



**HAL**  
open science

# Interaction des failles sismiques : modélisation mathématique et numérique de l'instabilité du glissement

Sylvie Wolf

► **To cite this version:**

Sylvie Wolf. Interaction des failles sismiques : modélisation mathématique et numérique de l'instabilité du glissement. Tectonique. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2003. Français. NNT: . tel-00744990

**HAL Id: tel-00744990**

**<https://theses.hal.science/tel-00744990>**

Submitted on 24 Oct 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TS 03/GRE1/0225/D

double

820



# THESE

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I

présentée et soutenue publiquement par

Sylvie WOLF

le 2 décembre 2003

## Interaction des failles sismiques : modélisation mathématique et numérique de l'instabilité du glissement

### Composition du jury :

|  |                       |
|--|-----------------------|
| Patrick Hild, <i>Professeur à l'Université de Franche Comté</i>                  | Rapporteur            |
| Jean-Pierre Vilotte, <i>Physicien à l'Institut de Physique du Globe de Paris</i> | Rapporteur            |
| Fabrice Cotton, <i>Professeur à l'Université Joseph Fourier</i>                  | Président - Examineur |
| Yvon Maday, <i>Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie</i>               | Examineur             |
| Michel Campillo, <i>Professeur à l'Université Joseph Fourier</i>                 | Directeur             |
| Ioan Ionescu, <i>Professeur à l'Université de Savoie</i>                         | Directeur             |





## Interaction des failles sismiques : modélisation mathématique et numérique de l'instabilité du glissement

par Sylvie Wolf

Nous modélisons les **processus de glissement instable**, en tenant compte de la géométrie souvent complexe des systèmes de failles et des lois de frottement observées en laboratoire. Nous assimilons les failles à des interfaces de discontinuité dans un milieu élastique parfait, la croûte, et utilisons une **loi de frottement dépendant du glissement** déduite d'expériences qui montrent que la résistance du matériau diminue du seuil statique au seuil dynamique, proportionnellement au glissement. Nous proposons **deux méthodes numériques**. La première a pour but de simuler l'évolution temporelle spontanée d'un réseau de faille, soumis initialement à un champ de contraintes donné et auquel nous appliquons une perturbation initiale en vitesse. Elle utilise un schéma de type Newmark en temps, et une discrétisation spatiale en éléments finis avec décomposition de domaine. Elle se révèle capable de capturer efficacement les instabilités du glissement, et en particulier la **phase d'initiation**, qui précède la propagation de la rupture dynamique et qui se caractérise par une forme auto-similaire et une croissance exponentielle du glissement au cours du temps. Des expériences numériques montrent que l'interaction, sur des segments de faille présentant un recouvrement significatif, se manifeste par l'existence de « **zones d'ombre** » dans lesquelles les contraintes sont déchargées et le glissement inhibé. En cas de recouvrement important de deux segments de faille, on observe une dissymétrie des profils de glissement, correspondant à la disparition de la singularité de contraintes à l'une des pointes de faille.

Le deuxième schéma numérique réalise l'**analyse spectrale non linéaire** du problème de l'initiation « pseudo-linéarisé » autour de la position d'équilibre dans laquelle le système de failles est initialement au seuil de résistance statique. La non-linéarité du problème provient de la prise en compte des zones d'ombre dont on ne connaît pas la géométrie *a priori*. Cette analyse permet de trouver le mode qui porte la *signature* de l'initiation, c'est-à-dire la forme auto-similaire remarquée plus haut. La version statique de cette analyse modale fournit un **critère de stabilité** des réseaux de failles, c'est-à-dire la valeur limite du taux d'affaiblissement au-delà de laquelle un épisode de glissement donnera lieu à un événement sismique.

Nous faisons l'hypothèse que le mode non linéaire statique, qui caractérise un comportement en affaiblissement à la limite de la stabilité, peut être utilisé pour décrire le **glissement cumulé** à l'échelle tectonique sur un réseau de failles normales particulier en Afar, dont nous connaissons les glissements mesurés en surface. Nous montrons qu'un choix judicieux du profil d'affaiblissement « équivalent » à l'échelle tectonique permet un bon accord entre le glissement observé et le mode statique. Nous en tirons des conclusions en termes d'interaction, mais aussi de propagation et/ou branchement des segments de failles. Enfin, nous décrivons deux autres applications :

- l'influence de la **fracturation secondaire** (endommagement) sur la forme du glissement
- les paramètres géométriques favorables à l'apparition d'une **zone de relai** entre deux segments de faille se propageant l'un vers l'autre.

