



**HAL**  
open science

# Etude par simulations numériques instationnaires de l'écoulement dans les moteurs à propergol solide

Magali Dupuy

► **To cite this version:**

Magali Dupuy. Etude par simulations numériques instationnaires de l'écoulement dans les moteurs à propergol solide. Autre. ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers, 2012. Français. NNT : 2012ESMA0009 . tel-00744017v1

**HAL Id: tel-00744017**

**<https://theses.hal.science/tel-00744017v1>**

Submitted on 22 Oct 2012 (v1), last revised 22 Oct 2012 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THÈSE

Pour l'obtention du Grade de  
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE MÉCANIQUE ET  
D'AÉROTECHNIQUE  
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École Doctorale :  
Sciences et Ingénierie en Matériaux, Mécanique, Énergétique et Aéronautique  
Secteur de Recherche : Mécanique des Milieux Fluides

Présentée par :  
**Magali DUPUY**

\*\*\*\*\*

# Étude par simulations numériques instationnaires de l'écoulement dans les moteurs à propergol solide

\*\*\*\*\*

Directeur de thèse : Frédéric PLOURDE  
Co-encadrant : Yves FABIGNON

\*\*\*\*\*

Soutenue le 14 Juin 2012  
devant la Commission d'Examen

\*\*\*\*\*

## JURY

Henri	BOISSON	Directeur de Recherche CNRS-IMFT Toulouse	(Président)
Françoise	DAUMAS-BATAILLE	Professeure-Université de Perpignan	(Rapporteur)
Marc	MEDALE	Professeur-Université de Marseille	(Rapporteur)
Dominique	COUTON	Maître de Conférences-Université de Poitiers	(Examineur)
Yves	FABIGNON	Dr. Ingénieur-ONERA Palaiseau	(Examineur)
Frédéric	PLOURDE	Directeur de Recherche-Institut PPRIME Poitiers	(Examineur)



# Remerciements

Je souhaiterais tout d'abord remercier Frédéric Plourde pour avoir été mon directeur de thèse et Yves Fabignon pour m'avoir supervisée. Je remercie également tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail : merci à Henri Boisson qui m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse, à Françoise Daumas-Bataille et Marc Médale d'avoir accepté la charge de rapporteurs, et à Dominique Couton d'avoir participé au jury.

Ce travail de thèse a été effectué au sein de l'unité Propulsion Solide du DEFA à l'ONERA de Palaiseau et je remercie tous les membres de cette unité de m'avoir si bien accueillie. Je remercie plus particulièrement Gérard Avalon, qui a toujours été présent pour répondre à toutes mes questions concernant le montage expérimental VECLA, et Emmanuel Radenac pour la patience et la disponibilité dont il a fait preuve à mon égard tout au long de ma thèse.

Je tiens également à remercier les membres du DSNA de l'ONERA de Châtillon pour leurs conseils et leur support technique concernant le code CEDRE.

Je remercie chaleureusement toutes les autres personnes que j'ai croisé à l'ONERA au cours de ces années, stagiaires, doctorants ou ingénieurs avec qui j'ai passé des moments joyeux et sympathiques : Cynthia, Estelle, Evangéline, Françoise, Hélène, Nadezda, Sheddia, Sonia, Sterenn, Alaric, Baptiste, Bruno, David, Denis, Florian, François, François-Xavier, Jean-Michel, Jore, Khaled, Ludovic, Nicolas, Philippe et Stéphane.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Line Denat, Shihab Rahman et Lionel Matuszewski pour leur amitié, leur aide et leur bonne humeur. Tous trois ont su, chacun à leur manière, me soutenir et m'encourager au cours de toutes ces années de thèse.

Pour finir, j'exprime toute ma gratitude à mes parents pour leur soutien indéfectible qui m'a permis d'effectuer ma thèse de la façon la plus sereine possible.





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>17</b>
<b>I Présentation des éléments théoriques et des techniques numériques</b>	<b>23</b>
I.1 Équations de base . . . . .	24
I.1.1 Équations de Navier-Stokes . . . . .	24
I.1.1.1 Équation de conservation de la masse . . . . .	24
I.1.1.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement . . . . .	24
I.1.1.3 Équation de conservation de l'énergie totale . . . . .	25
I.1.2 Relations complémentaires . . . . .	25
I.1.2.1 Loi d'état des gaz parfaits . . . . .	25
I.1.2.2 Expression de l'énergie totale $E$ . . . . .	25
I.1.2.3 Expression du tenseur des contraintes visqueuses $\sigma_{ij}$ . . . . .	25
I.1.2.4 Expression du flux de chaleur $\mathbf{Q}_i$ . . . . .	26
I.1.2.5 Lois de Sutherland . . . . .	26
I.1.3 Conclusion sur les équations de base . . . . .	27
I.2 Modélisation de la turbulence . . . . .	27
I.2.1 Caractéristiques générales de la turbulence . . . . .	27
I.2.1.1 Écoulement à grand nombre de Reynolds . . . . .	28
I.2.1.2 Écoulement instationnaire . . . . .	28
I.2.1.3 Écoulement très irrégulier en espace . . . . .	28
I.2.1.4 Écoulement avec une forte diffusivité apparente . . . . .	28
I.2.1.5 Variations spatiales et temporelles du rotationnel . . . . .	29
I.2.2 Cascade d'énergie et échelles caractéristiques . . . . .	29
I.2.2.1 Échelle de longueur énergétique $Le$ . . . . .	30
I.2.2.2 Théorie de la cascade d'énergie . . . . .	30
I.2.2.3 Échelle de longueur dissipative de Kolmogorov $\eta$ . . . . .	31
I.2.2.4 Relation entre échelles énergétique et dissipative . . . . .	32
I.2.2.5 Relation de Kolmogorov . . . . .	32
I.2.3 Les différentes approches pour la modélisation de la turbulence . . . . .	33
I.3 Modélisation numérique de la turbulence . . . . .	34
I.3.1 L'approche RANS . . . . .	34

I.3.1.1	Principe de la méthode . . . . .	34
I.3.1.2	Équations de Navier-Stokes moyennées . . . . .	35
I.3.1.3	Fermeture du problème . . . . .	35
I.3.1.4	Modèle $k - l$ . . . . .	36
I.3.1.5	Lois de paroi . . . . .	37
I.3.2	La méthode LES . . . . .	38
I.3.2.1	Principe de la méthode . . . . .	38
I.3.2.2	Approche MILES . . . . .	38
I.3.2.3	Filtrage . . . . .	39
I.3.2.4	Équations de Navier-Stokes filtrées . . . . .	40
I.3.2.5	Modélisation des échelles sous-maille . . . . .	40
I.4	Présentation générale du code de calcul CEDRE . . . . .	41
I.4.1	Formulation mathématique du problème . . . . .	41
I.4.1.1	Équations bilan à l'intérieur du domaine . . . . .	41
I.4.1.2	Modèle aux limites . . . . .	44
I.4.2	Discrétisation spatiale . . . . .	45
I.4.2.1	Interpolation . . . . .	45
I.4.2.2	Calcul du flux numérique sur l'interface $A_{ij}$ . . . . .	50
I.4.2.3	Conclusion sur la discrétisation d'espace . . . . .	53
I.4.3	Intégration temporelle . . . . .	54
I.4.3.1	Méthodes explicites . . . . .	54
I.4.3.2	Méthodes implicites à un pas . . . . .	55
I.4.3.3	Particularités du code CEDRE pour les calculs stationnaires . . . . .	56
I.5	Conclusion du chapitre . . . . .	57
 <b>II Présentation des données expérimentales du montage VECLA</b>		<b>59</b>
II.1	Dispositif expérimental . . . . .	61
II.1.1	Caractéristiques du montage VECLA . . . . .	61
II.1.2	Description des mesures . . . . .	62
II.2	Présentation des résultats expérimentaux . . . . .	62
II.2.1	Champs moyens . . . . .	62
II.2.1.1	Vitesse . . . . .	62
II.2.1.2	Pression . . . . .	64
II.2.1.3	Coefficient de quantité de mouvement $\beta$ . . . . .	65
II.2.2	Quantités fluctuantes . . . . .	66
II.2.3	Analyse spectrale des signaux . . . . .	70
II.2.3.1	Spectres de vitesse et de pression . . . . .	70
II.2.3.2	Densité spectrale de puissance . . . . .	72
II.2.4	Mesures de bruit . . . . .	73
II.2.4.1	Densité de probabilité de la fluctuation de vitesse totale pour les mesures de bruit . . . . .	74
II.2.4.2	Densité spectrale de puissance pour les mesures de bruit . . . . .	77

II.2.4.3	Taux de turbulence . . . . .	80
II.2.4.4	Échelles de turbulence . . . . .	81
II.3	Conclusion du chapitre . . . . .	83
<b>III</b>	<b>Analyse de l'écoulement dans VECLA</b>	<b>85</b>
III.1	Écoulement de Taylor-Culick . . . . .	86
III.1.1	Hypothèses et notations . . . . .	86
III.1.2	Mise sous forme adimensionnelle des équations . . . . .	87
III.1.3	Solution analytique . . . . .	88
III.2	Simulations numériques d'écoulement laminaire . . . . .	91
III.2.1	Comparaison Taylor-Culick/Calculs VECLA . . . . .	91
III.2.2	Comparaison laminaire/VECLA . . . . .	97
III.3	Transition et échelles de grandeur . . . . .	99
III.3.1	Définition de la transition . . . . .	100
III.3.2	Estimation des principales échelles de grandeur turbulentes . . . . .	101
III.3.2.1	Expression des nombres de Reynolds associés à la dimen- sion du canal . . . . .	101
III.3.2.2	Expression d'une échelle énergétique de la turbulence . . . . .	103
III.3.2.3	Estimation de l'échelle de Kolmogorov $\eta$ . . . . .	104
III.4	Simulations d'écoulement transitionnel . . . . .	105
III.4.1	Présentation de la simulation 2D RANS stationnaire . . . . .	105
III.4.2	Présentation de la simulation 3D LES instationnaire . . . . .	107
III.4.2.1	Données de calcul . . . . .	107
III.4.2.2	Commentaire sur le temps physique simulé lors du calcul LES . . . . .	111
III.4.2.3	Analyse du maillage pour la simulation tridimensionnelle . . . . .	112
III.4.3	Résultats des simulations . . . . .	113
III.4.4	Analyse des résultats des simulations RANS et LES . . . . .	118
III.5	Conclusion du chapitre . . . . .	120
<b>IV</b>	<b>Modélisations de perturbations</b>	<b>123</b>
IV.1	Modélisation de perturbations numériques . . . . .	124
IV.1.1	Choix et brève description de la modélisation de perturbations nu- mériques . . . . .	124
IV.1.2	Conclusion sur la modélisation de perturbations numériques . . . . .	125
IV.2	Modélisation de perturbations physiques . . . . .	126
IV.2.1	Choix de la modélisation de perturbations physiques . . . . .	126
IV.2.1.1	Conditions périodiques . . . . .	126
IV.2.1.2	Calcul précurseur . . . . .	127
IV.2.1.3	Méthodes stochastiques . . . . .	127
IV.2.1.4	Sélection de la méthode de génération de fluctuations . . . . .	129
IV.2.1.5	Conclusion . . . . .	131

IV.2.2	Description de la méthode de génération de perturbations physiques	132
IV.2.2.1	Mouvement brownien et processus de Wiener	132
IV.2.2.2	Équation de Langevin	132
IV.2.2.3	Détermination de la méthode de résolution numérique de l'équation de Langevin	134
IV.2.2.4	Étude du comportement du modèle de Langevin hors écoulement	142
IV.2.3	Implantation du modèle de bruit rouge filtré dans le code CEDRE	146
IV.2.3.1	Stratégie d'implantation dans CEDRE	146
IV.2.3.2	Prise en compte de sources dans CEDRE	146
IV.2.3.3	Adaptation du modèle de bruit rouge filtré à la structure des sources	148
IV.2.4	Étude du bruit rouge après implantation dans CEDRE	149
IV.2.4.1	Modèle de bruit rouge sur l'énergie	152
IV.2.4.2	Modèle de bruit rouge sur la masse	158
IV.2.4.3	Modèle de bruit rouge sur la variable $(\rho v_y)$	163
IV.2.4.4	Conclusion	168
IV.3	Conclusion du chapitre	169
<b>V</b>	<b>Simulations numériques LES</b>	<b>171</b>
V.1	Description et caractéristiques des simulations numériques LES	172
V.2	Choix des valeurs des paramètres du modèle de bruit rouge pour le calcul tridimensionnel de l'écoulement dans VECLA	174
V.2.1	Choix de la variable bruitée	175
V.2.2	Choix de la valeur de l'échelle temporelle $T_L$	175
V.2.3	Choix de la valeur de l'écart-type $\sigma$	175
V.2.4	Choix de la valeur du coefficient $C$ et de l'épaisseur $e$ sur laquelle le bruit est appliqué	176
V.2.5	Comparaison des mesures expérimentales de bruit avec la simulation LES avec bruit rouge	178
V.3	Analyse des résultats	180
V.3.1	Écoulement moyen	180
V.3.2	Transition du profil de vitesse moyenne longitudinale	185
V.3.3	Quantités fluctuantes	188
V.4	Conclusion du chapitre	197
	<b>Conclusion</b>	<b>199</b>
<b>A</b>	<b>Rappels sur les variables aléatoires et la loi normale</b>	<b>201</b>
A.1	Définition de la densité de probabilité (PDF) d'une loi normale	201
A.2	Coefficient de dissymétrie (ou <i>skewness</i> )	201
A.3	Coefficient d'aplatissement (ou <i>kurtosis</i> )	202

<b>B</b>	<b>Vitesses d'injection et débits</b>	<b>203</b>
B.1	Principe de l'alimentation en air du montage VECLA . . . . .	203
B.2	Débit $\dot{m}$ . . . . .	204
B.3	Expression du débit massique surfacique $\dot{m}_s$ . . . . .	204
B.4	Surface d'injection $S_{inj}$ . . . . .	205
B.5	Expression de la vitesse d'injection . . . . .	205
B.6	Masse volumique $\rho$ . . . . .	205
B.7	Valeurs de la vitesse d'injection et du débit massique surfacique . . . . .	206
<b>C</b>	<b>Résultats des tests d'activation du bruit rouge sur différentes variables</b>	<b>207</b>
C.1	Résultats du test d'activation du bruit rouge sur la variable $(\rho E)$ . . . . .	208
C.2	Résultats du test d'activation du bruit rouge sur la variable $\rho$ . . . . .	211
C.3	Résultats du test d'activation du bruit rouge sur la variable $(\rho v_y)$ . . . . .	214
<b>D</b>	<b>Expressions de <math>T^{n+1}</math> et <math>P^{n+1}</math></b>	<b>217</b>
D.1	Détermination de l'expression de la température . . . . .	218
D.2	Détermination de l'expression de la pression . . . . .	220
<b>E</b>	<b>Données et résultats pour les calculs LES 3D</b>	<b>223</b>
E.1	Détermination de la valeur de l'écart-type pour le calcul LES 3D avec bruit rouge . . . . .	223
E.1.1	Valeur de $(\rho v)_{inj}$ . . . . .	223
E.1.2	Valeur de $(\text{RMS}[(\rho v)'] / (\rho v)_{inj})_{\text{VECLA}}$ . . . . .	223
E.1.3	Valeur de la vitesse d'injection $v_{inj}$ . . . . .	224
E.1.4	Valeur numérique de l'écart-type $\sigma(\rho)$ . . . . .	226
E.2	Résultats de la simulation LES avec le modèle de bruit rouge . . . . .	227
E.3	Résultats des simulations LES : quantités fluctuantes . . . . .	231



# Nomenclature

$A$	Code CEDRE, discrétisation spatiale : nom de l'interface
$\vec{\mathbf{a}}$	Code CEDRE, discrétisation spatiale : interface - vecteur unitaire
$a$	Vitesse du son, $m.s^{-1}$
$B$	Code CEDRE, discrétisation spatiale : barycentre
$\vec{\mathbf{b}}$	Code CEDRE, discrétisation spatiale : interface - vecteur unitaire orthogonal
$C_f$	Coefficient de frottement
$\mathbf{E}$	Densité Spectrale d'Énergie
$E$	Énergie totale (par unité de masse), $J.kg^{-1}$
$e$	Énergie interne (par unité de masse)
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	Vecteurs du repère direct orthonormé en coordonnées cartésiennes
$\mathbf{F}$	Vecteur des flux (flux total)
$F$	Filtrage LES : nom du filtre
$F_k$	Autocorrélation des fluctuations de quantité de mouvement
$\mathbf{f}$	Flux hyperbolique (ou flux d'Euler)
$f$	Fréquence, $Hz$
$G$	Code CEDRE, discrétisation spatiale : centre de gravité de la cellule
$H$	Code CEDRE, discrétisation spatiale : point de courbure de la cellule
$h$	Hauteur du canal VECLA, $m$
$I$	Intensité turbulente, $m.s^{-1}$



$J$	Code CEDRE : matrice jacobienne
$\hat{J}$	Code CEDRE : matrice jacobienne approchée
$K$	Code CEDRE, discrétisation spatiale : centre de l'interface
$\mathbf{k}$	Nombre d'onde
$k$	Énergie cinétique turbulente
$L$	Longueur du canal VECLA, $m$
$Le$	Échelle de longueur énergétique, $m$
$l$	Longueur de mélange, $m$
$M$	Masse molaire du gaz, $kg.mol^{-1}$
$M_p$	Code CEDRE, préconditionnement BAS MACH : matrice de préconditionnement
$\dot{m}_s$	Débit massique surfacique, $kg.s^{-1}.m^{-2}$
$\vec{\mathbf{n}}$	Code CEDRE, discrétisation spatiale : normale extérieure à l'interface entre les cellules $i$ et $j$
$\vec{n}$	Normale extérieure au domaine fluide
$\mathbf{P}$	Code CEDRE, discrétisation spatiale : nombre total de cellules de premier voisinage
$P$	Pression, $Pa$
$\overline{\overline{P}}$	Pression adimensionnée
$\mathbf{Q}$	Flux de chaleur
$Q$	Vecteur des variables conservatives (internes+limites)
$q$	Vecteur des variables conservatives internes au domaine fluide
$\tilde{q}$	Vecteur des variables conservatives filtrées
$R$	Constante universelle des gaz parfaits, $J.mol^{-1}.K^{-1}$
$Re$	Nombre de Reynolds
$Re_b$	Nombre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne dans le canal
$Re_c$	Nombre de Reynolds basé sur la vitesse maximum sur l'axe du canal
$Re_s$	Nombre de Reynolds d'injection
$Re_t$	Nombre de Reynolds turbulent

$\mathbf{r}$	Code CEDRE, discrétisation spatiale : coordonnées d'un point
$r$	Constante spécifique des gaz parfaits, $J.kg^{-1}.K^{-1}$
$S$	Tenseur de déformation
$S$	Source de bruit rouge filtré en temps
$\mathbf{T}$	Code CEDRE, conditions aux limites : temps de relaxation
$T$	Température, $K$
$t$	Temps, $s$
$\sigma$	Frottement
$U$	Vecteur des variables primitives (internes+limites)
$u$	Vecteur des variables primitives internes au domaine fluide
$\tilde{u}$	Vecteur des variables primitives filtrées
$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$	Vitesse totale, $m.s^{-1}$
$v_x, v_y, v_z$	Composantes de la vitesse, $m.s^{-1}$
$\overline{\overline{v_x}}, \overline{\overline{v_y}}, \overline{\overline{v_z}}$	Composantes de la vitesse adimensionnée
$V$	Code CEDRE, discrétisation spatiale : volume de la cellule
$x, y, z$	Coordonnées cartésiennes, $m$
$\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}, \overline{\overline{z}}$	Coordonnées cartésiennes adimensionnées

*Caractères grecs*

$\beta$	Coefficient de quantité de mouvement
$\gamma$	Rapport des chaleurs spécifiques
$\epsilon$	Dissipation
$\eta$	Échelle de longueur dissipative, $m$
$\kappa$	Conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
$\Lambda_t$	Échelle temporelle mesurée sur le montage VECLA, $s$
$\Lambda_l$	Échelle spatiale mesurée sur le montage VECLA, $m$
$\lambda$	Deuxième coefficient de viscosité
$\mu$	Viscosité dynamique, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
$\nu$	Viscosité cinématique,
$\rho$	Masse volumique, $kg.m^{-3}$
$\lambda_{\text{paroi}}$	Conductivité thermique
$\sigma$	Tenseur des contraintes visqueuses
$\tau$	Tenseur de Reynolds
$\Phi$	Montage VECLA : diamètre du poral
$\phi$	Filtrage RANS : variable filtrée
$\varphi$	Flux visqueux (ou flux dissipatifs)
$\chi$	Coefficients de limitation
$\Psi$	Fonctions Limiteur de pente
$\psi$	Filtrage LES : variable filtrée
$\Omega$	Code CEDRE : nom du domaine fluide

### *Indices*

<i>al</i>	Alimentation du canal VECLA
$\alpha$	Code CEDRE : type de condition aux limites
<i>i</i>	Indice de la variable
<i>inj</i>	Injection du canal VECLA
<i>lim</i>	Indice de valeur limitée
<i>o</i>	Initial
<i>p</i>	Code CEDRE, discrétisation spatiale : indice des cellules de premier voisinage
<i>s</i>	Surfacique
<i>sgs</i>	Sous-maille

### *Exposants*

'	Fluctuation autour de la moyenne de Reynolds
"	Fluctuation autour de la moyenne de Favre
<i>sgs</i>	Sous-maille

### *Notations*

$\bar{\bar{\cdot}}$	Valeur adimensionnée
$\bar{\cdot}$	Valeur moyenne au sens de Reynolds
$\tilde{\cdot}$	Valeur moyenne au sens de Favre
$\underset{\sim}{\cdot}$	Fluctuation de sous-maille au sens de Reynolds
$\overset{\sim}{\cdot}$	Fluctuation à grande échelle au sens de Reynolds
$\underset{\sim}{\cdot}$	Fluctuation de sous-maille au sens de Favre
$\hat{\cdot}$	Transformée de Fourier
$[\cdot]$	Partie filtrée au sens de Reynolds
$\langle \cdot \rangle$	Partie filtrée au sens de Favre
$[[\cdot]]$	Moyenne en volume

### *Acronymes*

CEDRE	Calcul d'Écoulements Diphasiques Réactifs pour l'Énergétique
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
DIAS	DIspositif ASsouplisseur
DNS	<i>Direct Numerical Simulation</i>
DSP	Densité Spectrale de Puissance
EDO	Équation Différentielle Ordinaire
EDP	Équation aux Dérivées Partielles
EDS	Équation Différentielle Stochastique
FDS	<i>Flux Difference Splitting</i>
FVS	<i>Flux Vector Splitting</i>
LES	<i>Large Eddy Simulation</i>
MILES	<i>Monotone Integrated Large Eddy Simulation</i>
MPS	Moteur à Propergol Solide
MUSCL	<i>Monotonic Upstream Schemes for Conservative Laws</i>
ODF	Opérateur de Décentrement sur les Flux
ODQ	Opérateur de Décentrement sur les Quantités
ONERA	Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales
PCL	Paramètres de Conditions aux Limites
PT	Protections Thermiques
RANS	<i>Reynolds Averaged Navier Stokes</i>
RMS	<i>Root Mean Square</i>
TV	<i>Total Variation</i>
TVD	<i>Total Variation Diminishing</i>
VECLA	Veine d'Essai de la Couche Limite Acoustique

# Introduction

Le système de propulsion du lanceur européen Ariane 5 est composé d'un moteur à propulsion liquide Vulcain ainsi que de deux Moteurs à Propergol Solide (MPS) disposés de part et d'autre du corps central de la fusée. Dans la première phase du décollage, l'essentiel de la poussée est fourni par les deux MPS. Après environ deux minutes de vol, ils sont éjectés du corps central du lanceur et la poussée est alors assurée par le moteur Vulcain.

Le corps central du MPS contient environ 230 tonnes de propergol. D'un point de vue technique, il est très difficile de couler la totalité des 230 tonnes de propergol sous la forme d'un seul bloc. De ce fait, le chargement est divisé en trois segments. Les segments sont séparés par des Protections Thermiques (PT) positionnées sur les faces amont de chaque bloc, permettant de contrôler la surface de combustion. La combustion fait régresser la surface du propergol régulièrement avec le temps jusqu'à ce que tout le combustible ait brûlé. Les produits de combustion s'écoulent dans la chambre du MPS puis sont évacués par détente par la tuyère, ce qui permet la propulsion par le principe de l'action et de la réaction [32]. La poussée délivrée par les MPS au cours du temps dépend de la surface de combustion, liée à la géométrie initiale du propergol, ainsi que de sa composition chimique, de la pression dans la chambre et de la détente des gaz dans la tuyère. Par conséquent, la poussée ne peut pas être contrôlée pendant le vol, à l'inverse des moteurs à propulsion liquide. Ces derniers offrent également des performances supérieures en terme d'impulsion spécifique ISP<sup>1</sup>, mais sont toutefois plus complexes à fabriquer que les MPS et d'un coût supérieur. La propulsion solide reste donc la plus adaptée pour fournir la poussée nécessaire dans la première phase du vol. Les MPS présentent cependant un défaut : des oscillations de pression sont générées pendant la combustion du bloc de propergol puis converties en oscillations de poussée par l'intermédiaire de la tuyère. Les oscillations de poussée sont alors transmises au corps central du lanceur sous la forme de vibrations. Ces dernières

---

1. L'ISP (ou impulsion spécifique) permet d'estimer l'efficacité d'un système de propulsion. Elle est définie par : 
$$ISP = \frac{\text{Poussée}}{\text{Débit} \times \text{Accélération de la pesanteur}}$$

peuvent être suffisamment puissantes pour altérer fortement le fonctionnement complexe des équipements embarqués au niveau de la charge utile (électronique, gyroscope, etc.). Afin d'amortir les vibrations, Ariane 5 est équipé de Dispositifs Assouplisseurs (DIAS) installés entre chaque MPS et le corps central de la fusée. Ainsi, les vibrations sont filtrées permettant un fonctionnement dans les spécifications vibratoires demandées : de ce fait, le bon fonctionnement du lanceur est assuré. Cependant lors de certains vols, ces spécifications vibratoires peuvent être dépassées. L'étude des mécanismes qui sont à l'origine des oscillations permettrait à terme de les atténuer ou de les contrôler, ce qui se traduirait par un gain en confort pour la charge utile, voire un gain jugé significatif en performance si le DIAS pouvait être abandonné. Des études ont donc été entreprises à l'ONERA et à SAFRAN-SME afin d'étudier l'origine de ces oscillations de pression. Les recherches ont montrées qu'elles résultent de l'excitation du premier mode acoustique de la chambre de combustion du MPS principalement par différentes sources d'instabilités à l'intérieur du P230, phénomène appelé couplage aéroacoustique. Plusieurs sources d'instabilités existent dans le moteur parmi lesquelles certaines sont suspectées de pouvoir générer ce couplage.

Parmi les sources d'instabilités possibles envisagées, on trouve tout d'abord les instabilités de combustion. En effet, la combustion du propergol en régime stationnaire est dépendante de la pression et de la température ambiantes. Une variation de la pression peut de ce fait entraîner une variation du taux de combustion. En réponse, et sous certaines conditions, la variation du taux de combustion peut à son tour amplifier les variations de pression. Cependant, ce type d'instabilités n'agit probablement pas dans le couplage aéroacoustique car les fréquences concernées par le phénomène sont très différentes de celles observées sur les MPS. De ce fait, les instabilités de combustion ont été exclues au profit d'une autre source d'instabilité : les instabilités hydrodynamiques. Ces dernières sont dues à un écoulement instable qui exhibe des structures tourbillonnaires, phénomène appelé détachement tourbillonnaire (ou *Vortex Shedding*). Ce processus peut être indépendant de tout phénomène réactif. Les recherches menées à ce jour ont permis d'isoler trois sources de détachement tourbillonnaire différentes susceptibles d'engendrer l'accrochage aéroacoustique [38].

La première de ces instabilités hydrodynamiques est liée aux modifications de géométrie du bloc de propergol pendant sa combustion. Des angles peuvent ainsi apparaître, créant une couche de cisaillement avec un profil inflexionnel de vitesse axiale. Or, par expérience, on sait que ce type de profil est instable et peut provoquer l'apparition de tourbillons. Cette instabilité est alors à l'origine du *Vortex Shedding* d'Angle (VSA). La deuxième instabilité est l'instabilité d'obstacle au niveau de la Protection Thermique. En effet, la PT est elle aussi à l'origine d'une couche cisailée associée à un profil de vitesse inflexionnel, permettant la création d'un *Vortex Shedding* d'Obstacle (VSO). La troisième et dernière instabilité hydrodynamique est l'instabilité pariétale. Contrairement aux deux autres, l'instabilité pariétale n'a pas pour origine une couche cisailée mais est liée à l'instabilité naturelle de l'écoulement de gaz généré à la surface du propergol lors de sa com-

bustion. La première description de l’instabilité d’un écoulement avec injection pariétale a été effectuée par Varapaev et Yagodkin [79] en 1969. Leur théorie linéaire sur l’instabilité pariétale a ensuite été utilisée pour caractériser la transition du profil de vitesse vers la turbulence dans un canal avec injection pariétale (Beddini [14]). Ce sont Lupoglazoff et Vuillot [56] qui les premiers ont découvert par la simulation numérique un phénomène de détachement tourbillonnaire lié à cette instabilité pariétale qui permettrait un couplage avec l’acoustique de la chambre du moteur. Cette découverte, appelée *Vortex Shedding* Pariétal (VSP) car des tourbillons se détachent au niveau de la paroi, a rapidement été reliée à l’instabilité de Varapaev et Yagodkin. La théorie linéaire de Varapaev et Yagodkin [79] a alors été reprise et a induit des travaux importants, notamment à l’ONERA, pour comprendre l’origine du VSP [38][77][78][83]. Une théorie plus générale, appelée théorie linéaire de stabilité biglobale, a d’ailleurs été récemment développée par Casalis *et al.* [18][25][24] pour permettre d’analyser plus finement les instabilités dans les MPS. Cette théorie est cependant limitée par son caractère linéaire.

Pour compléter l’analyse théorique et valider le concept de VSP nouvellement introduit comme source d’instabilité potentielle, des montages expérimentaux ont été développés. L’instabilité pariétale n’étant pas liée à une couche de cisaillement, des montages avec une géométrie régulière sont employés. Ces maquettes de moteurs simplifiés peuvent être de simples cylindres de propergol en combustion [34][63]. Il est à noter que le VSP est une instabilité intrinsèque de type hydrodynamique qui naît de l’écoulement rotationnel de gaz généré au voisinage de la surface du propergol en combustion. De ce fait, le VSP peut être considéré comme indépendant du phénomène de combustion lui-même. Des montages sans combustion sont alors envisageables, avec de l’air injecté au travers d’une paroi poreuse pour simuler l’écoulement à la surface du propergol. Ces montages sont alors dits ”en gaz froid”. Différents montages de ce type existent pour caractériser le VSP. On peut citer par exemple le montage du VKI dont les mesures ont été exploitées par Antoine [1][2], ou encore le montage VALDO (Veine Axisymétrique pour Limiter le Développement des Oscillations) de l’ONERA [8]. L’ONERA possède également un montage en gaz froid à section rectangulaire VECLA (Veine d’Essai de la Couche Limite Acoustique) qui a fait l’objet de nombreuses campagnes d’essais et études [5][6][7][11][9][10][39][77][78][83].

L’analyse de ces études théoriques et expérimentales menées sur l’instabilité pariétale et le VSP a permis de montrer l’importance de la nature de l’écoulement (laminaire, en transition ou turbulent) sur le développement des instabilités. En effet, dans un canal avec injection à géométrie régulière, l’écoulement passe d’un état laminaire près du fond avant à un état turbulent en sortie de veine. La figure 1 récapitule les différentes étapes de ce processus. Les analyses linéaires développées initialement par Varapev *et al.* et plus récemment par Casalis *et al.* ne permettent de décrire que les ”prémises” de la turbulence (étapes 2 et 3). Cependant, la transition, qui peut être considérée comme un phénomène non-linéaire (étape 5), ainsi que la turbulence pleinement développée (étape 6) ne peuvent pas être décrites avec les formulations linéaires utilisées. Les travaux de thèse visent donc,



grâce à la simulation numérique instationnaire, à apporter une analyse sur la transition vers la turbulence d'un écoulement avec injection pariétale.

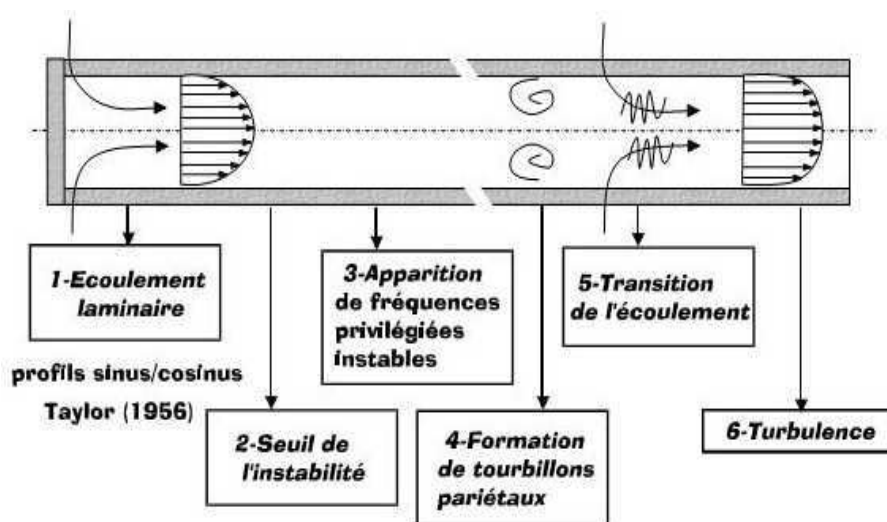


FIGURE 1 – Schéma du scénario explicatif du changement de comportement de l'écoulement dans un canal avec injection à géométrie régulière.

Afin d'apporter une analyse phénoménologique quantitative sur ce type d'écoulement complexe, les travaux de thèse ont été structurés en plusieurs chapitres. Le premier chapitre décrit les propriétés fondamentales des écoulements turbulents et les techniques numériques employées pour les simuler au cours de la thèse. Les caractéristiques principales du code de calcul CEDRE y sont également abordées. Le deuxième chapitre s'attache quant à lui à la description du montage expérimental nous servant de référence, c'est-à-dire le montage VECLA de l'ONERA. Les particularités du montage y sont explicitées, ainsi que les résultats obtenus lors de différentes campagnes d'essais. Les bases théoriques, numériques et expérimentales de l'étude sont de ce fait regroupées dans ces deux premiers chapitres. La suite du manuscrit aborde le cœur du problème posé, c'est-à-dire la simulation numérique de la transition de l'écoulement instationnaire dans le montage VECLA. La démarche a consisté à effectuer des simulations numériques en partant d'une modélisation la plus simple possible pour se diriger vers une modélisation de plus en plus élaborée. Dans le troisième chapitre, on a donc commencé par décrire l'écoulement de base dans un canal à injection pariétale, appelé écoulement de Taylor-Culick, avant de procéder à une simulation bidimensionnelle RANS d'un écoulement transitionnel dans le montage VECLA. Les résultats de cette première simulation ainsi que la confrontation de nos conclusions avec celles issues d'études effectuées par différents auteurs a permis de justifier le choix de l'utilisation de la méthode de type LES pour les simulations suivantes. Ensuite, l'analyse des calculs LES d'écoulements transitionnels dans un canal à injection pariétale effectués par d'autres chercheurs a permis d'extraire une possibilité d'amélioration significative de

la qualité des simulations numériques de ce type d'écoulement par l'intermédiaire d'une modélisation basée sur des grandeurs physiques des fluctuations injectées au niveau de la paroi poreuse de la veine.

Dans le quatrième chapitre, on se penche sur les différentes modélisations de génération de fluctuations à l'injection employées au cours de la thèse. Ce chapitre est divisé en deux parties distinctes. La première présente une méthode de génération de fluctuations de type purement numérique. Les résultats obtenus avec cette première modélisation ont servi de référence pour les simulations tridimensionnelles instationnaires dans le montage VECLA. La deuxième partie du quatrième chapitre propose une nouvelle modélisation des fluctuations selon certains paramètres provenant de données expérimentales obtenues sur le montage VECLA.

Le cinquième chapitre expose les résultats des différentes simulations numériques tridimensionnelles LES comparés aux résultats expérimentaux ainsi qu'à la simulation bidimensionnelle RANS. L'analyse des résultats permet de dégager les potentialités et les limitations du modèle de génération de turbulence physique que l'on a développé.



# Présentation des éléments théoriques et des techniques numériques

---

*Ce chapitre est consacré à l'établissement des bases théoriques et numériques de la thèse. Ainsi on commence par énoncer les équations et les lois décrivant le mouvement fluide, avant de rappeler quelques aspects fondamentaux de la turbulence. Puis on expose le principe de deux méthodes de modélisation de la turbulence qui sont employées au cours de l'étude, les méthodes RANS et LES. Enfin, on introduit les principales caractéristiques du code de calcul CEDRE de l'ONERA qui nous sert à effectuer les simulations numériques. Le lecteur familier de ces éléments théoriques et du code CEDRE pourra passer directement au chapitre suivant.*

## I.1 Équations de base

On se place dans le cadre de la mécanique des milieux continus, c'est-à-dire que l'on considère des écoulements pour lesquels les plus petites échelles des fluctuations turbulentes sont grandes par rapport au libre parcours moyen des molécules, défini comme la distance moyenne parcourue entre deux collisions [16][57]. Dans ce contexte, les mouvements du fluide sont décrits par les équations de Navier-Stokes qui correspondent aux équations bilan obtenues lorsqu'on applique le principe de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. Ces relations sont complétées par une équation d'état et des lois phénoménologiques qui permettent de fermer le système d'équations à résoudre.

### I.1.1 Équations de Navier-Stokes

Considérons un fluide monophasique compressible visqueux newtonien. Soit  $v$  le champ de vitesse du fluide,  $\rho$  sa densité,  $P$  sa pression,  $\mu$  sa viscosité dynamique,  $E$  son énergie totale et  $T$  sa température. Les variables  $t$  et  $x_i$  représentent respectivement le temps et les coordonnées spatiales selon une direction ( $i = 1, 2, 3$ ). La convention d'Einstein pour la sommation sur un indice répété est utilisée. On néglige la force gravitationnelle, ainsi que toute source de chaleur ou de force externe.

#### I.1.1.1 Équation de conservation de la masse

L'application du principe de conservation de la masse donne l'équation de continuité suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{I.1})$$

#### I.1.1.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement exprime le fait que celle-ci ne varie que selon les forces qui lui sont appliquées :

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{I.2})$$

où  $\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes visqueuses.

### I.1.1.3 Équation de conservation de l'énergie totale

La troisième relation des équations de Navier-Stokes traduit la manière dont s'effectuent les échanges thermiques et décrit la conservation de l'énergie totale :

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E + P)v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial(v_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{Q}_j}{\partial x_j} \quad (\text{I.3})$$

où  $\mathbf{Q}_j$  représente le flux de chaleur.

## I.1.2 Relations complémentaires

### I.1.2.1 Loi d'état des gaz parfaits

On fait l'hypothèse que le fluide considéré est un gaz thermodynamiquement parfait. Ainsi, aux équations de Navier-Stokes (I.1), (I.2) et (I.3), se rajoute la loi d'état pour un gaz parfait suivante :

$$P = \rho r T \quad (\text{I.4})$$

où  $r$  est la constante spécifique des gaz parfaits telle que :

$$r = \frac{R}{M} \quad (\text{I.5})$$

avec  $M$  la masse molaire du gaz et  $R = N k_b$  la constante des gaz parfaits telle que  $N$  est le nombre d'Avogadro et  $k_b$  la constante de Boltzmann.

### I.1.2.2 Expression de l'énergie totale $E$

L'énergie totale  $E$  est définie comme la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique et se calcule de la façon suivante :

$$\rho E = \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho v_i v_i \quad (\text{I.6})$$

avec  $\gamma$  le rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ . Pour l'air,  $\gamma$  est une constante égale à 1.4.

### I.1.2.3 Expression du tenseur des contraintes visqueuses $\sigma_{ij}$

On considère un fluide newtonien, donc l'expression du tenseur des contraintes visqueuses  $\sigma_{ij}$  peut être donnée par la loi de comportement newtonienne suivante :

$$\sigma_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda \delta_{ij} S_{kk} \quad (\text{I.7})$$

où  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker et avec  $S_{ij}$  le tenseur de déformation :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{I.8})$$

Dans la relation (I.7), deux coefficients de viscosité relient le tenseur des contraintes visqueuses  $\sigma_{ij}$  au tenseur de déformation  $S_{ij}$ . Le premier de ces coefficients est la viscosité dynamique  $\mu$ , qui représente à l'échelle macroscopique l'échange de quantité de mouvement entre molécules dû à leur agitation [16]. Son expression peut être donnée par la loi de Sutherland explicitée plus loin dans ce chapitre. Le deuxième coefficient de viscosité est calculé à partir de la viscosité dynamique  $\mu$  par l'intermédiaire de l'hypothèse de Stokes :

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (\text{I.9})$$

#### I.1.2.4 Expression du flux de chaleur $\mathbf{Q}_i$

Le flux de chaleur  $\mathbf{Q}_i$  est donné par la loi de Fourier :

$$\mathbf{Q}_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (\text{I.10})$$

où  $\kappa$  désigne la conductivité thermique. De même que pour la viscosité dynamique, ce coefficient est déterminé par la loi de Sutherland énoncée ci-après.

#### I.1.2.5 Lois de Sutherland

On utilise la loi de Sutherland pour déterminer la viscosité dynamique  $\mu$  qui dépend de de la température [16] :

$$\mu(T) = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + T_S}{T + T_S} \quad (\text{I.11})$$

avec  $T_0 = 273,15K$ ,  $\mu_0 = 1,711 \times 10^{-5} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$  et  $T_S = 110,4K$  la température de Sutherland. Dans le cas d'un gaz parfait, la conductivité thermique  $\kappa$  s'exprime en fonction de la température [16] :

$$\kappa(T) = \kappa_0 \frac{\mu(T)}{\mu_0} [1 + 0,00023(T - T_0)] \quad (\text{I.12})$$

avec  $\kappa_0 = 0,0242 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Les lois (I.11) et (I.12) sont valables pour de l'air uniquement et pour des températures  $T$  comprises entre  $100K$  et  $1900K$  [35][70].

### I.1.3 Conclusion sur les équations de base

On a posé les différentes relations qui décrivent le mouvement du fluide. Dans les équations de Navier-Stokes (I.1), (I.2) et (I.3), on distingue deux catégories de termes contenant des dérivées partielles spatiales. Les termes comportant le tenseur des contraintes visqueuses  $\sigma_{ij}$  ou le vecteur flux de chaleur  $Q_i$  sont appelés termes visqueux. Les autres sont dénommés termes convectifs [57]. Lorsque  $\sigma_{ij}$  et  $Q_i$  sont substitués par leurs expressions respectives (I.7) et (I.10), on constate qu'il ne reste alors que six inconnues :  $v$ ,  $\rho$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $\mu$  et  $E$ . Le système de six équations constitué par les trois relations de Navier-Stokes (I.1), (I.2) et (I.3) auxquelles on rajoute les trois relations complémentaires (I.4), (I.6) et (I.11) forme donc bien un système fermé qui peut être résolu. Ce système d'équations n'a pas à ce jour de solutions exactes dans les cas les plus généraux. On se contente donc d'une résolution numérique du système.

Afin de saisir la philosophie des méthodes de résolution des équations, il faut en premier lieu examiner les principales caractéristiques physiques des écoulements que l'on cherche à modéliser dans cette thèse : les écoulements turbulents.

## I.2 Modélisation de la turbulence

La turbulence est une caractéristique des écoulements et non pas des fluides eux-mêmes car elle ne dépend pas des propriétés moléculaires du fluide [75]. La dynamique des écoulements turbulents est donc la même dans tous les fluides, qu'ils soient liquides ou gazeux. De plus, puisque la plus petite échelle de grandeur existante dans un écoulement turbulent est plus grande que n'importe quelle échelle de longueur moléculaire, la turbulence peut être considérée comme un phénomène continu gouverné par les équations de la mécanique des fluides établies précédemment au paragraphe I.1. Étant donné que ces équations sont non-linéaires, chaque écoulement a des caractéristiques particulières associées aux conditions initiales et aux limites considérées. Il n'existe donc pas de solution générale pour tous les écoulements turbulents. Cependant, même si chaque écoulement turbulent est différent, il n'en reste pas moins qu'ils ont tous en commun des caractéristiques générales [75].

### I.2.1 Caractéristiques générales de la turbulence

Un écoulement turbulent est un écoulement :

- à grand nombre de Reynolds,
- instationnaire,
- irrégulier en espace,
- avec une forte diffusivité apparente,
- avec de fortes variations du rotationnel,



- dissipatif,
- tridimensionnel.

### **I.2.1.1 Écoulement à grand nombre de Reynolds**

Un écoulement turbulent apparaît pour des nombres de Reynolds élevés [75]. En effet, la turbulence a pour origine les instabilités qui existent dans les écoulements laminaires et qui se développent quand le nombre de Reynolds  $Re$  augmente. Ces instabilités sont liées à l'interaction entre les termes visqueux et les termes non-linéaires des équations de Navier-Stokes.

### **I.2.1.2 Écoulement instationnaire**

Un écoulement turbulent est instationnaire, c'est-à-dire que sur un signal fourni par une sonde enregistrant un paramètre (pression, vitesse, température...) au cours du temps, aucune séquence reproductible ne permet de réduire ce signal. Cependant, tous les écoulements instationnaires ne sont pas forcément turbulents, comme par exemple l'allée de Bénard-Karman où des fluctuations périodiques peuvent être dissociées du signal turbulent [17].

### **I.2.1.3 Écoulement très irrégulier en espace**

Les écoulements turbulents, en plus d'être irréguliers en temps, sont aussi très irréguliers en espace. Ces irrégularités en temps et en espace permettent d'envisager deux méthodes d'approche différentes. Soit on considère les phénomènes régis par le hasard, c'est-à-dire aléatoires, et on utilisera des méthodes statistiques. Soit on ne retient que le caractère chaotique et alors un calcul déterministe est envisageable, c'est-à-dire que l'évolution décrite par les équations sera entièrement déterminée par la connaissance des positions et des vitesses initiales [52].

### **I.2.1.4 Écoulement avec une forte diffusivité apparente**

Une des conséquences de ces très fortes variations temporelles et spatiales est que les écoulements turbulents possèdent une diffusivité apparente très supérieure à la diffusivité moléculaire : c'est la propriété de mélange [17][52]. En effet, entre des portions de fluide très proches, il peut exister des différences de vitesse importantes (en direction et module), ce qui va entraîner l'étirement et l'entrelacement de ces portions de fluide. Même si le processus de diffusion moléculaire reste le seul à transférer de l'énergie ou la masse, l'étirement et l'entrelacement générés accélèrent considérablement ce processus qui est assimilé à de la

diffusion. Cette propriété permet donc de mélanger ou de transporter l'énergie cinétique, les moments, la chaleur, les particules, etc..., de façon bien plus efficace dans le fluide que la diffusion moléculaire [75].

### I.2.1.5 Écoulement avec de fortes variations spatiales et temporelles du rotationnel de la vitesse

Une autre caractéristique importante des écoulements turbulents est qu'ils sont marqués par de fortes variations spatiales et temporelles du rotationnel de la vitesse [17], ce qui donne lieu à l'enchevêtrement de structures tourbillonnaires de tailles très différentes. Les plus gros tourbillons, dont la taille est de l'ordre de grandeur du domaine dans lequel évolue le fluide et correspondant aux basses fréquences du spectre d'énergie, sont principalement influencés par les conditions aux limites du problème. Les petits tourbillons, dont la taille est déterminée par les forces visqueuses, dissipent l'énergie turbulente et sont associés aux hautes fréquences du spectre. L'écart de dimension entre les grosses et petites structures est proportionnel au nombre de Reynolds  $Re$  global de l'écoulement, ce qui explique les difficultés rencontrées au fur et à mesure que  $Re$  augmente car plus le spectre d'énergie s'allonge, plus il existe des structures de petites tailles dans l'écoulement.

À toutes ces caractéristiques des écoulements turbulents on peut ajouter un autre phénomène également typique de la turbulence : il s'agit du processus qui permet à l'énergie cinétique produite par les grosses structures de l'écoulement d'être dissipée par les plus petites structures, processus décrit par la théorie de la cascade d'énergie.

## I.2.2 Théorie de la cascade d'énergie et échelles caractéristiques des écoulements turbulents

Richardson a été le premier à émettre l'idée que la turbulence est constituée de tourbillons de toutes tailles [64]. Considérons un tourbillon quelconque de taille caractéristique  $\Upsilon$ , avec une vitesse caractéristique  $v(\Upsilon)$ . Alors ce tourbillon peut être associé à un nombre de Reynolds qui lui est propre, noté  $Re(\Upsilon)$  et défini par :

$$Re(\Upsilon) = v(\Upsilon) \frac{\Upsilon}{\nu} \quad (\text{I.13})$$

avec  $\nu$  la viscosité. Une échelle de temps  $\tau(\Upsilon)$  peut également être associée à ce tourbillon, telle que :

$$\tau(\Upsilon) = \frac{\Upsilon}{v(\Upsilon)} \quad (\text{I.14})$$

### I.2.2.1 Échelle de longueur énergétique $Le$

Les plus gros tourbillons ont une échelle de grandeur  $Le$  (FIG. I.1) et une vitesse caractéristique  $v(Le)$  comparables respectivement à l'échelle de longueur et à l'échelle de vitesse caractéristiques de l'écoulement. De ce fait, le nombre de Reynolds de ces gros tourbillons  $Re(Le)$  est grand et les effets de la viscosité sont négligeables, avec :

$$Re(Le) = v(Le) \frac{Le}{\nu} \quad (\text{I.15})$$

La vitesse caractéristique  $v(Le)$  des gros tourbillons porteurs d'énergie peut être estimée à partir de l'énergie cinétique turbulente  $k$  de la façon suivante [19] :

$$v(Le) = \sqrt{k} \quad (\text{I.16})$$

En combinant les relations (I.15) et (I.16), on en déduit que le nombre de Reynolds turbulent  $Re_t$  caractéristique des gros tourbillons porteurs d'énergie est :

$$Re_t = \frac{\sqrt{k} Le}{\nu} \quad (\text{I.17})$$

La production d'énergie étant liée au gradient de vitesse moyenne de l'écoulement, il est possible de montrer par une étude de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente, que c'est l'écoulement moyen qui alimente les gros tourbillons [19].

### I.2.2.2 Théorie de la cascade d'énergie

Les gros tourbillons sont instables et transfèrent de l'énergie à des tourbillons de plus petites tailles, qui eux-mêmes transfèrent à leur tour l'énergie à des tourbillons encore plus petits, et ainsi de suite. L'énergie cinétique turbulente produite par les grosses structures de l'écoulement est ainsi transférée par étirement tourbillonnaire sans être dissipée, entre des structures de taille de plus en plus petite sur une zone nommée "zone inertielle" (FIG. I.1)[16]. Ce processus se poursuit jusqu'à ce que le nombre de Reynolds soit suffisamment petit pour que les mouvements des tourbillons soient stables et que la viscosité moléculaire ne soit plus négligeable et puisse dissiper l'énergie cinétique sous forme de chaleur. L'énergie est donc dissipée quand la taille des structures est du même ordre de grandeur que l'échelle de longueur associée aux tensions visqueuses : on parle d'échelle de longueur dissipative, ou échelle de Kolmogorov  $\eta$  (FIG. I.1). Cette échelle de dissipation  $\eta$  est d'autant plus petite que le nombre de Reynolds de l'écoulement à grande échelle est élevé. Cette notion de transfert d'énergie des gros tourbillons vers des tourbillons plus petits correspond à la cascade d'énergie [62].

Des études récentes montrent qu'en plus de cette cascade d'énergie "directe" des grosses structures vers les plus petites, il existerait une cascade "inverse" (FIG. I.1) où l'énergie des petites échelles remonterait vers les grandes, ce qui correspondrait à l'enroulement tourbillonnaire [16]. Cette cascade inverse serait cependant deux fois moins importante en intensité que la cascade directe.

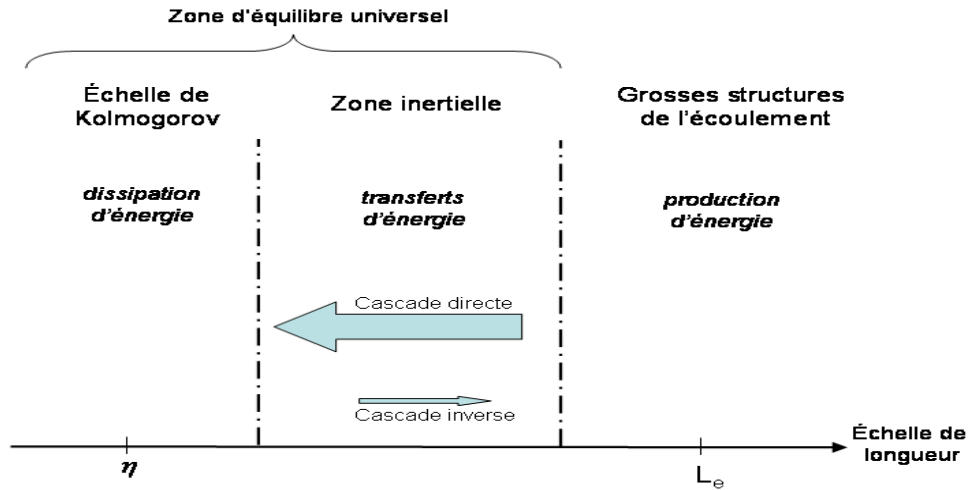


FIGURE I.1 – Représentation de la cascade d'énergie.

### I.2.2.3 Échelle de longueur dissipative de Kolmogorov $\eta$

Kolmogorov a ensuite repris l'idée de la cascade d'énergie de Richardson et l'a complétée [47]. Il a formulé une hypothèse selon laquelle les caractéristiques spécifiques de l'écoulement étudié, liées aux conditions aux limites et contenues dans les gros tourbillons, étaient perdues lors du passage d'énergie vers les tourbillons de plus petites tailles et que par conséquent les mouvements des plus petites échelles finissent par être statistiquement similaires d'un écoulement à l'autre et donc en quelque sorte universels. De plus, cette zone doit être en équilibre dynamique (FIG. I.1), c'est à dire que l'énergie dissipée doit être égale à l'énergie reçue par transfert lors de la cascade d'énergie. Autrement dit, pour les écoulements turbulents, les échelles dissipatives de grandeur d'espace  $\eta$ , de temps  $\tau(\eta)$  et de vitesse  $v(\eta)$  ont une forme universelle qui dépend uniquement du taux d'énergie cinétique de dissipation turbulente  $\epsilon$  et de la viscosité cinématique  $\nu$  [62] :

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{I.18})$$

$$v(\eta) = (\epsilon\nu)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{I.19})$$

$$\tau(\eta) = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\eta}{v(\eta)} \quad (\text{I.20})$$

En tenant compte de ces valeurs, le nombre de Reynolds dissipatif  $Re(\eta)$  est défini par :

$$Re(\eta) = \frac{v(\eta)\eta}{\nu} \quad (\text{I.21})$$

Ce nombre de Reynolds  $Re(\eta)$  est de l'ordre de l'unité. A partir des échelles dissipatives, on peut également obtenir l'expression de la dissipation  $\epsilon$  telle que :

$$\epsilon = \nu \frac{v(\eta)^2}{\eta^2} \quad (\text{I.22})$$

#### I.2.2.4 Relation entre échelles énergétique et dissipative

On peut relier l'échelle de longueur énergétique  $Le$  à l'échelle de longueur dissipative  $\eta$  par l'intermédiaire du nombre de Reynolds turbulent  $Re_t$ . En effet, on a [19] :

$$\frac{Le}{\eta} = Re_t^{3/4} \quad (\text{I.23})$$

#### I.2.2.5 Relation de Kolmogorov

Il est possible d'obtenir une expression de la dissipation  $\epsilon$  à partir de la densité d'énergie turbulente dans l'espace spectral, et on obtient [62] :

$$\epsilon = 2\nu \int_0^\infty \mathbf{k}^2 \mathbf{E}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (\text{I.24})$$

où  $\mathbf{k}$  est le nombre d'onde et  $\mathbf{E}(\mathbf{k})$  la densité spectrale d'énergie telle que [26][62] :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbf{E}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} &= \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i} \\ &= k \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

où  $k$  est l'énergie cinétique turbulente [62]. Dans la zone inertielle, il est possible de démontrer que le spectre d'énergie cinétique peut s'écrire sous la forme suivante [19] :

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) = c_0 \epsilon^{2/3} \mathbf{k}^{-5/3} \quad (\text{I.26})$$

où  $c_0$  est la constante de Kolmogorov. Cette expression (I.26) est appelée relation de Kolmogorov. Elle montre que dans la zone inertielle le spectre d'énergie suit une décroissance théorique en  $\mathbf{k}^{-5/3}$ .

Toutes les caractéristiques des écoulements turbulents décrites précédemment les rendent difficiles à modéliser [62] : en effet comme on l'a vu, il existe une large gamme d'échelles de longueur et de temps, le champ de vitesse est tridimensionnel et dépendant du temps, les plus grandes structures turbulentes de l'écoulement sont aussi grandes que la dimension caractéristique de l'écoulement et sont par conséquent affectées directement par la géométrie considérée... Il est toutefois possible d'effectuer des simulations numériques des écoulements turbulents grâce à différentes approches.

### I.2.3 Les différentes approches pour la modélisation de la turbulence

Une première approche possible pour modéliser les écoulements turbulents consiste à résoudre de façon directe les équations de Navier-Stokes. Cette méthode, appelée **DNS** (=Direct Numerical Simulation) (FIG. I.2) [62], est très coûteuse en temps de calcul car toutes les échelles de temps et d'espace sont résolues. De plus, comme le temps de calcul est proportionnel à  $Re^3$ , cette approche est utilisable uniquement pour les écoulements à bas nombre de Reynolds [62]. La DNS restant limitée pour l'instant à la simulation d'écoulements à faible nombre de Reynolds et pour des configurations géométriques simples, il est nécessaire d'envisager une autre approche pour simuler les écoulements dans les moteurs à propergol solide.

Contrairement à la DNS, l'approche **RANS** (=Reynolds Average Navier Stokes Equations) permet de s'intéresser à des écoulements à plus grands nombre de Reynolds car elle consiste à modéliser entièrement la turbulence de l'écoulement (FIG. I.2) à l'aide d'équations supplémentaires [62]. On ne considère alors que des quantités moyennes et on applique l'opérateur de moyenne d'ensemble sur les équations instantanées en pratiquant la décomposition de Reynolds sur les inconnues du problème. Les nouvelles équations ainsi obtenues sont dites équations moyennées. Les échelles de longueur sont ici considérées comme étant des moyennes à grandes échelles [16] et ne sont plus liées à des structures représentatives de phénomènes physiques instationnaires. Ceci permet donc d'utiliser un maillage plus grossier que pour la DNS.

Une autre approche, appelée **LES** (=Large Eddy Simulation) consiste à trouver une solution 'filtrée' représentant la physique des grandes structures de l'écoulement : les grandes structures sont donc simulées directement (FIG. I.2)[62]. L'influence des petites structures, ou échelles de sous-maille, est prise en compte grâce à un modèle. C'est donc une approche intermédiaire entre la DNS et la LES. Les grandes structures et les échelles de sous-maille sont séparées au niveau de l'échelle de longueur de coupure  $L_{\text{coupure}}$  (FIG. I.2) située dans la zone inertielle.

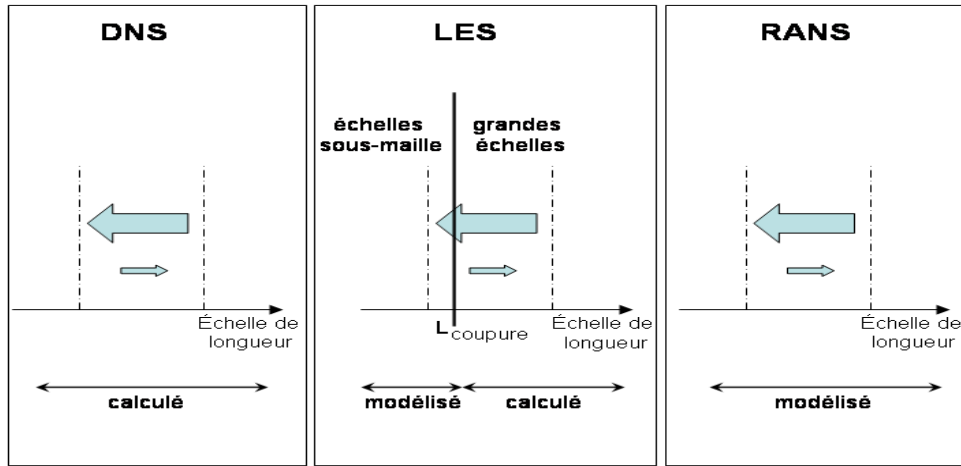


FIGURE I.2 – Différentes approches pour la simulation numérique d'écoulements turbulents.

Des méthodes hybrides peuvent être utilisées, comme la **DES** (=Detached Eddy Simulation). En DES, la couche limite est modélisée grâce à une approche RANS instationnaire. En dehors de la couche limite, l'approche LES est utilisée [61]. Cette méthode permet de bien calculer l'instabilité de la couche limite et le développement des structures cohérentes. De plus elle permet de calculer avec plus de précision les forces instationnaires et l'émission de son que ne permet une méthode RANS stationnaire ou instationnaire.

### I.3 Modélisation numérique de la turbulence

Parmi les approches citées précédemment, deux sont employées dans la thèse : les modélisations de type RANS et LES. On décrit ici plus en détail le principe et le système d'équations utilisés pour ces deux méthodes.

#### I.3.1 L'approche RANS

##### I.3.1.1 Principe de la méthode

La méthode RANS consiste à modéliser la turbulence de l'écoulement en ne considérant que des quantités moyennes. Les équations de Navier-Stokes explicitées précédemment au

paragraphe I.1 sont donc moyennées et la décomposition de Reynolds est appliquée sur les différentes variables. Cette décomposition consiste à séparer la quantité  $\phi$  en une moyenne  $\bar{\phi}$  et une fluctuation  $\phi'$  [17] :

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (\text{I.27})$$

avec  $\bar{\phi}' = 0$ . Cependant, pour des écoulements compressibles, cette décomposition n'est pas idéale et on adopte plutôt la décomposition de Favre qui consiste à séparer la quantité  $\phi$  en une moyenne  $\tilde{\phi}$  pondérée par la densité  $\rho$  et en une fluctuation  $\phi''$  [17] :

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi'' \quad (\text{I.28})$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}} \\ \overline{\rho\phi''} &= \bar{\rho}\phi'' = 0 \end{aligned}$$

### I.3.1.2 Équations de Navier-Stokes moyennées

En appliquant la décomposition de Favre (I.28) et en moyennant les équations de Navier-Stokes instantanées (I.1)(I.2)(I.3), on obtient les équations moyennées suivantes [36] :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j)}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_i\tilde{v}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial\tilde{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{P})\tilde{v}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial(\tilde{v}_i\tilde{\sigma}_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\kappa} \frac{\partial\tilde{T}}{\partial x_j} \right) &= -\frac{\partial(\tilde{v}_i\tilde{\tau}_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{\mathbf{Q}}}{\partial x_j} \end{aligned} \right. \quad (\text{I.29})$$

Les équations ci-dessus font apparaître les deux termes  $\tilde{\tau}_{ij} = \overline{\rho v_i'' v_j''}$  et  $\tilde{\mathbf{Q}} = -\overline{\rho C_p v_j'' T''}$ . Pour pouvoir résoudre le système (I.29) on modélise ces deux termes en fonction des grandeurs de l'écoulement moyen. Le terme  $\tilde{\tau}_{ij} = \overline{\rho v_i'' v_j''}$  est appelé tenseur de Reynolds.

### I.3.1.3 Fermeture du problème

Comme on vient de le voir, le moyennage des équations de Navier-Stokes et l'utilisation de la décomposition de Favre rajoutent des inconnues supplémentaires nous obligeant à utiliser des modèles pour fermer le problème.

Le terme  $\tilde{\mathbf{Q}} = \overline{\rho C_p v_j'' T''}$  est classiquement modélisé par une loi de Fourier [36] :

$$\overline{\rho C_p v_j'' T''} = -\kappa_t \frac{\partial\tilde{T}}{\partial x_j} \quad (\text{I.30})$$



avec  $\kappa_t = \frac{\mu_t C_p}{Pr_t}$ , où le nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  est égal à 0,9.

Pour modéliser le tenseur de Reynolds  $\widetilde{\tau}_{ij} = \overline{\rho v_i'' v_j''}$ , on peut classer les modèles dans deux catégories [31]. Une première catégorie comprend les modèles du premier ordre, ou modèles à viscosité turbulente, qui consiste à évaluer directement les tensions de Reynolds en fonction du champ moyenné grâce à une viscosité turbulente. La deuxième catégorie est composée des modèles du second ordre qui consistent à calculer directement les tensions de Reynolds, la modélisation ne portant que sur les moments d'ordre supérieur.

Les modèles du premier ordre sont basés sur le concept de viscosité turbulente qui permet de relier le tenseur de Reynolds des fluctuations de vitesse au champ moyen de vitesse. L'objectif de ces modèles est alors de définir une relation entre la viscosité turbulente  $\mu_t$  et les autres inconnues du problème pour fermer le système d'équations à résoudre. En fonction du nombre d'inconnues restant à modéliser, on aura des modèles à 0, 1 ou 2 équations de transport supplémentaires décrivant l'évolution de ces inconnues : par exemple il existe le modèle basé sur la longueur de mélange (modèle à 0 équations), le modèle basé sur l'énergie cinétique turbulente  $k$  (modèle à 1 équation), ou les modèles  $k - \epsilon$ ,  $k - \omega$ ,  $k - l, \dots$  (modèles à 2 équations).

Parmi les modèles du premier ordre, le plus simple correspond à l'hypothèse de Boussinesq qui établit une relation linéaire entre le tenseur de Reynolds et le gradient de vitesse moyenne [19] :

$$\widetilde{\tau}_{ij} = \mu_t \left( \frac{\partial \widetilde{v}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \widetilde{v}_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{\rho} k \quad (\text{I.31})$$

Cette modélisation introduit deux nouvelles variables à calculer, l'énergie cinétique de turbulence  $k$  et la viscosité turbulente  $\mu_t$ . Il existe d'autres formulations de fermeture du premier ordre, linéaires comme non linéaires. On peut par exemple citer les modèles EARSMS (Explicit Algebraic Reynolds Stress Model).

#### I.3.1.4 Modèle $k - l$

Il existe plusieurs variantes du modèle de turbulence  $k - l$ . On présente ici celui que l'on utilise pour les simulations.

Le modèle  $k - l$  est un modèle du premier ordre à deux équations de transport. Ce modèle consiste à considérer une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente  $k = 1/2 \overline{v_i' v_i'}$  et une équation de transport pour l'échelle turbulente  $l$ . Ces équations de transport de  $k$  et de  $l$  s'écrivent sous la forme générale [36] :

$$\frac{\partial \overline{\rho} k}{\partial t} + \widetilde{v}_j \frac{\partial \overline{\rho} k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu \frac{\partial k}{\partial x_j} + \Phi^{\text{NS}}(k) \right) \right] + \mathcal{P}_k - \overline{\rho} \epsilon \quad (\text{I.32})$$

$$\frac{\partial \overline{\rho} l}{\partial t} + \widetilde{v}_j \frac{\partial \overline{\rho} l}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu \frac{\partial l}{\partial x_j} + \Phi^{\text{NS}}(l) \right) \right] + S_l \quad (\text{I.33})$$

Les flux de diffusion  $\Phi^{\text{NS}}(k)$  et  $\Phi^{\text{NS}}(l)$  se mettent sous la forme  $\Phi^{\text{NS}}(a) = \frac{\mu_t}{\Sigma_a} \frac{\partial a}{\partial x_j}$ , avec  $\Sigma_k = 1$  et  $\Sigma_l = 0,9$ . Le terme  $S_l$  s'écrit de la façon suivante :

$$S_l = \frac{\mu}{l^*} \left[ \kappa^2 - \frac{\partial l}{\partial x_j} \frac{\partial l}{\partial x_j} \right] + \frac{\mu_t}{\Sigma_l l^*} \left[ \kappa^2 - 2 \frac{\partial l}{\partial x_j} \frac{\partial l}{\partial x_j} \right] \quad (\text{I.34})$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho \epsilon &= 2 \frac{\kappa^2 \mu}{(l^*)^2} \kappa + C_\mu^{3/4} f_\epsilon \rho \frac{\kappa^{3/2}}{l^*} \\ \mathcal{P}_k &= \max \left[ \min \left( -\overline{\rho v_i'' v_j''} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}; 5 \rho \epsilon \right); 0 \right] \\ l^* &= \max [l, C_l^{\text{min}}] \\ f_\epsilon &= th \left( \frac{R_t}{R_\epsilon} \right) \\ f_\mu &= th \left( \frac{R_t}{R_\nu} \right) \\ R_t &= \frac{\mu_t^0}{\mu} \\ \mu_t &= \min \left[ f_\mu \mu_t^0; \frac{C_\mu f_\mu \rho k}{\alpha \sqrt{2 C_\mu \sqrt{\mathcal{D}_{ij} \mathcal{D}_{ij}}}} \right] \\ R_\nu &= 21,3 \\ R_\epsilon &= 16,8 \\ \mathcal{D}_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} \\ \mu_t^0 &= C_\mu^{1/4} \rho \sqrt{k} l \\ C_l^{\text{min}} &= 0,02 \\ C_\mu &= 0,09 \\ \kappa &= 0,41 \end{aligned} \quad (\text{I.35})$$

### I.3.1.5 Lois de paroi

Dans le cas où les mailles sont grossières en paroi, la couche limite est mal résolue par le calcul, ce qui conduit à des valeurs erronées du frottement et du coefficient d'échange (et donc du flux de chaleur) à la paroi [36]. Pour éviter ce problème, on définit le frottement  $\sigma_{\text{paroi}}$  et le flux de chaleur  $\mathbf{Q}_{\text{paroi}}$  à la paroi comme :

$$\sigma_{\text{paroi}} = \left( \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{\text{paroi}} = (1 + \alpha_1) \mu \frac{v_x - v_{\text{paroi}}}{\delta} \quad (\text{I.36})$$

$$\mathbf{Q}_{\text{paroi}} = \left( \lambda_{\text{paroi}} \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{\text{paroi}} = (1 + \alpha_2) \lambda_{\text{paroi}} \frac{T_{LP} - T_{\text{paroi}}}{\delta} \quad (\text{I.37})$$

où  $\lambda_{\text{paroi}}$  est la conductivité thermique et  $\delta$  la distance entre la paroi et le centre de la première maille. Dans le cas d'une paroi immobile, on a  $v_{\text{paroi}} = 0$  m/s. Le but des lois de paroi est de calculer  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $T_{LP}$ . Il existe différentes lois de paroi. Dans cette thèse, la seule qui sera éventuellement utilisée est dite de 'Couette turbulent'. Il s'agit d'une loi basée sur le nombre de Reynolds convectif dans la première cellule  $Re_{\text{conv}} = \frac{\rho ||v_x - v_{\text{paroi}}|| \delta}{\mu}$ .

On a :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{f_c}{1 + f_c} \left( \frac{Re_{\text{conv}}}{223.5} \right)^{0.825} \\ \alpha_2 &= \alpha_1 \\ f_c &= \frac{Re_{\text{conv}}}{40} + \left( \frac{Re_{\text{conv}}}{60} \right)^2 \\ T_{LP} &= T_x + \frac{1}{2} Pr \frac{\rho ||v_x - v_{\text{paroi}}||^2}{C_p} \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

## I.3.2 La méthode LES

### I.3.2.1 Principe de la méthode

La méthode LES consiste à calculer directement les grandes structures de l'écoulement alors que les petites échelles sont modélisées. La séparation des grandes structures et des échelles de sous-maille est obtenue dans l'espace physique grâce à une opération de filtrage. Avant de présenter le principe de l'opération de filtrage, on aborde d'abord la méthode MILES qui se base sur le même principe de séparation des grandes et des petites échelles que la LES mais sans considérer de filtrage de façon explicite.

### I.3.2.2 Approche MILES

La méthode MILES (=Monotone Integrated Large Eddy Simulation) consiste à considérer une méthode numérique appropriée pour résoudre les équations de Navier-Stokes sans entreprendre de filtrage et de modélisation des échelles sous-maille [62]. De cette façon, les opérations de filtrage et de modélisation des termes sous-maille de la LES sont directement liées à la dissipation introduite par la méthode numérique. Cette méthode dépend donc uniquement du maillage et de la méthode numérique.

### I.3.2.3 Filtrage

L'opération de filtrage en LES consiste à décomposer une grandeur  $\psi$  en une partie calculée  $[\psi]$  et une partie sous-maille  $\check{\psi}$  :

$$\psi = [\psi] + \check{\psi} \quad (\text{I.39})$$

La partie calculée  $[\psi]$  peut s'exprimer en fonction de  $\psi$  et d'une fonction filtre  $F$  par l'intermédiaire d'un produit de convolution sur le domaine spatial  $\Omega$  [16] :

$$[\psi] = \int_{\Omega} F(x - \xi) \psi(\xi) d\xi \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{I.40})$$

Le filtre  $F$  est associé à une échelle de coupure  $\Delta$  qui caractérise la taille minimale des structures calculées. Il doit être choisi de telle sorte que l'opérateur de filtrage vérifie les propriétés de linéarité et de commutativité par rapport aux opérateurs de dérivation. Cet opérateur n'est pas un opérateur de Reynolds donc, contrairement à l'approche RANS, il n'y a pas de perte d'information liée à l'opération de filtrage. En pratique, le filtre n'est en général pas utilisé explicitement dans la simulation et est implicitement lié au maillage. Pour un maillage de taille  $\Delta_i$  dans la direction  $i$ , le nombre d'onde de coupure est donné par  $\mathbf{k}_c = \pi / (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}$ . Les fluctuations à grande échelle (échelle résolue)  $\check{\psi}$  et les échelles de sous-maille (échelles modélisées)  $\psi$  peuvent être définies dans l'espace spectral de la façon suivante [22] :

$$\check{\psi} = \int_{|\mathbf{k}| \leq \mathbf{k}_c} \widehat{\psi}'(\mathbf{k}) \exp(j\mathbf{k}\psi) d\mathbf{k} \quad (\text{I.41})$$

$$\psi = \int_{|\mathbf{k}| \geq \mathbf{k}_c} \widehat{\psi}'(\mathbf{k}) \exp(j\mathbf{k}\psi) d\mathbf{k} \quad (\text{I.42})$$

où  $\widehat{\psi}'(\mathbf{k})$  désigne la transformée de Fourier de la fluctuation  $\psi'(x)$ .

La fluctuation à grande échelle  $\check{\psi}$  peut être exprimée en fonction de la moyenne d'ensemble au sens statistique de Reynolds  $\bar{\psi}$  par  $\check{\psi} = [\psi] - \bar{\psi}$ . La fluctuation turbulente au sens statistique  $\psi'$  contient la fluctuation à grande échelle et la fluctuation de sous-maille  $\psi' = \check{\psi} + \psi$ .

Pour les écoulements compressibles, le filtrage (I.39) précédent s'avère mal adapté. On utilise alors le filtrage de Favre. Il consiste en un changement de variable où la moyenne est pondérée par la masse volumique et on a alors :

$$\begin{aligned} \psi &= \langle \psi \rangle + \check{\psi} \\ &= \frac{[\rho\psi]}{[\rho]} + \check{\psi} \end{aligned} \quad (\text{I.43})$$

### I.3.2.4 Équations de Navier-Stokes filtrées

Lorsqu'on applique le filtrage de Favre aux équations de Navier-Stokes (I.1), (I.2) et (I.3) on obtient les expressions suivantes [16][58] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial[\rho]}{\partial t} + \frac{\partial([\rho]\langle v_j \rangle)}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial([\rho]\langle v_i \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial([\rho]\langle v_i \rangle \langle v_j \rangle)}{\partial x_j} + \frac{\partial[P]}{\partial x_i} - \frac{\partial\langle \sigma_{ij} \rangle}{\partial x_j} = -\frac{\partial\tau_{ij}^{sgs}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial([\rho]\langle E \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial([\rho]\langle E \rangle + [P])\langle v_j \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial(\langle v_i \rangle \langle \sigma_{ij} \rangle)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( [\kappa] \frac{\partial\langle T \rangle}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial\langle v_i \rangle \tau_{ij}^{sgs}}{\partial x_j} + \frac{\partial\mathbf{Q}_j^{sgs}}{\partial x_j} \end{array} \right. \quad (\text{I.44})$$

On constate que pour résoudre ces équations, il faut des modèles de fermeture qui permettent de modéliser les échelles sous-maille  $\tau_{ij}^{sgs}$  et  $\mathbf{Q}_i^{sgs}$ .

### I.3.2.5 Modélisation des échelles sous-maille

#### Modélisation du flux de chaleur sous-maille

Le flux de chaleur sous-maille  $\mathbf{Q}^{sgs}$  peut être modélisé par une loi de Fourier [16] :

$$\mathbf{Q}_i^{sgs} = -\kappa_{sgs} \frac{\partial\langle T \rangle}{\partial x_i} \quad (\text{I.45})$$

avec  $\kappa_{sgs} = \mu_{sgs} C_p / Pr_t$ , où le nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  est égal à 0,9.

#### Modèle de Smagorinsky

Le tenseur des contraintes de sous-maille  $\tau_{ij}^{sgs}$  est modélisé en utilisant l'hypothèse de Boussinesq qui permet de relier le tenseur de sous-maille à celui des taux de déformation par l'intermédiaire d'une viscosité turbulente de sous-maille  $\mu_{sgs}$  [16] :

$$\tau_{ij}^{sgs} = \mu_{sgs} \left( \frac{\partial\langle v_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial\langle v_j \rangle}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial\langle v_k \rangle}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (\text{I.46})$$

La viscosité turbulente de sous-maille  $\mu_{sgs}$  est évaluée par le produit d'une longueur caractéristique  $\Delta$  et d'une vitesse turbulente caractéristique  $\Delta|\langle S \rangle|$  :

$$\mu_{sgs} = [C_S \Delta]^2 \bar{\rho} |\langle S \rangle| \quad (\text{I.47})$$

avec  $|\langle S \rangle| = \sqrt{2\langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle}$  et  $C_S$  une constante. La valeur de cette constante diffère selon le type d'écoulement étudié et est en général comprise entre 0,1 et 0,2. La longueur caractéristique  $\Delta$  peut être la taille de maille. Pour un maillage non-structuré, on peut considérer le diamètre hydraulique de maille :

$$\Delta = 6 \frac{\text{volume de la cellule}}{\sum \text{aires des faces}} \quad (\text{I.48})$$

Ce modèle de Smagorinsky est le modèle de tenseur de sous-maille de base même si il est très dissipatif pour certains types d'écoulements, notamment pour des écoulements en transition du laminaire au turbulent.

## I.4 Présentation générale du code de calcul CEDRE

On introduit maintenant le code volumes finis CEDRE de l'ONERA avec lequel les simulations numériques de type RANS et LES sont effectuées. On commence par expliciter la formulation volumes finis des équations telle qu'elle est envisagée dans CEDRE, puis on expose les principales propriétés de la discrétisation spatiale et de l'intégration temporelle du code.

### I.4.1 Formulation mathématique du problème

#### I.4.1.1 Équations bilan à l'intérieur du domaine

On considère un domaine  $\Omega$  de l'espace, limité par une surface  $\partial\Omega$  de normale extérieure  $\vec{n}$ . Dans ce volume  $\Omega$ , le mouvement fluide que l'on cherche à simuler numériquement peut être modélisé par les équations de Navier-Stokes (I.1)(I.2)(I.3), associées à la loi d'état et aux relations complémentaires énoncées au paragraphe I.1. On introduit les variables primitives  $u$  et conservatives  $q$  suivantes :

$$u = \begin{pmatrix} P \\ T \\ v_i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_i \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (\text{I.49})$$

Les changements de variables permettant de passer de  $u$  à  $q$  et inversement sont bi-univoques [16]. Par conséquent, on peut utiliser indifféremment l'un ou l'autre jeu de variables. En prenant en compte (I.49), le système d'équations (I.1)(I.2)(I.3) peut être réécrit sous une forme compacte :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{I.50})$$

où  $\mathbf{F}$  est appelé le vecteur des flux et peut être décomposé en flux hyperbolique, ou flux d'Euler  $\mathbf{f}$  et en flux visqueux  $\varphi$  :

$$\mathbf{F}(u) = \mathbf{f}(u) + \varphi(u, \nabla u) \quad (\text{I.51})$$

avec :

$$\mathbf{f}(u) = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_i v_j + P \\ (\rho E + P)v_j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(u, \nabla u) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma_{ij} \\ -\sigma_{ij} v_i + \mathbf{Q}_j \end{pmatrix} \quad (\text{I.52})$$

La méthode numérique consiste à résoudre (I.50) sur le volume  $\Omega$ , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} q d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \vec{n} dS = 0 \quad (\text{I.53})$$

Cette expression (I.53) est appelée formulation faible. La résolution numérique du problème consiste à trouver  $q(x, t)$  de la formulation faible (I.53) en tout point de  $\Omega$ , en prenant en compte des conditions aux limites et une condition initiale :

$$q(x, 0) = q_{ini}(x), \quad x \in \Omega \quad (\text{I.54})$$

La solution de la formulation faible (I.53) n'est en général pas unique. La solution physique est alors celle qui vérifie une condition supplémentaire, appelée condition d'entropie.

### Formulation pour la LES

Au cours de la thèse, on effectue des simulations de type LES. Or, on a vu précédemment au paragraphe I.3.2 que les équations à considérer pour la LES correspondent aux équations de Navier-Stokes (I.1)(I.2)(I.3) auxquelles on applique un filtre de Favre. On obtient alors le système (I.44). Même si le système (I.44) est différent de celui formé par les équations (I.1)(I.2)(I.3), il peut néanmoins être réécrit sous une forme compacte similaire à (I.50). En effet, ces équations (I.44) s'expriment sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\tilde{u}_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{I.55})$$

où  $\tilde{u}$  et  $\tilde{q}$  sont les grandeurs filtrées primitives et conservatives respectivement, telles que :

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{T} \\ \tilde{v}_i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{q} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \tilde{v}_i \\ \bar{\rho} \tilde{E} \end{pmatrix} \quad (\text{I.56})$$

Le terme  $\mathbf{F}(\tilde{u})$  est décomposé en flux hyperboliques  $\mathbf{f}$  et en flux visqueux  $\varphi$  :

$$\mathbf{F}(\tilde{u}) = \mathbf{f}(\tilde{u}) + \varphi(\tilde{u}, \nabla \tilde{u}) \quad (\text{I.57})$$

avec :

$$\mathbf{f}(\tilde{u}) = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \tilde{v}_j \\ \bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j + \bar{P} \\ (\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{P}) \tilde{v}_j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(\tilde{u}, \nabla \tilde{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\tilde{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}^{sgs}) \\ -(\tilde{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}^{sgs}) \tilde{v}_i - \bar{\kappa} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + \mathbf{Q}_j^{sgs} \end{pmatrix} \quad (\text{I.58})$$

La formulation faible (I.53) établie précédemment reste donc valable dans le cas de la LES, mais avec des coefficients différents et appliqués aux grandeurs moyennées au sens de Favre. On a détaillé ici la démarche pour la méthode LES, mais il en va de même pour une méthode RANS. Il est en effet également possible d'écrire les équations obtenues pour une approche de type RANS sous la forme (I.53).



