



**HAL**  
open science

# Value at risk et expected shortfall pour des données faiblement dépendantes : estimations non-paramétriques et théorèmes de convergences

Ali Kabui

► **To cite this version:**

Ali Kabui. Value at risk et expected shortfall pour des données faiblement dépendantes : estimations non-paramétriques et théorèmes de convergences. Mathématiques générales [math.GM]. Université du Maine, 2012. Français. NNT : 2012LEMA1008 . tel-00743159

**HAL Id: tel-00743159**

**<https://theses.hal.science/tel-00743159v1>**

Submitted on 18 Oct 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE DU MAINE**

Laboratoire Manceau de Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DU MAINE**

Spécialité : Mathématiques Appliquées

(Statistiques, Mathématiques Financières et Probabilités)

présentée et soutenue par

**Ali KABUI**

le mercredi 19 septembre 2012

---

**Value at Risk et Expected Shortfall  
pour des données faiblement  
dépendantes : Estimations  
non-paramétriques et théorèmes de  
convergences**

---

devant le jury composé de :

**Rafik AGUECH**, MCF-HDR, Univ. de Sousse, Tunisie, Rapporteur

**Djamal LOUANI**, Prof. Univ. de Reims, Rapporteur

**Saïd HAMADENE**, Prof. Univ. du Maine, Directeur de thèse

**Samir BEN HARIZ**, MCF, Univ. du Maine, Co-directeur de thèse

**Anis MATOUSSI**, Prof. Univ. du Maine, Examineur

**Philippe NAVEAU**, DR. LSCE, CNRS. Examineur



# Table des matières

Table des matières	iii
Remerciement	v
Abstract	vii
Résumé	ix
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Problématique . . . . .	1
1.1.1 Description générale et définitions . . . . .	1
1.1.2 Méthodes d'estimation de la <i>VaR</i> . . . . .	3
1.2 Les résultats majeurs de la thèse . . . . .	8
1.2.1 Chapitre 2 . . . . .	9
1.2.2 Chapitre 3 . . . . .	10
1.2.3 Chapitre 4 . . . . .	12
<b>2 La Value at Risk empirique pour des variables faiblement dépendantes</b>	<b>15</b>
2.1 Introduction . . . . .	15
2.2 L'oscillation du processus empirique . . . . .	19
2.3 Théorèmes limites pour la VaR empirique . . . . .	24
2.4 Applications . . . . .	30
2.4.1 Processus $\varphi$ -mélange . . . . .	30
2.4.2 Processus $\rho$ -mélange . . . . .	32
2.4.3 Processus $\alpha$ -mélange . . . . .	34
2.4.4 Fonctionnelles non-linéaires de processus Gaussiens . . . . .	36

2.4.5	Comparaison avec les résultats existants dans la littérature . . . . .	37
2.5	Simulation Monte Carlo . . . . .	39
2.5.1	Étude 1 : Processus gaussiens dépendants . . . . .	40
2.5.2	Étude 2 : Processus de Pareto dépendants . . . . .	40
2.5.3	Étude 3 : Modèle à volatilité stochastique . . . . .	41
<b>3</b>	<b>La représentation de Bahadur pour des variables faiblement dépendantes</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	La représentation de Bahadur en probabilité . . . . .	50
3.2.1	La représentation de Bahadur pour le quantile uniforme	53
3.2.2	La représentation de Bahadur pour le quantile empirique : cas général . . . . .	55
3.3	Approximation forte du processus et du quantile empiriques .	56
3.4	La représentation de Bahadur presque sûre . . . . .	63
3.4.1	La représentation de Bahadur presque sûre pour le quantile uniforme . . . . .	63
3.4.2	La représentation de Bahadur presque sûre pour le quantile empirique . . . . .	69
3.5	Applications . . . . .	70
3.5.1	Processus $\varphi$ -mélange . . . . .	71
3.5.2	Processus $\rho$ -mélange . . . . .	72
3.5.3	Processus $\alpha$ -mélange . . . . .	73
<b>4</b>	<b>L'Expected Shortfall pour des variables faiblement dépendantes</b>	<b>75</b>
4.1	Introduction . . . . .	75
4.2	Théorèmes limites pour l' <i>ES</i> empirique . . . . .	79
4.3	L'estimateur à noyau de la <i>VaR</i> et de l' <i>ES</i> . . . . .	83
4.3.1	L'estimateur à noyau de la <i>VaR</i> . . . . .	83
4.3.2	L'estimateur à noyau de l' <i>ES</i> . . . . .	92
4.4	Applications . . . . .	97
4.4.1	processus $\varphi$ -mélange . . . . .	98
4.4.2	Processus $\rho$ -mélange . . . . .	100
4.4.3	Fonctionnelles non-linéaires de processus Gaussiens . .	101
4.5	Simulation Monte Carlo . . . . .	102
4.5.1	Étude 1 : Processus gaussiens dépendants . . . . .	103

4.5.2	Étude 2 : Processus de Pareto dépendants . . . . .	104
4.5.3	Étude 3 : Modèle à volatilité stochastique . . . . .	105
	<b>Conférences avec une communication orale</b>	<b>121</b>
	<b>Pré-publications</b>	<b>123</b>
<b>A</b>	<b>Empirical Value at Risk for weak dependent random variables</b>	<b>125</b>
A.1	Introduction . . . . .	125
A.2	Oscillation of empirical process . . . . .	128
A.3	Limit theorems for the empirical <i>VaR</i> . . . . .	134
A.4	Applications . . . . .	139
A.4.1	$\varphi$ -mixing process . . . . .	140
A.4.2	$\rho$ -mixing process . . . . .	141
A.4.3	$\alpha$ -mixing process . . . . .	143
A.4.4	Nonlinear functional of gaussian sequences . . . . .	145
A.4.5	Comparison with the existing results of the literature . . . . .	146
A.5	Simulation studies . . . . .	148
A.5.1	Case 1 : Dependent Gaussian process . . . . .	148
A.5.2	Case 2 : Dependent Pareto process . . . . .	149
A.5.3	Case 3 : Stochastic Volatility Models . . . . .	150
	<b>Bibliographie</b>	<b>160</b>



# Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier particulièrement mes directeurs de thèse, Saïd Hamadène et Samir Ben Hariz pour leurs conseils, leurs grandes disponibilités et leurs générosités avec lesquelles ils m'ont fait partager leurs travaux, leurs idées et leurs intuitions. La pertinence de leurs questions et de leurs remarques ont toujours su me motiver et me diriger dans mes recherches. Je leur témoigne enfin ma profonde reconnaissance pour m'avoir fait confiance en me proposant de venir travailler avec eux, et pour leur soutien constant au cours de ces quatre années.

Je suis très reconnaissant à Rafik Aguech et à Djamel Louani, qui m'ont fait l'honneur de rapporter cette thèse.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Anis Matoussi, et à Philippe Naveau qui ont bien voulu participer au jury de cette thèse.

Je remercie tous les membres du Département de Mathématiques de l'Université du Maine pour leur accueil et leur sympathie.

Je remercie tous mes amis.

Enfin, je remercie chaleureusement toute ma famille, le père Rajab Horany, mon père Hasan, ma mère Hiam, mes frères Mohammad, Salman, Asad et Thabet, ma femme Nariman et mes enfants Hasan, Leila et Assef, qui m'a soutenu, encouragé et poussé durant toutes mes années d'étude.





# Abstract

To quantify and measure the risk in an environment partially or completely uncertain is probably one of the major issues of the applied research in financial mathematics. That relates to the economy, finance, but many other fields like health via the insurances for example.

One of the fundamental difficulties of this process of management of risks is to model the underlying credits, then approach the risk from observations or simulations. As in this field, the risk or uncertainty plays a fundamental role in the evolution of the credits; the recourse to the stochastic processes and with the statistical methods becomes crucial.

In practice the parametric approach is largely used. It consists in choosing the model in a parametric family, to quantify the risk according to the parameters, and to estimate its risk by replacing the parameters by their estimates. This approach presents a main risk, that badly to specify the model, and thus to underestimate or over-estimate the risk.

Based within and with a view to minimizing the risk model, we choose to tackle the question of the quantification of the risk with a nonparametric approach which applies to models as general as possible. We concentrate to two measures of risk largely used in practice and which are sometimes imposed by the national or international regulations. They are the Value at Risk (*VaR*) which quantifies the maximum level of loss with a high degree of confidence (95% or 99%). The second measure is the "Expected Shortfall" (*ES*) which informs about the average loss beyond the *VaR*.

To fix the ideas, let  $P_t$  be the value of a portfolio at time  $t$ . We denote by  $X_i = P_{t_i} - P_{t_{i+1}}$  the difference of  $P_t$  between times  $t_i$  and  $t_{i+1}$ . We assume that the  $X_i$ 's are the sample of a sequence of identically distributed random variables with common distribution function  $F$ , but not necessarily independent. Then we aim at estimating the *VaR* and the *ES* from observed

and simulated data under conditions as general as possible, on the distribution of the loss  $F$  and on the sequence  $(X_i)_i$  as well.

In the first part, we consider the empirical estimator of the  $VaR$  in the nonparametric approach. We then show the consistency of the estimator as well as a theorem of the central limit for the difference between the theoretical  $VaR$  and the empirical one. Our results apply to independent data and to slightly dependent data as well. Simulations on various models are carried out to illustrate our results.

In a second part, we discuss the Bahadur representation for the empirical quantile, defined as the generalized inverse of the empirical distribution function. This representation, introduced by R. Bahadur in 1966, is an elegant way to bind the empirical distribution function to its reverse, the empirical quantile. This part is devoted to the results of uniform convergence in the sense almost sure for the empirical distribution function and its inverse.

Finally, we discuss the estimation of the ES with the empirical estimate and the kernel estimate. In this context, we show the consistency of the estimators and we give a Theorem Central Limit (TCL) for the difference between the theoretical value and the estimated value. Later on, an applications are provided with the mixing sequences or with the conditions on the covariance.

**Key words :** Value at Risk ( $VaR$ ); Expected Shortfall ( $ES$ ); Bahadur representation; Quantile function; Empirical process; Modulus of continuity; Asymptotic normality; Nonparametric estimation; Moment's inequality, Weak dependent random variables.

# Résumé

Quantifier et mesurer le risque dans un environnement partiellement ou totalement incertain est probablement l'un des enjeux majeurs de la recherche appliquée en mathématiques financières. Cela concerne l'économie, la finance, mais d'autres domaines comme la santé via les assurances par exemple.

L'une des difficultés fondamentales de ce processus de gestion des risques est de modéliser les actifs sous-jacents, puis d'approcher le risque à partir des observations ou des simulations. Comme dans ce domaine, l'aléa ou l'incertitude joue un rôle fondamental dans l'évolution des actifs, le recours aux processus stochastiques et aux méthodes statistiques devient crucial.

Dans la pratique l'approche paramétrique est largement utilisée. Elle consiste à choisir le modèle dans une famille paramétrique, de quantifier le risque en fonction des paramètres, et d'estimer le risque en remplaçant les paramètres par leurs estimations. Cette approche présente un risque majeur, celui de mal spécifier le modèle, et donc de sous-estimer ou sur-estimer le risque.

Partant de ce constat et dans une perspective de minimiser le risque de modèle, nous avons choisi d'aborder la question de la quantification du risque avec une approche non-paramétrique qui s'applique à des modèles aussi généraux que possible. Nous nous sommes concentrés sur deux mesures de risque largement utilisées dans la pratique et qui sont parfois imposées par les réglementations nationales ou internationales. Il s'agit de la Value at Risk (*VaR*) qui quantifie le niveau de perte maximum avec un niveau de confiance élevé (95% ou 99%). La seconde mesure est l'"Expected Shortfall" (*ES*) qui nous renseigne sur la perte moyenne au delà de la *VaR*.

Pour fixer les idées, soit  $P_t$  la valeur d'un portefeuille à l'instant  $t$ . On note  $X_i = P_{t_i} - P_{t_{i+1}}$  la différence de  $P_t$  entre les instants  $t_i$  et  $t_{i+1}$ . On suppose que les  $X_i$  sont les réalisations d'une suite de variables aléatoires identiquement

distribuées de loi commune  $F$ , mais non nécessairement indépendantes. On cherche alors à estimer la  $VaR$  et l' $ES$  à partir des données observées ou simulées sous des conditions aussi générales que possible, aussi bien sur la distribution de la perte  $F$  que sur la suite  $(X_i)_i$ .

Dans la première partie, on considère l'estimateur empirique de la  $VaR$  comme approche non-paramétrique. On montre alors la consistance de l'estimateur ainsi qu'un théorème de la limite centrale pour la différence entre la  $VaR$  théorique et la  $VaR$  empirique. Nos résultats s'appliquent aussi bien à des données indépendantes qu'à des suites faiblement dépendantes. Des simulations sur différents modèles sont réalisées pour illustrer nos résultats.

Dans la seconde partie, on aborde la représentation de Bahadur pour le quantile empirique, défini comme l'inverse généralisé de la fonction de répartition empirique. Cette représentation, introduite par R. Bahadur en 1966, est une manière élégante de lier la fonction de répartition empirique à son inverse, le quantile empirique. Cette partie est aussi consacrée à des résultats de convergence uniforme au sens presque sure pour la fonction de répartition empirique et son inverse.

Enfin, nous abordons l'estimation de l' $ES$  aussi bien avec l'estimateur empirique qu'avec un estimateur à noyau. Dans ce cadre aussi, nous montrons la consistance des estimateurs et nous donnons un théorème de la limite centrale (TLC) pour la différence entre la valeur théorique et la valeur estimée. Des applications sont ensuite données avec des suites mélangeantes ou avec des conditions sur la covariance.

**Mots clés :** Value at Risk ( $VaR$ ) ; Expected Shortfall ( $ES$ ) ; Représentation de Bahadur ; Fonction de quantile ; Processus empirique ; Module de continuité ; Normalité asymptotique ; Estimation non-paramétrique ; Inégalité de moment ; Variables faiblement dépendantes.

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Problématique

#### 1.1.1 Description générale et définitions

Le développement des marchés financiers ces trente dernières années fait que les banques gèrent aujourd'hui d'importants portefeuilles, composés d'actifs plus ou moins corrélés. Elles doivent donc pouvoir évaluer au mieux le risque généré par ces portefeuilles, ceci afin de pouvoir assurer leur solvabilité, et décider au mieux de l'allocation de fonds à telle ou telle composante d'un portefeuille.

Les entreprises du secteur de la banque et de l'assurance gèrent aujourd'hui des risques importants et de natures diverses. Elles sont soumises à des obligations réglementaires de maîtrise du risque, et cherchent également par elles-mêmes à éviter la faillite. Un des outils intervenant dans cette gestion compliquée est la mesure du risque, qui doit permettre de fournir un indicateur pertinent permettant de générer du profit tout en limitant le risque de subir des pertes trop importantes.

Ce travail s'intéresse à la manière dont une entreprise, par exemple une banque ou une compagnie d'assurance, perçoit et gère l'aléa lié à certains flux financiers qu'elle doit verser ou recevoir. Ce problème est envisagé d'un point de vue probabiliste : nous supposons que ces flux sont représentés par les réalisations d'une variable aléatoire sur un espace probabilisé.

Lorsqu'un agent est placé devant une alternative se résumant au choix entre deux risques, il aimerait disposer d'un critère pouvant le guider dans sa décision, ce critère pouvant varier d'un individu à l'autre. Pour cela, il peut

par exemple réduire l'information associée au risque à une grandeur scalaire, appelée mesure de risque. Comparer les risques revient alors à comparer les dites mesures. Une question fondamentale, qui a occupé des générations d'actuaire, financiers et économistes, est alors de savoir quelle mesure considérer. Une question subsidiaire étant de donner un sens à la mesure du risque, qui soit plus que la traduction d'une relation ordinale.

**Définition 1 (Fonction P&L et fonction de perte) :** Considérons  $P_t$  comme la valeur d'un portefeuille ou d'une position à la date  $t$ . Alors la variation de la valeur de ce portefeuille pour une période  $[t_i, t_{i+T}]$ , appelée fonction P&L (profit and loss), est :

$$\Delta P_{t_i} \equiv P_{t_{i+T}} - P_{t_i},$$

et

$$X_i \equiv -\Delta P_{t_i}$$

est appelé la fonction de perte. En pratique, on décide de fixer la durée  $T$  (un jour, une semaine,... par exemple), et puis  $\Delta P_{t_i} \equiv P_{t_{i+1}} - P_{t_i}$ .

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et soit  $X_i$  une fonction mesurable à valeurs réelles définie sur  $\Omega$ . Soit  $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  l'ensemble des variables aléatoires  $X_i$  définies sur  $\Omega$  telles que  $\|X_i\|_\infty = \sup_{w \in \Omega} |X_i| < \infty$ . Soit  $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}^\infty$  un cône convexe, c'est à dire que pour  $X_1 \in \mathcal{M}$  et  $X_2 \in \mathcal{M}$  on a  $X_1 + X_2 \in \mathcal{M}$  et  $\lambda X_1 \in \mathcal{M}$  pour tout  $\lambda > 0$  :

**Définition 2 (Mesure de risque) :** Une mesure de risque est une fonction  $\zeta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Définition 3** On dit que  $\zeta$  est monétaire si : pour tout  $X, Y \in \mathcal{M}$ , elle satisfait les conditions suivantes

- Invariante par translation :  $\forall c \in \mathbb{R}, \zeta(X + c) = \zeta(X) + c$ ;
- Monotone : Si  $X \leq Y$  alors  $\zeta(X) \leq \zeta(Y)$ .

**Définition 4** On dit que  $\zeta$  est positivement homogène : si  $\zeta(\lambda X) = \lambda \zeta(X)$  pour tout  $\lambda > 0$ .

**Définition 5** On dit que  $\zeta$  est une mesure de risque cohérente, si elle est monétaire, positivement homogène et si elle est sous-additive, c'est à dire

$$\zeta(X + Y) \leq \zeta(X) + \zeta(Y). \quad (1.1)$$

Dans la suite, on rappelle la définition des deux mesures de risques largement utilisées dans la pratique.

**Définition 6 (La Value at Risk)** : La Value at Risk d'un portefeuille d'actifs pour une période  $[t, t + 1]$  avec un degré de confiance  $q \in (0, 1)$  est définie comme un montant, notée  $VaR(q)$  telle que la variation  $X_i$  observée ne sera supérieure au montant  $VaR(q)$  qu'avec une probabilité inférieure ou égale à  $(1 - q)$ .

$$VaR(q) \equiv \inf \{x : \mathbb{P}(X_i > x) \leq 1 - q\}$$

ou encore

$$VaR(q) \equiv F^{-1}(q) \equiv \inf \{x : F(x) \geq q\}$$

où  $F(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  la fonction de répartition de  $X_i$  et  $F^{-1}$  l'inverse généralisé de  $F$ .

La Value et Risk est une mesure de risque monétaire et positivement homogène mais elle ne vérifie pas la propriété de sous-additivité (1.1) au sens de P. Artzner et al [1], donc elle n'est pas cohérente. L'Expected Shortfall est une mesure de risque cohérente au sens de H. Follmer et al [16], est définie par :

**Définition 7 (L'Expected Shortfall)** : Soit  $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ , on définit l'Expected Shortfall d'un portefeuille d'actifs avec un degré de confiance  $q$ , notée  $ES(q)$  par l'espérance conditionnelle de la perte  $X_i$  sachant que celle-ci dépasse la  $VaR$  :

$$ES(q) \equiv \mathbb{E}[X_i | X_i \geq VaR(q)] = (1 - q)^{-1} \mathbb{E}(X_i \mathbb{I}_{(X_i \geq VaR(q))}).$$

Maintenant, nous présentons quelques méthodes pour estimer la  $VaR$  et l' $ES$ . On peut classer les méthodes en trois catégories, méthodes paramétriques, nonparamétriques et semi paramétriques. Voir C. Marinelli [23] et le livre de J. A. McNeil et al [25] pour plus de détails.

### 1.1.2 Méthodes d'estimation de la $VaR$

#### I) Méthodes paramétriques

Il y a principalement trois méthodes paramétriques pour estimer la  $VaR$ . Ces méthodes supposent une fonction de répartition particulière pour les données.



- 1) Approche en utilisant la loi gaussienne :** Soit  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors la VaR est donnée par :

$$\mathbb{P}[X \leq VaR(q)] = \mathbb{P}\left[\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{VaR(q) - \mu}{\sigma}\right] = q.$$

Soit  $z_q$  le  $q$  quantile d'une loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1)$ , c.à.d  $\mathbb{P}[Z \geq z_q] = q$  où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , alors la VaR gaussienne est définie par :

$$VaR(q) = \mu + \sigma z_q.$$

On remplace  $\mu$  et  $\sigma$  par ses estimateurs :  $\bar{X} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  et  $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ . Ensuite, on a :

$$\widehat{VaR}(q) = \bar{X} + \hat{\sigma}_n z_q.$$

- 2) Approche en utilisant le théorème des valeurs extrêmes :** La distribution de Pareto généralisée (GPD) est choisi pour modeliser la perte qui dépasse un seuil  $u$  suffisamment grand. Cette distribution est définie pour  $y \geq u$  par :

$$G_{\xi, \sigma(u)}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{y-u}{\sigma(u)}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y-u}{\sigma(u)}\right), & \xi = 0 \end{cases}$$

où  $\sigma > 0$ ,  $y \geq 0$  quand  $\xi \geq 0$  et  $0 \leq y \leq -\frac{\sigma}{\xi}$  quand  $\xi < 0$ . On estime les paramètres  $\theta = (\xi, \mu, \sigma)$  en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. Ensuite on définit l'estimateur de la VaR par :

$$\widehat{VaR}(q) = u + \frac{\hat{\sigma}(u)}{\hat{\xi}} \left( \left( \frac{n(1-q)}{n_u} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right), \text{ (voir [23] et [25])}$$

où  $n_u$  est le nombre d'observations qui dépassent le seuil  $u$ .

- 3) Approche en utilisant la distribution  $\alpha$ -stable :** Une variable aléatoire  $X$  est appelée  $\alpha$ -stable ( $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ ) s'il existe des paramètres  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $-1 \leq \beta \leq 1$ ,  $\sigma \geq 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  telle que sa fonction caractéristique  $\psi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$  s'écrive de la façon suivante :

$$\ln(\psi_X(t)) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) + i\mu t, & \alpha \neq 1 \\ -\sigma |t| \left(1 - i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(t) \log |t|\right) + i\mu t, & \alpha = 1. \end{cases}$$

où  $\alpha$  est un paramètre de l'épaisseur de la queue,  $\beta$  un paramètre d'asymétrie.

Pour estimer la  $VaR$ , on estime les paramètres en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. Ensuite, on estime la VaR par la méthode de Monte Carlo à partir des simulations de lois  $\alpha$ -stables.

## II) Méthodes non-paramétriques

L'estimation non paramétrique possède les avantages suivants : (i) elle ne dépend pas d'un modèle de la distribution de perte  $F$  ce qui la rend robuste et elle évite un biais généré par une mauvaise spécification de  $F$ ; (ii) elle demande des hypothèses plus faibles sur le processus de return  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ , ce qui la rend adaptable dans le contexte des pertes financières. On présente deux méthodes non paramétriques pour estimer la  $VaR$ .

**1) Estimation empirique :** Nous utilisons la fonction de répartition empirique  $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(X_i \leq x)}$  où  $x \in \mathbb{R}$  et  $\mathbb{I}$  est la fonction indicatrice. Nous définissons l'estimateur empirique de la  $VaR$ , qui a été étudié par Dowd [15], par :

$$\widehat{VaR}(q) \equiv F_n^{-1}(q) \equiv \inf \{x : F_n(x) \geq q\}.$$

On note que si on ordonne les variables aléatoires de manière croissante  $(X_{n,1} \leq X_{n,2} \leq \dots \leq X_{n,n})$  alors  $\widehat{VaR}(q)$  s'écrit encore

$$\widehat{VaR}(q) = X_{n,s}, \quad s = [nq] + 1$$

où  $[a]$  est la partie entière de  $a$ .

**2) Estimation à noyau :** Soit  $G(x) = \int_{-\infty}^x K(z) dz$  la fonction de répartition associée à un noyau  $K$  qui est une fonction de densité. L'estimateur à noyau de  $F(x)$  est défini en remplaçant la fonction indicatrice  $\mathbb{I}$  par  $G$  dans la fonction de répartition empirique  $F_n(x)$ , i.e.,

$$F_{n,h}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

où  $h > 0$  est un paramètre nommé fenêtre.

L'estimateur à noyau de la  $VaR$  présentée par C. Gouriéroux, O. Laurent et G.P. Scaillet [17], est défini par :

$$\widehat{VaR}_h(q) \equiv F_{n,h}^{-1}(q).$$

### III) Méthodes semi-paramétriques

On présente deux méthodes semi-paramétriques.

- 1) Estimation de Hill :** Cette méthode suppose qu'on peut approximer  $F$  par la fonction de répartition de Pareto  $F(x) = 1 - x^{-\frac{1}{\xi}}$  pour  $x$  suffisamment grand. Il y a alors deux étapes :

- (a) Estimer le paramètre  $\xi$  par l'estimateur de Hill :

$$\hat{\xi} = \left( \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \log X_{j,n} \right) - \log X_{k,n}$$

où  $k$  est un nombre choisi et  $X_{1,n} \geq X_{2,n} \geq \dots \geq X_{n,n}$ .

- (b) Estimer  $F$  par :

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{k}{n} \left( \frac{x}{X_{k+1,n}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}.$$

Enfin, l'estimateur de la  $VaR$  est définie par :

$$\widehat{VaR}(q) = \left( \frac{n}{k} (1 - q) \right)^{-\hat{\xi}} X_{k+1,n}.$$

- 2) Estimation de Pickand :** L'estimateur de Pickand est défini par :

$$\hat{\xi} = \frac{1}{\log 2} \log \frac{X_{k,n} - X_{2k,n}}{2X_{k,n} - X_{4k,n}},$$

et l'estimateur de la  $VaR$  est défini par :

$$\widehat{VaR}(q) = X_{k,n} + (X_{k,n} - X_{2k,n}) \frac{\left( \frac{k}{n(1-q)} \right)^{\hat{\xi}} - 1}{1 - 2^{-\hat{\xi}}}.$$

Toutes ces méthodes ont leurs analogues pour l'estimation de l' $ES$ .

Avant de présenter les résultats majeurs de la thèse, nous rappelons les définitions de coefficients de mélange qui sont des critères appropriés pour introduire des mesures de dépendances entre les variables.

**Définition 8** Soit  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  un espace de probabilité et soit  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  deux  $\sigma$ -algèbres de  $\mathcal{K}$ . On définit :

1. Le coefficient de  $\alpha$ -mélange par :

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \equiv \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|.$$

2. Le coefficient de  $\rho$ -mélange par :

$$\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \equiv \sup_{f \in L_2(\mathcal{A}), g \in L_2(\mathcal{B})} |corr(f, g)|,$$

$$\text{où } corr(f, g) = \frac{Cov(f, g)}{\sqrt{Var(f)}\sqrt{Var(g)}}.$$

3. Le coefficient de  $\varphi$ -mélange par :

$$\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \equiv \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} \left| \frac{P(A \cap B)}{P(A)} - P(B) \right|.$$

Enfin, on dit qu'une suite stationnaire de variables aléatoires  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  est  $\alpha$ -mélangeante, si

$$\alpha_n \equiv \alpha(\sigma(X_i, i \leq 0), \sigma(X_i, i \geq n)) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

La relation suivante est vérifiée :  $4\alpha \leq \rho \leq 2\varphi^{\frac{1}{2}}$ , (voir [7]).

Dans cette thèse, la dépendance des variables aléatoires  $(X_i)$  est d'abord exprimé à l'aide des inégalités de moment simples ou maximales pour les sommes partielles. Les hypothèses sont notées  $H(p, X)$  ou  $H^*(p, X)$ . Nous remarquons que ces hypothèses sont largement vérifiées pour différentes suites  $(X_i)_i$ , notamment à travers des conditions de mélanges  $(\alpha, \rho, \varphi)$  ou des conditions de covariance, comme par exemples pour les fonctionnelles de processus gaussiens.

Par exemple, S. Hu [18] a prouvé des inégalités de moment simples et maximales pour le cas  $\varphi$ -mélange. Aussi, S. Utev et M. Peligrad [34] ont montré des inégalités de moment simples et maximales pour le cas  $\rho$ -mélange. Et pour le cas  $\alpha$ -mélangeante Q. Shao et H. Yu [32] ont obtenu une inégalité simple et S.C. Yang [39] a obtenu une inégalité maximale. Enfin, pour le modèle de fonctionnelles non-linéaires de processus gaussien, S. Ben Hariz [5] a montré des inégalités de moment simple et maximales pour les sommes partielles.

## 1.2 Les résultats majeurs de la thèse

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'estimation non-paramétrique notamment l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la Value at Risk et de l'Expected Shortfall. On s'intéresse également à la représentation de Bahadur pour le quantile empirique avec des lois marginales uniformes et quelconques, dans le cas où il y a une certaine dépendance entre les données  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  (les variations  $(-\Delta P_{t_i})$  d'un portefeuille sur  $n$  périodes).

Pour les résultats de cette thèse, on a besoin d'une ou plusieurs des hypothèses suivantes :

$H(X)$  :  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une suite stationnaire de variables aléatoires réelles de fonction de répartition quelconque  $F$ .

$H(p, X)$  : Soit  $\mathcal{F}$  une classe  $(f_x)_{x \in \mathbb{R}}$  de fonctions réelles mesurables et bornées par 1. Pour des réels  $2 \leq v < p \leq r \leq \infty$ , et pour  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante positive  $D = D(\varepsilon, p, v, r) < \infty$  telle que pour toute  $f \in \mathcal{F}$ ,

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n [f_x(X_i) - \mathbb{E}(f_x(X_i))] \right|^p \leq D \left( n^{\frac{p}{2}} \|f_x\|_v^p + n^{1+\varepsilon} \|f_x\|_r^p \right). \quad (1.2)$$

$H^*(p, X)$  : Dans  $H(p, X)$ , la relation (1.2) est remplacée par :

$$\mathbb{E} \left( \max_{m \leq n} \left| \sum_{i=1}^m [f_x(X_i) - \mathbb{E}(f_x(X_i))] \right| \right)^p \leq D \left( n^{\frac{p}{2}} \|f_x\|_v^p + n^{1+\varepsilon} \|f_x\|_r^p \right).$$

$H(F)$  :  $F$  est continue sur  $\mathcal{I} = [F^{-1}(q) - a_n, F^{-1}(q) + a_n]$  où  $0 < a_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ , et  $F$  admet une densité  $f$  qui est continue et  $0 < f(F^{-1}(q)) < \infty$  où  $q \in (0, 1)$ .

Enfin, on pose pour  $0 < b_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ ,

$$a_n \ll b_n \Leftrightarrow \left\{ a_n < b_n \text{ et } \frac{a_n}{b_n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \right\}.$$

Et soit  $\xi \equiv VaR(q) = F^{-1}(q)$  et  $\xi_n \equiv \widehat{VaR}(q) = F_n^{-1}(q)$ .

### 1.2.1 Chapitre 2

Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'estimateur empirique de la  $VaR$ . Notre approche utilise l'étude de l'oscillation du processus empirique qui est défini pour tout  $f_x \in \mathcal{F} = \{f_x : \cdot \rightarrow \mathbb{I}_{(\cdot, \leq x)}, x \in \mathbb{R}\}$  par :

$$Z_n(f_x) \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [f_x(X_i) - \mathbb{E}(f_x(X_i))] = \sqrt{n} [F_n(x) - F(x)].$$

On étudie le module de continuité du processus empirique qui est défini par

$$W(n, \delta) \equiv \mathbb{E} \left( \sup_{\|f_x - f_y\|_v \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \right)$$

où  $\|f_x\|_v = (\mathbb{E} |f_x|^v)^{\frac{1}{v}}$ .

Soit,  $VaR(q) \equiv \xi$  et  $\widehat{VaR}(q) \equiv \xi_n$ , alors, on montre :

**Théorème 1** *Sous les conditions  $H(X)$  et  $H(p, X)$ , il existe une constante*

*$Cte = Cte(\varepsilon, p, v, r) < \infty$  tel que pour  $\delta > n^{\frac{\frac{1+\varepsilon-1}{p}}{v(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}}$ ,*

$$W(n, \delta) \leq Cte. \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}} + \delta^{(1-\frac{v}{p})} \right).$$

*Si en plus  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$  et  $\delta = \delta_n \rightarrow 0$ , alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(n, \delta_n) = 0.$$

On applique le Théorème précédent sur les fluctuations du processus empirique pour en déduire des résultats asymptotiques sur la  $\widehat{VaR}(q)$ . Pour cela, la quantité suivante :

$$\sigma_{\infty}^2(\xi) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} Cov(\mathbb{I}_{(X_1 \leq \xi)}, \mathbb{I}_{(X_{i+1} \leq \xi)}) = Var(\mathbb{I}_{(X_1 \leq \xi)}) + 2 \sum_{i=1}^{+\infty} Cov(\mathbb{I}_{(X_1 \leq \xi)}, \mathbb{I}_{(X_{i+1} \leq \xi)})$$

est supposé satisfaire  $0 < \sigma_{\infty}^2(\xi) < \infty$ . Alors on montre

**Théorème 2** *Sous les conditions  $H(X)$ ,  $H(F)$  et  $H(p, X)$  où  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$ , on a pour  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ ,*

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

*Si en plus*

$$\sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)),$$

*alors*

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)}\right).$$

Après, on applique les résultats précédents à des suites différentes. Enfin, des simulations sont réalisées pour illustrer nos résultats.

## Conclusion du Chapitre 2

Dans ce chapitre, nous avons donné des conditions générales assurant la consistance et un T.L.C pour la *VaR* empirique. La condition principale étant une inégalité de moment pour le processus de sommes partielles défini à partir de  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Cette condition est satisfaite pour plusieurs classes de processus, avec des conditions de mélange ( $\alpha$ ,  $\rho$  ou  $\varphi$ -mélange) ou des conditions de covariance. Nos résultats permettent notamment d'améliorer plusieurs résultats existants.

### 1.2.2 Chapitre 3

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à la représentation de Bahadur pour le quantile empirique pour des données faiblement dépendantes avec des lois marginales uniformes et quelconques.

R. Bahadur [3] (1966) a montré que si les  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont i.i.d, alors

$$\xi_n = \xi + \left[ \frac{q - F_n(\xi)}{f(\xi)} \right] + R_n(q), q \in (0, 1)$$

où  $R_n(q) = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{3}{4}} (\ln n)^{\frac{1}{2}} (\ln \ln n)^{\frac{1}{4}} \right)$ .

Dans le cas uniforme, il s'écrit :

$$\tilde{Q}_n(q) = q + \left[ q - \tilde{F}_n(q) \right] + \tilde{R}_n(q), q \in [0, 1]$$

où  $\tilde{F}_n(q) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(U_i \leq q)}$ ,  $U_i = F(X_i)$  est la fonction de répartition empirique uniforme et  $\tilde{Q}_n(q) = \tilde{F}_n^{-1}(q)$  le quantile empirique uniforme.

L'objectif principal de ce travail est d'étudier le processus  $R_n(t)$  associé à la représentation de Bahadur pour le quantile empirique. On cherche notamment à donner un ordre de grandeur pour  $R_n$  en probabilité ou presque sûrement, ponctuellement, ou de manière uniforme. Alors, on montre :

**Théorème 3** *Sous les conditions  $H(X)$ ,  $H(p, X)$  et  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$ , on a pour  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  et  $c_n \gg \max \left\{ a_n^{\frac{1}{v}}, n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)} a_n^{\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{v}\right) + \frac{1}{vr}} \right\}$ ,*

$$\left| \tilde{R}_n(q) \right| = o_p \left( n^{-\frac{1}{2}} c_n \right).$$

Un résultat similaire est obtenu dans le cas général avec des conditions supplémentaires sur  $F$ . On obtient aussi les résultats suivants au sens presque sûr.

**Théorème 4** *Sous  $H^*(p, X)$  et  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 + \frac{1}{r}\right) - \frac{3}{2}$ , on a pour  $\delta > \frac{1}{p}$ ,*

$$\sup_{q \in [0,1]} \left| \tilde{F}_n(q) - q \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right).$$

Et

$$\sup_{q \in [0,1]} \left| q - \tilde{Q}_n(q) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right).$$

Un résultat similaire est obtenu dans le cas général avec des conditions supplémentaires sur  $F$ . Enfin, on étudie la représentation de Bahadur presque sûre dans le cas uniforme.

**Théorème 5** *Sous les conditions  $H(X)$ ,  $H^*(p, X)$  où  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{v}\right) - 1$ , on a pour  $\delta > \frac{1}{p}$ ,*

$$\left| \tilde{R}_n(q) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{v}\right)} (\ln n)^{\delta \left(1 - \frac{1}{v}\right) + 2 + \frac{1}{p}} \right).$$

### Conclusion du Chapitre 3

Dans ce chapitre, on a cherché un ordre de grandeur pour la représentation de Bahadur pour des variables faiblement dépendantes en supposant que la



suite vérifie une inégalité de moment,  $H(p, X)$  ou  $H^*(p, X)$ , qui sont vérifiées en particulier sous des critères de mélange. Alors, on a montré des résultats pour des suites  $\varphi$ - et  $\alpha$ -mélangeantes. Par ailleurs, on obtient des résultats nouveaux pour des suites  $\rho$ -mélangeantes et pour le modèle de fonctionnelles non-linéaires de processus Gaussiens.

### 1.2.3 Chapitre 4

Dans le quatrième chapitre, Nous étudions des estimateurs non-paramétriques de l'Expected Shortfall ( $ES$ ), notamment l'estimateur empirique ainsi que l'estimateur à noyau. Nous établissons la consistance des estimateurs ainsi que leurs normalités asymptotiques sous des hypothèses assez générales. Soit

$$\sigma_0^2(\xi) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} Cov(g_\xi(X_1), g_\xi(X_{i+1}))$$

que l'on suppose satisfaire  $0 < \sigma_0^2(\xi) < \infty$  où  $g_\xi(x) \equiv (x - \xi) \mathbb{I}_{(x \geq \xi)}$ , et soit  $ES(q) \equiv \mu$ ,  $\widehat{ES}(q) \equiv \mu_n$  et  $\widehat{ES}_h(q) \equiv \mu_{n,h}$ . Alors on montre :

**Théorème 6** *Sous la condition  $H(X)$ , on a*

i)

$$\mu_n = \mu + \frac{1}{(1-q)n} \sum_{i=1}^n g_\xi(X_i) - \mathbb{E}[g_\xi(X_i)] + \frac{M_n}{(1-q)}$$

où

$$M_n \leq |\xi_n - \xi| (|F_n(\xi) - F(\xi)| + O(n^{-1})) + O(n^{-1}).$$

ii) *Si de plus  $H(p, X)$  où  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$ , est vérifiée, alors*

$$\mu_n = \mu + \frac{1}{(1-q)n} \sum_{i=1}^n g_\xi(X_i) - \mathbb{E}[g_\xi(X_i)] + O_p(n^{-1}).$$

iii) *Si de plus*

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_\xi(X_i) - \mathbb{E}[g_\xi(X_i)] \right) \longrightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_0^2(\xi)),$$

alors

$$\sqrt{n}(\mu_n - \mu) \longrightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_0^2(\xi)}{(1-q)^2}\right).$$

**Remarque 1** Lorsque  $0 < \sigma_0^2(\xi) < \infty$  et  $H(p, X)$  avec  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$  sont vérifiées, alors

$$|\mu_n - \mu| = O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Ensuite, on étudie l'estimateur à noyau de la *VaR* et de l'*ES*. Soit

$$G(x) = \int_{-\infty}^x K(z) dz$$

la fonction de répartition de la fonction de densité à noyau  $K$ . L'estimateur à noyau de  $F(x)$  est défini en remplaçant la fonction indicatrice  $\mathbb{I}$  par  $G$  dans la fonction de répartition empirique  $F_n(x)$ . i.e.

$$F_{n,h}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

où  $h > 0$  est un paramètre nommé fenêtre et  $K$  est un noyau vérifiant les hypothèses suivantes :

$$H(K) : \int_{-\infty}^{+\infty} K(z) dz = 1, \int_{-\infty}^{+\infty} zK(z) dz = 0, \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 K(z) dz = \sigma_K^2 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |z|^3 K(z) dz < \infty.$$

Alors, on montre le théorème suivant qui étudie la consistance et un TLC pour la *VaR* à noyau :

**Théorème 7** *Sous les conditions  $H(X), H(F), H(p, X), \varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1, H(K)$  et  $nh^4 \rightarrow 0$ , on a pour  $\lambda_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ ,*

$$|\xi_{n,h} - \xi| = o_p(\lambda_n).$$

*Si en plus  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$  et  $f'$  est uniformément bornée, alors*

$$\sqrt{n}f(\xi)(\xi_{n,h} - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)).$$

Ensuite, on étudie l'estimateur à noyau de l'*ES* : Soit

$$\bar{G}(x) = \int_x^{+\infty} K(z) dz.$$

L'estimateur à noyau de l'*ES*, noté  $\widehat{ES}_h$ , est défini par :

$$\widehat{ES}_h = \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i=1}^n X_i \bar{G}\left(\frac{\xi_{n,h} - X_i}{h}\right) := \mu_{n,h}.$$

Alors, on prouve le théorème suivant qui étudie la consistance et un TLC pour l'ES à noyau :

**Théorème 8** *Sous  $H(X)$ , on a*

i)

$$\mu_{n,h} = \mu + \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i=1}^n g_{\xi}(x) - \mathbb{E}[g_{\xi}(x)] + \frac{M_{n,h}}{(1-q)},$$

où

$$M_{n,h} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi_{n,h} - zh - \xi| |F_n(\xi_{n,h}) - F_n(\xi)| K(z) dz.$$

ii) *Si les conditions  $H(F)$ ,  $f$  est uniformément bornée,  $H(p, X)$  où  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$ ,  $H(K)$  et  $n^{-\frac{1}{2}} \ll h \ll n^{-\frac{1}{4}}$  sont vérifiées, alors*

$$\mu_{n,h} = \mu + \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i=1}^n g_{\xi}(x) - \mathbb{E}[g_{\xi}(x)] + O_p(h^2).$$

iii) *Si de plus*

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [g_{\xi}(X_i) - \mathbb{E}[g_{\xi}(X_i)]] \right) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_0^2(\xi)),$$

alors

$$\sqrt{n}(\mu_{n,h} - \mu) \rightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_0^2(\xi)}{(1-q)^2}\right).$$

**Remarque 2** Lorsque  $0 < \sigma_0^2(\xi) < \infty$ ,  $n^{-\frac{1}{2}} \ll h \ll n^{-\frac{1}{4}}$  et  $H(p, X)$  avec  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$  sont vérifiées, alors

$$|\mu_{n,h} - \mu| = O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Enfin, on applique le résultat du Théorème 1 à des suites différentes.

## Conclusion du Chapitre 4

Dans ce chapitre, on a prouvé la consistance et un théorème de la limite centrale pour l'ES pour des variables faiblement dépendantes en supposant que la suite vérifie une inégalité de moment,  $H(p, X)$ . Par ailleurs, on a montré des résultats nouveaux pour le cas  $\varphi$ ,  $\rho$ -mélange et pour le modèle de fonctionnelles non-linéaires de processus Gaussiens.



# Chapitre 2

## La Value at Risk empirique pour des variables faiblement dépendantes

### Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à l'estimation non paramétrique de la Value at Risk ( $VaR$ ) pour des données faiblement dépendantes. Notre approche utilise l'étude de l'oscillation du processus empirique sous des hypothèses de régularité sur les observations mesurées avec des inégalités de moment de type Rosenthal. On donne des conditions générales qui assurent la convergence de la  $VaR$  empirique ( $\widehat{VaR}$ ) ainsi qu'un TLC pour la différence. Enfin, on applique les résultats obtenus à des suites sous des hypothèses de mélange ou de covariance.

**Mots clés :** Value at Risk ( $VaR$ ); Module de continuité; Processus empirique; Variables faiblement dépendantes.

### 2.1 Introduction

La Value at Risk ( $VaR$ ) est une méthode d'évaluation des risques financiers. Elle permet de résumer les risques de perte en un seul chiffre et d'agréger les risques de marché à travers plusieurs classes d'actifs financiers (actions, devises, etc.).

La  $VaR$  est une mesure probabiliste de la perte possible sur un horizon donné. Elle représente un niveau de perte, pour une position ou un portefeuille, qui ne sera dépassé durant une période donnée qu'avec un certain degré de confiance.

La  $VaR$  n'est bien évidemment ni la perte à laquelle on peut s'attendre, ni la perte maximale qu'on risque de subir, mais un niveau de perte qui ne sera dépassé qu'avec un niveau de probabilité fixé  $q$ .

**Définition 2.1 (Fonction P&L et fonction de perte) :** Considérons  $P_t$  comme la valeur d'un portefeuille ou d'une position à la date  $t$ . Alors la variation de la valeur de ce portefeuille pour une période  $[t_i, t_{i+T}]$ , appelée fonction P&L (profit and loss), est :

$$\Delta P_{t_i} \equiv P_{t_{i+T}} - P_{t_i},$$

et

$$X_i \equiv -\Delta P_{t_i}$$

est appelé la fonction de perte. En pratique, on décide de fixer la durée  $T$  (un jour, une semaine,... par exemple), et puis  $\Delta P_{t_i} \equiv P_{t_{i+1}} - P_{t_i}$ .

**Définition 2.2 (La Value at Risk) :** La Value at Risk d'un portefeuille d'actifs pour une période  $[t_i, t_{i+1}]$  avec un degré de confiance  $q \in (0, 1)$  est définie comme un montant, notée  $VaR(q)$  tel que la variation  $X_i$  observée ne sera supérieure au montant  $VaR(q)$  qu'avec une probabilité inférieure ou égale à  $(1 - q)$ , c'est à dire,

$$VaR(q) \equiv \inf \{x : \mathbb{P}(X_i > x) \leq 1 - q\}$$

ou encore

$$VaR(q) \equiv F^{-1}(q) \equiv \inf \{x : F(x) \geq q\} := \xi \quad (2.1)$$

où  $F(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  est la fonction de répartition de  $X_i$  et  $F^{-1}$  l'inverse généralisé de  $F$ .

La définition (2.1) montre à l'évidence que la connaissance de la fonction de répartition  $F$  de la variable aléatoire  $X$  permet de déterminer la  $VaR(q)$ . Souvent la fonction  $F$  est supposée normale, mais beaucoup d'acteurs financiers utilisent des distributions historiques qui sont loin de suivre des lois normales (voir par exemple R. Cont [12]).

En général, les données historiques présentent des structures de dépendances temporelles. En effet l'hypothèse, selon laquelle les  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  (les variations  $(-\Delta P_{t_i})$  d'un portefeuille sur  $n$  périodes) sont i.i.d est difficilement satisfaite pour les données réelles. D'où l'intérêt et la nécessité de prendre en compte une éventuelle structure de dépendance ou encore un effet de mémoire dans les observations. Pour modéliser et mesurer cet aspect de mémoire dans les données, on peut utiliser soit les corrélations ou alors les coefficients de mélange.

Donc, l'objectif central de ce travail est de fournir un moyen qui permet d'estimer la  $VaR$  dans les cas où il y a soit un manque de paramétrisation de  $F$ , soit une certaine dépendance faible dans les données. Pour cela, nous utilisons la fonction de répartition empirique  $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(X_i \leq x)}$  où  $x \in \mathbb{R}$  et  $\mathbb{I}$  est la fonction indicatrice, pour une suite stationnaire  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  de variables aléatoires réelles éventuellement dépendantes, identiquement distribuées pour estimer la  $VaR$ .

Nous définissons l'estimateur empirique de la  $VaR$  (K. Dowd [15]) par :

$$\widehat{VaR}(q) := F_n^{-1}(q) := \inf \{x : F_n(x) \geq q\} := \xi_n.$$

On remarque que si on ordonne les variables aléatoires  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  de manière croissante  $X_{n,1} \leq X_{n,2} \leq \dots \leq X_{n,n}$  alors  $\widehat{VaR}(q)$  s'écrit encore

$$\widehat{VaR}(q) = X_{n,s}, \quad s = [nq] + 1$$

où  $[a]$  est la partie entière de  $a$ .

Maintenant, nous rappelons les définitions des coefficients de mélange qui sont des critères nécessaires pour introduire des mesures de dépendance entre les variables.

