HAL open science

Approximation diophantienne dans les variétés abéliennes

Manuel Pégourié-Gonnard

To cite this version:

Manuel Pégourié-Gonnard. Approximation diophantienne dans les variétés abéliennes. Théorie des nombres [math.NT]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2012. Français. NNT : . tel-00744899

HAL Id: tel-00744899

https://theses.hal.science/tel-00744899

Submitted on 24 Oct 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité mathématiques

Présentée par

Manuel Pégourié-Gonnard

pour obtenir le grade de

Docteur de l'université Pierre et Marie Curie

Sujet de la thèse

Approximation diophantienne sur les variétés abéliennes

Soutenue le 22 octobre 2012 devant le jury composé de

Patrice Philippon, *directeur*	Directeur de recherche, CNRS
Philipp Habegger, *rapporteur*	Professeur, université de Francfort
Gaël Rémond, *rapporteur*	Directeur de recherche, CNRS
Francesco Amoroso	Professeur, université de Caen
Daniel Bertrand	Professeur, université Pierre et Marie Curie
Sinnou David	Professeur, université Pierre et Marie Curie
Guillaume Maurin	Maître de conférences, université Pierre et Marie Curie
Fabien Pazuki	Maître de conférences, université de Bordeaux

À Marion

Table des matières

Remerciements vii

1 Introduction 1
- 1.1 Aperçu du problème . . . 1
- 1.2 Relation avec d'autres énoncés . . . 2
- 1.3 Énoncés des résultats principaux . . . 6
- 1.4 Stratégie générale . . . 8
- 1.5 Définitions et notations . . . 10
- 1.6 Compléments sur les distances . . . 18

2 Inégalité de Vojta 27
- 2.1 Cas particulier fondamental . . . 27
- 2.2 Réduction et autres préliminaires . . . 28
- 2.3 Construction d'une forme auxiliaire . . . 44
- 2.4 Extrapolation . . . 53
- 2.5 Application du théorème du produit et conclusion . . . 70
- 2.6 Valeurs des paramètres et estimations reliées . . . 74
- 2.7 Déduction du cas général . . . 80

3 Inégalité de Mumford 95
- 3.1 Énoncés principaux . . . 95
- 3.2 Inégalité de Liouville . . . 96
- 3.3 Comportement métrique des opérations . . . 98
- 3.4 Cas des translatés de sous-variétés abéliennes . . . 100
- 3.5 Étude du morphisme des différences . . . 102
- 3.6 Cas général . . . 108
- 3.7 Questions d'optimalité et énoncé conjectural . . . 111

4 Résultats de décompte 113
- 4.1 Conditions pour les décomptes . . . 113
- 4.2 Hypothèse d'approximation produit . . . 118
- 4.3 Grands points, cas des sous-groupes . . . 120
- 4.4 Grands points, cas général . . . 125
- 4.5 Options pour les petits points . . . 130

Références bibliographiques 133

Remerciements

Cette thèse a bien sûr été un passionnant parcours intellectuel, l'occasion d'approfondir ma compréhension de problèmes mathématiques fascinants et de goûter aux plaisirs et aux exigences de la recherche en apportant ma petite pierre à l'édifice. Elle a aussi et avant tout été une formidable aventure personnelle, souvent difficile, mais de ces difficultés dont on sort grandi.

Si l'aventure se termine de façon heureuse, c'est en grande partie grâce aux personnes que j'ai eu le privilège de rencontrer en chemin, qui m'ont beaucoup apporté que ce soit sur le plan mathématique ou humain (ce « ou » étant bien sûr inclusif) et que je souhaite ici remercier.

Ma gratitude va tout d'abord à mon directeur de thèse Patrice Philippon, qui m'a proposé un projet de recherche à la fois réaliste et stimulant, puis m'a accompagné avec une disponibilité et une patience sans faille, me faisant bénéficier de sa grande expérience et de sa profonde connaissance du domaine. C'est d'ailleurs lui et Sinnou David qui, en cours puis mémoire de master, m'ont initié aux problèmes et outils diophantiens, et donné l'envie de poursuivre une thèse sur ce sujet.

Je suis également très reconnaissant à Gaël Rémond qui a accepté de rapporter mes travaux, mais les a surtout rendus possibles en ouvrant la voie par deux de ses articles, dont il a très gentiment pris la peine de m'expliquer quelques points lorsque nous nous sommes croisés pendant ma thèse. Sa relecture rigoureuse et ses remarques pertinentes m'ont permis d'améliorer le manuscrit final en plusieurs endroits. Je remercie également Philipp Habegger d'avoir bien voulu rapporter cette thèse et me faire part de ses remarques, qui ont aussi contribué à la qualité du manuscrit. Les erreurs restantes sont miennes, il va sans dire.

J'ai déjà remercié Sinnou David pour son cours inspirant, je le remercie d'autant plus d'avoir accepté de faire partie de mon jury, ainsi que Francesco Amoroso, Daniel Bertrand, Guillaume Maurin et Fabien Pazuki.

J'ai effectué cette thèse au sein de l'institut de mathématiques de Jussieu qui (surtout à l'époque de Chevaleret) a été un environnement à la fois très riche mathématiquement et agréable à vivre. Avant de passer aux personnes que j'y ai rencontré plus personnellement, j'aimerais remercier toutes celles qui font ou ont fait vivre cet endroit, notamment les administrateurs et gestionnaires, dont le travail indispensable est trop souvent oublié. Je pense en particulier à Marceline Prosper qui s'occupait des doctorants, à Zouber Zadvat avec qui j'ai plus particulièrement été en contact en tant que membre du bureau des doctorants, qui étaient toujours

efficaces et à l'écoute des doctorants.

Parmi les chercheurs qui font de l'IMJ un endroit si spécial, je remercie particulièrement Marc Hindry, toujours et prêt à nous faire profiter avec une grande gentillesse de ses impressionnantes connaissances mathématiques. Je remercie également les professeurs avec lesquels j'ai eu le plaisir d'enseigner, en particulier Jan Nekovář et Alain Kraus.

Durant ces années de thèse, j'ai enseigné avec un plaisir toujours renouvelé, qui a souvent été une ressource précieuse quand la recherche se faisait difficile. Je remercie chaleureusement mes étudiants de l'UPMC, de l'université d'Évry, de l'ENSIIE et du CIES Jussieu, de m'avoir supporté et souvent surpris heureusement.

Pendant ma première année à l'IMJ, j'ai eu le plaisir non seulement de partager un bureau, mais aussi de découvrir la capitale avec Antonella et Philipp. Vint ensuite la période bénie du 7C04, dont j'ai plaisir à remercier les occupants successifs : François dont j'ai pris la place, Joël pour ses réponses toujours parfaites à mes questions de géométrie, Olivier et le culte de l'ours, Fabien le collègue diophantien, Jérôme aux conseils toujours avisés, Benjamin W. et Élodie croisés plus furtivement, et *last but not least*, Cécile, pour qui la page est trop courte.

Ce fabuleux bureau ne vivant pas en autarcie, je remercie aussi avec plaisir les autres doctorants que j'ai rencontrés : Nicolas B. avec qui j'ai partagé mes trois premières années d'enseignement, Benoît, Ismaël, Luc, Banafsheh, Julien G., Clémence, Mirjam, toutes celles et ceux que j'oublie (qu'ils veuillent bien m'en excuser), et enfin Benjamin C., Julien C. et Sarah F. que je suis heureux de pouvoir appeler des amis.

Merci à la Ludi et aux Ours pour tous ces moments d'improvisation, de rire et de détente. Merci à la FNF, à la RCL et au Mans pour les moments d'effort et de plaisir. Merci à mes tous amis non-mathématiques, en particulier Émilie, Chloé F. et Nicolas P. pour leur soutien précieux et leur présence réconfortante au cours de cette thèse.

Enfin, merci à mon frère Joris dont les exploits sportifs sont pour moi une source d'inspiration, et à ma mère sans qui rien de tout cela ne serait arrivé.

1 Introduction

1.1 Aperçu du problème

Soit $\mathcal{A}$ une variété abélienne définie sur un corps de nombres $\boldsymbol{k}$. Une fois $\mathcal{A}$ plongée dans un espace projectif $\mathbf{P}^n$, on dispose de deux notions héritées de l'espace projectif ambiant : une hauteur, et (pour tout place v de $\boldsymbol{k}$) une distance v-adique (définie en section 1.5.5 page 17) entre un point et une variété. Dans ces conditions, Faltings a démontré le théorème d'approximation suivant [Fal91, *Theorem II*].

Théorème 1.1.1 (Faltings). *Soit V une sous-variété quelconque de $\mathcal{A}$, v une place de $\boldsymbol{k}$, et $\varepsilon > 0$. Il n'existe qu'un nombre fini de points x dans $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ tels que*

$$0 < \mathrm{dist}_v(x, V) \leqslant H(x)^{-\varepsilon} . \tag{1.1}$$

Comme de nombreux énoncés de géométrie diophantienne, ce résultat n'est malheureusement pas effectif au sens suivant : on ne voit à l'heure actuelle pas de moyen de borner la hauteur des points satisfaisant à l'hypothèse d'approximation (1.1). Ainsi que le fait remarquer Faltings dans l'introduction de son article : « *As far as I can see, everything here is ineffective beyond hope.* »

Néanmoins, il semble *a priori* raisonnable de vouloir majorer explicitement le nombre de points rationnels satisfaisant à (1.1) (que nous appellerons à l'occasion les approximations exceptionnelles). Pour les courbes elliptiques, ce travail a été accompli dans [GS95] pour les courbes de hauteur assez grande, puis de façon indépendante par Farhi ([Far03, chap. 2] ou [Far05a]) pour toutes les courbes, avec des constantes d'apparence assez différente.

L'objet du présent mémoire, qui s'inscrit dans la lignée des travaux de Farhi, est de généraliser ce résultat en dimension supérieure, c'est-à-dire d'obtenir, autant que possible, une version quantitative explicite du théorème d'approximation de Faltings.

Plus précisément, ce type d'énoncé quantitatif est généralement obtenu en combinant une inégalité à la Vojta et une inégalité à la Mumford, dont nous rappelons brièvement des énoncés possibles, formulés de façon générique avec une condition (C) qui peut être par exemple l'hypothèse d'approximation (1.1) ci-dessus, ou une autre condition pour l'ex-conjecture de Mordell-Lang.

Les deux inégalités s'énoncent dans l'espace de Mordell-Weil de $\mathcal{A}$ muni de la forme quadratique donnée par la hauteur normalisée de Néron-Tate.

L'inégalité de Vojta affirme qu'il n'existe pas de suite $x_1, \dots, x_m$ de points satisfaisant simultanément à la condition (C) et aux trois conditions suivantes :

(*i*) $\hat{h}(x_1) > \alpha_{\mathrm{V}}$;

(*ii*) $\hat{h}(x_i) > \beta_{\mathrm{V}} \hat{h}(x_{i-1})$ pour $i > 1$;

(*iii*) $\cos(x_i, x_j) > 1 - \gamma_{\mathrm{V}}$ pour tous i et j ;

où l'angle est relatif à la structure euclidienne de l'espace. Nous appellerons *cône tronqué* une partie de l'espace délimitée par les conditions (*i*) et (*iii*) ci-dessus. Il est clair que l'espace privé d'une boule de rayon $\sqrt{\alpha_{\mathrm{V}}}$ peut être recouvert par un nombre fini de tels cônes tronqués dès qu'il est de dimension finie (ce qui est le cas si on se place sur un corps de nombres). L'inégalité de Vojta assure que, sous la condition (C), il n'y a qu'un nombre fini de points dans chaque cône, et permet donc de conclure à la finitude de l'ensemble des points satisfaisant (C).

L'inégalité de Mumford peut s'énoncer de façon très similaire. Elle dit qu'il n'existe pas de suite $x_1, \dots, x_m$ de points satisfaisant simultanément à la condition (C) et aux trois conditions suivantes :

(*i*) $\hat{h}(x_i) > \alpha_{\mathrm{M}}$ pour tout i ;

(*ii*) $|\hat{h}(x_i) - \hat{h}(x_j)| < \beta_{\mathrm{M}} \hat{h}(x_1)$ pour tous i et j.

(*iii*) $\cos(x_i, x_j) > 1 - \gamma_{\mathrm{M}}$ pour tous i et j ;

Utilisée conjointement avec l'inégalité de Vojta, et à condition que les constantes apparaissant dans ces deux inégalités soient effectives, elle permet de majorer le nombre de points dans chaque cône tronqué, donc le nombre total de points (modulo un résultat, assez indépendant, de décompte des « petits » points).

La démonstration de Faltings consiste précisément à démontrer une inégalité de Vojta, non effective, qui suffit à assurer la finitude. L'objectif consiste donc à rendre effective cette inégalité de Vojta et à lui adjoindre une inégalité de Mumford, elle aussi effective.

1.2 Relation avec d'autres énoncés

1.2.1 Le théorème de Roth

Le théorème de Roth [DR55], concernant l'approximation des nombres algébriques par les nombres rationnels, a d'abord été démontré pour la place archimédienne de $\mathbf{Q}$, puis étendu aux places quelconques par Ridout [Rid58] ; en voici un énoncé moderne (cas particulier du théorème D.2.1 page 304 de [HS00], en tenant compte des différences de normalisation).

Théorème 1.2.1 (Roth). *Soit $\xi \in \overline{\mathbf{Q}}$ un nombre algébrique. Soient par ailleurs $\boldsymbol{k}$ un corps de nombres et v une place de $\boldsymbol{k}$, étendue de façon arbitraire à $\boldsymbol{k}(\xi)$. Pour tout $\varepsilon > 0$,*

il n'existe qu'un nombre fini de points $x \in \boldsymbol{k}$ tels que

$$|x - \xi|_v^{\Delta_v} < H_2(x)^{-2-\varepsilon}$$

où $\Delta_v = [\boldsymbol{k}(\xi)_v : \mathbf{Q}_v]/[\boldsymbol{k}(\xi) : \mathbf{Q}]$ et la valeur absolue est normalisée de façon à prolonger une des valeurs absolues usuelles de $\mathbf{Q}$.

Le lien avec le théorème qui nous occupe ici est clair : on passe de l'un à l'autre en remplaçant ξ par V et $\boldsymbol{k} = \mathbf{A}^1(\boldsymbol{k})$ par $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$, la distance locale étant bien sûr représentée par $|x - \xi|_v$. Le théorème 2 de [Fal91] est donc aux variétés abéliennes ce que le théorème de Roth est à la droite, avec l'exposant $2 + \varepsilon$ remplacé par ε.

Très rapidement après la démonstration initiale de Roth, on a su établir des versions quantitatives du théorème. Plus précisément, la démonstration de Roth consiste en un fait qu'on peut appeler, anachroniquement, une inégalité à la Vojta : aucune suite $x_1, \ldots, x_m$ d'approximations exceptionnelles n'est telle que $H(x_1) > c_1$ et $H(x_i) > c_2 \cdot H(x_{i-1})$ pour tout $i > 1$.

Pour établir une version quantitative du théorème de Roth, il a fallu expliciter une valeur admissible des constantes c_1 et c_2, d'une part, et d'autre part lui adjoindre une inégalité que j'appellerai encore anachroniquement à la Mumford, disant qu'il existe une constante c_3 telle que deux approximations exceptionnelles x et y, de hauteur assez grande, satisfont toujours $H(x) > c_3 H(y)$. Dans le cas du théorème de Roth, ceci découle immédiatement de l'inégalité de la taille. La conjonction de ces deux inégalités donne clairement un décompte des approximations exceptionnelles de hauteur assez grande.

Rappelons aussi que le théorème de Roth a été l'aboutissement d'une longue série de théorèmes d'approximations moins précis, en ce sens que l'exposant optimal $2 + \varepsilon$ n'était pas atteint. Cette série a débuté avec le théorème de Liouville. Dans le cadre des espaces projectifs l'équivalent de l'inégalité de Liouville peut s'énoncer ainsi :

Proposition 1.2.2. *Soient V une sous-variété de $\mathbf{P}^n$ de degré d et $x \in \mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$ un point algébrique. Si x n'appartient pas à V, on a*

$$\mathrm{dist}_v(x, V)^{\Delta_v} \geqslant c(V) \cdot H(x)^{-d}$$

où Δ_v est le degré local, divisé par le degré global, d'un corps de définition de x.

Nous établirons (proposition 3.2.1 page 96) une version explicite de cette inégalité qui, outre son intérêt propre, joue un rôle crucial dans la preuve de nos inégalités à la Mumford. Un corollaire immédiat de l'inégalité de Liouville est le suivant.

Corollaire 1.2.3. *Soient V une sous-variété de $\mathbf{P}^n$ de degré d et $\varepsilon > 0$ un réel. Alors l'ensemble des points $x \in \mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$ tels que*

$$\mathrm{dist}_v(x, V)^{\Delta_v} < H(x)^{-d-\varepsilon}$$

est de hauteur bornée explicitement ; en particulier cet ensemble est fini si l'on exige que x appartienne à un corps de nombres de degré borné.

On peut relever les différences suivantes entre cet énoncé et le théorème d'approximation de Faltings : l'inégalité de Liouville prend place dans un espace projectif, il n'y pas besoin d'une variété abélienne ambiante ; on sait expliciter la borne sur la hauteur des approximation exceptionnelles ; en revanche, l'exposant de $H(x)$ n'est pas aussi fin. Comme on le verra en 1.2.3 page ci-contre, il est intéressant pour certaines applications de disposer d'un exposant inférieur ou égal à 1, ce qui n'est jamais le cas dans le corollaire précédent, même si V est linéaire.

1.2.2 L'ex-conjecture de Mordell-Lang

Dès 1922, Mordell avait conjecturé l'énoncé suivant.

Théorème 1.2.4 (Faltings, ex-conjecture de Mordell)**.** *Soit C une courbe projective lisse de genre $g \geqslant 2$, définie sur un corps de nombres $\boldsymbol{k}$. L'ensemble $C(\boldsymbol{k})$ des points rationnels de C est fini.*

Ce résultat a d'abord été prouvé par Faltings en 1983 comme conséquence d'une conjecture de Shafarevitch [Fal83]. La preuve fait intervenir des espaces de modules de variétés abéliennes, et c'est à cette occasion que Faltings a introduit la hauteur qui porte désormais son nom, sur ces espaces. Néanmoins, cette preuve reste assez éloignée des méthodes traditionnelles de l'approximation diophantienne.

Une preuve totalement indépendante a été publiée en 1991 par Vojta [Voj91]. Elle se rapproche grandement des idées habituelles de l'approximation diophantienne, en introduisant ce qu'on appelle maintenant l'inégalité de Vojta. La preuve est ensuite simplifiée (« *avoid[ing] the difficult Arakelov theory in Vojta's paper* ») et étendue par Faltings [Fal91] pour prouver une conjecture de Lang, généralisant celle de Mordell, et qui s'énonce ainsi.

Théorème 1.2.5 (Faltings, ex-conjecture de Mordell-Lang)**.**
Soit V une sous-variété d'une variété abélienne $\mathcal{A}$, définie sur un corps de nombres $\boldsymbol{k}$. Si V ne contient pas de translaté de sous-variété abélienne non nulle, alors $V(\boldsymbol{k})$ est fini.

Ceci généralise la conjecture de Mordell, qui correspond au cas où V est une courbe et $\mathcal{A}$ sa jacobienne. Ce résultat est proche de notre problème d'approximation dans le sens suivant : il consiste à montrer la finitude des points rationnels *sur* une sous-variété de variété abélienne, alors que nous nous intéressons aux points *proches* d'une telle sous-variété. Il est d'ailleurs significatif que Faltings a prouvé ces deux théorèmes (la conjecture de Mordell-Lang et celui que ce mémoire cherche à rendre quantitatif) dans le même article : une bonne partie des outils est commune aux deux preuves.

Une différence notable entre les deux situations est toutefois la suivante : pour étudier les points qui sont proches d'une sous-variété, sans appartenir à cette variété, on n'a pas besoin de supposer que celle-ci ne contient pas de translaté de sous-groupe. En fait, le résultat reste valable même pour les approximations d'une sous-variété abélienne.

Des versions quantitatives du théorème 1.2.5 page précédente ont été établies ensuite en suivant la méthode de Vojta. Signalons la relecture de la preuve par Bombieri [Bom90], qui simplifie certains arguments en les rapprochant de l'effectivité, et le travail de De Diego [Die97] sur les familles de courbes. Rémond obtient, dans la lignée de travaux de Faltings et Bombieri, une version totalement effective de l'inégalité de Vojta [Rém00b], puis lui adjoint une inégalité à la Mumford, établissant ainsi une version quantitative explicite [Rém00a] de l'ex-conjecture de Mordell-Lang. Enfin, Farhi [Far03, chap. 3] et [Far05b] donne une version quantitative de l'ex-conjecture de Mordell, démontrée dans un formalisme plus élémentaire que celui de Rémond, et légèrement plus précise que son application directe au cas des courbes.

1.2.3 Le théorème de Siegel et une ex-conjecture de Lang

Le théorème de Siegel [Sie29] affirme qu'une courbe de genre supérieur ou égal à 1 ne possède qu'un nombre fini de points entiers. Sa démonstration repose sur le théorème de Roth énoncé plus haut, et avait été obtenu par Siegel avec la version faible de cet énoncé dont il disposait en 1929. Pour les courbes de genre supérieur ou égal à 2, ce théorème est en quelque sorte surpassé par l'ex-conjecture de Mordell, mais il conserve un intérêt pour les courbes elliptiques. La généralisation suivante du théorème avait été conjecturée par Lang [Lan60].

Théorème 1.2.6 (Faltings, ex-conjecture de Lang)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une variété abélienne plongée dans $\mathbf{P}^n$ et E un hyperplan de $\mathbf{P}^n$. Alors $\mathcal{A} \setminus E$ ne possède qu'un nombre fini de points entiers.*

C'est en fait un corollaire [Fal91, cor. 6.2, p. 576] du théorème d'approximation de Faltings : on remarque que la hauteur (relative à E) d'un point entier x est égale au produit des inverses des distances v-adiques de x à E quand v parcourt les places archimédiennes de $\boldsymbol{k}$. Ainsi, les points entiers de $\mathcal{A} \setminus E$ sont des approximations exceptionnelles de E au sens du théorème 1.1.1 page 1 pour $\varepsilon = 1$, elles sont donc en nombre fini.

C'est pour ce type d'applications qu'il devient essentiel dans le théorème d'approximation de pouvoir prendre $\varepsilon \leqslant 1$ et que l'inégalité de Liouville (corollaire 1.2.3 page 3) ne suffit pas.

Les résultats obtenus ici permettent de donner un décompte explicite des points entiers, malheureusement pas dans le cas général, mais au moins lorsque $\mathcal{A}$ est

simple (et principalement polarisée). À notre connaissance, une telle version quantitative explicite de cette ex-conjecture de Lang, même dans un cas particulier, est nouvelle pour une variété abélienne de dimension au moins 2 ; néanmoins, les constantes que nous obtenons ne sont pas satisfaisantes (corollaire 4.4.5 page 129).

1.3 Énoncés des résultats principaux

Comme on l'a mentionné précédemment, il semble *a priori* difficile de borner la hauteur des approximations exceptionnelles, mais plus réaliste de borner leur nombre. En fait, il apparaît que dans notre situation, ces deux questions sont en général intimement liées : en effet, comme le montrera en détails le corollaire 4.1.4 page 116, certaines approximations exceptionnelles n'arrivent pas seules mais engendrent en fait une « grappe » d'approximations de qualité semblable, dont le cardinal est minoré en fonction de la hauteur de l'approximation qui engendre cette grappe. Ce phénomène est directement lié à l'existence possible de translatés de sous-variétés abéliennes contenus dans la variété approchée.

Ainsi, majorer le cardinal de l'ensemble des approximations exceptionnelles, donc de chaque grappe, reviendrait à majorer la hauteur de certains approximations exceptionnelles, voire de toutes les approximations exceptionnelles, résultat qui ne semble pas accessible à l'heure actuelle.

Par contre, on peut compter les grappes d'approximations exceptionnelles ou, autrement dit majorer le cardinal d'ensembles d'approximations exceptionnelles ne contenant qu'un point dans chaque grappe. On introduit dans ce but la définition suivante.

Définition 1.3.1. Soient F un sous-ensemble de $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ et τ un réel positif. On dit que F satisfait $\overline{C}(\tau)$ s'il existe une sous-variété abélienne $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ dont un translaté est contenu dans V et deux points distincts x et y dans F, tels que $x - y \in \mathcal{B}$ et $\hat{h}(x-y) \leqslant \tau \hat{h}(x)$.

On dit que F satisfait la condition $C(\tau)$ si F ne satisfait pas $\overline{C}(\tau)$.

Nous allons donc nous attacher à contrôler le cardinal d'ensemble d'approximations exceptionnelles satisfaisant $C(\tau)$ pour un certain τ explicite. La section 4.1 page 113 discute plus en détails ce phénomène de grappe et le choix de la condition utilisée pour le mettre de côté. Signalons tout de même avant de continuer que, si $\mathcal{A}$ est simple, il n'y a pas de grappes, la condition ci-dessus est vide et les résultats ci-dessous donnent donc des décomptes complets de toutes les approximations exceptionnelles.

Le premier résultat de décompte que nous donnons concerne le cas particulier où la variété approchée est un translaté d'une sous-variété abélienne de $\mathcal{A}$.

Pour simplifier, on note $c_{\mathcal{A}}$ une constante ne dépendant que de $\mathcal{A}$ plongée, qui peut être explicitée totalement dans certains plongements (voir l'énoncé complet

pour la valeur en fonction de constantes liées au plongement et la section 1.5.4 page 13 pour ces constantes).

Théorème 1.3.2 (corollaire 4.5.6 et scolie 4.5.7 page 132)**.** *Soit V un translaté par un point algébrique d'une sous-variété abélienne $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, de degré d et de dimension u. Soit de plus $\boldsymbol{k}$ un corps de nombres sur lequel sont définis $\mathcal{A}$ (et son plongement dans un espace projectif) et V ; on note r le rang de $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$. On fixe de plus un ensemble fini $\mathcal{S}$ de places de $\boldsymbol{k}$ et un réel $\varepsilon > 0$. Soit enfin une famille $x_1, \dots, x_p$ de points de $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ satisfaisant à $C(\varepsilon/2d)$ et telle que*

$$0 < \prod_{v \in \mathcal{S}} \operatorname{dist}_v(x_i, V)^{\Delta_v} < H_2(x_i)^{-\varepsilon} \exp(-d\alpha\Lambda^{(4g)^{4g^2}})$$

pour tout i, avec

$$\begin{aligned} \Lambda &= 34\varepsilon^{-2}\big(5(\deg \mathcal{A})(3g^2 d)^g\big)^{2g+2} \\ \alpha &= d^{g+1} c_{\mathcal{A}} + (g+1)\deg \mathcal{A}\Big(d^g h_1(V) + 2\big(2(d+1)\big)^{n+1}\Big) \end{aligned}$$

où $h_1(V)$ est la hauteur logarithmique d'une forme de Chow *de V (en utilisant la longueur aux places archimédiennes, voir section 1.5.3 page 12). Alors on a*

$$p \leqslant 2 \cdot 5^{\operatorname{Card} \mathcal{S}} \cdot \sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} (4g)^{4g^2+1} (\log \Lambda) \left(120760(\deg \mathcal{A}) d\, \varepsilon^{-1}\right)^r .$$

Comme on le constate, la condition d'approximation a été renforcée (facteur $\exp(-\dots)$). Ceci a pour but d'éliminer les points de petite hauteur afin de fournir un décompte complet. Sous l'hypothèse d'approximation plus naturelle (sans ce dernier facteur), on obtient un décompte seulement pour les points de grande hauteur (corollaire 4.3.7 page 125).

Signalons une interprétation possible de ce type d'énoncés : on a

$$\sum_{v \in \mathcal{S}} \Delta_v \log \operatorname{dist}_v(x, V) \geqslant -\varepsilon h_2(x) - d\alpha\Lambda^{(4g)^{4g^2}}$$

sauf pour un nombre fini de x (les approximations exceptionnelles). Dans l'inégalité ci-dessus, dans le cas où V est une sous-variété abélienne de $\mathcal{A}$, chaque terme du membre de gauche peut être interprété comme la valeur absolue v-adique d'une forme linéaire de logarithmes abéliens. La minoration obtenue présente alors la particularité de séparer $h_2(x)$ de d, qui représente la hauteur des formes linéaires. Cependant, la dépendance en d est nettement moins bonne que celle obtenue dans les minorations usuelles de formes linéaires de logarithmes et surtout, l'inégalité admet des exceptions, bien qu'elles soient en nombre fini et contrôlées.

Le deuxième décompte que nous donnons concerne le cas général. On suppose que $\mathcal{A}$ est principalement polarisée et plongée dans $\mathbf{P}^n$ par un plongement

de Mumford modifié (section 1.5.4 page 13) ; on note de plus $c'_{\mathcal{A}}$ une constante dépendant du degré d'un corps de définition de $\mathcal{A}$, en plus des éléments dont dépend déjà $c_{\mathcal{A}}$ (à nouveau, voir l'énoncé complet et la section 1.5.4 page 13 pour les détails).

Théorème 1.3.3 (corollaire 4.4.4 page 129)**.** *Soit V une sous-variété de $\mathcal{A}$, de degré d et de dimension u. Soit de plus $\boldsymbol{k}$ un corps de nombres sur lequel sont définis $\mathcal{A}$ (et son plongement dans un espace projectif) et V ; on note r le rang de $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$. On fixe de plus un ensemble fini $\mathcal{S}$ de places de $\boldsymbol{k}$ et un réel $\varepsilon > 0$. Soit enfin une famille $x_1, \ldots, x_p$ de points de $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ satisfaisant à $C(\varepsilon/2d)$ et telle que*

$$0 < \prod_{v \in \mathcal{S}} \operatorname{dist}_v(x_i, V)^{\Delta_v} < H_2(x_i)^{-\varepsilon}$$

$$\hat{h}(x_i) > (h_1(V) + c_{\mathcal{A}})\, \varepsilon^{-2(4g)^{4g^2}} d^M (3M)^{(M+1)u+3}$$

pour tout i, avec $M = \left(2^{34} c'_{\mathcal{A}}\, d\right)^{(r+1)g^{5(u+1)^2}} + 1$. Alors on a

$$p \leqslant 5^{\operatorname{Card} \mathcal{S}} M^2 \left(d^M (3M)^{(M+1)u}\right)^{(r+1)/2} \varepsilon^{-r-1/2} \log(\mathrm{e}/\varepsilon)\ .$$

On constate que la dépendance en les différents paramètres est significativement moins bonne que celle qu'on pourrait attendre (et en particulier que celle obtenue dans le cas précédent). Ceci semble être une faiblesse de la méthode utilisée pour prouver l'inégalité de Mumford dans ce cas.

Signalons enfin qu'on peut déduire du résultat précédent un décompte explicite, quoique peu satisfaisant, des points entiers d'un ouvert affine d'une variété abélienne simple : c'est le corollaire 4.4.5 page 129.

1.4 Stratégie générale

Il s'agit essentiellement d'employer la méthode de Vojta, en s'inspirant des travaux de Rémond [Rém00a ; Rém00b ; Rém05], de Farhi [Far03, chap. 2], et de la preuve originale de Faltings [Fal91]. Dans les grandes lignes, la preuve consistera donc à établir une version explicite de l'inégalité à la Vojta obtenue par Faltings et à lui adjoindre une inégalité à la Mumford, elle aussi explicite.

Les arguments utiliseront un formalisme simple : plongements, coordonnées et polynômes plutôt que fibrés (métrisés) et sections globales. Les outils techniques essentiels sont ceux de la théorie de l'élimination tels que rappelés par exemple dans [NP01, chap. 5 à 7].

Le plan de la thèse est le suivant :

- les sections suivantes du présent chapitre introduisent les principales notations et le cadre général dans lequel on se place, en rappelant les propriétés essentielles des notions utilisées ainsi qu'en prouvant au besoin quelque propriétés nouvelles mais assez simples ;

- le chapitre deux établit une inégalité de Vojta, en commençant par un cas particulier avant d'en déduire le cas général ;
- le chapitre trois établit une inégalité de Liouville et deux inégalités de Mumford : la première concerne un cas particulier mais présente de bien meilleures constantes que la seconde, traitant le cas général ;
- enfin, le chapitre quatre déduit de ces inégalités des décomptes de grands points avec certaines restrictions, après avoir détaillé les obstructions qui nous obligent à imposer lesdites restrictions.

Présentons maintenant un peu plus en détail les stratégies mises en œuvre pour établir les résultats techniques principaux que sont les inégalités de Vojta et Mumford, en commençant par cette dernière, qui est la plus directe.

Le remarque essentielle pour l'inégalité de Mumford est que si deux points satisfont à ses hypothèses, leur différence sera de hauteur très petite relativement aux points initiaux. Une proposition clé contrôle l'action de la soustraction sur la distance ; on voit alors que cette différence est ainsi très proche d'une nouvelle variété : dans le cas où la variété approchée est un translaté de sous-variété abélienne, il s'agit de la sous-variété abélienne en question, dans le cas général on contrôle le degré et la hauteur de la variété projective obtenue.

Ainsi, la différence est une approximation exceptionnelle d'une nouvelle variété et comme sa hauteur a chuté, elle est en fait tellement exceptionnelle que l'inégalité de Liouville la contraint à être sur cette variété. Dans le cas d'une sous-variété abélienne, c'est la conclusion voulue ; dans le cas général, on doit invoquer la version quantitative de l'ex-conjecture de Mordell-Lang donnée par Rémond pour conclure.

Pour l'inégalité de Vojta, on se ramène au cas particulier où la variété approchée est un hyperplan standard de la façon suivante. Si V est une variété quelconque, on choisit une hypersurface qui la contient, puis par un plongement de Veronese on transforme cette hypersurface en hyperplan, et un changement de coordonnées linéaire transforme ce dernier en l'hyperplan standard $X_0 = 0$. À chaque étape on contrôle explicitement l'action sur la distance, le degré et la hauteur des objets en jeu, et les différentes constantes associées au plongement.

L'idée principale de cette partie est alors la suivante : en supposant qu'il existe un m-uplet d'approximations exceptionnelles satisfaisant aux hypothèses du théorème, on le regarde comme un point dans $\mathcal{A}^m$ et on l'enferme dans des sous-variétés produit de $\mathcal{A}^m$ de dimension décroissante et de degrés et hauteurs contrôlés. Au final, l'un des facteurs de cette variété sera réduit à un point, et le contrôle obtenu sur sa hauteur contredira les hypothèses, achevant la preuve.

Pour cela, il s'agit, étant donné une telle variété, de produire une forme sur un des facteurs, s'annulant au point étudié, par laquelle couper pour faire décroître la dimension de la variété dans laquelle on l'a enfermé ; nous l'appellerons *forme motrice*. Si cette forme est suffisamment bien contrôlée, le théorème de Bézout,

dans ses versions géométrique et arithmétique, permet alors de contrôler le degré et la hauteur de l'intersection.

Le cœur technique de la preuve est donc la construction de cette forme motrice, pour laquelle on utilise la méthode de Thue. De façon classique, on commence par utiliser un lemme de Siegel pour produire une forme auxiliaire de multidegré prescrit (et étagé sur les différents facteurs) et de hauteur contrôlée, qui s'annule avec un indice (lui aussi étagé) élevé le long de l'hyperplan approché. L'étape d'extrapolation montre alors que la forme auxiliaire s'annule au point étudié, puis un lemme de zéros (en l'occurrence, une variante du théorème du produit) permet de conclure à l'existence de la forme motrice, ce qui clôt la preuve.

1.5 Définitions et notations

1.5.1 Formes homogènes et multihomogènes

On notera généralement $X = (X_0, \dots, X_n)$ un groupe de variables. Si $\lambda \in \mathbf{N}^{n+1}$ est un multiindice, on notera $X^\lambda = X_0^{\lambda_0} \cdots X_n^{\lambda_n}$. On introduit également les notations $\lambda! = \lambda_0! \cdots \lambda_n!$ et $|\lambda| = \lambda_0 + \cdots + \lambda_n$; on note alors $\binom{|\lambda|}{\lambda} = \frac{|\lambda|!}{\lambda!}$ le coefficient multinomial. Pour les dérivées, on utilisera les notations

$$\frac{\partial^\lambda}{\partial X^\lambda} = \frac{\partial^{\lambda_0}}{\partial X^{\lambda_0}} \cdots \frac{\partial^{\lambda_n}}{\partial X^{\lambda_n}} \quad \text{et} \quad \partial^\lambda = \frac{1}{\lambda!} \frac{\partial^\lambda}{\partial X^\lambda} .$$

Introduisons maintenant quelques notations pour les formes multihomogènes ; nous travaillerons principalement avec des formes sur des puissances d'espaces projectifs, nous nous limitons donc à ce cas pour alléger un peu. On notera $\boldsymbol{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(m)})$ un groupe de groupes de variables, où $X^{(i)} = (X_0^{(i)}, \dots, X_n^{(i)})$. On étend naturellement les notations projectives : pour $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{N}^{(n+1)m}$ on note $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\lambda}} = (X^{(1)})^{\lambda^{(1)}} \cdots (X^{(m)})^{\lambda^{(m)}}$; on procède de même pour les factorielles et les dérivées (divisées). Par ailleurs, on note $|\boldsymbol{\lambda}| = (|\lambda^{(1)}|, \dots, |\lambda^{(m)}|)$ le vecteur des longueurs de λ et $\|\boldsymbol{\lambda}\| = \sum_{i=1}^m |\lambda^{(i)}|$.

1.5.2 Normes locales

À chaque place v d'un corps de nombres $\boldsymbol{k}$, on associe la valeur absolue qui prolonge une des valeurs absolues standard de $\mathbf{Q}$, autrement dit $|p|_v = p^{-1}$ si v divise un premier p et $|2|_v = 2$ si v est archimédienne.

Si v est une place finie de $\boldsymbol{k}$, on définit la norme v-adique d'une famille[1] finie d'éléments de $\boldsymbol{k}$ comme le maximum des valeurs absolues v-adiques de ses

1. Au sens de « suite non nécessairement ordonnée » : les répétitions d'éléments sont possibles.

éléments. Si v est archimédienne, on utilisera les normes usuelles suivantes :

$$\|x\|_{\infty,v} = \max_i |x_i|_v \qquad \|x\|_{1,v} = \sum_i |x_i|_v \qquad \|x\|_{2,v} = \Big(\sum_i |x_i|_v^2\Big)^{1/2} .$$

On définit alors la norme d'un polynôme comme celle de la famille de ses coefficients. Si $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_p)$ est une famille de polynômes, on définit de plus sa norme $|||\mathcal{F}|||_{\star,v}$ comme pour la norme $\|\cdot\|_{\star,v}$ ci-dessus, mais en remplaçant $|x_i|_v$ par $\|F_i\|_{\star,v}$ dans le membre de droite.

Aux places archimédiennes, on dispose également de deux notions de mesure pour les polynômes. La première est la classique mesure de Mahler, définie pour v archimédienne par :

$$\log \mathcal{M}_v(P) = \int_0^1 \mathrm{d}\, t_1 \dots \int_0^1 \mathrm{d}\, t_n \log |P(\mathrm{e}^{2\pi i t_1}, \dots, \mathrm{e}^{2\pi i t_n})|_v$$

si $P \neq 0$ et $\mathcal{M}_v(0) = 0$; aux places ultramétriques on notera $\mathcal{M}_v(P) = \|P\|_{\infty,v}$.

La seconde, que nous appellerons mesure projective, est une variante introduite par Philippon pour les formes multihomogènes en intégrant sur un produit de sphères et non de cercles ainsi qu'en ajoutant un facteur correctif. On conservera $\mathrm{M}_v(P) = \|P\|_{\infty,v}$ aux places finies, et aux places infinies, si P est multihomogène de multidegré δ en l groupes de $n_k + 1$ variables :

$$\log \mathrm{M}_v(P) = \Big(\int_{S_1 \times \dots \times S_l} \log |P|_v \; \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_l\Big) + \sum_{k=1}^{l} \delta_k \cdot \gamma_{n_k} ,$$

où $S_k = \{u \in \mathbf{C}^{n_k},\ \|u\|_2 = 1\}$ est la sphère de dimension $2n_k - 1$ plongée dans $\mathbf{C}^{n_k}$ muni de sa structure hermitienne usuelle, μ_k désigne la mesure sur S_k invariante par l'action du groupe unitaire et normalisée par $\mu_k(S_k) = 1$, et enfin

$$\gamma_n = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q} .$$

On renvoie à [NP01] p. 86 pour un rappel des propriétés essentielles.

On rappelle au passage la définition du nombre de Stoll

$$\mathrm{St}_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{2j} \tag{1.2}$$

et les majorations élémentaires

$$\gamma_n \leqslant \frac{1 + \log n}{2} \leqslant \log(n+1) \qquad \mathrm{St}_n \leqslant \frac{(n+1)\log(n+1)}{2} \leqslant n \log(n+1) \tag{1.3}$$

obtenues en comparant avec des intégrales, par exemple.

Pour traiter les cas archimédien et ultramétrique de façon unifiée, on notera $\|\cdot\|_{2,v} = \|\cdot\|_{1,v} = \|\cdot\|_{\infty,v}$ si v est ultramétrique. On note de plus

$$\delta_v = \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ est archimédienne} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire par exemple $\|x\|_{1,v} \leqslant \|x\|_{\infty,v}(n+1)^{\delta_v}$ pour toute place v si x est un vecteur à $n+1$ composantes.

Parmi les comparaisons de normes et mesures qui nous seront utiles, rappelons celles entre mesure projective et norme euclidienne ou longueur. Dans la démonstration du lemme 3.3, p. 111 de [Rém01a], il est établi que si P est une forme multihomogène de multidegré d en plusieurs groupes de $n+1$ variables, dont on note p_α les coefficients, on a

$$|p_\alpha|_v \leqslant \binom{d}{\alpha}^{\delta_v} \mathcal{M}_v(P) \leqslant \binom{d}{\alpha}^{\delta_v} \mathrm{M}_v(P)$$

ce qui en sommant sur les multimultiindices α tels que $|\alpha| = d$, donne immédiatement, par la formule multinomiale :

$$\|P\|_{1,v} \leqslant (n+1)^{|d|\delta_v} \mathrm{M}_v(P) \ . \tag{1.4}$$

Dans l'autre sens, la définition de la mesure projective donne immédiatement

$$\mathrm{M}_v(P) \leqslant \|P\|_{2,v} \exp(\delta_v \sum_k d_k \cdot \gamma_n) \leqslant \|P\|_{2,v}(n+1)^{|d|\delta_v} \ . \tag{1.5}$$

1.5.3 Hauteurs

On définit la hauteur additive d'une famille finie d'éléments de $\boldsymbol{k}$ (en particulier, d'un vecteur ou d'un polynôme *via* la famille de ses coefficients) comme

$$h_\star(\,\cdot\,) = \sum_v \Delta_v \log\|\cdot\|_{\star,v} \ ,$$

où $\Delta_v = [\boldsymbol{k}_v : \mathbf{Q}_v]/[\boldsymbol{k} : \mathbf{Q}]$, la somme est prise sur l'ensemble des places de $\boldsymbol{k}$ et $\star$ désigne l'une des normes ci-dessus ; pour une forme (multi)homogène, on notera h_{P} la hauteur obtenue en utilisant la mesure M_v au lieu de la norme dans la formule ci-dessus. On note également $H_\star = \exp h_\star$ la hauteur multiplicative.

La hauteur d'une famille, ainsi définie, est invariante par multiplication de cette famille par un scalaire, et ne dépend pas non plus du corps de nombres. Ceci permet de définir la hauteur d'un point de $\mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$ comme celle de ses coordonnées homogènes.

Si V est une sous-variété de $\mathbf{P}^n$ on peut lui associer des formes de Chow relatives à certains indices de la façon rappelée dans [NP01] au début du chapitre 6. Nous

ne considérerons généralement que la forme d'indice $(1, \ldots, 1)$, que nous noterons f_V. Cette forme est bien définie à multiplication par un scalaire près, la définition $h_\star(V) = h_\star(f_V)$ a donc un sens.

Parmi les différentes hauteurs définies pour les points, h_∞ est la hauteur de Weil et h_2 est la hauteur projective ; pour les variétés, la hauteur projective est h_{P}. Dans le cas où $V = \{x\}$ est réduite à un point, on a $h_{\mathrm{P}}(V) = h_2(x)$, ce qui justifie la terminologie.

Nous utiliserons principalement la hauteur projective, pour ses propriétés géométriques, et la hauteur h_1, pour les propriétés agréables de la norme L_1 (longueur) aux places archimédiennes. Rappelons donc comment ces hauteurs se comparent dans le cas d'une variété : cette comparaison découle directement de (1.4) et (1.5) appliqués au cas particulier d'une forme de Chow :

$$|h_{\mathrm{P}}(V) - h_1(V)| \leqslant (\dim V + 1)(\deg V) \log(n+1) \ . \tag{1.6}$$

Par ailleurs, si l'on fixe un plongement $\Theta \colon \mathcal{A} \to \mathbf{P}^n$, on a des notions de hauteurs sur $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ associées à ce plongement. Si de plus ce plongement est associé à un fibré $\mathcal{L}$ symétrique, on peut définir de façon classique une hauteur normalisée $\hat{h}$ (dite de Néron-Tate), qui dépend encore du fibré $\mathcal{L}$ mais plus du choix d'un plongement particulier associé à ce fibré, ni de la norme ou mesure utilisée aux places archimédiennes pour définir la hauteur projective.

Si le fibré $\mathcal{L}$ est symétrique, cette hauteur normalisée induit une forme quadratique définie positive sur l'espace de Mordell-Weil de $\mathcal{A}$.

1.5.4 Plongement projectif de la variété abélienne

On supposera en général fixé un plongement $\Theta \colon \mathcal{A} \to \mathbf{P}^n$ associé à un fibré symétrique $\mathcal{L}$. On supposera de plus le plongement projectivement normal (c'est-à-dire tel que l'application $\Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(i)) \to \Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{L}^{\otimes i})$ soit surjective pour tout $i \geqslant 1$) ; cette condition n'est pas restrictive car si $\mathcal{M}$ est un fibré ample, alors $\mathcal{M}^{\otimes l}$ est très ample et satisfait la condition dès que $l \geqslant 3$.

On introduit alors quelques constantes et notations associées à ce plongement, dont on justifie brièvement l'existence sous ces hypothèses. On discutera ensuite de la possibilité d'expliciter certaines d'entre elles dans certains cas.

Fait 1.5.1. *Il existe une constante réelle $\hat{c}_\Theta$ telle que pour toute sous-variété V de $\mathcal{A}$ on ait*

$$|h_{\mathrm{P}}(V) - \hat{h}(V)| \leqslant \hat{c}_\Theta (\dim V + 1) \deg V \tag{1.7}$$

où $\hat{h}$ est la hauteur normalisée telle que définie dans [Phi91] pour les variétés. En particulier on a

$$|h_2(x) - \hat{h}(x)| \leqslant \hat{c}_\Theta \tag{1.8}$$

pour tout $x \in \mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$.

Démonstration. Inclus dans la proposition 9 page 281 de [Phi91]. □

Lemme 1.5.2. *Il existe un entier N, un ensemble Γ de N ouverts recouvrant $\mathcal{A}^2$, et une constante C_Θ qui se décompose en $C_\Theta = \prod_v C_{\Theta,v}^{\Delta_v}$ où les $C_{\Theta,v}$ sont des réels tous supérieurs et presque tous égaux à 1, possédant la propriété suivante.*

Pour tout couple d'entiers relatifs (a,b) n'admettant que 2 et 3 comme diviseurs premiers, il existe une famille $(L^{(a,b,\gamma)})_{\gamma\in\Gamma}$ de $(n+1)$-uplets de formes telle que :

1. *la famille $(L_k^{(a,b,\gamma)})_{k\in\{0,\dots n\}}$ représente le morphisme $(x,y)\mapsto ax-by$ dans le plongement Θ sur (l'image de) γ ;*
2. *chaque forme $L_k^{(a,b,\gamma)}$ est bihomogène de bidegré $(2a^2,2b^2)$;*
3. *pour tout place v et toute carte γ, on a*
$$|||L^{(a,b,\gamma)}|||_{1,v} \leqslant C_{\Theta,v}^{a^2+b^2}\,; \tag{1.9}$$
4. *pour tout $(x,y)\in\mathcal{A}^2$ et toute place v il existe une carte $\gamma\in\Gamma$ telle que $(x,y)\in\gamma$ et*
$$\frac{\|L^{(a,b,\gamma)}(x,y)\|_{1,v}}{\|x\|_{1,v}^{2a^2}\|y\|_{1,v}^{2b^2}} \geqslant C_{\Theta,v}^{-(a^2+b^2)}\,. \tag{1.10}$$
(Par ailleurs, cette quantité est majorée par $C_{\Theta,v}^{a^2+b^2}$ d'après le point précédent et les propriétés de la norme utilisée.)

De plus, on peut prendre $N=\deg\mathcal{A}/g!$ où $\deg\mathcal{A}$ est le degré de l'image de $\mathcal{A}$ dans le plongement projectif considéré.

Démonstration. Le fait 3 page 276 de [Phi91], appliqué à $S=\{2,3\}$, donne[2] pour tout entier relatif[3] a n'ayant que 2 et 3 comme facteurs premiers, une famille de $n+1$ formes $F^{(a)}$ de degré a^2 représentant globalement la multiplication par a dans le plongement fixé, et une famille de constantes $(C_{2,3,v})_v$ presque toutes égales à 1, telles que, pour toute place v,

$$|||F^{(a)}|||_{1,v} \leqslant C_{2,3,v}^{a^2} \qquad \text{et, pour tout } x\in\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}}),\quad \frac{\|F^{(a)}(x)\|_{1,v}}{\|x\|_{1,v}^{a^2}} \geqslant C_{2,3,v}^{-a^2}\,.$$

On conclut directement en composant avec le système complet de formes représentant la soustraction donné par le lemme suivant. □

Lemme 1.5.3. *Il existe un entier N, un ensemble Γ de N ouverts recouvrant $\mathcal{A}^2$, une constante C'_Θ qui se décompose en $C'_\Theta = \prod_v (C'_{\Theta,v})^{\Delta_v}$ où les $C'_{\Theta,v}$ sont des réels tous supérieurs et presque tous égaux à 1, et enfin une famille $(D^{(\gamma)})_{\gamma\in\Gamma}$ de formes bihomogènes de bidegré $(2,2)$ telles que*

2. À quelques différences de normes et notations près, qui sont sans incidence vu qu'on n'annonce pas de valeur explicite.

3. La référence citée énonce son résultat avec des entiers naturels, mais le résultat de Serre sur lequel elle se base est en fait valable pour des entiers relatifs.

1. *la famille* $(D_k^{(\gamma)})_{k=0}^n$ *représente le morphisme de soustraction dans le plongement* Θ *sur (l'image de)* γ *;*
2. *pour toute place* v *et toute carte* γ*, on a* $|||D^{(\gamma)}|||_{1,v} \leqslant C'_{\Theta,v}$ *;*
3. *pour tout* $(x,y) \in \mathcal{A}^2$ *et toute place* v *il existe une carte* $\gamma \in \Gamma$ *telle que* $(x,y) \in \gamma$ *et*
$$\frac{\|D^{(\gamma)}(x,y)\|_{1,v}}{\|x\|_{1,v}^2 \|y\|_{1,v}^2} \geqslant (C'_{\Theta,v})^{-1} . \tag{1.11}$$
(Par ailleurs, cette quantité est majorée par $C'_{\Theta,v}$ *d'après le point précédent et les propriétés de la norme utilisée.)*

De plus, on peut prendre $N = \deg \mathcal{A}/g!$ *où* $\deg \mathcal{A}$ *est le degré de l'image de* $\mathcal{A}$ *dans le plongement projectif considéré.*

Démonstration. Vu les hypothèses sur le plongement, [LR85] assure qu'il existe un système complet de formules de bidegré $(2,2)$ représentant l'addition. On en déduit aisément un système complet de formules pour la soustraction de même degré en composant sur le deuxième facteur avec une famille de formules linéaires représentant globalement la multiplication par -1. Cette famille répond à toutes les exigences du lemme (à condition de choisir $C'_{\Theta,v}$ en conséquence) sauf peut-être le dernier point, pour lequel on utilise le même argument que pour la fin de la preuve du fait 3 page 276 de [Phi91] cité précédemment, mais appliqué cette fois à la famille $(D_k^{(\gamma)})_{k\in\{0,\dots,n\}}^{\gamma\in\Gamma}$.

De plus, le lemme 2.1 page 607 de la référence citée et le paragraphe le précédant montrent qu'on peut choisir un système complet de lois d'addition en bijection avec l'espace des sections globales du faisceau $m^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_1^*\mathcal{L}^2 \otimes p_2^*\mathcal{L}^2$ dans les notations de la référence, où en particulier $m\colon \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}$ est le morphisme d'addition. Or, $\mathcal{L}$ étant symétrique, ce faisceau est isomorphe à $d^*\mathcal{L}$ si l'on note $d\colon \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}$ le morphisme de soustraction. Par ailleurs, on voit que $\Gamma(\mathcal{A}^2, d^*\mathcal{L}) = \Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ de la même façon que l'égalité analogue pour $m^*\mathcal{L}$ obtenue page 607 de la référence.

Ainsi, on peut prendre $N = h^0(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{L})$, où la dernière égalité provient du fait que $\mathcal{L}$ est ample. Le théorème de Riemann-Roch abélien entraîne alors l'assertion faite sur N. □

Remarque 1.5.4. On peut évidemment supposer que $C_{\Theta,v} \geqslant C'_{\Theta,v}$ pour tout v car le lemme 1.5.3 page précédente n'est qu'un cas particulier du lemme 1.5.2 page ci-contre.

Notations 1.5.5. On fixe désormais des constantes et formes telles que données par les deux lemmes précédents et le fait 1.5.1 page 13. On note de plus $c_\Theta = \log C_\Theta$ et $c'_\Theta = \log C'_\Theta$.

Remarque 1.5.6. On supposera que $n \geqslant 2$ et $N \geqslant 3$, et le degré de (l'image de) $\mathcal{A}$ dans le plongement est au moins 3, ce qui est le cas dans les plongements

usuels : plongement de Weierstrass pour une courbe elliptique ou en général, plongement de Mumford modifié (voir ci-dessous).

Discutons maintenant des valeurs explicites qu'on peut donner à certaines de ces constantes pour des plongements bien choisis. On considère principalement les plongements de Mumford modifiés tels que définis dans [DP02]. Nous noterons $h_{\mathcal{A}}$ la quantité notée $h(\mathcal{A})$ dans cette référence, car dans nos notations, $h(\mathcal{A})$ désigne plutôt la hauteur de la forme de Chow de $\mathcal{A}$ dans ce plongement. On introduit au passage la quantité suivante, qui sera utilisée dans l'énoncé du fait 3.6.4 page 110 :

$$h^0_{\mathcal{A}} = [\boldsymbol{k}_{\mathcal{A}} : \mathbf{Q}] \max(h_{\mathcal{A}}, 1) \tag{1.12}$$

où $\boldsymbol{k}_{\mathcal{A}}$ est un corps de définition de $\mathcal{A}$ plongée ; cette quantité est celle notée $h_0(\mathcal{A})$ dans la référence en question (théorème 1.4 page 641).

La proposition 3.9 page 665 de la référence citée dit alors qu'on peut choisir

$$\hat{c}_{\Theta} = 4^{g+1} h_{\mathcal{A}} + 3g \log 2 \,.$$

Par ailleurs, leur proposition 3.7 page 662 donne une famille totalement explicite de formes représentant globalement le morphisme d'addition-soustraction $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$. On en déduit par projection sur un des facteurs un système complet totalement explicite représentant au choix l'addition ou la soustraction, avec un atlas à $n + 1$ cartes (qui sont plus précisément les préimages des hyperplans standard par le morphisme de soustraction ou d'addition).

De plus, leur lemme 3.11 page 666 donne une famille représentant globalement la multiplication par 2 et possédant des propriétés analogues à celles exigées par le lemme 1.5.2 page 14. En rapprochant ces formules de celles représentant le morphisme d'addition-soustraction (dont le carré est la multiplication par deux sur les deux facteurs), il est possible d'expliciter $C'_{\Theta,v}$ en fonction des constantes (explicites) données par le lemme 3.11 de la référence citée.

Le point d'achoppement pour finir d'expliciter C_{Θ} est donc l'existence de formules globales pour la multiplication par 3 qui soient suffisamment bien contrôlées. À notre connaissance, on ne dispose pas à ce jour de formules explicites comme pour la multiplication par 2 ; il est néanmoins possible de majorer la hauteur d'une famille représentant globalement la multiplication par 3, puis, grâce à un *nullstellensatz* effectif, d'en déduire une constante telle que la minoration voulue soit satisfaite.

Dans le cas particulier des courbes elliptiques, si l'on choisit de les plonger dans $\mathbf{P}^2$ par un plongement de Weierstrass, on dispose alors de formules globales totalement explicites pour la multiplication par n'importe quel entier, ainsi que d'un système complet de 3 familles de formes de bidegré $(2, 2)$ représentant l'addition, données par la section 2.13 (pages 126 à 142) de [Far03]. On pourrait en déduire une valeur totalement explicite de C_{Θ} pour les plongement de Weierstrass. Par

ailleurs, Farhi donne une valeur explicite de $\hat{c}_\Theta$ à partir de ces formules (théorème 2.13.3 page 141).

Pour conclure cette section, remarquons que les différentes constantes introduites ici, ainsi que la quantité $h_1(\mathcal{A})$ qui sera utilisée plusieurs fois, ne sont pas exemptes de liens entre elles : par exemple, il est facile de majorer $h_1(\mathcal{A})$ en fonction de $\hat{c}_\Theta$ en utilisant (1.7) puis (1.6) ; en reprenant les arguments utilisés dans [DP02] pour déduire la proposition 3.9 du lemme 3.11, on pourrait majorer $\hat{c}_\Theta$ en fonction de c_Θ, etc. Néanmoins, nous avons choisi de laisser ces différentes constantes telles qu'elle apparaissent naturellement, laissant au lecteur le choix (et le soin) d'effectuer les estimations les plus appropriées en fonction de la situation considérée.

