



Modélisation des écoulements turbulents en rotation et en présence de transferts thermiques par approche hybride RANS/LES zonale

Benoît de Laage de Meux

► To cite this version:

Benoît de Laage de Meux. Modélisation des écoulements turbulents en rotation et en présence de transferts thermiques par approche hybride RANS/LES zonale. Autre. ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers, 2012. Français. NNT : 2012ESMA0008 . tel-00743542

HAL Id: tel-00743542

<https://theses.hal.science/tel-00743542>

Submitted on 19 Oct 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NoDerivatives 4.0 International License

THÈSE

pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE MECANIQUE ET D'AÉROTECHNIQUE

Spécialité : Mécanique des fluides

Présentée par

Benoît DE LAAGE DE MEUX

**MODÉLISATION DES ÉCOULEMENTS TURBULENTS EN ROTATION
ET EN PRÉSENCE DE TRANSFERTS THERMIQUES PAR
APPROCHE HYBRIDE RANS/LES ZONALE**

Directeur de Thèse : Alain Farcy
Co-direction : Rémi Manceau

Soutenue le 11 mai 2012
devant le jury

Pr. Eric Lamballais
Pr. Pierre Sagaut
Pr. Gilmar Mompean
Dr. Thomas B. Gatski
Dr. Sébastien Deck
Dr. Bruno Audebert
Dr. Rémi Manceau
Dr. Alain Farcy

Université de Poitiers, Institut Pprime
Université Pierre et Marie Curie, Paris
Laboratoire de Mécanique de Lille
Institut Pprime, CNRS, Poitiers
ONERA, Meudon
EDF R&D, Chatou
Institut Pprime, CNRS, Poitiers
ENSMA, Poitiers

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur

Institut PPRIME (UPR 3346)
CNRS, Université de Poitiers, ENSMA
SP2MI, téléport 2
11 bd Marie et Pierre Curie, BP 30179
86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex

EDF Recherche et Développement
Département Mécanique des Fluides,
Énergies et Environnement
6 quai Watier
78401 Chatou Cedex

Remerciements

Au terme de ce travail de thèse long de trois ans et demi, c'est très sincèrement que je souhaite remercier quelques personnes qui m'ont aidé dans cette entreprise.

Merci d'abord à Rémi Manceau qui a réalisé la direction scientifique des travaux. Au cours de nos échanges réguliers et conviviaux, il m'a fait partager ses grandes connaissances et j'ai pu apprécier sa propension aux bonnes idées. C'est donc sans réserve et en toute confiance que je me suis appuyé sur son expérience et ses conseils, ce qui m'a été très profitable.

Merci à Bruno Audebert qui a assuré l'encadrement au quotidien de la thèse, dans l'entreprise EDF. Son dynamisme et sa sympathie ont été dès l'origine parmi mes motivations à entreprendre cette thèse. Ingénieur-chercheur de qualité au management efficace, il a assuré pleinement tous les aspects de sa fonction d'encadrant industriel, notamment en valorisant mes travaux au sein de l'entreprise.

Je souhaite remercier également les personnes qui, par gentillesse ou ouverture d'esprit, ont consacré de leur temps pour cette thèse sans être formellement impliquées dans le projet. En particulier parmi mes collègues d'EDF, je remercie David M. pour l'aide régulière sur le code de calcul et Sofiane B. pour les nombreuses discussions « turbulencières » – mais néanmoins enrichissantes – partagées autour d'un café.

Merci beaucoup à ceux qui m'ont permis de terminer cette thèse et d'écrire ce mémoire dans de bonnes conditions, notamment mon supérieur hiérarchique Alain Martin et, dans un autre registre, mes parents.

Enfin, j'adresse mes amitiés sincères aux collègues de l'équipe I85 *Écoulements et Turbomachines*, notoirement sympathique, dans laquelle j'ai évolué et un salut fraternel aux thésards du département MFEE, en particulier Yoann F., Yoann J. et Thomas P.

BLM

Modélisation des écoulements turbulents en rotation et en présence de transferts thermiques par approche hybride RANS/LES zonale

Résumé : La simulation numérique d'écoulements turbulents dans les systèmes de refroidissement de joints de pompes hydrauliques demande à considérer des domaines de calcul très étendus et des temps d'intégration très longs. La modélisation hybride RANS/LES zonale pourrait permettre de reproduire, dans un temps de calcul acceptable industriellement, l'ensemble des phénomènes thermiques et dynamiques en présence. L'approche consiste à faire interagir une simulation des grandes échelles (LES), représentant finement les phénomènes instationnaires de la turbulence dans certaines régions critiques de l'écoulement, avec l'approche statistique (RANS), moins coûteuse numériquement et dont la mise en œuvre dans le reste du domaine permet de rendre compte des variations globales imposées à l'écoulement (injection d'eau froide dans de l'eau chaude, rotation de l'arbre et de la roue, etc...). Dans cette optique, une étude détaillée des modélisations adaptées aux écoulements en rotation est réalisée, suivant les deux approches RANS et LES. De nombreux modèles de turbulence sont comparés sur un cas test de canal en rotation. Le couplage zonal aux faces de bord par la méthode des structures turbulentes synthétiques (SEM) est étudié et une méthode innovante de couplage volumique par force de rappel (Forçage Linéaire Anisotrope) sur une zone de recouvrement RANS/LES est proposée. Ces deux méthodes sont étendues pour la première fois à la thermique. Les simulations hybrides RANS/LES zonales présentées, sur des cas test de canal fixe, en rotation ou en convection forcée, montrent la faisabilité de telles modélisations pour des applications industrielles.

Mots clés : modélisation de la turbulence, écoulements en rotation, couplage RANS/LES zonal, méthode des structures synthétiques, forçage linéaire anisotrope, convection forcée

Abstract : The numerical simulation of turbulent flows in cooling system of hydraulic pumps sealing requires considering large computational domains and long integration times. The zonal hybrid RANS/LES modelling of turbulence could deal with such applications, in order to reproduce the whole thermal and dynamical phenomena of the flow, with a computational cost compatible with industrial studies. This approach aims at properly interfacing a Large Eddy Simulation (LES), which provides an accurate unsteady description of turbulence in some critical regions of the flow, with the statistical RANS approach, less demanding in computational resources, applied in the whole remaining fluid domain in order to take into account the imposed global variations of the flow (cool water injection in hot water, shaft and rotor rotation, ...). To this end, a detailed study of turbulence models appropriate for rotating flows is presented, following both the RANS and the LES approaches. Numerous turbulence models are compared in the rotating channel flow test case. The zonal coupling at boundary faces using the Synthetic Eddy Method (SEM) is studied and an innovative volumic coupling using a source term on overlapping RANS/LES area, the Anisotropic Linear Forcing, is proposed. For the first time, these two coupling methods are extended to heat transfer. The present zonal hybrid RANS/LES computations of static or rotating channel flows in isothermal or forced convection regimes, show the applicability of such modelling for industrial studies.

Key words : turbulence modelling, rotating flows, zonal RANS/LES coupling, synthetic eddy method, anisotropic linear forcing, forced convection

Table des matières

Nomenclature	xiii
1 Introduction	1
1.1 Introduction générale	1
1.2 Contexte industriel	2
1.3 Contexte scientifique	3
1.4 Démarche proposée	4
1.5 Organisation du manuscrit	6
I Description et modélisation des écoulements turbulents en rotation	9
2 Introduction à l'étude de la turbulence	11
2.1 Équations de Navier–Stokes incompressible	12
2.2 Description statistique de la turbulence	14
2.3 Turbulence homogène, turbulence isotrope	16
2.4 Transferts énergétiques et éléments d'analyse spectrale	19
3 Description des écoulements turbulents en rotation	25
3.1 Équations modèles en référentiel tournant	25
3.1.1 Changement de référentiel et objectivité d'une grandeur tensorielle	25
3.1.2 L'équation de Navier–Stokes en référentiel tournant	26
3.1.3 Équations statistiques de la turbulence en référentiel tournant	30
3.2 Théorie de base des écoulements en rotation	32
3.2.1 Nombres adimensionnels caractéristiques	32
3.2.2 Théorème de Taylor–Proudman	33
3.2.3 Ondes inertielles dans les fluides en rotation	34
3.3 Modification des transferts énergétiques sous l'effet de la rotation	36
3.4 Effets conjugués de rotation et de cisaillement	39
3.4.1 Instabilité Coriolis–cisaillement	39
3.4.2 Manifestations de l'instabilité dans un canal en rotation transverse	41
3.5 Remarques sur l'analogie entre rotation et courbure	42
4 Modélisation des écoulements turbulents en rotation	45
4.1 Contraintes de modélisation pour les écoulements en rotation	45
4.2 Modélisation des corrélations statistiques : approche RANS	49
4.2.1 Généralités	49
4.2.1.1 Fermeture au premier ordre	49
4.2.1.2 Fermeture au second ordre	51
4.2.1.3 Prise en compte des parois	53
4.2.2 Positionnement du problème pour la rotation	55

4.2.3	Introduction et comparaison de plusieurs modèles sur le cas test du canal plan fixe	56
4.2.4	Évaluation de modèles au second ordre pour la rotation	60
4.2.4.1	Comparaison entre les modèles LRR et SSG	60
4.2.4.2	Modèle EB-RSM	65
4.2.5	Évaluation de modèles au premier ordre pour la rotation	70
4.2.5.1	Choix des modèles	70
4.2.5.2	Correction de Spalart et Shur	71
4.2.5.3	Correction de Pettersson Reif <i>et al.</i>	73
4.2.5.4	Correction de Cazalbou <i>et al.</i>	79
4.2.5.5	Validation	80
4.2.6	Bilan pour la modélisation RANS	85
4.3	Simulation des grandes échelles de la turbulence	87
4.3.1	Généralités	87
4.3.1.1	Formalisme et équations modèles	88
4.3.1.2	Introduction à la modélisation de sous-maille	90
4.3.1.3	Autres problématiques de la LES	92
4.3.1.4	Prise en compte des parois	93
4.3.2	Formalisme en référentiel tournant	94
4.3.3	Formulation des modèles testés	96
4.3.3.1	Modèle de Smagorinsky	96
4.3.3.2	Modèle de Smagorinsky dynamique	97
4.3.3.3	Modèle WALE	99
4.3.4	Prise en main et comparaison des modèles sur le cas test du canal plan fixe	100
4.3.5	Évaluation des modèles pour la rotation	108
4.3.6	Bilan pour la modélisation LES	119

II Modélisation hybride RANS/LES zonale, aspects dynamiques et thermiques 121

5 Généralités sur les méthodes hybrides 123

5.1	Motivations et classification	123
5.2	Aperçu des méthodes instationnaires globales	124
5.3	Grandes lignes du couplage RANS/LES zonal	126

6 Couplage aux faces de bord par une méthode de turbulence synthétique 131

6.1	Conditions d'entrée pour la simulation des grandes échelles	131
6.1.1	Généralités	132
6.1.2	Introduction de la méthode des structures synthétiques (SEM)	133
6.2	Application au couplage RANS/LES zonal	136
6.2.1	Première validation du couplage	137
6.2.2	Couplage de la SEM avec un modèle RANS au second ordre	141
6.2.3	Remarque sur l'influence du maillage	146
6.3	Couplage aux faces de bord pour les écoulements en rotation	148
6.3.1	Formulation de la SEM dans un référentiel tournant	148
6.3.2	Validation du couplage zonal dans un canal en rotation	149
6.4	Généralisation de la SEM à la thermique	155
6.4.1	Formulation proposée (T-SEM)	155
6.4.2	Validation de la méthode	156

6.4.3	Application au couplage RANS/LES zonal	162
6.5	Conclusion du chapitre	165
7	Couplage volumique par Forçage Linéaire Anisotrope	167
7.1	Dérivation du Forçage Linéaire Anisotrope	167
7.1.1	Effets statistiques d'un forçage volumique	168
7.1.2	Analyse de forçages volumiques proposés dans la littérature	169
7.1.3	Formulation du Forçage Linéaire Anisotrope (ALF)	171
7.1.4	Formulation du forçage pour une turbulence homogène et isotrope	174
7.1.5	Formulation du forçage dans un référentiel quelconque	176
7.2	Validation et paramétrisation du forçage ALF	178
7.2.1	Analyse et validation en turbulence homogène et isotrope.	178
7.2.2	Démonstration pour une turbulence homogène anisotrope	183
7.2.3	Analyse et paramétrisation dans un canal plan avec ou sans rotation	190
7.3	Applications au couplage RANS/LES zonal	205
7.3.1	Formulation du couplage	205
7.3.2	Génération de fluctuations en entrée	207
7.3.3	Couplage tangentiel en proche paroi	214
7.4	Forçage volumique pour la thermique	217
7.4.1	Propositions de formulations	217
7.4.2	Validation	219
7.5	Conclusion du chapitre	226
	Conclusion	227
	Annexes	231
A	Aperçu des méthodes numériques de <i>Code_Saturne</i>	233
B	Description des cas test	239
B.1	Canal plan fixe	239
B.2	Canal plan en rotation transverse	243
B.3	Canal plan chauffé par un flux constant aux parois, convection forcée	245
C	Diagramme de bifurcation du modèle SSG quasi-linéaire	249
D	Formulation de l'EB-RSM	253
E	Le tenseur de rotation effective d'Astarita	255
E.1	Introduction du tenseur	255
E.2	Application aux modèles au second ordre algébriques	257
F	Modèle de Smagorinsky dynamique dans un référentiel quelconque	261
G	Définition alternative de l'échelle des structures SEM	263
H	Propositions de forçages linéaires couplés vitesse-température	267
I	Publications	271
I.1	Toward zonal hybrid RANS/LES modelling of turbulence in rotating flows	271
I.2	Anisotropic linear forcing for synthetic turbulence generation	283
	Bibliographie	291

Nomenclature

Opérateurs

$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	produit tensoriel de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$
$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	produit vectoriel de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	produit scalaire de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$
$a * b$	produit de convolution de a et b
$\ \mathbf{a}\ $	norme de $\mathbf{a}$ ($= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$)
$\frac{\partial a}{\partial t}$	dérivée partielle temporelle de a
$\frac{\partial a}{\partial x_i}$	dérivée partielle spatiale dans la direction i de a
$\frac{d\mathcal{A}}{dt}$	dérivée temporelle de l'intégrale $\mathcal{A}$
$\frac{Da}{Dt}$	dérivée matérielle de a ($= \partial a / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla a$)
$\dot{a}$	dérivée matérielle de a (idem Da/Dt)
∇a	gradient de a
$\nabla^2 a$	laplacien de a
$\det \mathbf{A}$	déterminant de la matrice $\mathbf{A}$
$\bar{a}$	moyenne statistique de la v.a. a
$\langle a \rangle$	moyenne statistique de la v.a. a (idem $\bar{a}$)
a'	fluctuation statistique de la v.a. a ($= a - \bar{a}$)
$\tilde{a}$	filtrage LES de la variable a
	adimensionnement de la variable a
a''	fluctuation de sous-maille de la variable a ($= a - \tilde{a}$)
$\hat{a}$	filtrage test de la variable a (modèle de Smagorinsky dynamique)
	transformée de fourier de a
$\widehat{\widehat{a}}$	filtrage double de la variable a (modèle de Smagorinsky dynamique)

Indices, exposants

a_i	composante i du vecteur $\mathbf{a}$
A_{ij}	composante i, j du tenseur d'ordre deux $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^T$	matrice transposée de $\mathbf{A}$
a^*	complexe conjugué de a
a, a^*	grandeur tensorielle a perçue dans le référentiel $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^*$
a^+	variable a adimensionnée par ν et u_τ

$a^{+(p)}, a^{+(s)}$	variable a adimensionnée par ν et $u_\tau^{(p)}, u_\tau^{(s)}$
a_r	partie résolue du moment d'ordre deux a (LES)
$a^\dagger$	variable cible d'un forçage
a^*	variable issue d'un calcul LES de canal périodique adimensionnement de la variable a
a^{in}	moment a ; données d'entrée SEM

Symboles latins

A	coefficient du forçage linéaire isotrope
A_{ij}	matrice de coefficients du forçage linéaire anisotrope
b_{ij}	tenseur d'anisotropie (équation 4.13)
B_i	coefficients du forçage linéaire anisotrope
Br	nombre de Bradshaw (équation 3.47)
$\mathbf{C}$	tenseur des tensions croisées (équation 4.72)
C_K	constante de Kolmogorov (≈ 1.5)
C_κ	constante de Kármán (≈ 0.41)
C_μ	coefficient de viscosité turbulente
C_s	constante de Smagorinsky
C_d	constante de Smagorinsky dynamique
C_f	coefficient de frottement (équation 4.28)
$\text{CFL}_{\max}$	nombre de Courant maximal
D_{ij}^T, D^T	terme de diffusion turbulente (équations 2.19, 2.20)
D_{ij}^ν, D^ν	terme de diffusion visqueuse (équations 2.19, 2.20)
$\mathbf{e}_i$	i -ème vecteur de base
$e_{k_r}, e_{\overline{u'v'}_r}$	fonction d'erreur sur $k_r, \overline{u'v'}_r$ (équation 6.13)
$e_{\overline{\theta^2}_r}, e_{\overline{\theta u'}_r}, e_{\overline{\theta v'}_r}$	fonction d'erreur sur $\overline{\theta^2}_r, \overline{\theta u'}_r, \overline{\theta v'}_r$ (équation 6.27)
$E(\kappa)$	spectre d'énergie turbulente en module
$\mathbf{f}$	force en volume
	terme source de forçage dynamique
$\mathbf{f}^u$	terme source de forçage dynamique
G	noyau du filtre LES
G_i	noyau du filtre dans la direction i
G_{ij}	terme de production de Coriolis (équation 3.34)
$\mathcal{G}_T$	filtre temporel gaussien de taille T
h	demi-hauteur d'un canal plan
h^θ	terme source de forçage thermique
II_b, III_b	deuxième, troisième invariant du tenseur d'anisotropie, $II_b = b_{ij}b_{ij}, III_b = b_{ij}b_{jk}b_{ki}$
$\mathbb{I}_b, \mathbb{I}\mathbb{I}_b$	deuxième, troisième invariant principal du tenseur d'anisotropie (équation 7.59)
i	complexe imaginaire pure, $i^2 = -1$
k	énergie cinétique turbulente ($= \frac{1}{2}\overline{u_i'^2}$)
k_0	énergie turbulente résolue initiale

k_τ	énergie cinétique de sous-maille
K_i	flux thermiques de sous-maille (équation 6.24)
$[K]$	dimension de température
L	échelle de longueur
$\mathbf{L}$	tenseur de Léonard (équation 4.71)
L_x, L_y, L_z	taille du maillage d'un canal dans les direction x, y, z
$\mathcal{L}_{ij}$	tenseur de Léonard du filtrage test (équation 4.96)
L_{ij}^l	échelle de longueur intégrale (équation 2.22)
$L_\parallel, L_\perp$	échelle intégrale longitudinale, transversale en THI (page 263)
L_x^f, L_y^f	longueur de la zone de forçage dans la direction x, y
$[L]$	dimension d'espace
M_{ij}	voir équation (4.98)
$[M]$	dimension de masse
$\mathbf{n}$	normale extérieure
N_x, N_y, N_z	nombres de nœuds de maillage dans les directions x, y, z
Nu	nombre de Nusselt (équation 6.26)
p	pression hydrostatique
P	terme de production d'énergie turbulente (équation 2.20)
P_{ij}	terme de production de tensions de Reynolds (équation 2.19) projecteur sur le plan orthogonal à $\boldsymbol{\kappa}$ (équation 2.43)
P_{ij}^f, P^f	terme de production par forçage (équations 7.4, 7.58)
$\mathcal{P}$	matrice de changement de base
p_e	pression effective (pression hydrostatique plus des potentiels)
p_T	pression dynamique (pression effective plus des contraintes normales)
Pr	nombre de Pandtl ($= \nu/\alpha$)
q	coefficient de forçage thermique
$\mathbf{Q}$	matrice orthogonale d'un changement de référentiel (équation 3.1)
$\mathbf{R}$	tenseur de Reynolds tenseur de Reynolds de sous-maille (équation 4.73)
R_i	coefficients de forçage thermique
$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	tenseur des corrélation double en deux points (équation 2.1)
$\mathcal{R}, \mathcal{R}^*$	référentiels d'étude
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
Re	nombre de Reynolds ($= UL/\nu$)
Re_b	nombre de Reynolds débitant dans un canal ($= U_b h/\nu$)
Ro	nombre de rotation ($= 2\Omega L/U$)
Ro_b	nombre de rotation débitant dans un canal ($= 2\Omega h/U_b$)
s	coefficient de forçage thermique
$\mathbf{S}$	tenseur des taux de déformation, $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$
$\bar{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{S}}$	tenseur des taux de déformation moyenne, filtrée
t	temps
T	température échelle de temps
$T(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$	terme de transfert triadique (équation 2.49)

$T(\kappa)$	terme de transfert en THI (équation 2.53)
T_{ij}	tensions de sous-« filtre double » (équation 4.94)
T_τ	échelle de température basée sur la vitesse de frottement (équation B.43)
T_b	échelle de température basée sur la vitesse débitante (équation B.44)
$[T]$	dimension de temps
$\mathbf{u}$	vecteur vitesse
u	première composante du vecteur vitesse
U	échelle de vitesse vitesse longitudinale moyenne dans un canal
U_b	vitesse débitante moyenne dans un canal (équation B.22)
u_τ	vitesse de frottement à la paroi dans un canal (équation B.14)
$u_\tau^{(p)}, u_\tau^{(p)}$	vitesse de frottement à la paroi en pression, en dépression dans un canal en rotation
v	deuxième composante du vecteur vitesse
$\mathcal{V}$	volume de contrôle
w	troisième composante du vecteur vitesse
$\mathbf{W}$	tenseur de vorticité, $W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$
$\overline{\mathbf{W}}, \widetilde{\mathbf{W}}$	tenseur de vorticité moyenne, filtrée
$\mathbf{W}^a$	tenseur de vorticité absolue (équation 4.38)
$\mathbf{W}^A$	tenseur de vorticité objective d'Astarita (équation E.4)
$\mathbf{x}$	vecteur position
x	première coordonnée coordonnée longitudinale dans un canal
y	deuxième coordonnée coordonnée normale à la paroi dans un canal
y_1	ordonnée du nœud de maillage le plus proche de la paroi
z	troisième coordonnée coordonnée transverse dans un canal

Symboles grecs

α	coefficient de diffusivité thermique coefficient de pondération elliptique (modèle EB-RSM)
δ	épaisseur de la couche limite
δ_{ij}	symbole de Kronecker ($= 0$ si $i \neq j$, 1 sinon)
Δ	taille caractéristique des mailles
Δ_i	pas d'espace dans la directions i
$\widetilde{\Delta}$	taille du filtre LES
$\widetilde{\Delta}_i$	taille du filtre LES dans la direction i
$\widehat{\Delta}$	taille du filtre test (modèle de Smagorinsky dynamique)
$\widehat{\Delta}$	taille du filtre double (modèle de Smagorinsky dynamique)
Δt	pas de temps
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	pas d'espace dans les directions x, y, z
$\Delta y_{\min}, \Delta y_{\max}$	pas d'espace de la maille la plus proche, la plus éloignée de la paroi

	dans la direction normale à la paroi
ϵ_{ijk}	tenseur de permutation
$\varepsilon_{ij}, \varepsilon$	terme de dissipation (équations 2.19, 2.20)
ϕ_{ij}	corrélacion pression–déformation (équation 2.19)
$\phi_{ij}^{(1)}, \phi_{ij}^{(2)}$	partie rapide, lente de la corrélacion pression–déformation (équation 4.17)
η	deuxième invariant du tenseur d’anisotropie (équation 7.65)
$\boldsymbol{\kappa}$	vecteur d’onde
κ	module de $\boldsymbol{\kappa}$
κ_c	nombre d’onde de coupure
μ	viscosité dynamique
ν	viscosité cinématique ($= \mu/\rho$)
ν_t	viscosité turbulente
ν_{sgs}	viscosité de sous-maille
θ	fluctuation statistique de la v.a. T ($= T - \overline{T}$)
ρ	masse volumique
σ	fréquence
	échelle caractéristique des structures SEM
σ_i	échelle caractéristique des structures synthétiques SEM dans la direction i
$\boldsymbol{\tau}$	tenseur de sous-maille
$\boldsymbol{\tau}^d$	partie déviatrice du tenseur de sous-maille (équation 4.74)
$\boldsymbol{\omega}$	vecteur vorticité ($= \nabla \wedge \mathbf{u}$)
ω	norme du vecteur vorticité
	fréquence caractéristique de la turbulence (équation 4.56)
$\boldsymbol{\Omega}$	vecteur de rotation du référentiel d’étude par rapport au référentiel galiléen
Ω	norme de $\boldsymbol{\Omega}$
ξ	troisième invariant du tenseur d’anisotropie (équation 7.65)

Abréviations

ALF	<i>Anisotropic Linear Forcing</i>
c.c.	complexe conjugué
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
DNS	<i>Direct Numerical Simulation</i>
LES	<i>Large Eddy Simulation</i>
RANS	<i>Reynolds Averaged Navier–Stokes</i>
SEM	<i>Synthetic Eddy Method</i>
ssi	si et seulement si
THI	turbulence homogène isotrope
v.a.	variable aléatoire

Sauf indication contraire, la convention de sommation des indices muets est adoptée dans la suite du manuscrit.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction générale

La turbulence au sein du mouvement d'un fluide est un phénomène physique familier à tout un chacun, observé dans la vie de tous les jours. Le phénomène est très bien décrit par une équation différentielle célèbre, l'équation de Navier–Stokes, qui procède du principe fondamental de la dynamique de Newton et de la juste identification des forces s'exerçant sur un fluide au cours de son mouvement. Malgré les innombrables observations et l'existence d'un modèle mathématique fiable et reconnu, la turbulence est en fait si complexe qu'elle laisse perplexes les physiciens les plus illustres. On peine d'ailleurs à lui donner une définition universelle, tant elle revêt des formes variées. Pour fixer les idées du lecteur profane, parlons ici de mouvements fluides dans lesquels coexistent sur une large gamme d'échelles le désordre et la cohérence, la cohérence observée à une échelle correspondant souvent au désordre pour une échelle supérieure.

Les écoulements turbulents interviennent très largement dans l'industrie. Parfois, on cherche à exploiter cette turbulence, pour améliorer des procédés de mélange par exemple, d'autre fois, à la contrôler, comme c'est le cas pour éviter des nuisances sonores. Le plus souvent, on souhaite simplement caractériser la turbulence d'un écoulement, pour comprendre les sollicitations mécaniques qu'elle induit par exemple. Dans tous les cas, l'industriel cherche à se doter d'outils prédictifs du comportement des mouvements fluides auxquels il est confronté.

À ce titre, la simulation numérique des écoulements fait l'objet d'un fort engouement. En intégrant numériquement l'équation de Navier–Stokes dans l'espace et dans le temps, on peut observer le mouvement d'un fluide dans ses moindres détails. Cependant, lorsque l'écoulement est turbulent, le mouvement se répartit continûment sur une si large gamme d'échelles, toutes indispensables à prendre en compte, que les ressources informatiques nécessaires à l'intégration numérique directe (DNS¹) de l'équation de Navier–Stokes sont colossales. On ne peut dire aujourd'hui si la simulation numérique directe de toutes les échelles d'un écoulement turbulent sera un jour compatible avec les ressources et délais industriels.

L'ingénieur doit-il pour autant se passer de simulation numérique en mécanique des fluides, et croiser les doigts patiemment dans l'attente d'une éventuelle rupture technologique en matière de traitement de l'information ? On peut en douter, au regard de l'ampleur des défis industriels et environnementaux de ce siècle. D'autant qu'une autre voie, celle de la modélisation de la turbulence, offre aujourd'hui des alternatives intéressantes et des progrès prometteurs.

1. *Direct Numerical Simulation*

Cette approche consiste à ne décrire numériquement qu’une partie du « contenu » d’un écoulement turbulent. La partie non résolue de la turbulence impose alors à la partie résolue des contraintes de turbulence, qui s’ajoutent aux contraintes hydrodynamiques. Ces contraintes turbulentes doivent être prises en compte, et pour arriver *in fine* à un système d’équations mathématiques intégrables numériquement, elles doivent être exprimées en fonction de la part résolue de l’écoulement. C’est l’objectif ambitieux, insoluble exactement, de la modélisation de la turbulence.

Idéalement, on souhaiterait un modèle universel, valide pour n’importe quel écoulement. Le nombre de degrés de liberté de la solution modélisée devrait être drastiquement inférieur à celui d’un écoulement turbulent entièrement résolu (DNS), de manière à être en phase avec les ressources informatiques disponibles. Mieux encore, un même modèle pourrait s’adapter à différents niveaux de résolution, en fonction des choix de l’utilisateur – eux-même fonctions des ressources dont il dispose – et que dans tous les cas la solution restituée par le modèle soit pertinente et définie sans ambiguïté.

Aujourd’hui, un tel modèle parfaitement général n’existe pas. Au contraire, une multitude de modèles différents sont proposés chaque année. Dans les cas les moins favorables, la validation des modèles est très réduite et les différences proviennent principalement de la calibration *a posteriori* de constantes empiriques. Cela suscite scepticisme et dépit des autres communautés de la mécanique des fluides, dépendantes d’une bonne prise en compte de la turbulence mais ne pouvant s’approprier un arsenal de modèle aussi large. Dans d’autres cas en revanche, le modèle procède d’une démarche rationnelle où les hypothèses de modélisation sont ciblées et bien définies. Associés à une large validation, ces modèles peuvent rejoindre une « boîte à outils » constituée d’un nombre raisonnable de modèles dont les atouts et les faiblesses sont bien cernés et dans laquelle, dans l’attente d’un modèle ultime, l’ingénieur pourra piocher selon ses besoins, comme il choisirait son instrumentation pour une expérience physique.

C’est donc à la fois le souci de généralité et la rigueur scientifique mais également une application industrielle visée à moyen terme qui ont orienté les travaux de validation et de modélisation reportés dans ce mémoire de thèse.

1.2 Contexte industriel

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d’un co-encadrement CIFRE entre le Laboratoire d’Études Aérodynamiques (aujourd’hui intégré à l’institut PPRIME) et la division Recherche et Développement de l’entreprise EDF. Elle s’est inscrite dans un projet visant à caractériser le fonctionnement et la durée de vie des Groupes Moto-Pompe Primaires (GMPP) des centrales de production d’électricité d’origine nucléaire du groupe EDF.

Les GMPP sont un organe essentiel des centrales nucléaires. Ils ont pour fonction d’assurer une circulation d’eau continue et régulière dans le circuit primaire qui transporte la chaleur du combustible vers le générateur de vapeur. La vapeur transite ensuite par le circuit secondaire jusqu’à la turbine, qui convertit l’énergie cinétique et potentielle de la vapeur en énergie mécanique. Cette énergie mécanique est enfin transformée en électricité par un alternateur relié au réseau.

Dans le circuit primaire, la température de l’eau est d’environ trois cents degrés celsius et la pression de cent cinquante cinq bars. Une série de joints dynamiques assurent l’étanchéité du circuit au niveau de l’arbre du GMPP. Le dispositif d’étanchéité opérant uniquement à basse température (environ cinquante degrés), son bon fonctionnement est assuré par deux systèmes indépendants : un circuit d’injection directe d’eau froide faisant barrage à la remontée d’eau primaire et un circuit auxiliaire d’eau froide alimentant un échangeur nommé barrière thermique. À proximité des joints d’arbre, les échanges thermiques dans

le fluide sont donc importants, des zones de mélange entre une eau chaude et une eau plus froide apparaissent et la rotation de l'arbre et de la roue de la pompe ont une grande influence.

Pour simuler numériquement les écoulements au niveau de la barrière thermique, organe très peu instrumenté en pratique, le modèle de turbulence doit correctement prendre en compte les effets de la rotation de l'arbre et de la roue sur la turbulence. La modélisation des flux thermiques turbulents doit également être réaliste. Alors que dans les zones de mélange, la convection est essentiellement forcée, c'est-à-dire que la température peut être considérée comme un scalaire transporté passif, d'autres zones de la barrière thermique présentent des boucles de convection naturelle, où les gradients thermiques sont moteurs de l'écoulement. Les mélanges eau chaude/eau froide sont stationnaires et leur fréquence dépend fortement de la fréquence de rotation du rotor. Celle-ci est néanmoins altérée par plusieurs singularités géométriques. Le nombre de Reynolds, qui caractérise l'intensité de la turbulence, varie de quatre ordres de grandeur suivant les endroits et atteint 10^6 – 10^7 à proximité de l'arbre du rotor.

Suite à des expertises, des fissures génériques ont été découvertes sur certains composants sensibles du GMPP qui sont globalement soumis à des sollicitations importantes et complexes. Il est donc important pour EDF d'estimer au mieux la nocivité de ces fissures, par une meilleure connaissance des chargements thermiques et mécaniques en jeu. Pour cela, il serait intéressant de réaliser des simulations numériques globales de l'ensemble de l'environnement fluide du GMPP. Dans cette optique, l'objectif industriel de cette thèse est de proposer une stratégie de modélisation de la turbulence en mesure de reproduire l'ensemble des phénomènes physiques en présence dans le GMPP et dont le coût de calcul ne soit pas prohibitif. Le logiciel de simulation est le logiciel *Code_Saturne* développé par EDF R&D depuis 1998 (Archambeau *et al.*, 2004).²

1.3 Contexte scientifique

Aujourd'hui, quatre stratégies principales de modélisation de la turbulence peuvent être envisagées.

Une première grande famille de modèles est celle des modélisations statistiques, appelées RANS³. Elle est basée sur un formalisme issu des travaux de O. Reynolds dans lequel les variables de l'écoulement, la vitesse et la pression pour un écoulement incompressible, sont considérées comme des variables aléatoires. L'approche RANS vise à résoudre et/ou modéliser les moments statistiques de ces variables aléatoires, en particulier les plus simples : la vitesse et la pression moyenne, c'est-à-dire celles qu'on obtiendrait en moyenne en un point si l'on répétait un grand nombre de fois l'expérience. D'autres statistiques d'ordre plus élevé comme l'énergie détenue par les fluctuations autour de la moyenne ou un temps caractéristique de leur durée de vie peuvent également être rendues.

L'approche RANS est assez mature scientifiquement. Les difficultés liées à l'influence des parois solides sur la turbulence sont en passe d'être levées, grâce à l'augmentation des moyens de calcul et au développement de modélisation reproduisant correctement les spécificités de la turbulence de paroi. La validation des modèles pour les écoulements en rotation est un temps passé au second plan, mais l'analyse des solutions d'équilibre faible des modèles a permis d'améliorer cet état des choses. La modélisation des flux thermiques

2. *Code_Saturne* est un code de calcul utilisant une méthode de volumes finis colocalisés pour résoudre les équations de Navier–Stokes (plus terme source) sur des maillages non structurés. Le logiciel est distribué gratuitement en *open source* (www.code-saturne.org). Un aperçu des méthodes numériques utilisées dans le code est donné en annexe A.

3. *Reynolds Averaged Navier–Stokes*

turbulents est moins largement abordée dans la littérature.

L'avantage de l'approche RANS est que le coût numérique des simulations n'est pas excessif. Ainsi, cette approche est le « standard » industriel actuel. Son principal défaut est inhérent à son formalisme ; il réside dans son inaptitude à reproduire les structures cohérentes instationnaires de l'écoulement turbulent.

Une seconde famille de modèles est appelée Simulation des Grandes Échelles (LES⁴). Cette approche vise à ne résoudre que les plus grandes structures de l'écoulement. Elle permet ainsi d'accéder à une description instationnaire très riche de la turbulence. La partie modélisée de l'écoulement – les petites échelles – détient assez peu d'énergie, d'où une influence plus modérée des modèles, par rapport à l'approche RANS. En revanche l'incidence des schémas numériques devient plus importante. Notamment l'influence du maillage est capitale, en particulier en proche paroi. Plus l'écoulement est turbulent, c'est-à-dire plus le nombre de Reynolds est grand, plus le maillage doit être raffiné, ce qui augmente le coût numérique des simulations. Des recommandations existent pour le maillage requis en proche paroi mais elles dépendent du schéma numérique.

Malgré les attraits d'une description aussi riche de l'écoulement, le principal défaut de la LES est son coût numérique excessif, hors de portée pour beaucoup de problèmes industriels à l'heure actuelle. La sensibilité de la solution à la qualité du maillage (la forme des mailles) rend également son application à des géométries complexes délicate.

Une troisième catégorie de modèles est constituée des méthodes hybrides RANS/LES globales. Ces méthodes visent à proposer, grâce à un modèle unique, une description tantôt statistique, tantôt « grandes échelles » de l'écoulement. Ces méthodes sont très prometteuses mais souffrent à l'heure actuelle d'un manque de maturité d'un point de vue industriel. Le formalisme sur lequel elles reposent n'est pas toujours très clair, de sorte que dans certaines zones de l'écoulement, on peine à définir exactement ce que l'on résout et ce que l'on modélise.

Enfin, une partie de la recherche en modélisation de la turbulence est consacrée au développement de méthodes de couplage RANS/LES zonal. Ces méthodes visent à faire interagir plusieurs simulations séparées, les unes adoptant une modélisation statistique RANS, les autres décrivant l'écoulement par LES. Cette approche est dédiée aux applications où les structures cohérentes instationnaires de la turbulence sont intéressantes à capturer uniquement dans une zone réduite du domaine fluide. Le but du couplage RANS/LES zonal est alors d'« embarquer » une simulation LES fine dans un calcul global RANS moins détaillé. Cela peut permettre de traiter, avec un coût numérique accessible industriellement, des applications où le domaine fluide à simuler est très étendu ou pour lesquelles l'écoulement varie sur des échelles de temps longues. Le couplage RANS/LES porte sur l'interface entre les différents domaines, où les moyens de faire communiquer les descriptions RANS et LES, de significations physiques si distinctes, doivent être mis en œuvre.

1.4 Démarche proposée

En fonction de l'état de l'art de la modélisation de la turbulence, très brièvement résumé ci-dessus, et de l'application industrielle visée, les travaux de thèse se sont orientés sur la stratégie couplée RANS/LES zonale. Cette modélisation pourrait être à même de reproduire correctement et dans un temps de calcul acceptable les phénomènes thermiques complexes dans la barrière thermique des groupes moto-pompe primaires. La LES pourrait être utilisée dans certaines zones de la barrière thermique où les mélanges eau chaude/eau froide ont lieu. Cette description instationnaire des structures tridimensionnelles turbulentes rendrait alors compte précisément des extréma chauds et froids et de leur fréquence

4. *Large Eddy Simulation*

d'alternance par exemple. Le calcul RANS environnant permettrait quant à lui de prendre en compte les paramètres globaux liés à la rotation de l'arbre et de la roue, dans des zones où le nombre de Reynolds, de l'ordre de 10^6 – 10^7 , est trop élevé pour réaliser une LES dans un temps de calcul acceptable. L'approche RANS/LES zonale permet en outre de choisir explicitement et sans ambiguïté la position de l'interface entre le domaine RANS et le domaine LES.

En ce qui concerne le logiciel *Code_Saturne*, la stratégie couplée RANS/LES zonale est accessible car le logiciel est doté de fonctionnalités permettant de coupler plusieurs simulations, grâce à un repérage géométrique des faces de bord et des cellules constituant l'interface entre les différents domaines. Les modèles de couplage RANS/LES peuvent être appliqués à l'interface sur la base de ces fonctionnalités.

En plus d'un couplage efficace entre les domaines, le succès d'une modélisation RANS/LES zonale dépend de l'aptitude du modèle RANS et du modèle LES à reproduire correctement les phénomènes physiques en présence dans leur domaine respectif. Pour une application dans une pompe primaire, il convient donc de choisir des modèles RANS et LES appropriés aux écoulements dont la dynamique est dominée par les effets de rotation et de courbure, et dont la thermique présente différents régimes de convection (forcée, mixte et naturelle).

Dans cette thèse, on propose de réaliser d'abord une étude comparative de nombreux modèles de turbulence pour les écoulements en rotation, suivant les deux approches RANS et LES. Le cas test de référence est celui d'un canal en rotation transverse. Ce cas test de géométrie simple est néanmoins relativement représentatif d'un canal interaubes de turbomachine radiale comme une pompe centrifuge. Il est particulièrement discriminant pour les modèle RANS, car la rotation du canal n'a pas d'effet direct sur l'écoulement moyen mais uniquement indirect par l'intermédiaire des contraintes turbulentes. Il est également intéressant pour la LES car cet écoulement présente d'importants tourbillons longitudinaux. Les effets de la courbure des lignes de courant sur la turbulence peuvent-être appréhendés indirectement par ce cas test en examinant la consistance des modèles par changement de référentiel, ce que l'on fera systématiquement.

La modélisation RANS des flux thermiques turbulents n'est pas envisagée dans cette thèse. Elle fait actuellement l'objet d'une thèse CIFRE PPRIME/EDF R&D spécifique. Quelques simulations LES d'écoulements de canaux en convection forcée sont en revanche présentées.

Le second axe largement développé dans cette thèse concerne le couplage RANS/LES zonal spécifiquement, c'est-à-dire les moyens de faire interagir le modèle RANS et le modèle LES à l'interface entre les deux domaines. Deux approches sont développées : le couplage aux faces de bord par conditions aux limites et le couplage volumique par terme source. Dans les deux cas, le couplage est traité à la fois pour la dynamique et pour la thermique. On se concentre principalement sur la configuration critique où le modèle RANS est en amont et le modèle LES en aval de l'interface. Le couplage volumique sur une interface tangentielle à l'écoulement, entre un modèle RANS situé en proche paroi et un modèle LES est également envisagé. Les cas de validation sont des écoulements de canal plan, chauffé ou non et avec ou sans rotation d'ensemble du canal.

Concernant le couplage aux faces de bord, c'est une approche basée sur la méthode des structures synthétiques (SEM⁵) récemment proposée par Jarrin *et al.* (2006) qui a été retenue, en raison de ses résultats intéressants, y compris dans un contexte couplé RANS/LES zonal (Jarrin *et al.*, 2009). Concernant le couplage volumique par terme source, une nouvelle méthode de forçage est proposée. La méthode, nommée Forçage Linéaire

Anisotrope (ALF), pourrait se substituer ou être associée à la SEM selon les cas. Sur les cas de validation envisagés, elle montre des résultats très prometteurs.

1.5 Organisation du manuscrit

Le manuscrit est divisé en deux parties principales : la première traite de la description et de la modélisation des écoulements turbulents en rotation et la seconde du couplage RANS/LES zonal sous les aspects dynamiques et thermiques.

La première partie est introduite par un rappel de la phénoménologie de base des écoulements turbulents et des outils permettant son étude (chapitre 2). Puis les principaux phénomènes physiques que l'on trouve dans les écoulements en rotation sont décrits au chapitre 3. Ce sont ceux qu'un modèle de turbulence doit être en mesure de reproduire. On verra que cette phénoménologie est aujourd'hui assez bien expliquée par des études théoriques sur l'équation de Navier–Stokes en référentiel tournant, modèle de base pour l'étude des écoulements en rotation.

Le chapitre 4 est consacré à la modélisation de ces écoulements, suivant les deux approches « historiques » RANS et LES. Le chapitre commence par un rappel des contraintes physico-mathématiques nécessaires ou non pour une modélisation générale et réaliste des écoulements courbes ou en rotation. Puis on s'arrête sur l'approche RANS. L'avantage intrinsèque de la fermeture au second ordre des équations de Reynolds est confirmé par les calculs mais on compare également plusieurs propositions qui ont été faites dans la littérature pour combler les lacunes des modèles de viscosité turbulente pour les écoulements en rotation. Concernant la LES, plusieurs modèles populaires sont comparés sur le cas test du canal tournant, tant du point de vue statistique que des structures cohérentes que l'on trouve dans l'écoulement. L'influence du modèle de sous-maille est plus importante à cet égard. On s'intéresse également aux contraintes de maillage qu'impose spécifiquement la rotation du canal.

La seconde partie du manuscrit commence par une revue bibliographique des méthodes hybrides RANS/LES, globales ou zonales (chapitre 5). Puis, le chapitre 6 traite du couplage zonal aux faces de bord par la méthode SEM (Jarrin *et al.*, 2006, 2009). On montre notamment dans quelle mesure le couplage tire partie de l'estimation anisotrope des contraintes turbulentes fournie par un modèle de fermeture au second ordre dans le domaine RANS. Des simulations chaînées RANS/LES dans un canal en rotation montrent que la SEM permet un développement satisfaisant de la turbulence dans le domaine LES, malgré l'instabilité Coriolis–cisaillement qui amortit la turbulence dans une large partie du canal. Ces simulations confirment également que la fermeture au second ordre doit être préférée aux modèles de viscosité turbulente corrigée pour la rotation dans le domaine RANS. La méthode SEM est ensuite généralisée pour la génération de fluctuations de température à l'entrée du domaine LES. La généralisation (T–SEM), simple et fidèle au modèle de base, permet de reproduire des fluctuations de température cohérentes en entrée et présentant une variance et des flux thermiques turbulents cibles. La validation de cette méthode dans un canal en convection forcée montre que la distance nécessaire à l'obtention d'une turbulence thermique pleinement développée est sensiblement réduite par rapport à la méthode SEM sans fluctuations thermiques. Une application de couplage à un modèle RANS thermique est également présentée.

Enfin le chapitre 7 traite du couplage RANS/LES zonal volumique par force de rappel. Une nouvelle force de rappel (ALF) est proposée. Ce forçage est principalement une généralisation anisotrope d'un forçage linéaire isotrope introduit par Lundgren (2003). Dans le contexte du couplage RANS/LES zonal, elle généralise également plusieurs forçages proposés dans la littérature. On montre notamment sur une turbulence homogène que le forçage

ALF permet d'imposer toutes les anisotropies possibles de la turbulence. Le forçage est paramétré dans un canal plan avec ou sans rotation. On présente des applications de couplage RANS/LES zonal qui montrent que le forçage ALF sur une courte zone de recouvrement peut être une alternative intéressante à la SEM ou être associé à elle pour améliorer le développement des fluctuations turbulentes dans le domaine LES. La faisabilité d'un forçage tangentiel en proche paroi est également démontrée. Le chapitre 7 se termine par une généralisation du forçage ALF pour la thermique (TLF) et sa validation dans un canal en convection forcée.

Le manuscrit est complété par quelques remarques de conclusion et plusieurs annexes.

Première partie

Description et modélisation des écoulements turbulents en rotation

Chapitre 2

Introduction à l'étude de la turbulence

Pour appréhender l'étude de la turbulence, on peut commencer par observer une manifestation du phénomène (figure 2.1). Alors que pour un écoulement laminaire, le déplacement des particules fluides se fait de manière ordonné, suivant des trajectoires bien régulières, un certain *désordre* apparent règne au sein d'un écoulement turbulent. Ce brouillage de l'écoulement n'est pourtant pas total puisqu'il n'empêche pas la formation de *structures* relativement *cohérentes*, ou tourbillons, de tailles variables. Cette *large gamme d'échelles* impliquées est d'ailleurs l'une des caractéristiques principales de la turbulence.

En plus de ces caractéristiques directement observables, les outils développés pour l'étude de la turbulence, et brièvement présentés dans ce chapitre, ont permis de donner la phénoménologie suivante : la turbulence est créée ou *produite* aux *grandes échelles* du mouvement. Ces échelles sont celles qui détiennent la plus grande partie de l'énergie turbulente. À l'inverse, la turbulence est détruite ou *dissipée* en chaleur aux plus *petites échelles* du mouvement, par frottement visqueux des particules fluides entre elles. Entre ces deux mécanismes, l'énergie turbulente transite de proche en proche entre toutes les échelles de l'écoulement par le biais de la *cascade d'énergie* (L.F Richardson, A.N. Kolmogorov).

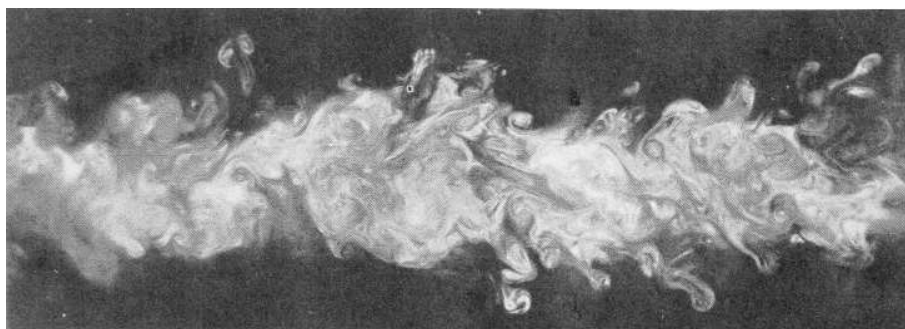


FIGURE 2.1 – Écoulement turbulent en aval d'un cylindre (d'après Dyke, 1982)

Le comportement d'apparence aléatoire à l'échelle macroscopique d'un système (l'écoulement turbulent) est inédit en mécanique. Il a conduit au développement d'un formalisme statistique pour l'étude du phénomène (O. Reynolds). Le modèle déterministe classique de la mécanique des fluides, les équations de Navier–Stokes, est conservé mais les variables de l'écoulement, vitesse et pression principalement, sont décrites comme des variables aléatoires. C'est le caractère chaotique du système, c'est-à-dire dont les solutions sont extrêmement sensibles à des variations infinitésimales, incontrôlables d'un point de vue pratique,

des conditions limites et initiales, qui justifie de décrire les variables de l'écoulement comme des variables aléatoires.

Du point de vue statistique, connaître la turbulence c'est savoir caractériser les moments statistiques de vitesse et de pression. En anticipant sur les notations données plus bas dans ce chapitre, introduisons simplement le tenseur des corrélations centrées de vitesse fluctuante en deux points :

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{u'_i(\mathbf{x})u'_j(\mathbf{y})}. \quad (2.1)$$

Si l'on connaissait une expression générale pour ce tenseur, le problème de la turbulence pour les applications industrielles serait assez largement résolu ! Ceci n'étant pas le cas, les études sur la turbulence se concentrent souvent sur certains cas plus simples, d'une turbulence idéalisée. Elles peuvent également chercher à caractériser les échelles de longueur et de temps du mouvement turbulent ou encore l'énergie contenue par les différentes échelles.

L'objet de ce chapitre est d'introduire les outils et notions qui seront utilisés dans le manuscrit. Ce faisant, il constitue une (très) courte introduction à l'étude de la turbulence, où la phénoménologie de base donnée ci-dessus est précisée, et qui pourra utilement être complétée par des cours dédiés comme ceux de Chassaing (2000) ou Sagaut (2007) dont la présente rédaction s'est inspirée. Les aspects modélisations ne sont pas abordés (ils apparaîtront au chapitre 4).

Dans un premier temps, les équations de Navier–Stokes pour les écoulements incompressibles sont introduites. Puis on présente succinctement l'approche statistique pour l'étude de la turbulence. Le cadre d'étude des turbulences « idéalisées » est présenté dans un troisième temps et enfin quelques éléments sur l'approche spectrale pour la description de tels écoulements sont donnés.

2.1 Équations de Navier–Stokes incompressible

Pour décrire le mouvement macroscopique d'un fluide, comme de beaucoup d'autres corps, on peut en général utiliser le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton ou théorème de la quantité de mouvement). Ce principe postule que dans un référentiel galiléen, la variation par unité de temps de la quantité de mouvement $m\mathbf{u}$ d'un corps (m désigne la masse du corps et $\mathbf{u}$ sa vitesse) est égale à la somme des forces s'exerçant sur celui-ci. Appliqué à un volume fluide $\mathcal{V}$ de frontière $\mathcal{S}$, ce principe s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u} dv = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} dv + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (2.2)$$

où dv est un volume élémentaire et $d\sigma$ une surface élémentaire. $\mathbf{f}$ désigne l'ensemble des forces en volume par unité de masse qui s'exercent sur le fluide (la gravité par exemple). Le tenseur $\boldsymbol{\Sigma}$ contient l'ensemble des contraintes s'exerçant sur l'élément de surface $d\sigma$. L'intégrale de surface dans le membre de droite de (2.2) peut s'écrire sous la forme d'une intégrale volumique à l'aide du théorème d'Ostrogradsky. En utilisant en outre la formule de dérivation d'une intégrale, le bilan (2.2) peut s'écrire sous la forme locale (c'est-à-dire sans signe intégral) :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}. \quad (2.3)$$

Dans la suite, on considère qu'aucune force en volume n'agit sur le fluide : $\mathbf{f} = 0$. Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}$ peut pour sa part être divisé en une contribution isotrope qui s'exerce même en l'absence de mouvement (pression hydrostatique) et une contribution $\boldsymbol{\tau}^\mu$ liée au

frottement des couches de fluide entre elles au cours du mouvement : ce sont les contraintes de viscosité. On écrit alors :

$$\Sigma_{ij} = \tau_{ij}^\mu - p\delta_{ij}, \quad (2.4)$$

avec p la pression hydrostatique, et le bilan de quantité de mouvement devient :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^\mu. \quad (2.5)$$

Pris sous cette forme, le bilan de quantité de mouvement contient beaucoup plus d'inconnues que d'équations ; le système est ouvert. On modélise donc le tenseur des contraintes visqueuses. Ces contraintes ne se manifestent pas dans un fluide en translation uniforme ou en rotation uniforme. Elles sont donc liées aux déformations que subit le fluide. Ces déformations sont mesurées par le tenseur des taux de déformation $\mathbf{S}$ qui est la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse :

$$S_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.6)$$

Le modèle des fluides newtoniens, valable pour une grande variété de fluides et d'écoulements, considère une dépendance linéaire entre les contraintes visqueuses et la déformation, via le coefficient de viscosité dynamique μ :

$$\tau_{ij}^\mu = 2\mu S_{ij}. \quad (2.7)$$

La pression est toujours une inconnue du système ; on utilise alors le bilan de masse pour fermer le système. En ce sens, on peut voir la pression comme l'entité qui assure la conservation de la masse au cours du mouvement pour un écoulement incompressible. Sans apport extérieur de masse, le bilan de masse dans le volume fluide $\mathcal{V}$ s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{V}} \rho dv \right) = 0,$$

soit sous forme locale :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.8)$$

avec $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ la dérivée particulaire. Si l'écoulement est incompressible ($D\rho/Dt = 0$), la masse volumique est constante le long d'une trajectoire et l'équation de conservation de la masse traduit alors simplement la conservation du volume :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.9)$$

En utilisant le modèle des fluides newtoniens (2.7) et la condition d'incompressibilité du fluide (2.9), le bilan de quantité de mouvement prend la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.10)$$

avec $\nu = \mu/\rho$ la viscosité cinématique (en $m \cdot s^{-1}$). C'est l'équation de Navier–Stokes pour les écoulements incompressibles de fluides newtoniens.

2.2 Description statistique de la turbulence

Pour caractériser les moments statistiques des variables aléatoires $\mathbf{u}$ et p de l'écoulement, il est utile de décomposer celles-ci en une partie moyenne et une partie fluctuante :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \\ p &= \bar{p} + p'.\end{aligned}\tag{2.11}$$

La moyenne statistique d'une variable aléatoire ϕ est définie par :

$$\bar{\phi} = \int_{\mathbb{R}} x f_{\phi}(x) dx,$$

avec f_{ϕ} la fonction de densité de probabilité :

$$Prob(a \leq \phi < b) = \int_a^b f_{\phi}(x) dx.$$

Cette moyenne est asymptotiquement égale à une moyenne d'ensemble :

$$\bar{\phi} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi_n \right\},\tag{2.12}$$

avec $\{\phi_n\}$ un ensemble de réalisations de la variable aléatoire ϕ . Par définition, la partie fluctuante ϕ' est de moyenne nulle :

$$\bar{\phi'} = 0.$$

Dans la décomposition (2.11), dite décomposition de Reynolds, des variables $\mathbf{u}$ et p de l'écoulement, les parties fluctuantes $\mathbf{u}'$ et p' représentent le mouvement turbulent.

En introduisant cette décomposition dans l'équation de Navier-Stokes (2.10), puis en appliquant l'opérateur de moyenne à chaque terme¹, on obtient l'équation de Reynolds, ou équation RANS *Reynolds Averaged Navier-Stokes Equation*). Elle s'écrit pour la i ème composante de vitesse :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}).\tag{2.13}$$

C'est cette équation qui décrit la dynamique du mouvement moyen. Celle-ci est gouvernée par les mêmes mécanismes physiques que celle du mouvement instantané (advection du champ par lui-même, effort de pression, diffusion moléculaire) auxquels s'ajoute un effort supplémentaire. Cet effort fait apparaître le moment centré d'ordre deux de la vitesse $\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'$, qu'on appelle communément *tenseur de Reynolds*.

L'équation du mouvement fluctuant s'obtient en soustrayant l'équation du mouvement moyen (2.13) à celle du mouvement instantané (2.10). Elle s'écrit :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j - \bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}).\tag{2.14}$$

En ce qui concerne la contrainte d'incompressibilité, elle est valable pour le mouvement moyen comme pour le mouvement fluctuant :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0,\tag{2.15}$$

$$\text{et } \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0,\tag{2.16}$$

car l'opérateur de divergence est linéaire.

1. On ne rappelle pas ici les règles opératoires de prise de moyenne qu'on trouvera dans Chassaing (2000) par exemple

Bilan d'énergie cinétique turbulente

Pour préciser la phénoménologie de la turbulence donnée plus haut, on va établir l'équation modélisant le transport de l'énergie cinétique turbulente moyenne :

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \overline{u_i'^2}. \quad (2.17)$$

En remarquant que :

$$\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} = \overline{u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial t}} + \overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial t}}, \quad (2.18)$$

on utilise l'équation du mouvement fluctuant (2.14) pour obtenir l'équation de transport par le champ moyen de chacune des composantes du tenseur de Reynolds $\overline{u_i' u_j'}$. Usuellement, on arrange les différents termes pour l'écrire sous la forme suivante :

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} + \overline{u_l} \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_l}}_{A_{ij}} = \underbrace{-\left(\overline{u_i' u_l} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_l} + \overline{u_j' u_l} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_l}\right)}_{P_{ij}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\overline{u_i' u_j' u_l} + \frac{1}{\rho} (\overline{u_j' p'} \delta_{il} + \overline{u_i' p'} \delta_{jl})\right)}_{D_{ij}^T} + \underbrace{\frac{1}{\rho} p' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_l} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_l}\right)}_{\phi_{ij}} - \underbrace{2\nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_l} \frac{\partial u_j'}{\partial x_l}\right)}_{\varepsilon_{ij}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} (\overline{u_i' u_j'})}_{D_{ij}^\nu}. \quad (2.19)$$

On remarque que cette équation fait intervenir les corrélations triples de vitesse fluctuante dans le terme D_{ij}^T . On entrevoit désormais le problème de la *cascade infinie des équations* : le terme inertiel – non linéaire – du membre de gauche de l'équation de Navier-Stokes (2.10) génère, dans l'équation d'évolution des corrélations d'ordre n , des corrélations d'ordre $n+1$. Ainsi à tout ordre, une fermeture du système est nécessaire si l'on veut résoudre les équations ; il faut modéliser les termes d'ordre supérieur (cf chapitre 4).

Par définition de l'énergie cinétique turbulente moyenne (2.17), son équation de transport par le champ moyen s'obtient de manière immédiate à partir de l'équation (2.19), en prenant $i = j$ puis en sommant sur i :

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_l} \frac{\partial k}{\partial x_l}}_A = \underbrace{-\overline{u_i' u_l} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_l}}_P - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i' u_l' u_l} + \frac{1}{\rho} \overline{u_l' p'}\right)}_{D^T} - \underbrace{\nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_l} \frac{\partial u_i'}{\partial x_l}\right)}_\varepsilon + \underbrace{\nu \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} k}_{D^\nu}. \quad (2.20)$$

Les équations (2.19) et (2.20) nous permettent de préciser le comportement énergétique de la turbulence. On observe d'abord que le terme $\phi = \frac{1}{2} \phi_{ii}$ n'apparaît pas dans le bilan de k . En effet :

$$\phi_{ii} = \frac{2}{\rho} p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_l} = \frac{2}{\rho} p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x_i} = \frac{2}{\rho} p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \delta_{il} = 0, \quad (2.21)$$

en tenant compte de la condition d'incompressibilité (2.16) des vitesses fluctuantes. Le terme ϕ_{ij} ne fait donc que redistribuer de l'énergie entre les différentes composantes du tenseur de Reynolds, sans en créer ni en détruire. Il y a donc équilibre entre l'advection de k par le champ moyen (terme A dans le membre de gauche de (2.20)) et quatre mécanismes représentés par les termes P, D^T, ε et D^ν (dans le membre de droite).

Le terme D^ν , qui représente la diffusion moléculaire, et le terme D^T , qu'on appelle diffusion turbulente, apparaissent sous la forme d'une divergence. Si l'on intègre ces termes sur un volume de contrôle $\mathcal{V}$, le théorème d'Ostrogradsky permet de réduire cette intégrale à un bilan des flux que génèrent ces termes aux bords du volume $\mathcal{V}$. Les termes D^ν et D^T ne représentent donc qu'une redistribution spatiale de l'énergie cinétique entre les différentes parties du domaine fluide.

Intéressons-nous maintenant au terme P . Si l'on écrivait le bilan d'énergie cinétique moyenne $\overline{E} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$ (ce que l'on ne fera pas ici, voir Chassaing, 2000, p. 93), on verrait que ce terme apparaît également, mais avec un signe opposé. Ce terme traduit donc la part d'énergie cinétique qui est prélevée au champ moyen par le champ fluctuant. En général, on a $P \geq 0$ et ce terme source est appelé *production*. Ce terme nous montre que l'apport d'énergie au champ turbulent est directement lié à la présence d'un gradient de vitesse moyenne.

Enfin, le terme $-\varepsilon$ est le terme de *dissipation*. Ce terme « puits » est toujours négatif et traduit donc une perte d'énergie cinétique turbulente. Ce mécanisme ne dépend pas du champ moyen et, comme évoqué plus haut, il est associé aux frottements visqueux du champ turbulent.

L'interprétation des différents termes de l'équation de transport des composantes du tenseur de Reynolds (2.19) est directement inspirée de celle qu'on vient de faire pour l'énergie cinétique : terme de production P_{ij} , de dissipation ε_{ij} et de diffusion visqueuse D_{ij}^ν et turbulente D_{ij}^T . Le terme supplémentaire ϕ_{ij} est appelé terme de corrélation pression-déformation. Comme mit en évidence par l'équation (2.21), il n'affecte pas le montant global de l'énergie mais seulement sa répartition entre les composantes du tenseur de Reynolds.

Échelles de longueur de la turbulence

On a dit plus haut que la turbulence faisait intervenir un grand nombre d'échelles. Les moments statistiques permettent d'en caractériser certaines.

En considérant les corrélations doubles de vitesse fluctuante (2.1) dans une direction $l = x, y$ ou z , on peut se donner des premières échelles de longueur de la turbulence :

$$L_{ij}^l \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \frac{R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x} + h\mathbf{e}_l)}{R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} dh. \quad (2.22)$$

Ce sont les échelles intégrales de la turbulence, ou macro-échelles de Taylor. Elles donnent une estimation de la taille des plus grosses structures turbulentes, dans le sens où en moyenne, les vitesses fluctuantes sont corrélées jusqu'à cette distance.

Le comportement à l'origine de la fonction de corrélation sous le signe intégral de (2.22) peut fournir quant à lui une échelle pour les « petits » tourbillons. Ainsi la micro-échelle de Taylor est l'intersection avec l'axe l de la parabole osculatrice à l'origine de la fonction de corrélation. En situation de turbulence homogène et isotrope (ces notions sont précisées au paragraphe suivant) cette échelle des petits tourbillons est explicitement liée au taux d'énergie dissipée (le terme ε de (2.20)), mais il faut se garder d'interpréter la micro-échelle de Taylor comme la taille des plus petites structures turbulentes, celles qui dissipent l'énergie.

2.3 Turbulence homogène, turbulence isotrope

Comme on commence à l'entrevoir, la turbulence est un phénomène complexe, difficile à appréhender dans le cas général. Cela conduit à considérer des situations plus simples afin d'identifier les mécanismes de base de la turbulence.

Turbulence homogène

L'une des situations plus simple la plus largement étudiée est celle d'une turbulence homogène, c'est-à-dire dont les propriétés statistiques sont invariantes par translation. Par exemple, on a dans ce cas :

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = R_{ij}(0, \mathbf{h}) = R_{ij}(\mathbf{h}), \quad \text{avec } \mathbf{h} = \mathbf{y} - \mathbf{x}. \quad (2.23)$$

En particulier, le tenseur de Reynolds $\overline{u'_i u'_j} = R_{ij}(\mathbf{h} = 0)$ qui apparaît dans l'équation du mouvement moyen (2.13) est identique en tout point $\mathbf{x}$ de l'espace. Au sens de Craya (Craya, 1958), on considère que l'homogénéité de la turbulence est vérifiée si le gradient de vitesse moyenne est uniforme dans l'espace. Cela exclut naturellement les moments statistiques d'ordre un (comme la vitesse moyenne ou fluctuante) des propriétés invariantes par translation. Selon le type gradient de vitesse moyenne, les études sur la turbulence homogène se concentrent en particulier sur les cas (S, D, Ω) des réels quelconques :

$$\begin{array}{l} \text{- du cisaillement constant :} \quad \left| \quad \text{- de la déformation pure plane :} \quad \left| \quad \text{- de la rotation pure :} \right. \right. \\ \nabla \bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} -D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Le cas de la rotation pure sera considéré au paragraphe (3.3).

Hormis le fait que le tenseur de Reynolds est uniforme dans l'espace, l'équation du mouvement moyen est inchangée en situation de turbulence homogène. En revanche, l'équation de l'énergie cinétique turbulente moyenne prend la forme simplifiée suivante :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \underbrace{-\overline{u'_i u'_l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l}}_P - \underbrace{\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \right)}_\varepsilon. \quad (2.24)$$

Il ne reste dans le membre de droite que les mécanismes de production et de dissipation. Naturellement, les termes de diffusion visqueuse D^ν et turbulente D^T ont disparu car on a vu plus haut qu'ils ne font que redistribuer l'énergie dans l'espace ; ils sont donc inactifs en situation homogène. Plus généralement, tous les termes pouvant s'écrire comme une dérivée de corrélation d'ordre supérieur ou égale à deux prise en un point (la partie Eulérienne du terme d'advection en fait partie) disparaissent du bilan en turbulence homogène.

Pour les mêmes raisons, l'équation de transport des tensions de Reynolds se réduit à :

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} = - \underbrace{\left(\overline{u'_i u'_l} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} + \overline{u'_j u'_l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \right)}_{P_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \right)}_{\phi_{ij}} - \underbrace{2\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \right)}_{\varepsilon_{ij}}. \quad (2.25)$$

Contrairement à la diffusion, on voit que la redistribution par la pression est active y compris en turbulence homogène.

Turbulence homogène et isotrope (THI)

En l'absence de gradient de vitesse moyenne, les corrélations statistiques en $n > 1$ points sont également invariantes par rotation et par symétrie plane. La turbulence sera alors isotrope ; les fluctuations turbulentes n'admettent aucune direction privilégiée.

Notamment, le tenseur des corrélations doubles (2.1) prend désormais la forme générale d'un tenseur isotrope (Robertson, 1940) :

$$R_{ij}(\mathbf{h}) = A(h)\delta_{ij} + B(h)h_i h_j \quad \text{avec } h = \|\mathbf{h}\|. \quad (2.26)$$

Exprimé dans une base orthogonale, ce tenseur est donc diagonal et ses composantes normales sont égales :

$$\overline{u'_i u'_j} = R_{ij}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \overline{u'^2} & \text{si } i = j, \end{cases} \quad (2.27)$$

en notant $\overline{u'^2} = A(0)$.

Quand la turbulence est isotrope, la production d'énergie cinétique turbulente, liée à la présence d'un gradient de vitesse moyenne, est nulle. Seul subsiste le mécanisme de la dissipation dans le bilan d'énergie cinétique turbulente :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = - \underbrace{\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \right)}_{\varepsilon}. \quad (2.28)$$

Il en va de même de l'évolution des composantes du tenseur de Reynolds :

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} = - 2 \underbrace{\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \right)}_{\varepsilon_{ij}}. \quad (2.29)$$

Comme le tenseur de Reynolds, la dissipation est isotrope ($\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}$) car il s'agit d'une corrélation double des variables du mouvement fluctuant. Le terme de pression-déformation ϕ_{ij} a quant à lui disparu du bilan car un tenseur isotrope et de trace nulle (contrainte d'incompressibilité) s'annule identiquement.

Échelles de longueur en THI

En utilisant (2.22) et (2.26), on constate que seules deux échelles intégrales de longueur subsistent pour une turbulence isotrope :

- l'échelle intégrale longitudinale : $L_{\parallel} = L_{ii}^i = \int_0^\infty \frac{\overline{u'_i(\mathbf{x})u'_i(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_i)}}{u'^2} dh, \quad \forall i,$
- l'échelle intégrale transversale : $L_{\perp} = L_{jj}^i = \int_0^\infty \frac{\overline{u'_j(\mathbf{x})u'_j(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_i)}}{u'^2} dh, \quad \forall i \neq j.$

Usuellement, les fonctions de corrélation sous le signe intégrale de $L_{\parallel}$, respectivement $L_{\perp}$, sont notées $f(h)$, respectivement $g(h)$. Avec cette notation, le tenseur des corrélations doubles s'écrit (on utilise la formule 2.26) :

$$R_{ij}(\mathbf{h}) = \overline{u'^2} \left(g(h)\delta_{ij} + \frac{f(h) - g(h)}{h^2} h_i h_j \right). \quad (2.30)$$

En fait, les fonctions de corrélations longitudinale f et transversale g sont directement reliées l'une à l'autre par la condition d'incompressibilité du fluide. Celle-ci implique :

$$\frac{\partial}{\partial h_j} R_{ij}(\mathbf{h}) = \frac{\partial}{\partial h_i} R_{ij}(\mathbf{h}) = 0, \quad (2.31)$$

et donc :

$$g(h) = f(h) + \frac{h}{2} \frac{d}{dh} f(h). \quad (2.32)$$

Cette relation entre les fonctions de corrélations en THI est l'une des *relations de Kàrmàn et Howarth*. Utilisée conjointement avec la relation (2.30), elle montre que pour une THI, le tenseur des corrélations doubles est entièrement déterminé par une seule fonction monodimensionnelle f . En terme d'échelle de longueur, elle implique que :

$$L_{\parallel} = 2L_{\perp}. \quad (2.33)$$

Ces deux échelles de longueur sont donc du même ordre. En THI, les structures porteuses d'énergie sont caractérisées par une seule échelle de longueur², ce qui est assez naturel pour une turbulence isotrope.

2. Il en va de même pour les petits tourbillons : la relation (2.32) implique que les micros-échelles de Taylor vérifient $\lambda_{\parallel} = \sqrt{2}\lambda_{\perp}$.

2.4 Transferts énergétiques et éléments d'analyse spectrale de la turbulence homogène

Même dans les écoulements les plus simples, l'interaction entre les différents tourbillons joue un rôle capital dans la dynamique de la turbulence. En THI par exemple, des mesures expérimentales de la décroissance énergétique sous l'effet de la dissipation font apparaître une modification des lois entre la phase initiale de la décroissance et la phase finale, ce qui suggère la coexistence de (au moins) deux effets dont les poids relatifs s'inversent entre les phases initiale et finale. L'analyse des corrélations en un point (tenseur de Reynolds, énergie cinétique turbulente) qui n'explique que le mécanisme de la dissipation, semble donc insuffisante pour expliquer ce phénomène. Les interactions entre les différents tourbillons, accessibles par l'analyse des corrélations en (au moins) deux points de l'espace, doivent être prises en compte.

Cadre d'étude

En turbulence homogène, on peut se placer dans l'espace spectral, ou espace des nombres d'onde, pour décrire la dynamique des corrélations, et cette description se trouve alors largement simplifiée. Pour passer dans l'espace spectral, on applique une transformée de Fourier aux grandeurs exprimées dans l'espace physique. La transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}^3$ est donnée par (i désigne le complexe $i^2 = -1$) :

$$\hat{f}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (2.34)$$

avec $\boldsymbol{\kappa}$ le vecteur d'onde. La transformée de Fourier inverse permet quant à elle de repasser dans l'espace physique :

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}} d\boldsymbol{\kappa}. \quad (2.35)$$

Rappelons les règles opératoires classiques de la transformée de Fourier :

– règle de dérivation :

$$\widehat{\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}} = i\kappa_j \hat{f}(\boldsymbol{\kappa}). \quad (2.36)$$

– règle pour le produit :

$$\widehat{fg(\mathbf{x})} = \hat{f} * \hat{g}(\boldsymbol{\kappa}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\mathbf{p}) \hat{g}(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{p}) d\mathbf{p} = \int_{\boldsymbol{\kappa}=\mathbf{p}+\mathbf{q}} \hat{f}(\mathbf{p}) \hat{g}(\mathbf{q}) d\mathbf{p} d\mathbf{q}, \quad (2.37)$$

c'est-à-dire qu'un produit dans l'espace physique correspond à un produit de convolution dans l'espace spectral.

Une autre propriété utile de la transformée de Fourier, qui découle directement de sa définition, est que :

$$\hat{f}(-\boldsymbol{\kappa}) = \hat{f}^*(\boldsymbol{\kappa}), \quad (2.38)$$

où une astérisque désigne le complexe conjugué, c'est-à-dire que la transformée de Fourier a la propriété de symétrie hermitienne.

Équations modèles dans l'espace spectral

Appliquons une transformée de Fourier à chaque terme de l'équation de Navier-Stokes (2.10). En tenant compte de la propriété (2.36), on trouve :

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + i\kappa_l \hat{u}_i \hat{u}_l = -\frac{i}{\rho} \kappa_i \hat{p} - \nu \kappa^2 \hat{u}_i, \quad (2.39)$$

avec $\kappa = \|\boldsymbol{\kappa}\|$. La contrainte d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ a pour équivalent dans l'espace spectral :

$$\kappa_i \widehat{u}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\kappa} \perp \widehat{\mathbf{u}}. \quad (2.40)$$

Le champ de vitesse à divergence nulle dans l'espace physique (champ *solénoïdal*) correspond à un champ orthogonal au vecteur d'onde dans l'espace spectral. En prenant la divergence de l'équation de Navier-Stokes (2.10) et en utilisant la contrainte de divergence nulle, la pression apparaît comme solution d'une équation de Poisson, qui s'écrit dans l'espace spectral :

$$\widehat{p} = -\rho \frac{\kappa_j \kappa_l}{\kappa^2} \widehat{u}_j \widehat{u}_l. \quad (2.41)$$

En injectant cette relation dans l'équation (2.39) et en utilisant la règle pour le produit (2.37), l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \kappa^2 \right) \widehat{u}_i = -i P_{ij} \kappa_l \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{u}_j(\mathbf{p}) \widehat{u}_l(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{p}) d\mathbf{p} d\mathbf{q}, \quad (2.42)$$

avec :

$$P_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{ij} - \frac{\kappa_i \kappa_j}{\kappa^2}. \quad (2.43)$$

Pour tout vecteur $\mathbf{a}$, on peut vérifier que :

$$\mathbf{P} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\kappa} = P_{ij} a_j \kappa_i = 0.$$

Le tenseur $\mathbf{P}$ est donc un opérateur de projection sur le plan orthogonal à $\boldsymbol{\kappa}$. On voit que dans l'espace spectral, on peut facilement éliminer la pression de l'équation de Navier-Stokes, ce qui a en outre pour effet de projeter le terme non linéaire sur le plan solénoïdal, c'est-à-dire de maintenir la contrainte de divergence nulle. Dans l'espace spectral et pour un vecteur d'onde donné, seul deux degrés de liberté, dans le plan orthogonal à ce vecteur d'onde, sont nécessaires pour décrire l'écoulement.

Si l'on fait le changement de variable $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, qu'on introduit la variable $\mathbf{q} = -\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{p}$ et qu'on utilise la symétrie hermitienne (2.38), on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \kappa^2 \right) \widehat{u}_i = -i P_{ij} \kappa_l \int_{\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0} \widehat{u}_j^*(\mathbf{p}) \widehat{u}_l^*(\mathbf{q}) d\mathbf{p} d\mathbf{q}. \quad (2.44)$$

On voit alors que les interactions entre différents vecteurs d'onde par effet non linéaire font intervenir uniquement les triplets $(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ vérifiant $\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$, couramment appelés des *triades*.

Le tenseur spectral des corrélations doubles $\widehat{R}_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$ est défini par le produit hermitien³ :

$$\widehat{R}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widehat{u}_i(\boldsymbol{\kappa}) \widehat{u}_j^*(\boldsymbol{\kappa}) \rangle, \quad (2.45)$$

avec $\langle \cdot \rangle$ l'opérateur de moyenne d'ensemble. Compte tenu de la propriété (2.38), sa dynamique est obtenue en exprimant :

$$\left\langle \frac{\partial \widehat{u}_i(\boldsymbol{\kappa})}{\partial t} \widehat{u}_j(-\boldsymbol{\kappa}) + \frac{\partial \widehat{u}_j(-\boldsymbol{\kappa})}{\partial t} \widehat{u}_i(\boldsymbol{\kappa}) \right\rangle.$$

3. Il s'agit ici de corrélation non centrées. Pour une turbulence isotrope, la vitesse moyenne étant nulle, les expressions dérivées sont les mêmes pour que pour le tenseur des corrélations centrées. Pour une turbulence homogène non isotrope, un terme de production, linéaire en $\widehat{R}_{ij}$ apparaîtrait dans le membre de gauche ; il n'est pas explicité ici car on s'intéresse surtout aux effets non linéaires. L'équation pour une turbulence homogène non isotrope est écrite p. 176.

En utilisant l'expression (2.44) pour le premier terme et l'expression (2.42) pour le second, on trouve directement :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu\kappa^2\right)\widehat{R}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) = & -iP_{im}\kappa_l \int_{\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} \langle \widehat{u}_j^*(\boldsymbol{\kappa}) \widehat{u}_m^*(\mathbf{p}) \widehat{u}_l^*(\mathbf{q}) \rangle d\mathbf{p}d\mathbf{q} \\ & + iP_{jm}\kappa_l \int_{\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} \langle \widehat{u}_i(\boldsymbol{\kappa}) \widehat{u}_m(\mathbf{p}) \widehat{u}_l(\mathbf{q}) \rangle d\mathbf{p}d\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

C'est, dans l'espace spectral, l'équation d'évolution du tenseur des corrélations doubles en deux points.

Enfin, pour étudier la répartition de l'énergie entre les différentes échelles, on définit la densité spectrale d'énergie cinétique turbulente (ou, par abus de langage, *spectre d'énergie*) par :

$$\widehat{k}(\boldsymbol{\kappa}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \widehat{R}_{ii}(\boldsymbol{\kappa}). \quad (2.47)$$

Cette définition est analogue à la définition (2.17) pour les corrélations doubles en un point de l'espace physique. En contractant les indices i et j dans (2.46), il vient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu\kappa^2\right)\widehat{k}(\boldsymbol{\kappa}) = \int_{\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} T(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{p}d\mathbf{q}. \quad (2.48)$$

En utilisant la condition d'incompressibilité (2.40) et compte tenu du rôle symétrique de $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ dans le membre de droite, le terme $T(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ peut s'exprimer sous la forme symétrique en $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ suivante :

$$T(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\mathbb{I}\left(\langle (\boldsymbol{\kappa} \cdot \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{p})) (\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\kappa}) \cdot \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{q})) \rangle + \langle (\boldsymbol{\kappa} \cdot \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{q})) (\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\kappa}) \cdot \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{p})) \rangle\right), \quad (2.49)$$

avec $\mathbb{I}(\cdot)$ la partie imaginaire du complexe en argument.

Mise en évidence des transferts

L'équation d'évolution de la densité spectrale d'énergie cinétique turbulente est plus riche que celle de l'énergie cinétique turbulente dans l'espace physique (2.28). En effet on y retrouve le terme d'évolution temporelle et le terme de dissipation (membre de gauche) mais on trouve en plus un terme au membre de droite qui fait intervenir les corrélations triples de vitesse.

Plaçons nous dans le cas isotrope et intéressons nous au spectre en module $E(\kappa)$, obtenu par intégration du spectre d'énergie sur la sphère $\mathcal{S}(\kappa)$ de rayon $\kappa = \|\boldsymbol{\kappa}\|$ sur laquelle il est donc constant :

$$E(\kappa) = \int_{\mathcal{S}(\kappa)} \widehat{k}(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa} = \widehat{k}(\kappa) \int_{\mathcal{S}(\kappa)} d\boldsymbol{\kappa} = 4\pi\kappa^2 \widehat{k}(\kappa). \quad (2.50)$$

En utilisant la transformée de Fourier inverse et en choisissant $\mathbf{h} = 0$, la relation entre l'énergie cinétique turbulente et le spectre en module est simplement :

$$k = \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{k}(\boldsymbol{\kappa}) \underbrace{e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{h}}}_{=1} d\boldsymbol{\kappa} = \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa. \quad (2.51)$$

La connaissance du spectre d'énergie en module $E(\kappa)$ nous donne donc la répartition de l'énergie entre les différents nombres d'onde. Comme κ est de dimension $[L]^{-1}$, cela nous renseigne sur les échelles du mouvement qui contiennent plus ou moins d'énergie.

En considérant ce spectre en module, l'équation (2.48) s'écrit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu\kappa^2\right)E(\kappa) = T(\kappa), \quad (2.52)$$

avec :

$$T(\kappa) = \int_{\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} 4\pi\kappa^2 T(\kappa, p, q) d\mathbf{p}d\mathbf{q} \quad \text{et} \quad T(\kappa, p, q) = T(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p}, \mathbf{q}). \quad (2.53)$$

L'équation (2.52) est parfois appelée équation de Lin. En intégrant sur toute la plage des nombres d'onde (ce qui revient à faire une transformée de Fourier inverse et à choisir $\mathbf{h} = 0$, cf équation 2.51), on doit retrouver l'équation (2.28) de décroissance énergétique en THI, on a donc :

$$\int_0^\infty T(\kappa) d\kappa = 0. \quad (2.54)$$

On voit que le terme $T(\kappa)$ est un terme de transfert qui distribue l'énergie entre les nombres d'onde, sans en créer ni en détruire. L'expression (2.49) montre que ce sont les corrélations triples qui assurent ce transfert entre les modes formant une triade. En outre Kraichnan (1967) montre qu'au sein d'une triade :

$$T(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + T(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\kappa}) + T(\mathbf{q}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p}) = 0, \quad (2.55)$$

ce qui traduit que les échanges d'énergie se font sans perte. L'énergie est conservée au sein d'une triade par le terme non linéaire (on parle du théorème de la *conservation détaillée*).

Représentation dans la base hélicitaire

Pour expliciter d'avantage les transferts énergétiques au sein d'une triade et tenter d'entrevoir dans quels sens ils s'opèrent, il est utile de décomposer la vitesse modale dans une base locale dont l'un des éléments est suivant le vecteur d'onde $\boldsymbol{\kappa}$. La vitesse modale étant orthogonale au vecteur d'onde en raison de l'incompressibilité, seuls deux composantes non nulles caractérisent la vitesse dans une telle base, ce qui simplifie la description. La base hélicitaire est de ce type ; ses deux vecteurs de base dans le plan orthogonal à $\boldsymbol{\kappa}$ sont donnés par :

$$\mathbf{h}_+(\boldsymbol{\kappa}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\eta} \wedge \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\kappa} + i\boldsymbol{\eta} \quad \text{et} \quad \mathbf{h}_-(\boldsymbol{\kappa}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\eta} \wedge \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\kappa} - i\boldsymbol{\eta}, \quad (2.56)$$

avec $\boldsymbol{\eta}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\boldsymbol{\kappa}$: $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\kappa} / \|\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\kappa}\|$ pour $\mathbf{n}$ quelconque.

Ces vecteurs de base ont les propriétés suivantes :

- (i) orthonormalité : $\mathbf{h}_s^* \cdot \mathbf{h}_t = 2\delta_{st}$, avec $s, t = +$ ou $-$,
- (ii) conjugaison : $\mathbf{h}_s^* = \mathbf{h}_{-s}$,
- (iii) symétrie hermitienne : $\mathbf{h}_s(-\boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{h}_s^*(\boldsymbol{\kappa})$.

En notant a_s les composantes de $\hat{\mathbf{u}}$ dans la base hélicitaire :

$$\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\kappa}) = a_+(\boldsymbol{\kappa})\mathbf{h}_+(\boldsymbol{\kappa}) + a_-(\boldsymbol{\kappa})\mathbf{h}_-(\boldsymbol{\kappa}),$$

la symétrie hermitienne de la vitesse modale $\hat{\mathbf{u}}$ et des vecteurs de base $\mathbf{h}_s$ implique qu'on l'a également pour les coefficients a_s : $a_s(-\boldsymbol{\kappa}) = a_s^*(\boldsymbol{\kappa})$.

La dernière propriété des vecteurs $\mathbf{h}_s$, et non la moindre, est qu'ils sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres $s\kappa$ ($s \pm 1$) de l'opérateur rotationnel, c'est-à-dire :

$$i\boldsymbol{\kappa} \wedge \mathbf{h}_s = s\kappa \mathbf{h}_s. \quad (2.57)$$

Dans la base hélicitaire, on a une expression simple pour l'énergie cinétique modale :

$$\hat{k}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2} \langle \|\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\kappa})\|^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\kappa}) \cdot \hat{\mathbf{u}}^*(\boldsymbol{\kappa}) \rangle = \langle a_+ a_+^* + a_- a_-^* \rangle. \quad (2.58)$$

On établit donc la dynamique de chaque coefficient $a_{s_\kappa} = a_s(\boldsymbol{\kappa})$. Celle-ci est obtenue en projetant l'équation (2.44) sur les vecteurs de base $\mathbf{h}_s$, c'est-à-dire en multipliant scalairement cette équation par $\frac{\mathbf{h}_{s_\kappa}^*}{\mathbf{h}_{s_\kappa}^* \cdot \mathbf{h}_{s_\kappa}} = \frac{\mathbf{h}_{s_\kappa}^*}{2}$. On trouve :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\kappa^2\right)a_{s_\kappa} = -\frac{1}{4} \int_{\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} \sum_{s_p, s_q} C_{\kappa p q}^{s_\kappa s_p s_q} a_{s_p}^* a_{s_q}^* d\mathbf{p} d\mathbf{q}, \quad (2.59)$$

avec $C_{\kappa p q}^{s_\kappa s_p s_q}$ des coefficients géométriques correspondant à chacune des huit interactions triadiques élémentaires $(s_\kappa, s_p, s_q) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. On les écrit sous la forme symétrique en $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ suivante :

$$C_{\kappa p q}^{s_\kappa s_p s_q} = i \left((\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{h}_{s_p}^*)(\mathbf{h}_{s_q}^* \cdot \mathbf{h}_{s_\kappa}^*) + (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{h}_{s_q}^*)(\mathbf{h}_{s_p}^* \cdot \mathbf{h}_{s_\kappa}^*) \right). \quad (2.60)$$

L'expression de ces coefficients est à rapprocher de l'expression (2.49) du terme de transfert triadique $T(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$. En utilisant les équations (2.60) et (2.58), la dynamique de la densité spectrale d'énergie cinétique est donnée par :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu\kappa^2\right)\widehat{k}(\boldsymbol{\kappa}) = -\frac{1}{4} \int_{\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} \sum_{s_\kappa, s_p, s_q} C_{\kappa p q}^{s_\kappa s_p s_q} \langle a_{s_\kappa}^* a_{s_p}^* a_{s_q}^* \rangle + \text{c.c.} \quad d\mathbf{p} d\mathbf{q}, \quad (2.61)$$

avec « c.c. » pour « complexe conjugué ». Le terme de transfert triadique (2.49) se décompose donc en huit contributions élémentaires :

$$T(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^8 T^{(i)}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (2.62)$$

avec :

$$T^{(i)}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} C_{\kappa p q}^{s_\kappa s_p s_q} \langle a_{s_\kappa}^* a_{s_p}^* a_{s_q}^* \rangle + \text{c.c.} = \mathbb{R}(C_{\kappa p q}^{s_\kappa s_p s_q} \langle a_{s_\kappa}^* a_{s_p}^* a_{s_q}^* \rangle), \quad (2.63)$$

où $\mathbb{R}(\cdot)$ désigne la partie réelle du complexe en argument. La conservation détaillée de chacune des interactions élémentaires s'écrit :

$$C_{\kappa p q}^{s_\kappa s_p s_q} + C_{p q \kappa}^{s_p s_q s_\kappa} + C_{q \kappa p}^{s_q s_\kappa s_p} = 0, \quad (2.64)$$

ce qui n'est pas évident au regard de l'expression (2.60) de ces coefficients.

On n'a pas fait usage jusqu'à présent de la propriété (2.57) de la base hélicitaire. Pour se faire, on décompose le terme non linéaire de l'équation de Navier–Stokes de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 \right). \quad (2.65)$$

Ainsi, on a dans l'espace spectral :

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + (\widehat{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}})_i + \frac{i}{2} \kappa_i \widehat{u_l u_l} = -\frac{i}{\rho} \kappa_i \widehat{p} - \nu \kappa^2 \widehat{u}_i. \quad (2.66)$$

En prenant la divergence de cette équation, la pression apparaît solution de :

$$\widehat{p} = i\rho \frac{\kappa_j}{\kappa^2} (\widehat{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}})_j - \frac{\rho}{2} \widehat{u_l u_l}.$$

En insérant cette équation dans l'équation (2.66), on élimine la pression du système, ce qui a également pour effet de supprimer la contribution du second terme de la décomposition

(2.65). L'équation de Navier–Stokes peut donc s'écrire de manière équivalente dans l'espace spectrale sous la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\kappa^2\right)\hat{u}_i = -P_{ij} \int_{\kappa+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} (\hat{\omega}^*(\mathbf{p}) \wedge \hat{\mathbf{u}}^*(\mathbf{q}))_j d\mathbf{p}d\mathbf{q}. \quad (2.67)$$

En utilisant la base hélicitaire, on retrouve les mêmes équations (2.59) pour la dynamique des composantes a_s de vitesse dans la base et (2.61) pour le spectre d'énergie, mais cette fois les coefficients $C_{\kappa pq}^{s_\kappa s_p s_q}$ des interactions triadiques élémentaires sont donnés par (on utilise l'antisymétrie du produit vectoriel pour les écrire de manière symétrique en $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$) :

$$C_{\kappa pq}^{s_\kappa s_p s_q} = \left((-i\mathbf{p} \wedge \mathbf{h}_{s_p}^*) \wedge \mathbf{h}_{s_q}^* - \mathbf{h}_{s_p}^* \wedge (-i\mathbf{q} \wedge \mathbf{h}_{s_q}^*) \right) \cdot \mathbf{h}_{s_\kappa}^*. \quad (2.68)$$

On peut alors utiliser la propriété (2.57) des vecteurs de base $\mathbf{h}_s$ pour récrire :

$$C_{\kappa pq}^{s_\kappa s_p s_q} = (s_p p - s_q q) G_{\kappa pq}^{s_\kappa s_p s_q}, \quad \text{avec} \quad G_{\kappa pq}^{s_\kappa s_p s_q} = \mathbf{h}_{s_p}^* \wedge \mathbf{h}_{s_q}^* \cdot \mathbf{h}_{s_\kappa}^*. \quad (2.69)$$

Waleffe (1992) montre que le facteur géométrique $G_{\kappa pq}$ est parfaitement symétrique en κ , p et q :

$$G_{\kappa pq}^{s_\kappa s_p s_q} = G_{pq\kappa}^{s_p s_q s_\kappa} = G_{q\kappa p}^{s_q s_\kappa s_p} = g. \quad (2.70)$$

Ce résultat important permet de vérifier de manière immédiate que chaque interaction triadique élémentaire conserve l'énergie (équation 2.64). En négligeant la viscosité, il permet en outre à l'auteur d'utiliser le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} a_{s_k} = (s_p p - s_q q) g a_{s_p}^* a_{s_q}^*, \\ \frac{\partial}{\partial t} a_{s_p} = (s_q q - s_k k) g a_{s_q}^* a_{s_k}^*, \\ \frac{\partial}{\partial t} a_{s_q} = (s_k k - s_p p) g a_{s_k}^* a_{s_p}^*. \end{cases} \quad (2.71)$$

pour décrire l'évolution des coefficients modaux a_{s_κ} , a_{s_p} et a_{s_q} au cours de l'interaction élémentaire (s_κ, s_p, s_q) . C'est l'analyse de stabilité linéaire des solutions de base de ce système qui conduit l'auteur à formuler la conjecture suivante : le mode dont l'inertie⁴ $s_\kappa \kappa$ est intermédiaire ($s_p p < s_\kappa \kappa < s_q q$ ou $s_q q < s_\kappa \kappa < s_p p$) est celui qui perd de l'énergie au profit des deux autres. Il s'agit du mode dont le coefficient $C_{\kappa pq}^{s_\kappa s_p s_q}$ est de plus grand module (équation 2.69) et dont le signe est opposé à celui des deux autres (équation 2.64). L'équation (2.63) souligne que cette conjecture résulte d'une hypothèse sur le signe des corrélations triples, qui seraient telles que statistiquement l'énergie circule du mode dont l'inertie est intermédiaire vers les deux autres de la triade.

Cette conjecture permet à l'auteur d'examiner en détail les différentes interactions triadiques élémentaires (de les « ranger » en seulement deux catégories notamment, et non plus huit) et leur contribution à la cascade d'énergie, argumentaire que l'on ne reproduit pas ici. Notons simplement que les conclusions de l'auteur sont consistantes avec des observations de simulation numérique directe et des modèles de fermeture dans l'espace spectral (Waleffe, 1993). Cette conjecture est également consistante avec la phénoménologie de la turbulence au sein d'écoulement en rotation, qui est décrite dans le chapitre suivant.

4. Ce terme d'inertie provient d'une analogie étroite entre le système (2.71) et l'équation d'Euler décrivant la rotation d'un solide indéformable. La matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $s_\kappa \kappa$, $s_p p$ et $s_q q$ joue alors le même rôle que la matrice d'inertie dans l'équation d'Euler. C'est l'analyse de stabilité des solutions stationnaires du système S qui conduit à identifier le mode dont l'inertie $s_\kappa \kappa$ est intermédiaire comme le mode instable, à l'inverse des deux autres, de même que l'analyse de stabilité de la rotation du solide autour de ses trois axes d'inertie révèle que la rotation autour de l'axe de longueur intermédiaire est instable, à l'inverse de celle autour du grand et du petit axe. C'est pourquoi la conjecture est appelée hypothèse d'instabilité (*instability assumption* en anglais).

Chapitre 3

Description des écoulements turbulents en rotation

La rotation est une composante fondamentale du mouvement. En mécanique des fluides, elle joue un rôle majeur dans beaucoup d'applications (écoulements atmosphériques, océanographiques, dans les machines tournantes, etc...). La bonne compréhension des écoulements turbulents en rotation est donc de première importance.

Dans ce chapitre, on propose un aperçu de la théorie sur ces écoulements. Comme dans le chapitre précédent, les aspects modélisation n'entrent pas dans la description (ils font l'objet du chapitre 4). On commence par introduire la notion de changement de référentiel qui est particulièrement utile pour étudier les écoulements en rotation (paragraphe 3.1). Ensuite, on voit aux paragraphes 3.2 et 3.3 que la rotation du fluide peut avoir des effets spectaculaires sur un écoulement turbulent, perturbant sensiblement plusieurs caractéristiques de base de la turbulence (dynamique tridimensionnelle, transferts énergétiques, etc...). Ces effets sont aujourd'hui relativement bien expliqués par la théorie. Au paragraphe 3.4, les effets conjugués de rotation et de cisaillement sont décrits. Ces effets sont sensibles dès les taux de rotation modérés et reconnus pour affecter notablement les couches limites dans les turbomachines. Enfin, l'analogie entre rotation et courbure des lignes de courant (cette dernière est un autre aspect important des écoulements dans les turbomachines) est brièvement discutée au paragraphe 3.5.

3.1 Équations modèles en référentiel tournant

3.1.1 Changement de référentiel et objectivité d'une grandeur tensorielle

Notion de référentiel galiléen

Un référentiel $\mathcal{R} = \{(O, \mathcal{B}), t_0\}$ est la donnée d'une origine dans l'espace et dans le temps, O et t_0 respectivement, et d'une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ avec $\mathbf{e}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, les vecteurs de base, qu'on suppose orthonormés dans la suite. Le référentiel sert à définir l'observateur du mouvement, en permettant de quantifier l'espace et le temps. L'origine du référentiel est un point matériel. Les axes portés par $\mathcal{B}$ doivent être fixe pour un observateur en ce point.

Pour obtenir l'équation de Navier–Stokes (2.10), on a invoqué le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton). Cette loi n'est valable que dans un référentiel *galiléen*, qu'on appelle également référentiel *inertiel*. L'existence d'un tel référentiel est l'expression du principe de l'inertie (première loi de Newton), qu'on peut formuler ainsi : il existe des référentiels dans lesquels un corps est au repos ou en mouvement de translation

uniforme si et seulement si la somme des forces qui s'exercent sur ce corps est nulle. En pratique, un référentiel pourra être considéré comme galiléen selon la nature du phénomène étudié (notamment son échelle en espace et en temps) et la précision attendue des résultats. Si par rapport aux éléments du système $(O, \mathcal{B})$ un point sur lequel aucune force ne s'applique semble fixe, il ne restera qu'à se fixer une origine des temps pour disposer d'un référentiel galiléen.

Changement de référentiel

Dans ce référentiel galiléen $\mathcal{R} = \{(O, \mathcal{B}), t_0\}$, le principe fondamental de la dynamique, et donc l'équation de Navier–Stokes (2.10), est valable. Cela n'interdit en rien pourtant de décrire le mouvement dans un autre référentiel $\mathcal{R}^* = \{(O^*, \mathcal{B}^*), t_0^*\}$ de notre choix. En revanche, il faudra tenir compte du fait que l'équation (2.10) n'est pas valable dans $\mathcal{R}^*$ si celui-ci n'est pas galiléen, mais seulement dans $\mathcal{R}$.

Pour ce faire, il faut appliquer aux grandeurs (scalaires, vecteurs et tenseurs) exprimées dans le référentiel $\mathcal{R}$ les formules de changement de référentiel suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \\ t^* &= t + \theta. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Le vecteur $\mathbf{b}(t) = \overrightarrow{OO^*}$ traduit le changement d'origine de l'espace et le scalaire $\theta = t_0^* - t_0$ le changement d'origine du temps. La matrice $\mathbf{Q}(t)$ est une matrice orthogonale, c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}. \quad (3.2)$$

Elle opère le changement de base (rotation et changement de sens – direct ou indirect – des éléments de base), ce qui s'écrit $\mathbf{e}_\alpha^* = \mathbf{Q}\mathbf{e}_\alpha$.

On peut donc décrire le mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}^*$ quelconque en traduisant dans ce référentiel, et par les formules de changement de référentiel (3.1), les lois valables dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Cela peut-être utile lorsque le domaine fluide qu'on considère est lui-même animé d'un mouvement global connu. Par exemple, c'est le cas des écoulements atmosphériques décrits dans le référentiel terrestre, qui ne peut plus être considéré comme galiléen pour ces écoulements, ou encore des écoulements dans un rotor de turbomachine décrits dans le référentiel tournant associé à la rotation du rotor.

Notion d'objectivité

On dit qu'une grandeur est *objective* si elle est intrinsèquement invariante par changement de référentiel. Dans ce cas, la perception que l'on a de cette grandeur, c'est-à-dire la mesure que l'on en fait, ne diffère dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ que par l'effet du changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}^*$. En notant avec une étoile, respectivement sans, les grandeurs perçues dans le référentiel $\mathcal{R}^*$, respectivement $\mathcal{R}$, on a alors, pour une grandeur objective, les relations :

- pour un scalaire a : $a^* = a$,
- pour un vecteur $\mathbf{a}$: $\mathbf{a}^* = \mathbf{Q}\mathbf{a}$,
- pour un tenseur d'ordre deux $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T$.

3.1.2 L'équation de Navier–Stokes en référentiel tournant

On établit dans ce paragraphe l'équation de Navier–Stokes dans un référentiel $\mathcal{R}^*$ en rotation constante d'axe $\boldsymbol{\Omega}$ par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Les origines du temps et de l'espace sont inchangées :

$$\theta = 0, \quad \mathbf{b}(t) = \mathbf{0}. \quad (3.3)$$

En revanche, les éléments de la base $\mathcal{B}^*$ sont en rotation d'axe $\boldsymbol{\Omega}$ par rapport aux éléments de la base $\mathcal{B}$.

Pour se fixer les idées, montrons la forme de la matrice $\mathbf{Q}$ lorsque l'axe de rotation est suivant z : $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_3$. Dans ce cas, à un instant t , l'angle formé par les vecteurs de base $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_1^*$ d'une part, et $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_2^*$ d'autre part, vaut Ωt , de sorte que la matrice de changement de base $\mathbf{Q}$ s'écrit simplement :

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Pour $\boldsymbol{\Omega}$ quelconque, la matrice de rotation $\mathbf{Q}$ est donnée par :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} + (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \cos(\Omega t) + \mathbf{R} \sin(\Omega t),$$

avec $P_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_i \Omega_j / \|\boldsymbol{\Omega}\|^2$ la matrice de projection sur l'axe porté par $\boldsymbol{\Omega}$, $(\mathbf{I} - \mathbf{P})_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{ij} - \Omega_i \Omega_j / \|\boldsymbol{\Omega}\|^2$ la matrice de projection sur le plan orthogonal à l'axe porté par $\boldsymbol{\Omega}$ et $R_{ij} = \epsilon_{imj} \Omega_m / \|\boldsymbol{\Omega}\|$ la matrice antisymétrique duale du vecteur unitaire $\boldsymbol{\Omega} / \|\boldsymbol{\Omega}\|$.

Une relation importante qui relie le vecteur de rotation du référentiel $\boldsymbol{\Omega}$ à la matrice orthogonale $\mathbf{Q}$ est que le produit $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$ est la matrice antisymétrique duale du vecteur $-\boldsymbol{\Omega}$. En introduisant la notation symbolique :

$$(\boldsymbol{\Omega} \wedge)_{ij} = \epsilon_{imj} \Omega_m, \quad (3.5)$$

la relation reliant $\mathbf{Q}$ et $\boldsymbol{\Omega}$ est donc :

$$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = -(\boldsymbol{\Omega} \wedge). \quad (3.6)$$

Le produit à droite du tenseur $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$ par un vecteur correspond donc au produit vectoriel de $-\boldsymbol{\Omega}$ par ce vecteur. On s'autorisera également à utiliser la notation (3.5) y compris lorsque l'on multiplie à droite par un tenseur d'ordre supérieur.

Donnons également deux propriétés de la matrice $\mathbf{Q}$ qui permettent de se ramener systématiquement à la relation (3.6). La première est obtenue en différenciant la propriété (3.2) par rapport au temps. Il vient :

$$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = -\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T. \quad (3.7)$$

Ensuite, on peut montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$:

$$(\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T)^n = \mathbf{Q}^{(n)}\mathbf{Q}^T, \quad (3.8)$$

avec $\mathbf{Q}^{(n)}$ la dérivée n -ième de $\mathbf{Q}$.

Appliquons maintenant les formules de changement de référentiel (3.1), (3.3) à l'équation de Navier–Stokes (2.10). On s'intéresse en premier lieu à la dérivée matérielle du membre de gauche. Celle-ci est obtenue en dérivant deux fois, en variable lagrangienne, la position $\mathbf{x}$ d'une particule dans le référentiel galiléen. Cette dernière s'exprime dans le référentiel tournant $\mathcal{R}^*$ suivant :

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T \mathbf{x}^*. \quad (3.9)$$

En différenciant une première fois cette relation par rapport au temps, on obtient la relation suivante entre les vitesses $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}^*$ perçues dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}^T (\mathbf{u}^* - \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \mathbf{x}^*) = \mathbf{Q}^T (\mathbf{u}^* + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^*). \quad (3.10)$$

La vitesse n'est donc pas une grandeur objective : les vitesses $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}^*$ ne coïncident pas par le simple changement de base, qui correspond à la multiplication à gauche par $\mathbf{Q}^T$ dans l'équation ci-dessus. Dans le référentiel tournant, la vitesse d'entraînement :

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^*,$$

qui correspond à une rotation solide d'axe $\boldsymbol{\Omega}$, doit être ajoutée à la vitesse $\mathbf{u}^*$ pour retrouver la vitesse $\mathbf{u}$ perçue dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Différencions maintenant la relation (3.10) pour obtenir l'expression dans le référentiel tournant $\mathcal{R}^*$ de l'accélération perçue dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \mathbf{Q}^T \left(\underbrace{\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T}_{=-\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T} \mathbf{u}^* + \frac{D\mathbf{u}^*}{Dt} - \left(\underbrace{\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T}_{=-\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T} \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \underbrace{\ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T}_{=(\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T)^2} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \underbrace{\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T}_{=-\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T} \right) \mathbf{x}^* - \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \mathbf{u}^* \right), \\ &= \mathbf{Q}^T \left(\frac{D\mathbf{u}^*}{Dt} - 2\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \mathbf{u}^* + (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T)^2 \mathbf{x}^* \right), \\ &= \mathbf{Q}^T \left(\frac{D\mathbf{u}^*}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}^* + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^*) \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

L'accélération n'est donc pas non plus une grandeur objective. Deux termes supplémentaires apparaissent par changement de référentiel : l'accélération de Coriolis $2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}^*$ et l'accélération centrifuge $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^*)$.

Intéressons-nous maintenant aux termes de droite de l'équation de Navier–Stokes (2.10). Comme on l'a vu au paragraphe 2.1 ces termes représentent les contraintes, de pression (statique) et visqueuses (dynamique), qui s'exercent au bord d'un volume élémentaire de fluide. Elles modélisent donc l'effet du contact entre deux éléments de fluide infiniment voisins. L'intuition physique porte à croire que l'effet de ces contacts est indépendant de l'observateur du mouvement. On invoque donc le principe d'*indifférence matérielle* qui postule que ces grandeurs sont objectives. En fait le principe d'indifférence matérielle ne porte que sur les scalaires intervenant dans le bilan (masse volumique ρ , pression p et coefficient de viscosité cinématique ν) :

$$\rho = \rho^*, \quad (3.12)$$

$$p = p^*, \quad (3.13)$$

$$\nu = \nu^*. \quad (3.14)$$

En effet, on vérifie à partir de l'équation (3.9) et de la loi de composition des dérivées que le gradient eulérien $\boldsymbol{\nabla}$ est objectif :

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\nabla}^*. \quad (3.15)$$

Appliqué à une grandeur objective, il génère donc une nouvelle grandeur objective (d'un ordre tensorielle supplémentaire). Le gradient de pression (premier terme du membre de droite de 2.10) est donc objectif. Pour le terme de contrainte visqueuse, examinons la transformation du gradient de vitesse par changement de référentiel. Celle-ci est donnée en dérivant l'expression (3.10) et en utilisant (3.15). Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= Q_{ki} \frac{\partial u_k^*}{\partial x_j} - Q_{ki} \dot{Q}_{kl} Q_{ml} \frac{\partial x_m^*}{\partial x_j}, \\ &= Q_{ki} \frac{\partial u_k^*}{\partial x_m^*} Q_{mj} - Q_{ki} \dot{Q}_{kl} Q_{ml} Q_{mj}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{u} &= \mathbf{Q}^T \left((\nabla \mathbf{u})^* - \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \right) \mathbf{Q}, \\ &= \mathbf{Q}^T \left((\nabla \mathbf{u})^* + (\boldsymbol{\Omega} \wedge) \right) \mathbf{Q}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Le tenseur gradient eulérien de vitesse n'est donc pas objectif. En revanche, comme la contribution supplémentaire qui apparaît par changement de référentiel est un tenseur antisymétrique, on vérifie immédiatement que seule la partie antisymétrique du gradient, ou tenseur de vorticité¹, est affectée par le changement de référentiel :

$$\mathbf{W} = \mathbf{Q}^T \left(\mathbf{W}^* + (\boldsymbol{\Omega} \wedge) \right) \mathbf{Q}. \quad (3.19)$$

Au contraire, le tenseur des taux de déformation (partie symétrique du gradient), qui est le seul à intervenir dans le modèle des fluides newtoniens pour les contraintes de viscosité, est objectif :

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}^T \mathbf{S} \mathbf{Q}. \quad (3.20)$$

L'ensemble des propriétés de transformation par changement de référentiel nécessaires à l'établissement de l'équation de Navier–Stokes en référentiel tournant sont désormais réunies. En substituant dans l'équation (2.10), valable dans un référentiel galiléen uniquement, les grandeurs concernées par les égalités (3.11)–(3.15), (3.20) puis en éliminant à gauche le facteur commun $\mathbf{Q}^T$, on décrit le mouvement d'un fluide incompressible dans un référentiel en rotation constante par rapport au référentiel galiléen par l'équation (l'exposant $\star$ est omis) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}). \quad (3.21)$$

Deux forces supplémentaires apparaissent donc dans le bilan de quantité de mouvement :

- la force centrifuge $\mathbf{f}_e = -\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x})$,
- la force de Coriolis $\mathbf{f}_c = -2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}$.

On les qualifie plutôt de pseudo-forces car elles n'interviennent dans le bilan que pour compenser le fait que l'on s'est placé dans un référentiel non galiléen en rotation pour décrire le mouvement.

La force centrifuge est orientée dans la direction radiale vers l'extérieur. Elle ne dépend que de la position du point où elle s'applique et de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \|\boldsymbol{\Omega}\|$. Son amplitude $\|\mathbf{f}_e\| = \Omega^2 r$ est d'autant plus grande que la vitesse angulaire est grande et que la distance $r = |\sin(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{x})|$ de $\mathbf{x}$ à l'axe de rotation est grande. Cette force est familière au voyageur qui se sent poussé dans son véhicule vers l'extérieur d'un virage au moment de tourner. Elle est également exploitée en aérospatiale lorsque l'on lance des fusées à proximité de l'équateur, là où l'effet de la force centrifuge est le plus important. La force

1. On a défini le vecteur vorticité comme le rotationnel de la vitesse et on a alors (cf notation 3.5) :

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \wedge), \quad (3.17)$$

c'est-à-dire que le tenseur de vorticité est le tenseur antisymétrique dual de la moitié du vecteur vorticité.

Cette précision faite, donnons l'expression du vecteur vorticité par changement de référentiel, qui se déduit directement de (3.19), (3.17) :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}^T (\boldsymbol{\omega}^* + 2\boldsymbol{\Omega}). \quad (3.18)$$

La contribution $2\boldsymbol{\Omega}$ est appelée vorticité d'entraînement.

centrifuge étant, au même titre que la gravité, indépendante de l'écoulement et ressentie même en l'absence de mouvement, elle dérive d'un potentiel, qu'on note Φ_e :

$$\mathbf{f}_e = \nabla \Phi_e, \quad \text{avec} \quad \Phi_e = \frac{(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x})^2}{2}. \quad (3.22)$$

On l'incorpore donc souvent au potentiel de pression dans le bilan de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p_e + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}, \\ p_e &= p - \Phi_e. \end{aligned} \quad (3.23)$$

et p_e est qualifiée de pression « effective ».

La force de Coriolis agit pour sa part perpendiculairement au plan engendré par $\boldsymbol{\Omega}$ et $\mathbf{u}$. Son amplitude $\|\mathbf{f}_c\| = 2\boldsymbol{\Omega}\|\mathbf{u}\|\sin(\alpha)$, avec α l'angle $(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{u})$, est d'autant plus grande que l'angle α se rapproche d'un angle droit ($\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$). À l'inverse de la force centrifuge, la force de Coriolis interagit avec la vitesse dans le référentiel tournant $\mathcal{R}^*$: elle est responsable du gauchissement (ou du « droitissement ») dans $\mathcal{R}^*$ d'une trajectoire qui apparaîtrait rectiligne dans un référentiel inertiel. Cette action se fait toutefois sans apport d'énergie : pour $d\mathbf{x}$ un élément infinitésimal de trajectoire, le travail $\mathbf{f}_c \cdot d\mathbf{x}$ que génère la force de Coriolis est nul car $\mathbf{f}_c$ est orthogonale au vecteur vitesse $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{f}_c \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{f}_c \cdot \mathbf{w} dt = 0. \quad (3.24)$$

Là encore, les effets de la force de Coriolis se manifestent à grande échelle dans le référentiel terrestre. En météorologie par exemple, on observe que les masses d'air convergentes vers une dépression sont déviées dans le sens anti-horaire dans l'hémisphère nord et dans le sens horaire dans l'hémisphère sud, ce qui est dû à l'action de la force de Coriolis. Dans le domaine de la ballistique, un tireur d'élite visant une cible très éloignée devra également prendre en compte la force de Coriolis pour atteindre sa cible.

3.1.3 Équations statistiques de la turbulence en référentiel tournant

Explicitons maintenant l'effet d'un changement de référentiel sur les corrélations classiques qu'on utilise pour décrire la turbulence suivant l'approche statistique. Ces résultats sont résumés par Speziale (1979).

Rappelons d'abord que l'espace et le temps sont déterministes :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{x}, \\ \bar{t} &= t, \end{aligned} \quad (3.25)$$

cela quel que soit le référentiel. Les opérateurs de changement de référentiel (équation 3.1) sont donc également déterministes :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}} &= \mathbf{Q}, \\ \bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}, \\ \bar{\theta} &= \theta. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Concrètement, cela signifie que la moyenne de Reynolds peut être approchée par la moyenne d'ensemble d'un grand nombre de réalisations d'un écoulement observé dans *le même référentiel*. Cette précision faite, on trouve en moyennant la relation (3.10) que, dans un

référentiel tournant, la vitesse moyenne admet la même composante d'entraînement que la vitesse instantanée :

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}^T(\bar{\mathbf{u}}^* - \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\mathbf{x}^*) = \mathbf{Q}^T(\bar{\mathbf{u}}^* + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^*). \quad (3.27)$$

Son équation de transport par le champ moyen peut être obtenue, dans un référentiel en rotation, en appliquant l'opérateur de moyenne à l'équation de transport du champ instantané (3.21). Des deux pseudo-forces supplémentaires apparaissant au membre de droite, seule la force de Coriolis dépend de la vitesse, et cette dépendance est linéaire. Comme de plus $(\boldsymbol{\Omega} \wedge)$ est indépendant de l'expérience (équations 3.6, 3.26), la force de Coriolis moyenne est une corrélation d'ordre un de la vitesse. Le changement de référentiel ne change donc pas le problème de fermeture des équations de Reynolds, qui s'écrivent dans un référentiel tournant :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \bar{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}) - \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}). \quad (3.28)$$

On reconnaît le tenseur de Reynolds au membre de droite (dernier terme), qu'on note $\mathbf{R}$ dans la suite de ce paragraphe.

Intéressons-nous maintenant au tenseur de Reynolds $\mathbf{R}$ et à son équation de transport par le champ moyen. Notons d'abord que la vitesse fluctuante vérifie :

$$\mathbf{u}' = \mathbf{Q}^T(\mathbf{u}')^*, \quad (3.29)$$

c'est-à-dire que, à l'inverse de la vitesse moyenne, la vitesse fluctuante est un vecteur objectif. Comme le produit tensoriel de deux vecteurs objectifs est un tenseur objectif et que la moyenne de Reynolds préserve l'objectivité d'une grandeur objective, le tenseur de Reynolds est lui-même objectif :

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^* \mathbf{Q}. \quad (3.30)$$

Son équation de transport peut donc être construite très simplement à partir de l'équation des fluctuations de vitesse dans le référentiel en rotation, obtenue en prenant la différence entre l'équation du champ instantané (3.21) et celle du champ moyen (3.28) :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j - \overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} - 2\epsilon_{imj} \Omega_m u'_j + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}). \quad (3.31)$$

Cette équation permet de noter que seule la force de Coriolis (avant-dernier terme au membre de droite) a un effet direct sur le champ fluctuant. La force centrifuge quant à elle n'intervient pas dans le bilan pour la vitesse fluctuante. En appliquant l'opération (2.18) à partir de (3.31), on construit immédiatement l'équation de transport du tenseur de Reynolds par le champ moyen dans un référentiel tournant.

Ici on va plutôt construire l'équation de transport de $\mathbf{R}$ en appliquant un changement de référentiel aux différents termes de l'équation (2.19) valable dans le référentiel galiléen. Cela permet d'identifier précisément d'où proviennent les termes qui apparaissent par changement de référentiel. On note d'abord que les tenseurs de diffusion $\mathbf{D}^T$ et $\mathbf{D}^\nu$, de corrélation pression-déformation $\boldsymbol{\phi}$ et de dissipation $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont objectifs : ils sont construits uniquement à partir des opérations produit, gradient eulérien et moyenne de Reynolds, qui, appliquées à des grandeurs objectives – vitesse et pression fluctuantes notamment – génèrent de nouvelles grandeurs objectives. Le terme de production $\mathbf{P}$ fait pour sa part intervenir le gradient de vitesse moyenne qui n'est pas objectif. En prenant la moyenne de (3.16), il vient :

$$\nabla \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}^T \left((\nabla \bar{\mathbf{u}})^* + (\boldsymbol{\Omega} \wedge) \right) \mathbf{Q},$$

si bien que l'on trouve :

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^T \left(\mathbf{P}^* - \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R}^* - (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R}^*)^T \right) \mathbf{Q}. \quad (3.32)$$

Pour le terme d'advection, la règle de dérivation, en variable lagrangienne, d'un tenseur d'ordre deux objectif (voir Gontier, 1969, par exemple) donne :

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{R}}{Dt} &= \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{R}^* \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \frac{D\mathbf{R}^*}{Dt} \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^* \dot{\mathbf{Q}}, \\ &= \mathbf{Q}^T \left(\frac{D\mathbf{R}^*}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R}^* + (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R}^*)^T \right) \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

En utilisant (3.32) et (3.33), l'équation de transport du tenseur de Reynolds par le champ moyen s'écrit dans un référentiel en rotation (on reprend les notations de l'équation 2.19) :

$$\frac{D\mathbf{R}^*}{Dt} = \mathbf{P}^* + \boldsymbol{\phi}^* + \mathbf{D}^{T*} + \mathbf{D}^{\nu*} - \boldsymbol{\varepsilon}^* + \mathbf{G}^*,$$

avec :

$$\mathbf{G}^* = -2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R}^* - 2(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R}^*)^T,$$

soit composante par composante (l'exposant $\star$ est omis) :

$$G_{ij} = -2\Omega_m (\epsilon_{imk} \overline{u'_j u'_k} + \epsilon_{jmk} \overline{u'_i u'_k}). \quad (3.34)$$

Il est intéressant de noter que ce sont les termes d'advection et de production qui contribuent, chacun pour moitié, à l'apparition du terme G_{ij} , dit de *production de Coriolis*.

En ce qui concerne l'énergie cinétique turbulente, on rappelle que son équation de transport est obtenue en prenant la trace de l'équation de transport des tensions de Reynolds. En contractant les indices i et j dans la formule (3.34), on remarque que le tenseur $\mathbf{G}$ est de trace nulle (le produit d'une matrice symétrique par une matrice antisymétrique est de trace nulle) :

$$G_{ii} = 0. \quad (3.35)$$

Le terme de production de Coriolis est donc un terme de redistribution, comme le terme de corrélation pression-déformation. Il affecte uniquement l'anisotropie de la turbulence, en redistribuant l'énergie entre les différentes composantes du tenseur de Reynolds. En revanche, il ne modifie pas le montant de cette énergie, de sorte que l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente (2.20) est inchangée quel que soit le référentiel d'étude. Ce résultat n'est pas surprenant car on a vu au paragraphe précédent que la force de Coriolis ne produit aucun travail.

3.2 Théorie de base des écoulements en rotation

3.2.1 Nombres adimensionnels caractéristiques

Pour s'affranchir des effets d'échelle et conférer généralité à l'étude d'un écoulement, il est pertinent de décrire cet écoulement uniquement avec des variables adimensionnées. L'adimensionnement d'une variable se fait en normalisant cette variable par son échelle caractéristique.

Pour les équations de Navier-Stokes, on se donne généralement une échelle de longueur L et une échelle de vitesse U . L'analyse dimensionnelle fournit alors l'échelle caractéristique

de toutes les variables intervenant dans l'équation² :

$$\mathbf{u} = U\tilde{\mathbf{u}} \quad ; \quad \mathbf{x} = L\tilde{\mathbf{x}} \quad ; \quad t = \frac{L}{U}\tilde{t} \quad ; \quad p = \rho U^2 \tilde{p}.$$

$\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{t}$ et $\tilde{p}$ sont donc des variables sans dimension. En utilisant ces adimensionnements dans l'équation de Navier–Stokes, on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}},$$

avec $Re = UL/\nu$ le *nombre de Reynolds*, sans dimension. Le nombre de Reynolds représente le ratio entre les ordres de grandeur du terme convectif (U^2/L) et du terme diffusif ($\nu U/L^2$). Il caractérise donc le « régime » d'un écoulement en donnant le poids relatif d'un mécanisme sur l'autre.

Lorsque le fluide est animé d'un mouvement de rotation global, on dissocie l'accélération liée à la rotation du fluide et l'accélération « relative » en considérant l'équation de Navier–Stokes en référentiel tournant (3.23). Pour adimensionner l'équation, il reste à donner l'ordre de grandeur du terme de Coriolis. Ce terme a sa fréquence propre 2Ω avec $\Omega = \|\boldsymbol{\Omega}\|$; son ordre de grandeur est donc $2\Omega U$. L'équation adimensionnelle dans un référentiel tournant est donc :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) = -\tilde{\nabla} \tilde{p}_e + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} - Ro \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} \wedge \tilde{\mathbf{u}},$$

avec :

$$Ro = 2\Omega L/U, \tag{3.36}$$

le *nombre de rotation*, sans dimension. Ce nombre représente le ratio entre les ordres de grandeur du terme de Coriolis et du terme convectif. Dans la littérature, on trouve également le nombre de Rossby, l'inverse du nombre de rotation, pour caractériser l'importance relative des mécanismes de rotation et de convection ; on utilisera pour notre part le nombre de rotation.

Deux nombres sans dimension, le nombre de Reynolds Re et le nombre de rotation Ro , permettent donc de caractériser un écoulement incompressible isotherme en rotation. Cela signifie que des écoulements de même géométrie mais d'échelles U , Ω et L différentes sont néanmoins structurellement identiques lorsque les nombres Re et Ro sont les mêmes pour chaque écoulement, c'est-à-dire lorsque les poids relatifs entre les différents mécanismes de la dynamique sont respectés pour chaque écoulement.

Pour étudier les effets de la rotation dans des zones de l'écoulement où les effets diffusifs sont également importants (couche limite par exemple), il est assez naturel d'introduire le *nombre d'Ekman* $Ek = \nu/2\Omega L^2$, c'est-à-dire le ratio entre les ordres de grandeur du terme diffusif et du terme de Coriolis. Notons qu'on a $Ek = (ReRo)^{-1}$. Les couples (Re, Ek) ou (Ro, Ek) peuvent donc également être utilisés pour caractériser l'écoulement d'un fluide en rotation.

3.2.2 Théorème de Taylor–Proudman

Le résultat le plus connu probablement sur la dynamique des fluides en rotation est appelé *théorème de Taylor–Proudman*. Ce théorème nous dit que si les effets de rotation dans un écoulement incompressible sont dominants devant les effets inertiels ($Ro \gg 1$),

2. On rappelle qu'on s'est placé dans le cas incompressible : la masse volumique ρ n'est pas considérée comme une variable.

visqueux ($Ek \ll 1$) et instationnaires, alors cet écoulement ne présente aucune variation dans la direction de l'axe de rotation.

Sous les hypothèses du théorème, on peut négliger dans l'équation (3.23) le terme instationnaire, le terme non linéaire et le terme visqueux, de sorte que le comportement du fluide est décrit par l'équation :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_e - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}. \quad (3.37)$$

En prenant le rotationnel de cette équation³, il vient (on utilise l'identité $\nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a})$ pour $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ des vecteurs quelconques et la condition d'incompressibilité 2.9) :

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0. \quad (3.38)$$

La pression n'apparaît plus dans cette équation car le rotationnel d'un champ potentiel est nul.

L'équation (3.38) montre que l'écoulement ne présente pas de variation dans la direction de l'axe de rotation. Par exemple, si $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$, (3.38) se réduit alors à :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0.$$

La vitesse est donc constante dans la direction de l'axe de rotation. De plus, si une condition limite d'imperméabilité dans la direction de l'axe de rotation $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z = w = 0$ s'applique à la paroi, l'écoulement est bidimensionnel, $w \equiv 0$.

Ce résultat est à l'origine de la formation des *colonnes de Taylor* (figure 3.1) dans les fluides en rotation. L'ouvrage de Guyon *et al.* (2001) reporte deux autres résultats contenus dans le théorème de Taylor–Proudman : d'abord l'écoulement est normal au gradient de pression, ce qui apparaît directement en multipliant scalairement par $\mathbf{u}$ l'équation (3.37), ensuite la section des tubes de vorticité dans le plan normal à $\boldsymbol{\Omega}$ est constante.

Un écoulement qui satisfait les hypothèses du théorème de Taylor–Proudman et qui a donc les propriétés énoncées ci-dessus est qualifié de *géostrophique*.

3.2.3 Ondes inertielles dans les fluides en rotation

Une autre caractéristique importante des écoulements en rotation est l'existence, aux grands nombres de rotation, de solutions sous forme d'ondes dites *ondes inertielles* (voir Greenspan, 1990; Sagaut, 2007). Ces ondes sont mises en évidence expérimentalement en étudiant l'évolution d'un écoulement géostrophique perturbé. La « contrainte » de bidimensionnalité de l'écoulement aux grands nombres de rotation induit alors la propagation des ondes inertielles pour ramener l'écoulement vers un état géostrophique.

À partir de l'équation d'évolution de la vorticité sous les hypothèses $Ro \gg 1$ et $Ek \ll 1$ (cf note de pied de page 34), on observe que si l'on cherche une solution sous forme d'ondes planes $\mathbf{u} = e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} + \sigma t)} \mathbf{h}$, avec $\mathbf{h}$ indépendant de $\mathbf{x}$ et de t , alors on a la relation :

$$\sigma i \boldsymbol{\kappa} \wedge \mathbf{h} = 2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\kappa}) \mathbf{h}.$$

Par suite la solution d'onde plane existe pour $\mathbf{h}$ un vecteur propre de l'opérateur rotationnel ($i \boldsymbol{\kappa} \wedge$). En notant α le vecteur propre associé, on a de plus la relation de dispersion :

$$\sigma = \frac{2\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\kappa}}{\alpha}.$$

3. Si l'on ne néglige pas le terme instationnaire, on obtient l'équation d'évolution de la vorticité sous les hypothèses $Ro \gg 1$ et $Ek \ll 1$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$$

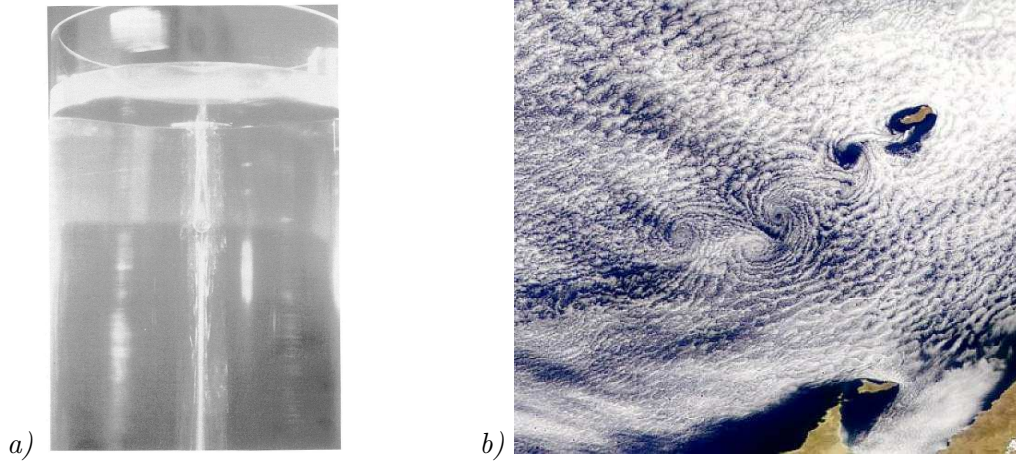


FIGURE 3.1 – Visualisation de *colonnes de Taylor* dans des écoulements quasi-géostrophiques. *a)* Remontée d'une bulle de silicone dans un bocal en rotation (d'après Bush *et al.*, 1995). Le caractère bidimensionnel de l'écoulement implique que l'écoulement est affecté dans toute la colonne de fluide au dessus et en dessous de la bulle. *b)* Image satellite au large de la Guadeloupe. La colonne d'air au dessus de l'île se comporte comme un obstacle, impliquant la formation d'une allée de Von Kármán dans les nuages largement au dessus de l'île.

La contrainte d'incompressibilité implique en outre que $\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{h} = 0$, c'est-à-dire $\boldsymbol{\kappa} \perp \mathbf{u}$; on dit que l'onde est transverse.

On reconnaît en $\mathbf{h}$ les propriétés des vecteurs $\mathbf{h}_s$ de la base hélicitaire introduite au paragraphe 3.2.3 (p. 22) comme les vecteurs propres de l'opérateur rotationnel associés aux valeurs propres $s\kappa$, avec $s = \pm 1$. Cette base est donc commode non seulement pour l'étude des transferts énergétiques par effets non linéaires mais aussi pour l'étude des écoulements en rotation, cette dernière vertu lui ayant été reconnue historiquement avant la première.

Donnons donc l'équation d'évolution des coefficients modaux a_s dans cette base, dans un référentiel en rotation cette fois. Pour cela, on construit d'abord l'équation de Navier-Stokes en référentiel tournant dans l'espace spectral. Comme on l'a fait au paragraphe (p. 20), on commence par prendre la divergence de l'équation de quantité de mouvement de manière à obtenir une expression pour la pression effective modale $\hat{p}_e$. En substituant cette expression dans le bilan de quantité de mouvement, on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\kappa^2\right)\hat{u}_i + 2P_{ij}(\boldsymbol{\Omega} \wedge \hat{\mathbf{u}})_j = -iP_{ij}\kappa_l \int_{\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} \hat{u}_j^*(\mathbf{p})\hat{u}_l^*(\mathbf{q})d\mathbf{p}d\mathbf{q}. \quad (3.39)$$

avec P_{ij} l'opérateur de projection sur le plan orthogonal à $\boldsymbol{\kappa}$ défini par (2.43). Bien que linéaire, le terme de Coriolis $2\boldsymbol{\Omega} \wedge \hat{\mathbf{u}}$ n'a aucune raison d'être orthogonal au vecteur d'onde $\boldsymbol{\kappa}$. On voit cependant que, de même que le terme convectif (dont le terme de Coriolis provient), l'élimination de la pression effective du bilan a pour effet de projeter ces termes sur le plan solénoïdal, c'est-à-dire de maintenir la contrainte d'incompressibilité. La projection sur le plan orthogonal à un axe peut se faire en multipliant vectoriellement à gauche et deux fois successivement par un vecteur unitaire portant cet axe. On utilisera donc la forme équivalente :

$$P_{ij} = \left(-\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\kappa} \wedge \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\kappa} \wedge\right)_{ij},$$

de sorte qu'en exploitant l'identité $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$, il vient (Cambon et Jacquin, 1989) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\kappa^2\right)\hat{u}_i + 2\frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\kappa}}{\kappa^2}(\boldsymbol{\kappa} \wedge \mathbf{u})_i = -iP_{ij}\kappa_l \int_{\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} \hat{u}_j^*(\mathbf{p})\hat{u}_l^*(\mathbf{q})d\mathbf{p}d\mathbf{q}. \quad (3.40)$$

C'est sous cette forme qu'on retiendra l'équation de Navier–Stokes en référentiel tournant dans l'espace spectral.

On décompose maintenant la vitesse suivant ses deux modes hélicitaires $\hat{\mathbf{u}} = a_+ \mathbf{h}_+ + a_- \mathbf{h}_-$. En utilisant le fait qu'ils sont des vecteurs propres de l'opérateur rotationnel (propriété 2.57) on en déduit la dynamique des coefficients modaux $a_{s_\kappa} = a_s(\boldsymbol{\kappa})$, $s = \pm 1$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2is_\kappa \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\kappa}}{\kappa} + \nu \kappa^2 \right) a_{s_\kappa} = -\frac{1}{4} \int_{\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0} \sum_{s_p, s_q} C_{\kappa p q}^{s_\kappa s_p s_q} a_{s_p}^* a_{s_q}^* d\mathbf{p} d\mathbf{q}, \quad (3.41)$$

avec $C_{\kappa p q}^{s_\kappa s_p s_q}$ les coefficients géométriques définis au paragraphe 3.2.3 par (2.60) (Cambon *et al.*, 1997) ou (2.68) si le terme non linéaire a préalablement été décomposé suivant (2.65) (Waleffe, 1993).

L'existence des ondes d'inertie « transparent » déjà au membre de gauche, c'est-à-dire la partie linéaire du système. Celles-ci sont recouvrées en faisant l'hypothèse $Ro \gg 1$ qui permet de négliger le membre de droite. On obtient une équation différentielle ordinaire sur les coefficients modaux $a_{s_\kappa}(t)$ dont la solution est :

$$a_{s_\kappa} = C e^{(-\nu \kappa^2 + 2is_\kappa \Omega \cos \theta)t},$$

avec $C = a_{s_\kappa}(0)$ et θ l'angle $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\kappa})$. En prenant la transformée de Fourier inverse de $\hat{\mathbf{u}}$, on trouve la solution en ondes d'inertie du problème linéaire :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} C (e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} + \sigma t)} \mathbf{h}_+ + e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} - \sigma t)} \mathbf{h}_-) e^{-\nu \kappa^2 t} d\boldsymbol{\kappa}, \quad (3.42)$$

avec $\sigma = 2\Omega \cos \theta$.

Au début du paragraphe, on avait présupposé l'existence d'une solution sous forme d'ondes planes à une formulation simplifiée de l'équation de la vorticité, ce qui nous permettait ensuite de caractériser cette solution. Maintenant, on voit que les ondes inertielles apparaissent directement en résolvant la partie linéaire du bilan de quantité de mouvement. On retrouve une solution sous forme d'ondes planes transverses. La relation de dispersion :

$$\sigma_{s_\kappa} = 2s_\kappa \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\kappa}}{\kappa}, \quad s_\kappa = \pm 1, \quad (3.43)$$

montre que la fréquence des ondes dépend seulement de l'orientation des vecteurs d'onde $\boldsymbol{\kappa}$ et pas de leur module. On voit en outre que les modes $e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} + \sigma_{s_\kappa} t)} \mathbf{h}_{s_\kappa}$ de fréquence opposée ont également une hélicité opposée (Waleffe, 1993). Enfin ces ondes sont également dissipatives puisqu'elles font apparaître le facteur $e^{-\nu \kappa^2 t}$.

3.3 Modification des transferts énergétiques sous l'effet de la rotation

Après avoir décrit quelques caractéristiques notables des écoulements en rotation, on s'intéresse maintenant plus spécifiquement aux effets de la rotation sur la turbulence. Ici, on se place dans le cadre de la turbulence homogène et on donne quelques résultats et éléments de description lorsque le champ moyen est simplement animé d'un mouvement de rotation solide.

Cet écoulement a été étudié expérimentalement par Jacquin *et al.* (1990). Le dispositif expérimental consiste en une turbulence initialement isotrope générée au passage d'une grille et à laquelle on imprime un mouvement de rotation solide à l'aide d'une section

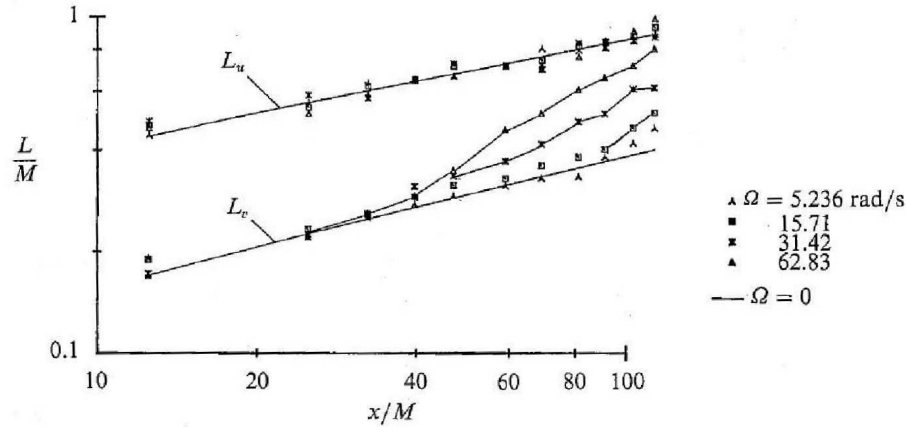


FIGURE 3.2 – Évolution des échelles intégrales dans un écoulement turbulent en rotation (d'après Jacquin *et al.*, 1990).

rotative. Les mesures en aval de cette section renseignent sur l'évolution des corrélations statistiques lorsque le champ moyen est en rotation solide.

L'un des effets le plus directement observable est un ralentissement de la décroissance énergétique par rapport au taux de décroissance observé pour un champ moyen nul. Comme la force de Coriolis ne produit aucun travail, cette observation n'est en fait que la manifestation de phénomènes plus complexes. Un deuxième point important mis en évidence par les mesures est une influence modérée de la rotation sur l'anisotropie du tenseur de Reynolds. Ce point est en revanche consistant avec ce que l'on observe directement à partir des équations de transport du tenseur de Reynolds dans un référentiel tournant puisque dans le cas d'une turbulence initialement (rigoureusement) isotrope, le terme de production de Coriolis s'annule pour toutes les composantes de sorte que la rotation n'a pas d'effets directs sur l'anisotropie dans ce cas. La troisième observation fournie par l'expérience est une augmentation des échelles intégrales de la turbulence. À l'inverse des corrélations en un point, ces modifications sont largement anisotropes (cf figure 3.2). Alors que dans le cas isotrope on a $L_u = 2L_v$ avec $L_u \stackrel{\text{def}}{=} L_{11,1}$, $L_v \stackrel{\text{def}}{=} L_{22,1}$ (cf équation 2.33), la rotation augmente beaucoup l'échelle intégrale transversale L_v (c'est-à-dire la distance dans la direction de l'axe de rotation le long de laquelle les fluctuations transversales sont corrélées) alors que son effet sur l'échelle intégrale longitudinale L_u (distance axiale le long de laquelle les fluctuations longitudinales sont corrélées) est modérée. De plus, les effets de la rotation sur l'échelle transversale semblent se déclencher au delà d'une valeur L_v critique dépendant du taux de rotation.

