which with any closed subset K associated its "viability kernel"[1] $\mathrm{Viab}_F(K)$ for the differential inclusion $x'(t) \in F(x(t))$, is *increasing antiextensive and idempotent.* We say that it is an *algebraic opening.* We show that it is upper-semi-continuous and we give a structure of the set of its fixpoints. The operator Inv_F which with any closed subset K associated its "invariance kernel"[2] $\mathrm{Inv}_F(K)$ for the differential inclusion $x'(t) \in F(x(t))$, is an algebraic opening which commutes with the infimum. We show that it is upper-semi-continuous and we give its dual operator in sense of the complementation.

In the last part, we will study a particular example: the differential inclusion $x'(t) \in B$ where B is a symmetrical compact convex set. As particular case of the previous results, we provide algebraic and continuity properties of the induced operators whose are morphological operators.

2 Lattice framework

In this section, we briefly recall some basic notions and some results that we shall use later on. For more details on lattice theory consult [58, 59, 18, Birkhof-MacLane].

2.1 Algebraic definitions and properties on a complete lattice

By an operator, we shall mean a mapping of a complete lattice $\mathcal{L}$ into a complete lattice $\mathcal{M}$.

Definition 2.1 *We say that an operator $\psi : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{M}$ is:*

- increasing *if $A \leq B$ implies $\psi(A) \leq \psi(B)$,*
- extensive *(resp.* antiextensive*) if $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ and $\psi(A) \geq A$ (resp. $\psi(A) \leq A$),*
- idempotent *if $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ and $\psi^2 = \psi$.*

It is obvious that if ψ is an increasing operator then for any family $K_i \in \mathcal{L}$, we have $\psi(\vee K_i) \geq \vee\psi(K_i)$ and $\psi(\wedge K_i) \leq \wedge\psi(K_i)$.

If $\mathcal{L}$ and $\mathcal{M}$ are subsets of Boolean lattices[3] (for example $\mathcal{F}(X)$ in $\mathcal{P}(X)$) then every element K in $\mathcal{L}$ (resp. in $\mathcal{M}$) has a unique complement in the Boolean lattice which we denote by K^c (in $\mathcal{P}(X)$, we have $K^c = X \setminus K$). The dual operator of an operator $\psi : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{M}$ is given by:

$$\psi^* : \mathcal{L}^* \mapsto \mathcal{M}^* \quad \text{where} \quad \psi^*(K) = (\psi(K^c))^c \text{ and } \mathcal{L}^* = \{K^c \mid K \in \mathcal{L}\}$$

[1] If K is a viability domain, then for any initial state $x_0 \in K$, there exists a solution $x(.)$ on $[0, \infty[$ to differential inclusion $x'(t) \in F(x(t))$ which satisfies $x(t) \in K$. The largest closed subset of K viable under F (which may be empty) is the viability kernel of K for F and we denote it by $\mathrm{Viab}_F(K)$.

[2] If K is an invariance domain, then for any initial state $x_0 \in K$, all solutions $x(.)$ on $[0, \infty[$ of the differential inclusion $x'(t) \in F(x(t))$ starting from x_0 which satisfies $x(t) \in K$. The largest closed subset of K invariant under F (which may be empty) is the invariant kernel of K for F and we denote it by $\mathrm{Inv}_F(K)$.

[3] In a complete lattice $\mathcal{L}$, there exists a smallest element denoted by $\emptyset$ and a greatest element denoted by E. If $x, y \in \mathcal{L}$ are such that $x \wedge y = \emptyset$ and $x \vee y = E$, the y is called a complement of x. A lattice $\mathcal{L}$ is called complemented if all elements in $\mathcal{L}$ have a complement. A Boolean lattice is complemented distributive lattice, *i.e.* every element has a unique complement and such that the supremun distributes over the infimum and conversely the infimum distributes over the supremum

It is clear that ψ^* is increasing if and only if ψ is, ψ^* is idempotent if and only if ψ is, and ψ^* is extensive if and only if ψ is anti-extensive.

For example, the space $\mathcal{F}(X)$ of all closed subsets of X and the space $\mathcal{F}^*(X)$ of all open subsets of X are duals, and we have:

$$\begin{cases} \forall \mathcal{H} \subset \mathcal{F}(X), \quad \vee\mathcal{H} = \overline{\bigcup_{K\in\mathcal{H}} K} \quad \textit{and} \quad \wedge\mathcal{H} = \bigcap_{K\in\mathcal{H}} K \\ \forall \mathcal{H} \subset \mathcal{F}^*(X), \quad \vee\mathcal{H} = \bigcup_{K\in\mathcal{H}} K \quad \textit{and} \quad \wedge\mathcal{H} = Int\left(\bigcap_{K\in\mathcal{H}} K\right) \end{cases}$$

where $Int(K)$ denotes the interior of K.

2.1.1 Algebraic dilation and erosion

Definition 2.2 [109, Serra-Vincent][45, Heijmans-Ronse] *We will say that ψ is an* algebraic dilation *(resp. an* algebraic erosion *) if ψ distributes over the suprema (resp. over the infima), i.e. $\psi(\vee K_i) = \vee\psi(K_i)$ (resp. $\psi(\wedge K_i) = \wedge\psi(K_i)$).*

In set-valued analysis [10, Aubin-Frankowska], there are two ways to extend the concept of the inverse image by a set-valued map F of a subset K: $F^{-1}(K) = \{y \in X|\ F(y) \cap K \neq \emptyset\}$ and $F^{+1}(K) = \{y \in X|\ F(y) \subset K\}$. The subset $F^{-1}(K)$ is called the inverse image of K by F and $F^{+1}(K)$ is called the core of K by F. They naturally coincide when F is a single valued, and we observe that $F^{+1}(K^c) = X \setminus F^{-1}(K)$ and $F^{-1}(K^c) = X \setminus F^{+1}(K)$.

Proposition 2.3 *Let $F : X \rightsquigarrow X$ be a set-valued map. The operator $K \mapsto F^{-1}(K)$ is an algebraic dilation and the map $K \mapsto F^{+1}(K)$ is an algebraic erosion on $\mathcal{P}(X)$ and $F^{-1}(.)$ and $F^{+1}(.)$ are dual operators, i.e. $(F^{-1})^* = F^{+1}$.*

Proof: :

$F^{+1}(\cap K_i) = \{y \in X|\ F(y) \subset (\cap K_i)\} = \{y \in X|\ \forall i,\ F(y) \subset K_i\} = \cap F^{+1}(K_i)$. By complementation, we see that $F^{-1}(\cup K_i) = \cup F^{-1}(K_i)$. ■

We give an other example. Let $F : X \rightsquigarrow X$ be a set-valued map, then the operator δ_F (resp. ε_F) defined on $\mathcal{P}(X)$ by:

$$\delta_F(K) = F(K) := \bigcup_{x\in K} F(x) \qquad \left(\text{resp. } \varepsilon_F(K) = \bigcap_{x\in K^c} [F(x)]^c\right)$$

is an algebraic dilation (resp. an algebraic erosion) and we have $\delta_F^* = \varepsilon_F$. If $F(x) = B_x$ where B is a subset of X and $B_x = B + x$ represents the translation set of B by the vector x, then $\delta_F(K) = K \oplus B$ and $\varepsilon_F(K) = K \ominus \check{B}$ where $\oplus$ and $\ominus$ are respectively the Minkowski addition and the Minkowski subtraction and $\check{B} = -B$ is the symmetric set of B.

Definition 2.4 *Let $\delta : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{M}$ and $\varepsilon : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{L}$) be two operators on a complete lattice $\mathcal{L}$. Then we will say that (ε, δ) is an* adjunction *if for every $A \in \mathcal{L}$ and for every $B \in \mathcal{M}$, we have:*

$$\delta(A) \leq B \Leftrightarrow A \leq \varepsilon(B) \tag{9.1}$$

We will denote $\varepsilon^{\circledast} = \delta$ and $\delta^{\circledast} = \varepsilon$ when (ε, δ) is an adjunction.

If (ε, δ) is an adjunction, it follows automatically that δ is an algebraic dilation and ε an algebraic erosion.

For example, in the case of Minkowski operations on $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, then the subtraction and the addition by a set B form an adjunction.

An automorphism of $\mathcal{L}$ is both an algebraic dilation and an algebraic erosion and (ψ^{-1}, ψ) and (ψ, ψ^{-1}) are adjunctions.

Proposition 2.5 [45, Heijmans-Ronse]

1. *For any algebraic dilation $\delta : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{M}$, there exists a unique algebraic erosion $\delta^{\circledast} : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{L}$ such that $(\delta^{\circledast}, \delta)$ is an adjunction.*

2. *For any algebraic erosion $\varepsilon : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{L}$, there exists a unique algebraic dilation $\varepsilon^{\circledast} : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{M}$ such that $(\varepsilon, \varepsilon^{\circledast})$ is an adjunction.*

Let $F : X \rightsquigarrow X$ be a set-valued map. The operator $K \mapsto F(K) = \cup_{x \in K} F(x)$ is a dilation and its adjoint erosion is $F^{\circledast} : K \mapsto F^{+1}(K)$ on $\mathcal{P}(X)$.

Proof: :

$F(K) \subset H \Leftrightarrow \forall x \in K,\ F(x) \subset H \Leftrightarrow \forall x \in K,\ x \in F^{+1}(H) \Leftrightarrow K \subset F^{+1}(H)$. ■

We provide two examples of adjunctions:

- Let $f, g : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ be two extended functions defined on X with real values. We defined [72] the supconvolution (resp. the infconvolution) of f by g at scale $t \geq 0$ by:

$$f \quad tg(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{f(x-ty)+tg(y)\} \quad (\text{resp. } f \uplus tg(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{f(x+ty)-tg(y)\})$$

  It is obvious that $U \ : f \mapsto f \quad tg$ is an algebraic dilation and $U_{\uplus} : f \mapsto f \uplus tg$ is an algebraic erosion on $\Phi^{usc}(X)$ and $(U_{\uplus}, U \ )$ is an adjunction.

- Let us consider two set-valued maps $F, G : X \rightsquigarrow X$ on a vector space X and $h > 0$. We say that the map $F \boxplus hG : X \rightsquigarrow Y$ defined by [75, Mattioli]

$$(F \boxplus hG)(x) \ := \bigcup_{y \in X} (F(x - hy) \oplus hG(y))$$

  is the set-convolution of F and G. The map $F \boxminus hG : X \rightsquigarrow Y$ defined by

$$(F \boxminus hG)(x) \ := \bigcap_{y \in X} (F(x + hy) \ominus hG(y))$$

  is called the internal set-convolution of F and G.

  It is obvious that the map $\Psi : F \mapsto F \boxplus G$ is an algebraic dilation and $\Phi : F \mapsto F \boxminus G$ is an algebraic erosion for every set-valued map F and G.

Proposition 9.2.1 :

Let $G : X \rightsquigarrow Y$ be a set-valued map. If $\Psi : F \to F \boxplus G$ and $\Phi : F \to F \boxminus G$ then (Φ, Ψ) is an adjunction.

Proof: :

$$\begin{aligned}
\Psi(F) \leq H &\Leftrightarrow \forall x \in X,\ F \boxplus G(x) \subset H(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in X,\ \cup_y F(x-y) \oplus G(y) \subset H(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x, y \in X,\ F(x-y) \oplus G(y) \subset H(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x, y \in X,\ F(x-y) \subset H(x) \ominus G(y) \\
&\Leftrightarrow \forall z, x \in X,\ F(z) \subset H(y+z) \ominus G(y) \\
&\Leftrightarrow \forall z \in X,\ F(z) \subset \cap_y H(y+z) \ominus G(y) \\
&\Leftrightarrow F \leq \Phi(H)
\end{aligned}$$

■

2.1.2 Algebraic opening and closing

Definition 2.6 *We will say that $\psi : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$ is an* algebraic opening *(resp. an* algebraic closing*) if ψ is increasing, idempotent and antiextensive (resp. extensive).*

The topological opening $K \mapsto Int(K)$ is an algebraic opening on $\mathcal{P}(X)$. The closed convex closure operator $K \mapsto \overline{co}(K)$ is an algebraic closing on $\mathcal{F}(X)$.