Par ailleurs, si $\hat{c}_\Theta$ est utilisée assez abondamment dans tous les contextes, en revanche seule la démonstration de l'inégalité de Vojta utilise c_Θ et N : l'inégalité de Mumford repose uniquement sur c'_Θ et n'utilise pas la valeur de N. Nous laisserons N telle quelle dans tous les résultats techniques et n'utiliserons l'estimation donnée ci-dessus que lors de la déduction des résultats principaux.

1.5.5 Distances et conditions d'approximations

Pour chaque place v de $\boldsymbol{k}$, on pose

$$\mathrm{dist}_v(x,y) = \frac{\|x \wedge y\|_{2,v}}{\|x\|_{2,v}\|y\|_{2,v}} \quad \text{où } x \wedge y = (x_i y_j - y_j x_i)_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \ .$$

Cette définition correspond, pour les points, à la distance d'indice 1 utilisée dans [Phi01] et [Jad96]. Cette dernière référence (notamment lemme 3.2 *(ii)*, page 51) montre qu'il s'agit bien d'une distance au sens usuel du terme (ultramétrique si v l'est). Par ailleurs, il est évident à partir de la définition que la distance est toujours majorée par 1.

Pour la distance entre un point et une variété, on s'écarte par contre légèrement des références citées, en posant [4]

$$\mathrm{dist}_v(x,V) = \inf_{y \in V(\mathbf{C}_v)} \mathrm{dist}_v(x,y) \ .$$

Les deux notions sont en fait très comparables, voir la section suivante. La notion qu'on vient de définir bénéficie par contre de la propriété suivante : si $V \subset V'$ alors $\mathrm{dist}_v(x,V') \leqslant \mathrm{dist}_v(x,V)$, qu'on utilisera couramment pour se ramener au cas où V est une hypersurface. Évidemment, on a $\mathrm{dist}_v(x,V) = 0 \Leftrightarrow x \in V(\mathbf{C}_v)$.

Soient $\boldsymbol{k}$ un corps de nombres, $\mathcal{S}$ un ensemble fini de places de $\boldsymbol{k}$ et $\varepsilon > 0$ un réel. Le but est d'étudier les points $x \in \mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ satisfaisant à la condition d'approximation

$$\prod_{v \in \mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(x,V)^{\Delta_v} \leqslant c H_2(x)^{-\varepsilon} \tag{1.13}$$

4. Si v est finie, $\mathbf{C}_v$ n'est pas localement compact et l'infemum n'est pas nécessairement atteint.

où c est une constante réelle et $\Delta_v = [\boldsymbol{k}_v : \mathbf{Q}_v]/[\boldsymbol{k} : \mathbf{Q}]$, de sorte que le membre de gauche ne dépend pas du corps de nombres (contenant x) utilisé pour le calculer. Autrement dit, une telle condition a un sens sur $\overline{\mathbf{Q}}$.

Malheureusement, cette condition n'est pas facile à exploiter techniquement. On introduit donc, comme il est d'usage, un autre type de condition faisant apparaître une inégalité par place. Plus précisément, soient $\boldsymbol{k}_0$ un corps de nombres, $\mathcal{S}_0$ un ensemble fini de places de $\boldsymbol{k}_0$ et $(\lambda_v)_{v\in\mathcal{S}_0}$ une famille de réels telle que $\sum_{v\in\mathcal{S}_0} \lambda_v \Delta_v(\boldsymbol{k}_0) = 1$. On utilisera des conditions d'approximations du type

$$\mathrm{dist}_v(x, V) \leqslant c_v H_2(x)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S}_0 \tag{1.14}$$

où les c_v sont des constantes réelles. Si l'on choisit $c = \prod_{v\in\mathcal{S}_0} c_v^{\Delta_v}$, il est clair que (1.14) est une hypothèse plus forte que (1.13), mais on verra qu'un décompte sous l'hypothèse forte implique en fait un décompte sous l'hypothèse plus faible (section 4.2 page 118).

Par ailleurs, il est facile de donner à cette condition un sens sur $\overline{\mathbf{Q}}$, de la façon suivante. Si $\boldsymbol{k}$ est une extension finie de $\boldsymbol{k}_0$, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des places v de $\boldsymbol{k}$ qui sont au-dessus d'un élément v_0 de $\mathcal{S}_0$ et on pose $\lambda_v = \lambda_{v_0}$ ainsi que $c_v = c_{v_0}$. On a toujours

$$\sum_{v\in\mathcal{S}} \lambda_v \Delta_v = 1 \tag{1.15}$$

et il est clair que la condition (1.14) est équivalente à

$$\mathrm{dist}_v(x, V) \leqslant c_v H_2(x)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S}\ .$$

Remarque 1.5.7. Vu que toutes les conditions considérées ont un sens sur $\overline{\mathbf{Q}}$, dans la suite on se préoccupera en général assez peu du corps de nombres utilisé. Sauf indication contraire, $\boldsymbol{k}$ désignera un corps de nombres « assez grand », contenant en particulier un corps de définition des approximations exceptionnelles considérées, et les notations $\mathcal{S}$ et λ_v auront le sens ci-dessus ; en particulier on supposera toujours que (1.15) est satisfait sans forcément le rappeler.

En particulier, dans l'ensemble de ce mémoire, tous les objets considérés (points, variétés, etc.) sont supposés définis sur $\overline{\mathbf{Q}}$ sauf mention explicite du contraire.

1.6 Compléments sur les distances

On commence par établir une expression simple de la distance entre un point et un hyperplan, cas qui sera fondamental pour l'inégalité de Vojta par exemple, puis on étudie les liens entre la distance définie ci-dessus et celle utilisée notamment dans [Phi01]. Certains des résultats établis ici ne sont pas utiles pour le reste

de la thèse[5] mais sont inclus afin de donner une vision assez complète des relations entre ces deux notions.

Par ailleurs, dans toute cette section, contrairement au reste du texte, les objets (points, variétés) considérés ne sont pas supposés définis sur $\overline{\mathbf{Q}}$, les résultats sont valables pour des objets définis sur $\mathbf{C}_v$. En revanche, les résultats d'existence (fait 1.6.2 page suivante en particulier) ne permettent en aucun cas de garantir le caractère algébrique des objets obtenus.

Proposition 1.6.1. *Si E est un hyperplan de $\mathbf{P}^n$, d'équation L, on a*

$$\mathrm{dist}_v(x, E) = \frac{|L(x)|_v}{\|L\|_{2,v}\|x\|_{2,v}} \quad \forall x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}_v)\ .$$

Démonstration. On commence par se ramener au cas $L = X_0$. Pour cela, si v est ultramétrique, on commence par choisir un coefficient de L de valeur absolue maximale : quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que c'est celui d'indice 0. En divisant par ce coefficient, on se ramène au cas $L = X_0 + l_1X_1 + \cdots + l_nX_n$ avec $|l_i|_v \leqslant 1$ entiers. Il est alors facile de voir que le changement de coordonnées donné par $x'_0 = L(x)$ et $x'_i = x_i$ pour $i \geqslant 1$ est une isométrie (son inverse est également à coefficients de module inférieur ou égal à 1), de sorte qu'on s'est bien ramené au cas $L = X_0$ sans modifier les quantités apparaissant dans chacun des deux membres, ni perdre en généralité.

Aux places archimédiennes, on plonge $\boldsymbol{k}_v$ dans $\mathbf{C}$ et on note $\overline{E}$ le relevé de E dans $\mathbf{C}^{n+1}$. On munit ce dernier de la forme hermitienne standard et on considère un vecteur unitaire normal à $\overline{E}$, qu'on note a_0. On complète ce vecteur en une base orthonormée et on considère le changement de coordonnées qui envoie cette base sur la base canonique : étant une transformation unitaire, il ne modifie aucun des deux membres de l'égalité à prouver, et nous ramène bien au cas $L = X_0$.

Par ailleurs, l'égalité qu'on cherche à montrer est banale si $x \in E(\mathbf{C}_v)$. On peut donc supposer que ce n'est pas le cas, et même choisir $(1, x_1, \ldots, x_n)$ comme représentant de x. Le membre de droite est alors égal à $\|x\|_{2,v}^{-1}$.

Soit maintenant $y = (0, y_1, \ldots, y_n) \in E(\mathbf{C}_v)$. On a $x \wedge y = (y_1, \ldots, y_n, x_1y_2 - x_2y_1, \ldots)$ et donc $\|x \wedge y\|_{2,v} \geqslant \|y\|_{2,v}$, avec égalité si et seulement si $(y_1, \ldots, y_n)$ est colinéaire à $(x_1, \ldots, x_n)$. Ainsi, pour tout $y \in E(\mathbf{C}_v)$ on a $\mathrm{dist}_v(x, y) \geqslant \|x\|_{2,v}^{-1}$ et l'égalité est atteinte, ce qui achève la preuve. □

Remarquons que la distance entre points et variétés définie ici ne dépend en fait que de l'ensemble des points de la variété mais pas de la structure géométrique (multiplicités) de celle-ci. Une autre notion de distance, développée dans [Jad96] et [Phi01] pour le cas projectif, et [Rém01a] pour le cas multiprojectif (qui englobe

5. Plus précisément, les seuls résultats utilisés sont la proposition 1.6.1, le lemme 1.6.4 page 21 et la proposition 1.6.6 page 25.

bien sûr le précédent) prend au contraire en compte cette structure. Cette distance est définie par

$$\mathrm{Dist}_v(x, V) = \frac{\mathrm{M}_v(\mathfrak{d}_x f_V)}{\mathrm{M}_v(f_V)\|x\|_{2,v}^{d(u+1)}}$$

où f_V est une forme de Chow de V, son degré est noté d et sa dimension u. Le morphisme $\mathfrak{d}_x$ est défini dans les références citées (p. 88 de [Phi01] par exemple) ; par ailleurs, par rapport à ces références, on considère uniquement la distance d'indice $(1, \ldots, 1)$. Comme pour la notion de distance précédemment définie, on a $0 \leqslant \mathrm{dist}_v(x, V) \leqslant 1$ avec égalité à gauche si et seulement si $x \in V$ (voir la référence précédente).

Nous appellerons cette distance *algébrique*, par opposition à la distance ensembliste définie ci-dessus. Examinons un peu les relations entre ces deux notions. Tout d'abord, dans le cas où $V = \{y\}$ est réduite à un point, on a $\mathrm{dist}_v(x, y) = \mathrm{Dist}_v(x, V)$ d'après [Jad96, p. 50]. Par ailleurs, dans le cas où V est une hypersurface de degré Δ et d'équation F, la proposition 3.6 (p. 64) de cette même référence montre que

$$\mathrm{Dist}_v(x, V) = \frac{|F(x)|_v}{\mathrm{M}_v(F)\|x\|_{2,v}^{\Delta}} .$$

Si V est en fait un hyperplan, on a $\mathrm{M}_v(F) = \|F\|_{2,v}$ d'après la proposition 4, p. 266 de [Phi91] (reprise dans la proposition 2.3, point (ii), p. 23 de [Jad96] sous une forme plus proche de nos notations), de sorte que la proposition 1.6.1 page précédente dit en fait simplement que $\mathrm{Dist}_v(\,\cdot\,, V) = \mathrm{dist}_v(\,\cdot\,, V)$ dans ce cas particulier.

Dans le cas général, on a la comparaison suivante.

Fait 1.6.2. *Pour toute variété $V \subset \mathbf{P}^n$ et tout point $x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}_v)$, il existe un point $y \in V(\mathbf{C}_v)$ tel que* $\mathrm{dist}_v(x, y) \leqslant \mathrm{dist}_v(x, V)^{1/\deg V} e^{\delta_v \gamma_{n+1}}$.

Démonstration. Pour les places infinies, c'est la *closest point property* p. 89 de [Phi01]. Pour les places finies, on constate que la preuve s'adapte, car le résultat crucial (lemme 5.2 de la référence citée) est en fait vrai aux places finies sans le dernier facteur (et en remplaçant évidemment la mesure par la norme du sup). □

Dans l'autre sens, on a le résultat suivant, où la notion de multiplicité utilisée est celle définie dans [Phi89, p. 151].

Proposition 1.6.3. *Pour toute variété $V \subset \mathbf{P}^n$ et tous points $x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}_v)$ et $y \in V(\mathbf{C}_v)$, on a*

$$\mathrm{Dist}_v(x, V) \leqslant \mathrm{dist}_v(x, y)^m \left(2(n+1)^{3/2}\right)^{(m+3ld)\delta_v}$$

où $l = \dim V + 1$, $d = \deg V$ et m est la multiplicité de V en y.

La démonstration repose sur un développement de $\mathfrak{d}f$ autour de y relativement à X, qui permet de quantifier le fait que, $\mathfrak{d}_y f$ étant nul, $\mathfrak{d}_x f$ doit être petit pour x

voisin de y. De façon générale, pour écrire un développement de TAYLOR , il faudra s'assurer de l'existence d'une carte affine $X_i \neq 0$ contenant à la fois x et y. On voit facilement que la non-existence d'un telle carte affine impliquerait $\mathrm{dist}_v(x,y) = 1$, rendant le résultat banal. En pratique, on pourra supposer sans problème que x et y sont suffisamment proches. Par ailleurs, il sera utile de pouvoir de plus choisir un indice i de sorte que $|x_i|_v$ (resp. $|y_i|_v$) soit comparable à $\|x\|_{2,v}$ (resp. $\|y\|_{2,v}$). Le lemme élémentaire suivant montre que c'est possible.

Lemme 1.6.4. *Pour chaque $x \in \mathbf{P}^n$, il existe $i \in \{0,\dots,n\}$ tel que $\frac{|x_i|_v}{\|x\|_{2,v}} \geqslant (\frac{1}{\sqrt{n+1}})^{\delta_v}$. De plus, pour le même indice i, pour tout point y satisfaisant $\mathrm{dist}_v(x,y) \leqslant \varepsilon_0$ avec $\varepsilon_0 < (\frac{1}{\sqrt{n+1}})^{\delta_v}$, on a*

$$\frac{|y_i|_v}{\|y\|_{2,v}} \geqslant \left(\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} - \varepsilon_0\right)^{\delta_v} .$$

En particulier, si $\varepsilon_0 < (\frac{1}{4\sqrt{n+1}})^{\delta_v}$ on a $\frac{|y_i|_v}{\|y\|_{2,v}} \geqslant (\frac{1}{2\sqrt{n+1}})^{\delta_v}$ et $y_i \neq 0$.

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de choisir $i \in \{0,\dots,n\}$ maximisant $|x_i|_v$. Afin d'alléger les notations, on supposera par la suite $i = 0$. Pour chaque $z = (z_0,\dots,z_n)$ on notera $\hat{z} = (z_1,\dots,z_n)$ le vecteur obtenu en omettant la première coordonnée. On a alors, vu l'hypothèse sur x et la définition de la distance :

$$\varepsilon_0\|y\|_{2,v}\|x\|_{2,v} \geqslant \|y \wedge x\|_{2,v} \geqslant \|x_0\hat{y} - y_0\hat{x}\|_{2,v} , \tag{1.16}$$

où la deuxième inégalité vient en remarquant que toutes les coordonnées de $x_0\hat{y} - y_0\hat{x}$ apparaissent également comme coordonnées de $y \wedge x$.

On traite d'abord le cas ultramétrique, par l'absurde. En effet, si on avait $|y_0|_v < \|\hat{y}\|_{2,v} = \|y\|_{2,v}$, il viendrait $\|x_0\hat{y}\|_{2,v} > \|y_0\hat{x}\|_{2,v}$ et la propriété ultramétrique appliquée au dernier membre de (1.16) donnerait $\varepsilon_0\|y\|_{2,v}\|x\|_{2,v} \geqslant |x_0|_v\|\hat{y}\|_{2,v}$, puis $\varepsilon_0 \geqslant 1$ contrairement aux hypothèses.

Pour le cas archimédien, l'inégalité triangulaire dans le membre de droite de (1.16) donne $\varepsilon_0\|y\|_{2,v}\|x\|_{2,v} \geqslant |x_0|_v\|\hat{y}\|_{2,v} - |y_0|_v\|\hat{x}\|_{2,v}$. En divisant par $\|y\|_{2,v}\|x\|_{2,v}$ puis en remarquant que $\|\hat{x}\|_{2,v}/\|x\|_{2,v} \leqslant 1$ il vient :

$$\frac{|y_0|_v}{\|y\|_{2,v}} \geqslant \frac{\|\hat{x}\|_{2,v}}{\|x\|_{2,v}} \cdot \frac{|y_0|_v}{\|y\|_{2,v}} \geqslant \frac{\|\hat{y}\|_{2,v}}{\|y\|_{2,v}} \cdot \frac{|x_0|_v}{\|x\|_{2,v}} - \varepsilon_0 \geqslant \frac{\|\hat{y}\|_{2,v}}{\|y\|_{2,v}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \varepsilon_0 .$$

Notons $t = |y_0|_v/\|y\|_{2,v} \in [0;1]$; comme $\|y\|_{2,v}^2 = |y_0|_v^2 + \|\hat{y}\|_{2,v}^2$, on réécrit l'inégalité précédente sous la forme $t \geqslant \sqrt{\frac{1-t^2}{n+1}} - \varepsilon_0$, ou encore :

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right) t^2 + 2t\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 - \frac{1}{n+1} \geqslant 0 ,$$

qui, compte tenu de l'hypothèse sur ε_0 et de la positivité de t, implique :

$$\begin{aligned} t &\geqslant \frac{n+1}{n+2}\sqrt{\frac{-\varepsilon_0^2}{n+1}+\frac{n+2}{(n+1)^2}}-\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\varepsilon_0 \\ &\geqslant \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}-\varepsilon_0\ , \end{aligned}$$

comme annoncé. Le cas particulier s'en déduit immédiatement en substituant. □

Démonstration de la proposition 1.6.3 page 20. Notons qu'on peut supposer $\dim V \geqslant 1$ (donc $n \geqslant 2$) car on sait que les deux distances sont égales si V est un point. On peut de plus supposer que $\mathrm{dist}_v(x,y) < (n+1)^{-9\delta_v/2}$ car sinon la conclusion du lemme est vide, la distance étant de toutes façons bornée par 1. (On peut en fait supposer une majoration plus forte, mais celle-ci est largement suffisante.) Les hypothèses du lemme précédent sont satisfaites ; en l'utilisant (et quitte à renuméroter) on peut supposer que $y_0 = x_0 = 1$, $\|y\|_{2,v} \leqslant (\sqrt{n+1})^{\delta_v}$ et $\|x\|_{2,v} \leqslant (2\sqrt{n+1})^{\delta_v}$.

Par ailleurs, $\|y\|_{2,v} \leqslant \|x\|_{2,v} + \|y-x\|_{2,v} \leqslant \|x\|_{2,v} + \|x\wedge y\|_{2,v}$, car chaque coefficient de $x-y$ est aussi un coefficient de $x\wedge y$. En substituant $\|x\wedge y\|_{2,v} = \mathrm{dist}_v(x,y)\|x\|_{2,v}\|y\|_{2,v}$ et en divisant l'inégalité obtenue par $\|x\|_{2,v}$, compte tenu de l'hypothèse sur la distance, il vient $\|y\|_{2,v}/\|x\|_{2,v} \leqslant 1+(n+1)^{-4} \leqslant 82/81$.

On reprend les notations de la section 4 (page 117) de [Rém01a] concernant le morphisme $\mathfrak{d}$. On regarde $\mathfrak{d}f_V$ comme un polynôme en s à coefficients dans $k[X]$ et on appelle $\mathcal{G}$ la famille de ses coefficients ; chacun d'entre eux est homogène de degré ld et s'annule en y. Plus précisément, d'après [Phi89, p. 151], la multiplicité de V en y est le plus grand entier k tel que les dérivées d'ordre total $k-1$ de toutes les formes de la famille $\mathcal{G}$ soient nulles en y. Le développement d'une forme $G \in \mathcal{G}$ autour du point y s'écrit donc :

$$G(x) = \sum_{k=m}^{ld} \overbrace{\sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N}^n\\|\alpha|=k}} \underbrace{\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^k G}{\partial X^\alpha}(y)\prod_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-y_i)^{\alpha_i}}_{R_{k,\alpha}}}^{R_k}\ .$$

On majore maintenant $|G(x)|_v/\|x\|_{2,v}^{ld}$ en procédant terme à terme.

$$\begin{aligned} \frac{\|R_{k,\alpha}\|_{2,v}}{\|x\|_{2,v}^{ld}} &\leqslant \left\|\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^k G}{\partial X^\alpha}\right\|_{2,v}\|y\|_{2,v}^{ld-k}\|x\wedge y\|_{2,v}^k/\|x\|_{2,v}^{ld} \\ &\leqslant 2^{ld\delta_v}\|G\|_{2,v}\|y\|_{2,v}^{ld-k}\|x\|_{2,v}^k\|y\|_{2,v}^k\,\mathrm{dist}_v(x,y)^k/\|x\|_{2,v}^{ld} \\ &\leqslant \left(\frac{164}{81}\right)^{ld\delta_v}\|G\|_{2,v}\,\mathrm{dist}_v(x,y)^k(\sqrt{n+1})^{k\delta_v}\ . \end{aligned}$$

(Pour la dernière estimation, on a majoré $\|y\|_{2,v}$ par $\sqrt{n+1}$ et $(\|y\|_{2,v}/\|x\|_{2,v})^{ld-k}$ par $(82/81)^{ld}$.) On remarque alors qu'il y a au plus $(n+1)^k$ termes dans R_k :

$$\frac{\|R_k\|_{2,v}}{\|x\|_{2,v}^{ld}} \leqslant \left(\frac{164}{81}\right)^{ld\delta_v} \|G\|_{2,v} \operatorname{dist}_v(x,y)^k (n+1)^{3k\delta_v/2} ,$$

puis, si v est finie, $\|G(x)\|_{2,v}/\|x\|_{2,v}^{ld} \leqslant \|G\|_{2,v} \operatorname{dist}_v(x,y)^m$ par l'inégalité ultramétrique et, si v est infinie :

$$\begin{aligned}\frac{\|G(x)\|_{2,v}}{\|x\|_{2,v}^{ld}} &\leqslant \left(\frac{164}{81}\right)^{ld} \|G\|_{2,v} \sum_{k=m}^{ld} \operatorname{dist}_v(x,y)^k (n+1)^{3k/2} \\ &\leqslant \left(\frac{164}{81}\right)^{ld} \|G\|_{2,v} \operatorname{dist}_v(x,y)^m (n+1)^{3m/2} \cdot \sum_{k=0}^{ld-m} \left(\operatorname{dist}_v(x,y)(n+1)^{3/2}\right)^k ,\end{aligned}$$

où la dernière somme est majorée par $27/26$, d'où finalement :

$$\frac{\|\mathcal{G}(x)\|_{2,v}}{\|x\|_{2,v}^{ld}} \leqslant |||\mathcal{G}|||_{2,v} \operatorname{dist}_v(x,y)^m \left(\frac{27}{26}(n+1)^{3m/2} \left(\frac{164}{81}\right)^{ld}\right)^{\delta_v} . \tag{1.17}$$

La fin de la démonstration consiste alors en des comparaisons de normes et mesures, qu'on peut résumer ainsi (les constantes sont explicitées ci-dessous) :

$$\frac{\mathrm{M}_v(\mathfrak{d}_x f)}{\|x\|_{2,v}^{ld}} \ll \frac{\|\mathfrak{d}_x f\|_{2,v}}{\|x\|_{2,v}^{ld}} = \frac{\|\mathcal{G}(x)\|_{2,v}}{\|x\|_{2,v}^{ld}} \ll |||\mathcal{G}|||_{2,v} = \|\mathfrak{d} f\|_{2,v} \ll \mathrm{M}_v(\mathfrak{d} f) \ll \mathrm{M}_v(f) .$$

Plus précisément, vu la définition de la mesure et une majoration facile de l'intégrale dans cette définition, on a

$$\mathrm{M}_v(\mathfrak{d}_x f) \leqslant \|\mathfrak{d}_x f\|_{2,v} \cdot \exp(\delta_v \cdot ld\gamma_{(n+1)n/2})$$

où l'on a noté $\gamma_j = \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{2i}$. La deuxième majoration est donnée par (1.17) ci-dessus ; pour la troisième on a

$$\|\mathfrak{d} f\|_{2,v} \leqslant \mathrm{M}_v(\mathfrak{d} f) \cdot (n(n+1)^2/2)^{ld\delta_v}$$

d'après (1.4). Pour la dernière, on utilise le fait que la distance est bornée par 1, autrement dit que $\mathrm{M}_v(\mathfrak{d}_x f) \leqslant \mathrm{M}_v(f)$ dès que $\|x\|_{2,v} = 1$: en reportant ceci dans la définition de $\mathrm{M}_v(\,\cdot\,)$ et en intégrant, il vient facilement

$$\mathrm{M}_v(\mathfrak{d} f) \leqslant \mathrm{M}_v(f) \cdot \exp(\delta_v \cdot ld\gamma_{n+1}) .$$

On met alors ces estimations bout à bout et on utilise la majoration classique $\gamma_n \leqslant (1+\log n)/2$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dist}_v(x,V) &\leqslant \exp(\delta_v \cdot ld\gamma_{(n+1)n/2}) \cdot \mathrm{dist}_v(x,y)^m \left(\frac{27}{26}(n+1)^{3m/2}\left(\frac{164}{81}\right)^{ld}\right)^{\delta_v} \\
&\quad \cdot (n(n+1)^2/2)^{ld\delta_v} \cdot \exp(\delta_v \cdot ld\gamma_{n+1}) \\
&\leqslant \mathrm{dist}_v(x,y)^m \left(\frac{27}{26}(n+1)^{3m/2}\right)^{\delta_v} \\
&\quad \cdot \left(\frac{164}{81}\sqrt{\frac{\mathrm{e}n(n+1)}{2}}\,\frac{n(n+1)^2}{2}\,\sqrt{\mathrm{e}(n+1)}\right)^{ld\delta_v} \\
&\leqslant \mathrm{dist}_v(x,y)^m \left(\left(2(n+1)^{3/2}\right)^m \left(2(n+1)^{9/2}\right)^{ld}\right)^{\delta_v}
\end{aligned}$$

en remarquant que $82\mathrm{e}/(81\sqrt{2}) \leqslant 2$, ce qui achève la preuve. □

Les deux dernières propositions permettent donc de comparer la distance algébrique et la distance ponctuelle en toute généralité. On voit bien intervenir la structure géométrique de la variété *via* son degré ou sa multiplicité en un point (évidemment majorée par le degré) respectivement. En conséquence, le corollaire suivant est assez naturel : il montre que les deux distances coïncident dans le cas d'un sous-variété linéaire, ce qu'on savait déjà dans les cas particulier des points et des hyperplans.

Corollaire 1.6.5. *Si V est une sous-variété linéaire de $\mathbf{P}^n$, pour tout point $x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}_v)$ on a* $\mathrm{dist}_v(x,V) = \mathrm{Dist}_v(x,V)$.

Démonstration. Si v est finie, c'est une conséquence immédiate des deux propositions précédentes. Sinon, on utilise la proposition 3.10, p. 76 de [Jad96] et sa preuve, qui montre qu'on peut supposer que V est définie par $X_0 = \cdots = X_k = 0$ et que $x = (0,\ldots,x_k,x_{k+1},0,\ldots,0)$. Si l'on pose $y = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ où le 1 est en $(k+1)$-ième position (en particulier, $y \in V$), on a

$$\mathrm{dist}_v(x,y) = \frac{\|x \wedge y\|_{2,v}}{\|x\|_{2,v}\,\|y\|_{2,v}} = \frac{|x_k|_v}{\|x\|_{2,v}} = \mathrm{Dist}_v(x,V)$$

où la dernière égalité est le résultat de la proposition citée. Par ailleurs, il est clair que pour tout $y \in V$, c'est-à-dire $y = (0,\ldots,0,y_{k+1},\ldots,y_n)$, on a

$$\mathrm{dist}_v(x,y)^2 = \frac{|x_k|_v^2\|y\|_{2,v}^2 + |x_{k+1}|_v \sum_{l=k+2}^n |y_l|_v^2}{\|x\|_{2,v}^2\|y\|_{2,v}^2} \geqslant \frac{|x_k|_v^2}{\|x\|_{2,v}^2} = \mathrm{Dist}_v(x,V)^2$$

ce qui achève la preuve. □

Par ailleurs, dans le cas particulier où V est une hypersurface, on peut obtenir une version un peu plus précise de 1.6.3 page 20 en utilisant l'expression particulière de la distance algébrique dans ce cas. Cette version nous sera utile par exemple pour démontrer une inégalité de Liouville (section 3.2 page 96).

Proposition 1.6.6. *Pour toute hypersurface $V \subset \mathbf{P}^n$ et tous points $x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}_v)$ et $y \in V(\mathbf{C}_v)$, on a*

$$\mathrm{Dist}_v(x, V) \leqslant \mathrm{dist}_v(x, y)^m \left((17/8)^d (n+1)^{d+3m/2}\right)^{\delta_v}$$

où $d = \deg V$ et m est la multiplicité de V en y.

Démonstration. On procède comme pour la propriété précédente, sauf que cette fois-ci on peut seulement supposer que $\mathrm{dist}_v(x, y) \leqslant (4(n+1)^{7/2})^{-\delta_v}$, dont on déduit également que $\|y\|_{2,v}/\|x\|_{2,v} \leqslant 82/81$. On développe alors une équation G de V, et non plus un coefficient de $\mathfrak{d}f$; on obtient ainsi, au lieu de (1.17), la majoration suivante :

$$\frac{|G(x)|_v}{\|x\|_{2,v}^d} \leqslant \|G\|_{2,v} \, \mathrm{dist}_v(x, y)^m \left(\frac{27}{26}(n+1)^{3m/2} \left(\frac{164}{81}\right)^d\right)^{\delta_v} . \tag{1.18}$$

On utilise à nouveau (1.4), qui donne $\|G\|_{2,v} \leqslant \mathrm{M}_v(G)(n+1)^d$, pour conclure. □

2 Inégalité de Vojta

2.1 Cas particulier fondamental

Nous établissons d'abord une inégalité de Vojta effective dans le cas particulier où la variété à approcher est, dans un plongement Θ fixé (*cf.* section 1.5.4 page 13) l'hyperplan $X_0 = 0$; nous verrons plus tard (section 2.7 page 80) que ce cas implique le cas général. On rappelle la remarque 1.5.7 page 18 concernant le sens à donner à la condition (2.1) dans l'énoncé suivant.

Théorème 2.1.1. *Soient E l'hyperplan défini par $X_0 = 0$ dans le plongement fixé et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Pour tout $m \geqslant g+1$, il n'existe dans $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ aucune famille de points $x_1, \ldots, x_m$ satisfaisant simultanément aux conditions suivantes :*

$$0 < \mathrm{dist}_v(x_i, E) < H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S} \tag{2.1}$$

$$\hat{h}(x_1) > \alpha_{\mathrm{V}} \tag{2.2}$$

$$\cos(x_i, x_j) > 1 - \gamma_{\mathrm{V}} \tag{2.3}$$

$$\hat{h}(x_i) > \beta_{\mathrm{V}} \hat{h}(x_{i-1}) \tag{2.4}$$

avec

$$\alpha_{\mathrm{V}} = 4c_{1,\Theta} \Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(m-1)} \tag{2.5}$$

$$\beta_{\mathrm{V}} = 4m\Lambda^{2mf(m)} \tag{2.6}$$

$$\gamma_{\mathrm{V}} = \frac{1}{m}\left(\frac{\varepsilon}{85N \cdot 5^g}\right)^{\frac{m}{m-g}} \tag{2.7}$$

$$\Lambda = \max\left((\deg \mathcal{A})^m, 5m^2\left(85N \cdot 5^g \cdot \varepsilon^{-1}\right)^{\frac{m}{m-g}} \deg \mathcal{A}, (\sqrt{2}mg)^{mg}\right) \tag{2.8}$$

$$f(u) = \prod_{i=u+1}^{mg} (2i+1) \tag{2.9}$$

$$c_{1,\Theta} = \max(h_1(f_{\mathcal{A}}), c_\Theta, \hat{c}_\Theta, n\log(n+1)) \tag{2.10}$$

La démonstration de ce théorème occupera la majeure partie de ce chapitre, jusqu'à la section 2.7 page 80 non incluse.

Remarquons que dans l'énoncé ci-dessus, E n'est pas une sous-variété de $\mathcal{A}$, cependant il est clair que si dans la condition (2.1) on remplace E par $E \cap \mathcal{A}$, on obtient une condition plus forte : $\mathrm{dist}_v(x, E) \leqslant \mathrm{dist}_v(x, E \cap \mathcal{A})$ et $x \notin E \cap \mathcal{A} \Leftrightarrow x \notin E$ pour $x \in \mathcal{A}$. Ainsi, l'énoncé ci-dessus est légèrement plus fort que le même énoncé en remplaçant E par $E \cap \mathcal{A}$ dans la condition d'approximation.

2.2 Réduction et autres préliminaires

On rappelle pour commencer que d'après la proposition 1.6.1 page 19, on a $\mathrm{dist}_v(x, E) = |x_0|_v / \|x\|_{2,v}$, ce qui est une motivation pour traiter en premier le cas où $E = \mathcal{Z}(X_0)$, l'autre raison étant que l'indice d'annulation le long de E admet une définition particulièrement commode à manipuler dans ce cas (section 2.3 page 44).

Notons pour commencer qu'on peut supposer $\varepsilon < 1$, car sinon l'inégalité de la taille appliquée à l'expression de la distance ci-dessus montre qu'il n'existe aucun point satisfaisant (2.1), sans même utiliser les autres conditions. De même, on peut supposer que E ne contient pas $\mathcal{A}$ car sinon il n'existe aucun point satisfaisant (2.1).

2.2.1 Poids associés à une famille d'approximations

La démonstration procède par l'absurde : si le théorème est faux, fixons une famille $e_1, \ldots, e_m$ qui le contredit. Bien que cette famille soit toujours supposée satisfaire à toutes les conditions du théorème, nous préciserons dans les hypothèses de la plupart des énoncés suivants la ou lesquelles de ces conditions nous utilisons, par souci de clarté.

Nous utiliserons des combinaisons linéaires des e_i de petite hauteur. Les lemmes suivants permettent de choisir les coefficients pour ces combinaisons ; nous les prendrons entiers et n'ayant que 2 et 3 pour diviseurs premiers, de sorte à disposer de représentations polynomiales convenables des formes linéaires abéliennes associées satisfaisant (1.9) et (1.10).

Lemme 2.2.1. *Soit $\zeta > 0$ un réel et supposons qu'aucun des e_i n'est de torsion. Il existe des entiers $a_i \in 2^{\mathbf{N}} 3^{\mathbf{N}}$ tels que, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$:*

$$\frac{1}{1+\zeta} \leqslant \frac{a_i^2 \hat{h}(e_i)}{a_1^2 \hat{h}(e_1)} \leqslant 1 + \zeta \,. \tag{2.11}$$

Démonstration. L'hypothèse qu'aucun des e_i n'est de torsion garanti que le quotient des $\hat{h}(e_i)/\hat{h}(e_1)$ est bien défini et n'est jamais nul. On commence par choisir des rationnels $b_i = 2^{b_{i2}} 3^{b_{i3}}$ tels que

$$\frac{1}{1+\zeta} \leqslant b_i^2 \frac{\hat{h}(e_i)}{\hat{h}(e_1)} \leqslant 1 + \zeta \,,$$

soit en prenant les logarithmes et en divisant par deux :

$$\left| b_{i2} \log 2 + b_{i3} \log 3 + \frac{1}{2} \log \frac{\hat{h}(e_i)}{\hat{h}(e_1)} \right| \leqslant \frac{1}{2} \log(1+\zeta) \,.$$

Comme $\mathbf{Z} \log 2 + \mathbf{Z} \log 3$ est dense dans $\mathbf{R}$, il est certainement possible de choisir indépendamment pour chaque i deux entiers b_{i2} et b_{i3} tels que cette dernière condition soit satisfaite.

Il ne reste plus qu'à définir a_1 comme un dénominateur commun des b_i puis à poser $a_i = a_1 b_i$ pour tout $i > 1$. Notons que ceci nous permet de choisir les a_i arbitrairement grands, car seuls leurs rapports comptent. □

En utilisant les inégalités élémentaires $(1+\zeta)^{-1} \geqslant 1-\zeta$ et $(1+\zeta)^{1/2} \leqslant 1+\zeta/2$, on en déduit facilement que pour toute famille (a_i) satisfaisant à (2.11), on a

$$\big|a_i|e_i| - a_1|e_1|\big| \leqslant \frac{\zeta}{2} a_1|e_1| \quad \text{et} \quad \big|a_i|e_i| - a_j|e_j|\big| \leqslant \zeta a_1|e_1| \tag{2.12}$$

pour tous i et j, où $|\cdot| = \hat{h}(\,\cdot\,)^{1/2}$ désigne la norme de Néron-Tate. Cette inégalité nous sera utile pour démontrer le lemme suivant.

Lemme 2.2.2. *Soient $\zeta > 0$ et (a_i) une famille d'entiers satisfaisant à* (2.11) *(on suppose qu'aucun e_i n'est de torsion). Si de plus la famille (e_i) satisfait à* (2.3)*, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ on a $\hat{h}(a_i e_i - a_m e_m) \leqslant a_1^2 \hat{h}(e_1)\,\big(\zeta^2 + 2\gamma_{\mathrm{V}}(1+\zeta)\big)$.*

Démonstration. En développant le membre de gauche, il vient successivement

$$\begin{aligned}
|a_i e_i - a_m e_m|^2 &= |a_i e_i|^2 + |a_m e_m|^2 - 2\langle a_i e_i, a_m e_m\rangle \\
&= a_i^2 |e_i|^2 + a_m^2 |e_m|^2 - 2a_i a_m \langle e_i, e_m\rangle \\
&= (a_i|e_i| - a_m|e_m|)^2 + 2a_i a_m\,(|e_i||e_m| - \langle e_i, e_m\rangle) \\
&\leqslant (a_i|e_i| - a_m|e_m|)^2 + 2a_i a_m |e_i||e_m|\gamma_{\mathrm{V}} && \text{d'après (2.3)} \\
&\leqslant (\zeta a_1|e_1|)^2 + 2\left(a_1|e_1|\sqrt{1+\zeta}\right)^2 \gamma_{\mathrm{V}} && \text{d'après (2.12) et (2.11)}
\end{aligned}$$

qui donne le résultat annoncé en factorisant $(a_1|e_1|)^2 = a_1^2 \hat{h}(e_1)$. □

Notations 2.2.3. On choisit désormais et jusqu'à la fin du chapitre une famille (a_i) donnée par l'application du lemme 2.2.1 page précédente avec $\zeta = \sqrt{\gamma_{\mathrm{V}}}/2$ (en effet, (2.2) et (2.4) garantissent qu'aucun e_i n'est de torsion) et a_1 assez grand [1] (ce qui est possible car seuls les rapports entre les différents a_i importent).

En remarquant que $\gamma_{\mathrm{V}} < 1/2$, le lemme précédent et la relation (2.11) donnent immédiatement les relations :

$$\hat{h}(a_i e_i - a_m e_m) \leqslant 3\gamma_{\mathrm{V}} a_1^2 \hat{h}(e_1) \tag{2.13}$$

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{a_i^2 \hat{h}(e_i)}{a_1^2 \hat{h}(e_1)} \leqslant 2\,. \tag{2.14}$$

Les estimations de la deuxième ligne sont un peu larges mais suffiront amplement en pratique.

1. Ce qui sera utilisé à la section 2.4.2 page 60, voir en particulier (2.49) et le dernier paragraphe de la section citée.

Jusqu'à présent nous avons surtout exploité l'hypothèse (2.3), pour (2.13). En tenant compte de l'hypothèse (2.4), on voit de plus que la suite $a_1^2, \dots, a_m^2$ décroît au moins comme une suite géométrique de raison inférieure à 1. Plus précisément, dès que e satisfait (2.4), on a

$$a_i^2 \leqslant (1+\zeta) \cdot \frac{a_1^2}{\beta_{\mathrm{V}}^{i-1}}$$

en appliquant directement la définition de a_i. On peut ainsi majorer des sommes faisant intervenir les a_i^2 en fonction de a_1^2 ; par exemple, l'énoncé suivant nous sera utile par la suite.

Lemme 2.2.4. *On a* $\sum_{i=1}^{m-1}(a_i^2 + a_m^2) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i^2 \leqslant 2a_1^2$, *où l'on a noté* $\eta_i = 1$ *si* $i < m$ *et* $\eta_m = m-1$.

Démonstration. En effet, on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1^2}\sum_{i=1}^{m-1}(a_i^2 + a_m^2) &= 1 + \frac{(m-1)a_m^2}{a_1^2} + \sum_{i=2}^{m-1}\frac{a_i^2}{a_1^2} \\
&\leqslant 1 + \frac{m(1+\zeta)}{\beta_{\mathrm{V}}^{m-1}} + (1+\zeta)\sum_{i=2}^{m-1}\beta_{\mathrm{V}}^{-i+1} \\
&\leqslant 1 + (1+\zeta)\left(\left(\frac{2}{\beta_{\mathrm{V}}}\right)^{m-1} + \frac{1}{\beta_{\mathrm{V}}-1}\right) .
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit d'observer que $\beta_{\mathrm{V}} > 4$ et que $\gamma_{\mathrm{V}} < 1/9$. □

2.2.2 Réduction à l'existence d'une forme motrice

Nous regardons $e = (e_i)$ comme un point de $\mathcal{A}^m$ plongée dans $(\mathbf{P}^n)^m$, et introduisons l'ensemble $\mathcal{V}(e)$ des sous-variétés produit $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_m$ de $\mathcal{A}^m$ qui contiennent e et satisfont aux majorations suivantes, où les notions de degré et de hauteurs s'entendent dans le plongement Θ^m et où l'on rappelle la notation $\eta_i = 1$ si $i < m$ et $\eta_m = m-1$:

$$\max_i D_i \leqslant B = c_2^{-1}\,\Lambda^{f(u)} \tag{2.15}$$

$$\prod_{i=1}^{m} D_i \leqslant \Lambda^{f(u)} \tag{2.16}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i^2 h_1(f_{Z_i}) \leqslant c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} a_1^2 , \tag{2.17}$$

où l'on a noté $D_i = \deg Z_i$ et $u = \dim Z$, ainsi que

$$c_2 = 5m^2\big(85N \cdot 5^g \cdot \varepsilon^{-1}\big)^{\frac{m}{m-g}} \tag{2.18}$$

de sorte que l'ensemble $\mathcal{V}(e)$ ne dépend de e que par la condition $e \in Z$ et les rapports entre les a_i.

Pour commencer, remarquons que cet ensemble n'est pas vide puisqu'il contient $\mathcal{A}^m$. En effet, la définition de Λ (deux premiers arguments du maximum) assure que (2.15) et (2.16) sont satisfaits ; le fait que $c_{1,\Theta} \geqslant h_1(\mathcal{A})$, que $\Lambda > 2$ et le lemme 2.2.4 page précédente garantissent que la condition (2.17) l'est aussi.

Nous allons voir qu'à partir d'une variété dans $\mathcal{V}(e)$ on peut en fabriquer une plus petite, pour peu que la variété initiale n'ait aucun facteur réduit à un point. Pour cela, on utilise la proposition suivante.

Proposition 2.2.5. *Soit $Z \in \mathcal{V}(e)$ n'ayant aucun facteur de dimension nulle. Alors il existe un i et une forme T ne dépendant que de $X^{(i)}$, s'annulant en e mais pas identiquement sur Z, telle que*

$$\deg T \leqslant \Lambda^{2uf(u)}$$

$$\eta_i a_i^2 h_\infty(T) \leqslant g\Lambda^{2uf(u)} \left(6 \sum_{j=1}^{m} \eta_j a_j^2 h_1(f_{Z_j}) + 3a_1^2 c_{1,\Theta} \Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} \right).$$

Supposons un instant cet énoncé acquis et voyons comment on en déduit le théorème 2.1.1 page 27 ; nous appelons « motrice » la forme T de la proposition car c'est elle qui « fait marcher la machine » en permettant la construction itérative dans la démonstration ci-dessus.

Démonstration du théorème 2.1.1 page 27. Voyons comment, en partant d'une variété Z satisfaisant aux hypothèses de la proposition, on peut fabriquer une variété Z' plus petite et appartenant toujours à $\mathcal{V}(e)$: on utilise la forme T fournie par la proposition et on note Z' la variété égale à Z sur tous les facteurs sauf le i-ème où on choisit une composante irréductible de $Z_i \cap \mathcal{Z}(T)$ qui contient e_i, de sorte que Z' est une variété strictement contenue dans Z et qui contient e.

Restent donc à vérifier les conditions (2.15) à (2.17) ; pour les deux premières (degrés), le théorème de Bézout donne

$$\deg Z_i' \leqslant D_i \deg T$$

ce qui montre que les quantités apparaissant dans les conditions (2.15) et (2.16) sur les degrés sont au plus multipliées par $\deg T \leqslant \Lambda^{2uf(u)}$ en passant de Z à Z'. Or, par définition de f on a

$$f(u-1) = 2uf(u) + f(u) \tag{2.19}$$

donc ces conditions sont à nouveau satisfaites par Z'.

Pour la condition sur la hauteur, on utilise la formule suivante (*arithmetic Bézout theorem*, [Phi01, p. 87]) :

$$h_{\mathrm{P}}(f_{Z_i'}) \leqslant \deg Z_i \cdot h_{\mathrm{m}}(T) + \deg T \cdot h_{\mathrm{P}}(f_{Z_i})$$

où h_{m} est la hauteur désignée par h_1 dans la référence citée et par h_m dans [Rém01b], dont le lemme 5.2 assure par ailleurs que $h_{\mathrm{m}}(T) \leqslant h_\infty(T) + \sqrt{n}$. En utilisant (1.6) pour se ramener aux hauteurs qui nous intéressent, le théorème de Bézout arithmétique s'écrit donc, dans notre cas (en notant $u_i = \dim Z_i$) :

$$\begin{aligned}
h_1(f_{Z_i'}) &\leqslant \deg Z_i\big(h_\infty(T) + \sqrt{n}\big) + \deg T\Big(h_1(f_{Z_i}) + (u_i+1)(\deg Z_i)\log(n+1)\Big) \\
&\quad + u_i(\deg Z_i')\log(n+1) \\
&\leqslant B\big(h_\infty(T) + n\big) + \deg T\Big(h_1(f_{Z_i}) + ngB\Big) + ngB\deg T \\
&\leqslant \Lambda^{2uf(u)}h_1(f_{Z_i}) + Bh_\infty(T) + 3ngB\Lambda^{2uf(u)}
\end{aligned}$$

et finalement, en multipliant par $\eta_i a_i^2$ et en majorant dans le dernier terme cette quantité par a_1^2, puis en utilisant l'information sur la hauteur de T fournie par la proposition :

$$\begin{aligned}
\eta_i a_i^2 h_1(f_{Z_i'}) &\leqslant \eta_i a_i^2\Lambda^{2uf(u)}h_1(f_{Z_i}) + 3a_1^2 ngB\Lambda^{2uf(u)} + \eta_i a_i^2 Bh_\infty(T) \\
&\leqslant \eta_i a_i^2\Lambda^{2uf(u)}h_1(f_{Z_i}) + 3a_1^2 ngB\Lambda^{2uf(u)} \\
&\qquad + Bg\Lambda^{2uf(u)}\left(6\sum_{j=1}^m \eta_j a_j^2 h_1(f_{Z_j}) + 3a_1^2 c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)}\right) \\
&\leqslant \Lambda^{2uf(u)}\left(\eta_i a_i^2 h_1(f_{Z_i}) + Bg\Big(6\sum_{j=1}^m \eta_j a_j^2 h_1(f_{Z_j}) + 4a_1^2 c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)}\Big)\right)
\end{aligned}$$

en remarquant que $3n \leqslant c_{1,\Theta}\Lambda$ pour intégrer le deuxième terme de la deuxième ligne dans celui en $c_{1,\Theta}$.

Nous pouvons maintenant substituer cette estimation dans la somme pondérée des hauteurs :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m \eta_j a_j^2 h_1(f_{Z_j'}) &= \sum_{j\neq i}\eta_j a_j^2 h_1(f_{Z_j}) + \eta_i a_i^2 h_1(f_{Z_i'}) \\
&\leqslant \Lambda^{2uf(u)}\sum_{j\neq i}\eta_j a_j^2 h_1(f_{Z_j}) + \Lambda^{2uf(u)}\eta_i a_i^2 h_1(f_{Z_i}) \\
&\qquad + Bg\Lambda^{2uf(u)}\Big(6\sum_{j=1}^m \eta_j a_j^2 h_1(f_{Z_j}) + 4a_1^2 c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)}\Big) \\
&\leqslant 7Bg\Lambda^{2uf(u)}\Big(\sum_{j=1}^m \eta_j a_j^2 h_1(f_{Z_j}) + a_1^2 c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)}\Big) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\Lambda^{(2u+1)f(u)}\Big(\sum_{j=1}^m \eta_j a_j^2 h_1(f_{Z_j}) + a_1^2 c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)}\Big) \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $7Bg$ est (largement) majoré par $\Lambda^{f(u)}/2$ d'après (2.15). Il ne reste plus qu'à appliquer l'hypothèse de hauteur sur Z, à savoir (2.17), pour

obtenir

$$\sum_{j=1}^{m} \eta_j a_j^2 h_1(f_{Z'_j}) \leqslant a_1^2 c_{1,\Theta} \Lambda^{(2u+2+\frac{1}{m})f(u)}$$

qui achève de montrer que $Z' \in \mathcal{V}(e)$ car

$$(2u+2+\frac{1}{m})f(u) \leqslant (2u+1)(1+\frac{1}{m})f(u) = (1+\frac{1}{m})f(u-1)\ .$$

On peut ainsi, en partant de $\mathcal{A}^m$, construire une suite d'éléments de $\mathcal{V}(e)$ de dimensions décroissantes, jusqu'au moment où l'un des facteurs est réduit à un point, c'est-à-dire que $Z_i = \{e_i\}$ pour un certain i et en particulier $h_1(f_{Z_i}) = h_1(e_i)$ vu l'expression de la forme de Chow d'un point. Par ailleurs, à ce stade on a $u \geqslant m-1$; on en déduit alors, par (2.17) et (1.8),

$$a_i^2 \hat{h}(e_i) \leqslant 2c_{1,\Theta} \Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(m-1)} a_1^2$$

puis, par (2.14),

$$a_1^2 \hat{h}(e_1) \leqslant 4c_{1,\Theta} \Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(m-1)} a_1^2 \tag{2.21}$$

qui contredit directement (2.2). Cette contradiction prouve qu'il est absurde de supposer l'existence d'une famille satisfaisant simultanément toutes les conditions du théorème 2.1.1 page 27. □

Il suffit donc d'établir la proposition 2.2.5 page 31 pour prouver le théorème 2.1.1 page 27 ; la démonstration de cette proposition nous occupera le reste du chapitre. L'intérêt de l'énoncer immédiatement plutôt qu'au moment où nous serons en mesure de l'établir est de pouvoir écarter rapidement quelques cas particuliers pour lesquels la méthode qui suit ne s'applique pas (mais qui sont heureusement immédiats). Nous énoncerons ces cas à la fin de la sous-section suivante après avoir introduit le système de coordonnées dans lequel ils s'expriment naturellement.

Notations 2.2.6. Désormais et jusqu'à la fin du chapitre, nous fixons une variété $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_m$ satisfaisant aux hypothèses de la proposition ; en particulier elle n'est contenue dans aucun hyperplan d'équation $X_0^{(i)} = 0$ puisqu'elle contient e qui n'est d'après (2.1) sur aucun de ces hyperplans, et aucun de ses facteurs n'est réduit à un point.

On notera en outre $u_i = \dim Z_i$ et $u = \dim Z$; observons de suite que $1 \leqslant u_i \leqslant g$ et donc $m \leqslant u \leqslant mg$. Notons également $D_i = \deg Z_i$ et B le majorant commun des D_i donné par (2.15). Enfin, on note f_{Z_i} une[2] forme de Chow de Z_i ainsi que $\mathcal{I}_Z$ l'idéal multihomogène saturé de Z et $\mathcal{I}_{Z_i}$ ceux de ses facteurs.

2. Cette forme est unique à multiplication par un scalaire près ; au besoin on la supposera normalisée de sorte que toutes ses normes locales soient au moins 1, par exemple en faisant en sorte qu'un de ses coefficients soit 1.

La preuve de la proposition 2.2.5 page 31 suit la méthode de Thue-Siegel : on construit d'abord une forme auxiliaire ayant un indice élevé le long de E, puis on montre qu'elle s'annule en e avec un indice plus faible mais toujours élevé par rapport à son degré et on conclut en appliquant une variante du théorème du produit pour obtenir la conclusion de la proposition.

Auparavant, nous aurons besoin de préciser un système de coordonnées adapté à Z et nous présenterons une écriture réduite des formes sur Z dans ce système de coordonnées. Nous présenterons ensuite un plongement éclatant associé aux poids a_i qui permettra d'exploiter (2.13).

2.2.3 Plongements projectifs adaptés

Définition 2.2.7. Suivant [Rém05], si V est une variété de dimension s et $\mathbf{P}^n$ un espace projectif muni de coordonnées homogènes $W_0, \dots, W_n$, on dit qu'un plongement $\iota\colon V \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ est adapté si

(i) $V \cap \mathcal{Z}(W_0, \dots, W_s) = \emptyset$;

(ii) $\mathcal{K}(V)$ est engendré par $\frac{W_1}{W_0}, \dots, \frac{W_{s+1}}{W_0}$;

(iii) $\frac{W_{s+1}}{W_0} \neq 0$ dans $\mathcal{K}(V)$.

Le fait suivant, qui ne fait que rappeler [Rémoob, partie 4.1, p. 114], explicite les principales propriétés d'un plongement adapté, qui est une version plus précise de la mise en position de Noether.

Fait 2.2.8. *Si V de dimension s est plongée dans $\mathbf{P}^n$ de façon adaptée, alors les fonctions rationnelles $\frac{W_1}{W_0}, \dots, \frac{W_s}{W_0}$ forment une base de transcendance de $\mathcal{K}(V)$ sur $\boldsymbol{k}$. De plus, $\frac{W_{s+1}}{W_0}$ est un élément primitif de $\mathcal{K}(V)$ sur $\boldsymbol{k}(\frac{W_1}{W_0}, \dots, \frac{W_s}{W_0})$.*

La projection linéaire $V \to \mathbf{P}^s$ obtenue en ne gardant que les $s+1$ premières variables est un revêtement fini, éventuellement ramifié.

On contrôle en fait des relations de dépendance intégrale des dernières variables sur la base de transcendance choisie.

Fait 2.2.9. *Si le plongement $\iota\colon V \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ est adapté, il existe des formes homogènes P_k pour $k \in \{s+1, \dots, n\}$ telles que :*

(i) $P_k \in \boldsymbol{k}[W_0, \dots, W_s, W_k] \cap \mathcal{I}_V$;

(ii) *P_k est unitaire en W_k, de degré Δ ;*

(iii) $\|P_k\|_{1,v} \leqslant \|f_V\|_{1,v}$ *pour tous v et k ;*

où Δ est le degré de V dans ce plongement.

Démonstration. Le lemme 4.1 de [Rémoob] donne explicitement des formes satisfaisant les deux premières conditions.

Seule l'assertion sur la norme n'y est pas énoncée sous cette forme mais elle vient en remarquant que P_k est une spécialisation de f_Z qui annule certaines variables et remplace les autres par des monômes unitaires. □

Nous établissons maintenant une variante de la proposition 4.1, de [Rémoob] qui montre qu'il est possible de rendre adapté un plongement donné tout en gardant fixe le diviseur E, à peu de frais.

Lemme 2.2.10. *Soit $\iota\colon V \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ une sous-variété de degré Δ, non contenue dans l'hyperplan d'équation $W_0 = 0$. Il existe une transformation linéaire $\chi \in \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbf{Q})$, représentable par une matrice à coefficients entiers de valeur absolue (archimédienne) majorée par $\max(\frac{\Delta}{2}, 1)$, telle que $\chi \circ \iota$ est un plongement adapté à V et que W_0 soit invariant par ce changement de coordonnées.*

Démonstration. On reprend la preuve de la proposition citée (p. 116) ; au moment de choisir des formes linéaires $L_0, \dots, L_n$ telles que

$$f_V(L_0, \dots, L_n) \neq 0 \ ,$$

on commence en fait par fixer $L_0 = W_0$. Le polynôme $f_Z(L_0, \cdot, \dots, \cdot)$ est multihomogène de degré Δ en chaque variable ; vu l'hypothèse sur V, il est non nul grâce au théorème fondamental de l'élimination (*Elimilnation theorem*, page 84 de [Phio1]). On peut donc choisir $L_1, \dots L_s$ comme dans [Rémoob] puis continuer la preuve sans autre modification. □

Nous aurons également besoin de contrôler χ^{-1}. Le lemme suivant établit un résultat général élémentaire sur l'inversion de matrices.

Lemme 2.2.11. *Soit M une matrice $p \times p$ inversible à coefficients entiers. On a alors $H_\infty(M^{-1}) \leqslant (p-1)! \cdot H_\infty(M)^{p-1}$.*

Démonstration. On peut supposer que les coefficients de M sont premiers entre eux, de sorte qu'ils sont tous majorés en valeur absolue par $H_\infty(M)$. On utilise alors les formules de Cramer. On constate d'abord que la contribution de l'inverse du déterminant s'élimine en prenant le produit sur toutes les places, de sorte qu'il s'agit d'estimer la hauteur de la comatrice. Cette dernière est à coefficients entiers, donc de norme inférieur à 1 aux places finies, et la valeur absolue archimédienne des coefficients est majorée par $(p-1)!\, H_\infty(M)^{p-1}$. □

Notations 2.2.12. On fixe désormais des transformations linéaires χ_i obtenues en appliquant le lemme 2.2.10 à chacun des Z_i, de sorte que $\chi_i \circ \Theta$ est adapté à Z_i et on note $D_i' = \max(D_i/2, 1)$.

