



**HAL**  
open science

**Algorithmes génériques en temps constant pour la  
résolution de problèmes combinatoires dans la classe des  
rotagrapes et fasciagrapes. Application aux codes  
identifiants, dominants-localisateurs et  
dominants-total-localisateurs**

Marwane Bouznif

► **To cite this version:**

Marwane Bouznif. Algorithmes génériques en temps constant pour la résolution de problèmes combinatoires dans la classe des rotagrapes et fasciagrapes. Application aux codes identifiants, dominants-localisateurs et dominants-total-localisateurs. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT : 2012GRENM036 . tel-00744488

**HAL Id: tel-00744488**

**<https://theses.hal.science/tel-00744488>**

Submitted on 23 Oct 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE**

Spécialité : **Mathématiques et Informatique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Marwane BOUZNIF**

Thèse dirigée par **Myriam PREISSMANN**  
et codirigée par **Julien MONCEL**

préparée au sein du laboratoire **G-SCOP**  
et de l'école doctorale **MSTII**

**Algorithmes génériques en temps constant pour la résolution de problèmes combinatoires dans la classe des rotagraphe et fasciagraphe. Application aux codes identifiants, dominant-localisateurs et dominant-total-localisateurs.**

Thèse soutenue publiquement le **4 juillet 2012**,  
devant le jury composé de :

**Mr, Sylvain GRAVIER**

Directeur de recherches CNRS, Université Joseph Fourier, Président

**Mr, Ralf KLASING**

Directeur de recherches CNRS, Université Bordeaux 1, Rapporteur

**Mr, Antoine LOBSTEIN**

Chargé de recherches CNRS, TELECOM ParisTech, Rapporteur

**Mr, Paul DORBEC**

Maitre de conférence sur une chaire, Université Bordeaux 1, Examineur

**Mr, Sandi KLAVŽAR**

Université de Maribor, Examineur

**Mr, Nicolas TROTIGNON**

Chargé de recherches CNRS, ENS Lyon, Examineur

**Mme, Myriam PREISSMANN**

Directeur de recherche CNRS, Université Joseph Fourier, Directeur de thèse

**Mr, Julien MONCEL**

Maitre de conférence, Université Toulouse 1 - IUT Rodez, Co-Directeur de thèse



UNIVERSITÉ DE GRENOBLE  
LABORATOIRE G-SCOP

# THÈSE

présentée en vue d'obtenir le grade de Docteur, spécialité  
« Mathématiques et Informatique »

par

Marwane BOUZNIF

ALGORITHMES GÉNÉRIQUES EN TEMPS  
CONSTANT POUR LA RÉOLUTION DE  
PROBLÈMES COMBINATOIRES DANS LA  
CLASSE DES ROTAGRAPHES ET  
FASCIAGRAPHES. APPLICATION AUX  
CODES IDENTIFIANTS,  
DOMINANT-LOCALISATEURS ET  
DOMINANT-TOTAL-LOCALISATEURS

Thèse soutenue le 4 Juillet 2012 devant le jury composé de :

M.	RALF KLASING	CNRS	(Rapporteur)
M.	ANTOINE LOBSTEIN	CNRS	(Rapporteur)
M.	PAUL DORBEC	Université Bordeaux 1	(Examineur)
M.	SYLVAIN GRAVIER	CNRS	(Président, Examineur)
M.	SANDI KLAVŽAR	Université de Maribor	(Examineur)
M.	NICOLAS TROTIGNON	CNRS	(Examineur)
M <sup>me</sup>	MYRIAM PREISSMANN	CNRS	(Directeur)
M.	JULIEN MONCEL	Université Toulouse 1	(Co-Directeur)



*À Gauthier BOUNIOL, tes histoires nous manquent.*



# REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord exprimer mes plus profonds remerciements à mes deux directeurs de thèse, Julien MONCEL pour toujours réussir à pointer les défauts d'un raisonnement et poser les questions qui permettent d'affiner une réflexion et Myriam PREISSMANN pour ses nombreux conseils, sa disponibilité, ses nombreuses relectures et sa recherche constante d'améliorations, et surtout à tous deux pour m'avoir fait confiance dans cette aventure. J'ai beaucoup appris à leur contact et j'espère me montrer digne de leurs enseignements.

Je remercie les membres du jury : Sylvain GRAVIER qui m'a fait l'honneur de présider le jury, Ralf KLASING et Antoine LOBSTEIN qui ont accepté d'être rapporteurs de ce mémoire, merci pour leurs conseils et les corrections et améliorations qu'ils ont suggérées, Nicolas TROTIGNON, merci pour avoir proposé des améliorations importantes sur les  $q$ -propriétés et avoir bien voulu, ainsi que Paul DORBEC et Sandi KLAVŽAR, merci à eux deux aussi, examiner ma thèse.

Je remercie aussi tous les enseignants et chercheurs qui m'ont poussé à continuer dans cette voie de la recherche : Rodolphe GIROUDEAU avec qui j'ai effectué mon stage de Master II à Montpellier, merci pour ses encouragements et ses conseils, Gilles SIMONIN pour m'avoir montré la voie à suivre, Frédéric HAVET qui m'a fait découvrir la méthode du déchargement et avec qui j'ai eu plaisir à travailler, et Louis ESPERET et Pierre LEMAIRE pour leurs nombreux conseils tout au long de ces années de thèse.

Je souhaite aussi saluer l'ensemble des ingénieurs, stagiaires et doctorants du laboratoire G-SCOP, et notamment les membres de l'A-DOC, sans qui ces quelques années auraient paru bien plus mornes, par ordre alphabétique et de façon non exhaustive : William BASSET, Belgacem BETTAYEB, Jérémy BONVOISIN, Lucie DOMINGO, Maud DUFRENE, Iulia DUMITRU, Olivier DURAND DE GEVIGNEY, Damien EVRARD, Valérie FIEGENWALD, Michael GABAY, Bertrand HELLION, Anne-Laure LADIER, Cécile MAGNIER, Guillaume MASSONNET, Maxime OGIER, Grégory DE OLIVIERA, Hélène PERSONNIER, Laura PICHERAL, Alexandre SALCH, Benjamin VAYRE, Ariel WASERHOLE, et plus particulièrement Christophe Marie DUQUESNE et Samuel VERCRAENE pour leurs conseils techniques en programmation, et Julien DARLAY, Grégory MOREL, et Valentin WEBER, qui m'ont apporté leur soutien et connaissances sur de nombreux sujets. Enfin je remercie mes

deux co-bureaux, Bertrand BAUD-LAVIGNE et Onur OZTURK, j'espère ne pas les avoir trop agacés avec mes éclats de rire tonitruants et mes chantonnements incessants.

Je remercie aussi l'observatoire Zététique et plus particulièrement Géraldine FABRE et Richard MONVOISIN pour m'avoir fait découvrir, à travers les formations CIES, l'art du doute et l'étude critique des phénomènes dits paranormaux.

Je remercie l'ensemble des enseignants qui m'ont accompagné lors de mes années de monitorat et d'ATER, notamment Laurent BONNAUD, Annie CULLET, Nathalie DENOS, Jérôme GOULIAN, Yann LAURILLOT et Dominique VAUFREYDAZ.

Enfin, je remercie mes parents pour m'avoir soutenu durant toutes mes études, mes amis de Clermont Jib's, Clepto, Micha, Pierre, Vinny et Nat, Adrien et Chacha (merci pour ces longues discussions sur la condition de doctorant), Axel, et les autres, ceux de Montpellier, du TAUST, Sam, Julien, Marie, Céline, Laeti, Nico, et surtout d'ANALISTIK Zaz, Ju XP, Ti'piaf, Francesco de la vega, ceux de Grenoble dits les "coupains" Matoche, Chloé, Aurélien, Vio, Claire, Estelle, et surtout ma sœur Nourhane pour ses rires et ses encouragements et Simon qui sera toujours un frère pour moi. Pour finir, je remercie ma fiancée Alexandra sans qui tout serait à la fois bien plus difficile et bien moins intéressant. A tous ceux là, pour le bonheur qu'ils m'offrent au quotidien, merci.

Grenoble, le 3 octobre 2012.



# TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vii
INTRODUCTION	1
0.1 PRÉLIMINAIRES . . . . .	1
0.2 PRÉSENTATION DU DOCUMENT . . . . .	1
0.3 NOTIONS DE BASE . . . . .	2
0.4 NOTIONS D'ALGÈBRE ABSTRAITE . . . . .	4
0.4.1 Structures algébriques simples . . . . .	4
0.4.2 Semi-anneaux et dioïdes . . . . .	5
0.4.3 Opérations dans les dioïdes . . . . .	6
<b>I Fasciagraphes et rotagraphes, modèles théoriques</b>	<b>9</b>
1 INTRODUCTION SUR LES FASCIAGRAPHERS ET LES ROTAGRAPHERS	11
1.1 CONTEXTE . . . . .	11
1.2 DÉFINITIONS ET NOTATIONS . . . . .	12
1.3 MOTIVATIONS . . . . .	14
2 NOTION DE $(d, q, w)$ -PROPRIÉTÉS	17
2.1 LES $q$ -ÉTIQUETAGES . . . . .	17
2.2 LES $q$ -PROPRIÉTÉS . . . . .	17
2.3 SUR LES ROTAGRAPHERS . . . . .	20
2.3.1 Pseudo- $d$ -localité . . . . .	20
2.3.2 Fonctions $d$ -modulaires . . . . .	20
2.3.3 Graphe auxiliaire associé . . . . .	21
2.3.4 Circuits et $q$ -étiquetages de rotagraphes . . . . .	22
2.4 SUR LES FASCIAGRAPHERS . . . . .	23
2.4.1 Pseudo- $d$ -localité . . . . .	23
2.4.2 Fonctions $d$ -modulaires . . . . .	24
2.4.3 Graphe auxiliaire associé . . . . .	25
2.4.4 Chemins et $q$ -étiquetages de fasciagraphes . . . . .	27
3 ALGORITHMES DE RÉOLUTION POUR LES $(d, q, w)$ -PROPRIÉTÉS	29
3.1 RÉOLUTION EN TEMPS POLYNOMIAL . . . . .	29
3.2 CAS PARTICULIERS ET RÉOLUTION EN TEMPS CONSTANT . . . . .	32
3.2.1 Cas clos . . . . .	32
$(d, q, w)$ - $r$ -propriétés closes . . . . .	33

	$(d, q, w)$ - $f$ -propriété closes . . . . .	34
3.2.2	Cas stable . . . . .	35
	$(d, q, w)$ - $r$ -propriétés stables . . . . .	40
	$(d, q, w)$ - $f$ -propriétés stables . . . . .	41
3.3	UNE SECONDE VERSION DE L'ALGORITHME CONSTRUCTION $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$ . . . . .	42
4	ÉTAT DE L'ART . . . . .	45
4.1	PETIT HISTORIQUE DES FASCIAGRAPHE ET DES ROTAGRAPHE . . . . .	45
4.2	UNE PREMIÈRE CARACTÉRISATION DES PROBLÈMES LOCAUX . . . . .	52
5	CONCLUSION DE LA 1ÈRE PARTIE . . . . .	55
<b>II</b>	<b>Les codes identifiants</b> . . . . .	<b>57</b>
6	INTRODUCTION . . . . .	59
6.1	DÉFINITION . . . . .	59
6.2	PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES . . . . .	61
7	CODE IDENTIFIANT : UNE $(5, 2, w)$ -PROPRIÉTÉ . . . . .	63
7.1	CAS GÉNÉRAL . . . . .	63
7.2	CAS DES BANDES CIRCULAIRES ET INFINIES . . . . .	69
7.2.1	Définitions . . . . .	69
7.2.2	Codes identifiants, LDsets, LTDsets et bandes . . . . .	72
	Bornes connues sur les bandes infinies . . . . .	73
	Spécificités du code informatique et de son exécution . . . . .	77
	Bande circulaire de hauteur 1 . . . . .	80
	Bandes circulaires de hauteur 2 . . . . .	81
	Bandes circulaires de hauteur 3 . . . . .	82
	Bandes circulaires de hauteur 4 . . . . .	85
	Densités minimum exactes dans les bandes infinies . . . . .	86
7.2.3	Motifs, périodicité et preuves pour certains codes . . . . .	88
	Bande infinie de hauteur 2, un code de densité $\frac{3}{7}$ . . . . .	89
8	CAS DES GRAPHES FRACTALS . . . . .	95
8.1	DÉFINITION . . . . .	95
8.2	RÉSULTATS CONNUS . . . . .	96
8.3	CAS DES GRAPHES FRACTALS DE CYCLES . . . . .	97
8.3.1	Propriétés et bornes générales . . . . .	97
8.3.2	Cas des graphes fractals de $\mathcal{C}_3$ . . . . .	100
8.3.3	Cas des graphes fractals de $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_5$ . . . . .	100
8.3.4	Cas des graphes fractals de $\mathcal{C}_{2n}$ avec $n \geq 3$ . . . . .	102
8.3.5	Cas des graphes fractals de $\mathcal{C}_{2n+1}$ avec $n \geq 3$ . . . . .	105
9	CONCLUSION . . . . .	111
A	ANNEXE . . . . .	113
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	121





# INTRODUCTION

## 0.1 PRÉLIMINAIRES

Cette thèse concrétise mes quatre années de doctorat passées au laboratoire G-SCOP de octobre 2008 à juin 2012. A l'origine de cette thèse se trouve Julien MONCEL, co-directeur de thèse, qui durant son propre doctorat, a été amené à croiser le chemin de classes de graphes à structure répétitive : les fasciagraphes et les rotagraphes. Après avoir présenté certains résultats concernant la notion de code identifiant, dont nous reparlerons par la suite, dans cette classe de graphes, il a pu observer que plusieurs articles scientifiques présentaient une méthode relativement similaire, s'appuyant sur la propriété de structure répétitive de ces graphes, pour traiter différents problèmes sur cette classe. Malgré cela, il n'était pas présenté de caractérisation des problèmes pouvant tirer parti de cette méthode. C'est donc dans cette optique de, non seulement présenter une méthode générique permettant de résoudre efficacement un certain type de problèmes sur les fasciagraphes et les rotagraphes, mais aussi de permettre d'identifier quels sont ces problèmes, que la thèse a été lancée sous la direction conjointe de Julien MONCEL et Myriam PREISSMANN.

## 0.2 PRÉSENTATION DU DOCUMENT

Nous expliquons ici l'organisation de la thèse, chapitre par chapitre. La suite de cette introduction, tout d'abord, est dédiée aux rappels des notions et définitions de théorie des graphes et d'algèbre dont nous aurons besoin tout au long du manuscrit. La suite de la thèse est séparée en deux parties.

La première partie a pour but de présenter une notion de localité des problèmes combinatoires quand ils sont traités dans une certaine classe de graphes formée par les fasciagraphes et les rotagraphes. Les fasciagraphes et les rotagraphes, que nous présentons dans le Chapitre 1 sont des graphes à structure répétitive. Dans ce même chapitre, nous présentons le contexte de l'étude et ses motivations.

Dans le Chapitre 2, nous caractérisons une classe de propriétés de graphes, les  $(d, q, w)$ -propriétés. Ces propriétés sont celles qui, partageant une notion de localité, vont pouvoir être traitées efficacement sur les fasciagraphes et les rotagraphes grâce à la structure répétitive de ces derniers.

Dans cette optique, nous présentons, dans le Chapitre 3, un algorithme de résolution de ces problèmes sur les fasciagraphes et les rotagraphes. Nous caractérisons deux types de  $(d, q, w)$ -propriétés, les  $(d, q, w)$ -propriétés closes et les  $(d, q, w)$ -propriétés stables, pour lesquelles notre algorithme est exécutable, à structure de fasciagraphe ou de rotagraphe fixée, en temps constant.

Dans le Chapitre 4, nous présentons les résultats de la littérature précédemment connus sur le sujet.

Le Chapitre 5 constitue une conclusion de cette première partie, dans laquelle nous résumons nos résultats et donnons plusieurs pistes de recherche possible pour poursuivre ces travaux.

Alors que dans la première partie nous nous intéressions à proposer des résultats génériques quelle que soit la  $(d, q, w)$ -propriété concernée, la seconde partie traite de trois problèmes plus spécifiques : le problème du code identifiant minimum, et deux problèmes proches, le code dominant-localisateur minimum et le code dominant-total-localisateur minimum. Ces trois propriétés de graphes sont présentées dans le Chapitre 6.

Nous prouvons, dans le Chapitre 7, que ces trois propriétés sont des  $(d, q, w)$ -propriétés stables, puis nous expliquons comment nous avons programmé l'algorithme présenté dans la première partie pour répondre à des questions ouvertes dans certains rotagraphes particuliers : les bandes circulaires de hauteur bornée. Nous en déduisons d'autres résultats sur les bandes infinies de hauteur bornée.

Dans le chapitre 8 nous traitons uniquement le problème du code identifiant minimum dans un autre type de graphes à structure répétitive, que nous présentons, les graphes fractals de cycle.

La conclusion de cette seconde partie, et de la thèse, réside dans le Chapitre 9.

En annexe du document nous donnons certains théorèmes prouvant que plusieurs problèmes combinatoires classiques sont caractérisés par des  $(d, q, w)$ -propriétés closes ou stables.

### 0.3 NOTIONS DE BASE

Dans cette section, nous donnons les notions de base de la théorie des graphes que nous utiliserons tout au long de la thèse.

**Définition 1** *Un **graphe mixte**  $M$  est un triplet  $(V, E, A)$  pour lequel  $V$  est un ensemble de **sommets**,  $E$  est un ensemble de sous-ensembles à deux éléments de  $V$  appelés **arêtes** et  $A$  est un ensemble de couples d'éléments de  $V$  appelés **arcs**. On note une arête*

$\{u, v\}$  par  $uv$  ou  $vu$ . Un graphe mixte peut être représenté par un dessin tel que les sommets sont représentés par des points, une arête entre deux sommets  $u$  et  $v$  est représentée par un segment entre les points représentant  $u$  et  $v$ , et un arc de  $u$  à  $v$  est représenté par une flèche du point représentant  $u$  à celui représentant  $v$  (voir Figure 1).

Etant donné un graphe mixte  $M$ , l'ensemble de sommets, arêtes et arcs de  $M$  sont notés, respectivement,  $V(M)$ ,  $E(M)$  et  $A(M)$ .

Dans la suite de la thèse, les graphes mixtes que nous considérons sont tels qu'ils ne comprennent ni arêtes ni arcs doubles. Autrement dit, entre deux sommets  $u$  et  $v$  il ne peut pas y avoir deux arêtes  $uv$  différentes, ou deux arcs  $(u, v)$  ou  $(v, u)$  différents. Les boucles, orientées  $(u, u)$  ou non  $uu$ , sont autorisées, et entre deux sommets  $u$  et  $v$  différents, il peut y avoir à la fois l'arête  $uv$  et les arcs  $(u, v)$  et  $(v, u)$ .

**Définition 2** Un **graphe orienté** est un graphe mixte  $G = (V, E, A)$  pour lequel  $E = \emptyset$ . On note ce graphe  $\vec{G} = (V, A)$ .

**Définition 3** Un **graphe non orienté** est un graphe mixte  $G = (V, E, A)$  pour lequel  $A = \emptyset$ . On note ce graphe  $G = (V, E)$ .

Dans la suite de la thèse, le mot "graphe" fera référence à un graphe non orienté, sauf si nous le spécifions.

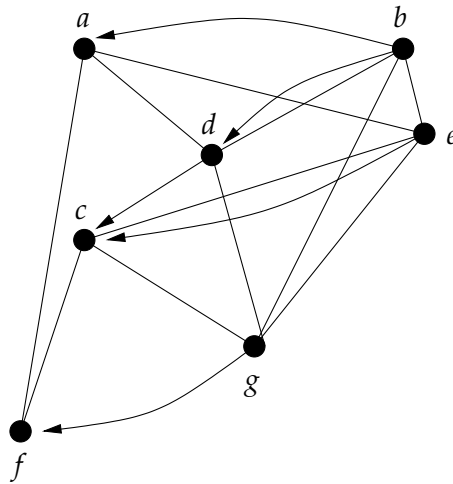


FIGURE 1 – Exemple d'un graphe mixte  $M$

**Définition 4** Un **chemin de cardinalité  $k$** , aussi noté  **$k$ -chemin**, d'un graphe orienté  $\vec{G} = (V, A)$  est une séquence de sommets  $v_1, \dots, v_{k+1}$ , non nécessairement distincts, telle que  $(v_i, v_{i+1}) \in A$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

**Définition 5** Un **circuit de cardinalité  $k$** , aussi noté  **$k$ -circuit**, d'un graphe orienté  $\vec{G} = (V, A)$  est une séquence de sommets  $v_1, \dots, v_k, v_1$ , non nécessairement distincts, telle que  $(v_i, v_{i+1}) \in A$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  et  $(v_k, v_1) \in A$ .

**Définition 6** Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  et un sommet  $u \in V$ , le **voisinage de  $u$**  noté  $N(u)$  est l'ensemble de sommets  $v \in V$  tels que  $uv \in E$ .

$N(u)$

**Définition 7** Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  et un sommet  $u \in V$ , le **voisinage fermé de  $u$**  noté  $N[u]$  est l'ensemble  $N(u) \cup \{u\}$ .

**Définition 8** Etant donné un graphe  $G = (V, E)$ , une chaîne élémentaire **de longueur  $k - 1$**  dans  $G$  est une suite de sommets distincts  $v_1, v_2, \dots, v_k$  telle que  $v_i v_{i+1}$  est une arête pour  $i$  dans  $\{1, \dots, k - 1\}$ .

**Définition 9** Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  et deux sommets  $u, v \in V$ ,  $u$  et  $v$  sont à **distance  $k$**  dans  $G$  si  $k$  est l'entier minimum tel qu'il existe une chaîne de longueur  $k$  entre  $u$  et  $v$ .

**Définition 10** Etant donné un graphe  $G = (V, E)$ , un sommet  $u \in V$  et un entier  $k \geq 0$ , la **boule de rayon  $k$  centrée en  $u$** , notée  $\mathcal{B}_k(u)$ , est l'ensemble de sommets  $v \in V$  tels que  $u$  et  $v$  sont à distance au plus  $k$ . A ce titre,  $\mathcal{B}_1(u) = N[u]$ .

**Définition 11** Etant donné deux ensembles de sommets  $B, C \subseteq V$ , la **différence symétrique** de  $B$  et  $C$ , notée  $\mathbf{B}\Delta\mathbf{C}$  est l'ensemble

$$\{u \in B \mid u \notin C\} \cup \{u \in C \mid u \notin B\}.$$

## 0.4 NOTIONS D'ALGÈBRE ABSTRAITE

### 0.4.1 Structures algébriques simples

En mathématiques, une **structure algébrique** est représentée par un ensemble combiné à au moins une loi de composition et qui satisfait un certain nombre d'axiomes. Nous allons donner dans cette section, plusieurs définitions nécessaires à la présentation, dans la section suivante, d'une structure algébrique particulière : les semi-anneaux, et plus particulièrement les dioïdes. La majorité de ces notions sont bien connues, mais dans un souci de clarté, nous préférons les rappeler ci-dessous. Ces rappels sont tirés de [GMo8].

**Définition 12** Une **application** est une relation entre deux ensembles  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  pour laquelle chaque élément de  $\mathbb{A}$  (appelé ensemble de départ ou source) est associé à un unique élément de  $\mathbb{B}$ .

**Définition 13** Etant donné un ensemble  $\mathbb{E}$ , une **loi de composition interne**  $\oplus$  sur  $\mathbb{E}$  est une application de  $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$  dans  $\mathbb{E}$ . En d'autres termes, pour tout  $a, b$  dans  $\mathbb{E}$ ,  $a \oplus b$  est dans  $\mathbb{E}$ .

**Définition 14** Etant donné un ensemble  $\mathbb{E}$  et une loi de composition interne  $\oplus$  sur  $\mathbb{E}$ ,  $\oplus$  est dite **associative** si pour tout  $a, b, c$  dans  $\mathbb{E}$ ,  $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ .

**Définition 15** Etant donné un ensemble  $\mathbb{E}$  et une loi de composition interne  $\oplus$  sur  $\mathbb{E}$ , on dit que  $\mathbb{E}$  possède un **élément neutre** pour  $\oplus$  s'il existe  $\varepsilon$  dans  $\mathbb{E}$  tel que pour tout  $a$  dans  $\mathbb{E}$ ,  $a \oplus \varepsilon = a = \varepsilon \oplus a$ .

**Définition 16** Etant donné un ensemble  $\mathbb{E}$  et une loi de composition interne  $\oplus$  sur  $\mathbb{E}$ ,  $\oplus$  est dite **commutative** si pour tout  $a, b$  dans  $\mathbb{E}$ ,  $a \oplus b = b \oplus a$ .



**Définition 17** Etant donné un ensemble  $\mathbb{E}$  et une loi de composition interne  $\oplus$  sur  $\mathbb{E}$ ,  $\oplus$  est dite **sélective** si pour tout  $a, b$  dans  $\mathbb{E}$ ,  $a \oplus b \in \{a, b\}$ .

**Exemple :** Etant donné un ensemble  $\mathbb{E}$  muni d'un ordre total  $\leq$ , la loi min usuelle sur cet ordre constitue une loi sélective.

**Définition 18** Un ensemble  $\mathbb{E}$  muni d'une loi de composition interne associative  $\oplus$  est appelé un **semi-groupe**. On le note  $(\mathbb{E}, \oplus)$ .

**Définition 19** Un **monoïde** est un semi-groupe  $(\mathbb{E}, \oplus)$  possédant un élément neutre  $\varepsilon$ . On le note  $(\mathbb{E}, \oplus, \varepsilon)$ .

**Exemple :** Voici quelques exemples de monoïdes :  $(\mathbb{R}, +, 0)$ ,  $(\mathbb{R}, \times, 1)$ ,  $(\mathbb{N}, +, 0)$ .

**Définition 20** Un **monoïde commutatif** est un monoïde  $(\mathbb{E}, \oplus, \varepsilon)$  pour lequel  $\oplus$  est commutative.

**Définition 21** Etant donné un monoïde  $(\mathbb{E}, \oplus, \varepsilon)$ , si pour tout  $a$  dans  $\mathbb{E}$ , il existe  $a'$  tel que  $a \oplus a' = a' \oplus a = \varepsilon$ , alors  $a'$  est dit être l'**inverse** de  $a$ , et  $(\mathbb{E}, \oplus, \varepsilon)$  est appelé **groupe**. L'inverse de  $a$  sera noté  $(-a)$ .

**Définition 22** Un groupe  $(\mathbb{E}, \oplus, \varepsilon)$  qui est aussi un monoïde commutatif, i.e.  $\oplus$  est commutative, est appelé **groupe abélien**.

### 0.4.2 Semi-anneaux et dioïdes

Les (pré)-semi-anneaux sont des structures algébriques dont l'ensemble  $\mathbb{E}$  de base, à la différence des monoïdes, est muni de non pas une, mais deux lois de composition internes  $\oplus$  et  $\otimes$ . Plus formellement :

**Définition 23** Un **pré-semi-anneau** est une structure algébrique  $(\mathbb{E}, \oplus, \otimes)$  vérifiant les axiomes suivants :

1.  $(\mathbb{E}, \oplus)$  est un semi-groupe commutatif,
2.  $(\mathbb{E}, \otimes)$  est un semi-groupe,
3.  $\otimes$  est **distributive** relativement à  $\oplus$ , i.e., pour tout  $a, b, c$  dans  $\mathbb{E}$ ,  $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$  et  $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ .

**Définition 24** Un **semi-anneau** est une structure algébrique  $(\mathbb{E}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$  vérifiant les axiomes suivants :

1.  $(\mathbb{E}, \oplus, \varepsilon)$  est un monoïde commutatif,
2.  $(\mathbb{E}, \otimes, e)$  est un monoïde,
3.  $\varepsilon$  est **absorbant** pour  $\otimes$ , i.e., pour tout  $a$  dans  $\mathbb{E}$ ,  $a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$ .
4.  $\otimes$  est **distributive** relativement à  $\oplus$ , i.e., pour tout  $a, b, c$  dans  $\mathbb{E}$ ,  $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$  et  $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ .

**Définition 25** Un **semi-anneau commutatif** est un semi-anneau  $(\mathbb{E}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$  pour lequel  $(\mathbb{E}, \otimes, e)$  est un monoïde commutatif.

**Définition 26** Etant donné un semi-anneau  $\mathcal{E} = (\mathbb{E}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$ , on définit la relation de pré-ordre induite par la loi  $\oplus$ , et notée  $\leq_{\oplus}$ , par :  $a \leq_{\oplus} b$  si et seulement s'il existe  $c$  dans  $\mathbb{E}$  tel que  $a \oplus c = b$ , et ce pour tout  $a, b$  dans  $\mathbb{E}$ .

**Définition 27** Un **dioïde**  $(\mathbb{E}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$  est un semi-anneau vérifiant l'axiome supplémentaire suivant :

1. le préordre  $\leq_{\oplus}$  est une relation d'ordre, c'est à dire vérifie

$$a \leq_{\oplus} b \text{ et } b \leq_{\oplus} a \Rightarrow a = b.$$

**Définition 28** On nomme **dioïde sélectif** un dioïde dans lequel la loi  $\oplus$  est commutative et sélective.

**Propriété 1** Si  $\mathbb{E}$  est muni d'un ordre total  $\leq$  et  $(\mathbb{E}, \min, \otimes, \varepsilon, e)$  est un semi-anneau, alors  $(\mathbb{E}, \min, \otimes, \varepsilon, e)$  est un dioïde.

*Preuve.* Nous savons que le préordre  $\leq_{\min}$  induit par la loi  $\min$  est défini de la façon suivante : pour tout  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{E}$ ,  $a \leq_{\min} b$  si et seulement s'il existe  $c$  dans  $\mathbb{E}$  tel que  $\min(a, c) = b$ . Supposons que la Propriété soit fautive, alors, comme  $(\mathbb{E}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$  est un semi-anneau,  $\leq_{\min}$  n'est pas un ordre. Autrement dit il existe dans ce cas  $a \neq b$  dans  $\mathbb{E}$  tel que  $a \leq_{\min} b$  et  $b \leq_{\min} a$ . Comme  $a \leq_{\min} b$ , il existe  $c_1$  dans  $\mathbb{E}$  tel que  $\min(a, c_1) = b$ . Dans ce cas, comme la loi  $\min$  est sélective, on a  $b = a$  ou  $b = c_1$ . De plus comme  $b \leq_{\min} a$ , il existe  $c_2$  dans  $\mathbb{E}$  tel que  $\min(b, c_2) = a$ , et de la même façon,  $a = b$  ou  $a = c_2$ . Comme, par hypothèse  $b \neq a$ , alors  $b = c_1$  et  $a = c_2$ . Donc, dans l'ordre usuel  $\leq$  sur  $\mathbb{E}$ , comme  $\min(a, c_1) = c_1$  et  $\min(b, c_2) = c_2$ , on a  $c_1 \leq a$  et  $c_2 \leq b$ , et donc  $b \leq a$  et  $a \leq b$ . Comme  $\leq$  est un ordre sur  $\mathbb{E}$ ,  $a = b$  ce qui présente une contradiction. Le préordre  $\leq_{\min}$  sur  $\mathbb{E}$  est donc bien un ordre sur  $\mathbb{E}$ , en particulier il s'agit de l'ordre inverse à  $\leq$ .  $\square$

**Remarque 1** L'équivalent de la Propriété 1 lorsque  $(\mathbb{E}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$  est un semi-anneau, tel que  $\mathbb{E}$  est muni d'un ordre total  $\leq$  et  $\oplus$  est l'opération  $\max$  usuelle sur cet ordre  $\leq$ , se prouve de la même manière.

**Exemple :** Voici quelques exemples de dioïdes :  $(\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$ ,  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +, +\infty, 0)$ . Dans la littérature, les dioïdes  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +, +\infty, 0)$  et  $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0)$  sont régulièrement appelés algèbres tropicales, semi-anneaux tropicaux, path-algebra, ou encore algèbre Min-Plus ou Max-Plus (voir par exemple [Sim94, Kv96]).

### 0.4.3 Opérations dans les dioïdes

**Définition 29** Etant donné un dioïde  $\mathcal{E} = (\mathbb{E}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$ , pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{M}_n(\mathcal{E})$  est l'ensemble des matrices  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{E}$ .

Etant donné un dioïde  $\mathcal{E} = (\mathbb{E}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$  et deux matrices  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{M}_n(\mathcal{E})$ ,

- la somme, notée  $A \oplus B$ , est la matrice  $C$  telle que, pour tout  $i, j$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,

$$C_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

- le produit, noté  $A \otimes B$ , est la matrice  $C$  telle que, pour tout  $i, j$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj} \text{ (somme au sens de } \oplus \text{)}$$

Ainsi dans un dioïde  $\mathcal{E} = (\mathbb{E}, \min, \otimes, \varepsilon, e)$ , étant donné une matrice  $A$  dans  $\mathbb{M}_n(\mathcal{E})$ , pour tout entier  $p \geq 2$ , le calcul de  $A^p$ , en considérant que  $A^1 = A$ , est défini de la façon suivante, pour tout  $i, j$  dans  $\{1, \dots, n\}$  :

$$(A^p)_{ij} = \min_{k=1}^n (A_{ik} \otimes (A^{p-1})_{kj}).$$

Étant donné une matrice  $A$  dans  $\mathbb{M}_n(\mathcal{E})$  et un élément  $c$  de  $\mathbb{E}$ , le produit de  $A$  et  $c$  dans le dioïde  $\mathcal{E} = (\mathbb{E}, \min, \otimes, \varepsilon, e)$ , est défini de la façon suivante, pour tout  $i, j$  dans  $\{1, \dots, n\}$  :

$$[A \otimes c]_{ij} = A_{ij} \otimes c$$

Notons que  $(A \otimes c) \otimes d = A \otimes (c \otimes d)$  pour tout  $c, d$  dans  $\mathbb{E}$ .

**Propriété 2** Pour deux matrices  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{M}_n(\mathcal{E})$ , et  $c$  dans  $\mathbb{E}$ , par la distributivité de  $\otimes$  sur  $\min$ , nous avons  $(A \otimes B) \otimes c = A \otimes (B \otimes c)$ .

**Définition 30** Étant donné un graphe orienté  $\vec{G} = (V, A)$  et une fonction  $l$  des arcs de  $\vec{G}$  dans un dioïde  $\mathcal{E} = (\mathbb{E} \cup \varepsilon, \min, \otimes, \varepsilon, e)$  où  $\mathbb{E}$  est muni d'un ordre total  $\leq$ , pour tout entier  $k \geq 1$ , nous définissons la **longueur**  $l$  d'un  $k$ -chemin  $c = u_1, u_2, \dots, u_{k+1}$  dans  $G$  comme étant  $l(c) = l(u_1 u_2) \otimes l(u_2 u_3) \otimes \dots \otimes l(u_k u_{k+1})$ .

**Définition 31** Étant donné un graphe orienté  $\vec{G} = (V, A)$  et une fonction  $l$  des arcs de  $\vec{G}$  dans un ensemble  $\mathbb{E}$  muni d'un ordre total  $\leq$ , nous définissons la matrice des longueurs de  $\vec{G}$ , notée  $\Pi_{\vec{G}}$  (ou  $\Pi$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) dans  $\mathbb{M}_n(\mathcal{E})$ , avec  $\mathcal{E} = (\mathbb{E} \cup \varepsilon, \min, \otimes, \varepsilon, e)$ , de la façon suivante :

$$\text{pour } i, j \in \{1, \dots, n\}, \Pi_{ij} = \begin{cases} l((u_i, u_j)) & \text{si } (u_i, u_j) \in A \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

**Théorème 1** (4.2 dans [GMo8]) Soit  $\Pi_{\vec{G}}$  la matrice des longueurs d'un graphe  $\vec{G}$  à  $n$  sommets  $u_1, \dots, u_n$ , dont les longueurs  $l$  sur les arcs sont dans un ensemble  $\mathbb{E}$  muni d'un ordre total  $\leq$ . Si  $(\mathbb{E}, \otimes, e)$  est un monoïde et  $\mathcal{E} = (\mathbb{E} \cup \{\varepsilon\}, \min, \otimes, \varepsilon, e)$  est un dioïde tel que pour tout  $a \in \mathbb{E}$ ,  $a \leq \varepsilon$ , alors pour tout entier  $k \geq 1$  et tout  $i, j$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , nous avons :

$$(\Pi^k)_{ij} = \begin{cases} \text{la longueur minimum d'un } k\text{-chemin de } u_i \text{ à } u_j \text{ dans } \vec{G}, & \text{s'il en existe un} \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous présentons ici une preuve similaire à celle disponible dans [GMo8].

**Preuve.** Nous allons montrer la propriété par récurrence sur  $k$ . Lorsque  $k = 1$ , par définition de la matrice des longueurs  $\Pi$ ,  $(\Pi^1)_{ij}$  est clairement la longueur minimum d'un 1-chemin, donc d'un arc, de  $u_i$  à  $u_j$  s'il existe, ou  $\varepsilon$  sinon. Posons comme hypothèse de récurrence que la propriété est vérifiée

jusqu'à un certain entier  $k$ . Alors  $(\Pi^k)_{ij}$  est bien la longueur minimum d'un  $k$ -chemin de  $u_i$  à  $u_j$  s'il en existe un,  $\varepsilon$  sinon. Montrons qu'elle reste vraie pour  $k + 1$ . Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors,

- il existe un  $k + 1$ -chemin de  $u_i$  à  $u_j$  et pourtant  $(\Pi^{k+1})_{ij} = \varepsilon$ ,
- ou il n'existe pas de  $k + 1$ -chemin de  $u_i$  à  $u_j$  et pourtant  $(\Pi^{k+1})_{ij} \neq \varepsilon$ ,
- ou enfin il existe un  $k + 1$ -chemin de  $u_i$  à  $u_j$  de longueur strictement plus petite que  $(\Pi^{k+1})_{ij}$ .

On sait que  $(\Pi^{k+1})_{ij} = \min_{r=1}^n (\Pi_{ir} \otimes (\Pi^k)_{rj})$ . Supposons que  $(\Pi^{k+1})_{ij} = \varepsilon$ . Alors clairement, puisque  $\varepsilon$  est neutre pour  $\min$ , pour tout  $r$ ,  $\Pi_{ir} \otimes (\Pi^k)_{rj} = \varepsilon$ . Comme  $(\mathbb{E}, \otimes, e)$  est un monoïde,  $\otimes$  est une opération de composition interne à  $\mathbb{E}$ . Ainsi, parmi  $\Pi_{ir}$  et  $(\Pi^k)_{rj}$ , au moins l'un des deux est égal à  $\varepsilon$ . Or  $\Pi_{ir}$  est égal à la longueur de l'arc  $u_i u_r$  et  $(\Pi^k)_{rj}$ , par hypothèse de récurrence est égal à la longueur minimum d'un  $k$ -chemin de  $u_r$  à  $u_j$  s'il en existe,  $\varepsilon$  sinon. Donc comme l'un des deux, au moins est égal à  $\varepsilon$ , s'il existe un arc de  $u_i$  à  $u_r$ , il n'existe pas de  $k$ -chemin de  $u_r$  à  $u_j$ , et si, inversement, il existe un  $k$ -chemin de  $u_r$  à  $u_j$ , il n'existe pas d'arc de  $u_i$  à  $u_r$ . Clairement, nous pouvons en conclure que  $(\Pi^{k+1})_{ij} = \varepsilon$  seulement s'il n'existe pas de  $k + 1$ -chemin de  $u_i$  à  $u_j$  dans  $\vec{G}$ .

S'il n'existe pas de  $k + 1$ -chemin de  $u_i$  à  $u_j$  dans  $\vec{G}$ , dans ce cas si  $(\Pi^k)_{rj} \neq \varepsilon$ , par hypothèse de récurrence, il existe un  $k$ -chemin de  $u_r$  à  $u_j$  et donc il n'existe pas d'arc de  $u_i$  à  $u_r$ . On a donc  $\Pi_{ir} = \varepsilon$ . Dans le cas contraire,  $(\Pi^k)_{rj} = \varepsilon$ . Donc, dans tous les cas,  $\Pi_{ir} \otimes (\Pi^k)_{rj} = \varepsilon$  pour tout sommet  $u_r$ .

Supposons donc que  $(\Pi^{k+1})_{ij} \neq \varepsilon$  et qu'il existe un  $k + 1$ -chemin de  $u_i$  à  $u_j$  de longueur strictement plus petite que  $(\Pi^{k+1})_{ij}$ . Notons  $c$  ce chemin et  $u_i u_l$  le premier arc de  $c$ . Alors  $c$  est de la forme  $c = u_i, u_l, \dots, u_j$  et  $u_l, \dots, u_j$  est un  $k$ -chemin de  $\vec{G}$ . On sait de plus que la longueur d'un  $k$  chemin est égale à la somme  $\otimes$  des longueurs de ces arcs, autrement dit le poids  $w$  de  $c$  est  $w(c) = w(u_i u_l) \otimes w(u_l, \dots, u_j)$ . Par hypothèse de récurrence,  $(\Pi^k)_{lj} \leq w(u_l, \dots, u_j)$  et  $\Pi_{il} = w(u_i u_l)$ , donc  $\Pi_{il} \otimes (\Pi^k)_{lj} \leq w(c)$ . Comme  $(\Pi^{k+1})_{ij} = \min_{r=1}^n (\Pi_{ir} \otimes (\Pi^k)_{rj})$ , il existe un sommet  $u_r \neq u_l$  tel que  $\Pi_{ir} \otimes (\Pi^k)_{rj} \leq \Pi_{il} \otimes (\Pi^k)_{lj}$  ce qui présente une contradiction puisque  $w(c) < (\Pi^{k+1})_{ij} \leq \Pi_{il} \otimes (\Pi^k)_{lj} \leq w(c)$ , démontrant ainsi le théorème.  $\square$

**Remarque 2** En conséquence du théorème précédent, étant donné la matrice des longueurs  $\Pi_{\vec{G}} \in \mathbb{M}_n(\mathcal{E})$  d'un graphe  $\vec{G}$  à  $n$  sommets  $u_1, \dots, u_n$ , et dont les poids sur les arcs sont dans un dioïde  $\mathcal{E} = (\mathbb{E}, \min, \otimes, \varepsilon, e)$ , il existe un  $k$ -circuit dans  $\vec{G}$  si et seulement s'il existe un coefficient dans la diagonale de  $(\Pi_{\vec{G}})^k$  qui n'est pas égal à  $\varepsilon$ . Dans ce cas la longueur minimum d'un  $k$ -circuit dans  $\vec{G}$  est égale au coefficient minimum dans la diagonale de  $(\Pi_{\vec{G}})^k$ .

**Première partie**

**Fasciagraphes et rotagraphes,  
modèles théoriques**



# INTRODUCTION SUR LES FASCIAGRAPHERS ET LES ROTAGRAPHES

## 1.1 CONTEXTE

Depuis la seconde moitié du 18<sup>ème</sup> siècle, les chimistes modélisent les assemblages d'atomes que forment les molécules par des graphes (voir Section 1.2 dans [BR93]). Dès lors mathématiciens et chimistes n'ont cessé de faire se rapprocher l'étude des molécules et ce qui allait devenir la théorie des graphes. Dans les années 1970, la "chemical graph theory" prend son essor ([BR93]). Au sein de cette période, les fasciagraphes et les rotagraphes ont été introduits dans [PT77] pour traiter de problèmes liés à la chimie des polymères. Les polymères sont des macromolécules constituées d'une répétition de molécules plus petites appelées, pour l'occasion, monomères. Afin de les modéliser par des graphes, les auteurs ont défini un polygraphe comme étant un graphe non orienté constitué de la succession d'un certain nombre de petits graphes appelés monographe. Chaque monographe est relié à celui qui le précède et à celui qui le suit selon un schéma dépendant de son emplacement dans la suite. Les fasciagraphes et les rotagraphes sont des polygraphes particuliers en ce sens qu'ils sont constitués d'une succession de copies d'un même monographe tous reliés au précédent et au suivant selon le même schéma. Nous les définissons formellement dans la partie suivante. Ils permettent de modéliser des polymères à structures répétitives (voir Figure 1.1).

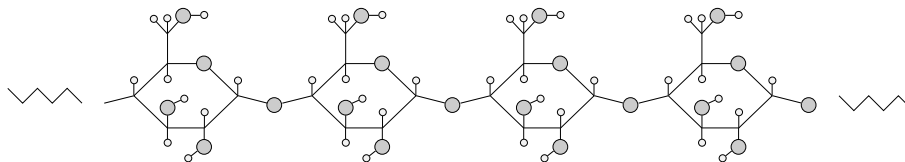


FIGURE 1.1 – Polymère à structures répétitives : molécule d'Amylose.

Pendant quelque temps, les fasciagraphes et les rotagraphes ont été utilisés principalement pour traiter de problèmes de chimie. L'un des premiers résultats intervient dans [BGMP86]. Les fasciagraphes et rotagraphes généralisent la classe de graphes constituée de produits (cartésiens, directs, forts) de

graphes avec des chemins ou des cycles, et plus particulièrement, les grilles. Dans différents articles les auteurs s'intéressent à proposer des méthodes efficaces pour résoudre, dans ces graphes particuliers, des problèmes combinatoires difficiles dans le cas général. Le but de ces méthodes est de tirer parti de la structure répétitive des fasciagraphes et des rotagraphes afin de restreindre l'étude du problème à une petite partie du graphe, pour ensuite étendre son résultat. De nombreux problèmes sont étudiés (domination minimum, stable maximum, coloration minimum ...). Nous reviendrons plus en détail sur ces différentes méthodes dans le Chapitre 4 que nous avons préféré placer après avoir présenté nos propres résultats pour en faciliter la compréhension et pour ne pas définir plusieurs fois des concepts similaires.

Le but de notre travail, et plus particulièrement de la première partie de cette thèse, est, d'une part, de regrouper une partie des différents résultats déjà connus en un seul algorithme générique, et d'autre part, de donner une bonne caractérisation des problèmes pour lesquels cet algorithme est utilisable.

## 1.2 DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Tout d'abord, nous allons définir formellement ce que sont les fasciagraphes et les rotagraphes, ainsi que présenter les différentes notions dont nous aurons besoin au cours de ce chapitre.

**Définition 32**  $\psi_n(M)$  *Étant donné un graphe mixte  $M = (V, E, A)$  et un entier  $n \geq 2$ , le **fasciagraphe de taille  $n$  basé sur  $M$** , noté  $\psi_n(M)$ , est le graphe non orienté défini de la façon suivante (voir Figure 1.2) :*

- $V(\psi_n(M)) = \bigcup_{i=1}^n V_i$  où  $V_i = \{v_i | v \in V\}$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,
- $E(\psi_n(M)) = \bigcup_{i=1}^n E_i \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$  où  $E_i = \{u_i v_i | uv \in E\}$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $A_j = \{u_j v_{j+1} | (u, v) \in A\}$  for  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ .

**Définition 33** *Un graphe  $F$  est un **fasciagraphe** si il existe un entier  $n \geq 2$  et un graphe mixte  $M$  tels que  $F = \psi_n(M)$ .*

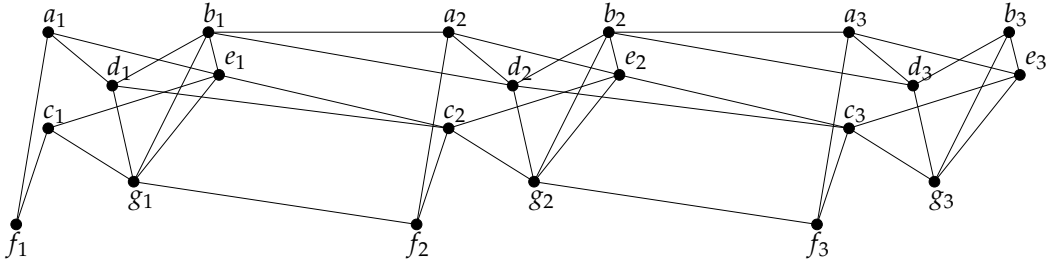
$\mathcal{F}$  *Nous notons  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fasciagraphes. Pour un entier  $k \geq 2$ , nous notons*  
 $\mathcal{F}_k$   *$\mathcal{F}_k$  l'ensemble des fasciagraphes de taille  $k$ . Pour un graphe mixte  $M$ , nous notons*  
 $\mathcal{F}_M$   *$\mathcal{F}_M$  l'ensemble des fasciagraphes basés sur  $M$  (quelle qu'en soit la taille).*

**Remarque 3** *Chaque fois que nous considérerons un fasciagraphe  $\psi_n(M)$ ,  $M$  et  $n$  seront supposés être respectivement un graphe mixte et un entier supérieur ou égal à 2.*

**Remarque 4** *Le fasciagraphe  $\psi_n(M)$  est constitué de  $n$  copies d'un graphe non orienté  $(V, E)$ , connectés selon un schéma défini par l'ensemble des arcs  $A$ . En particulier, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , le graphe  $M_i = (V_i, E_i)$  est isomorphe au graphe  $(V, E)$ .*

**Remarque 5** *Les fasciagraphes généralisent les grilles. En effet, le graphe associé à la grille de taille  $p \times q$  est isomorphe au fasciagraphe  $\psi_q(M)$  où  $M = (V, E, A)$  avec  $V = \{v_1, \dots, v_p\}$ ,  $E = \{v_i v_{i+1} | i \in \{1, \dots, p-1\}\}$ , et  $A = \{(v_i, v_i) | i \in \{1, \dots, p\}\}$ .*



FIGURE 1.2 – Le fasciagraphe  $\psi_3(M)$  pour le graphe mixte  $M$  de la Figure 1.

**Définition 34** Étant donné un graphe mixte  $M = (V, E, A)$ , et un entier  $n \geq 2$ , le **rotagraphe de taille  $n$  basé sur  $M$** , noté  $\omega_n(M)$ , est le graphe non orienté défini de la façon suivante (voir Figure 1.3) :

- $V(\omega_n(M)) = V(\psi_n(M))$ ,
- $E(\omega_n(M)) = E(\psi_n(M)) \cup \{u_n v_1 \mid (u, v) \in A\}$ .

**Définition 35** Étant donné un rotagraphe  $\omega_n(M)$ , ou un fasciagraphe  $\psi_n(M)$ ,  $M_i = (V_i, E_i)$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  est appelé la  $i$ ème **fibres** de ce rotagraphe ou fasciagraphe.

Dans la suite, nous considérerons que les fibres d'un rotagraphe sont arrangées selon un ordre cyclique. Ainsi, pour un rotagraphe  $\omega_n(M)$ ,  $M_i = M_{1+((i-1) \bmod n)}$  pour tout entier  $i$ .

**Définition 36** Étant donné un rotagraphe  $\omega_n(M)$ , ou un fasciagraphe  $\psi_n(M)$ , l'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans  $V(M_i)$  et une extrémité dans  $V(M_{i+1})$ , pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  pour les rotagraphe et  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  pour les fasciagraphe, est appelé la  $i$ ème **"entre-deux fibres"** de ce rotagraphe ou fasciagraphe et est noté  $E(M_{i,i+1})$ .

**Remarque 6** Étant donné un graphe mixte  $M = (V, E, A)$  et un entier  $n$ , le rotagraphe  $\omega_n(M)$  est isomorphe au graphe obtenu en ajoutant à  $\psi_n(M)$  un ensemble d'arêtes de la dernière fibre à la première selon le schéma défini par  $A$ .

**Définition 37** Un graphe  $R$  est un **rotagraphe** si il existe un entier  $n \geq 2$  et un graphe mixte  $M$  tels que  $R = \omega_n(M)$ .

Nous notons  $\mathcal{R}$  l'ensemble des rotagraphe. Pour un entier  $k \geq 2$ , nous notons  $\mathcal{R}_k$  l'ensemble des rotagraphe de taille  $k$ . Pour un graphe mixte  $M$ , nous notons  $\mathcal{R}_M$  l'ensemble des rotagraphe basé sur  $M$ .

**Remarque 7** Chaque fois que nous considérerons un rotagraphe  $\omega_n(M)$ ,  $M$  et  $n$  seront supposés être respectivement un graphe mixte et un entier supérieur ou égal à 2.

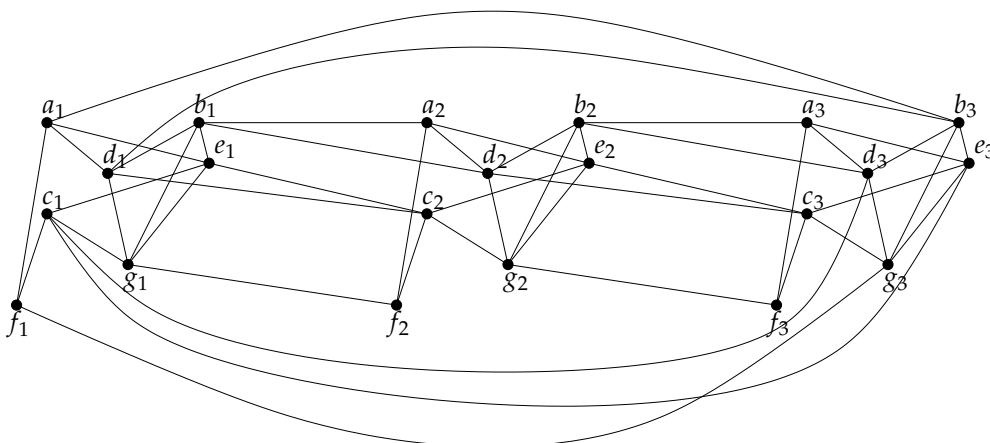


FIGURE 1.3 – Le rotagraph  $\omega_3(M)$  pour le graphe mixte  $M$  de la Figure 1.

### 1.3 MOTIVATIONS

Les méthodes développées dans l'ensemble des articles que nous présentons dans le Chapitre 4 ont pour point commun qu'elles consistent à calculer une matrice dont les coefficients dépendent des solutions partielles du problème étudié, ou d'un problème proche. Ces solutions partielles sont calculées sur une petite partie de la structure répétitive : un nombre fini de fibres consécutives. Il s'agit ensuite de déduire de ces solutions partielles une solution sur le fasciagraphe, ou le rotagraph, entier, en calculant les puissances de cette matrice. À fibre fixée, le calcul de cette matrice est effectué en temps constant, la complexité des algorithmes dépend donc du calcul de ces puissances. Nous présentons plus en détails ces articles dans le Chapitre 4. Dans certains articles ([Kv96], [DGM04]), cette séquence de puissances est calculée en  $O(\log n)$  avec  $n$  le nombre de fibres du fasciagraphe concerné. Dans d'autres, le calcul est effectué en temps constant ([LS94], [JMG<sup>+</sup>95], [JMv97], [Ž99] ...).

Certains articles présentent un algorithme spécifique à un problème ([JMG<sup>+</sup>95], [LS94], [DGM04]), ou à un type de problèmes ([JMv97]). D'autres présentent une méthode générique en laissant au lecteur le soin de savoir si la méthode peut être adaptée à son problème propre ([Kv96]). Il n'y a que dans [KV03] que les auteurs proposent une caractérisation des problèmes pour lesquels un algorithme similaire est proposé. Mais cette caractérisation est relativement restrictive puisqu'elle n'englobe pas certains problèmes, notamment ceux de type domination, qui sont pourtant clairement résolubles par ce type de méthode, comme développé dans [LS94], [Ž99] ou [DGM04].

Le but de cette première partie de la thèse, a donc été de présenter une caractérisation précise des problèmes combinatoires, englobant tous les problèmes déjà discutés. Remarquons qu'à fibre fixée, il est simple de vérifier qu'un fasciagraphe ou un rotagraph est de path-width, a fortiori de tree-

width, bornée<sup>1</sup>. Étant donné qu'un grand nombre de problèmes combinatoires deviennent polynomiaux, ou même linéaires, sur ces graphes, [ALS91], nous jugeons d'un algorithme qu'il est efficace s'il est exécutable en au plus  $O(\log n)$  sur les fasciagraphes ou les rotagraphes, avec  $n$  égal au nombre de fibres. Pour cette classe de problèmes, nous donnons donc un algorithme efficace pour calculer une solution sur les fasciagraphes et les rotagraphes. Nous présentons de plus des conditions fortes, nécessaires et/ou suffisantes, pour que l'algorithme soit exécutable, à fibre fixée, en un nombre constant d'opérations élémentaires.

---

1. Plus de détails sur la tree-width et la path-width, que nous n'aborderons pas plus en profondeur dans cette thèse, sont présentés dans [Bod88] par exemple.



# NOTION DE $(d, q, w)$ -PROPRIÉTÉS

# 2

Les notions suivantes sont inspirées en grande partie de l'article [KV03] discuté dans le Chapitre 4. Nous les redéfinissons ci-dessous.

## 2.1 LES $q$ -ÉTIQUETAGES

Nous donnons ci-après la définition de  $q$ -étiquetage d'un graphe, notion dont nous avons besoin pour caractériser l'ensemble des problèmes que nous savons traiter.

**Définition 38** *Étant donné un graphe  $G = (V, E)$ , nous définissons les  $q$ -étiquetages de la façon suivante :*

- un  $q$ -étiquetage de  $G$  est une fonction  $f : V \cup E \rightarrow \{1, \dots, q\}$ ,
- un  $q$ -étiquetage des sommets de  $G$  est une fonction  $f : V \rightarrow \{1, \dots, q\}$ ,
- un  $q$ -étiquetage des arêtes de  $G$  est une fonction  $f : E \rightarrow \{1, \dots, q\}$ .