Proposition 2.7 *Given an adjunction (ε, δ), then we have $\delta\varepsilon\delta = \delta$ and $\varepsilon\delta\varepsilon = \varepsilon$. The operator $\delta\varepsilon$ is an algebraic opening and the operator $\varepsilon\delta$ is an algebraic closing.*

Proof: :

- Since ε (resp. δ) is an algebraic erosion (resp. dilation), then $\delta\varepsilon$ and $\varepsilon\delta$ are two increasing operators.
- $\varepsilon(x) \leq \varepsilon(x) \Leftrightarrow \delta\varepsilon(x) \leq x$. We deduce that $\delta\varepsilon$ is an anti-extensive operator. With the same statement, we deduce that $\varepsilon\delta$ is an extensive operator.
- Since $\delta\varepsilon(x) \leq x \Leftrightarrow \delta\varepsilon\delta\varepsilon(x) \leq \delta\varepsilon(x)$, but $\varepsilon\delta(x) \geq x \Leftrightarrow \delta\varepsilon\delta\varepsilon(x) \geq \delta\varepsilon(x)$. We can deduce that $\delta\varepsilon\delta\varepsilon = \delta\varepsilon$. With the same statement, we deduce that $\varepsilon\delta$ is an idempotent operator.

■

Remark 2.8 *We observe that if ψ is an algebraic dilation (resp. an algebraic erosion) then its dual operator ψ^* is an algebraic erosion (resp. an algebraic dilation). Furthermore, if ψ is an algebraic opening (resp. an algebraic closing) then ψ^* is an algebraic closing (resp. an algebraic opening).*

2.1.3 Subset of fixpoints of algebraic opening and closing

Definition 2.9 (Subset of fixpoints) *Let ψ be an operator on $\mathcal{L}$ and $K \in \mathcal{L}$. We say that K is a* fixpoint *of ψ if $\psi(K) = K$. The set of all fixpoints of ψ is called the* subset of fixpoints of ψ *and it is denoted by:*

$$\mathrm{Fix}(\psi) := \{K \in \mathcal{L} \mid \psi(K) = K\}$$

It is obvious that $\mathrm{Fix}(\psi)$ is ψ-closed, because $\forall K \in \mathrm{Fix}(\psi)$ we have $\psi(K) = K$, and $\psi(\psi(K)) = \psi(K)$ implies that $\psi(K) \in \mathrm{Fix}(\psi)$. Then, for every opening $\psi : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$, there is an associated subset of fix points. Since ψ is idempotent, $\mathrm{Fix}(\psi)$ is nothing but the image of $\mathcal{L}$ under ψ, *i.e.* $\mathrm{Fix}(\psi) = \psi(\mathcal{L})$.

Theorem 2.10 [99, Ronse] *Let ψ be an increasing operator on $\mathcal{L}$. Then* $\mathrm{Fix}(\psi)$ *is a complete lattice included in $\mathcal{L}$.*

Algebraic opening and closing are completely characterized by their subset of fixpoints.

Proposition 2.11 *If ψ is an opening, then its subset of fixpoints is closed under suprema, that is if $K_i \in \mathrm{Fix}(\psi)$ for $i \in I$ then $\vee_{i\in I} K_i \in \mathrm{Fix}(\psi)$. Conversely, every subset $\mathcal{B}$ of $\mathcal{L}$ which is closed under suprema is the subset of fixpoints of a unique opening ψ given by:*

$$\psi(K) = \vee\{B \in \mathcal{B} \mid B \subset K\}$$

For example, in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, the subset of fixpoints of the topological opening $K \mapsto Int(K)$ is the family of all open sets which is closed under union and invariant under translation. Moreover, the interior of a set K is the union of all open balls inside K, *i.e.*

$$Int(K) = \cup\{B \in \mathcal{B} \mid B \subset K\} \quad \text{where } \mathcal{B} \text{ is the family of all open balls}$$

Proposition 2.12 *If ϕ is a closing, then its subset of fixpoints is closed under infima, that is if $K_i \in \mathrm{Fix}(\psi)$ for $i \in I$ then $\wedge_{i\in I} K_i \in \mathrm{Fix}(\psi)$. Conversely, every subset $\mathcal{B}$ of $\mathcal{L}$ which is closed under infima is the subset of fixpoints of unique closing ϕ given by:*

$$\phi(K) = \wedge\{B \in \mathcal{B} \mid B \supset K\}$$

For example, in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, the subset of fixpoints of the closed convex closure $K \mapsto \overline{co}(K)$ is the family of all closed convex sets which is closed under intersection and invariant under translation. Moreover, the closed convex hull of a set K is the intersection of all closed half hyper-planes which contain K, *i.e.*

$$\overline{co}(K) = \cap\{B \in \mathcal{B} \mid K \subset B\} \quad \text{where } \mathcal{B} \text{ is the family of all closed half hyper-planes}$$

Proposition 2.13 [100, Ronse-Heijmans] *Let ψ be an algebraic opening and θ be an increasing antiextensive operator. Then the following four statements are equivalent:*

1. $\psi \leq \theta$, (i.e. $\forall K \in \mathcal{L},\ \psi(K) \leq \theta(K)$),

2. $\psi\theta = \psi$,

3. $\theta\psi = \psi$,

4. $\mathrm{Fix}(\psi) \subset \mathrm{Fix}(\theta)$.

From this proposition, it follows that an algebraic opening is uniquely determined by its subset of fixpoints.

Corollary 2.14 *Let* ψ_1 *and* ψ_2 *be two algebraic openings, then* $\psi_1 = \psi_2$ *if and only if* $\mathrm{Fix}(\psi_1) = \mathrm{Fix}(\psi_2)$.

2.2 Order continuity of lattice operators

Throughout this section, we assume that $\mathcal{L}$ is a complete lattice.

Definition 2.15 *For a sequence* K_n *in* $\mathcal{L}$ *we define:*

$$\begin{aligned} \liminf K_n &= \vee_{N\geq 1} \wedge_{n\geq N} K_n \\ \limsup K_n &= \wedge_{N\geq 1} \vee_{n\geq N} K_n \end{aligned}$$

Obviously, for any sequence K_n, we have $\liminf K_n \leq \limsup K_n$. We say that $K_n \to K$ if $\liminf K_n = \limsup K_n = K$.

It is clear that

$$\begin{aligned} \limsup(K_n \wedge L_n) &\leq (\limsup K_n) \wedge (\limsup L_n) \\ \limsup(K_n \vee L_n) &\geq (\limsup K_n) \vee (\limsup L_n) \end{aligned}$$

and the same relations hold for the lim inf.

For example, on the lattice $\mathcal{F}(X)$ of the closed subsets of X, the lim sup and lim inf are given by:

$$\begin{aligned} \limsup K_n &:= \bigcap_{N\geq 1} \left(\overline{\bigcup_{n\geq N} K_n} \right) \\ \liminf K_n &:= \overline{\bigcup_{N\geq 1} \left(\bigcap_{n\geq N} K_n \right)} \end{aligned}$$

If $\mathcal{L}$ is a Boolean lattice, we have:

$$\begin{aligned} \limsup K_n^c &= (\liminf K_n)^c \\ \liminf K_n^c &= (\limsup K_n)^c \end{aligned}$$

Definition 2.16 *Let* $\mathcal{L}$ *and* $\mathcal{M}$ *be two complete lattices, and let* $\psi : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{M}$ *be an arbitrary operator. We say that* ψ *is* $\downarrow$-continuous *if* $K_n \to K$ *implies that* $\limsup \psi(K_n) \leq \psi(K)$ *and that* ψ *is* $\uparrow$-continuous *if* $K_n \to K$ *implies that* $\psi(K) \leq \liminf \psi(K_n)$. *If* ψ *is both* $\uparrow$- *and* $\downarrow$-*continuous then* $K_n \to K$ *implies* $\psi(K_n) \to \psi(K)$, *and we say that* ψ *is* continuous.

We can prove that:

Proposition 2.17 [47, Heijmans-Serra]

- *Any algebraic erosion is $\downarrow$-continuous,*
- *Any algebraic dilation is $\uparrow$-continuous.*

In fact this proposition is a corollary of the following proposition:

Proposition 2.18 [47, Heijmans-Serra] *Let ψ be an increasing operator on $\mathcal{L}$. Then the operator ψ is $\downarrow$-continuous if and only if $\limsup \psi(K_n) \leq \psi(\limsup K_n)$ for any sequence K_n in $\mathcal{L}$.*

If we now consider the complete lattice $\mathcal{F}(X)$, where X is a topological space which is Hausdorff, locally compact and admits a countable base. On $\mathcal{F}(X)$, we can first define limits of sets introduced by Painlevé in 1902, and called Kuratowski upper and lower limits of sequences of sets:

Definition 2.19 [10] *Let $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ be a sequence of subsets of a metric space X. We say that the subset*

$$\operatorname*{Limsup}_{n\to\infty} K_n := \left\{x \in X \mid \liminf_{n\to\infty} d(x, K_n) = 0\right\}$$

is the upper limit *of the sequence K_n and that the subset*

$$\operatorname*{Liminf}_{n\to\infty} K_n := \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} d(x, K_n) = 0\}$$

is its lower limit. *A subset K is said to be the* limit *or the* set limit *of the sequence K_n if*

$$K = \operatorname*{Liminf}_{n\to\infty} K_n = \operatorname*{Limsup}_{n\to\infty} K_n =: \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} K_n$$

Lower and upper limits are obviously closed. We also see at once that $\mathsf{Liminf}_{n\to\infty} K_n \subset \mathsf{Limsup}_{n\to\infty} K_n$ and that the upper limits and lower limits of the subsets K_n and of their closures $\overline{K}_n$ do coincide, since $d(x, K_n) = d(x, \overline{K}_n)$, and we have:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Liminf}_{n\to\infty} K_n &= \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{N\leq 1} \bigcap_{n\geq N} (K_n \oplus \varepsilon B) \\
\operatorname*{Liminf}_{n\to\infty} K_n &= \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{N\leq 1} \bigcup_{n\geq N} (K_n \oplus \varepsilon B)
\end{aligned}$$

where B is the unit ball of X.

Any decreasing sequence of subsets K_n has a limit, which is the intersection of their closures:

$$\text{if } K_n \subset K_m \text{ when } n \geq m, \text{ then } \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} K_n = \bigcap_{n\geq 0} \overline{K_n}$$

We have obviously on $\mathcal{F}(X)$, $\mathsf{Limsup}_{n\to\infty} K_n = \limsup_{n\to\infty} K_n$.
It is easy to check that:

Proposition 2.20 [10] *If $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ is a sequence of subsets of a metric space, then* $\mathsf{Liminf}_{n\to\infty}K_n$ *is the* set of limits of sequences $x_n \in K_n$ *and* $\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}K_n$ *is the set* of cluster points of sequences $x_n \in K_n$*, i.e., of limits of subsequences* $x_{n'} \in K_{n'}$.

Definition 2.21 *Let $\psi : \mathcal{F}(X) \mapsto \mathcal{F}(X)$ be an operator. We say that ψ is* upper-semi-continuous *(u.s.c.) if $K_n \to K$ implies that* $\mathsf{Limsup}_{n\to\infty}\psi(K_n) \subseteq \psi(K)$ *and that ψ is* lower-semi-continuous *(l.s.c.) if $K_n \to K$ implies that* $\psi(K) \subseteq \mathsf{Liminf}_{n\to\infty}\psi(K_n)$*. If ψ is both upper and lower semi-continuous then $K_n \to K$ implies $\psi(K_n) \to \psi(K)$, and we say that ψ is* continuous.

Proposition 3.3 of [47, Heijmans-Serra] is:

Proposition 2.22 *Let $\psi : \mathcal{F}(X) \mapsto \mathcal{F}(X)$ be an arbitrary operator on $\mathcal{F}(X)$.*

- *If ψ is u.s.c. then ψ is $\downarrow$-continuous,*
- *If ψ is an increasing and $\downarrow$-continuous then ψ is u.s.c.*

We deduce that every increasing erosion is u.s.c. on $\mathcal{F}(X)$.