### I.4.1.2 Modèle aux limites

Dans le code CEDRE, les conditions aux limites qui complètent la formulation faible (I.53) sont des équations différentielles de la forme :

$$\mathbf{T}_\alpha \frac{\partial q}{\partial t} = L_\alpha \quad (\text{I.59})$$

où  $\mathbf{T}_\alpha$  est un temps de relaxation. Dans le cas où  $\mathbf{T}_\alpha$  est nul, (I.59) devient un système de contraintes algébriques  $L_\alpha = 0$  qui correspond à la représentation habituelle des conditions aux limites. En revanche, si  $\mathbf{T}_\alpha$  n'est pas nul, la relation (I.59) est une équation de relaxation de ces contraintes algébriques. Cette formulation (I.59) a l'avantage d'imposer des conditions moins raides que des contraintes algébriques. Elle permet également d'envisager des modèles instationnaires de conditions aux limites. Enfin, elle permet d'avoir une représentation identique des équations bilan et des conditions aux limites. Ainsi, il est possible d'inclure la prise en compte des conditions aux limites lors de la mise en oeuvre des discrétisations spatiale et temporelle des équations bilan. On appelle alors  $U$  et  $Q$  l'ensemble des variables respectivement primitives et conservatives auxquelles on ajoute les conditions aux limites. Le second membre  $L_\alpha$  de l'expression (I.59) dépend du type  $\alpha$  de la condition limite envisagée. Les  $L_\alpha$  sont des fonctions qui peuvent s'exprimer en fonction des variables primitives  $u$  (fonctions  $L_\alpha^u$ ) ou des variables conservatives  $q$  (fonctions  $L_\alpha^q$ ) :

$$L_\alpha = L_\alpha^u(u, u_I, PCL(t)) = L_\alpha^q(q, q_I, PCL(t)) \quad (\text{I.60})$$

où  $u$  et  $q$  représentent l'état local à la limite,  $u_I$  et  $q_I$  l'état interne correspondant, c'est-à-dire la limite de l'état interne à la frontière :

$$u_I = \lim_{x \rightarrow \partial\Omega} u(x) \quad \text{et} \quad q_I = \lim_{x \rightarrow \partial\Omega} q(x) \quad (\text{I.61})$$

Les différentes fonctions  $PCL(t)$  regroupent les paramètres de conditions limites correspondant au type de condition utilisée.

Le modèle aux limites (I.59) du code CEDRE combine à la fois un état imposé sur la limite et un état interne au domaine. Cet état est relaxé avec un temps  $\mathbf{T}_\alpha$ , ce qui donne au modèle une certaine souplesse qui permet de se rapprocher de la souplesse naturelle des conditions limites physiques.

### I.4.2 Discrétisation spatiale

Le code CEDRE utilise une approche volume finis qui consiste à diviser le domaine  $\Omega$  en cellules  $i$  de volume  $V_i$ , puis à effectuer les bilans des différentes grandeurs de l'écoulement sur chacune de ces cellules. Ainsi, pour une cellule  $i$  on a :

$$V_i \frac{dq_i}{dt} = - \sum_j \mathbf{F}_{ij} \quad (\text{I.62})$$

Dans le cas de l'approche volume finis 'cell-centered', comme c'est le cas pour le code CEDRE, les cellules  $i$  coïncident avec les cellules du maillage. Dans la formule (I.62), les  $q_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} q dV$  sont donc les quantités conservatives moyennes de la cellule.

La discrétisation d'espace se divise en deux étapes distinctes :

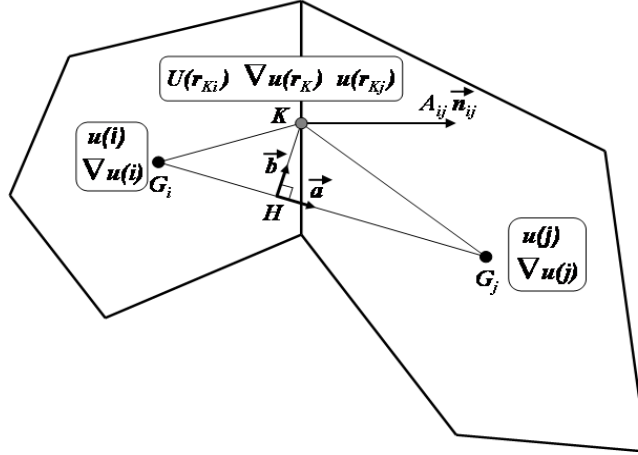
- L'**interpolation** liée au maillage non-structuré. Cette étape est indépendante des modèles physiques et consiste à évaluer les quantités en diverses localités du maillage.
- Le **calcul des flux numériques**  $\mathbf{F}_{ij}$  correspond à l'écriture des équations bilan discrètes par l'application de formules dont les arguments ont été préalablement calculés lors de l'étape d'interpolation.

#### I.4.2.1 Interpolation

La phase d'interpolation est liée au maillage non-structuré qui est constitué de polyèdres quelconques. Une cellule peut donc posséder un nombre quelconque de faces. Cependant, une face est toujours en contact avec deux cellules. C'est donc naturellement que la face est choisie comme entité géométrique de base [16]. Ainsi, pour pouvoir calculer le flux (I.57), il nous faut dans un premier temps déterminer l'évolution de l'état  $u(i, j)$  et du gradient  $\nabla u(i, j)$  sur l'interface  $A(i, j)$  séparant deux cellules voisines  $i$  et  $j$ . Pour y parvenir, on se base sur les valeurs de l'état  $u(i)$  et du gradient  $\nabla u(i)$  à l'intérieur de chacune des cellules  $i$  et  $j$ . Dans ce paragraphe, on commence par poser les paramètres géométriques décrivant le maillage non-structuré, avant d'exposer les méthodes employées pour déterminer les valeurs des états et des gradients à l'intérieur des cellules, puis sur l'interface.

#### Paramètres géométriques décrivant le maillage non-structuré

Le volume de contrôle est obtenu en joignant les centres de gravité des cellules ayant une face en commun. On considère deux cellules  $i$  et  $j$  (Figure I.3), avec  $G_i$  et  $G_j$  les centres de gravité des cellules  $i$  et  $j$ ,  $K$  le centre de la face commune à  $i$  et  $j$  d'aire  $A_{ij}$  et de normale extérieure  $\vec{\mathbf{n}}_{ij}$ , et  $H$  le point de courbure de la face construit à partir de la projection de  $K$  sur la droite passant par les centres de gravité  $G_i$  et  $G_j$ . Les vecteurs unitaires orthogonaux  $\vec{\mathbf{a}}$  et  $\vec{\mathbf{b}}$  sont également représentés. Ils sont respectivement colinéaires aux vecteurs  $\vec{G_i G_j}$  et  $\vec{HK}$ .

FIGURE I.3 – Notations pour un système élémentaire composé de deux cellules  $i$  et  $j$ .

### Calcul des variables internes à la cellule

#### État $u(i)$ dans la cellule

Les seules quantités connues avant interpolation sont  $u(i)$  et  $u(j)$ , définies comme étant les valeurs moyennes dans les cellules  $i$  et  $j$  et assimilées en pratique aux valeurs prises aux centres de gravité de ces cellules :

$$u(i) = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} u dV \quad (\text{I.63})$$

avec  $V_i$  le volume de la cellule  $i$ .

L'état  $u(\mathbf{r})$  en un point quelconque de la cellule de coordonnées  $\mathbf{r}$  est donné par une représentation linéaire par cellule [53]. Ainsi, en prenant comme origine un point quelconque  $M$  de la cellule, on a :

$$u(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}_M) + \nabla u(\mathbf{r}_M) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \quad (\text{I.64})$$

Si on intègre (I.64) sur la cellule, on fait apparaître la moyenne sur le volume  $\llbracket u \rrbracket$  et la position du centre de gravité  $G$  de la cellule :

$$\llbracket u \rrbracket = u(\mathbf{r}_M) + \nabla u_M (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_M) \quad (\text{I.65})$$

Si  $\mathbf{r}_G = \mathbf{r}_M$ , alors (I.65) donne  $\llbracket u \rrbracket = u(\mathbf{r}_M)$  et on en déduit que la moyenne de maille s'identifie au second ordre près à la valeur au centre de gravité de la cellule, définie par (I.63). En conclusion, sur chaque cellule, on adopte la représentation linéaire suivante :

$$u(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}_G) + \nabla u(\mathbf{r}_G) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \quad (\text{I.66})$$

Cette représentation (I.66) est utilisée pour obtenir des évaluations d'ordre 2 des grandeurs à l'interface. Dans le cas où une évaluation d'ordre 1 est suffisante, on peut alors adopter une autre représentation, par l'intermédiaire de la moyenne barycentrique au point de courbure  $H$  :

$$u(\mathbf{r}_H) = \frac{HG_j}{G_i G_j} u(i) + \frac{HG_i}{G_i G_j} u(j) \quad (\text{I.67})$$

*Gradient  $\nabla u(i)$  dans la cellule*

Les gradients  $\nabla u(i)$  sont calculés à partir des  $u(i)$  soit par une méthode basée sur la formule de Green, soit par la méthode des moindres carrés.

#### MÉTHODE DE GREEN

La méthode de Green pour l'évaluation du gradient dans la cellule est basée sur la formule de Green qui traduit l'égalité entre l'intégrale du gradient de l'état  $u$  sur la cellule de volume  $V$  et son intégrale le long de la surface  $\partial V$  de la cellule :

$$\int_V \nabla u dV = \int_{\partial V} u(\mathbf{r}) \vec{\mathbf{n}} dA \quad (\text{I.68})$$

En supposant que  $u$  est continue, et en décomposant le second membre de (I.68) suivant les différentes faces  $\mathbf{f} = 1, \dots, \mathbf{f}_{max}$  de la cellule, on peut alors écrire :

$$V_i [\nabla u] = \sum_{\mathbf{f}=1}^{\mathbf{f}_{max}} \int_{A_{i\mathbf{f}}} u(\mathbf{r}) \vec{\mathbf{n}} dA \quad (\text{I.69})$$

Dans l'expression (I.69), l'état  $u(\mathbf{r})$  peut être interpolé par la représentation linéaire (I.66) appliquée sur chaque face  $A_{i\mathbf{f}}$  au centre  $K$  de la face. Ainsi, en combinant les relations (I.66) et (I.69) appliquées au point  $K$ , on obtient :

$$V_i [\nabla u] = \sum_{\mathbf{f}=1}^{\mathbf{f}_{max}} \int_{A_{i\mathbf{f}}} [u(\mathbf{r}_K) + \nabla u(\mathbf{r}_K) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_K)] \vec{\mathbf{n}} dA \quad (\text{I.70})$$

Une seconde interpolation est réalisée pour se placer au point de courbure  $H$ . Pour cela, on se réfère aux paramètres géométriques décrivant le maillage et représentés sur la figure (I.3). On voit qu'il est possible d'évaluer  $u(\mathbf{r}_K)$  par l'expression suivante :

$$u(\mathbf{r}_K) = u(\mathbf{r}_H) + \overrightarrow{HK} \nabla u(\mathbf{r}_K) \cdot \vec{\mathbf{b}} \quad (\text{I.71})$$

où  $u(\mathbf{r}_H)$  est calculé par la moyenne barycentrique (I.67). En prenant cette dernière relation (I.71) en compte, on en déduit que l'expression (I.70) devient :

$$V_i [\nabla u] = \sum_{\mathbf{f}=1}^{\mathbf{f}_{max}} \int_{A_{i\mathbf{f}}} [u(\mathbf{r}_H) + \overrightarrow{HK} \nabla u(\mathbf{r}_K) \cdot \vec{\mathbf{b}} + \nabla u(\mathbf{r}_K) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_K)] \vec{\mathbf{n}} dA \quad (\text{I.72})$$

Sachant que les deux premiers termes de l'intégrale ne dépendent pas de la variable d'intégration, on peut alors écrire (I.72) de la façon suivante :

$$V_i [\nabla u] = \sum_{\mathbf{f}=1}^{\mathbf{f}_{max}} u(\mathbf{r}_H) A_{i\mathbf{f}} \vec{\mathbf{n}} + \sum_{\mathbf{f}=1}^{\mathbf{f}_{max}} \overrightarrow{HK} \nabla u(\mathbf{r}_K) \cdot \vec{\mathbf{b}} A_{i\mathbf{f}} \vec{\mathbf{n}} + \sum_{\mathbf{f}=1}^{\mathbf{f}_{max}} \int_{A_{i\mathbf{f}}} [\nabla u(\mathbf{r}_K) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_K)] \vec{\mathbf{n}} dA \quad (\text{I.73})$$

Le gradient  $\nabla u(\mathbf{r}_K)$  au point  $K$  est approximé par le gradient au centre de la cellule, lui-même assimilé au gradient moyen de la cellule  $[\nabla u]$ , ce qui donne au final :

$$V_i [\nabla u] = \sum_{\mathbf{f}=1}^{\mathbf{f}_{max}} u(\mathbf{r}_H) A_{i\mathbf{f}} \vec{\mathbf{n}} + \sum_{\mathbf{f}=1}^{\mathbf{f}_{max}} \overrightarrow{HK} [\nabla u] \cdot \vec{\mathbf{b}} A_{i\mathbf{f}} \vec{\mathbf{n}} + \sum_{\mathbf{f}=1}^{\mathbf{f}_{max}} \int_{A_{i\mathbf{f}}} [\nabla u] \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_K) \vec{\mathbf{n}} dA \quad (\text{I.74})$$

#### MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

Une autre possibilité pour l'estimation du gradient dans la cellule est la méthode des moindres carrés. Cette méthode implique de prendre en compte une cellule  $\mathcal{C}$  du domaine, mais également l'ensemble des cellules ayant une face commune avec  $\mathcal{C}$ , appelées cellules de premier voisinage. Considérons que la cellule  $\mathcal{C}$ , de centre de gravité  $G$ , possède un nombre  $\mathbf{P}$  de cellules de premier voisinage, indicées par  $p = 1, \dots, \mathbf{P}$ . Notons  $\mathbf{r}_p$  les coordonnées des centres de gravités des cellules de premier voisinage, et  $u_p$  les valeurs de l'état  $u$  dans ces cellules. La représentation linéaire de l'état  $u$  dans la cellule  $\mathcal{C}$  est donnée par la relation (I.66). La méthode des moindres carrés consiste à déterminer  $\nabla u(\mathbf{r}_G)$  de (I.66) de telle sorte que la somme  $E$  définie ci-dessous soit minimale :

$$E = \sum_{p=1}^{\mathbf{P}} [u(\mathbf{r}_p) - u_p]^2 \quad (\text{I.75})$$

On a pris ici comme valeurs de référence les états moyens calculés au centre de gravité des cellules. Il est cependant possible d'utiliser d'autres valeurs de référence, ce qui permet d'aboutir à différentes variantes de la méthode proposée ci-dessus, qui est appelée par la suite méthode des moindres carrés "aux centres de gravité" [53]. Parmi les variantes disponibles dans CEDRE, on peut citer les moindres carrés "sur  $G_p$ " où la référence est n'importe quel point situé sur chaque segment  $[GG_p]$ . Il existe également les moindres carrés "aux points de courbure  $H$ " ou encore les moindres carrés "isotrope". Pour cette dernière, les références sont les points positionnés sur les demi-droites  $[GG_p]$  équidistants de  $G$ , situés sur un cercle de rayon quelconque et de centre  $G$ .

Les méthodes de Green et des moindres carrés permettent toutes deux de déterminer la valeur du gradient dans la cellule. L'utilisation de la méthode des moindres carrés présente un léger avantage par rapport à la méthode de Green en terme de stockage de données et donc de lourdeur de calcul. Ceci dit, la méthode des moindres carrés peut être instable dans certains cas, comme par exemple sur des maillages composés de tétraèdres [16]. De ce fait, aucune des deux méthodes n'est idéale, ce qui explique leur coexistence dans le

code CEDRE.

### Interpolation à l'interface

Les grandeurs à l'interface sont calculées au centre  $K$  de la face commune aux cellules  $i$  et  $j$ .

#### État $u(\mathbf{r}_{K_{ij}})$ sur l'interface

Pour l'évaluation de l'état  $u(\mathbf{r}_{K_{ij}})$  à l'interface, deux types de moyenne sont disponibles :

- À l'ordre 2, la moyenne arithmétique de  $u(\mathbf{r}_{K_i})$  et  $u(\mathbf{r}_{K_j})$  donnée par l'expression (I.76) est utilisée pour l'évaluation des grandeurs pour le calcul des flux dissipatifs. Dans ce cas là, les grandeurs  $u(\mathbf{r}_{K_i})$  et  $u(\mathbf{r}_{K_j})$  ne doivent pas être limitées :

$$u(\mathbf{r}_{K_{ij}}) = \frac{u(\mathbf{r}_{K_i}) + u(\mathbf{r}_{K_j})}{2} \quad (\text{I.76})$$

- Pour le calcul des flux hyperboliques, lors de l'évaluation de l'état intermédiaire des schémas de type Roe, comme le schéma ODF par exemple, on utilise une moyenne décentrée.

#### Gradient $\nabla u(\mathbf{r}_{K_{ij}})$ sur l'interface

Pour le calcul des flux visqueux, le gradient d'interface  $\nabla u(\mathbf{r}_{K_{ij}})$  est évalué de la façon suivante [53] :

$$\nabla u(\mathbf{r}_{K_{ij}}) = \nabla u(\mathbf{r}_H) + \theta \left( \frac{u(i) - u(j)}{G_i G_j} - \nabla u(\mathbf{r}_H) \cdot \vec{\mathbf{a}} \right) \nu \quad (\text{I.77})$$

où  $\theta$  et  $\nu$  sont des variables locales qui varient selon l'interface considérée, ce qui permet de construire des schémas adaptatifs aux irrégularités locales [16]. Le gradient  $\nabla u(\mathbf{r}_H)$  au point  $H$  dans l'expression (I.77) est calculé en effectuant une moyenne barycentrique des gradients à l'intérieur des cellules  $i$  et  $j$  :

$$\nabla u(\mathbf{r}_H) = \frac{HG_j}{G_i G_j} \nabla u(i) + \frac{HG_i}{G_i G_j} \nabla u(j) \quad (\text{I.78})$$

Des études analytiques et numériques effectuées par N. Leterrier [53] ont permis d'observer l'influence des paramètres  $\theta$  et  $\nu$  sur les résultats et d'ainsi sélectionner le schéma le plus approprié suivant :

$$\nabla u(\mathbf{r}_{K_{ij}}) = \nabla u(\mathbf{r}_H) + \frac{1}{(a \cdot n)^2} \left( \frac{u(i) - u(j)}{G_i G_j} - \nabla u(\mathbf{r}_H) \cdot \vec{\mathbf{a}} \right) \vec{\mathbf{a}} \quad (\text{I.79})$$

### I.4.2.2 Calcul du flux numérique sur l'interface $A_{ij}$

Pour traiter le flux numérique, on commence par le diviser en flux dissipatifs  $\varphi$  et en flux hyperboliques  $\mathbf{f}$ . L'expression (I.62) s'écrit alors sous la forme suivante [16] :

$$V_i \frac{dq_i}{dt} = \sum_j [(\mathbf{f} \cdot A \vec{\mathbf{n}})_{i \leftarrow j} + (\varphi \cdot A \vec{\mathbf{n}})_{i \leftarrow j}] \quad (\text{I.80})$$

Selon leur nature, les flux sont discrétisés à l'aide de schémas différents :

- Les flux dissipatifs avec un schéma centré.
- Les flux hyperboliques avec un schéma décentré associé à une méthode de montée en ordre de type MUSCL (Monotonic Upstream Schemes for Conservative laws).

#### Flux hyperboliques

Les flux hyperboliques  $(\mathbf{f} \cdot A \vec{\mathbf{n}})_{i \leftarrow j}$  sont traités avec une méthode de type MUSCL dans CEDRE. Afin d'explicitier le principe de cette méthode, revenons à un cas simple monodimensionnel constitué de deux cellules  $i$  et  $j$  délimitées par une interface  $A_{ij}$  séparant deux états  $u_G$  et  $u_D$  (figure I.4) :

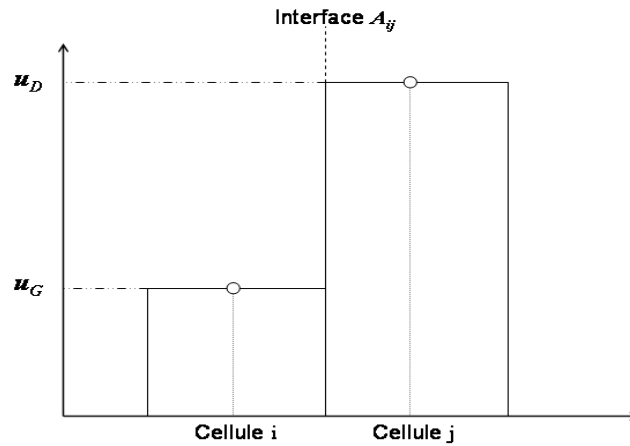


FIGURE I.4 – Schéma de deux cellules  $i$  et  $j$  pour la résolution du problème de Riemann.

Le problème s'écrit alors sous la forme du problème de Riemann suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(u)}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_G & \text{si } x < 0 \\ u_D & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{I.81})$$

On note  $J$  la matrice jacobienne du flux physique telle que :

$$J = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \quad (\text{I.82})$$

Il est possible de résoudre de façon exacte le problème de Riemann (I.81) grâce au schéma de Godunov pour lequel on pose :

$$\begin{aligned} u_G &= u(i) \\ u_D &= u(j) \end{aligned} \quad (\text{I.83})$$

Il existe alors une infinité de solutions qui ne dépendent que de  $(x/t)$  et qui sont constituées de 3 ondes associées aux valeurs propres de la matrice jacobienne  $J = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}$ . L'une de ces solutions est ensuite sélectionnée à l'aide par exemple d'un critère d'entropie. Mais c'est une procédure très coûteuse et même si le problème de Riemann est résolu exactement, ce n'est qu'une approximation d'ordre 1 en espace. D'où l'utilisation de schémas appelés "schémas de Riemann approchés", pour lesquels on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{J} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.84})$$

Les schémas de Riemann approchés permettent d'éviter la lourde résolution du problème de Riemann en se concentrant sur l'étude des propriétés spectrales de la matrice jacobienne approchée  $\tilde{J}$ . Cependant, la matrice  $\tilde{J}$  doit vérifier trois conditions :

- rester conservative à travers les discontinuités :  $\mathbf{f}(u_G) - \mathbf{f}(u_D) = \tilde{J}(u_G - u_D)$ ,
- être hyperbolique,
- être consistante avec  $J$  :  $\tilde{J}(u_G, u_D) = u$ .

Il existe plusieurs types de schémas de Riemann approchés et dans la suite de la thèse, on s'intéresse exclusivement aux schémas 'Flux Difference Splitting' (FDS), dont le plus connu est le schéma de Roe suivant :

$$\mathbf{f}_{Roe} = \frac{\mathbf{f}_G + \mathbf{f}_D}{2} + |J| \frac{\mathbf{f}_G - \mathbf{f}_D}{2} \quad (\text{I.85})$$

où  $\mathbf{f}_G = \mathbf{f}(u(\mathbf{r}_G)) \cdot \vec{\mathbf{n}}$  et  $\mathbf{f}_D = \mathbf{f}(u(\mathbf{r}_D)) \cdot \vec{\mathbf{n}}$  correspondent aux flux d'Euler respectivement à gauche et à droite de l'interface, projetés sur la normale  $\vec{\mathbf{n}}$  [84]. Le schéma ODF est une variante du schéma de Roe pour lequel on a [16] :

$$\mathbf{f}_{ODF} = \frac{\mathbf{f}_G + \mathbf{f}_D}{2} + \text{sgn}(J) \frac{\mathbf{f}_G - \mathbf{f}_D}{2} \quad (\text{I.86})$$

Pour accéder à des ordres plus élevés, on peut extrapoler les flux soit en développant le flux lui même, soit en développant les variables d'état  $u(\mathbf{r}_G)$  et  $u(\mathbf{r}_D)$  qui permettent de calculer les flux. Cette dernière solution correspond à l'approche MUSCL. Ainsi, à l'ordre



1,  $u(\mathbf{r}_G)$  et  $u(\mathbf{r}_D)$  sont constantes dans la cellule, alors qu'avec l'approche MUSCL,  $u(\mathbf{r}_G)$  et  $u(\mathbf{r}_D)$  sont interpolées linéairement dans la cellule, ce qui permet d'atteindre l'ordre 2. Cependant, cette procédure implique que les schémas ne sont alors plus TVD (Total Variation Diminishing)[42], ce qui peut entraîner l'obtention de solutions non-physiques. On rappelle ci-dessous la définition d'un schéma TVD :

### Définition

Un schéma est TVD (Total Variation Diminishing) si :

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n), \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{I.87})$$

où la grandeur  $TV$  est définie par :

$$TV(u^n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |u^n(i+1) - u^n(i)| \quad (\text{I.88})$$

Pour que les schémas restent TVD, on utilise alors des fonctions non-linéaires  $\Psi$  qui limitent les pentes des interpolations, assurant ainsi la monotonie entre les valeurs moyennes et les valeurs interpolées et permettant de limiter les oscillations (figure I.5).

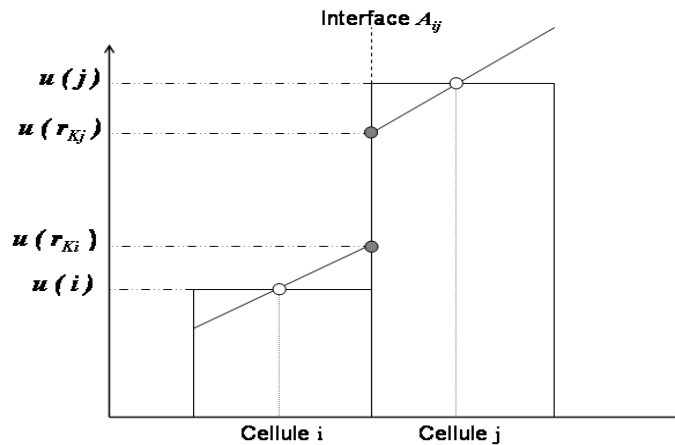


FIGURE I.5 – Schéma de l'interpolation linéaire à l'interface entre deux cellules  $i$  et  $j$  pour la montée à l'ordre 2.

Au centre  $K$  de l'interface commune aux cellules  $i$  et  $j$ , les grandeurs limitées s'expriment par [16] :

$$\begin{aligned} u_{Ki,lim} &= u_{Ki} + \chi_{Ki} \cdot (u_B - u_{Ki}) \\ u_{Kj,lim} &= u_{Kj} + \chi_{Kj} \cdot (u_B - u_{Kj}) \end{aligned} \quad (\text{I.89})$$

avec :

$$\begin{aligned} u_{Ki} &= u_i + \overline{\nabla u_i} \cdot (\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_i) \\ u_{Kj} &= u_j + \overline{\nabla u_j} \cdot (\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_j) \end{aligned} \quad (\text{I.90})$$

et où  $u_B$  est une moyenne barycentrique définie par :

$$u_B = \alpha_i u_i + \alpha_j u_j \quad (\text{I.91})$$

Si on prend par exemple  $B = H$ , alors  $\alpha_i = HG_j/G_iG_j$  et  $\alpha_j = HG_i/G_iG_j$  [53]. Les coefficients de limitations  $\chi$  s'expriment en fonction des trois valeurs d'interface  $u_{Ki}$ ,  $u_{Kj}$  et  $u_B$  et des valeurs dans les deux cellules voisines :

$$\begin{aligned} \chi_{Ki} &= \Psi(u_B - u_{Ki}, u_{Ki} - u_i) \\ \chi_{Kj} &= \Psi(u_B - u_{Kj}, u_{Kj} - u_j) \end{aligned} \quad (\text{I.92})$$

La fonction  $\Psi$  dépend du limiteur utilisé. Dans le code CEDRE, trois différents limiteurs sont disponibles :

$$\begin{aligned} \Psi_{Minmod}(U, V) &= \min \left( 2C - 1, \frac{|U + V|}{|U|} - 1 \right) \\ \Psi_{Superbee}(U, V) &= \min \left[ \max \left( 2C - 1, 3 - \frac{|U + V|}{|U|} \right), \frac{|U + V|}{|U|} - 1 \right] \\ \Psi_{VanLeer}(U, V) &= \frac{C|U + V| - (1 - C)|U - V|}{C|U + V| + (1 - C)|U - V|} \end{aligned} \quad (\text{I.93})$$

La valeur standard de la constante  $C$ , appelée paramètre de décentrement, est égale à 0,5. On note que dans le cas où  $C = 0$ , les limiteurs Minmod et Superbee donnent des résultats identiques.

### Flux dissipatifs

Les flux dissipatifs  $(\varphi \cdot A \vec{\mathbf{n}})_{i \leftarrow j}$  peuvent être directement estimés à partir des valeurs calculées à l'interface. Une autre possibilité consiste à écrire les flux à droite et à gauche de l'interface, puis à calculer un flux centré à l'interface.

#### I.4.2.3 Conclusion sur la discrétisation d'espace

La formulation mathématique du problème correspond à un système continu d'équations aux dérivées partielles (EDP) constitué par les équations bilan, les conditions initiales et

aux limites [16]. L'étape de discrétisation spatiale permet de passer de ce système d'EDP à un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) en chaque point du maillage. De ce fait, le problème à résoudre s'exprime sous la forme suivante :

$$M\dot{Q} = \mathbf{F} \quad (\text{I.94})$$

où  $M$  est une matrice diagonale. L'intégration temporelle consiste alors à transformer ce système d'EDO en une suite récurrente de la forme :

$$Q^{n+1} = G(Q^n) \quad (\text{I.95})$$

C'est cette étape d'intégration temporelle que l'on décrit au paragraphe suivant.

### I.4.3 Intégration temporelle

L'intégration temporelle a pour objectif de résoudre le système d'EDO (I.94) en remplaçant la solution exacte continue  $Q(t)$  par une suite  $Q^0, Q^1, \dots, Q^n, Q^{n+1}, \dots$  de valeurs discrètes aux instants  $t = 0, t^1, \dots, t^n, t^{n+1} = t^n + \Delta t, \dots$ . Entre les deux instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$ , l'intégration temporelle consiste alors à évaluer l'expression [16] :

$$M \delta Q = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(U) dt \quad (\text{I.96})$$

avec  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  et :

$$\delta Q = \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} \quad (\text{I.97})$$

Deux types de méthodes d'intégration temporelle sont disponibles dans CEDRE : les approches implicites et explicites.

#### I.4.3.1 Méthodes explicites

Les méthodes explicites consistent à calculer l'état au temps  $t^{n+1}$  à partir de la connaissance de l'état au temps  $t^n$  uniquement. La stabilité d'une telle méthode n'est assurée que si la condition *CFL* (Courant Friedrichs Lewy) suivante est vérifiée [16] :

$$CFL = \Delta t \frac{|v| + a}{\Delta x} < CFL_{max} \quad (\text{I.98})$$

avec  $v$  la vitesse locale convective,  $a$  la vitesse du son,  $\Delta x$  la taille de maille et  $CFL_{max}$  la valeur maximale de *CFL*. Ainsi, la valeur du pas de temps d'une méthode explicite est limitée par la valeur du *CFL* et on a, d'après (I.98) :

$$\Delta t < CFL_{max} \frac{\Delta x}{|v| + a} \quad (\text{I.99})$$

La plus simple des méthodes d'intégration temporelle explicite est le schéma d'Euler qui s'apparente à une méthode des rectangles à gauche en temps :

$$\begin{aligned} M \delta Q &= \mathbf{F}(U^n) \\ Q^{n+1} &= Q^n + \Delta t \delta Q \\ U^{n+1} &= U(Q^{n+1}) \end{aligned} \quad (\text{I.100})$$

En pratique, cette méthode est rarement utilisée. En effet, elle est peu précise en temps, car seulement d'ordre 1, et surtout elle a un domaine de stabilité extrêmement réduit. Il est possible d'améliorer la stabilité et la précision du schéma d'Euler en y incorporant une deuxième étape d'évaluation des états entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$ . On obtient alors la méthode de Runge-Kutta à 2 étapes suivante :

$$\begin{cases} M \delta Q_1 &= \mathbf{F}(U^n) \\ M \delta Q &= \theta \mathbf{F}(U_1) + (1 - \theta) \mathbf{F}(U^n) \end{cases} \quad (\text{I.101})$$

avec :

$$\begin{cases} Q_1 &= Q^n + \Delta t \delta Q_1 \\ Q^{n+1} &= Q_1 + \Delta t \delta Q \end{cases} \quad (\text{I.102})$$

Pour  $\theta = 0,5$ , la méthode (I.101) est d'ordre 2 en temps et stable pour un pas de temps tel que  $CFL_{max} < 0,5$  [16].

### I.4.3.2 Méthodes implicites à un pas

L'utilisation d'une méthode implicite présente l'avantage de pouvoir s'affranchir en théorie de la condition  $CFL$ . Cependant, ceci n'est possible qu'au prix d'une mise en oeuvre complexe [16]. Les schémas implicites dans le code CEDRE sont de la forme du  $\theta$ -schéma suivant :

$$M \delta Q = \theta \mathbf{F}(U^{n+1}) + (1 - \theta) \mathbf{F}(U^n) \quad (\text{I.103})$$

Selon la valeur de  $\theta$ , on obtient différents schémas. Pour  $\theta = 0$ , on retrouve la méthode d'Euler explicite. Si  $\theta = 0,5$ , on a alors la méthode de Crank-Nicholson, et si  $\theta = 1$ , on obtient la méthode d'Euler implicite. La mise en oeuvre de ces méthodes implicites s'effectue en trois étapes successives [16] :

#### 1. Linéarisation du second membre

La première de ces étapes consiste à linéariser le second membre de l'expression (I.103). Pour cela, on commence par développer au premier ordre  $\mathbf{F}(U^{n+1})$  autour de l'état  $U^n$  :

$$\mathbf{F}(U^{n+1}) = \mathbf{F}(U^n) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial Q} \right|^n (Q^{n+1} - Q^n) + \mathcal{O}[\Delta Q(t)]^2 \quad (\text{I.104})$$

On définit la matrice jacobienne  $J$  des seconds membres par rapport aux états, telle que :

$$J = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial Q} \quad (\text{I.105})$$

En appliquant (I.104) dans l'expression (I.103), on arrive au  $\theta$ -schéma linéarisé suivant :

$$(M - \theta \Delta t J^n) \delta Q = \mathbf{F}(U^n) \quad (\text{I.106})$$

## 2. Approximation du jacobien

L'utilisation de la définition exacte du jacobien (I.105) n'est pas aisée en pratique, notamment en raison de l'importante place mémoire nécessaire. On utilise alors un jacobien approché  $\hat{J}$ . Le système linéaire (I.106) devient alors :

$$(M - \theta \Delta t \hat{J}^n) \delta Q = \mathbf{F}(U^n) \quad (\text{I.107})$$

## 3. Résolution itérative du système linéaire

La troisième et dernière étape consiste à résoudre de façon itérative le système linéaire (I.107). La méthode employée pour effectuer cette étape est la méthode GMRES (Generalized Minimal Residual). GMRES correspond à une méthode de Krylov, c'est-à-dire une généralisation de la méthode du gradient conjugué au cas des matrices non-symétriques. De plus amples informations concernant cette méthode sont données dans les travaux de G. Selva [68]. Cette méthode est robuste et permet d'obtenir une convergence rapide, mais elle nécessite cependant une importante place mémoire.

### I.4.3.3 Particularités du code CEDRE pour les calculs stationnaires

Lors de simulations stationnaires, plusieurs options sont disponibles dans le code CEDRE pour permettre d'accélérer la convergence du calcul. Pendant les travaux de thèse, deux de ces techniques sont occasionnellement utilisées : le préconditionnement bas Mach et le pas de temps local.

#### Préconditionnement bas Mach

Les schémas numériques implantés dans le code CEDRE sont bien adaptés aux écoulements compressibles. Mais pour des écoulements à faible nombre de Mach, la convergence vers l'état stationnaire devient extrêmement lente. Dans ces cas là, l'utilisation du préconditionnement bas Mach permet d'améliorer la performance des solveurs compressibles et d'ainsi rétablir une vitesse de convergence raisonnable. Cette technique consiste à modifier la dérivée temporelle grâce à une matrice de préconditionnement  $M_p$ , d'où :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{devient} \quad M_p \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(u_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (\text{I.108})$$

L'introduction de la matrice de préconditionnement  $M_p$  modifie le comportement du système d'EDP et le schéma temporel n'est alors plus consistant. Cependant, lors de la discrétisation spatiale, les expressions des flux numériques restent consistantes. De ce fait, la solution stationnaire obtenue avec préconditionnement bas Mach est du même ordre de grandeur que celle obtenue sans préconditionnement tout en étant atteinte plus rapidement [84].

### **Pas de temps local**

Lorsqu'on effectue un calcul stationnaire et que l'on utilise un schéma d'intégration temporelle implicite, on peut envisager de prendre un grand pas de temps pour obtenir rapidement le résultat souhaité. La simulation débute alors par une phase transitoire de calcul sans signification physique qui permet de converger vers un état stationnaire. L'enjeu est de parvenir à la solution physique à l'issue de cette phase transitoire. La sélection du schéma utilisé se fait donc en fonction de sa robustesse, définie comme étant la capacité d'un schéma à calculer un écoulement sans produire d'état non-physique [37]. L'utilisation d'un pas de temps local permet de renforcer la robustesse pour de grands pas de temps. Cette technique agit comme un préconditionnement des équations bilan où la dérivée temporelle est modifiée par une matrice diagonale. On perd de ce fait la conservativité pendant la phase transitoire avant de la retrouver lorsque les résidus convergent uniformément vers zéro [84].

## **I.5 Conclusion du chapitre**

On a exposé dans ce chapitre les données théoriques de la modélisation des écoulements turbulents en énonçant les équations décrivant le mouvement fluide, mais également les différentes propriétés physiques de la turbulence. Les échelles caractéristiques existant au sein des écoulements turbulents ont été définies, ainsi que des hypothèses qui nous seront utiles lors de l'analyse de résultats, comme la relation de Kolmogorov. La description physique de la turbulence a permis de comprendre les fondements théoriques des approches RANS et LES et l'obtention des équations du mouvement dans le cadre de l'utilisation de telles méthodes. On a également présenté les caractéristiques principales du code de calcul CEDRE de l'ONERA, de la formulation mathématique des équations en passant par la discrétisation spatiale et l'intégration temporelle. Ces éléments sont utilisés pour l'étude numérique d'un écoulement bien particulier : l'écoulement dans le canal expérimental VECLA de l'ONERA. Ce sont les résultats expérimentaux obtenus sur ce montage qui sont détaillés au chapitre suivant.



# Présentation des données expérimentales du montage VECLA

---

*Dans ce chapitre, on présente le montage expérimental VECLA de l'ONERA sur lequel ont été effectuées les mesures de turbulence et de bruit qui nous servent de référence pour les simulations numériques. La première partie du chapitre décrit les principales caractéristiques du montage ainsi que les moyens de mesure. Puis les résultats expérimentaux obtenus sont explicités.*

*L'objectif de ce chapitre est uniquement d'exposer les données "brutes" relatives au montage VECLA. L'analyse de l'écoulement obtenu est effectuée au chapitre suivant.*



Le montage VECLA (figure II.1) de l'ONERA a été initialement conçu pour l'étude de la couche limite acoustique dans les chambres de combustion [82]. Il a ensuite été utilisé pour l'étude de l'instabilité pariétale [77] ou de la turbulence [10]. Ce montage correspond à un canal de section rectangulaire alimenté en gaz froid injecté au travers d'une paroi poreuse.

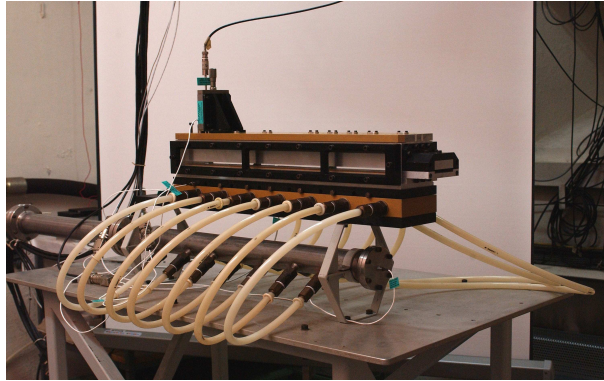


FIGURE II.1 – Photographie du montage VECLA.

Les instationnarités de l'écoulement dans VECLA peuvent provenir de différentes sources. L'une d'elle est l'instationnarité de l'injection de gaz au niveau de la paroi poreuse : en effet, l'introduction d'air à travers le poral ne se fait pas de façon parfaitement linéaire, mais inclut des fluctuations du débit. Ce phénomène se traduit par la création de petites structures tourbillonnaires instationnaires au niveau du poral et s'apparente ainsi à une sorte de "pseudo-turbulence". Le niveau de pseudo-turbulence générée est d'autant plus élevé que le diamètre du poral est grand [32]. La seconde source d'instationnarité est l'acoustique de la veine. Enfin, la dernière est le VSP. Le canal VECLA ayant une géométrie régulière, aucune couche de cisaillement n'est créée. De ce fait, les sources d'instabilités hydrodynamiques comme le VSA ou le VSO ne sont pas considérées dans ce montage. Différentes conditions d'utilisation sont possibles, selon la hauteur du canal et la vitesse d'injection envisagées. Le type d'écoulement généré pour les différentes configurations possibles varie en fonction de la prédominance de l'une ou l'autre des trois sources d'instationnarités citées précédemment. L'écoulement peut être laminaire sur toute la longueur de la veine ou, à l'opposé, se trouver totalement turbulent. Il est possible d'avoir des états intermédiaires où l'écoulement est laminaire près du fond avant du canal, avant que la transition turbulente ne s'enclenche en milieu de veine. Pour notre étude, on cherche à obtenir un écoulement en transition turbulente, sans atteindre la turbulence pleinement développée. Cette configuration peut être obtenue dans VECLA, et c'est donc celle-ci que l'on retient. Pour ce type d'écoulement, deux campagnes d'essais ont été effectuées par G. Avalon, l'une en 1993 [10] et l'autre en 2010 [9]. Le but de la première campagne d'essais a été de mesurer les grandeurs statistiques de l'écoulement, comme les champs moyens et

fluctuants. La campagne d'essais de 2010 a eu pour objectif de compléter cette première série de mesures, notamment en apportant des informations spectrales sur le bruit. Une description du montage VECLA pour la configuration souhaitée est d'abord donnée avant de passer aux principales caractéristiques des mesures effectuées. Les résultats obtenus sont ensuite détaillés.

## II.1 Dispositif expérimental

### II.1.1 Caractéristiques du montage VECLA

VECLA est constitué d'un canal parallélépipédique de  $581\text{ mm}$  de long,  $60\text{ mm}$  de large et sa hauteur peut être modifiée. La hauteur  $h$  de  $10,3\text{ mm}$  choisie dans la configuration étudiée ici permet d'avoir la transition de l'écoulement. Le nombre de Reynolds des essais effectués est d'environ 1360 [32]. Le fond avant ainsi que les parois supérieures et latérales sont lisses et imperméables (figure II.2). La sortie de fluide s'effectue à l'extrémité aval. De l'air à  $303\text{ K}$  est injecté par la paroi inférieure poreuse. La porosité est de  $18\text{ }\mu\text{m}$  pour les essais de 1993 et de  $8\text{ }\mu\text{m}$  en 2010.

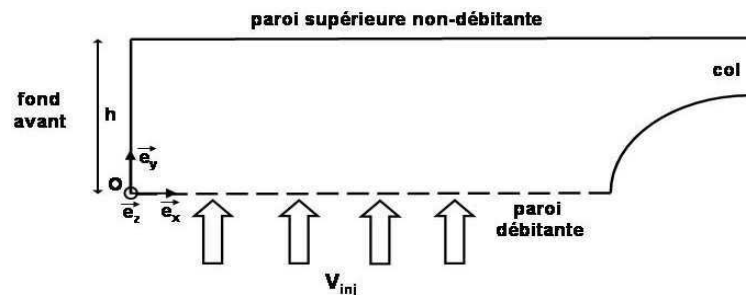


FIGURE II.2 – Schéma du montage VECLA.

Le système en amont de la plaque poreuse est constitué de préchambres alimentées par des cols soniques qui permettent de répartir le débit de façon égale et à l'imposer à l'entrée du montage. Ce débit injecté par la paroi poreuse est de  $2,619\text{ kg}/(\text{m}^2\text{ s})$ . Avant d'arriver dans les préchambres, l'air subit une détente qui fait chuter sa pression à 4 bar environ. L'air est alors réchauffé afin d'obtenir une température ambiante de  $303\text{ K}$  à l'intérieur de la veine. La pression à l'extrémité amont de la chambre est de 1,5 bar. L'extrémité aval du canal est raccordée à une tuyère avec un col sonique de  $4,37\text{ mm}$  de diamètre.

### II.1.2 Description des mesures

Les mesures de vitesse sont réalisées grâce à une sonde film chaud introduite par la face supérieure du montage en différentes abscisses  $x$  par rapport au fond avant du canal :  $x = 31, 120, 220, 350, 400, 450, 500$  et  $570 \text{ mm}$ . Pour les essais de 1993, la sonde utilisée est bifilm, alors qu'en 2010 la sonde est de type monofilm. Cette différence de matériel entre les deux campagnes d'essais fait que les composantes longitudinales  $v_x$  et transversales  $v_y$  de la vitesse sont accessibles en 1993, alors que la vitesse totale  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  est directement relevée en 2010. En 1993, l'acquisition des mesures de vitesse a été réalisée à la cadence de  $100 \text{ kHz}$ . En 2010, les mesures ont été recueillies sur 65336 valeurs enregistrées au cours de l'acquisition à la fréquence d'échantillonnage de  $50 \text{ kHz}$ . Des mesures de pression sont effectuées par des capteurs de type piézorésistifs en extrémité amont de la chambre ainsi qu'aux mêmes abscisses que les relevés de vitesse.

## II.2 Présentation des résultats expérimentaux

### II.2.1 Champs moyens

#### II.2.1.1 Vitesse

Les profils de vitesse totale moyenne  $v$  de la figure II.3 permettent de visualiser le développement de l'écoulement le long de la veine pour les essais de 1993 (en pointillés) et pour ceux de 2010 (en ligne continue). En premier lieu, on peut observer que le profil en pointillés pour  $x = 570 \text{ mm}$  présente un accroc aux environs de  $y \approx 6 \text{ mm}$ . Ceci est lié aux conditions de mesures : les expérimentateurs ont dû attendre que la température dans la veine se stabilise autour de la valeur théorique avant de procéder à la mesure, ce qui a entraîné l'accroc observé. Cette anomalie mise à part, on remarque que les mesures effectuées en 2010 sont en accord avec celles de 1993 tout le long de la veine sauf près de la sortie de fluide. En effet, en  $x = 570 \text{ mm}$ , on constate que la valeur de la vitesse moyenne obtenue en 2010 est plus faible que celle mesurée en 1993 dans la partie basse de la veine jusqu'à  $y \approx 9 \text{ mm}$ . En revanche, dans la partie supérieure du canal, pour  $y \geq 9 \text{ mm}$ , les valeurs de 2010 sont plus élevées que celles de 1993. Ces écarts de vitesse peuvent très probablement être expliqués par des conditions expérimentales qui ne sont pas totalement identiques lors des deux campagnes d'essais, comme l'utilisation de nouveaux instruments de mesures ou la différence de porosité de la plaque injectante par exemple. En effet, la porosité des essais de 1993 est plus grande que celle des essais de 2010 et on peut concevoir que cela pourrait influencer sur la turbulence injectée et donc sur les profils de vitesse moyenne. Sur les profils de 1993 et de 2010, on constate que près de la paroi supérieure une couche limite se développe. Cette couche limite s'élargit quand on se rapproche de la sortie de fluide pour atteindre un maximum d'environ  $2 \text{ mm}$  d'épaisseur. Le développement de

cette couche limite le long du canal entraîne l'apparition d'un pic de vitesse moyenne qui atteint un maximum de  $120 \text{ m/s}$  près de la sortie de fluide.

Les tracés de la figure II.4 représentent les profils de vitesse moyenne longitudinale (a) et transversale (b) relevés lors des essais avec bifilm en 1993. Les profils de 2010 ne sont pas disponibles puisqu'une sonde monofilament a été utilisée. En ce qui concerne les mesures effectuées avec la sonde bifilm, quand la valeur de la vitesse longitudinale  $v_x$  reste faible, il est possible de relever les profils de la vitesse transversale  $v_y$  de façon relativement précise. En revanche, cela devient beaucoup plus difficile lorsque la vitesse longitudinale  $v_x$  prend des valeurs plus importantes. Dans ce cas là, les valeurs de  $v_y$  relevées sont approximatives tout en restant du bon ordre de grandeur. On constate sur la figure II.4 que la valeur des vitesses moyennes transversales reste faible par rapport aux vitesses longitudinales quelle que soit l'abscisse dans la veine.

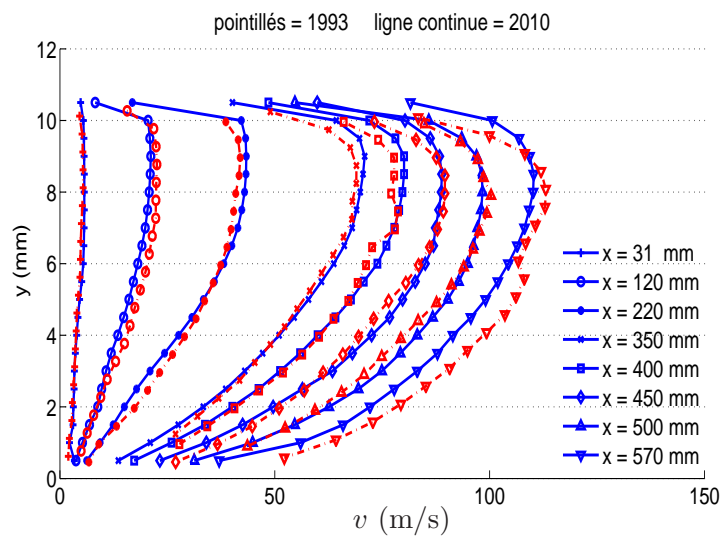


FIGURE II.3 – Profils de vitesse totale moyenne. Comparaison des relevés obtenus en 1993 (en pointillés) et en 2010 (en ligne continue).

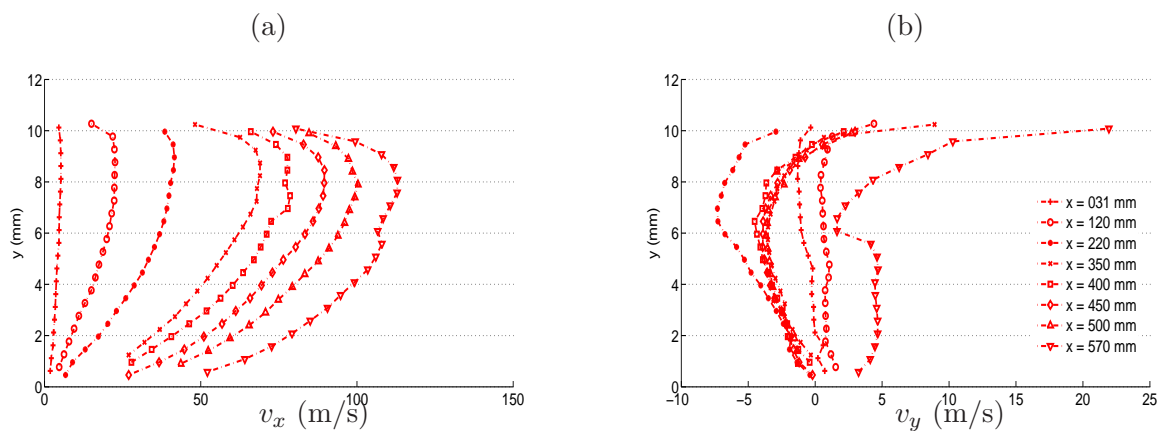


FIGURE II.4 – Profils de vitesses moyennes longitudinale (a) et transversale (b) pour les essais de 1993.

### II.2.1.2 Pression

Les pressions mesurées lors des deux campagnes d'essais sont en accord tout le long de la veine (figure II.5). La pression à l'intérieur de la chambre a une évolution de forme parabolique en fonction de l'abscisse : elle est d'environ 1,5 bar près du fond avant et chute aux alentours de 1,374 bar près de la sortie de fluide.

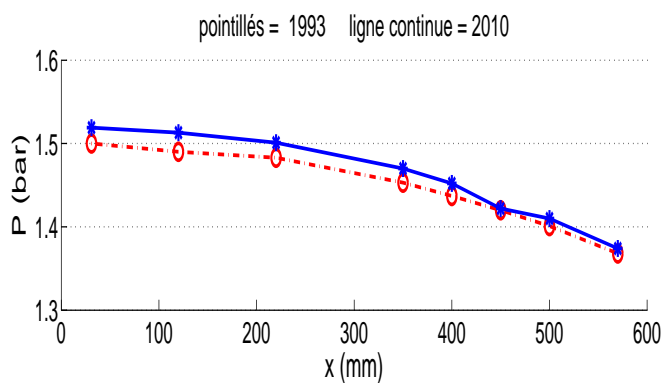


FIGURE II.5 – Pressions mesurées dans la veine en fonction de l'abscisse. Campagnes d'essais de 1993 (pointillés) et de 2010 (ligne continue).

### II.2.1.3 Coefficient de quantité de mouvement $\beta$

La transition d'un écoulement avec injection à la paroi peut être localisée grâce à la variation du coefficient de quantité de mouvement  $\beta$ . Celui-ci décroît au niveau de la transition en passant d'une valeur laminaire à une valeur turbulente. La valeur théorique de  $\beta$  pour un écoulement laminaire est 1,234 [3][10]. Pour des écoulements compressibles, ce coefficient s'exprime sous la forme suivante [21] :

$$\beta = \frac{\rho h \int_0^h \rho v_x^2 dy}{\left(\int_0^h \rho v_x dy\right)^2} \quad (\text{II.1})$$

où  $v_x$  est la composante longitudinale de la vitesse et  $\rho$  la masse volumique. Cette dernière est calculée à partir de la loi d'état pour un gaz parfait (I.4) et de l'équation d'état de la vitesse du son  $a$  suivante :

$$a = \sqrt{\gamma r T} \quad (\text{II.2})$$

où  $\gamma = 1,4$  est le rapport des chaleurs spécifiques. En combinant les deux relations (I.4) et (II.2), on obtient l'expression de la masse volumique suivante :

$$\rho = \frac{\gamma P}{a^2} \quad (\text{II.3})$$

On rappelle que la température  $T$  du fluide est constante dans VECLA. Donc, d'après l'expression (II.2),  $a$  est une constante. Ainsi, d'après (II.3), la masse volumique ne dépend que de la pression  $P$ . Or, en une abscisse donnée, la pression est quasiment constante dans VECLA, ce qui implique que la masse volumique est elle aussi quasiment constante. De ce fait, dans la formule (II.1), la masse volumique se simplifie et le coefficient  $\beta$  peut alors être déterminé par l'expression suivante [10][86] :

$$\beta = \frac{1}{v_{x\text{moy}}^2 h} \int_0^h v_x^2 dy, \quad (\text{II.4})$$

avec

$$v_{x\text{moy}} = \frac{1}{h} \int_0^h v_x dy. \quad (\text{II.5})$$

Comme indiqué précédemment dans ce chapitre, la composante axiale de la vitesse pour les essais de 2010 n'est pas accessible. Seule la vitesse totale  $v$  a été mesurée. Néanmoins, puisqu'il a été constaté que la contribution transversale de la vitesse moyenne  $v_y$  est négligeable par rapport à la valeur de la vitesse axiale  $v_x$  (figure II.4), on admet l'approximation consistant à prendre en compte la vitesse totale dans le calcul de  $\beta$  de 2010.

La figure II.6 représente l'évolution du coefficient de quantité de mouvement le long de la veine pour les deux campagnes d'essais. Les deux courbes suivent une évolution similaire, même si les valeurs relevées lors des essais de 2010 sont moins élevées que lors de

la première campagne d'essais. Près du fond avant, la valeur relevée de  $\beta$  pour les deux campagnes d'essais est plus faible que la valeur théorique laminaire de 1,234. Ceci est dû à un faible nombre de relevés expérimentaux ainsi qu'à la présence de la paroi du fond avant qui permet la génération de fluctuations dans l'écoulement. Le coefficient  $\beta$  a ensuite une valeur à peu près constante jusqu'à  $x = 220 \text{ mm}$ . Puis, entre les abscisses  $x = 220 \text{ mm}$  et  $x = 350 \text{ mm}$ , le coefficient décroît, indiquant le déclenchement de la transition turbulente.

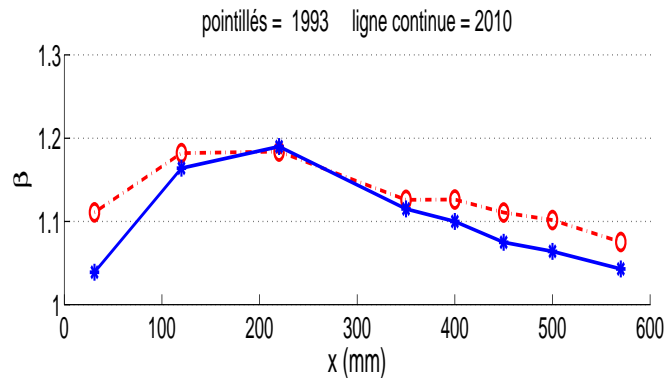


FIGURE II.6 – Variation du coefficient de quantité de mouvement  $\beta$  en fonction de l'abscisse. Campagnes d'essais de 1993 (pointillés) et de 2010 (ligne continue).

L'évolution des coefficients de quantité de mouvement  $\beta$  expérimentaux permet de mettre en évidence que l'écoulement généré dans VECLA passe bien d'un état laminaire près du fond avant à une transition turbulente pour des abscisses supérieures à  $x = 220 \text{ mm}$ . Dans la suite de la thèse, lorsque le coefficient  $\beta$  issu d'une simulation numérique sera comparé aux valeurs mesurées sur le montage VECLA, la valeur expérimentale erronée près du fond avant ne sera pas prise en compte.

## II.2.2 Quantités fluctuantes

Les évolutions en valeurs RMS des vitesses totales fluctuantes  $v' = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2}$  obtenues en 1993 et en 2010 sont représentées sur la figure II.7. Près du fond avant, pour les abscisses  $x = 31 \text{ mm}$  et  $x = 120 \text{ mm}$ , les profils des deux campagnes d'essais sont pratiquement superposés. Puis, pour des abscisses comprises entre  $x = 220 \text{ mm}$  et  $x = 400 \text{ mm}$ , les valeurs mesurées en 2010 sont supérieures à celles de 1993. Inversement, pour des abscisses supérieures ou égales à  $x = 450 \text{ mm}$ , les niveaux de fluctuation de 2010 sont moins élevés que ceux de 1993. De même que pour les vitesses moyennes, on peut penser que ces divergences entre les profils peuvent être liées à la différence de porosité des plaques injectantes lors des deux campagnes d'essais. En effet, l'écart de porosité pourrait avoir pour conséquence que le niveau de turbulence injectée à travers la plaque poreuse

est différent entre 1993 et 2010, ce qui aurait une influence directe sur les fluctuations de vitesse mesurées. Les tracés des figures II.7 et II.8 montrent que les niveaux de fluctuations de vitesse sont très faibles près du fond avant et qu'ils augmentent quand on se rapproche de la sortie de fluide. L'augmentation des niveaux est particulièrement sensible entre les abscisses  $x = 220 \text{ mm}$  et  $x = 350 \text{ mm}$ , illustrant le déclenchement de la transition de l'écoulement. Cette augmentation s'accompagne d'une évolution de la forme des tracés qui passent d'une silhouette plate à un profil qui s'arrondit avec l'abscisse. Cet arrondissement, d'abord observé à mi-hauteur de veine, se rapproche de la paroi poreuse quand l'abscisse augmente. Les courbes de la figure II.8 montrent que les niveaux de fluctuations sont plus importants selon la direction longitudinale que selon la direction transversale.

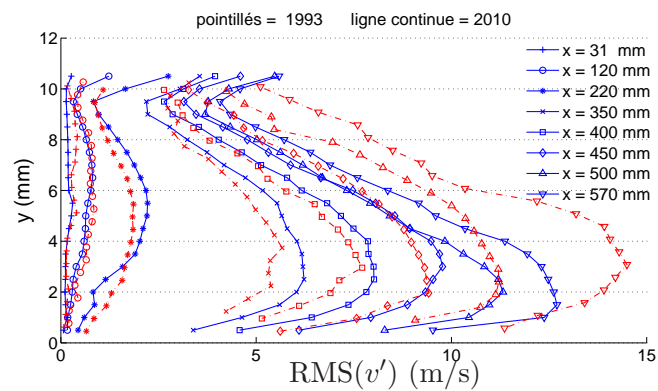


FIGURE II.7 – Profils de vitesse totale fluctuante en valeur RMS. Comparaison des relevés obtenus en 1993 avec bifilm (en pointillés) et en 2010 avec monofilm (en ligne continue).

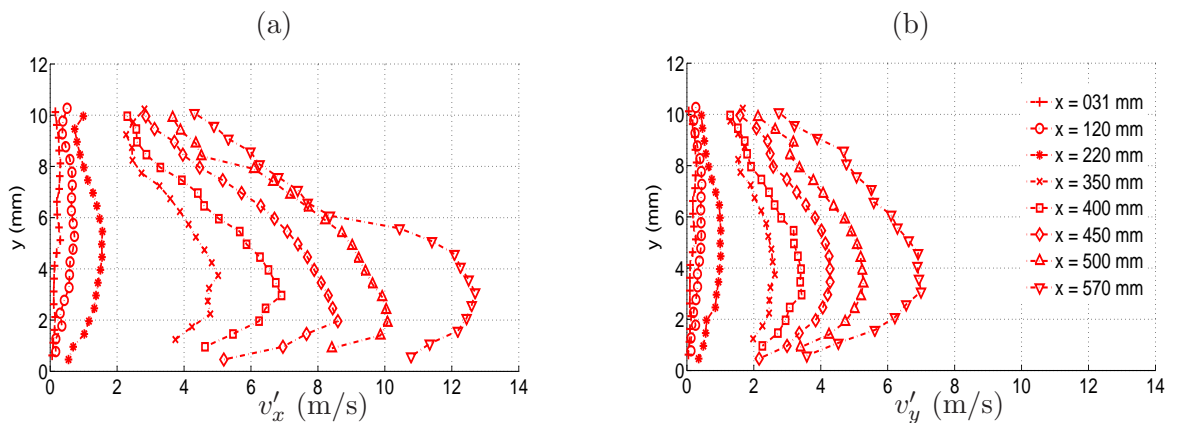


FIGURE II.8 – Profils de vitesses fluctuantes longitudinale (a) et transversale (b) pour les essais de 1993.



Les densités de probabilité (ou PDF, voir annexe A) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  obtenues pour les essais de 2010 en différentes positions axiales  $x$  le long de la veine sont tracées à la figure II.9. On a superposé à la PDF une courbe suivant la loi normale. Si la densité de probabilité d'une quantité physique suit une loi normale alors cette quantité physique est bruitée avec un bruit dit gaussien. Pour une telle loi, on a une valeur du coefficient de dissymétrie (*skewness*) égale à 0 et une valeur du coefficient d'aplatissement (*kurtosis*) égale à 3. On constate sur la figure II.9 que la PDF de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  ne suit pas tout à fait la loi normale du fond avant du canal jusqu'à  $x = 220$  mm. En revanche, pour des abscisses  $x$  supérieures à 220 mm, la densité de probabilité correspond approximativement à une loi normale. Étant donné que précédemment on a identifié que la transition turbulente se déclenche à partir de  $x = 220$  mm, les résultats de la figure II.9 montrent que dès que la transition de l'écoulement est amorcée, la vitesse totale  $v'$  est bruitée avec un bruit gaussien.

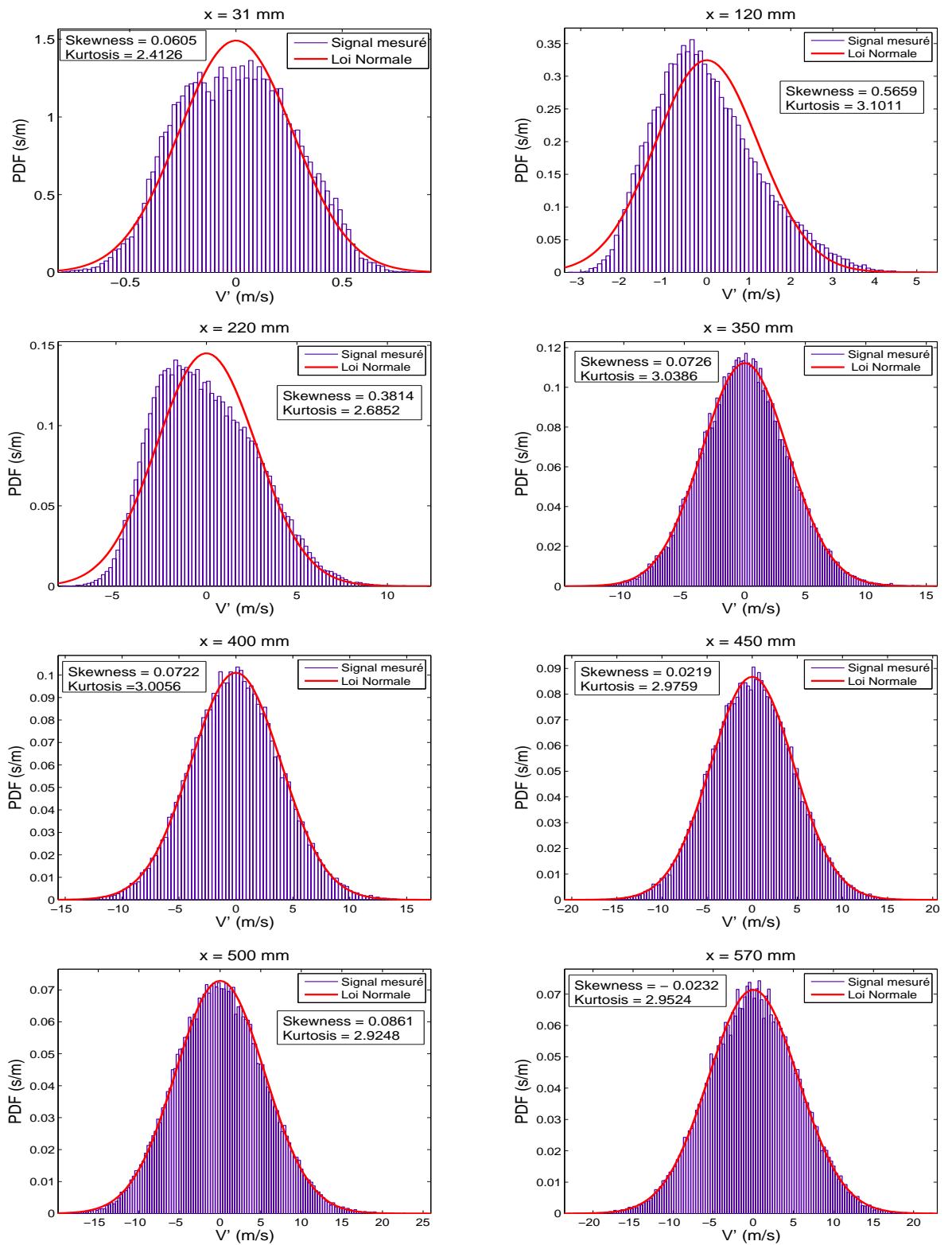


FIGURE II.9 – Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  pour les essais de 2010, en différentes positions axiales  $x$  le long de la veine.

### II.2.3 Analyse spectrale des signaux

L'analyse spectrale a été effectuée sur les mesures expérimentales de la campagne d'essais de 2010. Les signaux ont été filtrés entre  $40\text{ kHz}$  et  $50\text{ kHz}$  et les relevés ont été acquis à une fréquence de  $50\text{ kHz}$ . Les spectres présentés ci-après ont été obtenus par l'intermédiaire de la fonction *spectrogram* du logiciel MATLAB. Cette fonction effectue des FFT sur des fenêtres réparties sur toute la durée du signal. Dans notre cas, les fenêtres se recouvrent par moitié et sont constituées de 8192 points. Les amplitudes obtenues sur chaque fenêtre ont ensuite été moyennées afin d'obtenir un spectre moyen. Les spectres ainsi tracés ont une résolution fréquentielle de  $6,1\text{ Hz}$ .

#### II.2.3.1 Spectres de vitesse et de pression

La figure II.10 représente les spectres de vitesse totale fluctuante  $v'$  aux 8 positions axiales le long du canal. Pour chacune de ces positions axiales, les spectres obtenus en différentes distances de la paroi injectante sont représentés. On constate que le niveau des vitesses fluctuantes augmente quand on se rapproche de la sortie de fluide. Deux pics de fréquence se distinguent sur les spectres, l'un autour de  $8000\text{ Hz}$  et l'autre autour de  $27000\text{ Hz}$ . Leurs valeurs élevées ont amené les expérimentateurs à penser qu'il ne s'agit pas de fréquences acoustiques mais plutôt de fréquences mécaniques de vibration transversale de la sonde excitées par l'écoulement. Cette déduction est corroborée par l'analyse du spectre des fluctuations de pression près du fond avant (figure II.11). En effet, mis à part le pic observé autour de  $1000\text{ Hz}$  correspondant à une fréquence intrinsèque au capteur de pression, et le pic en  $1500\text{ Hz}$  dû à une perturbation de l'écoulement par la sonde, aucune autre fréquence n'est excitée dans le spectre. Ceci a permis de conclure qu'aucun phénomène acoustique n'est présent dans la veine et qu'ainsi les vitesses instantanées mesurées ne dépendent que de la turbulence de l'écoulement.

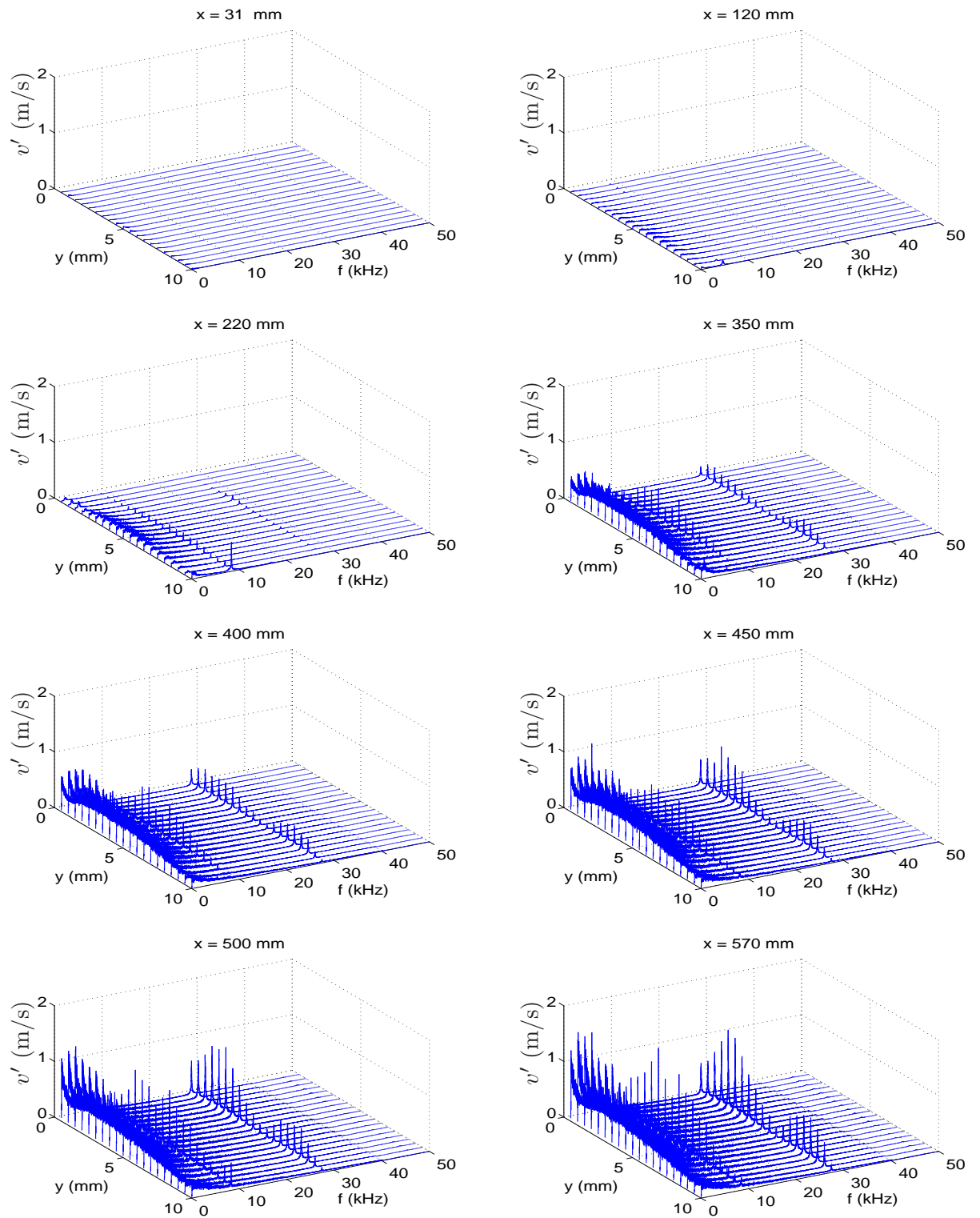


FIGURE II.10 – Spectres des fluctuations de vitesse totale  $v'$  aux différentes positions transversales  $y$  de mesure du film chaud et en différentes positions axiales  $x$  le long de la veine.

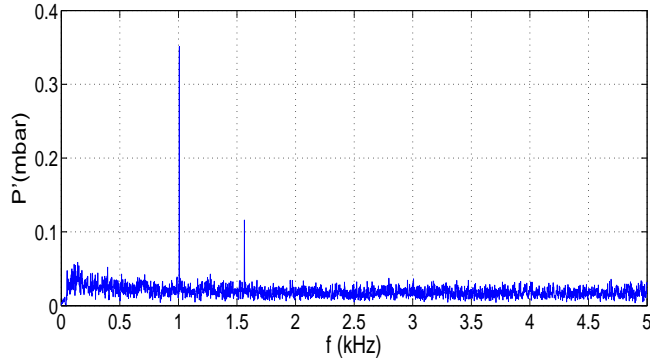


FIGURE II.11 – Spectre des fluctuations de pression relevé près du fond avant en  $x = 31$  mm et  $y = 3$  mm.

### II.2.3.2 Densité spectrale de puissance

Sur la figure II.12 sont représentées les densités spectrales de puissance ( $DSP$ ) des fluctuations de vitesse totale à mi-hauteur de veine et pour les 8 positions axiales le long du canal. La position axiale correspondant à chacun des tracés peut être identifiée en remarquant que les spectres sont obtenus de façon naturellement ordonnée de bas en haut, des abscisses les plus faibles aux plus élevées. La  $DSP$  est estimée de la façon suivante :

$$DSP(v') = \frac{(TF(v'))^2/T_p}{\max[(TF(v'))^2/T_p]} \quad (\text{II.6})$$

où  $T_p$  est la durée sur laquelle les signaux sont mesurés et  $TF(v')$  la transformée de Fourier des fluctuations de la vitesse. Les tracés de la figure II.12 montrent que l'énergie augmente sur toutes les fréquences du spectre quand on se rapproche de la sortie de fluide. Cette augmentation est significative avant la transition turbulente alors qu'elle devient minimale après la transition. On note également que la pente de la  $DSP$  évolue le long du canal et passe d'une pente en  $f^{-3}$  avant la transition à une pente en  $f^{-5/3}$  après la transition.

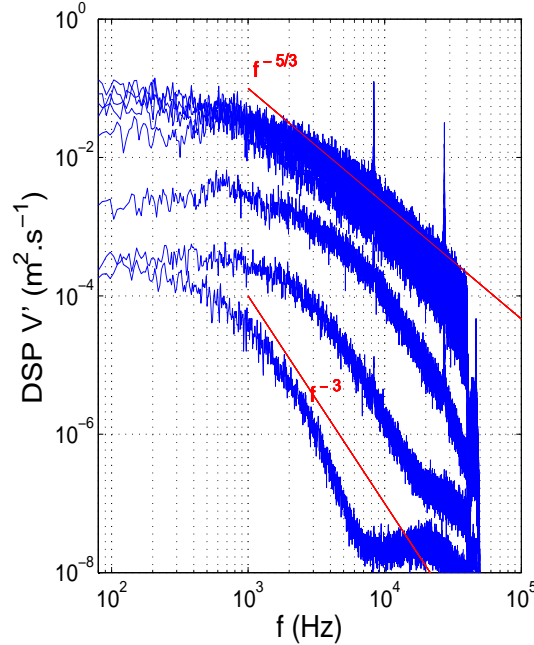


FIGURE II.12 –  $DSP$  de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  à  $5\text{ mm}$  de la plaque poreuse pour les 8 positions longitudinales le long de la veine. Spectres ordonnés de bas en haut, des abscisses les plus faibles aux plus élevées ( $x = 31, 120, 220, 350, 400, 450, 500$  et  $570\text{ mm}$ ).

#### II.2.4 Mesures de bruit

Les mesures de bruit ont été acquises près de la paroi injectante à l'abscisse  $x = 31\text{ mm}$  dans la zone laminaire de l'écoulement où l'on peut supposer que la vitesse et le niveau de turbulence sont peu différents de ceux existant à la surface de la plaque poreuse. Les mesures ont été réalisées pour 7 différentes valeurs de la vitesse d'injection. Ceci a été rendu possible grâce au retrait de la tuyère. En effet, lorsque celle-ci est intégrée au montage, la vitesse d'injection ne dépend que du rapport entre le col de la tuyère et la surface d'injection et ne peut donc pas être modifiée. En revanche, lorsque la tuyère est retirée, la pression à l'intérieur de la chambre reste voisine de la pression atmosphérique et la vitesse d'injection peut être modulée en fonction du débit injecté, autrement dit par la pression d'alimentation. Les valeurs de vitesse d'injection pour les mesures de bruit ont par conséquent été définies à partir d'un choix différent de pressions d'alimentation  $P_{al}$  : 7.25, 5.44, 4.35, 3.63, 3.11, 2.72 et 2.42 bar. Les valeurs de vitesse d'injection  $v_{inj}$  et de débit massique surfacique  $(\rho v)_{inj} = \dot{m}_s$  obtenues pour chaque pression d'alimentation citée ci-dessus sont répertoriées au tableau II.1. La démarche employée pour déterminer

ces valeurs est explicitée à l'annexe B.

$P_{al}$ (bar)	7,25	5,44	4,35	3,63	3,11	2,72	2,42
$v_{inj}$ ( $m.s^{-1}$ )	2,136	1,804	1,532	1,325	1,167	1,041	0,935
$\dot{m}_s$ ( $kg.s^{-1}.m^{-2}$ )	3,316	2,490	1,991	1,661	1,423	1,245	1,107

TABLE II.1 – Valeurs de vitesse d'injection  $v_{inj}$  et de débit massique surfacique  $(\rho v)_{inj} = \dot{m}_s$  associées à chaque pression d'alimentation  $P_{al}$ .

#### II.2.4.1 Densité de probabilité de la fluctuation de vitesse totale pour les mesures de bruit

Les densités de probabilité de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  obtenues lors des mesures de bruit pour les différentes valeurs du débit massique surfacique  $\dot{m}_s$  testées sont tracées aux figures II.13 et II.14. Pour chacun des 7 débits différents testés, les densités de probabilités sont indiquées pour une, voire deux, des 8 hauteurs de veine  $y$  auxquelles les mesures ont été relevées. Il est à noter que les PDF trouvées pour les combinaisons de débit massique surfacique  $\dot{m}_s$  et hauteur de veine  $y$  non-représentées ici sont de la même forme que celles indiquées aux figures II.13 et II.14. On a superposé à la PDF une courbe suivant la loi normale et on a également indiqué les valeurs des coefficients de dissymétrie (*skewness*) et d'aplatissement (*kurtosis*)<sup>1</sup>. On constate sur les figures II.13 et II.14 que la fluctuation de vitesse totale  $v'$  suit approximativement une loi normale quels que soient le débit et la hauteur de veine. On peut donc en conclure que le bruit mesuré sur la vitesse totale est gaussien.

1. Pour une loi normale, le coefficient de dissymétrie (*skewness*) est égal à 0 et le coefficient d'aplatissement (*kurtosis*) est égal à 3.

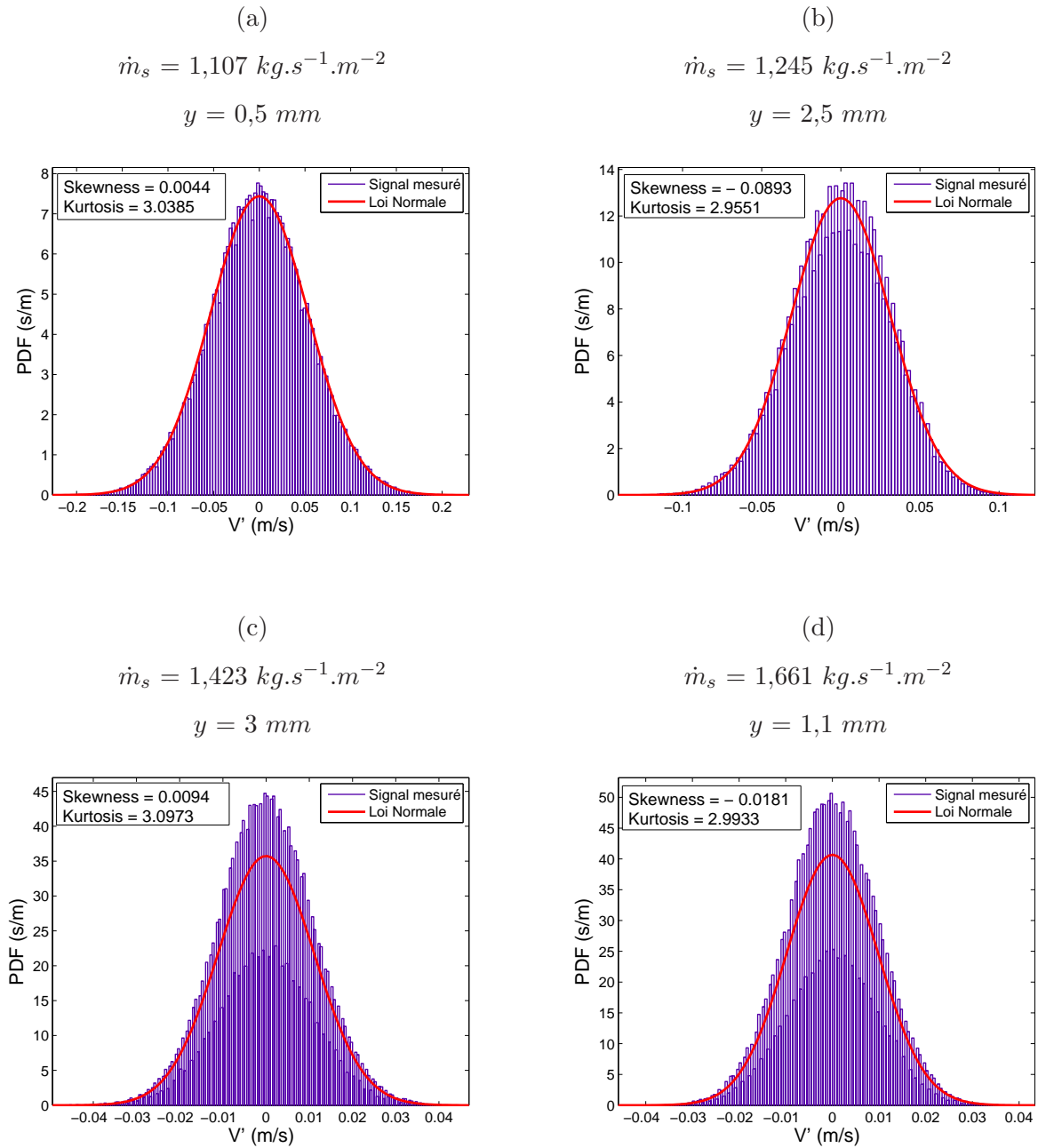


FIGURE II.13 – Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors des mesures de bruit pour différentes valeurs du débit massique surfacique  $\dot{m}_s$  et de hauteur de veine  $y$ , en  $x = 31 \text{ mm}$ .