Les mesures et un raisonnement simple par particules déplacées permettent à Jacquin *et al.* (1990) de montrer que la dérive des échelles transversales se déclenche pour $Ro_v > 1$ avec $Ro_v = 2L_v/L_\Omega$ et $L_\Omega = (v'^2)^{1/2}/2\Omega$ la distance de déplacement induite par la force de Coriolis suite à une perturbation v' de la vitesse. Lorsque $Ro_v > 1$, l'échelle L_Ω vient « s'intercaler » entre les échelles intégrales et les échelles dissipatives, ce qui modifie la cascade d'énergie entre ces échelles.

En utilisant la base de Craya-Herring, analogue à la base hélicitaire introduite précédemment, Cambon et Jacquin (1989) montrent que les quantités $E_1 \stackrel{\text{def}}{=} 2v'^2 L_v$, respectivement $E_2 \stackrel{\text{def}}{=} u'^2 L_u$, correspondent aux contributions des modes transverses, respectivement longitudinaux, à l'énergie détenue dans le plan orthogonal à Ω par les ondes inertielles. L'augmentation du ratio L_v/L_u à ratio v'/u' à peu près constant constatés expérimentalement correspond donc à une contribution énergétique accrue des modes orthogonaux à Ω ,

interprétée comme une transition vers un écoulement turbulent bidimensionnel.

Waleffe (1993) propose une explication à la transition vers un écoulement géostrophique sous l'effet d'une rotation rapide. Pour cela, la vitesse est représentée sous forme d'ondes inertielles perturbées :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s_\kappa = \pm 1} b_{s_\kappa} e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} + \sigma_{s_\kappa} t) - \nu \kappa^2 t} \mathbf{h}_{s_\kappa} d\boldsymbol{\kappa}.$$

Alors que dans la solution en ondes inertielles du problème linéaire, les coefficients b_{s_κ} sont constants (équation 3.42), ce n'est plus le cas lorsque les effets non linéaires sont pris en compte. L'évolution de ces coefficients se déduit directement de celle des coefficients a_{s_κ} de la décomposition en modes hélicitaires puisque l'on a :

$$a_{s_\kappa} = b_{s_\kappa} e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} + \sigma_{s_\kappa} t) - \nu \kappa^2 t}. \quad (3.44)$$

Analyser la dynamique des coefficient b_{s_κ} revient donc à analyser celle des coefficients a_{s_κ} en tenant compte du fait qu'ils sont amortis dans le temps par la viscosité et que la force de Coriolis leur fournit une fréquence propre qui est celle des ondes inertielles. Insérons donc le changement de variable (3.44) dans l'équation d'évolution des coefficients a_{s_κ} (3.41). Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{s_\kappa} = -\frac{1}{4} \int_{\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0} \sum_{s_p, s_q} C_{\kappa p q}^{s_\kappa s_p s_q} a_{s_p}^* a_{s_q}^* e^{-i(\sigma_{s_\kappa} + \sigma_{s_p} + \sigma_{s_q})t} e^{-\nu(k^2 + p^2 + q^2)t} d\mathbf{p} d\mathbf{q}. \quad (3.45)$$

Dans un référentiel tournant, l'évolution des coefficients b_{s_κ} de la décomposition en ondes inertielles est donc régie par la même équation que celle des coefficients hélicitaires $a'_{s_\kappa} = a_{s_\kappa} e^{-\nu \kappa^2 t}$ lorsque le référentiel est fixe, à ceci près que les effets non linéaires sont pondérés par le facteur $e^{-i(\sigma_{s_\kappa} + \sigma_{s_p} + \sigma_{s_q})t}$, avec σ_{s_κ} défini par (3.43). Pour les forts taux de rotation $Ro \gg 1$ et sur les échelles de temps longues, ce facteur oscille rapidement autour de zéro dès que $\sigma_{s_\kappa} + \sigma_{s_p} + \sigma_{s_q} \neq 0$. Cela tend à annuler les transferts dus aux interactions entre ces triades, si bien que seules les interactions entre triades *raisonnantes*, c'est-à-dire qui vérifient :

$$\sigma_{s_\kappa} + \sigma_{s_p} + \sigma_{s_q} = 0, \quad (3.46)$$

contribuent significativement aux transferts énergétiques entre les différents modes.⁴

Pour une triade raisonnable, le système décrivant l'évolution des coefficients b_{s_κ} , b_{s_p} , b_{s_q} au cours de l'interaction élémentaire (s_κ, s_p, s_q) est identique au système (2.71). La conjecture de Waleffe (1992) sur le mode qui perd de l'énergie peut donc être appliquée identiquement. D'après cette conjecture, Waleffe (1993) montre que dans ces triades, le mode qui perd de l'énergie est toujours celui dont la fréquence σ_{s_κ} est la plus grande en valeur absolue, c'est-à-dire celui dont l'angle avec le plan méridional (orthogonal à $\boldsymbol{\Omega}$) est le plus grand. Comme l'essentiel des transferts énergétiques est assuré par les triades raisonnables, cela permet d'expliquer la transition d'un écoulement tridimensionnel vers un écoulement géostrophique sous l'effet d'une rotation rapide.

Notons que cette explication ne suffit pas pour justifier le transfert de l'énergie vers des modes rigoureusement 2D car l'énergie transférée vers un mode 2D est nulle au sein d'une triade raisonnable. Smith et Waleffe (1999) exhibent toutefois plusieurs mécanismes qui peuvent transférer de l'énergie vers les modes 2D, ceux-ci mettant en jeu des triades

4. Le système (3.45), (3.46) est à l'origine de modèles de fermeture spectraux spécifiques à la turbulence en rotation rapide (Cambon *et al.*, 2004).

quasi-raisonnantes ou des *quartet* raisonnants. La génération de modes lents 2D à partir de mode rapide 3D est d'ailleurs confirmée numériquement par les auteurs, par forçage d'une turbulence en rotation à des nombres d'ondes intermédiaires κ_f . Des modes lents $\kappa < \kappa_f$ procèdent alors d'une cascade inverse, pour laquelle un spectre d'énergie en κ^{-3} environ est obtenu pour ces modes. La forme de ce spectre est soutenue par l'analyse dimensionnelle dans la mesure où cette cascade inverse ne serait pas pilotée par la dissipation mais seulement par la rotation, ce qui conduit à $E(\kappa) \sim \Omega^2 \kappa^{-3}$.

Comme mentionné plus haut, la cascade « en avant » de l'énergie est également modifiée par la rotation, lorsque l'échelle de longueur « caractéristique » de la rotation vient s'intercaler entre les échelles auxquelles l'énergie est produite et celles auxquelles elle est dissipée. Dans cette zone où les mécanismes de rotation et de dissipation sont en concurrence, la forme du spectre est encore sujette à discussions. Par exemple, l'analyse de Zhou (1995) et les résultats de Galtier (2003) conduisent à un spectre de type $E(\kappa) \sim (\Omega \varepsilon)^{1/2} \kappa^{-2}$ alors qu'une pente asymptotiquement en κ^{-3} est trouvée numériquement par Cambon *et al.* (2004).

3.4 Effets conjugués de rotation et de cisaillement

3.4.1 Instabilité Coriolis–cisaillement

Après avoir décrit les effets de la rotation sur un écoulement turbulent lorsque le mouvement de rotation est le seul présent dans le champ moyen, on s'intéresse aux effets de la rotation lorsque que le champ moyen est également cisailé, c'est-à-dire en présence d'un gradient normal au plan $(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\Omega})$. Dans ce cas, la rotation a un effet tantôt *stabilisant*, tantôt *déstabilisant*, selon que, suite à une légère perturbation de vitesse, la force de Coriolis a tendance à ramener les particules fluides perturbées vers leur position d'origine ou au contraire à les en éloigner.

La description de ce phénomène et l'élaboration d'un critère prédictif sur l'action stabilisante ou non de la force de Coriolis remonte aux travaux de Bradshaw (1969) et de Pedley (1969). Le premier auteur, dont les travaux sont plus populaires (du moins dans la communauté de la modélisation de la turbulence), s'appuie sur une analogie avec l'effet stabilisant ou non de la gravité sur un écoulement stratifié pour proposer le critère de stabilité suivant :

$$Br \stackrel{\text{def}}{=} R(R+1) > 0, \quad \text{avec} \quad R = \frac{2\Omega}{-S}, \quad (3.47)$$

pour un écoulement de cisaillement $S \stackrel{\text{def}}{=} du/dy$ constant dans un plan orthogonal au vecteur de rotation $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_3$. On voit que c'est le ratio entre la vorticité d'entraînement $2\boldsymbol{\Omega}$ et la vorticité relative $\boldsymbol{\omega}$ (plus précisément entre leur composante suivant l'axe de rotation, qui sont les seules non nulles dans ce cas) qui pilote l'instabilité. Si le critère de Bradshaw est vérifié ($R < -1$ ou $R > 0$), la force de Coriolis a un effet stabilisant. Au contraire, si le nombre de Bradshaw Br est strictement négatif ($-1 < R < 0$), l'écoulement est instable et si Br est nul ($R = 0$ ou $R = -1$), on parle de stabilité neutre.

Ce critère peut être recouvré en raisonnant par particules déplacé (Tritton, 1992), de même qu'en analysant l'alignement entre les directions principales (les vecteurs propres) du tenseur de Reynolds et les vecteurs tangent et normal à la vitesse dans le plan orthogonal à $\boldsymbol{\Omega}$ (Johnston *et al.*, 1972; Tritton, 1992). Ce dernier auteur identifie l'angle de $-\pi/4$ entre la vitesse et la plus grande valeur propre du tenseur de Reynolds comme particulièrement propice à la production d'énergie turbulente de sorte que la situation la moins stable serait :

$$R = -\frac{1}{2}, \quad \text{soit} \quad \mathbf{W} + 4\boldsymbol{\Omega} = 0.$$

Ce point est confirmé par les simulations numériques de Cambon *et al.* (1994).

Une analyse de stabilité linéaire très simple (Speziale et Mac Giolla Mhuiris, 1989b; Cambon *et al.*, 1994), qu'on reproduit ici, suffit pour retrouver les conclusions principales données ci-dessus. La solution de base :

$$\mathbf{U} = (Sy, 0, 0), \quad P = P_0 - \rho\Omega Sy^2,$$

correspond à l'écoulement de cisaillement constant dans le plan normal à l'axe de rotation.⁵ En introduisant une perturbation uniforme de cette solution de base :

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}', \quad p_e = P + p' \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}'(t), \quad p' = p'(t),$$

dans l'équation de Navier–Stokes (3.23) et en négligeant le terme non linéaire en $\mathbf{u}'$, l'évolution de cette perturbation est donnée par le système dynamique linéaire du premier ordre :

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{M}\mathbf{u}' = 0, \quad \text{avec} \quad \mathbf{M} = \nabla \mathbf{U} + 2(\boldsymbol{\Omega} \wedge) = \begin{pmatrix} 0 & S - 2\Omega & 0 \\ 2\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et l'analyse des valeurs propres de la matrice $\mathbf{M}$ suffit pour déterminer la stabilité de la solution de base (voir Hirsch et Smale, 1974, par exemple). Si le discriminant $\Delta = 2\Omega(S - 2\Omega)$ est positif, les valeurs propres sont réelles. La perturbation :

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}'^1(0)e^{\sqrt{\Delta}t} + \mathbf{u}'^2(0)e^{-\sqrt{\Delta}t},$$

est croissante et la solution de base est donc instable. Si au contraire le discriminant est négatif, les valeurs propres sont imaginaires pures conjuguées, la perturbation oscille ce qui est associé à une solution de base stable. Comme $Br = -\Delta/S^2$, on retrouve le critère de stabilité (3.47). On retrouve également que dans le cas instable, l'amplification de la perturbation est maximale lorsque $R = -\frac{1}{2}$. D'après Speziale *et al.* (1996), la capacité de cette analyse simple, par perturbation uniforme, à prédire le bon critère de stabilité révèle que l'instabilité Coriolis–cisaillement est justement peu sensible aux détails locaux des perturbations, ce qui la rend « accessible » à des modélisations statistiques de la turbulence (cf chapitre 4). Les auteurs notent que ce n'est pas le cas pour des instabilités plus complexes comme l'instabilité Coriolis–déformation.

Enfin, il est intéressant de remarquer que le critère de Bradshaw est très étroitement lié au critère de Rayleigh pour la stabilité des écoulements axisymétriques (Cambon *et al.*, 1994), c'est-à-dire $\mathbf{U} = (0, U_\theta(r), 0)$ en coordonnées cylindriques. Ce critère peut s'écrire :

$$Ra = \frac{1}{r^3} \frac{\partial(rU_\theta)^2}{\partial r} > 0. \\ \left(= \left(2\frac{U_\theta}{r} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rU_\theta)}{\partial r} \right) \right) \quad (3.48)$$

Le premier facteur de (3.48) exprime une rotation solide ; il correspond au facteur 2Ω en coordonnées cartésiennes dans un référentiel tournant. Le second facteur est le seul qui subsiste dans l'expression de la vorticité en coordonnées cylindriques pour un écoulement axisymétrique ; il correspond à la vorticité absolue $\omega_z + 2\Omega$ en coordonnées cartésiennes dans un référentiel tournant. En fait, l'écoulement cisailé en rotation et les écoulements

5. Comme le note Leblanc et Cambon (1996), pour les écoulements plan en rotation, on peut équilibrer la force de Coriolis par la pression car elle dérive du potentiel $2\Omega\Psi$ (Speziale, 1981) avec Ψ la fonction de courant de la solution plane sans rotation ($\Psi = \frac{1}{2}Sy^2$ dans notre cas).

axisymétriques appartiennent à la même famille d'écoulements, celle des écoulements plan en rotation. Pour ces écoulements, la théorie des instabilités *localisées* ou *de courte longueur d'onde* permet de trouver efficacement, sous des hypothèses moins fortes que celle d'une perturbation uniforme qu'on a utilisée dans l'analyse de stabilité linéaire reportée plus haut, des critères de stabilité génériques englobant celui de Rayleigh ou celui de Bradshaw (Leblanc et Cambon, 1996; Sipp et Jacquin, 2000).

3.4.2 Manifestations de l'instabilité dans un canal en rotation transverse

L'écoulement turbulent dans un canal en rotation transverse est un écoulement plan cisailé en rotation, dans lequel se manifeste donc l'instabilité Coriolis-cisaillement. Comme cet écoulement servira de cas test récurrent dans les chapitres suivants, on donne ici quelques éléments de description supplémentaires.

De même que dans un canal fixe (sans rotation), l'écoulement moyen est monodimensionnel et permanent, mais, à l'inverse du canal fixe, la rotation se traduit par la présence de la force de Coriolis dans le bilan, celle-ci étant orientée dans la direction normale aux parois et dans le sens pointant vers une des deux parois suivant le sens de la rotation. La force de Coriolis est équilibrée par un gradient de pression normal aux parois (cf note de pied de page 40) de sorte qu'on a une surpression près de la paroi vers laquelle la force de Coriolis pointe (face *en pression* ou *anticyclonique*) et une dépression près de l'autre paroi (face *en dépression* ou *cyclonique*). La force de Coriolis n'a aucun effet direct sur la vitesse moyenne $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, 0, 0)$; les altérations de celle-ci, sous l'effet de la rotation, n'interviennent qu'indirectement par l'intermédiaire des contraintes de Reynolds. Ces points sont détaillés formellement dans l'annexe B.2.

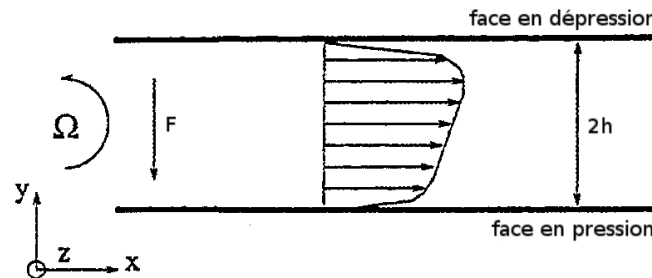


FIGURE 3.3 – Schématisation de l'écoulement turbulent dans un canal plan en rotation transverse. F désigne la force de Coriolis (adaptée de Dutzler *et al.*, 2000).

Cet écoulement a été étudié expérimentalement par Johnston *et al.* (1972) et numériquement (DNS) par Kristoffersen et Andersson (1993); Lamballais *et al.* (1996); Grundestam *et al.* (2008) notamment, ces études successives ayant permis entre autre d'explorer des taux de rotation toujours croissants. Il ressort que dès les nombres de rotation modérés – $|Ro_b| < 0.2$ environ –, avec :

$$Ro_b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\Omega h}{U_b}$$

(équation 3.36 pour les échelles $U = U_b$ la vitesse débitante et $L = h$ la demi-hauteur du canal – voir annexe B.1), l'écoulement est largement affecté par la rotation. L'intensité de la turbulence (composantes normales du tenseur de Reynolds notamment) est amortie du côté en dépression et augmentée du côté en pression. Entre les deux parois, une zone de vorticité absolue moyenne nulle, qui correspond à une pente en 2Ω dans le profil de vitesse, s'établit (cf figure 3.3).

Toutes ces observations sont en bon accord avec l'analyse de stabilité, en considérant que le caractère stable (respectivement instable) correspond à une diminution (respectivement une augmentation) de l'agitation turbulente. La zone de vorticité absolue nulle dans le cœur de l'écoulement correspond pour sa part au critère de stabilité neutre $R = -1$ (cf équation 3.47). L'apparition de zones de vorticité absolue quasi-nulle est d'ailleurs un caractère régulièrement observé (mais, comme le note Lamballais *et al.*, 1998, seulement partiellement compris) dans les fluides en rotation.

À ces régimes de rotation modérés, l'apparition de longs vortex longitudinaux, parfois appelés vortex de Taylor–Görtler, est également observée, phénomène qui n'est pas sans rappeler l'apparition des rouleaux longitudinaux dans l'écoulement de Couette au régime de stabilité neutre. Dans le canal en rotation, ces vortex seraient pourtant d'avantage localisés du côté en pression du canal (Kristoffersen et Andersson, 1993) mais les simulations de Piomelli et Liu (1995) semblent indiquer que ces structures sont quelque peu mobiles dans la direction normale aux parois, conférant à l'écoulement du côté en dépression une évolution sur des échelles de temps très longues.

Pour des taux de rotation supérieurs ($0.5 < |Ro_b| < 1.5$), ces vortex ne sont plus réellement persistants. L'examen des fluctuations rms de vitesse normale $\sqrt{v'^2}$ et de vorticité longitudinale $\sqrt{\omega_x'^2}$ révèle cependant une grande cohérence de ces moments dans le plan (y, z) (Lamballais *et al.*, 1998). Le « plateau » de vorticité absolue nulle est en revanche particulièrement prononcé. Du côté en dépression, l'écoulement ressemble de plus en plus à un écoulement laminaire, avec un profil de vitesse proche du profil parabolique de Poiseuille, et en accord avec le critère de stabilité de Bradshaw, les composantes du tenseur de Reynolds sont de plus en plus faibles. Du côté en pression, l'énergie turbulente décroît elle aussi, ce qui va à l'encontre de la tendance suggérée par le critère de stabilité. Cependant, Grundestam *et al.* (2008) notent que le pic d'énergie en proche paroi correspond à la zone de « déstabilisation maximale » $R = -\frac{1}{2}$. La baisse globale du niveau d'énergie y compris du côté en pression ne remet donc pas vraiment en cause la justesse du critère de stabilité de Bradshaw ; on pourrait plutôt l'attribuer à la progression du « front » laminaire au delà de la partie en dépression du canal, limitant notamment la taille des structures pouvant se développer du côté en pression.

Pour $|Ro_b| > 2$, l'écoulement est quasi-laminaire, le profil de vitesse est très proche d'un profil parabolique de Poiseuille et la corrélation spatiale des moments d'ordre deux est très grande. Si l'on admet que c'est vers ce profil que tend l'écoulement pour les très forts taux de rotation, la valeur limite $|Ro_b^{lam}|$ au delà de laquelle l'écoulement est totalement laminaire est calculée par Grundestam *et al.* (2008) comme celle pour laquelle la pente du profil de vitesse à la paroi en pression vaut 2Ω . On trouve $|Ro_b^{lam}| = 3$ et ce résultat est confirmé par les simulations numériques des auteurs.

3.5 Remarques sur l'analogie entre rotation et courbure

Il existe une analogie étroite entre les effets de rotation d'ensemble d'un écoulement, pour lesquels la description du mouvement dans un référentiel en rotation est un cadre d'étude approprié, et les effets induits par la courbure des lignes de courant. En effet, des lignes de courant perçues comme présentant une courbure constante à un observateur A paraîtront à l'inverse rectilignes à un observateur B positionné dans un référentiel en rotation constante par rapport à celui de A . Cette évidence physique est confirmée par Ishigaki (1994), qui compare, sur la base de mesures et de calculs numériques, l'écoulement turbulent dans un tube en rotation d'axe normal à celui du tube avec l'écoulement dans un tube de courbure constante, et vérifie que les nombres adimensionnels $Ro = \Omega d/U$ (d le diamètre du tube), respectivement $\lambda = d/R$ (R le rayon de courbure), jouent le même rôle pour l'écoulement

en rotation, respectivement courbe.

La rotation d'ensemble est donc un cas particulier de la courbure. Les deux phénomènes se confondent lorsque l'on fait l'hypothèse d'une courbure connue et constante le long d'une ligne de courant. En revanche, lorsque la courbure n'est pas constante ni connue *a priori* (recirculations, structures cohérentes, ...), on peut penser que le cadre d'étude des écoulements en rotation est insuffisant pour appréhender l'ensemble des effets de la courbure sur un écoulement et sa turbulence.

Pour mettre en évidence les effets de la courbure, on peut, à partir des équations de base, chercher à décrire l'évolution des variables exprimées dans une base locale qui « suit » la courbure des lignes de courant. On a d'ailleurs reporté au paragraphe précédent des analyses portant sur l'orientation des vecteurs propres du tenseur de Reynolds, qui forment une base de $\mathbb{R}^3$ (orthogonale car le tenseur de Reynolds est symétrique), il s'agit donc bien d'argumentaires utilisant la représentation de l'écoulement dans une base locale. D'autres auteurs (Spalart et Shur, 1997; Girimaji, 1996; Rumsey *et al.*, 2000) ont utilisé cette approche pour sensibiliser, avec succès, des modèles de turbulence à la courbure locale des lignes de courant. Notons qu'une autre base locale connue et qu'on peut utiliser est celle de Frenet, introduite en géométrie pour caractériser les courbes paramétrées, et qui donne lieu à la définition des notions de *courbure* et de *torsion*.

Une fois une base locale définie, on a pour le vecteur vitesse $\mathbf{u}$ et le tenseur de Reynolds $\mathbf{R}$ les formules de changement de base :

$$\mathbf{u}^\wedge = \mathcal{P}\mathbf{u}, \quad (3.49)$$

$$\mathbf{R}^\wedge = \mathcal{P}\mathbf{R}\mathcal{P}^{-1}, \quad (3.50)$$

avec $\mathcal{P}^{-1}$ la matrice de passage de la base cartésienne $\mathcal{B}$ à la base locale $\mathcal{B}^\wedge$, c'est-à-dire la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de base de $\mathcal{B}^\wedge$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$. Les formules de changement de base modifient seulement la représentation d'une grandeur et non pas la perception que l'on a d'une grandeur, contrairement aux formules de changement de référentiel (équation 3.1). Si $\mathcal{B}^\wedge$ est de plus orthonormée, $\mathcal{P}$ est une matrice orthogonale (cf propriété 3.2). Par suite, en dérivant en variable lagrangienne $\mathbf{u}$ et $\mathbf{R}$, on a :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathcal{P}^T \left(\frac{D\mathbf{u}^\wedge}{Dt} + \boldsymbol{\Omega}^{(r)} \mathbf{u}^\wedge \right), \quad (3.51)$$

$$\frac{D\mathbf{R}}{Dt} = \mathcal{P}^T \left(\frac{D\mathbf{R}^\wedge}{Dt} + \boldsymbol{\Omega}^{(r)} \mathbf{R}^\wedge + (\boldsymbol{\Omega}^{(r)} \mathbf{R}^\wedge)^T \right) \mathcal{P}, \quad (3.52)$$

avec $\boldsymbol{\Omega}^{(r)} = -\frac{D\mathcal{P}}{Dt}\mathcal{P}^T$ une matrice antisymétrique. Lorsque l'on utilise un système de coordonnées locales, le terme de dérivée matérielle fait donc apparaître des termes similaires à ceux induit par la force de Coriolis dans un référentiel tournant. En modélisation de la turbulence, ce résultat est utilisé pour sensibiliser les modèles de fermeture au second ordre algébriques à la courbure (voir Gatski et Wallin, 2004, par exemple).

Il est clair cependant que les termes de dérivée matérielle ne sont pas les seuls à être affectés par la courbure. Notamment, on sait que par définition une grandeur objective se transforme par changement de référentiel de la même manière que par un changement de base. Par suite, pour les écoulements identiques que sont l'écoulement de courbure constante, respectivement l'écoulement en rotation, la description de l'évolution d'une grandeur objective exprimée dans une base locale, respectivement dans un référentiel tournant, devraient être structurellement identiques. Les termes de courbure générés par la dérivée matérielle lorsque l'on se place dans une base locale ne sont pas suffisants pour assimiler les deux manières de décrire l'écoulement et il faut en particulier exhiber les termes de courbure

généérés par le gradient eulérien. Par exemple, Leblanc et Cambon (1996) donnent, pour des écoulements plans, la matrice antisymétrique à ajouter au tenseur gradient de vitesse moyenne pour passer d'un système de coordonnées curvilignes au système cartésien. Cela nécessite de caractériser précisément la matrice de changement de base $\mathcal{P}$, ce qui dépasse le cadre de ces remarques générales. Notons néanmoins que la caractérisation de bases locales propres à l'étude des effets de rotation et de courbure fait l'objet de travaux actuels (Gibbon, 2008, par exemple).

Chapitre 4

Modélisation des écoulements turbulents en rotation

Après avoir décrit quelques résultats observables à partir d'expériences ou de l'équation de Navier–Stokes concernant les écoulements turbulents en rotation, ce chapitre est consacré à la modélisation de ces écoulements.

Comme évoqué en introduction du manuscrit, la modélisation de la turbulence vise à proposer une description simplifiée de l'écoulement turbulent, la solution modélisée possédant moins de degrés de liberté que l'écoulement exact. Une motivation majeure est de rendre la simulation numérique d'écoulements turbulents compatible avec les ressources informatiques disponibles.

Pour cela, la démarche consiste à déduire de l'équation de quantité de mouvement exacte un système dont les inconnues ne sont pas la vitesse $\mathbf{u}$ et la pression p comme dans l'équation de Navier–Stokes, mais des variables $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ et $\mathcal{F}(p)$ définies à partir de $\mathbf{u}$ et p mais dont le nombre de degrés de liberté est inférieur. Le système résultant est alors ouvert car il fait apparaître des contraintes supplémentaires dans le bilan, en plus des contraintes hydrodynamiques. Ces contraintes turbulentes sont liées à l'action de la partie non résolue de l'écoulement sur les variables $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ et $\mathcal{F}(p)$. C'est cette action qu'il faut modéliser en élaborant un *modèle de turbulence*, c'est-à-dire une loi de comportement pour les contraintes turbulentes.

Les deux approches classiques de modélisation, la modélisation statistique, s'appuyant sur les équations RANS, et la Simulation des Grandes Échelles (LES), basée sur le concept de séparation d'échelles, sont considérées dans ce chapitre, respectivement au paragraphe 4.2 et 4.3. Auparavant, le paragraphe 4.1 précise des aspects de la démarche modélisatrice qu'il est important d'examiner lorsque l'on s'intéresse à la modélisation des écoulements en rotation.

4.1 Contraintes de modélisation pour les écoulements en rotation

Les approches de modélisation de la turbulence pour les écoulements en rotation sont les mêmes que dans le cas « général » (modélisation des corrélations statistiques – approche RANS – ou simulation des grandes échelles – LES). Cependant, le chapitre précédent nous a montré d'une part que la rotation d'ensemble a des effets importants sur la turbulence et d'autre part que le changement de référentiel d'étude est quasi-systématiquement utilisé pour l'étude de ces écoulements. Les « contraintes » spécifiques à la modélisation des écoulements en rotation relèvent donc de deux points :

- (I) une contrainte physico-formelle : la consistance de la modélisation par changement de référentiel,
- (II) une contrainte physique : la bonne représentation par les modèles de la phénoménologie des écoulements en rotation.

Consistance des modèles par changement de référentiel : nécessaire

Le premier critère (I) indique qu'un modèle utilisé dans un référentiel non galiléen doit être simplement la « traduction » d'un modèle exprimé dans le référentiel galiléen. Plus précisément, les termes non inertiels d'un modèle, c'est-à-dire qui dépendent du taux de rotation du référentiel¹ d'étude par rapport au référentiel galiléen, d'un modèle doivent être uniquement ceux qui apparaissent en appliquant les formules de changement de référentiel (3.1) aux grandeurs tensorielles intervenant dans le modèle. D'un autre côté, si un modèle fait intervenir des grandeurs tensorielles non objectives, les termes non inertiels qu'elles génèrent par changement de référentiel doivent être pris en compte lorsque l'on utilise ce modèle dans un référentiel non galiléen. En particulier, le tenseur de vorticité (membre de gauche de l'égalité 3.19) doit être remplacé par le tenseur de vorticité « absolue » (membre de droite de 3.19) dans un référentiel en rotation. D'autres modèles (Spalart et Shur, 1997, par exemple) font intervenir la dérivée matérielle du tenseur des taux de déformation et là encore, les termes non inertiels doivent être pris en compte lorsque ces modèles sont utilisés dans un référentiel quelconque. Speziale (1989) note que compte tenu de l'analogie entre rotation et courbure, le respect de ce principe permet d'utiliser la validation d'un modèle pour les écoulements en rotation comme validation préliminaire du modèle pour les écoulements courbes.

Indifférence matérielle : non nécessaire

En modélisation de la turbulence, les grandeurs tensorielles modélisées possèdent une définition exacte, notée $\mathbf{E}$, qui dépend des variables $\mathbf{u}$ et p de l'écoulement exact : $\mathbf{E} = f(\mathbf{u}, p)$. Les propriétés de transformation de $\mathbf{E}$ par changement de référentiel sont donc elles aussi explicitement connues. Par exemple, pour un tenseur d'ordre deux, on note :

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q}^T(\mathbf{E}^* + \mathbf{Z}_E^*)\mathbf{Q}, \quad (4.1)$$

avec $\mathbf{Z}_E^*$ non nul si $\mathbf{E}$ n'est pas objectif. Un modèle $\mathbf{M}$ pour $\mathbf{E}$ dépend quant à lui du contenu résolu $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ et $\mathcal{F}(p)$ des variables de l'écoulement, obtenus par application d'un opérateur $\mathcal{F}$ donné (moyenne statistique pour l'approche RANS, produit de convolution par un filtre pour l'approche LES, voir paragraphe 4.3.1.1) aux variables $\mathbf{u}$ et p : $\mathbf{M} = f(\mathcal{F}(\mathbf{u}), \mathcal{F}(p))$. Pour $\mathbf{M}$ un tenseur d'ordre deux, on note, par changement de référentiel :

$$\mathbf{M} = \mathbf{Q}^T(\mathbf{M}^* + \mathbf{Z}_M^*)\mathbf{Q}, \quad (4.2)$$

avec $\mathbf{Z}_M^*$ non nul si $\mathbf{M}$ n'est pas objectif. En notant « $\equiv$ » la relation « est un modèle de » :

$$\mathbf{M} \equiv \mathbf{E},$$

le principe de modélisation (I) implique :

$$\mathbf{M}^* + \mathbf{Z}_M^* \equiv \mathbf{E}^* + \mathbf{Z}_E^*.$$

1. La dépendance d'un modèle de turbulence au taux de translation du référentiel est injustifiée car le principe d'indifférence galiléenne étendue s'applique en modélisation de la turbulence (voir Spalart et Speziale, 1999). En effet, on peut montrer que deux mouvements isothermes identiques à un mouvement de translation, constante ou non, près sont soumis aux mêmes contraintes turbulentes (cela n'est plus vrai en présence de gradient de température). Cela n'est pas le cas lorsque les mouvements sont identiques à un mouvement de rotation solide près, ce sur quoi porte la discussion plus bas.

On peut se poser la question de savoir si un modèle devrait vérifier en plus :

$$\mathbf{Z}_E^* = \mathbf{Z}_M^*. \quad (4.3)$$

L'acceptation de ce principe conduit à utiliser, lorsque $\mathbf{Z}_E^* = 0$ – c'est le cas des contraintes de Reynolds en particulier (équation 3.30) –, des modèles indifférents aux mouvements de corps solide, c'est-à-dire vérifiant le principe d'indifférence matérielle. C'est sur la validité de ce principe en modélisation de la turbulence qu'on s'arrête maintenant.

Rappel (Principe d'indifférence matérielle). *En mécanique, c'est la définition des contraintes qui agissent sur un corps au cours du mouvement qui permet de définir le matériau du corps que l'on considère (loi de Hooke pour les solides élastiques, décomposition en contrainte de pression plus contraintes visqueuses pour un fluide, forme 2.7 des contraintes visqueuses pour un fluide newtonien, etc.). On définit ces contraintes, en accord avec l'expérience, en élaborant des relations constitutives ou lois de comportement.*

L'élaboration de lois constitutives pour différents matériaux a promu, au fil du temps, l'émergence de quelques principes parmi lesquels le principe d'indifférence matérielle², le principe de déterminisme (ou causalité : les contraintes présentes dépendent de l'histoire seulement et pas du futur) ou encore le principe de localité (celles qui s'exercent en un point $\mathbf{x}$ ne peuvent être affectées que par un voisinage spatial arbitrairement petit de $\mathbf{x}$). Le principe d'indifférence matérielle postule que les contraintes ne sont pas affectées par les mouvements « d'ensemble », variables dans le temps, de translation et/ou de rotation. Ces mouvements de corps solide sont par nature subjectifs, c'est-à-dire dépendants de l'observateur du mouvement, de sorte qu'une définition équivalente du principe d'indifférence matérielle est que les lois constitutives sont inchangées par changement de référentiels.

Il est important de noter que ces principes ne sont pas universels. Ils traduisent simplement des concepts généraux qui s'appliquent à plusieurs matériaux relativement divers. Si l'expérience montre que c'est le cas pour le matériau que l'on considère, l'invocation d'un de ces principes permet de « guider » la forme de la relation constitutive.

Il y a eu un temps une controverse sur la validité du principe d'indifférence matérielle en modélisation de la turbulence. Speziale (1979; 1984), considérait un temps que lorsque $\mathbf{Z}_E^*$ était nul (c'est-à-dire $\mathbf{E}$ objectif), le modèle $\mathbf{M}$ devait présenter la même propriété ($\mathbf{Z}_M^* = \mathbf{Z}_E^*$), et concluait à la validité du principe d'indifférence matérielle. Au contraire, Lumley (1970) a conclu très tôt et à juste titre, en utilisant des considérations d'échelle, que le principe d'indifférence matérielle n'est pas un principe de modélisation pertinent dans le cas de la fermeture RANS.

Formellement, il faut noter que l'étude des propriétés de $\mathbf{E}$ par changement de référentiel traduit le comportement des contraintes turbulentes pour deux écoulements $\mathbf{u}_A$ et $\mathbf{u}_B$ identiques à un mouvement de rotation solide près :

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_B + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}. \quad (4.4)$$

Ce cadre d'étude n'est pas correct pour étudier la validité du principe d'indifférence matérielle en modélisation de la turbulence. En effet, les contraintes turbulentes $\mathbf{E}$ ne s'exercent pas sur le matériau dont le mouvement est donné par $\mathbf{u}$ et p mais sur un autre « matériaux », dont le mouvement est donné par $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ et $\mathcal{F}(p)$. La question de la validité du principe d'indifférence matérielle pour la modélisation des contraintes turbulentes est celle de déterminer si deux écoulements $\mathcal{F}(\mathbf{u}_A)$ et $\mathcal{F}(\mathbf{u}_B)$ identiques à un mouvement de rotation solide près :

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_A) = \mathcal{F}(\mathbf{u}_B) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}, \quad (4.5)$$

2. Voir Truesdell et Noll (2004) p. 45 pour un historique sur l'émergence du principe d'indifférence matérielle.

sont soumis aux mêmes contraintes turbulentes. La réponse ici est clairement non, sans ambiguïté. Par exemple, pour $\mathcal{F}$ l'opérateur de moyenne de Reynolds, on a vu au paragraphe 3.3 que les deux écoulements $\bar{\mathbf{u}}_A = 0$ et $\bar{\mathbf{u}}_B = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}$ (ou de manière équivalente $\bar{\mathbf{u}}_B^* = 0$ avec $\mathcal{R}^*$ le référentiel en rotation) ne sont pas soumis du tout aux mêmes contraintes de Reynolds, la décroissance de l'énergie turbulente de $\bar{\mathbf{u}}_B$ étant plus lente que celle de $\bar{\mathbf{u}}_A$.

L'invalidité du principe d'indifférence matérielle vient bien sûr du fait que la relation (4.5), ou de manière équivalente $\mathcal{F}(\mathbf{u}_A) = \mathcal{F}(\mathbf{u}_B)^*$, n'implique pas la relation (4.4), c'est-à-dire $\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_B^*$. En effet, Speziale (1985) note qu'en écrivant l'équation de transport de la partie non résolue $\mathbf{u} - \mathcal{F}(\mathbf{u})$ d'un écoulement turbulent (voir équations 2.14 et 3.31 dans le cas de l'approche RANS), on voit clairement que même si l'on a $\mathcal{F}(\mathbf{u}_A) = \mathcal{F}(\mathbf{u}_B)^*$, la force de Coriolis affecte directement $\mathbf{u}_B^* - \mathcal{F}(\mathbf{u}_B)^*$ mais pas $\mathbf{u}_A - \mathcal{F}(\mathbf{u}_A)$, qui sont donc différents dans le cas général. Par conséquent, sous l'hypothèse (4.5), les contraintes turbulentes $\mathbf{E}_A$ et $\mathbf{E}_B$ ne sont pas les mêmes et le principe d'indifférence matérielle ne s'applique pas.

On se persuade néanmoins facilement que plus petite est la partie non résolue $\mathbf{u} - \mathcal{F}(\mathbf{u})$ d'un écoulement, plus proches sont les égalités (4.5) et (4.4) et plus le principe d'indifférence matérielle constitue une bonne approximation. Pour une modélisation statistique, la partie non résolue $\mathbf{u}'$ représente une partie significative du mouvement et le respect du principe d'indifférence matérielle conduit à des modèles représentant très mal les effets de la rotation sur l'écoulement (la contrainte (II) page 45), car les contraintes turbulentes ne sont pas affectées. C'est le cas des modèles de viscosité turbulente classiques (voir paragraphe 4.2.2). En simulation des grandes échelles en revanche (paragraphe 4.3), la partie non résolue du mouvement est relativement faible et le principe d'indifférence matérielle, quoique toujours faux, représente une approximation moins grossière, voire acceptable.

Bien que faux dans le cas général, Speziale (1985) montre que le principe d'indifférence matérielle est valable pour les écoulements bidimensionnels et donc qu'il est recouvert asymptotiquement pour $\Omega \rightarrow \infty$, d'après le théorème de Taylor–Proudman (paragraphe 3.2.2). En effet, dans le cas bidimensionnel, la force de Coriolis dérive d'un potentiel et peut être intégrée au gradient de pression (Speziale, 1981). Les équations d'évolution de $\mathbf{u}_A - \mathcal{F}(\mathbf{u}_A)$ et $\mathbf{u}_B^* - \mathcal{F}(\mathbf{u}_B)^*$ sont alors structurellement identiques, de sorte que lorsque (4.5) est vérifiée, alors l'égalité $\mathbf{u}_A - \mathcal{F}(\mathbf{u}_A) = \mathbf{u}_B^* - \mathcal{F}(\mathbf{u}_B)^*$ est satisfaite. Par conséquent dans le cas bidimensionnel, la relation (4.5) est suffisante pour obtenir la relation (4.4). Le principe d'indifférence matérielle est donc vrai pour les écoulements bidimensionnels, et donc asymptotiquement pour $\Omega \rightarrow \infty$ d'après le théorème de Taylor–Proudman.

Enfin, notons que, comme le rappellent Spalart et Speziale (1999), le même raisonnement permet de montrer que le principe d'indifférence galiléenne étendue, qui postule que les contraintes sont indépendantes du taux de translation, constant ou non, du référentiel, s'applique en modélisation de la turbulence. En effet, pour deux mouvements isothermes $\mathcal{F}(\mathbf{u}_A)$ et $\mathcal{F}(\mathbf{u}_B)$ identiques à une translation solide près, les équations de $\mathbf{u}_A - \mathcal{F}(\mathbf{u}_A)$ et $\mathbf{u}_B^* - \mathcal{F}(\mathbf{u}_B)^*$ sont structurellement identiques (la pseudo-force liée à la translation du référentiel est un potentiel). Les contraintes turbulentes ne sont donc pas affectées par les mouvements de translation solide.

En résumé, les modèles de turbulence dans un référentiel quelconque doivent être issus de l'application rigoureuse d'un changement de référentiel aux grandeurs tensorielles intervenant dans un modèle valable dans le référentiel galiléen. Le principe d'indifférence matérielle ne s'applique pas en modélisation de la turbulence, excepté pour les écoulements bidimensionnels. Par conséquent, un modèle traduit un équilibre valable uniquement dans un référentiel de référence (comme le théorème de la quantité de mouvement) :

$$\mathbf{M} \equiv \mathbf{E}.$$

Quel que soit le référentiel d'étude, c'est cet équilibre de référence qui doit être traduit :

$$\mathbf{M}^* + \mathbf{Z}_M^* \equiv \mathbf{E}^* + \mathbf{Z}_E^*.$$

4.2 Modélisation des corrélations statistiques : approche RANS

Ce paragraphe est consacré à l'approche RANS pour la modélisation des écoulements turbulents en rotation. Après avoir donné quelques généralités sur la modélisation RANS (paragraphe 4.2.1), on dégagera les implications qu'on peut déduire directement concernant la prise en compte des effets de la rotation par les modèles (paragraphe 4.2.2). Le paragraphe 4.2.3 présente quelques résultats de prise en main des modèles RANS utilisés dans la suite. Ensuite, plusieurs modèles de fermeture au second ordre (paragraphe 4.2.4) et au premier ordre (paragraphe 4.2.5) sont évalués pour les écoulements en rotation, en particulier en comparant leurs résultats sur le cas test du canal plan en rotation.

4.2.1 Généralités

La modélisation RANS (*Reynolds Averaged Navier–Stokes*) vise à caractériser les moments statistiques d'un écoulement. C'est l'approche la plus utilisée aujourd'hui pour les études numériques d'écoulements industriels. Deux raisons principales expliquent cette popularité : la maturité de l'approche (un demi-siècle de pratique et un cadre d'étude bien défini) et son coût modéré en termes de ressources informatiques³. Mais la maturité de la discipline ne nuance qu'en partie le fait que le coût modéré de l'approche RANS tient surtout aux limitations physiques qu'elle engendre. En effet, la description statistique de l'écoulement ne rend pas bien compte des aspects locaux et instantanés induits par les structures turbulentes cohérentes.

Pour caractériser les moments statistiques de l'écoulement, la modélisation RANS utilise comme base les équations de transport de ces moments, notamment l'équation de transport de la vitesse moyenne (2.13) et l'équation de transport du tenseur de Reynolds (2.19). Cette approche est confrontée à un *problème de fermeture* car, à cause de la non-linéarité de l'équation de Navier–Stokes notamment, si l'on se donne des moments statistiques pour inconnues primaires, le système formé par leurs équations de transport possède d'autres inconnues secondaires, qui sont des corrélations statistiques que l'on ne peut *pas calculer directement* à partir des inconnues primaires. L'objet de la modélisation RANS est de fermer le système : on cherche à *représenter le plus fidèlement possible* les corrélations inconnues en fonction des moments qui figurent parmi les variables primaires du système.

Usuellement, on dit que l'on fait une fermeture à l'ordre n si c'est l'équation des moments centrés d'ordre n de la vitesse sur laquelle porte la modélisation. La majeure partie des modèles RANS correspondent à des fermeture d'ordre un ou deux, de sorte que l'on modélise soit directement le tenseur de Reynolds, soit les corrélations inconnues qui apparaissent dans son équation de transport.

4.2.1.1 Fermeture au premier ordre

Dans le cadre d'une fermeture au premier ordre, on modélise directement le tenseur de Reynolds. Le plus souvent, cela se fait en utilisant une hypothèse de *viscosité turbulente*.

3. À titre d'exemple industriel standard, 3.6 tours de rotor sur le dernier étage complet rotor/stator/diffuseur d'une turbine à vapeur (*ie* une géométrie « complexe ») sont simulés par Stanciu *et al.* (2011) en trois semaines (un délai « acceptable ») sur une machine de 16 processeurs de 2.6 GHz (une puissance de calcul largement « accessible » aujourd'hui).

La première proposée, qui est encore la plus utilisée aujourd'hui, fut introduite par Boussinesq qui, en s'inspirant du modèle des fluides newtoniens (cf paragraphe 2.1, équation 2.7) propose que la partie déviatrice – de trace nulle – des contraintes turbulentes soit proportionnelle au tenseur des taux de déformation moyens *via* un coefficient de viscosité turbulente ν_t , ce qui s'écrit⁴ :

$$\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = -2\nu_t \overline{S_{ij}}. \quad (4.6)$$

Comme la viscosité cinématique ν , la viscosité turbulente ν_t s'exprime en $m^2 \cdot s^{-1}$ et il faut donc se fournir une échelle de longueur et de temps de la turbulence pour l'évaluer. Excepté dans les modèles purement algébriques de longueur de mélange, où ces échelles sont prescrites, celles-ci sont généralement construites à partir d'une (ou plusieurs) grandeur(s) turbulente(s) calculée(s) en résolvant une équation de transport. Ces équations sont modélisées; notamment elle peuvent utiliser l'hypothèse de viscosité turbulente de nouveau.

Pour illustrer ces généralités sur les modèles de fermeture au premier ordre, prenons l'exemple du modèle $k - \varepsilon$ à deux équations de transport. Ce modèle utilise l'hypothèse de viscosité turbulente (4.6) avec :

$$\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon. \quad (4.7)$$

Une équation de transport sur k et sur ε doivent donc être modélisées. L'équation modélisée de k se base sur l'équation de transport exacte (2.20). Grâce à l'hypothèse (4.6), on trouve pour le terme de production l'expression :

$$P = 2\nu_t \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}}. \quad (4.8)$$

La viscosité turbulente ν_t intervient également dans le modèle pour la diffusion turbulente :

$$D^T = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right). \quad (4.9)$$

L'équation modélisée de k s'écrit donc finalement :

$$\frac{Dk}{Dt} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right), \quad (4.10)$$

en faisant usage de (4.7) et de (4.8). Le taux de dissipation ε n'est pas directement modélisé, mais obtenu en résolvant une équation de transport. L'équation modélisée de ε s'écarte totalement de sa forme exacte, qui est trop complexe pour être modélisée simplement. Celle-ci est directement « calquée » sur celle de k : terme source, terme « puits », terme diffusif. Elle s'écrit :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{C_{\varepsilon_1} P - C_{\varepsilon_2} \varepsilon}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right). \quad (4.11)$$

Dans cette équation, la division par l'échelle de temps $\tau = k/\varepsilon$ intervient uniquement pour satisfaire l'analyse dimensionnelle. Pour finir, le jeu de constante retenu par accord à l'expérience est le suivant :

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon_1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon_2} = 1.92, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3. \quad (4.12)$$

4. Bien sûr, il s'agit ici d'une acceptation moderne du concept introduit par Boussinesq (1842–1929), mais la discussion historico-scientifique de Schmitt (2007) montre que l'essentiel des idées sous-jacentes étaient présentes dans les communications originales de Boussinesq, de sorte que la paternité qui lui est faite du concept de viscosité turbulente n'est pas usurpée.

Si l'on considère les équations (2.13), (4.10), (4.11) et que l'on fait usage de (4.6)–(4.8) et (4.12), on a obtenu un système fermé. Pour résoudre ce système, il reste à se donner des conditions au bord pour chaque variable résolue, point important dont il est question au paragraphe 4.2.1.3.

D'après cet exemple, on voit qu'avec un modèle de fermeture RANS au premier ordre, on peut accéder au champ moyen statistiquement. Grâce aux équations supplémentaires qui sont résolues (équations 4.10, 4.11 pour le modèle $k - \varepsilon$), on dispose aussi d'une approximation de la répartition spatiale de l'énergie cinétique turbulente k . La répartition « détaillée » de cette énergie entre les composantes du tenseur de Reynolds est quant à elle régie par l'hypothèse de viscosité turbulente à proprement parler. Sous l'hypothèse de Boussinesq (4.6) par exemple, le tenseur d'anisotropie $\mathbf{b}$ définit par :

$$b_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}}{2k}, \quad (4.13)$$

qui, comme son nom l'indique, mesure l'anisotropie du tenseur de Reynolds, est supposée alignée avec le tenseur des taux de déformation moyens $\overline{\mathbf{S}}$. Cette hypothèse est forte. Elle est mise en défaut y compris dans des configurations relativement simples. Par exemple, pour un écoulement turbulent de canal (cf annexe B.1), seule la composante $\partial \bar{u} / \partial y$ du gradient moyen est non nulle. Par suite l'hypothèse de viscosité turbulente (4.6) conduit à $\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2}$, résultat en forte contradiction avec la réalité physique de cet écoulement.

4.2.1.2 Fermeture au second ordre

Dans les modèles de turbulence au second ordre, on ne modélise pas directement le tenseur de Reynolds, mais son équation de transport (2.19). Celle-ci fait intervenir des corrélations statistiques inconnues, les termes ϕ , ε et $\mathbf{D}^t$, qu'il faut donc modéliser. On a vu que dans les modèles au premier ordre, l'anisotropie de la turbulence était contrainte par l'hypothèse de viscosité turbulente. Ce n'est plus le cas pour une fermeture au second ordre, de sorte que ce niveau de fermeture est *a priori* mieux à même de représenter l'anisotropie de la turbulence. Néanmoins, les termes ϕ et ε à modéliser jouent précisément un rôle important dans la distribution de l'énergie entre les composantes du tenseur de Reynolds (ϕ , de trace nulle d'après l'équation 2.21, ne joue d'ailleurs qu'un rôle de redistribution) et un soin particulier doit donc être apporté à la modélisation de ces termes pour tirer parti d'une fermeture au second ordre. À l'inverse, le terme de production $\mathbf{P}$, qui ne dépend que du gradient de vitesse moyenne et des composantes du tenseur de Reynolds, ne demande aucune modélisation. Il en va de même du terme de production de Coriolis $\mathbf{G}$, dans un référentiel tournant (voir paragraphe 4.2.2). C'est un avantage majeur des fermetures au second ordre par rapport aux fermetures au premier ordre.

Principes de base de la modélisation au second ordre

Donnons quelques remarques très générales sur la modélisation des termes de pression–déformation ϕ et de dissipation ε . En ce qui concerne ϕ , on décompose souvent ce terme en deux contributions additives :

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^{(1)} + \phi_{ij}^{(2)}. \quad (4.14)$$

Cette décomposition provient de celle de la pression fluctuante, solution de l'équation de Poisson suivante (obtenue en prenant la divergence de 2.14) :

$$-\frac{1}{\rho} \nabla^2 p' = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\overline{u'_i u'_j} - \overline{u'_i u'_j}). \quad (4.15)$$

Si le domaine spatial est infini, le formalisme de Green permet d'exprimer la solution de cette équation sous la forme générale (Chou, 1945) :

$$-\frac{1}{\rho}p'(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u'_i \overline{u'_j}) \right) \bigg|_{\mathbf{x}'} \frac{d\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}}_{p'(1)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j}) \right) \bigg|_{\mathbf{x}'} \frac{d\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}}_{p'(2)}, \quad (4.16)$$

et la décomposition (4.14) correspond à :

$$\phi_{ij}^{(1)} = \overline{p'(1) \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \right)}, \quad \phi_{ij}^{(2)} = \overline{p'(2) \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \right)}. \quad (4.17)$$

La décomposition (4.16) est intéressante car elle souligne que le terme de pression-déformation contient une partie *lente* associée à $p^{(2)}$ – non linéaire en la vitesse fluctuante – et une partie *rapide* associée à $p^{(1)}$ – linéaire en la vitesse fluctuante – et qui est la seule à dépendre explicitement du gradient de vitesse moyenne. Pour une turbulence homogène, ce gradient est constant et on a donc :

$$\phi_{ij} = A_{ij} + M_{ijkl} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_l}. \quad (4.18)$$

Cette relation exacte est une bonne base pour modéliser le terme de corrélation pression-déformation. Mais elle ne montre que trop bien la complexité de la tâche : les tenseurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{M}$ à modéliser mettent en jeu cinquante coefficients libres (en tenant compte du fait que ϕ_{ij} est symétrique et de trace nulle) qui dépendent chacun des corrélations doubles en deux points sur tout le domaine ! Dans les modèles au second ordre que l'on utilisera dans la suite (paragraphe 4.2.4), qui sont parmi les plus populaires, cette relation sera remplacée par une relation impliquant au plus 5 coefficients, constants ou dépendants de corrélations en un point.

En ce qui concerne la modélisation du terme lent $\phi_{ij}^{(2)}$, on a vu qu'il s'agit d'un terme de redistribution qui agit même en l'absence de gradient moyen. Effectivement, on constate expérimentalement que si on laisse librement (c'est-à-dire sans gradient moyen) évoluer une turbulence initialement anisotrope, celle-ci a tendance à retourner vers l'isotropie. Ce type d'écoulement, révélateur des situations que l'on peut appréhender avec un modèle de fermeture au second ordre et non avec un modèle au premier ordre, peut donc servir à construire une modélisation pour le terme lent $\phi_{ij}^{(2)}$. En fait ce terme n'est pas le seul responsable du retour à l'isotropie. Le déviateur du tenseur de dissipation $\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\mathbf{I}$ distribue également l'énergie entre les composantes du tenseur de Reynolds et ce même en l'absence de gradient moyen. Par suite, ces deux termes sont parfois modélisés conjointement, car leur effet individuel est difficile à isoler. On modélise alors :

$$T_{ij} = \phi_{ij}^{(2)} - \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \right).$$

Un aperçu plus concret de la modélisation au second ordre sera fourni au paragraphe 4.2.4 où les modèles « emblématiques » que l'on a utilisés sont brièvement introduits.

Équations différentielles ou équations algébriques

Une fois que l'équation (2.19) est fermée, la voie la plus naturelle est de résoudre numériquement cette équation de transport modélisée et d'obtenir ainsi le tenseur de Reynolds. Cette procédure porte, en général, à sept le nombre d'équations supplémentaires (une équation par composante distincte du tenseur de Reynolds plus une équation pour la dissipation) pour fermer les équations de Reynolds. Une deuxième voie, assez largement étudiée dans la littérature, est celle des modèles algébriques. Ces modèles sont bâtis sur l'hypothèse

que le tenseur d'anisotropie (4.13) est à l'équilibre, c'est-à-dire constant le long d'une ligne de courant (Pope, 1975) :

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} = 0, \quad (4.19)$$

$$\implies \frac{Du'_i u'_j}{Dt} - \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \frac{Dk}{Dt} = 0. \quad (4.20)$$

L'équation (4.19) est appelée *hypothèse d'équilibre faible*. Le développement (4.20) montre que si l'on substitue les termes de dérivée matérielle $Du'_i u'_j/Dt$ et Dk/Dt par leur expression issue d'une modélisation au second ordre, on obtient une équation algébrique (implicite) sur les composantes $\overline{u'_i u'_j}$ du tenseur de Reynolds. En outre, si cette équation peut s'écrire sous la forme d'une simple combinaison linéaire d'un nombre réduit d'arguments⁵, la théorie des invariants permet, sans introduire trop de non linéarité (celles-ci alourdissent la programmation des modèles et nuisent à sa stabilité numérique) de rendre la relation explicite (voir Pope, 1975; Gatski et Speziale, 1993; et plus récemment Ocen et al., 2010).

Avec un modèle au second ordre algébrique explicite, aucune équation supplémentaire par rapport à un modèle au premier ordre ne demande à être résolue et, comme pour le premier niveau de fermeture, cela est possible grâce à une hypothèse sur l'anisotropie du tenseur de Reynolds. Mais l'hypothèse d'équilibre faible est moins forte que l'hypothèse de viscosité turbulente : avec cette dernière, l'anisotropie du tenseur de Reynolds est « présumée » c'est-à-dire imposée, tandis qu'avec un modèle au second ordre algébrique, l'anisotropie est simplement supposée à l'équilibre, c'est-à-dire constante le long d'une ligne de courant.

4.2.1.3 Prise en compte des parois

Les équations de Reynolds fermées par un modèle au premier ou au second ordre, il reste à imposer des conditions au bord pour les variables du système. En particulier, en supposant que les parois sont fixes dans le référentiel d'étude, l'adhérence voudrait que la condition imposée au bord soit nulle pour la vitesse moyenne $\bar{\mathbf{u}}$ et le tenseur de Reynolds. Cependant, la physique de la turbulence est complexe en proche paroi. La turbulence devient fortement anisotrope en atteignant une limite à deux composantes ($v' = 0$). Le caractère non local de la pression fluctuante, mis en évidence par l'équation (4.16)⁶, joue un rôle important dans ces mécanismes de proche paroi (voir Manceau, 1999, par exemple). En pratique, beaucoup de modèles de turbulence ne sont pas assez riches physiquement pour être intégrés jusqu'à la paroi.

Lois de paroi

Cependant, les expériences d'écoulements turbulents sur des géométries simples (canaux ou conduites par exemple) indiquent que, jusqu'à une certaine distance adimensionnelle y^+ de la paroi, la production et la dissipation se compensent. La turbulence est alors en équilibre local. Dans ce cas, on peut alors montrer analytiquement que le profil de la composante longitudinale de vitesse moyenne adimensionnelle U^+ a un comportement

5. À ce titre, une hypothèse supplémentaire sur l'anisotropie de la diffusion :

$$\mathcal{D}_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{2k} \mathcal{D}_{kk},$$

avec $\mathcal{D}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} D_{ij}^\nu + D_{ij}^T$, est très utile.

6. Cette équation a été obtenue sous l'hypothèse d'un domaine spatial infini, mais une écriture similaire s'obtient dans le domaine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, soit en présence d'une paroi en $y = 0$ (voir Manceau et al., 2001).

universel (y^+ et U^+ sont adimensionnées par la vitesse de frottement pariétal u_τ , équation B.14, et la viscosité ν) :

$$U^+ = \frac{1}{C_\kappa} \ln y^+ + C, \quad (4.21)$$

avec $C_\kappa \approx 0.41$ la constante de Kármán et $C \approx 5.5$. Ce comportement universel est utilisé pour élaborer des *lois de paroi*. Ces formules analytiques permettent de fixer les conditions au bord, en fonction de la distance à la paroi du premier point de calcul. L'hypothèse d'équilibre local permet également d'élaborer ce type de lois pour le tenseur de Reynolds ou la dissipation (voir Chassaing, 2000, p. 382 ; Pope, 2006, p. 442). En admettant ce comportement universel de l'écoulement turbulent en proche paroi, on peut utiliser ces lois pour toutes géométries, mais un soin particulier doit être apporté à la construction du maillage, pour que les premiers points de calcul au bord du domaine se situent dans le domaine de validité des lois de parois.

Modélisation spécifique

Bien que l'utilisation de lois de paroi ne soit pas toujours perçue dans l'industrie comme contraignante, dans la mesure où cela dispense de mailler finement jusqu'à la paroi, ce qui allège beaucoup la durée des simulations, les moyens de calcul actuels justifient, pour accéder à une physique plus fine en proche paroi, que l'on cherche à s'affranchir de l'utilisation de lois de paroi. À ce titre, des modèles dit *bas-Reynolds* (élaborés pour être valides lorsque la turbulence est faible, ce qui est le cas près des parois) ou de *proche paroi* (élaborés spécifiquement pour rendre compte des effets de proche paroi) ont été développés. Bien sûr, ces modèles demandent de mailler finement jusqu'au bord, la condition d'adhérence étant directement imposée. Une revue de modèles au second ordre bas-Reynolds ou de proche paroi est disponible dans Manceau (1999). L'auteur dénonce que ces modèles se présentent souvent comme des corrections modérées à des modèles existants, sans remettre en cause les hypothèses de base de ces modèles (hypothèse de *localité* et de *quasi-homogénéité* notamment).

En rupture avec ce type d'approche, Durbin (1993) a introduit le concept de relaxation elliptique, repris plus tard par Manceau et Hanjalić (2002) pour développer le modèle au second ordre à pondération elliptique (*Elliptic Blending Reynolds Stress Model*, EB-RSM), cette seconde approche réduisant le nombre d'équations impliquées et améliorant la stabilité de la première approche. Une équation elliptique, analogue à celle dont la pression moyenne est solution, est résolue pour un coefficient α mesurant l'influence « à distance » de la paroi sur l'écoulement. Le coefficient α est alors utilisé pour passer continuellement d'un modèle valide en proche paroi à un modèle classique valable loin des parois (voir annexe D).

Comportement asymptotique en proche paroi

Un outil particulièrement efficace pour la modélisation de la turbulence en proche paroi est le développement en série de Taylor, qui permet de déduire le comportement asymptotique à la paroi d'une grandeur exacte ou de son modèle.

En se limitant à l'ordre deux, le développement en série de Taylor de la vitesse au voisinage de $\mathbf{x} = (x, 0, z)$ un point de la paroi s'écrit :

$$u_i(x, y, z, t) = a_{i0} + a_{i1}y + a_{i2}y^2 + \mathcal{O}(y^3), \quad \text{avec} \quad a_{ij}(x, z, t) = \left. \frac{1}{j!} \frac{\partial^j u_i}{\partial y^j} \right|_{(x,0,z,t)} \quad (4.22)$$

des coefficients indépendants de y . La condition d'adhérence implique :

$$a_{10} = a_{20} = a_{30} = 0, \quad (4.23)$$

et la condition d'incompressibilité, à la limite $y \rightarrow 0$, nous donne :

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(x,0,z,t)} = a_{21} = 0. \quad (4.24)$$

En retenant le terme prépondérant du développement (4.22) et en tenant compte de (4.23) et (4.24), on obtient les comportements asymptotiques suivants en proche paroi :

$$u \sim y, \quad v \sim y^2 \quad \text{et} \quad w \sim y. \quad (4.25)$$

Ces résultats ne sont vrais qu'asymptotiquement, c'est à dire très près de la paroi. En revanche, ils sont parfaitement généraux : ils ne dépendent pas de l'écoulement (homogène dans les directions x et z ou pas, en particulier). On a simplement utilisé les propriétés d'adhérence et d'incompressibilité, de sorte que tout champ $\mathcal{L}(\mathbf{u})$, pour $\mathcal{L}$ un opérateur linéaire, vérifie les mêmes comportements. En particulier, c'est le cas de la vitesse moyenne $\bar{\mathbf{u}}$ et de la vitesse fluctuante $\mathbf{u}'$.

Les comportements asymptotiques (4.25) permettent de déduire ceux de plusieurs grandeurs turbulentes, par exemple le tenseur de Reynolds. En général, la consistance entre le comportement asymptotique d'un modèle et celui de la grandeur exacte qu'il représente est une condition nécessaire pour une modélisation efficace en proche paroi. C'est un des points importants sur lesquels sont basés les modèles à relaxation ou pondération elliptique.

4.2.2 Positionnement du problème pour la rotation

Après ces généralités sur la modélisation RANS de la turbulence, l'objet de ce paragraphe est de dégager les quelques implications immédiates et bien connues pour la représentativité des modèles pour les écoulements en rotation. Cela nous permettra de préciser la démarche dans laquelle les paragraphes 4.2.3–4.2.5 s'inscrivent.

Niveau de fermeture : second ordre *a priori* mieux adapté

Examinons *a priori* les effets de la rotation sur le modèle au premier ordre $k - \varepsilon$ en figurant son comportement dans un référentiel tournant par application du principe de modélisation (I) (p. 45). Les causes et les conclusions que l'on dégage sont valables pour la majorité des modèles classiques ($k - \omega$, $k - \omega$ SST, Spalart–Almaras, $v^2 - f$, ...). D'abord, la structure de l'anisotropie est fixée par l'hypothèse de viscosité turbulente (4.6), imposant que le tenseur d'anisotropie est aligné au tenseur des taux de déformation moyen. Celui-ci n'est pas affecté par la rotation d'ensemble car il est objectif, d'où la conclusion : *avec un modèle au premier ordre basé sur (4.6), la rotation n'a aucun effet direct sur l'anisotropie de la turbulence*. Ensuite, la viscosité turbulente elle-même est donnée par (4.7) avec C_μ constant. Ce sont l'énergie cinétique turbulente k et la dissipation ε qui fixent le montant de la viscosité turbulente et ces grandeurs sont elles-mêmes déterminées grâce à une modélisation de leur équation de transport par la vitesse moyenne. À l'image des équations exactes auxquelles elles correspondent, ces équations modélisées sont inchangées en présence de rotation car elles ne contiennent que des termes objectifs. Cela traduit le fait que la force de Coriolis ne produit aucun travail : son effet est donc nul pour ces grandeurs « énergétiques » (voir équation 3.35). On a donc la conclusion suivante : *la rotation n'a aucun effet direct sur le montant de la viscosité turbulente (4.7)*. Au final, on voit que les modèles au premier ordre classiques ne prennent en compte aucun effet direct de la rotation sur la turbulence : celle-ci ne peut être affectée qu'indirectement par les modifications du champ moyen sous l'effet de la rotation. On peut dire que ces modèles ne « voient » pas la rotation car la modélisation du tenseur de Reynolds est indifférente matériellement. Les fermetures au premier ordre les plus classiques partagent toutes cette

défaillance pour les écoulements en rotation, mais plusieurs auteurs ont proposé des corrections plus ou moins empiriques pour y remédier. C'est l'objet du paragraphe 4.2.5 que d'évaluer en quelle mesure ces corrections sont efficaces.

Avec une fermeture au second ordre, la situation est plus favorable car l'anisotropie du tenseur de Reynolds n'est pas fixée explicitement par le modèle. De fait, en présence de rotation, le terme de production (ou plutôt redistribution) de Coriolis G_{ij} (équation 3.34) affecte directement l'anisotropie du tenseur de Reynolds à ce niveau de fermeture :

$$\frac{Du'_i u'_j}{Dt} = P_{ij} + \phi_{ij} + D_{ij}^T + D_{ij}^\nu - \varepsilon_{ij}, \quad (4.26)$$

$$\Rightarrow \frac{Du'_i u'_j}{Dt} = P_{ij}^* + \phi_{ij}^* + D_{ij}^{T*} + D_{ij}^{\nu*} - \varepsilon_{ij}^* + G_{ij}^*, \quad (4.27)$$

avec un exposant $\star$, respectivement sans, pour des grandeurs perçues dans un référentiel en rotation, respectivement galiléen. À l'instar des termes d'advection et de production dont il provient, le terme G_{ij} ne demande aucune modélisation : il peut être exactement calculé à partir des inconnues principales du système. Les modèles de fermeture au second ordre prennent donc naturellement en compte certains effets de la rotation sur la turbulence.

En dépit de cette sensibilité à la rotation intrinsèque à la fermeture au second ordre, la modélisation des corrélations inconnues ϕ_{ij} , ε_{ij} et D_{ij}^T affecte bien entendu les performances d'un modèle spécifique. C'est ce que l'on examinera au paragraphe 4.2.4.

Prise en compte des paroi : manque d'universalité des lois de paroi

En réalité, l'universalité des lois de paroi est toute relative, et particulièrement mise à mal pour les écoulements en rotation. Les DNS de Kristoffersen et Andersson (1993) montrent sans ambiguïté que l'on s'écarte sensiblement du comportement universel (4.21) dans un canal en rotation transverse, en particulier du côté en dépression où la zone logarithmique disparaît quand l'écoulement laminarise. Dans le même sens, Andersson et Kristoffersen (1993) montrent qu'aucune zone d'équilibre local $P = \varepsilon$ n'est identifiable de ce côté du canal, y compris pour des taux de rotation modérés ($Ro_b > 0.05$). De fait, plusieurs corrections aux lois de paroi ont été proposées pour prendre en compte à la paroi les effets de la rotation (Bradshaw, 1969; Watmuff *et al.*, 1985).

Dans les paragraphes suivants, on utilisera exclusivement des modèles de turbulence intégrables jusqu'à la paroi ; les lois de paroi ne seront pas utilisées. En ce qui concerne la fermeture au second ordre, c'est l'approche à pondération elliptique qui sera mise en œuvre. Pour les modèles de viscosité turbulente, plusieurs approches apparaîtront (amortissement bas-Reynolds, relaxation elliptique et modèle $k - \omega$ SST en particulier). On pourra ainsi juger de la validité de ces traitements en présence de rotation.

4.2.3 Introduction et comparaison de plusieurs modèles sur le cas test du canal plan fixe

On montre dans ce paragraphe les résultats obtenus avec *Code_Saturne* sur le cas test du canal plan (voir annexe B.1 pour une description formelle du cas test) pour plusieurs modèles de turbulence bas-Reynolds ou de proche paroi, correspondants à des fermetures au premier ou au second ordre. Il s'agit d'une étude préliminaire à celle des paragraphes 4.2.4, 4.2.5, pour se familiariser avec les modèles et leur comportement en écoulement de canal. On utilise les données de référence issues des calculs DNS de Moser *et al.* (1999), aux nombres de Reynolds $Re_\tau = 180, 395, 590$, basés sur la vitesse de frottement u_τ et la demi-hauteur du canal h .

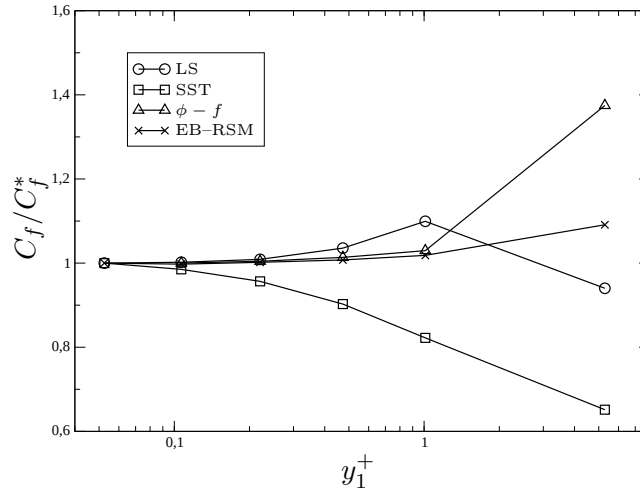


FIGURE 4.1 – Coefficient de frottement C_f normalisé par le coefficient de frottement obtenu pour le maillage le plus fin C_f^* , en fonction de l'ordonnée du premier point de calcul y_1^+ . Canal plan, $Re_\tau = 180$.

Un gradient longitudinal de pression moyenne constant tel que $\bar{u}_1/u_\tau = 1$ est imposé dans l'équation de quantité de mouvement et des conditions aux limites de périodicité sont utilisées dans les directions longitudinale et transverse. L'adhérence $\bar{\mathbf{u}} = 0$ est imposée à la paroi en $y/\delta = 0$ et une condition au bord de symétrie $\partial \bar{\mathbf{u}}/\partial y = 0$ est imposée en $y/\delta = 1$.

Les modèles de turbulence utilisés sont :

- le modèle $k - \varepsilon$ de Launder et Sharma (1974) (LS),
- le modèle $k - \omega$ SST (Menter, 1994) (SST),
- le modèle $\phi - f$ (Laurence *et al.*, 2004),
- le modèle EB-RSM (Manceau et Hanjalic, 2002).

Convergence en maillage

Une étude de convergence en maillage est d'abord réalisée pour chaque modèle sur le cas $Re_\tau = 180$. Des maillages plus ou moins raffinés, correspondant à $y_1^+ \approx 5, 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05$, pour y_1 l'ordonnée du premier point de calcul, sont utilisés. Pour tous les maillages, le ratio de progression $\Delta y_{j+1}/\Delta y_j$ entre deux mailles j et $j + 1$ consécutives dans la direction normale à la paroi est conservé constant, égal à 1.035.

L'évolution du coefficient de frottement :

$$C_f = \frac{u_\tau^2}{\frac{1}{2}U_b^2}, \quad (4.28)$$

en fonction du raffinement du maillage est tracée sur la figure 4.1, ce qui permet de juger de la convergence en maillage de la solution. On voit que les modèles dont la convergence en maillage est la plus rapide sont les modèles $\phi - f$ et EB-RSM. Ces deux modèles prennent en compte les effets non locaux de la pression en proche paroi. Pour ces deux modèles, on peut considérer que la convergence en maillage est atteinte pour $y_1^+ \leq 1$. La convergence en maillage du modèle EB-RSM est particulièrement satisfaisante car sur le maillage le plus grossier utilisé ($y_1^+ \approx 5$) la variation du coefficient de frottement par rapport à sa valeur convergée en maillage est inférieure à 10%. Notons que pour le modèle $\phi - f$, une solution stable n'a pas pu être obtenue sur le maillage le plus fin considéré ($y_1^+ \approx 0.05$). Ce calcul n'a donc pas été pris en compte.

La convergence en maillage des modèles LS et SST est moins rapide. En particulier pour le modèle SST, elle ne semble pas encore complètement atteinte avec le maillage le plus

		Re_τ		
		180	395	590
U_b/u_τ exacte (DNS)		15.68	17.54	18.65
Erreur (en %)	LS	7.15	6.45	5.27
	SST	-1.82	-0.21	-1.08
	$\phi - f$	0.28	-1.34	-2.49
	EB-RSM	2.73	1.99	0.96

TABLE 4.1 – Pourcentage d’erreur sur le débit par rapport aux calculs DNS de référence (Moser *et al.*, 1999).

fin considéré ($y_1^+ \approx 0.05$). La singularité de la condition limite à la paroi de $\omega \sim \frac{\varepsilon}{k} \rightarrow \infty$, approchée suivant la proposition de Menter (1994), est peut-être responsable de ce défaut de convergence en maillage du modèle.

D’après ces résultats, on conclut qu’un premier point de calcul en $y^+ \approx 0.2$ permet d’atteindre la solution recherchée pour tous les modèles, exceptés le modèle SST, pour lequel une erreur sur le coefficient de frottement inférieur à 5% par rapport à la solution optimale est obtenue. Les résultats présentés dans la suite de ce paragraphe utilisent ce type de maillage.

Comparaison avec les solutions de référence

Sur la figure 4.2, les profils de vitesse moyenne et d’énergie cinétique turbulente obtenus avec les modèles LS, SST, $\phi - f$ et EB-RSM sont comparés aux solutions DNS de référence de Moser *et al.* (1999), pour trois nombres de Reynolds, $Re_\tau = 180, 395$ et 590. Pour la vitesse (graphe du haut), le profil linéaire universel dans la sous-couche visqueuse ($y^+ < 5$) est bien rendu par tous les modèles. Dans la zone tampon ($5 < y^+ < 30$), le modèle $\phi - f$ s’écarte notablement du profil attendu : on passe quasi-directement à un profil logarithmique. Les autres modèles donnent des résultats visuellement corrects. Dans la zone logarithmique ($30 < y^+ < 100$), tous les modèles ont tendance à surévaluer la pente attendue, les erreurs les plus importantes étant constatées pour le modèle LS et le modèle $\phi - f$. Alors que dans cette zone, le profil linéaire (4.21) pour $C_\kappa \approx 0.41$ est couramment admis, la pente mesurée pour ces deux modèles correspond à $C_\kappa \approx 0.33$. Pour le modèle LS, cette erreur génère une surestimation importante de la vitesse dans une grande partie du canal – au delà de la zone tampon – et donc une erreur sur le débit U_b . Un récapitulatif des erreurs de débit pour chaque modèle est reporté sur le tableau 4.1. Les profils de vitesse les plus proches des données de référence sont obtenus avec le modèle de fermeture au second ordre EB-RSM et le modèle de viscosité turbulence $k - \omega$ SST offre lui-aussi un bon accord général avec les données de référence.

Les profils d’énergie cinétique turbulente sont tracés sur le graphe du bas de la figure 4.2. Globalement, celle-ci n’est correctement représentée qu’avec les modèles $\phi - f$ et EB-RSM. Pour le modèle SST, le pic énergétique autour de $y^+ \approx 12$ est trop faible. Sa position est erronée et varie en fonction du nombre de Reynolds, ce qui n’est pas le cas sur les DNS. Passé ce pic, et en se rapprochant de la paroi, le régime de décroissance (la pente) est également trop lent. Pour le modèle LS, l’erreur tient surtout à l’amplitude du pic, trop faible. Sa distance à la paroi, bien que légèrement surestimée, est à peu près fixe au trois nombre de Reynolds Re_τ , et le régime de décroissance en se rapprochant de la paroi est convenable. Les meilleurs estimations du profil d’énergie cinétique turbulente k dans le canal sont sans conteste obtenues avec le modèle EB-RSM. Cette performance tient bien sûr en partie au niveau de fermeture supérieur de ce modèle par rapport aux modèles de viscosité turbulente auxquels il est comparé. Notamment les bilans d’énergie cinétique tur-

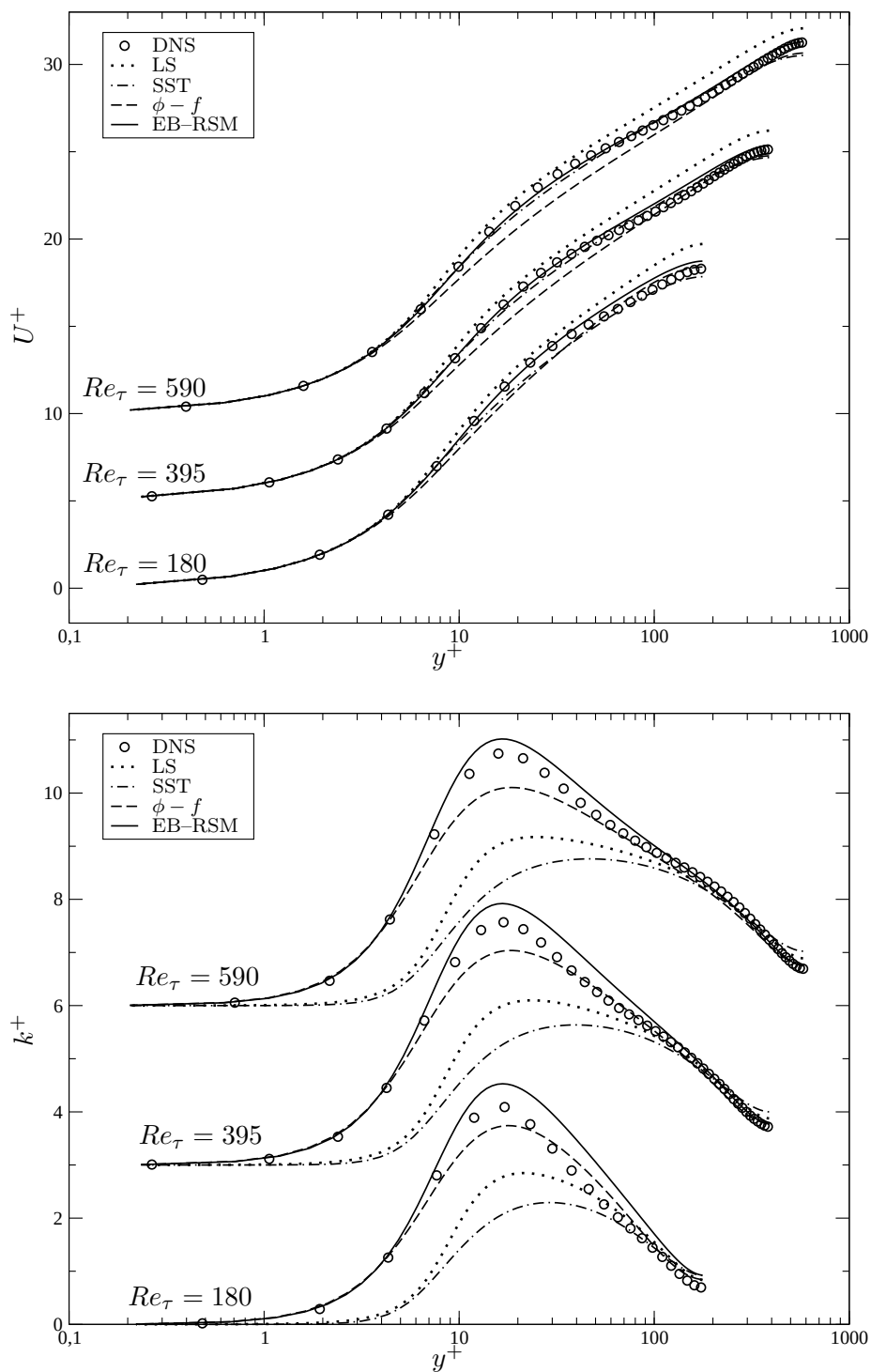


FIGURE 4.2 – Vitesse moyenne U^+ (haut) et énergie cinétique turbulente k^+ (bas), adimensionnées par la vitesse de frottement u_τ . Canal plan, $Re_\tau = 180, 395, 590$ (profils décalés).

bulente en couche limite (Spalart, 1988, par exemple) montrent que le pic d'énergie autour de $y^+ \approx 12$ correspond à un pic de production $P = P_{12}$, lorsque les contraintes de cisaillement visqueuses et turbulentes s'égalisent (voir aussi Chassaing, 2000, p. 380) ; or ce terme ne demande aucune modélisation dans le cadre d'une fermeture au second ordre. Dans cette mesure, les relativement bonnes estimations de l'énergie turbulente obtenues avec le modèle $\phi - f$ sont d'autant plus notables. Comme le modèle EB-RSM, ce modèle prend en compte les effets non locaux de la pression. L'anisotropie de la turbulence en proche paroi dû au blocage cinématique est alors mieux représenté. Des structures énergétiques anisotropes, portées par u' et w' , persistent jusqu'en très proche paroi. Pour les modèles LS et SST au contraire, seul l'effet dynamique « bas-Reynolds » d'amortissement visqueux est pris en compte : la turbulence s'éteint complètement en sous-couche visqueuse.

4.2.4 Évaluation de modèles au second ordre pour la rotation

4.2.4.1 Comparaison entre les modèles LRR et SSG : lien avec l'analyse des solutions d'équilibre de la turbulence homogène cisillée en rotation

Les modèles LRR (Launder *et al.*, 1975) et SSG (Speziale *et al.*, 1991) sont deux modèles emblématiques de fermeture au second ordre. Ce sont les deux modèles au second ordre proposés dans *Code_Saturne*. Pour comparer ces modèles pour les écoulements en rotation, on se réfère à l'analyse des solutions d'équilibre d'un modèle en turbulence homogène (Speziale et Mac Giolla Mhuiris, 1989a; Durbin et Pettersson Reif, 1999). Cette approche se révèle particulièrement fructueuse pour « préjuger » des performances de ces modèles dans un canal tournant, ce que l'on vérifiera par le calcul. De fait, des analyses similaires ont été reprises par plusieurs auteurs, pour sensibiliser des modèles de viscosité turbulente à l'instabilité Coriolis-cisaillement notamment (cf paragraphe 4.2.5), mais également dans le cadre d'autre type d'instabilité (Speziale *et al.*, 1996; Ji et Durbin, 2004).

Modèle LRR

Le modèle LRR (Launder *et al.*, 1975) s'inspire de l'état de l'art en modélisation de la turbulence au milieu des années 1970 pour proposer de manière unifiée un modèle simple pour les termes ϕ_{ij} , D_{ij}^T et ε_{ij} , qui demandent à être modélisés dans le cadre d'une fermeture au second ordre.

Pour la contribution rapide du terme de pression-déformation, l'hypothèse est que ce terme compense en partie l'anisotropie induite par la production (modèle IP pour *isotropisation de la production*) :

$$\phi_{ij}^{(1)} = -c_1 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right). \quad (4.29)$$

Le tenseur de dissipation est supposé isotrope :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}, \quad (4.30)$$

et ε est donnée par l'équation de transport modélisée suivante, similaire à celle du modèle $k - \varepsilon$:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{C_{\varepsilon_1} P - C_{\varepsilon_2} \varepsilon}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_j u'_l} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right), \quad (4.31)$$

avec $\tau = k/\varepsilon$ l'échelle intégrale de temps de la turbulence. La contribution lente du terme de pression-déformation est modélisée, d'après Rotta (1951), par :

$$\phi_{ij}^{(2)} = -c_2 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right). \quad (4.32)$$

Avec ce modèle, le retour « libre » à l'isotropie est d'autant plus rapide que l'anisotropie initiale est grande et que le temps caractéristique τ est court. Enfin, le terme de diffusion turbulente est modélisé, suivant la proposition de Daly et Harlow (1970), par :

$$D_{ij}^T = C_D \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right). \quad (4.33)$$

Le jeu de constante retenu pour le modèle LRR est le suivant :

$$c_1 = 0.6, \quad c_2 = 1.8, \quad C_D = 0.22, \quad C_{\varepsilon_1} = 1.45, \quad C_{\varepsilon_2} = 1.9, \quad C_\varepsilon = 0.18. \quad (4.34)$$

L'extension du modèle LRR dans un référentiel tournant $\mathcal{R}^*$ et sa validation pour un canal en rotation a été réalisée par Launder *et al.* (1987). Les auteurs notent que le terme de production P_{ij} n'est associé qu'à la moitié du terme de production de Coriolis G_{ij}^* (voir équations 3.32, 3.33 p. 32) de sorte que la formulation du modèle IP dans un référentiel en rotation, suivant le principe de modélisation (I) (p. 45), est (l'exposant $\star$ est omis) :

$$\phi_{ij}^{(1)} = -c_1 (P_{ij} + \frac{1}{2} G_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij}). \quad (4.35)$$

Modulo le fait que le transport des tensions de Reynolds est donné par (4.27) et non plus (4.26), c'est la seule modification à apporter au modèle LRR lorsqu'on l'utilise dans un référentiel non inertiel, car l'ensemble des termes dans les équations (4.31)–(4.33) sont objectifs.

Modèle SSG

Le modèle SSG (Speziale *et al.*, 1991), de conception plus « systématique » que celle « phénoménologique » du modèle LRR, est un modèle pour le terme de pression-déformation ϕ_{ij} . Il est souvent associé à une dissipation isotrope (4.30), à l'équation (4.31) pour la trace du tenseur de dissipation et au modèle (4.33) pour la diffusion turbulente.⁷ À partir de la relation (4.18), les auteurs ramènent le problème à la recherche d'une fonction tensorielle isotrope $\mathbf{f}$ satisfaisant :

$$\phi_{ij} = \varepsilon f_{ij}(\mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{S}}, \widetilde{\mathbf{W}}),$$

linéaire en $\widetilde{\mathbf{S}}$ et $\widetilde{\mathbf{W}}$, ces derniers désignant les adimensionnements de $\overline{\mathbf{S}}$ et $\overline{\mathbf{W}}$ par $\tau = k/\varepsilon$. En utilisant le théorème de représentation de Smith (1971) et en respectant la structure matricielle de ϕ_{ij} , puis en restreignant l'analyse aux solutions d'équilibre d'une turbulence plane homogène (voir plus bas), les auteurs donnent la forme générale de la fonctionnelle $\mathbf{f}$ pour ces solutions d'équilibre :

$$\begin{aligned} \phi_{ij} = & -C_1 \varepsilon b_{ij} + C_2 \varepsilon (b_{ik} b_{kj} - \frac{1}{3} b_{mn} b_{mn} \delta_{ij}) + C_3 k \overline{S}_{ij} \\ & + C_4 k (b_{ik} \overline{S}_{jk} + b_{jk} \overline{S}_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} \overline{S}_{mn} \delta_{ij}) + C_5 k (b_{ik} \overline{W}_{jk} + b_{jk} \overline{W}_{ik}), \end{aligned} \quad (4.36)$$

avec C_i des coefficients variables dépendants des invariants qu'on construit à partir des arguments $\mathbf{b}$, $\widetilde{\mathbf{S}}$ et $\widetilde{\mathbf{W}}$ (parmi lesquels le ratio P/ε et le second invariant du tenseur d'anisotropie $II_b = b_{ij} b_{ij}$). Par accord avec plusieurs cas tests canoniques, les coefficients retenus pour le modèle SSG sont :

$$\begin{aligned} C_1 = 3.4 + 1.8P/\varepsilon, \quad C_2 = 4.2, \quad C_3 = 0.8 - 1.3II_b^{1/2}, \quad C_4 = 1.25, \quad C_5 = 0.4, \\ C_{\varepsilon_1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon_2} = 1.83. \end{aligned} \quad (4.37)$$

7. Ce n'est pas le cas lorsque le modèle SSG est utilisé dans le cadre d'une modélisation algébrique des tensions de Reynolds (voir note de pied de page 53).

Comme précisé dans Speziale *et al.* (1991), pour utiliser le modèle SSG dans un référentiel non inertiel, il suffit de respecter la relation (3.19), c'est-à-dire de remplacer dans (4.36) le tenseur de vortacité $\mathbf{W}$ par le tenseur de vortacité « absolue » :

$$W_{ij}^a \stackrel{\text{def}}{=} W_{ij} + \epsilon_{imj} \Omega_m, \quad (4.38)$$

avec $\mathbf{\Omega}$ le vecteur rotation du référentiel non inertiel par rapport au référentiel galiléen.

Notons enfin que modèle LRR appartient à la famille générale de modèle (4.36) pour :

$$C_1 = 3.6, \quad C_2 = 0.0, \quad C_3 = 0.8, \quad C_4 = 1.2, \quad C_5 = 1.2,$$

et l'extension en référentiel quelconque (4.35) correspond alors au remplacement de $\mathbf{W}$ par $\mathbf{W}^a$ dans (4.36).

Solutions d'équilibre d'une turbulence homogène

Les solutions d'équilibre d'un modèle de fermeture sont définies par (voir Speziale et Mac Giolla Mhuiris, 1989a) :

$$\frac{D}{D\sigma} \left(\frac{\varepsilon}{Sk} \right) = 0, \quad (4.39)$$

$$\frac{Db_{ij}}{D\sigma} = 0, \quad (4.40)$$

avec $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} St$ un adimensionnement de t (S constant). Par rapport à l'hypothèse d'équilibre faible sur laquelle sont bâtis les modèles de fermeture au second ordre algébriques, les solutions d'équilibre sont caractérisées par la condition (4.39) supplémentaire, qui s'écrit, pour une turbulence homogène et à partir des équations (2.24) et (4.11) :

$$\left(\frac{P}{\varepsilon} - \frac{C_{\varepsilon_2} - 1}{C_{\varepsilon_1} - 1} \right) \left(\frac{\varepsilon}{Sk} \right)^2 (C_{\varepsilon_1} - 1) = 0. \quad (4.41)$$

Deux types de points fixes sont possibles pour le ratio d'échelle de temps ε/Sk : un point fixe trivial $(\varepsilon/Sk)_\infty = 0$ et un second point fixe $(\varepsilon/Sk)_\infty > 0$ tel que $(P/\varepsilon)_\infty = (C_{\varepsilon_2} - 1)/(C_{\varepsilon_1} - 1)$. Dans ce second cas, on a, pour les solutions d'équilibre :

$$k \sim e^{\lambda t} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{C_{\varepsilon_2} - C_{\varepsilon_1}}{C_{\varepsilon_1} - 1} \left(\frac{\varepsilon}{Sk} \right)_\infty. \quad (4.42)$$

Comme $\lambda > 0$, le point fixe $(\varepsilon/Sk)_\infty > 0$ correspond à un écoulement instable. Le point fixe trivial $(\varepsilon/Sk)_\infty = 0$ conduit à une évolution algébrique de l'énergie cinétique turbulente, dont le régime est donné par (Pettersson Reif *et al.*, 1999) :

$$k \sim \sigma^\lambda t \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{(P/\varepsilon)_\infty - 1}{C_{\varepsilon_2} - 1 - (P/\varepsilon)_\infty (C_{\varepsilon_1} - 1)}. \quad (4.43)$$

Ce point fixe correspond donc à un écoulement stable ou instable selon la valeur de $(P/\varepsilon)_\infty$, et notamment l'écoulement est stable quand $(P/\varepsilon)_\infty < 1$.

Lorsqu'un modèle de fermeture est utilisé pour exprimer les membres de gauche de (4.39) et (4.40), on obtient un système fermé d'équations algébriques, dont les solutions sont les valeurs d'équilibre $(\varepsilon/Sk)_\infty$ et $(b_{ij})_\infty$. La connaissance de ces valeurs d'équilibre est un moyen puissant d'évaluation ou de calibration d'un modèle de turbulence, pour reproduire une instabilité donnée. Cela permet de voir sous quelle condition le point fixe $(\varepsilon/Sk)_\infty > 0$ est atteint, ce qui garantit que l'écoulement soit instable et également sous quelle condition le point fixe $(\varepsilon/Sk)_\infty > 0$ atteint sa valeur maximale, ce qui correspond à une « déstabilisation maximale » de l'écoulement (pour C_{ε_1} , C_{ε_2} constants, équation 4.42).

Modèles LRR et SSG pour les écoulements cisailés en rotation

Dans le cas de l'instabilité Coriolis-cisaillement, le modèle doit prédire un écoulement instable dans la zone $0 < \Omega/S < 0.5$, conformément au critère de stabilité de Bradshaw (équation 3.47, paragraphe 3.4), et une déstabilisation maximale pour $\Omega/S \approx 0.25$. Les solutions d'équilibre de l'écoulement homogène cisailé en rotation sont obtenues en prenant $S = \partial u_1 / \partial x_2$, $\partial u_i / \partial x_j = 0$ pour $(i, j) \neq (1, 2)$ et $\Omega = \Omega \mathbf{e}_3$ le taux de rotation du référentiel dans lequel (4.40) s'applique (voir annexe C). Pour tous les modèles de type (4.36) – LRR et SSG en particulier – les solutions d'équilibre $(\varepsilon/Sk)_\infty$ sont structurellement identiques (représentées sur la figure 4.3). Le point fixe trivial $(\varepsilon/Sk)_\infty = 0$ existe pour tous les ratios Ω/S , mais il est stable uniquement à l'extérieur d'un intervalle $[A, B]$. Le point fixe $(\varepsilon/Sk)_\infty > 0$ n'est défini que pour $\Omega/S \in [A, B]$ et il est stable. Il est donné par $(\varepsilon/Sk)_\infty = g(\Omega/S)$ avec g une fonction parabolique. On a donc une bifurcation entre deux points fixes stables (rappelons que la stabilité du point fixe ne signifie pas que l'écoulement est stable ; voir les équations 4.42 et 4.43). Du point de vue de la modélisation, l'important est que les points de bifurcation A et B et la forme de la fonction g dépendent des coefficients C_1 – C_5 du modèle (4.36) (Speziale et Mac Giolla Mhuiris, 1989a).

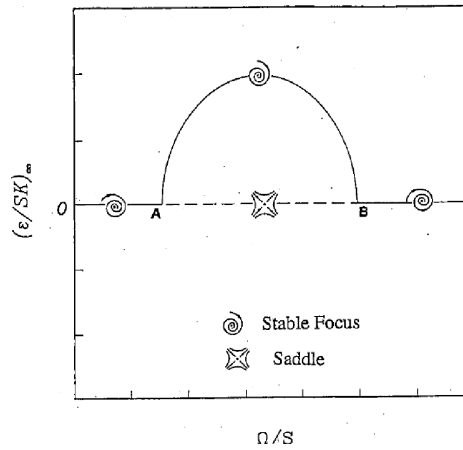


FIGURE 4.3 – Allure du diagramme de bifurcation des modèles au second ordre basés sur (4.36) pour l'écoulement homogène cisailé en rotation (d'après Speziale *et al.*, 1996)

Pour les modèles LRR et SSG, on a $C = A + (B - A)/2$ est l'argument Ω/S pour lequel g atteint son maximum) :

- LRR : $A = -0.09$, $B = 0.37$, $C = 0.14$.
- SSG : $A = -0.09$, $B = 0.53$, $C = 0.22$.

Le modèle LRR prédit donc une déstabilisation maximale de l'écoulement pour $\Omega/S = 0.14$, assez loin de la valeur $\Omega/S \approx 0.25$ attendue. Le modèle SSG est calibré de telle sorte que A et B soient proches des bornes $\Omega/S = 0$ et $\Omega/S = 0.5$ correspondant au critère de Bradshaw, quoique légèrement décalés à l'extérieur, notamment A car il est reconnu que l'écoulement homogène cisailé sans rotation est de stabilité linéaire neutre, mais instable dans la réalité (non linéaire, voir Drazin et Reid, 1981). De plus, rappelons que la bifurcation sur la branche triviale $(\varepsilon/Sk)_\infty = 0$ du diagramme n'implique pas la stabilisation directe de l'écoulement. Il existe des incréments δA et δB à l'extérieur de $[A, B]$ où $P/\varepsilon > 1$ ($\lambda > 1$ dans l'équation 4.43). Speziale et Mac Giolla Mhuiris (1989a) indiquent toutefois que ces incréments sont très faibles.

Sur la figure 4.4, les profils de vitesse moyenne obtenus avec les modèles LRR et SSG dans un canal plan en rotation sont tracés, pour $Re_\tau = 1500$ et deux nombres de rotation $Ro_\tau = 5$ et 7 . La figure montre que le point de bifurcation B est particulièrement important

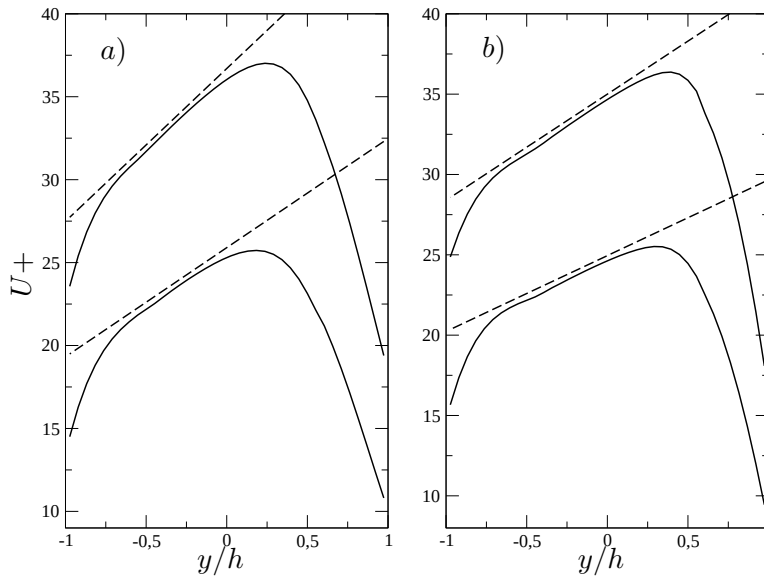


FIGURE 4.4 – Canal plan en rotation transverse, $Re_\tau = 1500$, $Ro_\tau = 5$ et 7 (profils décalés vers le haut). Vitesse moyenne (—) et pente $S = \Omega/B$ suggérée par le diagramme de bifurcation (---). a) LRR et b) SSG.

pour cette application (ce point est mentionné par Cazalbou *et al.*, 2005 notamment). En effet, on voit que la pente du profil de vitesse moyenne au centre du canal est très proche de $S = \Omega/B$, pour les deux modèles. En considérant que l'incrément δB est faible, cela indique que les modèles au second ordre LRR et SSG reproduisent un écoulement proche du régime de stabilité neutre au cœur de l'écoulement. Par conséquent, la position du point de bifurcation B est déterminante pour reproduire un cisaillement proche de $S = 2\Omega$, correspondant à l'écoulement de vorticité absolue nulle observé expérimentalement (paragraphe 3.4). À ce titre, le modèle SSG montre un meilleur accord avec l'expérience.

En conclusion, l'examen des solutions d'équilibre d'un modèle de turbulence est un outil important de qualification et de calibration du modèle. On a vérifié, sur le cas test du canal en rotation transverse, que ce type d'analyse permet de juger correctement des performances d'un modèle, au moins loin des parois, pour les écoulement cisailés en rotation. Des deux modèles « classiques » LRR et SSG, le modèle SSG est le plus performant pour ces écoulements. C'est ce modèle qui sert de base au modèle EB-RSM (Manceau et Hanjalic, 2002). L'examen de l'aptitude de ce modèle à conserver les qualités du modèle SSG loin des parois et à correctement prendre en compte les effets de la rotation proche des parois fait l'objet du paragraphe suivant.

Complément. *Pettersson Reif et al. (1999) et Durbin et Pettersson Reif (1999) ont développé l'analyse des solutions d'équilibre de la turbulence homogène initiée par Speziale et Mac Giolla Mhuiris (1989a). Les auteurs proposent de caractériser la branche « triviale » du diagramme en étudiant la limite de $b_{ij}\tilde{\tilde{S}}_{ij} = -\frac{1}{2}P/\varepsilon$, pour b_{ij} une modélisation algébrique explicite du tenseur d'anisotropie, quand l'invariant $\eta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\tilde{S}}_{ij}\tilde{\tilde{S}}_{ij}$ tend vers l'infini. En notant que cette limite doit être finie (égale à $(C_{\varepsilon_2} - 1)/(C_{\varepsilon_1} - 1)$ au point de bifurcation), les auteurs obtiennent des conditions nécessaires pour qu'un écoulement suscite la bifurcation d'un modèle de fermeture. Les points de bifurcation donnés par $(P/\varepsilon)_\infty = (C_{\varepsilon_2} - 1)/(C_{\varepsilon_1} - 1)$, mais également ceux de stabilisation donnés par $(P/\varepsilon)_\infty = 1$, peuvent être trouvés en*

se plaçant sur cette branche triviale $(\varepsilon/Sk)_\infty = 0$ – mais $(P/\varepsilon)_\infty$ variable – du diagramme de la figure 4.3.

4.2.4.2 Modèle EB–RSM

Contrairement aux modèles LRR et SSG examinés dans le paragraphe précédent, le modèle EB–RSM (Manceau et Hanjalić, 2002) intègre une modélisation des effets de paroi sur la turbulence de sorte qu’il s’utilise sans loi de paroi, en intégrant les équations jusqu’au bord du domaine et avec une condition limite d’adhérence. Ce modèle a été appliqué avec succès à plusieurs applications complexes, comme la simulation de l’écoulement dans un compresseur (Borello *et al.*, 2005) ou le contrôle du décollement par générateur de tourbillons (Törnblom et Johansson, 2007). On présente ici une validation du modèle pour les écoulements en rotation, notamment en l’appliquant au cas test du canal en rotation.

Validité de la formulation du modèle dans un référentiel quelconque

L’un des résultats importants, emprunté aux modèles à relaxation elliptique, qui permet la bonne prise en compte des effets de paroi par l’EB–RSM est que l’équilibre entre les termes $\mathbf{D}^\nu$ (exact), ϕ^* ⁸ et ε (modélisés) en proche paroi est bien représenté par le modèle. En effet, le tableau 4.2 (d’après Manceau et Hanjalić, 2002), montre que, selon les composantes, deux de ces termes ou les trois sont prépondérants dans le bilan des tensions de Reynolds en proche paroi et que dans tous les cas, l’ordre des termes prépondérants est correctement reproduit par l’EB–RSM.

Comme la reproduction correcte de l’équilibre dominant en proche paroi est difficilement conciliable avec une modélisation réaliste loin des parois, l’EB–RSM réalise une pondération entre les modèles de proche paroi ϕ_{ij}^w et ε_{ij}^w , satisfaisant asymptotiquement, et le modèle général SSG (quasi-linéarisé, c’est-à-dire avec $C_2 = 0$ dans 4.37), robuste et relativement efficace loin des parois, notamment pour les écoulements en rotation (voir paragraphe 4.2.4.1 et annexe C). Le coefficient de pondération, noté α , qui doit mesurer la « zone d’influence » des parois sur l’écoulement dû aux effets non locaux de la pression, est donné par une équation elliptique très simple :

$$\alpha - L_p^2 \nabla^2 \alpha = 1, \quad (4.46)$$

avec L_p l’échelle de longueur, basée sur l’échelle intégrale de la turbulence, suivante :

$$L_p = C_L \max \left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \right). \quad (4.47)$$

Cette équation est inspirée de l’équation de relaxation elliptique proposée par Durbin (1991). La formulation complète du modèle est donnée en annexe D.

Pour utiliser cette modélisation dans un référentiel en rotation, il faut vérifier la validité des hypothèses sur laquelle elle repose. Rappelons en premier lieu que le développement en série de Taylor est un outil purement mathématique, utilisable pour tout type d’écoulement et dans n’importe quel référentiel.

8. Le tenseur ϕ^* représente la corrélation vitesse–gradient de pression :

$$\phi_{ij}^* = -\frac{1}{\rho} \left(\overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right), \quad (4.44)$$

$$\left(= \phi_{ij} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_l} (p' u_j \delta_{il} + p' u_i \delta_{jl}) \right) \quad (4.45)$$

c’est-à-dire que la décomposition usuelle (4.45) de ce terme en partie redistributive ϕ_{ij} et partie inhomogène intégrée au terme de diffusion turbulente n’est pas faite.

	I_{ij}	E_{ij}	P_{ij}	G_{ij}	D_{ij}^ν	D_{ij}^T		ϕ_{ij}^*		ε_{ij}	
						E	M	E	M	E	M
$\overline{u'^2}$	2	3	3	2	0	3	4	1	2	0	0
$\overline{v'^2}$	4	5	5	3	2	5	6	2	2	2	2
$\overline{w'^2}$	2	3	3	2	0	3	4	1	2	0	0
$\overline{u'v'}$	3	4	4	2	1	4	5	1	1	1	1
$\overline{u'w'}$	2	3	3	2	0	3	4	1	–	0	0
$\overline{v'w'}$	3	4	4	2	1	4	5	1	1	1	1

TABLE 4.2 – Ordre du terme prépondérant du développement en série de Taylor, en (x, y, z) au voisinage de $(x, 0, z)$ un point de la paroi, de chaque terme de l'équation de transport des tensions de Reynolds dans un référentiel quelconque. Pour les termes nécessitant une modélisation, on indique l'ordre exact (E) et l'ordre reproduit par l'EB-RSM (M).

(Le terme d'advection $I_{ij} + E_{ij}$ est décomposé en partie instationnaire et eulérienne ; le symbole « – » indique que le terme est nul.)

Cette précision faite, le premier point à vérifier est que l'équilibre dominant en proche paroi, dans le bilan des tensions de Reynolds, est celui entre D_{ij}^ν , ϕ_{ij}^* et ε_{ij} . Le tableau 4.2 montre que cet équilibre est effectivement valable quel que soit le référentiel d'étude, car pour chaque composante, le terme de production de Coriolis G_{ij} est négligeable devant ces trois termes. En particulier, on peut noter que $\phi_{ij}^*/G_{ij} = \mathcal{O}(y^{-1})$. Le respect de l'équilibre prépondérant en proche paroi par l'EB-RSM est donc indépendant du référentiel d'étude.

Le second point à examiner est la validité de l'équation elliptique (4.46) pour mesurer l'influence des parois. Cette équation, inspirée de l'équation de relaxation elliptique proposée par Durbin (1991), provient donc indirectement de l'hypothèse de modélisation des corrélations en deux points :

$$\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') f(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (4.48)$$

avec $\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ la corrélation vitesse-Laplacien du gradient de pression en deux points :

$$\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\overline{u'_i(\mathbf{x}) \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_j}(\mathbf{x}')} - \overline{u'_j(\mathbf{x}) \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_i}(\mathbf{x}')},$$

à l'aide de la fonction de corrélation très simple suivante :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}{L_p}\right). \quad (4.49)$$

On voit que la relation (4.48) n'est pas modifiée par changement de référentiel car elle ne fait intervenir que des termes objectifs. L'équation (4.46) peut donc être utilisée telle quelle dans un référentiel non galiléen. Notons que, en dépit d'une formulation invariante, l'effet stabilisant ou déstabilisant de la rotation combinée au cisaillement de proche paroi a une grande influence sur l'échelle intégrale L_p . Ainsi, l'influence des parois sur l'écoulement est largement modifiée par la rotation de l'écoulement.

On en conclut que la modélisation des effets de paroi par pondération elliptique ne demande aucune modification dans un référentiel tournant. Seule la partie « homogène » de l'EB-RSM – le modèle SSG quasi-linéaire – doit tenir compte de la rotation du référentiel (voir équations 4.36 et 4.38).

Validation du modèle dans un canal plan en rotation transverse

On examine maintenant les résultats de l'EB-RSM sur le cas test du canal plan en

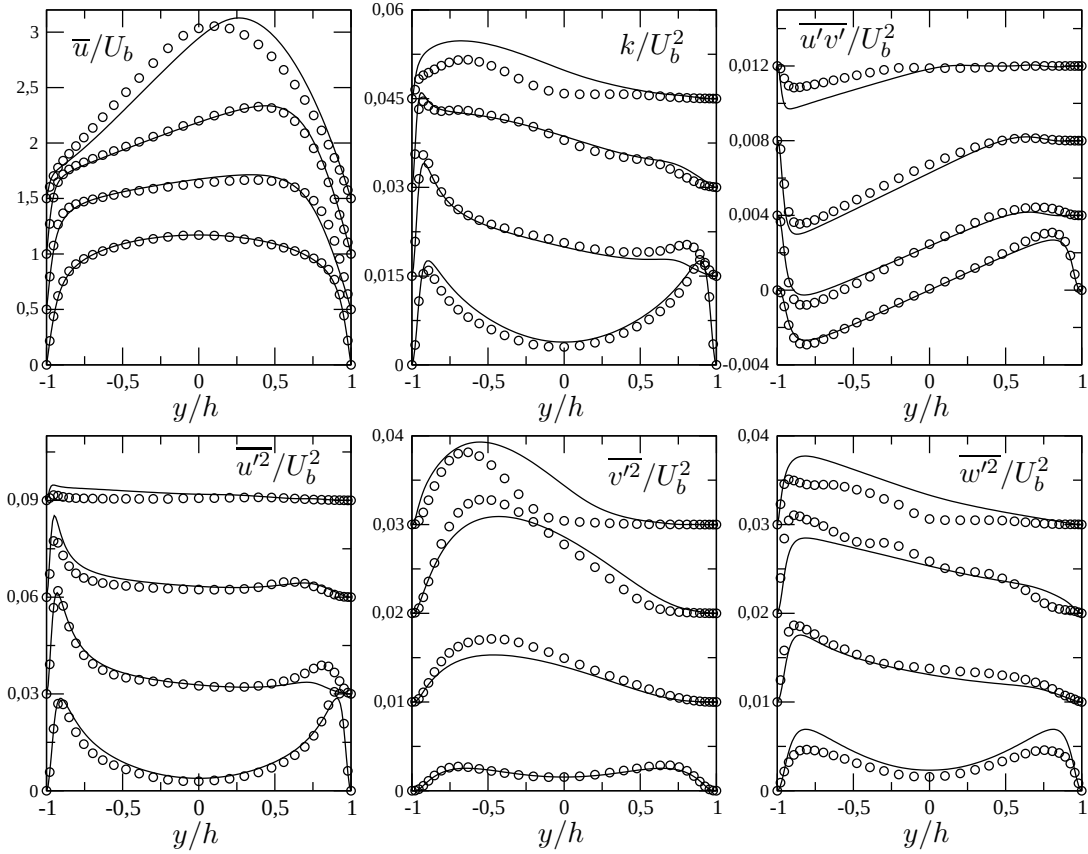


FIGURE 4.5 – Vitesse moyenne et tensions de Reynolds. Canal plan tournant, $Re_b = 2500$, $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$ (profils décalés vers le haut). Symboles : DNS (Lamballais *et al.*, 1996), trait plein : EB-RSM.

rotation, pour deux nombres de Reynolds $Re_b = 2500, 7000$ et une vaste plage de nombres de rotation $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$. Pour ces cas, on dispose de données de référence issues des calculs DNS de Lamballais *et al.* (1996) ($Re_b = 2500$) et LES de Lamballais *et al.* (1998) ($Re_b = 7000$). Pour tous les calculs réalisés, un terme source de quantité de mouvement est ajusté dynamique de manière à obtenir le même débit que celui des simulations de référence (voir annexe B.1). Le même maillage est utilisé, pour un nombre de Reynolds donné, pour tous les nombres de rotation. Ce maillage est dimensionné, sur la base des nombres de Reynolds de frottements reportés par Lamballais *et al.* (1996;1998), de manière à obtenir $y_1^+ \approx 0.125$ pour le premier point de calcul lorsque que le frottement est maximal (du côté en pression pour $Ro_b = 1/6$).

Sur les figures 4.5 et 4.6, on trace la vitesse moyenne et le tenseur de Reynolds. Les prédictions fournies par le modèle sont très satisfaisantes, offrant un bon accord avec les données de référence de Lamballais *et al.* (1996;1998), pour tous les nombres adimensionnés Re_b, Ro_b testés. L'accord global semble toutefois encore meilleur pour le plus grand des deux nombres de Reynolds testés ($Re_b = 7000$), ce qui répond aux « cahier des charges » du modèle, principalement destiné aux écoulements *haut-Reynolds*⁹. Le couplage de toutes les composantes du tenseur de Reynolds, au travers notamment des termes de redistribution ϕ_{ij} et G_{ij} , propres à la fermeture au second ordre, permet au modèle de rendre compte correctement non seulement du cisaillement turbulent moyen, et donc de la vitesse moyenne,

9. D'où l'importance de distinguer les modèles *bas-Reynolds* des modèles de *proche paroi* comme l'EB-RSM, cf paragraphe 4.2.1.3.

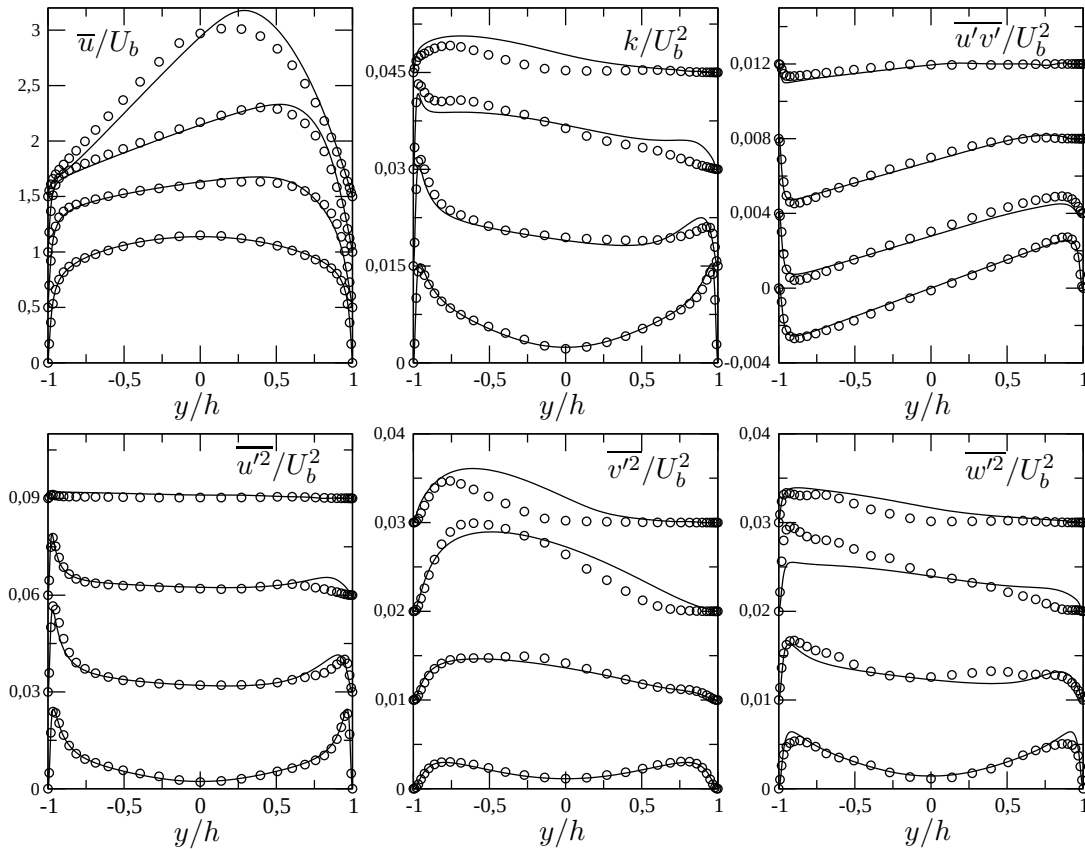


FIGURE 4.6 – Vitesse moyenne et tensions de Reynolds. Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$ (profils décalés vers le haut). Symboles : LES (Lamballais *et al.*, 1998), trait plein : EB-RSM.

mais aussi de l'anisotropie. On observe en effet que celle-ci, partant de $\overline{u'^2} > \overline{w'^2} > \overline{v'^2}$, est largement affectée par la rotation du canal, où l'on trouve alors $\overline{w'^2} > \overline{v'^2} > \overline{u'^2}$ près des parois et $\overline{v'^2} > \overline{w'^2} > \overline{u'^2}$ dans les zones de vorticité absolue nulle (situation favorable à l'apparition des vortex longitudinaux de Taylor-G rtler, d'après Lamballais *et al.*, 1998), ce qui est bien reproduit par le modèle.

Le coefficient de pondération α est tracé sur la figure 4.7, en coordonnée globale et en coordonnées locales de paroi, pour $Re_b = 7000$. On voit sur le graphe 4.7a que, pour tous les taux de rotation couverts par les données de référence, ce coefficient atteint sa valeur maximale $\alpha = 1$ dans une large partie centrale du canal, comprenant notamment la zone de pente constante dans le profil de vitesse moyenne. Cela indique que dans cette zone, le modèle SSG quasi-linéaire est totalement recouvert. L'EB-RSM préserve ainsi l'aptitude du modèle SSG quasi-linéaire à reproduire la pente correcte au centre du canal, propriété liée au diagramme de bifurcation de ce modèle pour l'écoulement homogène cisailé en rotation (voir figure 4.4 p. 64 et figure C.1 de l'annexe C). Dans la région de proche paroi, le graphe 4.7c montre que, en tant que fonction de y^+ , le coefficient de pondération α varie beaucoup selon le nombre de Reynolds de frottement du côté en dépression du canal. C'est beaucoup moins le cas du côté en pression (graphe 4.7b) et pas du tout pour des canaux plans fixes à différents nombres de Reynolds, voir Manceau, 2005). Cela montre que l'amortissement de la turbulence capturé par l'EB-RSM du côté en dépression ne dépend pas simplement de la diminution du nombre de Reynolds de frottement local, mais bien d'une nouvelle structuration de l'écoulement.

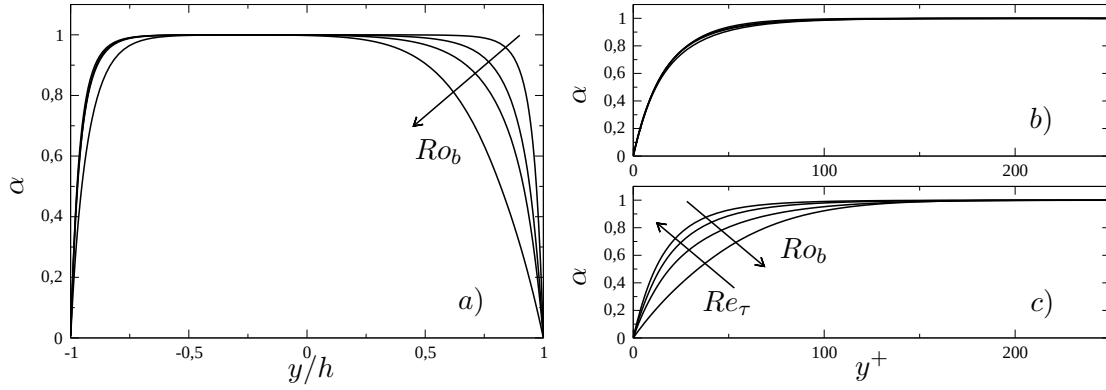


FIGURE 4.7 – Coefficient de pondération α de l'EB-RSM, en coordonnées a) globale et en coordonnées locales de paroi du côté b) en pression et c) en dépression. Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$.

En dépit de ces points positifs, on note que les prédictions de l'EB-RSM sont quantitativement moins bonnes pour le plus grand taux de rotation ($Ro_b = 1.5$) représenté sur les figures 4.5 et 4.6. À ce très fort taux de rotation, largement supérieur aux valeurs que l'on trouve typiquement dans les couches limites des rotors de turbomachines (autour de $|Ro_b| \leq 0.1$ d'après Johnston, 1998), on observe que la laminarisation de l'écoulement du côté en dépression du canal ($h > 0$) est sous-estimée par le modèle. Sur la figure 4.8, les résultats de l'EB-RSM sont comparés aux données DNS de Grundestam *et al.* (2008), qui couvrent des très grands taux de rotation pour $Re_\tau = 180$. L'accord obtenu est satisfaisant, bien que l'on observe là aussi une sous-estimation de la laminarisation du côté en dépression du canal. Ce « retard » dans le processus de laminarisation de l'écoulement pour des taux de rotation croissants est également illustré par la figure 4.9 (pour $Re_b = 7000$). On voit que l'on obtient un écoulement purement laminaire, caractérisé par un profil de vitesse de Poiseuille et un coefficient de pondération elliptique α symétrique en $y = 0$, pour $Ro_b \approx 4.5$. Cependant, l'analyse simple de Grundestam *et al.* (2008) suggère que l'écoulement est totalement laminaire à partir de $Ro_b = 3$, ce nombre de rotation permettant d'égaliser à 2Ω la pente à la paroi d'un profil de Poiseuille.

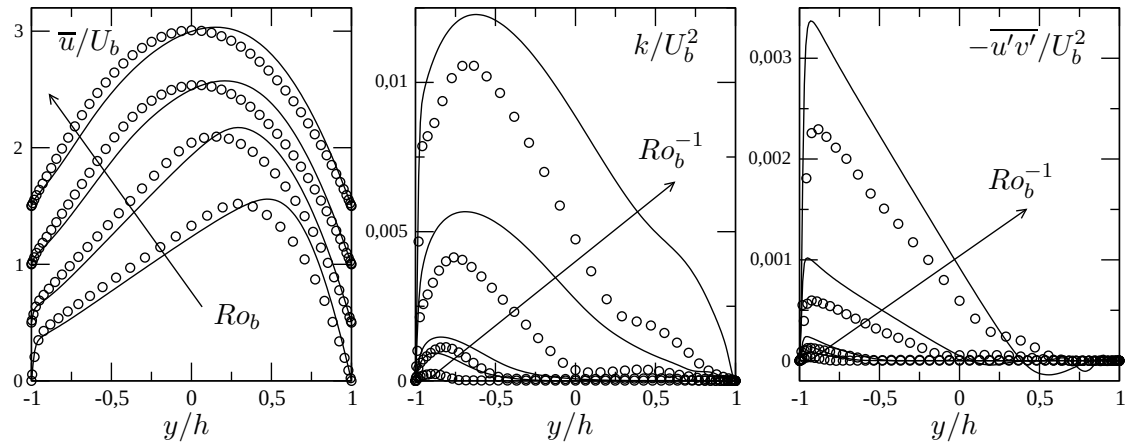


FIGURE 4.8 – Vitesse moyenne, énergie turbulente et tension de cisaillement turbulent. Canal plan tournant, $Re_\tau = 180$, $Ro_b = 0.98, 1.5, 2.06, 2.49$ (profils de vitesse décalés vers le haut). Symboles : DNS (Grundestam *et al.*, 2008), trait plein : EB-RSM.

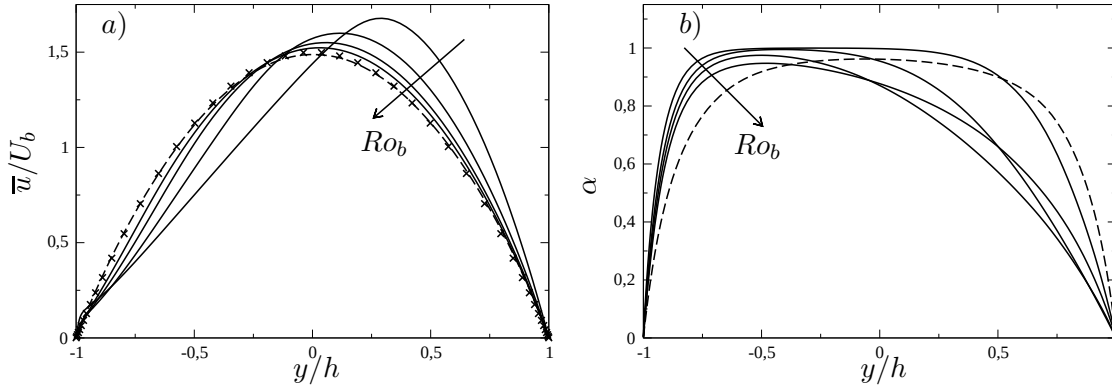


FIGURE 4.9 – a) Vitesse moyenne et b) coefficient de pondération elliptique pour les très grands taux de rotation. Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 1.5, 2, 2.5, 3$ (trait plein) et 4.5 (tirets). Lignes : EB-RSM, croix : profil de Poiseuille.

En conclusion, on a présenté une validation de l'EB-RSM sur le cas test du canal plan en rotation, pour plusieurs nombres de Reynolds et taux de rotation. La comparaison des résultats avec des données de référence et l'examen des hypothèses de base du modèle montrent que le modèle peut être utilisé efficacement, et sans aucune modification par rapport à la formulation de base (donnée en annexe D), pour les écoulements en rotation avec parois. L'EB-RSM fournit alors de très bonnes estimations de la vitesse moyenne et du tenseur de Reynolds, sur une large gamme de taux de rotation. Les résultats du modèle sont un peu moins précis pour les très grands taux de rotation, pour lesquels la laminarisation de l'écoulement est légèrement sous-estimée.

4.2.5 Évaluation de modèles au premier ordre pour la rotation

4.2.5.1 Choix des modèles

Comme on l'a dit au paragraphe 4.2.2, les modèles de turbulence au premier ordre les plus « populaires » (en particulier ceux proposés dans le logiciel *Code_Saturne*), basés sur une hypothèse de viscosité turbulente analogue à celle du modèle $k - \varepsilon$ standard (équations 4.6, 4.7), sont totalement insensibles à la rotation, en ce sens qu'elle n'a aucune influence sur le tenseur de Reynolds avec ces modèles.

Une voie de modélisation au premier ordre, potentiellement en mesure de reproduire les effets de la rotation sur le tenseur de Reynolds, consiste à « enrichir » l'hypothèse de viscosité turbulente (4.6), en prenant en compte d'autres termes au membre de droite, par exemple. C'est la voie des modèles dits de viscosité turbulente non linéaire, comme ceux proposés par Speziale (1987); Abe *et al.* (1994); Shih *et al.* (1995); Craft *et al.* (1997). Ces modèles relèvent toujours d'une hypothèse sur l'anisotropie du tenseur de Reynolds, mais celle-ci est plus complexe que le pur alignement avec le tenseur des taux de déformation moyens, mis en défaut dans plusieurs situations dont les écoulements en rotation. Concernant les modèles non linéaires cités plus haut, il faut noter que celui de Speziale (1987) est entièrement construit à partir de tenseurs objectifs, c'est-à-dire invariants à un mouvement de rotation solide près. On en déduit que ce modèle partage les mêmes lacunes pour les écoulements en rotation que les modèles de viscosité turbulente linéaire : la rotation n'a pas d'effet sur la modélisation du tenseur de Reynolds. Le modèle quadratique de Abe *et al.* (1994), le modèle cubique de Craft *et al.* (1997) et le modèle non linéaire réalisable de Shih *et al.* (1995) sont évalués par Nagano et Hattori (2002) (pour les deux premiers) et Jongen *et al.* (1998) (pour le troisième) pour des écoulements cisailés en rotation. Ces deux

études, basées sur des tests *a priori* (la première), une description des solutions d'équilibre (la seconde) et des comparaisons à des données DNS en canal tournant (les deux), montrent qu'aucun de ces trois modèles de viscosité turbulente non linéaire ne permet de reproduire correctement la turbulence des écoulements cisailés en rotation. On n'a donc pas retenu de modèle de viscosité turbulente non linéaire dans cette étude.

En accord avec les considérations précédentes, Jongen *et al.* (1998) insistent sur le fait que, pour les écoulements en rotation en particulier, une relation algébrique non linéaire construite rigoureusement à partir des équations des contraintes de Reynolds est plus vraisemblablement efficace qu'une *hypothèse* de viscosité turbulente, aussi complexe soit-elle, basée sur des considérations plus phénoménologiques. De fait, les auteurs présentent des résultats assez convaincants avec cette approche, qui est celle des modèles de fermeture au second ordre algébrique. Comme ce nom le souligne, on a introduit au paragraphe 4.2.1.2 ces modèles comme des modèles de fermeture aux second ordre, car ils résultent principalement d'une modélisation des corrélations entrant dans le bilan des tensions de Reynolds (moment d'ordre deux) et non de la vitesse moyenne (moment d'ordre un). Ils ne seront donc pas évalués non plus dans ce paragraphe, consacré aux modèles de fermeture au premier ordre.

Les modèles qu'on a retenus pour cette étude sont donc toujours basés sur l'hypothèse simple de viscosité turbulente linéaire (4.6). Ils constituent plutôt des *corrections* à des modèles de viscosité turbulente populaires existants, assez largement validés pour différents écoulements, et de manière à les sensibiliser en plus aux effets de la rotation sur la turbulence. Les corrections qu'on a retenues sont :

- la correction de Spalart et Shur (1997) (SS), initialement proposée pour le modèle à une équation de transport (sur la viscosité turbulente) de Spalart et Allmaras (1994),
- la correction de Pettersson Reif *et al.* (1999) (PR), initialement proposée pour le modèle à relaxation elliptique $v^2 - f$ (Durbin, 1991),
- la correction de Cazalbou *et al.* (2005) (CA), initialement proposée pour le modèle $k - \varepsilon$ bas-Reynolds de Launder et Sharma (1974).

On a indiqué le modèle *de base* auquel les corrections ont originalement été associées. Cependant, la plupart des modèles de turbulence au premier ordre ont une structure similaire – d'où leurs lacunes communes – de sorte qu'on peut facilement utiliser l'une ou l'autre de ces corrections avec un autre modèle de base. Les modèles de base auxquels on associera chacune des corrections sont :

- le modèle $k - \varepsilon$ bas-Reynolds de Launder et Sharma (1974) (LS),
- le modèle $k - \omega$ SST de Menter (1994) (SST),
- le modèle $\phi - f$ de Laurence *et al.* (2004) (PHI).

Compte tenu des remarques précédentes, on sera attentif non seulement à la qualité avec laquelle une correction donnée, associée à un modèle de base donné, reproduit l'instabilité Coriolis-cisaillement, mais aussi à la manière dont, en l'absence de rotation, le modèle de base est recouvert par le modèle corrigé – pour ne pas remettre en cause la validation préalable du modèle de base – et également à la robustesse numérique d'un modèle corrigé – pour tirer parti d'une modélisation au premier ordre (réputée plus stable numériquement), en conservant à l'esprit que la fermeture au second ordre semble plus « naturelle » pour les écoulements en rotation.

4.2.5.2 Correction de Spalart et Shur

Formulation

Spalart et Shur (1997) proposent une modification simple du modèle de turbulence à une équation de transport (sur la viscosité turbulente ν_t) de Spalart et Allmaras (1994), pour le sensibiliser aux effets de rotation et de courbure, plus particulièrement à l'instabilité

Coriolis–cisaillement. L’argumentaire empirique des auteurs, dont certaines idées avaient déjà été avancées par Knight et Saffman (1978), conduit à ce que, pour ce faire, la production de viscosité turbulente doit tenir compte de l’alignement entre le vecteur de vortacité $\boldsymbol{\omega}$ de l’écoulement et son vecteur de rotation *effective* $\boldsymbol{\omega}^{(r)}$, ce dernier tenant compte à la fois de la courbure locale des lignes de courant et de la rotation du référentiel. Dans les grandes lignes, le tenseur de vortacité sert à mesurer la différence entre les directions principales du tenseur de Reynolds et celles du tenseur des taux de déformation, cette différence tendant à se réduire temporairement, ce qui accroît la turbulence, ou à augmenter, ce qui amortit la turbulence, en fonction de la rotation effective. La bonne définition du taux de rotation effective de l’écoulement est une partie importante du problème.¹⁰ Finalement, Spalart et Shur (1997) proposent le scalaire :

$$e = \frac{2}{D^2} \overline{W}_{ik} \overline{S}_{jk} \left(\frac{D \overline{S}_{ij}}{Dt} + (\epsilon_{imn} \overline{S}_{jn} + \epsilon_{jmn} \overline{S}_{in}) \Omega_m \right), \quad (4.50)$$

$$\left(= 2 \overline{\omega}_i \cdot \overline{\omega}_i^{(r)}, \quad \text{avec} \quad \overline{\omega}_i^{(r)} = \frac{\epsilon_{ipq} \overline{S}_{pl} \dot{\overline{S}}_{lq}}{D^2} \right)$$

avec $D^2 \sim [T]^{-2}$ un facteur de normalisation, comme mesure de base de l’effet de la rotation et de la courbure sur la turbulence. Ce scalaire unifie les effets de courbure et de rotation (en ce sens que le principe (I) p. 45 est vérifié), est explicitement défini en 3D et satisfait l’invariance galiléenne étendue. Il a été repris dans la correction de Cazalbou *et al.* (2005) (voir paragraphe 4.2.5.4) et, comme noté par Dufour (2006), on peut vérifier qu’il dégénère en :

$$e = \frac{S^4}{2D^2} B_r,$$

avec B_r le nombre de Bradshaw défini au paragraphe 3.4 (équation 3.47), dans le cas d’une turbulence homogène cisailée en rotation. Wallin et Johansson (2002) pointent néanmoins le fait que le vecteur de rotation effective $\boldsymbol{\omega}^{(r)}$ défini par (4.50) (deuxième ligne) ne correspond pas au vecteur de rotation exacte $(u_\theta/r) \mathbf{e}_z$ (en coordonnées cylindriques (r, θ, z)) pour les écoulements axisymétriques de vitesse axiale u_z non constante.

Spalart et Shur (1997) utilisent le nombre e en multipliant le terme de production de viscosité turbulente du modèle de Spalart et Allmaras (1994) par la « fonction de rotation » suivante :

$$f_{rc} = (1 + c_{r1}) \frac{2r^*}{1 + r^*} (1 - c_{r3} \tan^{-1}(c_{r2}r)) - c_{r1}, \quad (4.51)$$

avec :

$$r = e/D^2, \quad r^* = \overline{S}/\overline{W}, \quad D^2 = \frac{1}{2}(\overline{S}^2 + \overline{W}^2), \quad \overline{S} = (2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij})^{1/2}, \quad \overline{W} = (2\overline{W}_{ij}\overline{W}_{ij})^{1/2},$$

$$c_{r1} = 1.0, \quad c_{r2} = 12.0, \quad c_{r3} = 1.0. \quad (4.52)$$

Une validation du modèle corrigé sur plusieurs cas test académiques est réalisée par Shur *et al.* (2000). Dufour *et al.* (2008) l’ont également utilisé pour des calculs dans un compresseur centrifuge. Smirnov et Menter (2009) ont repris la fonction (4.51), à quelques modifications mineures près, pour sensibiliser à la rotation et à la courbure les termes de production des équations de transport de k et ω du modèle SST; ils présentent une validation du modèle $k - \omega$ SST corrigé sur plusieurs cas test académiques et industriels.

10. Comme présenté en annexe E.2, c’est également le cas, dans le contexte des modèles au second ordre algébrique, pour obtenir une hypothèse d’équilibre faible suffisamment générale pour être réaliste y compris pour des écoulements courbes et/ou dans un référentiel en rotation (voir Rumsey *et al.*, 2000; Wallin et Johansson, 2002).

Mise en œuvre

Pour appliquer la correction de Spalart et Shur (1997) (SS) aux trois modèles de base LS, SST et $\phi - f$, on a simplement multiplié tous les termes de production intervenant dans les équations de transport des modèles de base ($P = 2\nu_t \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}$ dans l'équation de k et $P_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P$ dans l'équation de ε pour le modèle LS; P dans l'équation de k et $P_\omega = \frac{\omega}{k} P$ dans l'équation de ω pour le modèle SST; P dans l'équation de k , ϕ et f et P_ε dans l'équation de ε pour le modèle $\phi - f$) par la fonction de rotation f_{rc} définie par (4.50)–(4.52). Aucune tentative pour optimiser les constantes c_{r1} , c_{r2} et c_{r3} en fonction du modèle de base n'a été menée.

4.2.5.3 Correction de Pettersson Reif *et al.*

Formulation

Pettersson Reif *et al.* (1999) utilisent principalement l'analyse des solutions d'équilibre d'un modèle en turbulence homogène cisailée en rotation pour proposer une correction de l'hypothèse de viscosité turbulente. Alors que, à l'instar des modèles au second ordre, deux branches, l'une triviale $(\varepsilon/Sk)_\infty = 0$, l'autre non $(\varepsilon/Sk)_\infty > 0$, coexistent bien à l'équilibre, l'hypothèse de viscosité turbulente classique conduit, sur cette branche, à :

$$\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_\infty = \frac{C_{\varepsilon 1} - 1}{C_{\varepsilon 2} - 1} \Leftrightarrow \left(\frac{\varepsilon}{Sk}\right)_\infty = \left(2C_\mu \frac{C_{\varepsilon 1} - 1}{C_{\varepsilon 2} - 1}\right)^{1/2} = \text{constante.}$$

Par conséquent, les deux branches coexistent mais ne se rencontrent jamais : il n'y a pas de bifurcation (si à l'instant initial $(\varepsilon/Sk)_0 > 0$, c'est le point fixe non trivial qui est atteint). Pettersson Reif *et al.* (1999) proposent donc de modifier le coefficient C_μ de manière à ce que la branche non triviale ait les mêmes caractéristiques générales que celles du modèle SSG linéarisé (des points A , B et C proches notamment, voir p. 63). Les auteurs veillent également à ce que, en l'absence de rotation, la valeur originale C_μ du modèle de base soit recouvrée.