3 Algebraic properties and differential inclusion

3.1 Differential inclusion and reachable set

In this section, we recall some operators induced by differential inclusions as the reachable map, the viability kernel map and the invariance kernel map. For more details on the differential inclusion theory and viability theory, see [9, Aubin-Cellina], [4, Aubin] or [34, Frankowska]. We will give the algebraic properties of these operators.

Control systems are often governed by a family differential equation $x'(t) = f(x(t), u(t))$ where $u(t) \in U(x(t))$. The single-valued map f describes the dynamics of the system: It associates with state x of the system and the control u the velocity $f(x, u)$ of the system. The set-valued map U describes a feedback map assigning to the state x the subset $U(x)$ of admissible controls. If we put $F(x) := f(x, U(x)) = \{f(x, u)\}_{u\in U(x)}$, then the control system is governed by the differential inclusion $x'(t) \in F(x(t))$.

Let us describe the (non deterministic) dynamics of a system by a set-valued map F from the state space X to itself. We consider initial value problems (or Cauchy problems) associated to differential inclusion

$$\text{for almost all } t \in [0, T], x'(t) \in F(x(t)) \tag{9.2}$$

satisfying the initial condition $x(0) = x_0$.

Let $F : X \rightsquigarrow X$ be a set-valued map from the vector space X to itself. We denote by $\vartheta_F(x)$ the set of solutions x to the differential inclusion :

$$\forall t \in I, \quad x'(t) \in F(x(t)), \qquad x(0) = x \tag{9.3}$$

starting at the initial state x. We also denote by $\vartheta_F(h,x)$ the set of the values $x(h)$ at time h of the solutions x of (9.3). For all subsets $K \subset X$, $\vartheta_F(h,K) = \cup_{x\in K}\vartheta_F(h,x)$ is the reachable set from X at time h of F. The reachable map $t \rightsquigarrow \vartheta_F(t,x)$ enjoys the semi-group property: $\forall t,s \geq 0,\ \ \vartheta_F(t+s,x) = \vartheta_F(t,\vartheta_F(s,x))$.

Proposition 3.1 *The operator $K \mapsto \vartheta_F(h,K)$ is an algebraic dilation on $\mathcal{P}(X)$.*

Definition 3.2 *The set-valued map $\mathrm{Acc}_F(.,t) : x \rightsquigarrow \mathrm{Acc}_F(x,t) = \bigcup_{s\leq t}\vartheta_F(x,s)$ is called the* accessibility map for F at t. *The* Accessibility tube *of x is the set-valued map $t \to \mathrm{Acc}_F(x,t)$.*

Proposition 3.3 *Let F be a Marchaud set-valued map in X. The set-valued map $\mathrm{Acc}_F(t,.) : K \mapsto \mathrm{Acc}_F(K,t) = \cup_{x\in K}\mathrm{Acc}_F(x,t)$ is a dilation on $\mathcal{F}(X)$.*

Proof: :

For any family (K_i) of closed subsets of X,
$\mathrm{Acc}_F(.,t)(\cup_i K_i) = \displaystyle\bigcup_{x\in\cup K_i}\mathrm{Acc}_F(x,t) = \cup_i \bigcup_{x\in K_i}\mathrm{Acc}_F(x,t) = \cup_i \mathrm{Acc}_F(.,t)(K_i)$. ■

3.2 Viability domain and viability kernel

Let K be a subset of the domain of F. A function $x(\cdot) : I \mapsto X$ is said to be viable in K on the interval $I \subset \mathbb{R}^+$ if and only if

$$\forall t \in I,\ \ x(t) \in K$$

We shall say that K is locally viable under F (or enjoys the local viability property for the set-valued map F) if for any initial state x_0 in K, there exist $T > 0$ and a solution on $[0,T]$ to differential inclusion (9.2) starting at x_0 which is viable in K. It is said to be (globally) viable under F (or to enjoy the (global) viability property) if we can take $T = \infty$.

Let $K \subset X$ be a subset of the vector space X, and $x \in \overline{K}$ belongs to the closure of K. The contingent cone $T_K(x)$ to K at x is defined by [10, Aubin-Frankowska]:

$$T_K(x) := \left\{ v \mid \liminf_{h\to 0^+} \frac{d(x+hv,K)}{h} = 0 \right\} \tag{9.4}$$

where $d(x,K) = \inf_{y\in K} d(x,y)$ and d is the distance on X (see fig. 9.1). In other words, v belongs to $T_K(x)$ if and only if there exist a sequence of $h_n > 0$ converging to 0^+ and a sequence of $v_n \in X$ converging to v such that $\forall n \geq 0,\ x + h_n v_n \in K$. We see obviously that $\forall x \in Int(K),\ T_K(x) = X$ where $Int(K)$ denotes the interior of K.

Definition 3.4 (Viability Domain) *Let $F : X \rightsquigarrow X$ be a nontrivial set-valued map. We shall say that a subset $K \subset \mathrm{Dom}(F)$ is a* viability domain *of F if and only if*

$$\forall x \in K, F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset$$

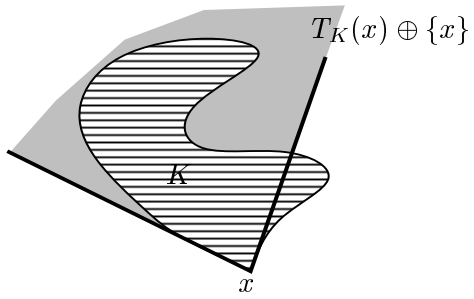


FIG. 9.1. – *Contingent cone of a subset K at x.*

Theorem 3.5 (Viability Theorem) [4, Aubin] *Consider a Marchaud map*[4] $F : X \rightsquigarrow X$ *and a closed subset* $K \subset \mathrm{Dom}(F)$ *of a finite dimensional vector space* X.

If K is a viability domain, then for any initial state $x_0 \in K$, there exists a viable *solution on* $[0, \infty[$ *to differential inclusion (9.2).*

If a closed subset K is not a viability domain, the question arises whether there are closed viability subsets of K viable under F and even, whether there exists a largest closed subset of K viable under F.

Definition 3.6 (Viability Kernel) *Let K be a subset of the domain of a set-valued map $F : X \rightsquigarrow X$. We shall say that the largest closed subset of K viable under F (which may be empty) is the* viability kernel of K for F *and denote it by* $\mathrm{Viab}_F(K)$.

Assume that $F : X \rightsquigarrow X$ is Marchaud. Then, if $\Omega \subset X$ is an open subset $\mathrm{Viab}_F(X \backslash \Omega)$ is the set of initial states x from which at least one solution never reaches Ω. It is a closed subset. We say that Ω is absorbing if this closed set is empty.

Its complement, called the absorbing domain, is the set

$$\mathrm{Abs}_F(\Omega) = X \backslash \mathrm{Viab}_F(X \backslash \Omega)$$

of initial states x from which all solutions reach Ω in finite time.

3.3 Invariance domain and invariance kernel

We shall say that a subset K is invariant under the differential inclusion (9.2) if for any initial state $x_0 \in K$, all solutions to the differential inclusion starting from it are viable in K. We then can prove the characterization of closed subsets invariant under a Lipschitz map:

Theorem 3.7 *Let us assume that $F : X \rightsquigarrow X$ is Lipschitz with nonempty compact values. Then a closed subset $K \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(F))$ is locally invariant under F if and only if K is an* invariance domain*:*

$$\forall x \in K, F(x) \subset T_K(x)$$

[4] We denote by $\|F(x)\| := \sup_{y \in F(x)} \|y\|$ and we say that F has linear growth if there exists a positive constant c such that: $\forall x \in \mathrm{Dom}(F), \|F(x)\| \leq c(\|x\|+1)$. We shall say that F is a Marchaud map if it is upper semicontinuous, has compact convex images and linear growth.

We then can introduce the concept of invariance kernels and invariance envelopes:

Definition 3.8 (Invariance Kernel, Invariance Envelope) *Let K be a closed subset. We shall say that the largest closed subset of K invariant under F (which may be empty) is the* invariance kernel of K for F *and denote it by* $\mathrm{Inv}_F(K)$. *We shall say that the smallest closed subset invariant under F containing K is the* invariance envelope of K for F *and denote it by* $\mathrm{Env}_F(K)$.

3.4 Exit Tubes

Let K be a closed subset of X and $x(\cdot) : [0, +\infty[\mapsto X$ be a continuous function. We denote by τ_K the exit functionnal associating with $x(\cdot)$ its exit time $\tau_K(x(\cdot))$ defined by [4] (See fig. 9.2):

$$\tau_K(x(\cdot)) := \inf\{t \in [0, +\infty[\mid x(t) \notin K\}$$

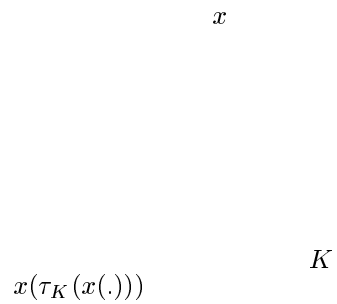


FIG. 9.2. – *Exit time.*

It is obvious that $\forall t \in [0, \tau_K(x(\cdot))[$, $x(t) \in K$, and if $\tau_K(x(\cdot))$ is finite then $x(\tau_K(x(\cdot))) \in \partial K$).

Then we can associate the function $\tau_K^\sharp : K \mapsto \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ defined by: $\tau_K^\sharp : K \mapsto \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (resp. $\tau_K^\flat : K \mapsto \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$) defined by:

$$\tau_K^\sharp(x) := \sup_{x(\cdot) \in \vartheta_F(x)} \tau_K(x(\cdot)) \quad (\text{resp. } \tau_K^\flat(x) := \inf_{x(\cdot) \in \vartheta_F(x)} \tau_K(x(\cdot)))$$

called the exit function (resp. the global exit function).

Finally, we can associate with any $t \geq 0$ the two subsets :

$$\begin{aligned} \mathrm{EXIT}_F(K, t) &:= \{x \in K \mid \tau_K^\sharp(x) \geq t\} \\ \mathrm{Exit}_F(K, t) &:= \{x \in K \mid \tau_K^\flat(x) \geq t\} \end{aligned}$$

We shall say that the set-valued map $t \mapsto \mathrm{Exit}_F(K,t)$ (resp. $t \mapsto \mathrm{EXIT}_F(K,t)$) is the exit tube (resp. the global exit tube).

One can prove [4] that *when F is Lipschitz with closed convex values, the graphs of these four tubes are closed.*

Furthermore $\mathrm{Exit}_F(K,t)$ *(resp.* $\mathrm{EXIT}_F(K,t)$*) is the subset of initial states $x \in K$ such that one solution (resp. all solutions) $x(\cdot)$ to differential inclusion* (9.3) *starting at x remains in K for all time in* $[0,t]$.

In summary, we have:

$$\begin{cases} \mathrm{Exit}_F(K,t) & = \vartheta_F^{-1}\{x(\cdot) \mid \forall s \in [0,t], x(s) \in K\} \\ \mathrm{EXIT}_F(K,t) & = \vartheta_F^{+1}\{x(\cdot) \mid \forall s \in [0,t], x(s) \in K\} \end{cases}$$

When $t_1 \leq t_2$ then: $\mathrm{Exit}_F(K,t_2) \subseteq \mathrm{Exit}_F(K,t_1) \subseteq ... \subseteq \mathrm{Exit}_F(K,0) = K$.
In particular, for $t = +\infty$,

$$\mathrm{Viab}_F(K) = \mathrm{Exit}_F(K,+\infty) = \bigcap_{t \geq 0} \mathrm{Exit}_F(K,t) \quad \text{and} \quad \mathrm{Inv}_F(K) = \bigcap_{t \geq 0} \mathrm{EXIT}_F(K,t)$$

Let $F : X \rightsquigarrow X$ be a set-valued map. The operator $K \mapsto Exit_F(K,t)$ is an increasing antiextensive operator.