THESE

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I

présentée et soutenue publiquement par

Sylvie WOLF

le 2 décembre 2003

**Interaction des failles sismiques :  
modélisation mathématique et numérique  
de l'instabilité du glissement**

Composition du jury :

|  |                       |
|--|-----------------------|
| Patrick Hild, <i>Professeur à l'Université de Franche Comté</i>                  | Rapporteur            |
| Jean-Pierre Vilotte, <i>Physicien à l'Institut de Physique du Globe de Paris</i> | Rapporteur            |
| Fabrice Cotton, <i>Professeur à l'Université Joseph Fourier</i>                  | Président - Examineur |
| Yvon Maday, <i>Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie</i>               | Examineur             |
| Michel Campillo, <i>Professeur à l'Université Joseph Fourier</i>                 | Directeur             |
| Ioan Ionescu, <i>Professeur à l'Université de Savoie</i>                         | Directeur             |

ppn 078440718





L'histoire commence il y a 4 ans. Alors étudiante en DEA de Mathématiques Appliquées à la recherche <sup>?</sup>⊙<sup>?</sup> d'un sujet de thèse original et intéressant, je me suis laissée tenter par le sujet proposé par Ioan Ionescu, en collaboration avec un sismologue du nom de Michel Campillo.



Pour résumer ces 4 années, disons que j'ai largement expérimenté l'interdisciplinarité<sup>1</sup>, un sport passionnant mais assez difficile à appréhender. Quelques mois après le début de ma thèse, je n'avançais plus beaucoup <sup>!</sup>⊙<sup>?</sup> et surtout je ne voyais ni comment orienter le sujet vers une problématique mathématique intéressante (c'est quand même pour ça que je me suis lancée dans l'aventure!), ni comment en tirer un outil vraiment intéressant pour les vraies applications qui intéressent les vrais géophysiciens (c'est tout de même pour eux que je me suis mise au Fortran!). Heureusement, l'ambiance est chaleureuse parmi les étudiants de la Maison des Géosciences ⊙ : Céline, Clarisse, Katia, Marianne, Mikaël, Muriel, Olivier, Renaud et les autres (pardon à ceux que je n'ai pas cités)... Sans oublier les jeunes recrutés : François, Jean-Emmanuel... Que dire d'eux sinon que je les remercie tous et que je devrais avoir honte de classer mes amis par ordre alphabétique ?



Quelques mois seulement avant la fin des trois ans impartis, les problèmes se sont résolus en cascade. L'enthousiasme <sup>!</sup>⊙<sup>!</sup> de Ioan m'a aidée à sortir de l'impasse et à retrouver ce qui m'avait plu d'emblée dans le calcul scientifique : l'alliance de la rigueur mathématique et du respect des applications. Lori Badea a rajouté ses compétences précieuses à l'équipe du côté matheux. Simultanément, du côté géophysique, Michel m'a permis d'étoffer les applications en me lançant dans une collaboration avec Isabelle Manighetti. Je suis assez contente du résultat ⊙ et en conséquence je les remercie tous les quatre.



<sup>1</sup>dénomination scientifique pour « le cul entre deux chaises »

Pour la qualité de l'ambiance dans le bureau pendant la troisième et dernière année, je remercie dans l'ordre Muriel et quelques morceaux de ♪ musique ♪ propices à la relaxation ☺☺☺☺ sans lesquels les journées de rédaction auraient paru encore plus longues.



L'aboutissement de ce travail a été ma soutenance ☺ du mardi 2 décembre 2003. Je ne reviens toujours pas de l'ambiance chaleureuse ☺ qui régnait ce jour-là, et je remercie tous les membres du jury pour leurs encouragements. Je ne leur en veux même pas de m'avoir posé des questions auxquelles je n'avais rien d'intelligent à répondre. Une mention particulière pour le président du jury, qui a rempli son rôle avec beaucoup de brio.