Soit  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  un espace de probabilité et soit  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  deux  $\sigma$ -algèbres de  $\mathcal{K}$ . On définit :

1. Le coefficient de  $\alpha$ -mélange par :

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \equiv \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|.$$

2. Le coefficient de  $\rho$ -mélange par :

$$\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \equiv \sup_{f \in L_2(\mathcal{A}), g \in L_2(\mathcal{B})} |corr(f, g)|,$$

$$\text{où } corr(f, g) = \frac{Cov(f, g)}{\sqrt{Var(f)}\sqrt{Var(g)}}.$$

3. Le coefficient de  $\varphi$ -mélange par :

$$\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \equiv \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} \left| \frac{P(A \cap B)}{P(A)} - P(B) \right|.$$

Enfin, on dit qu'une suite stationnaire de variables aléatoires  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  est  $\alpha$ -mélangeante, si

$$\alpha_n \equiv \alpha(\sigma(X_i, i \leq 0), \sigma(X_i, i \geq n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

L'article est organisé comme suit. La Section 2.2 concerne l'étude de l'oscillation du processus empirique qui est défini pour toute  $f_x \in \mathcal{F} = \{f_x : \cdot \rightarrow \mathbb{I}_{(\cdot \leq x)}, x \in \mathbb{R}\}$  par :

$$Z_n(f_x) \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [f_x(X_i) - \mathbb{E}(f_x(X_i))] = \sqrt{n} [F_n(x) - F(x)].$$

On étudie le module de continuité du processus empirique qui est défini par

$$W(n, \delta) \equiv \mathbb{E} \left( \sup_{\|f_x - f_y\|_v \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \right) \quad (2.2)$$

où  $\|f_x\|_v = (\mathbb{E} |f_x|^v)^{\frac{1}{v}}$ . Notre méthode est inspirée du travail de S. Ben Hariz [4] qui a étudié l'équicontinuité stochastique pour le processus empirique indexé par une famille de fonctions.

Dans la Section 2.3, qui est la partie principale de ce travail, on prouve la consistance ainsi qu'un Théorème de la limite centrale pour la  $\widehat{VaR}$  :

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)} \right)$$

où

$$\sigma_\infty^2(\xi) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} Cov(\mathbb{I}_{(X_1 \leq \xi)}, \mathbb{I}_{(X_{i+1} \leq \xi)}) = Var(\mathbb{I}_{(X_1 \leq \xi)}) + 2 \sum_{i=1}^{+\infty} Cov(\mathbb{I}_{(X_1 \leq \xi)}, \mathbb{I}_{(X_{i+1} \leq \xi)})$$

est supposé satisfaire  $0 < \sigma_\infty^2(\xi) < \infty$ .

Dans la Section 2.4, plusieurs applications sont discutées. La Section 2.5 est consacrée aux simulations pour illustrer les résultats.



## 2.2 L'oscillation du processus empirique

D'abord nous allons introduire les hypothèses suivantes :

$H(X)$  :  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une suite stationnaire de variables aléatoires réelles de fonction de répartition quelconque  $F$ .

$H(p, X)$  : Pour des réels  $2 \leq v < p \leq r \leq \infty$ , et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante positive  $D = D(\varepsilon, p, v, r) < \infty$  telle que pour tout  $f_x \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E} |Z_n(f_x)|^p \leq D \left( \|f_x\|_v^p + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} \|f_x\|_r^p \right).$$

$H(F)$  :  $F$  est continue sur  $\mathcal{I} = [\xi - a_n, \xi + a_n]$  où  $0 < a_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ , et admet une densité  $f$  qui est continue et enfin  $0 < f(\xi) < \infty$ .

Dans la suite, pour  $0 < b_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ , on pose

$$a_n \ll b_n \Leftrightarrow \left\{ a_n < b_n \text{ et } \frac{a_n}{b_n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \right\}. \square$$

Dans les preuves  $C$  désigne une constante dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre. Maintenant, on va étudier le module de continuité du processus empirique  $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$ .

**Théorème 2.1** *Sous les conditions  $H(X)$  et  $H(p, X)$ , il existe une constante  $C = C(\varepsilon, p, v, r) < \infty$  telle que pour  $\delta > n^{\frac{1+\varepsilon-1}{v(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}}$ ,*

$$W(n, \delta) \leq C. \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}} + \delta^{(1-\frac{v}{p})} \right).$$

*Si en plus  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$  et  $\delta = \delta_n \rightarrow 0$ , alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(n, \delta_n) = 0.$$

**Remarque 2.1** :

(i) Quand  $r = p$  le résultat s'écrit pour  $\delta > n^{\frac{1+\varepsilon-p}{vp}}$ ,

$$W(n, \delta) \leq C. \left( \ln n. n^{-\frac{1}{2} + \frac{1+\varepsilon}{p}} + \delta^{(1-\frac{v}{p})} \right).$$

(ii) Si  $F$  est  $L$ -Lipschitzienne, alors pour  $\delta_0 > \frac{1}{C(v,L)} n^{\frac{\frac{1+\varepsilon}{p}-1}{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}}$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{|x-y| \leq \delta_0} |Z_n(f_x - f_y)| \right] \leq C \cdot \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}} + C(v,p,L) \cdot \delta_0^{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{p}\right)} \right).$$

**Preuve du Théorème 2.1 :**

Soit  $N(k) = N_{[\cdot, \cdot]}(2^{-k}, \|\cdot\|_v, \mathcal{F})$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (l'entropie à crochets : the bracketing number), le nombre minimal de crochets qui sont de norme  $\|\cdot\|_v$  inférieur ou égale  $2^{-k}$  qui couvre  $\mathcal{F}$ . Comme  $N(k) \leq 2 \cdot 2^{vk}$  (Voir [36], ex 2.5.4, p. 129) est finie, il existe une suite finie

$$\{f_{x_k(i)}, \Delta_{x_k(i)} = \mathbb{I}(x_k(i) \leq \cdot \leq x_k(i+1))\}_{1 \leq i \leq 2^{vk}}$$

telle que :

1.  $\|\Delta_{x_k(i)}\|_v \leq 2^{-k}$ ,
2.  $\forall f_x \in \mathcal{F}, \exists i$  tq  $|f_x - f_{x_k(i)}| \leq \Delta_{x_k(i)}$ .

On pose  $(\pi_k(f), \Delta_k(f))$  le premier couple  $(f_{x_k(i)}, \Delta_{x_k(i)})$  satisfait :

$$|f_x - f_{x_k(i)}| \leq \Delta_{x_k(i)}.$$

Soit  $q_0, k$  et  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $q_0 \leq k \leq q_1$ , on définit pour  $1 \leq i \leq 2^{vq_0}$ ,

$$E_i = \{f \in \mathcal{F} \text{ tq } \pi_{q_0}(f) = f_{x_{q_0}(i)}\}.$$

Alors, les ensembles  $E_i$  forment une partition de  $\mathcal{F}$ . Pour  $\delta \sim 2^{-q_0} \Leftrightarrow q_0 \sim -\frac{\ln \delta}{\ln 2}$ , on définit :

$$F_{i,j} = \{(f_x, f_y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \text{ tq } f_x \in E_i, f_y \in E_j, \|f_x - f_y\|_v \leq \delta\}.$$

Soit  $\Lambda = \{(i, j) \text{ tq } F_{i,j} \neq \emptyset\}$ . Maintenant,  $\forall (i, j) \in \Lambda$ , on fixe un élément de  $F_{i,j}$  et on le note  $(\phi_{i,j}, \psi_{i,j})$ . Soit  $(f_x, f_y)$  vérifiant  $\|f_x - f_y\|_v \leq \delta$ , et alors  $(f_x, f_y) \in F_{i,j}$  pour  $(i, j) \in \Lambda$ . On écrit

$$f_x - f_y = f_x - \pi_{q_0}(f_x) + \pi_{q_0}(f_x) - \phi_{i,j} + \phi_{i,j} - \psi_{i,j} + \psi_{i,j} - \pi_{q_0}(f_y) + \pi_{q_0}(f_y) - f_y$$

Mais,  $\pi_{q_0}(f_x) = \pi_{q_0}(\phi_{i,j})$  et  $\pi_{q_0}(f_y) = \pi_{q_0}(\psi_{i,j})$  quand  $f_x, \phi_{i,j} \in E_i, f_y, \psi_{i,j} \in E_j$ . Par conséquent :

$$\sup_{\|f_x - f_y\|_v \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \leq 4 \sup_{f_x \in \mathcal{F}} |Z_n(f_x - \pi_{q_0}(f_x))| + \sup_{(i,j) \in \Lambda} |Z_n(\phi_{i,j} - \psi_{i,j})|.$$

Cela donne en prenant l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sup_{\|f_x - f_y\|_v \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \right) &\leq 4\mathbb{E} \left( \sup_{f_x \in \mathcal{F}} |Z_n(f_x - \pi_{q_0}(f_x))| \right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left( \sup_{(i,j) \in \Lambda} |Z_n(\phi_{i,j} - \psi_{i,j})| \right) \\ &\equiv 4E_1 + E_2. \end{aligned}$$

Pour contrôler cette équation, on pose  $\|Z_n(f)\|_{\mathcal{F}} = \sup_{f \in \mathcal{F}} |Z_n(f)|$ , et on utilise l'inégalité de Pisier : Pour des variables aléatoires  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$

$$\mathbb{E} \left[ \max_{1 \leq i \leq N} |Z_i| \right] \leq N^{\frac{1}{p}} \max_{1 \leq i \leq N} (\mathbb{E} |Z_i|^p)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.3)$$

Contrôle de  $E_1$  : Pour  $f \in \mathcal{F}$ , on écrit :

$$f - \pi_{q_0}(f) = f - \pi_q(f) + \sum_{k=q_0+1}^{q_1} [\pi_k(f) - \pi_{k-1}(f)].$$

Par suite :

$$\begin{aligned} E_1 &\equiv \mathbb{E} \|Z_n(f - \pi_{q_0}(f))\|_{\mathcal{F}} \\ &\leq \mathbb{E} \|Z_n(f - \pi_{q_1}(f))\|_{\mathcal{F}} + \sum_{k=q_0+1}^{q_1} \mathbb{E} \|Z_n(\pi_k(f) - \pi_{k-1}(f))\|_{\mathcal{F}} \\ &\leq E_{1,q_1+1} + 2\sqrt{n} \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbb{E} |\Delta_{q_1}(f)| + \sum_{k=q_0+1}^{q_1} E_{1,k} \end{aligned}$$

où

$$E_{1,k} = \mathbb{E} \|Z_n(\pi_k(f) - \pi_{k-1}(f))\|_{\mathcal{F}}, \quad q_0 + 1 \leq k \leq q_1$$

et

$$E_{1,q_1+1} = \mathbb{E} \|Z_n(\Delta_{q_1}(f))\|_{\mathcal{F}}.$$

On note que  $\pi_k(f) - \pi_{k-1}(f) = \pi_k(f) - \pi_{k-1}(\pi_k(f))$  et  $\pi_k(f)$  prennent des valeurs sur un ensemble finie de cardinal  $N(k) \leq 2 \cdot 2^{vk}$ . Donc, en utilisant l'inégalité de Pisier, on a :

$$E_{1,k} \leq 2^{\frac{vk}{p}} \max_{g \in \pi_k(\mathcal{F})} \|Z_n(g - \pi_{k-1}(g))\|_p.$$

En utilisant  $H(p, X)$  avec  $h = g - \pi_{k-1}(g)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \|Z_n(h)\|_p &\leq D^{\frac{1}{p}} \left( \|h\|_v^p + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} \|h\|_r^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq D^{\frac{1}{p}} \left( \|h\|_v + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} \|h\|_r \right). \end{aligned}$$

Maintenant, le fait que

$$\|X\|_r \leq \|X\|_v^{\frac{v}{r}} \times \|X\|_\infty^{\frac{r-v}{r}},$$

implique

$$\begin{aligned} \|Z_n(h)\|_p &\leq D^{\frac{1}{p}} \cdot \left( 2^{-(k-1)} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{(k-1)v}{r}} \right) \\ &\leq 2D^{\frac{1}{p}} \cdot \left( 2^{-k} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{kv}{r}} \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} E_{1,k} &\leq 2D^{\frac{1}{p}} \cdot 2^{\frac{vk}{p}} \left( 2^{-k} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{kv}{r}} \right) \\ &\leq 2D^{\frac{1}{p}} \cdot \left( 2^{-k(1-\frac{v}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} 2^{k(\frac{v}{p}-\frac{v}{r})} \right) \\ &\leq C \cdot \left( 2^{-k(1-\frac{v}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} 2^{k(\frac{v}{p}-\frac{v}{r})} \right) \end{aligned}$$

De même pour  $E_{1,q_1+1}$  on a :

$$E_{1,q_1+1} \leq C \cdot \left( 2^{-(q_1+1)(1-\frac{v}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} 2^{(q_1+1)(\frac{v}{p}-\frac{v}{r})} \right).$$

Enfin, en utilisant que  $\mathbb{E}|\Delta_{q_1}(f)| = \|\Delta_{q_1}(f)\|_v^v \leq 2^{-q_1v}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} E_1 &\leq C \cdot \sqrt{n} 2^{-q_1v} + \sum_{k=q_0+1}^{q_1+1} E_{1,k} \\ &\leq C \cdot \sqrt{n} 2^{-q_1v} + C \cdot \sum_{k=q_0+1}^{q_1+1} \left( 2^{-k(1-\frac{v}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} 2^{k(\frac{v}{p}-\frac{v}{r})} \right) \quad (2.4) \\ &\leq C \cdot \left( \sqrt{n} 2^{-q_1v} + 2^{-q_0(1-\frac{v}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} \left[ 2^{q_1(\frac{v}{p}-\frac{v}{r})} - 2^{q_0(\frac{v}{p}-\frac{v}{r})} \right] \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$E_1 \leq C \cdot \left( \sqrt{n} 2^{-q_1v} + 2^{-q_0(1-\frac{v}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} \left[ 2^{q_1(\frac{v}{p}-\frac{v}{r})} - 2^{q_0(\frac{v}{p}-\frac{v}{r})} \right] \right). \quad (2.5)$$

**Contrôle de  $E_2$**  : On a  $|\Lambda| \leq 2 \times 2^{vq_0}$  (puisque si  $F_{i,j} \neq \phi$ , il faut  $j = \{i-1, i, i+1\}$ , car  $|f_x - f_{x_{q_0}(i)}| \leq \Delta_{x_{q_0}(i)}$  et  $\|\Delta_{x_{q_0}(i)}\|_v \leq 2^{-q_0}$  et  $\|\phi_{i,j} - \psi_{i,j}\|_v \leq \delta$ , donc en utilisant de l'inégalité de Pisier (2.3),

$$\begin{aligned} E_2 &= \mathbb{E} \left( \sup_{(i,j) \in \Lambda} |Z_n(\phi_{i,j} - \psi_{i,j})| \right) \\ &\leq 2^{\frac{vq_0}{p}} \max_{(i,j) \in \Lambda} \|Z_n(\phi_{i,j} - \psi_{i,j})\|_p. \end{aligned}$$

Par  $H(p, X)$  on a,

$$\begin{aligned} E_2 &\leq 2^{\frac{vq_0}{p}} \left[ D^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \|\phi_{i,j} - \psi_{i,j}\|_v + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} \|\phi_{i,j} - \psi_{i,j}\|_r \right) \right] \\ &\leq 2^{\frac{vq_0}{p}} D^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \delta + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} \delta^{\frac{v}{r}} \right) \end{aligned}$$

et donc

$$E_2 \leq D^{\frac{1}{p}} \cdot 2^{\frac{vq_0}{p}} \left( \delta + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} \delta^{\frac{v}{r}} \right). \quad (2.6)$$

Ainsi à partir (2.5) et (2.6) on conclut que,

$$W(n, \delta) \leq C \cdot \left[ \sqrt{n} 2^{-q_1} + 2^{-q_0(1-\frac{v}{p})} + 2^{\frac{vq_0}{p}} \delta + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} \left( 2^{q_1(\frac{v}{p} - \frac{v}{r})} - 2^{q_0(\frac{v}{p} - \frac{v}{r})} + 2^{\frac{vq_0}{p}} \delta^{\frac{v}{r}} \right) \right].$$

On a  $\delta \sim 2^{-q_0}$  alors  $2^{\frac{vq_0}{p}} \cdot \delta \sim 2^{-q_0(1-\frac{v}{p})} \sim \delta^{(1-\frac{v}{p})}$ , et puis

$$W(n, \delta) \leq C \cdot \left[ \sqrt{n} 2^{-q_1} + \delta^{(1-\frac{v}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} 2^{q_1(\frac{v}{p} - \frac{v}{r})} \right].$$

On choisit  $q_1$  tel que  $\sqrt{n} 2^{-q_1} \sim n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} 2^{q_1(\frac{v}{p} - \frac{v}{r})}$ , alors

$$2^{q_1} \sim n^{\frac{1-\frac{1+\varepsilon}{p}}{v(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}} \Rightarrow q_1 \sim \frac{\left(1 - \frac{1+\varepsilon}{p}\right) \ln n}{v \left(1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) \ln 2}.$$

Par suite

$$W(n, \delta) \leq C \cdot \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}} + \delta^{(1-\frac{v}{p})} \right).$$

Pour que  $q_0 < q_1$  il faut que  $\delta > n^{\frac{\frac{1+\varepsilon}{p}-1}{v(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}}$ . Pour assurer que

$$W(n, \delta) \xrightarrow{\{n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0\}} 0,$$

il faut que  $-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}} < 0$  qui vérifie

$$\varepsilon < \frac{p}{2} \left( 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \right) - 1. \square$$

**Preuve de la Remarque 2.1 :** La preuve du premier point de la Remarque A.1 a les mêmes étapes que la preuve du Théorème 2.1 jusqu'à l'inégalité (2.4). Cette relation devient dans le cas où  $r = p$  :

$$\begin{aligned} E_1 &\leq C \cdot \sqrt{n} 2^{-q_1 v} + C \cdot \sum_{k=q_0+1}^{q_1+1} \left( 2^{-k(1-\frac{v}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq C \cdot \left( \sqrt{n} 2^{-q_1 v} + 2^{-q_0(1-\frac{v}{p})} + q_1 n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Puisque

$$q_1 \sim \frac{1}{v \ln 2} \left( 1 - \frac{1+\varepsilon}{p} \right) \ln n.$$

Alors,

$$W(n, \delta) \leq C \cdot \left( \ln n \cdot n^{-\frac{1}{2} + \frac{1+\varepsilon}{p}} + \delta^{(1-\frac{v}{p})} \right). \square$$

## 2.3 Théorèmes limites pour la VaR empirique

Dans cette partie on va appliquer le résultat de la section précédente sur les fluctuations du processus empirique pour en déduire des résultats asymptotiques sur la  $\widehat{VaR}(q)$ .

**Théorème 2.2** *Sous les conditions  $H(X), H(F), H(p, X)$  avec  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left( 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \right) - 1$ , on a pour  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ ,*

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

Si en plus

$$\sqrt{n} (F_n(\xi) - F(\xi)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)),$$

alors

$$\sqrt{n} (\xi_n - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)}\right).$$

La preuve du Théorème précédent repose sur les deux lemmes suivants :

**Lemme 2.1** *Sous les conditions  $H(X)$ ,  $H(F)$  et  $H(p, X)$  avec  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$ , on a pour  $a_n > 0$ ,*

$$\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > a_n) \leq C(\varepsilon, p, v, r, \xi) \cdot \left(n^{\frac{1}{2}} a_n\right)^{-p}.$$

*Si en plus  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ , alors*

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

**Preuve du Lemme 2.1 :** On rappelle que  $s = [nq] + 1$ . Alors, on note que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_n < \xi - a_n) &= \mathbb{P}(s \text{ ou plus des } X_i, 1 \leq i \leq n, \text{ sont inférieure à } \xi - a_n) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(X_i < \xi - a_n)} \geq s\right) \\ &= \mathbb{P}\left(F_n(\xi - a_n) \geq \frac{s}{n}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(F_n(\xi - a_n) - F(\xi - a_n) \geq \frac{s}{n} - F(\xi - a_n)\right). \end{aligned}$$

Puisque

$$F_n(\xi_n) = \frac{s}{n} = F(\xi) + O(n^{-1}),$$

alors, en utilisant  $H(F)$  et le développement de Taylor de  $F(\xi - a_n)$  on obtient,

$$\frac{s}{n} - F(\xi - a_n) = f(\xi) a_n [1 + o(1)].$$

Alors

$$\mathbb{P}(\xi_n < \xi - a_n) = \mathbb{P}(F_n(\xi - a_n) - F(\xi - a_n) \geq f(\xi) a_n [1 + o(1)]),$$

qui est, d'après l'inégalité de Markov, majorée par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_n < \xi - a_n) &\leq \left(\frac{1}{f(\xi) a_n [1 + o(1)]}\right)^p \mathbb{E}[F_n(\xi - a_n) - F(\xi - a_n)]^p, \\ &\leq C \cdot \left(\frac{1}{f(\xi) a_n}\right)^p \mathbb{E}|F_n(\xi - a_n) - F(\xi - a_n)|^p. \end{aligned}$$

Mais,

$$\mathbb{E} |F_n(\xi - a_n) - F(\xi - a_n)|^p = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^p \mathbb{E} |Z_n(f_{(\xi - a_n)})|^p.$$

Et d'après  $H(p, X)$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} |F_n(\xi - a_n) - F(\xi - a_n)|^p \\ & \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^p D. \left( \|\mathbb{I}_{(X_i < \xi - a_n)}\|_v^p + n^{1+\varepsilon - \frac{p}{2}} \cdot \|\mathbb{I}_{(X_i < \xi - a_n)}\|_r^p \right) \\ & \leq n^{-\frac{p}{2}} D. \left( F(\xi - a_n)^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon - \frac{p}{2}} F(\xi - a_n)^{\frac{p}{r}} \right). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_n < \xi - a_n) & \leq C. \left(\frac{1}{f(\xi)a_n}\right)^p n^{-\frac{p}{2}} D. \left( F(\xi - a_n)^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon - \frac{p}{2}} F(\xi - a_n)^{\frac{p}{r}} \right) \\ & \leq C.D \left(\frac{1}{f(\xi)}\right)^p n^{-\frac{p}{2}} a_n^{-p} \left( F(\xi - a_n)^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon - \frac{p}{2}} F(\xi - a_n)^{\frac{p}{r}} \right) \\ & \leq C(\varepsilon, p, v, r, \xi) \cdot \left(1 + n^{1+\varepsilon - \frac{p}{2}}\right) n^{-\frac{p}{2}} a_n^{-p}. \end{aligned}$$

Donc pour  $0 < a_n$  et  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$

$$\mathbb{P}(\xi_n < \xi - a_n) \leq C(\varepsilon, p, v, r, \xi) \cdot n^{-\frac{p}{2}} a_n^{-p}. \quad (2.8)$$

Pour le deuxième terme, on note que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_n > \xi + a_n) & = \mathbb{P}(s \text{ ou moins des } X_i, 1 \leq i \leq n, \text{ sont inférieure à } \xi + a_n) \\ & = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(X_i < \xi + a_n)} \leq s\right) \\ & = \mathbb{P}\left(F_n(\xi + a_n) \leq \frac{s}{n}\right) \\ & = \mathbb{P}\left(F_n(\xi + a_n) - F(\xi + a_n) \leq \frac{s}{n} - F(\xi + a_n)\right). \end{aligned}$$

Mais en utilisant  $H(F)$  et le développement de Taylor de  $F(\xi + a_n)$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_n > \xi + a_n) & = \mathbb{P}(F_n(\xi + a_n) - F(\xi + a_n) \leq -f(\xi) a_n [1 + o(1)]) \\ & = \mathbb{P}(F(\xi + a_n) - F_n(\xi + a_n) \geq f(\xi) a_n [1 + o(1)]). \end{aligned}$$



Qui implique, d'après l'inégalité de Markov,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_n > \xi + a_n) &\leq \left( \frac{1}{f(\xi) a_n [1 + o(1)]} \right)^p \mathbb{E} [F(\xi + a_n) - F_n(\xi + a_n)]^p, \\ &\leq C. \left( \frac{1}{f(\xi) a_n} \right)^p \mathbb{E} |F_n(\xi + a_n) - F(\xi + a_n)|^p. \end{aligned}$$

Comme le premier terme, on a

$$\mathbb{E} |F_n(\xi + a_n) - F(\xi + a_n)|^p = \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^p \mathbb{E} |Z_n(f_{(\xi+a_n)})|^p.$$

Et d'après  $H(p, X)$ ,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} |F_n(\xi + a_n) - F(\xi + a_n)|^p \\ &\leq \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^p D. \left( \|\mathbb{I}_{(X_i < \xi + a_n)}\|_v^p + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} \cdot \|\mathbb{I}_{(X_i < \xi + a_n)}\|_r^p \right) \\ &\leq n^{-\frac{p}{2}} D. \left( F(\xi + a_n)^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} F(\xi + a_n)^{\frac{p}{r}} \right). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_n > \xi + a_n) &\leq C. \left( \frac{1}{f(\xi) a_n} \right)^p n^{-\frac{p}{2}} D. \left( F(\xi + a_n)^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} F(\xi + a_n)^{\frac{p}{r}} \right) \\ &\leq C.D. \left( \frac{1}{f(\xi)} \right)^p n^{-\frac{p}{2}} a_n^{-p} \left( F(\xi + a_n)^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} F(\xi + a_n)^{\frac{p}{r}} \right) \\ &\leq C(\varepsilon, p, v, r, \xi) \cdot \left( 1 + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} \right) n^{-\frac{p}{2}} a_n^{-p}. \end{aligned}$$

Donc pour  $0 < a_n$  et  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$

$$\mathbb{P}(\xi_n > \xi + a_n) \leq C(\varepsilon, p, v, r, \xi) \cdot n^{-\frac{p}{2}} a_n^{-p}. \quad (2.9)$$

Alors, de (2.8) et (2.9) on conclut pour  $0 < a_n$  et  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$

$$\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > a_n) \leq C(\varepsilon, p, v, r, \xi) \cdot \left( n^{\frac{1}{2}} a_n \right)^{-p}.$$

Enfin, si  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ , alors

$$\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > a_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0. \square$$

Le lemme suivant étudie la proximité entre  $Z_n(f_{\xi_n}) = \sqrt{n}(F_n(\xi_n) - F(\xi_n))$  et  $Z_n(f_\xi) = \sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi))$ .

**Lemme 2.2** *Sous les conditions  $H(X), H(F), H(p, X)$  avec*

$$\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1, \text{ on a pour } a_n \gg n^{-\frac{1}{2}} \text{ et } b_n \gg \max \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}}, a_n^{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{p}\right)} \right),$$

$$|\sqrt{n}(F_n(\xi_n) - F(\xi_n)) - \sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi))| = o_p(b_n).$$

**Preuve du Lemme 2.2 :** Soit  $0 < a_n$  et  $0 < b_n$ , on note que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Z_n(f_{\xi_n} - f_{\xi})| > b_n) &= \mathbb{P}(|Z_n(f_{\xi_n} - f_{\xi})| > b_n \cap |\xi_n - \xi| \leq a_n) \\ &\quad + \mathbb{P}(|Z_n(f_{\xi_n} - f_{\xi})| > b_n \cap |\xi_n - \xi| > a_n) \\ &\leq \mathbb{P}(|Z_n(f_{\xi_n} - f_{\xi})| \mathbb{I}_{(|\xi_n - \xi| \leq a_n)} > b_n) \\ &\quad + \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > a_n). \end{aligned}$$

Si  $H(p, X)$  est vérifiée,  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1 \leq \frac{p}{2} - 1$  et  $0 < a_n$ , alors d'après le Lemme 2.1

$$\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > a_n) \leq C \cdot \left(n^{\frac{1}{2}} a_n\right)^{-p}.$$

Si  $H(F)$  est vérifiée, alors  $F$  est localement lipschitzienne, et que pour  $|y - \xi| \leq a_n$ , on a

$$\|f_y - f_{\xi}\|_v = |F(y) - F(\xi)|^{\frac{1}{v}} \leq C(v, \xi) \cdot |y - \xi|^{\frac{1}{v}} \leq C(v, \xi) \cdot a_n^{\frac{1}{v}}.$$

En plus, par l'inégalité de Markov et le Théorème 2.1 pour  $a_n > \frac{1}{C(v, \xi)} n^{\frac{\frac{1+\varepsilon}{p}-1}{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Z_n(f_{\xi_n} - f_{\xi})| \mathbb{I}_{(|\xi_n - \xi| \leq a_n)} > b_n) &\leq \frac{1}{b_n} \mathbb{E} \left| \sup_{|y - \xi| \leq a_n} |Z_n(f_y - f_{\xi})| \right| \\ &\leq C \cdot b_n^{-1} \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}} + C \cdot a_n^{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{p}\right)} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour  $a_n > \frac{1}{C(v, \xi)} n^{\frac{\frac{1+\varepsilon}{p}-1}{\left(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}}$  où  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$  et pour  $b_n > 0$ ,

$$\mathbb{P}(|Z_n(f_{\xi_n} - f_{\xi})| > b_n) \leq C \cdot \left[ b_n^{-1} \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}} + a_n^{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{p}\right)} \right) + \left( n^{\frac{1}{2}} a_n \right)^{-p} \right].$$

Si  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  et  $b_n \gg \max\left(n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}}, a_n^{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{p}\right)}\right)$ , alors

$$|Z_n(f_{\xi_n} - f_{\xi})| = o_p(b_n).$$

Enfin par définition de  $Z_n(f_x)$ , on obtient

$$\left|\sqrt{n}(F_n(\xi_n) - F(\xi_n)) - \sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi))\right| = o_p(b_n). \square$$

**Preuve du Théorème 2.2 :**

D'après le Lemme 2.1 et le Lemme 2.2 pour  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  et  $b_n \gg \max\left(n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}}, a_n^{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{p}\right)}\right)$ , on a

$$\left|\sqrt{n}(F_n(\xi_n) - F(\xi_n)) - \sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi))\right| = o_p(b_n). \quad (2.10)$$

puisque

$$F_n(\xi_n) = \frac{S}{n} = F(\xi) + O(n^{-1}),$$

alors,

$$\sqrt{n}(F_n(\xi_n) - F(\xi_n)) = \sqrt{n}(F(\xi) - F(\xi_n)) + O(n^{-\frac{1}{2}}). \quad (2.11)$$

Si  $H(F)$  est vérifiée, alors on applique le théorème des accroissements finis pour  $F(\xi) - F(\xi_n)$ ,

$$F(\xi) - F(\xi_n) = (\xi - \xi_n) f(\theta\xi_n + (1 - \theta)\xi)$$

où  $\theta \in ]0, 1[$ . Alors

$$\sqrt{n}(F_n(\xi_n) - F(\xi_n)) = \sqrt{n}(\xi - \xi_n) f(\theta\xi_n + (1 - \theta)\xi) + O(n^{-\frac{1}{2}}).$$

D'où

$$\left|\sqrt{n}(\xi - \xi_n) f(\theta\xi_n + (1 - \theta)\xi) + O(n^{-\frac{1}{2}}) - \sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi))\right| = o_p(b_n). \quad (2.12)$$

Mais par hypothèse

$$\sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_{\infty}^2(\xi)).$$

Et d'après le Lemme 2.1 pour  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ ,

$$f(\theta\xi_n + (1-\theta)\xi) = [f(\xi + o_p(a_n))] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\xi) \quad \text{en probabilité.} \quad (2.13)$$

Alors, d'après le Lemme de Slutsky ([13], p. 254), (2.10), (2.11), (2.12) et (2.13), on a :

$$\sqrt{n}(f(\xi)(\xi - \xi_n)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)).$$

Ce qui équivaut à

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)}\right). \square$$

## 2.4 Applications

Dans cette partie on se propose d'appliquer les résultats précédents à des suites différentes. En utilisant les résultats de S. Hu ([18], p.1124) et M. Peligrad ([27], Théorème 2.1, p.1305), on va appliquer notre résultat pour le cas  $\varphi$ -mélange. On applique les résultats de S. Utev et M. Peligrad ([34], Théorèmes 2.1 et 2.2) pour le cas  $\rho$ -mélange et pour le cas  $\alpha$ -mélange, on utilise les résultats de Q. Shao et H. Yu ([32], Théorème 4.1) et de E. Rio ([29], Théorème 7.2). On considère aussi le modèle de fonctionnelles non-linéaires de processus Gaussiens en utilisant les résultats de S. Ben Hariz [5], P. Breuer et P. Major [8]. Enfin, on compare ces résultats aux résultats existants dans la littérature.

### 2.4.1 Processus $\varphi$ -mélange

**Corollaire 2.1** Sous la condition  $H(X)$ , si la suite est  $\varphi$ -mélangeante, on suppose pour  $p > 2$ , le coefficient  $\varphi$ -mélange satisfait

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{p}}(2^i) < \infty,$$

Alors, pour  $\delta > n^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$ , il existe une constante positive  $C(p, \varphi(\cdot))$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{\|f_x - f_y\|_2 \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \right] \leq C(p, \varphi(\cdot)) \cdot \left( \ln n \cdot n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} + \delta^{(1-\frac{2}{p})} \right).$$

Si  $H(F)$  est vérifiée, alors pour  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  on a

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

Si en plus  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ , alors

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \longrightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)}\right).$$

**Preuve du Corollaire 2.1 :** Quand les v.a.  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont identiquement distribuées et d'après le Lemme de S. Hu ([18], p.1124), si

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{p}}(2^i) < \infty,$$

il existe une constante positive  $C = C(p, \varphi(\cdot))$  telle que pour tout  $n \geq 1$  et  $f_x \in \mathcal{F}$ , on a

$$\mathbb{E} |Z_n(f_x)|^p \leq C(p, \varphi(\cdot)) \cdot \left( \|f_x\|_2^p + n^{1-\frac{p}{2}} \|f_x\|_p^p \right).$$

On applique le Théorème 2.1 avec la condition  $H(p, X)$  où  $\varepsilon = 0, v = 2, p = r$  pour avoir

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{\|f_x - f_y\|_2 \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \right] \leq C \cdot \left( \ln n \cdot n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} + \delta^{(1-\frac{2}{p})} \right).$$

Si  $H(F)$  est vérifiée et  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ , alors le Lemme 2.1 pour  $p > 2$  implique

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

Pour prouver que

$$\sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)),$$

on va appliquer le résultat de M. Peligrad ([27], Théorème 2.1, p. 1305) avec  $Y_i \equiv \mathbb{I}_{(X_i \leq \xi)} - F(\xi)$ ,  $\sigma_n^2 = \mathbb{E} [\sum_{i=1}^n Y_i]^2$  et  $W_n(t) := \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{[nt]} Y_i$ ,  $t \in [0, 1]$ . Si on a  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ , alors  $\frac{\sigma_n^2}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \sigma_\infty^2$ . La condition (L) en page 1305 s'écrit

pour  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ Y_i^2 \mathbb{I}_{[Y_i^2 > \epsilon \sigma_n^2]} \right] &\leq \frac{n}{\sigma_n^2} \mathbb{E} \left[ Y_i^2 \mathbb{I}_{[Y_i^2 > \epsilon \sigma_n^2]} \right] \\ &\leq \frac{C.n}{\sigma_n^2} \mathbb{P} \left[ [\mathbb{I}_{(X_i \leq \xi)} - F(\xi)]^2 > \epsilon \sigma_n^2 \right] \\ &\leq \frac{C.n}{\epsilon \sigma_n^4} \mathbb{E} \left[ [\mathbb{I}_{(X_i \leq \xi)} - F(\xi)]^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Les conditions :

(A)  $\sigma_n^2 = nh(n)$  où  $h(n)$  est une fonction qui varie lentement et définie sur  $\mathbb{R}$ ,

(B)  $\sup_{m \geq 0, n \geq 1} \left[ \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{m+n} Y_i - \sum_{i=1}^m Y_i \right)^2 / \sigma_n^2 \right] < \infty$ ,

sont la conséquence de  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ . On pose  $t = 1$  pour conclure

$$\sqrt{n} (F_n(\xi) - F(\xi)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)).$$

Ensuite par le Théorème 2.2 on a

$$\sqrt{n} (\xi_n - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)} \right). \square$$

## 2.4.2 Processus $\rho$ -mélange

On va appliquer les résultats de S. Utev et M. Peligrad ([34], Théorèmes 2.1 et 2.2) sur nos Théorèmes 2.1 et 2.2 pour des variables identiquement distribuées. On définit pour la suite stationnaire  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$

$$\begin{aligned} \alpha_n^* &= \sup_{S, T \subset \mathbb{Z}, \text{dist}(S, T) \geq n} \alpha(\mathcal{M}_T, \mathcal{M}_S), \\ \rho_n^* &= \sup_{S, T \subset \mathbb{Z}, \text{dist}(S, T) \geq n} \rho(\mathcal{M}_T, \mathcal{M}_S), \end{aligned}$$

où  $\mathcal{M}_T = \sigma(X_i, i \in T)$ ,  $\mathcal{M}_S = \sigma(X_i, i \in S)$ . Alors on a le corollaire suivant :

**Corollaire 2.2** Sous l'hypothèse  $H(X)$  ainsi que

$H(\rho)$  : Il existe un nombre réel  $0 \leq \eta < 1$  et un nombre entier  $N \geq 1$  tel que  $\rho_N^* \leq \eta$ ,

alors pour tout  $p > 2$  et  $\delta > n^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$ , il existe une constante  $C(p, N, \eta)$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{\|f_x - f_y\|_2 \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \right] \leq C(p, N, \eta) \cdot \left( \ln n \cdot n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} + \delta^{(1-\frac{2}{p})} \right).$$

Si  $H(F)$  est vérifiée, alors pour  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  on a

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

Si en plus la suite  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  est  $\rho$ -mélangeante et  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ , alors

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \longrightarrow^d \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)} \right).$$

**Preuve du Corollaire 2.2 :** On suppose que la condition  $H(\rho)$  est vérifiée et les variables sont identiquement distribuées, alors selon S. Utev et M. Peligrad ([34], Théorème 2.1), pour  $p > 2$ , il existe une constante  $D = D(p, N, \eta)$  telle que pour tout  $n \geq 1$  et  $f_x \in \mathcal{F}$ , on a

$$\mathbb{E} |Z_n(f_x)|^p \leq D \left( \|f_x\|_2^p + n^{1-\frac{p}{2}} \|f_x\|_p^p \right).$$

On applique le Théorème 2.1 avec la condition  $H(p, X)$  où  $\varepsilon = 0, v = 2, p = r$  pour avoir

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{\|f_x - f_y\|_2 \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \right] \leq C \cdot \left( \ln n \cdot n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} + \delta^{(1-\frac{2}{p})} \right).$$

Si  $H(F)$  est vérifiée et  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ , alors par le Lemme 2.1 pour  $p > 2$  on obtient

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

Pour prouver que

$$\sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)),$$

on va appliquer le résultat de S. Utev et M. Peligrad ([34], Théorème 2.2, p. 105) avec  $\xi_{ni} \equiv \mathbb{I}_{(X_i \leq \xi)} - F(\xi)$ ,  $\sigma_n^2 = \mathbb{E} [\sum_{i=1}^n \xi_{ni}]^2$ ,  $k_n = n$  et  $W_n(t) := \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{v_t} \xi_{ni}$  où  $v_t = [nt]$  et  $t \in [0, 1]$ . Si on a  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ , alors  $\frac{\sigma_n^2}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \sigma_\infty^2$ . La condition (2.5) de S. Utev et M. Peligrad [34] :

$$(2.5) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} [n \mathbb{E} (\xi_{n1})^2 / \sigma_n^2] \leq C,$$

est la conséquence de  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ . La condition (2.3) de Utev et Peligrad [34] est prouvée dans le Corollaire 2.1 : (condition (L)). On prend  $t = 1$  pour conclure que

$$\sqrt{n} (F_n(\xi) - F(\xi)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)).$$

Et puis d'après le Théorème 2.2 on a

$$\sqrt{n} (\xi_n - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)}\right). \square$$

### 2.4.3 Processus $\alpha$ -mélange

**Corollaire 2.3** Supposon les conditions  $H(X)$  et  $H(F)$  vérifiées. On suppose que la suite est  $\alpha$ -mélangeante où le coefficient  $\alpha$ -mélange satisfait

$$\alpha(n) \leq Cn^{-\theta} \text{ pour } C \geq 1 \text{ et } \theta > 1 + \sqrt{2}.$$

Alors pour  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  on a

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

Si en plus  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ , alors

$$\sqrt{n} (\xi_n - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)}\right).$$

**Preuve du Corollaire 2.3 :** Lorsque  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont identiquement distribuées et d'après le résultat de Q. Shao et H. Yu ([32], Théorème 4.1), si le coefficient

$$\alpha(n) \leq Cn^{-\theta} \text{ pour } C > 0 \text{ et } \theta > 0,$$

alors pour des réels  $2 < p < r \leq \infty, 2 < v \leq r, \varepsilon > 0, \theta > \frac{v}{v-2}$  et  $\theta \geq \frac{(p-1)r}{r-p}$ , il existe une constante  $K = K(p, v, r, \varepsilon, \theta, C) < \infty$  telle que pour tout  $f_x \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E} |Z_n(f_x)|^p \leq K \left( \|f_x\|_v^p + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} \|f_x\|_r^p \right).$$

Alors  $H(p, X)$  est vérifiée. Si  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$  et  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ , alors par le Lemme 2.1 on a

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$



Pour déterminer  $\theta$  qui permet d'appliquer le Théorème 2.1 on a besoin de  $v < p < r$  et  $\frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1 > 0$ . On a

$$\theta \geq \frac{(p-1)r}{r-p} \Leftrightarrow p \leq \frac{r(\theta+1)}{\theta+r},$$

et

$$\theta > \frac{v}{v-2} \Leftrightarrow v > \frac{2\theta}{\theta-1}.$$

Pour que  $v < p$ , il faut que

$$\frac{2\theta}{\theta-1} < \frac{r(\theta+1)}{\theta+r}$$

qui est satisfaite si

$$\theta > 1 + \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{r(r-1)} + \sqrt{2}}{r-2} \right).$$

Par conséquent, on pose  $\theta = 1 + \eta$  où  $\eta > \sqrt{2}$ . Pour  $\eta > \sqrt{2}$  on a

$$2 + \frac{2}{\eta} < 2 + \frac{2\eta^2 + 6\eta + 4}{\eta^3 + \eta^2 + 2\eta + 4} < 2 + \frac{2(2\eta + 3)}{\eta^2 - 2},$$

alors on peut choisir  $v, p, r$

i)  $v = 2 + \frac{2}{\eta},$

ii)  $p = 2 + \frac{2\eta^2 + 6\eta + 4}{\eta^3 + \eta^2 + 2\eta + 4},$

iii)  $r = 2 + \frac{2(2\eta + 3)}{\eta^2 - 2}.$

Avec ce choix on a  $v < p < r$  et

$$\frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1 > 0.$$

Alors on a

$$W(n, a_n) \leq C \cdot \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}} + a_n^{\frac{1}{v}-\frac{1}{p}} \right) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Si en plus  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ , alors d'après le résultat de E. Rio ([29], Théorème 7.2) pour

$$\alpha(n) \leq Cn^{-\theta} \text{ où } C \geq 1 \text{ et } \theta > 1,$$

on a

$$\sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)).$$

Enfin en appliquant le Théorème 2.2 pour  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)}\right). \square$$

#### 2.4.4 Fonctionnelles non-linéaires de processus Gaussiens

Soit  $X_i = G(Z_i)$  où  $G$  est une fonction mesurable et  $(Z_i)$  est une suite gaussienne stationnaire de moyenne nulle et de fonction de covariance :

$$\varrho(n) = E(Z_i Z_{i+n}).$$

**Corollaire 2.4** Si on suppose :

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\varrho(i)| < \infty,$$

Alors pour  $p > 2$  et  $\delta > n^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$ , il existe une constante positive  $Cte(p, \varrho)$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{\|f_x - f_y\|_2 \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \right] \leq C(p, \varrho) \cdot \left( \ln n \cdot n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} + \delta^{(1-\frac{2}{p})} \right).$$

Si  $H(F)$  est vérifiée, alors pour  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  on a

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

Si en plus  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ , alors

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)}\right).$$

**Preuve du Corollaire 2.4 :** La preuve de ce Corollaire est une conséquence des résultats suivants :

**Lemme 2.3** (*S. Ben Hariz [5]*) : Soit  $p$  un entier et on suppose que  $\sum_{i=0}^{\infty} |\varrho(i)| < \infty$ , alors il existe une constante  $K = K(p, \varrho)$  telle que pour tout  $n > 0$ ,

$$\mathbb{E} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n f(Z_i) - E(f(Z_i)) \right)^p \leq K(p, \varrho) \left( \|f\|_2^p + n^{1-\frac{p}{2}} \|f\|_p^p \right).$$

On applique le Lemme 2.3 pour  $f(Z) = \mathbb{I}_{G(Z) \leq x}$ . Donc on a  $H(p, X)$  avec  $\varepsilon = 0$ ,  $v = 2$  et  $p = r$ . Si  $H(F)$  est vérifiée, alors par le Lemma 2.1 pour  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  on a

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

Et par le Théorème 2.1

$$W(n, \delta) \leq C \left( \ln n \cdot n^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{p}} + \delta^{(1-\frac{2}{p})} \right).$$

Pour le Théorème de la limite centrale, on a besoin d'appliquer le résultat de P. Breuer et P. Major [8] (voir aussi [9] pour l'extension fonctionnelle).

**Lemme 2.4** Soit  $(Z_i)_{i \geq 0}$  est une suite gaussienne stationnaire avec une fonction de covariance satisfaisant  $\sum_{i=0}^{\infty} |\varrho(i)| < \infty$ . Alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (\mathbb{I}_{G(Z_i) \leq x} - F(x)) \longrightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_{\infty}^2(x))$$

où  $\sigma_{\infty}^2(x) = \text{Var}(\mathbb{I}_{G(Z_1) \leq x}) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \text{Cov}(\mathbb{I}_{G(Z_1) \leq x}, \mathbb{I}_{G(Z_i) \leq x})$ .

Si  $0 < \sigma_{\infty}^2 < \infty$ , alors par les Lemmes 2.3 et 2.4 et le Théorème 2.2 on a

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \longrightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_{\infty}^2(\xi)}{f^2(\xi)}\right). \square$$

### 2.4.5 Comparaison avec les résultats existants dans la littérature

- Dans [31], P. K. Sen a prouvé pour des données  $\varphi$ -mélangeantes que si on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{2}}(i) < \infty,$$

alors

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \longrightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)}\right).$$

Cette condition est plus forte que notre condition :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{p}}(2^i) < \infty.$$

En effet,  $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{2}}(i) < \infty$  a besoin d'une décroissance algébrique pour le coefficient de  $\varphi$ -mélange alors que  $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{p}}(2^i) < \infty$  a besoin d'une décroissance logarithmique.

- Dans [10], S. X. Chen et C.Y. Tang se sont intéressés à l'estimation non paramétrique de la Value at Risk ( $VaR$ ) pour des données  $\alpha$ -mélangeantes géométriques c'est à dire

$$\alpha(k) \leq c\rho^k \text{ où } k \geq 1, c > 0 \text{ et } \rho \in (0, 1).$$

En utilisant l'estimateur du noyau de la  $VaR$  :

$$\widehat{F}_{n,h}\left(\widehat{VaR}_h(q)\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G\left(\frac{\widehat{VaR}_h(q) - X_i}{h}\right) = q,$$

où  $G(x) = \int_{-\infty}^x K(u) d(u)$  est la fonction de répartition d'une fonction de noyau  $K$ , ils ont montré que

$$\begin{aligned} \left|\widehat{VaR}_h(q) - VaR(q)\right| &= o_{p.s.}\left(n^{-\frac{1}{2}} \ln(n)\right). \\ \sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_h(q) - VaR(q)\right) &\rightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_\infty^2(VaR(q))}{f^2(VaR(q))}\right). \end{aligned}$$

- S.N. Lahiri et S. Sun [22] ont montré pour des données  $\alpha$ -mélangeantes tel que

$$\alpha(k) \leq dn^{-\theta} \text{ où } n \geq 1, \theta > 12 \text{ et } d \in (0, 1),$$

que l'estimateur empirique de la  $VaR$  vérifie pour une constante  $C > 0$  et  $n \geq 1$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left[\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \leq x\right] - \Phi\left[x \times \frac{f(\xi)}{\sigma_\infty(\xi)}\right] \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Ce qui montre, lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \longrightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)}\right).$$

On note que pour le TLC pour le cas  $\alpha$ -mélange, on a besoin de  $\alpha(k) \leq Cn^{-\theta}$  où  $\theta > 1 + \sqrt{2}$  qui est plus faible que les conditions de Chen et Lahiri.