Finalement, la correction de Pettersson Reif *et al.* (1999) peut s'écrire :

$$\nu_t^{rc} = f(\bar{S}^*, \bar{W}^*) \nu_t, \quad (4.53)$$

avec :

$$f = \frac{1 + \alpha_1 |\bar{S}^* - \bar{W}^*| + \alpha_3 (\bar{S}^* - \bar{W}^*)}{1 + \alpha_4 |\bar{S}^* - \bar{W}^*|} \left(\sqrt{\frac{1 + \alpha_5 \bar{S}^*}{1 + \alpha_5 \bar{W}^*}} + \alpha_1 \sqrt{\bar{W}^*} \sqrt{|\bar{S}^* - \bar{W}^*| - (\bar{S}^* - \bar{W}^*)} \right)^{-1}, \quad (4.54)$$

et

$$\bar{S}^* = \bar{S}_{ij}^* \bar{S}_{ij}^*, \quad \bar{W}^* = \bar{W}_{ij}^* \bar{W}_{ij}^*, \quad \bar{S}_{ij}^* = T \bar{S}_{ij}, \quad \bar{W}_{ij}^* = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + C_\Omega \epsilon_{ikj} \Omega_k,$$

$$T = \max \left(\frac{k}{\varepsilon}, 6 \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right), \quad C_\Omega = 2.25,$$

$$\alpha_1 = 0.055 \sqrt{f_1}, \quad \alpha_2 = 0.5 f_1, \quad \alpha_3 = 0.25 f_1, \quad \alpha_4 = 0.2 \sqrt{f_1}, \quad \alpha_5 = 0.025, \quad (4.55)$$

et f_1 une fonction d'amortissement dépendante du modèle (voir ci-dessous).

Cette correction a été originalement associée au modèle $v^2 - f$ (Durbin, 1991) et n'a, à notre connaissance, pas été associée à un autre modèle de base. Iaccarino *et al.* (1999) et Ooi *et al.* (2000) l'ont validée sur plusieurs cas test d'écoulements en rotation.

Notons que d'après (4.55), cette correction ne satisfait pas le principe de modélisation (I) (p. 45) (en raison du facteur $C_\Omega \neq 1$). Cela vient du fait que les auteurs, en s'appuyant

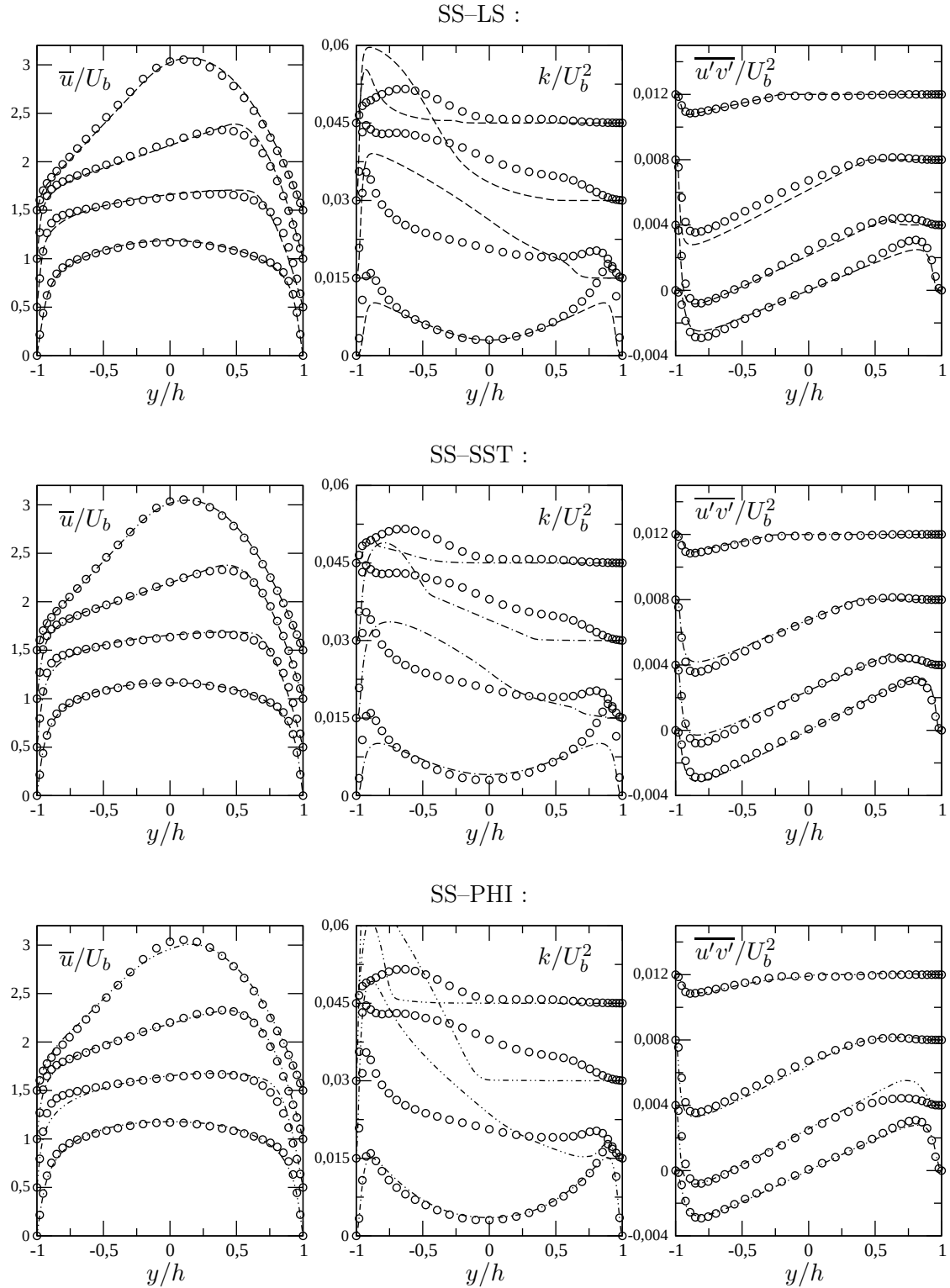


FIGURE 4.10 – Correction de Spalart et Shur (1997), associée au modèle LS (SS-LS), SST (SS-SST) et $\phi - f$ (SS-PHI). Canal plan tournant, $Re_b = 2500$, $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$ (profils décalés vers le haut). Symboles : DNS, --- : SS-LS ; -.- : SS-SST ; -.-.- : SS-PHI.

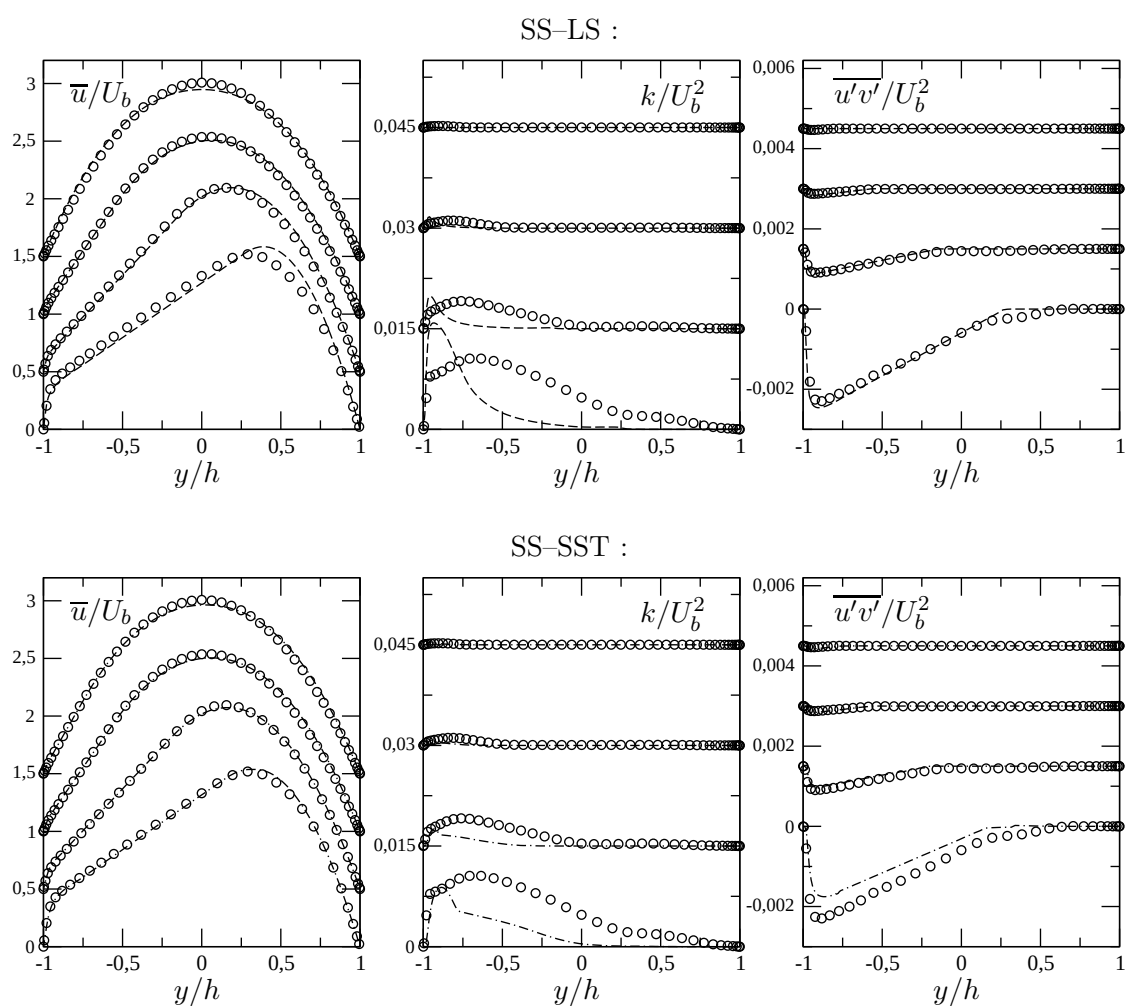


FIGURE 4.11 – Correction de Spalart et Shur (1997), associée au modèle LS (SS-LS) et SST (SS-SST). Canal plan tournant, $Re_\tau = 180$, $Ro_b = 0.98, 1.5, 2.06, 2.49$ (profils décalés vers le haut). Légende : voir figure 4.10.

sur l'état de l'art des modèles au second ordre algébriques (Gatski et Speziale, 1993, notamment), supposent que l'écoulement est en équilibre faible dans le référentiel relatif (c'est le cas du canal plan en rotation transverse, calculé dans un référentiel « attaché aux parois »). La prise en compte dans ce modèle d'une hypothèse d'équilibre faible plus générale (sensibilisée à la courbure des lignes de courant) est proposée par Duraisamy et Iaccarino (2005).

Mise en œuvre

Bien que la correction de Pettersson Reif *et al.* (1999) (PR) ait été introduite comme une modification du coefficient C_μ , sa généralisation à n'importe quel modèle de viscosité turbulente est plus immédiate en l'écrivant directement selon (4.53), c'est-à-dire comme une altération du coefficient de viscosité turbulente. Cela ne change rien aux arguments suivant lesquels le modèle est construit. En revanche, cela rend plus systématique son association au modèle SST. En effet, ce modèle utilise une équation de transport sur la fréquence caractéristique de la turbulence :

$$\omega = \frac{\varepsilon}{C_\mu k}, \quad (4.56)$$

qui est donnée, pour une turbulence homogène, par (d'après les équations 4.10, 4.11) :

$$\frac{d\omega}{dt} = (C_{\varepsilon 1} - 1) \frac{\omega}{k} P - C_\mu (C_{\varepsilon 2} - 1) \omega^2.$$

On voit donc que la modification du coefficient C_μ revient à modifier le coefficient du terme puits de cette équation. Au contraire, la modification de la viscosité turbulence (4.53) modifie le montant de la production P dans le premier terme, ce qui nous a semblé plus conforme à la logique de la correction de Pettersson Reif *et al.* (1999). De plus, les coefficients $C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$ du modèle SST sont définis grâce à une fonction de pondération qui dépend elle-même du coefficient C_μ (ou du moins de sa valeur 0.09 classiquement admise pour les écoulements cisailés). L'association de la correction de Pettersson Reif *et al.* (1999) et du modèle SST est donc plus simple et plus fidèle au modèle de base lorsqu'elle est écrite suivant (4.53).

La calibration des constantes α_1 – α_5 de la correction est assez largement indépendante du modèle de base auquel elle est associée. Notamment les points A , B et C (p. 63) et la « forme » du diagramme de bifurcation sont les mêmes quel que soit le modèle de base. On a donc conservé, pour chaque modèle de base, la valeur des constantes α_1 – α_5 donnée dans (4.55).

En revanche, la fonction f_1 d'amortissement des coefficients α_1 – α_4 dépend du modèle de base. Pettersson Reif *et al.* (1999) utilisent, avec le modèle $v^2 - f$:

$$f_1 = \sqrt{(\overline{v'^2}/k)/(\overline{v'^2}/k)_\infty}, \quad \text{avec} \quad (\overline{v'^2}/k)_\infty = 0.367. \quad (4.57)$$

Associée à d'autres modèles bas-Reynolds à fonction d'amortissement f_μ de la viscosité turbulente, les auteurs suggèrent de prendre $f_1 = f_\mu$. Pour le modèle à relaxation elliptique $\phi - f$, qui utilise une équation de transport sur $\phi \stackrel{\text{def}}{=} \overline{v'^2}/k$, on a utilisé l'amortissement correspondant à (4.57). Pour les modèles LS et SST, on a simplement choisi :

$$f_1 = 1. \quad (4.58)$$

En effet, des tests numériques ont révélé que l'amortissement $f_1 = f_\mu$ donnait des résultats moins satisfaisants pour le modèle LS.

Au final, la correction PR appliquée correspond donc aux équations (4.53)–(4.57) pour le modèle $\phi - f$ et (4.53)–(4.55) et (4.58) pour les modèles LS et SST.

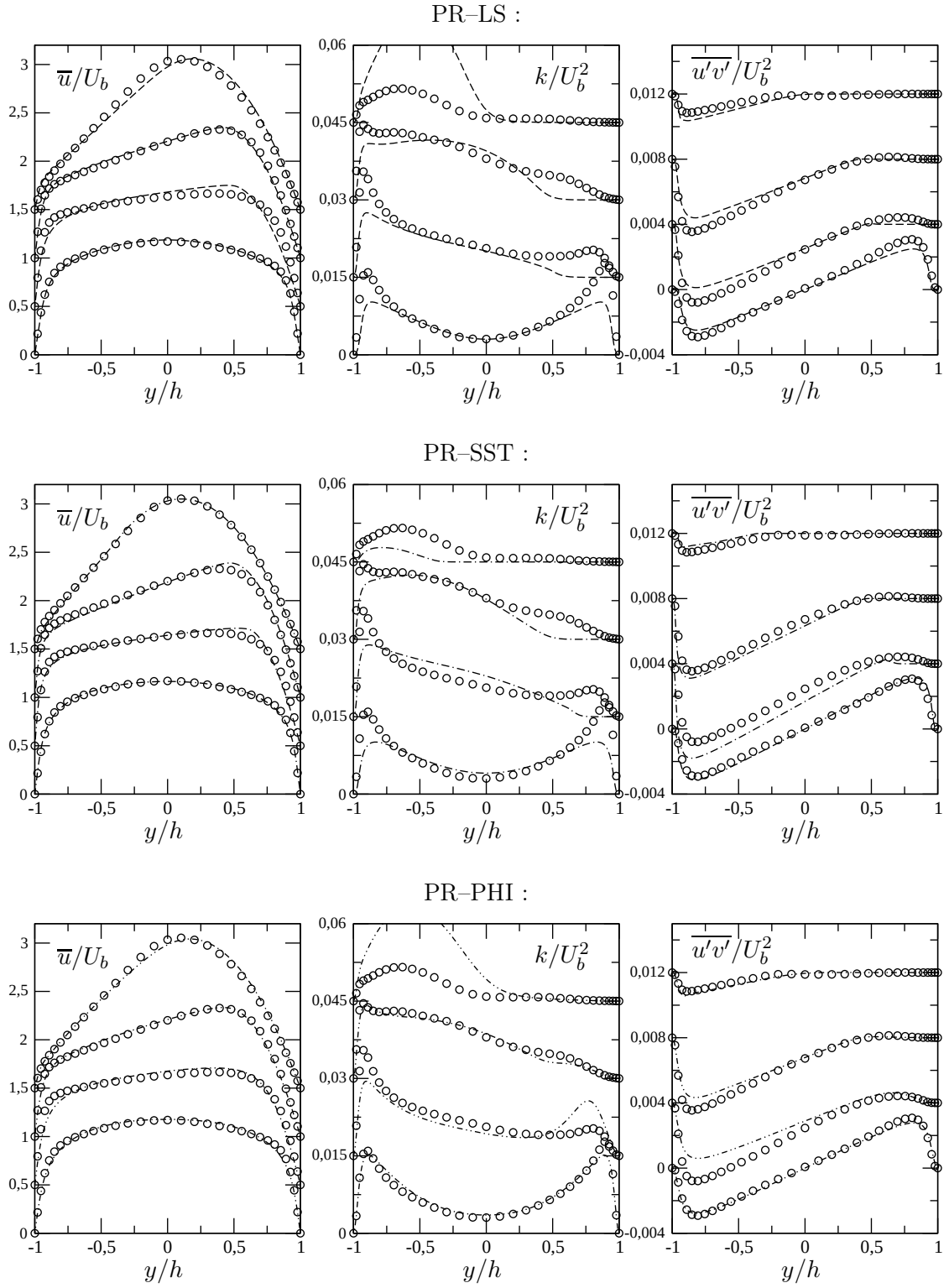


FIGURE 4.12 – Correction de Pettersson Reif *et al.* (1999), associée au modèle LS (PR-LS), SST (PR-SST) et $\phi - f$ (PR-PHI). Canal plan tournant, $Re_b = 2500$, $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$ (profils décalés vers le haut). Symboles : DNS, — : PR-LS ; - - : PR-SST ; - . - : PR-PHI.

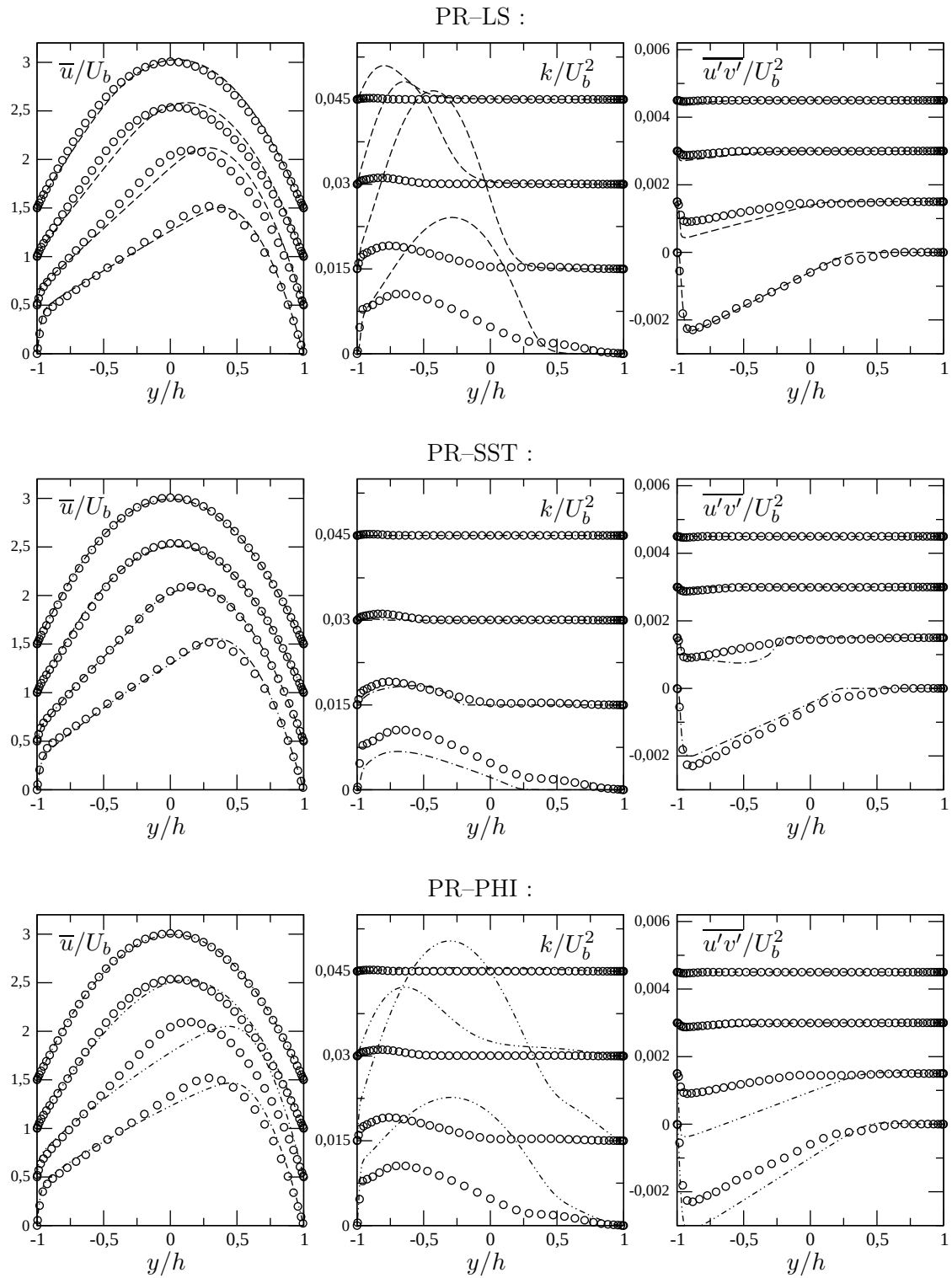


FIGURE 4.13 – Correction de Pettersson Reif *et al.* (1999), associée au modèle LS (PR-LS), SST (PR-SST) et $\phi-f$ (PR-PHI). Canal plan tournant, $Re_\tau = 180$, $Ro_b = 0.98, 1.5, 2.06, 2.49$ (profils décalés vers le haut). Légende : voir figure 4.12.

4.2.5.4 Correction de Cazalbou *et al.*

Formulation

La dernière correction aux modèles de viscosité turbulente qu'on considère est celle de Cazalbou *et al.* (2005). Les auteurs proposent de modifier le coefficient $C_{\varepsilon 2}$ du terme puits de l'équation de la dissipation pour reproduire les effets de la rotation sur la turbulence. Cela leur permet d'intégrer dans le modèle non seulement une prise en compte de l'instabilité Coriolis-cisaillement, mais aussi une modélisation de l'inhibition du transfert spectral sous l'effet de la rotation (cf paragraphe 3.3). Ce second phénomène, qui apparaît y compris en l'absence de gradient moyen, ne peut être reproduit par un modèle RANS qu'à travers du coefficient $C_{\varepsilon 2}$. À l'inverse, il peut sembler moins naturel au premier abord de modifier ce coefficient pour reproduire l'instabilité Coriolis-cisaillement (qui comme son nom l'indique provient de l'existence d'un gradient moyen), mais l'analyse mathématique des auteurs, fondée sur l'examen des solutions d'équilibre du modèle, permet à celui-ci de reproduire un écoulement instable dans l'intervalle $-0.04 < \Omega/S < 0.52$ et stable sinon, et de rester réalisable pour tout Ω/S .¹¹ Il est notable que le diagramme des points fixes $(\varepsilon/Sk)_\infty$ de ce modèle est totalement différent de celui d'un modèle au second ordre (figure C.1, annexe C), que la correction de Pettersson Reif *et al.* (1999) s'attache à imiter : avec la correction de Cazalbou *et al.* (2005), il n'y a pas de bifurcation ; seule la branche non triviale $(\varepsilon/Sk)_\infty > 0$ est atteinte, mais celle-ci, sur laquelle $(P/\varepsilon)_\infty$ n'est pas constant car $C_{\varepsilon 2}$ varie (voir équation 4.41), correspond à un écoulement stable lorsque $(P/\varepsilon)_\infty < 1$.

La formulation de la correction de Cazalbou *et al.* (2005) est la suivante :

$$C_{\varepsilon 2}^{rc} = C_{\varepsilon 2}^0 + \frac{C_{\varepsilon 2}^0 - 1}{1 + aRo^{*3/2}} + C_{\varepsilon 2}^0 C_{sc} \frac{S^*k}{\varepsilon} (\tanh(bBr^* + c) - d), \quad (4.59)$$

avec :

$$\begin{aligned} Ro^* &= \frac{2\varepsilon}{\overline{W}_k}, \quad Br^* = -\frac{2k}{\overline{S}^3 \varepsilon} \overline{W}_{ik} \overline{S}_{jk} \left(\frac{D\overline{S}_{ij}}{Dt} + (\epsilon_{imn} \overline{S}_{jn} + \epsilon_{jmn} \overline{S}_{in}) \Omega_m \right), \\ C_{\varepsilon 2}^0 &= 1.83, \quad C_{sc} = 0.119, \quad a = 4.3, \quad b = 5.13, \quad c = 0.453, \quad d = 0.682, \end{aligned} \quad (4.60)$$

et $\overline{S}$ et $\overline{W}$ définis dans (4.55). Dans (4.59), le troisième terme, qui s'annule en l'absence de rotation, correspond à la prise en compte de l'instabilité Coriolis-cisaillement. La fonction Br^* est adaptée du scalaire e (équation 4.50) proposé par Spalart et Shur (1997), ce qui permet au modèle de prendre en compte l'effet de la courbure des lignes de courant. Les deux premiers termes de (4.59) modélisent, d'après une proposition de Park et Chung (1999), l'inhibition du transfert spectral sous l'effet de la rotation, mais ils ne correspondent pas exactement au coefficient $C_{\varepsilon 2}$ du modèle de base en l'absence de rotation.

La validation initiale du modèle proposée par Cazalbou *et al.* (2005) se concentre sur quelques cas test canoniques. Il a ensuite été utilisée par Dufour *et al.* (2008) pour des calculs d'écoulements dans un compresseur centrifuge.

Mise en œuvre

La correction de Cazalbou *et al.* (2005) (CA) est développée à partir du modèle LS, mais elle peut être associée à d'autres modèles de viscosité turbulente à deux équations de transport, comme les modèles SST et $\phi - f$. Toutefois, contrairement aux corrections SS et PR, la calibrations des coefficients C_{sc} , b , c et d de la correction CA est dépendante des valeurs des coefficients C_μ , $C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$ du modèle de base (les relations liant ces coefficients entre eux sont résumées dans le tableau III de Cazalbou *et al.*, 2005).

11. Ce défaut de réalisabilité est récurrent dans les modèles à coefficient $C_{\varepsilon 2}$ variable, voir Speziale *et al.* (1990).

Pour le modèle $\phi - f$, les coefficients C_μ et $C_{\varepsilon 1}$ dépendent du ratio $\overline{v'^2}/k$, dont la valeur d'équilibre dépend elle-même de celle de $C_{\varepsilon 1}$ (voir équation 16 de Pettersson Reif *et al.*, 1999) : le problème est ouvert. On a donc conservé les coefficients C_{sc} , a , c et d calculés par Cazalbou *et al.* (2005) à partir du modèle LS.

Le modèle SST de Menter (1994) utilise une équation de transport sur la fréquence caractéristique $\omega = \varepsilon/(C_\mu k)$ de la turbulence. Pour une turbulence homogène, elle est donnée par (voir les équations 4.10, 4.11) :

$$\frac{d\omega}{dt} = (C_{\varepsilon 1} - 1) \frac{\omega}{k} P - C_\mu (C_{\varepsilon 2} - 1) \omega^2. \quad (4.61)$$

Les coefficients $C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$ sont donnés par :

$$C_{\varepsilon 1} = F_1 C_{\varepsilon 1}^{(1)} + (1 - F_1) C_{\varepsilon 1}^{(2)}, \quad C_{\varepsilon 2} = F_1 C_{\varepsilon 2}^{(1)} + (1 - F_1) C_{\varepsilon 2}^{(2)},$$

$$C_{\varepsilon 1}^{(1)} = 1.55, \quad C_{\varepsilon 1}^{(2)} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2}^{(1)} = 1.83, \quad C_{\varepsilon 2}^{(2)} = 1.92,$$

pour F_1 une fonction de pondération. Pour appliquer la correction de Cazalbou *et al.*, on a appliqué (4.59) calibrée à partir des valeurs $C_{\varepsilon 1}^{(1)}$ et $C_{\varepsilon 2}^{(1)}$, soit (en appliquant les formules résumées dans le tableau III de Cazalbou *et al.*, 2005) :

$$C_{sc} = 0.129, \quad b = 3.858, \quad c = 0.051, \quad d = 0.400,$$

pour obtenir $C_{\varepsilon 2}^{rc(1)}$, et appliqué (4.59) calibrée à partir des valeurs $C_{\varepsilon 1}^{(2)}$ et $C_{\varepsilon 2}^{(2)}$, qui correspondent à la calibration initiale de la correction (équation 4.60), pour obtenir $C_{\varepsilon 2}^{rc(2)}$. La fonction F_1 du modèle SST est utilisée pour pondérer $C_{\varepsilon 2}^{rc(1)}$ et $C_{\varepsilon 2}^{rc(2)}$ dans le second terme du membre de droite de (4.61).

4.2.5.5 Validation

Pour valider et comparer les trois corrections des modèles de viscosité turbulente présentées dans les paragraphes 4.2.5.2–4.2.5.4, associées aux trois modèles de base LS, SST et $\phi - f$, on utilise le cas test du canal plan en rotation transverse. Sur ce cas test, les mécanismes physiques dominants sont les effets de proche paroi et l'instabilité Coriolis–cisaillement. De plus, rappelons que la vitesse moyenne n'est pas affectée par la force de Coriolis sur ce cas test, de sorte qu'elle peut-être correctement reproduite uniquement si les effets de la rotation sur le tenseur de Reynolds sont bien pris en compte. À l'inverse, les modèles de base LS, SST et $\phi - f$, s'ils ne sont pas associés à une correction telle que celles qu'on teste ici, prédisent des profils de vitesse et de tensions de Reynolds identiques quel que soit le taux de rotation de l'écoulement.

Les modèles sont comparés aux données DNS de Lamballais *et al.* (1996), à $Re_b = 2500$ et $0 \leq Ro_b \leq 1.5$, et également aux données DNS récentes de Grundestam *et al.* (2008), à $Re_\tau = 180$ et $0.98 \leq Ro_b \leq 2.49$. Cela accroît sensiblement la validation des modèles, en les testant dans des conditions où la rotation laminarise presque totalement l'écoulement. Pour tous les calculs réalisés, un terme source de quantité de mouvement est ajusté dynamiquement de manière à obtenir le même débit que celui des calculs DNS de référence et le maillage utilisé garantit $y_1^+ < 0.15$ pour le premier point de calcul, quel que soit le taux de rotation.

Commençons la discussion par quelques remarques générales, globalement partagées par les modèles. Ces remarques seront précisées ou relativisées pour certains modèles par la suite. Sur les figures 4.10 à 4.15, on a tracé la vitesse moyenne, l'énergie cinétique turbulente et la tension de cisaillement turbulent obtenues en associant chaque modèle de

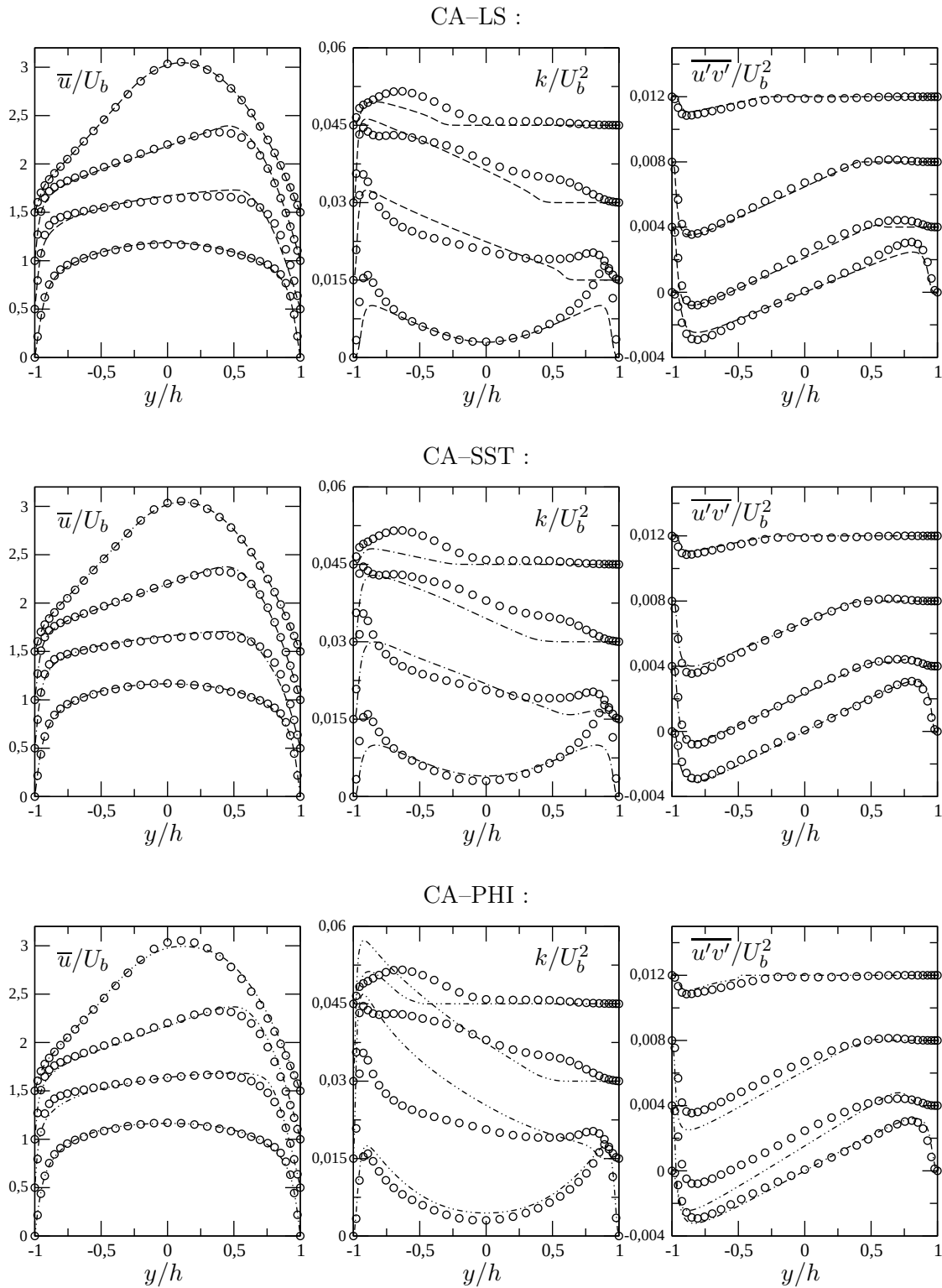


FIGURE 4.14 – Correction de Cazalbou *et al.* (2005), associée au modèle LS (CA-LS), SST (CA-SST) et $\phi-f$ (CA-PHI). Canal plan tournant, $Re_b = 2500$, $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$ (profils décalés vers le haut). Symboles : DNS, --- : CA-LS ; -.- : CA-SST ; : CA-PHI.

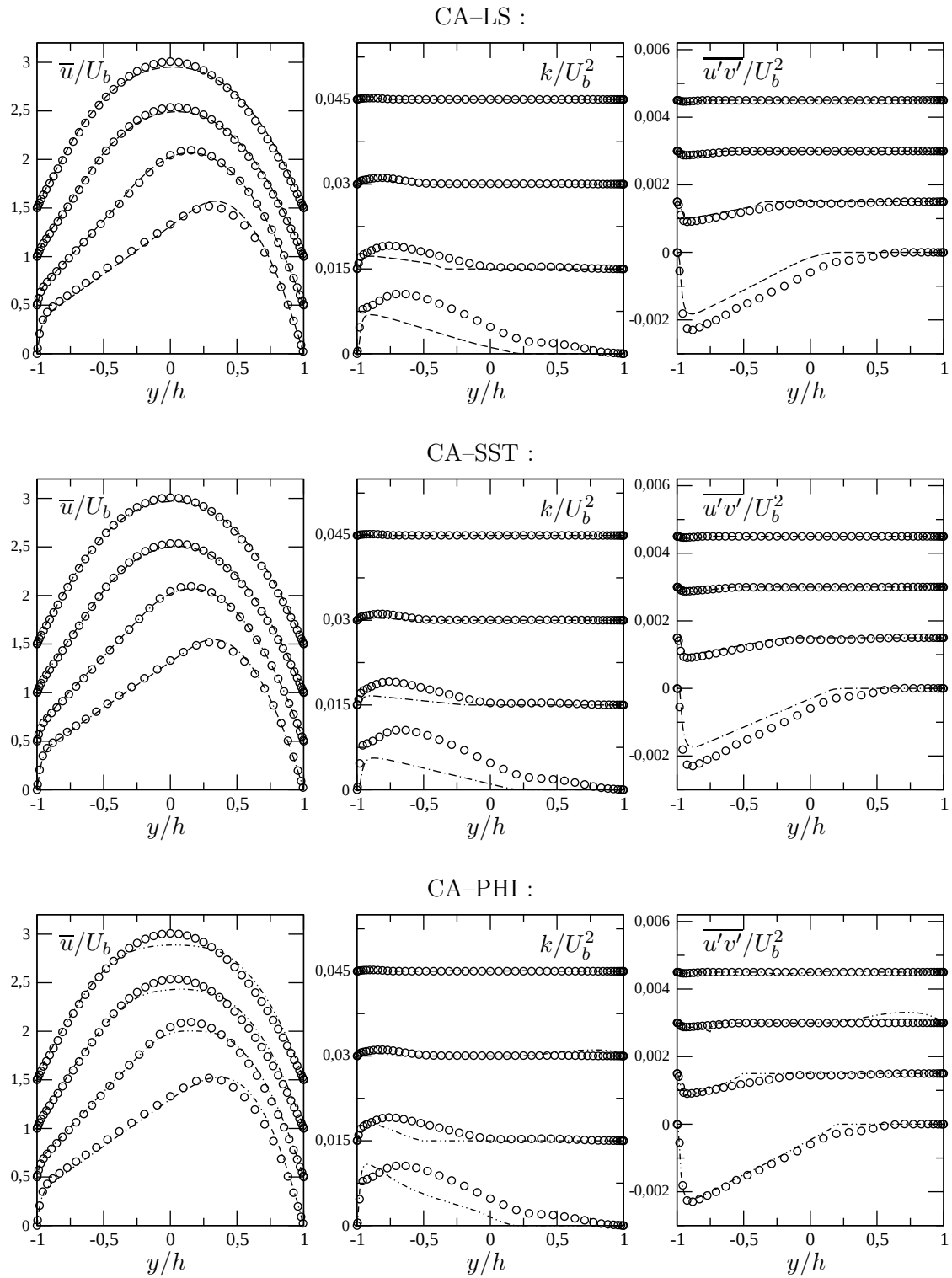


FIGURE 4.15 – Correction de Cazalbou *et al.* (2005), associée au modèle LS (CA-LS), SST (CA-SST) et $\phi - f$ (CA-PHI). Canal plan tournant, $Re_\tau = 180$, $Ro_b = 0.98, 1.5, 2.06, 2.49$ (profils décalés vers le haut). Légende : voir figure 4.14.

viscosité turbulente de base à chaque correction de rotation. Globalement, les modèles corrigés permettent de reproduire les caractéristiques principales de l'écoulement. La pente constante proche de 2Ω dans le profil de vitesse moyenne est bien reproduite. Cette zone de vorticité absolue nulle s'accompagne d'une pente constante dans le cisaillement turbulent qui, à l'inverse de celle de vitesse moyenne, est à peu près constante sur une large gamme de nombres de rotation (jusqu'à $Ro_b = 0.98$ sur les cas simulés). Concernant le profil d'énergie cinétique turbulente, les modèles prédisent bien une dissymétrie entre le côté en pression ($y/h < 0$) et le côté en dépression. Cependant, il est clair que pour chaque modèle, l'énergie cinétique turbulente est moins bien reproduite que la vitesse moyenne ou la tension de cisaillement. On peut penser que c'est l'énergie cinétique turbulente qui p t t le plus de l'empirisme relatif des corrections de rotation et aucun des modèles testés ne permet de reproduire finement k sur une gamme significative de nombres de rotation.

Concernant l'anisotropie, les trois corrections qu'on a testées reposent sur la même hypothèse linéaire (4.6) que les modèles de base : l'anisotropie n'est donc pas mieux représentée qu'avec les modèles de base, et en particulier sur ce cas test, les trois composantes normales du tenseur de Reynolds sont égales : $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} = 2k/3$.

Un point notable est que les corrections semblent valables pour tous les taux de rotation, jusqu'à la laminarisation quasi-complète de l'écoulement. Alors qu'il n'y a pas de raison *a priori* pour que les corrections PR et CA, construites à partir des solutions d'équilibre du modèle en turbulence homogène cisailée en rotation, soient moins efficaces aux forts taux de rotation, l'argumentaire physique de Spalart et Shur (1997) basé sur l'alignement du vecteur de vorticité et du vecteur de rotation, n'est valable, selon les auteurs, que pour des taux de rotation modérés. Malgré cela, on voit que même si les performances d'une correction sont variables d'un modèle de base à un autre, aucune d'entre elles ne semble montrer de limitation claire de validité selon le taux de rotation.

En fait, les cas les plus critiques pour ces corrections semblent être ceux à nombre de rotation modéré, $Ro_b = 1/6$ ici. La laminarisation partielle de l'écoulement du côté en dépression est souvent surestimée, la transition vers la zone de vorticité absolue nulle trop abrupte. Ainsi, aucun modèle (  part le modèle PR-PHI) ne parvient à maintenir de l'énergie turbulente du côté en dépression, même si le taux de rotation est modéré. Du côté en pression également, le profil de vitesse moyenne peut s'écarter notablement du profil de référence des DNS.

Enfin, notons que pour l'ensemble des modèles de base et des corrections, la convergence des modèles est d'autant plus lente que le nombre de rotation est grand. La figure 4.16, dont l'objet est surtout de quantifier les problèmes de convergence que certains calculs ont pu poser, permet néanmoins d'illustrer ce propos.

Concernant les modèles de base, les calculs réalisés révèlent que globalement, le modèle $\phi - f$ est le moins adapté aux corrections de rotation qu'on considère. D'une part, l'empirisme relatif des corrections annule l'avantage qu'on pourrait tirer d'une modélisation fine des effets de paroi par relaxation elliptique. D'autres part, la reformulation $\phi - f$ du modèle de relaxation elliptique $v^2 - f$ de Durbin (1991), dont le but est de rendre plus robuste numériquement le traitement des conditions aux limites, a l'inconvénient de faire apparaître des termes en P/k dans les équations de ϕ et de f (voir Laurence *et al.*, 2004). Ces termes sont sources d'instabilité du modèle lorsqu'il est associé à l'une des corrections de rotation, exceptée la correction PR car le modèle PR-PHI surestime très largement le niveau d'énergie aux forts taux de rotation. On peut souvent éviter la divergence des calculs en réalisant des *clipping*, par exemple en remplaçant P/k par $P/\varepsilon T$, avec T l'échelle

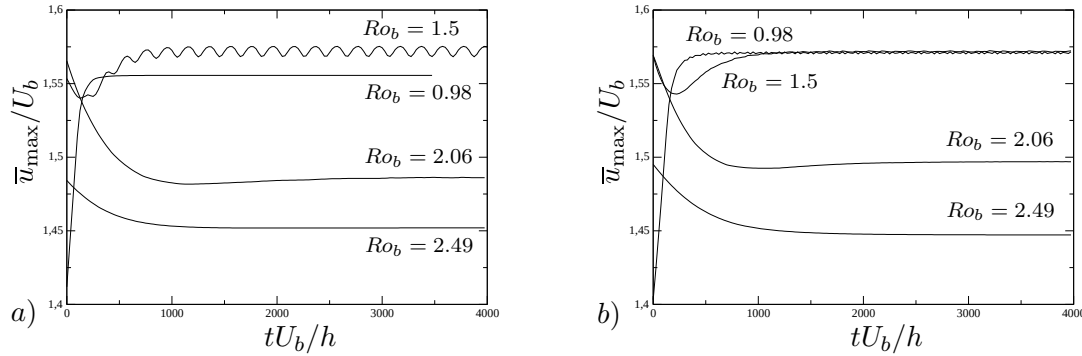


FIGURE 4.16 – Défauts de convergence pour certains modèles de viscosités turbulentes corrigés pour la rotation. Canal plan tournant, $Re_\tau = 180$, $Ro_b = 0.98, 1.5, 2.06, 2.49$. a) modèles PR-SST ; b) modèle CA-LS.

de temps de Durbin :

$$T = \max\left(\frac{k}{\varepsilon}, C_T\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right), \quad C_T = 6.$$

Malgré une convergence dégradée, cela a permis, avec la correction CA, de conduire les calculs jusqu'aux plus grands taux de rotation. Ce clipping est néanmoins suspecté d'être responsable du « rabottage » du profil de vitesse au centre du canal et aux forts taux de rotation, avec le modèle CA-PHI. Les termes en P/k du modèle $\phi - f$ sont encore plus critiques avec la correction SS, qui opère directement sur la production P . Il s'en suit un découplage (temporaire au moins) entre la production P et l'énergie turbulente k , conduisant à l'instabilité du modèle. Ainsi, on n'a pas pu obtenir la convergence du modèle SS-PHI sur les cas correspondant aux données DNS de Grundestam *et al.* (2008), à grands taux de rotation (voir figure 4.11).

Au contraire, le modèle le mieux adapté aux corrections testées est le modèle SST. Ce modèle est, parmi les trois modèles de base testés, celui qui donne les meilleurs résultats avec les corrections SS et PR, et ses prédictions sont tout à fait comparables à celles du modèle LS en ce qui concerne la correction CA. La convergence du modèle SST corrigé est bonne pour tous les nombres de rotation et toutes les corrections, à la seule exception près du cas $Ro_b = 0.98$ pour le modèle PR-SST, où de larges oscillations non physiques empêchent le calcul de converger (figure 4.16a).

En centrant maintenant le propos sur les corrections de rotation, on ne recommande pas d'utiliser la correction PR. Les premiers tests encourageants de Pettersson Reif *et al.* (1999) étaient réalisés avec le modèle $v^2 - f$ et ne concernaient que des nombres de rotation $Ro_b \leq 0.5$. On observe ici que la formulation PR-PHI du modèle de relaxation elliptique corrigé ne permet pas d'obtenir des prédictions satisfaisantes sur une gamme significative de nombres de rotation. Il en va de même pour le modèle PR-LS. Des calculs PR-PHI complémentaires, non reportés ici, à plus grand Reynolds ($Re_b = 7000$, d'après les données LES de Lamballais *et al.*, 1998), de même que l'association de la correction PR à un autre modèle de relaxation elliptique (Lien et Durbin, 1996), ne se sont pas montrés plus convaincants.

Globalement, c'est la correction CA qui, d'après nos calculs, est la plus satisfaisante. C'est la correction la plus « portable » dans la mesure où, compte tenu des limitations communes à tous les modèles de viscosité turbulente corrigés testés, on peut considérer qu'elle donne satisfaction à la fois avec le modèle LS et avec le modèle SST. Cette portabilité

de la correction CA est perçue comme un avantage car, si l'on souhaite sensibiliser à la rotation les modèles de viscosité turbulente d'un code de calcul, cela dispense d'intégrer une correction de rotation spécifique à chaque modèle de base. Il est également utile de rappeler que la correction CA, qui utilise le scalaire (4.50) proposé par Spalart et Shur (1997), intègre donc une prise en compte de la courbure des lignes de courant et qu'elle est la seule à modéliser l'inhibition du transfert spectral sous l'effet de la rotation. Un léger défaut de convergence, constaté pour le modèle CA-LS sur les cas de Grundestam *et al.* (2008), à $Ro_b = 0.98$ et 1.5, est néanmoins reporté sur la figure 4.16b.

Enfin, bien que la correction SS soit moins portable que la correction CA, notons que son association avec le modèle SST fournit un accord satisfaisant avec les DNS sur l'ensemble des cas testés et n'a montré aucun problème de convergence particulier.

4.2.6 Bilan pour la modélisation RANS

En conclusion, ce paragraphe a donné un bon aperçu de l'état de l'art en modélisation statistique de la turbulence pour les écoulements en rotation. On a vu que la fermeture au second ordre des équations de Reynolds était intrinsèquement supérieure à la fermeture au premier ordre pour ces écoulements. Parmi les fermetures au second ordre, le modèle SSG (Speziale *et al.*, 1991) représente bien l'effet de l'instabilité Coriolis-cisaillement sur la turbulence. Le traitement de proche paroi par pondération elliptique (Manceau et Hanjalic, 2002) peut être utilisé sans modification dans un référentiel en rotation et reproduit correctement l'amortissement ou l'amplification des contraintes turbulentes en proche paroi dans un canal soumis à une rotation transverse. Les modèles de viscosité turbulente linéaire classiques sont pour leur part totalement insensibles aux effets de la rotation sur la turbulence, mais des corrections plus ou moins *ad hoc* de ces modèles ont été proposées dans la littérature. Dans un canal plan en rotation transverse, ces corrections reproduisent très bien l'écoulement moyen pour tous les taux de rotation testés. En revanche, les composantes normales du tenseur de Reynolds, qui n'agissent pas sur l'écoulement moyen sur ce cas test particulier, sont beaucoup moins bien capturées. Parmi les corrections testées, c'est globalement celle de Cazalbou *et al.* (2005) qui donne le plus satisfaction, notamment en raison de sa portabilité d'un modèle de viscosité turbulente à un autre. Enfin, le modèle de viscosité turbulente à relaxation elliptique $\phi - f$ ne semble pas particulièrement approprié à l'ajout d'une correction de rotation/courbure au modèle.

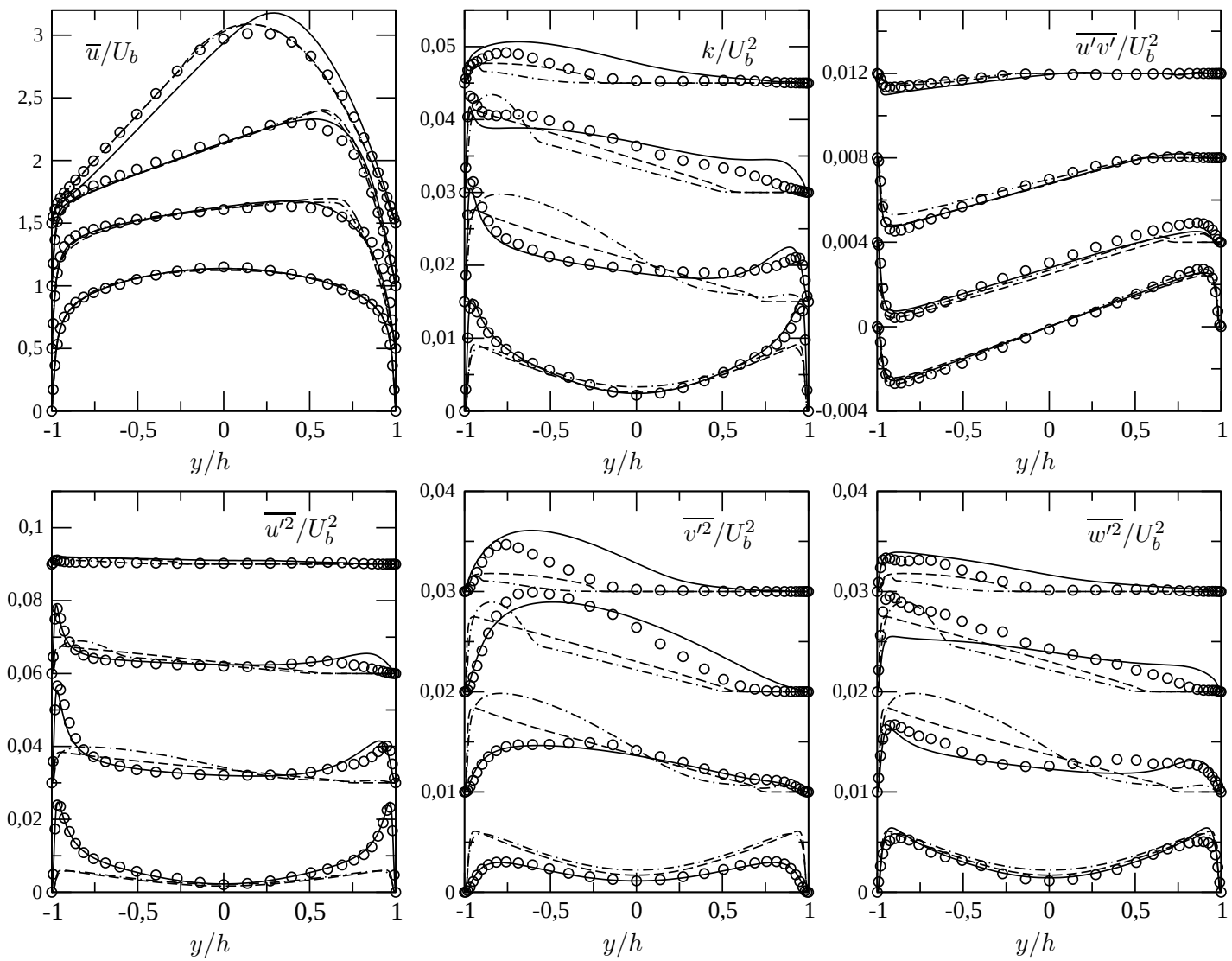


FIGURE 4.17 – Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 0,1/6,0,5,1,5$. Symboles : LES; — : EB-RSM; --- : CA-LS; -.- : SS-SST.

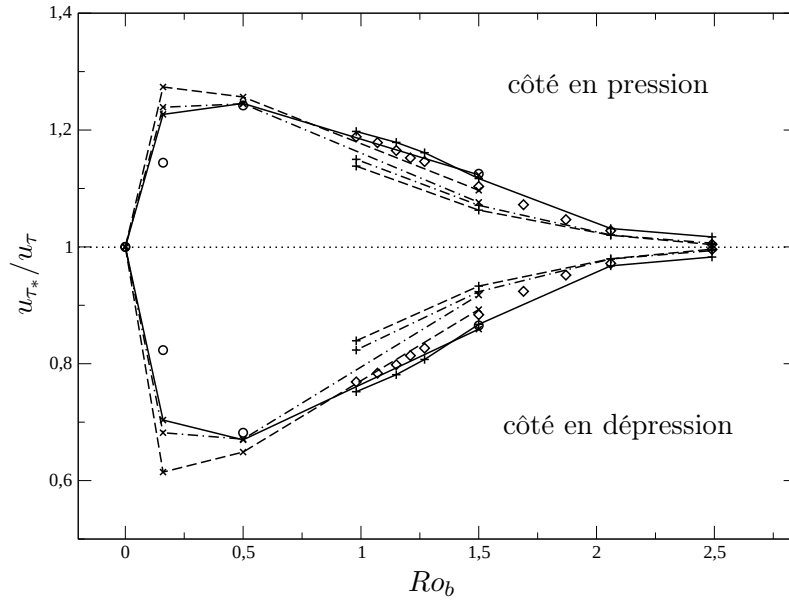


FIGURE 4.18 – Évolution des coefficients de frottements de chaque côté d'un canal en rotation, en fonction du nombre de rotation. $\circ$: LES ($Re_b = 7000$, Lamballais *et al.*, 1998) ; $\diamond$: DNS ($Re_\tau = 180$, Grundestam *et al.*, 2008) ; — : EB-RSM ; - - - : CA-LS ; - . - : SS-SST (les lignes marquées de $\times$, respectivement de $+$, correspondent au cas de Lamballais *et al.*, 1998, respectivement Grundestam *et al.*, 2008).

4.3 Simulation des grandes échelles de la turbulence

On s'intéresse maintenant à la seconde approche classique de modélisation de la turbulence : la *Simulation des Grandes Échelles* (LES). Après avoir présenté quelques généralités sur ces méthodes (paragraphe 4.3.1), on donnera au paragraphe 4.3.2 les points formels concernant l'utilisation de ces méthodes dans un référentiel non galiléen. Les modèles considérés dans ce paragraphe sont des modèles populaires. Il sont présentés succinctement au paragraphe 4.3.3 puis comparés pour un écoulement de canal plan, pour différents raffinements de maillage, au paragraphe 4.3.4. Des simulations réalisées dans un canal en rotation, pour une vaste plage de taux de rotation, sont discutées au paragraphe 4.3.5 et les différents modèles testés sont comparés.

4.3.1 Généralités

Bien que la connaissance des moments statistiques d'un écoulement soit souvent une bonne méthode pour étudier numériquement un problème donné, toutes les études pratiques ne sauraient être traitées de cette manière car, par définition, l'approche statistique ne rend pas compte de la structuration instantanée d'un écoulement turbulent. Le cas d'application présenté au paragraphe 1.2 est représentatif des situations pour lesquelles le traitement statistique peut être insuffisant : l'évaluation des chargements thermiques sur un matériau passe par une bonne estimation instantanée des extrema chaud et froid et des fréquences caractéristiques des fluctuations de température dans l'écoulement, ce que l'approche statistique ne rend pas précisément, car le « brassage » turbulent affecte sensiblement ces grandeurs.

Bien sûr, l'intégration numérique directe (DNS) des équations de Navier-Stokes permettrait d'accéder à ce type d'informations, mais on a vu qu'elle n'était pas exploitable

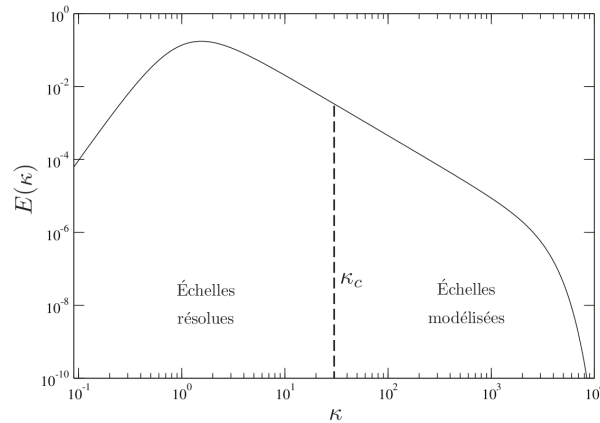


FIGURE 4.19 – Principe général de la simulation des grandes échelles (LES). Contrairement à l'approche RANS, qui résout une unique échelle associée au mouvement moyen statistiquement, la LES résout un spectre continu d'échelles, jusqu'à une échelle de *coupure* – correspondant à un nombre d'onde de coupure κ_c dans l'espace spectral. Au delà du nombre d'onde de coupure, la turbulence n'est plus directement résolue mais modélisée.

industriellement, à cause de la très large gamme d'échelles actives dans la turbulence. Une approche basée sur le principe de *séparation d'échelles* s'est donc développée parallèlement à l'approche RANS pour la simulation numérique des écoulements turbulents : la *Simulation des Grandes Échelles* ou LES (de l'anglais *Large Eddy Simulation*). Avec cette approche, seules les grandes échelles de l'écoulement (le haut du spectre, cf figure 4.19), fortement dépendantes de la géométrie et des conditions de l'écoulement, sont directement résolues tandis que les petites échelles, essentiellement dissipatives (d'un comportement « universel » selon la première hypothèse de Kolmogorov) sont modélisées, de manière à prendre en compte leur action sur les grandes échelles notamment.

4.3.1.1 Formalisme et équations modèles

Le formalisme classique pour introduire le concept de séparation d'échelle est de considérer que l'on cherche à résoudre non plus des grandeurs exactes mais des grandeurs filtrées. Mathématiquement, on définit souvent une variable filtrée $\tilde{f}$ comme celle obtenue en appliquant un produit de convolution à la variable f . Pour une fonction G intégrable et s'il existe $p \geq 1$ tel que f^p soit intégrable, on a, par définition, pour tout x de $\mathbb{R}^d$:

$$\tilde{f}(x) = G * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G(x - \xi) f(\xi) d\xi. \quad (4.62)$$

$\tilde{f}$ et G sont appelés respectivement partie filtrée de f et noyau du filtre. Un point important est que celui-ci dépend d'une taille $\tilde{\Delta}$ et, à la limite $\tilde{\Delta} \rightarrow 0$, $\tilde{f}$ tend vers la variable non filtrée f . C'est la taille $\tilde{\Delta}$ du filtre G qui caractérise la séparation d'échelle.

En simulation des grandes échelles, $\tilde{f}$ est la grandeur qu'on cherche à résoudre ; elle est également qualifiée de partie *résolue* de la variable f . Celle-ci se décompose donc comme :

$$f = \tilde{f} + f''. \quad (4.63)$$

f'' représente l'écart à la partie filtrée, et on a en général :

$$\tilde{f}'' \neq 0. \quad (4.64)$$

Dans ce cas, le filtrage se fait sans perte d'information : on peut reconstruire le signal exact f à partir du signal filtré $\widetilde{f}$ (déconvolution). À l'inverse, si $G * G = G$, le filtre est dit idempotent et dans ce cas $\widetilde{f''} = 0$. Ce type de filtre ne peut pas être inversé ; le filtrage induit alors une perte d'information.

Dans le cas le plus général, la formule (4.62) peut être utilisée avec $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, ce qui correspond à un filtrage spatio-temporel. x désigne alors symboliquement $(\mathbf{x}, t)$. Par ailleurs, on définit souvent G comme la résultante de filtrages successifs en temps et dans chaque direction :

$$G(\mathbf{x}, t) = G_0(t) \prod_{i=1}^3 G_i(x_i). \quad (4.65)$$

Dans ce rapport, on se limitera à un filtrage spatial ($G_0(t) = \delta_0(t)$ avec δ_0 la masse de Dirac en zéro).¹²

De même que par l'approche RANS avec l'opérateur de Reynolds (paragraphe 2.2), l'approche LES consiste à appliquer l'opérateur de filtrage aux équations de Navier–Stokes dans le but d'obtenir des équations non plus sur la vitesse $\mathbf{u}$ et la pression p mais sur leur analogue filtré $\widetilde{\mathbf{u}}$ et $\widetilde{p}$. Pour le faire simplement, le filtre doit vérifier les propriétés suivantes :

- (i) linéarité : $\widetilde{f + g} = \widetilde{f} + \widetilde{g}$,
- (ii) normalisation : $\int_{\mathbb{R}^d} G(\xi) d\xi = 1$,
- (iii) commutativité avec la dérivation : $\widetilde{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}$.

Alors que la propriété (i) est systématiquement vérifiée en définissant le filtrage comme un produit de convolution (équation 4.62) et que la propriété (ii) peut être obtenue par normalisation dès que l'intégrale du noyau G est finie, la propriété (iii) est plus contraignante. Elle demande à ce que le filtre soit homogène, c'est-à-dire indépendant de la position. Cette propriété est particulièrement contraignante, notamment lorsque le domaine fluide est borné (voir paragraphe 4.3.1.4), car les plus petites échelles qu'on souhaite résoudre à un endroit donné nivelle vers le bas la taille du filtre à adopter dans l'ensemble du domaine. La prise en compte de l'erreur de commutation pour des filtres inhomogènes (Fureby et Tabor, 1997, par exemple) ou la construction de filtres tels qu'elle puisse être maîtrisée (Vasilyev *et al.*, 1998, par exemple) est un sujet de recherche. Appliquons ici l'opérateur de filtrage aux équations de Navier–Stokes en faisant l'hypothèse de commutativité.

Avec les propriétés (i)–(iii), les équations de Navier–Stokes filtrées pour un écoulement incompressible s'écrivent :

$$\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\widetilde{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \widetilde{p} + \nu \nabla^2 \widetilde{\mathbf{u}}. \quad (4.67)$$

L'équation (4.67) fait intervenir des corrélations doubles filtrées (deuxième terme du membre de gauche) qu'on ne peut pas exprimer explicitement à partir des variables filtrées $\widetilde{\mathbf{u}}$ et $\widetilde{p}$. Il convient donc de reformuler l'équation (4.67) de la manière suivante :

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\widetilde{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \widetilde{p} + \nu \nabla^2 \widetilde{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (4.68)$$

avec :

$$\boldsymbol{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \widetilde{\mathbf{u}} \otimes \widetilde{\mathbf{u}}. \quad (4.69)$$

¹². Concernant la simulation des grandes échelles de temps (TLES), on pourra se référer à Pruett *et al.* (2003) par exemple.

τ est le tenseur de sous-maille qui fait l'objet de la modélisation LES de la turbulence, à l'instar du tenseur de Reynolds pour la modélisation RANS. Cependant, lorsqu'on introduit la décomposition (4.63) dans la définition de τ , la propriété (4.64) fait que l'on trouve :

$$\tau = \mathbf{L} + \mathbf{C} + \mathbf{R}, \quad (4.70)$$

avec :

$$L_{ij} = \widetilde{\widetilde{u_i u_j}} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j}, \quad (4.71)$$

$$C_{ij} = \widetilde{\widetilde{u_i u_j''}} + \widetilde{u_i''} \widetilde{u_j}, \quad (4.72)$$

$$\text{et } R_{ij} = \widetilde{u_i'' u_j''}. \quad (4.73)$$

Pour un opérateur idempotent (comme l'opérateur de moyenne de Reynolds), seule la contribution $\mathbf{R}$ (tenseur de *Reynolds de sous-maille*, représentant des contraintes dues au champ de sous-maille) subsiste mais dans le cadre général de la LES, les contributions $\mathbf{L}$ (tenseur de *Léonard*, représentant des contraintes dues au champ résolu), et $\mathbf{C}$ (tenseur des *tensions croisées*) interviennent. Germano (1986) propose une décomposition équivalente du tenseur τ dans laquelle seuls des moments centrés apparaissent :

$$\tau = \mathbf{L}^M + \mathbf{C}^M + \mathbf{R}^M,$$

avec :

$$L_{ij}^M = \widetilde{\widetilde{u_i} \widetilde{u_j}} - \widetilde{\widetilde{u_i}} \widetilde{\widetilde{u_j}}, \quad C_{ij}^M = \widetilde{\widetilde{u_i} u_j''} + \widetilde{u_i''} \widetilde{\widetilde{u_j}} - \widetilde{\widetilde{u_i} u_j''} - \widetilde{u_i''} \widetilde{\widetilde{u_j}}, \quad R_{ij}^M = \widetilde{u_i'' u_j''} - \widetilde{u_i''} \widetilde{u_j''}.$$

Enfin, notons que bien que la formulation (4.68) du problème de la LES soit probablement la plus utilisée aujourd'hui, elle n'est néanmoins pas la seule (voir Winckelmans *et al.*, 1996; Lund, 2003, par exemple).

4.3.1.2 Introduction à la modélisation de sous-maille

Les équations modèles de la LES (4.66), (4.68) sont tout à fait analogues aux équations de Reynolds (2.13), (2.15). Elles présentent le même problème de fermeture qui demande, à l'ordre n , de modéliser des corrélations d'ordre supérieur ou égal à n non déterminées en fonction de corrélations d'ordre inférieur ou égal à n résolues, pour fermer le système. Aujourd'hui, la quasi-totalité des fermetures LES sont d'ordre un. Dans ce cas, pour décrire le tenseur de sous-maille τ ou du moins son action sur le champ résolu, on cherche une relation algébrique impliquant :

- (i) soit uniquement des grandeurs connues à partir du champ résolu,
- (ii) soit également des grandeurs caractéristiques du champ de sous-maille (l'énergie de sous-maille $k_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{ll}/2$ notamment), déterminées en résolvant une équation de transport modélisée pour ces grandeurs,

On n'utilisera pas dans ce document Aucune fermeture de type (ii) ne sera utilisée dans la suite. Concentrons-nous sur les modélisations purement algébriques de type (i), dont les arguments sont donc choisis parmi le filtre G , sa taille $\widehat{\Delta}$ et les variables résolues $\widetilde{\mathbf{u}}$ et $\widetilde{p}$.¹³

Pour beaucoup de modèles, la décomposition (4.70) n'est pas réellement exploitée. Il s'agit d'une modélisation globale du mécanisme de transfert d'énergie entre deux plages de longueurs d'onde adjacentes. En écrivant les équations d'évolution de l'énergie résolue et de l'énergie de sous-maille (ce que l'on ne fait pas ici, voir Sagaut, 2005), on verrait que

13. Un filtrage $\widehat{G}$ de taille $\widehat{\Delta} > \widetilde{\Delta}$ est également souvent introduit dans les modèles ; le modèle présenté au paragraphe 4.3.3.2 en constitue un exemple.

le terme de *transfert* (l'analogie du terme de production pour l'approche RANS), qu'on retrouve avec un signe opposé dans les deux équations, est associé à un gradient de vitesse filtrée. D'autre part, pour des raisons pratiques qu'on évoquera au paragraphe 4.3.1.3, la dépendance explicite d'un modèle au filtre G n'est pas toujours souhaitable. Beaucoup de modèles de sous-maille se présentent donc sous la forme $\boldsymbol{\tau} = f(\tilde{\Delta}, \nabla \tilde{\mathbf{u}})$. D'un point de vue dimensionnel, on dispose ainsi d'une échelle de longueur et d'une échelle de temps pour modéliser $\boldsymbol{\tau}$.

Comme $\nabla \tilde{\mathbf{u}}$ est de trace nulle (champ résolu à divergence nulle), seule la partie déviatrice de $\boldsymbol{\tau}$:

$$\tau_{ij}^d \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{ij} - \frac{2}{3} k_\tau \delta_{ij}, \quad (4.74)$$

peut être modélisée de cette manière. Cela est néanmoins suffisant pour fermer le système, car on peut considérer l'équation (4.68) sous la forme :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p}_T + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^d, \quad (4.75)$$

avec :

$$\tilde{p}_T = \tilde{p} + \frac{2}{3} k_\tau. \quad (4.76)$$

En contrepartie, on voit qu'avec une modélisation algébrique du tenseur de sous-maille, on ne connaît pas la part d'énergie cinétique détenue par le champ de sous-maille. Celle-ci ne pourra être estimée qu'au prix d'une modélisation supplémentaire (voir par exemple Vreman, 2004; Sagaut, 2005, p.315).

Enfin, il est clair que parmi les transferts inter-échelles qu'il faut modéliser, le mécanisme de la cascade d'énergie vers les plus petites échelles dissipatives (qui appartiennent donc au champ de sous-maille) occupe une place très importante. Une modélisation de $\boldsymbol{\tau}$ par un terme diffusif pour le champ résolu et l'introduction du concept de *viscosité de sous-maille* est donc particulièrement naturelle. De nombreuses fermetures au premier ordre en LES reposent sur cette hypothèse, qui s'écrit :

$$\tau_{ij}^d = -2\nu_{sgs} \tilde{S}_{ij}, \quad (4.77)$$

avec ν_{sgs} la viscosité de sous-maille (*sgs* vient de l'anglais *subgrid-scales*). L'ensemble des modèles qu'on utilisera dans la suite (paragraphe 4.3.3–4.3.5) sont de ce type; ils se distinguent par l'expression donnée pour ν_{sgs} .

Même si beaucoup d'études par simulation des grandes échelles utilisent un modèle global pour $\boldsymbol{\tau}$ suivant l'approche décrite ci-dessus, certaines modélisations *mixtes* utilisent explicitement la décomposition (4.70). Dans ce cas, on peut considérer que le modèle de viscosité de sous-maille est réservé au tenseur $\mathbf{R}$ et l'approche globale est équivalente à l'approche mixte si l'on fait l'hypothèse :

$$\mathbf{L} + \mathbf{C} = 0 \quad (4.78)$$

(*Reynolds averaging assumption* en anglais). Il s'agit d'une hypothèse assez forte. En fait, les tenseurs $\mathbf{L}$ et $\mathbf{C}$ sont associés à des configurations triadiques bien distinctes de celles concernant $\mathbf{R}$ (voir Pope, 2006, p. 607). En particulier, le tenseur $\mathbf{C}$ contribue à transférer de l'énergie du champ de sous-maille vers le champ résolu (*cascade inverse* ou *back-scattering* en anglais). Il peut donc être intéressant de modéliser ces tenseurs. Même si aucune modélisation mixte ne sera utilisée dans la suite, donnons ici deux exemples classiques de modélisation mixte.

Un modèle classique, indépendant du filtre G , pour les tenseurs $\mathbf{L}$ et $\mathbf{C}$ est le modèle de Clark *et al.* (1979), basé sur le développement en série de Taylor du produit de convolution. Il s'écrit :

$$L_{ij} + C_{ij} = \frac{\tilde{\Delta}^2}{12} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k}. \quad (4.79)$$

D'autres modèles mixtes utilisent en revanche explicitement la forme du filtre G , auquel cas le tenseur $\mathbf{L}$ est directement calculé et non modélisé. La modélisation porte alors uniquement sur les tenseurs $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$, et un modèle classique est celui de Bardina *et al.* (1983) :

$$C_{ij} + R_{ij} = c_r (\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{\tilde{u}}_i \tilde{\tilde{u}}_j) - 2\nu_{sgs} \tilde{S}_{ij}, \quad (4.80)$$

avec $c_r \approx 1$.

4.3.1.3 Autres problématiques de la LES

La simulation des grandes échelles ne se limite pas au problème de la modélisation du tenseur de sous-maille. La courte présentation que l'on fait du sujet sera plus fidèle après ces quelques remarques, qui sont toutes plus ou moins liées les unes aux autres. Cela nous permettra également de préciser la mise en œuvre concrète des calculs LES qu'on présente dans la suite du document.

Filtrage explicite, filtrage implicite et interprétation des résultats

À la mise en pratique du formalisme de séparation d'échelles par filtrage, on est rapidement confronté à la grande difficulté de trouver un filtre en adéquation avec le cas qu'on souhaite traiter. Pour un domaine borné, on est contraint d'utiliser un filtre inhomogène, mais ceux-ci sont non-commutatifs. Cependant, la prise en compte de l'erreur de commutation (Fureby et Tabor, 1997) ou l'utilisation de filtre inhomogène pour lesquelles l'erreur de commutation est assez petite pour être négligée (Vasilyev *et al.*, 1998; Haselbacher et Vasilyev, 2003) complexifient beaucoup la démarche. De même, si l'on souhaite se placer dans un référentiel non galiléen (cf paragraphe 4.3.2), il convient de choisir un filtre isotrope (Fureby et Tabor, 1997), ce qui limite encore les filtres admissibles. Par conséquent, dans la majeure partie des études par simulations des grandes échelles, on s'abstient de définir explicitement le filtre et on considère plutôt que la projection des variables sur un domaine de dimension finie (le maillage) et le mode de discrétisation des opérateurs constituent en eux-mêmes un filtrage, qu'on ne sait pas définir précisément. On parlera alors de filtrage implicite. C'est l'approche qui est adoptée pour les calculs présentés dans la suite. En général, cette approche ne dispense pas de fournir une modélisation explicite pour le tenseur de sous-maille, comme on le fera dans la suite. Néanmoins, la dissipation numérique est parfois directement utilisée pour prendre en compte l'action des échelles de sous-maille (modèle MILES, Fureby et Grinstein, 1999, par exemple).

Le filtrage implicite suscite toutefois quelques difficultés d'interprétation des résultats puisqu'on ne peut pas reconstruire exactement les variables déconvoluées, et leur moments statistiques en particulier. Cela pose problème pour comparer la solution LES à des résultats moyens provenant d'une expérience, d'une DNS ou d'un calcul RANS. La contribution des échelles de sous-maille au tenseur de Reynolds peut toutefois être prise en compte de manière approchée (voir par exemple Vreman, 2004; Sagaut, 2005, p. 315). Dans les résultats de calcul présentés dans la suite, les variables ne sont pas déconvoluées (car le filtre n'est pas connu) et seule la contribution du champ résolu aux corrélations statistiques est prise en compte.

Identification des sources d'erreur et taille du filtre

Pour les plus petites échelles résolues, la dissipation numérique due à la précision (l'ordre) des schémas numériques est susceptible d'affecter sensiblement la représentativité des résultats. L'erreur que l'on fait en ne simulant que les grandes échelles ne peut donc pas être attribuée uniquement à une mauvaise modélisation de sous-maille et, par exemple, un modèle satisfaisant avec un schéma d'ordre deux pourrait s'avérer décevant en augmentant l'ordre du schéma.

En plus de l'ordre du schéma numérique, l'erreur de discrétisation des variables filtrées dépend de la taille du filtre. Même lorsque l'on ne réalise pas de filtrage explicite, la taille du filtre doit être spécifiée car ce paramètre gouverne la séparation d'échelle et entre donc quasi systématiquement dans le modèle de sous-maille. Comme cette dernière appellation l'indique, une taille caractéristique au delà de laquelle on peut prétendre résoudre les échelles s'impose : c'est celle des mailles, c'est-à-dire le pas d'espace du domaine discrétisé.¹⁴ Lorsque le maillage est cartésien, le filtre G peut être défini comme le produit de filtres G_i dans chaque direction (équation 4.65), et la taille $\tilde{\Delta}_i$ des filtres peut donc être exprimée en fonction des pas d'espace Δ_i dans chaque direction :

$$\tilde{\Delta}_i = m\Delta_i,$$

avec $m \geq 1$. Des valeurs $m > 1$ permettent de réduire l'erreur de discrétisation des variables filtrées.

Pour certains filtres simples, on peut définir ainsi la taille $\tilde{\Delta}$ exacte du filtre G (par exemple $\tilde{\Delta} = (\tilde{\Delta}_1^2 + \tilde{\Delta}_2^2 + \tilde{\Delta}_3^2)^{1/2}$ pour G_i des filtres gaussiens ou $\tilde{\Delta} = (\tilde{\Delta}_1\tilde{\Delta}_2\tilde{\Delta}_3)^{1/3}$ pour G_i des filtres à fréquence de coupure). Si le filtre G est inconnu ou que le maillage n'est pas cartésien, la situation est plus délicate. En général, on définit une taille Δ caractéristique d'un volume de contrôle $\mathcal{V}$ (une maille), puis on rapporte la taille du filtre à celle de la maille ; par exemple :

$$\Delta = |\mathcal{V}|^{1/3}, \quad \tilde{\Delta} = m\Delta, \quad (4.81)$$

avec $|\mathcal{V}| = \int_{\mathcal{V}} dv$ une mesure du volume de la maille, et m un entier.

Le formalisme théorique de Ghosal (1996) montre que l'augmentation de m est plus efficace que l'augmentation de l'ordre des schémas numériques pour éviter le « parasitage » de l'erreur de modélisation par l'erreur de discrétisation sur une large bande de nombres d'onde résolus.

Dans les calculs LES présentés dans la suite, la taille $\tilde{\Delta}$ du filtre est définie par (4.81) pour $m = 2$.

4.3.1.4 Prise en compte des parois

La volonté d'utiliser un filtrage inhomogène en LES (avec les difficultés mathématiques que cela pose, dont il ne sera pas question ici) est principalement dû à la physique complexe qu'on trouve en proche paroi. La phénoménologie tourbillonnaire (*sweep, ejection, streaks*, voir Robinson, 1991) témoigne d'une activité turbulente intense à l'intérieur de la couche limite (le pic de production d'énergie se trouve dans la zone interne de la couche limite – $y/\delta < 0.2$ avec y la distance à la paroi et δ l'épaisseur de la couche limite). Le choix entre l'intégration directe des équations filtrées jusqu'à la paroi, pour respecter la condition d'adhérence, ou l'utilisation de lois de paroi se pose dans les termes suivants en LES.

14. La définition de la taille du filtre en fonction de celle des mailles prive de la notion de convergence en maillage de la solution, puisque l'on change le filtre en raffinant le maillage. En revanche, Bose *et al.* (2010) montrent qu'en réalisant un filtrage explicite et en conservant la taille du filtre fixe, on peut appréhender la convergence en maillage en LES.

Si l'on résout l'écoulement jusqu'à la paroi, la principale limitation est liée au maillage. Alors que l'échelle des phénomènes en proche paroi est très petite – et d'autant plus que le nombre de Reynolds est grand – on constate qu'il est nécessaire d'en capturer l'essentiel pour des prédictions réalistes (l'ordre de grandeur de 80% de l'énergie détenue par les échelles résolues est souvent pris comme référence – Pope, 2006 par exemple). Cela contraint beaucoup la taille admissible des mailles en proches parois et alourdit donc considérablement le coût numérique des simulations. Plusieurs recommandations sur la taille acceptable des mailles en proche paroi ont été données (voir Sagaut, 2005, p. 332), les écarts substantiels entre certaines d'entre elles s'expliquant en partie par des schémas numériques plus ou moins diffusifs (voir Lund et Kaltenbach, 1995). On reporte ici les recommandations de Sagaut (2009), pour des LES bien résolues en proche paroi : $\Delta y_{\min}^+ = 1$ à la paroi avec au moins trois points de calcul dans la zone $y^+ < 10$, $\Delta x^+ < 50$ et $\Delta z^+ < 12$ ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$ désignent les pas d'espace dans les directions longitudinale, normale à la paroi et transverse respectivement et l'exposant « + » l'adimensionnement de ces distances par la vitesse de frottement u_τ et la viscosité ν). Contrairement aux modèles statistiques RANS, le raffinement dans les directions quasi-homogènes x et z est très important (voir Meyers et Sagaut, 2007). Toujours d'après Sagaut (2009), on a :

- $\Delta x^+ < 100, \Delta z^+ < 30$: LES moyennement résolue (streaks trop larges et trop courts, erreur sur le frottement pariétal),
- $\Delta x^+ \geq 100, \Delta z^+ \geq 30$: LES mal résolue (streaks non physiques, grande erreur sur le frottement pariétal).

Ce point est particulièrement contraignant car pour des maillages cartésiens conformes, l'ensemble du maillage est affecté par le raffinement nécessaire près des parois.

En revanche, la modélisation de sous-maille en proche paroi semble moins problématique. Sans y voir une condition suffisante, les fermetures simples de type viscosité de sous-maille offrent souvent des prédictions réalistes en proche paroi lorsque le comportement asymptotique de la viscosité de sous-maille au voisinage du bord est $\nu_{sgs} \sim y^3$. Cela permet de reproduire le comportement asymptotique exacte de la contrainte de cisaillement de sous-maille.

Pour s'affranchir des contraintes sur le maillage, plusieurs lois de paroi ont été proposées (voir Sagaut, 2005, pour une revue). Bien que le caractère local et instantané de la turbulence ne soit souvent pas représenté dans ces lois, les tests en canal plan de Temmerman *et al.* (2003), par exemple, montrent qu'elles peuvent être relativement satisfaisantes au regard de la réduction significative du nombre de mailles qu'elles autorisent.

En revanche, pour des écoulements plus complexes où le frottement pariétal dépend beaucoup de la zone externe de la couche limite (cas test de marche descendante ou de dunes périodiques par exemple), l'erreur induite par l'utilisation de ces lois est plus importante (Piomelli et Balaras, 2002). Larsson et Kawai (2010) insistent également sur le fait que l'application de lois de paroi s'accompagne souvent d'une dissipation numérique importante aux premiers points de calculs.

Pour se concentrer sur la validité des modèles de sous-maille en présence de rotation, on n'a pas utilisé de lois de paroi pour les calculs LES qu'on présente dans la suite. Les maillages utilisés sont décrits au paragraphe 4.3.4.

4.3.2 Formalisme en référentiel tournant

Après cette introduction générale à la simulation des grandes échelles, on donne ici des points formels spécifiques importants pour la simulation d'écoulements en rotation. Ces points concernent la généralisation de l'approche LES à des référentiels non galiléen en rotation.

De même que pour obtenir facilement, dans le référentiel galiléen, les équations de quantité de mouvement filtrées, l'hypothèse d'un filtre commutatif s'est révélée nécessaire, pour obtenir la même équation dans un référentiel quelconque, l'hypothèse d'un filtre isotrope :

$$G(\mathbf{x}) = G(x), \quad x = \|\mathbf{x}\|, \quad (4.82)$$

est particulièrement utile. Cette propriété rend le noyau G invariant à une rotation du système de coordonnées (voir Fureby, 1995; Fureby et Tabor, 1997), de sorte qu'on peut écrire symboliquement :

$$A = A^* + Z^* \implies \tilde{A} = \tilde{A}^* + \tilde{Z}^*,$$

où, dans la deuxième égalité, le filtrage est pris par rapport aux coordonnées $\mathbf{x}$ dans le membre de gauche et par rapport aux coordonnées $\mathbf{x}^*$, données par (3.1), dans le membre de droite. Par exemple, pour un tenseur d'ordre deux tel que :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^T (\mathbf{A}^*(\mathbf{x}^*) + \mathbf{Z}^*(\mathbf{x}^*)) \mathbf{Q},$$

on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) &= \int_{\mathcal{D}} G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \\ &= \int_{\mathcal{D}^*} \underbrace{G(\mathbf{Q}^T(\mathbf{x}^* - \boldsymbol{\xi}^*))}_{=G(\mathbf{x}^* - \boldsymbol{\xi}^*) \text{ ssi } G \text{ isotrope}} \mathbf{Q}^T (\mathbf{A}^*(\boldsymbol{\xi}^*) + \mathbf{Z}^*(\boldsymbol{\xi}^*)) \mathbf{Q} \underbrace{|\det(\mathbf{Q})|}_{=1} d\boldsymbol{\xi}^*, \\ &= \mathbf{Q}^T (\tilde{\mathbf{A}}^*(\mathbf{x}^*) + \tilde{\mathbf{Z}}^*(\mathbf{x}^*)) \mathbf{Q}, \end{aligned}$$

avec $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{\xi} | \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{D}_G\}$, $\mathcal{D}^* = \{\boldsymbol{\xi}^* = \mathbf{Q}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{b} | \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{D}\}$ et $\mathcal{D}_G$ le support de G . Deux exemples de filtres isotropes sont le filtre gaussien tridimensionnel (c'est-à-dire le produit de trois filtres gaussiens G_i dans chaque direction), ou le filtre « boîte » sphérique : $G(\mathbf{x}) = 0$ pour $\|\mathbf{x}\| > \tilde{\Delta}$ (Speziale, 1985). Bien que Ghosal (1999) note que les filtres inhomogènes à erreur de commutation maîtrisée (Vasilyev *et al.*, 1998) ne vérifient pas cette propriété, les équations de la LES en référentiel quelconque et pour un filtre non isotrope n'ont, à notre connaissance, pas été établies.

Exprimons donc, pour un filtre isotrope, la vitesse filtrée et l'accélération filtrée dans un référentiel quelconque, en appliquant l'opérateur de filtrage aux équations exactes (3.10), (3.11). Pour ce faire, Speziale (1985) montre que les filtres isotropes (entre autres) préservent l'application identité inchangée. En effet, en faisant le changement de variable $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$, on a :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \int_{\mathcal{D}_G} G(\boldsymbol{\eta})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}) \left| \frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\boldsymbol{\eta}} \right| d\boldsymbol{\eta} = \mathbf{x} \underbrace{\int_{\mathcal{D}_G} G(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}}_{=1} - \underbrace{\int_{\mathcal{D}_G} G(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\eta} d\boldsymbol{\eta}}_{=0} = \mathbf{x}$$

(la première intégrale vaut un par normalité du filtre et la seconde est nulle car l'intégrande est impaire et $\mathcal{D}_G$ centré dans chaque direction en zéro). L'isotropie du filtre permet d'étendre cette propriété au vecteur position dans n'importe quel référentiel : $\tilde{\mathbf{x}}^* = \mathbf{x}^*$. En filtrant les équations (3.10), (3.11) il vient donc directement :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}^T (\tilde{\mathbf{u}}^* + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^*), \quad \mathbf{u}'' = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}''^*, \quad (4.83)$$

$$\frac{D\tilde{\mathbf{u}}}{Dt} = \mathbf{Q}^T \left(\frac{D\tilde{\mathbf{u}}^*}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \tilde{\mathbf{u}}^* + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^*) \right). \quad (4.84)$$

L'équation (4.83) permet de déduire directement l'expression du tenseur de sous-maille dans un référentiel quelconque. Suivant la décomposition triple (4.70)–(4.73) il vient (Speziale, 1985) :

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^* \mathbf{Q}, \quad (4.85)$$

$$\mathbf{L} + \mathbf{C} = \mathbf{Q}^T (\mathbf{L}^* + \mathbf{C}^* + \mathbf{Z}^*) \mathbf{Q}, \quad (4.86)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^* = & \mathbf{u}^* \otimes \widetilde{(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^*)} + (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^*) \otimes \mathbf{u}^* + (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^*) \otimes \widetilde{(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^*)} \\ & - \widetilde{\mathbf{u}^*} \otimes (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^*) - (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^*) \otimes \widetilde{\mathbf{u}^*} - (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^*) \otimes (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^*) \end{aligned} \quad (4.87)$$

(sur la première ligne de 4.87 le filtrage porte sur l'ensemble des termes). On voit que seul le tenseur de Reynolds de sous-maille $\mathbf{R}$ est objectif. Les tenseurs $\mathbf{L}$ et $\mathbf{C}$, mais également leur somme, ne le sont pas. En revanche, Speziale (1985) montre que la somme des termes non inertiels de (4.87) est de divergence nulle et qu'on a donc :

$$\nabla \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{C}) = \mathbf{Q}^T (\nabla^* \cdot (\mathbf{L}^* + \mathbf{C}^*)). \quad (4.88)$$

À partir de l'équation (4.68) et en utilisant les équations (4.83)–(4.85 et (4.88), on trouve que l'équation de quantité de mouvement filtrée dans un référentiel en rotation s'écrit, pour un filtre isotrope (l'exposant $\star$ est omis) :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \tilde{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (4.89)$$

avec $\boldsymbol{\tau}$ donné par (4.70)–(4.73). Par rapport à l'équation (4.68), on trouve les deux contributions non inertiels « classiques » : la force de Coriolis, filtrée, et la force centrifuge, exacte, et qui peut donc être intégrée au gradient de pression filtrée *via* le potentiel Φ_e (équation 3.22).

En observant l'intérêt de regrouper les contributions $\mathbf{L}$ et $\mathbf{C}$ pour dériver les équations de la LES en référentiel tournant, Speziale (1985) suggère que ces tenseurs pourraient être modélisés conjointement et non distinctement l'un de l'autre.¹⁵ À ce titre, il est notable que, pour un filtre gaussien, le modèle de Clark *et al.* (1979) (équation 4.79) génère exactement les mêmes termes non inertiels que le tenseur $\mathbf{L} + \mathbf{C}$ exact par changement de référentiel (Shimomura, 1999), c'est-à-dire qu'il vérifie le principe d'indifférence matérielle pour la modélisation de $\boldsymbol{\tau}$ ou $\mathbf{L} + \mathbf{C}$.

4.3.3 Formulation des modèles testés

4.3.3.1 Modèle de Smagorinsky

Le modèle de Smagorinsky (1963) est un modèle très simple pour le tenseur de sous-maille, basé sur l'hypothèse de viscosité de sous-maille (4.77). Avec ce modèle, celle-ci est donnée par :

$$\nu_{sgs} = (f_\mu C_s \tilde{\Delta})^2 \|\tilde{\mathbf{S}}\|, \quad (4.90)$$

avec :

$$\|\tilde{\mathbf{S}}\| = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}}. \quad (4.91)$$

15. Rappelons néanmoins que le respect des propriétés de transformation par changement de référentiel des grandeurs exactes (équation 4.3, p. 47), n'a pas été retenu comme principe strict de modélisation.

On rappelle que la taille du filtre $\tilde{\Delta}$ est donnée par (4.81) pour $m = 2$, et la valeur de la constante C_s retenue dans le logiciel *Code_Saturne* est :

$$C_s = 0.065.$$

f_μ est la fonction d'amortissement de Van Driest (1956) :

$$f_\mu(y) = 1 - \exp(-y^+/25), \quad (4.92)$$

avec $y^+ = u_\tau y / \nu$ et y la distance à la paroi la plus proche.

Formulation du modèle dans un référentiel quelconque

D'après (4.90), on voit que ν_{sgs} dépend du tenseur des taux de déformation filtré $\tilde{\mathbf{S}}$. Celui-ci est objectif car le tenseur $\mathbf{S}$ est objectif et, en supposant que le filtre est isotrope, le filtrage conserve l'objectivité d'une grandeur tensorielle objective (paragraphe 4.3.2). De même, la norme d'un vecteur est objective et donc la distance y dans la fonction d'amortissement de Van Driest est la même quel que soit le référentiel d'étude. Le modèle de Smagorinsky est donc objectif et sa formulation (4.90)–(4.92) n'est pas modifiée dans un référentiel en rotation.

4.3.3.2 Modèle de Smagorinsky dynamique

Le modèle de Smagorinsky dynamique est une variante du modèle de Smagorinsky dans laquelle la constante impliquée dans le modèle est évaluée dynamiquement, en fonction de l'écoulement. La constante n'est donc plus un coefficient du modèle et ce dernier est libre de toute calibration empirique.

Comme pour le modèle de Smagorinsky, le modèle pour le tenseur de sous-maille peut s'écrire :

$$\tau_{ij}^d = -2C_d \tilde{\Delta}^2 \|\tilde{\mathbf{S}}\| \tilde{S}_{ij}, \quad (4.93)$$

avec $\|\tilde{\mathbf{S}}\|$ défini par (4.91). Avec le modèle de Smagorinsky standard, on aurait $C_d = (f_\mu C_s)^2$. Selon la procédure d'évaluation dynamique des constantes introduite par Germano *et al.* (1991), la constante C_d est calculée de manière à ce que, lorsqu'on applique un filtrage double aux équations de Navier–Stokes, les tensions de sous-« filtre double » :

$$T_{ij} = \widehat{\widehat{u_i u_j}} - \widehat{u_i} \widehat{u_j}, \quad (4.94)$$

avec $\tilde{f}$ le filtrage LES de base et $\hat{f}$ le filtrage *test* de la variable f , puissent elles aussi être calculées par le modèle de Smagorinsky et pour la même constante C_d :

$$T_{ij}^d = -2C_d \widehat{\Delta}^2 \|\widehat{\mathbf{S}}\| \widehat{S}_{ij}.$$

Il est important de noter que, par définition :

$$T_{ij} = \mathcal{L}_{ij} + \widehat{\tau_{ij}}, \quad (4.95)$$

avec :

$$\mathcal{L}_{ij} = \widehat{\widehat{u_i u_j}} - \widehat{u_i} \widehat{u_j}, \quad (4.96)$$

et que, en définissant le filtre *test*, le tenseur $\mathcal{L}_{ij}$ peut être calculé directement à partir de la vitesse résolue $\tilde{\mathbf{u}}$. Ainsi, il apparaît que les équations (4.93)–(4.95) définissent un système de six équations (le nombre de composantes distinctes des tenseurs τ_{ij} , T_{ij} ou $\mathcal{L}_{ij}$)

à une inconnue (la constante C_d). Ce problème peut être approché par un problème de minimisation au sens des moindres carrés (Lilly, 1992) dont la solution est :

$$C_d = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}, \quad (4.97)$$

avec :

$$M_{ij} = \widehat{\Delta}^2 \|\widehat{\mathbf{S}}\| \widehat{S}_{ij} - \widetilde{\Delta}^2 \|\widetilde{\mathbf{S}}\| \widetilde{S}_{ij}. \quad (4.98)$$

Notons qu'en utilisant les développements asymptotiques (4.25), on trouve qu'avec le modèle de Smagorinsky dynamique on a $\nu_{sgs} \sim y^3$ en très proche paroi, et le modèle reproduit donc le comportement asymptotique exact de la tension de sous-maille de cisaillement.

Implémentation du modèle dans le logiciel *Code_Saturne*

Dans *Code_Saturne*, une procédure de lissage du coefficient C_d est ajoutée, c'est-à-dire que C_d est calculé suivant :

$$C_d = \left\langle \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \right\rangle_{Vois}, \quad (4.99)$$

avec, pour une variable f :

$$\langle f \rangle_{Vois} = \frac{1}{\sum_{j \in Vois(i)} |\mathcal{V}_j|} \sum_{j \in Vois(i)} |\mathcal{V}_j| f_j, \quad (4.100)$$

et $Vois(i)$ l'ensemble des cellules partageant au moins un sommet avec la cellule $\mathcal{V}_i$. Le filtrage test correspond également à l'opérateur $\langle \cdot \rangle_{Vois}$:

$$\widehat{f} = \langle f \rangle_{Vois}. \quad (4.101)$$

La taille du « double filtre » est une approximation (exacte pour les maillages hexaédriques homogènes) de la taille du support de l'opérateur $\langle \cdot \rangle_{Vois}$:

$$\widehat{\Delta} = 3\Delta \implies \widehat{\Delta} = \frac{3}{2} \widetilde{\Delta}, \quad (4.102)$$

avec Δ et $\widetilde{\Delta}$ définis par (4.81). Enfin, pour éviter la déstabilisation du calcul lorsque la formule (4.99) renvoie une valeur de C_d négative, un clipping de la viscosité de sous-maille est réalisé :

$$\min \nu_{sgs} = -\nu, \quad (4.103)$$

de sorte que la viscosité totale $\nu + \nu_{sgs}$ reste positive.

Variantes du modèle testées

Le modèle de Smagorinsky dynamique tel qu'il est proposé dans le logiciel *Code_Saturne* correspond à (4.93), (4.98)–(4.103). Ce modèle sera appelé L-DS (Smagorinsky dynamique local) dans la suite.

Lorsque l'écoulement présente des directions d'homogénéité, il est parfois proposé (Germano *et al.*, 1991, par exemple) de remplacer le lissage local $\langle \cdot \rangle_{Vois}$ par une moyenne dans les directions d'homogénéité de l'écoulement :

$$C_d = \left\langle \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \right\rangle_{\mathbf{e}_m}, \quad (4.104)$$

avec $\mathbf{e}_m$ les directions d'homogénéité (dans un canal plan, $m = x, z$). De même, dans les publications de référence Germano *et al.* (1991) et Piomelli et Liu (1995) le filtrage test

n'est pas appliqué dans les directions non homogènes (y dans un canal). On peut donc définir le filtrage test :

$$\widehat{f} = \frac{1}{\sum_{j \in Vois_m(i)} |\mathcal{V}_j|} \sum_{j \in Vois_m(i)} |\mathcal{V}_j| f_j, \quad (4.105)$$

avec $Vois_m(i)$ les cellules partageant au moins un sommet avec la cellule $\mathcal{V}_i$ et dont les coordonnées dans les autres directions que $\mathbf{e}_m$ sont les mêmes. Dans ce cas, la taille du filtre double est définie par :

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{\Delta x} &= \frac{3}{2} \widetilde{\Delta x} \\ \widetilde{\Delta y} &= \widetilde{\Delta y} \\ \widetilde{\Delta z} &= \frac{3}{2} \widetilde{\Delta z} \end{aligned} \right\} \implies \widehat{\Delta} = \frac{\sqrt[3]{18}}{2} \widetilde{\Delta} \quad (\approx 1.31 \widetilde{\Delta}). \quad (4.106)$$

Le modèle correspondant à (4.93), (4.98), (4.103), (4.104)–(4.106) sera appelé H-DS (Smagorinsky dynamique homogène) dans la suite.

Enfin, Piomelli et Liu (1995) proposent une formulation alternative pour calculer dynamiquement et de manière localisée la constante de Smagorinsky. Pour cette variante du modèle, nommée PL-DS dans la suite, on n'utilise pas non plus de filtrage test dans les directions non homogènes (équations 4.105, 4.106).

Formulation du modèle de Smagorinsky dynamique dans un référentiel quelconque

Bien que la forme finale du modèle de Smagorinsky dynamique soit similaire à celle du modèle de Smagorinsky « standard », son extension en référentiel quelconque est moins immédiate.

Le modèle est construit à partir de l'égalité (4.95). Pour τ_{ij} , T_{ij} et $\mathcal{L}_{ij}$ exacts (équations 4.69, 4.94, 4.96), cette relation triviale est indépendante du référentiel d'étude :

$$T_{ij}^* = \widehat{\tau}_{ij}^* + \mathcal{L}_{ij}^*. \quad (4.107)$$

L'équilibre aux deux niveaux de filtrage entre les contraintes de sous-maille exactes est le même quel que soit le référentiel d'étude. Comme de plus le principe d'indifférence matérielle est une approximation acceptable lorsque la partie non résolue de l'écoulement est faible (voir discussion p. 46) – comme c'est le cas pour les calculs Smagorinsky dynamique dans un référentiel en rotation présentés au paragraphe 4.3.5 –, on a utilisé l'équation (4.107) exacte pour l'évaluation dynamique de la constante de Smagorinsky. La formulation résultante du modèle est alors identique à la formulation (4.97).

Il faut cependant noter que cette formulation ne permet pas de respecter le principe de consistance du modèle par changement de référentiel (principe (I) p. 45). Le modèle dynamique obtenu en appliquant ce principe de modélisation est détaillé en annexe F. Les simulations de Kobayashi et Shimomura (2001) montrent que ce modèle introduit des fluctuations non physiques dans la solution, du moins aux grands taux de rotation. On a donc pas retenu ce modèle.

4.3.3.3 Modèle WALE

Le modèle de WALE (*Wall-Adapting Local Eddy-viscosity*, Nicoud et Ducros, 1999) est un modèle de viscosité de sous-maille construit principalement pour reproduire le comportement asymptotique exacte de la tension de sous-maille de cisaillement, et ce sans avoir recours à une fonction d'amortissement empirique (comme celle de Van Driest, 1956, équation 4.92) ni à une procédure d'évaluation dynamique des constantes. Pour cela, les auteurs

proposent d'utiliser le déviateur de la partie symétrique du carré du tenseur gradient de vitesse $\tilde{\mathcal{S}}_{ij}^d$, dont le deuxième invariant peut s'écrire :

$$\tilde{\mathcal{S}}_{ij}^d \tilde{\mathcal{S}}_{ij}^d = \frac{1}{6} (\tilde{S}^2 \tilde{S}^2 + \tilde{W}^2 \tilde{W}^2) + \frac{2}{3} \tilde{S}^2 \tilde{W}^2 + 2IV_{\tilde{S}\tilde{W}}, \quad (4.108)$$

avec :

$$\tilde{S}^2 = \tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij}, \quad \tilde{W}^2 = \tilde{W}_{ij} \tilde{W}_{ij}, \quad IV_{\tilde{S}\tilde{W}} = \tilde{S}_{ik} \tilde{S}_{kj} \tilde{W}_{jl} \tilde{W}_{li}. \quad (4.109)$$

Asymptotiquement, on a $\tilde{\mathcal{S}}_{ij}^d \tilde{\mathcal{S}}_{ij}^d \sim y^2$ à la paroi. Comme de plus $\tilde{S}^2 = \mathcal{O}(1)$ à la paroi, pour obtenir un modèle de viscosité de sous-maille dimensionnellement correct et qui vérifie asymptotiquement $\nu_{sgs} \sim y^3$, Nicoud et Ducros (1999) proposent :

$$\nu_{sgs} = (C_w \tilde{\Delta})^2 \frac{(\tilde{\mathcal{S}}_{ij}^d \tilde{\mathcal{S}}_{ij}^d)^{3/2}}{(\tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij})^{5/2} + (\tilde{\mathcal{S}}_{ij}^d \tilde{\mathcal{S}}_{ij}^d)^{5/4}}, \quad (4.110)$$

et la valeur proposée pour la constante C_w est :

$$C_w = 0.5.$$

Formulation du modèle dans un référentiel quelconque

Contrairement au modèle de Smagorinsky qui dépend uniquement de la partie symétrique $\tilde{\mathbf{S}}$ du tenseur gradient de vitesse, le modèle WALE est construit à partir de l'ensemble du tenseur gradient, y compris sa partie antisymétrique $\tilde{\mathbf{W}}$ qui n'est pas objective. Si le référentiel d'étude est non galiléen, le principe de modélisation (I) implique que celle-ci doit être remplacée par le tenseur de vorticité absolue $\tilde{\mathbf{W}}^a$ (équation 4.38). Le modèle WALE dans un référentiel quelconque est donc :

$$\nu_{sgs} = (C_w \tilde{\Delta})^2 \frac{((\tilde{\mathcal{S}}^a)_{ij}^d (\tilde{\mathcal{S}}^a)_{ij}^d)^{3/2}}{(\tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij})^{5/2} + ((\tilde{\mathcal{S}}^a)_{ij}^d (\tilde{\mathcal{S}}^a)_{ij}^d)^{5/4}},$$

avec :

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{S}}^a)_{ij}^d (\tilde{\mathcal{S}}^a)_{ij}^d &= \frac{1}{6} (\tilde{S}^2 \tilde{S}^2 + (\tilde{W}^a)^2 (\tilde{W}^a)^2) + \frac{2}{3} \tilde{S}^2 (\tilde{W}^a)^2 + 2IV_{\tilde{S}\tilde{W}^a}, \\ \tilde{S}^2 &= \tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij}, \quad (\tilde{W}^a)^2 = \tilde{W}_{ij}^a \tilde{W}_{ij}^a, \quad IV_{\tilde{S}\tilde{W}^a} = \tilde{S}_{ik} \tilde{S}_{kj} \tilde{W}_{jl}^a \tilde{W}_{li}^a. \end{aligned}$$

4.3.4 Prise en main et comparaison des modèles sur le cas test du canal plan fixe

Dans ce paragraphe et le suivant, on compare les modèles de sous-maille introduits dans le paragraphe précédent sur le cas test du canal fixe ou en rotation transverse. Les cas simulés correspondent à ceux de Lamballais *et al.* (1998), à nombre de rotation $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$ et nombre de Reynolds $Re_b = 7000$ ($386 \geq Re_\tau \geq 223$ selon les nombres de rotation). Bien qu'il ne s'agisse pas de DNS mais de LES, les solutions de Lamballais *et al.* (1998) seront prises comme référence. Cela nous a permis de traiter un nombre de Reynolds sensiblement supérieur à ceux pour lesquels des solutions DNS sont disponibles ($194 \geq Re_\tau \geq 185$ pour Kristoffersen et Andersson, 1993, $Re_\tau = 180$ pour Grundestam *et al.*, 2008). Les données de Lamballais *et al.* (1998) couvrent en plus une large plage de nombres de rotation. Ces données peuvent être considérées comme très précises car les simulations sont réalisées avec un schéma de discrétisation d'ordre élevé (pseudo-spectral dans les directions d'homogénéité, différences finies d'ordre six dans la direction y , excepté aux deux premiers points de calculs où le schéma est d'ordre trois puis quatre) et le

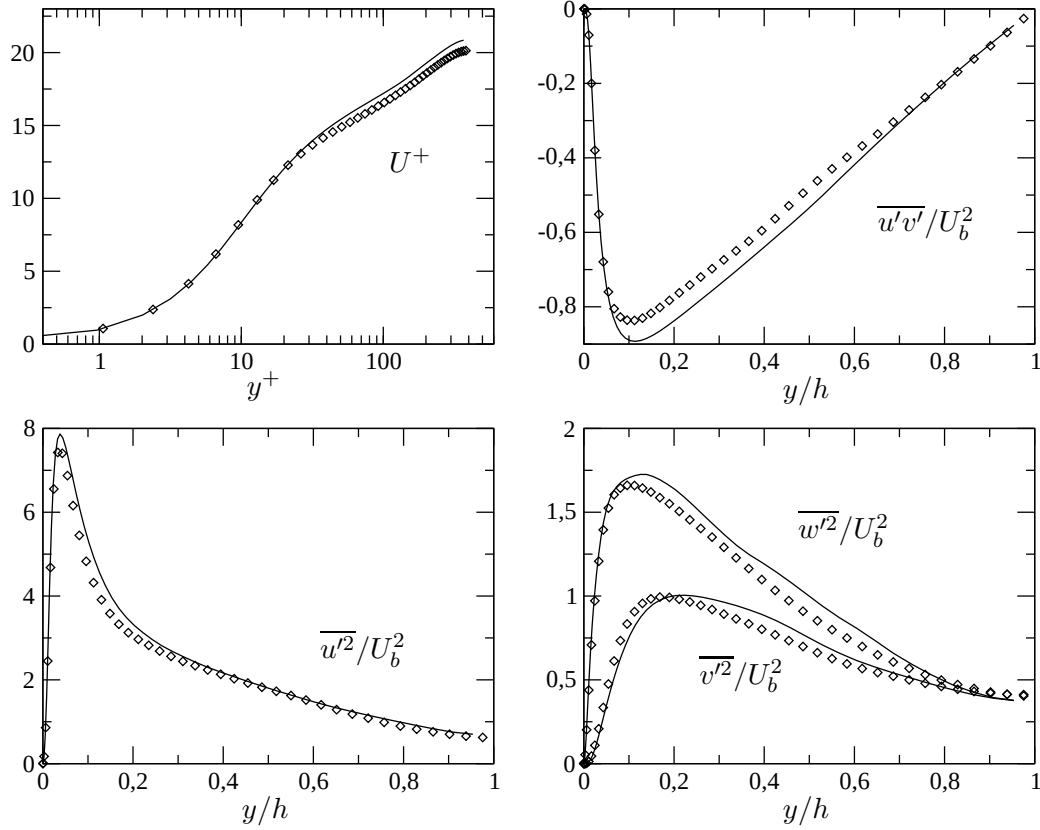


FIGURE 4.20 – Validation de la LES de référence. Canal plan. Symboles : DNS, $Re_\tau = 395$ (Moser *et al.*, 1999) ; Lignes : LES de référence, $Re_b = 7000$ (Lamballais *et al.*, 1998)

raffinement du maillage utilisé par les auteurs est supérieur à celui utilisé pour d'autres LES de canal en rotation de la littérature (Tafti et Vanka, 1991; Piomelli et Liu, 1995). Sur la figure 4.20, on a tracé les profils de Lamballais *et al.* (1998) pour la vitesse moyenne et la partie résolue du tenseur de Reynolds, dans le cas sans rotation ($Re_\tau = 386$). Le bon accord avec les données DNS de Moser *et al.* (1999), à $Re_\tau = 395$ confirme que les données de Lamballais *et al.* (1998) sont suffisamment précises pour être utilisées comme solution de référence dans la suite.

Les cas à nombres de rotation non nuls seront discutés dans le paragraphe suivant. Ici, on s'intéresse uniquement au cas du canal sans rotation ($Ro_b = 0$), ce qui permet de se familiariser avec les modèles et les paramètres de calcul. On teste également plusieurs raffinement de maillage dans le but de définir le raffinement qu'on utilise pour les calculs présentés dans le paragraphe suivant, où la rotation du canal est considérée.

Paramètres des maillages

Quatre maillages sont considérés dans ce paragraphe. Ils correspondent à un domaine de taille $2\pi h \times 2h \times \pi h$, soit la même taille que le domaine considéré par Lamballais *et al.* (1998). Les maillages sont constitués d'hexaèdres homogènes dans les directions x et z et ils présentent la même discrétisation dans la direction y normale aux parois : $\Delta y_{\min}^+ \approx 1$. après quoi une raison géométrique $q = 1.1$ est appliquée tant que $y^+ < 100$. Au delà de $y^+ = 100$, le pas d'espace dans la direction y est conservé constant. Le nombre de Reynolds qui sert de référence pour ces distances adimensionnées est $Re_\tau = 386$, basé sur la vitesse de frottement reportée par Lamballais *et al.* (1998) pour le cas sans rotation. Finalement, les

	Nombre de Reynolds de référence : $Re_\tau = 386$					$N_x \times N_y \times N_z$
	Δx^+	Δz^+	$\Delta y_{\min}^+$	$\Delta y_{\max}^+$	$N_{y^+ < 10}$	
Maillage A	39.76	19.88	0.96	11.44	8	$61 \times 102 \times 61$
Maillage B	39.76	9.94	0.96	11.44	8	$61 \times 102 \times 122$
Maillage C	19.88	19.88	0.96	11.44	8	$122 \times 102 \times 61$
Maillage D	18.88	9.94	0.96	11.44	8	$122 \times 102 \times 122$

TABLE 4.3 – Caractéristiques principales des maillages.

maillages utilisés dans ce paragraphe se distinguent par leur raffinement dans les directions homogènes x et z car, contrairement à la valeur $\Delta y_{\min}^+ \approx 1$ couramment admise pour une bonne résolution en proche paroi, on ne trouve pas de réel consensus dans la littérature pour le raffinement dans ces deux directions (voir Meyers et Sagaut, 2007). On a choisi de tester $(\Delta x^+, \Delta z^+)$ proches de $(40, 20)$ pour le maillage A, $(40, 10)$ pour le maillage B, $(20, 20)$ pour le maillage C et $(20, 10)$ pour le maillage D (voir table 4.3).

Paramètres de calcul

Comme pour les simulations de référence, un débit constant est imposé dans le canal en ajustant un terme source de quantité de mouvement dans la direction longitudinale. Le pas de temps est choisi de sorte que $\Delta t U_b / \Delta x \approx 0.25$. On obtient alors un nombre de Courant maximal¹⁶ $CFL_{\max}$ autour de 0.7 pour les maillage A et B et autour de 0.5 pour les maillage C et D (raffinés dans la direction x). Les nombres de Courant maximaux observés pendant les calculs sont décrits statistiquement dans le tableau 4.4, où l'on peut observer que le modèle de sous-maille a lui aussi une influence notable sur ce paramètre. En moyenne, $CFL_{\max}$ est plus important et plus dispersé autour de sa moyenne avec le modèle de Smagorinsky et moins avec le modèle dynamique L-DS. Mentionnons également que le nombre $CFL_{\max}$ est observé en très proche paroi, généralement dans l'intervalle $y^+ \in [10, 30]$ (zone « tampon » de la couche limite). Cela n'est pas surprenant car c'est dans cette zone que les fluctuations turbulentes sont les plus intenses.

Le champ de vitesse initial est obtenue par la méthode SEM (voir paragraphe 6.1.2), dont les paramètres sont donnés par les lois suivantes¹⁷ :

$$\begin{aligned}
 U^+ &= \frac{1}{\kappa} \log(1 + 0.4y^+) + 7.8 \left(1 - e^{-y^+/11} - \frac{y^+}{11} e^{-y^+/3} \right), \\
 k^+ &= 0.07 e^{-y^+/8} (y^+)^2 + 4.5 \frac{1 - e^{-y^+/20}}{1 + 4 \frac{y^+}{Re_\tau}}, \\
 \varepsilon^+ &= \frac{1}{\kappa} ((y^+)^4 + 15^4)^{-1/4},
 \end{aligned}$$

avec $U^+ = u/u_\tau$, $k^+ = k/u_\tau^2$, $\varepsilon^+ = \varepsilon \nu / u_\tau^4$. Cette initialisation permet aux fluctuations turbulentes de s'amorcer immédiatement au début du calcul.

16. En 1D, le nombre de Courant–Friedrichs–Lewy est défini par :

$$CFL = \frac{u \Delta t}{\Delta x}.$$

Dans le logiciel volumes finis 3D *Code Saturne*, la généralisation de $u/\Delta x$ en trois dimensions est la somme des flux sortants d'une maille $\mathcal{V}$ (de bord $\partial\mathcal{V}$) rapporté au volume de la maille, et on a donc :

$$CFL = \frac{\int_{\partial\mathcal{V}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|) d\sigma}{|\mathcal{V}|} \Delta t.$$

17. Ces lois sont utilisés pour construire une vitesse moyenne monodimensionnelle ($\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, 0, 0)$), un tenseur de Reynolds diagonal isotrope ($\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} = 2k/3$) et l'échelle de longueur intégrale $k^{3/2}/\varepsilon$.

(m, σ)	Smagorinsky	L-DS	WALE
Maillage A	(0.76, 0.087)	(0.52, 0.035)	(0.70, 0.073)
Maillage B	(0.78, 0.085)	(0.56, 0.041)	(0.68, 0.064)
Maillage C	(0.53, 0.052)	(0.40, 0.028)	(0.49, 0.041)
Maillage D	(0.64, 0.066)	(0.46, 0.025)	(0.54, 0.044)

TABLE 4.4 – Moyenne m et écart type σ du nombre de Courant maximal observé

Après une période d'établissement de $250\Delta t U_b/h$ pour obtenir une turbulence pleinement développée, les moyennes d'ensemble sont réalisées en faisant des moyennes temporelles locales pendant une période de $500\Delta t U_b/h$ puis, à la fin du calcul, en moyennant dans les directions d'homogénéité. Un exemple d'historique des moyennes temporelles (obtenu avec le modèle de Smagorinsky et sur le maillage le plus fin) est montré sur la figure 4.21. On voit que le temps d'intégration temporel est suffisamment long pour que les moments d'ordre un et deux atteignent localement des valeurs à peu près constantes, et symétriques en deux points situés de part et d'autre du plan médian $y/h = 0$. En fait, le temps d'intégration qu'on a utilisé pour les moyennes (environ $26.5h/u_\tau$) est sensiblement supérieur à celui reporté pour des calculs DNS de référence ($10h/u_\tau$ pour Kim *et al.*, 1987, $9.2h/u_\tau$ pour Kristoffersen et Andersson, 1993). Alors qu'il semble qu'un temps d'intégration plus court aurait pu suffire pour l'écoulement de canal fixe (figure 4.21), on verra au paragraphe suivant que ce n'est toujours le cas, suivant le taux de rotation du canal et le modèle de sous-maille utilisé.

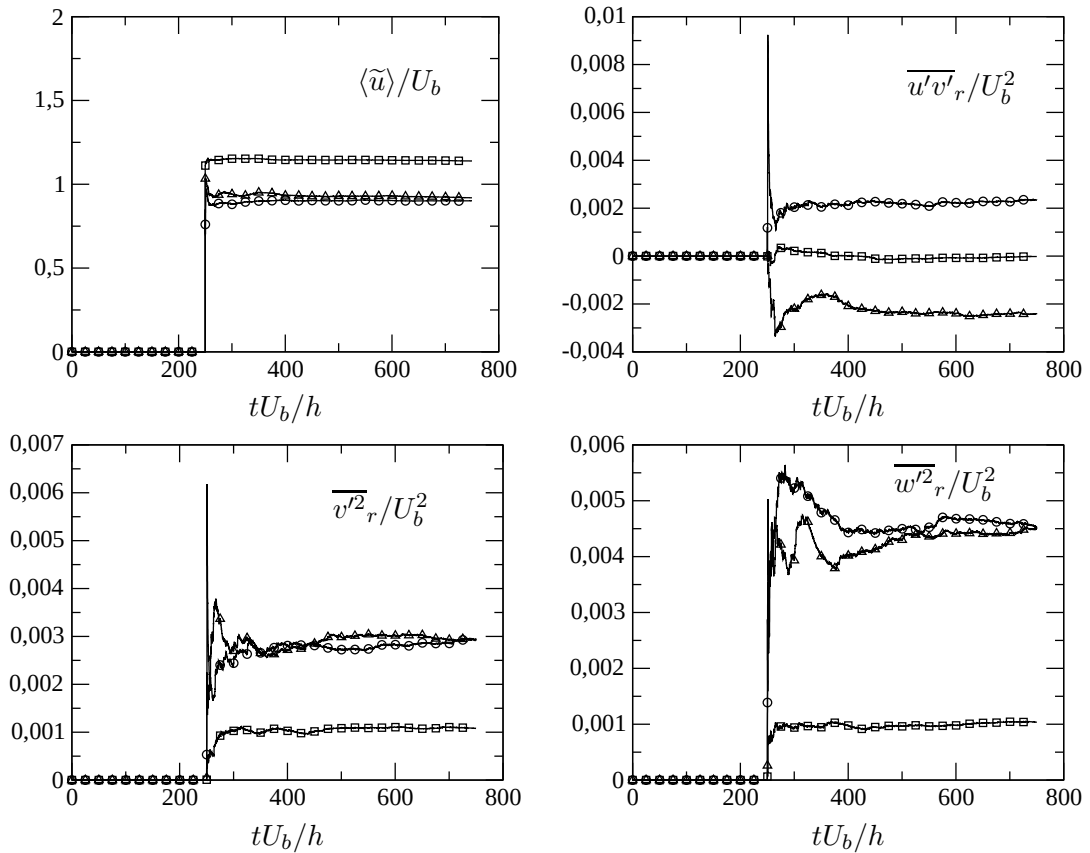


FIGURE 4.21 – Évolution temporelle des moyennes d'ensemble en trois points : $\mathbf{x}/h = (\pi/4, 0.8, \pi/4)$ ($\circ$), $\mathbf{x}/h = (\pi/4, 0, \pi/2)$ ($\square$), $\mathbf{x}/h = (\pi/4, -0.8, 3\pi/4)$ ($\triangle$). Maillage D, modèle de Smagorinsky.

Influence du maillage

Discutons maintenant les résultats des simulations en fonction du raffinement du maillage. Sur la figure 4.22 est représenté la vitesse moyenne U^+ et l'énergie cinétique turbulente résolue k_r en fonction du maillage utilisé, pour plusieurs modèles de sous-maille (Smagorinsky, Smagorinsky dynamique localisé L-DS et WALE). On observe en premier lieu que le raffinement du maillage a une grande incidence sur les résultats et que plus le maillage est fin, plus l'accord avec les données de référence est bon. Cela est particulièrement sensible pour la vitesse moyenne, mais moins pour l'énergie cinétique turbulente. Seul le maillage le plus fin (maillage D) permet d'obtenir une estimation réellement fine de la vitesse pour les trois modèles considérés et même avec ce maillage, une « marge d'amélioration » est clairement visible pour l'énergie cinétique turbulente. Les caractéristiques principales de la solution pour un maillage donné et son évolution en fonction du raffinement sont les mêmes pour les trois modèles testés : le pas d'espace $\Delta z^+ = 20$ conduit à une surestimation importante de la vitesse dans une grande partie du canal. Le raffinement dans cette direction semble d'ailleurs avoir plus d'influence que le raffinement dans la direction x . C'est particulièrement le cas avec le modèle dynamique L-DS pour lequel on observe une influence très faible du raffinement dans la direction x . En ce qui concerne l'énergie cinétique, le raffinement du maillage a tendance à réduire le pic en proche paroi et au contraire à combler la sous-estimation de l'énergie dans le cœur de l'écoulement. Des éléments de comparaison entre les modèles, à maillage fixé, sont donnés plus bas (figure 4.24).

Variantes du modèle dynamique

Intéressons-nous d'abord plus spécifiquement au modèle de Smagorinsky dynamique. Comme mentionné au paragraphe 4.3.3.2, l'évaluation dynamique de la constante C_d peut donner lieu à des valeurs de C_d négatives, de sorte qu'un clipping (équation 4.103) peut-être réalisé pour ne pas nuire à la stabilité numérique du calcul. Sur le tableau 4.5, le pourcentage moyen de cellules clippées au cours d'un calcul est spécifié. Avec le modèle dynamique local L-DS, ce nombre est non négligeable pour les maillages A et B (autour de 7% de cellules clippées) mais il diminue significativement lorsque l'on raffine dans la direction x (maillage C et D). Des mailles trop étirées dans une seule direction (type maillage A) semblent particulièrement propices à l'apparition de grandes valeurs négatives pour C_d . Notons que sur ce cas test, on n'a pas observé de zone de concentration claire de cellules clippées.

$\langle N_c \rangle / N$ (%)	modèle L-DS	modèle H-DS
Maillage A	5.94	0
Maillage B	7.06	0
Maillage C	3.24	0
Maillage D	1.44	0

TABLE 4.5 – Nombre moyen de cellules clippées $\langle N_c \rangle$ rapporté au nombre de cellules totales N (en %).

Un moyen d'éviter ces clipping est d'utiliser la variante H-DS du modèle dynamique. Comme le tableau 4.5 l'indique, on observe plus dans ce cas de viscosité de sous-maille négative. Cependant, la figure 4.23 montre que la précision des résultats s'en trouve dégradée, indépendamment du raffinement. Lilly (1992) pointait déjà le fait que l'intérêt d'évaluer dynamiquement la constante du modèle en fonction de l'écoulement semblait en partie annihilé par l'approche H-DS. D'après Piomelli et Liu (1995), la formulation ho-

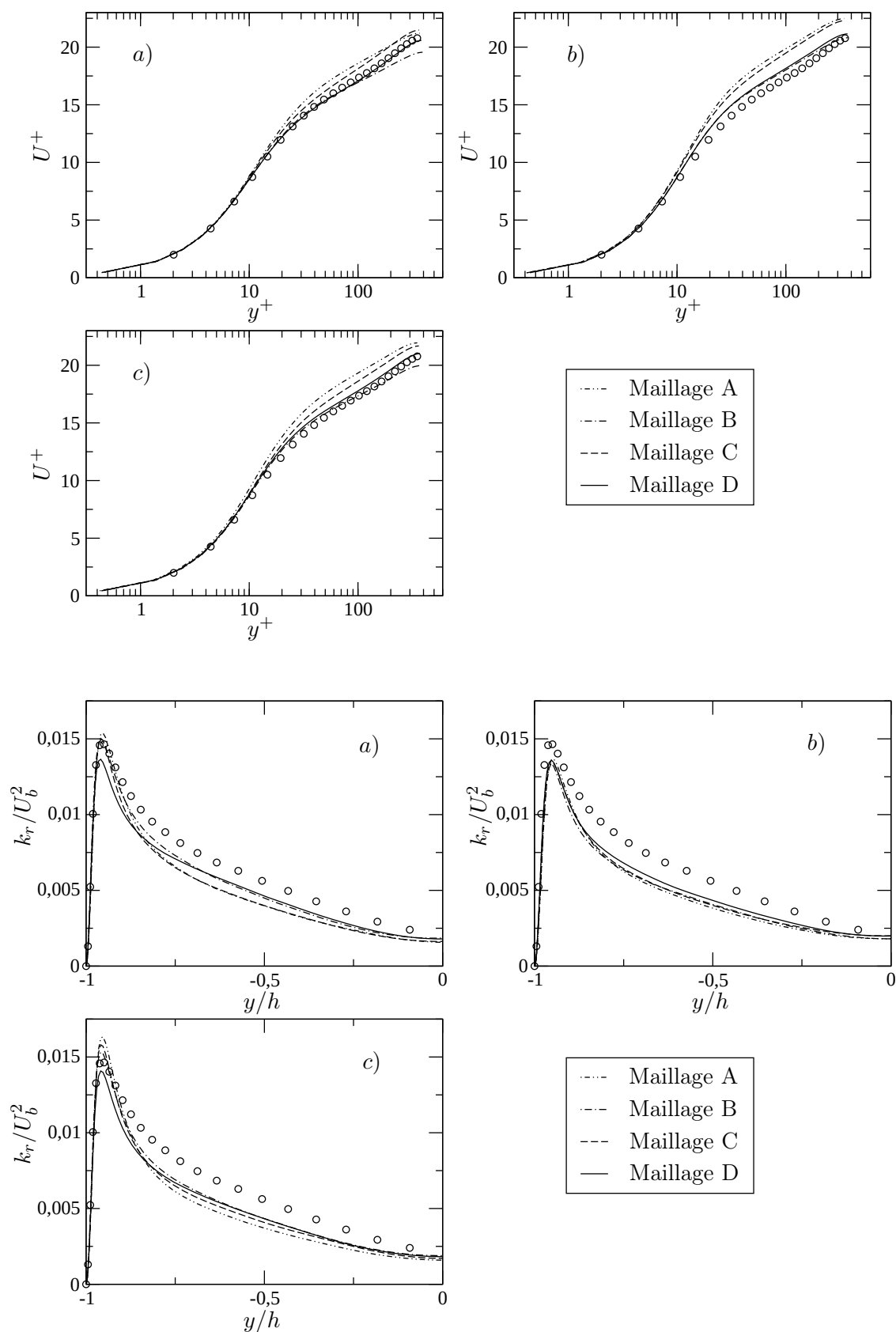


FIGURE 4.22 – Comparaison entre plusieurs maillages pour *a)* le modèle de Smagorinsky, *b)* le modèle de Smagorinsky dynamique localisé L-DS et *c)* le modèle WALE. Canal plan, $Re_b = 7000$. Symboles : LES de référence (Lamballais et al., 1998) ; lignes : LES présentes.

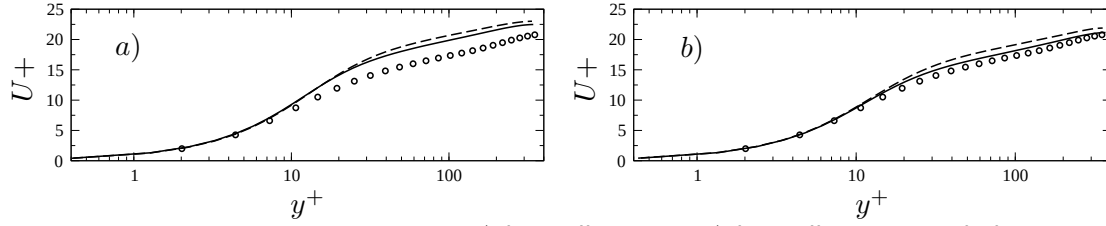


FIGURE 4.23 – Vitesse moyenne sur *a)* le maillage A et *b)* le maillage D. Symboles : LES de référence ; — : modèle L-DS ; - - - : modèle H-DS. Canal plan, $Re_b = 7000$.

mogène H-DS est essentiellement destinée à combler une inconsistance dans la dérivation du modèle localisé L-DS (d'où la proposition des auteurs, PL-DS, visant à réduire cette inconsistance tout en gardant un modèle localisé). Les résultats présentés ici confirment que, même dans un canal fixe, on gagne à conserver une évaluation locale de la constante de Smagorinsky (cette tendance peut être accentuée dans un canal en rotation, voir paragraphe 4.3.5), même si celle-ci conduit à utiliser des « parades » numériques comme les clipping. Ces clipping, dont l'occurrence diminue lorsque l'on raffine le maillage dans la direction x , ne semblent pas nuire sensiblement à la solution puisque l'on a vu plus haut que le raffinement dans la direction x avait justement peu d'influence sur la solution avec le modèle L-DS.

Comparaison entre les modèles

On termine ce paragraphe par une comparaison entre les modèles de Smagorinsky, L-DS et WALE. Au vue de la figure 4.24, un modèle particulier ne se montre pas supérieur aux autres sur tous les maillages testés. En revanche, on peut noter que quel que soit le maillage, le frottement prédit par le modèle de Smagorinsky est supérieur à celui prédit par le modèle WALE, lui-même supérieur à celui prédit par le modèle dynamique L-DS (tableau 4.6). Par suite les profils de la vitesse U^+ , qui correspond à un adimensionnement par la vitesse de frottement, sont toujours ordonnés de la même manière ($U_{\text{Smagorinsky}}^+ < U_{\text{WALE}}^+ < U_{\text{L-DS}}^+$). L'influence d'un modèle sur l'énergie cinétique résolue est assez modérée, même si l'on peut noter une tendance à surestimer le pic d'énergie en proche paroi avec le modèle WALE et à le sous-estimer avec le modèle L-DS. Globalement, c'est le modèle de Smagorinsky qui offre le meilleur compromis sur les différents maillages testés.

u_τ/U_b	Smagorinsky	L-DS	WALE
Maillage A	$5.32 \cdot 10^{-2}$	$4.98 \cdot 10^{-2}$	$5.09 \cdot 10^{-2}$
Maillage B	$5.70 \cdot 10^{-2}$	$5.38 \cdot 10^{-2}$	$5.58 \cdot 10^{-2}$
Maillage C	$5.30 \cdot 10^{-2}$	$5.04 \cdot 10^{-2}$	$5.24 \cdot 10^{-2}$
Maillage D	$5.55 \cdot 10^{-2}$	$5.35 \cdot 10^{-2}$	$5.39 \cdot 10^{-2}$

TABLE 4.6 – Vitesse de frottement

En conclusion, les simulations dans un canal plan réalisées dans cette étude préliminaire indiquent que pour trois des quatre maillages considérés, le modèle de Smagorinsky est plus satisfaisant que le modèle de Smagorinsky dynamique et le modèle WALE. Pour le modèle de Smagorinsky dynamique, il est important de conserver une évaluation localisée de la constante. Concernant le raffinement du maillage, il apparaît que seul le maillage correspondant à $(\Delta x^+, \Delta y_{\min}^+, \Delta z^+) \approx (20, 1, 10)$ (maillage D) est suffisamment fin pour obtenir un accord réellement satisfaisant avec la solution de référence. Pour ce raffinement,

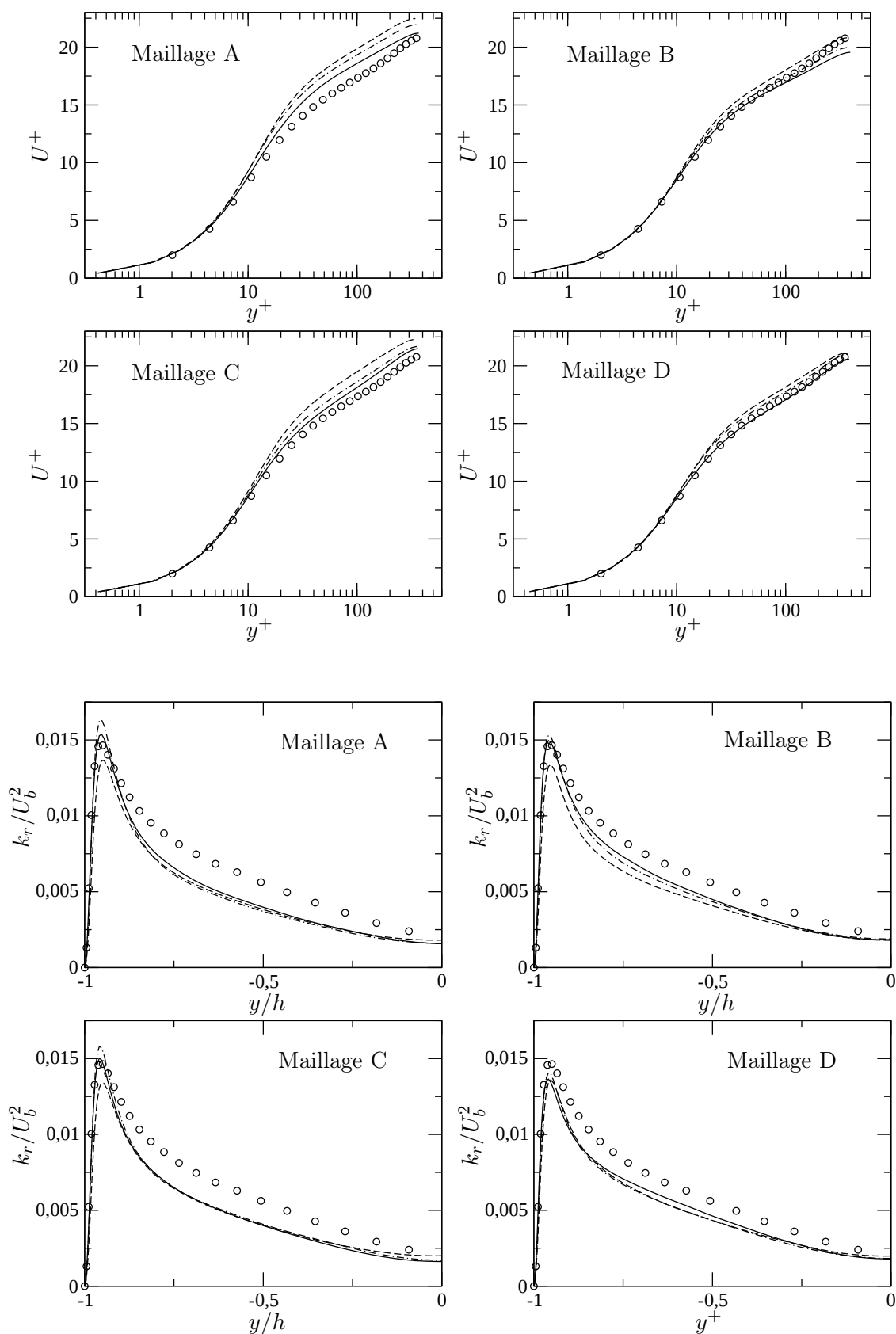


FIGURE 4.24 – Comparaison entre plusieurs modèles de sous-maille sur les maillages A, B, C et D. Canal plan, $Re_b = 7000$. Symboles : LES de référence ; — : modèle de Smagorinsky ; --- : modèle L-DS ; -.- : modèle WALE.

l'influence du modèle de sous-maille est modérée, quoique toujours notable. C'est donc ce maillage qui sera utilisé dans le paragraphe suivant, dans lequel la rotation du canal est considérée.

4.3.5 Évaluation des modèles pour la rotation

Considérons maintenant le cas du canal en rotation, dans les mêmes conditions que les calculs LES de Lamballais *et al.* (1998) ($Re_b = 7000$ et $Ro_b = 1/6, 0.5, 1.5$). Tous les calculs sont réalisés avec le maillage D présenté dans le paragraphe précédent (tableau 4.3). Le débit est imposé dans le canal de manière à avoir $Re_b = 7000$ pour toutes les simulations. En revanche, le nombre de Reynolds de frottement, pertinent pour juger du raffinement d'un maillage, varie selon le nombre de rotation et la paroi que l'on considère (en pression ou en dépression). Il convient alors de noter que la vitesse de frottement maximale dans les simulations de Lamballais *et al.* (1998) est observée à la paroi en pression au nombre de rotation $Ro_b = 1/6$, où l'on a $u_\tau^{(p)}/U_b = 5.90 \cdot 10^{-2}$, soit un nombre de Reynolds de frottement $Re_\tau \approx 413$. Dans ce cas, le maillage D correspond à $(\Delta x^+, \Delta z^+, \Delta y_{\min}^+, \Delta y_{\max}^+) = (20.20, 10.10, 1.03, 12.24)$.¹⁸ Les paramètres du calcul sont similaires à ceux du cas sans rotation présenté dans le paragraphe précédent. Le pas de temps est tel que $\Delta t U_b / \Delta x \approx 0.24$. Les nombres $CFL_{\max}$ observés pour les cas $Ro_b = 1/6, 0.5$ sont tout à fait similaires à ceux du cas sans rotation (tableau 4.4) et ils sont inférieurs pour $Ro_b = 1.5$. L'intégration temporelle servant au calcul des moyennes d'ensemble est réalisée pendant un temps minimum de $375h/U_b$ (après quoi une moyenne dans les directions homogènes x et z est appliquée) et celle-ci est commencée après un temps d'établissement de l'écoulement minimum de $125h/U_b$ (voir historiques des calculs de la figure 4.31). Les calculs sont initialisés par un champ pleinement développé correspondant à un taux de rotation inférieur ou à un autre modèle de sous-maille.