Pour finir, j'adresse un gargantuesque MERCI ☺☺☺ à Pascal pour son aide et (surtout) pour sa gentillesse extraterrestre.

## Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction</b>   | <b>1</b>  |
| Interaction et cycle sismique . . . . .   | 1         |
| Lois de comportement des failles . . . . .                                      | 4         |
| Modélisations numériques de la rupture sismique . . . . .                       | 7         |
| Enjeux de l'approche spectrale . . . . .  | 9         |
| Aperçu du contenu de la thèse . . . . .   | 11        |
| <b>1 Le problème d'évolution : résultats d'existence et d'unicité</b>           | <b>13</b> |
| 1.1 Introduction . . . . .  | 14        |
| 1.2 Problem statement . . . . .   | 16        |
| 1.3 Assumptions, notations and preliminaries . . . . .                          | 18        |
| 1.4 Existence of a solution . . . . .   | 20        |
| 1.5 Uniqueness in the one-dimensional case . . . . .                            | 26        |
| 1.6 Asymptotic behavior for vanishing viscosity . . . . .                       | 28        |
| <b>2 Modélisation numérique de la rupture : initiation et propagation</b>       | <b>33</b> |
| 2.1 Introduction . . . . .  | 33        |
| 2.2 Résolution numérique dans le cas de failles de géométrie complexe . . . . . | 34        |
| 2.2.1 Introduction . . . . .  | 36        |
| 2.2.2 Problem Statement . . . . .   | 39        |
| 2.2.3 Elliptic problem of each time step . . . . .                              | 43        |
| 2.2.4 Domain decomposition method . . . . .                                     | 47        |
| 2.2.5 Numerical results . . . . .   | 52        |
| 2.3 Remarques sur le choix de la méthode numérique . . . . .                    | 61        |
| 2.4 Stabilité et précision du schéma espace-temps . . . . .                     | 64        |
| <b>3 La phase d'initiation. Analyse spectrale non linéaire.</b>                 | <b>67</b> |
| 3.1 Introduction . . . . .  | 67        |
| 3.2 Initiation sur une faille plane . . . . .                                   | 68        |
| 3.2.1 Cas de la faille infinie . . . . .  | 68        |
| 3.2.2 Cas de la faille finie . . . . .  | 68        |
| 3.3 Interaction des failles non coplanaires pendant l'initiation . . . . .      | 71        |
| 3.3.1 Introduction . . . . .  | 72        |
| 3.3.2 Problem Statement . . . . .   | 74        |
| 3.3.3 Static analysis . . . . .   | 76        |



|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.3.4    | Dynamic analysis . . . . .   | 80         |
| 3.3.5    | Mixed finite element approximation . . . . .   | 85         |
| 3.3.6    | Numerical results . . . . .  | 89         |
| 3.4      | Pourquoi (et comment) un calcul de spectre non linéaire? . . . . .                                 | 97         |
| 3.5      | Remarques sur la résolution numérique . . . . .  | 101        |
| 3.5.1    | La méthode d'optimisation sous contraintes . . . . .   | 102        |
| 3.5.2    | Les éléments infinis . . . . .   | 103        |
| 3.5.3    | Adaptation de maillage . . . . .   | 106        |
| 3.6      | Généralisation aux failles courbes . . . . .   | 109        |
| <b>4</b> | <b>Applications</b> . . . . .  | <b>111</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .   | 111        |
| 4.2      | Application aux réseaux de failles normales . . . . .  | 112        |
| 4.2.1    | Introduction . . . . .   | 113        |
| 4.2.2    | The time-dependent problem . . . . .   | 117        |
| 4.2.3    | Non-linear spectral analysis . . . . .   | 119        |
| 4.2.4    | Numerical resolution of the non-linear spectral problem . . . . .                                  | 122        |
| 4.2.5    | Results for two parallel homogeneous identical straight segments . . . . .                         | 123        |
| 4.2.6    | Classification of two-faults systems. . . . .  | 126        |
| 4.2.7    | Application to a non-planar fault system in Afar, and implications<br>on fault mechanics . . . . . | 132        |
| 4.2.8    | Summary and discussion . . . . .   | 137        |
| 4.2.9    | Discussion sur la propagation des failles du réseau . . . . .                                      | 140        |
| 4.3      | Influence de l'endommagement sur les profils de glissement . . . . .                               | 141        |
| 4.4      | Implications dans les zones de relai . . . . .   | 144        |
| 4.5      | Conclusion sur les applications possibles . . . . .  | 146        |
|          | <b>Conclusion</b> . . . . .  | <b>149</b> |
|          | <b>Bibliographie</b> . . . . .   | <b>151</b> |