**Remarque 2.2** Nos résultats s'appliquent aussi pour les équations différentielles stochastiques et des modèles à volatilité stochastique observés en temps discret. En effet, V. Genon-Catalot et al. [35] ont montré que, sous certaines conditions, ces modèles ainsi que leurs versions discrètes, satisfont les critères de  $\alpha$ -mélange géométrique ou  $\rho$ -mélange. Par conséquent, l'hypothèse principale  $H(p, X)$  est vérifiée pour tout  $p \geq 2$ . En ce qui concerne les modèles GARCH, qui sont aussi largement utilisés dans les modèles financiers, on mentionne que R.A. Davis et al. [14] ont montré que sous certaines conditions sur le moment des innovations et sur l'exposant de Lyapunov associé à la suite, le carré de la suite de GARCH est un  $\alpha$ -mélange géométrique. Ainsi, nos résultats s'appliquent aussi pour les modèles GARCH.

## 2.5 Simulation Monte Carlo

Dans cette section, nous présentons des études numériques qui illustrent les conditions sous lesquelles la  $\widehat{VaR}(q)$  converge vers la  $VaR(q)$ . Dans les simulations que nous présentons, nous avons choisi deux suites corrélées d'une loi gaussienne et Pareto. Dans les deux cas, on compare la  $VaR(q)$  où  $q = 0.95$  avec l'estimateur empirique de la  $VaR(q)$ . Pour chaque ensemble de paramètres, nous réalisons ( $M = 10000$ ) simulations de Monte Carlo pour calculer la moyenne de l'erreur absolue ( $MAE(n)$ ) entre la  $\widehat{VaR}(q)$  et la  $VaR(q)$

$$MAE(n) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left| \widehat{VaR}_{(i)}(q) - VaR(q) \right|.$$

On donne aussi un intervalle de confiance à 95% pour la  $VaR(q)$ . On considère trois modèles différents. Le premier, une suite corrélée d'une loi gaussienne, le deuxième une suite corrélée d'une loi de Pareto et enfin un modèle à volatilité stochastique.

### 2.5.1 Étude 1 : Processus gaussiens dépendants

Soit  $(X_i)_{0 \leq i \leq n}$  une suite gaussienne corrélée telle que  $\mathbb{E}(X_i) = 0$  et  $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$ . On définit la fonction de corrélation par :

$$\varrho_n(i) := Cov(X_0, X_i) = (1 + |i|)^{-\alpha}, i = 1, \dots, n$$

où  $\alpha > 0$ . Le paramètre  $\alpha$  accorde la force de la dépendance. En particulier  $\alpha = \infty$  correspond à une suite i.i.d, alors que  $\alpha = 0$ , ( $\varrho_n(i) = 1$ ) donne une suite parfaitement corrélée.

Nous étudions le processus :

$$T_n := \sqrt{n} \left( \widehat{VaR}(q) - VaR(q) \right). \quad (2.14)$$

Nous montrons que pour  $\alpha > 1$  ( $\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} |\varrho_n(i)| < \infty$ ),

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \tau_{\infty}^2), \quad (2.15)$$

où  $\tau_{\infty}^2 = \frac{\sigma_{\infty}^2(VaR(q))}{f^2(VaR(q))}$ . On rappelle que  $VaR(0.95) = 1.6449$ .

Dans la Figure 2.1, on trace la moyenne de l'erreur absolue avec un intervalle de confiance à 95% comme une fonction de  $n$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  quand  $q = 0.95$ . Clairement  $MAE(n)$  tend vers zéro lorsque  $n$  augmente et  $\alpha > 0$ . Les simulations prouvent que la  $\widehat{VaR}(q)$  est consistante quand le paramètre de corrélation  $\alpha > 0$ . Dans la Figure 2.2 quand  $\alpha > 1$ , on trace  $\sqrt{n} MAE$  en fonction de  $n$  pour voir qu'il converge vers une constante. Dans la Figure 2.3, on montre que  $MAE(n)$  comme une fonction de  $\alpha$  pour des différentes valeurs de  $n$  avec  $q = 0.95$  tend vers zéro pour des grandes valeurs de  $n$ . Dans la Figure 2.4, on compare l'histogramme de  $T_n$  (2.14) pour  $\alpha = 3$  et  $n = 800$  avec la fonction de densité de loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, \sigma_{\infty}^2)$ . Clairement, pour  $\alpha > 1$  l'histogramme de  $T_n$  s'approche de la distribution normale, confirmant notre résultat (2.15).

### 2.5.2 Étude 2 : Processus de Pareto dépendants

Nous supposons la  $\widehat{VaR}(q)$  d'une suite corrélée  $(X_i)_{0 \leq i \leq n}$  d'une loi de Pareto où la fonction de répartition de Pareto est définie pour  $\beta > 0$  par :

$$G(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\beta} & x > x_0 \\ 0 & x \leq x_0 \end{cases}.$$

Pour simuler une suite corrélée de lois marginales de Pareto, nous supposons  $X_i = G^{-1}(\Phi(Y_i))$  où  $\Phi$  est la fonction de répartition de loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $(Y_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une suite corrélée de loi gaussienne ayant pour la fonction de corrélation  $\varrho_n(i)$ . Comme la première étude, on étudie le processus  $T_n$  (2.14) pour prouver le Théorème de la limite centrale (2.15). Ici  $VaR(0.95) = 2.7144$  lorsque  $\beta = 3$ .

Dans la Figure 2.5, on trace la  $MAE(n)$  avec un intervalle de confiance à 95% comme une fonction de  $n$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  lorsque  $q = 0.95$ . Clairement la  $MAE$  tend vers zéro lorsque  $n$  augmente et  $\alpha > 0$ . Les simulations prouvent que la  $\widehat{VaR}(q)$  est consistante quand le paramètre de corrélation  $\alpha > 0$ . Dans la Figure 2.6 quand  $\alpha > 1$ , on trace  $\sqrt{n} MAE(n)$  en fonction de  $n$  pour voir qu'il converge vers une constante. Dans la Figure 2.7, on montre que  $MAE(n)$  comme une fonction de  $\alpha$  pour des différentes valeurs de  $n$  avec  $q = 0.95$ , tend vers zéro pour de grandes valeurs de  $n$ . Dans la Figure 2.8, on compare l'histogramme de  $T_n$  (2.14) pour  $\alpha = 3$  et  $n = 800$  avec la fonction de densité de la loi de Pareto. Ici aussi, pour  $\alpha > 1$  le TLC est satisfait.

### 2.5.3 Étude 3 : Modèle à volatilité stochastique

Nous supposons la  $\widehat{VaR}(q)$  d'une suite corrélée  $(X_i)_{0 \leq i \leq n}$  à volatilité stochastique :

$$X_i = \sigma_i \cdot \varepsilon_i$$

où  $(\varepsilon_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une suite de v.a. iid d'une loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une suite corrélée d'une loi gaussienne ou d'une loi de Pareto  $G$ . Comme la première étude, nous étudions le processus  $T_n$  (2.14) pour prouver (2.15) où  $VaR(0.95) \approx 1.5949$  pour la suite gaussienne et  $VaR(0.95) \approx 2.4615$  pour la suite de Pareto ( $\beta = 3$ ).

Dans les Figures 2.9 et 2.10, nous comparons l'histogramme de  $T_n$  (2.14) pour  $\alpha = 3$  et  $n = 800$ , avec la fonction de densité de la loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$  en utilisant les deux lois gaussienne et Pareto. Ici aussi, pour  $\alpha > 1$  le TLC est satisfait.

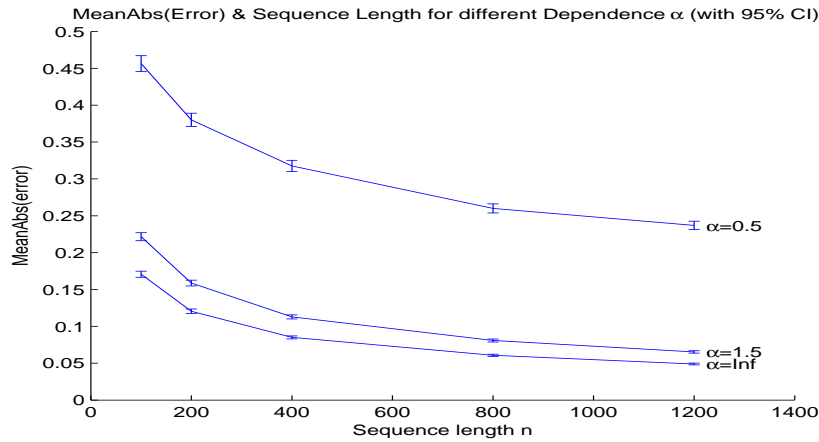


FIGURE 2.1 – La moyenne de l’erreur absolue ( $MAE(n)$ ) avec des intervalles de confiance à 95% pour une suite de loi gaussienne ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n(i) = (1 + |i|)^{-\alpha}$  est tracée en fonction de la longueur de la suite  $n$  pour des valeurs différentes du paramètre de dépendance  $\alpha$ .

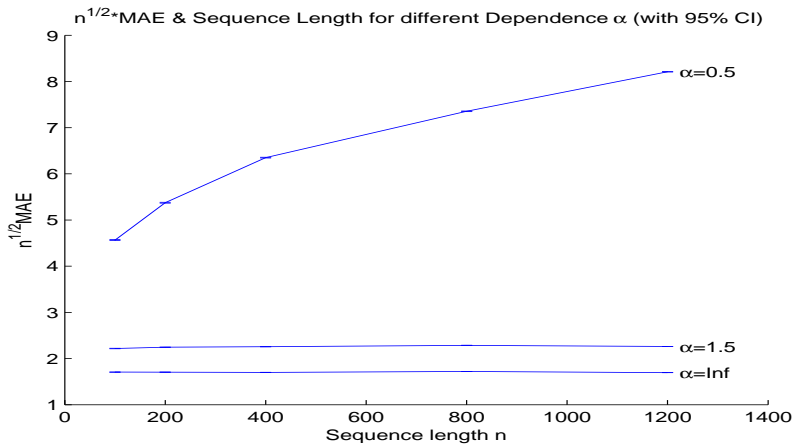


FIGURE 2.2 –  $(\sqrt{n}MAE(n))$  avec des intervalles de confiance à 95% pour une suite de loi gaussienne ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction de la longueur de la suite  $n$  pour  $\alpha \in \{0.5, 1.5, \infty\}$ . La valeur  $(\sqrt{n}MAE(n))$  tend vers une constante lorsque  $\alpha > 1$  indiquant que la vitesse de convergence est de l’ordre de  $O(n^{-\frac{1}{2}})$ .



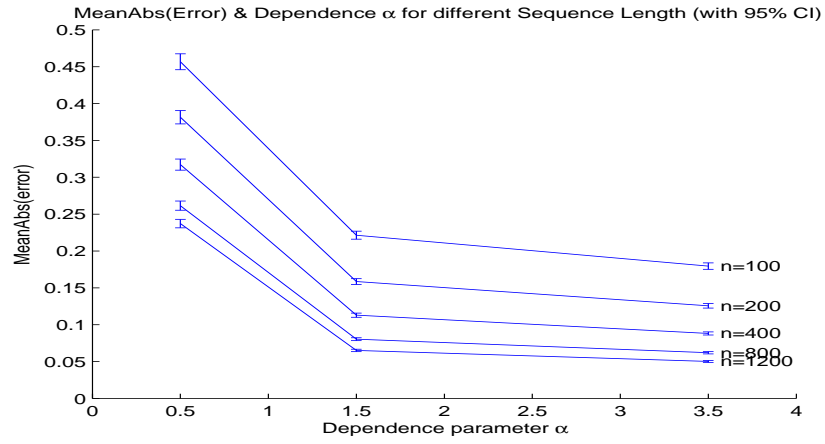


FIGURE 2.3 – La moyenne de l’erreur absolue ( $MAE(n)$ ) avec des intervalles de confiance à 95% pour une suite de loi gaussienne ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction du paramètre de dépendance  $\alpha$  pour des valeurs différentes de  $n$ .

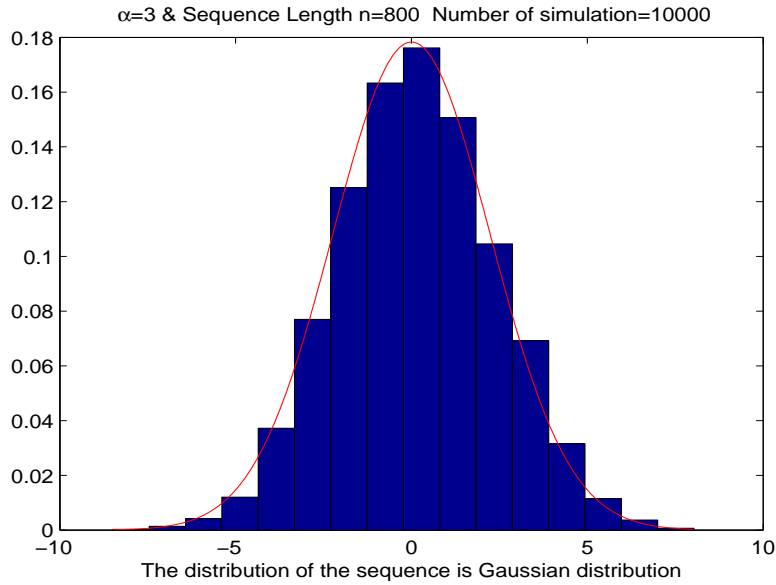


FIGURE 2.4 – Comparaison de l’histogramme de  $T_n$  (2.14) pour une suite de loi gaussienne où  $\alpha = 3$  et  $n = 800$ , avec la fonction de densité de la distribution gaussienne  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$ .

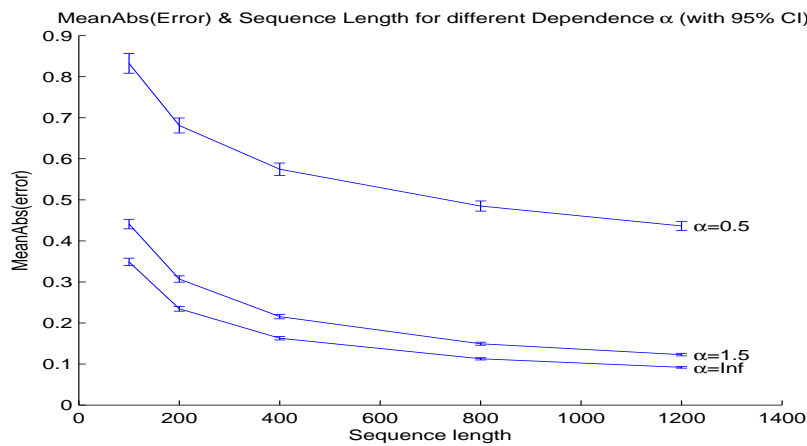


FIGURE 2.5 – La moyenne de l’erreur absolue ( $MAE(n)$ ) avec des intervalles de confiance à 95% pour une suite de loi de Pareto où ( $\beta = 3$ ) ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction de la longueur de la suite  $n$  pour des valeurs différentes du paramètre de dépendance  $\alpha$ .

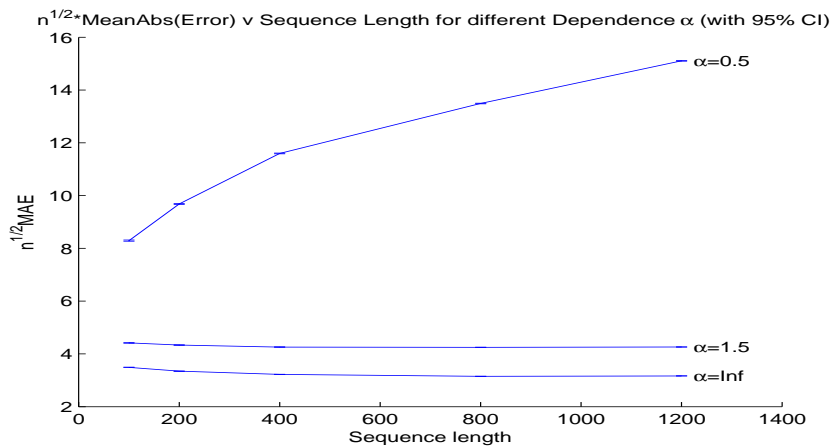


FIGURE 2.6 –  $(\sqrt{n}MAE(n))$  avec des intervalles de confiance  $\tilde{\Delta}$  95% pour une suite de loi de Pareto ( $\beta = 3$ ) ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction de la longueur de la suite  $n$  pour  $\alpha \in \{0.5, 1.5, \infty\}$ . La valeur  $(\sqrt{n}MAE(n))$  tend vers une constante lorsque  $\alpha > 1$  indiquant que la vitesse de convergence est de l’ordre de  $O(n^{-\frac{1}{2}})$ .

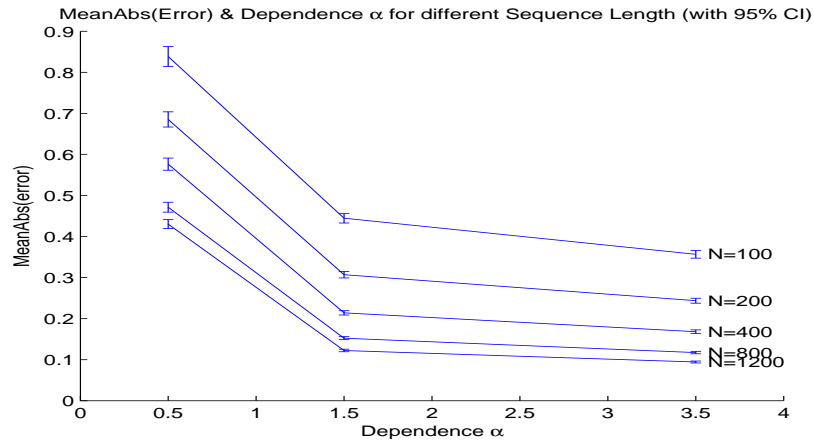


FIGURE 2.7 – La moyenne de l’erreur absolue ( $MAE(n)$ ) avec des intervalles de confiance à 95% pour une suite de loi de Pareto ( $\beta = 3$ ) ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction du paramètre de dépendance  $\alpha$  pour des valeurs différentes de  $n$ .

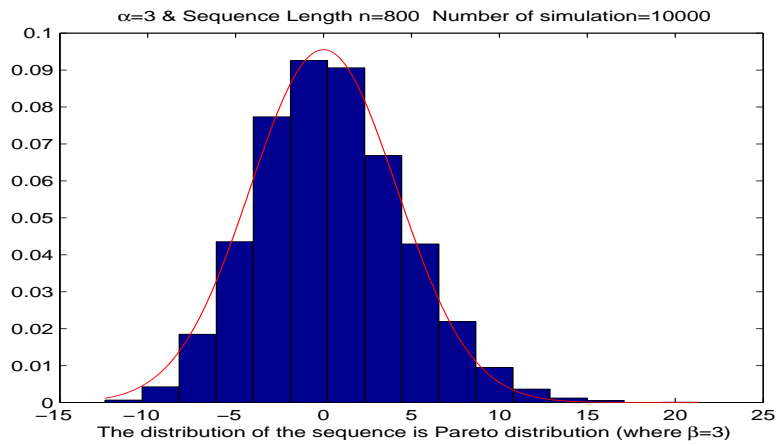


FIGURE 2.8 – Comparaison de l’histogramme de  $T_n$  (2.14) pour une suite corrélée d’une loi de Pareto ( $\beta = 3$ ) où  $\alpha = 3$  et  $n = 800$ , avec la fonction de densité de la distribution gaussienne  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$ .

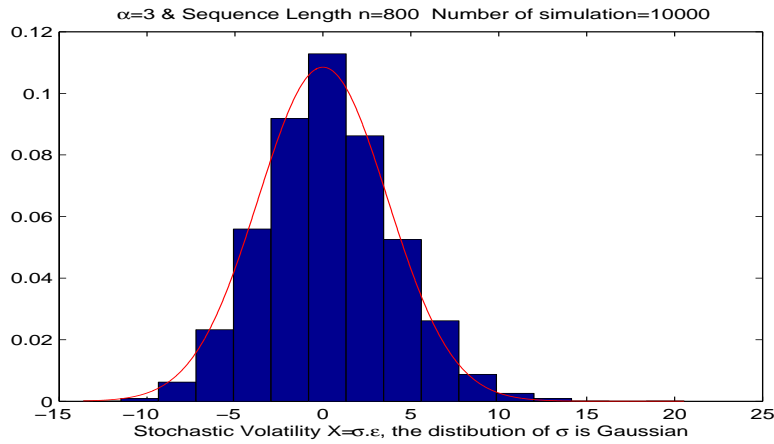


FIGURE 2.9 – Comparaison de l’histogramme de  $T_n$  (2.14) pour l’estimateur empirique de la  $VaR$  pour le modèle à volatilité stochastique dans le cas où  $\{\sigma_i\}_{i \geq 1}$  est une suite gaussienne corrélée avec  $\alpha = 3$  et  $n = 1000$ , avec la fonction de densité de la distribution gaussienne  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$ .

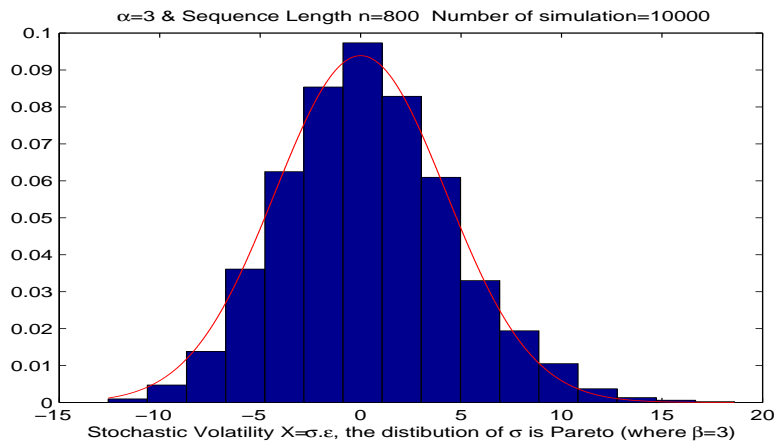


FIGURE 2.10 – Comparaison de l’histogramme de  $T_n$  (2.14) pour l’estimateur empirique de la  $VaR$  pour le modèle à volatilité stochastique dans le cas où  $\{\sigma_i\}_{i \geq 1}$  est une suite corrélée d’une loi de Pareto ( $\beta = 3$ ) avec  $\alpha = 3$  et  $n = 1000$ , avec la fonction de densité de la distribution gaussienne  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$ .



# Chapitre 3

## La représentation de Bahadur pour des variables faiblement dépendantes

### Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à la représentation de Bahadur pour le quantile empirique pour des données faiblement dépendantes. On donne des conditions générales assurant la représentation de Bahadur pour le quantile empirique en probabilité et presque sûrement. L'hypothèse principale étant une inégalité de moment pour les sommes partielles.

**Mots clés :** Fonction de quantile ; Processus empirique ; Représentation de Bahadur ; Module de continuité ; Inégalité de moment ; Variables faiblement dépendantes.

### 3.1 Introduction

La représentation de Bahadur, présentée par R. Bahadur [3] (1966), est un ordre de grandeur pour la différence entre le processus empirique et le processus de quantile empirique. Soit  $\{X_i\}_{i \geq 0}$  une suite stationnaire de variables aléatoires réelles identiquement distribuées de fonction de répartition  $F$ . Maintenant, on présente la représentation de Bahadur. Pour cela, soit

$\xi \equiv F^{-1}(q) = Q(q)$  la fonction de quantile de  $F$ ,  $F_n$  la fonction de répartition empirique et  $\xi_n \equiv F_n^{-1}(q) = Q_n(q)$  la fonction de quantile empirique, alors

R. Bahadur [3] (1966) a montré, si les  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont i.i.d, que

$$\xi_n = \xi + \left[ \frac{q - F_n(\xi)}{f(\xi)} \right] + R_n(q), q \in (0, 1) \quad (3.1)$$

où  $R_n(q) = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{3}{4}} (\ln n)^{\frac{1}{2}} (\ln \ln n)^{\frac{1}{4}} \right)$ .

Dans le cas uniforme, il s'écrit :

$$\tilde{Q}_n(q) = q + \left[ q - \tilde{F}_n(q) \right] + \tilde{R}_n(q), q \in [0, 1] \quad (3.2)$$

où  $\tilde{F}_n(q) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(U_i \leq q)}$ ,  $U_i = F(X_i)$  est la fonction de répartition empirique uniforme et  $\tilde{Q}_n(q) = \tilde{F}_n^{-1}(q)$  le quantile empirique uniforme.

L'objectif principale de ce travail est d'étudier le processus  $R_n(q)$  associé à la représentation de Bahadur pour le quantile empirique. On cherche notamment à donner un ordre de grandeur pour  $R_n$  en probabilité ou presque sûrement ponctuellement, ou de manière uniforme.

Avant d'énoncer nos résultats, nous rappelons brièvement les résultats existants dans la littérature : J. Kiefer [19] (1967) a amélioré ce résultat en donnant l'ordre exacte de  $R_n$  en montrant que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} R_n(q) \cdot \left( n^{-\frac{3}{4}} (\ln \ln n)^{\frac{3}{4}} \right) =_{p.s.} c,$$

où  $c$  une constante. Plus tard, J. Kiefer [20] (1970) a prouvé une version uniforme en montrant que si les  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont i.i.d de loi de densité  $f$ , alors pour  $0 \leq a < b \leq 1$  on a :

$$\sup_{q \in (a,b)} |R_n(q)| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{3}{4}} (\ln n)^{\frac{1}{2}} (\ln \ln n)^{\frac{1}{4}} \right),$$

si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$(K_1) \sup_{q \in (a,b)} |f'(Q(q))| < \infty;$$

$$(K_2) \inf_{q \in (a,b)} |f(Q(q))| > 0.$$

Pour des variables uniformes et i.i.d, une preuve à la fois courte et élégante est proposée dans le travail de G.R. Shorack [33] (1982). La méthode

de la preuve utilise la construction Hongroise qui consiste à approximer le processus empirique uniforme par un processus gaussien (l'inégalité (1.4) de [33]). Une deuxième preuve est fournie en utilisant le module de continuité uniforme du processus empirique.

Ces résultats ont été généralisés à des v.a ( $X_i$ ) dépendantes. En particulier, P.K. Sen [31] (1972) a prouvé pour des variables  $\phi$ -mélangeantes que :

$$|R_n(q)| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}(\beta+1)} \ln n \right)$$

où  $\beta \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$  selon les conditions sur le coefficient de mélange.

K. Yoshihara [38] (1994) a montré dans le cas  $\alpha$ -mélange ou  $\phi$ -mélange que

$$|R_n(q)| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{3}{4}} \ln n \right).$$

R. Kulik [21] (2007) a étudié la représentation de Bahadur pour une classe de processus linéaires stationnaires :

$$X_i = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \epsilon_{i-k}$$

où  $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est une suite i.i.d et  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty$ , sous des conditions de moment et de densité sur  $\epsilon$  et  $\sum_{k=i}^{\infty} c_k^2 = O\left(i^{-\frac{2}{\rho}} (\ln i)^{-3}\right)$  où  $\rho \in (0, \frac{1}{2})$ . Alors, il a prouvé

$$\sup_{q \in (a,b)} |R_n(q)| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{3}{4}} (\ln n)^{\frac{1}{2}} (\ln \ln n)^{\frac{1}{4}} \right)$$

où  $f$  vérifie les deux conditions de Kiefer ( $K_1$ ) et ( $K_2$ ). Il retrouve ainsi les mêmes résultats obtenus pour des v.a i.i.d.

Dans la suite, on donne une représentation de Bahadur pour le quantile empirique sous des inégalités de moment pour des sommes partielles définies à partir de la suite  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ . L'approche est essentiellement basée sur l'étude des oscillations du processus empirique.

Dans tout ce chapitre, on va supposer une ou plusieurs des conditions suivantes :

$H(X)$  :  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une suite stationnaire de variables aléatoires réelles de fonction de répartition  $F$ .



$H(p, X)$  : Soit  $\mathcal{F}$  la classe de fonctions réelles bornées par 1. Pour des réels  $2 \leq v < p \leq r \leq \infty$ , et pour  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante positive  $D = D(\varepsilon, p, v, r) < \infty$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{F}$ ,

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n [f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i))] \right|^p \leq D \left( n^{\frac{p}{2}} \|f\|_v^p + n^{1+\varepsilon} \|f\|_r^p \right). \quad (3.3)$$

$H^*(p, X)$  : Dans  $H(p, X)$ , la relation (3.3) est remplacée par :

$$\mathbb{E} \left( \max_{m \leq n} \left| \sum_{i=1}^m [f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i))] \right| \right)^p \leq D \left( n^{\frac{p}{2}} \|f\|_v^p + n^{1+\varepsilon} \|f\|_r^p \right).$$

$H(F)$  :  $F$  est continue, et sur  $\mathcal{I} = [Q(q) - a_n, Q(q) + a_n]$  où  $0 < a_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ ,  $F$  admet une densité  $f$  qui est continue et  $0 < f(Q(q)) < \infty$  où  $q \in (0, 1)$ .

Enfin, on pose pour  $0 < b_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ ,

$$a_n \ll b_n \Leftrightarrow \left\{ a_n < b_n \text{ et } \frac{a_n}{b_n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \right\}.$$

Dans les preuves  $C$  désigne une constante dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre.

## 3.2 La représentation de Bahadur en probabilité

Pour établir la représentation de Bahadur dans le cas uniforme, on va étudier le module de continuité locale du processus empirique uniforme qui est défini par

$$W(n, a_n) \equiv \mathbb{E} \left( \sup_{t \in \mathcal{I}} |U_n(t) - U_n(q)| \right) \quad (3.4)$$

où  $\mathcal{I} = [q - a_n, q + a_n]$  dans le cas uniforme. La condition  $H(p, X)$  s'écrit dans le cas uniforme :

$H'(p, X)$  : Pour des réels  $2 \leq v < p \leq r \leq \infty$ , et pour  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante positive  $D = D(\varepsilon, p, v, r) < \infty$  telle que pour tout  $t, t' \in [0, 1]$

$$\mathbb{E} |U_n(t) - U_n(t')|^p \leq D \left( |t - t'|^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} |t - t'|^{\frac{p}{r}} \right).$$

**Théorème 3.1** *Sous  $H'(p, X)$ , il existe une constante  $C = C(\varepsilon, p, v, r) < \infty$  telle que pour  $a_n \geq C.n^{-\frac{1}{2}(\frac{v}{v-1})}$ , on a :*

$$W(n, a_n) \leq C. \left( a_n^{\frac{1}{p}} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r})} a_n^{\frac{1}{p}(1 - \frac{1}{v}) + \frac{1}{vr}} \right). \quad (3.5)$$

Si en plus  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left( 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \right) - 1$ , alors

$$W(n, a_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Preuve du Théorème 3.1 :** Pour  $t \in \mathcal{I}$ , soit  $(x_i^k)_{1 \leq i \leq 2^{k+1}a_n}$  une subdivision finie de  $\mathcal{I}$  tel que  $x_1^k = q - a_n, x_2^k = q - a_n + 2^{-k}, \dots$ . Pour chaque  $k$  on définit une projection  $\pi_k(t) = x_i^k$  si  $t \in [x_i^k, x_{i+1}^k[$ . Alors, on a pour  $q_0 \leq k \leq q_1$ ,

$$\begin{aligned} U_n(t) - U_n(q) &= U_n(t) - U_n(\pi_{q_1}(t)) + \sum_{k=q_0+1}^{q_1} [U_n(\pi_k(t)) - U_n(\pi_{k-1}(t))] \\ &\quad + U_n(\pi_{q_0}(t)) - U_n(q) \end{aligned}$$

On pose  $\|U_n(t)\|_{\mathcal{I}} := \sup_{t \in \mathcal{I}} |U_n(t)|$  et alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|U_n(t) - U_n(q)\|_{\mathcal{I}} &\leq \mathbb{E} \|U_n(t) - U_n(\pi_{q_1}(t))\|_{\mathcal{I}} \\ &\quad + \sum_{k=q_0+1}^{q_1} \mathbb{E} \|U_n(\pi_k(t)) - U_n(\pi_{k-1}(t))\|_{\mathcal{I}} \\ &\quad + \mathbb{E} \|U_n(\pi_{q_0}(t)) - U_n(q)\|_{\mathcal{I}} \\ &\equiv E_{q_1+1} + \sum_{k=q_0+1}^{q_1} E_k + E_{q_0}. \end{aligned}$$

D'une part

$$\begin{aligned} E_{q_1+1} &\equiv \mathbb{E} \|U_n(t) - U_n(\pi_{q_1}(t))\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \mathbb{E} \|U_n(x_{i+1}^{q_1}) - U_n(x_i^{q_1})\|_{\mathcal{I}} + 2\sqrt{n}2^{-q_1}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Pisier (2.3), on a :

$$\mathbb{E} \|U_n(x_{i+1}^{q_1}) - U_n(x_i^{q_1})\|_{\mathcal{I}} \leq 2^{\frac{q_1+1}{p}} a_n^{\frac{1}{p}} \max_{x_i} \|U_n(x_{i+1}^{q_1}) - U_n(x_i^{q_1})\|_p.$$

De même pour  $E_k$  on a

$$\begin{aligned} E_k &\equiv \mathbb{E} \|U_n(\pi_k(t)) - U_n(\pi_{k-1}(t))\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq 2^{\frac{k+1}{p}} a_n^{\frac{1}{p}} \max_{v \in \pi_k(\mathcal{I})} \|U_n(v) - U_n(\pi_{k-1}(v))\|_p. \end{aligned}$$

On applique  $H(p, X)$  à  $U_n(v) - U_n(\pi_{k-1}(v))$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} \|U_n(v) - U_n(\pi_{k-1}(v))\|_p &\leq D^{\frac{1}{p}} \left( |v - \pi_{k-1}(v)|^{\frac{1}{v}} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} |v - \pi_{k-1}(v)|^{\frac{1}{r}} \right) \\ &\leq Cte(D) \cdot \left( 2^{-\frac{k}{v}} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} 2^{-\frac{k}{r}} \right). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} E_k &\leq C(D) \cdot 2^{\frac{k+1}{p}} a_n^{\frac{1}{p}} \left( 2^{-\frac{k}{v}} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} 2^{-\frac{k}{r}} \right) \\ &\leq C(D) \cdot a_n^{\frac{1}{p}} \left( 2^{-k(\frac{1}{v} - \frac{1}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} 2^{k(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \right). \end{aligned}$$

Pour  $E_{q_0}$ , on a

$$E_{q_0} \leq C \cdot a_n^{\frac{1}{p}} \left( 2^{-q_0(\frac{1}{v} - \frac{1}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} 2^{q_0(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \right).$$

Enfin, on obtient :

$$\begin{aligned} W(n, a_n) &\leq C \cdot \left[ \sqrt{n} 2^{-q_1} + a_n^{\frac{1}{p}} \sum_{k=q_0}^{q_1+1} \left[ 2^{-k(\frac{1}{v} - \frac{1}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} 2^{k(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \right] \right] \\ &\leq C \cdot \left[ \sqrt{n} 2^{-q_1} + a_n^{\frac{1}{p}} 2^{-q_0(\frac{1}{v} - \frac{1}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} a_n^{\frac{1}{p}} 2^{q_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \right]. \end{aligned}$$

On choisit  $q_0$  tel que  $2^{-q_0} \sim a_n \Rightarrow q_0 \sim -\frac{\ln a_n}{\ln 2}$ , et alors,

$$W(n, a_n) \leq C \cdot \left[ \sqrt{n} 2^{-q_1} + a_n^{\frac{1}{v}} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} a_n^{\frac{1}{p}} 2^{q_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \right].$$

On choisit  $q_1$  tel que  $\sqrt{n} 2^{-q_1} \sim a_n^{\frac{1}{v}}$ , donc  $q_1 \sim \frac{\ln(n^{\frac{1}{2}} a_n^{-\frac{1}{v}})}{\ln 2}$ . Il faut que

$$q_0 \leq q_1 \Rightarrow a_n^{-1} \leq n^{\frac{1}{2}} a_n^{-\frac{1}{v}} \Rightarrow a_n \geq n^{-\frac{1}{2}(\frac{v}{v-1})}.$$

Enfin, on a, pour  $a_n \geq C \cdot n^{-\frac{1}{2}(\frac{v}{v-1})}$ ,

$$W(n, a_n) \leq C \cdot \left[ a_n^{\frac{1}{v}} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \right) a_n^{\frac{1}{p} \left( 1 - \frac{1}{v} \right) + \frac{1}{vr}} \right]. \square$$

### 3.2.1 La représentation de Bahadur pour le quantile uniforme

On va appliquer le résultat du Théorème 3.1 pour en déduire une représentation de Bahadur en probabilité pour le quantile empirique uniforme.

**Théorème 3.2** *Sous les conditions  $H(X), H'(p, X)$  avec  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$ , on a, pour  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  et  $c_n \gg \max \left\{ a_n^{\frac{1}{v}}, n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)} a_n^{\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{v}\right) + \frac{1}{vr}} \right\}$ ,*

$$\left| \tilde{R}_n(q) \right| = o_p \left( n^{-\frac{1}{2}} c_n \right). \quad (3.6)$$

La preuve du Théorème précédent repose sur le Théorème 3.1 et le lemme suivant qui n'est rien autre que la version avec des lois uniformes du Lemme 2.1 du chapitre 1 :

**Lemme 3.1** *Sous les conditions  $H(X)$  et  $H'(p, X)$  où  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$ , on a : pour  $a_n > 0$ ,*

$$\mathbb{P} \left( \left| \tilde{Q}_n(q) - q \right| > a_n \right) \leq C(\varepsilon, p, v, r, q) \cdot \left( n^{\frac{1}{2}} a_n \right)^{-p}. \quad (3.7)$$

**Preuve du Théorème 3.2 :** Soit  $0 < a_n, 0 < c_n, q \in (0, 1)$  fixé et  $\mathcal{I} = [q - a_n, q + a_n]$  on note que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left| U_n \left( \tilde{Q}_n(q) \right) - U_n(q) \right| > c_n \right) &= \mathbb{P} \left( \left| U_n \left( \tilde{Q}_n(q) \right) - U_n(q) \right| > c_n \cap \left| \tilde{Q}_n(q) - q \right| \leq a_n \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left( \left| U_n \left( \tilde{Q}_n(q) \right) - U_n(q) \right| > c_n \cap \left| \tilde{Q}_n(q) - q \right| > a_n \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \left| U_n \left( \tilde{Q}_n(q) \right) - U_n(q) \right| \mathbb{I}_{\left( \left| \tilde{Q}_n(q) - q \right| \leq a_n \right)} > c_n \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left( \left| \tilde{Q}_n(q) - q \right| > a_n \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \sup_{t \in \mathcal{I}} \left| U_n(t) - U_n(q) \right| > c_n \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left( \left| \tilde{Q}_n(q) - q \right| > a_n \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

On applique le Théorème 3.1 au premier terme

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \sup_{t \in \mathcal{I}} |U_n(t) - U_n(q)| > c_n \right) &\leq \frac{1}{c_n} \mathbb{E} \left| \sup_{t \in \mathcal{I}} |U_n(t) - U_n(q)| \right| \\ &\leq C.c_n^{-1} \left( a_n^{\frac{1}{v}} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)} a_n^{\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{v}\right) + \frac{1}{vr}} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

D'après le Lemme 3.1, le second terme est majoré par :

$$\mathbb{P} \left( \left| \tilde{Q}_n(q) - q \right| > a_n \right) \leq C(\varepsilon, p, v, r, q) \cdot \left( n^{\frac{1}{2}} a_n \right)^{-p}. \quad (3.10)$$

A partir de (3.8), (3.9) et (3.10), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left| U_n \left( \tilde{Q}_n(q) \right) - U_n(q) \right| > c_n \right) &\leq C.c_n^{-1} \left( a_n^{\frac{1}{v}} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)} a_n^{\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{v}\right) + \frac{1}{vr}} \right) \\ &\quad + C(\varepsilon, p, v, r, q) \cdot \left( n^{\frac{1}{2}} a_n \right)^{-p}. \end{aligned}$$

Enfin pour  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  et  $c_n \gg \max \left\{ a_n^{\frac{1}{v}}, n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)} a_n^{\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{v}\right) + \frac{1}{vr}} \right\}$ , on a :

$$\left| U_n \left( \tilde{Q}_n(q) \right) - U_n(q) \right| = o_p(c_n).$$

Selon la définition de  $U_n(t)$ , la relation précédente s'écrit :

$$\left| \sqrt{n} \left( \tilde{F}_n \left( \tilde{Q}_n(q) \right) - \tilde{Q}_n(q) \right) - \sqrt{n} \left( \tilde{F}_n(q) - q \right) \right| = o_p(c_n).$$

puisque

$$\tilde{F}_n \left( \tilde{Q}_n(q) \right) = q + O(n^{-1}),$$

alors

$$\left| \sqrt{n} \left( q - \tilde{Q}_n(q) \right) - \sqrt{n} \left( \tilde{F}_n(q) - q \right) \right| = o_p(c_n) + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Enfin pour  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  et  $c_n \gg \max \left\{ a_n^{\frac{1}{v}}, n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)} a_n^{\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{v}\right) + \frac{1}{vr}} \right\}$ , on a

$$\left| \left( \tilde{Q}_n(q) - q \right) + \left( \tilde{F}_n(q) - q \right) \right| = o_p\left(n^{-\frac{1}{2}} c_n\right). \square$$

### 3.2.2 La représentation de Bahadur pour le quantile empirique : cas général

On a les relations suivantes sont vérifiées.

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_n(t) &= F(Q_n(t)) \\ F_n(x) &= \tilde{F}_n(F(x)) \\ F_n(Q(t)) &= \tilde{F}_n(t).\end{aligned}$$

où  $t \in [0, 1]$  et  $x \in \mathbb{R}$ . (voir par exemple Kulik [21]).

**Théorème 3.3** *Sous les conditions  $H(X), H(F), H(p, X)$  et*

$\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$ , *et si en plus  $0 < \sup_{x \in \mathcal{I}} |f'(x)| < \infty$ , alors, pour*  
 $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ ,  $c_n \gg \max \left\{ a_n^{\frac{1}{v}}, n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)} a_n^{\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{v}\right) + \frac{1}{vr}} \right\}$ , *on a*

$$|R_n(q)| = o_p \left( n^{-\frac{1}{2}} c_n \right). \quad (3.11)$$

**Preuve du Théorème 3.3 :** La preuve de ce théorème repose sur le Théorème 3.2 et le Lemme 2.1. On remplace  $\tilde{Q}_n(q)$  par  $F(\xi_n)$  et  $\tilde{F}_n(q)$  par  $F_n(\xi)$ . La relation (3.6) s'écrit :

$$\left| \sqrt{n} (F(\xi_n) - q) + \sqrt{n} (F_n(\xi) - q) \right| = o_p(c_n). \quad (3.12)$$

Le terme de gauche de (3.12) donne :

$$\sqrt{n} (F(\xi_n) - F(\xi)) + \sqrt{n} (F_n(\xi) - F(\xi)).$$

Si  $H(F)$  est vérifiée et  $0 < \sup_{x \in \mathcal{I}} |f'(x)| < \infty$ , alors en utilisant le développement de Taylor-Lagrange,

$$F(\xi_n) - F(\xi) = (\xi_n - \xi) f(\xi) + \frac{f'(\theta)}{2} (\xi_n - \xi)^2$$

où  $\theta$  entre  $\xi$  et  $\xi_n$ . Ensuite

$$\begin{aligned}F(\xi_n) - F(\xi) - (\xi_n - \xi) f(\xi) &\leq \frac{\sup_{x \in \mathcal{I}} |f'(x)|}{2} (\xi_n - \xi)^2 \\ &= o_p(a_n^2).\end{aligned}$$

Alors,

$$F(\xi_n) - F(\xi) - (\xi_n - \xi) f(Q(q)) = o_p(a_n^2).$$

Donc

$$\sqrt{n} |(\xi_n - \xi) f(\xi) + (F_n(\xi) - q)| = o_p(c_n) + o_p(a_n^2).$$

Enfin, pour  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  et  $c_n \gg a_n^{\frac{1}{2}} \gg a_n^2$ , on a

$$|(\xi_n - \xi) f(\xi) + (F_n(\xi) - q)| = o_p(n^{-\frac{1}{2}} c_n). \square$$

### 3.3 Approximation forte du processus et du quantile empiriques

Soit

$$S_n(t) \equiv \sum_{i=1}^n (\mathbb{I}_{(U_i \leq t)} - t) = n. (\tilde{F}_n(t) - t), t \in [0, 1]$$

et

$$\|S_n^*(.)\| \equiv \sup_{t \in [0,1]} \max_{m \leq n} |S_m(t)|.$$

Alors on a le théorème suivant :

**Théorème 3.4** *Sous  $H^*(p, X)$  où  $\varepsilon < \frac{p}{2} (1 + \frac{1}{r}) - \frac{3}{2}$ , on a pour  $\delta > \frac{1}{p}$ ,*

$$\sup_{t \in [0,1]} |\tilde{F}_n(t) - t| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right). \quad (3.13)$$

Et

$$\sup_{q \in [0,1]} |q - \tilde{Q}_n(q)| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right). \quad (3.14)$$

**Remarque 3.1** Dans le cas général, on pose  $t = F(x)$  et  $\tilde{F}_n(t) = \tilde{F}_n(F(x)) = F_n(x)$ . Ensuite, sous  $H^*(p, X)$  où  $\varepsilon < \frac{p}{2} (1 + \frac{1}{r}) - \frac{3}{2}$ , on a pour  $\delta > \frac{1}{p}$ ,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right). \quad (3.15)$$

Si de plus  $x = \xi_n$  et  $H(F)$  est vérifiée avec  $0 < \sup_{y \in \mathcal{I}} |f'(y)| < \infty$ , alors

$$\sup_{q \in (0,1)} |\xi_n - \xi| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right). \quad (3.16)$$

### 3.3. APPROXIMATION FORTE DU PROCESSUS ET DU QUANTILE EMPIRIQUES 57

La preuve de ce théorème repose sur le lemme suivant dont la preuve est remise à la fin de cette section.