Discussion générale et comparaison entre les modèles

Un aperçu général des résultats pour tous les taux de rotation considérés et trois modèles de sous-maille (Smagorinsky, L-DS et WALE) est donné par la figure 4.25 où les profils de vitesse moyenne et du tenseur de Reynolds résolu $\overline{u'_i u'_{j,r}}$ sont tracés en coordonnées globales et comparés aux profils des LES de référence. L'impression générale est que les calculs présentés sont en très bon accord avec les LES de référence. Les écarts entre les différents modèles sont modérés et apparaissent essentiellement sur les moments d'ordre deux (tenseur de Reynolds), à l'exception notable près du modèle WALE au plus fort taux de rotation ($Ro_b = 1.5$) qui prédit une vitesse moyenne totalement erronée, ce qui fait l'objet d'une discussion spécifique plus bas. L'accord avec les données de référence est aussi satisfaisant dans le cas sans rotation ($Ro_b = 0.0$) que lorsque la rotation du canal est imposée, y compris pour les forts taux de rotation. Le fait que la rotation n'ait pas d'effet direct sur les échelles modélisées (modèle de Smagorinsky et L-DS) ne semble pas pénalisant, et sur les calculs présentés, l'effet de la rotation sur les échelles résolues est suffisant pour offrir un très bon accord avec les données de référence. Notons que le fait que la rotation agit en premier lieu sur les grandes échelles d'un écoulement, et ses conséquences pour les calculs LES, est le principal résultat mentionné dans le paragraphe consacré aux écoulements en rotation de l'ouvrage de référence de Sagaut (2005) sur la simulation des grandes échelles.

L'examen spécifique des vitesses de frottement effectives calculées offre un aperçu plus critique des simulations présentées (tableau 4.7). Des écarts notables sur les vitesses de

¹⁸. Les vitesses de frottement effectivement calculées dans les simulations présentées sont reportées dans le tableau 4.7.

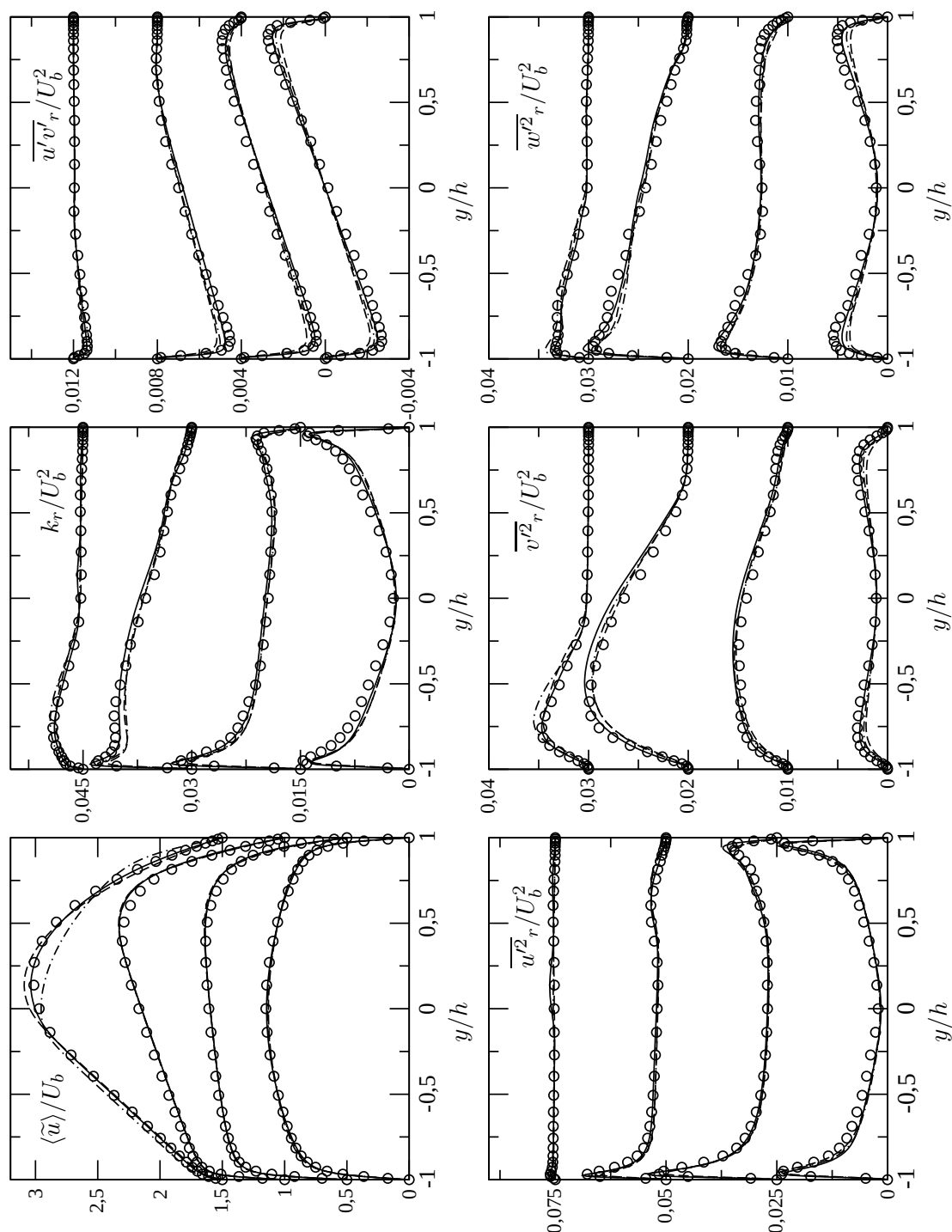


FIGURE 4.25 – Vitesse moyenne et tenseur de Reynolds résolu en coordonnées globales. Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 0,1/6, 0,5, 1,5$. Symboles : LES de référence ; — : Smagorinsky ; - - - : L-DS ; - . - : WALE.

u_τ^*/U_b $\times 10^2$	Lamballais <i>et al.</i>		Smagorinsky		L-DS		WALE	
	(p)	(s)	(p)	(s)	(p)	(s)	(p)	(s)
$Ro_b = 0.0$	5.514	5.514	5.549 (+0.6)	5.560 (+0.8)	5.352 (-2.9)	5.343 (-3.1)	5.375 (-2.51)	5.403 (-2.01)
$Ro_b = 1/6$	5.900	4.246	6.617 (+12.1)	4.395 (+3.5)	6.185 (+4.8)	3.929 (-7.5)	5.928 (+0.5)	3.359 (-20.9)
$Ro_b = 0.5$	5.625	3.088	5.990 (+6.5)	3.138 (+1.6)	5.756 (+2.3)	3.219 (+4.2)	5.775 (+2.7)	3.107 (+0.6)
$Ro_b = 1.5$	3.584	2.757	3.035 (-15.3)	2.514 (-8.8)	2.902 (-19.0)	2.441 (-11.4)	3.567 (-0.5)	3.057 (+10.9)

TABLE 4.7 – Vitesses de frottement. Les nombres entre parenthèses correspondent à l'écart (en %) avec les LES de référence.

frottement calculées, selon le modèle de sous-maille et également en comparaison avec les calculs LES de référence, sont observés, en particulier au plus grand taux de rotation $Ro_b = 1.5$. À l'inverse, les écarts sont plus modérés pour $Ro_b = 0.5$. Pour les modèles de Smagorinsky et L-DS, le frottement total $u_\tau = \sqrt{(u_\tau^{(p)})^2 + (u_\tau^{(s)})^2}/2$ est surestimé par rapport aux LES de référence pour les taux de rotation $Ro_b = 1/6$ et 0.5 et sous-estimé pour le taux de rotation $Ro_b = 1.5$. Le modèle WALE n'obéit pas à cette règle car, pour $Ro_b = 1.5$, on constate une surestimation substantielle du frottement du côté en dépression (où comme on l'a noté plus haut, le profil de vitesse est largement erroné) et une sous-estimation importante de $u_\tau^{(s)}$ pour $Ro_b = 1/6$. Naturellement, lorsque la vitesse de frottement calculée est utilisée pour normaliser les moments de vitesse, les différences entre les modèles sont plus apparentes que lorsque l'on trace les profils en coordonnées globales, ce dont la figure 4.26 rend compte.

Effets de la rotation sur le raffinement du maillage requis

L'accord satisfaisant obtenu sur la figure 4.25 pour tous les nombres de rotation, à maillage fixé laisse penser que, en présence de cisaillement et à débit constant, la rotation du référentiel n'induit pas de limitation supplémentaire sur le maillage que celles qui prévalent dans le référentiel galiléen. Tâchons maintenant de mesurer de manière plus quantitative la validité de ce propos.

La première mesure vient de l'examen des vitesses de frottement, qui varient en fonction du nombre de rotation (tableau 4.7). Or ce paramètre est un critère central d'appréciation du raffinement d'un maillage puisque les distances caractéristiques Δx_i^+ du maillage sont des distances adimensionnées par cette vitesse de frottement et la viscosité ν . Comme Lamballais *et al.* (1998), on observe que le frottement maximal, et donc le raffinement le plus dégradé, correspond au taux de rotation $Ro_b = 1/6$ du côté en pression du canal. L'augmentation la plus importante, par rapport au cas sans rotation sur lequel le maillage est dimensionné, est obtenue avec le modèle de Smagorinsky où le frottement augmente dans ce cas de près de 20%. D'après le tableau 4.3, cela correspond à un raffinement effectif minimal donné par $(\Delta x^+, \Delta y_{\min}^+, \Delta z^+) \approx (22.7, 1.15, 11.3)$. Avec les modèles L-DS et WALE, l'augmentation maximale du frottement sur toute la gamme des nombres de rotation testés est de 15% et 10% respectivement. L'effet *nombre de Reynolds* induit par la rotation du canal ne semble donc pas particulièrement contraignant et ne remet pas en cause le niveau de résolution des calculs présentés.

Un autre critère d'appréciation du maillage consiste à estimer dans quelle mesure les

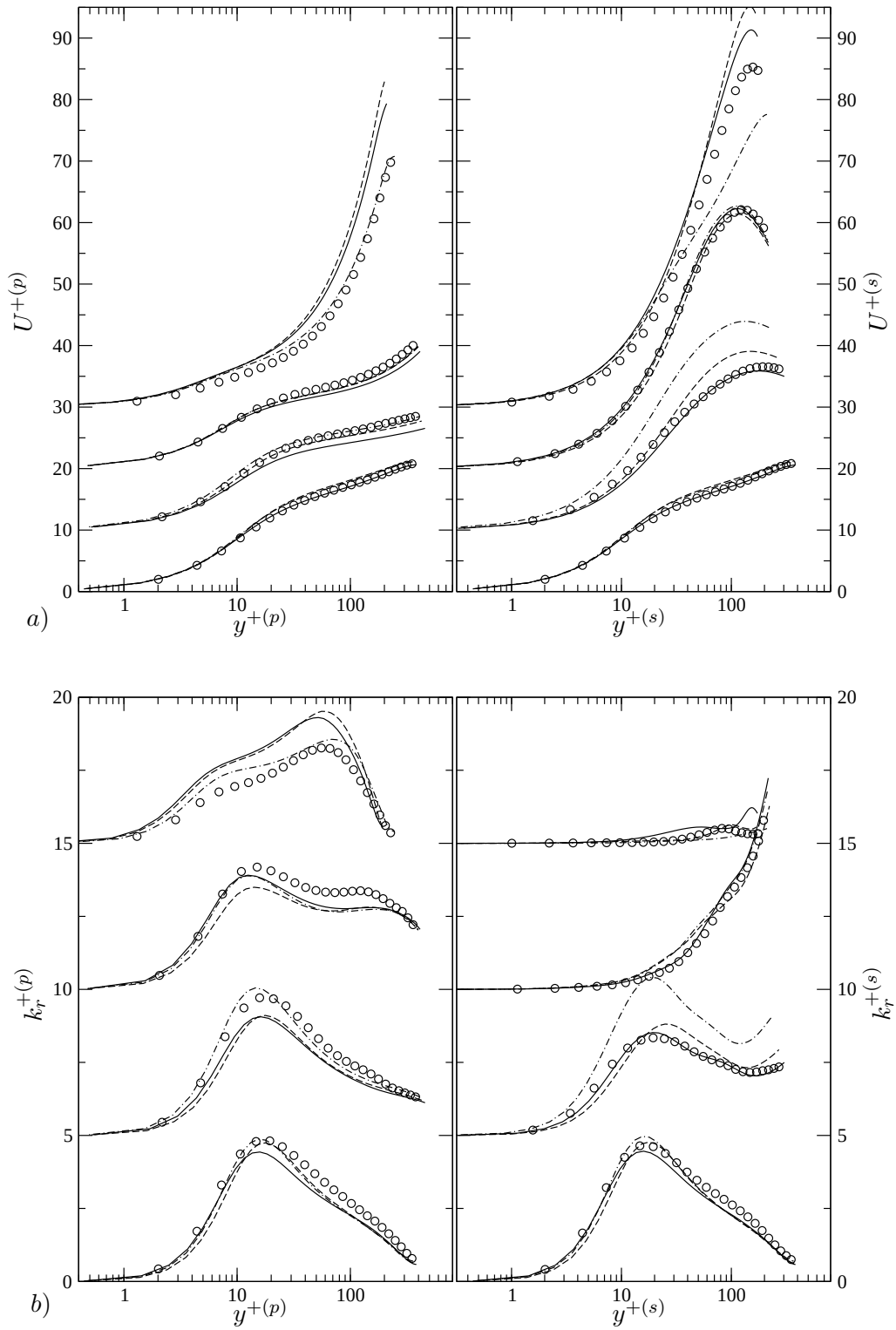


FIGURE 4.26 – Vitesse moyenne et énergie cinétique turbulente résolue en coordonnées de paroi. Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$. Symboles : LES de référence ; — : Smagorinsky ; - - - : L-DS ; - . - : WALE.

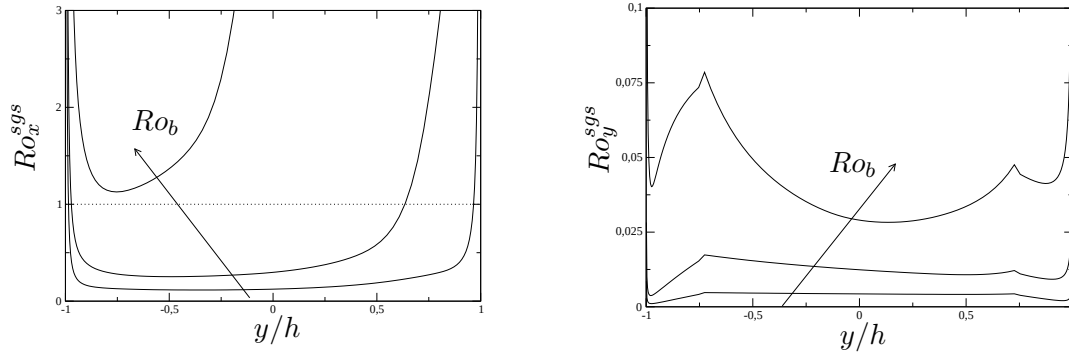


FIGURE 4.27 – Nombre de rotation de sous-maille. Canal tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 1/6, 0.5, 1.5$, modèle de Smagorinsky.

effets de la rotation sont capturés par une simulation. Pour ce faire, on peut construire des *nombre de rotation* de sous-maille Ro_i^{sgs} , définis comme le ratio $\Delta x_i / L_i^\Omega$ entre la taille des mailles dans la direction i et l'échelle de longueur associée à la force de Coriolis dans cette direction $L_i^\Omega = 2\epsilon_{imj}\Omega_m\tilde{u}_j / (2\Omega)^2$. Un nombre $Ro_i^{sgs} < 1$ indique alors que cette échelle est résolue. On peut rapprocher cette démarche à celle de Jacquin *et al.* (1990) qui, dans le cas d'une turbulence initialement isotrope ($\overline{\mathbf{u}} = 0$), proposent d'utiliser $L^\Omega = \overline{v'^2}^{1/2} / 2\Omega$ (pour v une composante transverse à l'axe de rotation) comme mesure du déplacement transverse induit par la force de Coriolis. En comparant cette échelle de longueur à l'échelle intégrale transversale, les auteurs définissent un nombre de Rosby local Ro_v dont la valeur seuil $Ro_v = 1$ marque le début de la dérive de l'échelle L_v sous l'effet de la rotation (voir paragraphe 3.3 et la figure 10 de Jacquin *et al.*, 1990). Dans un cas anisotrope, on peut proposer l'approximation $\tilde{u}_j \approx \langle \tilde{u}_j \rangle + \overline{u'_j u'_{jr}}^{1/2}$, avec $\overline{u'_j u'_{jr}}$ les contraintes de Reynolds résolues. Avec cette définition, les nombres de rotation de sous-maille (l'axe est suivant z) :

$$Ro_x^{sgs} = \frac{2\Omega\Delta x}{\overline{v'^2}^{1/2}_r}, \quad Ro_y^{sgs} = \frac{2\Omega\Delta y}{\langle \tilde{u} \rangle + \overline{u'^2}^{1/2}_r},$$

sont tracés, pour le modèle de Smagorinsky, sur la figure 4.27. On voit que dans un canal en rotation, les nombres de rotation de sous-maille augmentent lorsque le nombre de rotation global Ro_b augmente. En outre, on voit que Ro_x^{sgs} est largement supérieur à Ro_y^{sgs} , ce qui indique que c'est la bonne résolution du déplacement dû à la force de Coriolis dans le sens longitudinal qui est le plus contraignant pour le maillage. Néanmoins, on a bien $Ro_x^{sgs} < 1$ dans une large partie centrale du canal pour les deux taux de rotation $Ro_b = 0.16, 0.5$. En fait, les valeurs $Ro_x^{sgs} > 1$, près des parois et pour $Ro_b = 1.5$, correspondent à un écoulement très peu énergétique d'où l'impact modéré de ce manque de résolution sur les résultats globaux de la figure 4.25.

Instationnarités, dynamique tourbillonnaire

Intéressons-nous maintenant aux instationnarités de l'écoulement. Sur la figure 4.28, des isosurfaces du module de la vorticité ($\omega = 3U_b/h$) sont représentées, pour le modèle de Smagorinsky et pour les différents taux de rotation. Ces visualisations sont à rapprocher de celles proposées par Lamballais *et al.* (1998) dans leur étude. Elles donnent un bon aperçu de la structuration de l'écoulement en fonction du nombre de rotation. Pour le taux de rotation $Ro_b = 1/6$, de long vortex longitudinaux apparaissent du côté en pression du canal. L'observation de vortex de ce type, parfois appelés vortex de Taylor–Görtler, est reportée, pour des nombres de rotation proches, dans plusieurs études expérimentales ou numériques

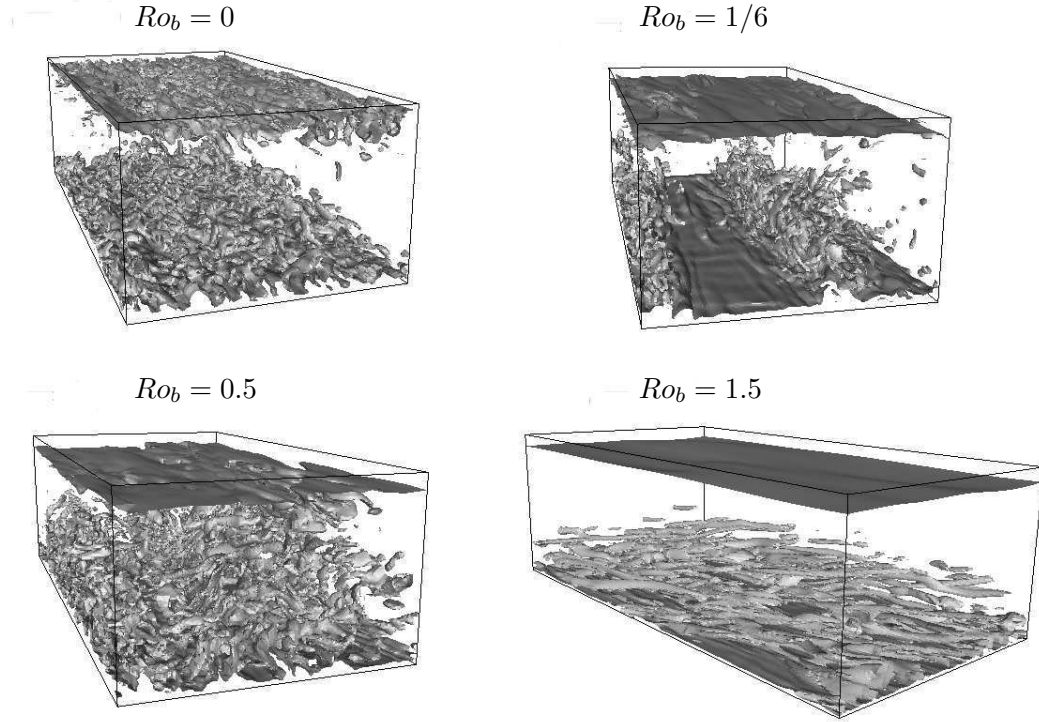


FIGURE 4.28 – Isosurfaces de module de vorticité $\omega = 3U_b/h$, modèle de Smagorinsky. Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$.

de cet écoulement (Johnston *et al.*, 1972; Kristoffersen et Andersson, 1993; Lamballais *et al.*, 1998, par exemple). Bien qu'il ne s'agisse ici que d'une visualisation instantanée, d'autres visualisations réalisées pour ce taux de rotation mais à d'autres instants ont également fait apparaître ces vortex. En revanche, leur vigueur et leur position en z varie notablement. On n'a pas vérifié à ce jour s'il s'agit d'un déplacement dans la direction z des vortex ou si ceux-ci se forment et disparaissent ponctuellement en des positions différentes (hypothèse privilégiée). Parallèlement, pour ce taux de rotation, on observe sur la figure 4.29, où les fluctuations de vitesse normale à la paroi, pendant une période de $750h/U_b$ et en trois points du domaine d'ordonnée y différentes, sont tracées, que le niveau moyen des fluctuations au centre du canal varie sur des périodes de temps relativement longues pour ce taux de rotation. Cela est sans doute lié à la nature instable des rouleaux longitudinaux. Près de la paroi en dépression, ce sont des variations « basses fréquences » notables de l'amplitude des fluctuations qui sont observées, conférant à la turbulence un caractère intermittent. Là encore, cela semble attester du peu de stabilité des vortex de Taylor–Görtler (vortex plus ou moins vigoureux où légèrement mobiles dans la direction y). Une analyse de Fourier (FFT des signaux de la figure 4.29 sur une période de 2^{16} pas de temps) n'a pas permis d'isoler de fréquence caractéristique de ces instationnarités. Enfin, la figure 4.30 montre l'évolution en temps des vitesses de frottement. Pour cette figure, celles-ci sont approchées à partir d'un filtrage temporel gaussien de taille $T = 90h/U_b$ de la vitesse en un point quelconque des parois :

$$u_\tau^{(p,s)} \approx \sqrt{\nu \left| \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \right|_{y=-h,h}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}((n+1)\Delta t) = \mathcal{U}(n\Delta t) + \frac{\Delta t}{T} \left(\tilde{u}((n+1)\Delta t) - \mathcal{U}(n\Delta t) \right).$$

Le filtre est initialisé à l'instant $t = 750h/U_b$ à partir de la vitesse de frottement estimée à cet instant par intégration temporel des $500h/U_b$ unités de temps précédentes et en

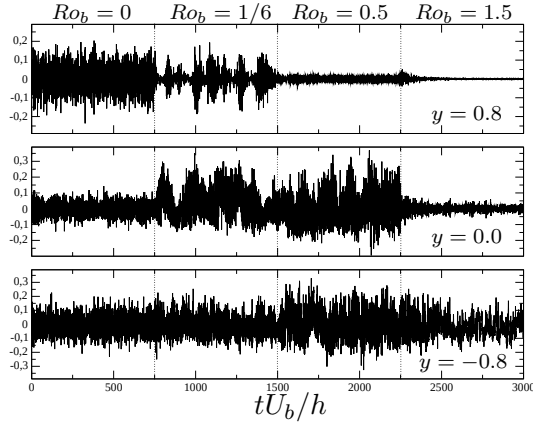


FIGURE 4.29 – Historique de vitesse normale à la paroi $\tilde{v}$, en trois points d'ordonnées différentes ($y = -0.8, 0, 0.8$), modèle de Smagorinsky. Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$.

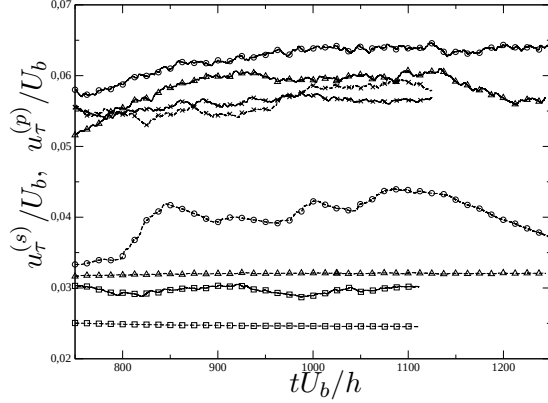


FIGURE 4.30 – Vitesses de frottement approchées par filtrage temporel de taille $T = 90U_b/h$ de la vitesse $\tilde{u}$, modèle de Smagorinsky. Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 0$ (marquage $\times$), $Ro_b = 1/6$ (marquage $\circ$), 0.5 (marquage $\triangle$), 1.5 (marquage $\square$). — : face en pression ; - - - : face en dépression.

moeynnant dans les directions d'homogénéité de l'écoulement. Alors qu'un filtre temporel de cette taille est suffisant pour obtenir des vitesses de frottement presque constantes dans un canal fixe, on constate, pour $Ro_b = 1/6$, des variations notables de la vitesse de frottement à la paroi en dépression. Cela justifie d'avoir utilisé une période d'intégration temporel aussi importante (jusqu'à $1000h/U_b$) pour obtenir les profils moyens des figures 4.25 et 4.26.

Pour $Ro_b = 0.5$, l'écoulement est nettement moins structuré. Les isosurfaces de vorticité (figure 4.28) montrent en revanche une très forte activité tourbillonnaire, qui occupe une large portion du canal. Cela concorde avec le haut niveau d'énergie cinétique turbulente (porté par les composantes $\overline{v'^2_r}$ et $\overline{w'^2_r}$) observé sur la figure 4.25. Lamballais *et al.* (1998) notent en outre que pour ce nombre de rotation, les structures de vorticité tendent à s'incliner dans la direction de l'écoulement, ce que nos simulations reproduisent également.

Cette direction privilégiée du vecteur de vorticité du côté en pression du canal se renforce pour $Ro_b = 1.5$. Pour ce taux de rotation, on n'observe pas de rouleaux longitudinaux. L'activité turbulente est dominée par des structures tourbillonnaires allongées dans la direction de l'écoulement, analogues à celles que l'on trouve dans les couches limites, mais d'échelle largement supérieure. L'évolution de la vitesse de frottement filtrée à la paroi en pression (figure 4.30) semblent indiquer, pour ce taux de rotation également, une évolution d'échelle de temps longue de ces phénomènes tourbillonnaires.

Selon le modèle de sous-maille, la structuration et les instationnarités de l'écoulement en fonction du nombre de rotation ne sont pas profondément modifiées. Il semble toutefois que les phénomènes tourbillonnaires décrits plus haut sont moins intenses avec le modèle WALE et le modèle dynamique L-DS qu'avec le modèle de Smagorinsky. L'évolution de la moyenne d'ensemble de la vitesse normale à la paroi $\tilde{v}$ rend globalement compte de cela. On constate que la période d'intégration temporelle permettant d'obtenir localement $\langle \tilde{v} \rangle \approx 0$ pour chaque point de suivi du calcul est sensiblement plus longue avec le modèle de Smagorinsky qu'avec le modèle WALE et surtout le modèle L-DS.

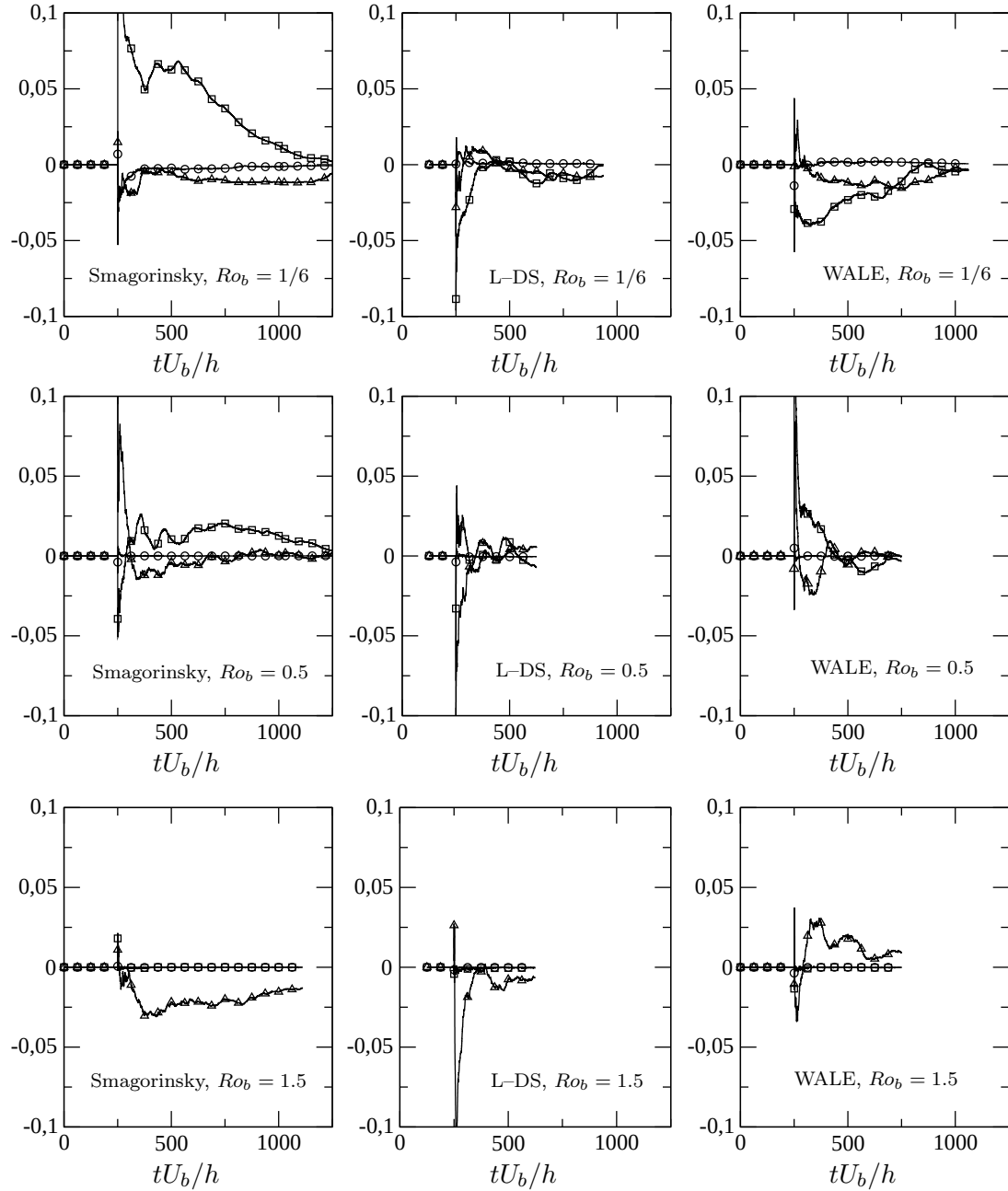


FIGURE 4.31 – Évolution temporelle de la moyenne d'ensemble de $\tilde{v}$ en trois points : $\mathbf{x}/h = (\pi/4, 0.8, \pi/4)$ ($\circ$), $\mathbf{x}/h = (\pi/4, 0, \pi/2)$ ($\square$), $\mathbf{x}/h = (\pi/4, -0.8, 3\pi/4)$ ($\triangle$), pour les modèles de Smagorinsky, L-DS et WALE. Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 1/6, 0.5, 1.5$.

On a également représenté sur la figure 4.32 les isosurfaces du module de la vorticité pour les modèles L-DS et WALE, pour $Ro_b = 1/6$. Les vortex de Taylor-Görtler semblent effectivement moins prononcés avec ces modèles qu'avec le modèle de Smagorinsky. De même, les variations à grande échelle de temps de la vitesse de frottement du côté en dépression du canal sont moins importantes (figure 4.33). En l'absence de caractérisation quantitative précise des phénomènes tourbillonnaires dans un canal tournant, on ne peut pas se prononcer sur le modèle le plus fidèle à la réalité de ce point de vue. En revanche, on peut reconnaître au modèle de Smagorinsky dynamique localisé L-DS l'avantage pratique de réduire la période d'intégration temporelle nécessaire à l'obtention d'une bonne approximation des moyennes d'ensemble.

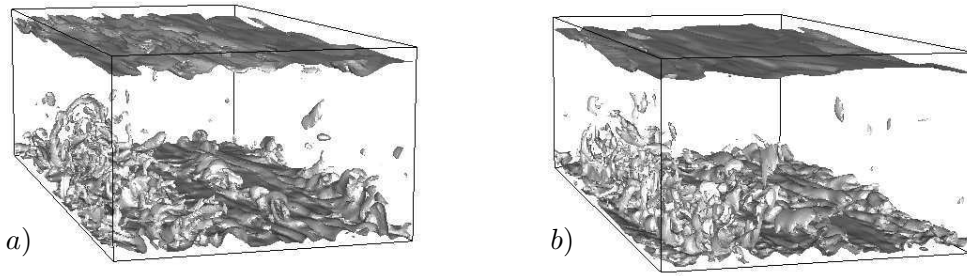


FIGURE 4.32 – Isosurfaces de module de vorticité $\omega = 3U_b/h$, avec a) le modèle L-DS et b) le modèle WALE. Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 1/6$.

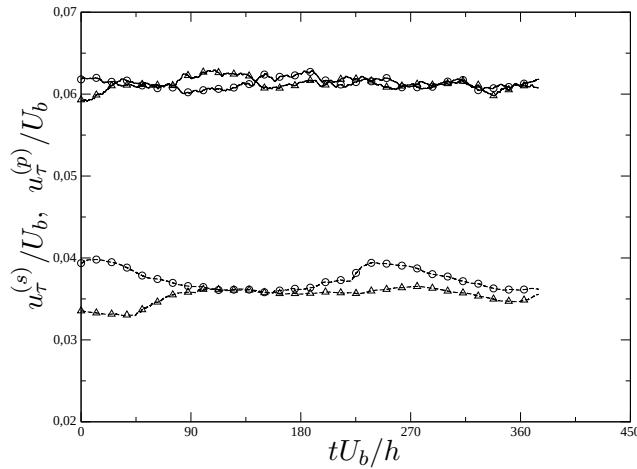


FIGURE 4.33 – Vitesses de frottement approchées par filtrage temporel de taille $T = 90U_b/h$ de la vitesse $\tilde{u}$ avec le modèle L-DS (marquage $\circ$) et le modèle WALE (marquage Δ). Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 1/6$. — : face en pression ; - - - : face en dépression.

Variantes du modèle dynamique

Poursuivons cette étude par quelques points spécifiques concernant la modélisation. On s'arrête dans un premier temps sur le modèle dynamique et ses différentes variantes. La figure 4.34 montre les profils de vitesse moyenne et d'énergie cinétique turbulente résolue obtenus avec les modèles L-DS, H-DS et PL-DS. L'intérêt d'utiliser une formulation locale (L-DS ou PL-DS) pour le calcul dynamique de la constante C_d est confirmé sur ce cas test, en particulier au taux de rotation modéré $Ro_b = 1/6$ où la formulation H-DS détériore

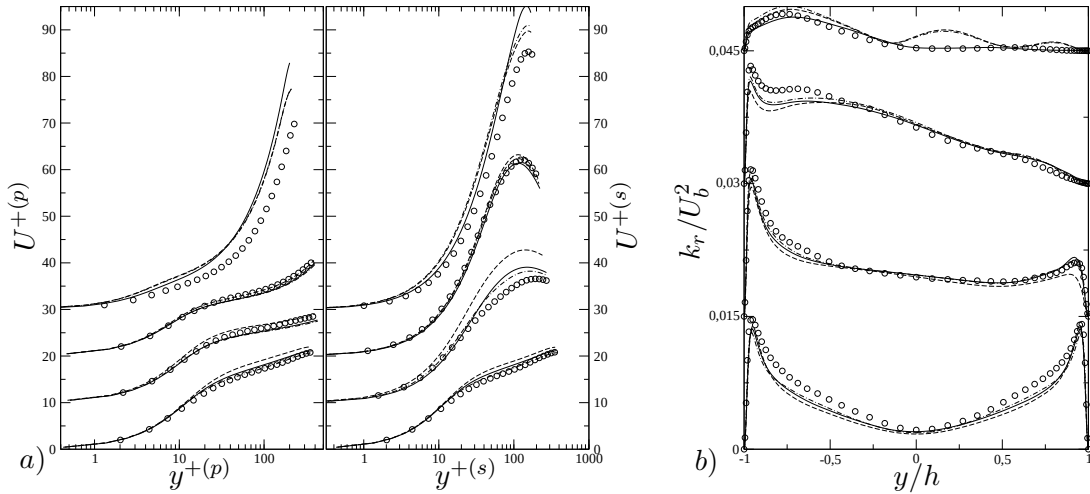


FIGURE 4.34 – a) Vitesse moyenne et b) énergie cinétique turbulente résolue. Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$. Symboles : LES de référence; — : modèle L-DS; - - - : modèle H-DS; - . - : modèle PL-DS.

sensiblement les résultats du côté en dépression du canal (sous-estimation du frottement et du pic d'énergie cinétique). En raison des vortex de Taylor–Görtler, l'écoulement présente, pour ce nombre de rotation, de grandes variations instantanées dans la direction z , l'homogénéité n'est approchée statistiquement que sur des temps très longs. L'utilisation de cette hypothèse pour le calcul instantané de la constante C_d est donc particulièrement contestable dans ce cas, ce qui peut expliquer les prédictions dégradées du modèle H-DS.

Pour le taux de rotation $Ro_b = 1.5$, le profil d'énergie cinétique turbulente dans la partie en dépression du canal obtenu avec le modèle H-DS mais également avec le modèle PL-DS est largement erroné (en fait, c'est la composante $\overline{u'^2_r}$ qui fait apparaître ces « bosses »). Au regard des profils moyens de la constante C_d calculés avec les différentes formulations du modèle dynamique (figure 4.35), on peut suspecter le mécanisme de cascade inverse ($C_d < 0$), que l'on trouve du côté en dépression du canal au plus fort taux de rotation pour les modèles H-DS et PL-DS, mais pas pour le modèle L-DS, de favoriser cette surestimation inopinée de l'énergie turbulente résolue.

Globalement, c'est donc la formulation L-DS du modèle de Smagorinsky qui donne le plus satisfaction sur ce cas test. Bien que le maillage qu'on utilise ici soit relativement fin et que l'impact du modèle de sous-maille s'en trouve donc réduite, on voit sur la figure 4.35 que le modèle dynamique capte bien la laminarisation de l'écoulement, sous les effets conjugués de rotation et de cisaillement, et qu'il prend en compte cet effet sur le modèle. Au contraire, avec le modèle de Smagorinsky, la rotation du canal n'a qu'un effet modéré sur le modèle, par l'intermédiaire de la fonction d'amortissement de Van Driest (équation 4.92) en proche paroi (effet « nombre de Reynolds »).

Correction du modèle WALE

Enfin, arrêtons-nous sur le cas du modèle de WALE. On a vu que celui-ci est construit à partir de l'ensemble du tenseur gradient de vitesse, y compris sa partie antisymétrique, et que par conséquent, il est largement dépendant du taux de rotation de l'écoulement. En fait, on peut vérifier que la viscosité de sous-maille (4.110) se comporte comme $\nu_{sgs} \sim \Omega$. Par suite, la part d'énergie transférée du champ résolu vers le champ de sous-maille augmente lorsque le taux de rotation augmente. Cela va à l'encontre de la phénoménologie de base des écoulements en rotation, qui montre une inhibition des transferts énergétiques sous l'effet

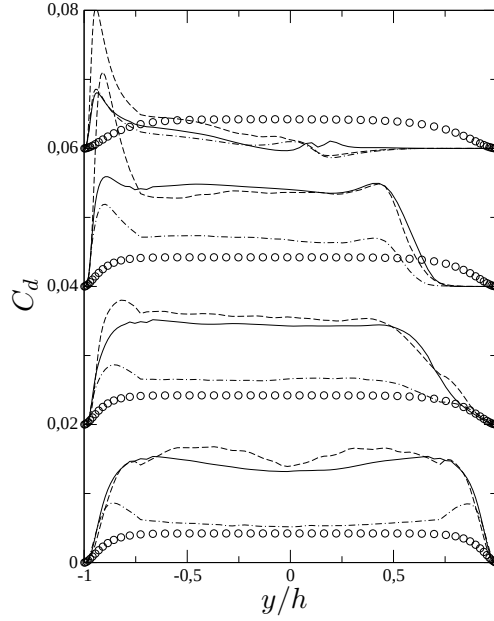


FIGURE 4.35 – Constante de Smagorinsky dynamique C_d . Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$ (profils décalés vers le haut). Symboles : modèle de Smagorinsky ; — : modèle L-DS ; - - - : modèle H-DS ; - . - : modèle PL-DS.

d'une rotation rapide (voir paragraphe 3.3). De même, lorsque la rotation est conjuguée à du cisaillement, l'écoulement peut devenir essentiellement laminaire, ce qui est également une situation critique pour un modèle tel que $\nu_{sgs} \sim \Omega^p$ avec $p \geq 0$, puisque l'énergie turbulente, résolue ou détenue par les échelles de sous-maille, devrait être nulle pour un écoulement laminaire. L'inconsistance des modèles de sous-maille construits à partir du tenseur de vorticité et tel que $\nu_{sgs} \sim \Omega^p$ avec $p \geq 0$ est point e par Speziale (1985). Cela conduit l'auteur à rejeter un modèle de sous-maille basé sur le vecteur de vorticité (Ferziger, 1977), pour lequel on a également $\nu_{sgs} \sim \Omega$, comme modèle approprié pour les écoulements en rotation.

Vérifions maintenant que c'est bien cette inconsistance du modèle WALE qui conduit à la mauvaise prédiction par ce modèle de la vitesse moyenne au plus fort taux de rotation. Sur la figure 4.36, on a représenté les profils de vitesse moyenne et d'énergie cinétique turbulente résolue obtenus avec une correction du modèle WALE, pour laquelle le terme non inertiel de rotation du référentiel n'est simplement pas pris en compte dans le tenseur de vorticité absolue. On voit que cette modification n'a pratiquement aucun effet jusqu'à $Ro_b = 0.5$ inclus, mais qu'en revanche elle corrige très bien la mauvaise estimation par le modèle WALE de la vitesse moyenne du côté en dépression du canal pour $Ro_b = 1.5$.

Bien sûr, cette correction du modèle ne peut pas donner satisfaction telle quelle puisque, telle qu'on l'a décrite, le principe de consistance du modèle par changement de référentiel (principe (I) p. 45) n'est pas respecté. Une correction respectant ce principe peut néanmoins être proposée en utilisant une mesure objective de la vorticité, insensible aux effets de rotation et de courbure. Une telle mesure est proposée par Astarita (1979) (voir annexe E.1). La correction RC-WALE proposée correspond au modèle (4.108)–(4.110) dans lequel le tenseur de vorticité $\widetilde{\mathbf{W}}$ est remplacé par le tenseur de « vorticité objective » :

$$\widetilde{\mathbf{W}}^A = \widetilde{\mathbf{W}} - \boldsymbol{\Omega}^{(\tilde{S})}, \quad (4.111)$$

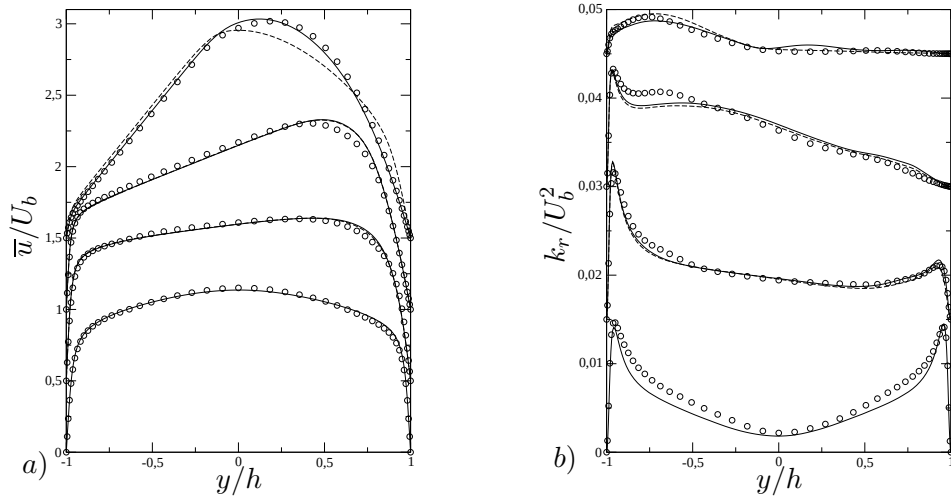


FIGURE 4.36 – a) Vitesse moyenne et b) énergie cinétique turbulente résolue. Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$. Symboles : LES de référence ; --- : modèle WALE ; — : modèle WALE corrigé.

avec

$$\Omega^{(\tilde{S})} = \frac{D\tilde{\mathbf{E}}}{Dt}\tilde{\mathbf{E}}^T, \quad (4.112)$$

et $\tilde{\mathbf{E}}$ la matrice des vecteurs propres du tenseur $\tilde{\mathbf{S}}$ (en colonne). Ce modèle permet de satisfaire le principe de modélisation (I) sans que la viscosité de sous-maille augmente par construction avec la rotation de l'écoulement. En fait, le modèle RC-WALE est indifférent matériellement, comme le modèle de Smagorinsky.

Notons que, pour l'écoulement dans un canal en rotation perçu dans le référentiel tournant attaché au canal, le deuxième terme de (4.111), qui mesure la courbure de l'écoulement, est nul en moyenne. La correction qu'on a mise en œuvre pour la figure 4.36, qui consiste simplement à utiliser dans le modèle WALE le tenseur de vorticité $\tilde{\mathbf{W}}$ et non le tenseur de vorticité absolue $\tilde{\mathbf{W}}^a$ bien que l'on soit dans un référentiel non galiléen, est alors équivalente en moyenne à la correction plus générale RC-WALE proposée ci-dessus. Cette équivalence n'étant vraie que statistiquement, il conviendrait de tester exactement la correction RC-WALE, ce qui n'a pas été fait dans cette étude.¹⁹

4.3.6 Bilan pour la modélisation LES

En conclusion, une étude de maillage dans un canal plan a montré qu'un raffinement d'environ $(\Delta x^+, \Delta y_{\min}^+, \Delta z^+) \approx (20, 1, 10)$ était nécessaire avec le logiciel *Code_Saturne* (schéma d'ordre deux en espace) pour obtenir des LES précises. Ce raffinement a été utilisé pour des simulations dans un canal en rotation à $Re_b = 7000$ et trois taux de rotation, pour plusieurs modèles de sous-maille, dont les modèles populaires de Smagorinsky, Smagorinsky dynamique et WALE. Ce dernier ne semble pas approprié pour les écoulements à très grands taux de rotation ($Ro_b = 1.5$). Une légère adaptation de la formulation du

19. Une formulation générale qu'on peut donner pour la correction testée sur la figure 4.36 consiste à définir le tenseur de vorticité objective par :

$$\tilde{\mathbf{W}}^A = \tilde{\mathbf{W}} - \Omega^{(\tilde{S})}, \quad \text{avec} \quad \Omega^{(\tilde{S})} = \frac{D\mathbf{E}}{Dt}\mathbf{E}^T$$

et $\mathbf{E}$ la matrice des vecteurs propres du tenseur des taux de déformation moyens $\langle \tilde{\mathbf{S}} \rangle$ (avec $\langle \cdot \rangle$ l'opérateur de moyenne d'ensemble).

modèle permet néanmoins de supprimer ce défaut. En dehors de ce point, les simulations réalisées montrent un bon accord global avec les LES très fines de Lamballais *et al.* (1998). Statistiquement, les différences entre les modèles sont surtout sensibles sur le coefficient de frottement, au taux de rotation $Ro_b = 1/6$ et $Ro_b = 1.5$. À ces taux de rotation, ce coefficient évolue sur des échelles de temps longues en raison de la présence de larges structures cohérentes dans l'écoulement. Celles-ci montrent une intensité variable selon les modèles et sont plus importantes avec le modèle de Smagorinky qu'avec le modèle WALE ou le modèle dynamique. Enfin, différentes formulations du modèle de Smagorinsky dynamique ont été testées. L'intérêt d'utiliser une évaluation localisée de la constante de Smagorinsky est confirmé et l'apparition de « back-scattering » ($C_d < 0$) au plus fort taux de rotation ne semble pas profitable à la solution du modèle.

Deuxième partie

Modélisation hybride RANS/LES zonale, aspects dynamiques et thermiques

Chapitre 5

Généralités sur les méthodes hybrides

5.1 Motivations et classification

Le chapitre précédent a donné un aperçu de la modélisation des écoulements en rotation suivant les deux approches classiques de modélisation de la turbulence : la modélisation statistique (RANS) et la simulation des grandes échelles (LES). On a vu que la LES permettait d'accéder à une information instationnaire beaucoup plus riche que les méthodes RANS, moyennant un coût de calcul beaucoup plus important. Par conséquent, la LES ne peut pas être systématiquement utilisée aujourd'hui pour les études industrielles (selon les estimations de Spalart, 2000, cela ne devrait pas être possible avant l'an 2045, si l'on utilise une loi de paroi, ou 2070, sans loi de paroi). Pourtant les problèmes industriels couvrent toutes sortes d'applications dans lesquelles le caractère instationnaire et les structures cohérentes de l'écoulement peuvent jouer un rôle important (contrôle du bruit, fatigue de matériaux par chargements dynamiques et/ou thermiques, etc...), alors que ces informations sont mal ou ne sont pas du tout capturées avec une modélisation statistique. Une part importante de la recherche en modélisation de la turbulence est actuellement consacrée au développement de modélisations associées à un niveau de résolution intermédiaire.

Les objectifs de ces modèles sont donc les suivants :

- (i) obtenir une description instationnaire et tridimensionnelle de l'écoulement, au moins dans certaines régions spécifiques où ces informations ont de l'importance pour un problème donné,
- (ii) le coût total de la simulation doit être largement inférieur à celui d'une LES.

Ces deux objectifs conduisent à identifier la zone de proche paroi comme une zone très coûteuse numériquement et dont beaucoup de problèmes ne demandent pas à connaître précisément les instationnarités.

Même si la grande vitalité de ce domaine de recherche et son manque de maturité (environ quinze ans) se prêtent mal à une classification pérenne des modèles, les axes principaux de développement qu'on peut dégager sont les suivants (voir Sagaut *et al.*, 2006) :

- (I) la modélisation statistique d'écoulements instationnaires (URANS),
- (II) les méthodes hybrides RANS/LES globales,
- (III) le couplage RANS/LES zonal.

Le troisième point se rapproche d'un problème multi-physique (physico-chimie, couplage fluide/solide dynamique ou thermique) où l'on fait interagir plusieurs problèmes (c'est-à-dire un modèle, un domaine d'intégration et des conditions aux limites et initiales) distincts, ces problèmes étant couplés les uns aux autres, par l'intermédiaire de leurs conditions aux

limites ou de termes sources. La difficulté du couplage RANS/LES zonal vient de ce que les formalismes RANS et LES de description de l'écoulement dans les différents domaines ont des significations physiques totalement différentes. Le couplage doit cependant permettre de faire communiquer efficacement ces deux descriptions de l'écoulement. C'est à cette approche, dont on décrit les grandes lignes au paragraphe 5.3, que sont consacrés les chapitres 6 et 7 de ce manuscrit.

Avec les approches (I) et (II), un seul jeu d'équations permet de décrire l'écoulement. On donne un aperçu succinct de ces approches ci-dessous ; essentiellement pour situer davantage les spécificités de l'approche zonale. Des revues plus détaillées du domaine (dont on s'est inspiré, ainsi que de Manceau, 2011) sont fournies par Sagaut *et al.* (2006) et Fröhlich et von Terzi (2008).

5.2 Aperçu des méthodes instationnaires globales

La modélisation URANS concerne en premier lieu les écoulements dont les conditions aux limites ou la géométrie sont variables dans le temps. Suivant le formalisme statistique de la turbulence, les variables aléatoires décrivant ces écoulements sont instationnaires. Il peuvent donc être traités par un modèle statistique RANS, en prenant en compte le terme de dérivée en temps dans l'équation de Reynolds. Cependant, comme la turbulence de ces écoulements instationnaires est en déséquilibre permanent, les hypothèses sur lesquelles beaucoup de modèles RANS classiques sont construits peuvent être mises en défaut. Des modèles RANS construits pour être valables pour les écoulements hors équilibres peuvent donc être utilisés (Revell *et al.*, 2010; Kim *et al.*, 2008, par exemple). Avec des modèles plus classiques comme le modèle $k - \varepsilon$ et le modèle LRR, Carpy et Manceau (2006) ont étudié les instationnarités obtenues dans le cas d'un jet périodique et concluent à la supériorité de la fermeture au second ordre.

Signalons que pour des calculs instationnaires (c'est-à-dire avec intégration temporelle) d'écoulements dont les conditions limites et la géométrie sont statistiquement stationnaires, des instationnarités apparaissent parfois dans la solutions de modèles RANS classiques. Parfois, ces instationnarités semblent physiquement pertinentes, d'autre fois beaucoup moins (voir Travin *et al.*, 2004, par exemple). En particulier, une convergence en maillage permet parfois de supprimer les instationnarités (Fadai-Ghotbi *et al.*, 2008). D'une manière générale, il est aujourd'hui assez largement admis que l'usage d'un modèle RANS classique (tel que ceux utilisés au paragraphe 4.2.3) est une manière très incertaine d'étudier les instationnarités d'un écoulement dont les conditions aux limites et la géométrie sont statistiquement stationnaires.

Dans les autres modélisations instationnaires de la turbulence, le modèle est construit de telle sorte que le spectre d'énergie turbulente se décompose en une partie modélisée et une partie résolue, cela quel que soit l'écoulement.

Ces modélisations sont parfois basées sur un formalisme semi-déterministe, qui suppose que la vitesse se décompose en une contribution déterministe, inchangée par moyenne de Reynolds et une contribution aléatoire (Ha Minh, 1999). La modélisation porte uniquement sur cette composante aléatoire. Il s'agit donc d'une modélisation RANS (modélisation des corrélations statistiques) mais l'hypothèse de semi-déterminisme permet d'étendre le champ de la modélisation RANS aux écoulements dont la géométrie et les conditions aux limites sont statistiquement stationnaires (en particulier cette hypothèse « expliquerait » pourquoi des modèles RANS classiques produisent parfois des instationnarités pour des écoulements statistiquement stationnaires au sens de Reynolds). Les modèles qui utilisent cette approche (Bastin *et al.*, 1997; Ha Minh, 1999, par exemple) sont adaptés de modèles

RANS classiques utilisant le formalisme complètement aléatoire des variables de l'écoulement. En particulier, la viscosité turbulente des modèles au premier ordre est diminuée, ce qui favorise l'apparition d'instationnarités. Notons qu'on considère *a priori* que l'échelle des fluctuations instationnaires déterministes est grande devant les échelles dissipatives, de sorte que ce type de modèles devrait permettre d'obtenir une convergence en maillage de la solution.

L'approche de modélisation qui concentre actuellement le plus de propositions dans la littérature est l'approche hybride RANS/LES globale. Le cadre d'étude de cette approche n'est pas encore figé ou du moins utilisé largement. Germano (2004) propose un opérateur hybride additif défini comme une pondération entre l'opérateur statistique de Reynolds et l'opérateur de filtrage de la LES. Rajamani et Kim (2008) ont appliqué avec succès ce formalisme pour des calculs hybrides dans un canal plan. Le formalisme du filtrage temporel (Pruett *et al.*, 2003; Fadai-Ghotbi *et al.*, 2010b), dont la taille variable permet, pour les écoulements statistiquement stationnaires, de passer continûment d'une moyenne de Reynolds à une TLES (simulation des grandes échelles de temps) est également prometteur. Il a donné lieu à l'élaboration du modèle TPITM (Fadai-Ghotbi *et al.*, 2010a), dont le lien étroit avec d'autres approches hybrides plus empiriques, comme la DES de Spalart *et al.* (1997), est mis en évidence par Manceau *et al.* (2010).

De manière plus large, l'« esprit » des méthodes hybrides RANS/LES globales est de faire apparaître une échelle de coupure, comme en LES, mais cette fois, l'échelle de coupure peut être choisie telle que les échelles supérieures ne détiennent pas nécessairement la majorité de l'énergie, comme il est requis en LES. Une modélisation statistique porte sur les échelles non résolues. La convergence en maillage de la solution instantanée n'est pas une propriété recherchée, mais idéalement, la somme de l'énergie résolue et modélisée devrait être indépendante du maillage (comme c'est le cas avec le modèle TPITM).

Le fait que, par application d'un opérateur linéaire aux équations de Navier-Stokes, on se ramène (sous l'hypothèse de commutation de l'opérateur avec la dérivation) à des équations modèles structurellement identiques quel que soit l'opérateur (Germano, 1992), conduit à utiliser un unique jeu d'équations pour décrire l'écoulement de manière hybride. Le transfert de l'énergie modélisée vers l'énergie résolue est réalisé en faisant varier l'échelle de coupure du modèle, d'une échelle intégrale de la turbulence (pour une description RANS) vers une échelle locale (pour une description LES). Les variations de cette échelle de coupure sont décrites en fonction du raffinement du maillage – VLES (Speziale, 1998), LNS (Batten *et al.*, 2002), DES (Spalart *et al.*, 1997), PITM (Schiestel et Dejoan, 2005), TPITM par exemple –, de la structure de l'écoulement résolu – SAS (Menter *et al.*, 2003), TRRANS (Travin *et al.*, 2004), DDES (Spalart *et al.*, 2006a) – ou de l'utilisateur – ZDES (Deck, 2005) par exemple. Ces indicateurs mesurent en particulier la distance à la paroi car c'est la zone de proche paroi qu'on cherche en priorité à résoudre en RANS. La distance à la paroi entre d'ailleurs parfois explicitement dans le modèle (DES, DDES, ZDES, pondération de modèles, etc...).

Certaines de ces modélisations hybrides sont devenues assez populaires, y compris dans l'industrie, et semblent répondre correctement aux objectifs pour lesquelles elles ont été conçues. Cependant, le phénomène de *zone grise* dans laquelle l'énergie détenue par les structures résolues n'est pas suffisante pour combler la chute brutale d'énergie modélisée est observé de manière récurrente. Lorsque la transition s'opère en proche paroi, ce phénomène fait apparaître une deuxième zone tampon, non physique, où la turbulence résolue se reconstruit. Les tests de Rajamani et Kim (2008) semblent indiquer que le formalisme hybride additif ne donne pas lieu à ce type de zone tampon artificielle. Des solutions plus pragmatiques, comme l'introduction d'un forçage des fluctuations par un terme source dans

cette zone (Piomelli *et al.*, 2003; Keating et Piomelli, 2006), ont néanmoins montré une certaine efficacité.

5.3 Grandes lignes du couplage RANS/LES zonal

Stratégie, motivation

Contrairement aux méthodes instationnaires globales, le couplage RANS/LES zonal est un problème multi-domaines où les descriptions différentes RANS et LES de l'écoulement sont adoptées dans les différents sous-domaines. Cette approche doit permettre de traiter des applications où l'incertitude sur les conditions de l'écoulement ou leurs variations sur des grandes échelles de temps conduit à considérer un domaine de calcul très étendu et un temps d'intégration très long. Ce type d'applications ne peut pas, d'un point de vue industriel, être aujourd'hui traitée par simulation des grandes échelles, en raison du coût numérique prohibitif de telles simulations. En revanche, si les instationnarités et les structures tridimensionnelles propres à la turbulence sont importantes à décrire – en particulier si elles sont susceptibles d'affecter significativement l'écoulement global – uniquement dans une zone du domaine limitée identifiée dans l'espace, on aimerait être en mesure d'utiliser la LES uniquement dans cette zone d'intérêt réduite, tandis que l'approche RANS, peu coûteuse numériquement, est employée dans tout le reste du domaine. Il s'agit donc de réaliser une LES fine « embarquée » dans une simulation globale moins détaillée (voir figure 5.1). C'est ce qui fait l'objet du couplage RANS/LES zonal.

Par rapport aux méthodes instationnaires globales, cette approche permet notamment de distinguer clairement quelles zones de l'écoulement sont décrites statistiquement (RANS) et quelles zones sont décrites par LES, puisque des maillages distincts sont utilisés dans les différentes zones. De plus, cela permet de choisir un modèle RANS spécifique (par exemple un modèle au second ordre si la rotation et la courbure sont importantes) et un modèle de sous-maille spécifique dans chaque sous-domaine.

Dans chaque sous-domaine, le « sous-problème » est fermé par un modèle de turbulence et des conditions aux limites. Le couplage RANS/LES zonal doit permettre aux différents sous-problèmes d'échanger les informations adéquates, pour que ceux-ci ne soient pas pratiquement indépendants les uns des autres, mais bien couplés, de manière à ce que le modèle global soit représentatif.

Couplage RANS/LES zonal, problème à facettes multiples

Dans un contexte zonal, le couplage RANS/LES porte en premier lieu sur

- (1) les faces de bord à l'interface entre un domaine RANS et un domaine LES, par l'intermédiaire des conditions aux limites.

En effet, les conditions au bord d'un sous-domaine doivent tenir compte de l'écoulement dans le sous-domaine en question mais également dans le(s) sous-domaine(s) voisin(s). Toutefois, les problèmes de conditions aux limites sont d'une difficulté telle qu'on peut également relaxer le problème en introduisant

- (2) une zone de recouvrement RANS/LES, dans laquelle un couplage par terme source est réalisé.

Même si l'interface entre les sous-domaines n'est plus uniquement surfacique mais étendue à un voisinage, on est bien dans le cadre d'un couplage RANS/LES zonal puisque les formalismes LES et RANS sont conservés inchangés dans les deux « couches » de la zone de recouvrement et que les deux sous-problèmes sont bien fermés mathématiquement.

D'autre part, la configuration de l'interface (surfacique ou volumique) entre les domaines RANS et LES peut être déterminante quant aux opérateurs de couplage à mettre en œuvre

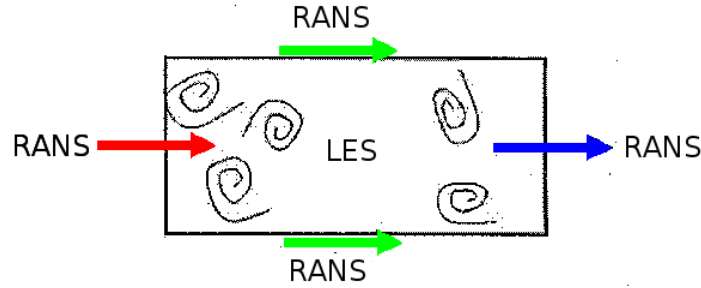


FIGURE 5.1 – Illustration du couplage RANS/LES zonal (adaptée de Fröhlich et von Terzi, 2008). La LES est embarquée dans un calcul RANS environnant. Les différentes couleurs de flèches sont associées à différentes configurations de l'interface RANS/LES, nécessitant la mise en œuvre de différents opérateurs de couplage.

pour un couplage efficace, sinon viable. Les configurations suivantes peuvent facilement être dégagées :

- (a) interface entre un domaine RANS situé en amont et un domaine LES situé en aval de l'interface (flèche rouge sur la figure 5.1),
- (b) interface entre un domaine RANS situé en aval et un domaine LES situé en amont de l'interface (flèche bleue),
- (c) interface RANS/LES tangentielle à l'écoulement (flèches vertes).

La configuration de l'interface est particulièrement importante pour le couplage surfacique par conditions aux limites car la conservation globale de la masse dans un domaine contraint sévèrement les conditions aux limites admissibles pour la vitesse et la pression. En particulier, si le flux de masse entrant dans un domaine est fixé explicitement à un bord par une condition aux limites de type Dirichlet pour la vitesse, le flux de masse sortant de ce même domaine ne peut pas être lui aussi imposé arbitrairement par un sous-domaine voisin (du moins sous l'hypothèse d'incompressibilité). Le flux sortant pourra en revanche plus facilement être déduit de la vitesse à l'intérieur du domaine, c'est-à-dire mettre en jeu une condition de type Neumann.

Le couplage volumique par terme source, n'impose pour sa part aucune contrainte physico-mathématique particulière. En revanche, ce type de force volumique n'ayant pas de réalité physique, elle pourra également revêtir différentes formes selon la tâche qui lui est dévolue, en fonction de la configuration de l'interface.

Pour un couplage aux faces de bord, les conditions aux limites des variables de l'écoulement devraient tenir compte des variables de l'écoulement dans le domaine voisin. Compte tenu des descriptions RANS et LES de l'écoulement, cette dernière contenant une information plus riche, en terme de contenu fréquentiel, que la première, les opérateurs de couplage RANS/LES sont des opérateurs (Quéméré et Sagaut, 2002) :

- (i) d'enrichissement de l'information lorsque l'information RANS est transmise au domaine LES,
- (ii) de restriction de l'information lorsque l'information LES est transmise au domaine RANS (filtrage).

Couplage aux faces de bord entre un domaine RANS amont et un domaine LES aval

Le couplage aux faces de bord entre un domaine RANS amont et un domaine LES aval se fait généralement en imposant une condition de Dirichlet pour la vitesse au bord du domaine LES. Dans le domaine RANS, le traitement le plus simple consiste à conserver la condition aux limites de vitesse inchangée par rapport à une condition de sortie classique

(Neumann homogène par exemple). La condition de Dirichlet au bord du domaine LES doit pour sa part être consistante avec la description LES de l'écoulement, c'est-à-dire instationnaire et locale, et les fluctuations de cette vitesse imposée doivent être représentatives de la turbulence de l'écoulement. Ce problème est celui des conditions aux limites d'entrée en LES et il se pose également en dehors du cadre du couplage RANS/LES zonal. Il fait l'objet de nombreuses propositions dans la littérature, dont le paragraphe 6.1.1 donnera un aperçu.

Dans le cadre d'un couplage zonal, les fluctuations imposées sont superposées à la vitesse moyenne issues du calcul RANS à l'interface et elles peuvent également dépendre des variables caractéristiques de la turbulence accessibles à partir du domaine RANS (tenseur de Reynolds, dissipation, etc...). Le chapitre 6 est consacré à l'utilisation d'une méthode de génération de fluctuations turbulentes synthétiques, la *Synthetic Eddy Method* de Jarrin *et al.* (2006), dans le cadre d'un couplage RANS/LES zonal et à son extension pour la génération de fluctuations synthétiques de température (ce dernier point n'est en revanche pas envisagé, à notre connaissance, dans la littérature).

Couplage aux faces de bord entre un domaine LES amont et un domaine RANS aval ou pour une interface tangentielle

Quéméré et Sagaut (2002) proposent un schéma général de couplage aux faces de bord pour des interfaces tangentielles ou lorsque le domaine RANS est en aval du domaine LES. Avec leur schéma, la vitesse imposée aux faces de bord du domaine RANS est une interpolation de la vitesse moyennée explicitement (en temps et/ou sur un voisinage) dans le domaine LES. La vitesse imposée aux faces de bord du domaine LES est la superposition d'une interpolation de la vitesse moyenne du domaine RANS et des fluctuations de vitesses existantes dans les cellules adjacentes au bord dans le domaine LES, ces fluctuations étant mises à l'échelle par un coefficient légèrement inférieur à un, déterminé empiriquement. Von Terzi et Fröhlich (2010) notent que cette procédure est très proche d'une condition aux limites convective¹ imposée aux fluctuations du domaine LES, dans la limite d'une vitesse de convection infinie. Dans ce cadre, les auteurs étudient l'influence de la vitesse de convection et du schéma de discrétisation en temps de la condition convective sur les fluctuations (la partie moyenne étant imposée à partir du domaine RANS, comme avec l'approche de Quéméré et Sagaut, 2002). Les auteurs montrent en outre que, sur un cas test de dune périodique, une condition convective sur la vitesse complète, et non pas seulement ses fluctuations, peut conduire, suivant la position de l'interface LES/RANS, à une réflexion importante dans le domaine LES, ce qui dégrade fortement la solution ou cause la divergence du calcul. Les auteurs obtiennent en revanche une solution satisfaisante lorsque la condition convective n'est appliquée qu'aux fluctuations de vitesse, que la vitesse de convection est évaluée localement en fonction de l'écoulement dans le domaine LES et que les flux de masses de part et d'autres de l'interface LES/RANS sont remis à l'échelle de manière à coïncider, localement ou globalement sur tout le bord. Le fait qu'une condition limite convective pour la vitesse ne garantit pas la conservation de la masse et que, par conséquent, celle-ci doit être corrigée explicitement, car la correction de pression ne s'applique pas aux faces de bord, est un fait relativement bien connu (voir Benteboula, 2006, par exemple). Les résultats de Von Terzi et Fröhlich (2010) semblent indiquer en outre que dans le cas d'un couplage RANS/LES, la condition convective devrait porter uniquement

1. On appelle condition aux limites convective (Orlanski, 1976) pour la variable φ une condition limite résultant de la discrétisation, au bord du domaine, de :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U_c \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = 0,$$

avec U_c une vitesse de convection à spécifier.

sur la fluctuation de vitesse et que la vitesse de convection devrait être évaluée localement en fonction de l'écoulement dans le domaine LES.

En général, les conditions limites pour les variables RANS caractéristiques de la turbulence, comme le tenseur de Reynolds, la dissipation ou la viscosité turbulente, sont du même type (Dirichlet et/ou Neumann) que celles de la vitesse moyenne. Pour cette configuration d'interface RANS/LES, le couplage doit donc permettre de prescrire, en fonction de l'écoulement dans le domaine LES, une condition limite Dirichlet pour ces variables turbulentes dans le domaine RANS. Ce point est envisagé par plusieurs auteurs, comme König *et al.* (2010) par exemple.

Couplage aux faces de bord pour la pression

Le couplage RANS/LES aux faces de bord pour la pression est assez peu envisagé dans la littérature. Ce point est toutefois discuté par Von Terzi et Fröhlich (2010) dans le cas d'un solveur prédicteur/correcteur pour les équations de Navier–Stokes incompressible. Les conditions aux limites de l'équation de Poisson sur la pression peuvent en théorie être déduites de celles de la vitesse (voir Sani *et al.*, 2006, par exemple) mais cela ne peut pas être exploité concrètement lorsque les étapes de prédiction et de correction sont découplées, de sorte que des conditions limites simplifiées, comme des conditions de Neumann homogènes, sont classiquement utilisées. L'usage de ces conditions limites dans le cadre RANS/LES zonal conduit au découplage complet de la pression dans chaque sous-domaine. Comme la pression n'est définie qu'à une constante près dans chaque sous-domaine, on peut envisager d'ajuster son niveau moyen de manière à ce qu'il soit continu de part et d'autre d'une interface. En revanche, dans le cas d'interfaces multiples, la continuité de la pression moyenne à toutes les interfaces ne peut pas être garantie de cette manière. Il faut également garder à l'esprit que, suivant le modèle de turbulence employé, le potentiel de pression « effective » résolu peut intégrer la trace du tenseur des contraintes turbulentes, ce dont il faut tenir compte si un couplage de la pression entre les sous-domaine est introduit.

Forçage volumique

Outre les couplages par conditions aux limites qu'on vient d'évoquer, de plus en plus d'attention est portée dans la littérature au couplage RANS/LES volumique sur une zone de recouvrement entre les domaines RANS et LES. Le couplage est alors réalisé par l'intermédiaire de forces « virtuelles », qui ne correspondent pas à un phénomène physique particulier, mais qui sont introduites comme terme source au bilan de quantité de mouvement dans le but de renforcer le couplage entre les domaines RANS et LES. Les forçages proposés jusqu'à présent portent uniquement sur l'équation de quantité de mouvement du domaine LES, sans couplage retour de la LES vers le modèle RANS. Le très bref aperçu qu'on donne ici de ces méthodes sera complété au paragraphe 7.1.2. En effet, le chapitre 7 est consacré au développement et à la validation d'une nouvelle méthode de couplage RANS/LES par forçage volumique.

Des forçages différents ont été proposés pour les différentes configurations d'interface RANS/LES. Spille-Kohoff et Kaltenbach (2001) proposent un forçage volumique employé au voisinage de quelques plans transverses à l'écoulement, en aval de l'entrée. Ce forçage est destiné à suppléer une méthode de condition d'entrée en LES, pour promouvoir l'apparition de fluctuations turbulentes en aval de l'entrée. Il a été appliqué par Keating *et al.* (2006) dans le cadre d'un couplage RANS/LES zonal, avec des résultats prometteurs. Il a été repris récemment par Laraufie *et al.* (2011) qui proposent plusieurs modifications du forçage et en étudient en détail l'influence des différents paramètres.

Schlüter *et al.* (2005) proposent un forçage volumique sur une zone de recouvrement RANS/LES située en amont d'une interface LES amont/RANS aval. Ce forçage tend à

pourvoir la LES forcée des moyennes du calcul RANS. Il permet ainsi aux auteurs de faire en sorte que le domaine RANS ait une influence sur le domaine LES amont, en dépit du fait que la condition aux bords du domaine LES, employée par les auteurs à cette interface, soit découplée du calcul RANS aval.

À notre connaissance, aucun forçage volumique n'a été appliqué pour un couplage RANS/LES tangentiel zonal. En revanche, certains forçages volumiques tangentiels, comme celui de Davidson et Billson (2006) – utilisés par les auteurs conjointement à un modèle instationnaire global, pour limiter la zone grise en proche paroi –, peuvent *a priori* être utilisés également dans un contexte zonal multi-domaine.

Enfin, notons que le forçage de Schlüter *et al.* (2005) a été appliqué par Benarafa *et al.* (2006) sur le volume complet d'un canal plan, dans le but de forcer la vitesse moyenne vers un profil réaliste en dépit d'un maillage relativement grossier dans le domaine LES. Considérant ce type d'application de forçage volumique, il convient de noter que dans une zone de recouvrement on ne réalise pas une « pure » LES puisque un terme source supplémentaire, qui n'existe pas dans le bilan de quantité de mouvement exacte, est pris en compte. La « pure » LES n'est recouverte qu'à l'extérieur de la zone de recouvrement. Dans la zone de forçage en revanche, la résolution est en quelque sorte hybride. Avec le forçage de Schlüter *et al.* (2005) par exemple, l'écoulement moyen est piloté par le calcul RANS « de fond ».

Formalisme alternatif dans le domaine LES

Dans le même sens que la remarque précédente, notons qu'une formulation alternative de couplage RANS/LES zonal est proposée par Labourasse et Sagaut (2002). Avec cette formulation, le domaine RANS s'étend sur l'ensemble du domaine fluide simulé tandis que le domaine LES n'en couvre qu'une partie, en superposition du calcul RANS (comme c'est le cas dans une zone de forçage). Avec cette formulation alternative, nommée NLDE (*Non-Linear Disturbance Equations*) les variables résolues dans le domaine LES ne sont pas les variables filtrées, comme pour une LES classique, mais uniquement leur écart par rapport aux moyennes RANS. Les tests de Labourasse et Sagaut (2002) révèlent que cette formulation alternative est plus robuste au déraffinement du maillage que la formulation LES classique.

Chapitre 6

Couplage aux faces de bord par une méthode de turbulence synthétique

Dans ce chapitre on s'intéresse au couplage RANS/LES zonal par conditions aux limites. Par rapport aux différentes configurations RANS/LES zonales qu'on peut rencontrer (voir figure 5.1 p. 127), on se limite au chaînage d'une simulation LES avec un calcul RANS dont le domaine est situé en amont de l'entrée du domaine LES. Le problème est alors étroitement lié au problème plus général des conditions au bord d'entrée d'une LES, et le couplage porte sur la manière de fixer les paramètres d'une méthode de condition d'entrée en fonction d'un calcul RANS.

Au paragraphe 6.1, on donne un aperçu des méthodes de condition d'entrée en LES, après quoi on introduit la méthode des structures synthétiques (SEM, Jarrin *et al.*, 2006) qui est utilisée dans ce chapitre. Au paragraphe 6.2, on valide le couplage entre cette méthode et un modèle RANS sur un cas test de canal plan. On étudie en particulier dans quelle mesure le couplage peut être amélioré en utilisant un modèle de fermeture au second ordre dans le domaine RANS. Au paragraphe 6.3, on valide le couplage dans un canal en rotation. Ce cas est particulièrement discriminant pour une méthode de condition d'entrée car l'instabilité Coriolis-cisaillement amortit la turbulence du côté en dépression du canal. On étudie l'influence du modèle utilisé dans le domaine RANS, en chaînant la SEM à un modèle RANS au second ordre et à un modèle de viscosité turbulente corrigé pour la rotation (voir paragraphe 4.2). Enfin, le paragraphe 6.4 est consacré au couplage RANS/LES pour un scalaire transporté (la température ici). Une généralisation de la SEM est proposée, puis validée dans un canal plan en convection forcée.

6.1 Conditions d'entrée pour la simulation des grandes échelles

Le problème des conditions d'entrée en simulation des grandes échelles (un problème quasiment identique se pose pour l'approche DNS) est un problème important, auquel la communauté scientifique s'est intéressée de plus en plus au cours de la dernière décennie, alors que la faisabilité de calcul LES pour un nombre croissant d'applications, y compris dans un contexte hybride zonal, est apparu plus clairement. On donne au paragraphe 6.1.1 un aperçu de ce problème et des solutions proposées dans la littérature (des revues bibliographiques détaillées récentes sont également proposées par Jarrin, 2007, Perret *et al.*, 2008 et Pamiès *et al.*, 2009). Au paragraphe 6.1.2, une méthode spécifique, celle des structures synthétiques (SEM, Jarrin *et al.*, 2006), qui est utilisée dans la suite du chapitre, est présentée.

6.1.1 Généralités

Comme pour beaucoup de problèmes de condition de bord libre (c'est-à-dire un bord qui n'existe pas dans le problème physique étudié), l'objectif d'une méthode de condition d'entrée en LES est de ne pas dénaturer le problème physique, en y introduisant des phénomènes parasites qui n'existeraient pas si le domaine fluide n'était pas tronqué. Le problème s'avère plus délicat en LES que pour l'approche RANS parce que les conditions d'entrée doivent être de même nature que la description LES de l'écoulement, c'est-à-dire instationnaires et locales. De plus, les fluctuations turbulentes imposées en entrée ne peuvent pas être fixées arbitrairement mais doivent être le plus proche possible de celle de l'écoulement qu'on souhaite simuler, notamment être pourvues de corrélations en deux points et en deux temps réalistes. C'est donc une part importante des degrés de libertés d'un écoulement turbulent qu'il faut s'imposer en entrée d'un domaine de calcul LES. Sauf dans des cas très particuliers, on n'est pas en mesure de fixer parfaitement ces degrés de liberté. On trouve alors, en aval de l'entrée, une zone « d'adaptation », dans laquelle la transition vers une « vrai » turbulence s'opère par effet non linéaire. Le problème des conditions d'entrée en LES vise principalement à réduire le plus possible cette zone d'adaptation, de manière à être en mesure de limiter le domaine simulé à la zone de l'écoulement qu'on souhaite effectivement décrire par simulation des grandes échelles.

Aujourd'hui la plupart des méthodes de condition d'entrée peuvent se classer dans trois catégories (Sagaut *et al.*, 2006) : les méthodes utilisant un écoulement précurseur, les méthodes à recyclage des fluctuations et les méthodes de turbulence synthétiques.

Les méthodes à *écoulement précurseur* sont des méthodes pour lesquelles les conditions d'entrée pour un écoulement donné sont calculées à partir d'une réalisation d'un autre écoulement, sauvegardée dans une base de données ou transmise dynamiquement au calcul LES principal. Ces données peuvent provenir d'une simulation numérique LES d'un écoulement avec des conditions de périodicité aux bords libres, comme un canal plan Kaltenbach *et al.*, 1999, par exemple, ou encore d'une expérience (Perret *et al.*, 2008). Un traitement spécifique de la base de données peut également être introduit, de manière à accroître la variété des écoulements qui peuvent utiliser la même base de données (Schlüter *et al.*, 2003) ou encore à réduire le volume de la base de données, en ne conservant que les plus grandes échelles (Johansson et Andersson, 2004) ou les plus basses fréquences (Li *et al.*, 2000) de l'écoulement précurseur, tandis que le reste du spectre à l'entrée du calcul LES principal est modélisé.

Contrairement aux méthodes précédentes, les méthodes à *recyclage des fluctuations* n'utilisent pas la réalisation d'un écoulement séparé pour définir les fluctuations en entrée d'un calcul principal. Les conditions d'entrée sont calculées à partir de la même simulation, en recyclant les fluctuations existantes ailleurs dans le domaine de calcul. Le principe de la méthode limite aujourd'hui son utilisation à des géométries assez simples, en particulier des écoulements de plaque plane (Lund *et al.*, 1998; Spalart *et al.*, 2006b). La position du plan de recyclage, de même que les formules de mise à échelle des fluctuations avant de les réintroduire en entrée, varient selon les auteurs (voir aussi Xiao *et al.*, 2003). La position du plan de recyclage est un paramètre important car il est reconnu que ces méthodes peuvent introduire une périodicité non physique (dont la période dépend de la distance entre le plan d'entrée et le plan de recyclage) dans l'écoulement (Nikitin, 2007), même si un déphasage spatial dans les directions homogènes (Spalart *et al.*, 2006b) peut permettre d'atténuer ce phénomène. Enfin, notons que ces méthodes demandent à initialiser l'écoulement de la manière la plus réaliste possible (Ferrante et Elghobashi, 2004), sans quoi un long temps de relaxation est nécessaire avant d'obtenir des conditions d'entrée réalistes (cette situation est analogue à celle rencontrée pour l'initialisation de calculs périodiques, voir p. 102).

Avec la dernière classe de méthodes, la vitesse en entrée du domaine n'est ni reconstruite à partir d'un autre écoulement précurseur, ni reconstruite à partir des fluctuations qu'on trouve dans le même écoulement mais en une position différente (recyclage), mais entièrement modélisée. Ce sont les méthodes dites de *turbulence synthétique*. Le plus souvent, le modèle pour la vitesse est construit de manière à reproduire des statistiques de bas ordres supposées connues, comme la vitesse moyenne ou le tenseur de Reynolds, et le caractère fluctuant du signal d'entrée est pris en compte grâce à l'introduction de variables aléatoires dans le modèle. En particulier, la décomposition suivante, proposée par Lund *et al.* (1998), est souvent utilisée :

$$\tilde{u}_i = \langle \tilde{u}_i \rangle^{in} + a_{ij}^{in} X_j, \quad (6.1)$$

avec $\langle \tilde{u}_i \rangle^{in}$ la vitesse moyenne et a_{ij}^{in} la factorisation de Cholesky du tenseur de Reynolds, données comme paramètres du modèle. La modélisation porte alors uniquement sur les variables aléatoires X_j , et dès que celles-ci sont indépendantes, centrées et réduites, la vitesse en entrée possède les corrélations d'ordre un et deux données en paramètres. Le fait de présenter des corrélations en un point correctes n'est pas suffisant pour obtenir une turbulence réaliste en entrée et une modélisation « simplistes » des variables X_j , comme des tirages aléatoires indépendants du temps et de l'espace (Lund *et al.*, 1998) conduit à de longue distance d'adaptation avant que la turbulence s'établisse en aval de l'entrée, si tant est que l'écoulement ne laminarise pas complètement (voir Jarrin *et al.*, 2006, par exemple). La modélisation de X_j doit donc reproduire également des corrélations en deux points et en deux temps « acceptables ». À ce titre, certaines méthodes avancées permettent de choisir également la forme des fonctions d'auto-corrélations en entrée (di Mare *et al.*, 2006). Comme on n'est pas toujours en mesure de décrire aussi précisément l'écoulement en entrée, la forme des fonctions d'auto-corrélations peut également être présupposée (Klein *et al.*, 2003) ou d'autres méthodes présentant leurs corrélations propres, plus ou moins réalistes, peuvent être utilisées. Parmi ces dernières méthodes, on trouve celle de Batten *et al.* (2004), utilisant une décomposition de la vitesse en mode de Fourier, celle de Perret *et al.* (2008), utilisant une décomposition en modes propres, ou encore la méthode des structures synthétiques (Jarrin *et al.*, 2006), décrite au paragraphe suivant.

6.1.2 Introduction de la méthode des structures synthétiques (SEM)

La méthode des structures synthétiques (*Synthetic Eddy Method*, SEM) est une méthode de turbulence synthétique proposée par Jarrin *et al.* (2006). Elle repose sur une description phénoménologique de la turbulence comme superposition d'un grand nombre N de structures cohérentes. En fournissant une échelle caractéristique σ des structures, la superposition de celles-ci permet de reconstruire un spectre continu d'énergie turbulente. En plus de leur taille σ , les structures synthétiques sont caractérisées par leur position, leur forme et le signe de leur contribution au champ fluctuant. La SEM consiste à générer ce type de structures dans un volume $\mathcal{B}$ entourant le bord d'entrée $\mathcal{S}$ du domaine LES et à les transporter par une vitesse d'advection $\mathbf{U}_c$ donnée, ce qui permet de définir en entrée du domaine un champ turbulent corrélé spatio-temporellement (figure 6.1).

Pamiès *et al.* (2009) ont utilisé la SEM et montré en quoi de simples considérations empiriques permettaient d'optimiser les paramètres de la méthode, en particulier la taille caractéristique σ , ce qui améliore l'efficacité de la méthode. Cette approche est également adoptée par Deck *et al.* (2011) et Laraufie *et al.* (2011), qui associent la SEM au modèle hybride RANS/LES global (au sens du nombre de système(s) vitesse/pression résolu(s), cf paragraphe 5.3) ZDES (et à un forçage volumique des fluctuations pour Laraufie *et al.*, 2011). Une version 2D de la SEM est également utilisée par Gourdain *et al.* (2011) pour simuler les transferts thermiques sur une grille d'aubes de turbine. Enfin Poletto *et al.*

(2011) proposent une variante de la SEM pour laquelle la contrainte de continuité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ est explicitement prise en compte dans la définition des fluctuations synthétiques, et non pas seulement dans le calcul, mais à ce jour, toutes les anisotropies de la turbulence ne peuvent pas être reproduites avec cette variante.

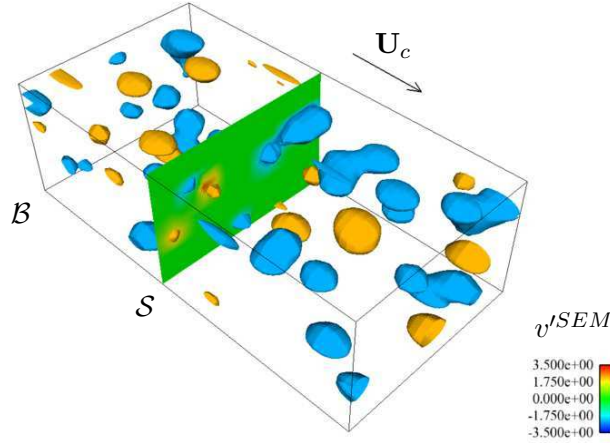


FIGURE 6.1 – Illustration du principe de la SEM. Les structures synthétiques sont matérialisées par des isosurfaces de vitesse normale à la paroi $v'^{SEM} = \pm 2.25$ dans un champ de turbulence synthétique SEM dans le domaine $\mathcal{B}$ ($N = 100$).

Mathématiquement, la SEM définit la vitesse en un point $\mathbf{x}$ de la surface d'entrée $\mathcal{S}$ du domaine par :

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x}) = \langle \tilde{u}_i(\mathbf{x}) \rangle^{in} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\lambda=1}^N a_{ij}^{in}(\mathbf{x}) \epsilon_j^\lambda f_{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda).$$

avec $\langle \tilde{u}_i(\mathbf{x}) \rangle^{in}$ la moyenne d'ensemble de la vitesse filtrée et a_{ij}^{in} la factorisation de Cholesky du tenseur de Reynolds résolu $\overline{u'_i u'_{j_r}}^{in}$, fournis comme paramètres d'entrée de la méthode.

En assimilant à la formule (6.1), la spécificité de la SEM est la définition des variables aléatoires (v.a.) X_j :

$$X_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\lambda=1}^N \epsilon_j^\lambda f_{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda), \quad (6.2)$$

qui traduit la physique de la méthode décrite plus haut. $\mathbf{x}^\lambda$ est la position de la structure λ . ϵ_j^λ et f_σ fixent le signe et l'amplitude de la contribution de la structure λ au champ fluctuant. En définissant $\mathbf{x}^\lambda$ comme une v.a. de probabilité uniforme dans $\mathcal{B}$ (densité de probabilité $p(\mathbf{x}^\lambda) = \frac{1}{|\mathcal{B}|}$), ϵ_j^λ comme des v.a. centrées réduites indépendantes et f_σ normée par $\|f_\sigma\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} f_\sigma^2 = |\mathcal{B}|$, on vérifie aisément que $\{X_j\}$ est bien une famille de v.a. centrées dont la matrice de covariance est l'identité (Jarrin, 2007). Grâce à la procédure (6.1), la SEM définit donc bien un champ turbulent dont la moyenne est $\langle \tilde{u}_i(\mathbf{x}) \rangle$ et le moment centré d'ordre deux est $\overline{u'_i u'_{j_r}}$.

Des choix spécifiques permettent ensuite de définir complètement la méthode. Les v.a. ϵ_j^λ sont choisies de probabilité uniforme dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ (cela permet de réduire l'intermittence du signal d'entrée, voir Jarrin, 2007), $\mathcal{B}$ est un domaine cartésien (une « boîte ») défini par :

$$\mathcal{B} = \prod_{i=1}^3 [\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} x_i - \sigma, \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} x_i + \sigma], \quad (6.3)$$

et f_σ est cartésienne à support compact :

$$f_{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda) = \sqrt{\frac{|\mathcal{B}|}{\sigma^3}} f\left(\frac{x - x^\lambda}{\sigma}\right) f\left(\frac{y - y^\lambda}{\sigma}\right) f\left(\frac{z - z^\lambda}{\sigma}\right), \quad (6.4)$$

avec f à support compact telle que $\int_{\mathbb{R}} f^2 = \int_{[-1,1]} f^2 = 1$. La fonction de forme retenue pour les applications pratiques présentées dans Jarrin *et al.* (2009) est une fonction « chapeau » :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}}(1 - |x|) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.5)$$

Enfin, la position des structures est actualisée à chaque pas de temps par la procédure suivante :

$$\mathbf{x}^\lambda(t + dt) = \mathbf{x}^\lambda(t) + \mathbf{U}_c dt,$$

avec $\mathbf{U}_c = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \int_{\mathcal{S}} \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle$ la vitesse débitante moyenne sur le plan d'entrée $\mathcal{S}$. Lorsqu'une structure est advectée en dehors du volume $\mathcal{B}$, celle-ci est régénérée de l'autre côté du volume, par exemple :

$$x_i^\lambda(t + dt) > \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} x_i + \sigma \quad \Rightarrow \quad x_i^\lambda(t + dt) = x_i^\lambda(t + dt) - (\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} x_i - \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} x_i + 2\sigma),$$

et les coordonnées différentes de i sont données par un nouveau tirage de probabilité uniforme. De cette manière, les positions $\mathbf{x}^\lambda$ sont bien identiquement distribuées (c'est-à-dire de probabilité uniforme) dans $\mathcal{B}$ à chaque instant.

Comme les autres méthodes de turbulence synthétique basées sur (6.1), la SEM admet pour paramètres d'entrée la vitesse moyenne $\langle \tilde{u}_i \rangle^{in}$ et les tensions de Reynolds résolues $\overline{u'_i u'_{j_r}}^{in}$. Les paramètres additionnels de la SEM sont donc le nombre N de structures et leur échelle caractéristique σ . Jarrin (2007) montre que le coefficient d'aplatissement des fluctuations synthétiques $u_i'^{SEM} \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij} X_j$, qui caractérise leur intermittence, s'écrit :

$$F_{u_j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle u_i'^{SEM4} \rangle}{\langle u_i'^{SEM2} \rangle^2} = 3 + \frac{1}{N} \left(A \frac{|\mathcal{B}|}{\sigma^3} + B \right),$$

avec A et B deux constantes. Pour une turbulence pleinement développée, on cherche une intermittence faible et donc N doit être choisi suffisamment grand. L'étude paramétrique de l'auteur montre que pour :

$$N > 0.5 \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{B}} \frac{|\mathcal{B}|}{\sigma^3(\mathbf{x})}, \quad (6.6)$$

ce paramètre n'a plus beaucoup d'influence sur l'écoulement en aval de l'entrée de turbulence synthétique. Le second paramètre spécifique à la SEM est l'échelle de longueur caractéristique des structures. Comme noté par Jarrin (2007), celle-ci est étroitement liée aux échelles intégrales L_{ij}^l (équation 2.22) de la turbulence synthétique. En particulier pour une turbulence homogène on a (pas de sommation sur i, j, l) :

$$L_{ij}^l = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} f \right)^2 \sigma. \quad (6.7)$$

Le paragraphe suivant montre comment ces paramètres sont fixés dans le cadre d'un couplage RANS/LES zonal.

6.2 Application au couplage RANS/LES zonal

On a vu au paragraphe 5.3 que le problème du couplage RANS/LES zonal est pluriel mais que l'une de ses facettes concerne la génération de conditions d'entrée turbulentes pour le domaine LES. D'un autre côté, le problème des conditions aux limites d'entrée en LES se pose y compris en dehors du cadre du couplage RANS/LES zonal. Les deux problèmes ne sont donc pas confondus mais partagent une plage commune. Actuellement, cette plage est assez largement occupée par les méthodes de turbulence synthétique car ces méthodes se prêtent particulièrement bien au couplage RANS/LES zonal.

En fait, les deux autres classes de méthodes de condition d'entrée – écoulement pré-curseur ou recyclage des fluctuations (paragraphe 6.1.1) – sont utilisées avec succès pour des calculs LES ou DNS très précis (Venema *et al.*, 2010; Lamballais et Lesieur, 2011, par exemple), mais elles présentent deux limitations principales en vue de leur application à des modélisations hybride RANS/LES zonales d'écoulements industriels : la lourdeur de la méthode, se traduisant par une intervention forte de l'utilisateur (surtout pour la première classe de méthodes, pour laquelle l'utilisateur doit construire lui-même sa base de données), et le spectre trop restreint de configurations d'écoulement qui peuvent être simulées avec ces méthodes (surtout les secondes, car on doit être en mesure de décrire une loi de similitude entre l'écoulement sur le plan de recyclage et l'écoulement sur le plan d'entrée). Quelques applications de chaînage RANS/LES zonal sont néanmoins reportées avec ces méthodes (Schlüter *et al.*, 2003 qui utilisent une base de données issue d'un écoulement pré-curseur, ou Xiao *et al.*, 2003 qui utilisent un plan de recyclage des fluctuations).

Au contraire, on a vu au paragraphe 6.1.1 que plusieurs méthodes de turbulence synthétique (Klein *et al.*, 2003; Batten *et al.*, 2004; Jarrin *et al.*, 2006) étaient entièrement déterminées par quelques statistiques de bas ordre, typiquement accessibles par un calcul RANS. En particulier, la décomposition (6.1) permet de fixer la vitesse moyenne $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle^{in}$ et les tensions de Reynolds résolues $\overline{u'_i u'_{j_r}}^{in}$ qu'on souhaite imposer en entrée. Il est donc clair que ces méthodes peuvent être utilisées pour réaliser l'interface entre un calcul RANS et un calcul LES dont les conditions d'entrée sont obtenues par une méthode de turbulence synthétique dont les moments sont donnés par le calcul RANS :

$$\langle \tilde{u}_i \rangle^{in} = \bar{u}_i, \quad (6.8)$$

$$\overline{u'_i u'_{j_r}}^{in} = \overline{u'_i u'_j}, \quad (6.9)$$

avec au membre de gauche des grandeurs évaluées à l'entrée du domaine LES et au membre de droite des grandeurs évaluées à la même position mais à partir des variables du calcul RANS. Notons que le couplage de la vitesse (6.8) pourrait être affiné en filtrant la vitesse moyenne RANS (dans le cas d'un filtrage explicite dans le domaine LES) de même que, dans le couplage des tensions de Reynolds (6.9), une prise en compte modélisée des contraintes de sous-maille pourrait être introduite. Cela n'a pas été le cas dans la suite et tous les calculs couplés présentés dans ce chapitre utilisent le schéma (6.8), (6.9).

Bien sûr, tous les couplages basés sur (6.1) et (6.8), (6.9) ne sont pas équivalents et le choix spécifique d'une méthode de fluctuation synthétique est déterminant dans le cadre d'un couplage RANS/LES zonal. En effet le traitement approprié, représentatif d'une turbulence bien développée, de la condition d'entrée du domaine LES peut permettre de limiter le domaine LES à la zone que l'on souhaite effectivement résoudre par simulation des grandes échelles. Cela peut s'avérer nécessaire en raison de contraintes physiques sur le domaine ou du coût numérique des simulations, potentiellement prohibitif si un domaine de calcul largement étendu autour de la zone d'intérêt doit être considéré. Par conséquent,

l'efficacité de la méthode de turbulence synthétique est assez largement garante du succès d'une stratégie de modélisation hybride RANS/LES zonale.

À ce titre, la méthode des structures synthétiques (SEM) décrite au paragraphe précédent a montré des résultats encourageants, y compris dans le cadre d'un couplage RANS/LES zonal (Jarrin *et al.*, 2009). En tant que méthode de turbulence synthétique basée sur (6.1), le couplage réside en premier lieu dans l'application du schéma (6.8), (6.9). Néanmoins, la SEM admet deux paramètres supplémentaires, le nombre de structures N et leur taille caractéristique σ , pour lesquels Jarrin *et al.* (2009) s'attachent à proposer une expression entièrement déterminée par des variables accessibles par un calcul RANS. L'expression proposée pour σ est basée sur l'échelle de longueur de la turbulence $k^{3/2}/\varepsilon$. Elle s'écrit :

$$\sigma = \min \left\{ \max \left\{ \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, \max\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\} \right\}, C_\kappa \delta \right\}, \quad (6.10)$$

avec $C_\kappa = 0.41$ la constante de Kármán et δ l'épaisseur de la couche limite de l'écoulement. Dans cette expression, la borne inférieure permet de s'assurer que les structures synthétiques peuvent être discrétisées par le maillage et la borne supérieure, qui correspond à la borne supérieure de la longueur de mélange dans une couche limite (voir Pope, 2006, p. 288), permet de prévenir le modèle contre une large déviation du comportement du modèle RANS par rapport au comportement universel attendu. L'estimation proposée pour le nombre de structures requis est :

$$N = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{B}} \frac{|\mathcal{B}|}{\sigma^3(\mathbf{x})}, \quad (6.11)$$

ce qui permet de s'assurer que le domaine $\mathcal{B}$ est « rempli » de structures synthétiques de taille σ .

Dans le paragraphe suivant, ce couplage est associé à un modèle RANS de viscosité turbulente (SST) pour un écoulement de canal plan, ce qui correspond à l'un des cas de validation présentés par Jarrin *et al.* (2009), après quoi le couplage avec un modèle de fermeture au second ordre (EB-RSM) est considéré. L'influence du maillage est brièvement discutée au paragraphe 6.2.3.

6.2.1 Validation du couplage de la SEM avec un modèle RANS au premier ordre

Dans ce paragraphe, on valide le couplage de la SEM avec un modèle RANS au premier ordre pour un écoulement de canal plan, ce qui correspond à l'un des cas de validation présenté par Jarrin *et al.* (2009). Les paramètres du calcul sont choisis très proches de ceux utilisés par les auteurs, de manière à vérifier notre implémentation de la méthode SEM et du couplage.

Méthodologie

Une simulation LES de référence est réalisée en imposant des conditions de périodicité dans les directions x et z . Cette simulation sert de référence puisque les conditions de périodicité permettent de simuler un domaine d'extension infinie dans les directions x et z d'homogénéité de l'écoulement. La turbulence y est donc pleinement développée. Un terme source dans l'équation de quantité de mouvement permet de fixer le nombre de Reynolds débitant, choisit à $Re_b = 7260$, le même que celui considéré par Jarrin *et al.* (2009). On obtient alors pour cette simulation LES périodique de référence $Re_\tau = 392.2$. Le raffinement du maillage est décrit dans le tableau 6.1. Il est tout à fait similaire à celui utilisé par Jarrin *et al.* (2009).

	présente	Jarrin (2007)
Re_b	7260	7259.5
$L_x \times L_y \times L_z$	$3\pi h \times 2h \times \pi h$	$2\pi h \times 2h \times \pi h$
$N_x \times N_y \times N_z$	$75 \times 48 \times 83$	$50 \times 46 \times 82$
modèle	Smagorinsky	Smagorinsky
Re_τ	392.2	395
$(\Delta x^+, \Delta z^+)$	(49.5, 14.8)	(50, 15)
$(\Delta y_{\min}^+, \Delta y_{\max}^+)$	(2.1, 40.9)	(1.9, 39)

TABLE 6.1 – Caractéristiques de la LES de référence (les valeurs correspondantes reportées par Jarrin (2007) sont indiquées).

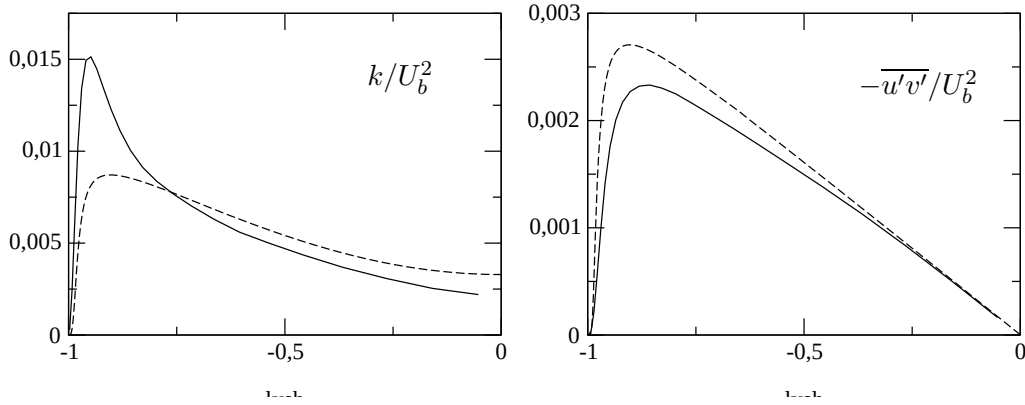


FIGURE 6.2 – Énergie cinétique turbulente et tensions de cisaillement turbulent. Canal plan, $Re_b = 7260$. — : LES périodique de référence ; - - - : modèle RANS SST (données d'entrée de la SEM).

Pour le calcul couplé RANS/LES zonal, un domaine LES, de taille $L_x \times L_y \times L_z = 10\pi h \times 2h \times \pi h$ et dans lequel le modèle de Smagorinsky est utilisé, est précédé en amont par un domaine RANS, utilisant le modèle de fermeture au premier ordre SST (le modèle utilisé par Jarrin *et al.*, 2009). Le nombre de Reynolds du calcul hybride est le même que celui du calcul LES de référence, $Re_b = 7260$, et le raffinement du maillage dans le domaine LES est identique ($N_x \times N_y \times N_z = 249 \times 48 \times 83$). Dans le domaine RANS, des conditions de périodicité sont imposées dans les directions x et z . Une fois que la solution RANS est convergée, la vitesse moyenne, le tenseur de Reynolds et la dissipation obtenus par le calcul SST sont transmis à la SEM en utilisant le couplage (6.8)–(6.11) avec $\delta = h$, pour imposer des conditions de Dirichlet en entrée du domaine LES. À la sortie du domaine LES, des conditions aux limites dites de sortie libre¹ sont appliquées. La figure 6.2 met en exergue l'écart qu'il existe entre les moments d'ordre deux $\overline{u'_i u'^{in}_{j_r}}$ de vitesse issus du calcul SST et fournis à la SEM, et les profils cibles $\overline{u'_i u'^{*}_{j_r}}$ dans le domaine LES (ceux du calcul périodique de référence). Il s'agit d'une situation typique susceptible de se présenter en appliquant

1. On appelle conditions de sortie libre des conditions de Neumann homogène pour la vitesse et les scalaires transportés. La condition au limite de pression au centre F d'une face de sortie appartenant à une cellule de centre I , s'écrit, à l'instant $n + 1$ (on suppose que le maillage est orthogonal) :

$$p_F^{(n+1)} = p_I^{(n)} + C,$$

avec l'incrément C calculé de manière à obtenir une pression nulle sur une face de sortie de référence choisie arbitrairement au début du calcul.

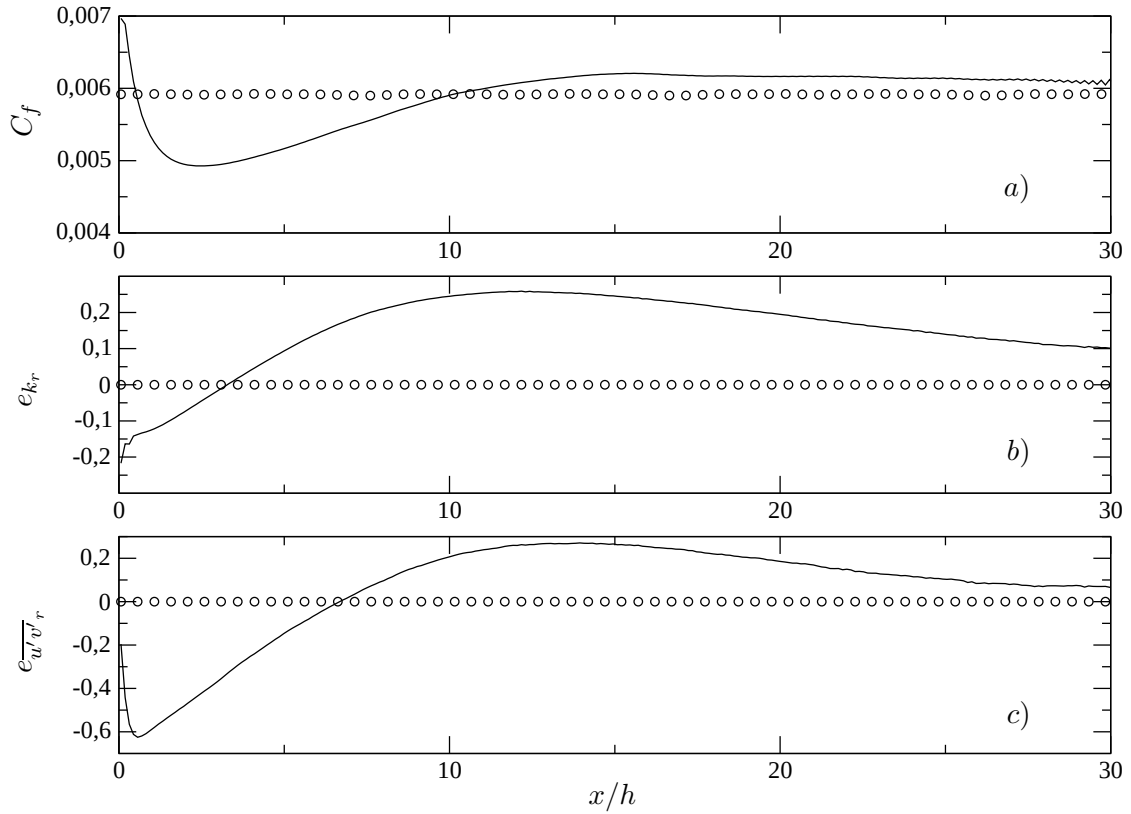


FIGURE 6.3 – Développement en aval de l'entrée a) du coefficient C_f , b) de la fonction d'erreur e_{k_r} et c) de la fonction d'erreur $e_{\overline{u'v'_r}}$. Canal plan, $Re_b = 7260$. Symboles : LES de référence ; ligne : calcul chaîné SST/Smagorinsky, domaine LES.

une modélisation hybride zonale à des écoulements complexes. La sensibilité du couplage à la précision du modèle utilisé dans le domaine RANS sera étudiée davantage dans la suite (paragraphe 6.3.2 notamment).

Validation

Pour juger du développement de la turbulence, en aval de l'entrée du domaine LES, vers son état pleinement développé, on utilisera principalement les indicateurs suivants. Premièrement, l'évolution longitudinale du coefficient de frottement pariétal :

$$C_f = \frac{u_\tau^2}{\frac{1}{2}U_b^2}, \quad (6.12)$$

nous renseigne sur le développement de la vitesse moyenne. La convergence des tensions de Reynolds résolues vers leur niveau cible – celui du calcul LES périodique de référence – est caractérisée par les fonctions d'erreur suivantes :

$$e_{k_r} = \frac{\int_{-h}^h (k_r - k_r^*)}{\int_{-h}^h k_r^*}, \quad e_{\overline{u'v'_r}} = \frac{\int_{-h}^h (|\overline{u'v'_r}| - |\overline{u'v'_r}^*|)}{\int_{-h}^h |\overline{u'v'_r}^*|}, \quad (6.13)$$

avec k_r^* et $\overline{u'v'_r}^*$ donnés par le calcul périodique de référence. Ces fonctions d'erreur sont utilisées par Jarrin (2007) et résultent d'une variante signée de celles proposées par Keating *et al.* (2004).

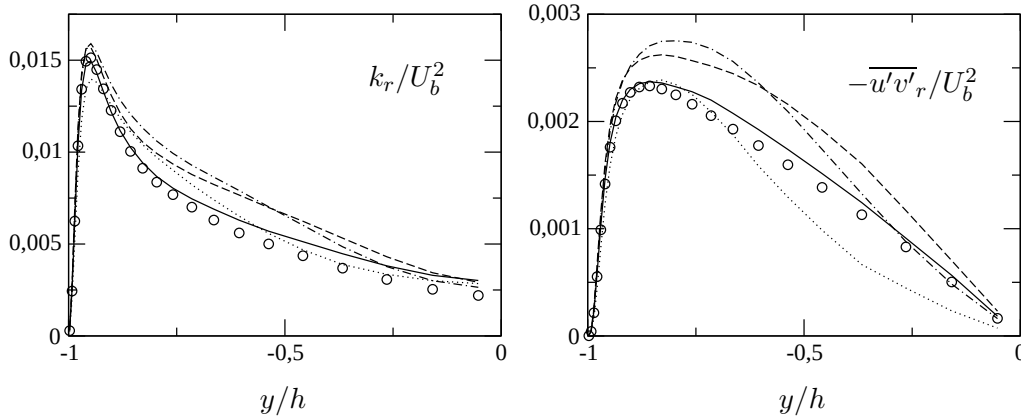


FIGURE 6.4 – Énergie cinétique turbulente et contrainte de cisaillement turbulent. Canal plan, $Re_b = 7260$. Symboles : LES périodique de référence ; lignes : calcul chaîné SST/Smagorinsky, domaine LES en $x/h = 5$ (· · · · ·), $x/h = 10$ (- · - · -), $x/h = 15$ (- - -), $x/h = 30$ (—).

Les trois indicateurs définis ci-dessus sont tracés sur la figure 6.3. Ils donnent un aperçu du comportement typique d'un calcul RANS/LES zonal couplé par la SEM (le temps d'intégration pour les moyennes est de $450h/U_b \approx 25h/u_\tau$ et la direction d'homogénéité z de l'écoulement, de même que sa symétrie par rapport au plan médian $y = 0$ sont utilisées pour améliorer la convergence). Partant de son niveau fourni par le calcul RANS, le coefficient de frottement connaît un amortissement rapide jusqu'à $x/h \approx 2.5$. L'amortissement de C_f n'excède néanmoins pas 20% de sa valeur cible. Jusqu'à $x/h \approx 13$, le frottement augmente jusqu'à atteindre un niveau à peu près constant, proche de son niveau pleinement développé, quoique légèrement surestimé (d'environ 5%). Au delà de $x/h \approx 15$, le coefficient C_f converge lentement vers son niveau développé, et celui-ci n'est pas encore tout à fait atteint à la sortie du domaine. Ce comportement de la turbulence, observable sur le moment d'ordre un, est partagé par d'autres méthodes de turbulence synthétique comme celle de Batten *et al.* (2004) (voir aussi Keating *et al.*, 2004), mais l'amortissement maximal du frottement et la distance après laquelle son erreur reste inférieure à 5% sont moins importants en utilisant la SEM pour le couplage (Jarrin *et al.*, 2009). Concernant le développement des tensions de Reynolds, la tension de cisaillement connaît, à proximité directe de l'entrée, un effondrement rapide et important. Ce n'est pas le cas de l'énergie cinétique turbulente. À cette différence près, l'évolution des contraintes normales et de cisaillement est ensuite similaire. Celles-ci augmentent sensiblement jusqu'à $x/h \approx 12.5$ environ. À cet endroit, les erreurs intégrales de k_r et de $\overline{u'v'_r}$ sont proches de 25%. Ces erreurs décroissent ensuite lentement vers leur niveau pleinement développé et à la fin du domaine, les erreurs intégrales e_{k_r} et $e_{\overline{u'v'_r}}$ sont inférieures à 10%. L'évolution des tensions de Reynolds décrite ci-dessus est visible également, mais de manière plus locale, sur la figure 6.4, où les profils dans la direction normale à la paroi des moments k_r et $\overline{u'v'_r}$ sont tracés en différentes positions longitudinales en aval de l'entrée. Cette figure correspond à la figure 3b proposée par Jarrin *et al.* (2009) (voir aussi figure 8.19b p. 171 de Jarrin, 2007) et le bon accord entre ces figures confirme que notre implémentation de la méthode SEM et du couplage est correcte. On voit que l'énergie turbulente k_r est surestimée dans le coeur de l'écoulement. Son pic en proche paroi est correctement reproduit dès le début du domaine LES. Ce n'est pas le cas de la tension de cisaillement dont le pic est encore largement surestimé pour $x/h = 15$. Pour $x/h = 30$, les tensions normales et de cisaillement fournies par le calcul chaîné SST/Smagorinsky *via* la SEM sont en très bon accord avec celles du calcul LES pleinement développé.

6.2.2 Couplage de la SEM avec un modèle RANS au second ordre. Influence de l'anisotropie

On valide maintenant le couplage zonal entre un modèle de fermeture RANS au second ordre et un modèle LES. Comme dans le paragraphe précédent, la méthode SEM est utilisée à l'interface entre le domaine RANS amont et le domaine LES aval. Comme un modèle RANS au second ordre permet d'obtenir un tenseur de Reynolds anisotrope (y compris en l'absence de déformation moyenne c'est-à-dire $\partial \overline{u_i}/\partial x_i = 0$ pour chaque i), il convient de mesurer comment et en quoi le couplage avec la SEM peut tirer parti de cette information supplémentaire.

Formulation anisotrope du couplage

Bien sûr, une première prise en compte de l'anisotropie du tenseur de Reynolds intervient grâce à la mise à l'échelle des fluctuations synthétiques (équation 6.1). Une seconde prise en compte de l'anisotropie peut facilement être intégrée à la SEM en définissant non plus une unique échelle caractéristique σ des structures synthétiques mais trois échelles caractéristiques σ_i , correspondant aux trois directions x , y et z . En effet, les formulations (6.3) de la « boîte virtuelle » $\mathcal{B}$ dans laquelle évoluent les structures synthétiques et (6.4) de la fonction f_σ qui définit leur contribution au champ turbulent sont « cartésiennes », c'est-à-dire qu'elle peuvent s'écrire comme un produit dans chaque direction :

$$\mathcal{B} = \prod_{i=1}^3 \mathcal{B}_i, \quad \text{avec} \quad \mathcal{B}_i = [\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} x_i - \sigma_i, \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} x_i + \sigma_i], \quad (6.14)$$

et :

$$f_{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda) = \prod_{i=1}^3 \sqrt{\frac{|\mathcal{B}_i|}{\sigma_i}} f\left(\frac{x_i - x_i^\lambda}{\sigma_i}\right). \quad (6.15)$$

Alors qu'on a utilisé précédemment des échelles isotropes $\sigma_i = \sigma$, le couplage de la SEM avec un modèle RANS au second ordre offre la possibilité de lever cette restriction. Dans ce cas l'intégration des fonctions d'auto-corrélation conduit à (pas de sommation sur i, j) :

$$L_{ij}^l = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} f \right)^2 \sigma_l.$$

La formulation anisotrope de la SEM permet donc, lorsque la turbulence est anisotrope, d'obtenir des échelles intégrales différentes dans les trois directions. En revanche ces échelles sont toujours identiques pour toutes les corrélations doubles $\overline{u'_i u'_j}$.

2. On peut vérifier que les corrélations doubles de vitesse en deux points sont données par :

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = R_{ij} \prod_{l=1}^3 f * f\left(\frac{r_l}{\sigma_l}\right),$$

dans un champ de vitesse SEM homogène (voir l'équation 4.28 p.75 de Jarrin, 2007). On en déduit :

$$\begin{aligned} L_{ij}^l &= \sigma_l \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx \right)^2}_{=1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} f(x_l) f(x_l + R_l) dx_l dR_l = \frac{1}{2} \sigma_l \int_{\mathbb{R}} f(x_l) \left[\int_{\mathbb{R}} f(x_l + R_l) dR_l \right] dx_l \\ &= \frac{1}{2} \sigma_l \int_{\mathbb{R}} f(x_l) \left[\int_{\mathbb{R}} f(R'_l) dR'_l \right] dx_l = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} f \right)^2 \sigma_l, \end{aligned}$$

par utilisation successive du changement de variable $R_l = r_l/\sigma_l$, de la symétrie du produit de convolution $f * f$ et du changement de variable $R'_l = R_l + x_l$.

Tâchons maintenant de définir les échelles caractéristiques σ_i . Une généralisation immédiate de l'expression (6.10) est de la forme :

$$\sigma_i \sim \frac{(\frac{3}{2}\overline{u_i'^2})^{3/2}}{\varepsilon}. \quad (6.16)$$

Dans le cas d'une turbulence isotrope, $\overline{u_i'^2} = \frac{2}{3}k$ pour chaque i , on retrouve bien $\sigma_i = \sigma \sim k^{3/2}/\varepsilon$. Par rapport à la formule (6.10), il reste à définir les bornes inférieures et supérieures de σ_i . En reprenant l'argument que les structures synthétiques doivent être discrétisées par le maillage, on peut proposer comme borne inférieure les pas d'espace Δ_i dans chaque direction. Notons que c'est en très proche paroi, où les échelles σ_i définies par (6.16) tendent vers zéro, que ces bornes inférieures peuvent être atteintes. Il est donc intéressant de définir celles-ci de manière anisotrope, de manière à être en mesure de reproduire les structures allongées dans la direction de l'écoulement, caractéristiques de la turbulence en proche paroi. Il est plus délicat de donner une formulation anisotrope à la borne supérieure des échelles σ_i puisque celle introduite dans l'expression (6.10) est basée sur les comportements *universels* de k et ε en couche limite. Toutefois, l'anisotropie des structures turbulentes est moins prononcée loin des parois, à l'extérieur des couches limites, où la borne supérieure des échelles σ_i peut être atteinte. On conservera donc une borne supérieure isotrope pour les échelles caractéristiques σ_i . Finalement, l'expression proposée pour celles-ci est donc :

$$\sigma_i = \min \left\{ \max \left\{ \frac{(\frac{3}{2}\overline{u_i'^2})^{3/2}}{\varepsilon}, \Delta_i \right\}, C_\kappa \delta \right\}. \quad (6.17)$$

C'est cette formulation des échelles caractéristiques des structures synthétiques SEM qui est validée dans la suite. Une formulation alternative des échelles σ_i , sans dépendance explicite à l'épaisseur de couche limite δ , est également proposée en annexe G.

Effets de l'anisotropie

Deux prises en compte distinctes de l'anisotropie peuvent donc être intégrées au couplage zonal entre un modèle RANS au second ordre et la méthode SEM de génération de conditions aux limites d'entrée d'une simulation LES : l'anisotropie de la mise à l'échelle des fluctuations synthétiques et l'anisotropie des échelles de longueur caractéristiques des structures synthétiques. On propose ici d'analyser ces effets distinctement, selon que le tenseur de Reynolds utilisé dans la formule de mise à l'échelle (6.1) est « isotropisé » ($\overline{u_r'^2}^{in} = \overline{v_r'^2}^{in} = \overline{w_r'^2}^{in} = \frac{2}{3}k$) ou non par rapport à celui fourni par le calcul RANS amont, ou encore que les échelles de longueur σ_i soient isotropes ($\sigma_i = \sigma$ avec σ donné par l'équation 6.10) ou anisotropes (σ_i donnés par l'équation 6.17). Quatre couplages possibles sont donc testés :

- le couplage ISIL (*Isotropic Scaling, Isotropic Length scales*),
- le couplage ISAL (*Isotropic Scaling, Anisotropic Length scales*),
- le couplage ASIL (*Anisotropic Scaling, Isotropic Length scales*),
- le couplage ASAL (*Anisotropic Scaling, Anisotropic Length scales*).

Le nombre de Reynolds des calculs couplés est $Re_b = 7000$. Dans le domaine RANS, périodique dans les directions x et z et avec un terme source de quantité de mouvement dans la direction x , c'est le modèle de fermeture au second ordre EB-RSM qui est utilisé. Dans le domaine LES, c'est le modèle de Smagorinsky. Ce domaine, périodique dans la direction z , est de taille $L_x \times L_y \times L_z = 10\pi h \times 2h \times \pi h$ et il est discrétisé par $N_x \times N_y \times N_z = 243 \times 86 \times 81$ cellules.³ La partie LES des calculs couplés est comparée à un calcul LES périodique de

3. Le maillage utilisé n'est pas le même qu'au paragraphe précédent (6.2.1). Celui-ci était construit spécifiquement pour être le plus proche possible de celui utilisé par Jarrin (2007). Le maillage utilisé dans

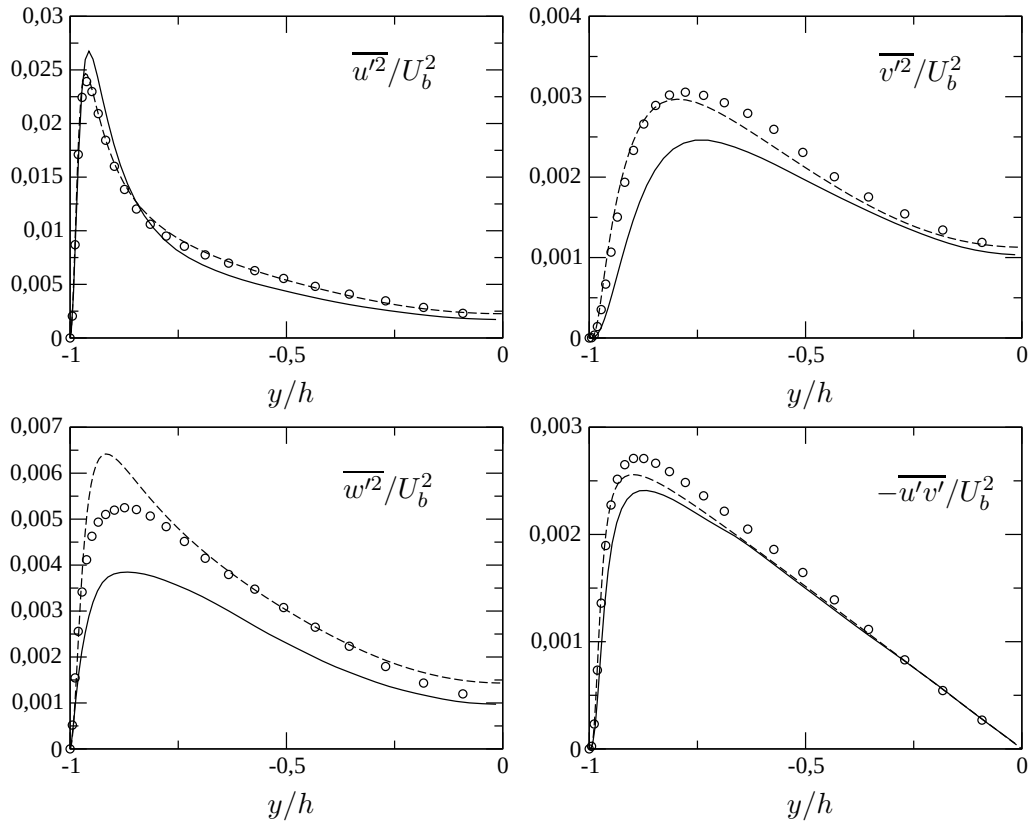


FIGURE 6.5 – Contraintes de Reynolds. Canal plan, $Re_b = 7000$. $\circ$: LES hautement résolue (Lamballais *et al.*, 1998) ; — : LES périodique de référence ; - - - : modèle RANS EB-RSM (données d'entrée de la SEM).

référence utilisant le même raffinement ($N_x \times N_y \times N_z = 73 \times 86 \times 81$ pour un domaine de taille $L_x \times L_y \times L_z = 3\pi h \times 2h \times \pi h$). Pour ce calcul, on obtient $Re_\tau = 387.3$ et on a alors ($\Delta x^+ = 50, \Delta z^+ = 15$) et ($\Delta y_{\min}^+ = 2.1, \Delta y_{\max}^+ = 12$) pour le maillage. Les contraintes de Reynolds obtenues pour ce calcul périodique sont tracées sur la figure 6.5. Bien sûr, on constate toujours des écarts entre ces statistiques cibles pour le domaine LES des calculs couplés et les statistiques d'entrée fournis par l'EB-RSM, mais ces écarts sont réduits par rapport à un couplage avec un modèle RANS au premier ordre. Enfin, la définition (6.17) des échelles de longueur se prêtant mal à une estimation de type (6.11) du nombre de structures requises, celle-ci étant fortement dépendante de la borne inférieure des échelles de longueurs, le nombre de structures a été fixé à $N = 10000$ (ce nombre vérifie largement – d'un facteur six environ – le critère 6.6 au delà duquel la solution est globalement indépendante du nombre de structures si celles-ci sont isotropes).

L'évolution en aval de l'entrée des indicateurs C_f , e_{k_r} et $e_{\overline{u'v'}}_{\tau}$ dans le domaine LES des calculs couplés sont tracés sur la figure 6.6, pour les quatre couplages ISIL, ISAL, ASIL, ASAL. On distingue bien l'effet de l'anisotropie des échelles de longueur de celui de l'anisotropie du tenseur de mise à l'échelle des fluctuations, car on observe sur chacun des indicateurs que les différences entre les résultats ISIL et ISAL sont analogues à celles entre les résultats ASIL et ASAL et elles montrent l'effet de l'anisotropie des échelles de longueur. De même, les écarts entre les résultats ISIL et ASIL sont analogues à ceux entre

ce paragraphe correspond à un raffinement plus important au centre du canal dans la direction normale à la paroi. L'effet de ce raffinement supplémentaire sur la solution est discuté au paragraphe 6.2.3.

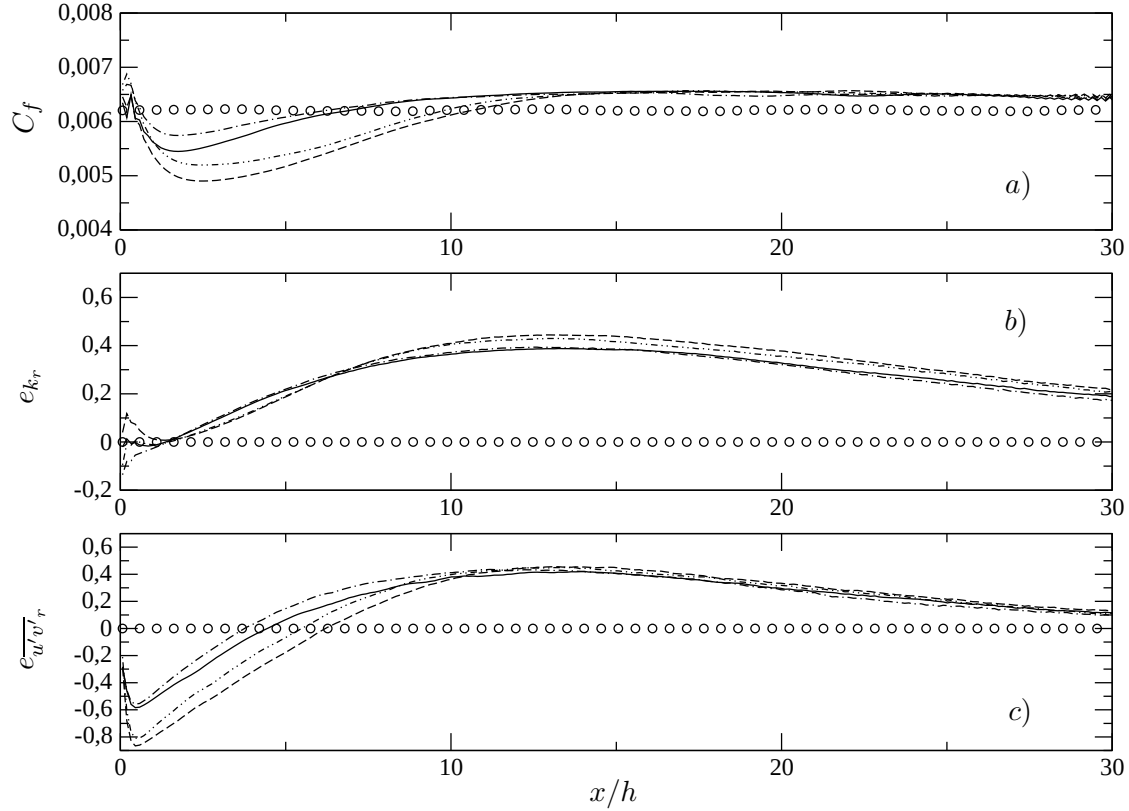


FIGURE 6.6 – Développement en aval de l'entrée a) du coefficient C_f , b) de la fonction d'erreur e_{k_r} et c) de la fonction d'erreur $\overline{e_{u'u'r}}$. Influence de l'anisotropie du couplage avec la SEM : couplage ISIL (---), ISAL (-.-.-), ASIL (- - -), ASAL (—). Canal plan, $Re_b = 7000$. Symboles : LES périodique de référence, lignes : calculs chaînés EB-RSM/Smagorinsky, domaine LES.

les résultats ISAL et ASAL et ils montrent l'effet de l'anisotropie du tenseur de mise à l'échelle.

C'est l'anisotropie des échelles de longueur qui a le plus d'incidence. Elle permet de réduire l'amortissement maximal du coefficient de frottement d'environ 50% par rapport à sa valeur cible C_f^* (celle donnée par le calcul périodique pleinement développé). La distance nécessaire pour obtenir le frottement correct C_f^* à $\pm 5\%$ d'erreur près est réduite d'autant. De manière corrélée, l'anisotropie des échelles de longueur a un impact bénéfique sur le développement de la tension de cisaillement, principalement grâce à la réduction importante de l'effondrement de cette contrainte directement en aval de l'entrée. La position où l'erreur atteint son maximum, autour de $x/h = 12.5$ et son régime de décroissance vers son niveau développé dans la suite ne sont en revanche pratiquement pas modifiés. L'anisotropie des échelles de longueur profite également à l'évolution des contraintes normales, car le surplus d'énergie généré par la turbulence synthétique SEM, et lentement dissipé dans la seconde partie du canal, est moins important. Ces résultats sont cohérents avec ceux de Pamiès *et al.* (2009) qui, en dehors du cadre du couplage RANS/LES zonal, montrent que la SEM est plus efficace lorsque les échelles caractéristiques des structures sont anisotropes et qu'elles varient en fonction de la distance à la paroi, ce que le couplage présent reproduit.

Même si elle est moins importante, l'anisotropie du tenseur de Reynolds $\overline{u_i' u_{j_r}'}^{in}$, utilisé pour la mise à l'échelle des fluctuations synthétiques, a elle aussi une incidence sur la qualité du couplage zonal, mais contrairement à ce qu'on aurait pu attendre, le développement de

l'écoulement dans le domaine LES est facilité en « isotropisant » le tenseur de Reynolds fourni par le modèle RANS au second ordre. Cet effet est sensible sur le développement du coefficient de frottement et la contrainte de cisaillement turbulent, mais il est pratiquement nul en ce qui concerne l'énergie cinétique turbulente k_r . Cela peut s'expliquer par le fait qu'en fournissant un tenseur de Reynolds isotrope, on a tendance à surestimer la tension normale à la paroi $\overline{v'^2}$ (au détriment de la tension longitudinale $\overline{u'^2}$), ce qui augmente la production de contrainte de cisaillement turbulent $P_{12} = -\overline{v'^2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$. Après son effondrement rapide à l'entrée, la contrainte $\overline{u'v'}$ se reconstruit alors plus facilement, ce qui permet d'obtenir plus rapidement le frottement pariétal correct. L'intérêt de favoriser la contrainte turbulente normale à la paroi pour faciliter le développement spatial de la turbulence a récemment été pointé par Laraufie *et al.* (2011), dans le cadre d'un forçage volumique. Il apparaissait également dans les tests préliminaires de Jarrin (2007).

Dans des applications complexes d'écoulements tridimensionnels, où toutes les composantes du tenseur de Reynolds agissent sur le champ moyen, on peut toutefois émettre une réserve sur l'intérêt de surestimer, dans l'étape de mise à l'échelle des fluctuations synthétiques, une composante normale au détriment d'une autre, en utilisant un tenseur isotrope. De même, dans un canal plan en rotation transverse, on a vu que la composante $\overline{v'^2}$ devient prépondérante devant les autres composantes normales à partir d'un certain nombre de rotation ; la procédure d'isotropisation du tenseur $\overline{u'_i u'_j}^{in}$ serait alors contre-productive. Au contraire, l'intérêt d'utiliser des échelles de longueur anisotropes semble moins dépendant de l'écoulement. Le couplage de la SEM avec un modèle RANS au second ordre qu'on préconise donc pour des applications générales est le couplage ASAL. Bien qu'il ne semble pas optimal dans le cas spécifique d'un canal plan sans rotation, c'est celui qui a été mis en œuvre systématiquement dans le suite du document.

Comparaison entre un couplage avec un modèle RANS au premier ordre et un couplage avec un modèle RANS au second ordre

La formulation du couplage de la SEM avec un modèle RANS de fermeture au premier ordre correspond à la méthode SEM décrite au paragraphe 6.17 et au couplage correspondant aux équations (6.8)–(6.10). Pour un couplage avec un modèle RANS de fermeture au second ordre, les équations (6.3), (6.4) sont reformulées suivant (6.14), (6.15) et la définition (6.10) est remplacée par (6.17) pour le couplage. En utilisant ces formulations, on présente ici une première étude de sensibilité au modèle RANS utilisé en amont sur développement de l'écoulement dans le domaine LES. Le cas traité est celui décrit plus haut dans ce paragraphe (canal plan à $Re_b = 7000$, maillage de $243 \times 86 \times 81$ cellules dans le domaine LES, voir p. 142). Dans le domaine RANS, on utilise soit le modèle de fermeture au premier ordre SST, soit le modèle de fermeture au second ordre EB–RSM. Dans le domaine LES, on utilise le modèle de Smagorinsky.

L'évolution du coefficient de frottement dans le domaine LES est tracée sur la figure 6.7a. Son développement est plus satisfaisant lorsque c'est le modèle au second ordre EB–RSM qui est utilisé en amont. Cela permet d'obtenir un meilleur accord pour la vitesse moyenne lorsque l'on se place à proximité du plan d'entrée (graphe 6.7b). En revanche, l'influence du modèle RANS en amont est limitée à partir de $x/h > 10$. On retrouve alors un processus plus lent et quasiment indépendant du modèle RANS amont, de dissipation de la turbulence synthétique et de sa transformation en « vraie » turbulence, pleinement développée.

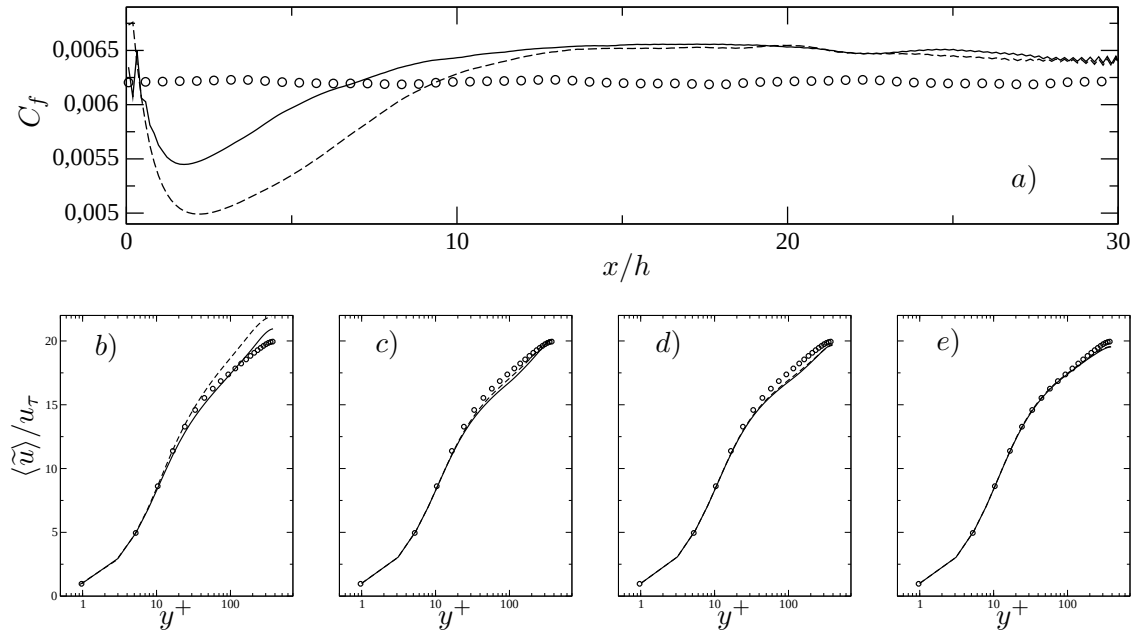


FIGURE 6.7 – a) Développement du coefficient de frottement C_f en aval de l'entrée et b) profil de vitesse moyenne en $x/h = 5$, c) $x/h = 10$, d) $x/h = 15$, e) $x/h = 30$. Canal plan, $Re_b = 7000$. Symboles : LES périodique de référence, lignes : calculs chaînés EB-RSM/Smagorinsky (—) et SST/Smagorinsky (---), domaine LES.