Pour tout ensemble  $\mathcal{G}$  de graphes, nous notons  $\mathcal{L}_q(V(\mathcal{G}) \cup E(\mathcal{G}))$ ,  $\mathcal{L}_q(V(\mathcal{G}))$ ,  $\mathcal{L}_q(E(\mathcal{G}))$  l'ensemble des  $q$ -étiquetages, respectivement, de graphes, de sommets de graphes, d'arêtes de graphes, dans  $\mathcal{G}$ . Pour tout ensemble  $\mathcal{G}$  de graphes,  $\mathcal{L}_q(\mathcal{G}) = \mathcal{L}_q(V(\mathcal{G}) \cup E(\mathcal{G})) \cup \mathcal{L}_q(V(\mathcal{G})) \cup \mathcal{L}_q(E(\mathcal{G}))$ . Si  $\mathcal{G}$  contient seulement un graphe  $G$ , alors nous écrivons  $\mathcal{L}_q(G)$ ,  $\mathcal{L}_q(V(G))$ ,  $\mathcal{L}_q(E(G))$ , au lieu de, respectivement,  $\mathcal{L}_q(\{G\})$ ,  $\mathcal{L}_q(V\{G\})$ ,  $\mathcal{L}_q(E\{G\})$ .

$\mathcal{L}_q(V(\mathcal{G}) \cup E(\mathcal{G}))$   
 $\mathcal{L}_q(V(\mathcal{G}))$   
 $\mathcal{L}_q(E(\mathcal{G}))$   
 $\mathcal{L}_q(\mathcal{G})$

## 2.2 LES $q$ -PROPRIÉTÉS

**Définition 39** *On dira qu'une propriété  $\mathcal{P}$  de graphes est une  $q$ -propriété si on sait définir pour tout graphe  $G$ , une sous-famille des  $q$ -étiquetages de  $G$  :  $\mathcal{P}(G) \subseteq \mathcal{L}_q(G)$ , telle que,*

- le problème de décision "Étant donné un graphe  $G$  et un  $q$ -étiquetage  $f$  de  $G$ ,  $f$  est-il dans  $\mathcal{P}(G)$  ?" est un problème dans la classe  $P$ ,
- la question "le graphe  $G$  a-t-il la propriété  $\mathcal{P}$  ?" a une réponse positive si et seulement si il existe un  $q$ -étiquetage de  $G$  qui est dans  $\mathcal{P}(G)$ .

En substituant dans la définition précédente le mot "graphes" par le mot "rotagraphes" (resp. "fasciagraphes"), on obtient la définition d'une  $q$ -propriété de rotagraphes (resp. de fasciagraphes).

**Définition 40** *Étant donné une  $q$ -propriété  $\mathcal{P}$  et une famille  $\mathcal{G}$  de graphes, nous définissons  $\mathcal{P}(\mathcal{G})$  de la façon suivante :*

$$\mathcal{P}(\mathcal{G}) = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} (\mathcal{P}(G)).$$

**Remarque 8** Notons que toute propriété de graphes qui peut être vérifiée en temps polynomial est une 1-propriété.

### Exemples

- La propriété "être  **$k$ -colorable**" : un graphe  $G$  est  $k$ -colorable si ses sommets peuvent être colorés en utilisant au plus  $k$  couleurs et en évitant l'adjacence entre les sommets de même couleur. Cette propriété est une  $k$ -propriété. En effet, elle correspond à un  $k$ -étiquetage des sommets de  $G$  tel qu'il n'y a pas deux sommets adjacents étiquetés de la même façon.
- La propriété "contenir un ensemble dominant" (ou propriété de domination) : un graphe  $G = (V, E)$  a un **ensemble dominant** si il existe  $W \subseteq V$  tel que tout sommet en dehors de  $W$  a au moins un voisin dans  $W$ . Cette propriété, notée  $\mathcal{D}$ , est une 2-propriété. En effet on peut définir  $\mathcal{D}(G)$  comme l'ensemble des 2-étiquetages de  $G$  vérifiant la propriété suivante : il y a au moins un sommet étiqueté 1 dans le voisinage fermé de chaque sommet de  $G$ .
- La propriété "contenir un code 1-identifiant" (voir Définition 67) est une 1-propriété par la Remarque 8 et la Propriété 6 et aussi une 2-propriété comme montré dans la Partie 2.
- La propriété "avoir une  $q$ -coloration totale bornée par  $b$ " (pour deux entiers  $q$  et  $b$ ) : un fasciagraphe  $\psi_n(M)$  a une  **$q$ -coloration totale bornée par  $b$**  si il existe un  $q$ -étiquetage des sommets et des arêtes de  $\psi_n(M)$  tel que :
  - les sommets adjacents ont des étiquettes différentes,
  - les arêtes adjacentes ont des étiquettes différentes,
  - les sommets et les arêtes incidents ont des étiquettes différentes,
  - pour chaque fibre, la somme des étiquettes de ses sommets est inférieure ou égale à  $b$ .

**Remarque 9** Les deux premiers exemples ci-dessus sont des propriétés de graphes, tandis que le troisième est une propriété de fasciagraphe puisqu'il y est fait référence à la notion de fibres.

Notons aussi que pour les deux premiers exemples, il n'y a aucune contrainte pour les étiquetages sur les arêtes. Pour ce type de  $q$ -propriétés,  $\mathcal{L}_q(G)$  pourra être restreint à l'ensemble des  $q$ -étiquetages des sommets de  $G$ .

De façon similaire, pour les  $q$ -propriétés caractérisées par les  $q$ -étiquetages d'arêtes, on pourra restreindre  $\mathcal{L}_q(G)$  à l'ensemble des  $q$ -étiquetages des arêtes de  $G$ .

Tous les résultats ci-dessous sont toujours valides avec ces définitions alternatives de  $\mathcal{L}_q(G)$ .

**Définition 41** Soit  $f$  un  $q$ -étiquetage d'un fasciagraphe  $\psi_n(M)$ , le  **$q$ -étiquetage  $(i, k)$ -partiel de  $f$** , (pour  $1 \leq i \leq n$ , et  $1 \leq k \leq n - i + 1$ ), noté  $f_{i,k}$ , est la restriction de  $f$  au

sous-graphe induit par les  $k$  fibres consécutives  $M_i, M_{i+1}, \dots, M_{i+k-1}$ . Ainsi  $f_{i,k}$  est dans  $\mathcal{L}_q(\psi_k(M))$ .

**Définition 42** Soit  $f$  un  $q$ -étiquetage d'un rotagraphe  $\omega_n(M)$ , le  $q$ -étiquetage  $(i, k)$ -partiel de  $f$ , (pour  $1 \leq i, k \leq n$ ), noté  $f_{i,k}$ , est la restriction de  $f$  au fasciagraphe induit par les  $k$  fibres consécutives depuis la fibre  $M_i$ . Ainsi  $f_{i,k}$  est dans  $\mathcal{L}_q(\psi_k(M))$ .

**Définition 43** Étant donné un entier  $d \geq 2$ ,  $f$  dans  $\mathcal{L}_q(\psi_n(M))$  et  $g$  dans  $\mathcal{L}_q(\psi_{n'}(M))$  tels que  $f_{n-d+1,d} = g_{1,d}$ , pour des entiers  $n, n' \geq d$ , le résultat de la  $d$ -concaténation de  $f$  et  $g$ , notée  $f \triangleright_d g$ , est le  $q$ -étiquetage  $h$  dans  $\mathcal{L}_q(\psi_{n+n'-d}(M))$  tel que  $h_{1,n} = f$  et  $h_{n+1,n'-d} = g_{d+1,n'-d}$  (voir Figure 2.1).  $\triangleright_d$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous écrivons  $\triangleright$  plutôt que  $\triangleright_d$ .

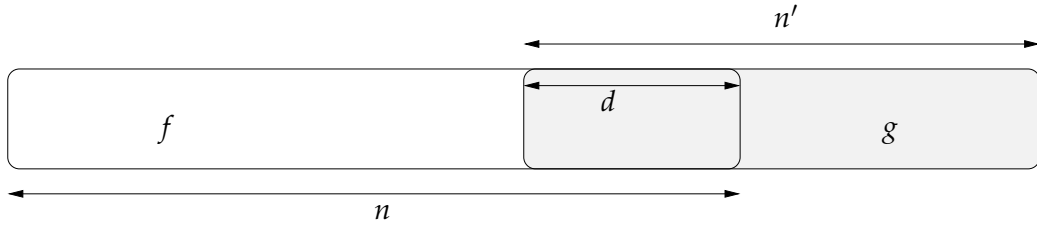


FIGURE 2.1 – Schéma de  $f \triangleright_d g$  où  $f \in \mathcal{L}_q(\psi_n(M))$  et  $g \in \mathcal{L}_q(\psi_{n'}(M))$

**Définition 44** Étant donné  $f$  dans  $\mathcal{L}_q(\psi_{n+d}(M))$  ( $n \geq d \geq 2$ ) tel que  $f_{1,d} = f_{n+1,d}$ , le résultat de la  $d$ -concaténation circulaire de  $f$ , notée  $\diamond_d(f)$ , est le  $q$ -étiquetage  $h$  dans  $\mathcal{L}_q(\omega_n(M))$  obtenu en identifiant les sommets et les arêtes des deux fasciagraphe qui constituent respectivement les  $d$  premières et les  $d$  dernières fibres de  $\omega_{n+d}(M)$  (qui sont, par hypothèse, étiquetés de la même façon par  $f$ ). Donc  $h_{1,n-1} = f_{1,n-1}$  et  $h_{n-1,3} = f_{n-1,3}$  (voir Figure 2.2).  $\diamond_d$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous écrivons  $\diamond$  plutôt que  $\diamond_d$ .

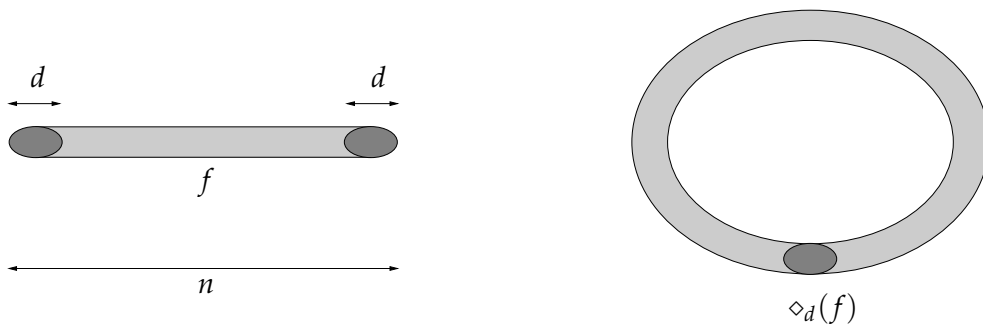


FIGURE 2.2 – Schéma de  $f \in \mathcal{L}_q(\psi_{n+d}(M))$  tel que  $f_{1,d} = f_{n+1,d}$ , et de  $\diamond_d(f) \in \mathcal{L}_q(\omega_n(M))$

Dans [KV03], S. Klavžar et A. Vesel ont défini les notions d'hérédité et de localité des  $q$ -propriétés de rotagraphe et de fasciagraphe. Ces notions permettent de caractériser les problèmes qui peuvent être traités avec la méthode qu'ils présentent. Néanmoins cette caractérisation est relativement restreinte et ne couvre pas certains problèmes combinatoires. Dans le but de couvrir une plus large gamme de problèmes, incluant en particulier les problèmes de domination, nous définissons une notion de localité différente : la

pseudo- $d$ -localité que nous avons introduite dans [BMP11]. Dans la section suivante, nous allons dans un premier temps nous intéresser à cette notion appliquée aux  $q$ -propriétés de rotagraphes.

## 2.3 SUR LES ROTAGRAPHES

### 2.3.1 Pseudo- $d$ -localité

**Définition 45**  $\mathcal{P}^{loc}$  Une  $q$ -propriété  $\mathcal{P}$  de rotagraphe est dite **pseudo- $d$ -locale** (pour un entier  $d \geq 2$ ) s'il existe une  $q$ -propriété  $\mathcal{P}^{loc}$  sur les fasciagraphes de taille  $d$ , telle que :  
pour tout  $q$ -étiquetage  $f$  d'un rotagraphe quelconque  $\omega_n(M)$ ,  $n \geq d + 1$  :

$$f \in \mathcal{P}(\omega_n(M)) \Leftrightarrow f_{i,d} \in \mathcal{P}^{loc}(\psi_d(M)) \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}$$

Nous allons étendre cette propriété  $\mathcal{P}^{loc}$  aux fasciagraphes de taille supérieure à  $d$  de la façon suivante : un  $q$ -étiquetage  $f$  de  $\psi_n(M)$  ( $n > d$ ), est dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_n(M))$  si et seulement si  $f_{i,d}$  est dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_d(M))$  pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n - d + 1\}$ .

Notons que la  $d$ -concaténation des  $q$ -étiquetages de fasciagraphes satisfaisant  $\mathcal{P}^{loc}$  satisfait  $\mathcal{P}^{loc}$ , et que la  $d$ -concaténation circulaire de  $q$ -étiquetages de fasciagraphes satisfaisant  $\mathcal{P}^{loc}$  satisfait  $\mathcal{P}$ .

**Exemple** Considérons la 2-propriété  $\mathcal{D}$  de domination définie précédemment. Cette propriété est une 2-propriété pseudo-3-locale. En effet, définissons la 2-propriété  $\mathcal{D}^{loc}$  de la façon suivante :

pour tout  $f$  dans  $\mathcal{L}_2(\psi_3(M))$ ,  $f$  est dans  $\mathcal{D}^{loc}(\psi_3(M))$  si et seulement si pour tout  $u$  dans la deuxième fibre de  $\psi_3(M)$ , i.e. pour tout  $u \in V(M_2)$ , il existe au moins un sommet étiqueté 1 dans le voisinage fermé de  $u$ .

En d'autres termes, un 2-étiquetage  $f$  d'un rotagraphe  $\omega_n(M)$  ( $n \geq 4$ ) correspond à un ensemble dominant si et seulement si la restriction de  $f$  à chaque sous-graphe induit par trois fibres consécutives vérifie la propriété  $\mathcal{D}^{loc}$ . En effet, le voisinage d'un sommet dans  $M_i$  est inclus dans  $M_{i-1} \cup M_i \cup M_{i+1}$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , et ne peut donc pas être dominé par un sommet d'une autre fibre.

### 2.3.2 Fonctions $d$ -modulaires

Les problèmes que nous voulons traiter sont des problèmes d'optimisation. Plus précisément, tout  $q$ -étiquetage dans  $\mathcal{P}(\mathcal{R})$  a un poids dont la valeur appartient à un ensemble totalement ordonné, notre but étant de trouver la meilleure valeur possible d'un  $q$ -étiquetage dans  $\mathcal{P}(\omega_n(M))$ . Ce "meilleur" poids peut donc être soit le poids maximum, soit le poids minimum d'un  $q$ -étiquetage dans  $\mathcal{P}(\omega_n(M))$ . Puisque chercher le maximum d'un ensemble ordonné est identique à chercher le minimum du même ensemble pour l'ordre renversé, nous pouvons supposer que nous recherchons toujours le poids minimum.



Les fonctions de poids pour lesquelles nous savons comment résoudre le problème de façon efficace vérifient la propriété suivante : le poids d'un  $q$ -étiquetage de rotagraphe est déterminé par tous ses  $q$ -étiquetages partiels sur  $(d + 1)$  fibres consécutives. Plus formellement, nous définissons ces fonctions de poids de la façon suivante :

**Définition 46** *Étant donné un entier  $d$ , une fonction de poids  $w$  des  $q$ -étiquetages de  $\mathcal{P}(\mathcal{R})$  dans un ensemble  $\mathbb{E}$  totalement ordonné est dite  **$d$ -modulaire** s'il existe*

- $w^{loc}$ , une fonction de poids local des  $q$ -étiquetages de  $\mathcal{P}^{loc}(\mathcal{F}_{d+1})$  dans  $\mathbb{E}$ , et
- une opération  $\otimes$  sur  $\mathbb{E}$  telle que  $(\mathbb{E}, \min, \otimes)$  forme un pré-semi-anneau,

tels que pour tout  $f$  dans  $\mathcal{P}(\omega_n(M))$ ,  $n > d$  :

$w^{loc}$   
 $\otimes$   
 $(\mathbb{E}, \min, \otimes)$

$$w(f) = w^{loc}(f_{1,d+1}) \otimes w^{loc}(f_{2,d+1}) \otimes \dots \otimes w^{loc}(f_{n,d+1})$$

En voyant  $f_{i,d+1}$  comme  $f_{i,d} \triangleright_{d-1} f_{i+1,d}$ , le poids local  $w^{loc}(f_{i,d+1})$  peut être compris comme l'augmentation de poids associée à l'ajout de la dernière fibre de  $f_{i+1,d}$  à  $f_{i,d}$  pour tout  $q$ -étiquetage  $f$  dans  $\mathcal{P}^{loc}(\mathcal{F}_{d+1})$ .

**Définition 47** *Étant donné une fonction de poids  $d$ -modulaire  $w$  de  $q$ -étiquetages de rotagraphes, nous définissons aussi le poids  $w$  pour les  $q$ -étiquetages de  $\mathcal{P}^{loc}(\mathcal{F})$  de la façon suivante :  $w(f) = w^{loc}(f_{1,d+1}) \otimes w^{loc}(f_{2,d+1}) \otimes \dots \otimes w^{loc}(f_{n-d,d+1})$ , pour tout  $f$  dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_n(M))$  ( $n > d$ ).*

**Exemple** Considérons la 2-propriété pseudo-3-locale  $\mathcal{D}$  de domination définie précédemment, ainsi que la fonction de poids suivante,  $w : f \in \mathcal{D}(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbb{N}$  telle que, pour tout  $f$  dans  $\mathcal{D}(\omega_n(M))$ ,  $w(f) = |\{u | u \in V(\omega_n(M)) \text{ et } f(u) = 1\}|$ , i.e.  $w(f)$  est le nombre de sommets étiquetés 1 par  $f$ .

$\mathcal{D}$

Cette fonction de poids est 3-modulaire. En effet, soit  $w^{loc} : \mathcal{D}^{loc}(\mathcal{F}_4) \rightarrow \mathbb{N}$  telle que, pour tout  $f$  dans  $\mathcal{D}^{loc}(\psi_4(M))$ ,  $w^{loc}(f) = |\{u | u \in V(M_4) \text{ et } f(u) = 1\}|$ , c'est à dire que  $w^{loc}$  d'un 2-étiquetage d'un fasciagraphe de taille 4, est le nombre de sommets étiquetés 1 dans la 4ième fibre. Puisque le nombre de sommets dans l'ensemble dominant est égal à la somme du nombre de sommets de l'ensemble dominant dans chaque fibre, nous avons  $w(f) = \sum_{i=1}^n w^{loc}(f_{i,4})$ . Ainsi,  $w^{loc}$  et l'addition usuelle sur les entiers fournissent la 3-modularité de  $w$ .

**Définition 48** *Une  $q$ -propriété pseudo- $d$ -locale de rotagraphe associée à une fonction  $d$ -modulaire de poids  $w$  est nommée une  **$(d, q, w)$ - $r$ -propriété**.*

Ainsi les problèmes d'optimisation que nous traitons correspondent à rechercher, au sein du pré-semi-anneau  $(\mathbb{E}, \min, \otimes)$  totalement ordonné et dépendant de la fonction  $d$ -modulaire  $w$ , le poids minimum d'un  $q$ -étiquetage vérifiant une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété donnée sur un rotagraphe donné.

### 2.3.3 Graphe auxiliaire associé

Étant donné un graphe mixte  $M$ , et une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété  $\mathcal{P}$ , nous définissons un graphe orienté  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w)$  (ou  $\vec{\mathcal{G}}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) avec

$\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w)$

une fonction de longueur  $l$  de l'ensemble des chemins de  $\vec{\mathcal{G}}$  dans  $(\mathbb{E}, \min, \otimes)$ , de la façon suivante :

- les sommets de  $\vec{\mathcal{G}}$  sont les  $q$ -étiquetages de  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_d(M))$ .
- les arcs de  $\vec{\mathcal{G}}$  sont les couples  $(u, v)$  de sommets de  $\vec{\mathcal{G}}$  (non nécessairement distincts) tels que  $u_{2,d-1} = v_{1,d-1}$ .
- la longueur  $l((u, v))$  d'un arc  $(u, v)$  est  $l((u, v)) = w^{loc}(u \triangleright_{d-1} v)$ .
- la longueur d'un  $n$ -chemin  $p = u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$  est  $l((u_1, u_2)) \otimes l((u_2, u_3)) \otimes \dots \otimes l((u_n, u_{n+1}))$ .

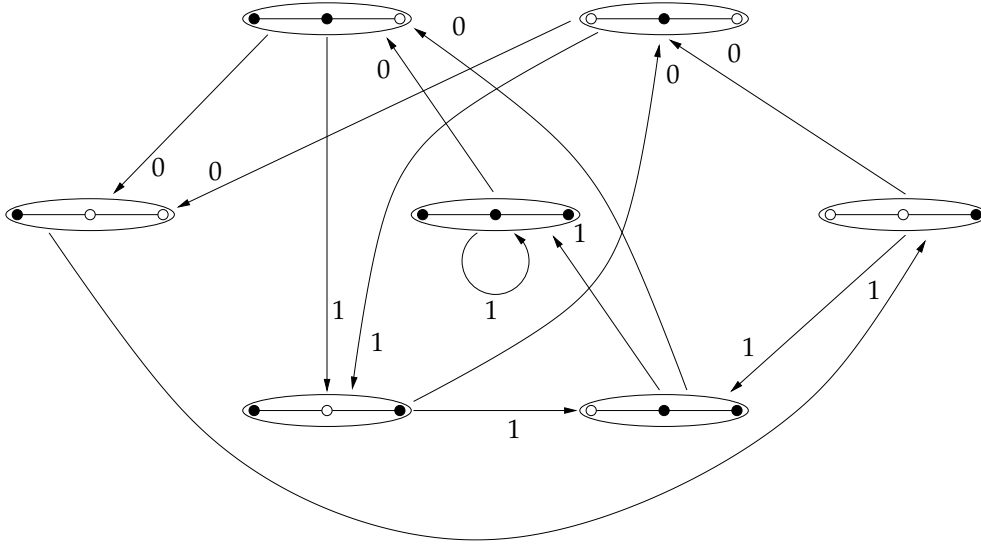


FIGURE 2.3 – Exemple du graphe auxiliaire  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{D}, w)$  pour la  $(3, 2, w)$ - $r$ -propriété  $\mathcal{D}$  de domination sur le graphe mixte trivial  $M = (V = \{x\}, E = \emptyset, A = \{(x, x)\})$ . Les sommets noirs sont ceux étiquetés 1. Les poids sont indiqués sur les arcs.

Dans la suite du manuscrit, nous utiliserons la même lettre pour indiquer un sommet de  $\vec{\mathcal{G}}$  et le  $q$ -étiquetage qu'il représente. Nous dirons donc "le sommet  $u$ " et le " $q$ -étiquetage  $u$ ".

### 2.3.4 Circuits et $q$ -étiquetages de rotagraphe

Ici nous montrons, pour une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété  $\mathcal{P}$ , le lien entre les  $q$ -étiquetages dans  $\mathcal{P}^{loc}(\mathcal{F})$  et les chemins de  $\vec{\mathcal{G}}$ .

**Théorème 2** Soit  $M$  un graphe mixte, et  $\mathcal{P}$  une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété. Pour un entier  $n > d$ , deux  $q$ -étiquetages  $u, v$  de  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_d(M))$ , et  $k$  dans  $\mathbb{E}$ , la proposition suivante est vraie :

il existe  $g$  dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{n+d}(M))$  tel que  $g_{1,d} = u, g_{n+1,d} = v$  et  $w(g) = k$  si et seulement si il existe un  $n$ -chemin  $p$  de longueur  $l(p) = k$  de  $u$  à  $v$  dans  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w)$ .

**Preuve.** 1. Montrons tout d'abord que la condition est suffisante. Soit  $p = u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$  un  $n$ -chemin dans  $\vec{\mathcal{G}}$  tel que  $u_1 = u$  et  $u_{n+1} = v$ . Par construction de  $\vec{\mathcal{G}}$ , les  $q$ -étiquetages  $u_1, \dots, u_{n+1}$  appartiennent à  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_d(M))$ . Soit  $g = u_1 \triangleright_{d-1} \dots \triangleright_{d-1} u_{n+1}$ ,  $g$  est un  $q$ -étiquetage de  $\psi_{n+d}(M)$  tel que  $g_{1,d} = u$  et  $g_{n+1,d} = v$ . Par définition,  $g$

est dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{n+d}(M))$ , et  $w(g) = w^{loc}(g_{1,d+1}) \otimes w^{loc}(g_{2,d+1}) \otimes \dots \otimes w^{loc}(g_{n,d+1}) = l((u_1, u_2)) \otimes l((u_2, u_3)) \otimes \dots \otimes l((u_n, u_{n+1})) = l(p)$ .

2. Montrons que la condition est nécessaire. Supposons qu'il existe  $g$  dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{n+d}(M))$  tel que  $g_{1,d} = u$  et  $g_{n+1,d} = v$ . Par définition de  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{n+d}(M))$ ,  $g$  est tel que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ ,  $g_{i,d} \in \mathcal{P}^{loc}(\psi_d(M))$ , et donc  $g_{i,d}$  est un sommet de  $\vec{\mathcal{G}}$ , et  $(g_{j,d}, g_{j+1,d}) \in A(\vec{\mathcal{G}})$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  par définition de  $\vec{\mathcal{G}}$ . Ainsi  $p = g_{1,d}, \dots, g_{n,d}, g_{n+1,d}$  est un  $n$ -chemin dans  $\vec{\mathcal{G}}$  de  $u$  à  $v$ . En outre,  $l(p) = l((g_{1,d}, g_{2,d})) \otimes l((g_{2,d}, g_{3,d})) \otimes \dots \otimes l((g_{n,d}, g_{n+1,d})) = w^{loc}(g_{1,d+1}) \otimes w^{loc}(g_{2,d+1}) \otimes \dots \otimes w^{loc}(g_{n,d+1}) = w(g)$ .  $\square$

**Corollaire 1** Soit  $M$  un graphe mixte, et  $\mathcal{P}$  une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété. Pour un entier  $n > d$ , un élément  $k$  de  $\mathbb{E}$ , et un  $q$ -étiquetage  $u$  de  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_d(M))$ , la proposition suivante est vraie :

il existe  $g$  dans  $\mathcal{P}(\omega_n(M))$  tel que  $g_{1,d} = u$  et  $w(g) = k$  si et seulement si il existe un  $n$ -circuit de longueur  $k$  de  $u$  à  $u$  dans  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w)$ .

*Preuve.* Par le Théorème 2, il existe  $g$  dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{n+d}(M))$  tel que  $g_{1,d} = g_{n+1,d} = u$  et  $w(g) = k$  si et seulement si il existe un  $n$ -chemin de longueur  $k$  de  $u$  à  $u$  dans  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w)$ . Un  $n$ -chemin de  $u$  à  $u$  est un  $n$ -circuit contenant  $u$ . Donc il est suffisant de montrer qu'il existe  $g'$  dans  $\mathcal{P}(\omega_n(M))$  tel que  $g'_{1,d} = u$  et  $w(g') = k$  si et seulement si il existe  $g$  dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{n+d}(M))$  tel que  $g_{1,d} = g_{n+1,d} = u$ .

Pour tout  $g$  satisfaisant ces conditions,  $g'$  défini comme  $g' = \diamond_{d-1}(g)$  est un  $q$ -étiquetage de  $\omega_n(M)$  satisfaisant  $w(g') = w(g)$ . Puisque  $\mathcal{P}$  est pseudo- $d$ -locale, alors  $g'$  est dans  $\mathcal{P}(\omega_n(M))$ .

Réciproquement, soit  $g'$  dans  $\mathcal{P}(\omega_n(M))$  tel que  $g'_{1,d} = u$ , alors  $g = g'_{1,n} \triangleright_1 g'_{n,d+1}$  est clairement dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{n+d}(M))$ .  $\square$

## 2.4 SUR LES FASCIAGRAPHES

Dans cette section, nous présentons, pour les fasciagraphes, des notions similaires à celles présentées plus haut pour les rotagraphes. Ainsi les  $q$ -propriétés que nous traitons dans cette section seront des  $q$ -propriétés de fasciagraphes.

### 2.4.1 Pseudo- $d$ -localité

La notion de pseudo- $d$ -localité pour le cas des  $q$ -propriétés de fasciagraphes est un peu plus complexe que dans le contexte des  $q$ -propriétés de rotagraphes puisqu'il est nécessaire de gérer les effets de bords. Nous la redéfinissons de la façon suivante :

**Définition 49** Une  $q$ -propriété  $\mathcal{P}$  de fasciagraphe est dite **pseudo- $d$ -locale** (pour un entier  $d \geq 2$ ) si il existe trois  $q$ -propriétés  $\mathcal{P}^1$ ,  $\mathcal{P}^2$  et  $\mathcal{P}^3$  de fasciagraphes de taille  $d$  telles que

$\mathcal{P}^1$   
 $\mathcal{P}^2$   
 $\mathcal{P}^3$

pour tout  $q$ -étiquetage  $f$  d'un fasciagraphe  $\psi_n(M)$ ,  $n \geq d + 2$  :

$$f \in \mathcal{P}(\psi_n(M)) \Leftrightarrow \begin{cases} f_{1,d} \in \mathcal{P}^1(\psi_d(M)) \\ f_{i,d} \in \mathcal{P}^2(\psi_d(M)) \text{ pour tout } i \in \{2, \dots, n-d\} \\ f_{n-d+1,d} \in \mathcal{P}^3(\psi_d(M)) \end{cases}$$

Pour caractériser les  $q$ -étiquetages de fasciagraphe qui pourraient être des  $q$ -étiquetages partiels de  $q$ -étiquetages dans  $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ , nous avons besoin de définir une quatrième  $q$ -propriété :

**Définition 50** Un  $q$ -étiquetage  $f$  est dans  $\mathcal{P}^{part}(\psi_n(M))$  ( $n \geq d$ )  $\Leftrightarrow \begin{cases} f_{1,d} \text{ satisfait } \mathcal{P}^1 \text{ ou } \mathcal{P}^2 \\ f_{2,d} \text{ satisfait } \mathcal{P}^2 \text{ pour tout } i \in \{2, \dots, n-d\} \\ f_{n-d+1,d} \text{ satisfait } \mathcal{P}^2 \text{ ou } \mathcal{P}^3 \end{cases}$

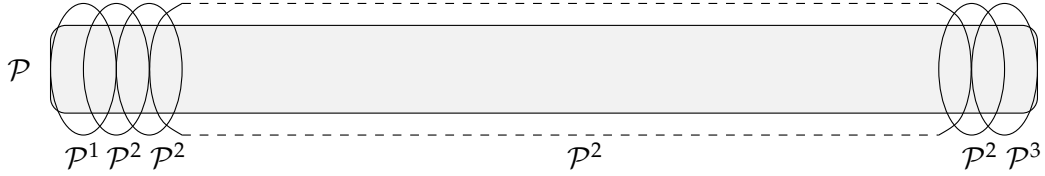


FIGURE 2.4 – Représentation d'une  $q$ -propriété pseudo- $d$ -locale  $\mathcal{P}$ .

$\mathcal{D}$

**Exemple** Considérons une nouvelle fois la 2-propriété  $\mathcal{D}$  de domination (voir Section 2.2). La 2-propriété  $\mathcal{D}$  est pseudo-3-locale pour les rotagraphe.

$\mathcal{D}$  est aussi une 2-propriété pseudo-3-locale de fasciagraphe. En effet, nous pouvons définir  $\mathcal{D}^1$ ,  $\mathcal{D}^2$  et  $\mathcal{D}^3$  de la façon suivante : pour tout  $f \in \mathcal{L}_2(\psi_3(M))$ ,

- $f \in \mathcal{D}^1(\psi_3(M))$  si et seulement si  $\forall u \in V(M_1) \cup V(M_2)$ , si  $u$  est étiqueté 0, alors au moins un voisin de  $u$  est étiqueté 1,
- $f \in \mathcal{D}^2(\psi_3(M))$  si et seulement si  $\forall u \in V(M_2)$ , si  $u$  est étiqueté 0, alors au moins un voisin de  $u$  est étiqueté 1,
- $f \in \mathcal{D}^3(\psi_3(M))$  si et seulement si  $\forall u \in V(M_2) \cup V(M_3)$ , si  $u$  est étiqueté 0, alors au moins un voisin de  $u$  est étiqueté 1,

Il est en effet facile de vérifier qu'un 2-étiquetage d'un fasciagraphe est tel que les sommets étiquetés 1 forment un ensemble dominant si et seulement si le 2-étiquetage partiel sur trois fibres consécutives satisfait  $\mathcal{D}^1$  pour les trois premières,  $\mathcal{D}^3$  pour les trois dernières, et  $\mathcal{D}^2$  pour toutes les autres. Remarquons que pour la propriété  $\mathcal{D}$ ,  $f \in \mathcal{D}^1 \cup \mathcal{D}^3 \Rightarrow f \in \mathcal{D}^2$ .

### 2.4.2 Fonctions $d$ -modulaires

De la même façon que pour les  $q$ -propriétés pseudo- $d$ -locales de rotagraphe, les fonctions de poids pour lesquelles nous savons comment résoudre efficacement le problème d'optimisation sur les fasciagraphe, ont la propriété que le poids peut être calculé à partir des  $q$ -étiquetages partiels.

**Définition 51** Une fonction de poids  $w$  des  $q$ -étiquetages de  $\mathcal{P}(\mathcal{F})$  dans un ensemble  $\mathbb{E}$  ordonné est dite  **$d$ -modulaire** si il existe

- deux fonctions de poids :
    - le poids initial  $w^{ini}$  des  $q$ -étiquetages de  $\mathcal{P}^1(\mathcal{F}_d)$  dans  $\mathbb{E}$ ,
    - le poids additionnel  $w^{part}$  des  $q$ -étiquetages de  $\mathcal{P}^{part}(\mathcal{F}_{d+1})$  dans  $\mathbb{E}$ ,
  - une opération  $\otimes$  sur  $\mathbb{E}$  ayant comme élément neutre  $e$  et telle que  $(\mathbb{E}, \min, \otimes)$  forme un pré-semi-anneau,
- tels que pour tout  $f$  de  $\mathcal{P}(\psi_n(M))$ ,  $n \geq d + 1$  :

$$\begin{aligned} &w^{ini} \\ &w^{part} \\ &\otimes \\ &(\mathbb{E}, \min, \otimes) \end{aligned}$$

$$w(f) = w^{ini}(f_{1,d}) \otimes w^{part}(f_{1,d+1}) \otimes \dots \otimes w^{part}(f_{n-d,d+1})$$

De la même façon que pour les  $q$ -propriétés de rotagraphes, le poids additionnel,  $w^{part}$  peut être compris comme l'augmentation de poids associée à l'ajout de la dernière fibre de  $f_{i+1,d}$  à  $f_{i,d}$  pour tout  $q$ -étiquetage  $f$  de  $\mathcal{P}^{part}(\mathcal{F}_{d+1})$ , et  $w^{ini}$  est le poids associé au  $q$ -étiquetage sur les  $d$  premières fibres.

**Définition 52** Une  $q$ -propriété pseudo- $d$ -locale de fasciagraphe associée à une fonction  $d$ -modulaire de poids  $w$  est nommée une  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété.

Dans la suite, la fonction  $d$ -modulaire  $w$  d'une  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété sera supposée être associée à son ensemble de définition  $\mathbb{E}$  et son opération  $\otimes$  même si nous ne les donnons pas explicitement.

**Exemple** Considérons la 2-propriété pseudo-3-locale  $\mathcal{D}$  de domination, et la fonction de poids  $w$  sur les fasciagraphes  $w : f \in \mathcal{D}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{N}$  telle que, pour tout  $f \in \mathcal{D}(\psi_n(M))$ ,  $w(f) = |\{u | u \in V(\psi_n(M)) \text{ et } f(u) = 1\}|$ , i.e.  $w(f)$  est le nombre de sommets dans le dominant.

$\mathcal{D}$

- Cette fonction de poids est 3-modulaire. En effet, définissons :
- $w^{ini} : \mathcal{D}^1(\mathcal{F}_3) \rightarrow \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $f \in \mathcal{D}^1(\psi_3(M))$ ,  $w^{ini}(f) = |\{u | u \in V(\psi_3(M)), f(u) = 1\}|$ . Donc le poids initial d'un 2-étiquetage  $f$  d'un fasciagraphe  $\psi_3(M)$  ayant la propriété  $\mathcal{D}$ , est le nombre de sommets étiquetés 1 par  $f$ , i.e.  $w^{ini}(f) = w(f)$  pour tout 2-étiquetage  $f$  de  $\mathcal{D}(\psi_3(M))$ .
  - $w^{part} : \mathcal{D}^2(\mathcal{F}_4) \rightarrow \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $f \in \mathcal{D}^2(\psi_4(M))$ ,  $w^{part}(f) = |\{u | u \in V(M_4) \text{ et } f(u) = 1\}|$ . Donc le poids additionnel d'un 2-étiquetage d'un fasciagraphe de taille 4, est le nombre de sommets étiquetés 1 dans la 4ième fibre.

Puisque le nombre de sommets dans le dominant est égal à la somme du nombre de sommets du dominant dans chaque fibre, pour  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_{n+3})$ , nous avons  $w(f) = w^{ini}(f_{1,3}) + \sum_{i=1}^n w^{part}(f_{i,4})$ . Ainsi,  $w^{ini}$ ,  $w^{part}$  et l'addition usuelle sur les entiers fournissent la 3-modularité de  $w$ .

Dans la suite du document, nous utiliserons la notion de  $(d, q, w)$ -propriété lorsque la propriété concernée peut être une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété, ou une  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété.

### 2.4.3 Graphe auxiliaire associé

La construction du graphe orienté  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w)$  pour une  $(d, q, w)$ - $f$ -

$$\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w)$$

propriété est similaire à celle pour une  $(d, q, w)$ -propriété.

Étant donné un graphe mixte  $M$  et une  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété  $\mathcal{P}$ , nous définissons le graphe orienté  $\vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w)$ , que nous notons  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté, avec une fonction de longueur  $l$  des arcs dans  $(\mathbb{E}, \min, \otimes)$ , de la façon suivante :

- les sommets de  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}$  sont les  $q$ -étiquetages de  $\mathcal{P}^1(\psi_d(M))$ , de  $\mathcal{P}^2(\psi_d(M))$  et de  $\mathcal{P}^3(\psi_d(M))$ , ainsi que deux sommets spéciaux,  $s$  et  $p$  :

$$V(\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{P}^1(\psi_d(M)) \cup \mathcal{P}^2(\psi_d(M)) \cup \mathcal{P}^3(\psi_d(M)) \cup \{s, p\}$$

- pour tout  $q$ -étiquetage  $u$  et  $v$  non nécessairement distincts :
  - $(u, v) \in A(\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}) \Leftrightarrow u \in \mathcal{P}^i(\psi_d(M))$ ,  $v \in \mathcal{P}^j(\psi_d(M))$  et  $u_{2,d-1} = v_{1,d-1}$  avec  $i \in \{1, 2\}$  et  $j \in \{2, 3\}$ ,
  - $(s, u) \in A(\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}) \Leftrightarrow u \in \mathcal{P}^1(\psi_d(M))$ ,
  - $(u, p) \in A(\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}) \Leftrightarrow u \in \mathcal{P}^3(\psi_d(M))$ .
- la longueur  $l((u, v))$  d'un arc  $(u, v)$  est
  - $l((u, v)) = w^{ini}(v)$  pour  $u = s$ ,
  - $l((u, v)) = w^{part}(u \triangleright_{d-1} v)$  pour  $u \neq s$  et  $v \neq p$ ,
  - $l((u, v)) = e$  pour  $v = p$  (l'élément neutre de  $\mathbb{E}$  pour  $\otimes$ ).
- la longueur d'un  $n$ -chemin  $p = u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$  est  $l(p) = l((u_1, u_2)) \otimes l((u_2, u_3)) \otimes \dots \otimes l((u_n, u_{n+1}))$ .

**Remarque 10** Notons qu'un même sommet peut à la fois vérifier plusieurs propriétés parmi  $\mathcal{P}^1$ ,  $\mathcal{P}^2$  et  $\mathcal{P}^3$  (voir Figure 2.5).

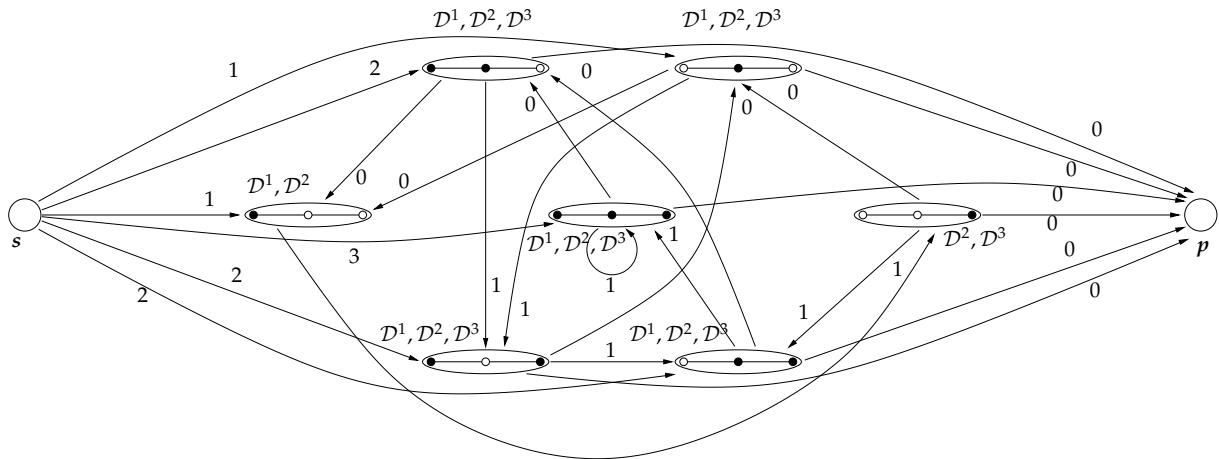


FIGURE 2.5 – Exemple du graphe auxiliaire  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{D}, w)$  pour la  $(3, 2, w)$ - $f$ -propriété  $\mathcal{D}$  de domination pour les fasciagraphes construit sur le graphe mixte trivial  $M = (V = \{x\}, E = \emptyset, A = \{(x, x)\})$ . Les sommets noirs sont ceux étiquetés 1. Les propriétés vérifiées par les 2-étiquetages ainsi que les poids sont indiqués.

$\vec{\mathcal{G}}(M, \mathcal{P}, w)$

Dans la suite du document, nous utiliserons la notion de  $\vec{\mathcal{G}}(M, \mathcal{P}, w)$ , ou  $\vec{\mathcal{G}}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté, lorsque la propriété concernée est une  $(d, q, w)$ -propriété, sans précision de fasciagraphes ou de rotagraphes.

### 2.4.4 Chemins et $q$ -étiquetages de fasciagraphes

Ici nous montrons, pour une  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété  $\mathcal{P}$ , le lien entre les  $q$ -étiquetages dans  $\mathcal{P}(\mathcal{F})$  et les chemins de  $s$  à  $p$  dans  $\vec{\mathcal{G}}$ .

**Théorème 3** *Soit  $M$  un graphe mixte et  $\mathcal{P}$  une  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété. Pour tout entier  $n > d + 1$ , et tout  $k$  dans  $\mathbb{E}$ , la proposition suivante est vraie :*

*il existe  $g$  dans  $\mathcal{P}(\psi_n(M))$  tel que  $w(g) = k$  si et seulement si il existe un  $(n - d + 2)$ -chemin  $P$  de longueur  $l(P) = k$  de  $s$  à  $p$  dans  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w)$ .*

*Preuve.* 1. Montrons tout d'abord que la condition est suffisante. Soit  $P = u_1, u_2, \dots, u_{n-d+3}$  un  $(n - d + 2)$ -chemin tel que  $u_1 = s$ ,  $u_2 = u$ ,  $u_{n-d+2} = v$ , et  $u_{n-d+3} = p$ . Par construction de  $\vec{\mathcal{G}}$ , le  $q$ -étiquetage  $u_2$  appartient à  $\mathcal{P}^1(\psi_d(M))$ , les  $q$ -étiquetages  $u_3, \dots, u_{n-d+1}$  appartiennent à  $\mathcal{P}^2(\psi_d(M))$ , et le  $q$ -étiquetage  $u_{n-d+2}$  appartient à  $\mathcal{P}^3(\psi_d(M))$ . Soit  $g = u_2 \triangleright_{d-1} u_3 \triangleright_{d-1} \dots \triangleright_{d-1} u_{n-d+2}$ , c'est à dire que  $g$  est un  $q$ -étiquetage de  $\psi_n(M)$  tel que  $g_{1,d} = u$  et  $g_{n-d+1,d} = v$ . Puisque  $\mathcal{P}$  est une  $q$ -propriété pseudo- $d$ -locale,  $g$  est dans  $\mathcal{P}(\psi_n(M))$ , et  $w(g) = w^{ini}(g_{1,d}) \otimes w^{part}(g_{1,d} \triangleright_{d-1} g_{2,d}) \otimes w^{part}(g_{2,d} \triangleright_{d-1} g_{3,d}) \otimes \dots \otimes w^{part}(g_{n-d,d} \triangleright_{d-1} g_{n-d+1,d}) \otimes e = l((s, u_2)) \otimes l((u_2, u_3)) \otimes \dots \otimes l((u_{n-d+2}, p)) = l(P)$ .

2. Puis montrons que la condition est nécessaire. Supposons qu'il existe  $g$  dans  $\mathcal{P}(\psi_n(M))$  tel que  $g_{1,d} = u$  et  $g_{n-d+1,d} = v$ . Puisque  $\mathcal{P}$  est une  $q$ -propriété pseudo- $d$ -locale,  $g$  est telle que  $g_{1,d}$  est dans  $\mathcal{P}^1(\psi_d(M))$ ,  $g_{i,d}$  est dans  $\mathcal{P}^2(\psi_d(M))$  pour tout  $i \in \{2, \dots, n - d\}$  et  $g_{n-d+1,d}$  est dans  $\mathcal{P}^3(\psi_d(M))$ . Dans ce cas,  $j \in \{1, \dots, n - d + 1\}$ ,  $g_{j,d}$  est un sommet et  $(g_{j,d}, g_{j+1,d})$  est un arc de  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w)$ . Puisque  $(s, g_{1,d})$  et  $(g_{n-d+1,d}, p)$  sont deux arcs de  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w)$ ,  $P = s, g_{1,d}, \dots, g_{n-d+1,d}, p$  est un  $(n - d + 2)$ -chemin de  $s$  à  $p$  dont le premier arc est  $(s, u)$  et dont le dernier arc est  $(v, p)$ . De plus,  $l(P) = l((s, g_{1,d})) \otimes l((g_{1,d}, g_{2,d})) \otimes \dots \otimes l((g_{n-d,d}, g_{n-d+1,d})) \otimes l((g_{n-d+1,d}, p)) = w^{ini}(g_{1,d}) \otimes w^{part}(g_{1,d} \triangleright_{d-1} g_{2,d}) \otimes \dots \otimes w^{part}(g_{n-d,d} \triangleright_{d-1} g_{n-d+1,d}) \otimes e = w(g)$ .

□





# ALGORITHMES DE $k$ -CHEMINS MINIMAUX DANS LES GRAPHERS AUXILIAIRES ASSOCIÉS AUX $(d, q, w)$ -PROPRIÉTÉS

Étant donné une  $(d, q, w)$ -propriété  $\mathcal{P}$  et un graphe mixte  $M$ , par le Corollaire 1, dans le cas des rotagraphes, ou le Théorème 3, dans le cas des fasciagraphes, on sait que calculer le poids minimum d'un  $q$ -étiquetage vérifiant  $\mathcal{P}$  dans un rotagraphe ou dans un fasciagraphe, est équivalent à trouver respectivement un  $k$ -circuit, ou un  $k$ -chemin de longueur minimum dans un graphe orienté associé. Nous allons donc nous intéresser aux méthodes de recherche de  $k$ -chemins de longueur minimum dans les graphes.

Jusqu'à maintenant, la fonction de poids des  $q$ -étiquetages d'une  $(d, q, w)$ -propriétés était définie dans un pré-semi-anneau  $(\mathbb{E}, \min, \otimes)$  sur un ensemble  $\mathbb{E}$  ordonné. Dans la suite, on considère que  $\mathbb{E}$  contient  $e$ , élément neutre pour  $\otimes$ , et nous notons  $\varepsilon$ , un élément hors de  $\mathbb{E}$  tel que :

- $\varepsilon \otimes \varepsilon = \varepsilon$ ,
- $\varepsilon$  est absorbant pour  $\otimes$  :  $\forall a \in \mathbb{E}, a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$ ,
- $\varepsilon$  est plus grand que tous les éléments de  $\mathbb{E}$  dans l'ordre associé à  $\mathbb{E}$  :  
 $\forall a \in \mathbb{E}, \min(a, \varepsilon) = a$ .

Ainsi,  $\mathcal{E} = (\mathbb{E} \cup \{\varepsilon\}, \min, \otimes, \varepsilon, e)$  forme un semi-anneau.

Rappelons que, d'après la Propriété 1,  $(\mathbb{E} \cup \{\varepsilon\}, \min, \otimes, \varepsilon, e)$  est un dioïde.

Dans la suite de ce chapitre, pour plus de simplicité, même si pour le dioïde  $\mathcal{E} = (\mathbb{E} \cup \{\varepsilon\}, \min, \otimes, \varepsilon, e)$ ,  $\varepsilon$  n'est pas dans  $\mathbb{E}$ , nous écrirons le dioïde  $\mathcal{E}$  de la façon suivante :  $(\mathbb{E}, \min, \otimes, \varepsilon, e)$ . En outre l'ensemble des définitions et des calculs seront exécutés dans ce dioïde sauf si nous le précisons.

## 3.1 RÉSOLUTION EN TEMPS POLYNOMIAL

Par le Théorème 1, nous savons que l'existence et la longueur minimum d'un  $k$ -chemin, ou d'un  $k$ -circuit, dans un graphe  $\vec{G}$ , peuvent être obtenues en calculant la  $k$ ème puissance de la matrice des longueurs  $\Pi$  de  $\vec{G}$ . Nous pouvons donc en déduire un algorithme polynomial.

Les deux conditions suivantes sont nécessaires pour que les algorithmes que nous présentons soient utilisables en pratique :

- **Condition de vérifiabilité** : Une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété, ou  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété,  $\mathcal{P}$  est appelée **vérifiable** s'il existe une procédure qui décide en temps fini si un  $q$ -étiquetage  $f$  de  $\psi_d(M)$  appartient à  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_d(M))$ , ou à  $\mathcal{P}^{part}(\psi_d(M))$ , respectivement.
- **Condition de calculabilité** : Une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété (resp.  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété)  $\mathcal{P}$  est appelée **calculable** s'il existe une procédure qui fournit  $w^{loc}(f)$  (resp.  $w^{ini}(f)$  et  $w^{part}(f)$ ) en temps fini, pour tout  $q$ -étiquetage  $f$  de  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{d+1}(M))$  (resp.  $\mathcal{P}^1(\psi_d(M))$  ou  $\mathcal{P}^{part}(\psi_{d+1}(M))$ ).

**Exemple :**

- La  $(3, 2, w)$ - $r$ -propriété  $\mathcal{D}$  de domination est vérifiable. Étant donné un 2-étiquetage  $f$  d'un fasciagraphe  $\psi_3(M)$ , il est possible de savoir en temps fini si  $f$  est dans  $\mathcal{D}^{loc}(\psi_3(M))$ . En effet, vérifier qu'un 2-étiquetage de  $\psi_3(M)$  est dans  $\mathcal{D}$  demande de vérifier que chaque sommet de la fibre du milieu a un sommet étiqueté 1 dans son voisinage fermé et cela se vérifie en  $m\Delta$  opérations (où  $m = |V(M)|$  et  $\Delta$  est le cardinal maximum de  $N[u]$  pour  $u \in V(\psi_3(M))$ ).
- La  $(3, 2, w)$ - $r$ -propriété  $\mathcal{D}$  de domination est calculable. Étant donné un 2-étiquetage  $f$  dans  $\mathcal{D}^{loc}(\psi_4(M))$ , il est possible de calculer en temps fini  $w^{loc}(f)$ . En effet  $w^{loc}(f)$  se calcule en effectuant, au plus  $|V(M)|$  additions.

**Remarque 11** Étant donné un graphe mixte  $M$  et une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété, ou  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété  $\mathcal{P}$ , l'Algorithme Construction  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}$  ou  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$  montre que, si  $\mathcal{P}$  est vérifiable et calculable, on peut construire le graphe auxiliaire  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w)$ , ou  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w)$  en temps fini.

ALGORITHME CONSTRUCTION  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$  :

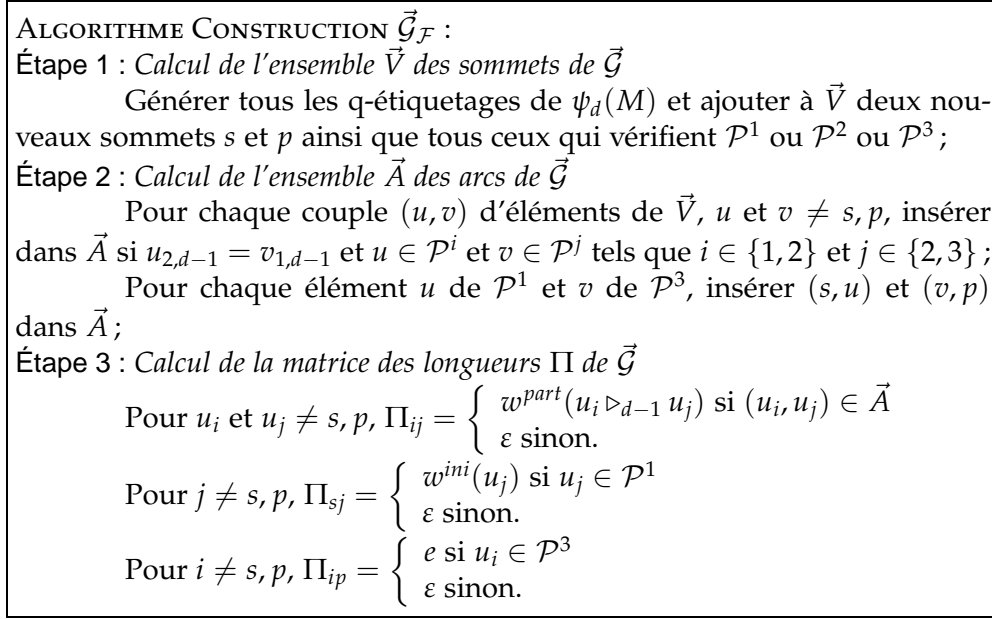
Étape 1 : Calcul de l'ensemble  $\vec{V}$  des sommets de  $\vec{\mathcal{G}}$   
 Générer tous les  $q$ -étiquetages de  $\psi_d(M)$  et insérer dans  $\vec{V}$  tous ceux qui vérifient  $\mathcal{P}^{loc}$  ;

Étape 2 : Calcul de l'ensemble  $\vec{A}$  des arcs de  $\vec{\mathcal{G}}$   
 Pour chaque couple  $(u, v)$  d'éléments de  $\vec{V}$  insérer dans  $\vec{A}$  si et seulement si  $u_{2,d-1} = v_{1,d-1}$  ;

Étape 3 : Calcul de la matrice des longueurs  $\Pi$  de  $\vec{\mathcal{G}}$   

$$\forall u_i, u_j \in \vec{V} \begin{cases} \text{si } (u_i, u_j) \notin \vec{A} \text{ alors } \Pi_{ij} := \varepsilon \\ \text{sinon calculer } w^{loc}(u_i \triangleright_{d-1} u_j) \text{ et } \Pi_{ij} := w^{loc}(u_i \triangleright_{d-1} u_j). \end{cases}$$

FIGURE 3.1 – Algorithme Construction  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$ .

FIGURE 3.2 – Algorithme Construction  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}$ .

**Théorème 4** *Étant donné un graphe auxiliaire  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w)$  (resp.  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w)$ ) associé à un graphe mixte  $M$  et une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété (resp.  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété)  $\mathcal{P}$  vérifiable et calculable, le problème d'optimiser  $\mathcal{P}$  sur un rotagraphe  $\omega_n(M)$  (resp. sur un fasciagraphe  $\psi_n(M)$ ), est logarithmique en  $n$ , pour tout entier  $n$ .*

Nos algorithmes reprennent les notions de l'Algorithme 2.2 dans [Kv96] (et utilisé aussi dans [KV03] et [DGM04]) tout en donnant une caractérisation, qui n'existait pas jusqu'alors, à travers les  $(d, q, w)$ - $r$ -propriétés, et  $(d, q, w)$ - $f$ -propriétés, des problèmes d'optimisation pour lesquels ils sont applicables.