## Introduction

### Interaction et cycle sismique

Les failles sont des zones d'intense déformation cumulée dans le temps, qui accommodent une différence de déplacement (*rejet*) dans la croûte terrestre. Elles prennent la forme d'une bande de cisaillement, dont l'épaisseur dépend principalement des rejet, taille et âge de la faille. La partie centrale de la bande de cisaillement, appelée la *gouge*, a une structure physique complexe. Le cycle de glissement d'une faille contient des phases sismiques (instables) et asismiques (stables). Sur les grandes failles, telles que celle de San Andreas, le glissement s'effectue selon les régions par un mouvement continu dégageant une énergie sismique faible mais régulière (fluage), ou au contraire par des mouvements brutaux associés à des séismes violents mais ponctuels. Une faille est soumise aux contraintes tectoniques qui varient lentement. A l'échelle d'un événement sismique, on pourra les considérer constantes puisque le rapport de temps entre chargement tectonique et relâchement sismique est d'au moins  $10^9$  pour une même quantité de contrainte. Pendant cette période de chargement, elle accumule de l'énergie, qu'elle peut éventuellement relâcher en partie en glissant de façon stable. Mais lorsque les contraintes appliquées à la faille atteignent la résistance maximale sur un domaine suffisamment étendu de la faille, une instabilité se produit, la rupture *s'initie*, se *propage* puis *s'arrête* spontanément, dissipant une part de l'énergie potentielle élastique emmagasinée, sous forme de radiation d'ondes élastiques mais aussi de chaleur, de fracturation et dans une moindre mesure d'énergie potentielle de pesanteur. Moyennant un certain nombre de répliques qui permettent d'accommoder les déformations résiduelles, la faille se retrouve alors dans une nouvelle position d'équilibre. Ce cycle sismique est encore mal connu : l'enchaînement des cycles est-il périodique ou chaotique? comment se déroulent les phases d'initiation, de propagation et d'arrêt de la rupture? C'est pour tenter de répondre à ces questions que de nombreux modèles existent.

Pour construire un modèle du glissement des failles, il faut d'abord définir la rhéo-



logie du milieu les entourant - la croûte - par l'intermédiaire d'une loi de comportement, c'est-à-dire une relation entre le tenseur de contraintes  $\sigma$ , le tenseur de déformation  $\varepsilon$  et leurs incréments respectifs  $d\sigma$  et  $d\varepsilon$ . On peut à l'échelle sismogénique adopter les lois de l'élasticité linéaire. A l'échelle du glissement tectonique, il faudrait prendre en compte l'endommagement résultant du développement de micro-failles, qui conduit à un comportement anélastique (et moins rigide que le matériau intact). Les observations montrent que les failles sont des zones localement très endommagées dont le centre, la *gouge*, a un comportement mécanique très différent de la roche environnante. En effet, la gouge peut se présenter comme un matériau très densément fissuré, broyé, voire proche d'un milieu granulaire. Néanmoins, puisque l'épaisseur de la bande de cisaillement est faible devant la longueur de la faille (avec un rapport de l'ordre de  $10^3$  au moins), on assimilera ici les failles à des surfaces de discontinuité sans épaisseur, soumises à des conditions aux limites particulières reliant contraintes et glissement. Contrairement aux fractures en ouverture où la résistance est concentrée en pointe de fracture, les failles résistent sur toute leur longueur, et le problème du glissement des failles peut être vu comme un problème d'instabilité de frottement. Pour cette raison, des expériences de frottement en laboratoire (détaillées ci-dessous) ont été conduites.