6.2.3 Remarque sur l'influence du maillage

Ici, on met en évidence que le développement de la solution dans le domaine LES est assez dépendant du maillage. Pour illustrer cela, on présente deux calculs couplés sur deux maillages de raffinement différents dans le domaine LES. Les caractéristiques principales des maillages sont résumées dans le tableau 6.2. Les deux maillages diffèrent surtout par leur raffinement dans la direction normale à la paroi, au centre du canal. Les autres caractéristiques des maillages sont quasiment identiques. Lorsque l'écoulement est pleinement développé, l'influence de ce paramètre est d'ailleurs assez modéré, ce dont la figure 6.8 rend compte. En revanche, dans le cadre d'un couplage RANS/LES, la figure 6.9 montre que le développement spatial de l'écoulement dans le domaine LES dépend

	Maillage A	Maillage B
LES périodique de référence		
Re_b	7260	7260
$L_x \times L_y \times L_z$	$3\pi h \times 2h \times \pi h$	$3\pi h \times 2h \times \pi h$
$N_x \times N_y \times N_z$	$75 \times 48 \times 83$	$75 \times 92 \times 83$
Re_τ	392.2	401.5
$(\Delta x^+, \Delta z^+)$	(49.5, 14.8)	(50.6, 15.2)
$(\Delta y_{\min}^+, \Delta y_{\max}^+)$	(2.1, 40.9)	(2.3, 10.7)
Calcul couplé, domaine LES		
Re_b	7260	7260
$L_x \times L_y \times L_z$	$10\pi h \times 2h \times \pi h$	$10\pi h \times 2h \times \pi h$
$N_x \times N_y \times N_z$	$249 \times 48 \times 83$	$249 \times 92 \times 83$

TABLE 6.2 – Caractéristiques des maillages.

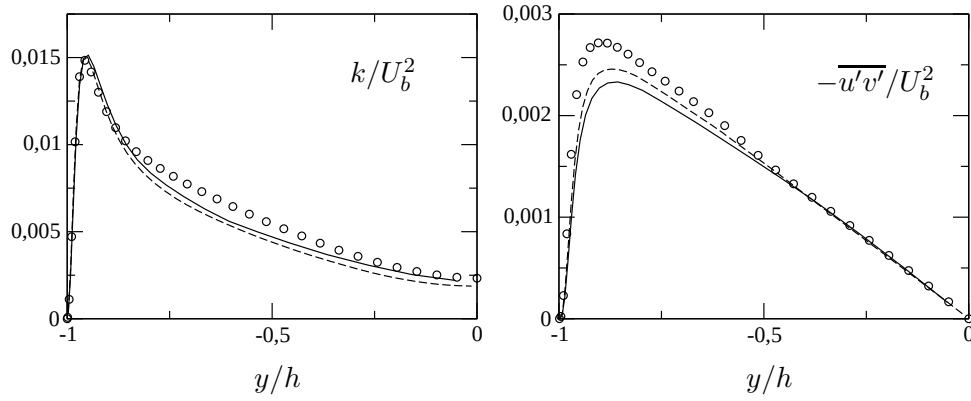


FIGURE 6.8 – Énergie cinétique turbulente et tensions de cisaillement turbulent. Canal plan. Symboles : DNS, $Re_\tau = 395$ (Moser *et al.*, 1999); lignes : LES périodique de référence, $Re_b = 7260$, sur maillage A (—), maillage B (---).

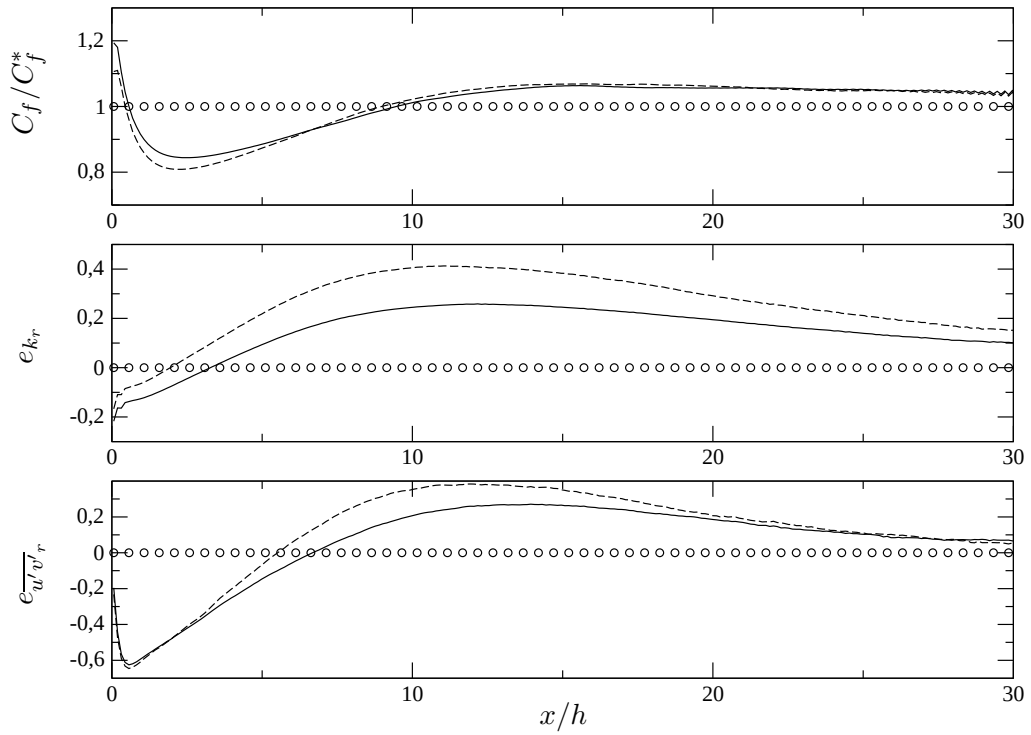


FIGURE 6.9 – Développement de la turbulence dans le domaine LES, calculs chaînés SST/Smagorinsky. Influence du maillage dans le domaine LES. Canal plan, $Re_b = 7260$. $\circ$: LES périodiques de référence; — : maillage A; --- : maillage B.

sensiblement du maillage utilisé. Avec le maillage B, plus fin au cœur de l'écoulement, les erreurs sont amplifiées, en particulier pour les composantes normales du tenseur de Reynolds. Cela est dû au fait que la SEM a tendance à générer un surplus d'énergie en aval de l'entrée (voir figures 6.3 et 6.6). Un maillage plus grossier permet de dissiper davantage cette énergie, ce qui évite son accumulation.

On voit donc que la dépendance au maillage d'un calcul LES est d'autant plus importante lorsque l'écoulement se développe spatialement car ce paramètre influe non seulement sur

l'état de la turbulence lorsqu'elle est pleinement développée, mais aussi sur la manière dont elle se développe. Avec la SEM, le maillage doit être optimisé pour être suffisamment lâche au cœur de l'écoulement, pour faciliter le développement spatial de la turbulence, et suffisamment fin dans son ensemble pour que l'écoulement pleinement développé soit correctement résolu. Les maillages utilisés pour les calculs SEM présentés dans ce chapitre ne sont pas systématiquement optimisés selon ce critère.

6.3 Couplage aux faces de bord pour les écoulements en rotation

On évalue maintenant le couplage RANS/LES zonal avec la SEM pour des écoulements en rotation. On discute d'abord de la formulation de la méthode dans un référentiel non galiléen quelconque. Ensuite, le couplage est validé dans un canal en rotation transverse et on étudie en particulier l'influence du modèle utilisé dans le domaine RANS.

6.3.1 Formulation de la SEM dans un référentiel tournant

On rappelle qu'avec la SEM, la vitesse à l'entrée d'une simulation LES est définie par :

$$\tilde{\mathbf{u}}^{SEM} = \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle + \mathbf{u}'^{SEM},$$

avec :

$$u_i'^{SEM} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\lambda=1}^N a_{ij}(\mathbf{x}) \epsilon_j^\lambda f_{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda). \quad (6.18)$$

Les variables intervenant dans cette expression ont été explicitées au paragraphe (6.1.2). Quel que soit le référentiel dans lequel on se place, il est clair que cette expression permet de définir des fluctuations de vitesse dont les propriétés statistiques, telles que $\langle \mathbf{u}'^{SEM} \rangle = 0$, $\langle u_i'^{SEM} u_j'^{SEM} \rangle = a_{ik} a_{jk}$ ou encore la relation (6.7) sur les échelles intégrales, sont les mêmes que celles démontrées par Jarrin (2007) dans un référentiel galiléen. En fait, ces propriétés dépendent des *définitions* qu'on se donne pour $\mathcal{B}$, $\mathbf{x}^\lambda, \epsilon^\lambda$ ou f_σ . Si ces variables sont définies à partir des coordonnées $\mathbf{x}^*$ d'un référentiel $\mathcal{R}^*$, elles sont vraies dans le référentiel $\mathcal{R}^*$, qu'il soit galiléen ou non. Il semble donc tout à fait naturel d'utiliser la formule (6.18) – avec les définitions données au paragraphe 6.1.2 – quel que soit le référentiel d'étude.

Mentionnons toutefois que, contrairement à la vitesse fluctuante exacte $\mathbf{u}'$, la fluctuation synthétique $\mathbf{u}'^{SEM}$ n'est pas un vecteur objectif. En particulier, la factorisation de Cholesky a_{ij} est une opération matricielle qui dépend des vecteurs de base du référentiel ; ce n'est pas une opération objective. Il est en effet immédiat de vérifier que pour $\mathbf{a}$ triangulaire inférieure et $\mathbf{Q}$ une matrice de rotation, $\mathbf{QaQ}^T$ n'est pas triangulaire inférieure dans le cas général, et ne définit donc pas une factorisation de Cholesky. D'autre part, même si l'on a $\sigma^* = \sigma$ (ce qui n'est pas exactement le cas avec la définition 6.10, dont la borne inférieure dépend des coordonnées), la fonction $f_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda)$ définie par (6.4) n'est pas non plus objective car elle ne dépend pas seulement de la différence $\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda$, objective, mais de ses projections sur chaque axe du repère, qui varient en fonction du référentiel. En revanche, les propriétés intégrales de f_σ ne dépendent pas du repère spécifique choisi et on a bien $\int_{\mathbb{R}^3} f_{\sigma^*}^2 = |\mathcal{B}^*|$. D'autre part, l'uniformité de la distribution des positions des structures $\mathbf{x}^\lambda$ est préservée par un mouvement de rotation solide : $p(\mathbf{x}^\lambda) = 1/|\mathcal{B}^*|$. Enfin, le vecteur de tirage aléatoire ϵ^λ est indépendant de l'espace et du temps. Il est donc objectif :

$$\epsilon^{\lambda*} = \mathbf{Q}\epsilon, \quad (6.19)$$

et il est facile de vérifier que la matrice de covariance de $\epsilon^{\lambda*}$ est bien l'identité :

$$\langle \epsilon_i^{\lambda*} \epsilon_j^{\lambda*} \rangle = \langle Q_{im} \epsilon_m^\lambda Q_{jn} \epsilon_n^\lambda \rangle = Q_{im} Q_{jn} \underbrace{\langle \epsilon_m^\lambda \epsilon_n^\lambda \rangle}_{=\delta_{mn}} = \delta_{ij}.$$

Puisque les fluctuations synthétiques SEM dépendent du référentiel d'étude, la démarche proposée plus haut, visant à utiliser la même formulation pour $\mathbf{u}'^{SEM}$ quel que soit le référentiel, ne respecte pas le principe de modélisation (I) (p. 45), c'est-à-dire le respect des propriétés de transformation d'un modèle par changement de référentiel. Le respect strict de ce principe n'est pas indispensable ici puisque ce sont les propriétés statistiques de la turbulence synthétique qui sont importantes et non pas l'évolution particulière de chaque structure synthétique.

On pourrait néanmoins formuler les fluctuations synthétiques de manière à respecter le principe de modélisation (I). Pour ce faire, il suffit d'exprimer, dans un référentiel quelconque, les fluctuations $\mathbf{u}'^{SEM}$ telles qu'elles sont définies dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. On note $\mathbf{A}$ la factorisation de Cholesky de $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^* \mathbf{Q}$ le tenseur de Reynolds mesuré dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. On a par ailleurs $\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda = \mathbf{Q}^T (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{\lambda*})$. Exprimées dans la base du référentiel $\mathcal{R}^*$ (multiplication à gauche par $\mathbf{Q}$), les fluctuations synthétiques $(\mathbf{u}'^{SEM})^*$ s'écrivent donc (on utilise également 6.19) :

$$(u_i'^{SEM})^* = Q_{im} A_{mn} Q_{jn} X_j^*, \quad X_j^* = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\lambda=1}^N \epsilon_j^{\lambda*} f_{\sigma^*}(\mathbf{Q}^T (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{\lambda*})), \quad (6.20)$$

avec $\epsilon_j^{\lambda*}$ défini par (6.19) et les axes du repère de $\mathcal{R}$ utilisés pour les projections dans f_{σ^*} . On a bien :

$$\langle X_i^* X_j^* \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\lambda=1}^N \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{|\mathcal{B}^*|} \int_{\mathbb{R}^3} f_{\sigma^*}(\mathbf{x}^*) d\mathbf{x}^* \underbrace{\langle \epsilon_i^{\lambda*} \epsilon_j^{\mu*} \rangle}_{=\delta_{ij} \delta_{\lambda\mu}} = \delta_{ij},$$

la matrice de covariance de $\{X_j^*\}$ est donc bien l'identité. D'autres part,

$$\mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T (\mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T)^T = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^* \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{R}^*,$$

le facteur $Q_{im} A_{mn} Q_{jn}$ permet donc de normaliser la famille $\{X_j^*\}$ de manière à obtenir le tenseur de Reynolds cible $\mathbf{R}^*$ dans le référentiel $\mathcal{R}^*$.

La formulation (6.20) permet de produire exactement le même signal turbulent d'entrée dans tous les référentiels, et on a vérifié que le tenseur de Reynolds était préservé dans tous les référentiels. Cette formulation demande néanmoins des opérations supplémentaires par rapport à la formule (6.18), sans que les propriétés statistiques de la turbulence synthétiques s'en trouvent améliorées. Elle ne sera donc pas utilisée dans la suite, et dans ce paragraphe on a simplement utilisé la formulation (6.18), indépendamment du référentiel d'étude.

6.3.2 Validation du couplage zonal dans un canal en rotation. Influence du modèle RANS amont.

On valide maintenant le couplage RANS/LES zonal utilisant la SEM pour des écoulements en rotation. Le cas test est celui d'un canal plan en rotation transverse, au nombre de Reynolds $Re_b = 7000$ et pour deux nombres de rotation, $Ro_b = 1/6$ et $Ro_b = 0.5$. Le domaine LES qu'on considère pour les calculs couplés est de taille $L_x \times L_y \times L_z = 20\pi h \times 2h \times \pi h$. Le même maillage, composé de $N_x \times N_y \times N_z = 497 \times 48 \times 83$ hexaèdres, est utilisé pour les deux taux de rotation. Pour les raisons évoquées à la fin de ce

paragraphe, un léger décentrement (1% d'*upwind*) a été introduit dans le schéma de discrétisation, initialement centré, dans le domaine LES. Les solutions de référence, obtenues avec le modèle de Smagorinsky et sur un domaine périodique maillé avec le même raffinement, sont présentées sur les graphes de la figure 6.10 et les nombres de Reynolds de frottement obtenus sont reportés dans le tableau 6.3.

	$Ro_b = 1/6$		$Ro_b = 0.5$	
	(p)	(s)	(p)	(s)
Re_τ	429.7	244.6	431.8	236.0
Δx^+	54.0	30.7	54.3	29.7
$\Delta y_{\min}^+$	2.3	1.3	2.4	1.3
Δz^+	16.3	9.3	16.3	8.9

TABLE 6.3 – Nombre de Reynolds de frottement et raffinement du maillage pour les calculs périodiques de référence.

Le modèle de Smagorinsky a été choisi dans le domaine LES par souci de simplicité et parce qu'on a vu au paragraphe 4.3.5 que le modèle spécifique utilisé pour des simulations des grandes échelles d'écoulements en rotation a une influence moins importante que dans le cas de la modélisation statistique RANS. Pour le domaine RANS, dans lequel le modèle spécifique utilisé est déterminant, les deux niveaux de fermeture discutés aux paragraphes 4.2.4 et 4.2.5 sont envisagés : la fermeture au premier ordre avec un modèle corrigé pour la rotation, et la fermeture au second ordre. Dans le premier cas notre choix s'est porté sur le modèle $k - \omega$ SST avec la correction rotation/courbure de Spalart et Shur, 1997 (SS-SST). Ce modèle permet de résoudre correctement la vitesse moyenne et la tension de cisaillement turbulent sur ce cas test et il est relativement populaire parmi les modèles de viscosité turbulente corrigés pour la rotation. Dans le second cas, on a utilisé le modèle EB-RSM, validé pour les écoulements en rotation au paragraphe 4.2.4.2. Les solutions obtenues avec ces deux modèles dans le domaine RANS des calculs hybrides sont tracées sur la figure 6.10. C'est en particulier sur les contraintes normales que l'EB-RSM permet d'obtenir une meilleure cohérence entre les données d'entrée de la SEM, fournies par le calcul RANS, et les statistiques de l'écoulement pleinement développé dans le domaine LES. Enfin, rappelons que pour le chaînage avec le modèle de viscosité turbulente SS-

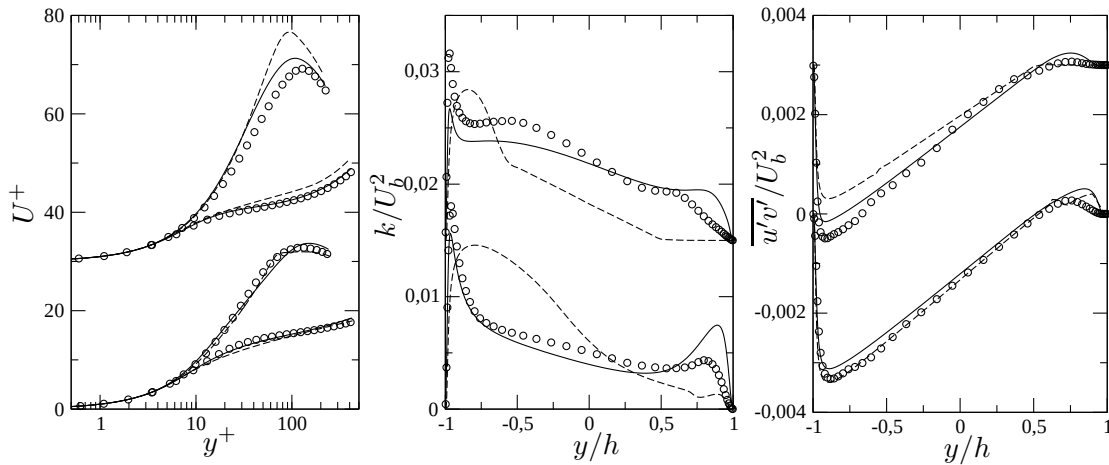


FIGURE 6.10 – Statistiques d'entrée fournies à la SEM (lignes) et statistiques cibles dans le domaine LES (symboles). Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 1/6, 0.5$ (profils décalés vers le haut). $\circ$: LES périodique de référence ; --- : SS-SST ; — : EB-RSM.

SST, les structures synthétiques SEM sont caractérisées par l'échelle de longueur σ (6.10) tandis que pour le chaînage avec l'EB-RSM, la taille des structures est différente dans chaque direction (équation 6.17). Le nombre de structures synthétiques est quant à lui fixé à $N = 10000$.

Les figures 6.11 ($Ro_b = 1/6$) et 6.12 ($Ro_b = 0.5$) contiennent plusieurs graphes permettant de juger du développement de la solution dans le domaine LES. Celui-ci est sensiblement affecté par la rotation du canal. Le transitoire vers l'écoulement pleinement développé dépend fortement du modèle RANS couplé en amont mais aussi du taux de rotation du canal.

En fait c'est du côté en dépression du canal (côté (s), pour $y > 0$) que l'on observe cette sensibilité. Du côté en pression (côté (p), $y < 0$), le développement de l'écoulement est très satisfaisant, pour les deux taux de rotation et pour les deux couplages. En particulier, en $x/h = 5$, la vitesse en coordonnées de paroi est déjà très proche de son profil pleinement développé de ce côté du canal.

Le développement de l'écoulement est plus délicat du côté en dépression, où l'écoulement a tendance à laminariser. Cela est lié au fait que la SEM est moins efficace lorsque l'écoulement est faiblement turbulent, ce qui apparaît dans les calculs de Jarrin *et al.* (2009) en canal plan à différents nombre de Reynolds. Contrairement à ce que l'on observe à la paroi en pression, ou dans un canal sans rotation, le coefficient de frottement C_f à la paroi en dépression est surestimé dans la zone de développement de l'écoulement. Le modèle RANS auquel est chaîné la SEM a ici une grande influence. Pour $Ro_b = 1/6$, on observe que la convergence du côté en dépression est globalement plus satisfaisante avec le modèle SS-SST qu'avec l'EB-RSM dans le domaine RANS. À l'inverse, pour $Ro_b = 0.5$, la convergence est sensiblement meilleure en utilisant l'EB-RSM dans le domaine RANS. Les deux cas « critiques » – le chaînage avec l'EB-RSM pour $Ro_b = 1/6$ et le chaînage avec le modèle SS-SST pour $Ro_b = 0.5$ – se traduisent par une surestimation substantielle du frottement et des contraintes de Reynolds en aval de l'entrée de ce côté du canal, ce second effet tendant à s'amortir plus rapidement que le premier.

Néanmoins, les erreurs observées en aval de l'entrée du côté en dépression du domaine LES sont beaucoup plus importantes pour le chaînage avec le modèle SS-SST à $Ro_b = 0.5$ que pour le chaînage avec le modèle EB-RSM à $Ro_b = 1/6$. Dans ce second cas, la surestimation maximale du coefficient C_f est limitée à 35% de sa valeur cible, en $x/h \approx 5$, et ce coefficient retrouve une valeur proche de son niveau développé à partir de $x/h = 20$. Les erreurs intégrales e_{k_r} et $e_{\overline{u'v'_r}}$ sont quant à elles d'un niveau similaire à celui rencontré dans un canal plan sans rotation (voir figure 6.9, maillage A). Pour le chaînage avec le modèle SS-SST à $Ro_b = 0.5$, le coefficient de frottement à la paroi en dépression est surestimé d'un facteur 2.5 en $x/h = 5$ et ce n'est qu'en $x/h = 40$ que le profil de vitesse moyenne s'ajuste à son niveau développé. Le développement de la solution dans le domaine LES souffre donc des estimations relativement grossières du tenseur de Reynolds et de la dissipation fournies par un modèle de viscosité turbulente corrigé pour la rotation. Notamment l'annulation complète des contraintes de Reynolds du côté en dépression, prédites de manière erronée par le modèle SS-SST à $Ro_b = 0.5$, semble particulièrement dommageable pour le chaînage, mais paradoxalement, cela se traduit par une activité beaucoup trop importante de la turbulence synthétique au début du domaine LES. Au contraire, l'EB-RSM prédit correctement la prédominance de la contrainte normale $\overline{v'^2}$ à ce nombre de rotation (voir figure 4.6 p. 68), ce qui, en favorisant la production P_{12} , pourrait expliquer la rapidité avec laquelle le chaînage entre l'EB-RSM et la SEM permet d'obtenir un écoulement pleinement développé dans le domaine LES. On observe en effet que les profils de vitesse moyenne, d'énergie turbulente et de contrainte de cisaillement turbulent sont proches des profils de référence dès $x/h = 5$ dans ce cas.

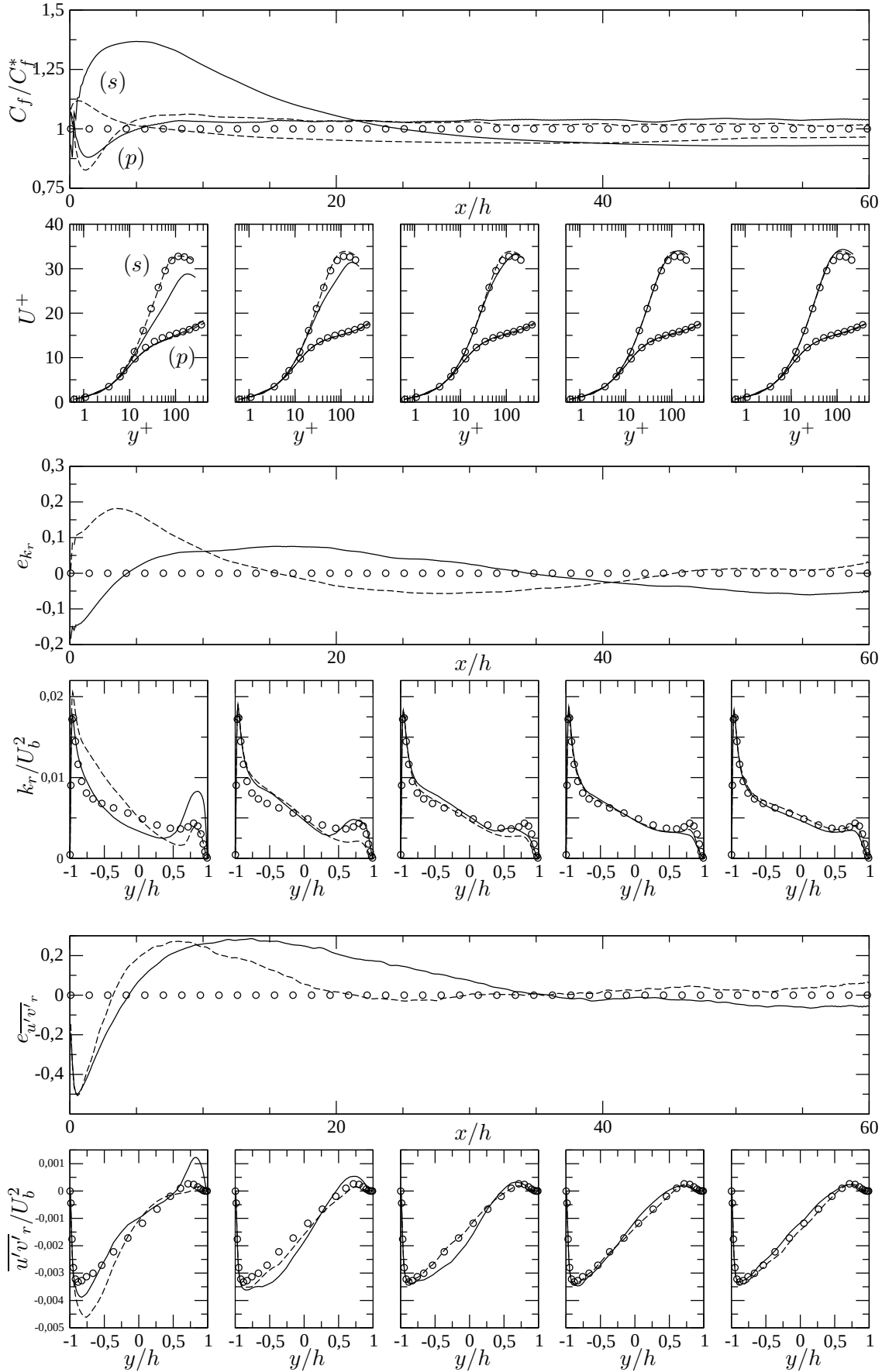
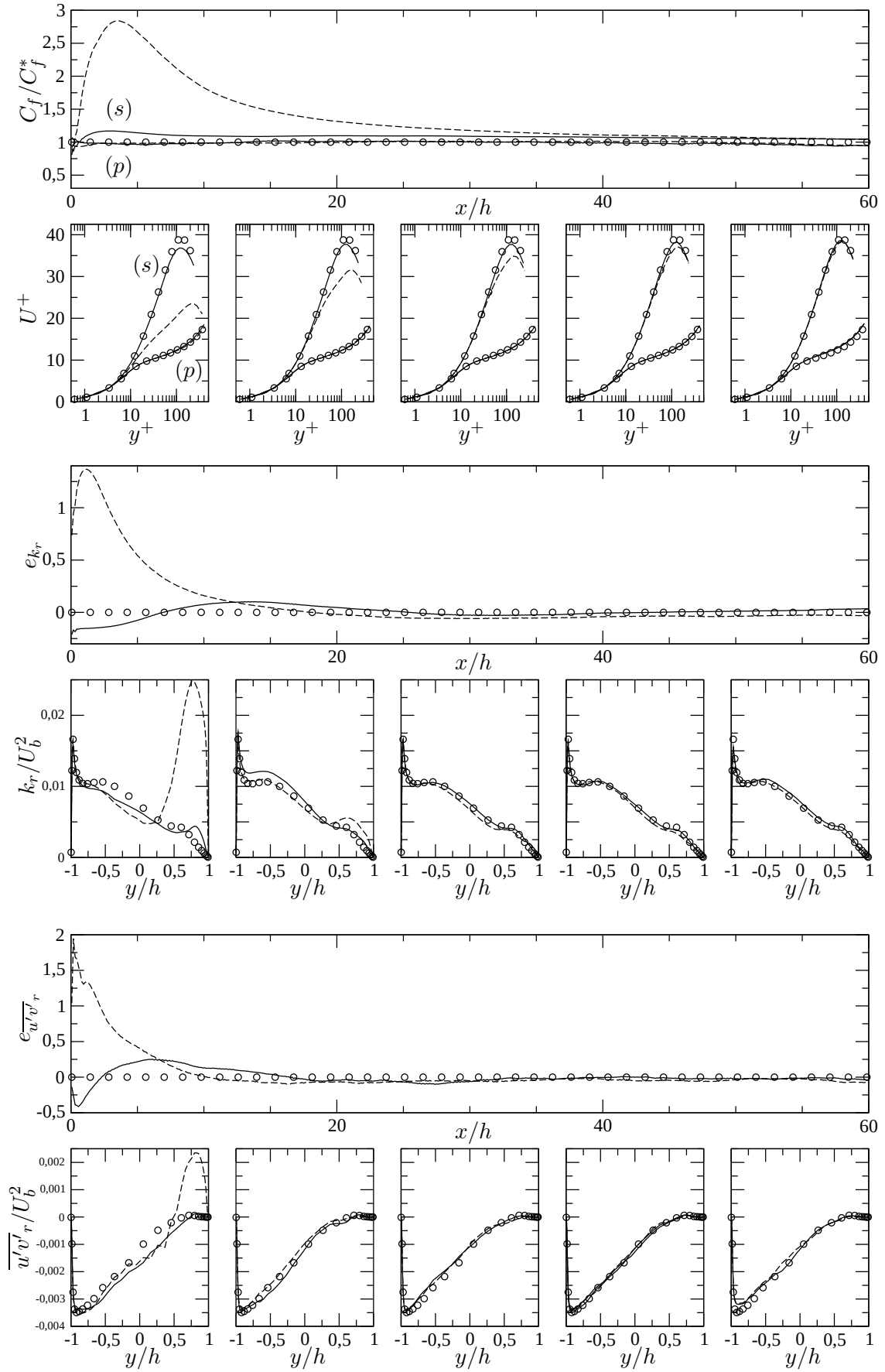


FIGURE 6.11 – Développement de l'écoulement dans le domaine LES de calculs chaînés RANS/LES. Influence du modèle RANS. Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 1/6$. Symboles : LES périodique de référence; lignes : calculs chaînés SS-SST/Smagorinsky (---) et EB-RSM/Smagorinsky (—). Les profils transverses de U^+ , k_r et $\overline{u'v'_r}$ sont extraits, de gauche à droite, en $x/h = 5, 15, 25, 40, 60$.

FIGURE 6.12 – Même intitulé que la figure 6.11 pour $Ro_b = 0.5$.

Il apparaît donc que dans le cadre d’une modélisation hybride zonal pour des écoulements en rotation, les modèles RANS de viscosité turbulente corrigés pour la rotation montrent leurs limites et qu’il est important d’utiliser dans le domaine RANS un modèle de fermeture au second ordre précis comme l’EB-RSM. Bien que la SEM soit relativement robuste à la précision des données d’entrée qui lui sont fournies, la méthode tire quand même parti d’une bonne estimation non seulement de la vitesse moyenne mais aussi de l’ensemble du tenseur de Reynolds et de la dissipation, qui interviennent dans la formulation du couplage.

Remarques sur le schéma numérique de convection

Par défaut dans le logiciel *Code_Saturne*, pour une simulation des grandes échelles, le schéma d’approximation des flux convectifs est *centré* (voir annexe A). Alors que ce schéma centré d’ordre deux a pu être utilisé sans problème de stabilité pour tous les calculs LES présentés précédemment, ce choix a conduit à l’apparition d’oscillations parasites, en particulier à la paroi en pression, pour les calculs de canaux tournants présentés dans ce paragraphe. Cela est peut-être lié au fait d’atteindre la limite de stabilité du schéma centré, en raison de flux convectifs trop importants. On a également observé que la solution des calculs LES se développant spatialement (c’est-à-dire avec une entrée et une sortie) se trouve alors largement dépendante de la taille du domaine simulé. Sur la figure 6.13, le coefficient de frottement est tracé lorsque le domaine en aval de l’interface RANS/LES est de taille $L_x = 20\pi$ ou $L_x = 10\pi$. On voit qu’avec le schéma centré ($\beta = 0$, voir équation A.9), le coefficient de frottement à la paroi en pression montre un comportement « étrange » et qu’il ne coïncide pas entre les deux simulations. À la paroi en dépression, ce phénomène est largement atténué mais on observe toujours une dépendance à la taille du domaine simulé.

Quelques tests visant à discriminer la provenance de ce problème ont été menés. La méthode de condition aux limites SEM n’est pas mise en cause puisque le problème est également apparu avec la méthode de Batten *et al.* (2004) et avec la méthode de forçage volumique décrite dans le chapitre suivant. L’implication partielle (sous-itérations) du terme de Coriolis n’a pas apporté d’amélioration non plus.

En revanche, l’introduction d’un léger décentrement dans le schéma de discrétisation des flux convectifs ($\beta > 0$ dans l’équation A.9) permet, au prix d’une diffusion numérique supplémentaire, de supprimer les oscillations parasites et de retrouver une solution quasiment indépendante de la taille du domaine. Sur la figure 6.13, on a tracé les coefficients de frottement obtenus pour $\beta = 0.01$ (1% d’*upwind*) et $\beta = 0.05$. Il apparaît que $\beta = 0.01$ est suffisant pour corriger le problème (en revanche, $\beta = 10^{-3}$ était insuffisant) tout en limitant la diffusivité numérique du schéma. Les calculs couplés de même que les calculs périodiques de référence présentés dans ce paragraphe ont donc été réalisés avec $\beta = 0.01$.

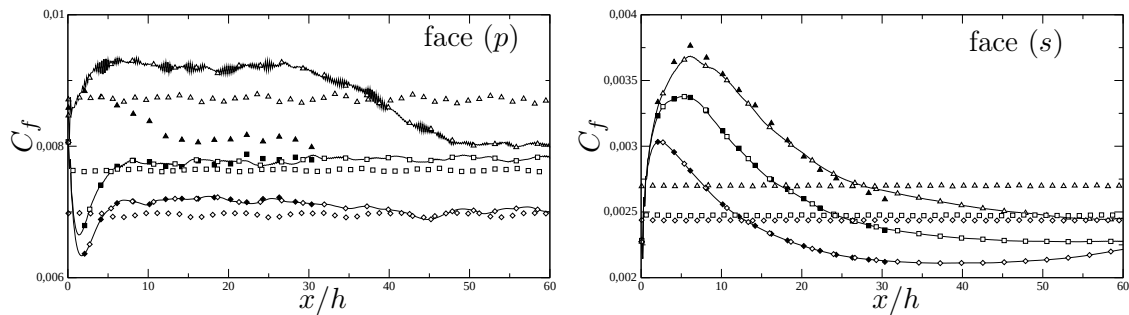


FIGURE 6.13 – Coefficient de frottement C_f pour $\beta = 0$ ($\triangle$), $\beta = 0.01$ ($\square$) et $\beta = 0.05$ ($\diamond$). Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 1/6$. Symboles vides : LES périodique ; symboles pleins : LES chaînée à l’EB-RSM, $L_x = 10\pi$; lignes : LES chaînée à l’EB-RSM, $L_x = 20\pi$.

6.4 Généralisation de la SEM à la thermique

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au problème du développement spatial de fluctuations de température, dans le cadre du couplage RANS/LES zonal. Une généralisation de la SEM pour la génération de fluctuations synthétiques de température en entrée d'un domaine LES est proposée au paragraphe 6.4.1. Le paragraphe 6.4.2 concerne la validation de cette méthode, sur des cas de convection forcée. Au paragraphe 6.4.3, une première application de chaînage avec le modèle RANS EB-AFM (Dehoux *et al.*, 2012) est présentée.

6.4.1 Formulation proposée (T-SEM)

On propose ici une extension de la SEM de manière à générer des fluctuations synthétiques de vitesse et de température (T-SEM). La décomposition de Reynolds de la température T est notée :

$$T = \overline{T} + \theta.$$

On définit le vecteur $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^4$ par :

$$\mathbf{u}_1 = u, \quad \mathbf{u}_2 = v, \quad \mathbf{u}_3 = w, \quad \mathbf{u}_4 = T.$$

On a $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$, avec :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{u}}_1 &= \overline{u}, & \overline{\mathbf{u}}_2 &= \overline{v}, & \overline{\mathbf{u}}_3 &= \overline{w}, & \overline{\mathbf{u}}_4 &= \overline{T}, \\ \text{et } \mathbf{u}'_1 &= u', & \mathbf{u}'_2 &= v', & \mathbf{u}'_3 &= w', & \mathbf{u}'_4 &= \theta. \end{aligned} \quad (6.21)$$

On introduit le tenseur $\mathfrak{R} = \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$, soit :

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} & \overline{\theta u'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} & \overline{\theta v'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} & \overline{\theta w'} \\ \overline{\theta u'} & \overline{\theta v'} & \overline{\theta w'} & \overline{\theta^2} \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

De même que le tenseur de Reynolds, $\mathfrak{R}$ est symétrique et semi-défini positif.⁴ Si ses valeurs propres sont non nulles, il admet une factorisation de Cholesky : $\mathfrak{R} = \mathbf{a}\mathbf{a}^T$ avec :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathfrak{R}_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{R}_{21}/\mathbf{a}_{11} & \sqrt{\mathfrak{R}_{22} - \mathbf{a}_{21}^2} & 0 & 0 \\ \mathfrak{R}_{31}/\mathbf{a}_{11} & (\mathfrak{R}_{32} - \mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{31})/\mathbf{a}_{22} & \sqrt{\mathfrak{R}_{33} - \mathbf{a}_{31}^2 - \mathbf{a}_{32}^2} & 0 \\ \mathfrak{R}_{41}/\mathbf{a}_{11} & (\mathfrak{R}_{42} - \mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{41})/\mathbf{a}_{22} & (\mathfrak{R}_{43} - \mathbf{a}_{31}\mathbf{a}_{41} - \mathbf{a}_{32}\mathbf{a}_{42})/\mathbf{a}_{33} & \sqrt{\mathfrak{R}_{44} - \mathbf{a}_{41}^2 - \mathbf{a}_{42}^2 - \mathbf{a}_{43}^2} \end{pmatrix}.$$

La T-SEM modélise alors la vitesse et la température par :

$$\mathbf{u}^{SEM} = \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'^{SEM}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}'_i^{SEM} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\lambda=1}^N \mathbf{a}_{ij} \epsilon_j^\lambda f_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda). \quad (6.23)$$

Bien que les composantes du tenseur $\mathfrak{R}$ ne soient pas toutes de même dimension, on peut vérifier que les composantes des trois premières lignes de $\mathbf{a}$ sont de dimension $[L][T]^{-1}$ tandis que celles de la quatrième ligne sont de dimension $[K]$; la formule (6.23) est donc dimensionnellement correcte.

4. Pour satisfaire cette dernière propriété, on doit avoir $\mathbf{x} \cdot \mathfrak{R} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ pour tout $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^4$. Ici,

$$\mathbf{x} \cdot \mathfrak{R} \cdot \mathbf{x} = x_i \overline{u'_i u'_j} x_j = \overline{x_i u'_i u'_j x_j} = \overline{(x_i u'_i)^2} \geq 0.$$

Comme pour la SEM « standard », ϵ_j^λ sont des v.a. indépendantes de probabilité uniforme $\epsilon_j^\lambda = \pm 1$ et $f_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda)$ est définie par (6.4). De même, les positions $\mathbf{x}^\lambda$ des structures synthétiques sont fixées aléatoirement à l'instant initial dans le volume $\mathcal{B}$ considéré, suivant une loi de probabilité uniforme (densité de probabilité $p(\mathbf{x}^\lambda) = 1/|\mathcal{B}|$). Rappelons que comme les v.a. ϵ_j^λ et $\mathbf{x}^\lambda$ sont indépendantes, leurs moments sont décorrélés, ce qui implique notamment :

$$\langle \epsilon_j^\lambda f_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda) \rangle = \langle \epsilon_j^\lambda \rangle \langle f_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda) \rangle,$$

et que la fonction f_σ est normalisée suivant :

$$\|f_\sigma\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} f_\sigma^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = |\mathcal{B}|.$$

La T-SEM possède alors les mêmes propriétés statistiques que la SEM. Notamment, on a :

– pour les moments d'ordre un :

$$\langle \mathbf{u}_i^{SEM} \rangle = \langle \bar{\mathbf{u}}_i \rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\lambda=1}^N \mathbf{a}_{ij} \underbrace{\langle \epsilon_j^\lambda \rangle}_{=0} \langle f_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda) \rangle = \bar{\mathbf{u}}_i,$$

– pour les moments centrés d'ordre deux :

$$\langle \mathbf{u}_i^{SEM} \mathbf{u}_j^{SEM} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\lambda=1}^N \sum_{\mu=1}^N \mathbf{a}_{im} \mathbf{a}_{jn} \underbrace{\langle \epsilon_m^\lambda \epsilon_n^\mu \rangle}_{=\delta_{\lambda\mu} \delta_{mn}} \langle f_\sigma^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda) \rangle = \mathbf{a}_{im} \mathbf{a}_{jm} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{\lambda=1}^N p(\mathbf{x}^\lambda) |\mathcal{B}|}_{=1} = \Re_{ij}.$$

La T-SEM permet donc de générer des fluctuations de température et de vitesse préservant le tenseur de Reynolds $\overline{u'_i u'_j}$, la variance de la température $\overline{\theta^2}$, mais également les flux thermiques turbulents $\overline{\theta u'_i}$ cibles. En fait l'approche proposée consiste essentiellement en une extension en dimension quatre de la formule (6.1) de mise à l'échelle des fluctuations, qui permet, à partir d'une famille $\{X_j\}_{j=1,4}$ de v.a. de matrice de covariance identité, d'obtenir un signal fluctuant présentant les corrélations en un point d'ordre un et deux escomptées.

Concernant plus spécifiquement la SEM, on a choisi d'égaliser la fonction f_{σ_θ} , qui fixe, en fonction de sa position, la contribution de la structure λ à la fluctuation de température, à f_σ , dont le rôle est identique pour la vitesse. En particulier, les échelles caractéristiques σ et σ_θ sont égales. Cette hypothèse est assez naturelle, au moins pour une convection forcée. Elle est correctement soutenue par les calculs DNS de turbulence isotrope de Shirani *et al.* (1981), qui montrent que l'échelle intégrale de $\overline{\theta^2}$ est très proche des échelles intégrales transversales de vitesse. De même, en présence d'un gradient moyen de température, les ratios entre les micro-échelles transverses de vitesse et de température mesurés par Budwig *et al.* (1985) sont compris entre 0.9 et 1.2. Mathématiquement, le choix $f_\sigma = f_{\sigma_\theta}$ permet d'obtenir immédiatement $\int_{\mathbb{R}^3} f_{\sigma_\theta}^2 = |\mathcal{B}|$ et $\int_{\mathbb{R}^3} f_{\sigma_\theta} f_\sigma = |\mathcal{B}|$, qui sont les deux normalisations requises pour préserver à la fois la variance de température $\overline{\theta^2}$ et les flux thermiques turbulents $\overline{\theta u'_i}$ donnés en paramètres de la méthode.

6.4.2 Validation de la méthode

On propose maintenant une validation de la méthode T-SEM, qui généralise la méthode de turbulence synthétique SEM pour la génération de fluctuations de température en entrée d'une simulation des grandes échelles. Le cas test est celui d'un canal plan chauffé par un

	Maillage A	Maillage B	DNS
Re_b	<u>7031</u>	<u>7031</u>	<u>7031</u>
Re_τ	392.17	393.24	<u>395</u>
Pr	0.71 2	0.71 2	0.71 2
Nu	36.75 62.88	37.42 63.02	36.65 61.20
$L_x \times L_y \times L_z$	$6.4\pi h \times 2h \times 3.2\pi h$	$6.4\pi h \times 2h \times 3.2\pi h$	
$N_x \times N_y \times N_z$	$51 \times 88 \times 85$	$127 \times 104 \times 127$	
$(\Delta x^+, \Delta z^+)$	(49.2, 14.8)	(19.8, 9.9)	
$(\Delta y_{\min}^+, \Delta y_{\max}^+)$	(2.04, 11.7)	(0.96, 11.3)	
Période d'intégration ($\times \delta / u_\tau$)	84	14	

TABLE 6.4 – Paramètres des simulations et des maillages, calculs périodiques (le nombre de Reynolds souligné est celui qui est effectivement imposé dans la simulation). Les paramètres correspondant aux calculs DNS de Kawamura *et al.* (1999) sont indiqués.

flux de température $\dot{q}_w$ constant aux parois, dans un régime de convection forcée (c'est-à-dire qu'on considère que la température est un scalaire transporté passif). Une description formelle du cas test est donnée en annexe B.3. Le nombre de Reynolds dans le canal est fixé à $Re_b = 7031$ et deux nombres de Prandtl sont considérés, $Pr = 0.71$ et $Pr = 2$. Kawamura *et al.* (1999) ont réalisé des simulations numériques directes de cet écoulement.

Comme précédemment, la qualité du développement de la solution en aval de l'entrée de turbulence synthétique T-SEM est évaluée par comparaison à la solution d'un calcul de référence du même écoulement réalisé sur un maillage de raffinement identique mais en imposant des conditions de périodicité dans la direction x , ce qui permet de reproduire un domaine d'extension spatiale infinie dans cette direction et de ce fait, d'obtenir un écoulement pleinement développé.

Calculs périodiques

Les LES périodiques sont réalisées sur un domaine de taille $L_x \times L_y \times L_z = 6.4\pi h \times 2h \times 3.2\pi h$, comme celui considéré par Kawamura *et al.* (1999) pour leurs DNS. Le modèle de sous-maille utilisé pour la dynamique est le modèle de Smagorinsky et les flux thermiques de sous-maille :

$$K_i \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{T u_i} - \widetilde{T} \widetilde{u_i}, \quad (6.24)$$

sont modélisés en utilisant une hypothèse de gradient simple (SGDH) :

$$K_i = -\frac{\nu_{sgs}}{\sigma_T} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_i}, \quad (6.25)$$

avec $\sigma_T = 1$. Deux maillages sont utilisés pour ces simulations périodiques. Le premier maillage correspond à $(\Delta x^+, \Delta y_{\min}^+, \Delta z^+) \approx (50, 2, 15)$ (maillage A). Ces calculs périodiques servent de référence pour les calculs T-SEM, réalisés sur un maillage de raffinement identique, présentés plus bas dans ce paragraphe. Le second maillage, plus fin, correspond à $(\Delta x^+, \Delta y_{\min}^+, \Delta z^+) \approx (20, 1, 10)$ (maillage B). Ces calculs ne seront pas utilisés dans la suite mais ils donnent un aperçu de la précision de la solution obtenue pour la thermique lorsque la dynamique est finement résolue (voir étude de maillage du paragraphe 4.3.4).

Le tableau 6.4 résume les données des calculs réalisés. Les statistiques obtenues pour ces simulations périodiques sont tracées, adimensionnées par la température « de frottement » $T_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \dot{q}_w / \rho c_p u_\tau$, sur la figure 6.15. On voit que le maillage B permet d'obtenir un bon accord avec les données DNS de Kawamura *et al.* (1999). La variance de température

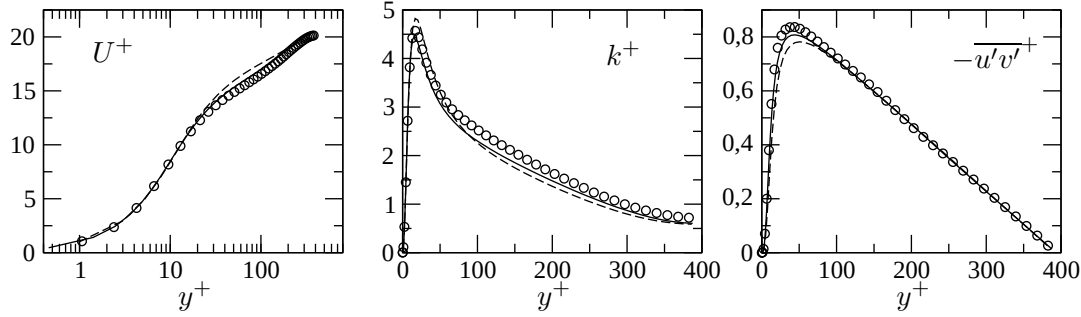


FIGURE 6.14 – Vitesse moyenne, énergie cinétique turbulente et contrainte de cisaillement turbulent. Canal plan chauffé (flux constant). Symboles : DNS, $Re_\tau = 395$ (Moser *et al.*, 1999) ; lignes : LES périodique, $Re_b = 7031$, sur maillage A (---), maillage B (—).

$\overline{\theta^2}^+$ et le flux thermique turbulent longitudinal $\overline{\theta u'}^+$ sont particulièrement bien capturés, d'autant plus pour $Pr = 2$. L'accord pour la température $\overline{T}^+$ et le flux thermique $\overline{\theta v'}^+$ est légèrement moins satisfaisant que celui obtenu pour la vitesse moyenne U^+ et la contrainte de cisaillement turbulent $\overline{u'v'}^+$ (figure 6.14). Notamment la pente constante (en coordonnée log) de $\overline{T}^+$ dans la zone logarithmique est légèrement sous-estimée. Bien sûr, le maillage A conduit à des prédictions moins précises que la maillage B, plus fin. La zone logarithmique n'apparaît pas clairement dans le profil de température moyenne et les moments $\overline{\theta^2}$ et $\overline{\theta u'}$ sont surestimés pour $y^+ < 100$. Le cas à nombre de Prandtl $Pr = 2$ semble toutefois moins sensible au déraffinement du maillage que pour $Pr = 0.71$.

On peut conclure que sur ces cas de convection forcée et aux nombres de Prandtl considérés la thermique ne semble pas imposer de restrictions fortes sur le maillage par rapport à la dynamique. Comme dans les paragraphes 6.2 et 6.3, les calculs T-SEM présentés dans ce paragraphe ont donc été réalisés sur un maillage de même raffinement que le maillage A, de manière à alléger les temps de calculs, au regard du nombre important de simulations réalisées. Bien entendu, l'objet de ces calculs n'est pas d'étudier les caractéristiques de la turbulence développée, mais plutôt la rapidité avec laquelle elle se développe en aval d'une entrée de turbulence synthétique.

Calculs T-SEM

Pour s'affranchir du problème de la sensibilité de la méthode T-SEM à la précision des données d'entrée qui lui sont fournies, c'est-à-dire du décalage qu'il peut exister entre ces données et l'écoulement cible, pleinement développé, en aval dans le domaine LES, on valide ici la méthode en lui fournissant les données d'entrée optimales issues du calcul périodique de référence, coïncidant avec les statistiques cibles dans le domaine LES. Les variables $\overline{\mathbf{u}}$ et $\mathfrak{R}$ définies par (6.21) et (6.22) sont donc celles données par le calcul périodique de référence. La SEM est prise sous sa formulation anisotrope (6.14), (6.15) avec les échelles de longueur σ_i définies par (6.17). Dans cette expression, les tensions normales $\overline{u_i'^2}$ correspondent elles aussi à celles du calcul périodique mais la dissipation ε est donnée par un calcul RANS EB-RSM, cela parce que les échelles résolues par la LES périodique de référence ne permettent pas de fournir une approximation acceptable de la dissipation. Enfin, le nombre de structures synthétiques est fixé à $N = 10000$.

Le domaine simulé est de taille $L_x \times L_y \times L_z = 10\pi h \times 2h \times 3.2h$, discrétisé par $N_x \times N_y \times N_z = 249 \times 88 \times 85$ cellules, ce qui correspond au raffinement utilisé pour le maillage A (tableau 6.4). Le temps d'intégration pour les moyennes d'ensemble est de $400\delta/U_b$. Le modèle de sous-maille est le modèle de Smagorinsky, associé à une hypothèse de gradient simple (équation 6.25) pour les flux thermiques de sous-maille.

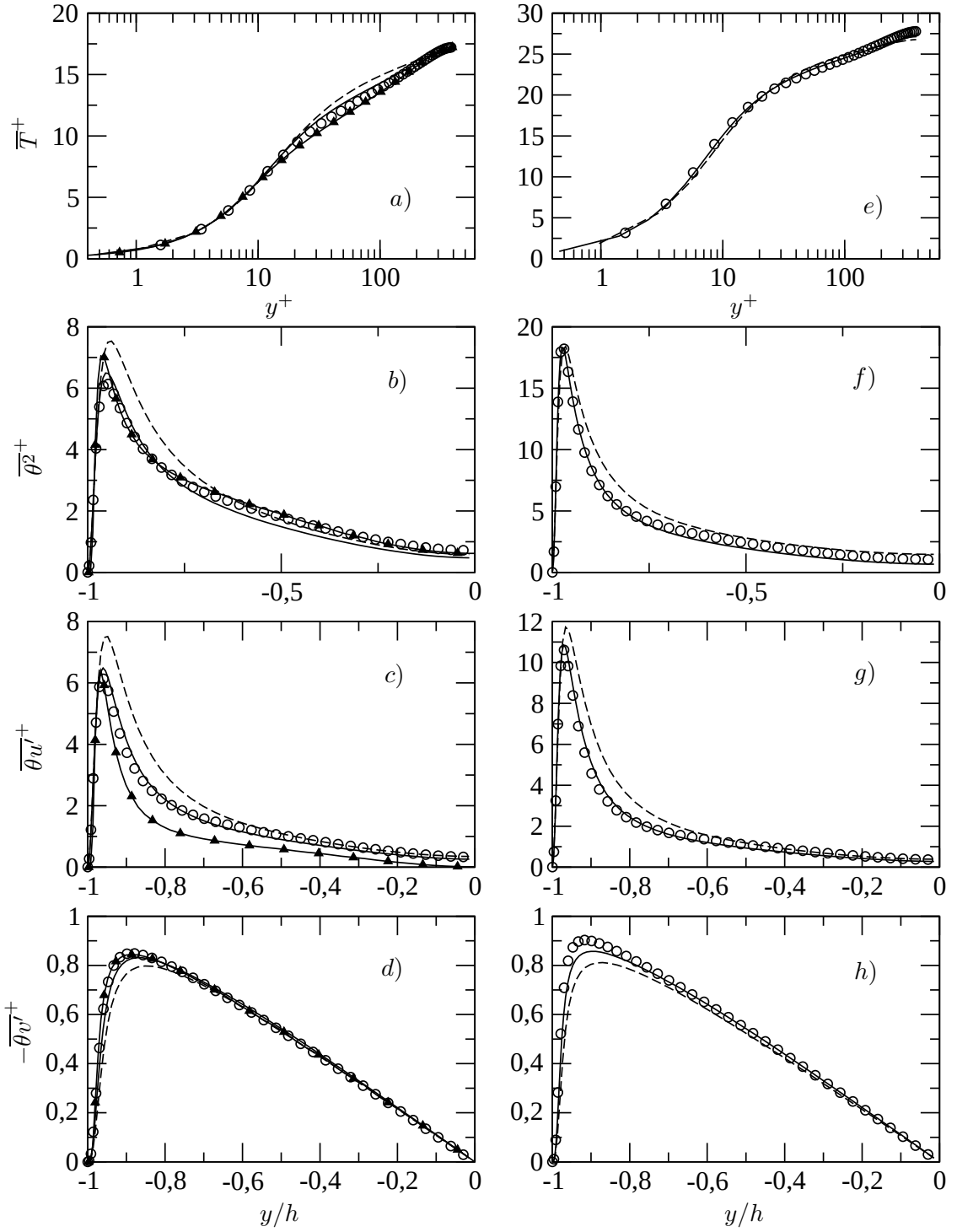


FIGURE 6.15 – Température moyenne, variance de température et flux thermiques turbulents. Canal plan chauffé (flux constant), $Re_\tau \approx 395$ (voir tableau 6.4 et 6.5) avec *a-d*) $Pr = 0.71$ et *e-h*) $Pr = 2$. $\circ$: DNS (Kawamura *et al.*, 1999); $--$: LES maillage A; $---$: LES maillage B; $\blacktriangle$: RANS EB-AFM.

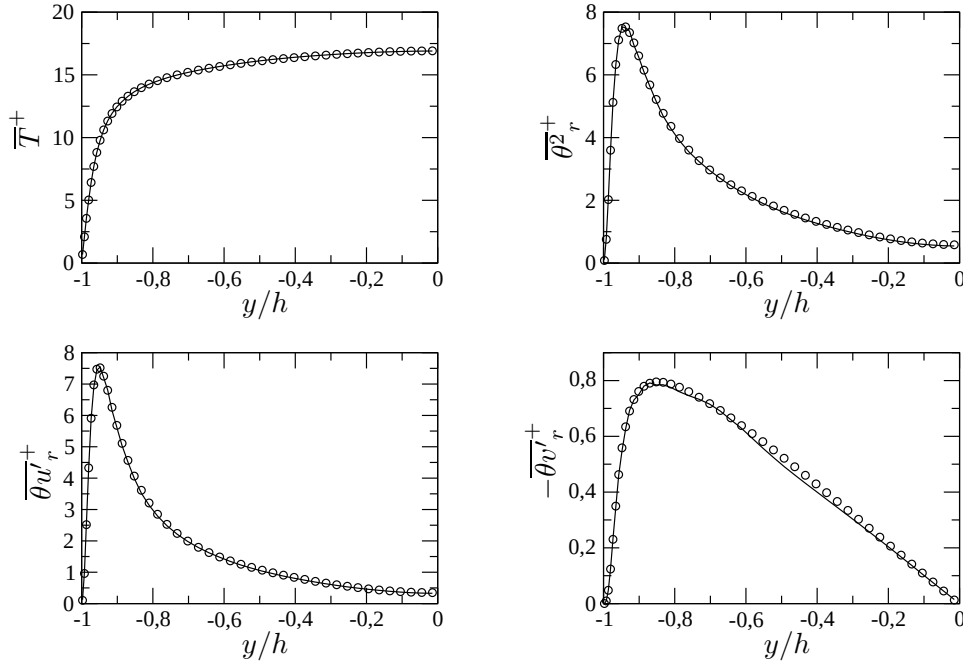


FIGURE 6.16 – Température moyenne, variance de température et flux thermiques turbulents en entrée. Canal plan chauffé, $Re_b = 7031$, $Pr = 0.71$. $\circ$: LES périodique de référence ; — : signal T-SEM.

Les moments statistiques du signal d'entrée T-SEM sont tracés sur la figure 6.16. Comme attendu, la méthode T-SEM permet d'obtenir à l'entrée du domaine la température moyenne, la variance de température et les flux thermiques turbulents qui lui sont fournis comme paramètres. Au terme de la période d'intégration utilisée ($400\delta/U_b$), la convergence statistique de $\overline{T}$, $\overline{\theta^2_r}$ et $\overline{\theta u'_r}$ est excellente. Le flux thermique normal à la paroi $\overline{\theta v'_r}$ n'a pas exactement recouvré sa valeur asymptotique mais en est très proche.

Observons maintenant le développement de la thermique en aval de l'entrée. Pour étudier le développement spatial de la température moyenne, on peut utiliser le nombre de Nusselt :

$$Nu = \frac{2h\dot{q}_w}{\rho c_p \alpha (T_m - T_w)}, \quad \text{avec} \quad T_m = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \overline{T} dy, \quad (6.26)$$

et α le coefficient de diffusivité thermique (voir annexe B.3 pour les autres notations). L'évolution de la variance de température et des flux thermiques turbulents est caractérisée par les fonctions d'erreur suivantes :

$$e_{\overline{\theta^2_r}} = \frac{\int_{-h}^h |\overline{\theta^2_r} - \overline{\theta^2_r^*}|}{\int_{-h}^h |\overline{\theta^2_r^*}|}, \quad e_{\overline{\theta u'_r}} = \frac{\int_{-h}^h |\overline{\theta u'_r} - \overline{\theta u'_r^*}|}{\int_{-h}^h |\overline{\theta u'_r^*}|}, \quad e_{\overline{\theta v'_r}} = \frac{1}{2h} \frac{\int_{-h}^h |\overline{\theta v'_r} - \overline{\theta v'_r^*}|}{\max(|\overline{\theta v'_r^*}|)}. \quad (6.27)$$

où les grandeurs avec une astérisque sont issues du calcul LES périodique de référence. Ces fonctions correspondent à une extension directe des fonctions d'erreur définies par Keating *et al.* (2004) pour l'énergie turbulente et la tension de cisaillement.

Sur la figure 6.17, ces indicateurs sont tracés en fonction de la distance à l'entrée. Les résultats de la méthode T-SEM sont comparés à deux autres approches envisageables pour les conditions d'entrée de température : l'approche qui consiste à imposer directement la température moyenne cible $\overline{T^*}$, sans aucune fluctuation, et l'approche qui consiste à imposer la température moyenne $\overline{T^*}$ plus un bruit blanc correspondant à une variable aléatoire

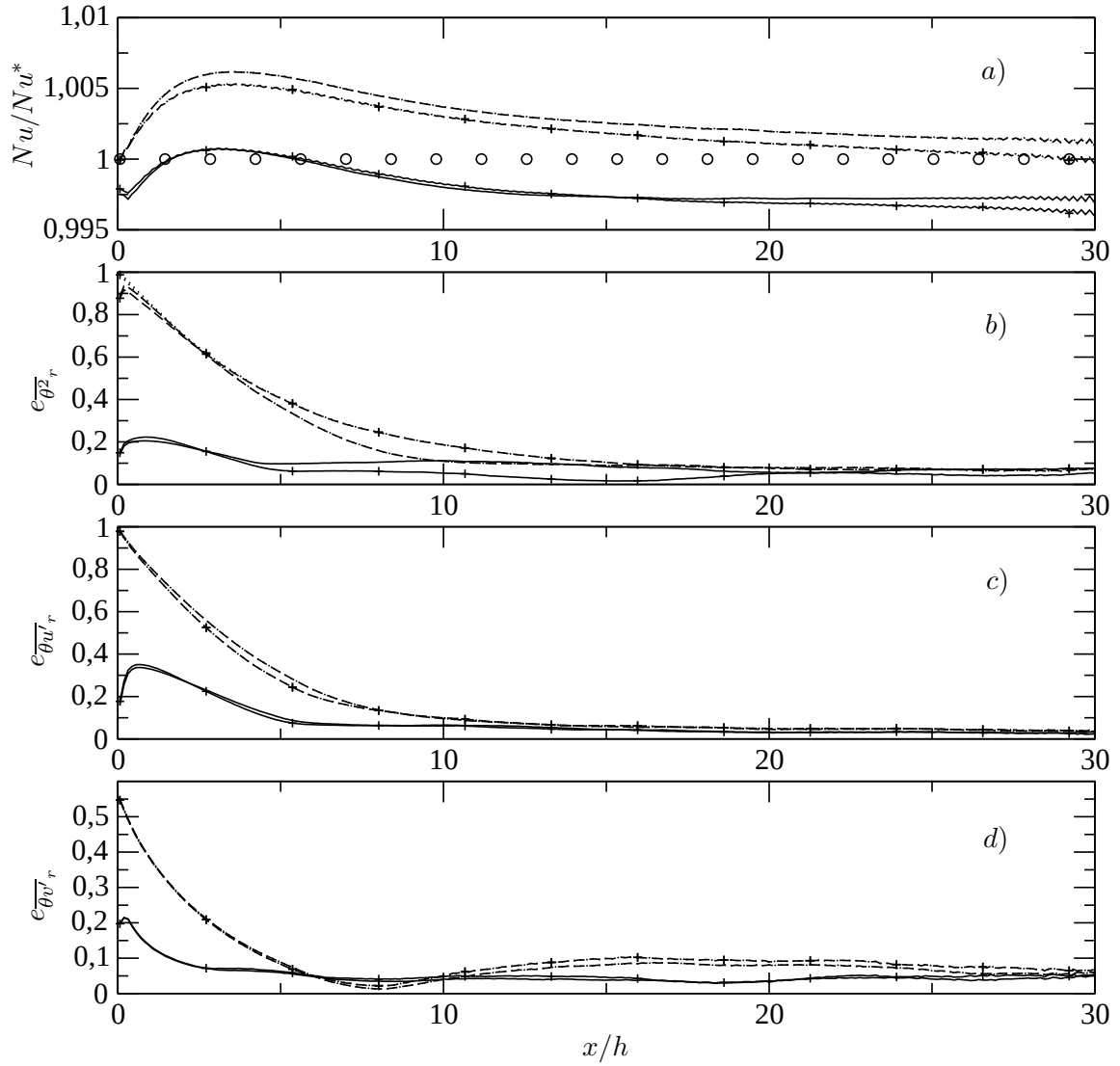


FIGURE 6.17 – Développement en aval de l'entrée a) du nombre de Nusselt, b) de la fonction d'erreur e_{θ^2} , c) de la fonction d'erreur $e_{\theta u}$, d) de la fonction d'erreur $e_{\theta v}$. Canal plan chauffé (flux constant), $Re_b = 7031$ avec $Pr = 0.71$ (pas de marquage), $Pr = 2$ (marquage +). $\circ$: LES périodiques de référence; ---- : SEM0; --- : SEM1; — : T-SEM (les lignes SEM0 et SEM1 sont confondues).

gaussienne de moyenne nulle et de variance $\overline{\theta^2}_r^*$. Pour ces deux approches alternatives, dénotées respectivement SEM0 et SEM1, les conditions d'entrée pour la vitesse sont données par la méthode SEM. On voit sur la figure 6.17 que le problème des conditions d'entrée pour la température en LES est nettement moins crucial que celui des conditions d'entrée de vitesse. En effet, même si l'on impose directement la température moyenne sans aucune fluctuation, la thermique se développe relativement vite en aval de l'entrée, le long d'une distance d'environ $10h$ – $15h$, pour atteindre un état proche de son état pleinement développé. Une telle procédure, sans aucune fluctuation, pour les conditions d'entrée de vitesse conduirait à la laminarisation directe de l'écoulement (voir Jarrin *et al.*, 2009, par exemple). Dans le cas de la convection forcée en revanche, la température est transportée par l'écoulement et si celui-ci fait apparaître des fluctuations turbulentes, ce qui est le cas avec la méthode SEM, les fluctuations de température sont amorcées grâce au brassage de la température réalisé par l'écoulement. En particulier, lorsqu'on laisse les fluctuations

de température se déclencher uniquement par transport convectif (SEM0), la température moyenne est bien préservée car on voit que l'erreur commise sur le nombre de Nusselt est inférieur à 1% de sa valeur cible. Au contraire, la variance de température et les flux thermiques turbulents sont nuls à l'entrée du domaine, et bien qu'elle se résorbe relativement rapidement, l'erreur commise sur ces moments d'ordre deux est importante au début du domaine.

Lorsque les fluctuations de température en entrée consistent en un bruit blanc normé (SEM1), décorrélié en espace et en temps, on voit que ces fluctuations sont immédiatement dissipées en entrant dans le domaine, car elles n'ont aucune consistance physique. Ainsi, la variance de température, égale à sa valeur cible sur le bord SEM1, n'est pas du tout préservée en entrant dans le domaine LES. L'erreur $e_{\overline{\theta^2}_r}$ est proche de 90% au premier point de calcul en aval de l'entrée, après quoi elle se confond, à l'instar des autres indicateurs tracés sur la figure 6.17, avec le résultat des simulations SEM0.

La T-SEM permet quant à elle de reproduire en entrée un signal turbulent préservant la variance $\overline{\theta^2}_r$ de température et les flux thermiques $\overline{\theta u_{i,r}}$. De plus les fluctuations de température sont corrélées spatio-temporellement, suivant une dynamique relativement représentative d'un écoulement turbulent. Par conséquent, on voit sur la figure 6.17 que les fluctuations ne sont que modérément dissipées en aval de l'entrée, d'où des erreurs maximales réduites d'un facteur trois pour les flux thermiques à cinq pour la variance de température, par rapport aux simulations SEM0 et SEM1. Dès $x/h = 5$, les erreurs intégrales sur les moments d'ordre deux atteignent un niveau faible et à peu près constant. Le nombre de Nusselt lui aussi évolue peu ; ses variations sont inférieures à 0.5%. Il semble toutefois se stabiliser à une valeur légèrement inférieure à son niveau cible.

Enfin, la figure 6.17 montre une influence très faible du nombre de Prandtl sur le développement de la thermique en aval de l'entrée du domaine LES, pour les calculs SEM0 et SEM1 comme pour les calculs T-SEM. C'est la variance $\overline{\theta^2}_r$ qui semble la plus affectée par ce paramètre mais le comportement global des solutions est le même pour $Pr = 0.71$ et $Pr = 2$.

En conclusion, on a présenté des calculs LES d'écoulements turbulents avec convection forcée ($Re_b = 7031$ et $Pr = 0.71, 2$), en s'intéressant au développement spatial de la thermique en aval d'une entrée de turbulence synthétique. Ces calculs montrent que lorsque les paramètres d'entrée de la méthode de turbulence synthétique SEM sont optimaux, la thermique se développe efficacement en aval de l'entrée, grâce aux fluctuations de vitesse. On a vérifié que la généralisation T-SEM de cette méthode (paragraphe 6.4.1) permet d'obtenir des fluctuations de température présentant la moyenne, la variance et les flux thermiques turbulents donnés en paramètres, et montré que cela permet d'améliorer significativement le développement de la variance de la température et des flux thermiques turbulents à proximité de l'entrée du domaine.

6.4.3 Application au couplage RANS/LES zonal

On présente maintenant une première application de couplage RANS/LES zonal par une méthode de turbulence synthétique à l'interface entre un domaine RANS en amont et un calcul LES en aval. Comme dans le paragraphe précédent, le cas test est l'écoulement dans un canal plan chauffé par un flux constant au paroi, en convection forcée ($Re_\tau = 395$ et $Pr = 0.71$). En revanche, on se place maintenant dans le cadre général où l'état développé de la turbulence dans le domaine LES n'est pas connu à l'avance et où les paramètres de la méthode de condition d'entrée de ce domaine sont entièrement déterminés par le calcul RANS amont.

	LES périodique	RANS/LES zonal	
		RANS	LES
Re_τ	395	395	395
Pr	0.71	0.71	0.71
$L_x \times L_y \times L_z$	$6.4h \times 2h \times 3.2h$	–	$10\pi h \times 2h \times \pi h$
$N_x \times N_y \times N_z$	$51 \times 88 \times 85$	–	$249 \times 88 \times 85$
Périodicité	x, z	x, z	z
Période d'intégration ($\times \delta/u_\tau$)	84	–	24
Modèle	Smagorinsky + SGDh	EB-RSM + EB-AFM	Smagorinsky + SGDh
U_b	17.89	17.92	–
Nu	36.48	37.97	–

TABLE 6.5 – Paramètres des simulations et des maillages.

Pour ce calcul, c'est le modèle EB-AFM, récemment proposé par Dehoux *et al.* (2012), qui est utilisé. Ce modèle intègre, dans le cadre d'une modélisation algébrique au second ordre des flux thermiques turbulents, une prise en compte fine des effets de proche paroi par pondération elliptique. En combinant ce modèle de flux thermiques au modèle EB-RSM pour la dynamique, Dehoux *et al.* (2012) montrent qu'on peut accéder à des estimations précises de la température moyenne, de la variance de température et des flux thermiques turbulents, pour différents régimes de convection (forcée et mixte). Les variables RANS thermiques obtenues avec ce modèle sur le cas test considéré dans ce paragraphe sont tracées sur les graphes de la figure 6.15 (p. 159) et montrent effectivement un bon accord avec les données DNS de Kawamura *et al.* (1999). Pour le couplage, les deux approches SEM0 (fluctuations SEM pour la vitesse, pas de fluctuation la température) et T-SEM considérées au paragraphe précédent sont utilisées. Les données des calculs réalisés sont indiquées dans le tableau 6.5.

La figure 6.18 contient plusieurs graphes montrant le développement de la thermique dans le domaine LES. Les profils de U^+ , k^+ et $\overline{u'v'}^+$ sont également tracés pour comparaison. On observe globalement que l'évolution des grandeurs statistiques thermiques est assez similaire à celle des grandeurs dynamiques.

La température moyenne, sous-estimée au début du canal, se reconstruit rapidement en proche paroi pour montrer un très bon accord avec la LES pleinement développée. L'évolution de la température au centre du canal est en revanche beaucoup plus lente, comme on le voit sur le nombre de Nusselt qui évolue peu au delà de $x/h = 15$. L'erreur sur cette grandeur est néanmoins faible (inférieure à 5%).

Le développement du flux thermique longitudinal $\overline{\theta u'}_r$ est très satisfaisant. Celui-ci se reconstruit très rapidement en aval de l'entrée après quoi son erreur reste faible tout le long du canal. L'évolution de la variance de température et du flux thermique normal à la paroi est similaire à celle de l'énergie turbulente et de la contrainte de cisaillement. Ces grandeurs montrent sur ce cas couplé des erreurs assez largement amplifiées pour $x/h < 10$ par rapport au cas où les données d'entrée de la SEM/T-SEM sont issues de la simulation périodique. Cependant, l'erreur décroît assez vite également par la suite. À la fin du domaine considéré ici ($x/h = 30$), la variance et les flux thermiques sont très proches de leur profil pleinement développé, montrant un accord même meilleur que celui obtenu pour le tenseur de Reynolds.

L'évolution du nombre de Nusselt et des fonctions d'erreurs $e_{\overline{\theta^2}_r}$, $e_{\overline{\theta u'}_r}$ et $e_{\overline{\theta v'}_r}$ indique que l'imposition de fluctuations synthétiques de température au bord a moins d'influence

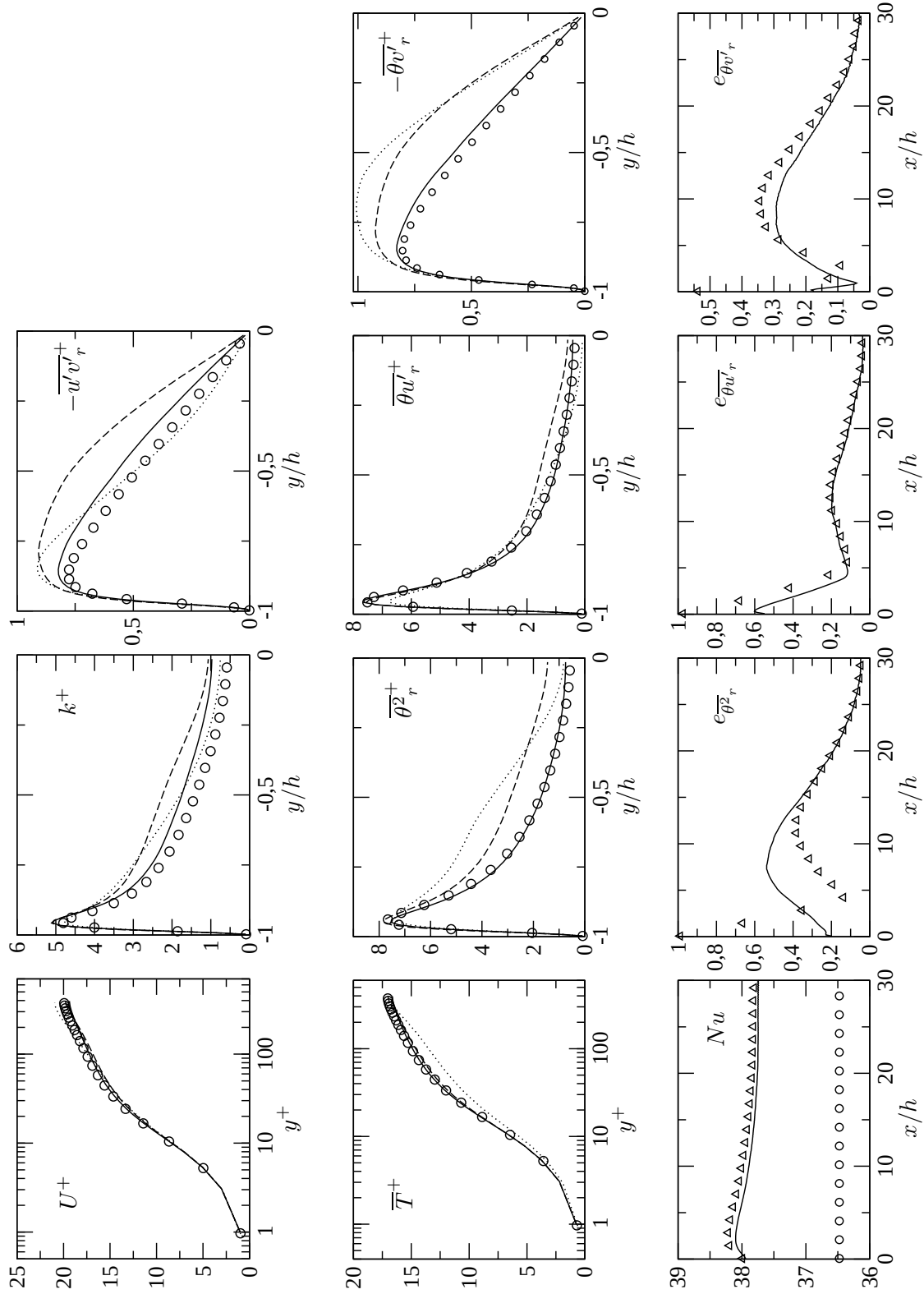


FIGURE 6.18 – Développement de la turbulence dans le domaine LES de calculs couplés RANS/LES zonal (voir tableau 6.5). Canal plan chauffé (flux constant), $Re_\tau = 395$, $Pr = 0.71$. $\circ$: LES périodiques de référence; $\triangle$: couplage SEM0; lignes : couplage T-SEM (les profils dans la direction y sont tracés en $\cdots$: $x/h = 5$; $---$: $x/h = 15$; $---$: $x/h = 30$).

dans ce cas couplé au RANS que sur le cas précédent où les données d'entrée étaient optimales. Les fluctuations synthétiques profitent quelque peu au développement de la température moyenne et du flux thermique $e_{\overline{\theta v_r}}$ dans le canal. Elles génèrent en revanche une surestimation plus importante de la variance à proximité de l'entrée mais cet effet néfaste n'est plus sensible pour $x/h > 15$.

6.5 Conclusion du chapitre

En conclusion, ce chapitre a permis d'étendre la validation de la méthode SEM comme méthode de couplage entre un modèle RANS situé en amont d'un domaine LES. On a vu que le couplage avec un modèle RANS au second ordre permettait de définir des structures synthétiques anisotropes, ce qui améliore le développement de la turbulence dans le domaine LES (en particulier pour le coefficient de frottement). On a montré que la SEM pouvait être utilisée sans modification dans un référentiel en rotation. Les calculs réalisés dans un canal en rotation montrent que le développement spatial de la turbulence est plus délicat en présence d'un mécanisme laminarisant comme la force de Coriolis du côté en dépression du canal. Les fluctuations SEM sont néanmoins relativement robustes à cet égard, en particulier lorsque les données d'entrée de la méthode sont issues d'une modélisation RANS au second ordre (EB-RSM). Lorsque l'on utilise un modèle de viscosité turbulente corrigé pour la rotation dans le domaine RANS, le couplage est passablement dégradé, probablement en raison des estimations erronées de l'énergie turbulente avec ces modèles, celle-ci servant pourtant à définir la taille des structures synthétiques. Enfin, on a proposé une généralisation de la SEM à la thermique (T-SEM). La méthode est basée sur une généralisation de la formule de remise à l'échelle de fluctuations normées, proposée par Lund *et al.* (1998) et classiquement employée depuis dans les méthodes de turbulence synthétique. On a vu que l'imposition de fluctuations T-SEM améliorait significativement le développement de la thermique dans le domaine LES dans le cas où les statistiques d'entrée de la méthode sont optimales, c'est-à-dire coïncident avec les statistiques de la LES pleinement développée. Dans un contexte plus général de couplage RANS/LES, le couplage de la T-SEM avec un modèle RANS thermique (EB-AFM, Dehoux *et al.*, 2012) montre une amélioration plus modérée par rapport à un couplage dynamique SEM sans fluctuations thermiques explicites au bord.

Chapitre 7

Couplage volumique par Forçage Linéaire Anisotrope

Comme évoqué au paragraphe 5.3 (p. 129), le forçage volumique de la LES sur une zone de recouvrement RANS/LES suscite une attention grandissante dans la littérature, et apparaît désormais comme moyen efficace de couplage RANS/LES zonal, que ce soit pour un couplage RANS amont/LES aval (Spille-Kohoff et Kaltenbach, 2001; Laraufie *et al.*, 2011) ou pour un couplage RANS aval/LES amont (Schlüter *et al.*, 2005).

Ce chapitre est consacré à la dérivation et à la validation d’une nouvelle force volumique de couplage RANS/LES sur une zone de recouvrement. La méthode, baptisée Forçage Linéaire Anisotrope, ou ALF (*Anisotropic Linear Forcing*), est dérivée au paragraphe 7.1. Elle apparaît comme une généralisation de beaucoup des forçages volumiques proposés jusqu’à présent dans la littérature (par les auteurs cités ci-dessus en particulier), mais également d’un forçage proposé par Lundgren (2003) dans le contexte différent du forçage d’une turbulence homogène isotrope à l’équilibre. L’effet du forçage ALF est décrit et étudié au paragraphe 7.2, ce qui permet de le paramétrer en vue de son application à des couplages RANS/LES zonaux. Ces applications sont présentées au paragraphe 7.3. Enfin, le paragraphe 7.4 est consacré à l’utilisation et à l’extension du forçage ALF pour le transport d’un scalaire passif.

7.1 Dérivation du Forçage Linéaire Anisotrope

Ce paragraphe est consacré au développement d’un nouveau forçage volumique, le Forçage Linéaire Anisotrope (ALF), pour le couplage RANS/LES zonal sur une zone de recouvrement. Au paragraphe 7.1.1, on rappelle l’effet statistique d’un forçage volumique, cette information étant particulièrement pertinente dans le cadre du couplage RANS/LES. Le paragraphe 7.1.2 analyse ainsi les effets statistiques de plusieurs forçages volumiques considérés dans la littérature. La formulation générale du forçage ALF est donnée au paragraphe 7.1.3. On verra que sa forme générale englobe plusieurs des forçages étudiés au paragraphe 7.1.2, mais cette fois, le forçage est construit de manière à rendre consistants, entre les domaines RANS et LES, la vitesse moyenne et l’ensemble des contraintes de Reynolds. La restriction isotrope du forçage ALF est envisagée au paragraphe 7.1.4. On verra cette fois que le terme ALF dégénère en un forçage linéaire isotrope des fluctuations, très proche de celui introduit par Lundgren (2003) pour maintenir une turbulence isotrope à l’équilibre. Enfin, on montre au paragraphe 7.1.5 que le terme de forçage ALF est objectif (il sera utilisé dans un référentiel en rotation aux paragraphes 7.2.3 et 7.3.2).

7.1.1 Effets statistiques d'un forçage volumique

On introduit une force volumique $\mathbf{f}$ dans l'équation de quantité de mouvement filtrée (équation 4.68 p. 89) :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}. \quad (7.1)$$

La force volumique $\mathbf{f}$ peut être décomposée en une partie moyenne $\bar{\mathbf{f}}$ et une partie fluctuante $\mathbf{f}'$, au sens de Reynolds :

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}} + \mathbf{f}'.$$

En utilisant cette décomposition, on peut expliciter la contribution de $\mathbf{f}$ au bilan de quantité de mouvement filtrée moyenne, en prenant, comme on l'a fait pour l'équation de Reynolds (p. 14), la moyenne de (7.1). Il vient :

$$\frac{\partial \langle \tilde{u}_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \tilde{u}_i \rangle \langle \tilde{u}_j \rangle) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \tilde{p} \rangle}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \langle \tilde{u}_i \rangle}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_{j_r}}) - \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} + \bar{f}_i, \quad (7.2)$$

Dans cette équation, on rappelle que les opérateurs $\langle \cdot \rangle$ et $\bar{\cdot}$ désignent tous les deux la moyenne de Reynolds et que $\overline{u'_i u'_{j_r}}$ est la partie résolue des contraintes de Reynolds :

$$\overline{u'_i u'_{j_r}} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{(\tilde{u}_i - \langle \tilde{u}_i \rangle)(\tilde{u}_j - \langle \tilde{u}_j \rangle)}. \quad (7.3)$$

Sans surprise, seule la partie moyenne de la force $\mathbf{f}$ a un effet sur le bilan de quantité de mouvement moyen. De même, il est intéressant d'explicitier l'action de $\mathbf{f}$ sur l'équation des tensions de Reynolds résolues $\overline{u'_i u'_{j_r}}$. Celle-ci est obtenue par l'opération :

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_{j_r}}}{\partial t} = \frac{\partial (\tilde{u}_i - \langle \tilde{u}_i \rangle)}{\partial t} (\tilde{u}_j - \langle \tilde{u}_j \rangle) + (\tilde{u}_i - \langle \tilde{u}_i \rangle) \frac{\partial (\tilde{u}_j - \langle \tilde{u}_j \rangle)}{\partial t},$$

et en utilisant les équations (7.1) et (7.2). Il vient :

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_{j_r}}}{\partial t} + \langle \tilde{u}_j \rangle \frac{\partial \overline{u'_i u'_{j_r}}}{\partial x_j} = P_{ij}^r + P_{ij}^f + \phi_{ij}^r + \chi_{ij} + D_{ij}^{Tr} + D_{ij}^{\tau} + D_{ij}^{\nu r} - \varepsilon_{ij}^r,$$

avec P_{ij}^r , ϕ_{ij}^r , D_{ij}^{Tr} , $D_{ij}^{\nu r}$ et ε_{ij}^r correspondant aux termes de l'équation du tenseur de Reynolds (2.19) avec $\overline{u_i}$, u'_i , $\overline{u'_i u'_j}$ remplacés respectivement par $\langle \tilde{u}_i \rangle$, $(\tilde{u}_i - \langle \tilde{u}_i \rangle)$, $\overline{u'_i u'_{j_r}}$, et :

$$\begin{aligned} D_{ij}^{\tau} &= -\frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\tau'_{il}(\tilde{u}_j - \langle \tilde{u}_j \rangle) + \tau'_{jl}(\tilde{u}_i - \langle \tilde{u}_i \rangle)}, \\ \chi_{ij} &= \overline{\tau'_{il} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} + \tau'_{jl} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_l}}, \\ P_{ij}^f &= \overline{f'_i(\tilde{u}_j - \langle \tilde{u}_j \rangle) + f'_j(\tilde{u}_i - \langle \tilde{u}_i \rangle)}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Par rapport à l'équation des contraintes résolues sans forçage volumique, on trouve donc un terme de plus, P_{ij}^f , qui ne dépend que de la partie fluctuante de la force $\mathbf{f}$. Ce terme source augmente ou amortit les fluctuations turbulentes selon son signe. Dans la suite, on propose d'analyser l'effet d'un forçage volumique principalement sous ces deux aspects statistiques : son effet sur la vitesse moyenne (équation 7.2) et son effet sur les contraintes de Reynolds résolues (équation 7.4).

7.1.2 Analyse de forçages volumiques proposés dans la littérature

Dans ce paragraphe, on analyse l'effet statistique de forçages volumiques sur une zone de recouvrement RANS/LES précédemment considérés dans la littérature.

Le premier forçage considéré correspond au forçage de la vitesse filtrée moyennée au sens de Reynolds $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle$ vers son niveau $\overline{\mathbf{u}}^{RANS}$ donnée par le calcul RANS. Cela est obtenu en définissant $\mathbf{f}$ par :

$$f_i = \frac{1}{\tau_f} (\overline{u_i}^{RANS} - \langle \tilde{u}_i \rangle), \quad (7.5)$$

avec τ_f l'échelle de temps du terme de forçage. Cette force de rappel est introduite par Schlüter *et al.* (2005), qui proposent d'utiliser cette force virtuelle sur une zone de recouvrement RANS/LES située directement en amont de la sortie du domaine LES, de manière à « faire remonter » de l'information (contraction ou expansion soudaine de la géométrie par exemple) du domaine RANS aval vers le domaine LES amont. Elle est également utilisée par Benarafa *et al.* (2006) sur l'ensemble du domaine de calcul LES d'un canal plan périodique, dans le but de forcer la vitesse moyenne $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle$ vers un niveau correct en dépit d'un maillage relativement grossier.

La seconde force de rappel considérée ici correspond au forçage de la vitesse filtrée instantanée $\tilde{\mathbf{u}}$ vers la valeur $\overline{\mathbf{u}}^{RANS}$ donnée par le calcul RANS :

$$f_i = \frac{1}{\tau_f} (\overline{u_i}^{RANS} - \tilde{u}_i). \quad (7.6)$$

Bien qu'assez peu intuitive, sachant que les variables RANS $\overline{u_i}^{RANS}$ et LES $\tilde{u}_i$ ont une signification physique bien distincte, cette force de rappel est également envisagée par Schlüter *et al.* (2005), lorsque les moyens pratiques de calculer $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle$ sont considérés.

En effet, lorsque l'écoulement est statistiquement stationnaire, le théorème d'ergodicité implique que la moyenne statistique $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle$ est égale à une moyenne en temps sur une période d'intégration infinie, ce qui ne peut pas être calculé exactement d'un point de vue pratique. Néanmoins, un filtrage temporel gaussien $\mathcal{G}_T(\tilde{\mathbf{u}})$ de taille T peut être utilisé pour approcher la moyenne statistique (Pruett *et al.*, 2003). Dans ce cas, le forçage peut s'écrire :

$$f_i = \frac{1}{\tau_f} (\overline{u_i}^{RANS} - \mathcal{G}_T(\tilde{u}_i)), \quad (7.7)$$

et les forces de rappel (7.5) et (7.6) correspondent aux deux cas limites $T \rightarrow \infty$ (car $\mathcal{G}_\infty(\tilde{u}_i) = \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle$) et $T \rightarrow 0$ (car $\mathcal{G}_0(\tilde{u}_i) = \tilde{\mathbf{u}}$). Rappelons également, toujours d'après Pruett *et al.* (2003), que l'expression différentielle du filtre temporel gaussien $\mathcal{G}_T$ permet de calculer très simplement $\mathcal{G}_T(\tilde{\mathbf{u}}, t)$ à chaque instant :

$$\mathcal{G}_T(\tilde{\mathbf{u}}, t + \Delta t) = \mathcal{G}_T(\tilde{\mathbf{u}}, t) + \frac{\Delta t}{T} (\tilde{\mathbf{u}}(t + \Delta t) - \mathcal{G}_T(\tilde{\mathbf{u}}, t)). \quad (7.8)$$

Examinons maintenant l'effet statistique de la force de rappel (7.7), en particulier dans les deux cas limites (7.5) et (7.6). En supposant que l'échelle de temps τ_f du forçage est constante, on a :

$$\overline{f_i} = \frac{1}{\tau_f} (\overline{u_i}^{RANS} - \langle \tilde{u}_i \rangle), \quad (7.9)$$

$$\text{et } P_{ij}^f = -\frac{1}{\tau_f} \overline{((\mathcal{G}_T(\tilde{u}_i) - \langle \tilde{u}_i \rangle)(\tilde{u}_j - \langle \tilde{u}_j \rangle) + (\mathcal{G}_T(\tilde{u}_j) - \langle \tilde{u}_j \rangle)(\tilde{u}_i - \langle \tilde{u}_i \rangle))}. \quad (7.10)$$

L'équation (7.9) montre que quel que soit T , et donc en particulier dans les deux cas limites correspondant aux équations (7.5) et (7.6), la force volumique fait apparaître dans le bilan

de quantité de mouvement moyen un terme de rappel de la vitesse moyenne vers le niveau $\overline{u_i}^{RANS}$.

En revanche, l'effet des forçages (7.5) et (7.6) est sensiblement différent sur les contraintes de Reynolds résolues. Avec (7.5), le forçage n'a aucun effet direct sur les contraintes de Reynolds puisque, dans (7.10), $\mathcal{G}_T(\tilde{\mathbf{u}}) = \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle$ implique $P_{ij}^f = 0$. Il n'est donc pas surprenant que ce forçage n'ait été utilisé ni par Schlüter *et al.* (2005) ni par Benarafa *et al.* (2006) pour promouvoir l'apparition de fluctuations turbulentes dans un écoulement se développant spatialement, mais uniquement dans des situations où la turbulence est déjà développée.

D'un autre côté, avec le forçage (7.6) correspondant à $\mathcal{G}_T(\tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{\mathbf{u}}$ dans (7.7), la « production » P_{ij}^f induite par le forçage devient $P_{ij}^f = -\frac{2}{\tau_f} \overline{u'_i u'_{j,r}}$. On voit donc que le forçage s'oppose en réalité à la production des contraintes turbulentes ; la turbulence est détruite par ce terme. Le fait que le forçage (7.6) amortit sévèrement les fluctuations turbulentes est reporté par Schlüter *et al.* (2005) dans leur étude.

Pour $0 < T < \infty$, l'effet du forçage (7.7) sur les tensions résolues $\overline{u'_i u'_{j,r}}$ n'est pas directement visible dans l'expression (7.10). En revanche, on peut vérifier que pour les contraintes « basses fréquences » :

$$\overline{(\mathcal{G}_T(\tilde{u}_i) - \langle \tilde{u}_i \rangle)(\mathcal{G}_T(\tilde{u}_j) - \langle \tilde{u}_j \rangle)},$$

la force (7.7) fait apparaître au bilan le terme puits :

$$-\frac{2}{\tau_f} \overline{(\mathcal{G}_T(\tilde{u}_i) - \langle \tilde{u}_i \rangle)(\mathcal{G}_T(\tilde{u}_j) - \langle \tilde{u}_j \rangle)},$$

c'est-à-dire que les fluctuations d'échelle de temps supérieure à T sont amorties par le forçage.

Considérons maintenant les termes de forçage proposés par Spille-Kohoff et Kaltenbach (2001) (noté SKK) et Laraufie *et al.* (2011) (LDS).

Le forçage SKK a pour but d'amplifier ou de réduire les « événements » turbulents locaux contribuant à la contrainte de Reynolds de cisaillement (Keating *et al.*, 2004). Il s'écrit :

$$f_i = r_{SKK}(\tilde{u} - \langle \tilde{u} \rangle)\delta_{i2}, \quad (7.11)$$

c'est-à-dire que seule la composante de vitesse normale à la paroi est forcée. r_{SKK} est un facteur de contrôle de la tension de cisaillement turbulent, défini par :

$$r_{SKK} = \alpha e + \beta \int_0^t e, \quad \text{avec} \quad e = \overline{u'v'_r}^{RANS} - \overline{u'v'_r},$$

et α et β deux constantes. Cette force est appliquée sous les conditions suivantes :

$$|\tilde{u} - \langle \tilde{u} \rangle| < 0.6U_b, \quad |\tilde{v} - \langle \tilde{v} \rangle| < 0.4U_b, \quad |(\tilde{u} - \langle \tilde{u} \rangle)(\tilde{v} - \langle \tilde{v} \rangle)| < 0.0015U_b^2.$$

D'après (7.11), il est clair que $\overline{f_i} = 0$. Le forçage SKK n'a donc pas d'effet direct sur la vitesse moyenne. Seules les fluctuations turbulentes sont forcées, conformément à l'objectif de ce forçage. La production de contraintes turbulentes avec ce forçage est :

$$P_{11}^f = P_{23}^f = P_{33}^f = 0, \quad P_{22}^f = 2r_{SKK}\overline{u'v'_r}, \quad P_{12}^f = r_{SKK}\overline{u'^2_r}, \quad P_{23}^f = r_{SKK}\overline{u'w'_r}.$$

Comme la contrainte normale $\overline{u'^2_r}$ est positive, la production P_{12}^f est bien positive (respectivement négative) lorsque $\overline{u'v'_r}$ est inférieur (respectivement supérieur) à sa valeur cible $\overline{u'v'_r}^{RANS}$.

Le forçage LDS, s'écrit pour sa part :

$$f_i = r_{LDS}(\tilde{v} - \langle \tilde{v} \rangle) \delta_{i2}, \quad (7.12)$$

et le facteur de contrôle porte sur la contrainte turbulente normale à la paroi :

$$r_{LDS} = \alpha(\overline{v'^2_r}^{RANS} - \overline{v'^2_r}).$$

Comme pour le forçage SKK, on a $\overline{f_i} = 0$, mais avec le forçage LDS, la production de contraintes turbulentes est :

$$P_{11}^f = P_{13}^f = P_{33}^f = 0, \quad P_{22}^f = 2r_{LDS}\overline{v'^2_r}, \quad P_{12}^f = r_{LDS}\overline{u'v'_r}, \quad P_{23}^f = r_{LDS}\overline{v'w'_r}.$$

La production P_{22}^f permet donc d'ajuster la contrainte normale à la paroi vers son niveau cible.

En revanche, les forçages SSK et LDS introduisent une production sur d'autres composantes (P_{22} et P_{23} pour SSK, P_{12} et P_{23} pour LDS) que celle sur laquelle le facteur de contrôle porte. Rien n'indique *a priori* que cette production ajuste ces contraintes forcées vers leur niveau cible.

7.1.3 Formulation du Forçage Linéaire Anisotrope (ALF)

Le paragraphe précédent a montré que l'analyse des effets statistiques d'un forçage volumique donnait des informations très utiles et que de ce point de vue, il était important de considérer à la fois l'effet du forçage sur l'écoulement moyen mais aussi sur les contraintes de Reynolds. En effet, si la force de rappel est fluctuante, un terme de production supplémentaire P_{ij}^f entre dans le bilan des contraintes résolues. Dans le cadre d'un couplage RANS/LES zonal, ce terme de production pourrait permettre d'amplifier ou d'amortir les fluctuations turbulentes en rendant consistants les moments au second ordre résolus dans le calcul RANS et dans le calcul LES.

On propose ici d'utiliser une force de rappel fluctuante sous la forme générale suivante :

$$f_i = A_{ij}\tilde{u}_j + B_i, \quad (7.13)$$

avec A_{ij} un tenseur d'ordre deux symétrique et B_i un vecteur. On peut noter que le forçage (7.6) considéré au paragraphe précédent est de cette forme (pour $A_{ij} = -\frac{1}{\tau_f}\delta_{ij}$ et $B_i = \frac{1}{\tau_f}\overline{u_i}^{RANS}$), de même que le forçage de Laraufie *et al.* (2011) (pour $A_{ij} = r_{LDS}\delta_{i2}\delta_{j2}$). Le forçage de Spille-Kohoff et Kaltenbach (2001) peut également s'écrire sous la forme générique (7.13), mais pour $A_{ij} = r_{SKK}\delta_{i2}\delta_{j1}$, c'est-à-dire que le tenseur A_{ij} n'est pas symétrique avec ce forçage. La caractéristique principale de la force générale (7.13) est qu'elle est *linéaire* en la vitesse. De ce fait, elle est étroitement liée au terme de forçage linéaire introduit par Lundgren (2003) pour maintenir une turbulence isotrope à l'équilibre. Ce point est développé au paragraphe suivant.

Si l'on suppose que A_{ij} et B_i sont déterministes, la partie moyenne de f_i , qui contribue au bilan de quantité de mouvement moyen, est :

$$\overline{f_i} = A_{ij}\langle \tilde{u}_j \rangle + B_i, \quad (7.14)$$

et la partie fluctuante de f_i , non nulle, est :

$$f'_i = A_{ij}(\tilde{u}_j - \langle \tilde{u}_j \rangle).$$

Par suite, la force (7.13) contribue au bilan des contraintes résolues $\overline{u'_i u'_{j_r}}$ en faisant apparaître le terme (équation 7.4) :

$$P_{ij}^f = A_{ik} \overline{u'_j u'_{k_r}} + A_{jk} \overline{u'_i u'_{k_r}}. \quad (7.15)$$

Si l'on souhaite faire tendre les contraintes résolues vers un niveau « cible » $\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger$, un modèle simple pour P_{ij}^f est :

$$P_{ij}^f = \frac{1}{\tau_r} (\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger - \overline{u'_i u'_{j_r}}), \quad (7.16)$$

avec τ_r un paramètre libre fixant l'intensité du terme de rappel, et qui a la dimension d'un temps. Les équations (7.15) et (7.16) définissent un système linéaire de six équations (pour les six composantes distinctes de P_{ij}^f) à six inconnues (les six composantes distinctes de A_{ij}), qui s'écrit :

$$A_{ik} \overline{u'_j u'_{k_r}} + A_{jk} \overline{u'_i u'_{k_r}} = \frac{1}{\tau_r} (\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger - \overline{u'_i u'_{j_r}}). \quad (7.17)$$

Dans le cadre d'un couplage RANS/LES, on peut faire l'approximation suivante pour les contraintes résolues cibles :

$$\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger = \overline{u'_i u'_j}^{RANS} - \langle \tau_{ij} \rangle, \quad (7.18)$$

avec $\langle \tau_{ij} \rangle$ la moyenne statistique du tenseur de sous-maille, qui donne une approximation de la contribution des échelles de sous-maille aux contraintes de Reynolds. Le système (7.17) s'écrit alors :

$$A_{ik} \overline{u'_j u'_{k_r}} + A_{jk} \overline{u'_i u'_{k_r}} = \frac{1}{\tau_r} (\overline{u'_i u'_j}^{RANS} - \langle \tau_{ij} \rangle - \overline{u'_i u'_{j_r}}). \quad (7.19)$$

Pour construire ce système, les termes $\overline{u'_i u'_{j_r}}$ et $\langle \tau_{ij} \rangle$ doivent être estimés, ce qui est fait en pratique grâce à un filtrage spatial (pour les cas homogènes) et/ou temporel (pour les cas stationnaires) de l'écoulement. Le système (7.19) est ensuite inversé par une méthode directe, de manière à déterminer les coefficients A_{ij} du forçage. L'inversion peut se faire localement, dans chaque cellule de la zone de recouvrement RANS/LES, ce qui demande peu d'opérations ($\mathcal{O}(N)$ avec N le nombre de cellules dans la zone de recouvrement).¹

Il reste à prescrire l'effet moyen du terme de forçage, ce qui achève de le déterminer. Comme pour les forces de rappel de type (7.7), on peut proposer que le forçage fait tendre la vitesse moyenne $\langle \tilde{u}_i \rangle$ vers une valeur cible $\overline{u_i}^\dagger$:

$$\overline{f_i} = \frac{1}{\tau_v} (\overline{u_i}^\dagger - \langle \tilde{u}_i \rangle), \quad (7.20)$$

avec τ_v l'échelle de temps du forçage de la vitesse moyenne. Dans ce cas, une fois les coefficients A_{ij} déterminés, les équations (7.14) et (7.20) permettent de définir explicitement les coefficients B_i :

$$B_i = \frac{1}{\tau_v} (\overline{u_i}^\dagger - \langle \tilde{u}_i \rangle) - A_{ij} \langle \tilde{u}_j \rangle. \quad (7.21)$$

Dans le cadre d'un couplage RANS/LES zonal, on prendra $\overline{u_i}^\dagger = \overline{u_i}^{RANS}$.

1. Dans notre implémentation, les équations du système (7.17) et les inconnues A_{ij} étaient numérotées dans l'ordre 11,22,33,12,13,23. L'inversion était réalisée par la méthode LU. Aucun problème de stabilité numérique n'a été rencontré.

On peut également envisager de ne pas forcer la vitesse moyenne, en la laissant s'ajuster aux contraintes de Reynolds forcées à leur niveau RANS par (7.19). Dans ce cas, on a :

$$\overline{f_i} = 0, \quad (7.22)$$

et donc :

$$B_i = -A_{ij}\langle \tilde{u}_j \rangle. \quad (7.23)$$

La question du forçage de la vitesse moyenne est développée dans la remarque plus bas. Il ressort que pour un écoulement homogène, le forçage moyen devrait être nul mais que dans le cas général, un forçage moyen non nul permet de compenser les erreurs de modélisation entre les domaine RANS et LES.

Que l'on utilise le modèle (7.20) ou (7.22), cette seconde étape achève de déterminer le terme de forçage volumique proposé. Les coefficients A_{ij} et B_i du forçage sont implicitement déterminés par des fonctions simples (équations 7.19 et 7.20 ou 7.22), qui ne dépendent que de statistiques et non pas de réalisations aléatoires, en accord avec l'hypothèse de déterminisme (équations 7.14 et 7.15) de ces coefficients.

Le terme de forçage (7.13) est défini comme une fonction linéaire de la vitesse et il est construit de manière à forcer la vitesse moyenne et l'ensemble des contraintes de Reynolds, quelle que soit l'anisotropie de la turbulence. Il est donc qualifié de *Forçage Linéaire Anisotrope* dans la suite, ou, de manière plus synthétique, de ALF (*Anisotropic Linear Forcing*).

Remarque (Forçage de la vitesse moyenne). *On note l'équation de Navier–Stokes sous la forme symbolique :*

$$\mathcal{NS}(\mathbf{u}, p) = 0.$$

Sur une zone de recouvrement RANS/LES avec forçage volumique, les équations modèles sont :

$$\mathcal{NS}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \mathbf{f} = 0 \quad (\text{LES forcée}), \quad (7.24)$$

$$\mathcal{NS}(\overline{\mathbf{u}}, \overline{p}) + \nabla \cdot \mathbf{R} = 0, \quad (\text{RANS}), \quad (7.25)$$

avec $\boldsymbol{\tau}$ le tenseur de sous-maille, $\mathbf{f}$ le terme de forçage et $\mathbf{R}$ le tenseur de Reynolds. En appliquant l'opérateur de moyenne de Reynolds à (7.24) et l'opérateur de filtrage à (7.25), on obtient (sous les hypothèses classiques de commutation de la dérivation avec l'opérateur de moyenne de Reynolds et avec l'opérateur de filtrage) :

$$\mathcal{NS}(\widetilde{\overline{\mathbf{u}}}, \widetilde{\overline{p}}) + \nabla \cdot \widetilde{\overline{\boldsymbol{\tau}}} + \nabla \cdot \mathbf{R}_r - \bar{\mathbf{f}} = 0, \quad (7.26)$$

$$\mathcal{NS}(\widetilde{\overline{\mathbf{u}}}, \widetilde{\overline{p}}) + \nabla \cdot \widetilde{\overline{\mathbf{R}}} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_m = 0, \quad (7.27)$$

avec :

$$\widetilde{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = \widetilde{\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}} - \widetilde{\overline{\mathbf{u}}} \otimes \widetilde{\overline{\mathbf{u}}} \quad (\text{contraintes de sous-maille moyennes}), \quad (7.28)$$

$$\mathbf{R}_r = \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}} \otimes \overline{\mathbf{u}} \quad (\text{contraintes de Reynolds résolues}), \quad (7.29)$$

$$\widetilde{\overline{\mathbf{R}}} = \widetilde{\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}} - \widetilde{\overline{\mathbf{u}}} \otimes \widetilde{\overline{\mathbf{u}}} \quad (\text{contraintes de Reynolds filtrées}), \quad (7.30)$$

$$\boldsymbol{\tau}_m = \widetilde{\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}} - \widetilde{\overline{\mathbf{u}}} \otimes \widetilde{\overline{\mathbf{u}}} \quad (\text{contraintes de sous-maille du champ moyen}). \quad (7.31)$$

En définissant l'opérateur de moyenne de Reynolds comme une moyenne d'ensemble (équation 2.12) et l'opérateur de filtrage comme un produit de convolution (équation 4.62), ces deux opérateurs commutent. Cela implique notamment $\mathcal{NS}(\widetilde{\overline{\mathbf{u}}}, \widetilde{\overline{p}}) = \mathcal{NS}(\overline{\mathbf{u}}, \overline{p})$, et donc, en soustrayant (7.26) et (7.27), on obtient :

$$\bar{\mathbf{f}} = \nabla \cdot (\mathbf{R}_r - \widetilde{\overline{\mathbf{R}}}) + \nabla \cdot (\widetilde{\overline{\boldsymbol{\tau}}} - \boldsymbol{\tau}_m). \quad (7.32)$$

D'après leur définition et en raison de la commutation des opérateurs de moyenne et de filtrage, on voit facilement que si les contraintes (7.28)–(7.31) sont exactes, on a $\bar{\mathbf{f}} = 0$. En revanche, dans

une application pratique de couplage RANS/LES zonal, $\mathbf{R}$ et $\boldsymbol{\tau}$ sont modélisés et les contraintes ne s'annulent pas a priori. C'est donc l'expression (7.32), trop complexe pour être calculée directement (en particulier le tenseur $\tilde{\mathbf{R}}$ qui demande à connaître explicitement le filtre LES), qu'il faut modéliser. En raison du terme de rappel des contraintes de Reynolds résolues (équation 7.16), on peut faire l'approximation :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_r + \overline{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbf{R}, \\ \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{f}} &= \nabla \cdot (\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_m. \end{aligned} \quad (7.33)$$

L'expression (7.20) modélise principalement le premier terme, qui ne peut pas être calculé explicitement lorsque le filtre LES est inconnu. Le second terme pourrait être modélisé par un modèle de sous-maille appliqué au champ moyen, mais on s'attend à ce que l'influence de ce terme soit très faible. Il a donc été négligé ici, pour simplifier le modèle.

7.1.4 Formulation du forçage pour une turbulence homogène et isotrope. Lien avec le forçage linéaire de Lundgren

On se place maintenant dans le cas d'une turbulence isotrope, par exemple, si une turbulence initialement isotrope est forcée vers des moments cibles $\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger$ isotropes :

$$\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger = \frac{2}{3} k_r^\dagger \delta_{ij}. \quad (7.34)$$

On peut alors faire l'hypothèse que la turbulence reste statistiquement isotrope à chaque instant, et donc que les moments résolus $\overline{u'_i u'_{j_r}}$ vérifient :

$$\overline{u'_i u'_{j_r}} = \frac{2}{3} k_r \delta_{ij}. \quad (7.35)$$

Cette situation simplifie grandement les calculs puisque dans ce cas on peut donner une expression entièrement explicite de la force (7.13). En substituant (7.34) et (7.35) dans (7.17) et en utilisant la symétrie $A_{ij} = A_{ji}$, on trouve que la production du forçage est :

$$\frac{4}{3} k_r A_{ij} = \frac{1}{\tau_r} \left(\frac{2}{3} k_r^\dagger - \frac{2}{3} k_r \right) \delta_{ij}, \quad (7.36)$$

et donc les coefficients A_{ij} du forçage sont :

$$A_{ij} = \frac{1}{2\tau_r} \left(\frac{k_r^\dagger}{k_r} - 1 \right) \delta_{ij}.$$

Puisque l'écoulement est homogène, l'effet moyen du forçage est nul (équation 7.32). On a alors :

$$B_i = -\frac{1}{2\tau_r} \left(\frac{k_r^\dagger}{k_r} - 1 \right) \langle \tilde{u}_i \rangle.$$

La restriction isotrope (ILF) du terme de forçage linéaire anisotrope s'écrit donc :

$$f_i = \frac{1}{2\tau_r} \left(\frac{k_r^\dagger}{k_r} - 1 \right) (\tilde{u}_i - \langle \tilde{u}_i \rangle). \quad (7.37)$$

Lien avec le forçage linéaire de Lundgren (2003)

En fait, le terme ILF (7.37) est une écriture aménagée du terme de forçage linéaire isotrope proposé par Lundgren (2003) pour maintenir une turbulence isotrope à l'équilibre.

L'auteur introduit une force linéaire isotrope $A\mathbf{u}'$ dans l'équation de la vitesse fluctuante $\mathbf{u}'$, en turbulence isotrope ($\overline{\mathbf{u}} = 0$) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' = -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u}' + A\mathbf{u}'. \quad (7.38)$$

Cela implique :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\varepsilon + 2Ak,$$

et donc, la turbulence est maintenue à l'équilibre $\frac{\partial k}{\partial t} = 0$ pour :

$$A = \frac{\varepsilon}{3u_{\text{rms}}'^2}. \quad (7.39)$$

Rappelons qu'un terme de forçage est couramment introduit dans les études numériques de turbulence homogène isotrope, mais le plus souvent, le forçage est défini dans l'espace de Fourier et il est localisé sur les bas nombres d'onde (voir la revue de Rosales et Meneveau, 2005). Avec le forçage linéaire de Lundgren (2003), l'ensemble des nombres d'onde est directement affecté par le forçage. La motivation première de ce type de forçage, outre le fait qu'il peut être utilisé dans des codes de calculs résolvant les équations dans l'espace physique, est que la production d'énergie turbulente provient elle-même du terme $\mathbf{u}' \cdot \nabla \overline{\mathbf{u}}$ dans l'équation des fluctuations de vitesse, ce qui correspond à un forçage linéaire des fluctuations, proportionnel au gradient moyen. En ce sens, le forçage linéaire de la turbulence est similaire au processus « naturel » de production turbulente.

Rosales et Meneveau (2005) ont analysé en détail les propriétés de la turbulence isotrope forcée linéairement, propriétés dont le paragraphe 7.2.1 donnera un aperçu. Les auteurs prescrivent directement le coefficient A , ce qui revient à imposer à la turbulence son échelle de temps intégrale k/ε , et un équilibre statistiquement stationnaire est atteint. Alternativement, ils vérifient que l'on peut forcer la turbulence à un niveau de dissipation cible $\varepsilon^\dagger$, conservé constant au numérateur de (7.39) alors qu'au dénominateur, u_{rms}' est évalué au cours du calcul. À l'équilibre, $\varepsilon^\dagger$ correspond au taux moyen d'énergie injectée, ou produite, par le forçage. Cette approche est donc très proche de celle conduisant au terme ILF (et plus généralement au terme ALF). Avec (7.37), le coefficient A de l'équation (7.38) est :

$$A = \frac{1}{2\tau_r} \left(\frac{k_r^\dagger}{k_r} - 1 \right). \quad (7.40)$$

La production du forçage n'est pas explicitement imposée ici, mais ce sont les paramètres $k_r^\dagger$ et τ_r qui en déterminent le montant moyen. À l'équilibre, cette production (équation 7.36) est entièrement balancée par la dissipation, et donc :

$$\varepsilon = \frac{1}{\tau_r} (k_r^\dagger - k_r). \quad (7.41)$$

En substituant (7.41) dans (7.40), l'expression (7.39) du coefficient A du forçage linéaire isotrope de Lundgren (2003) est recouvrée.

Équations du forçage linéaire dans l'espace spectral

On donne ici les équations du forçage linéaire dans l'espace spectral. Lorsque la turbulence est homogène, la vitesse s'écrit $u_i = U_i^0 + u_i'$ avec U_i^0 un vecteur constant (dans l'espace et dans le temps). Le gradient de vitesse moyenne est également constant dans l'espace, et noté $\lambda_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \partial \overline{u_i} / \partial x_j$. De même, A_{ij} est homogène et la moyenne $\overline{\mathbf{f}}$ est nulle. L'équation pour la vitesse fluctuante est donc :

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} - (\lambda_{ij} - A_{ij}) u_j'. \quad (7.42)$$

On voit bien que les coefficients A_{ij} du forçage contribuent au bilan de la même manière que le gradient moyen λ_{ij} . Physiquement, ces deux tenseurs sont néanmoins bien distincts puisqu'aucune contrainte d'incompressibilité ne s'applique à $\mathbf{A}$, en particulier il peut être isotrope.

Notons $\widehat{\mathbf{u}}$ la transformée de Fourier de $\mathbf{u}'$. L'équation de la vitesse fluctuante dans l'espace spectral est (* désigne le complexe conjugué) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\kappa^2 + U_j^0\kappa_j\right)\widehat{u}_i + P_{ij}(\lambda_{jl} - A_{jl})\widehat{u}_l = -iP_{ij}\kappa_l \int_{\kappa+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} \widehat{u}_j^*(\mathbf{p})\widehat{u}_l^*(\mathbf{q})d\mathbf{p}d\mathbf{q}. \quad (7.43)$$

Dans cette équation, la pression a été éliminée du bilan – en la substituant par son expression obtenue en prenant la divergence de l'équation (7.42) – ce qui a pour effet de projeter les variables non colinéaires à $\widehat{\mathbf{u}}$ sur le plan orthogonal à κ (contrainte de continuité), par l'opérateur de projection P_{ij} (équation 2.43). C'est le cas du terme non linéaire au membre de droite mais aussi des termes de forçage linéaire (par le tenseur gradient λ et par le tenseur $\mathbf{A}$), au membre de gauche. La dynamique du tenseur spectral des corrélations doubles $\widehat{R}_{ij}(\kappa) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widehat{u}_i(\kappa)\widehat{u}_j(-\kappa) \rangle$ est donnée par :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu\kappa^2\right)\widehat{R}_{ij}(\kappa) + P_{im}(\lambda_{ml} - A_{ml})\widehat{R}_{jl}(\kappa) + P_{jm}(\lambda_{ml} - A_{ml})\widehat{R}_{il}(\kappa) = \int_{\kappa+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} T_{ij}(\kappa, \mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (7.44)$$

avec $T_{ij}(\kappa, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ le terme de transfert triadique dont l'explicitation conduit au membre de droite de (2.46) (p. 21).

Pour une turbulence isotrope, on a $\lambda_{ij} = 0$ et $A_{ij} = A\delta_{ij}$. En prenant la trace de (7.44) puis en intégrant sur la sphère de rayon $\kappa = \|\kappa\|$, on déduit l'équation du spectre en module (équation 2.50) pour une THI forcée linéairement (Rosales et Meneveau, 2005) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu\kappa^2 - 2A\right)E(\kappa) = T(\kappa), \quad (7.45)$$

avec $T(\kappa)$ le terme de transfert défini par (2.53). L'effet du forçage est celui d'une déformation isotrope. Tous les nombres d'onde sont forcés, d'autant plus que la densité spectrale d'énergie turbulente $E(\kappa)$ est importante.

7.1.5 Formulation du forçage dans un référentiel quelconque

En utilisant les équations (7.13) et (7.21), le forçage linéaire anisotrope s'écrit :

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{u}} - \langle \widetilde{\mathbf{u}} \rangle) + \frac{1}{\tau_v}(\overline{\mathbf{u}}^\dagger - \langle \overline{\mathbf{u}} \rangle), \quad (7.46)$$

avec $\mathbf{A}$ défini de manière implicite par :

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_r + (\mathbf{A}\mathbf{R}_r)^T = \frac{1}{\tau_r}(\mathbf{R}_r^\dagger - \mathbf{R}_r). \quad (7.47)$$

$\mathbf{R}_r$ est le tenseur des contraintes de Reynolds résolues, $\mathbf{R}_r^\dagger$ est le tenseur des contraintes résolues cibles et $\overline{\mathbf{u}}^\dagger$ est le vecteur vitesse moyenne cible. Si l'on ne force pas la vitesse moyenne (équation 7.23), le second terme du membre de droite de (7.46) est nul.

On se place dans le cadre suivant (l'exposant $\star$ indique que la grandeur est perçue dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}^\star$) :

- (i) le filtre LES est isotrope,
- (ii) $\overline{\mathbf{u}}^\dagger$ est tel que :

$$\overline{\mathbf{u}}^\dagger = \mathbf{Q}^T((\overline{\mathbf{u}}^\dagger)^\star + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^\star), \quad (7.48)$$

(iii) $\mathbf{R}_r^\dagger$ est objectif :

$$\mathbf{R}_r^\dagger = \mathbf{Q}^T (\mathbf{R}_r^\dagger)^* \mathbf{Q}, \quad (7.49)$$

(iv) les paramètres τ_v et τ_r sont des scalaires objectifs :

$$\tau_v = \tau_v^*, \quad \tau_r = \tau_r^*. \quad (7.50)$$

Avec l'hypothèse (i), on peut facilement vérifier (grâce aux équations 3.6, 3.25, 3.26, 4.83) qu'on a, par changement de référentiel, les propriétés suivantes :

$$\langle \tilde{u} \rangle = \mathbf{Q}^T (\langle \tilde{u}^* \rangle + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}^*), \quad (7.51)$$

$$(\tilde{u} - \langle \tilde{u} \rangle) = \mathbf{Q}^T (\tilde{u}^* - \langle \tilde{u}^* \rangle). \quad (7.52)$$

La vitesse filtrée fluctuante est objective, et par suite, le tenseur des contraintes de Reynolds résolues est objectif :

$$\mathbf{R}_r^* = \mathbf{Q} \mathbf{R}_r \mathbf{Q}^T. \quad (7.53)$$

Les hypothèses (ii) et (iii) ne sont pas très restrictives en pratique. Typiquement, $\bar{\mathbf{u}}^\dagger$ peut être la vitesse moyenne, exacte ou filtrée par un filtre spatial isotrope, d'un écoulement quelconque. De même, $\mathbf{R}_r^\dagger$ peut être défini comme le tenseur de Reynolds, exacte ou uniquement sa partie résolue issue de l'application d'un filtre isotrope à un écoulement quelconque. Le modèle (7.18) peut également être utilisé à condition que le modèle pour les contraintes de sous-maille $\boldsymbol{\tau}$ soit objectif (c'est le cas du modèle de Smagorinsky – paragraphe 4.3.3.1–, utilisé dans ce chapitre).

L'hypothèse (iv) sera quant à elle vérifiée pour l'ensemble des paramètres τ_v , τ_r utilisés dans ce chapitre.

D'après (7.48), (7.50) et (7.51), la partie moyenne de $\mathbf{f}$ (second terme du membre de droite de 7.46) est objective.

Examinons maintenant l'objectivité de $\mathbf{A}$, qui est définie implicitement par le système linéaire (7.47). Si ce système est inversible, il existe une fonction g telle que :

$$\mathbf{A} = g(\mathbf{R}_r, \mathbf{R}_r^\dagger, \tau_r).$$

Comme $\mathbf{R}_r$, $\mathbf{R}_r^\dagger$ et τ_r sont objectifs (équations 7.49, 7.50 et 7.53), on a de plus :

$$\mathbf{A}^* = g(\mathbf{R}_r^*, (\mathbf{R}_r^\dagger)^*, \tau_r^*). \quad (7.54)$$

D'autre part, l'objectivité de $\mathbf{R}_r$, $\mathbf{R}_r^\dagger$ et τ_r permet de réécrire (7.47) sous la forme :

$$\mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T \mathbf{R}_r^* + (\mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T \mathbf{R}_r^*)^T = \frac{1}{\tau_r} ((\mathbf{R}_r^\dagger)^* - \mathbf{R}_r^*),$$

soit :

$$\mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T = g(\mathbf{R}_r^*, (\mathbf{R}_r^\dagger)^*, \tau_r^*) \quad (7.55)$$

(cela montre que g est une fonction isotrope – sujette au théorème de représentation de Smith, 1971, en particulier –, car elle vérifie $\mathbf{Q} g(\mathbf{R}_r, \mathbf{R}_r^\dagger, \tau_r) \mathbf{Q}^T = g(\mathbf{Q} \mathbf{R}_r \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \mathbf{R}_r^\dagger \mathbf{Q}^T, \tau_r)$). En soustrayant (7.54) et (7.55), on montre que le tenseur $\mathbf{A}$ est objectif.

Comme la vitesse résolue fluctuante est également objective (équation 7.52), la partie fluctuante de $\mathbf{f}$ est objective, à l'instar de sa partie moyenne. Le terme de forçage ALF est donc objectif. Sa formulation est la même dans tous les référentiels sous les hypothèses (i–iv).

7.2 Validation et paramétrisation du forçage ALF

7.2.1 Analyse et validation en turbulence homogène et isotrope.

On analyse ici le forçage linéaire dérivé aux paragraphes précédents, dans le cas d'une turbulence homogène et isotrope (THI). La turbulence est forcée à son niveau d'énergie résolue initial k_0 . Cet état initial est celui d'une THI en phase de décroissance énergétique, dans un domaine de calcul cubique de taille $L^3 = (2\pi)^3$, périodique dans les trois directions et maillé par $N^3 = 32^3$ cellules de taille constante. L'initialisation est faite en filtrant dans l'espace spectral une simulation numérique directe de turbulence isotrope à $Re_\lambda \approx 105$ (avec λ la micro-échelle de Taylor).² Le problème est adimensionné en prenant la longueur L du domaine de calcul comme échelle de longueur et $\sqrt{k_0}$ comme échelle de vitesse. Avec ces échelles, le nombre de Reynolds des simulations est $Re = \sqrt{k_0}L/\nu = 11933$. Dans ce paragraphe et dans le suivant, la taille du filtre LES est définie par $\tilde{\Delta} = \Delta$, avec $\Delta = L/N$ le pas d'espace.³ La fréquence de coupure est alors définie par $\kappa_c \stackrel{\text{def}}{=} \pi/\Delta = 16$. Le modèle de sous-maille est le modèle de Smagorinsky, avec $C_s = 0.18$. Cette valeur est très proche de la valeur analytique qu'on peut déduire suivant l'analyse de Lilly (1966) pour un filtre à fréquence de coupure. Pour toutes les simulations le nombre $CFL_{\max}$ est autour de 0.1.

Le forçage est réalisé avec le terme général ALF (paragraphe 7.1.3), mais aussi avec sa restriction isotrope ILF (paragraphe 7.1.4). Avec la force ALF, les contraintes cibles sont fixées à :

$$\overline{u'_i u'^{\dagger}_{j_r}} = \frac{2}{3} k_0 \delta_{ij}, \quad (7.56)$$

c'est-à-dire que l'écoulement est explicitement forcé vers l'isotropie à chaque instant. Aucun forçage de la vitesse moyenne n'est pris en compte, ce qui permet de s'assurer que le forçage des contraintes turbulentes ne génère pas de quantité de mouvement moyenne dans ce cas homogène isotrope. Ce sont donc les équations (7.17), (7.23) et (7.56) qui déterminent implicitement les coefficients A_{ij} et B_i du forçage ALF. Le forçage ILF est quant à lui déterminé par l'équation (7.37) pour $k_r^\dagger = k_0$. Dans ce forçage, l'isotropie statistique de l'écoulement est supposée vraie exactement à chaque instant. Le forçage ne s'ajuste pas en fonction des faibles anisotropies qui pourrait apparaître à un instant donné. Pour les deux forçages, les moments $\langle \tilde{u}_i \rangle$ et $\overline{u'_i u'^{\dagger}_{j_r}}$, homogènes, sont calculés en moyennant spatialement $\tilde{u}_i$ sur l'ensemble du domaine. Trois valeurs du paramètre adimensionné $\tau_r^* \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k_0} \tau_r / L$ sont testées : $\tau_r^* = 0.1, 0.05$ et 0.01 . Dans la suite de ce paragraphe, les échelles de longueur L et de temps $L/\sqrt{k_0}$ sont systématiquement utilisées pour l'adimensionnement, ce qui est noté par une astérisque.

Sur la figure 7.1, l'évolution temporelle de la norme de la vitesse moyenne dans le domaine est tracée. On vérifie principalement ici que le forçage linéaire isotrope ne génère pas de quantité de mouvement moyenne. C'est bien le cas pour les trois valeurs du paramètre τ_r considérées et pour les deux formulations ALF et ILF, puisque dans tous les cas, la vitesse moyenne reste très proche de zéro, au moins cinq ordres de grandeur inférieure à l'énergie turbulente k_0 . Cela confirme qu'aucun forçage de la vitesse moyenne vers zéro n'est nécessaire pour le terme ALF sur ce cas test homogène isotrope. On peut d'ailleurs noter que la vitesse moyenne est plus proche encore de zéro avec la formulation ALF

2. Cas HOM02 du cahier de validation AGARD ADVISORY REPORT 345 (référence [1]).

3. Lorsque le maillage est cartésien et régulier, le schéma de discrétisation volumes finis de *Code_Saturne* est non diffusif car les termes d'exposant pair de l'erreur de troncature s'annulent identiquement. La taille du filtre implicite LES peut donc raisonnablement être identifiée au pas d'espace du maillage dans ce cas.

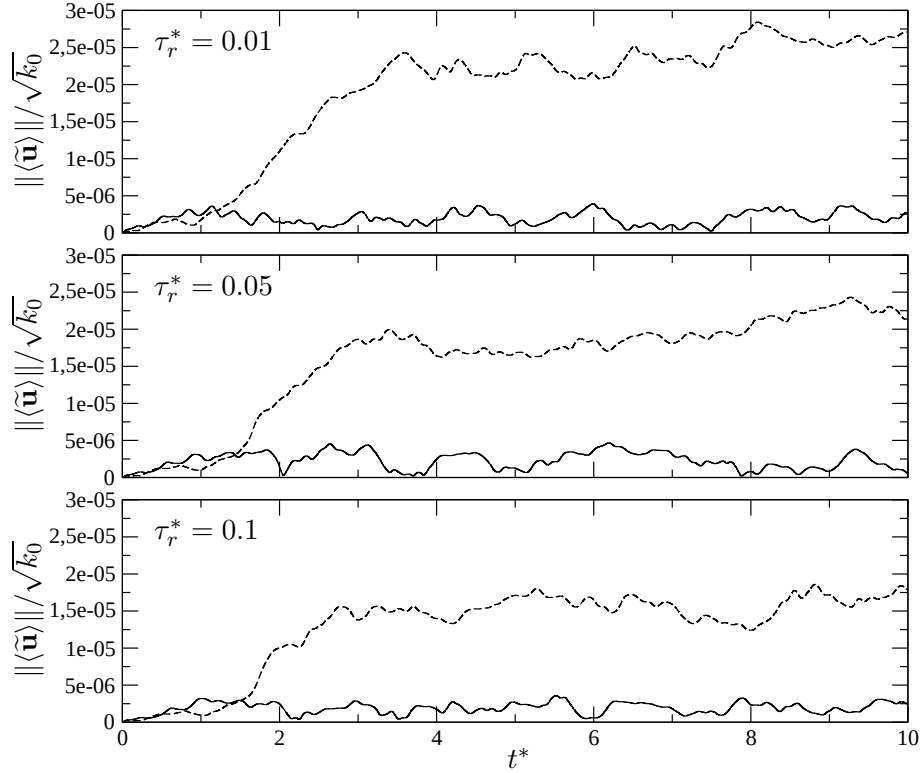


FIGURE 7.1 – Évolution de la norme de la vitesse moyenne. Forçage d'une THI vers son niveau d'énergie initial k_0 , $\tau_r^* = 0.01, 0.05, 0.1$. — : ALF ; - - - : ILF.

qu'avec la formulation ILF. À l'inverse, avec cette dernière, la quantité de mouvement moyenne augmente légèrement lorsque l'intensité du forçage augmente (c'est-à-dire lorsque τ_r diminue), ce qui n'est pas le cas avec le terme ALF.

Sur la figure 7.2, l'évolution de l'énergie turbulente résolue est tracée pour les trois valeurs du paramètre τ_r^* testées. Dans les trois cas, l'énergie commence par décroître au début du calcul puis le forçage permet de la ramener vers un niveau à peu près constant. L'écoulement est alors statistiquement stationnaire mais l'énergie effective instantanée oscille autour du niveau moyen statistiquement, noté $\langle k_r \rangle_t$. Ces observations concordent tout à fait avec les résultats de Rosales et Meneveau (2005), qui réalisent des simulations directes de turbulence isotrope forcée linéairement, en imposant directement le scalaire A dans l'équation (7.38). Avec la formulation présente du forçage linéaire, le niveau moyen d'énergie résolue dépend du paramètre τ_r et de k_0 : il reste inférieur à k_0 , mais plus τ_r est petit, plus la fraction $\langle k_r \rangle_t / k_0$ se rapproche de un. Asymptotiquement, on a $\langle k_r \rangle_t \rightarrow k_0$ lorsque $\tau_r \rightarrow 0$ (en supposant qu'un équilibre est atteint, c'est-à-dire avec le membre de droite de l'équation 7.36 statistiquement constant). Les résultats obtenus avec la formulation générale ALF du forçage ou avec sa restriction isotrope ILF sont similaires. Dans un sens, cela indique que l'hypothèse d'isotropie statistique instantanée de l'écoulement, conduisant au terme ILF (équation 7.35), est pratiquement vérifiée. Dans l'autre, cela permet de vérifier que l'implémentation du terme ALF est correcte. En particulier, l'inversion d'un système linéaire pour calculer les coefficients A_{ij} ne pose aucun problème numérique particulier.

L'évolution du spectre d'énergie cinétique turbulente résolue $E_r(\kappa)$ est représentée sur les figures 7.3 et 7.4. Pour faciliter la lecture, les évolutions durant la phase de décroissance – avant que l'énergie n'atteigne son minimum – et durant la phase de reconstruction –

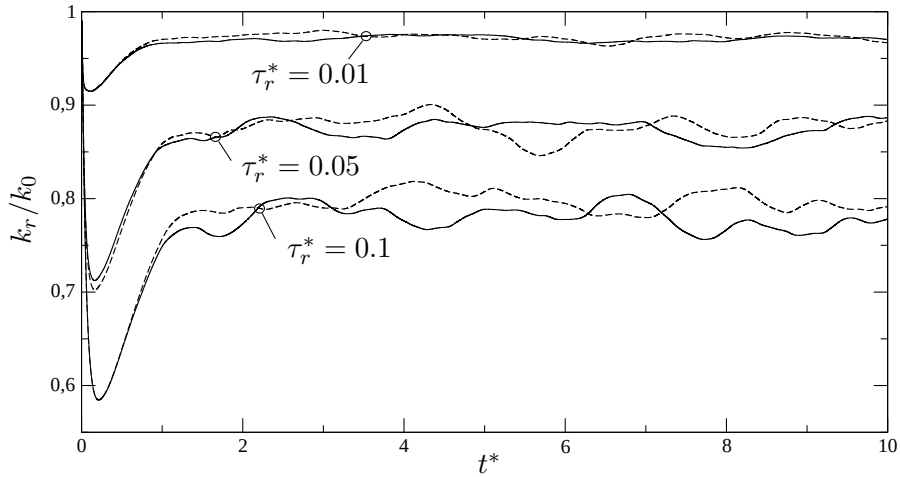


FIGURE 7.2 – Évolution de l'énergie cinétique turbulente. Forçage d'une THI vers son niveau d'énergie initial k_0 , $\tau_r^* = 0.01, 0.05, 0.1$. — : ALF ; - - - : ILF.

avant qu'elle ne devienne à peu près constante – sont présentées distinctement sur les deux graphes de la figure 7.3, pour le forçage ALF avec $\tau_r^* = 0.1$. Le spectre initial est marqué par des symboles pleins sur le graphe 7.3a.

Pendant la phase de décroissance (graphe 7.3a), on observe que l'énergie décroît d'abord rapidement sur une large gamme de nombre d'onde $\kappa > 4$, tandis que les plus grandes échelles se maintiennent grâce au forçage. La décroissance ralentit ensuite et le spectre tend vers une forme relativement figée pour $\kappa \geq 4$. Le spectre montre alors une pente à peu près constante (en coordonnées log-log) dans cette plage. La cascade est néanmoins beaucoup moins rapide que dans un régime inertiel; on a environ $E_r(\kappa) \sim \kappa^{-0.6}$ (contre $\kappa^{-5/3}$ dans le régime inertiel). Parallèlement, l'énergie détenue par les plus grandes échelles commence à croître, ce qui amorce la phase de croissance de l'énergie turbulente (graphe 7.3b). Pendant cette seconde phase, plus lente que la première, le forçage de l'énergie semble se concentrer sur les grandes échelles de l'écoulement, dont l'énergie augmente. Au contraire, l'énergie détenue par les petites échelles décroît. Notons que, par définition, le forçage linéaire affecte directement tous les nombres d'onde. Cependant, les nombres d'ondes sont d'autant moins forcés que $E_r(\kappa)$ est petit (voir équation 7.45). On constate

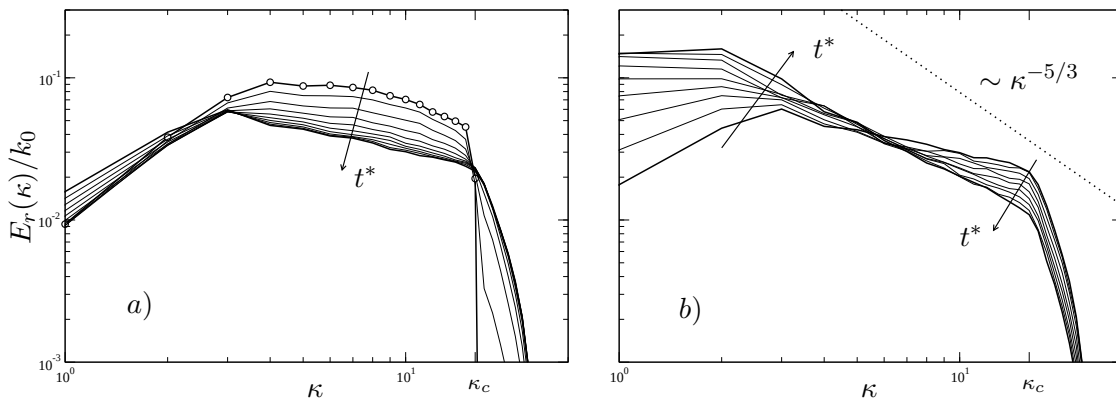


FIGURE 7.3 – Évolution du spectre d'énergie. Forçage ALF d'une THI vers son niveau d'énergie initial k_0 , $\tau_r^* = 0.1$. a) Phase de décroissance ($0 \leq t^* \leq 0.18$, une ligne tous les $\delta t^* = 0.02$), b) phase de croissance, ($0.2 \leq t^* \leq 1$, une ligne tous les $\delta t^* = 0.1$).