*Preuve.* Par le Corollaire 1, dans le cas des rotagraphe, ou le Théorème 3, dans le cas des fasciagraphe, on sait que calculer le poids minimum d'un  $q$ -étiquetage vérifiant  $\mathcal{P}$  dans un rotagraphe  $\omega_n(M)$  ou dans un fasciagraphe  $\psi_n(M)$ , est équivalent à trouver respectivement un  $n$ -circuit, ou un  $(n - d + 1)$ -chemin, de longueur minimum dans  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w)$  ou  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w)$ . Enfin, par le Théorème 1 et le Corollaire 2, on sait que trouver le plus court  $n$ -circuit ou  $(n - d + 1)$ -chemin, dans  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w)$  ou  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w)$ , est équivalent à calculer respectivement la  $n$ -ième ou la  $(n - d + 1)$ -ième, puissance de la matrice des longueurs  $\Pi$  du graphe dans le dioïde  $\mathcal{E} = (\mathbb{E}, \min, \otimes, \varepsilon, e)$ . Il est bien connu que calculer la  $n$ -ième puissance d'une matrice est réalisable en temps logarithmique en  $n$ . En effet, puisque  $\Pi^p \otimes \Pi^q = \Pi^{p+q}$ , on sait qu'il est nécessaire de calculer de l'ordre de  $\log n$  matrices pour calculer  $\Pi^n$ . Par exemple pour  $\Pi^{20}$ , on n'a besoin de calculer que  $\Pi^2 = \Pi \otimes \Pi$ ,  $\Pi^4 = \Pi^2 \otimes \Pi^2$ ,  $\Pi^5 = \Pi \otimes \Pi^4$ ,  $\Pi^{10} = \Pi^5 \otimes \Pi^5$  et enfin  $\Pi^{20} = \Pi^{10} \otimes \Pi^{10}$ .  $\square$

Nous allons présenter, ci-dessous, deux cas pour lesquels, étant donné un graphe auxiliaire  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w)$  (resp.  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w)$ ) associé à un graphe mixte

$M$  et une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété (resp.  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété)  $\mathcal{P}$  vérifiable et calculable, en calculant seulement un nombre fini et constant de puissances de  $\Pi_{\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w)}$  (resp.  $\Pi_{\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w)}$ ), il est possible de fournir la longueur minimum d'un  $n$ -circuit (resp. d'un  $(n - d + 1)$ -chemin) de  $\vec{\mathcal{G}}$ , pour tout entier  $n$ . Dans le premier cas, il existe deux entiers  $u < t$  tels que  $\Pi^t = \Pi^u$ . Ce cas est appelé le **cas clos**. Dans le second cas, il existe deux entiers  $u < t$  et  $c$  dans  $\mathbb{E}$  tels que  $\Pi^t = \Pi^u \otimes c$ . Ce cas est appelé le **cas stable**.

Ces résultats généralisent les cas particuliers présentés dans [Ž04], [JMG<sup>+</sup>95], [LS94], ou encore [Spa98], tout en donnant, à travers les notions que nous allons définir ci-dessous des  $(d, q, w)$ - $r$ -propriétés, et  $(d, q, w)$ - $f$ -propriétés, closes et stables, une caractérisation des problèmes d'optimisation pour lesquels cette méthode est applicable.

## 3.2 CAS PARTICULIERS ET RÉOLUTION EN TEMPS CONSTANT

### 3.2.1 Cas clos

Ce premier cas "simple" a lieu lorsqu'il existe deux entiers  $u < t$  tels que  $\Pi^u = \Pi^t$ . Pour ce cas, nous considérons un graphe mixte  $M$  et une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété, ou  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété,  $\mathcal{P}$ , vérifiable et calculable.

**Lemme 1** (Comportement périodique) *Soit  $\Pi$  la matrice des longueurs du graphe auxiliaire  $\vec{\mathcal{G}}(M, \mathcal{P}, w)$ . Supposons qu'il existe deux entiers  $u < t$  tels que  $\Pi^t = \Pi^u$ . Alors pour,  $p = t - u$  et tout entier  $k \geq t$ , nous avons  $\Pi^k = \Pi^{u+r}$  où  $(k - u) \equiv r[p]$  (c'est à dire  $k = u + qp + r$  où  $q, r \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq r < p$ ).*

*En d'autres termes, la séquence des puissances de  $\Pi$  a la forme suivante :  $\Pi, \Pi^2, \dots, \Pi^{u-1}, S, S, \dots, S, \dots$  où  $S$  est la sous-séquence  $\Pi^u, \Pi^{u+1}, \dots, \Pi^{u+p-1}$ .*

*Preuve.* Nous allons tout d'abord prouver l'assertion suivante :

$$\Pi^{i+p} = \Pi^i, \forall i \geq u$$

Nous allons prouver l'assertion par récurrence sur  $i$ . Puisque  $p = t - u$  et  $\Pi^t$  est supposé être égale à  $\Pi^u$ , l'assertion est vraie pour  $i = u$ .

Soit  $i > u$  et supposons que l'hypothèse de récurrence est vraie pour  $i - 1$ , c'est à dire que  $\Pi^{i-1+p} = \Pi^{i-1}$ . Nous obtenons la propriété désirée pour  $i$  en multipliant l'égalité par  $\Pi$ , et l'assertion est vérifiée.

Nous avons donc que  $\Pi^{i+qp} = \Pi^i$  pour tout entiers  $q$  et  $i \geq u$ .

Maintenant, soit  $k \geq u$ ,  $q = \left\lfloor \frac{k-u}{p} \right\rfloor$  et  $k - u \equiv r[p]$  avec  $q, r$  dans  $\mathbb{N}$  et  $0 \leq r < p$ . Nous avons  $k = u + r + qp$  et donc  $\Pi^k = \Pi^{u+r+qp} = \Pi^{u+r}$ , induisant donc un comportement périodique de la séquence des puissances de  $\Pi$  à partir de  $\Pi^u$ .  $\square$

Nous donnons une caractérisation des matrices satisfaisant la condition du Lemme 1.

**Définition 53** Une matrice  $\Pi$  dans  $\mathbb{M}_n(\mathcal{E})$  est dite *close* si l'ensemble  $\mathcal{M}_\Pi = \{\Pi^k | k \in \mathbb{N}\}$  a un nombre fini d'éléments distincts.

**Assertion 1** Soit  $\Pi$  la matrice des longueurs du graphe auxiliaire  $\vec{G}(M, \mathcal{P}, w)$  : il existe deux entiers  $u < t$  tels que  $\Pi^t = \Pi^u$  si et seulement si  $\Pi$  est close.

*Preuve.* 1. Supposons qu'il existe deux entiers  $u < t$  tels que  $\Pi^t = \Pi^u$ . Alors, par le Lemme 1,  $\mathcal{M}_\Pi = \{\Pi, \Pi^2, \dots, \Pi^{t-1}\}$ , et donc,  $\Pi$  est close.  
2. Supposons que  $\Pi$  est close, et soit  $b = |\mathcal{M}_\Pi|$ . Alors clairement, dans la séquence  $\Pi, \Pi^2, \dots, \Pi^{b+1}$ , il y a deux éléments égaux. □

**Remarque 12** Étant donné une matrice  $\Pi$  dans  $\mathbb{M}_n(\mathcal{E})$ , soit  $\mathbb{E}_\Pi = \{(\Pi^k)_{ij} | i, j \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbb{N}\}$ . L'ensemble  $\mathcal{M}_\Pi$  a un nombre fini d'éléments si et seulement si  $\mathbb{E}_\Pi$  a un nombre fini d'éléments.

**Exemple :** Voici trois exemples de cas clos :

- Si, dans le dioïde  $(\mathbb{E}, \min, \otimes, \varepsilon, e)$ ,  $\mathbb{E}$  est un ensemble fini, alors, par la Remarque 12 et le fait que  $\mathbb{E}_\Pi \subseteq \mathbb{E} \cup \{\varepsilon\}$ ,  $\Pi$  est manifestement close :  $\mathbb{E}_\Pi = \mathbb{E} \cup \{\varepsilon\}$ . Par exemple quand  $\mathcal{E} = (\{1\}, \min, \max, +\infty, 1)$ ,  $(\Pi^n)_{ij} = 1$  si et seulement si il existe un  $n$ -chemin de  $i$  à  $j$  dans le graphe. Alors  $\mathbb{E}_\Pi = \{1, +\infty\}$ .
- Si  $\otimes$  est une opération sélective, c'est à dire que pour tout  $a, b \in \mathbb{E}$ ,  $a \otimes b = a$  ou  $b$  (par exemple quand  $\otimes$  est max ou min). Alors  $\mathbb{E}_\Pi = \{\Pi_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$ .
- Si  $\vec{G}$  est un arbre à  $n$  sommets. Dans ce cas il n'y a pas de chemin avec plus que  $n - 1$  arcs, et, pour  $k \geq n$ , les coefficients de  $\Pi^k$  sont tous égaux à  $\varepsilon$ . Alors  $\mathcal{M}_\Pi = \{\Pi, \Pi^2, \dots, \Pi^n\}$ , et donc, par la Remarque 12,  $\Pi$  est close.

**Définition 54** Une  $(d, q, w)$ -propriété  $\mathcal{P}$  est dite *close* si elle est vérifiable, calculable, et si, pour tout graphe mixte  $M$ , la matrice des longueurs  $\Pi$  du graphe auxiliaire  $\vec{G}(M, \mathcal{P}, w)$  est close.

#### Algorithme pour des $(d, q, w)$ - $r$ -propriétés closes

Étant donné la matrice  $\Pi$  des longueurs d'un graphe auxiliaire  $\vec{G}_R(M, \mathcal{P}, w)$  associé à un graphe mixte  $M$  et à une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété close, l'algorithme suivant calcule les plus petits  $u$  et  $t > u$  tels que  $\Pi^t = \Pi^u$  ainsi que  $\Pi^i$  pour tout  $1 \leq i \leq t$  ( $u$  et  $t$  existent puisque  $\mathcal{P}$  est supposée close). Il calcule de plus un vecteur  $\mathcal{T}$  de taille  $t - 1$  et dont le  $i$ ème coefficient correspond à la valeur minimum dans la diagonale de  $\Pi^i$ .

ALGORITHME ROTAGRAPHERS EGALITÉ :

Étape 0 : *Initialisation*  
 $i := 1$  ;

Étape 1 : *Calcul de  $u, t$ , et des puissances de  $\Pi$  jusqu'à  $\Pi^t$*   
 Tant que  $\Pi^i \neq \Pi^j$  pour  $0 < j < i$  :  
   poser  $\mathcal{T}_i$  comme la plus petite valeur dans la diagonale de  $\Pi^i$ ,  
 calculer  $\Pi^{i+1}$  ;  
    $i := i + 1$  ;  
 Pour  $j < i$  tel que  $\Pi^i = \Pi^j$ ,  $u := j$  et  $t := i$ .

FIGURE 3.3 – *Algorithme Rotagraphe Egalité.*

Donc, étant donné une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété close  $\mathcal{P}$  et un graphe mixte  $M$ , en appliquant consécutivement l'Algorithme Construction  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$  (Figure 3.1) et l'Algorithme Rotagraphe Egalité (Figure 3.3), nous obtenons  $u, t$  et le vecteur  $\mathcal{T}$  qui permettent, pour tout entier  $n > d$ , de calculer, en une seule opération, la poids minimum d'un  $q$ -étiquetage de  $\omega_n(M)$  vérifiant  $\mathcal{P}$  :

ALGORITHME ROTAGRAPHERS CLOS :

Étape 1 : *Calcul du poids minimum d'un  $q$ -étiquetage de  $\omega_n(M)$  vérifiant  $\mathcal{P}$*   
 Si  $n < t$  alors retourner  $\mathcal{T}_n$ , sinon retourner  $\mathcal{T}_{u+r}$  pour  $r \equiv (n - u) \pmod{(t - u)}$ .

FIGURE 3.4 – *Algorithme Rotagraphe Clos.*

Comme conséquence des Corollaires 1 et 2, ainsi que du Lemme 1, nous obtenons ce qui suit :

**Théorème 5** *Étant donné un graphe mixte  $M$ , et une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété close  $\mathcal{P}$ , l'Algorithme Construction  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$  (Figure 3.1) et l'Algorithme Rotagraphe Egalité (Figure 3.3) fournissent, en un temps d'exécution indépendant de  $n$ , les données  $(u, t, \mathcal{T})$  utilisées par l'Algorithme Rotagraphe Clos (Figure 3.4) pour calculer, pour tout entier  $n > d$ , en un nombre constant d'opérations élémentaires, le poids minimum d'un  $q$ -étiquetage dans  $\mathcal{P}(\omega_n(M))$ .*

### Algorithme pour des $(d, q, w)$ - $f$ -propriétés closes

Étant donné la matrice  $\Pi$  des longueurs d'un graphe auxiliaire  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w)$  associé à un graphe mixte  $M$  et à une  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété close, l'algorithme suivant calcule les plus petits  $u$  et  $t > u$  tels que  $\Pi^t = \Pi^u$  ainsi que  $\Pi^i$  pour tout  $1 \leq i \leq t$  ( $u$  et  $t$  existent puisque  $\mathcal{P}$  est supposée close). Il calcule de plus un vecteur  $\mathcal{T}$  de taille  $t - 1$  et dont le  $i$ ème coefficient correspond à la valeur de  $(\Pi^i)_{sp}$ .

ALGORITHME FASCIAGRAPHERS EGALITÉ :

Étape 0 : *Initialisation*  
 $i := 1$ ;

Étape 1 : *Calcul de  $u$ ,  $t$ , et des puissances de  $\Pi$  jusqu'à  $\Pi^t$*   
 Tant que  $\Pi^i \neq \Pi^j$  pour  $0 < j < i$  :  
   poser  $\mathcal{T}_i$  comme la valeur de  $(\Pi^i)_{sp}$ , calculer  $\Pi^{i+1}$  ;  
    $i := i + 1$  ;  
 Pour  $j < i$  tel que  $\Pi^i = \Pi^j$ ,  $u := j$  et  $t := i$ .

FIGURE 3.5 – *Algorithme Fasciagraphes Egalité.*

Donc, étant donné une  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété close  $\mathcal{P}$  de fasciagraphe et un graphe mixte  $M$ , en appliquant successivement l'Algorithme Construction  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}$  (Figure 3.2) et l'Algorithme Fasciagraphes Egalité (Figure 3.5), nous obtenons  $u, t$  et le vecteur  $\mathcal{T}$  qui permettent, pour tout entier  $n > d$ , de calculer, en une seule opération, la poids minimum d'un  $q$ -étiquetage de  $\psi_n(M)$  vérifiant  $\mathcal{P}$  :

ALGORITHME FASCIAGRAPHERS CLOS :

Étape 1 : *Calcul du poids minimum d'un  $q$ -étiquetage de  $\psi_n(M)$  vérifiant  $\mathcal{P}$*   
 Si  $n - d + 2 < t$  alors retourner  $\mathcal{T}_{n-d+2}$ , sinon retourner  $\mathcal{T}_{u+r}$  pour  
 $r \equiv (n - d + 2 - u) \pmod{(t - u)}$ .

FIGURE 3.6 – *Algorithme Fasciagraphes Clos.*

Comme conséquence du Corollaire 1, du Théorème 1, et du Lemme 1, nous obtenons ce qui suit :

**Théorème 6** *Étant donné un graphe mixte  $M$ , et une  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété close  $\mathcal{P}$  de fasciagraphe, l'Algorithme Construction  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}$  (Figure 3.2) et l'Algorithme Fasciagraphes Egalité (Figure 3.5) fournissent, en un temps d'exécution indépendant de  $n$ , les données  $(u, t, \mathcal{T})$  utilisées par l'Algorithme Fasciagraphes Clos (Figure 3.6) pour calculer, pour tout entier  $n > d$ , en un nombre constant d'opérations élémentaires, le poids minimum d'un  $q$ -étiquetage dans  $\mathcal{P}(\psi_n(M))$ .*

### 3.2.2 Cas stable

Ce second cas a lieu quand il existe deux entiers  $u < t$  et  $c$  dans  $\mathbb{E}$  tels que  $\Pi^t = \Pi^u \otimes c$ . Pour ce cas, nous considérons un graphe mixte  $M$  et une  $(d, q, w)$ -propriété  $\mathcal{P}$ , vérifiable et calculable.

**Lemme 2** (Comportement pseudo-périodique) *Soit  $\Pi$  la matrice des longueurs du graphe auxiliaire  $\vec{\mathcal{G}}(M, \mathcal{P}, w)$ . Supposons qu'il existe deux entiers  $u < t$  et  $c$  dans  $\mathbb{E}$  tels que  $\Pi^t = \Pi^u \otimes c$ . Alors pour,  $p = t - u$  et tout entier  $k \geq t$ , nous avons  $\Pi^k = \Pi^{u+r} \otimes c^q$  où  $q = \left\lfloor \frac{k-u}{p} \right\rfloor$  et  $(k - u) \equiv r[p]$  (c'est à dire que  $k = u + qp + r$  où  $q, r \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq r < p$ ).*

*En d'autres termes, la séquence des puissances de  $\Pi$  a la forme suivante :  $\Pi, \Pi^2, \dots, \Pi^{u-1}, S_0, S_0 \otimes c, S_0 \otimes c^2, \dots, S_0 \otimes c^i, \dots$  où  $S_0$  est la sous-séquence  $\Pi^u, \Pi^{u+1}, \dots, \Pi^{t-1}$ , et pour  $j \geq 1$ ,  $S_0 \otimes c^j = \Pi^u \otimes c^j, \Pi^{u+1} \otimes c^j, \dots, \Pi^{t-1} \otimes c^j$ .*

*Preuve.* Nous allons tout d'abord prouver l'assertion suivante :

**Assertion 2**

$$\Pi^{i+p} = \Pi^i \otimes c, \forall i \geq u \quad (3.1)$$

Nous allons prouver l'assertion par récurrence sur  $i$ . Puisque  $p = t - u$  et  $\Pi^t$  est supposé être égal à  $\Pi^u \otimes c$ , l'assertion est vraie pour  $i = u$ .

Soit  $i > u$  et supposons que l'hypothèse de récurrence est vraie pour  $i - 1$ , c'est à dire que  $\Pi^{i-1+p} = \Pi^{i-1} \otimes c$ . Nous obtenons la propriété désirée en  $i$  en multipliant cette égalité par  $\Pi$  :  $\Pi^{i+p} = \Pi \otimes (\Pi^{i-1} \otimes c) = \Pi^i \otimes c$  par la distributivité de  $\otimes$  sur  $\min$  (voir Propriété 2), et l'assertion est vérifiée.

Par l'Assertion 2, nous avons que  $\Pi^{i+qp} = \Pi^i \otimes c^q$  pour tout entiers  $q$  et  $i \geq u$ .

Maintenant, soit  $k \geq u$ ,  $q = \lfloor \frac{k-u}{p} \rfloor$  et  $k - u \equiv r[p]$  avec  $q, r$  dans  $\mathbb{N}$  et  $0 \leq r < p$ . Nous avons  $k = u + qp + r$  et donc  $\Pi^k = \Pi^{u+r+qp} = \Pi^{u+r} \otimes c^q$ .  $\square$

Quand  $(\mathbb{E}, \otimes)$  est un groupe abélien, nous sommes capables de caractériser les matrices des longueurs qui vérifient l'hypothèse du Lemme 2.

**Propriété 3** Il est bien connu que, dans un groupe abélien  $(\mathbb{A}, \otimes)$  l'inverse est unique et, pour tout  $a, b$  dans  $\mathbb{A}$ ,  $-(a \otimes b) = (-a) \otimes (-b)$ .

Nous aurons besoin des définitions et notations suivante :

**Définition 55** Étant donné une matrice  $A$  dans  $\mathbb{M}_n(\mathcal{E})$ , le coefficient minimum dans  $A$  est noté  $\min(A)$  **min**  $(A)$ , i.e.  $\min(A) = \min(A_{ij} | i, j \in \{1, \dots, n\})$

**Définition 56** Étant donné un entier  $k$  et une matrice  $A$  dans  $\mathbb{M}_n(\mathcal{E})$  telle que  $\min(A^k) \neq \varepsilon$ , nous notons  $A_k$  la matrice  $A^k \otimes (-\min(A^k))$ . Nous rappelons que  $(-\min(A^k))$  existe puisque  $(\mathbb{E} \setminus \{\varepsilon\}, \otimes)$  est un groupe abélien et  $\min(A^k) \neq \varepsilon$ .

**Définition 57** Une matrice  $\Pi$  dans  $\mathbb{M}_n(\mathcal{E})$  est dite **stable** si l'ensemble  $\mathcal{M}'_{\Pi} = \{\Pi_k | k \in \mathbb{N}\}$  a un nombre fini d'éléments.

**Théorème 7** Soit  $\Pi$  la matrice des longueurs du graphe auxiliaire  $\vec{\mathcal{G}}(M, \mathcal{P}, w)$ , définie dans le dioïde  $(\mathbb{E}, \min, \otimes, \varepsilon, e)$ . Si  $(\mathbb{E} \setminus \{\varepsilon\}, \otimes)$  est un groupe abélien alors il existe deux entiers  $u < t$  et  $c$  dans  $\mathbb{E}$  tels que  $\Pi^t = \Pi^u \otimes c$  si et seulement si  $\Pi$  est stable.

*Preuve.* 1. Supposons qu'il existe deux entiers  $u < t$  et  $c$  dans  $\mathbb{E}$ , tels que  $\Pi^t = \Pi^u \otimes c$ . Alors pour tout  $k \geq t$ , par le Lemme 2, nous avons  $\Pi^k = \Pi^{u+r} \otimes c^q$  où  $q = \lfloor \frac{k-u}{p} \rfloor$ ,  $(k - u) \equiv r[p]$ ,  $p = t - u$ , et  $0 \leq r \leq p - 1$ .

Donc,  $\Pi_k = \Pi^k \otimes (-\min(\Pi^k)) = (\Pi^{u+r} \otimes c^q) \otimes (-\min(\Pi^{u+r} \otimes c^q))$ . Par la distributivité de  $\otimes$  sur  $\min$  (voir la Propriété 2), nous avons



$\min(\Pi^{u+r} \otimes c^q) = \min(\Pi^{u+r}) \otimes c^q$ . Alors

$$\begin{aligned} \Pi_k &= (\Pi^{u+r} \otimes c^q) \otimes (-\min(\Pi^{u+r}) \otimes c^q) \\ &= (\Pi^{u+r} \otimes c^q) \otimes (-\min(\Pi^{u+r})) \otimes (-c^q) \text{ (par la Propriété 3)} \\ &= \Pi^{u+r} \otimes (-\min(\Pi^{u+r})) \otimes c^q \otimes (-c^q) \text{ (par commutativité)} \\ &= \Pi_{u+r}. \end{aligned}$$

Alors, puisque  $0 \leq r \leq p-1$ , et  $p = t-u$ , nous avons  $\mathcal{M}'_{\Pi} = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{t-1}\}$ .

2. Supposons que  $\Pi$  est stable, et soit  $b = |\mathcal{M}'_{\Pi}|$ . Alors, dans la séquence  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{b+1}$ , il y a deux éléments égaux.

Soit  $\Pi_t$  le premier élément dupliqué de cette séquence, c'est à dire que  $t$  est tel que  $\Pi_k \neq \Pi_l$  pour tout entiers  $k \neq l$  et  $1 \leq k, l \leq t-1$ , et il existe un entier  $u \leq t-1$  tel que  $\Pi_u = \Pi_t$ . Donc  $\Pi^t = \Pi_t \otimes \min(\Pi^t) = \Pi_u \otimes \min(\Pi^t) = (\Pi^u \otimes (-\min(\Pi^u))) \otimes \min(\Pi^t)$ . Alors pour  $c = (-\min(\Pi^u)) \otimes \min(\Pi^t)$ , nous avons  $\Pi^t = \Pi^u \otimes c$ .  $\square$

**Remarque 13** *Étant donné une matrice  $\Pi$  dans  $\mathbb{M}_n(\mathcal{E})$ , soit  $\mathbb{E}'_{\Pi} = \{(\Pi_k)_{ij} | i, j \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbb{N}\}$ , et  $\mathbb{E}''_{\Pi} = \{((\Pi^k)_{ij} \otimes (-\Pi^k_{i'j'})) | i, j, i', j' \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbb{N}, \Pi^k_{i'j'} \neq \varepsilon\}$ . Les trois conditions suivantes sont équivalentes et caractéristiques d'une matrice  $\Pi$  stable :*

- $\mathcal{M}'_{\Pi}$  a un nombre fini d'éléments,
- $\mathbb{E}'_{\Pi}$  a un nombre fini d'éléments,
- $\mathbb{E}''_{\Pi}$  a un nombre fini d'éléments.

**Définition 58** *Une  $(d, q, w)$ -propriété  $\mathcal{P}$  est dite **stable** si le dioïde  $(\mathbb{E}, \min, \otimes, e, \varepsilon)$  dans lequel elle est définie est tel que  $(\mathbb{E}, \otimes)$  est un groupe abélien, si elle est vérifiable, calculable, et si, pour tout graphe mixte  $M$ , la matrice des longueurs  $\Pi$  du graphe auxiliaire  $\vec{\mathcal{G}}(M, \mathcal{P}, w)$  est stable.*

L'ensemble des conditions nécessaires pour qu'une  $(d, q, w)$ -propriété soit stable peut paraître difficile à remplir, néanmoins nous allons montrer que pour certaines  $(d, q, w)$ -propriétés, ces conditions sont très raisonnables. Considérons, par exemple, le cas de la  $(3, 2, w)$ - $r$ -propriété de domination  $\mathcal{D}$  étudiée précédemment.

**Théorème 8** *La  $(3, 2, w)$ - $r$ -propriété  $\mathcal{D}$  de domination est stable.*

*Preuve.* Soit  $M$  un graphe mixte,  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{D}, w)$  le graphe auxiliaire associé,  $n$  le nombre de sommets de  $\vec{\mathcal{G}}$  et  $\Pi$  la matrice des longueurs de  $\vec{\mathcal{G}}$ . Les poids étant des entiers, nous effectuerons nos calculs dans le dioïde  $(\mathbb{Z}, \min, +, +\infty, 0)$ .

Rappelons que :

- un 2-étiquetage d'un fasciagraphe d'au moins trois fibres vérifie  $\mathcal{D}^{loc}$  si chaque sommet des fibres centrales (les fibres autres que la première et la dernière) contient au moins un sommet étiqueté 1 dans son voisinage fermé,

- le poids d'un 2-étiquetage dans  $\mathcal{D}^{loc}(\psi_4(M))$  est égal au nombre de sommets étiquetés 1 dans la quatrième fibre.

Nous allons montrer que, soit  $(\Pi_k)_{ij} = +\infty$ , soit  $0 \leq (\Pi_k)_{ij} \leq 5|V(M)|$  pour tout  $k \geq 3$  et tout  $1 \leq i, j \leq n$  et ainsi prouver que  $\Pi$  est stable (voir Remarque 13). Supposons donc que  $(\Pi_k)_{ij} \neq +\infty$ . Par définition de  $\vec{\mathcal{G}}$  et  $\Pi$  et par le Corollaire 2, pour  $1 \leq i, j \leq n$ , dans ce cas,  $(\Pi^k)_{ij}$  est égale au nombre minimum de sommets étiquetés 1 dans les fibres  $M_4$  à  $M_{k+3}$  par un 2-étiquetage dans  $\mathcal{D}^{loc}(\psi_{k+3}(M))$  qui commence par  $u_i$  et finit par  $u_j$  ( $u_i, u_j$  sont dans  $\mathcal{D}^{loc}(\psi_3(M))$ ), et donc  $0 \leq (\Pi_k)_{ij} \leq (\Pi^k)_{ij}$ .

Si  $1 \leq k \leq 5$ , il y a au plus cinq fibres de  $M_4$  à  $M_{k+3}$  et pas plus que la totalité de leurs sommets peuvent être étiquetés 1. Donc dans ce cas  $0 \leq (\Pi_k)_{ij} \leq (\Pi^k)_{ij} \leq 5|V(M)|$ .

Supposons maintenant que  $k > 5$ . Soit  $f^*$  le 2-étiquetage dans  $\mathcal{D}^{loc}(\psi_{k+3}(M))$  tel que le nombre de sommets étiquetés 1 dans les fibres  $M_4$  à  $M_{k+3}$  est égal à  $\min(\Pi^k)$  ( $f^*$  existe puisqu'il existe au moins un 2-étiquetage dans  $\mathcal{D}^{loc}(\psi_{k+3}(M))$ , celui qui étiquette tous les sommets 1). Si  $f^*$  commence par  $u_i$  et finit par  $u_j$ , alors  $(\Pi_k)_{ij} = 0$ . Sinon, depuis  $f^*$ , nous pouvons construire  $f^{ij}$ , un 2-étiquetage dans  $\mathcal{D}^{loc}(\psi_{k+3}(M))$  qui démarre par  $u_i$  et se termine par  $u_j$ , en remplaçant les étiquettes sur les 3 premières et les 3 dernières fibres, respectivement, par  $u_i$  et  $u_j$ , et en étiquetant 1 tous les sommets de la quatrième et de la  $k$ ième fibre. Plus formellement :  $f_{1,3}^{ij} = u_i$ ,  $f_{4,1}^{ij}$  étiquette tous les sommets de la quatrième fibre par 1,  $f_{5,k-5}^{ij} = f_{5,k-5}^*$ ,  $f_{k,1}^{ij}$  étiquette tous les sommets de la  $k$ ième fibre par 1,  $f_{k+1,3}^{ij} = u_j$ .

Par définition,  $f_{1,3}^{ij}$  et  $f_{k+1,3}^{ij}$  sont des sommets de  $\vec{\mathcal{G}}$  et donc sont dans  $\mathcal{D}^{loc}(\psi_3(M))$ . Clairement,  $f_{3,3}^{ij}$  et  $f_{k-1,3}^{ij}$  sont dans  $\mathcal{D}^{loc}(\psi_3(M))$  puisque tous les sommets de leur fibre du milieu sont étiquetés 1. De plus, puisque  $f^* \in \mathcal{D}^{loc}(\psi_{k+3}(M))$ , nous avons que  $f_{h,3}^{ij} \in \mathcal{D}^{loc}(\psi_3(M))$  pour  $5 \leq h \leq k-3$ . Il reste donc à montrer que  $f_{2,3}^{ij}$ ,  $f_{4,3}^{ij}$ ,  $f_{k-4,3}^{ij}$  et  $f_{k-1,3}^{ij}$  sont dans  $\mathcal{D}^{loc}(\psi_3(M))$  pour conclure que  $f^{ij} \in \mathcal{D}^{loc}(\psi_{k+3}(M))$ . Nous savons que puisque  $(\Pi^k)_{ij} \neq +\infty$ , alors il existe  $g^{ij} \in \mathcal{D}^{loc}(\psi_{k+3}(M))$  tel que  $w^{loc}(g^{ij}) = (\Pi^k)_{ij}$ . Comparons  $f_{2,3}^{ij}$  et  $g_{2,3}^{ij}$ . Clairement, tous les sommets étiquetés 1 par  $g_{2,3}^{ij}$  sont aussi étiquetés 1 par  $f_{2,3}^{ij}$ , donc  $f_{2,3}^{ij} \in \mathcal{D}^{loc}(\psi_3(M))$ . De la même façon, tous les sommets étiquetés 1 par  $g_{k-1,3}^{ij}$  sont aussi étiquetés 1 par  $f_{k-1,3}^{ij}$ , donc  $f_{k-1,3}^{ij} \in \mathcal{D}^{loc}(\psi_3(M))$ . Le raisonnement est le même pour  $f_{4,3}^{ij}$  et  $f_{4,3}^*$ , tous les sommets étiquetés 1 par  $f_{4,3}^*$  sont aussi étiquetés 1 par  $f_{4,3}^{ij}$ , donc  $f_{4,3}^{ij} \in \mathcal{D}^{loc}(\psi_3(M))$  et tous les sommets étiquetés 1 par  $f_{k-3,3}^*$  sont aussi étiquetés 1 par  $f_{k-3,3}^{ij}$ , donc  $f_{k-3,3}^{ij} \in \mathcal{D}^{loc}(\psi_3(M))$ .

Alors  $f^{ij}$  est bien un 2-étiquetage dans  $\mathcal{D}^{loc}(\psi_{k+2}(M))$  commençant par  $u_i$  et se terminant par  $u_j$  et donc  $w^{loc}(f^{ij}) \geq (\Pi^k)_{ij}$ . De plus, sur les fibres  $M_4$  à  $M_{k+3}$ ,  $f^{ij}$  diffère de  $f^*$  sur au plus cinq fibres (la quatrième et les quatre dernières). Par conséquent,  $w^{loc}(f^{ij}) \leq \min(\Pi^k) + 5|V(M)|$ . Donc  $0 \leq (\Pi^k)_{ij} - \min(\Pi^k) = (\Pi_k)_{ij} \leq w^{loc}(f^{ij}) - w^{loc}(f^*) \leq 5|V(M)|$ .  $\square$

**Théorème 9** *Etant donné une  $(d, q, w)$ -propriété  $\mathcal{P}$ , si  $\mathcal{P}$  est une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété stable et  $\mathcal{P}^1 \subseteq \mathcal{P}^{loc}$ ,  $\mathcal{P}^3 \subseteq \mathcal{P}^{loc}$  et  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}^{loc}$ , alors  $\mathcal{P}$  est une  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété stable.*

*Preuve.* Si  $\mathcal{P}^1 \subseteq \mathcal{P}^{loc}$ ,  $\mathcal{P}^3 \subseteq \mathcal{P}^{loc}$  et  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}^{loc}$ , il est clair que le graphe  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w)$  sans les sommets  $s$  et  $p$  est isomorphe au graphe  $\vec{\mathcal{G}}'_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w)$ . Donc la matrice  $\Pi'_{\vec{\mathcal{G}}}$  des longueurs du graphe  $\vec{\mathcal{G}}'_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w)$  est identique à la matrice  $\Pi_{\vec{\mathcal{G}}}$  des longueurs du graphe  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w)$  sans les lignes et colonnes correspondants aux sommets  $s$  et  $p$ . On sait que  $\Pi'$  est stable. On sait de plus que dans  $\Pi$ , toutes les entrées de la ligne correspondant au sommet  $p$  et toutes les entrées de la colonne correspondant au sommet  $s$  sont égales à  $\varepsilon$ . Il est donc clair que pour tout entier  $k \geq 1$  et tout sommet  $u_i$  et  $u_j$  autre que  $s$  et  $p$ ,  $(\Pi^k)_{ij} = (\Pi'^k)_{ij}$ . Ainsi il est clair que si  $\Pi'$  est stable, alors  $\Pi$  est stable.  $\square$

Nous allons montrer une conséquence intéressante des  $(d, q, w)$ -propriétés stables lorsque le dioïde concerné est  $(\mathbb{Z}, \min, +, \infty, 0)$ . Pour ce faire, nous avons besoin de la définition suivante :

**Définition 59** *Soit  $\vec{G}$  un graphe orienté et  $l$  une fonction de longueurs des arcs de  $\vec{G}$  dans  $\mathbb{N}$ . La **densité** d'un  $k$ -chemin  $P$  de  $\vec{G}$  est  $\frac{l(P)}{k}$ . Notons que  $P$  est un  $k$ -chemin de densité minimum dans  $\vec{G}$  si et seulement si  $P$  est un  $k$ -chemin de longueur minimum dans  $\vec{G}$ .*

Un  $k$ -circuit étant un  $k$ -chemin, la densité d'un  $k$ -circuit est aussi définie.

Dans un graphe orienté, étant donné deux sommets (non nécessairement distincts)  $v$  et  $w$ , soit il n'y a pas de chemin de  $v$  à  $w$ , soit il n'y a que des chemins élémentaires de  $v$  à  $w$ , soit il existe au moins un chemin non élémentaire de  $v$  à  $w$ . Il n'y a pas de borne sur le nombre d'arcs qu'un chemin de  $v$  à  $w$  peut avoir si et seulement si on se situe dans ce dernier cas.

**Lemme 3.1** *Soit  $\vec{G}$  un graphe orienté muni d'une fonction de longueur  $l$  des arcs dans  $\mathbb{N}$ , et soit  $d^*$  la densité minimum d'un circuit élémentaire de  $\vec{G}$ . La densité minimum d'un circuit dans  $\vec{G}$  est égale à  $d^*$ .*

*Preuve.* Tout d'abord il est clair que comme il y a un nombre fini de circuits élémentaires dans  $\vec{G}$ , le minimum  $d^*$  des densités de ces circuits existe bien. De plus il est bien connu que tout circuit  $C$  peut être décomposé en circuits élémentaires. Par définition de  $d^*$ , chacun de ces circuits élémentaires est de densité au moins  $d^*$ , donc la densité de  $C$  est au moins  $d^*$ , et au moins un circuit de  $\vec{G}$  a la plus petite densité  $d^*$ .  $\square$

**Théorème 10** *Soit  $\vec{G}$  un graphe orienté muni d'une fonction de longueur  $l$  des arcs dans  $\mathbb{N}$  et soit  $d^*$  la plus petite densité d'un circuit élémentaire dans  $\vec{G}$ .*

*Si la matrice  $\Pi$  des longueurs de  $\vec{G}$  est stable pour le dioïde  $(\mathbb{Z}, \min, +, \infty, 0)$ , alors, pour tout couple de sommets  $v$  et  $w$  tel qu'il existe au moins un chemin non élémentaire de  $v$  à  $w$  dans  $\vec{G}$ , la densité minimum des chemins de  $v$  à  $w$  tend vers  $d^*$  lorsque leur cardinalité tend vers l'infini.*

*Preuve.* Soit  $C^*$  un circuit élémentaire de densité  $d^*$ ,  $k^*$  le nombre d'arcs de  $C^*$ , et  $c^* = l(C^*)$ , donc  $d^* = \frac{c^*}{k^*}$ .

Par le Lemme 3.1, nous savons que tout circuit constitué de plusieurs  $C^*$  consécutifs est de longueur minimum parmi les circuits de même cardinalité dans  $\vec{G}$ . Ainsi pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la longueur minimum d'un  $kk^*$ -circuit dans  $\vec{G}$  est égale à  $kc^*$ .

Puisque  $\Pi$  est stable, par le Théorème 7 nous savons qu'il existe trois entiers  $u < t$  et  $c$  tels que  $\Pi^t = \Pi^u + c$ . Soit  $p = t - u$  et  $k \in \mathbb{N}$  tels que  $kk^* \geq u$ . Par le Lemme 2 nous avons que  $\Pi^{kk^*+k^*p} = \Pi^{kk^*} + k^*c$ . Ainsi l'entrée minimum sur la diagonale de  $\Pi^{kk^*+k^*p}$  est égale à la somme de l'entrée minimum sur la diagonale de  $\Pi^{kk^*}$  et  $k^*c$ . Et donc, nous avons que la longueur minimum d'un  $(kk^* + k^*p)$ -circuit est égale à la somme de la longueur minimum d'un  $kk^*$ -circuit et  $k^*c$ , c'est à dire  $(k + p)c^* = kc^* + k^*c$ . Donc  $c = \frac{pc^*}{k^*} = pd^*$ .

Soit  $v$  et  $w$  deux sommets de  $\vec{G}$  tels qu'il existe un chemin non élémentaire de  $v$  à  $w$ . Alors il n'existe pas de borne sur la cardinalité des chemins de  $v$  à  $w$ , et, par le Lemme 2, il existe  $k' \in \mathbb{N}, u \leq k' \leq t$ , tel qu'il existe un  $k'$ -chemin de  $v$  à  $w$ . Soit  $l'$  la longueur minimum d'un tel chemin. Par le Lemme 2, nous avons que, pour tout  $q \in \mathbb{N}$ , la longueur minimum d'un  $(k' + qp)$ -chemin de  $v$  à  $w$  est égale à  $l' + qc$  et donc ce chemin a une densité  $\frac{l'+qc}{k'+qp}$ , qui tend vers  $\frac{c}{p}$  quand  $q$  tend vers l'infini. Nous avons donc  $\frac{c}{p} = \frac{pd^*}{p} = d^*$ .  $\square$

**Remarque 14** *En conséquence du Théorème 10, quand la matrice des longueurs d'un graphe orienté est stable pour le dioïde  $(\mathbb{Z}, \min, +, \infty, 0)$ , pour  $k$  suffisamment grand, tout  $k$ -chemin de longueur minimum de  $v$  à  $w$  contient un circuit de densité  $d^*$ .*

### Algorithme pour des $(d, q, w)$ - $r$ -propriété stables

Étant donné la matrice  $\Pi$  des longueurs d'un graphe auxiliaire  $\vec{G}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w)$  associé à un graphe mixte  $M$  et une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété stable, l'algorithme suivant calcule les plus petits  $u$  et  $t > u$  tels que  $\Pi^t = \Pi^u \otimes c$  pour un certain  $c$  dans  $\mathbb{E}$  ainsi que  $\Pi^i$  pour tout  $i \leq t$  ( $u, t$  et  $c$  existent puisque  $\mathcal{P}$  est supposée être stable).

ALGORITHME ROTAGRAPHES TRANSLATION :

Étape 0 : *Initialisation*

$i := 1$ ;

Étape 1 : *Calcul de  $u, t$ , et des puissances de  $\Pi$  jusqu'à  $\Pi^t$*

Tant que  $\Pi_i \neq \Pi_j$  pour  $0 < j < i$  :

poser  $\mathcal{T}_i$  comme la plus petite valeur dans la diagonale de  $\Pi^i$ ;

calculer  $\Pi^{i+1}$  et  $\Pi_{i+1}$ ;

$i := i + 1$ ;

Pour  $j < i$  tel que  $\Pi_i = \Pi_j$ ,  $u := j$ ,  $t := i$ ,  $c := \min(\Pi^t) \otimes (-\min(\Pi^u))$ .

FIGURE 3.7 – *Algorithme Rotagraphes Translation.*

Donc, étant donné une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété  $\mathcal{P}$  de rotagraphe et un graphe

mixte  $M$ , en appliquant consécutivement l'Algorithme Construction  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$  (Figure 3.1) et l'Algorithme Rotagraphe Translation (Figure 3.7), nous obtenons  $u, t, c$  et le vecteur  $\mathcal{T}$  qui permettent, pour tout entier  $n > d$ , de calculer en une seule opération, le poids minimum d'un  $q$ -étiquetage de  $\omega_n(M)$  vérifiant  $\mathcal{P}$  :

ALGORITHME ROTAGRAPHES STABLE :

Étape 1 : Calcul du poids minimum d'un  $q$ -étiquetage de  $\omega_n(M)$  vérifiant  $\mathcal{P}$   
 Si  $n < t$  alors retourner  $\mathcal{T}_n$ , sinon retourner  $\mathcal{T}_{u+r} \otimes c^q$  pour  $r \equiv (n - u) \bmod (t - u)$  et  $q = \frac{n-u-r}{t-u}$ .

FIGURE 3.8 – Algorithme Rotagraphe Stable.

Comme conséquence des Corollaires 1 et 2, ainsi que du Lemme 2, nous obtenons ce qui suit :

**Théorème 11** *Étant donné un graphe mixte  $M$  et une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété stable  $\mathcal{P}$  de rotagraphe, l'Algorithme Construction  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$  (Figure 3.1) et l'Algorithme Rotagraphe Translation (Figure 3.7) fournissent, en un temps d'exécution indépendant de  $n$ , les données  $(u, t, c, \mathcal{T})$  utilisées par l'Algorithme Rotagraphe Stable (Figure 3.8) pour calculer, pour tout entier  $n > d$ , en un nombre constant d'opérations élémentaires, le poids minimum d'un  $q$ -étiquetage dans  $\mathcal{P}(\omega_n(M))$ .*

### Algorithme pour des $(d, q, w)$ - $f$ -propriétés stables

Étant donné la matrice  $\Pi$  des longueurs d'un graphe auxiliaire  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w)$  associé à un graphe mixte  $M$  et une  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété stable, l'algorithme suivant calcule les plus petits  $u$  et  $t > u$  tels que  $\Pi^t = \Pi^u \otimes c$  pour un certain  $c$  dans  $\mathbb{E}$  ainsi que  $\Pi^i$  pour tout  $i \leq t$  ( $u, t$  et  $c$  existent puisque  $\mathcal{P}$  est supposée être stable).

ALGORITHME FASCIAGRAPHES TRANSLATION :

Étape 0 : Initialisation  
 $i := 1$ ;

Étape 1 : Calcul de  $u, t$ , et des puissances de  $\Pi$  jusqu'à  $\Pi^t$   
 Tant que  $\Pi_i \neq \Pi_j$  pour  $0 < j < i$  :  
   poser  $\mathcal{T}_i$  comme la valeur de  $(\Pi^i)_{sp}$ ; calculer  $\Pi^{i+1}$  et  $\Pi_{i+1}$ ;  
    $i := i + 1$ ;  
 Pour  $j < i$  tel que  $\Pi_i = \Pi_j$ ,  $u := j$ ,  $t := i$ ,  $c := \min(\Pi^t) \otimes (-\min(\Pi^u))$ .

FIGURE 3.9 – Algorithme Fasciagraphe Translation.

Donc, étant donné une  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété  $\mathcal{P}$  de fasciagraphe et un graphe mixte  $M$ , en appliquant consécutivement l'Algorithme Construction  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}$  (Figure 3.2) et l'Algorithme Fasciagraphe Translation (Figure 3.9), nous obtenons  $u, t, c$  et le vecteur  $\mathcal{T}$  qui permettent, pour tout entier  $n > d$ , de calculer en une seule opération, le poids minimum d'un  $q$ -étiquetage de  $\psi_n(M)$  vérifiant  $\mathcal{P}$  :

ALGORITHME FASCIAGRAPHERS STABLE :

Étape 1 : Calcul du poids minimum d'un  $q$ -étiquetage de  $\psi_n(M)$  vérifiant  $\mathcal{P}$

Si  $n - d + 2 < t$  alors retourner  $\mathcal{T}_{n-d+2}$ , sinon retourner  $\mathcal{T}_{u+r} \otimes c^q$   
pour  $r \equiv (n - d + 2 - u) \pmod{(t - u)}$  et  $q = \frac{n-d+2-u-r}{t-u}$ .

FIGURE 3.10 – Algorithme Fasciagraphes Stable.

Comme conséquence du Corollaire 1, du Théorème 1, et du Lemme 2, nous obtenons ce qui suit :

**Théorème 12** *Étant donné un graphe mixte  $M$  et une  $(d, q, w)$ - $f$ -propriété stable  $\mathcal{P}$ , l'Algorithme Construction  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}$  (Figure 3.2) et l'Algorithme Fasciagraphes Translation (Figure 3.9) fournissent, en un temps d'exécution indépendant de  $n$ , les données  $(u, t, c, \mathcal{T})$  utilisées par l'Algorithme Fasciagraphes Stable (Figure 3.10) pour calculer, pour tout entier  $n > d$ , en un nombre constant d'opérations élémentaires, le poids minimum d'un  $q$ -étiquetage dans  $\mathcal{P}(\psi_n(M))$ .*

### 3.3 UNE SECONDE VERSION DE L'ALGORITHME CONSTRUCTION $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$

Nous présentons dans cette section une seconde version de l'Algorithme Construction  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$  (Figure 3.1) qui n'améliore pas les résultats théoriques de complexité de l'ensemble des algorithmes cités précédemment, mais qui, en pratique, permet d'améliorer les temps de calcul. Nous avons développé cette seconde version après avoir programmé la version initiale de l'algorithme et avoir observé des temps de calcul effectifs relativement longs (voir Section 7.2.2).

Étant donné une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété  $\mathcal{P}$  et un graphe mixte  $M$ , nous savons que, pour tout entier  $n \geq d$ , il existe un  $q$ -étiquetage dans  $\mathcal{P}(\omega_n(M))$  si et seulement si il existe un  $n$ -circuit dans  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w)$ . Les sommets de  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$  sont les  $q$ -étiquetages de  $\psi_d(M)$  vérifiant  $\mathcal{P}^{loc}$ . Nous allons construire une seconde version du graphe auxiliaire  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$ , que nous nommons  $\vec{\mathcal{G}}'_{\mathcal{R}}$ , dans laquelle les sommets sont les  $q$ -étiquetages de  $\psi_{d-1}(M)$  vérifiant une propriété  $\mathcal{P}^{loc}$  définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \forall f' \in \mathcal{L}_q(\psi_{d-1}(M)), f' \in \mathcal{P}^{loc}(\psi_{d-1}(M)) \\ \Leftrightarrow \\ \exists f \in \mathcal{P}^{loc}(\psi_d(M)) \text{ telle que } f' = f_{1,d-1} \end{aligned}$$

Deux  $q$ -étiquetages  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{P}^{loc}$  forment un arc de  $\vec{\mathcal{G}}'_{\mathcal{R}}$  si et seulement si  $f_{2,d-2} = g_{1,d-2}$  et  $(f \triangleright_{d-2} g) \in \mathcal{P}^{loc}(\psi_d(M))$ . En d'autres termes, on peut considérer les sommets de  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$  comme étant les arcs de  $\vec{\mathcal{G}}'_{\mathcal{R}}$ . Enfin pour connaître la longueur d'un arc il est nécessaire de redéfinir  $w^{loc}$  en  $w'^{loc}$  : une fonction de poids similaire à  $w^{loc}$  mais des  $q$ -étiquetages de  $\mathcal{P}^{loc}(\mathcal{F}_d)$  dans  $\mathbb{E}$  et telle que pour tout  $f$  dans  $\mathcal{P}(\omega_n(M))$ ,  $w(f) = w'^{loc}(f_{1,d}) \otimes \dots \otimes w'^{loc}(f_{n,d})$ . La longueur d'un arc  $fg$  de  $\vec{\mathcal{G}}'_{\mathcal{R}}$ , avec  $f, g \in \mathcal{P}^{loc}(\psi_{d-1}(M))$ , est alors  $w'^{loc}(f \triangleright_{d-2} g)$  et correspond à l'augmentation due à l'ajout de la dernière fibre de  $g$  à  $f$ .

Le nouvel algorithme de construction du graphe auxiliaire est alors :

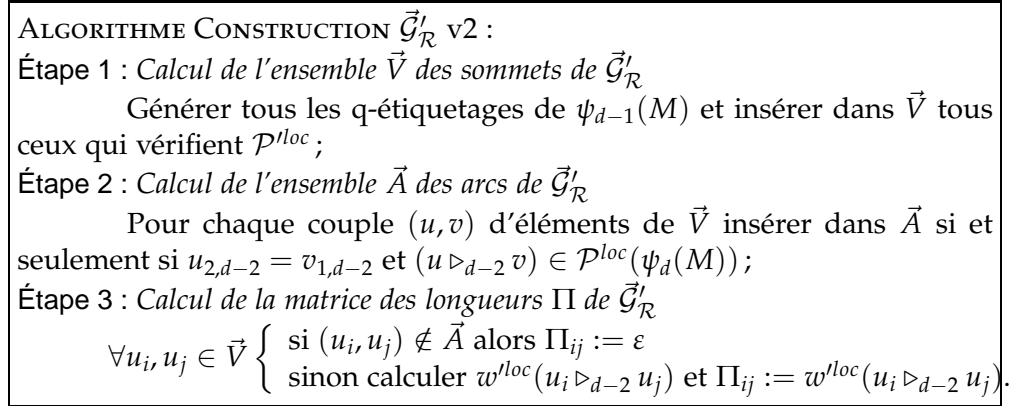


FIGURE 3.11 – Algorithme Construction  $\vec{\mathcal{G}}'_{\mathcal{R}}$  v2.

Notons que le nombre total de sommets possibles du nouveau graphe auxiliaire, au maximum  $q^{(d-1) \times |V(M)|}$  est moins élevé que celui de l'ancien  $q^{d \times |V(M)|}$ . Nous savons que, pour tout entier  $n \geq d$ , il existe  $f \in \mathcal{P}(\omega_n(M))$  si et seulement si il existe un  $k$ -circuit dans  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$  (de longueur  $w(f)$ ). Il est simple de vérifier que cette condition est aussi valide dans  $\vec{\mathcal{G}}'_{\mathcal{R}}$ . En d'autres termes, pour tout entier  $n \geq d$ , il existe  $f \in \mathcal{P}(\omega_n(M))$  si et seulement si il existe un  $k$ -circuit dans  $\vec{\mathcal{G}}'_{\mathcal{R}}$  (de longueur  $w(f)$ ). Ainsi l'ensemble des algorithmes que nous avons présenté plus haut reste toujours valide, et nous permet, étant donné une  $(d, q, w)$ - $r$ -propriété  $\mathcal{P}$ , de calculer grâce à ces algorithmes, un  $q$ -étiquetage de  $\omega_n(M)$  de poids minimum vérifiant  $\mathcal{P}$ .

Remarquons que cette nouvelle version du graphe auxiliaire n'améliore pas les résultats théoriques de complexité présentés plus tôt. La seule conséquence qui nous occupe est celle de la diminution du nombre de sommets du graphe et donc de la taille de sa matrice des longueurs. En effet, étant donné une  $(d, q, w)$ -propriété  $\mathcal{P}$ , il est simple de vérifier que le nombre d'arcs du nouveau graphe auxiliaire correspond au nombre de sommets de l'ancien.

**Exemple** Considérons la  $(3, 2, w)$ - $r$ -propriété de domination présentée plus tôt. Dans ce contexte, pour tout  $f$  dans  $\mathcal{L}_2(\psi_2(M))$ ,  $f$  est dans  $\mathcal{D}^{loc}(\psi_2(M))$  si et seulement si pour tout  $u$  dans la deuxième fibre de  $\psi_2(M)$ , i.e. pour tout  $u \in V(M_2)$ , il existe au moins un sommet étiqueté 1 dans le voisinage fermé de  $u$ , et  $w^{loc}(f)$  est égal au nombre de sommets étiquetés 1 dans  $V(M_2)$ .





# ÉTAT DE L'ART

# 4

Ce chapitre est dévolu à retracer l'état de l'art dans le domaine de la résolution de problèmes combinatoires dans les fasciagraphes et les rotagraphes.

## 4.1 PETIT HISTORIQUE DES FASCIAGRAPHES ET DES ROTAGRAPHES

Comme nous l'avons dit plus tôt en Section 1.1, la classe des fasciagraphes et des rotagraphes a été introduite initialement dans la communauté de la chimie en 1977 dans [PT77]. Entre 1977 et 1986, cette classe de graphes a été essentiellement utilisée dans le cadre de la chimie des polymères ([GPT83] et [GB85]). Dans cette partie, nous allons donner un historique des fasciagraphes et des rotagraphes, en nous focalisant sur les articles concernant l'algorithmique dans les rotagraphes et les fasciagraphes.

[BGMP86] Le premier résultat théorique qui traite d'algorithmique de théorie des graphes dans les rotagraphes et les fasciagraphes intervient en 1986 dans *The matching polynomial of a polygraph* ([BGMP86]). Dans cet article, Darko Babić, Ante Graovac, Bojan Mohar et Ornaž Pisanski traitent du polynôme des couplages. En théorie des graphes, le polynôme des couplages d'un graphe est la fonction génératrice du nombre de couplages du graphe selon leur taille. L'idée générale est de traiter le problème sur une petite partie de la structure répétitive puis d'étendre le résultat au fasciagraphe, ou rotagraphe, entier. Comme nous le démontrons en Annexe (voir Théorème 32), le problème du couplage maximum correspond à une  $(3, 2, w)$ -propriété stable. Il semble logique que le problème qui consiste à énumérer ces couplages partage de même une notion de localité. Ainsi, dans leur étude, les auteurs proposent d'utiliser la "polynomial matrix method" utilisée dans [KC78] et [KC77]. Ce type de méthode consiste à résoudre le problème étudié grâce au calcul d'une matrice associée et de ses puissances. Ainsi, les auteurs proposent une formule qui permet de calculer le polynôme des couplages d'un fasciagraphe, ou d'un rotagraphe, à  $n$  fibres, en calculant la  $n$ ième puissance d'une matrice associée. En outre, étant donné une fibre  $M$ , ils exhibent une relation linéaire de récurrence sur la suite, selon  $n$ , formée par le nombre de couplages de  $\psi_n(M)$  ou  $\omega_n(M)$ .

**[GBS86]** Peu de temps après, dans *Enumeration of Kekulé structures in polymers* ([GBS86]), Ante Graovac, Darko Babić et Mate Strunje adaptent la méthode utilisée dans [BGMP86] au problème d'énumération des structures de Kekulé dans les polymères. Lorsque le polymère est à structure répétitive, la méthode revient à étudier le problème sur une petite partie, dans ce cas deux fibres consécutives, du fasciagraphe ou du rotagraphe qui le représente, puis d'étendre le résultat au fasciagraphe, ou au rotagraphe, entier. Ainsi, les auteurs proposent une formule de récurrence qui permet de calculer le nombre de structures de Kekulé pour un fasciagraphe, ou un rotagraphe, à  $n$  fibres, en fonction d'un certain nombre de conditions initiales qui dépendent de la fibre du fasciagraphe ou du rotagraphe.

Dans ces deux articles, pour le cas particulier où le polymère étudié est à structure répétitive, la méthode consiste à calculer tout d'abord une matrice dont les coefficients dépendent du problème étudié et de la fibre du fasciagraphe, ou du rotagraphe, associé, puis de calculer une puissance de cette matrice en fonction de la taille du fasciagraphe, ou du rotagraphe, concerné. Ces deux algorithmes traitant de problèmes d'énumération et non pas d'optimisation, ils sont un peu éloignés de ceux que nous avons présentés dans la thèse.

**[LS94]** Dans *Constant time computation of minimum dominating sets* ([LS94]), Marilyn Livingston et Quentin F. Stout s'intéressent au problème de domination minimum dans la classe des produit cartésiens d'un graphe  $G$  et d'un graphe  $P(n)$  d'une classe de graphes à un paramètre, tels les  $n$ -chemins, les  $n$ -cycles, ou les arbres binaires complets de hauteur  $n$ . Le produit cartésien de deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  est le graphe  $G$  défini de la façon suivante : les sommets de  $G$  sont les couples de  $V(G_1) \times V(G_2)$  et deux sommets  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  de  $G$  sont reliés par une arête si  $u_1 = u_2$  et  $v_1 v_2 \in E(G_2)$  ou si  $v_1 = v_2$  et  $u_1 u_2 \in E(G_1)$ . Les auteurs présentent un algorithme pour calculer un dominant minimum des graphes de la classe. Notons que la famille des produits cartésiens d'un graphe avec un chemin ou un cycle est une sous-classe des fasciagraphes et des rotagraphes. Etant donné un graphe  $G$  l'algorithme calcule dans un premier temps un vecteur dont les coefficients dépendent des solutions partielles au problème sur  $G$ . Par la suite la méthode construit un dominant de  $G \times P(n)$  en choisissant la meilleure séquence de  $n$  solutions partielles. Pour ce faire les auteurs présentent une procédure pour connaître, à partir du vecteur de solutions partielles sur  $G \times P(1)$ , le vecteur des solutions partielles pour  $G \times P(2)$ . Ainsi l'algorithme construit une séquence de vecteurs de solutions partielles. De plus, il est expliqué qu'il existe une période dans la séquence des vecteurs, i.e., il existe deux entier  $i$  et  $j > i$  tels que le vecteur des solutions partielles de  $G \times P(i)$  est égal à celui des solutions partielles de  $G \times P(j)$  plus une constante. Ainsi, il n'est donc nécessaire de calculer qu'un nombre fini de vecteurs pour pouvoir déduire, pour tout  $n$ , le vecteur des solutions de  $G \times P(n)$ . Clairement, le problème de domination minimum correspondant à une  $(3, 2, w)$ -propriété stable, la méthode présentée est similaire à notre algorithme et s'exécute là aussi en

temps constant. Il est cependant à noter qu'à l'inverse de notre algorithme qui est générique, la méthode présentée ici est spécifique au problème de domination, et en ce sens, plus adaptée à ce problème. Ainsi il est à penser que l'implémentation d'une telle méthode réduirait sûrement les temps de calcul en comparaison à la nôtre.