Proposition 3.9 *Let $F : X \rightsquigarrow X$ be a set-valued map. The operator $EXIT_F(.,t) : K \mapsto \mathrm{EXIT}_F(K,t)$ is an algebraic erosion on $\mathcal{F}(X)$.*

Proof: :

Since $EXIT_F(.,t)(K) = \mathrm{EXIT}_F(K,t) = \{x \in K \mid \forall s \leq t,\ \vartheta_F(s,x) \subset K\}$, it is obvious that: $EXIT_F(.,t)(\cap K_i) = \mathrm{EXIT}_F(\cap K_i,t) = \cap \mathrm{EXIT}_F(K_i,t) = \cap EXIT_F(.,t)(K_i)$. ■

Let $F : X \rightsquigarrow X$ be a Marchaud map, then $K \mapsto \vartheta_F(h,K)$ is $\uparrow$-continuous, since this operator is an algebraic dilation on $\mathcal{P}(X)$, and $K \mapsto EXIT_F(.,t)(K) = EXIT_F(K,t)$ is $\downarrow$-continuous as an algebraic erosion on $\mathcal{F}(X)$. Since $K \mapsto EXIT_F(.,t)(K)$ is increasing and $\downarrow$-continuous, we deduce that

Proposition 3.10 *Let $F : X \rightsquigarrow X$ be a Marchaud map. The operator $EXIT_F(.,t) : K \mapsto EXIT_F(K,t)$ is u.s.c. on $\mathcal{F}(X)$.*

3.5 Accessibility tube

Let $F : X \rightsquigarrow X$ be a Marchaud set-valued map. Let $\vartheta_F(h,x)$ be the set of the values $x(h)$ at time h of the solutions x of (9.3). We recall that the Accessibility tube of x is the set-valued map $t \to \mathrm{Acc}_F(x,t) = \bigcup_{s \leq t} \vartheta_F(x,s)$.

Proposition 3.11 [71, Mattioli]

- *Let F be a Lispchitz set-valued map with compact convex values in X, then $Exit_F(K,h) \subseteq \mathrm{Acc}_F(.,h)^{-1}(K)$,*
- *Let F be a Marchaud set-valued map in X, then $EXIT_F(K,h) = \mathrm{Acc}_F(.,h)^{+1}(K)$.*

Proof: :

$$\begin{aligned}
Exit_F(K,h) &= \{x \in K | \sup_{x(\cdot)\in\vartheta_F(x)} \tau_K(x(\cdot)) \geq t\} \\
&= \{x \in K \mid \exists x(\cdot) \in \vartheta_F(x),\ \tau_K(x(\cdot)) \geq t\} \\
&= \{x \in K \mid \exists x(\cdot) \in \vartheta_F(x),\ \forall t \leq h,\ x(t) \in K\} \\
&\subseteq \{x \in K \mid \forall t \leq h,\ \exists x(\cdot) \in \vartheta_F(x),\ x(t) \in K\} \\
&\subseteq \{x \in X \mid \forall t \leq h,\ \ \vartheta_F(t,x) \cap K \neq \emptyset\} \\
&\subseteq \{x \in X \mid \bigcup_{t\leq h} \vartheta_F(t,x) \cap K \neq \emptyset\} \\
&\subseteq \mathrm{Acc}_F(.,h)^{-1}(K)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EXIT_F(K,h) &= \{x \in K \mid \inf_{x(\cdot)\in\vartheta_F(x)} \tau_K(x(\cdot)) \geq t\} \\
&= \{x \in K \mid \forall x(\cdot) \in \vartheta_F(x),\ \tau_K(x(\cdot)) \geq t\} \\
&= \{x \in K \mid \forall x(\cdot) \in \vartheta_F(x),\ \forall t \leq h,\ x(t) \in K\} \\
&= \{x \in K \mid \forall t \leq h,\ \forall x(\cdot) \in \vartheta_F(x),\ x(t) \in K\} \\
&= \{x \in X \mid \forall t \leq h,\ \vartheta_F(t,x) \subset K\} \\
&= \{x \in X \mid \bigcup_{t\leq h} \vartheta_F(t,x) \subset K\} \\
&= \mathrm{Acc}_F(.,h)^{+1}(K)
\end{aligned}$$

■

Theorem 3.12 *Let F be a Marchaud set-valued map in X. Let us consider the two operators on $\mathcal{P}(X)$: $EXIT_F(.,t) : K \mapsto EXIT_F(K,t)$ and $\mathrm{Acc}_F(.,t) : K \mapsto \mathrm{Acc}_F(K,t)$. Then $EXIT_F(.,t)^{\circledast} = \mathrm{Acc}_F(.,t)$ on $\mathcal{P}(X)$.*

Proof: :

For any $K, H \in \mathcal{F}(X)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Acc}_F(.,t)(K) \subset H &\Leftrightarrow \bigcup_{s\leq t} \vartheta_F(s,K) \subset H \\
&\Leftrightarrow \forall x \in K,\ \forall s \leq t,\ \vartheta_F(s,x) \subset H \text{ (In particular } x \in H) \\
&\Leftrightarrow K \subset EXIT_F(H,t) = \{x \in H \mid \forall s \leq t,\ \vartheta_F(s,x) \subset H\} \\
&\Leftrightarrow K \subset EXIT_F(.,t)(H)
\end{aligned}$$

■

It follows from proposition 2.7 that :

Corollary 3.13 *The operator* $K \mapsto \mathrm{Acc}_F(EXIT_F(K,t),t)$ *is an algebraic opening and the operator* $K \mapsto EXIT_F(\mathrm{Acc}_F(K,t),t)$ *is an algebraic closing on* $\mathcal{P}(X)$.

3.6 Properties of the viability kernel

Let us consider a Marchaud map $F : X \rightsquigarrow X$. Let Viab_F be the following operator on $\mathcal{F}(X)$ defined by $\mathrm{Viab}_F : K \mapsto \mathrm{Viab}_F(K)$. In this section, we will study some properties of this operator.

3.6.1 Algebraic properties

We first recall a characterization of the viability kernel.

Theorem 3.14 [4] *Let* $F : X \rightsquigarrow X$ *be a Marchaud map and* $K \subset \mathrm{Dom}(F) = \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$ *be closed. Then the viability kernel of* K *exists (possibly empty) and is equal to the subset of initial states such that at least one solution starting from them is viable in* K*:*

$$\mathrm{Viab}_F(K) = \vartheta_F^{-1}\{x(\cdot) \mid \forall t \geq 0, x(t) \in K\}$$

Proposition 3.15 *The operator* $\mathrm{Viab}_F : K \mapsto \mathrm{Viab}_F(K)$ *is an algebraic opening on* $\mathcal{F}(X)$.

Proof: :

- By theorem 3.14, Viab_F is idempotent.
- It is obvious that Viab_F is anti-extensive because $\forall K \in \mathcal{F}(X), \quad \mathrm{Viab}_F(K) \subset K$.
- Viab_F is increasing: Suppose that $K \subset L$, $\forall x \in \mathrm{Viab}_F(K)$, $\exists x(.)$ such that $\forall t \in [0,T]$, $x(t) = \vartheta_F(t,x)$ and $x(t) \in K \subset L$, this implies $x \in \mathrm{Viab}_F(L)$, then we deduce that $\mathrm{Viab}_F(K) \subset \mathrm{Viab}_F(L)$.

■

It follows from proposition 2.8 that:

Corollary 3.16 *The operator* $\mathrm{Abs}_F(.)$ *defined by* $\mathrm{Abs}_F(\Omega) = X \backslash \mathrm{Viab}_F(X \backslash \Omega)$ *is an algebraic closing on the space* $\mathcal{F}^*(X)$ *of all open subsets of* X.

Since Viab_F is increasing, for all family (K_i), we have:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Viab}_F(\cap_i K_i) & \subset & \cap_i \mathrm{Viab}_F(K_i) \\ \mathrm{Viab}_F(\overline{\cup_i K_i}) & \supset & \overline{\cup_i \mathrm{Viab}_F(K_i)} \end{array}$$

Let $F : X \rightsquigarrow X$ be a Lipschitz and Marchaud set-valued map. Then from proposition 2.13 we deduce that:

$$\forall K \in \mathcal{F}(X), \ \forall t \geq 0, \quad \mathrm{Viab}_F(Exit_F(t,K)) = Exit_F(t, \mathrm{Viab}_F(K)) = \mathrm{Viab}_F(K)$$

3.6.2 Continuity property

Proposition 3.17 [4, Aubin, Corollary 4.1.5.] *Let us consider a set-valued map $F : X \rightsquigarrow X$ satisfying uniform linear growth and an arbitrary sequence of closed sets K_n.*

Then $\mathsf{Limsup}_{n\to\infty}\mathrm{Viab}_F(K_n) \subset \mathrm{Viab}_F(\mathsf{Limsup}_{n\to\infty}K_n)$.

From this proposition, it is obvious that Viab_F is a $\downarrow$-continuous map. Since Viab_F is increasing, from proposition 2.22 we have:

Corollary 3.18 *Let $F : X \rightsquigarrow X$ be a Marchaud map. Let $\mathrm{Viab}_F : \mathcal{F}(X) \mapsto \mathcal{F}(X)$ be defined $K \mapsto \mathrm{Viab}_F(K)$ then Viab_F is u.s.c..*

3.6.3 Set of fixpoints

From proposition 3.15, we deduce that $\mathrm{Viab}_F(K) = \cup\{L \in \mathcal{F}(X) \mid L \in \mathrm{Fix}(\mathrm{Viab}_F) \;\; L \subset K\}$ where $\mathrm{Fix}(\mathrm{Viab}_F)$ is the set of all viability domains for F. This set is a complete lattice. The domain of the solution map ϑ_F is the largest closed viability domain contained in the domain of F, and:

$$\begin{aligned} \wedge\mathrm{Fix}(\mathrm{Viab}_F) &= \emptyset \\ \vee\mathrm{Fix}(\mathrm{Viab}_F) &= \mathrm{Dom}(\vartheta_F) \end{aligned}$$

Definition 3.19 (Limit set) *Let $x(\cdot)$ be a solution to differential inclusion (9.2). We say that the subset*

$$\omega_F(x(\cdot)) := \bigcap_{T>0} cl(x([T,\infty[)) = \limsup_{t\to+\infty}\{x(t)\}$$

of its cluster points when $t \to \infty$ is the limit set *of $x(\cdot)$. If K is a subset of $\mathrm{Dom}(\vartheta_F)$ and $\vartheta_F(.,K)$ the reachable map, we denote by $\omega_F(K) := \limsup_{t\to+\infty}\vartheta_F(t,K)$ the ω-limit set of the subset K.*

Proposition 3.20 (Limit sets are viability domains) *Let us consider a Marchaud map $F : X \rightsquigarrow X$. Then the limit sets of the solutions to differential inclusion (9.2) are closed viability domains which are connected when $\omega_F(x(\cdot))$ are compact. In particular, the limits of solutions to differential inclusion (9.2), when they exist, are equilibria of F and the trajectories of periodic solutions to the differential inclusion (9.2) are also closed viability domains.*

Proposition 3.21 *Let $F : X \rightsquigarrow X$ be a Marchaud map. Then for all $x \in K$ and for all $x(.) \in \vartheta_F(x) \cap K$:*

$$\mathbb{E}_F(x(.)) = \left(\bigcup_{t\geq 0}\{x(t)\}\right) \cup \omega_F(x(.))$$

is a closed viability domain and,

$$\mathrm{Viab}_F(K) = \bigcup_{x\in K}\left(\bigcup_{x(.)\in\vartheta_F(x)\cap K}\mathbb{E}_F(x(.))\right)$$

Proof: :

$\forall x \in \mathrm{Viab}_F(K)$, the subset $\{x\}$ is contained into a minimal closed viability domain (Zorn's lemma for the inclusion order on the family of non empty closed viability domains of F). Minimal domains which contain x are $V(x) = \bigcup_{x(.)\in\vartheta_F(x)\cap K} \mathbb{E}_F(x(.))$. It is clear that $\mathrm{Viab}_F(K) = \bigcup_{x\in K} V(x)$.