**Lemme 3.2** *Sous  $H^*(p, X)$ , on a pour  $\lambda > 0$*

$$\mathbb{P}(\|S_n^*(\cdot)\| > \lambda) \leq C \cdot \left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\right)^p \left[1 + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} \left(\frac{n}{\lambda}\right)^{(1-\frac{p}{r})} \left(\ln \frac{n}{\lambda}\right)^{2p+1}\right]. \quad (3.17)$$

Si en plus  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 + \frac{1}{r}\right) - \frac{3}{2}$ , alors on a pour  $\delta > 0$ ,

$$\mathbb{P}\left(\|S_n^*(\cdot)\| > \sqrt{n} (\ln n)^\delta\right) \leq C \cdot (\ln n)^{-\delta p}. \quad (3.18)$$

**Preuve du Théorème 3.4 :** Du Lemme précédent, on a pour  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 + \frac{1}{r}\right) - \frac{3}{2}$  et  $\delta > 0$ ,

$$\mathbb{P}\left(\|S_n^*(\cdot)\| > \sqrt{n} (\ln n)^\delta\right) \leq C \cdot (\ln n)^{-\delta p}.$$

D'où, pour  $n = 2^{k+1}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\|S_{2^{k+1}}^*(\cdot)\| > 2^{\frac{k+1}{2}} (\ln 2^{k+1})^\delta\right) &\leq C \cdot ((k+1) \ln 2)^{-\delta p + 2p+1} \\ &\leq C \cdot k^{-\delta p}. \end{aligned}$$

Si on a  $\delta > \frac{1}{p}$ , alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\|S_{2^{k+1}}^*(\cdot)\| > 2^{\frac{k+1}{2}} (\ln 2^{k+1})^\delta\right) < \infty.$$

D'après le Lemme de Borel-Cantelli, on a

$$\|S_{2^{k+1}}^*(\cdot)\| \leq 2^{\frac{k+1}{2}} (\ln 2^{k+1})^\delta \text{ p.s.}$$

On pose  $n \in [2^k, 2^{k+1}]$ , alors

$$\begin{aligned} \|S_n^*(\cdot)\| &\leq \|S_{2^{k+1}}^*(\cdot)\| \leq 2^{\frac{k+1}{2}} (\ln 2^{k+1})^\delta \leq 2^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} (\ln 2^k + \ln 2)^\delta \\ &\leq 2^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln n}\right)^\delta \sqrt{n} (\ln n)^\delta \\ &\leq C \cdot \sqrt{n} (\ln n)^\delta. \end{aligned}$$



Donc

$$\|S_n^*(\cdot)\| = O_{p.s.} \left( \sqrt{n} (\ln n)^\delta \right). \quad (3.19)$$

Mais

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0,1]} |S_n(\cdot)| &= \sup_{t \in [0,1]} \left| \sum_{i=1}^n (\mathbb{I}_{(U_i \leq t)} - t) \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} \max_{m \leq n} |S_m(t)| \\ &\leq \|S_n^*(\cdot)\|. \end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{t \in [0,1]} |S_n(\cdot)| = O_{p.s.} \left( \sqrt{n} (\ln n)^\delta \right).$$

Ensuite, on divise par  $n$  pour trouver

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| \tilde{F}_n(t) - t \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right).$$

On utilise cette égalité pour prouver la deuxième. Pour celà, on remplace  $t$  par  $\tilde{Q}_n(q) \in [0, 1]$ , alors

$$\sup_{q \in [0,1]} \left| \tilde{F}_n(\tilde{Q}_n(q)) - \tilde{Q}_n(q) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right).$$

Puisque  $\tilde{F}_n(\tilde{Q}_n(q)) = q + O(n^{-1})$ , alors

$$\sup_{q \in [0,1]} \left| q + O(n^{-1}) - \tilde{Q}_n(q) \right| = \sup_{q \in [0,1]} \left| q - \tilde{Q}_n(q) \right| + O(n^{-1}).$$

Enfin, on a pour  $\delta > \frac{1}{p}$

$$\sup_{q \in [0,1]} \left| q - \tilde{Q}_n(q) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right). \square$$

**Preuve du Lemme 3.2 :** Pour  $t \in [0, 1]$ , soit  $(u_i^k)_{1 \leq i \leq 2^k}$  une subdivision finie de  $[0, 1]$  tel que  $u_1^k = 0, u_2^k = 2^{-k}, \dots, u_{2^k}^k = 1$ . Pour chaque  $k$  on définit une projection  $\pi_k(t) = u_i^k$  si  $t \in [u_i^k, u_{i+1}^k[$ . Alors, on a pour  $q_0 \leq k \leq q_1$ ,

$$\|S_n^*(\cdot)\| \leq \|S_n^*(\cdot) - S_n^*(\pi_{q_1}(\cdot))\| + \sum_{k=q_0+1}^{q_1} \|S_n^*(\pi_k(\cdot)) - S_n^*(\pi_{k-1}(\cdot))\| + \|S_n^*(\pi_{q_0}(\cdot))\|.$$

### 3.3. APPROXIMATION FORTE DU PROCESSUS ET DU QUANTILE EMPIRIQUES 59

Soit  $\sum_{k=q_0}^{q_1+1} \lambda_k = \lambda$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|S_n^*(\cdot)\| > \lambda) &\leq \mathbb{P}(\|S_n^*(\cdot) - S_n^*(\pi_{q_1}(\cdot))\| > \lambda_{q_1+1}) \\ &\quad + \sum_{k=q_0+1}^{q_1} \mathbb{P}(\|S_n^*(\pi_k(\cdot)) - S_n^*(\pi_{k-1}(\cdot))\| > \lambda_k) \\ &\quad + \mathbb{P}(\|S_n^*(\pi_{q_0}(\cdot))\| > \lambda_{q_0}) \\ &\equiv E_{q_1+1} + \sum_{k=q_0+1}^{q_1} E_k + E_{q_0}. \end{aligned}$$

Contrôle de  $E_{q_1+1}$  : on a

$$E_{q_1+1} \equiv \mathbb{P}(\|S_n^*(\cdot) - S_n^*(\pi_{q_1}(\cdot))\| > \lambda_{q_1+1}). \quad (3.20)$$

Or

$$\begin{aligned} \|S_n^*(\cdot) - S_n^*(\pi_{q_1}(\cdot))\| &= \sup_{t \in [0,1]} \max_{m \leq n} \left| \left( \sum_{i=1}^m \mathbb{I}_{(U_i \leq t)} - t \right) - \left( \sum_{i=1}^m \mathbb{I}_{(U_i \leq \pi_{q_1}(t))} - \pi_{q_1}(t) \right) \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} \max_{m \leq n} \left| \sum_{i=1}^m \mathbb{I}_{(\pi_{q_1}(t) \leq U_i \leq t)} - (t - \pi_{q_1}(t)) \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} \max_{m \leq n} \left| \sum_{i=1}^m \left( \mathbb{I}_{(\pi_{q_1}(t) \leq U_i \leq \pi_{q_1}(t) + 2^{-q_1})} - 2^{-q_1} \right) \right| + 2n \cdot 2^{-q_1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|S_n^*(\cdot) - S_n^*(\pi_{q_1}(\cdot))\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \max_{m \leq n} \left| \sum_{i=1}^m \left( \mathbb{I}_{(\pi_{q_1}(t) \leq U_i \leq \pi_{q_1}(t) + 2^{-q_1})} - 2^{-q_1} \right) \right| + 2n \cdot 2^{-q_1}. \quad (3.21)$$

A partir de (3.20) et (3.21), on a

$$E_{q_1+1} \leq \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0,1]} \max_{m \leq n} \left| \sum_{i=1}^m \left( \mathbb{I}_{(\pi_{q_1}(t) \leq U_i \leq \pi_{q_1}(t) + 2^{-q_1})} - 2^{-q_1} \right) \right| > \lambda_{q_1+1} - 2n \cdot 2^{-q_1} \right). \quad (3.22)$$

Selon l'inégalité de Bonferroni

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq i \leq N} \{|Z_i|\} > \varepsilon \right) \leq \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(|Z_i| > \varepsilon), \quad (3.23)$$

on a de (3.22) et comme  $\pi_{q_1}(t) \in \{l2^{-q_1}, (l+1)2^{-q_1}\}$ ,

$$E_{q_1+1} \leq \sum_{l=0}^{2^{q_1}} \mathbb{P} \left( \max_{m \leq n} \left| \sum_{i=1}^m \left( \mathbb{I}_{(l2^{-q_1} \leq U_i \leq (l+1)2^{-q_1})} - 2^{-q_1} \right) \right| > \lambda_{q_1+1} - 2n \cdot 2^{-q_1} \right).$$

D'après l'inégalité de Markov et  $H^*(p, X)$ , on a

$$\begin{aligned} E_{q_1+1} &\leq D \cdot (\lambda_{q_1+1} - 2n \cdot 2^{-q_1})^{-p} \sum_{l=0}^{2^{q_1}} \left( n^{\frac{p}{2}} \left\| \mathbb{I}_{(l2^{-q_1} \leq U_i \leq (l+1)2^{-q_1})} \right\|_v^p \right. \\ &\quad \left. + n^{1+\varepsilon} \left\| \mathbb{I}_{(l2^{-q_1} \leq U_i \leq (l+1)2^{-q_1})} \right\|_r^p \right), \\ E_{q_1+1} &\leq D \cdot (\lambda_{q_1+1} - 2n \cdot 2^{-q_1})^{-p} \sum_{l=0}^{2^{q_1}} \left( n^{\frac{p}{2}} 2^{-q_1 \frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon} 2^{-q_1 \frac{p}{r}} \right) \\ &\leq C \cdot (\lambda_{q_1+1} - 2n \cdot 2^{-q_1})^{-p} \left( n^{\frac{p}{2}} 2^{-q_1 \left( \frac{p}{v} - 1 \right)} + n^{1+\varepsilon} 2^{q_1 \left( 1 - \frac{p}{r} \right)} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

**Contrôle de  $E_k$  :** on a

$$\begin{aligned} E_k &\equiv \mathbb{P} \left( \|S_n^*(\pi_k(\cdot)) - S_n^*(\pi_{k-1}(\cdot))\| > \lambda_k \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \max_{m \leq n} \sup_{t \in [0,1]} |S_m(\pi_k(t)) - S_m(\pi_{k-1}(t))| > \lambda_k \right) \\ &\leq 2^k \max_{\pi_k(t)} \left\{ \mathbb{P} \left( \max_{m \leq n} |S_m(\pi_k(t)) - S_m(\pi_{k-1}(t))| > \lambda_k \right) \right\}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Markov et  $H^*(p, X)$ , on a

$$\begin{aligned} E_k &\leq D \cdot 2^k \lambda_k^{-p} \max_{\pi_k(t)} \left\{ n^{\frac{p}{2}} \left\| \mathbb{I}_{(\pi_{k-1}(t) \leq U_i \leq \pi_k(t))} \right\|_v^p + n^{1+\varepsilon} \left\| \mathbb{I}_{(\pi_{k-1}(t) \leq U_i \leq \pi_k(t))} \right\|_r^p \right\} \\ &\leq D \cdot 2^k \lambda_k^{-p} \max_{\pi_k(t)} \left\{ n^{\frac{p}{2}} |\pi_k(t) - \pi_{k-1}(t)|^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon} |\pi_k(t) - \pi_{k-1}(t)|^{\frac{p}{r}} \right\} \\ &\leq D \cdot 2^k \lambda_k^{-p} \left\{ n^{\frac{p}{2}} 2^{-k \frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon} 2^{-k \frac{p}{r}} \right\} \\ &\leq C \cdot \lambda_k^{-p} \left( n^{\frac{p}{2}} 2^{-k \left( \frac{p}{v} - 1 \right)} + n^{1+\varepsilon} 2^{k \left( 1 - \frac{p}{r} \right)} \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Enfin pour  $E_{q_0}$  on obtient de manière analogue à  $E_k$  :

$$\begin{aligned} E_{q_0} &\equiv \mathbb{P} \left( \|S_n^*(\pi_{q_0}(\cdot))\| > \lambda_{q_0} \right) \\ &\leq C \cdot 2^{q_0} \lambda_{q_0}^{-p} \left( n^{\frac{p}{2}} + n^{1+\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

### 3.3. APPROXIMATION FORTE DU PROCESSUS ET DU QUANTILE EMPIRIQUES61

De (3.24), (3.25) et (3.26), on conclut que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|S_n^*(\cdot)\| > \lambda) &\leq C. (\lambda_{q_1+1} - 2n.2^{-q_1})^{-p} \left( n^{\frac{p}{2}} 2^{-q_1(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon} 2^{q_1(1-\frac{p}{r})} \right) \\ &\quad + C. \sum_{k=q_0+1}^{q_1} \lambda_k^{-p} \left( n^{\frac{p}{2}} 2^{-k(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon} 2^{k(1-\frac{p}{r})} \right) \\ &\quad + C. 2^{q_0} \lambda_{q_0}^{-p} \left( n^{\frac{p}{2}} + n^{1+\varepsilon} \right) \\ &\equiv A + B + G \end{aligned}$$

On pose  $\lambda_k = \theta_k \cdot \lambda$  où  $\sum_{k=q_0}^{q_1+1} \theta_k \leq 1$  et on choisit  $\lambda_{q_1+1}$  tel que  $\lambda_{q_1+1} \geq 4n2^{-q_1}$ . Alors

$$\begin{aligned} A &\equiv C. (\lambda_{q_1+1} - 2n.2^{-q_1})^{-p} \left( n^{\frac{p}{2}} 2^{-q_1(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon} 2^{q_1(1-\frac{p}{r})} \right) \\ &\leq C. \left( \frac{2\sqrt{n}}{\lambda} \right)^p \theta_{q_1+1}^{-p} \left( 2^{-q_1(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{q_1(1-\frac{p}{r})} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Concernant  $B$ , on a

$$\begin{aligned} B &\equiv C. \sum_{k=q_0+1}^{q_1} \lambda_k^{-p} \left( n^{\frac{p}{2}} 2^{-k(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon} 2^{k(1-\frac{p}{r})} \right) \\ &= C. \left( \frac{\sqrt{n}}{\lambda} \right)^p \sum_{k=q_0+1}^{q_1} \theta_k^{-p} \left( 2^{-k(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{k(1-\frac{p}{r})} \right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

et

$$\begin{aligned} G &\equiv C. 2^{q_0} \lambda_{q_0}^{-p} \left( n^{\frac{p}{2}} + n^{1+\varepsilon} \right) \\ &\leq C. 2^{q_0} \left( \frac{\sqrt{n}}{\lambda} \right)^p \theta_{q_0}^{-p} \left( 1 + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

De (3.27), (3.28) et (3.29), il résulte que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|S_n^*(\cdot)\| > \lambda) &\leq C. \left( \frac{\sqrt{n}}{\lambda} \right)^p \sum_{k=q_0+1}^{q_1+1} \theta_k^{-p} \left( 2^{-k(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{k(1-\frac{p}{r})} \right) \\ &\quad + C. 2^{q_0} \left( \frac{\sqrt{n}}{\lambda} \right)^p \theta_{q_0}^{-p} \left( 1 + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} \right). \end{aligned}$$

On pose  $\theta_k \sim C.k^{-2}$ , pour  $q_0 \leq k \leq q_1$  et  $\theta_{q_1+1} = \frac{1}{2}$ . Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|S_n^*(\cdot)\| > \lambda) &\leq C. \left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\right)^p \sum_{k=q_0+1}^{q_1+1} \left(2^{-k(\frac{p}{v}-1)} k^{2p} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{k(1-\frac{p}{r})} k^{2p}\right) \\ &\quad + C.2^{q_0} \left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\right)^p q_0^{2p} \left(1 + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}}\right). \end{aligned}$$

Comme, on a  $\sum_{k=q_0+1}^{q_1+1} 2^{-k(\frac{p}{v}-1)} k^{2p} < \infty$  et  $\sum_{k=q_0+1}^{q_1+1} 2^{k(1-\frac{p}{r})} k^{2p} \leq 2^{q_1(1-\frac{p}{r})} q_1^{2p+1}$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|S_n^*(\cdot)\| > \lambda) &\leq C. \left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\right)^p \left(C + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{q_1(1-\frac{p}{r})} q_1^{2p+1}\right) \\ &\quad + C. \left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\right)^p 2^{q_0} q_0^{2p} \left(1 + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}}\right). \end{aligned}$$

On choisit  $q_0$  tel que  $2^{q_0} q_0^{2p} (1 + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}}) < \infty$  où  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$ , ensuite

$$\mathbb{P}(\|S_n^*(\cdot)\| > \lambda) \leq C. \left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\right)^p \left[1 + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{q_1(1-\frac{p}{r})} q_1^{2p+1}\right].$$

On choisit  $q_1$  tel que  $\lambda \sim 8n2^{-q_1}$ , alors  $q_1 \sim \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{8n}{\lambda}$ . Enfin,

$$\mathbb{P}(\|S_n^*(\cdot)\| > \lambda) \leq C. \left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\right)^p \left[1 + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} \left(\frac{n}{\lambda}\right)^{(1-\frac{p}{r})} \left(\ln \frac{n}{\lambda}\right)^{2p+1}\right],$$

ce qui prouve la relation (3.17) du lemme.

Pour prouver la deuxième équation (3.18) de ce lemme, on choisit  $\lambda$  tel que  $\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\right)^p \sim \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\delta p}$  où  $\delta > 0$ , alors  $\lambda \sim \sqrt{n} (\ln n)^\delta$ . Ensuite on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\|S_n^*(\cdot)\| > \sqrt{n} (\ln n)^\delta\right) &\leq C. (\ln n)^{-\delta p} \left[1 \right. \\ &\quad \left. + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}+\frac{1}{2}(1-\frac{p}{r})} (\ln n)^{-\delta(1-\frac{p}{r})} \left(\ln \frac{\sqrt{n}}{(\ln n)^\delta}\right)^{2p+1}\right]. \end{aligned}$$

Il suffit que  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 + \frac{1}{r}\right) - \frac{3}{2}$  pour avoir

$$\mathbb{P}\left(\|S_n^*(\cdot)\| > \sqrt{n} (\ln n)^\delta\right) \leq C. (\ln n)^{-\delta p}. \square$$

## 3.4 La représentation de Bahadur presque sûre

### 3.4.1 La représentation de Bahadur presque sûre pour le quantile uniforme

On établit la représentation de Bahadur dans le cas uniforme au sens presque sûre. Soit  $\mathcal{I} = [q - a_n, q + a_n]$  où  $a_n = n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta$ ,  $\delta > \frac{1}{p}$ . On étudie le module de continuité :

$$\begin{aligned} w(n, a_n) &\equiv \sup_{t \in \mathcal{I}} |\Delta_n(t)|. \\ w^*(n, a_n) &\equiv \sup_{t \in \mathcal{I}} \max_{m \leq n} |\Delta_m(t)|. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_n(t) &\equiv U_n(t) - U_n(q), \\ U_n(t) &\equiv \sqrt{n} \left( \tilde{F}_n(t) - t \right). \end{aligned}$$

Alors, on a le théorème suivant :

**Théorème 3.5** *Sous  $H^*(p, X)$  où  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{v}\right) - 1$ , on a pour  $\delta > \frac{1}{p}$ ,*

$$\left| \tilde{R}_n(q) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{v}\right)} (\ln n)^{\delta \left(1 - \frac{1}{v}\right) + 2 + \frac{1}{p}} \right). \quad (3.30)$$

La preuve de ce théorème repose sur le lemme et la proposition suivants :

**Lemme 3.3** *Sous  $H(p, X)$  où  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{v}\right) - 1$ , on a pour  $\lambda > 0$ ,*

$$\mathbb{P} \left( w(n, a_n) > \lambda \right) \leq C \cdot \lambda^{-p} a_n^{\frac{p}{v}} \left( 1 + n^{1 + \varepsilon - \frac{p}{2}} a_n^{-\frac{p}{v}} \right) (\ln a_n^{-1})^{2p+1}.$$

*Si en plus,  $a_n = n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta$  où  $\delta > \frac{1}{p}$ , alors*

$$\mathbb{P} \left( w(n, a_n) > n^{-\frac{1}{2v}} (\ln n)^{\delta \left(1 - \frac{1}{v}\right) + 2 + \frac{1}{p}} \right) \leq C \cdot (\ln n)^{-\delta p}.$$

*Et sous  $H^*(p, X)$  où  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{v}\right) - 1$ , on a*

$$\mathbb{P} \left( w^*(n, a_n) > \lambda \right) \leq C \cdot \lambda^{-p} a_n^{\frac{p}{v}} \left( 1 + n^{1 + \varepsilon - \frac{p}{2}} a_n^{-\frac{p}{v}} \right) (\ln a_n^{-1})^{2p+1}. \quad (3.31)$$

*Si en plus,  $a_n = n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta$  où  $\delta > \frac{1}{p}$ , alors*

$$\mathbb{P} \left( w^*(n, a_n) > n^{-\frac{1}{2v}} (\ln n)^{\delta \left(1 - \frac{1}{v}\right) + 2 + \frac{1}{p}} \right) \leq C \cdot (\ln n)^{-\delta p}. \quad (3.32)$$

**Proposition 3.1** *Sous  $H^*(p, X)$  où  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{v}\right) - 1$ , on a pour  $\delta > \frac{1}{p}$ ,*

$$w(n, a_n) = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2v}} (\ln n)^{\delta(1-\frac{1}{v})+2+\frac{1}{p}} \right). \quad (3.33)$$

La preuve de la Proposition 3.1 est une conséquence du Lemme 3.3 et le Lemme de Borel-Cantelli en suivant les mêmes lignes que la preuve du Théorème 3.4.

**Preuve du Théorème 3.5 :** De la Proposition 3.1, on a sous  $H^*(p, X)$  où  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{v}\right) - 1$  et  $\delta > \frac{1}{p}$ ,

$$w(n, a_n) = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2v}} (\ln n)^{\delta(1-\frac{1}{v})+2+\frac{1}{p}} \right).$$

Ensuite, par la définition de  $w(n, a_n)$ , on a

$$\sup_{|t-q| \leq n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta} |U_n(t) - U_n(q)| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2v}} (\ln n)^{\delta(1-\frac{1}{v})+2+\frac{1}{p}} \right).$$

D'après le Théorème 3.4, on a sous  $H^*(p, X)$  pour  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 + \frac{1}{r}\right) - \frac{3}{2}$  et  $\delta > \frac{1}{p}$

$$\left| \tilde{Q}_n(q) - q \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right).$$

Donc,

$$\left| U_n \left( \tilde{Q}_n(q) \right) - U_n(q) \right| \leq \sup_{|t-q| \leq C.n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta} |U_n(t) - U_n(q)|.$$

Par suite, on a

$$\left| U_n \left( \tilde{Q}_n(q) \right) - U_n(q) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2v}} (\ln n)^{\delta(1-\frac{1}{v})+2+\frac{1}{p}} \right).$$

Par la définition de  $U_n$ , on a

$$\sqrt{n} \left| \left( \tilde{F}_n(\tilde{Q}_n(q)) - \tilde{Q}_n(q) \right) - \left( \tilde{F}_n(q) - q \right) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2v}} (\ln n)^{\delta(1-\frac{1}{v})+2+\frac{1}{p}} \right).$$

Puisque

$$\tilde{F}_n \left( \tilde{Q}_n(q) \right) = q + O(n^{-1}),$$

alors

$$\sqrt{n} \left| \left( q + O(n^{-1}) - \tilde{Q}_n(q) \right) - \left( \tilde{F}_n(q) - q \right) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2v}} (\ln n)^{\delta(1-\frac{1}{v})+2+\frac{1}{p}} \right).$$

On a  $\frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{v}\right) - 1 < \frac{p}{2} \left(1 + \frac{1}{r}\right) - \frac{3}{2}$ , donc, on a pour  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{v}\right) - 1$  et  $\delta > \frac{1}{p}$

$$\left| \left( q - \tilde{Q}_n(q) \right) - \left( \tilde{F}_n(q) - q \right) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{v}\right)} (\ln n)^{\delta \left(1 - \frac{1}{v}\right) + 2 + \frac{1}{p}} \right). \square$$

**Preuve du Lemme 3.3 :** Pour  $t \in \mathcal{I}$ , on définit une subdivision finie  $(u_i^k)_{1 \leq i \leq a_n 2^{k+1}}$  de  $\mathcal{I}$  tel que  $u_1^k = q - a_n$ ,  $u_2^k = q - a_n + 2^{-k}$ , ... Pour chaque  $k$  et  $t \in \mathcal{I}$ , on définit une projection  $\pi_k(t) = u_i^k$  si  $t \in [u_i^k, u_{i+1}^k[$ . Alors, on a pour  $q_0 \leq k \leq q_1$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_n(t) &= \Delta_n(t) - \Delta_n(\pi_{q_1}(t)) + \sum_{k=q_0+1}^{q_1} [\Delta_n(\pi_k(t)) - \Delta_n(\pi_{k-1}(t))] \\ &\quad + \Delta_n(\pi_{q_0}(t)). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} w(n, a_n) &\leq \|\Delta_n(t) - \Delta_n(\pi_{q_1}(t))\| + \sum_{k=q_0+1}^{q_1} \|\Delta_n(\pi_k(t)) - \Delta_n(\pi_{k-1}(t))\| \\ &\quad + \|\Delta_n(\pi_{q_0}(t))\|. \end{aligned}$$

Soit  $\sum_{k=q_0}^{q_1+1} \lambda_k = \lambda$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(w(n, a_n) > \lambda) &\leq \mathbb{P}(\|\Delta_n(t) - \Delta_n(\pi_{q_1}(t))\| > \lambda_{q_1+1}) \\ &\quad + \sum_{k=q_0+1}^{q_1} \mathbb{P}(\|\Delta_n(\pi_k(t)) - \Delta_n(\pi_{k-1}(t))\| > \lambda_k) \\ &\quad + \mathbb{P}(\|\Delta_n(\pi_{q_0}(t))\| > \lambda_{q_0}) \\ &\equiv E_{q_1+1} + \sum_{k=q_0+1}^{q_1} E_k + E_{q_0}. \end{aligned}$$

Contrôle de  $E_{q_1+1}$  : on a

$$E_{q_1+1} \equiv \mathbb{P}(\|\Delta_n(t) - \Delta_n(\pi_{q_1}(t))\| > \lambda_{q_1+1}).$$

Or

$$\begin{aligned} \Delta_n(t) - \Delta_n(\pi_{q_1}(t)) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(\pi_{q_1}(t) \leq U_i \leq t)} - (t - \pi_{q_1}(t)) \\ &\leq \sup_{t \in \mathcal{I}} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left( \mathbb{I}_{(\pi_{q_1}(t) \leq U_i \leq \pi_{q_1}(t) + 2^{-q_1})} - 2^{-q_1} \right) \right| + 2\sqrt{n} \cdot 2^{-q_1}. \end{aligned}$$



Donc

$$\|\Delta_n(t) - \Delta_n(\pi_{q_1}(t))\| \leq \sup_{t \in \mathcal{I}} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left( \mathbb{I}_{(\pi_{q_1}(t) \leq U_i \leq \pi_{q_1}(t) + 2^{-q_1})} - 2^{-q_1} \right) \right| + 2\sqrt{n} \cdot 2^{-q_1}.$$

D'où

$$E_{q_1+1} \leq \mathbb{P} \left( \sup_{t \in \mathcal{I}} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left( \mathbb{I}_{(\pi_{q_1}(t) \leq U_i \leq \pi_{q_1}(t) + 2^{-q_1})} - 2^{-q_1} \right) \right| > \lambda_{q_1+1} - 2\sqrt{n} \cdot 2^{-q_1} \right).$$

Selon l'inégalité de Bonferroni (3.23), on a

$$E_{q_1+1} \leq \sum_{l=0}^{2^{q_1} a_n} \mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left( \mathbb{I}_{(l2^{-q_1} \leq U_i \leq (l+1)2^{-q_1})} - 2^{-q_1} \right) \right| > \lambda_{q_1+1} - 2\sqrt{n} \cdot 2^{-q_1} \right).$$

D'après l'inégalité de Markov

$$E_{q_1+1} \leq (\lambda_{q_1+1} - 2\sqrt{n} \cdot 2^{-q_1})^{-p} \sum_{l=0}^{2^{q_1} a_n} \mathbb{E} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left( \mathbb{I}_{(l2^{-q_1} \leq U_i \leq (l+1)2^{-q_1})} - 2^{-q_1} \right) \right|^p$$

Par  $H(p, X)$ , on a

$$\begin{aligned} E_{q_1+1} &\leq D \cdot (\lambda_{q_1+1} - 2\sqrt{n} \cdot 2^{-q_1})^{-p} \sum_{l=0}^{2^{q_1} a_n} \left( \left\| \mathbb{I}_{(l2^{-q_1} \leq U_i \leq (l+1)2^{-q_1})} \right\|_v^p \right. \\ &\quad \left. + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} \left\| \mathbb{I}_{(l2^{-q_1} \leq U_i \leq (l+1)2^{-q_1})} \right\|_r^p \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{q_1+1} &\leq D \cdot (\lambda_{q_1+1} - 2\sqrt{n} \cdot 2^{-q_1})^{-p} \sum_{l=0}^{2^{q_1} a_n} \left( 2^{-q_1 \frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{-q_1 \frac{p}{r}} \right) \\ &\leq C (\lambda_{q_1+1} - 2\sqrt{n} \cdot 2^{-q_1})^{-p} 2^{q_1} a_n \left( 2^{-q_1 \frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{-q_1 \frac{p}{r}} \right) \\ &\leq C (\lambda_{q_1+1} - 2\sqrt{n} \cdot 2^{-q_1})^{-p} a_n \left( 2^{-q_1 \left( \frac{p}{v} - 1 \right)} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{q_1 \left( 1 - \frac{p}{r} \right)} \right). \end{aligned}$$

Contrôle de  $E_k$  : on a

$$\begin{aligned} E_k &\equiv \mathbb{P} (\|\Delta_n(\pi_k(t)) - \Delta_n(\pi_{k-1}(t))\| > \lambda_k) \\ &\leq 2^k a_n \max_{\pi_k(t)} \{ \mathbb{P} (|\Delta_n(\pi_k(t)) - \Delta_n(\pi_{k-1}(t))| > \lambda_k) \}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Markov et  $H(p, X)$

$$\begin{aligned}
E_k &\leq D \cdot 2^k a_n \lambda_k^{-p} \max_{\pi_k(t)} \left\{ \left\| \mathbb{I}_{(\pi_{k-1}(t) \leq U_i \leq \pi_k(t))} \right\|_v^p + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} \left\| \mathbb{I}_{(\pi_{k-1}(t) \leq U_i \leq \pi_k(t))} \right\|_r^p \right\} \\
&\leq D \cdot 2^k a_n \lambda_k^{-p} \max_{\pi_k(t)} \left\{ |\pi_k(t) - \pi_{k-1}(t)|^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} |\pi_k(t) - \pi_{k-1}(t)|^{\frac{p}{r}} \right\} \\
&\leq D \cdot 2^k a_n \lambda_k^{-p} \left\{ 2^{-k\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{-k\frac{p}{r}} \right\} \\
&\leq C \cdot \lambda_k^{-p} a_n \left( 2^{-k(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{k(1-\frac{p}{r})} \right).
\end{aligned}$$

Enfin pour  $E_{q_0}$  : on a

$$\begin{aligned}
E_{q_0} &\equiv \mathbb{P}(\|\Delta_n(\pi_{q_0}(t))\| > \lambda_{q_0}) \\
&\leq C \cdot 2^{q_0} a_n \cdot \lambda_{q_0}^{-p} \left( 2^{-q_0\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{-q_0\frac{p}{r}} \right) \\
&\leq C \cdot a_n \cdot \lambda_{q_0}^{-p} \left( 2^{-q_0(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{-q_0(\frac{p}{r}-1)} \right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(w(n, a_n) > \lambda) &\leq C \cdot (\lambda_{q_1+1} - 2\sqrt{n} \cdot 2^{-q_1})^{-p} a_n \left( 2^{-q_1(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{q_1(1-\frac{p}{r})} \right) \\
&\quad + C \cdot a_n \sum_{k=q_0+1}^{q_1} \lambda_k^{-p} \left( n^{\frac{p}{2}} 2^{-k(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{k(1-\frac{p}{r})} \right) \\
&\quad + C \cdot a_n \cdot \lambda_{q_0}^{-p} \left( 2^{-q_0(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{-q_0(\frac{p}{r}-1)} \right) \\
&\equiv A + B + G.
\end{aligned}$$

On pose  $\lambda_k = \theta_k \cdot \lambda$  où  $\sum_{k=q_0}^{q_1+1} \theta_k \leq 1$  et on choisit  $\lambda_{q_1+1} \geq 4\sqrt{n} 2^{-q_1+1}$ . Alors

$$\begin{aligned}
A &\equiv C \cdot (\lambda_{q_1+1} - 2\sqrt{n} \cdot 2^{-q_1})^{-p} a_n \left( 2^{-q_1(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{q_1(1-\frac{p}{r})} \right) \\
&\leq C \cdot a_n \left( \frac{2}{\lambda} \right)^p \theta_{q_1+1}^{-p} \left( 2^{-q_1(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{q_1(1-\frac{p}{r})} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &\equiv C \cdot a_n \sum_{k=q_0+1}^{q_1} \lambda_k^{-p} \left( 2^{-k(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{k(1-\frac{p}{r})} \right) \\
&= C \cdot a_n \lambda^{-p} \sum_{k=q_0+1}^{q_1} \theta_k^{-p} \left( 2^{-k(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{k(1-\frac{p}{r})} \right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G &\equiv C.a_n.\lambda_{q_0}^{-p} \left( 2^{-q_0(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{-q_0(\frac{p}{r}-1)} \right) \\ &\leq C.a_n.\lambda^{-p}\theta_{q_0}^{-p} \left( 2^{-q_0(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{-q_0(\frac{p}{r}-1)} \right). \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}(w(n, a_n) > \lambda) \leq C.\lambda^{-p} a_n \sum_{k=q_0}^{q_1+1} \theta_k^{-p} \left( 2^{-k(\frac{p}{v}-1)} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{k(1-\frac{p}{r})} \right).$$

On pose  $\theta_k \sim C.k^{-2}$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|\Delta_n(\cdot)\| > \lambda) &\leq C.\lambda^{-p} a_n \sum_{k=q_0}^{q_1+1} \left( 2^{-k(\frac{p}{v}-1)} k^{2p} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{k(1-\frac{p}{r})} k^{2p} \right) \\ &\leq C.\lambda^{-p} a_n \left( 2^{-q_0(\frac{p}{v}-1)} q_0^{2p} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{q_1(1-\frac{p}{r})} q_1^{2p+1} \right) \end{aligned}$$

On choisit  $q_0$  tel que  $2^{-q_0} \sim a_n$ , alors  $q_0 \sim \frac{1}{\ln 2} \ln a_n^{-1}$ , donc

$$\mathbb{P}(w(n, a_n) > \lambda) \leq C.\lambda^{-p} a_n \left( a_n^{\frac{p}{v}-1} (\ln a_n^{-1})^{2p} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} 2^{q_1(1-\frac{p}{r})} q_1^{2p+1} \right).$$

On choisit  $q_1$  tel que  $2^{q_1(1-\frac{p}{r})} \sim a_n^{-1}$  alors

$$q_1 \sim \frac{\ln a_n^{-\frac{r}{r-p}}}{\ln 2} = \frac{r}{(r-p)\ln 2} \cdot \ln a_n^{-1}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(w(n, a_n) > \lambda) &\leq C.\lambda^{-p} a_n \left( a_n^{\frac{p}{v}-1} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} a_n^{-1} \right) (\ln a_n^{-1})^{2p+1} \\ &\leq C.\lambda^{-p} a_n^{\frac{p}{v}} \left( 1 + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} a_n^{-\frac{p}{v}} \right) (\ln a_n^{-1})^{2p+1}. \end{aligned}$$

On a  $a_n = n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta$ ,  $\delta > \frac{1}{p}$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(w(n, a_n) > \lambda) &\leq C.\lambda^{-p} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right)^{\frac{p}{v}} \left( 1 + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}+\frac{p}{2v}} (\ln n)^{-\frac{\delta p}{v}} \right) \\ &\quad \times \left( \ln \left( n^{\frac{1}{2}} (\ln n)^{-\delta} \right) \right)^{2p+1} \\ &\leq C.\lambda^{-p} n^{-\frac{p}{2v}} (\ln n)^{\frac{\delta p}{v}} \left( 1 + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}(1-\frac{1}{v})} (\ln n)^{-\frac{\delta p}{v}} \right) \\ &\quad \times (\ln n)^{2p+1}. \end{aligned}$$

Il suffit que  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{v}\right) - 1$ , pour avoir,

$$\mathbb{P}(w(n, a_n) > \lambda) \leq C \lambda^{-p} n^{-\frac{p}{2v}} (\ln n)^{-\frac{\delta p}{v}} \times (\ln n)^{2p+1}. \quad (3.34)$$

Ensuite, on choisit  $\lambda$  tel que  $\lambda^{-p} n^{-\frac{p}{2v}} (\ln n)^{-\frac{\delta p}{v} + 2p+1} \sim (\ln n)^{-\delta p}$ , alors  $\lambda \sim n^{-\frac{1}{2v}} (\ln n)^{\delta(1-\frac{1}{v})+2+\frac{1}{p}}$ . Enfin, on a pour  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{v}\right) - 1$  et  $\delta > \frac{1}{p}$

$$\mathbb{P}\left(w(n, a_n) > n^{-\frac{1}{2v}} (\ln n)^{\delta(1-\frac{1}{v})+2+\frac{1}{p}}\right) \leq C (\ln n)^{-\delta p}.$$

Pour prouver les relations (3.31) et (3.32), on utilise les mêmes étapes de la preuve du Lemme 3.2.  $\square$

### 3.4.2 La représentation de Bahadur presque sûre pour le quantile empirique

On établit la représentation de Bahadur dans le cas général presque sûrement.

**Théorème 3.6** *Sous les conditions  $H(X), H(F), H^*(p, X)$  avec  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{v}\right) - 1$  et  $0 < \sup_{x \in \mathcal{I}} |f'(x)| < \infty$ , on a : pour  $\delta > \frac{1}{p}$ ,*

$$|R_n(q)| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{v})} (\ln n)^{\delta(1-\frac{1}{v})+2+\frac{1}{p}} \right). \quad (3.35)$$

**Preuve du Théorème 3.6 :** Du Théorème 3.5, on a pour  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{v}\right) - 1$  et  $\delta > \frac{1}{p}$ ,

$$\left| \left( q - \tilde{Q}_n(q) \right) - \left( \tilde{F}_n(q) - q \right) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{v})} (\ln n)^{\delta(1-\frac{1}{v})+2+\frac{1}{p}} \right).$$

On remplace  $\tilde{Q}_n(q)$  par  $F(\xi_n)$  et  $\tilde{F}_n(q)$  par  $F_n(\xi)$ . Ensuite,

$$|(q - F(\xi_n)) - (F_n(\xi) - q)| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{v})} (\ln n)^{\delta(1-\frac{1}{v})+2+\frac{1}{p}} \right). \quad (3.36)$$

Le terme de gauche de (3.36) donne

$$\sqrt{n} |(q - F(\xi_n)) - (F_n(\xi) - q)|$$

Si  $H(F)$  est vérifiée et  $0 < \sup_{x \in \mathcal{I}} |f'(x)| < \infty$ , alors en utilisant le développement de Taylor-lagrange,

$$q - F(\xi_n) = (\xi - \xi_n) f(\xi) + \frac{f'(\theta)}{2} (\xi - \xi_n)^2$$

où  $\theta$  entre  $\xi$  et  $\xi_n$ . Ensuite, par le Théorème 3.4

$$\begin{aligned} (q - F(\xi_n)) - (\xi - \xi_n) f(\xi) &\leq \frac{\sup_{x \in \mathcal{I}} |f'(x)|}{2} \left( \sup_{q \in (0,1)} |\xi_n - \xi| \right)^2 \\ &= O_{p.s.} \left( n^{-1} (\ln n)^{2\delta} \right). \end{aligned}$$

Alors,

$$\sqrt{n} (q - F(\xi_n)) = \sqrt{n} (\xi - \xi_n) f(\xi) + O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^{2\delta} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \sqrt{n} |(\xi - \xi_n) f(\xi) - (F_n(\xi) - q)| &= O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{v})} (\ln n)^{\delta(1-\frac{1}{v})+2+\frac{1}{p}} \right) \\ &\quad + O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^{2\delta} \right). \end{aligned}$$

Enfin, pour  $\delta > \frac{1}{p}$ , on a

$$|(\xi_n - \xi) f(\xi) + (F_n(\xi) - q)| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{v})} (\ln n)^{\delta(1-\frac{1}{v})+2+\frac{1}{p}} \right). \square$$

## 3.5 Applications

Dans cette partie on se propose d'appliquer les résultats précédents à des suites différentes. En utilisant le résultat de S. Hu ([18], p.1124), on va appliquer nos résultats pour le cas  $\varphi$ -mélange. On applique le résultat de S. Utev et M. Peligrad ([34], Théorème 2.1) pour le cas  $\rho$ -mélange. Enfin, pour le cas  $\alpha$ -mélange, on utilise le résultat de S.C. Yang ([39], Théorème 2.1).

### 3.5.1 Processus $\varphi$ -mélange

**Corollaire 3.1** Sous la condition  $H(X)$ , si on suppose pour  $p > 2$ , le coefficient  $\varphi$ -mélange satisfait

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{p}}(2^i) < \infty,$$

Alors, on a pour  $p > 4$  et  $\delta > \frac{1}{p}$ ,

$$\left| \tilde{R}_n(q) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{3}{4}} (\ln n)^{\frac{\delta}{2} + \frac{1}{p} + 2} \right).$$

**Preuve du Corollaire 3.1 :** Quand  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont identiquement distribuées et selon le Lemme de S. Hu ([18], p.1124), si

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{p}}(2^i) < \infty,$$

il exist une constante positive  $C = C(p, \varphi(\cdot))$  tel que pour tout  $n \geq 1$  et  $f \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E} \left| \max_{m \leq n} \left| \sum_{i=1}^m [f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i))] \right| \right|^p \leq C. \left( n^{\frac{p}{2}} \|f\|_2^p + n \|f\|_p^p \right).$$

Donc  $H^*(p, X)$  est vérifiée avec  $\varepsilon = 0, v = 2$  et  $p = r$ . Ensuite, d'après le Théorème 3.5, si  $\frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{v}\right) - 1 > 0 \Rightarrow p > 4$ , Alors pour  $\delta > \frac{1}{p}$ ,

$$\left| \tilde{R}_n(q) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{3}{4}} (\ln n)^{\frac{\delta}{2} + \frac{1}{p} + 2} \right). \square$$

**Remarque 3.2** Dans [38], K. Yochihara a prouvé pour des données  $\varphi$ -mélangeantes que si on a

$$\varphi(n) = O(n^{-2}),$$

alors

$$\left| \tilde{R}_n(q) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{3}{4}} (\ln n) \right).$$

Nous, on a prouvé sous la condition

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{p}}(2^i) < \infty,$$

qu'on a pour  $p > 4$  et  $\delta > \frac{1}{p}$ ,

$$\left| \tilde{R}_n(q) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{3}{4}} (\ln n)^{\frac{\delta}{2} + \frac{1}{p} + 2} \right).$$

En effet, Sa condition est plus forte que notre condition, parce que  $\varphi(n) = O(n^{-2})$  a besoin d'une décroissance algébrique pour le coefficient de  $\varphi$ -mélange et  $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{p}}(2^i) < \infty$  a besoin d'une décroissance logarithmique.

### 3.5.2 Processus $\rho$ -mélange

On va appliquer les résultats de S. Utev et M. Peligrad ([34], Théorèmes 2.1 et 2.2) sur nos Théorèmes 2.1 et 2.2 pour des variables identiquement distribuées. On définit pour la suite stationnaire  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$

$$\begin{aligned} \alpha_n^* &= \sup_{S, T \subset \mathbb{Z}, \text{dist}(S, T) \geq n} \alpha(\mathcal{M}_T, \mathcal{M}_S), \\ \rho_n^* &= \sup_{S, T \subset \mathbb{Z}, \text{dist}(S, T) \geq n} \rho(\mathcal{M}_T, \mathcal{M}_S), \end{aligned}$$

où  $\mathcal{M}_T = \sigma(X_i, i \in T)$ ,  $\mathcal{M}_S = \sigma(X_i, i \in S)$ . Alors on a les deux Théorèmes suivants :

**Corollaire 3.2** Sous l'hypothèse  $H(X)$  ainsi que

$H(\rho)$  Il existe un nombre réel  $0 \leq \eta < 1$  et un nombre entier  $N \geq 1$  tel que  $\rho_N^* \leq \eta$ .

Alors pour  $p > 4$  et  $\delta > \frac{1}{p}$ , on a

$$\left| \tilde{R}_n(q) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{3}{4}} (\ln n)^{\frac{\delta}{2} + \frac{1}{p} + 2} \right).$$

**Preuve du Corollaire 3.2 :** On suppose que la condition  $H(\rho)$  est vérifiée et les variables sont identiquement distribuées, alors selon S. Utev and M. Peligrad ([34], Théorème 2.1), il existe une constante  $D = D(p, N, \eta)$  tel que pour toute  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{E} \left| \max_{m \leq n} \left| \sum_{i=1}^m [f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i))] \right| \right|^p \leq D \left( n^{\frac{p}{2}} \|f\|_2^p + n \|f\|_p^p \right).$$

Alors,  $H^*(p, X)$  est vérifiée où  $\varepsilon = 0, v = 2, p = r$ . Donc, on applique le Théorème 3.5 comme la preuve du Corollaire 3.1 pour avoir nos résultats.  $\square$

### 3.5.3 Processus $\alpha$ -mélange

**Corollaire 3.3** Sous l'hypothèse  $H(X)$  et si le coefficient  $\alpha$ -mélange satisfait que

$$\alpha(n) \leq Cn^{-\theta}, C > 0, \theta > 1 + \sqrt{2}.$$

Alors on a pour  $\delta > \frac{1}{\theta+1}$ ,

$$\left| \tilde{R}_n(q) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{3}{4} \left( \frac{\theta+2}{\theta+1} \right)} (\ln n)^{\frac{\delta}{2} \left( \frac{\theta+2}{\theta+1} \right) + 2 + \frac{1}{\theta+1}} \right).$$

**Preuve du Corollaire 3.3 :** Lorsque  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont identiquement distribuées et d'après le résultat de S.C. Yang ([39], Théorème 2.1 avec la Remarque 2.1), si le coefficient  $\alpha$ -mélange satisfait pour des réels  $2 < v < p < r = \infty$ , on a

$$\alpha(n) \leq Cn^{-\theta} \text{ pour } C > 0,$$

où  $\theta > \max \left\{ \frac{v}{v-2}, p-1 \right\}$ .

Alors,  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe une constante  $K = K(v, p, \varepsilon, \theta, C) < \infty$  telle que pour toute  $f \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E} \left| \max_{m \leq n} \left| \sum_{i=1}^m [f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i))] \right| \right|^p \leq K \left( n^{\frac{p}{2}} \|f\|_v^p + n^{1+\varepsilon} \|f\|_\infty^p \right)$$

On détermine  $\theta$  qui permet d'appliquer le Théorème 3.5, on a besoin de  $v < p$  et  $\frac{p}{2} \left( 1 - \frac{1}{v} \right) - 1 > 0$ . On a

$$\theta > \frac{v}{v-2} \Leftrightarrow v > \frac{2\theta}{\theta-1}$$

et

$$\theta > p-1 \Leftrightarrow p < \theta+1,$$

Il faut que  $v < p$ , alors

$$\frac{2\theta}{\theta-1} < \theta+1$$

qui est satisfaite si

$$\theta > 1 + \sqrt{2}.$$



Alors, pour  $1 + \sqrt{2} < \theta' < \theta$ , on choisit  $v = 2 + \frac{2}{\theta'}$  et  $p = 1 + \theta'$ . Avec ce choix on a  $v < p$  et  $\frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{v}\right) - 1 > 0$ . Ensuite d'après le Théorème 3.5, il existe  $\varepsilon < \frac{\theta'+2}{4} - 1$  tel que pour  $\delta > \frac{1}{\theta'+1}$ , on a

$$\left| \tilde{R}_n(q) \right| = O_{p.s.} \left( n^{-\frac{3}{4} \left( \frac{\theta'+\frac{2}{3}}{\theta'+1} \right)} (\ln n)^{\frac{\delta}{2} \left( \frac{\theta'+2}{\theta'+1} \right) + 2 + \frac{1}{\theta'+1}} \right).$$

**Remarque 3.3** Aussi, nous obtenons des résultats similaires dans le cas général avec des conditions supplémentaires sur  $F$ .



# Chapitre 4

## L'Expected Shortfall pour des variables faiblement dépendantes

### Résumé

Soit  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  une suite de v.a. identiquement distribuées mais faiblement dépendantes. Nous étudions des estimateurs non-paramétriques de l'Expected Shortfall, notamment l'estimateur empirique ainsi que l'estimateur à noyau. Nous établirons la consistance des estimateurs ainsi que leurs normalités asymptotiques sous des hypothèses assez générales. Enfin, nous appliquons nos résultats à des suites mélangeantes ( $\alpha$ ,  $\varphi$  ou  $\rho$ -mélange). Des simulations sont aussi réalisés pour illustrer nos résultats.

**Mots clés :** Value at Risk ( $VaR$ ) ; Expected Shortfall ( $ES$ ) ; Variables faiblement dépendantes ; Normalité asymptotique ; Estimation non-paramétrique.

### 4.1 Introduction

La value at risk ( $VaR$ ) et l'Expected Shortfall ( $ES$ ) sont des quantités permettant l'évaluation des risques financiers pour un actif ou un portefeuille d'actifs. Même si la  $VaR$  est largement utilisée dans la pratique et imposée pour beaucoup de réglementations en vigueur, cette mesure de risque à l'inconvénient de ne pas être une mesure de risque cohérente, parce qu'elle ne vérifie pas la propriété de sous-additivité au sens d'Artzner et al [1]. En revanche, l' $ES$  est une mesure de risque cohérente au sens de Follmer et al. [16]

Aussi, la  $VaR$  ne donne aucune information sur les pertes excessives autre que de spécifier le niveau qui définit les pertes excessives, mais l' $ES$  donne une information sur les pertes moyennes qui dépassent la  $VaR$ .

**Définition 4.1 (Fonction P&L et fonction de perte)** : Considérons  $P_t$  comme la valeur d'un portefeuille ou d'une position à la date  $t$ . Alors la variation de la valeur de ce portefeuille pour une période  $[t_i, t_{i+T}]$ , appelée fonction P&L (profit and loss), est :

$$\Delta P_{t_i} \equiv P_{t_{i+T}} - P_{t_i},$$

et

$$X_i \equiv -\Delta P_{t_i}$$

est appelé la fonction de perte. En pratique, on décide de fixer la durée  $T$  (un jour, une semaine,... par exemple), et puis  $\Delta P_{t_i} \equiv P_{t_{i+1}} - P_{t_i}$ .