La construction et le lemme précédent montrent alors que

$$\|\chi_i\|_{\infty,v} \leqslant (D_i')^{\delta_v} \qquad \text{et} \qquad H_\infty(\chi_i^{-1}) \leqslant n! \cdot (D_i')^n \tag{2.22}$$

On note $\tilde{\mathcal{I}}_{Z_i}$ l'idéal homogène saturé de Z_i dans le plongement $\chi_i \circ \Theta$ et $\tilde{f}_{Z_i}$ une forme de CHOW de Z_i dans ces coordonnées. Le théorème de l'élimination montre qu'une telle forme s'obtient en composant f_{Z_i} avec (la transposée de) χ_i sur chacun des $u_i + 1$ groupes de variables ; il est alors clair que

$$\|\tilde{f}_{Z_i}\|_{1,v} \leqslant \|f_{Z_i}\|_{1,v} \cdot \left((n+1)D_i'\right)^{D_i(u_i+1)\delta_v} . \tag{2.23}$$

Par ailleurs, pour $l \in \{u_i, \ldots, n\}$, on notera $P_l^{(i)}$ une relation de dépendance de $X_l^{(i)}$ sur $X_0^{(i)}, \ldots, X_{u_i}^{(i)}$ telle que donnée par l'application du fait 2.2.9 page 34 au facteur Z_i dans le plongement $\chi_i \circ \Theta$. L'estimation précédente et le fait cité donnent une majoration des normes locales de ces polynômes, qu'on peut en fait améliorer en

$$\|P_l^{(i)}\|_{1,v} \leqslant \|f_{Z_i}\|_{1,v} \cdot (2D_i')^{D_i(u_i+1)\delta_v} \tag{2.24}$$

en utilisant le début de la démonstration du lemme 4.2 de [Rémoob] (la suite de la démonstration étant moins pertinente compte tenu des différences de normes utilisées). Cependant, nous utiliserons souvent la majoration plus évidente $\|P_l^{(i)}\|_{1,v} \leqslant \|\tilde{f}_{Z_i}\|_{1,v}$ dans les estimations où cette quantité apparaît déjà par ailleurs.

Notations 2.2.13. On note Q_i la dérivée de $P_{u_i+1}^{(i)}$ par rapport à la dernière variable. Par ailleurs, on fixe $(e_k^{(i)})_k$ un système de coordonnées multihomogènes de e_i dans le plongement Θ et on note $(\tilde{e}_k^{(i)})_k$ l'image de ce dernier par χ_i.

Nous pouvons maintenant énoncer les cas particuliers à exclure dans la démonstration de la proposition 2.2.5 page 31.

Scolie 2.2.14. *Dans la démonstration de la proposition 2.2.5 page 31, on peut supposer que :*

(i) $\tilde{e}_k^{(i)} \neq 0$ *pour tous* i *et* $k \in \{1, \ldots, u_i\}$ *;*

(ii) $Q_i(\tilde{e}^{(i)}) \neq 0$ *pour tout* i*.*

Remarquons qu'on a déjà $\tilde{e}_0^{(i)} \neq 0$ *d'après l'hypothèse* (2.1).

Démonstration. Si le premier point n'est pas satisfait, pour un certain (i, k), on peut prendre $T = X_k^{(i)}$ dans la conclusion de la proposition ; en effet cette forme s'annulle en e mais pas identiquement sur Z_i (car le plongement est adapté) et les conditions de degré et de hauteur sont largement satisfaites.

Si le deuxième point est faux pour un certain i , on choisit cette fois $T = Q_i$ qui convient également : en effet, le caractère adapté du plongement implique que $P_{u_i+1}^{(i)}$ est irréductible et de degré D_i en $X_{u_i+1}^{(i)}$ donc Q_i étant de degré plus petit, ne peut pas s'annuler identiquement sur Z_i. □

2.2.4 Réduction de formes sur une variété plongée de façon adaptée

Les propriétés des plongements adaptés permettent d'associer à chaque forme homogène, à peu de choses près, une représentation canonique modulo $\tilde{\mathcal{I}}_Z$, définie par des restrictions de degrés en certaines variables. Introduisons pour cela quelques notations : pour chaque $C \in (\mathbf{N} \cup \{+\infty\})^{m(n+1)}$, on notera

$$\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]^C = \{H \in \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}] \text{ tel que } \deg_{X_k^{(i)}} H \leqslant C_k^{(i)} \quad \forall i, k\} \ . \tag{2.25}$$

Pour tout $\Delta \in \mathbf{N}^m$ on définit trois tels vecteurs C'_Δ, C'' et C'''_Δ par :

$$(C'_\Delta)_k^{(i)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } k \leqslant u_i \\ \Delta_i - 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (C'')_k^{(i)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } k \leqslant u_i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.26}$$

$$(C'''_\Delta)_k^{(i)} = \min\big((C'_\Delta)_k^{(i)}, (C'')_k^{(i)}\big) \ ,$$

pour $0 \leqslant i \leqslant m$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Par ailleurs, on omettra l'indice Δ lorsqu'il est égal à D (le vecteur des degrés de Z) pour alléger les notations.

L'intérêt de $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]^{C'''}$ est que, le plongement étant adapté, son intersection avec $\tilde{\mathcal{I}}_Z$ est réduite à 0 : en effet, $X_{u_i+1}^{(i)}$ est de degré D_i sur les variables précédentes, il n'est donc pas possible qu'un polynôme de degré en $X_{u_i+1}^{(i)}$ strictement inférieur à D_i (et ne dépendant pas des variables suivantes) soit dans $\tilde{\mathcal{I}}_Z$ sans être nul. Par ailleurs, on peut facilement vérifier que les dimensions des parties homogènes de degré β, notées $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]_\beta^{C'''}$ et $(\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]/\tilde{\mathcal{I}}_Z)_\beta$ sont données par des polynômes en β ayant le même terme dominant, de sorte que le morphisme de réduction, qui est injectif, n'est pas très loin d'être un isomorphisme en degré assez grand.

Nous allons maintenant expliciter, en chaque multidegré $\beta \in \mathbf{N}^m$, une application linéaire ρ^β définie sur la partie homogène $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]_\beta$ et à valeurs dans $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]^{C'''}$, qui permet par exemple de déterminer l'appartenance à $\tilde{\mathcal{I}}_Z$ d'une forme homogène.

L'idée générale est la suivante : on peut exploiter les relations de dépendance des dernières variables sur les premières données par le fait 2.2.9 page 34 pour réduire le degré en les dernières variables, et le deuxième point de la définition 2.2.7 page 34 permet même d'éliminer totalement les variables d'indice strictement supérieur à $u_i + 1$, à condition de multiplier par un certain dénominateur intervenant dans ces relations de dépendance rationnelles.

Il sera essentiel par la suite que ce dénominateur puisse être choisi indépendamment du degré considéré ; pour cela l'application ρ sera la composée des trois étapes suivantes : une application ρ_{div} arrivant dans $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]^{C'}$, c'est-à-dire faisant chuter le degré en les dernières variables par division euclidienne, une application $\rho_{\text{élim}}$ arrivant dans $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]^{C''}$, c'est-à-dire éliminant les toutes dernières variables en faisant éventuellement croître le degré en $X_{u_i+1}^{(i)}$, et une dernière application ρ_{div} pour limiter à nouveau ce degré et arriver dans $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]^{C'''}$.

Avant de procéder à la construction des applications évoquées, soulignons qu'il s'agit d'applications linéaires définies sur chaque partie homogène de $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]$ mais en aucun cas de morphismes d'algèbres, les espaces d'arrivée n'étant eux-mêmes pas des algèbres.

Pour construire l'application ρ_{div} on commence par énoncer un résultat de réduction modulo des relations de dépendance intégrale sous une forme un peu générale avant de l'appliquer au cas qui nous intéresse.

Lemme 2.2.15. *Pour $i \in \{1, \dots, m\}$ et $k \in \{u_i + 1, \dots, n\}$, on se donne :*

(i) $\Delta_i \in \mathbf{N}^*$ *;*

(ii) $P_k^{(i)} \in \boldsymbol{k}[X_0^{(i)}, \dots, X_{u_i}^{(i)}, X_k^{(i)}]$ *homogène de degré Δ_i et unitaire en $X_k^{(i)}$.*

On note $N_i = \max_k \|P_k^{(i)}\|_{1,v}$ et $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par les $P_k^{(i)}$. En tout multidegré $\beta \in \mathbf{N}^m$, il existe une (unique) application linéaire

$$\rho_{\mathrm{div}}^{\beta} \colon \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]_{\beta} \to \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]_{\beta}^{C'_{\Delta}}$$

qui est l'identité modulo $\mathcal{I}$ (voir (2.25) *et* (2.26) *pour la définition de l'espace d'arrivée). De plus les colonnes c_p de la matrice de cette application dans les bases de monômes satisfont la majoration de norme*

$$\|c_p\|_{1,v} \leqslant \prod_{i=1}^{m} \left(N_i \cdot (2\Delta_i)^{\delta_v}\right)^{\beta_i}$$

pour tout $p \in \mathbf{N}^{m(n+1)}$ de multilongueur β, et l'image de $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]_{\beta}^{C''}$ par $\rho_{\mathrm{div}}^{\beta}$ est contenue dans $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]_{\beta}^{C'''_{\Delta}}$.

Démonstration. C'est essentiellement une variante du lemme 2.5 de [Rém05], notre résultat étant formulé différemment et dans un cadre d'apparence un peu moins générale ; la preuve suivra en tout cas les mêmes lignes. On commence par décomposer chaque $P_k^{(i)}$ de la façon suivante :

$$P_k^{(i)} = (X_k^{(i)})^{\Delta_i} + \sum_{\alpha=1}^{\Delta_i} P_{k,\alpha}^{(i)} \cdot (X_k^{(i)})^{\Delta_i - \alpha} ,$$

où $P_{k,\alpha}^{(i)} \in \boldsymbol{k}[X_0^{(i)}, \dots, X_{u_i}^{(i)}]$. On a alors $(X_k^{(i)})^{\Delta_i} \equiv -\sum_{\alpha=1}^{\Delta_i} P_{k,\alpha}^{(i)} \cdot (X_k^{(i)})^{\Delta_i - \alpha} \mod \mathcal{I}$ et plus généralement, le lemme 2.4 de [Rém05] fournit pour tout $q \in \mathbf{N}$ et tout $\alpha \in \{1, \dots, \Delta_i\}$ un polynôme U_{q,α,Δ_i} tel que si l'on pose, pour $i \in \{1, \dots, m\}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$R_{i,k,q} = \begin{cases} (X_k^{(i)})^q & \text{si } k \leqslant u_i \,; \\ \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{\Delta_i} U_{q,\alpha,\Delta_i}(P_{k,1}^{(i)}, \dots, P_{k,\Delta^{(i)}}^{(i)})(X_k^{(i)})^{\Delta_i - \alpha} & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors $R_{i,k,q} \equiv (X_k^{(i)})^q \mod \mathcal{I}$ et on a l'estimation de norme

$$\|R_{i,k,q}\|_{1,v} \leqslant \left(\|P_k^{(i)}\|_{1,v}(2\Delta_i)^{\delta_v}\right)^q .$$

On définit alors $\rho_{\mathrm{div}}^{\beta}$ par son action sur les monômes, en posant pour tout $p \in \mathbf{N}^{m(n+1)}$:

$$c_p = \rho_{\mathrm{div}}^{\beta}(\boldsymbol{X}^p) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{k=0}^{n} R_{i,k,p_k^{(i)}}$$

et en prolongeant par linéarité. L'estimation de norme annoncée découle directement de la majoration précédente en prenant le produit.

Par ailleurs, il est clair que si une forme ne fait intervenir que les variables $X_k^{(i)}$ pour $k \leqslant u_i + 1$, il en est de même de son image. En effet, $\rho_{\mathrm{div}}^{\beta}$ consiste à substituer, dans chaque monôme, le facteur en $X_k^{(i)}$ (pour $k > u_i$) par un polynôme en $X_0^{(i)}, \ldots, X_{u_i}^{(i)}$ et ne peut donc pas introduire de variables $X_k^{(i)}$ pour $k > u_i$. □

Corollaire 2.2.16. *Pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^m$, il existe une application linéaire $\rho_{\mathrm{div}}^{\alpha}$ égale à l'identité modulo $\tilde{\mathcal{I}}_Z$, dont la matrice dans la base monomiale canonique a des colonnes de normes $\|\cdot\|_{1,v}$ majorées par*

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\|f_{Z_i}\|_{1,v} 2B^{(B(g+1)+1)\delta_v}\right)^{\alpha_i} .$$

Démonstration. Découle directement du lemme précédent en utilisant (2.24) et en remarquant que

$$(2D_i')^{D_i(u_i+1)} \cdot 2D_i \leqslant 2B^{(B(g+1)+1)}$$

car d'après (2.15), B est un majorant commun des D_i et donc de $2D_i'$, et pour tout i on a $u_i \leqslant g$. □

Intéressons-nous maintenant au morphisme $\rho_{\text{élim}}$.

Lemme 2.2.17. *Soient, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et tout $k \in \{u_i + 1, \ldots n\}$, des formes $S_k^{(i)} \in \boldsymbol{k}[X_0^{(i)}, \ldots, X_{u_i}^{(i)}]$ et $T_k^{(i)} \in \boldsymbol{k}[X_0^{(i)}, \ldots, X_{u_i+1}^{(i)}]$ telles que $\deg S_k^{(i)} + 1 = \deg T_k^{(i)}$ et des entiers Δ_i. On note $\mathcal{I}_{S,T}$ l'idéal engendré par les $S_k^{(i)} X_k^{(i)} - T_k^{(i)}$.*

Posons $R = \prod_{i=1}^{m}\prod_{k=u_i+1}^{n}(S_k^{(i)})^{\Delta_i}$ et $r = \deg R$; la multiplication par R modulo $\mathcal{I}_{S,T}$ est alors représentée en tout degré $\alpha \in \mathbf{N}^m$ par une application linéaire

$$\rho_{\text{élim}}^{\alpha} \colon \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]_{\alpha}^{C'_{\Delta}} \to \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]_{\alpha+r}^{C''}$$

telle que les colonnes $c_q^{\rho_{\text{élim}}}$ de sa matrice dans les bases de monômes satisfont

$$\|c_q^{\rho_{\text{élim}}}\|_{1,v} \leqslant \prod_{i=1}^{m} N_i^{\Delta_i}$$

pour tout q de multilongueur α, où N_i majore $\|S_k^{(i)}\|_{1,v}$ et $\|T_k^{(i)}\|_{1,v}$ pour tout k.

Démonstration. Soit R défini comme dans l'énoncé, et $\boldsymbol{X}^q$ un monôme de l'espace de départ. Par hypothèse, $q_k^{(i)} < \Delta_i$ pour tout i et $k \leqslant u_i + 1$, de sorte que l'on peut poser

$$\rho_{\text{élim}}(\boldsymbol{X}^q) = \prod_{i=1}^{m} \left(\prod_{k=1}^{u_i} (X_k^{(i)})^{q_k^{(i)}} \prod_{k=u_i+1}^{n} (T_k^{(i)})^{q_k^{(i)}} (S_k^{(i)})^{\Delta_i - q_k^{(i)}} \right)$$

et prolonger par linéarité. On vérifie immédiatement que $\rho_{\text{élim}}(\boldsymbol{X}^q)$ est congru à $R \cdot \boldsymbol{X}^q$ modulo $\mathcal{I}_{S,T}$, de même que l'estimation de norme annoncée. □

Dans l'énoncé suivant, on rappelle que $C' = C'_D$, comme indiqué en-dessous de (2.26).

Corollaire 2.2.18. *Il existe une forme $R \in \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]^{C''}$ ne dépendant que de Z et n'appartenant pas à $\tilde{\mathcal{I}}_Z$, et une application linéaire*

$$\rho_{\text{élim}}^{\alpha} \colon \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]_{\alpha}^{C'} \to \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]_{\alpha+r}^{C''}$$

où $r = \deg R$, qui est la multiplication par R modulo $\tilde{\mathcal{I}}_Z$. De plus, les colonnes de la matrice de $\rho_{\text{élim}}^{\alpha}$ dans les bases monomiales canoniques ont leur norme $\|\cdot\|_{1,v}$ majorée par

$$\prod_{i=1}^{m} (N_i')^{D_i} ,$$

où N_i' est une constante ne dépendant pas de α.

Démonstration. Il suffit d'établir l'existence de familles S et T comme dans l'énoncé du lemme précédent, telles que $\mathcal{I}_{S,T} \subset \tilde{\mathcal{I}}_Z$ et $S \notin \tilde{\mathcal{I}}_Z$; elle découle du fait qu'on a utilisé un plongement adapté. En effet, d'après le fait 2.2.8 page 34, pour tous i et k, il existe des formes $A_{k,\beta}^{(i)}$ et $B_{k,\beta}^{(i)}$ dans $\boldsymbol{k}[X_0^{(i)}, \ldots, X_{u_i}^{(i)}]$ telles que $B_{k,\beta}^{(i)} \notin \tilde{\mathcal{I}}_Z$ et

$$\frac{X_k^{(i)}}{X_0^{(i)}} = \sum_{\beta=0}^{D_i-1} \frac{A_{k,\beta}^{(i)}}{B_{k,\beta}^{(i)}} \left(\frac{X_{u_i+1}^{(i)}}{X_0^{(i)}} \right)^{\beta} \quad \text{dans } \boldsymbol{k}(Z) = \operatorname{Frac}(\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]/\tilde{\mathcal{I}}_Z).$$

On obtient alors les familles S et T recherchées en multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $X_0^{(i)}$ puis en réduisant au même dénominateur le membre de droite ; ce dénominateur commun S n'appartient évidemment pas à $\tilde{\mathcal{I}}_Z$. La forme R recherchée est alors celle fournie par le lemme précédent. □

On note désormais R la forme donnée par le lemme précédent et $r \in \mathbf{N}^m$ son multidegré. Notons qu'on a pas besoin d'en savoir plus sur cette forme, à part le fait qu'elle n'appartient pas à $\tilde{\mathcal{I}}_Z$ et ne dépend que de Z mais pas du degré α considéré. En effet, en pratique on fera tendre ce dernier vers l'infini ; c'est en ce sens qu'il faut comprendre la notation $o(\alpha)$ dans le lemme suivant, qui résume la construction de ρ^{α} à partir des briques précédentes.

Lemme 2.2.19. *Pour tout multidegré $\alpha \in \mathbf{N}^m$ il existe une application linéaire*

$$\rho^\alpha \colon \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]_\alpha \to \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]_{\alpha+r}^{C'''}$$

qui est égale à la multiplication par R modulo $\tilde{\mathcal{I}}_Z$. De plus, les colonnes de sa matrice dans les bases monomiales canoniques sont de norme $\|\cdot\|_{\infty,v}$ majorée par

$$\prod_{i=1}^{m} \left(\|f_{Z_i}\|_{1,v} 2B^{(B(g+1)+1)\delta_v} \right)^{2\alpha_i} \cdot \mathrm{e}^{o(\alpha)} \ .$$

En particulier, on a $\ker \rho^\alpha = \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]_\alpha \cap \tilde{\mathcal{I}}_Z$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser les résultats des lemmes précédents et de poser

$$\rho^\alpha = \rho_{\mathrm{div}}^{\alpha+r} \circ \rho_{\mathrm{élim}}^{\alpha} \circ \rho_{\mathrm{div}}^{\alpha} \ .$$

L'assertion sur la norme est immédiate en remarquant que, si M_1 et M_2 sont deux matrices, la norme $\|\cdot\|_{\infty,v}$ de leur produit est majorée par $\|M_1\|_{\infty,v} \max(\|c\|_{1,v})$ où c parcourt les colonnes de M_2. On absorbe par ailleurs les constantes ne dépendant pas de α, à savoir le r et la norme de $\rho_{\mathrm{élim}}$, dans le $o(\alpha)$.

Pour le noyau, considérons une forme H de multidegré α. On constate d'une part que si $\rho^\alpha(H) = 0$, alors $RH \in \tilde{\mathcal{I}}_Z$ donc $H \in \tilde{\mathcal{I}}_Z$ car ce n'est pas le cas de R et que $\tilde{\mathcal{I}}_Z$ est premier. Réciproquement, si $H \in \tilde{\mathcal{I}}_Z$, alors $RH \in \tilde{\mathcal{I}}_Z$ et $\rho^\alpha(H) \in \tilde{\mathcal{I}}_Z \cap \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]^{C'''} = \{0\}$. □

Notons qu'en prenant la somme, on peut définir une application linéaire ρ sur $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]$ entier ; on utilisera cette notation quand il ne sera pas utile de préciser le degré.

2.2.5 Plongement abélien pondéré

Introduisons un plongement, dit *éclatant* ou pondéré par $a = (a_1, \ldots, a_m)$, défini par

$$\begin{aligned} \varphi_a \colon \qquad & Z \longrightarrow \mathcal{A}^m \times \mathcal{A}^{m-1} = \mathcal{A}^{2m-1} \\ (x_1, \ldots, x_m) & \longmapsto (x_1, \ldots, x_m; a_1 x_1 - a_m x_m, \ldots, a_{m-1} x_{m-1} - a_m x_m) \ . \end{aligned}$$

qui nous permettra d'exploiter la relation (2.13).

Nous allons représenter ce morphisme par des familles de polynômes. Pour cela, commençons par préciser les plongements utilisés : au départ, chaque facteur Z_i est plongé par $\chi_i \circ \Theta$; on utilise ces mêmes plongements pour les m premiers facteurs $\mathcal{A}$ de l'espace d'arrivée et on garde le plongement Θ pour les $m-1$ facteurs $\mathcal{A}$ restants.

On munit l'espace $(\mathbf{P}^n)^{2m-1}$ (dans lequel est plongé l'espace d'arrivée) des coordonnées multihomogènes $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} = X^{(1)}, \ldots, X^{(m)}, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(m-1)}$; dans ce contexte

quand i et j sont deux indices non précisés, on supposera implicitement $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant m-1$.

Une représentation de φ_a dans ces plongements, définie sur un ouvert γ de $\mathcal{A}^m$, est un morphisme ψ_a tel que le diagramme suivant, dont les flèches verticales sont les projections canoniques, commute.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] \arrow[r, "\psi_a"] \arrow[d] & \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}] \arrow[d, "\pi"] \\ \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]/\tilde{\mathcal{I}}_{\varphi_a(Z)} \arrow[r, "\varphi_a^*"] & (\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]/\tilde{\mathcal{I}}_Z)_\gamma \end{tikzcd}$$

En bas, $\tilde{\mathcal{I}}_{\varphi_a(Z)}$ désigne l'idéal multihomogène de l'image dans les coordonnées choisies et $(\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]/\tilde{\mathcal{I}}_Z)_\gamma$ désigne la localisation de l'anneau des coordonnées au départ correspondant à l'ouvert γ.

On dispose (section 1.5.4 page 13) d'un atlas Γ de $\mathcal{A}^2$ avec sur chaque carte une représentation locale de $(x,y) \mapsto \alpha x - \beta y$ dans le plongement Θ. Voyons comment en déduire un atlas de $\mathcal{A}^m$ et des représentations locales de φ_a dans les plongements considérés.

Soit $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}) \in \Gamma^{m-1}$. On lui associe un ouvert de $\mathcal{A}^m$, que par abus on notera encore γ, défini par $\bigcap_{j=1}^{m-1} p_j^{-1}(\gamma_j)$ où p_j désigne la projection sur les facteurs j et m. On vérifie sans peine qu'on obtient ainsi un atlas de $\mathcal{A}^m$, qu'on notera encore Γ^{m-1}. On introduit alors pour chaque j la famille de formes

$$L^{(\gamma,j)} = L^{(a_j,a_m,\gamma_j)}\big(\chi_j^{-1}(X^{(j)}), \chi_m^{-1}(X^{(m)})\big) \tag{2.27}$$

où $L^{(a_j,a_m,\gamma_j)}$ est donnée par la section 1.5.4 page 13, de sorte que chaque application

$$\begin{aligned} \psi_{a,\gamma} \colon \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] &\to \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}] \\ X^{(i)} &\mapsto X^{(i)} \\ Y^{(j)} &\mapsto L^{(\gamma,j)}(X^{(i)}, X^{(m)}) \end{aligned} \tag{2.28}$$

est une représentation locale de φ_a dans les plongements considérés, valable sur l'ouvert γ (ou plus précisément, son image dans le plongement utilisé).

Étudions maintenant l'action de $\psi_{a,\gamma}$ sur le degré et la hauteur. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la définition.

Lemme 2.2.20. *Soit $H \in \overline{\mathbf{Q}}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]$ une forme multihomogène de multidegré (α,β) où $\alpha \in \mathbf{N}^m$ et $\beta \in \mathbf{N}^{m-1}$. On a alors*

$$\deg \psi_{a,\gamma}(H) = \big(\alpha_1 + 2\beta_1 a_1^2, \ldots, \alpha_{m-1} + 2\beta_{m-1} a_{m-1}^2, \alpha_m + 2|\beta| a_m^2\big)\ .$$

Avant de passer aux estimations de hauteur, il est utile d'introduire quelques paramètres[3] qui seront utilisés tout au long de ce chapitre et qui contrôlent notamment le degré en lequel nous établirons ces estimations.

3. Paramètres dont les définitions peuvent paraître énigmatiques à ce stade ; voir la section 2.6 page 74 pour une meilleure appréciation de ces choix.

Introduisons un réel ε_1 défini par :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^{\frac{g}{m-g}} \cdot \left(N^{m-1}\,(85\cdot 5^m)^g\right)^{\frac{-1}{m-g}} \tag{2.29}$$

et un rationnel ε_0 tel que :

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_1}{33m} \leqslant \varepsilon_0 \leqslant \frac{\varepsilon\varepsilon_1}{32m}\ , \tag{2.30}$$

et enfin un entier δ (qui sera choisi assez grand) tel que $\varepsilon_0\delta$ soit également entier. On pose alors

$$\begin{aligned} d &= \left(\varepsilon_0 a_1^2, \ldots, \varepsilon_0 a_m^2, 1, \ldots, 1\right) \in \mathbf{Q}^{2m-1} \\ d' &= \left(a_1^2(2+\varepsilon_0), \ldots, a_{m-1}^2(2+\varepsilon_0), a_m^2(2m-2+\varepsilon_0)\right) \in \mathbf{Q}^m \end{aligned} \tag{2.31}$$

de sorte que, si H est une forme de multidegré δd dans $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]$, son image par $\psi_{a,\gamma}$ est de multidegré exactement $\delta d'$ d'après le lemme 2.2.20 page ci-contre. Pour alléger les notations par la suite, on introduit le vecteur $\eta = (1,\ldots,1,m-1) \in \mathbf{N}^m$, de sorte qu'on a $d'_i = a_i^2(2\eta_i + \varepsilon_0)$ pour tout i.

Revenons donc au calcul de l'action de $\psi_{a,\gamma}$ sur la hauteur. Ce morphisme étant homogène, il induit d'après la remarque ci-dessus une application linéaire de $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]_{\delta d}$ dans $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]_{\delta d'}$. La base évidente de l'espace de départ est formée par les monômes $\boldsymbol{X}^p\boldsymbol{Y}^q$ pour

$$(p,q) \in \mathbf{N}^{m(n+1)} \times \mathbf{N}^{(m-1)(n+1)} \text{ tel que } |p^{(i)}| = \delta d_i = \delta\varepsilon_0 a_i^2 \text{ et } |q^{(j)}| = \delta d_{m+j} = \delta\ .$$

Lemme 2.2.21. *Avec les notations précédentes, l'application linéaire*

$$\psi_{a,\gamma}\colon \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]_{\delta d} \to \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]_{\delta d'}$$

est représentée dans les bases canoniques de monômes par une matrice dont les colonnes $c_{p,q} = \psi_{a,\gamma}(\boldsymbol{X}^p\boldsymbol{Y}^q) = \sum_{|s|=\delta d'-|p|} c_{p,q;s}\boldsymbol{X}^{s+p}$ *satisfont*

$$H_1(c_{p,q}) \leqslant \left(C_\Theta((n+1)!)^2\, B^{2n}\right)^{2\delta a_1^2}\ ,$$

où l'on rappelle que C_Θ *est donné par la section 1.5.4 page 13.*

Démonstration. La définition de $\psi_{a,\gamma}$ montre que $\psi_{a,\gamma}(\boldsymbol{X}^p\boldsymbol{Y}^q) = \boldsymbol{X}^p\psi_{a,\gamma}(\boldsymbol{Y}^q)$, on a donc $\|c_{p,q}\|_{1,v} = \|\psi_{a,\gamma}(\boldsymbol{Y}^q)\|_{1,v}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \|c_{p,q}\|_{1,v} &\leqslant \prod_{j=1}^{m-1}\prod_{k=0}^{n} \|L_k^{(a_j,a_m,\gamma_j)}\left(\chi_j^{-1}(X^{(j)}), \chi_m^{-1}(X^{(m)})\right)\|_{1,v}^{q_k^{(j)}} \\ &\leqslant \prod_{j=1}^{m-1}\prod_{k=0}^{n} \left(\|L_k^{(a_j,a_m,\gamma_j)}\|_{1,v}\, \|\chi_j^{-1}\|_{1,v}^{2a_j^2}\, \|\chi_m^{-1}\|_{1,v}^{2a_m^2}\right)^{q_k^{(j)}} \\ &\leqslant \prod_{j=1}^{m-1} \left(C_{\Theta,v}^{a_j^2+a_m^2}\, \|\chi_j^{-1}\|_{1,v}^{2a_j^2}\, \|\chi_m^{-1}\|_{1,v}^{2a_m^2}\right)^{\delta} \end{aligned}$$

en remarquant que, par définition de d, on a $|q^{(j)}| = \delta$ pour tout j, puis en utilisant la section 1.5.4 page 13. En prenant le produit sur toutes les places (et en prenant la racine δ-ième pour simplifier l'écriture) il vient, compte tenu de (2.22) et de (2.15)

$$\begin{aligned} H_1(c_{p,q})^{1/\delta} &\leqslant \prod_{j=1}^{m-1} C_\Theta^{a_j^2+a_m^2} \left((n+1)!\,(D_j')^n)\right)^{2a_j^2} \left((n+1)!\,(D_m')^n)\right)^{2a_m^2} \\ &\leqslant \prod_{j=1}^{m-1} \left(C_\Theta((n+1)!)^2\, B^{2n}\right)^{a_j^2+a_m^2} . \end{aligned}$$

Le résultat annoncé suit en invoquant le lemme 2.2.4 page 30. □

Énonçons de suite une variante qui nous sera utile par la suite.

Corollaire 2.2.22. *Soient $(\gamma_v)_v$ une famille de cartes indexée par les places de $\boldsymbol{k}$ et $F \in \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]$ une forme homogène. Alors*

$$\prod_v \|\psi_{a,\gamma_v}(F)\|_{1,v}^{\Delta_v} \leqslant H_1(F)\left(C_\Theta((n+1)!)^2\, B^{2n}\right)^{2\delta a_1^2} .$$

Démonstration. Dans le cas d'un monôme, on reprend point par point le début de la preuve précédente, en remplaçant simplement $L_k^{(a_j,a_m,\gamma_j)}$ par $L_k^{(a_j,a_m,\gamma_{v,j})}$ au début, différence qui disparaît au moment où l'on majore la norme de ces formes par $C_{\Theta,v}$, car cette majoration ne dépend pas de la carte utilisée ; on obtient ainsi

$$\|\psi_{a,\gamma_v}(\boldsymbol{X}^p\boldsymbol{Y}^q)\|_{1,v} \leqslant \prod_{j=1}^{m-1} \left(C_{\Theta,v}^{a_j^2+a_m^2}\, \|\chi_j^{-1}\|_{1,v}^{2a_j^2}\, \|\chi_m^{-1}\|_{1,v}^{2a_m^2}\right)^{\delta}$$

puis, F étant une combinaison linéraire de monômes :

$$\|\psi_{a,\gamma_v}(F)\|_{1,v} \leqslant \|F\|_{1,v} \prod_{j=1}^{m-1} \left(C_{\Theta,v}^{a_j^2+a_m^2}\, \|\chi_j^{-1}\|_{1,v}^{2a_j^2}\, \|\chi_m^{-1}\|_{1,v}^{2a_m^2}\right)^{\delta} .$$

La suite de la preuve est inchangée à par un facteur $H_1(F)$ supplémentaire. □

2.3 Construction d'une forme auxiliaire

L'objectif de cette section est de construire une forme non nulle sur Z, provenant d'une forme sur $\varphi_a(Z)$, de degré prescrit, de hauteur contrôlée, et d'indice élevé le long de E dans Z. Nous commencerons par définir la notion d'indice utilisée et préciser les propriétés voulues et la stratégie de construction, puis nous établirons les estimations de dimension et de hauteur nécessaires avant de conclure en appliquant un lemme de THUE-SIEGEL.

2.3.1 Stratégie de construction de la forme auxiliaire

Commençons par définir l'indice d'annulation (par rapport à un vecteur de poids $b \in \mathbf{N}^m$) d'une forme le long de E . (Une autre notion d'indice, en un point cette fois-ci, sera définie de façon similaire au début de la sous-section 2.4.2 page 60.) Pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{N}^{m(n+1)}$, notons

$$S_0^b(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\lambda_0^{(1)}}{b_1} + \cdots + \frac{\lambda_0^{(m)}}{b_m} .$$

Pour toute forme $H = \sum h_{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\lambda}}$ et tout $\beta > 0$, on pose

$$\pi_\beta^b(H) = \sum_{S_0^b(\boldsymbol{\lambda})<\beta} h_{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\lambda}} \tag{2.32}$$

et on définit l'indice par

$$\operatorname{Ind}_E^b H = \inf\{\beta \text{ tel que } \pi_\beta^b(H) \neq 0\} ,$$

où la borne inférieure est en fait un minimum, sauf si $H = 0$, cas où l'indice est infini. À partir de maintenant, nous utiliserons l'indice $\operatorname{Ind}_E^{\eta a^2}$ pondéré par le vecteur $\eta a^2 = (\eta_1 a_1^2, \ldots, \eta_m a_m^2)$, qui est essentiellement proportionnel à d', ce qui sera crucial pour la section 2.5 page 70.

Au début de cette section, nous avons dit vouloir construire une forme sur Z provenant d'une forme sur $\varphi_a(Z)$; plus précisément nous allons construire une forme F sur $\varphi_a(Z)$ et la tirer localement en arrière sur Z en une famille de formes F''_γ grâce aux différents morphismes $\psi_{a,\gamma}$ introduits à la sous-section 2.2.5 page 41.

Mais on ne peut brutalement exiger que leur indice, tel que défini précédemment, soit élevé, car le nombre de conditions serait trop élevé (géométriquement, il s'agirait d'exiger une annulation le long de E dans $\mathbf{P}^n$ alors que les degrés de libertés sont donnés par Z qui est de dimension plus petite). Nous allons donc utiliser le morphisme ρ introduit à la sous-section 2.2.4 page 37 et exiger que $F'_\gamma = \rho(F''_\gamma)$ ait un indice élevé, ce qui est loisible car le nombre des équations définissant un indicé élevé dans $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]^{C'''}$ est convenable (le nombre de variables libre dans cet espace correspondant à la dimension de Z) comme le montrera la prochaine sous-section.

Concernant le degré, on reprend les multidegrés définis par (2.31) et on rappelle que δ désigne un grand entier tel que $\delta\varepsilon_0$ soit aussi entier. On impose alors à F d'être de degré δd, de sorte que les F''_γ seront de degré $\delta d'$ et les F'_γ de degré $\delta d' + r = \delta d' + o(\delta)$. Par ailleurs, l'indice exigé sera $\varepsilon_1\delta$, où ε_1 est défini par (2.29) et la relation entre ε_0 et ε_1 permettra d'ajuster l'exposant de Dirichlet du système auquel on appliquera le lemme de Thue-Siegel.

Choisissons donc dans $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]_{\delta d}$ un supplémentaire de $(\tilde{\mathcal{I}}_{\varphi_a(Z)})_{\delta d}$ engendré par des monômes, que l'on notera $\tilde{\mathcal{F}}_{\delta d}$ et dans lequel on cherchera F. L'entier δ sera

choisi assez grand pour que la dimension de $\tilde{\mathcal{F}}_{\delta d}$ coïncide avec la valeur du polynôme de Hilbert-Samuel de $\tilde{\mathcal{I}}_{\varphi_a(Z)}$ en δd.

Reformulons l'objectif en introduisant un morphisme σ défini par

$$\begin{aligned} \sigma\colon \tilde{\mathcal{F}}_{\delta d} \to \mathcal{G}_{\delta d'+r} &= \bigoplus_{\gamma\in\Gamma^{m-1}} \left(\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]^{C'''}_{\delta d'+r} \cap \mathrm{Vect}\left((\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\lambda}})_{S_0^{\eta a^2}(\boldsymbol{\lambda})<\varepsilon_1\delta}\right)\right) \\ F &\mapsto \left(\pi^{\eta a^2}_{\varepsilon_1\delta} \circ \rho^{\delta d'} \circ \psi_{a,\gamma}(F)\right)_\gamma \end{aligned} \tag{2.33}$$

de sorte qu'il s'agit en fait de trouver une forme non nulle dans le noyau de σ. Pour procéder nous devons donc :

1. Estimer les dimensions des espaces de départ et d'arrivée de σ et s'assurer que la seconde est plus petite que la première ;
2. Estimer la hauteur de la matrice de σ dans les bases monomiales évidentes.

Ces estimations font l'objet des deux sous-sections suivantes. Comme δ est arbitrairement grand devant les autres paramètres, on n'explicitera à chaque fois que le terme de plus haut degré en δ ; ainsi lorsqu'on utilisera la notation $o(\,\cdot\,)$ ou $\sim$, il s'agira d'équivalents quand δ tend vers l'infini.

2.3.2 Deux calculs de dimension

La dimension de $\tilde{\mathcal{F}}_{\delta d}$ est donnée par le théorème de Hilbert-Samuel multihomogène (voir [Phi86, § 3] par exemple) dès qu'on connaît les différents multidegrés de $\varphi_a(Z)$. Il est *a priori* difficile de tous les calculer, mais comme il suffit en fait de minorer la dimension, le lemme suivant nous donne tout ce qu'on aura besoin de savoir sur le degré.

Lemme 2.3.1. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\deg_{(0,\dots,0,u_m;u_1,\dots,u_{m-1})}\big(\varphi_a(Z)\big) = D_m \prod_{j=1}^{m-1} D_j a_j^{2u_j}\,.$$

Démonstration. Ce degré est donné par le cardinal de l'intersection de $\varphi_a(Z)$ avec des hyperplans génériques choisis de la façon suivante : u_m provenant du m-ième facteur $\mathbf{P}^n$, et u_i hyperplans provenant du facteur $m+i$ pour $i \in \{1,\dots,m-1\}$.

On commence par choisir les hyperplans sur le facteur m : on remarque qu'ils se remontent par φ_a en des hyperplans sur le dernier facteur de l'espace de départ $(\mathbf{P}^n)^m$. Ainsi, couper $\varphi_a(Z)$ par ces hyperplans revient à imposer à x_m de parcourir un ensemble de cardinal D_m.

Fixons maintenant un point p' dans cet ensemble et notons $p = a_m p'$. On constate que $\varphi_a(Z) \cap \mathcal{Z}(X^{(m)} = p')$ coïncide avec l'image de

$$\begin{aligned} \varphi'_{a,p'}\colon Z_1 \times \cdots \times Z_{m-1} \times \{p'\} &\to \mathcal{A}^{2m-1} \\ (x_1,\dots,x_{m-1},p') &\mapsto (x_1,\dots,x_{m-1},p';a_1x_1-p,\dots,a_{m-1}x_{m-1}-p) \end{aligned}$$

qui est le produit d'un point par des variétés de la forme $\varphi''_{a_i,p}(Z_i)$ pour i variant de 1 à $m-1$ en notant

$$\begin{aligned}\varphi''_{a_i,p} \colon Z_i &\to \mathcal{A}^2 \\ x &\mapsto (x, a_i x - p)\end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer le degré de ces variétés. La translation par p n'ayant pas d'influence sur le degré, il suffit de regarder l'action de la multiplication par a_i. Or, celle-ci pouvant être représentée globalement par des formes de degré a_i^2, en tirant en arrière par $\varphi''_{a_i,p}$ une famille de u_i hyperplans génériques sur le second facteur, on obtient des hypersurfaces génériques de degré a_i^2 qui coupent donc Z_i en $D_i a_i^{2u_i}$ points.

Le résultat suit en prenant le produit. □

Lemme 2.3.2. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\dim \tilde{\mathcal{F}}_{\delta d} \geqslant \frac{\varepsilon_0^{u_m} \prod_{i=1}^m D_i\, a_i^{2u_i}}{\prod_{i=1}^m u_i!} \delta^u + o(\delta^u)\ .$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Hilbert-Samuel multihomogène en utilisant le lemme précédent, car une somme de nombre positifs est minorée par chacun de ses termes. Il vient

$$\begin{aligned}\dim \tilde{\mathcal{F}}_{\delta d} &= \left(\sum_{\substack{t \in \mathbf{N}^{2m-1} \\ |t| = |u|}} \deg_t \varphi_a(Z) \frac{d^t}{t!} \right) \delta^u + o(\delta^u) \\ &\geqslant \deg_{(0,\ldots,0,u_m;u_1,\ldots,u_{m-1})} \big(\varphi_a(Z)\big) \cdot \frac{(\varepsilon_0 a_m^2)^{u_m}}{\prod_{i=1}^m u_i!} \delta^u + o(\delta^u)\end{aligned}$$

par définition de d, voir (2.31). On achève la preuve en combinant avec le résultat du lemme précédent. □

Il reste à majorer la dimension de $\mathcal{G}_{\delta d'+r}$. On introduit à cet effet l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = \Bigg\{ &(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)}) \in \prod_{i=1}^m \big(\mathbf{N}^{u_i+1} \times \{0, \ldots, D_i - 1\} \times \{0\}^{n-u_i-1}\big) \\ &\text{tel que } S_0^{\eta a^2}(\lambda) < \delta\varepsilon_1 \text{ et } |\lambda^{(i)}| = \delta d'_i + r_i \quad \forall i \Bigg\}\ ,\end{aligned}$$

dont il s'agit de calculer le cardinal. En effet, la famille $(\boldsymbol{X}^\lambda)_{\lambda \in \mathcal{E}}$ forme une base de $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}]^{C'''}_{\delta d'+r} \cap \mathrm{Vect}\big((\boldsymbol{X}^\lambda)_{S_0^{\eta a^2}(\lambda) < \varepsilon_1 \delta}\big)$ et $\mathcal{G}_{\delta d'+r}$ est somme directe de tels espaces.

Lemme 2.3.3. *Avec les notations précédentes,*

$$\operatorname{Card}\mathcal{E} \leqslant \delta^u \prod_{i=1}^m D_i a_i^{2u_i} \cdot \frac{\varepsilon_1^m\, m^{u_m}\, 3^{u-m}}{m!\, \prod_{i=1}^m (u_i-1)!} + o(\delta^u)$$

Démonstration. Pour choisir un indice $\boldsymbol{\lambda}$ dans $\mathcal{E}$, on peut commencer par choisir $\lambda_{u_i+1}^{(i)}$ entre 0 et $D_i - 1$ pour tout i, ce qui représente $\prod_{i=1}^m D_i$ possibilités.

On peut ensuite choisir des entiers $\lambda_0^{(1)}, \dots \lambda_0^{(m)}$ sujets à la seule condition

$$S_0^{\eta a^2}(\lambda) < \delta\varepsilon_1 \ .$$

Le lemme 2.14.5 de [Far03] donne le nombre de choix possibles, qui est

$$\frac{a_1^2 \dots a_m^2 (m-1)}{m!} (\delta\varepsilon_1)^m + o(\delta^m) \ .$$

Il reste alors à choisir pour tout i un élément de l'ensemble

$$\left\{ (\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{u_i}^{(i)}) \in \mathbf{N}^{u_i} \text{ tel que } \sum_{j=1}^{u_i} \lambda_j^{(i)} = \delta d_i' + r_i - \lambda_0^{(i)} - \lambda_{u_i+1}^{(i)} \right\} \ ,$$

qui est de cardinal

$$\begin{aligned} \binom{\delta d_i' + r_i - \lambda_0^{(i)} - \lambda_{u_i+1}^{(i)} + u_i - 1}{u_i - 1} &\leqslant \binom{\delta d_i' + r_i + u_i - 1}{u_i - 1} \\ &\leqslant \frac{(d_i')^{u_i-1}}{(u_i-1)!} \delta^{u_i-1} + o(\delta^{u_i-1}) \ . \end{aligned}$$

On prend alors le produit :

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\mathcal{E} &\leqslant \frac{a_1^2 \dots a_m^2 (m-1)}{m!} (\delta\varepsilon_1)^m \cdot \prod_{i=1}^m \frac{(d_i')^{u_i-1}}{(u_i-1)!} D_i \delta^{u_i-1} + o(\delta^u) \\ &\leqslant \delta^u \prod_{i=1}^m D_i a_i^{2u_i} \cdot \frac{\varepsilon_1^m (m-1)(2m-2+\varepsilon_0)^{u_m-1}(2+\varepsilon_0)^{u-m-u_m+1}}{m!\, \prod_{i=1}^m (u_i-1)!} + o(\delta^u) \end{aligned}$$

d'après la définition (2.31) de d'. Le résultat annoncé suit en remarquant que $2 + \varepsilon_0 \leqslant 3$ et $2m - 2 + \varepsilon_0 \leqslant 3m$. □

Compte tenu de la définition (2.33) de $\mathcal{G}_{\delta d'+r}$ et du fait que $\operatorname{Card}\Gamma^{m-1} = N^{m-1}$, on a immédiatement

$$\dim \mathcal{G}_{\delta d'+r} \leqslant \delta^u \prod_{i=1}^m D_i a_i^{2u_i} \cdot \frac{\varepsilon_1^m\, N^{m-1}\, m^{u_m}\, 3^{u-m}}{m!\, \prod_{i=1}^m (u_i-1)!} + o(\delta^u) \ .$$

En combinant ce résultat avec le lemme 2.3.2 page 47 et en observant que $u_i \leqslant g$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\dim \mathcal{G}_{\delta d'+r}}{\dim \tilde{\mathcal{F}}_{\delta d}} &\leqslant \frac{\varepsilon_1^m\, N^{m-1}\, m^{u_m}\, 3^{u-m}\, \prod_{i=1}^m u_i}{\varepsilon_0^{u_m}\, m!} + o(1) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon_1^m\, N^{m-1}\, m^g\, 3^{m(g-1)}\, g^m}{\varepsilon_0^g\, m!} + o(1)\ .\end{aligned}$$

Or, nous allons prouver dans un instant que

$$\frac{\varepsilon_1^m\, N^{m-1}\, m^g\, 3^{m(g-1)}\, g^m}{\varepsilon_0^g\, m!} \leqslant \frac{1}{2} \tag{2.34}$$

ce qui nous donne immédiatement

$$\frac{\dim \mathcal{G}_{\delta d'+r}}{\dim \tilde{\mathcal{F}}_{\delta d}} \leqslant \frac{1}{2} + o(1) \tag{2.35}$$

et montre que le noyau de l'application σ définie par (2.33) est de dimension strictement positive et permet même de contrôler l'exposant de Dirichlet lorsque nous appliquerons le lemme de Thue-Siegel.

Prouvons maintenant notre assertion (2.34) : on utilise la définition (2.30) de ε_0 et la minoration classique $m! \geqslant m^m \mathrm{e}^{-m}$ pour écrire

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon_1^m\, N^{m-1}\, m^g\, 3^{m(g-1)}\, g^m}{\varepsilon_0^g\, m!} &\leqslant \frac{\varepsilon_1^{m-g}\, N^{m-1}\, m^g\, 3^{m(g-1)}\, g^m\, (33m)^g\, \mathrm{e}^m}{\varepsilon^g\, m^m} \\ &\leqslant \frac{1}{m^{m-g}} \cdot \frac{\varepsilon_1^{m-g}\, N^{m-1}\, 3^{mg}\, g^m\, (33m)^g}{\varepsilon^g} \\ &\leqslant \frac{1}{m^{m-g}} \cdot \frac{\varepsilon_1^{m-g}\, N^{m-1}\, (85 \cdot 5^m)^g}{\varepsilon^g}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les faits élémentaires (quitte à vérifier numériquement pour les petites valeurs) $g \cdot 3^g \leqslant (13/3)^g$ puis $33m \cdot (13/3)^m \leqslant 85 \cdot 5^m$. On remarque que la définition (2.29) de ε_1 signifie précisément que le deuxième facteur vaut 1 ; il suffit maintenant d'observer que $m \geqslant g+1 \geqslant 2$ pour conclure.

2.3.3 Hauteur du système

Il s'agit d'estimer la hauteur de la matrice (dans les bases monomiales canoniques) M_σ de l'application σ définie par (2.33). Nous utiliserons ici la norme $\|\cdot\|_{\infty,v}$ en chaque place, de sorte que la norme de la matrice de σ sera majorée par tout majorant commun des normes des matrices des applications $\pi_{\varepsilon_1\delta}^{\eta a^2} \circ \rho^{\delta d'} \circ \psi_{a,\gamma}$.

D'après la définition (2.32) de $\pi_{\varepsilon_1\delta}^{\eta a^2}$ il est clair que cette application ne peut que faire décroître la norme. On pose alors $\sigma'_\gamma = \rho^{\delta d'} \circ \psi_{a,\gamma}$; il s'agit donc de majorer $h_\infty(M_{\sigma'_\gamma})$ indépendamment de γ.

On utilise le fait élémentaire suivant : si M_1 et M_2 sont deux matrices, la hauteur h_∞ de leur produit est majorée par $h_\infty(M_1) + \max(h_1(c))$ où c parcourt les colonnes de M_2. Il suffit alors de combiner les estimations des lemmes 2.2.19 page 41 et 2.2.21 page 43 pour obtenir

$$\begin{aligned} h_\infty(M_{\sigma'_\gamma}) \leqslant\ & 2\delta a_1^2\big(c_\Theta + 2\log((n+1)!) + 2n\log B\big) \\ & + \sum_{i=1}^m 2\delta d'_i\Big(h_1(f_{Z_i}) + \big(B(g+1)+1\big)\log B + \log 2\Big) + o(\delta)\ . \end{aligned}$$

On remarque pour commencer que, comme $\varepsilon_0 < 1$ on a $d'_i = a_i^2(2\eta_i + \varepsilon_0) \leqslant 3\eta_i a_i^2$; le lemme 2.2.4 page 30 implique alors que $\sum_i d'_i \leqslant 6a_1^2$. On utilise de plus la définition (2.10) pour majorer $h_\infty(M_{\sigma'_\gamma})$ par

$$\begin{aligned} & 4\delta a_1^2\Big(c_{1,\Theta}/2 + \log((n+1)!) + n\log B + 3\log(B)\big(B(g+1)+1\big) + 3\log 2\Big) \\ & \quad + 6\delta\sum_{i=1}^m \eta_i a_i^2 h_1(f_{Z_i}) + o(\delta)\ . \end{aligned}$$

On invoque alors (2.61)[4] pour conclure :

$$h_\infty(M_{\sigma'_\gamma}) \leqslant \delta a_1^2 c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} + 6\delta\sum_{i=1}^m \eta_i a_i^2 h_1(f_{Z_i}) + o(\delta)\ . \tag{2.36}$$

Compte tenu des remarques précédentes, on a donc aussi

$$h_\infty(M_\sigma) \leqslant \delta a_1^2 c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} + 6\delta\sum_{i=1}^m \eta_i a_i^2 h_1(f_{Z_i}) + o(\delta)\ . \tag{2.37}$$

Remarquons que l'on pourrait invoquer l'hypothèse (2.17) pour simplifier cette dernière expression ; voire à ce sujet la remarque suivant le scolie 2.3.7 page suivante.

2.3.4 Construction finale de la forme auxiliaire

Commençons par rappeler la version que nous utiliserons du classique lemme de Thue-Siegel.

Fait 2.3.4. *Pour toute matrice M de dimensions $p \times q$ à coefficients dans un corps de nombres $\boldsymbol{k}$ avec $p < q$, il existe un vecteur $x \in \boldsymbol{k}^q$ non nul tel que $Mx = 0$ et satisfaisant*

$$h_\infty(x) \leqslant \frac{p}{q-p}\big(h_\infty(M) + \log q\big) + \frac{q}{q-p}c_{\boldsymbol{k}}\ ,$$

où $c_{\boldsymbol{k}}$ est une constante ne dépendant que de $\boldsymbol{k}$.

4. La section 2.6.2 page 78 regroupe quelques estimations plus ou moins fastidieuses ou inintéressantes pour ne pas perturber le cours du texte ; elle est parfaitement indépendante des sections précédentes sauf bien sûr pour les définitions de différents paramètres en jeu.

Démonstration. C'est le lemme de Siegel de Bombieri tel qu'énoncé dans [Bom81]. Notons que des versions plus précises sont disponibles, mais les améliorations ne concernent que des termes qui sont négligeables dans notre situation et n'ont donc pas d'intérêt ici. □

Nous sommes maintenant en mesure de construire la forme auxiliaire.

Proposition 2.3.5. *Sous les hypothèses et notations précédentes et si δ est assez grand, il existe une forme non nulle $F \in \ker \sigma$ telle que*

$$\deg F = \delta d = \left(\varepsilon_0 a_1^2 \delta, \ldots, \varepsilon_0 a_m^2 \delta, \delta, \ldots, \delta\right)$$
$$h_\infty(F) \leqslant \delta a_1^2 c_{1,\Theta} \Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} + 6\delta \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i^2 h_1(f_{Z_i}) + o(\delta) \ .$$

Démonstration. On applique le fait 2.3.4 page ci-contre à la matrice M_σ introduite à la sous-section précédente, de dimensions $p = \dim \mathcal{G}_{\delta d'+r}$ et $q = \dim \tilde{\mathcal{F}}_{\delta d}$ estimées précédemment. La relation (2.35) se lit alors $\frac{p}{q} \leqslant \frac{1}{2} + o(1)$, ce qui implique directement que $p < q$ et que

$$\frac{p}{q-p} = \frac{1}{\frac{q}{p} - 1} \leqslant \frac{1}{1 - o(1)} \leqslant 1 + o(1) \ .$$

De même, $\frac{q}{q-p} c_{\boldsymbol{k}} = o(\delta)$; en remarquant de plus que $\log q = o(\delta)$, on voit qu'il existe une forme F satisfaisant aux conditions de l'énoncé mais de hauteur majorée par $h_\infty(M_\sigma) + o(\delta)$. Il ne reste plus qu'à invoquer (2.37) pour conclure au résultat annoncé. □

Remarquons que dans la majoration de hauteur on peut en fait choisir la hauteur utilisée, comme le montre le scolie suivant.

Scolie 2.3.6. *On a $h_1(F) \leqslant h_\infty(F) + o(\delta)$.*

Démonstration. La différence entre ces deux hauteurs est majorée par le logarithme du nombre de coefficients de F, qui est au plus

$$\prod_{i=1}^{2m-1} \binom{\delta d_i + n}{n} \leqslant \prod_{i=1}^{2m-1} \frac{(\delta d_i + n)^n}{n!} \ .$$

Cette quantité étant polynomiale en δ, son logarithme est négligeable devant δ. □

Par la suite, nous travaillerons presqu'exclusivement avec les formes $F'_\gamma = \rho \circ \psi_{a,\gamma}(F)$, la forme F ne servant qu'à assurer un lien global entre elles. Le scolie suivant résume toutes les propriétés de ces formes dont nous aurons besoin.

Scolie 2.3.7. *Pour toute carte $\gamma \in \Gamma^{m-1}$, la forme $F'_\gamma \in \boldsymbol{k}[(X_0^{(i)}, \ldots, X_{u+1}^{(i)})_i]$ satisfait :*

(i) $F'_\gamma = R(\boldsymbol{X}) \cdot F(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{L}^{(\gamma)}(\boldsymbol{X})) \mod \tilde{\mathcal{I}}_Z$;

(ii) $\mathrm{Ind}_E^{\eta a^2} F'_\gamma \geqslant \varepsilon_1 \delta$;

(iii) $\deg F'_\gamma = \delta d' + r$ *avec* $d'_i = a_i^2(2\eta_i + \varepsilon_0)$ *pour tout* i, *et* r *indépendant de* δ ;

(iv) $h_1(F'_\gamma) \leqslant 2\delta a_1^2 c_{1,\Theta} \Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} + 12\delta \sum_{i=1}^m \eta_i a_i^2 h_1(f_{Z_i}) + o(\delta)$;

De plus, si $(\gamma_v)_v$ *est une famille de cartes indexée par les places de* $\boldsymbol{k}$, *on a*

$$\sum_v \Delta_v \log \|F'_{\gamma_v}\|_{1,v} \leqslant 14\delta a_1^2 c_{1,\Theta} \Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} + o(\delta) \ . \tag{2.38}$$

Démonstration. Les trois premiers points ne font que résumer la construction. Plus précisément, le premier découle de la définition de F'_γ, du lemme 2.2.19 page 41 et de la définition (2.28) de $\psi_{a,\gamma}$; le deuxième est imposé par la construction et le troisième découle du lemme 2.2.20 page 42 et des définitions (2.31) de d et d'.

Pour le quatrième point, on remarque que $F'_\gamma = \sigma'_\gamma(F)$ dans les notations de la sous-section 2.3.3 page 49 de sorte qu'on a

$$h_\infty(F'_\gamma) \leqslant h_\infty(M_{\sigma'_\gamma}) + h_1(F) \leqslant 2\delta a_1^2 c_{1,\Theta} \Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} + 12\delta \sum_{i=1}^m \eta_i a_i^2 h_1(f_{Z_i}) + o(\delta)$$

en utilisant le résultat de la proposition précédente et (2.36). Le même argument qu'au scolie 2.3.6 page précédente montre que $h_1(F'_\gamma)$ est en fait majoré par la même quantité.