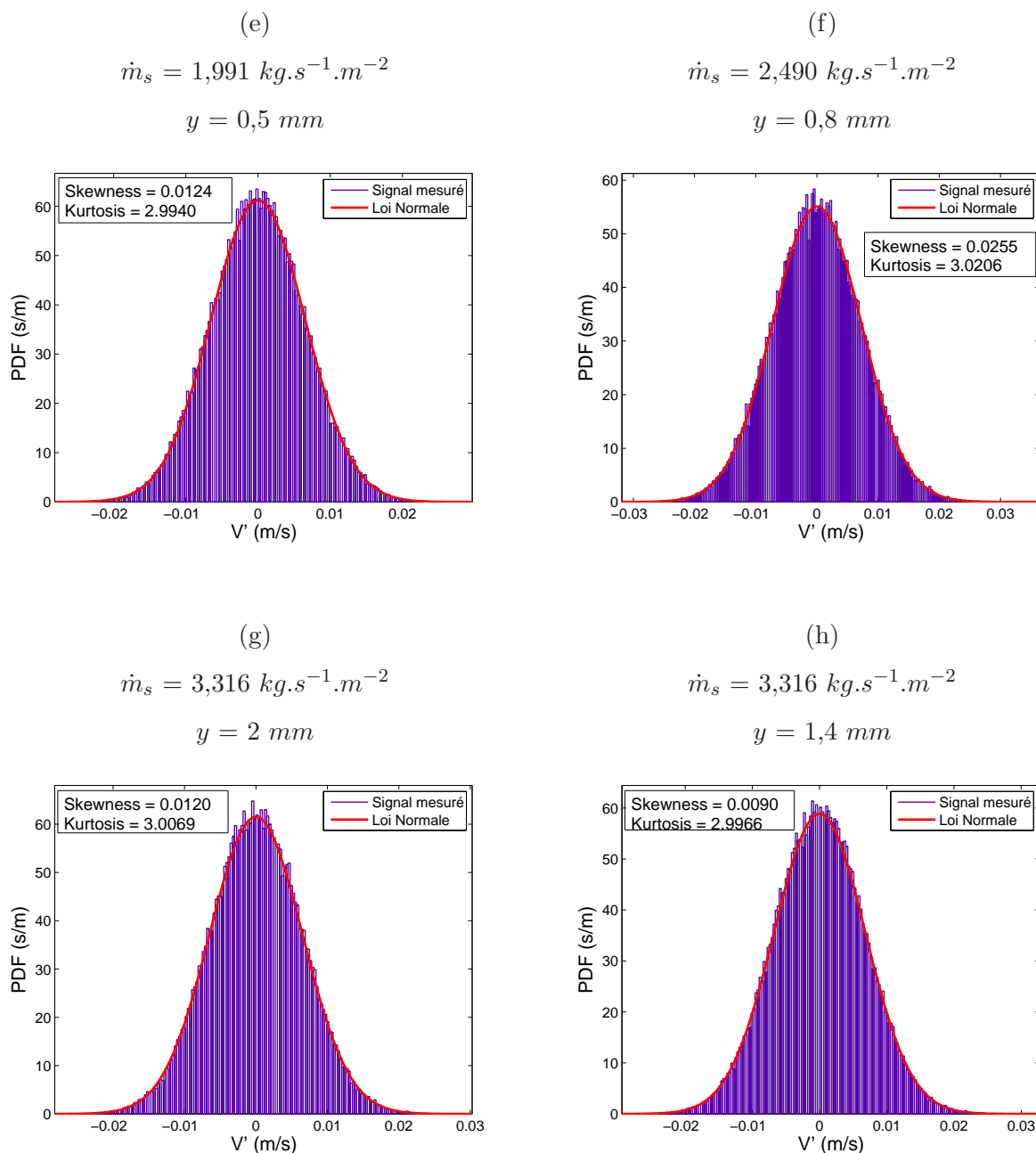


FIGURE II.14 – Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors des mesures de bruit pour différentes valeurs du débit massique surfacique  $\dot{m}_s$  et de hauteur de veine  $y$ , en  $x = 31 \text{ mm}$  (suite).

#### II.2.4.2 Densité spectrale de puissance pour les mesures de bruit

Les *DSP* des fluctuations de la vitesse  $v'$  relevées par le capteur positionné en  $x = 31 \text{ mm}$  et  $y = 1,7 \text{ mm}$  pour les différentes valeurs du débit  $\dot{m}_s$  sont tracées aux figures II.15 et II.16. Les courbes correspondant à chaque débit testé sont ordonnées dans l'ordre croissant des valeurs des débits injectés. Précédemment sur la figure II.12, on a remarqué qu'à la position  $x = 31 \text{ mm}$  dans la veine, la *DSP* de la fluctuation de vitesse suit une pente en  $f^{-3}$ . Cette décroissance du spectre en  $f^{-3}$  se retrouve sur les deux premiers graphiques (courbes (a) et (b)) de la figure II.15, correspondant aux débits injectés testés les plus faibles. En revanche, pour des débits plus importants, la pente du spectre est plus proche d'une évolution en  $f^{-2}$  qu'en  $f^{-3}$ . Les *DSP* obtenues en d'autres hauteurs  $y$  par rapport à la paroi injectante (pour  $0,5 \leq y \leq 3 \text{ mm}$ ) sont similaires à celles tracées aux figures II.15 et II.16. De même, les *DSP* des fluctuations de quantité de mouvement  $RMS(\rho v')$  fournissent des résultats analogues.

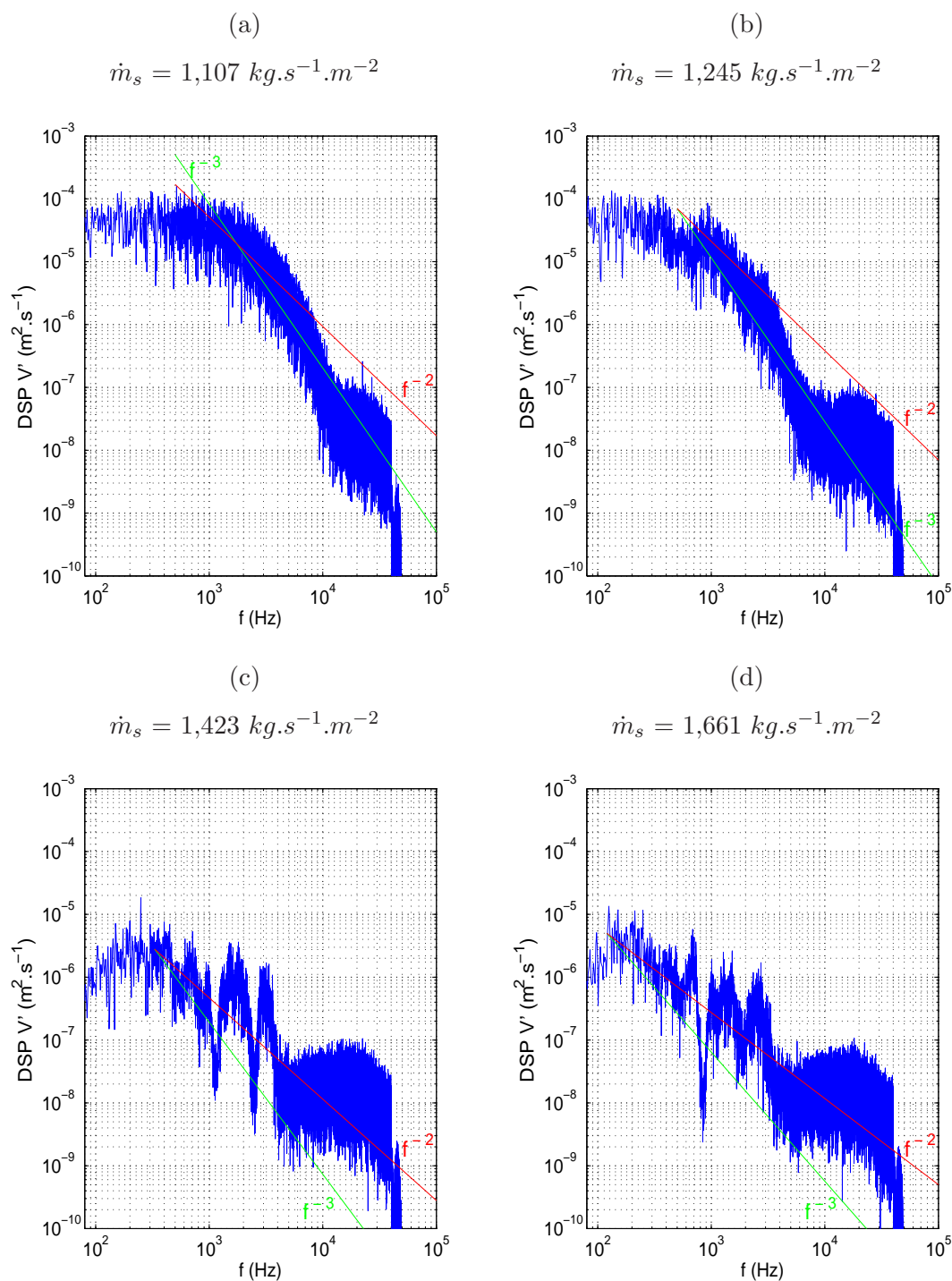


FIGURE II.15 –  $DSP$  de la fluctuation de vitesse  $v'$  relevées lors des mesures de bruit pour différentes valeurs du débit massique surfacique  $\dot{m}_s$ , pour une hauteur de veine  $y = 1,7 \text{ mm}$  et en  $x = 31 \text{ mm}$ .

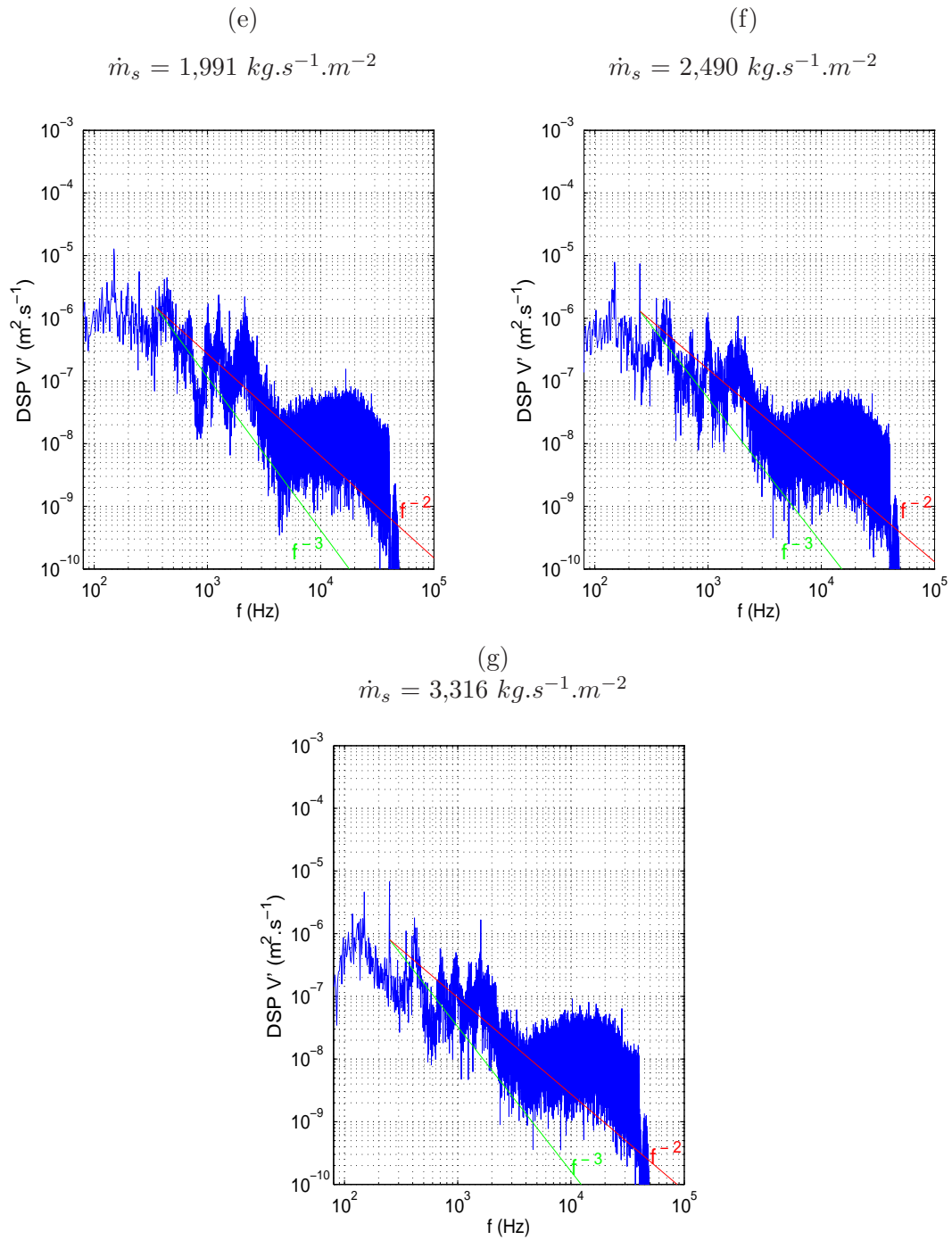


FIGURE II.16 –  $DSP$  de la fluctuation de vitesse  $v'$  relevées lors des mesures de bruit pour différentes valeurs du débit massique surfacique  $\dot{m}_s$ , pour une hauteur de veine  $y = 1,7 \text{ mm}$  et en  $x = 31 \text{ mm}$  (suite).

### II.2.4.3 Taux de turbulence

La figure II.17(a) montre les variations de la quantité de mouvement  $\rho v$  en fonction du débit injecté à la paroi  $(\rho v)_{inj}$ . Pour chacune des valeurs du débit injecté à la paroi, des relevés ont été effectués à 8 distances de la paroi. Sur la figure II.17(a), on constate que la quantité de mouvement augmente de façon linéaire avec le débit d'injection. On observe également que plus on s'éloigne de la paroi, plus la quantité de mouvement est importante, ce qui traduit l'influence de la vitesse longitudinale. La figure II.17(b) représente l'évolution des fluctuations de quantité de mouvement  $RMS(\rho v')$  adimensionnées en fonction du débit injecté. Les données acquises pour différentes distances de la paroi  $y$  sont indiquées. On remarque que pour des débits injectés ne dépassant pas  $2 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$  le taux de fluctuations est quasi-constant. Puis, pour des débits injectés plus importants, les taux de fluctuations obtenus aux différentes hauteurs de mesures pour un débit donné ne sont plus regroupés autour d'une même valeur mais sont relativement dispersés et dépendent de la position du capteur. On voit cependant que la valeur moyenne du taux de fluctuations évolue de façon linéaire avec le débit injecté.

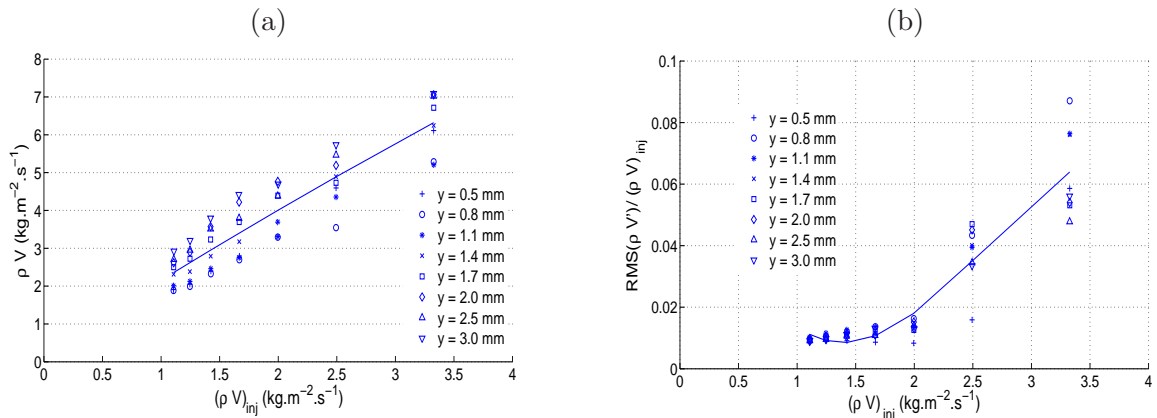


FIGURE II.17 – Quantité de mouvement (a) et fluctuations de quantité de mouvement en valeurs RMS adimensionnées (b) en fonction du débit injecté à la paroi, à la position  $x = 31 \text{ mm}$ , avec  $y$  la hauteur de la sonde monofilament par rapport à la plaque poreuse.

#### II.2.4.4 Échelles de turbulence

Lors des essais de 2010, les échelles intégrales temporelles et spatiales ont été déterminées par l'intermédiaire de l'autocorrélation temporelle des fluctuations de quantité de mouvement  $F_k(t)$ . En effet, l'échelle temporelle  $\Lambda_t$  peut être définie comme :

$$\Lambda_t = \int_0^{\infty} F_k(t) dt \quad (\text{II.7})$$

Numériquement, la fonction d'autocorrélation  $F_k$  est estimée par :

$$F_k(t) = \frac{C_k(t)}{C_0} \quad (\text{II.8})$$

avec :

$$C_k(t) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (a_t - \bar{a})(a_{t+k} - \bar{a}) \quad (\text{II.9})$$

où  $\bar{a}$  représente la moyenne temporelle,  $t+k$  le décalage de temps de la corrélation et  $a$  la fluctuation de quantité de mouvement. Sur les graphes présentés ci-après, la fonction d'autocorrélation est obtenue en utilisant la fonction *xcorr* du logiciel MATLAB qui permet de tracer  $F_k$  non pas en fonction du temps  $t$  mais en fonction du décalage de temps  $\tau$  de la corrélation. L'échelle intégrale de longueur  $\Lambda_l$  peut par exemple être définie comme étant égale à l'échelle temporelle  $\Lambda_t$  divisée par la vitesse moyenne locale  $V(y)$  à la position  $y$  considérée :

$$\Lambda_l = \frac{\Lambda_t}{V(y)} \quad (\text{II.10})$$

La fonction d'autocorrélation et les échelles intégrales ont été calculées pour l'ensemble des positions du film chaud et des niveaux de vitesse d'injection. Il a été observé que la fonction d'autocorrélation a un comportement identique pour toutes les distances de mesures et niveaux de vitesse d'injection. La figure II.18 représente les fonctions d'autocorrélation obtenues pour des signaux relevés en différentes hauteurs de veine et pour des débits d'injection différents. On remarque que le temps de corrélation des fluctuations de quantité de mouvement est de 0,4 ms environ pour les deux tracés. Après examen de toutes les fonctions d'autocorrélation obtenues, il a été constaté que le temps de corrélation varie entre 0,4 ms et 1 ms. Étant donné que ce temps de corrélation n'est pas le même pour toutes les mesures, les échelles intégrales ont alors été calculées pour les temps minimum et maximum relevés,  $\tau_{min} = 0,4 \text{ ms}$  et  $\tau_{max} = 1 \text{ ms}$ . Les échelles intégrales obtenues à partir de ces temps de corrélation et selon les expressions (II.7) et (II.10) pour l'échelle temporelle et l'échelle spatiale respectivement sont représentées aux figures II.19 et II.20. On constate que quels que soient le temps de corrélation, la vitesse d'injection et la distance à la paroi, les échelles intégrales sont réparties autour de valeurs moyennes voisines de  $\Lambda_t = 0,12 \times 10^{-3} \text{ s}$  pour l'échelle temporelle et de  $\Lambda_l = 0,45 \times 10^{-4} \text{ m}$  pour l'échelle spatiale.

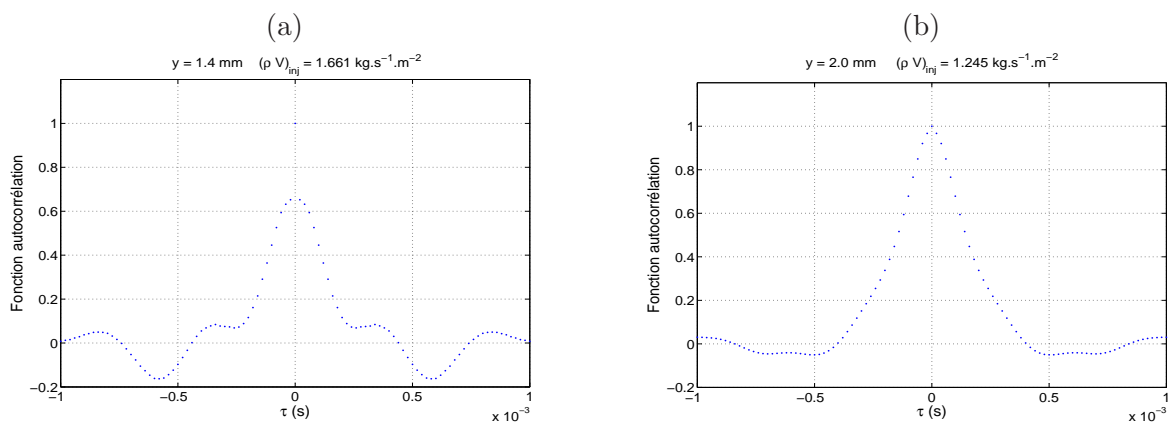


FIGURE II.18 – Exemples de fonctions d’autocorrélation obtenues en  $x = 31 \text{ mm}$  et pour :  
 (a) :  $y = 1,4 \text{ mm}$  et un débit injecté  $(\rho v)_{inj} = 1,661 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$ .  
 (b) :  $y = 2,0 \text{ mm}$  et un débit injecté  $(\rho v)_{inj} = 1,245 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$ .

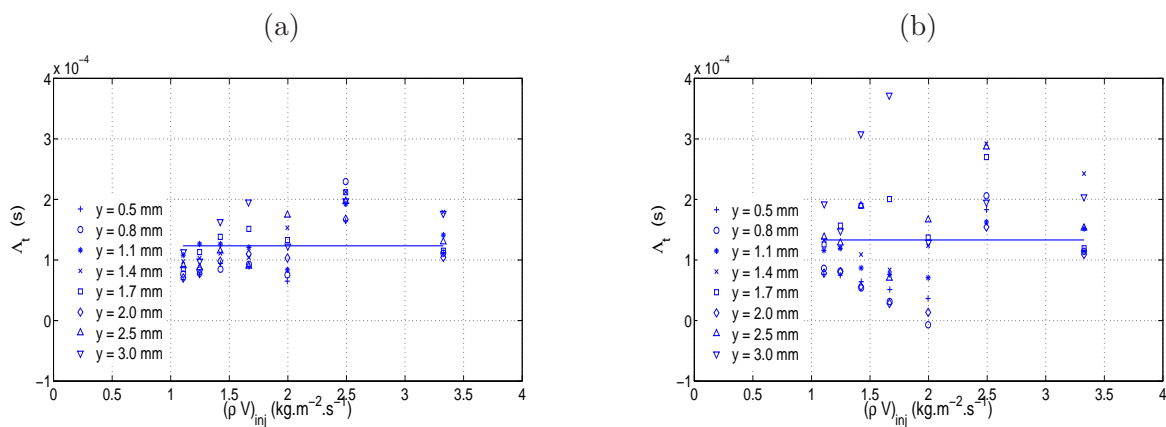


FIGURE II.19 – Échelles intégrales temporelles des fluctuations de quantité de mouvement déterminées pour  $\tau = 0,4 \text{ ms}$  (a) et  $\tau = 1,0 \text{ ms}$  (b), avec  $y$  la hauteur de la sonde par rapport à la plaque poreuse.

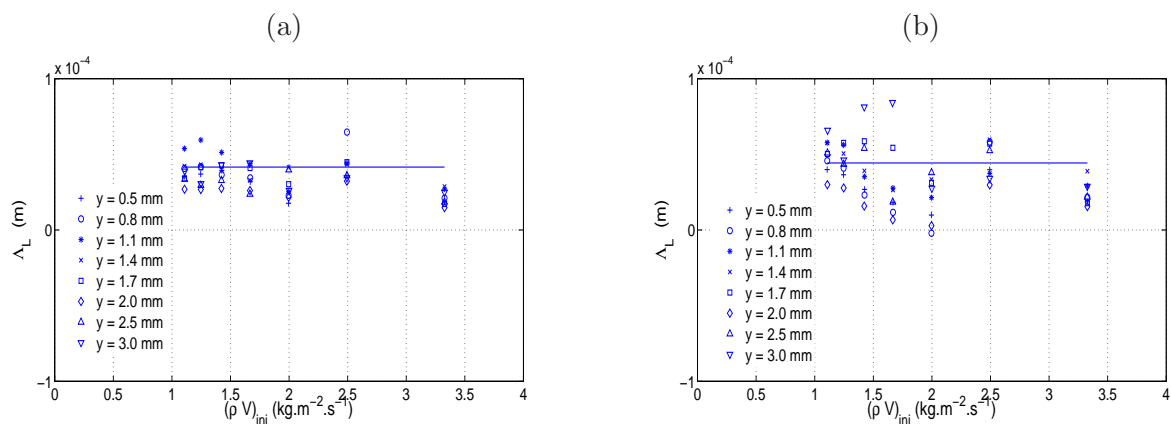


FIGURE II.20 – Échelles intégrales de longueur des fluctuations de quantité de mouvement déterminées pour  $\tau = 0,4$  ms (a) et  $\tau = 1,0$  ms (b), avec  $y$  la hauteur de la sonde par rapport à la plaque poreuse.

## II.3 Conclusion du chapitre

On a exposé les principales caractéristiques du montage VECLA ainsi que les mesures effectuées. On a pu observer que les données statistiques de l'écoulement relevées en 1993 et en 2010 sont pratiquement identiques. Les légères divergences constatées sont probablement dues à la différence de porosité des plaques injectantes et des instruments de mesures utilisés lors des deux campagnes d'essais.

On a trouvé que l'écoulement dans VECLA passe d'un état laminaire près du fond avant à un état de transition turbulente en milieu de veine, sans générer de phénomène acoustique dans le canal. Ce changement de comportement se retrouve également dans le domaine spectral. En effet, les densités spectrales de puissance passent d'une pente en  $f^{-3}$  avant transition, à une pente en  $f^{-5/3}$  après transition. On a aussi constaté que les densités de probabilité de la fluctuation de vitesse totale deviennent gaussiennes dès le début de la transition et le restent jusqu'en sortie du canal. À l'abscisse  $x = 31$  mm, on a observé que quelle que soit la hauteur de mesure par rapport à la paroi injectante, les densités spectrales de puissance passent d'une pente proche de  $f^{-3}$  pour de faibles valeurs du débit, à une pente qui suit plutôt une évolution en  $f^{-2}$  pour des débits supérieurs à environ  $1,4$  kg.s<sup>-1</sup>.m<sup>-2</sup>. Les densités de probabilité de la fluctuation de vitesse totale en  $x = 31$  mm restent approximativement de la forme d'une distribution gaussienne pour tous les cas de figure testés. Enfin, les mesures de bruit à l'abscisse  $x = 31$  mm ont permis d'extraire les échelles intégrales temporelle  $\Lambda_t = 0,12 \times 10^{-3}$  s et de longueur  $\Lambda_l = 0,45 \times 10^{-4}$  m qui ne dépendent ni du débit injecté, ni de la distance à la paroi poreuse.

Au cours de l'étude, ces relevés expérimentaux vont nous servir de base de comparai-



son pour nos simulations et on va donc chercher à reproduire numériquement l'écoulement dans le montage VECLA. La simulation numérique dans un canal à injection pariétale débute par l'étude de l'écoulement de base dans une telle configuration, appelé écoulement de Taylor-Culick. La description de cet écoulement ainsi que l'analyse de résultats de simulations numériques font l'objet du chapitre suivant.

# Analyse par simulations numériques de l'écoulement dans le montage VECLA

---

*Dans ce chapitre on étudie par simulations numériques l'écoulement dans le montage VECLA en analysant son passage de l'état laminaire à l'état transitionnel.*

*On commence par introduire la théorie de l'écoulement laminaire de base dans un canal à injection pariétale, appelé écoulement de Taylor-Culick. Cet écoulement de base est ensuite comparé à des simulations bidimensionnelles d'écoulement laminaire dans une veine de mêmes dimensions que le montage expérimental. Cette démarche donne la possibilité de vérifier la légitimité de l'application de diverses hypothèses de la théorie de Taylor-Culick pour un écoulement laminaire dans une veine ayant des caractéristiques identiques à celles de VECLA. Puis la comparaison de la simulation d'un écoulement laminaire avec les résultats expérimentaux permet d'évaluer le domaine de validité de la théorie analytique pour l'écoulement en transition. Ensuite, on donne une définition de la transition et on procède à l'estimation des différentes échelles de grandeur de l'écoulement turbulent dans la configuration étudiée. Enfin, les résultats expérimentaux sont confrontés aux premières tentatives de simulations d'écoulement transitionnel dans VECLA par des modélisations RANS et LES. Ceci permet de mettre en évidence les avantages et les inconvénients de l'utilisation de telles méthodes. Cela amène également à dégager une piste d'amélioration possible de la qualité des simulations de l'écoulement transitionnel dans un canal à injection pariétale.*

### III.1 Théorie analytique de l'écoulement laminaire de Taylor-Culick

L'écoulement de Taylor-Culick [27][74] correspond à l'écoulement laminaire engendré dans un canal à parois parallèles par une injection pariétale symétrique avec une vitesse d'injection uniforme et normale à la paroi (FIG. III.1). L'écoulement correspond à une solution des équations de Navier-Stokes en admettant la stationnarité et l'incompressibilité. On va d'abord présenter les hypothèses et les notations utilisées avant d'explicitier la solution analytique de l'écoulement de Taylor-Culick.

#### III.1.1 Hypothèses et notations

Pour pouvoir parvenir à une solution analytique, on fait les hypothèses suivantes :

- on considère un écoulement monophasique, incompressible, non réactif, stationnaire, dans un canal plan semi-infini,
- on suppose que l'écoulement de Taylor-Culick à l'intérieur d'un canal avec injection pariétale est subsonique,
- on se place dans un cas bidimensionnel, c'est-à-dire que l'on considère que l'écoulement est uniforme selon la direction perpendiculaire au plan,
- on néglige l'action de la pesanteur,
- on néglige les couches limites sur les parois non-débitantes.

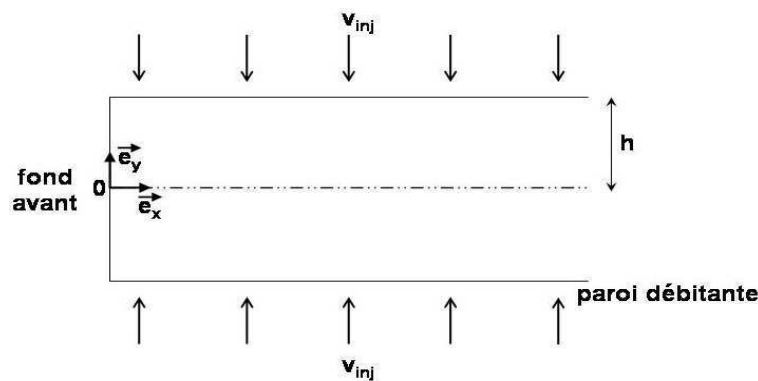


FIGURE III.1 – Schéma d'un canal plan à parois parallèles avec une injection pariétale symétrique pour l'écoulement de Taylor-Culick.

Étant donné que l'on s'intéresse à un cas plan (FIG. III.1), on se place dans le repère direct de coordonnées cartésiennes  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  où :

- le point  $O$  est le centre du fond avant,
- $\vec{e}_x$  est orthogonal au fond avant, orienté dans le sens de l'écoulement moyen,
- $\vec{e}_y$  est normal aux parois débitantes, orienté vers le haut.

On note  $h$  la demi-distance entre les parois débitantes,  $L$  la longueur du canal selon l'axe  $\vec{e}_x$ ,  $(v_x, v_y)$  les composantes de la vitesse et  $v_{inj}$  la vitesse d'injection. Étant donné que le problème est symétrique par rapport à l'axe  $(O, \vec{e}_x)$  (FIG. III.1), on ne considèrera par la suite que le demi-domaine compris entre  $y = -h$  et  $y = 0$ .

### III.1.2 Mise sous forme adimensionnelle des équations

Les équations décrivant le mouvement du fluide sont les équations de Navier-Stokes. Avec les hypothèses faites précédemment, on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.1})$$

avec  $\rho_0$  la masse volumique,  $\nu$  la viscosité cinématique et  $P$  la pression. À ces équations, s'ajoutent les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = 0, \quad v_y = v_{inj} \quad \text{en } y = -h \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \quad v_y = 0 \quad \text{en } y = 0 \end{array} \right. \quad \forall x \quad (\text{III.2})$$

Ainsi modélisé, le problème ne fait apparaître que quatre paramètres :  $h$ ,  $v_{inj}$ ,  $\rho_0$  et  $\nu$ . En utilisant la demi-hauteur  $h$  du canal comme référence pour les variables d'espace et la vitesse  $v_{inj}$  pour les composantes de vitesse, on introduit les variables réduites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = \frac{x}{h}, \quad \bar{x} \in [0, \frac{L}{h}] \\ \bar{y} = \frac{y}{h}, \quad \bar{y} \in [-1, 0] \end{array} \right. \quad (\text{III.3})$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\overline{v_x}} = \frac{v_x}{v_{inj}} \\ \overline{\overline{v_y}} = \frac{v_y}{v_{inj}} \\ \overline{\overline{P}} = \frac{P}{\rho_0 v_{inj}^2} \end{array} \right. \quad (\text{III.4})$$

La pression est adimensionnée par  $\rho_0 v_{inj}^2$ . Il apparaît un nombre de Reynolds d'injection  $Re_{inj}$  tel que :

$$Re_{inj} = \frac{h v_{inj}}{\nu} \quad (\text{III.5})$$

Les nouvelles équations du mouvement adimensionnées s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \overline{\overline{v_x}}}{\partial \overline{\overline{x}}} + \frac{\partial \overline{\overline{v_y}}}{\partial \overline{\overline{y}}} = 0 \\ \overline{\overline{v_x}} \frac{\partial \overline{\overline{v_x}}}{\partial \overline{\overline{x}}} + \overline{\overline{v_y}} \frac{\partial \overline{\overline{v_x}}}{\partial \overline{\overline{y}}} + \frac{\partial \overline{\overline{P}}}{\partial \overline{\overline{x}}} = \frac{1}{Re_{inj}} \left( \frac{\partial^2 \overline{\overline{v_x}}}{\partial \overline{\overline{x}}^2} + \frac{\partial^2 \overline{\overline{v_x}}}{\partial \overline{\overline{y}}^2} \right) \\ \overline{\overline{v_x}} \frac{\partial \overline{\overline{v_y}}}{\partial \overline{\overline{x}}} + \overline{\overline{v_y}} \frac{\partial \overline{\overline{v_y}}}{\partial \overline{\overline{y}}} + \frac{\partial \overline{\overline{P}}}{\partial \overline{\overline{y}}} = \frac{1}{Re_{inj}} \left( \frac{\partial^2 \overline{\overline{v_y}}}{\partial \overline{\overline{x}}^2} + \frac{\partial^2 \overline{\overline{v_y}}}{\partial \overline{\overline{y}}^2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.6})$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\overline{v_x}} = 0, \quad \overline{\overline{v_y}} = 1 \quad \text{en } \overline{\overline{y}} = -1 \\ \frac{\partial \overline{\overline{v_x}}}{\partial \overline{\overline{y}}} = 0, \quad \overline{\overline{v_y}} = 0 \quad \text{en } \overline{\overline{y}} = 0 \end{array} \right. \quad \forall \overline{\overline{x}} \quad (\text{III.7})$$

Il est possible de formuler une solution analytique de ce système d'équations (III.6) (III.7), appelée solution de Taylor-Culick [27][74].

### III.1.3 Solution analytique

Afin d'expliciter la solution analytique de Taylor-Culick, il faut revenir en 1953, lorsque Berman étudie la configuration du canal de longueur infinie avec une injection pariétale

[15]. Celui-ci introduit la fonction de courant  $\Phi$  définie par :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} = \bar{v}_x, \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} = \bar{v}_y \quad (\text{III.8})$$

pour laquelle il suppose la forme suivante :

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = [\overline{v_{x\text{moy}}}(0) - \bar{x}]f(\bar{y}) \quad (\text{III.9})$$

où  $\overline{v_{x\text{moy}}}(0)$  est la moyenne de la vitesse axiale à travers la section d'entrée du canal ( $\overline{v_{x\text{moy}}}(0) = 0$  pour le cas avec un fond avant non débitant). Il établit une solution auto-similaire des équations de Navier-Stokes qui a la forme suivante :

$$\begin{cases} \bar{v}_x(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}f'(\bar{y}) \\ \bar{v}_y(\bar{y}) = -f(\bar{y}) \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

En remplaçant ces expressions de  $\bar{v}_x$  et de  $\bar{v}_y$  dans les équations de Navier-Stokes précédentes (III.6), il obtient la fonction de similitude  $f(\bar{y})$  vérifiant l'équation :

$$\frac{f^{(4)}}{Re_{inj}} + ff''' - f'f'' = 0 \quad (\text{III.11})$$

Et les conditions aux limites deviennent alors :

$$f(0) = f'(-1) = f''(0) = 0 \text{ et } f(-1) = 1 \quad (\text{III.12})$$

Moyennant l'hypothèse de solution auto-semblable et celle d'injection uniforme sur les parois latérales, l'écoulement moyen est défini dans le cas plan par (III.11) et (III.12) (appelées équations de Berman) avec :

$$\Phi = \bar{x}f(\bar{y}), \quad \bar{v}_x = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{v}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \quad (\text{III.13})$$

L'équation (III.11) conduit à 2 solutions analytiquement connues. Des nombres de Reynolds suffisamment grands conduisent à une solution donnée pour la première fois par G.I. Taylor en 1956 [74]. Cette solution, dite solution de Taylor, a été appliquée aux écoulements internes des propulseurs à propergol solide par Culick en 1966 [27]. Pour la géométrie plane décrite précédemment, elle est donnée analytiquement sous la forme sans dimension suivante :

$$\begin{cases} \bar{v}_x(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\Pi \bar{x}}{2} \cos\left(\frac{\Pi \bar{y}}{2}\right) \\ \bar{v}_y(\bar{y}) = -\sin\left(\frac{\Pi \bar{y}}{2}\right) \\ \bar{P}(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{\Pi^2}{8} \bar{x}^2 + \frac{1}{4} \cos(\Pi \bar{y}) + \bar{P}_0 \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

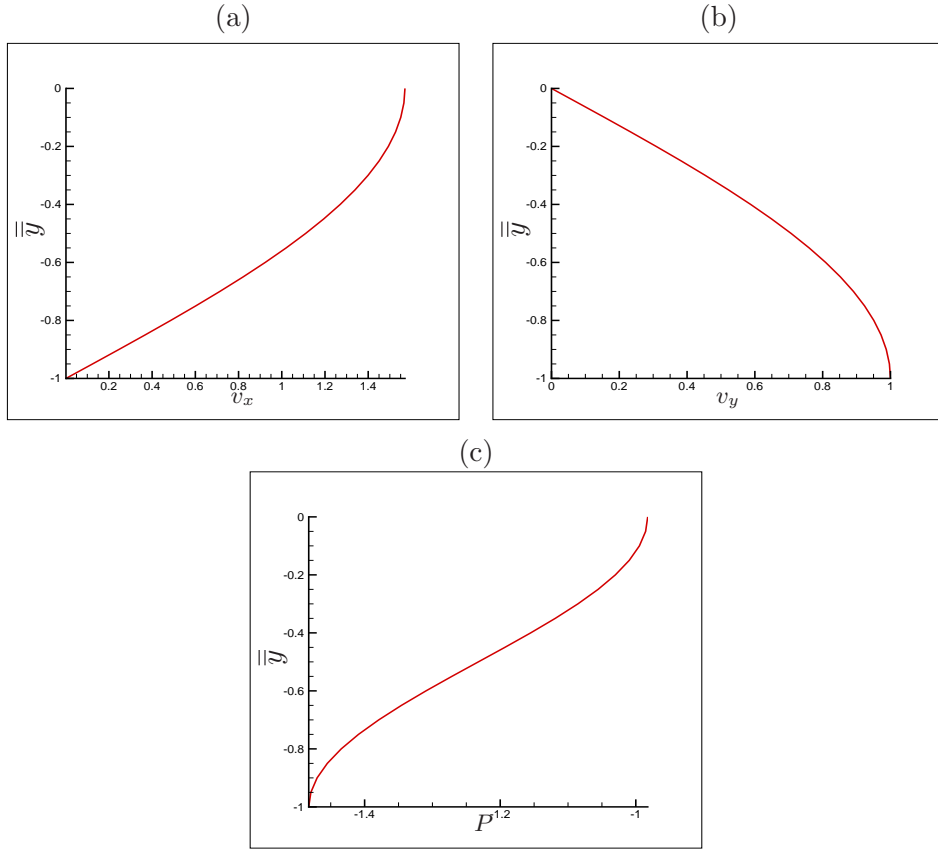


FIGURE III.2 – Profils analytiques adimensionnés de Taylor-Culick de vitesse longitudinale (a), de vitesse transversale (b) et de pression (c).

D'après les équations (III.14) et en choisissant arbitrairement  $\bar{x} = 1$ ,  $\bar{y} \in [-1, 0]$  et  $\bar{P}_0 = 0$ , on peut tracer les profils de vitesse longitudinale, transversale et de pression de Taylor-Culick (FIG. III.2).

Les profils de vitesses et de pression de Taylor-Culick tracés sur la figure III.2 sont représentatifs d'un écoulement laminaire dans un canal à injection pariétale. Cependant, ces profils analytiques ont été obtenus sous l'hypothèse de certaines conditions qui peuvent ne pas être vérifiées dans le cas d'une veine ayant les mêmes caractéristiques que le montage VECLA. C'est notamment le cas de l'hypothèse d'incompressibilité. Afin de préciser les limites de validité éventuelles des hypothèses posées, il semble donc judicieux de comparer les profils analytiques de Taylor-Culick aux profils obtenus pour un écoulement laminaire dans le canal VECLA.

## III.2 Simulations numériques bidimensionnelles d'écoulement laminaire dans le montage VECLA

On commence par effectuer des simulations numériques bidimensionnelles pour lesquelles le montage VECLA est modélisé selon le schéma de la figure III.3. L'injection de fluide s'effectue par la paroi inférieure. L'origine du repère direct est placée près du fond avant au niveau de la paroi débitante. L'axe des abscisses est orienté dans le sens de l'écoulement moyen et l'axe des ordonnées est normal à la plaque poreuse, orienté vers le haut.

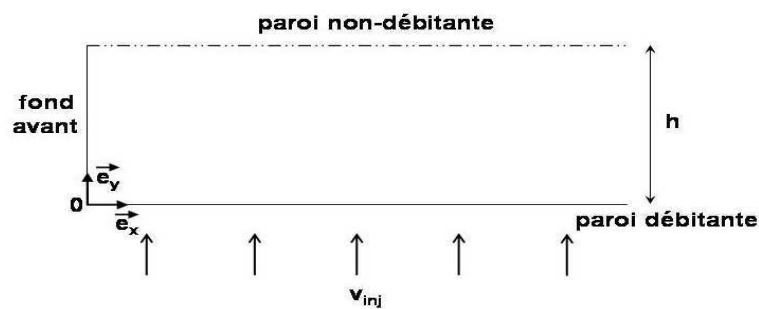


FIGURE III.3 – Modélisation du montage VECLA pour les simulations numériques bidimensionnelles.

Lors de l'exploitation des résultats, les valeurs des abscisses et des ordonnées sont adimensionnées par la hauteur de veine  $h = 10,3 \text{ mm}$ . Les valeurs des abscisses adimensionnées  $x/h$  correspondant aux abscisses de relevé de données expérimentales sont indiquées dans le tableau III.1.

$x \text{ (mm)}$	31	120	220	350	400	450	500	570
$x/h$	3	11,65	21,36	33,98	38,83	43,69	48,54	55,34

TABLE III.1 – Valeurs des abscisses adimensionnées  $x/h$  correspondant aux abscisses de relevé de données expérimentales  $x$ .

### III.2.1 Comparaison de la solution analytique de Taylor-Culick avec des écoulements laminaires dans le montage VECLA

La comparaison de simulations numériques d'écoulement laminaire dans le montage VECLA avec les profils de Taylor-Culick a pour objectif d'identifier le domaine de validité de la théorie analytique dans une veine ayant des dimensions identiques à celles de VECLA. La géométrie bidimensionnelle a donc les mêmes longueur  $L$  et hauteur  $h$  que le montage



expérimental, c'est-à-dire  $L = 581 \text{ mm}$  et  $h = 10,3 \text{ mm}$ . Une première simulation en écoulement compressible est effectuée avec une condition de symétrie à la paroi supérieure afin de s'accorder avec les hypothèses de la théorie analytique de Taylor-Culick. La paroi supérieure de VECLA (figure III.3) est donc assimilée à l'axe de symétrie du canal semi-infini de la théorie de Taylor-Culick (figure III.1). Pour les profils analytiques, on ne considère alors que la moitié inférieure du canal. Afin de pouvoir comparer la théorie analytique avec les calculs, les coordonnées de l'axe des ordonnées décrivant VECLA sont adimensionnées par la hauteur  $h$  du canal. Cependant, le repère utilisé pour établir les profils de Taylor-Culick (figure III.1) et celui choisi pour modéliser le montage VECLA (figure III.3) ne sont pas positionnés au même emplacement dans la veine. Pour superposer les profils analytiques aux courbes issues des simulations numériques, la position transversale adimensionnée théorique  $\left(\frac{y}{h}\right)_{\text{théorie}}$  employée pour établir les expressions des profils de Taylor-Culick est décalée sur les graphiques de la façon suivante :

$$\left(\frac{y}{h}\right)_{\text{graphique}} = \left(\frac{y}{h}\right)_{\text{théorie}} + 1 \quad (\text{III.15})$$

avec  $\left(\frac{y}{h}\right)_{\text{théorie}} \in [-1, 0]$  et  $\left(\frac{y}{h}\right)_{\text{graphique}} \in [0, 1]$ . Dans le but de simplifier l'écriture par la suite, on se réfère à cette simulation par le terme VECLA-TC. Un second calcul d'écoulement laminaire dans VECLA est également entrepris avec cette fois-ci une condition de paroi adiabatique à la paroi supérieure, comme c'est le cas dans le montage expérimental. Cette simulation est appelée VECLA-laminaire. Les autres conditions de calcul sont identiques pour les deux simulations et correspondent aux conditions d'essais expérimentales. Le fluide injecté à la paroi inférieure est de l'air, considéré comme un gaz parfait. L'entrée subsonique de fluide est effectuée de façon normale à la paroi à un débit constant de  $2,619 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$  et à une température de  $303 \text{ K}$ . La sortie subsonique de fluide est effectuée à l'extrémité aval à pression imposée de  $1,374 \text{ bar}$ , correspondant à la valeur expérimentale. Le fond avant est une paroi imperméable et adiabatique. Une approche stationnaire est utilisée avec une méthode d'intégration en temps implicite à un pas d'ordre 1. On utilise un pas de temps local et le préconditionnement bas Mach. Le pas de temps local maximum est égal à  $5 \times 10^{-5} \text{ s}$ . La discrétisation d'espace est assurée par un schéma d'ordre 2 de Roe adapté pour les écoulements bas Mach, avec des limiteurs de pente de type Van Leer. Le maillage est constitué de 4400 mailles de taille égale (101 points selon  $x$  et 45 points selon  $y$ ). Les résultats sont exploités après convergence du calcul sur 8000 itérations en temps. On considère qu'il y a convergence quand la somme du débit entrant par la paroi inférieure injectante et du débit sortant par l'extrémité aval s'est équilibrée, c'est-à-dire est égale à 0. On vérifie également qu'en fin de calcul le pas de temps local est égal à 1 et que les résidus sont stabilisés. On rappelle qu'à la différence de la théorie analytique, le code CEDRE simule des écoulements compressibles.

Maillage	$M_x \times M_y = 101 \times 45$
Paroi injectante	Air injecté : gaz parfait ( $\gamma = 1,4$ ; $C_p = 1003,4 \text{ J.kg}^{-1}.K^{-1}$ ) Viscosité dynamique : $\mu = 1,814 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.s^{-1}$ Injection normale à la paroi Débit = $2,62 \text{ kg}/(m^2.s)$ Température d'arrêt = $303 \text{ K}$
Sortie de fluide	$P = 1,374 \text{ bar}$
Fond avant	Paroi adiabatique
Paroi supérieure	VECLA-TC : axe de symétrie VECLA-laminaire : paroi adiabatique
Type de calcul	Calcul laminaire
Intégration temporelle	Méthode implicite, ordre 1 Pas de temps local maximum = $5 \times 10^{-5} s$
Discrétisation spatiale	Schéma de Roe (bas Mach) d'ordre 2 Limiteurs de Van Leer

TABLE III.2 – Résumé des conditions de calcul pour les simulations d'écoulement laminaire dans VECLA.

La figure III.4 représente la variation de la pression moyenne adimensionnée le long du canal. On constate que les évolutions de la pression pour les calculs VECLA-TC et VECLA-laminaire sont superposées à la courbe analytique pour des abscisses  $x/h \leq 20$ . Puis, pour  $x/h \geq 20$ , les profils calculés s'éloignent tous les deux de plus en plus, et de façon identique, du profil analytique plus on se rapproche de la sortie de fluide. On rappelle que le profil analytique de Taylor-Culick est valable pour un écoulement incompressible. De ce fait, les tracés de la figure III.4 prouvent que près du fond avant et jusqu'à  $x/h \approx 20$ , l'écoulement dans le montage VECLA se comporte comme un écoulement incompressible. Ensuite, pour des abscisses supérieures à  $x/h \approx 20$ , les effets de la compressibilité apparaissent et sont de plus en plus intenses plus on se rapproche de la sortie de fluide. Cependant, on note que la déviation entre profils calculés et analytique reste minime. Ainsi, l'écoulement dans VECLA peut être qualifié de quasi-incompressible sur toute la longueur de la veine. À la figure III.5 sont tracés les profils de vitesses transversales pour différentes sections  $x/h$  le long de la veine. Les profils analytiques et calculés sont quasiment superposés tout le long de la veine, même si de très légères différences apparaissent quand on se rapproche de la

sortie de fluide. Des observations similaires sont faites sur les tracés de la figure III.6 qui montrent l'évolution le long de la veine des profils de vitesse longitudinale. On remarque que la forme des profils calculés est identique à celle des profils de vitesse analytiques, sauf près de la paroi supérieure pour le calcul VECLA-laminaire. Ceci est dû à la condition de paroi imposée pour ce calcul qui ne correspond pas à la condition de symétrie de la théorie analytique. Cependant, à l'exception d'une bande très mince de la couche limite laminaire près de la paroi supérieure, on remarque que les profils des calculs VECLA-TC et VECLA-laminaire sont équivalents tout le long de la veine. On en conclut que l'ajustement de la condition limite pour coller aux spécificités du montage expérimental n'a qu'un effet limité à une zone réduite près de la paroi supérieure. En excluant la partie supérieure des tracés, on constate que jusqu'à  $x/h = 21,36$ , les profils analytiques et calculés sont parfaitement superposés alors qu'à partir de  $x/h = 33,98$ , de légères différences apparaissent, même si la forme générale des profils reste similaire. Ces variations observées entre profils calculés et de Taylor-Culick sont probablement dues à l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement que l'on a imposée afin de pouvoir calculer la solution de Taylor-Culick de façon analytique, alors que pour le calcul dans VECLA on a considéré un écoulement compressible.

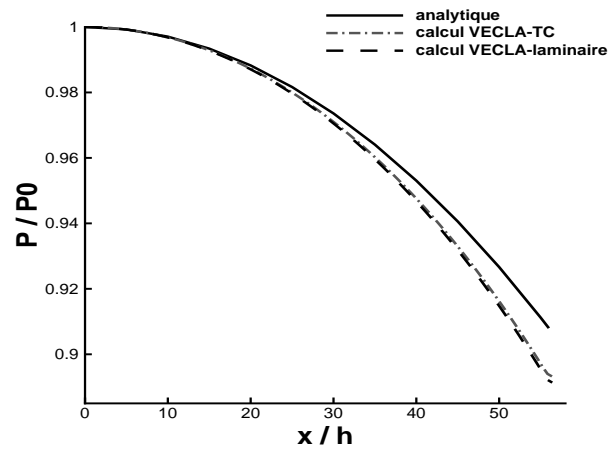


FIGURE III.4 – Comparaison Taylor-Culick/Calculs laminares VECLA : variation de la pression moyenne adimensionnée le long de la veine.

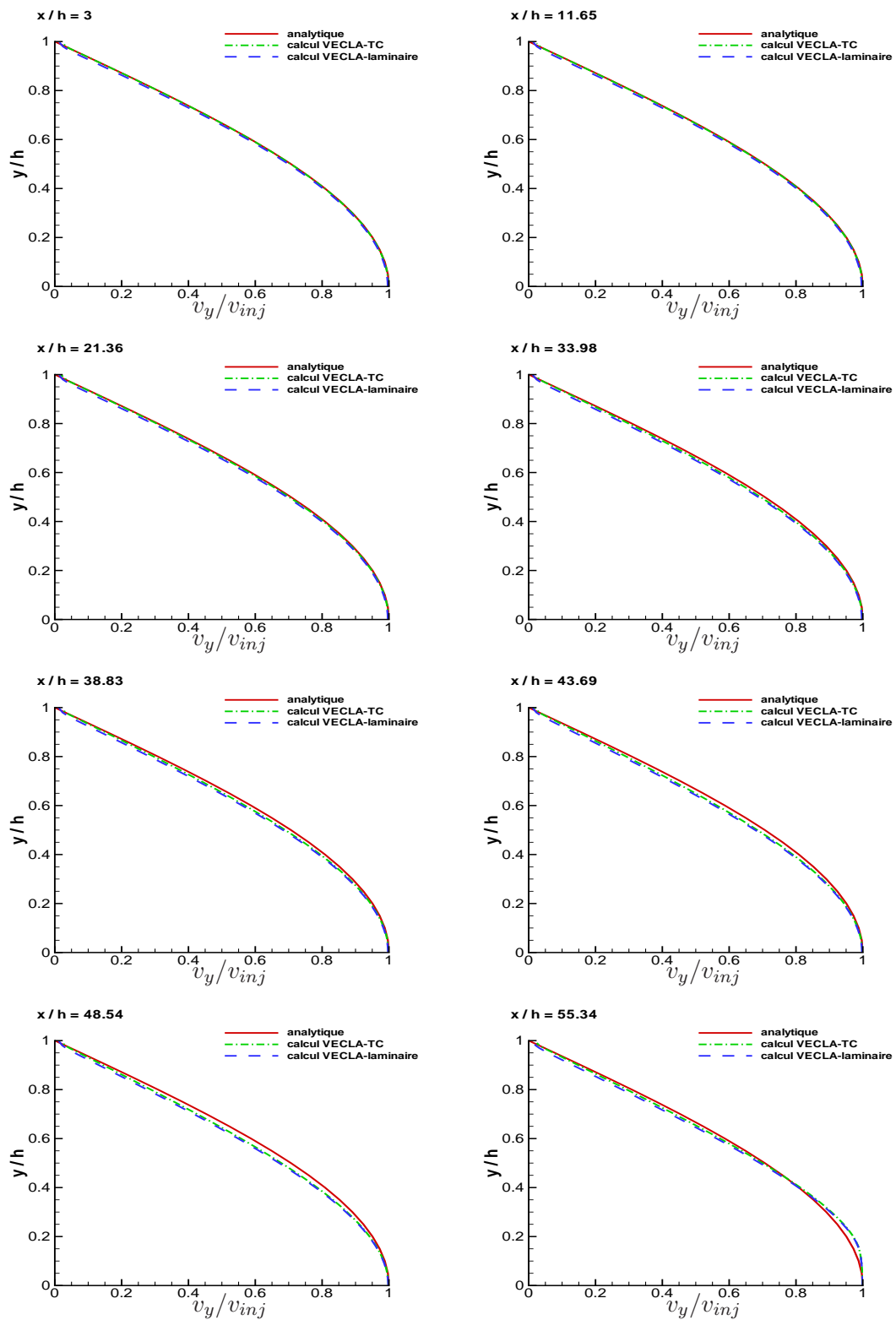


FIGURE III.5 – Comparaison Taylor-Culick/Calculs laminares VECLA : profils de vitesse transversale adimensionnée pour 8 sections  $x/h$  dans la veine.

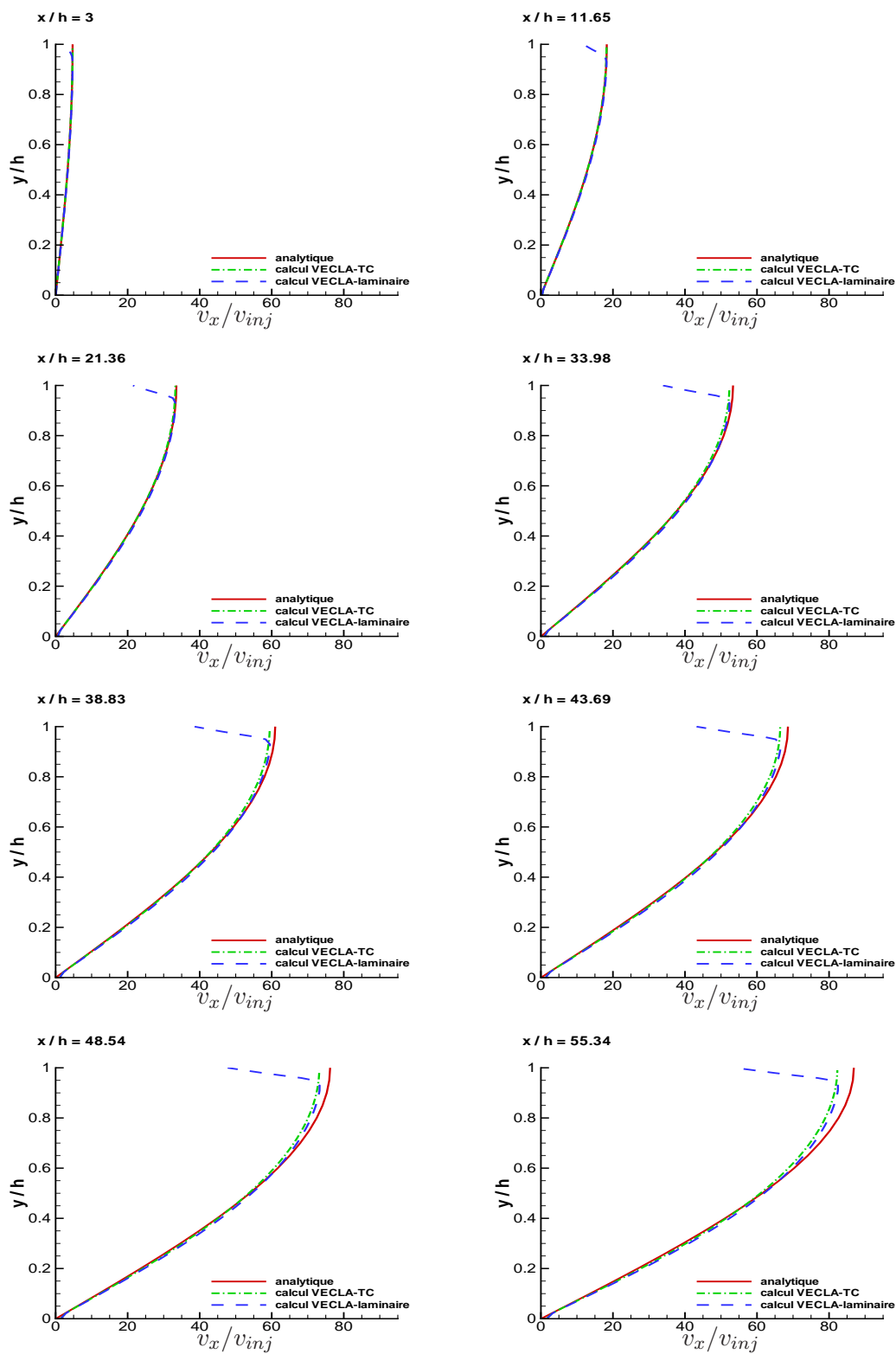


FIGURE III.6 – Comparaison Taylor-Culick/Calculs laminaires VECLA : profils de vitesse longitudinale adimensionnée pour 8 sections  $x/h$  dans la veine.

En conclusion, la comparaison des profils de pression et de vitesse transversale des deux simulations numériques avec la théorie analytique ne laisse apparaître que de très légers écarts. L'analyse de la pression révèle que l'écoulement peut être considéré comme quasi-incompressible tout le long de la veine. L'analyse des profils de vitesse longitudinale révèle que malgré la différence de condition limite de paroi supérieure entre le calcul VECLA-laminaire et la théorie analytique, l'écoulement simulé numériquement correspond à l'écoulement de Taylor-Culick, à l'exception de la zone de couche limite laminaire à proximité immédiate de la paroi supérieure. Ainsi, malgré quelques différences entre la configuration du montage expérimental et les hypothèses de la théorie analytique, l'écoulement laminaire dans le canal VECLA reste globalement décrit par les profils de Taylor-Culick. Cependant, lors de la description des résultats expérimentaux au chapitre précédent, on a vu que l'écoulement ne demeure pas laminaire, mais transitionne vers un état turbulent en milieu de veine. Afin de se rendre compte des limites de validité de la théorie de Taylor-Culick dans ce contexte, on peut confronter les résultats de la simulation VECLA-laminaire aux données expérimentales.

### III.2.2 Comparaison d'un calcul d'écoulement laminaire avec les résultats d'expérience sur le montage VECLA

On compare maintenant les résultats de la simulation VECLA-laminaire décrite précédemment avec les résultats expérimentaux. Sur les 3 premiers graphes représentant les profils de vitesse longitudinale (Fig.III.7) et correspondant à la partie amont de la veine, on remarque peu de différence entre le profil expérimental et le profil obtenu par le calcul. Cependant, à partir de  $x/h = 33,98$ , le profil expérimental et le profil simulé commencent à diverger l'un de l'autre. On distingue effectivement sur la partie des profils de vitesse longitudinale (Fig.III.7) proche de la paroi supérieure de la veine la présence d'un espacement entre les profils calculés et expérimentaux. Cet écart observe un minimum en milieu de veine mais il redevient important près de la paroi injectante. Cette tendance s'accroît quand l'abscisse augmente. On peut en conclure que les profils expérimentaux s'éloignent des profils laminaires de Taylor-Culick quand on se rapproche de la sortie de veine, trahissant le changement de comportement de l'écoulement. Cette observation se retrouve également sur le graphe représentant l'évolution du coefficient  $\beta$  le long de la veine (Fig.III.8). En effet, sur le profil expérimental, on observe la chute de  $\beta$  dans la zone comprise entre  $x/h = 20$  et  $x/h = 30$ , provoquée par la transition de l'écoulement vers un régime turbulent, alors que le profil obtenu par calcul laminaire reste quasiment constant et égal à la valeur théorique laminaire  $\beta_{laminaire} = 1,234$  tout le long de la veine.

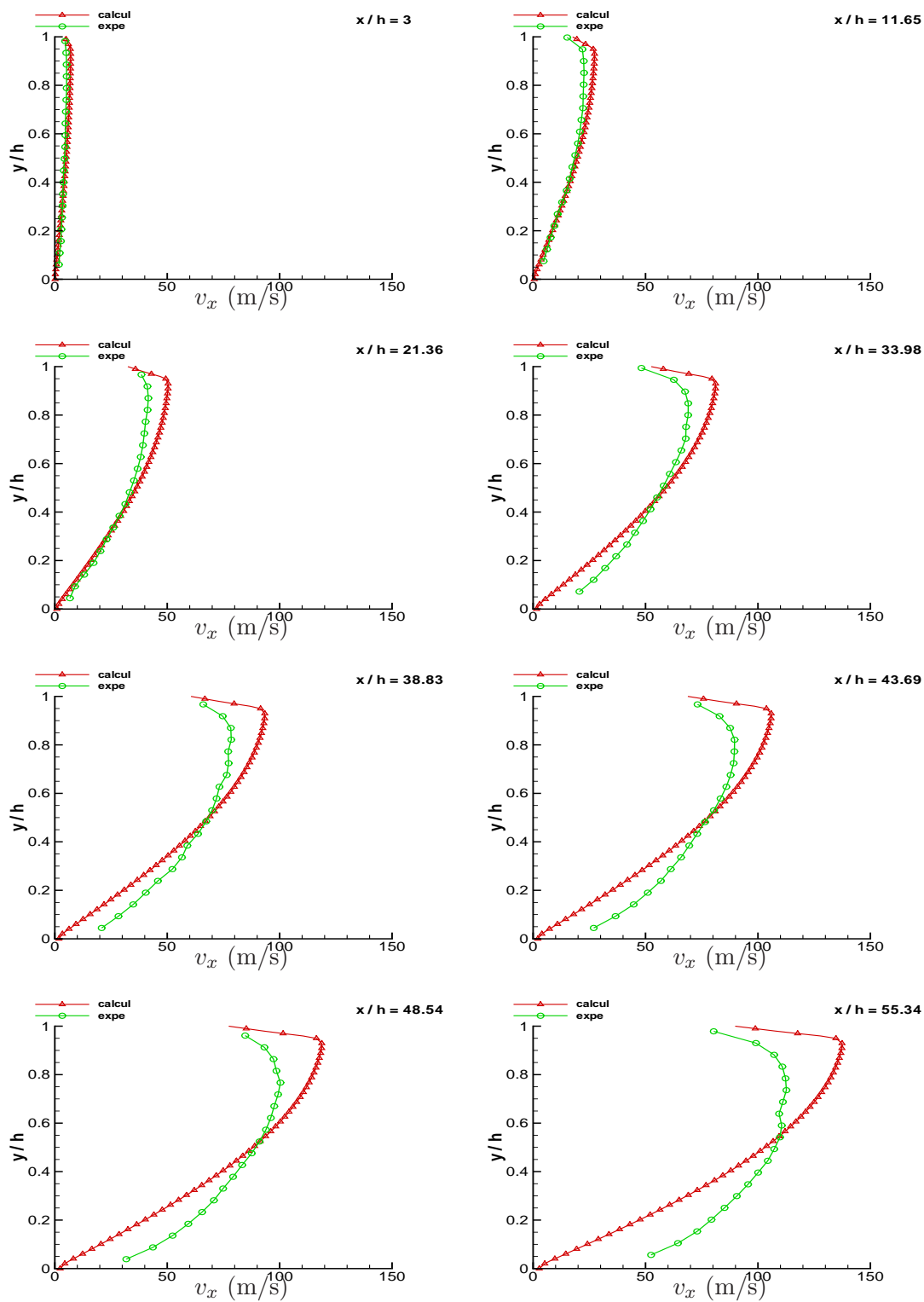


FIGURE III.7 – Comparaison calcul laminaire/expérience VECLA : profils de vitesse longitudinale pour 8 sections de la veine.

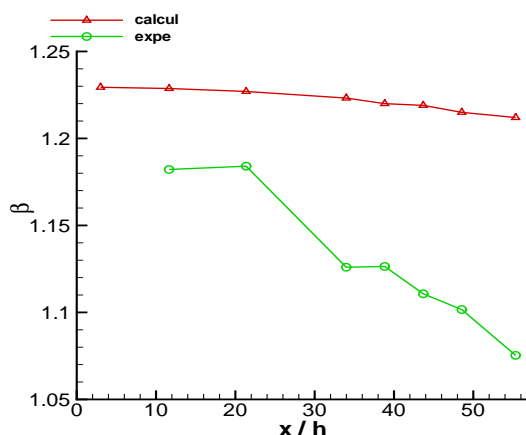


FIGURE III.8 – Comparaison calcul laminaire/expérience VECLA : évolution du coefficient  $\beta$  le long de la veine.

Ces résultats montrent que la simulation numérique s'accorde bien avec l'expérience dans la partie amont du propulseur où l'écoulement est laminaire. Comme il a été constaté au paragraphe précédent que ce calcul VECLA-laminaire peut globalement s'assimiler à la théorie de Taylor-Culick, on en déduit que près du fond avant, l'écoulement obtenu expérimentalement est décrit par l'écoulement de Taylor-Culick. En revanche, la simulation numérique s'écarte de l'expérience dans la partie aval du canal, où un changement de comportement de l'écoulement s'opère. L'évolution du coefficient  $\beta$  expérimental prouve en effet que l'écoulement transitionne vers le turbulent en milieu de veine. Donc, afin de se rapprocher de la réalité physique de l'écoulement dans le montage VECLA, il est nécessaire de s'intéresser à la modélisation de l'écoulement en transition turbulente dans la partie aval de la veine.

### III.3 Définition de la transition turbulente et estimation des principales échelles de grandeur

À cette étape de l'étude, il semble judicieux de compléter la caractérisation de la transition turbulente. Jusqu'à présent, celle-ci a été identifiée par une déviation significative des données issues des simulations numériques d'écoulement laminaire par rapport aux résultats expérimentaux sur le montage VECLA. La notion de transition reste donc plutôt vague, alors qu'il est pourtant essentiel de bien la définir. En effet, lors de ces recherches, Griffond [38] a analysé les différents types de comportement obtenus lors des campagnes d'essais sur le montage VECLA et en a conclu que la turbulence pourrait avoir un effet atténuateur sur les oscillations créées par l'instabilité pariétale à l'origine des structures tourbillonnaires déclenchant le couplage aéroacoustique. Par conséquent, la connaissance



de l'étendue précise de la zone où l'écoulement est turbulent ainsi que l'estimation des quantités fluctuantes semblent être des données indispensables à connaître pour pouvoir étudier le détachement tourbillonnaire pariétal (VSP) entre autres. De ce fait, afin de mieux prédire ce phénomène, Griffond [38] suggère différentes pistes de recherche parmi lesquelles figure une amélioration de la prévision de la **position de la transition de l'écoulement**. C'est pourquoi on va définir dans ce paragraphe ce que l'on entend par 'transition turbulente' en donnant une définition, avant de passer à l'estimation des différentes échelles de grandeur turbulente dans VECLA, utiles à l'analyse de l'écoulement.

### III.3.1 Définition de la transition

En effectuant des simulations numériques d'écoulement dans un canal à injection pariétale avec différentes conditions initiales et aux limites, et notamment en faisant varier la condition d'injection à la paroi, Beddini [13][14] a montré que l'on peut distinguer trois régimes d'écoulement avant que la turbulence ne soit pleinement établie :

1. *Premier régime* : **régime laminaire** (pour  $x/h \leq 5$ ).  
Le régime d'écoulement est purement laminaire et le profil de vitesse axiale moyenne a une forme laminaire correspondant au profil de Taylor-Culick.
2. *Deuxième régime* : **transition turbulente** (pour  $5 \leq x/h \leq 10$ ).  
C'est le début de la transition turbulente avec une intensité turbulente telle que  $\sqrt{k} \geq 0,1\bar{v}_x$ . Cette transition correspond à la localisation axiale dans le canal où les faibles taux de turbulence initialement présents dans l'écoulement sont fortement amplifiés, alors que l'écoulement moyen conserve un profil laminaire. On dit alors que l'écoulement est à persistance laminaire.
3. *Troisième régime* : **transition du profil de vitesse moyenne** (pour  $x/h \geq 10$  à 20 selon le taux de turbulence injectée).  
Cette transition se produit plus en aval dans la veine que le deuxième régime et correspond à la localisation axiale où les profils de vitesse moyenne passent d'une forme laminaire à une forme turbulente.

Beddini [13] a montré que ce troisième régime est d'un intérêt particulier pour les applications industrielles puisqu'il est directement lié à l'augmentation du transfert de chaleur et des taux de réactions chimiques. Dans la présente étude, c'est cette transition du profil de vitesse moyenne, c'est-à-dire le troisième régime décrit ci-dessus, que l'on s'attache à étudier.

Dans son étude, Beddini [13] identifie la position axiale de transition du profil de vitesse moyenne (3ème régime) par la présence d'un minimum dans l'évolution du coefficient de frottement  $C_f$  à la paroi débitante du canal en fonction du nombre de Reynolds  $Re_c$  basé sur la vitesse maximum sur l'axe. Beddini [13] note que l'identification de la transition du profil de vitesse moyenne (3ème régime) peut également être opérée de façon moyenne

dans toute la hauteur de veine par la localisation axiale du début de la décroissance de la valeur du coefficient  $\beta$  par rapport à la valeur laminaire. On rappelle ici la définition de  $\beta$  que l'on utilise dans cette étude (voir paragraphe II.2.1.3) :

$$\beta = \frac{1}{v_{x\text{moy}}^2 h} \int_0^h v_x^2 dy \quad (\text{III.16})$$

avec

$$v_{x\text{moy}} = \frac{1}{h} \int_0^h v_x dy \quad (\text{III.17})$$

Lors des expériences sur le montage VECLA, des relevés ont été effectués sur toute la hauteur du canal pour différentes positions axiales le long de la veine. On a donc pu tracer l'évolution axiale du coefficient  $\beta$  et ainsi déterminer la position de la transition du profil de vitesse moyenne (3ème régime), qui se situe entre les abscisses  $x/h \approx 20$  et  $x/h \approx 30$  (voir le tracé expérimental de la figure III.8).

### III.3.2 Estimation des principales échelles de grandeur turbulentes

L'estimation des échelles de grandeur turbulentes que l'on va effectuer suppose un écoulement incompressible dans tout le canal. Cette hypothèse permet d'obtenir des ordres de grandeur raisonnables sachant que, dans la configuration VECLA étudiée ici, l'écoulement est quasi-incompressible, comme constaté précédemment au paragraphe III.2.1.

#### III.3.2.1 Expression des nombres de Reynolds associés à la dimension du canal

Dans le cas d'un canal plan à injection pariétale on peut définir différents nombres de Reynolds associés à la hauteur  $h$  du canal, soit :

$$Re_c = v_x^c \frac{h}{\nu} \quad (\text{III.18})$$

$$Re_s = v_{inj} \frac{h}{\nu} \quad (\text{III.19})$$

$$Re_b = \bar{v}_x \frac{h}{\nu} \quad (\text{III.20})$$

où  $Re_c$  est le nombre de Reynolds basé sur la vitesse maximum sur l'axe (ou *centerline*),  $Re_s$  le nombre de Reynolds d'injection (ou de surface) et  $Re_b$  le nombre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne dans le canal.

L'application numérique à notre cas d'étude ( $v_x^c \approx 120 \text{ m.s}^{-1}$  relevée au niveau de la sortie de veine,  $v_{inj} \approx 1,847 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\bar{v}_x \approx 60 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $h = 0,0103 \text{ m}$  et  $\nu \approx 1,279 \times 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ ) nous donne les valeurs des différents nombres de Reynolds suivantes :

$$Re_c \approx 10^5 \quad (\text{III.21})$$

$$Re_s \approx 1,5 \times 10^3 \quad (\text{III.22})$$

$$Re_b \approx 5 \times 10^4 \quad (\text{III.23})$$

Il est possible de relier ces différents nombres de Reynolds entre eux. En effet, si on effectue un bilan de masse dans le canal, toujours en supposant que l'écoulement est incompressible, on a :

$$Lv_{inj} = h\bar{v}_x^{sortie} \quad (\text{III.24})$$

soit

$$Re_b = \frac{L}{h} Re_s \quad (\text{III.25})$$

Cette relation (III.25) montre donc que  $Re_b$  est une fonction de  $Re_s$ .

Il est également possible d'exprimer  $Re_c$  en fonction de  $Re_s$  par l'intermédiaire du diagramme de Beddini (figure III.9). Sur ce diagramme, on peut tout d'abord distinguer en pointillés l'évolution de la position de stabilité de l'écoulement selon la théorie linéaire de Varapaev et Yagodkin [79] (deuxième régime). Au-dessus de cette ligne pointillée, sont représentées en traits pleins (lignes A à D) les localisations de la transition du profil de vitesse moyenne (troisième régime) déterminées par Beddini [13] grâce à des simulations numériques utilisant diverses conditions de calcul. Des résultats expérimentaux obtenus par différents auteurs [30][43][60][89][90] sont également indiqués par des symboles. On peut voir que les courbes A à D évoluent toutes avec la même pente pour de grandes valeurs de  $Re_s$ , prouvant que la distance axiale entre la localisation de la transition turbulente (2ème régime) et la transition du profil de vitesse moyenne (3ème régime) est une constante. La valeur de cette constante dépend des conditions initiales et aux limites [13].

D'après ce diagramme, la transition du profil de vitesse longitudinale peut être définie de façon approchée par :

$$Re_c \approx \alpha Re_s^\beta \quad (\text{III.26})$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes. Pour caractériser la transition, il suffit de prendre deux points de ce diagramme pour estimer les valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . Ainsi, avec ( $Re_s = 10^2$ ,  $Re_c = 2 \times 10^4$ ) et ( $Re_s = 10^5$ ,  $Re_c = 4 \times 10^6$ ), on trouve :

$$\alpha = 584,8 \text{ et } \beta = 0,767 \quad (\text{III.27})$$

Ces valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  sont donc valables pour  $Re_s \in [10^2; 10^5]$ .

Dans la configuration VECLA étudiée, on a vu que l'on a  $Re_c \approx 10^5$  et  $Re_s \approx 1,5 \times 10^3$  au niveau de la sortie de veine. Si on se place dans le diagramme de Beddini (figure III.9), on peut constater que la configuration d'écoulement considérée à cette abscisse du canal se situe juste après la transition du profil de vitesse longitudinale (3ème régime).

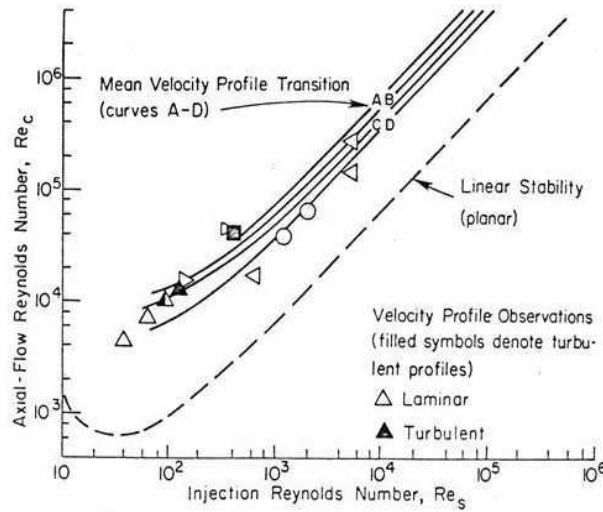


FIGURE III.9 – Diagramme de Beddini [14].

### III.3.2.2 Expression d'une échelle énergétique de la turbulence

Au paragraphe I.2.2.1, on a défini l'échelle énergétique de la turbulence  $Le$  comme correspondant à la grandeur des plus gros tourbillons de l'écoulement. Lors de son étude numérique sur la transition de l'écoulement, Beddini [14] a utilisé une échelle énergétique de la turbulence  $Le$  de la forme suivante :

$$Le = \min [Le_{inj} + 0,65y ; 0,17h] \quad (\text{III.28})$$

où  $Le_{inj}$  est une échelle énergétique de la turbulence à l'injection. Cette définition (III.28) de l'échelle  $Le$  est basée sur le concept de la longueur de mélange introduite initialement par Von Karman.

Dans notre étude, on utilise la relation (III.28) de Beddini donnant l'échelle énergétique pour définir cette échelle dans le cas du montage VECLA. Dans cette configuration, l'injection de turbulence s'effectue au niveau du poral. On décide alors de définir  $Le_{inj}$  comme une fonction d'un paramètre caractérisant ce poral. En supposant l'équivalence entre l'échelle énergétique de la turbulence à l'injection et la notion de longueur de mélange définie au sens de Karman, on peut définir l'injection au niveau d'un poral comme étant constituée d'une multitude de micro-jets contenu dans le diamètre  $\Phi$  du poral. Ainsi, on peut écrire :

$$Le_{inj} = k\Phi \quad (\text{III.29})$$

où  $k \approx 0,125$  selon Schiestel [67]. On vient donc de déterminer une formulation donnant l'échelle énergétique  $Le$  dans le cas de VECLA, telle que :

$$Le = \min [k\Phi + 0,65y ; 0,17h] \quad (\text{III.30})$$

### III.3.2.3 Estimation de l'échelle de Kolmogorov $\eta$

D'après le paragraphe I.2.2.4, l'échelle de Kolmogorov  $\eta$  est reliée à l'échelle de la turbulence  $Le$  de la façon suivante :

$$\frac{\eta}{Le} = Re_t^{-3/4} \quad (\text{III.31})$$

On rappelle que  $Re_t$  est le nombre de Reynolds turbulent tel que :

$$Re_t = \frac{v_x Le}{\nu} \quad (\text{III.32})$$

La relation (III.31) indique que pour estimer l'échelle de Kolmogorov  $\eta$  connaissant  $Le$ , il nous suffit de déterminer  $Re_t$ . Si on considère en première approximation que globalement la fréquence de l'écoulement moyen est égale à celle de l'écoulement fluctuant, alors on peut écrire :

$$\frac{v_x}{Le} \approx \frac{\bar{v}_x}{h} \quad (\text{III.33})$$

et on a :

$$Re_t = \frac{\bar{v}_x Le^2}{h\nu} \quad (\text{III.34})$$

Compte-tenu de l'expression de  $Re_b$  (III.20), on a alors :

$$Re_t = Re_b \left( \frac{Le}{h} \right)^2 \quad (\text{III.35})$$

D'après la relation (III.25), on peut réécrire le nombre de Reynolds  $Re_b$  en fonction de l'abscisse  $x$  de la façon suivante :

$$Re_b(x) = \frac{x}{h} Re_s \quad (\text{III.36})$$

Ainsi, en introduisant cette expression (III.36) dans la relation (III.35), on obtient :

$$Re_t(x) = Re_s \left( \frac{Le}{h} \right)^2 \frac{x}{h} \quad (\text{III.37})$$

Or, d'après (III.31), on a alors :

$$\eta(x) = Le \left[ Re_s \left( \frac{Le}{h} \right)^2 \frac{x}{h} \right]^{-3/4} \quad (\text{III.38})$$

Cette dernière expression donne l'évolution de l'échelle de Kolmogorov  $\eta$  en fonction de l'abscisse  $x$ .

## III.4 Simulations de type RANS et LES d'écoulement transitionnel dans VECLA et comparaison avec les données expérimentales

### III.4.1 Présentation de la simulation 2D RANS stationnaire

Afin de tenter de représenter les aspects turbulents de l'écoulement obtenu expérimentalement, on procède à une simulation numérique en utilisant une méthode de type RANS. Le maillage et les paramètres de calcul sont choisis en se référant à une simulation 2D RANS précédemment menée par des chercheurs de l'ONERA [85]. On a choisi de reproduire cette simulation car elle a donné des résultats satisfaisants pour l'écoulement dans VECLA par rapport à des simulations RANS menées avec d'autres modèles de turbulence (approches  $k-l$  bas Reynolds,  $k-\omega$ ,...). Pour ce calcul, le maillage est plus raffiné que pour les calculs laminaires et est constitué de 9000 mailles (151 points selon  $x$  et 61 points selon  $y$ ) réparties de façon uniforme selon  $x$  et raffinées selon  $y$  avec un espace minimum de  $10^{-3}$  mm sur les parois inférieure et supérieure (figure III.10). Le modèle de turbulence employé par les auteurs [85] est un modèle RANS haut Reynolds de type  $k-l$ . De plus, un modèle de paroi de Couette turbulent est utilisé. Le pas de temps local maximum est de  $10^{-3}$  s. La méthode d'intégration en temps est implicite à un pas et la discrétisation d'espace correspond à un schéma ODFI d'ordre 2. On utilise des limiteurs de type Van Leer. L'air à 303 K est injecté normalement à la paroi inférieure avec un débit de  $2,62$  kg/(m<sup>2</sup>s). Les paramètres  $k$  et  $l$  du modèle RANS sont calibrés de façon arbitraire de telle sorte que la solution de la simulation obtenue se rapproche le plus possible des profils expérimentaux. Ces deux grandeurs ont pour valeurs  $k = 0,011$  m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup> et  $l = 0,001$  m à l'injection. On impose au fond avant une condition de paroi, l'extrémité aval est une sortie subsonique de fluide avec une pression imposée de 1,374 bar et une condition de paroi adiabatique est imposée à la paroi supérieure. La convergence du calcul est obtenue après 2000 itérations en temps.

Maillage	$M_x \times M_y = 151 \times 61$
Paroi injectante	Air injecté : gaz parfait Injection normale à la paroi Débit = $2,62 \text{ kg}/(m^2s)$ Température d'arrêt = $303 \text{ K}$ $k = 0,011 \text{ m}^2/s^2$ $l = 0,001 \text{ m}$
Sortie de fluide	$P = 1,374 \text{ bar}$
Fond avant	Paroi adiabatique
Paroi supérieure	Paroi adiabatique
Type de calcul	Calcul RANS $k - l$ haut Reynolds Modèle de paroi = Couette turbulent
Intégration temporelle	Méthode implicite, ordre 1 Pas de temps local maximum = $10^{-3} \text{ s}$
Discretisation spatiale	Schéma ODFI, ordre 2 Limiteurs de Van Leer

TABLE III.3 – Résumé des conditions de calcul pour la simulation RANS de l'écoulement dans VECLA.