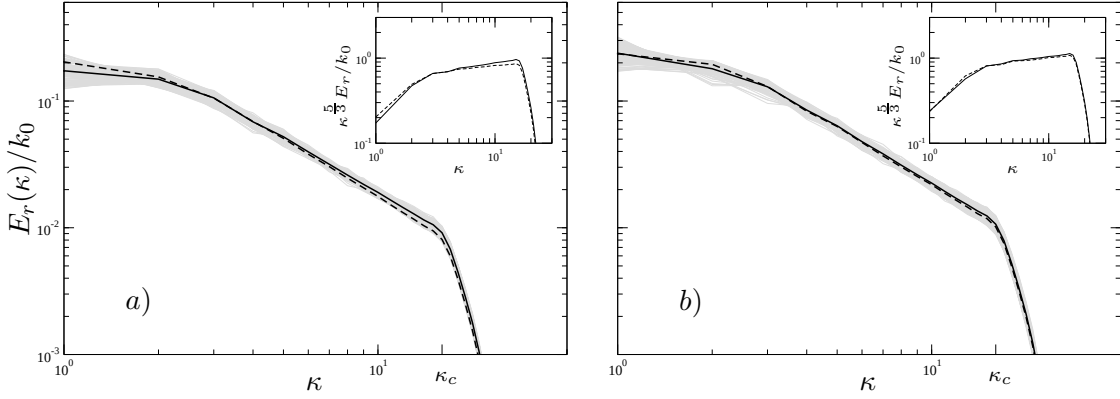


FIGURE 7.4 – Évolution du spectre d'énergie. Forçage d'une THI vers son niveau d'énergie initial k_0 , pour a) $\tau_r^* = 0.1$, b) $\tau_r^* = 0.01$. Lignes grises : 100 spectres uniformément répartis dans l'intervalle $3 < t^* \leq 10$. Ligne noire : spectre moyen (multiplié par $\kappa^{5/3}$ dans l'encadré). — : ALF ; - - - : ILF.

sur le graphe 7.3b que l'effet du forçage n'est pas dominant aux petites échelles pendant cette seconde phase. L'augmentation de la dissipation aux petites échelles, en réponse à l'augmentation de l'énergie aux grandes échelles, pourrait expliquer ce reconditionnement spectral.

Rosales et Meneveau (2005) ont montré que le spectre d'une turbulence isotrope forcée linéairement est indépendant de la répartition spectrale initiale. Le transitoire vers l'état stationnaire dépend en revanche du spectre initial. L'évolution décrite ci-dessus correspond à celle obtenue pour un spectre initial dont les nombres d'ondes les plus énergétiques sont autour de $\kappa \approx 5$.

Une fois que la turbulence atteint son équilibre statistiquement stationnaire, le spectre d'énergie oscille autour d'une forme moyenne (figure 7.4). Là encore, les résultats avec le terme général ALF et sa restriction isotrope ILF coïncident puisque les spectres moyens sont très proches. De même, la forme générale du spectre n'est pas modifiée en fonction du temps de relaxation τ_r . Les spectres moyens tracés sur les figures 7.4a et 7.4b se comportent en $\kappa^{-\alpha}$ sur une large plage des fréquences résolues. L'encadré des figures montre que α est assez proche de $5/3$, qui est la pente obtenue sous les hypothèses de Kolmogorov. Cela apparaît également sur les simulations directes de Lundgren (2003) et de Rosales et Meneveau (2005). Pour les LES présentées ici, on a environ $E_r(\kappa) \sim \kappa^{-1.5}$.

Comme indiqué au paragraphe 7.1.4, la production aux échelles résolues induite par le forçage est, à l'équilibre et en l'absence d'autre mécanisme de production, entièrement balancée par la dissipation (résolue + de sous-maille), de sorte que la relation (7.41) est vérifiée, avec au membre de gauche ε désignant symboliquement :

$$\varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle - \langle \tau_{ij} \tilde{S}_{ij} \rangle.$$

L'équation (7.41) peut être utilisée pour évaluer les échelles intégrales de temps T et d'espace $L_{\parallel}$:

$$T = \frac{\langle u_{\text{rms}}'^2 \rangle_t}{\varepsilon}, \quad L_{\parallel} = \frac{\langle u_{\text{rms}}'^3 \rangle_t}{\varepsilon}, \quad (7.57)$$

avec $u'_{\text{rms}} = \sqrt{2\langle k_r \rangle_t / 3}$ évalué à partir des échelles résolues. Les résultats sont reportés dans le tableau 7.1.

τ_r^*	$\langle k_r \rangle / k_0$		T^*		$L_{\parallel}^*$	
	ALF	ILF	ALF	ILF	ALF	ILF
0.01	0.970	0.972	0.217	0.230	0.174	0.185
0.05	0.874	0.883	0.232	0.253	0.177	0.194
0.1	0.787	0.797	0.246	0.262	0.178	0.191

TABLE 7.1 – Énergie résolue moyenne et échelles intégrales de temps T et d'espace $L_{\parallel}$ (équation 7.57) (en moyenne pour $3 < t^* \leq 40$).

Comme attendu, l'échelle intégrale de temps T est modifiée en fonction du paramètre τ_r car, comme le souligne l'expression (7.39), le coefficient A du forçage linéaire est inversement proportionnel à l'échelle intégrale de temps. Cependant, avec la formulation ALF/ILF, A n'est pas explicitement fixé ; il s'ajuste en fonction des paramètres τ_r et k_0 . La dépendance de l'échelle intégrale T au paramètre τ_r n'est pas triviale puisque le coefficient A du forçage ALF/ILF (équation 7.40) dépend de τ_r à la fois explicitement, avec le facteur $1/\tau_r$, et implicitement, *via* le ratio k_0/k_r . Ces deux dépendances s'exercent avec des monotonies opposées puisqu'on a vu qu'une augmentation de $1/\tau_r$ impliquait une diminution de k_0/k_r (figure 7.2). Finalement, on observe sur le tableau 7.1 que le paramètre τ_r du forçage ALF/ILF a une influence modérée sur l'échelle intégrale de temps T .

L'échelle intégrale de longueur est quant à elle à peu près constante pour les trois valeurs de τ_r testées. Cela est également observé par Rosales et Meneveau (2005). Les auteurs expliquent cela par le fait que le forçage introduit une échelle de temps dans le système, mais pas d'échelle de longueur. La seule échelle caractéristique à disposition des grandes structures pour fixer le montant de la dissipation est donc la taille L du domaine, de sorte qu'une relation de type $\varepsilon \sim A^3 L^2$ s'établit. En utilisant (7.39), cela implique :

$$\frac{u_{\text{rms}}^3}{\varepsilon} \sim L.$$

La constante de proportionnalité $L_{\parallel}/L$ reportée par Rosales et Meneveau (2005) est 0.19, en très bon accord avec les ratios mesurés pour les LES présentes.

Notons que cette constante de proportionnalité très proche suggère que l'échelle intégrale construite à partir des échelles résolues d'une simulation avec forçage linéaire est la même, que l'on résolve toutes les échelles (DNS) ou seulement les plus grandes (LES). Ainsi, pour une LES forcée linéairement, l'échelle intégrale « totale », qui prend en compte l'énergie de sous-maille, serait d'autant plus grande que la fréquence de coupure de la LES est basse. Comme la fréquence de coupure d'une LES forcée linéairement fixe également la largeur de bande du forçage, ce résultat est conforme à l'observation de Rosales et Meneveau (2005) qui relèvent que l'échelle intégrale d'une DNS forcée linéairement (à tous les nombres d'ondes) est plus petite que l'échelle intégrale mesurée pour des DNS forcées uniquement au grandes échelles. Lundgren (2003) a également montré, à l'aide des équations de Kármán et Howarth, que la largeur de bande du forçage a une influence importante sur les statistiques de l'écoulement.

Pour finir, on montre sur la figure 7.5 le comportement de la solution lorsque le paramètre τ_r est modifié au cours du calcul. Les simulations sont commencées avec un paramètre $\tau_r = \tau_1$ puis à l'instant $t^* = 3$, τ_1 est remplacé par τ_2 . Deux *scenarii* sont représentés sur la figure 7.5 : l'un pour lequel $\tau_1^* = 0.1$ et $\tau_2^* = 0.01$ et l'autre pour lequel $\tau_1^* = 0.01$ et $\tau_2^* = 0.1$. On voit que si l'on augmente τ_r , cela réduit la production induite par le forçage :

$$Pf \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} P_{ii}^f = \frac{1}{\tau_r} (k_0^\dagger - k_r^\dagger) \quad (7.58)$$

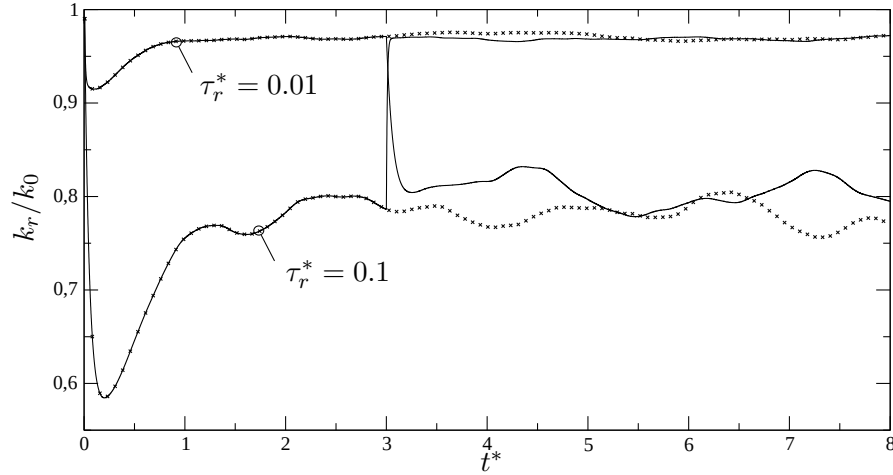


FIGURE 7.5 – Évolution de l'énergie cinétique turbulente résolue. Forçage ALF d'une THI vers son niveau d'énergie initial k_0 . $\times$: τ_r constant pendant la simulation ; — : τ_r modifié à l'instant $t^* = 3$.

(d'après l'équation 7.15), et donc le niveau d'énergie k_r baisse. À l'inverse, si l'on diminue τ_r , k_r augmente. On voit également qu'après la modification du paramètre τ_r , la solution s'ajuste rapidement à la solution obtenue lorsque τ_2 est choisi dès le début du calcul. Cela confirme l'indépendance de la solution forcée à la condition initiale. Comme attendu, le transitoire après le changement du paramètre est d'autant plus court que τ_2 est petit. De plus, pour un paramètre τ_r donné, le transitoire est plus court lorsque la condition initiale est déjà une solution forcée linéairement, puisque seul le niveau de l'énergie s'ajuste ; il n'y a pas de reconditionnement du spectre comme celui décrit par la figure 7.3.

En conclusion, on a validé la formulation du forçage linéaire proposé aux paragraphes 7.1.3 et 7.1.4, pour une turbulence homogène et isotrope. On a vu que les caractéristiques principales de la turbulence isotrope forcée linéairement, dégagées par Rosales et Meneveau (2005), étaient très bien recouvertes avec la formulation alternative ALF/ILF, y compris avec un maillage de raffinement limité. Les spécificités de la formulation ALF/ILF du forçage viennent d'une part du fait qu'il est appliquée à une simulation des grandes échelles et non pas à une simulation directe, et d'autre part que sa formulation de type relaxation implique que les statistiques cibles sont atteintes à un degré de précision près, qui dépend du paramètre τ_r . L'augmentation de ce paramètre augmente légèrement l'échelle intégrale de temps de la turbulence mais pas l'échelle intégrale d'espace.

7.2.2 Démonstration pour une turbulence homogène anisotrope

On montre maintenant l'efficacité du forçage linéaire pour une turbulence homogène anisotrope. Pour cela, on part (le plus souvent) d'une turbulence isotrope et on force, grâce au terme ALF, différentes anisotropies de la turbulence, *via* des contraintes cibles $\overline{u'_i u'_j}$ anisotropes. On verra ainsi si le forçage ALF est en mesure d'imposer toutes les anisotropies possibles à la turbulence.

Rappel (Caractérisation de l'anisotropie). *Le tenseur d'anisotropie :*

$$b_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}}{2k}.$$

étant symétrique et de trace nulle, la structure de l'anisotropie est entièrement caractérisée par les deuxième et le troisième invariants principaux du tenseur :

$$\mathbb{I}_b = -\frac{1}{2}b_{ij}b_{ji}, \quad \mathbb{III}_b = \frac{1}{3}b_{ij}b_{jk}b_{ki}. \quad (7.59)$$

Lumley et Newman (1977) et Lumley (1978) proposent de caractériser les différentes anisotropies possibles de la turbulence dans le plan des invariants $(\mathbb{III}_b, -\mathbb{I}_b)$. En utilisant les conditions de réalisabilité de Schumann (1977) :

$$\overline{u_i'^2} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.60)$$

$$\det(\overline{\mathbf{u}} \otimes \overline{\mathbf{u}}) \geq 0, \quad (7.61)$$

$$|\overline{u_i' u_j'}| \leq \sqrt{\overline{u_i'^2} \overline{u_j'^2}}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (7.62)$$

les auteurs montrent que les invariants $\mathbb{I}_b$ et $\mathbb{III}_b$ vérifient les relations :

$$\frac{1}{9} + 3\mathbb{III}_b + \mathbb{I}_b \geq 0, \quad (7.63)$$

$$2\left(-\frac{\mathbb{I}_b}{3}\right)^{3/2} - |\mathbb{III}_b| \geq 0, \quad (7.64)$$

de sorte que, dans le plan des invariants $(\mathbb{III}_b, -\mathbb{I}_b)$, toutes les anisotropies réalisables de la turbulence sont à l'intérieur ou sur les arêtes d'un « triangle » dont les équations (7.63) et (7.64) définissent les arêtes (les deux arêtes définies par (7.64) sont courbes, d'où les guillemets). Choi (1983) propose de faire les changements de variables :

$$\eta = \sqrt{-\mathbb{I}_b/2}, \quad \xi = \sqrt[3]{\mathbb{III}_b/2},$$

ce qui permet (entre autre) d'obtenir un triangle visuellement moins déformé. Les arêtes du triangle correspondent à des structures de la turbulence bien déterminées : celle d'une turbulence axisymétrique dont une valeur propre est prépondérante devant les deux autres (arête dénotée 'axi cigare' sur la figure 7.6), celle d'une turbulence axisymétrique dont deux valeurs propres sont prépondérantes devant la troisième ('axi pancake') et celle d'une turbulence à deux composantes ('2C'). Les sommets à l'intersection de ces arêtes correspondent à une turbulence isotrope ('iso'), une turbulence axisymétrique à deux composantes ('2C-axi') et une turbulence à une composante ('1C'), comme illustré sur la figure 7.6. Choi et Lumley (2001) et Simonsen et Krogstad (2005) insistent sur le fait que cette classification porte sur la forme du speroïde des valeurs propres du tenseur de Reynolds et non pas sur la forme des structures turbulentes ou tourbillons observés instantanément dans un écoulement turbulent.

En se plaçant dans le plan des invariants (ξ, η) du tenseur d'anisotropie :

$$\eta^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{6}b_{ij}b_{ji}, \quad \xi^3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{6}b_{ij}b_{jk}b_{ki}, \quad (7.65)$$

les points du triangle de Lumley (Lumley et Newman, 1977; Lumley, 1978) qu'on propose de visiter sont (voir figure 7.6) :

- une turbulence anisotrope à trois composantes fortes (le point noté 'O') :

$$\overline{u'^2}_r = \frac{1}{3}k_r, \quad \overline{v'^2}_r = \frac{2}{3}k_r, \quad \overline{w'^2}_r = k_r, \quad \overline{u'v'}_r = \overline{u'w'}_r = \overline{v'w'}_r = 0, \quad (7.66)$$

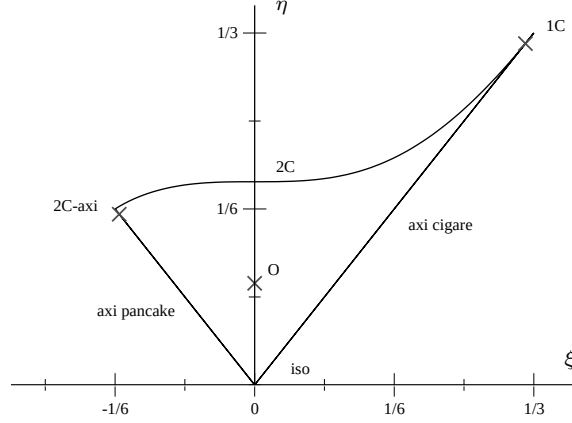


FIGURE 7.6 – Triangle de Lumley dans le plan des invariants (ξ, η) . Les anisotropies cibles (équations 7.66–7.68) forcées dans ce paragraphe sont marquées d'une croix.

- une turbulence axisymétrique dont une composante est très faible devant les deux autres (proche du coin en haut à gauche du triangle, noté '2C-axi') :

$$\begin{aligned} \overline{u'^2}_r = \overline{v'^2}_r = 0.99k_r, \quad \overline{w'^2} = 0.02k_r, \\ \overline{u'v'}_r = \overline{u'w'}_r = \overline{v'w'}_r = 0, \end{aligned} \quad (7.67)$$

- une turbulence axisymétrique dont une composante est très forte devant les deux autres (proche du coin en haut à droite du triangle, noté '1C') :

$$\begin{aligned} \overline{u'^2}_r = 1.96k_r, \quad \overline{v'^2}_r = \overline{w'^2}_r = 0.02k_r, \\ \overline{u'v'}_r = \overline{u'w'}_r = \overline{v'w'}_r = 0. \end{aligned} \quad (7.68)$$

Le coin bas du triangle, qui correspond à l'isotropie, a été étudiée au paragraphe précédent.

Les équations (7.66)–(7.68) sont des exemples de réalisation des formes de la turbulence mentionnées. Elles correspondent au cas particulier où les directions principales du tenseur de Reynolds coïncident avec les axes du repère (comme la méthode de forçage est indépendante du repère, il est suffisant de montrer qu'on peut imposer ces anisotropies dans ce repère particulier). Ce sont ces réalisations qui sont données comme contraintes résolues cibles au terme de forçage ALF, avec $k_r = k_0$ le niveau d'énergie turbulente initial. S'agissant d'une turbulence homogène, la vitesse moyenne n'est pas forcée et les moyennes $\langle \cdot \rangle$ dans les équations (7.17) et (7.23) définissant le forçage ALF sont des moyennes spatiales sur l'ensemble du domaine. Les LES sont réalisées sur le même maillage cubique de côté L avec 32^3 cellules qu'au paragraphe précédent. De même, le nombre de Reynolds des calculs est $Re = \sqrt{k_0}L/\nu = 11933$ et le modèle de sous-maille est le modèle de Smagorinsky avec $\tilde{\Delta} = \Delta$ et $C_s = 0.18$.

Turbulence anisotrope à trois composantes fortes

On force la turbulence initialement isotrope vers les contraintes cibles :

$$\begin{aligned} \overline{u'^2}_r^\dagger = \frac{1}{3}k_0, \quad \overline{v'^2}_r^\dagger = \frac{2}{3}k_0, \quad \overline{w'^2}_r^\dagger = k_0, \\ \overline{u'v'}_r^\dagger = \overline{u'w'}_r^\dagger = \overline{v'w'}_r^\dagger = 0. \end{aligned}$$

Deux valeurs du paramètre τ_r sont testées : $\tau_r^* = 0.05$ et $\tau_r^* = 0.01$.

Sur la figure 7.7a on voit que, après une courte phase de décroissance, l'énergie turbulente résolue k_r s'équilibre autour d'une valeur moyenne plus ou moins proche de l'énergie k_0 ,

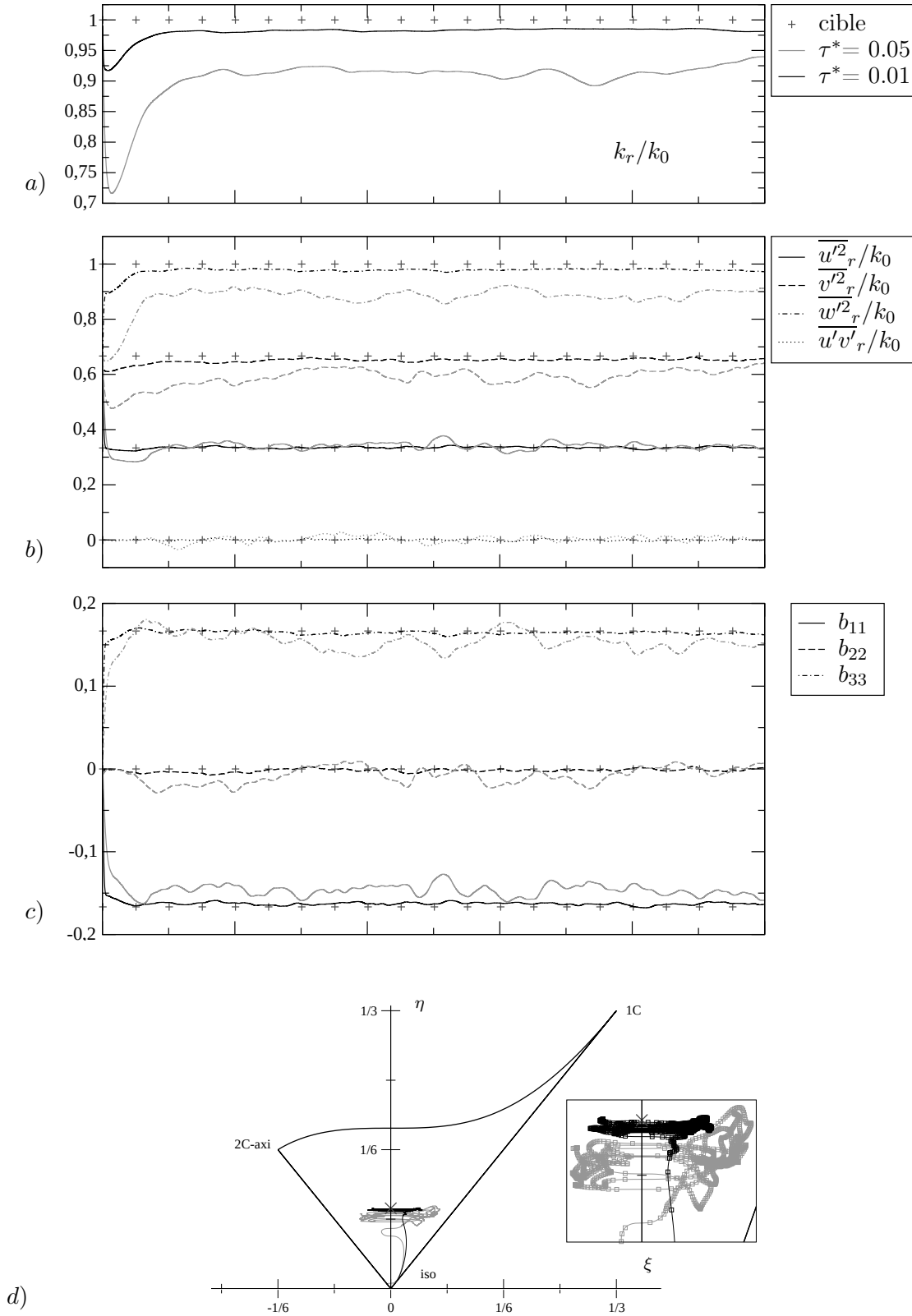


FIGURE 7.7 – Forçage d'une turbulence initialement isotrope vers une turbulence anisotrope. Évolution temporelle a) de l'énergie turbulente, b) du tenseur de Reynolds, c) du tenseur d'anisotropie et d) trajectoire de l'anisotropie dans le plan des invariants (ξ, η) (l'encadré est un zoom pour lequel les lignes sont marquées tous les $\delta t^* = 10^{-2}$). Symboles (+, x) : valeurs cibles, lignes : LES forcée, pour $\tau^* = 0.05$ (—), $\tau^* = 0.01$ (—).

en fonction du paramètre τ_r du forçage. Comme dans le cas isotrope, cette valeur moyenne est d'autant plus proche de k_0 que τ_r est petit. Le niveau moyen d'énergie résolue de la turbulence anisotrope forcée est cependant légèrement supérieur à celui de la turbulence isotrope forcée, à paramètre τ_r identique (voir figure 7.2). Sur la figure 7.7b, on constate que l'écart entre le niveau moyen des contraintes normales résolues et les contraintes normales cibles varie selon les composantes. On voit que ce niveau n'est pas non plus proportionnel à la composante cible considérée : les deux composantes les plus énergétiques, $\overline{v'^2}_r$ et $\overline{w'^2}_r$, sont inférieures à leur valeur cible tandis que le niveau moyen de la troisième composante normale $\overline{u'^2}_r$ semble être exactement le niveau cible $\overline{u'^2}_r^\dagger$. Par suite, le tenseur d'anisotropie des contraintes résolues n'est pas exactement le tenseur d'anisotropie des contraintes cibles, comme on le voit sur la figure 7.7c. La composante positive du tenseur d'anisotropie est en moyenne inférieure à sa valeur cible et au contraire, la composante négative est en moyenne supérieure à sa valeur cible. La composante d'anisotropie nulle semble exactement reproduite en moyenne. Comme de plus, l'écart entre les anisotropies non nulles cibles et les anisotropies résolues est d'autant plus faible que le paramètre τ_r est petit, on a finalement une relation de type :

$$|\langle b_{ij} \rangle_t| = (1 - \epsilon(\tau_r)) |b_{ij}^\dagger|,$$

avec ϵ une fonction d'erreur. Cela implique que le deuxième invariant moyen $\eta_{\text{rms}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \eta^2 \rangle_t}$ est inférieur à la valeur cible $\eta^\dagger$ tandis que l'invariant $\xi_{\text{rnc}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[3]{\langle \xi^3 \rangle_t}$ est nul en moyenne, comme $\xi^\dagger$. Cela apparaît clairement sur la figure 7.7d qui représente la trajectoire de l'anisotropie dans le plan des invariants (ξ, η) . La trajectoire se stabilise en dessous de la valeur cible $\eta^\dagger$ suivant l'axe η et oscille de part et d'autre de $\xi^\dagger = 0$ suivant l'axe ξ . Ces deux aspects sont amplifiés lorsque τ_r est plus grand.

Enfin, on peut noter qu'avant d'osciller autour d'un point fixe, les trajectoires sont courbes dans le plan (ξ, η) , ce qui, d'après Choi (1983), atteste du fait que les variations de l'anisotropie se font par effets non linéaires. On remarque également que pour les deux paramètres τ_r testés, la turbulence a « choisi » le côté « cigare » du diagramme pendant le transitoire (malgré un état initial légèrement décalé du côté « *pancake* »).

Turbulence axisymétrique quasi-2C et quasi-1C

Des tests numériques ont été conduits pour forcer la turbulence vers les anisotropies limites où une ou deux des composantes principales du tenseur de Reynolds s'annule(nt) exactement. On a observé que dans ces cas limites, la solution n'était pas réaliste physiquement : l'écoulement devenait stationnaire et les fluctuations étaient uniquement spatiales. Cela est peut-être dû à la résolution modérée utilisée pour cette étude de faisabilité. On propose donc ici de forcer les anisotropies moins extrêmes suivantes, où aucune des valeurs propres ne s'annule complètement :

$$\begin{aligned} \overline{u'^2}_r = \overline{v'^2}_r = 0.99k_0, \quad \overline{w'^2}_r = 0.02k_0, \\ \overline{u'v'}_r = \overline{u'w'}_r = \overline{v'w'}_r = 0, \end{aligned} \quad (\text{axisymétrique quasi-2C})$$

et :

$$\begin{aligned} \overline{u'^2}_r = 1.96k_0, \quad \overline{v'^2}_r = \overline{w'^2}_r = 0.02k_0, \\ \overline{u'v'}_r = \overline{u'w'}_r = \overline{v'w'}_r = 0, \end{aligned} \quad (\text{axisymétrique quasi-1C})$$

Le paramètre τ_r est fixé à $\tau_r^* = 0.05$.

Sur les figure 7.8a et 7.8d, on voit que les contraintes normales atteignent bien un niveau constant statistiquement autour duquel elles fluctuent (voir aussi les visualisations 7.8d et 7.8h). Les variations autour de cet état moyen sont cependant d'amplitude plus

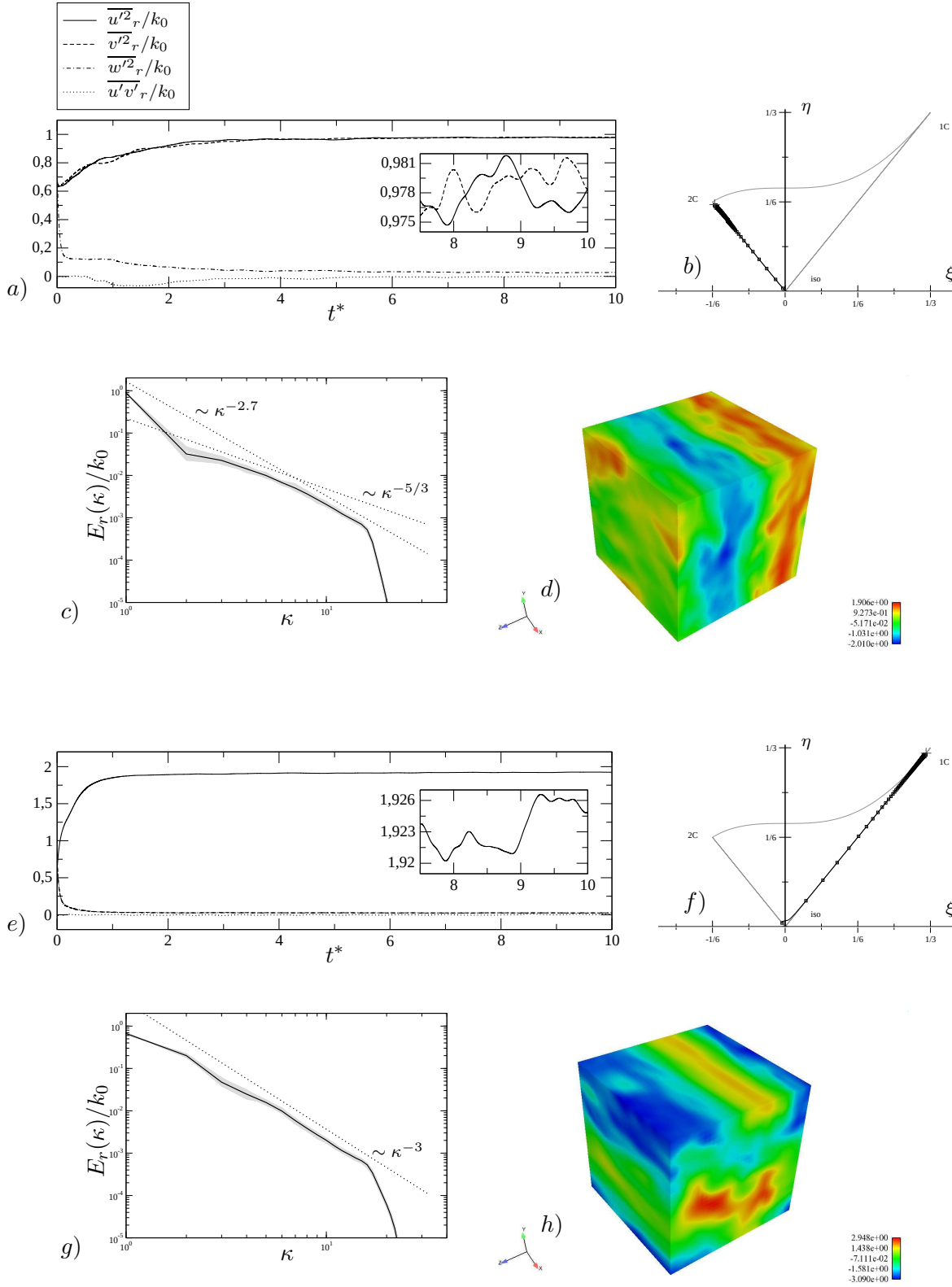


FIGURE 7.8 – Forçage d'une turbulence initialement isotrope vers les états axisymétriques *a-d*) quasi-2C et *e-h*) quasi-1C. $\tau_r^* = 0.05$. *a, e*) Évolution des contraintes de Reynolds (voir la légende au dessus du graphe *a*), l'encadré est un zoom); *b, f*) Trajectoire de l'anisotropie dans le plan des invariants (ξ, η) (une marque '□' tous les $\delta t^* = 10^{-2}$, l'anisotropie cible est marquée d'une croix '+'); *c, g*) Spectre d'énergie. Lignes grises : 50 spectres uniformément répartis dans l'intervalle $7.5 < t^* < 10$; ligne noire : spectre moyen; *d, h*) Visualisation de la vitesse $u'/\sqrt{k_0}$ à l'instant final $t^* = 10$.

faible que pour une turbulence anisotrope à trois composantes fortes ('iso' ou 'O' par exemple, cf graphe 7.6). Le transitoire pour atteindre l'état statistiquement stationnaire est également plus long. On observe que le niveau d'énergie résolue est très proche du niveau cible. Il se situe, pour $\tau_r^* = 0.05$, à environ 99% du niveau cible, contre environ 87% pour une turbulence isotrope (voir tableau 7.2) et 90% pour la turbulence anisotrope à trois composantes notée 'O' sur le diagramme des invariants (voir figure 7.7a). De même, on a observé que l'anisotropie effective de l'écoulement était plus proche de l'anisotropie cible que pour les turbulences à trois composantes fortes. En revanche les écarts se font dans le même sens : les anisotropies cibles positives (respectivement négatives) sont en moyenne sous-estimées (respectivement surestimées).

Sur le diagramme des invariants (figure 7.7b et 7.7f), on voit que le transitoire entre l'isotropie initiale et les turbulences axisymétriques quasi-2C et quasi-1C se fait en restant axisymétrique.

Enfin, et à titre simplement indicatif, les spectres moyennés pendant les 2.5 dernières unités de temps des calculs sont tracés sur les graphes 7.8c et 7.8g. Ces spectres ne donnent qu'une tendance, en raison de la résolution modeste des simulations. En particulier, le domaine ne semble pas assez grand pour contenir les plus grandes structures de l'écoulement et celui-ci est donc affecté par la périodicité spatiale du domaine. Observons simplement que la pente du spectre est globalement plus raide dans ces cas que dans le cas d'une turbulence forcée isotrope. Pour le cas quasi-2C, on observe également que la pente du spectre varie en fonction du nombre d'onde (elle est moins raide aux bas nombres d'onde), ce qui ne semble pas être le cas pour la turbulence quasi-1C. Une étude détaillée basée sur des calculs DNS devrait permettre de montrer dans quelle mesure ce type de forçage anisotrope est cohérent avec des théories existantes, sur les écoulements bidimensionnels en particulier.

Modification des paramètres du forçage

Pour finir on propose de tester le forçage ALF lorsque les anisotropies cibles sont modifiées au cours du calcul. On impose à la turbulence le cycle suivant : isotropie, quasi-2C, quasi-1C, isotropie. Il s'agit en fait de « faire le tour » du triangle de Lumley. Cela permet notamment d'éprouver la robustesse du forçage ALF à des variations brutales des statistiques d'entrée. Deux valeurs du paramètre τ_r ont été testées : $\tau_r^* = 0.05$ et 0.01.

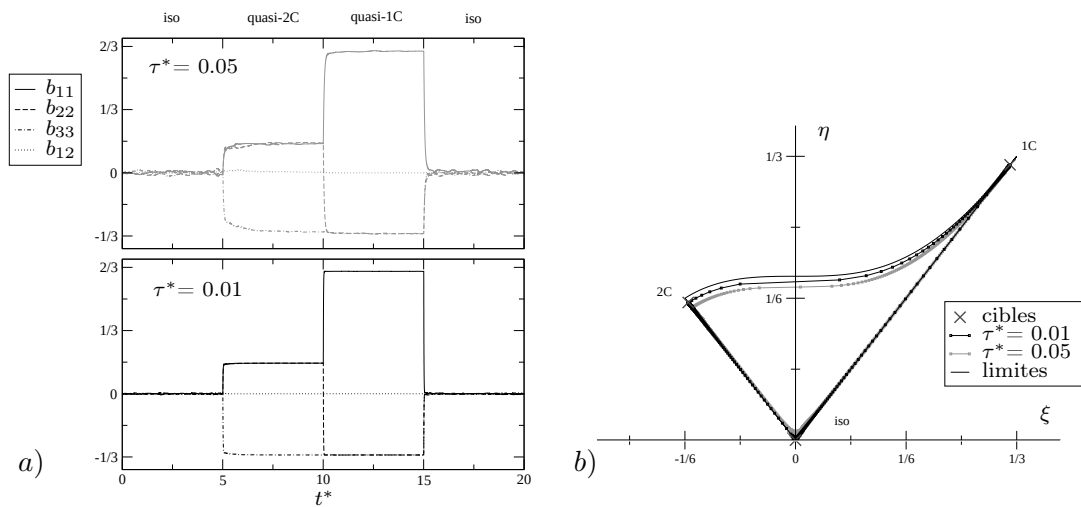


FIGURE 7.9 – Évolution de l'anisotropie a) en fonction du temps et b) dans le plan des invariants (η, ξ) .

On voit sur la figure 7.9a que le transitoire d'une anisotropie à l'autre est assez rapide, excepté de l'isotropie vers la turbulence quasi-2C pour $\tau_r^* = 0.05$ où, à l'instant $t^* = 10$, l'anisotropie effective n'est pas encore stabilisée à proximité de l'anisotropie cible lorsque l'on commence à forcer l'état quasi-1C. Entre les états quasi-2C et quasi-1C, la composante principale presque nulle du tenseur de Reynolds n'augmente pas, de sorte que l'anisotropie longe la frontière 2C dans le plan des invariants.

En conclusion, on a appliqué le forçage ALF pour forcer différentes anisotropies dans une turbulence homogène. Les tests réalisés montrent que ce forçage permet de fournir avec une bonne précision l'anisotropie souhaitée de l'écoulement. Comme pour l'énergie turbulente, l'écart entre l'anisotropie des statistiques d'entrée de la méthode et l'anisotropie effective de l'écoulement est d'autant plus faible que le paramètre τ_r est petit. Lorsque τ_r décroît, les anisotropies cibles positives sont atteintes par valeurs inférieures et les anisotropies négatives sont atteintes par valeurs supérieures. Une étude systématique envisageant toutes les anisotropies possibles de la turbulence pourrait être intéressante, mais les tests réalisés suggèrent d'ores et déjà une relation du type :

$$|(b_{ij})_t| = (1 - \epsilon(\tau_r, \eta^\dagger, \xi^\dagger)) |b_{ij}^\dagger|,$$

avec ϵ une fonction d'erreur qui dépend de τ_r mais aussi de l'anisotropie cible. Ainsi, l'isotropie comme l'axisymétrie sont préservées par le forçage. La fonction ϵ décroît en se rapprochant d'une turbulence à une ou deux composantes, bien que ces états limites, où une ou deux des composantes principales du tenseur de Reynolds s'annule(nt) exactement, n'ont pas pu être atteints dans cette étude de faisabilité. Les autres anisotropies testées, couvrant une très large part des structures de la turbulence rencontrées dans des écoulements réels, ont pu être atteintes. La méthode a également montré une bonne robustesse à des variations soudaines des statistiques d'entrée.

7.2.3 Analyse et paramétrisation dans un canal plan avec ou sans rotation

Méthodologie

On utilise maintenant le forçage linéaire anisotrope ALF dans un canal plan avec développement spatial de la turbulence. À l'entrée du canal, on impose une condition de Dirichlet constante correspondant à la vitesse moyenne $\overline{u}_i^\dagger$, imposée sans aucune fluctuation. À la sortie du canal, on utilise une condition de sortie libre (voir note de pied de page 138). Entre l'entrée et la sortie, l'intégralité du volume fluide est forcé avec la méthode ALF. Le modèle de sous-maille de la LES forcée est le modèle de Smagorinsky défini au paragraphe 4.3.3.1.

Plusieurs calculs sont réalisés, dans le but de paramétrer le forçage ALF pour des applications plus générales que les écoulements homogènes considérés aux paragraphes 7.2.1 et 7.2.2. Les caractéristiques distinctives des calculs sont résumées dans le tableau 7.2. Celles-ci portent d'une part sur la nature de l'écoulement simulé, et d'autre part sur les paramètres du forçage, et plus précisément, dans les équations (7.17) et (7.21) du forçage, sur la provenance des paramètres $\overline{u}_i^\dagger$ et $\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger$, la valeur des paramètres τ_v et τ_r et le mode d'approximation des moments $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle$ et $\overline{u'_i u'_{j_r}}$.

Dans beaucoup des cas présentés, la vitesse cible $\overline{u}_i^\dagger$ – imposée au bord d'entrée – et les contraintes cibles $\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger$ – fournies, en plus de $\overline{u}_i^\dagger$, à la méthode de forçage ALF – sont données par un calcul périodique du même écoulement avec un maillage de raffinement

Cas	Ro_b	$\overline{u_i^\dagger}, \overline{u'_i u'_{j_r}{}^\dagger}$	τ_v	τ_r	approximation $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle, \overline{u'_i u'_{j_r}}$
1	0	LES périodique	$0.5h/U_b$	$0.5h/U_b$	filtrage gaussien, $T = 100$
2	0	LES périodique	$0.1h/U_b$	$0.1h/U_b$	"
3	0	EB-RSM	∞	$0.1h/U_b$	"
4a	1/6	EB-RSM	∞	$0.1h/U_b$	"
4b	"	"	$10h/U_b$	"	"
4c	"	"	$1h/U_b$	"	"
4d	"	"	$0.1h/U_b$	"	"
5a	1/6	LES périodique	$0.1h/U_b$	$0.1h/U_b$	"
5b	"	"	$5h/U_b$	"	"
6	0	LES périodique	$5h/U_b$	$0.01k/\varepsilon$	filtrage gaussien, $T = 100$
7a	"	"	"	"	filtrage gaussien, $T = 10$
7b	"	"	"	"	filtrage gaussien, $T = 100 + \langle \cdot \rangle_z$

TABLE 7.2 – Paramètres des calculs

identique, sans forçage linéaire. L'écoulement forcé linéairement, pour lequel la turbulence se développe spatialement, est alors comparé avec l'écoulement pleinement développé sans forçage linéaire, correspondant au calcul périodique. Dans les autres cas, les moments cibles $\overline{u_i^\dagger}$ et $\overline{u'_i u'_{j_r}{}^\dagger}$, sont issus d'un calcul RANS avec le modèle de fermeture au second ordre EB-RSM. Les contraintes résolues cibles $\overline{u'_i u'_{j_r}{}^\dagger}$ sont directement les contraintes de Reynolds de l'EB-RSM, c'est-à-dire qu'il n'y pas de prise en compte des contraintes de sous-maille comme dans l'équation (7.18). En effet, la consistance des formalismes RANS et LES n'entre pas en compte ici ; ces calculs ont pour but de vérifier que les moments $\overline{u_i^\dagger}$ et $\overline{u'_i u'_{j_r}{}^\dagger}$ peuvent effectivement être imposés à la solution LES forcée. Le calcul périodique sans forçage ne constitue pas une référence dans ces cas. Seules les corrélations en un point peuvent être comparées à celles de l'EB-RSM.

Pour tous les cas présentés, le forçage est mis en œuvre dès le début du calcul. Dans les équations (7.17) et (7.21), les moments statistiques $\langle \tilde{u}_i \rangle$ et $\overline{u'_i u'_{j_r}}$ de la LES forcée sont initialisés par leur valeur cible $\overline{u_i^\dagger}$ et $\overline{u'_i u'_{j_r}{}^\dagger}$. Ils sont ensuite mis à jour au cours du calcul en utilisant un filtrage temporel gaussien (équation 7.8). Pour beaucoup des cas présentés, la taille du filtre temporel est $T = 100h/U_b$. La direction d'homogénéité z de l'écoulement n'est pas utilisée pour affiner l'approximation des moyennes. Cette procédure est apparue suffisante pour disposer d'une approximation satisfaisante des moments $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle$ et $\overline{u'_i u'_{j_r}}$ (l'influence de la taille T du filtre gaussien ou de l'utilisation de la direction z d'homogénéité de l'écoulement pour le calcul des moyennes est étudiée avec les cas 7a et 7b). Parallèlement, les grandeurs statistiques présentées sur les graphes sont obtenues par une intégration en temps, entre les instants $t = 200h/U_b$ et $600h/U_b$, puis une moyenne dans la direction d'homogénéité z .

Enfin, les écoulements simulés sont des écoulements de canal plan, à $Re_b = 7000$. Le canal est soit fixe – $Ro_b = 0$ – soit en rotation transverse avec $Ro_b = 1/6$. Dans le cas sans rotation, les LES forcées sont réalisées sur un maillage de taille $10\pi h \times 2h \times \pi h$, maillé par $243 \times 86 \times 81$ cellules, et la solution périodique de référence est obtenue sur un maillage de taille $3\pi h \times 2h \times \pi h$ maillé par $73 \times 86 \times 81$ cellules ($\Delta x^+ = 50$, $\Delta z^+ = 15$, $\Delta y_{\min}^+ = 2.1$ et $\Delta y_{\max}^+ = 12$ pour un nombre de Reynolds de frottement effectif $Re_\tau = 387.3$). Pour le canal en rotation, le maillage des calculs LES forcée est de taille $10\pi h \times 2h \times \pi h$, maillé par $249 \times 48 \times 83$ cellules. La solution périodique de référence est obtenue sur un maillage de taille $3\pi h \times 2h \times \pi h$ maillé par $75 \times 48 \times 83$ cellules (le raffinement du maillage et les nombres de Reynolds de frottement aux parois en pression et en dépression sont donnés

dans le tableau 6.3 p. 150). Pour les raisons évoquées à la page 154, un léger décentrement est introduit dans le schéma numérique (1% d'upwind) dans le cas en rotation.

Caractéristiques principales de la solution

On commence par décrire les caractéristiques principales de la LES forcée et l'influence des paramètres τ_v et τ_r , fixant respectivement l'intensité du forçage de la vitesse moyenne et des contraintes de Reynolds. La LES est forcée sur ses moments pleinement développés, dans le cas sans rotation. Contrairement au cas homogène, on force à la fois les contraintes de Reynolds et la vitesse moyenne. Les paramètres τ_v et τ_r sont pris égaux ici, avec $\tau_v = \tau_r = 0.5h/U_b$ ou $\tau_v = \tau_r = 0.1h/U_b$ (cas 1 et 2 du tableau 7.2), après quoi la paramétrisation du forçage sera affinée.

Sur la figure 7.10, la vitesse moyenne, l'énergie turbulente et la contrainte de cisaillement turbulent sont tracées en trois stations plus ou moins proches de l'entrée : $x/h = 2, 5, 10$. On voit qu'avec les paramètres τ_v et τ_r testés, le forçage de la vitesse et des contraintes de Reynolds est très efficace puisque pour les deux cas présentés, la vitesse moyenne et les contraintes résolues effectives de la LES forcées sont très proches des valeurs cibles fournies à la force ALF (la vitesse moyenne cible est également imposée en entrée). L'évolution des statistiques vers leur niveau cible est plus rapide pour $\tau_v = \tau_r = 0.1h/U_b$. Les moments $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle$ et $u'_i u'_{j,r}$ s'ajustent à leur valeur cible presque exactement et directement en aval de l'entrée dans ce cas. Pour $\tau_v = \tau_r = 0.5h/U_b$, les contraintes de Reynolds ne s'ajustent pas directement à leur valeur cible, mais l'erreur se résorbe lorsque la turbulence se développe spatialement. En $x/h = 10$, l'accord avec les contraintes cibles est très satisfaisant. Bien

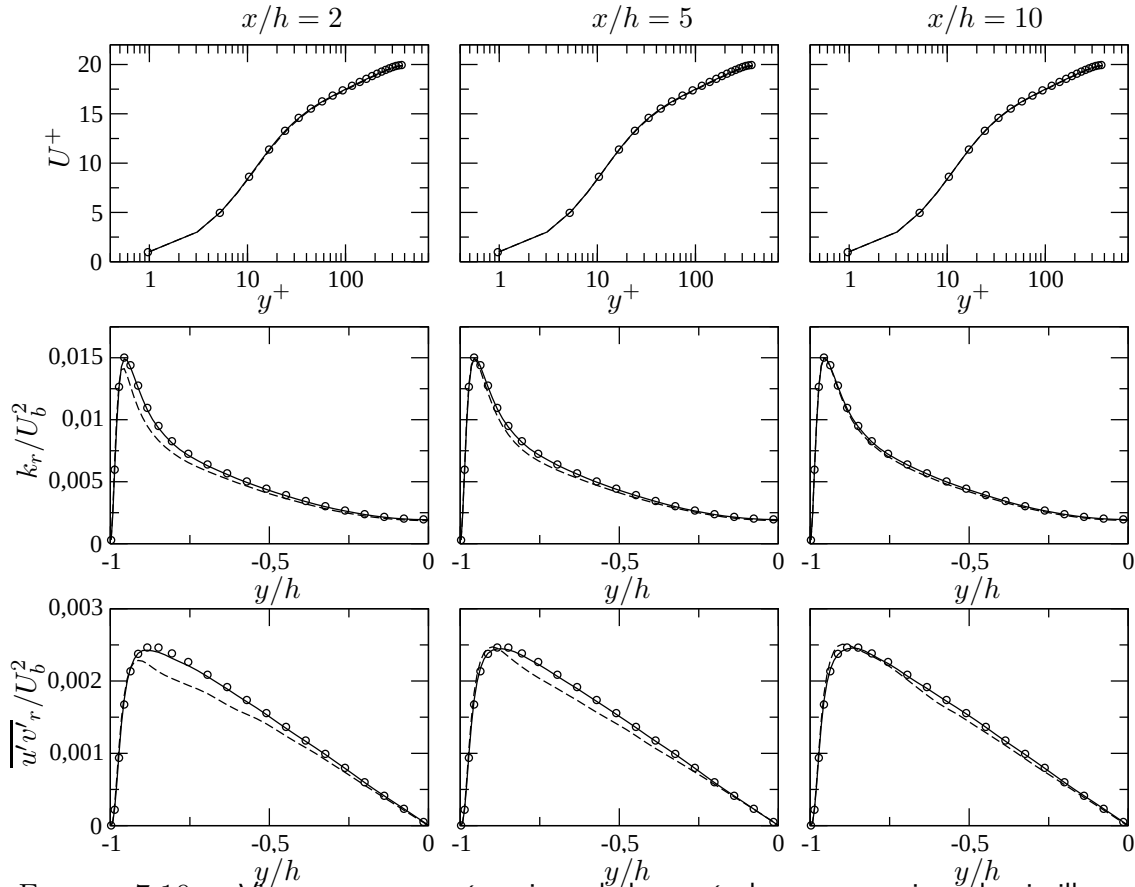


FIGURE 7.10 – Vitesse moyenne, énergie turbulente résolue et contrainte de cisaillement turbulent, en $x/h = 2, 5, 10$. Canal plan, $Re_b = 7000$. Symboles : moments cibles ; lignes : LES forcée, pour $\tau_v = \tau_r = 0.5h/U_b$ (---, cas 1), $\tau_v = \tau_r = 0.1h/U_b$ (—, cas 2).

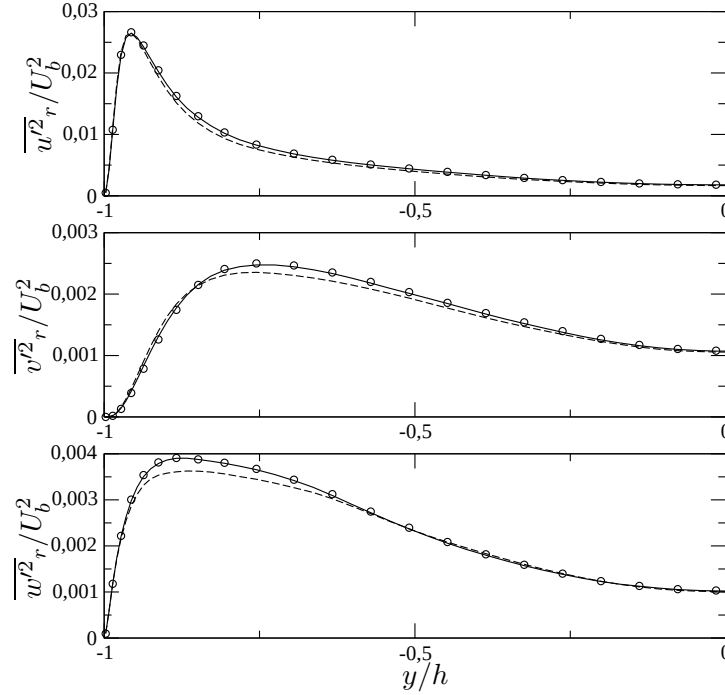


FIGURE 7.11 – Anisotropie des contraintes normales en, $x/h = 5$. Canal plan, $Re_b = 7000$. Symboles : moments cibles; lignes : LES forcée, pour $\tau_v = \tau_r = 0.5h/U_b$ (---, cas 1), $\tau_v = \tau_r = 0.1h/U_b$ (—, cas 2).

sûr, le forçage anisotrope ALF force l'ensemble des contraintes de Reynolds. L'anisotropie des contraintes normales cibles $\overline{u'^2_r}$ se trouve donc très bien préservée par la solution LES forcée, comme en atteste la figure 7.11.

Sur la figure 7.12, les structures turbulentes de la LES forcée sont visualisées par des iso-contours de vitesse longitudinale fluctuante $\tilde{u} - \langle \tilde{u} \rangle$, en trois positions plus ou moins proches des parois, toujours pour les cas 1 et 2 du tableau 7.2. Puisque la LES est forcée sur les moments pleinement développés du calcul périodique sans forçage, les structures sont comparées à celles que l'on trouve dans le calcul périodique. On voit que le forçage ALF permet de générer rapidement des fluctuations turbulentes dans le canal, en dépit du fait que la condition au bord en entrée est purement stationnaire. À l'image des statistiques, le développement des structures turbulentes semble plus efficace avec $\tau_v = \tau_r = 0.1h/U_b$ qu'avec $\tau_v = \tau_r = 0.5h/U_b$. Cela est particulièrement visible en très proche paroi ($y/h = -0.99$) où, pour ce second cas, les structures allongées dans la direction de l'écoulement, caractéristiques de la turbulence en proche paroi, n'apparaissent pas immédiatement en aval de l'entrée. Lorsqu'on s'éloigne des parois, des structures fluctuantes sont directement visibles mais leur taille caractéristique semble plus faible que celles qu'on trouve dans l'écoulement périodique. Ce phénomène est assez largement atténué pour $\tau_v = \tau_r = 0.1h/U_b$, quoique toujours visible. Pour autant, ce phénomène est transitoire car, au fur et à mesure en aval de l'entrée, les structures turbulentes évoluent pour atteindre un aspect tout à fait similaire à celui des structures qu'on trouve dans l'écoulement pleinement développé périodique.

Le contenu spectral des LES forcées est considéré sur la figure 7.13, qui présente la transformée de Fourier (TF) temporelle de la vitesse normale à la paroi en différentes positions dans le canal, plus ou moins proche des parois et de l'entrée du domaine. Ces TF discrètes sont obtenues avec un algorithme FFT, à partir d'échantillons de $N = 2^{13}$ relevés de vitesse, uniformément répartis sur une période de $\mathcal{T} = 409.6h/U_b$. Avec cet

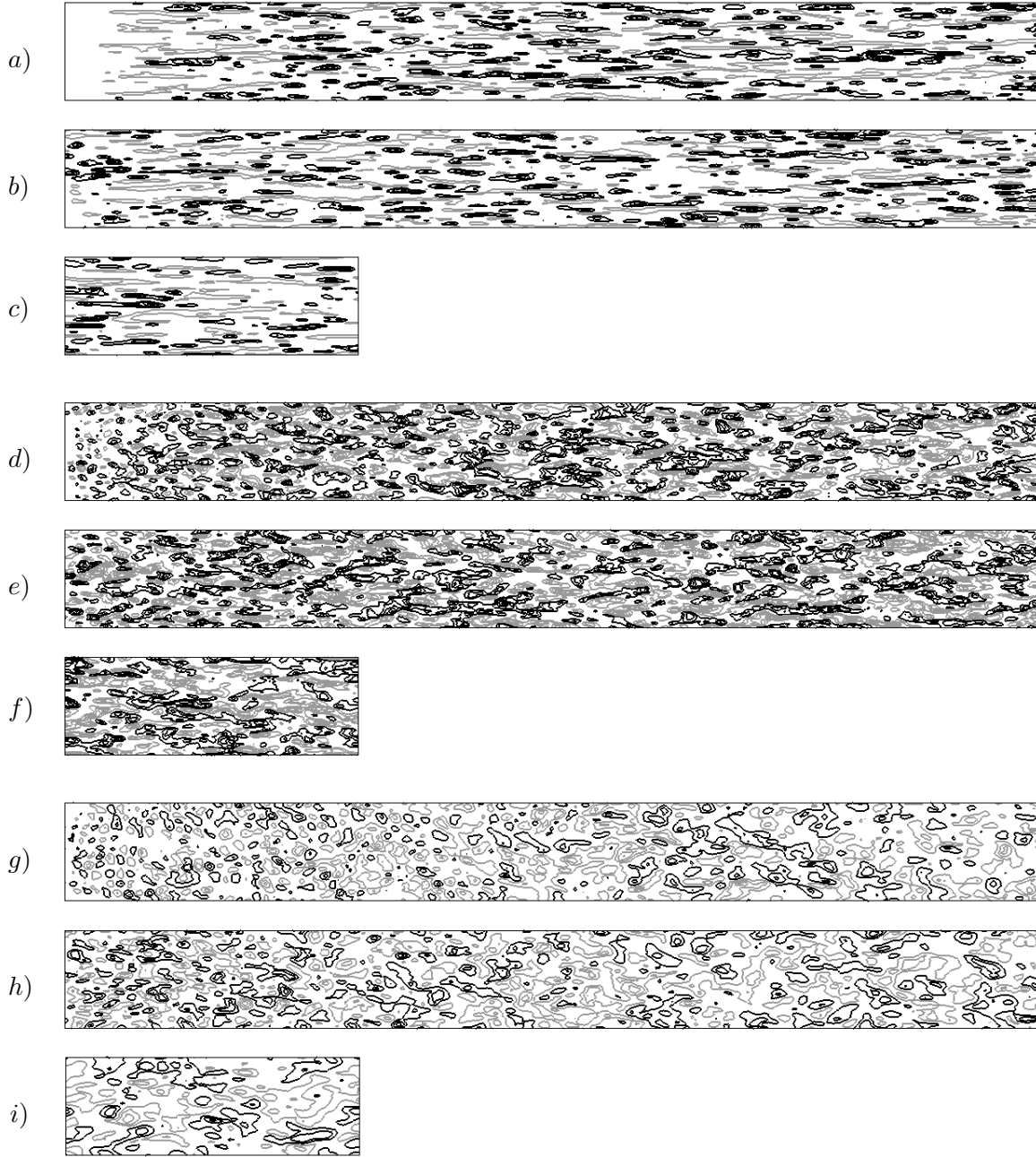


FIGURE 7.12 – Isocontours de vitesse fluctuante longitudinale $\tilde{u} - \langle \tilde{u} \rangle$, en *a-c*) $y/h = -0.99$, *d-f*) $y/h = -0.8$, *g-i*) $y/h = 0$. Canal plan, $Re_b = 7000$. LES forcée, avec $\tau_v = \tau_r = 0.5h/U_b$ (*a, d, g*, cas 1); $\tau_v = \tau_r = 0.1h/U_b$ (*b, e, h*, cas 2); LES périodique (*c, f, i*). (Les contours correspondent aux valeurs $\pm 0.06, 0.12, 0.18, 0.24, 0.3$ (*a-f*) et $\pm 0.03, 0.0725, 0.115, 0.1575, 0.2$ (*g-i*) avec un contour noir pour les valeurs positives et gris pour les valeurs négatives.)

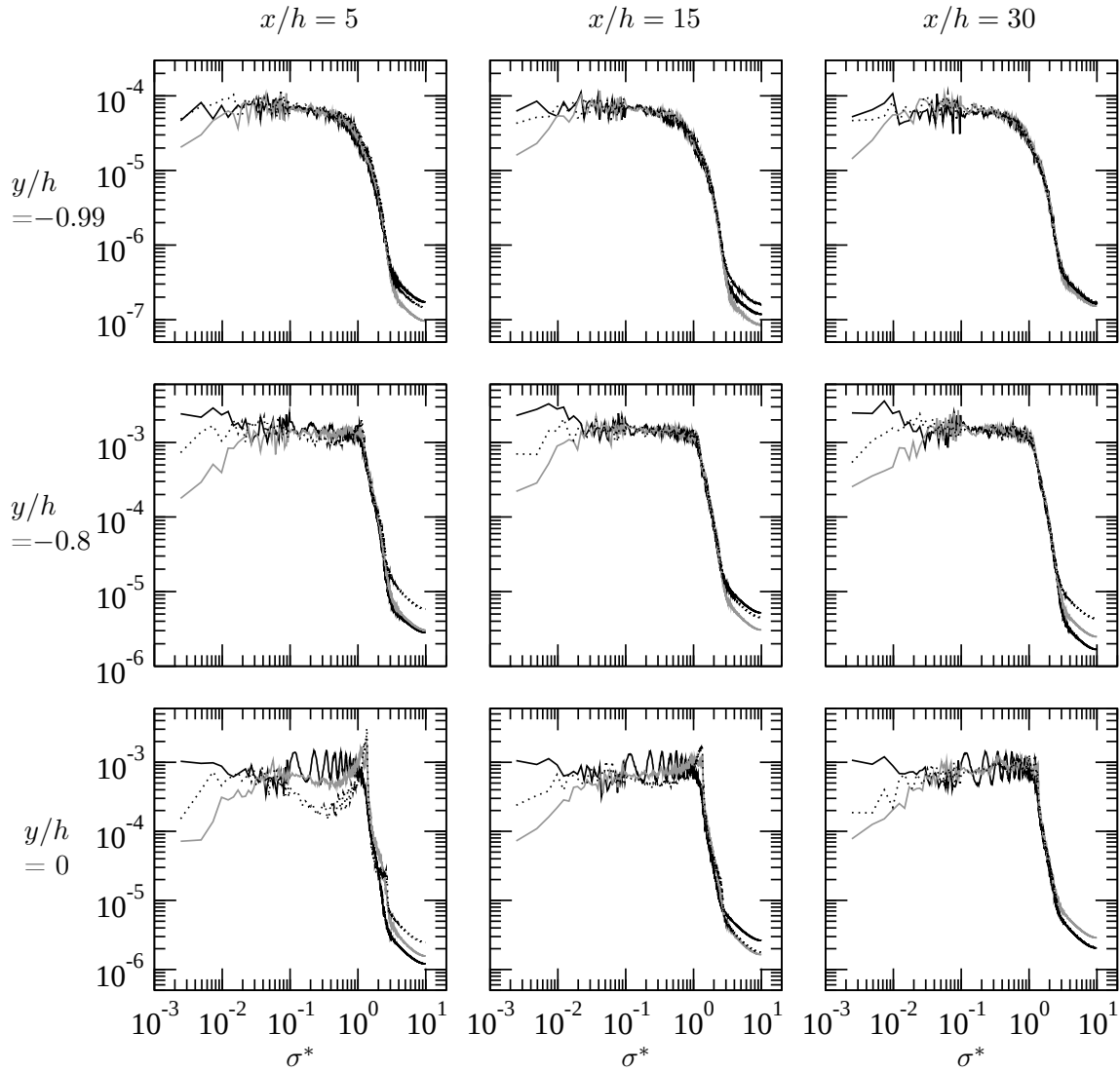


FIGURE 7.13 – Transformée de Fourier de vitesse normale à la paroi $\hat{v}$, plus ou moins proche de l'entrée du domaine ($x/h = 5, 15, 30$) et des parois ($y/h = -0.99, -0.8, 0$). Canal plan, $Re_b = 7000$. — : LES périodique; ---- : LES forcée, $\tau_v = \tau_r = 0.5h/U_b$ (cas 1); —·— : LES forcée, $\tau_v = \tau_r = 0.1h/U_b$ (cas 2).

échantillonnage, la plus basse fréquence et la plus haute fréquence représentées sont $\sigma_1^* \approx 2.4 \cdot 10^{-3}$ et $\sigma_{N/2}^* = 10$ respectivement, avec $\sigma_i^* \stackrel{\text{def}}{=} iU_b/(\mathcal{T}h)$.⁴ La TF temporelle de la LES forcée montre un bon accord global avec celle de la LES périodique. Mentionnons d'abord que la TF de la LES périodique fait apparaître au centre du canal une fréquence caractéristique, autour de $\sigma^* = 10^{-1}$, et ses harmoniques supérieurs. Cela est probablement lié à la périodicité du domaine, de taille $L_x = 3\pi$ pour une vitesse débitante $U_b = 1$. Il est donc normal que les LES forcées ne fassent pas apparaître ce phénomène. Ensuite, les écarts visibles sur la « queue » des spectres ne sont pas considérés comme significatifs car les instationnarités concernées sont très peu énergétiques. De tels écarts apparaissent

4. Pour chaque positions (x, y) considérées, six TF obtenues en des coordonnées z uniformément réparties sont moyennées. Les courbes obtenues étant encore relativement bruitées, on a, pour faciliter la lecture, lissé les courbes pour $\sigma^* > 10^{-1}$, grâce à une moyenne glissante sur l'intervalle $d\sigma^* = 2.44 \cdot 10^{-2}$ centré autour de chaque fréquence. Pour les comparaisons essentiellement qualitatives qui nous occupent, cette précision est suffisante.

également d'une abscisse à l'autre dans le calcul périodique.

Les différences entre le spectre des LES forcées et celui de la LES périodique ne concernent donc que deux points particuliers. D'abord, le spectre au centre du canal est relativement déformé en $x/h = 5$. Cela était prévisible au regard des visualisations de la figure 7.12. En accord avec ces visualisations, on voit que l'altération du spectre au centre du canal est atténuée pour $\tau_v = \tau_r = 0.1h/U_b$, et que dans les deux cas, la TF évolue en aval de l'entrée pour retrouver une forme proche de celle de la LES périodique. La seconde différence entre le spectre des LES forcées et celui de la LES périodique est l'amortissement des basses fréquences des LES forcées. Là encore, ce phénomène est plus sensible en s'éloignant des parois, mais contrairement au phénomène précédent, celui-ci perdure en aval de l'entrée. Comme discuté ci-dessous, on peut largement atténuer cet effet en ajustant le paramètre τ_v du forçage.

Ajustement de l'échelle τ_v

Sur la figure 7.14, on présente les statistiques en un point et la transformée de Fourier temporelle de $\tilde{u}$ obtenues lorsque les moments cibles sont ceux d'un calcul RANS EB-RSM. Le paramètre de forçage des contraintes de Reynolds est fixé à $\tau_r = 0.1h/U_b$ mais cette fois, aucun rappel de la vitesse moyenne n'est pris en compte : $\tau_v = \infty$ (cas 3 du tableau 7.2). On voit que ces paramètres permettent de fournir à la LES forcée les contraintes de Reynolds de l'EB-RSM et que, sans forcer directement la vitesse moyenne, celle-ci est proche de la vitesse moyenne de l'EB-RSM. De plus, les graphes 7.14b montrent que les fluctuations basses fréquences de la LES forcée se maintiennent dans ce cas, ce qui n'est pas complètement le cas lorsque l'on force la vitesse moyenne (figure 7.13).

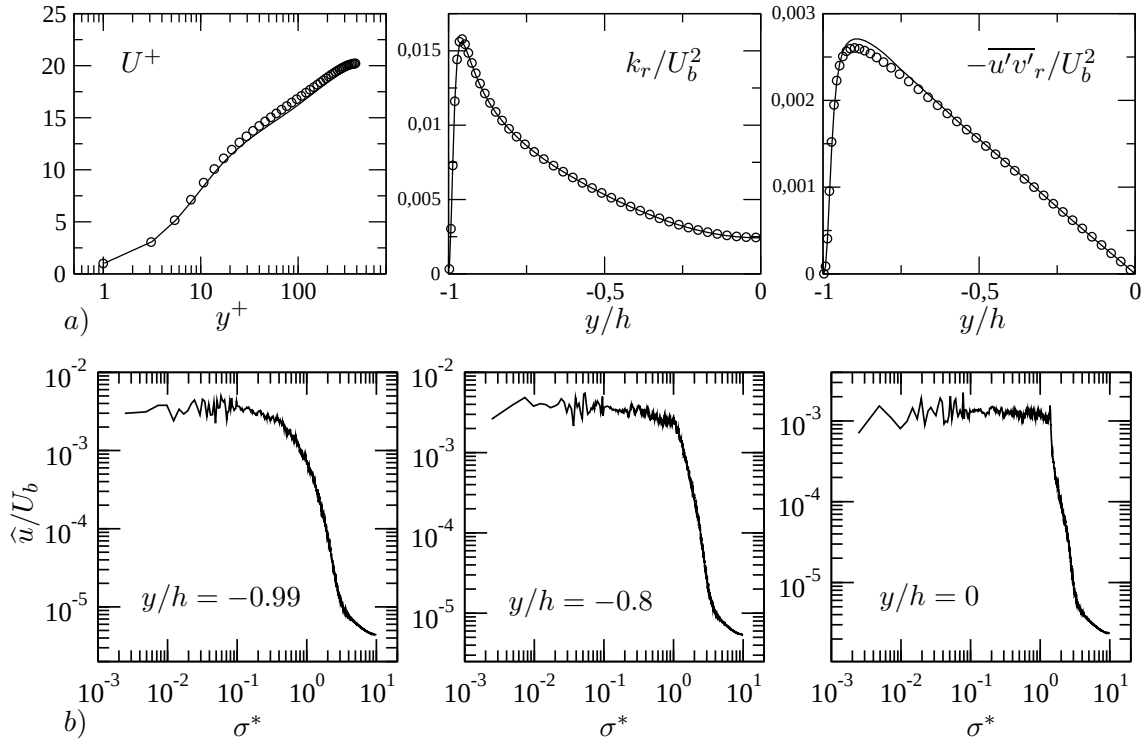


FIGURE 7.14 – Forçage de la LES sur les moments EB-RSM, pour $\tau_r = 0.1h/U_b$ et $\tau_v = \infty$ (cas 3) ; résultats en $x/h = 15$. Canal plan, $Re_b = 7000$. a) Vitesse moyenne, énergie turbulente et contrainte de cisaillement turbulent. b) Transformée de Fourier temporelle de la vitesse $\tilde{u}$, plus ou moins loin des parois.

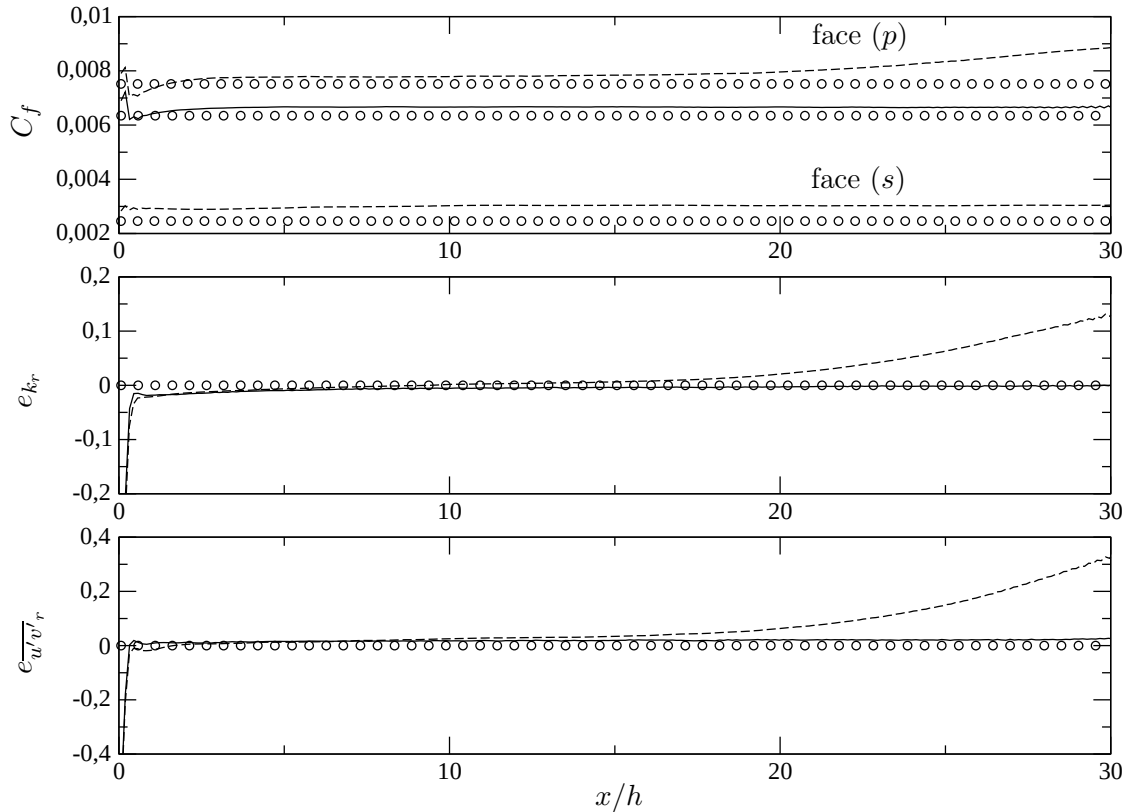


FIGURE 7.15 – Évolution des corrélations en un point dans une zone de forçage ALF, pour $\tau_r = 0.1h/U_b$ et $\tau_v = \infty$ (cas 3 et 4a). Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 0, 1/6$. Symboles : solution forcée (EB-RSM); lignes : LES ALF, pour $Ro_b = 0$ (—), $Ro_b = 1/6$ (---).

Cependant, pour l'écoulement plus complexe de canal en rotation, le forçage de la vitesse moyenne ne peut pas être totalement annulé. Sur la figure 7.15, l'évolution du coefficient de frottement et des fonctions d'erreur e_{k_r} et $e_{u'v'_r}$ (équations 6.12 et 6.13 p. 139) sont tracées pour le cas 4a du tableau 7.2 : la LES est forcée sur les contraintes de Reynolds de l'EB-RSM, sans forçage explicite de la vitesse moyenne, et le canal est en rotation avec $Ro_b = 1/6$. Le paramètre τ_r du forçage est le même que pour le cas de canal fixe décrit ci-dessus (cas 3), également considéré sur la figure 7.15 pour comparaison. Alors que pour le cas sans rotation, les statistiques de la LES forcée restent constantes et proche des valeurs cibles de l'EB-RSM, pour $Ro_b = 1/6$, on voit qu'elles dérivent continûment en aval de l'entrée par rapport à leur valeur cible. On ne dispose pas à ce jour d'explication claire de ce phénomène. Le même cas forcé sur les moments de la LES périodique (non présenté ici) montre un comportement similaire mais dans une proportion moindre. Le caractère non galiléen du référentiel d'étude n'est pas en cause car on a montré au paragraphe 7.1.5 que le forçage ALF est objectif.⁵ On a également vérifié que les contraintes de Reynolds prédites par l'EB-RSM et fournies au forçage ALF étaient bien réalisables.

5. Notons qu'avec un opérateur de filtrage temporel de taille finie, le moment centré d'ordre deux de la vitesse n'est pas un tenseur objectif (Pruett *et al.*, 2003). La déclinaison du forçage qu'on utilise dans ce paragraphe, pour laquelle les contraintes résolues sont évaluées par filtrage temporel, n'est donc pas proprement objective. Malgré cela, dans le référentiel tournant avec le canal dans lequel on s'est placé, l'écoulement est stationnaire et donc l'utilisation d'un filtre temporel pour calculer les contraintes résolues est justifiée. Elle ne le serait pas dans un autre référentiel, à moins de correctement prendre en compte dans la formulation du forçage ALF les termes non inertiels liés à l'utilisation d'un filtre temporel de taille finie pour évaluer les moyennes.

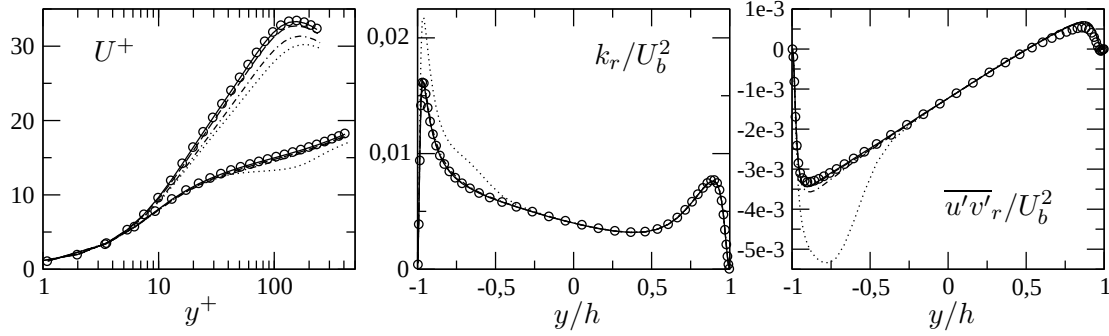


FIGURE 7.16 – Vitesse moyenne, énergie turbulente et contrainte de cisaillement turbulent à fin de la zone de forçage ($x/h = 30$). Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 1/6$. Symboles : statistiques cibles (EB-RSM); lignes : LES forcée pour $\tau_r = 0.1h/U_b$ et $\tau_v = \infty$ (----, cas 4a), $\tau_v = 10h/U_b$ (- - -, cas 4b), $\tau_v = h/U_b$ (- - -, cas 4c), $\tau_v = 0.1h/U_b$ (—, cas 4d).

La figure 7.16 présente les profils de vitesse moyenne, énergie turbulente et contrainte de cisaillement turbulent pour ce cas critique (cas 4a), proche de la sortie du domaine, c'est-à-dire là où l'erreur est la plus importante. On voit que, comme pour le coefficient de frottement, la dérive des contraintes de Reynolds, lorsque l'on ne force pas la vitesse moyenne, est localisée du côté en pression du canal. La figure présente également les statistiques obtenues lorsque l'on prend en compte un forçage de la vitesse moyenne, plus ou moins important : $\tau_v U_b/h = 0.1, 1, 10$ (cas 4b–4d). On voit qu'un forçage modéré de la vitesse moyenne est suffisant pour éliminer presque complètement l'erreur sur les contraintes de Reynolds, en particulier les contraintes normales. Le rappel complet de la vitesse moyenne vers la valeur RANS demande un forçage plus important, surtout du côté en dépression. Il semble donc qu'un compromis soit nécessaire pour fixer le paramètre τ_v : celui-ci doit être suffisamment petit pour éviter un comportement non maîtrisé de la LES forcée comme celui qu'on vient de décrire, et suffisamment grand pour ne pas trop amortir les basses fréquences du signal de vitesse. D'après la figure 7.16, on a jugé que $\tau_v = 5h/U_b$ pourrait être un bon compromis.

Cela se vérifie sur les figures 7.17 et 7.18. Le cas présenté est le cas 5b du tableau 7.2, correspondant au canal en rotation forcé sur les moments de la LES périodique, pour $\tau_r = 0.1h/U_b$ et $\tau_v = 5h/U_b$. La figure 7.17 montre que les statistiques cibles sont très finement

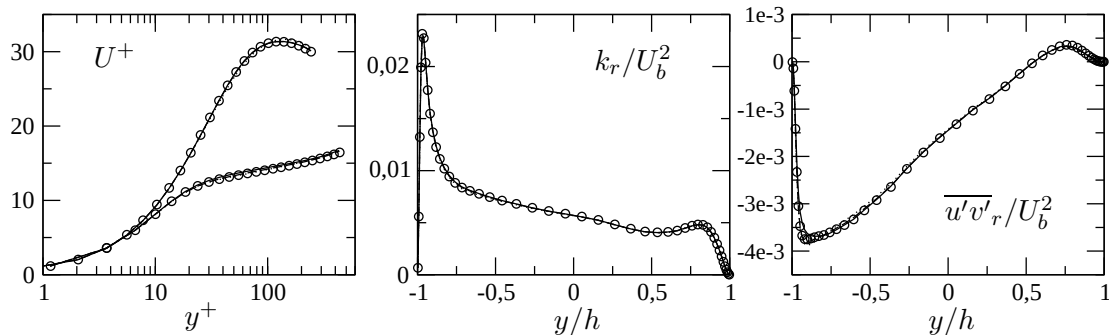


FIGURE 7.17 – Vitesse moyenne, énergie turbulente et contrainte de cisaillement turbulent. Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 1/6$ (cas 5b). Symboles : statistiques cibles (LES périodique); lignes : LES forcée, pour $\tau_r = 0.1h/U_b$ et $\tau_v = 5h/U_b$, en $x/h = 5$ (----), 15 (- - -), 30 (—).

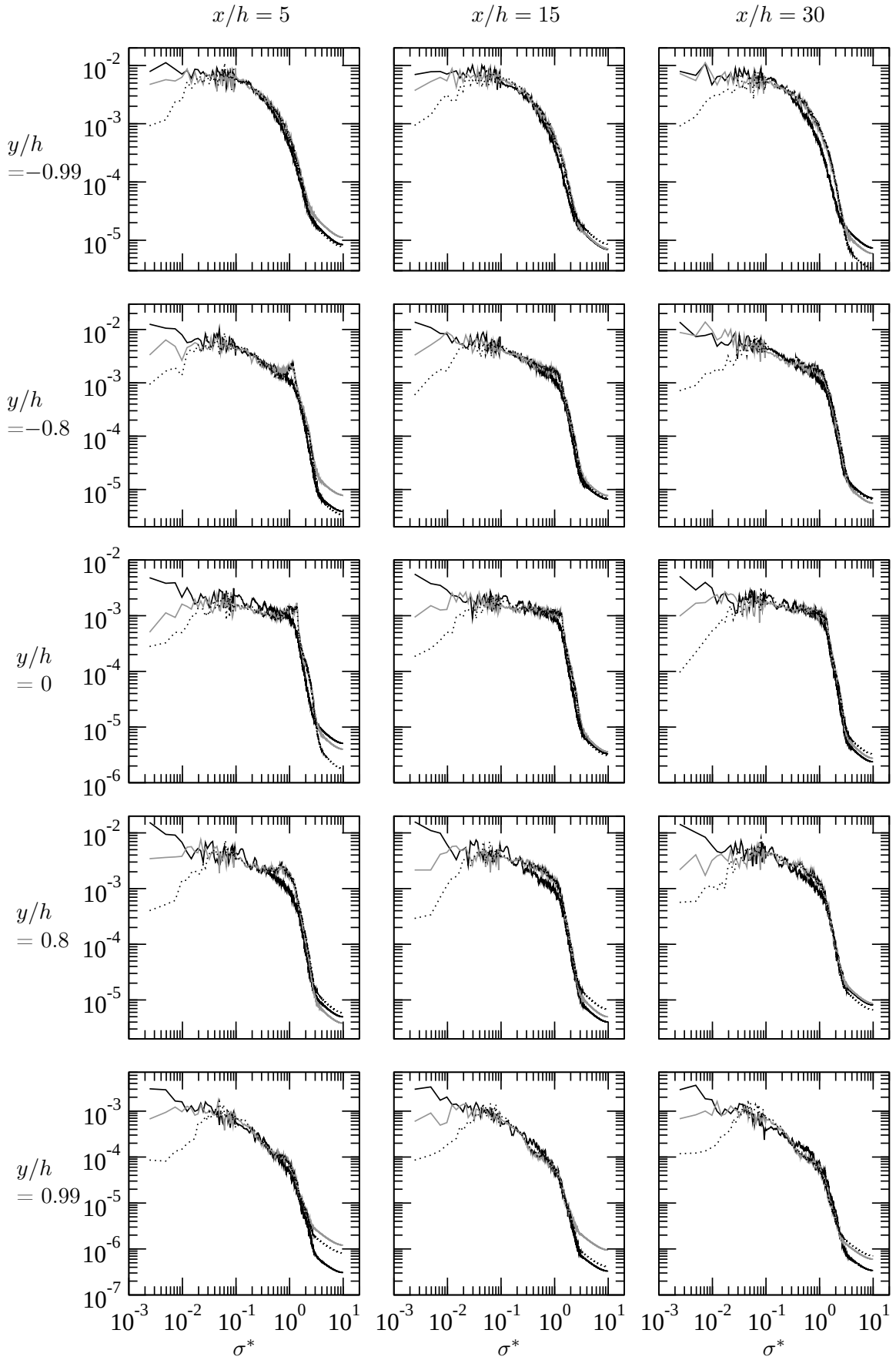


FIGURE 7.18 – Transformée de Fourier de vitesse longitudinale $\hat{u}$, pour différentes coordonnées dans la direction longitudinale ($x/h = 5, 15, 30$) et normale à la paroi ($y/h = -0.99, -0.8, 0, 0.8, 0.99$). Canal plan tournant, $Re_b = 7000$, $Ro_b = 1/6$. — : LES périodique; : LES forcée, $\tau_v = \tau_r = 0.1$ (cas 5a); — : LES forcée, $\tau_v = 5h/U_b$, $\tau_r = 0.1$ (cas 5b).

reproduites sur l'ensemble du domaine. La TF temporelle de la vitesse longitudinale $\hat{u}$ est comparé à celle de la LES périodique sur la figure 7.18. Le spectre obtenu lorsque le forçage de la vitesse moyenne est plus important (cas 5a) est également tracé pour comparaison. On voit qu'avec les paramètres $\tau_r = 0.1h/U_b$ et $\tau_v = 5h/U_b$, presque toutes les fréquences comprises entre $\sigma_1^* = 2.4 \cdot 10^{-3}$ et $\sigma_{N/2}^* = 10$ sont correctement représentées. L'accord avec la LES périodique est particulièrement satisfaisant du côté en pression du canal ($y/h < 0$). Au centre du canal et du côté en dépression, les plus basses fréquences de la LES forcée sont légèrement amorties mais seulement pour $\sigma^* < 10^{-2}$ et cet amortissement est faible. Concernant les autres caractéristiques du spectre, on voit que, malgré la diversité des formes de spectre qu'on trouve localement dans un canal en rotation, le spectre de la LES forcée est proche de celui de la LES périodique.

Variante locale de l'échelle de temps τ_r

Comme τ_r fixe l'échelle de temps de la production turbulente par forçage linéaire, il semble assez naturel de formuler ce paramètre en fonction de l'échelle de temps k/ε de la turbulence :

$$\tau_r = C_r \frac{k^\dagger}{\varepsilon^\dagger}.$$

Dans le cadre d'un couplage RANS/LES, une telle échelle de temps est facilement accessible avec le modèle RANS. Sur la figure 7.19b, on voit qu'avec $C_r = 0.01$ et $k^\dagger, \varepsilon^\dagger$ donnés par l'EB-RSM, τ_r est également réparti dans le canal autour de $\tau_r = 0.1h/U_b$, une valeur constante qui donne globalement satisfaction pour les écoulements de canaux, envisagés jusqu'à présent dans ce paragraphe. En revanche, cette échelle de temps tend vers zéro aux parois, ce qui pourrait nuire à la stabilité du forçage, en particulier lorsque le maillage est très raffiné en proche paroi. On impose donc la contrainte supplémentaire que l'échelle de temps du forçage doit être résolue par le schéma en temps, de pas Δt . Le paramètre τ_r proposé est donc :

$$\tau_r = \max \left\{ 2\Delta t, 0.01 \frac{k^\dagger}{\varepsilon^\dagger} \right\}. \quad (7.69)$$

Sur la figure 7.20, on teste l'expression locale (7.69) de τ_r , conjointement à $\tau_v = 5h/U_b$. La LES est forcée sur les moments du calcul périodique, mais, en raison de la difficulté à évaluer l'échelle intégrale de temps à partir des variables filtrées de la LES périodique, τ_r est calculé à partir de l'EB-RSM (cas 6). On voit que cette échelle permet bien d'obtenir

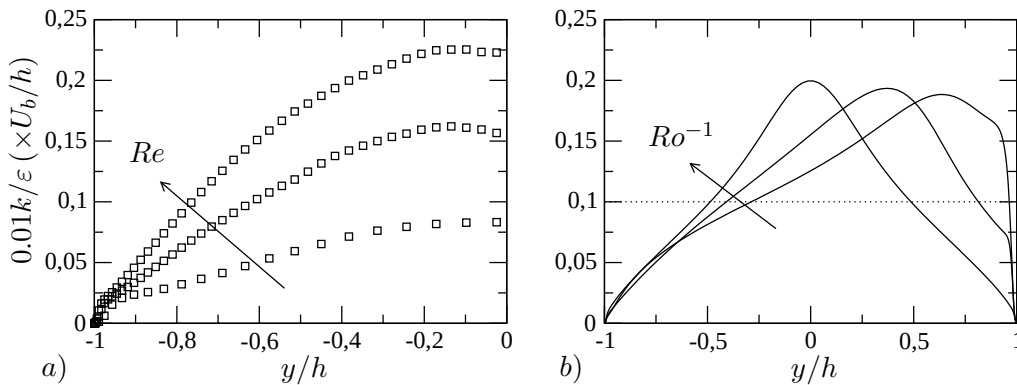


FIGURE 7.19 – Échelle intégrale k/ε de la turbulence dans un canal plan, multipliée par le coefficient $C_r = 0.01$. a) Variation en fonction du nombre de Reynolds ($Re_\tau = 180, 395, 590$; données DNS de Moser *et al.*, 1999); b) variation en fonction du nombre de rotation ($Re_b = 7000$ et $Ro_b = 0, 1/6, 0.5$, résultats de l'EB-RSM).

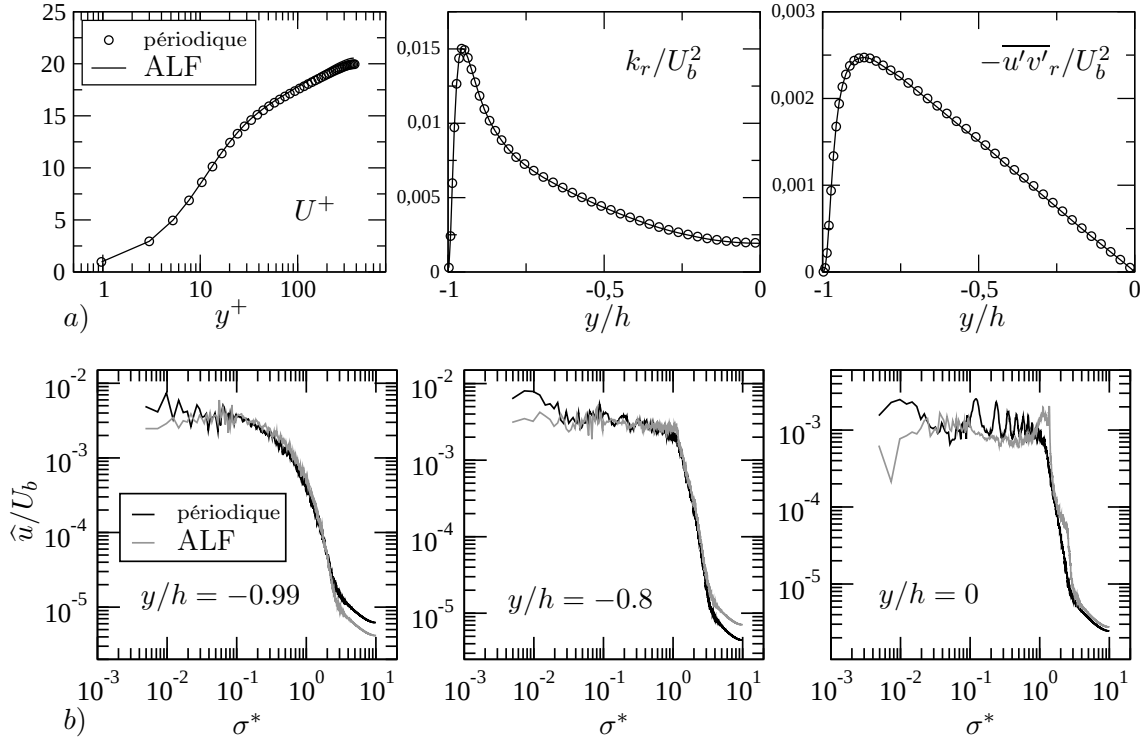


FIGURE 7.20 – Forçage de la LES sur les moments de la LES périodique, pour $\tau_v = 5h/U_b$ et $\tau_r = 0.01k/\varepsilon$ (cas 6); résultats en $x/h = 5$. Canal plan, $Re_b = 7000$. a) Vitesse moyenne, énergie turbulente et contrainte de cisaillement turbulent. b) Transformée de Fourier temporelle de la vitesse $\tilde{u}$, plus ou moins loin des parois.

un rappel satisfaisant des contraintes de Reynolds et de la vitesse vers leur valeur cible. La forme de la transformée de Fourier à proximité de l'entrée est similaire à celle obtenue lorsque $\tau_r = 0.1h/U_b$. En fait, le caractère local de l'échelle de temps τ_v ne semble pas avoir beaucoup d'influence sur les résultats. L'expression de τ_r en fonction de l'échelle intégrale de temps devrait cependant permettre d'ajuster l'intensité du forçage en fonction du nombre de Reynolds (figure 7.19a), avec un forçage plus important pour les écoulements à bas nombres de Reynolds, dont le développement spatial est particulièrement délicat.

Remarque (Interprétation de la constante C_r). *Pour une turbulence isotrope, et en l'absence d'autre mécanisme de production que le forçage linéaire, on a vu que la production du forçage était balancée par la dissipation, de telle sorte que, si la dissipation cible $\varepsilon^\dagger$ est proche de la dissipation effective ε , on peut écrire :*

$$\frac{1}{\tau_r}(k^\dagger - k) \approx \varepsilon^\dagger,$$

avec $k = k_r + k_\tau$ (équation 7.18) la somme de l'énergie turbulente résolue et de l'énergie turbulente de sous-maille. Cette relation implique :

$$\tau_r = C_r \frac{k^\dagger}{\varepsilon^\dagger}, \quad \text{avec} \quad C_r \approx \frac{k^\dagger - k}{k^\dagger}.$$

On voit donc que pour une turbulence isotrope, la constante C_r fixe implicitement l'erreur relative « tolérée » pour k par rapport à sa valeur cible $k^\dagger$. Pour une turbulence homogène à l'équilibre avec un gradient de vitesse moyenne non nulle, la dissipation balance la somme des deux sources de production : $P + P^f = \varepsilon$. Sous l'hypothèse $\varepsilon^\dagger = \varepsilon$, la constante C_r

représente dans ce cas $(1 - P/\varepsilon)^{-1}(k^\dagger - k)/k^\dagger$. Le facteur $(1 - P/\varepsilon)^{-1}$ est bien défini lorsque la turbulence est forcée, c'est-à-dire $P^f \neq 0$.

Influence de la taille du filtre temporel

On étudie maintenant l'influence du mode d'approximation des moments $\langle \tilde{u}_i \rangle$ et $\overline{u'_i u'_{j_r}}$ dans les équations (7.17) et (7.21) qui définissent implicitement les coefficients A_{ij} et B_i du forçage. Comme mentionné au début de ce paragraphe, les calculs présentés jusque là utilisent un filtrage temporel gaussien de taille $T = 100h/U_b$. Avec cette approximation, il est facile de voir que les termes $\langle f_i \rangle$ et P_{ij}^f (équations 7.16 et 7.20) apparaissent en fait au bilan de la vitesse filtrée temporellement $\mathcal{G}_T(\tilde{u}_i)$ et des contraintes « hautes fréquences » $\mathcal{G}_T((\tilde{u}_i - \mathcal{G}_T(\tilde{u}_i))(\tilde{u}_j - \mathcal{G}_T(\tilde{u}_j)))$, et non pas exactement au bilan de la vitesse moyenne $\langle \tilde{u}_i \rangle$ et des contraintes de Reynolds résolues $\overline{u'_i u'_{j_r}}$. La taille T du filtre temporel peut donc avoir une influence importante sur les résultats puisque, lorsque les termes de rappel $\langle f_i \rangle$ et P_{ij}^f portent sur les plus hautes fréquences de l'écoulement, on peut penser que les phénomènes plus lents que la période T sont amortis par le forçage.

Sur les figures 7.21 et 7.22, on considère trois LES forcées qui diffèrent par le mode d'approximation des moments, de représentativité croissante par rapport à une moyenne de Reynolds, dans la définition des coefficients du forçage : un filtrage temporel gaussien de taille $T = 10h/U_b$ (cas 7a), un filtrage temporel gaussien de taille $T = 100h/U_b$ (cas 6) et un filtrage temporel gaussien de taille $T = 100h/U_b$ plus une moyenne dans la direction z d'homogénéité de l'écoulement (cas 7b), ce qui revient à accroître sensiblement la taille du filtre temporel. On voit sur les graphes du bas de la figure 7.21 que quel que soit le mode d'approximation des moments, les statistiques des LES forcées pleinement développées ($x/h = 30$) coïncident avec les statistiques cibles du forçage. Ces statistiques « globales » sont réalisées par intégration temporelle pendant une période de $400h/U_b$ plus une moyenne

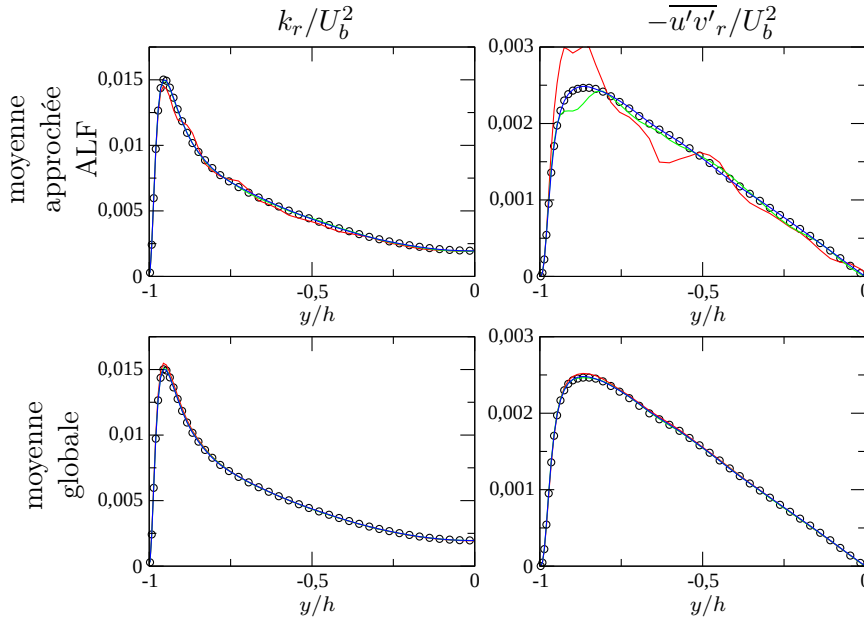


FIGURE 7.21 – Énergie turbulente et contrainte de cisaillement turbulent. Influence du mode d'approximation des moments dans le calcul des coefficients du forçage : filtrage temporel de taille $T = 10h/U_b$ (—, cas 7a), $T = 100h/U_b$ (—, cas 6) et $T = 100h/U_b$ plus moyenne dans la direction z d'homogénéité (—, cas 7b). Haut : approximation des moments pour le calcul des coefficients du forçage, en $x = 30h$, $z = 0$ et $t = 200h/U_b$. Bas : moments globaux, en $x = 30h$. Canal plan, $Re_b = 7000$. Symboles : LES périodique ; lignes : LES forcée.

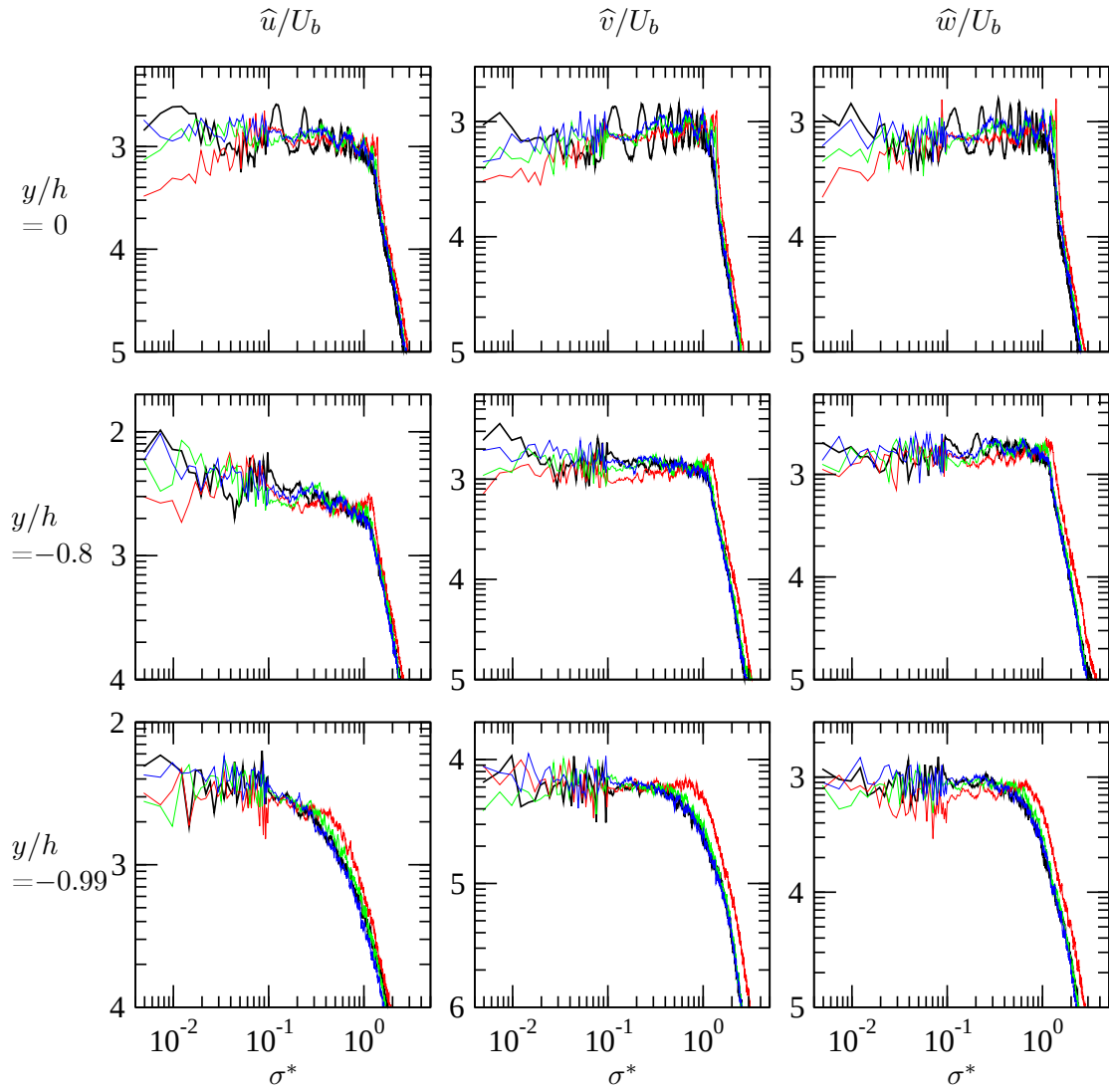


FIGURE 7.22 – Transformée de Fourier des trois composantes de vitesse, en $x/h = 30$ et plus ou moins loin des parois ($y/h = 0.99, 0.8, 0$). Influence du mode d'approximation des moments pour le calcul des coefficients du forçage : filtrage temporel de taille $T = 10h/U_b$ (—, cas 7a), $T = 100h/U_b$ (—, cas 6) et $T = 100h/U_b$ plus moyenne dans la direction z d'homogénéité (—, cas 7b). Canal plan, $Re_b = 7000$. Lignes noires : LES périodique ; lignes colorées : LES forçée.

dans la direction z d'homogénéité de l'écoulement, ce qui donne avec une bonne précision les contraintes de Reynolds dans un canal plan. Celles-ci sont donc indifférentes au mode d'approximation des moments dans la définition du forçage. Les graphes du haut de la figure 7.21 représentent pour leur part des moments approchés utilisés localement et instantanément pour calculer les coefficients du forçage. On voit que plus l'approximation des moments est fine, plus les moments approchés sont proches des statistiques cibles vers lesquelles la LES est forçée. Pour $T = 10h/U_b$, les moments approchés diffèrent sensiblement des moments aux sens de Reynolds tracés sur les graphes du bas. Ce résultat peut paraître trivial mais il montre que le forçage n'annule pas complètement les phénomènes plus lents que la taille du filtre temporel. La figure 7.22 représente la transformée de Fourier temporelle de la vitesse. Celle-ci est tracée proche de la sortie du canal, de manière à garantir que les LES forcées sont pleinement développées. On voit que pour $T = 10h/U_b$, les basses fréquences de la vitesse sont tout de même amorties. Plus proche des parois,

on observe en plus qu'avec cette approximation médiocre de la moyenne de Reynolds, le spectre de vitesse est relativement déformé, avec une surestimation de la vitesse aux hautes fréquences (autour de $\sigma^* = 1$). Au contraire, pour $T = 100h/U_b$ plus une moyenne dans la direction z , l'amortissement de la vitesse aux basses fréquences est minime, voire inexistant, et le spectre aux plus hautes fréquences est presque confondu avec le spectre de la LES périodique. Bien que ce ne soit pas le cas lorsqu'on utilise uniquement un filtrage temporel de taille $T = 100h/U_b$ sans moyenne dans la direction d'homogénéité, l'accord entre le spectre de la LES forcée et celui de la LES périodique est très satisfaisant pour ce calcul également.

Bilan

Les calculs présentés dans ce paragraphe ont permis de valider le forçage ALF pour des écoulements non homogènes avec développement spatial de la turbulence, et de le paramétrer, en vue de son application au couplage RANS/LES zonal notamment. Le forçage permet d'amorcer rapidement des fluctuations turbulentes dans un canal. Les paramètres $\tau_v = 5h/U_b$ et $\tau_r = 0.01k/\varepsilon$ sont appropriés pour obtenir un accord très précis et très rapide des corrélations en un point de la LES forcée avec les corrélations cibles du forçage. L'approximation des moments dans les équations (7.17) et (7.21) qui définissent les coefficients du forçage doit être la plus proche possible d'une moyenne de Reynolds. Cela permet de fournir à la LES forcée un spectre de vitesse quasiment identique à celui d'un écoulement périodique pleinement développé, bien que le développement spatial du spectre soit moins rapide que celui des corrélations en un point. Pour les écoulements statistiquement stationnaires, une approximation purement locale des moments par filtrage temporel

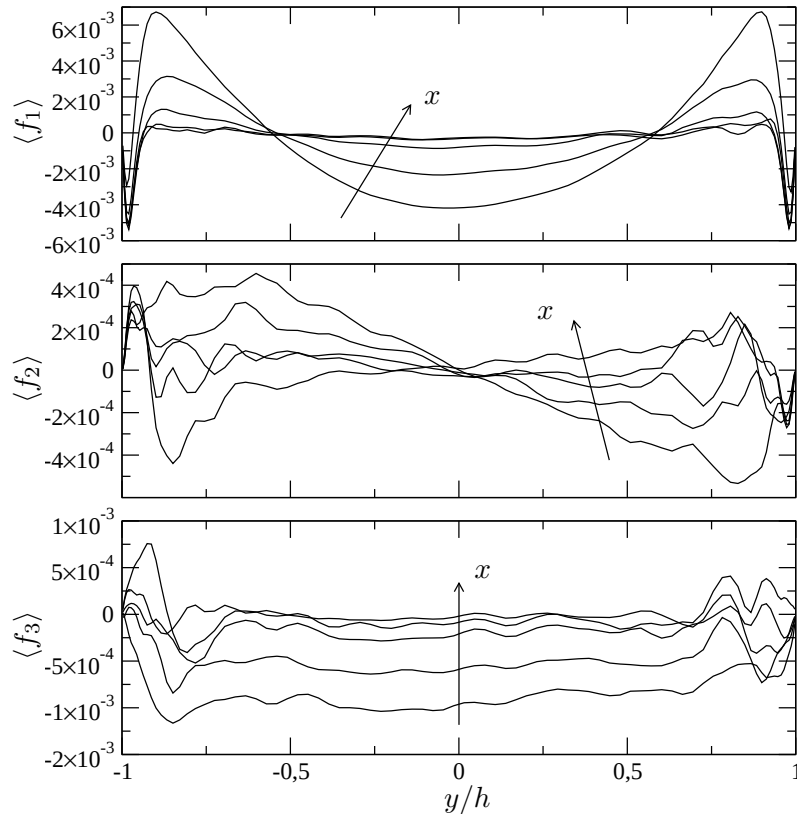


FIGURE 7.23 – Moyenne du terme de forçage, en $x/h = 2, 5, 10, 15, 30$. Canal plan, $Re_b = 7000$ (cas 6).

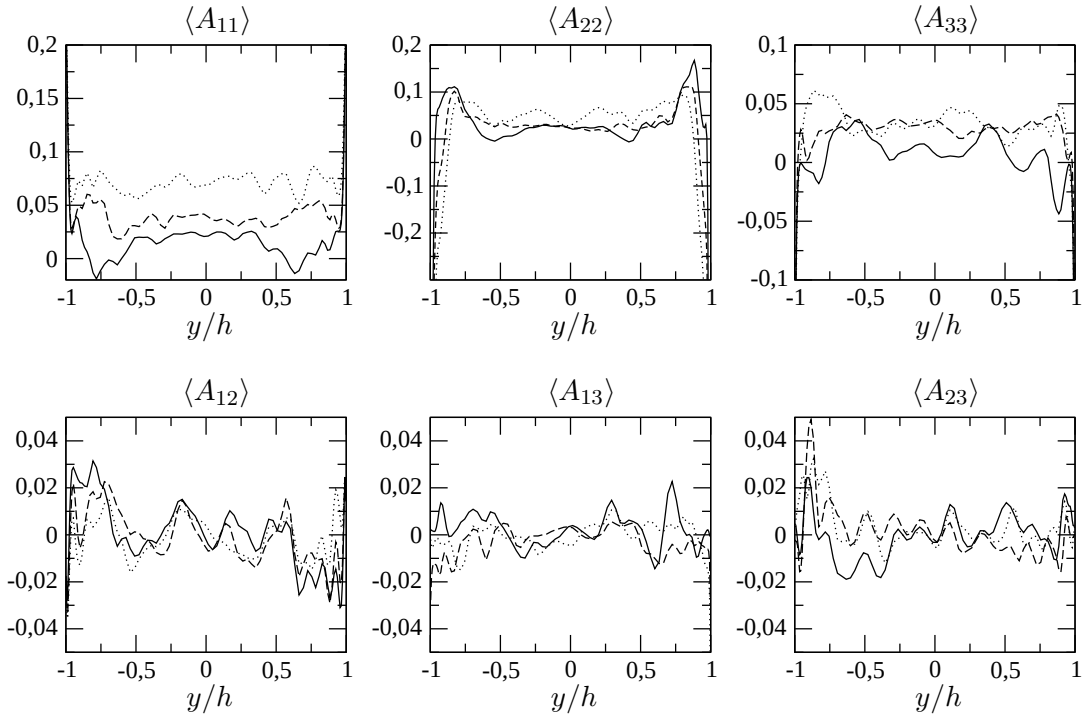


FIGURE 7.24 – Moyenne des coefficients A_{ij} du forçage, en $x/h = 5$ (· · · ·), 15 (— — —), 30 (—). Canal plan, $Re_b = 7000$ (cas 6).

gaussien de taille $T = 100h/U_b$ ($\approx 5 \max(k/\varepsilon)$) donne globalement satisfaction.

Avec cette formulation du forçage, on a tracé sur les figures 7.23 et 7.24 les composantes moyennes du terme de forçage et plus particulièrement du tenseur des coefficients A_{ij} (cas 6 du tableau 7.2). Comme attendu, le forçage décroît rapidement en moyenne en aval de l'entrée du canal, en même temps que la vitesse moyenne converge vers son niveau cible (figure 7.23). Les composantes prépondérantes du tenseur $\mathbf{A}$ sont les composantes diagonales, en particulier A_{11} et A_{22} . Ces deux composantes contribuent notamment à la production par forçage de la contrainte de cisaillement $\overline{u'v'_r}$, par le terme d'amplification $(A_{11} + A_{22})\overline{u'v'_r}$. L'amplitude de ces deux composantes décroît également le long du canal.

7.3 Applications au couplage RANS/LES zonal

Dans ce paragraphe, on présente des applications de couplage RANS/LES zonal avec la méthode ALF. Il s'agit d'applications immédiates pour lesquelles le forçage n'est plus appliqué dans tout le domaine comme précédemment, mais uniquement dans une zone de recouvrement RANS/LES déterminée. Après avoir rappelé et précisé la formulation du couplage au paragraphe 7.3.1, les deux applications qu'on considère sont les suivantes :

- l'utilisation du forçage proche de l'entrée du domaine LES pour amorcer les fluctuations turbulentes dans le domaine LES (paragraphe 7.3.2),
- l'utilisation du forçage en proche paroi dans un domaine LES faiblement résolu (paragraphe 7.3.3).

7.3.1 Formulation du couplage

On rappelle la formulation du forçage ALF dans un contexte couplé RANS/LES :

$$f_i = A_{ij}\tilde{u}_j + B_i,$$

avec A_{ij} et B_i les coefficients du forçage donnés par :

$$A_{ik}\overline{u'_j u'_{k_r}} + A_{jk}\overline{u'_i u'_{k_r}} = \frac{1}{\tau_r}(\overline{u'_i u'_j}^{RANS} - \langle \tau_{ij} \rangle - \overline{u'_i u'_{j_r}}), \quad (7.70)$$

$$B_i = \frac{1}{\tau_v}(\overline{u_i}^{RANS} - \langle \tilde{u}_i \rangle) - A_{ij}\langle \tilde{u}_j \rangle, \quad (7.71)$$

avec f_i ajoutée, sur une zone de recouvrement RANS/LES, comme terme source volumique à l'équation de quantité de mouvement filtrée du domaine LES, $\tilde{u}_i$ la vitesse filtrée de la LES et $\overline{u_i}^{RANS}$ et $\overline{u'_i u'_j}^{RANS}$ la vitesse moyenne et le tenseur de Reynolds du calcul RANS. Les paramètres τ_v et τ_r du forçage sont évalués à partir des variables du calcul RANS par les formules :

$$\begin{aligned} \tau_v &= 5h/U_b, \\ \tau_r &= \max \left\{ 2\Delta t, 0.01 \frac{k^{RANS}}{\varepsilon^{RANS}} \right\}. \end{aligned}$$

Dans les équations (7.70) et (7.71), l'opérateur de moyenne d'ensemble $\langle \cdot \rangle$, pour le calcul des moments $\langle \tilde{u}_i \rangle$ et $\overline{u'_i u'_{j_r}}$, est approché par un filtrage temporel gaussien (équation 7.8) de taille $T = 100h/U_b$. Les contraintes de sous-maillages moyennes sont évaluées par :

$$\langle \tau_{ij} \rangle = \langle \tau_{ij}^d \rangle + \frac{2}{3}k_\tau,$$

avec la partie déviatrice τ_{ij}^d du tenseur de sous-maille donnée par le modèle de sous-maille. L'évaluation de l'énergie de sous-maille k_τ est moins immédiate car, avec un modèle de sous-maille algébrique comme le modèle de Smagorinsky, k_τ est ajoutée au potentiel de pression effective $\widetilde{p_T} = \widetilde{p} + \frac{2}{3}k_\tau$ (équation 4.76, paragraphe 4.3.1.2) et n'est donc pas résolue ni modélisée. Si le filtre LES est un filtre à fréquence de coupure et que la fréquence de coupure :

$$\kappa_c = \frac{\pi}{\Delta}, \quad \text{avec} \quad \Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3},$$

est dans la zone inertielle d'un spectre de Kolmogorov, l'énergie de sous-maille peut être évaluée par la formule :

$$k_\tau^K = \int_{\kappa_c}^{\infty} C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} d\kappa = \frac{3C_K}{2} \left(\frac{\varepsilon}{\kappa_c} \right)^{2/3}, \quad (7.72)$$

avec $C_K = 1.5$ la constante de Kolmogorov. Pour des applications plus générales, il convient de corriger cette relation de manière à prendre en compte le possible déséquilibre spectral de la turbulence et l'incertitude sur le filtre implicite LES. Par conséquent, une constante de calibration C a été introduite :

$$k_\tau = C k_\tau^K. \quad (7.73)$$

En utilisant les relations (7.72) et (7.73), la constante C a été calibrée de telle sorte que :

$$\int_0^h k dy = \int_0^h (k_r + k_\tau) dy$$

avec k et ε (dans 7.72) donnés par une simulation directe dans un canal plan (de demi-hauteur h) et k_r et κ_c (dans 7.72) donnés par une LES du même écoulement. À partir des données DNS de Moser *et al.* (1999) à $Re_\tau = 395$ et $Re_\tau = 590$ et des LES périodiques correspondantes, présentées aux paragraphes 6.4.3 (pour $Re_\tau = 395$, voir tableau 6.5 p. 163) et 7.3.2 (pour $Re_\tau = 590$, voir tableau 7.4 p. 210), $C = 0.35$ est apparu comme un

bon compromis. Finalement, l'évaluation de l'énergie de sous-maille mise en œuvre pour les calculs couplés RANS/LES présentés dans ce paragraphe est :

$$k_\tau = C \frac{3C_K}{2} \left(\frac{\varepsilon^{RANS}}{\kappa_c} \right)^{2/3}, \quad C_K = 1.5, \quad C = 0.35. \quad (7.74)$$

Le forçage dans le domaine LES est réalisé dès le début des calculs, en initialisant les filtrages $\langle \tilde{u}_i \rangle$ et $\overline{u'_i u'_j} + \langle \tau_{ij} \rangle$ par les variables $\overline{u_i}^{RANS}$ et $\overline{u'_i u'_j}^{RANS}$. Enfin, le modèle de sous-maille dans le domaine LES est le modèle de Smagorinsky (paragraphe 4.3.3.1) et le modèle de fermeture dans le domaine RANS est l'EB-RSM.

7.3.2 Génération de fluctuations en entrée

Dans ce paragraphe, on utilise le forçage ALF sur une zone de recouvrement RANS/LES pour générer les fluctuations turbulentes dans le domaine LES. La zone de forçage est située juste en aval de l'entrée du domaine LES. Sa taille dans la direction x est notée L_x^f . Dans les directions y et z , l'ensemble du domaine LES est forcé. La condition limite pour la vitesse en entrée du domaine est soit la vitesse moyenne du calcul RANS, imposée sans aucune fluctuation, soit la vitesse fluctuante obtenue par la méthode SEM (chapitre 6).

On considère d'abord l'écoulement de canal plan au nombre de Reynolds $Re_b = 7000$. Aucune fluctuation de vitesse n'est imposée en entrée, de manière à voir si le forçage peut à lui seul amorcer la turbulence dans le domaine LES. L'influence de l'étendue de la zone de forçage est également étudiée. Le domaine LES est de taille $L_x \times L_y \times L_z = 20\pi h \times 2h \times \pi h$, maillé par $497 \times 48 \times 83$ cellules. Les statistiques des LES forcées sont obtenues en intégrant en temps sur une période de $400h/U_b$ à partir de l'instant $t = 200h/U_b$, puis en moyennant la direction z d'homogénéité. Un calcul couplé aux faces de bord d'entrée par la méthode SEM est également réalisé pour comparaison. La période d'intégration pour les moyennes est $225h/U_b$ pour ce calcul. La solution de référence est la solution LES pleinement développée obtenue sur un domaine de taille $3\pi h \times 2h \times \pi h$ avec des conditions de périodicité dans les directions x et z et un maillage de raffinement identique à celui des calculs couplés ($75 \times 48 \times 83$ hexaèdres). Le nombre de Reynolds de frottement du calcul périodique est $Re_\tau = 379.7$ et les pas d'espaces adimensionnés du maillage sont $\Delta x^+ \approx 48$, $\Delta z^+ \approx 14.4$, $\Delta y_{\min}^+ \approx 2$.

Sur la figure 7.25, on trace l'évolution du coefficient de frottement C_f et des fonctions d'erreur e_{k_τ} et $e_{\overline{u'u'v'}}$ (équation 6.13) pour quatre longueurs L_x^f de la zone de forçage différentes : $L_x^f/h = 1, 2.5, 5, 7.5$. Pour faciliter la lecture, les graphes sont tracés en fonction de la coordonnée longitudinale $\tilde{x} = x - L_x^f \in [0, L_x - L_x^f]$, mesurant la distance entre un point et la fin de la zone de recouvrement. On voit que dans tous les cas, les fluctuations générées par le forçage dans la zone de recouvrement se maintiennent au delà de celle-ci. Globalement les statistiques en aval de la zone de forçage sont caractérisées par des erreurs faibles par rapport à l'écoulement pleinement développé, mais une évolution relativement lente. La longueur de la zone de recouvrement a une influence importante sur ces deux caractéristiques. Plus la zone de forçage est longue, plus les fluctuations synthétisées dans la zone de forçage sont proches d'une turbulence développée et plus l'amplitude des variations dans la zone non forcée est réduite. De même, les variations sont plus rapides, la position où les contraintes sont le plus surestimées étant plus proche de la fin de la zone de forçage lorsque L_x^f augmente. Une longueur de forçage $L_x^f \geq 5h$ semble être appropriée pour un développement efficace de la turbulence dans le domaine LES. Pour les deux calculs concernés ($L_x^f/h = 5, 7.5$), le développement du coefficient de frottement est particulièrement satisfaisant. Celui-ci est très proche de sa valeur pleinement développée

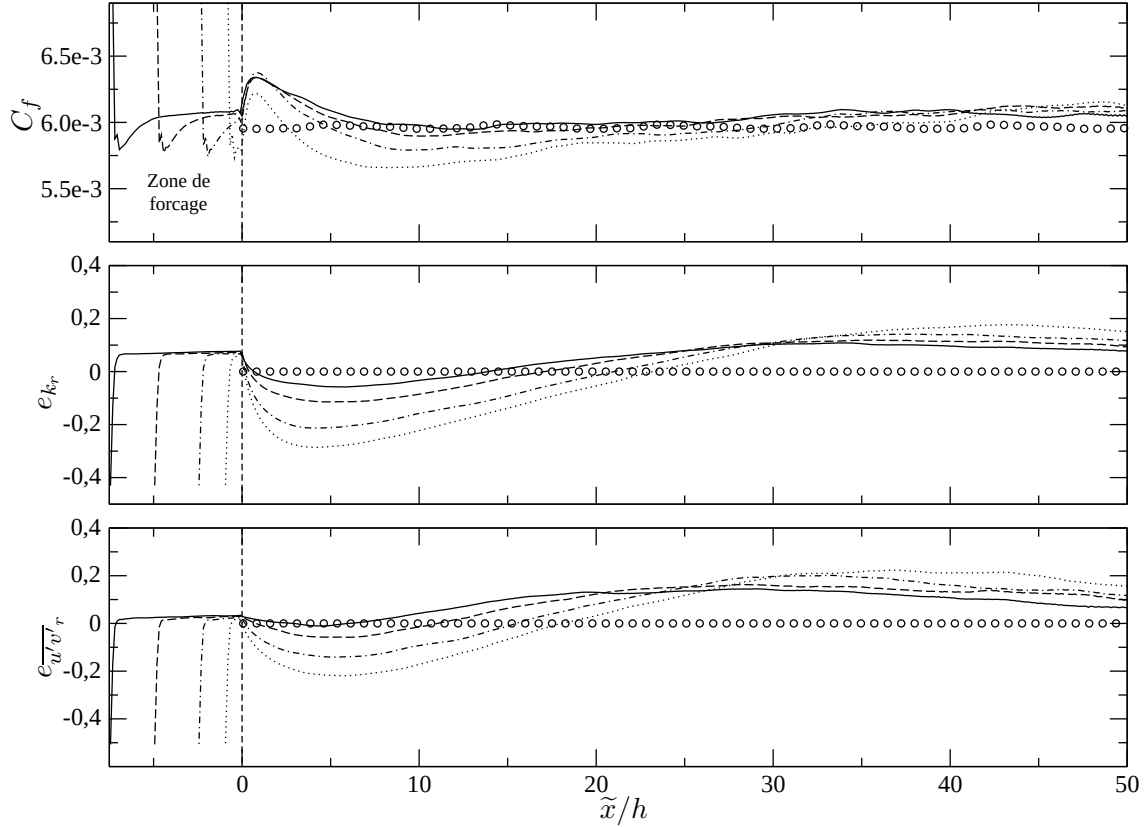


FIGURE 7.25 – Évolution du coefficient de frottement et des fonctions d'erreurs e_{k_r} et $e_{\overline{u'v'}}$ en aval de la fin de la zone de forçage, pour différentes longueurs L_x^f de zone de forçage. Canal plan, $Re_b = 7000$. Symboles : LES périodique, lignes : LES forçée, pour $L_x^f/h = 1$ (.....), 2.5 (---), 5 (-.-), 7.5 (—).

dès $\tilde{x}/h = 5$ et montre simplement une surestimation modérée (environ 8%) à proximité directe de la fin de la zone de forçage. Les erreurs sur l'énergie turbulente et la contrainte de cisaillement turbulent sont comprises entre $\pm 15\%$ dans l'ensemble du domaine, même si les erreurs maximales sont observées assez loin de la fin de la zone de forçage ($\tilde{x}/h \approx 30$).

Sur la figure 7.26, les profils de vitesse moyenne, d'énergie turbulente résolue et de contrainte de cisaillement turbulent résolu sont tracés en différentes stations plus ou moins éloignées de l'entrée du domaine, pour la simulation correspondant à $L_x^f = 5h$ (contrairement à la figure précédente, l'abscisse des profils est exprimée en fonction de la coordonnée x non décalée, de sorte que $x/h = 5$ correspond à la fin de la zone de forçage). Les résultats sont comparés à ceux obtenus lorsque le chaînage RANS/LES est réalisé aux faces de bord *via* la SEM et non pas par le terme de forçage ALF. On retrouve, avec une vision plus locale, les résultats énoncés plus haut. Lorsque les fluctuations sont amorcées sur une zone de recouvrement forcée, la vitesse moyenne et les contraintes de Reynolds sont immédiatement proches de leurs profils pleinement développés. On note toutefois que la vitesse est légèrement surestimée pour $y^+ \geq 200$, en aval de la zone de forçage. Les contraintes de Reynolds sont quant à elles modérément amorties au cœur de l'écoulement avant de se reconstruire. Au contraire, la SEM a tendance à surestimer plus largement l'activité turbulente en aval de l'entrée, mais cette erreur est assez rapidement dissipée de sorte qu'en $x/h = 40$, les moments d'ordre un et deux pleinement développés sont presque exactement recouverts, ce qui n'est pas le cas pour le calcul ALF, en particulier pour la contrainte de cisaillement.

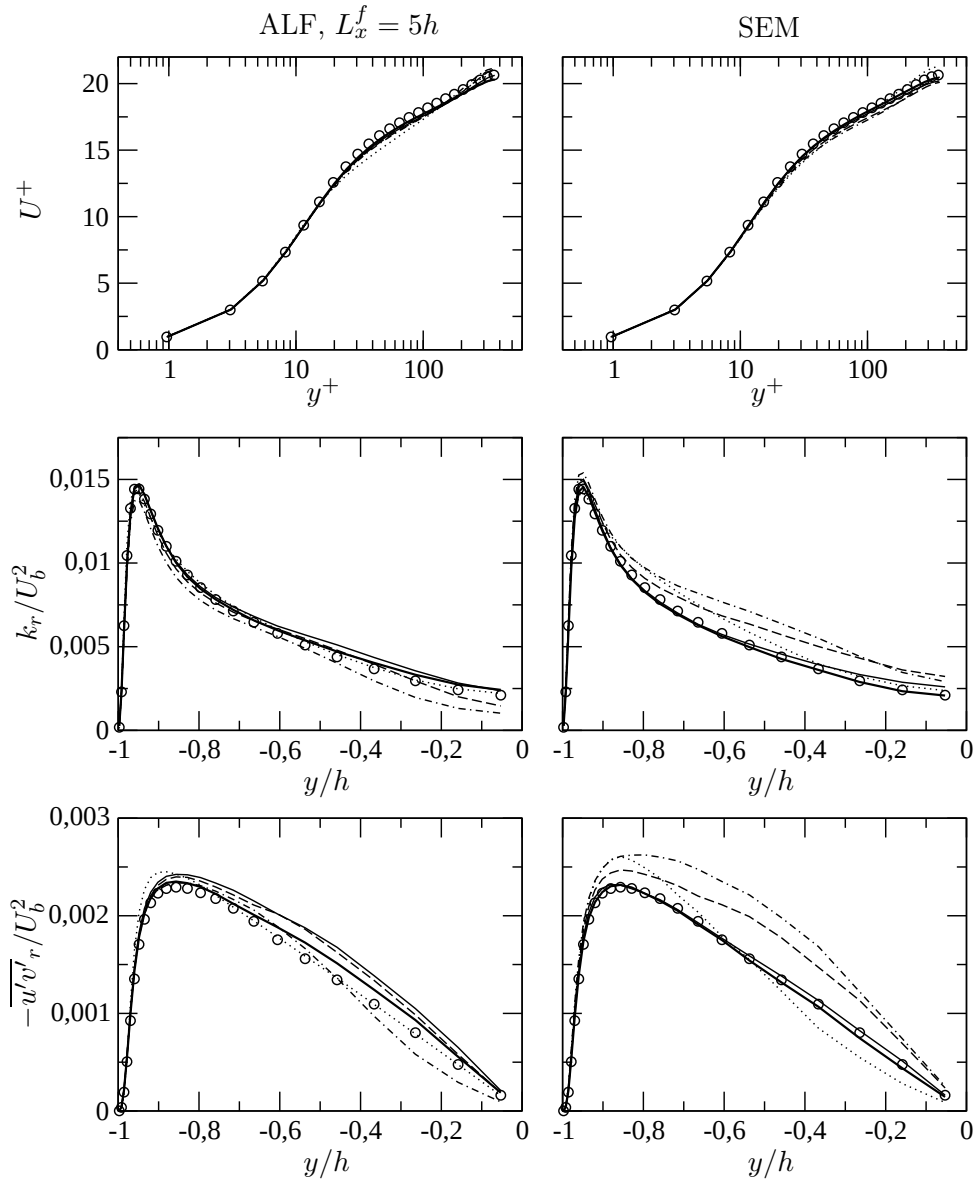


FIGURE 7.26 – Vitesse moyenne, énergie turbulente et contrainte de cisaillement turbulent, en $x/h = 5$ (· · · ·), 15 (— — —), 25 (— — —), 40 (—, trait fin), 60 (—, trait épais). Chaînage EB-RSM/Smagorinsky par forçage ALF pour $L_x^f = 5h$ (gauche) ou par la SEM (droite). Symboles : LES périodique ; lignes : calculs chaînés, domaine LES.

Le tableau 7.3 compare les temps de calculs en fonction de la longueur de la zone de recouvrement. Ces relevés n'ont qu'une valeur indicative puisque le temps CPU peut varier notablement pour deux calculs identiques. La tendance serait que le surcoût engendré par le forçage d'une partie du domaine serait du même ordre que la part du domaine qui est forcée (par exemple, forcer 10% des cellules augmente le temps de calcul de 10%). Le calcul pour $L_x^f/h = 7.5$ remet toutefois en cause cette tendance puisqu'aucune augmentation du temps de calcul n'apparaît par rapport au calcul avec $L_x^f/h = 5$. Le tableau 7.3 indique de manière plus sûre que le nombre de sous-itérations dans l'étape de résolution de la pression est le même pour les LES forcées que pour la LES périodique. Cela n'est pas le cas avec la SEM (de même qu'avec d'autres méthodes de turbulence synthétique comme celle de Batten *et al.* (2004)), car la vitesse imposée en entrée ne satisfait pas la contrainte de divergence nulle. La projection sur le plan à divergence nulle de la vitesse convectée de l'entrée vers

L_x^f/h	$N_f/N(\%)$	CPU (s)	$n_{\Delta p}$
forçage ALF			
1	1.6	1.77	82.3
2.5	4	1.84	81.8
5	8	1.91	81.3
7.5	11.9	1.91	81.1
SEM			
–	–	(7.24)	802.6
LES périodique			
–	–	–	81.5

TABLE 7.3 – Performance des calculs. N_f/N : ratio entre le nombre de cellules forcées et le nombre de cellules total ; CPU : temps CPU moyen par pas de temps ; $n_{\Delta p}$: nombre moyen de sous-itérations pour l'étape de correction de pression.

(Le CPU de la LES périodique n'est pas indiqué car le domaine de calcul est plus petit ; celui du calcul SEM est indiqué entre parenthèse car les écritures de fichiers de suivi de variables pendant le calcul était beaucoup moins importantes que pour les calculs ALF.)

l'intérieur du domaine peut être assez contraignante pour le solveur de pression, ce qui engendre un surcoût de calcul important et des oscillations non physiques sur la pression proche de l'entrée (voir Poletto *et al.*, 2011). Avec le forçage ALF, on génère des fluctuations dans le domaine tout en imposant simplement la vitesse moyenne, à divergence nulle, d'un calcul RANS en entrée. C'est un avantage important de la méthode.

La validation du forçage ALF comme méthode de génération de fluctuations turbulentes dans des calculs chaînés RANS/LES est poursuivie par une simulation dans un canal plan à nombre de Reynolds plus élevé, $Re_\tau = 590$. Les caractéristiques de ce calcul et du maillage sont reportées dans le tableau 7.4. Aucune fluctuation n'est imposée sur le bord d'entrée et le forçage ALF est réalisé sur une zone de recouvrement de longueur $L_x^f = 5h$.

Pour ce cas également, le développement de la turbulence dans le domaine LES est satisfaisant. Le profil de vitesse moyenne en proche paroi montre une zone logarithmique marquée tout au long du domaine (figure 7.27). En revanche, la vitesse moyenne est sur-estimée au cœur de l'écoulement et n'a pas atteint sa valeur pleinement développée à la fin du domaine. La sous-estimation, en aval de la zone de forçage, des contraintes de

	LES périodique	RANS/LES zonal	
		RANS	LES
Re_τ	590	590	590
$L_x \times L_y \times L_z$	$2\pi h \times 2h \times \pi h$	–	$10\pi h \times 2h \times \pi h$
$N_x \times N_y \times N_z$	$75 \times 70 \times 124$	–	$371 \times 70 \times 124$
$(\Delta x^+, \Delta z^+)$	(50,15)	–	–
$(\Delta y_{\min}^+, \Delta y_{\max}^+)$	(1,48.3)	(1,48.3)	–
Périodicité	x, z	x, z	z
Période d'intégration	37.5	–	16.45
$(\times \delta/u_\tau)$			
U_b	19.23	18.87	–

TABLE 7.4 – Paramètres du calcul à $Re_\tau = 590$.

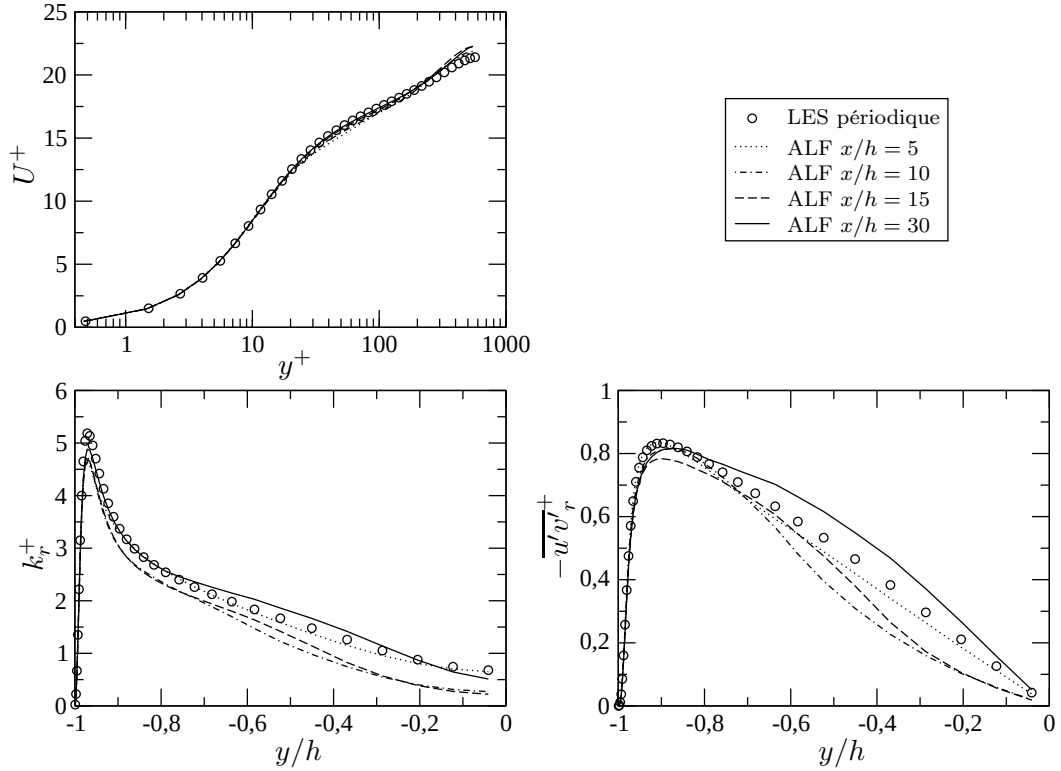


FIGURE 7.27 – Vitesse moyenne, énergie turbulente et contrainte de cisaillement turbulent, en $x/h = 5, 10, 15, 30$. Canal plan, $Re_\tau = 590$. Symboles : LES périodique ; lignes : chaînage EB-RSM/Smagorinsky par forçage ALF pour $L_x^f = 5h$, domaine LES.