Pour la dernière assertion, on procède exactement comme pour majorer la hauteur de F'_γ sauf qu'on utilise le corollaire 2.2.22 page 44 à la place du lemme 2.2.21 page 43, ce qui donne une majoration identique à la précédente :

$$\sum_v \Delta_v \log \|F'_{\gamma_v}\|_{1,v} \leqslant 2\delta a_1^2 c_{1,\Theta} \Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} + 12\delta \sum_{i=1}^m \eta_i a_i^2 h_1(f_{Z_i}) + o(\delta)$$

Il ne reste qu'à appliquer l'hypothèse (2.17) pour conclure. □

Remarquons qu'on a utilisé l'hypothèse (2.17) pour simplifier la dernière estimation contrairement à celle du quatrième point. En effet, cette estimation de $h_1(F'_\gamma)$ contribuera directement, en section 2.5 page 70, à l'estimation de hauteur de la forme motrice que nous cherchons à construire (proposition 2.2.5 page 31) et il est donc intéressant de conserver la dépendance en $\sum_{i=1}^m \eta_i a_i^2 h_1(f_{Z_i})$ explicite jusqu'à la relation de récurrence (2.20). L'autre estimation en revanche, ne sera utilisée que dans la section suivante pour assurer que les termes ne dépendant pas de $\hat{h}(e_1)$ sont assez petits pour être couverts par cette dernière quantité, compte tenu de l'hypothèse (2.2).

2.4 Extrapolation

Le but de cette section est de montrer que la fonction auxiliaire que nous venons de construire s'annulle avec un indice élevé en e, pour une définition de l'indice que nous préciserons.

Auparavant, nous étudierons les dérivées sur Z des fonctions rationnelles obtenues en déshomogénéisant F'_γ par $(X_{k_i}^{(i)})_i$ où $0 \leqslant k_i \leqslant u_i$, que nous représenterons par des fractions rationnelles suffisamment bien contrôlées. Pour commencer, nous effectuons ce travail sur une variété projective quelconque (plongée de façon adaptée) avant de passer à une variété produit.

2.4.1 Estimation de dérivées

Soit V une variété projective de dimension s, plongée de façon adaptée dans un espace projectif $\mathbf{P}^n$, de degré Δ dans ce plongement. Alors $\boldsymbol{k}(V)$ est une extension finie de

$$\boldsymbol{k}\Big(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_s}{X_0}\Big)$$

dont $\frac{X_{s+1}}{X_0}$ est un élément primitif. Sur ce dernier corps, on dispose des dérivations standard définies par $\mathrm{d}_k \frac{X_l}{X_0} = \delta_k^l$ qui forment une base de l'espace des dérivations, et s'étendent de façon unique à $\boldsymbol{k}(V)$ pour former une base de l'espace de ses dérivations ; on pose alors

$$\partial^\kappa = \prod_{k=0}^{s} \frac{1}{\kappa_k!} \mathrm{d}_k^{\kappa_k} \ .$$

On cherche, pour tout κ et pour certaines fonctions rationnelles f, à donner une représentation de $\partial^\kappa f$ sous la forme G/H avec $G \in \boldsymbol{k}[X]$ de degré et normes locales contrôlés, et $H \in \boldsymbol{k}[X] \setminus \mathcal{I}_V$ totalement explicite. Par « représentation », on entend qu'on veut avoir $\pi(G/H) = \partial^\kappa f$ où π est la projection naturelle de $\boldsymbol{k}[X]_{(\mathcal{I}_V)}$ sur $\boldsymbol{k}(V)$. Pour des raisons techniques, on construira en fait deux représentations, dont on contrôlera respectivement les normes aux places finies ou infinies.

Pour l'application considérée, on peut se restreindre au cas où f est de la forme $P/X_k^{\deg P}$ avec $0 \leqslant X_k \leqslant s$ et $P \in \boldsymbol{k}[X_0, \ldots, X_{s+1}]$. Par linéarité et en utilisant la règle de Leibniz, il suffit pour commencer de considérer les fonctions de la forme X_l/X_k pour $0 \leqslant l \leqslant s+1$ et $0 \leqslant k \leqslant s$. Le cas où $l \neq s+1$ est facile et fait l'objet du lemme suivant, valable aussi bien dans $\boldsymbol{k}[X]_{\mathcal{I}_V}$ que dans $\boldsymbol{k}(Z)$.

Lemme 2.4.1. *Soit $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_s) \in \mathbf{N}^s$ et posons $\kappa_0 = 0$; on note* $\operatorname{Supp} \kappa$ *l'ensemble des indices α tels que $\kappa_\alpha \neq 0$. Alors, pour tout $(k,l) \in \{0, \ldots, s\}^2$ tel que $k \neq l$ on a*

$$\partial^\kappa \frac{X_l}{X_k} = \begin{cases} 0 & \textit{si } \operatorname{Supp} \kappa \not\subset \{k,l\} \textit{ ou } \kappa_l > 1\,; \\ (-1)^{\kappa_k} \left(\frac{X_l}{X_k}\right)^{1-\kappa_l} \left(\frac{X_0}{X_k}\right)^{|\kappa|} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, si $k = l$ alors $\partial^\kappa \frac{X_l}{X_k}$ vaut 0 si $\kappa \neq 0$ et 1 sinon.

Démonstration. Si $k = 0$, c'est la définition même de ∂^κ ; si $k = l$ le résultat est clair également. Sinon, en utilisant la règle de Leibniz et ses conséquences usuelles, on a facilement

$$\mathrm{d}_\alpha \frac{X_l}{X_0}\left(\frac{X_k}{X_0}\right)^{-1} = \left(\frac{X_k}{X_0}\right)^{-2}\left(\frac{X_k}{X_0}\,\mathrm{d}_\alpha \frac{X_l}{X_0} - \frac{X_l}{X_0}\,\mathrm{d}_\alpha \frac{X_k}{X_0}\right) = \begin{cases} -\frac{X_l}{X_0}\left(\frac{X_0}{X_k}\right)^2 & \text{si } \alpha = k\,; \\ \frac{X_0}{X_k} & \text{si } \alpha = l\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\operatorname{Supp}\kappa \not\subset \{k, l\}$, il existe un α distinct de k et l tel que ∂^κ contient un facteur d_α et on a donc $\partial^\kappa \frac{X_l}{X_k} = 0$. De même, $\kappa_l > 1$ on a $\partial^\kappa \frac{X_l}{X_k} = 0$ car $\mathrm{d}_l \circ \mathrm{d}_l \frac{X_l}{X_k} = \mathrm{d}_l \frac{X_0}{X_k} = 0$. Ceci donne le premier cas ; pour le deuxième, si $l \neq 0$ on écrit

$$\begin{aligned} \partial^\kappa \frac{X_l}{X_k} &= \mathrm{d}_l^{\kappa_l} \frac{X_l}{X_0} \cdot \frac{1}{\kappa_k!}\,\mathrm{d}_k^{\kappa_k} \frac{X_0}{X_k} \\ &= \left(\frac{X_l}{X_0}\right)^{1-\kappa_l} \cdot (-1)^{\kappa_k}\left(\frac{X_0}{X_k}\right)^{\kappa_k+1} = (-1)^{\kappa_k}\left(\frac{X_l}{X_k}\right)^{1-\kappa_l}\left(\frac{X_0}{X_k}\right)^{\kappa_k+\kappa_l} \end{aligned}$$

qui donne bien le résultat annoncé. Le cas $l = 0$ est direct. □

Pour le cas $l = s + 1$, on utilisera des relations de dépendance sur les autres variables, données par le fait que le plongement est adapté. Le lemme suivant énonce de façon générale comment exploiter de telles relations.

Lemme 2.4.2. *Soient $W_1, \ldots, W_s, W'_1, \ldots, W'_s, T$ des variables et L une extension algébrique finie de $\boldsymbol{k}(W'_1, \ldots, W'_s)$. On fixe ω un élément de L ; on note π le morphisme de $\boldsymbol{k}[W_1, \ldots, W_s, T]$ dans L qui envoie W_k sur W'_k et T sur ω. Soit $S \in \ker \pi$; on note $R = \frac{\partial S}{\partial T}$ et on suppose que $R \notin \ker \pi$.*

On considère les dérivations standard d_k sur $\boldsymbol{k}(W'_1, \ldots, W'_s)$ ainsi que leurs extensions à L, et on note $\partial^\kappa = \frac{1}{\kappa!}\prod_{k=0}^s \mathrm{d}_k^{\kappa_k}$. Il existe des polynômes $P_\alpha^\kappa \in \boldsymbol{k}[W_1, \ldots, W_s, T]$, pour $\kappa \in \mathbf{N}^s \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \{0, 1\}$, tels que :

(i) $\partial^\kappa \omega = \pi\left(\dfrac{P_\alpha^\kappa}{R^{2|\kappa|-1}}\right)$;

(ii) $\deg_W P_\alpha^\kappa \leqslant (2|\kappa| - 1)\deg_W S$;

(iii) $\deg_T P_\alpha^\kappa \leqslant (2|\kappa| - 1)\deg_T S$;

(iv) $\|P_{\delta_v}^\kappa\|_{1,v} \leqslant \|S\|_{1,v}^{2|\kappa|-1} \cdot \left((8s)^{|\kappa|} D^{3|\kappa|-2}\right)^{\delta_v}$ *où* $D = \max(\deg_W S, \deg_T S)$

où le dernier point est valable en toute place v.

Démonstration. Il s'agit en fait de compléter[5] la preuve du lemme 6.1 de [Rémoob], en utilisant aux places finies une généralisation de la relation 2.3.1, p. 63 de [Far03].

5. On contrôle en fait le développement autour d'un point générique, alors que Rémond l'étudie en un point fixé. Plus précisément, on pourrait retrouver l'énoncé de Rémond à partir de celui-ci par évaluation de $P_{\delta_v}^\kappa$ et R en un point convenable.

On va construire P_0^κ et P_1^κ indépendamment par récurrence sur la longueur de κ, en partant à chaque fois de $P_{\delta_v}^\kappa = -\frac{\partial S}{\partial W_{k_0}}$ quand $\kappa_k = \delta_{k_0}^k$ (cas $|\kappa| = 1$), car ce choix convient. Pour la suite, on fixe un δ_v, un κ de longueur au moins 2, et on suppose qu'on a choisi un $P_{\delta_v}^{\kappa'}$ convenable pour chaque κ' de longueur strictement inférieure à celle de κ.

On commence par le cas ultramétrique et on note donc provisoirement $P^\kappa = P_0^\kappa$ pour alléger. Les polynômes recherchés sont caractérisés par la contrainte

$$S\left(W_1 + t_1, \ldots, W_s + t_s, T + \sum_{\kappa \in \mathbf{N}^s \setminus \{0\}} \frac{P^\kappa}{R^{2|\kappa|-1}} t^\kappa\right) \in \ker \pi \ ,$$

où l'on a étendu π aux algèbres de séries en $t_1, \ldots, t_s$ au départ et à l'arrivée. Il suffit, pour satisfaire cette contrainte, d'imposer que la série ci-dessus ait tous ses termes nuls sauf le premier qui est égal à S. Le développement de Taylor de l'expression ci-dessus donne alors :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{(\lambda,\mu) \in \mathbf{N}^{s+1} \setminus \{(0,0)\}} \partial^{\lambda,\mu} S \cdot t^\lambda \cdot \left(\sum_{\kappa \in \mathbf{N}^s \setminus \{0\}} \frac{P^\kappa}{R^{2|\kappa|-1}} t^\kappa\right)^\mu \\
&= \sum_{\substack{(\lambda,\mu) \in \mathbf{N}^{s+1} \setminus \{(0,0)\} \\ \boldsymbol{\nu} \in (\mathbf{N}^s \setminus \{0\})^\mu}} \left(\partial^{\lambda,\mu} S \cdot \prod_{i=1}^{\mu} \frac{P^{\nu^{(i)}}}{R^{2|\nu^{(i)}|-1}}\right) t^{\sum_i \nu^{(i)} + \lambda} \\
&= \sum_{\kappa \in \mathbf{N}^s \setminus \{0\}} \left(\frac{P^\kappa}{R^{2|\kappa|-2}} + \sum_{\substack{(\lambda,\mu) \in \mathbf{N}^{s+1} \setminus \{(0,0),(0,1)\} \\ \boldsymbol{\nu} \in (\mathbf{N}^s \setminus \{0\})^\mu \\ \sum_i \nu^{(i)} + \lambda = \kappa}} \partial^{\lambda,\mu} S \cdot \prod_{i=1}^{\mu} \frac{P^{\nu^{(i)}}}{R^{2|\nu^{(i)}|-1}}\right) t^\kappa \ ,
\end{aligned}$$

où l'on a noté $(\lambda, \mu) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu)$ et $\partial^{\lambda,\mu}$ les dérivées divisées correspondantes dans $\boldsymbol{k}[W_1, \ldots, W_s, T]$. On remarque alors que, sur l'ensemble de sommation, on a d'une part $\sum_{i=1}^{\mu}(2|\nu^{(i)}| - 1) = 2|\kappa| - 2|\lambda| - \mu$ et d'autre part $2|\lambda| + \mu \geqslant 2$: en effet on a soit $|\lambda| \geqslant 1$ soit $\mu \geqslant 2$.

On peut donc définir les polynômes P^κ par la relation de récurrence

$$-P^\kappa = \sum_{\substack{(\lambda,\mu) \in \mathbf{N}^{s+1} \setminus \{(0,0),(0,1)\} \\ \nu^{(i)} \in \mathbf{N}^s \setminus \{0\} \\ \sum_i \nu^{(i)} + \lambda = \kappa}} \partial^{\lambda,\mu} S \cdot \left(\prod_{i=1}^{\mu} P^{\nu^{(i)}}\right) \cdot R^{2|\lambda|+\mu-2} \ .$$

On majore alors les degrés de P^κ par récurrence :

$$\begin{aligned}
\deg_W P^\kappa &\leqslant \deg_W S + (2|\kappa| - 2) \deg_W S = (2|\kappa| - 1) \deg_W S \\
\deg_T P^\kappa &\leqslant \deg_T S + (2|\kappa| - 2) \deg_T S = (2|\kappa| - 1) \deg_T S \ .
\end{aligned}$$

La majoration de norme locale est immédiate par analogie avec les degrés vu les propriétés de la norme aux places ultramétriques.

Considérons maintenant le cas archimédien (désormais $P^\kappa = P_1^\kappa$ pour alléger). On utilise la relation de récurrence suivante, établie dans la démonstration du lemme 6.1 de [Rémoob] (haut de la page 139), avec $Q_\kappa = P^\kappa \cdot \kappa!$ et $P = S$ où, rappelons-le, κ' est tel que $\kappa_{k_0} = \kappa'_{k_0} + 1$ et $\kappa_k = \kappa'_k$ sinon :

$$\begin{aligned} Q_\kappa = R^2 \frac{\partial Q_{\kappa'}}{\partial W_{k_0}} - R \frac{\partial S}{\partial W_{k_0}} \frac{\partial Q_{\kappa'}}{\partial T} \\ + (2|\kappa'| - 1) Q_{\kappa'} \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial W_{k_0}} \frac{\partial R}{\partial T} - R \frac{\partial R}{\partial W_{k_0}} \right) . \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement les estimations de degré annoncées. En particulier, on utilise le fait que $\max(\deg_W Q_{\kappa'}, \deg_T Q_{\kappa'}) \leqslant (2|\kappa| - 3)D$ pour l'estimation de norme :

$$\begin{aligned} \|Q_\kappa\|_{1,v} &\leqslant 2D^2 \|S\|_{1,v}^2 \cdot (2|\kappa| - 3)D \|Q_{\kappa'}\|_{1,v} + (2|\kappa| - 3)\|Q_{\kappa'}\|_{1,v} \cdot 2D^3 \|S\|_{1,v}^2 \\ &\leqslant 4(2|\kappa| - 3)D^3 \|S\|_{1,v}^2 \|Q_{\kappa'}\|_{1,v} \leqslant 8(|\kappa| - 1)D^3 \|S\|_{1,v}^2 \|Q_{\kappa'}\|_{1,v} . \end{aligned}$$

On se souvient alors que dans le cas $|\kappa| = 1$ on a $\|Q_\kappa\|_{1,v} \leqslant \|S\|_{1,v} D^{\delta_v}$ pour en déduire par récurrence que $\|Q_\kappa\|_{1,v} \leqslant \|S\|_{1,v}^{2|\kappa|-1} 8^{|\kappa|-1} D^{3|\kappa|-2} (|\kappa| - 1)!$; ceci implique le résultat annoncé vu la définition de Q_κ ci-dessus et le fait que $\binom{|\kappa|}{\kappa} \leqslant s^{|\kappa|}$. □

Notations 2.4.3. On note P_{s+1} le polynôme donné par l'application du fait 2.2.9 page 34 à V avec $k = s + 1$ et $Q = \frac{\partial P_{s+1}}{\partial X_{s+1}}$. Il est clair que $\deg Q = \Delta - 1$ et $\|Q\|_{1,v} \leqslant \|f_V\|_{1,v} \Delta^{\delta_v}$.

Lemme 2.4.4. *Avec la définition précédente, pour tout $k \in \{0, \ldots, s\}$, tout $\kappa \in \mathbf{N}^s \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \{0, 1\}$, il existe des formes homogènes $P_{k,\alpha}^\kappa$ telles que :*

(i) $\partial^\kappa \frac{X_{s+1}}{X_k} = \frac{P_{k,\alpha}^\kappa}{(X_k^{\Delta+1} Q)^{2|\kappa|}}$ *dans* $\boldsymbol{k}(V)$;

(ii) $\deg P_{k,\alpha}^\kappa = 4\Delta|\kappa|$;

(iii) $\|P_{k,\delta_v}^\kappa\|_{1,v} \leqslant \|f_V\|_{1,v}^{2|\kappa|} \cdot (8s\Delta^3)^{|\kappa|\delta_v}$ *en toute place v.*

Démonstration. Posons $S_k = P_{s+1}(1, W_1, \ldots, W_s, W_k T)$; les degrés partiels en W et T de S_k sont tous deux majorés par Δ, et la norme par celle de f_V.

On souhaite appliquer le lemme précédent avec $L = \boldsymbol{k}(V)$ en prenant pour W'_l et ω les images respectives de X_l / X_0 et X_{s+1} / X_k dans ce dernier, ainsi que $S = S_k$. Ceci est possible car on a

$$\begin{aligned} \pi(R) = \pi\left(\frac{\mathrm{d}\, S_k}{\mathrm{d}\, T}\right) &= \pi\big(W_k Q(1, W_1, \ldots, W_s, W_k T)\big) \\ &= \frac{X_k}{X_0} Q\left(\frac{X_0}{X_0}, \ldots, \frac{X_{s+1}}{X_0}\right) \end{aligned}$$

et qu'aucun de ces facteurs n'est nul dans $\boldsymbol{k}(V)$ car le plongement est adapté. On note $\tilde{P}^{\kappa}_{k,\delta_v}$ les polynômes obtenus. On a alors, dans $\boldsymbol{k}(V)$:

$$\begin{aligned}
\partial^{\kappa}\frac{X_{s+1}}{X_k} &= \pi\left(\frac{\tilde{P}^{\kappa}_{k,\delta_v}(W_1,\dots,W_s,T)}{R(W_1,\dots,W_s,T)^{2|\kappa|-1}}\right)\\
&= \frac{\tilde{P}^{\kappa}_{k,\delta_v}(X_1/X_0,\dots,X_s/X_0,X_{s+1}/X_k)}{\big((X_k/X_0)Q(X_0/X_0,\dots,X_s/X_0,X_{s+1}/X_0)\big)^{2|\kappa|-1}}\cdot\left(\frac{X_0X_k}{X_0X_k}\right)^{(2|\kappa|-1)\Delta}\\
&= \frac{\overline{P}^{\kappa}_{k,\delta_v}(X_0,\dots,X_{s+1})}{\big(X_k^{\Delta+1}Q(X_0,\dots,X_{s+1})\big)^{2|\kappa|-1}} = \frac{P^{\kappa}_{k,\delta_v}(X_0,\dots,X_{s+1})}{\big(X_k^{\Delta+1}Q(X_0,\dots,X_{s+1})\big)^{2|\kappa|}}
\end{aligned}$$

où $\overline{P}^{\kappa}_{k,\delta_v}$ est l'homogénéisé de $\tilde{P}^{\kappa}_{k,\delta_v}$ par rapport à X_0X_k, de degré $2\Delta(2|\kappa|-1)$, et $P^{\kappa}_{k,\delta_v} = \overline{P}^{\kappa}_{k,\delta_v}X_k^{\Delta+1}Q$. Cette dernière opération n'a pour but que de simplifier les calculs ultérieurs en rendant le degré exactement linéaire en $|\boldsymbol{\kappa}|$.

Par construction, P^{κ}_{k,δ_v} est homogène de degré $4\Delta|\kappa|$ et satisfait le premier point ; de plus

$$\|P^{\kappa}_{k,\delta_v}\|_{1,v} \leqslant \|f_V\|_{1,v}^{2|\kappa|-1}\cdot\Big((8s)^{|\kappa|}\Delta^{3|\kappa|-2}\Big)^{\delta_v}\cdot\|f_V\|_{1,v}\cdot\Delta^{\delta_v}$$

qui donne immédiatement le dernier point. □

Nous sommes maintenant prêts à étudier les dérivées des monômes de la forme

$$M_k^{\lambda} = \prod_{l=0}^{s+1}\left(\frac{X_l}{X_k}\right)^{\lambda_l},$$

qui font l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.4.5. *Soient $\lambda \in \mathbf{N}^{s+2}$ et M_k^{λ} comme ci-dessus, pour $k \in \{0,\dots,s\}$. En conservant les notations ci-dessus, pour tous $\kappa \in \mathbf{N}^s$ et $\alpha \in \{0,1\}$, il existe des formes homogènes $P^{\kappa}_{\lambda,k,\alpha}$ telles que*

(i) $\partial^{\kappa}M_k^{\lambda} = \frac{P^{\kappa}_{\lambda,k,\alpha}}{Q_k^{2|\kappa|}X_k^{2|\kappa|(\Delta+1)+|\lambda|}}$ *dans* $\boldsymbol{k}(V)$;

(ii) $\deg P^{\kappa}_{\lambda,k,\alpha} = |\lambda| + 4\Delta|\kappa|$;

(iii) $\|P^{\kappa}_{\lambda,k,\delta_v}\|_{1,v} \leqslant \|f_V\|_{1,v}^{2|\kappa|}\left(\left(16s\Delta^3\right)^{|\kappa|}\cdot 2^{s|\lambda|}\right)^{\delta_v}$ *en toute place v.*

De plus, $\mathrm{Ord}_{X_0}\big(P^{\kappa}_{\lambda,k,\alpha}\big) \geqslant \lambda_0$.

Démonstration. On utilise la règle de Leibniz :

$$\partial^{\kappa}M_k^{\lambda} = \partial^{\kappa}\prod_{l=0}^{s+1}\prod_{\alpha_l=1}^{\lambda_l}\left(\frac{X_l}{X_k}\right) = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{N}}\prod_{l=0}^{s+1}\prod_{\alpha_l=1}^{\lambda_l}\partial^{\nu^{(l,\alpha_l)}}\left(\frac{X_l}{X_k}\right),$$

où la somme est prise sur l'ensemble

$$\mathcal{N} = \left\{ \boldsymbol{\nu} \in \prod_{l=0}^{s+1} (\mathbf{N}^s)^{\lambda_l} \text{ tel que } \sum_{l=0}^{s+1} \sum_{\alpha_l=1}^{\lambda_l} \nu^{(l,\alpha_l)} = \kappa \right\} .$$

On pose alors $P_{k,\delta_v}^{(0,\dots,0)} = 1$ et $\mathbf{1}_0(\kappa) = 1$ si $\kappa = (0,\dots,0)$ et 0 sinon, de sorte que d'après le lemme précédent on a

$$\partial^\kappa \frac{X_{s+1}}{X_k} = \frac{P_{k,\delta_v}^\kappa}{(X_k^{\Delta+1} Q)^{2|\kappa|}} \cdot \left(\frac{X_{s+1}}{X_k} \right)^{\mathbf{1}_0(\kappa)}$$

pour tout κ, même nul. On pose enfin $\nu_0^{(l,\alpha_l)} = 0$ pour tout l ; en appliquant le lemme 2.4.1 page 53, il vient alors :

$$\partial^\kappa M_k^\lambda = \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}'} \left(\prod_{l=0}^{s} \prod_{\alpha_l=1}^{\lambda_l} (-1)^{\nu_k^{(l,\alpha_l)}} \left(\frac{X_l}{X_k} \right)^{1-\nu_l^{(l,\alpha_l)}} \left(\frac{X_0}{X_k} \right)^{|\nu^{(l,\alpha_l)}|} \right)$$
$$\cdot \prod_{\alpha_{s+1}=1}^{\lambda_{s+1}} \frac{P_{k,\delta_v}^{\nu^{(s+1,\alpha_{s+1})}}}{(X_k^{\Delta+1} Q)^{2|\nu^{(s+1,\alpha_{s+1})}|}} \cdot \left(\frac{X_{s+1}}{X_k} \right)^{\mathbf{1}_0(\nu^{(s+1,\alpha_{s+1})})} ,$$

où la somme est prise sur l'ensemble

$$\mathcal{N}' = \Big\{ \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N} \text{ tel que } \nu_l^{(l,\alpha_l)} = 0$$
$$\text{et, pour tout } (l,\alpha_l) \text{ avec } l \leqslant s : \operatorname{Supp} \nu^{(l,\alpha_l)} \subset \{k,l\} \text{ et } \nu_l^{(l,\alpha_l)} \leqslant 1 \Big\} .$$

On remarque alors que $\sum_{l=0}^{s+1} \sum_{\alpha_l=1}^{\lambda_l} 1 = |\lambda|$ de sorte que multiplier chaque facteur par X_k dans l'expression ci-dessus revient à multiplier la somme par $X_k^{|\lambda|}$. On est ainsi amené à poser

$$P_{\lambda,k,\delta_v}^\kappa = \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}'} \left(\prod_{l=0}^{s} \prod_{\alpha_l=1}^{\lambda_l} (-1)^{\nu_k^{(l,\alpha_l)}} X_l^{1-\nu_l^{(l,\alpha_l)}} X_k^{\nu_l^{(l,\alpha_l)}} \cdot X_0^{|\nu^{(l,\alpha_l)}|} X_k^{|\nu^{(l,\alpha_l)}|(2\Delta+1)} \cdot Q^{2|\nu^{(l,\alpha_l)}|} \right)$$
$$\cdot \prod_{\alpha_{s+1}=1}^{\lambda_{s+1}} P_{k,\delta_v}^{\nu^{(s+1,\alpha_{s+1})}} \cdot X_{s+1}^{\mathbf{1}_0(\nu^{(s+1,\alpha_{s+1})})} X_k^{1-\mathbf{1}_0(\nu^{(s+1,\alpha_{s+1})})}$$

qui satisfait au premier point.

Le calcul du degré est direct (par homogénéité, c'est celui du dénominateur) et on ne détaille donc que l'estimation de norme : chaque terme de la somme définissant $P_{\lambda,k,\delta_v}^\kappa$ est majoré en norme par

$$\left(\prod_{l=0}^{s} \prod_{\alpha_l=1}^{\lambda_l} \|Q\|_{1,v}^{2|\nu^{(l,\alpha_l)}|} \right) \prod_{\alpha_{s+1}=1}^{\lambda_{s+1}} \|P_{k,\delta_v}^{\nu^{(s+1,\alpha_{s+1})}}\|_{1,v} \leqslant \|f_V\|_{1,v}^{2|\kappa|} \cdot (8s\Delta^3)^{|\kappa|\delta_v}$$

d'après le lemme précédent et le fait que $\|Q\|_{1,v}^{2|\boldsymbol{\nu}|}$ admet le même majorant que celui donné par le lemme en question pour $\|P_{k,\delta_v}^{\boldsymbol{\nu}}\|_{1,v}$ pour tout $\boldsymbol{\nu}$. On remarque alors que l'ensemble de sommation $\mathcal{N}'$ est contenu dans $\mathcal{N}$ qui s'écrit aussi

$$\prod_{p=1}^{s}\left\{\boldsymbol{\nu}_p \in \mathbf{N}^{|\lambda|} \text{ tel que } \sum_{l=0}^{s+1}\sum_{\alpha_l=1}^{\lambda_l} \nu_p^{(l,\alpha_l)} = \kappa_p\right\}.$$

Chacun des facteurs de ce produit est de cardinal $\binom{\kappa_p+|\lambda|-1}{|\lambda|-1} \leqslant 2^{\kappa_p+|\lambda|-2}$. L'estimation annoncée suit en prenant le produit.

Enfin, on constate que chaque terme de la somme définissant $P_{\lambda,k,\delta_v}^{\kappa}$ contient un facteur (pour $l=0$) de la forme $\prod_{\alpha_0=1}^{\lambda_0} X_0^{1-\nu_0^{(0,\alpha_0)}} = X_0^{\lambda_0}$, ce qui prouve l'assertion sur l'ordre. □

Transposons maintenant ce résultat à notre situation multiprojective. On rappelle auparavant que les Q_i sont donnés par la notation 2.2.13 page 36, qui coïncide avec la notation 2.4.3 page 56 appliquée successivement à chaque facteur Z_i.

Lemme 2.4.6. *Soit $G \in \boldsymbol{k}[(X_0^{(i)},\dots,X_{u+1}^{(i)})_i]$ une forme de multidegré $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ et $g = G/\prod_{i=1}^m (X_{k_i}^{(i)})^{\alpha_i}$ avec $k \in \prod_{i=1}^m \{0,\dots,u_i\}$. Alors, pour tous $\boldsymbol{\kappa} \in \prod_{i=1}^m \mathbf{N}^{u_i}$ et $\beta \in \{0,1\}$, il existe une forme $P_{G,k,\delta_v}^{\boldsymbol{\kappa}}$ telle que*

(i) $\partial^{\boldsymbol{\kappa}} g = \dfrac{P_{G,k,\beta}^{\boldsymbol{\kappa}}}{\prod_{i=1}^m Q_i^{2|\kappa^{(i)}|}(X_{k_i}^{(i)})^{2|\kappa^{(i)}|(D_i+1)+\alpha_i}}$ *dans* $\boldsymbol{k}(Z)$ *;*

(ii) $\deg_i P_{G,k,\beta}^{\boldsymbol{\kappa}} = \alpha_i + 4D_i|\kappa^{(i)}|$ *pour tout i, où* $\deg_i$ *est le degré partiel en* $X^{(i)}$ *;*

(iii) $\|P_{G,k,\delta_v}^{\boldsymbol{\kappa}}\|_{1,v} \leqslant \|G\|_{1,v}\prod_{i=1}^m \|\tilde{f}_{Z_i}\|_{1,v}^{2|\kappa^{(i)}|}\left(\left(16u_iD_i^3\right)^{|\kappa^{(i)}|}\cdot 2^{u_i\alpha_i}\right)^{\delta_v}$ *pour tout v.*

De plus, $\mathrm{Ind}_E^{\eta a^2}(P_{G,k,\beta}^{\boldsymbol{\kappa}}) \geqslant \mathrm{Ind}_E^{\eta a^2}(G)$.

Démonstration. Les trois premiers points s'obtiennent en remarquant que g est une combinaison linéaire de monômes en $X_l^{(i)}/X_k^{(i)}$ pour $i \in \{1,\dots,m\}$ et $l \in \{0,\dots,u_i+1\}$, puis en écrivant que

$$\partial^{\boldsymbol{\kappa}}\left(\prod_{i=1}^m\prod_{l=0}^{u_i+1}\left(\frac{X_l^{(i)}}{X_k^{(i)}}\right)^{\lambda_k^{(i)}}\right) = \prod_{i=1}^m \partial^{i,\kappa^{(i)}}\left(\prod_{l=0}^{u_i+1}\left(\frac{X_l^{(i)}}{X_k^{(i)}}\right)^{\lambda_k^{(i)}}\right)$$

et en appliquant le lemme 2.4.5 page 57 sur chaque facteur.

Seul le point sur l'indice reste à vérifier ; on peut clairement se ramener au cas où $G = \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\lambda}}$ est un monôme. Considérons alors $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\nu}}$ un monôme apparaissant dans $P_{G,k,\beta}^{\boldsymbol{\kappa}}$: c'est-à-dire que $(X^{(i)})^{\nu^{(i)}}$ apparaît dans $P_{\lambda^{(i)},k,\beta}^{\boldsymbol{\kappa}}(X^{(i)})$. D'après le lemme cité, on alors $\nu_0^{(i)} \geqslant \lambda_0^{(i)}$ d'où, en sommant, $S_0^{\eta a^2}(\boldsymbol{\nu}) \geqslant S_0^{\eta a^2}(\boldsymbol{\lambda})$ qui est équivalent à l'estimation annoncée vu la définition de l'indice. □

2.4.2 Minoration de l'indice

Nous allons maintenant montrer que la forme auxiliaire construite précédemment s'annule avec un indice élevé en e. Commençons par préciser la notion d'indice utilisée, similaire à celle définie au début de la sous-section 2.3.1 page 45, mais cette fois en un point. Par ailleurs on introduit d'abord la notion d'indice pondéré par un vecteur $b \in \mathbf{N}^m$ quelconque avant de spécialiser au vecteur de poids qui nous intéresse, ce qui n'était pas utile précédemment mais le sera cette fois pour énoncer la variante du théorème du produit que nous utiliserons. Posons

$$S^b(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{|\kappa^{(1)}|}{b_1} + \cdots + \frac{|\kappa^{(m)}|}{b_m}$$

pour tout $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbf{N}^u$. Si ζ est une fraction rationnelle et x un point où elle est définie, on définit son indice en x comme

$$\mathrm{Ind}_x^b \zeta = \inf\{S^b(\boldsymbol{\kappa}) \text{ pour } \boldsymbol{\kappa} \text{ tel que } \partial^{\boldsymbol{\kappa}}\zeta(x) \neq 0\} \ ,$$

où la borne inférieure est en fait un minimum, sauf si $\zeta = 0$, cas où l'indice est infini.

Remarque 2.4.7. La définition ci-dessus fait usage d'une base de dérivations de $\boldsymbol{k}(Z_i)$ *via* les applications $\partial^{\boldsymbol{\kappa}}$ (voir le début de la sous-section 2.4.1 page 53). Cependant, elle ne dépend pas de la base choisie, car seul compte l'ordre des opérateurs différentiels sur chaque facteur (correspondant à $|\kappa^{(i)}|$ ci-dessus), ordre qui est indépendant de l'expression de ces opérateurs en fonction de telle ou telle base de dérivations.

Lemme 2.4.8. *Soient ζ_1, ζ_2 et α des fonctions rationnelles telles que $\zeta_1 = \alpha\zeta_2$ et x un point où elles sont toutes les trois définies.*

(i) Si $\boldsymbol{\kappa}$ est tel que $\partial^{\boldsymbol{\nu}}\zeta_2(x) = 0$ dès que $\boldsymbol{\nu} < \boldsymbol{\kappa}$ pour l'ordre produit sur $\mathbf{N}^u$, alors $\partial^{\boldsymbol{\kappa}}\zeta_1(x) = \alpha(x)\,\partial^{\boldsymbol{\kappa}}\zeta_2(x)$.

(ii) Si $\alpha(x) \neq 0$ on a $\mathrm{Ind}_x^b(\zeta_1) = \mathrm{Ind}_x^b(\zeta_2)$.

Démonstration. Le premier point découle facilement de la formule de LEIBNIZ :

$$\partial^{\boldsymbol{\kappa}}\zeta_1(x) = \sum_{\boldsymbol{\nu} \leqslant \boldsymbol{\kappa}} \partial^{\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\nu}}\alpha(x)\,\partial^{\boldsymbol{\nu}}\zeta_2(x) \ .$$

Or, par hypothèse, tous les termes de cette somme sont nuls sauf peut-être celui où $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\kappa}$.

Si $\alpha(x) \neq 0$ alors α^{-1} est également définie en x et les deux autres fonctions jouent donc un rôle symétrique. Ainsi, si un indice $\boldsymbol{\kappa}$ est minimal pour la condition $\partial^{\boldsymbol{\kappa}}\zeta_1(x) \neq 0$, il l'est aussi pour la condition $\partial^{\boldsymbol{\kappa}}\zeta_2(x) \neq 0$ grâce au point précédent, ce qui prouve que les deux fonctions ont le même indice en x. □

Si G est une forme multihomogène, on définit $\operatorname{Ind}_x^b G = \operatorname{Ind}_x^b G/H$ où H est n'importe quelle forme multihomogène de même degré ne s'annulant pas en x. Le deuxième point du lemme précédent montre que cette définition a bien un sens. On s'intéressera désormais à l'indice pondéré par $\eta a^2 = (a_1^2, \ldots, a_{m-1}^2, (m-1)a_m^2)$.

On choisit dans l'atlas Γ^{m-1} présenté en sous-section 2.2.5, page 42 une carte γ_e contenant e, et on considère la forme multihomogène F'_{γ_e} donnée par le scolie 2.3.7 page 51. Le but de cette section est alors de montrer la proposition suivante.

Proposition 2.4.9. *On a* $\operatorname{Ind}_e^{\eta a^2} F'_{\gamma_e} \geqslant \frac{\varepsilon_1 \delta}{\sigma}$ *avec* $\sigma = \frac{128(m-1)B}{\varepsilon}$.

La preuve consistera à évaluer les valeurs absolues locales des valeurs en e des dérivées successives de cette forme et à montrer qu'elles sont suffisamment petites, tant que l'ordre de dérivation n'est pas trop élevé, pour contredire la formule du produit à moins que la dérivée ne s'annule. Avant de procéder, commençons par introduire quelques choix d'indices adaptés à chaque place.

On rappelle que $\tilde{\boldsymbol{e}}$ désigne un système de coordonnées multihomogènes (dans le plongement adapté) du point e supposé contredire le théorème 2.1.1 page 27. On choisit, pour tout i, un indice $k_{v,i} \in \{0, \ldots, u_i\}$ de sorte que $|\tilde{e}_{k_{v,i}}^{(i)}|_v$ soit maximal parmi $|\tilde{e}_0^{(i)}|_v, \ldots, |\tilde{e}_{u_i}^{(i)}|_v$. Le lemme suivant montre que cette valeur absolue représente à peu de chose près la norme de $\tilde{e}^{(i)}$.

Lemme 2.4.10. *Avec les notations précédentes, on a*

$$|\tilde{e}_{k_{v,i}}^{(i)}|_v \geqslant \|\tilde{\boldsymbol{e}}\|_{\infty,v} \cdot \|f_{Z_i}\|_{1,v}^{-1} \cdot (2D'_i)^{-D_i(u_i+1)\delta_v} .$$

Démonstration. Il s'agit de montrer qu'on a

$$|\tilde{e}_k^{(i)}|_v \leqslant |\tilde{e}_{k_{v,i}}^{(i)}|_v \cdot \|f_{Z_i}\|_{1,v} \cdot (2D'_i)^{D_i(u_i+1)\delta_v}$$

pour tout k. D'après la note 2 en bas de page 33 on a $\|f_{Z_i}\|_{1,v} \geqslant 1$, donc le résultat est acquis dès que $|\tilde{e}_k^{(i)}|_v \leqslant |\tilde{e}_{k_{v,i}}^{(i)}|_v$, ce qui est le cas pour $k \leqslant u_i$ par définition de $k_{v,i}$. Notons donc $k > u_i$ un indice tel que $|\tilde{e}_{k_{v,i}}^{(i)}|_v < |\tilde{e}_k^{(i)}|_v$.

On utilise alors le fait qu'on connaît, dans un plongement adapté, des relations $P_k^{(i)}$ liant chacune des dernières coordonnées aux premières, unitaires en la dernière variable (voir page 36). En décomposant $P_k^{(i)}$ suivant les puissances de $X_k^{(i)}$, on voit qu'il existe des polynômes $P_{k,\alpha}^{(i)} \in \boldsymbol{k}[X_0^{(i)}, \ldots, X_{u_i}^{(i)}]$ tels que :

$$(X_k^{(i)})^{D_i} = \sum_{\alpha=1}^{D_i} (X_k^{(i)})^{D_i-\alpha} P_{k,\alpha}^{(i)} \quad \text{où } \deg P_{k,\alpha}^{(i)} = \alpha \text{ et } \sum_{\alpha=1}^{D_i} \|P_{k,\alpha}^{(i)}\|_{1,v} \leqslant \|P_l^{(i)}\|_{1,v} .$$

On spécialise alors en $\tilde{e}^{(i)}/\tilde{e}_{k_{v,i}}^{(i)}$ et on prend les valeurs absolues :

$$\left|\frac{\tilde{e}_k^{(i)}}{\tilde{e}_{k_{v,i}}^{(i)}}\right|_v^{D_i} \leqslant \sum_{\alpha=1}^{D_i} \left|\frac{\tilde{e}_k^{(i)}}{\tilde{e}_{k_{v,i}}^{(i)}}\right|_v^{D_i-\alpha} \left|P_{k,\alpha}^{(i)}\left(\frac{\tilde{e}_0^{(i)}}{\tilde{e}_{k_{v,i}}^{(i)}}, \ldots, \frac{\tilde{e}_{u_i}^{(i)}}{\tilde{e}_{k_{v,i}}^{(i)}}\right)\right|_v$$

puis on divise et on utilise les remarques précédentes pour obtenir :

$$\left|\frac{\tilde{e}_k^{(i)}}{\tilde{e}_{k_{v,i}}^{(i)}}\right|_v \leqslant \sum_{\alpha=1}^{D_i} \left|\frac{\tilde{e}_k^{(i)}}{\tilde{e}_{k_{v,i}}^{(i)}}\right|_v^{1-\alpha} \|P_{k,\alpha}^{(i)}\|_{1,v} \leqslant \sum_{\alpha=1}^{D_i} \|P_{k,\alpha}^{(i)}\|_{1,v} \leqslant \|P_l^{(i)}\|_{1,v}$$

Le résultat désiré est alors donné exactement par (2.24). □

On introduit ensuite le point $e' \in \mathcal{A}^{m-1}$ tel que $\varphi_a(e) = (e, e')$ et on note $e'^{(j)} = L^{(\gamma_e,j)}(\tilde{e}^{(j)}, \tilde{e}^{(m)})$, qui est un système de coordonnées multihomogènes de e' dans le plongement Θ^{m-1} (on rappelle que $L^{(\gamma,j)}$ est défini par (2.27)). On choisit alors pour tout j un indice $l_{v,j} \in \{0, \ldots, n\}$ maximisant $|e'^{(j)}_{l_{v,j}}|_v$, ainsi que $l_j \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $e'^{(j)}_{l_j} \neq 0$. Il est alors clair que $|e'^{(j)}_{l_{v,j}}|_v \geqslant \|e'^{(j)}\|_{1,v}(n+1)^{-\delta_v}$.

Introduisons maintenant une fonction rationnelle définie par

$$\xi = \frac{F'_{\gamma_e}(\boldsymbol{X})}{\prod_{i=1}^m (X_0^{(i)})^{\varepsilon_0 a_i^2 \delta + r_i} \prod_{j=1}^{m-1} L_{l_j}^{(\gamma_e,j)}(\boldsymbol{X})^\delta}\ .$$

D'après l'hypothèse (2.1), on a $\tilde{e}_0^{(i)} \neq 0$; par ailleurs le choix de l_j assure que $L_{l_j}^{(\gamma_e,j)}(\tilde{\boldsymbol{e}}) \neq 0$, de sorte que le dénominateur ne s'annule pas en $\tilde{\boldsymbol{e}}$ et que par définition on a $\mathrm{Ind}_e^{\eta a^2} F'_{\gamma_e} = \mathrm{Ind}_e^{\eta a^2} \xi$. Pour minorer cet indice, nous allons commencer par décomposer cette fonction en des facteurs dont nous aurons un bon contrôle en chaque place.

Pour toute place v et tout indice j on note désormais $\gamma_{v,j}$ la carte donnée par la section 1.5.4 page 13 avec $(a, b, x, y) = (a_i, a_m, e_i, e_m)$, puis $\gamma_v = (\gamma_{v,1}, \ldots, \gamma_{v,m-1})$ la carte correspondante dans Γ^{m-1}. On pose alors pour simplifier $L^{(v,j)} = L^{(\gamma_v,j)}$ et $F'_v = F'_{\gamma_v}$. En utilisant le premier point du scolie 2.3.7 page 51 et en remarquant que, pour chaque j, les vecteurs $L^{(v,j)}(\tilde{e}^{(j)}, \tilde{e}^{(m)})$ sont non nuls et proportionnels entre eux quand v varie, on a, pour tout v :

$$\xi = \frac{R(\boldsymbol{X})\, F(\boldsymbol{X}; L^{(v,1)}(\boldsymbol{X}), \ldots, L^{(v,m-1)}(\boldsymbol{X}))}{\prod_{i=1}^m (X_0^{(i)})^{\varepsilon_0 a_i^2 \delta + r_i} \cdot \prod_{j=1}^{m-1} L_{l_j}^{(v,j)}(\boldsymbol{X})^\delta}$$

par homogénéité de F. On introduit alors nos indices locaux k_v et l_v :

$$\xi = \frac{R(\boldsymbol{X})\, F(\boldsymbol{X}; L^{(v,1)}(\boldsymbol{X}), \ldots, L^{(v,m-1)}(\boldsymbol{X}))}{\prod_{i=1}^m (X_{k_{v,i}}^{(i)})^{\varepsilon_0 a_i^2 \delta + r_i} \cdot \prod_{j=1}^{m-1} L_{l_{v,j}}^{(v,j)}(\boldsymbol{X})^\delta} \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{L_{l_{v,j}}^{(v,j)}(\boldsymbol{X})}{L_{l_j}^{(v,j)}(\boldsymbol{X})}\right)^\delta \cdot \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{X_{k_{v,i}}^{(i)}}{X_0^{(i)}}\right)^{\varepsilon_0 a_i^2 \delta + r_i}$$

puis on utilise la définition de $\delta d' + r$ (voir (2.31) page 43 pour d' ; pour r il suffit de se souvenir qu'il ne dépend pas de δ) en scindant le premier facteur et de nouveau

la remarque sur les $L^{(v,j)}$ pour simplifier le second :

$$\xi = \frac{R(\boldsymbol{X})\, F(\boldsymbol{X}; L^{(v,1)}(\boldsymbol{X}), \ldots, L^{(v,m-1)}(\boldsymbol{X}))}{\prod_{i=1}^{m} (X_{k_{v,i}}^{(i)})^{\delta d_i' + r_i}}$$
$$\cdot \underbrace{\prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{(X_{k_{v,j}}^{(j)})^{2a_j^2} (X_{k_{v,m}}^{(m)})^{2a_m^2}}{L_{l_{v,j}}^{(v,j)}(X^{(j)}, X^{(m)})} \right)^{\delta}}_{\alpha_{2,v}} \cdot \underbrace{\prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{L_{l_{v,j}}^{(\gamma_e,j)}(\boldsymbol{X})}{L_{l_j}^{(\gamma_e,j)}(\boldsymbol{X})} \right)^{\delta}}_{\alpha_{3,v}} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{X_{k_{v,i}}^{(i)}}{X_0^{(i)}} \right)^{\varepsilon_0 a_i^2 \delta + r_i}}_{\alpha_{4,v}} .$$

On remarque que le numérateur du premier facteur est égal à F_v' modulo $\tilde{\mathcal{I}}_Z$.

Soit maintenant $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbf{N}^u$ un indice minimal tel que $\partial^{\boldsymbol{\kappa}} \xi(e) \neq 0$. Comme les derniers facteurs de l'écriture précédente sont tous définis et inversibles en $\boldsymbol{e}$ grâce aux différents choix d'indices et au premier point du scolie 2.2.14 page 36, une nouvelle application du lemme 2.4.8 page 60 montre que, pour tout v, on a l'expression suivante, où l'on rappelle que $F_v' = F_{\gamma_v}'$:

$$\partial^{\boldsymbol{\kappa}} \xi(e) = \underbrace{\partial^{\boldsymbol{\kappa}} \frac{F_v'(\boldsymbol{X})}{\prod_{i=1}^{m} (X_{k_{v,i}}^{(i)})^{\delta d_i' + r_i}}}_{\alpha_{1,v}} (\tilde{\boldsymbol{e}}) \cdot \alpha_{2,v}(\tilde{\boldsymbol{e}}) \cdot \alpha_{3,v}(\tilde{\boldsymbol{e}}) \cdot \alpha_{4,v}(\tilde{\boldsymbol{e}}) \tag{2.39}$$

c'est-à-dire que $\partial^{\boldsymbol{\kappa}} \xi(e) = \alpha_{1,v}(\tilde{\boldsymbol{e}}) \cdot \alpha_{2,v}(\tilde{\boldsymbol{e}}) \cdot \alpha_{3,v}(\tilde{\boldsymbol{e}}) \cdot \alpha_{4,v}(\tilde{\boldsymbol{e}})$. Remarquons que chacun des facteurs du membre de droite dépend de v, mais pas leur produit.

Pour $p \in \{1, 2, 3, 4\}$, posons alors $h(\alpha_p(\tilde{\boldsymbol{e}})) = \sum_v \Delta_v \log |\alpha_{p,v}(\tilde{\boldsymbol{e}})|_v$ où Δ_v désigne le degré local divisé en v ; cette somme converge car chaque $\alpha_{p,v}$ appartient à un ensemble fini fixe de nombres algébriques (dont le cardinal est majoré en fonction de n, m et N). La formule du produit donne alors

$$0 = h(\alpha_1(\tilde{\boldsymbol{e}})) + h(\alpha_2(\tilde{\boldsymbol{e}})) + h(\alpha_3(\tilde{\boldsymbol{e}})) + h(\alpha_4(\tilde{\boldsymbol{e}})) \ . \tag{2.40}$$

Supposons maintenant que, contrairement à la conclusion de la proposition, on ait

$$S^{\eta a^2}(\boldsymbol{\kappa}) < \varepsilon_1 \delta / \sigma \tag{2.41}$$

et montrons qu'on contredit alors l'égalité ci-dessus. Pour cela, on majore séparément chacun des termes, en procédant de droite à gauche (par ordre plus ou moins croissant de difficulté) et on obtient une somme négative en utilisant l'hypothèse ci-dessus, les hypothèses (2.2) et (2.3) sur e, et bien sûr les propriétés de la forme auxiliaire.

Pour $\alpha_{4,v}(\tilde{\boldsymbol{e}})$ on commence par remarquer que le dénominateur n'intervient pas dans le calcul de la hauteur, puis au numérateur que la valeur absolue d'une coordonnée est majorée par la norme du vecteur :

$$\prod_v \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{|\tilde{e}_{k_{v,i}}^{(i)}|_v}{|\tilde{e}_0^{(i)}|_v} \right)^{(\varepsilon_0 \delta a_i^2 + r_i)\Delta_v} \leqslant \prod_{i=1}^{m} H_\infty(\tilde{e}^{(i)})^{\varepsilon_0 \delta a_i^2 + r_i}$$

puis on passe au logarithme :

$$h(\alpha_4(\tilde{\boldsymbol{e}})) \leqslant \varepsilon_0 \delta \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i^2 h_\infty(\tilde{e}^{(i)}) \Big) + o(\delta) \ .$$

Concentrons-nous sur le contenu de la parenthèse, que nous rencontrerons à nouveau en évaluant $\alpha_{1,v}(\tilde{\boldsymbol{e}})$. On utilise le fait que $\tilde{e}^{(i)} = \chi_i(e^{(i)})$, puis (1.8) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} a_i^2 h_\infty(\tilde{e}^{(i)}) &\leqslant \sum_{i=1}^{m} a_i^2 \big(h_1(e^{(i)}) + h_\infty(\chi_i) \big) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{m} a_i^2 \big(\hat{h}(e_i) + \hat{c}_\Theta + \frac{1}{2} \log(n+1) + h_\infty(\chi_i) \big) \ . \end{aligned}$$

On remarque alors que $h_\infty(\chi_i) \leqslant \log B$ d'après (2.22) et (2.15). On regroupe alors les termes avant d'utiliser d'une part (2.14) et d'autre part le lemme 2.2.4 page 30 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} a_i^2 h_\infty(\tilde{e}^{(i)}) &\leqslant \sum_{i=1}^{m} \big(a_i^2 \hat{h}(e_i) \big) + \big(\hat{c}_\Theta + \frac{1}{2} \log(n+1) + \log B \big) \sum_{i=1}^{m} a_i^2 \\ &\leqslant 2 m a_1^2 \hat{h}(e_1) + 2 a_1^2 \big(\frac{3}{2} c_{1,\Theta} + \log B \big) \ . \end{aligned} \tag{2.42}$$

Au final on a donc

$$h(\alpha_4(\tilde{\boldsymbol{e}})) \leqslant 2 \varepsilon_0 \delta a_1^2 \big(m \hat{h}(e_1) + \frac{3}{2} c_{1,\Theta} + \log B \big) \ . \tag{2.43}$$

Pour $h(\alpha_3(\tilde{\boldsymbol{e}}))$ on commence avec les mêmes arguments pour écrire

$$\prod_v \prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{|L_{l_{v,j}}^{(\gamma_e, j)}(\tilde{e}^{(j)}, \tilde{e}^{(m)})|_v}{|L_{l_j}^{(\gamma_e, j)}(\tilde{e}^{(j)}, \tilde{e}^{(m)})|_v} \right)^{\delta \Delta_v} \leqslant \prod_{j=1}^{m-1} H_\infty(e'_j)^\delta$$

puis on passe au logarithme et on utilise encore (1.8) :

$$h(\alpha_3(\tilde{\boldsymbol{e}})) \leqslant \delta \sum_{j=1}^{m-1} \Big(\hat{h}(e'_j) + \hat{c}_\Theta \Big)$$

mais on conclut cette fois en invoquant (2.13) :

$$h(\alpha_3(\tilde{\boldsymbol{e}})) \leqslant \delta \big(3 a_1^2 (m-1) \gamma_V \hat{h}(e_1) + o(a_1^2) \big) \ . \tag{2.44}$$

Pour $\alpha_{2,v}$, on commence par minorer le dénominateur grâce à la définition de

$l_{v,j}$ puis on utilise la majoration évidente $\|\tilde{e}^{(i)}\|_{\infty,v} \leqslant \|\chi_i\|_{\infty,v} \|e^{(i)}\|_{1,v}$:

$$\begin{aligned}
\frac{|\tilde{e}^{(j)}_{k_{v,j}}|_v^{2a_j^2} |\tilde{e}^{(m)}_{k_{v,m}}|_v^{2a_m^2}}{|L^{(v,j)}_{l_{v,j}}(\tilde{e}^{(j)}, \tilde{e}^{(m)})|_v} &\leqslant \frac{\|\tilde{e}^{(j)}\|_{\infty,v}^{2a_j^2} \|\tilde{e}^{(m)}\|_{\infty,v}^{2a_m^2}}{\|L^{(v,j)}(\tilde{e}^{(j)}, \tilde{e}^{(m)})\|_{1,v}} (n+1)^{\delta_v} \\
&\leqslant \frac{\|e^{(j)}\|_{1,v}^{2a_j^2} \|e^{(m)}\|_{1,v}^{2a_m^2}}{\|L^{(a_j,a_m,\gamma_{v,j})}(e^{(j)}, e^{(m)})\|_{1,v}} (n+1)^{\delta_v} B^{2\delta_v(a_j^2+a_m^2)} \\
&\leqslant (n+1)^{\delta_v} \left(C_{\Theta,v} B^{2\delta_v}\right)^{a_j^2+a_m^2}
\end{aligned}$$

compte tenu de (1.10) et du choix des γ_v. Il ne reste alors plus qu'à prendre le logarithme dans l'estimation précédente, multiplier par δ puis sommer sur v et sur j pour avoir

$$h(\alpha_2(\tilde{\boldsymbol{e}})) \leqslant \delta\big(2a_1^2(c_{1,\Theta} + 2\log B) + o(a_1^2)\big) \tag{2.45}$$

en utilisant encore le lemme 2.2.4 page 30.

Nous allons maintenant expliciter $\alpha_{1,v}$. Pour chaque place v, on applique alors le lemme 2.4.6 page 59 avec $G = F'_v$ et $k = k_v$, et on note $P_v = P^{\boldsymbol{\kappa}}_{F'_v,k_v,\delta_v}$ la forme obtenue pour l'indice $\boldsymbol{\kappa}$ fixé plus haut (plus précisément, celle des deux formes obtenues qui correspond à la place considérée). Remarquons comme précédemment que P_v parcourt un ensemble fini de formes à coefficients algébriques quand v varie ; la famille P_v jouit de plus des propriétés suivantes.

Lemme 2.4.11. *Dans les notations précédentes, on a :*

(i) $\alpha_{1,v} = \dfrac{P_v(\boldsymbol{X})}{\prod_{i=1}^m Q_i(X^{(i)})^{2|\kappa^{(i)}|}(X^{(i)}_{k_{v,i}})^{2|\kappa^{(i)}|(D_i+1)+\delta d'_i+r_i}}$;

(ii) $\deg_i P_v \leqslant 3\delta\eta_i a_i^2$;

(iii) $h_1((P_v)_v) \leqslant 15\delta a_1^2 c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} + o(\delta)$;

(iv) $\mathrm{Ind}_E^{\eta a^2}(P_v) \geqslant \varepsilon_1\delta$;

où l'on a noté $h_1((P_v)_v) = \sum_v \Delta_v \log\|P_v\|_{1,v}$.

Démonstration. Chaque point découle du point correspondant du lemme 2.4.6 page 59, en tenant compte des informations connues sur F'_v (voir le scolie 2.3.7 page 51) et $\boldsymbol{\kappa}$ (voir (2.41)). Le premier est immédiat d'après la définition (2.39) de $\alpha_{1,v}$ et le fait que $\deg_i F'_v = \delta d'_i + r_i$. Le point sur l'indice est également clair.