[Kv96] Sandi Klavžar et Janez Žerovnik proposent dans *Algebraic approach to fasciagraphs and rotagraphs* ([Kv96]) une méthode générique de résolution pour des problèmes d'optimisation dans les rotagraphes et les fasciagraphes. Les problèmes concernés sont ceux qui cherchent un sous-ensemble de sommets vérifiant une certaine propriété (par exemple domination minimum). Pour autant la méthode ne peut pas être utilisée pour traiter tous les problèmes de ce type. Cette méthode est illustrée par le calcul du dominant minimum dans les grilles. Il y a un certain nombre d'imprécisions qui nuisent à la compréhension. Il s'agit néanmoins du premier article qui propose une méthode générique de résolution de problèmes sur les fasciagraphes et les rotagraphes, sans toutefois donner une caractérisation des problèmes pour lesquels la méthode peut être appliquée. Il s'agit aussi du premier article qui présente la recherche d'une solution au problème en terme de chemins dans un graphe auxiliaire associé. Etant donné un problème du bon type étudié sur les fasciagraphes ou les rotagraphes et une fibre  $M$ , le graphe orienté  $\vec{\mathcal{G}}$  est défini de la façon suivante :

- les sommets sont les sous-ensembles de  $W = D \cup R$  avec  $D = \{u \in V(M) \mid \exists v \in V(M), (u, v) \in A(M)\}$  et  $R = \{u \in V(M) \mid \exists v \in V(M), (v, u) \in A(M)\}$ . Donc  $|V(\vec{\mathcal{G}})| = 2^{|W|}$ , et à chaque sommet  $u \in V(\vec{\mathcal{G}})$  correspond un sous-ensemble  $D_u \cup R_u = W_u \subseteq W$
- les arcs sont les couples de sommets  $(u, v)$  qui ne présentent pas de "conflits" entre eux. La signification de ce que peut être un conflit entre deux sommets dépend du problème mais n'est pas définie clairement. Un exemple est toutefois donné, si le problème étudié est le problème du stable maximum,  $(u, v)$  est un arc de  $\vec{\mathcal{G}}$  si et seulement si pour tout couple de sommets  $x, y$  de  $\psi_3(M)$  avec  $x, y \in (R_u \cap V(M_1)) \cup (D_u \cap V(M_2)) \cup (R_v \cap V(M_2)) \cup (D_v \cap V(M_3))$ ,  $xy$  n'est pas une arête de  $\psi_3(M)$ .
- les longueurs des arcs  $(u, v)$  sont définies selon une fonction des longueurs  $l$  et sont telles que  $l(u, v)$  est dans l'ensemble de définition d'un dioïde (dans l'article les auteurs parlent de "path algebra", néanmoins les notions sont équivalentes pour cette utilisation).

L'algorithme est alors présenté en ces termes :

- choisir un dioïde approprié,
- déterminer une fonction de poids appropriée des arcs de  $\vec{\mathcal{G}}$ ,
- calculer, dans le dioïde choisi, la  $n$ ième puissance de la matrice des longueurs de  $\vec{\mathcal{G}}$ ,
- choisir l'entrée de la matrice qui optimise la fonction objectif du problème.

La méthode est ensuite illustrée dans le cadre du problème de domination minimum. Remarquons que notre méthode et celle présentée ici se rejoignent sur les deux derniers points de l'algorithme, et que, en outre, cette méthode permet de résoudre, en plus de problèmes de décision et d'optimisation, des problèmes d'énumération. Cependant la possibilité d'une période, ou d'une pseudo-période, dans la séquence des puissances de la matrice des longueurs n'est pas traitée. Le calcul de la  $n$ ième puissance de la matrice est donc réalisé en temps  $O(\log n)$ .

Notons que la méthode ne prévoit pas le cas où  $D$  et  $R$  s'intersectent. Dans ce cas une partie de la création du graphe auxiliaire peut poser problème.

Enfin de nombreux problèmes qui sont pourtant caractérisés par des  $(d, q, w)$ -propriétés, comme le problème du code identifiant minimum, ou de l'existence d'une  $k$ -coloration, pour  $k \geq 2$  par exemple, ne semblent pas pouvoir être résolus grâce à cette méthode. Cette méthode est à l'origine d'une majorité des propositions d'algorithmes de résolution de problèmes dans les rotagraphes et les fasciagraphes qui suivront, ceux de cette thèse y compris.

**[JMG<sup>+</sup>95]** Dans *Fast computation of the Wiener index of fasciagraphs and rotagraphs* ([JMG<sup>+</sup>95]) Martin Juvan, Bojan Mohar, Ante Graovac, Sandi Klavžar et Janez Žerovnik adaptent l'algorithme de [Kv96] pour calculer l'index de Wiener des fasciagraphes et rotagraphes. Ici, le problème n'est pas un problème de décision ou d'optimisation, mais de calcul. En effet l'index de Wiener est égal à la somme des distances entre chaque paire de sommets. Il s'agit donc ici d'un calcul de plus courtes chaînes, non pas dans un graphe associé, mais directement dans le fasciagraphe. Les auteurs montrent l'existence d'une pseudo-période pour la matrice  $D_i$  des plus courtes distances entre les paires de sommets qui sont dans des fibres à distances  $i$ . L'argument est le même que celui de notre théorème sur les matrices stables. Ainsi il n'est nécessaire de calculer qu'un nombre fini de matrices pour en connaître la  $n$ ième puissance quel que soit  $n$ . Ce résultat est proche de celui énoncé dans [LS94]. Alors que dans [Kv96] la méthode générique proposée pour certains problèmes sur les fasciagraphes et les rotagraphes, était exécutée, à fibre fixée, en  $O(\log n)$ , la méthode adaptée pour l'index de Wiener est, elle, exécutée en temps constant.

**[JMv97]** Dans *Distance-related invariants on polygraphs* ([JMv97]) Martin Juvan, Bojan Mohar et Janez Žerovnik généralisent l'algorithme, sur les rotagraphes et les fasciagraphes, présenté dans [JMG<sup>+</sup>95] à tout problème dit de *distance-related invariants* dont l'index de Wiener fait partie. Pour l'ensemble de ces problèmes, la séquence de puissances des matrices calculées contient une pseudo-période. L'algorithme est donc exécuté, à fibre fixé, en temps constant.

**[Spa98]** Anne Spalding reprend dans sa thèse *Min-plus algebra and graph domination* ([Spa98]) les travaux de Livingston et Stout ([LS94]) sur le pro-

blème de domination dans la classe de graphes à un paramètre, et définit cette méthode comme la "Power Method". Elle explique que la périodicité qui apparaît dans la suite de puissances de matrices qui permettent de répondre au problème, peut être exprimée en termes de valeurs propres et vecteurs propres de la matrice. Elle applique la méthode sur une famille de graphes nommés graphes circulants. Pour de nombreux graphes de cette classe, elle donne le nombre de domination minimum qu'elle a calculé après avoir programmé l'algorithme sur ordinateur. Son algorithme est aussi exécuté en temps constant grâce à la présence d'une pseudo-période dans la séquence de puissances des matrices calculées. Dans sa thèse elle donne aussi une condition suffisante pour qu'une pseudo-période soit présente dans la séquence des matrices. Elle explique en effet que dans le graphe associé à la matrice  $M^1$ , s'il existe un entier  $k$  tel que pour tout entier  $k' \geq k$ , il existe un  $k'$ -chemin entre toute paire de sommets du graphe, alors  $M^1$  est stable (au sens où nous l'avons défini pour les  $(d, q, w)$ -propriétés stables), et donc il y a une pseudo-période dans la séquence des puissances de  $M$ . Néanmoins on peut remarquer que la condition n'est pas nécessaire puisque, par exemple, toute matrice close est trivialement stable, la matrice des longueurs d'un arbre orienté est trivialement close, et donc stable, et pourtant il n'existe pas de  $k$ -chemin pour  $k$  plus grand que la hauteur de l'arbre.

[Ž99] Dans *Deriving formula for domination numbers of fasciagraphs and rotagraphs* ([Ž99]), Janez Žerovnik observe que l'algorithme présenté dans [Kv96] peut être exécuté en temps constant, à fibre fixée, sur les fasciagraphes et les rotagraphes, pour d'autres problèmes que ceux sur les "distance-related invariants" présentés dans [JMG<sup>+</sup>95] et [JMv97]. Il adapte la méthode au problème de domination minimum dans les fasciagraphes et les rotagraphes, ainsi que le problème du stable maximum, et de l'existence d'une  $k$ -coloration. Pour chacun de ces problèmes il adapte l'algorithme proposé dans [Kv96] pour être exécuté en temps constant.

[KV03] Dans *Computing graph invariants on rotagraphs using dynamic algorithm approach : the case of (2,1)-colorings and independence numbers* ([KV03]), Sandi Klavžar et Aleksander Vesel, essayent de caractériser les problèmes pour lesquels le type de méthodes présenté dans l'ensemble des articles précédents donne un algorithme de résolution efficace. Ils donnent une notion de "localité" des problèmes sur les fasciagraphes et les rotagraphes. Étonnamment, les problèmes de type domination ne font pas partie de leur classe de problèmes, alors que dans [Ž99], J. Žerovnik utilise ce même type de méthode. Les auteurs expliquent comment réduire la recherche d'une solution aux problèmes de leur classe dans les fasciagraphes ou les rotagraphes, à la recherche d'un chemin dans un graphe auxiliaire associé. Deux exemples de problèmes "locaux" : la  $L(2,1)$ -coloration, et le problème du stable maximum, sont présentés. Pour chacun de ces problèmes, un algorithme a été programmé sur machine, les auteurs présentent les résultats que le programme a obtenus lorsque les problèmes ont été résolus pour certaines grilles. Nous reviendrons plus en détail sur cet article en Section 4.2.

**[DGM04]** Dans *Identifying codes in some subgraphs of the square lattice* ([DGM04]), Marc Daniel, Sylvain Gravier et Julien Moncel s'intéressent à un problème combinatoire de type domination : le problème du code identifiant dont nous allons parler plus en détail dans la seconde partie de la thèse. Ils proposent un algorithme efficace proche de celui développé dans [KV03] alors que, dans [KV03], le problème du code identifiant ne fait pas partie de la classe des problèmes "locaux" présentée. Leur algorithme est aussi exécuté en  $O(\log n)$  à fibre fixée sur les fasciagraphes et les rotagraphes.

**[Ž04]** Dans *Deriving formulas for the pentomino exclusion problem* ([Ž04]), Janez Žerovnik, reprend ses résultats présentés dans [Ž99] et adapte sa méthode pour le problème d'exclusion des pentominos. L'algorithme est presque identique à celui présenté dans [Ž99].

**[JKV05]** Dans  *$L(2,1)$ -labeling of direct product of paths and cycles* ([JKV05]), Pranava K. Jha, Sandi Klavžar et Aleksander Vesel reviennent sur le problème du  $L(2,1)$ -labeling présenté dans [KV03] et proposent de nouveaux résultats sur des grilles plus grandes.

**[GMP07]** Dans *A generalization of the pentomino exclusion problem : Dislocation of graphs* ([GMP07]), Sylvain Gravier, Julien Moncel et Charles Payan proposent eux aussi un algorithme pour le problème de l'exclusion des pentominos dans les fasciagraphes et les rotagraphes déjà discuté dans [Ž04]. Ils adaptent leur méthode pour un cas particulier de ce problème : le problème de  $\Delta$ -dislocation.

Nous résumons l'ensemble des résultats par article ainsi que dans cette thèse dans le tableau ci-dessous :

Référence	complexité		problème(s) étudié(s)			classe de graphes concernée	
	temps non constant	temps constant	problèmes particuliers	classe restreinte de problèmes	large classe de problèmes	sous-classe des fasciagraphes ou autre classe	fasciagraphes et rotagraphes
[BGMP86]	X		X				X
[GBS86]	X		X				X
[LS94]		X	X			X	
[Kv96]	X			X			X
[JMG <sup>+</sup> 95]		X	X				X
[JMv97]		X		X			X
[Spa98]		X	X			X	
[Ž99]		X		X			X
[KV03]	X				X		X
[DGM04]	X		X				X
[Ž04]		X		X			X
[JKV05]	X		X				X
[GMP07]	X		X				X
Cette thèse		X			X		X

## 4.2 UNE PREMIÈRE CARACTÉRISATION DES PROBLÈMES LOCAUX

Dans cette section, nous allons revenir plus en détail sur l'article [KV03] où les auteurs proposent une caractérisation des problèmes sur les fasciagraphes et les rotagraphes qui pourraient bénéficier d'une méthode de résolution basée sur l'étude de la suite de puissances d'une matrice associée.

Cette caractérisation n'inclut pas plusieurs problèmes, notamment les problèmes de type domination. Nous avons présenté dans [BMP11] un contre-exemple à une partie d'un des théorèmes de l'article, nous le redonnons ci-dessous. Nous expliquons l'approche de [KV03] et revenons sur le théorème en question.

**Définition 60** Une  $q$ -propriété de rotagraphes  $\mathcal{P}$  est dite **héréditaire** si, pour tout  $q$ -étiquetage  $f$  de sommets, dans  $\mathcal{L}_q(\omega_n(M))$ <sup>1</sup> :

$$f \in \mathcal{P}(\omega_n(M)) \Rightarrow f_{i,k} \in \mathcal{P}(\psi_k(M)) \forall i, k \in \{1, \dots, n\}$$

**Définition 61** Soit un entier  $d \geq 2$ . Une  $q$ -propriété  $\mathcal{P}$  est dite  **$d$ -locale**, si pour tout rotagraphe  $\omega_n(M)$  et pour tout  $q$ -étiquetage  $f$  dans  $\mathcal{L}_q(\omega_n(M))$ , on a

$$f_{i,d} \in \mathcal{P}(\psi_d(M)) \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow f \in \mathcal{P}(\omega_n(M))$$

Dans [KV03], les notions d'hérédité et de  $d$ -localité des  $q$ -propriétés pour le cas des  $q$ -propriétés de fasciagraphes sont définies de façon similaires.

**Remarque 15** Les  $q$ -propriétés de rotagraphes qui sont à la fois héréditaires et  $d$ -locales, sont aussi des  $q$ -propriétés pseudo- $d$ -locales de rotagraphes.

En effet, soit  $\mathcal{P}$  une  $q$ -propriété héréditaire et  $d$ -locale de rotagraphes. Par définition,  $\mathcal{P}$  est aussi pseudo- $d$ -locale avec  $\mathcal{P}^{loc} = \mathcal{P}$ .

**Remarque 16** Les  $q$ -propriétés de fasciagraphes qui sont à la fois héréditaires et  $d$ -locales, sont aussi des  $q$ -propriétés pseudo- $d$ -locales de fasciagraphes.

En effet, soit  $\mathcal{P}$  une  $q$ -propriété héréditaire et  $d$ -locale de fasciagraphes. Par définition,  $\mathcal{P}$  est aussi pseudo- $d$ -locale avec  $\mathcal{P}^1 = \mathcal{P}^2 = \mathcal{P}^3 = \mathcal{P}$ .

**Le graphe orienté  $\vec{D}_d(M, \mathcal{P})$**  Étant donné une  $q$ -propriété héréditaire et  $d$ -locale  $\mathcal{P}$  de rotagraphe, et  $M$  un graphe mixte, le graphe orienté  $\vec{D}_d(M, \mathcal{P})$  est défini de la façon suivante :

les sommets sont les  $q$ -étiquetages dans  $\mathcal{P}(\psi_2(M))$ , les arcs sont définis selon la valeur de  $d$  :

- si  $d = 2$  : pour tout  $f, g \in V(\vec{D}_2(M, \mathcal{P}))$ ,  $(f, g) \in A(\vec{D}_2(M, \mathcal{P}))$  si et seulement si  $f_{2,1} = g_{1,1}$ ,
- si  $d = 3$  : pour tout  $f, g \in V(\vec{D}_3(M, \mathcal{P}))$ ,  $(f, g) \in A(\vec{D}_3(M, \mathcal{P}))$  si et seulement si  $f_{2,1} = g_{1,1}$  et  $f \triangleright g \in \mathcal{P}(\psi_3(M))$ ,
- si  $d \geq 4$ , le graphe a deux types d'arcs :

1. Dans [KV03], les  $q$ -étiquetages sont seulement des fonctions d'étiquetage de sommets. Dans notre approche, le domaine de définition des  $q$ -étiquetages inclut les sommets et les arêtes, nous permettant ainsi de traiter une plus large gamme de problèmes.



- les arcs normaux : pour tout  $f, g \in V(\vec{D}_d(M, \mathcal{P}))$ ,  $(f, g) \in A(\vec{D}_d(M, \mathcal{P}))$  si et seulement si  $f_{2,1} = g_{1,1}$ ,
- les  $d$ -arcs : pour tout  $f, g \in V(\vec{D}_d(M, \mathcal{P}))$ ,  $(f, g)$  est un  $d$ -arc si et seulement si il existe un chemin  $\gamma = f_1, f_2, \dots, f_{d-1}$  de longueur  $d - 2$  tel que  $f_1 = f$  et  $f_{d-1} = g$  et dont le  $q$ -étiquetage  $h = f_1 \triangleright_1 f_2 \triangleright_1 \dots \triangleright_1 f_{d-1}$  est tel que  $h \in \mathcal{P}(\psi_d(M))$ ,

Nous présentons ci-dessous l'assertion présentée dans [KV03] sous la dénomination "Theorem 1" :

**Assertion 3** Soit  $\mathcal{P}$  une  $q$ -propriété héréditaire et  $d$ -locale ( $d \geq 2$ ), et soit  $\omega_n(M)$  un rotagraphe ( $n \geq d + 1 \geq 3$ ). L'ensemble  $\mathcal{P}(\omega_n(M)) \neq \emptyset$  si et seulement si  $\vec{D}_d(M, \mathcal{P})$  contient une suite de  $n$  sommets  $f_1, f_2, \dots, f_n$  (non nécessairement distincts) tels que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

- $(f_i, f_{i+1})$  est un arc normal de  $\vec{D}_d(M, \mathcal{P})$
- si  $d \geq 4$ ,  $(f_i, f_{i+d-2})$  est un  $d$ -arc de  $\vec{D}_d(M, \mathcal{P})$

Pour  $d \in \{2, 3\}$ , l'Assertion 3 est correcte telle que prouvée dans [KV03]. Elle peut aussi être déduite facilement des résultats que nous avons présentés précédemment.

Ainsi, dans ce cas, calculer une solution au problème est équivalent à calculer un chemin dans un graphe associé. Dans [KV03], l'algorithme qui calcule ce chemin n'est pas explicitement donné, mais il est bien connu, comme déjà discuté auparavant, qu'il existe une méthode exécutable en  $O(\log n)$  pour trouver un  $n$ -chemin dans un graphe, et ce grâce au calcul des puissances de la matrice d'adjacence du graphe.

Pour  $d \geq 4$  la preuve de l'Assertion 3 n'est plus correcte. Nous présentons un contre-exemple pour  $d = 5$  qui peut être généralisé pour tout  $d \geq 5$ . Dans cette optique, nous définissons une 2-propriété  $Cent$  de (rota)graphes de la façon suivante :

Un (rota)graphe  $R$  vérifie  $Cent$  si et seulement si il existe un 2-étiquetage  $f$  de  $R$  tel que pour toute chaîne de 5 sommets  $v, w, x, y, z$ , nous avons  $f(v) = f(w) = f(y) = f(z) = 1$  et  $f(x) = 2$  (voir Figure 4.1).



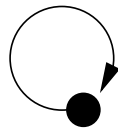
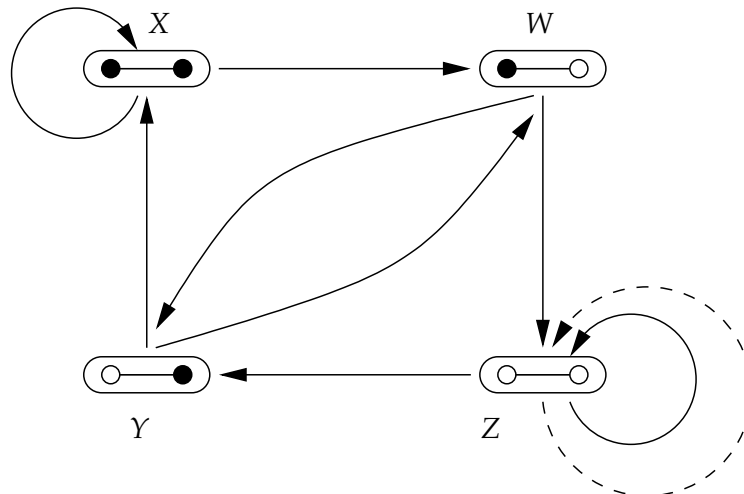
FIGURE 4.1 – Une chaîne de 5 sommets satisfaisant  $Cent$  : le sommet plein est étiqueté 2, les sommets vides sont étiquetés 1

Cette 2-propriété est héréditaire et 5-locale. En effet, si  $R$  satisfait  $Cent$ , alors tout sous-graphe de  $R$  satisfait  $Cent$ , et si tout 5-uplet de fibres consécutives de  $R$  satisfait  $Cent$  alors  $R$  satisfait  $Cent$  puisque toute chaîne de 5 sommets de  $R$  est contenue dans un 5-uplet de fibres consécutives de  $R$ .

De plus, il est facile de vérifier qu'un graphe contenant une chaîne de 6 sommets ne peut pas satisfaire la propriété  $Cent$ .

Pour le graphe mixte  $M = (V, E, A)$  de la Figure 4.2, le rotagraphe  $\omega_n(M)$  est un  $n$ -cycle.

Construisons le graphe orienté  $\vec{D}_5(M, Cent)$  (voir Figure 4.3) :

FIGURE 4.2 – Un graphe mixte  $M$ FIGURE 4.3 – Le graphe  $\vec{D}_5(M, Cent)$ 

L'arc  $(Z, Z)$  (en pointillé sur la figure) est un  $d$ -arc. En effet le 2-étiquetage  $g = Z \triangleright_1 Y \triangleright_1 W \triangleright_1 Z$  est tel que  $g \in Cent(\psi_5(M))$ .

La suite  $Z, Z, \dots, Z$ ,  $n$  fois, satisfait les deux conditions de l'Assertion 3, et pourtant, pour tout  $n \geq 6$ ,  $\omega_n(M)$  ne satisfait pas  $Cent$ , puisqu'il contient une chaîne de 6 sommets.

# CONCLUSION DE LA 1ÈRE PARTIE

# 5

Dans cette première partie de la thèse, nous avons développé un cadre théorique, à travers les  $(d, q, w)$ -propriétés, permettant une caractérisation, inexistante jusqu'alors, d'une classe de problèmes combinatoires que l'on sait résoudre efficacement sur les fasciagraphes et/ou les rotagraphes. Pour l'ensemble de ces problèmes, à fibre fixée, nous donnons un algorithme efficace, autrement dit exécutable en temps logarithmique en le nombre de fibres. Nous donnons de plus des conditions fortes, de par les  $(d, q, w)$ -propriétés closes et stables, permettant de savoir s'il existe une période, ou un pseudo-période, dans la série des puissances des matrices que nous calculons, permettant ainsi de ne calculer qu'un nombre fini de matrices pour pouvoir répondre au problème quel que soit le nombre de fibres du rotagraph, ou du fasciagraphe, concerné.

Nous tenons à faire remarquer qu'un nombre important de problèmes combinatoires classiques correspondent à des  $(d, q, w)$ -propriétés, certaines closes ou stables. Ainsi nous avons vu que le problème du dominant minimum correspond à une  $(3, 2, w)$ -propriété stable, où le dioïde concerné est  $(\mathbb{Z}, \min, +, +\infty, 0)$  (Théorème 8).

Dans la seconde partie de la thèse, nous prouvons que les problèmes code  $t$ -identifiant minimum (Théorèmes 2 et 5), code  $t$ -dominant-localisateur minimum (Théorèmes 3 et 6), et code  $t$ -dominant-total-localisateur minimum (Théorèmes 4 et 7), pour tout entier  $t \geq 1$ , correspondent à des  $(4t + 1, 2, w)$ -propriétés stables, où le dioïde concerné est  $(\mathbb{Z}, \min, +, +\infty, 0)$ .

Enfin, nous prouvons en Annexe que les problèmes de l'existence d'un dominant parfait, Théorème 29, de l'existence d'une  $k$ -coloration propre, Théorème 30, du stable maximum, Théorème 31, et du couplage maximum, Théorème 32, sont respectivement une  $(3, 2, w)$ -propriété close dans le dioïde  $\mathcal{E} = (\{1\}, \min, \max, +\infty, 1)$ , une  $(2, k, w)$ -propriété close dans le dioïde  $\mathcal{E} = (\{1\}, \min, \max, +\infty, 1)$ , une  $(2, 2, w)$ -propriété stable dans le dioïde  $\mathcal{E} = (\mathbb{Z}, \max, +, -\infty, 0)$  et une  $(3, 2, w)$ -propriété stable dans le dioïde  $\mathcal{E} = (\mathbb{Z}, \max, +, -\infty, 0)$ .

**Remarque 17** *Les  $(d, q, w)$ -propriétés closes dont le dioïde est  $\mathcal{E} = (\{1\}, \min, \max, +\infty, 1)$  correspondent à des problèmes de décision où la question est de savoir si un rotagraph ou un fasciagraphe vérifie la propriété donnée. Ces problèmes ont fait l'objet du premier travail de cette thèse et ont donné lieu à l'article [BMP11]. Les  $(d, q, w)$ -propriétés*

*closets ou stables en sont une généralisation et ont donné lieu à un second manuscrit : [BMP].*

**Remarque 18** *Remarquons que le dioïde  $\mathcal{E} = (\{1\}, \min, \max, +\infty, 1)$  est équivalent au dioïde  $\mathcal{E}' = (\{1\}, \max, \min, 0, 1)$ .*

Pour les problèmes de code 1-identifiant minimum, code 1-dominant-localisateur minimum et code 1-dominant-total-localisateur minimum, nous avons programmé l'algorithme sur ordinateur, ce qui nous a permis de répondre à des questions ouvertes sur les bandes circulaires et infinies. Nous aborderons ce point plus en détail dans la seconde partie de la thèse.

Il est aussi important de remarquer que ces algorithmes sont génériques et non pas adaptés à des problèmes précis. C'est pourquoi il est possible d'améliorer la méthode de création du graphe auxiliaire (de par le nombre de sommets qu'il est possible de diminuer, ou le nombre d'arêtes ...) lorsque l'on traite un problème en particulier, comme par exemple dans [LS94] ou [Spa98] pour le problème de domination, ou dans [DGM04] pour le problème du code identifiant que nous aborderons plus en détail dans la seconde partie de la thèse.

Comme poursuite de ces travaux, il serait intéressant de regarder quelle généralisation il est possible d'appliquer aux  $(d, q, w)$ -propriétés. Notamment il est assez simple de remarquer que pour les  $(d, q, w)$ - $f$ -propriétés, il est possible d'adapter nos résultats, même si les effets de bords concernent un nombre borné de fibres différent de  $d$ . Autrement dit il est possible d'adapter la méthode même si, étant donné une  $q$ -propriété  $\mathcal{P}$  de fasciagraphes,  $\mathcal{P}^1$  et/ou  $\mathcal{P}^3$  ne sont pas des propriétés sur  $\mathcal{F}_d$  mais sur  $\mathcal{F}_{d'}$  et  $\mathcal{F}_{d''}$  respectivement, avec  $d'$  et  $d''$  différents de  $d$ .

Dans le même état d'esprit, il doit être possible d'adapter l'algorithme pour d'autres graphes à structures répétitives tels que les graphes constitués de la façon suivante : étant donné un graphe orienté  $\vec{G}$  et une fibre  $M = (V, E, A)$ ,  $\vec{G}_n$  est le graphe orienté obtenu en remplaçant tous les arcs de  $\vec{G}$  par des  $n$ -chemins. Puis  $G_n(M)$  est le graphe non orienté obtenu en remplaçant les sommets de  $\vec{G}_n$  par le graphe  $(V, E)$  et les arcs de  $\vec{G}_n$  selon le schéma dicté par les arcs de  $A$ . Le fasciagraphe  $\psi_{n+2}(M)$  est donc isomorphe au graphe  $G_n(M)$  ainsi construit lorsque  $\vec{G}$  est un 2-chemin, et  $\omega_{3n+3}(M)$  est isomorphe au graphe  $G_n(M)$  lorsque  $\vec{G}$  est un 3-cycle orienté. Ainsi à graphe  $\vec{G}$  et fibre  $M$  fixés, il doit être possible d'adopter une approche proche de la nôtre où dans un premier temps l'algorithme calculerait les  $n$ -chemins, puis déciderait la façon de les recoller. Comme, à graphe  $\vec{G}$  fixé, il y a un nombre fini et constant d'endroits où il est nécessaire de "recoller" les solutions données par les  $n$ -chemins, il doit être possible de donner un algorithme efficace pour répondre aux problèmes combinatoires correspondant aux  $(d, q, w)$ -propriétés dans ce type de graphes.

**Deuxième partie**

**Les codes identifiants**



# INTRODUCTION

# 6

Dans ce chapitre nous présentons les problèmes de code  $t$ -identifiant minimum, code  $t$ -dominant-localisateur minimum et code  $t$ -dominant-total-localisateur minimum.

## 6.1 DÉFINITION

Dans la première partie de cette thèse, nous avons parlé du problème de domination qui consiste, étant donné un graphe  $G$ , à trouver un dominant minimum de  $G$ . Nous avons défini le dominant d'un graphe  $G$  comme étant un sous-ensemble  $C$  de sommets de  $G$  tel que, pour tout sommet  $u$  de  $G$ ,  $N[u] \cap C \neq \emptyset$ . Les trois problèmes que nous traitons dans cette partie sont des problèmes proches de celui de domination. Nous en donnons les définitions ci-dessous.

Pour commencer, nous allons étendre la définition du dominant d'un graphe, au  $t$ -dominant, ou code  $t$ -couvrant, d'un graphe de la façon suivante.

**Définition 62** *Etant donné un graphe  $G$  et un entier  $t \geq 1$ , nous définissons un  **$t$ -dominant**, ou **code  $t$ -couvrant**, de  $G$  comme étant un sous-ensemble  $C$  de sommets de  $G$  tel que, pour tout sommet  $u$  de  $G$ ,  $\mathcal{B}_t(u) \cap C \neq \emptyset$ . Si un sommet  $v$  est dans  $\mathcal{B}_t(u) \cap C$ , on dit que  $u$  est  **$t$ -couvert**, ou  **$t$ -dominé** par  $v$ .*

**Définition 63** *Etant donné un graphe  $G = (V, E)$ , et un  $t$ -dominant  $C \subseteq V$  de  $G$ ,  $C$  est un  $t$ -dominant **total** si pour tout sommet  $u$  de  $G$ ,  $(\mathcal{B}_t(u) \setminus \{u\}) \cap C \neq \emptyset$ .*

**Définition 64** *Etant donné un graphe  $G = (V, E)$ , un sous-ensemble  $C$  de sommets de  $G$  et un entier  $t \geq 1$ , on dit qu'un sommet  $c$  de  $C$   **$t$ -sépare** les sommets  $u$  et  $v$  de  $G$  si  $c$  est dans la différence symétrique de  $\mathcal{B}_t(u) \cap C$  et  $\mathcal{B}_t(v) \cap C$ , c'est à dire  $c$   $t$ -domine un et un seul sommet parmi  $u$  et  $v$ .*

**Définition 65** *Etant donné un graphe  $G = (V, E)$ , deux sous-ensembles de sommets  $C$  et  $W \subseteq V(G)$  et un entier  $t \geq 1$ , on dit que  $C$   **$t$ -sépare**  $W$  si pour tout couple de sommets distincts  $u$  et  $v$  dans  $W$ , il existe un sommet  $c$  dans  $C$  qui  $t$ -sépare  $u$  et  $v$ .*

**Définition 66** *Etant donné un graphe  $G$ , un sous-ensemble  $C$  de sommets de  $G$  et un entier  $t \geq 1$ ,  $C$  est un **code  $t$ -séparateur** de  $G$  si pour tout couple  $(u, v)$  de sommets de  $G$ , il existe  $c$  dans  $C$  qui  $t$ -sépare  $u$  et  $v$ .*

**Définition 67** Etant donné un graphe  $G = (V, E)$ , un **code  $t$ -identifiant** de  $G$  est un sous-ensemble  $C$  de  $V$  (voir Figure 6.1) tel que,

- pour tout sommet  $u$  de  $V$ ,  $\mathcal{B}_t(u) \cap C \neq \emptyset$ ,
- pour tout couple de sommets  $(u, v)$  de  $V$ , ( $u \neq v$ ),  $(\mathcal{B}_t(u) \cap C) \Delta (\mathcal{B}_t(v) \cap C) \neq \emptyset$ .

En d'autres termes, un code  $t$ -identifiant de  $G$  est un code à la fois  $t$ -dominant et  $t$ -séparateur de  $G$ .

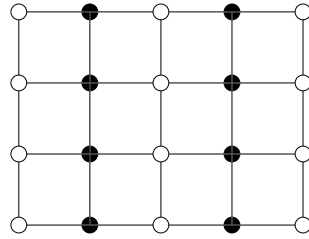


FIGURE 6.1 – L'ensemble des sommets noirs forme un code 1-identifiant du graphe.

**Définition 68** Etant donné un graphe  $G = (V, E)$ , un **code  $t$ -dominant-total-localisateur**, aussi nommé  **$t$ -LTDset**, de  $G$  est un sous-ensemble  $C$  de  $V$  (voir Figure 6.2) tel que,

- pour tout sommet  $u$  de  $V$ ,  $(\mathcal{B}_t(u) \setminus \{u\}) \cap C \neq \emptyset$ ,
- pour tout couple de sommets  $(u, v)$  de  $V \setminus C$ ,  $(\mathcal{B}_t(u) \cap C) \Delta (\mathcal{B}_t(v) \cap C) \neq \emptyset$ .

En d'autres termes, un  $t$ -LTDset  $C$  de  $G$  est un  $t$ -dominant total de  $G$  et qui  $t$ -sépare tout couple de sommets de  $G \setminus C$ .

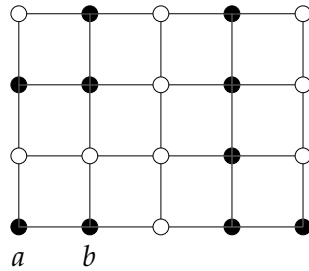


FIGURE 6.2 – L'ensemble des sommets noirs forme un 1-LTDset du graphe. L'ensemble des sommets noirs ne forme pas un code 1-identifiant puisque les sommets  $a$  et  $b$  ne sont pas 1-séparés.

**Définition 69** Etant donné un graphe  $G = (V, E)$ , un **code  $t$ -dominant-localisateur**, aussi nommé  **$t$ -LDset**, de  $G$  est un sous-ensemble  $C$  de  $V$  (voir Figure 6.3) tel que,

- pour tout sommet  $u$  de  $V$ ,  $\mathcal{B}_t(u) \cap C \neq \emptyset$ ,
- pour tout couple de sommets  $(u, v)$  de  $V \setminus C$ ,  $(\mathcal{B}_t(u) \cap C) \Delta (\mathcal{B}_t(v) \cap C) \neq \emptyset$ .

En d'autres termes, un  $t$ -LDset  $C$  de  $G$  est un  $t$ -dominant de  $G$  et qui  $t$ -sépare tout couple de sommets de  $G \setminus C$ .

La notion de code identifiant a été introduite dans [KCL98]. Celle de code dominant-localisateur a été présentée dans [Sla87, Sla88]. Celle de code dominant-total-localisateur dans [HHHo6a]. Les problèmes autour de ces



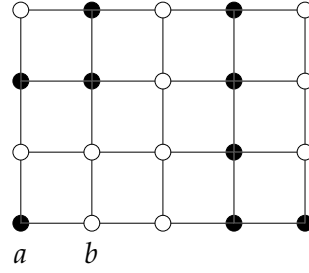


FIGURE 6.3 – L'ensemble des sommets noirs forme un 1-LDset du graphe. L'ensemble des sommets noirs ne forme pas un code 1-identifiant puisque les sommets  $a$  et  $b$  ne sont pas 1-séparés. L'ensemble des sommets noirs ne forme pas un 1-LTDset puisque le sommet  $a$  n'est pas 1-dominé par un autre sommet que lui-même.

notions sont largement étudiés dans la littérature, voir, entre autres, [Lob]. Nous allons détailler certaines propriétés concernant ces problèmes.

## 6.2 PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

**Propriété 4** Etant donné un graphe  $G$  et un sous-ensemble  $C$  de sommets de  $G$ , si  $C$  est un code  $t$ -identifiant de  $G$ , alors  $C$  est un  $t$ -LDset de  $G$ .

*Preuve.* Un code  $t$ -identifiant  $C$  est un  $t$ -dominant  $t$ -séparateur de  $G$ . En particulier il s'agit donc d'un  $t$ -dominant  $t$ -séparant  $G \setminus C$ .  $\square$

**Propriété 5** Etant donné un graphe  $G$  et un sous-ensemble  $C$  de sommets de  $G$ , si  $C$  est un  $t$ -LTDset de  $G$ , alors  $C$  est un  $t$ -LDset de  $G$ .

*Preuve.* Un  $t$ -LTDset  $C$  est un  $t$ -dominant total  $t$ -séparant  $G \setminus C$ . En particulier il s'agit donc d'un  $t$ -dominant  $t$ -séparant  $G \setminus C$ .  $\square$

**Définition 70** Etant donné un graphe  $G$  et deux sommets  $u$  et  $v$  de  $G$ , on dit que  $u$  et  $v$  sont des vrais jumeaux si  $N[u] = N[v]$ .

**Propriété 6** Un graphe  $G$  admet un code  $t$ -identifiant, si et seulement si, pour tout couple de sommets  $(u, v)$  de  $G$ ,  $\mathcal{B}_t(u) \neq \mathcal{B}_t(v)$ . En particulier,  $G$  a un code 1-identifiant si et seulement si il n'existe pas de vrais jumeaux dans  $G$ .

*Preuve.* Il est simple de voir que s'il existe deux sommets  $u$  et  $v$  tels que  $\mathcal{B}_t(u) = \mathcal{B}_t(v)$ , alors il n'existe pas de sous-ensemble de sommets de  $G$   $t$ -séparant  $u$  et  $v$ . Dans le cas contraire, l'ensemble  $V$  des sommets de  $G$  est un code  $t$ -identifiant trivial de  $G$  puisque pour tout couple de sommets  $u$  et  $v$ ,  $\mathcal{B}_t(u) \cap V \neq \mathcal{B}_t(v) \cap V$ .  $\square$

**Propriété 7** Si  $G$  admet un code  $t$ -identifiant, alors  $G$  admet un code  $t'$ -identifiant pour tout entier  $t' \leq t$ .

*Preuve.* Cette propriété est une conséquence de la Propriété 6. D'après la Propriété 6,  $G$  admet un code  $t$ -identifiant si et seulement si pour tout couple de sommets  $u$  et  $v$ ,  $\mathcal{B}_t(u) \neq \mathcal{B}_t(v)$ . Or dans ce cas, comme pour tout sommet  $u$  et pour tout entier  $t' \leq t$ ,  $\mathcal{B}_t(u) = \cup_{u' \in \mathcal{B}_{t'}(u)} \mathcal{B}_{t-t'}(u')$ , nous avons pour tout

couple de sommets  $u$  et  $v$ ,  $\cup_{u' \in \mathcal{B}_{t'}(u)} \mathcal{B}_{t-t'}(u') \neq \cup_{v' \in \mathcal{B}_{t'}(v)} \mathcal{B}_{t-t'}(v')$ , et donc  $\mathcal{B}_{t'}(u) \neq \mathcal{B}_{t'}(v)$ . □

**Propriété 8** *Tout graphe  $G$  admet un  $t$ -LDset, quel que soit l'entier  $t \geq 1$ .*

*Preuve.* En effet, l'ensemble  $V$  des sommets de  $G$  est un  $t$ -LDset trivial de  $G$ . □

**Propriété 9** *Un graphe  $G$  admet un  $t$ -LTDset si et seulement si il n'existe pas de sommet isolé dans  $G$ , quel que soit l'entier  $t \geq 1$ .*

*Preuve.* En effet, si  $G$  a un sommet isolé  $u$ , alors, pour tout sous-ensemble  $C$  de sommets,  $(\mathcal{B}_t(u) \setminus \{u\}) \cap C = \emptyset$  donc  $C$  n'est pas un  $t$ -LTDset de  $G$ . Dans le cas contraire, l'ensemble  $V$  des sommets de  $G$  est un  $t$ -LTDset trivial de  $G$ . □

**Propriété 10** ([CHLo3]) *Etant donné un entier  $k$  et un graphe  $G$  connexe, les problèmes de décision consistant à savoir s'il existe un code  $t$ -identifiant ou un  $t$ -LDset de cardinalité au plus  $k$  sont des problèmes  $\mathcal{NP}$ -complets pour tout entier  $t \geq 1$ .*

Les problèmes d'optimisation de code  $t$ -identifiant,  $t$ -LDset et  $t$ -LTDset consistent à trouver, étant donné un graphe  $G$ , respectivement, un code  $t$ -identifiant, un  $t$ -LDset ou un  $t$ -LTDset de cardinalité minimum.

# CODE IDENTIFIANT : UNE (5, 2, $w$ )-PROPRIÉTÉ, APPLICATION DU MODÈLE THÉORIQUE POUR LES FASCIAGRAPHERS ET LES ROTAGRAPHES

Dans ce chapitre, nous allons traiter des problèmes d'optimisation code  $t$ -identifiant minimum, code  $t$ -dominant-localisateur minimum et code  $t$ -dominant-total-localisateur minimum, sur les rotagraphes et les fasciagraphes. Pour l'ensemble de ces trois problèmes on s'attache à minimiser le cardinal de l'ensemble de sommets qui constitue le code.

## 7.1 CAS GÉNÉRAL

Le but de cette section est de montrer que ces trois notions correspondent à des  $(4t + 1, 2, w)$ -propriétés stables dans  $(\mathbb{Z}, \min, +, +\infty, 0)$ .

**Propriété 11** *Trivialement, la propriété  $\text{Code}_t$  (resp.  $\mathcal{LDset}_t$ ,  $\mathcal{LTDset}_t$ ) : "posséder un code  $t$ -identifiant" (resp. code  $t$ -dominant-localisateur, code  $t$ -dominant-total-localisateur) est une 2-propriété de graphes. En effet on peut définir, pour tout graphe  $G$ ,  $\text{Code}_t(G)$  (resp.  $\mathcal{LDset}_t(G)$ ,  $\mathcal{LTDset}_t(G)$ ) comme l'ensemble des 2-étiquetages de  $G$  vérifiant la propriété suivante : les sommets étiquetés 1 forment un code  $t$ -identifiant (resp. un code  $t$ -dominant-localisateur, un code  $t$ -dominant-total-localisateur) de  $G$ .*

**Définition 71** *Dans la suite de cette section, étant donné un 2-étiquetage  $f$  d'un fasciagraphe ou d'un rotagraphe, nous désignons par  $C_f$  l'ensemble des sommets étiquetés 1 par  $f$ .*

$C_f$

**Définition 72** *Étant donné un entier  $t \geq 1$  et une 2-propriété  $\mathcal{P}$  de fasciagraphes (resp. de rotagraphes), nous disons que  $\mathcal{P}$  est de type  **$t$ -domination-séparation** si,*

- *il existe une fonction  $D_{\mathcal{P}}$  qui à tout sommet  $u$  d'un fasciagraphe (resp. d'un rotagraphe), associe à  $u$ ,  $D_{\mathcal{P}}(u) \subseteq \mathcal{B}_t(u)$  l'ensemble des sommets qui peuvent  $t$ -dominer  $u$ ,*
- *il existe une fonction  $W_{\mathcal{P}}$  qui à tout 2-étiquetage  $f$  d'un fasciagraphe  $F$  (resp. d'un rotagraphe  $R$ ) associe  $W_{\mathcal{P}}(f)$ , un sous-ensemble des sommets de  $F$  (resp.*

- $R$ ), qui doit être  $t$ -séparé par  $C_f$  et tel que pour tous 2-étiquetages  $f$  et  $f'$  d'un fasciagraphe  $F$  ou d'un rotagraphe  $R$ ,  $C_f \subseteq C_{f'} \Rightarrow W_{\mathcal{P}}(f') \subseteq W_{\mathcal{P}}(f)$ ,
- un 2-étiquetage  $f$  d'un fasciagraphe ou d'un rotagraphe vérifie  $\mathcal{P}$  si et seulement si chaque sommet  $u$  est  $t$ -dominé par un sommet dans  $D_{\mathcal{P}}(u)$  et tous les sommets de  $W_{\mathcal{P}}(f)$  sont  $t$ -séparés par  $C_f$ . Plus formellement, pour tout sommet  $u$ ,  $D_{\mathcal{P}}(u) \cap C_f \neq \emptyset$ , et pour tout couple de sommets  $u$  et  $v$  dans  $W_{\mathcal{P}}(f)$ ,  $u \neq v \Rightarrow C_f \cap \mathcal{B}_t(u) \neq C_f \cap \mathcal{B}_t(v)$ ,
  - le poids associé à un 2-étiquetage  $f$  vérifiant  $\mathcal{P}$  est  $|C_f|$ .

**Remarque 19** Concernant les trois propriétés que nous étudions ici, étant donné un fasciagraphe ou un rotagraphe  $G$ , nous aurons pour tout sommet  $u$  dans  $G$ ,  $D_{\mathcal{P}}(u) = \mathcal{B}_t(u)$  ou  $\mathcal{B}_t(u) \setminus \{u\}$  et pour tout 2-étiquetage  $f$  de  $G$ ,  $W_{\mathcal{P}}(f) = V(G)$  ou  $V(G) \setminus C_f$ .

**Propriété 12** Par définition, étant donné une 2-propriété  $\mathcal{P}$  de type  $t$ -domination-séparation, et deux 2-étiquetages  $f$  et  $f'$  d'un fasciagraphe ou d'un rotagraphe, si  $C_f \subseteq C_{f'}$  et  $f$  vérifie  $\mathcal{P}$ , alors  $f'$  vérifie  $\mathcal{P}$ . En effet dans le cas où  $f$  vérifie  $\mathcal{P}$ , pour tout sommet  $u$  il existe au moins un sommet dans  $D_{\mathcal{P}}(u) \cap C_f$  et  $C_f$   $t$ -sépare  $W_{\mathcal{P}}(f)$ . Comme  $C_f \subseteq C_{f'} \Rightarrow W_{\mathcal{P}}(f') \subseteq W_{\mathcal{P}}(f)$ , il existe au moins un sommet dans  $D_{\mathcal{P}}(u) \cap C_{f'}$  et  $C_{f'}$   $t$ -sépare  $W_{\mathcal{P}}(f')$ .

**Propriété 13** Les propriétés  $\text{Code}_t$ ,  $\mathcal{L}\mathcal{D}\text{set}_t$  et  $\mathcal{L}\mathcal{T}\mathcal{D}\text{set}_t$  sont de type  $t$ -domination-séparation.

*Preuve.* En effet, étant donné un fasciagraphe ou un rotagraphe  $G$ , on a

- $D_{\text{Code}_t}(u) = \mathcal{B}_t(u)$  pour tout sommet  $u$  de  $G$  et  $W_{\text{Code}_t}(f) = V(G)$  pour tout 2-étiquetage  $f$  de  $G$ ,
- $D_{\mathcal{L}\mathcal{D}\text{set}_t}(u) = \mathcal{B}_t(u)$  pour tout sommet  $u$  de  $G$  et  $W_{\mathcal{L}\mathcal{D}\text{set}_t}(f) = V(G) \setminus C_f$  pour tout 2-étiquetage  $f$  de  $G$ ,
- $D_{\mathcal{L}\mathcal{T}\mathcal{D}\text{set}_t}(u) = \mathcal{B}_t(u) \setminus \{u\}$  pour tout sommet  $u$  de  $G$  et  $W_{\mathcal{L}\mathcal{T}\mathcal{D}\text{set}_t}(f) = V(G) \setminus C_f$  pour tout 2-étiquetage  $f$  de  $G$ .

□

**Propriété 14** Pour tout entier  $t \geq 1$ , une 2-propriété  $\mathcal{P}$  de rotagraphe de type  $t$ -domination-séparation est pseudo- $(4t + 1)$ -locale.

*Preuve.* Définissons la propriété  $\mathcal{P}^{\text{loc}}$  de la façon suivante :

pour tout  $f$  dans  $\mathcal{L}_2(\psi_{4t+1})$ ,  $f$  est dans  $\mathcal{P}^{\text{loc}}$  si et seulement si pour tout couple de sommets différents  $(v_1, v_2)$  dans  $V(M_{t+1}) \cup V(M_{t+2}) \cup \dots \cup V(M_{3t+1})$ ,

- $v_1$  est dominé par un sommet dans  $D_{\mathcal{P}}(v_1)$ , i.e.,  $D_{\mathcal{P}}(v_1) \cap C_f \neq \emptyset$ ,
- si  $v_1$  et  $v_2$  sont dans  $W_{\mathcal{P}}(f)$ ,  $v_1$  et  $v_2$  sont  $t$ -séparés par  $C_f$ , i.e.,  $|\mathcal{B}_t(v_1) \cap C_f \Delta \mathcal{B}_t(v_2) \cap C_f| \geq 1$ .

Montrons qu'un 2-étiquetage  $f$  d'un rotagraphe  $\omega_n(M)$  ( $n \geq 4t + 2$ ) vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  si et seulement si  $f_{i,4t+1}$  est dans  $\mathcal{P}^{\text{loc}}(\psi_{4t+1}(M))$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

En effet, pour tout sommet  $u$  de  $\omega_n(M)$ , il existe au moins un groupe de  $4t + 1$  fibres consécutives tel que  $u$  est dans l'une des  $2t + 1$  fibres centrales de ce groupe. Nommons  $F_u$  ce groupe de  $4t + 1$  fibres consécutives et  $V(F_u)$  l'ensemble de ses sommets. Il est simple de vérifier que  $D_{\mathcal{P}}(u) = D_{\mathcal{P}}(u) \cap V(F_u)$ . Dans ce cas  $D_{\mathcal{P}}(u) \cap C_f \Leftrightarrow D_{\mathcal{P}}(u) \cap V(F_u) \cap C_f$ , i.e.  $u$  est  $t$ -dominé

dans  $\omega_n(M)$  si et seulement si il est  $t$ -dominé dans un groupe de  $4t + 1$  fibres consécutives.

De la même façon, pour tout couple de sommets  $u$  et  $v$  dans  $W_{\mathcal{P}}(f)$  dans les  $2t + 1$  fibres du milieu d'un même groupe de  $4t + 1$  fibres consécutives  $F_{uv}$ ,  $|(\mathcal{B}_t(u) \cap C_f) \Delta (\mathcal{B}_t(v) \cap C_f)| \geq 1 \Leftrightarrow |(\mathcal{B}_t(u) \cap C_f \cap V(F_{uv})) \Delta (\mathcal{B}_t(v) \cap C_f \cap V(F_{uv}))| \geq 1$ .

Il reste donc à montrer que si  $u$  et  $v$  ne font pas partie d'un même groupe de  $2t + 1$  fibres consécutives et  $u$  et  $v$  dans  $W_{\mathcal{P}}(f)$ , alors  $u$  et  $v$  sont  $t$ -séparés par  $C_f$ . Or, pour que deux sommets  $u$  et  $v$  ne soient pas séparés, il doit y avoir au moins un sommet dans  $\mathcal{B}_t(u) \cap \mathcal{B}_t(v)$ . Dans ce cas il existe un groupe de  $2t + 1$  fibres consécutives qui contient  $u$  et  $v$ .  $\square$

**Propriété 15** Pour tout entier  $t \geq 1$ , une 2-propriété  $\mathcal{P}$  de fasciagraphes de type  $t$ -domination-séparation est pseudo- $(4t + 1)$ -locale.

*Preuve.* Définissons les propriétés  $\mathcal{P}^1$ ,  $\mathcal{P}^2$  et  $\mathcal{P}^3$  de la façon suivante :

- pour tout  $f$  dans  $\mathcal{L}_2(\psi_{4t+1})$ ,  $f$  est dans
- $\mathcal{P}^1$  si et seulement si pour tout couple de sommets différents  $(v_1, v_2)$  dans  $V(M_1) \cup V(M_2) \cup \dots \cup V(M_{3t+1})$ ,
    - $D_{\mathcal{P}}(v_1) \cap C_f \neq \emptyset$ ,
    - si  $v_1, v_2 \in W_{\mathcal{P}}(f)$ ,  $|(\mathcal{B}_t(v_1) \cap C_f) \Delta (\mathcal{B}_t(v_2) \cap C_f)| \geq 1$ .
  - $\mathcal{P}^2$  si et seulement si pour tout couple de sommets différents  $(v_1, v_2)$  dans  $V(M_{t+1}) \cup V(M_{t+2}) \cup \dots \cup V(M_{3t+1})$ ,
    - $D_{\mathcal{P}}(v_1) \cap C_f \neq \emptyset$ ,
    - si  $v_1, v_2 \in W_{\mathcal{P}}(f)$ ,  $|(\mathcal{B}_t(v_1) \cap C_f) \Delta (\mathcal{B}_t(v_2) \cap C_f)| \geq 1$ .
  - $\mathcal{P}^3$  si et seulement si pour tout couple de sommets différents  $(v_1, v_2)$  dans  $V(M_{t+1}) \cup V(M_{t+2}) \cup \dots \cup V(M_{4t+1})$ ,
    - $D_{\mathcal{P}}(v_1) \cap C_f \neq \emptyset$ ,
    - si  $v_1, v_2 \in W_{\mathcal{P}}(f)$ ,  $|(\mathcal{B}_t(v_1) \cap C_f) \Delta (\mathcal{B}_t(v_2) \cap C_f)| \geq 1$ .

La preuve est similaire à la précédente, on voit que  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}^{loc}$ , de plus il est simple de voir que les sommets des  $3t + 1$  premières (resp. dernières) fibres ne peuvent être  $t$ -dominés que par des sommets dans les  $4t + 1$  premières (resp. dernières) fibres, et que ceux qui sont en plus dans  $W_{\mathcal{P}}(f)$  ne peuvent être  $t$ -séparés que par des sommets de  $C_f$  qui sont dans les  $4t + 1$  premières (resp. dernières) fibres.  $\square$

En conséquence des deux propriétés précédentes, les 2-propriétés  $\text{Code}_t$ ,  $\mathcal{LDset}_t$  et  $\mathcal{LTDset}_t$  de fasciagraphes et de rotagraphes sont pseudo- $(4t + 1)$ -locales.

**Remarque 20** Remarquons que les propriétés  $\text{Code}_t$ ,  $\mathcal{LDset}_t$  et  $\mathcal{LTDset}_t$  sont telles que

- $\text{Code}_t^1 \subseteq \text{Code}_t^{loc}$ ,  $\text{Code}_t^3 \subseteq \text{Code}_t^{loc}$  et  $\text{Code}_t^2 = \text{Code}_t^{loc}$ ,
- $\mathcal{LDset}_t^1 \subseteq \mathcal{LDset}_t^{loc}$ ,  $\mathcal{LDset}_t^3 \subseteq \mathcal{LDset}_t^{loc}$  et  $\mathcal{LDset}_t^2 = \mathcal{LDset}_t^{loc}$ ,
- $\mathcal{LTDset}_t^1 \subseteq \mathcal{LTDset}_t^{loc}$ ,  $\mathcal{LTDset}_t^3 \subseteq \mathcal{LTDset}_t^{loc}$  et  $\mathcal{LTDset}_t^2 = \mathcal{LTDset}_t^{loc}$ .

**Propriété 16** Pour tout entier  $t \geq 1$ , les 2-propriétés de rotagraphes  $\mathcal{P}$  de type  $t$ -domination-séparation correspondent à des  $(4t + 1, 2, w)$ - $r$ -propriétés.

*Preuve.* Par définition on a la fonction de poids  $w : f \in \mathcal{P}(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbb{N}$  telle que, pour tout  $f$  dans  $\mathcal{P}(\omega_n(M))$ ,  $w(f) = |C_f|$ , i.e.  $w(f)$  est le nombre de sommets étiquetés 1 par  $f$ .

Cette fonction de poids est  $(4t + 1)$ -modulaire. En effet, soit  $w^{loc} : \mathcal{P}^{loc}(\mathcal{F}_{4t+2}) \rightarrow \mathbb{N}$  telle que, pour tout  $f$  dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{4t+2}(M))$ ,  $w^{loc}(f) = |V(M_{4t+2}) \cap C_f|$ , c'est à dire que le poids  $w^{loc}$  d'un 2-étiquetage d'un fasciagraphe de taille  $4t + 2$ , est le nombre de sommets étiquetés 1 dans la  $(4t + 2)$ ième fibre. Puisque le nombre de sommets étiquetés 1 est égal à la somme du nombre de sommets étiquetés 1 dans chaque fibre, nous avons  $w(f) = \sum_{i=1}^n w^{loc}(f_{i,4t+2})$ . Ainsi,  $w^{loc}$  et l'addition usuelle sur les entiers fournissent la  $(4t + 1)$ -modularité de  $w$ .  $\square$

**Propriété 17** Pour tout entier  $t \geq 1$ , les 2-propriétés de fasciagraphes  $\mathcal{P}$  de type  $t$ -domination-séparation correspondent à des  $(4t + 1, 2, w)$ - $f$ -propriétés.