Soit  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  une suite stationnaire de variables aléatoires (les variations  $(-\Delta P_i)$  d'un portefeuille sur  $n$  périodes) réelles éventuellement dépendantes, identiquement distribuées et de fonction de répartition  $F$ . Alors on rappelle la définition de la Value at Risk :

**Définition 4.2 (La Value at Risk)** : Soit  $q \in (0, 1)$  le degré de confiance. La Value at Risk d'un portefeuille d'actifs avec un degré de confiance  $q$  est définie comme un montant, notée  $VaR(q)$  telle que la perte  $X_i$  ne sera supérieure au montant  $VaR(q)$  qu'avec une probabilité inférieure ou égale de  $(1 - q)$ .

$$VaR(q) \equiv \inf \{x : \mathbb{P}(X_t > x) \leq 1 - q\}. \quad (4.1)$$

ou encore

$$VaR(q) \equiv F^{-1}(q) = \inf \{x : F(x) \geq q\} := \xi.$$

La value at Risk assure que le montant des pertes ne dépassera la  $VaR$  qu'avec une probabilité  $1 - q$  où  $q$  est typiquement égale à 0.95 ou 0.99. L'Expected Shortfall qui a l'avantage d'être une mesure de risque cohérente est définie par :

**Définition 4.3 (L'Expected Shortfall)** : Soit  $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ , on définit l'Expected Shortfall d'un portefeuille d'actifs avec un degré de confiance  $q$ , notée  $ES(q)$  par l'espérance conditionnelle de la perte  $X_i$  sachant que celle-ci dépasse la  $VaR$  :

$$ES(q) \equiv \mathbb{E}[X_i | X_i \geq VaR(q)] = (1 - q)^{-1} \mathbb{E}(X_i \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}) := \mu. \quad (4.2)$$

L'estimateur empirique de l' $ES$  est défini en ordonnant les variables aléatoires  $(X_{n,1} \leq X_{n,2} \leq \dots \leq X_{n,n})$  par :

$$\widehat{ES}(q) \equiv \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} X_i = \frac{1}{(n - [nq] - 1)} \sum_{i=[nq]+1}^n X_{(i)} := \mu_n \quad (4.3)$$

où  $I = \{i : X_i \geq \widehat{VaR}(q)\}$  et  $|I|$  est le cardinal.  $\widehat{ES}(q)$  s'écrit encore

$$\mu_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \mathbb{I}(X_i \geq \xi_n)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \geq \xi_n)} = (n - [nq] - 1)^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \mathbb{I}(X_i \geq \xi_n). \quad (4.4)$$

L'objectif central de ce travail est d'estimer l' $ES$  dans un cadre non-paramétrique avec des données stationnaires et donc éventuellement dépendantes. On examinera l'estimateur empirique de la  $VaR$  et de l' $ES$  ainsi que l'estimateur à noyau de la  $VaR$  et de l' $ES$ .

L'estimation non-paramétrique de la  $VaR$  a été étudié par Dowd [15] en utilisant le quantile empirique qui est appelé la  $VaR$  historique ou la  $VaR$  empirique. Gourieroux, Laurent et Scaillet [17] a présenté un estimateur à noyau de la  $VaR$  et Scaillet [30] a présenté l'estimateur à noyau de l' $ES$ . Chen et al. [10] et [11] ont étudié l'estimateur à noyau de la  $VaR$  et les estimateurs empiriques et à noyau de l' $ES$  dans le cas de  $\alpha$ -mélange géométrique, c'est à dire le coefficient de mélange  $\alpha(k)$  vérifie

$$\alpha(k) \leq c\rho^k \text{ où } k \geq 1, c > 0 \text{ et } \rho \in (0, 1).$$

L'estimation non-paramétrique possède les avantages suivants : (i) elle ne dépend pas d'un modèle de la distribution de perte  $F$  ce qui la rend robuste et elle évite un biais généré par une mauvaise spécification de  $F$ ; (ii) elle demande des hypothèses plus faibles sur le processus de returns  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ , ce qui la rend adaptable dans le contexte des pertes financières. Une limitation potentielle pour l'estimation non paramétrique peut être la nécessité d'une taille d'échantillon raisonnable pour assurer de bonnes performances.

Avant de pouvoir énoncer nos résultats, nous présentons une famille d'hypothèses qui seront utilisées dans la suite :

$H(X) : (X_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une suite stationnaire de variables aléatoires réelles de fonction de répartition continue  $F$ .

$H(F)$  :  $F$  admet une densité  $f$  qui est dérivable dans un voisinage  $\mathcal{I}$  de  $\xi \equiv F^{-1}(q)$ ,  $f(\xi) > 0$  et  $\sup_{x \in \mathcal{I}_n} |f'(x)| < \infty$ .

$H(p, X)$  : Soit  $\mathcal{F}$  la classe de fonctions réelles mesurables et bornées par 1. Pour des réels  $2 \leq v < p \leq r \leq \infty$ , et pour  $\varepsilon > 0$ , il exist une constante positive  $D = D(\varepsilon, p, v, r) < \infty$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{F}$ ,

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n [f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i))] \right|^p \leq D \left( n^{\frac{p}{2}} \|f\|_v^p + n^{1+\varepsilon} \|f\|_r^p \right).$$

$H^*(p, X)$  :

$$\mathbb{E} \left( \max_{m \leq n} \left| \sum_{i=1}^m [f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i))] \right| \right)^p \leq D \left( n^{\frac{p}{2}} \|f\|_v^p + n^{1+\varepsilon} \|f\|_r^p \right).$$

Enfin, on pose pour  $0 < b_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ ,

$$a_n \ll b_n \Leftrightarrow \left\{ a_n < b_n \text{ et } \frac{a_n}{b_n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \right\}.$$

Dans les preuves  $C$  désigne une constante dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre.

L'article est organisé comme suit. Dans la Section 4.2 on prouve la consistance ainsi qu'un Théorème de la limite centrale pour l'estimateur empirique de l'expected shortfall

$$\sqrt{n} \left( \widehat{ES} - ES \right) \rightarrow^d \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_0^2(\xi)}{(1-q)^2} \right),$$

où

$$\sigma_0^2(\xi) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} Cov(g_\xi(X_1), g_\xi(X_{i+1})) = Var(g_\xi(X_1)) + 2 \sum_{i=1}^{+\infty} Cov(g_\xi(X_1), g_\xi(X_{i+1}))$$

est supposé satisfaire  $0 < \sigma_0^2(\xi) < \infty$  et  $g_\xi(x)$  est défini par :

$$g_\xi(x) \equiv (x - \xi) \mathbb{I}_{(x \geq \xi)}. \quad (4.5)$$

La Section 4.3 concerne les estimateurs à noyau de la Value at Risk et de l'Expected Shortfall :  $\widehat{VaR}_h$  et  $\widehat{ES}_h$ . On montre aussi la consistance et un

Théorème de la limite centrale pour  $\widehat{VaR}_h$  et  $\widehat{ES}_h$  :

$$\begin{aligned}\sqrt{n} \left( \widehat{VaR}_h - VaR \right) &\rightarrow {}^d \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f(\xi)} \right), \\ \sqrt{n} \left( \widehat{ES}_h - ES \right) &\rightarrow {}^d \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_0^2(\xi)}{(1-q)^2} \right),\end{aligned}$$

où

$$\sigma_\infty^2(\xi) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} Cov \left( \mathbb{I}_{(X_1 \leq \xi)}, \mathbb{I}_{(X_{i+1} \leq \xi)} \right) = Var \left( \mathbb{I}_{(X_1 \leq \xi)} \right) + 2 \sum_{i=1}^{+\infty} Cov \left( \mathbb{I}_{(X_1 \leq \xi)}, \mathbb{I}_{(X_{i+1} \leq \xi)} \right)$$

est supposé satisfaire  $0 < \sigma_\infty^2(\xi) < \infty$ . Dans la Section 4.4, plusieurs applications sont discutées. La Section 4.5 est consacrée aux simulations pour illustrer les résultats.

Dans les preuves  $C$  désigne une constante dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre.

## 4.2 Théorèmes limites pour l'ES empirique

Le théorème suivant donne un développement pour l'ES sous des conditions très générales.

**Théorème 4.1** *Sous la condition  $H(X)$ , on a :*

i)

$$\mu_n = \mu + \frac{1}{(1-q)n} \sum_{i=1}^n g_\xi(X_i) - \mathbb{E}[g_\xi(X_i)] + \frac{M_n}{(1-q)} \quad (4.6)$$

où

$$M_n \leq |\xi_n - \xi| \left( |F_n(\xi) - F(\xi)| + O(n^{-1}) \right) + O(n^{-1}) \quad (4.7)$$

et  $g_\xi(x)$  est définie par (4.5).

ii) Si de plus  $H(p, X)$  où  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$ , est vérifiée, alors

$$\mu_n = \mu + \frac{1}{(1-q)n} \sum_{i=1}^n g_\xi(X_i) - \mathbb{E}[g_\xi(X_i)] + O_p(n^{-1}). \quad (4.8)$$

iii) *Si de plus*

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_{\xi}(X_i) - \mathbb{E}[g_{\xi}(X_i)] \right) \longrightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_0^2(\xi)),$$

alors

$$\sqrt{n}(\mu_n - \mu) \longrightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_0^2(\xi)}{(1-q)^2}\right). \quad (4.9)$$

**Remarque 4.1** Lorsque  $0 < \sigma_0^2(\xi) < \infty$  et  $H(p, X)$  où  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$  sont vérifiées, alors

$$|\mu_n - \mu| = O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (4.10)$$

**Preuve du Théorème 4.1 :**

i) Soit  $\mu_n$  l'expecté Shortfall empirique. Par la définition de  $\mu_n$ , on a :

$$\mu_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_n)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_n)}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_n)}}{1 - F_n(\xi_n)}.$$

Puisque

$$F_n(\xi_n) = F(\xi) + O(n^{-1}),$$

on pose  $m_n \equiv 1 - F_n(\xi_n) = 1 - q - O(n^{-1}) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1 - q$ , alors

$$\begin{aligned} m_n \cdot \mu_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_n)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \xi) (\mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_n)} - \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)} \\ &\quad + \xi (1 - F_n(\xi_n)), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} m_n \cdot \mu_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)} - \mathbb{E}[(X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}] \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \xi) (\mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_n)} - \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}) \\ &\quad + \mathbb{E}[(X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}] + \xi (1 - F_n(\xi_n)) \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \quad (4.11)$$



où

$$I_1 \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)} - \mathbb{E} [(X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}] \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_\xi(X_i) - \mathbb{E} [g_\xi(X_i)]. \quad (4.12)$$

Et

$$I_2 \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \xi) (\mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_n)} - \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}), \quad (4.13)$$

$$I_3 \equiv \mathbb{E} [(X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}] + \xi (1 - F_n(\xi_n)). \quad (4.14)$$

D'abord, on va chercher à contrôler  $I_2$ . On considère deux cas :  $\xi_n > \xi$  et  $\xi_n < \xi$

1.  $\xi_n > \xi$ , alors

$$\mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_n)} - \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)} = -\mathbb{I}_{(\xi < X_i \leq \xi_n)}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \xi) \mathbb{I}_{(\xi < X_i \leq \xi_n)} \\ |I_2| &\leq |\xi_n - \xi| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(\xi < X_i \leq \xi_n)} \\ &\leq |\xi_n - \xi| |F_n(\xi_n) - F_n(\xi)|. \end{aligned} \quad (4.15)$$

2.  $\xi_n < \xi$ , dans ce cas  $\mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_n)} - \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)} = \mathbb{I}_{(\xi_n < X_i \leq \xi)}$ . Donc ,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \xi) \mathbb{I}_{(\xi_n < X_i \leq \xi)} \\ |I_2| &\leq |\xi_n - \xi| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(\xi_n < X_i \leq \xi)} \\ &\leq |\xi_n - \xi| |F_n(\xi_n) - F_n(\xi)|. \end{aligned} \quad (4.16)$$

De (4.15) et (4.16) on peut donc conclure que :

$$|I_2| \leq |\xi_n - \xi| (|F_n(\xi) - F(\xi)| + O(n^{-1})). \quad (4.17)$$

Enfin, pour contrôler  $I_3$  on a :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \mathbb{E} [(X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}] + \xi (1 - F_n(\xi_n)) \\
&= (1 - q) \mu - \xi (1 - q) + \xi (1 - q + O(n^{-1})) \\
&= (1 - q) \mu + O(n^{-1}).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Des relation (4.11), (4.12), (4.17) et (4.18), on déduit :

$$\begin{aligned}
(1 - q - O(n^{-1})) \mu_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_\xi(X_i) - \mathbb{E}[g_\xi(X_i)] \\
&\quad + I_2 + (1 - q) \mu + O(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Donc, on peut conclure que :

$$(1 - q) (\mu_n - \mu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_\xi(X_i) - \mathbb{E}[g_\xi(X_i)] + I_2 + O(n^{-1}),$$

où  $|I_2| \leq |\xi_n - \xi| (|F_n(\xi) - F(\xi)| + O(n^{-1}))$ .

ii) Par  $H(p, X)$ , on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} |\sqrt{n} (F_n(\xi) - F(\xi))|^2 &\leq \mathbb{E} |\sqrt{n} (F_n(\xi) - F(\xi))|^p \\
&\leq D. \left( |F(\xi)|^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} |F(\xi)|^{\frac{p}{r}} \right).
\end{aligned}$$

Si on a  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$ , alors

$$\mathbb{E} |\sqrt{n} (F_n(\xi) - F(\xi))|^2 \leq C,$$

alors

$$|F_n(\xi) - F(\xi)| \leq O(n^{-\frac{1}{2}}).$$

Donc,

$$|I_2| \leq |\xi_n - \xi| O(n^{-\frac{1}{2}}) \left( 1 + O(n^{-\frac{1}{2}}) \right).$$

Ensuite

$$\mu_n = \mu + \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i=1}^n g_\xi(X_i) - \mathbb{E}[g_\xi(X_i)] + |\xi_n - \xi| O(n^{-\frac{1}{2}}) + O(n^{-1}).$$

D'après le Lemme 2.1 si  $H(p, X)$  est vérifiée où  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$ , alors

$|\xi_n - \xi| = O_p(n^{-\frac{1}{2}})$ . Ensuite, on a

$$\sqrt{n}(1-q) \cdot (\mu_n - \mu) = \sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_\xi(X_i) - \mathbb{E}[g_\xi(X_i)] \right) + O_p(n^{-\frac{1}{2}}). \square$$

**Remarque 4.2 :**

Chen [11] s'est intéressé à l'estimation non paramétrique de l'ES pour des données  $\alpha$ -mélangeants géométriques c'est à dire

$$\alpha(k) \leq c\rho^k \text{ où } k \geq 1, c > 0 \text{ et } \rho \in (0, 1).$$

Il a montré que

$$\mu_n = \mu + \frac{1}{(1-q)n} \sum_{i=1}^n g_\xi(X_i) - \mathbb{E}[g_\xi(X_i)] + o_p(n^{-\frac{3}{4}+\kappa}),$$

et

$$\sqrt{n}(\mu_n - \mu) \longrightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_0^2(\xi)}{(1-q)^2}\right),$$

où  $\kappa > 0$ .

Dans ce travail, on a prouvé dans le cas  $\alpha$ -mélange qu'on a besoin seulement de la décroissance algébrique en utilisant  $H(p, X)$  (voir le corollaire 2.3).

## 4.3 L'estimateur à noyau de la VaR et de l'ES

### 4.3.1 L'estimateur à noyau de la VaR

Soit  $G(x) = \int_{-\infty}^x K(z) dz$  la fonction de répartition de la fonction de densité à noyau  $K$ . L'estimateur à noyau de  $F(x)$  est défini en remplaçant la fonction indicatrice  $\mathbb{I}$  par  $G$  dans la fonction de répartition empirique  $F_n(x)$ . i.e.

$$F_{n,h}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \quad (4.19)$$

où  $h > 0$  est un paramètre nommé fenêtre et  $K$  est un noyau vérifiant les hypothèses suivantes :

$H(K) : \int_{-\infty}^{+\infty} K(z) dz = 1, \int_{-\infty}^{+\infty} zK(z) dz = 0, \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 K(z) dz = \sigma_K^2$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |z|^3 K(z) dz < \infty$ .

L'estimateur à noyau de la *VaR*, noté  $\xi_{n,h}$ , présenté par Gouriéroux, Laurent et Scaillet [17], est défini par :

$$\widehat{VaR}_h \equiv F_{n,h}^{-1}(q) := \xi_{n,h}.$$

D'abord on va exprimer  $F_{n,h}(x)$  comme une moyenne pondérée par le noyau  $K$  de  $\{F_n(x - zh), z \in \mathbb{R}\}$ .

**Lemme 4.1** *Soit  $F_{n,h}$  l'estimateur à noyau de  $F$  et  $F_n$  l'estimateur empirique de  $F$ , alors,*

$$F_{n,h}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(\xi - zh) K(z) dz. \quad (4.20)$$

**Preuve du Lemme 4.1 :** Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(\xi - zh) K(z) dz &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{(X_i \leq \xi - zh)} K(z) dz \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{(z \leq \frac{\xi - X_i}{h})} K(z) dz \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\frac{\xi - X_i}{h}} K(z) dz \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G\left(\frac{\xi - X_i}{h}\right). \end{aligned}$$

D'où :

$$F_{n,h}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(\xi - zh) K(z) dz.$$

□

**Lemme 4.2** *Sous  $H^*(p, X)$ ,  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 + \frac{1}{r}\right) - \frac{3}{2}$ ,  $h \ll n^{-\frac{1}{4}}$  et  $H(F)$  est vérifiée pour  $F$  et  $F^{-1}$ , alors on a pour  $\delta > \frac{1}{p}$ ,*

$$|\xi_{n,h} - \xi| \leq O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right). \quad (4.21)$$

**Preuve du Lemme 4.2 :** Par la définition de  $\xi_{n,h}$  et la relation (4.20) du Lemme 4.1, on a :

$$\begin{aligned} q &= F_{n,h}(\xi_{n,h}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(\xi_{n,h} - zh) K(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n - F)(\xi_{n,h} - zh) K(z) dz + \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi_{n,h} - zh) K(z) dz \\ &\equiv A + B. \end{aligned}$$

Par le Théorème 3.4 dans le cas général, on a :

$$\begin{aligned} |A| &\equiv \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n - F)(\xi_{n,h} - zh) K(z) dz \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_y |F_n - F|(y) K(z) dz \\ &= O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right). \end{aligned}$$

Si  $H(F)$  est vérifiée, alors en utilisant le développement de Taylor-Lagrange, on a :

$$\begin{aligned} B &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi_{n,h} - zh) K(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ F(\xi_{n,h}) - hzf(\xi_{n,h}) + \frac{1}{2}h^2z^2f'(\theta) \right] K(z) dz \end{aligned}$$

où  $\theta$  est entre  $\xi_{n,h} - zh$  et  $\xi_{n,h}$ . Ensuite

$$\begin{aligned} B &= F(\xi_{n,h}) - hf(\xi_{n,h}) \int_{-\infty}^{+\infty} zK(z) dz + \frac{1}{2}h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f'(\theta) z^2K(z) dz \\ &= F(\xi_{n,h}) + O(h^2). \end{aligned}$$

Alors,

$$q = F(\xi_{n,h}) + O(h^2) + O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right).$$

Si on a  $h \ll n^{-\frac{1}{4}}$ , donc

$$F(\xi_{n,h}) = q - O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right).$$

Ensuite,

$$\xi_{n,h} = F^{-1} \left( q - O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right) \right).$$

Si  $H(F^{-1})$  est vérifiée, alors par le développement de Taylor-lagrange, on a

$$\begin{aligned} \xi_{n,h} &= F^{-1} \left( q - O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right) \right) \\ &= F^{-1}(q) - (F^{-1})'(\theta) O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right), \end{aligned}$$

où  $\theta$  entre  $q - O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right)$  et  $q$ . Donc,

$$\xi_{n,h} - \xi = - (F^{-1})'(\theta) O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right).$$

Enfin, on a

$$|\xi_{n,h} - \xi| \leq O_{p.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^\delta \right). \square$$

**Théorème 4.2** *Sous les conditions  $H(X), H(F), H(p, X), \varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1, H(K)$  et  $nh^4 \rightarrow 0$ , on a pour  $\lambda_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ ,*

$$|\xi_{n,h} - \xi| = o_p(\lambda_n).$$

*Si en plus  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$  et  $f'$  est uniformément bornée, alors*

$$\sqrt{n}(\xi_{n,h} - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)} \right).$$

La preuve de ce théorème repose sur le Lemme suivant :

**Lemme 4.3** *Sous  $H(p, X), \varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1, H(F)$  et  $nh^4 \rightarrow 0$ , on a pour  $\lambda_n > 0$ ,*

$$\mathbb{P}(|\xi_{n,h} - \xi| > \lambda_n) \leq C(\varepsilon, v, p, r, f(\xi)) \cdot (\lambda_n \sqrt{n})^{-p}. \quad (4.22)$$

*Si en plus  $\lambda_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ , alors*

$$|\xi_{n,h} - \xi| = o_p(\lambda_n). \quad (4.23)$$

**Preuve du Lemme 4.3 :** On a

$$\mathbb{P}(|\xi_{n,h} - \xi| > \lambda_n) = \mathbb{P}(\xi_{n,h} < \xi - \lambda_n) + \mathbb{P}(\xi_{n,h} > \xi + \lambda_n).$$

Pour le premier terme, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_{n,h} < \xi - \lambda_n) &\leq \mathbb{P}(F_{n,h}(\xi_{n,h}) \leq F_{n,h}(\xi - \lambda_n)) \\ &\leq \mathbb{P}(F_{n,h}(\xi - \lambda_n) - F(\xi - \lambda_n) \geq F_{n,h}(\xi_{n,h}) - F(\xi - \lambda_n)) \\ &\leq \mathbb{P}(F_{n,h}(\xi - \lambda_n) - F(\xi - \lambda_n) \geq q - F(\xi - \lambda_n)). \end{aligned}$$

Qui est selon l'inégalité de Markov majorée par,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_{n,h} < \xi - \lambda_n) &\leq (q - F(\xi - \lambda_n))^{-p} \mathbb{E}[F_{n,h}(\xi - \lambda_n) - F(\xi - \lambda_n)]^p \\ &\leq 2^{p-1} (q - F(\xi - \lambda_n))^{-p} \mathbb{E}|F_{n,h}(\xi - \lambda_n) - \mathbb{E}(F_{n,h}(\xi - \lambda_n))|^p \\ &\quad + 2^{p-1} (q - F(\xi - \lambda_n))^{-p} |\mathbb{E}(F_{n,h}(\xi - \lambda_n)) - F(\xi - \lambda_n)|^p. \end{aligned}$$

Mais en utilisant le développement de Taylor de  $F(\xi - \lambda_n)$ , on a

$$q - F(\xi - \lambda_n) = f(\xi) \lambda_n [1 + o(1)].$$

Si on a  $0 < f(\xi) < \infty$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_{n,h} < \xi - \lambda_n) &\leq C(p, f(\xi)) \lambda_n^{-p} \mathbb{E}|F_{n,h}(\xi - \lambda_n) - \mathbb{E}(F_{n,h}(\xi - \lambda_n))|^p \\ &\quad + C(p, f(\xi)) \lambda_n^{-p} |\mathbb{E}(F_{n,h}(\xi - \lambda_n)) - F(\xi - \lambda_n)|^p. \end{aligned}$$

Cherchons maintenant à contrôler  $|\mathbb{E}(F_{n,h}(\xi - \lambda_n)) - F(\xi - \lambda_n)|$ . Alors comme

$\int_{-\infty}^{+\infty} K(z) dz = 1$  parce que  $K$  est une fonction de densité. Et donc

$$\begin{aligned} F_{n,h}(\xi - \lambda_n) - F(\xi - \lambda_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(\xi - \lambda_n - zh) K(z) dz - F(\xi - \lambda_n) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n(\xi - \lambda_n - zh) - F(\xi - \lambda_n)) K(z) dz. \end{aligned}$$

En appliquant l'espérance et le Théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(F_{n,h}(\xi - \lambda_n) - F(\xi - \lambda_n)) &= \mathbb{E} \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n(\xi - \lambda_n - zh) - F(\xi - \lambda_n)) K(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbb{E}(F_n(\xi - \lambda_n - zh)) - F(\xi - \lambda_n)] K(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (F(\xi - \lambda_n - zh) - F(\xi - \lambda_n)) K(z) dz. \end{aligned}$$

Si  $H(F)$  est vérifiée, alors en utilisant le développement de Taylor-Lagrange, on a

$$\begin{aligned} F(\xi - \lambda_n - zh) - F(\xi - \lambda_n) &= -hzf(\xi - \lambda_n) + \frac{1}{2}h^2z^2f'(\xi - \lambda_n - \theta_1zh) \\ &= -hzf(\xi) + hz\lambda_nf(\xi - \theta_2\lambda_n) \\ &\quad + \frac{1}{2}h^2z^2f'(\xi - \lambda_n - \theta_1zh) \end{aligned}$$

où  $\theta_1$  et  $\theta_2 \in (0, 1)$ . Ensuite par  $H(K)$  et  $nh^4 \rightarrow 0$  on a

$$|\mathbb{E}(F_{n,h}(\xi - \lambda_n) - F(\xi - \lambda_n))| = O(h^2) = o(n^{-\frac{1}{2}}).$$

Alors

$$\mathbb{P}(\xi_{n,h} < \xi - \lambda_n) \leq C \cdot \lambda_n^{-p} \mathbb{E}|F_{n,h}(\xi - \lambda_n) - \mathbb{E}(F_{n,h}(\xi - \lambda_n))|^p + o(\lambda_n \sqrt{n})^{-p}.$$

Qui est d'après  $H(p, X)$  majorée par,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_{n,h} < \xi - \lambda_n) &\leq C \cdot \lambda_n^{-p} D \cdot n^{-\frac{p}{2}} \left( \left\| G\left(\frac{\xi - \lambda_n - X_i}{h}\right) \right\|_v^p \right. \\ &\quad \left. + n^{1+\varepsilon-p} \cdot \left\| G\left(\frac{\xi - \lambda_n - X_i}{h}\right) \right\|_r^p \right) \\ &\quad + o(\lambda_n \sqrt{n})^{-p}. \end{aligned}$$

On a  $|G(\frac{\xi - \lambda_n - X_i}{h})| < 1$  et si  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$ , alors

$$\mathbb{P}(\xi_{n,h} < \xi - \lambda_n) \leq C(p, f(\xi), D) \cdot \lambda_n^{-p} n^{-\frac{p}{2}} + o(\lambda_n \sqrt{n})^{-p}$$

Ensuite, pour  $0 < \lambda_n$  et  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$

$$\mathbb{P}(\xi_{n,h} < \xi - \lambda_n) \leq C(\varepsilon, v, p, r, f(\xi)) \cdot (\lambda_n \sqrt{n})^{-p}.$$

De même pour le deuxième terme, on trouve que :

$$\mathbb{P}(\xi_{n,h} > \xi + \lambda_n) \leq C(\varepsilon, v, p, r, f(\xi)) \cdot (\lambda_n \sqrt{n})^{-p}.$$

Enfin, on a pour  $0 < \lambda_n$  et  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$ ,

$$\mathbb{P}(|\xi_{n,h} - \xi| > \lambda_n) \leq C(\varepsilon, v, p, r, f(\xi)) \cdot (\lambda_n \sqrt{n})^{-p}. \square$$



**Preuve du Théorème 4.2 :** Soit  $Z_n(x) = \sqrt{n}(F_n(x) - F(x))$  et  $Z_n(x, y) = Z_n(x) - Z_n(y)$ . Par la définition de  $\xi_{n,h}$  et la relation (4.20), on a

$$\begin{aligned}
q &= F_{n,h}(\xi_{n,h}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(\xi_{n,h} - zh) K(z) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} Z_n(\xi_{n,h} - zh) K(z) dz + \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi_{n,h} - zh) K(z) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} Z_n(\xi_{n,h} - zh, \xi - zh) K(z) dz \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} Z_n(\xi - zh) K(z) dz + \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi_{n,h} - zh) K(z) dz \\
&\equiv A + B + G.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Contrôle de A : Soit  $0 < \lambda_n$  et  $0 < c_n$ , on note que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|Z_n(\xi_{n,h} - zh, \xi - zh)| > c_n) &= \mathbb{P}(|Z_n(\xi_{n,h} - zh, \xi - zh)| > c_n \cap |\xi_{n,h} - \xi| \leq \lambda_n) \\
&\quad + \mathbb{P}(|Z_n(\xi_{n,h} - zh, \xi - zh)| > c_n \cap |\xi_{n,h} - \xi| > \lambda_n) \\
&\leq \mathbb{P}\left(|Z_n(\xi_{n,h} - zh, \xi - zh)| \mathbb{I}_{(|\xi_{n,h} - \xi| \leq \lambda_n)} > c_n\right) \\
&\quad + \mathbb{P}(|\xi_{n,h} - \xi| > \lambda_n).
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 4.3, on a

$$\mathbb{P}(|\xi_{n,h} - \xi| > \lambda_n) \leq C(\varepsilon, v, p, r, f(\xi)) \cdot (\lambda_n \sqrt{n})^{-p}.$$

En plus, par l'inégalité de Markov et le Théorème 2.1 pour  $\lambda_n > n^{\frac{1+\varepsilon-1}{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|Z_n(\xi_{n,h} - zh, \xi - zh)| \mathbb{I}_{(|\xi_{n,h} - \xi| \leq \lambda_n)} > c_n\right) &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{|x-y| \leq \lambda_n} |Z_n(x, y)| > c_n\right) \\
&\leq \frac{1}{c_n} \mathbb{E} \left| \sup_{|x-y| \leq \lambda_n} |Z_n(x, y)| \right| \\
&\leq C \cdot c_n^{-1} \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}} + \lambda_n^{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{p}\right)} \right).
\end{aligned}$$

Par conséquence, pour  $\lambda_n > n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{r}}$  où  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$  et pour  $c_n > 0$ ,

$$\mathbb{P}(|Z_n(\xi_{n,h} - zh, \xi - zh)| > c_n) \leq C \cdot \left[ c_n^{-1} \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}} + \lambda_n^{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{p}\right)} \right) + \left( n^{\frac{1}{2}} \lambda_n \right)^{-p} \right].$$

Si  $\lambda_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  et  $c_n \gg \max \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}}, \lambda_n^{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{p}\right)} \right)$ , alors

$$|Z_n(\xi_{n,h} - zh, \xi - zh)| = o_p(c_n).$$

Ensuite, on remplace le résultat dans la formule de  $A$  :

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} Z_n(\xi_{n,h} - zh, \xi - zh) K(z) dz \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} o_p(c_n) K(z) dz \\ &= o_p\left(n^{-\frac{1}{2}} c_n\right). \end{aligned} \tag{4.25}$$

**Contrôle de  $B$  :**

$$\begin{aligned} B &\equiv \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} Z_n(\xi - zh) K(z) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} Z_n(\xi) K(z) dz + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} Z_n(\xi - zh, \xi) K(z) dz \\ &\equiv B_1 + B_2. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Pour le contrôle de  $B_2$ , on a :

$$\sqrt{n} B_2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} Z_n(\xi - zh, \xi) K(z) dz := R.$$

On calcule l'espérance de  $R^2$ , ensuite

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(Z_n(\xi - zh, \xi) Z_n(\xi - z'h, \xi)) K(z) K(z') dz dz' \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \|Z_n(\xi - zh, \xi)\|_2 \|Z_n(\xi - z'h, \xi)\|_2 K(z) K(z') dz dz' \\ &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \|Z_n(\xi - zh, \xi)\|_2 K(z) dz \right)^2. \end{aligned}$$

Par  $H(p, X)$ , on a

$$\begin{aligned} \|Z_n(\xi - zh, \xi)\|_2 &\leq \|Z_n(\xi - zh, \xi)\|_p \\ &\leq D^{\frac{1}{p}} \cdot \left( |F(\xi - zh) - F(\xi)|^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} |F(\xi - zh) - F(\xi)|^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \cdot \left( |F(\xi - zh) - F(\xi)|^{\frac{1}{v}} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} |F(\xi - zh) - F(\xi)|^{\frac{1}{r}} \right). \end{aligned}$$

Ensuite

$$\mathbb{E}(R^2) \leq C \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \left( |F(\xi - zh) - F(\xi)|^{\frac{1}{v}} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} |F(\xi - zh) - F(\xi)|^{\frac{1}{r}} \right) K(z) dz \right)^2.$$

Si  $F$  est continue en  $\xi$ , alors

$$\forall z, F(\xi - zh) - F(\xi) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

alors d'après le théorème de convergence dominé, on a

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( |F(\xi - zh) - F(\xi)|^{\frac{1}{v}} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} |F(\xi - zh) - F(\xi)|^{\frac{1}{r}} \right) K(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \left( |F(\xi - zh) - F(\xi)|^{\frac{1}{v}} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} |F(\xi - zh) - F(\xi)|^{\frac{1}{r}} \right) K(z) dz. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\mathbb{E}(R^2) \rightarrow 0 \Rightarrow R \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2.$$

Alors

$$B_2 = o_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (4.27)$$

**Contrôle de  $G$  :**

$$G \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi_{n,h} - zh) K(z) dz.$$

Si  $H(F)$  est vérifiée, alors par le développement de Taylor-Lagrange, on a

$$\begin{aligned} F(\xi_{n,h} - zh) &= F(\xi) + f(\xi)(\xi_{n,h} - zh - \xi) \\ &\quad + \frac{1}{2} f'(\xi + \theta(\xi_{n,h} - zh - \xi))(\xi_{n,h} - zh - \xi)^2. \end{aligned}$$

où  $\theta \in (0, 1)$ . Par  $H(K)$ , on a

$$G = q + f(\xi)(\xi_{n,h} - \xi) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} f'(\xi + \theta(\xi_{n,h} - zh - \xi)) (\xi_{n,h} - zh - \xi)^2 K(z) dz.$$

Quand  $f'$  est uniformément bornée,  $nh^4 \rightarrow 0$  et  $H(K)$  est vérifiée, alors

$$G = q + f(\xi)(\xi_{n,h} - \xi) + O(h^2). \quad (4.28)$$

On conclut de (4.24), (4.25), (4.26), (4.27) et (4.28) :

$$\begin{aligned} q &= o_p\left(n^{-\frac{1}{2}}c_n\right) + (F_n(\xi) - F(\xi)) + o_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &\quad + q + f(\xi)(\xi_{n,h} - \xi) + O(h^2). \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\sqrt{n}(f(\xi)(\xi - \xi_{n,h})) = o_p(c_n) + \sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi)) + o_p(1) + O(\sqrt{nh^2}).$$

Si  $nh^4 \rightarrow 0$  et si de plus

$$\sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi))$$

où  $0 < \sigma_\infty^2(\xi) < \infty$ , alors

$$\sqrt{n}f(\xi)(\xi_{n,h} - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)). \square$$

### 4.3.2 L'estimateur à noyau de l'ES

Soit  $\bar{G}(x) = \int_x^{+\infty} K(z) dz$ . L'estimateur à noyau de l'ES, noté  $\widehat{ES}_h$ , présenté par Scaillet [30], est défini par :

$$\widehat{ES}_h = \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i=1}^n X_i \bar{G}\left(\frac{\xi_{n,h} - X_i}{h}\right) := \mu_{n,h}. \quad (4.29)$$

Maintenant, on va prouver une sorte de représentation de Bahadur pour  $\mu_{n,h}$ , analogue à la relation (4.8) du Théorème 4.1 obtenue pour l'estimateur empirique de l'ES. Comme conséquence de cette représentation, on va pouvoir en déduire un TLC pour l'estimateur à noyau de l'ES.

**Théorème 4.3** *Sous  $H(X)$ , on a*

i)

$$\mu_{n,h} = \mu + \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i=1}^n g_\xi(x) - \mathbb{E}[g_\xi(x)] + \frac{M_{n,h}}{(1-q)}, \quad (4.30)$$

où

$$M_{n,h} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi_{n,h} - zh - \xi| |F_n(\xi_{n,h}) - F_n(\xi)| K(z) dz \quad (4.31)$$

et  $g_\xi(x)$  est définie par (4.5).

ii) *Si les conditions  $H(F)$ ,  $f$  est uniformément bornée,  $H(p, X)$  où  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$ ,  $H(K)$  et  $n^{-\frac{1}{2}} \ll h \ll n^{-\frac{1}{4}}$  sont vérifiées, alors*

$$\mu_{n,h} = \mu + \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i=1}^n g_\xi(x) - \mathbb{E}[g_\xi(x)] + O_p(h^2). \quad (4.32)$$

iii) *Si de plus*

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [g_\xi(X_i) - \mathbb{E}[g_\xi(X_i)]] \right) \longrightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_0^2(\xi)),$$

alors

$$\sqrt{n}(\mu_{n,h} - \mu) \longrightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_0^2(\xi)}{(1-q)^2}\right). \quad (4.33)$$

**Remarque 4.3** Lorsque  $0 < \sigma_0^2(\xi) < \infty$ ,  $n^{-\frac{1}{2}} \ll h \ll n^{-\frac{1}{4}}$  et  $H(p, X)$  où  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$  sont vérifiées, alors

$$|\mu_{n,h} - \mu| = O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (4.34)$$

**Preuve du Théorème 4.3 :** D'abord, remarquons que :

$$\mu_{n,h} = \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i=1}^n X_i \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_{n,h} - zh)} K(z) dz.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\mu_{n,h} &= \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i=1}^n X_i \bar{G} \left( \frac{\xi_{n,h} - X_i}{h} \right) \\
&= \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i=1}^n X_i \int_{\frac{\xi_{n,h} - X_i}{h}}^{+\infty} K(z) dz \\
&= \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i=1}^n X_i \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_{n,h} - zh)} K(z) dz.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
n(1-q) \cdot \mu_{n,h} &= \sum_{i=1}^n X_i \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_{n,h} - zh)} K(z) dz \\
&= \sum_{i=1}^n (X_i - \xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_{n,h} - zh)} - \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)} \right) K(z) dz \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \xi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_{n,h} - zh)} K(z) dz + \sum_{i=1}^n (X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n(1-q) \cdot \mu_{n,h} &= \sum_{i=1}^n (X_i - \xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_{n,h} - zh)} - \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)} \right) K(z) dz \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)} - n \mathbb{E} [(X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}] \\
&\quad + \xi \sum_{i=1}^n \bar{G} \left( \frac{\xi_{n,h} - X_i}{h} \right) + n \mathbb{E} [(X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}].
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
n(1-q) \cdot \mu_{n,h} &= \sum_{i=1}^n (X_i - \xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_{n,h} - zh)} - \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)} \right) K(z) dz \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)} - n \mathbb{E} [(X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}] \\
&\quad + \xi \sum_{i=1}^n \bar{G} \left( \frac{\xi_{n,h} - X_i}{h} \right) + n \mathbb{E} [(X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}]. \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{i=1}^n \bar{G} \left( \frac{\xi_{n,h} - X_i}{h} \right) = n(1 - F_{n,h}(\xi_{n,h})) = n(1 - q),$$

et

$$\mathbb{E} [(X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}] = \mu(1 - q) - \xi(1 - q),$$

donc,

$$\xi \sum_{i=1}^n \bar{G} \left( \frac{\xi_{n,h} - X_i}{h} \right) + n \mathbb{E} [(X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}] = n(1 - q)\mu. \quad (4.36)$$

On pose :

$$I = (1 - q) \cdot (\mu_{n,h} - \mu) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)} - \mathbb{E} [(X_i - \xi) \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}].$$

A partir de (4.35), (4.36), on conclut que

$$I = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_{n,h} - zh)} - \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)} \right) K(z) dz. \quad (4.37)$$

Cherchons maintenant à contrôler (4.37) :

$$I = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} (X_i - \xi) \left( \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_{n,h} - zh)} - \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)} \right) K(z) dz.$$

On a deux cas :

-  $\xi < \xi_{n,h} - zh$ , on a

$$\mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_{n,h} - zh)} - \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)} = -\mathbb{I}_{(\xi < X_i \leq \xi_{n,h} - zh)}.$$

-  $\xi \geq \xi_{n,h} - zh$  :

$$\mathbb{I}_{(X_i \geq \xi_{n,h} - zh)} - \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)} = \mathbb{I}_{(\xi_{n,h} - zh < X_i \leq \xi)}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} |I| &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi_{n,h} - zh - \xi| \mathbb{I}_{(\min\{\xi, \xi_{n,h} - zh\} < X_i \leq \max\{\xi, \xi_{n,h} - zh\})} K(z) dz \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi_{n,h} - zh - \xi| |F_n(\xi_{n,h} - zh) - F_n(\xi)| K(z) dz. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ce qui termine la preuve de *i*). Pour *ii*) on a du Lemme 4.2

$$|I| \leq |\xi_{n,h} - \xi| \int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(\xi_{n,h} - zh) - F_n(\xi)| K(z) dz \\ + h \int_{-\infty}^{+\infty} |z| |F_n(\xi_{n,h} - zh) - F_n(\xi)| K(z) dz.$$

D'après le Lemme 4.2, on a pour  $\lambda_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  et  $h \sim \lambda_n$

$$|I| \leq O_p(h) \cdot (I_1 + I_2),$$

où

$$I_1 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(\xi_{n,h} - zh) - F_n(\xi)| K(z) dz, \\ I_2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |z| |F_n(\xi_{n,h} - zh) - F_n(\xi)| K(z) dz.$$

On contrôle  $I_1$  : soit  $Z_n(x) = \sqrt{n}(F_n(x) - F(x))$  et  $Z_n(x, y) = Z_n(x) - Z_n(y)$ , alors

$$I_1 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(\xi_{n,h} - zh) - F_n(\xi)| K(z) dz \\ \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} |Z_n(\xi_{n,h} - zh, \xi - zh)| K(z) dz + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} |Z_n(\xi, \xi - zh)| K(z) dz \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\xi_{n,h} - zh) - F(\xi)| K(z) dz \\ \equiv I_{11} + I_{12} + I_{13}.$$

On contrôle  $I_{11}$  et  $I_{12}$  comme le contrôle de  $A$  et  $B_2$  dans la preuve du Théorème 4.2 qui a prouvé pour  $\lambda_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  et  $c_n \gg \max\left(n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}}, \lambda_n^{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{p}\right)}\right)$ , on a

$$I_{11} = A = o_p\left(n^{-\frac{1}{2}} c_n\right).$$

Et

$$I_{12} = B_2 = o_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$



Maintenant, on contrôle  $I_{13}$ . Alors si  $H(F)$  est vérifiée et si  $f$  est uniformément bornée, alors par le développement de Taylor-Lagrange et le Lemme 4.2, on a

$$\begin{aligned}
I_{13} &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\xi_{n,h} - zh) - F(\xi)| K(z) dz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |(\xi_{n,h} - zh - \xi) f(\theta)| K(z) dz \\
&\leq |\xi_{n,h} - \xi| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\theta)| K(z) dz + h \int_{-\infty}^{+\infty} |zf(\theta)| K(z) dz \\
&= O_p(h).
\end{aligned}$$

où  $\theta$  entre  $\xi_{n,h} - zh$  et  $\xi$ . Ensuite, on a

$$I_1 \leq o_p\left(n^{-\frac{1}{2}}c_n\right) + o_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) + O_p(h).$$

De même on peut montrer

$$I_2 \leq o_p\left(n^{-\frac{1}{2}}c_n\right) + o_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) + O_p(h).$$

Alors

$$\begin{aligned}
|I| &\leq O_p(h) \cdot (I_1 + I_2) \\
&\leq O_p(h) \cdot \left(o_p\left(n^{-\frac{1}{2}}c_n\right) + o_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\lambda_n\right) + O(h)\right).
\end{aligned}$$

Enfin, on conclût pour  $n^{-\frac{1}{2}} \ll h \ll n^{-\frac{1}{4}}$  que

$$|I| \leq O_p(h^2). \square$$

## 4.4 Applications

Dans cette partie on se propose d'appliquer les résultats précédents à des suites différentes. En utilisant le Corollaire 2.1 et le résultat de M. Peligrad ([27], Théorème 2.1, p.1305), on va appliquer notre résultat pour le cas  $\varphi$ -mélange. On applique le Corollaire 2.2 et le résultat de S. Utev et M. Peligrad ([34], Théorèmes 2.2) pour le cas  $\rho$ -mélange et pour le cas  $\alpha$ -mélange, on utilise le Corollaire 2.3 et le résultat de E. Rio ([29], Théorème 7.2). On

considère aussi le modèle de fonctionnelles non-linéaires de processus Gaussiens en utilisant le Corollaire 2.4 et le résultat de P. Breuer et P. Major [8]. Enfin, on compare nos résultats dans le cas  $\alpha$ -mélange avec le résultat de S. X. Chen [11].

#### 4.4.1 processus $\varphi$ -mélange

**Corollaire 4.1** Sous les conditions  $H(X)$ ,  $H(F)$  et  $0 < \sigma_0^2(\xi) < \infty$ , si la suite est  $\varphi$ -mélangeante, on suppose pour  $p > 2$ , le coefficient  $\varphi$ -mélange satisfait

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{p}}(2^i) < \infty,$$

Alors

$$|\mu_n - \mu| = O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Si en plus  $\mathbb{E}|X_i|^2 < \infty$ , alors

$$\sqrt{n}(\mu_n - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_0^2(\xi)}{(1-q)^2}\right).$$

**Preuve du Corollaire 4.1 :** On a prouvé dans le Corollaire 2.1 sous les conditions  $H(X)$  et  $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{p}}(2^i) < \infty$  où  $p > 2$  qu'il existe une constante positive  $C = C(p, \varphi(\cdot))$  telle que pour tout  $n \geq 1$  et  $f_x \in \mathcal{F}$ , on a

$$\mathbb{E}|Z_n(f_x)|^p \leq C(p, \varphi(\cdot)) \cdot \left(\|f_x\|_2^p + n^{1-\frac{p}{2}}\|f_x\|_p^p\right).$$

On applique le Lemme 2.1 avec la condition  $H(p, X)$  où  $\varepsilon = 0, v = 2, p = r$  pour avoir sous  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ ,

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

D'après  $H(p, X)$ , on a

$$|F_n(\xi) - F(\xi)| = O_p(n^{-\frac{1}{2}}),$$

et si  $0 < \sigma_0^2(\xi) < \infty$ , alors

$$\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_{\xi}(X_i) - \mathbb{E}g_{\xi}(X_i)\right| = O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

où  $g_\xi(X_i) \equiv (X_i - \xi) \cdot \mathbb{I}_{(X_i \geq \xi)}$ . Donc, on a du Théorème 4.1

$$|\mu_n - \mu| = O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Pour le Théorème de la limite centrale, on va appliquer le Théorème 2.1 de M. Peligrad [27] avec  $Y_i \equiv g_\xi(X_i) - \mathbb{E}g_\xi(X_i)$  où  $\mathbb{E}g_\xi(X_i) = (\mu - \xi)(1 - q) \equiv c < \infty$ ,  $\sigma_{0n}^2 = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n Y_i]^2$   $W_n(t) \equiv \frac{1}{\sigma_{0n}} \sum_{i=1}^{[nt]} Y_i$ ,  $t \in [0, 1]$ . Si on a  $0 < \sigma_0^2 < \infty$ , alors  $\frac{\sigma_{0n}^2}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \sigma_0^2$ . Les conditions (A) et (B) sont des conséquences de  $0 < \sigma_0^2(\xi) < \infty$ . La condition (L) page 1305 s'écrit :

$$\begin{aligned} L &\equiv \frac{1}{\sigma_{0n}^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [Y_i^2 \mathbb{I}_{[|Y_i| > \epsilon \sigma_{0n}]}] \\ &\leq \frac{n}{\sigma_{0n}^2} \mathbb{E} [Y_i^2 \mathbb{I}_{[|Y_i| > \epsilon \sigma_{0n}]}] \\ &\leq \frac{n}{\sigma_{0n}^2} \mathbb{E} \left[ (g_\xi(X_i) - c)^2 \mathbb{I}_{[|g_\xi(X_i) - c| > \epsilon \sigma_{0n}]} \right]. \end{aligned}$$

Si en plus  $\mathbb{E}|X_i|^2 < \infty$ , alors on a

$$\mathbb{E} \left[ (g_\xi(X_i) - c)^2 \mathbb{I}_{[|g_\xi(X_i) - c| > \epsilon \sigma_{0n}]} \right] \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'où :

$$L \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

On prend  $t = 1$  pour conclure que

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [g_\xi(X_i) - \mathbb{E}g_\xi(X_i)] \right) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_0^2(\xi)).$$

Du Théorème 4.1, on a

$$\sqrt{n}(1 - q)(\mu_n - \mu) = \sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_\xi(X_i) - \mathbb{E}[g_\xi(X_i)] \right) + O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Enfin,

$$\sqrt{n}(\mu_n - \mu) \rightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_0^2(\xi)}{(1 - q)^2}\right). \square$$

### 4.4.2 Processus $\rho$ -mélange

On définit pour la suite stationnaire  $\{(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}\}$

$$\begin{aligned}\alpha_n^* &= \sup_{S, T \subset \mathbb{Z}, \text{dist}(S, T) \geq n} \alpha(\mathcal{M}_T, \mathcal{M}_S), \\ \rho_n^* &= \sup_{S, T \subset \mathbb{Z}, \text{dist}(S, T) \geq n} \rho(\mathcal{M}_T, \mathcal{M}_S),\end{aligned}$$

où  $\mathcal{M}_T = \sigma(X_i, i \in T)$ ,  $\mathcal{M}_S = \sigma(X_i, i \in S)$ . Alors on a le corollaire suivant :

**Corollaire 4.2** Supposons  $H(X)$ ,  $H(F)$  et  $0 < \sigma_0^2(\xi) < \infty$  sont vérifiées, ainsi que

$H(\rho)$  : Il existe un nombre réel  $0 \leq \eta < 1$  et un nombre entier  $N \geq 1$  tel que  $\rho_N^* \leq \eta$ .