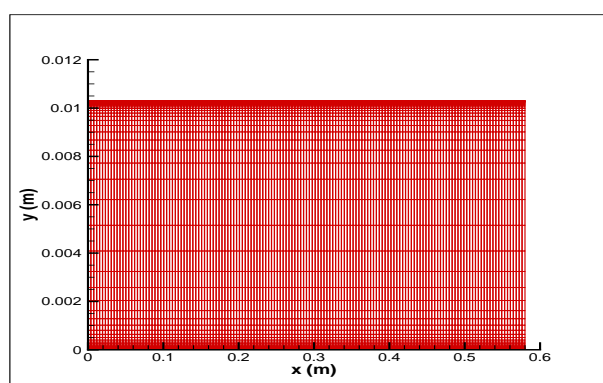


FIGURE III.10 – Représentation du maillage pour le calcul bidimensionnel RANS.

### III.4.2 Présentation de la simulation 3D LES instationnaire

#### III.4.2.1 Données de calcul

Pour la simulation tridimensionnelle instationnaire, on modélise le canal avec les mêmes dimensions que le montage expérimental, c'est-à-dire  $581\text{ mm}$  de long,  $60\text{ mm}$  de large et  $10,3\text{ mm}$  de haut (figure III.11). L'injection de fluide se fait par la base de la veine. La sortie de fluide s'effectue à une extrémité du canal et les autres parois sont adiabatiques.

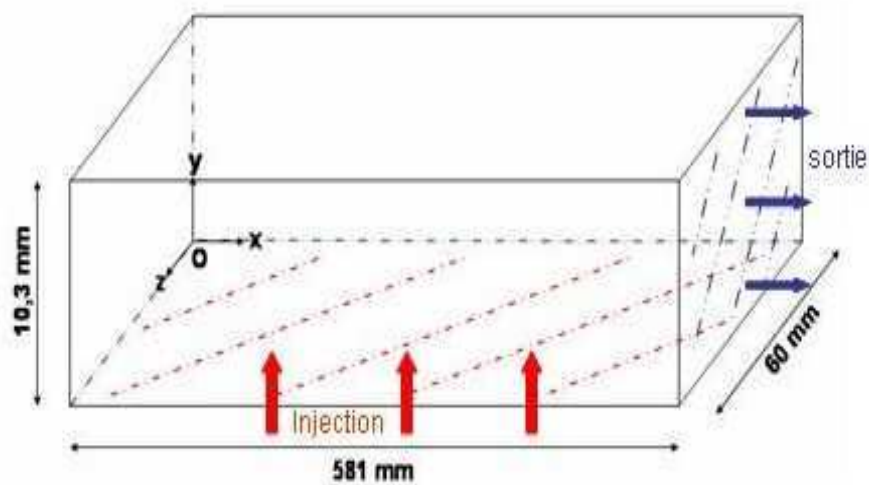
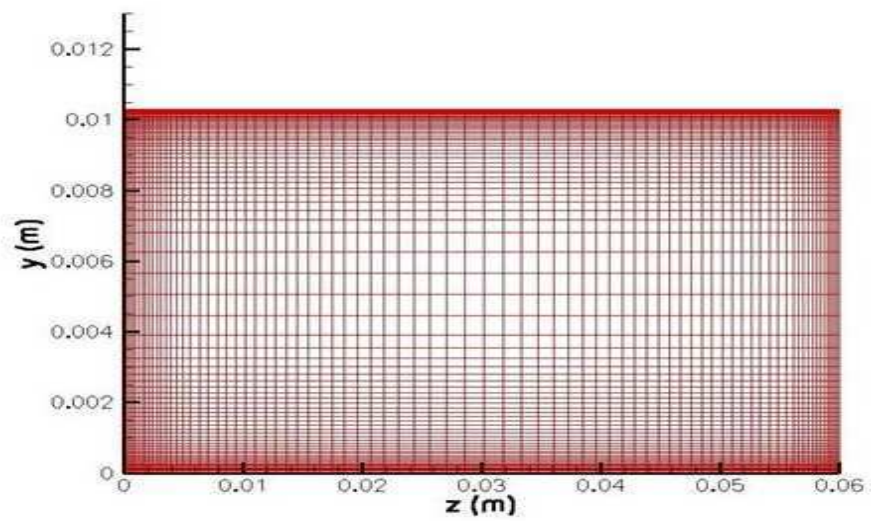
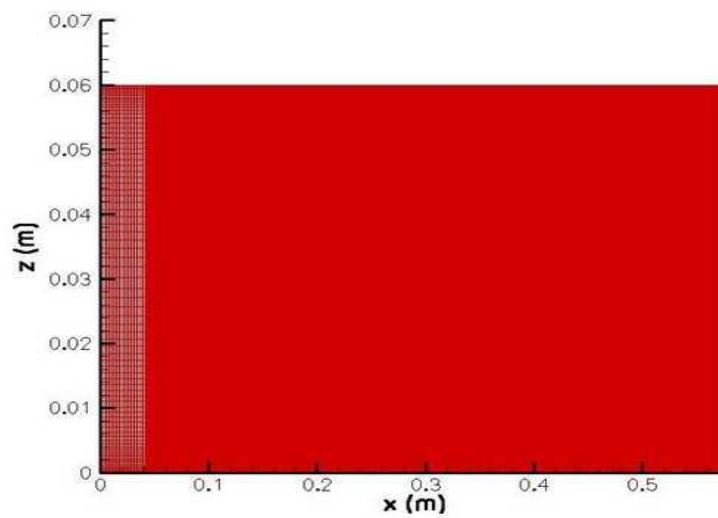


FIGURE III.11 – Modélisation du montage VECLA pour le calcul tridimensionnel.

On utilise un maillage composé de 5 056 000 de points (790 points selon  $x$ , 80 selon  $y$  et 80 selon  $z$ ) raffiné selon les trois directions de l'espace (figures III.12 et III.13). Selon l'axe  $x$ , on a une taille de maille relativement grossière près du fond avant (en  $x = 0\text{ m}$ ). Puis la taille de maille est raffinée jusqu'à  $x = 46\text{ mm}$  pour ensuite avoir une valeur constante jusqu'à la sortie de veine (figure III.14 et tableau III.4). La valeur  $x = 46\text{ mm}$  a été choisie telle que l'abscisse à partir de laquelle le maillage est raffiné soit positionnée au début du développement des instabilités de l'écoulement, de façon à capturer tous les phénomènes amenant la transition turbulente. Pour cela, on s'est basé sur la théorie linéaire de G. Casalis [7][77]. Selon les axes  $y$  et  $z$ , on raffine près des parois avec une taille maximale de maille en milieu de veine (figure III.14 et tableau III.4).



FIGURE III.12 – Représentation du maillage pour une coupe selon l'axe  $x$ .FIGURE III.13 – Représentation du maillage pour une coupe selon l'axe  $z$ .

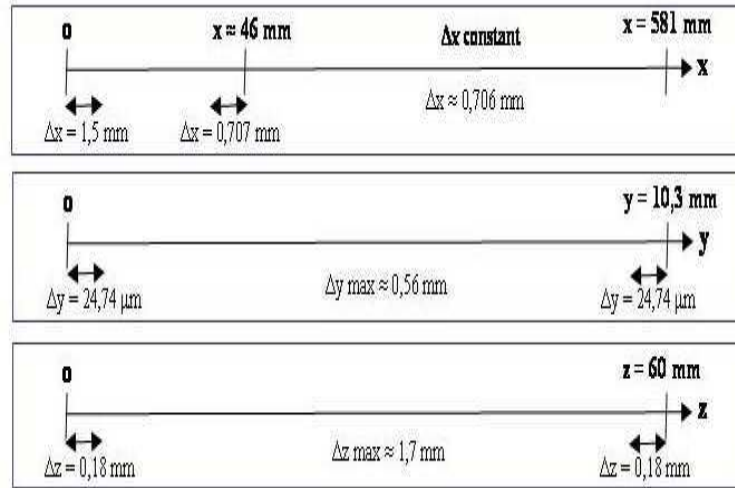


FIGURE III.14 – Détail des dimensions des mailles selon l'axe  $x$  (en haut), selon l'axe  $y$  (au milieu) et selon l'axe  $z$  (en bas).

	min	max
$\Delta x$	0,706 mm	1,5 mm
$\Delta y$	24,74 $\mu m$	0,56 mm
$\Delta z$	0,18 mm	1,7 mm

TABLE III.4 – Dimensions minimales et maximales du maillage selon les trois directions de l'espace.

Pour ce calcul tridimensionnel, on reproduit les mêmes conditions que celles de l'expérience et que celles utilisées par Vuillot *et al.* [85] dans le calcul 2D RANS. Ainsi, à la paroi inférieure injectante, l'entrée subsonique de fluide s'effectue avec un débit unitaire de  $2,62 \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})$  et pour une température d'arrêt de  $303 \text{ K}$ . La sortie de fluide est à pression imposée de  $137400 \text{ Pa}$ . Les autres parois sont adiabatiques. On utilise une approche MILES. Avant d'effectuer la simulation de l'écoulement transitionnel, on commence par effectuer un calcul stationnaire de l'écoulement laminaire, de façon à pouvoir par la suite initialiser le champ dans la veine. Cette première étape est menée avec un schéma de discrétisation spatiale de Roe d'ordre 2 et une approche stationnaire avec un schéma en temps implicite d'ordre 1 avec un pas de temps local maximum égal à  $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$ . Une fois cet écoulement laminaire obtenu, on passe alors à la simulation de l'écoulement en transition à proprement parler. Pour ce calcul, on prend le schéma ODFI d'ordre 2 pour la discrétisation spatiale, avec des limiteurs de Van Leer. En ce qui concerne l'intégration temporelle, on prend une approche instationnaire avec une méthode implicite d'ordre 2 de Runge Kutta avec un pas de temps  $\Delta t = 10^{-8} \text{ s}$  ( $\text{CFL} \approx 0,19$ ). La simulation est effectuée avec le code CEDRE sur 64 processeurs. L'exploitation des données pour le calcul de l'écoulement tridimensionnel avec l'approche MILES est effectuée après 1050000 itérations, correspondant à un temps physique simulé de  $0,0105 \text{ s}$ . Les paramètres du calcul sont regroupés au tableau III.5.

Maillage	$M_x \times M_y \times M_z = 790 \times 80 \times 80$
Paroi injectante	Air injecté : gaz parfait Injection normale à la paroi Débit = $2,62 \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})$ Température d'arrêt = $303 \text{ K}$
Sortie de fluide	$P = 1,374 \text{ bar}$
Fond avant	Paroi adiabatique
Paroi supérieure	Paroi adiabatique
Parois latérales	Paroi adiabatique
Type de calcul	Calcul MILES
Intégration temporelle	Méthode implicite, ordre 2 Pas de temps = $10^{-8} \text{ s}$
Discrétisation spatiale	Schéma ODFI, ordre 2 Limiteurs de Van Leer

TABLE III.5 – Résumé des conditions de calcul pour la simulation MILES.

### III.4.2.2 Commentaire sur le temps physique simulé lors du calcul LES

Commençons par faire un commentaire sur le temps total physique simulé pour le calcul LES. Pour obtenir un calcul représentatif, on peut considérer que le temps physique minimum à simuler correspond au temps mis par une particule fluide pour atteindre la sortie du domaine à partir du fond avant du montage. Pour déterminer ce temps minimum, il suffit d'intégrer l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dt} = v_x^c \quad (\text{III.39})$$

où  $v_x^c$  est la vitesse maximum sur l'axe. La valeur de la vitesse  $v_x^c$  varie selon l'abscisse  $x$ . Pour déterminer une expression de cette vitesse, on pose alors l'hypothèse qu'en moyenne  $v_x^c$  est du même ordre de grandeur que la vitesse longitudinale correspondant à un écoulement laminaire, c'est-à-dire la vitesse longitudinale de Taylor-Culick donnée par l'expression (III.14). En effet, on a vu au paragraphe III.2.2 précédent que la vitesse longitudinale dans le montage VECLA, bien que s'éloignant de la vitesse analytique de Taylor-Culick, reste toutefois toujours du même ordre de grandeur (figure III.7). On rappelle ci-dessous l'expression de la vitesse longitudinale de Taylor-Culick :

$$\overline{v_x}(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{\Pi \overline{x}}{2} \cos\left(\frac{\Pi \overline{y}}{2}\right) \quad (\text{III.40})$$

Ainsi, d'après (III.40), une approximation de vitesse maximum sur l'axe  $v_x^c$  est donnée par :

$$\frac{v_x^c}{v_{inj}^c} = \frac{\Pi x}{2 h} \quad (\text{III.41})$$

Soit :

$$v_x^c = \frac{\pi v_{inj}^c}{2h} x = K_{TC} x \quad (\text{III.42})$$

avec  $K_{TC} = \frac{\pi v_{inj}^c}{2h}$  une constante. En introduisant cette dernière relation dans la formule (III.39), on a :

$$\frac{dx}{dt} = K_{TC} x \quad (\text{III.43})$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{1}{x} dx = K_{TC} dt \quad (\text{III.44})$$

soit :

$$\int_0^L \frac{1}{x} dx = K_{TC} \int_0^{T_{min}} dt \quad (\text{III.45})$$

d'où, par intégration :

$$[\ln(x)]_e^L = K_{TC} [t]_0^{T_{min}} \quad (\text{III.46})$$

avec  $\epsilon$  une valeur infinitésimale. On obtient alors l'expression du temps physique minimum à simuler  $T_{min}$  suivante :

$$T_{min} \approx \frac{\ln(L/\epsilon)}{K_{TC}} \quad (\text{III.47})$$

L'application numérique au montage VECLA ( $h = 0,0103 \text{ m}$ ,  $v_{inj} = 1,847 \text{ m/s}$ ,  $L = 0,581 \text{ m}$  et  $\epsilon = 10^{-3}$  par exemple) donne un temps de calcul minimum  $T_{min}$  d'environ  $23 \text{ ms}$ . Pour le calcul tridimensionnel LES présenté dans ce chapitre, le temps physique total simulé est d'environ  $10 \text{ ms}$ . Il est clair que cette simulation ne permet pas de s'assurer du transfert de l'information entre l'amont et l'aval du canal, puisque le temps physique simulé est environ deux fois plus petit que le temps physique total minimum  $T_{min}$ . La simulation LES n'a pas été menée jusqu'à obtention d'un temps physique d'au moins  $23 \text{ ms}$ , car cela aurait nécessité un temps de calcul très long. Cette première simulation peut cependant être instructive car on devrait logiquement pouvoir observer les prémises de la turbulence.

#### III.4.2.3 Analyse du maillage pour la simulation tridimensionnelle

Précédemment, lors de l'estimation des principales échelles de grandeur, on a vu que l'on pouvait évaluer l'échelle de Kolmogorov  $\eta$  en fonction de l'abscisse  $x$  (expression (III.38)), avec une échelle énergétique  $Le$  qui dépend de  $y$  (expression (III.30)). Cette relation (III.38) permet de positionner notre calcul par rapport à une approche DNS. En effet, pour une taille de maille  $\Delta m$  telle que  $\Delta m \approx \eta$ , on a alors un maillage qui permet d'effectuer une simulation de type DNS. En revanche, pour des  $\Delta m \approx a\eta$  avec  $a > 1$ , on a une simulation de type LES.

L'application directe de la formule (III.38) au cas VECLA permet de tracer sur la figure III.15 l'évolution de la taille de maille  $\Delta m$  adimensionnée par l'échelle de Kolmogorov  $\eta$  (pour  $Re_s = 1,5 \times 10^3$ ). La taille de maille  $\Delta m$  correspond au diamètre hydraulique de maille calculé selon la formule I.48 (cf chapitre I). Il est important de noter que la notion d'échelle de Kolmogorov estimée dans le montage VECLA n'a aucune signification pour des abscisses  $x/h < 10$  car l'écoulement est laminaire ou à persistance laminaire. Pour des abscisses  $x/h > 10$ , le tracé de la figure (III.15) montre que pour notre simulation  $\Delta m > \eta$ , sauf près de la paroi injectante où la valeur de la taille de maille  $\Delta m$  est approximativement de l'ordre de grandeur de l'échelle de Kolmogorov  $\eta$ . Ainsi, le calcul effectué avec ce maillage est de type LES dans la majorité du volume du canal.

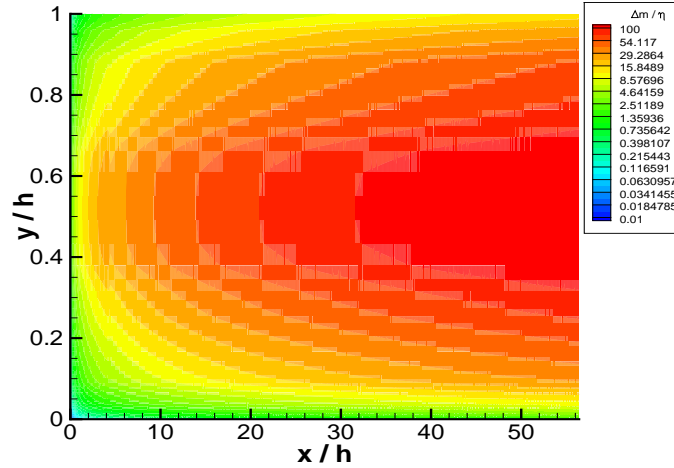


FIGURE III.15 – Évolution de la taille de maille  $\Delta m$  adimensionnée par l'échelle de Kolmogorov  $\eta$  en fonction de l'abscisse adimensionnée  $x/h$  et de la hauteur de veine adimensionnée  $y/h$ , en  $z = 30 \text{ mm}$ , pour  $Re_s = 1,5 \times 10^3$ .

### III.4.3 Résultats des simulations

La figure III.16 représente les profils de vitesse longitudinale adimensionnée obtenus en 8 différentes sections le long de la veine pour les deux calculs (2D RANS et 3D MILES) comparés aux profils expérimentaux et analytiques de Taylor-Culick. Les profils LES correspondent à des mesures instantanées en fin de calcul, c'est-à-dire pour un temps physique simulé égal à  $10 \text{ ms}$ . On constate que les profils du calcul 3D MILES suivent la même évolution que les profils analytiques tout le long du canal, mis à part près de la paroi supérieure. Comme évoqué précédemment au paragraphe III.2.1, cette divergence localisée dans une couche très mince est due à la différence de condition limite à la paroi supérieure entre la théorie analytique et le calcul 3D MILES.

La similitude des profils analytiques et 3D LES prouve que l'écoulement calculé par cette simulation reste laminaire tout le long de la veine et ne capte aucunement le changement de comportement de l'écoulement mesuré expérimentalement! Cette constatation est à relativiser puisque le temps physique simulé pour le calcul 3D n'est pas suffisamment long ( $10 \text{ ms}$ ) pour permettre à une particule d'atteindre la sortie de fluide depuis le fond avant du canal. Malgré cela, on pourrait s'attendre à observer la turbulence se développer. Or il n'en est rien, puisque l'écoulement LES instantané est laminaire sur toute la longueur de la veine. Au vu de ce résultat, on peut penser que, même en laissant tourner le calcul sur un très grand nombre d'itérations (calcul qui prendrait alors un temps considérable!), on pourrait ne jamais observer de transition turbulente.

La figure III.16 montre que, contrairement à la simulation 3D LES, les profils de vitesse longitudinale pour le calcul 2D RANS sont identiques aux profils de vitesse expérimentaux tout le long de la veine, démontrant que cette dernière à bien reproduit le changement de comportement de l'écoulement mesuré dans le montage VECLA. Ce résultat est corroboré par les tracés de la figure III.17 qui montrent l'évolution du coefficient de quantité de mouvement  $\beta$  le long de la veine pour l'expérience et le calcul 2D RANS. On y observe la chute du coefficient  $\beta$  pour le calcul RANS et on remarque que cette chute se produit à la même position dans la veine que celle observée expérimentalement, contrairement à l'évolution du coefficient  $\beta$  pour un calcul laminaire. La méthode RANS  $k-l$  haut Reynolds nous permet donc de capter la transition de l'écoulement, qui se produit entre  $x/h = 20$  et  $x/h = 30$  dans la veine. Il est toutefois important de noter que ces résultats n'ont pu être obtenus qu'après avoir paramétré les valeurs de  $k$  et de  $l$  injectés de façon à se rapprocher le plus possible de la solution expérimentale. Les graphiques de la figure III.18 représentent les profils de 'l'intensité turbulente'  $I$  définie par :

$$I = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2} \quad (\text{III.48})$$

Sur les tracés de la figure III.18, on constate que l'intensité turbulente obtenue pour le calcul 2D RANS est surestimée à partir de  $x/h = 21,36$ , c'est-à-dire à partir de la position dans la veine où l'écoulement commence à transitionner vers le turbulent. Donc, même si la méthode RANS  $k-l$  haut Reynolds capte bien la transition de l'écoulement, les caractéristiques de l'écoulement turbulent ne sont pas toutes correctement estimées. On observe également sur toute la longueur de la veine, un écart entre profils expérimentaux et calculés près de la paroi supérieure. Ceci montre que la couche limite n'est pas correctement modélisée dans cette partie du canal.

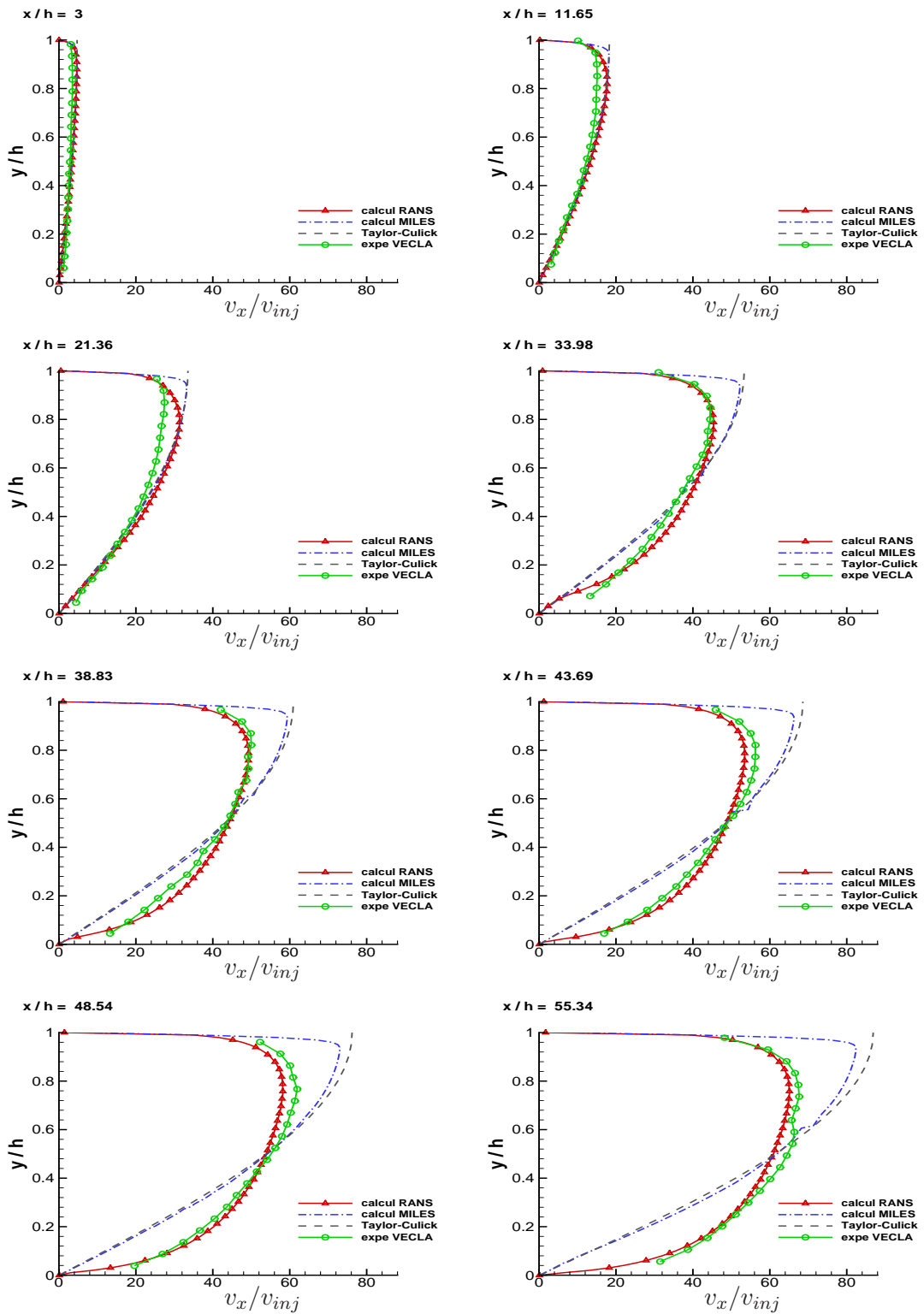


FIGURE III.16 – Comparaison des calculs RANS et LES avec l'expérience VECLA et les profils de Taylor-Culick : profils de vitesse longitudinale adimensionnée pour 8 sections  $x/h$  de la veine.



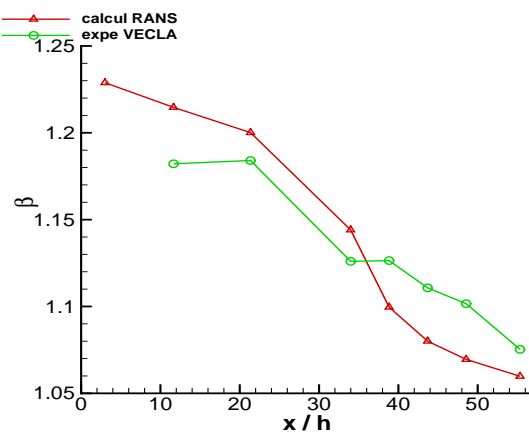


FIGURE III.17 – Comparaison calcul RANS/expérience VECLA : évolution du coefficient  $\beta$  le long de la veine.

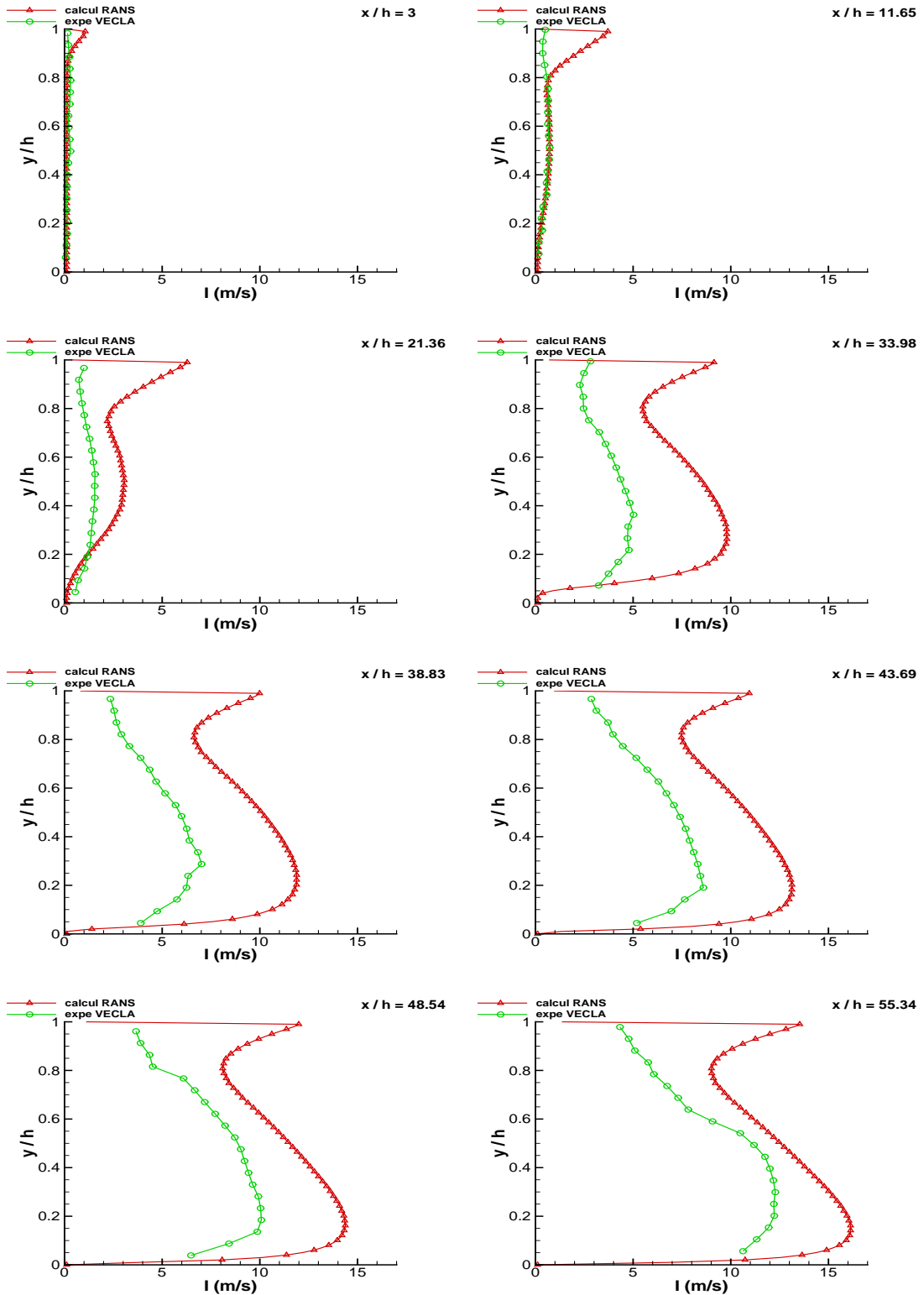


FIGURE III.18 – Comparaison calcul RANS/expérience VECLA : profils de l'intensité turbulente pour 8 sections de la veine.

#### III.4.4 Analyse des résultats des simulations RANS et LES

La simulation 2D RANS effectuée ici reproduit de façon assez fidèle les vitesses longitudinales et la transition turbulente alors que l'estimation de l'intensité turbulente n'est pas satisfaisante. Ces résultats s'accordent avec ceux d'études effectuées par d'autres auteurs concernant la simulation numérique d'écoulements dans un canal à injection pariétale avec une méthode RANS. En effet, Sabnis *et al.* [65] ont simulé l'écoulement obtenu expérimentalement par Dunlap *et al.* [30] en employant un modèle  $k-\epsilon$ . Les profils de vitesse moyenne ainsi simulés sont en accord avec les résultats expérimentaux mais les profils d'intensité turbulente sont surévalués jusqu'à environ 200%. Sviridenkov et Yagodkin [71] ont quant à eux réalisé des simulations RANS  $k-\epsilon$  et  $k-\omega$  d'écoulements incompressibles dans un canal à injection pariétale. Le modèle de turbulence  $k-\omega$  donne de bons résultats avant la transition mais les quantités turbulentes sont surestimées d'environ 200% après la transition. En ce qui concerne le modèle  $k-\epsilon$ , les estimations après transition sont satisfaisantes mais des écarts sont observés avant la transition. En modifiant de façon empirique les fonctions d'amortissement du modèle  $k-\epsilon$  pour des bas nombres de Reynolds ainsi que les conditions aux limites, Sabnis *et al.* [66] ont obtenus des simulations se rapprochant des résultats expérimentaux de Traineau *et al.* [76]. Chaouat [20] a également calculé cet écoulement avec un modèle de turbulence  $k-\epsilon$  et l'intensité turbulente pour cette simulation reste surestimée. Chaouat [21] a effectué des simulations numériques en utilisant le modèle RSM de Launder et Shima [49] étendu aux écoulements compressibles. Ce modèle avancé reproduit fidèlement les profils de vitesse moyenne alors que les quantités turbulentes sont sensiblement différentes des résultats expérimentaux d'Avalon *et al.* [7].

On constate donc que la simulation RANS que l'on a effectuée ici illustre bien les problèmes d'estimation des quantités turbulentes rencontrés par d'autres auteurs lors d'études utilisant différentes modélisations de type RANS pour les écoulements transitionnels. Même si notre calcul bidimensionnel RANS  $k-l$  montre que certains aspects de l'écoulement dans la veine sont bien reproduits, comme par exemple les vitesses longitudinales ou la transition turbulente, l'obtention de ces résultats n'a cependant été possible qu'après avoir calibré les paramètres  $k$  et  $l$  à l'injection du modèle RANS afin de s'accorder au mieux avec la solution expérimentale. Malgré cela, les caractéristiques de la turbulence elle-même ne sont pas bien estimées, comme le prouvent les profils d'intensité turbulente. Ceci peut en partie s'expliquer par le fait que la turbulence est fortement tridimensionnelle alors que le calcul RANS est bidimensionnel : des éléments essentiels de la turbulence peuvent donc échapper à la modélisation... On sait également que le type d'écoulement que l'on cherche à simuler ici est en transition et n'atteint pas un régime de turbulence totalement établie [10][9]. La méthode RANS, bien qu'efficace pour la simulation de la turbulence pleinement développée, ne paraît pas aussi précise pour le calcul d'écoulements en transition et ne semble donc pas être la méthode la mieux adaptée à notre cas d'étude. En effet, la modélisation RANS consiste à modéliser entièrement l'écoulement et à ne considérer que les quantités moyennes. Les échelles de longueur sont alors définies comme des moyennes

à grandes échelles et ne sont plus liées à des structures représentatives de phénomènes physiques instationnaires, comme la transition. En revanche, la modélisation LES consiste à calculer directement les grandes échelles de l'écoulement et à ne modéliser que les petites. Ainsi l'effet des grosses structures de l'écoulement est bien capturé en LES, ce qui permet à cette méthode de donner une représentation précise de la partie transitionnelle de l'écoulement. Pour améliorer la qualité des simulations de la transition on choisit alors de procéder pour la suite de cette étude à des calculs tridimensionnels avec des méthodes de type LES.

Les raisons qui nous poussent à favoriser la modélisation LES tridimensionnelle au détriment de la méthode RANS sont pertinentes, toutefois ce choix peut sembler surprenant au premier abord lorsque l'on observe les résultats de la simulation tridimensionnelle de type LES que l'on a effectuée. En effet, on a vu que les résultats LES à l'instant  $t \approx 10 \text{ ms}$  sont en accord avec la théorie analytique de l'écoulement laminaire de Taylor-Culick et ne capte pas du tout la transition turbulente! Il faut cependant relativiser ce résultat en rappelant que pour un temps physique simulé de  $10 \text{ ms}$ , le transfert de l'information entre l'amont et l'aval n'a pas encore eu le temps de s'effectuer (on a estimé à  $23 \text{ ms}$  en moyenne le temps nécessaire pour que ce transfert soit complet, voir paragraphe III.4.2.2). Cependant, à l'instant  $t \approx 10 \text{ ms}$ , on pourrait penser que la transition a déjà commencé à s'amorcer, or l'écoulement reste parfaitement laminaire. Si on continuait ce calcul, deux possibilités d'évolution de l'écoulement sont envisageables. En premier lieu, on peut imaginer que la transition de l'écoulement va finir par se déclencher. Au vu de l'état laminaire de l'écoulement à l'instant  $t \approx 10 \text{ ms}$ , on pourrait imaginer que cette transition va arriver après un temps de calcul très long, voire trop long pour le réaliser dans cette thèse (pour atteindre un temps physique de  $10 \text{ ms}$ , on a déjà effectué plus d'un million d'itérations). La deuxième possibilité est que la transition ne s'amorce pas du tout, quel que soit le temps physique sur lequel le calcul est effectué. En effet, la transition de l'écoulement dans la configuration étudiée provient uniquement des instabilités dues aux fluctuations introduites dans la veine lors de l'injection de fluide par la paroi poreuse. Aucune autre source d'instabilité n'existe dans le canal puisqu'aucun obstacle ni angle ne sont présents dans la géométrie considérée. Il faut donc introduire dans l'écoulement des fluctuations pour déclencher la transition. Or, pour la simulation LES, on a utilisé la condition d'injection à débit constant et aucune perturbation n'a de ce fait été transmise dans l'écoulement. Cette même condition limite d'injection à débit constant a été utilisée pour le calcul RANS, mais dans ce cas, l'introduction de fluctuations est réalisée par l'intermédiaire des quantités turbulentes  $k$  et  $l$  du modèle. En revanche, de par sa formulation, la modélisation MILES dépend uniquement du maillage et de la méthode numérique (paragraphe I.3.2.2). Dans le cas présent, les fluctuations ne peuvent donc venir que du schéma numérique utilisé et celui-ci apparaît comme étant stable. Aucune perturbation, d'origine géométrique ou numérique, n'est par conséquent insufflée dans le calcul MILES. De ce fait, pour amorcer la transition, il est alors nécessaire d'introduire des perturbations dans l'écoulement d'une façon ou d'une autre, et préférentiellement au niveau de la condition d'injection de fluide

pour s'accorder avec l'expérience. Comme souligné par Tabor *et al.* [72], dans le cas de simulation LES dans des configurations où l'injection de fluide influe sur le développement de la turbulence dans le domaine, comme c'est le cas dans VECLA, alors la condition d'injection a une importance significative sur la dynamique de l'écoulement simulé.

Des simulations de type LES d'écoulement dans des canaux à injection pariétale incluant une modélisation de perturbations à l'injection de fluide ont été effectuées par différents auteurs. Liou et Lien [54] ont simulé l'écoulement obtenu expérimentalement par Traineau *et al.* [76] par l'intermédiaire d'une simulation bidimensionnelle LES sans modèle de sous-maille avec de très forts taux d'injection à la paroi. Les résultats ont été comparés avec le calcul bidimensionnel RANS  $k - \epsilon$  de Sabnis *et al.* [66]. La vitesse moyenne issue de la simulation LES et les profils d'intensité turbulente ont été plus en accord avec l'expérience que les données RANS. Apte et Yang [3] ont eux aussi mené une simulation bidimensionnelle LES de l'écoulement expérimental de Traineau *et al.* [76] en utilisant un modèle de sous-maille semi-empirique et en incorporant des perturbations à l'injection. Les résultats ont révélé que plus le niveau de perturbations est important, plus la transition turbulente se produit tôt dans le canal. Ainsi, de la même façon que pour les simulations RANS, la position de la transition dépend fortement du niveau de fluctuations injecté. Des observations similaires ont été faites par Apte et Yang [4] et Wasistho *et al.* [87][86]. Apte et Yang [4] ont effectué un calcul tridimensionnel LES avec un modèle de sous-maille de Smagorinsky dynamique et en superposant à l'injection des fluctuations aléatoires de différents niveaux d'intensité. Wasistho *et al.* [87][86] ont quant à eux mené une simulation avec une approche bidimensionnelle pour obtenir l'écoulement laminaire et une approche tridimensionnelle LES pour calculer la transition et l'écoulement turbulent, tout en rajoutant des fluctuations aléatoires au niveau de l'injection à la paroi poreuse. Au cours de cette étude, différentes simulations ont été effectuées avec différents modèles de sous-maille. L'analyse des résultats a amené les auteurs à penser que la condition limite d'injection a un effet plus important sur les résultats que la modélisation de sous-maille. À cause du manque de données expérimentales près de la paroi poreuse, l'ajout de fluctuations au niveau de l'injection a été faite sans justification physique, comme indiqué par Wasistho *et al.* [86][87] et Liou et Lien [54]. Ces chercheurs [54][86][87] soupçonnent que le manque de précision des résultats obtenus pourrait être lié à ce manque de justification physique des fluctuations. Ainsi, il est possible que l'utilisation de fluctuations paramétrées par un ou des critères physiques puisse améliorer la qualité des simulations numériques de ce type d'écoulement.

### III.5 Conclusion du chapitre

Les différentes simulations numériques effectuées ont permis de donner une première analyse de l'évolution du profil de vitesse dans VECLA, qui passe d'un état laminaire décrit par la solution analytique de Taylor-Culick près du fond avant, à une transition turbulente

en milieu de veine. L'estimation des quantités fluctuantes ainsi que le positionnement de la transition du profil de vitesse moyenne ont été identifiés comme des critères essentiels, à simuler numériquement avec le plus de précision possible. La transition de l'écoulement a été définie comme étant la position axiale dans le canal où les profils de vitesse longitudinale passent d'une forme laminaire de Taylor-Culick à une forme turbulente. Cette position est identifiée par la localisation axiale du début de la décroissance de la valeur du coefficient  $\beta$  par rapport à la valeur laminaire.

Les données issues de la simulation numérique 2D RANS  $k-l$  montrent que les profils moyens et la transition turbulente sont bien calculés avec toutefois de l'imprécision dans l'estimation des quantités turbulentes. La méthode RANS, bien qu'efficace pour certains types d'écoulement, ne paraît pourtant pas être la plus adaptée pour la simulation numérique d'écoulements en transition. En effet ce type de méthode est trop dépendant des paramètres de calculs, en particulier des conditions aux limites. On a alors choisi de poursuivre la thèse en utilisant une approche LES. Les différentes études menées avec ce type de modélisation montrent que la qualité des résultats, et en particulier la précision de la position de la transition, dépend fortement des fluctuations injectées au niveau de la paroi poreuse. Certains chercheurs [54][86][87] ont émis l'idée que le manque de précision des résultats obtenus pourraient être lié au fait que les fluctuations sont générées sans justification physique. Il paraît donc intéressant de quantifier les fluctuations en développant un modèle physique, ce qui constituerait une piste d'amélioration possible des simulations numériques des écoulements transitionnels dans un canal à injection pariétale. On décide d'exploiter cette piste en cherchant à développer un nouveau modèle de génération de fluctuations à l'injection prenant en compte un ou des paramètres physiques calibrés par des données issues de résultats expérimentaux.



# Modélisations de perturbations pour des simulations LES instationnaires

---

*On aborde ici les modélisations envisagées pour créer des fluctuations susceptibles de générer la transition turbulente pour des calculs LES tridimensionnels instationnaires d'écoulement dans le montage VECLA. On commence par exposer la modélisation de génération de perturbations numériques qui nous permet de mener une première série de simulations tridimensionnelles LES d'écoulement transitionnel dans VECLA. Ces premiers calculs serviront de base de comparaison pour la simulation tridimensionnelle LES avec la modélisation de fluctuations calibrées avec les résultats expérimentaux issus du chapitre II. Le choix et le principe de fonctionnement de cette dernière sont explicités en deuxième partie de ce chapitre.*



## IV.1 Modélisation de perturbations numériques

Avant de rechercher une méthode de génération de fluctuations calibrées par un ou des paramètres physiques, on souhaiterait tout d'abord obtenir une première simulation avec une approche tridimensionnelle instationnaire LES. En effet, au chapitre précédent, on n'a pas réussi à aboutir à l'écoulement transitionnel dans VECLA avec une telle approche. Pour y parvenir, on cherche donc dans un premier temps une méthode simple pour générer des fluctuations qui pourraient déclencher la transition.

### IV.1.1 Choix et brève description de la modélisation de perturbations numériques

Plusieurs méthodes de génération de perturbations ont été employées par différents auteurs. Luploglazoff [55] a par exemple utilisé la technique de 'scotch' correspondant à une interruption du débit sur une partie de la chambre. L'application de bruit gaussien dans toute la chambre VECLA a également été testée par Luploglazoff [55]. Ugurtas [77] a quant à lui appliqué le bruit gaussien non pas dans la totalité de la veine mais uniquement près de la paroi injectante. Il a aussi été envisagé de déformer le maillage au niveau de la paroi injectante pour créer des irrégularités [23]. Une autre possibilité consiste à exploiter les conditions de stabilité des schémas numériques du code CEDRE. C'est cette dernière méthode que l'on retient. Ce choix a l'avantage de nous permettre de procéder à des simulations instationnaires LES d'écoulement transitionnel dans VECLA sans modélisation additionnelle de notre part.

Cette méthode de génération de perturbations numériques repose sur la non-utilisation des limiteurs de pente du schéma de discrétisation spatiale. En effet, supposons une intégration explicite à l'ordre 1, le schéma de transport résolu par le code CEDRE peut se résumer en première approche sous la forme simplifiée suivante :

$$Q^{n+1} = Q^n + C + V \quad (\text{IV.1})$$

où  $Q$  représente le vecteur des variables conservatives,  $C$  la contribution convective sans limiteur et  $V$  la contribution visqueuse pour des  $CFL < 1$  (cas explicite). Il a été démontré que dans le cas linéaire, cette formulation (IV.1) est stable [16]. En revanche, ce schéma peut être instable dans le cas non-linéaire. Les instabilités sont alors compensées par l'ajout de limiteurs. Le système à résoudre s'écrit alors :

$$Q^{n+1} = Q^n + C_L + V \quad (\text{IV.2})$$

où  $C_L$  représente la contribution convective avec limiteur de flux (cf chapitre I). Les non-linéarités peuvent provenir de la nature non-linéaire des équations à résoudre, comme c'est le cas pour les équations de Navier-Stokes. Elles peuvent également résulter de la présence

de discontinuités ou de chocs dans l'écoulement à simuler.

Lors de la simulation de l'écoulement dans la configuration VECLA étudiée ici, on ne trouve ni choc ni discontinuité et l'essentiel de la non-linéarité provient des équations de Navier-Stokes. En désactivant les limiteurs dans ce cas là, on suppose que l'instabilité numérique ainsi générée permettra de mener à bien le calcul sans toutefois le faire diverger. On utilisera donc la formulation (IV.1) pour les simulations.

### **IV.1.2 Conclusion sur la modélisation de perturbations numériques**

La modélisation consistant à générer des perturbations de type numérique pour déclencher la transition turbulente à été exposée brièvement. Ces fluctuations seront obtenues par l'intermédiaire de la désactivation des limiteurs de pente lors de la discrétisation spatiale. Ainsi, on peut relativement facilement procéder aux premiers calculs de la transition dans VECLA avec une approche LES tridimensionnelle et instationnaire. Ces simulations serviront de base de comparaison pour les calculs menés avec le modèle de génération de fluctuations calibrées par des paramètres physiques. C'est cette modélisation que l'on va maintenant présenter.

## IV.2 Modélisation de perturbations physiques

### IV.2.1 Choix de la modélisation de perturbations physiques

L'objectif est de trouver un modèle de génération de perturbations de l'écoulement permettant de prendre en compte des paramètres physiques calibrés par des données expérimentales. On veut ensuite intégrer ce modèle dans le code CEDRE pour pouvoir effectuer des simulations LES instationnaires d'écoulement transitionnel dans VECLA. On voudrait que les fluctuations s'approchent le plus possible de celles observées expérimentalement, c'est-à-dire qu'elles correspondent à des fluctuations de quantité de mouvement. La possibilité ou non d'imposer ce type de perturbations en pratique est abordée en fin de chapitre.

On recherche une méthode qui réponde au mieux aux critères suivants :

- La modélisation choisie devra permettre d'introduire des fluctuations lors de l'injection de fluide à la paroi.
- Les fluctuations générées par la modélisation choisie pourront être calibrées par au moins un paramètre physique et seront le plus possible en adéquation avec les mesures de bruit relevées expérimentalement sur le montage VECLA.
- La modélisation sera la moins gourmande possible en temps de calcul et volume de stockage car les calculs LES sont déjà très coûteux.

On commence par présenter de façon non exhaustive des méthodes de génération de turbulence qui existent à l'heure actuelle.

#### IV.2.1.1 Conditions périodiques

Parmi les méthodes de génération de turbulence on peut citer les conditions périodiques qui servent par exemple pour les calculs d'écoulements dans un canal ou une conduite où l'injection se fait dans un plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement. Dans ces cas là, l'écoulement s'établit en devenant pleinement turbulent à une certaine distance de l'entrée de fluide [72]. Expérimentalement, il suffit d'avoir un canal suffisamment long pour que la turbulence pleinement développée soit observée. Mais numériquement, il n'est pas aussi facile de prendre en compte un grand domaine de calcul. L'utilisation de la condition périodique permet alors d'éviter ce problème en réintroduisant dans le domaine de calcul au niveau du plan d'entrée de fluide l'écoulement obtenu au niveau du plan de sortie. Ce type de condition est particulièrement adapté à l'étude des écoulements turbulents pleinement développés dans des conduits. Cependant, dans la configuration qui nous intéresse où l'on cherche à caractériser la transition et non à exploiter une zone de turbulence pleinement développée, cette méthode semble être inadéquate.

### IV.2.1.2 Calcul précurseur

Comme pour les conditions périodiques, le calcul précurseur est souvent utilisé dans le cas d'écoulements dans un canal où l'injection se fait dans un plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement. Ce type de méthode consiste à effectuer une simulation de l'écoulement amont, appelée calcul précurseur [59]. C'est la technique la plus précise pour imposer une condition d'injection de fluide pour la LES puisqu'elle représente exactement les tourbillons des grandes échelles de l'écoulement. Cette technique présente cependant des inconvénients [72] : tout d'abord, elle manque de généralité car son utilisation se réduit à des cas simples où la condition d'injection peut être considérée comme un écoulement turbulent. De plus, cette technique ne peut pas être utilisée pour des simulations hybrides RANS/LES. Enfin, l'utilisation de cette technique nécessite de faire une simulation supplémentaire et on a par conséquent besoin de beaucoup d'espace de stockage. Tout comme pour les conditions périodiques, le calcul précurseur ne semble pas approprié à notre cas d'étude de par l'état transitionnel de l'écoulement à simuler. D'autre part, l'utilisation d'un calcul précurseur reviendrait dans notre cas à déplacer le problème de génération de fluctuations en amont. De plus, l'importance de l'espace de stockage nécessaire pour son utilisation suffirait à l'exclure puisque cela va à l'encontre de l'un de nos objectifs qui est d'avoir une modélisation la moins coûteuse possible.

### IV.2.1.3 Méthodes stochastiques

Des méthodes plus rapides et plus flexibles que les conditions périodiques et le calcul précurseur ont été développées par les chercheurs, telles que les méthodes stochastiques. Ces méthodes consistent à générer un signal d'entrée qui se rapproche le plus possible de l'écoulement réel en reproduisant certaines données statistiques [44]. Ainsi, des fluctuations stochastiques sont générées et combinées avec l'écoulement moyen au niveau de l'injection de fluide [72].

#### MÉTHODES DE GÉNÉRATION DE BRUIT

La méthode de génération de bruit consiste à superposer des fluctuations aléatoires [44] à une donnée du problème, telle que la vitesse ou le débit par exemple. Ces fluctuations aléatoires, générées par un processus stochastique, sont dénommées "bruit". La forme la plus simple de bruit est celle où l'énergie générée est uniformément répartie sur tous les nombres d'ondes. Par analogie avec la lumière, le bruit est alors dit blanc. Cette méthode est très souvent utilisée pour les simulations d'écoulement dans un canal à injection pariétale du fait de sa simplicité d'utilisation et de son très faible coût en temps de calcul et espace de stockage [4][54][87][86]. Cependant, cette méthode reste peu appropriée pour des simulations d'écoulements dans la configuration étudiée ici car il n'y a aucune corrélation spatio-temporelle, l'énergie générée est uniformément répartie sur tous les nombres

d'ondes et la pseudo-turbulence est rapidement dissipée.

À partir d'un processus stochastique générant du bruit blanc il est possible de créer d'autres processus stochastiques avec des propriétés différentes, par l'intermédiaire d'équations différentielles stochastiques. C'est le cas notamment du processus d'Ornstein-Uhlenbeck qui génère des nombres aléatoires à distribution gaussienne avec une variance, une moyenne et une corrélation temporelle imposées. Ce processus a été utilisé avec succès pour introduire de la turbulence par l'extrémité d'un conduit [59]. Ce type de procédé dérivé du bruit blanc est simple à mettre en place car son utilisation consiste à résoudre une équation différentielle stochastique, ce qui de plus n'est pas gourmand en temps de calcul ni volume de stockage.

#### MÉTHODES SPECTRALES

Les fluctuations turbulentes peuvent être décomposées sur une base de Fourier et donc représentées par une somme linéaire de fonctions sinus et cosinus [72] :

$$u'_x(y, t) = u_m \sum_{i=1}^N a'_i(t) \cos(iky + \phi'_i(t)) \quad (\text{IV.3})$$

où  $u'_x$  est la composante selon  $x$  de la fluctuation de vitesse par exemple,  $y$  une coordonnée du plan d'entrée de fluide,  $a'_i$  et  $\phi'_i$  des coefficients aléatoires générés par un processus stochastique par exemple [72]. Ces coefficients représentent l'énergie contenue dans chaque mode de Fourier. La quantité fluctuante  $u'_x$  est ajoutée au profil de vitesse moyenne  $\bar{u}_x$  :

$$u_x(y, t) = \bar{u}_x(y) + u'_x(y, t) = \bar{u}_x(y) + u_m \sum_{i=1}^N a'_i(t) \cos(iky + \phi'_i(t)) \quad (\text{IV.4})$$

L'utilisation de fonctions périodiques fournit une cohérence spatiale sur le plan d'entrée de fluide. Par l'intermédiaire de la formule de Parseval, on trouve :

$$2E_{k_x} = u_m^2 \sum_{i=1}^N (a'_i)^2 \quad (\text{IV.5})$$

Cette relation (IV.5) montre que l'énergie cinétique turbulente  $E_{k_x}$  est reliée aux coefficients  $a'_i$ . Donc, on peut imposer un spectre d'énergie pour calibrer les valeurs des  $a'_i$ . Les  $\phi'_i$  sont eux reliés à la différence de phase entre deux modes. Les  $a'_i$  et  $\phi'_i$  sont créés à partir de processus aléatoires.

La méthode spectrale est plus rapide et plus flexible que celle utilisant un calcul pré-curseur [72]. Elle a été utilisée avec succès pour la simulation de turbulence homogène isotrope [51] ou de l'écoulement autour d'une marche descendante [50] par exemple. Il est

possible de rajouter une corrélation temporelle à ce type de méthode. Davidson [28][29] a par exemple utilisé un filtrage assymétrique. Cela consiste à relier la fluctuation à l'instant  $t$  à la fluctuation à l'instant  $t - 1$ . Cette méthode a été reprise par la SNPE [33] dans une configuration avec injection proche de celle étudiée ici. Les résultats obtenus par la SNPE montrent que la prise en compte d'une échelle temporelle joue un rôle important sur la qualité des résultats de simulation. Tabor *et al.* [73] ont quant à eux relié les coefficients de Fourier  $a'_i$  et  $\phi'_i$  à un processus de Ornstein-Uhlenbeck pour créer la corrélation temporelle.

L'utilisation des méthodes spectrales nécessite l'emploi de transformées de Fourier. Lorsqu'on a des maillages complexes non-structurés par exemple, la transformée de Fourier rapide ne peut plus être utilisée et ces méthodes deviennent alors coûteuses, ce qui les rend difficiles à utiliser dans un contexte industriel.

#### FILTRES NUMÉRIQUES

Un autre type de méthodes de reconstruction stochastique qui permet d'éviter les problèmes rencontrés avec les méthodes spectrales correspond aux méthodes basées sur le filtrage numérique de données aléatoires. Cette technique permet de générer des propriétés statistiques voulues, comme par exemple la corrélation spatiale et temporelle [72]. Cette méthode se base sur la technique spectrale développée par Lee *et al.* [51] et Smirnov *et al.* [69]. La différence avec la méthode spectrale est qu'au lieu d'utiliser des séries de Fourier afin de modéliser les fluctuations aléatoires, ici on utilise un filtre numérique linéaire non-récuratif. Klein *et al.* [45] précisent que cette approche est simple à coder et facilement adaptable à des données expérimentales.

La méthode décrite revient à structurer un processus stochastique gaussien par l'intermédiaire d'un filtre numérique [72]. Cela signifie qu'il est possible de créer des variantes de cette technique grâce à d'autres techniques de filtrage. Veloudis *et al.* [81][80] ont notamment étudié l'impact des maillages non-uniformes. Il apparaît que si les échelles turbulentes varient dans le plan d'injection, ce qui en LES revient à faire varier la largeur du filtre LES, c'est à dire la taille des mailles, alors on a besoin de plusieurs filtres numériques. Ceci complique la méthode et accroît le coût de calcul.

#### IV.2.1.4 Sélection de la méthode de génération de fluctuations

Parmi les méthodes présentées ici, on cherche à savoir laquelle est la plus appropriée pour le développement de la condition d'injection de fluide incluant des fluctuations physiques dans un canal à injection pariétale.

Les conditions périodiques sont particulièrement adaptées à des simulations d'écoulements turbulents pleinement développés. Or, dans la configuration étudiée ici, on passe d'un état

laminaire à une transition turbulente sans atteindre la turbulence pleinement développée. Les conditions périodiques ne semblent par conséquent pas appropriées à notre cas et ne seront donc pas utilisées.

Tout comme les conditions périodiques, la méthode employant un calcul précurseur paraît difficilement transposable pour la simulation d'un écoulement transitionnel puisqu'elle est applicable dans des configurations d'écoulements pleinement turbulents. Même dans l'hypothèse où elle serait appropriée, elle nécessite beaucoup d'espace de stockage. Or nos simulations sont déjà très coûteuses et on cherche à limiter le coût de calcul. Ainsi, on n'utilisera pas de calcul précurseur pour générer les fluctuations physiques.

Pour cette même raison de coût de calcul, les méthodes spectrales semblent être difficilement envisageables. En effet, le traitement des transformées de Fourier est lourd, notamment avec un maillage non-structuré. De plus, certains auteurs ont noté que ces méthodes sont compliquées à coder. On se détourne donc de ce type de méthode.

On a jusqu'à présent éliminé les conditions périodiques, le calcul précurseur ainsi que les méthodes spectrales. Parmi les modélisations restantes, on trouve les méthodes de génération de bruit et les filtres numériques. La technique du filtre numérique est équivalente à implémenter un processus stochastique gaussien avec des données statistiques imposées, ce qui nous permettrait de relier les fluctuations à des données expérimentales. Pour des simulations de type LES, la présence de mailles de différentes tailles dans le plan d'injection équivaut à faire varier la largeur du filtre LES. Il est alors nécessaire d'employer plusieurs filtres numériques. Ainsi, cela complique la méthode et entraîne un accroissement important du coût de calcul. Or, la méthode de génération de perturbations recherchée va être utilisée pour mener des simulations de type LES avec un maillage comportant des tailles de maille qui varient. La technique de filtre numérique est donc à son tour éliminée.

La méthode de bruit blanc, très souvent utilisée pour appliquer des perturbations lors de l'injection à la paroi, est simple d'utilisation et peu coûteuse en temps de calcul et espace de stockage. Malheureusement, l'expérience a montré que l'utilisation de bruit blanc présente des inconvénients majeurs, notamment le manque de justification physique des fluctuations générées. En effet, celles-ci ne possèdent pas de corrélation spatio-temporelle et l'énergie est uniformément répartie sur tous les nombres d'ondes. Il a aussi été remarqué que lorsque le bruit blanc est employé comme condition aux limites, les fluctuations introduites dans le canal se retrouvent rapidement dissipées... En ce qui concerne le manque de justification physique, les auteurs ont trouvé un moyen de remédier au problème grâce à des processus stochastiques dérivés du processus stochastique de base de bruit blanc et créés par l'intermédiaire d'équations différentielles stochastiques. Cette méthode de génération de perturbations dérivées du bruit blanc est simple à mettre en place car son utilisation consiste à résoudre une équation différentielle stochastique, ce qui de plus ne nécessite pas beaucoup de temps de calcul ou de volume de stockage. Pour les simulations

LES instationnaires d'écoulement transitionnel dans VECLA, on décide donc de créer les fluctuations physiques à l'injection grâce à un processus stochastique dérivé du bruit blanc.

Parmi les processus stochastiques existants, on cherche celui qui permet de se rapprocher le plus des données expérimentales relevées lors des mesures de bruit sur le montage VECLA. Ces mesures, présentées au chapitre II, ont montré que les fluctuations de quantité de mouvement ont une distribution gaussienne et des valeurs d'échelles temporelle et spatiale respectivement constantes quels que soient le débit et la hauteur de mesure par rapport à la plaque poreuse. Les études menées à la SNPE [33] ont mis en avant le fait que le déclenchement du VSP, ce phénomène de détachement de tourbillons au niveau de la paroi injectante, est très sensible à la valeur de l'échelle temporelle. De ce fait, on souhaiterait que le processus stochastique générant les fluctuations physiques puisse prendre en compte l'échelle temporelle relevée expérimentalement sur VECLA. Les mesures de bruit ont également révélé que la densité spectrale de puissance des signaux ont une pente proche de  $f^{-2}$ . On voudrait de ce fait que ce critère soit respecté par le modèle de perturbations physiques choisi. Il existe un processus stochastique "amélioré" qui remplit ces conditions. Il s'agit du processus d'Ornstein-Uhlenbeck qui génère des fluctuations aléatoires à distribution gaussienne avec une corrélation temporelle et une décroissance du spectre en  $f^{-2}$  imposées. C'est donc naturellement ce processus d'Ornstein-Uhlenbeck que l'on sélectionne pour générer les fluctuations physiques à la paroi poreuse.

#### IV.2.1.5 Conclusion

Différentes méthodes de génération de perturbations physiques ont été exposées. On a recherché une modélisation permettant d'introduire des fluctuations au niveau de la paroi injectante et dont les paramètres peuvent être associés aux résultats expérimentaux, tout en restant raisonnable en temps de calcul et volume de stockage. La méthode finalement adoptée répond à ces exigences et correspond au processus stochastique d'Ornstein-Uhlenbeck. L'origine et les principes de ce processus sont développés au paragraphe suivant.



## IV.2.2 Description de la méthode de génération de perturbations physiques

Les fluctuations physiques pour les simulations d'écoulement transitionnel dans VECLA sont générées par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, modélisation dérivée du bruit blanc. Ce dernier peut être créé par un processus stochastique appelé processus de Wiener qui lui-même a pour vocation initiale la description du mouvement brownien.

### IV.2.2.1 Mouvement brownien et processus de Wiener

Brown a décrit en 1827 le mouvement d'une particule infiniment petite immergée dans un liquide ou un gaz. Ce mouvement, appelé mouvement brownien, permet de décrire le caractère aléatoire de phénomènes physiques divers, comme la turbulence par exemple. Le mouvement brownien peut être décrit par des équations différentielles stochastiques (EDS). La solution d'une EDS est appelée processus de diffusion. Le plus fondamental de tous les processus de diffusion, à partir duquel tous les autres processus peuvent être dérivés, est le processus de Wiener. Sur un intervalle  $[0, T]$ , ce processus correspond à une variable aléatoire  $W(t)$  telle que [41] :

- $W(t)$  dépend continument de  $t \in [0, T]$ .
- $W(0) = 0$ .
- Pour  $0 \leq s < t \leq T$ ,  $W(t) - W(s) \sim (t - s)^{1/2} \mathcal{N}(0, 1)$ . Autrement dit<sup>1</sup>, la variable aléatoire  $W(t) - W(s)$  est une gaussienne de moyenne nulle et de variance  $(t - s)$ .
- Pour  $0 \leq s < t < u < v \leq T$ ,  $W(t) - W(s)$  et  $W(v) - W(u)$  sont indépendants.

Du fait de ces caractéristiques, le processus de Wiener est équivalent à du bruit blanc.

Le processus de Wiener discrétisé s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} W_0 &= 0 \\ W_j &= W_{j-1} + dW_j \text{ avec } j = 1, \dots, N \end{aligned} \tag{IV.6}$$

avec  $N$  un entier positif, avec  $\delta t = T/N$ ,  $W_j = W(t_j)$  où  $t_j = (j \times \delta t)$  et  $dW_j$  une variable aléatoire indépendante de la forme  $\delta t^{1/2} \mathcal{N}(0, 1)$ .

### IV.2.2.2 Équation de Langevin

L'équation de Langevin est une EDS contenant une partie déterministe et un terme additionnel aléatoire de bruit blanc. La solution de l'équation de Langevin [48] est un processus de diffusion initialement développé comme modèle stochastique pour décrire la vitesse

---

1. Il est rappelé que  $\mathcal{N}(0, 1)$  correspond à une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance unité.

d'une particule microscopique soumise à un mouvement brownien [62]. Cette EDS s'écrit sous la forme :

$$dV_i(t) = a_i(X, V, t)dt + b_{ij}(X, V, t)dW_j(t) \quad (\text{IV.7})$$

où  $X$  est la position de la particule à l'instant  $t$  ( $dX_i = V_i dt$ ),  $a_i$  le terme de tendance (ou de dérivée, ou "drift"),  $b_{ij}$  le terme de diffusion (ou de dispersion) et  $dW_j(t)$  un processus de Wiener [59]. Plusieurs modèles existent pour décrire  $a$  et  $b$ . Dans le cas de la turbulence gaussienne stationnaire et homogène, ces deux paramètres sont définis par :

$$a = -V/T_l \text{ et } b = \sigma(2/T_l)^{1/2} \quad (\text{IV.8})$$

avec  $T_l$  l'échelle temporelle et  $\sigma$  l'écart-type, deux constantes positives. L'équation (IV.7) s'écrit alors :

$$dV(t) = \frac{-V(t)}{T_l} dt + \sigma \left( \frac{2}{T_l} \right)^{1/2} dW(t) \quad (\text{IV.9})$$

avec  $dW(t)$  de la forme  $(\delta t)^{1/2} \mathcal{N}(0, 1)$ . La partie stochastique de l'équation est donc modélisée par un bruit blanc. Dans cette expression (IV.9), le terme de tendance  $\frac{-V(t)}{T_l} dt$  entraîne la relaxation de la vitesse vers zéro selon l'échelle temporelle  $T_l$ . Le terme de diffusion ajoute quant à lui un incrément aléatoire de moyenne nulle avec une déviation de  $\sigma \left( \frac{2dt}{T_l} \right)^{1/2}$ .

La solution de l'équation de Langevin correspond au processus d'Ornstein-Uhlenbeck [62], qui est un processus statistiquement stationnaire gaussien. Ce dernier est caractérisé par une moyenne nulle et une variance  $\sigma^2$ . Sa fonction d'autocorrélation  $F(\tau)$  s'écrit sous la forme suivante :

$$F(t) = \exp\left(-\frac{|t|}{T_l}\right) \quad (\text{IV.10})$$

On en déduit que l'échelle temporelle  $T_l$  est définie par :

$$T_l = \int_0^\infty F(t) dt \quad (\text{IV.11})$$

Le spectre d'énergie de ce processus s'écrit [62] :

$$S(f) = \frac{(2/\pi)\sigma^2 T_l}{1 + T_l^2 f^2} \quad (\text{IV.12})$$

Cette relation (IV.12) indique que la décroissance de l'énergie du processus d'Ornstein-Uhlenbeck s'effectue de façon monotone avec une pente en  $f^{-2}$ . Par analogie avec la lumière, ce processus est alors appelé bruit rouge.

En résumé, la solution de l'équation de Langevin permet de générer un signal aléatoire gaussien, de moyenne nulle, de variance  $\sigma^2$ , avec une échelle temporelle imposée et un

spectre d'énergie qui décroît avec une pente imposée en  $f^{-2}$  : on a donc un bruit rouge gaussien filtré en temps. Pour résoudre l'équation de Langevin, il nous faut trouver une méthode de résolution numérique.

### IV.2.2.3 Détermination de la méthode de résolution numérique de l'équation de Langevin

Différentes méthodes de résolution numérique de l'équation de Langevin existent, comme par exemple la méthode d'Euler-Maruyama [59]. On teste ici quelques-unes de ces méthodes. Pour cela, on génère avec ces différentes méthodes un signal de moyenne  $M$ , de variance  $\sigma^2$ , de durée  $T$  et avec un pas de temps  $\Delta t$ . Le nombre de valeurs  $N$  est donné par :

$$N = T/\Delta t \quad (\text{IV.13})$$

Il a été observé que le pas de temps a une influence sur les résultats. Wilson & Zhuang [88] ont établi que la condition :

$$\Delta t = 0,1T_l \quad (\text{IV.14})$$

permet d'obtenir une bonne reproduction du signal.

Considérons par exemple un signal de vitesse constant tel que :

$$\begin{aligned} \text{Durée du signal} & : T = 0,0228 \text{ s.} \\ \text{Pas de temps} & : \Delta t = 10^{-7} \text{ s} \\ \text{Moyenne} & : V = 1,5 \text{ m/s} \\ \text{Écart-type} & : \sigma = 2 \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

On va ajouter à ce signal constant dans le temps des fluctuations obtenues par l'équation de Langevin. Grâce aux relations (IV.13) et (IV.14), on peut alors déduire les valeurs suivantes :

- échelle temporelle  $T_l = 10^{-6} \text{ s}$ ,
- nombre de valeur  $N = 228000$ .

On cherche la méthode qui reproduit le plus fidèlement possible les valeurs imposées de moyenne, d'écart-type et d'échelle intégrale temporelle.

#### GÉNÉRATEUR DE NOMBRES ALÉATOIRES

Pour pouvoir procéder aux tests, il nous faut tout d'abord un générateur de nombres aléatoires qui permettra d'obtenir la partie "bruit blanc" de l'équation de Langevin. On utilise une méthode de type "*linear congruential generator*" [40][46]. Cette méthode permet de générer une variable aléatoire à distribution uniforme. Les variables aléatoires ainsi

générées sont ensuite réutilisées pour créer une variable aléatoire à distribution normale par l'intermédiaire du théorème centrale limite. Les variables aléatoires sont finalement générées de telle sorte qu'elles suivent une loi de distribution normale de moyenne nulle et de variance unité  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On rappelle que pour une telle loi, la valeur du coefficient de dissymétrie (ou *skewness*) est de 0 et la valeur du coefficient d'aplatissement (ou *kurtosis*) est égale à 3.

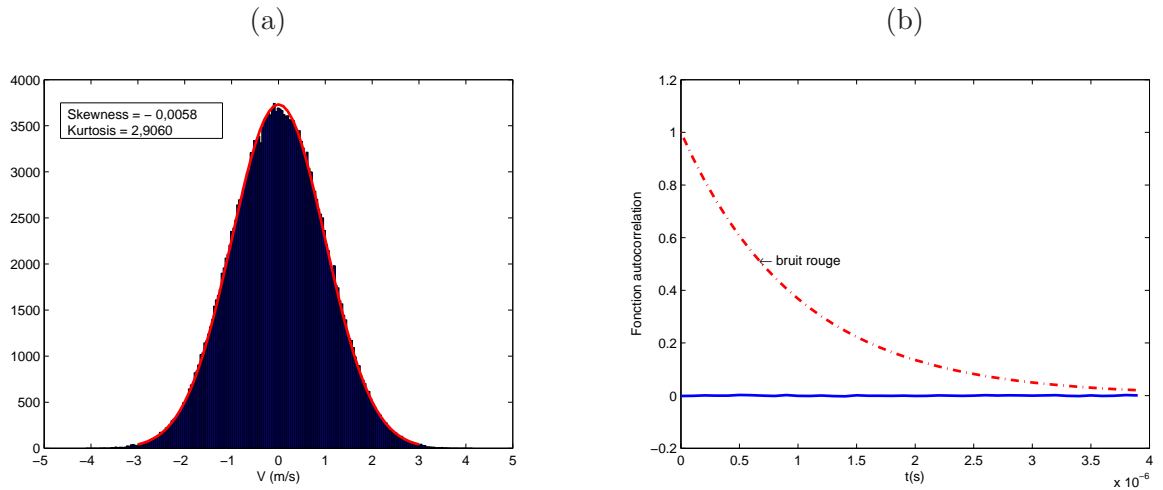


FIGURE IV.1 – Exemple d’histogramme (a) et de fonction d’autocorrélation (b) obtenus lors de la génération de variables aléatoires à distribution gaussienne par la méthode “*linear congruential generator*” pour une suite de 228000 nombres.

On constate sur la figure (IV.1 a) que l’histogramme suit bien une distribution normale avec des valeurs de coefficient de dissymétrie et du coefficient d’aplatissement en accord avec les valeurs théoriques. Sur la figure (IV.1 b), on a tracé l’évolution de la fonction d’autocorrélation pour les variables à distribution gaussienne générées par la méthode “*linear congruential generator*” et l’évolution théorique d’un bruit rouge (expression IV.10). On constate bien que pour les variables à distribution gaussienne la répartition de la fonction d’autocorrélation reste nulle et constante dans le temps, c’est-à-dire qu’il n’y a aucune corrélation temporelle des variables, comme cela doit être le cas pour un bruit blanc.

Numériquement, la fonction d’autocorrélation  $F_k$  est estimée par :

$$F_k(t) = \frac{C_k(t)}{C_0} \quad (\text{IV.16})$$

avec :

$$C_k(t) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (v_t - \bar{v})(v_{t+k} - \bar{v}) \quad (\text{IV.17})$$

où  $v$  est la variable pour laquelle on veut calculer la fonction d'autocorrélation, et  $\bar{v}$  est la moyenne.

#### MÉTHODE 1 : MÉTHODE EULER-MARUYAMA

L'équation de Langevin (IV.9) peut être linéarisée suivant la méthode Euler-Maruyama ci-dessous [59] :

$$V(t + \Delta t) = \left(1 - \frac{\Delta t}{T_l}\right)V(t) + \sigma \sqrt{\frac{2\Delta t}{T_l}}\omega(t) \quad (\text{IV.18})$$

où  $\omega(t)$  est une variable aléatoire indépendante normale de moyenne nulle et de variance unité  $\omega(t) \in \mathcal{N}(0, 1)$  (ou bruit blanc).

On teste cette méthode pour un signal ayant les caractéristiques résumées en (IV.15). L'évolution temporelle du signal généré par l'équation de Langevin après résolution avec la méthode d'Euler-Maruyama est tracée sur la figure IV.2a. On constate que le signal constant de départ est effectivement bruité autour de la valeur moyenne désirée de  $1,5 \text{ m.s}^{-1}$ . On remarque également que la DSP du signal décroît avec une pente en  $f^{-2}$ , comme prévu (figure IV.2b). De plus, le caractère gaussien des fluctuations est respecté (figure IV.2c) et la fonction d'autocorrélation (figure IV.2d) suit bien la forme théorique attendue (expression IV.10). L'analyse du signal bruité après application du bruit rouge filtré donne les valeurs suivantes :

- Échelle temporelle =  $8,4235995 \times 10^{-7} \text{ s}$  (erreur relative = 16%).
- Moyenne =  $1,510297$  (erreur relative = 0,7%).
- Écart-type =  $2,049852$  (erreur relative = 2,5%).

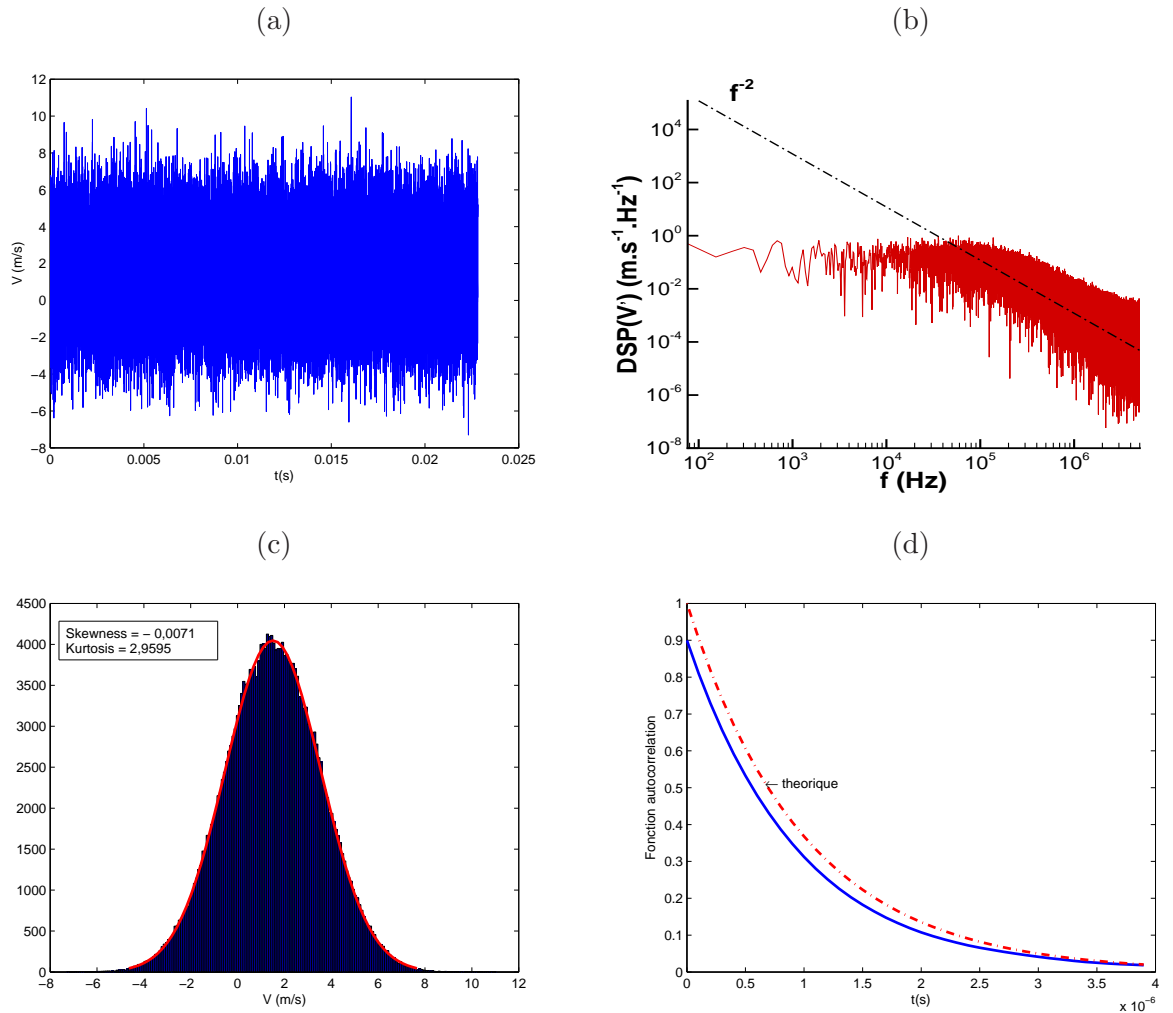


FIGURE IV.2 – Évolution temporelle du signal généré (a), DSP du signal (b), histogramme (c) et fonction d'autocorrélation temporelle du signal (d) obtenus par la méthode de résolution d'Euler-Maruyama.

## MÉTHODE 2

Cette méthode consiste à intégrer directement l'équation (IV.9) sur l'intervalle  $t = [t_0, t_1]$ , ce qui donne [59] :

$$V(t + \Delta t) = \exp\left(\frac{-\Delta t}{T_l}\right)V(t) + \sigma\sqrt{\frac{2\Delta t}{T_l}}\exp\left(\frac{-\Delta t}{T_l}\right)\omega(t) \quad (\text{IV.19})$$

L'évolution temporelle du signal généré avec la méthode de résolution numérique IV.19 est tracée sur la figure IV.3a. Tout comme pour la méthode d'Euler-Maruyama, le signal constant de départ est bruité autour de la valeur moyenne de  $1,5 \text{ m.s}^{-1}$ . La DSP du signal décroît avec une pente en  $f^{-2}$  (figure IV.3b). Les fluctuations sont également à distribution gaussienne (figure IV.3c). Enfin, la fonction d'autocorrélation (figure IV.3d) suit la forme théorique (expression IV.10). L'analyse du signal bruité après application du bruit rouge filtré donne les valeurs suivantes :

- Échelle temporelle =  $8,8884451 \times 10^{-7} \text{ s}$  (erreur relative = 11%).
- Moyenne =  $1,509778$  (erreur relative = 0,7%).
- Écart-type =  $1,898912$  (erreur relative = 5%).

## MÉTHODE 3 : MÉTHODE HYBRIDE

Si on combine les deux méthodes précédentes, on obtient une méthode hybride [59] telle que :

$$V(t + \Delta t) = \exp\left(\frac{-\Delta t}{T_l}\right)V(t) + \sigma\sqrt{1 - \exp\left(\frac{-2\Delta t}{T_l}\right)}\omega(t) \quad (\text{IV.20})$$

Le signal de départ est bruité autour de la valeur moyenne de  $1,5 \text{ m.s}^{-1}$  (figure IV.4a). La DSP du signal décroît avec une pente en  $f^{-2}$  (figure IV.4b), les fluctuations sont à distribution gaussienne (figure IV.4c) et la fonction d'autocorrélation (figure IV.4d) suit la forme théorique (expression IV.10). L'analyse du signal bruité donne les valeurs suivantes :

- Échelle temporelle =  $8,8883496 \times 10^{-7} \text{ s}$  (erreur relative = 11%),
- Moyenne =  $1,510291$  (erreur relative = 0,7%),
- Écart-type =  $1,997937$  (erreur relative = 0,1%).

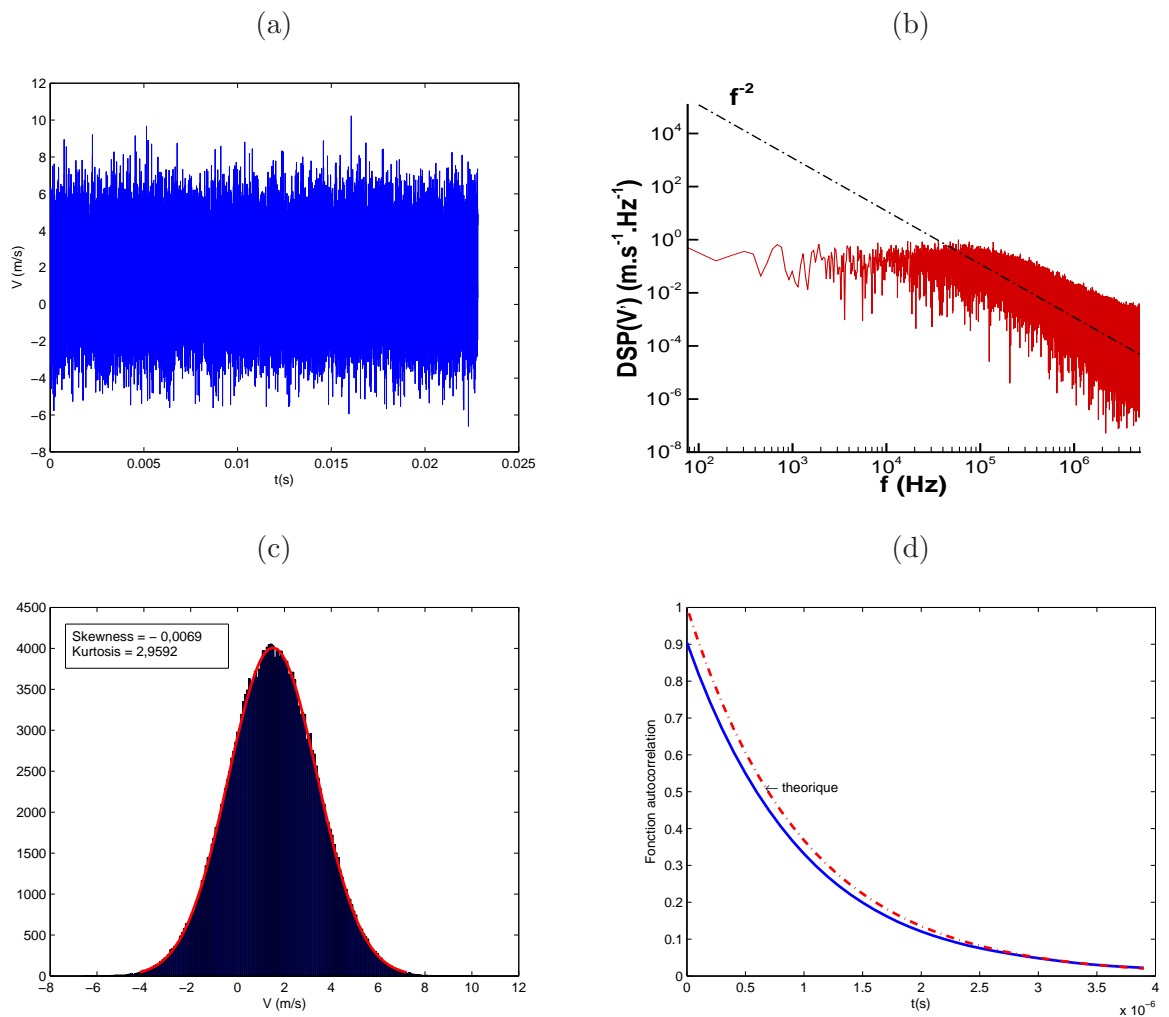


FIGURE IV.3 – Évolution temporelle du signal bruité (a), DSP du signal (b), histogramme (c) et fonction d'autocorrélation temporelle du signal (d) obtenus par la méthode 2.