*Preuve.* Par définition on a la fonction de poids  $w : f \in \mathcal{P}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $f \in \mathcal{P}(\psi_n(M))$ ,  $w(f) = |C_f|$ , i.e.  $w(f)$  est le nombre de sommets étiquetés 1 par  $f$ .

Cette fonction de poids est  $(4t + 1)$ -modulaire. En effet, définissons :

- $w^{ini} : \mathcal{P}^1(\mathcal{F}_{4t+1}) \rightarrow \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $f \in \mathcal{P}^1(\mathcal{F}_{4t+1})$ ,  $w^{ini}(f) = |C_f|$ .
- $w^{part} : \mathcal{P}^2(\mathcal{F}_{4t+2}) \rightarrow \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $f \in \mathcal{P}^2(\mathcal{F}_{4t+2})$ ,  $w^{part}(f) = |C_f \cap V(M_{4t+2})|$ . Donc le poids additionnel d'un 2-étiquetage d'un fasciagraphe de taille  $4t + 2$ , est le nombre de sommets étiquetés 1 dans la  $(4t + 2)$ ième fibre.

Puisque le nombre de sommets étiquetés 1 est égal à la somme du nombre de sommets étiquetés 1 dans chaque fibre, nous avons  $w(f) = w^{ini}(f_{1,4t+1}) + \sum_{i=1}^n w^{part}(f_{i,4t+2})$ . Ainsi,  $w^{ini}$ ,  $w^{part}$  et l'addition usuelle sur les entiers fournissent la  $(4t + 1)$ -modularité de  $w$ .  $\square$

En conséquence des propriétés précédentes, pour tout entier  $t \geq 1$ , les 2-propriétés  $\mathcal{C}ode_t$ ,  $\mathcal{L}Dset_t$  et  $\mathcal{L}TDset_t$  correspondent à des  $(4t + 1, 2, w)$ -propriétés.

**Théorème 13** Pour tout entier  $t \geq 1$ , quelle que soit une  $(4t + 1, 2, w)$ - $r$ -propriété  $\mathcal{P}$  de type  $t$ -domination-séparation,  $\mathcal{P}$  correspond à une  $(4t + 1, 2, w)$ - $r$ -propriété stable.

*Preuve.* Soit  $M$  un graphe mixte,  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w)$  le graphe auxiliaire associé,  $n$  le nombre de sommets de  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$  et  $\Pi$  la matrice des longueurs de  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$ . Les poids étant des entiers, nous effectuerons nos calculs dans le dioïde  $(\mathbb{Z}, \min, +, +\infty, 0)$ .

Rappelons que :

- un 2-étiquetage  $f$  d'un fasciagraphe d'au moins  $(4t + 1)$  fibres vérifie  $\mathcal{P}^{loc}$  si pour chaque sommet  $v$  des fibres centrales (les fibres autres que les  $t$  premières et les  $t$  dernières)  $v$  est  $t$ -dominé par un sommet dans  $D_{\mathcal{P}}(v)$  et pour chaque couple de sommets  $(v_1, v_2)$  dans  $W_{\mathcal{P}}(f)$  dans les fibres centrales,  $v_1$  et  $v_2$  sont  $t$ -séparés par  $C_f$ ,
- le poids d'un 2-étiquetage dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{4t+2}(M))$  est égal au nombre de sommets étiquetés 1 dans la  $(4t + 2)$ ième fibre.

Nous allons montrer que, soit  $(\Pi_k)_{ij} = +\infty$ , soit  $0 \leq (\Pi_k)_{ij} \leq (12t + 1)|V(M)|$  pour tout  $k \geq 1$  et tout  $1 \leq i, j \leq n$  et ainsi prouver que  $\Pi$  est stable (voir Section 3.2.2 Remarque 13). Supposons donc que  $(\Pi_k)_{ij} \neq +\infty$ . Par définition de  $\vec{G}$  et  $\Pi$  et par le Corollaire 2, pour  $1 \leq i, j \leq n$ , dans ce cas,  $(\Pi^k)_{ij}$  est égal au nombre minimum de sommets étiquetés 1 dans les fibres  $M_{4t+2}$  à  $M_{k+4t+1}$  par un 2-étiquetage dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{k+4t+1}(M))$  qui commence par  $u_i$  et finit par  $u_j$  ( $u_i, u_j$  dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{4t+1}(M))$ ), et donc  $0 \leq (\Pi_k)_{ij} \leq (\Pi^k)_{ij}$ .

Si  $1 \leq k \leq 12t + 1$ , il y a au plus  $(12t + 1)$  fibres de  $M_{4t+2}$  à  $M_{k+4t+1}$  et pas plus que la totalité de leurs sommets peuvent être étiquetés 1. Donc dans ce cas  $0 \leq (\Pi_k)_{ij} \leq (\Pi^k)_{ij} \leq (12t + 1)|V(M)|$ .

Supposons maintenant que  $k > (12t + 1)$ . Soit  $f^*$  le 2-étiquetage dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{k+4t+1}(M))$  tel que le nombre de sommets étiquetés 1 dans les fibres  $M_{4t+2}$  à  $M_{k+4t+1}$  est égal à  $\min(\Pi^k)$ . Comme nous avons supposé que  $(\Pi_k)_{ij} \neq +\infty$ , nous savons que  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{k+4t+1}(M)) \neq \emptyset$  et donc que  $f^*$  existe. Si  $f^*$  commence par  $u_i$  et finit par  $u_j$  alors  $(\Pi_k)_{ij} = 0$ . Sinon, depuis  $f^*$ , nous pouvons construire  $f^{ij}$ , un 2-étiquetage dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{k+4t+1}(M))$  qui démarre par  $u_i$  et se termine par  $u_j$ , en remplaçant les étiquettes sur les  $(4t + 1)$  premières et les  $(4t + 1)$  dernières fibres, respectivement, par  $u_i$  et  $u_j$ , et en étiquetant 1 les sommets des fibres  $(4t + 2)$  à  $(8t + 1)$  et des fibres  $(k - 4t + 1)$  à  $k$ . Plus formellement :  $f_{1,4t+1}^{ij} = u_i$ ,  $f_{4t+2,4t}^{ij}$  étiquette tous les sommets des fibres  $(4t + 2)$  à  $(8t + 1)$  par 1,  $f_{8t+2,k-4t+1-(8t+2)}^{ij} = f_{8t+2,k-4t+1-(8t+2)}^{f^*}$ ,  $f_{k-4t+1,4t}^{ij}$  étiquette tous les sommets des fibres  $(k - 4t + 1)$  à  $k$  par 1,  $f_{k+1,4t+1}^{ij} = u_j$  (voir Figure 7.1).

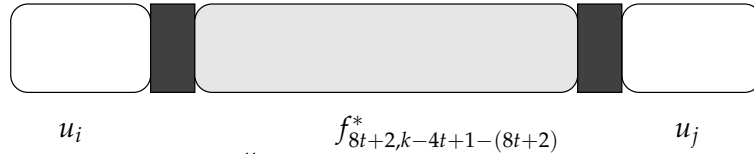


FIGURE 7.1 – Un 2-étiquetage  $f^{ij}$ .

Par définition,  $f_{1,4t+1}^{ij}$  et  $f_{k+1,4t+1}^{ij}$  sont des sommets de  $\vec{G}$  et donc sont dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{4t+1}(M))$ . De plus, puisque  $f^* \in \mathcal{P}^{loc}(\psi_{k+4t+1}(M))$ , nous savons que  $f_{8t+2,k-12t-1}^{ij} \in \mathcal{P}^{loc}(\psi_{k-12t-1}(M))$ . Nous savons que, puisque  $(\Pi^k)_{ij} \neq +\infty$ , il existe  $g^{ij} \in \mathcal{P}^{loc}(\psi_{k+4t+1}(M))$  tel que  $w^{loc}(g^{ij}) = (\Pi^k)_{ij}$ . Comparons  $f_{2,8t}^{ij}$  et  $g_{2,8t}^{ij}$ . Clairement, tous les sommets étiquetés 1 par  $g_{2,8t}^{ij}$  sont aussi étiquetés 1 par  $f_{2,8t}^{ij}$ , donc, par la Propriété 12,  $f_{2,8t}^{ij} \in \mathcal{P}^{loc}(\psi_{8t}(M))$ . De la même façon, tous les sommets étiquetés 1 par  $g_{k-4t+1,8t}^{ij}$  sont aussi étiquetés 1 par  $f_{k-4t,8t}^{ij}$ , donc, par la Propriété 12,  $f_{k-4t,8t}^{ij} \in \mathcal{P}^{loc}(\psi_{8t}(M))$ . Le raisonnement est le même pour  $f_{4t+2,8t}^{ij}$  et  $f_{4t+2,8t}^{f^*}$ , tous les sommets étiquetés 1 par  $f_{4t+2,8t}^{f^*}$  sont aussi étiquetés 1 par  $f_{4t+2,8t}^{ij}$ , donc, par la Propriété 12,  $f_{4t+2,8t}^{ij} \in \mathcal{P}^{loc}(\psi_{8t}(M))$  et tous les sommets étiquetés 1 par  $f_{k-8t,8t}^{f^*}$  sont aussi étiquetés 1 par  $f_{k-8t,8t}^{ij}$ , donc, par la Propriété 12,  $f_{k-8t,8t}^{ij} \in \mathcal{P}^{loc}(\psi_{8t}(M))$ .

Alors  $f^{ij}$  est bien un 2-étiquetage dans  $\mathcal{P}^{loc}(\psi_{k+4t+1}(M))$  commençant

par  $u_i$  et se terminant par  $u_j$  et donc  $w^{loc}(f^{ij}) \geq (\Pi^k)_{ij}$ . De plus, sur les fibres  $M_{4t+2}$  à  $M_{k+4t+1}$ ,  $f^{ij}$  diffère de  $f^*$  sur au plus  $(12t + 1)$  fibres (les fibres  $4t + 2$  à  $8t + 1$  et les  $8t + 1$  dernières). Par conséquent,  $w^{loc}(f^{ij}) \leq \min(\Pi^k) + (12t + 1)|V(M)|$ . Donc  $0 \leq (\Pi^k)_{ij} - \min(\Pi^k) = (\Pi_k)_{ij} \leq w^{loc}(f^{ij}) - w^{loc}(f^*) \leq (12t + 1)|V(M)|$ .  $\square$

**Remarque 21** *Dans la preuve précédente, nous n'avons pas optimisé la borne supérieure sur la valeur maximale que peut atteindre  $(\Pi_k)_{ij}$ . Ici nous donnons  $(12t + 1)|V(M)|$ , mais il doit être possible de démontrer  $(8t + 3)|V(M)|$ . Ceci étant, n'importe quelle borne finie est suffisante pour démontrer la stabilité de la propriété.*

En conséquence du théorème précédent et de la Propriété 13, on énonce les trois corollaires suivants :

**Corollaire 2** *Pour tout entier  $t \geq 1$ , le problème du code  $t$ -identifiant correspond à une  $(4t + 1, 2, w)$ - $r$ -propriété stable.*

**Corollaire 3** *Pour tout entier  $t \geq 1$ , le problème du code  $t$ -dominant-localisateur correspond à une  $(4t + 1, 2, w)$ - $r$ -propriété stable.*

**Corollaire 4** *Pour tout entier  $t \geq 1$ , le problème du code  $t$ -dominant-total-localisateur correspond à une  $(4t + 1, 2, w)$ - $r$ -propriété stable.*

D'après la Remarque 20 et le Théorème 9, les trois corollaires suivants sont démontrés.

**Corollaire 5** *Pour tout entier  $t \geq 1$ , le problème du code  $t$ -identifiant correspond à une  $(4t + 1, 2, w)$ - $f$ -propriété stable.*

**Corollaire 6** *Pour tout entier  $t \geq 1$ , le problème du code  $t$ -dominant-localisateur correspond à une  $(4t + 1, 2, w)$ - $f$ -propriété stable.*

**Corollaire 7** *Pour tout entier  $t \geq 1$ , le problème du code  $t$ -dominant-total-localisateur correspond à une  $(4t + 1, 2, w)$ - $f$ -propriété stable.*

Les problèmes de code  $t$ -identifiant minimum, de code  $t$ -dominant-localisateur minimum, et de code  $t$ -dominant-total-localisateur minimum, dans les rotagraphes ou les fasciagraphes, correspondent donc à des  $(4t + 1, 2, w)$ -propriétés stables. L'algorithme générique que nous avons présenté dans la première partie de la thèse permet donc de calculer, étant donné un graphe mixte  $M$  fixé, le cardinal minimum d'un code  $t$ -identifiant, le cardinal minimum d'un code  $t$ -dominant-localisateur, et le cardinal minimum d'un code  $t$ -dominant-total-localisateur, de tout rotagraphe ou fasciagraphe de fibre  $M$ , et ce en un nombre d'opérations élémentaires constant.

Dans la suite du document nous présenterons des résultats concernant les codes 1-identifiants, les codes 1-dominant-localisateurs, et les codes 1-dominant-total-localisateurs. Pour plus de simplicité, nous parlerons, dans ce cas, respectivement, de codes identifiants, de LD-sets et de LTD-sets.



## 7.2 CAS DES BANDES CIRCULAIRES ET INFINIES

Dans cette partie nous allons présenter les résultats que nous avons obtenus en programmant l'algorithme développé dans le début de la thèse, sur les bandes circulaires. Grâce à ce programme, nous avons pu donner plusieurs solutions à plusieurs problèmes du type code identifiant, et notamment répondre à une conjecture concernant la densité minimum d'un code identifiant dans la bande infinie de hauteur 3.

### 7.2.1 Définitions

**Définition 73** Etant donné deux entiers  $h$  et  $s$ , la **bande circulaire carrée de hauteur  $h$  et de taille  $s$**  est le graphe  $G = (V, E)$  tel que

- $V = \{1, 2, \dots, h\} \times \{1, 2, \dots, s\}$ ,
- $E = \{(i, j)(k, l) \mid i, k \in \{1, 2, \dots, h\}, j, l \in \{1, 2, \dots, s\}, |i - k| + |j - l| = 1\} \cup \{(i, s)(i, 1) \mid i \in \{1, 2, \dots, h\}\}$ .

Nous la notons  $\mathcal{S}_{h,s}^\circ$  (voir Figure 7.2).

 $\mathcal{S}_{h,s}^\circ$ 

**Définition 74** Etant donné un entier  $h$ , la **bande infinie carrée de hauteur  $h$**  est le graphe infini  $G = (V, E)$  tel que

- $V = \{1, 2, \dots, h\} \times \mathbb{Z}$ ,
- $E = \{(i, j)(k, l) \mid i, k \in \{1, 2, \dots, h\}, j, l \in \mathbb{Z}, |i - k| + |j - l| = 1\}$ .

Nous la notons  $\mathcal{S}_h^\infty$ .

 $\mathcal{S}_h^\infty$ 

D'autres types de bandes circulaires ou infinies existent pour lesquels l'ensemble des sommets est le même que pour  $\mathcal{S}_{h,s}^\circ$  et  $\mathcal{S}_h^\infty$  respectivement, et l'ensemble d'arêtes est défini de la façon suivante :

**Définition 75** - la **bande triangulée** notée  $\mathcal{Y}_{h,s}^\circ$  pour le cas circulaire ou  $\mathcal{Y}_h^\infty$  pour le cas infini :

- $E(\mathcal{Y}_{h,s}^\circ) = E(\mathcal{S}_{h,s}^\circ) \cup \{(i, j)(k, l) \mid i, k \in \{1, \dots, h\}, j, l \in \{1, \dots, s\} \text{ et } (i - k) = (j - l) = \pm 1\} \cup \{(i, s)(i + 1, 1) \mid i \in \{1, 2, \dots, h - 1\}\}$  (voir Figure 7.3),

- $E(\mathcal{Y}_h^\infty) = E(\mathcal{S}_h^\infty) \cup \{(i, j)(k, l) \mid i, k \in \{1, \dots, h\}, j, l \in \mathbb{Z} \text{ et } (i - k) = (j - l) = \pm 1\}$ ,

- la **bande royale** notée  $\mathcal{K}_{h,s}^\circ$  pour le cas circulaire ou  $\mathcal{K}_h^\infty$  pour le cas infini :

- $E(\mathcal{K}_{h,s}^\circ) = E(\mathcal{Y}_{h,s}^\circ) \cup \{(i, j)(k, l) \mid i, k \in \{1, \dots, h\}, j, l \in \{1, \dots, s\} \text{ et } (i - k) = -(j - l) = \pm 1\} \cup \{(i, s)(i - 1, 1) \mid i \in \{2, 3, \dots, h\}\}$  (voir Figure 7.4),

- $E(\mathcal{K}_h^\infty) = E(\mathcal{Y}_h^\infty) \cup \{(i, j)(k, l) \mid i, k \in \{1, \dots, h\}, j, l \in \mathbb{Z} \text{ et } (i - k) = -(j - l) = \pm 1\}$ ,

- la **bande torique** notée  $\mathcal{U}_{h,s}^\circ$  pour le cas circulaire ou  $\mathcal{U}_h^\infty$  pour le cas infini :

- $E(\mathcal{U}_{h,s}^\circ) = E(\mathcal{S}_{h,s}^\circ) \cup \{(1, i)(h, i) \mid i \in \{1, \dots, s\}\}$  (voir Figure 7.5),

- $E(\mathcal{U}_h^\infty) = E(\mathcal{S}_h^\infty) \cup \{(1, i)(h, i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ .

 $\mathcal{Y}_{h,s}^\circ$ 
 $\mathcal{Y}_h^\infty$ 
 $\mathcal{K}_{h,s}^\circ$ 
 $\mathcal{K}_h^\infty$ 
 $\mathcal{U}_{h,s}^\circ$ 
 $\mathcal{U}_h^\infty$ 

Nous définissons de la même façon les grilles infinies carrée, royale et triangulée :

**Définition 76** La **grille carrée** (resp. **triangulée**, **royale**) **infinie** est le graphe infini noté  $\mathbb{Z}^2$  (resp.

$\mathbb{Z}^2$        $\mathbb{T}^2, \mathbb{K}^2$  dont l'ensemble de sommets est  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  et l'ensemble d'arêtes est, respectivement :  
 $\mathbb{T}^2$   
 $\mathbb{K}^2$

- $E(\mathbb{Z}^2) = \{(i, j)(k, l) | i, j, k, l \in \mathbb{Z} \text{ et } |(i - k) + (j - l)| = 1\}$
- $E(\mathbb{T}^2) = E(\mathbb{Z}^2) \cup \{(i, j)(k, l) | i, j, k, l \in \mathbb{Z} \text{ et } (i - k) = (j - l) = \pm 1\}$
- $E(\mathbb{K}^2) = E(\mathbb{T}^2) \cup \{(i, j)(k, l) | i, j, k, l \in \mathbb{Z} \text{ et } (i - k) = -(j - l) = \pm 1\}$

**Définition 77** Etant donné une bande circulaire  $\mathcal{S}_{h,s}^\circ, \mathcal{K}_{h,s}^\circ, \mathcal{Y}_{h,s}^\circ, \mathcal{U}_{h,s}^\circ$  (resp. bande infinie  $\mathcal{S}_h^\infty, \mathcal{K}_h^\infty, \mathcal{Y}_h^\infty, \mathcal{U}_h^\infty$ ), pour tout  $i$  dans  $\{1, 2, \dots, h\}$ , l'ensemble  $\{1, 2, \dots, s\} \times \{i\}$  (resp.  $\{i\} \times \mathbb{Z}$ ) est appelé la  $i$ -ème **ligne** de la bande.

**Définition 78** Etant donné une bande circulaire  $\mathcal{S}_{h,s}^\circ, \mathcal{K}_{h,s}^\circ, \mathcal{Y}_{h,s}^\circ, \mathcal{U}_{h,s}^\circ$  (resp. bande infinie  $\mathcal{S}_h^\infty, \mathcal{K}_h^\infty, \mathcal{Y}_h^\infty, \mathcal{U}_h^\infty$ ), pour tout  $i$  dans  $\{1, 2, \dots, s\}$  (resp.  $i$  dans  $\mathbb{Z}$ ), l'ensemble  $\{i\} \times \{1, 2, \dots, h\}$  est appelé la  $i$ -ème **colonne** de la bande.

**Définition 79** Etant donné un entier  $h \geq 1$ , nous nommons  $\mathbf{M}_{\mathcal{S}(h)}$  le graphe mixte défini de la façon suivante :  $M_{\mathcal{S}(h)} = (V, E, A)$  tel que  $V = \{1, \dots, h\}$ ,  $E = \{i, i + 1 | i \in \{1, \dots, h - 1\}\}$ ,  $A = \{(i, i) | i \in \{1, \dots, h\}\}$  (voir Figure 7.2).

**Définition 80** Etant donné un entier  $h \geq 1$ , nous nommons  $\mathbf{M}_{\mathcal{K}(h)}$  le graphe mixte défini de la façon suivante :  $M_{\mathcal{K}(h)} = (V, E, A)$  tel que  $V = \{1, \dots, h\}$ ,  $E = \{i, i + 1 | i \in \{1, \dots, h - 1\}\}$ ,  $A = \{(i, i) | i \in \{1, \dots, h\}\} \cup \{(i, i + 1) | i \in \{1, \dots, h - 1\}\} \cup \{(i + 1, i) | i \in \{1, \dots, h - 1\}\}$  (voir Figure 7.4).

**Définition 81** Etant donné un entier  $h \geq 1$ , nous nommons  $\mathbf{M}_{\mathcal{Y}(h)}$  le graphe mixte défini de la façon suivante :  $M_{\mathcal{Y}(h)} = (V, E, A)$  tel que  $V = \{1, \dots, h\}$ ,  $E = \{i, i + 1 | i \in \{1, \dots, h - 1\}\}$ ,  $A = \{(i, i) | i \in \{1, \dots, h\}\} \cup \{(i, i + 1) | i \in \{1, \dots, h - 1\}\}$  (voir Figure 7.3).

**Définition 82** Etant donné un entier  $h \geq 1$ , nous nommons  $\mathbf{M}_{\mathcal{U}(h)}$  le graphe mixte défini de la façon suivante :  $M_{\mathcal{U}(h)} = (V, E, A)$  tel que  $V = \{1, \dots, h\}$ ,  $E = \{uv | u = i, v = i + 1, i \in \{1, \dots, h - 1\}\} \cup \{uv | u = 1, v = h\}$ ,  $A = \{(i, i) | i \in \{1, \dots, h\}\}$  (voir Figure 7.5).

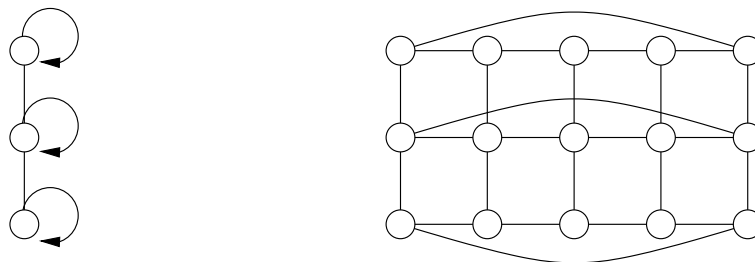
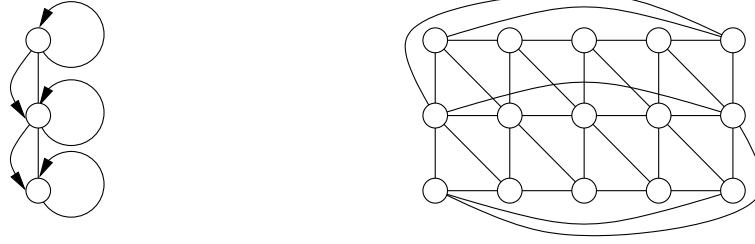
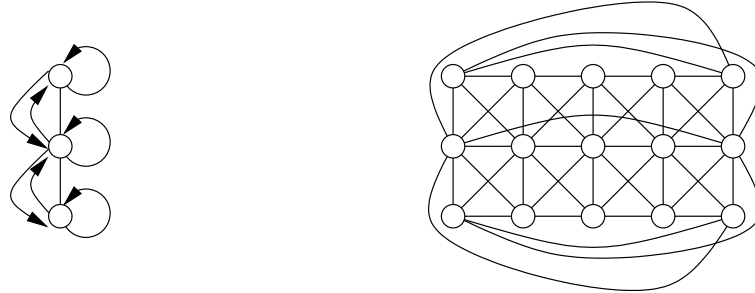
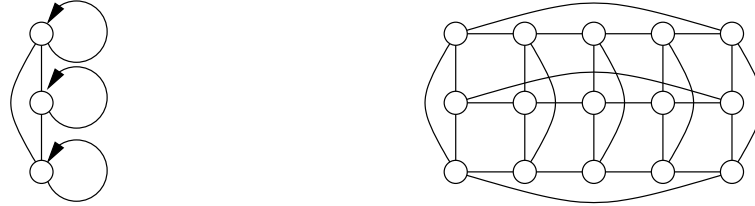


FIGURE 7.2 – Le graphe mixte  $M_{\mathcal{S}(3)}$  à gauche et la bande circulaire carrée  $\mathcal{S}_{3,5}^\circ$  à droite.

**Remarque 22** Il est clair que, étant donné deux entiers  $h, s$ , les bandes circulaires de hauteur  $h$  et de taille  $s$ ,  $\mathcal{S}_{h,s}^\circ, \mathcal{U}_{h,s}^\circ, \mathcal{K}_{h,s}^\circ, \mathcal{Y}_{h,s}^\circ$  sont isomorphes, respectivement, au rotagraphe  $\omega_s(M_{\mathcal{S}(h)}), \omega_s(M_{\mathcal{U}(h)}), \omega_s(M_{\mathcal{K}(h)}), \omega_s(M_{\mathcal{Y}(h)})$ .

**Définition 83** Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  fini, et un code  $t$ -identifiant, un  $t$ -LDset ou un  $t$ -LTDset  $C \subseteq V$  de  $G$ , la **densité** de  $C$ , notée  $d(C, G)$  est définie de la façon

FIGURE 7.3 – Le graphe mixte  $M_{\mathcal{Y}(3)}$  à gauche et la bande circulaire triangulée  $\mathcal{Y}_{3,5}^\circ$  à droite.FIGURE 7.4 – Le graphe mixte  $M_{\mathcal{K}(3)}$  à gauche et la bande circulaire royale  $\mathcal{K}_{3,5}^\circ$  à droite.FIGURE 7.5 – Le graphe mixte  $M_{\mathcal{U}(3)}$  à gauche et la bande circulaire torique  $\mathcal{U}_{3,5}^\circ$  à droite.

suivante :

$$d(C, G) = \frac{|C|}{|V|}.$$

La densité minimum d'un code  $t$ -identifiant d'un graphe  $G$  fini est notée  $d_t^*(G)$ .

$d_t^*(G)$

La densité minimum d'un  $t$ -LDset d'un graphe  $G$  fini est notée  $dl_t^*(G)$ .

$dl_t^*(G)$

La densité minimum d'un  $t$ -LTDset d'un graphe  $G$  fini est notée  $dt_t^*(G)$ .

$dt_t^*(G)$

**Remarque 23** Tout code  $t$ -identifiant,  $t$ -LDset et  $t$ -LTDset d'un graphe infini étant lui-même infini, la densité d'un tel code ne peut donc pas être définie de la façon dont nous l'avons présenté dans le contexte des graphes finis. Nous donnons donc ci-dessous la définition de la densité d'un code  $t$ -identifiant,  $t$ -LDset et  $t$ -LTDset d'une bande infinie.

**Définition 84** Etant donné un graphe infini  $G$  connexe, et un code  $t$ -identifiant, un  $t$ -LDset, ou un  $t$ -LTDset  $C \subseteq V(G)$  de ce graphe, la **densité** de  $C$ , notée  $d(C, G)$  est définie de la façon suivante, étant donné un sommet  $v$  quelconque de  $G$ ,

$$d(C, G) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|C \cap \mathcal{B}_n(v)|}{|\mathcal{B}_n(v)|}$$

La densité minimum d'un code  $t$ -identifiant d'un graphe infini est notée  $d_t^*(G)$ .

$d_t^*(G)$

La densité minimum d'un  $t$ -LDset d'un graphe infini est notée  $dl_t^*(G)$ .

$dl_t^*(G)$

La densité minimum d'un  $t$ -LTDset d'un graphe infini est notée  $dl_t^*(G)$ .

$dt_t^*(G)$

**Propriété 18** Tout code  $t$ -identifiant d'un graphe  $G$  étant aussi un  $t$ -LDset de  $G$ , et tout  $t$ -LTDset de  $G$  étant aussi un  $t$ -LDset de  $G$ , nous obtenons les inégalités suivantes pour tout graphe  $G$  et tout entier  $t \geq 1$  :

$$dl_t^*(G) \leq d_t^*(G),$$

$$dl_t^*(G) \leq dt_t^*(G).$$

**Définition 85** Etant donné une bande infinie  $\mathcal{S}_h^\infty$ , et un code  $t$ -identifiant, un  $t$ -LDset ou un  $t$ -LTDset  $C \subseteq V(\mathcal{S}_h^\infty)$ ,  $C$  est dit **périodique** s'il existe  $c \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall (i, j) \in V(\mathcal{S}_h^\infty), (i, j) \in C \Leftrightarrow (i, j + qc) \in C \quad \forall q \in \mathbb{Z}$$

D'après les Théorèmes 2, 3 et 4, les problèmes code  $t$ -identifiant,  $t$ -LDset, et  $t$ -LTDset minimums correspondent à des  $(4t + 1, 2, w)$ - $r$ -propriétés stables. Les bandes circulaires  $\mathcal{S}_{h,s}^\circ$ ,  $\mathcal{K}_{h,s}^\circ$ ,  $\mathcal{Y}_{h,s}^\circ$  et  $\mathcal{U}_{h,s}^\circ$  étant isomorphes respectivement aux rotagraphes  $\omega_s(M_{\mathcal{S}(h)})$ ,  $\omega_s(M_{\mathcal{K}(h)})$ ,  $\omega_s(M_{\mathcal{Y}(h)})$  et  $\omega_s(M_{\mathcal{U}(h)})$ , nous savons que l'Algorithme Rotagraphes Stable (voir Figure 3.8), présenté dans la partie précédente permet, étant donné un entier  $h$  fixé, de connaître la taille d'un code  $t$ -identifiant, d'un  $t$ -LDset ou d'un  $t$ -LTDset minimum de ces bandes, pour tout entier  $s$ , en un nombre d'opérations élémentaires indépendant de  $s$ .

**Remarque 24** D'après le Théorème 10, les égalités suivantes sont donc vérifiées :

- $d_t^*(\mathcal{S}_h^\infty) = \min_{s \in \mathbb{N}} (d_t^*(\mathcal{S}_{h,s}^\circ))$
- $dl_t^*(\mathcal{S}_h^\infty) = \min_{s \in \mathbb{N}} (dl_t^*(\mathcal{S}_{h,s}^\circ))$
- $dt_t^*(\mathcal{S}_h^\infty) = \min_{s \in \mathbb{N}} (dt_t^*(\mathcal{S}_{h,s}^\circ))$
- $d_t^*(\mathcal{K}_h^\infty) = \min_{s \in \mathbb{N}} (d_t^*(\mathcal{K}_{h,s}^\circ))$
- $dl_t^*(\mathcal{K}_h^\infty) = \min_{s \in \mathbb{N}} (dl_t^*(\mathcal{K}_{h,s}^\circ))$
- $dt_t^*(\mathcal{K}_h^\infty) = \min_{s \in \mathbb{N}} (dt_t^*(\mathcal{K}_{h,s}^\circ))$
- $d_t^*(\mathcal{Y}_h^\infty) = \min_{s \in \mathbb{N}} (d_t^*(\mathcal{Y}_{h,s}^\circ))$
- $dl_t^*(\mathcal{Y}_h^\infty) = \min_{s \in \mathbb{N}} (dl_t^*(\mathcal{Y}_{h,s}^\circ))$
- $dt_t^*(\mathcal{Y}_h^\infty) = \min_{s \in \mathbb{N}} (dt_t^*(\mathcal{Y}_{h,s}^\circ))$
- $d_t^*(\mathcal{U}_h^\infty) = \min_{s \in \mathbb{N}} (d_t^*(\mathcal{U}_{h,s}^\circ))$
- $dl_t^*(\mathcal{U}_h^\infty) = \min_{s \in \mathbb{N}} (dl_t^*(\mathcal{U}_{h,s}^\circ))$
- $dt_t^*(\mathcal{U}_h^\infty) = \min_{s \in \mathbb{N}} (dt_t^*(\mathcal{U}_{h,s}^\circ))$

## 7.2.2 Codes identifiants, LDsets, LTDsets et bandes

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux codes 1-identifiants, aux codes 1-dominant-localisateurs et aux codes 1-dominant-total-localisateurs, exclusivement. Pour simplifier la lecture, nous écrirons donc dominant, code séparateur, code identifiant, code dominant-localisateur, ou encore LDset, et code dominant-total-localisateur ou encore LTDset. Nous allons traiter ces problèmes dans les bandes circulaires et infinies. Nous nous intéresserons donc à chercher, étant donné une bande circulaire ou infinie, et un problème parmi ces trois derniers, la densité minimum d'un code solution sur cette bande. Nous commençons par donner des bornes générales.

### Bornes connues sur les bandes infinies

En 1999, G. Cohen, S. Gravier, I. Honkala, A. Lobstein, M. Mollard, C. Payan et G. Zémor, dans [CGH<sup>+</sup>99], présentent un code identifiant de  $\mathbb{Z}^2$  de densité  $\frac{7}{20}$ , et montrent ainsi que  $d_1^*(\mathbb{Z}^2) \leq \frac{7}{20}$ . Y. Ben-Haim et S. Litsyn, dans [BHL05], montrent, quant à eux, que  $d_1^*(\mathbb{Z}^2) \geq \frac{7}{20}$ . Le théorème suivant est ainsi prouvé :

**Théorème 14** ([CGH<sup>+</sup>99], [BHL05]) *La densité minimum d'un code identifiant de  $\mathbb{Z}^2$  (voir Figure 7.6) est*

$$d_1^*(\mathbb{Z}^2) = \frac{7}{20}.$$

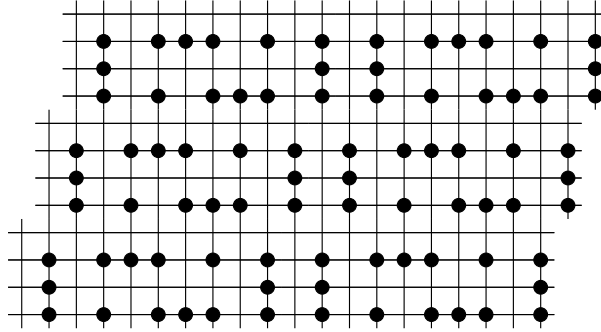


FIGURE 7.6 – Un code identifiant de  $\mathbb{Z}^2$  de densité  $\frac{7}{20}$  ([CGH<sup>+</sup>99]).

Nous pouvons en déduire le théorème suivant sur la densité minimum d'un code identifiant d'une bande infinie, comme proposé dans [DGM04] :

**Théorème 15** ([DGM04]) *Pour tout entier  $k \geq 3$ ,*

$$\frac{7}{20} - \frac{1}{2k} \leq d_1^*(\mathcal{S}_k^\infty) \leq \min\left(\frac{2}{5}, \frac{7}{20} + \frac{2}{k}\right).$$

*Preuve.* Commençons par démontrer la borne supérieure. Il est simple de vérifier que pour tout entier  $k \geq 3$ , le sous-ensemble  $C$  de sommets de  $\mathcal{S}_k^\infty$  constitué des sommets  $(x, y)$  dans  $\mathbb{Z} \times \{1, \dots, k\}$  tels que

$$(x, y) \in C \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow x \bmod 5 \in \{1, 3\} \\ x < 0 \Rightarrow |x + 1| \bmod 5 \in \{1, 3\} \end{cases}$$

est un code identifiant de  $\mathcal{S}_k^\infty$  de densité  $\frac{2}{5}$  (voir Figure 7.7). Ainsi, pour tout entier  $k \geq 3$ , nous avons  $d_1^*(\mathcal{S}_k^\infty) \leq \frac{2}{5}$ .

Concernant la seconde borne supérieure de  $\frac{7}{20} + \frac{2}{k}$ , considérons un code identifiant  $C$  de  $\mathbb{Z}^2$  de densité minimum. D'après le Théorème 14, la densité de  $C$  est de  $\frac{7}{20}$ . Il existe un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}$  de  $k$  entiers consécutifs  $\{i_1, \dots, i_k\}$  tel que  $C_i$  le sous-ensemble de  $C$  induit par les sommets de  $\mathbb{Z} \times \{i_1, \dots, i_k\}$  est de densité  $d(C_i)$  inférieure ou égale à  $\frac{7}{20}$ . En effet, supposons que ce ne soit pas le cas, nous arrivons à une contradiction puisqu'il est simple de vérifier qu'alors, la densité de  $C$  est strictement supérieure à  $\frac{7}{20}$ . Soit  $C'_i = C_i \cup \mathbb{Z} \times \{i_1, i_k\}$ . Il est clair que  $C'_i$  est de densité  $d(C'_i) \leq d(C_i) + \frac{2}{k}$ .

Comme  $d(C_i) \leq \frac{7}{20}$ , nous avons  $d(C'_i) \leq \frac{7}{20} + \frac{2}{k}$ . Montrons que  $C'_i$  est un code identifiant de  $\mathcal{S}_k^\infty$ . Supposons que ce ne soit pas le cas, alors il existe un sommet  $(x, y)$  non dominé, ou deux sommets différents  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  non séparés par  $C'_i$ .

Supposons qu'il existe  $(x, y)$  non dominé. Il est clair que  $y$  ne peut pas être dans  $\{i_2, \dots, i_{k-1}\}$ . En effet, l'union des voisinages des sommets de  $\mathbb{Z} \times \{i_2, \dots, i_{k-1}\}$  est inclus dans  $\mathbb{Z} \times \{i_1, \dots, i_k\}$ , et donc les sommets de  $\mathbb{Z} \times \{i_2, \dots, i_{k-1}\}$  ne peuvent être dominés que par des sommets dans  $\mathbb{Z} \times \{i_1, \dots, i_k\}$ . Comme  $C$  est un code identifiant, les sommets de  $\mathbb{Z} \times \{i_2, \dots, i_{k-1}\}$  sont dominés par  $C$  et donc en particulier par  $C \cap \mathbb{Z} \times \{i_1, \dots, i_k\} = C_i$ . Nous arrivons à une contradiction puisque  $y$  est donc dans  $\{i_1, i_k\}$  et cependant tous les sommets de  $\mathbb{Z} \times \{i_1, i_k\}$  sont dans  $C'_i$ .

Supposons donc qu'il existe deux sommets différents  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  non séparés par  $C'_i$ . Dans ce cas  $N[(x_1, y_1)] \cap C'_i = N[(x_2, y_2)] \cap C'_i$ . Puisque tous les sommets  $(x, y)$  dans  $\mathbb{Z} \times \{i_1, i_k\}$  sont dans  $C'_i$ , si  $y_1 = i_1$  ou, symétriquement,  $y_1 = i_k$ , il existe toujours un sommet dans  $N[(x_1, y_1)] \cap C'_i$  qui n'est pas dans  $N[(x_2, y_2)] \cap C'_i$  :  $(x_1 - 1, y_1)$  si  $x_1 < x_2$ ,  $(x_1 + 1, y_1)$  sinon. Donc  $y_1$  et  $y_2$  sont différents de  $i_1$  et  $i_k$ . Nous ne pouvons pas non plus avoir  $y_1 = i_2$  ou, symétriquement  $y_1 = i_{k-1}$ , puisque, là aussi, il existe toujours un sommet dans  $N[(x_1, y_1)] \cap C'_i$  qui n'est pas dans  $N[(x_2, y_2)] \cap C'_i$  :  $(x_1, i_1)$  si  $y_1 = i_2$ ,  $(x_1, i_k)$  si  $y_1 = i_{k-1}$ . Ceci présente une contradiction puisque dans ce cas,  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  sont dans  $\mathbb{Z} \times \{i_3, \dots, i_{k-2}\}$ , or il est clair que tous les sommets de  $\mathbb{Z} \times \{i_3, \dots, i_{k-2}\}$  sont séparés par  $C \cap \mathbb{Z} \times \{i_2, \dots, i_{k-1}\}$  et donc a fortiori par  $C'_i$ .

Nous avons donc démontré que, pour tout entier  $k \geq 3$ ,  $d_1^*(\mathcal{S}_k^\infty) \leq \min(\frac{2}{5}, \frac{7}{20} + \frac{2}{k})$ .

Montrons maintenant la borne inférieure. La preuve est un peu plus complexe. Considérons la grille infinie comme étant une infinité de bandes infinies carrées posées les unes au dessus des autres. Etant donné un code identifiant  $C$  de  $\mathcal{S}_k^\infty$  de densité minimum, construisons un sous-ensemble  $C'$  de sommets de  $\mathbb{Z}^2$  à partir de  $C$  de la façon suivante : pour tout  $(x, y)$  dans  $\mathbb{Z}^2$ ,  $(x, y) \in C \Rightarrow (x, y + qk) \in C'$  pour tout  $q \in \mathbb{Z}$ . Il est clair que  $C'$  est un dominant de  $\mathbb{Z}^2$  de densité  $d(C'; \mathbb{Z}^2) = d(C, \mathcal{S}_k^\infty)$ . Cependant  $C'$  peut ne pas être un code identifiant de  $\mathbb{Z}^2$ . En effet, il peut exister deux sommets de  $\mathbb{Z}^2$  non séparés par  $C'$ . Les situations où cela peut se produire correspondent exactement aux deux cas présentés dans la Figure 7.8. Dans ces deux situations, il existe deux sommets non séparés (les sommets  $a$  et  $b$  dans la Figure 7.8). Malgré tout, dans chacune des deux situations, il suffit de rajouter exactement un sommet dans  $C'$  pour séparer ces deux sommets (les sommets  $v$  dans la Figure 7.8). Le sous-ensemble de sommets  $C'_2$  ainsi construit est donc bien un code identifiant de  $\mathbb{Z}^2$ . De plus la situation 1 peut apparaître au plus une fois toutes les deux colonnes, la situation 2 au plus une fois toutes les trois colonnes. Ainsi la densité de  $C'_2$  est au plus la densité de  $C + \frac{1}{2k}$ . Comme, d'après le Théorème 14, la densité d'un code identifiant de  $\mathbb{Z}^2$  est au moins  $\frac{7}{20}$ , la densité  $d(C, \mathcal{S}_k^\infty)$  est au moins  $\frac{7}{20} - \frac{1}{2k}$ .  $\square$

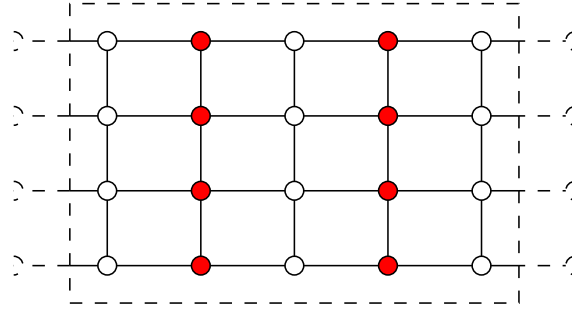


FIGURE 7.7 – Un code identifiant de  $\mathcal{S}_4^\infty$  de densité  $\frac{2}{5}$  et de période 5, le motif encadré se répète toutes les 5 colonnes.

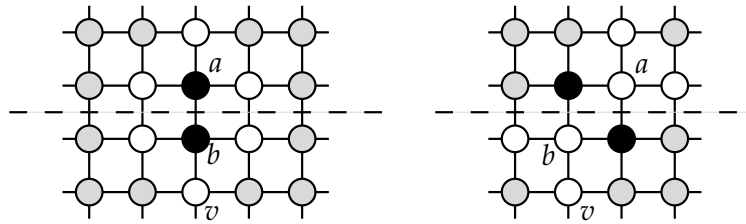


FIGURE 7.8 – Situations dans lesquelles la construction d'un code de  $\mathbb{Z}^2$  à partir d'un code identifiant de  $\mathcal{S}_k^\infty$  forme deux sommets  $a$  et  $b$  non séparés. Les sommets noirs sont dans le code, les blancs en dehors, la situation des gris n'est pas spécifiée. Les pointillés symbolisent la fin d'une copie du code de  $\mathcal{S}_k^\infty$  et le début de la suivante.

D'après la Propriété 18, nous avons la conséquence suivante :

$$d_1^*(\mathcal{S}_k^\infty) \leq \min\left(\frac{2}{5}, \frac{7}{20} + \frac{2}{k}\right)$$

D'autres bornes sur les codes identifiants et codes dominant-localisateurs sont aussi connues pour les grilles infinies triangulée et royale. Nous les présentons ci-dessous.

Dans [CHLo2] et [CHLZo1], I. Charon, I. Honkala, O. Hudry et A. Lobstein présentent d'autres bornes pour le problème du code identifiant dans la grille royale infinie et la grille triangulée infinie :

**Théorème 16** ([KCL98, CHLo2, CHLZo1]) *La densité minimum d'un code identifiant de la grille triangulée infinie (voir Figure 7.9) est*

$$d_1^*(\mathbb{T}^2) = \frac{1}{4}$$

*La densité minimum d'un code identifiant de la grille royale infinie (voir Figure 7.10) est*

$$d_1^*(\mathbb{K}^2) = \frac{2}{9}$$

Dans [Slao2], [Hono6] et [HLo6], Peter J. Slater, Iiro Honkala et Tero Laihonon présentent, respectivement, un code dominant-localisateur de densité minimum pour la grille infinie carrée, triangulée et royale :

**Théorème 17** ([Slao2, Hono6, HLo6]) *La densité minimum d'un code dominant-localisateur de la*

grille infinie carrée (voir Figure 7.11) est

$$dl_1^*(\mathbb{Z}^2) = \frac{3}{10}$$

La densité minimum d'un code dominant-localisateur de la grille infinie triangulée (voir Figure 7.12) est

$$dl_1^*(\mathbb{T}^2) = \frac{13}{57}$$

La densité minimum d'un code dominant-localisateur de la grille infinie royale (voir Figure 7.13) est

$$dl_1^*(\mathbb{K}^2) = \frac{1}{5}$$

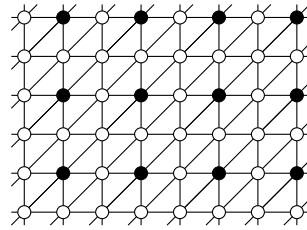


FIGURE 7.9 – Un code identifiant de  $\mathbb{T}^2$  de densité  $\frac{1}{4}$  ([CHLo2]).

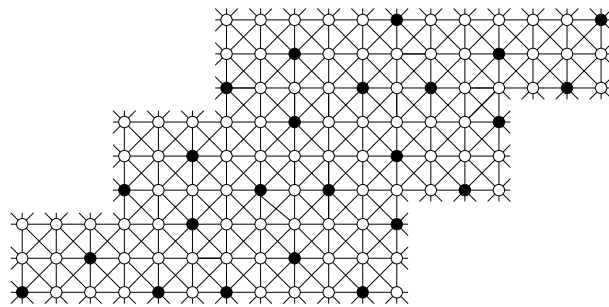


FIGURE 7.10 – Un code identifiant de  $\mathbb{K}^2$  de densité  $\frac{2}{9}$  ([CHLZo1]).

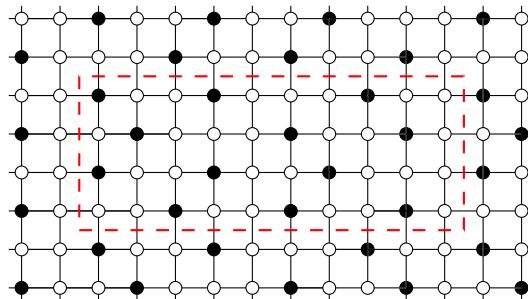


FIGURE 7.11 – Un code dominant-localisateur de  $\mathbb{Z}^2$  de densité  $\frac{3}{10}$ , le motif encadré se répète ([Slao2]).

En programmant l'algorithme que nous avons décrit dans la première partie de la thèse nous avons retrouvé plusieurs résultats, certains déjà connus, et d'autres nouveaux, sur les bandes circulaires de hauteur 1 à 4



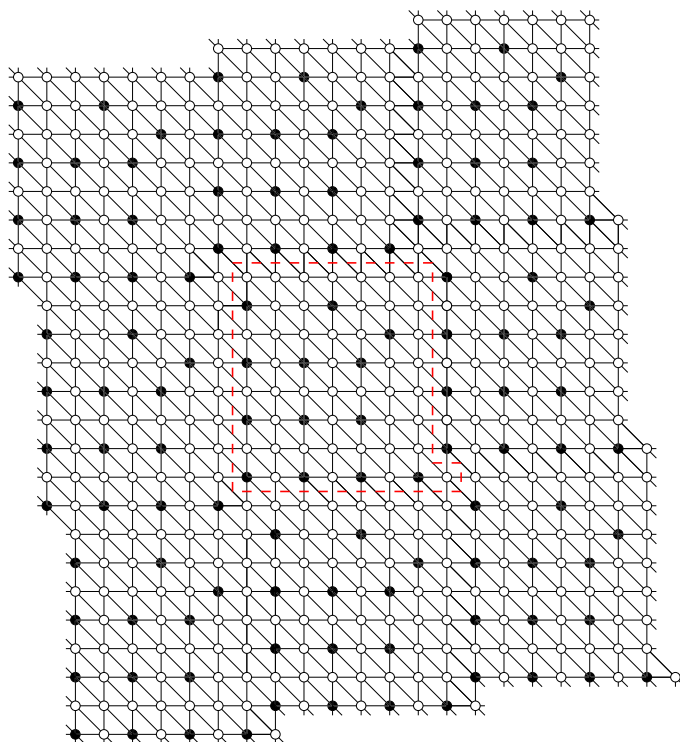


FIGURE 7.12 – Un code dominant-localisateur de  $\mathbb{T}^2$  de densité  $\frac{13}{57}$ , le motif encadré se répète ([Hono6]).

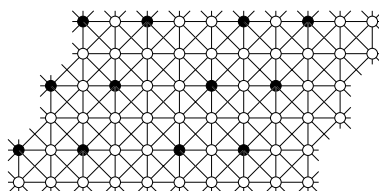


FIGURE 7.13 – Un code dominant-localisateur de  $\mathbb{K}^2$  de densité  $\frac{1}{5}$  ([HLo6]).

concernant les codes identifiants, les LDset et les LTDset. Nous présentons les spécificités du code informatique que nous avons programmé dans la section ci-dessous, suivi des résultats obtenus dans les quatre sections suivantes.

### Spécificités du code informatique et de son exécution

Nous avons programmé deux versions (pour chacune des trois propriétés et pour chaque hauteur de bande) de l'algorithme, l'une, la v1, comprenant l'Algorithme Construction  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}$  (Figure 3.1) et l'autre, la v2, l'Algorithme Construction  $\vec{\mathcal{G}}'_{\mathcal{R}}$  (Figure 3.11). Les programmes sont codés en C++ et sont conçus pour être exécutés en *multithread* (c'est à dire en parallèle sur plusieurs processeurs). Nous avons commencé par les tester sur la bande circulaire de hauteur 1 et 2 pour le code identifiant dont les densités minimum étaient déjà connues. L'algorithme donnant des résultats identiques, nous avons pu en confirmer le bon fonctionnement. Pour la création du graphe auxiliaire, pour une bande de hauteur  $h$ , par exemple la bande carrée, nous

codons naturellement les 2-étiquetages du fasciagraphe  $\psi_5(M_{S(h)})$  par des mots de  $5h$  bits pour la  $v_1$  et de  $4h$  bits pour la  $v_2$ . Un des problèmes informatiques que nous avons dû gérer au moment où nous n'avions pas encore programmé la seconde version, mais qui persiste toutefois dans cette dernière, est la taille très importante de mémoire nécessaire à l'exécution. Comme  $5h$  bits permettent de coder  $2^{5h}$  mots différents, il y a, au maximum,  $2^{5h}$  sommets dans le graphe. Nous avons pu remarquer qu'en général, selon la hauteur ou le type de bande concernée, il y a environ au moins la moitié d'entre eux qui vérifient  $\text{Code}^{loc}$ . Soit, à partir de la hauteur 3, environ  $2^{14} = 16384$  sommets dans le graphe (pour le cas du code identifiant de la bande carrée de hauteur 3, il y a exactement 16824 sommets). La partie critique en mémoire vient de la matrice des longueurs du graphe auxiliaire et de sa séquence de puissances. Chaque matrice  $M^i$  contient des longueurs de  $i$ -chemins dans le graphe auxiliaire que nous codons dans des *short* (16 bits). A tout moment de l'exécution, nous gardons en mémoire vive trois matrices, la matrice initiale ( $M^0$ ), la matrice courante ( $M^i$ ) et la matrice qui est à calculer ( $M^{i+1} = M^0 \otimes M^i$ ). Comme il y a environ  $2^{5h-1}$  sommets dans le graphe auxiliaire, les matrices utilisent toutes environ  $16 \times 2^{5h-1}$  bits, soit  $2 \times 2^{5h-1}$  octets. Pour le code identifiant de la bande carrée de hauteur 3, les matrices font  $16824^2 \times 2 = 555093952$  octets soit environ 540 Mo. Une fois les matrices calculées, nous en conservons les translatés (chaque entrée moins le minimum de la matrice) dans des fichiers .txt dont nous calculons le *hash* afin de pouvoir comparer les matrices. Le programme s'arrête lorsque deux fichiers ont le même *hash*, et donc que deux matrices translatées sont identiques. Le nombre de matrices calculées à ce moment-là diffère selon le type de grille et le problème. Pour le code identifiant de la bande circulaire carrée de hauteur 3, 28 matrices ont été calculées. Pour ce faire, le programme a été exécuté sur un serveur du laboratoire G-SCOP contenant 10 cœurs. Il est clair qu'avec cette première version du programme nous n'aurions pas pu calculer de résultats sur les bandes de hauteur 4. En effet pour cette hauteur on peut estimer le nombre de sommets du graphe auxiliaire à  $2^{19}$  sommets, soit sa matrice des longueurs codée sur  $2^{19} \times 2^{19} \times 2 = 2^{39}$  octets ou encore 512 Go. Tels quels les ordinateurs actuels ne permettent pas une telle quantité de mémoire vive. Pour pallier ce problème, nous aurions pu décider de ne conserver en mémoire vive qu'une partie des matrices, mais il faudrait tout de même suffisamment de place pour conserver la séquence de matrices à 512 Go par matrice. On pourrait là aussi décider de ne conserver en mémoire centrale que ces mêmes trois matrices, mais dans ce cas on s'interdit la possibilité de reprendre l'exécution en cours de calcul (après un crash machine par exemple), tout arrêt impliquerait de reprendre le programme au début, et de plus les temps de calcul nécessaires par matrice seraient très élevés pour cause du chargement et déchargement fréquent des parties de la matrice. Nous avons donc préféré ne pas pousser plus loin les améliorations possibles de cette version. A la hauteur 3, pour des matrices de 500 Mo donc, le programme met environ une heure pour calculer une matrice.

C'est à ce moment que nous avons fait l'observation nous permettant de développer la seconde version pour réduire la taille du graphe auxiliaire,

et donc réduire la mémoire nécessaire à l'exécution. Cette adaptation nous a permis de commencer les calculs pour les problèmes sur les bandes de hauteur 4. Afin de donner une illustration de la différence entre les deux versions, nous donnons dans le tableau ci-dessous, des valeurs approchées des temps de calculs nécessaires et de la mémoire, vive et globale, utilisée lors de l'exécution de chacun des deux programmes pour explorer le cas du code identifiant de la bande circulaire carrée. Rappelons toutefois que ces calculs sont effectués en préprocess et qu'une fois fini, calculer le code identifiant de la bande circulaire correspondante quelle qu'en soit la taille, se fait en une unique opération.

hauteur	nombre de sommets		temps de calcul		taille d'une matrice		taille totale	
	v1	v2	v1	v2	v1	v2	v1	v2
1	15	10	2 sec	1 sec	≈ 450 o	≈ 200 o	≈ 24 Ko	≈ 4,1 Ko
2	581	169	10 sec	2 sec	≈ 660 Ko	≈ 56 Ko	≈ 12,3 Mo	≈ 1 Mo
3	16824	2598	34 heures	6 minutes	≈ 540 Mo	≈ 13 Mo	≈ 16 Go	≈ 370 Mo
4	X	37791	X	16 jours	X	≈ 2,6 Go	X	≈ 151 Go

Une fois le programme exécuté, quelle qu'en soit la version, nous obtenons plusieurs fichiers .txt différents :

- un fichier qui contient la liste des sommets du graphe auxiliaire sous la forme d'entiers,
- un fichier par matrice calculée, dont deux d'entre eux, le dernier et un autre, sont identiques,
- un fichier qui contient la liste des entrées minimum de chaque matrice (comme nous conservons les matrices translattées, pour retrouver les matrices d'origine, il faut ajouter ce minimum à chaque entrée de la matrice correspondante),
- un fichier qui contient la liste, pour chaque matrice, d'un des coefficients minimum dans la diagonale (correspondant donc à la densité minimum du code concerné sur la bande circulaire de taille égale à la puissance de la matrice) et d'un des sommets qui les ont réalisés,
- un fichier qui contient le minimum des entrées du fichier précédent (à partir de ce fichier on connaît la densité minimum du code de la bande infinie correspondante et le sommet, et donc le 2-étiquetage, qui le réalise),

Tel que nous obtenons ces résultats, une fois le programme terminé, nous pouvons dire la densité minimum du code correspondant pour chaque taille de bande circulaire, mais nous ne connaissons, de ce code, que le motif sur

les 4 ou 5 premières colonnes qui nous sont données par le sommet, et donc le 2-étiquetage, qui vérifie ce minimum (selon s'il s'agit de la première ou de la seconde version du programme qui a été exécutée). Pour connaître le motif total du code, il faut normalement effectuer un *backtrack* sur la façon dont l'entrée de la matrice correspondante a été calculée. Nous avons choisi de ne pas effectuer ce backtrack qui aurait été trop coûteux en temps d'exécution (notamment sur le temps nécessaire au rechargement de chaque matrice en mémoire). Pour connaître ce motif, nous avons préféré utiliser un solveur de programmation par contrainte, codé grâce à la librairie java *choco*, exécuté sur une machine grand public sur un unique processeur, et auquel nous donnons la densité attendue, la taille du motif (le nombre de colonnes) et les colonnes connues (les 4 ou 5 premières). Pour la bande de hauteur 1 et 2 ce programme trouve la réponse immédiatement quel que soit le type de bande (carrée, triangulaire, royale ou torique) ou de code (identifiant, LDset ou LTDset). A partir de la hauteur 3, le backtrack met environ 1 heure, et à la hauteur 4 environ 24 heures.