Un autre ingrédient important d'un modèle de comportement des failles est leur géométrie. Les modèles les plus récents mettent l'accent sur l'importance de modéliser la géométrie des systèmes de failles le plus précisément possible. Aochi et al. (2000), Aochi et Fukuyama (2001) montrent, en ce qui concerne la propagation et l'arrêt de la rupture, qu'il est nécessaire de respecter la courbure des failles, mais aussi leur segmentation. En effet, il faut rappeler que les systèmes de failles se développent en formant des failles secondaires, plus petites, qui viendront éventuellement se connecter aux failles principales. L'exemple des failles normales en Afar (Figure 1) montre un réseau très serré. Dès lors, il paraît impossible d'étudier ces failles isolément : les phénomènes d'interaction sont peut-être aussi importants que la rhéologie intrinsèque des failles. Les séismes eux-mêmes interagissent par des reports de contrainte d'une faille sur l'autre. Cette complexité géométrique est à l'origine des phénomènes d'interaction que nous voulons modéliser ici, dans le cadre de l'initiation et de la propagation de la rupture.

Pour en finir avec les ingrédients nécessaires à la modélisation du glissement des failles, il ne faut pas oublier leur hétérogénéité intrinsèque. Voisin (2000), Voisin et al. (2002) montrent que des variations locales de la résistance à la rupture sur une faille plane tendent à retarder le début de la phase de propagation de la rupture. Ampuero et al. (2002) étudient un autre type d'hétérogénéité, produit par l'existence d'une zone endommagée autour de la faille, et montrent son influence sur la phase d'initiation.



Figure 1 *Topographie (éclairée par le Sud-Ouest) d'une population de failles normales en Afar (par I. Manighetti).*

Nous développons ici un modèle dans lequel les failles sont assimilées à des interfaces de discontinuité sans épaisseur dans un milieu élastique éventuellement hétérogène. Il ne s'agit pas d'un modèle de cycle sismique complet, cependant nous espérons rendre compte de certains aspects, sismiques et asismiques, du cycle du glissement des failles à différentes échelles de temps. Nous nous intéressons particulièrement à la transition sismique-asismique et à l'interaction complexe des failles par l'intermédiaire des *zones d'ombre*, où les contraintes sur une faille sont relâchées sous l'effet du glissement d'une autre faille. On montrera que ce mécanisme peut donner à une faille un comportement hétérogène alors même que le milieu dans lequel elle se trouve et le frottement auquel elle est soumise sont supposés homogènes.



## Lois de comportement des failles

D'après la description que nous venons de donner des failles en général, et des zones de gouge en particulier, il apparaît que les failles ne sont pas exactement des interfaces de discontinuité, en tout cas pas à l'échelle métrique. De même, la présence de fluides dans les failles ne permet pas, en toute rigueur, d'adopter le formalisme du frottement sec pour modéliser leur déformation. Néanmoins, le rapport entre la longueur des failles et l'épaisseur de la zone endommagée rend acceptable un modèle de contact entre deux surfaces, et les fluides sont encore très souvent négligés dans les modèles actuels. Nous adoptons donc ici, comme de nombreux autres auteurs, l'hypothèse selon laquelle la contrainte de cisaillement est proportionnelle à la contrainte normale. Il en découle une formulation de type Signorini avec frottement de Coulomb :

$$\dot{u}_N \leq 0 \quad \text{avec} \quad (1)$$

$$\text{soit } \dot{u}_N < 0, \quad \text{et } \sigma_T = 0, \quad \sigma_N = 0 \quad (2)$$

$$\text{soit } \dot{u}_N = 0, \quad \text{et } |\sigma_T| \leq \mu |\sigma_N| \quad \text{avec} \quad (3)$$

$$\text{soit } |\sigma_T| < \mu |\sigma_N| \quad \text{et } \dot{u}_T = 0 \quad (4)$$

$$\text{soit } |\sigma_T| = \mu |\sigma_N| \quad \text{et } \exists \lambda \geq 0 \quad \text{tel que } \dot{u}_T = -\lambda \sigma_T \quad (5)$$

On désigne ici par  $u$  le déplacement,  $u_T$  et  $u_N$  en étant les composantes tangentielle et normale. La Figure 2 montre un exemple simple de contact (ponctuel) entre deux corps.