- Let us consider, for all $x \in K$ and for all $x(.) \in \vartheta_F(x) \cap K$, the following set $\mathbb{E}_F(x(.)) = \left(\bigcup_{t\geq 0}\{x(t)\}\right) \cup \omega_F(x(.))$, where $x(.) \in \vartheta_F(x) \cap K$. The set $\mathbb{E}_F(x(.))$ is a viability domain because $\forall y \in \mathbb{E}_F(x(.))$, we have $y = x(t)$ or $y = \lim_{t_n\to\infty} x(t_n)$ then $y(.) = x(. - t)$ or $y(.) = x(. - t_n)$ is a solution viable in $\mathbb{E}_F(x(.))$.
- $\forall x \in V(x)$, $\exists x(.) \in \vartheta_F(x)$ viable in $V(x)$, then $\forall t \geq 0$, $x(t) \in V(x)$. We deduce that $\mathbb{E}_F(x) \subset V(x)$. Since $\mathbb{E}_F(x(.))$ is a viability domain for one of the solutions of the differential inclusion (9.3) and $V(x)$ is a minimal closed viability domain contain in K, we have $V(x) = \bigcup_{x(.)\in\vartheta_F(x)\cap K} \mathbb{E}_F(x(.))$.
- Since $\forall y \in \mathbb{E}_F(x(.)) \Rightarrow \mathbb{E}_F(y(.)) \subset \mathbb{E}_F(x(.))$, we have a preorder relationship $x(.) \succ y(.) \Rightarrow \mathbb{E}_F(y(.)) \subset \mathbb{E}_F(x(.))$. Therefore for every point $x \in K$, the subset $\{x\}$ is contained in a minimal element $\mathbb{E}_F(x(.))$ for this preorder.

■

We can deduce that :

$$\mathrm{Viab}_F(K) = \bigcup\{E \in \mathcal{E} \mid E \subset K\} \text{ where } \mathcal{E} = \bigcup_{x\in X} \bigcup_{x(.)\in\vartheta_F(x)} \mathbb{E}_F(x(.))$$

3.7 Properties of the invariance kernel and invariance envelope

Let us consider a Marchaud map $F : X \rightsquigarrow X$. Let Inv_F be the following operator on $\mathcal{F}(X)$ defined by $K \mapsto \mathrm{Inv}_F(K)$. In this section, we will study some algebraic properties of this operator.

Let us recall a useful characterization of the invariance kernel:

Theorem 3.22 *Let us consider a Lipschitz map $F : X \rightsquigarrow X$ with closed values. Let K be closed. Then the invariance kernel of K exists (possibly empty) and is equal to the subset of initial states such that all solutions starting from them is viable in K:*

$$\mathrm{Inv}_F(K) = \vartheta_F^{+1}\{x(\cdot) \mid \forall t \geq 0, x(t) \in K\}$$

From theorem 3.22, it is easy to deduce that:

Proposition 3.23 *The operator $\mathrm{Inv}_F : K \mapsto \mathrm{Inv}_F(K)$ is an increasing algebraic erosion and an algebraic opening on $\mathcal{F}(X)$.*

It is clear that $\mathrm{Inv}_F(K_1 \cap K_2) = \mathrm{Inv}_F(K_1) \cap \mathrm{Inv}_F(K_2)$ and more generally, that the invariance kernel of any intersection of closed subsets K_i $(i \in I)$ is the intersection of invariances kernels of the K_i.

It follows that:

Proposition 3.24 *The operator* $\mathrm{Inv}_F : K \mapsto \mathrm{Inv}_F(K)$ *is u.s.c. on* $\mathcal{F}(X)$.

Proposition 3.25 [4, Aubin, Proposition 5.4.5.] *Let us assume that the solution map* ϑ_F *is lower semicontinuous from* Ω *to* $\mathcal{C}(0,\infty;X) = \{f : [0,\infty] \mapsto X$ *which is continuous*$\}$. *Then the lower limit of closed subsets* $K_n \subset \Omega$ *invariant under* F *is also invariant under* F. *In particular, the lower limit of the invariance kernels of a sequences of closed subsets* $K_n \subset \Omega$ *contains the invariance kernels of the lower limit of the sequence* K_n*:*

$$\operatorname*{Liminf}_{n\to\infty}(\mathrm{Inv}_F(K_n)) \supset \mathrm{Inv}_F\left(\operatorname*{Liminf}_{n\to\infty}(K_n)\right)$$

It follows that if the solution map ϑ_F is lower semicontinuous, then the operator $\mathrm{Inv}_F : K \mapsto \mathrm{Inv}_F(K)$ is $\uparrow$-continuous. Since it is an algebraic erosion, it is $\downarrow$-continuous. We deduce that, under the previous assumptions, the operator $\mathrm{Inv}_F : K \mapsto \mathrm{Inv}_F(K)$ is continuous.

Proposition 3.26 [95, 96, Quincampoix] *Assume that* $F : X \rightsquigarrow X$ *is Lipschitz with non empty closed values. Then the invariance envelope and the accessibility map are related by:*

$$\mathrm{Env}_F(K) = \overline{\mathrm{Acc}_F(K,+\infty)}$$

Furthermore, if we suppose that $K = \overline{Int(K)}$ *then:*

$$\mathrm{Env}_F(K) = \overline{X \setminus \mathrm{Inv}_{-F}\hat{K}} \qquad \textit{where } \hat{K} = \overline{X \setminus K}$$

Let $F : X \rightsquigarrow X$ be Lipschitz with non empty closed values. Let K, H be two non empty closed subsets of X, then:

- if $H \subset K$ then $\mathrm{Env}_F(H) \subset \mathrm{Env}_F(K)$,
- $\mathrm{Env}_F(H \cap K) \subset \mathrm{Env}_F(H) \cap \mathrm{Env}_F(K)$,
- the subset K is invariant if and only if $K = \mathrm{Env}_F(K)$.

It follows that:

Proposition 3.27 *The operator* $\mathrm{Env}_F : K \mapsto \mathrm{Env}_F(K)$ *is an algebraic dilation and closing on* $\mathcal{F}(X) \cap \{K = \overline{Int(K)}\}$.

Since the intersection of two invariance domains is still an invariance domain, the invariance envelope $\mathrm{Env}_F(K)$ is defined as the intersection of all closed subsets containing K. Then we obtain: $\mathrm{Env}_F(K) = \cap\{B \in \mathcal{B} \mid K \subset B\}$ where $\mathcal{B}$ is the family of all invariant domains under F.

4 Application to morphological operators

Let B be a subset of a topological vector space X. We consider the multivalued map T_B defined by: $T_B(x) = B_x = \{x + b \text{ where } b \in B\} = B \oplus \{x\}$. We put $\check{B} = -B = \{-b \mid b \in B\}$ the symmetrical set of B.

We recall [66, Matheron] that if K and B are two subsets of X,

- The morphological dilation of K by B is defined by: $K \oplus \check{B} = \{x \mid B_x \cap K \neq \emptyset\}$.
- The morphological erosion of K by B is defined by: $K \ominus \check{B} = \{x \mid B_x \subset K\}$.
- The morphological opening of K by B is defined by: $K_B = (K \ominus \check{B}) \oplus B = \cup_x \{B_x \mid B_x \subset K\}$.
- The morphological closing of K by B is defined by: $K^B = (K \oplus \check{B}) \ominus B$.

It is obvious that the morphological dilation (resp. erosion, opening, closing) is an algebraic dilation (resp. erosion, opening, closing), and we have:

$$T_B^{-1}(K) = \{x \mid B_x \cap K \neq \emptyset\} = K \oplus \check{B} \quad \text{and} \quad T_B^{+1}(K) = \{x \mid B_x \subset K\} = K \ominus \check{B}$$

From formula (2.8), it follows that: $M_K^{+1}(X^c) = M_K^{-1}(X)^c \Leftrightarrow X^c \oplus \check{K} = \left(X \ominus \check{K}\right)^c$, then the operators $K \mapsto K \oplus \check{B}$ and $K \mapsto K \ominus \check{B}$ are duals.

We observe at once that, if F is the constant set-valued map $y \rightsquigarrow F(y) = B$ where B is a compact convex set, then $\vartheta_F(h, K) = K \oplus hB$ is the Minkowski addition of K by the homothetic of B at scale h. In fact, we have: $\vartheta_F(h, x) = \{x(h) \mid x'(t) \in F(x(t)) \ \& \ x(0) = x\}$. Then, differential inclusion (9.3) is equivalent to $x'(t) \in B$ and $x(0) = x$, i.e. $x(h) = x + \int_0^h b(t)dt$ for $b(t) \in B$. Under the convexity assumption of B, we deduce that $\vartheta_F(h, x) = \{x\} \oplus hB$, and we finally obtain $\vartheta_F(h, K) = \cup_{x \in K}\{\vartheta_F(h, x)\} = \cup_{x \in K}\{x\} \oplus hB = K \oplus hB$.

We say that B is a barrel set of the finite dimensional vector space X if B is a convex, symmetric (i.e. $-B = B$), compact set with non-empty interior. We can equip the space X with a metric derived from a norm associated with a barrel set B defined by: $\|\cdot\|_B$: $\|x\|_B = \min\{\lambda,\ \lambda \geq 0;\ x \in \lambda B\}$ and the induced distance d^B is defined by: [104]

$$d^B(x, y) = \|x - y\|_B \Leftrightarrow d^B(x, y) = \min\{\lambda,\ \lambda \geq 0;\ y \in \{x\} \oplus \lambda B\} \tag{9.5}$$

i.e. $d^B(x, y)$ is the size of the biggest homothetic set of B centered on x and containing y. It is obvious that in the plane $\mathbb{R}^2$, the Euclidean norm, the L_1-norm, i.e. $\|x\|_1 = \mid x_1 + x_2 \mid$, and the L_∞-norm, i.e. $\| x\|_\infty = \sup(|x_1|, |x_2|)$ where $x = (x_1, x_2)$, are $\|\cdot\|_B$ for B respectively be a disk, a diamond and a square.

Let us now, consider the following differential inclusion: $x'(t) \in F(x(t))$ where F is the constant set-valued map equal to the barrel B, i.e. we consider the differential inclusion $x'(t) \in B$, then $\vartheta_B(h, x) = \{x\} \oplus hB$, and we have:

Proposition 4.1 *Let K be a closed subset of X and B be a compact convex subset of X containing the origin. Let $\varphi : X \to \mathbb{R}^+$ be a 1-Lipschitz single valued map, and let be $F(y) = \varphi(y)B$ for all $y \in X$. Then, for all initial state x, we have:*

$$\mathrm{Acc}_B(x,t) = \vartheta_B(t,x) = \{x\} \oplus \sup_{x(\cdot)\in\vartheta_B(x)} \left(\int_0^t \varphi(x(s))ds\right) B \tag{9.6}$$

Proof: :

We observe [9] that $\vartheta_B(h,x) = \{x\} \oplus \sup_{x(\cdot)\in\vartheta_B(x)} \left(\int_0^h \varphi(x(s))ds\right) B$ is the set of solutions of the differential inclusion $x'(t) \in \varphi(x(t))B$ with initial state $x(0) = x$. Under the assumption $O \in B$, we have: For $a < b$, $\left(\int_0^a \varphi(x(s))ds\right) B \subset \left(\int_0^b \varphi(x(s))ds\right) B$, and finally:

$$\bigcup_{h\leq t} \sup_{x(\cdot)\in\vartheta_B(x)} \left(\int_0^h \varphi(x(s))ds\right) B = \sup_{x(\cdot)\in\vartheta_B(x)} \left(\int_0^t \varphi(x(s))ds\right) B$$

■

Lemma 4.2 *Let B be a barrel and K be a compact subset of X such that $\overline{Int(K)} = K$, then we have:*

$$\forall K \in X, \quad \tau_K^\flat(x) = d^B(x, K^c)$$

where $d^B(x,y) = \|x-y\|_B$, and $d^B(x,Y) = \inf_{y\in Y} d^B(x,y)$ is the distance to K^c function associated with B.

From lemma 4.2, we deduce that:

Proposition 4.3 *Let B be a barrel and K be a compact subset of X such that $\overline{Int(K)} = K$, then we have:*

$$\begin{cases} Exit_B(K,h) & = & K & & \\ \vartheta_B(h,K) & = & \vartheta_B(h,.)^{-1}(K) & = & K \oplus hB \\ EXIT_B(K,h) & = & \vartheta_B(h,.)^{+1}(K) & = & K \ominus hB \\ \vartheta_B(h, EXIT_B(K,h)) & = & (K \ominus hB) \oplus hB & & \end{cases}$$

Bibliographie

[1] A. Aho, J. Hopcroft, and J. Ullmann. *Data Structures and Algorithms.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1983.