Avant de passer au degré, remarquons que l'hypothèse (2.41) implique que

$$|\kappa^{(i)}| < \eta_i a_i^2 \varepsilon_1 \delta/\sigma\,, \tag{2.46}$$

ce qui nous servira également pour l'estimation de hauteur. On écrit alors

$$\begin{aligned}\deg_i P_v &= \delta d'_i + r_i + 4D_i|\kappa^{(i)}| \\ &\leqslant \delta a_i^2(2\eta_i + \varepsilon_0) + 4D_i\eta_i a_i^2\varepsilon_1\delta/\sigma + o(\delta) \\ &\leqslant \delta a_i^2\eta_i(2 + \varepsilon_0 + \frac{4B}{\sigma}\varepsilon_1) + o(\delta)\end{aligned}$$

qui donne bien la majoration annoncée, compte tenu du fait que $4B/\sigma \leqslant 1$ par définition de σ (prop. 2.4.9 page 61) et qu'on a largement $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \leqslant 1$.

Pour la hauteur, dans le point correspondant du lemme, on prend le logarithme puis la somme (pondérée par les degrés locaux divisés) sur toutes les places :

$$\begin{aligned}h_1((P_v)_v) &\leqslant h_1((F'_v)_v) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \big(2|\kappa^{(i)}|h_1(\tilde{f}_{Z_i}) + |\kappa^{(i)}|(\log(16g) + 3\log B) + g(\delta d'_i + r_i)\log 2\big) \\ &\leqslant h_1((F'_v)_v) + 2\big(\sum_{i=1}^m |\kappa^{(i)}|h_1(f_{Z_i})\big) + \delta g(\log 2)\sum_{i=1}^m a_i^2(2\eta_i + \varepsilon_0) + o(\delta) \\ &\quad + \big(2gB(\log B + \log(n+1)) + \log(16g) + 3\log B\big)\sum_{i=1}^m |\kappa^{(i)}|\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (2.23) et la définition de d'. Nous allons maintenant majorer indépendamment chacun des termes de cette somme. Le premier est donné par (2.38) ; nous verrons que c'est le terme dominant. Pour le deuxième, on a

$$\sum_{i=1}^m |\kappa^{(i)}|h_1(f_{Z_i}) \leqslant \delta\varepsilon_1\sigma^{-1}\sum_{i=1}^m a_i^2\eta_i h_1(f_{Z_i}) \leqslant \delta a_1^2\varepsilon_1\sigma^{-1}c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)}$$

en utilisant la remarque précédente sur $\boldsymbol{\kappa}$ puis l'hypothèse (2.17).

On écrit ensuite

$$g(\log 2)\sum_{i=1}^m a_i^2(2\eta_i + \varepsilon_0) \leqslant 3g(\log 2)\sum_{i=1}^m a_i^2\eta_i \leqslant 6g(\log 2)\, a_1^2 \leqslant \frac{1}{4}\Lambda a_1^2$$

en utilisant successivement le fait que $\varepsilon_0 < 1$ puis le lemme 2.2.4 page 30 et enfin la définition (2.8) de Λ (deuxième argument du maximum et $m \geqslant g$). Enfin, on remarque que

$$\sum_{i=1}^m |\kappa^{(i)}| \leqslant \delta\varepsilon_1\sigma^{-1}\sum_{i=1}^m \eta_i a_i^2 \leqslant 2\delta a_1^2\varepsilon_1\sigma^{-1}$$

en utilisant à nouveau la remarque précédente sur $\boldsymbol{\kappa}$ et le lemme 2.2.4 page 30. On invoque alors (2.65)[6] pour majorer le dernier terme par

$$2\delta a_1^2\varepsilon_1\sigma^{-1}c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)}\ .$$

Il ne reste plus qu'à prendre la somme, en utilisant le fait que $\varepsilon_1\sigma^{-1} \leqslant 1/8$ (majoration très large mais suffisante) pour aboutir à l'estimation annoncée. □

6. Voir note 4 en bas de page 50

Pour estimer $h(\alpha_1(\tilde{\boldsymbol{e}}))$, commençons par scinder une nouvelle fois notre fonction en deux facteurs :

$$\alpha_{1,v} = \frac{P_v(\boldsymbol{X})}{\prod_{i=1}^m Q_i^{2|\kappa^{(i)}|}(X_{k_{v,i}}^{(i)})^{2|\kappa^{(i)}|(D_i+1)+\delta d_i'+r_i}} = \underbrace{\frac{P_v(\boldsymbol{X})}{\prod_{i=1}^m (X_{k_{v,i}}^{(i)})^{\deg_i P_v}}}_{\alpha_{1',v}} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^m \frac{(X_{k_{v,i}}^{(i)})^{2|\kappa^{(i)}|\cdot \deg Q_i}}{(Q_i)^{2|\kappa^{(i)}|}}}_{\alpha_{1'',v}}$$

Pour le second facteur, on commence par remarquer que le dénominateur ne s'annulle pas en $\tilde{e}^{(i)}$ d'après le deuxième point du scolie 2.2.14 page 36 et qu'on a donc

$$\prod_v \frac{|\tilde{e}_{k_v}^{(i)}|_v^{2\deg Q_i|\kappa^{(i)}|\Delta_v}}{|Q_i(\tilde{e}^{(i)})|_v^{|\kappa^{(i)}|\Delta_v}} \leqslant H_\infty(\tilde{e}^{(i)})^{2\deg Q_i|\kappa^{(i)}|} .$$

On note alors que par définition, $\deg Q_i = D_i - 1 \leqslant B$, puis on utilise (2.46)

$$\begin{aligned} h(\alpha_{1''}(\tilde{\boldsymbol{e}})) &\leqslant 2B \sum_{i=1}^m h_\infty(\tilde{e}^{(i)})|\kappa^{(i)}| \\ &\leqslant 2\delta B \varepsilon_1 \sigma^{-1} \sum_{i=1}^m \eta_i a_i^2 h_\infty(\tilde{e}^{(i)}) . \end{aligned}$$

En adaptant la démonstration de (2.42) on a facilement

$$\sum_{i=1}^m \eta_i a_i^2 h_\infty(\tilde{e}^{(i)}) \leqslant 2a_1^2\big(2(m-1)\hat{h}(e_1) + \frac{3}{2}c_{1,\Theta} + \log B\big)$$

en remarquant que $\sum_{i=1}^m \eta_i = 2(m-1)$. Au final, on a donc

$$\begin{aligned} h(\alpha_{1''}(\tilde{\boldsymbol{e}})) &\leqslant 4\delta a_1^2 B \varepsilon_1 \sigma^{-1}\big(2(m-1)\hat{h}(e_1) + \frac{3}{2}c_{1,\Theta} + \log B\big) \\ &\leqslant \delta a_1^2\big(8(m-1)B\varepsilon_1\sigma^{-1}\hat{h}(e_1) + \frac{3}{2}c_{1,\Theta} + \log B\big) . \end{aligned} \tag{2.47}$$

en utilisant le fait que $4B\varepsilon_1\sigma^{-1} \leqslant 1$ d'après le choix de σ pour les deux derniers termes, mais pas pour le premier car c'est celui qui est crucial dans le choix de σ : on désire donc conserver jusqu'au bout sa dépendance en σ explicite.

Pour l'autre partie, on écrit

$$\alpha_{1',v}(\tilde{\boldsymbol{e}}) = P_v\left(\frac{\tilde{e}^{(1)}}{\tilde{e}_{k_{v,1}}^{(1)}}, \dots, \frac{\tilde{e}^{(m)}}{\tilde{e}_{k_{v,m}}^{(m)}}\right) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} p_{v,\boldsymbol{\lambda}} \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{e}}}{\tilde{\boldsymbol{e}}_{k_v}}\right)^{\boldsymbol{\lambda}}$$

où la dernière somme est prise sur les multiindices $\boldsymbol{\lambda}$ tels que $|\lambda^{(i)}| = \deg_i P_v$ et $S_0^{\eta a^2}(\boldsymbol{\lambda}) \geqslant \frac{3}{4}\varepsilon_1\delta$. Étudions de plus près les valeurs absolues des monômes interve-

nant dans cette écriture ; d'après le lemme 2.4.10 page 61 on a :

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{|\tilde{e}_k^{(i)}|_v}{|\tilde{e}_{k_{v,i}}^{(i)}|_v}\right)^{\lambda_k^{(i)}} \leqslant \prod_{i=1}^{m}\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{|\tilde{e}_k^{(i)}|_v}{\|\tilde{e}^{(i)}\|_{\infty,v}}\right)^{\lambda_k^{(i)}} \cdot \prod_{i=1}^{m}\Big(\|f_{Z_i}\|_{1,v}\cdot(2D_i')^{D_i(u_i+1)\delta_v}\Big)^{\deg_i P_v}.$$

Il est clair que le premier facteur est inférieur à 1 pour tout v. Cependant, si $v \in \mathcal{S}$ on peut dire mieux en se concentrant sur la partie

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{|\tilde{e}_0^{(i)}|_v}{\|\tilde{e}^{(i)}\|_{\infty,v}}\right)^{\lambda_0^{(i)}} \tag{2.48}$$

et en exploitant l'hypothèse principale. On commence par utiliser le fait que $e^{(i)} = \chi_i^{-1}(\tilde{e}^{(i)})$ pour minorer le dénominateur, puis une comparaison classique de normes donne

$$\frac{|\tilde{e}_0^{(i)}|_v}{\|\tilde{e}^{(i)}\|_{\infty,v}} \leqslant \frac{|\tilde{e}_0^{(i)}|_v}{\|e^{(i)}\|_{2,v}}\cdot(n+1)^{3\delta_v/2}\,\|\chi_i^{-1}\|_{\infty,v}\,.$$

Par construction de χ_i (lemme 2.2.10 page 35) on a $\tilde{e}_0^{(i)} = e_0^{(i)}$ et on remarque alors que le premier facteur dans l'écriture ci-dessus n'est autre que $\mathrm{dist}_v(e_i, E)$, ce qui nous permet d'exploiter (2.1) :

$$\begin{aligned}\frac{|\tilde{e}_0^{(i)}|_v}{\|\tilde{e}^{(i)}\|_{\infty,v}} &\leqslant H_2(e_i)^{-\lambda_v\varepsilon}\cdot(n+1)^{3\delta_v/2}\,\|\chi_i^{-1}\|_{\infty,v}\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_v\varepsilon\hat{h}(e_i)}\cdot\mathrm{e}^{\lambda_v\varepsilon\hat{c}_\Theta}\cdot(n+1)^{3\delta_v/2}\,\|\chi_i^{-1}\|_{\infty,v}\end{aligned}$$

où la dernière ligne découle comme d'habitude de (1.8).

En utilisant le fait que $\lambda_0^{(i)} \leqslant |\lambda^{(i)}| = \deg_i P_v$, on peut alors majorer le logarithme de (2.48) par

$$-\lambda_v\varepsilon\sum_{i=1}^{m}\lambda_0^{(i)}\hat{h}(e_i) + \sum_{i=1}^{m}\deg_i P_v\left(\frac{3\delta_v}{2}\log(n+1) + \log\|\chi_i^{-1}\|_{\infty,v} + \lambda_v\varepsilon\hat{c}_\Theta\right)$$

et pour majorer le premier terme de cette somme on écrit en utilisant encore (2.14)

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_0^{(i)}\hat{h}(e_i) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_0^{(i)}}{a_i^2}\,a_i^2\hat{h}(e_i) \geqslant \frac{1}{2}a_1^2\hat{h}(e_1)\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_0^{(i)}}{a_i^2} \geqslant \frac{1}{2}a_1^2\hat{h}(e_1)\,\delta\varepsilon_1$$

où la dernière estimation découle du quatrième point du lemme 2.4.11 page 65 et de la définition de l'indice.

En regroupant tous les termes qui constituent $\alpha_{1',v}(\boldsymbol{e})$ puis en sommant sur v, on majore la hauteur logarithmique de ce facteur par la quantité suivante, où l'on note $\lambda_v = 0$ si $v \notin \mathcal{S}$:

$$\sum_v \Delta_v \Bigg(-\frac{1}{2}\delta a_1^2 \hat{h}(e_1)\lambda_v \varepsilon\varepsilon_1 + \log\|P_v\|_{1,v} + \sum_{i=1}^m \deg_i P_v \Bigg(\frac{3\delta_v}{2}\log(n+1)$$
$$+ \log\|\chi_i^{-1}\|_{\infty,v} + \lambda_v \varepsilon \hat{c}_\Theta + \log\|f_{Z_i}\|_{1,v} + (D_i(u_i+1)\delta_v)\log(2D_i'(n+1))\Bigg)\Bigg)$$

puis en se souvenant que $\sum_v \Delta_v \lambda_v = 1$ et en utilisant (2.22) et le lemme 2.4.11 page 65 :

$$h(\alpha_{1'}(\tilde{\boldsymbol{e}})) \leqslant -\frac{1}{2}\delta a_1^2 \hat{h}(e_1)\varepsilon\varepsilon_1 + 15\delta a_1^2 c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} + 3\delta \sum_{i=1}^m \eta_i a_i^2 h_1(f_{Z_i}) + o(\delta)$$
$$+ 3\delta\Big(\frac{3}{2}\log(n+1) + n\log(Bn) + \varepsilon\hat{c}_\Theta + B(g+1)\log(B(n+1))\Big)\sum_{i=1}^m \eta_i a_i^2$$

On utilise alors l'hypothèse (2.17), le lemme 2.2.4 page 30 et l'estimation (2.66) pour conclure :

$$h(\alpha_{1'}(\tilde{\boldsymbol{e}})) \leqslant -\frac{1}{2}\delta a_1^2 \hat{h}(e_1)\varepsilon\varepsilon_1 + 19\delta a_1^2 c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} + o(\delta)\ .$$

En substituant cette dernière estimation ainsi que (2.43), (2.44), (2.45), (2.47) dans (2.40), il vient

$$0 \leqslant \delta a_1^2\big(\alpha\hat{h}(e_1) + \beta\big) + o(\delta a_1^2) \tag{2.49}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2m\varepsilon_0 + 3(m-1)\gamma_{\mathrm{V}} + \frac{8(m-1)B\varepsilon_1}{\sigma} - \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_1 \\
\beta &= 19c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} + (\frac{7}{2} + 3\varepsilon_0)c_{1,\Theta} + (5+2\varepsilon_0)\log B \\
&\leqslant 20c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)}
\end{aligned}$$

où la dernière majoration utilise (2.64) et le fait que $2\varepsilon_0 \leqslant 1$.

Montrons que α est négatif et même inférieur à $-\frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon_1$. La définition (2.30) de ε_0 assure que

$$2m\varepsilon_0 \leqslant \frac{\varepsilon\varepsilon_1}{16}\ . \tag{2.50}$$

Par ailleurs, en utilisant la définition (2.29) de ε_1 puis celle (2.7) de γ_{V}, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon\varepsilon_1}{48(m-1)} &\geqslant \frac{\varepsilon^{\frac{m}{m-g}}}{48(m-1)\,N^{\frac{m-1}{m-g}}\,(85\cdot 5^m)^{\frac{g}{m-g}}} \\
&\geqslant \frac{\varepsilon^{\frac{m}{m-g}}}{mN^{\frac{m}{m-g}}\,(85\cdot 5^g)^{\frac{m}{m-g}}} = \gamma_{\mathrm{V}}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

en remarquant que $48 \cdot 85^{\frac{g}{m-g}} \leqslant 85^{\frac{m}{m-g}}$. Ceci entraîne immédiatement que

$$3(m-1)\gamma_{\mathrm{V}} \leqslant \frac{\varepsilon\varepsilon_1}{16} \,. \tag{2.52}$$

Enfin, le choix de σ dans l'énoncé de la proposition 2.4.9 page 61 assure que

$$\frac{8(m-1)B\varepsilon_1}{\sigma} \leqslant \frac{\varepsilon\varepsilon_1}{16} \tag{2.53}$$

et on a bien $\alpha \leqslant \frac{3}{16}\varepsilon\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_1 \leqslant -\frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon_1 < 0$ comme annoncé.

Ainsi on a, en remarquant que $u \geqslant m$ et que f est décroissante :

$$\begin{aligned} \alpha\hat{h}(e_1) + \beta &\leqslant -\frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon_1\hat{h}(e_1) + 20c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(m)} \\ &\leqslant -\frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon_1\Big(\hat{h}(e_1) - \frac{80}{\varepsilon\varepsilon_1}c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(m)}\Big) \,. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Or, en remarquant que $c_2 = 5m/\gamma_{\mathrm{V}}$ d'après les définitions respectives (2.7) et (2.18) de ces deux constantes, la comparaison (2.51) entraîne

$$\frac{80}{\varepsilon\varepsilon_1} \leqslant \frac{48(m-1)\cdot 5m}{\varepsilon\varepsilon_1} \leqslant c_2 \leqslant \Lambda$$

par définition (2.8) de Λ. Par ailleurs, $(1+\frac{1}{m})f(m) + 1 \leqslant (1+\frac{1}{m})f(m-1)$ d'après la définition (2.9) de f, donc en utilisant le fait que $m \geqslant 2$, il vient :

$$\alpha\hat{h}(e_1) + \beta \leqslant -\frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon_1\Big(\hat{h}(e_1) - c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(m-1)}\Big) \leqslant -\frac{3}{4}\varepsilon\varepsilon_1 c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(m-1)} < 0$$

où l'on a utilisé l'hypothèse (2.2) et la définition (2.5). Au final, pour δ et a_1^2 assez grands, le membre de droite de (2.49) est négatif, contradiction qui achève la preuve de la proposition 2.4.9 page 61.

2.5 Application du théorème du produit et conclusion

La section précédente a montré que F'_{γ_e} était d'indice élevé en e. Nous allons maintenant en déduire l'existence d'une forme T comme dans la conclusion de la proposition 2.2.5 page 31, en utilisant le fait suivant, conséquence du théorème du produit.

Fait 2.5.1. *Soient $(x_1, \ldots, x_m)$ un point rationnel de $\mathbf{P}^{u_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{u_m}$ et $u = u_1 + \cdots + u_m$. On considère une forme G de degré $b \in (\mathbf{N} \setminus \{0\})^m$ et on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :*

(i) $\mathrm{Ind}_x^b\, G \geqslant \alpha$;

(ii) $\frac{b_j}{b_{j+1}} \geqslant \big(\frac{m}{\alpha}\big)^u$ *pour tout* $j \in \{1, \ldots, m-1\}$;

(iii) $\frac{\alpha}{m} < \left(\frac{\log(u+1)}{2u^2}\right)^u$.

Il existe alors un $i \in \{1, \dots, m\}$ *et une forme* $T \in \boldsymbol{k}[X_0^{(i)}, \dots, X_{u_i}^{(i)}]$ *non nulle, telle que*

(i) $x \in \mathcal{Z}(T)$;

(ii) $\deg T \leqslant \left(\frac{m}{\alpha}\right)^u$;

(iii) la hauteur de T *satisfait à*

$$b_i\, h_\infty(T) \leqslant u_i \left(\frac{m}{\alpha}\right)^u \left(h_\infty(G) + \sum_{j=1}^{m} \left(b_j(\mathrm{St}_{u_j} + \log 2) + \sqrt{u_j}\right) + \frac{u-1}{2}\log|b|\right)$$
$$+ b_i \left(\frac{m}{\alpha}\right)^u (u_i+1) \log\left(\left(\frac{m}{\alpha}\right)^u (u_i+1)\right) + b_i \log\binom{\deg T + u_i}{u_i}$$

où le nombre de Stoll *est défini par* (1.2).

Démonstration. C'est le théorème 7.1 page 149 de [Rémoob]. □

Pour appliquer ce fait, nous devons fabriquer à partir de F'_{γ_e} une forme sur $\mathbf{P}^{u_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{u_m}$ qui conserve un indice comparable et dont on contrôlera degré et hauteur. On considère à cet effet la projection linéaire π d'un ouvert dense de $(\mathbf{P}^n)^m$ sur cet espace obtenue en conservant les $u_i + 1$ premières coordonnées sur chaque facteur. Cette projection fait apparaître Z, ou plus précisément son image par $\chi_i \circ \Theta$, comme un revêtement (ramifié) de l'espace d'arrivée, car ce plongement est adapté. Algébriquement, ceci signifie que l'anneau des coordonnées homogènes de Z est une extension finie de $\boldsymbol{k}[X_0^{(1)}, \dots, X_{u_1}^{(1)}; \dots; X_0^{(m)}, \dots, X_{u_m}^{(m)}]$. Le fait suivant montre que la norme $N(F'_{\gamma_e})$ de F'_{γ_e} dans cette extension est une forme possédant les propriétés voulues.

Fait 2.5.2. *La forme* $N(F'_{\gamma_e}) \in \boldsymbol{k}[X_0^{(1)}, \dots, X_{u_1}^{(1)}; \dots; X_0^{(m)}, \dots, X_{u_m}^{(m)}]$ *possède les propriétés suivantes :*

(i) $\mathrm{Ind}_{\pi(e)}^{\eta a^2} N(F'_{\gamma_e}) \geqslant \mathrm{Ind}_e^{\eta a^2} F'_{\gamma_e}$;

(ii) $\deg N(F'_{\gamma_e}) = (\prod_{i=1}^m D_i) \deg F'_{\gamma_e}$;

(iii) $h_\infty(N(F'_{\gamma_e})) \leqslant (\prod_{i=1}^m D_i) h_\infty(F'_{\gamma_e}) + o(\delta)$.

Démonstration. C'est le résultat de la page 148 de [Rémoob]. □

On note désormais $G = N(F'_{\gamma_e})$ puis $D = \prod_{i=1}^m D_i$ et $b_i = D\delta a_i^2(2\eta_i + \varepsilon_0)$. On souhaite alors appliquer le fait 2.5.1 page précédente à G avec $\alpha = m\Lambda^{-2f(u)}$ et $x = \pi(e)$. Il s'agit tout d'abord de vérifier que les hypothèses sont bien satisfaites.

Commençons avec l'indice : pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in (\mathbf{N}^{n+1})^m$ on a

$$\sum_{i=1}^m \frac{|\lambda^{(i)}|}{b_i} \geqslant \frac{1}{3\delta D} \sum_{i=1}^m \frac{|\lambda^{(i)}|}{\eta_i a_i^2}$$

par définition de b et en observant que $\varepsilon_0 < 1$, de sorte qu'en utilisant successivement l'inégalité ci-dessus, le fait précédent et la proposition 2.4.9 page 61, il vient :

$$\operatorname{Ind}_x^b G \geqslant \frac{1}{3\delta D} \operatorname{Ind}_{\pi(e)}^{\eta a^2} G \geqslant \frac{1}{3\delta D} \operatorname{Ind}_e^{\eta a^2} F'_{\gamma_e} \geqslant \frac{\varepsilon\varepsilon_1}{384(m-1)BD} \,.$$

On tire maintenant parti de la définition (2.29) de ε_1 puis de celle (2.18) de c_2 :

$$\begin{aligned} \frac{384(m-1)m}{\varepsilon\varepsilon_1} &= \frac{384(m-1)m \cdot N^{\frac{m-1}{m-g}} \left(85 \cdot 5^m\right)^{\frac{g}{m-g}}}{\varepsilon^{\frac{m}{m-g}}} \\ &\leqslant \frac{5m^2 N^{\frac{m}{m-g}} \left(85 \cdot 5^g\right)^{\frac{m}{m-g}}}{\varepsilon^{\frac{m}{m-g}}} = c_2 \end{aligned} \tag{2.55}$$

où l'on a utilisé le fait que $384 \leqslant 5 \cdot 85$. Après avoir rassemblé les deux inégalités précédentes, il ne reste plus qu'à exploiter les hypothèses (2.15) et (2.16) pour obtenir

$$\operatorname{Ind}_x^b G \geqslant \frac{m}{c_2 BD} \geqslant \frac{m}{\Lambda^{2f(u)}} = \alpha \tag{2.56}$$

qui est précisément la première hypothèse à satisfaire.

Pour la deuxième, en utilisant la définition des η_i et le fait que $\varepsilon_0 < 1$, puis deux fois (2.14) et enfin l'hypothèse (2.4), on écrit

$$\frac{b_i}{b_{i+1}} = \frac{(2\eta_i + \varepsilon_0)a_i^2}{(2\eta_{i+1} + \varepsilon_0)a_{i+1}^2} \geqslant \frac{1}{m} \frac{a_i^2}{a_{i+1}^2} \geqslant \frac{1}{4m} \frac{\hat{h}(e_{i+1})}{\hat{h}(e_i)} \geqslant \frac{\beta_{\mathrm{V}}}{4m} \,. \tag{2.57}$$

Par ailleurs, $\left(\frac{m}{\alpha}\right)^u = \Lambda^{2uf(u)}$ d'après le choix de α. Pour u compris entre m et mg, cette quantité est majorée par $\Lambda^{2mf(m)}$ vu la définition de f. La définition (2.6) de β_{V} implique alors directement que la deuxième hypothèse est satisfaite.

Pour la troisième, on observe que l'expression

$$\left(\frac{\log(u+1)}{2u^2}\right)^u$$

est décroissante en u tandis que $\alpha/m = \Lambda^{-2f(u)}$ est croissante que u, de sorte qu'il suffit de vérifier que cette condition est satisfaite pour $u = mg$. C'est bien le cas puisque

$$\left(\frac{\log(mg+1)}{2(mg)^2}\right)^{mg} > (\sqrt{2}mg)^{-2mg} \geqslant \Lambda^{-2} \tag{2.58}$$

d'après la définition (2.8) de Λ (troisième argument du maximum) et $f(mg) = 1$.

On peut donc appliquer le fait 2.5.1 page 70 comme annoncé, on note T la forme obtenue. On a alors $\pi(e) \in \mathcal{Z}(T)$, c'est-à-dire $T(\tilde{e}) = 0$. On introduit une forme $T'(X^{(i)}) = T\big(\chi_i(X^{(i)})\big)$ dont on va montrer qu'elle possède bien les propriétés annoncés par la proposition 2.2.5 page 31.

Tout d'abord il est clair, par construction, que $T'(\boldsymbol{e}) = 0$ et que T' ne s'annule pas identiquement sur Z. Pour l'assertion sur le degré, d'après le choix de α on a

$$\deg T' = \deg T \leqslant \Lambda^{2uf(u)}$$

qui est bien la majoration annoncée.

Concernant la hauteur, on commence par majorer $h_\infty(T)$ en fonction de $h_\infty(F'_{\gamma_e})$; le fait 2.5.1 page 70 donne immédiatement la majoration suivante, compte tenu du fait 2.5.2 page 71 et du choix de α, et en remarquant que $\log|b|$ et $\sqrt{u_i}$ sont négligeables devant δ :

$$\begin{aligned} D\delta a_i^2(2\eta_i+\varepsilon_0)h_\infty(T) \leqslant u_i\Lambda^{2uf(u)} &\left(Dh_\infty(F'_{\gamma_e}) + \sum_{j=1}^m D\delta a_j^2(2\eta_j+\varepsilon_0)(\mathrm{St}_{u_j}+\log 2)\right) \\ &+ D\delta a_i^2(2\eta_i+\varepsilon_0)\Lambda^{2uf(u)}(u_i+1)\log\left(\Lambda^{2uf(u)}(u_i+1)\right) \\ &+ D\delta a_i^2(2\eta_i+\varepsilon_0)\log\binom{\Lambda^{2uf(u)}+u_i}{u_i} + o(\delta)\ . \end{aligned}$$

On utilise alors l'estimation élémentaire

$$\log\binom{\Lambda^{2uf(u)}+u_i}{u_i} \leqslant u_i\log(\Lambda^{2uf(u)}+1) \leqslant u_i\Lambda^{2uf(u)}$$

et le fait que $2 \leqslant 2\eta_i+\varepsilon_0 \leqslant 2m$, puis on simplifie par $2\delta D$ et on met $u_i\Lambda^{2uf(u)}$ en facteur (en majorant u_i+1 par $2u_i$ le cas échéant) pour obtenir

$$\begin{aligned} \eta_i a_i^2 h_\infty(T) \leqslant u_i\Lambda^{2uf(u)} &\Bigg(\frac{1}{2\delta}h_\infty(F'_{\gamma_e}) \\ &+ m\left(\sum_{j=1}^m a_j^2(\mathrm{St}_{u_j}+\log 2) + a_i^2\left(2\log\left(\Lambda^{2uf(u)}(u_i+1)\right)+1\right)\right)\Bigg) + o(1) \end{aligned}$$

On utilise alors (1.3) et le fait que $u_j \leqslant g \leqslant m-1$ pour écrire $\mathrm{St}_{u_j} \leqslant m\log m$. On utilise de plus le lemme 2.2.4 page 30 et le fait que $a_i^2 \leqslant a_1^2$ pour estimer le terme de la dernière ligne ci-dessus par

$$2ma_1^2\left(m\log m + \log 2 + 2u\log\Lambda^{f(u)} + \log m + \frac{1}{2}\right)$$

puis on invoque (2.62)[7] pour obtenir

$$\eta_i a_i^2 h_\infty(T) \leqslant u_i\Lambda^{2uf(u)}\left(\frac{1}{2\delta}h_\infty(F'_{\gamma_e}) + \frac{1}{4}a_1^2\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)}\right) + o(1)$$

7. Voir note 4 en bas de page 50

comme estimation finale de la hauteur de T en fonction de celle de F'_{γ_e}.

Utilisons maintenant le scolie 2.3.7 page 51 pour exprimer cette hauteur en fonction de $\sum_{i=1}^m \eta_i a_i^2 h_1(f_{Z_i})$.

$$\begin{aligned}\eta_i a_i^2 h_\infty(T) &\leqslant u_i \Lambda^{2uf(u)} \left(6 \sum_{j=1}^m \eta_j a_j^2 h_1(f_{Z_j}) + \frac{5}{4} a_1^2 c_{1,\Theta} \Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} \right) + o(1) \\ &\leqslant u_i \Lambda^{2uf(u)} \left(6 \sum_{j=1}^m \eta_j a_j^2 h_1(f_{Z_j}) + 2 a_1^2 c_{1,\Theta} \Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} \right) \qquad (2.59)\end{aligned}$$

où l'on a supposé δ assez grand pour que le terme en $o(1)$ de la première ligne soit plus petit que la quantité perdue en remplaçant $\frac{5}{4}$ par 2 dans le terme précédent, qui ne dépend pas de δ.

Passons maintenant à T'. Par construction, en utilisant les propriétés classiques de la hauteur, on a

$$\begin{aligned}h_\infty(T') &\leqslant h_\infty(T) + \left(\deg T \Big(h_\infty(\chi_i) + \log(n+1) \Big) + \log \binom{\deg T + n + 1}{n+1} \right) \\ &\leqslant h_\infty(T) + \left(\Lambda^{2uf(u)} \Big(\log B + \log(n+1) \Big) + 2u(n+1) \log(\Lambda^{f(u)}) \right) .\end{aligned}$$

On invoque alors (2.63), puis on multiplie les deux membres par $\eta_i a_i^2$ et, en remarquant que cette dernière quantité est majorée par a_1^2, il vient :

$$\eta_i a_i^2 h_\infty(T') \leqslant \eta_i a_i^2 h_\infty(T) + a_1^2 c_{1,\Theta} \Lambda^{(2u+1+\frac{1}{m})f(u)} .$$

Il ne reste plus qu'à substituer (2.59) dans l'estimation précédente pour avoir

$$\eta_i a_i^2 h_\infty(T') \leqslant u_i \Lambda^{2uf(u)} \left(6 \sum_{j=1}^m \eta_j a_j^2 h_1(f_{Z_j}) + 3 a_1^2 c_{1,\Theta} \Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} \right) ,$$

ce qui achève la preuve de la proposition 2.2.5 page 31 en remarquant que $u_i \leqslant g$.

2.6 Valeurs des paramètres et estimations reliées

Les sections précédentes suivent l'ordre logique de la démonstration : réduction du théorème à l'existence d'une forme motrice, puis construction de celle-ci par la méthode de Thue-Siegel : construction d'une forme auxiliaire, extrapolation et application d'un théorème de multiplicité. Cependant, cet ordre n'est pas celui dans lequel les valeurs des différents paramètres sont déterminées ; la présente section a pour but de clarifier la façon de choisir ces valeurs qui autrement risquent de paraître un peu « magiques » au moment où elles sont introduites dans les sections précédentes.

Par ailleurs, nous établissons ici quelques majorations *ad hoc* de quantités apparaissant au cours de la preuve ; ces estimations sont plus ou moins intimement liées aux valeurs choisies pour les différents paramètres, ou un peu fastidieuses quoiqu'élémentaires, c'est pourquoi nous les avons regroupées ici pour ne pas perturber le cours des sections précédentes.

2.6.1 Méthode d'ajustement des paramètres

Tout d'abord, ε est fixé par l'énoncé, et la famille e supposée contredire le théorème est fixée en premier, ainsi que la famille $(a_i)_i$ comme indiqué à la sous-section 2.2.1 page 28. Plus précisément, cette famille est fixée à un facteur entier près : on prendra ensuite a_1 assez grand pour que dans (2.49) la partie en $\delta\, o(a_1^2)$, qui provient de (2.44) et (2.45), soit négligeable devant le terme en δa_1^2.

Nous arrivons maintenant aux conditions définissant $\mathcal{V}(e)$. En fait, celles-ci sont déterminées de façon à ce que $\mathcal{A}^m \in \mathcal{V}(e)$ et qu'on puisse, en coupant par des formes données par la proposition 2.2.5 page 31 produire d'autres formes qui restent dans $\mathcal{V}(e)$. On peut voir cette partie comme la construction d'une suite de sous-variétés emboîtées, en estimant à chaque étape le degré et la hauteur, qui dépendent des estimations à l'étape précédente ; $\mathcal{V}(e)$ est défini de sorte à contenir tous les éléments de cette suite. Le plan général de la construction est résumé par la figure 2.1 page suivante.

Remarquons qu'on pourrait tout à fait dans un premier temps se concentrer uniquement sur le degré puisqu'on peut l'estimer indépendamment de la hauteur, et qu'au contraire cette dernière dépend de façon cruciale du degré. Lors de la construction de la fonction auxiliaire, on se contenterait de savoir que la borne de hauteur ne dépend pas de e, ce qui permettrait ensuite de faire l'extrapolation « pour $\hat{h}(e)$ assez grand » sans préciser, et d'obtenir un indice extrapolé permettant d'appliquer le théorème du produit, donnant ainsi l'estimation de degré au cran suivant.

Plus précisément, pour la construction de la fonction auxiliaire on introduit les deux paramètres ε_0 (contrôlant certains degrés de la fonction auxiliaire) et ε_1 (contrôlant son indice de construction). À ce stade on a seulement besoin que ε_0 soit suffisamment grand devant ε_1 pour avoir (2.34) ; notons que cette condition ne fait pas intervenir les degrés de Z, uniquement ceux de la fonction auxiliaire. L'estimation de hauteur de la fonction auxiliaire en revanche dépend du maximum des degrés de Z et de ses hauteurs.

On peut alors mener les calculs de la sous-section 2.4.2 page 60 et aboutir à (2.49) : la quantité qui y est notée α ne dépend que du maximum des degrés de Z tandis que β dépend de ce maximum et de la hauteur de la forme auxiliaire, donc en définitive de celle de Z. Dans un premier temps, en attendant les estimations finales, on peut tout à fait ne pas achever le calcul de ce β car son seul impact sera de fixer une valeur minimale pour α_V, paramètre qui peut être fixé en dernier.

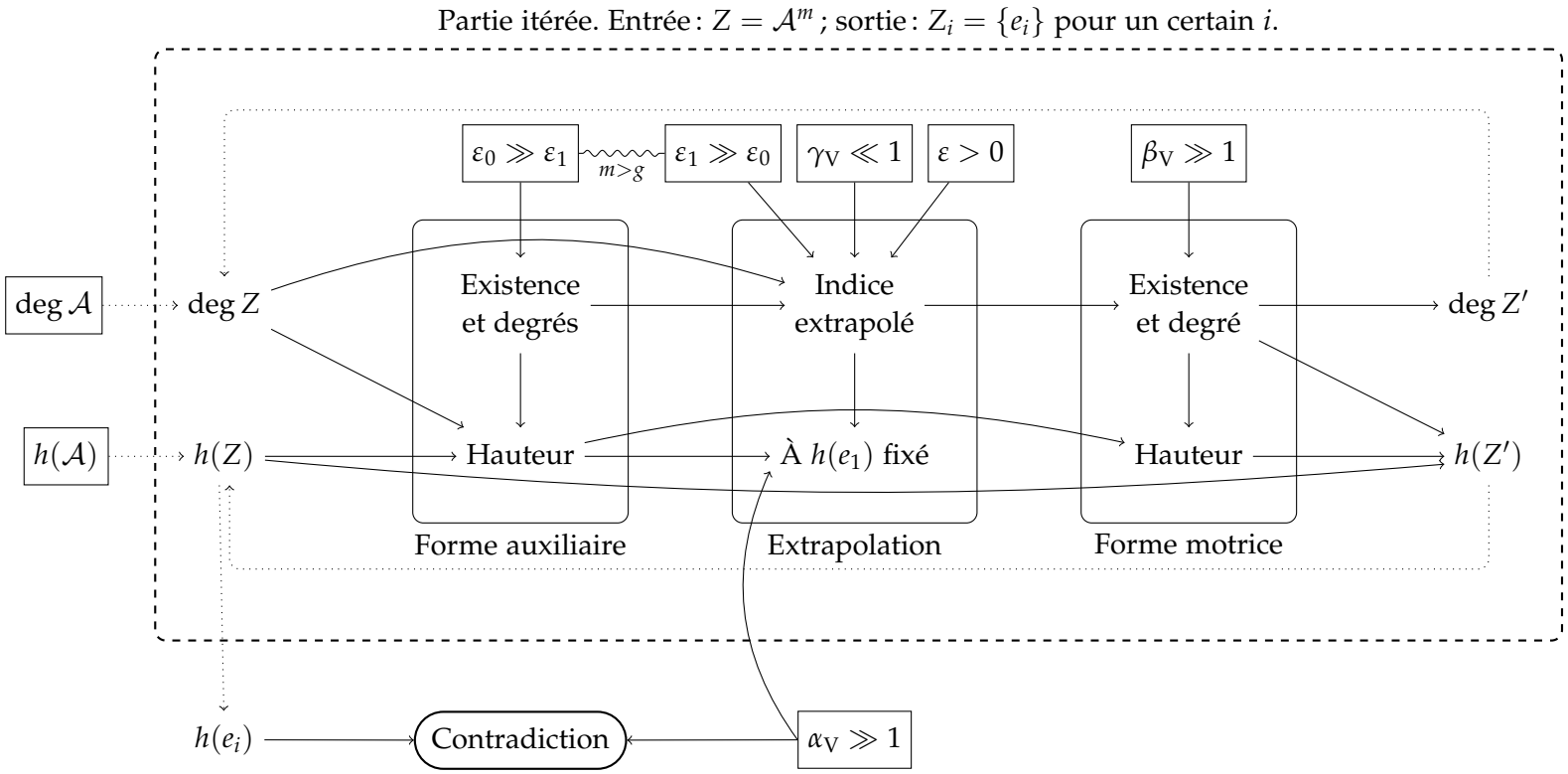

Figure 2.1 : Dépendances entre les différentes quantités en jeu. Toutes les quantités dans le cadre en traitillé qui dépendent indirectement de $\deg Z$ en dépendent aussi directement ; les flèches correspondantes sont omises pour alléger.

Rappelons que pour pouvoir extrapoler, il est essentiel que cette quantité α soit négative. Rappelons sa valeur :

$$\alpha = 2m\varepsilon_0 + 3(m-1)\gamma_{\mathrm{V}} + \frac{8(m-1)nB\varepsilon_1}{\sigma} - \frac{3}{8}\varepsilon\varepsilon_1$$

et essayons de la relier à la structure de la fonction auxiliaire (on considère ici la forme $F \in \boldsymbol{k}[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]$). Le premier terme provient du premier groupe de variables et peut être rendu petit en diminuant les degrés en ces variables, contrôlés par ε_0 ; le deuxième correspond au deuxième groupe et peut être rendu petit en diminuant la hauteur de e', contrôlée par γ_{V} (une fois les a_i convenablement choisis). Le troisième terme correspond à ce qu'on perd en dérivant, il dépend du degré de Z car c'est le long de cette variété qu'on dérive ; la seule façon de le rendre petit est d'augmenter σ c'est-à-dire de ne pas dériver à un ordre trop élevé. Le dernier terme enfin est déterminé par la condition d'approximation (2.1) ; le seul moyen de le rendre grand en valeur absolue est que l'indice de construction de la forme auxiliaire, contrôlé par ε_1, soit assez grand.

On se retrouve à ce stade avec deux conditions « allant en sens contraire » sur ε_0 et ε_1 : le premier doit être, par rapport au second, suffisamment grand pour permettre la construction de la forme auxiliaire, mais suffisamment petit pour pouvoir extrapoler, plus précisément on veut avoir (2.34) et (2.50). Un calcul élémentaire montre qu'il est possible de satisfaire simultanément ces deux contraintes pour peu que $m > \max u_i = g$ (exposants apparaissant dans la première condition). C'est uniquement pour répondre à cette exigence qu'on demande $m > g$ dans l'énoncé du théorème ; de même les deux conditions citées déterminent seules les définitions de ε_0 et ε_1 données en (2.30) et (2.29). (On utilisera souvent par ailleurs le fait que $m \geqslant 2$ et que $\varepsilon_0 < 1$ pour simplifier certaines estimations, mais aucune de ces inégalités n'est cruciale pour la bonne marche de la preuve.)

Maintenant que ε_1 est fixé, on en déduit les valeurs souhaitables de γ_{V} et σ : le premier est choisi dans le seul but d'avoir (2.52), ce qui est assuré par (2.51) et le second est seulement déterminé par (2.53).

Nous arrivons maintenant à l'application du théorème du produit : l'indice de la forme à laquelle nous souhaitons l'appliquer dépend d'une part de l'indice extrapolé de la fonction auxiliaire, donc du maximum des degrés de Z et d'autre part du produit de ces degrés. C'est principalement cet indice qui détermine la valeur de la quantité notée α dans la section 2.5 page 70[8], et donc le degré de la forme motrice.

La raison pour laquelle on introduit c_2 dans la condition (2.15) est qu'on veut pouvoir écrire (2.56) et c'est ceci, plus précisément (2.55), qui détermine sa valeur. Il est plus naturel d'absorber les facteurs supplémentaires dans la majoration de B que celle de D car la première quantité est *a priori* plus petite (ceci se vérifie

8. Distincte de la quantité également notée α dans la section précédente, que le lecteur veuille bien nous pardonner ce recyclage de notations entre plusieurs sections.

sur leurs valeurs initiales : $\deg \mathcal{A}$ et $(\deg \mathcal{A})^m$ respectivement, ensuite les deux quantités seront multipliées à chaque cran par le même facteur, à savoir $\deg T$).

Nous sommes maintenant en mesure de choisir Λ : les deux premiers arguments dans le maximum assurent que $\mathcal{A}^m$ satisfait bien les conditions (2.15) et (2.16). Le troisième a pour but de satisfaire la troisième hypothèse dans l'énoncé du théorème du produit, voir (2.58).

Par ailleurs, la volonté de satisfaire la deuxième hypothèse du théorème du produit motive la définition de β_{V} : (2.57) est la seule contrainte sur β_{V}.

Penchons-nous à présent sur la démonstration du théorème à partir de la proposition 2.2.5 page 31 ; elle explique la définition de la fonction f apparaissant en exposant dans les estimations, qui procède par récurrence décroissante en partant de $f(mg) = 1$ et en descendant avec la relation (2.19). Nous avons à ce stade pleinement expliqué (forme générale et définition de chaque quantité intervenant) les estimations de degré (2.15) et (2.16).

Muni de ces informations, nous pouvons à présent remplacer les degrés intervenant dans les estimations de hauteur. On estime donc successivement la hauteur de la forme auxiliaire puis celle de la forme motrice en fonction des hauteurs de Z, et au final on obtient la relation de récurrence (2.20). Il ne reste plus qu'à dérouler cette récurrence (en partant rappelons-le de $Z = \mathcal{A}^m$) pour obtenir la forme finale de (2.17).

Enfin, de cette dernière relation on déduit (2.21) qui motive à choisir α_{V} assez grand pour contredire cette relation. On se souvient alors que lors de l'extrapolation on devait également avoir α_{V} assez grand pour que la quantité (2.54) soit négative. Il suffit donc maintenant de choisir α_{V} répondant à ces deux contraintes, ce qui n'est pas problématique puisqu'elles vont dans le même sens : en fait, la première contrainte est la plus forte et implique facilement la deuxième, comme le montrent les calculs suivant (2.54).

2.6.2 Estimations diverses

Commençons par quelques estimations générales ; on rappelle pour commencer que $n \geqslant 2$, $N \geqslant 3$ et $\deg \mathcal{A} \geqslant 3$ d'après la remarque 1.5.6 page 15, puis $g \geqslant 1$ et $m \geqslant g + 1 \geqslant 2$. Ainsi, le dernier argument du maximum dans la définition (2.10) de $c_{1,\Theta}$ donne $c_{1,\Theta} \geqslant n \log 3 \geqslant 2$. De plus, la définition (2.8) de Λ implique immédiatement, en considérant le deuxième argument du maximum, que

$$\Lambda \geqslant 5 \cdot m^2 \cdot 85 \cdot 3 \cdot 5^g \cdot 3 \geqslant 3\,825\, m^2\, 5^g \geqslant 19\,125\, m^2 \geqslant 76\,500\ .$$

Remarquons au passage que si le deuxième argument dans le maximum domine largement pour m et g petits, le troisième croît en revanche bien plus vite quand ces deux quantités augmentent.

On fera fréquemment usage des deux estimations suivantes :

$$\log B \leqslant \log(\Lambda^{f(u)}) \leqslant m\Lambda^{\frac{1}{m}f(u)} \qquad \text{et} \qquad \log B \leqslant B \leqslant \frac{\Lambda^{f(u)}}{1\,275 \cdot m^2 \cdot 5^g} ,$$

qui découlent de (2.15) et dont la première utilise l'inégalité élémentaire $\log x \leqslant \alpha\, x^{1/\alpha}$, valable pour tout $\alpha > 0$.

Avant de passer aux différentes estimations *ad hoc*, établissons encore une estimation qui nous sera utile plusieurs fois :

$$\begin{aligned} B(g+1)\log(B(n+1)) &\leqslant B(g+1)\big(m\Lambda^{\frac{1}{m}f(u)} + c_{1,\Theta}\big) \\ &\leqslant m^2 B c_{1,\Theta}\Lambda^{\frac{1}{m}f(u)} \\ &\leqslant \frac{1}{1\,275} c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} . \end{aligned} \tag{2.60}$$

Signalons enfin qu'en général on ne cherchera pas à obtenir la plus grande précision possible sur le facteur constant, on se contentera de la valeur utile pour chacune des situations considérées.

Intéressons-nous maintenant à notre première estimation *ad hoc* :

$$\frac{c_{1,\Theta}}{2} + \log((n+1)!) + n\log B + 3\log(B)\big(B(g+1)+1\big) + 3\log 2 \leqslant \frac{1}{4} c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} . \tag{2.61}$$

Pour le deuxième terme, on a par définition : $\log((n+1)!) \leqslant n\log(n+1) \leqslant c_{1,\Theta}$ de sorte que la somme des deux premiers termes est au plus $\frac{3}{2}c_{1,\Theta}$. En utilisant de plus l'estimation (2.60) ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned} &c_{1,\Theta}/2 + \log((n+1)!) + 3(\log B)B(g+1) + n\log B + 3\log B + 3\log 2 \\ &\quad \leqslant \frac{3\Lambda}{2\cdot 1\,275} c_{1,\Theta} + \frac{3}{1\,275} c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} + c_{1,\Theta}\cdot\frac{\Lambda^{f(u)}}{1\,275} + 3\cdot\frac{\Lambda^{f(u)}}{1\,275} + \frac{\Lambda}{1\,275} \end{aligned}$$

qui implique largement l'estimation annoncée.

La prochaine majoration *ad hoc* que nous montrons est

$$2m\left(m\log m + \log 2 + 2u\log(\Lambda^{f(u)}) + \log m + \frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{1}{4}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} . \tag{2.62}$$

On commence par utiliser le fait que $\Lambda \geqslant (\sqrt{2}mg)^{mg}$ pour écrire

$$m\log\Lambda \geqslant m^2 g\log(\sqrt{2}mg) \geqslant m^2\log m + \frac{m^2}{2}\log 2 \geqslant m\log m + \log m + \frac{1}{2} + \log 2$$

où l'on utilise le fait que $m \geqslant 2$ pour la dernière minoration. Comme de plus $u \geqslant m$, la parenthèse dans (2.62) est majorée par $3u\log(\Lambda^{f(u)})$ et comme de plus $u \leqslant mg$ le membre de gauche de (2.62) est majoré successivement par

$$6m^2 g\log(\Lambda^{f(u)}) \leqslant 6m^3 g\Lambda^{\frac{1}{m}f(u)} \leqslant \frac{1}{4}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)}\cdot\frac{24m^4}{\Lambda}$$

qui implique l'estimation annoncée pour peu que le dernier facteur soit inférieur à 1. Or on a vu que $\Lambda \geqslant 19\,125m^2$ et un simple calcul montre que cette quantité est supérieure à $24m^4$ tant que $m \leqslant 28$; par ailleurs pour $m > 28$ on a immédiatement $(\sqrt{2}\,m)^m \geqslant m^5 \geqslant 24m^4$.

Prouvons maintenant que

$$\Lambda^{2uf(u)}\Big(\log B + \log(n+1)\Big) + 2u(n+1)\log(\Lambda^{f(u)}) \leqslant c_{1,\Theta}\Lambda^{(2u+1)f(u)} \ . \tag{2.63}$$

Pour commencer, on a

$$\log B + \log(n+1) \leqslant \log B + c_{1,\Theta} \leqslant \frac{\Lambda^{f(u)}}{1\,275} + c_{1,\Theta}\frac{\Lambda}{1\,275} \leqslant \frac{1}{7}c_{1,\Theta}\Lambda^{f(u)} \ . \tag{2.64}$$

Par ailleurs

$$2u(n+1)\log(\Lambda^{f(u)}) \leqslant 4c_{1,\Theta}m^2 g\Lambda^{\frac{1}{m}f(u)} \leqslant \frac{1}{2}c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)}$$

qui aboutit largement à l'estimation annoncée.

On a également, en utilisant (2.60) :

$$\begin{aligned} &2gB(\log B + \log(n+1)) + \log(16g) + 3\log B \\ &\quad \leqslant \frac{2}{1\,275}c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} + \frac{4\Lambda^{f(u)}}{1\,275} \\ &\quad \leqslant c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} \ . \end{aligned} \tag{2.65}$$

Par ailleurs, en utilisant à nouveau (2.60) :

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2}\log(n+1) + n\log(Bn) + \hat{c}_\Theta + B(g+1)\log(B(n+1)) \\ &\quad \leqslant \frac{3}{2}c_{1,\Theta} + c_{1,\Theta} + c_{1,\Theta}\log B + c_{1,\Theta} + \frac{1}{1\,275}c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} \\ &\quad \leqslant 4c_{1,\Theta}\cdot\frac{\Lambda}{1\,275} + c_{1,\Theta}\frac{\Lambda^{f(u)}}{1\,275} + \frac{1}{1\,275}c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} \\ &\quad \leqslant \frac{1}{6}c_{1,\Theta}\Lambda^{(1+\frac{1}{m})f(u)} \ . \end{aligned} \tag{2.66}$$

2.7 Déduction du cas général

Le théorème 2.1.1 page 27 fait l'hypothèse que la variété dont on étudie les approximations exceptionnelles est l'hyperplan $X_0 = 0$ dans le plongement considéré. Nous allons en déduire un résultat similaire sans cette hypothèse, par des changements de plongement successifs. Si E est un hyperplan quelconque, on se ramène au cas précédent par un changement de coordonnées linéaire. Si c'est une hypersurface quelconque, on se ramène à un hyperplan par un plongement de Veronese. Enfin, si c'est une variété quelconque, on se ramène au cas précédent en considérant une hypersurface convenable la contenant.

2.7.1 Hyperplans quelconques

On commencera par un hyperplan presque quelconque, en excluant seulement un cas particulier. On montrera ensuite qu'on peut toujours l'éviter, avec de plus un certaine marge de sécurité évitant l'explosion de certains constantes, quitte à changer l'ensemble des places considérées dans l'hypothèse d'approximation. En attendant, le lemme suivant donne un changement de base dans le cas favorable et estime son coût sur les différentes quantités en jeu.

Lemme 2.7.1. *Soient $\Theta\colon \mathcal{A} \to \mathbf{P}^n$ un plongement projectif, p_0 le point de coordonnées homogènes $(1{:}0{:}\cdots{:}0)$ et E un hyperplan ne contenant pas p_0. Il existe un automorphisme χ de $\mathbf{P}^n$ tel que $\chi(E)$ admet $X_0 = 0$ comme équation et que, si l'on note $\Theta' = \chi \circ \Theta$ le nouveau plongement $\mathcal{A} \to \mathbf{P}^n$ obtenu par composition, on a, pour tout $x \in \mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$:*

(i) $\mathrm{dist}_{v,\Theta'}(x,E) \leqslant \mathrm{dist}_{v,\Theta}(x,E) \cdot \mathrm{dist}_{v,\Theta}(E,p_0)^{-2}\,(n+1)^{\delta_v/2}$;

(ii) $H_{2,\Theta'}(x) \leqslant H_{2,\Theta}(x) \cdot H_{2,\Theta}(E)\sqrt{n+1}$;

(iii) $h_{1,\Theta'}(\mathcal{A}) \leqslant h_{1,\Theta}(\mathcal{A}) + h_{1,\Theta}(E)(g+1)\deg \mathcal{A}$;

(iv) $\hat{c}_{\Theta'} = \hat{c}_{\Theta} + h_{2,\Theta}(E) + \frac{1}{2}\log(n+1)$;

(v) $c_{\Theta'} = c_{\Theta} + \frac{5}{2}h_{1,\Theta}(E)$

où les deux derniers points signifient qu'il s'agit de valeurs acceptables pour pour ces constantes (les valeurs optimales pouvant être plus petites). Par ailleurs le cardinal N de l'ensemble de cartes introduit à la section 1.5.4 page 13 et la dimension ambiante sont inchangés.

Démonstration. Notons L une équation de E, qu'on peut supposer de la forme $L(X) = X_0 + l_1X_1 + \cdots + l_nX_n$. Remarquons de suite que $\mathrm{dist}_{v,\Theta}(E,p_0) = \|L\|_{2,v}^{-1}$. Par ailleurs, posons

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -l_1 & -l_2 & \dots & -l_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots\dots\dots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots\dots\dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que toutes les colonnes de M sauf la première sont les coordonnées homogènes (dans le plongement Θ) de points de E. Plus précisément, en relevant dans $\boldsymbol{k}^{n+1}$, ces vecteurs constituent une base du relevé de E. On remarque que les normes des lignes et des colonnes de M comme de M^{-1} sont majorées par la norme de L.

On note alors $\chi \in \mathbf{GL}_{n+1}(\boldsymbol{k})$ la transformation linéaire associée à M^{-1} (dans la base canonique) et on note de même la transformation linéaire de $\mathbf{P}^n$ qui en découle en passant au quotient. On pose alors $\Theta' = \chi \circ \Theta$. On note $L'(X) =$

$L(M(X)) = X_0$; par construction L' est une équation de E dans ce nouveau plongement, lequel satisfait donc à la première condition.

Soit maintenant x un point de $\mathcal{A}$, dont on note $C_x \in \overline{\mathbf{Q}}^{n+1}$ des coordonnées dans le plongement Θ et $C'_x = M^{-1}C_x$ des coordonnées dans le plongement Θ'. Vu les expressions de M et M^{-1} on a immédiatement

$$\|C_x\|_{1,v} \leqslant \|L\|_{1,v}\|C'_x\|_{1,v} \qquad \|C'_x\|_{1,v} \leqslant \|L\|_{1,v}\|C_x\|_{1,v} \tag{2.67}$$

$$\|C_x\|_{\infty,v} \leqslant \|L\|_{2,v}\|C'_x\|_{2,v} \qquad \|C'_x\|_{\infty,v} \leqslant \|L\|_{2,v}\|C_x\|_{2,v} \tag{2.68}$$

et la dernière inégalité donne aussitôt le point (*ii*) page précédente en comparant $\|\cdot\|_{\infty,v}$ à $\|\cdot\|_{2,v}$.

Par ailleurs, en appliquant la définition de la distance d'un point à un hyperplan, il vient

$$\mathrm{dist}_{v,\Theta'}(x,E) = \frac{|L'(C'_x)|_v}{\|L'\|_{2,v}\|C'_x\|_{2,v}} = \mathrm{dist}_{v,\Theta}(x,E)\frac{\|L\|_{2,v}}{\|L'\|_{2,v}}\frac{\|C_x\|_{2,v}}{\|C'_x\|_{2,v}}$$

qui donne le point (*i*) page précédente en remarquant que $\|L'\|_{2,v} = 1$ par construction et en utilisant la comparaison ci-dessus pour majorer le dernier facteur.

Par ailleurs, si $f_{\mathcal{A}}$ est une forme de Chow de $\mathcal{A}$ dans le plongement Θ, on obtient une forme de Chow $f'_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ dans Θ' en composant $f_{\mathcal{A}}$ avec (la transposée de) M^{-1} sur chacun des $g+1$ groupes de $n+1$ variables, de sorte que, si $\deg \mathcal{A}$ désigne le degré de $\mathcal{A}$ en tant que sous-variété de $\mathbf{P}^n$ (qui est évidemment le même dans les plongements Θ et Θ') c'est-à-dire le degré de $f_{\mathcal{A}}$ en chacun des groupes de variables, on a

$$\|f'_{\mathcal{A}}\|_{1,v} \leqslant \|f_{\mathcal{A}}\|_{1,v}\|L\|_{1,v}^{(g+1)\deg \mathcal{A}}$$

qui établit (*iii*) page précédente.