Par la suite, nous supposons que le contact est imposé (pas d'ouverture des failles), et que la contrainte normale est constante (Tresca), et nous en déduisons une formulation variationnelle qui s'écrit comme une inéquation hyperbolique du second ordre, sous la forme suivante :

$$(\ddot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle \quad \forall v$$

où  $a$  est une forme bilinéaire symétrique représentant le travail des forces élastiques, tandis que  $f$  et  $j$  sont des fonctionnelles représentant le travail des forces extérieures (chargement) et des forces de frottement.

Des expériences de frottement en laboratoire ont permis de définir des lois de comportement macroscopique des failles soumises à un chargement normal constant. Citons d'abord les lois dites *rate and state* (que nous n'utiliserons pas), dans lesquelles le coefficient de frottement  $\mu$  s'écrit en fonction de la vitesse de glissement  $v$  et de variables d'état. Ces lois ont été déduites d'expériences de glissement quasi-statique, à petite vitesse

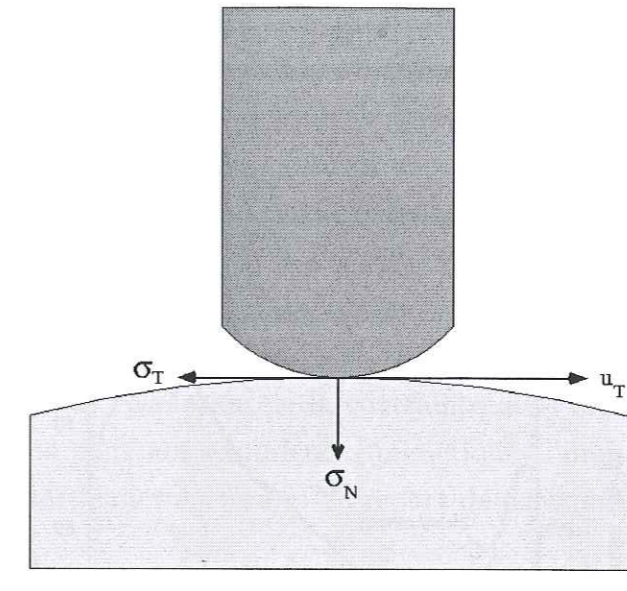


Figure 2 Modélisation du contact entre deux corps. On a représenté ici schématiquement un contact ponctuel, en précisant le déplacement tangentiel  $u_T$ , la contrainte normale  $\sigma_N$  (chargement) et la contrainte tangentielle  $\sigma_T$  (frottement) au point de contact.

de glissement, effectuées sur des surfaces de roche ou des gouges artificielles (une couche granulaire). La formulation la plus simple est due à Dieterich et Ruina (Dieterich, 1979; Ruina, 1983) :

$$\mu = \mu_0 + a \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) + b \ln\left(\frac{v_0 \theta}{L}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{v\theta}{L} \ln\left(\frac{v\theta}{L}\right)$$

avec  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $v_0 > 0$ ,  $L > 0$ . Dans cette version, la variable d'état  $\theta$  traduit l'état de la surface de contact et porte donc la mémoire de l'histoire du glissement. Dans cette loi, la chute de contrainte potentielle est contrôlée par le paramètre  $a - b$ , tandis que son taux de variation temporelle est contrôlé par  $v_0/L$ . On peut remarquer que cette formulation n'est pas définie pour  $v = 0$ .

La deuxième grande famille de lois de frottement est celle des lois dépendant du glissement, qui résultent d'expériences de rupture dynamique hétérogène (entre deux blocs rocheux) effectuées en laboratoire par Ohnaka et al. (1987), Ohnaka et Kuwahara (1990), Ohnaka et Shen (1999). Ici, le glissement lui-même fait office de variable-mémoire. La Figure 3 montre un exemple d'expérience où la contrainte cisailante ainsi que la vitesse de glissement sont tracées en fonction du glissement. La loi de frottement peut donc se formuler de la manière suivante :

$$\mu = \mu([u_T(t)])$$



où  $[u_T(t)]$  désigne le saut de la variable  $u_T$ , c'est-à-dire le glissement tangentiel, à l'instant  $t$ . D'une manière générale, le coefficient de frottement  $\mu$  est dans un premier temps une fonction croissante du glissement (phase de durcissement) puis, dès qu'une certaine valeur de frottement est atteinte,  $\mu$  décroît en fonction du glissement (phase d'affaiblissement), pour se stabiliser sur un palier constant (frottement résiduel).