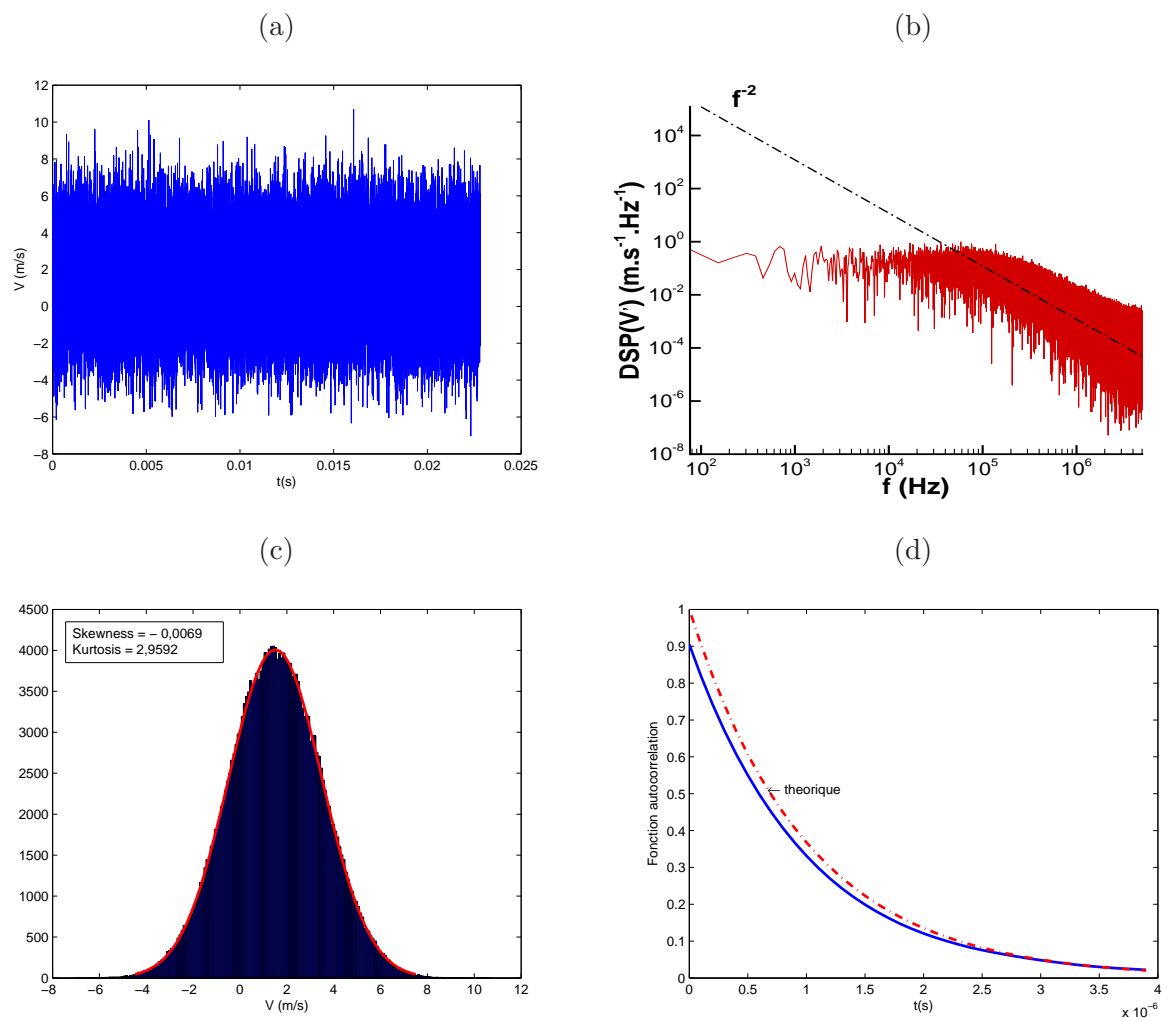


FIGURE IV.4 – Signal généré (a), DSP du signal (b), histogramme (c) et fonction d'auto-corrélation temporelle du signal (d) obtenus par la méthode de résolution hybride.

## RÉSUMÉ DES TESTS - CONCLUSION

On résume maintenant les résultats obtenus avec les différentes méthodes de résolution de l'équation de Langevin. On commence par rappeler les valeurs théoriques des différents paramètres du modèle de bruit rouge filtré :

- échelle temporelle  $T_l = 10^{-6}s$ ,
- moyenne  $M = 1,5$ ,
- écart-type  $\sigma = 2$ ,
- *skewness* = 0,
- *kurtosis* = 3.

Les valeurs de ces mêmes paramètres calculés pour le signal après application du bruit et selon les différentes méthodes de résolution sont résumées dans le tableau IV.1.

Méthode	Échelle temporelle $T_l$	Moyenne $M$	Écart-type $\sigma$	Skewness	Kurtosis
Euler-Maruyama	$8,4235995 \times 10^{-7}s$	1,510297	2,049852	-0,0071	2,9595
<i>Erreur relative</i>	16%	0,7%	2,5%		
Methode 2	$8,8884451 \times 10^{-7}s$	1,509778	1,898912	-0,0069	2,9592
<i>Erreur relative</i>	11%	0,7%	5%		
Hybride	$8,8883496 \times 10^{-7}s$	1,510291	1,997937	-0,0069	2,9592
<i>Erreur relative</i>	11%	0,7%	0,1%		

TABLE IV.1 – Résumé des valeurs des paramètres du bruit rouge pour différentes méthodes de résolution.

Ces résultats tendent à montrer que la méthode de résolution à privilégier est la méthode hybride puisqu'elle permet de générer des fluctuations avec les caractéristiques voulues (échelle temporelle, valeur moyenne, écart-type,...) de façon plus précise que les autres méthodes. C'est donc grâce à la méthode hybride de résolution numérique de l'équation de Langevin que l'on va générer les fluctuations physiques pour les simulations LES instationnaires.

#### IV.2.2.4 Étude du comportement du modèle de Langevin hors écoulement

Avant d'intégrer le modèle de bruit rouge filtré dans CEDRE et de tester son effet sur un écoulement de type VECLA, on commence par étudier hors écoulement l'influence de la variation de certains paramètres du modèle. En effet, si certaines caractéristiques sont fixées, comme par exemple la décroissance du spectre en  $f^{-2}$  ou la distribution gaussienne, en revanche d'autres éléments peuvent être modulés : on peut notamment choisir la valeur du pas de temps, de l'échelle temporelle, de l'écart-type ou du temps physique total sur lequel le bruit est appliqué. Nous cherchons ici à examiner l'effet de la variation de ces critères modulables sur les fluctuations générées.

##### ÉTUDE DE L'INFLUENCE DU TEMPS TOTAL SIMULÉ $T_{total}$

On peut se demander quelle est l'influence du temps total  $T_{total}$  sur lequel est appliqué le bruit sur la qualité des résultats. Pour s'en rendre compte, on a effectué des tests d'ajout de bruit rouge filtré sur un temps total simulé  $T_{total}$  variable pour un signal constant de quantité de mouvement moyenne  $m = 5 \text{ kg.m/s}$ , avec un pas de temps  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ , un écart-type  $\sigma = 0,106$  et une échelle temporelle  $T_L = 0,12 \times 10^{-3} \text{ s}$  (ce qui donne  $\Delta t/T_L \approx 8,33 \times 10^{-4}$ ). Les résultats de l'analyse des signaux obtenus sont tracés sur la figure IV.5. Pour tous les paramètres caractéristiques du bruit, on observe que pour  $T_{total}/T_L < 200$  environ, ceux-ci ne sont plus correctement estimés. Ces résultats semblent pouvoir s'expliquer par le fait qu'il faut générer suffisamment de données discrétisées (c'est-à-dire faire un nombre assez important d'itérations, autrement dit avoir un temps total  $T_{total}$  suffisamment grand) pour obtenir un signal représentatif et exploitable. Ainsi, augmenter la taille de l'échantillon permet de diminuer le biais statistique. Du fait de ces constatations, on prendra par la suite :

$$\frac{T_{total}}{T_L} \geq 200 \quad (\text{IV.21})$$

##### ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE L'ÉCART-TYPE $\sigma$

On regarde maintenant l'influence de l'écart-type  $\sigma$  sur le signal. Les résultats des tests pour différentes valeurs de  $\sigma$  sont présentés sur la figure IV.6. La figure IV.6a représente l'évolution de l'écart-type du signal bruité en fonction de sa valeur théorique imposée : la simulation reproduit bien la valeur souhaitée, avec l'apparition de très légères différences quand l'écart-type imposé augmente. L'échelle temporelle du signal calculé (figure IV.6 b) reste égale à sa valeur théorique quel que soit l'écart-type imposé. La même tendance est observée pour le *skewness* (figure IV.6 c), le *kurtosis* (figure IV.6 c) et la valeur moyenne (figure IV.6 d) du signal simulé. L'évolution des valeurs maximales et minimales du signal simulé en fonction de l'écart-type imposé (figure IV.6 d) montre que plus celui-ci est grand, plus l'amplitude des fluctuations est importante. Ce constat est en accord avec la définition même de l'écart-type.

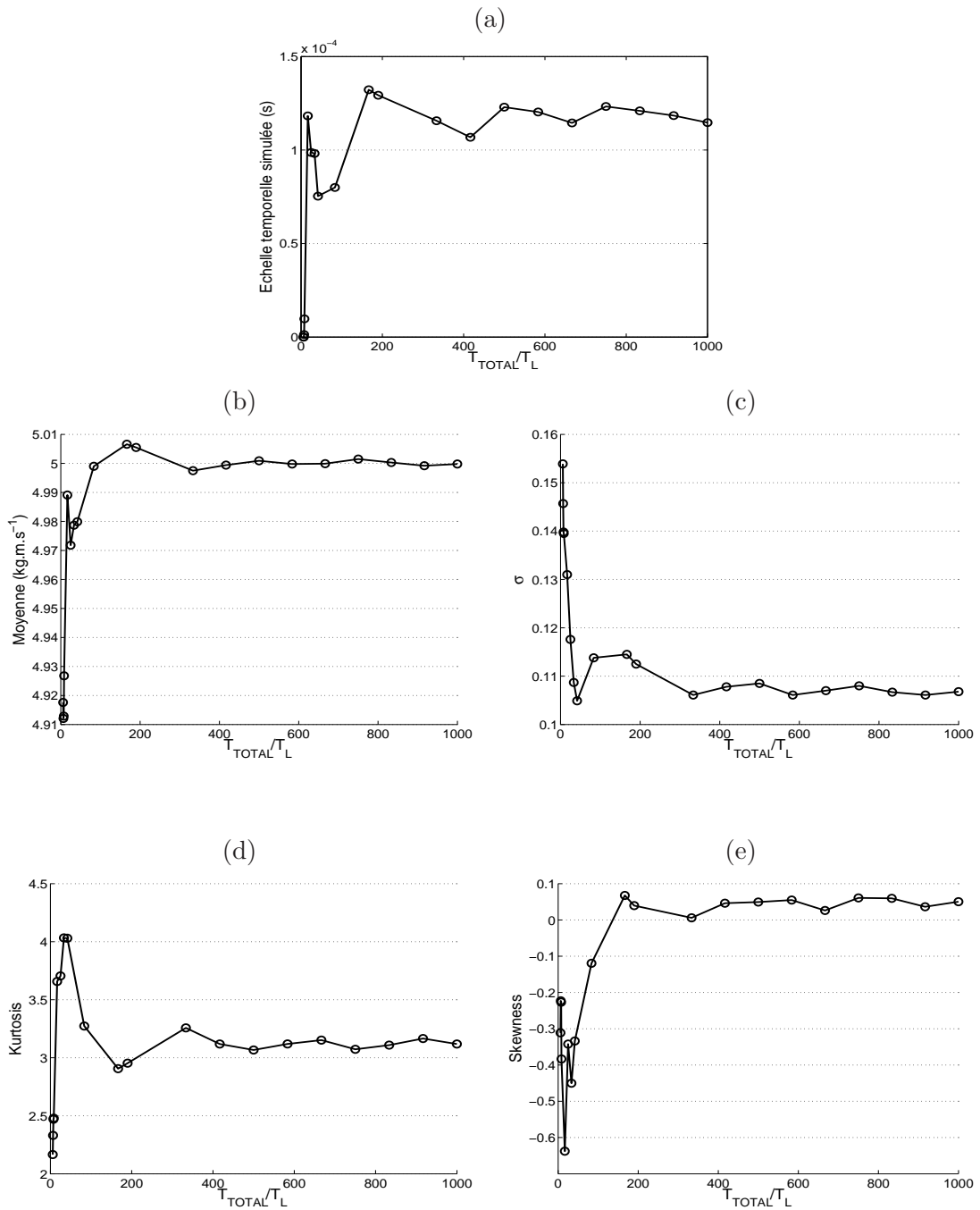


FIGURE IV.5 – Évolution de l'échelle temporelle générée par le modèle de Langevin (a), de la moyenne (b), de l'écart-type  $\sigma$  (c), du kurtosis (d) et du skewness (e) en fonction du temps total simulé  $T_{Total}$  adimensionné par l'échelle temporelle  $T_L$ .

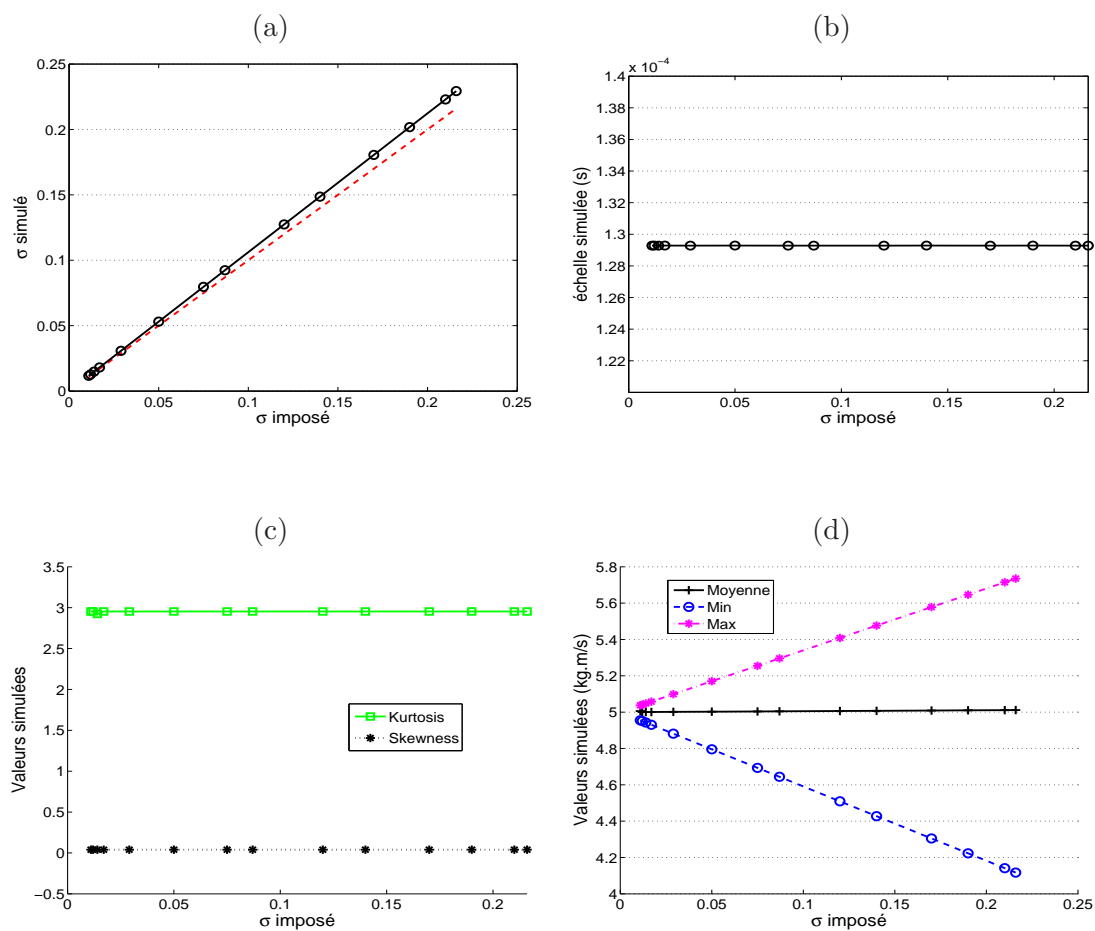


FIGURE IV.6 – Évolution de l'écart-type  $\sigma$  généré par le modèle de Langevin (a), de l'échelle temporelle (b), du *kurtosis* et du *skewness* (c) et des valeurs moyennes, minimum et maximum du signal (d) en fonction de l'écart-type imposé.

INFLUENCE DU RAPPORT  $\frac{\Delta t}{T_L}$ 

Intéressons-nous maintenant à l'influence du rapport  $\frac{\Delta t}{T_L}$  sur les résultats. Wilson & Zhuang [88] ont établi qu'il n'existe pas de limite inférieure pour le choix de  $\Delta t$  mais qu'en ce qui concerne la limite supérieure, il faut prendre garde à la valeur du rapport  $\frac{\Delta t}{T_L}$ . Celui-ci peut en effet avoir des conséquences sur le spectre du processus [88]. Nguyen [59] a comparé les spectres de signaux générés pour des rapports de  $\Delta t/T_L$  compris entre 0,001 et 0,5 et il a constaté le changement du spectre selon la valeur de  $\Delta t/T_L$  testées. Pour  $\frac{\Delta t}{T_l} \approx 0,5$ , la discrétisation en temps génère alors une erreur de l'ordre de 15% sur le spectre, ce qui reste acceptable [59]. Wilson & Zhuang [88] ont établi que la condition  $\frac{\Delta t}{T_l} \approx 0,1$  permet d'obtenir une bonne reproduction du signal. De ce fait, pour les simulations, on essaiera autant que possible d'avoir  $\Delta t/T_l \approx 0,1$  tout en respectant le critère suivant :

$$\frac{\Delta t}{T_l} \leq 0,5 \quad (\text{IV.22})$$

## CONCLUSION DES TESTS

On a procédé à une étude de l'influence de la variation des paramètres du modèle de bruit rouge filtré sur les fluctuations générées. Cela a permis de constater les effets produits et de mettre en évidence les critères à respecter pour l'obtention de perturbations avec les paramètres voulus. En résumé, on a :

- $\frac{\Delta t}{T_l} \leq 0,5$ .
- $\frac{T_{total}}{T_l} \geq 200$ .
- Plus  $\sigma$  augmente, plus l'amplitude des fluctuations est importante.

## IV.2.3 Implantation du modèle de bruit rouge filtré dans le code CEDRE

### IV.2.3.1 Stratégie d'implantation dans CEDRE

On veut que le modèle de bruit rouge filtré sélectionné soit utilisé pour ajouter des fluctuations lors de l'injection de fluide dans le canal. En première approche, on pense à implanter le modèle comme une condition aux limites, en l'adaptant par exemple à la condition aux limites d'injection de débit constant employée pour toutes les simulations menées jusqu'à présent. L'ajout de fluctuations (bruit blanc) à une condition limite d'injection de débit constant a déjà été testé par d'autres auteurs [4][54][86][87]. Cependant, il a été remarqué que lorsque le bruit blanc est employé comme condition aux limites, les fluctuations introduites dans le canal se retrouvent rapidement dissipées. Les perturbations ainsi introduites dans l'écoulement sont très vite amorties, rendant la condition limite d'injection à débit fluctuant quasi-similaire à celle à débit constant... On peut alors envisager d'étudier les raisons de ce phénomène pour ensuite tenter d'y remédier et ainsi éventuellement pouvoir greffer notre modèle de bruit rouge filtré à la condition limite. Une autre alternative s'offre à nous et une deuxième approche est envisageable en exploitant les caractéristiques du code de calcul CEDRE. En effet, une fonctionnalité d'ajout de sources existe dans le code CEDRE et sa complexité moindre par rapport aux conditions limites permet d'entrevoir une possibilité d'adaptation plus simple et rapide pour notre modèle de bruit. Ainsi, on choisit de coder le modèle de bruit rouge filtré comme une source ajoutée à l'intérieur du canal au niveau de la paroi injectante.

On commence par exposer la fonctionnalité de prise en compte de sources dans le code CEDRE. Puis on passe à la façon dont on a greffé le bruit rouge filtré pour l'adapter à la structure déjà existante.

### IV.2.3.2 Prise en compte de sources dans CEDRE

Dans le code CEDRE, la source  $S(x, y, z, t)$  est appliquée sur les variables conservatives  $q$  et a autant de composantes  $n_q$  qu'il y a d'équations de bilan, soit [84] :

- les composantes pour les sources de masse, avec une composante pour chaque espèce (avec  $n_{esp}$  espèces),
- les trois composantes pour les sources de quantité de mouvement,
- la composante pour la source d'énergie totale,
- les composantes pour les sources associées aux  $n_{sca}$  scalaires supplémentaires éventuels (avec une composante pour chaque scalaire).

Au total, on a donc  $n_q = 4 + n_{esp} + n_{sca}$ . La définition de l'amplitude de la source se fait en deux étapes. La première consiste à spécifier la distribution spatiale de la source et la deuxième à définir sa variation temporelle éventuelle. Les composantes de la source sont

alors de la forme :

$$S_j = F(t) \cdot G(x, y, z) \cdot \gamma_j \quad (\text{IV.23})$$

avec  $j = 1, n_q$ ,  $\gamma_j$  réfère à la composante considérée,  $G$  définit la partie purement spatiale de la source et  $F(t)$  son éventuelle dépendance temporelle.

#### DISTRIBUTION SPATIALE DE LA SOURCE

Deux fonctions sont disponibles dans CEDRE pour définir la distribution spatiale, c'est-à-dire la fonction  $G$  précédente (formule IV.23). On peut choisir entre [84] :

– une **gaussienne**, telle que :

$$G(x, y, z) = \exp \left[ - \left( \frac{(x - x_0)^2}{a_x^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a_y^2} + \frac{(z - z_0)^2}{a_z^2} \right) \right] \quad (\text{IV.24})$$

avec les paramètres  $x_0, y_0, z_0, a_x, a_y, a_z$  à définir selon la gaussienne voulue.

– un **créneau à support parallélépipédique** tel que :

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= 1 \text{ si } x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2, z_1 < z < z_2 \\ G(x, y, z) &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

avec les paramètres  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_2, y_2, z_2$  à définir selon le parallélépipède voulu.

#### VARIATION TEMPORELLE DE LA SOURCE

Si la source dépend du temps, la fonction  $F(t)$  définit la forme de la variation temporelle. Dans le code CEDRE, plusieurs types sont disponibles. Parmi ceux-là, on a par exemple [84] :

– une **rampe** de  $t_1$  à  $t_2$ , telle que :

$$\begin{aligned} F(t) &= a \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \text{ si } t_1 \leq t \leq t_2 \\ F(t) &= 0 \text{ si } t < t_1 \\ F(t) &= a \text{ si } t > t_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

– une **gaussienne** centrée sur  $t_1$  et d'écart-type  $t_2$ , telle que :

$$F(t) = a \cdot \exp \left[ - \left( \frac{t - t_1}{t_2} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.27})$$

– un **sinus** de fréquence  $f_1$  sur l'intervalle  $[t_1, t_2]$  :

$$\begin{aligned} F(t) &= a \cdot \sin [2\pi f_1 (t - t_1)] \text{ si } t_1 \leq t \leq t_2 \\ F(t) &= 0 \text{ si } t < t_1 \text{ ou } t > t_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$



– une **sirène** entre les fréquences  $f_1$  et  $f_2$  avec :

$$\begin{aligned} F(t) &= a. \sin [2\pi f_1(t - t_3)] \text{ si } t < t_1 \\ F(t) &= a. \sin [2\pi f_{12}(t - t_3)] \text{ si } t_1 \leq t \leq t_2 \\ F(t) &= a. \sin [2\pi f_2(t - t_3)] \text{ si } t > t_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

$$\text{avec } f_{12} = f_1 + (f_2 - f_1) \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}.$$

Comme on le voit sur ces exemples, il faut fixer la valeur d'un certain nombre de paramètres pour définir ces fonctions temporelles. Dans le code CEDRE, il est prévu que les valeurs de six paramètres au maximum puissent être spécifiées :

- un réel pour définir la valeur d'une amplitude  $a$ ,
- un réel pour définir la valeur d'un instant  $t_1$ ,
- un réel pour définir la valeur d'un instant  $t_2$ ,
- un réel pour définir la valeur d'un instant  $t_3$ ,
- un réel pour définir la valeur d'une fréquence  $f_1$ ,
- un réel pour définir la valeur d'une fréquence  $f_2$ .

### IV.2.3.3 Adaptation du modèle de bruit rouge filtré à la structure des sources

Pour intégrer notre modèle de bruit rouge filtré dans le code CEDRE, on utilise la fonction  $G(x, y, z)$  de définition de la distribution spatiale des sources telle qu'elle est codée dans CEDRE. En revanche, un travail d'adaptation est nécessaire pour la spécification de la variation temporelle. En effet, actuellement, la prise en compte de la partie temporelle des sources s'effectue pendant l'intégration temporelle. Or, du fait de sa formulation (relation IV.20), pour appliquer la source de bruit rouge filtré  $\mathcal{S}$ , on voudrait que celle-ci soit prise en compte en dehors de l'intégration temporelle, en fin de pas de temps. Ainsi, on voudrait que notre modèle de source temporelle de bruit rouge  $\mathcal{S}$  soit pris en compte de la façon suivante :

$$q^{n+1} = q_*^{n+1} + C \times \mathcal{S} \quad (\text{IV.30})$$

où  $q_*^{n+1}$  correspond aux variables conservatives calculées par CEDRE hors source de bruit rouge et où  $\mathcal{S} = [\rho_S, (\rho v_x)_S, (\rho v_y)_S, (\rho v_z)_S, (\rho E)_S]^t$ , avec, d'après (IV.20) :

$$\mathcal{S}(t + \Delta t) - \mathcal{S}(t) = \left[ \exp\left(-\frac{\Delta t}{T_L}\right) - 1 \right] \mathcal{S}(t) + \sigma \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{2\Delta t}{T_L}\right)} w(t) \quad (\text{IV.31})$$

Dans la relation (IV.30), le vecteur  $C = [C(\rho), C(\rho v_x), C(\rho v_y), C(\rho v_z), C(\rho E)]^t$  permet de préciser sur quelle variable conservative la source de bruit rouge est appliquée. La valeur des coefficients de  $C$  règle l'amplitude des fluctuations sur l'ensemble du volume sur lequel la source de bruit rouge est imposée. Ce volume est défini par l'intermédiaire de la fonction  $G(x, y, z)$  caractérisant la distribution spatiale de la source. Ainsi, l'implantation du

modèle de bruit rouge dans le code CEDRE implique que l'amplitude des fluctuations générées ne dépend plus uniquement de la valeur de l'écart-type du modèle, mais également de la valeur des coefficients de  $C$  et du volume sur lequel les perturbations sont appliquées.

L'intégration dans CEDRE consiste donc à ajouter une option permettant de spécifier que dans le cas d'une source temporelle de bruit rouge filtré, il ne faut pas la considérer pendant la phase d'intégration temporelle. Dans un deuxième temps, on a créé une nouvelle fonction dans CEDRE de prise en compte de la source temporelle en dehors de la phase d'intégration temporelle, en se basant sur la structure déjà existante et en apportant toutes les modifications nécessaires. On a également créé de nouvelles fonctions, telle que celle permettant de créer une variable aléatoire à distribution normale (bruit blanc) ou celle assemblant les différents éléments du modèle selon la formulation (IV.31).

#### IV.2.4 Étude du bruit rouge après implantation dans CEDRE

Les tests effectués ci-après ont pour objectif de déterminer comment va être interprété le modèle de bruit rouge par le code CEDRE. Pour ces calculs, on considère un domaine de calcul bidimensionnel de dimension  $(10^{-3} \times 10^{-3}) m^2$ . Le maillage est constitué d'une seule maille, avec  $\Delta x = \Delta y = 10^{-3} m$ . Des conditions de paroi sont imposées sur toutes les limites du domaine. La source de bruit rouge est appliquée sur la totalité du volume de la cellule. Les conditions de calcul sont résumées dans le tableau IV.2.

Pour activer la source de bruit rouge filtré dans CEDRE, il faut spécifier les valeurs des coefficients du vecteur  $C$  permettant de préciser sur quelle variable conservative la source de bruit rouge est appliquée :

$$C = \begin{pmatrix} C(\rho) \\ C(\rho v_x) \\ C(\rho v_y) \\ C(\rho v_z) \\ C(\rho E) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.32})$$

La valeur des coefficients de  $C$  est fixée de façon arbitraire selon les tests, de telle sorte que l'amplitude des fluctuations soient suffisamment importante pour que celles-ci soient observées sur les signaux temporels des variables bruitées.

Étant donné que l'on utilise une seule cellule de calcul avec des conditions de paroi sur toutes les faces, alors les flux sont toujours nuls en fonction du temps. Cette propriété nous permet alors d'étudier comment le bruit 'volumique' va être interprété dans le code CEDRE. Finalement, lors du calcul, le schéma itératif résolu prend en compte la source

Maillage	$\Delta x = \Delta y = 10^{-3} \text{ m}$
Conditions aux limites	Condition de paroi sur les 4 côtés
Conditions initiales	$P_0 = 101325 \text{ Pa}$ $T_0 = 300 \text{ K}$ $\rho_0 = 1,1780 \text{ kg.m}^{-3}$ $v_0 = 0 \text{ m/s}$
Pas de temps	$\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$
Temps physique total simulé	$T_{\text{TOTAL}} = 0,06 \text{ s}$
Discrétisation d'espace	ODFI, ordre 2
Intégration en temps	Implicite d'ordre 2
Paramètres du modèle de bruit rouge	Échelle temporelle $T_L = 1,2 \times 10^{-4} \text{ s}$ Écart-type $\sigma = 0,05$

TABLE IV.2 – Données de calcul pour le test du comportement du modèle de bruit rouge dans CEDRE.

de bruit rouge  $\mathcal{S}$  en l'appliquant sur les variables conservatives  $q$  de la façon suivante :

$$q^{n+1} = q^n + C \times \mathcal{S}^n \quad (\text{IV.33})$$

avec pour conditions initiales :

$$q_0 = \begin{pmatrix} (\rho)_0 \\ (\rho v_x)_0 \\ (\rho v_y)_0 \\ (\rho v_z)_0 \\ (\rho E)_0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.34})$$

La solution  $q(t)$  dépend donc uniquement des conditions initiales du problème et de la source de bruit rouge.

Les paramètres de calcul listés dans le tableau IV.2 sont calibrés de façon à ce que le modèle de bruit rouge puisse fonctionner de manière optimale, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{\Delta t}{T_L} \leq 0,5 \quad (\text{IV.35})$$

$$\frac{T_{\text{TOTAL}}}{T_L} \geq 200 \quad (\text{IV.36})$$

Lors de l'utilisation de la source de bruit rouge dans CEDRE, on spécifie les paramètres du modèle de bruit rouge suivants :

- Échelle temporelle théorique  $T_L$
- Écart-type théorique  $\sigma$

Si on applique le modèle de bruit rouge sur une variable lors d'un calcul CEDRE, on doit théoriquement retrouver l'échelle temporelle théorique  $T_L$  imposée dans le signal correspondant à l'évolution temporelle de la variable. En revanche, l'écart-type du signal calculé par CEDRE correspond à sa valeur théorique  $\sigma$  à des coefficients multiplicatifs près. En effet, il faut prendre en compte le volume de la cellule (ou des cellules) sur lequel on applique le bruit rouge. Ainsi, la valeur de l'écart-type calculé  $\sigma_C$  doit être égal à :

$$\sigma_C(\text{Variable bruitée}) = \sigma \times (\text{Volume sur lequel le bruit rouge est appliqué}) \quad (\text{IV.37})$$

Lors du calcul, le bruit rouge est appliqué sur la totalité du domaine de calcul et les évolutions temporelles de la masse volumique  $\rho$ , de la pression  $P$ , de la température  $T$  et des vitesses longitudinale  $v_x$  et transversale  $v_y$  sont relevées par un capteur placé au centre du domaine.

#### IV.2.4.1 Modèle de bruit rouge sur l'énergie

On commence par tester l'activation du bruit rouge uniquement sur la variable conservative  $\rho E$ . Ainsi, on donne au vecteur  $C$  les valeurs d'activation de la source bruit rouge suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10^6 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.38})$$

#### RÉSULTATS DU CALCUL

	$\rho$	$P$	$T$	$v_x$	$v_y$	$\rho E$
Signal bruité ?	NON	OUI	OUI	NON	NON	OUI
Valeur moyenne	1,1780 $kg.m^{-3}$	$1,0133 \times 10^5$ $Pa$	300 $K$	0 $m.s^{-1}$	0 $m.s^{-1}$	$2,5329 \times 10^5$ $m^2.s^{-2}$
Écart-type $\sigma$	×	0,0191	$5,6624 \times 10^{-5}$	×	×	0,0478
<i>Skewness</i>	×	-0,0093	-0,0093	×	×	-0,0093
<i>Kurtosis</i>	×	2,9902	2,9901	×	×	2,9902
Échelle temporelle ( $s$ )	×	$8,1597 \times 10^{-5}$	$8,1566 \times 10^{-5}$	×	×	$8,1566 \times 10^{-5}$

TABLE IV.3 – Résultats de calcul pour le test du comportement du modèle de bruit rouge dans CEDRE lors de l'application du bruit rouge sur l'énergie.

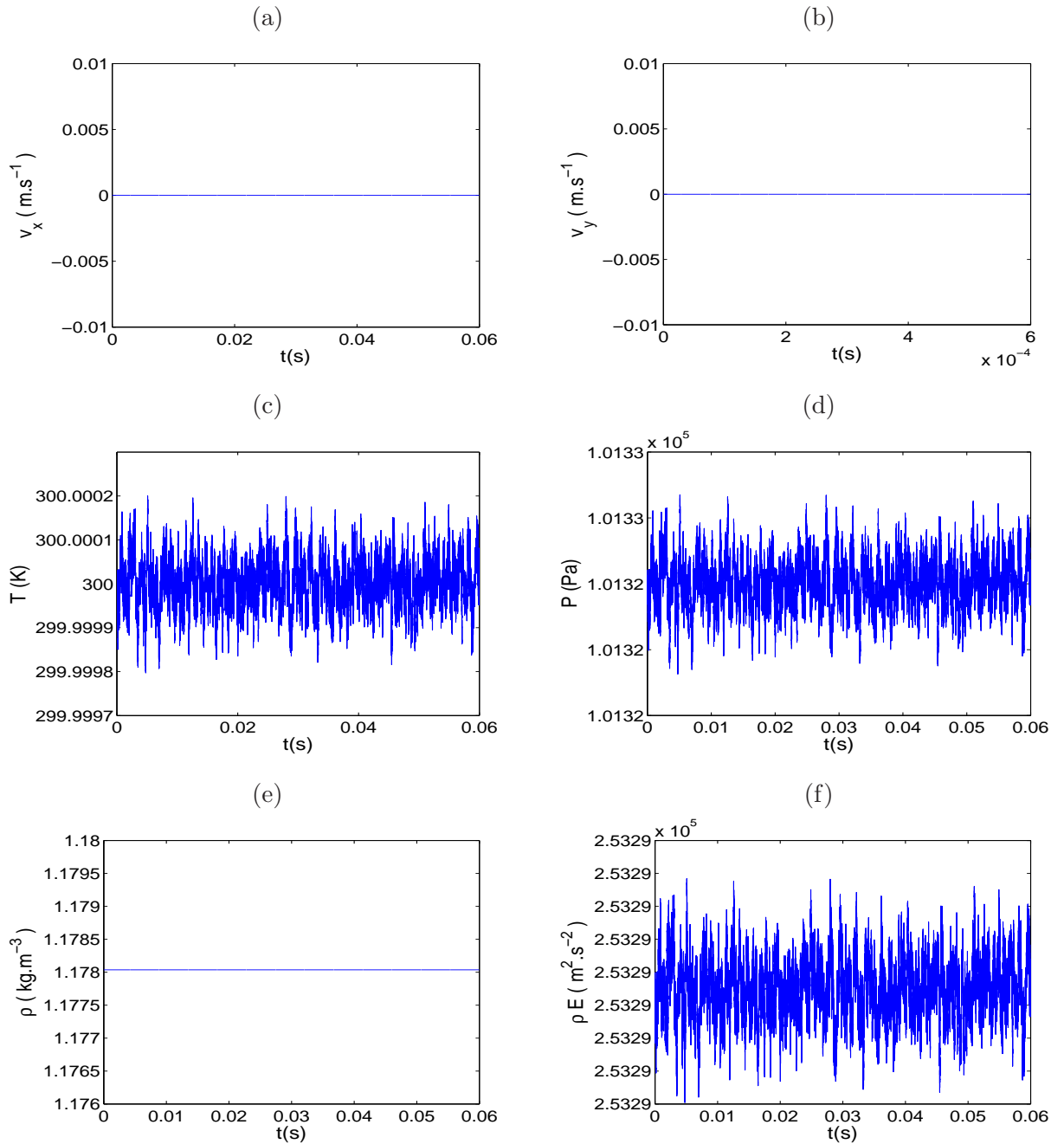


FIGURE IV.7 – Évolution temporelle de la vitesse longitudinale  $v_x$  (a), de la vitesse transversale  $v_y$  (b), de la température  $T$  (c), de la pression  $P$  (d), de la masse volumique  $\rho$  (e) et de la variable conservative  $\rho E$  (f) pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative ( $\rho E$ ).

## ANALYSE DES RÉSULTATS

D'après les évolutions temporelles des différentes variables du calcul (figure IV.7), le cas-test où l'on applique du bruit rouge sur la variable conservative ( $\rho E$ ) produit du bruit sur la pression et la température, alors que les vitesses longitudinale et transversale, ainsi que la masse volumique restent constantes tout au long du calcul.

On peut expliquer ces résultats en détaillant le schéma itératif résolu au cours de ce calcul sur les variables conservatives. D'après (IV.33), lors du calcul CEDRE à l'itération  $n + 1$ , on a alors :

$$\begin{pmatrix} (\rho)^{n+1} \\ (\rho v_x)^{n+1} \\ (\rho v_y)^{n+1} \\ (\rho v_z)^{n+1} \\ (\rho E)^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\rho)^n \\ (\rho v_x)^n \\ (\rho v_y)^n \\ (\rho v_z)^n \\ (\rho E)^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C(\rho E) \end{pmatrix} \times \mathcal{S}^n \quad (\text{IV.39})$$

En développant le système (IV.39), on a :

$$(\rho)^{n+1} = (\rho)^n = (\rho)_0 \quad (\text{IV.40})$$

$$(\rho v_i)^{n+1} = (\rho v_i)^n = (\rho v_i)_0 \quad (\text{IV.41})$$

$$(\rho E)^{n+1} = (\rho E)^n + C(\rho E) \times \mathcal{S}^n = (\rho E)_0 + C(\rho E) \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \quad (\text{IV.42})$$

**Analyse des résultats sur la vitesse  $v$  et la masse volumique  $\rho$** 

D'après (IV.40) et (IV.41), pour ce calcul on doit retrouver des valeurs des vitesses et de la masse volumique constantes dans le temps, telles que  $v_x(t) = v_y(t) = v_0 = 0 \text{ m/s}$  pour les vitesses et  $\rho(t) = \rho_0 = 1,1780 \text{ kg.m}^{-3}$ . Ce comportement théorique est bien retrouvé lors du calcul CEDRE, comme on le constate sur les tracés des évolutions temporelles des composantes de la vitesse et la masse volumique (figures IV.7 a, b et e).

**Analyse des résultats sur la température  $T$** 

Tentons maintenant d'expliquer les variations de température observées sur la figure IV.7c. Pour cela, repartons du bruit rouge initialement appliqué sur la variable conservative ( $\rho E$ ). On rappelle ci-dessous la définition de l'énergie totale  $E$  :

$$\begin{aligned} E &= C_v T + \frac{1}{2} v^2 \\ &= C_v T + \frac{1}{2} \left[ \frac{(\rho v)}{\rho} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.43})$$

Il apparait que cette énergie totale  $E$  s'exprime en fonction de la température. Or, en introduisant la définition de l'énergie totale (IV.43) dans l'expression (IV.42), on obtient :

$$\begin{aligned} (\rho E)^{n+1} &= (\rho E)_0 + C(\rho E) \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \\ &= \rho_0 \left[ C_v T_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{(\rho v)_0}{\rho_0} \right)^2 \right] + C(\rho E) \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \end{aligned} \quad (\text{IV.44})$$

soit

$$\rho^{n+1} \left[ C_v T^{n+1} + \frac{1}{2} \left( \frac{(\rho v)^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right)^2 \right] = \rho_0 \left[ C_v T_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{(\rho v)_0}{\rho_0} \right)^2 \right] + C(\rho E) \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \quad (\text{IV.45})$$

d'où, d'après (IV.40) et (IV.41) :

$$\rho_0 \left[ C_v T^{n+1} + \frac{1}{2} \left( \frac{(\rho v)_0}{\rho_0} \right)^2 \right] = \rho_0 \left[ C_v T_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{(\rho v)_0}{\rho_0} \right)^2 \right] + C(\rho E) \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \quad (\text{IV.46})$$

En développant la relation (IV.46), on finit par trouver l'expression de la température  $T$  à l'itération  $n + 1$  :

$$T^{n+1} = T_0 + \frac{C(\rho E)}{\rho_0 C_v} \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \quad (\text{IV.47})$$

On vient donc de montrer que l'application de bruit rouge sur la variable conservative  $(\rho E)$  entraîne une variation de la température  $T$  selon le schéma itératif (IV.47). Ce dernier prédit que la température  $T$  est perturbée autour de la valeur moyenne  $T_0$  par le bruit rouge imposé sur  $(\rho E)$  au coefficient multiplicatif  $\frac{C(\rho E)}{\rho_0 C_v}$  près.

D'après la figure IV.7c et le tableau de résultats IV.3, on constate que l'évolution temporelle de la température est bien bruitée autour de la valeur moyenne  $T_0 = 300 \text{ K}$ . De plus, pour la température, l'échelle temporelle relevée dans le tableau IV.3 correspond approximativement à la valeur théorique imposée. Ce résultat est confirmé par le tracé de la figure C.1a où la fonction d'autocorrélation de la température suit bien l'évolution théorique. La DSP du signal (figure C.1b) décroît en  $f^{-2}$ , prouvant que la température est bien perturbée par du bruit rouge. De plus, le bruit est bien gaussien, comme le prouve l'histogramme de la figure C.1c et les valeurs des coefficients *skewness* et *kurtosis* (tableau IV.3) qui sont proches des valeurs théoriques de la gaussienne (*skewness*<sub>gaussien</sub> = 0 et *kurtosis*<sub>gaussien</sub> = 3). La dernière donnée à exploiter est l'écart-type calculé par CEDRE  $\sigma_{\text{CEDRE}}(T)$ . D'après (IV.47), cette valeur est égale à la valeur théorique de l'écart-type ( $\sigma \times \text{Volume}$ ) au coefficient multiplicatif  $\frac{C(\rho E)}{\rho_0 C_v}$  près. Donc on a :

$$\sigma_{\text{CEDRE}}(T) = \frac{C(\rho E)}{\rho_0 C_v} \times \sigma \times \text{Volume de la cellule} \quad (\text{IV.48})$$



Numériquement, l'application de la formule (IV.48) donne :

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{CEDRE}}(T) &= \frac{10^6}{1,178 \times 716,71} \times 0,05 \times (10^{-3})^2 \\ &\approx 5,9222 \times 10^{-5}\end{aligned}\quad (\text{IV.49})$$

D'après le tableau IV.3, l'écart-type  $\sigma_{\text{CEDRE}}(T)$  du signal temporel pour la température est bien à peu près égal à sa valeur théorique  $\sigma_{\text{CEDRE}}$ .

### Analyse des résultats sur la pression $P$

De la même manière que le bruit imposé sur  $(\rho E)$  entraîne une variation de la température par l'intermédiaire de l'énergie totale, la variation de température entraîne à son tour une variation de la pression  $P$  via l'équation d'état, que l'on rappelle ci-dessous :

$$P = \rho r T \quad (\text{IV.50})$$

Ainsi, à l'itération  $n + 1$ , la pression s'exprime par :

$$P^{n+1} = \rho^{n+1} r T^{n+1} \quad (\text{IV.51})$$

En prenant en compte (IV.40) et (IV.47), cette expression (IV.51) devient :

$$\begin{aligned}P^{n+1} &= \rho_0 r \left( T_0 + \frac{C(\rho E)}{\rho_0 C_v} \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \right) \\ &= \rho_0 r T_0 + \frac{r C(\rho E)}{C_v} \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \\ &= P_0 + \frac{r C(\rho E)}{C_v} \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k\end{aligned}\quad (\text{IV.52})$$

L'expression (IV.52) prouve que la pression  $P$  est perturbée autour de la valeur moyenne  $P_0$  par le bruit rouge imposé sur  $(\rho E)$  au coefficient multiplicatif  $\frac{r C(\rho E)}{C_v}$  près.

Le tracé de la figure IV.7d ainsi que les résultats du tableau IV.3 suivent les prédictions théoriques démontrées précédemment en prouvant que l'évolution temporelle de la pression est bien bruitée autour de la valeur moyenne  $P_0 = 101325 \text{ Pa}$ . La décroissance de la DSP du signal (figure C.2b) en  $f^{-2}$  confirme que le bruit est rouge. L'histogramme de la figure C.2c ainsi que les valeurs des coefficients *skewness* et *kurtosis* (tableau IV.3) montrent que ce bruit est gaussien, comme attendu. De même, l'échelle temporelle relevée dans le tableau IV.3 et le tracé de la fonction d'autocorrélation (figure C.2a) attestent que l'échelle temporelle pour la pression est approximativement de la même valeur que l'échelle temporelle imposée. Enfin, en ce qui concerne l'écart-type calculé par CEDRE  $\sigma_{\text{CEDRE}}(P)$ , l'expression (IV.52) prévoit que sa valeur doit être égale à :

$$\sigma_{\text{CEDRE}}(P) = \frac{r C(\rho E)}{C_v} \times \sigma \times \text{Volume de la cellule} \quad (\text{IV.53})$$

Ce qui donne numériquement :

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{CEDRE}}(P) &= \frac{286,69 \times 10^6}{716,71} \times 0,05 \times (10^{-3})^2 \\ &\approx 0,02\end{aligned}\tag{IV.54}$$

D'après le tableau IV.3, l'écart-type pour la pression ( $\sigma_{\text{CEDRE}}(P) = 0,0191$ ) a approximativement la même valeur que celle déterminée de façon théorique par la formule (IV.54) ( $\sigma_{\text{CEDRE}}(P) = 0,02$ ).

### Conclusion du cas-test

La simulation où l'on applique du bruit rouge sur la variable conservative ( $\rho E$ ) dans un domaine bidimensionnel constitué d'une seule maille et borné par des parois, donne des résultats en accord avec les prédictions théoriques. En effet, celles-ci pronostiquent que l'application de bruit rouge sur ( $\rho E$ ) entraîne des variations temporelles de la température par l'intermédiaire de la définition de l'énergie totale  $E$ , qui à son tour provoque des oscillations de pression via l'équation d'état, les autres variables restant constantes au cours du temps. Les évolutions temporelles de la température et de la pression ainsi perturbées le sont théoriquement selon les critères de bruit rouge imposés à la variable conservative ( $\rho E$ ) à des coefficients multiplicatifs près. On a vérifié que toutes ces prévisions ont été satisfaites lors de la simulation numérique.

#### IV.2.4.2 Modèle de bruit rouge sur la masse

On teste maintenant l'activation du bruit rouge uniquement sur la variable conservative  $\rho$ . Ainsi, les valeurs d'activation de la source bruit rouge sont les suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.55})$$

#### RÉSULTATS DU CALCUL

	$\rho$	$P$	$T$	$v_x$	$v_y$
Signal bruité ?	OUI	OUI	OUI	NON	NON
Valeur moyenne	$1,1780 \text{ kg.m}^{-3}$	$1,0133 \times 10^5 \text{ Pa}$	$300 \text{ K}$	$0 \text{ m.s}^{-1}$	$0 \text{ m.s}^{-1}$
Écart-type $\sigma$	$4,7811 \times 10^{-8}$	0,0057	$4,7653 \times 10^{-6}$	×	×
<i>Skewness</i>	-0,0093	-0,0092	-0,0093	×	×
<i>Kurtosis</i>	2,9902	2,9902	2,9901	×	×
Échelle temporelle (s)	$8,1563 \times 10^{-5}$	$8,1564 \times 10^{-5}$	$8,1558 \times 10^{-5}$	×	×

TABLE IV.4 – Résultats de calcul pour le test du comportement du modèle de bruit rouge dans CEDRE lors de l'application du bruit rouge sur la masse.

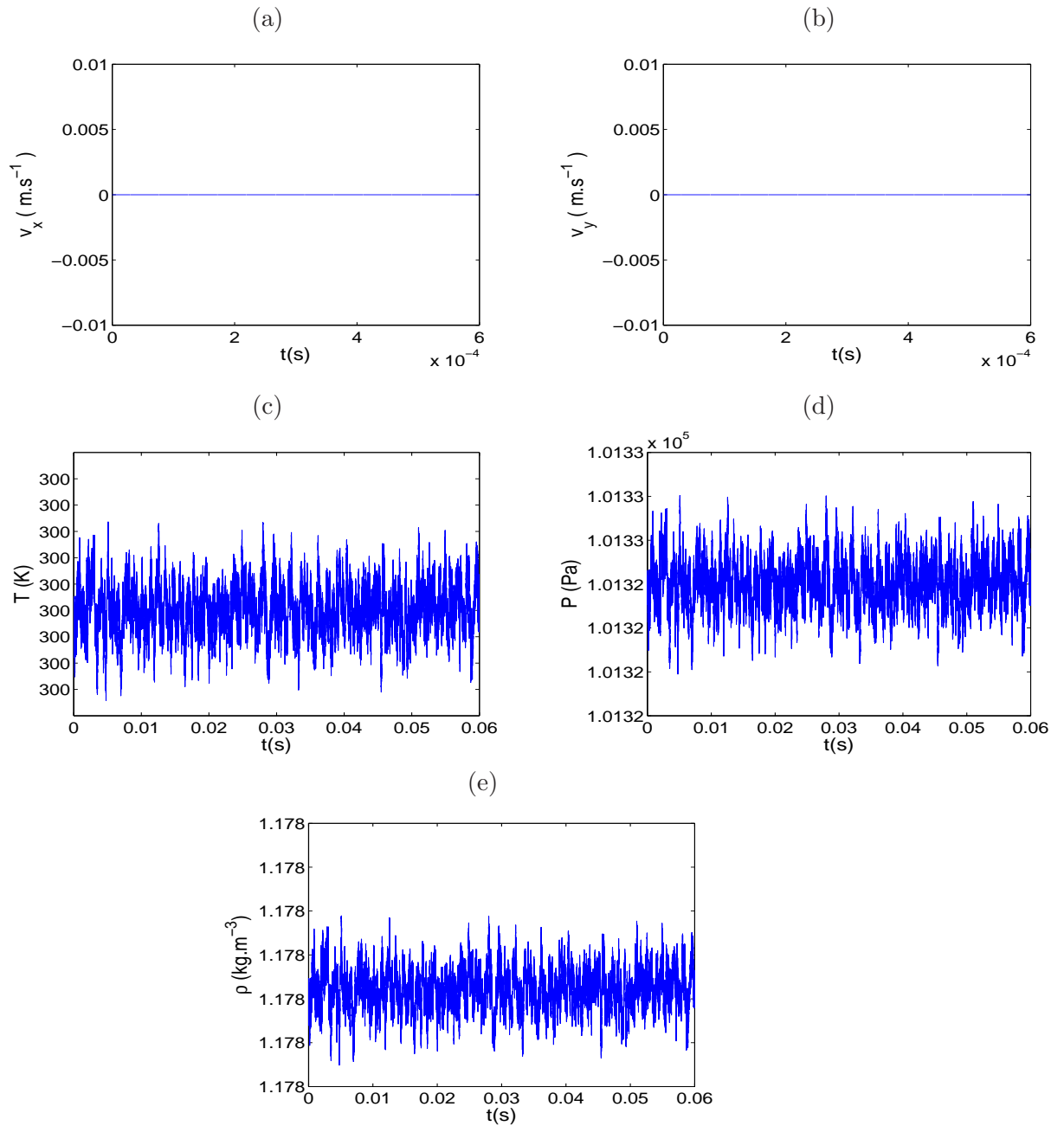


FIGURE IV.8 – Évolution temporelle de la vitesse longitudinale  $v_x$  (a), de la vitesse transversale  $v_y$  (b), de la température  $T$  (c), de la pression  $P$  (d) et de la masse volumique  $\rho$  (e) pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative  $\rho$ .

## ANALYSE DES RÉSULTATS

Sur les tracés des évolutions temporelles de la figure IV.8, on constate que la masse volumique est bruitée, ainsi que la pression et la température alors que la vitesse reste constante et égale à sa valeur initiale  $v = 0 \text{ m/s}$  tout au long du calcul. Pour expliquer ces résultats, revenons au schéma itératif résolu au cours du calcul ; à l'itération  $n + 1$ , on a :

$$\begin{pmatrix} (\rho)^{n+1} \\ (\rho v_x)^{n+1} \\ (\rho v_y)^{n+1} \\ (\rho v_z)^{n+1} \\ (\rho E)^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\rho)^n \\ (\rho v_x)^n \\ (\rho v_y)^n \\ (\rho v_z)^n \\ (\rho E)^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C(\rho) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \mathcal{S}^n \quad (\text{IV.56})$$

En développant le système (IV.56), on obtient donc :

$$(\rho)^{n+1} = (\rho)^n + C(\rho) \times \mathcal{S}^n = \rho_0 + C(\rho) \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \quad (\text{IV.57})$$

$$(\rho v_i)^{n+1} = (\rho v_i)^n = (\rho v_i)_0 \quad (\text{IV.58})$$

$$(\rho E)^{n+1} = (\rho E)^n = (\rho E)_0 \quad (\text{IV.59})$$

**Analyse des résultats sur la vitesse  $v$  et sur la masse volumique  $\rho$** 

D'après l'expression (IV.58), il est logique que le calcul effectué ici donne des valeurs de la vitesse selon  $x$  et  $y$  constantes et de valeur nulle, correspondant à la valeur initiale  $(v_i)_0$  de la vitesse. L'évolution temporelle de la masse volumique est quant à elle bruitée car on a appliqué le bruit rouge sur cette variable spécifiquement. Suivant la relation (IV.57), la masse volumique doit osciller autour de la valeur moyenne  $\rho_0$  avec des perturbations de bruit rouge amplifiées par le coefficient  $C(\rho)$ . Ainsi, en prenant en compte (IV.37) et (IV.57), l'écart-type calculé doit être égal à :

$$\sigma_C(\rho) = C(\rho) \times \sigma \times (\text{Volume de la cellule}) \quad (\text{IV.60})$$

Numériquement, la formule (IV.60) précédente donne :

$$\begin{aligned} \sigma_C(\rho) &= 1 \times 0,05 \times (10^{-3})^2 \\ &= 5 \times 10^{-8} \end{aligned} \quad (\text{IV.61})$$

D'après le tableau IV.4, on constate que la valeur de l'écart-type calculée numériquement pour la masse volumique est approximativement égale à la valeur  $\sigma_C(\rho)$  donnée par l'expression (IV.61).

La relation (IV.57) indique que le bruit observé sur la variable  $\rho$  doit être du bruit rouge. On vérifie que c'est bien le cas sur les tracés de la DSP à la figure C.4b : en effet, on a bien une décroissance du spectre en  $f^{-2}$ . On retrouve aussi les autres caractéristiques du bruit rouge, telle que l'échelle temporelle ou la gaussienne (tableau IV.4 et figures C.4 a et c).

### Analyse des résultats sur la température $T$

Une fois la masse volumique bruitée, celle-ci va transmettre les oscillations dues au bruit rouge à la température via l'énergie totale, puisque d'après (IV.59) et (IV.43) on a :

$$(\rho E)_0 = (\rho E)^{n+1} = \rho^{n+1} \times \left( C_v T^{n+1} + \frac{1}{2} \left[ \frac{(\rho v)^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right]^2 \right) \quad (\text{IV.62})$$

En prenant en compte la relation (IV.58), cette expression (IV.62) devient :

$$(\rho E)_0 = \rho^{n+1} \left( C_v T^{n+1} + \frac{1}{2} \left[ \frac{(\rho v)_0}{\rho^{n+1}} \right]^2 \right) \quad (\text{IV.63})$$

En remaniant cette équation (IV.63), on arrive finalement à l'expression de la température à l'itération  $n + 1$  suivante :

$$T^{n+1} = \frac{(\rho E)_0}{C_v} \frac{1}{\rho^{n+1}} - \frac{(\rho v)_0^2}{2C_v} \frac{1}{(\rho^{n+1})^2} \quad (\text{IV.64})$$

Cette expression (IV.64) peut se réécrire sous la forme :

$$T^{n+1} = a_1 \frac{1}{\rho^{n+1}} - b_1 \frac{1}{(\rho^{n+1})^2} \quad (\text{IV.65})$$

où  $a_1 = \frac{(\rho E)_0}{C_v}$  et  $b_1 = \frac{(\rho v)_0^2}{2C_v}$  sont des constantes. Cette relation (IV.65) s'exprime aussi en fonction de la valeur initiale  $T_0$  de la façon suivante (voir annexe D.1) :

$$T^{n+1} = T_0 \times \left( \frac{\rho_0}{\rho^{n+1}} \right)^2 + \frac{a_1 C(\rho) \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k}{(\rho^{n+1})^2} \quad (\text{IV.66})$$

Dans le cas où  $\rho^{n+1}$  correspond à du bruit rouge, on a vérifié numériquement que les expressions  $\frac{1}{\rho^{n+1}}$  et  $\frac{1}{(\rho^{n+1})^2}$  correspondent elles aussi à du bruit rouge. Ainsi, la relation (IV.66) montre que l'ajout de bruit rouge sur la masse volumique entraîne une variation de la température qui correspond à du bruit rouge et que les oscillations de température se répartissent autour de la valeur initiale  $T_0$ . D'après l'évolution temporelle de la

température (figure IV.8), on observe que celle-ci est bien bruitée lors de la simulation. On vérifie également que l'évolution temporelle de la température a pour valeur moyenne  $T_0 = 300 \text{ K}$  (tableau IV.4), comme le prévoit la relation théorique (IV.66). L'analyse du signal montre que les oscillations temporelles de température sont identifiées à du bruit rouge puisque le spectre décroît en  $f^{-2}$  (figure C.5 b). De plus, ce bruit est bien gaussien (figure C.5 c) et l'échelle temporelle correspond approximativement à l'échelle temporelle théorique imposée sur la variable conservative  $\rho$  (figure C.5 a et tableau IV.4). La seule donnée numérique que l'on ne peut pas comparer à la théorie est l'écart-type  $\sigma_C(T)$  : en effet, la valeur théorique de celui-ci est déterminée par l'expression (IV.66) et il est difficile de la calculer numériquement à partir de la valeur imposée  $\sigma$ .

### Analyse des résultats sur la pression $P$

La variation de la masse volumique entraîne une variation de la pression  $P$  par l'intermédiaire de l'équation d'état suivante :

$$P = \rho r T \quad (\text{IV.67})$$

A l'itération  $n + 1$ , on a donc :

$$\begin{aligned} P^{n+1} &= \rho^{n+1} r T^{n+1} \\ &= r \rho^{n+1} \left[ a_1 \frac{1}{\rho^{n+1}} - b_1 \frac{1}{(\rho^{n+1})^2} \right] \\ &= a_2 - b_2 \frac{1}{\rho^{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{IV.68})$$

où  $a_2 = r a_1 = r \frac{(\rho E)_0}{C_v}$  et  $b_2 = r b_1 = r \frac{(\rho v)_0^2}{2C_v}$  sont des constantes. Dans l'annexe D.2, on a déterminé que l'expression (IV.68) s'exprime en fonction de la pression initiale  $P_0$  de la façon suivante :

$$P^{n+1} = P_0 \times \frac{\rho_0}{\rho^{n+1}} + a_1 C(\rho) \times \frac{\sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k}{\rho^{n+1}} \quad (\text{IV.69})$$

Grâce à l'expression (IV.69), on vient de montrer que la pression est bruitée dans le temps autour de sa valeur initiale  $P_0$  et que ce bruit est de même nature que celui imposé sur la variable conservative  $\rho$ , c'est-à-dire du bruit rouge. Sur le tracé de l'évolution temporelle de la pression de la figure IV.8d, on constate qu'elle est effectivement bruitée au cours du temps. La valeur moyenne du signal répertoriée au tableau IV.4 prouve que la pression est bruitée autour de sa valeur initiale, comme le prévoit l'expression théorique (IV.69). Les différentes caractéristiques du bruit rouge sont retrouvées pour la pression : en effet, le spectre décroît en  $f^{-2}$  (figure C.6b), démontrant l'obtention de bruit rouge ; celui-ci est bien gaussien (figure C.6c) et l'échelle temporelle mesurée correspond approximativement à celle imposée sur  $\rho$  (figure C.6a et tableau IV.4). De même que pour la température,

la seule donnée non-exploitable est l'écart-type  $\sigma_C(P)$  : sa valeur théorique donnée par la relation (IV.69) est difficilement calculable numériquement.

### Conclusion

En résumé, l'ajout de bruit rouge sur la masse volumique uniquement entraîne une variation de celle-ci ainsi que de la température et de la pression. Ces trois variables sont alors toutes bruitées par du bruit rouge autour de leurs valeurs initiales respectives. On a vérifié par la simulation numérique que l'on obtient bien les comportements théoriques attendus.

#### IV.2.4.3 Modèle de bruit rouge sur la variable $(\rho v_y)$

On teste à présent l'ajout de bruit rouge uniquement sur la variable conservative  $(\rho v_y)$ . Les valeurs d'activation de la source de bruit rouge sont les suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.70})$$

#### RÉSULTATS DU CALCUL

	$\rho$	$P$	$T$	$v_x$	$v_y$
Signal bruité ?	NON	OUI	OUI	NON	OUI
Valeur moyenne	1,1780 $kg.m^{-3}$	$1,0077 \times 10^5 Pa$	298,3624 K	$0 m.s^{-1}$	$-0,0045 m.s^{-1}$
Écart-type $\sigma$	×	787,4915	2,3316	×	48,4510
<i>Skewness</i>	×	-2,8608	-2,8608	×	0,0072
<i>Kurtosis</i>	×	15,2738	15,2738	×	3,0271
Échelle temporelle (s)	×	$7,5050 \times 10^{-7}$	$7,5050 \times 10^{-7}$	×	$1,0816 \times 10^{-7}$

TABLE IV.5 – Résultats de calcul pour le test du comportement du modèle de bruit rouge dans CEDRE lors de l'application du bruit rouge sur la variable conservative  $(\rho v_y)$ .



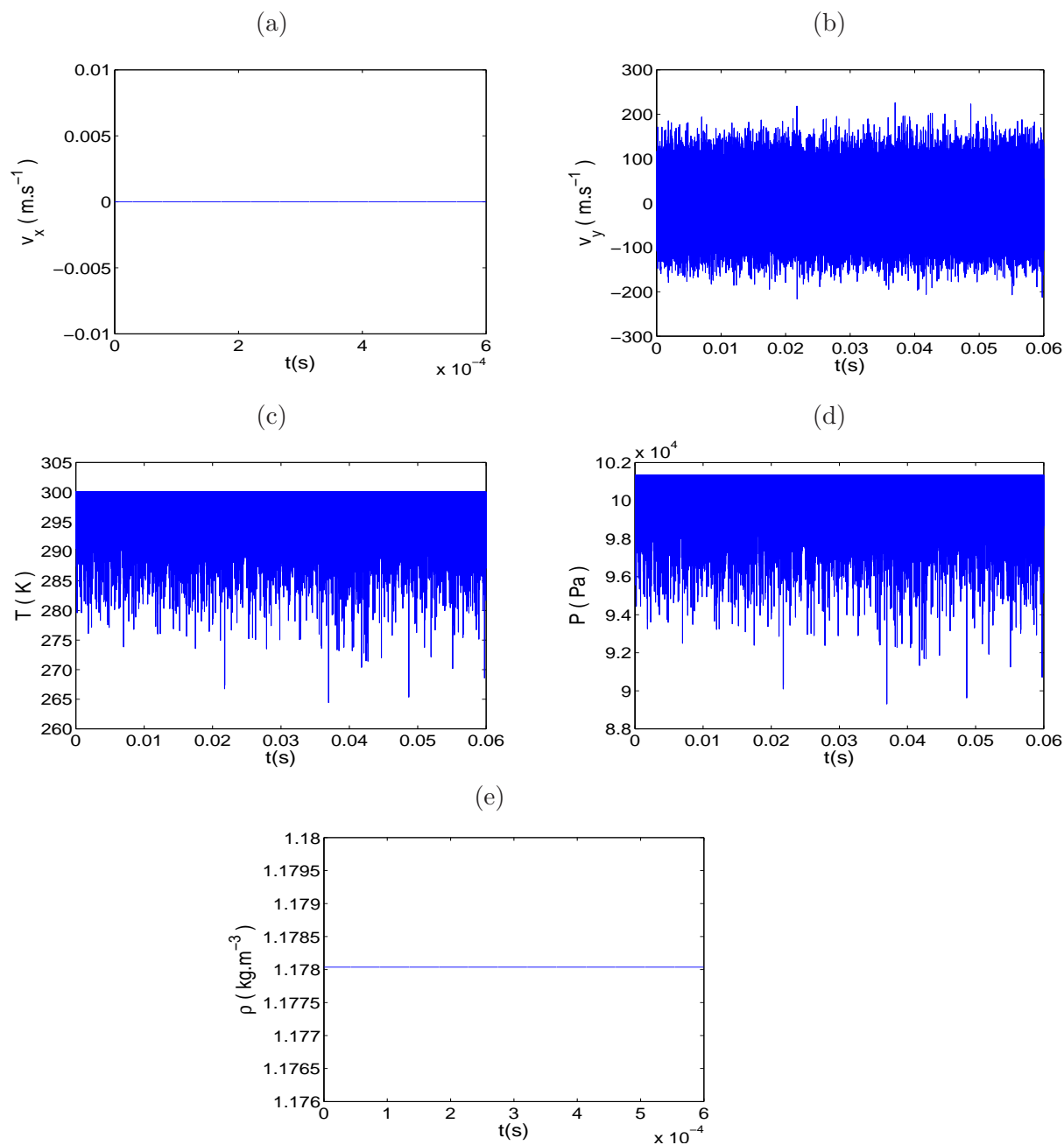


FIGURE IV.9 – Évolution temporelle de la vitesse longitudinale  $v_x$  (a), de la vitesse transversale  $v_y$  (b), de la température  $T$  (c), de la pression  $P$  (d) et de la masse volumique  $\rho$  (e) pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative ( $\rho v_y$ ).

## ANALYSE DES RÉSULTATS

Le schéma itératif résolu pour ce cas-test est le suivant :

$$\begin{pmatrix} (\rho)^{n+1} \\ (\rho v_x)^{n+1} \\ (\rho v_y)^{n+1} \\ (\rho v_z)^{n+1} \\ (\rho E)^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\rho)^n \\ (\rho v_x)^n \\ (\rho v_y)^n \\ (\rho v_z)^n \\ (\rho E)^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C(\rho v_y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \mathcal{S}^n \quad (\text{IV.71})$$

En développant ce système (IV.71), on a :

$$(\rho)^{n+1} = (\rho)^n = \rho_0 \quad (\text{IV.72})$$

$$(\rho v_x)^{n+1} = (\rho v_x)^n = (\rho v_x)_0 \quad (\text{IV.73})$$

$$(\rho v_y)^{n+1} = (\rho v_y)^n + \mathcal{S}^n = (\rho v_y)_0 + C(\rho v_y) \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \quad (\text{IV.74})$$

$$(\rho E)^{n+1} = (\rho E)^n = (\rho E)_0 \quad (\text{IV.75})$$

### Analyse des résultats sur la masse volumique $\rho$ et la composante $v_x$ de la vitesse

D'après les relations (IV.72) et (IV.73), la masse volumique  $\rho$  et la composante  $v_x$  de la vitesse doivent théoriquement rester constantes au cours du temps et être égales à leurs valeurs initiales respectives  $\rho_0 = 1,178 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $v_{x0} = 0 \text{ m.s}^{-1}$ . Sur le tracé de leurs évolutions temporelles des figures IV.9e et IV.9a, on constate que la masse volumique et la composante  $v_x$  de la vitesse calculées lors de ce cas-test respectent effectivement les prévisions théoriques.

### Analyse des résultats sur la composante $(\rho v_y)$

D'après le schéma itératif (IV.74), en ce qui concerne la composante  $(\rho v_y)$ , on s'attend à ce que celle-ci soit bruitée autour de la valeur  $\rho v_{y0} = \rho_0 \times v_{y0} = 0 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ . Ce bruit doit satisfaire toutes les caractéristiques du bruit rouge imposé, c'est-à-dire être filtré selon une échelle temporelle égale à  $T_L$ , être gaussien, avoir une décroissance du spectre en  $f^{-2}$  et avoir un écart-type  $\sigma_{\text{CEDRE}}(\rho v_y)$  égal à  $\sigma_C(\rho v_y)$  au coefficient multiplicatif  $C(\rho v_y)$  près. Or, comme l'évolution temporelle de  $\rho$  est constante au cours du temps (figure IV.9e), on en déduit que la variable  $(\rho v_y)$  doit être bruitée de la même façon que la composante  $v_y$  de la vitesse. Cette dernière est effectivement bruitée (figure IV.9b) avec des fluctuations à distribution normale (figure C.7c). De plus, le spectre semble également décroître en  $f^{-2}$  pour les hautes fréquences. Cependant, la fonction d'autocorrélation de  $v_y$  (figure C.7a)

montre que les perturbations ne sont pas corrélées en temps !

### Analyse des résultats sur la température $T$

Afin de déterminer le comportement théorique de la température à l'itération  $n + 1$ , repartons de la relation (IV.75) en prenant en compte l'expression (IV.43) :

$$(\rho E)_0 = (\rho E)^{n+1} = \rho^{n+1} \times \left( C_v T^{n+1} + \frac{1}{2} \left[ \frac{(\rho v)^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right]^2 \right) \quad (\text{IV.76})$$

En prenant en compte les expressions (IV.72) et (IV.74), on obtient :

$$\begin{aligned} (\rho E)_0 &= \rho_0 \times \left( C_v T^{n+1} + \frac{1}{2\rho_0^2} \left[ (\rho v)_0 + C(\rho v) \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \right]^2 \right) \\ &= \rho_0 C_v T^{n+1} + \frac{(\rho v)_0^2}{2\rho_0} + \frac{(\rho v)_0}{\rho_0} C(\rho v) \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k + \frac{(C(\rho v))^2}{2\rho_0} \times \left[ \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.77})$$

De la relation (IV.77), on peut extraire l'expression  $T^{n+1}$ , et on a :

$$T^{n+1} = \frac{(\rho E)_0}{\rho_0 C_v} - \frac{(\rho v)_0^2}{2\rho_0^2 C_v} - \frac{(\rho v)_0}{\rho_0^2 C_v} C(\rho v) \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k - \frac{(C(\rho v))^2}{2\rho_0^2 C_v} \times \left[ \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \right]^2 \quad (\text{IV.78})$$

Or, d'après la définition de l'énergie totale  $E$  (IV.43), à l'instant initial, la température  $T_0$  a pour valeur :

$$T_0 = \frac{(\rho E)_0}{\rho_0 C_v} - \frac{(\rho v)_0^2}{2\rho_0^2 C_v} \quad (\text{IV.79})$$

D'où, en introduisant la relation (IV.79) dans (IV.78), on arrive à l'expression suivante de la température à l'itération  $n + 1$  exprimée en fonction de sa valeur initiale  $T_0$  :

$$T^{n+1} = T_0 - \frac{(\rho v)_0}{\rho_0^2 C_v} C(\rho v) \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k - \frac{(C(\rho v))^2}{2\rho_0^2 C_v} \times \left[ \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \right]^2 \quad (\text{IV.80})$$

Cette dernière relation (IV.80) prouve que théoriquement, la température  $T$  doit être bruitée. En observant l'évolution temporelle de cette variable (figure IV.9c), on voit que celle-ci est effectivement bruitée, mais d'une façon jamais rencontrée dans les tests menés jusqu'à présent : les fluctuations ne sont plus distribuées "autour" d'une valeur moyenne, mais semblent toutes situées "en-dessous" de la constante  $T_0 \approx 300 \text{ K}$  ! Cela voudrait dire que chacune des perturbations est "enlevée" à la moyenne et est donc une quantité négative. Une explication de ce phénomène peut se trouver dans l'expression (IV.80). En la regardant de plus près, on voit que l'on peut la réécrire sous la forme suivante :

$$T^{n+1} = T_0 + A_T \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k + B_T \times \left[ \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \right]^2 \quad (\text{IV.81})$$

avec  $A_T = -\frac{(\rho v)_0}{\rho_0^2 C_v} C(\rho v)$  une constante et  $B_T = -\frac{(C(\rho v))^2}{2\rho_0^2 C_v}$  une constante négative. Dans le cas présent, comme  $v_0 = 0$  m/s, alors  $A_T = 0$ . Ainsi, pour le cas-test effectué, on se retrouve avec :

$$T^{n+1} = T_0 + B_T \times \left[ \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \right]^2 \quad (\text{IV.82})$$

La température initiale  $T_0$  est donc bruitée avec du bruit rouge mis au carré, celui-ci étant multiplié par un coefficient  $B_T$  négatif. On se retrouve donc en adéquation avec les caractéristiques constatées sur l'évolution temporelle de la température (figure IV.9c). La forme de l'expression (IV.82) indique que les perturbations ajoutées à cette variable ne sont pas du bruit rouge (mais de bruit rouge au carré) et il n'est pas étonnant qu'elles ne soient pas filtrées en temps (figure C.8a) ni à distribution gaussienne (figure C.8c). Si on voulait que la température soit bruitée avec du bruit rouge filtré, il faudrait sûrement que le terme  $A_T$  dans l'expression (IV.81) soit "dominant" par rapport au terme  $B_T$ , ce qui reviendrait à avoir :

$$v_0 \gg \frac{C(\rho v)}{2\rho_0} \quad (\text{IV.83})$$

### Analyse des résultats sur la pression $P$

On a vu précédemment que la température est bruitée suivant la relation (IV.80). De ce fait, par l'intermédiaire de la loi d'état, on arrive à l'expression de la pression  $P$  suivante :

$$\begin{aligned} P^{n+1} &= \rho^{n+1} r T^{n+1} \\ &= \rho_0 r \left[ T_0 - \frac{(\rho v)_0}{\rho_0^2 C_v} C(\rho v) \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k - \frac{(C(\rho v))^2}{2\rho_0^2 C_v} \times \left[ \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \right]^2 \right] \\ &= P_0 - \frac{r(\rho v)_0}{\rho_0 C_v} C(\rho v) \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k - \frac{r(C(\rho v))^2}{2\rho_0 C_v} \times \left[ \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.84})$$

Cette relation (IV.84) est de la même forme que l'expression (IV.80) pour la température  $T$ , et on peut la réécrire de la façon suivante :

$$P^{n+1} = P_0 + A_P \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k + B_P \times \left[ \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \right]^2 \quad (\text{IV.85})$$

avec  $A_P = -\frac{r(\rho v)_0}{\rho_0 C_v} C(\rho v)$  et  $B_P = -\frac{r(C(\rho v))^2}{2\rho_0 C_v}$  deux constantes distinctes. Dans le cas présent,  $A_P = 0$  et  $B_P < 0$ . Ainsi, la pression possède en théorie les mêmes caractéristiques que la température et on constate que c'est bien le cas sur le tracé de l'évolution temporelle de  $P$  (figure IV.9d). De même que pour  $T$ , pour pouvoir avoir du bruit rouge sur la pression,

il faudrait probablement avoir une valeur de  $A_P$  plus importante que celle de  $B_P$ , telle que :

$$A_P \gg B_P \quad (\text{IV.86})$$

soit

$$v_0 \gg \frac{C(\rho v)}{2\rho_0} \quad (\text{IV.87})$$

### Résumé et conclusion du cas-test

Les expressions itératives théoriques de la pression et de la température pour le test consistant à appliquer du bruit rouge sur la variable conservative  $(\rho v_y)$  montrent que dans le cas présent, ces variables sont bruitées, mais pas avec du bruit rouge filtré en temps. Toujours selon la théorie, la quantité de mouvement  $(\rho v_y)$  devrait en revanche suivre une évolution temporelle avec du bruit rouge filtré. Or, on a vu que ce n'est pas le cas, notamment en ce qui concerne l'échelle temporelle. Il est possible que pour appliquer le modèle de bruit rouge sur toutes les variables bruitées  $((\rho v_y), P$  et  $T)$ , il faudrait que la condition suivante soit vérifiée :

$$v_0 \gg \frac{C(\rho v)}{2\rho_0} \quad (\text{IV.88})$$

Dans le cas-test envisagé ici, il est impossible de respecter ce critère (IV.88) puisque  $v_0 = 0$  m/s.

#### IV.2.4.4 Conclusion

Des simulations visant à tester le comportement de la source de bruit rouge filtré que l'on a intégré dans le code CEDRE ont été effectuées. Le domaine de calcul considéré est bidimensionnel, constitué d'une seule maille et borné par des parois. On a appliqué le modèle de bruit rouge sur les variables conservatives  $(\rho E)$ ,  $\rho$  et  $(\rho v_y)$  successivement. Les cas-tests où le bruit rouge est ajouté sur  $(\rho E)$  et  $\rho$  ont permis de vérifier que toutes les prévisions théoriques sont réalisées par la simulation numérique. En revanche, pour le cas-test où le bruit rouge est ajouté sur  $(\rho v_y)$ , il est possible qu'il soit nécessaire de vérifier la condition (IV.89) suivante pour retrouver les caractéristiques du bruit rouge :

$$v_0 \gg \frac{C(\rho v)}{2\rho_0} \quad (\text{IV.89})$$

Pour la configuration bidimensionnelle envisagée dans ce paragraphe, il est impossible de satisfaire cette condition, ce qui pourrait expliquer pourquoi on n'a pas retrouvé par le calcul les propriétés de bruit rouge lors du test de l'application du bruit rouge sur la variable  $(\rho v_y)$ .

### IV.3 Conclusion du chapitre

On a envisagé différentes modélisations pour générer les fluctuations susceptibles de déclencher la transition pour les simulations de type LES. On a dans un premier temps évoqué une méthode simple permettant de procéder à un premier calcul LES d'écoulement transitionnel dans VECLA. Cette méthode de déstabilisation consiste à ne pas utiliser les limiteurs de pente lors du calcul. Ainsi, la non-linéarité des équations est libre de générer des perturbations de nature numérique et capables de déclencher la transition avec toutefois un risque de divergence du calcul.

La majeure partie de ce chapitre est ensuite consacrée à la modélisation de fluctuations physiques. Cette méthode est sélectionnée en fonction de certains critères correspondant à ceux relevés expérimentalement. Le choix s'est porté sur l'équation différentielle stochastique de Langevin. Cette dernière engendre des fluctuations identifiées à du bruit rouge filtré temporellement. On s'est focalisé sur l'étude de la résolution de cette équation pour pouvoir par la suite l'implanter dans le code de calcul. Le modèle de bruit rouge filtré est intégré dans CEDRE en tant que source pouvant être activée sur un certain nombre de mailles. L'analyse de la façon dont est interprété le modèle par le code CEDRE a permis de vérifier que lors de l'application du bruit rouge sur les quantités  $\rho$  ou  $(\rho E)$ , les prévisions théoriques sont respectées.

On va maintenant pouvoir effectuer et analyser des simulations numériques LES d'écoulement transitionnel dans VECLA en employant les deux modélisations de fluctuations adoptées. Ceci fait l'objet du chapitre suivant.



# **Simulations numériques LES tridimensionnelles instationnaires d'écoulement transitionnel dans VECLA**

---

*Des simulations numériques LES tridimensionnelles instationnaires d'écoulement transitionnel dans le montage VECLA sont réalisées avec le code CEDRE, en utilisant les différentes modélisations de génération de perturbations présentées précédemment. Les résultats sont analysés, notamment par comparaison avec les données expérimentales ainsi qu'avec une simulation bidimensionnelle RANS. Cette démarche permet d'exhiber les points forts et les possibilités d'amélioration de la méthode de génération de fluctuations physiques développée au chapitre précédent.*



## V.1 Description et caractéristiques des simulations numériques LES

Des simulations tridimensionnelles instationnaires sont réalisées. Deux calculs distincts sont menés avec la méthode de Déstabilisation Numérique (DN), l'un avec une approche MILES (calcul référencé dans la suite de la thèse par 'MILES DN') et un deuxième avec une modélisation LES avec un modèle de sous-maille de Smagorinsky (calcul nommé 'LES/Smago DN'). Un autre calcul LES est également effectué en utilisant la méthode de génération de fluctuations physiques de Bruit Rouge filtré (BR) appliqué au niveau de l'injection. Cette dernière simulation est menée avec une approche LES avec un modèle de sous-maille de Smagorinsky (simulation 'LES/Smago BR'). Les conditions aux limites de toutes ces simulations numériques correspondent à celles de l'expérience VECLA. De l'air froid à  $303\text{ K}$  est injecté à la paroi inférieure avec un débit uniforme de  $2,62\text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ . La sortie de fluide s'effectue à pression constante de  $137400\text{ Pa}$ . Pour la simulation avec le modèle de bruit rouge filtré, en plus d'imposer une pression constante, on ajoute une condition de non-réflexion à la sortie de fluide. Les autres parois sont imperméables et adiabatiques. La géométrie du canal est identique à celle du montage VECLA (voir les dimensions à la figure III.11). Pour tous les calculs, le même maillage tridimensionnel est employé, composé de 50560000 mailles raffinées près des parois selon la description exposée au paragraphe III.4.2.1. Le domaine de calcul est divisé en plusieurs domaines, chacun affecté à un processeur. Le nombre de domaines varie selon la simulation effectuée. Les conditions de calcul identiques à toutes les simulations sont regroupées dans le tableau V.1. À l'inverse, les différences entre les calculs sont détaillées dans le tableau V.2.

Pour les deux simulations avec la méthode de déstabilisation numérique, le domaine est découpé en 64 domaines. Ces deux simulations sont divisées en deux étapes successives. La première de ces étapes correspond à un calcul stationnaire de l'écoulement laminaire dans la veine en partant d'un état initial à pression atmosphérique et vitesse nulle. Pour cette étape, on utilise un schéma d'intégration temporelle implicite du premier ordre avec un pas de temps local maximum égal à  $\Delta t = 10^{-4}\text{ s}$  ( $\text{CFL} \approx 1900$ ). La deuxième étape constitue la simulation LES à proprement parler, avec comme condition initiale dans la veine l'écoulement laminaire obtenu à l'issue de la première étape. La discrétisation spatiale est basée sur une approche MUSCL du second ordre. En ce qui concerne l'intégration temporelle, on a entrepris en première approche d'utiliser un schéma explicite avec un pas de temps le plus grand possible. Cette tentative s'est révélée infructueuse car il aurait fallu un temps prohibitif avant de pouvoir obtenir des résultats significatifs. Par conséquent, on a choisi en deuxième approche un schéma implicite du second ordre de Runge-Kutta avec un pas de temps de  $\Delta t = 10^{-7}\text{ s}$  ( $\text{CFL} \approx 1,9$ ). Aucun limiteur de pente n'est employé pour permettre de créer une instabilité numérique dans la veine capable de déclencher la transition de l'écoulement pendant les  $22,8\text{ ms}$  de temps physique simulé.

Pour la simulation numérique avec la modélisation de bruit rouge filtré au niveau de l'injection, le volume de calcul est divisé en 480 domaines. Le calcul se déroule en deux étapes. Comme pour les calculs avec la méthode de déstabilisation numérique décrits précédemment, cette simulation débute par le calcul de l'écoulement stationnaire laminaire dans le canal. Cet écoulement est ensuite utilisé comme état initial pour le calcul LES. Ce dernier est mené avec une approche MUSCL du second ordre et des limiteurs de pente de Van Leer pour la discrétisation spatiale. Pour l'intégration temporelle, un schéma implicite du second ordre de Runge-Kutta avec un pas de temps de  $\Delta t = 10^{-7} s$  (CFL  $\approx 1,9$ ) est employé. L'écoulement transitionnel est calculé pendant un temps physique total de 40 *ms*.

Dimensions de la veine	$L = 581 \text{ mm} \times h = 10,3 \text{ mm} \times l = 60 \text{ mm}$
Maillage	$M_x \times M_y \times M_z = 790 \times 80 \times 80$
Paroi injectante	Air injecté : gaz parfait Injection normale à la paroi Débit = $2,62 \text{ kg}/(m^2 s)$ Température d'arrêt = $303 \text{ K}$
Fond avant	Paroi adiabatique
Paroi supérieure	Paroi adiabatique
Parois latérales	Paroi adiabatique
Intégration temporelle	Méthode implicite, ordre 2 Pas de temps = $10^{-7} s$ CFL $\approx 1,9$

TABLE V.1 – Résumé des conditions de calcul identiques à toutes les simulations tridimensionnelles instationnaires.