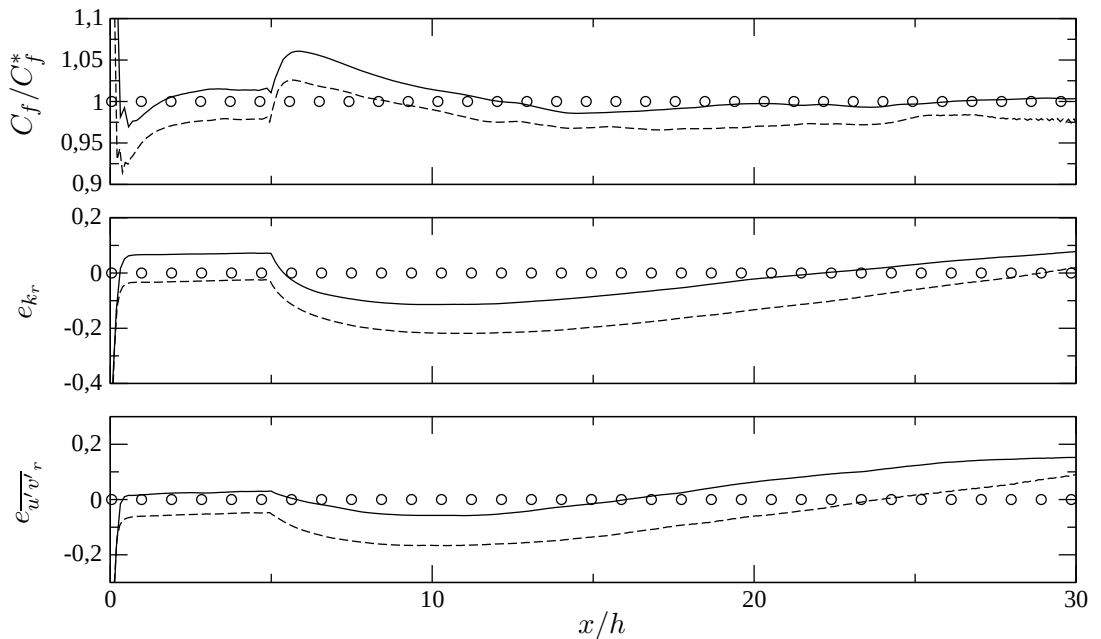


FIGURE 7.28 – Coefficient de frottement normalisé et fonctions d'erreurs e_{k_r} et $e_{\overline{u'v'_r}}$. Canal plan, $Re_b = 7000$ (—), $Re_\tau = 590$ (---). Symboles : LES périodiques ; lignes : chaînage EB-RSM/Smagorinsky par forçage ALF pour $L_x^f = 5h$, domaine LES.

Reynolds par rapport à leur valeur pleinement développée est également un peu plus importante que sur le cas précédent, à nombre de Reynolds inférieur mais pour une même longueur de forçage L_x^f . Cette légère amplification de l'erreur est due à l'approximation des moments résolus cibles $\overline{u'_i u'_j}^\dagger = \overline{u'_i u'_j}^{RANS} - \langle \tau_{ij} \rangle$ sur lesquels la LES est forcée dans la zone de recouvrement. Ceux-ci sont légèrement sous-estimés par rapport aux contraintes de la LES pleinement développée sur ce maillage (voir les profils de k_r et $\overline{u'v'}_r$ en $x/h = 5$).

Sur la figure 7.28, on compare l'évolution du coefficient de frottement C_f normalisé par sa valeur développée C_f^* et des fonctions d'erreur e_{k_r} et $e_{\overline{u'v'}_r}$, aux deux nombres de Reynolds $Re_b = 7000$, soit $Re_\tau \approx 380$, et $Re_\tau = 590$ et pour une même longueur de forçage ($L_x^f = 5$). L'évolution de ces grandeurs en aval de la zone de recouvrement est tout à fait similaire. Ainsi, l'augmentation du nombre de Reynolds ne semble pas requérir d'augmentation de la longueur de forçage, mais n'en autorise pas non plus de réduction.

Enfin, le forçage ALF est utilisé pour générer les fluctuations turbulentes dans un canal en rotation à $Re_b = 7000$ et $Ro_b = 1/6$. Deux calculs avec la force ALF sont présentés : l'un pour lequel le forçage est associé à une condition limite constante (la vitesse moyenne de l'EB-RSM) au bord d'entrée et l'autre pour lequel le forçage ALF est associé à une condition limite fluctuante obtenue avec la SEM chaînée au domaine RANS (paragraphe 6.2.2). Pour les deux simulations, la zone de forçage est de longueur $L_x^f = 5h$ dans la direction x . Les solutions sont comparées à la solution périodique pleinement développée et à la solution hybride zonale utilisant uniquement la SEM pour le couplage. Les maillages, la solution LES périodique et la solution SEM sont décrits au paragraphe 6.3.2.

On voit sur la figure 7.29 que le développement de la turbulence dans le domaine LES est globalement moins satisfaisant avec la méthode ALF qu'avec la SEM sur ce cas test. Les fluctuations générées par le forçage dans la zone de recouvrement sont assez sévèrement amorties après la zone de recouvrement, comme on le voit sur le profil d'énergie turbulente en $x/h = 15$. La vitesse moyenne et la contrainte de cisaillement sont moins affectées par l'arrêt soudain du forçage. Elles montrent ainsi une erreur réduite par rapport à la SEM jusqu'à $x/h = 20$, ce qui se voit également sur le coefficient de frottement. Toutefois, au delà de $x/h = 20$, la convergence vers la solution pleinement développée est plus lente qu'avec la SEM.

Il apparaît donc que sur l'écoulement de canal en rotation, le forçage ALF sur une zone limitée du domaine ($L_x^f = 5h$) n'est pas suffisant pour obtenir un développement satisfaisant de la turbulence. Rappelons que pour ce cas test, l'instabilité Coriolis-cisaillement amortit la turbulence sur une large portion du canal, ce qui est particulièrement pénalisant pour une turbulence à développement spatial. Les fluctuations synthétiques de la SEM se montrent plus robustes à cet égard.

Sur la figure 7.29, on voit que les méthodes ALF et SEM peuvent utilement être associées l'une à l'autre sur ce cas test. Le forçage ALF permet de contrôler efficacement la solution au début du domaine, dans la zone de recouvrement et au delà, comme on le voit sur la vitesse moyenne et le coefficient de frottement du côté en dépression du canal. Les fluctuations synthétiques SEM subsistent pour leur part au forçage ce qui empêche l'amortissement important des contraintes normales au delà de la zone de forçage.

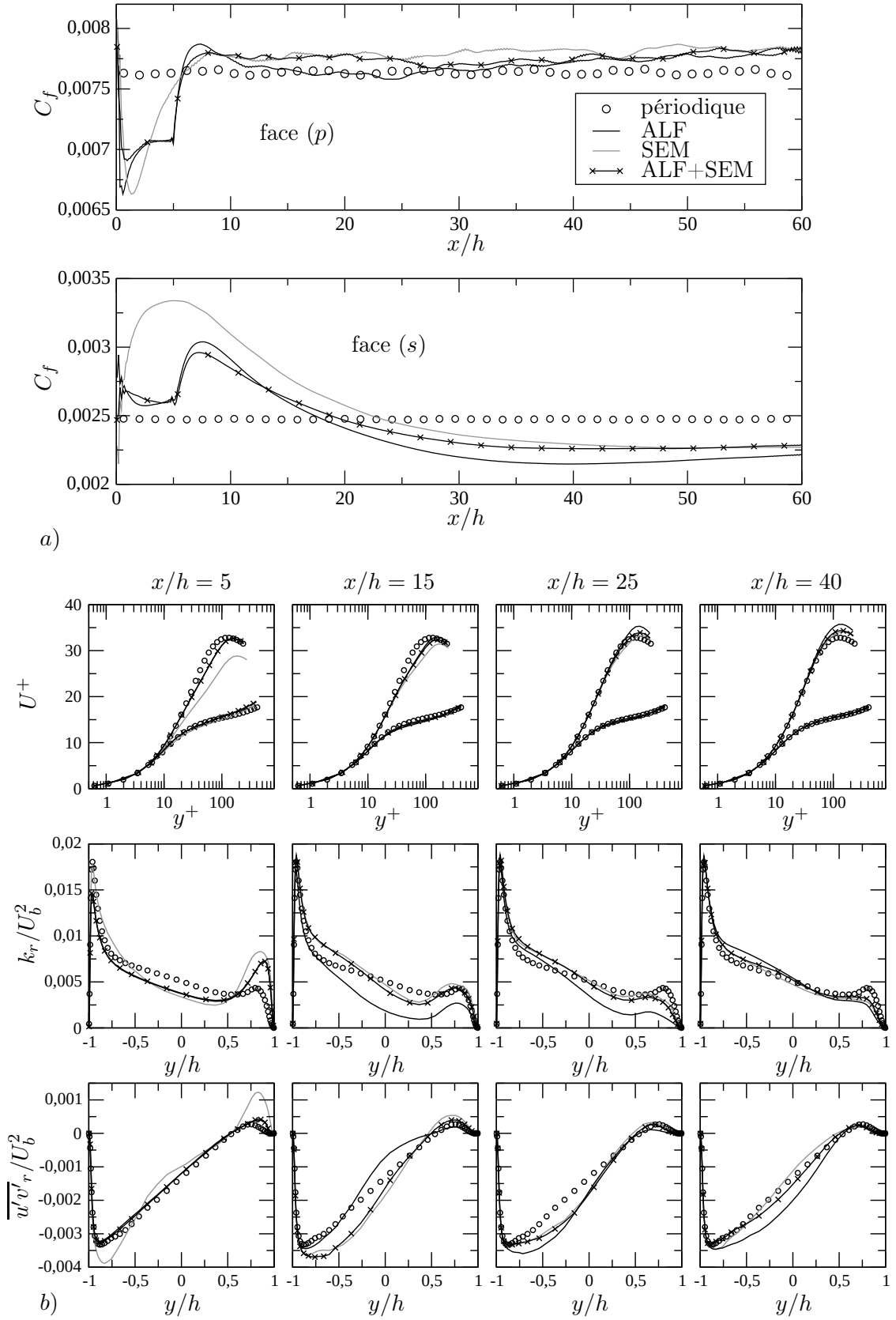


FIGURE 7.29 – Couplage RANS/LES zonal dans un canal en rotation avec le forçage ALF et/ou la SEM. *a*) Développement du coefficient de frottement aux faces en pression (p) et dépression (s) du canal. *b*) Profils de vitesse, d'énergie turbulente résolue et de contrainte de cisaillement turbulent, extraits, de gauche à droite, en $x/h=5, 15, 25, 40$.

7.3.3 Couplage tangentiel en proche paroi

Comme mentionné au paragraphe 4.3.1.4, la résolution correcte d'un écoulement de couche limite par simulation des grandes échelles demande à mailler finement le domaine en proche paroi, pour capturer l'essentiel des structures turbulentes qu'on trouve dans cette zone de l'écoulement. Un effort de recherche important est mené actuellement pour lever cette limitation, en particulier par des modélisations hybrides RANS/LES. Même si la plupart des modèles hybrides développés à cette fin sont des modèles *globaux* (DES de Spalart *et al.*, 1997, par exemple) – suivant la classification de Sagaut *et al.* (2006), reprise au début du chapitre 5 (p. 5.1) – quelques applications ont été réalisées avec un couplage *zonal* (Quéméré et Sagaut, 2002; Schlüter, 2006). Dans ce paragraphe, on présente des premiers tests de couplage RANS/LES zonal utilisant le forçage anisotrope ALF sur une zone de recouvrement en proche paroi. Ces tests ont pour but de voir si le forçage peut être utilisé pour alléger les contraintes de maillage de la LES en proche paroi. Ils renseignent aussi sur le comportement de la solution LES lorsque l'interface entre la zone forcée et la zone non forcée n'est pas dans le sens normal à l'écoulement, comme dans le paragraphe précédent, mais dans le sens de l'écoulement.

	Re_b	Maillage	L_y^f	Re_τ^{ref}	$(\Delta x^+, \Delta z^+)$	$(\Delta y_{\min}^+, \Delta y_{\max}^+)$	L_y^{f+}
Cas 1	6928	$25 \times 48 \times 25$	0.25	395	(99.3, 49.6)	(1.9, 48.7)	100
Cas 2	"	"	0.38	"	"	"	150
Cas 3	11003.5	$38 \times 60 \times 38$	0.17	590	(97.5, 48.8)	(1.9, 39)	100
Cas 4	"	"	0.25	"	"	"	150

TABLE 7.5 – Description des cas de couplage tangentiel en proche paroi.

L'écoulement considéré est l'écoulement turbulent dans un canal plan de taille $2\pi h \times 2h \times \pi h$, périodique dans les directions x et z , et dont le débit est maintenu constant par un terme source de quantité de mouvement. Deux nombres de Reynolds sont considérés : $Re_b = 6928$ et $Re_b = 11003.5$. Ces nombres de Reynolds basés sur la vitesse débitante correspondent à $Re_\tau^{\text{ref}} = 395$ et $Re_\tau^{\text{ref}} = 590$ dans les simulations numériques directes de Moser *et al.* (1999).

Dans le domaine LES des calculs couplés présentés, les contraintes de sous-maille sont modélisées par le modèle de Smagorinsky. Le maillage de ce domaine est grossier (voir les critères de raffinement donnés page 94) : $\Delta x^+ \approx 100$, $\Delta z^+ \approx 50$ et $\Delta y_{\min}^+ \approx 2$, par rapport au nombre de Reynolds de frottement Re_τ^{ref} des simulations numériques directes. Les LES sont forcées sur le calcul RANS EB-RSM en proche paroi uniquement. Bien que le forçage de la LES ne soit pris en compte qu'en proche paroi, le domaine RANS couvre lui-aussi l'ensemble du canal. L'étendue de zone de forçage dans la direction normale à la paroi est notée L_y^f et pour les deux nombres de Reynolds considérés, deux épaisseurs de forçage sont testées : $L_y^{f+} = 100$ et $L_y^{f+} = 150$, en coordonnées de paroi (basées sur les nombres de Reynolds de frottement Re_τ^{ref}), c'est-à-dire que la zone de forçage couvre la zone interne de la couche limite.

Sur la figure 7.30, le profil de vitesse moyenne dans le canal est tracé pour la DNS de référence, pour le calcul RANS EB-RSM et pour une LES périodique sans forçage sur le maillage grossier considéré dans ce paragraphe. La vitesse est adimensionnée par la vitesse de frottement effective de chaque calcul. On voit bien que les maillages utilisés sont beaucoup trop grossiers pour résoudre correctement l'écoulement par simulation des grandes échelles, en particulier pour $Re_b = 6928$. Au contraire, l'EB-RSM fournit une estimation très fine de la vitesse moyenne et du tenseur de Reynolds (figure 7.31). Le forçage d'une LES sur cette solution statistique est donc particulièrement bien fondé.

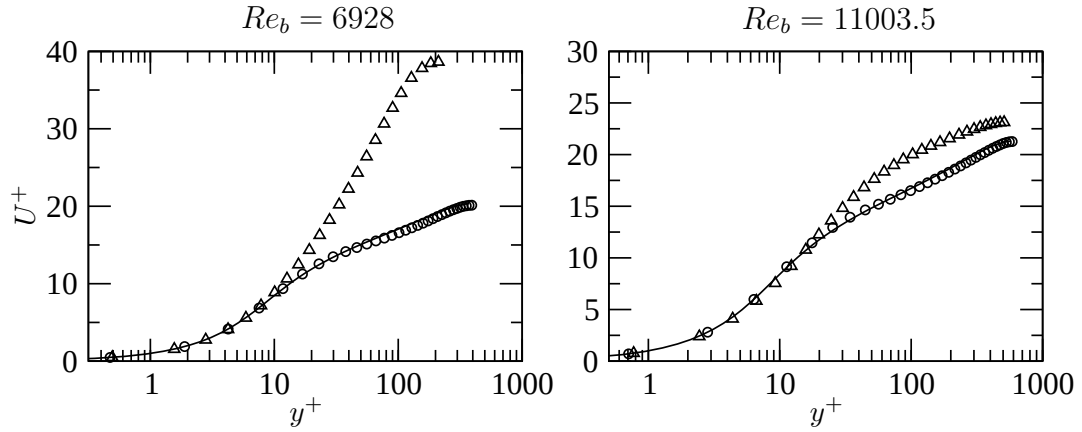


FIGURE 7.30 – Vitesse moyenne de la LES sans forçage (maillages grossiers) et de l'EB-RSM. Canal plan, $Re_b = 6928, 11003.5$. $\circ$: DNS (Moser *et al.*, 1999); $\triangle$: LES; — : RANS EB-RSM.

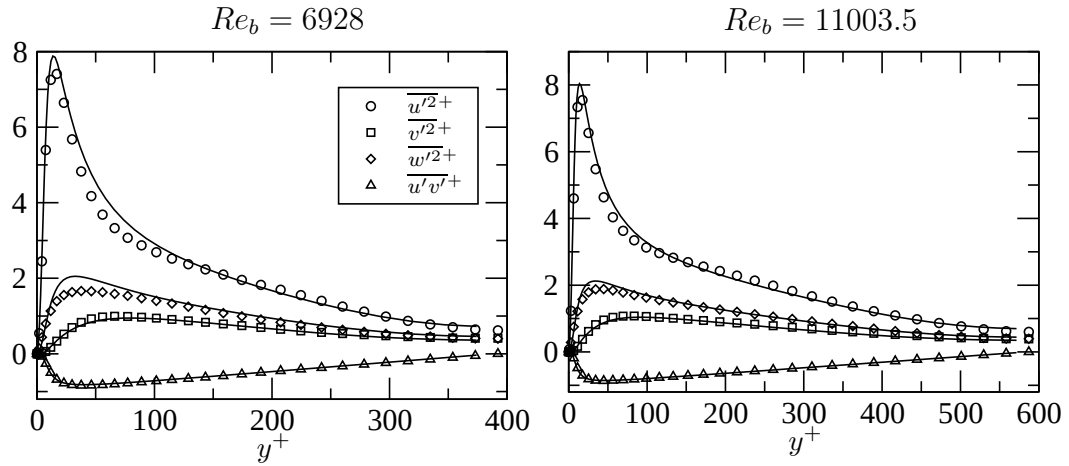


FIGURE 7.31 – Tensions de Reynolds de l'EB-RSM. Canal plan, $Re_b = 6928, 11003.5$. Symboles : DNS (Moser *et al.*, 1999); lignes : RANS EB-RSM.

Les profils de vitesse moyenne, d'énergie cinétique turbulente et de contrainte de cisaillement turbulent obtenus lorsque la LES est forcée en proche paroi sont tracés sur la figure 7.32. Les vitesses de frottement effectives servant à l'adimensionnement des profils sont reportées dans le tableau 7.6. L'amélioration par rapport au cas sans forçage est très sensible. L'erreur sur la vitesse de frottement est de l'ordre de 2%. Le profil de vitesse moyenne est proche de celui obtenu par simulation directe de l'écoulement, non seulement dans la zone de couplage RANS/LES mais également à l'extérieur de celle-ci. Les contraintes de Reynolds sont également assez bien résolues. La fin de la zone de recouvrement affecte peu l'énergie turbulente. Elle est en revanche beaucoup plus visible sur la contrainte de cisail-

	u_τ	Erreur (%)
Cas 1	$5.61 \cdot 10^{-2}$	-1.58
Cas 2	$5.59 \cdot 10^{-2}$	-1.92
Cas 3	$5.25 \cdot 10^{-2}$	-2.14
Cas 4	$5.25 \cdot 10^{-2}$	-2.03

TABLE 7.6 – Vitesse de frottement des LES forcées en proche paroi et erreur par rapport aux DNS de référence (Moser *et al.*, 1999).

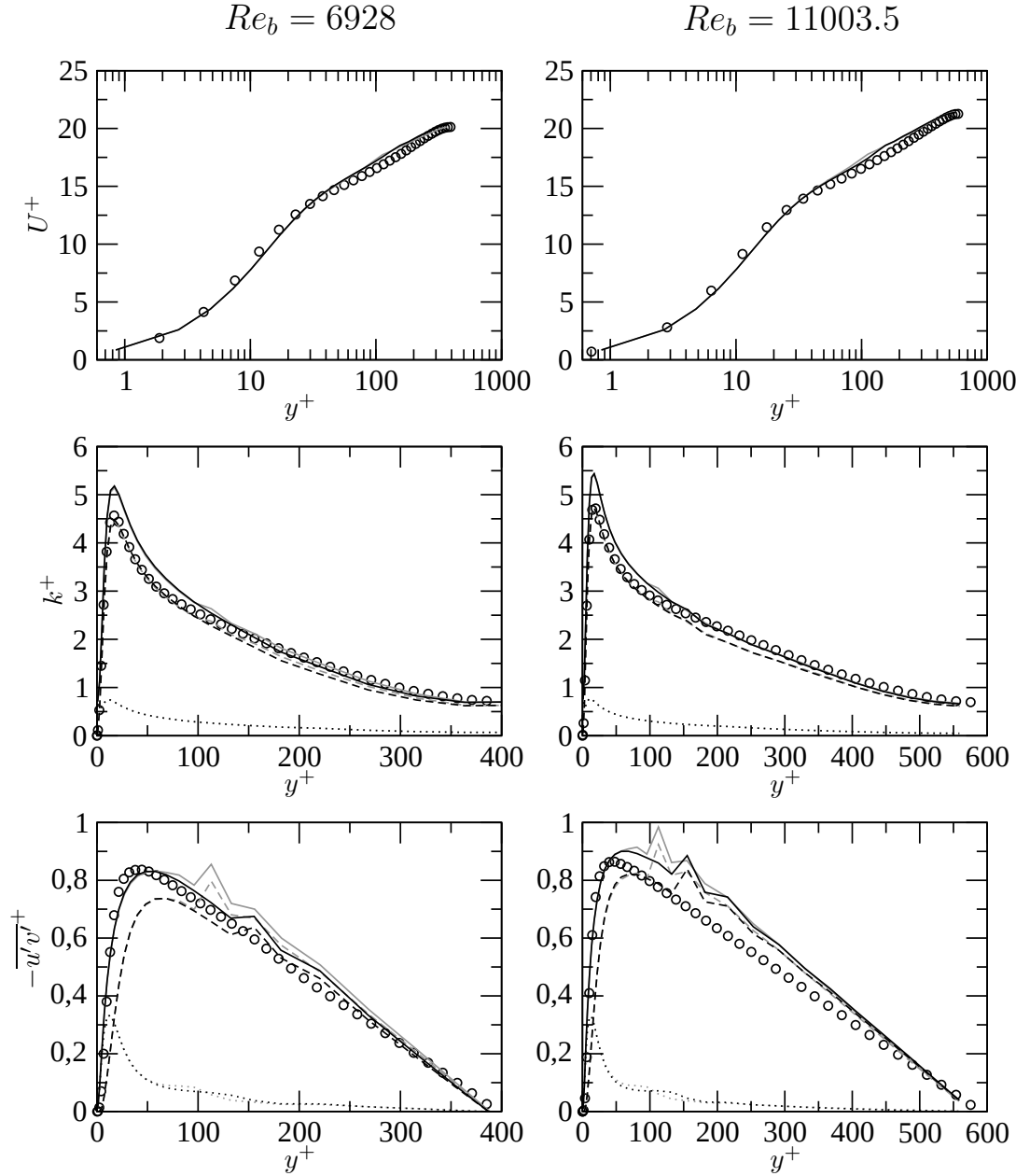


FIGURE 7.32 – Vitesse moyenne, énergie turbulente et contrainte de cisaillement turbulent des LES avec forçage ALF en proche paroi (l'énergie turbulente et la contrainte de cisaillement sont décomposées en — — : partie résolue; - - - : partie de sous-maille; — : total). Canal plan, $Re_b = 6928$ (gauche), 11003.5 (droite). Symboles : DNS (Moser *et al.*, 1999); lignes : LES forcées, pour $L_y^{f+} = 100$ (lignes grises) et $L_y^{f+} = 150$ (lignes noires).

ment turbulent, car celle-ci montre un « sursaut » non physique sur la première cellule à l'extérieur de la zone de forçage. Sur les graphes où sont représentées à la fois les contraintes de Reynolds résolues, les contraintes de Reynolds de sous-mailles et les contraintes totales, on voit que lorsqu'on arrête le forçage, c'est le cisaillement turbulent résolu qui augmente brusquement. Au contraire, la contrainte de cisaillement de sous-maille diminue un peu, ce qui lisse en partie la contrainte totale. Les perturbations induites par l'arrêt soudain du forçage sont légèrement atténuées lorsque la zone de forçage est étendue à $L_y^{f+} = 150$. Elles sont quoi qu'il en soit localisées puisque la contrainte de cisaillement dans la zone LES non forcée montre ensuite une pente constante proche de celle amorcée dans la zone forcée.

7.4 Forçage volumique pour la thermique

On s'intéresse maintenant au forçage linéaire de la turbulence en présence de transferts thermiques. Au paragraphe 7.4.1, des généralisations possibles du Forçage Linéaire Anisotrope pour la thermique sont proposées. La validation de l'une de ces formulations est présentée au paragraphe 7.4.2.

7.4.1 Propositions de formulations

Les équations filtrées de quantité de mouvement en présence de transferts thermiques pour un fluide incompressible s'écrivent, sous l'approximation de Boussinesq et en l'absence d'autres forces extérieures que la gravité :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial x_i} + \beta g_i (\tilde{T} - T_0) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \tau_{ij} \right), \quad (7.75)$$

avec τ_{ij} le tenseur de sous-maille (équation 4.69), T_0 la température de référence (fluide au repos), ρ_0 la masse volumique de référence, β le coefficient de dilatation thermique, $\mathbf{g}$ le vecteur gravité et $\tilde{p}_e \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{p} - \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ l'écart à la pression hydrostatique de référence. L'évolution de la température filtrée est décrite, en l'absence de source d'énergie interne, par :

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} - K_j \right), \quad (7.76)$$

avec α le coefficient de diffusivité thermique et K_i le flux thermique de sous-maille :

$$K_i \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{T u_i} - \tilde{T} \tilde{u}_i.$$

Pour forcer la vitesse et la température sur une zone de recouvrement RANS/LES, on introduit un terme source volumique dans les équations (7.75) et (7.76) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \dots &= \dots + f_i^u, \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \dots &= \dots + h^\theta, \end{aligned}$$

où les pointillés correspondent aux termes explicités dans les équations (7.75) et (7.76).

Forçage dynamique linéaire de la vitesse et forçage thermique linéaire de la vitesse et de la température

Le premier forçage généralisé vitesse-température qu'on a envisagé s'écrit sous la forme générale suivante :

$$f_i^u = A_{ij} \tilde{u}_j + B_i, \quad (7.77)$$

$$h^\theta = R_i \tilde{u}_i + s \tilde{T} + q, \quad (7.78)$$

avec A_{ij} est un tenseur symétrique. f_i^u est donc le terme de forçage linéaire anisotrope ALF, conservé inchangé par rapport à sa formulation décrite au paragraphe 7.1.3. Ce forçage dynamique permet de forcer la vitesse filtrée moyenne $\langle \tilde{u}_i \rangle$ et les contraintes de Reynolds résolues $\overline{u'_i u'_j}$.

Le forçage thermique h^θ est écrit comme une fonction linéaire de la vitesse et de la température filtrées. Cela permet de faire apparaître cinq coefficients libres dans le forçage thermique : les trois composantes du vecteur R_i et les scalaires s et q . Suivant la même

approche que pour le forçage dynamique ALF, on peut chercher à déterminer ces cinq coefficients libres en fonction de l'effet recherché du forçage thermique sur la température filtrée moyenne $\langle \tilde{T} \rangle$, la variance de température résolue $\overline{\theta^2_r}$ et les flux thermiques turbulents résolus $\overline{\theta u'_{i_r}}$ (cinq « contraintes »). En explicitant la contribution de h^θ à l'équation d'évolution de ces variables, on trouve (R_i , s et q sont supposés déterministes) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \tilde{T} \rangle}{\partial t} + \dots &= \dots + R_i \langle \tilde{u}_i \rangle + s \langle \tilde{T} \rangle + q, \\ \frac{\partial \overline{\theta^2_r}}{\partial t} + \dots &= \dots + 2R_i \overline{\theta u'_{i_r}} + 2s \overline{\theta^2_r}, \\ \frac{\partial \overline{\theta u'_{i_r}}}{\partial t} + \dots &= \dots + R_j \overline{u'_i u'_{j_r}} + (A_{ij} + s \delta_{ij}) \overline{\theta u'_{j_r}}, \end{aligned}$$

où des pointillés désignent l'ensemble des termes des bilans que l'on n'a pas besoin d'expliquer ici (les équations de transport de $\overline{\theta^2}$ et $\overline{\theta u'_i}$ sont détaillées dans la revue de Hanjalic, 2002 par exemple). Pour que le forçage thermique fasse tendre les moments thermiques de la LES vers des moments cibles $\overline{T}^\dagger$, $\overline{\theta^2_r}^\dagger$ et $\overline{\theta u'_{i_r}}^\dagger$, on peut alors proposer de résoudre le système suivant :

$$R_j \overline{u'_i u'_{j_r}} + (A_{ij} + s \delta_{ij}) \overline{\theta u'_{j_r}} = \frac{1}{\tau_{tv}} (\overline{\theta u'_{i_r}}^\dagger - \overline{\theta u'_{i_r}}), \quad (7.79)$$

$$R_i \overline{\theta u'_{i_r}} + s \overline{\theta^2_r} = \frac{1}{2\tau_{t2}} (\overline{\theta^2_r}^\dagger - \overline{\theta^2_r}), \quad (7.80)$$

$$R_i \langle \tilde{u}_i \rangle + s \langle \tilde{T} \rangle + q = \frac{1}{\tau_t} (\overline{T}^\dagger - \langle \tilde{T} \rangle), \quad (7.81)$$

avec τ_t , τ_{t2} et τ_{tv} des temps de relaxation. Les équations (7.79) et (7.80) définissent un système de quatre équations couplées dont les inconnues sont les coefficients R_i et s du forçage thermique. Notons que la matrice de ce système est la matrice symétrique semi-définie positive (6.22), introduite au paragraphe 6.4.1 pour la mise à l'échelle de fluctuations normées de vitesse et de température indépendantes. Hormis des cas très particuliers de turbulence à une ou deux composante(s), elle est inversible. Une fois que les coefficients R_i et s sont déterminés, l'équation (7.81) détermine explicitement le scalaire q du forçage thermique.

De nombreux tests numériques ont révélé que ce forçage thermique est très instable. Il cause la divergence rapide du calcul. Plusieurs valeurs des paramètres τ_t , τ_{t2} et τ_{tv} ont été testées sans améliorer la stabilité de ce forçage. Devant ce constat, un forçage thermique simplifié, à uniquement deux degrés de liberté, a été envisagé.

Forçage dynamique linéaire de la vitesse et forçage thermique linéaire de la température

Le forçage thermique linéaire de la température uniquement s'écrit sous la forme générale :

$$h^\theta = s \tilde{T} + q, \quad (7.82)$$

avec s et q deux scalaires déterministes. En explicitant la contribution de h^θ à l'équation de transport de la température moyenne et de la variance de température résolue et en prescrivant que ces contributions agissent comme des termes de relaxation vers les valeurs cibles $\overline{T}^\dagger$ et $\overline{\theta^2_r}^\dagger$, on peut déterminer les scalaires s et q du forçage thermique par les

formules :

$$s = \frac{1}{2\tau_{t2}} \left(\frac{\overline{\theta^2}_r}{\overline{\theta^2}_r} - 1 \right), \quad (7.83)$$

$$q = \frac{1}{\tau_t} (\overline{T}^\dagger - \langle \tilde{T} \rangle) - s \langle \tilde{T} \rangle. \quad (7.84)$$

Le membre de droite de (7.83) est bien défini car le dénominateur $\overline{\theta^2}_r$ est strictement positif lorsque l'écoulement est turbulent. Ce forçage thermique est tout à fait similaire au forçage linéaire isotrope de la vitesse (paragraphe 7.1.4 et 7.2.1). Ce forçage thermique, dénommé TLF (*Temperature Linear Forcing*) dans la suite, ne pose aucun problème de stabilité particulier. Il a été mis en œuvre pour les cas de validation présentés au paragraphe suivant. Notons que le forçage TLF influe également sur les flux thermiques turbulents résolus, *via* les termes de productions correspondant au membre de gauche de (7.79) pour $R_i = 0$. Contrairement aux effets du forçage TLF sur la température moyenne et la variance de température résolue, les effets du TLF sur les flux thermiques turbulents ne sont pas maîtrisés. La validation présentée au paragraphe suivant porte en particulier sur ce point.

Notons également qu'avec une force thermique de la forme générale (7.82), le choix de contrôler la variance de température $\overline{\theta^2}_r$ plutôt que l'un des flux thermiques turbulent $\overline{\theta u'_r}$, $\overline{\theta v'_r}$ ou $\overline{\theta w'_r}$ est *a priori* arbitraire. En effet, pour calculer le scalaire s , on pourrait envisager de remplacer l'équation (7.83) par l'équation (7.79) pour une composante i choisie et $R_i = 0$. Cela a été testé, pour chacune des composantes i , et a causé systématiquement la divergence rapide des calculs. Dès lors, une approche visant à déterminer s comme le meilleur compromis, au sens des moindres carrés, à partir des équations (7.79), pour $R_i = 0$, et (7.83), ne semble pas non plus judicieuse (les tests numériques ont confirmé ce point). Associé au forçage dynamique ALF, le seul forçage thermique de type (7.82) viable selon notre expérience est le forçage TLF donnée par les équations (7.83) et (7.84).

Même si une étude plus approfondie pourrait être intéressante, les différents tests réalisés pour cette étude semblent indiquer que le forçage thermique seul n'est pas en mesure d'imposer à l'écoulement les flux thermiques turbulents cibles $\overline{\theta u'_r}^\dagger$. Seul le forçage TLF associé au forçage ALF a pu être validé dans cette étude. Néanmoins, d'autres forçages couplés vitesse-température peuvent être envisagés. L'annexe H présente des propositions qui n'ont pas été testées dans cette étude, mais qui pourront faire l'objet d'investigations futures.

7.4.2 Validation

On valide dans ce paragraphe le forçage thermique TLF (équations 7.82–7.84) associé au forçage dynamique ALF (équations 7.13, 7.17, 7.21). L'écoulement considéré est l'écoulement turbulent dans un canal plan chauffé par un flux constant aux parois (voir annexe B.3), aux nombre de Reynolds $Re_b = 7031$ et nombre de Prandtl $Pr = 0.71$. Les statistiques d'entrée $\overline{u_i}^\dagger$, $\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger$, $\overline{T}^\dagger$ et $\overline{\theta^2}_r^\dagger$ des forçages ALF et TLF correspondent à celles de l'écoulement pleinement développé dans un domaine périodique dans les directions x et z . Les caractéristiques du calcul périodique sont résumées dans le tableau 6.4 p. 157 (maillage A). Les LES avec forçages sont réalisées dans un domaine de taille $L_x \times L_y \times L_z = 10\pi h \times 2h \times 3.2h$, maillé par $249 \times 88 \times 85$ cellules, soit un raffinement identique à celui du calcul périodique. Le domaine des LES forcées est périodique dans la direction z , tandis que dans la direction x , l'écoulement se développe en aval du bord d'entrée, où la vitesse moyenne $\overline{u_i}^\dagger$ et la température moyenne $\overline{T}^\dagger$ sont imposées sans aucune fluctuation. Dans les équations (7.83), (7.84), (7.17) et (7.21), qui définissent implicitement

les coefficients A_{ij} , B_i , s et q des forçages, les moments $\langle \tilde{u}_i \rangle$, $\langle \tilde{T} \rangle$, $\overline{u'_i u'_j}$ et $\overline{\theta'^2}$ sont approchés grâce à un filtrage temporel gaussien (équation 7.8) de taille $T = \max(5k^\dagger/\varepsilon^\dagger)$, avec $\varepsilon^\dagger$ la dissipation obtenue par un calcul RANS EB–RSM auxiliaire (cela donne $T \approx 100h/U_b$). Parallèlement, les statistiques présentées sur les figures sont obtenues par une intégration en temps entre les instants $200h/U_b$ et $600h/U_b$ plus une moyenne dans la direction z d'homogénéité de l'écoulement.

Pour les premiers cas présentés, le forçage est pris en compte dans l'ensemble du domaine. Les paramètres du forçage dynamique sont :

$$\tau_v = 5h/U_b, \quad \tau_r = \max \left\{ 2\Delta t, 0.01 \frac{k_r^\dagger}{\varepsilon^\dagger} \right\}, \quad (7.85)$$

avec $\varepsilon^\dagger$ la dissipation retournée par le calcul RANS EB–RSM auxiliaire. Le paragraphe 7.2.3 a montré qu'avec ces paramètres, la LES forcée présente, pour $x/h \geq 1$, des moments $\langle \tilde{u}_i \rangle$, $\overline{u'_i u'_j}$ très proches de ceux de la LES périodique et que pour $x/h \geq 15$, la transformée de Fourier temporelle $\tilde{u}_i$ de la LES forcée est également très proche de celle d'une LES pleinement développée sans forçage.

Les paramètres τ_t et τ_{t2} du forçage thermique TLF sont exprimés en fonction de ceux du forçage dynamique par :

$$\tau_t = \tau_v, \quad \tau_{t2} = R\tau_r, \quad \text{avec} \quad R = 0.5. \quad (7.86)$$

Le scalaire R correspond à l'approximation classique du ratio τ_θ/τ entre l'échelle intégrale de temps thermique $\tau_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\theta^2}/\varepsilon_\theta$ et l'échelle intégrale de temps mécanique $\tau \stackrel{\text{def}}{=} k/\varepsilon$ (voir Hanjalíc, 2002). En effet, on vérifie facilement que pour une turbulence isotrope forcée à l'équilibre dynamique et thermique, on a (on suppose que la turbulence est statistiquement isotrope à chaque instant, et donc que le forçage ALF est isotrope : $A_{ij} = A\delta_{ij}$) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} = -\varepsilon + 2Ak = 0 & \iff A = \frac{1}{2\tau}, \\ \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial t} = -\varepsilon_\theta + 2s\overline{\theta^2} = 0 & \iff s = \frac{1}{2\tau_\theta}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$A = \frac{\tau_\theta}{\tau} s.$$

Les définitions (7.40) et (7.83) des coefficients A et s des forçages impliquent alors :

$$\frac{1}{2\tau_r} \left(\frac{k^\dagger}{k} - 1 \right) = \frac{\tau_\theta}{\tau} \frac{1}{2\tau_{t2}} \left(\frac{\overline{\theta^2}^\dagger}{\overline{\theta^2}} - 1 \right).$$

Par suite si l'on souhaite des ratios $k/k^\dagger$ et $\overline{\theta^2}/\overline{\theta^2}^\dagger$ identiques (des forçages de même « intensité » en quelque sorte), on a :

$$\frac{k}{k^\dagger} = \frac{\overline{\theta^2}}{\overline{\theta^2}^\dagger} \iff \tau_{t2} = \frac{\tau_\theta}{\tau} \tau_r.$$

L'échelle de temps τ_t du forçage de la température moyenne a quant à elle été choisie égale à l'échelle de temps du forçage de la vitesse moyenne. Ce choix est fait en considérant d'une part que plus l'échelle τ_t est faible, plus la température moyenne de la LES forcée pleinement développée est proche de sa valeur cible $\overline{T}^\dagger$, et d'autre part qu'en convection forcée, la température moyenne pleinement développée n'a pas de raison d'être atteinte avant que le champ de vitesse n'ait atteint lui-même son niveau moyen.

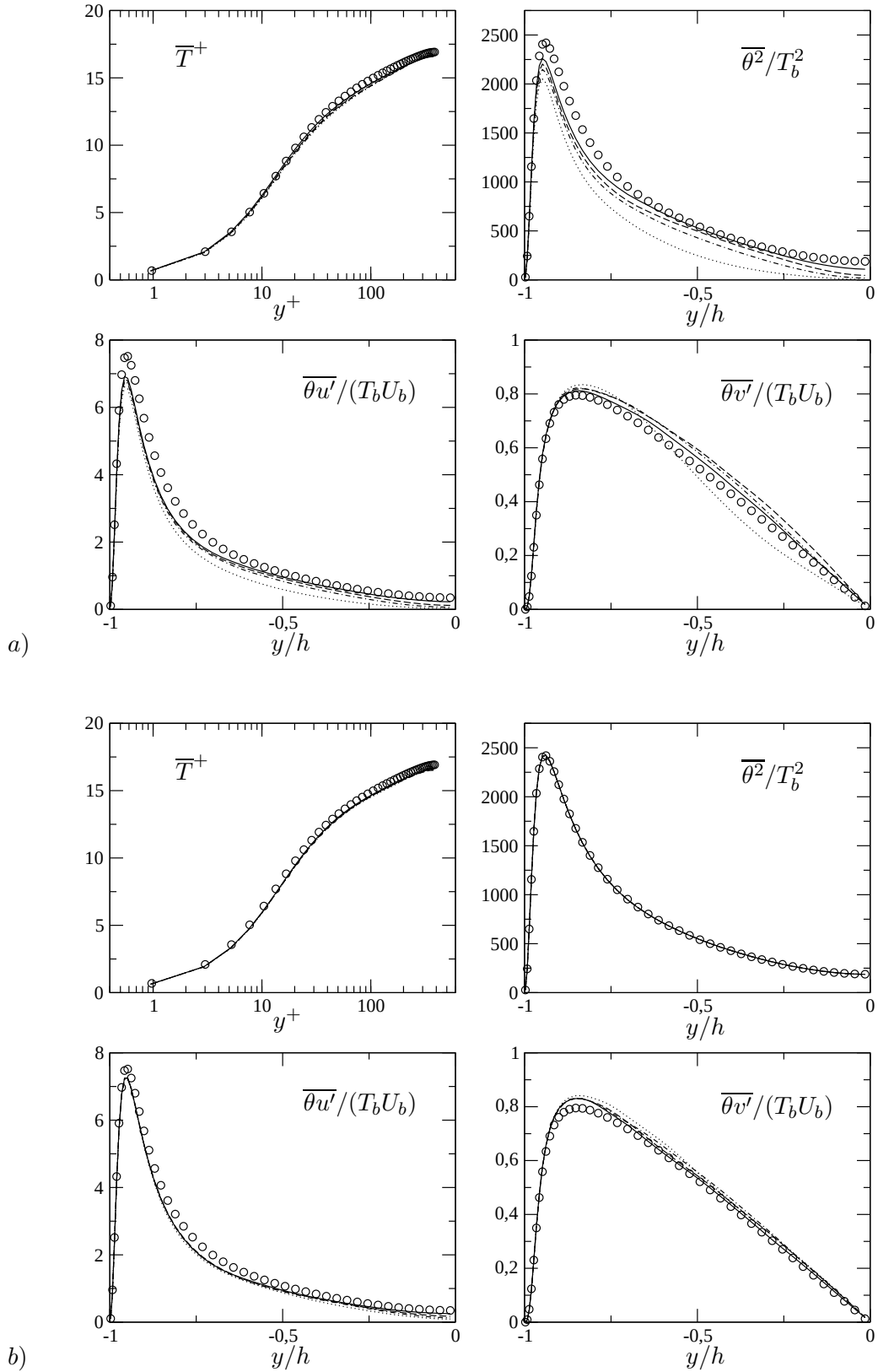


FIGURE 7.33 – Profils de température moyenne, variance de température et flux thermiques turbulents pour une LES forcée a) avec uniquement le forçage dynamique ALF et b) avec le forçage dynamique ALF plus le forçage thermique TLF. Canal plan chauffé, $Re_b = 7031$, $Pr = 0.71$. Symboles : LES périodique ; lignes : LES forcée, profils extraits en $x/h = 5$ (· · · ·), 10 (– · – ·), 15 (– – –), 30 (—).

Sur la figure 7.33, on compare les profils de température moyenne, variance de température et flux thermiques turbulents en différentes abscisses plus ou moins éloignées du bord d'entrée, lorsque la LES est forcée uniquement dynamiquement par le terme ALF (graphes 7.33a) ou lorsque le forçage thermique TLF est également pris en compte (graphes 7.33b). De manière similaire à ce qu'on a vu pour les conditions d'entrée de turbulence synthétique, les graphes 7.33a montrent que le forçage de la température est moins crucial que celui de la vitesse car le forçage dynamique seul permet de développer des fluctuations thermiques réalistes dans le canal. Le développement de la température moyenne et du flux thermique turbulent normal à la paroi est même très satisfaisant puisque dès $x/h = 5$, les écarts avec la LES périodique sont faibles. La variance de la température est plus lente à se reconstruire, notamment au centre du canal.

Au contraire, lorsque le forçage thermique TLF est pris en compte (graphes 7.33b), la variance de température cible $\overline{\theta^2}_r^\dagger$ est quasiment exactement et instantanément fournie à la LES. La température moyenne s'équilibre également très rapidement à un niveau proche du niveau $\overline{T}^\dagger$. Les flux thermiques turbulents, qui ne sont pas explicitement forcés par le terme TLF, profitent cependant notablement du forçage de la température moyenne et de la variance de température. Le transitoire avant d'atteindre des profils $\overline{\theta u'}_r$ et $\overline{\theta v'}_r$ constants, correspondant aux flux thermiques de la LES forcée pleinement développée, est largement raccourci. L'écart entre ces profils et ceux de la LES périodique sans forçage est également plus faible que lorsque le forçage ALF est utilisé sans forçage thermique.

Les remarques précédentes sont confirmées par la figure 7.34 (lignes noires). Cette figure permet de souligner que lorsqu'un terme source de forçage est introduit, les statistiques qui ne sont pas explicitement forcées ne s'ajustent *a priori* pas à leur niveau cible. Pour illustrer ce point, les fonctions d'erreurs intégrales sur la variance de température et sur les flux thermiques turbulents (équation 6.27) sont tracées pour un paramétrage dégradé des forçages dynamiques et thermiques (lignes grises de la figure 7.34). En particulier, les paramètres du forçage dynamique sont pris à $\tau_v = \tau_r = 0.01k/\varepsilon$, alors qu'on a vu au paragraphe 7.2.3 qu'une valeur τ_v aussi faible amortissait significativement les fluctuations basses fréquences de la vitesse. Cependant, l'ensemble du spectre de vitesse contribue au transport de la température. Par conséquent, avec le paramétrage dégradé, les flux thermiques turbulents, non forcés, mais aussi la variance de température lorsque le forçage thermique TLF n'est pas pris en compte, convergent vers un niveau assez éloigné de celui de la LES périodique. Cela est particulièrement sensible pour le flux thermique longitudinal $\overline{\theta u'}_r$. Avec le paramétrage amélioré proposé (lignes noires), le spectre de vitesse de la LES forcée pleinement développée est proche de celui d'une LES périodique sans forçage, d'où une erreur très faible entre les flux thermiques de la LES forcée et ceux de la LES périodique sans forçage. L'erreur est encore plus faible lorsque le forçage thermique TLF est appliqué.

On valide maintenant le forçage thermique TLF comme méthode de génération de fluctuations thermiques pour des simulations LES à développement spatial de la turbulence. Pour cela, le forçage est réalisé non plus sur l'ensemble du domaine mais uniquement le long d'une distance $L_x^f = 5h$ en aval de l'entrée. À cette différence près, les simulations sont identiques à celles présentées ci-dessus, avec les paramètres des forçages ALF et TLF donnés par les équations (7.85) et (7.86). Deux cas sont présentés : l'un où seul le forçage dynamique ALF est pris en compte et l'autre où le forçage dynamique est associé au forçage thermique TLF.

L'évolution du nombre de Nusselt N_u et des fonctions d'erreurs $e_{\overline{\theta^2}_r}$, $e_{\overline{\theta u'}_r}$ et $e_{\overline{\theta v'}_r}$ (équations 6.26 et 6.27, p. 160) sont présentées sur la figure 7.35. Les résultats obtenus avec la méthode de turbulence synthétique T-SEM sont également tracés pour comparaison (ces résultats sont extraits de la figure 6.17 discutée au paragraphe 6.4.2). Pour tous les in-

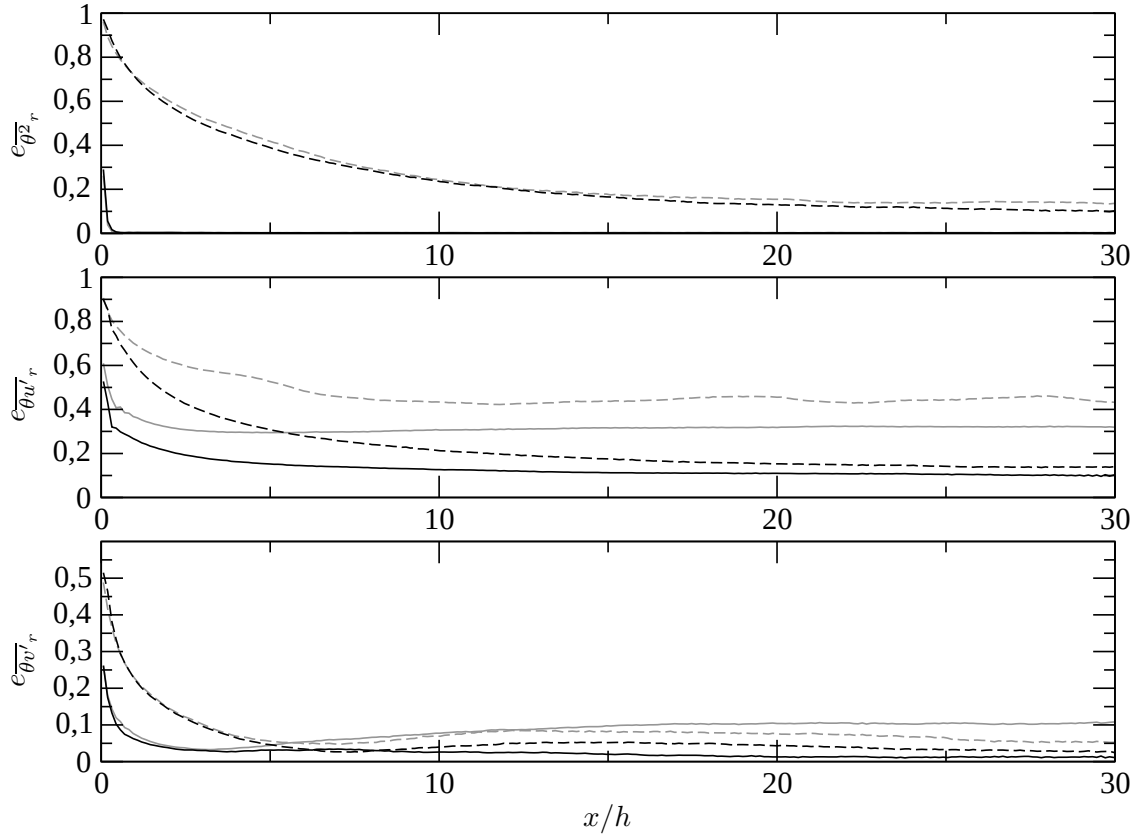


FIGURE 7.34 – Évolution longitudinale des erreurs intégrales sur la variance de température et sur les flux thermiques turbulents. Influence du paramètre τ_v du forçage ALF. Canal plan chauffé, $Re_b = 7031$, $Pr = 0.71$. Lignes grises : paramétrage dégradé ($\tau_v = \tau_r = 0.01k/\varepsilon$, $\tau_T = \tau_{\overline{\theta^2}} = 0.5\tau_r$); lignes noires : paramétrage amélioré ($\tau_v = 5h/U_b$, $\tau_r = 0.01k/\varepsilon$, $\tau_T = \tau_v$, $\tau_{\overline{\theta^2}} = 0.5\tau_r$). Lignes tirets : forçage dynamique uniquement ; lignes pleines : forçage dynamique et thermique.

dicateurs considérés, le forçage TLF améliore le développement de la thermique dans le domaine par rapport au forçage dynamique seul. Le forçage thermique profite particulièrement au développement de la température moyenne et la variance de température, qui sont les deux grandeurs explicitement forcées par le TLF. Ainsi, le nombre de Nusselt est plus proche de sa valeur pleinement développée Nu^* dans tout le domaine, excepté pour $x/h < 1$. La valeur Nu^* n'est pas encore tout à fait atteinte à la fin du domaine mais l'erreur est inférieure à 0.25%. Malgré une légère augmentation en aval de la zone de forçage, le TLF permet de maintenir l'erreur intégrale sur la variance de température inférieur à 15% dans l'ensemble du domaine, alors que ce niveau n'est atteint que pour $x/h > 15$ sans forçage thermique. Les flux thermiques turbulents $\overline{\theta u'}_r$ et $\overline{\theta v'}_r$ sont également positivement affectés par le forçage TLF, mais dans une proportion moindre que $\overline{\theta^2}_r$.

En comparant avec les résultats obtenus en imposant des fluctuations synthétiques au bord du domaine par la méthode T-SEM, on voit que seul le flux thermique turbulent longitudinal se développe plus rapidement avec la T-SEM. Pour les autres indicateurs, le forçage ALF+TLF le long d'une distance $L_x^f = 5h$ en aval de l'entrée est tout aussi satisfaisant que la T-SEM. Cela est confirmé sur la figure 7.36. L'accord local entre les statistiques thermiques de la LES périodique pleinement développée et celles des LES à développement spatial de la turbulence est excellent, pour les deux stratégies T-SEM et ALF+TLF.

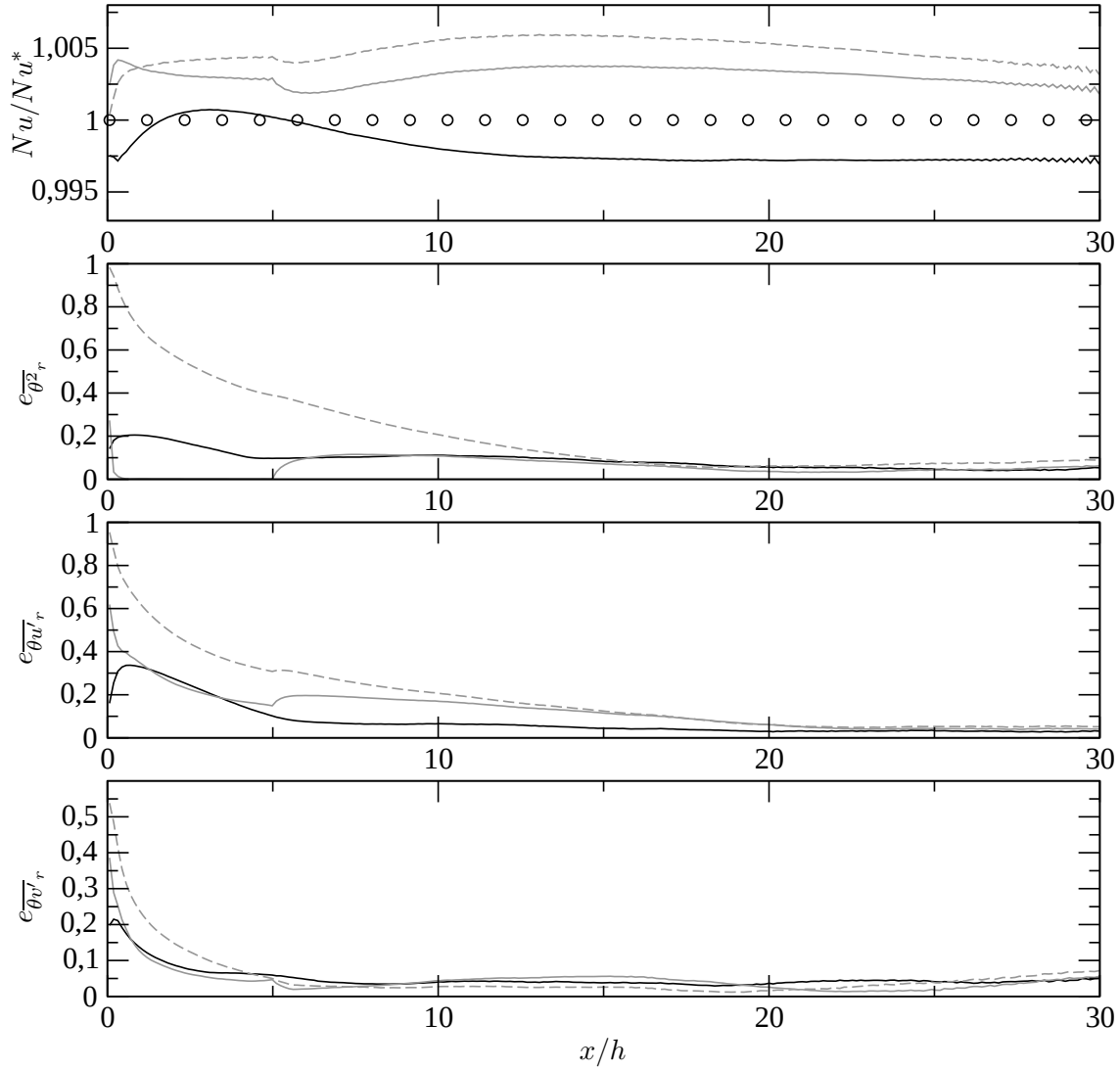


FIGURE 7.35 – Évolution longitudinale du nombre de Nusselt (normalisé par la valeur Nu^* du calcul périodique) et des erreurs intégrales sur la variance de température et sur les flux thermiques turbulents. Comparaison de plusieurs méthodes de générations de fluctuations thermiques. Canal plan chauffé, $Re_b = 7031$, $Pr = 0.71$. Fluctuations imposées aux faces de bord (— : T-SEM) ou fluctuations générées sur une zone de forçage de longueur $L_x^f = 5h$ (--- : ALF uniquement ; — : ALF+TLF).

D'autres cas tests devraient permettre de discriminer l'une ou l'autre des méthodes, en fonction du régime de convection ou du nombre de Reynolds notamment. La robustesse de l'une ou l'autre des méthodes face à des statistiques d'entrée imparfaites, issues d'un calcul RANS, et le temps de calcul – point sur lequel l'approche forçage est supérieure (voir tableau 7.3) – devront également entrer en compte.

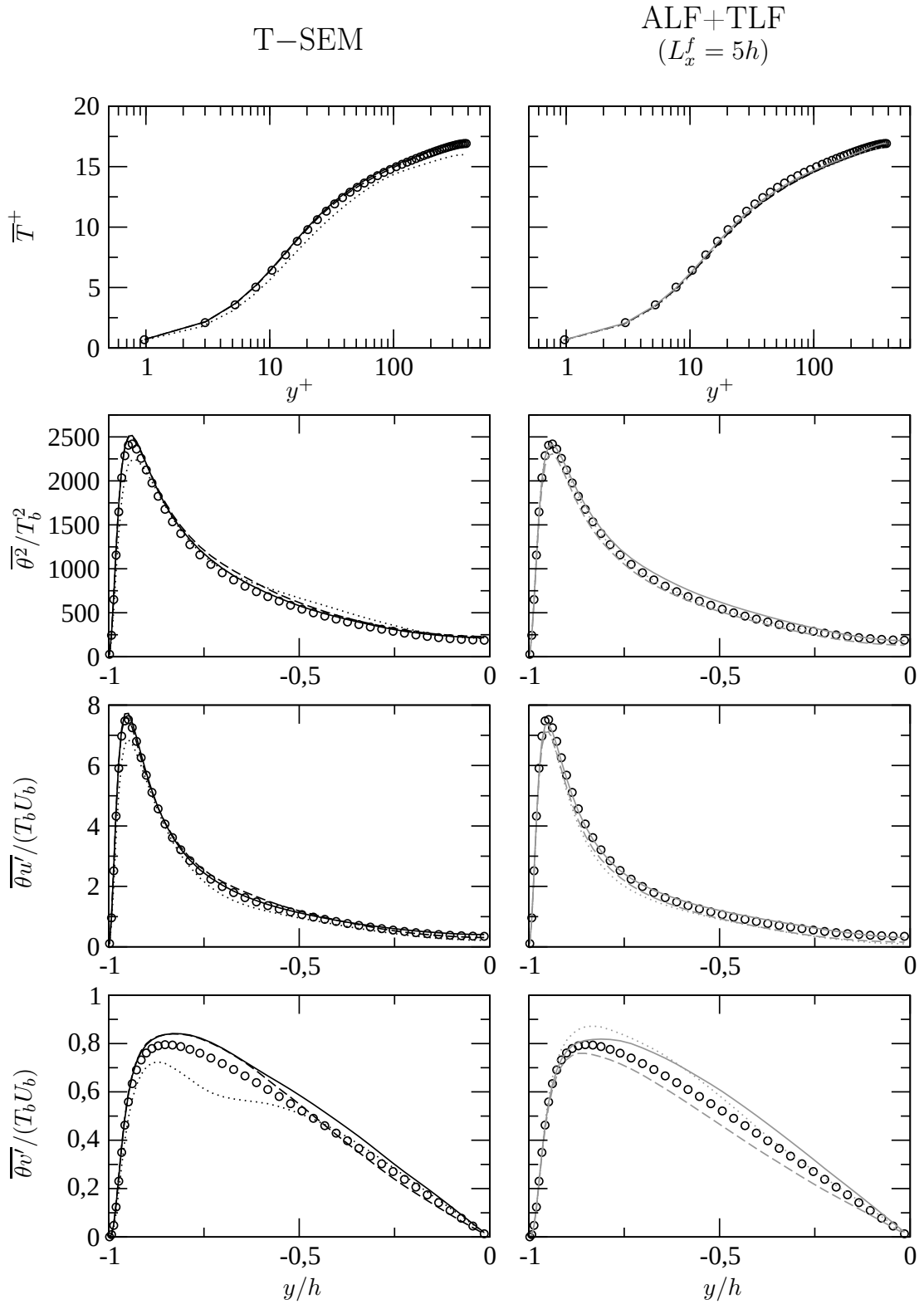


FIGURE 7.36 – Profils de température moyenne, de variance de température et de flux thermiques turbulents, extraits en $x/h = 5$ (---), 15 (---), 30 (—). Canal plan chauffé, $Re_b = 7031$, $Pr = 0.71$. Symboles : LES périodique; lignes noires : T-SEM; lignes grises : forçage linéaire ALF+TLF, $L_x^f = 5h$.

7.5 Conclusion du chapitre

En conclusion, on a proposé et validé une nouvelle méthode de couplage RANS/LES zonal par forçage volumique sur une zone de recouvrement. Le forçage, nommé ALF (*Anisotropic Linear Forcing*), permet de forcer la solution LES de manière à ce qu'elle présente les mêmes moments statistiques d'ordre un et deux de vitesse que ceux du calcul RANS. La forme très générale de ce forçage, celle d'une fonction tensorielle linéaire de la vitesse, permet de le voir comme une généralisation de plusieurs forçages proposés dans la littérature, en particulier le forçage linéaire isotrope introduit par Lundgren (2003).

On a d'abord validé le forçage ALF sur une turbulence homogène et isotrope. Les propriétés du forçage de Lundgren (2003), décrites en détail par Rosales et Meneveau (2005), ont été observées. Cela a permis en outre de décrire l'influence d'un paramètre de relaxation τ_r qui apparaît en plus dans le forçage ALF. On a ensuite démontré dans le cas d'une turbulence homogène, que le forçage ALF permettait de fournir à l'écoulement l'anisotropie souhaitée. Plusieurs anisotropies typiques de la turbulence ont été forcées avec succès. Le forçage a ensuite été paramétré dans un canal plan à développement spatial de la turbulence, avec ou sans rotation. On a vu que le terme ALF permettait de générer rapidement des fluctuations turbulentes dans la zone de forçage, en dépit d'une condition limite d'entrée constante sans fluctuation. La paramétrisation retenue pour le forçage est telle que l'écoulement forcé présente non seulement des statistiques très proches de celles fournies au terme ALF mais en plus un contenu spectral réaliste. Ces paramètres sont des échelles de temps facilement évaluables à partir d'un calcul RANS.

On a ensuite présenté des applications du forçage ALF dans un contexte couplé RANS/LES zonal. La prise en compte du forçage sur une courte zone de recouvrement en aval de l'entrée du domaine LES apparaît comme une alternative intéressante à l'imposition directe de fluctuations au bord du domaine. Dans le cas discriminant d'un canal en rotation, on a cependant constaté qu'un couplage RANS/LES plus efficace était obtenu en associant le forçage ALF à la méthode de fluctuations synthétiques SEM. Notons qu'un aspect intéressant du forçage ALF est son caractère générique, c'est-à-dire utilisable *a priori* quelle que soit la configuration de la zone de recouvrement entre le domaine RANS et le domaine LES. Ainsi, une application immédiate du forçage sur une zone de recouvrement tangentielle en proche paroi a également montré des résultats prometteurs.

Enfin, on a envisagé la généralisation du forçage linéaire anisotrope à la thermique. La formulation validée (TLF) force explicitement la température moyenne et la variance de température. Sur le cas de convection forcée considéré, on a cependant constaté que l'influence de ce forçage était bénéfique également pour les flux thermiques turbulents.

Conclusion

Dans l'objectif industriel de simuler numériquement les écoulements au sein de systèmes de refroidissement de joints de pompes hydrauliques, les travaux réalisés dans cette thèse visaient à permettre à moyen terme la mise en place d'une modélisation couplée RANS/LES zonale adaptée aux écoulements dont la dynamique est dominée par la rotation et faisant apparaître des transferts thermiques. À cette fin, les travaux réalisés ont porté sur :

- (I) la validation et la comparaison de plusieurs modèles de turbulence pour les écoulements en rotation, suivant les deux approches RANS et LES ;
- (II) la validation et le développement de méthodes de couplage RANS/LES zonal et leur généralisation à la thermique.

Concernant le premier point, un état de l'art assez complet de la modélisation des écoulements en rotation a été dressé au chapitre 4. Celui-ci s'accompagne d'un aperçu des résultats théoriques connus sur les écoulements en rotation (chapitre 3), qu'un modèle de turbulence doit être en mesure de reproduire. Les effets les plus connus et les mieux compris de la rotation sur un écoulement turbulent sont d'une part l'inhibition des transferts énergétiques et la transition de l'écoulement vers un état bidimensionnel et d'autre part l'effet tantôt stabilisant tantôt déstabilisant de la rotation sur un écoulement cisailé dans le plan transverse à l'axe de rotation. Pour un écoulement d'échelle modérée et confiné par des parois, c'est le second effet qui est dominant. Le cas test choisi pour comparer les modèles, celui d'un canal plan en rotation transverse, rend principalement compte de cet effet.

Le cadre d'étude approprié pour l'étude des écoulements en rotation est celui des équations de Navier–Stokes dans un référentiel en rotation. Concernant la modélisation, les conclusions qu'on tire dans ce cadre d'étude seront cependant générales uniquement si les propriétés de transformation par changement de référentiel des grandeurs tensorielles intervenant dans le modèle sont respectées.

C'est suivant cette démarche que la validation et la comparaison de nombreux modèles de turbulence a été réalisée. Concernant la modélisation RANS, la supériorité intrinsèque, pour les écoulements en rotation, de la fermeture au second ordre des équations de Reynolds est confirmée par cette étude. Le modèle de turbulence EB–RSM (Manceau et Hanjalić, 2002) nous apparaît particulièrement approprié pour ces écoulements, dans la mesure où il apporte au modèle SSG (Speziale *et al.*, 1991), qui reproduit correctement l'instabilité Coriolis–cisaillement, une prise en compte des parois, dont la validité pour les écoulements en rotation est confirmée par cette étude.

La fermeture RANS au premier ordre n'est pas *a priori* le niveau de fermeture approprié pour les écoulements en rotation. Si on souhaite tout de même adopter ce niveau de fermeture, il convient de prendre en compte une des corrections de ces modèles pour la rotation proposées dans la littérature. Dans un canal plan en rotation transverse, ces corrections reproduisent bien la vitesse moyenne et ne montrent pas de limite de validité en fonction du taux de rotation. L'énergie turbulente est moins bien reproduite. En raison de

sa portabilité d'un modèle de viscosité turbulente à un autre notamment, notre préférence va à la correction de Cazalbou *et al.* (2005).

Concernant la simulation des grandes échelles, l'action de la rotation sur les échelles résolues donne une bonne prise en compte globale des effets de la rotation sur l'écoulement. Le modèle classique de Smagorinsky donne satisfaction. On a cependant observé que les phénomènes tourbillonnaires de grande échelle apparaissant dans un canal en rotation étaient plus importants avec le modèle de Smagorinsky qu'avec d'autres modèles (Smagorinsky dynamique, WALE).

Concernant le couplage RANS/LES zonal, deux méthodologies ont été étudiées : le couplage aux faces de bord d'entrée d'un domaine LES grâce à la méthode des structures synthétiques (SEM, Jarrin *et al.*, 2006) et le couplage volumique par Forçage Linéaire Anisotrope (ALF) sur une zone de recouvrement RANS/LES.

On a vu que le couplage de la SEM avec un modèle RANS au second ordre pouvait être amélioré en définissant des échelles caractéristiques anisotropes pour les structures synthétiques. L'application de ce couplage dans un canal en rotation a montré que la SEM permet d'obtenir un développement spatial de la turbulence satisfaisant, en dépit de l'action laminarisante de la force de Coriolis du côté en dépression du canal. L'utilisation d'un modèle RANS de viscosité turbulente corrigé pour la rotation n'est pas recommandable dans un contexte couplé RANS/LES zonal. En effet, l'ensemble du tenseur de Reynolds doit être correctement reproduit par le modèle RANS pour un couplage efficace.

Le forçage ALF a été développé dans cette thèse. Sa formulation très générale en fait une extension de plusieurs méthodes de forçage existantes, et une bonne base pour des développements futurs. On a démontré que ce forçage permettait d'imposer une anisotropie quelconque à une simulation LES. La méthode a été paramétrée sur la base d'écoulements de canal plan fixe ou en rotation, en veillant à ce que la LES forcée présente des statistiques proches de celles qu'on souhaite imposer mais également un contenu spectral réaliste. Les applications de couplage RANS/LES zonal présentées avec le forçage ALF sont des applications immédiates, où l'on choisit simplement la zone du domaine LES que l'on force. Lorsque la zone de forçage est à l'aval de l'entrée du domaine LES, le forçage permet d'amorcer des fluctuations turbulentes réalistes qui perdurent au delà de la zone de forçage. Lorsqu'il est appliqué en proche paroi, il semble en mesure d'autoriser l'utilisation de maillages moins fins dans le domaine LES.

Les deux méthodes de couplage RANS/LES étudiées, SEM et ALF, ont été étendues à la thermique (T-SEM et TLF). Les simulations de couplage RANS/LES en convection forcée présentées montrent que le développement spatial de la thermique dans le domaine LES dépend principalement du bon développement de l'écoulement, et donc du couplage mis en œuvre pour la dynamique. Malgré cela, l'introduction d'un couplage explicite sur la température par l'intermédiaire des méthodes T-SEM ou TLF apporte une amélioration.

Les perspectives des travaux présentés sont nombreuses. Par exemple, il serait intéressant d'étudier l'influence du modèle de sous-maille sur le développement spatial de l'écoulement dans le domaine LES de simulations couplées. Concernant le couplage par forçage volumique, il faudrait envisager l'introduction d'un couplage retour de la LES sur le calcul RANS. Des travaux visant à « adoucir » la transition entre la zone forcée et la zone non forcée seraient également utiles. D'autre part, des calculs DNS précis décrivant les caractéristiques spectrales d'une turbulence homogène anisotrope forcée seraient intéressants.

Enfin, sur la base des travaux réalisés dans cette thèse, la mise en place d'une modélisation couplée RANS/LES pour des problèmes industriels complexes d'écoulements en

rotation et en présence de transferts thermiques semble réaliste. Cela constitue une perspective centrale des travaux présentés.

Annexes

Annexe A

Aperçu des méthodes numériques de *Code_Saturne*

Code_Saturne est un logiciel de CFD développé par EDF. Il est dédié aux applications d'écoulements turbulents monophasiques et incompressibles. Il fonctionne sur maillage non structuré d'éléments polyédriques quelconques. Un large spectre d'applications peut être traité avec *Code_Saturne*, notamment grâce à des fonctionnalités de suivi lagrangien de particules, de déformation de maillage (basée sur une méthode ALE), de couplage thermique fluide/solide (couplage *Code_Saturne*/SYRTHES), de couplage de plusieurs instances du code, etc... Un soin particulier est apporté à la gestion des données (pré/post-processeur), le code étant utilisé par EDF à des fins de calcul intensif.

La description détaillée des méthodes numériques utilisées dans le logiciel est disponible dans la documentation théorique du code (www.code-saturne.org). Une description synthétique est donnée dans Archambeau *et al.* (2004). Quelques éléments de description sont reproduits ci-dessous. Les options numériques proposées par défaut dans le code sont indiquées. Sauf indication contraire, ce sont celles qui ont été utilisées pour les simulations présentées dans ce manuscrit.

Dans cette annexe, les conventions de notation diffèrent de celles adoptées dans le reste du document : l'ordre tensoriel des grandeurs est indiqué par des barres inférieures et les indices dénotent les valeurs discrètes des variables aux points de maillage.

Code_Saturne résout les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement d'un fluide Newtonien sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) = \Gamma, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \text{div}((\rho \underline{u}) \otimes \underline{u}) = -\text{grad } P + \text{div}(\mu_{tot} \text{grad } \underline{u}) - \text{div}(\rho \underline{\underline{R}}) + \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{B}} \underline{u}, \quad (\text{A.2})$$

et les équations de convection–diffusion pour un scalaire ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div}((\rho \underline{u}) \phi) = \text{div}(\alpha_{tot} \text{grad } \phi) + S_e + S_i \phi. \quad (\text{A.3})$$

Dans les équations (A.2) et (A.3), on a :

- $\mu_{tot} = \mu + \rho \nu_t$ pour les modèles de viscosité turbulente/viscosité de sous-maille, $\mu_{tot} = \mu$ en laminaire ou pour les modèles RANS au second ordre,
- $\underline{\underline{R}} = 0$ en laminaire ou pour les modèles de viscosité turbulente/de sous-maille, $\underline{\underline{R}}$ le tenseur de Reynolds pour les modèles RANS au second ordre,
- α_{tot} intègre, dans le cas turbulent, une modélisation des flux turbulents par diffusivité turbulente/de sous-maille,

- $\underline{S}$ et S_e désignent des termes sources quelconques et $\underline{B}\underline{u}$ et $S_i\phi$ des termes sources linéarisés (terme de flottabilité, de Coriolis, terme source utilisateurs, etc...).

Dans la suite, on supposera $\Gamma = 0$ et ρ constant (et donc $\text{div}(\underline{u}) = 0$).

Schéma semi-discret

Chaque composante de vitesse et la pression sont résolues de manière *découplée*. La contrainte de continuité est assurée suivant une procédure *prédiction-correction* (l'algorithme de *Code_Saturne* est très proche de l'algorithme SIMPLEC ; voir Vertseeg et Malalasekera, 1995, par exemple).

À l'étape de prédiction, un θ -schéma est adopté pour la discrétisation temporelle. La prédiction de vitesse, notée $\tilde{\underline{u}}^{(n+1)}$, est obtenue en résolvant le système suivant à cette étape :

$$\rho \frac{\tilde{\underline{u}}^{(n+1)} - \underline{u}^{(n)}}{\Delta t} + \text{div}(\tilde{\underline{u}}^{(n+\theta)} \otimes (\rho \underline{u}^{(n)})) - \text{div}(\mu_{\text{tot}} \underline{\text{grad}} \tilde{\underline{u}}^{(n+\theta)}) - \underline{B}^{(n)} \tilde{\underline{u}}^{(n+\theta)} = -\underline{\text{grad}} P^{(n+\theta-1)} + \underline{A}^{(n+\theta_S)}, \quad (\text{A.4})$$

avec :

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \text{div}(\mu_{\text{tot}}^t \underline{\text{grad}} \underline{u}) - \text{div}(\rho \underline{R}) + \underline{S}, \\ \tilde{\underline{u}}^{(n+\theta)} &= \theta \tilde{\underline{u}}^{(n+1)} + (1 - \theta) \underline{u}^{(n)}, \end{aligned}$$

et l'exposant $(n + \theta_S)$ indiquant qu'une procédure d'extrapolation (non détaillée ici) peut être mise œuvre pour les termes sources. Par défaut, en LES $\theta = 1/2$ (*Crank–Nicholson*). En RANS $\theta = 0$ (*Euler implicite*). Les termes source de $\underline{A}$ sont extrapolés en LES.

La seconde étape consiste à calculer l'incrément $(\delta \underline{u})^{(n+1)}$ tel que $\underline{u} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\underline{u}} + \delta \underline{u}$ satisfasse la contrainte de continuité (équation A.1). L'équilibre du bilan de quantité de mouvement permet de voir que d'après l'étape de prédiction :

$$\rho(\delta \underline{u})^{(n+1)} \approx -\Delta t \underline{\text{grad}} (\delta P)^{(n+1)}, \quad \text{avec} \quad (\delta P)^{(n+1)} \stackrel{\text{def}}{=} P^{(n+1)} - P^{(n)}. \quad (\text{A.5})$$

En prenant la divergence de cette équation, on résout finalement à l'étape de correction :

$$\text{div}(\Delta t \underline{\text{grad}} (\delta P)^{(n+1)}) = \text{div}(\rho \tilde{\underline{u}}^{(n+1)}), \quad (\text{A.6})$$

ce qui permet de déterminer $P^{(n+1)}$ puis $\underline{u}^{(n+1)}$ d'après (A.5).

Si le modèle de turbulence demande à résoudre une ou plusieurs équations de transport, celles-ci sont résolues ensuite, avec un schéma en temps explicite.

Enfin, les équations de convection–diffusion pour les éventuels autres scalaires résolus (température ou enthalpie par exemple) sont intégrées (schéma en temps explicite).

Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale est de type *volumes finis colocalisés* (vitesse, pression et tous les scalaires résolus aux mêmes nœuds de maillage). La valeur discrète ϕ_i de la variable ϕ au centre de gravité, noté I , d'une maille Ω_i représente :

$$\phi_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \phi dv.$$

La face commune aux cellules Ω_i et Ω_j est notée F_{ij} , de centre de gravité F . La valeur discrète ϕ_{ij} de ϕ en F est une approximation de :

$$\phi_{ij} = \frac{1}{|F_{ij}|} \int_{F_{ij}} \phi d\sigma.$$

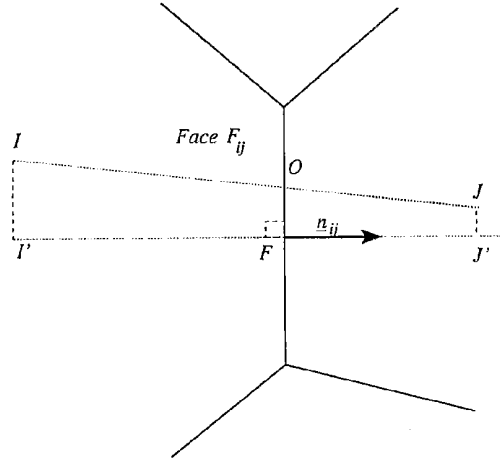


FIGURE A.1 – Notation des entités géométriques intervenant dans les schémas (adapté de Archambeau *et al.*, 2004).

Les autres entités géométriques impliquées dans les schémas de discrétisation sont O l'intersection entre la droite (IJ) et la face F_{ij} et I' (resp. J') le projeté de I (resp. J) sur la normale à F_{ij} . Cette normale est portée par le vecteur unitaire $\underline{n}_{ij}$ extérieure à Ω_i (voir figure A.1).

Prédiction

En utilisant le théorème de la divergence, la discrétisation spatiale de l'équation de prédiction (A.4) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{|\Omega_i|}{\Delta t} (\rho \tilde{\underline{u}}_i^{(n+1)} - \rho \underline{u}_i^{(n)}) + \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \tilde{\underline{u}}_{ij}^{(n+\theta)} (\rho \underline{u} \cdot \underline{n})_{ij}^{(n)} |F_{ij}| - \sum_{j \in \text{Vois}(i)} (\mu_{\text{tot}} \underline{\text{grad}} \tilde{\underline{u}} \cdot \underline{n})_{ij}^{(n+\theta)} |F_{ij}| \\ = -|\Omega_i| \underline{G}_i(P)^{(n+\theta-1)} + |\Omega_i| \underline{A}_i^{(n)} + |\Omega_i| \underline{B}_i^{(n)} \cdot \tilde{\underline{u}}_i^{(n+\theta)}. \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

Par défaut, l'opérateur de gradient au centre des cellules :

$$\underline{G}_i(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \underline{\text{grad}} \phi dv = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \int_{F_{ij}} \phi \underline{n} d\sigma,$$

est discrétisé par :

$$\underline{G}_i(\phi) = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \mathcal{I}_{ij}(\phi) |F_{ij}| \underline{n}_{ij}, \quad (\text{A.8})$$

avec $\mathcal{I}_{ij}$ l'opérateur d'interpolation au centre des faces (interpolation d'ordre deux) :

$$\mathcal{I}_{ij}(\phi) = \alpha_{ij} \phi_i + (1 - \alpha_{ij}) \phi_j + \frac{1}{2} \underline{OF} \cdot (\underline{G}_i(\phi) + \underline{G}_j(\phi)),$$

avec :

$$\alpha_{ij} = \frac{\underline{FJ'} \cdot \underline{n}_{ij}}{\underline{IJ'} \cdot \underline{n}_{ij}}.$$

On voit que la discrétisation (A.8) des gradients est implicite ; par défaut, (A.8) est inversé par une méthode de Jacobi.

Dans la discrétisation du terme convectif (deuxième terme du membre de gauche de A.7), le flux de masse $(\rho \underline{u} \cdot \underline{n})_{ij}^{(n)}$ est connu à l'issue de l'étape de correction (voir plus bas) du pas de temps précédent. Plusieurs schémas sont disponibles pour l'approximation de la valeur discrète ϕ_{ij} au centre des faces, en particulier :

– *upwind* (schéma d'ordre un) :

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^U = \gamma_{ij} \phi_i + (1 - \gamma_{ij}) \phi_j, \quad \text{avec} \quad \gamma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\rho \underline{u} \cdot \underline{n})_{ij}^{(n)} > 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

– centré (schéma d'ordre deux) :

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^C = \mathcal{I}_{ij}(\phi),$$

– mixte :

$$\phi_{ij} = \beta \phi_{ij}^U + (1 - \beta) \phi_{ij}^C, \quad 0 < \beta < 1. \quad (\text{A.9})$$

Par défaut, $\beta = 0$ en *LES* (schéma centré) et $\beta = 1$ en *RANS* (*upwind*). Les calculs RANS présentés dans le manuscrit ont néanmoins été réalisés avec $\beta = 0$.

Dans la discrétisation du terme de diffusion (troisième terme du membre de gauche de A.7), les flux diffusifs sont approchés par :

$$(\mu_{tot} \underline{\text{grad}} \tilde{\underline{u}} \cdot \underline{n})_{ij} = \mu_{tot} \mathcal{G}_{n,ij}(\tilde{\underline{u}}),$$

avec $\mathcal{G}_{n,ij}$ l'opérateur de gradient normal aux faces, discrétisé par :

$$\mathcal{G}_{n,ij}(\phi) = \frac{\phi_{j'} - \phi_{i'}}{\underline{IJ} \cdot \underline{n}_{ij}},$$

pour $\phi_{i'}$ (resp. $\phi_{j'}$) l'interpolation de ϕ_i (resp. ϕ_j) en I' (resp. J') suivante (interpolation d'ordre un) :

$$\phi_{i'} = \phi_i + \underline{II'} \cdot \underline{G}_i(\phi).$$

Finalement, le système (A.7) est inversé par une méthode de Jacobi.

Correction

La discrétisation volumes finis de l'équation de correction (A.6) peut s'écrire :

$$\Delta t \sum_{j \in \text{Vois}(i)} (\underline{\text{grad}} (\delta P) \cdot \underline{n})_{ij}^{(n+1)} |F_{ij}| = \sum_{j \in \text{Vois}(i)} (\rho \tilde{\underline{u}} \cdot \underline{n})_{ij}^{(n+1)} |F_{ij}|, \quad (\text{A.10})$$

où l'inconnue est l'incrément de pression $(\delta P)_i \stackrel{\text{def}}{=} P_i^{(n+1)} - P_i^{(n)}$.

Dans le membre de gauche, l'approximation est la suivante :

$$(\underline{\text{grad}} (\delta P) \cdot \underline{n})_{ij} = \mathcal{G}_{n,ij}(\delta P).$$

Dans le membre de droite, on a :

$$(\rho \tilde{\underline{u}} \cdot \underline{n})_{ij} = \mathcal{I}_{ij}(\rho \tilde{\underline{u}}) \cdot \underline{n}_{ij} + \mathcal{F}_{ij}.$$

$\mathcal{F}_{ij}$ est un terme, dit *filtre de Rhie et Chow* (Rhie et Chow, 1983), permettant d'éviter le découplage complet de deux cellules adjacentes à cette étape. Il s'écrit :

$$\mathcal{F}_{ij} = \Delta t \left(\mathcal{I}_{ij}(\underline{G}(P^{(n)})) \cdot \underline{n}_{ij} - \mathcal{G}_{n,ij}(P^{(n)}) \right).$$

Le système (A.10) est inversé par une méthode multi-grille algébrique (par défaut).

À l'issue de cette étape de correction, les variables discrètes de quantité de mouvement $\rho \underline{u}_i$, de flux de masse $(\rho \underline{u} \cdot \underline{n})_{ij}$ et de pression P_i sont mises à jour par les procédures suivantes :

- $\rho \underline{u}_i^{(n+1)} = \rho \tilde{\underline{u}}_i^{(n+1)} - \Delta t \underline{G}_i(\delta P^{(n+1)})$,
- $(\rho \underline{u} \cdot \underline{n})_{ij}^{(n+1)} = (\rho \tilde{\underline{u}} \cdot \underline{n})_{ij}^{(n)} - \Delta t \mathcal{G}_{n,ij}(\delta P^{(n+1)})$,
- $P_i^{(n+1)} = P_i^{(n)} + (\delta P)_i^{(n+1)}$.

Annexe B

Description des cas test

B.1 Canal plan fixe

Modèle mathématique

Considérons un écoulement laminaire incompressible entre deux plaques planes infinies parallèles (fixes) orientées suivant le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ et séparées de la distance $2h$. L'écoulement est caractérisé par un débit constant dans le plan $(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. Sous cette hypothèse, et en l'absence de force extérieure, on a :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$\text{et } w = 0. \quad (\text{B.3})$$

L'équation de continuité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ se réduit à $\partial v / \partial y = 0$. Comme la condition d'adhérence à la paroi implique que $v|_{y=y_w} = 0$, la composante v de la vitesse est nulle partout dans le canal :

$$v = 0. \quad (\text{B.4})$$

L'écoulement laminaire est donc monodimensionnel et permanent.

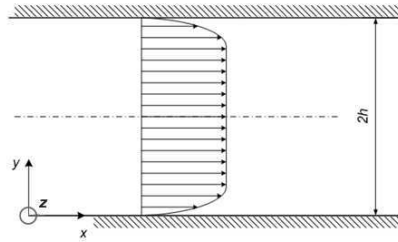


FIGURE B.1 – Schématisation du cas test du canal plan fixe

En moyenne, ces propriétés sont également vérifiées dans le cas turbulent. On note donc :

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = U(y)\mathbf{e}_x. \quad (\text{B.5})$$

L'écoulement moyen présente un gradient constant (nul) dans les directions $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$, on suppose donc également que les corrélations statistiques en un point et d'ordre supérieur

ou égal à deux sont invariantes par translation dans ces deux directions (cf turbulence homogène au sens de Craya p. 16). En particulier cela implique :

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial z} = 0. \quad (\text{B.6})$$

Compte tenu des hypothèses (B.5) et (B.6), les équations de Reynolds se réduisent à :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{d}{dy} \left(\nu \frac{dU}{dy} - \overline{u'v'} \right), \quad (\text{B.7})$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{d\overline{v'^2}}{dy}, \quad (\text{B.8})$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{d\overline{v'w'}}{dy}. \quad (\text{B.9})$$

On peut écrire l'équation (B.8) sous la forme :

$$\frac{\partial p_T}{\partial y} = 0, \quad (\text{B.10})$$

avec

$$p_T = \bar{p} + \rho \overline{v'^2}. \quad (\text{B.11})$$

On peut appeler p_T « pression dynamique » par exemple. Dans le cas laminaire, on a $p_T = p$ donc la pression est constante dans la direction $\mathbf{e}_y$ partout dans le canal. Dans le cas turbulent, la pression moyenne peut varier dans la direction $\mathbf{e}_y$, mais la condition d'adhérence en paroi nous montre que p_T est bien la pression moyenne en paroi.

Comme $\overline{v'^2}$ ne dépend pas de x (hypothèse B.6), on peut également écrire l'équation (B.7) en fonction de la pression dynamique :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_T}{\partial x} + \frac{d}{dy} \left(\nu \frac{dU}{dy} - \overline{u'v'} \right). \quad (\text{B.12})$$

La pression dynamique p_T ne dépendant pas de y (équation B.10), $\partial p_T / \partial x$ ne dépend pas non plus de y . On peut donc facilement intégrer l'équation (B.12) dans la direction $\mathbf{e}_y$ entre une paroi (d'ordonnée notée y_{w1}) et un point quelconque du canal. Il vient (on utilise la condition d'adhérence $\overline{u'v'}|_{y_{w1}} = 0$) :

$$\nu \frac{dU}{dy} - \overline{u'v'} = \nu \frac{dU}{dy} \Big|_{y=y_{w1}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_T}{\partial x} (y - y_{w1}). \quad (\text{B.13})$$

On définit la vitesse de frottement pariétale par :

$$u_\tau^w = \sqrt{\nu \left| \frac{dU}{dy} \right|_{y=y_w}}. \quad (\text{B.14})$$

Pour un canal fixe, l'écoulement présente une symétrie dans la direction $\mathbf{e}_y$ et la vitesse de frottement est la même pour les deux parois :

$$u_\tau^{w1} = u_\tau^{w2} = u_\tau.$$

Par suite, si l'on évalue l'équation (B.13) à la paroi située en y_{w2} il vient (là encore on utilise l'adhérence pour $\overline{u'v'}$) :

$$\frac{\partial p_T}{\partial x} = -\rho \frac{u_\tau^2}{h}, \quad (\text{B.15})$$

avec $h = |y_{w2} - y_{w1}|/2$. Notons que si $u_\tau^{w1} \neq u_\tau^{w2}$ (mais pour le même modèle B.12, B.10) – si l’une des parois est rugueuse, ou en présence de rotation transverse (cf annexe B.2) par exemple – le même résultat est valable en définissant u_τ par :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{1}{2}(u_\tau^{w1} + u_\tau^{w2})}. \quad (\text{B.16})$$

En fait, la définition (B.11) de p_T nous montre que

$$\partial p_T / \partial x = \partial \bar{p} / \partial x. \quad (\text{B.17})$$

Comme dans le cas laminaire, c’est bien le gradient de pression longitudinal le terme moteur de l’écoulement, qui équilibre l’influence du frottement sur la paroi (la perte de charge). Cela n’est pas surprenant puisque la turbulence s’annule en paroi.

Mise en œuvre numérique

Précisons maintenant comment l’on simule numériquement le cas test du canal plan.

À partir du maillage d’un parallélépipède de $\mathbb{R}^3$, on impose des conditions aux limites de paroi (adhérence ou loi de paroi, selon la modélisation de la turbulence adoptée, cf paragraphe 4.2.1.3) sur les deux bords $y = h$ et $y = -h$. Pour simuler l’extension infinie du canal dans la direction $\mathbf{e}_x$ (respectivement $\mathbf{e}_z$), on impose des conditions de périodicité sur les deux bords transverses à la direction $\mathbf{e}_x$ (respectivement $\mathbf{e}_z$). Enfin, si les deux parois ont les mêmes propriétés, et en l’absence de force supplémentaire, l’écoulement est symétrique par rapport au plan médian $y = 0$. Dans ce cas, on peut simuler uniquement un demi canal et imposer une condition de symétrie (c’est-à-dire pas de flux normaux à ce bord) sur le plan $y = 0$.

Avec une modélisation RANS de la turbulence, on accède simplement aux grandeurs moyennes de l’écoulement, et celles-ci sont homogènes dans les directions $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$ (équations B.5 et B.6). Par conséquent, une seule couche de cellule est nécessaire dans chacune de ces directions. Le maillage se réduit alors à une simple « tige » de cellules dans la direction $\mathbf{e}_y$. Pour une simulation des grandes échelles de la turbulence (LES) ou en l’absence de modélisation (DNS), ce type de maillage en « tige » n’est évidemment pas adapté pour restituer les effets instantanés tridimensionnels de la turbulence. Il faudra alors considérer un domaine de calcul suffisamment grand pour contenir les plus grandes échelles de l’écoulement.

On a vu plus haut que dans un canal plan, le terme moteur de l’écoulement est le gradient de pression longitudinal moyen $\partial \bar{p} / \partial x$ qui est constant. On prescrit donc ce terme pour imposer le mouvement dans le canal. Pour cela, on considère l’équation de Navier-Stokes pour la composante longitudinale de la vitesse sous la forme « décomposée » :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \nabla^2 u - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}}_{\text{à prescrire}}, \quad (\text{B.18})$$

soit en utilisant les relations (B.15) et (B.17) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + \frac{u_\tau^2}{h}. \quad (\text{B.19})$$

La part p' de la pression que l’on résout ne tient pas compte des variations longitudinales moyennes. Celles-ci, constantes dans le canal, sont données par le terme source supplémentaire u_τ^2/h .

Pour déterminer ce terme, le moyen le plus simple est de prendre comme échelle de vitesse u_τ et comme échelle de longueur h et de résoudre les équations adimensionnées :

$$\begin{cases} \mathbf{u} &= \tilde{\mathbf{u}}u_\tau \\ \mathbf{x} &= \tilde{\mathbf{x}}h \\ t &= \frac{h}{u_\tau}\tilde{t} \\ p &= \rho u_\tau^2 \tilde{p} \end{cases} \implies \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla})\tilde{u} = -\frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Re_\tau} \tilde{\nabla}^2 \tilde{u} + 1. \quad (\text{B.20})$$

Re_τ est un nombre de Reynolds bâti sur la vitesse de frottement u_τ et la demi-hauteur du canal h :

$$Re_\tau = \frac{u_\tau h}{\nu}. \quad (\text{B.21})$$

Cette approche à vitesse de frottement imposée est utilisée dans beaucoup de simulations directes de la turbulence en canal (Kim *et al.*, 1987; Moser *et al.*, 1999, par exemple).

D'un point de vue physique, il n'est pourtant pas très intuitif de travailler à vitesse de frottement imposée. Lors d'une expérience par exemple, on conçoit aisément que l'expérimentateur aura plus tendance à se fixer un débit et à en déduire une vitesse de frottement plutôt que l'inverse. Numériquement, on peut également fixer le gradient longitudinal de pression moyenne (cf équation B.18) de manière à atteindre une vitesse débitante moyenne :

$$U_b = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h U(y) dy. \quad (\text{B.22})$$

À l'étape n d'une simulation, on accède à la vitesse débitante $\mathcal{U}^n$ en calculant :

$$\mathcal{U}^n = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Pour obtenir la vitesse débitante moyenne U_b , on peut ajuster le terme source $\partial \bar{p}/\partial x$ à chaque pas de temps selon le schéma :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^n}{\partial x} - \beta \frac{U_b - 2\mathcal{U}^n + \mathcal{U}^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (\text{B.23})$$

Le coefficient β est un coefficient de relaxation destiné à améliorer la stabilité du processus. Par exemple on peut prendre $\beta = 0.1$. Cette approche à vitesse débitante moyenne U_b imposée permet d'utiliser U_b pour l'adimensionnement des équations de Navier-Stokes. Pour la première composante de vitesse, il vient :

$$\begin{cases} \mathbf{u} &= \tilde{\mathbf{u}}U_b \\ \mathbf{x} &= \tilde{\mathbf{x}}h \\ t &= \frac{h}{u_\tau}\tilde{t} \\ p &= \rho U_b^2 \tilde{p} \end{cases} \implies \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla})\tilde{u} = -\frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Re_b} \tilde{\nabla}^2 \tilde{u} + \left(\frac{u_\tau}{U_b}\right)^2, \quad (\text{B.24})$$

avec Re_b un nombre de Reynolds bâti sur la vitesse débitante U_b et la demi-hauteur du canal h :

$$Re_b = \frac{U_b h}{\nu}. \quad (\text{B.25})$$

À l'instar des données à vitesse de frottement imposée, l'approche à débit imposé est également utilisée pour des simulations directes de la turbulence en canal (Lamballais *et al.*, 1996, par exemple).

Avec l'approche à vitesse de frottement imposée, une simulation aura tendance à générer une erreur sur le débit, plus ou moins grande selon le modèle de turbulence utilisé. À l'inverse, si l'on travaille à débit imposé, on constatera une erreur sur la vitesse de frottement. Il est donc important de préciser quelle approche est retenue lors d'un calcul.

Bien sûr, on peut passer d'un adimensionnement à un autre *a posteriori* : le terme source fixé dynamiquement par le processus (B.23) nous fournit, à convergence, le rapport u_τ/U_b de même que, si l'on travaille à vitesse de frottement imposé, on peut évaluer la vitesse débitante par la formule (B.22).

B.2 Canal plan en rotation transverse

On décrit dans ce paragraphe le cas test du canal plan en rotation transverse. Pour cela, on fera parfois référence à la description du cas test du canal plan fixe donnée dans l'annexe précédente (annexe B.1).

Modèle mathématique

On se place dans un référentiel non inertiel $\mathcal{R}^*$, muni d'une base orthonormale $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. Par rapport à un référentiel inertiel, $\mathcal{R}^*$ est en rotation constante de vecteur $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$. On considère un écoulement turbulent incompressible entre deux plaques planes infinies orientées suivant le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ et séparées de la distance $2h$. La configuration de l'écoulement est reportée sur la figure B.2. Comme dans le cas sans rotation, l'écoulement

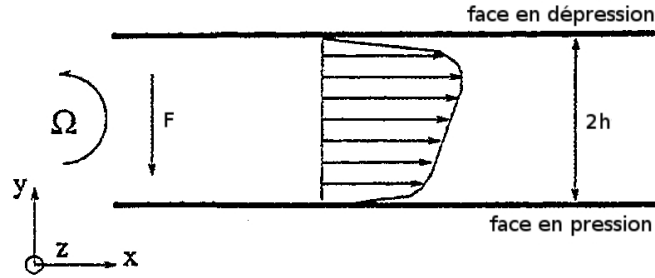


FIGURE B.2 – Schématisation du cas test du canal plan en rotation transverse (F désigne la force de Coriolis)

moyen est caractérisé par un débit constant dans les plans $(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. Par suite, la vitesse est statistiquement homogène dans la direction $\mathbf{e}_x$ et stationnaire :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = 0, \quad (\text{B.26})$$

$$\text{et } \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z} = 0. \quad (\text{B.27})$$

En revanche, les pseudo-forces de Coriolis et centrifuges dues à la rotation de $\mathcal{R}^*$ sont cette fois à prendre en compte. Comme on l'a mentionné au paragraphe 3.21, la force centrifuge dérive d'un potentiel, on l'intègre donc au gradient de pression en considérant la pression effective p_e (équations 3.22, 3.23). La force de Coriolis est la seule à agir sur la trajectoire. Mais celle-ci est par définition orthogonale à l'axe de rotation $\mathbf{e}_z$, de sorte que, comme pour un écoulement de canal fixe, $\bar{w} = 0$. Par suite, l'utilisation conjointe des propriétés d'adhérence en paroi et d'incompressibilité de l'écoulement nous donne également $\bar{v} = 0$. On peut donc adopter le même modèle que dans le cas sans rotation – celui d'un écoulement moyen monodimensionnel et d'une turbulence homogène dans les directions $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = U(y)\mathbf{e}_x, \quad (\text{B.28})$$

$$\text{et } \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial z} = 0. \quad (\text{B.29})$$

On sait que la force de Coriolis est également orthogonale à la vitesse. Statistiquement, elle s'exerce dans la direction $\mathbf{e}_y$. Cet écoulement a ceci de singulier que, dans le référentiel tournant $\mathcal{R}^*$, la force de Coriolis n'agit pas directement sur la seule composante non nulle du champ moyen :

$$\bar{\mathbf{f}}_c \cdot \mathbf{e}_x = 0.$$

Compte tenu des hypothèses (B.28), (B.29) les équations de Reynolds s'écrivent pour cet écoulement :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_e}{\partial x} + \frac{d}{dy} \left(\nu \frac{dU}{dy} - \overline{u'v'} \right), \quad (\text{B.30})$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_e}{\partial y} - \frac{d\overline{v'^2}}{dy} - 2\Omega U(y), \quad (\text{B.31})$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_e}{\partial z} - \frac{d\overline{v'w'}}{dy}. \quad (\text{B.32})$$

L'équation (B.30) est la même que pour le cas test du canal fixe (équation B.7). Les variations du profil moyen $U(y)$ par rapport au cas sans rotation ne peuvent provenir que des effets de la rotation sur la contrainte de cisaillement turbulent $\overline{u'v'}$.¹ De manière analogue à ce qui a été fait pour le canal fixe, on peut considérer les équations RANS en canal tournant sous la forme suivante :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_T}{\partial x} + \frac{d}{dy} \left(\nu \frac{dU}{dy} - \overline{u'v'} \right), \quad (\text{B.33})$$

$$0 = \frac{\partial p_T}{\partial y}, \quad (\text{B.34})$$

avec :

$$p_T = \bar{p}_e + \rho \overline{v'^2} + 2\rho\Omega \int_{y_w}^y U(y') dy'. \quad (\text{B.35})$$

La force de Coriolis n'a pas d'effet direct sur la vitesse moyenne, mais en a sur la pression moyenne. Dans l'équation (B.35), y_w désigne l'ordonnée y de l'une des paroi. De manière arbitraire, on choisit d'intégrer à partir de la paroi d'ordonnée inférieur (en $-h$ sur la figure B.2), pour que l'intégrale soit positive (l'intégrande étant positif). Si l'on fait abstraction temporairement des effets de la turbulence, l'équation (B.34) nous montre que dans un plan transverse de l'écoulement, on a :

$$p_e = C - \underbrace{2\rho\Omega \int_{-h}^y U(y') dy'}_{\geq 0},$$

avec C une constante. L'intégrale est d'autant plus grande qu'on se rapproche de l'autre paroi. On observe donc que la force de Coriolis génère un gradient de pression transverse dans le canal : la pression est plus importante du côté vers lequel la force de Coriolis pointe. C'est ce qui justifie l'appellation couramment utilisée de face *en pression* et de face *en dépression*.

Le système (B.33), (B.34) est le même que celui qu'on a utilisé pour le canal fixe. De la même manière, on peut intégrer l'équation (B.33) dans la direction y entre une paroi et un point quelconque du canal pour retrouver l'équation (B.13). Évaluée à l'autre paroi, et compte tenu de l'homogénéité dans la direction $\mathbf{e}_x$, cette équation nous donne :

$$\frac{\partial \bar{p}_e}{\partial x} = -\rho \frac{u_\tau^2}{h}, \quad (\text{B.36})$$

1. C'est ce qui fait la pertinence de ce cas test pour valider des modèle de turbulence RANS pour les écoulements en rotation.

avec :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{1}{2}(u_\tau^{(p)} + u_\tau^{(s)})}, \quad (\text{B.37})$$

et respectivement :

$$u_\tau^{(p)} = \sqrt{\nu \left| \frac{dU}{dy} \right|_{y=-h}} \quad \text{et} \quad u_\tau^{(s)} = \sqrt{\nu \left| \frac{dU}{dy} \right|_{y=h}}, \quad (\text{B.38})$$

les vitesses de frottement aux parois en pression et en dépression. Celles-ci ne sont pas égales en présence de rotation transverse car le problème n'est plus symétrique par rapport au plan médian $y = 0$. L'évaluation de ces vitesses de frottement peut également se faire de manière globale à partir de la contrainte de cisaillement turbulent dans tout le canal. En effet, si l'on intègre deux fois dans la direction $\mathbf{e}_y$ l'équation (B.30) entre une paroi et un point quelconque du canal, puis qu'on évalue l'expression à l'autre paroi, on trouve :

$$\frac{u_\tau^{(p)}}{u_\tau} = \sqrt{1 - \frac{1}{2hu_\tau^2} \int_{-h}^h \overline{u'v'}(y') dy'}, \quad (\text{B.39})$$

$$\frac{u_\tau^{(s)}}{u_\tau} = \sqrt{2 - \left(\frac{u_\tau^{(p)}}{u_\tau} \right)^2}. \quad (\text{B.40})$$

u_τ est quand à lui évalué à partir du gradient longitudinal de pression effective, qui est une donnée du problème, et de la relation (B.36).

Mise en œuvre numérique

La mise en œuvre numérique de ce cas test est semblable à celle du canal fixe. L'homogénéité statistique du problème dans les directions $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$ permet, dans le cadre d'une modélisation RANS de la turbulence, de ne considérer qu'une seule cellule dans ces deux directions (maillage en « tige » dans la direction y). L'extension infinie du canal est simulée par des conditions au bord de périodicité. Cette fois, le problème n'est plus symétrique par rapport au plan médian $y = 0$: on doit mailler l'intégralité du canal dans la direction $\mathbf{e}_y$.

La force de Coriolis doit être ajoutée aux équations. Dans le solveur découplé de *Code_Saturne*, cela se fait par l'ajout d'un terme source explicite. La force centrifuge est considérée comme intégrée au gradient de pression par l'intermédiaire de la pression effective p_e . La composante longitudinale du gradient de cette dernière doit être prescrite pour forcer le mouvement dans le canal ; les deux approches décrites dans l'annexe B.1 (vitesse de frottement imposée ou débit imposé) sont possibles.

B.3 Canal plan chauffé par un flux constant aux parois, convection forcée

On considère le cas test d'un canal plan chauffé uniformément aux parois par un flux constant $\dot{q}_w$ (une énergie par unité de surface et de temps, de dimension $[M][T]^{-3}$). Ce cas test correspond à celui traité dans Kawamura *et al.* (1999). On explicite ici comment convertir le flux imposé en terme source et les conditions aux limites qui en résultent.

Le bilan d'énergie dans le volume $(dx, 2h, L_z)$, correspondant à une section volumique transverse du canal, s'écrit :

$$- \int_{L_z} \int_{-h}^h \rho c_p u T dy dz \Big|_x + \int_{L_z} \int_{-h}^h \rho c_p u T dy dz \Big|_{x+dx} - 2\dot{q}_w L_z dx = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \rho c_p h \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2hL_z} \int_{L_z} \int_{-h}^h u T dy dz \right) - \dot{q}_w = 0, \quad (\text{B.41})$$

avec c_p la capacité thermique (dimension $[L]^2[T]^{-2}[K]^{-1}$) du fluide et ρ sa masse volumique. On introduit la vitesse débitante :

$$\mathcal{U}_b = \frac{1}{2hL_z} \int_{L_z} \int_{-h}^h u dy dz,$$

et la « température débitante » :

$$\mathcal{T}_b = \frac{1}{2hL_z\mathcal{U}_b} \int_{L_z} \int_{-h}^h u T dy dz.$$

Par suite le bilan d'énergie (B.41) montre que :

$$\frac{\partial \mathcal{T}_b}{\partial x} = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p h \mathcal{U}_b}. \quad (\text{B.42})$$

On voit donc que la température débitante croît linéairement dans la direction du canal.

On peut décomposer la température comme :

$$T = \mathcal{T}_b - \theta.$$

En utilisant cette décomposition, l'équation de transport de θ est :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2} + \frac{\dot{q}_w u}{\rho c_p h \mathcal{U}_b},$$

avec α le coefficient de diffusivité thermique (dimension $[L]^2[T]^{-1}$).

On définit la température de frottement par :

$$T_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p u_\tau}. \quad (\text{B.43})$$

En introduisant les variables adimensionnées :

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{h}, \quad \tilde{u}_i = \frac{u_i}{u_\tau}, \quad \tilde{t} = \frac{tu_\tau}{h}, \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta}{T_\tau},$$

l'équation adimensionnelle est (le tilde est omis) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \frac{1}{Re_\tau Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2} + \frac{u}{\mathcal{U}_b},$$

avec $Re_\tau = u_\tau h / \nu$ le nombre de Reynolds de frottement et $Pr = \nu / \alpha$ le nombre de Prandtl. Si l'on choisit la vitesse débitante $\mathcal{U}_b$ comme échelle de vitesse et

$$T_b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p \mathcal{U}_b} \quad (\text{B.44})$$

comme échelle de température, on a :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \frac{1}{Re_b Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2} + u.$$

θ représente la température « libérée » de sa partie croissante linéairement dans la direction de l'écoulement. Les hypothèses de stationnarité et d'homogénéité statistique de l'écoulement peuvent donc raisonnablement être étendues à θ :

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0,$$

de sorte que des conditions au limites de périodicité sont appropriées dans ces deux directions pour $\bar{\theta}$, et admissibles pour θ , dès lors que le domaine de calcul est suffisamment grand pour contenir les plus grandes échelles de l'écoulement. Enfin, comme le souligne l'expression (B.42), θ n'est définie qu'à une constante près, celle-ci étant fixée par la condition limite uniforme qu'on impose en $y = \pm 1$. On choisit :

$$\theta(x, 1, z) = \theta(x, -1, z) = 0.$$

La prise en compte de fluctuations thermiques à la paroi est considérée dans Abe *et al.* (2004) par exemple.

Annexe C

Diagramme de bifurcation du modèle SSG quasi-linéaire

On rappelle que l'équation de transport du tenseur d'anisotropie est, en supposant que la dissipation est isotrope :

$$\begin{aligned} \frac{Db_{ij}}{Dt} = & -\frac{\varepsilon}{k}\left(\frac{P}{\varepsilon} - 1\right)b_{ij} - \frac{2}{3}\overline{S}_{ij} - (b_{ik}\overline{S}_{jk} + b_{jk}\overline{S}_{ik} - \frac{2}{3}b_{mn}\overline{S}_{mn}\delta_{ij}) \\ & - (b_{ik}(\overline{\omega}_{jk} + 2\epsilon_{jmk}\Omega_m) + b_{jk}(\overline{\omega}_{ik} + 2\epsilon_{imk}\Omega_m)) + \frac{\phi_{ij}}{2k}, \end{aligned}$$

et donc, avec le modèle général SSG (équation 4.36) pour ϕ_{ij} , on a :

$$\begin{aligned} \frac{Db_{ij}}{Dt} = & -\frac{\varepsilon}{k}\left(\frac{C_1}{2} + \frac{P}{\varepsilon} - 1\right)b_{ij} + \left(\frac{C_3}{2} - \frac{2}{3}\right)\overline{S}_{ij} + \left(\frac{C_4}{2} - 1\right)(b_{ik}\overline{S}_{jk} + b_{jk}\overline{S}_{ik} - \frac{2}{3}b_{mn}\overline{S}_{mn}\delta_{ij}) \\ & + \left(\frac{C_5}{2} - 1\right)(b_{ik}(\overline{\omega}_{jk} + \frac{C_5-4}{C_5-2}\epsilon_{jmk}\Omega_m) + b_{jk}(\overline{\omega}_{ik} + \frac{C_5-4}{C_5-2}\epsilon_{imk}\Omega_m)) + \frac{C_2}{2}\frac{\varepsilon}{k}(b_{ik}b_{jk} - \frac{1}{3}II_b^2\delta_{ij}). \end{aligned}$$

Pour l'écoulement homogène cisailé dans un référentiel en rotation, donné par :

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & S & 0 \\ S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & S & 0 \\ -S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{\Omega} \wedge) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{Db_{11}}{D\sigma} = & \left[\frac{1}{3}\left(\frac{C_4}{2} - 1\right) - \left(\frac{C_5}{2} - 1\right)\left(C_\Omega \frac{\Omega}{S} - 1\right) \right] b_{12} \\ & + \left[\left(1 - \frac{C_1}{2} - \frac{P}{\varepsilon}\right)b_{11} + \frac{C_2}{2}(b_{11}^2 + b_{12}^2 - \frac{1}{3}II_b) \right] \frac{\varepsilon}{Sk}, \end{aligned} \quad (C.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{Db_{22}}{D\sigma} = & \left[\frac{1}{3}\left(\frac{C_4}{2} - 1\right) + \left(\frac{C_5}{2} - 1\right)\left(C_\Omega \frac{\Omega}{S} - 1\right) \right] b_{12} \\ & + \left[\left(1 - \frac{C_1}{2} - \frac{P}{\varepsilon}\right)b_{22} + \frac{C_2}{2}(b_{12}^2 + b_{22}^2 - \frac{1}{3}II_b) \right] \frac{\varepsilon}{Sk}, \end{aligned} \quad (C.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{Db_{12}}{D\sigma} = & \frac{1}{2}\left(\frac{C_3}{2} - \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{C_4}{2} - 1\right)(b_{11} + b_{22}) + \frac{1}{2}\left(\frac{C_5}{2} - 1\right)\left(C_\Omega \frac{\Omega}{S} - 1\right)(b_{11} - b_{22}) \\ & + \left[\left(1 - \frac{C_1}{2} - \frac{P}{\varepsilon}\right)b_{12} + \frac{C_2}{2}(b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} - \frac{1}{3}II_b) \right] \frac{\varepsilon}{Sk}, \end{aligned} \quad (C.3)$$

avec $\sigma = St$ et $C_\Omega = 2\frac{C_5-4}{C_5-2}$.

En notant $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C_{\varepsilon 2}-1}{C_{\varepsilon 1}-1}$, le point fixe non trivial $(\varepsilon/Sk)_{\infty} > 0$ est caractérisé par (voir paragraphe 4.2.4.1 p. 62) :

$$\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_{\infty} = \alpha. \quad (\text{C.4})$$

Comme de plus $P = -2b_{12}Sk$ pour l'écoulement homogène cisailé, on a :

$$(b_{12})_{\infty} = -\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\varepsilon}{Sk}\right)_{\infty}. \quad (\text{C.5})$$

Les solutions d'équilibre sont déterminées en remplaçant le membre de gauche de (C.1)–(C.3) par zéro et en utilisant (C.4), (C.5). Pour le modèle SSG quasi-linéaire ($C_2 = 0$), on obtient :

$$(b_{11})_{\infty} = -\frac{\alpha}{2(\frac{C_1}{2}-1+\alpha)}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{C_4}{2}-1\right) - \left(\frac{C_5}{2}-1\right)\left(C_{\Omega}\frac{\Omega}{S}-1\right)\right] \quad (\text{C.6})$$

$$(b_{22})_{\infty} = -\frac{\alpha}{2(\frac{C_1}{2}-1+\alpha)}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{C_4}{2}-1\right) + \left(\frac{C_5}{2}-1\right)\left(C_{\Omega}\frac{\Omega}{S}-1\right)\right] \quad (\text{C.7})$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{Sk}\right)_{\infty} = \frac{1}{\frac{C_1}{2}-1+\alpha}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{C_4}{2}-1\right)^2 - \left(\frac{C_5}{2}-1\right)^2\left(C_{\Omega}\frac{\Omega}{S}-1\right)^2 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{C_3}{2}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{C_1}{2}-1+\alpha\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.8})$$

Dans le modèle général (4.36) les coefficients C_1 – C_5 peuvent dépendre des invariants II_b , III_b , (P/ε) et $(b_{33}P/\varepsilon)$. Dans le jeu de constantes (4.37) retenus, on a :

$$\begin{aligned} C_1 &= C_1^0 + C_1^*P/\varepsilon, & \text{avec } C_1^0 &= 3.4, \quad C_1^* = 1.8, \\ C_3 &= C_3^0 - C_3^*II_b^{1/2}, & \text{avec } C_3^0 &= 0.8, \quad C_3^* = 1.3, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que le coefficient C_1 dépend de l'invariant P/ε , dont la valeur d'équilibre est donnée par (C.4), et le coefficient C_3 dépend de l'invariant II_b , dont la valeur d'équilibre est (voir équation 50 de Speziale *et al.*, 1991) :

$$(II_b)_{\infty} = \left(\frac{2-C_1^0}{\alpha} - C_1^* - \frac{1}{2}C_3^* - 2\right)^{-1}\left((2-C_4)(b_{33})_{\infty} + \frac{1}{2}C_3^0 - \frac{2}{3}\right), \quad (\text{C.9})$$

avec :

$$(b_{33})_{\infty} = -(b_{11})_{\infty} - (b_{22})_{\infty} = \frac{\alpha}{3(\frac{C_1}{2}-1+\alpha)}\left(\frac{C_4}{2}-1\right). \quad (\text{C.10})$$

En utilisant les valeurs d'équilibre (C.4)–(C.10), on peut tracer (figure C.1) le diagramme de bifurcation du modèle SSG quasi-linéaire (SSG-QL), qui correspond au modèle SSG (4.36), (4.37) en annulant le terme quadratique de la partie « lente » de ϕ_{ij} ($C_2 = 0$). Ce diagramme, proche de celui du modèle SSG original, témoigne d'une bonne prise en compte de l'instabilité Coriolis-cisaillement par le modèle SSG-QL (voir paragraphe 4.2.4.1). Toutefois on peut noter qu'un diagramme de bifurcation plus proche encore de celui du modèle SSG original peut être obtenu avec le modèle SSG quasi-linéaire en ajustant légèrement C_3^* (SSG-QL, $C_3^* = 1.6$).

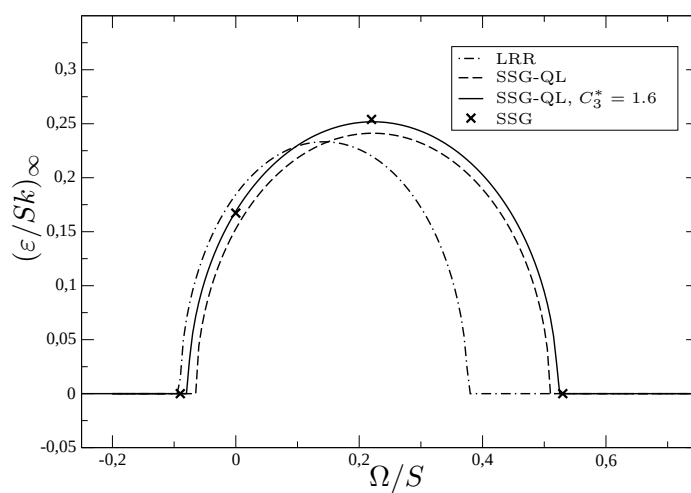


FIGURE C.1 – Diagramme de bifurcation du modèle SSG quasi-linéaire pour l'écoulement homogène cisailé en rotation (les points de référence du diagramme du modèle SSG mentionnés dans Speziale *et al.*, 1991, sont également indiqués).

Annexe D

Formulation de l'EB-RSM

Avec l'EB-RSM (*Elliptic Blending Reynolds Stress Model*), la fermeture complète des équations de transport des tensions de Reynolds est donnée par :

- Échelles intégrales de la turbulence :
 - Échelle de longueur :

$$L_p = C_L \max \left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \right), \quad C_L = 0.125, \quad C_\eta = 80. \quad (\text{D.1})$$

- Échelle de temps :

$$T = \max \left(\frac{k}{\varepsilon}, C_T \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right), \quad C_T = 6. \quad (\text{D.2})$$

- Coefficient de pondération elliptique α :

$$\begin{cases} \alpha - L_p^2 \nabla^2 \alpha = 1, \\ \alpha(y=0) = 0. \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

- Vecteur géométrique unitaire $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \alpha}{\|\nabla \alpha\|}. \quad (\text{D.4})$$

- Dissipation ε_{ij} :

$$\varepsilon_{ij} = (1 - \alpha^3) \varepsilon_{ij}^w + \alpha^3 \varepsilon_{ij}^h. \quad (\text{D.5})$$

- Contribution quasi-homogène (isotropie) :

$$\varepsilon_{ij}^h = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}. \quad (\text{D.6})$$

- Contribution de proche paroi :

$$\varepsilon_{ij}^w = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \varepsilon. \quad (\text{D.7})$$

- Dissipation $\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_{ii}$:

$$\begin{cases} \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{C'_{\varepsilon_1} P - C_{\varepsilon_2} \varepsilon}{T} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + C_\varepsilon \overline{u'_j u'_l} T) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right), \\ \varepsilon(y=0) = 2\nu \lim_{y \rightarrow 0} \frac{k}{y^2}, \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} C'_{\varepsilon_1} &= C_{\varepsilon_1} \left(1 + A_1 (1 - \alpha^3) \sqrt{\frac{k}{\overline{u'_i u'_j} n_i n_j}} \right), \quad C_{\varepsilon_1} = 1.44, \quad A_1 = 0.028, \\ C_{\varepsilon_2} &= 1.83, \quad C_\varepsilon = 0.18. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

- Corréation vitesse–gradient de pression ϕ_{ij}^* :

$$\phi_{ij}^* = (1 - \alpha^3)\phi_{ij}^w + \alpha^3\phi_{ij}^h. \quad (\text{D.10})$$

- Contribution quasi-homogène (SSG quasi-linéaire) :

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^h = & -g_1\varepsilon b_{ij} + g_2k\overline{S}_{ij} + g_3k(b_{ik}\overline{S}_{jk} + b_{jk}\overline{S}_{ik} - \frac{2}{3}b_{mn}\overline{S}_{mn}\delta_{ij}) \\ & + g_4k(b_{ik}\overline{W}_{jk} + b_{jk}\overline{W}_{ik}), \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

$$g_1 = 3.4 + 1.8P/\varepsilon, \quad g_2 = 0.8 - 1.3(b_{mn}b_{mn})^{1/2}, \quad g_3 = 1.25, \quad g_4 = 0.4. \quad (\text{D.12})$$

- Contribution de proche paroi :

$$\phi_{ij}^w = -5\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u'_i u'_k} n_j n_k + \overline{u'_j u'_k} n_i n_k - \frac{1}{2}\overline{u'_k u'_l} n_k n_l (n_i n_j + \delta_{ij})). \quad (\text{D.13})$$

Les conditions aux limites de paroi pour la vitesse moyenne $\overline{\mathbf{u}}$ et les tensions de Reynolds $\overline{u'_i u'_j}$ sont l'adhérence.

Annexe E

Le tenseur de rotation effective d'Astarita et son utilisation dans les modèles au second ordre algébriques

E.1 Introduction du tenseur

Pour élaborer des lois de comportement pour des fluides rhéologiques, Astarita (1979) cherche à obtenir une mesure objective de la vorticité. L'auteur introduit le tenseur $\boldsymbol{\Omega}^{(S)}$ défini par :

$$\frac{D\mathbf{e}_j}{Dt} = \boldsymbol{\Omega}^{(S)} \cdot \mathbf{e}_j,$$

avec $\mathbf{e}_j$ ($j = 1, 2$ ou 3) les axes principaux (ou vecteurs propres) du tenseur des taux de déformation $\mathbf{S}$. L'existence de $\boldsymbol{\Omega}^{(S)}$ est assurée en vertu du théorème spectral en dimension finie. Ce théorème nous dit que toute matrice symétrique à coefficients réels (comme $\mathbf{S}$) est diagonalisable :

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{E}^{-1},$$

avec $\boldsymbol{\Lambda}$ la matrice diagonale des valeurs propres, et $\mathbf{E}$ la matrice dont la colonne j est le vecteur propre $\mathbf{e}_j$. Ce théorème nous dit aussi que $\mathbf{E}$ est une matrice orthogonale : $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}^T$. On peut donc également écrire le tenseur $\boldsymbol{\Omega}^{(S)}$ sous la forme :

$$\boldsymbol{\Omega}^{(S)} = \frac{D\mathbf{E}}{Dt}\mathbf{E}^T. \quad (\text{E.1})$$

Astarita (1979) montre que, comme les vecteurs propres $\mathbf{e}_j$ d'un tenseur objectif sont eux-mêmes objectifs ($\mathbf{e}_j^* = \mathbf{Q}\mathbf{e}_j$), en appliquant un changement de référentiel, on a :

$$\frac{D(\mathbf{e}_j)^*}{Dt} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{e}_j + \mathbf{Q}\frac{D\mathbf{e}_j}{Dt} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\mathbf{e}_j^* + \mathbf{Q}\boldsymbol{\Omega}^{(S)}\mathbf{Q}^T\mathbf{e}_j^*,$$

et donc :

$$(\boldsymbol{\Omega}^{(S)})^* = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Omega}^{(S)}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T. \quad (\text{E.2})$$

Le tenseur $\boldsymbol{\Omega}^{(S)}$ peut être qualifié de tenseur de rotation *effective*. Dans un référentiel galiléen, il mesure la courbure du champ de déformation. Dans un référentiel non galiléen en rotation, la rotation du référentiel s'ajoute à la courbure perçue.

Rappelons que le tenseur de vorticité $\mathbf{W}$ vérifie, par changement de référentiel (équation 3.19 p. 29) :

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T. \quad (\text{E.3})$$

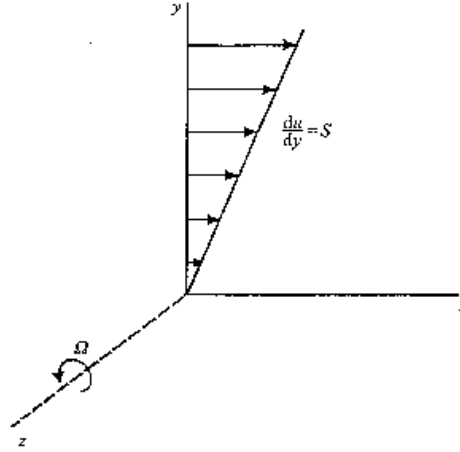


FIGURE E.1 – Schématisation de l'écoulement turbulent homogène cisailé en référentiel tournant (d'après Speziale et Mac Giolla Mhuiris, 1989a).

Ainsi, le tenseur de vorticité $\mathbf{W}$ peut être associé au tenseur de rotation effective $\mathbf{\Omega}^{(S)}$ en définissant :

$$\mathbf{W}^A = \mathbf{W} - \mathbf{\Omega}^{(S)}, \quad (\text{E.4})$$

et, d'après (E.3) et (E.2), le tenseur $\mathbf{W}^A$ est objectif :

$$(\mathbf{W}^A)^\star = \mathbf{Q}\mathbf{W}^A\mathbf{Q}^T.$$

On peut illustrer ce que mesure le tenseur $\mathbf{W}^A$ en considérant l'écoulement homogène cisailé en rotation d'axe $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_z$ (figure E.1) pour un observateur placé dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Dans le référentiel $\mathcal{R}^\star$ en rotation par rapport à $\mathcal{R}$, cet écoulement est homogène et stationnaire :

$$\nabla\mathbf{u}^\star = \begin{pmatrix} 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{S}^\star = \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{2} & 0 \\ \frac{S}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{W}^\star = \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{2} & 0 \\ -\frac{S}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le deuxième terme du membre de droite de (E.4) est donc nul et on a :

$$(\mathbf{W}^A)^\star = \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{2} & 0 \\ -\frac{S}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\mathbf{W}^A$ est objectif, la même mesure serait faite dans un autre référentiel, au changement de base près. Si l'on considère maintenant un écoulement homogène cisailé sans rotation, et que l'on se place dans le référentiel galiléen, on a :

$$\mathbf{W}^A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{2} & 0 \\ -\frac{S}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que le tenseur $\mathbf{W}^A$ mesure la vorticité locale, sans être affecté par la rotation globale ou la courbure perçue de l'écoulement (comme le tenseur des taux de déformation $\mathbf{S}$ par exemple).

  l'inverse, le tenseur de vorticité absolue est défini par :

$$W_{ij}^a = W_{ij} + \epsilon_{imj}\Omega_m,$$

avec $\mathbf{\Omega}$ le vecteur de rotation du référentiel d'étude par rapport au référentiel galiléen. $\mathbf{W}^a$ mesure donc, quel que soit le référentiel d'étude, la vorticité telle qu'elle serait perçue dans un référentiel galiléen. Pour l'écoulement homogène cisailé en rotation exprimé dans le référentiel tournant, il vaut statistiquement :

$$(\mathbf{W}^a)^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{2} - \Omega & 0 \\ -\frac{S}{2} + \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si l'écoulement n'est pas en rotation mais fixe dans le référentiel galiléen et observé dans ce même référentiel, il vaut :

$$\mathbf{W}^a = \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{2} & 0 \\ -\frac{S}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce tenseur est donc affecté par la rotation globale et la courbure perçue de l'écoulement.

$\mathbf{W}^a$ et $\mathbf{W}^A$ sont donc deux tenseurs de vorticité totalement différents : $\mathbf{W}^a$ est affecté par la rotation globale et la courbure, tandis que $\mathbf{W}^A$ mesure uniquement la vorticité locale, sans être affecté par la rotation globale et la courbure. Ces deux tenseurs peuvent être utilisés en modélisation de la turbulence car ils permettent de respecter le principe de consistance du modèle par changement de référentiel (p. 45).

Le paragraphe 4.3.5 (p. 117) illustre qu'en modélisation de sous-maille, le tenseur de « vorticité objective » $\mathbf{W}^A$ peut être une alternative intéressante au tenseur de vorticité absolue $\mathbf{W}^a$ dans certains cas. On pourrait également envisager d'utiliser le tenseur $\mathbf{W}^A$ en modélisation RANS, si l'on cherche à sensibiliser une corrélation à la vorticité sans dépendance à la rotation et à la courbure.

E.2 Application aux modèles au second ordre algébriques

Associé au tenseur de vorticité $\mathbf{W}$, le tenseur $\mathbf{\Omega}^{(S)}$ (équation E.1) introduit par Astarita (1979) permet de construire une mesure objective de la vorticité, délivrée des effets induits par la rotation et la courbure. Cela traduit le fait que le tenseur $\mathbf{\Omega}^{(S)}$ est en soit une mesure de la rotation *effective* de l'écoulement, mesure dont l'intérêt en modélisation est apparue au paragraphe 4.2.5.2, pour sensibiliser les modèles RANS au premier ordre à la rotation et à la courbure. L'intérêt d'un tel tenseur s'est également fait sentir dans le contexte des modèles au second ordre algébriques, ce sur quoi on revient ici, en complétant la discussion.

Reprenons l'équation de transport du tenseur d'anisotropie dans un référentiel quelconque, en turbulence homogène :

$$\begin{aligned} \frac{Db_{ij}}{Dt} + \Omega_k(\epsilon_{ikm}b_{jm} + \epsilon_{jkm}b_{im}) = & -\left(P - \varepsilon\right)\frac{b_{ij}}{k} - \frac{2}{3}\overline{S}_{ij} - (b_{ik}\overline{S}_{jk} + b_{jk}\overline{S}_{ik} - \frac{2}{3}b_{mn}\overline{S}_{mn}\delta_{ij}) \\ & + (b_{ik}\overline{W}_{jk}^a + b_{jk}\overline{W}_{ik}^a) + \frac{\Pi_{ij}}{2k}. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Dans cette équation les termes de diffusion n'apparaissent pas en raison de l'homogénéité et Π_{ij} intègre la corrélation pression-déformation et la partie déviatrice de la dissipation. On a laissé au membre de gauche les termes non inertiels générés par la dérivée matérielle et, au membre de droite, les termes non inertiels générés par la production sont implicitement pris en compte dans la vorticité absolue moyenne $\overline{\mathbf{W}}^a$.

Si l'écoulement est à l'équilibre faible dans le référentiel d'étude :

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} = 0, \quad (\text{E.6})$$

on obtient la relation algébrique implicite (Gatski et Speziale, 1993) :

$$\begin{aligned} (P - \varepsilon) \frac{b_{ij}}{k} = & -\frac{2}{3} \bar{S}_{ij} - (b_{ik} \bar{S}_{jk} + b_{jk} \bar{S}_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} \bar{S}_{mn} \delta_{ij}) \\ & + (b_{ik} (\bar{W}_{jk} + 2\epsilon_{jmk} \Omega_m) + b_{jk} (\bar{W}_{ik} + 2\epsilon_{imk} \Omega_m)) + \frac{\Pi_{ij}}{2k}. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

La procédure d'inversion (ou explicitation) décrite par Gatski et Speziale (1993) conduit alors à une relation explicite de la forme :

$$\mathbf{b}^\dagger = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{S}}^\dagger, \bar{\mathbf{W}}^\dagger), \quad (\text{E.8})$$

avec notamment $(\mathbf{b}^\dagger, \bar{\mathbf{S}}^\dagger)$ et $\mathbf{F}$ n'ont pas besoin d'être explicités ici, voir Gatski et Speziale, 1993) :

$$\bar{W}_{ij}^\dagger = \frac{1}{2} g\tau (2 - C_4) \left(\bar{W}_{ij} + \left(\frac{C_4 - 4}{C_4 - 2} \right) \epsilon_{imj} \Omega_m \right). \quad (\text{E.9})$$

Dans cette expression, C_4 est un des coefficients du modèle SSG (voir équations 4.36, 4.37 p. 61). Le coefficient $(C_4 - 4)/(C_4 - 2) \neq 1$ devant le terme non inertiel (deuxième terme) montre que le modèle (E.9) ne peut pas être recouvert en appliquant simplement un changement de référentiel au modèle exprimé dans le référentiel galiléen (principe (I) p. 45). Cela vient du fait que l'hypothèse (E.6) suppose que l'écoulement est à l'équilibre dans le référentiel d'étude. Par suite, si l'on change de référentiel, on change non seulement l'observateur du mouvement mais également l'hypothèse modélisatrice.

Devant ce constat, Weis et Hutter (2003) ont proposé une hypothèse d'équilibre faible « absolue » :

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} + \Omega_k (\epsilon_{ikm} b_{jm} + \epsilon_{jkm} b_{im}) = 0, \quad (\text{E.10})$$

pour laquelle l'écoulement est supposé à l'équilibre uniquement dans le référentiel galiléen. Bien que le modèle résultant satisfasse le principe de consistance du modèle par changement de référentiel, l'hypothèse (E.10) est totalement irréaliste pour beaucoup d'écoulements. Par exemple, l'écoulement dans un canal plan en rotation transverse est à l'équilibre uniquement dans un référentiel attaché au canal et non pas dans le référentiel galiléen.

Il est donc clair que le seul choix d'un référentiel dans lequel prendre l'équilibre faible ne peut pas donner satisfaction dans tous les cas, et qu'une hypothèse d'équilibre faible générale doit tenir compte de la rotation effective (courbure et rotation) de l'écoulement.

C'est l'objet des propositions de Girimaji (1996), Gatski et Jongen (2000) et Wallin et Johansson (2002) (voir aussi Gatski et Wallin, 2004). L'idée de base est qu'une hypothèse moins forte est que l'écoulement est à l'équilibre dans une base locale $\mathcal{B}'$ à définir. En notant $\mathcal{P}$ la matrice de passage de la base euclidienne $\mathcal{B}$ à la base locale $\mathcal{B}'$ (c'est à dire la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$), on a :

$$\mathbf{b}' = \mathcal{P}^{-1} \mathbf{b} \mathcal{P}.$$

L'hypothèse d'équilibre faible générale est la suivante :

$$\frac{D\mathbf{b}'}{Dt} = 0.$$

D'après cette hypothèse, on écrit :

$$\frac{D\mathbf{b}}{Dt} = -(\mathbf{b}\boldsymbol{\Omega}^{(r)} - \boldsymbol{\Omega}^{(r)}\mathbf{b}),$$

avec :

$$\boldsymbol{\Omega}^{(r)} = \frac{D\mathcal{P}}{Dt}\mathcal{P}^{-1}.$$

Dans le référentiel galiléen, la relation algébrique implicite générale est alors :

$$\begin{aligned} (P - \varepsilon) \frac{b_{ij}}{k} = & -\frac{2}{3}\bar{S}_{ij} - (b_{ik}\bar{S}_{jk} + b_{jk}\bar{S}_{ik} - \frac{2}{3}b_{mn}\bar{S}_{mn}\delta_{ij}) \\ & + (b_{ik}(\bar{W}_{jk} + \Omega_{jk}^{(r)}) + b_{jk}(\bar{W}_{ik} + \Omega_{ik}^{(r)})) + \frac{\Pi_{ij}}{2k}. \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Girimaji (1996) utilise le tenseur d'accélération pour définir $\boldsymbol{\Omega}^{(r)}$. Comme le note Spalart et Speziale (1999), cela conduit à un modèle qui ne satisfait pas la contrainte d'invariance galiléenne qui, contrairement à la contrainte d'indifférence matérielle, s'applique en modélisation de la turbulence (voir paragraphe 4.1). Gatski et Jongen (2000) se placent dans le cas 2D et proposent de prendre $\mathcal{P} = \mathbf{E}$, c'est-à-dire que l'écoulement soit à l'équilibre dans la base formée par les vecteurs propres de $\bar{\mathbf{S}}$. Dans ce cas, le tenseur $\boldsymbol{\Omega}^{(r)}$ n'est autre que le tenseur $\boldsymbol{\Omega}^{(S)}$ introduit par Astarita (1979). De même, bien qu'elle résulte d'un raisonnement alternatif, la proposition de Wallin et Johansson (2002) consiste en une procédure, valable en dimension trois, pour calculer explicitement $\boldsymbol{\Omega}^{(S)}$.

Il nous semble intéressant ici de donner la forme du modèle algébrique explicite obtenu pour $\boldsymbol{\Omega}^{(r)} = \boldsymbol{\Omega}^{(S)}$ dans un référentiel quelconque (dans les publications de référence de Gatski et Jongen (2000), Wallin et Johansson, 2002 et Gatski et Wallin, 2004, ce modèle est formulé dans un référentiel galiléen, *via* la relation E.12). L'extension dans un référentiel quelconque est immédiate à partir des propriétés (E.3) et (E.2). La relation algébrique implicite sous l'hypothèse d'équilibre faible sensibilisé à la courbure s'écrit donc, dans un référentiel quelconque :

$$\begin{aligned} (P - \varepsilon) \frac{b_{ij}}{k} = & -\frac{2}{3}\bar{S}_{ij} - (b_{ik}\bar{S}_{jk} + b_{jk}\bar{S}_{ik} - \frac{2}{3}b_{mn}\bar{S}_{mn}\delta_{ij}) \\ & + (b_{ik}(\bar{W}_{jk} + \Omega_{jk}^{(S)} + 2\epsilon_{jmk}\Omega_m) + b_{jk}(\bar{W}_{ik} + \Omega_{ik}^{(S)} + 2\epsilon_{imk}\Omega_m)) + \frac{\Pi_{ij}}{2k}. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Contrairement au tenseur de vorticité objective moyenne $\bar{\mathbf{W}}^A$ (voir équation E.4), on voit qu'au membre de droite le tenseur de rotation effective $\boldsymbol{\Omega}^{(S)}$ s'ajoute au tenseur de vorticité moyenne $\bar{\mathbf{W}}$, au lieu de se retrancher. De cette manière, on retrouve dans cette relation algébrique les mêmes termes non inertiels que dans la relation différentielle (avec le coefficient 2 notamment). Bien sûr, s'il n'y a pas de courbure dans le référentiel d'étude, on retrouve le modèle algébrique de Gatski et Speziale (1993) ( quation E.7). Si l'on utilise le modèle SSG ( quations 4.36, 4.37) pour Π_{ij} la relation explicite générale en référentiel quelconque est la relation (E.8) avec :

$$\bar{W}_{ij}^\dagger = \frac{1}{2}g\tau(2 - C_4) \left(\bar{W}_{ij} - \left(\frac{2}{C_4 - 2} \right) \Omega_{ij}^{(S)} + \left(\frac{C_4 - 4}{C_4 - 2} \right) \epsilon_{imj}\Omega_m \right). \quad (\text{E.13})$$

Dans ce tenseur, le troisième terme provient bien de l'application directe d'un changement de référentiel au tenseur de vorticité moyenne $\bar{\mathbf{W}}$ et au tenseur de rotation effective $\boldsymbol{\Omega}^{(S)}$. Le modèle est donc consistant par changement de référentiel.