[2] L. Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions, and J.M. Morel. Axiomatisation et nouveaux opérateurs de la morphologie mathématique. *C.R. Acad. Sci. Paris*, pages 265–268, t.315, Série I, 1992.

[3] D.K. Arrowsmith and C.M. Place. *An introduction to Dynamical Systems.* Cambridge University Press, 1990.

[4] J.-P. Aubin. *Viability theory.* Birkhauser, Systems and Control : Foundations and Applications, 1991.

[5] J.-P. Aubin. *Morphological and Mutational Analysis, Tools for Shape Regulation and Optimization.* Commett Matari Programme, CEREMADE, University of Paris-Dauphine, France, 1993.

[6] J.-P. Aubin. Mutational Equations in Metric Spaces. *Set-Valued Analysis*, 1:pages 3–46, 1993.

[7] J.-P. Aubin. *Initiation à l'analyse contemporaine.* Masson, Paris, France, 1994.

[8] J.-P. Aubin and C. Byrnes. Approximation aux différences finies des noyaux de viabilité. Technical report, Cahiers de Mathématiques de la Décision, Université Paris-Dauphine, Paris, France, 1994. to appear.

[9] J.-P. Aubin and A. Cellina. *Differential Inclusions (Set-valued maps and viability theory).* Springer-Verlag, 1984.

[10] J.-P. Aubin and H. Frankowska. *Set-Valued Analysis.* Birkhauser, 1990. Systems and Control: Foundations and Applications.

[11] J.-P. Aubin and P. Saint-Pierre. Lyapunov Functions Associated with Attractors of Differential Inclusions. Technical report, Cahiers de Mathématiques de la Décision, Université Paris-Dauphine, Paris, France, 1994. to appear.

[12] J.P. Aubin and L. Najman. The "montagnes russes" algorithm for global optimization. In preparation, 1994.

[13] J.P. Aubin and L. Najman. The "Montagnes Russes" Algorithm for Global Optimization. In *7ème colloque franco-allemand d'optimisation*, Dijon, France, juin 1994. submitted.

[14] S. Beucher. Watersheds of functions and picture segmentation. In *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 1928–1931, Paris, may 1982.

[15] S. Beucher. *Segmentation d'images et morphologie mathématique.* Thèse, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, June 1990.

[16] S. Beucher and Ch. Lantuéjoul. Use of watersheds in contour detection. In *Proc. International Workshop on Image Processing, Real-Time Edge and Motion Detection/Estimation*, Rennes, september 1979.

[17] S. Beucher and F. Meyer. The Morphological Approach to Segmentation: The Watershed Transformation. In E.R. Dougherty, editor, *Mathematical Morphology in Image Processing*, Optical engineering, pages 433–482. Marcel Dekker, inc., New York - Basel - Hong Kong, 1993.

[18] G. Birkhoff. *Lattice Theory.* Am. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 25, 1983.

[19] R. van den Boomgaard. *Mathematical Morphology: Extensions towards Computer Vision.* PhD thesis, Amsterdam University, The Netherlands, Mars 1992.

[20] R. Brockett and P. Maragos. Evolution equations for continuous-scale morphology. In *IEEE Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, San Francisco CA, March 92 1992.

[21] J.F. Canny. A computational approach to edge detection. In M.A. Fischler and O. Firschein, editors, *Readings in Computer Vision: Issues, Problems, Principles and Paradigms*, pages 184–203. Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1986.

[22] R. Cerf. Asymptotic convergence of genetic algorithm. Ecole Normale Supérieure, France, 1991 (to appear).

[23] F.H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis.* Wiley-Intersience, 1983.

[24] R. Deriche. Using Canny's Criteria to Derive a Recursive Implemented Optimal Edge Detector. *International Journal of Computer Vision*, pages 167–187, 1987.

[25] R. Deriche and J.P. Cocquerez. Extraction de composantes connexes basée sur une détection optimale des contours. In *MARI 87*, pages 2–7, Paris, La Villette, May 1987.

[26] J. Dieudonné. *Éléments d'Analyse (Tome 1).* Gauthier-Villars, 1969.

[27] H. Digabel and Ch. Lantuéjoul. Iterative algorithms. In J-L. Chermant ed., editor, *2nd European Symposium on Quantitative Analysis of Microstructures in Material Science, Biology and Medicine*, pages 85–99, Stuttgart FRG, 1978. Riederer Verlag.

[28] L. Doyen. *Évolution, contrôle et optimisation de formes.* Thèse de Doctorat, Université Paris-Dauphine, Paris, France, juin 1993.

[29] L. Doyen. Mutational Equation for Tube and Vison Based Control. *Set Valued Analysis*, (submitted).

[30] L. Doyen. Shape Lyapunov Functions and visual Servoing. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (submitted).

[31] L. Doyen. Filippov and invariance theorems for mutational inclusions of tubes. *Journal of Set-Valued Analysis*, (to appear).

[32] L. Doyen, L. Najman, and J. Mattioli. Mutational Equations of Morphological Dilation Tubes. *Journal of Mathematical Imaging and Vision (submitted)*, 1994. Preprint Cahier de Mathématiques de la Décision, No 9369, CEREMADE, Université Paris-Dauphine - France.

[33] L. Doyen, L. Najman, and J. Mattioli. Mutational Equations of Morphological Dilation Tubes. In J. Serra, editor, *Mathematical Morphology and its Application to Signal Processing II*, ISMM'94, Fontainebleau, France, september 1994. École des Mines de Paris. submitted.

[34] H. Frankowska. *Control of nonlinear systems and differetial inclusions.* Birkhäuser, to appear.

[35] H. Frankowska and M. Quincampoix. Viability kernels of differential inclusions with constraints: algorithm and applications. *J. Math. Systems, Estimations and Control*, 1(1):371–388, 1991.

[36] F. Friedlander. A sequential algorithm for detecting watersheds on a gray level image. In *Acta Stereologica*, pages 663–668, Caen, France, September 1987. 7th Int. Congress For Stereology. Vol. 6/III.

[37] F. Friedlander. *Le traitement morphologique d'images en cardiologie nucléaire.* Thèse, École des Mines, Paris, December 1989.

[38] S. Geman and D. Geman. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6:721–741, 1984.

[39] Giraudon, G. and Deriche, R. Accurate corner detection: an analytical study. Technical Report 1420, INRIA, April 1991.

[40] Giraudon, G. and Deriche, R. On corner and vertex detection. Technical Report 1439, INRIA, June 1991.

[41] D. Goldberg. *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning.* Addison-Wesley, 1989.

[42] M. Grimaud. La Géodésie Numérique en Morphologie Mathématique : Application à la Détection Automatique de Microcalcifications en Mammographie Numérique. Thesis, École des Mines de Paris, December 1991.

[43] M. Gromov. Structures de longueurs : espaces de longueurs. In C. Houzel L. Bérard-Bergery, M. Berger, editor, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes.* CEDIC/FERNAND NATHAN, Paris, France, 1981.

[44] H.J.A.M. Heijmans. *Morphological Image Operators.* Academic Press, Boston, 1994.

[45] H.J.A.M. Heijmans and C. Ronse. The Algebraic Basis of Mathematical Morphology : I. Dilatations and Erosions. *Computer Vison, Graphics, and Image Processing*, 50:245–295, 1990.

[46] H.J.A.M Heijmans and J. Serra. Convergence, continuity and iteration in mathematical morphology. Technical Report BS-R-9104, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, The Netherlands, 1991.

[47] H.J.A.M. Heijmans and J. Serra. Convergence, continuity and iteration in mathematical morphology. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 3(No. 1):84–102, March 1992.

[48] J. Hertz, A. Krogh, and R.G. Palmer. *Introduction to the theory of neural computation.* Addison-Wesley, 1991.

[49] J.J. Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. In *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, volume 79, pages 2554–2558, 1982.

[50] B.K.P. Horn. *Robot Vision.* The MIT Engineering and Computer Science Series. The MIT Press, Mac Graw-Hill Book Company, 1986.

[51] D. H. Hubel and T. N. Wiesel. Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex. *Journal of Physiology*, 160:106–154, 1962.

[52] H. Ishii. A simple, direct proof of uniqueness for solutions of the hamilton-jacobi equations of eikonal type. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 100(2):247–251, 1987.

[53] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes : active contour models. In *IEEE Proc. 1st International Conference on Computer Vision*, pages 259–268, June 1987.

[54] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220:671–680, 1983.

[55] S. Kirkpatrick, S.D. Gelatt, and M.P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *IBM Research Report*, RC(9955), 1982.

[56] D. Knuth. *The art of computer programming, Volume 3: sorting and searching.* Addison-Wesley, 1973.

[57] W.M. Krueger and K. Phillips. The Geometry of Differential Operators with Application to Image Processing. *IEEE PAMI*, 11:1252–1264, December 1989.

[58] S. Mac Lane and G. Birkhoff. *Algèbre : Structures fondamentales*, volume I. Gauthier-Villars, 1970.

[59] S. Mac Lane and G. Birkhoff. *Algèbre : Les grands théorèmes*, volume II. Gauthier-Villars, 1971.

[60] B. Laÿ. Recursive algorithms in mathematical morphology. In *Acta Stereologica*, pages 691–696, Caen, France, 1987. Vol. 6/III,*Proc. 7th Int. Congress For Stereology,*.

[61] T. Lindeberg. Detecting Salient Blob-Like Image Structures and Their Scales with a Scale-Space Primal Sketch: A Method for Focus-of-Attention. *International Journal of Computer Vision*, 11(3):283–318, Mars 1993.

[62] P.L. Lions, E. Rouy, and A. Tourin. Shape-from-shading, viscosity solutions and edges. *Numerische Mathematik*, 64:323–353, 1993.

[63] H. Lorin. *Sorting and Sort Systems.* Addison-Wesley, 1975. The System Programming Series.

[64] J. Mallik. Interpreting line drawings of curved objects. *International Journal of Computer Vision*, 1:73–104, 1987.

[65] D. Marr. *Vision.* Freeman, San Francisco, 1982.

[66] G. Matheron. *Random Sets and Integral Geometry.* John Wiley and Sons, New York, 1975.

[67] G. Matheron. Quelques propriétés topologiques du squelette. Technical Report 560, CGMM, École des Mines, April 1978.

[68] G. Matheron. Examples of topological properties of skeletons. In J. Serra, editor, *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances.* Academic Press, London, 1988.

[69] G. Matheron. Filters and lattices. In J. Serra, editor, *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances.* Academic Press, London, 1988.

[70] G. Matheron. Les treillis compacts. Technical Report N-23/90/G, Centre de Géostatistique, École des Mines de Paris, novembre 1990.

[71] J. Mattioli. Differential Inclusions for Mathematical Morphology. In *SPIE: Image Algebra and Morphological Image Processing IV*, volume 2030, pages 12–23, San Diego, July 11-16 1993.

[72] J. Mattioli. Differential Relations of Morphological Operators. In *Mathematical Morphology and its applications to Signal Processing*, pages 162–167, Barcelona, Spain, May, 12-14 1993.

[73] J. Mattioli. *Problèmes inverses et relations différentielles en morphologie mathématique.* Thèse de Doctorat, Université Paris Dauphine, Paris, France, mai 1993.

[74] J. Mattioli. Relations différentielles d'opérations de la morphologie mathématique. *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 316, Série I:879–884, 1993.

[75] J. Mattioli. Filtering set-valued and vectorial images with set-convolutions of maps. *Set-Valued Analysis*, (submitted).

[76] J. Mattioli, L. Doyen, and L. Najman. Lattice operators underlying dynamic systems. *SIAM, Journal on Applied Mathematics*, submitted. Preprint Cahier de Mathématique de la Décision, No 94112, CEREMADE, Université Paris-Dauphine- France, and Technical Report L.C.R, No PER-94-1, 1994.