Nom du calcul	MILES DN	LES/Smago DN	LES/Smago BR
Type de calcul	MILES	LES	LES
Modèle de sous-maille	Aucun	Smagorinsky	Smagorinsky
Méthode de génération de perturbations	Déstabilisation Numérique	Déstabilisation Numérique	Modèle de Bruit Rouge filtré
Discrétisation spatiale	Schéma ODFI, ordre 2	Schéma ODFI, ordre 2	Schéma ODFI, ordre 2
Limiteurs	Aucun	Aucun	Van Leer
Sortie de fluide	$P = 1,374$ bar	$P = 1,374$ bar	$P = 1,374$ bar Non-réflexion
Calcul parallèle	oui	oui	oui
Nombre de domaines	64	64	480
Nombre de processeurs	64	64	480
Type de processeurs	Itanium	Itanium	Nehalem
$\mu s$ /itération/maille/proc.	2,3	2,3	0,15
Temps physique total simulé	22,8 <i>ms</i>	22,8 <i>ms</i>	40 <i>ms</i>
Procédure de moyennage	Moyenne sur tout le volume de la veine	Moyenne sur tout le volume de la veine	Moyenne sur le plan en $z = 30$ mm dans la veine

TABLE V.2 – Détails des caractéristiques de calcul qui diffèrent entre les simulations tridimensionnelles instationnaires.

## V.2 Choix des valeurs des paramètres du modèle de bruit rouge pour le calcul tridimensionnel de l'écoulement dans VECLA

Afin de procéder à la simulation LES avec la méthode de bruit rouge, il nous faut déterminer les valeurs des paramètres de ce modèle.

### V.2.1 Choix de la variable bruitée

Étant donné les résultats du chapitre précédent concernant la façon dont est interprété le modèle de bruit rouge dans le code CEDRE, on choisit d'appliquer les fluctuations de bruit rouge pour le calcul tridimensionnel LES instationnaire d'écoulement transitionnel dans VECLA soit sur la masse volumique  $\rho$  soit sur  $(\rho E)$ . Dans le but de déterminer sur laquelle de ces deux quantités on va appliquer le bruit rouge filtré pour la simulation LES, on revient à la configuration expérimentale d'écoulement que l'on étudie. Dans celle-ci, les fluctuations sont introduites dans la veine au niveau de l'injection de fluide à la paroi poreuse. Numériquement, on modélise l'injection par une condition d'entrée de fluide à débit massique surfacique  $(\rho v)_{inj}$  constant. Si on fait l'hypothèse qu'au niveau de la paroi injectante la fluctuation de vitesse est nulle, alors ajouter des fluctuations de bruit rouge sur la masse volumique  $\rho$  revient à ajouter des fluctuations sur la quantité de mouvement  $(\rho v)$ . Ainsi, pour le calcul tridimensionnel LES instationnaire d'écoulement transitionnel dans VECLA, on choisit d'appliquer le modèle de bruit rouge filtré sur la masse volumique  $\rho$ .

### V.2.2 Choix de la valeur de l'échelle temporelle $T_L$

L'échelle temporelle  $T_L$  du modèle de bruit rouge filtré est celle mesurée expérimentalement sur le montage VECLA, soit  $T_L = 1,2 \times 10^{-4}$  s.

### V.2.3 Choix de la valeur de l'écart-type $\sigma$

On souhaiterait relier l'écart-type à un paramètre physique. Pour cela, on part de la définition de l'écart-type  $\sigma$  d'une variable aléatoire  $f$  :

$$\sigma(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [f_n - \overline{f_n}]^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [f'_n]^2 \quad (\text{V.1})$$

Expérimentalement, on a relevé les valeurs de  $\text{RMS}[(\rho v)'] / (\rho v)_{inj}$ . Or, la définition des valeurs RMS est la suivante :

$$\text{RMS}[(\rho v)'] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [(\rho v)']^2 \quad (\text{V.2})$$

D'où, par identification avec la relation (V.1), on a :

$$\sigma(\rho v) = \text{RMS}[(\rho v)'] \quad (\text{V.3})$$

On a donc la possibilité de relier l'écart-type  $\sigma(\rho v)$  aux données physiques expérimentales. Cependant, c'est la valeur de l'écart-type  $\sigma(\rho)$  que l'on recherche, puisque l'on a décidé

d'appliquer le modèle de bruit sur la masse volumique  $\rho$ . Lors de la détermination de la variable à bruite (paragraphe V.2.1), on a fait l'hypothèse qu'au niveau de la paroi injectante la fluctuation de vitesse totale est nulle. Donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sigma(\rho v) &= \text{RMS}[(\rho v)'] \\ &= \text{RMS}(\rho') \times v \\ &= \sigma(\rho) \times v\end{aligned}\quad (\text{V.4})$$

On en déduit que :

$$\sigma(\rho) = \frac{\sigma(\rho v)}{v} \quad (\text{V.5})$$

D'où :

$$\sigma(\rho) = \frac{\text{RMS}[(\rho v)']}{v} \quad (\text{V.6})$$

où  $v$  correspond à la vitesse d'injection. Ainsi, cette dernière relation (V.6) nous permet de relier l'écart-type  $\sigma(\rho)$  que l'on va imposer pour notre modèle de bruit rouge filtré à une donnée physique relevée expérimentalement, et on a :

$$\sigma(\rho) = \left( \frac{\text{RMS}[(\rho v)']}{(\rho v)_{inj}} \right)_{\text{VECLA}} \times (\rho v)_{inj} \times \frac{1}{v_{inj}} \quad (\text{V.7})$$

Après application numérique (voir annexe E.1), on obtient :

$$\sigma(\rho) = 0,57 \quad (\text{V.8})$$

#### V.2.4 Choix de la valeur du coefficient $C$ et de l'épaisseur $e$ sur laquelle le bruit est appliqué

L'amplitude des fluctuations de bruit rouge dépend à la fois de la valeur du coefficient  $C(\rho)$  et de l'épaisseur  $e$  sur laquelle on applique le modèle de bruit. Cette épaisseur  $e$  correspond à une hauteur de veine définissant une zone à l'intérieur du canal près de la paroi poreuse (figure V.1). En pratique, cela équivaut à appliquer le modèle de bruit rouge sur un certain nombre de rangée de mailles à partir de la paroi injectante.

Le choix des valeurs de ces deux paramètres,  $C(\rho)$  et  $e$ , se fait de façon empirique en testant par simulation numérique des combinaisons possibles jusqu'à obtenir des valeurs de moyenne et de fluctuations de quantité de mouvement approximativement en accord avec les données expérimentales relevées lors des mesures de bruit sur le montage VECLA à la position axiale  $x = 31 \text{ mm}$  et pour différentes hauteurs de mesures  $y$  (voir paragraphe II.2.4.3). Après plusieurs essais, les paramètres sont déterminés tels que :

$$\begin{aligned}C(\rho) &= 7 \times 10^7 \\ e &= 0,5 \times 10^{-3} \text{ m}\end{aligned}\quad (\text{V.9})$$

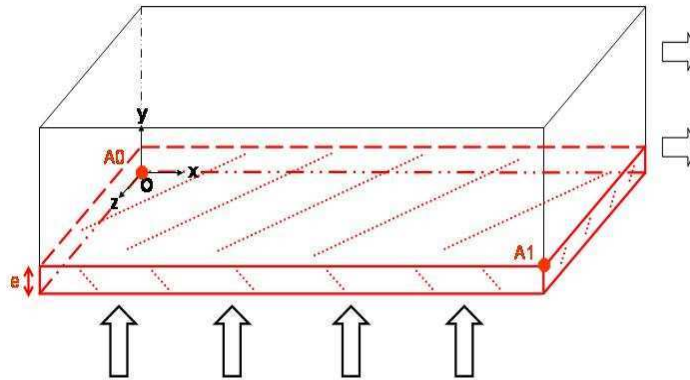


FIGURE V.1 – Schéma du montage VECLA avec la zone correspondant à l'épaisseur  $e$  sur laquelle la source de bruit rouge est appliquée.

L'épaisseur  $e$  de  $0,5 \times 10^{-3} \text{ m}$  équivaut à appliquer le modèle de bruit sur les 14 premières mailles à partir de la paroi injectante, soit environ 4,85% de la hauteur totale de veine.

Les tracés de la figure V.2 représentent les variations de quantités de mouvement ( $\rho v$ ) (figure V.2 a) et des fluctuations de ces dernières (figure V.2 b) en fonction du débit injecté à la paroi et pour les 8 hauteurs de veine  $y$  auxquelles les relevés expérimentaux ont été effectués pour les mesures de bruit à l'abscisse  $x/h = 3$ . Ces deux figures ont déjà été présentées au chapitre II exposant les résultats expérimentaux sur le montage VECLA (figures II.17 a et b). Ici, on a toutefois ajouté les valeurs obtenues avec la simulation numérique LES avec le modèle de bruit pour l'association de  $C(\rho) = 7 \times 10^7$  et  $e = 0,5 \times 10^{-3} \text{ m}$ . Cette simulation est celle obtenue avec le débit  $(\rho v)_{inj}$  de  $2,62 \text{ kg.m}^{-2}.s^{-1}$  (localisée sur la figure par un trait vertical), débit employé pour l'obtention de l'écoulement transitionnel que l'on cherche à reproduire. On constate sur les tracés de la figure V.2 que les variations de la moyenne et des fluctuations de quantité de mouvement relevées pour la combinaison  $C(\rho) = 7 \times 10^7$  et  $e = 0,5 \times 10^{-3} \text{ m}$  se situent dans les ordres de grandeur obtenus expérimentalement.

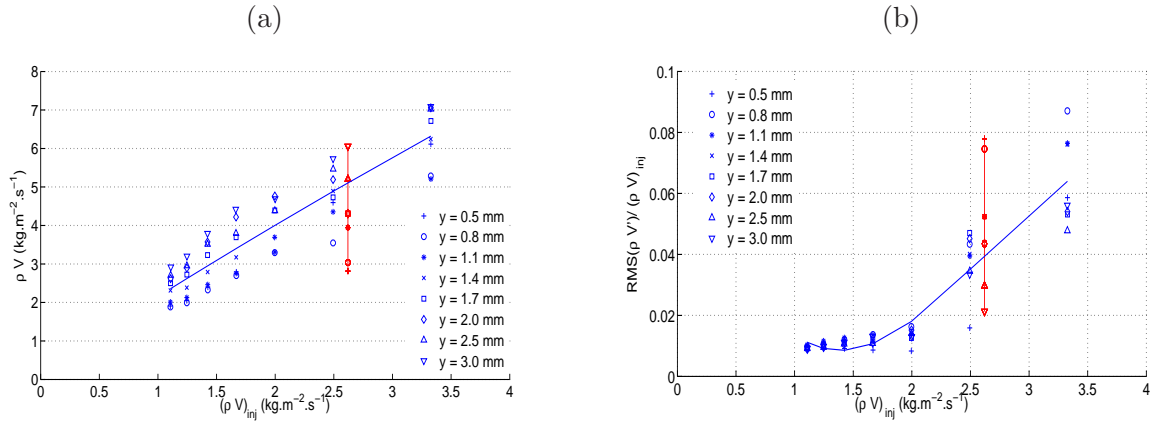


FIGURE V.2 – Quantité de mouvement (a) et fluctuations de quantité de mouvement en valeurs RMS adimensionnées (b) en fonction du débit injecté à la paroi, à la position  $x = 31 \text{ mm}$ , avec  $y$  la hauteur de la sonde monofilament par rapport à la plaque poreuse : valeurs relevées expérimentalement (pour des débits  $(\rho v)_{inj}$  de 1.107, 1.245, 1.423, 1.661, 1.991, 2.490, 3.316  $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ ) et pour la simulation LES avec le modèle de bruit rouge filtré (débit injecté  $(\rho v)_{inj} = 2,62 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ , localisée par un trait vertical).

### V.2.5 Comparaison des mesures expérimentales de bruit avec la simulation LES avec bruit rouge

On se focalise maintenant sur la comparaison des mesures de bruit sur le montage VECLA avec les résultats de la simulation LES employant la modélisation de bruit rouge filtré. Jusqu'à présent, pour déterminer la valeur des paramètres du modèle de bruit rouge, on s'est basé sur les valeurs de certaines données expérimentales. En effet, on a utilisé la valeur de l'échelle temporelle relevée expérimentalement. De même, les valeurs de l'écart-type et de la hauteur de veine sur laquelle on applique la source de bruit rouge ont été calibrées de telle sorte que l'amplitude des fluctuations de quantité de mouvement calculées soit du même ordre de grandeur que celle relevée expérimentalement. Au delà de l'échelle temporelle et de l'amplitude des fluctuations, d'autres critères expérimentaux ont été étudiés (cf chapitre II). On cherche dans ce paragraphe à savoir si la simulation d'écoulement transitionnel effectuée avec le modèle de bruit rouge respecte ces critères.

Lors de la présentation des résultats expérimentaux (chapitre II), on rappelle que l'on a caractérisé le bruit dans la veine en relevant la vitesse dans la zone laminaire de l'écoulement en  $x = 31 \text{ mm}$ . Des mesures ont été effectuées pour différentes valeurs du débit injecté et en 8 différentes hauteurs de veine par rapport à la paroi injectante. Il a été constaté que quels que soient le débit injecté et la hauteur de mesure, le bruit mesuré sur la vitesse totale est approximativement gaussien. De plus, les densités spectrales de puissance des

fluctuations de vitesse expérimentale passent d'une pente d'évolution proche de  $f^{-3}$  pour des débits inférieurs ou égaux à  $1,245 \text{ kg.s}^{-1}.m^{-2}$ , à une pente en  $f^{-2}$  pour des débits supérieurs ou égaux à  $1,423 \text{ kg.s}^{-1}.m^{-2}$ . Dans le cas de la simulation LES/Smagorinsky avec le modèle de Bruit Rouge filtré, on a tracé la densité de probabilité (figure V.3a) et la DSP (figure V.3 b) de la fluctuation de vitesse en  $x = 31 \text{ mm}$  et pour différentes hauteurs de mesure  $y$  par rapport à la paroi injectante. Ces deux figures sont représentatives du comportement observé pour les autres hauteurs de mesures (voir annexe E.2). La figure V.3a montre que le bruit obtenu par la simulation numérique LES est approximativement gaussien, en accord avec les relevés expérimentaux. Le tracé de la figure V.3b est quant à lui particulièrement bruité et il est par conséquent difficile de déterminer si la pente suit une évolution similaire à celle du montage VECLA, c'est-à-dire en  $f^{-2}$ . Cependant, la superposition de droites d'évolutions en  $f^{-2}$  et  $f^{-3}$  à la DSP permet de visualiser que cette dernière a une évolution comprise entre ces deux pentes, en accord relatif avec les relevés expérimentaux.

On vient de vérifier que les fluctuations générées au niveau de la paroi injectante par le modèle de bruit rouge filtré reproduisent de façon relativement fidèle les caractéristiques de celles mesurées sur le montage VECLA.

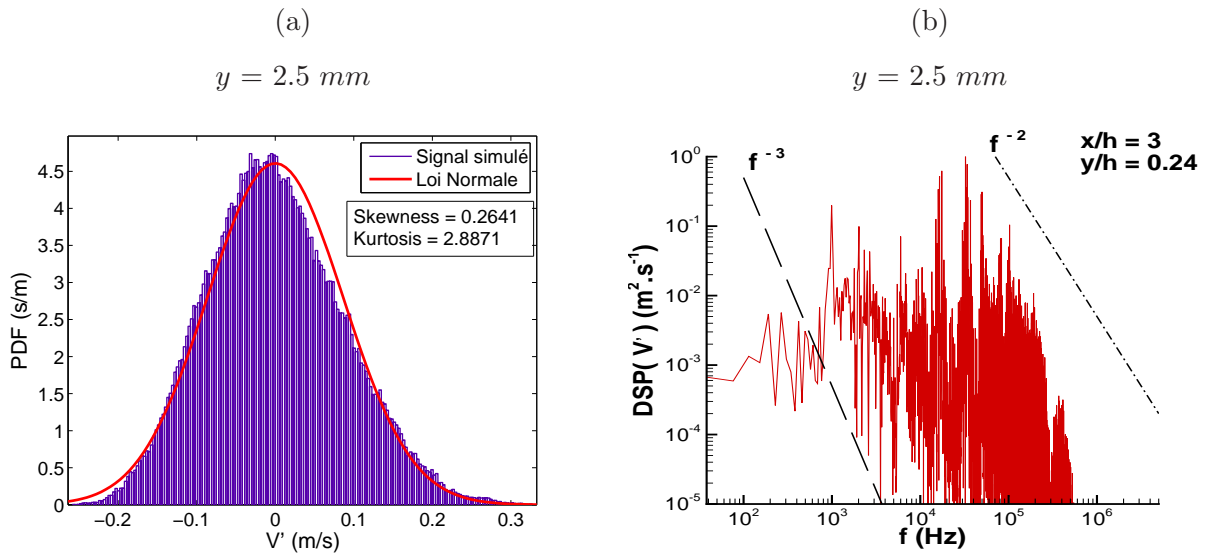


FIGURE V.3 – Calcul LES/Smagorinsky Bruit rouge : (a) : Tracé de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour une hauteur de veine  $y = 2,5 \text{ mm}$ , en  $x = 31 \text{ mm}$ . (b) Tracé de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour une hauteur de veine  $y = 2,5 \text{ mm}$ , en  $x = 31 \text{ mm}$ . ( $2^{18}$  points,  $\Delta f = 38 \text{ Hz}$  et  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ ).



## V.3 Analyse des résultats

### V.3.1 Écoulement moyen

Tous les tracés représentant les simulations LES sont extraits du plan en  $z = 30 \text{ mm}$ . Les quantités sont moyennées sur un temps physique total de  $22,8 \text{ ms}$  pour les simulations avec Déstabilisation Numérique, l'une avec l'approche MILES (calcul référencé par l'appellation 'MILES DN') et l'autre avec une approche LES/Smagorinsky (calcul nommé 'LES/Smago DN'). Le calcul LES avec Bruit Rouge filtré (calcul 'LES/Smago BR') est quant à lui moyenné sur un temps physique de  $22 \text{ ms}$  ainsi que sur  $40 \text{ ms}$ . Pour les deux simulations avec Déstabilisation Numérique, la procédure de moyennage est appliquée sur la totalité du volume de la veine, avant que les données dans le plan en  $z = 30 \text{ mm}$  ne soit extraites. À l'inverse, pour le calcul avec Bruit Rouge filtré, le champ instantané dans le plan en  $z = 30 \text{ mm}$  est d'abord extrait avant d'appliquer la procédure de moyennage sur ce plan uniquement.

Les figures V.4 et V.5 montrent l'évolution du profil de vitesse longitudinale moyenne en différentes abscisses  $x$  le long de la veine. Le choix de la méthode de génération de fluctuations pour les calculs LES a une influence sur le champ moyen, influence ressentie notamment près de la sortie de fluide. En effet, près du fond avant et jusqu'à l'abscisse  $x/h = 43,69$ , les profils des calculs LES sont superposés. Puis, à partir de  $x/h = 48,54$ , les profils de la simulation avec bruit rouge filtré s'éloignent légèrement de ceux avec déstabilisation numérique, ainsi que des données expérimentales. Pour la simulation avec bruit rouge filtré, le temps physique sur lequel est moyenné le champ de vitesse semble avoir un impact relatif : plus les données de la simulation avec bruit Rouge sont moyennées sur un temps physique long, plus les profils de vitesse longitudinale semblent proches des profils expérimentaux. On peut alors imaginer qu'en analysant la simulation de Bruit Rouge sur un temps physique encore plus long, on pourrait obtenir des profils plus en adéquation avec l'expérience. En comparant les deux simulations LES menées avec la méthode de déstabilisation numérique, on observe que l'utilisation du modèle de Smagorinsky ne permet pas d'améliorer de façon significative l'évaluation de la vitesse longitudinale moyenne par rapport à l'approche MILES.

Près de la paroi supérieure, toutes les simulations LES surestiment la vitesse longitudinale moyenne (jusqu'à environ 15% d'erreur relative par rapport aux mesures expérimentales) alors qu'aucune surestimation n'est constatée dans le cas RANS : pour toutes les simulations LES, l'écoulement au niveau de la paroi supérieure ne semble pas correctement simulé. On remarque que plus l'écart avec les données expérimentales est important à la paroi supérieure, plus l'ensemble du profil de vitesse longitudinale moyenne est mal reproduit. Ainsi, la mauvaise estimation de l'écoulement à la paroi supérieure semble impacter le champ moyen sur la totalité de la hauteur de veine. Ce problème de survitesse semble

indiquer que l'écoulement à la paroi supérieure transitionne plus tard dans les simulations LES que dans l'expérience VECLA. Cette surestimation pourrait résulter du fait que l'écoulement calculé n'est pas en adéquation avec la condition limite imposée et que le frottement à la paroi supérieure est mal estimé. On peut tenter d'expliquer cette hypothèse en regardant l'évolution axiale de  $y^+$  dans la première rangée de maille<sup>1</sup> à la paroi supérieure pour le calcul LES/Smago DN qui est tracée sur la figure V.6. Les valeurs de  $y^+$  obtenues pour les autres calculs LES sont du même ordre de grandeur. Sur la figure V.6, on a calculé la valeur  $y^+$  à partir des données issues de la simulation selon deux formulations différentes. En premier lieu, on a calculé le  $y^+$  directement à partir de la définition du gradient. On a également tracé le  $y^+$  obtenu en utilisant une loi de paroi. On remarque que quelle que soit la modélisation utilisée (avec le gradient ou avec loi de paroi), la valeur de  $y^+$  est quasi-identique tout le long de la veine et reste inférieure à 5. On en déduit tout d'abord que le maillage est suffisamment raffiné pour capter la sous-couche visqueuse près de la paroi supérieure. De plus, l'écoulement simulé est en accord avec la représentation de condition limite employée pour les simulations LES. L'origine du problème de surestimation de la vitesse à la paroi supérieure pour les simulations LES est donc à chercher ailleurs... Cela pourrait être lié au fait que la condition limite de paroi lisse utilisée lors de ces simulations LES n'est pas représentative de la paroi du montage expérimental. Cette dernière peut en effet présenter des aspérités ou être rugueuse par exemple, ce qui influencerait sur la nature de l'écoulement, laminaire, transitionnel ou turbulent. Il pourrait alors être intéressant d'effectuer un calcul tridimensionnel LES en utilisant une condition limite à la paroi supérieure qui concorderait plus avec la réalité expérimentale.

L'évolution axiale de la pression moyenne dans la veine est exposée sur la figure V.7. Les tracés correspondant aux simulations avec la méthode de déstabilisation numérique (MILES DN et LES/Smagorinsky DN) ainsi que ceux correspondant à la simulation avec le modèle de bruit rouge filtré moyennée sur 22 ms et sur 40 ms sont représentés. Ils sont comparés aux profils obtenus par le calcul RANS et sur le montage expérimental VECLA. Le profil de pression calculé suivant la théorie de Taylor-Culick est également indiqué. On rappelle que ce profil décrit la solution analytique d'un écoulement laminaire et incompressible, dont l'expression est donnée par la relation (III.14). Dans le cas présent, la pression calculée de Taylor-Culick est tracée en  $y/h = 0,5$  et pour une valeur de  $P_0$  telle que :

$$\frac{P}{P_0}(0; 0, 5) = 1 \quad (\text{V.10})$$

On constate que tous les profils simulés, quelle que soit la modélisation considérée (RANS, LES, méthode de déstabilisation numérique, méthode de bruit rouge filtré,...), ont des évolutions analogues tout le long de la veine. On remarque sur la figure V.7 que près

---

1. On rappelle que  $y^+$  est relié à la contrainte de frottement  $\sigma_{\text{paroi}}(x) = \left( \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{\text{paroi}}$  de la façon suivante :  $y^+ = \frac{y v_\sigma}{\nu}$  avec  $v_\sigma = \sqrt{\frac{|\sigma_{\text{paroi}}|}{\rho}}$ .

du fond avant, les profils calculés et expérimentaux sont quasiment superposés au profil de Taylor-Culick. Ainsi, dans cette partie de la veine, l'écoulement peut être considéré comme laminaire et incompressible. Puis, pour  $20 \leq x/h \leq 30$ , on observe une déviation des données expérimentales par rapport à Taylor-Culick, révélant les effets de la compressibilité. Cette déviation est de plus en plus prononcée quand on se rapproche de la sortie de fluide. Les profils calculés s'éloignent également de la solution de Taylor-Culick, et ce dès l'abscisse  $x/h \approx 10$ , pour arriver en sortie de veine à une plus grande distance de la pression de Taylor-Culick que les profils expérimentaux. Cependant, l'écart entre Taylor-Culick et les autres profils reste minime et on peut en déduire que l'écoulement étudié reste quasi-incompressible tout le long de la veine.

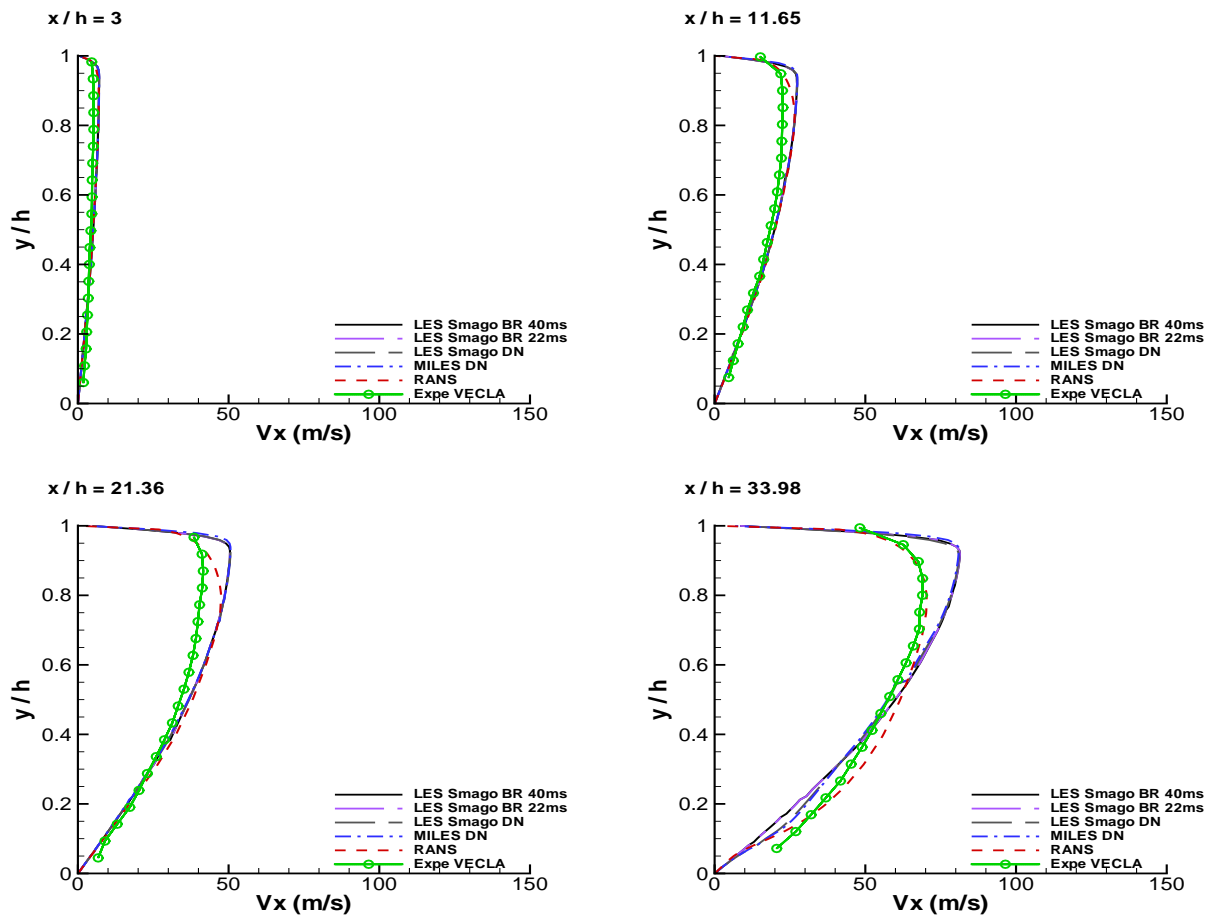


FIGURE V.4 – Profils de vitesse longitudinale pour 8 sections  $x/h$  de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40 ms, LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22 ms, LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (1ère PARTIE)

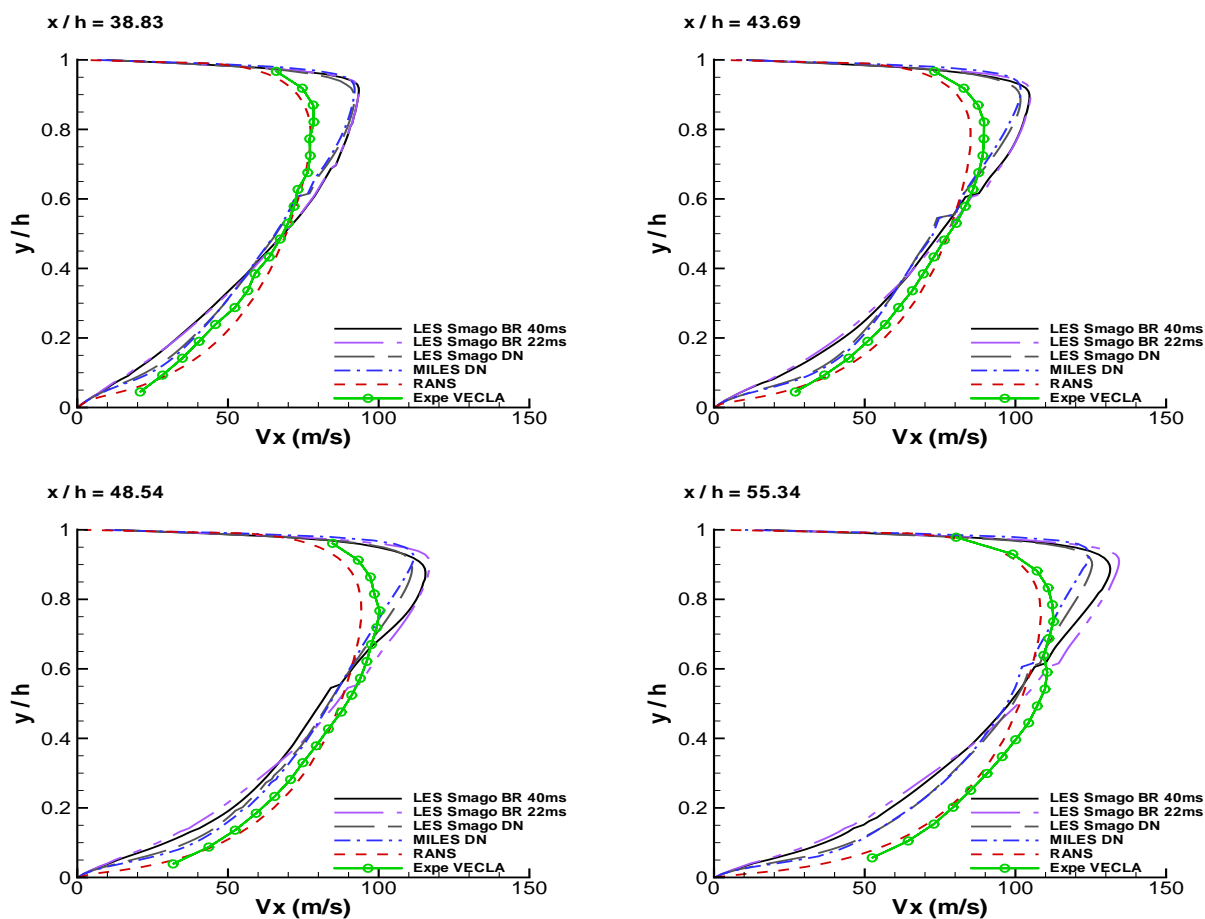


FIGURE V.5 – Profils de vitesse longitudinale pour 8 sections  $x/h$  de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40 ms, LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22 ms, LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (SUITE)

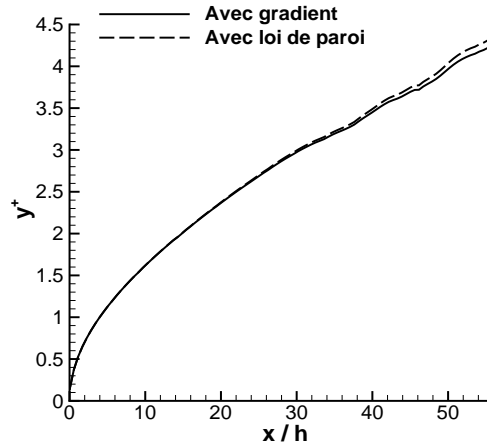


FIGURE V.6 – Calcul 3D LES/Smago DN : Évolution axiale de la valeur de  $y^+$  pour le calcul LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique pour une coupe en  $z = 30 \text{ mm}$ .

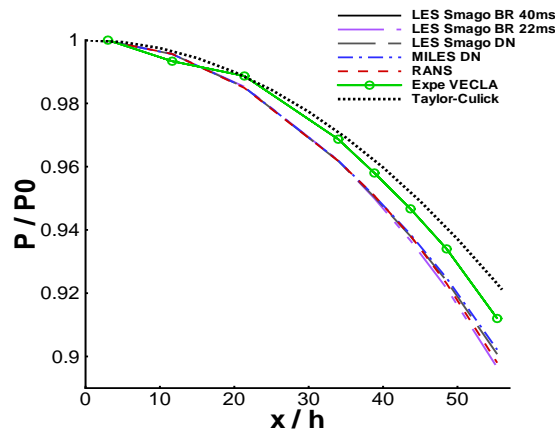


FIGURE V.7 – Variation de la pression moyenne adimensionnée le long de la veine. Comparaison des simulations LES/Bruit Rouge, LES/Smagorinsky, MILES et RANS avec l'expérience VECLA et l'évolution analytique selon Taylor-Culick.

### V.3.2 Transition du profil de vitesse moyenne longitudinale

Pour détecter la transition de la vitesse moyenne longitudinale de façon moyenne dans toute la hauteur du canal, on trace l'évolution du coefficient de quantité de mouvement  $\beta$  le long de la veine sur la figure V.8a. On rappelle que la théorie prévoit que le coefficient

$\beta$  reste constant pour un écoulement laminaire, avant que sa valeur ne diminue lorsque la transition se déclenche, pour atteindre une autre constante quand l'écoulement est pleinement turbulent. La figure V.8a montre que dans le cas expérimental, la transition s'effectue entre les abscisses  $x/h = 20$  et  $x/h = 30$ . En ce qui concerne les simulations numériques, il est plus difficile de déterminer à quelle abscisse la transition s'amorce en se référant uniquement aux tracés de la figure V.8a. On impose alors un critère permettant de déterminer la position de transition  $x/h_{\text{transition}}$  : on choisit que celle-ci est identifiée lorsque le coefficient de quantité de mouvement  $\beta$  s'écarte de 0,5% par rapport à sa valeur laminaire près du fond avant, c'est-à-dire :

$$x/h_{\text{transition}} \text{ tel que } E_{\beta} = 0,5\% \quad (\text{V.11})$$

avec  $E_{\beta}$  le pourcentage d'écart entre le coefficient à l'abscisse  $x/h$  et sa valeur près du fond avant :

$$E_{\beta}(\%) = \frac{\beta_{\text{fond avant}} - (\beta_{\text{fond avant}} - \beta(x/h))}{\beta_{\text{fond avant}}} \times 100 \quad (\text{V.12})$$

La valeur de  $E_{\beta}$  de 0,5% est calculée en première approximation de telle sorte que la position de transition de la simulation LES/Smago DN soit en accord avec le diagramme de Beddini. L'évolution axiale de l'écart entre la valeur au fond avant de  $\beta$  et sa valeur le long de la veine est représentée sur la figure V.8b. On a également indiqué en pointillés les 0,5% d'écart à atteindre pour que l'on considère que la transition est amorcée. Les abscisses  $x/h_{\text{transition}}$  correspondant à la transition de chacune des simulations selon le critère (V.11) cité ci-dessus sont repertoriées dans le tableau V.3. On constate sur la figure V.8b que dans le cas de la simulation RANS, le coefficient  $\beta$  n'est jamais constant mais diminue sur toute la longueur de la veine, contrairement à l'expérience VECLA et aux simulations LES. Selon notre critère, la transition pour le calcul RANS débute en  $x/h \approx 6,7034$  (tableau V.3), bien plus en amont dans la veine que dans le cas expérimental. Par conséquent, la transition turbulente n'est pas estimée de façon satisfaisante par l'approche RANS. En revanche, la figure V.8b montre que le coefficient  $\beta$  pour les simulations LES est quasi-constant près du fond avant, puis commence à décroître entre  $x/h = 25$  et  $x/h = 30$ , en accord avec les relevés expérimentaux, prouvant que la transition est correctement capturée par les simulations LES. Le relevé exact des positions de transition selon le critère imposé (V.11) dans le tableau V.3 montre que de la même façon que pour les profils de vitesse moyenne longitudinale, aucune différence significative n'est observée entre les deux simulations avec déstabilisation numérique (environ 5% d'écart entre MILES DN et LES/Smago DN), ce qui signifie que l'utilisation du modèle de sous-maille de Smagorinsky a peu d'influence sur la transition de l'écoulement. En ce qui concerne le calcul LES/Smagorinsky avec bruit rouge filtré, le temps sur lequel sont moyennées les données (22 ms ou 40 ms) n'a pas ou peu d'influence près du fond avant et sur l'abscisse à laquelle la décroissance s'amorce (moins de 0,01% d'écart entre les deux positions). En revanche, le temps physique a un impact dans le reste de la veine, sur la pente du coefficient  $\beta$  : la figure V.8a illustre le fait que plus le temps physique sur lequel le calcul est moyenné est long, plus la diminution

du coefficient  $\beta$  vers une constante correspondant à un état de turbulence pleinement développée est 'rapide'.

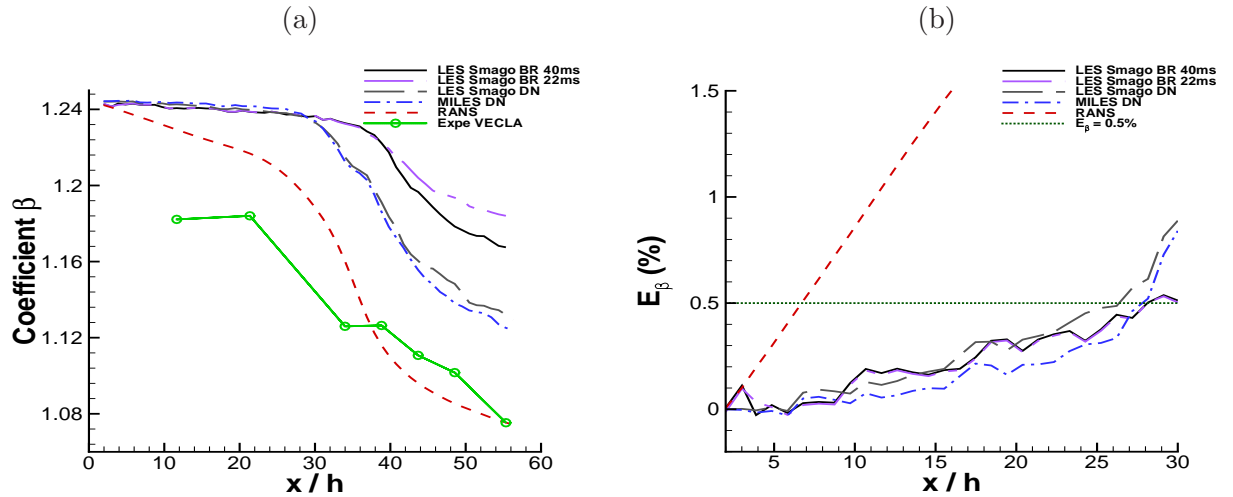


FIGURE V.8 – (a) : Évolution du coefficient de quantité de mouvement  $\beta$  le long de la veine. (b) : Pourcentage d'écart relatif entre la valeur du coefficient  $\beta$  au fond avant et sa valeur le long de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40 ms, LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22 ms, LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA.

Nom de la simulation	Position axiale $x/h_{\text{transition}}$ de transition
RANS	6,7034
LES/Smago DN	26,3663
MILES DN	27,8026
LES/Smago BR40ms	28,1184
LES/Smago BR22ms	28,1205

TABLE V.3 – Position axiale de la transition du profil de vitesse moyenne longitudinale pour les simulations selon le critère suivant : la transition est repérée lorsque le coefficient de quantité de mouvement  $\beta$  atteint 0,5% d'écart  $E_\beta$  défini par (V.12) par rapport à sa valeur laminaire près du fond avant.



### V.3.3 Quantités fluctuantes

Les figures V.9 et V.10 montrent la comparaison des profils d'intensité turbulente  $I = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2}$  des calculs LES avec la simulation RANS et les données expérimentales en différentes positions axiales le long de la veine. Pour  $x/h \leq 21, 36$ , l'intensité turbulente des calculs LES est approximativement en accord avec l'expérience VECLA. En revanche, les valeurs RANS surestiment les données expérimentales avec un maximum de 20% d'erreur relative. Pour  $33, 98 \leq x/h \leq 38, 83$ , les calculs RANS et LES avec Déstabilisation Numérique surestiment les données expérimentales, à l'inverse du calcul LES avec Bruit Rouge qui les sous-estime. Pour  $x/h \geq 43, 69$ , tous les calculs, RANS comme LES, surestiment l'intensité turbulente et cette tendance s'accroît quand on se rapproche de la sortie de fluide. Le temps physique sur lequel on analyse la simulation LES avec Bruit Rouge a une influence sur le profil d'intensité turbulente dans la zone du canal où la turbulence se développe. En effet, en se rapprochant de la sortie de fluide, le profil calculé sur 40 *ms* s'éloigne de celui calculé sur 22 *ms* ainsi que des données expérimentales. On remarque que pour un temps physique simulé d'environ 22 *ms*, l'utilisation de la méthode de bruit rouge (calcul LES/Smago BR) donne des estimations des quantités turbulentes bien plus en accord avec l'expérience que la méthode de Déstabilisation Numérique (calcul LES/Smago DN). Cette différence peut être liée au fait que la méthode de Déstabilisation Numérique est appliquée dans tout le volume de la veine, alors que le bruit rouge impose des fluctuations localisées au niveau de la paroi injectante, comme c'est le cas dans l'expérience VECLA.

Sur les profils expérimentaux, on voit émerger un pic d'intensité turbulente à la mi-hauteur du canal en  $x/h = 21, 36$ , localisation axiale correspondant au début de la transition. Pour  $x/h \geq 21, 36$ , la valeur maximale de ce pic s'accroît et se déplace vers la paroi injectante quand on se rapproche de la sortie de fluide. L'apparition de ce pic et de son évolution le long de la veine est globalement bien reproduit par les simulations sauf près de la paroi supérieure. La simulation avec Bruit Rouge effectuée sur 40 *ms* se différencie des autres calculs et de l'expérience par la présence d'un pic à la mi-hauteur de veine et uniquement près de la sortie de fluide. Comme le prouvent les figures E.9, E.10, E.11 et E.12 de l'annexe E.3, ce pic provient exclusivement de la contribution longitudinale de la fluctuation de vitesse. Les profils d'intensité turbulente des figures V.9 et V.10 mettent en évidence que toutes les simulations, RANS comme LES, calculent des quantités fluctuantes près de la paroi supérieure différentes de celles mesurées expérimentalement. Pour les simulations LES, l'analyse de l'écoulement moyen a révélé que celui-ci est également mal estimé près de la paroi supérieure, puisque la présence d'une survitesse semblait indiquer que la transition de l'écoulement à ce niveau de la veine est retardé par rapport à l'expérience. Or, en ce qui concerne les quantités fluctuantes, c'est le comportement inverse qui est décelé pour les simulations LES : la surestimation des fluctuations laisse croire que la transition à la paroi supérieure est calculée en avance par rapport à l'expérience ! Avec cette constatation, on s'aperçoit que l'emploi d'une condition limite qui modéliserait la paroi supérieure

expérimentale de façon plus précise pourrait apporter une amélioration significative pour la simulation de l'écoulement dans la veine.

Les figures E.7 et E.8 de l'annexe E.3 représentent également l'évolution des profils d'intensité turbulente, mais à la différence des profils des figures V.9 et V.10, l'intensité turbulente pour les calculs LES y est calculée en prenant en compte la composante tangentielle de la fluctuation de vitesse  $v'_z$ , et on a :

$$I = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2} \quad (\text{V.13})$$

En comparant les profils des calculs LES des figures E.7 et E.8 avec ceux des figures V.9 et V.10, on constate que la contribution de la composante tangentielle est non-négligeable, ce qui semble compréhensible étant donné que la turbulence est un phénomène tridimensionnel.

Dans le chapitre II, le spectre des fluctuations de pression (figure II.11) a permis d'établir qu'expérimentalement, aucun phénomène acoustique n'est présent dans la veine. Or, la figure V.11 démontre que dans le cas des simulations LES, une fréquence  $f_{\text{pic}} \approx 33000 \text{ Hz}$  est excitée. Dans le tableau V.4, sont indiquées les valeurs des quatre premiers modes de fréquences acoustiques longitudinales, transversales et tangentielles dans un canal fermé aux dimensions identiques à VECLA. D'après le tableau V.4, cette fréquence  $f_{\text{pic}} \approx 33000 \text{ Hz}$  pourrait correspondre au deuxième mode transversal acoustique de la veine. L'amplitude de la pression à cette fréquence est deux à trois fois plus élevée pour la simulation avec Bruit Rouge que pour les simulations avec Déstabilisation Numérique. On a inventorié dans le tableau V.5, le pourcentage d'énergie que représente l'amplitude de la DSP de la fluctuation de pression à la fréquence  $f_{\text{pic}} \approx 33000 \text{ Hz}$  par rapport à l'énergie globale sur tout le signal temporel de pression, pour le calcul LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge. La contribution de l'acoustique à cette fréquence s'élève à environ 10% de l'énergie totale près du fond avant, alors que près de la sortie de veine, cette contribution chute aux alentours de 1%. On peut penser que l'onde plane qui semble excitée selon la direction transversale  $y$  a un impact sur l'écoulement particulièrement ressenti dans la zone où celui-ci est laminaire. Puis, avec le déclenchement de la transition, cette part d'acoustique se mêle à la turbulence. De ce fait, la présence d'acoustique dans le canal pour les simulations LES pourrait venir perturber l'écoulement et le modifier par rapport à celui obtenu lors de l'expérience sur le montage VECLA.

$n$	1	2	3	4
$f_x^n (Hz)$	300	600	900	1200
$f_y^n (Hz)$	16942	33884	50825	67767
$f_z^n (Hz)$	2908	5816	8724	11633

TABLE V.4 – Valeurs des fréquences acoustiques longitudinales  $f_x^n$ , transversales  $f_y^n$  et tangentielles  $f_z^n$  selon différents modes  $n$  pour le canal VECLA. ( $f_i^n = n \times a / (2L_i)$ , avec  $i = x, y, z$ ).

$x/h$	$(\text{RMS}(P'))^2$ $(Pa^2)$	Amplitude de $\text{DSP}(P')(f = f_{\text{pic}})$ $(Pa^2)$	% de $\text{DSP}(P')$ par rapport à $(\text{RMS}(P'))^2$ (%)
3	8364,93	524,76	6,27
11,65	3210,36	380,16	11,84
21,36	3466,85	375,02	10,80
33,98	10689,49	509	4,76
38,83	120096,90	522,99	0,44
43,69	181237,52	978,71	0,54
48,54	121041,37	602,99	0,50
55,34	124792,63	1441,72	1,16

TABLE V.5 – Tableau des valeurs RMS au carré de la fluctuation de pression et valeurs de l'amplitude de la DSP des fluctuations de pression relevée à la fréquence  $f_{\text{pic}} \approx 33000 Hz$ , en différentes abscisses  $x$  le long de la veine, en  $y = 5 mm$ .

Expérimentalement, on a vu dans le chapitre II, que la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de la fluctuation de vitesse totale passe d'une pente en  $f^{-3}$  près du fond avant à une pente en  $f^{-5/3}$  après le déclenchement de la transition (figure II.12). Les DSP de la fluctuation de vitesse totale en deux abscisses différentes de la veine pour les calculs LES sont représentées à la figure V.12 (voir figures E.16, E.17 et E.18 de l'annexe E.3 pour les DSP obtenues tout le long de la veine). Même si les DSP sont trop bruitées pour pouvoir déterminer leur pente avec précision, on peut toutefois constater que celles obtenues avec la méthode de déstabilisation numérique (figures V.12 a et b) semblent se redresser le long de la veine, suivant ainsi l'évolution expérimentale. En revanche, pour la simulation

avec Bruit Rouge (figure V.12c), c'est le comportement inverse qui semble prédominer : la pente de la DSP paraît se raidir quand on se rapproche de la sortie de veine. Il est possible que ce comportement ait pour origine des différences de condition d'injection entre les écoulements obtenus expérimentalement et numériquement. En effet, près de la paroi injectante, l'évolution expérimentale dans VECLA de la DSP de la fluctuation de vitesse totale en  $f^{-2}$  a été relevée en une seule abscisse près du fond avant du montage. On peut imaginer que l'évolution du spectre près de la paroi injectante ne reste pas en  $f^{-2}$  tout le long de la veine, mais qu'elle varie. Or, numériquement, la source de bruit rouge impose un spectre en  $f^{-2}$  au niveau de l'injection et sur la totalité de la longueur du canal. Ainsi, ce spectre imposé en  $f^{-2}$  à l'injection pour la simulation LES avec bruit rouge pourrait marquer l'écoulement dans le reste de la veine et cela pourrait expliquer le raidissement du spectre observé plus on se rapproche de la sortie de veine (figure V.12c). Pour vérifier cette hypothèse, il faudrait analyser des mesures expérimentales près de la paroi injectante sur toute la longueur du canal VECLA, données dont on ne dispose pas à l'heure actuelle.

À la figure V.13, sont exposées les densités de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale pour les différents calculs LES et en deux positions axiales le long de la veine (voir figures E.19, E.20 et E.21 de l'annexe E.3 pour les autres abscisses). Expérimentalement, on a vu que la fluctuation de vitesse totale est quasi-gaussienne tout le long de la veine, et est particulièrement proche de la loi normale après le déclenchement de la transition (figure II.9). La figure V.13 montre que la simulation avec bruit rouge reproduit le caractère gaussien des fluctuations de vitesse totale avec plus de précision que les deux calculs menés avec la méthode de déstabilisation numérique. Cela peut provenir du fait que le modèle de bruit rouge permet d'imposer le critère gaussien aux fluctuations générées alors qu'aucune précision sur ce point n'est accessible par la méthode de déstabilisation numérique. On a vu au paragraphe V.2.5 que le caractère gaussien du modèle de bruit rouge est bien reproduit près de la paroi injectante lors de la simulation. La figure V.13c semble indiquer que les fluctuations appliquées par le modèle de bruit rouge au niveau de l'injection marque l'écoulement fluctuant dans le reste de la veine en lui imposant le caractère gaussien.

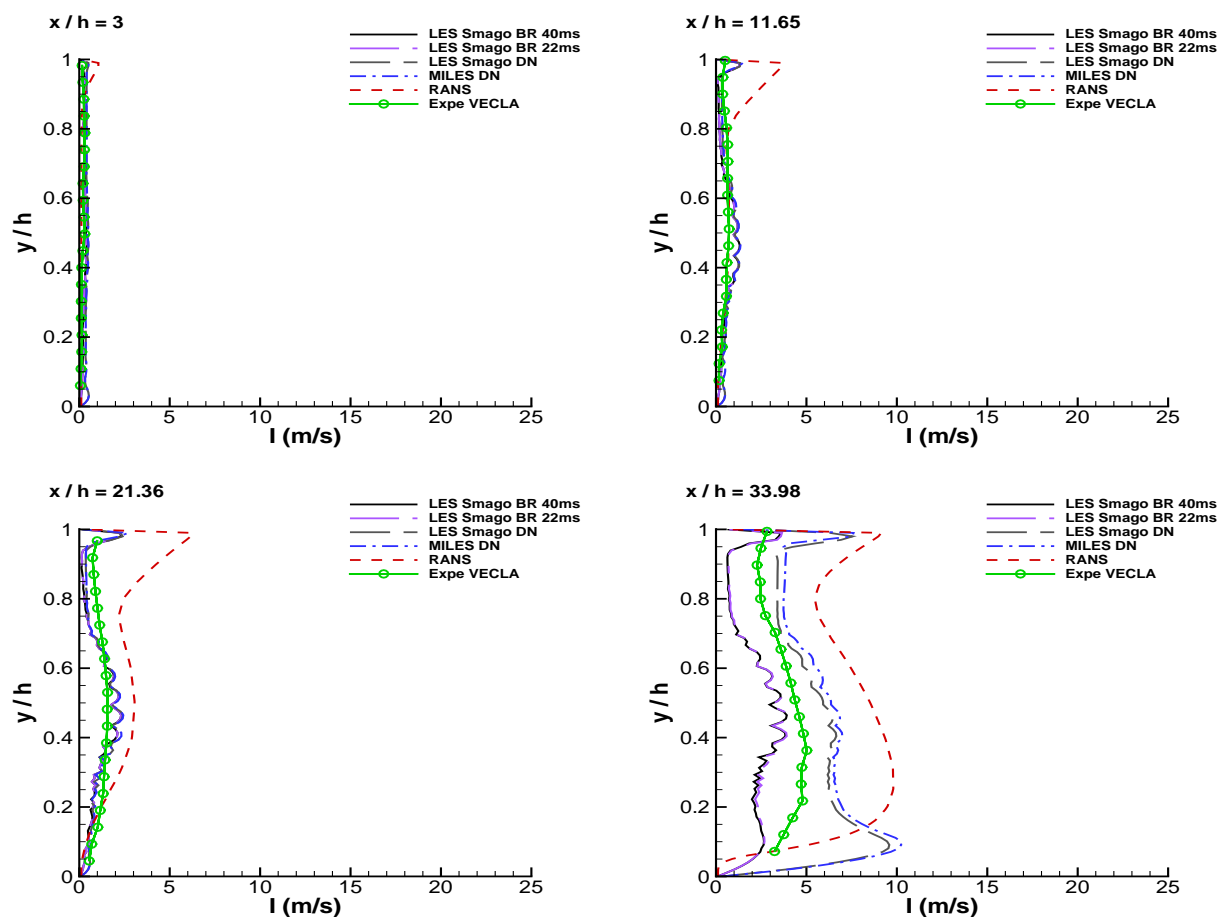


FIGURE V.9 – Intensité turbulente  $I = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2}$  pour 8 sections  $x/h$  de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40  $ms$ , LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22  $ms$ , LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (1ère PARTIE)

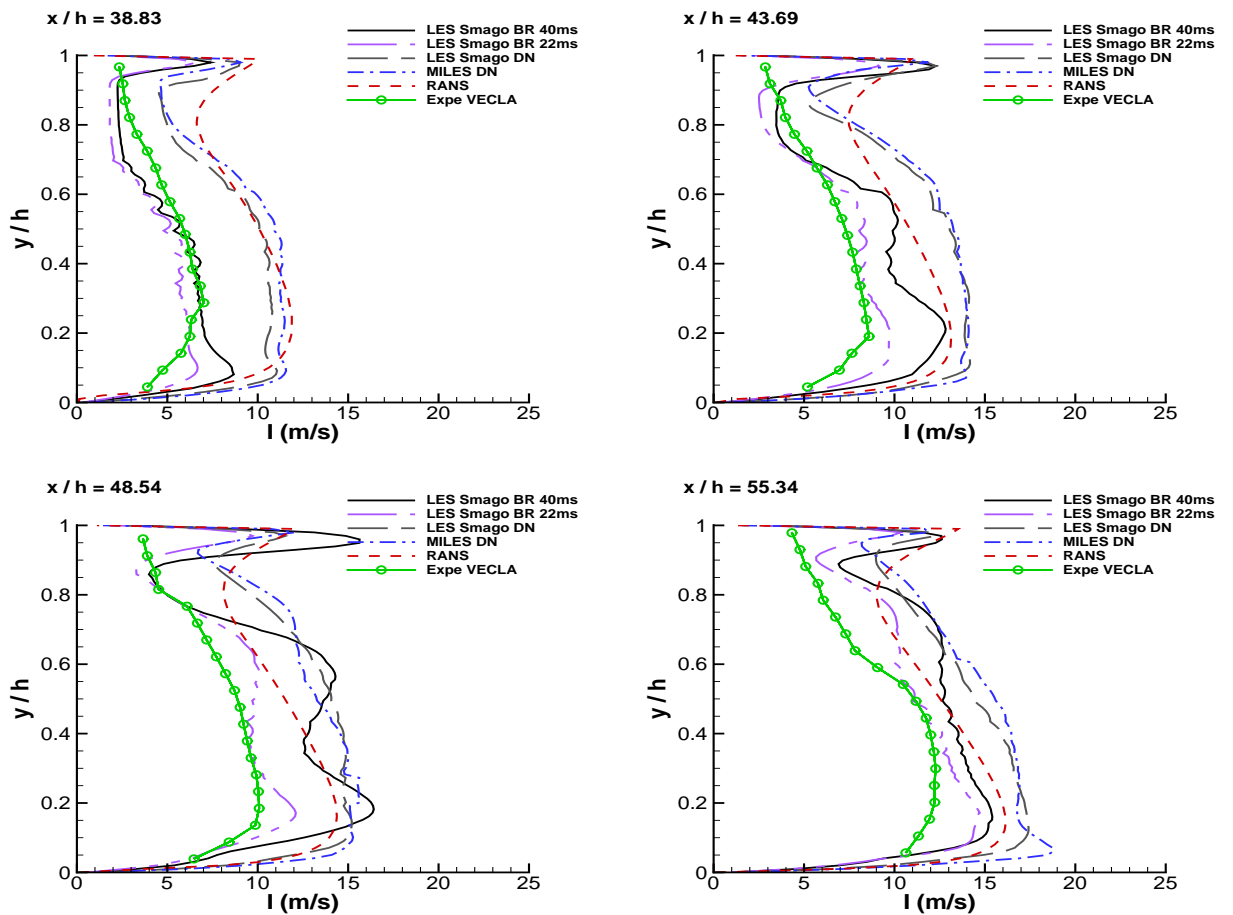


FIGURE V.10 – Intensité turbulente  $I = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2}$  pour 8 sections  $x/h$  de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40 ms, LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22 ms, LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (SUITE)

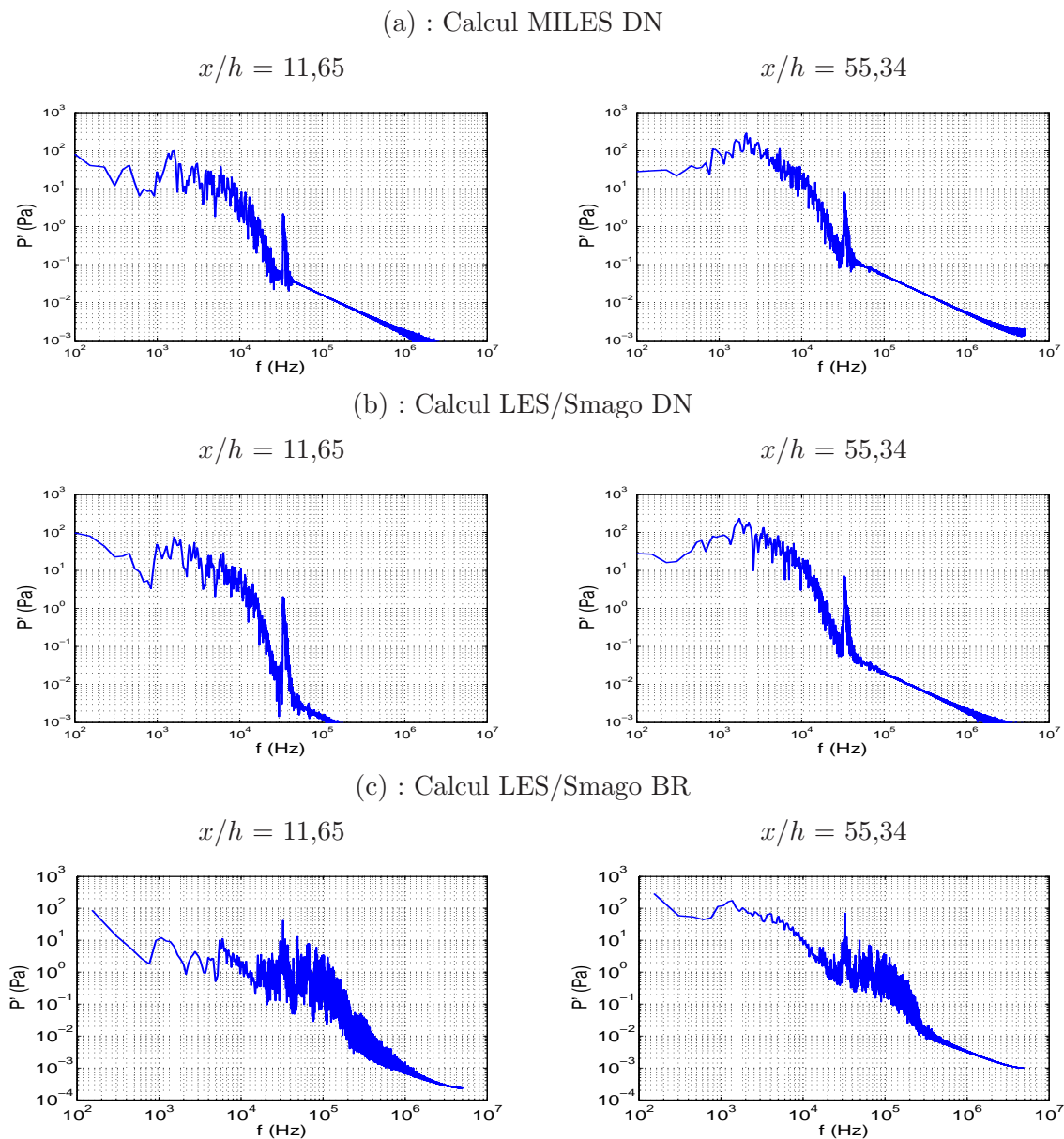


FIGURE V.11 – Spectres de la fluctuation de pression  $P'$  lors des calculs 3D LES en différentes positions axiales  $x$  le long de la veine, en  $y = 5 \text{ mm}$ . (Calculs MILES DN et LES/Smago DN :  $2^{17}$  points,  $\Delta f = 76 \text{ Hz}$  et  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ .) (Calcul LES/Smago BR :  $2^{16}$  points,  $\Delta f = 38 \text{ Hz}$  et  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ .)

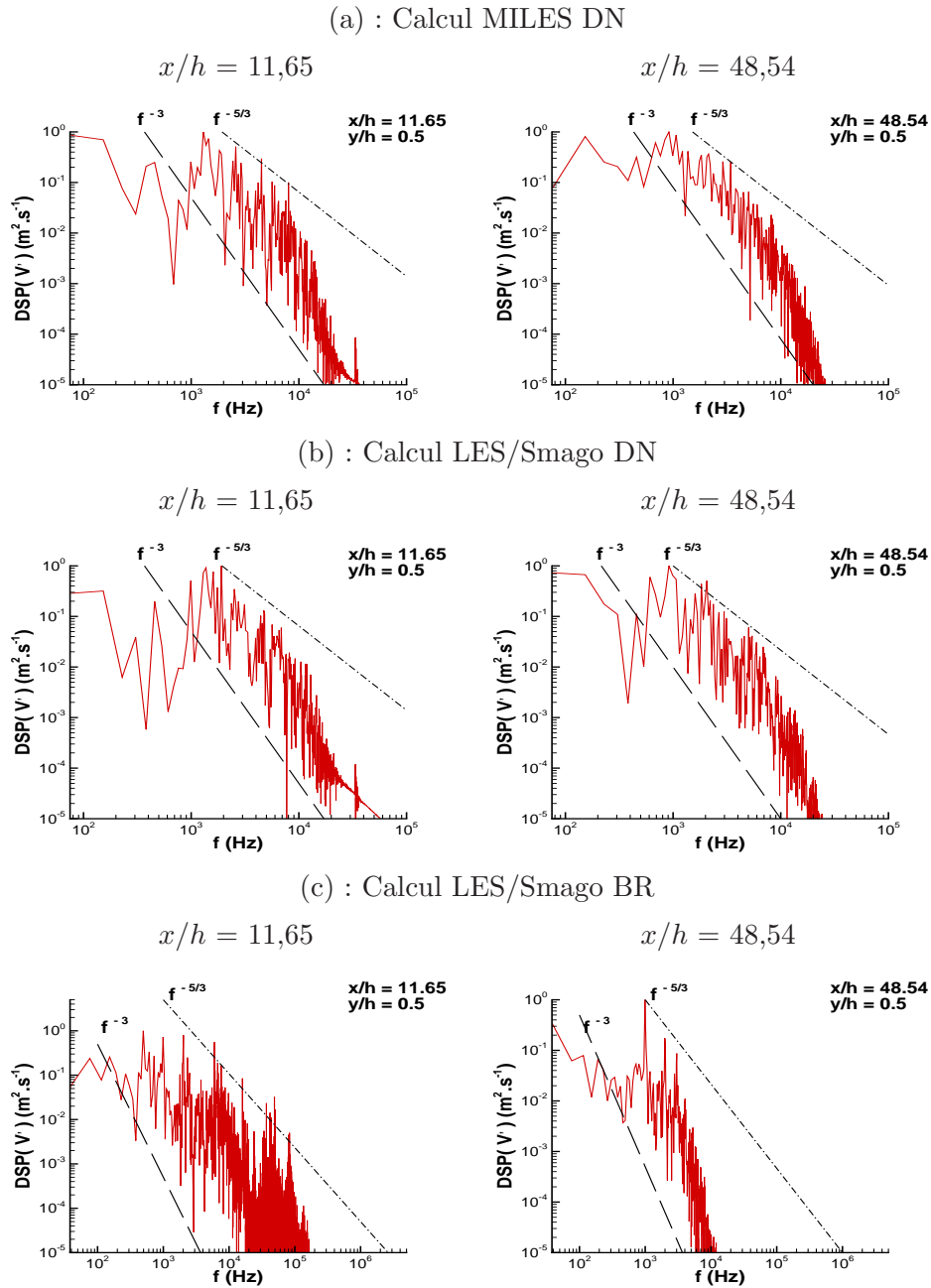


FIGURE V.12 – Tracés de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors des calculs 3D pour différentes valeurs de l'abscisse  $x$  le long de la veine, en  $y = 5 \text{ mm}$ . (Calcul 3D MILES DN et calcul LES/Smago DN :  $2^{17}$  points,  $\Delta f = 76 \text{ Hz}$  et  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ .) (Calcul LES/Smago BR :  $2^{18}$  points,  $\Delta f = 38 \text{ Hz}$  et  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ .)



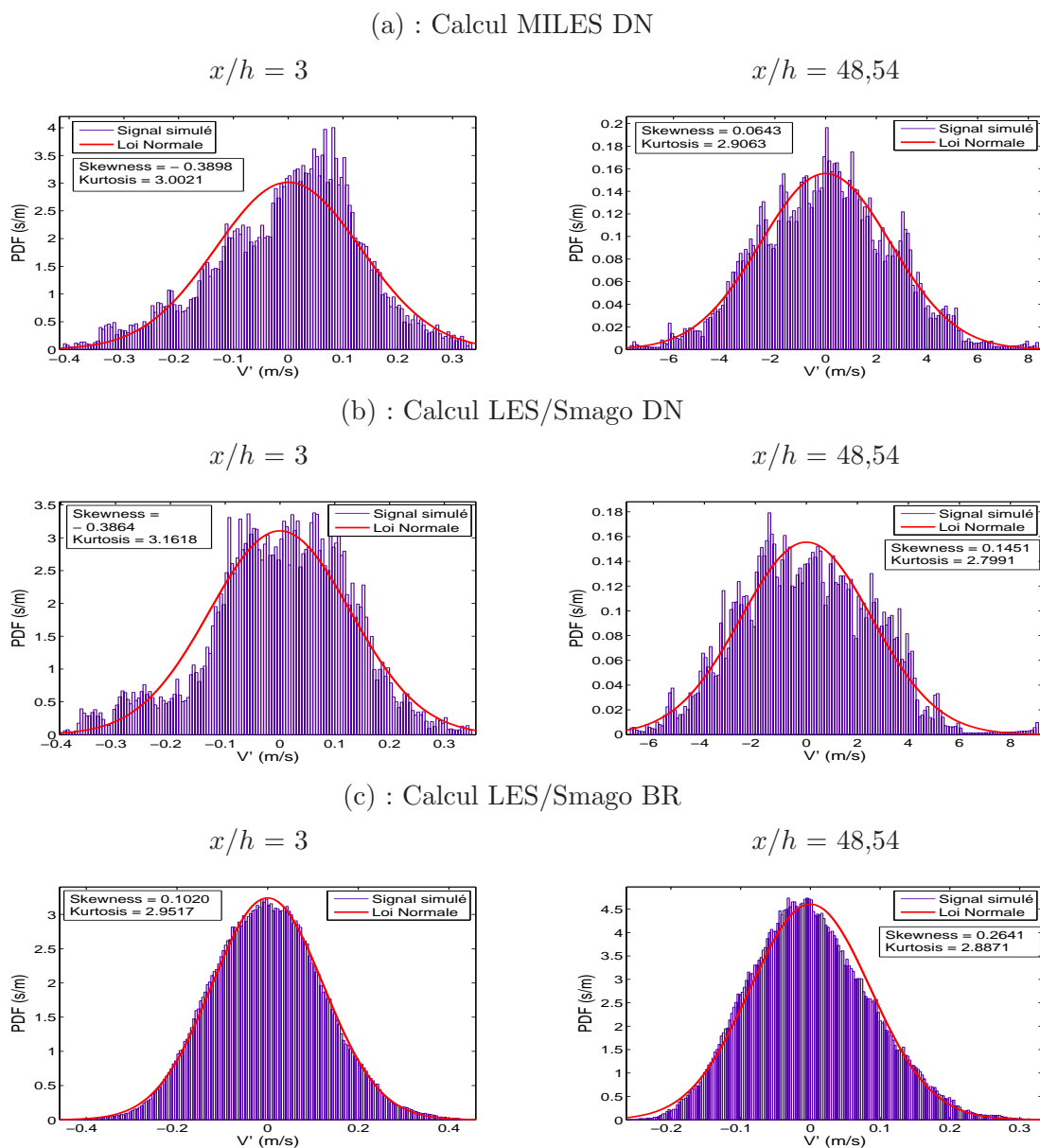


FIGURE V.13 – Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors des calculs 3D LES pour deux différentes positions axiales  $x$  le long de la veine (telles que  $x/h = 3$  et  $x/h = 48,54$ ), en  $y = 5 \text{ mm}$ .

## V.4 Conclusion du chapitre

Des calculs LES d'écoulement transitionnel dans VECLA ont été menés avec soit une approche MILES associée à la méthode de déstabilisation numérique, soit une approche LES avec un modèle de sous-maille de Smagorinsky et la déstabilisation numérique, soit une approche LES avec modèle de Smagorinsky et le modèle de bruit rouge filtré pour générer les fluctuations près de la paroi injectante.

On a tout d'abord calibré les différents paramètres du modèle de bruit rouge avant de vérifier que les fluctuations générées par ce modèle lors de la simulation LES de l'écoulement transitionnel dans VECLA possèdent bien les mêmes propriétés que les mesures de bruit expérimentales. On a ensuite comparé les simulations tridimensionnelles instationnaires LES dans VECLA avec une simulation bidimensionnelle stationnaire RANS et les données expérimentales.

Les écoulements moyen et fluctuant ont révélé une surestimation des champs simulés par rapport aux données expérimentales au niveau de la paroi supérieure. L'analyse effectuée montre que la condition limite de paroi lisse employée pour les simulations n'est pas représentative de celle du montage VECLA. Une amélioration de la qualité des simulations pourrait être obtenue par l'utilisation d'une condition à la paroi supérieure plus en accord avec la réalité de l'expérience.

L'approche RANS reproduit fidèlement l'écoulement moyen, mais reste approximative pour estimer les quantités turbulentes. Quant à la position de transition, cette approche n'a pas permis de la localiser avec précision. En revanche, toutes les simulations LES ont capturé la position de transition de façon quasi-similaire et en accord avec les données expérimentales. Elles engendrent également de l'acoustique dans la veine, alors qu'aucun phénomène de ce type n'est observé dans l'expérience. Même si l'énergie associée à la fréquence acoustique excitée reste faible, il pourrait être intéressant d'analyser plus en détails les mécanismes qui en sont à l'origine pour tenter de les éliminer. On a constaté que le modèle de sous-maille de Smagorinsky a peu ou pas d'effet sur l'écoulement moyen et la transition et permet de relativement améliorer l'estimation des quantités turbulentes.

L'utilisation du modèle de bruit rouge a permis de déclencher la transition à partir d'un écoulement initial laminaire dans le canal. On a noté une amélioration de l'estimation du champ fluctuant par rapport à la simulation LES de référence avec déstabilisation numérique. Même si certains aspects de l'écoulement ne sont pas exactement reproduits par le calcul avec le modèle de bruit rouge, d'autres sont calculés en accord avec les données expérimentales. C'est notamment le cas de la position de la transition. De plus, le caractère gaussien des fluctuations imposé par le bruit rouge à la paroi injectante est transporté dans le reste de la veine. Grâce à ce comportement, les fluctuations dans la veine respectent la

loi gaussienne observée expérimentalement.

## Conclusion et perspectives

Les travaux ont consisté à étudier par simulation numérique instationnaire l'écoulement dans un Moteur à Propergol Solide (MPS). On s'est concentré sur l'écoulement en gaz froid généré dans un canal à injection pariétale, configuration représentative par certains aspects de l'écoulement dans un MPS. On s'est basé sur les résultats expérimentaux obtenus sur le montage en gaz froid de section rectangulaire VECLA de l'ONERA.

Les premières simulations numériques effectuées ont permis d'identifier que l'écoulement dans VECLA change de comportement le long du canal : il passe d'un état laminaire décrit par la solution analytique de Taylor-Culick près du fond avant, à une transition turbulente en milieu de veine. La transition turbulente correspond à la position le long du canal où les profils de vitesse longitudinale passent d'une forme laminaire de Taylor-Culick à une forme turbulente. Pour identifier cette position, on s'est référé à la localisation où le coefficient de quantité de mouvement commence à décroître par rapport à sa valeur laminaire.

Les simulations numériques tridimensionnelles instationnaires d'écoulement transitionnel dans VECLA sont menées avec une approche LES. L'une des difficultés de ce type de simulation repose sur la modélisation des perturbations de l'écoulement injectées au niveau de la paroi poreuse. Celle-ci peut avoir une influence majeure sur la qualité des résultats, et notamment sur la position de la transition. On s'est alors focalisé sur la recherche d'une modélisation de fluctuations au niveau de l'injection de fluide à la paroi poreuse qui permettrait de prendre en compte des paramètres physiques qui seraient calibrés par des données expérimentales issues du montage VECLA.

La méthode de génération de fluctuations physiques trouvée correspond à l'équation différentielle stochastique de Langevin. Par l'intermédiaire de ce modèle, on a pu imposer certains critères concernant les perturbations générées en les reliant aux données expérimentales. L'étude du comportement de ce modèle après son implantation dans le code de calcul CEDRE a révélé certaines limitations, notamment dans le choix de la variable sur

laquelle les fluctuations sont appliquées. Malgré cela, nombre d'autres paramètres physiques ont pu être imposés selon des valeurs choisies. C'est notamment le cas de l'échelle temporelle ou de l'amplitude des fluctuations.

Grâce aux simulations numériques LES tridimensionnelles instationnaires de l'écoulement transitionnel dans VECLA, nous avons montré dans cette étude la capacité du modèle de génération de fluctuations de Langevin à déclencher la transition, en une position en accord avec l'expérience. La comparaison avec des résultats d'une simulation LES menée avec une méthode de génération de perturbations numériques a révélé que l'utilisation du modèle de Langevin permet d'améliorer la précision de l'estimation du champ fluctuant. Ce modèle de Langevin, appliqué dans une zone limitée près de la paroi injectante, contraint les fluctuations à suivre une répartition gaussienne, caractère qui se trouve ensuite transporté dans tout le reste de la veine.

Dans le cas spécifique de la simulation numérique de l'écoulement dans VECLA, l'importance de la condition limite à la paroi supérieure a été mise en évidence. Dans les simulations menées, la condition limite de paroi supérieure lisse employée a été analysée comme ne représentant probablement pas la paroi supérieure du montage expérimental. En conséquence, l'estimation des champs moyen et fluctuant calculés près de la paroi supérieure s'en est retrouvée affectée et ne concorde pas avec les valeurs expérimentales. Le défaut reste localisé près de la paroi supérieure mais pourrait cependant jouer sur la structure de l'écoulement dans le reste de la veine et notamment sur la transition. Une amélioration possible des simulations d'écoulement dans VECLA pourrait être obtenue en employant une condition limite à la paroi supérieure plus représentative de celle utilisée expérimentalement.

Pour l'étude de la transition de façon plus générale, on pourrait envisager par la suite de coder le modèle de Langevin non plus comme une source appliquée près de la paroi supérieure, mais plutôt comme une condition limite. Ainsi, on se rapprocherait de la réalité de l'expérience. Ce modèle de Langevin pourrait également permettre d'effectuer des études paramétriques, notamment au niveau de l'étude de la sensibilité du déclenchement de la transition en fonction de la valeur de l'échelle temporelle ou de l'amplitude des fluctuations imposées par exemple. Le modèle de Langevin pourrait également être employé pour des simulations numériques multiphysiques dans le cadre d'études plus générales sur les moteurs à propergol solide. En effet, l'opportunité apportée par ce modèle de pouvoir imposer la valeur de certains paramètres offre la possibilité de l'utiliser pour imposer l'échelle temporelle caractéristique de la combustion du propergol par exemple.

# Rappels sur les variables aléatoires et la loi normale

---

## A.1 Définition de la densité de probabilité (PDF) d'une loi normale

Une variable aléatoire réelle  $x$  qui suit une loi normale d'espérance  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$  (notée  $x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  avec  $\sigma^2$  la variance) a une densité de probabilité PDF (pour *Probability Density Function*) de la forme suivante :

$$\text{PDF}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (\text{A.1})$$

La loi normale centrée réduite, ou loi gaussienne, correspond à une loi normale d'espérance nulle et de variance unité :  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

## A.2 Coefficient de dissymétrie (ou skewness)

Le coefficient de dissymétrie permet de caractériser l'asymétrie de la distribution d'une variable aléatoire :

- Pour la loi normale, la distribution est symétrique, donc le coefficient de dissymétrie est égal à 0.
- Si le coefficient de dissymétrie est positif, alors la distribution est étalée vers la gauche avec une queue de distribution étalée vers la droite.
- Si le coefficient de dissymétrie est négatif, alors la distribution est étalée vers la droite avec une queue de distribution étalée vers la gauche.

### A.3 Coefficient d'applatissage (ou kurtosis)

Tout comme le *skewness*, le coefficient d'applatissage permet de caractériser la distribution d'une variable aléatoire. Le *kurtosis* indique si le regroupement des valeurs est plus ou moins proche du centre de la distribution.

- Pour la loi normale, le coefficient d'applatissage est égal à 3.
- Si le coefficient d'applatissage est inférieur à 3, alors la distribution semble plus "pointue" que la loi normale : les valeurs sont "serrées" autour du centre de la distribution par rapport à une distribution suivant la loi normale.
- Si le coefficient d'applatissage est supérieur à 3, alors la distribution est "aplatie" autour du centre de la distribution par rapport à une distribution suivant la loi normale.

# Calcul des vitesses d'injection et des débits associés aux différentes pressions d'alimentation

---

Pour les mesures expérimentales de bruit sur VECLA lors de la campagne d'essais de 2010, des relevés ont été effectués en  $x = 31 \text{ mm}$  pour différentes valeurs du débit d'injection. Ces débits dépendent uniquement du choix de la pression d'alimentation  $P_{al}$ . Des mesures ont donc été effectuées pour différentes valeurs de  $P_{al}$  : 7.25, 5.44, 4.35, 3.63, 3.11, 2.72 et 2.42 bar. On présente ici la démarche employée pour déterminer la valeur du débit ainsi que la valeur de la vitesse d'injection associées à chacune de ces pressions d'alimentation.

## B.1 Principe de l'alimentation en air du montage VECLA

Avant d'atteindre le canal rectangulaire dans lequel sont effectuées les mesures, l'air passe par une chambre d'alimentation où il subit une détente jusqu'à la pression d'alimentation  $P_{al}$  (figure B.1). L'air circule ensuite à travers 14 tubes flexibles pour arriver dans 7 pré-chambres. Enfin, l'air est introduit dans le canal par l'intermédiaire de la plaque poreuse. En entrée de chaque tube flexible est disposé un col sonique de diamètre  $D = 2,5 \text{ mm}$  afin de répartir le débit de façon égale entre les 7 préchambres et de calculer le débit entrant dans le canal. Le débit ne dépend en effet que de la température de l'air et de la pression dans la chambre d'alimentation et peut être déterminé grâce aux formules des tuyères amorcées. Ces formules ainsi que la démarche employée pour déduire les débits à partir de la pression d'alimentation sont décrites dans cette annexe.



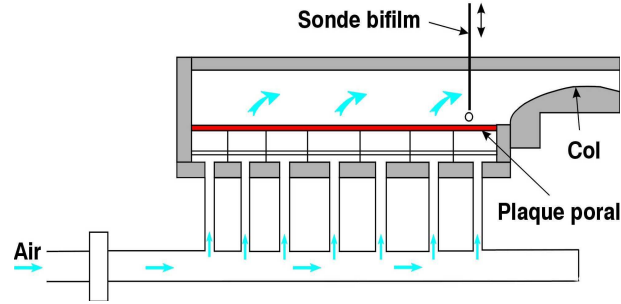


FIGURE B.1 – Schéma de l'alimentation en air du montage VECLA.

## B.2 Débit $\dot{m}$

Le débit  $\dot{m}$  ( $kg.s^{-1}$ ) est donné par la formule de débit d'une tuyère [12] :

$$\dot{m} = P_{al} A_c \Gamma(\gamma) \frac{1}{\sqrt{\frac{RT}{M}}} \times N \quad (B.1)$$

avec  $N$  le nombre de tubes flexibles,  $M = 0,02912 \text{ kg.mol}^{-1}$  la masse molaire de l'air,  $R = 8,314472 \text{ J.mol}^{-1}.K^{-1}$  la constante universelle des gaz parfaits,  $A_c$  la section du col telle que  $A_c = \frac{\pi D^2}{4}$  ( $m^2$ ), avec  $D = 2,5 \times 10^{-3} \text{ m}$  le diamètre au col et :

$$\Gamma(\gamma) = \sqrt{\gamma} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (B.2)$$

avec  $\gamma = 1,4$  le rapport des chaleurs spécifiques.  $T$  est la température d'arrêt du fluide dans la tuyère. Sa valeur est proche de la température dans la veine et on fait alors l'approximation de prendre  $T$  égale à la température dans la veine.

## B.3 Expression du débit massique surfacique $\dot{m}_s$

Au cours de l'étude, on a besoin du débit massique surfacique  $\dot{m}_s$  qui peut aisément être déterminé à partir du débit  $\dot{m}$ . En effet, on a :

$$\dot{m}_s = \frac{\dot{m}}{S_{inj}} \quad (B.3)$$

où  $S_{inj}$  est la surface d'injection.

## B.4 Surface d'injection $S_{inj}$

La surface d'injection est égale à :

$$S_{inj} = L \times l \quad (\text{B.4})$$

où  $L = 0,581 \text{ m}$  est la longueur du canal VECLA et  $l = 0,060 \text{ m}$  sa largeur.

## B.5 Expression de la vitesse d'injection

La vitesse d'injection  $v_{inj} \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$  est obtenue à partir de l'expression suivante :

$$v_{inj} = \frac{\dot{m}}{\rho S_{inj}} = \frac{\dot{m}_s}{\rho} \quad (\text{B.5})$$

avec  $\rho$  la masse volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ ).

## B.6 Masse volumique $\rho$

L'expression de la masse volumique utilisée pour le calcul des vitesses d'injection dépend de la pression à l'intérieur de la veine  $P_{veine}$  (exprimée en  $\text{Pa} = \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$ ), de la température de l'air  $T = 303 \text{ K}$  et de la constante spécifique des gaz parfaits pour l'air  $r = 287 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  :

$$\rho = \frac{P_{veine}}{rT} \quad (\text{B.6})$$

La pression dans la veine  $P_{veine}$  correspondant à chacune des pressions d'alimentation  $P_{al}$  est obtenue en moyennant les valeurs relevées expérimentalement en chacune des positions de mesure de bruit près du fond avant :

$P_{al} \text{ (bar)}$	7,25	5,44	4,35	3,63	3,11	2,72	2,42
$P_{veine} \text{ (bar)}$	1,35	1,20	1,13	1,09	1,06	1,04	1,03

TABLE B.1 – Valeurs des pressions dans la veine  $P_{veine}$  associées à chacune des pressions d'alimentation  $P_{al}$ .