Par ailleurs, les comparaisons (2.68) donnent immédiatement

$$|h_{2,\Theta}(x) - h_{2,\Theta'}(x)| \leqslant h_2(L) + \frac{1}{2}\log(n+1)$$

d'où, en constatant que les hauteurs normalisées sont les mêmes dans Θ et Θ'

$$|h_{2,\Theta'}(x) - \hat{h}(x)| \leqslant \hat{c}_\Theta + h_2(L) + \frac{1}{2}\log(n+1)$$

qui donne directement (*iv*) page précédente.

Enfin, si $(L_\Theta^{(a,b,\gamma)})_{\gamma\in\Gamma}$ est une famille de $(n+1)$-uplets de formes donnée par le lemme 1.5.2 page 14, on pose

$$L_{\Theta'}^{(a,b,\gamma)} = M^{-1}L_\Theta^{(a,b,\gamma)}(MX, MY)$$

de sorte que la famille $(L_\Theta^{(a,b,\gamma)})_{\gamma\in\Gamma}$ satisfait aux mêmes hypothèses dans le plongement Θ', sauf peut-être (1.9) et (1.10). Montrons que ces deux conditions sont satisfaites avec $C_{\Theta',v} = C_{\Theta,v}\cdot\|L\|_{1,v}^{5/2}$, ce qui impliquera le dernier point de l'énoncé.

Pour la première, en utilisant les propriétés de la norme 1, on a immédiatement

$$|||L_{\Theta'}^{(a,b,\gamma)}|||_{1,v} \leqslant \|L\|_{1,v} |||L_{\Theta}^{(a,b,\gamma)}|||_{1,v} \|L\|_{1,v}^{2(a^2+b^2)} \leqslant C_{\Theta,v}^{a^2+b^2} \|L\|_{1,v}^{\frac{5}{2}(a^2+b^2)} = C_{\Theta',v}^{a^2+b^2}$$

en remarquant que pour $(a,b) \geqslant (1,1)$ on a $1+2(a^2+b^2) \leqslant \frac{5}{2}(a^2+b^2)$. Pour la deuxième, en utilisant (2.67), on écrit de même

$$\begin{aligned}\frac{\|L_{\Theta'}^{(a,b,\gamma)}(C'_x, C'_y)\|_{1,v}}{\|C'_x\|_{1,v}^{2a^2}\|C'_y\|_{1,v}^{2b^2}} &= \frac{\|M^{-1}L_{\Theta}^{(a,b,\gamma)}(C_x, C_y)\|_{1,v}}{\|C_x\|_{1,v}^{2a^2}\|C_y\|_{1,v}^{2b^2}} \left(\frac{\|C_x\|_{1,v}}{\|C'_x\|_{1,v}}\right)^{2a^2} \left(\frac{\|C_y\|_{1,v}}{\|C'_y\|_{1,v}}\right)^{2b^2} \\ &\geqslant \frac{\|L_{\Theta}^{(a,b,\gamma)}(C_x, C_y)\|_{1,v}}{\|C_x\|_{1,v}^{2a^2}\|C_y\|_{1,v}^{2b^2}} \frac{1}{\|L\|_{1,v}^{1+2(a^2+b^2)}} \geqslant \frac{C_{\Theta,v}^{-(a^2+b^2)}}{\|L\|_{1,v}^{\frac{5}{2}(a^2+b^2)}}\,.\end{aligned}$$

Enfin, il est clair que $N = \operatorname{Card}\Gamma$ reste inchangé car l'ensemble de cartes considéré est le même (les cartes sont des ouverts de $\mathcal{A}^2$, pas de son image dans un plongement) ; par ailleurs n n'est bien évidemment pas modifié par un changement de coordonnées linéaire. □

On en déduit une version un peu plus générale du théorème 2.1.1 page 27.

Corollaire 2.7.2. *Soient $\Theta\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ un plongement projectif, E un hyperplan de $\mathbf{P}^n$, p_0 le point de $\mathbf{P}^n$ de coordonnées homogènes $(1{:}0{:}\cdots{:}0)$ et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Il n'existe dans $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ aucune famille de points $x_1, \ldots, x_m$ avec $m \geqslant g+1$ satisfaisant simultanément aux conditions suivantes, où les notions de distance et de hauteur sont relatives au plongement Θ :*

$$\begin{aligned} 0 < \operatorname{dist}_v(x_i, E) &< \frac{\operatorname{dist}_v(p_0, E)^2}{(n+1)^{\delta_v/2}} H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S} \\ \hat{h}(x_1) &> 4c_{3,\Theta}\Lambda_1^{(1+\frac{1}{m})\prod_{i=m}^{mg}(2i+1)} \\ \hat{h}(x_i) &> \hat{h}(x_{i-1}) \cdot 4m\Lambda_1^{2m\prod_{i=m+1}^{mg}(2i+1)} \\ \cos(x_i, x_j) &> 1 - \frac{1}{m}\left(\frac{\varepsilon}{86N \cdot 5^g}\right)^{\frac{m}{m-g}} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \max\big((\deg\mathcal{A})^m, 5m^2\big(86N \cdot 5^g \cdot \varepsilon^{-1}\big)^{\frac{m}{m-g}} \deg\mathcal{A}, (\sqrt{2}mg)^{mg}\big) \\ c_{3,\Theta} &= \max\big(h_1(\mathcal{A}) + h_1(E)(g+1)\deg\mathcal{A}, c_\Theta + \frac{5}{2}h_1(E), \\ &\qquad \hat{c}_\Theta + h_2(E) + \frac{1}{2}\log(n+1), n\log(n+1)\big)\,. \end{aligned}$$

Avant de passer à la démonstration, examinons les différences entre cet énoncé et le théorème 2.1.1 page 27 : les deux principales sont une hypothèse moins restrictive sur E compensée par une hypothèse d'approximation plus contraignante,

en particulier si E est proche de p_0. Les seuls autres changements concernent les valeurs des constantes : $c_{1,\Theta}$ est remplacée par $c_{3,\Theta}$ avec une définition différente faisant intervenir la hauteur de E, et le nombre 85 est remplacé par 86 partout où il apparaît en même temps que ε.

Démonstration. On remarque pour commencer que le résultat est vide dans le cas où $p_0 \in E$, car la première condition n'est jamais satisfaite. Dans le cas contraire, on considère le plongement Θ' donné par le lemme 2.7.1 page 81 et on prévoit d'appliquer le théorème 2.1.1 page 27 à E et Θ' avec $\varepsilon' = 85\varepsilon/86$ pour une raison qui deviendra bientôt claire. Il s'agit de vérifier que les hypothèses du corollaire impliquent bien celles du théorème.

Pour l'hypothèse principale (2.1), on utilise d'abord le point (*i*) page 81 du lemme, puis l'hypothèse principale du présent corollaire, la définition de ε' et enfin le point (*ii*) page 81 du lemme :

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}_{v,\Theta'}(x_i, E) &\leqslant \mathrm{dist}_{v,\Theta}(x_i, E) \cdot \mathrm{dist}_{v,\Theta}(E, p_0)^{-2}\,(n+1)^{\delta_v/2} \\
&\leqslant H_{2,\Theta}(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \\
&\leqslant H_{2,\Theta}(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon'} \cdot H_{2,\Theta}(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon/86} \\
&\leqslant H_{2,\Theta'}(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon'} \cdot H_{2,\Theta}(E)^{\lambda_v \varepsilon'}(n+1)^{\lambda_v \varepsilon'/2} \cdot H_{2,\Theta}(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon/86} \\
&\leqslant H_{2,\Theta'}(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon'} \Big(H_{2,\Theta}(E)^{85}(n+1)^{85/2} / H_{2,\Theta}(x_i) \Big)^{\lambda_v \varepsilon/86},
\end{aligned}$$

qui donne le résultat voulu pour peu que la quantité dans la dernière parenthèse soit inférieure à 1. Or, la deuxième hypothèse entraîne largement cette inégalité, par exemple : $h_{2,\Theta}(x_i) \geqslant 2c_{3,\Theta}\Lambda_1 \geqslant 85(h_{1,\Theta}(E) + \frac{1}{2}\log(n+1))$ en utilisant de diverses façon la définition de $c_{3,\Theta}$ et le fait que $\Lambda_1 \geqslant 85$.

Les autres hypothèses sont plus faciles, car un changement de coordonnées linéaire ne modifie en rien la hauteur normalisée, c'est-à-dire la forme quadratique définissant la géométrie de l'espace de MORDELL-WEIL. Les conditions s'écrivant dans cet espace sont donc inchangées en passant de Θ à Θ'. Ainsi, les hypothèses (2.3) et (2.4) sont satisfaites car les hypothèses correspondantes du corollaire sont les mêmes, compte tenu du changement de ε. Il en est de même pour (2.2) en remarquant de plus que $c_{3,\Theta} > c_{1,\Theta'}$ par définition et en utilisant les points restants du lemme précédent.

On peut donc appliquer le théorème 2.1.1 page 27 comme prévu et en déduire qu'il n'existe pas de famille de points satisfaisant aux hypothèses du présent énoncé. □

Le défaut du résultat précédent est que l'hypothèse d'approximation est d'autant plus forte (et donc le résultat d'autant plus faible) que p_0 est proche de E, jusqu'à obtenir une hypothèse impossible à satisfaire (donc un résultat vide) lorsque $p_0 \in E$. Le corollaire suivant propose deux options pour contourner ce problème :

la première consiste à considérer des permutations de coordonnées pour éviter que cette condition ne devienne trop restrictive, mais a un coût sur les autres constantes (sauf si $\operatorname{Card}\mathcal{S} = 1$) ; la deuxième consiste à remarquer que les différentes distances en question, dès qu'elles sont non nulles, sont liées à la hauteur de E – cette version prendra plus de sens lorsque l'hypothèse d'approximation sera modifiée en utilisant un produit sur toutes les places de $\mathcal{S}$ à la section 4.2 page 118.

Corollaire 2.7.3. *Soient $\Theta\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ un plongement projectif, E un hyperplan de $\mathbf{P}^n$ et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Il n'existe dans $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ aucune famille de points $x_1, \dots, x_m$ avec $m \geqslant g+1$ satisfaisant simultanément aux conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} 0 < \operatorname{dist}_v(x_i, E) &< \alpha_v^{-1} H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S} \\ \hat{h}(x_1) &> 4c_{3,\Theta} \Lambda_2^{(1+\frac{1}{m})\prod_{i=m}^{mg}(2i+1)} \\ \hat{h}(x_i) &> \hat{h}(x_{i-1}) \cdot 4m\Lambda_2^{2m\prod_{i=m+1}^{mg}(2i+1)} \\ \cos(x_i, x_j) &> 1 - \frac{1}{m}\left(\frac{\varepsilon}{86N \cdot 5^g s}\right)^{\frac{m}{m-g}} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \max\big((\deg \mathcal{A})^m, 5m^2\big(86N \cdot 5^g \cdot \varepsilon^{-1} s\big)^{\frac{m}{m-g}} \deg \mathcal{A}, (\sqrt{2}mg)^{mg}\big) \\ c_{3,\Theta} &= \max\big(h_1(\mathcal{A}) + h_1(E)(g+1)\deg \mathcal{A}, c_\Theta + \frac{5}{2}h_1(E), \\ &\qquad \hat{c}_\Theta + h_2(E) + \frac{1}{2}\log(n+1), n\log(n+1)\big) \end{aligned}$$

et au choix :

(i) $s = \min(n+1, \operatorname{Card}\mathcal{S})$ *et* $\alpha_v = (n+1)^{3\delta_v/2}$ *; ou bien*

(ii) $s = 1$ *et* $(\alpha_v)_v$ *une certaine famille de réels tous supérieurs ou égaux à* 1*, satisfaisant* $\prod_{v\in\mathcal{S}} \alpha_v^{\Delta_v} \leqslant H_2(E)^2 \cdot \sqrt{n+1}$.

Démonstration. Commençons par la deuxième option, qui est la plus simple. On considère les points p_i définis comme p_0 mais avec le 1 en i-ème position ; on peut certainement choisir un i tel que $p_i \notin E$. On pose alors

$$\alpha_v = \frac{(n+1)^{\delta_v/2}}{\operatorname{dist}_v(p_i, E)^2} \quad \forall v \in \mathcal{S}\ ,$$

ce qui a un sens car le dénominateur n'est pas nul, et on a bien $\alpha_v \geqslant 1$. Par ailleurs, on a

$$\prod_{v\in\mathcal{S}} \operatorname{dist}_v(p_i, E)^{\Delta_v} \leqslant \prod_{v\in M_k} \operatorname{dist}_v(p_i, E)^{\Delta_v} = H_2(E)^{-1}$$

vu l'expression de la distance à un hyperplan. On applique alors le corollaire précédent au plongement déduit de Θ en échangeant les coordonnées d'indices i et 0, ce qui ne change aucune des quantité en jeu.

Pour la première option, soit $L = l_0X_0 + \cdots + l_nX_n$ une équation de E. Pour chaque place v, on note i_v un indice tel que $|l_{i_v}|_v$ soit maximal, de sorte que $|l_{i_v}|_v \geqslant \|L\|_{2,v}(n+1)^{-\delta_v/2}$. On a immédiatement $\mathrm{dist}_v(E, p_{i_v}) \geqslant (n+1)^{-\delta_v/2}$.

On définit maintenant pour chaque i un ensemble de places

$$\mathcal{S}_i = \{v \in \mathcal{S} \text{ telle que } \mathrm{dist}_v(E, p_{i_v}) \geqslant (n+1)^{-\delta_v/2}\} .$$

Le paragraphe précédent montre que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_n$. (Cette réunion n'est pas nécessairement disjointe, mais il n'est pas utile qu'elle le soit.) On associe à chacun de ces ensembles le nombre réel $\sigma_i = \sum_{v\in\mathcal{S}_i} \lambda_v\Delta_v$ où Δ_v désigne comme d'habitude le degré local en v divisé par le degré global. Par hypothèse, on a $1 = \sum_{v\in\mathcal{S}} \lambda_v\Delta_v \leqslant \sum_{i=0}^n \sigma_i$, or cette somme comporte au plus $s = \min(n+1, \mathrm{Card}\,\mathcal{S})$ termes non nuls, donc il existe (au moins) un indice i tel que $\sigma_i \geqslant 1/s$. On fixe un tel indice, désormais désigné par i.

On note alors $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_i$ et, pour tout $v \in \mathcal{S}'$, on pose $\lambda'_v = \lambda_v/\sigma_i$ pour avoir $\sum_{v\in\mathcal{S}'} \lambda'_v\Delta_v = 1$. Enfin, on pose $\varepsilon' = \varepsilon\sigma_i$ de sorte qu'on a

$$(n+1)^{-3\delta_v/2} H_2(x_i)^{-\lambda_v\varepsilon} \leqslant \frac{\mathrm{dist}_v(p_{i_v}, E)^2}{(n+1)^{\delta_v/2}} H_2(x_i)^{-\lambda'_v\varepsilon'} \quad \forall v \in \mathcal{S}' .$$

On considère pour finir le plongement Θ' obtenu à partir de Θ en échangeant les coordonnées d'indices i et 0, ce qui n'a aucune incidence sur la distance ni la hauteur. On peut alors appliquer le corollaire 2.7.2 page 83 avec le plongement Θ', le réel ε', l'ensemble de places $\mathcal{S}'$ et les poids λ'_v, car ses hypothèses sont impliquées par celle du présent corollaire compte tenu de la comparaison ci-dessus et du fait que $\varepsilon' \geqslant \varepsilon/s$. □

2.7.2 Hypersurfaces

Pour se ramener au cas précédent, on utilise un plongement de Veronese remodelé, tel que défini dans [Jad96, p. 14] ou [Rém01a, p. 102], dont on rappelle la définition (sur les coordonnées homogènes) :

$$\begin{aligned} \chi_d \colon \mathbf{P}^n &\to \mathbf{P}^{n'} \\ (x_0 : \ldots : x_n) &\mapsto \left(\tbinom{d}{\alpha}^{1/2} x^\alpha\right)_\alpha \end{aligned}$$

où $n' = \binom{n+d}{d} - 1$ et α parcourt l'ensemble des $(n+1)$-uplets d'entiers de longueur d. L'intérêt de ce plongement par rapport au plongement de Veronese classique réside dans le fait qu'on a, aux places archimédiennes :

$$\|\chi_d(x)\|_{2,v} = \left(\sum_\alpha \binom{d}{\alpha} |x|_v^{2\alpha}\right)^{1/2} = \|x\|_{2,v}^d$$

d'après la formule multinomiale. Par ailleurs, pour chaque place ultramétrique, si l'on choisit un indice k_v tel que $|x_{k_v}|_v$ soit maximale, il n'est pas difficile de constater que $x_{k_v}^d$ est une coordonnée de $\chi_d(x)$ qui est aussi de valeur absolue maximale. On a ainsi

$$\|\chi_d(x)\|_{2,v} = \|x\|_{2,v}^d \quad \forall v \,. \tag{2.69}$$

Dans les estimations de normes et hauteurs à venir, on aura aussi besoin du lemme suivant.

Lemme 2.7.4. *Soient n et d deux entiers et $\alpha \in \mathbf{N}^{n+1}$ tel que $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = d$. Pour toute place v d'un corps de nombres contenant $\binom{d}{\alpha}^{-1/2}$, on pose $\delta'_v = 1$ si v divise un premier inférieur ou égal à d et 0 sinon. On a alors*

$$\left|\binom{d}{\alpha}\right|_v^{-1/2} \leqslant d^{\delta'_v n/2} \,.$$

De plus, cette valeur absolue vaut 1 si v divise un premier strictement supérieur à d.

Par ailleurs, on a $\sum_v \Delta_v \delta'_v \leqslant 1.26 d/\log d$. En particulier si on note b le vecteur dont les composantes sont les $\binom{d}{\alpha}^{-1/2}$ quand α varie, on a $h_\infty(b) \leqslant dn$.

Démonstration. Le cas des places archimédiennes est clair. Pour les places finies, on note p tel que $|\cdot|_v$ prolonge $|\cdot|_p$ et on utilise la définition du multinomial en termes de factorielles et la formule (de Legendre) donnant la valuation d'une factorielle :

$$v_p(\binom{d}{\alpha}) = \sum_{i=1}^{\lfloor \log_p d \rfloor} \left\lfloor \frac{d}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\alpha_0}{p^i} \right\rfloor - \cdots - \left\lfloor \frac{\alpha_n}{p^i} \right\rfloor$$

qui donne immédiatement le cas d'égalité, car la somme est vide si $p > d$. Par ailleurs, chacun des termes vaut au plus n donc en sommant sur i on a $v_p(\binom{d}{\alpha}) \leqslant n \log_p(d)$ qui donne bien l'estimation de valeur absolue annoncée.

La somme pondérée des δ'_v est par définition le nombre de premiers inférieurs ou égaux à d, qui est au plus $1.25506 d/\log d$ d'après le corollaire 1 page 69 de [RS62]. L'estimation de hauteur annoncée en découle immédiatement. □

Le lemme suivant précise l'effet d'un plongement de Veronese remodelé sur les différents paramètres en jeu dans notre situation.

Lemme 2.7.5. *Soient $\Theta\colon \mathcal{A} \to \mathbf{P}^n$ un plongement projectif et F une hypersurface de $\mathbf{P}^n$, de degré d. On note χ le plongement de Veronese remodelé de degré d, qui va donc de $\mathbf{P}^n$ dans $\mathbf{P}^{n'}$ où $n' = \binom{n+d}{d} - 1$, et $\Theta' = \chi \circ \Theta$. Dans ce plongement, l'image de F est découpée par un hyperplan E et on a :*

(i) $h_{1,\Theta'}(E) \leqslant h_{1,\Theta}(F) + dn$;

(ii) $\mathrm{dist}_{v,\Theta'}(x, E) \leqslant \mathrm{dist}_{v,\Theta}(x, F) \cdot d^{\delta_v/2}$;

(iii) $h_{2,\Theta'}(x) = h_{2,\Theta}(x) \cdot d$;

(iv) $\deg_{\Theta'} \mathcal{A} = \deg_{\Theta} \mathcal{A} \cdot d^g$;

(v) $h_{1,\Theta'}(\mathcal{A}) \leqslant d^{g+1} h_{1,\Theta}(\mathcal{A}) + 2d^{g+1}(g+1)(\deg_{\Theta} \mathcal{A}) \log(n+1)$;

(vi) $\hat{c}_{\Theta'} = \hat{c}_{\Theta} \cdot d$;

(vii) $c_{\Theta'} = c_{\Theta} \cdot d + 2dn$

où les deux derniers points signifient qu'il s'agit de valeurs acceptables pour pour ces constantes (les valeurs optimales pouvant être plus petites). Par ailleurs le cardinal N de l'ensemble de cartes introduit à la section 1.5.4 page 13 est inchangé.

Démonstration. On utilise la remarque de [Rém01a, p. 102] pour interpréter les distances et hauteurs dans le plongement de Veronese remodelé comme des distances et hauteurs d'indice $(d, \ldots, d)$ dans le plongement initial.

On trouve alors les comparaisons de degré et de hauteurs qui nous intéressent dans [Phi01, p. 85-86] : les points (*iv*) et (*iii*) page précédente en découlent directement et le point (*vi*) est une conséquence immédiate de ce dernier (pour lequel ou pouvait aussi utiliser (2.69) en fait). Par ailleurs, la référence citée donne $h_{\mathrm{P},\Theta'}(\mathcal{A}) = d^{g+1} h_{\mathrm{P},\Theta}(\mathcal{A})$ (en notant h_{P} la hauteur utilisée dans cette référence), dont on déduit le point (*v*) en comparant les hauteurs utilisées grâce à (1.6) :

$$\begin{aligned} h_{1,\Theta'}(\mathcal{A}) &\leqslant h_{\mathrm{P},\Theta'}(\mathcal{A}) + (g+1)(\deg_{\Theta'} \mathcal{A}) \log(n'+1) \\ &\leqslant d^{g+1} h_{\mathrm{P},\Theta}(\mathcal{A}) + d^{g+1}(g+1)(\deg_{\Theta} \mathcal{A}) \log(n+1) \\ &\leqslant d^{g+1} h_{1,\Theta}(\mathcal{A}) + 2d^{g+1}(g+1)(\deg_{\Theta} \mathcal{A}) \log(n+1) \ . \end{aligned}$$

Pour (*ii*) page précédente, pour chaque place, introduisons un point $y_v \in F$ tel que $\mathrm{dist}_{v,\Theta}(x, F) = \mathrm{dist}_{v,\Theta}(x, y_v)$; par définition on a $\mathrm{dist}_{v,\Theta'}(x, E) \leqslant \mathrm{dist}_{v,\Theta'}(x, y_v)$. Pour majorer cette dernière quantité, aux places infinies on utilise la première formule en haut de la page 89 de [Phi01] qu'on interprète ainsi :

$$\mathrm{dist}_{v,\Theta'}(x, y_v) = \sqrt{1 - \left(1 - \mathrm{dist}_{v,\Theta}(x, y_v)^2\right)^d} \ .$$

On conclut en appliquant l'inégalité élémentaire $1 - (1-z)^d \leqslant dz$ avec $z = \mathrm{dist}_{v,\Theta}(x, y_v)^2$. Aux places finies, on se base sur la définition de la distance : aux dénominateurs on utilise (2.69) et au numérateur on voit facilement par le même type d'argument que $\|\chi(x) \wedge \chi(y)\|_v \leqslant \|x \wedge y\|_v$ de sorte que $\mathrm{dist}_{v,\Theta'}(x, y_v) \leqslant \mathrm{dist}_{v,\Theta}(x, y_v)$ comme annoncé.

Pour la hauteur de E, on remarque pour commencer que les résultats de [Phi01, p. 85-86] utilisés ci-dessus ne s'appliquent pas, car ce dernier n'est pas l'image de F dans le plongement ; en fait on a $\chi(F) = E \cap \chi(\mathbf{P}^n)$. Fixons plutôt une équation de F dans le plongement initial : c'est un polynômes homogène de degré d en $X = (X_0, \ldots, X_n)$ mais on peut aussi le voir comme une forme linéaire en $Z = (Z_\alpha)_\alpha$ (où α parcourt l'ensemble des $(n+1)$-uplets de longueur d), en faisant le changement de variable $Z_\alpha = X^\alpha$. On note $L = \sum l_\alpha Z_\alpha$ la forme linéaire obtenue,

puis $L' = l_\alpha \binom{d}{\alpha}^{-1/2} Z_\alpha$. Par construction, L' est bien l'équation dans le nouveau plongement d'un hyperplan E contenant $\chi(F)$. Par ailleurs, le lemme précédent donne l'estimation de hauteur annoncée.

Pour chaque (a, b, γ) on considère la famille $(L_k^{(a,b,\Theta,\gamma)})_{k=0}^n$ donnée par la section 1.5.4 page 13. Pour tout $\beta \in \mathbf{N}^{n+1}$ de longueur d, on regarde $\prod_{k=0}^n (L_k^{(a,b,\gamma)})^{\beta_k}$, qui est une forme bihomogène de bidegré $(2da^2, 2db^2)$ en $(X^{(1)}, X^{(2)})$, comme une forme bihomogène de $(2a^2, 2b^2)$ en la famille des monômes de bidegré (d, d) en $(X^{(1)}, X^{(2)})$, image qu'on note provisoirement K_β. La famille $(K_\beta)_\beta$ représente le morphisme $(x, y) \mapsto ax - by$ sur l'ouvert γ dans le plongement Θ'.

La famille correspondante dans le plongement remodelé, notée $(L_{\Theta',\beta}^{(a,b,\gamma)})_\beta$, s'en déduit en multipliant chacun des coefficients de K_β par un monôme de degré $2(a^2 + b^2)$ en les $\binom{d}{\alpha}^{-1/2}$ puis en multipliant la forme obtenue par $\binom{d}{\beta}^{1/2}$. D'après le lemme précédent, on a donc

$$\|L_{\Theta',\beta}^{(a,b,\gamma)}\|_{1,v} \leqslant |\binom{d}{\beta}^{1/2}|_v \cdot |||L^{(a,b,\gamma)}|||_{1,v}^d \cdot d^{n(a^2+b^2)\delta'_v}$$

puis en sommant sur β :

$$|||L_{\Theta'}^{(a,b,\gamma)}|||_{1,v} \leqslant (n+1)^{d\,\delta_v} \cdot |||L^{(a,b,\gamma)}|||_{1,v}^d \cdot d^{n(a^2+b^2)\delta'_v} \leqslant C_{\Theta',v}^{a^2+b^2}$$

en posant $C_{\Theta',v} = C_{\Theta,v}^d \cdot (n+1)^{5d\delta_v/4} \cdot d^{n\delta'_v}$ (l'exposant de $n+1$ n'est pas optimal ici mais sera utile au paragraphe suivant).

Par ailleurs, on sait que si x désigne des coordonnées homogènes d'un point de $\mathbf{P}^n$ et x' l'image de ces coordonnées par χ, on a en toute place $\|x'\|_{2,v} = \|x\|_{2,v}^d$. Ainsi, vu les définitions ci-dessus, on a

$$\frac{\|L_{\Theta'}^{(a,b,\gamma)}(x', y')\|_{2,v}}{\|x'\|_{2,v}^{2a^2}\|y'\|_{2,v}^{2b^2}} = \left(\frac{\|L_{\Theta}^{(a,b,\gamma)}(x, y)\|_{2,v}}{\|x\|_{2,v}^{2a^2}\|y\|_{2,v}^{2b^2}}\right)^d$$

puis, en utilisant des comparaisons classiques de normes :

$$\begin{aligned}
\frac{\|L_{\Theta'}^{(a,b,\gamma)}(x', y')\|_{1,v}}{\|x'\|_{1,v}^{2a^2}\|y'\|_{1,v}^{2b^2}} &\geqslant \frac{\|L_{\Theta'}^{(a,b,\gamma)}(x', y')\|_{2,v}}{\|x'\|_{2,v}^{2a^2}\|y'\|_{2,v}^{2b^2}}\,(n'+1)^{-(a^2+b^2)\delta_v} \\
&\geqslant \left(\frac{\|L_{\Theta}^{(a,b,\gamma)}(x, y)\|_{2,v}}{\|x\|_{2,v}^{2a^2}\|y\|_{2,v}^{2b^2}}(n+1)^{-(a^2+b^2)\delta_v}\right)^d \\
&\geqslant \left(\frac{\|L_{\Theta}^{(a,b,\gamma)}(x, y)\|_{1,v}}{\|x\|_{1,v}^{2a^2}\|y\|_{1,v}^{2b^2}}(n+1)^{-(a^2+b^2+1/2)\delta_v}\right)^d \\
&\geqslant \left(C_{\Theta,v}(n+1)^{5\delta_v/4}\right)^{-d(a^2+b^2)} \geqslant C_{\Theta',v}^{-(a^2+b^2)}\,.
\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau le lemme précédent il vient

$$c_{\Theta'} = c_\Theta \cdot d + \frac{5}{4} d \log(n+1) + 1.26dn$$

dont le dernier terme se déduit en remarquant que $\frac{5}{4}\log(n+1)/n \leqslant \frac{5}{8}\log 3 \leqslant 0.69$ car $n \geqslant 2$. □

Corollaire 2.7.6. *Soient $\Theta\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ un plongement projectif, F une hypersurface de $\mathbf{P}^n$ de degré d et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Il n'existe dans $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ aucune famille de points $x_1, \ldots, x_m$ avec $m \geqslant g+1$ satisfaisant simultanément aux conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} 0 < \operatorname{dist}_v(x_i, F) &< \alpha_v^{-1} H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S} \\ \hat{h}(x_1) &> \frac{4}{d} c_{4,\Theta} \Lambda_3^{(1+\frac{1}{m})\prod_{i=m}^{mg}(2i+1)} \\ \hat{h}(x_i) &> \hat{h}(x_{i-1}) \cdot 4m\Lambda_3^{2m\prod_{i=m+1}^{mg}(2i+1)} \\ \cos(x_i, x_j) &> 1 - \frac{1}{m}\Big(\frac{\varepsilon}{86N \cdot 5^g ds}\Big)^{\frac{m}{m-g}} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda_3 &= \max\big((d^g \deg \mathcal{A})^m, 5m^2\big(86N \cdot 5^g ds\, \varepsilon^{-1}\big)^{\frac{m}{m-g}} d^g \deg \mathcal{A}, (\sqrt{2}mg)^{mg}\big) \qquad (2.70) \\ c_{4,\Theta} &= d \max\big(d^g h_1(\mathcal{A}), c_\Theta, \hat{c}_\Theta\big) + (g+1)\deg \mathcal{A}\big(d^g h_1(F) + n(d+1)^n \log(d+1)\big) \end{aligned}$$

et au choix :

(i) $s = \min(\binom{d+n}{n}, \operatorname{Card}\mathcal{S})$ *et* $\alpha_v = \big(d\binom{d+n}{n}^3\big)^{\delta_v/2}$ *; ou bien*

(ii) $s = 1$ *et* $(\alpha_v)_v$ *une certaine famille de réels tous supérieurs ou égaux à* 1*, satisfaisant* $\prod_{v\in\mathcal{S}} \alpha_v^{\Delta_v} \leqslant H_1(F)^2\, \mathrm{e}^{3dn}$.

Démonstration. On considère le plongement Θ' et l'hyperplan E fournis par le lemme 2.7.5 page 87 précédent et on prévoit d'appliquer le corollaire 2.7.3 page 85 dans ce cadre avec $\varepsilon' = \varepsilon/d$ comme exposant d'approximation. Il s'agit donc de vérifier que nos conditions impliquent celles du corollaire en question.

Concernant l'hypothèse d'approximation, avec le premier choix pour (s, α),

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}_{v,\Theta'}(x_i, E) \leqslant \operatorname{dist}_{v,\Theta}(x_i, F) \cdot d^{\delta_v/2} &\leqslant \big(d\tbinom{d+n}{n}^3\big)^{-\delta_v/2} H_{2,\Theta}(x_i)^{-\lambda_v\varepsilon} \cdot d^{\delta_v/2} \\ &\leqslant (n'+1)^{-3\delta_v/2} H_{2,\Theta'}(x_i)^{-\lambda_v\varepsilon'} \end{aligned}$$

ce qui justifie le choix fait pour ε'.

Avec le deuxième choix, si l'on note α' la famille du corollaire 2.7.3 page 85, on voit qu'il s'agit de poser $\alpha_v = \alpha'_v \cdot d^{\delta_v/2}$. On a alors

$$\prod_{v\in\mathcal{S}} \alpha_v^{\Delta_v} \leqslant d^{1/2} \prod_{v\in\mathcal{S}} \alpha'_v \leqslant d^{1/2} H_{2,\Theta'}(E)^2 (n'+1)^{1/2} \leqslant d^{1/2} H_{1,\Theta}(F)^2 \mathrm{e}^{2dn} \tbinom{d+n}{n}^{1/2}$$

qui donne bien la majoration annoncée.

On adapte alors les constantes pour tenir compte des variations de degrés, hauteurs et dimension ambiante ainsi que du choix de ε. Détaillons le cas de $c_{4,\Theta}$. En utilisant abondamment le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} &h_{1,\Theta'}(\mathcal{A}) + h_{1,\Theta'}(E)(g+1)\deg_{\Theta'}\mathcal{A} \\ &\quad \leqslant d^{g+1}h_{1,\Theta}(\mathcal{A}) + (g+1)\deg_{\Theta}\mathcal{A}\Big(2d^{g+1}\log(n+1) + d^g\big(h_{1,\Theta}(F) + dn\big)\Big) \end{aligned}$$

puis

$$c_{\Theta'} + \frac{5}{2}h_{1,\Theta'}(E) \leqslant dc_{\Theta} + 2dn + \frac{5}{2}(h_{1,\Theta}(F) + dn)$$

et

$$\hat{c}_{\Theta'} + h_{2,\Theta'}(E) + \frac{1}{2}\log(n'+1) \leqslant d\hat{c}_{\Theta} + h_{1,\Theta}(F) + dn + \frac{1}{2}d\log(n+1)$$

ce qui prouve que

$$\begin{aligned} c_{3,\Theta'} &\leqslant \max\Big(d^{g+1}h_{1,\Theta}(\mathcal{A}) + d^g(g+1)\deg_{\Theta}\mathcal{A}\big(h_{1,\Theta}(F) + 3dn\big), \\ &\qquad dc_{\Theta} + \frac{5}{2}h_{1,\Theta}(F) + \frac{9}{2}dn,\ d\hat{c}_{\Theta} + h_{1,\Theta}(F) + \frac{3}{2}dn,\ n(d+1)^n\log(d+1)\Big) \\ &\leqslant d\max\big(d^g h_{1,\Theta}(\mathcal{A}), c_{\Theta}, \hat{c}_{\Theta}\big) \\ &\qquad + (g+1)\deg_{\Theta}\mathcal{A}\big(d^g h_{1,\Theta}(F) + n(d+1)^n\log(d+1)\big) \end{aligned}$$

en prenant le maximum terme par terme, assez largement pour le dernier.

La condition suivante vient alors en remarquant que la hauteur normalisée est multipliée par d en changeant de plongement. Enfin, les rapports de hauteurs normalisées et les angles dans l'espace de Mordell-Weil étant invariants sous le changement de plongement considéré, les deux dernières conditions sont inchangées. On peut donc appliquer le corollaire 2.7.3 page 85 comme prévu et conclure. □

2.7.3 Variétés quelconques

Il s'agit de choisir une hypersurface contenant la variété et ne passant par aucun des points considérés, puis de lui appliquer le corollaire précédent. Le lemme suivant donne un choix possible d'hypersurface de degré et hauteur contrôlés.

Lemme 2.7.7. *Soient V une sous-variété de $\mathbf{P}^n$ de degré d et de dimension u, et $x_1, \ldots, x_m$ des points dans $\mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}}) \setminus V(\overline{\mathbf{Q}})$. Il existe une hypersurface F de $\mathbf{P}^n$ contenant V mais aucun des x_i, de degré* $\deg V$ *et de hauteur*

$$h_1(F) \leqslant h_1(V) + (u+2)(d+n+1)\log(d+1) + \log(m/2)\ .$$

Démonstration. On se base sur la proposition 6.1 (p. 543) de [Rémooa], qui fournit une famille de formes $P_1, \dots, P_s$ de degré d définissant V (ensemblistement), avec une variante : si $d = 1$ on choisit pour $\mathcal{M}_2$ (dans les notations de la preuve de *loc. cit.*) l'ensemble des matrices dont les coefficients sont 0 ou 1, de sorte que pour tout d on a

$$s = \operatorname{Card} \mathcal{M}_2 \leqslant (d+1)^{(u+2)(n+1)} .$$

Par ailleurs, on utilisera plutôt les hauteurs h_1, pour lesquelles on obtient la majoration suivante

$$h_1(P_i) \leqslant h_1(V) + (u+1)d \log(d+1)$$

en remarquant que les P_i sont une spécialisation de la forme de Chow de V en des points (formes linéaires) de hauteur H_1 au plus $d+1$: au plus deux coefficients non nuls, tous deux entiers et de valeur absolue au plus $\max(1, d/2)$.

Si $m = 1$, il suffit de choisir un P_i ne s'annulant pas en x_1. On suppose donc désormais que $m \geqslant 2$.

Pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$ on fixe un j_i tel que $P_{j_i}(x_i) \neq 0$. On considère alors le polynôme $\mathcal{P} \in \overline{\mathbf{Q}}[T_1, \dots, T_s]$ défini par

$$\mathcal{P} = \prod_{i=1}^{m} \big(P_1(x_i)T_1 + \cdots + P_s(x_i)T_s\big)$$

qui est donc homogène de degré m et n'est pas le polynôme nul, car aucun des facteurs n'est nul et l'anneau ambiant est intègre. On peut donc choisir un point $\lambda \in \mathbf{Z}^s$ avec $|\lambda_j| \leqslant m/2$ en lequel $\mathcal{P}$, qui est homogène, ne s'annule pas (voir [Rémoob] avant la proposition 4.1 page 115).

On pose alors $Q = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_s P_s$ et $F = \mathcal{Z}(Q)$. Par construction, il est clair que F est de degré d et contient V mais aucun des x_i (en effet, $\prod_{i=1}^{m} Q(x_i) = \mathcal{P}(\lambda) \neq 0$). Par ailleurs, $h_1(\lambda) \leqslant \log s + \log(m/2)$, ce qui donne immédiatement

$$h_1(F) \leqslant h_1(V) + (u+1)d \log(d+1) + (u+2)(n+1)\log(d+1) + \log(m/2)$$

qui implique l'estimation annoncée. □

Corollaire 2.7.8. *Soient $\Theta \colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ un plongement projectif, V une variété de $\mathbf{P}^n$ de degré d et de dimension u, et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Il n'existe dans $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ aucune famille de points $x_1, \dots, x_m$ avec $m \geqslant g+1$ satisfaisant simultanément aux conditions suivantes :*

$$\begin{aligned}
0 < \operatorname{dist}_v(x_i, V) &< \alpha_v^{-1} H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S} \\
\hat{h}(x_1) &> \frac{4}{d} c_{4,\Theta} \Lambda_3^{(1+\frac{1}{m})\prod_{i=m}^{mg}(2i+1)} \\
\hat{h}(x_i) &> \hat{h}(x_{i-1}) \cdot 4m \Lambda_3^{2m \prod_{i=m+1}^{mg}(2i+1)} \\
\cos(x_i, x_j) &> 1 - \frac{1}{m}\left(\frac{\varepsilon}{86N \cdot 5^g ds}\right)^{\frac{m}{m-g}}
\end{aligned}$$

avec Λ_3 *comme en* (2.70),

$$c_{5,\Theta} = d\max\big(d^g h_1(\mathcal{A}), c_\Theta, \hat{c}_\Theta\big) + (g+1)\deg\mathcal{A}\Big(n(d+1)^n\log(d+1) + d^g\big(h_1(V) + (u+2)(d+n+1)\log(d+1) + \log(m/2)\big)\Big)$$

et au choix :

(i) $s = \min(\binom{d+n}{n}, \operatorname{Card}\mathcal{S})$ *et* $\alpha_v = \big(d\binom{d+n}{n}^3\big)^{\delta_v/2}$ *; ou bien*

(ii) $s = 1$ *et* $(\alpha_v)_v$ *une certaine famille de réels tous supérieurs ou égaux à* 1*, satisfaisant* $\prod_{v\in\mathcal{S}} \alpha_v^{\Delta_v} \leqslant H_1(V)^2 \cdot (d+1)^{2(u+2)(d+n+1)} \cdot \frac{m^2}{4} \cdot \mathrm{e}^{3dn}$.

Démonstration. Découle immédiatement du corollaire 2.7.6 page 90 appliqué à l'hypersurface produite par le lemme précédent. □

On énonce maintenant une version du précédent corollaire avec des constantes légèrement simplifiées.

Corollaire 2.7.9. *Soient* $\Theta\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ *un plongement projectif,* V *une variété de* $\mathbf{P}^n$ *de degré* d *et de dimension* u*, et* $0 < \varepsilon$ *un nombre réel. Il n'existe dans* $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ *aucune famille de points* $x_1, \ldots, x_m$ *avec* $m \geqslant g+1$ *satisfaisant simultanément aux conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} 0 < \operatorname{dist}_v(x_i, V) &< \alpha_v^{-1} H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S} \\ \hat{h}(x_1) &> c_{5,\Theta}\Lambda_4^{(2mg)^{mg}} \\ \hat{h}(x_i) &> \hat{h}(x_{i-1}) \cdot \Lambda_4^{(2mg)^{mg}} \\ \cos(x_i, x_j) &> 1 - \frac{1}{m\,c_6} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} c_6 &= \big(86N \cdot 5^g ds\,\varepsilon^{-1}\big)^{\frac{m}{m-g}} \\ \Lambda_4 &= c_6\big((\sqrt{2}mgd)^g \deg\mathcal{A}\big)^m \\ c_{5,\Theta} &= d\max\big(d^g h_1(\mathcal{A}), c_\Theta, \hat{c}_\Theta\big) + (g+1)\deg\mathcal{A}\Big(n(d+1)^n\log(d+1) \\ &\quad + d^g\big(h_1(V) + (u+2)(d+n+1)\log(d+1) + \log(m/2)\big)\Big) \end{aligned}$$

et au choix :

(i) $s = \min(\binom{d+n}{n}, \operatorname{Card}\mathcal{S})$ *et* $\alpha_v = \big(d\binom{d+n}{n}^3\big)^{\delta_v/2}$ *; ou bien*

(ii) $s = 1$ *et* $(\alpha_v)_v$ *une certaine famille de réels tous supérieurs ou égaux à* 1*, satisfaisant* $\prod_{v\in\mathcal{S}} \alpha_v^{\Delta_v} \leqslant H_1(V)^2 \cdot (d+1)^{2(u+2)(d+n+1)} \cdot \frac{m^2}{4} \cdot \mathrm{e}^{3dn}$.

Démonstration. La définition de $c_{5,\Theta}$ n'a pas changé, elle est simplement rappelée pour référence, et l'apparition de c_6 ne change rien. La définition de Λ_4 a été

simplifiée en observant que $5m^2 \deg \mathcal{A} \leqslant (\deg \mathcal{A})^m (\sqrt{2}mg)^{mg}$ compte tenu du fait que $m \geqslant 2$ et $\deg \mathcal{A} \geqslant 3$ (c'est évident pour m assez grand et on le vérifie numériquement pour les petites valeurs).

On montre maintenant que $\prod_{i=m}^{mg}(2i+1) \leqslant \frac{1}{2}(2mg)^{mg}$. C'est clair si $g = 1$ et dans le cas contraire on remarque qu'il s'agit d'un produit de $mg - m + 1$ facteurs tous inférieurs à $2mg$ sauf le dernier qu'on regroupe avec le premier car $(2m+1)(2mg+1) \leqslant (2mg)^2$ pour $g \geqslant 2$ (et donc $m \geqslant 3$).

On en déduit que la deuxième condition ci-dessus implique celle du corollaire précédent en remarquant que $\frac{4}{d} \leqslant \Lambda_4^{1/4}$ puis que $(1+\frac{1}{m})\prod_{i=m}^{mg}(2i+1) + \frac{1}{4} \leqslant (2mg)^{mg}$. On procède de façon similaire pour la troisième condition en remarquant que cette fois le produit dans l'exposant commence à $i = m+1$. □

Signalons enfin qu'une version simplifiée de l'énoncé précédent, dans le cas où $\mathcal{A}$ est plongée dans $\mathbf{P}^n$ par un plongement de MUMFORD modifié associé à une polarisation principale, est donnée par le corollaire 4.4.1 page 125.

3 Inégalité de Mumford

3.1 Énoncés principaux

On prouve ici deux inégalités de Mumford explicites : la première dans le cas particulier où V est un translaté d'une sous-variété abélienne de $\mathcal{A}$, la deuxième dans le cas général. À part être plus simple à démontrer et servir d'échauffement pour le cas général, la version particulière présente deux intérêts majeurs : elle s'énonce sur $\overline{\mathbf{Q}}$ sans devoir se restreindre à un sous-groupe de rang fini de $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ et les constantes obtenues y sont sensiblement meilleures.

Par ailleurs, on renvoie à la remarque 1.5.7 page 18 pour le sens à donner à la condition d'approximation dans les énoncés suivants.

Théorème 3.1.1. *Soient $\mathcal{B}$ une sous-variété abélienne de $\mathcal{A}$ et V un translaté de $\mathcal{B}$ par un point algébrique ; on note $d = \deg \mathcal{B}$ et $u = \dim \mathcal{B}$. On choisit $\varepsilon > 0$ puis $\phi > 0$ et $\rho > 0$ tels que*

$$\frac{\rho^2}{4} + \rho\phi + 2\phi \leqslant \frac{\varepsilon}{2d} \,. \tag{3.1}$$

Si x et y sont deux points de $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ tels que

$$0 < \operatorname{dist}_v(z, V) \leqslant H_2(z)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S} \quad \text{où } z \text{ est } x \text{ ou } y \tag{3.2}$$

$$\hat{h}(x) > \frac{2}{\varepsilon} d(u+1)\Big(\log(d) + (2 + \frac{\varepsilon}{d})\hat{c}_\Theta + 2c'_\Theta + 11\log(n+1)\Big) \tag{3.3}$$

$$\cos(x, y) \geqslant 1 - \phi \tag{3.4}$$

$$\hat{h}(x) \leqslant \hat{h}(y) \leqslant (1+\rho)\hat{h}(x) \tag{3.5}$$

alors $x - y \in \mathcal{B}(\overline{\mathbf{Q}})$.

On remarquera que la conclusion obtenue est plus faible que celle qu'on pourrait attendre naïvement, à savoir $x = y$, qui ne semble pas accessible pour le moment. Cette obstruction sera discutée plus en détails à la section 4.1 page 113.

Pour le cas général, l'énoncé est le suivant.

Théorème 3.1.2. *On suppose $\mathcal{A}$ plongée dans $\mathbf{P}^n$ par un plongement de* Mumford *modifié associé à une polarisation principale. Soit V une sous-variété de $\mathcal{A}$; on note $d = \deg V$ et $u = \dim V$. On fixe un sous-groupe $\Gamma \subset \mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ de rang fini r, puis on pose*

$$m = \left(2^{34}\, h^0_{\mathcal{A}}\, d\right)^{(r+1)g^{5(u+1)^2}} + 1$$

où $h^0_{\mathcal{A}}$ est définie par (1.12). *On choisit alors $\varepsilon > 0$ puis $\phi > 0$ et $\rho > 0$ tels que*

$$\frac{\rho^2}{4} + \rho\phi + 2\phi \leqslant \frac{\varepsilon}{d^m (2m)^{(m+1)u}} \,. \tag{3.6}$$

Si $x_1, \ldots, x_m$ est une famille de points de Γ telle que, pour tous i et j entre 1 et m :

$$0 < \operatorname{dist}_v(x_i, V) \leqslant H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S} \tag{3.7}$$

$$\hat{h}(x_m) \geqslant \frac{4}{\varepsilon} d^{m-1} (2m)^{(m+1)u+1} \Big(h_1(V) + 4dm\big(\log d + c'_\Theta + \hat{c}_\Theta\big)\Big) \tag{3.8}$$

$$\cos(x_i, x_j) \geqslant 1 - \phi \tag{3.9}$$

$$\hat{h}(x_m) \leqslant \hat{h}(x_i) \leqslant (1+\rho)\hat{h}(x_m) \tag{3.10}$$

alors il existe une sous-variété abélienne $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ dont un translaté est contenu dans V et deux indices distincts i et j tels que $x_i - x_j \in \mathcal{B}$.

La conclusion de cet énoncé n'est peut-être pas la plus forte qu'on puisse obtenir, voir la section 3.7 page 111 pour un énoncé conjectural plus fort.

Avant d'attaquer les preuves proprement dites, on démontre une inégalité de Liouville, qui est intéressante en elle-même et sera un ingrédient crucial dans les inégalités de Mumford, puis on explicite quelques aspects métriques des opérations de $\mathcal{A}$: cette étape sera utile non seulement pour la preuve des inégalités de Mumford, mais aussi pour expliciter l'obstruction à la version naïve de cette inégalité.

Une fois réunis ces ingrédients techniques, on peut conclure directement dans le cas des translatés de sous-variété abéliennes ; pour le cas général, on étudie au préalable un morphisme « des différences » qui joue un rôle central dans la preuve.

3.2 Inégalité de Liouville

On établit ici l'analogue suivant de la classique inégalité de Liouville.

Proposition 3.2.1. *Soit V une sous-variété de $\mathbf{P}^n$, de dimension u et de degré d. Pour tout point $x \in \mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$, on a soit $x \in V(\overline{\mathbf{Q}})$ soit*

$$\prod_{v \in \mathcal{S}} \operatorname{dist}_v(x, V)^{\Delta_v} \geqslant \frac{1}{(n+1)^{3/2} (3d)^{d(u+1)}\, H_1(V)\, H_2(x)^d} \,,$$

où $\mathcal{S}$ est un ensemble fini quelconque de places d'un corps de nombres $\boldsymbol{k}$ contenant x, et $\Delta_v = [\boldsymbol{k}_v : \mathbf{Q}_v]/[\boldsymbol{k} : \mathbf{Q}_v]$.

Ce type d'inégalité se prouve de façon naturelle avec la distance algébrique (section 1.6 page 18). Cependant, si l'on traite directement le cas général en utilisant la définition, on obtient $d(u+1)$ comme exposant de $H_2(x)$. On commence donc par

le cas d'une hypersurface, où la distance algébrique admet une expression plus simple, puis on remarque que toute variété est une intersection d'hypersurfaces.

On pourrait se ramener au cas d'un hyperplan, où la distance admet une expression simple, par un plongement de Veronese (remodelé) comme dans le lemme 2.7.5 page 87, mais on obtient en fait de meilleurs constantes en utilisant la propriété 1.6.6 page 25.

Lemme 3.2.2. *Soit V une hypersurface de $\mathbf{P}^n$, d'équation F et de degré d. Pour tout point $x \in \mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$, on a soit $x \in V(\overline{\mathbf{Q}})$ soit*

$$\prod_{v\in\mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(x,V)^{\Delta_v} \geqslant \frac{1}{(17/8)^d (n+1)^{3/2}\, H_2(F)\, H_2(x)^d}\,.$$

Démonstration. Plutôt que la proposition 1.6.6 page 25, on utilise en fait l'inégalité (1.18) établie au cours de sa preuve afin d'éviter une comparaison norme-mesure superflue. On remarque également qu'on peut supposer $m = 1$ dans cette comparaison. On a alors :

$$\begin{aligned}\prod_{v\in\mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(x,V)^{\Delta_v} &\geqslant \prod_{v\in M(\boldsymbol{k})} \mathrm{dist}_v(x,V)^{\Delta_v}\\ &\geqslant \prod_{v\in M(\boldsymbol{k})} \left(\left(\frac{27}{26}(n+1)^{3/2}\left(\frac{164}{81}\right)^d\right)^{-\delta_v} \frac{|F(x)|_v}{\|x\|_{2,v}^d \|F\|_{2,v}}\right)^{\Delta_v}\end{aligned}$$

qui implique le résultat annoncé, *via* une simple comparaison numérique pour la constante. □

Démonstration de la proposition 3.2.1 page ci-contre. Si $x \notin V(\overline{\mathbf{Q}})$, la proposition 6.1 de [Rémooa] donne une forme F homogène de degré d, contenant V mais pas x, telle que

$$H_1(F) \leqslant H_1(V)\cdot (d+1)^{d(u+1)}$$

en tenant compte des différences de hauteurs utilisées, comme observé dans la preuve du lemme 2.7.7 page 91. Il suffit alors d'appliquer le lemme précédent à $\mathcal{Z}(F)$ et de remarquer que $17/8\cdot(d+1)^2 \leqslant (3d)^2$ pour conclure. □

On déduit de l'inégalité de Liouville le corollaire suivant, qui montre que dans notre étude des approximations exceptionnelles de hauteur assez grande, on pourra supposer $\varepsilon < d+1$.

Corollaire 3.2.3. *Soit V une sous-variété de $\mathbf{P}^n$, de dimension u et de degré d. Il n'existe aucun point $x \in \mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$ tel que*

$$0 < \prod_{v\in\mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(x,V)^{\Delta_v} < H_2(x)^{-\varepsilon} \tag{3.11}$$

$$H_2(x) > (n+1)^{3/2}(3d)^{d(u+1)}\, H_1(f_V) \tag{3.12}$$

pour $\varepsilon \geqslant d+1$.

Démonstration. Un tel point contredirait directement la proposition 3.2.1 page 96. □

3.3 Comportement métrique des opérations

La situation d'approximation considérée met en jeu plusieurs types de géométrie sur $\mathcal{A}$: la géométrie euclidienne de son espace de Mordell-Weil, la géométrie algébrique et projective de la variété plongée, une géométrie métrique, locale, en chaque place de $\mathcal{S}$. On s'attend à ce que les métriques locales sur $\mathcal{A}$ se comportent de façon agréable vis-à-vis des structures géométrique et arithmétique, par exemple que les opérations soient uniformément continues, voire lipschitziennes.

On montre ici que c'est bien le cas et on explicite une valeur admissible pour la constante de Lipschitz en fonction des constantes introduites à la section 1.5.4 page 13.

Proposition 3.3.1. *Pour tous x, x', y, y' dans $\mathcal{A}(\mathbf{C}_v)$, on a :*

$$\mathrm{dist}_v(x-y, x'-y') \leqslant \max\big(\mathrm{dist}_v(x,x'), \mathrm{dist}_v(y,y')\big) \cdot (C'_{\Theta,v})^2 \big(5\sqrt{2}(n+1)^5\big)^{\delta_v} .$$

Démonstration. On considère le plongement de Segre $s\colon (\mathbf{P}^n)^2 \to \mathbf{P}^{n'}$ avec $n' = n^2 + 2n$. D'après le lemme 4.3 (p. 121) de [Rém01a], appliqué avec $q = 2$ et $d = (1,1)$, ainsi que le paragraphe 2.3 (p. 103 notamment) de cette référence donnant le lien entre indices (d'une forme de Chow ou, par extension, d'une distance) et plongements de Segre (et de Veronese remodelé), on a

$$1 \leqslant \frac{\mathrm{dist}_v(s(x,x'), s(y,y'))}{\max\big(\mathrm{dist}_v(x,x'), \mathrm{dist}_v(y,y')\big)} \leqslant 2^{\delta_v/2} \tag{3.13}$$

dans le cas où le dénominateur est différent de zéro (dans le cas contraire, on a $x = x'$ et $y = y'$ et le résultat est immédiat).

Si l'on note $z = s(x,y)$ et $z' = s(x',y')$ les images dans ce plongement, et ξ le morphisme de soustraction vu comme allant de $s(\mathcal{A}^2)$ dans $\mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est comme d'habitude identifiée à son image dans $\mathbf{P}^n$ par un plongement fixé, on est ainsi ramené à montrer que

$$\mathrm{dist}_v(\xi z, \xi z') \leqslant \mathrm{dist}_v(z,z') \cdot (C'_{\Theta,v})^2 \big(5(n+1)^5\big)^{\delta_v} \tag{3.14}$$

en appliquant (3.13). On peut donc supposer $\mathrm{dist}_v(z,z') < (C'_{\Theta,v})^{-2}\big(5(n+1)^5\big)^{-\delta_v}$, car sinon l'inégalité précédente est banale.

On note alors F une famille de formes représentant la soustraction au voisinage de z, donnée par le lemme 1.5.3 page 14, mais on regarde chaque élément de cette famille non pas comme une forme sur $(\mathbf{P}^n)^2$, mais comme une forme sur $\mathbf{P}^{n'}$, qui

est donc de degré 2. Ceci ne change évidemment aucune des autres propriétés données par le lemme cité, en particulier (1.11) donne immédiatement

$$\frac{\|F(z)\|_{2,v}}{\|z\|_{2,v}^2} \geqslant \frac{\|F(z)\|_{1,v}}{\|z\|_{1,v}^2}(n'+1)^{-\delta_v} \geqslant (C'_{\Theta,v})^{-1}(n'+1)^{-\delta_v} \ . \tag{3.15}$$

On va utiliser un développement de Taylor au voisinage de z de chacune des formes de la famille F pour montrer que $\|F(z')\|_{2,v}$ n'est pas trop petit devant $\|F(z)\|_{2,v}$ (donc en particulier, que F représente également la soustraction au voisinage de z'), puis que $\|F(z) \wedge F(z')\|_{2,v}$ n'est pas trop grand devant $\|F(z)\|_{2,v}^2$.