Alors

$$|\mu_n - \mu| = O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Si en plus la suite  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  est  $\rho$ -mélangeante et  $\mathbb{E}|X_i|^2 < \infty$ , alors

$$\sqrt{n}(\mu_n - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_0^2(\xi)}{(1-q)^2}\right).$$

**Preuve du Corollaire 4.2** : On a prouvé dans le Corollaire 2.2 sous les conditions  $H(X)$  et  $H(\rho)$  que pour  $p > 2$ , il existe une constante positive  $D = D(p, N, \eta)$  telle que pour tout  $n \geq 1$  et  $f_x \in \mathcal{F}$ , on a

$$\mathbb{E}|Z_n(f_x)|^p \leq D. \left(\|f_x\|_2^p + n^{1-\frac{p}{2}} \|f_x\|_p^p\right).$$

On applique le Lemme 2.1 avec la condition  $H(p, X)$  où  $\varepsilon = 0$ ,  $v = 2$ ,  $p = r$  pour avoir sous  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ ,

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

Comme la preuve du Corollaire 4.1, d'après  $H(p, X)$  et le Théorème 4.1, on a

$$|\mu_n - \mu| = O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Pour le Théorème de la limite centrale, on va appliquer le Théorème 2.2 de S. Utev et M. Peligrad [34] page 105 avec  $\xi_{ni} \equiv g_\xi(X_i) - \mathbb{E}g_\xi(X_i)$  où  $\mathbb{E}g_\xi(X_i) =$

$(\mu - \xi)(1 - q) \equiv c < \infty$ ,  $\xi := F^{-1}(q)$ ,  $k_n = n$ ,  $\sigma_{0n}^2 = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n \xi_{ni}]^2$ ,  $W_n(t) := \frac{1}{\sigma_{0n}} \sum_{i=1}^{v_t} \xi_{ni}$  où  $v_t = [nt]$ ,  $t \in [0, 1]$  et  $\sigma_{0n} \equiv \sum_{i=1}^n \text{Cov}(g_\xi(X_1), g_\xi(X_i))$ . Si on a  $0 < \sigma_0^2 < \infty$ , alors  $\frac{\sigma_{0n}^2}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \sigma_\infty^2$ . La condition (2.5) pp. 106 est une conséquence de  $0 < \sigma_0^2(\xi) < \infty$ . La condition (2.3) est prouvée dans le Théorème 4.3 (condition (L)) si on a  $\mathbb{E}|X_i|^2 < \infty$ . On prend  $t = 1$  pour conclure que

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [g_\xi(X_i) - \mathbb{E}g_\xi(X_i)] \right) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_0^2(\xi)).$$

Du Théorème 4.1, on a

$$\sqrt{n}(1 - q)(\mu_n - \mu) = \sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_\xi(X_i) - \mathbb{E}[g_\xi(X_i)] \right) + O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Enfin, on a

$$\sqrt{n}(\mu_n - \mu) \rightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_0^2(\xi)}{(1 - q)^2}\right). \square$$

### 4.4.3 Fonctionnelles non-linéaires de processus Gaussiens

**Corollaire 4.3** Soit  $X_i = G(Z_i)$  où  $G$  est une fonction mesurable et  $(Z_i)_i$  est une suite gaussienne stationnaire de moyenne nulle et fonction de covariance :

$$\varrho(n) = E(Z_i Z_{i+n}).$$

On suppose  $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$ ,  $\sum_{i=0}^{\infty} |\varrho(i)| < \infty$ ,  $0 < \sigma_0^2(\xi) < \infty$  et  $H(F)$ , Alors, on a

$$|\mu_n - \mu| = O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Et,

$$\sqrt{n}(\mu_n - \mu) \rightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_0^2(\xi)}{(1 - q)^2}\right).$$

**Preuve du Corollaire 4.3 :** On a prouvé dans le Corollaire 2.4 sous les conditions  $H(X)$  et  $\sum_{i=0}^{\infty} |\varrho(i)| < \infty$ , que pour  $p > 2$ , il existe une constante positive  $K = K(p, \varrho)$  telle que pour tout  $n \geq 1$  et  $f_x \in \mathcal{F}$ , on a

$$\mathbb{E}|Z_n(f_x)|^p \leq K \cdot \left( \|f_x\|_2^p + n^{1-\frac{p}{2}} \|f_x\|_p^p \right).$$

On applique le Lemme 2.1 avec la condition  $H(p, X)$  où  $\varepsilon = 0, v = 2, p = r$  pour avoir sous  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ ,

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

Aussi, comme la preuve du Corollaire 4.1, d'après  $H(p, X)$  et le Théorème 4.1 on a

$$|\mu_n - \mu| = O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Pour le Théorème de la limite centrale, on applique le résultat de P. Breuer et P. Major [8] pour montrer

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [g_\xi(X_i) - \mathbb{E}g_\xi(X_i)] \right) \longrightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_0^2(\xi)).$$

Du Théorème 4.1, on a

$$\sqrt{n}(1-q)(\mu_n - \mu) = \sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_\xi(X_i) - \mathbb{E}[g_\xi(X_i)] \right) + O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Enfin, on a

$$\sqrt{n}(\mu_n - \mu) \longrightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_0^2(\xi)}{(1-q)^2}\right). \square$$

## 4.5 Simulation Monte Carlo

Dans cette section, nous présentons des études numériques qui illustrent les conditions dans lesquelles l'estimateur converge vers la valeur exacte. Dans les simulations que nous présentons, nous avons choisi deux suites corrélées d'une loi gaussienne et Pareto. Pour chaque ensemble de paramètres, nous réalisons ( $M = 10000$ ) simulations de Monte Carlo pour calculer le *Bias*  $\equiv \bar{\theta} - \theta$  où  $\bar{\theta} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\theta}(i)$  le *SD*  $\equiv \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{\theta}(i) - \bar{\theta})^2}$  et le (*RMSE* ( $n$ )) (Root Mean Square Error) entre l'estimateur et la valeur exacte de  $\xi_n, \xi_{n,h}, \mu_n$  et  $\mu_{n,h}$  où (*RMSE* ( $n$ )) est définie par :

$$RMSE(n) \equiv \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{\theta}(i) - \theta)^2}, \quad (4.39)$$

On donne aussi un intervalle de confiance à 95% pour la  $VaR(q)$ . Pour l'estimateur à noyau, on choisit la fonction à noyau gaussienne  $K(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$  et on pose  $h \approx n^{-\frac{1}{3}}$  la valeur qui minimise le  $RMSE$  selon Chen et Tang [10]. On considère trois modèles différents, le premier, une suite corrélée d'une loi gaussienne, le deuxième une suite corrélée d'une loi de Pareto et enfin un modèle à volatilité stochastique.

### 4.5.1 Étude 1 : Processus gaussiens dépendants

Soit  $(X_i)_{0 \leq i \leq n}$  une suite gaussienne corrélées telle que  $\mathbb{E}(X_i) = 0$  et  $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$ . On définit la fonction de corrélation par :

$$\varrho_n(i) := Cov(X_0, X_i) = (1 + |i|)^{-\alpha}, i = 1, \dots, n \quad (4.40)$$

où  $\alpha > 0$ . Le paramètre  $\alpha$  mesure la force de la dépendance. En particulier  $\alpha = \infty$  correspond à une suite i.i.d, alors que  $\alpha = 0$ , ( $\varrho_n(i) = 1$ ) donne une suite parfaitement corrélée.

Nous étudions le processus :

$$T_n := \sqrt{n} (\hat{\theta} - \theta). \quad (4.41)$$

Nous illustrons que pour  $n$  grand et  $\alpha > 1$ ,

$$T_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2), \quad (4.42)$$

où  $\sigma_\infty^2 = \frac{\sigma_\infty^2(\theta)}{f^2(\theta)}$ . On rappelle que dans ce cas  $VaR(0.95) = 1.6449$  et  $ES(0.95) = 2.0627$ .

Dans les Tables 4.1-4.4 et 4.9-4.12, on calcule le *Biais*, le *SD* et le *RMSE* pour  $\xi_n, \xi_{n,h}, \mu_n$  et  $\mu_{n,h}$  pour des différentes valeurs de  $n \in \{125, 250, 500, 1000, 1500\}$  et de  $\alpha \in \{0.5, 1.5, 3, \infty\}$  lorsque  $q = 0.95$ . Clairement les estimateurs  $\xi_n, \xi_{n,h}, \mu_n$  et  $\mu_{n,h}$  de la  $VaR$  et l' $ES$  donnent des résultats très satisfaisants dans le cas  $\alpha > 1$  et  $n$  grand. On voit aussi que le  $RMSE$  s'approche du  $SD$  pour tous les estimateurs lorsque  $n$  grand et  $\alpha > 1$ . Nous observons que le *Biais*, le *SD* et le *RMSE* diminuent quand  $n$  augmente ce qui indique nos résultats de la consistance.

Dans les Figures 4.1 et 4.9, on trace le  $(RMSE(n))$  de  $\xi_n, \xi_{n,h}, \mu_n$  et  $\mu_{n,h}$  avec un intervalle de confiance 95% en fonction de  $n$  pour des différentes valeurs de  $\alpha$  lorsque  $q = 0.95$ . Clairement le  $RMSE(n)$  tend vers zéro lorsque

$n$  augmente et  $\alpha > 0$ . Les simulations suggèrent que les estimateurs sont consistants quand le paramètre de corrélation  $\alpha > 0$ . Dans les Figures 4.2 et 4.10 on représente  $RMSE(n)$  en fonction de  $\alpha$  pour des différentes valeurs de  $n$  lorsque  $q = 0.95$ , tend vers zéro lorsque  $\alpha$  augmente. Dans les Figures 4.3 et 4.11 quand  $\alpha > 1$ , on trace  $\sqrt{n} RMSE$  de l'estimateurs en fonction de  $n$  pour voir qu'il converge vers une constante. Dans les Figures 4.4 et 4.12 on compare l'histogramme de  $T_n$  (4.41) pour les estimateurs lorsque  $\alpha = 3$  et  $n = 1000$  avec la fonction de densité de loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2)$ . L'histogramme de  $T_n$  s'approche de la distribution normale, confirmant notre résultat (4.42).

### 4.5.2 Étude 2 : Processus de Pareto dépendants

Nous supposons les estimateurs empirique et à noyau de la  $VaR$  et l' $ES$  pour une suite corrélée  $(X_i)_{0 \leq i \leq n}$  d'une loi de Pareto où la fonction de répartition de Pareto est défini pour  $\beta > 0$  par :

$$G(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\beta & x > x_0 \\ 0 & x \leq x_0 \end{cases} .$$

Pour simuler une suite corrélée de lois marginale de Pareto, nous supposons  $X_i = G^{-1}(\Phi(Y_i))$  où  $\Phi$  est la fonction de répartition de loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $(Y_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une suite de loi gaussienne corrélée ayant pour la fonction de corrélation  $\varrho_n$  (4.40). comme la première étude, on étudie le processus  $T_n$  (4.41) pour prouver le théorème de la limit centrale (4.42). Ici, lorsque  $\beta = 4$ , on a  $VaR(0.95) = 2.1147$  et  $ES(0.95) = 2.8197$ .

Dans les Tables 4.5-4.8 et les Tables 4.13-4.16, on calcule le  $Biais$ , le  $SD$  et le  $RMSE$  pour  $\xi_n$ ,  $\xi_{n,h}$ ,  $\mu_n$  et  $\mu_{n,h}$  pour des différentes valeurs de  $n$  et de  $\alpha$  quand  $q = 0.95$ . Clairement les estimateurs  $\xi_n$ ,  $\xi_{n,h}$ ,  $\mu_n$  et  $\mu_{n,h}$  de la  $VaR$  et l' $ES$  donnent des résultats très satisfaisants dans le cas  $\alpha > 1$  et  $n$  grand. On voit aussi que le  $RMSE$  s'approche du  $SD$  pour tous l'estimateurs lorsque  $n$  croît  $\alpha > 1$ . Nous observons que le  $Biais$ , le  $SD$  et le  $RMSE$  diminuent lorsque  $n$  augmente ce qui indique nos résultats de la consistance.

Dans les Figures 4.5 et 4.13 on trace le  $RMSE(n)$  de  $\xi_n$ ,  $\xi_{n,h}$ ,  $\mu_n$  et  $\mu_{n,h}$  avec un intervalle de confiance à 95% en fonction de  $n$  pour des différentes valeurs de  $\alpha$  lorsque  $q = 0.95$ . Les simulations suggèrent que les estimateurs sont consistants quand le paramètre de corrélation  $\alpha > 0$ . Dans les Figures 4.6 et 4.14 on représente  $RMSE(n)$  en fonction de  $\alpha$  pour des différentes



N	Kernel			Empirical		
	Bias	SD	RMSE	Bias	SD	RMSE
125	-0.0927	0.5034	0.5118	-0.2015	0.5065	0.5451
250	-0.0751	0.4312	0.4377	-0.1304	0.4372	0.4562
500	-0.0532	0.3650	0.3689	-0.0797	0.3658	0.3743
1000	-0.0417	0.3018	0.3046	-0.0628	0.3030	0.3094
1500	-0.0326	0.2726	0.2745	-0.0544	0.2730	0.2784

TABLE 4.1 – L'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  (95%) pour une suite d'une loi gaussienne corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n(i) = (1 + |i|)^{-\alpha}$  où  $\alpha = 0.5$  et la  $VaR$  exacte dans ce cas  $VaR = 1.6449$ .

valeurs de  $n$  lorsque  $q = 0.95$ , tend vers zéro pour des grandes valeurs de  $n$ . Dans les Figures 4.7 et 4.15 lorsque  $\alpha > 1$ , on trace  $\sqrt{n} RMSE(n)$  en fonction de  $n$  pour voir qu'il converge vers une constante. Dans les Figures 4.8 et 4.16 on compare l'histogramme de  $T_n$  (4.41) pour les estimateurs lorsque  $\alpha = 3$  et  $n = 1000$  avec la fonction de densité de la loi de Pareto. Ici aussi, pour  $\alpha > 1$  le TLC est satisfait.

### 4.5.3 Étude 3 : Modèle à volatilité stochastique

Nous supposons les estimateurs empirique et à noyau de la  $VaR$  et l' $ES$  pour une suite corrélée  $(X_i)_{0 \leq i \leq n}$  à volatilité stochastique :

$$X_i = \sigma_i \cdot \varepsilon_i$$

où  $(\varepsilon_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une suite gaussienne de variables aléatoires iid  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une suite corrélée d'une loi gaussienne ou d'une loi de Pareto  $G$ . Comme la première étude, nous étudions le processus  $T_n$  (4.41) pour les estimateurs pour prouver (4.42).

Dans les Figures 4.17 et 4.19, nous comparons l'histogramme de  $T_n$  (4.41) pour les estimateurs lorsque  $\alpha = 3$  et  $n = 1000$ , avec la fonction de densité de loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, \sigma(T_n))$  en utilisant une suite d'une loi gaussienne où  $VaR(0.95) \approx 1.595$  et  $ES(0.95) \approx 2.452$ . Dans les Figures 4.18 et 4.20, nous comparons l'histogramme de  $T_n$  (4.41) pour les estimateurs lorsque  $\alpha = 3$  et  $n = 1000$ , avec la fonction de densité de loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, \sigma(T_n))$  en utilisant une suite d'une loi de Pareto ( $\beta = 4$ ) où  $VaR(0.95) \approx 2.201$  et  $ES(0.95) \approx 3.062$ . Ici aussi, pour  $\alpha > 1$  le TLC est satisfait.

N	Kernel			Empirical		
	Bias	SD	RMSE	Bias	SD	RMSE
125	0.0500	0.2222	0.2278	-0.0424	0.2419	0.2456
250	0.0437	0.1639	0.1697	-0.0068	0.1790	0.1791
500	0.0298	0.1167	0.1204	0.0026	0.1259	0.1260
1000	0.0230	0.0849	0.0879	0.0021	0.0908	0.0908
1500	0.0189	0.0695	0.0720	0.0011	0.0733	0.0733

TABLE 4.2 – L'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  (95%) pour une suite d'une loi gaussienne corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  où  $\alpha = 1.5$ .

N	Kernel			Empirical		
	Bias	SD	RMSE	Bias	SD	RMSE
125	0.0644	0.1712	0.1829	-0.0231	0.1977	0.1990
250	0.0498	0.1237	0.1333	-0.0017	0.1408	0.1408
500	0.0350	0.0878	0.0945	0.0084	0.0989	0.0992
1000	0.0241	0.0642	0.0686	0.0027	0.0704	0.0704
1500	0.0207	0.0528	0.0568	0.0028	0.0575	0.0576

TABLE 4.3 – L'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  (95%) pour une suite d'une loi gaussienne corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  où  $\alpha = 3$ .

N	Kernel			Empirical		
	Bias	SD	RMSE	Bias	SD	RMSE
125	0.0660	0.1609	0.1739	-0.0257	0.1831	0.1849
250	0.0483	0.1139	0.1237	-0.0045	0.1325	0.1325
500	0.0360	0.0841	0.0915	0.0089	0.0965	0.0969
1000	0.0247	0.0604	0.0653	0.0040	0.0666	0.0667
1500	0.0205	0.0499	0.0540	0.0028	0.0548	0.0548

TABLE 4.4 – L'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  (95%) pour une suite indépendante d'une loi gaussienne.

N	Kernel			Empirical		
	Bias	SD	RMSE	Bias	SD	RMSE
125	0.0090	0.5448	0.5449	-0.0738	0.5738	0.5785
250	-0.0053	0.4646	0.4646	-0.0447	0.4806	0.4826
500	-0.0115	0.3910	0.3912	-0.0261	0.3994	0.4003
1000	-0.0066	0.3342	0.3342	-0.0131	0.3381	0.3383
1500	-0.0170	0.2973	0.2978	-0.0244	0.3032	0.3042

TABLE 4.5 – L'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  (95%) pour une suite d'une loi de Pareto où ( $\beta = 4$ ) corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  où  $\alpha = 0.5$  et la  $VaR$  exacte dans ce cas  $VaR = 2.1147$ .

N	Kernel			Empirical		
	Bias	SD	RMSE	Bias	SD	RMSE
125	0.0565	0.2509	0.2572	-0.0138	0.2692	0.2695
250	0.0370	0.1823	0.1860	0.0067	0.1962	0.1963
500	0.0236	0.1325	0.1346	0.0153	0.1419	0.1427
1000	0.0114	0.0939	0.0945	0.0050	0.0990	0.0991
1500	0.0093	0.0779	0.0785	0.0039	0.0807	0.0808

TABLE 4.6 – L'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  (95%) pour une suite d'une loi de Pareto où ( $\beta = 4$ ) corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  où  $\alpha = 1.5$ .

N	Kernel			Empirical		
	Bias	SD	RMSE	Bias	SD	RMSE
125	0.0623	0.1990	0.2085	-0.0084	0.2177	0.2179
250	0.0400	0.1423	0.1478	0.0104	0.1561	0.1565
500	0.0208	0.1004	0.1026	0.0125	0.1103	0.1110
1000	0.0134	0.0727	0.0739	0.0070	0.0784	0.0787
1500	0.0093	0.0594	0.0601	0.0040	0.0628	0.0630

TABLE 4.7 – L'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  (95%) pour une suite d'une loi de Pareto où ( $\beta = 4$ ) corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  où  $\alpha = 3$ .

N	Kernel			Empirical		
	Bias	SD	RMSE	Bias	SD	RMSE
125	0.0600	0.1856	0.1950	-0.0104	0.2062	0.2065
250	0.0361	0.1330	0.1378	0.0064	0.1481	0.1482
500	0.0227	0.0965	0.0991	0.0143	0.1053	0.1062
1000	0.0125	0.0687	0.0699	0.0062	0.0734	0.0737
1500	0.0095	0.0563	0.0571	0.0041	0.0597	0.0599

TABLE 4.8 – L'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  (95%) pour une suite indépendante d'une loi de Pareto où ( $\beta = 4$ ).

N	Kernel			Empirical		
	Bias	SD	RMSE	Bias	SD	RMSE
125	-0.3641	0.5412	0.6523	-0.3094	0.5293	0.6130
250	-0.2605	0.4586	0.5274	-0.2050	0.4531	0.4973
500	-0.1812	0.3849	0.4254	-0.1329	0.3824	0.4049
1000	-0.1299	0.3154	0.3411	-0.0959	0.3140	0.3283
1500	-0.1034	0.2835	0.3017	-0.0760	0.2825	0.2925

TABLE 4.9 – L'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $ES$  (95%) pour une suite d'une loi gaussienne corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  où  $\alpha = 0.5$  et la  $ES$  exacte dans ce cas  $ES = 2.0627$ .

N	Kernel			Empirical		
	Bias	SD	RMSE	Bias	SD	RMSE
125	-0.1443	0.2823	0.3170	-0.1005	0.2649	0.2834
250	-0.0876	0.2044	0.2224	-0.0419	0.1970	0.2014
500	-0.0606	0.1425	0.1548	-0.0162	0.1390	0.1400
1000	-0.0383	0.1020	0.1089	-0.0066	0.1002	0.1005
1500	-0.0313	0.0826	0.0884	-0.0051	0.0815	0.0816

TABLE 4.10 – L'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $ES$  (95%) pour une suite d'une loi gaussienne corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  où  $\alpha = 1.5$ .

N	Kernel			Empirical		
	Bias	SD	RMSE	Bias	SD	RMSE
125	-0.1251	0.2417	0.2721	-0.0837	0.2215	0.2368
250	-0.0811	0.1670	0.1856	-0.0349	0.1580	0.1619
500	-0.0532	0.1179	0.1294	-0.0086	0.1144	0.1147
1000	-0.0377	0.0832	0.0914	-0.0058	0.0813	0.0815
1500	-0.0290	0.0682	0.0741	-0.0030	0.0667	0.0668

TABLE 4.11 – L'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $ES$  (95%) pour une suite d'une loi gaussienne corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  où  $\alpha = 3$ .

N	Kernel			Empirical		
	Bias	SD	RMSE	Bias	SD	RMSE
125	-0.1204	0.2334	0.2626	-0.0794	0.2126	0.2269
250	-0.0800	0.1602	0.1791	-0.0339	0.1515	0.1552
500	-0.0525	0.1147	0.1261	-0.0085	0.1110	0.1113
1000	-0.0362	0.0793	0.0872	-0.0045	0.0772	0.0773
1500	-0.0288	0.0651	0.0712	-0.0027	0.0636	0.0637

TABLE 4.12 – L'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $ES$  (95%) pour une suite indépendante d'une loi gaussienne.

N	Kernel			Empirical		
	Bias	SD	RMSE	Bias	SD	RMSE
125	-0.3357	0.9660	1.0226	-0.3291	0.8969	0.9553
250	-0.2304	0.8233	0.8549	-0.2177	0.7956	0.8248
500	-0.1624	0.6885	0.7074	-0.1432	0.6819	0.6968
1000	-0.1023	0.5783	0.5872	-0.0911	0.5750	0.5822
1500	-0.0975	0.5251	0.5341	-0.0891	0.5230	0.5305

TABLE 4.13 – L'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $ES$  (95%) pour une suite d'une loi de Pareto où ( $\beta = 4$ ) corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  où  $\alpha = 0.5$  et la  $ES$  exacte dans ce cas  $ES = 2.8197$ .

N	Kernel			Empirical		
	Bias	SD	RMSE	Bias	SD	RMSE
125	-0.0926	0.6084	0.6154	-0.1228	0.5526	0.5661
250	-0.0509	0.4164	0.4195	-0.0519	0.4005	0.4038
500	-0.0241	0.2991	0.3001	-0.0086	0.2966	0.2967
1000	-0.0184	0.2087	0.2095	-0.0088	0.2076	0.2077
1500	-0.0130	0.1692	0.1697	-0.0057	0.1685	0.1686

TABLE 4.14 – L'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $ES$  (95%) pour une suite d'une loi de Pareto où ( $\beta = 4$ ) corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  où  $\alpha = 1.5$ .

N	Kernel			Empirical		
	Bias	SD	RMSE	Bias	SD	RMSE
125	-0.0806	0.5331	0.5391	-0.1128	0.4810	0.4940
250	-0.0407	0.3590	0.3613	-0.0423	0.3442	0.3467
500	-0.0307	0.2500	0.2518	-0.0153	0.2479	0.2483
1000	-0.0145	0.1814	0.1820	-0.0049	0.1804	0.1804
1500	-0.0132	0.1411	0.1417	-0.0059	0.1405	0.1406

TABLE 4.15 – L'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $ES$  (95%) pour une suite d'une loi de Pareto où ( $\beta = 4$ ) corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  où  $\alpha = 3$ .

N	Kernel			Empirical		
	Bias	SD	RMSE	Bias	SD	RMSE
125	-0.0789	0.4867	0.4930	-0.1115	0.4383	0.4522
250	-0.0453	0.3470	0.3499	-0.0469	0.3325	0.3357
500	-0.0233	0.2450	0.2461	-0.0079	0.2429	0.2430
1000	-0.0185	0.1691	0.1701	-0.0089	0.1681	0.1684
1500	-0.0104	0.1392	0.1396	-0.0031	0.1386	0.1386

TABLE 4.16 – L'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $ES$  (95%) pour une suite indépendante d'une loi de Pareto où ( $\beta = 4$ ).

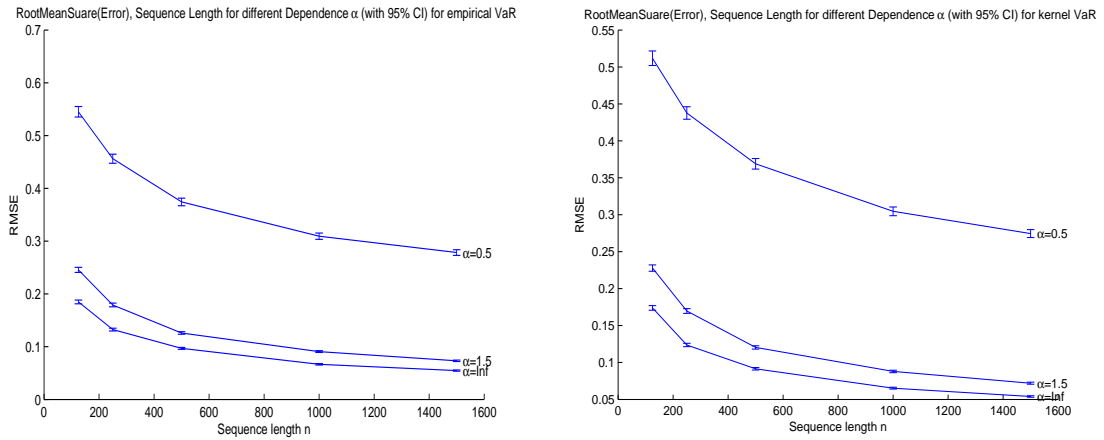


FIGURE 4.1 – Le  $(RMSE(n))$  pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  avec des intervalles de confiance à 95% pour une suite d'une loi gaussienne corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction de la longueur de la suite  $n$  pour des valeurs différentes du paramètre de dépendance  $\alpha$ .

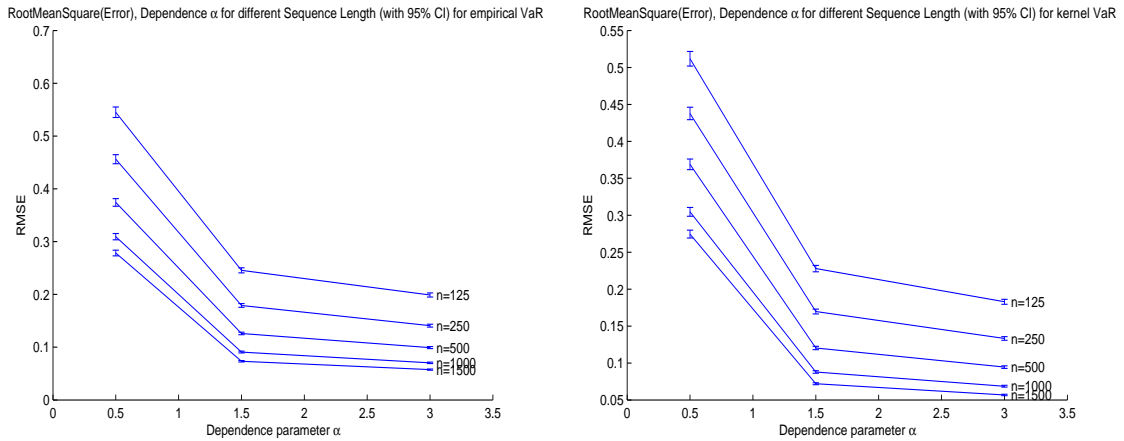


FIGURE 4.2 – Le  $(RMSE(n))$  pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  avec des intervalles de confiance à 95% pour une suite d'une loi gaussienne corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction du paramètre de dépendance  $\alpha$  pour des valeurs différentes de  $n$ .

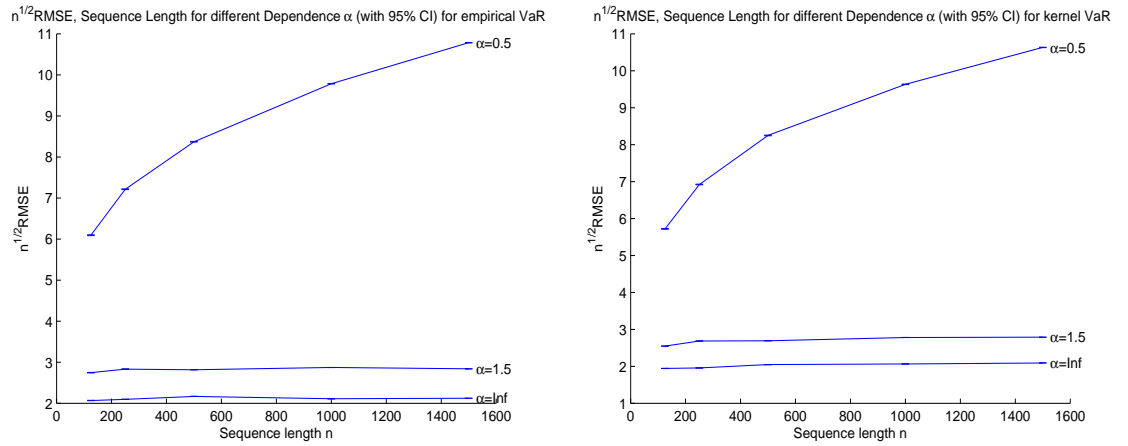


FIGURE 4.3 – La  $(\sqrt{n}RMSE(n))$  pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  avec des intervalles de confiance à 95% pour une suite d'une loi gaussienne corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction de la longueur de la suite  $n$  pour  $\alpha \in \{0.5, 1.5, \infty\}$ . La valeur  $(\sqrt{n}MAE(n))$  tend vers une constante lorsque  $\alpha > 1$  indiquant que la vitesse de convergence est de l'ordre de  $O(n^{-\frac{1}{2}})$ .

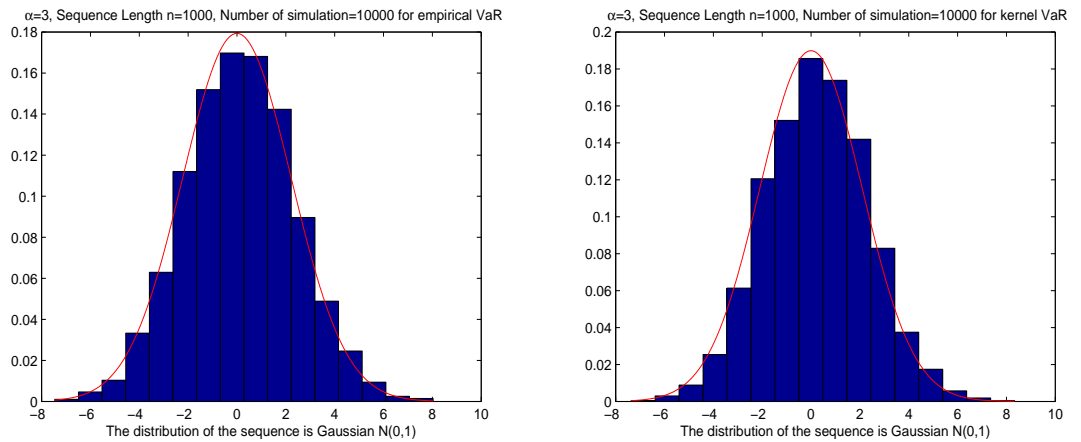


FIGURE 4.4 – Comparaison de l'histogramme de  $T_n$  (4.41) pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  pour une suite gaussienne corrélée où  $\alpha = 3$  et  $n = 1000$ , avec la fonction de densité de la distribution gaussienne  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$ .



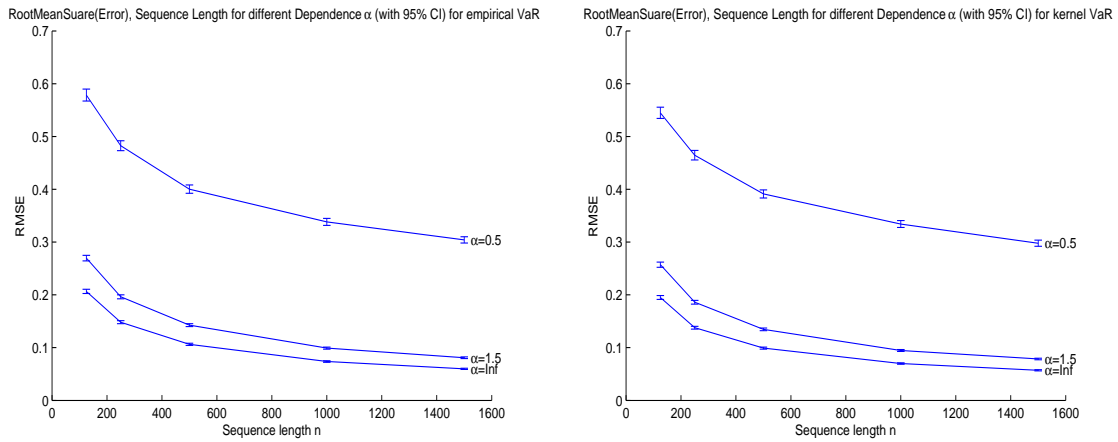


FIGURE 4.5 – Le  $(RMSE(n))$  pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  avec des intervalles de confiance à 95% pour une suite d'une loi de Pareto où  $(\beta = 4)$  corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction de la longueur de la suite  $n$  pour des valeurs différentes du paramètre de dépendance  $\alpha$ .

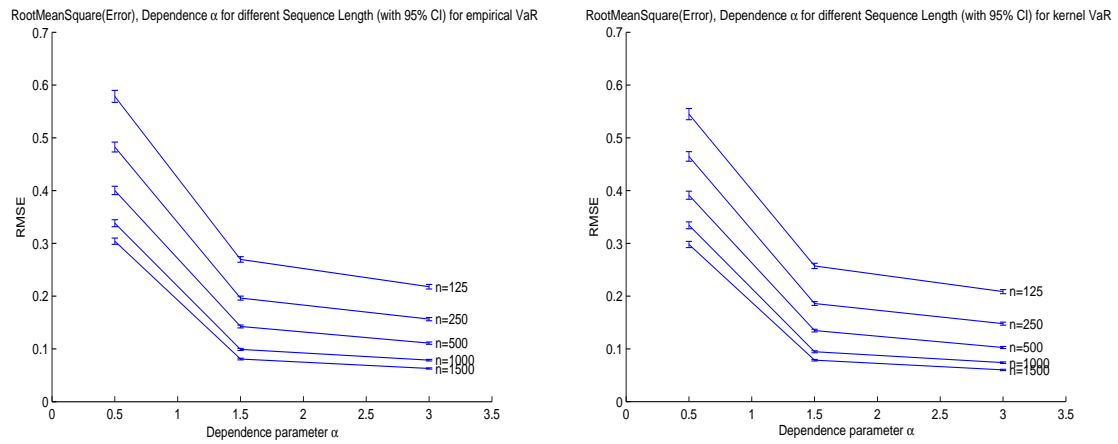


FIGURE 4.6 – Le  $(RMSE(n))$  pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  avec des intervalles de confiance à 95% pour une suite d'une loi de Pareto où  $(\beta = 4)$  corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction du paramètre de dépendance  $\alpha$  pour des valeurs différentes de  $n$ .

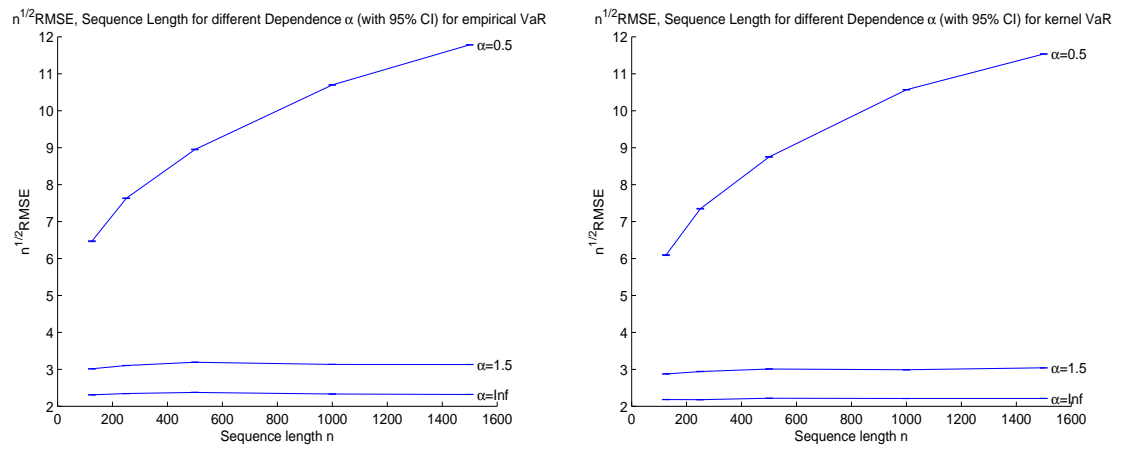


FIGURE 4.7 – La  $(\sqrt{n}RMSE(n))$  pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  avec des intervalles de confiance 95% pour une suite d'une loi de Pareto où  $(\beta = 4)$  corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction de la longueur de la suite  $n$  pour  $\alpha \in \{0.5, 1.5, \infty\}$ . La valeur  $(\sqrt{n}MAE(n))$  tend vers une constante lorsque  $\alpha > 1$  indiquant que la vitesse de convergence est de l'ordre de  $O(n^{-\frac{1}{2}})$ .

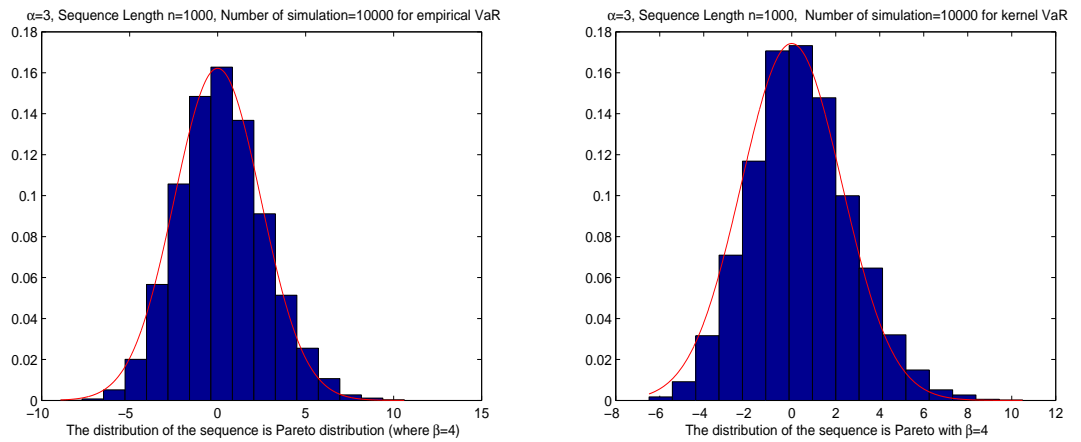


FIGURE 4.8 – Comparaison de l'histogramme de  $T_n$  (4.41) pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  pour une suite corrélée de Pareto où  $\beta = 4$ ,  $\alpha = 3$  et  $n = 1000$ , avec la fonction de densité de la distribution gaussienne  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$ .

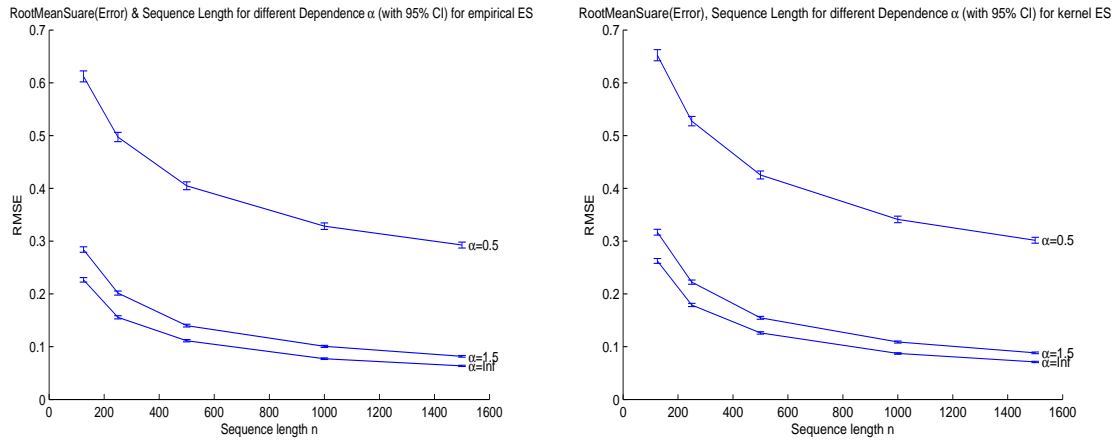


FIGURE 4.9 – Le  $(RMSE(n))$  pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $ES$  avec des intervalles de confiance à 95% pour une suite d'une loi gaussienne corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction de la longueur de la suite  $n$  pour des valeurs différentes du paramètre de dépendance  $\alpha$ .

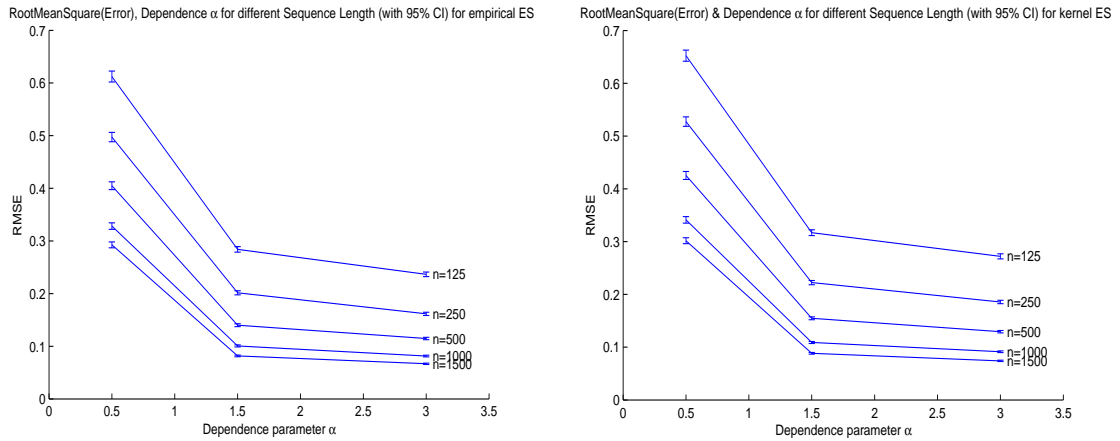


FIGURE 4.10 – Le  $(RMSE(n))$  pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $ES$  avec des intervalles de confiance à 95% pour une suite d'une loi gaussienne corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction du paramètre de dépendance  $\alpha$  pour des valeurs différentes de  $n$ .

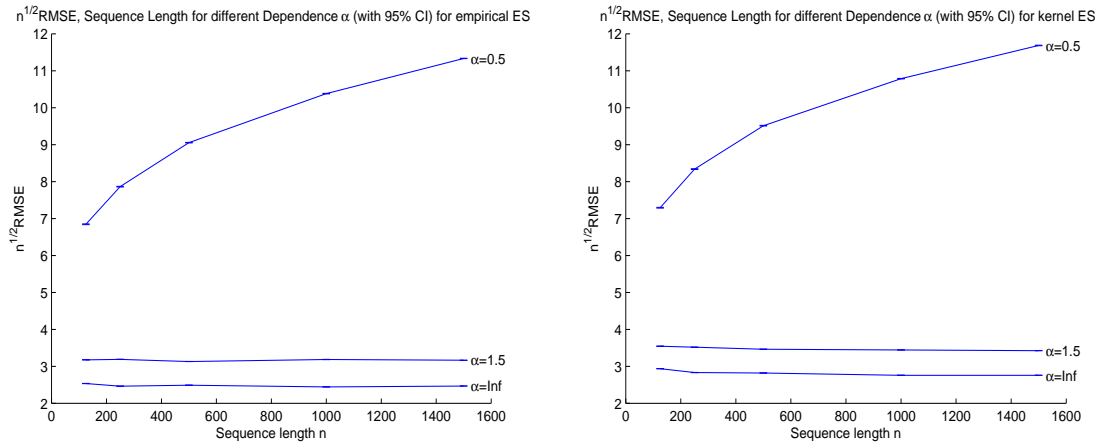


FIGURE 4.11 – La  $(\sqrt{n}RMSE(n))$  pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $ES$  avec des intervalles de confiance à 95% pour une suite d'une loi gaussienne corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction de la longueur de la suite  $n$  pour  $\alpha \in \{0.5, 1.5, \infty\}$ . La valeur  $(\sqrt{n}MAE(n))$  tend vers une constante lorsque  $\alpha > 1$  indiquant que la vitesse de convergence est de l'ordre de  $O(n^{-\frac{1}{2}})$ .

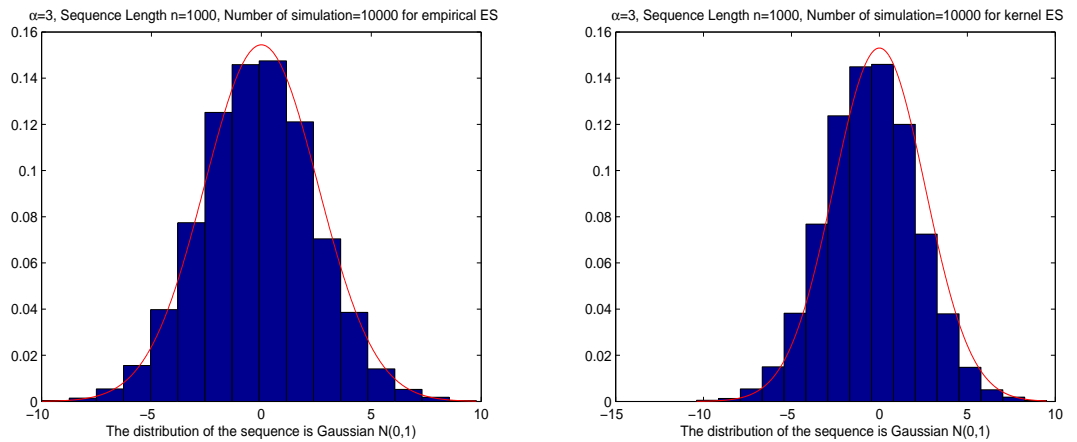


FIGURE 4.12 – Comparaison de l'histogramme de  $T_n$  (4.41) pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $ES$  pour une suite gaussienne corrélée où  $\alpha = 3$  et  $n = 1000$ , avec la fonction de densité de la distribution gaussienne  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$ .