[77] F. Meyer. The perceptuel graph: A new algorithm. In *Proc. IEEE Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing,*, Paris, 1982.

[78] F. Meyer. Skeletons and perceptual graphs. *Signal Processing*, 16(4):335–363, 1989.

[79] F. Meyer. Integrals, gradients and watershed lines. In *Mathematical Morphology and its Applications to Signal Procassing*, pages 70–75, Barcelona, Spain, May, 12-14 1993.

[80] J. Milnor. *Morse Theory.* Princeton University Press, 1963.

[81] H. Minkowski. Volumen und Oberfläche. *Math. Ann.*, 57:447–495, 1903.

[82] O. Monga. An optimal region growing algorithm for image segmentation. *Int. Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 3(4), December 1987.

[83] H-H. Nagel. Displacement vectors derived from second order intensity variation in images. *Comput. Vision, Graphics, Image Processing*, 21:85–117, 1986.

[84] L. Najman and M. Schmitt. Quelques caractérisations de la ligne de partage des eaux d'une fonction continue. Technical Report ASRF-92-4, L.C.R., Août 1992.

[85] L. Najman and M. Schmitt. Definition and some properties of the watershed of a continuous function. In Gianni Vemazza, editor, *Image Processing: Theory and Applications, An International Conference*, pages 151–153, San Remo, Italy, June 1993. IPTA93, ELSEVIER.

[86] L. Najman and M. Schmitt. Definition and some properties of the watershed of a continuous function. In *Mathematical Morphology and its applications to Signal Processing*, pages 76–81, Barcelona, Spain, May, 12-14 1993.

[87] L. Najman and M. Schmitt. La Ligne de Partage des eaux : applications d'une approche continue. *Revue Technique Thomson*, 25(2):261–280, Mars 1993.

[88] L. Najman and M. Schmitt. A dynamic hierarchical segmentation algorithm. In J. Serra, editor, *Mathematical Morphology and its Application to Signal Processing II*, ISMM'94, Fontainebleau, France, september 1994. École des Mines de Paris. submitted.

[89] L. Najman and M. Schmitt. Ligne de partage des eaux. In M. Schmitt and J. Mattioli, editors, *Morphologie Mathématique*, chapter 7, pages 121–140. Masson, Paris-Milan-Barcelonne, 1994.

[90] L. Najman and M. Schmitt. Watershed of a continuous function. *Signal Processing*, 1994. to appear in special issue on Mathematical Morphology.

[91] L. Najman, R. Vaillant, and É. Pernot. From Face Sideviews to Identification. *Revue Technique Thomson*, 24(4):1037–1054, Décembre 1992.

[92] L. Najman, R. Vaillant, and É. Pernot. From Face Sideviews to Identification. In Gianni Vemazza, editor, *Image Processing: Theory and Applications, An International Conference*, pages 299–302, San Remo, Italy, June 1993. IPTA93, ELSEVIER.

[93] F. Prêteux. On a distance Function Approach for Gray-level Mathematical Morphology. In E.R. Dougherty, editor, *Mathematical Morphology in Image Processing*, Optical engineering, pages 323–350. Marcel Dekker, inc., New York - Basel - Hong Kong, 1993.

[94] F. Prêteux and N. Merlet. New concept in Mathematical Morphology: the Topographical and Differential Distance functions. In *Image Algebra and Morphological Image Processing II*, volume 1568, pages 66–77, San Diego, California, July 1991.

[95] M. Quincampoix. *Problèmes de cibles en théorie du contrôle et des jeux différentiels.* Thèse de Doctorat, Université Paris-Dauphine, 1991.

[96] M. Quincampoix. Enveloppe d'invariance pour les inclusions différentielles lipschitziennes : applications aux problèmes de cibles. *C.R. Acad. Sci. Paris*, Tome 314:343–347, 1992.

[97] M. Quincampoix and P. Saint-Pierre. An Algorithm for Viability Kernels in Hölderian case: Approximation by Discrete Viability Kernels. *J. Math. of Systems, Estimation and Control.*, 1993.

[98] R.T. Rockafellar and R. Wets. *Variational Analysis.* Springer-Verlag, 1994. To appear.

[99] C. Ronse. Lattice-Theorical Fixpoint Theorems in Morphological Image Filtering. Technical Report 92-5, Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique, Université de Bordeaux I, France, 1992.

[100] C. Ronse and H.J.A.M. Heijmans. The Algebraic Basis of Mathematical Morphology : II. Openings and Closings. *Computer Vison, Graphics, and Image Processing*, 54(1):74–97, july 1991.

[101] P. Saint-Pierre. Approximation of the viability kernel. *Applied Mathematics & Optimisation*, to appear.

[102] M. Schmitt. Des algorithmes morphologiques à l'intelligence artificielle. Thèse Ecole des Mines de Paris, February 1989.

[103] M. Schmitt. Morphologie mathématique et traitement de l'image. Mémoire d'habilitation, Université de Paris IX–Dauphine, November 1992.

[104] M. Schmitt and J. Mattioli. *Morphologie Mathématique.* Logique - Mathématiques - Informatique. Masson, Décembre 1993.

[105] M. Schmitt and L. Vincent. *Morphological image analysis: a practical and algorithmic handbook.* Cambridge University Press, To appear in 1994.

[106] L. Schwartz. *Théorie des Distributions.* Hermann, France, 1966.

[107] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology.* Academic Press, London, 1982.

[108] J. Serra, editor. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances.* Academic Press, London, 1988.

[109] J. Serra and L. Vincent. An overview of morphological filtering. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 11(1):47–108, January 1992.

[110] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry (Tome 2).* Publish Or Perish, Inc., Houston, Texas, second edition, 1979.

[111] V. Torre and T. Poggio. On edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8:147–163, March 1986.

[112] B.J.H. Verwer. *Distance Transforms: metrics, algorithms and applications.* PhD thesis, Technical University Of Delft, The Netherlands, 1991.

[113] B.J.H. Verwer and P.W. Verbeek. Shading from shape, the eikonal equation solved by grey-weighted distance transform. *Pattern Recognition Letters*, 11:681–690, October 1990.

[114] L. Vincent. *Algorithmes Morphologiques à Base de Files d'Attente et de Lacets : Extension aux Graphes.* Thèse, École des Mines, Paris, France, May 1990.

[115] L. Vincent. Morphological Algorithms. In E.R. Dougherty, editor, *Mathematical Morphology in Image Processing*, Optical engineering, pages 255–288. Marcel Dekker, inc., New York - Basel - Hong Kong, 1993.

[116] L. Vincent and J. Serra. Lectures notes on morphological filtering. Technical report, CGMM, École des Mines, 1989.

[117] L. Vincent and P. Soille. Watersheds in digital spaces: an efficient algorithm based on immersion simulations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 13(No. 6):583–598, 1991.

[118] A.P. Witkin. Scale-space filtering. In *Proc. 8th Intern. Joint Conf. Artif. Intell.*, pages 1019–1022, Karlsruhe, West Germany, 1983.

Table des Figures

1.1 Construction de la ligne de partage des eaux pour une fonction monodimensionnelle. À l'altitude h, les quatre bassins versants sont encore séparés. Puis à l'altitude $h + \Delta$, on construit un barrage pour séparer les eaux de $\mathbf{BV_2}$ et de $\mathbf{BV_3}$. 3

1.2 Illustration du processus d'immersion. 4

1.3 Extraction des contours sur un exemple, une image composée de quatre quadrants de teintes de gris différentes. L'extracteur de Canny-Deriche ne trouve pas le point multiple. 10

1.4 Comparaison de diverses possibilités de segmentation 11

1.5 Différence entre un simple calcul de la dynamique des bassins et une application de l'algorithme. 13

2.1 Vue classique et tridimensionnelle d'une image en teintes de gris. 28

2.2 Construction de la ligne de partage des eaux : approche en deux dimensions. . 29

2.3 Construction de la ligne de partage des eaux. 30

2.4 Deux exemples de zones d'influence des composantes $\mathbf{B_i}$ dans un ensemble $\mathbf{A}$. 31

2.5 Illustration du processus d'immersion par récurrence. 32

2.6 Distances aux bords sur un anneau ayant deux points surélevés proches du bord intérieur. 33

2.7 Le problème des plateaux : le choix d'un bon contour. 34

2.8 Exemple de création d'un bassin supplémentaire par la distance au bord montant. 35

2.9 Lorsque l'on munit les plateaux de la distance au bord montant des plateaux, la lpe peut connecter des objets. Ici, le plateau au niveau 0 est un unique minimum régional : la lpe est donc vide. Si l'on munit le plateau de la distance au bord montant, la lpe de l'image complétée par l'opposée de la distance au bord montant connecte les points sous forme d'un hexagone. 36

2.10 Minima régionaux et leurs dérivés, les $h - \infty$ minima. Noter les différentes images binaires que l'on peut en tirer. 38

2.11 Idée de la segmentation par ligne de partage des eaux : les lignes de crêtes du gradient correspondent à des contours de l'image originale. 39

2.12 Exemple de gradient morphologique. 41

2.13 Séparation d'objets par la ligne de partage des eaux de la fonction distance. Noter la façon de rendre robuste cette séparation par filtrage des minima régionaux de l'opposée de la fonction distance. 44
2.14 Pourquoi une particule convexe peut générer un érodé ultime en plusieurs morceaux : l'épaisseur de l'objet varie entre 4 et 5 pixels. 45
2.15 Ligne de partage des eaux calculée directement sur une image réelle présente une sur-segmentation importante, due au bruit qui crée de nombreux minima parasites. 45
2.16 Ligne de partage des eaux contrainte : les marqueurs sont imposés comme minima régionaux du gradient morphologique. 46
2.17 Illustration de la manière d'imposer les minima régionaux de g à l'image f. . . 47
2.18 La ligne de partage des eaux calculée sur un chapeau haut de forme. 48

3.1 Champ de gradient de $\sin(x)\sin(y)$ (M : maxima - m: minima - s: point selle). 52
3.2 Trajectoires typiques du champ de gradient (images de gauche) suivant la position de l'exponentielle des valeurs propres du hessien dans le plan complexe (images de droite). 54
3.3 Quelques exemples de points de $\mathcal{P}(f)$. 56
3.4 Repère considéré. 59
3.5 Choix de A_1^- et de A_2^-. 59
3.6 Selle de singe. 61
3.7 Champ de gradient d'une boutonnière. 62
3.8 Choix de a_0 et de b_0. 65
3.9 Il existe deux géodésiques reliant s_1 à s_2. 70
3.10 Frontières au voisinage d'un point selle de boules centrées sur un minimum. . 72
3.11 Différence entre le squelette par zone d'influence et le squelette du complémentaire. Noter que le squelette par zone d'influence n'est pas connexe dans cet exemple. 75
3.12 Non continuité de la ligne de partage des eaux. 78

4.1 Description du détecteur de contours de Canny. 87
4.2 Structures idéales de contours détectées par l'opérateur de Canny. 88
4.3 Comparaison des algorithmes de segmentation. 91
4.4 Contours trouvés par les algorithmes. 92
4.5 Carte des signes de l'opérateur $Q(f)$. 92

5.1 Illustration de la manière d'imposer les minima régionaux de g à l'image f. . . 99
5.2 Ligne de partage des eaux contrainte : les marqueurs sont imposés comme minima régionaux du chapeau haut-de-forme. 100
5.3 Illustration du concept de dynamique. 101
5.4 Ligne de partage des eaux contrainte par le critère de contraste : la dynamique. 102

5.5 Entre la figure de droite et celle de gauche, les deux bassins BV_1 et BV_2 ont inversés leur dynamique. La dynamique du contour les séparant est par contre restée la même. 104
5.6 Différence entre un simple calcul de la dynamique des bassins et une application de l'algorithme. 105
5.7 Illustration du concept de blob. Nous voyons que le blob est contenu dans un bassin versant de $-f$. 106
5.8 Exemple de la structure en arbre sur les blobs. 107
5.9 Différents seuillages de l'image de dynamique des contours. 109