Ainsi, en combinant les expressions (B.5) et (B.6), on en déduit que la vitesse d'injection peut être calculée de la façon suivante :

$$v_{inj} = \frac{\dot{m}_s r T}{P_{veine}} \quad (\text{B.7})$$

## B.7 Valeurs de la vitesse d'injection et du débit massique surfacique

Grâce aux expressions définies précédemment, on peut calculer les valeurs du débit massique surfacique  $\dot{m}_s$  (expression B.3) et de la vitesse d'injection  $v_{inj}$  (expression B.7) correspondant à chacune des pressions d'alimentation  $P_{al}$  utilisées au cours de la campagne d'essais. On obtient les valeurs suivantes :

$P_{al}$ (bar)	7,25	5,44	4,35	3,63	3,11	2,72	2,42
$\dot{m}$ ( $kg.s^{-1}$ )	0,1156	0,0868	0,0694	0,0579	0,0496	0,0434	0,0386
$\dot{m}_s$ ( $kg.s^{-1}.m^{-2}$ )	3,316	2,490	1,991	1,661	1,423	1,245	1,107
$v_{inj}$ ( $m.s^{-1}$ )	2,136	1,804	1,532	1,325	1,167	1,041	0,935

TABLE B.2 – Valeurs de vitesse d'injection  $v_{inj}$  et de débit massique surfacique  $\dot{m}_s$  associées à chaque pression d'alimentation  $P_{al}$  employée lors des tests.

# **Résultats des tests d'activation du bruit rouge sur différentes variables**

---

### C.1 Résultats du test d'activation du bruit rouge sur la variable $(\rho E)$

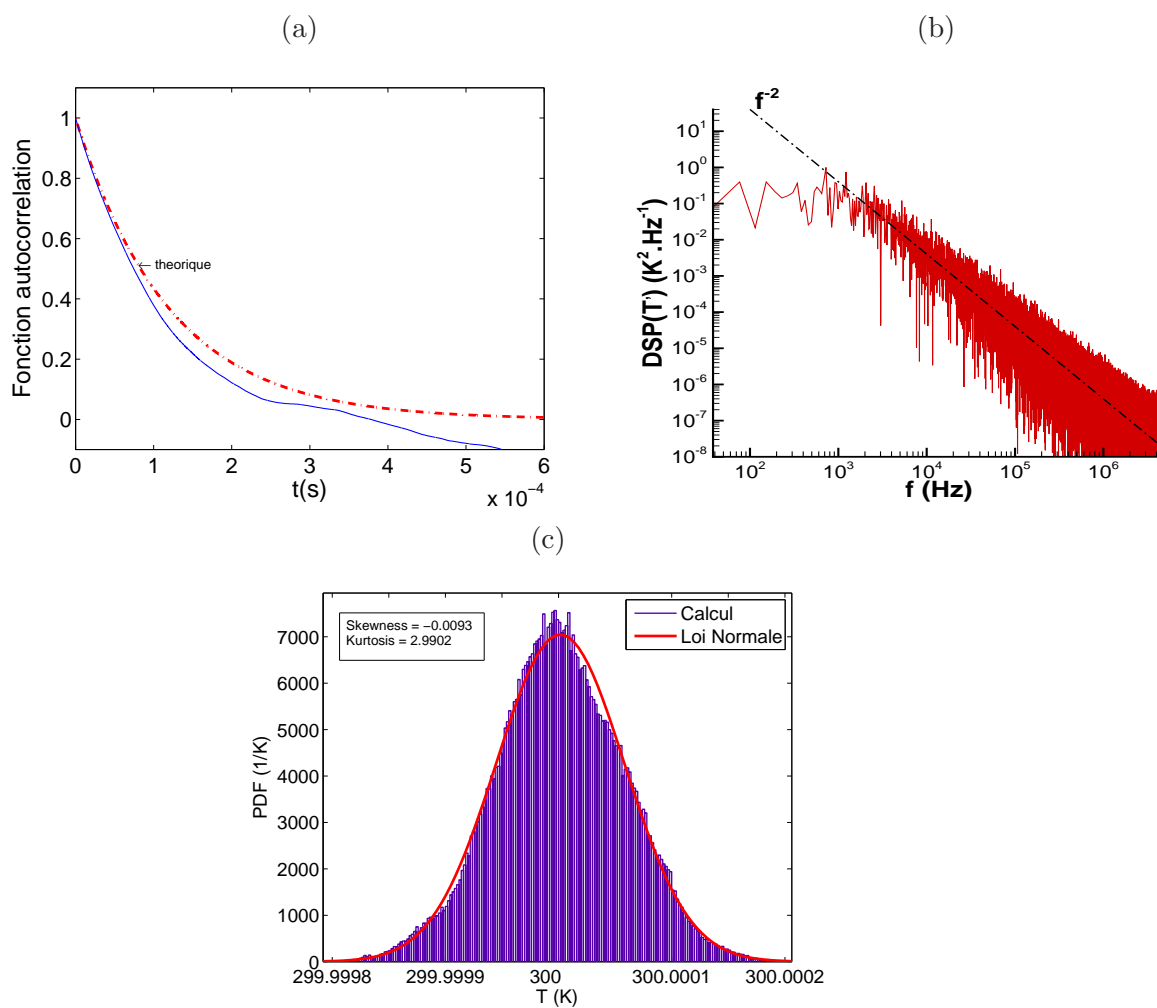


FIGURE C.1 – Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la température  $T$  pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative  $(\rho E)$ .

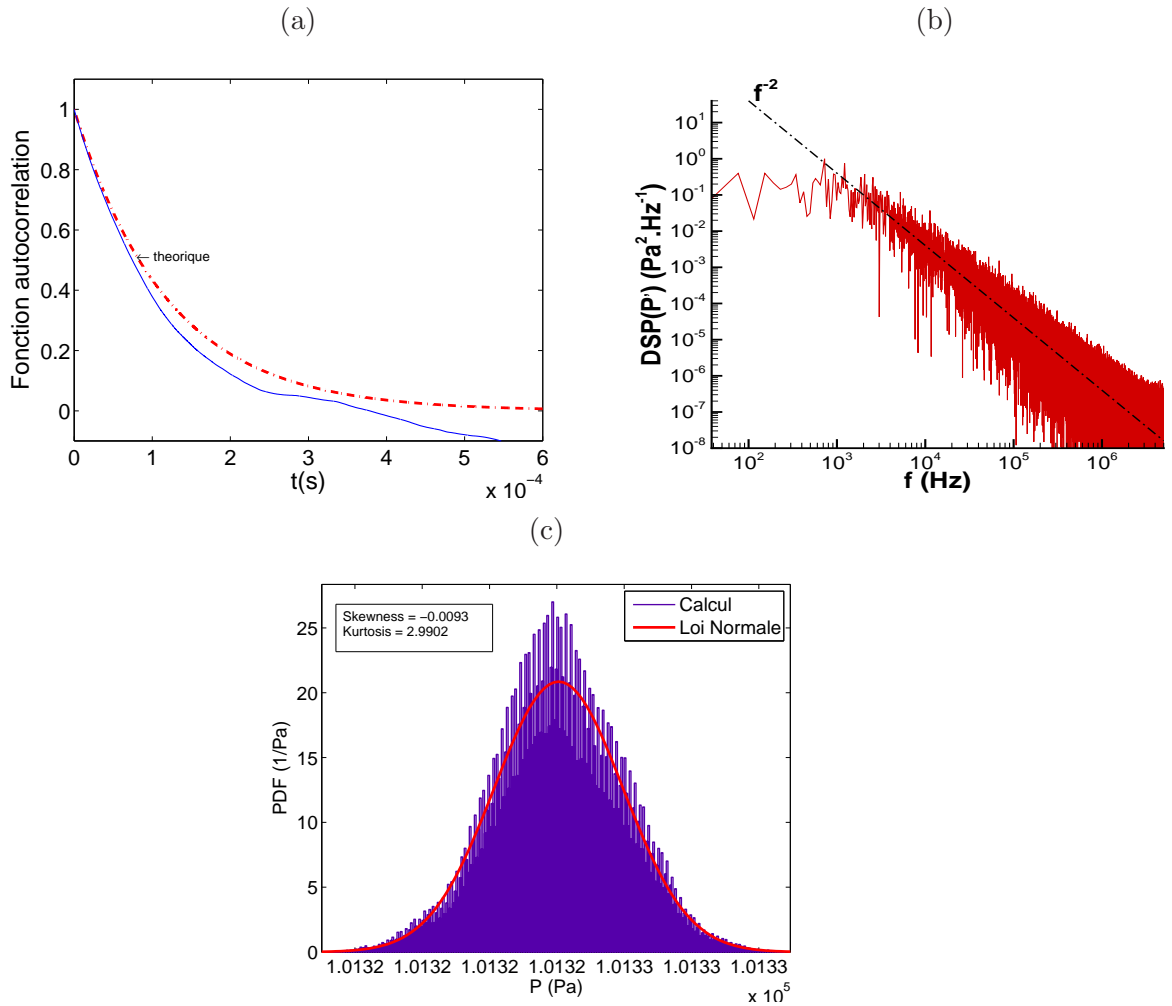


FIGURE C.2 – Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la pression  $P$  pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative ( $\rho E$ ).

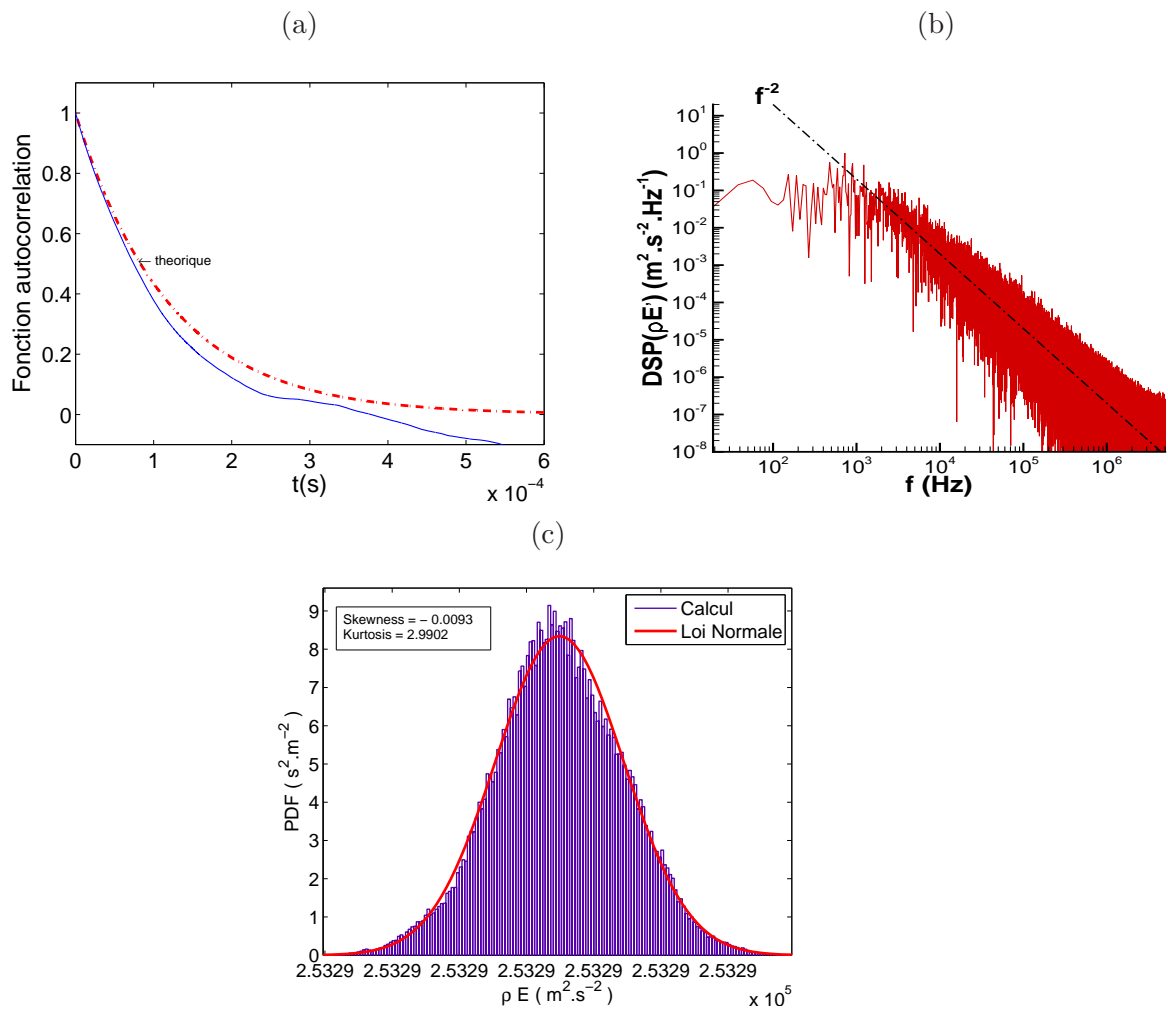


FIGURE C.3 – Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la variable conservative ( $\rho E$ ) pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative ( $\rho E$ ).

## C.2 Résultats du test d'activation du bruit rouge sur la variable

$\rho$

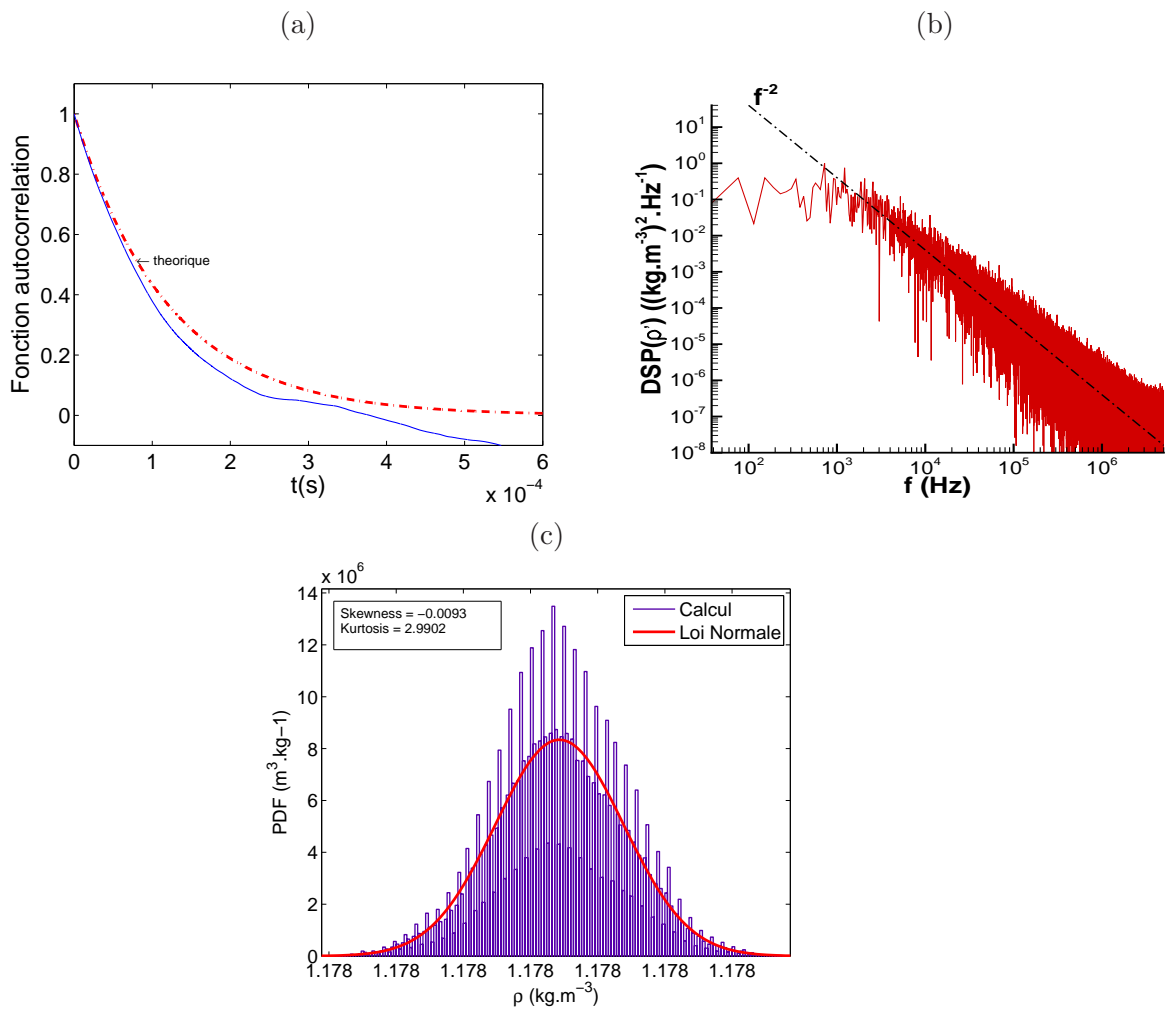


FIGURE C.4 – Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la masse volumique  $\rho$  pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative  $\rho$ .



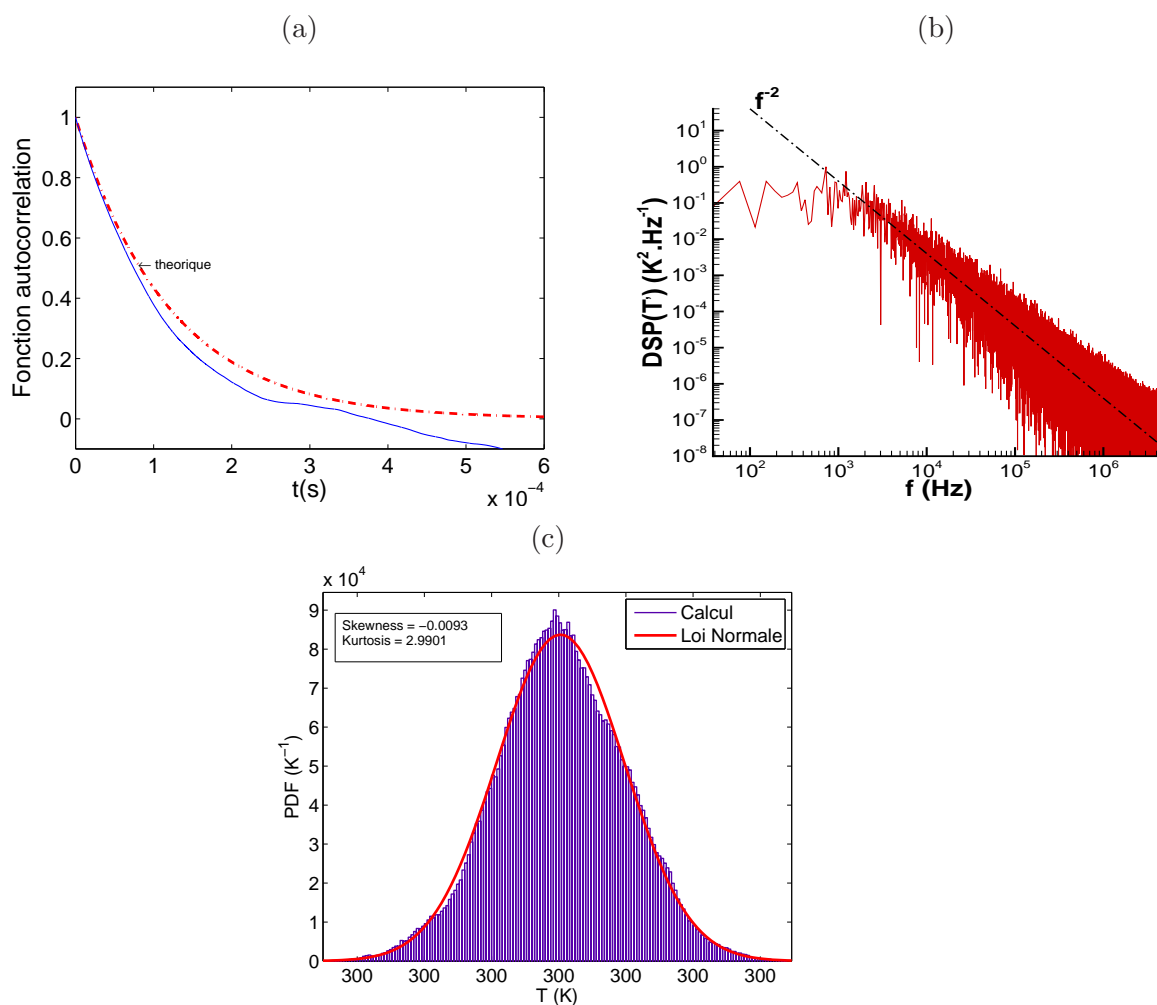


FIGURE C.5 – Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la température  $T$  pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative  $\rho$ .

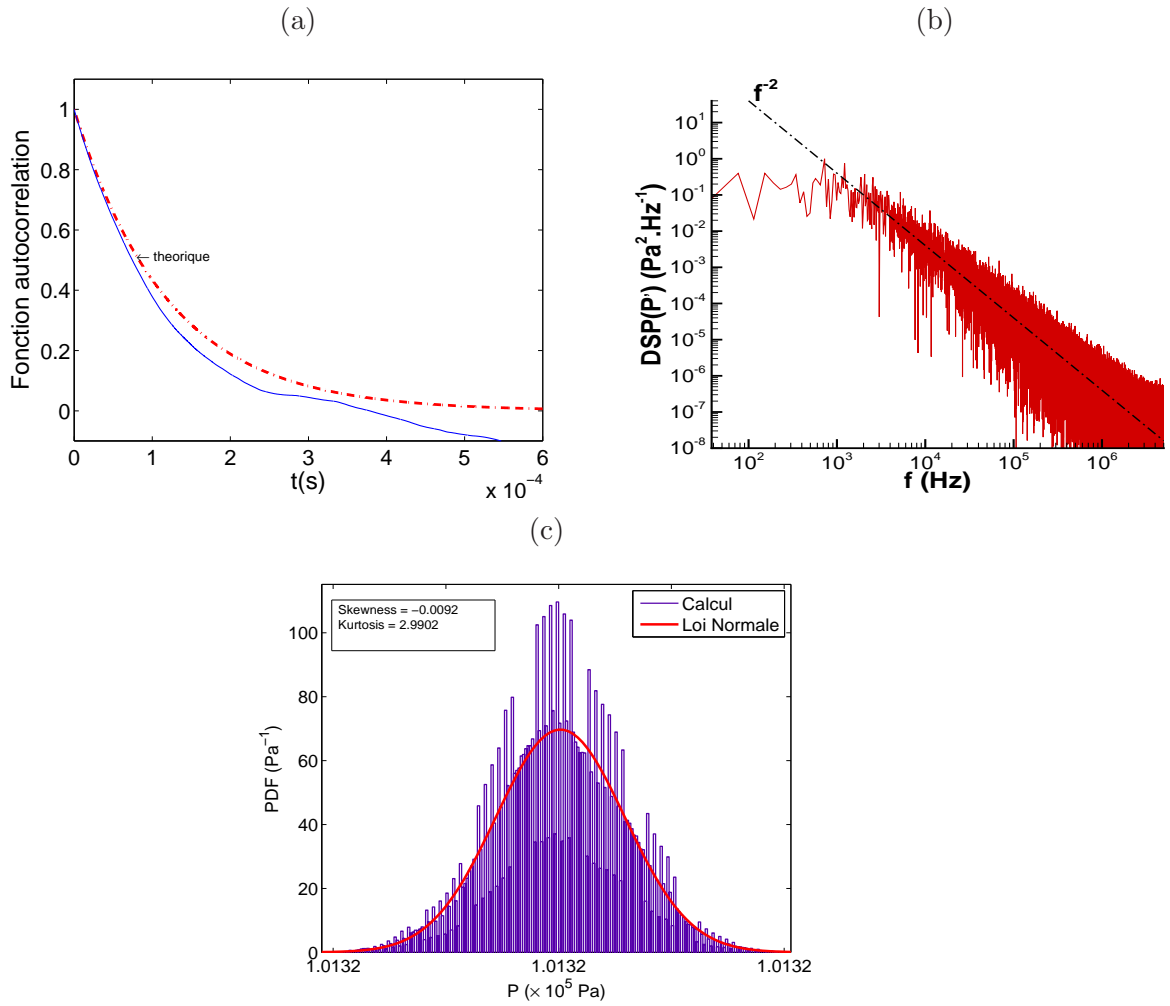


FIGURE C.6 – Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la pression  $P$  pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative  $\rho$ .

### C.3 Résultats du test d'activation du bruit rouge sur la variable $(\rho v_y)$

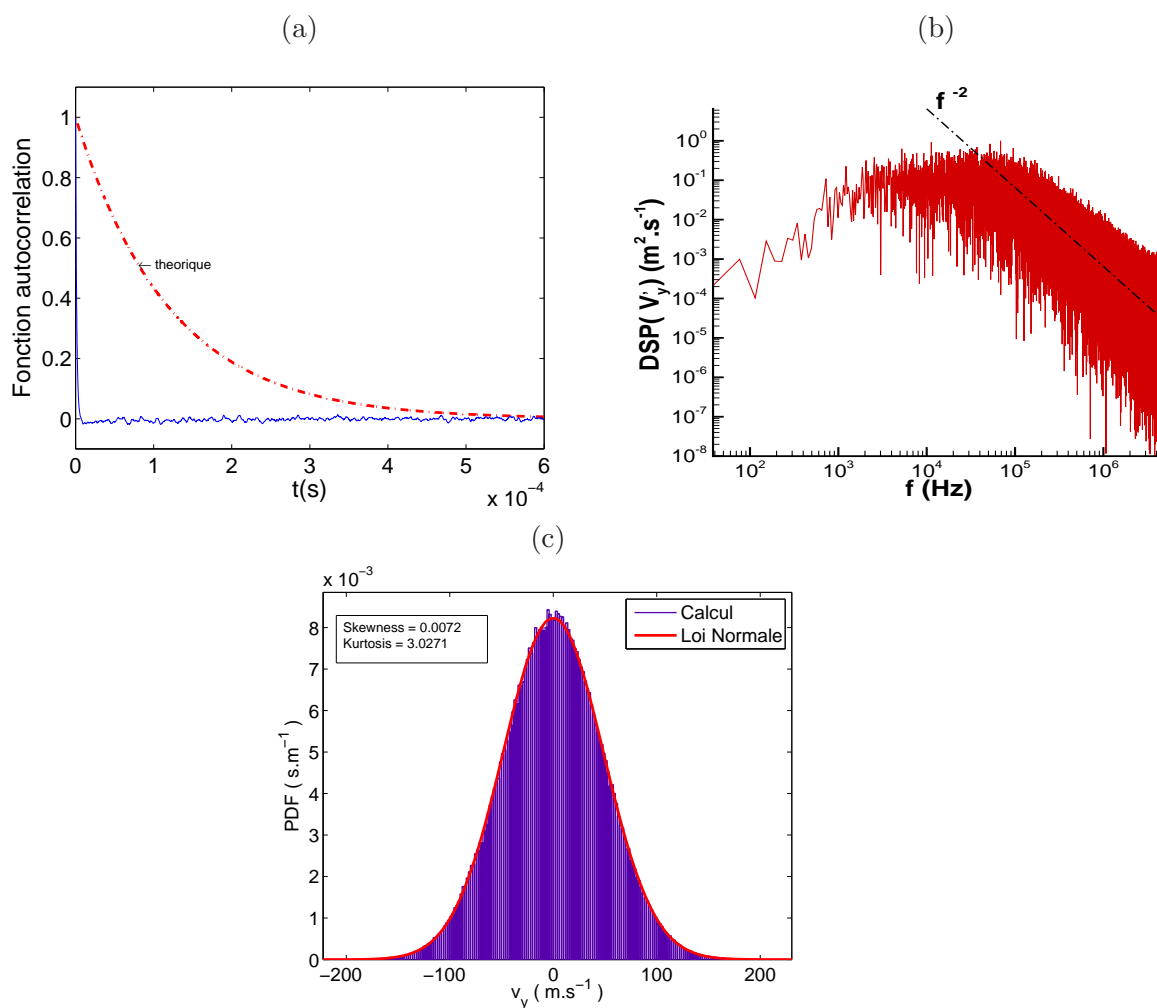


FIGURE C.7 – Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la vitesse transversale  $v_y$  pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative  $(\rho v_y)$ .

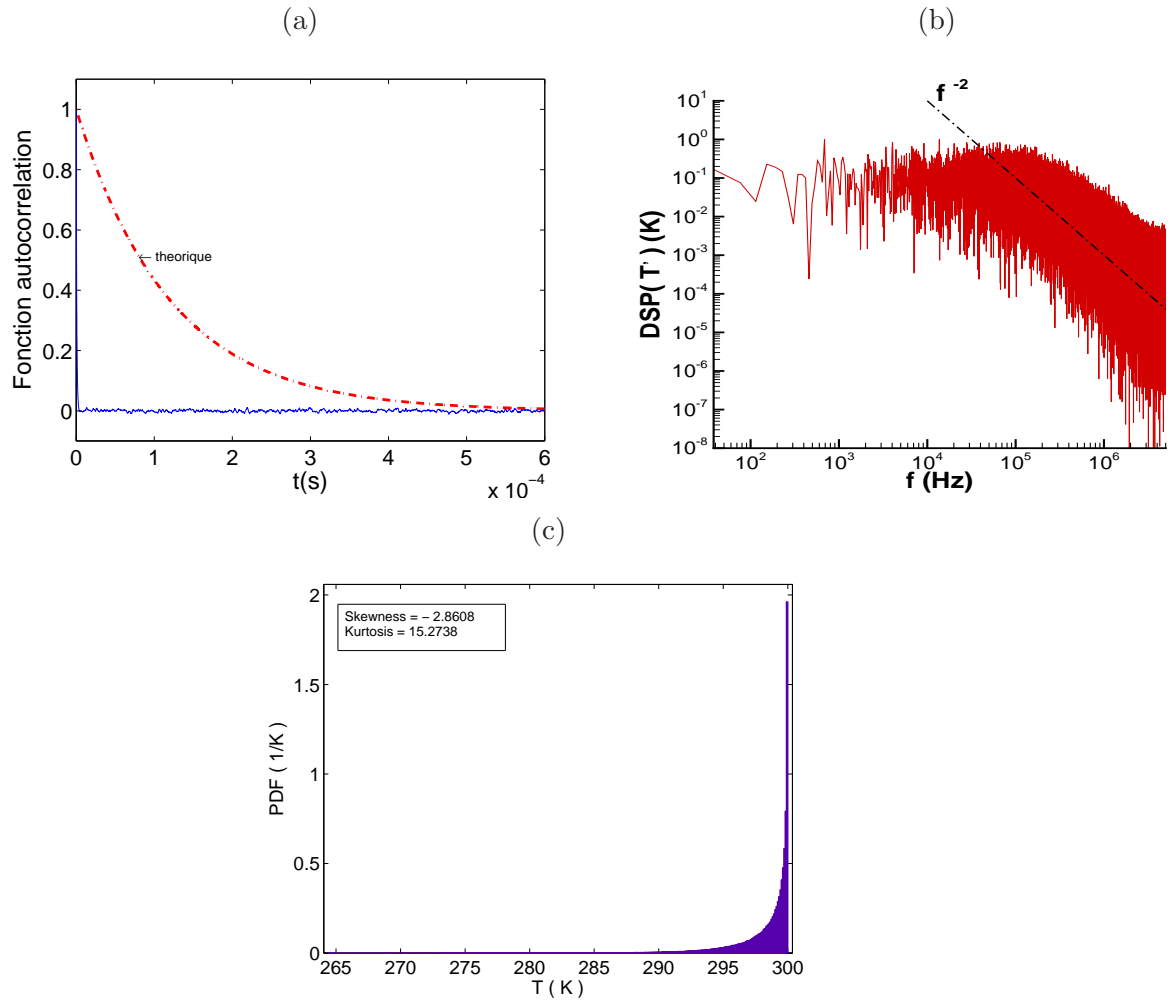


FIGURE C.8 – Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la température  $T$  pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative ( $\rho v_y$ ).

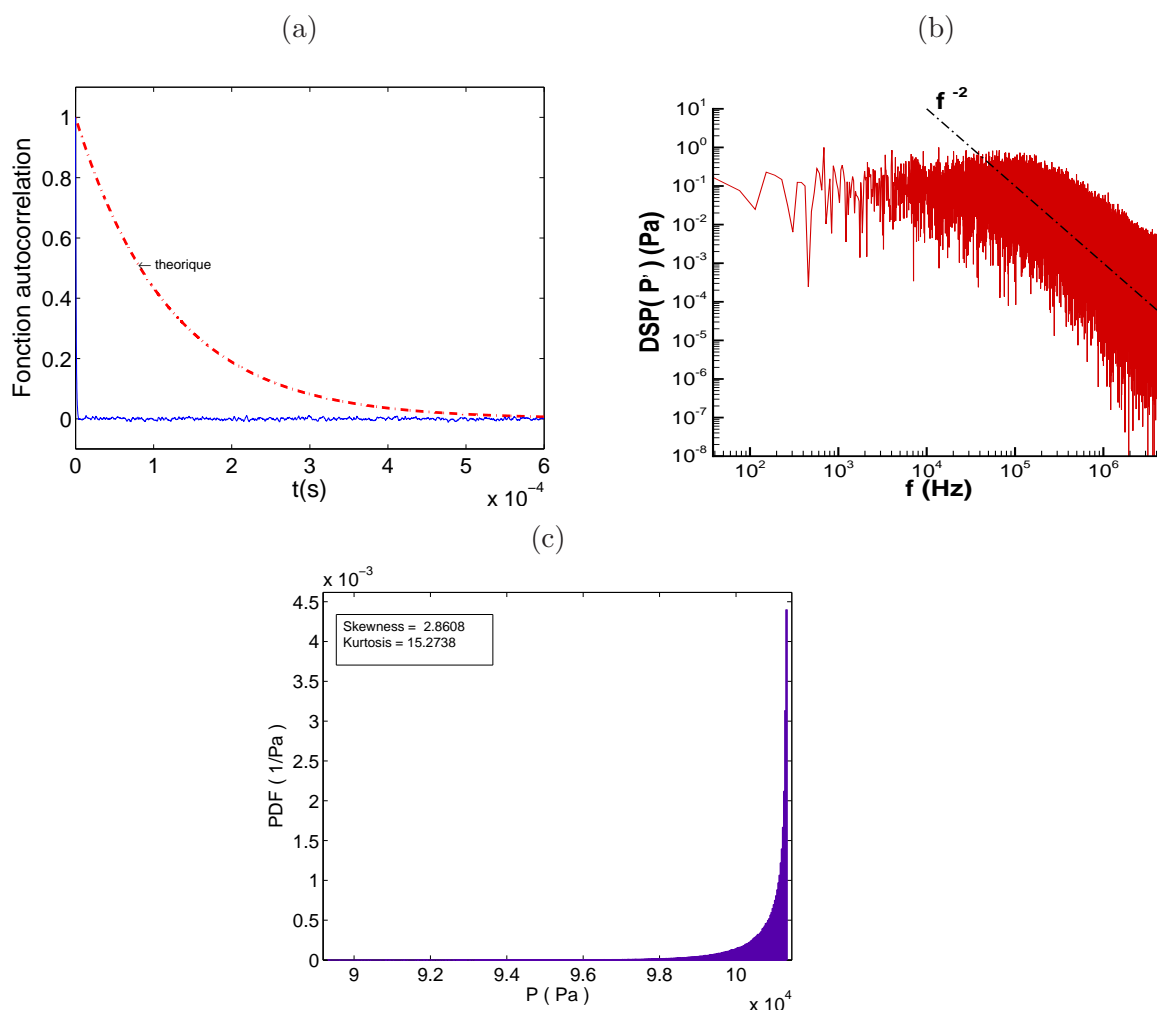


FIGURE C.9 – Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la pression  $P$  pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative  $\rho v_y$ .

## **Expressions de $T^{n+1}$ et $P^{n+1}$ pour le cas-test d'application du bruit rouge sur la masse volumique**

---

On détaille dans cette annexe l'obtention des expressions utilisées au paragraphe IV.2.4.2 donnant la température  $T$  et de la pression  $P$  à l'itération  $n + 1$  en fonction de leurs valeurs initiales respectives  $T_0$  et  $P_0$  pour la simulation test où l'on applique le bruit rouge sur la variable conservative  $\rho$  uniquement.

Pour ce cas, on rappelle que la masse volumique à l'itération  $n + 1$  est donnée par :

$$\rho^{n+1} = \rho_0 + C(\rho) \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k \quad (\text{D.1})$$

## D.1 Détermination de l'expression de la température

On a déterminé que la température  $T$  a pour expression à l'itération  $n + 1$  la formule (IV.65), que l'on rappelle ci-dessous :

$$T^{n+1} = a_1 \frac{1}{\rho^{n+1}} - b_1 \frac{1}{(\rho^{n+1})^2} \quad (\text{D.2})$$

où  $a_1 = \frac{(\rho E)_0}{C_v}$  et  $b_1 = \frac{(\rho v)_0^2}{2C_v}$  sont des constantes.

À l'itération  $n = 0$ , on a alors :

$$T_0 = a_1 \frac{1}{\rho_0} - b_1 \frac{1}{(\rho_0)^2} \quad (\text{D.3})$$

À l'itération  $n = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} T^1 &= a_1 \frac{1}{\rho^1} - b_1 \frac{1}{(\rho^1)^2} \\ &= \frac{a_1}{\rho_0 + C(\rho) \times \mathcal{S}_0} - \frac{b_1}{(\rho_0 + C(\rho) \times \mathcal{S}_0)^2} \\ &= \frac{a_1(\rho_0 + C(\rho) \times \mathcal{S}_0) - b_1}{(\rho_0 + C(\rho) \times \mathcal{S}_0)^2} \\ &= \rho_0^2 \frac{a_1/\rho_0 - b_1/\rho_0^2 + a_1 C(\rho) \mathcal{S}_0/\rho_0^2}{(\rho_0 + C(\rho) \times \mathcal{S}_0)^2} \\ &= \rho_0^2 \frac{T_0 + a_1 C(\rho) \mathcal{S}_0/\rho_0^2}{(\rho_0 + C(\rho) \times \mathcal{S}_0)^2} \\ &= T_0 \times \left( \frac{\rho_0}{\rho^1} \right)^2 + \frac{a_1 C(\rho) \mathcal{S}_0}{(\rho^1)^2} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$T^n = T_0 \times \left( \frac{\rho_0}{\rho^n} \right)^2 + \frac{a_1 C(\rho) \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k}{(\rho^n)^2} \quad (\text{D.5})$$

Au rang  $n = 1$ , la relation (D.4) prouve que la propriété (D.5) est vraie. Supposons que la propriété soit vraie au rang  $n$ . À l'itération  $n + 1$ , on a :

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= a_1 \frac{1}{\rho^{n+1}} - b_1 \frac{1}{(\rho^{n+1})^2} \\ &= \frac{a_1}{\rho_0 + C(\rho) \times \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k} - \frac{b_1}{\left( \rho_0 + C(\rho) \times \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k \right)^2} \\ &= \frac{a_1 \left( \rho_0 + C(\rho) \times \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k \right) - b_1}{\left( \rho_0 + C(\rho) \times \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k \right)^2} \\ &= \rho_0^2 \frac{a_1/\rho_0 - b_1/\rho_0^2 + (a_1 C(\rho) \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k)/\rho_0^2}{\left( \rho_0 + C(\rho) \times \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k \right)^2} \\ &= \rho_0^2 \frac{T_0 + (a_1 C(\rho) \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k)/\rho_0^2}{\left( \rho_0 + C(\rho) \times \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k \right)^2} \\ &= T_0 \times \left( \frac{\rho_0}{\rho^{n+1}} \right)^2 + \frac{a_1 C(\rho) \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k}{(\rho^{n+1})^2} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

On vient de montrer que la propriété (D.5) est vraie au rang  $n + 1$ , donc la propriété est vraie pour tout entier naturel  $n \geq 1$ . On en conclut que la température à l'itération  $n + 1$  peut s'exprimer en fonction de la température initiale  $T_0$  selon l'expression (D.6).



## D.2 Détermination de l'expression de la pression

On a déterminé que dans le cas où l'on applique le bruit rouge sur la masse volumique  $\rho$ , la pression  $P$  est elle aussi bruitée et a pour expression à l'itération  $n + 1$  la formule (IV.68) que l'on rappelle ci-après :

$$P^{n+1} = a_2 - b_2 \frac{1}{\rho^{n+1}} \quad (\text{D.7})$$

où  $a_2 = r \frac{(\rho E)_0}{C_v}$  et  $b_2 = r \frac{(\rho v)_0^2}{2C_v}$  sont des constantes.

Pour  $n = 0$ , on a :

$$P_0 = a_2 - \frac{b_2}{\rho_0} \quad (\text{D.8})$$

À l'itération  $n = 1$ , la relation (D.7) donne :

$$\begin{aligned} P^1 &= a_2 - b_2 \frac{1}{\rho^1} \\ &= a_2 - \frac{b_2}{\rho_0 + C(\rho)\mathcal{S}_0} \\ &= \rho_0 \frac{a_2 + (a_2 C(\rho)\mathcal{S}_0)/\rho_0 - b_2/\rho_0}{\rho_0 + C(\rho)\mathcal{S}_0} \\ &= \rho_0 \frac{P_0 + (a_2 C(\rho)\mathcal{S}_0)/\rho_0}{\rho_0 + C(\rho)\mathcal{S}_0} \\ &= P_0 \times \frac{\rho_0}{\rho^1} + \frac{a_2 C(\rho)\mathcal{S}_0}{\rho^1} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$P^n = P_0 \times \frac{\rho_0}{\rho^n} + \frac{a_2 C(\rho) \times \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_k}{\rho^n} \quad (\text{D.10})$$

Au rang  $n = 1$ , la relation (D.9) prouve que la propriété (D.10) est vraie. Supposons que la propriété soit vraie au rang  $n$ . À l'itération  $n + 1$ , on a :

$$\begin{aligned}
P^{n+1} &= a_2 - b_2 \frac{1}{\rho^2} \\
&= a_2 - \frac{b_2}{\rho_0 + C(\rho) \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k} \\
&= \rho_0 \frac{a_2 + \left( a_2 C(\rho) \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k \right) / \rho_0 - b_2 / \rho_0}{\rho_0 + C(\rho) \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k} \\
&= \rho_0 \frac{P_0 + \left( a_2 C(\rho) \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k \right) / \rho_0}{\rho_0 + C(\rho) \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k} \\
&= P_0 \times \frac{\rho_0}{\rho^{n+1}} + \frac{a_2 C(\rho) \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{S}_k}{\rho^{n+1}}
\end{aligned} \tag{D.11}$$

On vient de montrer que la propriété (D.10) est vraie au rang  $n + 1$ , donc la propriété est vraie pour tout entier naturel  $n \geq 1$ . On en conclut que la pression à l'itération  $n + 1$  peut s'exprimer en fonction de la pression initiale  $T_0$  selon l'expression (D.11).



# Données et résultats pour les calculs LES 3D

---

## E.1 Détermination de la valeur de l'écart-type pour le calcul LES 3D avec bruit rouge

Pour la simulation LES avec le modèle de bruit rouge filtré d'écoulement transitionnel dans VECLA, on a déterminé que l'écart-type  $\sigma(\rho)$  est défini par la relation (V.7) que l'on rappelle ci-dessous :

$$\sigma(\rho) = \left( \frac{\text{RMS}[(\rho v)']}{(\rho v)_{inj}} \right)_{\text{VECLA}} \times (\rho v)_{inj} \times \frac{1}{v_{inj}} \quad (\text{E.1})$$

Pour l'application numérique de la formule (E.1), il suffit de connaître les valeurs de  $\left( \frac{\text{RMS}[(\rho v)']}{(\rho v)_{inj}} \right)_{\text{VECLA}}$ , de  $(\rho v)_{inj}$  et de  $\frac{1}{v_{inj}}$ .

### E.1.1 Valeur de $(\rho v)_{inj}$

Le débit massique surfacique  $\dot{m}_s = (\rho v)_{inj}$  injecté par la paroi poreuse correspond à la valeur expérimentale, soit :

$$\dot{m}_s = (\rho v)_{inj} = 2,62 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1} \quad (\text{E.2})$$

### E.1.2 Valeur de $(\text{RMS}[(\rho v)'] / (\rho v)_{inj})_{\text{VECLA}}$

Lors des mesures de bruit effectuées sur le montage VECLA, les valeurs des fluctuations de quantité de mouvement adimensionnée  $\left( \frac{\text{RMS}[(\rho v)']}{(\rho v)_{inj}} \right)_{\text{VECLA}}$  ont été relevées à l'abscisse

$x = 31 \text{ mm}$  pour différentes hauteurs  $y$  de la sonde par rapport à la plaque poreuse et pour différents débits d'injection (figure II.17 b, représentée de nouveau ci-dessous à la figure E.1). Cependant, pour le débit utilisé pour les relevés expérimentaux de l'écoulement transitionnel dans VECLA (c'est-à-dire  $(\rho v)_{inj} = 2,62 \text{ kg.m}^{-2}.s^{-1}$ ), aucune donnée sur les fluctuations de quantité de mouvement n'a été relevée... Pour déterminer la valeur de  $\text{RMS}[(\rho v)']/(\rho v)_{inj}$  pour le débit voulu de  $\dot{m}_s = (\rho v)_{inj} = 2,62 \text{ kg.m}^{-2}.s^{-1}$ , on déduit la valeur par lecture directe sur le graphe de la figure E.1, où on constate que l'on a :

$$\left( \frac{\text{RMS}[(\rho v)']}{(\rho v)_{inj}} \right)_{\text{VECLA}} ((\rho v)_{inj} = 2,62 \text{ kg.m}^{-2}.s^{-1}) \approx 0,04 \quad (\text{E.3})$$

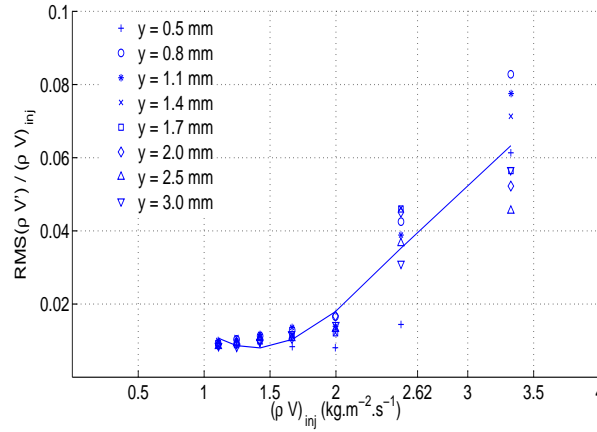


FIGURE E.1 – Fluctuations de quantité de mouvement en valeur RMS adimensionnées en fonction du débit injecté à la paroi, à la position axiale  $x = 31 \text{ mm}$ , pour différentes hauteurs  $y$  par rapport à la plaque poreuse. (Symboles : valeurs expérimentales).

### E.1.3 Valeur de la vitesse d'injection $v_{inj}$

D'après l'annexe B, la valeur de la vitesse d'injection  $v_{inj}$  peut être déterminée par la relation suivante :

$$v_{inj} = \frac{\dot{m}_s r T}{P_{veine}} \quad (\text{E.4})$$

Pour un débit donné (ici  $\dot{m}_s = 2,62 \text{ kg.m}^{-2}.s^{-1}$ ), on peut donc déterminer la vitesse d'injection correspondante. Pour cela, il faut connaître la valeur de la pression  $P_{veine}$  dans la veine. On a vu (voir annexe B) que le débit  $\dot{m}_s$  dépend de la pression d'alimentation  $P_{al}$  du canal, tel que :

$$\dot{m}_s = \frac{1}{S_{inj}} \left( P_{al} A_c \Gamma(\gamma) \frac{1}{\sqrt{\frac{RT}{M}}} \times N \right) \quad (\text{E.5})$$

avec  $S_{inj}$  la surface d'injection,  $T$  la température d'arrêt du fluide dans la tuyère (dont la valeur est approximée par celle de la température dans la veine),  $N = 14$  le nombre de tubes flexibles,  $\gamma = 1,4$  le rapport des chaleurs spécifiques,  $M = 0,02912 \text{ kg.mol}^{-1}$  la masse molaire de l'air,  $R = 8,314472 \text{ J.mol}^{-1}.K^{-1}$  la constante universelle des gaz parfaits,  $A_c$  la section du col telle que  $A_c = \frac{\pi D^2}{4} \text{ (m}^2\text{)}$ , avec  $D = 2,5 \times 10^{-3} \text{ m}$  le diamètre au col et :

$$\Gamma(\gamma) = \sqrt{\gamma} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (\text{E.6})$$

Pour le débit  $\dot{m}_s = (\rho v)_{inj} = 2,62 \text{ kg.m}^{-2}.s^{-1}$  voulu, et connaissant les valeurs de  $S_{inj}$ ,  $N$ ,  $\gamma$ ,  $M$ ,  $R$ ,  $A_c$  et  $D$ , on peut alors déduire de la relation (E.5) la valeur de la pression d'alimentation  $P_{al}(\dot{m}_s = 2,62 \text{ kg.m}^{-2}.s^{-1})$  équivalente, et on trouve :

$$P_{al}(\dot{m}_s = 2,62 \text{ kg.m}^{-2}.s^{-1}) \approx 5,71 \text{ bar} \quad (\text{E.7})$$

On peut ensuite remonter jusqu'à la valeur de  $P_{veine}$  correspondante par interpolation sur le graphique représentant l'évolution de  $P_{veine}$  en fonction de  $P_{al}$  (figure E.2). Sur la figure E.2, on lit que la pression dans la veine  $P_{veine}$  obtenue pour une pression d'alimentation de 5,71 bar est égale à :

$$P_{veine}(P_{al} = 5,71 \text{ bar}) \approx 1,233 \text{ bar} \quad (\text{E.8})$$

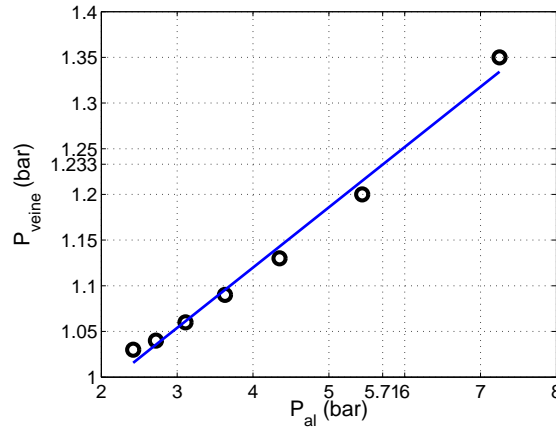


FIGURE E.2 – Évolution de la pression mesurée expérimentalement dans la veine en fonction de la pression d'alimentation dans les préchambres du montage VECLA. (Symboles : valeurs expérimentales).

Ainsi, la formule (E.4) nous donne une valeur de la vitesse d'injection égale à :

$$\begin{aligned}
 v_{inj} &= \frac{\dot{m}_s r T}{P_{vejne}} \\
 &\approx \frac{2,62 \times 287 \times 303}{123300} \\
 &\approx 1,848 \text{ m/s}
 \end{aligned} \tag{E.9}$$

#### E.1.4 Valeur numérique de l'écart-type $\sigma(\rho)$

L'application numérique de la formule (E.1) donne donc une valeur numérique de l'écart-type  $\sigma(\rho)$  pour la simulation d'écoulement transitionnel dans VECLA telle que :

$$\begin{aligned}
 \sigma(\rho) &= \left( \frac{\text{RMS}[(\rho v)']}{(\rho v)_{inj}} \right)_{\text{VECLA}} \times (\rho v)_{inj} \times \frac{1}{v_{inj}} \\
 &\approx 0,04 \times 2,62 \times \frac{1}{1,848} \\
 &\approx 0,57
 \end{aligned} \tag{E.10}$$

## E.2 Résultats de la simulation LES avec le modèle de bruit rouge

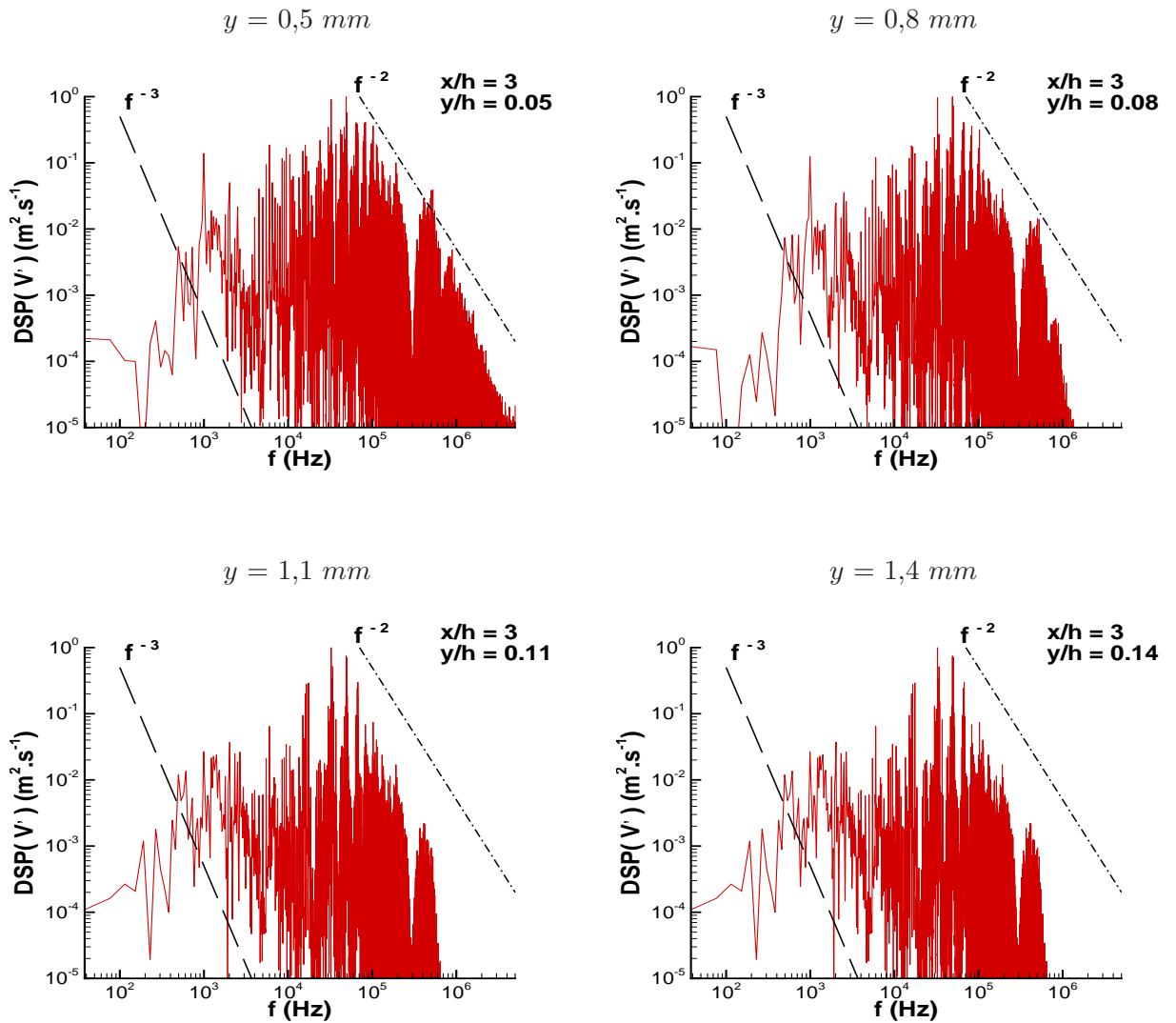


FIGURE E.3 – Tracés de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour différentes valeurs de la hauteur de veine  $y$ , en  $x = 31 \text{ mm}$ .  $2^{18}$  points,  $\Delta f = 38 \text{ Hz}$  et  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ .



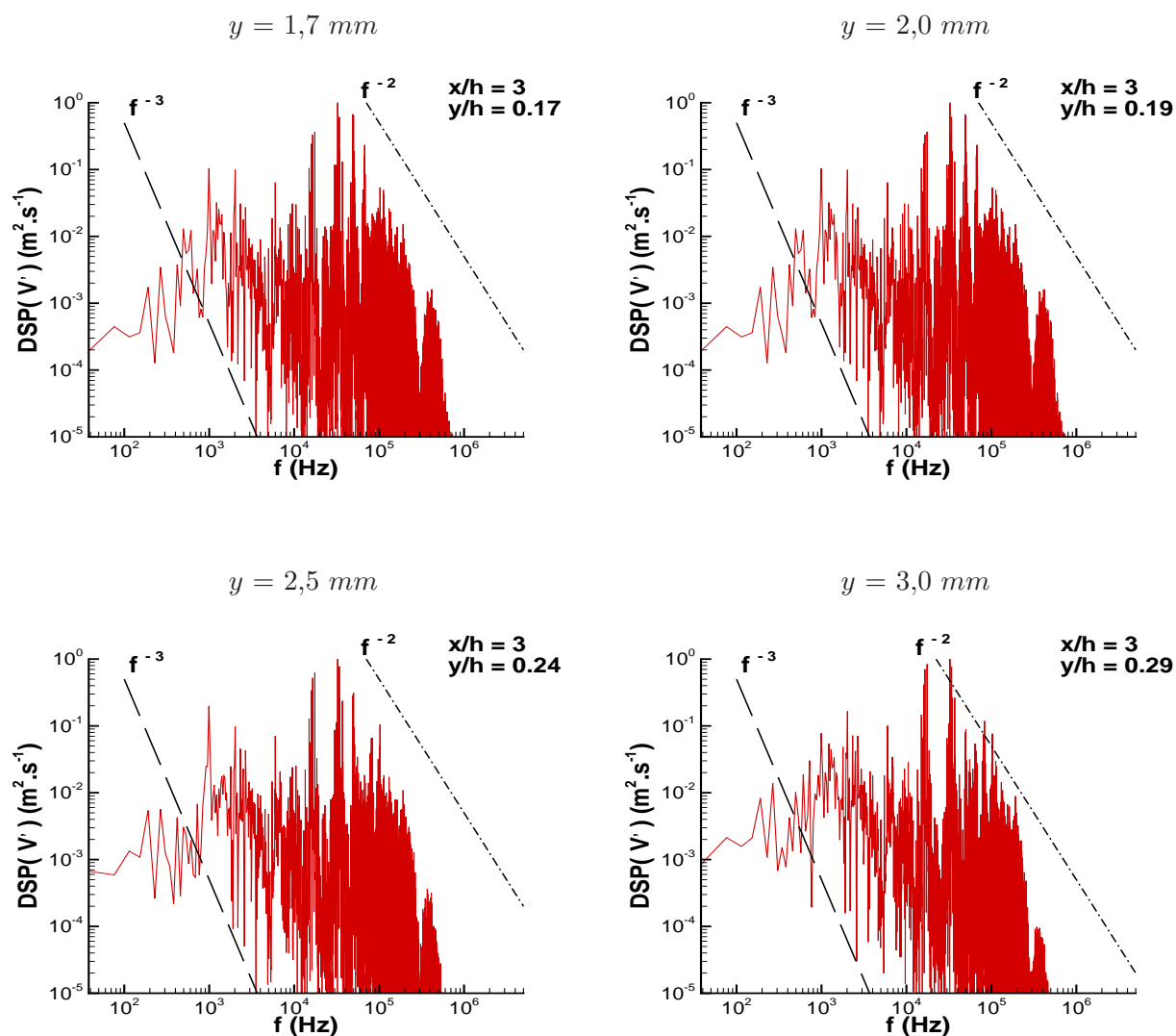


FIGURE E.4 – Tracés de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour différentes valeurs de la hauteur de veine  $y$ , en  $x = 31 \text{ mm}$ .  $2^{18}$  points,  $\Delta f = 38 \text{ Hz}$  et  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ . (SUITE)

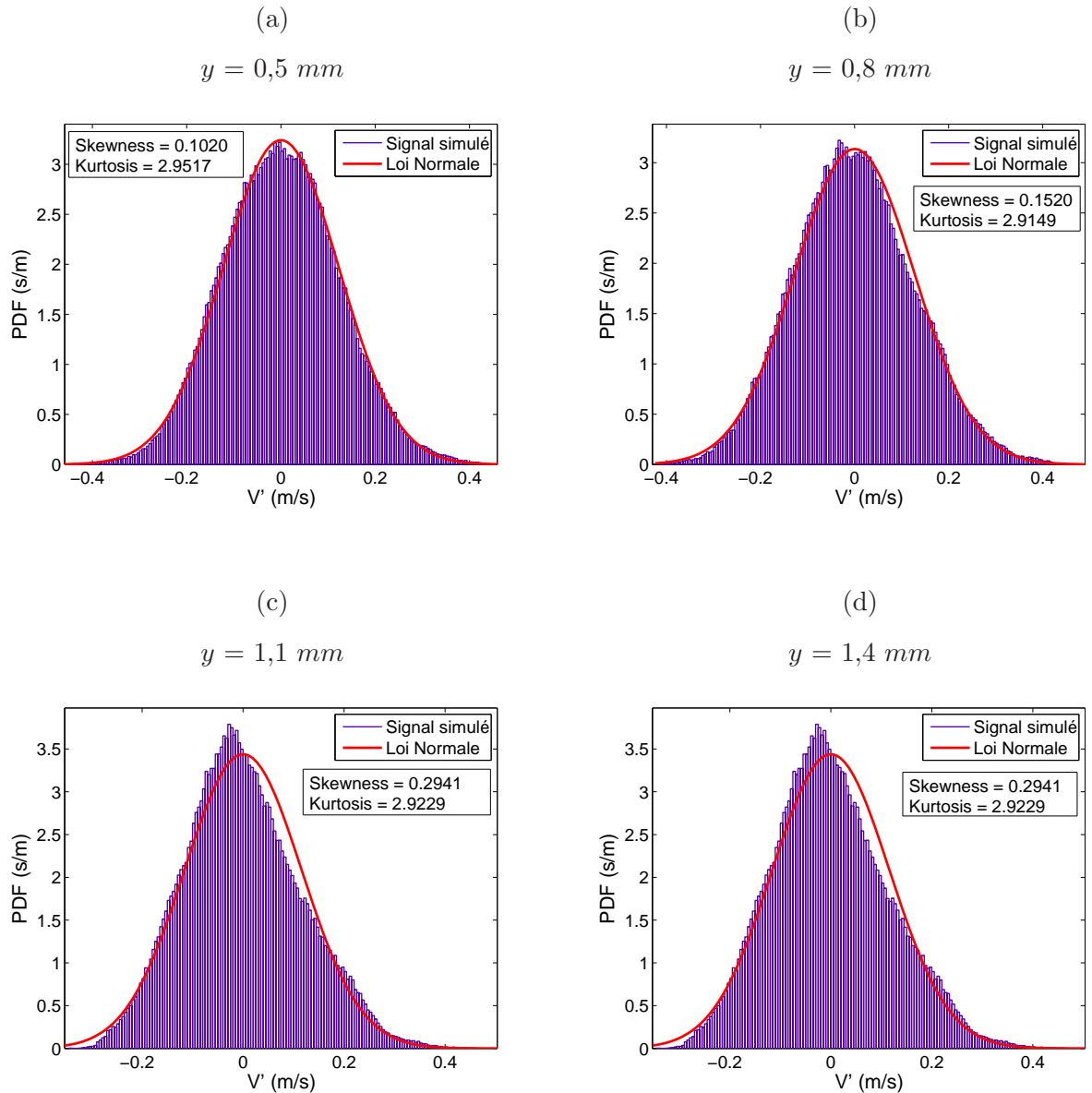


FIGURE E.5 – Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour différentes valeurs de la hauteur de veine  $y$ , en  $x = 31 \text{ mm}$ .

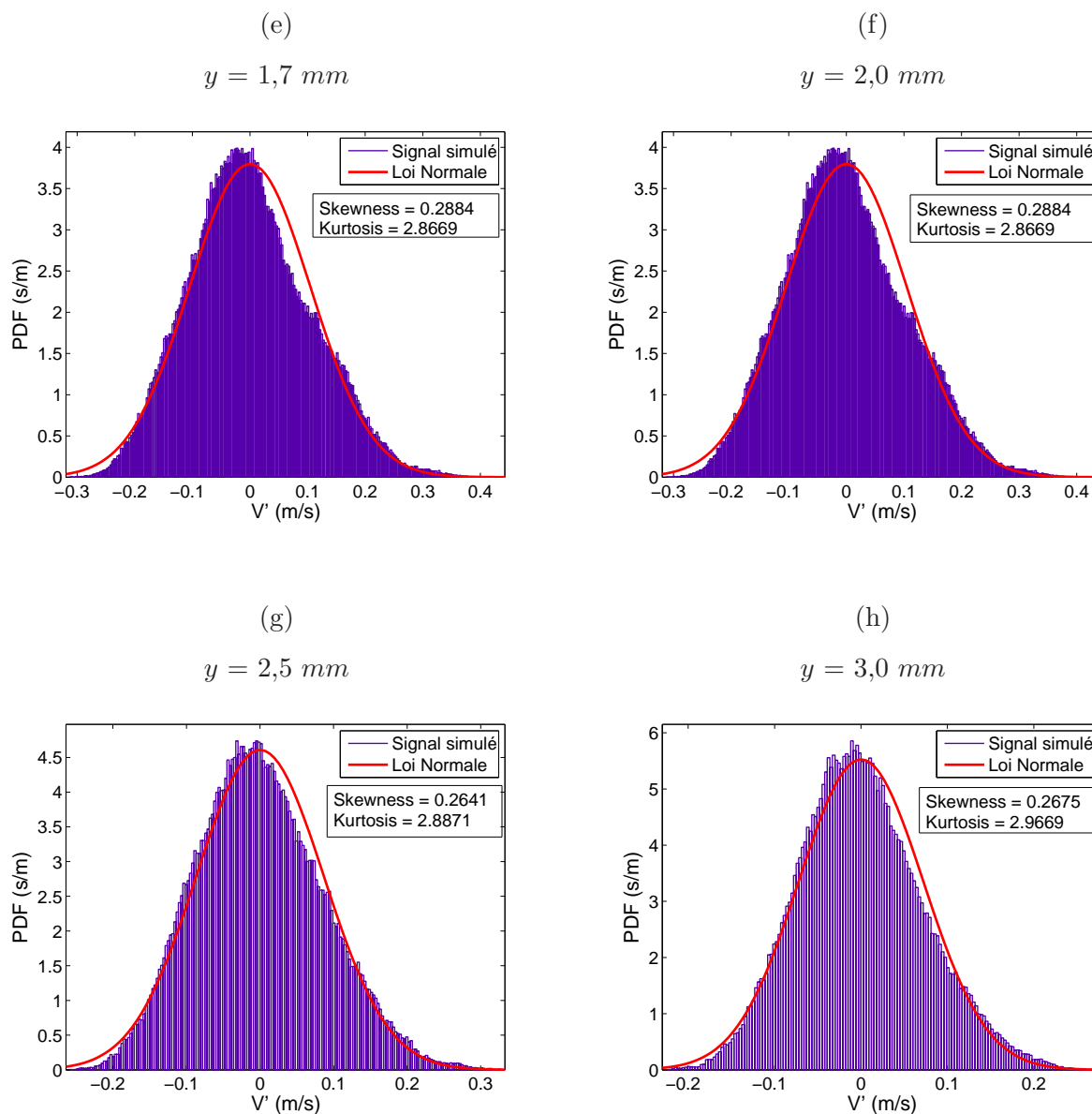


FIGURE E.6 – Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour différentes valeurs de la hauteur de veine  $y$ , en  $x = 31 \text{ mm}$  (suite).

### E.3 Résultats des simulations LES : quantités fluctuantes

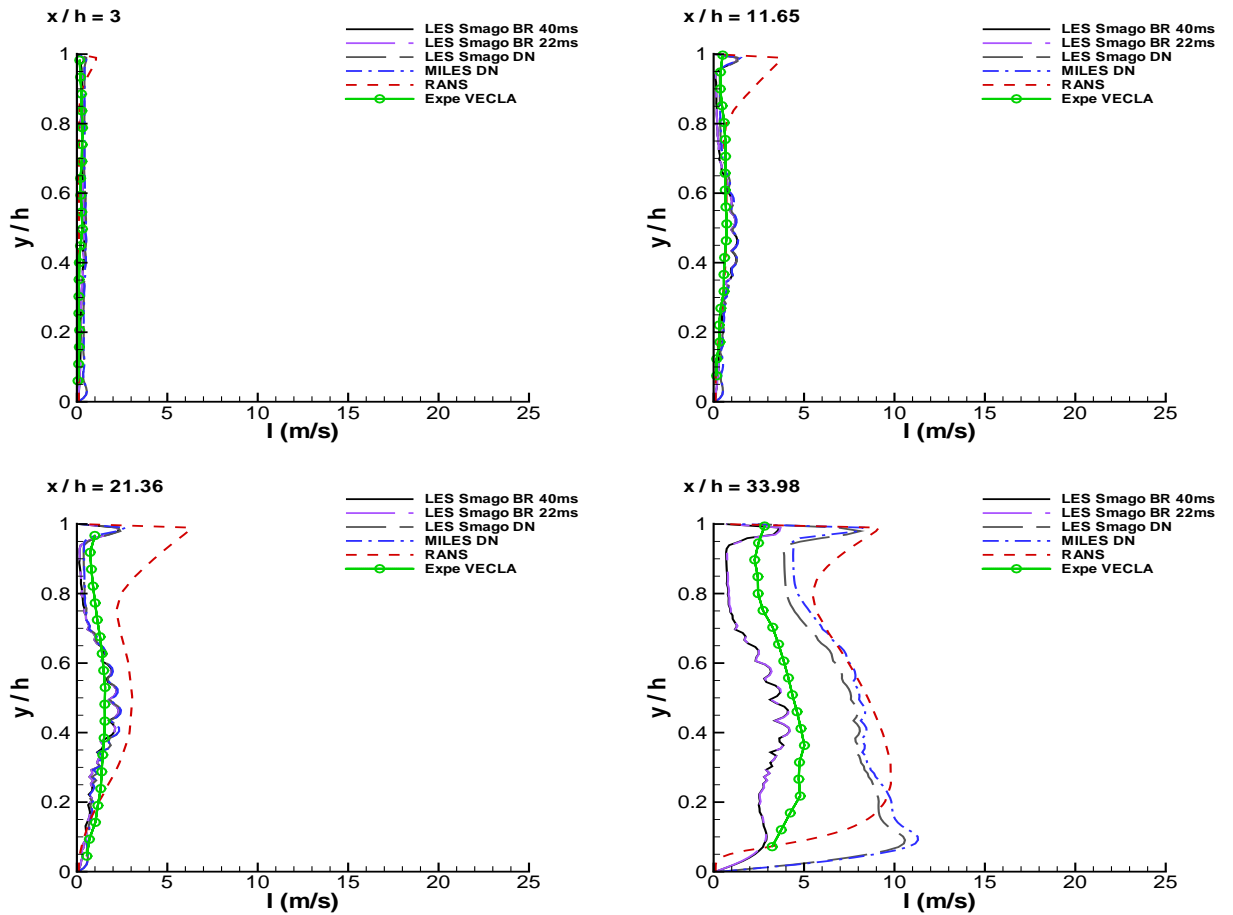


FIGURE E.7 – Intensité turbulente pour 8 sections  $x/h$  de la veine, telle que  $I = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2}$  pour les calculs LES et  $I = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2}$  pour le calcul RANS et les données expérimentales. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40 ms, LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22 ms, LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (1ère PARTIE)

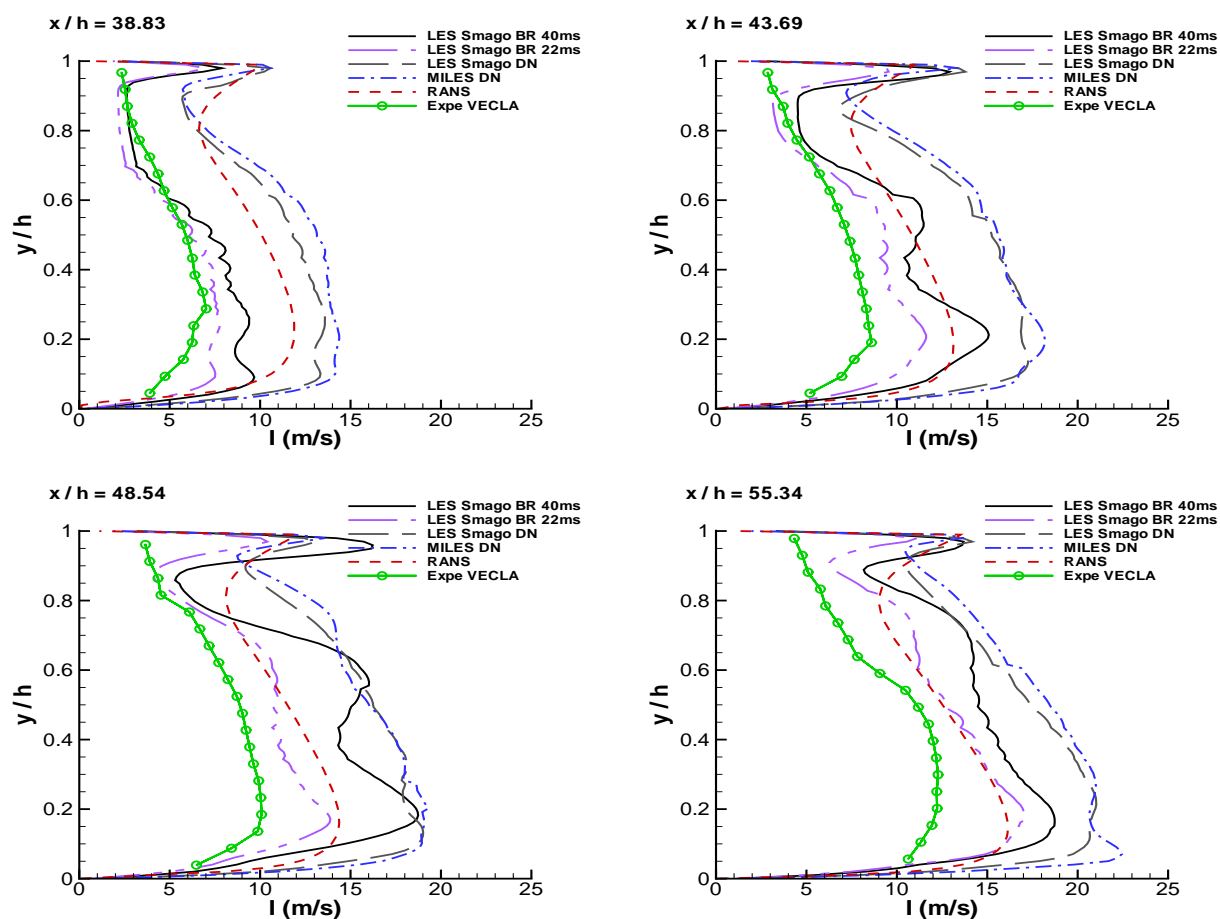


FIGURE E.8 – Intensité turbulente pour 8 sections  $x/h$  de la veine, telle que  $I = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2}$  pour les calculs LES et  $I = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2}$  pour le calcul RANS et les données expérimentales. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40  $ms$ , LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22  $ms$ , LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (SUITE)

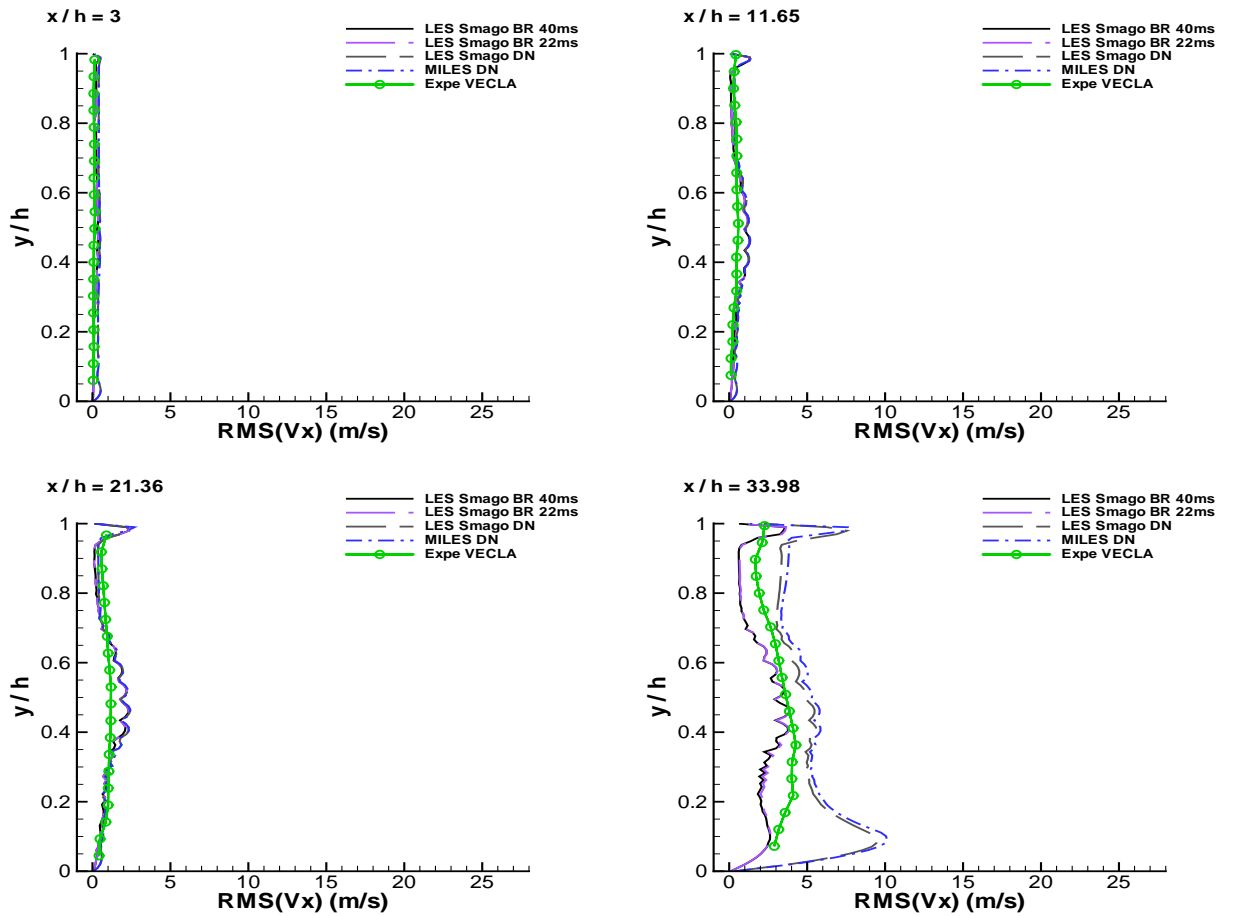


FIGURE E.9 – Profils de vitesse longitudinale fluctuante en valeurs RMS pour 8 sections  $x/h$  de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40  $ms$ , LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22  $ms$ , LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l’expérience VECLA. (1ère PARTIE)

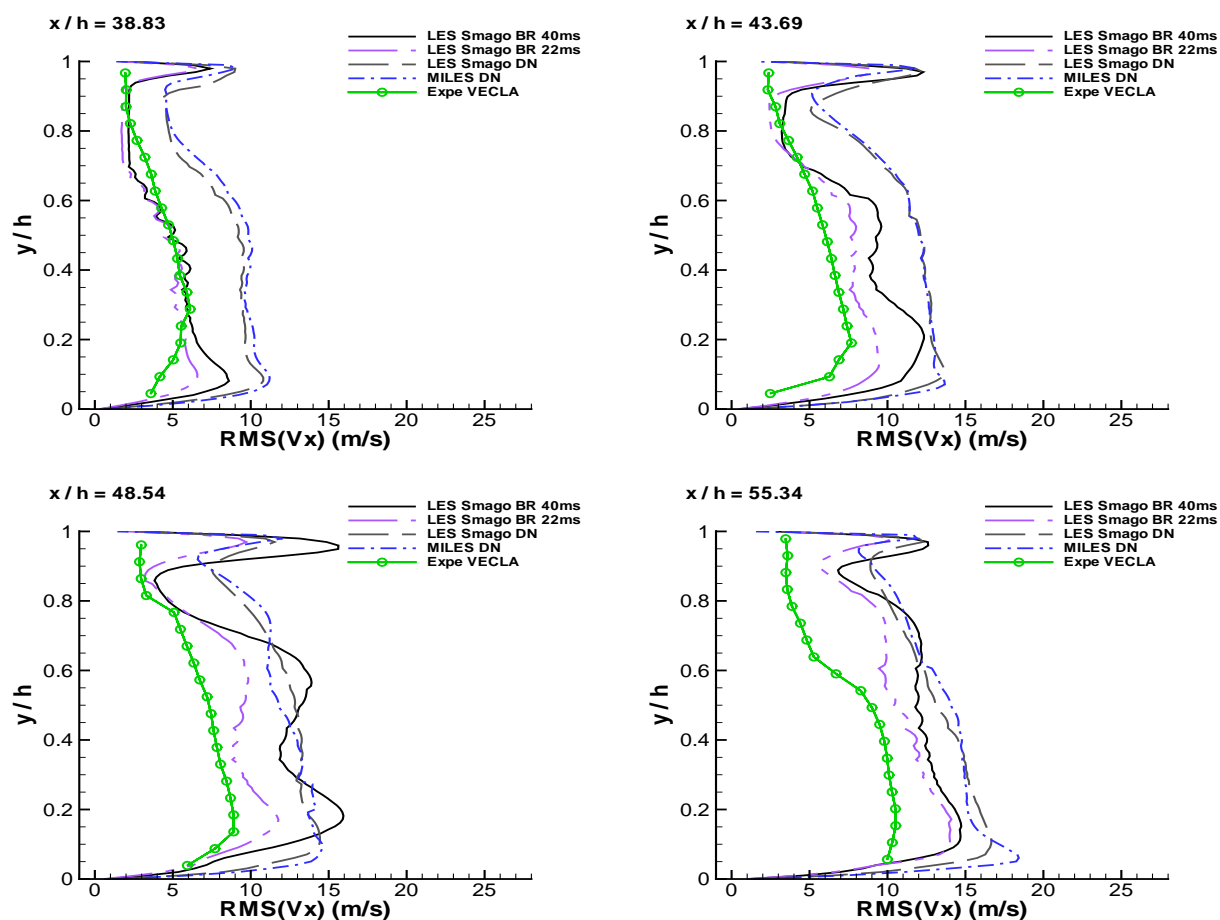


FIGURE E.10 – Profils de vitesse longitudinale fluctuante en valeurs RMS pour 8 sections  $x/h$  de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40 ms, LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22 ms, LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (SUITE)

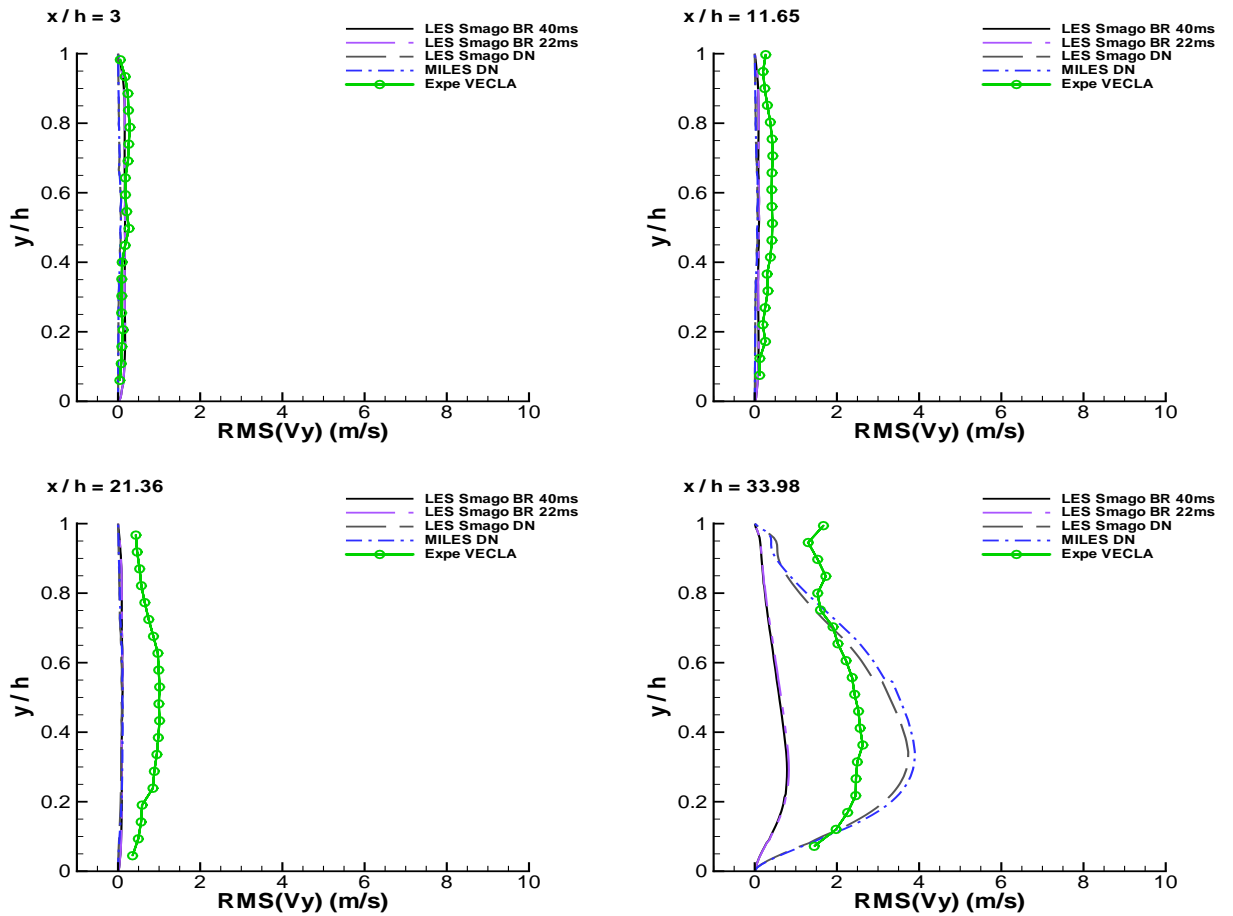


FIGURE E.11 – Profils de vitesse transversale fluctuante en valeurs RMS pour 8 sections  $x/h$  de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40  $ms$ , LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22  $ms$ , LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l’expérience VECLA. (1ère PARTIE)



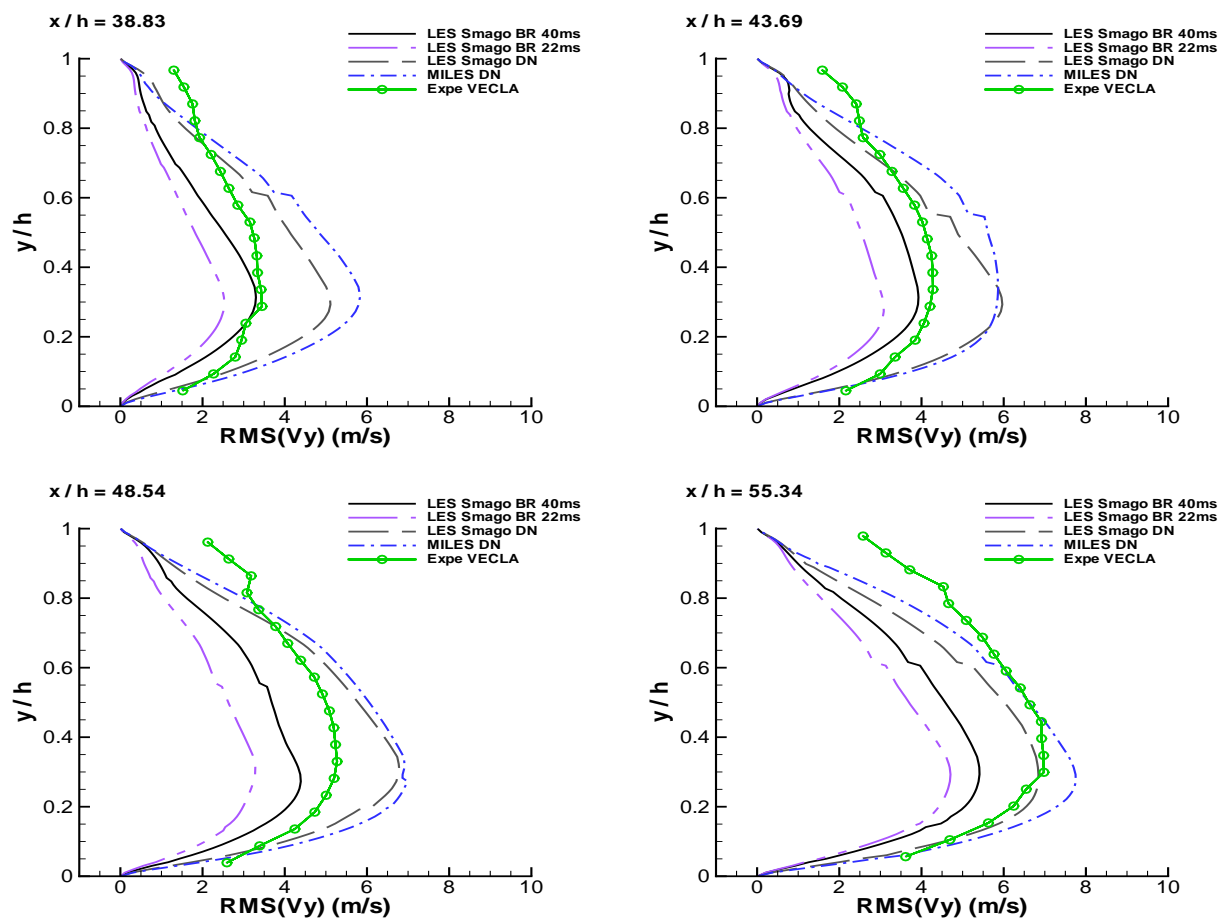


FIGURE E.12 – Profils de vitesse transversale fluctuante en valeurs RMS pour 8 sections  $x/h$  de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40 ms, LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22 ms, LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (SUITE)

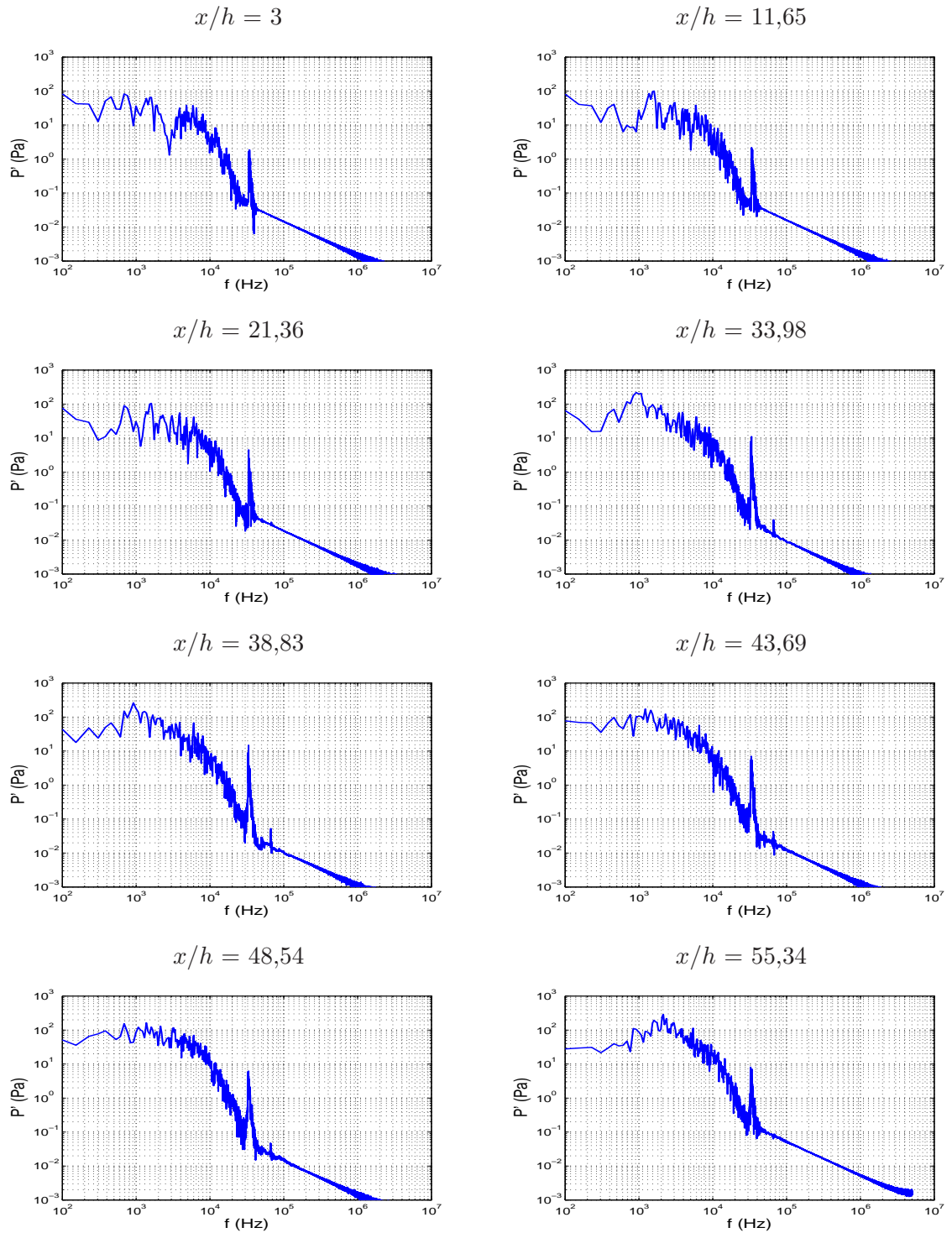


FIGURE E.13 – Calcul MILES DN : Spectres de la fluctuation de pression  $P'$  lors du calcul 3D MILES avec Déstabilisation Numérique pour différentes positions axiales  $x$  le long de la veine, en  $y = 5 \text{ mm}$ . ( $2^{17}$  points,  $\Delta f = 76 \text{ Hz}$  et  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ .)