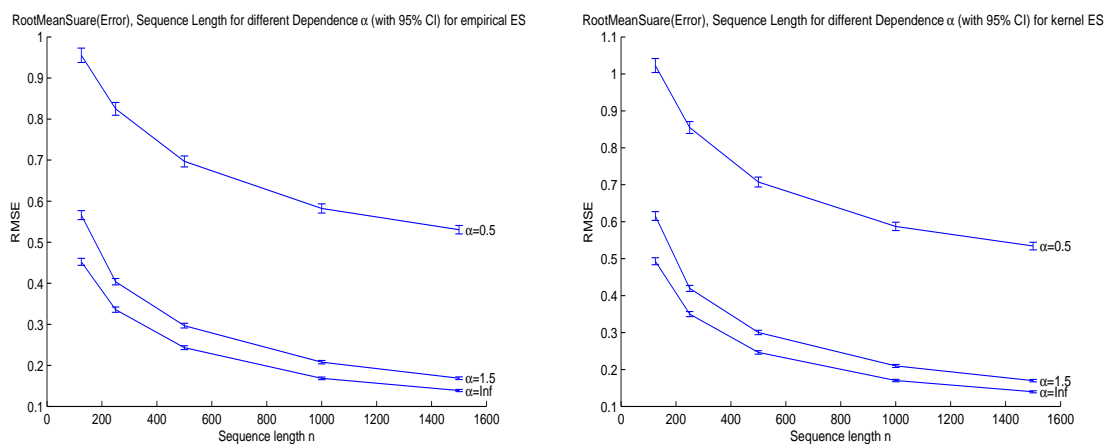


FIGURE 4.13 – Le  $(RMSE(n))$  pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $ES$  avec des intervalles de confiance à 95% pour une suite d'une loi de Pareto où  $(\beta = 4)$  corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction de la longueur de la suite  $n$  pour des valeurs différentes du paramètre de dépendance  $\alpha$ .

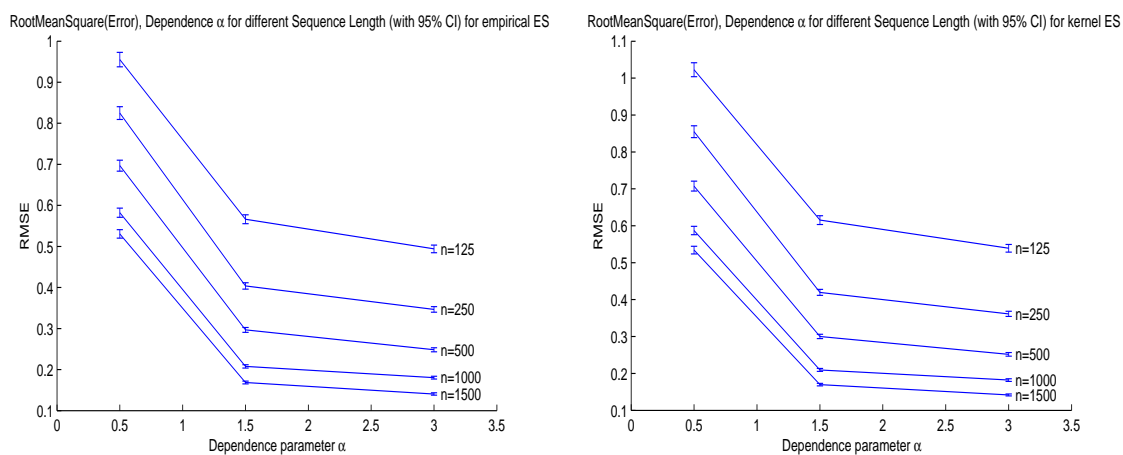


FIGURE 4.14 – Le  $(RMSE(n))$  pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $ES$  avec des intervalles de confiance 95% pour une suite d'une loi de Pareto où  $(\beta = 4)$  corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction du paramètre de dépendance  $\alpha$  pour des valeurs différentes de  $n$ .

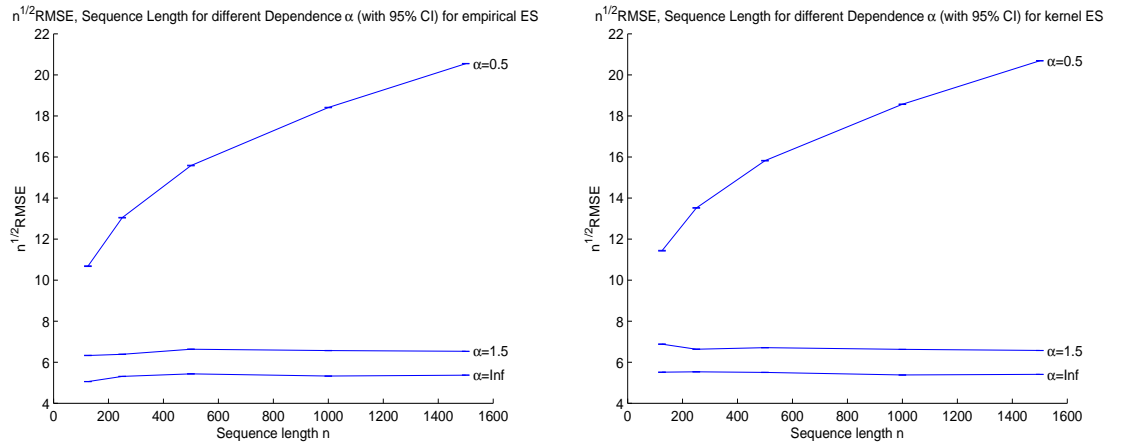


FIGURE 4.15 – La  $(\sqrt{n}RMSE(n))$  pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $ES$  avec des intervalles de confiance à 95% pour une suite d'une loi de Pareto où  $(\beta = 4)$  corrélée ayant pour fonction de corrélation  $\varrho_n$  est tracée en fonction de la longueur de la suite  $n$  pour  $\alpha \in \{0.5, 1.5, \infty\}$ . La valeur  $(\sqrt{n}MAE(n))$  tend vers une constante lorsque  $\alpha > 1$  indiquant que la vitesse de convergence est de l'ordre de  $O(n^{-\frac{1}{2}})$ .

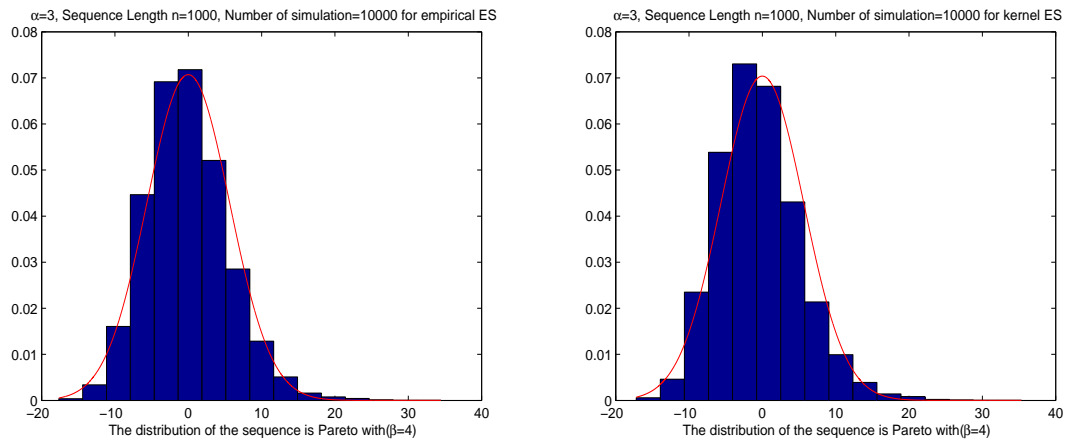


FIGURE 4.16 – Comparaison de l'histogramme de  $T_n$  (4.41) pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $ES$  pour une suite corrélée de Pareto où  $\beta = 4$ ,  $\alpha = 3$  et  $n = 1000$ , avec la fonction de densité de la distribution gaussienne  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$ .

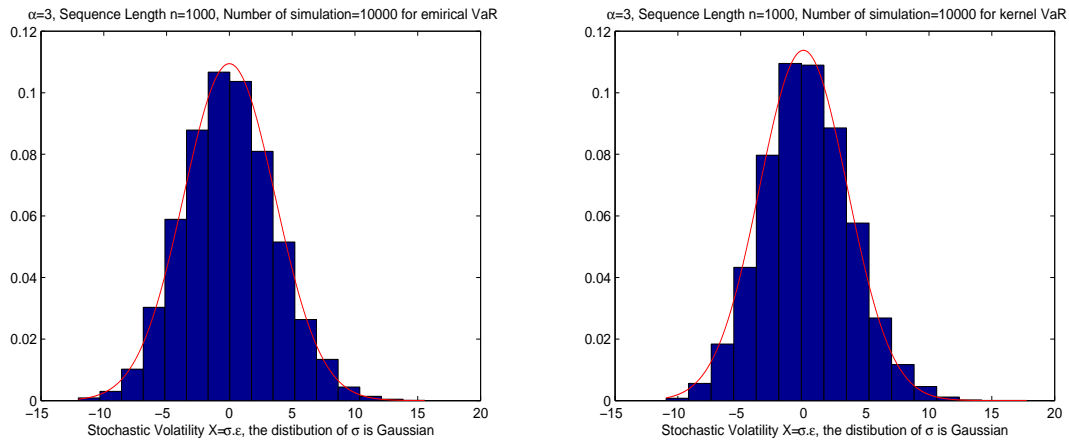


FIGURE 4.17 – Comparaison de l'histogramme de  $T_n$  (4.41) pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  pour le modèle à volatilité stochastique où  $\{\sigma_i\}_{i \geq 1}$  une suite gaussienne corrélée,  $\alpha = 3$  et  $n = 1000$ , avec la fonction de densité de la distribution gaussienne  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$ .

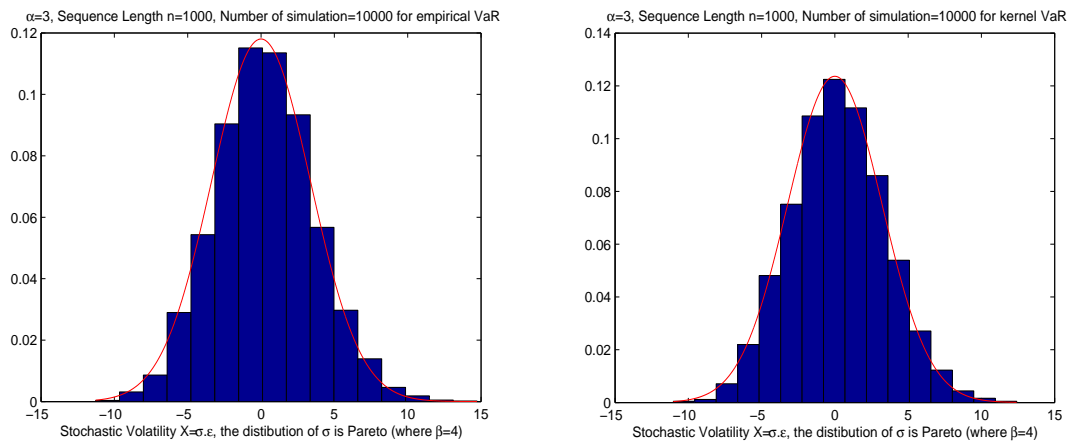


FIGURE 4.18 – Comparaison de l'histogramme de  $T_n$  (4.41) pour l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau de la  $VaR$  pour le modèle à volatilité stochastique où  $\{\sigma_i\}_{i \geq 1}$  une suite corrélée d'une loi de Pareto ( $\beta = 4$ ),  $\alpha = 3$  et  $n = 1000$ , avec la fonction de densité de la distribution gaussienne  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$ .

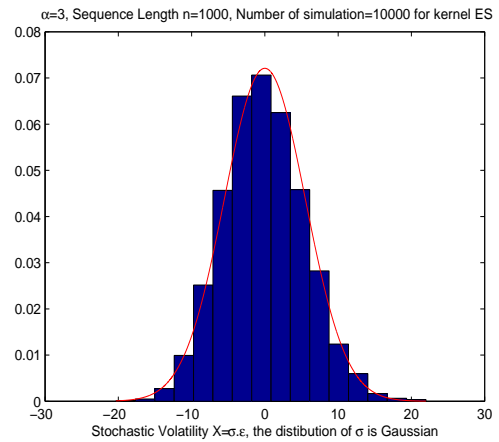
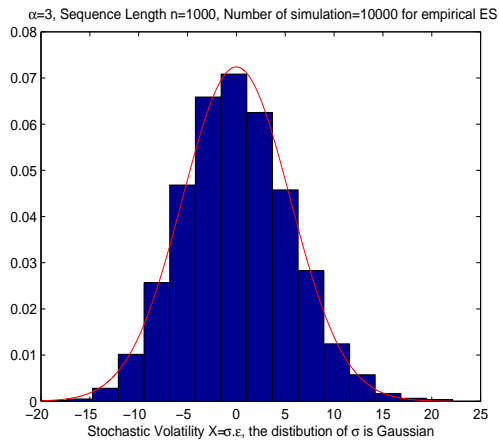


FIGURE 4.19 – Comparaison de l’histogramme de  $T_n$  (4.41) pour l’estimateur empirique et l’estimateur à noyau de la  $ES$  pour le modèle à volatilité stochastique où  $\{\sigma_i\}_{i \geq 1}$  une suite gaussienne corrélée,  $\alpha = 3$  et  $n = 1000$ , avec la fonction de densité de la distribution gaussienne  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$ .

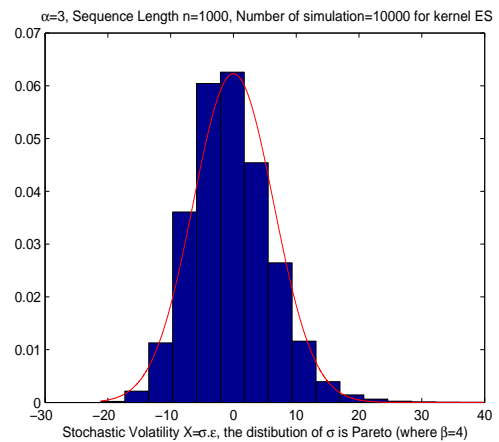
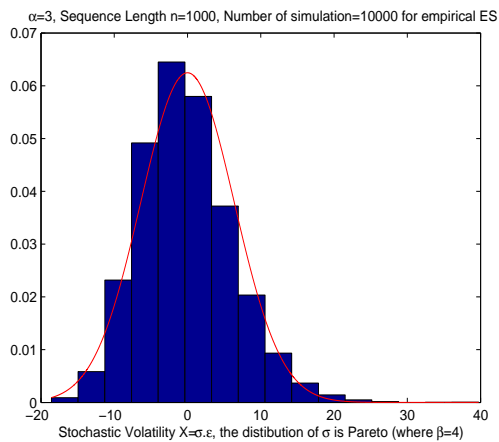


FIGURE 4.20 – Comparaison de l’histogramme de  $T_n$  (4.41) pour l’estimateur empirique et l’estimateur à noyau de la  $ES$  pour le modèle à volatilité stochastique où  $\{\sigma_i\}_{i \geq 1}$  une suite corrélée d’une loi de Pareto ( $\beta = 4$ ),  $\alpha = 3$  et  $n = 1000$ , avec la fonction de densité de la distribution gaussienne  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$ .





# Conférences avec une communication orale

1. 44<sup>ième</sup> **Journées de Statistique** à Bruxelles en Belgique du 21 au 25 Mai 2012. Université libre de Bruxelles, Campus du solbosch. (**Nonparametric estimation of the Value at Risk for dependent random variables**).
2. 4<sup>ième</sup> **Rencontres des Jeunes Statisticiens**, doctorants et jeunes docteurs, du 5 au 9 septembre 2011 à Aussois en France. (**Empirical Value at Risk for dependent random variables**).



# Pré-publications

1. Empirical Value at Risk for weak dependent random variables, (Avec S. Ben Hariz) a accepté.
2. Bahadur representation for weak dependent random variables, (Avec S. Ben Hariz) en préparation.
3. Nonparametric estimation of the Expected Shortfall for weak dependent random variables, (Avec S. Ben Hariz) en préparation.



# Annexe A

## Empirical Value at Risk for weak dependent random variables

Joint paper with Samir Ben Hariz.

### abstract

In this work, we study the empirical estimator of the Value at Risk (VaR for short) for weak dependent observations. Our approach uses the oscillation of the empirical process under hypothesis of moment's inequality. We provide general conditions which ensure the convergence of empirical estimator and a CLT for the difference. Finally, we apply the results for different sequences under assumptions of mixing or covariance.

**Key words :** Value at Risk (*VaR*); Modulus of continuity ; Empirical process ; Quantile function ; Moment's inequality ; Weak dependent random variables.

### A.1 Introduction

The Value at Risk *VaR* is a method to evaluate financial risks. It summarizes the risks of loss in a unique number and aggregating the risks of market through several classes of financial assets (stocks, bonds, etc.).

The *VaR* is a probabilistic measure of the possible loss for a given horizon. It represents a level of loss, for a financial position or a portfolio, which will be exceeded during a given period only with a chosen typically small probability.

The  $VaR$  is obviously neither the loss which one can expect nor the maximum loss which one may suffer, but a level of loss which will be exceeded only with a level of a fixed probability  $q$ .

**Définition A.1 (P&L and loss function)** : Let  $P_t$  be the value of a portfolio of assets at time  $t$ . Then the variation of the value of this portfolio over the interval  $[t_i, t_{i+T}]$ , is called the profit-and-loss (P&L) function :

$$\Delta P_{t_i} \equiv P_{t_{i+T}} - P_{t_i},$$

and the function

$$X_i := -\Delta P_{t_i}$$

is called the loss function.

In practice, we decide to fix  $T$  (e.g. one day or one week), yet  $\Delta P_{t_i} \equiv P_{t_{i+1}} - P_{t_i}$ .

**Définition A.2 (Value at Risk)** : The Value at Risk  $VaR(q)$  of a portfolio of assets for a period  $[t_i, t_{i+1}]$  at the confidence level  $q \in (0, 1)$  is given by the smallest number  $x$  such that the probability that the loss  $X_i$  exceeds  $x$  is no larger than  $(1 - q)$ . Formally

$$VaR(q) \equiv \inf \{x : \mathbb{P}(X_i > x) \leq 1 - q\}$$

or

$$VaR(q) \equiv F^{-1}(q) = \inf \{x : F(x) \geq q\} := \xi. \quad (\text{A.1})$$

where  $F(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  is the distribution function of  $X_i$  and  $F^{-1}$  its quantile function.

Definition (A.1) clearly shows that the knowledge of the distribution function (in short  $df$ ) of the r.v  $X$  can determine the  $VaR(q)$ . Often the function  $F$  is assumed to be normal. However a lot of financial practitioners use historical distributions which are far from being normally distributed (see e.g. R. Cont [12]). Moreover, in general, the historical data have an intertemporally dependent structures. Indeed the assumption that the variables  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  (denote the variations  $(-\Delta P_{t_i})_{1 \leq i \leq n}$  in the value of a portfolio over the  $n$  periods) are i.i.d, is not easily satisfied in practice. Hence the feeling of the need of taking into account a possible dependence structure or an effect of memory in the observations. In order to model and measure this memory aspect in the data, we consider two cases : correlations or mixing coefficients.

So the main objective of this paper is to provide ways which allow to tackle the issue of estimation of the  $VaR$  in the cases where there is either a lack of parameterizations of  $F$  or some weak dependency among the data. To do so, we use the empirical distribution function  $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(X_i \leq x)}$ , where  $x \in \mathbb{R}$  and  $\mathbb{I}$  is the indicator function, for a stationary sequence of dependent real-valued random variables  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  to estimate the  $VaR$ .

The empirical estimator of the  $VaR$  ( $\widehat{VaR}$ ) (see e.g. K. Dowd [15]) is defined by :

$$\widehat{VaR}(q) \equiv F_n^{-1}(q) \equiv \inf \{x : F_n(x) \geq q\}.$$

We note that if we order the independent random variables  $X_{n,1} \leq X_{n,2} \leq \dots \leq X_{n,n}$  then  $\widehat{VaR}_e(q)$  can be written as

$$\widehat{VaR}(q) = X_{n,s}, \quad s = [nq] + 1.$$

where  $[a]$  is the integer part of  $a$ .

Next let us recall the definitions of some mixing coefficients which are criteria needed to introduce dependency measures between variables.

Let  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  be a probability space and let  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  be two sub  $\sigma$ -algebras of  $\mathcal{K}$ . We define :

1. The  $\alpha$ -mixing coefficient by :

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|.$$

2. The  $\rho$ -mixing coefficient by :

$$\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{f \in L_2(\mathcal{A}), g \in L_2(\mathcal{B})} |corr(f, g)|,$$

$$\text{where } corr(f, g) = \frac{Cov(f, g)}{\sqrt{Var(f)}\sqrt{Var(g)}}.$$

3. The  $\varphi$ -mixing coefficient by :

$$\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} \left| \frac{P(A \cap B)}{P(A)} - P(B) \right|.$$

Finally, we say that a stationary sequence  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  is strong mixing or  $\alpha$ -mixing, if

$$\alpha_n = \alpha(\sigma(X_i, i \leq 0), \sigma(X_i, i \geq n)) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$



The paper is organized as follows. The section A.2 is related to the notion of oscillation of an empirical process which is defined for each  $f_x \in \mathcal{F}$  by :

$$Z_n(f_x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [f_x(X_i) - \mathbb{E}(f_x(X_i))] = \sqrt{n} [F_n(x) - F(x)]$$

where  $\mathcal{F}$  is the set of characteristic functions of intervals of the form  $(-\infty, x)$  for any  $x \in \mathbb{R}$ . We study the mean of the modulus of continuity of the empirical process defined by

$$W(n, \delta) := \mathbb{E} \left( \sup_{\|f_x - f_y\|_v \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \right) \quad (\text{A.2})$$

where  $\|f_x\|_v = (\mathbb{E} |f_x|^v)^{\frac{1}{v}}$ . Our method is inspired by the work by S. Ben Hariz [4] who studied the stochastic equicontinuity of empirical processes indexed by a family of functions.

In the section A.3, which is the main part of this work, we prove the consistency as well as a central limit theorem for the  $\widehat{VaR}$ , i.e.

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \longrightarrow^d \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)} \right)$$

where

$$\sigma_\infty^2(\xi) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(\mathbb{I}_{(X_1 \leq \xi)}, \mathbb{I}_{(X_{i+1} \leq \xi)}) = \text{Var}(\mathbb{I}_{(X_1 \leq \xi)}) + 2 \sum_{i=1}^{+\infty} \text{Cov}(\mathbb{I}_{(X_1 \leq \xi)}, \mathbb{I}_{(X_{i+1} \leq \xi)})$$

is assumed to satisfy  $0 < \sigma_\infty^2(\xi) < \infty$ .

In the section A.4, several applications are discussed. Finally, the section A.5 is devoted to simulations which illustrate the results.

## A.2 Oscillation of empirical process

First let us introduce the following assumptions :

$H(X) : (X_i)_{1 \leq i \leq n}$  is a stationary sequence of real-valued random variables with a common distribution function  $F$ .

$H(p, X)$  : For all positive real numbers  $2 \leq v < p < r \leq \infty$  and for any  $\varepsilon > 0$ , there exists a positive constant  $D = D(\varepsilon, p, v, r) < \infty$  such that for any  $f \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E} |Z_n(f)|^p \leq D \left( \|f\|_v^p + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} \|f\|_r^p \right).$$

$H(F)$  :  $F$  is continuous in  $\mathcal{I} = [\xi - a_n, \xi + a_n]$  where  $0 < a_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ , and  $F$  has a density function  $f$  which is continuous and  $0 < f(\xi) < \infty$ .

For  $0 < b_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$  we denote,

$$a_n \ll b_n \Leftrightarrow \left\{ a_n < b_n \text{ and } \frac{a_n}{b_n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \right\} . \square$$

In the proofs  $C$  denote constant where values may change from one line to another. We will now focus on the modulus of continuity of an empirical process  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

**Theorem 1** Under conditions  $H(X)$  and  $H(p, X)$ , there exists  $C = C(\varepsilon, p, v, r) < \infty$  such that for  $\delta > n^{\frac{\frac{1+\varepsilon}{p}-1}{v(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}}$ ,

$$W(n, \delta) \leq C. \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}} + \delta^{(1-\frac{v}{p})} \right).$$

If in addition  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left( 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \right) - 1$  and  $\delta = \delta_n \rightarrow 0$ , then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(n, \delta_n) = 0.$$

**Remarque A.1** :

– When  $r = p$  the result becomes for  $\delta > n^{\frac{1+\varepsilon-p}{vp}}$ ,

$$W(n, \delta) \leq C. \left( \ln n . n^{-\frac{1}{2} + \frac{1+\varepsilon}{p}} + \delta^{(1-\frac{v}{p})} \right). \quad (\text{A.3})$$

– If  $F$  is  $L$ -Lipschitz, then for  $\delta_0 > \frac{1}{C(v,L)} n^{\frac{\frac{1+\varepsilon}{p}-1}{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}}$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{|x-y| \leq \delta_0} |Z_n(f_x - f_y)| \right] \leq C. \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}} + C(v, p, L) . \delta_0^{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{p}\right)} \right).$$

**Proof of Theorem 1**

Let  $N(k) = N_{[\cdot]}(2^{-k}, \|\cdot\|_v, \mathcal{F})$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (the bracketing number) be the minimal number of brackets which are of a norm  $\|\cdot\|_v$  less than or equal  $2^{-k}$  needed to cover  $\mathcal{F}$ . As  $N(k) \leq 2 \cdot 2^{vk}$  is finite (see e.g. [36], ex 2.5.4 in p. 129), there exists a finite sequence

$$\{f_{x_k(i)}, \Delta_{x_k(i)} = \mathbb{I}_{(x_k(i) \leq \cdot \leq x_k(i+1))}\}_{1 \leq i \leq 2^{vk}}$$

such that :

1.  $\|\Delta_{x_k(i)}\|_v \leq 2^{-k}$ ,
2.  $\forall f_x \in \mathcal{F}, \exists i : |f_x - f_{x_k(i)}| \leq \Delta_{x_k(i)}$ .

We set  $(\pi_k(f), \Delta_k(f))$  the first pair  $(f_{x_k(i)}, \Delta_{x_k(i)})$  which satisfies

$|f_x - f_{x_k(i)}| \leq \Delta_{x_k(i)}$ . Let  $q_0, k$  and  $q_1 \in \mathbb{N}$  such that  $q_0 \leq k \leq q_1$ , we define for  $1 \leq i \leq 2^{vq_0}$ ,

$$E_i = \{f \in \mathcal{F} : \pi_{q_0}(f) = f_{x_{q_0}(i)}\},$$

then the sets  $E_i$  form a partition of  $\mathcal{F}$ . For  $\delta \sim 2^{-q_0} \Leftrightarrow q_0 \sim -\frac{\ln \delta}{\ln 2}$ , we define :

$$F_{i,j} = \{(f_x, f_y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : f_x \in E_i, f_y \in E_j, \|f_x - f_y\|_v \leq \delta\}.$$

Let now  $\Lambda = \{(i, j) : F_{i,j} \neq \emptyset\}$ . For every pair  $(i, j) \in \Lambda$ , we fix an element of  $F_{i,j}$  and denote this pair  $(\phi_{i,j}, \psi_{i,j})$ . Let  $(f_x, f_y)$  be a pair satisfying  $\|f_x - f_y\|_v \leq \delta$ , then  $(f_x, f_y) \in F_{i,j}$  for some  $(i, j) \in \Lambda$ . We write

$$f_x - f_y = f_x - \pi_{q_0}(f_x) + \pi_{q_0}(f_x) - \phi_{i,j} + \phi_{i,j} - \psi_{i,j} + \psi_{i,j} - \pi_{q_0}(f_y) + \pi_{q_0}(f_y) - f_y$$

but  $\pi_{q_0}(f_x) = \pi_{q_0}(\phi_{i,j})$  and  $\pi_{q_0}(f_y) = \pi_{q_0}(\psi_{i,j})$  since  $f_x, \phi_{i,j} \in E_i$ ,  $f_y, \psi_{i,j} \in E_j$ . Consequently :

$$\sup_{\|f_x - f_y\|_v \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \leq 4 \sup_{f_x \in \mathcal{F}} |Z_n(f_x - \pi_{q_0}(f_x))| + \sup_{(i,j) \in \Lambda} |Z_n(\phi_{i,j} - \psi_{i,j})|$$

That gives by applying the expectation :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sup_{\|f_x - f_y\|_v \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \right) &\leq 4\mathbb{E} \left( \sup_{f_x \in \mathcal{F}} |Z_n(f_x - \pi_{q_0}(f_x))| \right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left( \sup_{(i,j) \in \Lambda} |Z_n(\phi_{i,j} - \psi_{i,j})| \right) \\ &\equiv 4E_1 + E_2. \end{aligned}$$

In order to control the terms  $E_1$  and  $E_2$ , we put  $\|Z_n(f)\|_{\mathcal{F}} = \sup_{f \in \mathcal{F}} |Z_n(f)|$ , and we use the following inequality due to Pisier : For all random variables  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$

$$\mathbb{E} \left[ \max_{1 \leq i \leq N} |Z_i| \right] \leq N^{\frac{1}{p}} \max_{1 \leq i \leq N} (\mathbb{E} |Z_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

**Control of  $E_1$  :** For  $f \in \mathcal{F}$ , we write :

$$f - \pi_{q_0}(f) = f - \pi_{q_1}(f) + \sum_{k=q_0+1}^{q_1} [\pi_k(f) - \pi_{k-1}(f)].$$

Therefore,

$$\begin{aligned} E_1 &\equiv \mathbb{E} \|Z_n(f - \pi_{q_0}(f))\|_{\mathcal{F}} \\ &\leq \mathbb{E} \|Z_n(f - \pi_{q_1}(f))\|_{\mathcal{F}} + \sum_{k=q_0+1}^{q_1} \mathbb{E} \|Z_n(\pi_k(f) - \pi_{k-1}(f))\|_{\mathcal{F}} \\ &\leq E_{1,q_1+1} + 2\sqrt{n} \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbb{E} |\Delta_{q_1}(f)| + \sum_{k=q_0+1}^{q_1} E_{1,k} \end{aligned}$$

where  $E_{1,k} = \mathbb{E} \|Z_n(\pi_k(f) - \pi_{k-1}(f))\|_{\mathcal{F}}$ ,  $q_0 + 1 \leq k \leq q_1$  and  $E_{1,q_1+1} = \mathbb{E} \|Z_n(\Delta_{q_1}(f))\|_{\mathcal{F}}$ . Note that  $\pi_k(f) - \pi_{k-1}(f) = \pi_k(f) - \pi_{k-1}(\pi_k(f))$  and  $\pi_k(f)$  take values on a finite set  $N(k) \leq 2 \cdot 2^{vk}$ . Then using Pisier's inequality, we can write :

$$E_{1,k} \leq 2^{\frac{vk}{p}} \max_{g \in \pi_k(\mathcal{F})} \|Z_n(g - \pi_{k-1}(g))\|_p.$$

Apply  $H(p, X)$  to  $h = g - \pi_{k-1}(g)$  to get :

$$\begin{aligned} \|Z_n(h)\|_p &\leq D^{\frac{1}{p}} \left( \|h\|_v^p + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} \|h\|_r^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq D^{\frac{1}{p}} \left( \|h\|_v + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} \|h\|_r \right) \end{aligned}$$

Using the fact that

$$\|X\|_r \leq \|X\|_v^{\frac{v}{r}} \times \|X\|_{\infty}^{\frac{r-v}{r}},$$

we obtain

$$\begin{aligned} \|Z_n(h)\|_p &\leq D^{\frac{1}{p}} \cdot \left( 2^{-(k-1)} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{(k-1)v}{r}} \right) \\ &\leq 2D^{\frac{1}{p}} \cdot \left( 2^{-k} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p}-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{kv}{r}} \right). \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned}
E_{1,k} &\leq 2D^{\frac{1}{p}} \cdot 2^{\frac{vk}{p}} \left( 2^{-k} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} 2^{-\frac{kv}{r}} \right) \\
&\leq 2D^{\frac{1}{p}} \cdot \left( 2^{-k(1-\frac{v}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} 2^{k(\frac{v}{p} - \frac{v}{r})} \right) \\
&\leq C \cdot \left( 2^{-k(1-\frac{v}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} 2^{k(\frac{v}{p} - \frac{v}{r})} \right)
\end{aligned}$$

Similarly for  $E_{1,q_1+1}$  :

$$E_{1,q_1+1} \leq C \cdot \left( 2^{-(q_1+1)(1-\frac{v}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} 2^{(q_1+1)(\frac{v}{p} - \frac{v}{r})} \right).$$

Finally, using that  $\mathbb{E} |\Delta_{q_1}(f)| = \|\Delta_{q_1}(f)\|_v^v \leq 2^{-q_1 v}$ , we obtain :

$$\begin{aligned}
E_1 &\leq C \cdot \sqrt{n} 2^{-q_1 v} + \sum_{k=q_0+1}^{q_1+1} E_{1,k} \\
&\leq C \cdot \sqrt{n} 2^{-q_1 v} + C \cdot \sum_{k=q_0+1}^{q_1+1} \left( 2^{-k(1-\frac{v}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} 2^{k(\frac{v}{p} - \frac{v}{r})} \right) \quad (\text{A.4}) \\
&\leq C \cdot \left( \sqrt{n} 2^{-q_1 v} + 2^{-q_0(1-\frac{v}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} \left[ 2^{q_1(\frac{v}{p} - \frac{v}{r})} - 2^{q_0(\frac{v}{p} - \frac{v}{r})} \right] \right).
\end{aligned}$$

Then,

$$E_1 \leq C \cdot \left( \sqrt{n} 2^{-q_1 v} + 2^{-q_0(1-\frac{v}{p})} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} \left[ 2^{q_1(\frac{v}{p} - \frac{v}{r})} - 2^{q_0(\frac{v}{p} - \frac{v}{r})} \right] \right). \quad (\text{A.5})$$

**Control of  $E_2$  :** Noting that  $|\Lambda| \leq 2 \times 2^{vq_0}$  (since if  $F_{i,j} \neq \phi$ , then  $j = \{i-1, i, i+1\}$ , because  $|f_x - f_{x_{q_0}(i)}| \leq \Delta_{x_{q_0}(i)}$  and  $\|\Delta_{x_{q_0}(i)}\|_v \leq 2^{-q_0}$ ) and  $\|\phi_{i,j} - \psi_{i,j}\|_v \leq \delta$ , using the inequality of Pisier, we get

$$\begin{aligned}
E_2 &= \mathbb{E} \left( \sup_{(i,j) \in \Lambda} |Z_n(\phi_{i,j} - \psi_{i,j})| \right) \\
&\leq 2^{\frac{vq_0}{p}} \max_{(i,j) \in \Lambda} \|Z_n(\phi_{i,j} - \psi_{i,j})\|_p.
\end{aligned}$$

Again by  $H(p, X)$ ,

$$\begin{aligned}
E_2 &\leq 2^{\frac{vq_0}{p}} \left[ D^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \|\phi_{i,j} - \psi_{i,j}\|_v + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} \|\phi_{i,j} - \psi_{i,j}\|_r \right) \right] \\
&\leq 2^{\frac{vq_0}{p}} D^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \delta + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} \delta \frac{v}{r} \right)
\end{aligned}$$

Then,

$$E_2 \leq D^{\frac{1}{p}} \cdot 2^{\frac{vq_0}{p}} \left( \delta + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} \delta^{\frac{v}{r}} \right). \quad (\text{A.6})$$

Thus, from (A.5) and (A.6) we conclude that :

$$W(n, \delta) \leq C. \left[ \sqrt{n} 2^{-q_1 v} + 2^{-q_0 \left(1 - \frac{v}{p}\right)} + 2^{\frac{vq_0}{p}} \delta + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} \left( 2^{q_1 \left(\frac{v}{p} - \frac{v}{r}\right)} - 2^{q_0 \left(\frac{v}{p} - \frac{v}{r}\right)} + 2^{\frac{vq_0}{p}} \delta^{\frac{v}{r}} \right) \right].$$

We have  $\delta \sim 2^{-q_0}$  then  $2^{\frac{vq_0}{p}} \cdot \delta \sim 2^{-q_0 \left(1 - \frac{v}{p}\right)} \sim \delta^{\left(1 - \frac{v}{p}\right)}$ , hence

$$W(n, \delta) \leq C. \left[ \sqrt{n} 2^{-q_1 v} + \delta^{\left(1 - \frac{v}{p}\right)} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} 2^{q_1 \left(\frac{v}{p} - \frac{v}{r}\right)} \right].$$

Take  $q_1$  such that  $\sqrt{n} 2^{-q_1 v} \sim n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} 2^{q_1 \left(\frac{v}{p} - \frac{v}{r}\right)}$  then

$$2^{q_1} \sim n^{\frac{1 - \frac{1+\varepsilon}{p}}{v \left(1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)}} \Rightarrow q_1 \sim \frac{\left(1 - \frac{1+\varepsilon}{p}\right) \ln n}{v \left(1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) \ln 2}.$$

Therefore,

$$W(n, \delta) \leq C. \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon - \frac{p}{r}}{p+1 - \frac{p}{r}}} + \delta^{\left(1 - \frac{v}{p}\right)} \right).$$

As  $q_1$  and  $q_0$  have to satisfy  $q_0 < q_1$  then  $\delta > n^{\frac{\frac{1+\varepsilon}{p} - 1}{v \left(1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)}}$ . And to ensure that  $W(n, \delta) \rightarrow_{\{n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0\}} 0$ , we need  $-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon - \frac{p}{r}}{p+1 - \frac{p}{r}} < 0$  which is this

$$\varepsilon < \frac{p}{2} \left( 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \right) - 1. \square$$

**Proof of Remark A.1.** The proof of the first point of the Remark A.1 has the same steps of the proof of Theorem 1 up to the equality (A.4). This relation becomes in the case where  $r = p$ ,

$$\begin{aligned} E_1 &\leq C. \sqrt{n} 2^{-q_1 v} + C. \sum_{k=q_0+1}^{q_1+1} \left( 2^{-k \left(1 - \frac{v}{p}\right)} + n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} \right) \\ &\leq C. \left( \sqrt{n} 2^{-q_1 v} + 2^{-q_0 \left(1 - \frac{v}{p}\right)} + q_1 n^{\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Since

$$q_1 \sim \frac{1}{v \ln 2} \left( 1 - \frac{1+\varepsilon}{p} \right) \ln n.$$

Therefore,

$$W(n, \delta) \leq C. \left( \ln n \cdot n^{-\frac{1}{2} + \frac{1+\varepsilon}{p}} + \delta^{\left(1 - \frac{v}{p}\right)} \right). \square$$

### A.3 Limit theorems for the empirical $VaR$

In this part we will apply the results of the previous section on the fluctuations of the empirical process to deduce asymptotic results on the  $\widehat{VaR}(q)$ .

**Theorem 2** *Under conditions  $H(X)$ ,  $H(F)$  and  $H(p, X)$  where  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$ , we have for  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ ,*

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

*If in addition*

$$\sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)),$$

*then*

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)}\right).$$

The proof of the previous theorem is based on the two following lemmas :

**Lemma 1** *Under conditions  $H(X)$ ,  $H(F)$  and  $H(p, X)$  where  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$ , we have for  $a_n > 0$ ,*

$$\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > a_n) \leq C(\varepsilon, p, v, r, \xi) \cdot \left(n^{\frac{1}{2}} a_n\right)^{-p}.$$

*If in addition  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ , then*

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

**Proof of Lemma 1** Let  $s = [nq] + 1$ . Then, we note that

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_n < \xi - a_n) &= \mathbb{P}(s \text{ or more of the } X_i (1 \leq i \leq n) \text{ are } < \xi - a_n) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(X_i < \xi - a_n)} \geq s\right) \\ &= \mathbb{P}\left(F_n(\xi - a_n) \geq \frac{s}{n}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(F_n(\xi - a_n) - F(\xi - a_n) \geq \frac{s}{n} - F(\xi - a_n)\right). \end{aligned}$$

Since

$$F_n(\xi_n) = \frac{s}{n} = F(\xi) + O(n^{-1}), \text{ (see e.g. [31])}$$

then, using  $H(F)$  and the first-order Taylor expansion of  $F(\xi - a_n)$ , one obtains

$$\frac{s}{n} - F(\xi - a_n) = f(\xi) a_n [1 + o(1)].$$

Then

$$\mathbb{P}(\xi_n < \xi - a_n) = \mathbb{P}(F_n(\xi - a_n) - F(\xi - a_n) \geq f(\xi) a_n [1 + o(1)]).$$

And by Markov's inequality, this is bounded by

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_n < \xi - a_n) &\leq \left( \frac{1}{f(\xi) a_n [1 + o(1)]} \right)^p \mathbb{E} [F_n(\xi - a_n) - F(\xi - a_n)]^p, \\ &\leq C. \left( \frac{1}{f(\xi) a_n} \right)^p \mathbb{E} |F_n(\xi - a_n) - F(\xi - a_n)|^p. \end{aligned}$$

But,

$$\mathbb{E} |F_n(\xi - a_n) - F(\xi - a_n)|^p = \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^p \mathbb{E} |Z_n(f_{(\xi - a_n)})|^p.$$

By  $H(p, X)$ ,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} |F_n(\xi - a_n) - F(\xi - a_n)|^p \\ &\leq \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^p D. \left( \|\mathbb{I}_{(X_i < \xi - a_n)}\|_v^p + n^{1+\varepsilon - \frac{p}{2}} \cdot \|\mathbb{I}_{(X_i < \xi - a_n)}\|_r^p \right) \\ &\leq n^{-\frac{p}{2}} D. \left( F(\xi - a_n)^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon - \frac{p}{2}} F(\xi - a_n)^{\frac{p}{r}} \right). \end{aligned}$$

Then,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_n < \xi - a_n) &\leq C. \left( \frac{1}{f(\xi) a_n} \right)^p n^{-\frac{p}{2}} D. \left( F(\xi - a_n)^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon - \frac{p}{2}} F(\xi - a_n)^{\frac{p}{r}} \right) \\ &\leq C.D \left( \frac{1}{f(\xi)} \right)^p n^{-\frac{p}{2}} a_n^{-p} \left( F(\xi - a_n)^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon - \frac{p}{2}} F(\xi - a_n)^{\frac{p}{r}} \right) \\ &\leq C(\varepsilon, p, v, r, \xi). \left( 1 + n^{1+\varepsilon - \frac{p}{2}} \right) n^{-\frac{p}{2}} a_n^{-p}. \end{aligned}$$

Consequently for  $0 < a_n$  and  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$

$$\mathbb{P}(\xi_n < \xi - a_n) \leq C(\varepsilon, p, v, r, \xi) \cdot n^{-\frac{p}{2}} a_n^{-p}. \quad (\text{A.7})$$



For the second term, we note that :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_n > \xi + a_n) &= \mathbb{P}(s \text{ or less of the } X_i (1 \leq i \leq n) \text{ are } < \xi + a_n) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(X_i < \xi + a_n)} \leq s\right) \\
&= \mathbb{P}\left(F_n(\xi + a_n) \leq \frac{s}{n}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(F_n(\xi + a_n) - F(\xi + a_n) \leq \frac{s}{n} - F(\xi + a_n)\right).
\end{aligned}$$

But, using  $H(F)$  and the first-order Taylor expansion of  $F(\xi + a_n)$ , one obtains

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_n > \xi + a_n) &= \mathbb{P}(F_n(\xi + a_n) - F(\xi + a_n) \leq -f(\xi) a_n [1 + o(1)]) \\
&= \mathbb{P}(F(\xi + a_n) - F_n(\xi + a_n) \geq f(\xi) a_n [1 + o(1)]).
\end{aligned}$$

and by Markov's inequality, this is bounded by

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_n > \xi + a_n) &\leq \left(\frac{1}{f(\xi) a_n [1 + o(1)]}\right)^p \mathbb{E}[F(\xi + a_n) - F_n(\xi + a_n)]^p, \\
&\leq C. \left(\frac{1}{f(\xi) a_n}\right)^p \mathbb{E}|F_n(\xi + a_n) - F(\xi + a_n)|^p.
\end{aligned}$$

In the same way for the first term, we have

$$\mathbb{E}|F_n(\xi + a_n) - F(\xi + a_n)|^p = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^p \mathbb{E}|Z_n(f_{(\xi+a_n)})|^p.$$

By  $H(p, X)$ ,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|F_n(\xi + a_n) - F(\xi + a_n)|^p \\
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^p D. \left(\|\mathbb{I}_{(X_i < \xi + a_n)}\|_v^p + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} \cdot \|\mathbb{I}_{(X_i < \xi + a_n)}\|_r^p\right) \\
&\leq n^{-\frac{p}{2}} D. \left(F(\xi + a_n)^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} F(\xi + a_n)^{\frac{p}{r}}\right).
\end{aligned}$$

Then,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_n > \xi + a_n) &\leq C. \left(\frac{1}{f(\xi) a_n}\right)^p n^{-\frac{p}{2}} D. \left(F(\xi + a_n)^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} F(\xi + a_n)^{\frac{p}{r}}\right) \\
&\leq C.D. \left(\frac{1}{f(\xi)}\right)^p n^{-\frac{p}{2}} a_n^{-p} \left(F(\xi + a_n)^{\frac{p}{v}} + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} F(\xi + a_n)^{\frac{p}{r}}\right) \\
&\leq C(\varepsilon, p, v, r, \xi) \cdot \left(1 + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}}\right) n^{-\frac{p}{2}} a_n^{-p}.
\end{aligned}$$

Consequently for  $0 < a_n$  and  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$

$$\mathbb{P}(\xi_n > \xi + a_n) \leq C(\varepsilon, p, v, r, \xi) \cdot n^{-\frac{p}{2}} a_n^{-p}. \quad (\text{A.8})$$

Thus, from (A.7) and (A.8) we conclude for  $0 < a_n$  and  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$

$$\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > a_n) \leq C(\varepsilon, p, v, r, \xi) \cdot \left(n^{\frac{1}{2}} a_n\right)^{-p}.$$

Finally, if  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ , then

$$\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > a_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0. \square$$

The following lemma studies the proximity between

$$Z_n(f_{\xi_n}) = \sqrt{n}(F_n(\xi_n) - F(\xi_n)) \text{ and } Z_n(f_\xi) = \sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi)).$$

**Lemma 2** *Under conditions  $H(X)$ ,  $H(F)$  and  $H(p, X)$  where  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$ , we have for  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  and  $b_n \gg \max\left(n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}}, a_n^{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{p}\right)}\right)$ ,*

$$\left|\sqrt{n}(F_n(\xi_n) - F(\xi_n)) - \sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi))\right| = o_p(b_n).$$

**Proof of Lemma 2** Let  $0 < a_n$  and  $0 < b_n$ , we note that

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Z_n(f_{\xi_n} - f_\xi)| > b_n) &= \mathbb{P}(|Z_n(f_{\xi_n} - f_\xi)| > b_n \cap |\xi_n - \xi| \leq a_n) \\ &\quad + \mathbb{P}(|Z_n(f_{\xi_n} - f_\xi)| > b_n \cap |\xi_n - \xi| > a_n) \\ &\leq \mathbb{P}(|Z_n(f_{\xi_n} - f_\xi)| \mathbb{I}_{(|\xi_n - \xi| \leq a_n)} > b_n) \\ &\quad + \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > a_n). \end{aligned}$$

If  $H(p, X)$  is verified for  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1 \leq \frac{p}{2} - 1$  and  $0 < a_n$ , then by Lemma 1 :

$$\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > a_n) \leq C \cdot \left(n^{\frac{1}{2}} a_n\right)^{-p}.$$

If  $H(F)$  is verified, then  $F$  is locally Lipschitz, then for  $|y - \xi| \leq a_n$ , we have

$$\|f_y - f_\xi\|_v = |F(y) - F(\xi)|^{\frac{1}{v}} \leq C(v, \xi) \cdot |y - \xi|^{\frac{1}{v}} \leq C(v, \xi) \cdot a_n^{\frac{1}{v}}.$$

In addition, by Markov's inequality and Theorem 1 for  $a_n > \frac{1}{C(v,\xi)} n^{\frac{\frac{1+\varepsilon}{p}-1}{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Z_n(f_{\xi_n} - f_{\xi})| \mathbb{I}_{(|\xi_n - \xi| \leq a_n)} > b_n) &\leq \frac{1}{b_n} \mathbb{E} \left| \sup_{|y - \xi| \leq a_n} |Z_n(f_y - f_{\xi})| \right| \\ &\leq C.b_n^{-1} \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}} + C.a_n^{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{p}\right)} \right). \end{aligned}$$

Consequently, for  $a_n > \frac{1}{C(v,\xi)} n^{\frac{\frac{1+\varepsilon}{p}-1}{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}}$  where  $\varepsilon < \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1$  and  $0 < b_n$

$$\mathbb{P}(|Z_n(f_{\xi_n} - f_{\xi})| > b_n) \leq C. \left[ b_n^{-1} \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}} + C.a_n^{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{p}\right)} \right) + \left( n^{\frac{1}{2}} a_n \right)^{-p} \right].$$

If  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  and  $b_n \gg \max \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}}, a_n^{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{p}\right)} \right)$ , then

$$|Z_n(f_{\xi_n} - f_{\xi})| = o_p(b_n).$$

Finally, by the definition of  $Z_n(f_x)$ , we obtain

$$|\sqrt{n}(F_n(\xi_n) - F(\xi_n)) - \sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi))| = o_p(b_n). \square$$

**Proof of Theorem 2 :**

By Lemmas 1 and 2 for  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  and  $b_n \gg \max \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}}, a_n^{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{p}\right)} \right)$ , we have

$$|\sqrt{n}(F_n(\xi_n) - F(\xi_n)) - \sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi))| = o_p(b_n). \quad (\text{A.9})$$

Since

$$F_n(\xi_n) = \frac{s}{n} = F(\xi) + O(n^{-1}),$$

then,

$$\sqrt{n}(F_n(\xi_n) - F(\xi_n)) = \sqrt{n}(F(\xi) - F(\xi_n)) + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (\text{A.10})$$

If  $H(F)$  is satisfied, then by the Mean Value Theorem of  $F(\xi) - F(\xi_n)$ ,

$$F(\xi) - F(\xi_n) = (\xi - \xi_n) f(\theta\xi_n + (1 - \theta)\xi)$$

where  $\theta \in ]0, 1[$ . Then

$$\sqrt{n}(F_n(\xi_n) - F(\xi_n)) = \sqrt{n}(\xi - \xi_n) f(\theta\xi_n + (1 - \theta)\xi) + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Hence,

$$\left| \sqrt{n}(\xi - \xi_n) f(\theta\xi_n + (1 - \theta)\xi) + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) - \sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi)) \right| = o_p(b_n). \quad (\text{A.11})$$

But we have,

$$\sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)).$$

And by Lemma 1 for  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ ,

$$f(\theta\xi_n + (1 - \theta)\xi) = [f(\xi + o_p(a_n))] \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f(\xi) \quad \text{in probability.} \quad (\text{A.12})$$

Then by (A.9), (A.10), (A.11), (A.12) and Slutsky's Theorem ([13], p. 254), we have :

$$\sqrt{n}(f(\xi)(\xi - \xi_n)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)).$$

Which is equivalent in the result to,

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)}\right). \square$$

## A.4 Applications

In this section we apply the previous results for different sequences. Using the findings of S. Hu ([18], p.1124) and M. Peligrad ([27], Theorem 2.1, p.1305), we apply our result to  $\varphi$ -mixing case. Making use of the result of S. Utev and M. Peligrad ([34], Theorem 2.1 and 2.2), we apply our result to the  $\rho$ -mixing case and to  $\alpha$ -mixing by mean of the results in Q. Shao and H. Yu ([32], Theorem 4.1) and E. Rio ([29], Theorem 7.2). We also consider the nonlinear functional of Gaussian sequences to which we apply the result of S. Ben Hariz [5] and P. Breuer and P. Major [8]. Finally we compare the results with those in the existing literature.