L'hypothèse faite sur la distance permet d'appliquer le lemme 1.6.4 page 21 à z et z' (en remplaçant n par $n' = n^2 + 2n$) et donc de supposer, quitte à renuméroter les coordonnées, que $z_0 = z'_0 = 1$ et $\|z'\|_{2,v} \leqslant (n'+1)^{\delta_v/2}$ ainsi que $\|z\|_{2,v} \leqslant \left(2\sqrt{n'+1}\right)^{\delta_v}$. Le développement de Taylor de F s'écrit alors :

$$F(z') = F(z) + \sum_{1\leqslant i\leqslant n'} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial Z_i}(z)\cdot(z'_i - z_i)}_{R_i} + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n'} \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial Z_i \partial Z_j}(z)\cdot(z'_i - z_i)(z'_j - z_j)}_{R_{ij}} \ .$$

On remarque alors que $|z'_i - z_i|_v \leqslant \|z \wedge z'\|_{2,v} \leqslant \|z\|_{2,v}\|z'\|_{2,v}\,\mathrm{dist}_v(z,z')$, ce qu'on utilise, ainsi que (3.15) et l'hypothèse faite sur $\|z'\|_{2,v}$, pour estimer R_i :

$$\begin{aligned}\|R_i\|_{2,v} &\leqslant 2^{\delta_v}|||F|||_{2,v}\|z\|_{2,v}\cdot\|z\|_{2,v}\|z'\|_{2,v}\,\mathrm{dist}_v(z,z') \\ &\leqslant 2^{\delta_v}(C'_{\Theta,v})^2(n'+1)^{\delta_v}\|F(z)\|_{2,v}(n'+1)^{\delta_v/2}\,\mathrm{dist}_v(z,z') \ .\end{aligned}$$

En sommant et en se souvenant que $n'+1 = (n+1)^2$, il vient immédiatement

$$\|\sum R_i\|_{2,v} \leqslant (C'_{\Theta,v})^2\left(2(n+1)^5\right)^{\delta_v}\|F(z)\|_{2,v}\,\mathrm{dist}_v(z,z') \ .$$

De même (en utilisant de plus l'hypothèse sur $\|z\|_{2,v}$), on obtient successivement :

$$\begin{aligned}\|R_{ij}\|_{2,v} &\leqslant (C'_{\Theta,v})^2\left(2(n+1)^5\right)^{\delta_v}\|F(z)\|_{2,v}\,\mathrm{dist}_v(z,z')^2 \\ \|\sum R_{ij}\|_{2,v} &\leqslant (C'_{\Theta,v})^2\left(2(n+1)^9\right)^{\delta_v}\|F(z)\|_{2,v}\,\mathrm{dist}_v(z,z')^2 \\ &\leqslant (C'_{\Theta,v})^2\left(2(n+1)^4/5\right)^{\delta_v}\|F(z)\|_{2,v}\,\mathrm{dist}_v(z,z')\end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse sur la distance pour la dernière ligne. Au final, en utilisant à nouveau cette hypothèse, on a :

$$\begin{aligned}\left\|\sum R_i + \sum R_{ij}\right\|_{2,v} &\leqslant \|F(z)\|_{2,v}\cdot(C'_{\Theta,v})^2\left(\frac{12}{5}\cdot(n+1)^5\right)^{\delta_v}\mathrm{dist}_v(z,z') \\ &< \left(\frac{1}{2}\right)^{\delta_v}\|F(z)\|_{2,v} \ .\end{aligned}$$

Les inégalités triangulaire aux places infinies et ultramétrique aux places finies donnent alors $\|F(z')\|_{2,v} \geqslant (1/2)^{\delta_v}\|F(z)\|_{2,v}$. Afin d'estimer la distance, il reste à majorer $\|F(z) \wedge F(z')\|_{2,v}$. Pour ce faire, on développe le second facteur, on remarque que le premier terme du produit est nul et on majore brutalement le terme restant par le produit des normes ; il vient ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}_v(\xi(z), \xi(z')) &= \frac{\|F(z) \wedge F(z')\|_{2,v}}{\|F(z)\|_{2,v}\|F(z')\|_{2,v}} \\
&\leqslant \frac{\|F(z)\|_{2,v}\|\sum R_i + \sum R_{ij}\|_{2,v}}{\|F(z)\|_{2,v}\|F(z)\|_{2,v} \cdot 2^{-\delta_v}} \\
&\leqslant (C'_{\Theta,v})^2 \left(\frac{24}{5} \cdot (n+1)^5\right)^{\delta_v} \mathrm{dist}_v(z, z')
\end{aligned}$$

qui donne bien (3.14) et achève la preuve. □

Scolie 3.3.2. *La proposition 3.3.1 page 98 reste vraie en remplaçant la soustraction par l'addition et C'_Θ par C_Θ.*

Démonstration. Au lieu des formules de soustraction données par le lemme 1.5.3 page 14, on utilise les formules d'addition données par le lemme 1.5.2 page 14 appliqué avec $(a, b) = (1, -1)$. Le reste de la preuve est inchangé. □

3.4 Cas des translatés de sous-variétés abéliennes

La stratégie de la preuve est la suivante : si on a deux approximations exceptionnelles, suffisamment proches dans l'espace de Mordell-Weil et de hauteur assez grande, on fabrique (en prenant leur différence, sous l'hypothèse que V est un translaté du sous-groupe $\mathcal{B}$) une approximation de $\mathcal{B}$ de qualité telle qu'elle contredit l'inégalité de Liouville à moins d'appartenir à $\mathcal{B}$.

Lemme 3.4.1. *Soient x et y dans $\mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$, on note $z = x - y$. Si x et y satisfont à* (3.2) *et à l'inégalité de gauche de* (3.5)*, on a*

$$\prod_{v \in \mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(z, \mathcal{B})^{\Delta_v} \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon\hat{h}(x)} \cdot \mathrm{e}^{\varepsilon\hat{c}_\Theta} \cdot 5\sqrt{2}(n+1)^5 (C'_\Theta)^2 \,.$$

Démonstration. Soit $\eta > 0$ un réel ; en chaque place v, il existe des points x'_v et y'_v dans $V(\mathbf{C}_v)$ tels que $\mathrm{dist}_v(x, V) = \mathrm{dist}_v(x, x'_v) + \eta$ et $\mathrm{dist}_v(y, V) = \mathrm{dist}_v(y, y'_v) + \eta$. Les hypothèses et une comparaison de hauteur donnent alors

$$\max\big(\mathrm{dist}_v(x, x'_v), \mathrm{dist}_v(y, y'_v)\big) \leqslant \exp(-\lambda_v \varepsilon \hat{h}(x) + \lambda_v \varepsilon \hat{c}_\Theta) + \eta \,.$$

Comme V est translaté d'un sous-groupe $\mathcal{B}$, on a $x'_v - y'_v \in \mathcal{B}(\mathbf{C}_v)$, donc la proposition 3.3.1 page 98 donne

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}_v(z, \mathcal{B}) &\leqslant \operatorname{dist}_v(z, x'_v - y'_v)\\ &\leqslant \big(\exp(-\lambda_v \varepsilon \hat{h}(x) + \lambda_v \varepsilon \hat{c}_\Theta) + \eta\big) \cdot (C'_{\Theta,v})^2 \big(5\sqrt{2}(n+1)^5\big)^{\delta_v} .\end{aligned}$$

Cette inégalité étant valable pour tout $\eta > 0$, on a en fait

$$\operatorname{dist}_v(z, \mathcal{B}) \leqslant \exp(-\lambda_v \varepsilon \hat{h}(x) + \lambda_v \varepsilon \hat{c}_\Theta) \cdot (C'_{\Theta,v})^2 \big(5\sqrt{2}(n+1)^5\big)^{\delta_v} .$$

On prend alors le produit sur $v \in \mathcal{S}$, en supposant (c'est le cas défavorable) que $\mathcal{S}$ contient toutes les places archimédiennes, et la normalisation $\sum_{v\in\mathcal{S}} \lambda_v \Delta_v = 1$ permet de conclure. □

Lemme 3.4.2. *Soient x et y satisfaisant aux hypothèses* (3.4) *et* (3.5) *du théorème 3.1.1 page 95, notons z leur différence. On a alors $h_2(z) \leqslant (\rho^2/4 + 2\phi + \rho\phi)\hat{h}(x) + \hat{c}_\Theta$.*

Démonstration. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $|\cdot| = \sqrt{\hat{h}(\cdot)}$ la norme dans l'espace de Mordell-Weil. On remarque de plus que l'hypothèse (3.5) implique $|x| \leqslant |y| \leqslant (1+\rho)^{1/2}|x| \leqslant (1+\rho/2)|x|$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}\hat{h}(z) &= |x-y|^2\\ &= |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y\rangle\\ &= (|y| - |x|)^2 + 2|x||y|\,(1 - \cos(x,y))\\ &\leqslant \left(\frac{\rho}{2}|x|\right)^2 + 2\left(1 + \frac{\rho}{2}\right)|x|^2 \cdot \phi\\ &\leqslant ((\rho^2/4) + 2\phi + \rho\phi)\hat{h}(x)\end{aligned}$$

et une simple comparaison de hauteurs permet de conclure. □

Démonstration du théorème 3.1.1 page 95. Le lemme 3.4.1 page ci-contre donne, en prenant le logarithme et en observant que $5\sqrt{2} \leqslant 9 \leqslant (n+1)^2$:

$$\sum_{v\in\mathcal{S}} \Delta_v \log \operatorname{dist}_v(z, \mathcal{B}) \leqslant -\varepsilon\hat{h}(x) + \varepsilon\hat{c}_\Theta + 7\log(n+1) + 2c'_\Theta . \tag{3.16}$$

Par ailleurs, le lemme 3.4.2 et l'hypothèse (3.1) donnent

$$h_2(z) \leqslant (\rho^2/4 + 2\phi + \rho\phi)\hat{h}(x) + \hat{c}_\Theta \leqslant \frac{\varepsilon}{2d}\hat{h}(x) + \hat{c}_\Theta . \tag{3.17}$$

Supposons maintenant que $z \notin \mathcal{B}(\overline{\mathbf{Q}})$ et montrons qu'on contredit (3.3). En effet, l'inégalité de Liouville (proposition 3.2.1 page 96) appliquée à z et $\mathcal{B}$ donne

$$\begin{aligned}\sum_{v\in\mathcal{S}} \Delta_v \log \operatorname{dist}_v(z, \mathcal{B}) &\geqslant -dh_2(z) - h_1(\mathcal{B}) - \frac{3}{2}\log(n+1) - (u+1)d\log(3d)\\ &\geqslant -\frac{\varepsilon}{2}\hat{h}(x) - d\hat{c}_\Theta - h_1(f_\mathcal{B}) - \frac{3}{2}\log(n+1) - (u+1)d\log(3d)\end{aligned}$$

où la deuxième ligne vient en substituant (3.17). En comparant avec (3.16), il vient :

$$\frac{\varepsilon}{2}\hat{h}(x) \leqslant h_1(\mathcal{B}) + (u+1)d\log(3d) + (d+\varepsilon)\hat{c}_\Theta + 2c'_\Theta + 9\log(n+1)\ .$$

Comme $\mathcal{B}$ est une sous-variété abélienne de $\mathcal{A}$, sa hauteur normalisée est nulle [Phi91, prop. 9] ; ainsi, en utilisant successivement (1.6) et (1.7), on a

$$h_1(\mathcal{B}) \leqslant h_{\mathrm{P}}(\mathcal{B}) + d(u+1)\log(n+1) \leqslant \hat{c}_\Theta d(u+1) + d(u+1)\log(n+1)\ .$$

En substituant dans l'inégalité précédente, il vient :

$$\frac{\varepsilon}{2}\hat{h}(x) \leqslant d(u+1)\Big(\log(d) + (2+\frac{\varepsilon}{d})\hat{c}_\Theta + 2c'_\Theta + 10\log(n+1) + \log(3)\Big)$$

qui, en observant de plus que $\log(3) \leqslant \log(n+1)$, contredit bien (3.3), achevant ainsi la preuve. □

3.5 Étude du morphisme des différences

Comme dans l'énoncé du théorème, on choisit V une sous-variété de $\mathcal{A}$; on note $d = \deg V$ et $u = \dim V$. On supposera que $u \geqslant 1$ car l'étude qui suit est sans intérêt sinon. Remarquons de suite qu'alors le degré de V est nécessairement au moins 2, car si V était linéaire, elle contiendrait une droite projective, c'est-à-dire une courbe de genre 0, or il est impossible de plonger une telle courbe dans une variété abélienne.

Dans le cas des translatés de sous-variétés abéliennes, la preuve reposait sur le morphisme

$$\begin{aligned} s_2 \colon \mathcal{A}^2 &\to \mathcal{A} \\ (x,y) &\mapsto x - y\ . \end{aligned}$$

Si $V = z + \mathcal{B}$, l'image de V^2 par ce morphisme est exactement $\mathcal{B}$, qui a même dimension et même degré que V et dont la hauteur est majorée en fonction de celle de $\mathcal{A}$. On montre alors que si (x,y) satisfait les hypothèses du théorème, son image est dans $s_2(V^2)$, ce qui permet de conclure.

Dans le cas général, pour tout entier $m \geqslant 2$, on définit un morphisme

$$\begin{aligned} s_m \colon \mathcal{A}^m &\to \mathcal{A}^{m-1} \\ (x_1,\dots,x_m) &\mapsto (x_1 - x_m, \dots, x_{m-1} - x_m) \end{aligned}$$

et on note $Z = s_m(V^m)$ plongée dans $\mathbf{P}^{n'}$, où $n' = (n+1)^{m-1} - 1$ par un plongement de Segre. Le but de cette section est de contrôler le degré et la hauteur de Z dans ce plongement en fonction du degré et de la hauteur de V.

On commence par représenter localement le morphisme s_m par une famille de formes de degrés et hauteur contrôlés.

Lemme 3.5.1. *Pour tout $x \in V^m$, il existe une famille de $n'+1$ formes multihomogènes de multidegré $(2,\dots,2,2(m-1))$ représentant le morphisme s_m sur un voisinage de x et telle que $|||S|||_{1,v} \leqslant (C'_{\Theta,v})^{m-1}$ en toute place v.*

Démonstration. La section 1.5.4 page 13 fournit, pour chaque $i \in \{1,\dots,m-1\}$ une famille de formes bihomogènes de bidegré $(2,2)$ représentant la soustraction de $\mathcal{A}^2$ dans $\mathcal{A}$ au voisinage de (x_i, x_m), que l'on notera $(L_k^{(i)})_{k\in\{0,\dots,n\}}$, telle que $|||L^{(i)}|||_{1,v} \leqslant C'_{\Theta,v}$. Pour chaque $l \in \{0,\dots,n\}^{m-1}$ on pose

$$S_l(X^{(1)},\dots,X^{(m)}) = \prod_{i=1}^{m-1} L_{l_i}^{(i)}(X^{(i)}, X^{(m)})$$

de sorte que la famille $(S_l)_l$ représente s_m au voisinage de x et que $\deg S_l = (2,\dots,2,2(m-1))$. On a de plus $|||S|||_{1,v} \leqslant (C'_{\Theta,v})^{m-1}$ par les propriétés de la norme L_1. □

On en déduit immédiatement l'action de s_m sur la hauteur des points.

Corollaire 3.5.2. *Pour tout $x \in V^m$, on a*

$$h_2(s_m(x)) \leqslant 4(m-1) \max_{1\leqslant i\leqslant m} \big(h_2(x_i)\big) + (m-1)c'_\Theta\,.$$

Démonstration. Vu le lemme précédent, les propriétés de la norme euclidienne donnent

$$h_2(S(x)) \leqslant h_2(S) + 2h_2(x_1) + \cdots + 2h_2(x_{m-1}) + 2(m-1)h_2(x_m)$$

qui implique le résultat annoncé. □

Ce corollaire sera utile pour estimer la hauteur de Z en passant par le minimum essentiel ; pour l'instant nous devons commencer par estimer le degré.

Lemme 3.5.3. *On a* $\deg Z \leqslant d^m\, 2^{mu}\, m^{(m+1)u-1}$.

Démonstration. On note $u' = \dim Z \leqslant mu$ et on choisit u' hyperplans de $\mathbf{P}^{n'}$ en position générale, qu'on notera $E_1,\dots,E_{u'}$ de sorte que $F = \bigcap_i E_i$ est un ensemble fini de points, de cardinal $\deg Z$. On note donc $F = \{y_1,\dots,y_p\}$ et notre but est de majorer $p = \deg Z$.

Pour chaque $j \in \{1,\dots,p\}$, on choisit un point $x_j \in s_m^{-1}(y_j) \cap V^m$ et une famille de formes $(S_{j,l})_l$ représentant s_m au voisinage de x_j donnée par le lemme 3.5.1. Clairement, on peut choisir des scalaires λ_j tels que si, pour tout l, on pose $S_l = \sum_{j=1}^p \lambda_j S_{j,l}$, alors la famille $S = (S_l)_l$ représente s_m sur un ouvert contenant tous les x_j ; on fixe donc une telle famille S. Maintenant, pour chaque $i \in \{1,\dots,u'\}$, on choisit une équation L_i de E_i, on pose $\tilde{L}_i = L_i(S)$ puis on note $\tilde{E}_i$ l'hypersurface de $(\mathbf{P}^n)^m$ définie par $\tilde{L}_i$.

Par construction, il est clair que pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, la fibre $s_m^{-1}(y_j) \cap V^m$ est une composante isolée de l'intersection $V^m \cap \bigcap_i \tilde{E}_i$: en effet, les fibres sont deux à deux d'intersection vide et les autres composantes éventuelles de l'intersection sont celles provenant du lieu des zéros commun des formes de S, qui ne contient aucune des fibres en question grâce au choix de cette famille.

On introduit alors les notations suivantes (voir p. 364 et p. 362 de [Phi86]), pour tout fermé X de $(\mathbf{P}^n)^m$ et tout multidegré $d_1, \dots, d_m$:

$$SH(X; d_1, \dots, d_m) = \sum_Y H(Y; d_1, \dots, d_m)$$

où la somme est prise sur l'ensemble des composantes de X et

$$H(Y; d_1, \dots, d_m) = \sum_{|\alpha| = \dim Y} \deg_\alpha Y \, \frac{(\dim Y)!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} d_1^{\alpha_1} \cdots d_m^{\alpha_m} \, .$$

On invoque alors la proposition 3.3, p. 365 de la référence citée pour obtenir

$$SH(V^m \cap \bigcap_i \tilde{E}_i \, ; 2, \dots, 2, 2(m-1)) \leqslant SH(V^m; 2, \dots, 2, 2(m-1)) \, .$$

On remarque que le seul multidegré non nul de V^m est celui d'indice $(u, \dots, u)$ et qu'il vaut d^m, de sorte que l'on a

$$SH(V^m; 2, \dots, 2, 2(m-1)) = d^m \frac{(mu)!}{(u!)^m} 2^{mu} (m-1)^u \leqslant d^m (2m)^{mu} (m-1)^{u-1}$$

en majorant le coefficient multinomial qui apparaît dans cette expression par m^{mu-1}. Par ailleurs, on a

$$SH(V^m \cap \bigcap_i \tilde{E}_i \, ; 2, \dots, 2, 2(m-1)) \geqslant \sum_{j=1}^{p} H(s_m^{-1}(y_j) \cap V; 2, \dots, 2, 2(m-1)) \geqslant p \tag{3.18}$$

d'après le paragraphe précédent, ce qui achève la preuve. □

On déduit assez aisément des deux résultats précédents une majoration de la hauteur de Z.

Corollaire 3.5.4. *On a* $h_1(Z) \leqslant \big(2h_1(V)/d + 5\log(n+1) + c'_\Theta\big) d^m (2m)^{(m+1)u+1}$.

Démonstration. Il suffit de savoir majorer le minimum essentiel de Z en fonction de celui de V, en vertu des comparaison suivantes, données par [1] le théorème 3.1 de [DP98] :

$$\mu^{\mathrm{ess}}(Z) \deg Z \leqslant h_{\mathrm{P}}(Z) \leqslant \mu^{\mathrm{ess}}(Z) \deg Z (\dim Z + 1)$$

1. Cette comparaison est originellement donnée par le théorème 5.2 de [Zha95], mais la référence citée ici fournit le résultat avec des notions de hauteurs plus proches de celles que nous utilisons.

où μ^{ess} désigne le minimum essentiel, défini en utilisant la hauteur h_2 pour les points et h_{P} est la hauteur projective.

Soit $\eta > 0$ un réel et notons F l'ensemble des points de $x \in V(\overline{\mathbf{Q}})$ tels que $h_2(x) \leqslant \mu^{\mathrm{ess}}(V) + \eta$; par définition F est dense dans V, donc F^m est dense dans V^m et $s_m(F^m)$ est dense dans Z. On applique alors le corollaire 3.5.2 page 103 pour majorer la hauteur des points de $s_m(F^m)$ par $4(m-1)\big(\mu^{\mathrm{ess}}(V) + \eta\big) + (m-1)c'_\Theta$ et, cette majoration étant valable quel pour tout $\eta > 0$, on a

$$\mu^{\mathrm{ess}}(Z) \leqslant 4(m-1)\mu^{\mathrm{ess}}(V) + (m-1)c'_\Theta \,.$$

Il est alors aisé de passer aux hauteurs projectives grâce à l'encadrement rappelé ci-dessus ; on passe de plus aux hauteurs h_1 en utilisant (1.6) :

$$\begin{aligned}
h_1(Z) &\leqslant h_{\mathrm{P}}(Z) + (\dim Z + 1)(\deg Z)\log(n'+1) \\
&\leqslant \Big(\mu^{\mathrm{ess}}(Z) + (m-1)\log(n+1)\Big)(\dim Z + 1)\deg Z \\
&\leqslant \Big(4\mu^{\mathrm{ess}}(V) + c'_\Theta + \log(n+1)\Big)(m-1)(um+1)\deg Z \\
&\leqslant \Big(\frac{4}{d}h_{\mathrm{P}}(V) + \log(n+1) + c'_\Theta\Big)um^2 \deg Z \\
&\leqslant \Big(\frac{4}{d}h_1(V) + 4(u+1)\log(n+1) + \log(n+1) + c'_\Theta\Big)um^2 \deg Z \\
&\leqslant \Big(\frac{2}{d}h_1(V) + 4\log(n+1) + \frac{1}{2}\log(n+1) + \frac{1}{2}c'_\Theta\Big)u(u+1)m^2 \deg Z \,.
\end{aligned}$$

La majoration annoncée s'en déduit en utilisant le lemme 3.5.3 page 103 et en remarquant que $u(u+1) \leqslant 2^{u+1}$. □

Nous avons maintenant tous les ingrédients utiles pour continuer la preuve de l'inégalité de Mumford. Néanmoins, nous concluons cette section par une étude des fibres de s_m, qui pourrait être utile pour discuter d'améliorations éventuelles de l'inégalité de Mumford.

Lemme 3.5.5. *Pour tous $m \geqslant 2$ et $x \in V^m$, on a*

$$s_m^{-1}(s_m(x)) \cap V^m = x + \delta\Big(\bigcap_{i=1}^{m}(V - x_i)\Big)$$

où $\delta\colon V \to V^m$ est le plongement diagonal.

Démonstration. Soit $y \in s_m^{-1}(s_m(x))$, on a $y_m - x_m = y_i - x_i$ pour tout i donc $y = x + \delta(y_m - x_m)$. Si de plus $y \in V^m$ on a $y_m - x_m \in \bigcap_{i=1}^m (V - x_i)$. Réciproquement, si $z \in \bigcap_{i=1}^m (V - x_i)$, il est clair que $x + \delta(z)$ appartient à V^m et a la même image que x par s_m. □

Notons S_V le stabilisateur de V, qui peut être défini (ensemblistement) par

$$S_V = \bigcap_{x \in V(\overline{\mathbf{Q}})} (V - x) \ .$$

Ainsi, il est clair que chaque fibre contient un ensemble algébrique isomorphe à S_V ; le lemme suivant montre que l'égalité est atteinte pour certains points dès que m est assez grand.

Lemme 3.5.6. *Posons $M = 2d^{u+1} - d$; pour tout $m \geqslant M$ il existe $(x_1, \ldots, x_m) \in V^m(\overline{\mathbf{Q}})$ tel que $S_V = \bigcap_{i=1}^m (V - x_i)$.*

Démonstration. En partant d'un $V - x_1$ pour x_1 quelconque, on va couper successivement par des $V - x_i$ choisis de sorte à faire chuter à chaque fois la dimension d'au moins une des composantes de dimension maximale de l'intersection partielle qui n'est pas une composante de S_V. Clairement, ce processus se termine et l'intersection obtenue est S_V.

Plus précisément, on note $X_j = \bigcap_{i=1}^{j+1} (V - x_i)$ le fermé de Zarisiki obtenu après j intersections. Pour nous aider à compter les composantes à chaque étape, on introduit la quantité définie pour tout fermé X et tout entier D par :

$$SH(X, D) = \sum_Y \deg Y \, D^{\dim Y}$$

où la somme est prise sur l'ensemble des composantes de X. Cette définition coïncide avec celle donnée p. 364 de [Phi86] et rappelée dans la démonstration du lemme 3.5.3 page 103 ; on est ici dans le cas homogène c'est-à-dire $p = 1$ dans les notations de la référence citée.

Il est clair que $SH(X_1, d) = SH(V, d) = d^{u+1}$. Par ailleurs, comme chaque X_j peut être défini (ensemblistement) par des équations de degré au plus d, on peut appliquer à ces équations la proposition 3.3 de la référence citée, ce qui garantit que $SH(X_{j+1}, d) \leqslant SH(X_j, d)$ et donne immédiatement par récurrence $SH(X_j, d) \leqslant d^{u+1}$ pour tout j.

Par définition de SH, cette inégalité montre que pour tout k, le nombre de composantes de X_j de dimension $u - k$ est au plus d^{k+1}. On peut être un peu plus précis pour X_1 et voir que toutes ses composantes sont de dimension au plus $u - 1$ car $V - x_1$ n'a qu'une composante. Ainsi, en choisissant successivement les x_i de façon à ce que $V - x_{j+2}$ coupe strictement une des composantes de X_j de dimension maximale parmi celles qui ne sont pas composantes de S_V, on voit qu'il existe un $j_1 \leqslant 1 + d^2$ tel que X_{j_1} n'ait plus de composante de dimension $u - 1$ à part peut-être celles de S_V, et en continuant jusqu'à avoir éliminé les composantes indésirables de dimension 0, qu'il existe un $j_u \leqslant 1 + d^2 + d^3 + \cdots + d^{u+1}$ tel que X_{j_u} n'ait plus aucune composante autre que celles de S_V, c'est-à-dire tel que $X_{j_u} = S_V$.

Le nombre de points utilisés est alors

$$j_u + 1 \leqslant 2 + d^2 \sum_{l=0}^{u-1} d^l = 2 + \frac{d}{d-1}(d^{u+1} - d) \leqslant 2 + 2(d^{u+1} - d) \ ,$$

en utilisant le fait que $d \geqslant 2$.

Par ailleurs, on constate qu'une fois qu'on a choisi $x_1, \ldots, x_{j_u+1}$ tels que $X_{j_u} = S_V$, on peut rajouter des x_i arbitraires pour $i > j_u + 1$ et on conserve l'égalité $S_V = \bigcap_i (V - x_i)$. □

On suppose désormais $m \geqslant 2d^{u+1} - d$ jusqu'à la fin de cette section. On peut voir qu'il existe un ouvert dense de V^m où $(x_1, \ldots, x_m)$ « définissent le stabilisateur » au sens ci-dessus, car la condition correspondante est ouverte et le lemme précédent affirme que l'ouvert n'est pas vide. On en déduit immédiatement que les fibres de $s_{m|V}$ sont génériquement des translatés de $\delta(S_V)$; en particulier $\dim s_m(V^m) = mu - \dim S_V$.

On peut alors préciser l'estimation du degré de l'image :

$$\deg Z \leqslant \frac{d^m}{\deg S_V} 2^{mu - 2\dim S_V} m^{(m+1)u - 1 - \dim S_V}$$

En effet, on peut s'arranger pour que les $s_m^{-1}(y_j) \cap V$ apparaissant dans (3.18) soient tous des translatés de $\delta(S_V)$ et on voit assez facilement que tous les multidegrés de $\delta(S_V)$ sont égaux à $\deg S_V$, ce qui donne

$$\begin{aligned} H(\delta(S_V); 2, \ldots, 2, 2(m-1)) &= \sum_{|\alpha| = \dim S_V} \deg S_V \frac{(\dim S_V)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} 2^{\dim S_V} (m-1)^{\alpha_m} \\ &= \deg S_V 2^{2\dim S_V} (m-1)^{\dim S_V} \end{aligned}$$

d'après la formule multinomiale.

Remarquons que les estimations ci-dessus peuvent être obtenues sous une hypothèse plus faible : en utilisant un argument analogue à la démonstration de la proposition 3.3 de [Rémooa], on peut montrer que la composante neutre de S_V est la seule composante contenant 0 de $\cap_{i=1}^m (V - x_i)$ sur un ouvert dense de V^m dès que $m \geqslant u$. L'hypothèse plus forte du lemme précédent donne par contre un renseignement plus précis sur les fibres.

En revanche, notons que, même en prenant m extrêmement grand, il y aura toujours des fibres de dimension plus grande que le stabilisateur : par exemple, il est clair que $s_m^{-1}(0) = \delta(V)$. Un autre exemple est celui où V contient la somme de deux courbes (non elliptiques) C_1 et C_2 : alors, pour tous $x \in C_1$ et $y \in C_2^m$, on a $s_m^{-1}(s_m(\delta(x) + y)) \cap V^m \supset \delta(C_1) + y$, qui en général peut être de dimension plus grande que le stabilisateur.

3.6 Cas général

Dans toute cette section, on fixe $m \geqslant 2$ et une famille $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})^m$ (et non pas V^m) et on note $z = s_m(x)$. On suppose de plus $u \geqslant 1$ car sinon le théorème 3.1.2 page 95 est une conséquence directe du théorème 3.1.1 page 95. Les trois premiers énoncés sont des conséquences ou analogues directs de ceux de la section 3.4 page 100.

Lemme 3.6.1. *Sous les hypothèses* (3.9) *et* (3.10) *du théorème 3.1.2 page 95, on a*

$$h_2(z) \leqslant (m-1)(\rho^2/4 + 2\phi + \rho\phi)\hat{h}(x_m) + (m-1)\hat{c}_\Theta \,.$$

Démonstration. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, on utilise le lemme 3.4.2 page 101 avec $x = x_m$ et $y = x_i$, ce qui montre que $h_2(z_i) \leqslant (\rho^2/4 + 2\phi + \rho\phi)\hat{h}(x_m) + \hat{c}_\Theta$. On remarque ensuite que $h_2(z) = \sum_{i=1}^{m-1} h_2(z_i)$ pour aboutir au résultat annoncé. □

Lemme 3.6.2. *Si x satisfait l'hypothèse* (3.7) *et la première inégalité de l'hypothèse* (3.10) *du théorème 3.1.2 page 95, on a*

$$\prod_{v \in \mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(z, Z)^{\Delta_v} \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon\hat{h}(x_m)} \cdot \mathrm{e}^{\varepsilon\hat{c}_\Theta} (C'_\Theta)^2 \cdot 5\sqrt{2m-2}\,(n+1)^5$$

Démonstration. C'est une variante du lemme 3.4.1 page 100 ; la démonstration est identique sauf pour l'étape finale. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, m\}$ et chaque $v \in \mathcal{S}$, la définition de la distance permet de choisir un point $y_{i,v} \in V(\mathbf{C}_v)$ tel que

$$\mathrm{dist}_v(x_i, y_{i,v}) = \mathrm{dist}_v(x_i, V) \leqslant \exp(-\lambda_v \varepsilon \hat{h}(x_m) + \lambda_v \varepsilon \hat{c}_\Theta)$$

où l'inégalité découle directement des hypothèses et d'une comparaison entre hauteurs. La proposition 3.3.1 page 98 donne alors

$$\max_i \mathrm{dist}_v(x_i - x_m, y_{i,v} - y_{m,v}) \leqslant \exp(-\lambda_v \varepsilon \hat{h}(x_m) + \lambda_v \varepsilon \hat{c}_\Theta) \cdot (C'_{\Theta,v})^2 \big(5\sqrt{2}(n+1)^5\big)^{\delta_v} \,.$$

Or, d'après le lemme 4.3, p. 121 de [Rémo1a] (interprété à la lumière des remarques p. 102 de la même référence concernant le lien entre indices d'une distance et plongement de Segre), en notant $y_v = (y_{1,v}, \ldots, y_{m,v}) \in V^m(\mathbf{C}_v)$, on a

$$\mathrm{dist}_v(s_m(x), s_m(y_v)) \leqslant (m-1)^{\delta_v/2} \max_i \mathrm{dist}_v(x_i - x_m, y_{i,v} - y_{m,v}) \,.$$

Or, par définition, le membre de gauche majore $\mathrm{dist}_v(z, Z)$. On prend le produit sur v pour conclure. □

Lemme 3.6.3. *Sous les hypothèses du théorème 3.1.2 page 95 (sauf $x_i \in \Gamma$, et en remplaçant la définition de m par l'hypothèse plus faible $m \geqslant g$), on a $z \in Z$.*

Démonstration. Avant de commencer, remarquons qu'on peut supposer $\varepsilon < d + 1$. En effet, dans le cas contraire, le corollaire 3.2.3 page 97 s'applique car (3.7) implique directement (3.11) et (3.8) implique très largement (3.12), donc il n'existe aucune famille satisfaisant aux hypothèses du théorème.

On procède comme en page 101 pour la preuve du théorème 3.1.1. Si $z \notin Z$, l'inégalité de Liouville (proposition 3.2.1 page 96) appliquée à z et Z donne, en prenant les logarithmes :

$$\begin{aligned}\sum_{v\in\mathcal{S}} \Delta_v \log \operatorname{dist}_v(z, Z) \geqslant -(\deg Z)h_2(z) - h_1(Z) \\ - \frac{3}{2}\log(n'+1) - (\dim Z + 1)(\deg Z)\log(3\deg Z)\ .\end{aligned} \tag{3.19}$$

On va maintenant estimer une par une les quantités apparaissant dans le membre de droite. Le lemme 3.5.3 page 103 donne

$$\begin{aligned}(\dim Z + 1)\log(3\deg Z) &\leqslant (mu+1)\big(m\log d + mu\log 2 + (m+1)u\log m + \log 3\big)\\ &\leqslant u^2(m+1)\big(m\log 2 + (m+1)\log m + \log 3\big)\\ &\quad + m^2(u+1)\log d\\ &\leqslant 2^{u+2}m^3 + 2^u m^2 \log d\ ,\end{aligned}$$

où la dernière ligne utilise le fait que $u^2 \leqslant 2^{u+1}$ et que la partie en m est majorée par $2m^3$ (vérification numérique pour les petites valeurs). Au final on a

$$\begin{aligned}(\dim Z + 1)(\deg Z)\log(3\deg Z) &\leqslant d^m 2^{mu} m^{(m+1)u-1}\cdot\big(2^{u+2}m^3 + 2^u m^2\log d\big)\\ &\leqslant d^m(2m)^{(m+1)u+2}(1 + (\log d)/8)\\ &\leqslant d^m(2m)^{(m+1)u+2}\cdot 2\log d\ .\end{aligned} \tag{3.20}$$

Par ailleurs, le lemme 3.6.1 page ci-contre et l'hypothèse (3.6) donnent

$$\begin{aligned}(\deg Z)h_2(z) &\leqslant d^m\, 2^{mu}\, m^{(m+1)u-1}\left(\frac{\varepsilon}{d^m(2m)^{(m+1)u}}(m-1)\hat{h}(x_m) + (m-1)\hat{c}_\Theta\right)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\hat{h}(x_m) + d^m(2m)^{(m+1)u}\hat{c}_\Theta\ .\end{aligned}$$

On peut maintenant substituer cette estimation ainsi que (3.20) et le résultat du corollaire 3.5.4 page 104 dans l'inégalité de Liouville écrite en (3.19), puis simplifier l'expression notamment en remarquant que, vu l'hypothèse sur le plongement,

on a $n+1 = 16^g$:

$$\begin{aligned}\sum_{v\in\mathcal{S}} \Delta_v \log \mathrm{dist}_v(z,Z) &\geqslant -\frac{\varepsilon}{2}\hat{h}(x_m) - d^m(2m)^{(m+1)u}\hat{c}_\Theta \\ &\quad - \big(2h_1(V)/d + 5\log(n+1) + c'_\Theta\big)d^m(2m)^{(m+1)u+1} \\ &\quad - 2(m-1)\log(n+1) - d^m(2m)^{(m+1)u+2}\cdot 2\log d \\ &\geqslant -\frac{\varepsilon}{2}\hat{h}(x_m) - 4d^{m-1}(2m)^{(m+1)u+1}\,h_1(V) \\ &\quad - d^m(2m)^{(m+1)u+2}\big(2\log d + c'_\Theta + \hat{c}_\Theta\big)\ .\end{aligned}$$

Dans l'autre sens, le lemme 3.6.2 page 108 dit que

$$\sum_{v\in\mathcal{S}} \Delta_v \log \mathrm{dist}_v(z,Z) \leqslant -\varepsilon\hat{h}(x_m) + 2c'_\Theta + 2d\hat{c}_\Theta + \log 5 + \frac{1}{2}\log(2m-2) + 5g\log(16)$$

vu l'hypothèse sur ε. En confrontant ces deux inégalités, il vient

$$\frac{\varepsilon}{2}\hat{h}(x_m) \leqslant 2d^{m-1}(2m)^{(m+1)u+1}\,h_1(V) + 4d^m(2m)^{(m+1)u+2}\big(\log d + c'_\Theta + \hat{c}_\Theta\big)$$

qui contredit précisément (3.8), achevant ainsi la preuve. □

On rappelle la version quantitative de l'ex-conjecture de Mordell-Lang obtenue par Rémond.

Fait 3.6.4. *On suppose $\mathcal{A}$ plongée dans $\mathbf{P}^n$ par un plongement de* Mumford *modifié associé à une polarisation principale. Soient $V \subset \mathcal{A}$ une sous-variété, $\Gamma \subset \mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ un sous-groupe de rang fini r et $\boldsymbol{k}$ un corps de définition de $\mathcal{A}$. Alors il existe un entier naturel*

$$S \leqslant \big(2^{34}\,h^0_{\mathcal{A}}\,d\big)^{(r+1)g^{5(u+1)^2}}\ ,$$

des points $x_1,\dots,x_S$ de $V(\overline{\mathbf{Q}})\cap\Gamma$ et des sous-variétés abéliennes $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_s$ de $\mathcal{A}$ telles que $x_i + \mathcal{B}_i \subset V$ pour tout $i \in \{1,\dots,S\}$ et

$$V(\overline{\mathbf{Q}})\cap\Gamma = \bigcup_{i=1}^{S}(x_i+\mathcal{B}_i)(\overline{\mathbf{Q}})\cap\Gamma\ .$$

Démonstration. C'est une version du théorème de 2.1, p. 517 de [Rémoo a] où la fonction notée f dans ledit énoncé est explicitée, citée dans [DP02] p. 643. Par ailleurs, la quantité notée $h_0(\mathcal{A})$ dans cette dernière référence est celle que nous notons $h^0_{\mathcal{A}}$, voir (1.12). □

Nous sommes maintenant prêts à conclure.

Démonstration du théorème 3.1.2 page 95. Soit $x = (x_1, \ldots, x_m)$ une famille de points comme dans l'énoncé. D'après le lemme précédent, il existe un point $y \in V^m(\overline{\mathbf{Q}})$ tel que $s_m(x) = s_m(y)$, c'est-à-dire $x_i - x_m = y_i - y_m$ pour tout i. En particulier, pour tout i on a

$$y_i - y_m \in (V - y_m)(\overline{\mathbf{Q}}) \cap \Gamma = \bigcup_{k=1}^{S} (z_k + \mathcal{B}_k)(\overline{\mathbf{Q}}) \cap \Gamma$$

où l'égalité de droite découle du fait précédent appliqué à $V - y_m$, avec $z_k \in V - y_m$ et $z_k + \mathcal{B}_k \subset V - y_m$, où $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{A}$ est une sous-variété abélienne, pour tout k, et $S < m$.

Ainsi, il existe un indice $k \in \{1, \ldots, S\}$ et deux indices distincts i et j tels que $y_i - y_m \in z_k + \mathcal{B}_k$ et $y_j - y_m \in z_k + \mathcal{B}_k$. Par différence, on a alors

$$y_i - y_j = x_i - x_j \in \mathcal{B}_k$$

et $z_k + y_m + \mathcal{B}_k \subset V$, ce qui achève la preuve. □

3.7 Questions d'optimalité et énoncé conjectural

Comme on l'a vu, la conclusion du théorème 3.1.1 page 95 n'est pas celle qu'on attend naturellement, à savoir $x = y$. La section 4.1 page 113 montrera que la conclusion obtenue est probablement ce qu'on peut espérer de mieux à l'heure actuelle. En effet, si dans cet énoncé on pouvait remplacer la conclusion par $x = y$, alors en suivant la méthode de la section 4.3 page 120 on aboutirait à un décompte explicite des points de hauteur assez grande. Or, le corollaire 4.1.4 page 116 et la discussion qui suit montrent que ceci équivaudrait à une borne explicite sur la hauteur des approximations exceptionnelles, résultat qui ne semble pas vraiment accessible dans l'immédiat.

En revanche, dans le cas général, il ne semble *a priori* pas exclu dans un futur proche d'améliorer le théorème 3.1.2 page 95 de la façon suivante.

Conjecture 3.7.1. *Soient V une sous-variété d'une variété abélienne $\mathcal{A}$ et $\Gamma \subset \mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ un sous-groupe de rang fini. On fixe $\varepsilon > 0$; il existe alors un entier m et des constantes ρ, ϕ et R telles que si $x_1, \ldots, x_m$ est une famille de points de Γ telle que, pour tous i et j entre 1 et m :*

$$\begin{aligned} 0 < \mathrm{dist}_v(x_i, V) &\leqslant H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S} \\ \hat{h}(x_m) &\geqslant R \\ \cos(x_i, x_j) &\geqslant 1 - \phi \\ \hat{h}(x_m) \leqslant \hat{h}(x_i) &\leqslant (1 + \rho)\hat{h}(x_m) \end{aligned}$$

alors il existe deux indices distincts i et j ainsi qu'une sous-variété abélienne $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ tels que $x_i - x_j \in \mathcal{B}$ et

$$\prod_{v \in \mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(x, (V : \mathcal{B}))^{\Delta_v} \leqslant H_2(x)^{-\varepsilon/2}$$

où $(V : \mathcal{B})$ désigne l'union des translatés de $\mathcal{B}$ inclus dans V.

Autrement dit, dans les notations de la section 4.1 page suivante, la conclusion serait que l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_m\}$ satisfait $\overline{C}_1(\tau, \varepsilon/2)$ pour $\tau = \rho^2/4 + \rho\phi + 2\phi$ (lemme 3.4.2 page 101), plutôt que $\overline{C}(\tau)$ pour le théorème que nous démontrons. On renvoie à la section citée pour plus de détails sur les notations et pourquoi il semblerait ambitieux dans un futur proche de démontrer mieux que l'énoncé conjecturé ci-dessus (avec des constantes explicites).

4 Résultats de décompte

Nous déduisons ici des deux chapitres précédents des décomptes d'approximations exceptionnelles. Plus précisément, on donne un décompte des points de hauteur assez grande (au sens de (2.2) et (3.3) ou (3.8)), que nous appellerons grands points, en combinant l'inégalité de Vojta à chacune des deux inégalités de Mumford obtenues précédemment.

Auparavant, on introduit des conditions sur les ensembles d'approximations exceptionnelles considérés et on discute de leur caractère nécessaire. On introduit également un résultat permettant de passer d'une condition d'approximation avec un système d'inégalités à la forme plus naturelle d'un produit sur les places. Enfin, on conclut ce chapitre par l'évocation de deux méthodes de traitement des petits points : un décompte trivial, et une façon de les éliminer.

4.1 Conditions pour les décomptes

La définition 1.3.1 page 6 présente la condition qui sera utilisée pour dénombrer les ensembles d'approximations exceptionnelles. On discute ici du phénomène qui rend ce type de condition nécessaire, et on présente une autre condition, plus faible en général, qui devrait être suffisante pour l'éviter.

Dans cette section, on suppose fixés une sous-variété $V \subset \mathcal{A}$, un réel ε et un sous-groupe $\Gamma \subset \mathcal{A}$ de rang fini r. On considère de plus un sous-ensemble F de $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ et un réel $\tau \geqslant 0$.

Donnons alors une reformulation des inégalités de Mumford du chapitre précédent. On appelle *lunule* associée aux paramètres (ρ, ϕ, β) un sous-ensemble de $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ dans lequel deux points quelconques x et y satisfont les conditions suivantes :

$$\cos(x, y) \geqslant 1 - \phi \qquad |\hat{h}(x) - \hat{h}(y)| \leqslant \rho \hat{h}(x) \qquad \hat{h}(x) \geqslant \beta \ .$$

Le théorème 3.1.1 page 95 dit alors que si F satisfait $C(\varepsilon/2d)$, son intersection avec chaque lunule (de paramètres donnés par l'énoncé) contient au plus une approximation exceptionnelle : en effet, on a vu au cours de la démonstration du lemme 3.4.2 page 101 que si x et y sont dans une même lunule, alors $\hat{h}(x - y) \leqslant (\rho^2/4 + 2\phi + \rho\phi)\hat{h}(x)$ et l'hypothèse (3.1) permet de conclure.

De même, le théorème 3.1.2 page 95 affirme que si F est un ensemble d'approximations exceptionnelles inclus dans Γ et satisfaisant $C(\varepsilon/d^m(2m)^{(m+1)u})$, alors son

intersection avec une lunule associée aux paramètres donnés contient au plus $m-1$ approximations exceptionnelles, dans les notations de cet énoncé.

Plus précisément, on remarque que la condition $\overline{C}(\tau)$ est d'autant plus forte que τ est petit, autrement dit, plus τ est petit, moins la condition $C(\tau)$ est restrictive. On remarque que les inégalités de Mumford du chapitre précédent disent en fait que l'ensemble de points considéré satisfait $\overline{C}(\tau)$ avec $\tau = \rho^2/4 + 2\phi + \rho\phi$, quantité qui peut être rendue arbitrairement petite à condition de réduire la taille des lunules considérées.

Ainsi, dans les résultats de décompte des sections suivantes, on pourrait faire une hypothèse plus faible sur l'ensemble d'approximations considérées, au prix d'un décompte moins précis. Néanmoins, on formulera les résultats avec la valeur « naturelle » de τ pour éviter d'alourdir le texte.

Pour introduire l'autre condition que nous proposons, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 4.1.1. Si $\mathcal{B}$ est un sous-variété abélienne de $\mathcal{A}$, on note $(V\colon \mathcal{B})$ l'union des translatés de $\mathcal{B}$ inclus dans V. On dit alors que $\mathcal{B}$ est *ε-associée* à x si

$$\prod_{v\in\mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(x,(V\colon \mathcal{B}))^{\Delta_v} \leqslant H_2(x)^{-\varepsilon}\,.$$

Toute approximation ε-exceptionnelle admet au moins une variété ε-associée : la composante neutre du stabilisateur de V. Par ailleurs, si l'on note Z_V l'union des translatés de sous-variétés abéliennes non nulles inclus dans V, il est clair que tout point possédant une variété ε-associée non nulle est une approximation ε-exceptionnelle de Z_V (la réciproque est en revanche fausse). Enfin, remarquons que dans les énoncés suivants, lorsqu'on considère une variété ε-associée à un point, on a en général intérêt à la choisir maximale.

Définition 4.1.2. On dit que F satisfait $\overline{C}_1(\tau,\varepsilon)$ s'il existe deux points distincts x et y dans F et $\mathcal{B}$ une sous-variété abélienne ε-associée à x tels que $x-y\in\mathcal{B}$ et $\hat{h}(x-y)\leqslant\tau\hat{h}(x)$.

On dit que F satisfait la condition $C_1(\tau,\varepsilon)$ si F ne satisfait pas $\overline{C}_1(\tau,\varepsilon)$.

Il est clair qu'en général $\overline{C}_1(\tau,\varepsilon)$ est une condition plus forte que $\overline{C}(\tau)$, autrement dit que $C_1(\tau,\varepsilon)$ est une condition plus faible que $C(\tau)$. Notons

$$\mathcal{E}(V,\varepsilon) = \{x\in\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}}) \text{ tel que } 0<\prod_{v\in\mathcal{S}}\mathrm{dist}_v(x,V)^{\Delta_v}\leqslant H_2(x)^{-\varepsilon}\}$$

et $\mathcal{E}'(V,\varepsilon)=\mathcal{E}(V,\varepsilon)\cup V(\overline{\mathbf{Q}})$. On remarque que, dans le cas particulier où F est un sous-ensemble de $\mathcal{E}'(V,\varepsilon)$ et V est un translaté de sous-variété abélienne, les conditions $C_1(\tau,\varepsilon)$ et $C(\tau)$ sont équivalentes pour F. Évidemment, si $Z_V=\emptyset$ (ce qui est le cas pour tout $V\neq\mathcal{A}$ si $\mathcal{A}$ est simple), tout ensemble F satisfait $C_1(\tau,\varepsilon)$ (et $C(\tau)$).

Nous allons maintenant essayer de convaincre le lecteur qu'on ne peut guère espérer majorer le cardinal des ensembles $\mathcal{E}(V,\varepsilon)\cap\Gamma$ sous une condition plus faible que $C_1(\tau,\varepsilon)$ à moins de savoir majorer la hauteur de certaines (voire toutes les) approximations exceptionnelles. Par ailleurs, on supposera $\varepsilon\leqslant 1$ et $\tau\leqslant 1$ pour simplifier certaines estimations.

Lemme 4.1.3. *Soient $x\in\mathcal{E}'(V,\varepsilon)$, $\mathcal{B}$ une sous-variété abélienne ε-associée à x, et $y\in\mathcal{B}(\overline{\mathbf{Q}})$ tels que*

$$\begin{aligned}\hat{h}(x) &> \frac{2}{\varepsilon\sqrt{\tau}}\big(2c_\Theta+7\log(n+1)\big)+\frac{11}{\sqrt{\tau}}\hat{c}_\Theta \\ \hat{h}(y) &\leqslant \tau\hat{h}(x)\ .\end{aligned} \tag{4.1}$$

Alors $x+y\in\mathcal{E}'(V,\varepsilon')$ avec $\varepsilon'=\varepsilon(1+2\sqrt{\tau})^{-2}$.

Démonstration. Soit $\eta>0$ un réel ; pour chaque $v\in\mathcal{S}$, il existe un point $p_v\in(V\colon\mathcal{B})(\mathbf{C}_v)$ tel que $\mathrm{dist}_v(x,p_v)=\mathrm{dist}_v(x,(V\colon\mathcal{B}))+\eta$. Le scolie 3.3.2 page 100 donne alors (en remarquant que $5\sqrt{2}\leqslant(n+1)^2$) :

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_v(x+y,p_v+y) &\leqslant \mathrm{dist}_v(x,p_v)\cdot C_{\Theta,v}^2(n+1)^{7\delta_v} \\ &\leqslant \big(\mathrm{dist}_v(x,(V\colon\mathcal{B}))+\eta\big)\cdot C_{\Theta,v}^2(n+1)^{7\delta_v}\ .\end{aligned}$$

Cette inégalité étant valable pour tout $\eta>0$, elle l'est aussi avec $\eta=0$. En remarquant alors que $p_v+y\in(V\colon\mathcal{B})\subset V$, puis en prenant le produit sur les places, il vient

$$\begin{aligned}\prod_{v\in\mathcal{S}}\mathrm{dist}_v(x+y,V)^{\Delta_v} &\leqslant \prod_{v\in\mathcal{S}}\mathrm{dist}_v(x,(V\colon\mathcal{B}))^{\Delta_v}\cdot C_{\Theta,v}^{2\Delta_v}(n+1)^{7\delta_v\Delta_v} \\ &\leqslant H_2(x)^{-\varepsilon}\cdot C_\Theta^2(n+1)^7\ .\end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer que cette dernière quantité est majorée par $H_2(x+y)^{-\varepsilon'}$.

Si l'on note $|\cdot|$ la norme de l'espace de Mordell-Weil, on a $|x+y|\leqslant|x|+|y|\leqslant(1+\sqrt{\tau})|x|$ vu l'hypothèse sur $\hat{h}(y)$. On en déduit alors

$$h_2(x+y)\leqslant\hat{h}(x+y)+\hat{c}_\Theta\leqslant(1+\sqrt{\tau})^2\hat{h}(x)+\hat{c}_\Theta\leqslant(1+\sqrt{\tau})^2h_2(x)+5\hat{c}_\Theta$$

puis

$$\begin{aligned}-\varepsilon\frac{(1+\sqrt{\tau})^2}{(1+2\sqrt{\tau})^2}h_2(x) &\leqslant -\varepsilon' h_2(x+y)+5\varepsilon'\hat{c}_\Theta \\ -\varepsilon h_2(x) &\leqslant -\varepsilon' h_2(x+y)+5\varepsilon'\hat{c}_\Theta-\varepsilon\left(1-\frac{(1+\sqrt{\tau})^2}{(1+2\sqrt{\tau})^2}\right)h_2(x)\ .\end{aligned}$$

On observe alors que, pour tout $0<t\leqslant 1$, on a

$$1-\frac{(1+t)^2}{(1+2t)^2}=t\,\frac{2+3t}{(1+2t)^2}\geqslant\frac{5}{9}t$$

où l'inégalité vient en remarquant que la fraction du milieu est décroissante en t. Au final,

$$-\varepsilon h_2(x) \leqslant -\varepsilon' h_2(x+y) + 5\varepsilon\hat{c}_\Theta - \frac{\varepsilon\sqrt{\tau}}{2} h_2(x)$$

et l'hypothèse sur $\hat{h}(x)$ permet alors de conclure. □

Ainsi, on peut construire de nouvelles approximations exceptionnelles à partir d'une approximation exceptionnelle ayant une variété ε-associée non nulle et de points de cette variété. Le corollaire suivant donne une précision quantitative.

Corollaire 4.1.4. *Soient $x \in \mathcal{E}'(V,\varepsilon) \cap \Gamma$ satisfaisant (4.1), ε' comme au lemme précédent et $\mathcal{B}$ une variété ε-associée à x. De plus, on note $\hat{h}_{\inf}(\mathcal{B} \cap \Gamma)$ l'infemum de $\hat{h}(y)$ lorsque y parcourt l'ensemble des points d'ordre infini de $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{Q}}) \cap \Gamma$, ou $+\infty$ si cet ensemble est vide.*

Alors l'ensemble $\mathcal{E}'(V,\varepsilon') \cap \Gamma$ contient au moins

$$\operatorname{Card}\big(\mathcal{B}(\overline{\mathbf{Q}})_{\mathrm{tor}} \cap \Gamma\big) \left(2\left\lfloor \sqrt{\tau\hat{h}(x)/\hat{h}_{\inf}(\mathcal{B}\cap\Gamma)} \right\rfloor + 1\right)$$

points de hauteur normalisée supérieure ou égale à $(1-\sqrt{\tau})^2\,\hat{h}(x)$ (avec les conventions $(+\infty)^{-1} = 0$ et $0^{-1} = +\infty$). En particulier, cet ensemble contient une infinité de grands points (au sens précédent) dès que $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{Q}}) \cap \Gamma$ n'est pas de type fini.

Démonstration. D'après le lemme précédent, la translation par x est une application de

$$\{y \in \mathcal{B}(\overline{\mathbf{Q}}) \text{ tel que } \hat{h}(y) \leqslant \tau\hat{h}(x)\} \cap \Gamma$$

vers $\mathcal{E}'(V,\varepsilon') \cap \Gamma$, qui est évidemment injective. Il s'agit donc de minorer le cardinal de cet ensemble. Clairement, il contient tous les points de torsion, ce qui donne la conclusion annoncée dans le cas où $\hat{h}_{\min}(\mathcal{B}\cap\Gamma) = +\infty$.

Par ailleurs, si z est un point d'ordre infini de $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{Q}}) \cap \Gamma$, que t est un point de torsion de ce même ensemble et m un entier relatif, alors $mz + t$ est dans l'ensemble de départ tant que m^2 est inférieur à $\tau\hat{h}(x)/\hat{h}(z)$. □

Remarquons qu'en général, les nouvelles approximations construites sont dans $\mathcal{E}'(V,\varepsilon')$, mais pas forcément dans $\mathcal{E}(V,\varepsilon')$. On ne voit pas en général comment prouver que ces approximations ne tombent pas sur V (et à l'inverse, on imagine mal comment prouver qu'elles y sont toutes sauf un nombre contrôlé d'exceptions). Cependant, dans certains cas la situation est plus claire.

Scolie 4.1.5. *Si $\mathcal{B}$ est une sous-variété abélienne de $\mathcal{A}$ telle que $V = (V\colon \mathcal{B})$, alors dans le corollaire précédent, si l'on remplace $\mathcal{E}'(V,\varepsilon)$ par $\mathcal{E}(V,\varepsilon)$ dans l'hypothèse (où il devient inutile de supposer de plus que $\mathcal{B}$ est ε-associée à x car c'est nécessairement le cas), on peut également remplacer $\mathcal{E}'(V,\varepsilon')$ par $\mathcal{E}(V,\varepsilon')$ dans la conclusion.*

Démonstration. Dans ce cas, V est stable par translation par les éléments de $\mathcal{B}$, donc $\mathcal{A} \setminus V$ l'est aussi, or $\mathcal{E}(V,\varepsilon) = \mathcal{E}'(V,\varepsilon) \setminus V$. □

On est donc face à un phénomène de multiplication des approximations exceptionnelles, quitte à changer un peu l'exposant, phénomène présent au moins dans le cas $V = (V\colon \mathcal{B})$ et dont on voit mal pourquoi il disparaîtrait totalement dans le cas général. En quelque sorte, les approximations exceptionnelles arrivent par « grappes » : pour chaque approximation exceptionnelle d'exposant légèrement meilleur que celui exigé, de hauteur assez grande et possédant une variété associée non nulle, on a une grappe d'approximations exceptionnelles, dont le cardinal dépend de la hauteur (et de la qualité) de la première.

Ainsi, le seul moyen de contrôler le cardinal de l'ensemble des approximations exceptionnelles est de borner la hauteur de celles qui ont une variété associée non nulle ; dans le cas particulier où V est un translaté de sous-variété abélienne de dimension positive, il s'agirait donc de majorer la hauteur de toutes les approximations.