6.1 Érosion géodésique de g au-dessus de f. 118
6.2 Comparaison de diverses possibilités de segmentation. 128
6.3 Détermination du bassin qui value le contour auquel appartient le pixel P. . . 130
6.4 Exemples de segmentation hiérarchique par dynamique sur des avions. 137
6.5 Autres exemples de segmentation hiérarchique par dynamique sur des avions. 138
6.6 Application de l'algorithme de hiérarchie par dynamique sur une image de l'aéroport d'Orly. 139
6.7 Application de l'algorithme de hiérarchie par dynamique sur une image de l'aéroport d'Orly (suite). 140
6.8 Application de l'algorithme de hiérarchie par dynamique sur une image de l'aéroport d'Orly (suite et fin). 141

7.1 Dilation by the unit Euclidean ball in $\mathbb{R}^2$ 148
7.2 Circatangent and Normal cones associated with the Euclidean norm. 151

8.1 Various examples of computation of Liapunov function. We show some intermediary steps of computation. 171
8.2 Example of a trajectory converging towards the minimum of the function V defined by $V(x_1, x_2) := 1 - \cos(2\sqrt{x_1^2 + x_2^2})\cos(3\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$. Note that for implementing this algorithm, we need to compute V_n^h at least at the points x_p^h. But the knowledge of the function V_n^h at a given point x requires only the values of the original function V on a neighborhood $x + nhB$ of radius nh around x. 177

9.1 Contingent cone of a subset K at x. 190
9.2 Exit time. 191

Table des matières

Introduction **ix**
Descriptif du contenu de la thèse ix
1.1 La ligne de partage des eaux ix
1.2 Morphologie mathématique et analyse multivoque x
1.2.1 Équations mutationnelles de la dilatation x
1.2.2 L'algorithme des Montagnes Russes xi
1.2.3 Propriétés algébriques des opérateurs induits par des systèmes dynamiques . xi
Synopsis de la thèse xi

1 Principaux résultats de la thèse **1**
1 Première partie : la ligne de partage des eaux 1
1.1 Approche de la ligne de partage des eaux par immersion 2
1.1.1 Discrétisation des niveaux de gris 2
1.1.2 Ligne de partage des eaux d'une fonction régulière 5
1.2 Approche métrique 7
1.2.1 La ligne de partage des eaux est un Skiz 7
1.2.2 Semi-continuité de l'ossature 8
1.2.3 L'équation eikonale 9
1.3 Détecteurs de Canny 9
1.4 Segmentation hiérarchique par dynamique 10
1.4.1 Le concept de dynamique 10
2 Deuxième partie : Morphologie Mathématique et Analyse non régulière 13
2.1 Dérivées mutationnelles de la dilatation 13
2.1.1 Introduction 13
2.1.2 Jauge et dilatation 14
2.1.3 Gradient généralisé de la fonction distance et cône normal 14
2.1.4 Équations mutationnelles de la dilatation 15
2.2 Algorithme des Montagnes Russes 16
2.2.1 Algorithme continu 17
2.2.2 Algorithme discret 18

2.3 Propriétés algébriques des opérateurs induits par des systèmes dynamiques . . 19
2.3.1 Rappels sur les treillis 20
2.3.2 Propriétés algébriques des opérateurs induits par des systèmes dynamiques . 20
3 Perspectives 22

I Segmentation et Morphologie Mathématique 23

2 La ligne de partage des eaux discrète 27
1 La ligne de partage des eaux : approche par immersion 27
1.1 Algorithme générique 27
2 Le problème des plateaux 33
3 Segmentation 36
3.1 Quelques outils morphologiques 36
3.1.1 Érosion géodésique 36
3.1.2 Gradient morphologique 38
3.1.3 Chapeau haut-de-forme 42
3.2 Séparation d'objets se recouvrant 42
3.3 Segmentation numérique 43

3 La ligne de partage des eaux continue 49
1 Convergence de la ligne de partage des eaux 49
1.1 Quelques rappels sur les systèmes dynamiques 49
1.2 Champ de gradient 51
1.3 Théorème de convergence 55
2 Aspect métrique de la ligne de partage des eaux 66
2.1 La distance image continue 66
2.2 La topologie de la distance image continue 67
2.2.1 Existence des géodésiques de d_f 67
2.2.2 Caractérisation des géodésiques de d_f 69
2.2.3 Allure des boules de la métrique d_f 71
2.2.4 La ligne de partage des eaux est un squelette par zones d'influence 73
2.2.5 Le problème de la caractérisation locale 74
2.2.6 Semi-continuité de l'ossature 76
3 Une application aux équations différentielles : l'équation eikonale 82
3.1 Résolution de l'équation eikonale 82
3.2 Discussion de la régularité de la solution 83

4 Comparaisons de la segmentation par ligne de partage des eaux 85
1 Comparaison avec les extracteurs de contours 85

2 Comparaison dans un cas pratique 89

5 Segmentation hiérarchique 95

1 Supprimer la sursegmentation 96
1.1 Reconstruction géodesique 97
1.2 La technique des marqueurs : une reconstruction géodésique de la fonction de marquage sur le gradient 98
1.3 La technique de la dynamique : érosion géodésique de f_t sous f 100
2 Segmentation hiérarchique 102
2.1 La segmentation hiérarchique de S. Beucher 102
2.2 Segmentation hiérarchique par dynamique 103
3 Un regard vers les “structures en forme de blob dans l'espace d'échelle” 104
4 Application à la reconnaissance des formes 108

6 Algorithmique 111

1 L'algorithme de ligne de partage des eaux 111
1.1 L'étape de tri 112
1.2 L'étape d'immersion 113
2 Reconstruction géodésique 117
2.1 Reconstruction séquentielle 117
2.2 L'algorithme de Beucher-Meyer 117
2.3 Un nouvel algorithme 117
3 Algorithmes de ligne de partage des eaux avec points d'ancrage et marqueurs . . 122
4 Algorithme de segmentation hiérarchique par dynamique 127

II Morphologie mathématique et analyse multivoque 143

7 Mutational Equations of Morphological Dilation Tubes 145

1 Introduction 146
2 Dilation 147
2.1 Structuring Element and Gauge 147
2.2 Dilation by a structuring element S 148
3 Generalized gradient and sub-normal cone 148
3.1 Generalized gradient 148
3.2 Distance function and normal cone 150
4 Differential Inclusions 152
4.1 Definition 152
4.2 Marchaud Maps 153
4.3 Solution Map 154

4.4 Reachable Map 154
4.5 Viability Definitions 154
4.6 The Viability Theorem 155
4.7 Viability Tubes 156
5 Mutational equations of the dilation 159
5.1 Mutations of tube 159
5.2 Mutational equations for the dilation 160
5.3 Comparison between dilations 162

8 The "Montagnes Russes" Algorithm for Global Optimization 165
1 The Continuous Algorithm 167
2 The Discrete Algorithm 170
3 Implementation 174
4 Mathematical Morphological Tools 176

9 Lattice operators underlying dynamic systems 179
1 Introduction 180
2 Lattice framework 181
2.1 Algebraic definitions and properties on a complete lattice 181
2.1.1 Algebraic dilation and erosion 182
2.1.2 Algebraic opening and closing 184
2.1.3 Subset of fixpoints of algebraic opening and closing 185
2.2 Order continuity of lattice operators 186
3 Algebraic properties and differential inclusion 188
3.1 Differential inclusion and reachable set 188
3.2 Viability domain and viability kernel 189
3.3 Invariance domain and invariance kernel 190
3.4 Exit Tubes 191
3.5 Accessibility tube 192
3.6 Properties of the viability kernel 194
3.6.1 Algebraic properties 194
3.6.2 Continuity property 195
3.6.3 Set of fixpoints 195
3.7 Properties of the invariance kernel and invariance envelope 196
4 Application to morphological operators 198

Bibliographie 200

Tables des figures et des tableaux 209

Index

$\downarrow$-continuité, 186
Limsup, 187
$\uparrow$-continuité, 186
$\mathcal{P}(f)$, 55

Adjonctions, 182
Application d'accessibilité, 189
Application de Marchaud, 153
Application solution, 154, 188
Application viable, 189
Arc, 28
Au dessus, 55

Bassins versants, 32
Blob, 104
Boule Maximale, 80

Cône circatangent externe, 150
Cône contingent, 189
Cône normal externe, 150
Cœur d'une correspondance, 182
Canny (Filtre de), 86
Champ de vecteurs complet, 51
Champ de vecteurs, 50
Chapeau haut-de-forme, 42
Chemin, 28
Chemin rectifiable, 31
Complément, 181
Convolution ensembliste, 183
Courbes intégrales, 50
Courbes intégrales maximales, 50
Croissance lineaire, 153

Dérivée contingente, 156
Dilatation algébrique, 182
Dilatation géodésique, 97
Dilatation morphologique, 37
Dilatation par un élément structurant, 148
Distance géodésique, 31
Distance image, 66
Domaine d'absorbtion, 190
Domaine d'invariance, 190
Domaine de viabilité, 154, 189
Dynamique d'un contour, 103, 127
Dynamique d'un minimum, 101

Écart géodésique, 31
Eikonale, 82
Ensemble atteignable, 154, 159
Ensemble des points fixes, 185
Ensemble limite, 195
Ensemble viable, 154
Enveloppe d'invariance, 191
Épidérivée contingente, 166
Épigraphe, 167
Épilimite inférieure (d'une suite de fonctions), 173
Équilibre, 155
Érodés ultimes, 42
Érosion algébrique, 182
Érosion géodésique, 36, 97, 117
Érosion morphologique, 37
Espace de longueur, 67
Extrémités, 28
Extraction de contours, 86

Fermeture algébrique, 184
Fermeture morphologique, 37
File d'attente, 111
Flot, 49
Flot local, 50
Fonction de Lyapounov, 166
Fonctionnelle de sortie, 191

Géodésique, 67
Géodésique minimisante, 67
Gradient morphologique, 38

h-∞ minima, 37

Hyperbolique (point singulier), 53

Image, 28
Image de Morse, 51
Image inverse d'une correspondance, 182
Image mosaïque, 103
Inf-convolution, 183

Ligne de crête, 27
Ligne de partage des eaux d'une fonction de Morse, 56, 73
Ligne de partage des eaux, définition discrète, 32
Ligne de plus grande pente, 51
Ligne maximale du gradient, 52
Ligne polygonale croissante, 30
Linéarisation d'une équation différentielle, 53
Localement viable, 189
Longueur, 30
Longueur d'un chemin, 31

Marqueurs, 96, 97
Marqueurs de la ligne de partage des eaux, 98
Minimum régional, 28
Morse, 51
Mutation, 159

Niveau de gris, 28
Noyau d'invariance, 191
Noyau de viabilité, 155, 168, 169, 190

Opérateur, 181
Opérateur anti-extensif, 181
Opérateur croissant, 181
Opérateur extensif, 181
Opérateur idempotent, 181
Opérateurs adjoints, 182
Opérateurs duaux, 181
Opérateurs morphologiques, 37
Ossature, 80
Ouverture algébrique, 184
Ouverture morphologique, 37

Plateau, 28
Point critique, 52
Point régulier, 51
Point singulier, 51
Propriété de semi-groupe, 154
Propriété de viabilité, 154
Propriété de viabilité (pour tubes), 156

Règle de Fermat, 167
Reconstruction binaire, 97
Reconstruction de fonctions, 97
Reconstruction numérique, 37
Rectifiable, 31

Segmentation hiérarchique, 102
Segmentation par marqueurs, 98
Shape from Shading, 82
Squelette par zone d'influence géodésique, 31
Sup-convolution, 183
Système à base de connaissance, 109

Temps de sortie, 191
Théorème de Nagumo, 155
Théorème de viabilité, 155
Topologie $\mathcal{D}$, 76
Topologiquement conjugué, 53
Treillis booléen, 181
Treillis complementé, 181
Treillis complet, 180
Tube d'accessibilité, 189
Tube de sortie, 192
Tube de viabilité, 156

Viable, 189

Zéros du Laplacien, 86
Zone d'influence géodésique, 31

Vu : le Président

Vu : les suffrageants

Vu et permis d'imprimer

Le président du Conseil Scientifique chargé
de la Recherche de l'Université de Paris IX Dauphine