Un autre point notable est qu'on obtient un modèle algébrique exactement analogue en remplaçant $\Omega^{(S)}$ dans (E.12), (E.13) par :

$$\mathbf{\Omega}^{(b)} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} \mathbf{T}^T,$$

avec $\mathbf{T}$ la matrice orthogonale des vecteurs propres du tenseur d'anisotropie $\mathbf{b}$ (en colonnes). L'hypothèse d'équilibre faible correspondante est que ce sont uniquement les composantes principales (les valeurs propres) du tenseur d'anisotropie qui sont à l'équilibre (et non pas les valeurs propres *et* les vecteurs propres, comme c'est le cas pour l'hypothèse d'équilibre faible E.6, non sensibilisé à la courbure). Cette hypothèse, assez intuitive physiquement, ne change pas la forme des équations (E.12), (E.13) car la propriété (E.2) utilise simplement l'objectivité et l'orthogonalité des vecteurs propres du tenseur $\bar{\mathbf{S}}$, de sorte qu'on peut montrer de la même manière que, par changement de référentiel, on a :

$$(\mathbf{\Omega}^{(b)})^* = \mathbf{Q}\mathbf{\Omega}^{(b)}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T.$$

Annexe F

Formulation du modèle de Smagorinsky dynamique dans un référentiel quelconque

L'évaluation dynamique des constantes d'un modèle de sous-maille est basée sur la relation exacte :

$$T_{ij} = \widehat{\tau}_{ij} + \mathcal{L}_{ij}, \quad (\text{F.1})$$

avec T_{ij} , τ_{ij} , $\mathcal{L}_{ij}$ les moments centrés définis par :

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j}, \\ T_{ij} &= \widehat{\widetilde{u_i u_j}} - \widehat{\widetilde{u_i}} \widehat{\widetilde{u_j}}, \\ \mathcal{L}_{ij} &= \widehat{\widetilde{u_i u_j}} - \widehat{\widetilde{u_i}} \widehat{\widetilde{u_j}}. \end{aligned}$$

La relation (F.1) est triviale dans le sens où chaque terme s'annule des deux côtés de l'égalité. Il en est de même des termes non inertiels lorsque l'on applique un changement de référentiel, de telle sorte que, par définition :

$$T_{ij}^* = \widehat{\tau}_{ij}^* + \mathcal{L}_{ij}^*. \quad (\text{F.2})$$

Cependant, pour évaluer dynamiquement les constantes d'un modèle de sous maille, la relation (F.1) est utilisée avec τ_{ij} et T_{ij} modélisés et non plus exacts.

Si le modèle utilisé pour τ_{ij} et T_{ij} vérifie la propriété (4.3), l'égalité (F.2) reste vraie lorsque τ_{ij} et T_{ij} sont modélisés et non plus exacts. Comme noté par Kobayashi et Shimomura (2001), c'est le cas lorsqu'on utilise le modèle « Smagorinsky + Clark »

$$\tau_{ij} = -2C_d \widetilde{\Delta}^2 \|\widetilde{\mathbf{S}}\| \widetilde{S}_{ij} + \frac{\widetilde{\Delta}^2}{12} \frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \widetilde{u_j}}{\partial x_k}, \quad (\text{F.3})$$

$$T_{ij} = -2C_d \widehat{\widetilde{\Delta}}^2 \|\widehat{\widetilde{\mathbf{S}}}\| \widehat{\widetilde{S}}_{ij} + \frac{\widehat{\widetilde{\Delta}}^2}{12} \frac{\partial \widehat{\widetilde{u_i}}}{\partial x_k} \frac{\partial \widehat{\widetilde{u_j}}}{\partial x_k}, \quad (\text{F.4})$$

ce qui permet d'obtenir une formule d'évaluation dynamique de la constante C_d de formulation identique dans tous les référentiels.

Lorsque le modèle pour τ_{ij} et T_{ij} est uniquement le modèle de Smagorinsky :

$$\tau_{ij} = -2C_d \widetilde{\Delta}^2 \|\widetilde{\mathbf{S}}\| \widetilde{S}_{ij}, \quad (\text{F.5})$$

$$T_{ij} = -2C_d \widehat{\widetilde{\Delta}}^2 \|\widehat{\widetilde{\mathbf{S}}}\| \widehat{\widetilde{S}}_{ij}, \quad (\text{F.6})$$

l'évaluation dynamique de la constante n'est plus invariante par changement de référentiel. En effet, la consistance du modèle par changement de référentiel implique :

$$\mathcal{L}_{ij}^* + Z_{ij}^* = C_d M_{ij}^*,$$

avec M_{ij}^* défini par (4.98). Ce terme objectif ne fait apparaître aucun terme supplémentaire lorsque la relation (F.1) est exprimée dans un référentiel non galiléen. Au contraire, le tenseur $\mathcal{L}_{ij}$ n'est pas modélisé mais exactement calculé. Dans un autre référentiel, il correspond à $\mathcal{L}_{ij} + Z_{ij}^*$, avec Z_{ij}^* défini par l'équation (4.87) dans laquelle l'opérateur « $\sim$ » est remplacé par le filtrage test « $\hat{\cdot}$ » et $\mathbf{u}$ est remplacé par $\tilde{\mathbf{u}}$. À l'instar de $\mathcal{L}_{ij}^*$, ce terme non inertiel peut être calculé en appliquant le filtre test explicite au champ $\tilde{\mathbf{u}}$ résolu.

La procédure de minimisation de Lilly (1992) conduit alors à :

$$C_d = \frac{1}{2} \frac{(\mathcal{L}_{ij}^* + Z_{ij}^*) M_{ij}^*}{M_{ij}^* M_{ij}^*}. \quad (\text{F.7})$$

Comme le principe de consistance par changement de référentiel (principe (I) p. 45), unifie les effets de rotation et de courbure constante, la validation du modèle (F.5), (F.7) dans un canal en rotation permettrait de voir si le modèle de Smagorinsky dynamique classiquement utilisé dans le référentiel galiléen est réaliste pour les écoulements courbes. Les simulations de turbulence homogène en rotation de Kobayashi et Shimomura (2001) permettent toutefois d'avoir quelques doutes à cet égard, car les résultats présentés avec ce modèle font apparaître des oscillations non physiques dans la décroissance énergétique de l'écoulement.

Annexe G

Définition alternative de l'échelle caractéristique des structures synthétiques SEM

L'échelle de longueur caractéristique des structures synthétiques SEM :

$$\sigma = \min \left\{ \max \left\{ \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, \max\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\} \right\}, C_\kappa \delta \right\} \quad (\text{G.1})$$

(voir équation 6.10) est construite par Jarrin (2007) de manière plus ou moins empirique, de manière à reproduire le mieux possible les échelles intégrales calculées dans un écoulement de canal plan pleinement développé. En pratique, l'introduction de l'épaisseur de la couche limite δ dans le modèle peut poser problème pour des applications complexes. Pourtant, ce clipping est actif sur une très large partie centrale du canal. Ici, on propose une formulation alternative de l'échelle de longueur σ , qui pourrait être utilisée pour des applications complexes.

Un résultat important en turbulence, lié au mécanisme de cascade d'énergie, est que le montant d'énergie dissipée est connu dès les grandes échelles de l'écoulement. Ainsi, dans la première phase de décroissance d'une THI, on a :

$$\varepsilon \approx \frac{\overline{u'^2}^{3/2}}{L_\parallel}. \quad (\text{G.2})$$

Cette relation semble une bonne base pour fixer l'échelle caractéristique σ , en utilisant la relation (6.7). Pourtant, une limitation de (6.7) est que les échelles longitudinales $L_\parallel$ et transversales $L_\perp$ sont les mêmes, alors qu'on sait qu'en THI on a (équation 2.33) :

$$L_\parallel = 2L_\perp. \quad (\text{G.3})$$

On ne peut donc pas utiliser directement (6.7) pour définir σ . On propose ici de calculer σ de manière à ce que la moyenne arithmétique des échelles intégrales de la SEM en THI (voir équation 6.7) :

$$\frac{L_\parallel + 2L_\perp}{3} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f \right)^2}_{=3/2 \text{ d'après (6.5)}} \sigma, \quad (\text{G.4})$$

correspondre à celle observée pendant la première phase de décroissance énergétique d'une THI, d'après (G.2) et (G.3) :

$$\frac{L_\parallel + 2L_\perp}{3} = \frac{2}{3} \frac{\overline{u'^2}^{3/2}}{\varepsilon}. \quad (\text{G.5})$$

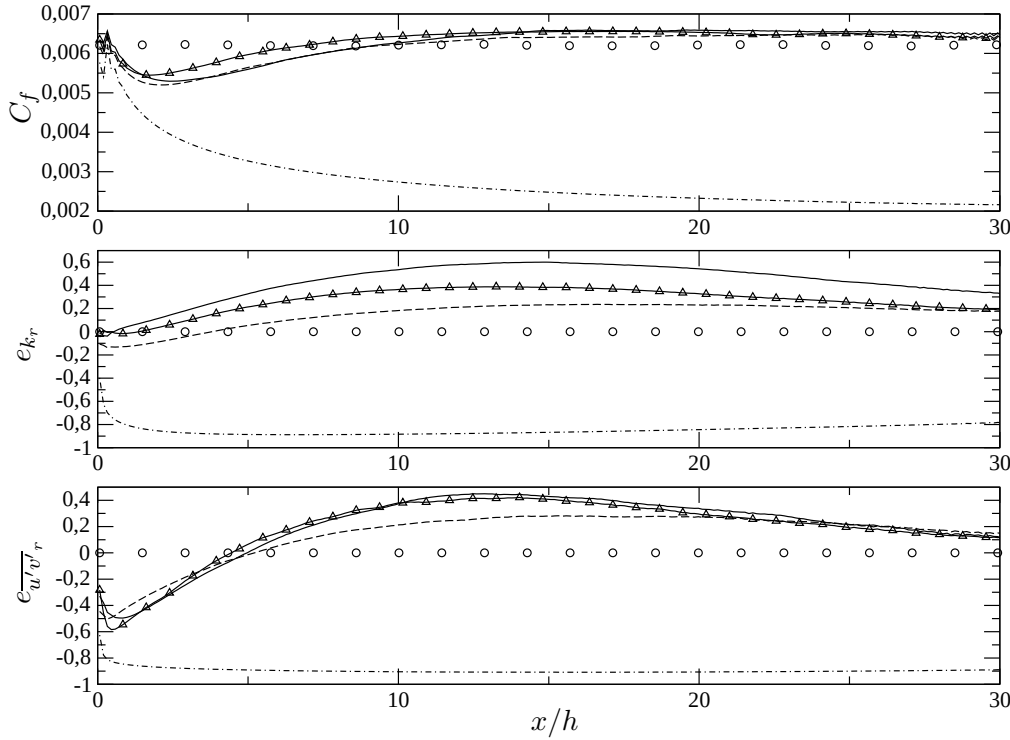


FIGURE G.1 – Développement de la turbulence dans le domaine LES, calculs chaînés EB-RSM/Smagorinsky. Influence de l'échelle de longueur σ_i . Canal plan, $Re_b = 7000$. $\circ$: LES périodique de référence; $\triangle$: échelle de longueur (6.17); échelle de longueur (G.7) pour $---$: $C = 0.1$; $- \cdot -$: $C = 0.5$; $---$: $C = 1$.

En égalisant les seconds membres de (G.4) et (G.5), on trouve :

$$\sigma \approx 0.5 \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}. \quad (\text{G.6})$$

Concernant la borne supérieure introduite dans (G.1), on peut noter que les lois universelles en proche paroi permettent de déduire que $C_\kappa \delta$ est une borne supérieure pour la longueur de mélange $C_\mu^{3/4} k^{3/2} / \varepsilon$ et non pas pour l'échelle de longueur $k^{3/2} / \varepsilon$, qui se comporte quant à elle comme $k^{3/2} / \varepsilon \approx C_L y$, avec $C_L \approx 2.5$ dans une couche limite (voir Pope, 2006, p. 288). On pourrait introduire $0.5 C_L \delta$ comme borne supérieure de (G.6). Cependant, cette borne n'est jamais atteinte dans un canal et l'épaisseur de la couche limite est difficile à évaluer pour des écoulements complexes. En généralisant (G.6) au cas anisotrope et en introduisant la borne inférieure des pas d'espace du maillage, la définition alternative proposée pour les échelles caractéristiques σ_i des structures SEM est :

$$\sigma_i = \max \left\{ C \frac{(\frac{3}{2} \overline{u_i'^2})^{3/2}}{\varepsilon}, \Delta_i \right\}, \quad (\text{G.7})$$

avec $C = 0.5$.

La figure G.1 donne un aperçu du développement de l'écoulement dans un canal lorsque cette échelle est utilisée. Les courbes obtenues s'il on a $C = 0.1$ ou $C = 1$, au lieu de $C = 0.5$, dans (G.7) sont ajoutées pour comparaison, de même que celles obtenues lorsque σ_i est définie par (6.17). En dehors de la définition de l'échelle de longueur, les simulations sont exactement identiques au cas de couplage anisotrope ASAL présenté au paragraphe 6.2.2 (p. 142).

On voit que la définition (G.7) permet un développement satisfaisant de la turbulence dans le domaine LES. L'amortissement du coefficient de frottement pour $x/h < 10$ est légèrement plus important qu'avec l'échelle (6.17) mais la surestimation des contraintes de Reynolds pendant tout le transitoire vers un écoulement pleinement développé est réduite significativement. On voit également que si la définition (G.7) est utilisée pour $C = 0.1$, l'écoulement laminarise quasiment complètement, ce qui confirme que des grandes échelles génèrent plus facilement, par effets inertiels, un spectre continu d'énergie et une turbulence développée que des petites échelles, qui se dissipent sans avoir créé de plus grands tourbillons. Un résultat analogue ressort des tests *a priori* de Keating *et al.* (2004), qui utilisent pour ce faire un filtrage passe-haut ou passe-bas de calcul LES périodique pré-curseur comme condition d'entrée. Pour $C = 1$, la turbulence se développe mais au prix d'une surestimation importante des contraintes normales sur une longue distance en aval de l'entrée. L'analyse ci-dessus, basée sur les échelles intégrales en THI, conduit à $C \approx 0.5$, une valeur qui semble donc dans la bonne « fourchette ».

La définition (G.7) des échelles caractéristiques σ_i pourrait donc être une alternative à la formulation (6.17), construite comme généralisation de l'échelle isotrope (G.1) proposée par Jarrin *et al.* (2009) et qui demande à connaître l'épaisseur de la couche limite δ de l'écoulement.

Annexe H

Propositions de forçages linéaires couplés vitesse–température

On a mentionné au paragraphe 7.4.1 que le forçage des flux thermiques turbulents était instable lorsque le forçage dynamique ALF était conservé inchangé par rapport à un cas sans transfert thermique. On propose ici trois formulations de forçages dynamique et thermique dans lesquelles le forçage dynamique est modifié de manière à tenir compte des contraintes imposées par la thermique. Des trois propositions, c'est la troisième qui nous semble la plus prometteuse.

Proposition 1

Le premier forçage linéaire couplé vitesse–température qu'on peut proposer s'écrit sous la forme générale (comme au paragraphe 7.4.1, les termes sources f_i^u et h^θ sont introduits respectivement au bilan de quantité de mouvement filtré 7.75 et dans l'équation de transport de la température 7.75) :

$$f_i^u = A_{ij}\tilde{u}_j + B_i, \quad (\text{H.1})$$

$$h^\theta = s\tilde{T} + q. \quad (\text{H.2})$$

Dans ce forçage, A_{ij} est un tenseur d'ordre deux quelconque (non symétrique, à l'inverse du tenseur A_{ij} du forçage ALF – voir paragraphe 7.1.3), B_i un vecteur et s et q deux scalaires. f_i^u et h^θ contiennent alors quatorze coefficients libres. En exprimant les contributions de f_i^u et h^θ aux bilans de $\overline{u'_i u'_{j_r}}$, $\overline{\theta u'_{i_r}}$, $\overline{\theta^2_r}$, $\langle \tilde{u}_i \rangle$ et $\langle \tilde{T} \rangle$ comme des termes de relaxation, il vient :

$$2s\overline{\theta^2_r} = \frac{1}{\tau_{t2}}(\overline{\theta^2_r}^\dagger - \overline{\theta^2_r}), \quad (\text{H.3})$$

$$A_{ik}\overline{u'_j u'_{k_r}} + A_{jk}\overline{u'_i u'_{k_r}} = \frac{1}{\tau_r}(\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger - \overline{u'_i u'_{j_r}}), \quad (\text{H.4})$$

$$(A_{ij} + s\delta_{ij})\overline{\theta u'_{j_r}} = \frac{1}{\tau_{tv}}(\overline{\theta u'_{i_r}}^\dagger - \overline{\theta u'_{i_r}}), \quad (\text{H.5})$$

$$A_{ij}\langle \tilde{u}_j \rangle + B_i = \frac{1}{\tau_v}(\overline{u_i}^\dagger - \langle \tilde{u}_i \rangle), \quad (\text{H.6})$$

$$s\langle \tilde{T} \rangle + q = \frac{1}{\tau_t}(\overline{T}^\dagger - \langle \tilde{T} \rangle), \quad (\text{H.7})$$

avec τ_v , τ_t , τ_r , τ_{t2} et τ_{tv} des temps de relaxation à prescrire. Ces équations déterminent implicitement les coefficients des forces f_i^u et h^θ . L'équation (H.3) est indépendante tandis que les équations (H.4) et (H.5) définissent un système de neuf équations couplées, dont

les inconnues sont les coefficients A_{ij} . Un soin particulier devrait être apporté à la numérotation des inconnues pour que la matrice de ce système soit correctement conditionnée, ou du moins inversible.

Proposition 2

Le second forçage couplé vitesse–température envisagé s’écrit sous la forme générale :

$$f_i^u = A_{ij}\tilde{u}_j + sp_i\tilde{T} + B_i, \quad (\text{H.8})$$

$$h^\theta = R_i\tilde{u}_i + q. \quad (\text{H.9})$$

avec A_{ij} un tenseur symétrique, B_i et R_i deux vecteurs, s et q deux scalaires et p_i un vecteur choisi arbitrairement ($p_i = \delta_{ii}$ ou $p_i = g_i$, avec g_i le vecteur gravité, par exemple). f_i^u et h^θ contiennent alors quatorze coefficients libres. On voit que le forçage dynamique dépend de la température. Par conséquent, ce forçage semble plus adapté à des écoulements de convection mixte ou naturelle, pour lesquels le terme de flottabilité (deuxième terme) au membre de droite (7.75) est pris en compte. Pour des écoulements de convection forcée, pour lesquels le terme de flottabilité est négligeable, l’introduction de la température au bilan de quantité de mouvement est moins naturelle. En exprimant les contributions de f_i^u et h^θ aux bilans de $\overline{u'_i u'_{j_r}}$, $\overline{\theta u'_{i_r}}$, $\overline{\theta^2_r}$, $\langle \tilde{u}_i \rangle$ et $\langle \tilde{T} \rangle$ comme des termes de relaxation, il vient :

$$A_{ik}\overline{u'_j u'_{k_r}} + A_{jk}\overline{u'_i u'_{k_r}} + s(p_i\overline{\theta u'_{j_r}} + p_j\overline{\theta u'_{i_r}}) = \frac{1}{\tau_r}(\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger - \overline{u'_i u'_{j_r}}), \quad (\text{H.10})$$

$$R_j\overline{u'_i u'_{j_r}} + A_{ij}\overline{\theta u'_{j_r}} + sp_i\overline{\theta^2_r} = \frac{1}{\tau_{tv}}(\overline{\theta u'_{i_r}}^\dagger - \overline{\theta u'_{i_r}}), \quad (\text{H.11})$$

$$2R_i\overline{\theta u'_{i_r}} = \frac{1}{\tau_{t2}}(\overline{\theta^2_r}^\dagger - \overline{\theta^2_r}), \quad (\text{H.12})$$

$$A_{ij}\langle \tilde{u}_j \rangle + sp_i\langle \tilde{T} \rangle + B_i = \frac{1}{\tau_v}(\overline{u_i}^\dagger - \langle \tilde{u}_i \rangle), \quad (\text{H.13})$$

$$R_i\langle \tilde{u}_i \rangle + q = \frac{1}{\tau_t}(\overline{T}^\dagger - \langle \tilde{T} \rangle). \quad (\text{H.14})$$

Les équations (H.10)–(H.12) définissent un système de dix équations couplées, dont les inconnues sont les coefficients A_{ij} , R_i et s . On peut noter que les termes introduits par ce forçage dans les équations de transport de $\overline{u'_i u'_{j_r}}$, $\overline{\theta u'_{i_r}}$ et $\overline{\theta^2_r}$ sont structurellement identiques à ceux qui existent déjà dans les équations exactes, avec A_{ij} jouant un rôle analogue à celui du tenseur gradient de vitesse moyenne, R_i analogue au gradient de température moyenne et sp_i analogue au vecteur gravité.

Proposition 3

Le dernier forçage couplé vitesse–température (sans doute le plus prometteur) s’écrit sous la forme générale :

$$f_i^u = A_{ij}\tilde{u}_j + R_i\tilde{T} + B_i, \quad (\text{H.15})$$

$$h^\theta = R_i\tilde{u}_i + s\tilde{T} + q, \quad (\text{H.16})$$

avec A_{ij} symétrique. Ce forçage contient quatorze degrés de liberté.

Suivant une démarche analogue à la généralisation de la SEM pour la thermique, ce forçage représente une généralisation à « quatre dimensions » du forçage dynamique tridimensionnel ALF. En effet, avec les définitions :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^u \\ h^\theta \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^T & s \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ q \end{pmatrix},$$

les termes introduits dans les bilans de $\langle \tilde{u}_i \rangle$, $\langle \tilde{T} \rangle$, $\overline{u'_i u'_{j_r}}$, $\overline{\theta u'_{i_r}}$ et $\overline{\theta^2_r}$ par ce forçage peuvent être définis comme des termes de relaxation suivant la formule :

$$\mathfrak{A}_{ik} \mathfrak{R}_{jk} + \mathfrak{A}_{jk} \mathfrak{R}_{ik} = \frac{1}{\tau} (\mathfrak{R}_{ij}^\dagger - \mathfrak{R}_{ij}), \quad (\text{H.17})$$

$$\mathfrak{B}_i = \frac{1}{\tau} (\overline{u_i}^\dagger - \langle u_i \rangle) - \mathfrak{A}_{ij} \langle u_j \rangle, \quad (\text{H.18})$$

avec $\mathfrak{R}_{ij}$ la matrice introduite au paragraphe 6.4.1. Ce système est écrit ici sous une forme symbolique, dans la mesure où des temps de relaxation τ_v , τ_t , τ_r , τ_{tv} et τ_{t2} différents peuvent être utilisés pour le forçage de $\langle \tilde{u}_i \rangle$, $\langle \tilde{T} \rangle$, $\overline{u'_i u'_{j_r}}$, $\overline{\theta u'_{i_r}}$ et $\overline{\theta^2_r}$. On voit que ce système est tout à fait similaire au système (7.17) du forçage ALF, dont l'inversion ne pose aucun problème de stabilité, comme les nombreux cas de validation envisagés au chapitre 7 le montrent. Pour $R_i = 0$, le forçage ALF+TLF, validé au paragraphe 7.4.2, est recouvré.

Annexe I

Publications

I.1 Toward zonal hybrid RANS/LES modelling of turbulence in rotating flows

Publication présentée au congrès *9th European Turbomachinery Conference* (21–25 mars 2011, Istanbul, Turquie)

TOWARD ZONAL HYBRID RANS/LES MODELLING OF TURBULENCE IN ROTATING FLOWS

B. de Laage de Meux¹ - B. Audebert¹ - R. Manceau²

¹Mécanique des Fluides, Energie, Environnement (MFEE), EDF R&D, Chatou, France,
benoit.de-laage-de-meux@edf.fr, bruno.audebert@edf.fr

²Institute Pprime, Department of Fluid Flow, Heat Transfer and Combustion, CNRS–University of
Poitiers–ENSMA, Poitiers, France, remi.manceau@univ-poitiers.fr

ABSTRACT

Industrial studies of rotating machinery are concerned with very large computational domain and a careful attention to numerous unsteady phenomena can be required in some specific regions. For this type of applications, a zonal coupling between RANS (Reynolds Average Navier-Stokes) and LES (Large Eddy Simulation) is proposed in the present paper, based on state of the art turbulence models for rotating flows and recent developments in near-wall turbulence modelling and in RANS/LES coupling. As a preliminary study, spanwise rotating channel flows are used for a systematic comparison of various RANS and LES models. Then the Synthetic-Eddy Method is used for the interface conditions between the upstream RANS and downstream LES domains. Hybrid RANS/LES computations of rotating channel flows are performed and the sensitivity to rotation of the upstream RANS model is shown to have a major influence on the development of turbulence in the LES region.

NOMENCLATURE

ϵ_{ijk}	permutation tensor	U_b	bulk velocity
Δ_i	grid spacing	Re_τ, Re_b	Reynolds number based on friction, bulk velocity ; $Re_\tau = u_\tau \delta / \nu$, $Re_b = U_b \delta / \nu$
δ	boundary layer thickness / half channel width	Ro_τ, Ro_b	rotation number based on friction, bulk velocity ; $Ro_\tau = 2\Omega\delta / u_\tau$, $Ro_b = 2\Omega\delta / U_b$
Ω, Ω_i	rotation rate, rotation vector ; $\Omega = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2}$	Operators:	
ν	dynamic viscosity coefficient	$\bar{f}$	mean part of the field f (RANS region)
u_i	velocity	$\langle f \rangle$	mean part of the field f (LES region)
k, k_R	turbulent kinetic energy, resolved turbulent kinetic energy	f'	fluctuating part of the field f
ϵ	turbulent dissipation rate	$\tilde{f}$	large scale part of the field f
$u_\tau, u_\tau^{(p)}, u_\tau^{(s)}$	global, pressure side, suction side friction velocity ; $u_\tau = \sqrt{\frac{1}{2}(u_\tau^{(p)2} + u_\tau^{(s)2})}$	Superscript:	
		$+, +^{(p)}, +^{(s)}$	wall coordinate: global, at pressure side, at suction side ; $d^+ = u_\tau d / \nu$

INTRODUCTION

System rotation and streamline curvature are the main characteristics of turbomachinery flows and these two phenomena strongly affect the turbulence characteristics: the energy transfer between the different scales of turbulence is modified, with a tendency toward two-dimensional turbulence (Cambon et al., 1997), and the combination of rotation with shear is either stabilising or destabilising (Tritton, 1992). The latter effect is of particular importance for the rotating wall-bounded flows encountered in the turbomachinery field. However, in turbomachinery engineering, some standard turbulence models are often use, without addressing the question of their applicability for rotating and curved flows. A clarification on the state of the art turbulence models that successfully reproduce the effects of rotation and curvature is then useful. While most of the numerical studies on hydraulic machines use a statistical (RANS) description of turbulence (Rocklawski and Hellmann, 2006, for instance), some large eddy simulations (LES) are also reported (Byskov et al., 2003). Both approaches will be investigated

in the first part of the paper by performing a comparison of numerous models on the spanwise rotating channel test case, which representativeness of radial machinery flows is briefly discussed.

In the second part of the paper, a zonal hybrid RANS/LES modelling of turbulence for rotating flows is evaluated. The hybridisation is a promising way to capture unsteady phenomena with a numerical cost lower than LES. While some global hybrid computations have recently been applied for turbomachinery flows (Lucius and Brenner, 2010, for instance), the investigated hybrid method is zonal, in the sense that it is based on communications between separated RANS and LES formulations, each one acting on its respective domain. The Synthetic-Eddy Method (Jarrin et al., 2006) will be used for interfacing the upstream RANS and downstream LES domains, and relevant turbulence models are selected in each region according to the first part of the paper. Promising results are obtained for rotating channel flows with this coupling procedure.

All simulations presented in the paper were performed with the unstructured collocated finite-volume code *Code_Saturne* (Archambeau et al., 2004), developed at EDF R&D and freely available as an open source code (www.code-saturne.org).

STUDY OF TURBULENCE MODELS SENSITIVE TO ROTATION

In this section, the spanwise rotating channel test case is used to evaluate the performance of numerous turbulence models for turbomachinery applications.

In practice, the flow is computed in the relative frame of reference rotating with the channel at rate Ω . Therefore, all tensorial quantities entering in the turbulence closure must be expressed in this non-inertial frame of reference. In particular the absolute vorticity tensor

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \epsilon_{ikj} \Omega_k, \quad (1)$$

must be considered.

As noted by Johnston (1998), this simple flow configuration, similar to the one encountered in radial rotors, involves a major influence of the Coriolis force and is appropriate for the study of stability of the boundary layer of rotating flows. While the author has shown that the relevant parameter $Ro_b = 2\Omega\delta/U_b$, named the rotation number, is expected to be relatively small ($Ro_b \leq 0.2$) in turbomachines, numerical data of Lamballais et al. (1998) and Grundestam et al. (2008) stemming from direct simulations of all the scales of turbulence (DNS) also cover some much larger rotation numbers, which may appear in off-design conditions, in the presence of large separation for instance.

The effects of streamline curvature, which are of importance in the turbomachinery field, are the same as those of rotation, because there is a close analogy between streamline curvature and rotation, considering the rotation of the local curvilinear coordinates with regard to the coordinates of the reference frame (Spalart and Shur, 1997). However, a modelled effective measure of streamline curvature is required for sensitising a turbulence model to curvature, and this specific issue is not addressed in the rotating channel test case computed in the rotating frame of reference. The pressure gradient due to the diverging blade passages in turbomachines is not taken into account either in this test case.

RANS modelling

It is important to note that linear eddy-viscosity type RANS models are originally not sensitive to rotation and curvature. Indeed, the linear eddy-viscosity assumption states that the anisotropy of turbulence is aligned with the strain rate tensor, independently of the presence or not of rotation/curvature. The eddy-viscosity itself is not affected by rotation or curvature since neither streamline curvature nor Coriolis force produce or decrease energy (they act orthogonally to the flow), such that no direct effects of rotation/curvature on turbulence can be accounted for by linear eddy-viscosity models. On the contrary, with second moment closures, no hypothesis is made on the anisotropy of turbulence, making them the appropriate modelling level to account for complex effects of rotation and curvature on

turbulence. Actually, the additional terms arising in the Reynolds stress transport equation in a rotating or curvilinear coordinate frame come from the material derivative and the production terms. Since these terms do not require modelling in the second moment closures, an intrinsic sensitivity to rotation and curvature is provided. Nonetheless, only a few numerical studies on turbomachinery (Marty et al., 2009, for instance) have used a second moment closure while most of them are concerned with linear eddy-viscosity turbulence models.

To overcome the deficiencies of linear eddy-viscosity models for rotation and curvature (RC), some corrections are also proposed in the literature. In the present study, the Spalart and Shur (1997), Cazal-bou et al. (2005) and Pettersson Reif et al. (1999) RC corrections are selected for evaluation. While the latter has been designed in order to replicate the behaviour of a second moment closure in the presence of background rotation, the latter two are more empirical, using, in their formulations, a generalisation of the stability criterion for rotating/curved shear flows, and they have been successfully implemented on industrial geometries by Dufour et al. (2008). As concerns the second moment closure, despite its intrinsic sensitivity to RC, the unknown correlations in the Reynolds-stress transport equation require a careful attention for the model to provide realistic predictions. In addition to the popular LRR (Launder et al., 1975) and SSG (Speziale et al., 1991) models, the Elliptic-Blending Reynolds-Stress Model (EBRSM) of Manceau and Hanjalić (2002), using an appropriate wall treatment, is considered. This model is based on a blending of the SSG model and a near-wall model satisfying asymptotic behaviours of the velocity–pressure-gradient correlation. The blending coefficient α is given by an additional elliptic equation

$$\alpha - L_p^2 \nabla^2 \alpha = 1, \quad (2)$$

where L_p is a turbulent length-scale valid in the whole domain.

Figure 1 shows the mean velocity profiles predicted by LRR and SSG second moment closure at Reynolds number $Re_\tau = 1500$ and rotation number $Ro_\tau = 5$. Assuming that the flow is in neutral stability in the core of the channel, straight lines indicate the theoretical slope suggested by the bifurcation diagram of equilibrium states of each model for turbulent homogeneous rotating shear flows (Speziale and Mac Giolla Mhuiris, 1989). It can be seen that the results agree fairly well with the equilibrium state analysis, and that, as expected, the SSG model is better suited to rotating cases, since it approaches the exact 2Ω slope (see, for instance, Kristoffersen and Andersson, 1993). In Figure 2, the blending function α of EBRSM closure is plotted for several rotation rates. The blending function goes to one in the core of the channel, indicating that the SSG model is exactly recovered in this region, such that the EBRSM satisfies the same bifurcation diagram as the SSG model.

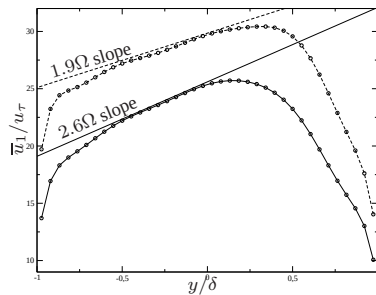


Figure 1: **Mean velocity profiles.** $Re_\tau = 1500$ and $Ro_\tau = 5$. LRR model (solid line) and SSG model (dashed line, profile shifted). Theoretical slopes in the core of the channel are also shown.

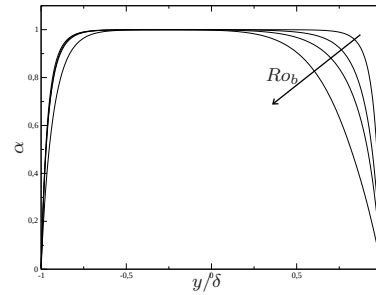


Figure 2: **Blending function α of the EBRSM.** $Re_b = 7000$ and $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$.

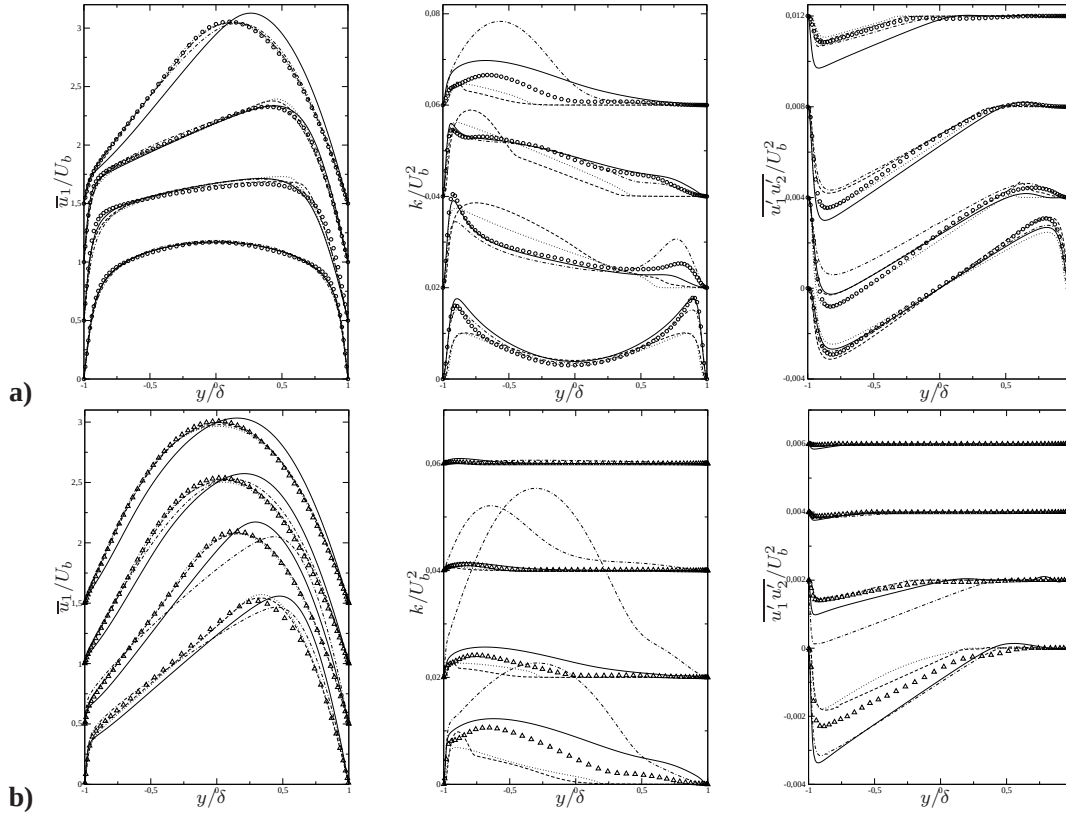


Figure 3: **Mean velocity (left), turbulent kinetic energy (center) and Reynolds shear stress (right).** **a)** $Re_b = 2500$ with $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$ and **b)** $Re_\tau = 180$ with $Ro_b = 0.98, 1.50, 2.06, 2.49$ (on each graph, profiles shifted to top as Ro_b increases). DNS (symbols), EBRSM (solid line), SS-SST (dashed line), PR- $\phi - f$ (dash-dotted line) and C-LS (dotted line).

In Figure 3, the DNS data of Lamballais et al. (1998) and Grundestam et al. (2008) are used to compare various rotation-sensitive RANS models. These two databases cover a wide range of rotation rates up to complete laminarisation of the flow, and two Reynolds numbers: $Re_b = 2500$ for the former and $Re_\tau = 180$ for the latter. One of the aims of these computations is to determine which RC-corrected eddy-viscosity models could be interesting alternatives to Reynolds stress models for rotating flows. The three RC corrections mentioned above have been tested with three eddy-viscosity models: the low-Reynolds number $k - \varepsilon$ model of Launder and Sharma (1974) (LS), the $k - \omega$ SST model of Menter (1994) and the so-called *code-friendly* $\phi - f$ formulation of the elliptic relaxation V2F model (Laurence et al., 2004). The nine possible associations of RC corrections and eddy-viscosity models were tested, and, for each RC correction, only the results obtained with their best partner are shown in Figure 3, i.e., the SST model for the Spalart-Shur correction (SS-SST), the $\phi - f$ model for the Petersson Reif correction (PR- $\phi - f$) and the LS model for the Cazalbou correction (C-LS). The results of EBRSM (without any specific RC correction) are plotted as well. For moderate and intermediate rotation numbers (up to $Ro_b = 0.5$), these three RC sensitive RANS closure provide fairly good representation of the mean flow. On the other hand, turbulent kinetic energy predictions are very inaccurate with SS-SST and C-LS. The best overall agreement is obtained with the EBRSM for these rotation numbers. For high ($Ro_b = 0.98, 1.5$) and very high ($Ro_b = 2.06, 2.49$) rotation rates, the tendency toward a Poiseuille-type velocity profile is better captured with SS-SST and C-LS models. The EBRSM reproduces the correct 2Ω -slope up to $Ro_b = 1.5$, but the laminarisation at the suction

side ($y/\delta = 1$) is underpredicted at these high rotation numbers. This results could be improved by sensitising the turbulent length scale L_p (see equation 2) to rotation through the absolute mean vorticity (equation 1). However, similarly to cases at low rotation rates, the turbulent kinetic energy is better predicted with the EBRSM at high rotation rate. It can also be seen that the SS-SST and C-LS kinetic energy profiles are not always physically meaningful. As concerns the PR- $\phi - f$ model, the results are satisfactory up to $Ro_b = 0.5$, but the predictions are severely deteriorated for higher rotation rates.

It can be concluded that the EBRSM is appropriate for RANS computations of rotating turbulent flows. Firstly, in second moment closures, Coriolis effects can be intrinsically accounted for, without any *ad hoc* correction. Moreover, the elliptic-blending near-wall approach preserves the consistency of the SSG model with linear stability theory and provides physically meaningful predictions of turbulent quantities at all rotation rates. As an alternative, a RC corrected eddy-viscosity model can be used, and according to the results shown above, the Spalart and Shur (1997) correction used with SST model can be recommended, since it provides good predictions of the mean flow and quantitatively acceptable estimates of the turbulent quantities. As a consequence, EBRSM and SS-SST are the two models used in the RANS region for hybrid RANS/LES computations presented in the following of the paper.

LES modelling

For some turbomachinery applications, a very fine and unsteady description of the turbulence is of great interest, at least in some specific regions where the statistical fields provided by a RANS computation are insufficient. LES is then a more relevant approach.

The performance of LES for rotating flows is thus examined, aiming at selecting an appropriate subgrid scale (SGS) model. The Smagorinsky model (Smagorinsky, 1963) and various versions of the dynamic Smagorinsky model are evaluated, the latter differing from the former by the fact that the coefficient that scales the amount of energy transferred between resolved and subgrid scales is variable, adjusting itself dynamically to the flow. The WALE model of Nicoud and Ducros (1999), mainly designed for an appropriate near-wall modelling, but also providing the model with a sensitivity to vorticity, is also discussed. These models are evaluated against the highly-resolved LES of Lamballais et al. (1998) at $Re_b = 7000$, for rotation numbers $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$. The present simulations are performed in the same $x-z$ -periodic box of dimension $2\pi\delta \times 2\delta \times \pi\delta$ as the reference LES. The mesh consists of $122 \times 102 \times 122$ cells, which corresponds, for the non-rotating case, to $\Delta_1^+ \simeq 20$, $\Delta_3^+ \simeq 10$, $\Delta_{2\min}^+ \simeq 1$ (at the wall), with eight nodes in the $y^+ < 10$ region, and $\Delta_{2\max}^+ \simeq 11.5$ at the centre of the channel.

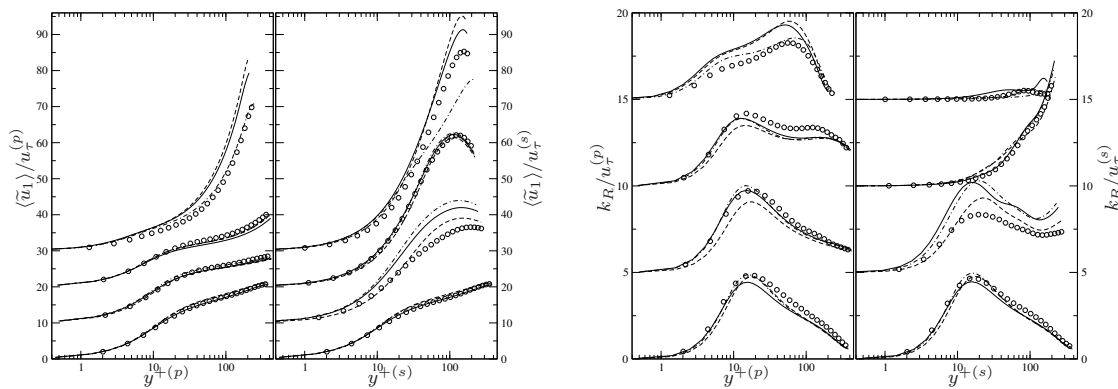


Figure 4: Mean resolved velocity (left) and turbulent kinetic energy (right) in wall coordinates at pressure (p) (resp. suction (s)) side of the channel. $Re_b = 7000$ with $Ro_b = 0, 1/6, 0.5, 1.5$ (profiles shifted upwards as Ro_b increases). Reference LES (symbols), Smagorinsky model (solid line), L-DS model (dashed line), WALE model (dash-dotted line).

Figure 4 shows the mean resolved velocity and turbulent kinetic energy obtained with three SGS models: the Smagorinsky model, a local dynamic Smagorinsky model (L-DS model, see the discussion in the following of the paper) and the WALE model. Profiles at the pressure (p) and suction (s) sides of the channel are normalised by their respective local friction velocity $u_\tau^{(p)}$ and $u_\tau^{(s)}$. Each model shows a satisfactory agreement, at least up to $Ro_b = 0.5$, which can be explained by the fact that mainly the large - resolved - scales are affected by the Coriolis force (Cambon et al., 1997), such that the simple Smagorinsky model is often satisfactory for rotating flows, although, unlike the WALE model, it is independent of the rotation rate, and, unlike the dynamic model, the use of a constant coefficient could lead to a misprediction of laminarisation. Therefore, for simplicity, the Smagorinsky model is selected for the next section dedicated to the hybrid RANS/LES method.

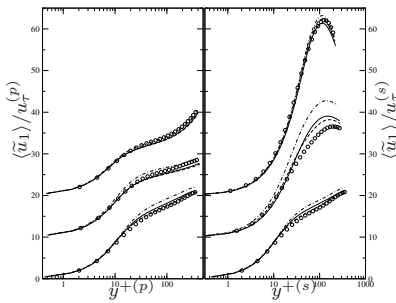


Figure 5: Mean resolved velocity in wall coordinates (left) and turbulent kinetic energy in global coordinates (right). $Re_b = 7000$ with $Ro_b = 0, 1/6, 0.5$ (profiles shifted upwards as Ro_b increases). Reference LES (symbols), PA-DS model (dash-dotted lines), PL-DS model (dashed lines) and L-DS model (solid lines).

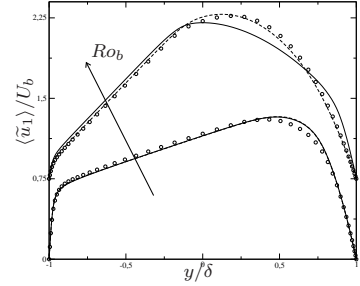
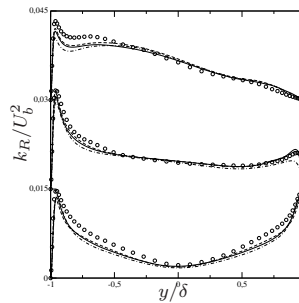


Figure 6: Mean resolved velocity in global coordinates. $Re_b = 7000$ with $Ro_b = 0.5, 1.5$. Reference LES (symbols), NI-WALE model (dashed line) and WALE model (solid line).

Two specific features of the results shown in Figure 4 are now examined a little closer. Firstly, it appears that a challenging issue for LES is the prediction of the moderate laminarisation occurring on the suction side at moderate rotation rate ($Ro_b = 1/6$ here). Large longitudinal roll cells, sometimes referred as Taylor-Görtler vortices, are persistent in this rotation range (Kristoffersen and Andersson, 1993, for instance). It can be observed that, in this case, the dynamic model L-DS reproduces both velocity and kinetic energy profiles better than the other models. It is due to its particular formulation that *locally* evaluates the dynamic coefficient. Actually, the original formulation of Germano et al. (1991) of the dynamic model (PA-DS) is based on averaging in x - and z -directions, based on statistical homogeneity, such that its coefficient is constant in x - z planes, which can be questioned in the presence of persistent roll cells. Figure 5 compares the PA-DS model with two localised versions of the dynamic model: the one proposed by Piomelli and Liu (1995) (PL-DS model) and the L-DS model which corresponds to the straightforward localisation of the PA-DS model where the global plane averaging is replaced by a local averaging on the neighbourhood of each computational cell. The improvement obtained with a localised formulation is clearly visible at the suction side at moderate rotation rates. At higher rotation rates, Taylor-Görtler vortices are less persistent and the advantage of using a localised formulation of the dynamic Smagorinsky model is less pronounced.

Next, Figure 6 emphasises the poor predictions of the WALE model at the high rotation number $Ro_b = 1.5$. Actually, the WALE model is built from the whole velocity gradient tensor, including its anti-symmetric part, that is replaced by the absolute vorticity tensor in a rotating reference frame. Therefore, at high rotation rates, the WALE subgrid-viscosity asymptotically scales with $\Omega^{4.8}$, whereas interscale energy transfers should be blocked under rapid rotation (Cambon et al., 1997). Figure 6 shows the results obtained with the WALE model without the inertial term in the absolute vorticity

tensor (second term on right hand side of 1), referred to as NI-WALE model. The predictions are significantly improved at high rotation numbers, without deteriorating those at lower rotation rates. This modification is equivalent to replacing in the WALE model the vorticity tensor by an objective vorticity tensor, as the one proposed by Astarita (1979). Note that the Astarita tensor is of limited practical interest because it is cumbersome to compute, but a simplified formulation can be obtained using the approximated effective rotation rate tensor proposed by Wallin and Johansson (2002) for instance.

A ZONAL HYBRID RANS/LES METHOD FOR ROTATING FLOWS

Industrial applications are often concerned with high Reynolds numbers flows and a large computational domain. As a result, the LES of such flows is not accessible for most of CFD users, because of its computational cost. For instance, Byskov et al. (2003) consider only two blade passages of a radial rotor for their LES. Some hybrid methodologies have then been developed. To the authors knowledge, only global hybridisations have been attempted for the moment, in the turbomachinery field. With the global approach, the turbulence model is automatically switching from RANS - mainly in the near-wall region - to LES - in regions where the three-dimensional and unsteady turbulent structures can be captured by the mesh. Using such global hybrid modelling, Lucius and Brenner (2010) reported transient computations in a full pump geometry and Martini et al. (2006) a successful application to film cooling in gas turbine.

On the other hand, with the zonal hybrid RANS/LES modelling, RANS and LES act on distinct regions, the separation of which being chosen by the user. Contrary to the global approach, it allows a full control of the switch between the RANS and the LES description of the flow, and also to select a specific, appropriate, turbulence model in each region. The zonal hybridisation is a relevant approach to deal, in a reasonable computational cost, with applications where the unsteady turbulent structures are of interest only in a restricted area of the whole domain of computation. For instance, in the hydraulic turbomachinery field, a RANS computation can be sufficient to capture the large time scale rotor/stator interactions while their coupling with the turbulent structures in a small downstream region would be closely described by LES.

The zonal coupling between an upstream RANS region and a downstream LES region is examined here, in the presence of background rotation. The problem is closely linked to the more general problem of generation of fluctuating inlet boundary conditions for LES. The Synthetic-Eddy Method (SEM), which has shown promising performance compared to other methods (Jarrin et al., 2006) and, contrary to more elaborate approaches (Perret et al., 2006, 2008), only requires flow statistics as input parameters, is used.

Coupling with the Synthetic-Eddy Method

With the SEM, a spatio-temporally coherent inflow is obtained by convecting synthetic eddies in a virtual “box” surrounding the inlet plane. More precisely, based on a macro turbulent length scale σ , target mean velocities $\langle \tilde{u}_i \rangle$ and resolved Reynolds stresses $\langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle - \langle \tilde{u}_i \rangle \langle \tilde{u}_j \rangle$, the SEM computes the fluctuating velocity at the inlet as the sum of the contributions of N eddies, according to the relation

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x}) = \langle \tilde{u}_i(\mathbf{x}) \rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\lambda=1}^N \sum_{j=1}^3 a_{ij}(\mathbf{x}) \epsilon_j^\lambda f_{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda), \quad (3)$$

where $\mathbf{x}$ is a point in the inlet plane, $\mathbf{x}^\lambda$ the location of the eddy λ and (a_{ij}) the Cholesky decomposition of the target resolved stress tensor. ϵ_j^λ and $f_{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda)$ represent the sign and the magnitude, respectively, of the contribution of the eddy λ to the turbulent field at the location $\mathbf{x}$. In particular, the latter depends on the turbulent length scale σ and the distance $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda|$, providing a spacial coherence to the signal. It is worth mentioning that $\epsilon_j^\lambda f_{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\lambda)$ is statistically centred and normalised, such that the SEM preserves the target mean velocity and resolved stress, in the limit of high number of ed-

dies N . Temporal coherence of the signal is obtained by advecting the eddies with a constant velocity. The complete formulation of the SEM is given in Jarrin et al. (2006).

Since the input parameters of the SEM are flow statistics, the method induces a natural RANS to LES zonal coupling, since, based on an upstream RANS computation, it enables the generation of inlet boundary conditions for a downstream LES. This coupling was successfully applied to various flows by Jarrin et al. (2009), who computed the target mean velocity $\langle \tilde{u}_i \rangle$ and resolved stress tensor $\langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle - \langle \tilde{u}_i \rangle \langle \tilde{u}_j \rangle$ from an upstream SST calculation

$$\begin{cases} \langle \tilde{u}_i \rangle = \overline{u_i}, \\ \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle - \langle \tilde{u}_i \rangle \langle \tilde{u}_j \rangle = \overline{u'_i u'_j}. \end{cases}$$

The turbulent length scale σ was also evaluated from the upstream RANS variables as

$$\sigma = \max \left\{ \min \left\{ \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, \kappa \delta \right\}, \Delta \right\}, \quad (4)$$

with $\kappa = 0.41$, δ the thickness of the boundary layer under consideration and $\Delta = \max\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$. The lower bound guarantees that all the eddies are discretised.

When information is available about the turbulence anisotropy, as when coupling with a second moment closure, the SEM can take it into account by replacing the unique turbulent length scale σ by three length scales σ_i . In the present paper, the anisotropic turbulent length scales are computed as

$$\sigma_i = \max \left\{ \min \left\{ \frac{(\frac{3}{2} \overline{u'_i u'_i})^{3/2}}{\varepsilon}, \kappa \delta \right\}, \Delta_i \right\}, \quad (5)$$

resulting in a straightforward generalisation of (4).

Results and discussion

RANS/LES hybrid simulations of the non-rotating and spanwise rotating channel flow are presented. For $x/\delta < 0$, a RANS solution is obtained in a periodic channel and used to generate at $x/\delta = 0$ the inlet conditions of a downstream LES region of size $10\pi\delta \times 2\delta \times \pi\delta$, using the SEM described by (3) with $N = 10^4$.

According to the previous section, we use the Smagorinsky model in the LES region. In the upstream RANS region, both SST and EBRSM models are tested. For the former, the same definition (4) of isotropic length scale σ as Jarrin et al. (2009) is used. For the latter, anisotropic length scales (5) are preferred. Finally, when rotation occurs, the Spalart-Shur eddy-viscosity correction is applied to the SST model. Considering the large number of computations, a moderate Reynolds number $Re_b = 7000$ is considered with a $(\Delta_1^+, \Delta_{2\min}^+, \Delta_3^+) \simeq (50, 2, 15)$ resolution in the LES region. Note that for all the computations presented in the following of the paper, the CPU time required by the SEM never exceeds 0.5% of the total.

The performance of the coupling can be evaluated in the downstream LES region by comparison to the periodic LES, with the same grid resolution: the latter represents the fully developed, homogeneous, flow whereas for hybrid RANS/LES computations, the flow is spatially developing downstream of the inlet of the LES domain and as short as possible a transient is desirable.

Figure 7 presents, for the non-rotating case, the friction coefficient C_f in the LES region, for both SST and EBRSM upstream computations. A rapid development of turbulence, represented by an almost constant value of friction coefficient, is obtained with the SEM, at only $x/\delta \simeq 8$ with the EBRSM, with a maximum discrepancy of about 15%, and at $x/\delta \simeq 12$ for the SST model, with a maximum discrepancy of about 23%. These results are in accordance with those of Jarrin et al. (2009), whose calculations at higher Reynolds numbers moreover reveal that, as a function of the non-dimensional coordinate x^+ , the distance required to reach a developed turbulence state is almost constant, making the SEM well suited for high Reynolds industrial flows. Present computations show

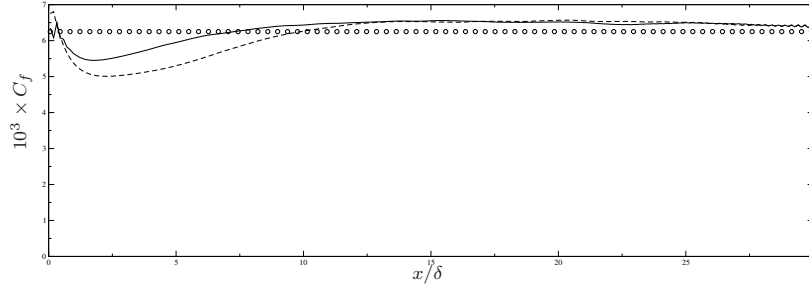


Figure 7: **Friction coefficient along the channel.** $Re_b = 7000$, **non-rotating case.** **Periodic LES (symbols), upstream SST (dashed lines) and upstream EBRSM (solid lines).**

that an even easier development of turbulence is obtained using the second moment EBRSM rather than the eddy-viscosity SST model to generate the inlet conditions for LES. However, it can be noted that the friction coefficient of periodic LES is still not fully recovered at the end of the channel.

Figure 8 shows the evolution of mean resolved velocity along the channel, in the non-rotating case. Again, it can be observed that the coupled simulations rapidly show a good agreement with the periodic LES. At the end of the channel, the reference profile is almost fully recovered and, at intermediate stations $x/\delta = 10$ and $x/\delta = 15$, only a small difference is visible in the log region. Profiles at $x/\delta = 5$ indicate that the SEM clearly takes advantage of the finer EBRSM predictions in the upstream RANS region, enabling a faster development of turbulence. On the other hand, the upstream RANS model has only a slight influence beyond ($x/\delta \geq 10$) in this non-rotating case.

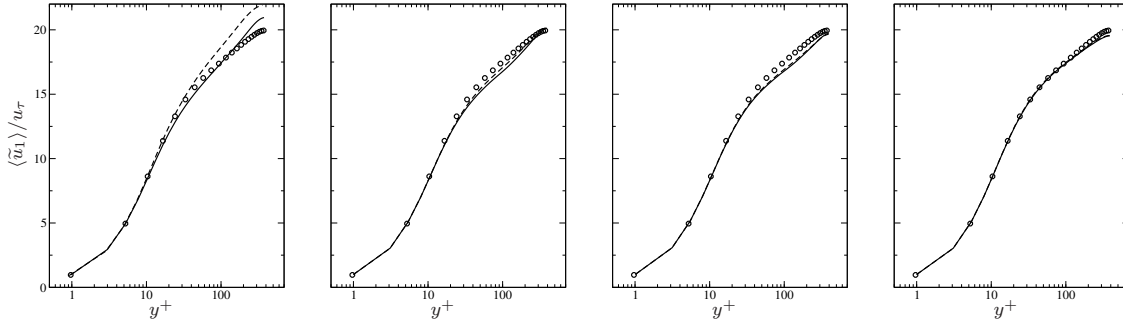


Figure 8: **Mean resolved velocity in wall coordinates at various longitudinal locations (from left to right: $x/\delta = 5, 10, 15, 30$).** $Re_b = 7000$, **non-rotating case.** **Same legends as Figure 7.**

The rotating case is now investigated, using the two rotation numbers $Ro_b = 1/6$ and $Ro_b = 0.5$. The results reported in Figure 9 are very satisfactory, showing a rapid agreement of velocity and resolved turbulent kinetic energy with the reference profiles, especially when coupling with the EBRSM. The upstream RANS computation significantly affects the results in a downstream region longer than in the non-rotating case, in particular at the suction side of the channel. The substantial improvement achieved with the upstream EBRSM is more visible at $Ro_b = 0.5$. On the suction side and at the moderate rotation rate $Ro_b = 1/6$, the upstream SS-SST computation enables a rapid, global agreement with reference velocity profile, although the full convergence toward the periodic profile is very slow. Conversely, with an upstream EBRSM, the periodic profile is recovered in this case as well.

It is important to note that a fine description of the full Reynolds stress tensor in the upstream RANS region is of importance with the present zonal coupling since it enters the SEM formulation through both the length scale of the eddies and the scaling of the fluctuations (a_{ij} tensor in equation 3). This remark is confirmed by the present computations where turbulence development in the downstream

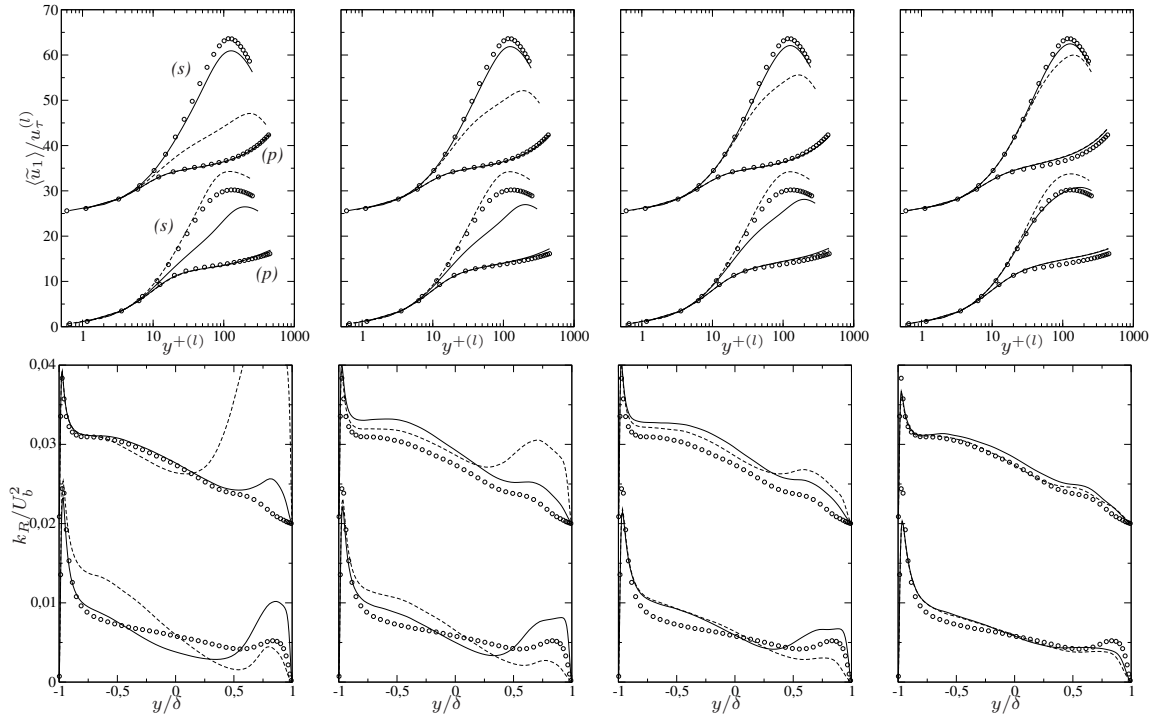


Figure 9: Mean resolved velocity in local (l) wall coordinates (top, $l = p, s$) and resolved kinetic energy in global coordinates (bottom) at various longitudinal locations (from left to right: $x/\delta = 5, 10, 15, 30$). $Re_b = 7000$ with $Ro_b = 1/6, 0.5$ (on each graph, profiles shifted upwards as Ro_b increases). Same legends as Figure 7.

region clearly suffers from the lack of relevance of SS-SST predictions of turbulent quantities. Overall, the zonal coupling between EBRSM and LES using the SEM appears promising for rotating flows.

CONCLUSIONS

Turbulence modelling of rotating flows has been investigated, aiming at enabling industrial studies with unsteady phenomena and a large computational domain for turbomachinery applications. To this end, the present paper suggests as an appropriate modelling the zonal coupling between the EBRSM second moment closure (Manceau and Hanjalić, 2002) and Smagorinsky model for LES, following the RANS/LES coupling procedure initiated by Jarrin et al. (2009).

This proposal results first from a careful evaluation and a systematic confrontation of numerous RANS and LES models for the spanwise rotating channel test case. Various eddy-viscosity corrections for rotation and curvature have been tested and the Spalart and Shur (1997) correction associated with the SST model is preferred. However, improved predictions are obtained with the EBRSM second moment closure, which was shown to be relevant for rotating flows. Concerning LES, the Smagorinsky subgrid scale model appears satisfactory for rotating flows. A specific asset of the dynamic Smagorinsky model and a drawback of the WALE model have also been discussed.

The Synthetic-Eddy Method has then been used as the link between upstream RANS and downstream LES computations, following the procedure proposed by Jarrin et al. (2009). A straightforward extension of the methodology to account for the information about the anisotropy of second moment RANS closures is used. Thus, encouraging results are obtained in the non-rotating and rotating channel test cases by coupling EBRSM second order closure with LES.

The present work constitutes the first steps toward embedded LES for turbomachinery applications

with heat transfers. Current and future work focuses on a forcing procedure to get a closer coupling between RANS and LES, outlet boundary conditions for LES and a generalisation of the Synthetic-Eddy Method to thermal fluctuations.

REFERENCES

- Archambeau, F., Méchitoua, N., Sakiz, M., 2004. *Code_Saturne* : a Finite Volume Code for the Computation of Turbulent Incompressible Flows - Industrial Applications. International Journal on Finite Volumes 1(1).
- Astarita, G., 1979. Objective and generally applicable criteria for flow classification. J. Non Newtonian Fluid Mech. 6.
- Byskov, R., Jacobsen, B., Pedersen, N., 2003. Flow in a centrifugal pump impeller at design and off-design conditions—part II: large eddy simulations. J. Fluid Eng. ASME 125(1), 73–83.
- Cambon, C., Mansour, N., Godefert, F., 1997. Energy transfer in rotating turbulence. J. Fluid Mech. 337, 303–332.
- Cazalbou, J.-B., Chassaing, P., Dufour, G., Carbonneau, X., 2005. Two-equation modeling of turbulent rotating flows. Phys. Fluids 17(5).
- Dufour, G., Cazalbou, J.-B., Carbonneau, X., Chassaing, P., 2008. Assessing rotation/curvature corrections to eddy-viscosity models in the calculations of centrifugal-compressor flows. J. Fluid Eng. ASME 130.
- Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., Cabot, W., 1991. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. Phys. Fluids 3(7).
- Grundestam, O., Wallin, S., Johansson, A., 2008. Direct numerical simulations of rotating turbulent channel flow. J. Fluid Mech. 598, 177–199.
- Jarrin, N., Benhamadouche, S., Laurence, D., Prosser, R., 2006. A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations. Int. J. Heat Fluid Flow 27, 585–593.
- Jarrin, N., Prosser, R., Uribe, J., Benhamadouche, S., Laurence, D., 2009. Reconstruction of turbulent fluctuations for hybrid RANS/LES simulations using a Synthetic-Eddy Method. Int. J. Heat Fluid Flow 30, 435–442.
- Johnston, J., 1998. Effects of system rotation on turbulence structure: a review relevant to turbomachinery flows. Int. J. Rot. Machinery 56, 533–557.
- Kristofferessen, R., Andersson, H., 1993. Direct simulations of low-Reynolds-number turbulent flow in a rotating channel. J. Fluid Mech. 256, 163–197.
- Lamballais, E., Métais, O., Lesieur, M., 1998. Spectral-dynamic model for large-eddy simulations of turbulent rotating channel flow. Theor. Comput. Fluid Dyn. 12, 149–177.
- Launder, B., Reece, G., Rodi, W., 1975. Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure. J. Fluid Mech. 68(3), 537–566.
- Launder, B., Sharma, B., 1974. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow in a spinning disc. Lett. Heat Mass Transfer 1, 131.
- Laurence, D., Uribe, J., Utyuzhnikov, S., 2004. A robust formulation of the v_2 -f model. Flow, Turbulence and Combustion 73, 169–185.
- Lucius, A., Brenner, G., 2010. Unsteady CFD simulations of a pump in part load conditions using scale-adaptive simulation. Int. J. Heat Fluid Flow 31, 1113–1118.
- Manceau, R., Hanjalic, K., 2002. Elliptic blending model : A new near-wall Reynolds-stress turbulence closure. Phys. Fluids 14(2), 744–754.
- Martini, P., Schultz, A., Bauer, H.-J., Whitney, C., 2006. Detached eddy simulation of film cooling performance on the trailing edge cutback of gas turbine airfoils. J. Turbomachinery ASME 128(2), 292–299.
- Marty, J., Cottin, G., Aupoix, B., March 2009. Turbulence modelling and transition to turbulent effects for a high pressure multistage compressor. In: 8th European Conference on Turbomachinery.
- Menter, F., 1994. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. AIAA Journal 32(8).
- Nicoud, F., Ducros, F., 1999. Subgrid stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. Flow, Turbulence and Combustion 62(3), 183–200.
- Perret, L., Delville, J., Manceau, R., Bonnet, J.-P., 2006. Generation of turbulent inflow conditions for LES from stereoscopic PIV measurements. Int. J. Heat Fluid Flow 27 (4), 576–584.
- Perret, L., Delville, J., Manceau, R., Bonnet, J.-P., 2008. Turbulent inflow conditions for large-eddy simulation based on low-order empirical model. Phys. Fluids 20 (7), 1–17.
- Pettersson Reif, B., Durbin, P., Ooi, A., 1999. Modeling rotational effects in eddy-viscosity closures. Int. J. Heat Fluid Flow 20, 563–573.
- Piomelli, U., Liu, J., 1995. Large-eddy simulation of rotating channel flows using a localized dynamic model. Phys. Fluids 7(3), 839–848.
- Rocklawski, H., Hellmann, D., January 2006. Numerical simulation of a radial multistage centrifugal pump. In: 44th AIAA. Smagorinsky, J., 1963. General circulation experiments with the primitive equations, I. The basic experiment. Mon. Weather Rev. 91, 99.
- Spalart, P., Shur, M., 1997. On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature. Aerospace Science and Technology 5, 297–302.
- Speziale, C., Mac Giolla Mhuiris, N., 1989. On the prediction of equilibrium states in homogeneous turbulence. J. Fluid Mech. 209, 591–615.
- Speziale, C., Sarkar, S., Gatski, T., 1991. Modelling the pressure-strain correlation of turbulence : an invariant dynamical systems approach. J. Fluid Mech. 227, 245–272.
- Tritton, D., 1992. Stabilization and destabilization of turbulent shear flow in a rotating fluid. J. Fluid Mech. 241, 503–523.
- Wallin, S., Johansson, A., 2002. Modelling streamline curvature effects in explicit algebraic Reynolds stress turbulence models. Int. J. Heat Fluid Flow 23, 721–730.

I.2 Anisotropic linear forcing for synthetic turbulence generation in hybrid RANS/LES modelling

Publication prochainement présentée au congrès *9th International ERCOFTAC Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements* (6–8 juin 2012, Thessalonique, Grèce)

ANISOTROPIC LINEAR FORCING FOR SYNTHETIC TURBULENCE GENERATION IN HYBRID RANS/LES MODELLING

B. de Laage de Meux¹, B. Audebert¹, R. Manceau²

¹ *EDF R&D, Dpt of Fluid Dynamics, Power Generation and Environment,
Chatou, France*

² *Institute Pprime, Dpt of Fluid Flow, Heat Transfer and Combustion,
CNRS/Univ. Poitiers/ENSMA, France*

benoit.de-laage-de-meux@edf.fr, remi.manceau@lea.univ-poitiers.fr

Abstract

A new body force is proposed, aiming at imposing to a large eddy simulation low order statistics in some specific regions where the forcing is applied. The forced LES presents a realistic turbulence with imposed mean velocity and Reynolds stress tensor of any anisotropy. It is emphasized that this new forcing – the *Anisotropic Linear Forcing* (ALF) – generalizes several body forces proposed in the past decade. The influence of the parameters of the forcing is discussed. An application of ALF for synthetic turbulence generation in zonal RANS/LES computation of channel flow is presented. The method enables an efficient spatial development of the flow in the LES domain, without prescribing any fluctuations at the inlet boundary.

1 Introduction

In many industrial applications, as, for instance, in the field of energy production, an unsteady description of the flow, typically using LES, is only required in a reduced area of interest, whereas the necessary knowledge of the flow conditions surrounding this area implies considering a far larger computational domain, leading to prohibitive numerical costs. Zonal hybrid RANS/LES modelling of turbulence can be advocated for this kind of applications, in order to properly interface LES and the low-cost RANS approach. One of the main issues in this context is the generation of resolved, turbulent fluctuations at the inlet of the LES region. To this aim, several authors proposed to introduce, in an overlapping RANS/LES region, a volume force in the filtered momentum equation (Keating et al., 2006; Laraufie et al., 2011). Similarly, such a method can be used near the LES outlet (Schlüter et al., 2005) or in the framework of tangential RANS/LES coupling (Schlüter, 2006; Davidson and Billson, 2006).

In the present work, a new body force is proposed. The method is formulated in order to impose

to the LES computation, in the overlapping region, the RANS mean velocity and all components of the Reynolds stress tensor. As such, the method generalizes the forcing of Schlüter et al. (2005), which imposes the mean velocity of RANS, and the forcings of Spille-Kohoff and Kaltenbach (2001) or Laraufie et al. (2011), which promote turbulent fluctuations in the overlapping region through a controller applied to one component of the Reynolds stress tensor. Note that Xiao and Jenny (2012) have very recently proposed an anisotropic forcing that can control all the components of the Reynolds stress tensor. However, their formulation differs from the new method presented here, which is derived from an inverse approach, based on a proper analysis of the statistical effect of the forcing. The main characteristics of the present method, the so-called *Anisotropic Linear Forcing* (ALF), is that it is a general linear function of velocity. Therefore, it is actually a generalization of the linear isotropic forcing introduced, in the context of isotropic turbulence, by Lundgren (2003), and further analysed by Rosales and Meneveau (2005).

Firstly, the ALF formulation is given in section 2. Then, the method is applied to homogeneous turbulence in section 3, in order to show its ability to enforce any anisotropic state. In section 4, it is applied to the case of a turbulent channel flow, both in the context of a forcing toward a reference periodic LES, and of a zonal RANS/LES computation with an overlapping region.

The simulations presented herein are performed with the CFD software *Code_Saturne* developed by EDF and freely available as an open source code (www.code-saturne.org).

2 Mathematical formulation

The filtered momentum equation for an incompressible flow can be written as

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i,$$

where τ_{ij} is the deviatoric part of the subgrid stress tensor and f_i is the anisotropic linear forcing (ALF) term, defined as a general linear function of the filtered velocity:

$$f_i = A_{ij}\tilde{u}_j + B_i, \quad (1)$$

where A_{ij} is a symmetric tensor and B_i a vector. More precisely, A_{ij} 's and B_i 's are deterministic free coefficients that are evaluated from the procedure described below.

The contribution of ALF to the mean velocity equation reads

$$\langle f_i \rangle = A_{ij}\langle \tilde{u}_j \rangle + B_i, \quad (2)$$

where $\langle \cdot \rangle$ denotes the Reynolds averaging operator. In the budgets of the resolved Reynolds stresses,

$$\overline{u'_i u'_{j_r}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle (\tilde{u}_i - \langle \tilde{u}_i \rangle)(\tilde{u}_j - \langle \tilde{u}_j \rangle) \rangle, \quad (3)$$

ALF introduces the additional production term

$$P_{ij}^f = A_{ik}\overline{u'_i u'_{j_r}} + A_{jk}\overline{u'_i u'_{k_r}}. \quad (4)$$

The target mean velocity $\overline{u}_i^\dagger$ and resolved Reynolds stresses $\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger$ are now introduced. In the context of hybrid RANS/LES, $\overline{u}_i^\dagger$ and $\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger$ are obtained from RANS variables (see section 4), but in general, target statistics of the forcing can be given, for instance, by an experiment, a DNS or a highly resolved LES. In order to drive the mean velocity $\langle \tilde{u}_j \rangle$ and the resolved Reynolds stress tensor $\overline{u'_i u'_{j_r}}$ toward their target values, ALF imposes the constraints

$$\langle f_i \rangle = \frac{1}{\tau_v}(\overline{u}_i^\dagger - \langle \tilde{u}_j \rangle), \quad (5)$$

$$P_{ij}^f = \frac{1}{\tau_r}(\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger - \overline{u'_i u'_{j_r}}), \quad (6)$$

i.e., simply acts as a relaxation term, with relaxation times τ_v and τ_r for the mean velocity and the resolved Reynolds stress tensor, respectively. Equating the r.h.s of Eqs. (2) and (5) on the one hand, and of Eqs. (4) and (6) on the other hand, the following system of algebraic equation is obtained

$$A_{ij}\langle \tilde{u}_j \rangle + B_i = \frac{1}{\tau_v}(\overline{u}_i^\dagger - \langle \tilde{u}_j \rangle) \quad (7)$$

$$A_{ik}\overline{u'_i u'_{j_r}} + A_{jk}\overline{u'_i u'_{k_r}} = \frac{1}{\tau_r}(\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger - \overline{u'_i u'_{j_r}}), \quad (8)$$

which implicitly determines the free coefficients A_{ij} and B_i of ALF. More precisely, Eq. (8) is a system of six equations for the 6 unknowns A_{ij} , which can be locally inverted in each cell of the forcing area, using a direct method. Once A_{ij} 's are computed, B_i 's can be explicitly determined by Eq. (7), such that the ALF term (1) is completely defined. Relaxation times τ_r and τ_v are adjustable parameters that control the intensity of the forcing.

3 Application to homogeneous turbulence

ALF is now validated in the case of homogeneous turbulence. The domain is a triply periodic box of size $L^3 = (2\pi)^3$, discretized by 32^3 cells. The flow is initialized using isotropic turbulent fields generated by filtering the DNS of Wray (1998) at $Re_\lambda = 104.5$. The subgrid stresses are modelled with the Smagorinsky model.

In this homogeneous case, the Reynolds operator $\langle \cdot \rangle$ is defined as a spatial averaging, which is used to compute the mean velocity $\langle \tilde{u}_i \rangle$ and the resolved Reynolds stresses $\overline{u'_i u'_{j_r}}$ (Eq. 3) in Eqs. (7) and (8) that determine the ALF coefficients A_{ij} and B_i . The mean velocity of the flow is kept unforced, that is $\overline{u}_i^\dagger = \langle \tilde{u}_i \rangle$ or equivalently $\tau_v \rightarrow \infty$ in Eq. (7). The Reynolds stresses are forced toward some constant target stresses $\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger$, expressed as a function of the kinetic energy of the initial flow field k_0 .

Firstly, the target stresses of ALF are taken isotropic:

$$\overline{u'_i u'_{j_r}}^\dagger = \frac{2}{3}k_0\delta_{ij}.$$

The kinetic energy $k_r = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_{i_r}}$ is plotted versus the non-dimensional time $t^* \stackrel{\text{def}}{=} t\sqrt{k_0}/L$ in Fig. 1, for different values of the relaxation time $\tau_r^* \stackrel{\text{def}}{=} \tau_r\sqrt{k_0}/L$. It is seen that after a short transient, the flow reaches an equilibrium where the kinetic energy fluctuates around a constant value, denoted by $\langle k_r \rangle_t$. It can be observed that the lower the relaxation parameter τ_r , the closer the effective energy level $\langle k_r \rangle_t$ to its target value k_0 .

Note that in this isotropic case, ALF is almost identical to the isotropic linear forcing introduced by Lundgren (2003), whose interesting properties have been extensively analysed by Rosales and Meneveau (2005). In the context of isotropic turbulence, a body force $f_i^L = Au'_i$ is introduced by the authors in the unfiltered momentum equation, in order to compensate

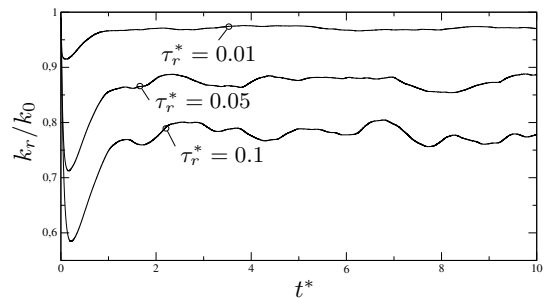


Figure 1: Time evolution of the turbulent kinetic energy. Forcing of isotropic turbulence toward its initial energy level k_0 . $\tau_r^* = 0.01, 0.05, 0.1$.

for the energy dissipation ε , leading to

$$A = \frac{\varepsilon}{2k},$$

such that a statistically steady isotropic flow is obtained. This forcing is recovered with ALF assuming the exact instantaneous isotropy of the flow: $\overline{u'_i u'_{j_r}} = \frac{2}{3} k_r \delta_{ij}$. In this case, ALF degenerates to

$$f_i = A(\tilde{u}_i - \langle \tilde{u}_i \rangle), \quad A = \frac{1}{2\tau_r} \left(\frac{k_r^\dagger}{k_r} - 1 \right).$$

It is worth noting that the energy production of ALF,

$$P^f = \frac{1}{\tau_r} (k_r^\dagger - k_r), \quad (9)$$

does not explicitly equal the instantaneous dissipation. However, when equilibrium, as visible in Fig. 1, is reached, P^f indeed balances the dissipation, and Eq. 9 shows that the level of kinetic energy remains slightly lower than the target, by an amount that depends on the relaxation parameter τ_r . The energy spectrum obtained with ALF in the isotropic case is plotted in Fig. 2. In accordance with DNS results of Lundgren (2003) and Rosales and Meneveau (2005), it can be seen that the linear forcing is compatible with an inertial cascade, the energy spectrum exhibiting a wavenumber range where the slope close to $-5/3$.

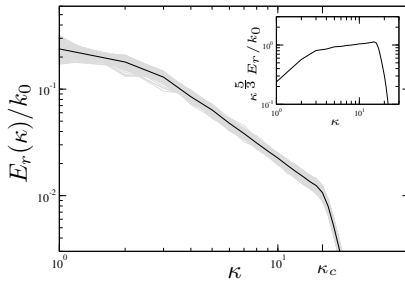


Figure 2: Kinetic energy spectra. Forcing of isotropic turbulence toward its initial energy level k_0 , for $\tau_r^* = 0.01$. Gray lines: spectra for $3 < t^* \leq 10$, sampled at interval $\Delta t^* = 0.07$. Black line: averaged spectrum (premultiplied by $\kappa^{5/3}$ in the inset).

In order to demonstrate the flexibility and efficiency of ALF, anisotropic homogeneous turbulence is now generated. As previously, the flow is initially isotropic, but the following three-component anisotropic turbulence is enforced:

$$\begin{aligned} \overline{u'^2_r} &= \frac{1}{3} k_0, & \overline{v'^2_r} &= \frac{2}{3} k_0, & \overline{w'^2_r} &= k_0, \\ \overline{u'v'_r} &= \overline{u'w'_r} = \overline{v'w'_r} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

The time evolution of the anisotropy tensor

$$b_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_{j_r}} - \frac{1}{3} \delta_{ij}}{2k_r},$$

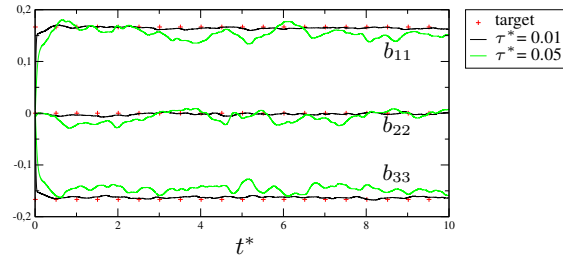


Figure 3: Time evolution of the anisotropy tensor. Forcing of an initially isotropic turbulence toward a three-component anisotropic turbulence (Eq. 10).

plotted in Fig. 3, shows again that the flow rapidly converges toward a stationary state. As for the kinetic energy, the anisotropies converge toward a mean level slightly lower, in absolute value, than the target anisotropies, but this small difference is reduced when the relaxation parameter τ_r is low.

The limiting anisotropies corresponding to axisymmetric two-component and one-component turbulence can also be approached with ALF. In Fig. 4, the following cycle is imposed:

- isotropy:

$$\overline{u'_i u'_{j_r}} = \frac{2}{3} k_0 \delta_{ij}, \quad (11)$$

- axisymmetry with one component close to zero:

$$\begin{aligned} \overline{u'^2_r} &= \overline{v'^2_r} = 0.99 k_0, & \overline{w'^2_r} &= 0.02 k_0, \\ \overline{u'v'_r} &= \overline{u'w'_r} = \overline{v'w'_r} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

- axisymmetry with two components close to zero:

$$\begin{aligned} \overline{u'^2_r} &= 1.96 k_0, & \overline{v'^2_r} &= \overline{w'^2_r} = 0.02 k_0, \\ \overline{u'v'_r} &= \overline{u'w'_r} = \overline{v'w'_r} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

- back to isotropy.

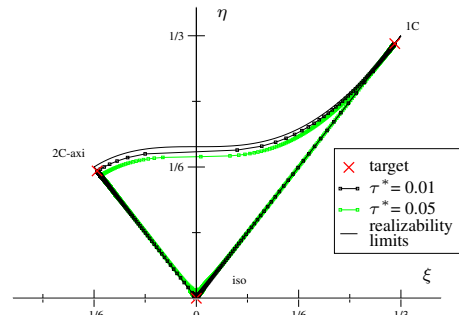


Figure 4: Trajectory of anisotropy in the invariant map (ξ, η) . Sequential forcing of the anisotropies corresponding to Eqs. (11), (12), (13) and (11) again (each anisotropy state is forced during 10 non-dimensional time units).

The evolution of the anisotropy in the invariant map (the two independent invariants η and ξ of the anisotropy tensor are defined by $6\eta^2 = b_{ij}b_{ij}$ and $6\xi^3 = b_{ij}b_{jk}b_{ki}$, see Choi and Lumley, 2001 for instance) shows that the target anisotropies are exponentially approached. During the transient between each imposed state, the trajectory pass along the edges of the triangle, associated with axisymmetric and two-component turbulence, which shows that ALF does not artificially break symmetries of the flow. Fig. 5 presents typical flow visualisations in the nearly two-component (Eq. 12) and one-component (Eq. 13) states investigated with ALF.

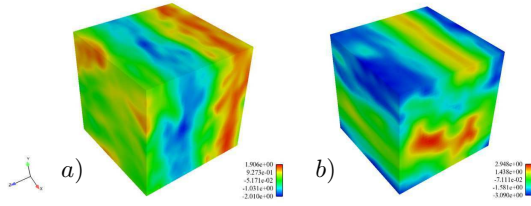


Figure 5: Visualisation of instantaneous velocity $u'/\sqrt{k_0}$. Homogeneous turbulence forced ($\tau_r^* = 0.01$) to (a) axisymmetric quasi two-component state (Eq. 12) and (b) axisymmetric quasi one-component state (Eq. 13).

4 Application to turbulent channel flow

The case of a spatially developing turbulent channel flow is now considered, at $Re_b \stackrel{\text{def}}{=} U_b h / \nu = 7000$, with h the half-width of the channel and U_b the bulk velocity. A steady velocity is imposed, without any fluctuation, at the inlet, but the whole flow domain is forced with ALF, in order to investigate the spatial development of the flow. The target statistics $\overline{u_i^\dagger}$ and $\overline{u_i^\dagger u_{j_r}^\dagger}$ of ALF are taken from a precursor periodic simulation with the same grid refinement, corresponding to $(\Delta x^+, \Delta y_{\min}^+, \Delta z^+) \approx (50, 2, 15)$ in wall unit. The constant velocity imposed at inlet is $\overline{u_i^\dagger}$. In Eqs. (7) and (8) defining the ALF coefficients A_{ij} and B_i , the Reynolds operator $\langle \cdot \rangle$ is approximated by an exponential time filtering of size $T = 100h/U_b$, whose differential form writes

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \phi \rangle(t) = \frac{\phi(t) - \langle \phi \rangle(t)}{T}.$$

The Smagorinsky subgrid model is used.

In Fig. 6, it is seen that turbulent stresses are rapidly generated downstream the inlet by ALF. For the lower relaxation parameters presented ($\tau_v = \tau_r = 0.1h/U_b$), the short distance $2h$ is sufficient for the mean velocity and all the components of Reynolds tensor to adjust almost exactly to their target values $\overline{u_i^\dagger}$ and $\overline{u_i^\dagger u_{j_r}^\dagger}$, respectively. When the forcing parameters are increased ($\tau_v = \tau_r = 0.5h/U_b$), the develop-

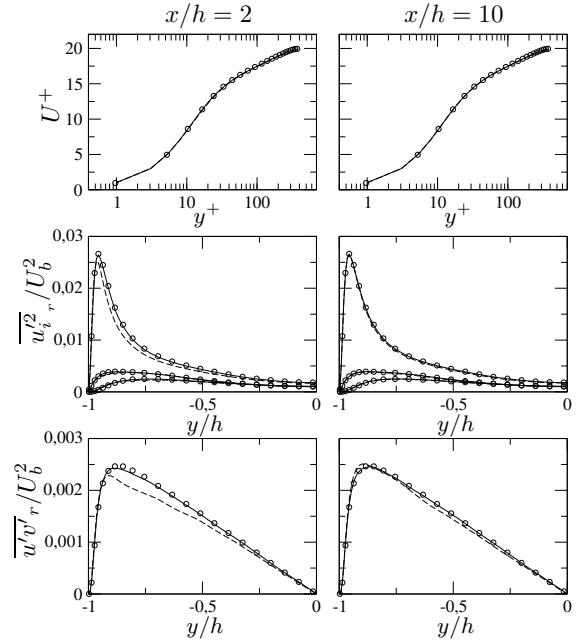


Figure 6: Mean velocity (top), resolved turbulent normal stresses (middle) and resolved turbulent shear stress (bottom), at $x/h = 2$ (left) and $x/h = 10$ (right). Channel flow, $Re_b = 7000$. Symbols: target statistics (periodic LES); lines: ALF LES, for $\tau_v = \tau_r = 0.5h/U_b$ (---) or $\tau_v = \tau_r = 0.1h/U_b$ (—).

ment of Reynolds stresses is slower but, at $x/h = 10$, the flow reaches the target statistics.

The spectral content of the forced LES is considered in Fig. 7. The temporal Fourier transform of the velocity of the forced LES is close to the one of the periodic simulation (without forcing), corresponding to a fully developed turbulence. It can be seen that a better reproduction of the low frequency fluctuations is obtained by increasing the relaxation parameter of the mean velocity forcing τ_v , in comparison with τ_r . The agreement of the mean velocity with the target profile $\overline{u_i^\dagger}$ is still very satisfactory when the τ_v parameter is increased to $\tau_v = 5h/U_b$.

ALF is now applied in a zonal RANS/LES framework, in order to generate turbulent fluctuations in a LES computation downstream a RANS computation. To this end, the forcing is applied only in a reduced RANS/LES overlapping area, of length L_x^f , downstream the LES inlet plane. Moreover, the target profiles $\overline{u_i^\dagger}$ and $\overline{u_i^\dagger u_{j_r}^\dagger}$ of ALF are now deduced from the RANS results $\overline{u_i}^{RANS}$ and $\overline{u_i u_{j_r}}^{RANS}$, by

$$\overline{u_i^\dagger} = \overline{u_i}^{RANS} \quad (14)$$

$$\overline{u_i^\dagger u_{j_r}^\dagger} = \overline{u_i u_{j_r}}^{RANS} - \langle \tau_{ij} \rangle - \frac{2}{3} k_\tau \delta_{ij}. \quad (15)$$

In Eq. (15), the second and third terms in the r.h.s are an evaluation of the contribution of the subgrid scales to the Reynolds stresses. The deviatoric part $\langle \tau_{ij} \rangle$ is obtained by ensemble averaging the Smagorinsky sub-

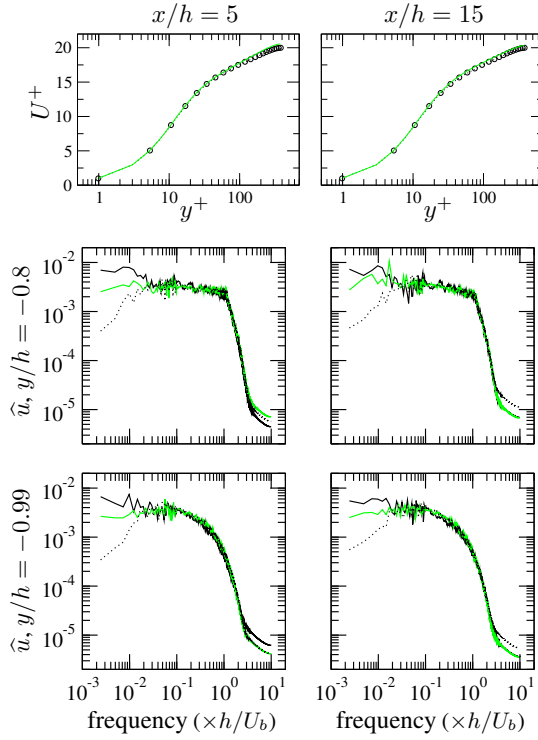


Figure 7: Mean velocity (top) and temporal Fourier transform of longitudinal velocity, at $y/h = -0.8$ (middle) and $y/h = -0.99$ (bottom). Profiles in $x/h = 5$ (left) and $x/h = 15$ (right). Channel flow, $Re_b = 7000$. Periodic LES (○, —) and ALF LES for $\tau_r = 0.1h/U_b$ and $\tau_v = 0.1h/U_b$ (····) or $\tau_r = 0.1h/U_b$ and $\tau_v = 5h/U_b$ (—).

grid model. The subgrid kinetic energy is modelled by

$$k_\tau = C \frac{3C_K}{2} \left(\frac{\varepsilon^{RANS}}{\kappa_c} \right)^{2/3}, \quad C_K = 1.5, \quad C = 0.35,$$

which corresponds to the integration of a Kolmogorov spectrum beyond the cut-off wavenumber $\kappa_c \stackrel{\text{def}}{=} \pi/(\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$, with C a calibration constant introduced to take into account the fact that the implicit LES filter is not exactly a spectral cut-off filter. The relaxation parameters τ_v and τ_r of ALF are evaluated from the RANS computation as

$$\tau_v = 5h/U_b, \quad \tau_r = \max \left(2\Delta t, 0.01 \frac{k^{RANS}}{\varepsilon^{RANS}} \right).$$

According to the full parametric study of de Laage de Meux (2012), the time scale τ_r of the ALF production (Eq. 6) is set proportional to the turbulent time scale $k^{RANS}/\varepsilon^{RANS}$, with a lower bound $2\Delta t$ that ensures that the production is properly resolved by the numerical scheme (of time step Δt). Finally, the model in the RANS region is the second moment closure EB-RSM (Manceau and Hanjalic, 2002; Dehoux et al., 2012).

In Fig. 8, the spatial development of the flow in the LES domain is observed by plotting the longitudinal

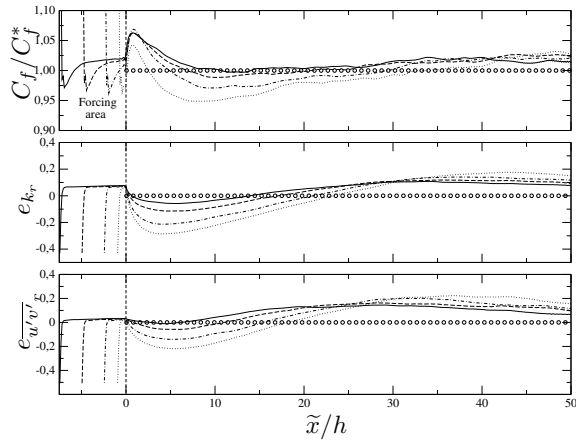


Figure 8: Evolution of the friction coefficient and the error functions e_{k_r} and $e_{u'v'_r}$ (Eq. 16) downstream the forcing area. Channel flow, $Re_b = 7000$. Symbols: periodic LES; lines: LES domain of zonal EB-RSM/Smagorinsky computations using ALF, for $L_x^f/h = 1$ (····), 2.5 (---), 5 (— · —), 7.5 (—).

evolution of the friction coefficient

$$C_f = \frac{u_\tau^2}{\frac{1}{2}U_b^2}$$

and the error functions

$$e_{k_r} = \frac{\int_{-h}^h (k_r - k_r^*)}{\int_{-h}^h k_r^*}, \quad e_{u'v'_r} = \frac{\int_{-h}^h (|u'v'_r| - |u'v'_r^*|)}{\int_{-h}^h |u'v'_r^*|}, \quad (16)$$

where the asterisk denotes the statistics of the fully developed flow, obtained from a periodic computation. Several lengths L_x^f of the forcing area are considered and the abscissa in Fig. 8 is the distance from the end of the forcing region $\tilde{x} = x - L_x^f$. It can be seen that for all the tested forcing lengths, the turbulent fluctuations synthesized by ALF in the overlapping region are sustained downstream. However, increasing L_x^f , the spectral content of the flow is better developed at the end of the forcing region, and, as a consequence, the adaptation of the flow in the full LES (without forcing) region is minor. A forcing length $L_x^f = 5h$ is sufficient to obtain a very satisfactory development of the flow in the LES domain. With this forcing length, the maximum overestimation of the friction coefficient in only of 6–7% of the fully developed value C_f^* and is located very close to the end of the forcing region ($\tilde{x} \approx h$). Until $\tilde{x} \geq 5$, the friction coefficient evolves in a range $\pm 2.5\%$ around C_f^* . As concerns the Reynolds stresses, the integral error functions e_{k_r} and $e_{u'v'_r}$ are less than 15% in absolute value in the entire domain. Fig. 9 shows, for $L_x^f = 5h$, mean velocity, turbulent kinetic energy and Reynolds shear stress profiles at various x location downstream the inlet. All over the LES domain, the profiles of the spatially developing flow are close to those of the fully developed flow. Thus, ALF appears as an efficient turbulence generation method in zonal hybrid RANS/LES computations.

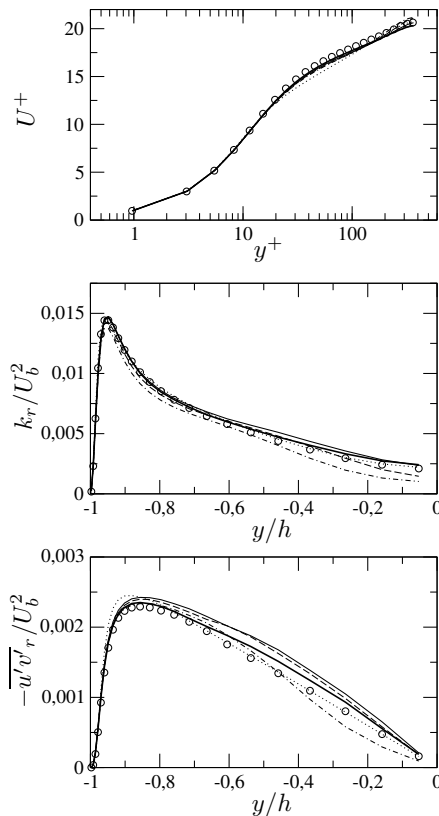


Figure 9: Mean velocity, resolved turbulent kinetic energy and resolved turbulent shear stress, in $x/h = 5$ (.....), 15 (---), 25 (---), 40 (—, thin line), 60 (—, thick line). Channel flow, $Re_b = 7000$. Symbols: periodic LES; lines: LES domain of zonal EB-RSM/Smagorinsky computation using ALF, for $L_x^f = 5h$.

5 Conclusions

A new body force, the *Anisotropic Linear Forcing* (ALF), was proposed, in order to enforce the mean velocity and the Reynolds stress tensor in an overlapping RANS/LES region. It was shown, in homogeneous turbulence, that the method is able to force the LES to any anisotropic state. In a channel flow, the one-way coupling between a RANS second moment closure and LES, applying ALF in a reduced overlapping region downstream the inlet of the LES domain, enables an efficient spatial development of the flow.

References

- K.-S. Choi and J.L. Lumley. The return to isotropy of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 436: 59–84, 2001.
- L. Davidson and M. Billson. Hybrid LES-RANS using synthesized turbulent fluctuations for forcing in the interface region. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 27(6): 1028–1042, 2006.
- B. de Laage de Meux. *Modélisation des écoulements turbulents en rotation et en présence de transferts thermiques par approche hybride RANS/LES*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, 2012. (in french).
- F. Dehoux, Y. Lecocq, S. Benhamadouche, R. Manceau, and L.-E. Brizzi. Algebraic modeling of the turbulent heat fluxes using the elliptic blending approach - application to forced and mixed convection regimes. *Flow, Turbulence and Combustion*, 88(1):77–100, 2012.
- A. Keating, G. De Prisco, and U. Piomelli. Interface conditions for hybrid RANS/LES calculations. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 27:777–788, 2006.
- R. Laroche, S. Deck, and P. Sagaut. A dynamic forcing method for unsteady turbulent inflow conditions. *J. Comput. Phys.*, 230(23):8647–8663, 2011.
- T.S. Lundgren. Linearly forced isotropic turbulence. *Center of Turbulence Research Annual Research Briefs*, pages 461–473, 2003.
- R. Manceau and K. Hanjalić. Elliptic blending model: A new near-wall Reynolds-stress turbulence closure. *Phys. Fluids*, 14(2):744–754, 2002.
- C. Rosales and C. Meneveau. Linear forcing in numerical simulations of isotropic turbulence: physical space implementations and convergence properties. *Phys. Fluids*, 17(9), 2005.
- J. Schlüter. Toward the prediction of turbulent boundary layers using a coupled RANS-LES method. In *Summer Program - Center of Turbulence Research*, pages 179–186, 2006.
- J.U. Schlüter, H. Pitsch, and P. Moin. Outflow conditions for integrated large eddy simulation/Reynolds-average Navier–Stokes simulations. *AIAA Journal*, 43(1):156–164, 2005.
- A. Spille-Kofoff and H.-J. Kaltenbach. Generation of turbulent inflow data with a prescribed shear-stress profile. In *Proc. of the 3rd AFOSR International Conference on DNS/LES*, 2001.
- A.A. Wray. *A selection of test cases for the validation of large-eddy simulations of turbulent flows*, AGARD Advisory Report 345. Chapter: HOM02 Decaying Isotropic Turbulence. 1998.
- H. Xiao and P. Jenny. A consistent dual-mesh framework for hybrid LES/RANS modeling. *J. Comput. Phys.*, 231(4):1848–1865, 2012.

Bibliographie

- Fluid Dynamic Panel Working Group 21 : A selection of test cases for the validation of large-eddy simulations of turbulent flows. Rapport technique 345, AGARD.
- H. ABE, H. KAWAMURA et Y. MATSUO : Surface heat-flux fluctuations in a turbulent channel flow up to $Re_\tau = 1020$ with $Pr = 0.025$ and 0.71 . *Int. J. Heat Fluid Flow*, 25:404–419, 2004.
- K. ABE, T. KONDOH et Y. NAGANO : A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows—I. flow field calculations. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 37(1):139–151, 1994.
- H.I. ANDERSSON et R. KRISTOFFERSEN : Reynolds-stress budgets in rotating channel flow. *In Proc. of 9th Symp. on turbulent shear flows*, August 1993.
- F. ARCHAMBEAU, N. MÉCHITOUA et M. SAKIZ : *Code_Saturne* : a Finite Volume Code for the Computation of Turbulent Incompressible Flows - Industrial Applications. *International Journal on Finite Volumes*, 1(1), 2004.
- G. ASTARITA : Objective and generally applicable criteria for flow classification. *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, 6:69–76, 1979.
- J. BARDINA, J.H. FERZINGER et W.C. REYNOLDS : Improved turbulence models based on large eddy simulation of homogeneous, incompressible turbulent flows. Rapport technique TF-19, Stanford University, 1983.
- F. BASTIN, P. LAFON et S. CANDEL : Computation of jet mixing noise due to coherent structures. *J. Fluid Mech.*, 335:261–304, 1997.
- P. BATTEN, U. GOLDBERG et S. CHAKRAVARTHY : LNS : an approach towards embedded LES. *In Proc. 40th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2002.
- P. BATTEN, U. GOLDBERG et S. CHAKRAVARTHY : Interfacing statistical turbulence closures with large-eddy simulation. *AIAA Journal*, 42:485–492, 2004.
- Y. BENARAF, O. CIONI, F. DUCROS et P. SAGAUT : RANS/LES coupling for unsteady turbulent flow simulation at high Reynolds number on coarse meshes. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 195:2939–2960, 2006.
- S. BENTEBOULA : *Résolution des équations de Navier–Stokes à faible nombre de Mach : application à l’étude de l’anneau de vorticit   à masse volumique variable*. Th  se de doctorat, Universit   de Marne-la-Vall  e, 2006.
- D. BORELLO, K. HANJALIC et F. RISPOLI : Prediction of cascade flows with innovative second-moment closures. *J. Fluid Eng.-T. ASME*, 127(6):1059–1070, 2005.

- S.T. BOSE, P. MOIN et D. YOU : Grid-independent large-eddy simulation using explicit filtering. *Phys. Fluids*, 22, 2010.
- P. BRADSHAW : The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.*, 36:177–191, 1969.
- R. BUDWIG, S. TAVOULARIS et S. CORRSIN : Temperature fluctuations and heat flux in grid-generated isotropic turbulence with streamwise and transverse mean-temperature gradients. *J. Fluid Mech.*, 153:441–460, 1985.
- J.W.M. BUSH, H.A. STONE et J. BLOXHAM : Axial drop motion in rotating fluids. *J. Fluid Mech.*, 282:247–278, 1995.
- C. CAMBON, J.P. BENOIT, L. SHAO et J. JACQUIN : Stability analysis and large-eddy simulation of rotating turbulence with organized eddies. *J. Fluid Mech.*, 278:175–200, 1994.
- C. CAMBON et L. JACQUIN : Spectral approach to non-isotropic turbulence subjected to rotation. *J. Fluid Mech.*, 202:295–317, 1989.
- C. CAMBON, N.N. MANSOUR et F.S. GODEFERD : Energy transfer in rotating turbulence. *J. Fluid Mech.*, 337:303–332, 1997.
- C. CAMBON, R. RUBINSTEIN et F.S. GODEFERD : Advances in wave turbulence : rapidly rotating flows. *New Journal of Physics*, 6:73, 2004.
- S. CARPY et R. MANCEAU : Turbulence modelling of statistically periodic flows : synthetic jet into quiescent air. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 27:756–767, 2006.
- J.-B. CAZALBOU, P. CHASSAING, G. DUFOUR et X. CARBONNEAU : Two-equation modelling of turbulent rotating flows. *Phys. Fluids*, 17(5), 2005.
- P. CHASSAING : *Turbulence en mécanique des fluides*. Cépaduès-éditions, 2000.
- K.-S. CHOI : *A study of the return to isotropy of homogeneous turbulence*. Thèse de doctorat, Cornell University, 1983.
- K.-S. CHOI et J.L. LUMLEY : The return to isotropy of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 436:59–84, 2001.
- P.Y. CHOU : On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation. *Quart. of Appl. Math.*, 3:38–54, 1945.
- R.A. CLARK, J.H. FERZINGER et W.C. REYNOLDS : Evaluation of subgrid scale models using an accurately simulated turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 91:1–16, 1979.
- T.J. CRAFT, B.E. LAUNDER et K. SUGA : Prediction of turbulent transitional phenomena with a nonlinear eddy-viscosity model. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 18:15–28, 1997.
- A. CRAYA : Contribution à l'analyse de la turbulence associée à des vitesses moyennes. *Pub. Scien. Tech. Ministère de l'air*, 345, 1958.
- B.J. DALY et F.H. HARLOW : Transport equations in turbulence. *Phys. Fluids*, 13(11): 2634–2649, 1970.
- L. DAVIDSON et M. BILLSON : Hybrid LES-RANS using synthesized turbulent fluctuations for forcing in the interface region. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 27(6):1028–1042, 2006.

- S. DECK : Zonal-detached-eddy simulation of the flow around a high-lift configuration. *AIAA Journal*, 43(11):2373–2384, 2005.
- S. DECK, P.-E. WEISS, M. PAMIÈS et E. GARNIER : Zonal detached eddy simulation of a spatially developing flat plate turbulent boundary layer. *Computers & Fluids*, 48:1–15, 2011.
- F. DEHOUX, Y. LECOCQ, S. BENHAMADOUCHE, R. MANCEAU et L.-E. BRIZZI : Algebraic modeling of the turbulent heat fluxes using the elliptic blending approach - application to forced and mixed convection regimes. *Flow, Turbulence and Combustion*, 88(1):77–100, 2012.
- L. DI MARE, M. KLEIN, W.P. JONES et J. JANICKA : Synthetic turbulence inflow conditions for large-eddy simulation. *Phys. Fluids*, 18(2):1–11, 2006.
- P.G. DRAZIN et W.H. REID : *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 1981.
- G. DUFOUR : *Contribution à la modélisation et au calcul des écoulements dans les compresseurs centrifuges : application à la conception par lois de similitude*. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse, 2006.
- G. DUFOUR, J.-B. CAZALBOU, X. CARBONNEAU et P. CHASSAING : Assessing rotation/curvature corrections to eddy-viscosity models in the calculations of centrifugal-compressor flows. *J. Fluid Eng. ASME*, 130, 2008.
- K. DURAISAMY et G. IACCARINO : Curvature correction and application of the $v^2 - f$ turbulence model to tip vortex flows. In *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, pages 157–168, 2005.
- P.A. DURBIN : Near-wall turbulence closure modelling without damping functions. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 3:1–13, 1991.
- P.A. DURBIN : A reynolds stress model for near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 249:465–498, 1993.
- P.A. DURBIN et B.A. PETTERSSON REIF : On algebraic second moment models. *Flow, Turbulence and Combustion*, 63:23–37, 1999.
- G.K. DUTZLER, B.A. PETTERSSON REIF et H.I. ANDERSSON : Relaminarization of turbulent flow in the entrance region of a rapidly rotating channel. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 21:49–57, 2000.
- M. Van DYKE : *An Album of Fluid Motion*. The parabolic press, 1982.
- A. FADAI-GHOTBI, C. FRIESS, R. MANCEAU et J. BORÉE : A seamless hybrid RANS-LES model based on transport equations for the subgrid stresses and elliptic blending. *Phys. Fluids*, 22:055104, 2010a.
- A. FADAI-GHOTBI, C. FRIESS, R. MANCEAU, T.B. GATSKI et J. BORÉE : Temporal filtering : a consistent formalism for seamless hybrid RANS-LES modeling in inhomogeneous turbulence. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 31(3):378–389, 2010b.
- A. FADAI-GHOTBI, R. MANCEAU et J. BORÉE : Revisiting URANS computations of the backward-facing step flow using second moment closures. Influence of the numerics. *Flow, Turbulence and Combustion*, 81(3):395–414, 2008.

- A. FERRANTE et S.E. ELGHOBASHI : A robust method for generating inflow conditions for direct simulations of spatially-developing turbulent boundary layers. *J. Comput. Phys.*, 198(1):372–387, 2004.
- J.H. FERZIGER : Large eddy numerical simulations of turbulent flows. *AIAA Journal*, 15:1261–1267, 1977.
- J. FRÖHLICH et D. VON TERZI : Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 44:349–377, 2008.
- C. FUREBY : On subgrid scale modeling in large eddy simulations of compressible fluid flow. *Phys. Fluids*, 8(5):1301–1311, 1995.
- C. FUREBY et F.F. GRINSTEIN : Monotically integrated large-eddy simulation of free shear flows. *AIAA Journal*, 37(5):544–556, 1999.
- C. FUREBY et G. TABOR : Mathematical and physical constraints on large-eddy simulations. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 9:85–102, 1997.
- S. GALTIER : Weak inertial-wave turbulence theory. *Phys. Rev. E*, 68, 2003.
- T.B. GATSKI et T. JONGEN : Nonlinear eddy viscosity and algebraic stress models for solving complex turbulent flows. *Prog. Aerospace Sciences*, 36(8):655–682, 2000.
- T.B. GATSKI et C.G. SPEZIALE : On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 254:59–78, 1993.
- T.B. GATSKI et S. WALLIN : Extending the weak-equilibrium condition for algebraic Reynolds stress models to rotating and curved flows. *J. Fluid Mech.*, 518:147–155, 2004.
- M. GERMANO : A proposal for a redefinition of the turbulent stresses in the filtered Navier–Stokes equations. *Phys. Fluids*, 29(7):2323–2324, 1986.
- M. GERMANO : Turbulence : the filtering approach. *J. Fluid Mech.*, 238:325–336, 1992.
- M. GERMANO : Properties of the hybrid RANS/LES filter. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 17(4):225–231, 2004.
- M. GERMANO, U. PIOMELLI, P. MOIN et W.H. CABOT : A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids*, 3(7):1760–1765, 1991.
- S. GHOSAL : An analysis of numerical errors in large-eddy simulations of turbulence. *J. Comput. Phys.*, 125(1):187–206, 1996.
- S. GHOSAL : Mathematical and physical constraints on large-eddy simulations of turbulence. *AIAA Journal*, 37(4):425–433, 1999.
- J.D. GIBBON : The three-dimensional Euler equations : Where do we stand ? *Physica D*, 237:1894–1904, 2008.
- S.S. GIRIMAJI : A Galilean invariant explicit algebraic Reynolds stress model for turbulent curved flows. *Phys. Fluids*, 9(4):1067–1077, 1996.
- G. GONTIER : *Mécanique des milieux déformables : principes et théorèmes généraux*. Dunod, 1969.

- N. GOURDAIN, L. Y.M. GICQUEL et E. COLLADO : Comparison of RANS simulation and LES for the prediction of heat transfer in a highly loaded turbine guide vane. *In Proc. of the 9th European Turbomachinery Conference*, pages 847–862, 2011.
- H.P. GREENSPAN : *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge University Press, 1990.
- O. GRUNDESTAM, S. WALLIN et A.V. JOHANSSON : Direct numerical simulations of rotating turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 598:177–199, 2008.
- E. GUYON, J.P. HULIN et L. PETIT : *Hydrodynamique physique*. CNRS Editions, seconde édition, 2001.
- H. HA MINH : La modélisation statistique de la turbulence : ses capacités et ses limitations. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, 337(4):343–358, 1999.
- K. HANJALÍĆ : One-point closure models for buoyancy-driven turbulent flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 34:321–347, 2002.
- A. HASELBACHER et O. VASILYEV : Commutative discrete filtering on unstructured grids based on least-squares techniques. *J. Comput. Phys.*, 187:197–211, 2003.
- M.W. HIRSCH et S. SMALE : *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Academic Press, 1974.
- G. IACCARINO, A. OOI, B.A. PETTERSSON REIF et P.A. DURBIN : RANS simulations of rotating flows. *In Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, pages 257–266, 1999.
- H. ISHIGAKI : Analogy between turbulent flows in curved pipes and orthogonally rotating pipes. *J. Fluid Mech.*, 307:1–10, 1994.
- L. JACQUIN, O. LEUCHTER, C. CAMBON et J. MATHIEU : Homogeneous turbulence in the presence of rotation. *J. Fluid Mech.*, 220:1–52, 1990.
- N. JARRIN : *Synthetic inflow boundary conditions for numerical simulation of turbulence*. Thèse de doctorat, School of Mechanical, Aerospace and Civil Engineering, University of Manchester, 2007.
- N. JARRIN, S. BENHAMADOUCHE, D. LAURENCE et R. PROSSER : A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 27:585–593, 2006.
- N. JARRIN, R. PROSSER, J.C. URIBE, S. BENHAMADOUCHE et D. LAURENCE : Reconstruction of turbulent fluctuations for hybrid RANS/LES simulations using a Synthetic-Eddy Method. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 30:435–442, 2009.
- M. JI et P.A. DURBIN : On the equilibrium states predicted by second moment models in rotating, stably stratified homogeneous shear flow. *Phys. Fluids*, 16(10):3541–3556, 2004.
- P.S. JOHANSSON et H.I. ANDERSSON : Generation of inflow data for inhomogeneous turbulence. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 18:371, 2004.
- J.P. JOHNSTON : Effects of system rotation on turbulence structure : a review relevant to turbomachinery flows. *Int. J. Rot. Machinery*, 56:533–557, 1998.

- J.P. JOHNSTON, R.M. HALLEEN et D.K. LEZIUS : Effects of spanwise rotation on the structure of two-dimensional fully developed turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 56:533–557, 1972.
- T. JONGEN, L. MACHIELS et T.B. GATSKI : Predicting noninertial effects with linear and non-linear eddy-viscosity, and algebraic stress models. *Flow, Turbulence and Combustion*, 60:215–234, 1998.
- H.-J. KALTENBACH, M. FATICA, R. MITTAL et T.S. Lund an P. MOIN : Study of flow in a planar asymmetric duffuser using large-eddy simulation. *J. Fluid Mech.*, 390:151–185, 1999.
- H. KAWAMURA, H. ABE et Y. MATSUO : DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effects. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 20:196–207, 1999.
- A. KEATING et U. PIOMELLI : A dynamic stochastic forcing method as a wall-layer model for large-eddy simulation. *J. of Turbulence*, 7(12):1–24, 2006.
- A. KEATING, U. PIOMELLI et E. BALARAS : *A priori* and *a posteriori* tests of inflow conditions for large-eddy simulation. *Phys. Fluids*, 16(12):4696–4712, 2004.
- A. KEATING, G. De PRISCO et U. PIOMELLI : Interface conditions for hybrid RANS/LES calculations. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 27:777–788, 2006.
- J. KIM, P. MOIN et R. MOSER : Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177:133–166, 1987.
- K.R. KIM, M.A. COTTON, T.J. CRAFT et O.R. HEYNES : On the dynamics and frequency response of fully-pulsed turbulent round jets : Computations using two-time-scale/strain-sensitized eddy viscosity models. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 29(6):1650–1669, 2008.
- M. KLEIN, A. SADIKI et J. JANICKA : A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations. *J. Comput. Phys.*, 186(2):652–665, 2003.
- D.D. KNIGHT et P.G. SAFFMAN : Turbulence model predictions for flows with significant mean streamline curvature. *In 16th AIAA*, January 1978.
- H. KOBAYASHI et Y. SHIMOMURA : The performance of dynamic subgrid-scale models in the large eddy simulation of rotating homogeneous turbulence. *Phys. Fluids*, 13(8):2350–2360, 2001.
- D. KÖNIG, M. MEINKE et W. SCHRÖDER : Embedded LES-to-RANS boundary in zonal simulations. *J. of Turbulence*, 11(7):1–25, 2010.
- R.H. KRAICHNAN : Inertial ranges in two dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 10:1417–1423, 1967.
- R. KRISTOFFERSEN et H.I. ANDERSSON : Direct simulations of low-Reynolds-number turbulent flow in a rotating channel. *J. Fluid Mech.*, 256:163–197, 1993.
- E. LABOURASSE et P. SAGAUT : Reconstruction of turbulent fluctuations using a hybrid RANS/LES approach. *J. Comput. Phys.*, 182:301–336, 2002.

- E. LAMBALLAIS et M. LESIEUR : Direct numerical simulation of a turbulent channel flow across a sudden expansion : effect of spanwise rotation. *In 7th Inst. Symp. Turbulence and Shear Flow Phenomena*, pages 902–910, 2011.
- E. LAMBALLAIS, M. LESIEUR et O. MÉTAIS : Effects of spanwise rotation on the vorticity stretching in transitionnal and turbulent channel flow. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 17:324, 1996.
- E. LAMBALLAIS, O. MÉTAIS et M. LESIEUR : Spectral-dynamic model for large-eddy simulations of turbulent rotating channel flow. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 12:149–177, 1998.
- R. LARAUFIE, S. DECK et P. SAGAUT : A dynamic forcing method for unsteady turbulent inflow conditions. *J. Comput. Phys.*, 230(23):8647–8663, 2011.
- J. LARSSON et S. KAWAI : Wall-modeling in large eddy simulation : length scales, grid resolution and accuracy. *Center of Turbulence Research Annual Research Briefs*, pages 39–46, 2010.
- B.E. LAUNDER, G.J. REECE et W. RODI : Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.*, 68(3):537–566, 1975.
- B.E. LAUNDER et B.I. SHARMA : Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow in a spinning disc. *Lett. Heat Mass Transfer*, 1:131, 1974.
- B.E. LAUNDER, D.P. TSELEPIDAKIS et B.A. YOUNIS : A second-moment closure study of rotating channel flow. *J. Fluid Mech.*, 183:63–75, 1987.
- D.R. LAURENCE, J.C. URIBE et S.V. UTUYUZHNIKOV : A robust formulation of the v2-f model. *Flow, Turbulence and Combustion*, 73:169–185, 2004.
- S. LEBLANC et C. CAMBON : On the three-dimensional instabilities of plane flows subjected to coriolis force. *Phys. Fluids*, 9(5):1307–1316, 1996.
- N. LI, E. BALARAS et U. PIOMELLI : Inflow conditions for large-eddy simulations of mixing layers. *Phys. Fluids*, 12(4):935, 2000.
- F.S. LIEN et P.A. DURBIN : Non linear $\kappa - \varepsilon - v^2$ modelling with application to high lift. *In Proc. Summer Program 1996*, pages 5–22, 1996.
- D.K. LILLY : On the application of eddy-viscosity concept in the inertial sub-range of turbulence. *NCAR Manuscript No. 123, CO*, 1966.
- D.K. LILLY : A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Phys. Fluids*, 4(3):633–635, 1992.
- J.L. LUMLEY : Toward a turbulent constitutive relation. *J. Fluid Mech.*, 41:413–434, 1970.
- J.L. LUMLEY : Computational modelling of turbulent flows. *Advances in applied mechanics*, 18:123–176, 1978.
- J.L. LUMLEY et G.R. NEWMAN : The return to isotropy of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 82:161–178, 1977.
- T.S. LUND : The use of explicit filters in large eddy simulation. *Comput. & Math. with Appl.*, 335(9–10):603–616, 2003.

- T.S. LUND et H.J. KALTENBACH : Experiments with explicit filtering for LES using a finite-difference method. *Center of Turbulence Research Annual Research Briefs*, pages 91–105, 1995.
- T.S. LUND, X. WU et K.D. SQUIRES : Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations. *J. Comput. Phys.*, 140:233–258, 1998.
- T.S. LUNDGREN : Linearly forced isotropic turbulence. *Center of Turbulence Research Annual Research Briefs*, pages 461–473, 2003.
- R. MANCEAU : *Modélisation de la turbulence. Prise en compte de l'influence des parois par relaxation elliptique*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1999.
- R. MANCEAU : An improved version of the Elliptic Blending Model. Application to non-rotating and rotating channel flows. *In Proc. 4th Int. Symp. Turb. Shear Flow Phenomena*, 2005.
- R. MANCEAU : *Modélisation de la turbulence. Habilitation à diriger les recherches*. CNRS, université de Poitiers, ENSMA, 2011.
- R. MANCEAU, C. FRIESS et T.B. GATSKI : Of the interpretation of DES as a hybrid RANS/temporal LES method. *In Proc. 8th ERCOFTAC Int. Symp. on Eng. Turb. Modelling and Measurements*, 2010.
- R. MANCEAU et K. HANJALIĆ : Elliptic blending model : A new near-wall Reynolds-stress turbulence closure. *Phys. Fluids*, 14(2):744–754, 2002.
- R. MANCEAU, M. WANG et D. LAURENCE : Inhomogeneity and anisotropy effects on the redistribution term in Reynolds-averaged Navier-Stokes modelling. *J. Fluid Mech.*, 438:307–338, 2001.
- F. MENTER, M. KUNTZ et R. BENDER : Scale-adaptive simulation model for turbulent flow predictions. *In Proc. 41st AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2003.
- F.R. MENTER : Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8):1598–1605, 1994.
- J. MEYERS et P. SAGAUT : Is plane-channel flow a friendly case for the testing of large-eddy simulation subgrid-scale models? *Phys. Fluids*, 19(4), 2007.
- R.D. MOSER, J. KIM et N.N. MANSOUR : Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Phys. Fluids*, 11(4):943–945, 1999.
- Y. NAGANO et H. HATTORI : An improved turbulence model for rotating shear flows. *J. of Turbulence*, 3-006:1–13, 2002.
- F. NICOUD et F. DUCROS : Subgrid stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow, Turbulence and Combustion*, 62(3):183–200, 1999.
- N. NIKITIN : Spatial periodicity of spatially evolving turbulent flow caused by inflow boundary condition. *Phys. Fluids*, 19(9):1–4, 2007.
- A.G. OCENI, R. MANCEAU et T. GATSKI : *Progress in wall turbulence : Understanding and Modelling*, chapitre Introduction of wall effect in explicit algebraic stress models through elliptic blending. Springer, 2010.

- A. OOI, B.A. PETTERSSON REIF, G. IACCARINO et P.A. DURBIN : Evaluation of RANS models for rotating flows. *In Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, pages 229–239, 2000.
- I. ORLANDSKI : A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *J. Comput. Phys.*, 21:251–269, 1976.
- M. PAMIÈS, P.-E. WEISS, E. GARNIER, S. DECK et P. SAGAUT : Generation of synthetic turbulent inflow data for large eddy simulation of spatially evolving wall-bounded flows. *Phys. Fluids*, 21(4):1–15, 2009.
- J.Y. PARK et M.K. CHUNG : A model for the decay of rotating homogeneous turbulence. *Phys. Fluids*, 11:1544, 1999.
- T.J. PEDLEY : On the instability of viscous flow in a rapidly rotating pipe. *J. Fluid Mech.*, 35:97–115, 1969.
- L. PERRET, J. DELVILLE, R. MANCEAU et J.-P. BONNET : Turbulent inflow conditions for large-eddy simulation based on low-order empirical model. *Phys. Fluids*, 20(7):1–17, 2008.
- B.A. PETTERSSON REIF, P.A. DURBIN et A. OOI : Modeling rotational effects in eddy-viscosity closures. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 20:563–573, 1999.
- U. PIOMELLI et E. BALARAS : Wall-layer models for large-eddy simulations. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 34:349–374, 2002.
- U. PIOMELLI, E. BALARAS, H. PASINATO, K.D. SQUIRES et P.R. SPALART : The inner/outer layer interface in large-eddy simulations with wall-layer models. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 24:538–550, 2003.
- U. PIOMELLI et J. LIU : Large-eddy simulation of rotating channel flows using a localized dynamic model. *Phys. Fluids*, 7(3):839–848, 1995.
- R. POLETTO, A. REVELL, T. CRAFT et N. JARRIN : Divergence free synthetic eddy method for embedded LES inflow boundary conditions. *In 7th Inst. Symp. Turbulence and Shear Flow Phenomena*, 2011.
- S.B. POPE : A more general effective viscosity hypothesis. *J. Fluid Mech.*, 72:331–340, 1975.
- S.B. POPE : *Turbulents Flows*. Cambridge University Press, fourth édition, 2006.
- C.D. PRUETT, T.B. GATSKI, C.E. GROSCH et W.D. THACKER : The temporally filtered Navier–Stokes equations : Properties of the residual stress. *Phys. Fluids*, 15(8):2127, 2003.
- P. QUÉMÉRÉ et P. SAGAUT : Zonal multi-domain RANS/LES simulations of turbulent flows. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 40:903–925, 2002.
- B. RAJAMANI et J. KIM : A hybrid-filter approach to turbulence simulation. *Flow, Turbulence and Combustion*, 85:421–441, 2008.
- A.J. REVELL, T.J. CRAFT et D.R. LAURENCE : Turbulence modelling of unsteady turbulent flows using the stress strain lag model. *Flow, Turbulence and Combustion*, 86(1):129–151, 2010.

- C.M. RHIE et W.L. CHOW : Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, 11:1525–1532, 1983.
- H.P. ROBERTSON : The invariant theory of isotropic turbulence. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 36, 1940.
- S.K. ROBINSON : Coherent motion in the turbulent boundary layer. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 23:601–639, 1991.
- C. ROSALES et C. MENEVEAU : Linear forcing in numerical simulations of isotropic turbulence : physical space implementations and convergence properties. *Phys. Fluids*, 17(9), 2005.
- J. ROTTA : Statistische theorie nichthomogener turbulenz I. *Zeitschrift für Physik*, 131:547–572, 1951.
- C.L. RUMSEY, T.B. GATSKI et J.H. MORRISON : Turbulence model predictions of strongly curved flow in a U-duct. *AIAA Journal*, 38(8):1394–1402, 2000.
- P. SAGAUT : *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Springer, third édition, 2005.
- P. SAGAUT : Dynamique et modélisation de la turbulence. Cours de master de l’Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 2007.
- P. SAGAUT : LES modelling. In von Karaman Institute for FLUID DYNAMICS LECTURE SERIES, éditeur : *Numerical investigations in turbomachinery : the state of the art*, August 2009.
- P. SAGAUT, S. DECK et M. TERRACOL : *Multiscale and multiresolution approaches in turbulence*. Imperial College Press, 2006.
- R.L. SANI, J. SHEN, O. PIRONNEAU et P.M. GRESHO : Pressure boundary condition for the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 50:673–682, 2006.
- R. SCHIESTEL et A. DEJOAN : Towards a new partially integrated transport model for coarse grid and unsteady turbulent flow simulations. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 18:443–468, 2005.
- J. SCHLÜTER : Toward the prediction of turbulent boundary layers using a coupled RANS-LES method. In *Summer Program - Center of Turbulence Research*, pages 179–186, 2006.
- J.U. SCHLÜTER, H. PITSCH et P. MOIN : Large eddy simulation inflow conditions for coupling with Reynolds-averaged flow solvers. *AIAA Journal*, 42(3):478–484, 2003.
- J.U. SCHLÜTER, H. PITSCH et P. MOIN : Outflow conditions for integrated large eddy simulation/Reynolds-average Navier-Stokes simulations. *AIAA Journal*, 43(1):156–164, 2005.
- F.G. SCHMITT : About Boussinesq’s turbulent viscosity hypothesis : historical remarks and a direct evaluation of its validity. *Comptes Rendus Mécanique*, 335(9–10):617–627, 2007.
- U. SCHUMANN : Realizability of Reynolds stress turbulence models. *Phys. Fluids*, 20(5):721–725, 1977.

- T.-S. SHIH, J. ZHU et J.L. LUMLEY : A new Reynolds stress algebraic equation model. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 125:287–302, 1995.
- Y. SHIMOMURA : A family of dynamic subgrid-scale models consistent with asymptotic material frame indifference. *J. Phys. Soc. Jap.l*, 68(8):2483–2486, 1999.
- E. SHIRANI, J.H. FERZIGER et W.C. REYNOLDS : Mixing of a passive scalar in isotropic and sheared homogeneous turbulence. Rapport technique TF-15, Stanford Thermosci. Div. Tech. Rep., 1981.
- M.L. SHUR, M.K. STRELETS, A.K. TRAVIN et P.R. SPALART : Turbulence modelling in rotating and curved channels : assessing the Spalart–Shur correction. *AIAA Journal*, 38(5):784–792, 2000.
- A.J. SIMONSEN et P.-A. KROGSTAD : Turbulent stress invariant analysis : Clarification of existing terminology. *Phys. Fluids*, 17(8), 2005.
- D. SIPP et L. JACQUIN : Three-dimensional centrifugal-type instabilities of two-dimensional flows in rotating systems. *Phys. Fluids*, 12(7):1740–1748, 2000.
- J. SMAGORINSKY : General circulation experiments with the primitive equations, I. The basic experiment. *Mon. Weather Rev.*, 91:99, 1963.
- P.E. SMIRNOV et F.R. MENTER : Sensitization of the SST turbulence model to rotation and curvature by applying the Spalart–Shur correction term. *J. Turbomachinery*, 1:5–21, 2009.
- G.F. SMITH : On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors. *Int. J. Eng. Sci.*, 9:899, 1971.
- L.M. SMITH et F. WALEFFE : Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating three-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 11(6):1608–1622, 1999.
- P.R. SPALART : Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 1410$. *J. Fluid Mech.*, 187:61–98, 1988.
- P.R. SPALART : Strategies for turbulence modelling and simulations. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 21:252–263, 2000.
- P.R. SPALART et S.R. ALLMARAS : A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *La recherche aérospaciale*, 1:5–21, 1994.
- P.R. SPALART, S. DECK, M.L. SHUR, K.D. SQUIRES, M.K. STRELETS et A. TRAVIN : A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 20(3):181–195, 2006a.
- P.R. SPALART, W.-H. JOU, M.K. STRELETS et S.R. ALLMARAS : Comments of feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach. *In Proc. of the 1st AFSOR Int. Conf. on DNS/LES*, pages 137–147, 1997.
- P.R. SPALART et M.L. SHUR : On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature. *Aerospace Science and Technology*, 5:297–302, 1997.
- P.R. SPALART et C.G. SPEZIALE : A note on constraints in turbulence modelling. *J. Fluid Mech.*, 391:373–376, 1999.

- P.R. SPALART, M.K. STRELETS et A. TRAVIN : Direct numerical simulation of large-eddy-break-up devices in a boundary layer. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 27(5):902–910, 2006b.
- C.G. SPEZIALE : Invariance of turbulent closure models. *Phys. Fluids*, 22(6):1033–1037, 1979.
- C.G. SPEZIALE : Some interesting properties of two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 24, 1981.
- C.G. SPEZIALE : Material frame-indifference in turbulence modelling. *ASME*, 51:942–944, 1984.
- C.G. SPEZIALE : Subgrid scale stress models for the large eddy simulation of rotating turbulent flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 33:199–222, 1985.
- C.G. SPEZIALE : On nonlinear $k-l$ and $k-\varepsilon$ models of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 178:459–475, 1987.
- C.G. SPEZIALE : Turbulence modeling in noninertial frames of reference. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 1:3–19, 1989.
- C.G. SPEZIALE : Turbulence modeling for time-dependent RANS and VLES : A review. *AIAA Journal*, 36(2):173–184, 1998.
- C.G. SPEZIALE, R. ABID et G.A. BLAISDELL : On the consistency of Reynolds stress turbulence closures with hydrodynamic stability theory. *Phys. Fluids*, 8(3):781–788, 1996.
- C.G. SPEZIALE et N. MAC GIOLLA MHUIRIS : On the prediction of equilibrium states in homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 209:591–615, 1989a.
- C.G. SPEZIALE et N. MAC GIOLLA MHUIRIS : Scaling laws for homogeneous turbulent shear flows in a rotating frame. *Phys. Fluids*, 1(2):294–301, 1989b.
- C.G. SPEZIALE, R. RAJ et T.B. GATSKI : Modeling the dissipation rate in rotating turbulent flows. Rapport technique 90–88, ICASE, 1990.
- C.G. SPEZIALE, S. SARKAR et T.B. GATSKI : Modelling the pressure-strain correlation of turbulence : an invariant dynamical systems approach. *J. Fluid Mech.*, 227:245–272, 1991.
- A. SPILLE-KOHOFF et H.-J. KALTENBACH : Generation of turbulent inflow data with a prescribed shear-stress profile. In *Proc. of the 3rd AFOSR International Conference on DNS/LES*, 2001.
- M. STANCIU, Y. FENDLER et J.-M. DOREY : Unsteady stator-rotor interaction coupled with exhaust hood effect for last stage steam turbines. In *Proc. of the 9th European Turbomachinery Conference*, pages 1425–1434, 2011.
- D.K. TAFTI et S.P. VANKA : A numerical study of the effect of spanwise rotation on turbulent channel flow. *Phys. Fluids*, 3(4):642–656, 1991.
- L. TEMMERMAN, M.A. LESCHZNER, C.P. MELLEN et J. FRÖHLICH : Investigation of wall-function approximations and subgrid-scale models in large eddy simulation of separated flow in a channel with streamwise periodic constrictions. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 24:157–180, 2003.

- O. TÖRNBLOM et A.V. JOHANSSON : A Reynolds stress closure description of separation control with vortex generators in a plane asymmetric diffuser. *Phys. Fluids*, 19(115108), 2007.
- A. TRAVIN, M.L. SHUR, P.R. SPALART et M.K. STRELETS : On URANS solutions with LES-like behaviour. In *Proc. ECCOMAS Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, 2004.
- D.J. TRITTON : Stabilization and destabilization of turbulent shear flow in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, 241:503–523, 1992.
- C. TRUESDELL et W. NOLL : *The non-linear field theories of mechanics*. Springer, third édition, 2004.
- E.R. VAN DRIEST : On turbulent flow near a wall. *J. Aero. Sci.*, 23:1007–1011, 1956.
- O. VASILYEV, T.S. LUND et P. MOIN : A general class of commutative filters for LES in complex geometries. *J. Comput. Phys.*, 146:82–104, 1998.
- L. VENEMA, D. von TERZI, H.-J. BAUER et W. RODI : DNS of heat transfer increase in a cylinder stagnation region due to wake-induced turbulence. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 32(3):492–498, 2010.
- H.K. VERTSEEG et W. MALALASEKERA : *An introduction to Computational Fluid Dynamics : the Finite Volume Method*. Longman Scientific and Technical, 1995.
- D.A. VON TERZI et J. FRÖHLICH : Segregated coupling of large-eddy simulations with downstream Reynolds-Averaged Navier–Stokes calculations. *Computers & Fluids*, 39:1314–1331, 2010.
- A.W. VREMAN : An eddy-viscosity subgrid-scale model for turbulent shear flow : Algebraic theory and applications. *Phys. Fluids*, 16(10):3670–3681, 2004.
- F. WALEFFE : The nature of triad interactions in homogeneous turbulence. *Phys. Fluids*, 4(2):350–363, 1992.
- F. WALEFFE : Inertial transfers in the helical decomposition. *Phys. Fluids*, 5(3):677–685, 1993.
- S. WALLIN et A.V. JOHANSSON : Modelling streamline curvature effects in explicit algebraic Reynolds stress turbulence models. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 23:721–730, 2002.
- J.H. WATMUFF, H.T. WITT et P.N. JOUBERT : Developing turbulent boundary layers with system rotation. *J. Fluid Mech.*, 175:405–448, 1985.
- J. WEIS et K. HUTTER : On Euclidean invariance of algebraic Reynolds stress models in turbulence. *J. Fluid Mech.*, 476:63–68, 2003.
- G.S. WINCKELMANS, T.S. LUND, D. CARATI et A. WRAY : A priori testing of subgrid-scale models for the velocity–pressure and vorticity–velocity formulations. In *Summer Program - Center of Turbulence Research*, pages 309–329, 1996.
- X. XIAO, J.R. EDWARDS, H.A. HASSAN et R.A. BAURLE : Inflow boundary conditions for hybrid large eddy/Reynolds averaged Navier–Stokes simulations. *AIAA Journal*, 41(8):1463–1489, 2003.
- Y. ZHOU : A phenomenological treatment of rotating turbulence. *Phys. Fluids*, 7(8):2092–2094, 1995.