Enfin les problèmes que nous étudions étant des  $(5, 2, w)$ -propriétés stables, la première version du programme ne permettait de connaître les valeurs minimum des codes concernés, pour tout  $\omega_n(M)$  que pour  $n \geq 5$ . Grâce à la seconde version de l'algorithme, nous avons pu calculer les résultats aussi dans le cas où  $n = 4$ . Notre but étant l'utilisation de notre algorithme afin de traiter des problèmes de code identifiant, code dominant-localisateur et code dominant-total-localisateur, bien que cela soit facilement calculable, dans les listes ci-dessous, nous ne présentons pas les cas pour lesquels  $n \leq 3$ . Certains des résultats sur les bandes de hauteur 1 et 2 que nous présentons ci-dessous sont déjà connus dans la littérature comme nous le rappelons dans le tableau qui suit.

### Bande circulaire de hauteur 1

A la hauteur 1 seule la bande carrée est définie, il s'agit d'un cycle, les bandes royales, triangulées et toriques ne sont pas définies.

Concernant le code identifiant :

- $d_1^*(\mathcal{C}_4) = \frac{3}{4}$
- $d_1^*(\mathcal{C}_5) = \frac{3}{5}$
- pour tout entier  $n \geq 3$   $\begin{cases} d_1^*(\mathcal{C}_{2n}) = \frac{1}{2} \\ d_1^*(\mathcal{C}_{2n+1}) = \frac{n+2}{2n+1} \end{cases}$

Concernant le LDset :

- $dl_1^*(\mathcal{C}_4) = \frac{1}{2}$
- pour tout entier  $n \geq 1$   $\begin{cases} d_1^*(\mathcal{C}_{5n}) = \frac{2}{5} \\ d_1^*(\mathcal{C}_{5n+1}) = \frac{2n+1}{5n+1} \\ d_1^*(\mathcal{C}_{5n+2}) = \frac{2n+1}{5n+2} \\ d_1^*(\mathcal{C}_{5n+3}) = \frac{2(n+1)}{5n+3} \\ d_1^*(\mathcal{C}_{5n+4}) = \frac{2(n+1)}{5n+4} \end{cases}$

Concernant le LTDset :

$$- \text{ pour tout entier } n \geq 1 \begin{cases} d_1^*(\mathcal{C}_{4n}) = \frac{1}{2} \\ d_1^*(\mathcal{C}_{4n+1}) = \frac{2n+1}{4n+1} \\ d_1^*(\mathcal{C}_{4n+2}) = \frac{2n+2}{4n+2} \\ d_1^*(\mathcal{C}_{4n+3}) = \frac{2n+2}{4n+3} \end{cases}$$

### Bandes circulaires de hauteur 2

La bande torique n'est pas définie pour la hauteur 2. Pour les autres bandes, nous donnons les résultats suivants :

Concernant le code identifiant :

Bande carrée :

$$- \text{ pour } n \in \{4, 5, 6\}, dl_1^*(\mathcal{S}_{2,n}^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$- \text{ pour tout entier } n \geq 1 \begin{cases} d_1^*(\mathcal{S}_{2,7n}^\circ) = \frac{3}{7} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{2,7n+1}^\circ) = \frac{3n+1}{7n+1} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{2,7n+2}^\circ) = \frac{3(2n+1)}{2(7n+2)} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{2,7n+3}^\circ) = \frac{3(2n+1)}{2(7n+3)} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{2,7n+4}^\circ) = \frac{3n+2}{7n+4} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{2,7n+5}^\circ) = \frac{6n+5}{2(7n+5)} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{2,7n+6}^\circ) = \frac{3(n+1)}{7n+6} \end{cases}$$

Bande royale :

$$- \text{ pour tout entier } n \geq 1, d_1^*(\mathcal{K}_{2,n}^\circ) = \infty$$

Bande triangulée :

$$- \text{ pour tout entier } n \geq 4, d_1^*(\mathcal{Y}_{2,n}^\circ) = \frac{1}{2}$$

Concernant le LDset :

Bande carrée :

$$- dl_1^*(\mathcal{S}_{2,7}^\circ) = \frac{3}{7}$$

$$- \text{ pour tout entier } n \geq 1 \begin{cases} dl_1^*(\mathcal{S}_{2,8n}^\circ) = \frac{3}{8} \\ dl_1^*(\mathcal{S}_{2,8n+1}^\circ) = \frac{6n+1}{2(8n+1)} \\ dl_1^*(\mathcal{S}_{2,8n+2}^\circ) = \frac{3n+1}{2(4n+1)} \\ dl_1^*(\mathcal{S}_{2,8n+3}^\circ) = \frac{6n+3}{2(8n+3)} \\ dl_1^*(\mathcal{S}_{2,8n+4}^\circ) = \frac{3n+2}{2(4n+2)} \\ dl_1^*(\mathcal{S}_{2,8n+5}^\circ) = \frac{3n+2}{8n+5} \\ dl_1^*(\mathcal{S}_{2,8n+6}^\circ) = \frac{6n+5}{4(4n+3)} \\ dl_1^*(\mathcal{S}_{2,8n+7}^\circ) = \frac{3(n+1)}{8n+7} \end{cases}$$

Bande royale :

– pour tout entier  $n \geq 4$ ,  $dl_1^*(\mathcal{K}_{2,n}^\circ) = \frac{1}{2}$

Bande triangulée :

– pour tout entier  $n \geq 1$   $\begin{cases} dl_1^*(\mathcal{Y}_{2,3n+1}^\circ) = \frac{1+2n}{2+6n} \\ dl_1^*(\mathcal{Y}_{2,3n+2}^\circ) = \frac{2+2n}{4+6n} \end{cases}$

– pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $dl_1^*(\mathcal{Y}_{2,3n}^\circ) = \frac{1}{3}$

Concernant le LTDset :

Bande carrée :

– pour  $n \in \{4, 6\}$ ,  $dt_1^*(\mathcal{S}_{2,n}^\circ) = \frac{1}{2}$

–  $dt_1^*(\mathcal{S}_{2,8}^\circ) = \frac{7}{16}$

–  $dt_1^*(\mathcal{S}_{2,9}^\circ) = \frac{8}{18}$

– pour tout entier  $n \geq 1$   $\begin{cases} dt_1^*(\mathcal{S}_{2,5n}^\circ) = \frac{2}{5} \\ dt_1^*(\mathcal{S}_{2,10n+1}^\circ) = \frac{1+8n}{2+20n} \\ dt_1^*(\mathcal{S}_{2,10n+2}^\circ) = \frac{1+4n}{2+10n} \\ dt_1^*(\mathcal{S}_{2,10n+3}^\circ) = \frac{3+8n}{6+20n} \\ dt_1^*(\mathcal{S}_{2,10n+4}^\circ) = \frac{1+2n}{2+5n} \\ dt_1^*(\mathcal{S}_{2,10n+6}^\circ) = \frac{3+4n}{6+10n} \\ dt_1^*(\mathcal{S}_{2,10n+7}^\circ) = \frac{3+4n}{7+10n} \\ dt_1^*(\mathcal{S}_{2,10n+8}^\circ) = \frac{7+8n}{16+20n} \\ dt_1^*(\mathcal{S}_{2,10n+9}^\circ) = \frac{4+4n}{9+10n} \end{cases}$

Bande royale :

– pour tout entier  $n \geq 4$ ,  $dt_1^*(\mathcal{K}_{2,n}^\circ) = \frac{1}{2}$

Bande triangulée :

– pour tout entier  $n \geq 1$   $\begin{cases} dt_1^*(\mathcal{Y}_{2,3n+1}^\circ) = \frac{1+2n}{2+6n} \\ dt_1^*(\mathcal{Y}_{2,3n+2}^\circ) = \frac{2+2n}{4+6n} \end{cases}$

– pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $dt_1^*(\mathcal{Y}_{2,3n}^\circ) = \frac{1}{3}$

### Bandes circulaires de hauteur 3

Concernant le code identifiant :

Bande carrée :

– pour  $n \in \{4, 8\}$ ,  $d_1^*(\mathcal{S}_{3,n}^\circ) = \frac{5}{12}$

– pour  $n \in \{5, 10\}$ ,  $d_1^*(\mathcal{S}_{3,n}^\circ) = \frac{2}{5}$

- $d_1^*(\mathcal{S}_{3,6}^\circ) = \frac{4}{9}$
- $d_1^*(\mathcal{S}_{3,7}^\circ) = \frac{3}{7}$
- $d_1^*(\mathcal{S}_{3,9}^\circ) = \frac{11}{27}$
- $d_1^*(\mathcal{S}_{3,11}^\circ) = \frac{14}{33}$

$$- \text{ pour tout entier } n \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} d_1^*(\mathcal{S}_{3,12n}^\circ) = \frac{7}{18} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{3,12n+1}^\circ) = \frac{2+14n}{3+36n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{3,12n+2}^\circ) = \frac{3+14n}{6+36n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{3,12n+3}^\circ) = \frac{4+14n}{9+36n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{3,12n+4}^\circ) = \frac{5+14n}{12+36n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{3,12n+5}^\circ) = \frac{6+14n}{15+36n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{3,12n+6}^\circ) = \frac{4+7n}{9+18n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{3,12n+7}^\circ) = \frac{9+14n}{21+36n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{3,12n+8}^\circ) = \frac{5+7n}{12+18n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{3,12n+9}^\circ) = \frac{11+14n}{27+36n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{3,12n+10}^\circ) = \frac{6+7n}{15+18n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{3,12n+11}^\circ) = \frac{14+14n}{33+36n} \end{array} \right.$$

Bande royale :

- $d_1^*(\mathcal{K}_{3,7}^\circ) = \frac{8}{21}$
- $d_1^*(\mathcal{K}_{3,9}^\circ) = \frac{10}{27}$
- $d_1^*(\mathcal{K}_{3,13}^\circ) = \frac{14}{39}$
- $d_1^*(\mathcal{K}_{3,19}^\circ) = \frac{20}{57}$
- pour tout entier  $n \in \{4 \text{ à } 6, 8, 10 \text{ à } 12, 14 \text{ à } 18, 20\}$ ,  $d_1^*(\mathcal{K}_{3,n}^\circ) = \frac{1}{3}$
- pour tout entier  $n \geq 21$ ,  $d_1^*(\mathcal{K}_{3,n}^\circ) = \frac{1}{3}$

Bande torique :

$$- \text{ pour tout entier } n \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} d_1^*(\mathcal{U}_{3,4n}^\circ) = \frac{5}{12} \\ d_1^*(\mathcal{U}_{3,4n+1}^\circ) = \frac{2+5n}{3+12n} \\ d_1^*(\mathcal{U}_{3,4n+2}^\circ) = \frac{3+5n}{6+12n} \\ d_1^*(\mathcal{U}_{3,4n+3}^\circ) = \frac{4+5n}{9+12n} \end{array} \right.$$

Bande triangulée :

- $d_1^*(\mathcal{Y}_{3,7}^\circ) = \frac{8}{21}$
- pour tout entier  $n \geq 4$  et  $n \neq 7$ ,  $d_1^*(\mathcal{Y}_{3,n}^\circ) = \frac{1}{3}$

Concernant le LDset :

Bande carrée :

- $dl_1^*(\mathcal{S}_{3,4}^\circ) = \frac{1}{3}$
- $dl_1^*(\mathcal{S}_{3,5}^\circ) = \frac{2}{5}$

$$- \text{ pour tout entier } n \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} dl_1^*(\mathcal{S}_{3,6n}^\circ) = \frac{1}{3} \\ dl_1^*(\mathcal{S}_{3,6n+1}^\circ) = \frac{6n+2}{18n+3} \\ dl_1^*(\mathcal{S}_{3,6n+2}^\circ) = \frac{1}{3} \\ dl_1^*(\mathcal{S}_{3,6n+3}^\circ) = \frac{1}{3} \\ dl_1^*(\mathcal{S}_{3,6n+4}^\circ) = \frac{1}{3} \\ dl_1^*(\mathcal{S}_{3,6n+5}^\circ) = \frac{2n+2}{6n+5} \end{array} \right.$$

Bande royale :

$$- dl_1^*(\mathcal{K}_{3,4}^\circ) = \frac{1}{3}$$

$$- \text{ pour tout entier } n \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} dl_1^*(\mathcal{K}_{3,5n}^\circ) = \frac{4}{15} \\ dl_1^*(\mathcal{K}_{3,5n+1}^\circ) = \frac{1+4n}{3+15n} \\ dl_1^*(\mathcal{K}_{3,5n+2}^\circ) = \frac{2+4n}{6+15n} \\ dl_1^*(\mathcal{K}_{3,5n+3}^\circ) = \frac{3+4n}{9+15n} \\ dl_1^*(\mathcal{K}_{3,5n+4}^\circ) = \frac{4+4n}{12+15n} \end{array} \right.$$

Bande torique :

$$- \text{ pour tout entier } n \geq 4, dl_1^*(\mathcal{U}_{3,n}^\circ) = \frac{1}{3}$$

Bande triangulée :

$$- \text{ pour tout entier } n \in \{4, \dots, 9\}, dl_1^*(\mathcal{Y}_{3,n}^\circ) = \frac{1}{3}$$

$$- \text{ pour tout entier } n \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} dl_1^*(\mathcal{Y}_{3,10n}^\circ) = \frac{3}{10} \\ dl_1^*(\mathcal{Y}_{3,10n+1}^\circ) = \frac{1+9n}{3+30n} \\ dl_1^*(\mathcal{Y}_{3,10n+2}^\circ) = \frac{2+9n}{6+30n} \\ dl_1^*(\mathcal{Y}_{3,10n+3}^\circ) = \frac{3+9n}{9+30n} \\ dl_1^*(\mathcal{Y}_{3,10n+4}^\circ) = \frac{4+9n}{12+30n} \\ dl_1^*(\mathcal{Y}_{3,10n+5}^\circ) = \frac{5+9n}{15+30n} \\ dl_1^*(\mathcal{Y}_{3,10n+6}^\circ) = \frac{6+9n}{18+30n} \\ dl_1^*(\mathcal{Y}_{3,10n+7}^\circ) = \frac{7+9n}{21+30n} \\ dl_1^*(\mathcal{Y}_{3,10n+8}^\circ) = \frac{8+9n}{24+30n} \\ dl_1^*(\mathcal{Y}_{3,10n+9}^\circ) = \frac{9+9n}{27+30n} \end{array} \right.$$

Concernant le LTDset :

Bande carrée :

$$- dt_1^*(\mathcal{S}_{3,4}^\circ) = \frac{5}{12}$$

$$- dt_1^*(\mathcal{S}_{3,5}^\circ) = \frac{2}{5}$$

$$- \text{ pour tout entier } n \geq 3 \left\{ \begin{array}{l} dt_1^*(\mathcal{S}_{3,6n}^\circ) = \frac{7}{18} \\ dt_1^*(\mathcal{S}_{3,6n+1}^\circ) = \frac{2+7n}{3+18n} \\ dt_1^*(\mathcal{S}_{3,6n+2}^\circ) = \frac{3+7n}{6+18n} \\ dt_1^*(\mathcal{S}_{3,6n+3}^\circ) = \frac{4+7n}{9+18n} \\ dt_1^*(\mathcal{S}_{3,6n+4}^\circ) = \frac{5+7n}{12+18n} \\ dt_1^*(\mathcal{S}_{3,6n+5}^\circ) = \frac{6+7n}{15+18n} \end{array} \right.$$



Bande royale :

$$\begin{aligned}
 & - \text{pour } n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}, dt_1^*(\mathcal{K}_{3,n}^\circ) = \frac{1}{3} \\
 & - \text{pour tout entier } n \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} dt_1^*(\mathcal{K}_{3,9n}^\circ) = \frac{8}{27} \\ dt_1^*(\mathcal{K}_{3,9n+1}^\circ) = \frac{1+8n}{3+27n} \\ dt_1^*(\mathcal{K}_{3,9n+2}^\circ) = \frac{2+8n}{6+27n} \\ dt_1^*(\mathcal{K}_{3,9n+3}^\circ) = \frac{3+8n}{9+27n} \\ dt_1^*(\mathcal{K}_{3,9n+4}^\circ) = \frac{4+8n}{12+27n} \\ dt_1^*(\mathcal{K}_{3,9n+5}^\circ) = \frac{5+8n}{15+27n} \\ dt_1^*(\mathcal{K}_{3,9n+6}^\circ) = \frac{6+8n}{18+27n} \\ dt_1^*(\mathcal{K}_{3,9n+7}^\circ) = \frac{7+8n}{21+27n} \\ dt_1^*(\mathcal{K}_{3,9n+8}^\circ) = \frac{8+8n}{24+27n} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Bande torique :

$$\begin{aligned}
 & - dt_1^*(\mathcal{U}_{3,4}^\circ) = \frac{5}{12} \\
 & - dt_1^*(\mathcal{U}_{3,5}^\circ) = \frac{6}{15} \\
 & - \text{pour tout entier } n \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} dt_1^*(\mathcal{U}_{3,6n}^\circ) = \frac{1}{3} \\ dt_1^*(\mathcal{U}_{3,6n+1}^\circ) = \frac{2+6n}{3+18n} \\ dt_1^*(\mathcal{U}_{3,6n+2}^\circ) = \frac{1+2n}{2+6n} \\ dt_1^*(\mathcal{U}_{3,6n+3}^\circ) = \frac{4+6n}{9+18n} \\ dt_1^*(\mathcal{U}_{3,6n+4}^\circ) = \frac{5+6n}{12+18n} \\ dt_1^*(\mathcal{U}_{3,6n+5}^\circ) = \frac{2+2n}{5+6n} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Bande triangulée :

$$- \text{pour tout entier } n \geq 4, dt_1^*(\mathcal{Y}_{3,n}^\circ) = \frac{1}{3}$$

#### Bandes circulaires de hauteur 4

Pour ces bandes, les calculs sont toujours en cours d'exécution, nous donnons donc les résultats que nous avons obtenus jusqu'à maintenant. Concernant le code identifiant :

Bande carrée :

$$\begin{aligned}
 & - d_1^*(\mathcal{S}_{4,4}^\circ) = \frac{7}{16} \\
 & - \text{pour tout } n \in \{5, 10\}, d_1^*(\mathcal{S}_{4,n}^\circ) = \frac{2}{5} \\
 & - \text{pour tout } n \in \{6, 9\}, d_1^*(\mathcal{S}_{4,n}^\circ) = \frac{5}{12} \\
 & - d_1^*(\mathcal{S}_{4,7}^\circ) = \frac{3}{7} \\
 & - d_1^*(\mathcal{S}_{4,8}^\circ) = \frac{13}{32} \\
 & - d_1^*(\mathcal{S}_{4,11}^\circ) = \frac{9}{22} \\
 & - d_1^*(\mathcal{S}_{4,12}^\circ) = \frac{19}{48} \\
 & - d_1^*(\mathcal{S}_{4,13}^\circ) = \frac{21}{52}
 \end{aligned}$$

$$- \text{ pour tout entier } n \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} d_1^*(\mathcal{S}_{4,14n}^\circ) = \frac{11}{28} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{4,14n+1}^\circ) = \frac{2+22n}{4+56n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{4,14n+2}^\circ) = \frac{4+22n}{8+56n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{4,14n+3}^\circ) = \frac{5+22n}{12+56n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{4,14n+4}^\circ) = \frac{7+22n}{16+56n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{4,14n+5}^\circ) = \frac{8+22n}{20+56n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{4,14n+6}^\circ) = \frac{10+22n}{24+56n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{4,14n+7}^\circ) = \frac{12+22n}{28+56n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{4,14n+8}^\circ) = \frac{13+22n}{32+56n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{4,14n+9}^\circ) = \frac{15+22n}{36+56n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{4,14n+10}^\circ) = \frac{16+22n}{40+56n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{4,14n+11}^\circ) = \frac{18+22n}{44+56n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{4,14n+12}^\circ) = \frac{19+22n}{48+56n} \\ d_1^*(\mathcal{S}_{4,14n+13}^\circ) = \frac{21+22n}{52+56n} \end{array} \right.$$

### Densités minimum exactes connues dans les bandes infinies

Grâce aux résultats précédents concernant les codes identifiants, LDset et LTDset minimaux sur les bandes circulaires carrées, royales, toriques, triangulées, et d'après la Remarque 24, nous obtenons, résumées dans le tableau ci-dessous, les valeurs des densités minimum exactes connues des codes identifiants, LDset et LTDset des bandes infinies carrées, royales, toriques ou triangulées.

$h$	$\mathcal{S}_h^\circ$			$\mathcal{K}_h^\circ$			$\mathcal{U}_h^\circ$			$\mathcal{Y}_h^\circ$		
	C	LD	LTD	C	LD	LTD	C	LD	LTD	C	LD	LTD
1	$\frac{1}{2}$ [BCHLo4]	$\frac{2}{5}$ [BCHLo4]	$\frac{1}{2}$	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	$\frac{3}{7}$ [DGMo4]	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	X	X	X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{11}{28}$						$\frac{5}{14}$					

Comme précisé en partie dans le tableau ci-dessus, le cas du code identifiant et du LDset dans les cycles et le chemin infini avait déjà été étudié dans [BCHLo4]. Le cas du code identifiant dans la bande infinie de hauteur 2

avait été, quant à lui, étudié et résolu dans [DGMo4]. Enfin le cas du code identifiant dans la bande infinie carrée de hauteur 3 avait été conjecturée, dans [GMSo6], par S. Gravier, J. Moncel et A. Semri, comme étant de densité minimum  $2/5$ . Grâce à cet algorithme, nous avons montré que la densité minimum d'un code identifiant de la bande infinie carrée de hauteur 3 était en réalité de  $7/18$ .

Nous donnons dans les figures ci-dessous (7.14 à 7.19) les motifs périodiques, pour chaque type de grille et chaque problème, qui réalisent les densités du tableau précédent.

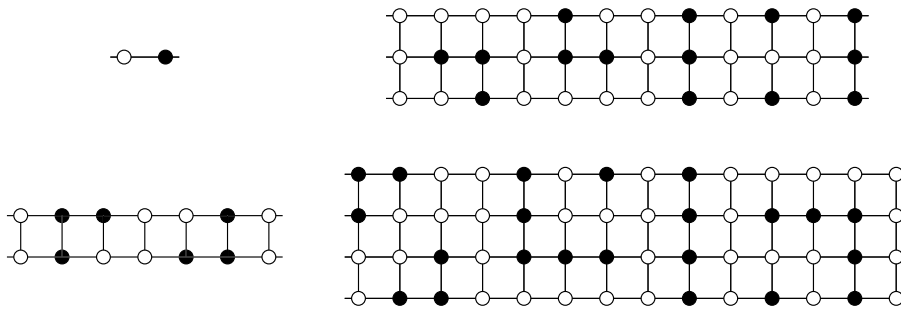


FIGURE 7.14 – Sont représentés les motifs périodiques réalisant un code identifiant de densité minimum pour les bandes infinies carrées de hauteur 1, 2, 3 et 4.

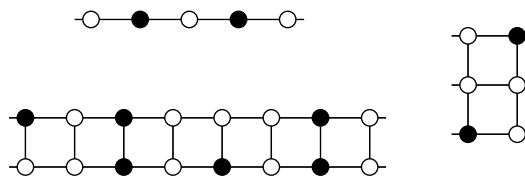


FIGURE 7.15 – Sont représentés les motifs périodiques réalisant un LDset de densité minimum pour les bandes infinies carrées de hauteur 1, 2 et 3.

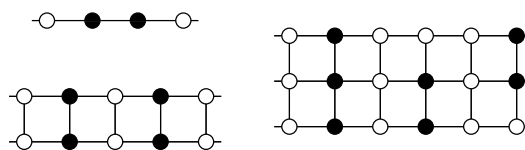


FIGURE 7.16 – Sont représentés les motifs périodiques réalisant un LTDset de densité minimum pour les bandes infinies carrées de hauteur 1, 2 et 3.

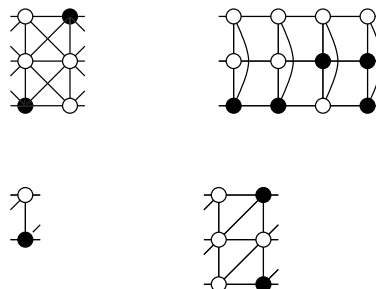


FIGURE 7.17 – Sont représentés les motifs périodiques réalisant un code identifiant de densité minimum pour les bandes infinies royales, triangulées et toriques de hauteur 2 et 3.

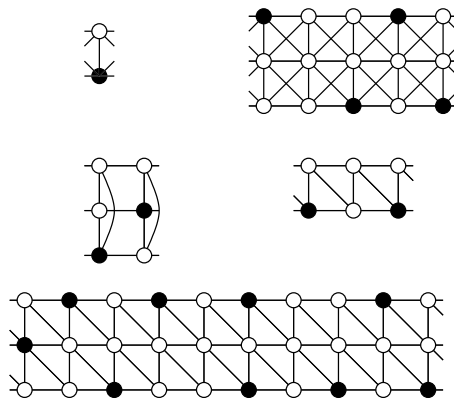


FIGURE 7.18 – Sont représentés les motifs périodiques réalisant un LDset de densité minimum pour les bandes infinies royales, triangulées et toriques de hauteur 2 et 3.

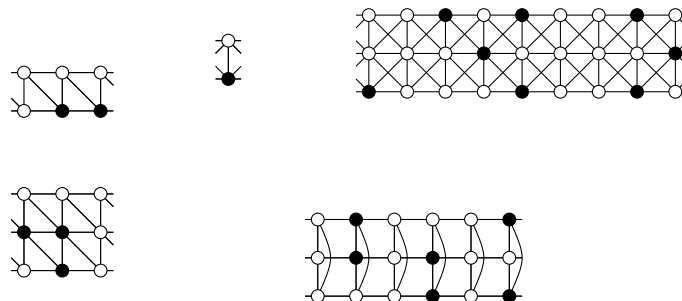


FIGURE 7.19 – Sont représentés les motifs périodiques réalisant un LTDset de densité minimum pour les bandes infinies royales, triangulées et toriques de hauteur 2 et 3.

### 7.2.3 Motifs, périodicité et preuves combinatoires pour certains codes

C'est suite à la présentation du résultat concernant la densité minimum d'un code identifiant dans la bande infinie carrée de hauteur 3 lors de la conférence des JGA 2010 que Frédéric Havet nous a fait remarquer qu'il est possible de fournir des preuves combinatoires de ces résultats de densité minimum en utilisant la méthode du déchargement. La méthode de déchargement a été développée dans le cadre de la preuve du Théorème des 4 couleurs ([AH89]) bien connu en théorie des graphes. La méthode est utilisée, habituellement, si l'on souhaite montrer qu'une classe de graphes vérifie une propriété, par exemple la classe des graphes planaires qui sont 4-colorables. Pour ce faire, on prend un graphe de la classe, et on assigne des charges aux éléments du graphes. Grâce aux propriétés des graphes de la classe, on montre que le total de la charge attribuée est constante (généralement négative). Vient, dans un second temps, la phase où les charges sont redistribuées selon différentes règles établies au préalable. Au terme de cette redistribution, la conservation de la charge totale nous permet alors de montrer que notre graphe a une certaine structure impliquant qu'il vérifie la propriété donnée.

Dans le contexte où l'on recherche un sous-ensemble  $C$  de sommets, vérifiant une certaine propriété, d'un graphe  $G$  donné, cette méthode de déchargement est très adaptée pour calculer des bornes inférieures sur la densité de  $C$  dans  $G$ . En effet, il suffit, pour un tel  $C$ , de donner 1 de charge à chaque

sommet de  $C$  et 0 aux autres, et de remarquer qu'après redistribution des charges, tous les sommets de  $G$  ont au moins un certain pourcentage de charge, pour conclure qu'il y avait au moins ce pourcentage des sommets de  $G$  dans  $C$ . Frédéric Havet a illustré le fait que cette méthode est très adaptée pour réaliser des preuves combinatoires des résultats présentés plus hauts en démontrant, grâce à la méthode du déchargement, dans [Hav11], que la densité minimum d'un code identifiant de la grille infinie carrée de hauteur 3 est d'au moins  $\frac{7}{18}$ . D'autres preuves, dans le même contexte, sont aussi en cours d'étude.

Afin d'illustrer ceci, nous donnons ci-dessous une preuve combinatoire pour le code identifiant de densité  $3/7$  dans la bande infinie carrée de hauteur 2. Pour ce faire, nous avons besoin des définitions et propriétés supplémentaires suivantes :

**Définition 86** Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $C$  un code identifiant de  $G$ , nous définissons les ensembles de sommets suivants :

- $U = \{x \in V \mid x \notin C\}$  est l'ensemble des sommets hors du code,
- $C_i = \{x \in C \mid |N(x) \cap U| = i\}$  est l'ensemble des sommets dans le code ayant  $i$  voisins hors du code,
- $U_i = \{x \in U \mid |N(x) \cap C| = i\}$  est l'ensemble des sommets hors du code ayant  $i$  voisins dans le code.

**Propriété 19** Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $C$  un code identifiant de  $G$ , un sommet dans  $C$  est connecté à au plus un sommet dans  $U_1$ .

*Preuve.* Supposons, par l'absurde, qu'il existe un code identifiant  $C$  de  $G$  et un sommet  $x$  dans  $C$  ayant deux voisins  $y$  et  $z$  dans  $U_1$ . Dans ce cas, nous arrivons à la contradiction suivante :  $N[y] \cap C = N[z] \cap C = \{x\}$ .  $\square$

**Propriété 20** Soit  $G = (V, E)$  un graphe,  $C$  un code identifiant de  $G$  et  $x$  un sommet dans  $C$ ,  $N(x) \subseteq U \Rightarrow N(x) \cap U_1 = \emptyset$ .

*Preuve.* Supposons, par l'absurde, qu'il existe un code identifiant  $C$  de  $G$  et un sommet  $x$  dans  $C$  dont tous les voisins sont dans  $U$  parmi lesquels un sommet  $y$  est dans  $U_1$ . Dans ce cas, nous arrivons à la contradiction suivante :  $N[x] \cap C = N[y] \cap C = \{x\}$ .  $\square$

**Propriété 21** Soit  $G = (V, E)$  un graphe,  $C$  un code identifiant de  $G$ , et  $x$  et  $y$  deux sommets dans  $C$  :  $xy \in E \Rightarrow ((N(x) \cup N(y)) \setminus \{x, y\}) \cap C \neq \emptyset$ .

*Preuve.* Si  $((N(x) \cup N(y)) \setminus \{x, y\}) \cap C = \emptyset$  alors  $N[x] \cap C = N[y] \cap C = \{x, y\}$  ce qui contredit la définition du code identifiant.  $\square$

### Bande infinie de hauteur 2, un code identifiant de densité $\frac{3}{7}$

Dans cette partie du document, nous désignons par  $C$  un code identifiant de  $S_2^\infty$ , par  $i$  un élément de  $\mathbb{Z}$ , et par  $l$  un élément de  $\{1, 2\}$ .

**Définition 87** Pour tout sommet  $(1, i)$  (resp.  $(2, i)$ ), nous désignons le *voisin bas* (resp. *haut*) de  $(1, i)$  (resp.  $(2, i)$ ) comme étant le sommet  $(2, i)$  (resp.  $(1, i)$ ).

**Définition 88** Pour tout sommet  $(l, i)$ , nous désignons le *voisin gauche* (resp. *droite*) de  $(l, i)$  comme étant le sommet  $(l, i - 1)$  (resp.  $(l, i + 1)$ ).

**Définition 89** Nous désignons par *colonne*  $i$  l'ensemble  $\{(1, i), (2, i)\}$ .

**Remarque 25** Tout sommet  $(l, i)$  de  $\mathcal{S}_2^\infty$  appartient à  $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup U_1 \cup U_2 \cup U_3$ .

**Lemme 7.1** Un sommet dans  $C_3$  a au plus deux voisins dans  $U_2$ .

*Preuve.* Supposons, par l'absurde, qu'il existe  $(l, i)$ , un sommet dans  $C_3$  ayant ses trois voisins dans  $U_2$ . Sans perte de généralité, nous pouvons dire que  $(l, i)$  est sur la ligne du haut (i.e.  $l = 1$ ). Puisque  $(2, i)$  est dans  $U_2$ , il a exactement deux voisins dans  $C$ . L'un d'eux est  $(1, i)$ , sans perte de généralité, on peut supposer que l'autre est  $(2, i - 1)$ . Dans ce cas, puisque  $(1, i - 1)$  est aussi dans  $U_2$  ses deux voisins dans  $C$  sont  $(2, i - 1)$  et  $(1, i)$ , nous arrivons à une contradiction puisque  $N[(1, i - 1)] \cap C = N[(2, i)] \cap C = \{(1, i), (2, i - 1)\}$ .  $\square$

Comme nous l'avons démontré en appliquant l'algorithme,  $d_1^*(\mathcal{S}_2^\infty) = \frac{3}{7}$ . Ce résultat était déjà connu et démontré dans [DGMo4]. Nous en présentons ci-dessous, une nouvelle preuve, grâce à la méthode du déchargement :

**Théorème 18** ([DGMo4]) Pour tout code identifiant  $C$  de  $\mathcal{S}_2^\infty$ ,  $d_1(C, \mathcal{S}_2^\infty) \geq \frac{3}{7}$ .

*Preuve.* Par déchargement. Initialement, nous donnons 1 de charge à tous les sommets dans  $C$ , 0 aux autres, puis

- Règle 1 : un sommet dans  $C$  donne  $\frac{3}{7}$  de charge à chaque voisin dans  $U_i$ .
- Règle 2 : un sommet dans  $C_0$  ou  $C_1$  donne  $1/14$  de charge à chacun de ses voisins dans  $C_2$ .

Montrons que suite à ce déchargement tous les sommets de  $\mathcal{S}_2^\infty$  ont au moins  $3/7$  de charge. Il est simple de vérifier que les sommets dans  $U_i$  ont tous exactement  $3/7$  de charge.

- Un sommet dans  $C_0$  ne donne de la charge qu'à la règle 2 et dans le pire des cas il en donne  $3/14$ . Dans l'ensemble des preuves par déchargement que nous présentons ici, le pire cas sera celui dans lequel le sommet concerné donne le plus de charge. Il lui reste au moins  $11/14 > 3/7$  à la fin du déchargement.
- Un sommet dans  $C_1$  est dans le pire des cas connecté à un sommet dans  $U_1$  et deux dans  $C_2$ . A la fin de la première règle il lui reste au moins  $4/7$ , à la fin de la seconde  $3/7$ .
- Un sommet dans  $C_2$  peut être connecté, dans le pire des cas, à un sommet dans  $U_1$  et à un sommet dans  $U_2$  (par la Propriété 19). A la fin de la première règle il lui reste donc au minimum  $14/14 - 6/14 - 3/14 = 5/14$ . Un sommet dans  $C_2$  est connecté à exactement un sommet dans  $C$  qui ne peut être un sommet dans  $C_3$  (par définition) ou dans  $C_2$  (par la Propriété 20). Il reçoit donc  $1/14$  de ce sommet et finit bien le déchargement avec au moins  $3/7$  de charge.
- Un sommet dans  $C_3$  ne peut pas avoir de voisins dans  $U_1$  (par la Propriété 20), ni avoir trois voisins dans  $U_2$  (par le Lemme 7.1). Dans le

pire des cas il a deux voisins dans  $U_2$  et un dans  $U_3$ . Après l'exécution de la règle 1, il a donc au moins  $7/7 - 2 \times 3/(7 \times 2) - 3/(7 \times 3) = 3/7$ . Il ne donne rien à la règle 2, à la fin du déchargement, il a donc bien une charge de  $3/7$ .

A la fin du déchargement, tous les sommets de  $S_2^\infty$  ont bien une charge d'au moins  $3/7$ , impliquant par là même, une densité du code d'au moins  $3/7$ .  $\square$

### Solution optimale

- Lemme 7.2** Dans un code identifiant  $C$  de  $S_2^\infty$  de densité  $3/7$
- il y a un nombre fini de sommets dans  $C_0$ ,
  - il y a un nombre fini de sommets dans  $C_1$  n'ayant pas deux voisins dans  $C_2$  et un dans  $U_1$ ,
  - il y a un nombre fini de sommets dans  $C_2$  n'ayant pas un voisin dans  $C_1$ , un dans  $U_1$  et un dans  $U_2$ ,
  - il y a un nombre fini de sommets dans  $C_3$  n'ayant pas deux voisins dans  $U_2$  et un dans  $U_3$ .

*Preuve.* Pour que la borne inférieure de  $3/7$  soit atteinte, il faut que les sommets de  $S_2^\infty$  finissant le déchargement avec plus de  $3/7$  de charge soient en nombre fini. Les seuls sommets dans  $C$  pouvant terminer le déchargement avec une telle charge sont ceux cités ci-dessus.  $\square$

- Définition 90** Nous nommons **configuration bloquante** (voir Figure 7.20), un ensemble de deux colonnes consécutives tel que :
- une des deux colonnes est constituée de deux sommets dans  $C$ ,
  - l'autre colonne a un sommet dans  $U_1$  et un sommet dans  $U_2$ .

- Lemme 7.3** Dans un code identifiant de  $S_2^\infty$  de densité  $3/7$  il y a pas un nombre infini de configurations bloquantes.

*Preuve.* Cette configuration contraint les deux sommets du code à n'être ni dans  $C_0$  ni dans  $C_3$ . S'il y a une infinité de configurations bloquantes, d'après le Lemme 7.2, dans une infinité d'entre elles, les deux sommets du code ne peuvent être qu'un sommet dans  $C_1$  et un autre dans  $C_2$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que le sommet  $(1, i)$  est dans  $C_2$ , le sommet  $(2, i)$  dans  $C_1$ , et les sommets  $(1, i + 1)$  et  $(2, i + 1)$  dans  $U$ .

Le sommet  $(2, i + 1)$  est dans  $U$  et est voisin de  $(2, i)$  qui est dans  $C_1$ . D'après le Lemme 7.2, le sommet  $(2, i + 1)$  est donc dans  $U_1$ , et, puisqu'on a une configuration bloquante, le sommet  $(1, i + 1)$  est alors dans  $U_2$ , et donc, par le Lemme 7.2 appliqué à  $(1, i)$ ,  $(1, i - 1)$  est dans  $U_1$ , contraignant le sommet  $(2, i - 1)$  à être dans  $U$  ce qui contredit  $(2, i)$  dans  $C_1$ .

Un code identifiant de  $S_2^\infty$  de densité  $3/7$  ne peut donc pas contenir une infinité de configurations bloquantes.  $\square$

- Lemme 7.4** Dans un code identifiant de  $S_2^\infty$  de densité  $3/7$ , il y a un nombre fini de sommets dans  $C_3$ .

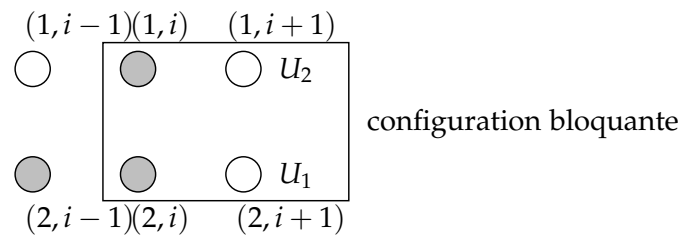
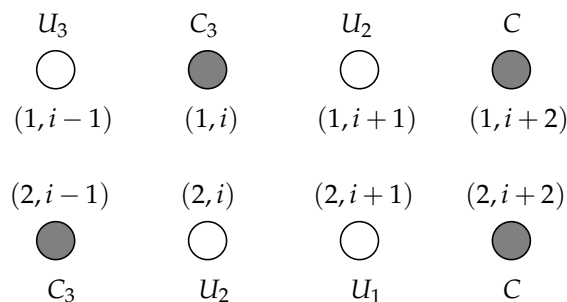


FIGURE 7.20 – la configuration bloquante et une partie de son voisinage

*Preuve.* Supposons, par l'absurde, qu'il existe une infinité de sommets dans  $C_3$ . Remarquons, grâce au Lemme 7.2, qu'une infinité de sommets dans  $C_3$  implique  $U_3 \neq \emptyset$ , et que, pour une infinité de sommets dans  $U_3$ , leurs trois voisins sont dans  $C_3$ . On peut donc supposer sans perte de généralité, qu'il existe une infinité de  $i$  tel que  $(1, i)$ , et  $(2, i - 1)$  sont dans  $C_3$  et les sommets  $(1, i - 1)$  sont dans  $U_3$ . Dans ce cas, par le Lemme 7.2, les sommets  $(1, i + 1)$  et  $(2, i)$  sont dans  $U_2$ . Les sommets  $(2, i)$  sont dans  $U_2$  et leurs voisins  $(1, i)$  et  $(2, i - 1)$  sont dans  $C_3$ , donc  $(2, i + 1)$  sont dans  $U$ , et pour qu'ils aient chacun un voisin dans  $C$ , les sommets  $(2, i + 2)$  sont dans  $C$ . Enfin, les sommets  $(1, i + 1)$  sont dans  $U_2$  et donc,  $(1, i + 2)$  sont dans  $C$ . Nous arrivons à la contradiction suivante : les colonnes  $i + 1$  et  $i + 2$  forment une infinité de configurations bloquantes (voir Figure 7.21).  $\square$

FIGURE 7.21 – Configuration  $(1, i - 1)$  dans  $U_3$ 

**Lemme 7.5** Dans un code identifiant de  $\mathcal{S}_2^\infty$  de densité  $3/7$ , les sommets dans  $C_1$  qui n'ont pas un voisin dans  $U_1$  et deux voisins dans  $C_2$  non alignés sont en nombre fini.

*Preuve.* Supposons, par l'absurde, que ce ne soit pas le cas. Dans ce cas, par le Lemme 7.2, on peut supposer sans perte de généralité qu'il existe une infinité de  $i$  tels que les sommets  $(1, i)$  dans  $C_1$  ont chacun deux voisins  $(1, i - 1)$  et  $(1, i + 1)$  dans  $C_2$ , et  $(2, i)$  dans  $U_1$ . Ainsi, les sommets  $(2, i - 1)$ ,  $(2, i + 1)$ , et  $(1, i + 2)$  sont dans  $U$ . Les sommets  $(2, i + 2)$  sont dans  $U$  car sinon les sommets  $(1, i + 1)$  n'ont pas chacun un voisin dans  $U_1$  contredisant le Lemme 7.2. Alors les sommets  $(1, i + 2)$  sont les voisins des sommets  $(1, i + 1)$  qui sont dans  $U_2$ , et les sommets  $(1, i + 3)$  sont dans  $C$ . De plus les sommets  $(2, i + 3)$  sont aussi dans  $C$  sinon les sommets  $(2, i + 2)$  n'ont pas de voisin dans  $C$ . Nous arrivons à la contradiction suivante : les colonnes  $i + 2$  et  $i + 3$  forment une infinité de configurations bloquantes (voir Figure 7.22).  $\square$



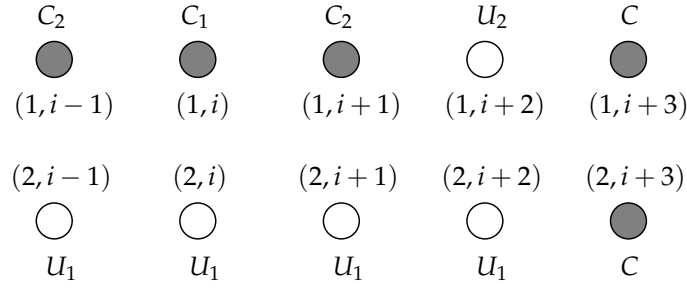


FIGURE 7.22 – configuration d'un sommet dans  $C_1$  dont les deux sommets voisins dans  $C_2$  sont alignés

La preuve par déchargement permet de caractériser les solutions optimales, nous permettant d'énoncer le théorème suivant :

**Théorème 19** *La densité de  $3/7$  peut être atteinte, et l'est uniquement pour les codes identifiants de  $\mathcal{S}_2^\infty$  construits avec une infinité de blocs de sept colonnes consécutives choisis parmi les deux blocs représentés Figures 7.23 et 7.24.*

*Preuve.* Supposons qu'il existe un code identifiant  $C$  de  $\mathcal{S}_2^\infty$  de densité  $3/7$ . D'après les Lemmes 7.2, 7.4, et 7.5, excepté pour un nombre fini de sommets dans  $C$  constituant un nombre fini de perturbations, les sommets de  $C$  sont des sommets dans  $C_1 \cup C_2$  tels que

- les sommets dans  $C_1$  ont deux voisins dans  $C_2$  non alignés et un voisin dans  $U_1$ ,
- les sommets dans  $C_2$  ont un voisin dans  $C_1$ , un voisin dans  $U_1$  et un voisin dans  $U_2$ .

Il y a donc au moins un sommet dans  $C_1$ , supposons sans perte de généralité que ce soit le sommet  $(1, i)$ , et que  $(1, i-1)$  et  $(2, i)$  soient dans  $C_2$ , et  $(1, i+1)$  dans  $U_1$ . D'après le Lemme 7.2, les sommets  $(1, i-1)$  et  $(2, i)$  étant dans  $C_2$ , ils doivent avoir chacun un voisin dans  $U_1$  et un voisin dans  $U_2$ . Le sommet  $(2, i-1)$  est un voisin commun de  $(1, i-1)$  et  $(2, i)$ , il doit donc être dans  $U_2$ , contraignant ainsi les sommets  $(1, i-2)$  et  $(2, i+1)$  à être dans  $U_1$ . Le sommet  $(2, i-1)$  est dans  $U_2$ , le sommet  $(2, i-2)$  est donc dans  $U$ , contraignant le sommet  $(2, i-3)$  à être dans  $C$ . Le sommet  $(1, i-2)$  étant dans  $U_1$ , et son voisin  $(1, i-1)$  étant dans  $C$ , le sommet  $(1, i-3)$  est dans  $U$ . Le sommet  $(2, i-3)$  est dans  $C$  et a un voisin  $(2, i-1)$  dans  $U_1$  et un voisin  $(1, i-3)$  dans  $U$  : le sommet  $(2, i-3)$  est donc dans  $C_2$ , contraignant le sommet  $(1, i-3)$  à être dans  $U_2$ , le sommet  $(2, i-4)$  dans  $C_1$ , le sommet  $(1, i-4)$  dans  $C_2$ , et les sommets  $(1, i-5)$ ,  $(1, i-6)$ ,  $(2, i-5)$ ,  $(2, i-6)$  dans  $U_1$ . La configuration ainsi obtenue correspond à celle de la Figure 7.23, nous la nommons **configuration finale 1**.

Dans la configuration décrite ci-dessus, le sommet dans  $C_1$  est sur la ligne du haut, son voisin dans  $U_1$  est à droite. On remarque qu'il existe trois autres configurations initiales pour le sommet dans  $C_1$  et son voisinage. Par un raisonnement identique, nous aurions obtenu la configuration

- de la Figure 7.24, que nous nommons **configuration finale 2**, dans le cas où le sommet  $(1, i)$  est dans  $C_1$ , les sommets  $(2, i)$  et  $(1, i+1)$  dans  $C_2$ , et le sommet  $(1, i-1)$  dans  $U_1$ ,

- de la Figure 7.23 dans le cas où le sommet  $(2, i)$  est dans  $C_1$ , les sommets  $(1, i)$  et  $(2, i + 1)$  dans  $C_2$ , et le sommet  $(2, i - 1)$  dans  $U_1$ ,
- de la Figure 7.24 dans le cas où le sommet  $(2, i)$  est dans  $C_1$ , les sommets  $(1, i)$  et  $(2, i - 1)$  dans  $C_2$ , et le sommet  $(2, i + 1)$  dans  $U_1$ .

Il s'agit donc là des deux seules configurations qui, si elles sont présentes une infinité de fois, vérifient les contraintes des Lemmes 7.2, 7.4 et 7.5.

Nous nommons **bloc 1** (resp. **bloc 2**) le groupe des sept colonnes centrales de la configuration finale 1 (resp. 2) (voir Figures 7.23 et 7.24). On remarque que les colonnes  $i - 7$  et  $i + 3$  (resp.  $i - 3$  et  $i + 7$ ) dans la configuration finale 1 (resp. configuration finale 2) sont constituées de sommets dans  $C$ . Par le Lemme 7.2, dans une infinité des cas, deux sommets dans  $C$  sont voisins si et seulement si il s'agit d'un sommet dans  $C_1$  et d'un sommet dans  $C_2$ . Selon que le sommet dans  $C_1$  est sur la ligne du haut ou celle du bas, la configuration des colonnes suivantes correspond, dans une infinité des cas, au bloc 1 ou au bloc 2. Ainsi, un code identifiant de  $S_2^\infty$  est de densité  $3/7$  si et seulement si il est constitué d'une infinité de blocs 1 et/ou 2 et potentiellement un nombre fini de perturbations.  $\square$

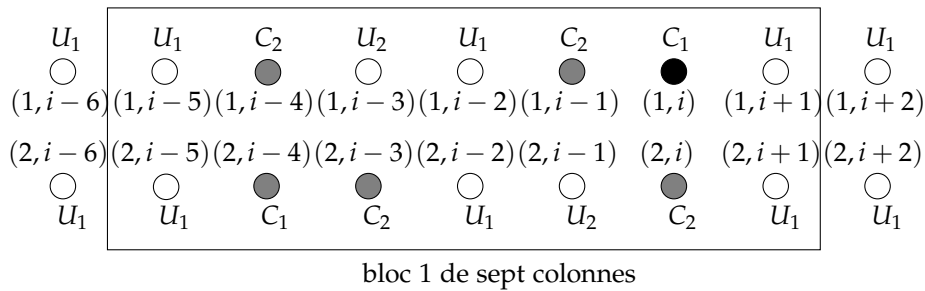


FIGURE 7.23 – Configuration finale 1

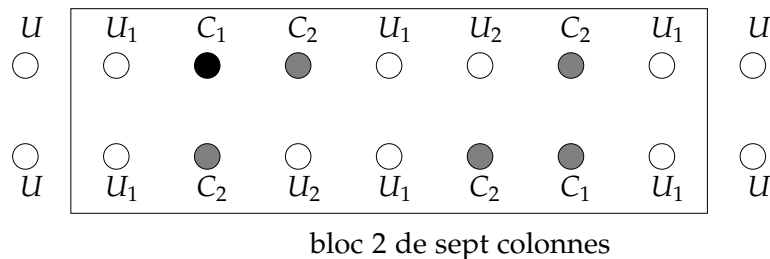


FIGURE 7.24 – Configuration finale 2

Les autres résultats présentés dans le tableau précédent peuvent aussi être démontrés grâce à la méthode du déchargement. Le cas du code identifiant de densité minimum égale à  $\frac{7}{18}$  pour le code identifiant de la bande infinie carrée de hauteur 3 en est un exemple puisque, comme nous l'avons dit plus tôt, Frédéric Havet, dans [Hav11], en a produit une preuve grâce à cette méthode. La preuve est plus complexe que celle que nous présentons pour la hauteur 2 puisqu'il y a plus de configurations à considérer, notamment à cause des sommets de degré 4.

# CAS DES GRAPHES FRACTALS

# 8

Au cours de la thèse, j'ai pu effectuer un travail sur les codes identifiants dans les graphes fractals. Les graphes fractals constituent une autre classe de graphes à structure répétitive. Ils ont été définis dans [GKP] et généralisent les graphes fractals de cliques, aussi appelés graphes de Sierpiński, définis dans [KM97] et [KMPo2]. Dans l'article [GKM<sup>+</sup>], les problèmes de code identifiant, de code dominant-localisateur, et de code dominant-total-localisateur dans les graphes fractals de cliques sont étudiés. Nous définissons les graphes fractals dans la partie suivante. Dans l'ensemble de ce chapitre, contrairement au chapitre précédent, les graphes étudiés sont des graphes finis.

## 8.1 DÉFINITION

Nous définissons les graphes fractals de la façon suivante :

**Définition 91** *Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  fini, tel que  $V = \{1, \dots, |V|\}$ , et un entier  $d \geq 2$ , le **graphe fractal  $F(G, n)$**  (voir Figure 8.1) est défini sur l'ensemble de sommets  $\{V(G)\}^d$  où deux sommets  $(i_1, i_2, \dots, i_d)$  et  $(j_1, j_2, \dots, j_d)$  sont adjacents si et seulement si il existe  $h$  dans  $\{1, 2, \dots, d\}$  tel que*

- $i_t = j_t$  pour tout entier  $t$  dans  $\{1, 2, \dots, h-1\}$  si  $h > 1$ , et
- $i_h j_h \in E(G)$ , et
- $i_t = j_h$  et  $i_h = j_t$  pour tout entier  $t$  dans  $\{h+1, \dots, d\}$  si  $h < d$ .

*L'entier  $d$  est appelé la **dimension** de  $F(G, d)$  et  $G$  la **brique** de  $F(G, d)$ .*

**Définition 92** *Lorsque le graphe  $G$  est un graphe complet à  $k$  sommets,  $F(G, d)$  est aussi appelé **graphe de Sierpiński**, et est noté  $S(d, k)$  (voir Figure 8.2). En ce sens les graphes fractals généralisent les graphes de Sierpiński, et sont appelés parfois **graphes de Sierpiński généralisés**.*

**Définition 93** *Etant donné un graphe fractal  $F(G, d)$  de dimension  $d$  et de brique  $G = (V, E)$ , un entier  $1 \leq k \leq d-1$ , et un élément  $e \in V^{d-k}$ , où  $e = (i_1, i_2, \dots, i_{d-k})$ , la  $n$ -ième **fibre de dimension  $k$** , notée  $F^n(G, k)$  avec  $n = 1 + (i_1 - 1) + (i_2 - 1) * |V| + (i_3 - 1) * |V|^2 + \dots + (i_{d-k} - 1) * |V|^{d-(k+1)}$ , est le sous-graphe de  $F(G, d)$  induit par l'ensemble de sommets  $e \times V^k$ . Ainsi il est clair qu'un sommet appartient à exactement une fibre de  $F(G, d)$  de dimension  $k$  et qu'il y a exactement  $|V|^{d-k}$*

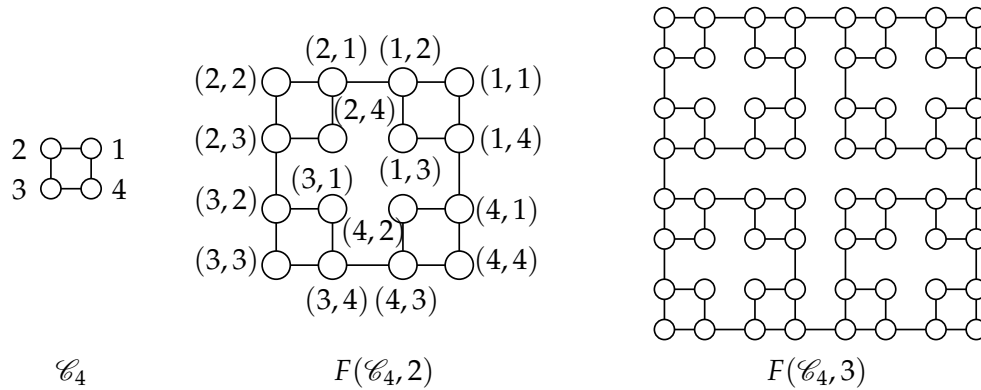


FIGURE 8.1 – Le cycle  $\mathcal{C}_4$  et les graphes fractals  $F(\mathcal{C}_4, 2)$  et  $F(\mathcal{C}_4, 3)$ . Les étiquettes des sommets de  $\mathcal{C}_4$  et  $F(\mathcal{C}_4, 2)$  sont notés.

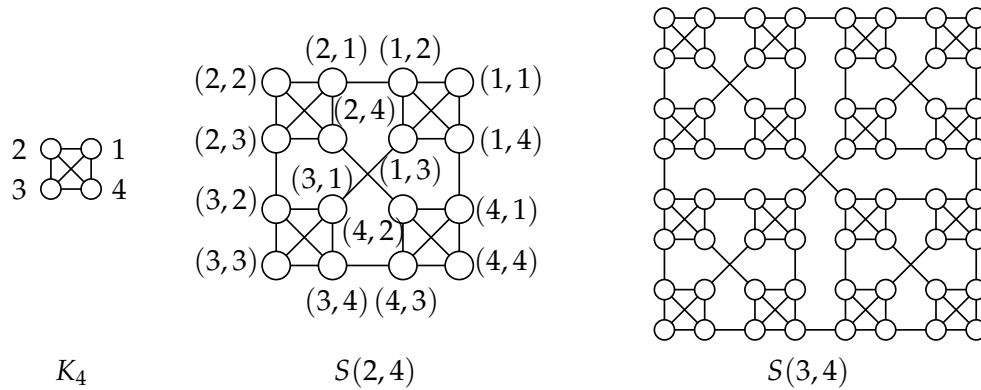


FIGURE 8.2 – Le graphe complet  $K_4$  et les graphes fractals  $S(2, 4)$  et  $S(3, 4)$ . Les étiquettes des sommets de  $K_4$  et  $S(2, 4)$  sont notés.

fibres de dimension  $k$  dans  $F(G, d)$  puisque  $1 \leq n \leq |V|^{d-k}$ . Enfin toute fibre de dimension  $k$  est isomorphe au graphe  $F(G, k)$ , ou au graphe  $G$  si  $k = 1$ .