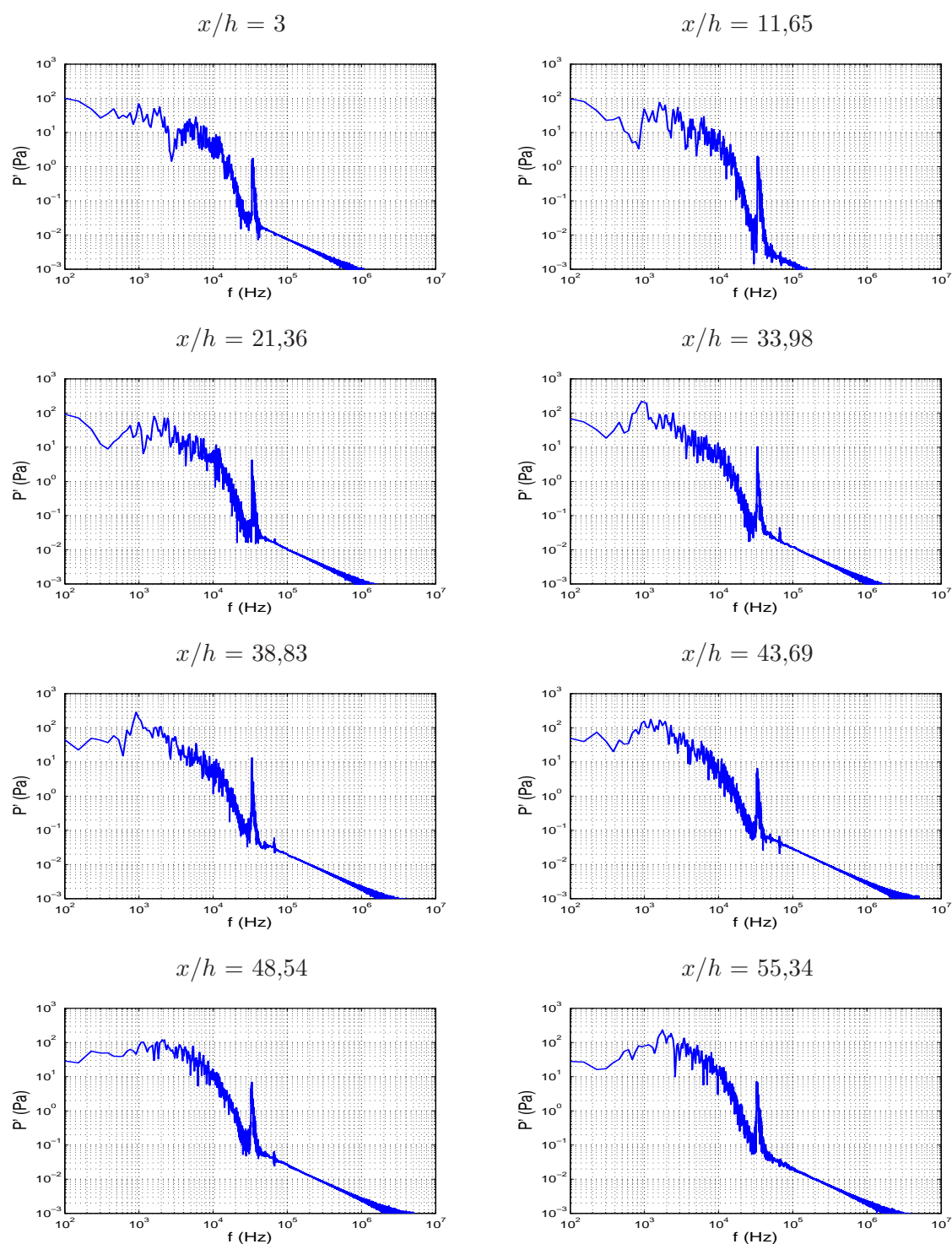


FIGURE E.14 – Calcul LES/Smago DN : Spectres de la fluctuation de pression  $P'$  lors du calcul 3D LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique pour différentes positions axiales  $x$  le long de la veine, en  $y = 5 \text{ mm}$ . ( $2^{17}$  points,  $\Delta f = 76 \text{ Hz}$  et  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ .)

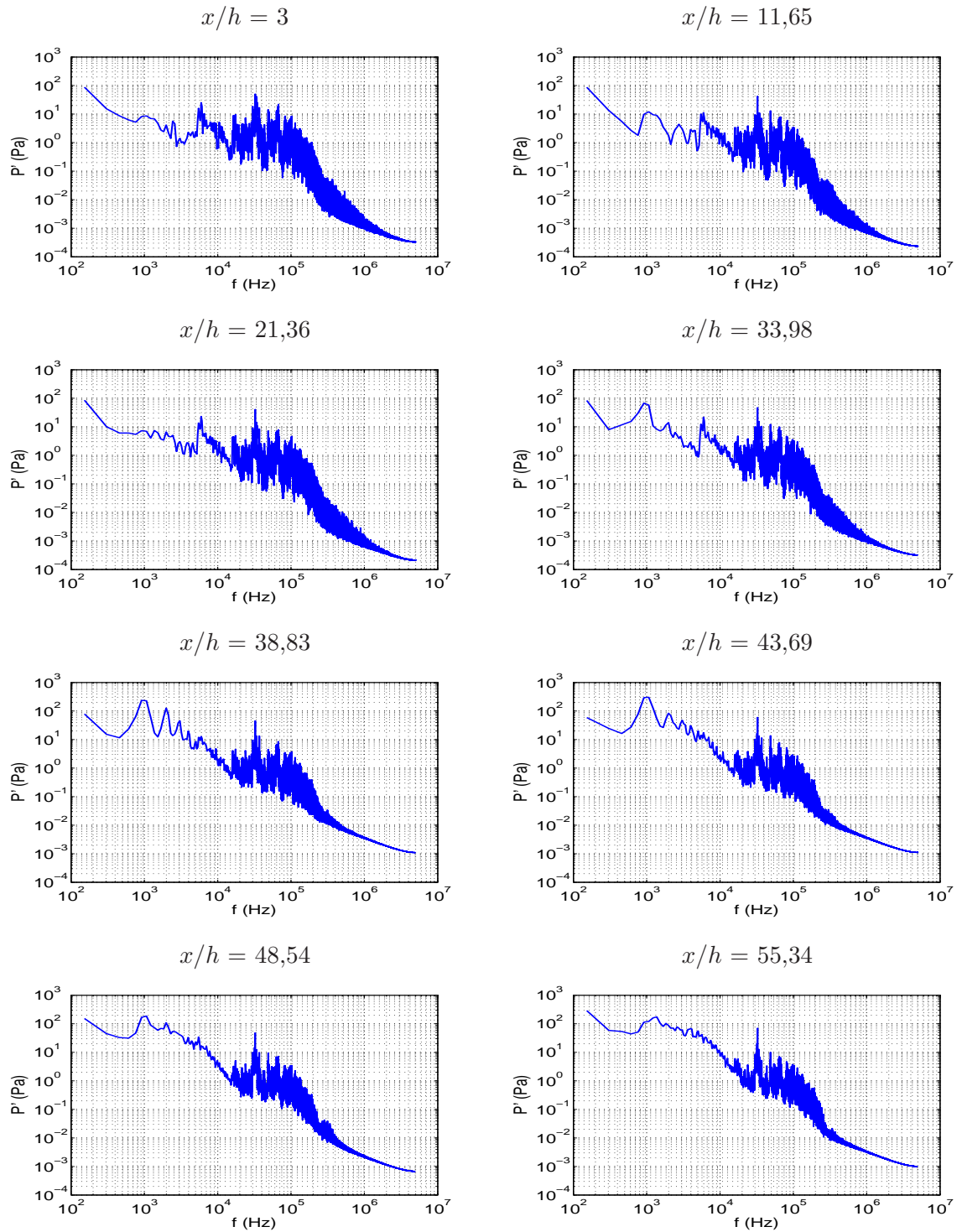


FIGURE E.15 – Calcul LES/Smago BR : Spectres de la fluctuation de pression  $P'$  lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour différentes positions axiales  $x$  le long de la veine, en  $y = 5 \text{ mm}$ . ( $2^{16}$  points,  $\Delta f = 38 \text{ Hz}$  et  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ .)

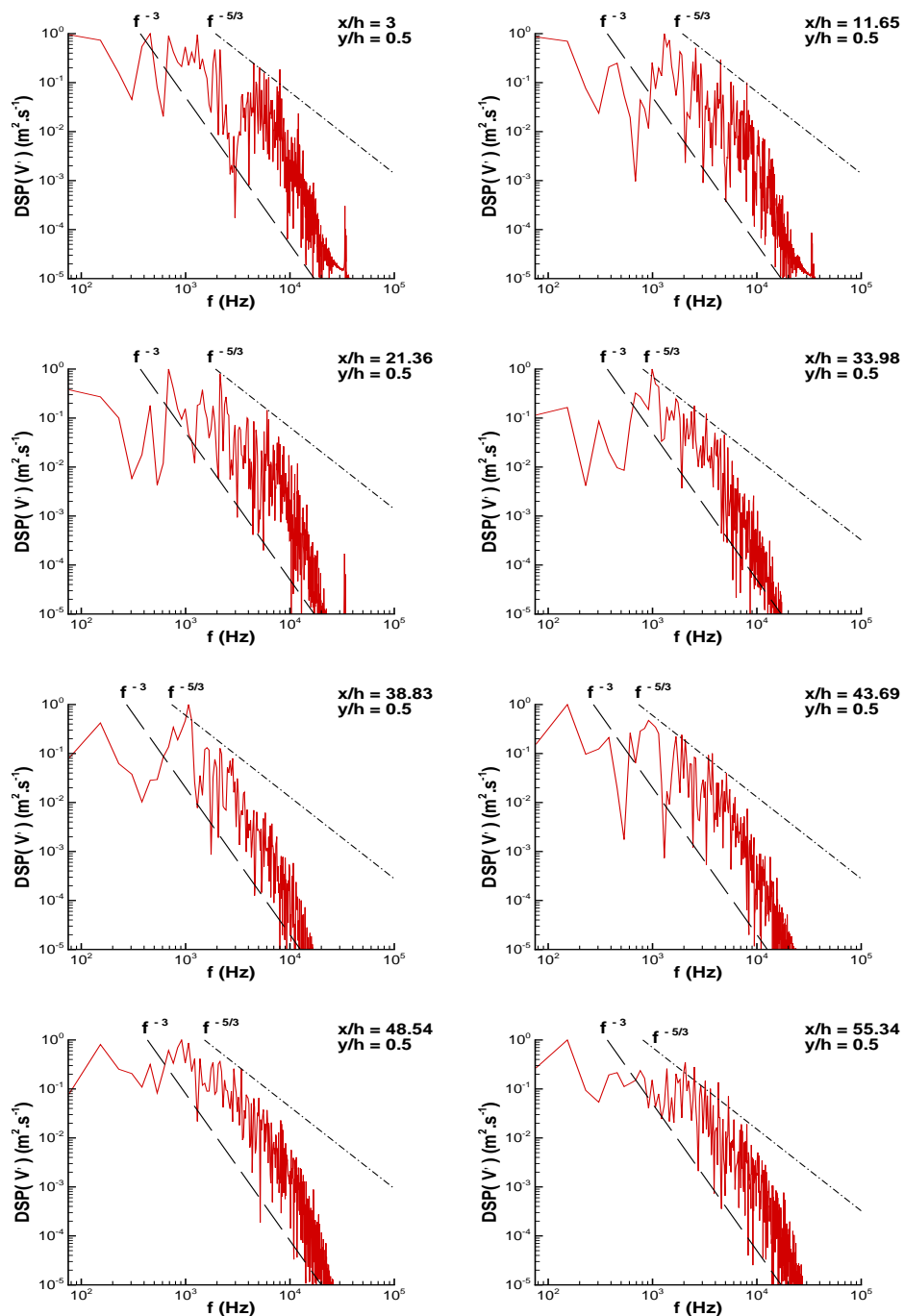


FIGURE E.16 – Calcul 3D MILES DN : Tracés de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors de la simulation 3D MILES avec la méthode de déstabilisation numérique.  $2^{17}$  points,  $\Delta f = 76\text{Hz}$  et  $\Delta t = 10^{-7}\text{s}$ .

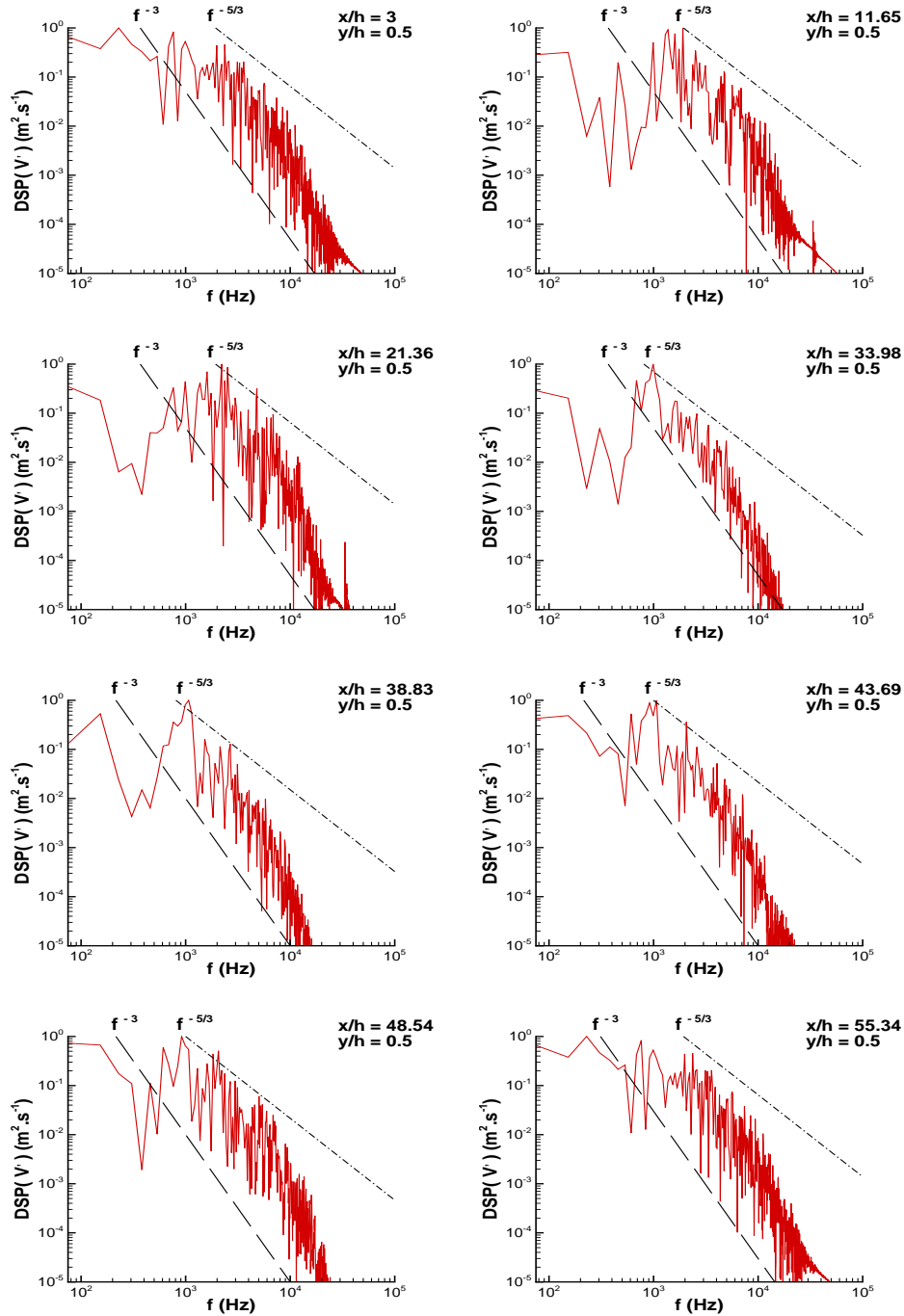


FIGURE E.17 – Calcul LES/Smago DN : Tracés de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors de la simulation 3D LES/Smagorinsky avec la méthode de déstabilisation numérique.  $2^{17}$  points,  $\Delta f = 76\text{Hz}$  et  $\Delta t = 10^{-7}\text{s}$ .

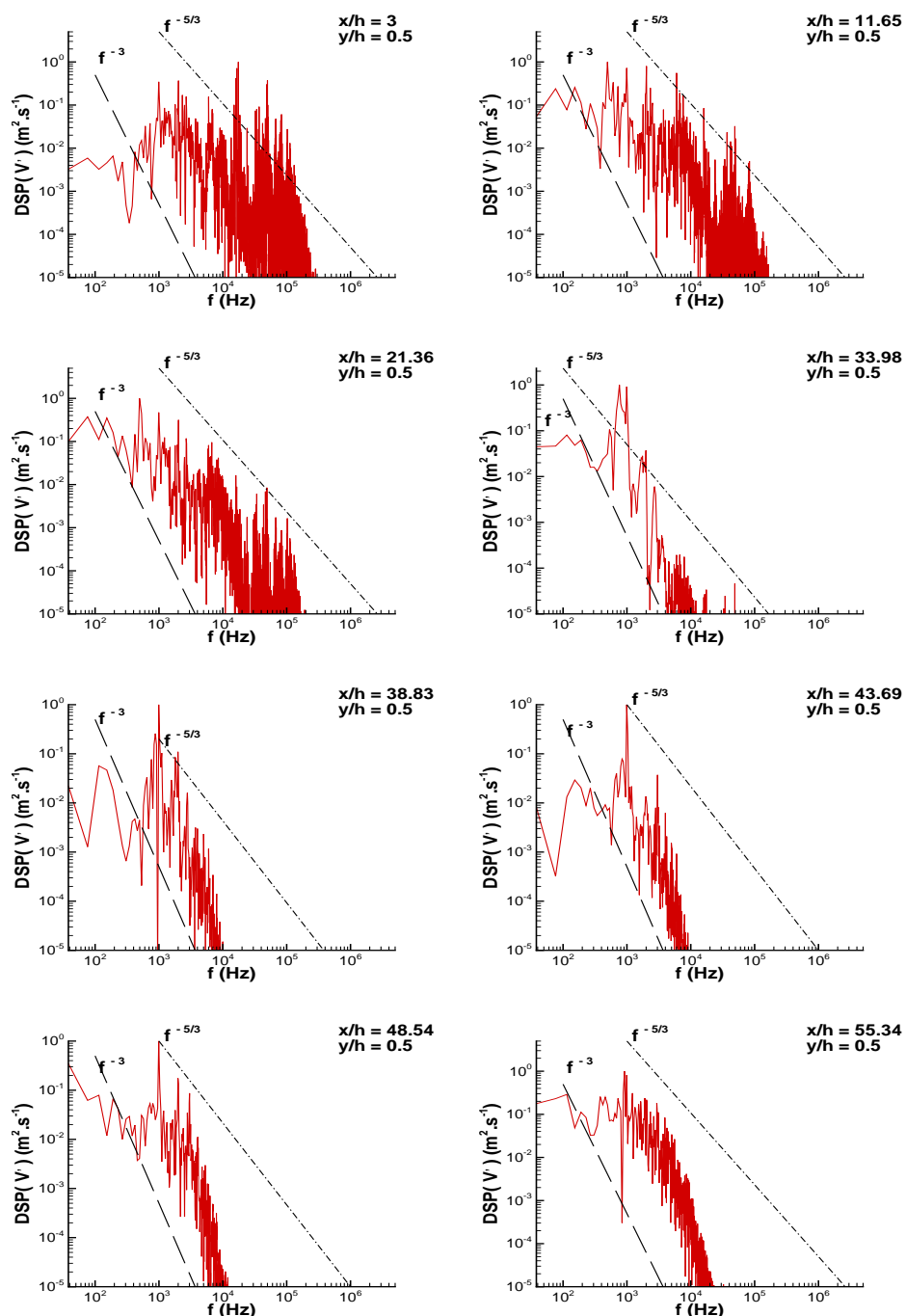


FIGURE E.18 – Calcul LES/Smago BR : Tracés de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour différentes valeurs de l'abscisse  $x$  le long de la veine, en  $y = 5 \text{ mm}$ .  $2^{18}$  points,  $\Delta f = 38 \text{ Hz}$  et  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ .

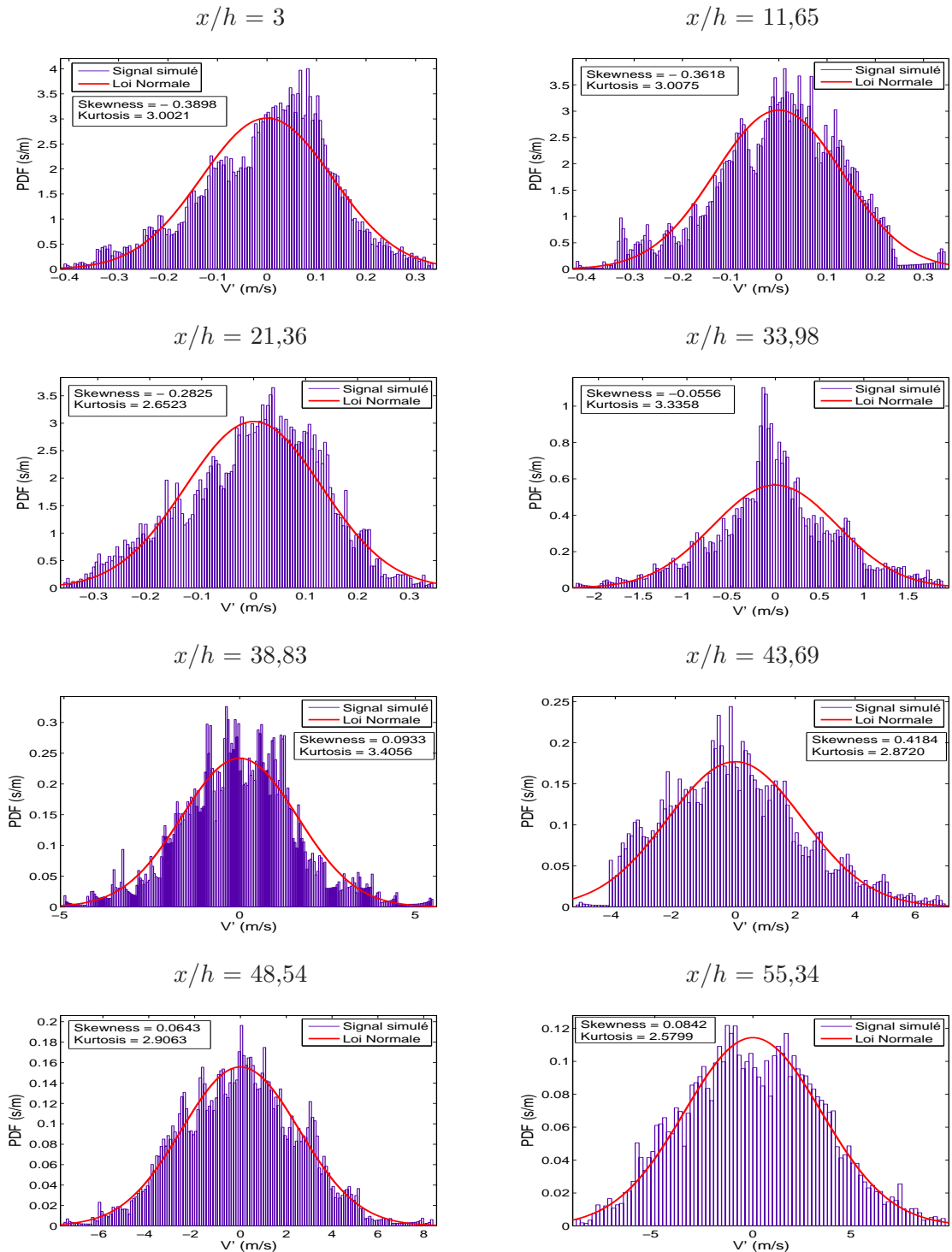


FIGURE E.19 – Calcul MILES DN : Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors du calcul 3D MILES avec la Déstabilisation Numérique pour différentes positions axiales  $x$  le long de la veine, en  $y = 5 \text{ mm}$ .



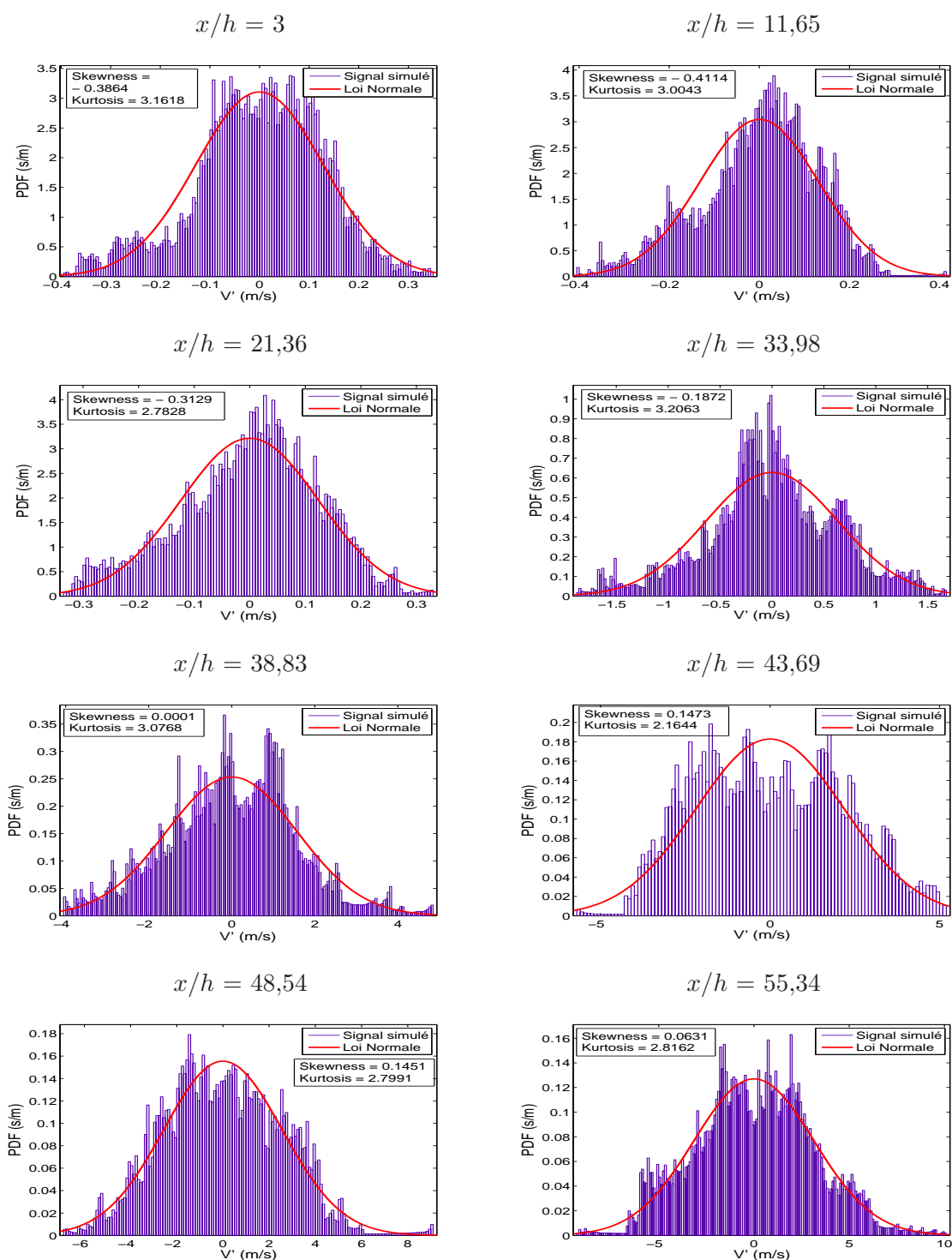


FIGURE E.20 – Calcul LES/Smago DN : Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors du calcul 3D LES/Smagorinsky avec la Déstabilisation Numérique pour différentes positions axiales  $x$  le long de la veine, en  $y = 5 \text{ mm}$ .

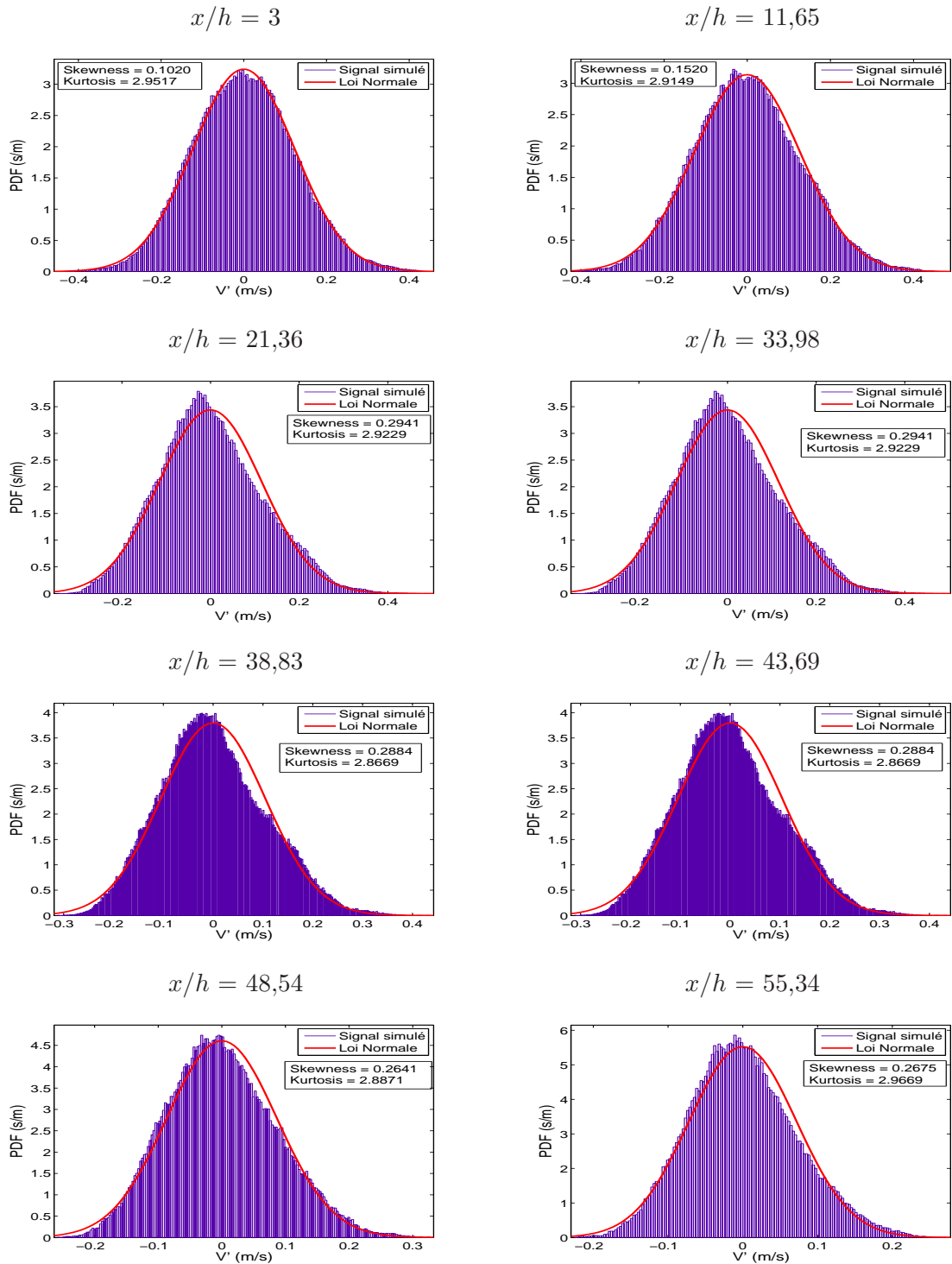


FIGURE E.21 – Calcul LES/Smago BR : Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour différentes positions axiales  $x$  le long de la veine, en  $y = 5 \text{ mm}$ .



# Bibliographie

- [1] J. ANTHOINE. Experimental and numerical study of aeroacoustic phenomena in large solid propellant boosters. *PhD Thesis, Université Libre de Bruxelles*, Octobre 2000.
- [2] J. ANTHOINE, J.M. BUCHLIN, and J.F. GUERY. Experimental and numerical investigations of nozzle geometry effect on the instabilities in solid propellant boosters. *36th Joint Propulsion Conference & Exhibit AIAA/ASME/ASEE*, AIAA 2000-3560, July 2000.
- [3] S. APTE and V. YANG. Unsteady flow evolution in porous chamber with surface mass injection, Part 1 : Free oscillation. *AIAA Journal*, 39(8) :1577–1586, August 2001.
- [4] S. APTE and V. YANG. A large eddy simulation study of transition and flow instability in a porous-walled chamber with mass injection. *Journal of Fluid Mechanics*, 477 :215–225, 2003.
- [5] G. AVALON. Caractérisation des phénomènes liés à l’instabilité naturelle de l’écoulement dans le montage VECLA. Étude des conditions permettant de réaliser l’accrochage acoustique. *Rapport final CNES 90/6133EY, ONERA*, Juillet 1997.
- [6] G. AVALON. Étude expérimentale des instabilités naturelles d’un écoulement avec injection à la paroi. Campagnes d’essais VECLA ASSM7. *Rapport technique RT 4/6163DSNA/Y/DEFA, ONERA*, Mars 1999.
- [7] G. AVALON, G. CASALIS, and J. GRIFFOND. Flow instabilities and acoustic resonance of channels with wall injection. *34th AIAA Joint Propulsion Conference & Exhibit Proceedings*, Cleveland, OH(AIAA Paper 98-3218), 1998.
- [8] G. AVALON and D. LAMBERT. Montage VALDO : premiers essais de mise au point et de qualification. *Rapport technique, RF 5/00064 DEFA, ONERA*, Septembre 2000.
- [9] G. AVALON and D. LAMBERT. Mesures de vitesse par sonde à film chaud sur le montage de simulation en gaz froid VECLA. *Rapport technique ONERA 2/17456 DEFA*, Novembre 2010.
- [10] G. AVALON and L. LEBON. Étude de la turbulence sur le montage VECLA pour un écoulement en transition. *Rapport technique, 6/2486EY, ONERA*, Septembre 1993.

- [11] G. AVALON, B. UGURTAS, F. GRISCH, and A. BRESSON. Numerical computations and visualizations tests of the flow inside a cold gas simulation with characterization of a parietal vortex-shedding. *36th Joint Propulsion Conference & Exhibit AIAA/ASME/ASEE*, AIAA 2000-3387, July 2000.
- [12] M. BARRERE. Problèmes énergétiques de la propulsion. *ENSAE*, 1972.
- [13] R.A. BEDDINI. Analysis of injection-induced flows in porous-walled ducts with application to the aerothermochemistry of solid-propellant motors. *Thèse, State University of New Jersey*, Octobre 1981.
- [14] R.A. BEDDINI. Injection induced flows in porous-walled ducts. *AIAA Journal*, 24(11) :1766–1773, Novembre 1986.
- [15] A. S. BERMAN. Laminar flow in channels with porous walls. *Journal of Applied Physics*, 24(9), September 1953.
- [16] N. BERTIER. Simulation des grandes échelles en aérothermique sur des maillages non-structurés généraux. *Thèse de l'Université Paris VI*, Avril 2006.
- [17] J.P. CALTAGIRONE. Physique des écoulements continus. *Polycopié de cours*, Université Bordeaux I - École MATMECA, Octobre 2005.
- [18] G. CASALIS, G. AVALON, and J.P. PINEAU. Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls. *Physics of Fluids*, 10(10) :2558–2568, October 1998.
- [19] B. CHAOUAT. Modélisation et simulation des écoulements turbulents dans les propulseurs à propergol solide. *Note technique ONERA*, Mars 1995.
- [20] B. CHAOUAT. Computation using  $k - \epsilon$  model with turbulent mass transfer in the wall region. *11th Symposium on Turbulence Shear Flows*, 2 :2.71–2.76, 1997.
- [21] B. CHAOUAT. Numerical predictions of channel flows with fluid injection using Reynolds-stress model. *Journal of Propulsion and Power*, 18(2) :295–303, 2002.
- [22] B. CHAOUAT. Contribution à la fermeture de turbulence au second ordre : de la modélisation à la simulation. *HDR Université Paris VI*, Avril 2007.
- [23] F. CHEDEVERGNE. Instabilités intrinsèques des moteurs à propergol solide. *Thèse de l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace*, Septembre 2007.
- [24] F. CHEDEVERGNE and G. CASALIS. Biglobal linear stability analysis and DNS investigation of the flow induced by wall injection. *6th ERCOFTAC SIG 33 workshop*, Kleinwalsertal, 8-11 June 2007.
- [25] F. CHEDEVERGNE, G. CASALIS, and T. FERAILLE. Biglobal linear stability analysis of the flow induced by wall injection. *Physics of Fluids*, Kleinwalsertal, 18 January 2006.
- [26] J. COUSTEIX. Aérodynamique - Turbulence et couche limite. *CEPADUES EDITIONS*, Collection La Chevêche, 1989.

- [27] F.E.C. CULICK. Rotational axisymmetric mean flow and damping of acoustic waves in a solid propellant rocket. *AIAA Journal*, 4 :1462–1464, August 1966.
- [28] L. DAVIDSON. Hybrid LES-RANS : inlet boundary conditions. *3rd National Conference on Computational Mechanics-MekIT05*, pages 7–22, 2005.
- [29] L. DAVIDSON. Using isotropic synthetic fluctuations as inlet boundary conditions for unsteady simulations. *Adv. Appl. Fluid. Mech.*, 1(1), 2007.
- [30] R. DUNLAP, P.G. WILLOUGHBY, and R.W. HERMSEN. Flowfield in the combustion chamber of a solid propellant rocket motor. *AIAA Journal*, 12(12) :1440–1442, 1974.
- [31] J.L. ESTIVALEZES. Notes de cours. Octobre 2005.
- [32] T. FERAILLE. Instabilités de l’écoulement interne des moteurs à propergol. *Thèse de l’École Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace*, 2004.
- [33] S. GALLIER. Conditions réalistes d’injection des gaz de propergol. *R&T CNES/SME, RT-DM-1133000-0468-SNPE-(01)*, Juin 2010.
- [34] S. GALLIER, M. PREVOST, J. HIJLKEMA, and M. ROUMY. Effects of cavity on thrust oscillations in subscale solid rocket motors. *45th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Denver (CO)*, (AIAA 2009-5253), 2-5 August 2009.
- [35] E. GARNIER. Simulation des grandes échelles en régime transsonique. *Thèse de l’Université Paris XI Orsay*, Octobre 2000.
- [36] P. GRECARD, J. TROYES, B. AUPOIX, and E. LAROCHE. Modèles de turbulence dans CEDRE. *Rapport Technique ONERA, RT 1/14801 DEFA/DSNA/DMAE*, Novembre 2010.
- [37] J. GRESSIER. Robustesse et précision des schémas décentrés pour les écoulements compressibles. *Thèse de l’École Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace*, Novembre 1999.
- [38] J. GRIFFOND. Instabilité pariétale et accrochage aéroacoustique dans les conduits à parois débitantes simulant les moteurs à propergol solide d’Ariane 5. *Thèse de l’École Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace*, Septembre 2001.
- [39] J. GRIFFOND, G. CASALIS, G. AVALON, B. UGURTAS, and F. VUILLOT. Instability and resonance in a system simulating the solid propellant motors behaviour. *2nd European Conference on Launcher Technology, Space Solid Propulsion*, November 2000.
- [40] R.W. HAMMING. Numerical methods for scientists and engineers. *McGraw-Hill*, 1987.
- [41] D.J. HIGHAM. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equation. *University of Strathclyde Mathematics Research report 26*, 2000.
- [42] C. HIRSCH. Numerical computation of internal and external flows. *John Wiley & Sons*, 1988.

- [43] K. HUESMANN and E.R.G. ECKERT. Studies of the laminar flow and the transition to turbulence in porous tubes with uniform injection through the tube wall. *translated from Wärme und Stoffübertragung*, Bd. 1, 5.2(FTD-ID(RS)T-1953-78) :2–9, 1968.
- [44] N. JARRIN, S. BENHAMADOUCHE, D. LAURENCE, and R. PROSSER. A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 27 :585–593, 2006.
- [45] M. KLEIN, A. SADIKI, and J. JANICKA. A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations. *Journal of Computational Physics*, 186 :652–665, 2003.
- [46] D.E. KNUTH. Seminumerical algorithms, Vol.2 The art of computer programming. 1981.
- [47] A. N. KOLMOGOROV. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30 :299–303, 1941.
- [48] P. LANGEVIN. Sur la théorie du mouvement brownien. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, pages 530–533, 1946.
- [49] B.E. LAUNDER and N. SHIMA. Second moment closure for the near wall sublayer : development and application. *AIAA Journal*, 27(10) :1319–1325, 1989.
- [50] H. LE, P. MOIN, and J. KIM. Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward facing step. *Journal of Fluid Mechanics*, 330 :349–374, 1997.
- [51] S. LEE, S. LELE, and P. MOIN. Simulation of spatially evolving compressible turbulence and the application of Taylor hypothesis. *Physics of Fluids*, pages 1521–1530, 1992.
- [52] M. LESIEUR. La turbulence. *Presses universitaires de Grenoble*, 1994.
- [53] N. LETERRIER. Discrétisation spatiale en maillage non-structuré de type général. *Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)*, Février 2003.
- [54] T.M. LIOU and W.Y. LIEN. Numerical simulations of injection driven flows in a two-dimensional nozzleless solid rocket motor. *Journal of Propulsion and Power*, 11(4) :600–606, 1995.
- [55] N. LUPOGLAZOFF. Simulations numériques du montage en gaz froid 2D plan VECLA. Étude du détachement tourbillonnaire pariétal : influence du bruit et de divers paramètres. *Rapport Technique ONERA RT 95/6133 EY*, Juillet 1997.
- [56] N. LUPOGLAZOFF and F. VUILLOT. Parietal vortex shedding as a cause of instability for long solid propellant motors. Numerical simulations and comparisons with firing tests. *AIAA paper*, 96-0761, 1996.
- [57] J.C. MAGNIENT. Simulation des grandes échelles d'écoulements de fluides quasi-compressibles. *Thèse de l'Université Paris XI Orsay*, Septembre 2001.
- [58] C.C. NGUYEN. Interaction des mécanismes tourbillonnaires en espace confiné - Effet de la conicité. *Thèse de l'Université de Poitiers - ENSMA*, 2002.

- [59] P.K. NGUYEN. Simulation des grandes échelles des écoulements turbulents inertes et réactifs en aval d'un élargissement brusque symétrique. *Thèse de l'Université de Poitiers*, Octobre 2006.
- [60] R.M. OLSON. Experimental studies of turbulent flow in a porous circular tube with uniform mass transfer through the tube wall. *Ph.D. Thesis, University of Minnesota*, 1964.
- [61] U. PIOMELLI. Large eddy simulation of turbulent flows. *Von Karman Institut for Fluid Dynamics Lecture Series 2008-04*, March 2008.
- [62] S.B. POPE. Turbulent Flows. *Cambridge University Press*, 2000.
- [63] M. PREVOST, J.C. GODON, and O. INNEGRAEVE. Thrust oscillations in reduced scale solid rocket motors Part I : experimental investigations. *41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Tucson (AZ)*, (AIAA 2005-4003), 10-13 July 2005.
- [64] L.F. RICHARDSON. Weather prediction by numerical process. *Cambridge University Press*, 1922.
- [65] J.S. SABNIS, H.J. GIBELING, and H. McDONALD. Navier-Stokes analysis of solid propellant rocket motor internal flows. *Journal of Propulsion and Power*, 5(6) :657–664, 1989.
- [66] J.S. SABNIS, R.K. MADABHUSHI, H.J. GIBELING, and H. McDONALD. On the use of  $k - \epsilon$  model for computation of solid rocket internal flows. *25th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Monterey, CA*, (AIAA paper 89-2558), July 1989.
- [67] R. SCHIESTEL. Modélisation et simulation des écoulements turbulents. *Traité des Nouvelles Technologies, série Mécanique*, Éditions Hermès, 1993.
- [68] G. SELVA. Méthodes itératives pour l'intégration implicite des équations de l'aérothermochimie sur des maillages non-structutés. *Thèse de l'École Centrale de Paris*, 1998.
- [69] A. SMIRNOV, S. SHI, and I. CELIK. Random flow generation technique for large-eddy simulations and particle dynamics modeling. *Journal of Fluids Engineering*, 123 :359–371, 2001.
- [70] A.J. SMITS and J.P. DUSSAUGE. Turbulent shear layers in supersonic flow. *AIP Press*, 1996.
- [71] A.A. SVIRIDENKOV and V.I. YAGODKIN. Flows in the initial sections of channels with permeable walls. *Fluid Dynamics*, 11(5) :43–48, 1976.
- [72] G.R. TABOR and M.H. BABA-AHMADI. Inlet conditions for large eddy simulation : a review. *Comput. Fluids*, 2009.
- [73] G.R. TABOR, M.H. BABA-AHMADI, E. De VILLIERS, and H.G. WELLER. Construction of inlet conditions for LES of turbulent channel flow. *ECCOMAS*, 2004.



- [74] G.I. TAYLOR. Fluid flows in regions bounded by porous surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 234 :456–475, 1956.
- [75] H. TENNEKES and J.L. LUMLEY. A first course in turbulence. *The MIT Press*, 1972.
- [76] J.C. TRAINEAU, P. HERVAT, and P. KUENTZMANN. Cold flow simulation of a two-dimensional nozzleless solid rocket motor. AIAA paper 86-1447, Juin 1986.
- [77] B. UGURTAS. Étude numérique et expérimentale des instabilités hydrodynamiques et du couplage aéro-acoustique dans un écoulement de Taylor. *Thèse de l'université Paris VI*, Décembre 2000.
- [78] B. UGURTAS, G. AVALON, N. LUPOGLAZOFF, and G. CASALIS. Stability and acoustic resonance of internal flows generated by side injection. Solid Propellant Chemistry, Combustion and Motor Interior Ballistics, AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics Series(185), July 2000.
- [79] V.N. VARAPAEV and V.I. YAGODKIN. Flow stability in a channel with porous walls. *Mekhanika Zhidkosi i Gaza*, 4(5) :91–95, 1969.
- [80] I. VELOUDIS, Z. YANG, J.J. MCGUIRK, and G.J. PAGE. Assessment of digital filter approach for generating large eddy simulation inlet conditions. *Proceedings of Engineering Turbulence Modelling and Experiments*, 6 :307–316, 2005.
- [81] I. VELOUDIS, Z. YANG, J.J. MCGUIRK, G.J. PAGE, and A. SPENCER. Novel implementation and assessment of a digital filter based approach for the generation of LES inlet conditions. *Flow Turb. Combust.*, 79 :1–24, 2007.
- [82] F. VUILLOT and G. AVALON. Instabilités de combustion des propulseurs à propergols solides. Mise en place de moyens de simulation en gaz froids et compléments de calculs. *Rapport Technique RT 54/3725EY, ONERA*, Mai 1988.
- [83] F. VUILLOT, G. CASALIS, and N. LUPOGLAZOFF. Mise en résonance acoustique d'une cavité par l'instabilité naturelle d'un écoulement généré par injection pariétale. *CR Acad. Sci., Paris, Série IIb*, pages 77–83, 1999.
- [84] F. VUILLOT and A. REFLOCH. Manuel utilisateur de la chaîne CEDRE. *ONERA*, Mars 2009.
- [85] F. VUILLOT, D. SCHERRER, and M. HABIBALLAH. CFD code validation for space propulsion applications. *5th International Symposium on Liquid Space Propulsion Proceedings, Chattanooga, TN*, Octobre 2003.
- [86] B. WASISTHO, S. BALACHANDAR, and R.D. MOSER. Compressible wall-injection flows in laminar, transitional and turbulent regimes : numerical prediction. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 41(6) :915–924, November-December 2004.
- [87] B. WASISTHO, A. HASELBACHER, F.M. NAJJAR, D. TAFTI, S. BALACHANDAR, and R.D. MOSER. Direct and large eddy simulation of compressible wall-injection flows in laminar, transitional, and turbulent regimes. *38th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Indianapolis, IN*, AIAA Paper 2002-4344, 2002.

- [88] J.D. WILSON and Y. ZHUANG. Restriction on the time-step to be used in stochastic lagrangian models of turbulent dispersion. *Boundary Layer Meteorol.*, 49 :309–316, 1989.
- [89] V. YAGODKIN. Use of channels with porous walls for studying flows which occur during combustion of solid propellants. *Transactions of 18<sup>th</sup> international astronomical congress*, 3 :69–79, 1967.
- [90] K. YAMADA, M. GOTO, and N. ISHIKAWA. Simulative study on the erosive burning of solid rocket motors. *AIAA Journal*, 14(9) :1170–1176, 1976.



# Table des figures

1	Schéma du scénario explicatif du changement de comportement de l'écoulement dans un canal avec injection à géométrie régulière. . . . .	20
I.1	Représentation de la cascade d'énergie. . . . .	31
I.2	Différentes approches pour la simulation numérique d'écoulements turbulents. . . . .	34
I.3	Notations pour un système élémentaire composé de deux cellules $i$ et $j$ . . . . .	46
I.4	Schéma de deux cellules $i$ et $j$ pour la résolution du problème de Riemann. . . . .	50
I.5	Schéma de l'interpolation linéaire à l'interface entre deux cellules $i$ et $j$ pour la montée à l'ordre 2. . . . .	52
II.1	Photographie du montage VECLA. . . . .	60
II.2	Schéma du montage VECLA. . . . .	61
II.3	Profils de vitesse totale moyenne. Comparaison des relevés obtenus en 1993 (en pointillés) et en 2010 (en ligne continue). . . . .	63
II.4	Profils de vitesses moyennes longitudinale (a) et transversale (b) pour les essais de 1993. . . . .	64
II.5	Pressions mesurées dans la veine en fonction de l'abscisse. Campagnes d'essais de 1993 (pointillés) et de 2010 (ligne continue). . . . .	64
II.6	Variation du coefficient de quantité de mouvement $\beta$ en fonction de l'abscisse. Campagnes d'essais de 1993 (pointillés) et de 2010 (ligne continue). . . . .	66
II.7	Profils de vitesse totale fluctuante en valeur RMS. Comparaison des relevés obtenus en 1993 avec bifilm (en pointillés) et en 2010 avec monofilm (en ligne continue). . . . .	67
II.8	Profils de vitesses fluctuantes longitudinale (a) et transversale (b) pour les essais de 1993. . . . .	67
II.9	Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale $v'$ pour les essais de 2010, en différentes positions axiales $x$ le long de la veine. . . . .	69
II.10	Spectres des fluctuations de vitesse totale $v'$ aux différentes positions transversales $y$ de mesure du film chaud et en différentes positions axiales $x$ le long de la veine. . . . .	71

II.11	Spectre des fluctuations de pression relevé près du fond avant en $x = 31$ $mm$ et $y = 3$ $mm$ . . . . .	72
II.12	<i>DSP</i> de la fluctuation de vitesse totale $v'$ à $5$ $mm$ de la plaque poreuse pour les 8 positions longitudinales le long de la veine. Spectres ordonnés de bas en haut, des abscisses les plus faibles aux plus élevées ( $x = 31, 120, 220, 350, 400, 450, 500$ et $570$ $mm$ ). . . . .	73
II.13	Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale $v'$ lors des mesures de bruit pour différentes valeurs du débit massique surfacique $\dot{m}_s$ et de hauteur de veine $y$ , en $x = 31$ $mm$ . . . . .	75
II.14	Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale $v'$ lors des mesures de bruit pour différentes valeurs du débit massique surfacique $\dot{m}_s$ et de hauteur de veine $y$ , en $x = 31$ $mm$ (suite). . . . .	76
II.15	<i>DSP</i> de la fluctuation de vitesse $v'$ relevées lors des mesures de bruit pour différentes valeurs du débit massique surfacique $\dot{m}_s$ , pour une hauteur de veine $y = 1,7$ $mm$ et en $x = 31$ $mm$ . . . . .	78
II.16	<i>DSP</i> de la fluctuation de vitesse $v'$ relevées lors des mesures de bruit pour différentes valeurs du débit massique surfacique $\dot{m}_s$ , pour une hauteur de veine $y = 1,7$ $mm$ et en $x = 31$ $mm$ (suite). . . . .	79
II.17	Quantité de mouvement (a) et fluctuations de quantité de mouvement en valeurs RMS adimensionnées (b) en fonction du débit injecté à la paroi, à la position $x = 31$ $mm$ , avec $y$ la hauteur de la sonde monofilament par rapport à la plaque poreuse. . . . .	80
II.18	Exemples de fonctions d'autocorrélation obtenues en $x = 31$ $mm$ et pour : (a) : $y = 1,4$ $mm$ et un débit injecté $(\rho v)_{inj} = 1,661$ $kg/(m^2s)$ . (b) : $y = 2,0$ $mm$ et un débit injecté $(\rho v)_{inj} = 1,245$ $kg/(m^2s)$ . . . . .	82
II.19	Échelles intégrales temporelles des fluctuations de quantité de mouvement déterminées pour $\tau = 0,4$ $ms$ (a) et $\tau = 1,0$ $ms$ (b), avec $y$ la hauteur de la sonde par rapport à la plaque poreuse. . . . .	82
II.20	Échelles intégrales de longueur des fluctuations de quantité de mouvement déterminées pour $\tau = 0,4$ $ms$ (a) et $\tau = 1,0$ $ms$ (b), avec $y$ la hauteur de la sonde par rapport à la plaque poreuse. . . . .	83
III.1	Schéma d'un canal plan à parois parallèles avec une injection pariétale symétrique pour l'écoulement de Taylor-Culick. . . . .	86
III.2	Profils analytiques adimensionnés de Taylor-Culick de vitesse longitudinale (a), de vitesse transversale (b) et de pression (c). . . . .	90
III.3	Modélisation du montage VECLA pour les simulations numériques bidimensionnelles. . . . .	91
III.4	Comparaison Taylor-Culick/Calculs laminaires VECLA : variation de la pression moyenne adimensionnée le long de la veine. . . . .	94
III.5	Comparaison Taylor-Culick/Calculs laminaires VECLA : profils de vitesse transversale adimensionnée pour 8 sections $x/h$ dans la veine. . . . .	95

III.6	Comparaison Taylor-Culick/Calculs laminaires VECLA : profils de vitesse longitudinale adimensionnée pour 8 sections $x/h$ dans la veine. . . . .	96
III.7	Comparaison calcul laminaire/expérience VECLA : profils de vitesse longitudinale pour 8 sections de la veine. . . . .	98
III.8	Comparaison calcul laminaire/expérience VECLA : évolution du coefficient $\beta$ le long de la veine. . . . .	99
III.9	Diagramme de Beddini [14]. . . . .	103
III.10	Représentation du maillage pour le calcul bidimensionnel RANS. . . . .	106
III.11	Modélisation du montage VECLA pour le calcul tridimensionnel. . . . .	107
III.12	Représentation du maillage pour une coupe selon l'axe $x$ . . . . .	108
III.13	Représentation du maillage pour une coupe selon l'axe $z$ . . . . .	108
III.14	Détail des dimensions des mailles selon l'axe $x$ (en haut), selon l'axe $y$ (au milieu) et selon l'axe $z$ (en bas). . . . .	109
III.15	Évolution de la taille de maille $\Delta m$ adimensionnée par l'échelle de Kolmogorov $\eta$ en fonction de l'abscisse adimensionnée $x/h$ et de la hauteur de veine adimensionnée $y/h$ , en $z = 30 \text{ mm}$ , pour $Re_s = 1,5 \times 10^3$ . . . . .	113
III.16	Comparaison des calculs RANS et LES avec l'expérience VECLA et les profils de Taylor-Culick : profils de vitesse longitudinale adimensionnée pour 8 sections $x/h$ de la veine. . . . .	115
III.17	Comparaison calcul RANS/expérience VECLA : évolution du coefficient $\beta$ le long de la veine. . . . .	116
III.18	Comparaison calcul RANS/expérience VECLA : profils de l'intensité turbulente pour 8 sections de la veine. . . . .	117
IV.1	Exemple d'histogramme (a) et de fonction d'autocorrélation (b) obtenus lors de la génération de variables aléatoires à distribution gaussienne par la méthode " <i>linear congruential generator</i> " pour une suite de 228000 nombres. . . . .	135
IV.2	Évolution temporelle du signal généré (a), DSP du signal (b), histogramme (c) et fonction d'autocorrélation temporelle du signal (d) obtenus par la méthode de résolution d'Euler-Maruyama. . . . .	137
IV.3	Évolution temporelle du signal bruité (a), DSP du signal (b), histogramme (c) et fonction d'autocorrélation temporelle du signal (d) obtenus par la méthode 2. . . . .	139
IV.4	Signal généré (a), DSP du signal (b), histogramme (c) et fonction d'autocorrélation temporelle du signal (d) obtenus par la méthode de résolution hybride. . . . .	140
IV.5	Évolution de l'échelle temporelle générée par le modèle de Langevin (a), de la moyenne (b), de l'écart-type $\sigma$ (c), du <i>kurtosis</i> (d) et du <i>skewness</i> (e) en fonction du temps total simulé $T_{Total}$ adimensionné par l'échelle temporelle $T_L$ . . . . .	143

IV.6	Évolution de l'écart-type $\sigma$ généré par le modèle de Langevin (a), de l'échelle temporelle (b), du <i>kurtosis</i> et du <i>skewness</i> (c) et des valeurs moyennes, minimum et maximum du signal (d) en fonction de l'écart-type imposé. . . . .	144
IV.7	Évolution temporelle de la vitesse longitudinale $v_x$ (a), de la vitesse transversale $v_y$ (b), de la température $T$ (c), de la pression $P$ (d), de la masse volumique $\rho$ (e) et de la variable conservative $\rho E$ (f) pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative ( $\rho E$ ). . . . .	153
IV.8	Évolution temporelle de la vitesse longitudinale $v_x$ (a), de la vitesse transversale $v_y$ (b), de la température $T$ (c), de la pression $P$ (d) et de la masse volumique $\rho$ (e) pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative $\rho$ . . . . .	159
IV.9	Évolution temporelle de la vitesse longitudinale $v_x$ (a), de la vitesse transversale $v_y$ (b), de la température $T$ (c), de la pression $P$ (d) et de la masse volumique $\rho$ (e) pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative ( $\rho v_y$ ). . . . .	164
V.1	Schéma du montage VECLA avec la zone correspondant à l'épaisseur $e$ sur laquelle la source de bruit rouge est appliquée. . . . .	177
V.2	Quantité de mouvement (a) et fluctuations de quantité de mouvement en valeurs RMS adimensionnées (b) en fonction du débit injecté à la paroi, à la position $x = 31 \text{ mm}$ , avec $y$ la hauteur de la sonde monofilament par rapport à la plaque poreuse : valeurs relevées expérimentalement (pour des débits $(\rho v)_{inj}$ de 1.107, 1.245, 1.423, 1.661, 1.991, 2.490, 3.316 $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ ) et pour la simulation LES avec le modèle de bruit rouge filtré (débit injecté $(\rho v)_{inj} = 2,62 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ , localisée par un trait vertical). . . . .	178
V.3	Calcul LES/Smagorinsky Bruit rouge : (a) : Tracé de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale $v'$ lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour une hauteur de veine $y = 2,5 \text{ mm}$ , en $x = 31 \text{ mm}$ . (b) Tracé de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de la fluctuation de vitesse totale $v'$ lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour une hauteur de veine $y = 2,5 \text{ mm}$ , en $x = 31 \text{ mm}$ . ( $2^{18}$ points, $\Delta f = 38 \text{ Hz}$ et $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ ). . . . .	179
V.4	Profils de vitesse longitudinale pour 8 sections $x/h$ de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40 $\text{ms}$ , LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22 $\text{ms}$ , LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (1ère PARTIE) . . . . .	183

V.5	Profils de vitesse longitudinale pour 8 sections $x/h$ de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40 $ms$ , LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22 $ms$ , LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (SUITE) . . . . .	184
V.6	Calcul 3D LES/Smago DN : Évolution axiale de la valeur de $y^+$ pour le calcul LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique pour une coupe en $z = 30 mm$ . . . . .	185
V.7	Variation de la pression moyenne adimensionnée le long de la veine. Comparaison des simulations LES/Bruit Rouge, LES/Smagorinsky, MILES et RANS avec l'expérience VECLA et l'évolution analytique selon Taylor-Culick. . . . .	185
V.8	(a) : Évolution du coefficient de quantité de mouvement $\beta$ le long de la veine. (b) : Pourcentage d'écart relatif entre la valeur du coefficient $\beta$ au fond avant et sa valeur le long de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40 $ms$ , LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22 $ms$ , LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. . . . .	187
V.9	Intensité turbulente $I = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2}$ pour 8 sections $x/h$ de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40 $ms$ , LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22 $ms$ , LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (1ère PARTIE) . . . . .	192
V.10	Intensité turbulente $I = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2}$ pour 8 sections $x/h$ de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40 $ms$ , LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22 $ms$ , LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (SUITE) . . . . .	193
V.11	Spectres de la fluctuation de pression $P'$ lors des calculs 3D LES en différentes positions axiales $x$ le long de la veine, en $y = 5 mm$ . (Calculs MILES DN et LES/Smago DN : $2^{17}$ points, $\Delta f = 76Hz$ et $\Delta t = 10^{-7}s$ .) (Calcul LES/Smago BR : $2^{16}$ points, $\Delta f = 38Hz$ et $\Delta t = 10^{-7}s$ .) . . . . .	194
V.12	Tracés de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de la fluctuation de vitesse totale $v'$ lors des calculs 3D pour différentes valeurs de l'abscisse $x$ le long de la veine, en $y = 5 mm$ . (Calcul 3D MILES DN et calcul LES/Smago DN : $2^{17}$ points, $\Delta f = 76Hz$ et $\Delta t = 10^{-7}s$ .) (Calcul LES/Smago BR : $2^{18}$ points, $\Delta f = 38Hz$ et $\Delta t = 10^{-7}s$ .) . . . . .	195



V.13	Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale $v'$ lors des calculs 3D LES pour deux différentes positions axiales $x$ le long de la veine (telles que $x/h = 3$ et $x/h = 48,54$ ), en $y = 5 \text{ mm}$ . . . . .	196
B.1	Schéma de l'alimentation en air du montage VECLA. . . . .	204
C.1	Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la température $T$ pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative ( $\rho E$ ). . . . .	208
C.2	Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la pression $P$ pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative ( $\rho E$ ). . . . .	209
C.3	Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la variable conservative ( $\rho E$ ) pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative ( $\rho E$ ). . . . .	210
C.4	Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la masse volumique $\rho$ pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative $\rho$ . . . . .	211
C.5	Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la température $T$ pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative $\rho$ . . . . .	212
C.6	Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la pression $P$ pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative $\rho$ . . . . .	213
C.7	Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la vitesse transversale $v_y$ pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative ( $\rho v_y$ ). . . . .	214
C.8	Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la température $T$ pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative ( $\rho v_y$ ). . . . .	215
C.9	Tracés de la fonction d'autocorrélation (a), de la DSP (b) et de l'histogramme (c) pour la pression $P$ pour la simulation testant l'application du modèle de bruit rouge sur la variable conservative $\rho v_y$ . . . . .	216
E.1	Fluctuations de quantité de mouvement en valeur RMS adimensionnées en fonction du débit injecté à la paroi, à la position axiale $x = 31 \text{ mm}$ , pour différentes hauteurs $y$ par rapport à la plaque poreuse. (Symboles : valeurs expérimentales). . . . .	224
E.2	Évolution de la pression mesurée expérimentalement dans la veine en fonction de la pression d'alimentation dans les préchambres du montage VECLA. (Symboles : valeurs expérimentales). . . . .	225

E.3	Tracés de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de la fluctuation de vitesse totale $v'$ lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour différentes valeurs de la hauteur de veine $y$ , en $x = 31 \text{ mm}$ . $2^{18}$ points, $\Delta f = 38 \text{ Hz}$ et $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ . . . . .	227
E.4	Tracés de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de la fluctuation de vitesse totale $v'$ lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour différentes valeurs de la hauteur de veine $y$ , en $x = 31 \text{ mm}$ . $2^{18}$ points, $\Delta f = 38 \text{ Hz}$ et $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ . (SUITE) . . . . .	228
E.5	Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale $v'$ lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour différentes valeurs de la hauteur de veine $y$ , en $x = 31 \text{ mm}$ . . . . .	229
E.6	Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale $v'$ lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour différentes valeurs de la hauteur de veine $y$ , en $x = 31 \text{ mm}$ (suite). . . . .	230
E.7	Intensité turbulente pour 8 sections $x/h$ de la veine, telle que $I = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2}$ pour les calculs LES et $I = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2}$ pour le calcul RANS et les données expérimentales. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur $40 \text{ ms}$ , LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur $22 \text{ ms}$ , LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (1ère PARTIE) . . . . .	231
E.8	Intensité turbulente pour 8 sections $x/h$ de la veine, telle que $I = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2}$ pour les calculs LES et $I = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2}$ pour le calcul RANS et les données expérimentales. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur $40 \text{ ms}$ , LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur $22 \text{ ms}$ , LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (SUITE) . . . . .	232
E.9	Profils de vitesse longitudinale fluctuante en valeurs RMS pour 8 sections $x/h$ de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur $40 \text{ ms}$ , LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur $22 \text{ ms}$ , LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (1ère PARTIE) . . . . .	233
E.10	Profils de vitesse longitudinale fluctuante en valeurs RMS pour 8 sections $x/h$ de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur $40 \text{ ms}$ , LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur $22 \text{ ms}$ , LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (SUITE) . . . . .	234

E.11	Profils de vitesse transversale fluctuante en valeurs RMS pour 8 sections $x/h$ de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40 $ms$ , LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22 $ms$ , LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (1ère PARTIE) . . . . .	235
E.12	Profils de vitesse transversale fluctuante en valeurs RMS pour 8 sections $x/h$ de la veine. Comparaison des simulations LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 40 $ms$ , LES/Smagorinsky avec Bruit Rouge pour une moyenne temporelle sur 22 $ms$ , LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique, MILES avec Déstabilisation Numérique et RANS avec l'expérience VECLA. (SUITE) . . . . .	236
E.13	Calcul MILES DN : Spectres de la fluctuation de pression $P'$ lors du calcul 3D MILES avec Déstabilisation Numérique pour différentes positions axiales $x$ le long de la veine, en $y = 5\text{ mm}$ . ( $2^{17}$ points, $\Delta f = 76Hz$ et $\Delta t = 10^{-7}s$ .) . . . . .	237
E.14	Calcul LES/Smago DN : Spectres de la fluctuation de pression $P'$ lors du calcul 3D LES/Smagorinsky avec Déstabilisation Numérique pour différentes positions axiales $x$ le long de la veine, en $y = 5\text{ mm}$ . ( $2^{17}$ points, $\Delta f = 76Hz$ et $\Delta t = 10^{-7}s$ .) . . . . .	238
E.15	Calcul LES/Smago BR : Spectres de la fluctuation de pression $P'$ lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour différentes positions axiales $x$ le long de la veine, en $y = 5\text{ mm}$ . ( $2^{16}$ points, $\Delta f = 38Hz$ et $\Delta t = 10^{-7}s$ .) . . . . .	239
E.16	Calcul 3D MILES DN : Tracés de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de la fluctuation de vitesse totale $v'$ lors de la simulation 3D MILES avec la méthode de déstabilisation numérique. $2^{17}$ points, $\Delta f = 76Hz$ et $\Delta t = 10^{-7}s$ . . . . .	240
E.17	Calcul LES/Smago DN : Tracés de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de la fluctuation de vitesse totale $v'$ lors de la simulation 3D LES/Smagorinsky avec la méthode de déstabilisation numérique. $2^{17}$ points, $\Delta f = 76Hz$ et $\Delta t = 10^{-7}s$ . . . . .	241
E.18	Calcul LES/Smago BR : Tracés de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de la fluctuation de vitesse totale $v'$ lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour différentes valeurs de l'abscisse $x$ le long de la veine, en $y = 5\text{ mm}$ . $2^{18}$ points, $\Delta f = 38Hz$ et $\Delta t = 10^{-7}s$ . . . . .	242
E.19	Calcul MILES DN : Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale $v'$ lors du calcul 3D MILES avec la Déstabilisation Numérique pour différentes positions axiales $x$ le long de la veine, en $y = 5\text{ mm}$ . . . . .	243

E.20 Calcul LES/Smago DN : Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors du calcul 3D LES/Smagorinsky avec la Déstabilisation Numérique pour différentes positions axiales  $x$  le long de la veine, en  $y = 5 \text{ mm}$ . . . . . 244

E.21 Calcul LES/Smago BR : Tracés de la densité de probabilité (PDF) de la fluctuation de vitesse totale  $v'$  lors du calcul 3D LES avec le modèle de bruit rouge filtré pour différentes positions axiales  $x$  le long de la veine, en  $y = 5 \text{ mm}$ . . . . . 245



# Liste des tableaux

II.1	Valeurs de vitesse d'injection $v_{inj}$ et de débit massique surfacique $(\rho v)_{inj} = \dot{m}_s$ associées à chaque pression d'alimentation $P_{al}$ . . . . .	74
III.1	Valeurs des abscisses adimensionnées $x/h$ correspondant aux abscisses de relevé de données expérimentales $x$ . . . . .	91
III.2	Résumé des conditions de calcul pour les simulations d'écoulement laminaire dans VECLA. . . . .	93
III.3	Résumé des conditions de calcul pour la simulation RANS de l'écoulement dans VECLA. . . . .	106
III.4	Dimensions minimales et maximales du maillage selon les trois directions de l'espace. . . . .	109
III.5	Résumé des conditions de calcul pour la simulation MILES. . . . .	110
IV.1	Résumé des valeurs des paramètres du bruit rouge pour différentes méthodes de résolution. . . . .	141
IV.2	Données de calcul pour le test du comportement du modèle de bruit rouge dans CEDRE. . . . .	150
IV.3	Résultats de calcul pour le test du comportement du modèle de bruit rouge dans CEDRE lors de l'application du bruit rouge sur l'énergie. . . . .	152
IV.4	Résultats de calcul pour le test du comportement du modèle de bruit rouge dans CEDRE lors de l'application du bruit rouge sur la masse. . . . .	158
IV.5	Résultats de calcul pour le test du comportement du modèle de bruit rouge dans CEDRE lors de l'application du bruit rouge sur la variable conservative $(\rho v_y)$ . . . . .	163
V.1	Résumé des conditions de calcul identiques à toutes les simulations tridimensionnelles instationnaires. . . . .	173
V.2	Détails des caractéristiques de calcul qui diffèrent entre les simulations tridimensionnelles instationnaires. . . . .	174

V.3	Position axiale de la transition du profil de vitesse moyenne longitudinale pour les simulations selon le critère suivant : la transition est repérée lorsque le coefficient de quantité de mouvement $\beta$ atteint 0,5% d'écart $E_\beta$ défini par (V.12) par rapport à sa valeur laminaire près du fond avant. . . . .	187
V.4	Valeurs des fréquences acoustiques longitudinales $f_x^n$ , transversales $f_y^n$ et tangentiels $f_z^n$ selon différents modes $n$ pour le canal VECLA. ( $f_i^n = n \times a / (2L_i)$ , avec $i = x, y, z$ ). . . . .	190
V.5	Tableau des valeurs RMS au carré de la fluctuation de pression et valeurs de l'amplitude de la DSP des fluctuations de pression relevée à la fréquence $f_{pic} \approx 33000 Hz$ , en différentes abscisses $x$ le long de la veine, en $y = 5 mm$ . . . . .	190
B.1	Valeurs des pressions dans la veine $P_{veine}$ associées à chacune des pressions d'alimentation $P_{al}$ . . . . .	205
B.2	Valeurs de vitesse d'injection $v_{inj}$ et de débit massique surfacique $\dot{m}_s$ associées à chaque pression d'alimentation $P_{al}$ employée lors des tests. . . . .	206

## RÉSUMÉ

Cette étude est consacrée à l'analyse par simulations numériques instationnaires tridimensionnelles LES de la transition laminaire-turbulent dans un canal à injection pariétale représentatif de l'écoulement dans les chambres de moteurs à propergol solide.

Pour déclencher le phénomène de transition vers la turbulence avec la méthode LES, il a été nécessaire d'introduire des fluctuations dans l'écoulement. Cette étude se focalise sur la recherche d'une méthodologie de calcul permettant de générer des perturbations dans l'écoulement. Une première méthode, basée sur le comportement du schéma numérique du code de calcul CEDRE de l'ONERA, a été utilisée pour générer des fluctuations dans l'écoulement. Une deuxième méthode prenant en compte les données expérimentales relevées sur le montage en gaz froid VECLA de l'ONERA a ensuite été développée. Cette dernière utilise une modélisation stochastique dans le cadre de l'équation de Langevin. Après implantation de cette méthode de calcul stochastique dans le code CEDRE, une étude spécifique a été menée pour analyser le comportement du modèle en relation avec la problématique de l'écoulement transitionnel dans le canal avec injection pariétale. Les simulations numériques instationnaires LES de l'écoulement en transition dans le montage VECLA ont ensuite été réalisées avec le code de calcul CEDRE. Les résultats ont été confrontés aux données expérimentales ainsi qu'à une simulation stationnaire RANS de l'écoulement. Les résultats mettent en évidence l'intérêt de la modélisation stochastique de Langevin sur la description du champ fluctuant dans le canal avec injection pariétale.

**MOTS CLÉS :** *Compressibilité, régime transitoire (hydraulique), processus stochastiques, propergols solides, turbulence, simulation numérique instationnaire, simulation des grandes échelles.*

## ABSTRACT

This study focuses on the analysis of the laminar-turbulent transition of the flowfield in a channel with fluid injection through a porous wall. Such a configuration is representative of the flowfield inside solid rocket motors. The flowfield is obtained thanks to unsteady three-dimensional LES numerical computations.

In order to trigger the transition from a laminar state to a turbulent one using LES approach, it turns out to be necessary to introduce some perturbation in the flowfield. This study concentrates on searching a method to generate such perturbations. A first attempt has been made using the properties of the numerical scheme of the CEDRE CFD code of ONERA. A second approach that enables to take into account some experimental data has been developed. The experimental data is provided from the VECLA cold-gas setup of ONERA. This second method is based on the stochastic model from the Langevin equation. This equation has been implemented in the CEDRE code. A numerical study of the behaviour of such a model for the simulation of the transitional state of the flowfield obtained in channel with fluid injection through a porous wall has been done. The three-dimensional unsteady LES simulations of the flowfield in the VECLA setup have then been carried out using the CEDRE code. The results have been compared with the experimental data and with the results from a RANS computation. The benefit of using the stochastic equation of Langevin for the simulation of the turbulent quantities of such a flowfield has been pointed out.

**KEYWORDS :** *Compressibility, turbulent transition, stochastic process, solid propellant, turbulence, unsteady numerical simulation, large eddy simulation.*