Ce type de résultat (borne explicite sur la hauteur) étant un peu trop ambitieux à l'heure actuelle, il faut donc se résoudre à compter non pas toutes les approximations exceptionnelles, mais seulement les grappes, sans tenir compte du cardinal de ces grappes, trop directement relié à la hauteur. Une condition du type $C_1(\tau, \varepsilon)$ semble la plus faible qu'on puisse mettre sur les ensembles d'approximations exceptionnelles considérés pour n'inclure qu'un point par grappe.

Pour conclure cette discussion, énonçons de façon explicite comment une borne sur la hauteur des approximations exceptionnelles se déduit d'une borne sur leur nombre (plus précisément, une borne sur le nombre de grands points suffit), dans le cas particulier où $V = (V\colon \mathcal{B})$, ce qui équivaut à dire que V est la somme de $\mathcal{B}$ et d'une autre sous-variété de $\mathcal{A}$, incluant en particulier le cas où V est un translaté de $\mathcal{B}$.

Corollaire 4.1.6. *Soient V une sous-variété de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ une sous-variété abéliennes de $\mathcal{A}$, telles que $V = (V\colon \mathcal{B})$. Supposons que pour un certain $\varepsilon_0 > 0$ et un certain Γ de type fini, il existe R et N tels que*

$$\mathrm{Card}\{x \in \mathcal{E}(V, \varepsilon_0) \cap \Gamma \text{ tel que } \hat{h}(x) \geqslant R\} \leqslant N\,.$$

Alors, pour tout $\varepsilon_0 < \varepsilon \leqslant \max(1, 3\varepsilon_0)$, les points de $\mathcal{E}(V, \varepsilon) \cap \Gamma$ sont tous de hauteur normalisée inférieure ou égale à

$$\max\Big(\big((N+1)/2\big)^2 \hat{h}_{\min}(\mathcal{B} \cap \Gamma)\tau^{-1},\ R \cdot (1 - \sqrt{\tau})^{-2},\ B(\varepsilon, \tau)\Big)$$

avec

$$\tau = \frac{\big((\varepsilon/\varepsilon_0) - 1\big)^2}{4} \qquad B(\varepsilon, \tau) = \frac{2}{\varepsilon\sqrt{\tau}}\big(2c_\Theta + 7\log(n+1)\big) + \frac{11}{\sqrt{\tau}}\hat{c}_\Theta\,.$$

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe un point $x_0 \in \mathcal{E}(V, \varepsilon) \cap \Gamma$ de hauteur normalisée strictement plus grande que la borne annoncée ; en particulier,

$\hat{h}(x_0)$ est assez grand pour appliquer le corollaire 4.1.4 page 116. Par ailleurs, $\mathcal{B}$ est une sous-variété abélienne ε-associée à x_0 et le choix de τ donne $\varepsilon' = \varepsilon_0$ dans les notations de ce corollaire, qui s'applique donc (car de plus $\tau \leqslant 1$ et $\varepsilon \leqslant 1$) et donne, compte tenu du scolie 4.1.5 page 116 :

$$\begin{aligned} N &\geqslant \operatorname{Card}\{x \in \mathcal{E}(V, \varepsilon_0) \cap \Gamma \text{ tel que } \hat{h}(x) \geqslant R\} \\ &\geqslant 2\sqrt{\tau \hat{h}(x)/\hat{h}_{\min}(\mathcal{B} \cap \Gamma)} - 1 \end{aligned}$$

ce qui est absurde. □

4.2 Hypothèse d'approximation produit

Comme annoncé dans l'introduction (page 17), on montre ici comment transformer un énoncé où la condition d'approximation fait apparaître une inégalité par place en une version où l'hypothèse d'approximation fait apparaître un produit sur l'ensemble des places.

Pour cela, on utilise le lemme suivant, qui n'est rien d'autre qu'une version plus abstraite du lemme 2.12.1, p. 120 de [Far03]. Par ailleurs, par rapport à cette référence, on a fixé $\varepsilon'(T) = \varepsilon/2$, d'où $A(T) = \operatorname{Card} T$, car c'est la valeur qui a le plus de sens pour les applications, afin de simplifier légèrement l'énoncé et sa preuve. L'énoncé ci-dessous est volontairement aussi abstrait que possible afin de mettre en lumière le caractère purement combinatoire de la preuve et d'être utilisable dans le plus grand nombre de situations ; immédiatement après l'énoncé on détaille la correspondance avec la situation étudiée ici afin d'en éclaircir le sens.

Lemme 4.2.1. *Soient A un ensemble et H une fonction de A dans $[1, +\infty[$. Soient par ailleurs M un autre ensemble et, pour chaque élément v de M :*
- *une fonction $d_v \colon A \to [0, 1]$;*
- *deux réels $0 < \Delta_v < 1$ et $c_v > 0$.*

Pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout partie finie S de M, on définit

$$E(\varepsilon, S) = \left\{ x \in A \text{ tel que } \prod_{v \in S} d_v(x)^{\Delta_v} \leqslant \Big(\prod_{v \in S} c_v^{\Delta_v}\Big) H(x)^{-\varepsilon} \right\}.$$

De plus, pour toute famille de réels $(\lambda_v)_{v \in S}$, on définit

$$E'(\varepsilon, S, \lambda) = \left\{ x \in A \text{ tel que } d_v(x) \leqslant c_v H(x)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in S \right\}.$$

On note enfin $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des parties finies de M et on suppose qu'il existe une fonction $g \colon \mathbf{R}_{>0} \times \mathcal{P}(M) \to \mathbf{N}$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, tout $S \in \mathcal{P}(M)$ non vide et toute famille $(\lambda_v)_{v \in S}$ de réels positifs telle que $\sum_{v \in S} \lambda_v \Delta_v = 1$, on ait

$$\operatorname{Card} E'(\varepsilon, S, \lambda) \leqslant g(\varepsilon, S).$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $S \in \mathcal{P}(M)$ on a

$$\operatorname{Card} E(\varepsilon, S) \leqslant \sum_{T \in \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}} \binom{2 \operatorname{Card} T - 1}{\operatorname{Card} T - 1} g(\varepsilon/2, T) \ .$$

Remarque 4.2.2. Dans l'application prévue, les paramètres seront choisis de la façon suivante. L'ensemble A sera un sous-ensemble fini de $\big(\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}}) \setminus V(\overline{\mathbf{Q}})\big) \cap \Gamma$ avec Γ un sous-groupe de rang fini de $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ et H la hauteur induite sur cet ensemble par le choix d'un plongement projectif de $\mathcal{A}$. L'ensemble M sera l'ensemble des places d'un corps de nombres $\boldsymbol{k}$ suffisamment gros et en chaque place $\Delta_v = [\boldsymbol{k}_v : \mathbf{Q}_v]/[\boldsymbol{k} : \mathbf{Q}]$ est le degré local divisé par le degré global. En revanche, le choix des constantes c_v dépendra de l'application envisagée. On reconnaît la condition sur la famille λ, et la fonction g sera alors donnée par l'un des énoncés majorant le cardinal d'ensembles du type $E'(\varepsilon, S, \lambda)$ que nous aurons établi.

Démonstration. On suppose S et ε fixés. On remarque que pour toute famille λ telle que $\sum_{v \in S} \lambda_v \Delta_v = 1$ on a $E'(\varepsilon, S, \lambda) \subset E(\varepsilon, S)$; à l'inverse on aimerait bien recouvrir $E(\varepsilon, S)$ par de tels ensembles, en nombre fini. Dans ce but, pour tout $x \in A$ (tel que $H(x) > 1$ pour simplifier pour l'instant), on introduit une famille de réels $\lambda(x)$ telle que

$$d_v(x) = c_v H(x)^{-\lambda_v(x)\varepsilon} \quad \forall v \in S \tag{4.2}$$

de sorte que $x \in E'(\varepsilon, S, \lambda(x))$. De plus, si $x \in E(\varepsilon, S)$ on a $\sum_{v \in S} \lambda_v(x) \Delta_v \geqslant 1$. Ainsi, on a recouvert $E(\varepsilon, S)$ par des ensembles de la forme $E'(\varepsilon, S, \lambda(x))$ mais ceux-ci ne sont *a priori* pas en nombre fini ; par ailleurs les familles $\lambda(x)$ obtenues ne sont pas nécessairement composées que de nombres positifs. (Le fait que leur somme pondérée ne soit pas exactement 1 n'est en revanche pas gênant, il suffirait de choisir une famille $\lambda'(x)$ plus petite (pour l'ordre produit) sommant à 1, car la fonction $\lambda \mapsto E'(\varepsilon, S, \lambda)$ est décroissante.)

Pour forcer les $\lambda_v(x)$ à être positifs [1] on introduit la fonction $\pi \colon E(\varepsilon, S) \to \mathcal{P}(S)$ définie par

$$\pi(x) = \{v \in S \text{ tel que } d_v(x) \leqslant c_v\} \ .$$

On remarque que π prend en fait ses valeurs dans $\mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$, de sorte que

$$E(\varepsilon, S) = \bigcup_{T \in \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}} \pi^{-1}(T) \ .$$

Par ailleurs, pour toute partie non vide T de S, on introduit l'ensemble

$$C = \{(\lambda_v)_{v \in T} \text{ tel que } \lambda_v \Delta_v \operatorname{Card} T \in \mathbf{N} \ \forall v \in T \text{ et } \sum_{v \in T} \lambda_v \Delta_v = 1\}$$

1. Ce qui n'est en soi pas indispensable (on pourrait en fait se dispenser de cette hypothèse dans les résultats de décompte précédents en considérant un ensemble de places plus petit) mais sera utile pour assurer la finitude et contrôler le cardinal de l'ensemble C ci-dessous.

qui est fini et de cardinal $\binom{2\operatorname{Card} T-1}{\operatorname{Card} T-1}$ car il est en bijection avec l'ensemble des familles de $\operatorname{Card} T$ entiers naturels dont la somme est $\operatorname{Card} T$. Pour obtenir la conclusion du lemme, il suffit donc de montrer que

$$\pi^{-1}(T) \subset \bigcup_{\lambda \in C} E'(\varepsilon/2, T, \lambda) \ .$$

Fixons donc $\emptyset \neq T \in \mathcal{P}(S)$ et $x \in \pi^{-1}(T)$. Par définition de $E(\varepsilon, S)$ et de π on a

$$\Big(\prod_{v \in S} c_v^{\Delta_v}\Big) H(x)^{-\varepsilon} \geqslant \prod_{v \in S} d_v(x)^{\Delta_v} \geqslant \prod_{v \in T} d_v(x)^{\Delta_v} \prod_{v \in S \setminus T} c_v^{\Delta_v}$$

d'où $x \in E(\varepsilon, T)$. Par ailleurs, si $H(x) = 1$ il est clair que $x \in E'(\varepsilon/2, T, \lambda)$ pour n'importe quelle famille $\lambda \in C$, on suppose donc $H(x) > 1$ et on associe à x une famille $\lambda(x)$ comme en (4.2). Cette fois-ci, les $\lambda_v(x)$ pour $v \in T$ sont tous positifs ou nuls. Par ailleurs, comme $x \in E(\varepsilon, T)$, on a successivement

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Card} T \sum_{v \in T} \lambda_v(x) \Delta_v &\geqslant 2\operatorname{Card} T \\ \sum_{v \in T} \lfloor 2\lambda_v(x) \Delta_v \operatorname{Card} T \rfloor &\geqslant \operatorname{Card} T \end{aligned}$$

donc il existe des entiers naturels $a_v(x)$ inférieurs ou égaux à $2\lambda_v(x)\Delta_v \operatorname{Card} T$ et dont la somme est exactement $\operatorname{Card} T$. On pose alors $\lambda'_v(x) = a_v(x)/(\Delta_v \operatorname{Card} T)$ de sorte que $\lambda'(x) \in C$ et $\lambda'_v(x) \leqslant 2\lambda_v(x)$, ce qui implique que $x \in E'(\varepsilon/2, T, \lambda'(x))$, achevant ainsi la preuve. □

En pratique, la fonction de comptage ne dépend pas de l'ensemble de places considérées, on utilisera donc le scolie suivant.

Scolie 4.2.3. *Dans la situation du lemme précédent, si l'on suppose de plus que la fonction g ne dépend pas de son deuxième argument, alors on a* $\operatorname{Card} E(\varepsilon, S) \leqslant 5^{\operatorname{Card} S} g(\varepsilon/2)$.

Démonstration. C'est un calcul élémentaire, fait page 125 de [Far03]. □

4.3 Grands points, cas des sous-groupes

On commence par majorer le nombre de points dans chaque cône tronqué ; on rappelle la définition 1.3.1 page 6 pour la notation $C(\varepsilon/2d)$ dans l'énoncé suivant.

Lemme 4.3.1. *Soit V un translaté par un point algébrique d'une sous-variété abélienne $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, de degré d et de dimension u. On fixe un réel $0 < \varepsilon$, un entier $m \geqslant g+1$ et on considère une famille de points $x_1, \ldots, x_p \in \mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ satisfaisant à $C(\varepsilon/2d)$ et aux*

conditions suivantes, pour tous i et j :

$$0 < \mathrm{dist}_v(x_i, V) < \alpha_v^{-1} H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S} \tag{4.3}$$

$$\hat{h}(x_i) > c_{5,\Theta} \Lambda_4^{(2mg)^{mg}} \tag{4.4}$$

$$\cos(x_i, x_j) > 1 - \frac{1}{m\, c_6} \tag{4.5}$$

avec

$$\begin{aligned} c_6 &= \big(86N \cdot 5^g d s\, \varepsilon^{-1}\big)^{\frac{m}{m-g}} \\ \Lambda_4 &= c_6\big((\sqrt{2}mgd)^g \deg \mathcal{A}\big)^m \\ c_{5,\Theta} &= d \max\big(d^g h_1(\mathcal{A}), c_\Theta, \hat{c}_\Theta\big) + (g+1) \deg \mathcal{A}\Big(n(d+1)^n \log(d+1) \\ &\qquad + d^g\big(h_1(V) + (u+2)(d+n+1)\log(d+1) + \log(m/2)\big)\Big) \end{aligned}$$

et au choix :

(i) $s = \min(\binom{d+n}{n}, \mathrm{Card}\, \mathcal{S})$ *et* $\alpha_v = \big(d\binom{d+n}{n}^3\big)^{\delta_v/2}$ *; ou bien*

(ii) $s = 1$ *et* $(\alpha_v)_v$ *une certaine famille de réels tous supérieurs ou égaux à* 1*, satisfaisant* $\prod_{v \in \mathcal{S}} \alpha_v^{\Delta_v} \leqslant H_1(V)^2 \cdot (d+1)^{2(u+2)(d+n+1)} \cdot \frac{m^2}{4} \cdot \mathrm{e}^{3dn}$.

On a alors nécessairement

$$p \leqslant \sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} (2mg)^{mg+1} \log \Lambda_4 \,.$$

Démonstration. Pour commencer, remarquons qu'on peut supposer $\varepsilon < d+1$. En effet, sinon le corollaire 3.2.3 page 97 s'applique, car (4.3) implique immédiatement (3.11) et (4.4) implique assez largement (3.12) vu la définition de $c_{5,\Theta}$ et la remarque 1.5.4 page 15.

Soit $x_1, \ldots, x_p$ une famille comme dans l'énoncé, qu'on suppose de plus ordonnée par hauteur normalisée croissante. On pose $\phi = (m\, c_6)^{-1}$ et $\rho = \sqrt{\varepsilon/d}$. On constate facilement que $\phi \leqslant \varepsilon/(2580d)$ de sorte que ce couple (ρ, ϕ) satisfait à (3.1). Par ailleurs, il est assez facile de voir que la condition (4.4) est plus forte que (3.3) : en effet $c_6 \geqslant (2/\varepsilon) \cdot d(u+1)$ et la parenthèse dans le membre de droite de (3.3) est largement majorée par $6c_{5,\Theta}$.

On peut donc appliquer le théorème 3.1.1 page 95 avec $x = x_i$ et $y = x_{i+1}$ et conclure que $\hat{h}(x_{i+1}) > (1 + \sqrt{\varepsilon/d})\hat{h}(x_i)$ pour tout $i \leqslant p-1$. On pose alors

$$\eta = \left\lceil (2mg)^{mg} \frac{\log \Lambda_4}{\log(1 + \sqrt{\varepsilon/d})} \right\rceil .$$

On suppose que $p \geqslant (m-1)\eta + 1$: on peut alors poser $y_i = x_{1+(i-1)\eta}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ de sorte que, pour tout $i \leqslant m-1$, on a

$$\hat{h}(y_{i+1}) > (1 + \sqrt{\varepsilon/d})^\eta \hat{h}(y_i) \geqslant \Lambda_4^{(2mg)^{mg}} \hat{h}(y_i)$$

et la famille $(y_i)_i$ contredit le corollaire 2.7.9 page 93, ce qui est absurde.

Ainsi, on a $p \leqslant (m-1)\eta$. On remarque que la fonction $t \mapsto t/\log(1+t)$ est croissante pour $t > 0$ et, comme on a supposé $\varepsilon \leqslant d+1 \leqslant 2d$, on a

$$\frac{1}{\log(1+\sqrt{\varepsilon/d})} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\log(1+\sqrt{2})}\sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} \leqslant 2\sqrt{\frac{d}{\varepsilon}}$$

en vérifiant numériquement pour la dernière inégalité. On a alors

$$p \leqslant (m-1)\left((2mg)^{mg}(\log\Lambda_4)\cdot 2\sqrt{\frac{d}{\varepsilon}}+1\right) \leqslant 2m(2mg)^{mg}(\log\Lambda_4)\sqrt{\frac{d}{\varepsilon}}$$

qui donne directement le résultat annoncé. □

On utilise ensuite le fait suivant.

Fait 4.3.2. *Soient r un entier et $\gamma > 0$ un réel. On peut recouvrir $\mathbf{R}^r$ par $\lfloor(1+\sqrt{8/\gamma})^r\rfloor$ ensembles dans chacun desquels deux points quelconques satisfont $\cos(x,y) \geqslant 1-\gamma$.*

Démonstration. C'est le corollaire 6.1, p. 542 de [Rémooa]. □

Corollaire 4.3.3. *Soit V un translaté par un point algébrique d'une sous-variété abélienne $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, de degré d et de dimension u. On considère de plus un sous-groupe $\Gamma \subset \mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ de rang fini r, un réel $\varepsilon > 0$ et un entier $m \geqslant g+1$. Soit enfin une famille $x_1,\dots,x_p$ de points de Γ satisfaisant à $C(\varepsilon/2d)$ et aux conditions suivantes, pour tout i :*

$$0 < \mathrm{dist}_v(x_i, V) < \alpha_v^{-1} H_2(x_i)^{-\lambda_v\varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S}$$
$$\hat{h}(x_i) > c_{5,\Theta}\Lambda_4^{(2mg)^{mg}}$$

avec Λ_4, $c_{5,\Theta}$, s et α_v comme au lemme 4.3.1 page 120. Alors on a

$$p \leqslant \sqrt{\frac{d}{\varepsilon}}(2mg)^{mg+1}(\log\Lambda_4)\left(3\sqrt{m}\left(86N\cdot 5^g ds\,\varepsilon^{-1}\right)^{\frac{m}{2(m-g)}}\right)^r .$$

Démonstration. En utilisant le fait précédent avec $\gamma = (mc_6)^{-1}$, on recouvre l'espace euclidien $\Gamma \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ muni du produit scalaire donné par la hauteur de Néron-Tate par des ensembles dans lesquels deux points quelconques satisfont (4.5). Le nombre d'ensembles nécessaires est au plus

$$\left(1+\sqrt{8m}\left(86N\cdot 5^g ds\,\varepsilon^{-1}\right)^{\frac{m}{2(m-g)}}\right)^r \leqslant \left(3\sqrt{m}\left(86N\cdot 5^g ds\,\varepsilon^{-1}\right)^{\frac{m}{2(m-g)}}\right)^r$$

en remarquant que $1+\sqrt{8\cdot 86\cdot 3\cdot 5} \leqslant 3\sqrt{86\cdot 3\cdot 5}$.

Il ne reste plus qu'à appliquer lemme 4.3.1 page 120 à chacun de ces ensembles pour conclure. □

Il ne reste maintenant plus qu'à passer à une hypothèse d'approximation sous sa forme produit. Pour que la condition écrite sous cette forme ait un sens, on fixe un corps de nombres $\boldsymbol{k}$ (contenant un corps de définition des variétés considérées et du plongement projectif utilisé) sur lequel on exigera que tous les x_i soient définis ; ceci fixe l'ensemble de places $\mathcal{S}$ utilisé. On fixe également $\Gamma = \mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ et on continue à noter r son rang.

Corollaire 4.3.4. *Soit V un translaté par un point algébrique d'une sous-variété abélienne $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, de degré d et de dimension u. On fixe un réel $\varepsilon > 0$ et un entier $m \geqslant g+1$. Soit enfin une famille $x_1, \ldots, x_p$ de points de $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ satisfaisant à $C(\varepsilon/2d)$ et aux conditions suivantes, pour tout i :*

$$0 < \prod_{v \in \mathcal{S}} \operatorname{dist}_v(x_i, V)^{\Delta_v} < \alpha^{-1} H_2(x_i)^{-\varepsilon}$$

$$\hat{h}(x_i) > c_{5,\Theta} \Lambda_4^{(2mg)^{mg}}$$

avec Λ_4 et $c_{5,\Theta}$ comme au lemme 4.3.1 page 120 et au choix :

(i) $s = \min(\binom{d+n}{n}, \operatorname{Card} \mathcal{S})$ *et* $\alpha = \left(d\binom{d+n}{n}^3\right)^{1/2}$ *; ou bien*

(ii) $s = 1$ *et* $\alpha = H_1(V)^2 \cdot (d+1)^{2(u+2)(d+n+1)} \cdot \frac{m^2}{4} \cdot \mathrm{e}^{3dn}$.

Alors on a

$$p \leqslant 2 \cdot 5^{\operatorname{Card} S} \cdot \sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} (2mg)^{mg+1} (\log \Lambda_4) \left(3\sqrt{m}\left(172N \cdot 5^g ds\, \varepsilon^{-1}\right)^{\frac{m}{2(m-g)}}\right)^r .$$

Démonstration. On applique le scolie 4.2.3 page 120 au corollaire 4.3.3 page précédente, comme prévu à la remarque 4.2.2 page 119, avec $A = \{x_1, \ldots, x_p\}$. Ceci a pour effet, dans le décompte, de rajouter un facteur $5^{\operatorname{Card} \mathcal{S}}$ et remplacer ε par $\varepsilon/2$. On constate que vu la définition de Λ_4, en effectuant cette opération, on ajoute $\log(2)m/(m-g)$ à son logarithme et que

$$\log \Lambda_4 + \log(2)m/(m-g) \leqslant \sqrt{2} \log \Lambda_4 .$$

Les autres modifications sont évidentes. □

On peut alors simplifier légèrement la condition d'approximation en absorbant la constante ; on aboutit au résultat suivant.

Corollaire 4.3.5. *Soit V un translaté par un point algébrique d'une sous-variété abélienne $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, de degré d et de dimension u. On fixe un réel $\varepsilon > 0$ et un entier $m \geqslant g+1$. Soit enfin une famille $x_1, \ldots, x_p$ de points de $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ satisfaisant à $C(\varepsilon/2d)$ et aux conditions suivantes, pour tout i :*

$$0 < \prod_{v \in \mathcal{S}} \operatorname{dist}_v(x_i, V)^{\Delta_v} < H_2(x_i)^{-\varepsilon}$$

$$\hat{h}(x_i) > c_{5,\Theta} \Lambda_5^{(2mg)^{mg}}$$

avec

$$\begin{aligned}\Lambda_5 &= \left(87N \cdot 5^g d\,\varepsilon^{-1}\right)^{\frac{m}{m-g}} \left((\sqrt{2}mgd)^g \deg \mathcal{A}\right)^m \\ c_{5,\Theta} &= d \max\left(d^g h_1(\mathcal{A}), c_\Theta, \hat{c}_\Theta\right) + (g+1)\deg \mathcal{A}\Big(n(d+1)^n \log(d+1) \\ &\qquad + d^g\left(h_1(V) + (u+2)(d+n+1)\log(d+1) + \log(m/2)\right)\Big)\,.\end{aligned}$$

Alors on a

$$p \leqslant 2 \cdot 5^{\operatorname{Card}\mathcal{S}} \cdot \sqrt{\frac{d}{\varepsilon}}(2mg)^{mg+1}(\log \Lambda_5)\left(3\sqrt{m}\left(174N \cdot 5^g d\,\varepsilon^{-1}\right)^{\frac{m}{2(m-g)}}\right)^r\,.$$

Démonstration. On commence par majorer chacun des deux choix possibles pour α dans le corollaire précédent. Pour le premier, on a immédiatement

$$\log\left(d\tbinom{d+n}{n}^3\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2}\log d + \frac{3}{2}n\log(d+1) \leqslant c_{5,\Theta}\,.$$

Pour le deuxième choix, on a

$$\begin{aligned}\log \alpha &= 2h_1(V) + 2(u+2)(d+n+1)\log(d+1) + 2\log(\tfrac{m}{2}) + 3dn \\ &\leqslant d\Big(h_1(V) + (u+2)(d+n+1)\log(d+1) + \log(\tfrac{m}{2}) + 3n\Big) \leqslant c_{5,\Theta} \quad (4.6)\end{aligned}$$

Ainsi, quel que soit le choix pour (s, α) dans le corollaire précédent, on a assez largement $\log \alpha \leqslant c_{5,\Theta}\Lambda_5 \cdot \varepsilon/87$ dont on déduit immédiatement que $H_2(x_i)^{\varepsilon/87} \geqslant \alpha$ puis que les hypothèses du présent énoncé impliquent celles du corollaire précédent en remplaçant ε par $86\varepsilon/87$. On applique donc le corollaire en question pour aboutir au résultat annoncé.

Par ailleurs, comme les deux valeurs possibles de α peuvent être absorbées à un coût équivalent, il est clair qu'on a intérêt à choisir la deuxième option pour le couple (s, α) afin d'avoir $s = 1$ qui minimise Λ_5 et p. □

Remarque 4.3.6. Dans le cas où $\operatorname{Card}\mathcal{S} = 1$, on aura plutôt intérêt à utiliser le corollaire 4.3.3 page 122 et prendre $s = \operatorname{Card}\mathcal{S}$ puis supprimer le α_v éventuel (si l'unique place de $\mathcal{S}$ est archimédienne) comme ci-dessus en remplaçant 86 par 87 dans le décompte et la définition de Λ_4.

La dépendance en ε dans le décompte précédent est en

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{r}{2}\cdot\frac{m}{m-g}} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\,.$$

L'exposant du premier facteur tend donc vers $(r+1)/2$ lorsque m tend vers l'infini. Cependant, quand m grandit, le facteur $(2mg)^{mg+1}$ dans le décompte croît rapidement et la condition de hauteur aussi croît rapidement. Il n'est pas évident

de déterminer la valeur de m réellement optimale, mais la valeur $m = 2g$ semble être un bon compromis : elle ramène le facteur devant r dans l'exposant de ε à une constante absolue, sans pour autant coûter beaucoup plus cher que $g+1$ sur les autres facteurs.

Corollaire 4.3.7. *Soient V un translaté par un point algébrique d'une sous-variété abélienne $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, de degré d et de dimension u. Soient de plus un réel $\varepsilon > 0$ et une famille $x_1, \ldots, x_p$ de points de $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ satisfaisant à $C(\varepsilon/2d)$ et aux conditions suivantes, pour tout i :*

$$0 < \prod_{v \in \mathcal{S}} \operatorname{dist}_v(x_i, V)^{\Delta_v} < H_2(x_i)^{-\varepsilon}$$

$$\hat{h}(x_i) > c'_{5,\Theta}(\Lambda'_5)^{(4g)^{4g^2}}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Lambda'_5 &= \left(87Nd\,\varepsilon^{-1}\right)^2 \left(5(\deg \mathcal{A})(3g^2 d)^g\right)^{2g} \\
c'_{5,\Theta} &= d \max\left(d^g h_1(\mathcal{A}), c_\Theta, \hat{c}_\Theta\right) + (g+1)\deg \mathcal{A}\Big(n(d+1)^n \log(d+1) \\
&\quad + d^g\left(h_1(V) + (u+2)(d+n+1)\log(d+1) + \log(g)\right)\Big) .
\end{aligned}$$

Alors on a

$$p \leqslant 2 \cdot 5^{\operatorname{Card} \mathcal{S}} \cdot \sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} (4g)^{4g^2+1} (\log \Lambda'_5) \left(739N \cdot 7^g d\,\varepsilon^{-1}\right)^r .$$

Démonstration. C'est le corollaire précédent appliqué avec $m = 2g$ et en opérant quelques simplifications d'écriture et majorations. □

4.4 Grands points, cas général

Dans toute cette section, on suppose (sans nécessairement le rappeler à chaque énoncé) que $\mathcal{A}$ est plongée dans $\mathbf{P}^n$ par un plongement de Mumford modifié associé à une polarisation principale, ce qui est nécessaire pour appliquer le théorème 3.1.2 page 95. Cette hypothèse implique en particulier que $\deg \mathcal{A} = n+1 = 16^g$ et qu'on peut prendre $N = n+1$. Par ailleurs, on supposera toujours $\varepsilon \leqslant 1$ pour simplifier certaines comparaisons.

Par ailleurs, comme on l'a vu dans la section précédente, on aura intérêt dans l'inégalité de Vojta (corollaire 2.7.9 page 93) à toujours prendre l'option $s = 1$ et à poser $m = 2g$. Commençons par énoncer l'inégalité de Vojta sous ces conditions.

Corollaire 4.4.1. *Soit V une variété de $\mathbf{P}^n$ de degré d et de dimension u, et $0 < \varepsilon \leqslant 1$ un nombre réel. Il n'existe dans $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ aucune famille de points $x_1, \ldots, x_{2g}$ satisfaisant*

simultanément aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} 0 < \mathrm{dist}_v(x_i, V) &< \alpha_v^{-1} H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S} \\ \hat{h}(x_1) &> c_{7,\Theta} \Lambda_6^{(4g)^{4g^2}} \\ \hat{h}(x_i) &> \hat{h}(x_{i-1}) \cdot \Lambda_6^{(4g)^{4g^2}} \\ \cos(x_i, x_j) &> 1 - \frac{\varepsilon^2}{2^{15g+14} d^2} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda_6 &= 2^{35g^3} d^{2g^2+2} \varepsilon^{-2} \\ c_{7,\Theta} &= d \max\big(d^g h_1(\mathcal{A}), c_\Theta, \hat{c}_\Theta\big) + 32^g \Big((2d)^{16^g+1} 16^g + d^g \big(h_1(V) + 32^g d^2\big) \Big) \end{aligned}$$

et $(\alpha_v)_v$ *une certaine famille de réels tous supérieurs ou égaux à* 1*, avec* $\sum_{v \in \mathcal{S}} \Delta_v \log \alpha_v \leqslant c_{7,\Theta}$.

Démonstration. C'est le corollaire 2.7.9 page 93 avec $m = 2g$ et l'option $s = 1$, où l'on a simplifié la majoration de la « hauteur » de α en tenant compte de (4.6). On a par ailleurs utilisé les majorations suivantes :

$$\frac{1}{2g} \Big(\frac{\varepsilon}{86 \cdot 16^g \cdot 5^g \cdot d} \Big)^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2^g \big(2^7 \cdot 2^{7g} d\big)^2}$$

$$86^2 \cdot 40^{2g} d^2 \varepsilon^{-2} (32\sqrt{2} g^2 d)^{2g^2} \leqslant 86^2\, 40^{2g}\, 2^{11g^2} g^{4g^2} \cdot d^{2g^2+2} \varepsilon^{-2} \leqslant 2^{35g^3} d^{2g^2+2} \varepsilon^{-2}$$

où la dernière majoration provient d'une vérification numérique pour $g = 1$. De plus, on a remarqué que

$$(u+2)(d+16^g) \log(d+1) + \log g \leqslant (g+1) d (d + 16^g + 1) \leqslant 2^g d^2 \cdot 16^g$$

pour simplifier l'expression de $c_{7,\Theta}$. □

À partir de maintenant et pour le reste de cette section, on fixe un sous-groupe $\Gamma \subset \mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ de rang fini $r \geqslant 1$ (car les résultats établis ici sont évidents si $r = 0$) ainsi que les constantes suivantes

$$M = \big(2^{34} h_{\mathcal{A}}^0 d\big)^{(r+1) g^{5(u+1)^2}} + 1 \qquad M' = d^M (2M)^{(M+1)u}$$

$$\phi = \frac{\varepsilon}{4M'} \qquad \rho = \Big(\frac{\varepsilon}{M'}\Big)^{1/2}$$

de sorte que (ρ, ϕ) satisfait bien la condition (3.6). Par ailleurs, à un facteur 2 près, chacune de ces deux quantités est aussi grande que possible sous cette condition.

On remarque alors que $M \geqslant 2^{68g^5} d^{2g^5}$ pour majorer en fonction de M les différentes constantes apparaissant dans l'inégalité de Vojta ci-dessus. Pour commencer, on a $\varepsilon^2 \Lambda_6 \leqslant M^2$ et $(4g)^{4g^2} \leqslant M/2$ puis, en posant

$$c_{8,\Theta,V} = h_1(V) + \max\big(h_1(\mathcal{A}), c_\Theta, \hat{c}_\Theta\big)$$

on a aisément $c_{7,\Theta} \leqslant c_{8,\Theta,V} d^M$ soit au final

$$c_{7,\Theta} \Lambda_6^{(4g)^{4g^2}} \leqslant \varepsilon^{-2(4g)^{4g^2}} c_{8,\Theta,V} (dM)^M \leqslant \varepsilon^{-2(4g)^{4g^2}} c_{8,\Theta,V} M' \ .$$

Par ailleurs, on a $h_1(V) + 2dM\big(\log d + c'_\Theta + \hat{c}_\Theta\big) \leqslant 4d^2 M c_{8,\Theta,V}$. Nous sommes maintenant prêts à combiner les inégalités de Vojta et de Mumford pour majorer le nombre de points dans chaque cône tronqué.

Lemme 4.4.2. *Soit V une sous-variété de $\mathcal{A}$, de degré d et de dimension u. On considère de plus un sous-groupe $\Gamma \subset \mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ de rang fini r et un réel $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Soit enfin une famille $x_1, \ldots, x_p$ de points de Γ satisfaisant à $C(\varepsilon/M')$ et aux conditions suivantes, pour tout i :*

$$\begin{aligned} 0 < \mathrm{dist}_v(x_i, V) &< \alpha_v^{-1} H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S} \\ \hat{h}(x_i) &> \mu \\ \cos(x_i, x_j) &> 1 - \varepsilon\phi \end{aligned}$$

avec $(\alpha)_v$ comme ci-dessus et $\mu = c_{8,\Theta,V} M' M^3 \varepsilon^{-2(4g)^{4g^2}}$. Alors on a

$$p \leqslant 2g(M-1) \frac{(4g)^{4g^2} \log \Lambda_6}{\rho}$$

avec Λ_6 comme ci-dessus.

Démonstration. D'après les remarques et majorations précédentes, il est assez clair que les conditions du présent énoncé impliquent les conditions correspondantes du théorème 3.1.2 page 95 et du corollaire 4.4.1 page 125. On peut donc appliquer simultanément ces deux résultats et en conclure comme dans la preuve du lemme 4.3.1 page 120 que

$$p \leqslant g(M-1) \left(\frac{(4g)^{4g^2} \log \Lambda_6}{\log(1+\rho)} + 1 \right) \leqslant 2g(M-1) \frac{(4g)^{4g^2} \log \Lambda_6}{\rho}$$

compte tenu du fait que cette fois-ci il peut y avoir jusqu'à $M-1$ points par lunule de largeur $1+\rho$. □

On en déduit un décompte complet des grands points.

Corollaire 4.4.3. *Soit V une sous-variété de $\mathcal{A}$, de degré d et de dimension u. On considère de plus un sous-groupe $\Gamma \subset \mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ de rang fini r et un réel $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Soit enfin une famille $x_1, \ldots, x_p$ de points de Γ satisfaisant à $C(\varepsilon/M')$ et aux conditions suivantes, pour tout i :*

$$0 < \mathrm{dist}_v(x_i, V) < \alpha_v^{-1} H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S}$$
$$\hat{h}(x_i) > \mu$$

avec $(\alpha_v)_v$ et μ comme ci-dessus. Alors on a

$$p \leqslant M^2 (M')^{(r+1)/2} \varepsilon^{-r-1/2} \log(\mathrm{e}/\varepsilon) \,.$$

Démonstration. On applique le fait 4.3.2 page 122 avec $\gamma = \varepsilon\phi$ pour recouvrir l'espace euclidien $\Gamma \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ muni du produit scalaire donné par la hauteur de Néron-Tate par des ensembles dans lesquels deux points quelconques satisfont (4.5). Le nombre d'ensembles nécessaires est au plus

$$\left(1 + \sqrt{\frac{8}{\varepsilon\phi}}\right)^r \leqslant \left(1 + \frac{4\sqrt{2}}{\rho\sqrt{\varepsilon}}\right)^r \leqslant \left(\frac{6}{\rho\sqrt{\varepsilon}}\right)^r$$

en utilisant le fait que $\phi = \rho^2/4$ d'après leurs définitions. Le lemme précédent donne le nombre de points dans chaque ensemble, on a donc

$$p \leqslant 2g(M-1) \frac{(4g)^{4g^2} (\log \Lambda_6)\, 6^r}{\rho^{r+1}} \varepsilon^{-r/2} \,.$$

On remarque maintenant que

$$\log \Lambda_6 \leqslant 2 \log M + 2 \log(\mathrm{e}/\varepsilon) \leqslant 4 \log M \log(\mathrm{e}/\varepsilon) \leqslant \sqrt{M} \log(\mathrm{e}/\varepsilon)$$

car on a supposé[2] que $\varepsilon \leqslant 1$ (on rappelle que $a + b \leqslant ab$ dès que les deux sont supérieurs ou égaux à 2). Par ailleurs, on remarque que

$$2g(4g)^{4g^2} \leqslant (4g)^{4g^2+1} \leqslant 2^{4(g+1)g^2+1} \leqslant (2^9)^{g^3}$$

de sorte que $2g(4g)^{4g^2} 6^r \leqslant \sqrt{M}$ soit au final

$$p \leqslant \frac{M^2}{\rho^{r+1}} \varepsilon^{-r/2} \log(\mathrm{e}/\varepsilon) \leqslant M^2 (M')^{(r+1)/2} \varepsilon^{-r-1/2} \log(\mathrm{e}/\varepsilon)$$

compte tenu de la définition de ρ. □

2. On aurait pu supposer $\varepsilon \leqslant \mathrm{e}^{-1}$ mais on aurait été gêné pour établir le corollaire 4.4.5 page suivante ; on a donc préféré rajouter ce e un peu gratuit.

Corollaire 4.4.4. *Soit V une sous-variété de $\mathcal{A}$, de degré d et de dimension u. Soient de plus un réel $\varepsilon > 0$ et une famille $x_1, \dots, x_p$ de points de $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ satisfaisant à $C(\varepsilon/2d)$ et aux conditions suivantes, pour tout i :*

$$0 < \prod_{v \in \mathcal{S}} \operatorname{dist}_v(x_i, V)^{\Delta_v} < H_2(x_i)^{-\varepsilon}$$
$$\hat{h}(x_i) > c_{8,\Theta,V}\, \varepsilon^{-2(4g)^{4g^2}} d^M (3M)^{(M+1)u+3}$$

où $\mathcal{S}$ est un ensemble fini de places de $\mathbf{Q}(x_1, \dots, x_p)$ et

$$c_{8,\Theta,V} = h_1(V) + \max\bigl(h_1(\mathcal{A}), c_\Theta, \hat{c}_\Theta\bigr)$$
$$M = \bigl(2^{34}\, h_{\mathcal{A}}^0\, d\bigr)^{(r+1)g^{5(u+1)^2}} + 1\,.$$

Alors on a

$$p \leqslant 5^{\operatorname{Card}\mathcal{S}} M^2 \Bigl(d^M (3M)^{(M+1)u}\Bigr)^{(r+1)/2} \varepsilon^{-r-1/2} \log(\mathrm{e}/\varepsilon)\,.$$

Démonstration. Ce résultat se déduit du corollaire précédent de la même façon que le corollaire 4.3.5 page 123 se déduit du corollaire 4.3.3 page 122 : on commence par appliquer le scolie 4.2.3 page 120, ce qui a pour coût, dans le décompte, de remplacer ε par $\varepsilon/2$ et d'ajouter un facteur $5^{\operatorname{Card}\mathcal{S}}$. Ensuite, pour absorber le α restant dans la condition d'approximation, il suffit de diviser encore ε par 2, cette fois non seulement dans le décompte mais aussi dans la condition de hauteur.

On constate ensuite que les constantes apparues près des ε sont facilement absorbées dans les autres facteurs en remplaçant $2M$ par $3M$ comme ci-dessus. □

On en déduit immédiatement un décompte des points entiers d'un ouvert affine, dans le cas où $\mathcal{A}$ est simple.

Corollaire 4.4.5. *Supposons que $\mathcal{A}$ est simple et soient $\boldsymbol{k}$ un corps de nombres, r le rang de $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ et $\mathcal{S}$ un ensemble fini de places de $\boldsymbol{k}$, contenant toutes les places archimédiennes. Le nombre de points $\mathcal{S}$-entiers sur $\boldsymbol{k}$ de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{Z}(X_0)$ de hauteur normalisée au moins*

$$\max\bigl(h_1(\mathcal{A}), c_\Theta, \hat{c}_\Theta\bigr)(48M_1)^{gM_1}$$

avec $M_1 = \bigl(2^{39}\, h_{\mathcal{A}}^0\bigr)^{(r+1)g^{6g^2}}$ est au plus

$$5^{\operatorname{Card}\mathcal{S}} (48M_1)^{gM_1(r+1)/2}\,.$$

Démonstration. Notons $E = \mathcal{Z}(X_0)$ et soit x un point $\mathcal{S}$-entier de $\mathcal{A} \setminus E$, c'est-à-dire que x admet un système de cordonnées homogènes de la forme $(1 : x_1 : \dots : x_n)$ avec $|x_i|_v \leqslant 1$ dès que $v \notin \mathcal{S}$. En une telle place, on a donc $\|x\|_{2,v} = 1$. Par ailleurs,

en toute place, la proposition 1.6.1 page 19 montre que $\mathrm{dist}_v(x, E) = \|x\|_{2,v}^{-1}$. Ainsi, on a

$$\prod_{v \in \mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(x, E)^{\Delta_v} = \prod_{v \in M_k} \|x\|_{2,v}^{-\Delta_v} = H_2(x)^{-1} ,$$

autrement dit x est une approximation exceptionnelle de E, d'exposant 1. On applique donc le corollaire précédent avec $V = E$ et $\varepsilon = 1$ ainsi que $\Gamma = \mathcal{A}(\boldsymbol{k})$, en remarquant que comme $\mathcal{A}$ est simple, la condition $C(\varepsilon/M')$ est automatiquement satisfaite.

En particulier, on a $u = g - 1$ et $d = \deg \mathcal{A} = 16^g$ vu le plongement de $\mathcal{A}$ choisi, et bien sûr $h_1(E) = 0$. On utilise ces informations pour écrire

$$\left(2^{34}\, h_{\mathcal{A}}^0\, d\right)^{(r+1)g^{5(u+1)^2}} + 1 = \left(2^{34}\, h_{\mathcal{A}}^0\, 16^g\right)^{(r+1)g^{5g^2}} + 1 \leqslant \left(2^{39}\, h_{\mathcal{A}}^0\right)^{(r+1)g^{6g^2}} .$$

On remarque ensuite que $(M_1 + 1)(g - 1) \leqslant gM_1 - 3$ pour écrire

$$d^{M_1}(3M_1)^{(M_1+1)(g-1)+3} \leqslant 16^{gM_1}(3M_1)^{gM_1} = (48M_1)^{gM_1}$$

et conclure. □

4.5 Options pour les petits points

Il ne semble pas évident d'exploiter l'hypothèse d'approximation dans le décompte des petits points. Nous rappelons donc pour mémoire comment compter les points de petite hauteur d'une variété abélienne appartenant à un groupe de type fini donné : ce décompte repose sur une propriété élémentaire en géométrie euclidienne, que l'on commence par rappeler.

Fait 4.5.1. *Soient E un espace euclidien de dimension r et deux réels ρ et μ. On peut recouvrir toute boule (fermée) de rayon ρ par des boules (ouvertes) de rayon μ en nombre inférieur à $(2\,\frac{\rho}{\mu} + 1)^r$.*

Démonstration. C'est le lemme 6.1, p. 541 de [Rémooa], où l'on a par ailleurs effectué le changement de notations $\mu = \rho/\gamma$. L'énoncé donné dans la référence citée ne précise pas si les boules sont ouvertes ou fermées, mais on constate facilement que la preuve qui y est proposée fonctionne parfaitement pour la variante la plus forte, énoncée ci-dessus. □

On en déduit la majoration suivante du nombre de points de petite hauteur sans aucune hypothèse d'approximation.

Corollaire 4.5.2. *Soit Γ un sous-groupe de type fini de $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$; on note r le rang de Γ et $\hat{h}_{\min}(\Gamma)$ le minimum de $\hat{h}(x)$ quand x parcourt l'ensemble des points d'ordre infini de Γ. Pour tout réel positif R, on a*

$$\mathrm{Card}\left\{x \in \Gamma \text{ tel que } \hat{h}(x) \leqslant R\right\} \leqslant \mathrm{Card}\,\Gamma_{\mathrm{tor}} \cdot \left(1 + 2\sqrt{R/\hat{h}_{\min}(\Gamma)}\right)^r$$

où Γ_{tor} *désigne l'ensemble des points de torsion de* Γ.

Démonstration. Dans $\Gamma \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ muni de la structure euclidienne induite par la hauteur normalisée, on applique le fait précédent avec $\rho = \sqrt{R}$ et $\mu = \sqrt{\hat{h}_{\min}(\Gamma)}$ puis on remarque que la préimage dans Γ de chacune des boules ouvertes de rayon μ est composée de points qui sont tous égaux modulo Γ_{tor}. □

Remarque 4.5.3. Si dans l'énoncé précédent on prend $\Gamma = \mathcal{A}(\boldsymbol{k})$, on retrouve le lemme 2.11.1, p. 117 de [Far03].

Si l'on applique le résultat précédent en conjonction avec le corollaire 4.3.5 page 123, on constate assez facilement que le décompte obtenu pour les petits points est largement supérieur à celui obtenu pour les grands points (à moins que $\hat{h}_{\min}(\Gamma)$ ne soit particulièrement grand), ce qui n'est pas très satisfaisant. Nous établissons donc un résultat, basé sur l'inégalité de Liouville, permettant de supprimer les petits points quitte à renforcer l'hypothèse d'approximation.

Lemme 4.5.4. *Soit V une sous-variété de $\mathcal{A}$, de dimension u et de degré d. Si R et F sont deux réels positifs, l'ensemble des points $x \in \mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ tels que*

$$0 < \prod_{v \in \mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(x, V)^{\Delta_v} \leqslant \mathrm{e}^{-F} H_2(x)^{-\varepsilon} \quad \textit{et} \quad \hat{h}(x) \leqslant R$$

est vide dès que $F > (d-\varepsilon)R + h_1(f_V) + d(u+1)\log(3d) + \frac{3}{2}\log(n+1) + (d-\varepsilon)\hat{c}_\Theta$.

Démonstration. Si l'ensemble en question n'est pas vide, on choisit un point x dedans et on lui applique l'inégalité de Liouville (proposition 3.2.1 page 96) :

$$\frac{1}{(n+1)^{3/2}(3d)^{d(u+1)}\, H_1(f_V)\, H_2(x)^d} \leqslant \prod_{v \in \mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(x, V)^{\Delta_v} \leqslant \mathrm{e}^{-F} H_2(x)^{-\varepsilon}$$

puis en prenant les opposés des logarithmes

$$\begin{aligned} F &\leqslant (d-\varepsilon)h_2(x) + h_1(f_V) + d(u+1)\log(3d) + \frac{3}{2}\log(n+1) \\ &\leqslant (d-\varepsilon)R + h_1(f_V) + d(u+1)\log(3d) + \frac{3}{2}\log(n+1) + (d-\varepsilon)\hat{c}_\Theta\ . \end{aligned}$$

Par contraposée, l'ensemble considéré est vide si cette inégalité est fausse. □

On en déduit immédiatement le corollaire pratique suivant.

Corollaire 4.5.5. *Soit V une sous-variété de $\mathcal{A}$, de dimension u et de degré d. Si R est un réel supérieur ou égal à*

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(h_1(f_V) + d(u+1)\log(3d) + \frac{3}{2}\log(n+1) + d\hat{c}_\Theta\right)\ ,$$

il n'existe aucun point $x \in \mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ tel que

$$0 < \prod_{v \in \mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(x, V)^{\Delta_v} \leqslant \mathrm{e}^{-dR} H_2(x)^{-\varepsilon} \quad \textit{et} \quad \hat{h}(x) \leqslant R\ .$$

Démonstration. Application immédiate du lemme précédent avec $F = dR$. □

On en déduit à titre d'exemple une variante du corollaire 4.3.7 page 125 ; le lecteur en déduira sans peine des variantes similaires des autres résultats de décompte.

Corollaire 4.5.6. *Soit V un translaté par un point algébrique d'une sous-variété abélienne $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, de degré d et de dimension u. Soient de plus un réel $\varepsilon > 0$ et une famille $x_1, \ldots, x_p$ de points de $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ satisfaisant à $C(\varepsilon/2d)$ et aux conditions suivantes, pour tout i :*

$$0 < \prod_{v \in \mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(x_i, V)^{\Delta_v} < H_2(x_i)^{-\varepsilon} \exp(-dc'_{5,\Theta}(\Lambda'_5)^{(4g)^{4g^2}})$$

avec Λ'_5 et $c'_{5,\Theta}$ comme au corollaire 4.3.7 page 125. Alors on a

$$p \leqslant 2 \cdot 5^{\mathrm{Card}\,\mathcal{S}} \cdot \sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} (4g)^{4g^2+1} (\log \Lambda'_5) \left(739N \cdot 7^g d\, \varepsilon^{-1}\right)^r .$$

Démonstration. La condition d'approximation considérée permet d'appliquer le corollaire 4.5.5 page précédente avec $R = c'_{5,\Theta}(\Lambda'_5)^{(4g)^{4g^2}}$, quantité qui satisfait amplement l'hypothèse du corollaire. Ainsi, on voit que tous les points satisfaisant cette condition d'approximation satisfont aussi $\hat{h}(x_i) \geqslant R$ et on peut appliquer le corollaire 4.3.7 page 125 pour conclure. □

Scolie 4.5.7. *Dans le corollaire précédent, on peut en fait prendre*

$$\Lambda'_5 = 34\varepsilon^{-2}\big(5(\deg \mathcal{A})(3g^2 d)^g\big)^{2g+2}$$

et remplacer $739N \cdot 7^g$ par $120760 \deg \mathcal{A}$ dans la majoration donnée pour p. De plus, on peut prendre

$$c'_{5,\Theta} = d \max\big(d^g h_1(\mathcal{A}), c_\Theta, \hat{c}_\Theta\big) + (g+1) \deg \mathcal{A}\Big(d^g h_1(V) + 2\big(2(d+1)\big)^{n+1}\Big) .$$

Démonstration. On utilise le dernier point du lemme 1.5.2 page 14 pour estimer N par $\deg \mathcal{A}/g!$. Pour Λ'_5, on effectue alors quelques regroupements en remarquant que $87/15 \leqslant 34$ et pour la majoration de p, on voit que $739 \cdot 7^g/g! \leqslant 120760$ pour tout g en constatant que le maximum de $7^g/g!$ est atteint pour $g = 7$ (et $g = 6$).

Enfin, en remarquant que $u + 2 \leqslant g + 1 \leqslant n$, on a

$$d^g\big((u+2)(d+n+1)\log(d+1) + \log(g)\big) \leqslant d^{g+1} n(d+n+2) \leqslant d^{n+1} n(n+3)$$

qui entraîne facilement le résultat annoncé en remarquant que $n(n+4) \leqslant 2^{n+2}$. □

Références bibliographiques

[Bom81] E. Bombieri. « On G-functions ». Dans : *Recent progress in analytic number theory, Vol. 2 (Durham, 1979)*. London : Academic Press, 1981, p. 1–67.

[Bom90] E. Bombieri. « The Mordell conjecture revisited ». Dans : *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 17.4 (1990), p. 615–640. URL : http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1990_4_17_4_615_0.

[DR55] H. Davenport et K. F. Roth. « Rational approximations to algebraic numbers ». Dans : *Mathematika* 2 (1955), p. 160–167.

[DP98] S. David et P. Philippon. « Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes ». Dans : *Number theory (Tiruchirapalli, 1996)*. T. 210. Contemp. Math. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1998, p. 333–364. URL : http://dx.doi.org/10.1090/conm/210/02795.

[DP02] S. David et P. Philippon. « Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abeliennes. II ». Dans : *Comment. Math. Helv.* 77.4 (2002), p. 639–700. URL : http://dx.doi.org/10.1007/PL00012437.

[Die97] T. de Diego. « Points rationnels sur les familles de courbes de genre au moins 2 ». Dans : *J. Number Theory* 67.1 (1997), p. 85–114. URL : http://dx.doi.org/10.1006/jnth.1997.2146.

[Fal83] G. Faltings. « Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern ». Dans : *Invent. Math.* 73.3 (1983), p. 349–366. URL : http://dx.doi.org/10.1007/BF01388432.

[Fal91] G. Faltings. « Diophantine approximation on abelian varieties ». Dans : *Ann. of Math. (2)* 133.3 (1991), p. 549–576. URL : http://dx.doi.org/10.2307/2944319.

[Far03] B. Farhi. « Approximations diophantiennes sur les groupes algébriques commutatifs ». Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie, 2003.

[Far05a] B. Farhi. « Un analogue elliptique du théorème de Roth ». Dans : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 341.5 (2005), p. 275–278. URL : http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2005.05.026.

[Far05b] B. Farhi. « Une approche polynomiale du théorème de Faltings ». Dans : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 340.2 (2005), p. 103–106. URL : http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2004.11.026.

[GS95] R. Gross et J. Silverman. « *S*-integer points on elliptic curves ». Dans : *Pacific J. Math.* 167.2 (1995), p. 263–288. URL : http://projecteuclid.org/getRecord?id=euclid.pjm/1102620866.

[HS00] M. Hindry et J. H. Silverman. *Diophantine geometry*. T. 201. Graduate Texts in Mathematics. An introduction. New York : Springer-Verlag, 2000, p. xiv+558. URL : http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-1210-2.

[Jad96] C. Jadot. « Critères pour l'indépendance linéaire et algébrique ». Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie, 1996. URL : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00451019.

[Lan60] S. Lang. « Integral points on curves ». Dans : *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 6 (1960), p. 27–43. URL : http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1960__6__27_0.

[LR85] H. Lange et W. Ruppert. « Complete systems of addition laws on abelian varieties ». Dans : *Inventiones Mathematicae* 79 (3 1985), p. 603–610. URL : http://dx.doi.org/10.1007/BF01388526.

[NP01] Y. Nesterenko et P. Philippon, éds. *Introduction to algebraic independence theory*. T. 1752. Lecture Notes in Mathematics. Berlin : Springer-Verlag, 2001, p. xiv+256. URL : http://dx.doi.org/10.1007/b76882.

[Phi86] P. Philippon. « Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs ». Dans : *Bull. Soc. Math. France* 114.3 (1986), p. 355–383. URL : http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__355_0.

[Phi89] P. Philippon. « Théorème des zéros effectif et élimination ». Dans : *Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2)* 1.1 (1989), p. 137–155. URL : http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_1989__1_1_137_0.

[Phi91] P. Philippon. « Sur des hauteurs alternatives. I ». Dans : *Math. Ann.* 289.2 (1991), p. 255–283. URL : http://dx.doi.org/10.1007/BF01446571.

[Phi01] P. Philippon. « Diophantine geometry ». Dans : *Introduction to algebraic independance theory [NP01]*. 2001. Chap. 6.

[Rém00a] G. Rémond. « Décompte dans une conjecture de Lang ». Dans : *Invent. Math.* 142.3 (2000), p. 513–545. URL : http://dx.doi.org/10.1007/s002220000095.

[Rém00b] G. Rémond. « Inégalité de Vojta en dimension supérieure ». Dans : *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 29.1 (2000), p. 101–151. URL : http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_2000_4_29_1_101_0.

[Rém01a] G. Rémond. « Géométrie diophantienne multiprojective ». Dans : *Introduction to algebraic independance theory [NP01]*. 2001. Chap. 7.

[Rém01b] G. Rémond. « Sur le théorème du produit ». Dans : *J. Théor. Nombres Bordeaux* 13.1 (2001). 21st Journées Arithmétiques (Rome, 2001), p. 287–302. URL : http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2001__13_1_287_0.

[Rém05] G. Rémond. « Inégalité de Vojta généralisée ». Dans : *Bull. Soc. Math. France* 133.4 (2005), p. 459–495.

[Rid58] D. Ridout. « The p-adic generalization of the Thue-Siegel-Roth theorem ». Dans : *Mathematika* 5 (1958), p. 40–48.

[RS62] J. B. Rosser et L. Schoenfeld. « Approximate formulas for some functions of prime numbers ». Dans : *Illinois J. Math.* 6 (1962), p. 64–94.

[Sie29] C. L. Siegel. « Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen ». Dans : *Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.* (1929), p. 41–69.

[Voj91] P. Vojta. « Siegel's theorem in the compact case ». Dans : *Ann. of Math. (2)* 133.3 (1991), p. 509–548. URL : http://dx.doi.org/10.2307/2944318.

[Zha95] S. Zhang. « Positive line bundles on arithmetic varieties ». Dans : *J. Amer. Math. Soc.* 8.1 (1995), p. 187–221. URL : http://dx.doi.org/10.2307/2152886.