Nous nous intéressons, dans ce chapitre, au problème du code identifiant dans les graphes fractals pour lesquels la brique concernée est un cycle.

## 8.2 RÉSULTATS CONNUS

Dans [BGK<sup>+</sup>10], L. Beaudou, S. Gravier, S. Klavžar, M. Kovše et M. Mollard démontrent plusieurs résultats sur les codes couvrants, et plus particulièrement, les  $(a, b)$ -codes, dans les graphes de Sierpiński. Etant donné un graphe  $G$ , ils définissent un  $(a, b)$ -code, pour tout couple d'entiers  $(a, b) \geq 0$ , comme étant un sous ensemble  $C$  des sommets de  $G$  tel que tout sommet dans  $C$  a exactement  $a$  voisins dans  $C$ , et tout sommet hors de  $C$  a exactement  $b$  voisins dans  $C$ . Pour ces codes, il prouvent le théorème suivant :

**Théorème 20** ([BGK<sup>+</sup>10]) *Etant donné deux entiers  $n, k \geq 2$ , le graphe de Sierpiński  $S(n, k)$  contient un  $(a, b)$ -code si et seulement si  $a < k$  et si l'un des cas suivants est vérifié :*

- $a \geq 1, b = a, k$  est pair,
- $a \geq 2$  est pair,  $b = a, k$  est impair,

- $a = 0, b = 1,$
- $a \geq 1, b = a + 1, n$  est impair,
- $a \geq 0, b = a + 2, n = 2, k = 2a + 1.$

Dans [GKM<sup>+</sup>], S. Gravier, M. Kovše, M. Mollard, J. Moncel et A. Parreau démontrent le théorème suivant :

**Théorème 21** ([GKM<sup>+</sup>]) *Etant donné un graphe de Sierpiński  $S(n, k)$ , un code identifiant minimum de  $S(n, k)$  a exactement  $k^{n-1}(k - 1)$  sommets.*

Dans [GKM<sup>+</sup>], les auteurs traitent aussi des problèmes de code dominant-localisateur et code dominant-total, en démontrant deux théorèmes supplémentaires que nous présentons ci-dessous. Toutefois, nous ne traiterons pas de ces autres problèmes dans le cas des graphes fractals de cycle.

**Théorème 22** ([GKM<sup>+</sup>]) *Etant donné un graphe de Sierpiński  $S(n, k)$ , un code dominant-localisateur minimum a exactement  $\frac{k^{n-1}(k-1)}{2}$  sommets.*

**Théorème 23** ([GKM<sup>+</sup>]) *Etant donné un graphe de Sierpiński  $S(n, k)$ , un code dominant-total minimum a exactement  $k^{n-1}$  sommets si  $k$  est pair, et  $k^{n-1} + 1$  sinon.*

## 8.3 CAS DES GRAPHES FRACTALS DE CYCLES

### 8.3.1 Propriétés et bornes générales

Dans cette section nous présentons plusieurs propriétés sur les codes identifiants des graphes fractals de cycle, ainsi qu'une borne inférieure sur la densité minimum d'un code identifiant d'un graphe fractal de cycle.

**Propriété 22** *Pour tout entier  $n$ , tout graphe fractal  $F(\mathcal{C}_n, d)$  vérifie les propriétés suivantes :*

- les sommets de  $F(\mathcal{C}_n, d)$  sont de degré 2 ou 3,
- tout sommet appartient à exactement une fibre de dimension 1,
- chacune des fibres de dimension 1 de  $F(\mathcal{C}_n, d)$  contient  $n - 3$  sommets de degré 2 et
  - 3 sommets consécutifs de degré 3, ou
  - 2 sommets de degré 3 séparés par un autre sommet de degré 2

**Définition 94** *Dans une fibre  $i$  de dimension 1 de  $\mathcal{C}_n$ , nous nommons*

- $v_1^i, v_2^i, v_3^i, \dots, v_n^i$  les sommets ( $v_1, v_2, \dots, v_n$  s'il n'y a pas d'ambiguïté),
- $P^i$  ( $P$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) la chaîne de  $n - 3$  sommets de degré 2, sans perte de généralité, nous considérons ces sommets comme étant les sommets  $v_1, v_2, \dots, v_{n-3}$ ,
- **sommets extrémaux de degré 3** les deux sommets  $v_{n-2}$  et  $v_n$  de degré 3 ,
- **sommet du milieu** le sommet  $v_{n-1}$  de degré 2 ou 3.

**Propriété 23** *Dans un graphe fractal du cycle  $\mathcal{C}_n$ , un sommet extrémal (resp. du milieu de degré 3) d'une fibre  $\mathcal{C}_n^i$  est relié à un sommet extrémal (resp. du milieu de degré 3) d'une autre fibre de  $\mathcal{C}_n^j$ .*

Dans cette partie du document, nous désignons par  $F(\mathcal{C}_{\geq 6}, d)$  un graphe fractal du cycle  $\mathcal{C}_n$  avec  $n \geq 6$ , et par  $C$  un code identifiant de  $F(\mathcal{C}_{\geq 6}, d)$ . Nous réutilisons ci-dessous les notations  $C_i$  et  $U_i$  de la Définition 86.

**Définition 95** Nous nommons  $C_2^3$  l'ensemble des sommets dans  $C_2$  de degré 3.

**Définition 96** Nous nommons  $C_2^2 = C_2 \setminus C_2^3$  l'ensemble des sommets dans  $C_2$  de degré 2.

**Propriété 24** Au sein d'une même fibre  $\mathcal{C}_n^i$  il existe au plus deux sommets dans  $C_2^3 \cup C_3$ .

**Remarque 26** Tout sommet  $x$  de  $G$  est tel que  $x \in C_0 \cup C_1 \cup C_2^3 \cup C_2^2 \cup C_3 \cup U_1 \cup U_2 \cup U_3$ .

**Remarque 27** Dans la chaîne  $P = v_1, \dots, v_{n-3}$  de  $n - 3$  sommets de degré 2 d'une fibre de dimension 1 il n'existe pas trois sommets consécutifs dans  $U$ .

*Preuve.* Supposons, par l'absurde, qu'il existe  $v_i, v_{i+1}, v_{i+2} \in U \cap P$ . Nous arrivons à la contradiction suivante : le sommet  $v_{i+1}$  a pour voisins deux sommets dans  $U$ ,  $N[v_{i+1}] \cap C = \emptyset$ .  $\square$

**Lemme 8.1** Dans la chaîne  $P = v_1, v_2, \dots, v_{n-3}$  de  $n - 3$  sommets de degré 2 d'une fibre de dimension 1, un couple de sommets  $(v_i, v_{i+1})$  est tel que, si  $v_i$  et  $v_{i+1}$  sont dans  $U$ , alors, pour tous les indices compris entre 1 et  $n - 3$ , on a  $v_{i-3}, v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4} \in C$ .

*Preuve.* Les sommets  $v_i$  et  $v_{i+1}$  sont dans  $U$  et sont de degré 2. Les sommets  $v_{i-1}$  (pour  $i \geq 2$ ), et  $v_{i+2}$  (pour  $i \leq n - 5$ ), sont donc dans  $C$  sans quoi  $v_i$  et  $v_{i+1}$  ne seraient pas identifiés. De plus  $v_{i-1}$  et  $v_{i+2}$  ne sont pas dans  $C_0$  (par définition), ni dans  $C_2$  (par la Propriété 20). Les sommets  $v_{i-1}$  et  $v_{i+2}$  sont donc dans  $C_1$ , et donc, les sommets  $v_{i-2}$  et  $v_{i+3}$  (pour  $i \geq 3$  ou  $i \leq n - 6$ ) ne sont pas dans  $U$ , ni dans  $C_1$  (par la propriété 21), ni dans  $C_2$  (par définition), ils sont donc dans  $C_0$  contraignant ainsi les sommets  $v_{i-3}$  et  $v_{i+4}$  (pour  $i \geq 4$  ou  $i \leq n - 7$ ), à être dans  $C$ .  $\square$

**Lemme 8.2** Soit  $F(\mathcal{C}_{\geq 6}, d)$  un graphe fractal du cycle  $\mathcal{C}_n$  ( $n \geq 6$ ). Pour tout code identifiant  $C$  de  $F(\mathcal{C}_{\geq 6}, d)$ , au sein d'une même fibre de dimension 1 il y a au moins  $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$  sommets appartenant à  $C_0 \cup C_1 \cup C_2^2$ .

*Preuve.* Sans perte de généralité, prenons une fibre  $\mathcal{C}_n^j$  dans  $F(\mathcal{C}_{\geq 6}, d)$ . On note  $P = v_1, v_2, \dots, v_{n-3}$  la chaîne de sommets de degré 2 de cette fibre. D'après la Remarque 27, les sommets de  $P$  qui sont dans  $U$  forment un sous-graphe de  $P$  de sommets isolés et d'arêtes  $v_i v_{i+1}$ . Nous définissons une fonction  $f$  de la façon suivante :

- $f$  est une fonction de  $P \cap U$  dans  $P \cap C$ ,
- pour chaque  $v_i \in U$  isolé et  $i < n - 3$ ,  $f(v_i) = v_{i+1}$ ,
- pour chaque arête  $v_i v_{i+1} \in U \times U$ ,
  - si  $i \leq n - 6$ ,  $f(v_i) = v_{i+2}$ , et  $f(v_{i+1}) = v_{i+3}$ ,
  - si  $i = n - 5$ ,  $f(v_i) = v_{i+2} = v_{n-3}$ ,
  - si  $i = n - 4$ ,  $f(v_i) = v_{i-1} = v_{n-5}$ .

Chaque sommet  $f(v_i)$  existe et est dans  $C$  (par le Lemme 8.1). Si pour tout  $i < n - 4$  tel que  $v_i$  est dans  $U$  on a  $f(v_i) = v_{i+1}$  ou  $f(v_i) = v_{i+2}$ , alors chaque  $v_k$  dans  $C$  est l'image d'au plus un élément de  $U \cap P$  :  $v_{k-1}$  si  $v_{k-1}$

est dans  $U$  et  $v_{k-2}$  ne l'est pas,  $v_{k-2}$  si  $v_{k-1}$  et  $v_{k-2}$  sont dans  $U$ , ou si  $v_{k-1}$  est dans  $C$  et  $v_{k-2}$  et  $v_{k-3}$  sont dans  $U$ . Le seul problème pourrait être pour  $v_{n-5}$  si  $v_{n-5} = f(v_{n-4})$  mais alors  $v_{n-4}$  et  $v_{n-3}$  sont dans  $U$ , et dans ce cas, s'ils existent,  $v_{n-5}$ ,  $v_{n-6}$  et  $v_{n-7}$  sont dans  $C$  (par le Lemme 8.1), et  $v_{n-5}$  n'est pas égal à  $f(v_{n-6})$  ou  $f(v_{n-7})$ .  $\square$

**Théorème 24** *Pour tout entier  $n \geq 6$ , et tout entier  $d \geq 1$ , la densité d'un code identifiant de  $F(\mathcal{C}_n, d)$  est strictement supérieure à  $\frac{n}{2n+2}$ , i.e.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}$ .*

*Preuve.* Nous allons tout d'abord montrer l'inégalité large, c'est à dire  $d_1^*(F(\mathcal{C}_n, d)) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}$ , par déchargement. Soit  $F(\mathcal{C}_n, d)$  un graphe fractal pour  $n \geq 6$  et  $d \geq 3$ . Soit  $C$  un code identifiant de  $F(\mathcal{C}_n, d)$ , nous donnons 1 de charge à tous les sommets dans  $C$ , 0 aux autres.

- Règle 1 : un sommet dans  $C$  donne  $\frac{n}{(2n+2)i}$  de charge à chaque voisin dans  $U_i$ .
- Règle 2 : un sommet dans  $C$  et dans  $P$  donne  $\frac{1}{2n+2}$  à chaque sommet dans  $C_2^3 \cup C_3$  appartenant à la même fibre que lui.

Montrons que suite à ce déchargement, tous les sommets de  $F(\mathcal{C}_n, d)$  ont au moins  $\frac{n}{2n+2}$  de charge. Il est simple de vérifier que les sommets dans  $U_i$  ont tous exactement  $\frac{n}{2n+2}$  de charge.

- Un sommet dans  $C_0$  ne donne rien pour la règle 1, et au plus  $\frac{2}{2n+2}$  à la règle 2 (par la Propriété 24), il lui reste donc au moins  $\frac{2n}{2n+2}$ .
- Un sommet dans  $C_1$  est au pire connecté à un sommet dans  $U_1$  et donne au plus  $\frac{n}{2n+2}$  à la règle 1 et  $\frac{2}{2n+2}$  à la règle 2 s'il est dans  $P$ , il lui reste donc au moins  $\frac{n}{2n+2}$ .
- Un sommet dans  $C_2^2$  est connecté au pire à deux sommets dans  $U_2$  (par la Propriété 20) et donne au plus  $\frac{n}{2n+2}$  à la règle 1 et  $\frac{2}{2n+2}$  à la règle 2, il lui reste donc au moins  $\frac{n}{2n+2}$ .
- Un sommet dans  $C_2^3$  est connecté au pire à un sommet dans  $U_1$  et à un dans  $U_2$  (par la Propriété 19), il donne, au plus,  $\frac{n}{2n+2} + \frac{n}{4n+4} = \frac{3n}{4n+4}$  à la règle 1. Il reçoit  $\frac{1}{2n+2}$  de chacun des sommets dans  $C_0 \cup C_1 \cup C_2^2$  de sa fibre, donc, d'après le Lemme 8.2, au moins  $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor \frac{1}{2n+2} \geq \frac{n-4}{2} \frac{2}{4n+4}$ . Un sommet dans  $C_2^3$  finit donc le déchargement avec au moins  $\frac{n}{2n+2}$  de charge.
- Un sommet dans  $C_3$  est connecté au pire à trois  $U_2$  (par la Propriété 20), il donne donc au plus  $\frac{3n}{4n+4}$  à la règle 1. Il reçoit  $\frac{1}{2n+2}$  de chacun des sommets dans  $C_0 \cup C_1 \cup C_2^2$  de sa fibre, donc, d'après le Lemme 8.2, au moins  $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor \frac{1}{2n+2} \geq \frac{n-4}{2} \frac{2}{4n+4}$ . Un sommet dans  $C_3$  finit donc le déchargement avec au moins  $\frac{n}{2n+2}$  de charge.

A la fin du déchargement, tous les sommets de  $G$  ont bien une charge d'au moins  $\frac{n}{2n+2}$ .

**Borne inférieure stricte** Nous allons montrer que la borne de  $\frac{n}{2n+2}$  n'est jamais atteinte.

S'il existe un graphe fractal de cycle  $\mathcal{C}_n$  dont un code identifiant  $C$  a une densité  $d = \frac{n}{2n+2}$ , alors tous ses sommets doivent avoir exactement  $\frac{n}{2n+2}$  à la

fin du déchargement ci-dessus. Un sommet de  $C$  qui peut finir le déchargement ainsi est un sommet

- dans  $C_1$ , dans la chaîne de  $n - 3$  sommets et voisin d'un sommet dans  $U_1$  et d'un sommet dans  $C$ , et appartenant à une fibre contenant deux sommets dans  $C_2^3 \cup C_3$ ,
- dans  $C_2^2$ , dans la chaîne de  $n - 3$  sommets et voisin de deux sommets dans  $U_2$ , et appartenant à une fibre contenant deux sommets dans  $C_2^3 \cup C_3$ ,
- dans  $C_2^3$ , voisin d'un sommet dans  $U_1$ , d'un sommet dans  $U_2$ , et d'un sommet dans  $C$ , et appartenant à une fibre contenant exactement  $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor = \frac{n-4}{2}$  sommets dans  $C$  dans la chaîne de  $n - 3$  sommets,
- dans  $C_3$ , voisin de trois sommets dans  $U_2$ , et appartenant à une fibre contenant exactement  $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor = \frac{n-4}{2}$  sommets dans  $C$  dans la chaîne de  $n - 3$  sommets.

Pour que  $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor = \frac{n-4}{2}$ , il faut que  $n - 3$  soit impair, et donc que  $n$  soit pair. On remarque que dans un  $C$ , il n'y a pas de sommets dans  $C_0$ . Dans la chaîne  $P$  de  $n - 3$  sommets d'une fibre de dimension 1 il ne peut pas y avoir deux sommets voisins dans  $C$ . Supposons, par l'absurde, que ce soit le cas, n'étant pas dans  $C_0$ , il s'agit de deux sommets dans  $C_1$ , impossible (par la Propriété 21). Ainsi, par le Lemme 8.1, la chaîne est constituée de sommets alternativement dans  $C_2$  et dans  $U_2$ , les extrémités de la chaîne étant dans  $U_2$ .

Dans une fibre de dimension 1, si les trois sommets de  $\mathcal{C}_n - P$  sont dans  $C$ , alors le sommet du milieu ne peut pas appartenir à  $C_2^3 \cup C_3$  et finit donc le déchargement avec trop de charge. On doit donc avoir deux sommets  $u$  et  $v$  dans  $C_2^3 \cup C_3$  séparés par un sommet dans  $U$ , qui est donc dans  $U_2 \cup U_3$ . Ainsi  $u$  et  $v$  ne sont pas dans  $C_2^3$  puisqu'ils ne sont pas voisins d'un sommet dans  $U_1$ . Nous avons donc  $u$  et  $v$  dans  $C_3$  séparés par un sommet dans  $U_2$ . Mais dans ce cas, nous arrivons à la contradiction suivante, chaque sommet dans  $C_3$  contraint un sommet à être dans  $U_2$  dans la fibre voisine à laquelle il est relié, autre que le sommet de degré 3 du milieu (par la Propriété 23), cette fibre ne pouvant alors plus contenir deux sommets dans  $C_3$ .  $\square$

### 8.3.2 Cas des graphes fractals de $\mathcal{C}_3$

Le cas du code identifiant minimum des graphes fractals du cycle  $\mathcal{C}_3$  est contenu dans le Théorème 21 puisque le cycle  $\mathcal{C}_3$  est isomorphe au graphe complet  $K_3$  et que  $S(d, 3)$  est isomorphe à  $F(K_3, d)$ . Ainsi un code identifiant minimum de  $F(\mathcal{C}_3, d)$  a  $(2 \times 3^{d-1})$  éléments, et ce pour toute dimension  $d \geq 3$ .

### 8.3.3 Cas des graphes fractals de $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_5$

Il n'y a pas de résultats connus concernant les codes identifiants dans les graphes fractals de  $\mathcal{C}_4$  et  $\mathcal{C}_5$ . Nous pouvons tout de même énoncer les deux théorèmes suivants :

**Théorème 25** *Etant donné un entier  $d \geq 4$ , la densité minimum d'un code identifiant de  $F(\mathcal{C}_4, d)$*



est telle que

$$d_1^*(F(\mathcal{C}_4, d)) \leq \frac{31}{64}.$$

*Preuve.* En effet, il est simple de vérifier que l'ensemble des sommets noirs du graphe  $F(\mathcal{C}_4, 4)$  de la Figure 8.3 forme un code identifiant du graphe de densité  $\frac{31}{64}$ .

Il est clair que ce code est généralisable aux graphes  $F(\mathcal{C}_4, d)$  pour toute dimension  $d \geq 5$  en reproduisant le motif décrit par le code de la Figure 8.3 sur chaque fibre  $F(\mathcal{C}_4, 4)$ , et ce en conservant la densité de  $\frac{31}{64}$ . En effet dans ce cas les sommets extrémaux des arêtes entre les fibres  $F(\mathcal{C}_4, 4)$  sont nécessairement des sommets du code appartenant à des chaînes de 8 sommets dans le code. Clairement ces arêtes conservent la domination et la séparation.  $\square$

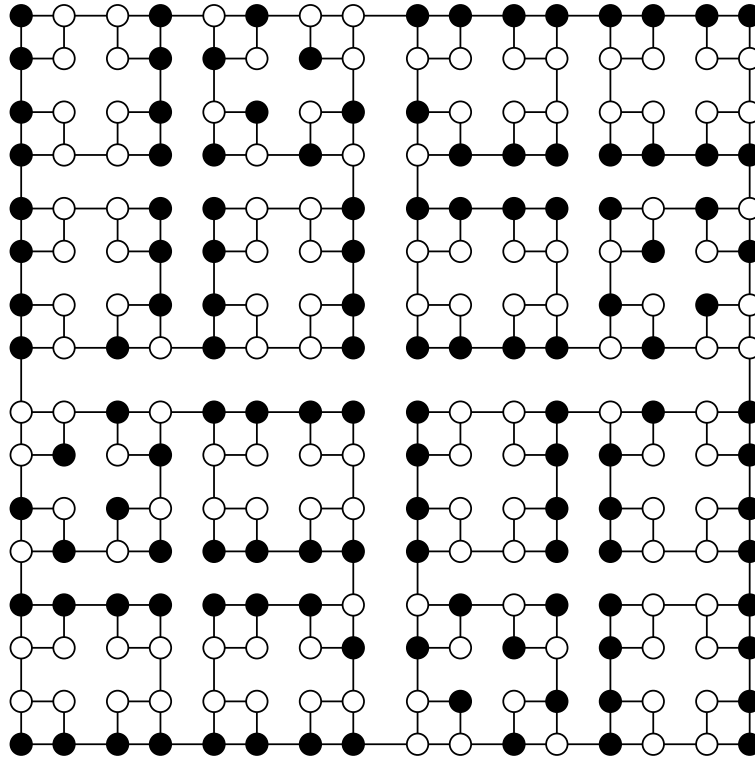


FIGURE 8.3 – Les sommets noirs forment un code identifiant de densité  $\frac{31}{64}$  du graphe fractal  $F(\mathcal{C}_4, 4)$ .

**Propriété 25** Etant donné deux graphes  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  et  $C$ , resp.  $C'$ , un code 1-identifiant de  $G$ , resp.  $G'$ , l'ensemble de sommets  $C \cup C'$  est un code identifiant de tout graphe  $G''$  construit de la façon suivante :  $G'' = (V \cup V', E \cup E' \cup E'')$  avec  $E'' \subseteq \{uv \mid u \in V \setminus C, v \in V' \setminus C'\}$ .

*Preuve.* Il est clair que tous les sommets de  $G''$  sont dominés par  $C \cup C'$ . De plus si deux sommets ne sont pas séparés alors l'un est dans  $V$ , nommons-le  $u$ , et l'autre dans  $V'$ , nommons-le  $v$ . Comme  $u$  est dominé dans  $G$  il existe  $y$  dans  $C$  tel que  $uy \in E$ . Comme, par construction, il n'existe pas d'arête  $yx$

dans  $G''$  avec  $x$  dans  $V'$ , nous arrivons à une contradiction puisque  $y$  sépare  $u$  et  $v$  dans  $G''$ . Donc  $C \cup C'$  est un code identifiant de  $G''$ .  $\square$

**Théorème 26** *Etant donné un entier  $d \geq 4$ , la densité minimum d'un code identifiant de  $F(\mathcal{C}_5, d)$  est telle que*

$$d_1^*(F(\mathcal{C}_5, d)) \leq \frac{12}{25}$$

*Preuve.* En effet, il est simple de vérifier que l'ensemble des sommets noirs de  $F(\mathcal{C}_5, 2)$  de la Figure 8.4 forme un code identifiant du graphe de densité  $\frac{12}{25}$ .

Il est clair que ce code est généralisable aux graphes  $F(\mathcal{C}_5, d)$  pour toute dimension  $d \geq 3$ . En effet, par la Propriété 25, en reproduisant le motif décrit par le code de la Figure 8.4 sur chaque fibre  $F(\mathcal{C}_5, 2)$ , de telle sorte que des sommets hors du code occupent la place des sommets aux extrémités des arêtes entre les fibres  $F(\mathcal{C}_5, 2)$ , nous obtenons un code identifiant de  $F(\mathcal{C}_5, d)$  et ce en conservant la densité de  $\frac{12}{25}$ .  $\square$

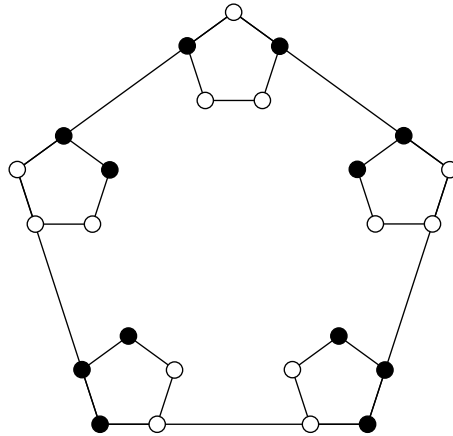


FIGURE 8.4 – Les sommets noirs forment un code identifiant de densité  $\frac{12}{25}$  du graphe fractal  $F(\mathcal{C}_5, 2)$ .

### 8.3.4 Cas des graphes fractals de $\mathcal{C}_{2n}$ avec $n \geq 3$

**Propriété 26** *Les graphes fractals des cycles  $\mathcal{C}_{2n}$  avec  $n \geq 3$  sont bipartis connexes, sans faux jumeaux, pour lesquels chaque partie contient exactement la moitié des sommets, et dont tous les sommets sont de degré au moins 2.*

*Preuve.* En effet, il est clair qu'un cycle de longueur paire vérifie la propriété. Supposons que  $F(\mathcal{C}_{2n}, d)$  pour des entiers  $d \geq 1$  et  $n \geq 3$ , vérifie la propriété. Dans ce cas, il est clair que  $F(\mathcal{C}_{2n}, d + 1)$  vérifie aussi la propriété puisque, chaque fibre de dimension  $d$  est bipartie, ne contient pas de sommet de degré 1, contient exactement la moitié de ses sommets dans chaque partie, n'a pas de faux jumeaux. De plus il y a un nombre pair de fibres qui sont placées le long d'un cycle pair constitué, tour à tour, de deux arêtes dans une fibre suivies d'une arête entre cette fibre et la suivante, le graphe ainsi constitué est bien toujours biparti et sans faux jumeaux.  $\square$

**Lemme 8.3** Soit  $G$  un graphe biparti dont la bipartition  $(A, B)$  avec  $A \subset V(G)$  et  $B = V \setminus A(G)$  est telle que pour tout sommet  $x \in A$ ,  $x$  est de degré  $\delta \geq 2$ , et  $A$  ne contient pas de faux jumeaux. L'ensemble  $B$  est un code identifiant de  $G$ .

*Preuve.* En effet, trivialement, pour tout sommet  $u$  de  $B$ ,  $N[u] \cap B \neq \emptyset$ . Comme tout sommet de  $A$  est de degré au moins 2, un sommet  $u$  de  $A$  a au moins deux voisins dans  $B$ , ainsi  $N[u] \cap B \neq \emptyset$ . De plus, par construction, pour tout sommet  $u \in B$ ,  $N[u] = u$ . Comme il n'y a pas d'arête entre les sommets de  $B$ , tous les sommets de  $B$  sont séparés entre eux. Enfin, par construction, pour tout sommet  $u \in A$ ,  $N[u] \cap B = N(u)$ , comme, par hypothèse, il n'y a pas de faux jumeaux dans  $A$ , quels que soient deux sommets  $u$  et  $v$  dans  $A$ ,  $u \neq v \Rightarrow N(u) \neq N(v)$ . Les sommets de  $A$  sont donc bien séparés.  $\square$

**Lemme 8.4** Soit  $F(\mathcal{C}_n, d)$  un graphe fractal du cycle  $\mathcal{C}_n$  ( $n$  pair et  $n \geq 6$ ). Si, pour une fibre de dimension 1, il y a exactement  $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor = \frac{n-4}{2} = \frac{n}{2} - 2$  sommets de la chaîne  $P$  dans  $C$ , alors les sommets extrémaux de degré 3,  $v_{n-2}$  et  $v_n$ , sont dans  $C$ .

*Preuve.* Supposons que  $v_n$  soit dans  $U$ . Montrons qu'il y a alors au moins  $\frac{n}{2} - 1$  sommets de  $P$  dans  $C$ .

Dans  $P$  il n'y a pas trois sommets consécutifs dans  $U$ . Par le Lemme 8.2, et puisque  $v_n$  est dans  $U$ ,

- pour tout couple de deux sommets consécutifs  $v_i, v_{i+1}$  de  $P$ , si  $v_i$  et  $v_{i+1}$  sont dans  $U$ , alors  $i \geq 4$  et  $v_{i-1}, v_{i-2}, v_{i-3}$  sont dans  $C$ . Supposons que  $i < 4$ , alors
  - $i = 1$ , dans ce cas nous arrivons à la contradiction suivante,  $v_n, v_2 \in U \Rightarrow N[v_1] \cap C = \emptyset$ ,
  - ou  $i = 2$ , dans ce cas nous arrivons à la contradiction suivante,  $v_n, v_2, v_3 \in U$  et  $v_1 \in C \Rightarrow N[v_1] \cap C = N[v_2] \cap C = \{v_1\}$ ,
  - ou  $i = 3$ , dans ce cas nous arrivons à la contradiction suivante,  $v_n, v_3, v_4 \in U$  et  $v_1, v_2 \in C \Rightarrow N[v_1] \cap C = N[v_2] \cap C = \{v_1, v_2\}$ .

Comme  $v_{i-1}, v_{i-2}, v_{i-3}$  sont donc dans  $P$ , ils sont de degré 2 et  $v_{i-1}$  est voisin de  $v_i$  qui est dans  $U$  lui-même voisin de  $v_{i+1}$  aussi dans  $U$ . Donc  $v_{i-1}$  est dans  $C$ , pour le séparer de  $v_i$ ,  $v_{i-2}$  est aussi dans  $C$ , et pour séparer  $v_{i-2}$  et  $v_{i-1}$ ,  $v_{i-3}$  est dans  $C$ . Soit  $k$  le nombre des ces couples  $v_i, v_{i+1}$  dans  $U \cap P$ ,

- pour tout sommet  $v_i$  de  $P$  dans  $U$  n'appartenant pas à un couple de deux sommets consécutifs dans  $U$ , le sommet  $v_{i-1}$  est dans  $C$ , excepté pour au plus un sommet :  $v_1$  s'il est dans  $U$ . Soit  $l$  le nombre des sommets de  $U$  n'appartenant pas à un couple.

Ainsi, le nombre  $n_U$  de sommets dans  $U \cap P$  est  $n_U = 2k + l$ , et le nombre  $n_C$  de sommets dans  $C$  est  $n_C \geq 3k + l - 1$ . Par conséquent,  $n_U \leq n_C - k + 1$ . Comme  $n - 3 = n_C + n_U$ ,  $n - 3 \leq 2n_C + 1 - k$ , c'est à dire  $n_C \geq \frac{n+k-4}{2}$ .

- Ainsi, si  $k \geq 1$ , i.e., il existe au moins un couple de sommets de  $P$   $v_i, v_{i+1}$  dans  $U$ , il y a au moins  $\frac{n}{2} - 1$  sommets de  $P$  dans  $C$ .
- Pour  $k = 0$ 
  - Si  $v_1$  est dans  $C$  alors  $n_C \geq l$  et donc  $n_C \geq n_U \Rightarrow n_C \geq \frac{n-3}{2}$ . Il y a donc au moins  $\frac{n}{2} - 1$  sommets de  $P$  dans  $C$ .

- Si  $v_1$  est dans  $U$  alors, par les Propriétés 20 et 21,  $v_2, v_3$ , et  $v_4$  sont dans  $C$ . Dans ce cas, dans la chaîne  $v_5, v_6, \dots, v_{n-3}$  il y a au moins  $\frac{n-3-5}{2}$  sommets dans  $C$ , soit, dans  $P$ ,  $\frac{n}{2} - 4 + 3$  sommets dans  $C$ . □

**Corollaire 8** Soit  $F(\mathcal{C}_n, d)$  un graphe fractal du cycle  $\mathcal{C}_n$  ( $n$  pair, et  $n \geq 6$ ). Si dans une fibre de dimension 1, il y a strictement moins de  $\frac{n}{2}$  sommets dans  $C$ , alors il y a exactement  $\frac{n}{2} - 1$  sommets de  $P$  dans  $C$ , et les sommets  $v_{n-2}, v_{n-1}$  et  $v_n$  sont dans  $U$ .

*Preuve.* Par le Lemme 8.2, on sait qu'il y a au moins  $\frac{n}{2} - 2$  sommets de  $P^1$  dans  $C$ , et par le Lemme 8.4, on sait que s'il y en a exactement  $\frac{n}{2} - 2$ , les sommets  $v_{n-2}$  et  $v_n$  sont dans  $C$ , ce qui fait  $\frac{n}{2}$  sommets de  $\mathcal{C}_n^1$  dans  $C$ . □

**Théorème 27** Pour tout entier pair  $n \geq 6$ , un code identifiant minimum d'un graphe fractal du cycle  $\mathcal{C}_n$ , a une densité d'exactlyment  $\frac{1}{2}$ .

*Preuve.* 1. Montrons que pour tout entier pair  $n \geq 6$ , un code identifiant minimum d'un graphe fractal du cycle  $\mathcal{C}_n$  contient au plus la moitié des sommets.

Par la Propriété 26, on sait que les graphes fractals des cycles  $\mathcal{C}_n$  avec  $n$  pair sont des graphes bipartis, connexe, sans faux jumeaux, dont chacune des deux parties contient exactement la moitié des sommets, et dont tous les sommets sont de degré au moins 2. Par le Lemme 8.3, chacune des parties d'un tel graphe est un code identifiant du graphe.

2. Montrons que pour tout entier pair  $n \geq 6$ , un code identifiant minimum d'un graphe fractal du cycle  $\mathcal{C}_n$  contient au moins la moitié des sommets.

Supposons par l'absurde, que ce ne soit pas le cas, alors il existe un entier pair  $n \geq 6$  et un graphe fractal  $G = (V, E)$  du cycle  $\mathcal{C}_n$  contenant un code identifiant  $C$  de densité  $d < 1/2$ . Dans ce cas il existe dans  $G$  au moins une fibre contenant strictement moins que  $\frac{n}{2}$  sommets dans  $C$ , notons cette fibre  $\mathcal{C}_n^1$ . Dans  $\mathcal{C}_n^1$  il y a donc au plus  $\frac{n}{2} - 1$  sommets dans  $C$ . Par le Corollaire 8, dans  $\mathcal{C}_n^1$  il y a au moins  $\frac{n}{2} - 1$  sommets dans  $C$ .

S'il y a exactement  $\frac{n}{2} - 1$  sommets de  $P^1$  dans  $C$ , par le Corollaire 8, les sommets extrémaux de degré 3,  $v_{n-2}^1$  et  $v_n^1$ , et le sommet du milieu  $v_{n-1}^1$  sont dans  $U$ . Par définition,  $N[v_{n-1}^1] \cap C \neq \emptyset$ , le sommet  $v_{n-1}^1$  est donc de degré 3, et dans la fibre  $\mathcal{C}_n^2$ , voisine de  $\mathcal{C}_n^1$  par  $v_{n-1}^1$  (voir la Propriété 23), le sommet  $v_{n-1}^2$ , est dans  $C$ . De plus, par la Propriété 20,  $v_{n-1}^2$  a au moins un voisin dans  $C$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $v_n^2$  est dans  $C$ . De plus dans la chaîne  $P^2$  de  $\mathcal{C}_n^2$ , il y a au moins  $\frac{n}{2} - 2$  sommets dans  $C$ .

- S'il y a exactement  $\frac{n}{2} - 2$  sommets de  $P^2$  dans  $C$ , par le Lemme 8.4  $v_{n-2}^2$  est dans  $C$ , et donc il y a  $\frac{n}{2} + 1$  sommets de  $\mathcal{C}_n^2$  dans  $C$ .
- S'il y a au moins  $\frac{n}{2} - 1$  sommets de  $P^2$  dans  $C$ , plus les sommets  $v_{n-1}^2$  et  $v_n^2$ , il y a  $\frac{n}{2} + 1$  sommets de  $\mathcal{C}_n^2$  dans  $C$ .

Ainsi s'il existe une fibre  $\mathcal{C}_n^1$  contenant au plus  $\frac{n}{2} - 1$  sommets dans  $C$ , alors

- $\mathcal{C}_n^1$  contient exactement  $\frac{n}{2} - 1$  sommets dans  $C$ ,
  - il existe une fibre  $\mathcal{C}_n^2$  contenant au moins  $\frac{n}{2} + 1$  sommets dans  $C$ .
- Donc, par la Propriété 23, il existe un couplage qui associe à chaque fibre contenant  $k$  sommets dans  $C$  avec  $k < \frac{n}{2}$ , une autre fibre contenant  $k'$  sommets dans  $C$  et tel que  $k + k' \geq n$ . Pour tout entier pair  $n \geq 6$ , un code identifiant minimum d'un graphe fractal du cycle  $\mathcal{C}_n$  contient donc au moins  $\frac{n}{2}$  sommets.

Un code identifiant de densité  $\frac{1}{2}$  du graphe fractal  $F(\mathcal{C}_6, 3)$  est donné Figure 8.5. □

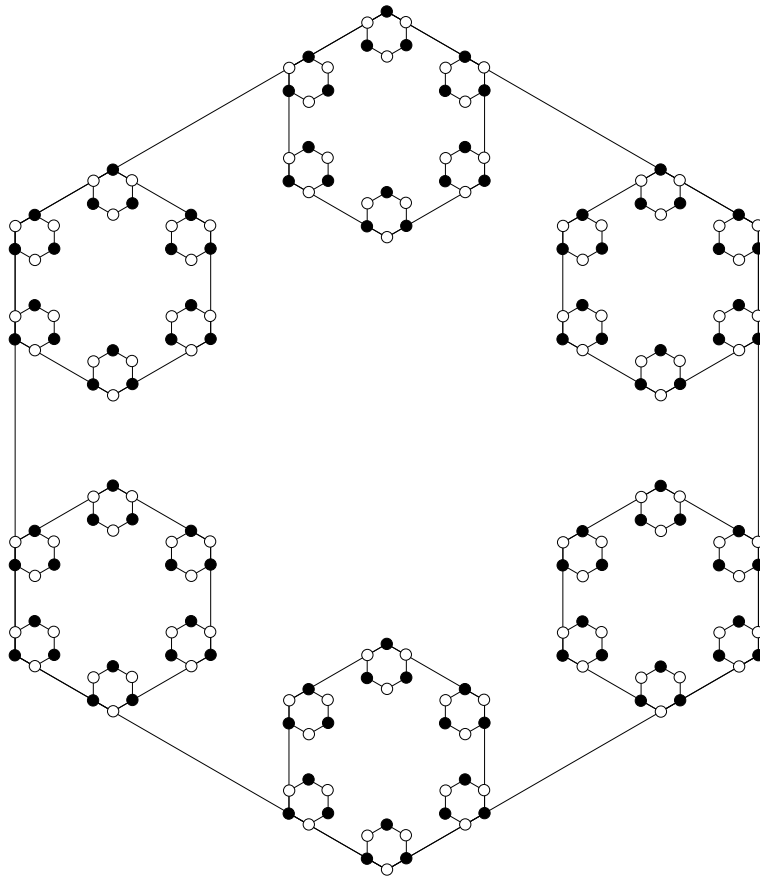


FIGURE 8.5 – Une bipartition de  $F(\mathcal{C}_6, 3)$  est représentée par d'une part les sommets noirs et d'autre part les sommets blancs. Chacune des parties forme un code identifiant du graphe.

### 8.3.5 Cas des graphes fractals de $\mathcal{C}_{2n+1}$ avec $n \geq 3$

Pour plus de simplicité, dans cette section, nous considérerons les sommets du cycle  $\mathcal{C}_n$ , et donc par définition, les fibres  $F(\mathcal{C}_n, k)$  des graphes fractals  $F(\mathcal{C}_n, d)$  (pour  $1 \leq k \leq d - 1$ ), ordonnés dans le sens antihoraire à partir du haut de la figure (voir Figure 8.6 par exemple). Nous considérerons aussi que les calculs faits sur les étiquettes des sommets des graphes fractals sont effectués modulo  $n$ . Ainsi, par exemple, pour le graphe fractal  $F(\mathcal{C}_n, 3)$ , le sommet  $(1, 1 - 2, n + 3)$  est le sommet  $(1, n - 1, 3)$ .

Commençons par démontrer le Lemme suivant.

**Lemme 8.5** Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $C$  un code identifiant de  $G$ , tel qu'il existe deux sommets  $u$  et  $v$  dans  $G$  de degrés 2 avec  $uv \in E$  et  $u$  est dans  $C$  et  $v$  hors de  $C$ . Nous définissons un graphe  $G'$  construit à partir de  $G$  de la façon suivante,  $G' = (V \cup \{w_1, \dots, w_{2n}\}, E \cup \{uw_1, w_1w_2, \dots, w_{2n-1}w_{2n}, w_{2n}v\} \setminus \{uv\})$  pour tout entier  $n \geq 1$ . Alors  $C \cup \{w_2, w_4, \dots, w_{2n}\}$  est un code identifiant de  $G'$ . Autrement dit, en remplaçant l'arête  $uv$  de  $G$  par une chaîne de  $2n$  sommets (pour tout entier  $n \geq 1$ ) alternativement hors du code et dans le code (si  $u$  est dans  $C$  et  $v$  hors de  $C$ ), ou dans le code et hors du code (si  $u$  est hors de  $C$  et  $v$  est dans  $C$ ), on construit un code identifiant  $C'$  du nouveau graphe, code formé par les sommets déjà dans  $C$  ajoutés à ceux présents dans la chaîne.

*Preuve.* Il est clair que tous les sommets sont dominés. Si  $C'$  n'est pas un code identifiant du graphe ainsi créé, alors il existe deux sommets  $x$  et  $y$  non séparés. Le sommet  $x$  ne peut pas être dans  $\{w_{1,2}, \dots, w_{2n}\}$  puisque tous ces sommets sont séparés par  $C'$ . Le sommet  $x$  ne peut pas être dans  $V \setminus \{u, v\}$  sans quoi  $C$  ne serait pas un code identifiant. Donc  $x = u$  et  $y = v$ . Or  $u$  et  $v$  ne sont pas reliés et l'un est dans  $C'$  et l'autre non. Nous arrivons donc à une contradiction.  $\square$

**Théorème 28** Pour tout entier impair  $n \geq 7$  et tout entier  $d \geq 3$ , la densité minimum d'un code identifiant de  $F(\mathcal{C}_n, d)$  est telle que

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2} < d_1^*(F(\mathcal{C}_n, d)) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}.$$

*Preuve.* Concernant la borne inférieure, grâce au Théorème 24, on sait que pour tout entier impair  $n \geq 7$  et tout entier  $d \geq 1$ , la densité minimum d'un code identifiant de  $F(\mathcal{C}_n, d)$  est strictement supérieure à  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}$ .

Concernant la borne supérieure, montrons tout d'abord que l'ensemble des sommets noirs du graphe de la Figure 8.8 forme un code identifiant de  $F(\mathcal{C}_7, 3)$  de densité  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}$ . Ce code est constitué de la façon suivante : pour chaque entier  $i, j, k$  dans  $\{1, \dots, 7\}$ , les sommets  $(i, j, k)$  sont dans  $C$  si et seulement si les sommets  $(j - (i - 1), k - (i - 1))$  de la Figure 8.6 sont dans  $C$  (les sommets noirs).

Il est simple de voir que, pour chaque  $i$  dans  $\{1, \dots, 7\}$ , les sommets du code restreints à  $F^i(\mathcal{C}_7, 2)$  dominent et séparent tous les sommets de  $F^i(\mathcal{C}_7, 2)$  exceptés les sommets  $(i, i + 1, i + 1)$  et  $(i, i + 1, i)$  qui ne sont pas séparés (voir Figure 8.6). Or dans  $F(\mathcal{C}_7, 3)$ , pour chaque  $i$  dans  $\{1, \dots, 7\}$ , le sommet  $(i, i + 1, i + 1)$  est voisin du sommet  $(i + 1, i, i)$  qui est dans  $C$ . Donc les sommets  $(i, i + 1, i + 1)$  et  $(i, i + 1, i)$  sont séparés, dans  $F(\mathcal{C}_7, 3)$  par le sommet  $(i + 1, i, i)$ .

Ce code est de densité  $\frac{7 \times (3 \times 3 + 4 \times 4)}{7^3} = \frac{175}{343} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 7^2}$ .

De plus ce code est généralisable aux graphes fractals  $F(\mathcal{C}_n, d)$  pour tout entier impair  $n > 7$  et tout entier  $d \geq 3$  tout en restant identifiant et en conservant sa densité de  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}$ .

Montrons tout d'abord la généralisation pour  $d > 3$ . Considérons qu'il existe un code identifiant  $C$  de  $F(\mathcal{C}_n, 3)$  tel que les sommets  $(i, i, i)$  ne sont

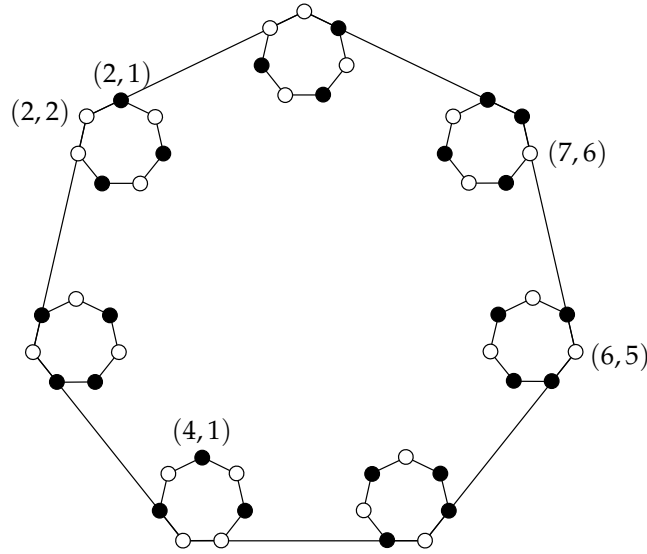


FIGURE 8.6 – Le graphe fractal  $F(\mathcal{C}_7, 2)$ . Les sommets noirs ne forment pas un code identifiant du graphe, les sommets  $(2, 1)$  et  $(2, 2)$  n'étant pas séparés. Le label de certains sommets est indiqué.

pas dans  $C$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  (c'est le cas pour le code identifiant de  $F(\mathcal{C}_7, 3)$  défini plus tôt). Dans ce cas, nous allons construire un code  $C'$  de  $F(\mathcal{C}_n, d)$  de la façon suivante : pour tout sommet  $u = (i_1, i_2, \dots, i_{d-2}, i_{d-1}, i_d)$  de  $F(\mathcal{C}_n, d)$ ,  $u$  est dans  $C'$  si et seulement si le sommet  $(i_{d-2}, i_{d-1}, i_d)$  de  $F(\mathcal{C}_n, 3)$  est dans  $C$ . Ce code  $C'$  dans  $F(\mathcal{C}_n, d)$  est clairement de même densité que  $C$  dans  $F(\mathcal{C}_n, 3)$  puisque  $d(C', F(\mathcal{C}_n, d)) = \frac{|C| * n^{d-3}}{n^d}$  et  $d(C, F(\mathcal{C}_n, 3)) = \frac{|C|}{n^3}$ . De plus  $C'$  est un code identifiant de  $F(\mathcal{C}_n, d)$ . Si ça n'était pas le cas,

- il y aurait au moins un sommet non dominé, ce qui n'est pas possible puisque  $C$  est un code identifiant de  $F(\mathcal{C}_n, 3)$  et que  $C'$  est constitué de  $n^{d-3}$  copies de  $C$ ,
- ou il y aurait deux sommets non séparés. Or au sein d'une fibre  $F(\mathcal{C}_n, 3)$  il n'y a pas de sommets non séparés par  $C'$ . Par définition de  $C$ , dans  $F(\mathcal{C}_n, 3)$ , les sommets  $(i, i, i)$  ne sont pas dans  $C$ . Or, dans  $F(\mathcal{C}_n, d)$ , si une arête a ses extrémités dans deux fibres  $F(\mathcal{C}_n, 3)$  différentes, alors ces sommets sont de la forme  $(i_1, i_2, \dots, i_{d-2}, i_{d-1}, i_d)$  avec  $i_{d-2} = i_{d-1} = i_d$ . Ainsi, comme ces fibres sont reliées par des sommets qui ne sont pas dans  $C'$ , par la Propriété 25,  $C'$  est bien un code identifiant de  $F(\mathcal{C}_n, d)$ .

Montrons, enfin, la généralisation pour  $n$  impair et  $n > 7$ . Nous allons construire, à partir de  $C$  dans  $F(\mathcal{C}_7, 3)$ , un code identifiant  $C'$  de  $F(\mathcal{C}_n, 3)$  dont tous les sommets  $(i, i, i)$  sont hors de  $C$  et de densité  $d(C', F(\mathcal{C}_n, 3)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}$ . Nous donnons l'idée de la construction. Dans la Figure 8.8, remarquons que tous les couples de sommets figurant entre parenthèses noires sur la figure, sont constitués de deux sommets de degrés 2, l'un dans  $C$  et l'autre hors de  $C$  (les sommets  $(1, 1, 4)$  et  $(1, 1, 5)$  par exemple, ou encore  $(1, 2, 5)$  et  $(1, 2, 6)$ ,

ou encore  $(4, 4, 1)$  et  $(4, 4, 7)$ ). Pour obtenir  $C'$  à partir de  $C$ , il faut remplacer chaque couple de sommets entre les parenthèses noires par une chaîne de  $n - 5$  sommets alternativement dans  $C$  et hors de  $C$ , en conservant l'alternance définie par le couple à remplacer. Ainsi pour la construction de  $C'$ , un code identifiant de  $F(\mathcal{C}_9, 3)$ , le couple de sommets  $(1, 1, 4)$  et  $(1, 1, 5)$  est remplacé par la chaîne formée par les nouveaux sommets  $(1, 1, 4)$ ,  $(1, 1, 5)$ ,  $(1, 1, 6)$  et  $(1, 1, 7)$ , tels que  $(1, 1, 4)$  et  $(1, 1, 6)$  ne sont pas dans  $C'$  et  $(1, 1, 5)$  et  $(1, 1, 7)$  le sont. Toutes les fibres du graphes fractal ainsi constitué sont bien isomorphes au cycle  $\mathcal{C}_n$ . Enfin remarquons qu'au sein de chaque fibre  $F(\mathcal{C}_7, 2)$  de la figure 8.8, il y a deux motifs différents induits par les sommets noirs des fibres entre les parenthèses rouges. Considérons chacun de ces deux motifs comme une chaîne constituée d'une fibre que nous nommerons  $A$ , celle avec 3 sommets dans le code, et d'une fibre que nous nommerons  $B$ , celle avec 4 sommets dans le code. Nous nommerons ces chaînes de deux fibres les sous-graphes  $AB$ . Remarquons que les fibres  $A$  sont reliées à des fibres hors des parenthèses rouges, mais présentant le même motif de sommets dans le code que les fibres  $B$ . Nous nommerons ces fibres  $B'$  (voir Figure 8.7). Pour clore la construction de  $C'$ , il reste à remplacer chacun des sous-graphes  $AB$  par une suite constituée de  $n - 5$  fibres alternativement  $A$  et  $B$ , une fibre  $A$  reliée à une fibre  $B$  qui la suit de la même manière que dans le sous-graphe  $AB$ , et une fibre  $B$  reliée à une fibre  $A$  qui la suit de la même manière qu'une fibre  $B'$  à une fibre  $A$  (voir Figure 8.7).

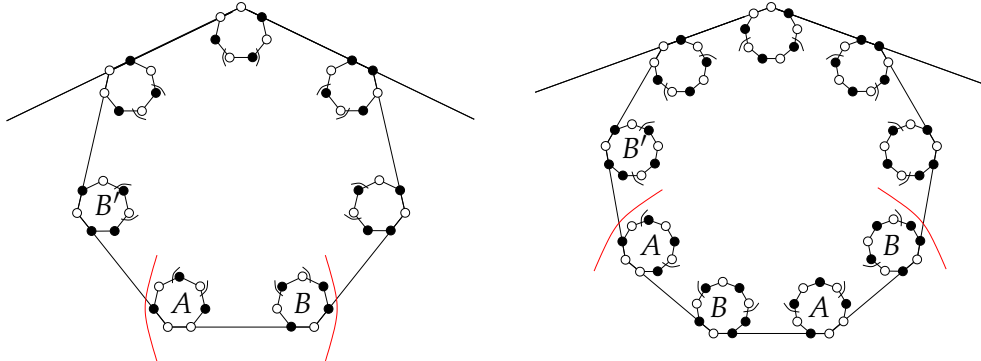


FIGURE 8.7 – Passage d'une fibre  $F(\mathcal{C}_7, 2)$  à une fibre  $F(\mathcal{C}_9, 2)$ . Le type des motifs du code restreint aux fibres entre les parenthèses rouges est noté.

Au terme de cette construction il est clair que les sommets  $(i, i, i)$  sont toujours hors de  $C$ . L'ensemble des sommets de  $C'$  ainsi construit forme bien un code identifiant. En effet nous avons remplacé une chaîne de deux sommets de degré 2 alternativement dans  $C$  et hors de  $C$  par une chaîne équivalente plus longue en conservant la même alternance de sommets dans  $C'$  et hors de  $C'$ . Par le Lemme 8.5  $C'$  est bien un code identifiant du graphe à ce stade de la construction. De plus en remplaçant les sous-graphes  $AB$  par des suites de fibres  $A$  et  $B$  il est clair que les sommets dans  $C'$  forment un code identifiant de densité :

$$d(C', F(\mathcal{C}_n, 3)) = \frac{n\left(\frac{n-1}{2} \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} \frac{n+1}{2}\right)}{n^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}$$

□



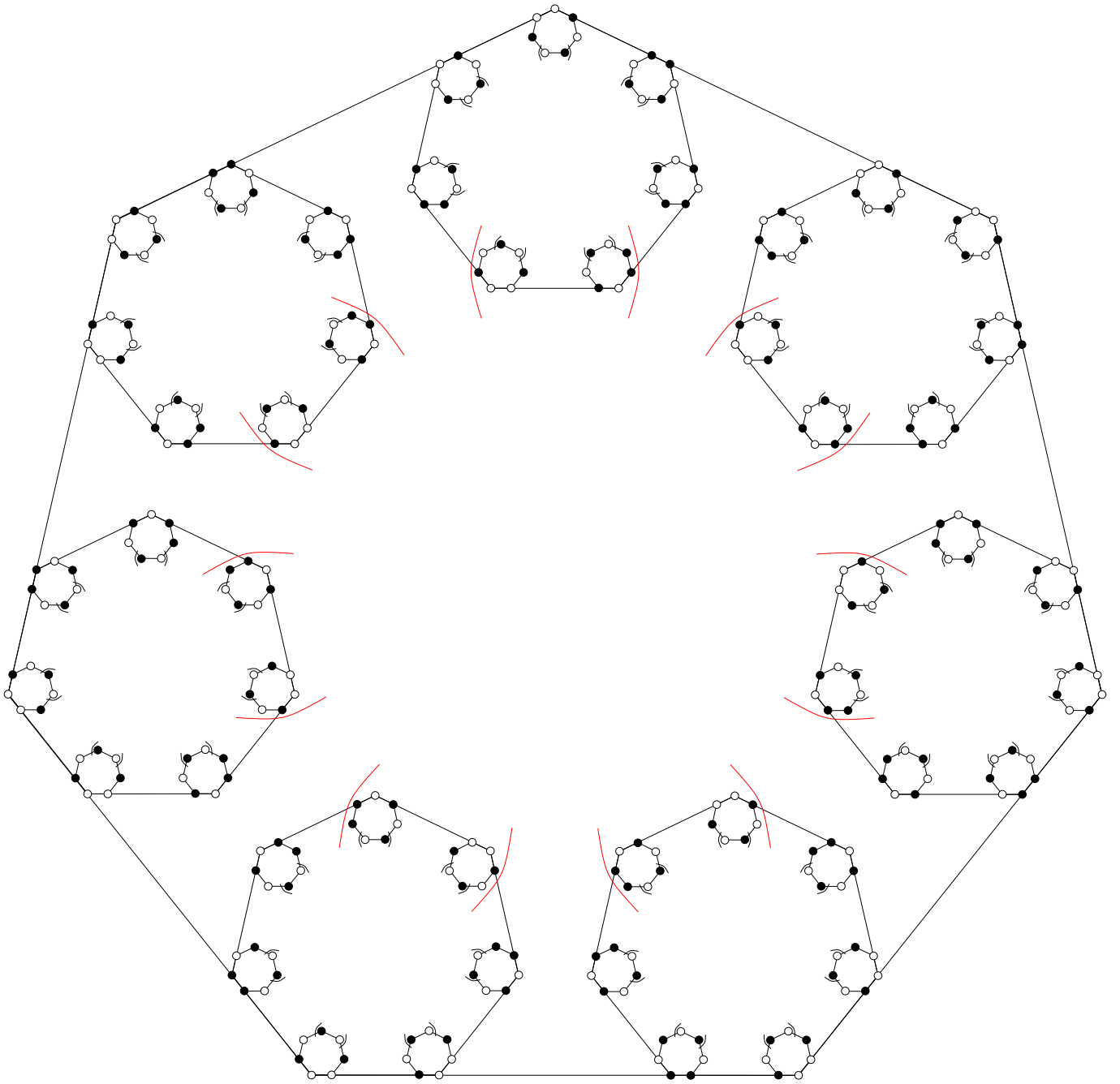


FIGURE 8.8 – Un code identifiant de  $F(\mathcal{C}_7, 3)$  de densité  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}$



# CONCLUSION

# 9

Dans cette seconde partie de la thèse, nous avons montré que plusieurs problèmes d'optimisation de type code identifiant correspondaient à des  $(d, q, w)$ -propriétés stables. Pour chacun de ces problèmes, nous avons programmé l'algorithme développé dans la première partie de la thèse pour calculer des solutions optimales dans les bandes circulaires, nous permettant d'en déduire des résultats sur les codes identifiants, LDset et LTDset dans les bandes infinies. Dans ce contexte, nous avons pu répondre à une conjecture énoncée dans [GMS06], et donner un meilleur résultat que celui escompté. L'ensemble de ces travaux a été présenté lors de plusieurs interventions dans des séminaires sur le sujet (séminaire du laboratoire G-SCOP, JGA 2010, BWIC2011), et fera l'objet d'une publication, à l'heure actuelle encore en préparation : [BDMP].