### A.4.1 $\varphi$ -mixing process

**Corollaire A.1** Under condition  $H(X)$ , if the  $\varphi$ -mixing coefficient satisfies

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{p}}(2^i) < \infty \quad \text{with } p > 2,$$

Then, for  $\delta > n^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$ , there is a positive constant  $C(p, \varphi(\cdot))$  such that for any  $f \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{\|f_x - f_y\|_2 \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \right] \leq C(p, \varphi(\cdot)) \cdot \left( \ln n \cdot n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} + \delta^{(1-\frac{2}{p})} \right).$$

If  $H(F)$  is verified, then for  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  we have

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

and if in addition  $0 < \sigma_{\infty}^2 < \infty$ , then

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \longrightarrow^d \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_{\infty}^2(\xi)}{f^2(\xi)} \right).$$

**Proof of Corollary A.1 :** When  $(X_i)_{i \geq 1}$  are identically distributed, using a Lemma by S. Hu ([18], p.1124), if

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{p}}(2^i) < \infty,$$

then, there exists a positive constant  $K = K(p, \varphi(\cdot))$  such that for all  $n \geq 1$  and for any  $f$

$$\mathbb{E} |Z_n(f)|^p \leq C(p, \varphi(\cdot)) \cdot \left( \|f\|_2^p + n^{1-\frac{p}{2}} \|f\|_p^p \right).$$

Then  $H(p, X)$  is satisfied with  $\varepsilon = 0, v = 2$  and  $p = r$ . Apply now Theorem 1 for  $\delta > n^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$ , to obtain

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{\|f_x - f_y\|_2 \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \right] \leq C \cdot \left( \ln n \cdot n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} + \delta^{(1-\frac{2}{p})} \right).$$

If  $H(F)$  is verified and  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ , then by Lemma 1 for  $p > 2$  we obtain

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

To show that

$$\sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)),$$

we will apply a result by M. Peligrad ([27], Theorem 2.1, p. 1305) with  $Y_i \equiv \mathbb{I}_{(X_i \leq \xi)} - F(\xi)$ ,  $\sigma_n^2 = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n Y_i]^2$  and  $W_n(t) := \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{[nt]} Y_i$ ,  $t \in [0, 1]$  and  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ . If we have  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ , then  $\frac{\sigma_n^2}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \sigma_\infty^2$ .

The condition (L) therein can be written for  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ Y_i^2 \mathbb{I}_{[Y_i^2 > \epsilon \sigma_n^2]} \right] &\leq \frac{n}{\sigma_n^2} \mathbb{E} \left[ Y_i^2 \mathbb{I}_{[Y_i^2 > \epsilon \sigma_n^2]} \right] \\ &\leq \frac{C.n}{\sigma_n^2} \mathbb{P} \left[ \left[ \mathbb{I}_{(X_i \leq \xi)} - F(\xi) \right]^2 > \epsilon \sigma_n^2 \right] \\ &\leq \frac{C.n}{\epsilon \sigma_n^4} \mathbb{E} \left[ \left[ \mathbb{I}_{(X_i \leq \xi)} - F(\xi) \right]^2 \right] \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

The conditions :

(A)  $\sigma_n^2 = nh(n)$  où  $h(n)$  is a slowly varying function defined on  $\mathbb{R}$ ,

(B)  $\sup_{m \geq 0, n \geq 1} \left[ \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{m+n} Y_i - \sum_{i=1}^m Y_i \right)^2 / \sigma_n^2 \right] < \infty$ ,

therein are a result of  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ . We take  $t = 1$  to conclude

$$\sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)).$$

Therefore by Theorem 2

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)} \right). \square$$

### A.4.2 $\rho$ -mixing process

For a stationary sequence  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , we define

$$\begin{aligned} \alpha_n^* &= \sup_{S, T \subset \mathbb{Z}, \text{dist}(S, T) \geq n} \alpha(\mathcal{M}_T, \mathcal{M}_S), \\ \rho_n^* &= \sup_{S, T \subset \mathbb{Z}, \text{dist}(S, T) \geq n} \rho(\mathcal{M}_T, \mathcal{M}_S), \end{aligned}$$

where  $\mathcal{M}_T = \sigma(X_i, i \in T)$ ,  $\mathcal{M}_S = \sigma(X_i, i \in S)$ . We apply a result by Utev and Peligrad ([34], Theorems 2.1 and 2.2) to prove the following Theorems :

**Corollaire A.2** Under condition  $H(X)$ , we assume :

$H(\rho)$  : There exists a real number  $0 \leq \eta < 1$  and integer number  $N \geq 1$  such that  $\rho_N^* \leq \eta$ .

Then, for  $p > 2$  and  $\delta > n^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$ , there is a positive constant  $C(p, N, \eta)$  such that for any  $f \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{\|f_x - f_y\|_2 \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \right] \leq C(p, N, \eta) \cdot \left( \ln n \cdot n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} + \delta^{(1-\frac{2}{p})} \right).$$

If  $H(F)$  is verified, then for  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  we have

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n) \quad \text{in probability.}$$

If in addition the sequence  $(X_i)_{i \geq 1}$  is stongly mixing and  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ , then

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \longrightarrow^d \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)} \right).$$

**Proof of Corollary A.2 :** Assuming that the condition  $H(\rho)$  is satisfied and the random variables are identically distributed, then by S. Utev and M. Peligrad ([34], Theorem 2.1), for any  $p > 2$ , there exists a positive constant  $D = D(p, N, \eta)$  such that for  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{E} |Z_n(f)|^p \leq D \left( \|f\|_2^p + n^{1-\frac{p}{2}} \|f\|_p^p \right).$$

Apply now Theorem 1 with the condition  $H(p, X)$  where  $\varepsilon = 0, v = 2$  and  $p = r$ , we obtain

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{\|f_x - f_y\|_2 \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \right] \leq C \cdot \left( \ln n \cdot n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} + \delta^{(1-\frac{2}{p})} \right).$$

If  $H(F)$  is verified and  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ , then by Lemma 1 for  $p > 2$  we obtain

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n) \quad \text{in probability.}$$

To show that

$$\sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)),$$

we will apply a result by S. Utev and M. Peligrad ([34], Theorem 2.2, p. 105) with  $\xi_{ni} \equiv \mathbb{I}_{(X_i \leq \xi)} - F(\xi)$ ,  $\sigma_n^2 = \mathbb{E} [\sum_{i=1}^n \xi_{ni}]^2$ ,  $k_n = n$  and  $W_n(t) := \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^{v_t} \xi_{ni}$  where  $v_t = [nt]$  and  $t \in [0, 1]$ . Si on a  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ , alors  $\frac{\sigma_n^2}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \sigma_\infty^2$ . The condition (2.5) of S. Utev and M. Peligrad [34] :

$$(2.5) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} [n \mathbb{E} (\xi_{n1})^2 / \sigma_n^2] \leq C,$$

is a consequence of  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ . The condition (2.3) is proved in Corollary A.2 : (condition (L)). We take  $t = 1$  to conclude

$$\sqrt{n} (F_n (\xi) - F (\xi)) \rightarrow^d \mathcal{N} (0, \sigma_\infty^2 (\xi)).$$

Therefore by Theorem 2

$$\sqrt{n} (\xi_n - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_\infty^2 (\xi)}{f^2 (\xi)} \right). \square$$

### A.4.3 $\alpha$ -mixing process

**Corollaire A.3** Under conditions  $H(X)$  and  $H(F)$ , if the  $\alpha$ -mixing coefficient satisfies

$$\alpha (n) \leq C n^{-\theta} \quad \text{for some } C \geq 1 \text{ and } \theta > 1 + \sqrt{2}.$$

Then, for  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  we have

$$|\xi_n - \xi| = o_p (a_n).$$

and if in addition  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ , then

$$\sqrt{n} (\xi_n - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_\infty^2 (\xi)}{f^2 (\xi)} \right).$$

**Proof of Corollary A.3 :** When  $(X_i)_{i \geq 1}$  are identically distributed, then by Q. Shao and H. Yu ([32], Theorem 4.1), if

$$\alpha (n) \leq C n^{-\theta} \quad \text{for } C > 0 \text{ and } \theta > 0.$$

Then, for some real numbers  $2 < p < r \leq \infty, 2 < v \leq r, \varepsilon > 0, \theta > \frac{v}{v-2}$  and  $\theta \geq \frac{(p-1)r}{r-p}$ , there is a constant  $K = K (v, p, r, \varepsilon, \theta, C) < \infty$  such that for any  $f \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E} |Z_n (f)|^p \leq K \left( \|f\|_v^p + n^{1+\varepsilon-\frac{p}{2}} \|f\|_r^p \right)$$

which satisfies  $H(p, X)$ . If  $\varepsilon \leq \frac{p}{2} - 1$  and  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ , then by Lemma 1 we have

$$|\xi_n - \xi| = o_p (a_n).$$



For determining  $\theta$  which allows to apply Theorem 1 we need  $v < p < r$  and  $\frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1 > 0$ . Now we have

$$\theta \geq \frac{(p-1)r}{r-p} \Leftrightarrow p \leq \frac{r(\theta+1)}{\theta+r},$$

and

$$\theta > \frac{v}{v-2} \Leftrightarrow v > \frac{2\theta}{\theta-1}.$$

Since  $v < p$  we need

$$\frac{2\theta}{\theta-1} < \frac{r(\theta+1)}{\theta+r}$$

which is satisfied if

$$\theta > 1 + \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{r(r-1)} + \sqrt{2}}{r-2} \right).$$

Consequently, we take  $\theta = 1 + \eta$  where  $\eta > \sqrt{2}$ . For  $\eta > \sqrt{2}$  we have  $2 + \frac{2}{\eta} < 2 + \frac{2\eta^2+6\eta+4}{\eta^3+\eta^2+2\eta+4} < 2 + \frac{2(2\eta+3)}{\eta^2-2}$ , then we choose  $v, p, r$

- i)  $v = 2 + \frac{2}{\eta}$ ,
- ii)  $p = 2 + \frac{2\eta^2+6\eta+4}{\eta^3+\eta^2+2\eta+4}$ ,
- iii)  $r = 2 + \frac{2(2\eta+3)}{\eta^2-2}$ .

With these choices we have  $v < p < r$  and

$$\frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) - 1 > 0.$$

Then we have

$$W(n, a_n) \leq C \cdot \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{2+\varepsilon-\frac{p}{r}}{p+1-\frac{p}{r}}} + a_n^{\frac{1}{v}-\frac{1}{p}} \right) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

If in addition  $0 < \sigma_\infty^2 < \infty$ , then by E. Rio ([29], Theorem 7.2) for

$$\alpha(n) \leq Cn^{-\theta} \quad \text{where } C \geq 1 \text{ and } \theta > 1,$$

we have

$$\sqrt{n}(F_n(\xi) - F(\xi)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_\infty^2(\xi)).$$

Finally, by applying Theorem 2 for  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ , we obtain that

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_\infty^2(\xi)}{f^2(\xi)}\right). \square$$

### A.4.4 Nonlinear functional of gaussian sequences

**Corollaire A.4** Let  $X_i = G(Z_i)$  where  $G$  is a measurable function and  $(Z_i)$  is a stationary Gaussian sequence with zero mean and covariance function

$$\varrho(n) = E(Z_i Z_{i+n}).$$

Assume  $\sum_{i=0}^{\infty} |\varrho(i)| < \infty$ . Then, for  $p > 2$  and  $\delta > n^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$ , there is a positive constant  $C(p, \varrho)$  such that for any  $f \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{\|f_x - f_y\|_2 \leq \delta} |Z_n(f_x - f_y)| \right] \leq C(p, \varrho) \cdot \left( \ln n \cdot n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} + \delta^{(1-\frac{2}{p})} \right).$$

If  $H(F)$  is verified, then for  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$  we have

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n) \quad \text{in probability,}$$

and if in addition  $0 < \sigma_{\infty}^2 < \infty$ , then

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_{\infty}^2(\xi)}{f^2(\xi)} \right).$$

**Proof of Corollary A.4 :** The proof of this corollary is a consequence of the following results :

**Lemma 3** (*S. Ben Hariz [5]*) : Let  $p$  be an even integer and assume that  $\sum_{i=0}^{\infty} |\varrho(i)| < \infty$ , then there exists a constant  $K = K(p, \varrho)$  such that for all  $n > 0$ ,

$$\mathbb{E} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n f(Z_i) - E(f(Z_i)) \right)^p \leq K(p, \varrho) \left( \|f\|_2^p + n^{1-\frac{p}{2}} \|f\|_p^p \right).$$

We apply Lemma 3 for  $f(Z) = \mathbb{I}_{G(Z) \leq x}$ . Then  $H(p, X)$  is satisfied with  $\varepsilon = 0, v = 2$  and  $p = r$ . If  $H(F)$  is verified, then by Lemma 1 for  $a_n \gg n^{-\frac{1}{2}}$ , we have

$$|\xi_n - \xi| = o_p(a_n).$$

And by Theorem 1

$$W(n, \delta) \leq C \cdot \left( \ln n \cdot n^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{p}} + \delta^{(1-\frac{2}{p})} \right).$$

For the central limit theorem we need to apply the following results due to P. Breuer and P. Major [8], (see also [9] for a functional extension) .

**Lemma 4** *Let  $(Z_i)$  be a stationary Gaussian sequence with a covariance function satisfying  $\sum_{i=0}^{\infty} |\varrho(i)| < \infty$ , then*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (\mathbb{I}_{G(Z_i) \leq x} - F(x)) \longrightarrow^d \mathcal{N}(0, \sigma_{\infty}^2(x))$$

where  $\sigma_n^2(x) = \text{Var}(\mathbb{I}_{G(Z_i) \leq x}) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \text{Cov}(\mathbb{I}_{G(Z_1) \leq x}, \mathbb{I}_{G(Z_i) \leq x})$ .

If  $0 < \sigma_{\infty}^2 < \infty$ , then by Lemma 3, Lemma 4 and Theorem 2 we have

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \longrightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_{\infty}^2(\xi)}{f^2(\xi)}\right). \square$$

#### A.4.5 Comparison with the existing results of the literature

- In [31], P. K. Sen has proved that for a  $\varphi$ -mixing sequence of random variables, if we have

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{2}}(i) < \infty,$$

then

$$\sqrt{n}(\xi_n - \xi) \longrightarrow^d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_{\infty}^2(\xi)}{f^2(\xi)}\right).$$

which is stronger than our condition :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{p}}(2^i) < \infty.$$

Indeed,  $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{2}}(i) < \infty$  needs an algebraic decay of the the mixing coefficient  $\varphi(i)$ , and  $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{p}}(2^i) < \infty$  needs only a logarithmic decay.

- In [10], S. X. Chen and C. Y. Tang studied the nonparametric estimation of the Value at Risk ( $VaR$ ) for a geometric  $\alpha$ -mixing sequence of random variables, that means

$$\alpha(k) \leq c\rho^k \text{ where } k \geq 1, c > 0 \text{ and } \rho \in (0, 1).$$

Using the kernel estimation of the  $VaR$  :

$$\widehat{F}_{n,h}\left(\widehat{VaR}_h(q)\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G\left(\frac{\widehat{VaR}_h(q) - X_i}{h}\right) = q,$$

where  $G(x) = \int_{-\infty}^x K(u) d(u)$  is a distribution function of a kernel density  $K$ , they showed that :

$$\begin{aligned} \left| \widehat{VaR}_h(q) - VaR(q) \right| &= o_{a.s.} \left( n^{-\frac{1}{2}} \ln(n) \right). \\ \sqrt{n} \left( \widehat{VaR}_h(q) - VaR(q) \right) &\rightarrow^d \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_{\infty}^2(VaR(q))}{f^2(VaR(q))} \right). \end{aligned}$$

- S. N. Lahiri and S. A. Sun [22] showed that for a  $\alpha$ -mixing sequence of random variables such that

$$\alpha(n) \leq dn^{-\theta} \text{ where } \theta > 12,$$

the empirical  $\widehat{VaR}(q)$  satisfy for a constant  $C > 0$  and  $n \geq 1$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left[ \sqrt{n} (\xi_n - \xi) \leq x \right] - \Phi \left[ x \times \frac{f(\xi)}{\sigma_{\infty}(\xi)} \right] \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

where  $\Phi$  is the standard normal distribution. In particular they obtained as  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\sqrt{n} (\xi_n - \xi) \rightarrow^d \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_{\infty}^2(\xi)}{f^2(\xi)} \right).$$

Observe that for the CLT to hold for strong mixing sequences, we only need that  $\alpha(k) \leq Cn^{-\theta}$  with  $\theta > 1 + \sqrt{2}$ .

**Remarque A.2 :** Our results also apply for stochastic differential equations and stochastic volatility models discretely observed . Indeed, V. Genon-Catalot et al. [35] showed that, under some conditions, these models as well as their discrete versions, satisfies geometric  $\alpha$  or  $\rho$ -mixing. Therefore the main hypothesis  $H(p, X)$  is then fulfilled for any  $p \geq 2$ . Regarding GARCH models which are also widely used in financial modeling, we mention that R. A. Davis et al. [14] showed that under conditions on the moment of the innovations and on the Lyapunov exponent associated to the sequence, the squared of the GARCH sequence is geometric  $\alpha$ -mixing. Hence, our results apply also for GARCH models.

## A.5 Simulation studies

In this section we present some numerical studies which illustrate the conditions under which  $\widehat{VaR}(q)$  converges to  $VaR(q)$ . In these simulations, we choose a correlated Gaussian and Pareto sequences. In both cases, we compare the  $VaR(q)$  where  $q = 0.95$  to the empirical estimate of  $VaR(q)$ . For each set of parameters, we run ( $M = 10000$ ) Monte Carlo simulations and compute the mean absolute error ( $MAE(n)$ ) between  $\widehat{VaR}(q)$  and  $VaR(q)$

$$MAE(n) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left| \widehat{VaR}_{(i)}(q) - VaR(q) \right|.$$

We also give a confidence interval with level 95% to the  $VaR(q)$ . We consider three different models. First, a correlated Gaussian sequence, then a correlated sequences with Pareto marginal distributions and finally a stochastic volatility model.

### A.5.1 Case 1 : Dependent Gaussian process

Let  $(X_i)_{0 \leq i \leq n}$  be a Gaussian sequence with zero mean, unit variance and a correlation function given by :

$$\varrho_n(i) := Cov(X_0, X_i) = (1 + |i|)^{-\alpha} \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

where  $\alpha > 0$ . The parameter  $\alpha$  tunes the strength of dependence. In particular  $\alpha = \infty$  corresponds to the i.i.d. sequence, whereas  $\alpha = 0$ , ( $\varrho_n(i) = 1$ ) gives perfectly correlated sequence.

We study the process :

$$T_n := \sqrt{n} \left( \widehat{VaR}(q) - VaR(q) \right).$$

We show that for  $\alpha > 1$  ( $\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} |\varrho_n(i)| < \infty$ ),

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \tau_{\infty}^2), \tag{A.13}$$

where  $\tau_{\infty}^2 = \frac{\sigma_{\infty}^2(VaR(q))}{f^2(VaR(q))}$ . Here we recall that  $VaR(0.95) = 1.6449$ .

In Figure A.1, we plot the mean absolute error with a 95% confidence interval as a function of  $n$  for different values of  $\alpha$  when  $q = 0.95$ . Clearly the

$MAE(n)$  goes to zero when  $n$  large, for any  $\alpha > 0$ . The simulations shows that the  $\widehat{VaR}(q)$  is consistent when the correlation parameter  $\alpha > 0$ . When  $\alpha > 1$ , in Figure A.2, we plot  $\sqrt{n} MAE$  against  $n$  to see that it converges to a constant. In Figure A.3, we see that the  $MAE(n)$  as a function of  $\alpha$  for different values of  $n$  with  $q = 0.95$ , tends to zero for large values of  $n$ . In Figure A.4, we compare the histogram of  $T_n$  for  $\alpha = 3$  and  $n = 800$  with the density function of Gaussian distribution  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$ . Clearly, for  $\alpha > 1$  the histogram of  $T_n$  is close to the normal distribution, confirming our result (A.13).

### A.5.2 Case 2 : Dependent Pareto process

We now consider the  $\widehat{VaR}(q)$  for a correlated Pareto sequence  $(X_i)_{0 \leq i \leq n}$ . Recall that the distribution function of Pareto is defined for  $\beta > 0$  by :

$$G_\beta(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\beta & x > x_0 \\ 0 & x \leq x_0 \end{cases}$$

To construct a correlated Pareto sequence, we let  $X_i = G_\beta^{-1}(\Phi(Y_i))$  where  $\Phi$  is the Gaussian distribution  $\mathcal{N}(0, 1)$  and  $\{Y_i\}_{0 \leq i \leq n}$  is a correlated Gaussian sequence defined as in the previous example. As in the first case, we study the process  $T_n$  to illustrate the central limit theorem (see (A.13)). Here  $VaR(0.95) = 2.7144$  when  $\beta = 3$ .

In Figure A.5, we plot  $MAE(n)$  with a 95% confidence interval as a function of  $n$  for different values of  $\alpha$  when  $q = 0.95$ . Clearly, the  $MAE$  goes to zero when  $n$  large, for any  $\alpha > 0$ . The simulations shows that the  $\widehat{VaR}(q)$  is consistent when the correlation parameter  $\alpha > 0$ . When  $\alpha > 1$ , in Figure A.6, we plot  $\sqrt{n} MAE(n)$  against  $n$  to see that it converges to a constant. In Figure A.7, we see that the  $MAE(n)$  as a function of  $\alpha$  for different values of  $n$  with  $q = 0.95$ , tends to zero for large values of  $n$ . In Figure A.8, we compare the histogram of  $T_n$  for  $\alpha = 3$  and  $n = 800$ , with the density function of Pareto distribution. Here again, when  $\alpha > 1$ , the CLT is satisfied.

### A.5.3 Case 3 : Stochastic Volatility Models

We assume that  $\widehat{VaR}(q)$  of the correlated sequence  $(X_i)_{0 \leq i \leq n}$  with stochastic volatility :

$$X_i = \sigma_i \cdot \varepsilon_i$$

where  $(\varepsilon_i)_{0 \leq i \leq n}$  is an iid Gaussian sequence  $\mathcal{N}(0, 1)$  and  $(\sigma_i)_{0 \leq i \leq n}$  correlated Gaussian or Pareto sequences.

As in the first case, we study the process  $T_n$  to prove (A.13) where  $VaR(0.95) \approx 1.5949$  for the Gaussian sequence and  $VaR(0.95) \approx 2.4615$  for the Pareto sequence with  $\beta = 3$ . In Figure A.9, we compare the histogram of  $T_n$  for  $\alpha = 3$  and  $n = 800$ , with the density function of Gaussian distribution  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$  using two cases (Gaussian and Pareto for the distribution function of  $\sigma_i$ ). Here again, when  $\alpha > 1$ , the CLT is satisfied.

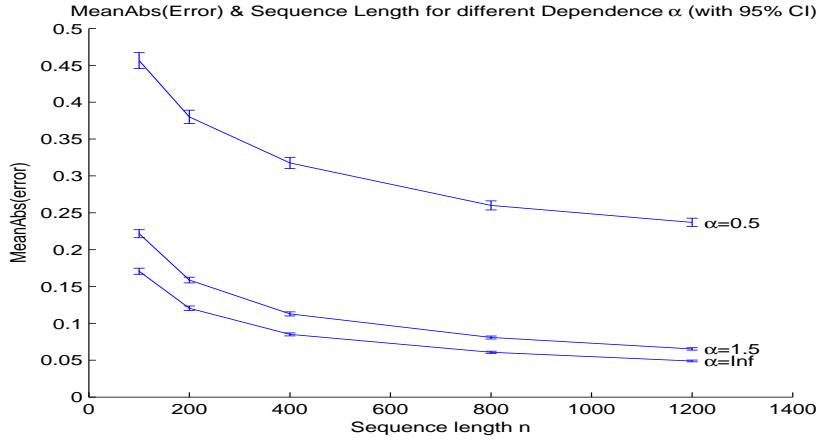


FIGURE A.1 – The Mean Absolute Error ( $MAE(n)$ ) with 95% confidence intervals for correlated Gaussian sequence with correlation function  $\varrho_n(i) = (1 + |i|)^{-\alpha}$  is plotted against the sequence length  $n$  for different values of dependence parameter  $\alpha$ .

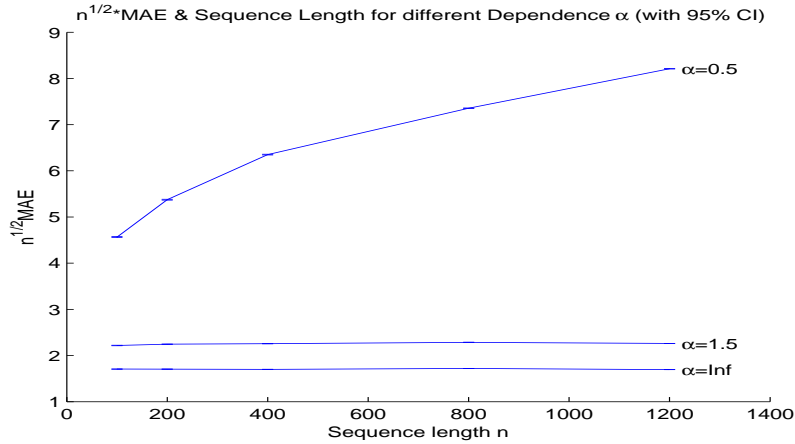


FIGURE A.2 –  $(\sqrt{n}MAE(n))$  with 95% confidence intervals for correlated Gaussian sequence with correlation function  $\varrho_n(i)$  is plotted against the sequence length  $n$  for  $\alpha \in \{0.5, 1.5, \infty\}$ . The value  $(\sqrt{n}MAE(n))$  tends to a constant for  $\alpha > 1$  indicating that the optimal convergence rate  $O(n^{-\frac{1}{2}})$  is achieved.



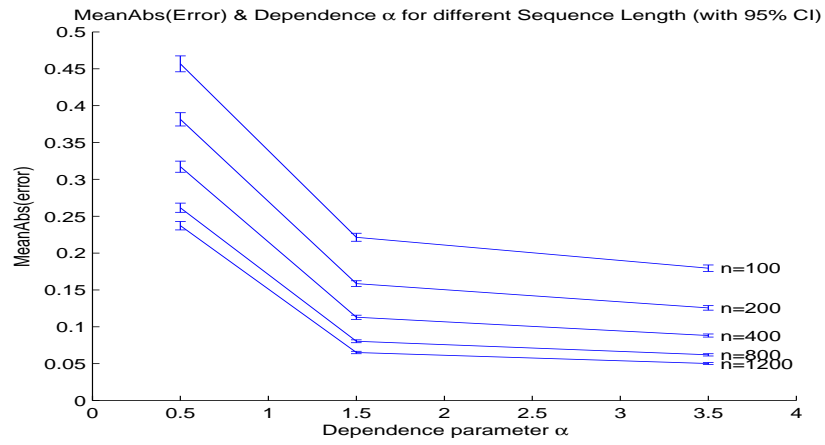


FIGURE A.3 – The Mean Absolute Error ( $MAE(n)$ ) with 95% confidence intervals for correlated Gaussian sequence with correlation function  $\varrho_n(i)$  is plotted against the dependence parameter  $\alpha$  for different values of  $n$ .

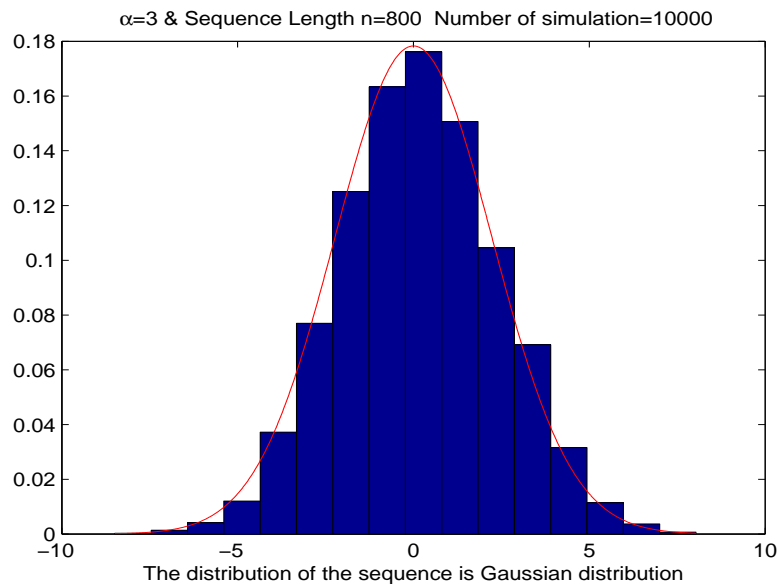


FIGURE A.4 – Comparing the histogram of  $T_n$  for a Gaussian sequence where  $\alpha = 3$  and  $n = 800$ , with the density function of Gaussian distribution  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$ .

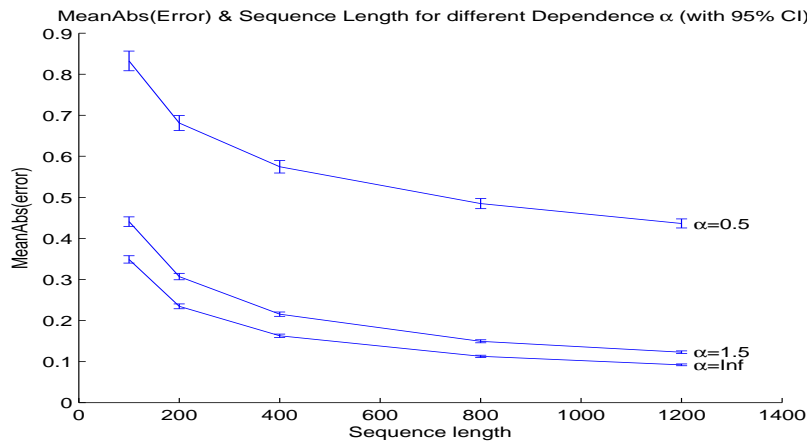


FIGURE A.5 – The Mean Absolute Error ( $MAE(n)$ ) with 95% confidence intervals for correlated **Pareto** sequence with correlation function  $\varrho_n(i)$  is plotted against the sequence length  $n$  for different values of dependence parameter  $\alpha$ .

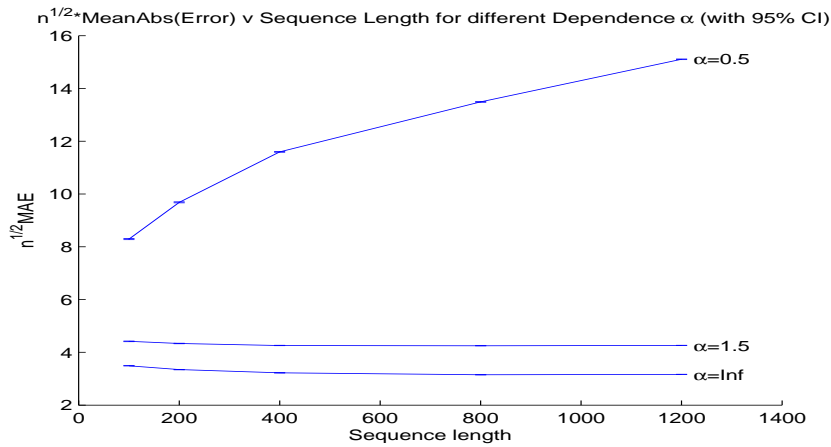


FIGURE A.6 –  $(\sqrt{n}MAE(n))$  with 95% confidence intervals for correlated **Pareto** sequence with correlation function  $\varrho_n(i)$  is plotted against the sequence length  $n$  for  $\alpha \in \{0.5, 1.5, \infty\}$ . The value  $(\sqrt{n}MAE(n))$  tends to a constant for  $\alpha > 1$  indicating that the optimal convergence rate  $O(n^{-\frac{1}{2}})$  is achieved.

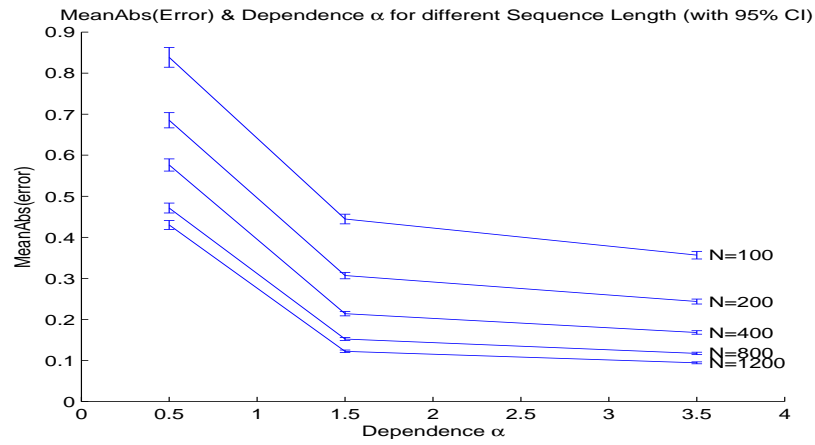


FIGURE A.7 – The Mean Absolute Error ( $MAE(n)$ ) with 95% confidence intervals for correlated **Pareto** sequence with correlation function  $\varrho_n(i)$  is plotted against the dependence parameter  $\alpha$  for different values of  $n$ .

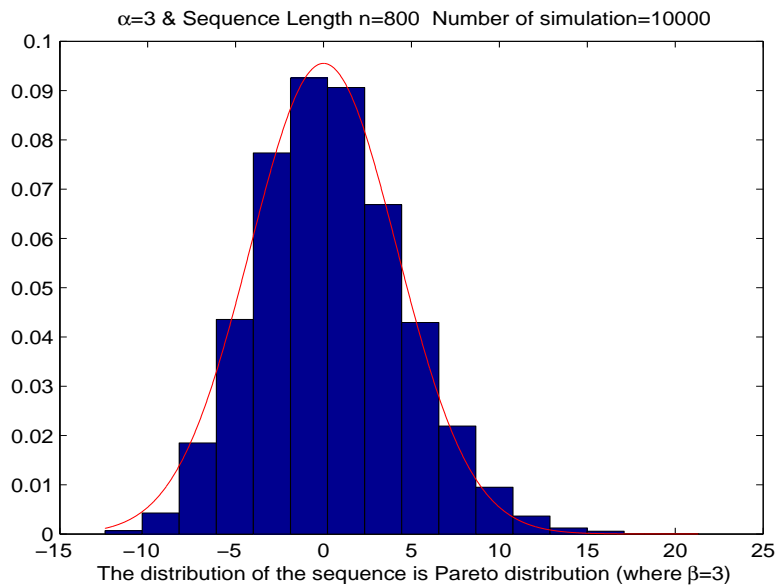


FIGURE A.8 – Comparing the histogram of  $T_n$  for a Pareto sequence where  $\alpha = 3$  and  $n = 800$ , with the density function of Gaussian distribution  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$ .

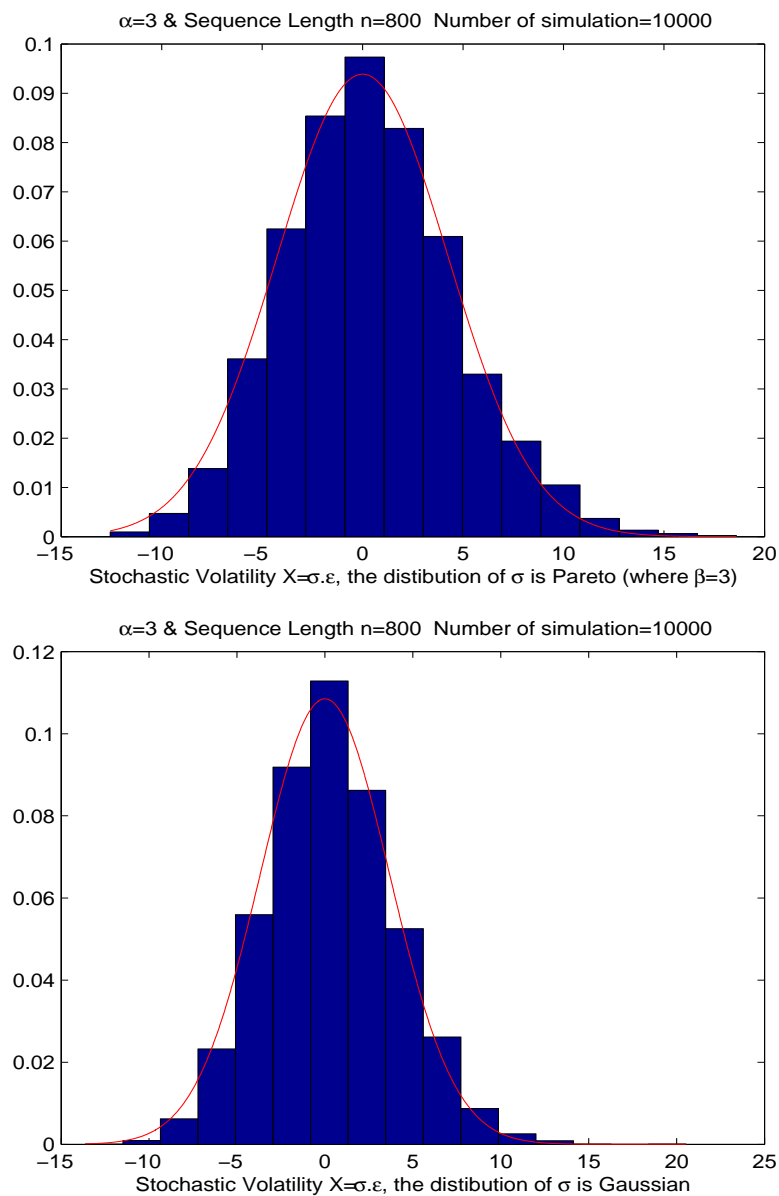


FIGURE A.9 – Comparing the histogram of  $T_n$  for  $\alpha = 3$  and  $n = 800$ , with the density function of Gaussian distribution  $\mathcal{N}(0, \tau_\infty^2)$  for two case (Gaussian and Pareto sequence).



# Bibliographie

- [1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J-M. and Heath, D. (1999) : *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance, 9, 203-228.
- [2] Babu, Guttu Jogesh; Singh, Kesar. *On deviations between empirical and quantile processes for mixing random variables*. J. Multivariate Anal. 8 (1978), no. 4, 532549.
- [3] Bahadur, R. *A note on quantiles in large samples*. Ann. Math. Statist. 37 577580. (1966)
- [4] Ben Hariz, Samir. *Uniform CLT for empirical process*. Stochastic Process. Appl. 115 (2005), no. 2, 339358. (Reviewer : Andrzej Krajka), 60F17 (60F05).
- [5] Ben Hariz, Samir. *Moment Inequalities for short and long-range dependent sequences* Preprint (2011).
- [6] Bennett George. *Probability Inequalities for the Sum of Independent Random Variables*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 57, No. 297 (Mar., 1962), pp. 33-45.
- [7] Bradley, R. C. *Basic Properties of Strong Mixing Conditions. A Survey and Some Open Questions*. Probability Surveys, Vol. 2, 107-144, (2005).
- [8] Breuer, P., Major, P. *Central limit theorems for non-linear functional of Gaussian fields*. J. Multivariate Anal. 13, 425-441 (1983).
- [9] Csörgo S., Mielniczuk, J. *The empirical process of a short-range dependent stationary sequence under Gaussian subordination*. Probab. Theory Relat. Fields 104, No.1, 15-25, (1996).
- [10] Chen, S. X. and Tang, C. Y. *Nonparametric inference of Value at Risk for dependent financial returns* . Journal of Financial Econometrics, 3, 227-255,(2005).
- [11] Chen, S. X. *Nonparametric Estimation of Expected Shortfall* . Journal of Financial Econometrics, 87-107,(2008).

- [12] Cont, R. (2001). *Empirical properties of asset returns : Stylized facts and statistical issues*. Quant. Finance 1 223236.
- [13] Cramér, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [14] Davis, R. A., Mikosch, T. and Basrak, B. (1999). *Sample ACF of multivariate stochastic recurrence equations with applications to GARCH*. Preprint.
- [15] Dowd, K. *Estimating VaR with order statistics*. Journal of Derivatives, 23-30,(2001).
- [16] Follmer, H. Schied, A. *Convex measures of risk and trading constraints*. Finance and Stochastics, 6, 429-447.(2002)
- [17] Gouriéroux, C., Scaillet, O. and Laurent, J.P. *Sensitivity analysis of Values at Risk*, Journal of empirical nance, 7, 225-245. (2000)
- [18] Hu, Shuhe. *Some new results for the strong law of large numbers*. Acta Mathematica Sinica, 2003, 46 :11231134 (in Chinese).
- [19] Kiefer, J. *On Bahadurs representation of sample quantiles*. Ann. Math. Statist.38 13231342. (1967)
- [20] Kiefer, J. *Deviations between the sample qunatile process and the sample df*. In Nonparametric Techniques in Statistical Inference. (1970)
- [21] Kulik, Rafal. *Bahadur-Kiefer theory for sample quantiles of weakly dependent linear processes*. Bernoulli 13 (2007), no. 4, 1071,1090.
- [22] Lahiri S N, Sun S. *A Berry-Esseen theorem for sample quantiles under weak dependence*. Ann. Appl. Probab. 19(2009), no. 1, 108126. 60F05 (60G10 62E20).
- [23] Marinelli, C. *A comparison of some univariate models for value-at-risk and expected shortfall*. Int. J. Theor. Appl. Finance 10 (2007), no. 6, 10431075.
- [24] Mason, D., Shorack, G., Wellner, J. *Strong limit theorems for oscillation moduli of the uniform empirical process*. Unpublished technical report (1982)
- [25] McNeil, J. A. ; J. ; Frey, R. Embrechts, P. *Quantitative risk management. Concepts, techniques and tools*. Princeton Series in Finance. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. xvi+538 pp.

- [26] Oksendal, B. *Stochastic differential equations. An introduction with applications*. Sixth edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003. xxiv+360 pp. ISBN : 3-540-04758-1, 60H10 (60G44 60J60)
- [27] Peligrad, Magda. *An invariance principle for  $\varphi$ -mixing sequences*. Ann. Probab. 13 (1985), no. 4, 13041313. 60F17 (60G10).
- [28] Pierre Priouret. *Introduction aux processus de diffusion*. Université Pierre et Marie Curie (2004/2005).
- [29] Rio, E. *Théorèmes limites pour des variables aléatoires faiblement dépendentes*, Preprint, Orsay no.97/81, 1997.
- [30] Scaillet, O. (2004) : *Nonparametric estimation and sensitivity analysis of expected shortfall*, Mathematical Finance, 14, 115-129.
- [31] SEN, P. K. *On the Bahadur representation of sample quantiles for sequences of  $\phi$ -mixing random variables*. J. Multivariate Anal. 2 (1972), 7795, 60F05.
- [32] Shao, Q. ; Yu, H. *Weak convergence for weighted empirical processes of dependent sequences*, Ann.Probab. 24 (4)(1996) 20982127.
- [33] Shorack, Galen R. *Kiefer's theorem via the Hungarian construction*. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 61 (1982), no. 3, 369373
- [34] Utev, S. ; Peligrad, M. *Maximal inequalities and an invariance principle for a class of weakly dependent random variables*. J. Theoret. Probab. 16 (2003), no. 1, 101115. 60E15 (60F17).
- [35] Valentine Genon-Catalot, Thierry Jeantheau and Catherine Larédo. *Stochastic Volatility Models as Hidden Markov Models and Statistical Applications*. Bernoulli Vol. 6, No. 6 (Dec., 2000), pp. 1051-1079
- [36] Van der Vaart, Aad W. ; Wellner, Jon A. *Weak convergence and empirical processes. With applications to statistics*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1996. xvi+508 pp. ISBN : 0-387-94640-3.
- [37] Wassily Hoeffding. *Probability Inequalities for Sums of Bounded Random Variables*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 58, No. 301 (Mar., 1963), pp. 13-30.
- [38] Yoshihara, K. (1995). *The Bahadur representation of sample quantiles for sequences of strongly mixing random variables*. Statistics and Probability Letters, 24, 299-304.
- [39] Yang, S. C. *Maximal Moment Inequality for Partial Sums of Strong Mixing Sequences and Application* . Acta Mathematica Sinica, English Series, 2007, 23(6) : 1013-102.



- [40] Moorad, Choudhry. Ketul Tanna. *An Introduction to Value-at-Risk*. John Wiley. Sons, Ltd.n, 2006.
- [41] Wei Biao Wu. *On the Bahadur representation of sample quantiles for dependent sequences*. Annals of Statistics 2005.