Nous avons aussi présenté des résultats concernant d'autres graphes à structures répétitive : les graphes fractals, ou graphes de Sierpiński généralisés. Nous avons étudié le problème du code identifiant pour ces graphes, et donné pour certaines tailles de cycles et certaines dimensions, des bornes sur la densité minimum des codes identifiants, et sur d'autres la densité minimum exacte.

L'ensemble des résultats importants peut être résumé dans les deux tableaux suivants :

- concernant les codes identifiants, LDset et LTDset dans les bandes infinies :

$h$	$\mathcal{S}_h^\infty$			$\mathcal{K}_h^\infty$			$\mathcal{U}_h^\infty$			$\mathcal{Y}_h^\infty$		
	C	LD	LTD	C	LD	LTD	C	LD	LTD	C	LD	LTD
1	$\frac{1}{2}$ [BCHLo4]	$\frac{2}{5}$ [BCHLo4]	$\frac{1}{2}$	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	$\frac{3}{7}$ [DGMo4]	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	X	X	X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{11}{28}$											

- concernant les codes identifiants dans les graphes fractals de cycles (les résultats que nous présentons ont pour but d'être généralisables quelle que soit la dimension du graphe fractal concerné, généralisation qui intervient à partir d'une certaine dimension, nous ne présentons donc pas de résultat pour les dimensions plus petites) :

	$d_1^*(\mathcal{C}_4) = \frac{3}{4}$	$d_1^*(\mathcal{C}_5) = \frac{3}{5}$	$n \geq 3 :$ $d_1^*(\mathcal{C}_{2n}) = \frac{1}{2}$ [BCHLo4]	$n \geq 3 :$ $d_1^*(\mathcal{C}_{2n+1}) = \frac{n+2}{2n+1}$ [GMSo6]
$d \geq 2, F(\mathcal{C}_3, d) :$ $d_1^*(F) = \frac{2}{3}$ [GKM <sup>+</sup> ]	$d \geq 4, F(\mathcal{C}_4, d) :$ $d_1^*(F) \leq \frac{31}{64}$	$d \geq 2, F(\mathcal{C}_5, d) :$ $d_1^*(F) \leq \frac{12}{25}$	$d, n \geq 3, F(\mathcal{C}_{2n}, d) :$ $d_1^*(F) = \frac{1}{2}$	$d, n \geq 3, F(\mathcal{C}_{2n+1}, d) :$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+3} < d_1^*(F) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2n+1)^2}$

Comme poursuite de ces travaux, il serait intéressant de regarder les codes 2-identifiants, 2-LDset et 2-LTDset dans les bandes infinies de hauteur 1 et 2, les hauteurs plus grandes ne permettent pas d'être codées à l'heure actuelle grâce à notre programme. Il serait aussi intéressant d'adapter notre code informatique pour permettre d'étudier des bandes de hauteur supérieure à 4, ou des code  $t$ -identifiants, ou  $t$ -LDset ou  $t$ -LTDset avec  $t \geq 2$ .

Concernant les codes identifiants dans les graphes fractals, je pense que les bornes supérieures que nous fournissons dans le tableau précédent sont les solutions optimales. Il serait intéressant de le démontrer. La méthode du déchargement semble être la plus adaptée pour répondre à ces questions.

# ANNEXE

# A

Nous donnons ici quatre exemples de problèmes combinatoires largement étudiés dans la théorie des graphes et qui sont des  $(d, q, w)$ -propriétés closes ou stables :

**Définition 97** *Étant donné un graphe  $G = (V, E)$ , un **dominant parfait** de  $G$  est un sous-ensemble de sommets  $D \subseteq V$  tel que pour tout sommet  $u$  de  $G$ , il existe exactement un sommet de  $D$  dans le voisinage fermé  $N[u]$ .*

**Théorème 29** *L'existence d'un dominant parfait est une  $(3, 2, w)$ -propriété close.*

*Preuve.* Nous prouverons le théorème dans le cas d'une  $(3, 2, w)$ - $r$ -propriété. La preuve peut être facilement adaptée pour le cas d'une  $(3, 2, w)$ - $f$ -propriété. Il est simple de voir que le problème correspond à une 2-propriété de graphe. En effet un graphe  $G = (V, E)$  possède un dominant parfait si et seulement si il existe un 2-étiquetage des sommets de  $G$  tel que tout sommet de  $G$  a exactement un sommet étiqueté 1 dans son voisinage fermé.

Notons cette 2-propriété  $\mathcal{D}_{\text{parf}}$ . Montrons que  $\mathcal{D}_{\text{parf}}$  est pseudo-3-locale. La preuve est similaire à celle de la propriété  $\mathcal{D}$  de domination (voir Section 2.3.1). Pour tout  $f$  dans  $\mathcal{L}_2(\psi_3(M))$ ,  $f$  est dans  $\mathcal{D}_{\text{parf}}^{\text{loc}}$  si et seulement si pour tout  $u$  dans  $V(M_2)$ , il existe exactement un sommet étiqueté 1 dans le voisinage fermé de  $u$ . En effet, dans un rotographe  $\omega_n(M)$ , le voisinage d'un sommet dans  $M_i$  est inclus dans  $M_{i-1} \cup M_i \cup M_{i+1}$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , et un tel sommet ne peut donc pas être dominé par un sommet d'une autre fibre.

Considérons la fonction de poids  $w$  qui assigne le poids 1 à tous les 2-étiquetages de  $\mathcal{D}_{\text{parf}}(\omega_n(M))$ .

Cette fonction de poids est 3-modulaire. En effet, soit  $w^{\text{loc}}$  la fonction qui assigne le poids 1 à tous les 2-étiquetages de  $\mathcal{D}_{\text{parf}}^{\text{loc}}(\psi_4(M))$ , nous avons, pour tout  $f \in \mathcal{D}_{\text{parf}}(\omega_n(M))$ ,  $w(f) = \max_{i=1}^n (w^{\text{loc}}(f_{i,A}))$ . Ainsi,  $w^{\text{loc}}$  et l'opération  $\max$  sur l'ensemble  $\{1\}$  fournissent la 3-modularité de  $w$ , la propriété  $\mathcal{D}_{\text{parf}}$  est donc une  $(3, 2, w)$ - $r$ -propriété. Les calculs s'effectuant dans le dioïde  $\mathcal{E} = (\{1\}, \min, \max, +\infty, 1)$ , par les exemples donnés suite à la Remarque 12,  $\mathcal{D}_{\text{parf}}$  est une  $(3, 2, w)$ - $r$ -propriété close.  $\square$

Nous avons, dans la Section 2.2, donné en exemple de  $k$ -propriété, la propriété "être  $k$ -colorable". Nous la rappelons ci-dessous.

**Définition 98** *Étant donné un graphe  $G = (V, E)$ , une  **$k$ -coloration propre** de  $G$  est une partition de  $V$  en  $k$  sous ensembles stables, i.e. il existe un  $k$ -étiquetage des sommets de  $G$  tel qu'il n'existe pas deux sommets adjacents qui ont la même étiquette. Un graphe est  **$k$ -colorable** si et seulement si il admet une  $k$ -coloration propre.*

**Théorème 30** *L'existence d'une  $k$ -coloration propre est une  $(2, k, w)$ -propriété close.*

*Preuve.* Nous prouverons le théorème dans le cas d'une  $(2, k, w)$ - $r$ -propriété. La preuve peut être facilement adaptée pour le cas d'une  $(2, k, w)$ - $f$ -propriété. La preuve est presque identique à celle du Théorème 29. Notons cette  $k$ -propriété  $Ck$ . Montrons que  $Ck$  est pseudo-2-locale. Pour tout  $f$  dans  $\mathcal{L}_2(\psi_2(M))$ ,  $f$  est dans  $Ck^{loc}$  si et seulement si pour tout  $u$  dans  $V(\psi_2(M))$ ,  $f(u) \neq f(v)$  pour tout  $v$  dans  $N(u)$ . Remarquons que pour cette propriété,  $Ck$  est identique à  $Ck^{loc}$ . En effet dans un rotagraphe  $\omega_n(M)$ , toute arête est présente dans au moins un groupe de deux fibres consécutives. Ainsi un 2-étiquetage  $f$  de  $\omega_n(M)$  correspond à une  $k$ -coloration propre si et seulement si la restriction de  $f$  à tous les groupes de deux fibres consécutives correspond à une  $k$ -coloration propre de  $\psi_2(M)$ .

Considérons la fonction de poids  $w$  identique à celle de la  $(3, 2, w)$ -propriété  $\mathcal{D}_{\text{parf}}$  de domination parfaite, qui assigne le poids 1 à tous les 2-étiquetages de  $Ck(\omega_n(M))$ . Pour les mêmes raisons que précédemment, cette fonction de poids est 2-modulaire, le dioïde concerné est  $\mathcal{E} = (\{1\}, \min, \max, +\infty, 1)$  et  $Ck$  est une  $(2, k, w)$ - $r$ -propriété close.  $\square$

Les deux problèmes que nous présentons ci-dessous sont des problèmes de maximisation. Autrement dit, il s'agit de trouver, dans l'ensemble de poids  $\mathbb{E}$ , non plus le minimum, mais le maximum des valeurs des  $q$ -étiquetages vérifiant la propriété sur les rotagraphe, ou les fasciagraphe, concernés. Il est simple de vérifier que les algorithmes que nous avons présentés plus tôt restent utilisables si le dioïde concerné est  $(\mathbb{E}, \max, \otimes, \varepsilon, e)$  avec  $\varepsilon < i$  pour tout  $i \in \mathbb{E}$ . Pour les problèmes de maximisation, nous utiliserons donc ce dioïde.

**Définition 99** *Étant donné un graphe  $G = (V, E)$ , un **stable** ou **ensemble indépendant** de  $G$  est un sous-ensemble indépendant  $S$  de sommets de  $G$ , i.e. pour tous sommets  $u$  et  $v$  dans  $S$ ,  $uv$  n'est pas une arête de  $G$ .*

**Théorème 31** *Le problème du stable maximum est une  $(2, 2, w)$ -propriété stable.*

*Preuve.* Nous prouverons le théorème dans le cas d'une  $(2, 2, w)$ - $r$ -propriété. La preuve peut être facilement adaptée pour le cas d'une  $(2, 2, w)$ - $f$ -propriété. Il est simple de voir que le problème correspond à une 2-propriété de graphe. En effet, étant donné un graphe  $G = (V, E)$ , les sommets étiquetés 1 par un 2-étiquetage des sommets de  $G$  vérifient les contraintes d'un ensemble indépendant si et seulement si ils ne sont pas deux à deux adjacents. Notons cette 2-propriété  $\mathcal{S}$ . Trivialement, tout graphe  $G$  vérifie  $\mathcal{S}$ , en effet, tout 2-étiquetage de  $G$  n'étiquetant 1 aucun sommet, ou exactement un sommet, vérifie  $\mathcal{S}$ .

Montrons que  $\mathcal{S}$  est pseudo-2-locale. Pour tout  $f$  dans  $\mathcal{L}_2(\psi_2(M))$ ,  $f$  est dans  $\mathcal{S}^{loc}$  si et seulement si pour tout  $u$  étiqueté 1 dans  $V(\psi_2(M))$ , il n'existe aucun sommet  $v$  étiqueté 1 dans le voisinage  $N(u)$ . Ainsi pour tout  $f$  dans  $\mathcal{L}_2(\omega_n(M))$ ,  $f$  vérifie  $\mathcal{S}$  si et seulement si  $f_{i,2}$  est dans  $\mathcal{S}^{loc}$  pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ .

Montrons que la condition est nécessaire. Supposons que ce ne soit pas le cas, alors il existe un 2-étiquetage  $f$  dans  $\mathcal{S}(\omega_n(M))$  et tel qu'il existe  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$  avec  $f_{i,2}$  ne vérifiant pas  $\mathcal{S}^{loc}$ . Si  $f_{i,2}$  ne vérifie pas  $\mathcal{S}^{loc}$  alors il existe deux sommets adjacents dans  $V(M_i) \cup V(M_{i+1})$  étiquetés 1. Or, dans ce cas, l'ensemble des sommets étiquetés 1 par  $f$  ne forme pas un ensemble indépendant dans  $\omega_n(M)$ , ce qui présente une contradiction puisque  $f$  vérifie  $\mathcal{S}(\omega_n(M))$ .

Montrons que la condition est suffisante. Supposons que ce ne soit pas le cas, alors il existe un 2-étiquetage dans  $\mathcal{L}_2(\omega_n(M))$  tel que pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,  $f_{i,2}$  vérifie  $\mathcal{S}^{loc}(\psi_2(M))$  et  $f$  ne vérifie pas  $\mathcal{S}(\omega_n(M))$ . Autrement dit, les sommets étiquetés 1 par  $f$  ne forment pas un ensemble indépendant dans  $\omega_n(M)$ . Dans ce cas il existe deux sommets  $u$  et  $v$  de  $\omega_n(M)$  adjacents, et étiquetés 1. Sans perte de généralité, supposons que  $u$  soit dans  $V(M_i)$ . Alors  $v$  est dans  $V(M_{i-1})$ ,  $V(M_i)$ , ou  $V(M_{i+1})$ . Le sommet  $v$  ne peut pas être dans  $V(M_{i-1})$  sans quoi  $f_{i-1,2}$  ne vérifierait pas  $\mathcal{S}^{loc}(\psi_2(M))$ . De la même façon, le sommet  $v$  ne peut être ni dans  $V(M_i)$ , ni dans  $V(M_{i+1})$ , sans quoi, respectivement, ni  $f_{i-1,2}$ , ni  $f_{i,2}$ , ne vérifierait  $\mathcal{S}^{loc}(\psi_2(M))$ . Ceci présente une contradiction. La 2-propriété  $\mathcal{S}$  est donc bien pseudo-2-locale.

Considérons la fonction de poids  $w : f \in \mathcal{S}(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbb{N}$  identique à celle pour la  $(3, 2, w)$ -propriété  $\mathcal{D}$  de domination (voir Section 2.4.2), autrement dit, telle que, pour tout  $f$  dans  $\mathcal{S}(\omega_n(M))$ ,  $w(f) = |\{u \mid u \in V(\omega_n(M)) \text{ et } f(u) = 1\}|$ , i.e.  $w(f)$  est le nombre de sommets étiquetés 1 par  $f$ .

Cette fonction de poids est 2-modulaire. En effet, soit  $w^{loc} : \mathcal{S}^{loc}(\mathcal{F}_3) \rightarrow \mathbb{N}$  telle que, pour tout  $f$  dans  $\mathcal{S}^{loc}(\psi_3(M))$ ,  $w^{loc}(f) = |\{u \mid u \in V(M_3) \text{ et } f(u) = 1\}|$ , c'est à dire que  $w^{loc}$  d'un 2-étiquetage d'un fasciagraphe de taille 3, est le nombre de sommets étiquetés 1 dans la 3ième fibre. Puisque le nombre de sommets dans l'ensemble indépendant est égal à la somme du nombre de sommets de l'ensemble indépendant dans chaque fibre, nous avons  $w(f) = \sum_{i=1}^n w^{loc}(f_{i,3})$ . Ainsi,  $w^{loc}$  et l'addition usuelle sur les entiers fournissent la 2-modularité de  $w$ , la propriété  $\mathcal{S}$  est donc une  $(2, 2, w)$ - $r$ -propriété.

Montrons qu'il s'agit d'une  $(2, 2, w)$ - $r$ -propriété stable. La preuve reprend l'idée de celle pour la propriété  $\mathcal{D}$  de domination du Théorème 8. Soit  $M$  un graphe mixte,  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{S}, w)$  le graphe auxiliaire associé,  $n$  le nombre de sommets de  $\vec{\mathcal{G}}$  et  $\Pi$  la matrice des longueurs de  $\vec{\mathcal{G}}$ . Les poids étant des entiers, nous effectuerons nos calculs dans le dioïde  $(\mathbb{Z}, \max, +, -\infty, 0)$ .

Nous allons montrer que, soit  $(\Pi_k)_{ij} = -\infty$ , soit  $0 \leq (\Pi_k)_{ij} \leq 4|V(M)|$  pour tout  $k \geq 2$  et tout  $1 \leq i, j \leq n$  et ainsi prouver que  $\Pi$  est stable (voir Remarque 13). Supposons donc que  $(\Pi_k)_{ij} \neq -\infty$ . Par définition de  $\vec{\mathcal{G}}$  et  $\Pi$  et par le Corollaire 2, pour  $1 \leq i, j \leq n$ , dans ce cas,  $(\Pi^k)_{ij}$  est égal au

nombre maximum de sommets étiquetés 1 dans les fibres  $M_3$  à  $M_{k+2}$  par un 2-étiquetage dans  $\mathcal{S}^{loc}(\psi_{k+2}(M))$  qui commence par  $u_i$  et finit par  $u_j$  ( $u_i, u_j$  dans  $\mathcal{S}^{loc}(\psi_2(M))$ ), et donc  $0 \leq (\Pi_k)_{ij} \leq (\Pi^k)_{ij}$ .

Si  $1 \leq k \leq 4$ , il y a au plus quatre fibres de  $M_3$  à  $M_{k+2}$  et pas plus que la totalité de leurs sommets peuvent être étiquetés 1. Donc dans ce cas  $0 \leq (\Pi_k)_{ij} \leq (\Pi^k)_{ij} \leq 4|V(M)|$ .

Supposons maintenant que  $k > 4$ . Soit  $f^*$  le 2-étiquetage dans  $\mathcal{S}^{loc}(\psi_{k+2}(M))$  tel que le nombre de sommets étiquetés 1 dans les fibres  $M_3$  à  $M_{k+2}$  est égal à  $\max(\Pi^k)$  ( $f^*$  existe puisqu'il existe au moins deux 2-étiquetages dans  $\mathcal{S}^{loc}(\psi_{k+2}(M))$ , celui qui n'étiquette aucun sommet 1 et celui qui étiquette exactement un sommet 1). Si  $f^*$  commence par  $u_i$  et finit par  $u_j$ , alors  $(\Pi_k)_{ij} = 0$ . Sinon, depuis  $f^*$ , nous pouvons construire  $f^{ij}$ , un 2-étiquetage dans  $\mathcal{S}^{loc}(\psi_{k+2}(M))$  qui démarre par  $u_i$  et se termine par  $u_j$ , en remplaçant les étiquettes sur les 2 premières et les 2 dernières fibres, respectivement, par  $u_i$  et  $u_j$ , et en étiquetant 2 tous les sommets de la troisième et de la  $k$ ème fibre. Plus formellement :  $f_{1,2}^{ij} = u_i$ ,  $f_{3,1}^{ij}$  étiquette tous les sommets de la troisième fibre par 2,  $f_{4,k-4}^{ij} = f_{4,k-4}^*$ ,  $f_{k,1}^{ij}$  étiquette tous les sommets de la  $k$ ème fibre par 2,  $f_{k+1,2}^{ij} = u_j$ .

Par définition,  $f_{1,2}^{ij}$  et  $f_{k+1,2}^{ij}$  sont des sommets de  $\vec{\mathcal{G}}$  et donc sont dans  $\mathcal{S}^{loc}(\psi_2(M))$ . De plus, puisque  $f^* \in \mathcal{S}^{loc}(\psi_{k+2}(M))$ , nous avons que  $f_{h,2}^{ij} \in \mathcal{S}^{loc}(\psi_2(M))$  pour  $4 \leq h \leq k-2$ . Il reste donc à montrer que  $f_{2,2}^{ij}$ ,  $f_{3,2}^{ij}$ ,  $f_{k-1,2}^{ij}$  et  $f_{k,2}^{ij}$  sont dans  $\mathcal{S}^{loc}(\psi_2(M))$  pour conclure que  $f^{ij} \in \mathcal{S}^{loc}(\psi_{k+2}(M))$ . Nous savons que puisque  $(\Pi^k)_{ij} \neq -\infty$ , alors il existe  $g^{ij} \in \mathcal{S}^{loc}(\psi_{k+3}(M))$  tel que  $w^{loc}(g^{ij}) = (\Pi^k)_{ij}$ . Comparons  $f_{2,2}^{ij}$  et  $g_{2,2}^{ij}$ . Clairement, tous les sommets étiquetés 2 par  $g_{2,2}^{ij}$  sont aussi étiquetés 2 par  $f_{2,2}^{ij}$ , donc  $f_{2,2}^{ij} \in \mathcal{S}^{loc}(\psi_2(M))$ . De la même façon, tous les sommets étiquetés 2 par  $g_{k,2}^{ij}$  sont aussi étiquetés 2 par  $f_{k,2}^{ij}$ , donc  $f_{k,2}^{ij} \in \mathcal{S}^{loc}(\psi_2(M))$ . Le raisonnement est le même pour  $f_{3,2}^{ij}$  et  $f_{3,2}^*$ , tous les sommets étiquetés 2 par  $f_{3,2}^*$  sont aussi étiquetés 2 par  $f_{3,2}^{ij}$ , donc  $f_{3,2}^{ij} \in \mathcal{S}^{loc}(\psi_2(M))$  et tous les sommets étiquetés 2 par  $f_{k-1,2}^*$  sont aussi étiquetés 2 par  $f_{k-1,2}^{ij}$ , donc  $f_{k-1,2}^{ij} \in \mathcal{S}^{loc}(\psi_2(M))$ .

Alors  $f^{ij}$  est bien un 2-étiquetage dans  $\mathcal{S}^{loc}(\psi_{k+2}(M))$  commençant par  $u_i$  et se terminant par  $u_j$  et donc  $w^{loc}(f^{ij}) \leq (\Pi^k)_{ij}$ . De plus, sur les fibres  $M_3$  à  $M_{k+2}$ ,  $f^{ij}$  diffère de  $f^*$  sur au plus quatre fibres (la troisième et les trois dernières). Par conséquent,  $w^{loc}(f^{ij}) \geq \max(\Pi^k) - 4|V(M)|$ . Donc  $0 \leq (\Pi^k)_{ij} - \min(\Pi^k) = (\Pi_k)_{ij} \leq w^{loc}(f^*) - w^{loc}(f^{ij}) \leq 4|V(M)|$ .  $\square$

**Définition 100** *Étant donné un graphe  $G = (V, E)$ , un **couplage** de  $G$  est un sous-ensemble d'arêtes de  $G$  deux à deux non adjacentes.*

**Théorème 32** *Le problème du couplage maximum est une  $(3, 2, w)$ -propriété stable.*

*Preuve.* Nous prouverons le théorème dans le cas d'une  $(3, 2, w)$ - $r$ -propriété. La preuve peut être facilement adaptée pour le cas d'une  $(3, 2, w)$ - $f$ -



propriété. L'ensemble de la preuve suit le même raisonnement que celle pour la 2-propriété  $\mathcal{S}$  d'ensemble indépendant. Il est simple de voir que le problème correspond à une 2-propriété de graphe. En effet, un 2-étiquetage des arêtes de  $G$  vérifie les contraintes d'un couplage si et seulement si les arêtes étiquetées 1 sont deux à deux non adjacentes. Notons cette 2-propriété  $\text{Coupl}$ . Trivialement, tout graphe  $G$  vérifie  $\text{Coupl}$ , en effet, tout 2-étiquetage de  $G$  n'étiquetant 1 aucune arête, ou exactement une arête, vérifie  $\text{Coupl}$ .

Montrons que  $\text{Coupl}$  est pseudo-3-locale. Pour tout  $f$  dans  $\mathcal{L}_2(\psi_3(M))$ ,  $f$  est dans  $\text{Coupl}^{\text{loc}}$  si et seulement si pour toute arête  $uv$  étiquetée 1 dans l'ensemble d'arêtes entre la première et la deuxième fibre, de la deuxième fibre, ou entre la deuxième et la troisième fibre, il n'existe aucune arête étiquetée 1 parmi les arêtes adjacentes à  $uv$ . Plus formellement,  $\forall uv \in E(M_{1,2}) \cup E(M_2) \cup E(M_{2,3})$ ,

$$f(uv) = 1 \Rightarrow f(ui) = 2 \text{ et } f(vj) = 2, \forall ui, vj \in E(\psi_3(M)).$$

Ainsi pour tout  $f$  dans  $\mathcal{L}_2(\omega_n(M))$ ,  $f$  vérifie  $\text{Coupl}$  si et seulement si  $f_{i,3}$  est dans  $\text{Coupl}^{\text{loc}}$  pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ .

Montrons que la condition est nécessaire. Supposons que ce ne soit pas le cas, alors il existe un 2-étiquetage  $f$  dans  $\text{Coupl}$  et tel qu'il existe  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$  avec  $f_{i,3}$  ne vérifiant pas  $\text{Coupl}^{\text{loc}}$ . Si  $f_{i,3}$  ne vérifie pas  $\text{Coupl}^{\text{loc}}$ , alors il existe une arête étiquetée 1 dans  $E(M_{i,i+1}) \cup E(M_{i+1}) \cup E(M_{i+1,i+2})$  adjacente à une arête étiquetée 1 dans  $E(\omega_n(M))$ . Or, dans ce cas, l'ensemble des arêtes étiquetées 1 ne forme pas un couplage, ce qui présente une contradiction puisque  $f$  vérifie  $\text{Coupl}$ .

Montrons que la condition est suffisante. Supposons que ce ne soit pas le cas, alors il existe un 2-étiquetage dans  $\mathcal{L}_2(\omega_n(M))$  tel que pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,  $f_{i,3}$  vérifie  $\text{Coupl}^{\text{loc}}(\psi_3(M))$  et  $f$  ne vérifie pas  $\text{Coupl}(\omega_n(M))$ . Autrement dit, les arêtes étiquetées 1 par  $f$  ne forment pas un couplage dans  $\omega_n(M)$ . Dans ce cas, il existe deux arêtes  $u_1v_1$  et  $u_2v_2$  de  $\omega_n(M)$  adjacentes et étiquetées 1. Sans perte de généralité, supposons que  $u_1v_1$  soit dans  $E(M_i)$  ou dans  $E(M_{i,i+1})$ . Alors  $u_2v_2$  est, respectivement, dans  $E(M_{i-1,i})$ , dans  $E(M_i)$  ou dans  $E(M_{i,i+1})$ , ou bien, dans le second cas, dans  $E(M_i)$ , dans  $E(M_{i,i+1})$  ou dans  $E(M_{i+1})$ .

- Supposons que  $u_1v_1$  soit dans  $E(M_i)$ . L'arête  $u_2v_2$  ne peut pas être dans  $E(M_{i-1,i})$  sans quoi, ni  $f_{i-2,3}$ , ni  $f_{i-1,3}$  ne seraient dans  $\text{Coupl}^{\text{loc}}$ . L'arête  $u_2v_2$  ne peut pas être dans  $E(M_i)$  sans quoi,  $f_{i-1,3}$  ne serait pas dans  $\text{Coupl}^{\text{loc}}$ . Enfin, l'arête  $u_2v_2$  ne peut pas être dans  $E(M_{i,i+1})$  sans quoi, ni  $f_{i-2,3}$ , ni  $f_{i-1,3}$  ne seraient dans  $\text{Coupl}^{\text{loc}}$ .
- De la même façon, supposons que  $u_1v_1$  soit dans  $E(M_{i,i+1})$ . Nous avons déjà vu que l'arête  $u_2v_2$  ne peut pas être dans  $E(M_i)$ . L'arête  $u_2v_2$  ne peut pas être dans  $E(M_{i,i+1})$  sans quoi, ni  $f_{i,3}$  ni  $f_{i+1,3}$  ne seraient dans  $\text{Coupl}^{\text{loc}}$ . Enfin, l'arête  $u_2v_2$  ne peut pas être dans  $E(M_{i+1})$  sans quoi, ni  $f_{i-1,3}$ , ni  $f_{i,3}$  ne seraient dans  $\text{Coupl}^{\text{loc}}$ .

Ceci présente une contradiction, la 2-propriété  $\text{Coupl}$  est donc bien pseudo-

3-locale.

Considérons la fonction de poids  $w : f \in \text{Coupl} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que, pour tout  $f$  dans  $\text{Coupl}(\omega_n(M))$ ,  $w(f) = |\{uv|uv \in E(\omega_n(M)) \text{ et } f(uv) = 1\}|$ , i.e.  $w(f)$  est le nombre d'arêtes étiquetées 1 par  $f$ .

Cette fonction de poids est 3-modulaire. En effet, soit  $w^{loc} : \text{Coupl}^{loc}(\mathcal{F}_4) \rightarrow \mathbb{N}$  telle que, pour tout  $f$  dans  $\text{Coupl}(\psi_4(M))$ ,  $w^{loc}(f) = |\{uv|uv \in E(M_{3,4}) \cup E(M_4) \text{ et } f(uv) = 1\}|$ , c'est à dire que  $w^{loc}$  d'un 2-étiquetage d'un fasciagraphe de taille 4, est le nombre d'arêtes étiquetées 1 entre les fibres 3 et 4 et dans la fibre 4. Puisque le nombre d'arêtes dans le couplage est égal à la somme du nombre d'arêtes du couplage dans et entre chaque fibre, nous avons  $w(f) = \sum_{i=1}^n w^{loc}(f_{i,4})$ . Ainsi,  $w^{loc}$  et l'addition usuelle sur les entiers fournissent la 3-modularité de  $w$ , la propriété  $\text{Coupl}$  est donc une  $(3, 2, w)$ - $r$ -propriété.

Montrons qu'il s'agit d'une  $(3, 2, w)$ - $r$ -propriété stable. Soit  $M$  un graphe mixte,  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \text{Coupl}, w)$  le graphe auxiliaire associé,  $n$  le nombre de sommets de  $\vec{\mathcal{G}}$  et  $\Pi$  la matrice des longueurs de  $\vec{\mathcal{G}}$ . Les poids étant des entiers, nous effectuerons nos calculs dans le dioïde  $(\mathbb{Z}, \max, +, -\infty, 0)$ .

Nous allons montrer que, soit  $(\Pi_k)_{ij} = -\infty$ , soit  $0 \leq (\Pi_k)_{ij} \leq 5|E(M)| + 4|A(M)|$  pour tout  $k \geq 3$  et tout  $1 \leq i, j \leq n$  et ainsi prouver que  $\Pi$  est stable (voir Remarque 13). Supposons donc que  $(\Pi_k)_{ij} \neq -\infty$ . Par définition de  $\vec{\mathcal{G}}$  et  $\Pi$  et par le Corollaire 2, pour  $1 \leq i, j \leq n$ , dans ce cas,  $(\Pi^k)_{ij}$  est égal au nombre maximum d'arêtes étiquetées 1 de la fibre  $M_4$  à la fibre  $M_{k+3}$  par un 2-étiquetage dans  $\text{Coupl}^{loc}(\psi_{k+3}(M))$  qui commence par  $u_i$  et finit par  $u_j$  ( $u_i, u_j$  dans  $\text{Coupl}^{loc}(\psi_3(M))$ ), et donc  $0 \leq (\Pi_k)_{ij} \leq (\Pi^k)_{ij}$ .

Si  $1 \leq k \leq 4$ , il y a au plus quatre fibres de  $M_4$  à  $M_{k+3}$ , et 4 "entre-deux" fibres de  $M_3$  à  $M_{k+3}$  et pas plus que la totalité des arêtes induites par ces fibres consécutives peuvent être étiquetées 1. Donc dans ce cas  $0 \leq (\Pi_k)_{ij} \leq (\Pi^k)_{ij} \leq 4|E(M)| + 4|A(M)|$ .

Supposons maintenant que  $k \geq 5$ . Soit  $f^*$  le 2-étiquetage dans  $\text{Coupl}^{loc}(\psi_{k+3}(M))$  tel que le nombre d'arêtes étiquetées 1 de la fibre  $M_4$  à la fibre  $M_{k+3}$  est égal à  $\max(\Pi^k)$  ( $f^*$  existe puisqu'il existe au moins deux 2-étiquetages dans  $\text{Coupl}^{loc}(\psi_{k+3}(M))$ , celui qui n'étiquette aucune arête 1, et celui qui étiquette exactement une arête 1). Si  $f^*$  commence par  $u_i$  et finit par  $u_j$  alors  $(\Pi_k)_{ij} = 0$ . Sinon, depuis  $f^*$ , nous pouvons construire  $f^{ij}$ , un 2-étiquetage dans  $\text{Coupl}^{loc}(\psi_{k+3}(M))$  qui démarre par  $u_i$  et se termine par  $u_j$ , en remplaçant les étiquettes sur les arêtes induites par les 3 premières et les 3 dernières fibres, respectivement, par  $u_i$  et  $u_j$ , en étiquetant 2 les arêtes des fibres 4 et  $k$  et entre les fibres 3 et 4 et  $k$  et  $k+1$ . Plus formellement :  $f_{1,3}^{ij} = u_i$ ,  $f_{k+1,3}^{ij} = u_j$ ,  $f_{5,k-5}^{ij} = f_{5,k-5}^*$ , les arêtes entre les fibres 4 et 5 et celles entre les fibres  $k-1$  et  $k$  sont étiquetées selon  $f^*$ , toutes les autres sont étiquetées 2.

Par définition,  $f_{1,3}^{ij}$  et  $f_{k+1,3}^{ij}$  sont des sommets de  $\vec{\mathcal{G}}$  et donc sont dans  $\text{Coupl}^{loc}(\psi_3(M))$ . Clairement,  $f_{3,3}^{ij}$  et  $f_{k-1,3}^{ij}$  sont dans  $\text{Coupl}^{loc}(\psi_3(M))$  puisque toutes les arêtes entre leur fibre 1 et 2 et de leur fibre 2 sont

étiquetées 2. De plus, puisque  $f^* \in \text{Coupl}^{loc}(\psi_{k+3}(M))$ , nous avons que  $f_{h,3}^{ij} \in \text{Coupl}^{loc}(\psi_3(M))$  pour  $5 \leq h \leq k-3$ . Il reste donc à montrer que  $f_{2,3}^{ij}$ ,  $f_{4,3}^{ij}$ ,  $f_{k-4,3}^{ij}$  et  $f_{k-1,3}^{ij}$  sont dans  $\text{Coupl}^{loc}(\psi_3(M))$  pour conclure que  $f^{ij} \in \text{Coupl}^{loc}(\psi_{k+3}(M))$ . Nous savons que puisque  $(\Pi^k)_{ij} \neq -\infty$ , alors il existe  $g^{ij} \in \text{Coupl}^{loc}(\psi_{k+3}(M))$  tel que  $w^{loc}(g^{ij}) = (\Pi^k)_{ij}$ . Comparons  $f_{2,3}^{ij}$  et  $g_{2,3}^{ij}$ . Clairement, toutes les arêtes étiquetées 2 par  $g_{2,3}^{ij}$  sont aussi étiquetées 2 par  $f_{2,3}^{ij}$ , donc  $f_{2,3}^{ij} \in \text{Coupl}^{loc}(\psi_3(M))$ . De la même façon, toutes les arêtes étiquetées 2 par  $g_{k-1,3}^{ij}$  sont aussi étiquetées 2 par  $f_{k-1,3}^{ij}$ , donc  $f_{k-1,3}^{ij} \in \text{Coupl}^{loc}(\psi_3(M))$ . Le raisonnement est le même pour  $f_{4,3}^{ij}$  et  $f_{4,3}^*$ , toutes les arêtes étiquetées 2 par  $f_{4,3}^*$  sont aussi étiquetées 2 par  $f_{4,3}^{ij}$ , donc  $f_{4,3}^{ij} \in \text{Coupl}^{loc}(\psi_3(M))$  et toutes les arêtes étiquetées 2 par  $f_{k-3,3}^*$  sont aussi étiquetées 2 par  $f_{k-3,3}^{ij}$ , donc  $f_{k-3,3}^{ij} \in \text{Coupl}^{loc}(\psi_3(M))$ .

Alors  $f^{ij}$  est bien un 2-étiquetage dans  $\text{Coupl}^{loc}(\psi_{k+2}(M))$  commençant par  $u_i$  et se terminant par  $u_j$  et donc  $w^{loc}(f^{ij}) \leq (\Pi^k)_{ij}$ . De plus, sur les fibres  $M_4$  à  $M_{k+3}$ ,  $f^{ij}$  diffère de  $f^*$  sur au plus cinq fibres (la quatrième et les quatre dernières) et quatre "entre-deux" fibres (entre la 3 et la 4, entre la  $k$  et la  $k+1$ , entre la  $k+1$  et la  $k+2$ , et entre la  $k+2$  et la  $k+3$ ). Par conséquent,  $\max(\Pi^k) - (5|E(M)| + 4|A(M)|) \leq \min(\Pi^k) \leq w^{loc}(f^{ij}) \leq \max(\Pi^k)$ . Nous pouvons conclure que  $0 \leq (\Pi^k)_{ij} \leq \max(\Pi^k) - (\max(\Pi^k) - (5|E(M)| + 4|A(M)|)) = 5|E(M)| + 4|A(M)|$ .

□



# BIBLIOGRAPHIE

- [AH89] Kenneth Appel and Wolfgang Haken. volume 98 of *Contemporary mathematics*. 1989. (Cité page 88.)
- [ALS91] Stefan Arnborg, Jens Lagergren, and Detlef Seese. Easy problems for tree-decomposable graphs. *Journal of Algorithms*, 12(2) :308 – 340, 1991. (Cité page 15.)
- [BCHLo4] Nathalie Bertrand, Irène Charon, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein. Identifying and locating-dominating codes on chains and cycles. *European Journal of Combinatorics*, 25(7) :969 – 987, 2004. (Cité pages 86 et 112.)
- [BCM<sup>+</sup>07] Mostafa Blidia, Mustapha Chellali, Frédéric Maffray, Julien Moncel, and A. Semri. Locating-domination and identifying codes in tress. *Aust. J. Combin.*, 39 :219 – 232, 2007.
- [BDMP] Marwane Bouznif, Julien Darlay, Julien Moncel, and Myriam Preissmann. New results on identifying codes in square grids of small height. *en préparation*. (Cité page 111.)
- [BFLo8] Mostafa Blidia, Odile Favaron, and Rahma. Lounes. Locating-domination 2-domination and independence in trees. *Aust. J. Combin.*, 42 :309 – 319, 2008.
- [BGK<sup>+</sup>10] Laurent Beaudou, Sylvain Gravier, Sandi Klavžar, Matjaž Kovše, and Michel Mollard. Covering codes in sierpiński graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 12(3), 2010. (Cité page 96.)
- [BGMP86] Darko Babic, Ante Graovac, Bojan Mohar, and Tomaz Pisanski. The matching polynomial of a polygraph. *Discrete Applied Mathematics*, 15(1) :11 – 24, 1986. (Cité pages 11, 45, 46 et 51.)
- [BHL05] Yael Ben-Haim and Simon Litsyn. Exact minimum density of codes identifying vertices in the square grid. *SIAM J. Discret. Math.*, 19(1) :69 – 82, 2005. (Cité page 73.)
- [BMP] Marwane Bouznif, Julien Moncel, and Myriam Preissmann. Optimization algorithms for rotagraphs and fasciagraphs. *en préparation*. (Cité page 56.)
- [BMP11] Marwane Bouznif, Julien Moncel, and Myriam Preissmann. Generic algorithms for some decision problems on fasciagraphs and rotagraphs. *preprint*, 2011. (Cité pages 20, 52 et 55.)
- [Bod88] Hans Bodlaender. Dynamic programming on graphs with bounded treewidth. In *Automata, Languages and Programming*, volume

- 317 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 105–118. 1988. (Cité page 15.)
- [BR93] Danail Bonchev and Dennis H. Rouvray. Chemical graph theory, introduction and fundamentals. *Journal of Molecular Structure : THEOCHEM*, 281(1) :89 – 90, 1993. (Cité page 11.)
- [CGH<sup>+</sup>99] G. Cohen, S. Gravier, I. Honkala, A. Lobstein, M. Mollard, C. Payan, and G. Zémor. Improved identifying codes for the grid. *Electronic Journal of Combinatorics, comment to*, 6(1) R19, 1999. (Cité page 73.)
- [CHHL01] Irène Charon, Iiro Honkala, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein. General bounds for indentifying codes in some infinite regular graphs. *Electron. J. Combin.*, 8 :R39, 2001.
- [CHHL04] Irène Charon, Iiro Honkala, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein. The minimum density of an identifying code in the king lattice. *Discrete Mathematics*, 276(1 - 3) :95 – 109, 2004.
- [CHL02] Irène Charon, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein. Identifying codes with small radius in some infinite regular graphs. *Electron. J. Combin.*, 9 :R11, 2002. (Cité pages 75 et 76.)
- [CHL03] Irène Charon, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein. Minimizing the size of an identifying or locating-dominating code in a graph is np-hard. *Theoretical Computer Science*, 290(3) :2109 – 2120, 2003. (Cité page 62.)
- [CHLZ01] Gérard D. Cohen, Iiro Honkala, Antoine Lobstein, and Gilles Zémor. On codes identifying vertices in the two-dimensional square lattice with diagonals. *IEEE Transactions on Computers*, 50 :174 – 176, 2001. (Cité pages 75 et 76.)
- [CSS87] C. J. Colbourn, Peter J. Slater, and L. K. Stewart. Locating-dominating sets in series-parallel networks. *Congr. Numer.*, 56 :135 – 162, 1987.
- [DGM04] Marc Daniel, Sylvain Gravier, and Julien Moncel. Identifying codes in some subgraphs of the square lattice. *Theoretical Computer Science*, 319(1-3) :411–421, 2004. (Cité pages 14, 31, 50, 51, 56, 73, 86, 87, 90 et 112.)
- [GB85] Ante Graovac and Darko Babic. On the mathing spectrum of rotagraphs. *Z. Naturforsch. A*, 40a :66 – 72, 1985. (Cité page 45.)
- [GBS86] Ante Graovac, Darko Babic, and M. Strunje. Enumeration of kekulé structures in polymers. *Chemical Physics Letters*, 123(5) :433 – 436, 1986. (Cité pages 46 et 51.)
- [GKM<sup>+</sup>] Sylvain Gravier, Matjazaž Kovše, Michel Mollard, Julien Moncel, and Aline Parreau. New results on variants of covering codes in Sierpiński graphs. (Cité pages 95, 97 et 112.)
- [GKP] Sylvain Gravier, Matjazaž Kovše, and Aline Parreau. Generalized Sierpiński graphs. *en préparation*. (Cité page 95.)

- [GMO8] Michel Gondran and Michel Minoux. *Graphs, Dioids and Semirings : New Models and Algorithms (Operations Research/Computer Science Interfaces Series)*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2008. (Cité pages 4 et 7.)
- [GMPo7] Sylvain Gravier, Julien Moncel, and Charles Payan. A generalization of the pentomino exclusion problem : Dislocation of graphs. *Discrete Mathematics*, 307(3-5) :435–444, 2007. (Cité pages 50 et 51.)
- [GMSo6] Sylvain Gravier, Julien Moncel, and Ahmed Semri. Identifying codes of cycles. *European Journal of Combinatorics*, 27(5) :767 – 776, 2006. (Cité pages 87, 111 et 112.)
- [G n83] Walter Günther. The automorphism group of roto- and fasciagraphs. *Communication in Mathematical and Computer Chemistry*, 14 :3–42, 1983.
- [GPT83] Ante Graovac, O.E. Polansky, and N.N. Tyutyulkov. Acyclic and characteristic polynomial of regular conjugated polymers and their derivatives. *Croat. Chem. Acta*, 56 :325 – 356, 1983. (Cité page 45.)
- [Hav11] Frédéric Havet. Minimum-density identifying codes in grids. *manuscrit non publi *, 2011. (Cité pages 89 et 94.)
- [HHHo6a] Teresa W. Haynes, Michael A. Henning, and Jamie Howard. Locating and total dominating sets in trees. *Discrete Applied Mathematics*, 154(8) :1293 – 1300, 2006. (Cité page 60.)
- [HHHo6b] Teresa W. Haynes, Michael A. Henning, and Jamie Howard. Locating and total dominating sets in trees. *Discrete Appl. Math.*, 154(8) :1293 – 1300, 2006.
- [HL06] Iiro Honkala and Tero Laihonen. On locating-dominating sets in infinite grids. *Eur. J. Comb.*, 27(2) :218 – 227, 2006. (Cité pages 75 et 77.)
- [Hon06] Iiro Honkala. An optimal locating-dominating set in the infinite triangular grid. *Discrete Mathematics*, 306(21) :2670 – 2681, 2006. (Cité pages 75 et 77.)
- [JKV05] Pranava K. Jha, Sandi Klavzar, and Aleksander Vesel.  $L(2,1)$ -labeling of direct product of paths and cycles. *Discrete Applied Mathematics*, 145(2) :317–325, 2005. (Cité pages 50 et 51.)
- [JMG<sup>+</sup>95] Martin Juvan, Bojan Mohar, Ante Graovac, Sandi Klav ar, and Janez  erovnik. Fast computation of the Wiener index of fasciagraphs and rotagraphs. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, 35(5) :834–840, 1995. (Cité pages 14, 32, 48, 49 et 51.)
- [JMv97] Martin Juvan, Bojan Mohar, and Janez  . Distance-related invariants on polygraphs. *Discrete Applied Mathematics*, 80(1) :57–71, 1997. (Cité pages 14, 48, 49 et 51.)
- [JPG<sup>+</sup>03] Martin Juvan, Marko Petkov ek, Ante Graovac, Aleksander Vesel, and Janez  erovnik. The szeged index of fasciagraphs. *Communication in Mathematical and Computer Chemistry*, 49 :47–66, 2003.

- [KC77] Murlidhar V. Kaulgud and Vijay H. Chitgopkar. Polynomial matrix method for the calculation of  $\pi$ -electron energies for linear conjugated polymers. *J. Chem. Soc. Faraday Trans. 2*, 73 :1385 – 1395, 1977. (Cité page 45.)
- [KC78] Murlidhar V. Kaulgud and Vijay H. Chitgopkar. Polynomial matrix method for the calculation of charge densities and bond orders in linear conjugated  $\pi$ -electron systems. *J. Chem. Soc. Faraday Trans. 2*, 74 :951 – 957, 1978. (Cité page 45.)
- [KCL98] Mark G. Karpovsky, Krishnendu Chakrabarty, and Lev B. Levitin. On a new class of codes for identifying vertices in graphs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 44 :599 – 611, 1998. (Cité pages 60 et 75.)
- [KM97] Sandi Klavžar and Uroš Milutinović. Graphs  $s(n, k)$  and a variant of the tower of hanoi problem. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 47 :95 – 104, 1997. (Cité page 95.)
- [KMP02] Sandi Klavžar, Uroš Milutinović, and Ciril Petr. 1-perfect codes in Sierpiński graphs. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 2002. (Cité page 95.)
- [Kv96] Sandi Klavžar and Janez Žerovnik. Algebraic approach to fascia-graphs and rotagraphs. *Discrete Applied Mathematics*, 68(1-2) :93–100, 1996. (Cité pages 6, 14, 31, 47, 48, 49 et 51.)
- [KV03] Sandi Klavžar and Aleksander Vesel. Computing graph invariants on rotagraphs using dynamic algorithm approach : the case of (2,1)-colorings and independence numbers. *Discrete Applied Mathematics*, 129(2-3) :449–460, 2003. (Cité pages 14, 17, 19, 31, 49, 50, 51, 52 et 53.)
- [Lob] Antoine Lobstein. Une bibliographie. <http://www.infres.enst.fr/~lobstein/bibLOCDOMetID.html>. (Cité page 61.)
- [LS94] Marilyn Livingston and Quentin F. Stout. Constant time computation of minimum dominating sets. *Congressus Numerantium*, 105 :116–128, 1994. (Cité pages 14, 32, 46, 48, 51 et 56.)
- [Möh90] RH Möhring. Graph problems related to gate matrix layout and PLA folding. *Computing Supplementum*, 7 :17–51, 1990.
- [PT77] O.E. Polansky and N.N. Tyutyulkov. Structural graphs of regular polymers and their properties. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 3 :149 – 223, 1977. (Cité pages 11 et 45.)
- [RS84] D. F. Rall and Peter J. Slater. On locatin-domination numbers for certain classes of graphs. *Congr. Numer.*, 45 :97 – 106, 1984.
- [Sim94] Imre Simon. On semigroups of matrices over the tropical semi-ring. 1994. (Cité page 6.)
- [Sla87] Peter J. Slater. Domination and location in acyclic graphs. *Networks*, 17(1) :55 – 64, 1987. (Cité page 60.)



- [Sla88] Peter J. Slater. Dominating and refercne sets in graphs. *J. Math. Phys. Sci.*, 22 :445 – 455, 1988. (Cité page 60.)
- [Sla02] Peter J. Slater. Fault-tolerant locating-dominating sets. *Discrete Math.*, 249 :179 – 189, 2002. (Cité pages 75 et 76.)
- [Spa98] Anne Spalding. *Min-Plus Algebra and Graph Domination*. PhD thesis, Department of Applied Mathematics, University of Colorado, 1998. (Cité pages 32, 48, 51 et 56.)
- [Ž99] Janez Žerovnik. Deriving formulas for domination numbers of fasciagraphs and rotagraphs. *FCT '99 : Proceedings of the 12th International Symposium on Fundamentals of Computation Theory : Springer. Lecture Notes in Computer Science*, 1684 :559–568, 1999. (Cité pages 14, 49, 50 et 51.)
- [Ž04] Janez Žerovnik. Deriving formulas for the pentomino exclusion problem. *Preprint Series*, 42, 2004. (Cité pages 32, 50 et 51.)
- [Wie07] Douglas M. Van Wieren. Critical cyclic patterns related to the domination number of the torus. *Discrete Mathematics*, 307(3-5) :615–632, 2007.

# INDEX

- étiquetage
  - $\mathcal{L}_q(E(\mathcal{G})), 17$
  - $\mathcal{L}_q(V(\mathcal{G})), 17$
  - $\mathcal{L}_q(V(\mathcal{G}) \cup E(\mathcal{G})), 17$
  - $\mathcal{L}_q(\mathcal{G}), 17$
  - $q$ -étiquetage, 17
  - $q$ -étiquetage partiel, 18, 19
- absorbant, 5
- $A_k, 36$
- algorithmes
  - fasciagraphes
    - clos, 35
    - construction, 31
    - égalité, 35
    - stable, 42
    - translation, 41
  - rotagraphes
    - clos, 34
    - construction, 30
    - construction v2, 43
    - égalité, 34
    - stable, 41
    - translation, 40
- application, 4
- arcs, 2
- arêtes, 2
- associativité, 4
- bande
  - bande circulaire  $\mathcal{S}_{h,s}^\circ, 69$
  - bande infinie  $\mathcal{S}_h^\infty, 69$
- condition de calculabilité, 30
- cas clos, 32
- cas stable, 32
- chaîne élémentaire, 4
- clos, 33
- code  $t$ -séparateurs, 59
- colonne, 70
- commutativité, 4
- concaténation
  - $\diamond_d, 19$
  - $\triangleright_d, 19$
  - $d$ -concaténation, 19
  - $d$ -concaténation circulaire, 19
- densité, 70, 71
- dioïde, 6
- distance, 4
- distributivité, 5
- dominant total, 59
- domination  $\mathcal{D}, 18, 21, 24, 25$
- $(d, q, w)$ -propriété close, 33
- $(d, q, w)$ -propriété stable, 37
- $(\mathbb{E}, \min, \otimes), 21, 25$
- $\mathcal{F}$ 
  - $\mathcal{F}, 12$
  - $\mathcal{F}_M, 12$
  - $\mathcal{F}_k, 12$
- fasciagraphe  $\psi_n(M), 12$
- fibres, 13
- fibres
  - entre-deux fibres, 13
- graphe auxiliaire  $\vec{\mathcal{G}}(M, \mathcal{P}, w), 26$
- graphe auxiliaire  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(M, \mathcal{P}, w), 25$
- graphe auxiliaire  $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{P}, w), 21$
- graphe mixte, 2
- $M_{\mathcal{K}(h)}, 70$
- $M_{\mathcal{S}(h)}, 70$
- $M_{\mathcal{U}(h)}, 70$
- $M_{\mathcal{Y}(h)}, 70$

- graphe non orienté, 3  
 graphe orienté, 3  
 graphe fractal  $F(G, d)$ , 95  
 groupe abélien, 5  
 groupe, 5  
 inverse, 5  
  
*k*-chemin, 3  
*k*-circuit, 3  
  
 ligne, 70  
 loi de composition interne, 4  
  
 $\mathbb{M}_n(\mathcal{E})$ , 6  
 $\min(A)$ , 36  
*d*-modularité, 21, 24  
 monoïde, 5  
 monoïde commutatif, 5  
  
 élément neutre, 4  
  
 $\otimes$ , 21, 25  
  
 périodique, 72  
 pré-semi-anneau, 5  
 propriété
  - $(d, q, w)$ -*f*-propriété, 25
  - $(d, q, w)$ -*r*-propriété, 21
  - $(d, q, w)$ -propriété, 25
  - $\mathcal{P}^{loc}$ , 20
  - $\mathcal{P}^1$ , 23
  - $\mathcal{P}^2$ , 23
  - $\mathcal{P}^3$ , 23
  - $\mathcal{P}^{part}$ , 24
 pseudo-*d*-localité
  - de fasciagraphe, 23
  - de rotagraphe, 20  
 $\mathcal{R}$ 
  - $\mathcal{R}$ , 13
  - $\mathcal{R}_M$ , 13
  - $\mathcal{R}_k$ , 13
 rotagraphe  $\omega_n(M)$ , 13  
  
 sélectivité, 5  
 semi-anneau, 5  
 semi-anneau commutatif, 5  
 semi-groupe, 5  
*t*-sépare, 59  
  
 sommets, 2  
 stable, 36  
  
 condition de vérifiabilité, 30  
 voisinage, 3  
 voisinage fermé, 4  
 vrais jumeaux, 61  
  
 $w^{ini}$ , 25  
 $w^{loc}$ , 21  
 $w^{part}$ , 25



**Titre** Algorithmes génériques en temps constant pour la résolution de problèmes combinatoires dans la classe des rotagrapes et fasciagrapes. Application aux codes identifiants, dominant-localisateurs et dominant-total-localisateurs

**Résumé** Un fasciagraphe de taille  $n$  et de fibre  $F$  est constitué de  $n$  copies consécutives du graphe  $F$ , chaque copie étant reliée à la suivante selon le même schéma. Les rotagrapes sont définis similairement, mais selon une structure circulaire. Dans cette thèse nous caractérisons un ensemble de problèmes combinatoires qui peuvent être résolus de façon efficace dans la classe des fasciagrapes et rotagrapes. Dans ce contexte, nous définissons les  $(d,q,w)$ -propriétés closes et stables, et présentons pour de telles propriétés un algorithme pour calculer une solution optimale en temps constant pour l'ensemble des fasciagrapes ou rotagrapes de fibre fixée. Nous montrons que plusieurs problèmes communément étudiés dans la théorie des graphes et NP-complets dans le cas général sont caractérisés par des  $(d,q,w)$ -propriétés closes ou stables. Dans une seconde partie de la thèse, nous adaptons cet algorithme générique à trois problèmes spécifiques caractérisés par des  $(d,q,w)$ -propriétés stables : le problème du code identifiant minimum, et deux problèmes proches, celui de dominant-localisateur minimum et celui du dominant-total-localisateur minimum. Nous présentons alors une implémentation de l'algorithme qui nous a permis de répondre à des questions ouvertes dans certains rotagrapes particuliers : les bandes circulaires de hauteur bornée. Nous en déduisons d'autres résultats sur les bandes infinies de hauteur bornée. Enfin, nous explorons le problème du code identifiant dans une autre classe de graphes à structure répétitive : les graphes fractals de cycle.

**Mots-clés** théorie des graphes, optimisation combinatoire, grilles, fasciagrapes, rotagrapes, complexité algorithmique,  $\mathcal{NP}$ -complétude, graphes fractals, codes identifiants, dominant-localisateur, dominant-total-localisateurs.

**Title** Constant time generic algorithms for resolution of combinatorial optimization problems in the class of rotagraphs and fasciagraphs. Application to identifying codes, locating-dominating set and locating-total-dominating set.

**Abstract** A fasciagraph of length  $n$  and of fiber  $F$ , is constituted of  $n$  consecutive copies of a graph  $F$ , each copy being linked to the next one according to a same scheme. Rotagraphs are defines similarly, but along a circular structure. In this thesis, we characterize a set of combinatorial problems that can be efficiently solved when applied on the class of rotagraphs and fasciagraphs. In this context, we define closed and stable  $(d,q,w)$ -properties, and we present, for such properties, an algorithm to compute an optimal solution, in constant time, for the set of fasciagraphs or rotagraphs of fixed fiber. We show that several problems, largely studied in graph theory, are characterized by closed or stable  $(d,q,w)$ -properties. In a second part of the thesis, we adapt the generic algorithm to three problems characterized by stable  $(d,q,w)$ -properties : the problem of minimum indentifying code, and two other, close to this one, the problem of minimum locating-dominating set et the one of minimum locating-total-dominating set. We present an implementation of our algorithm which has let us respond to open questions in a certain sub-class of rotagraphs : the circular strips of bounded height. We deduce from there other results on infinite strips of bounded height. Finally we explore the problem of minimum indentifying code in another class of graphs with repetitive structure : the fractal graphs.

**Keywords** graph theory, combinatorial optimization, grids, fasciagraphs, rotagraphs, algorithmic complexity,  $\mathcal{NP}$ -Hard problems, fractal graphs, identifying codes, locating-dominating sets, locating-total-dominating sets.