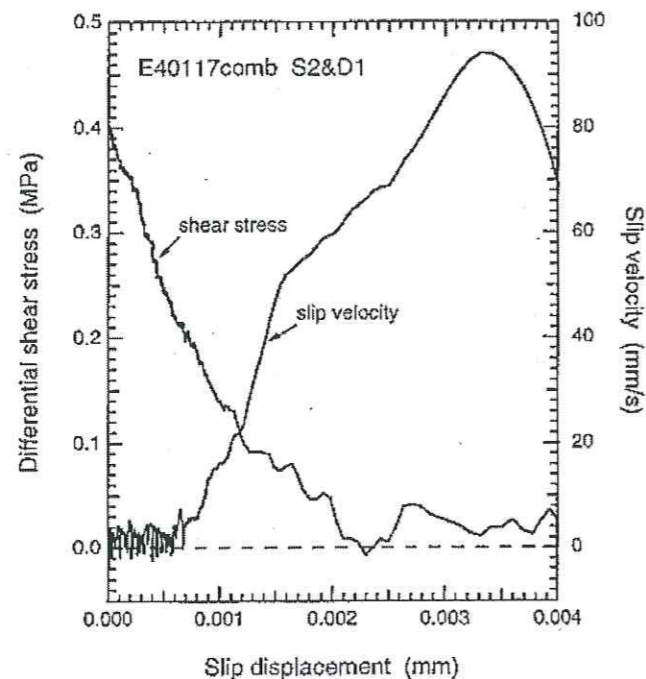


Figure 3 Résultat d'une expérience de frottement décrite par Ohnaka et Shen (1999). Il en ressort une loi de frottement dépendant du glissement, paramétrée par les résistances statique et dynamique et le glissement critique.

Les expériences d'Ohnaka et ses collaborateurs décrivent un unique événement de type « stick-slip-stick ». Elles ne suffisent pas pour décrire le cycle sismique entier, c'est-à-dire la succession de tels événements, puisqu'elles ne décrivent pas la phase de restauration de la résistance du matériau, qui rend possible le rechargement des contraintes. Ces expériences prouvent toutefois l'existence, à l'échelle du laboratoire, d'une phase préliminaire d'accélération progressive du glissement. A l'échelle sismogénique, une telle phase a été repérée sur certains sismogrammes par Iio (1995) pour des micro-séismes. Pour des grands tremblements de terre, les sismogrammes analysés par Ellsworth et Beroza (1995) montrent également une initiation, même si elle apparaît beaucoup moins progressive. Les observations restent encore très peu nombreuses, en raison du manque de données enregistrées suffisamment près de la faille, mais l'existence de la phase d'initiation fait maintenant l'unanimité (ou presque).

Les résultats numériques que nous présentons ici utilisent une version simplifiée des lois dépendant du glissement, où le coefficient de frottement est une fonction linéaire par morceaux du glissement :

$$\mu([u_T(t)]) = \max \left( \mu_s - (\mu_s - \mu_d) \frac{[u_T(t)]}{D_c}, \mu_d \right)$$

Remarquons que les expériences d'Ohnaka et ses collaborateurs ne permettent pas d'observer des phases de déchargement du système. Il faut donc considérer que les lois qui en découlent ne décrivent pas l'évolution de la contrainte mais de la résistance de cisaillement. Nous montrerons dans nos expériences numériques l'importance de ces périodes de déchargement, en particulier en termes de report de contraintes entre deux failles en interaction.

## Modélisations numériques de la rupture sismique

De tout le cycle sismique, la phase la mieux observée est la propagation de la rupture. Elle fait donc l'objet d'un grand nombre de modélisations numériques, beaucoup plus que l'initiation, l'arrêt ou les phases de glissement asismique. Cette section est dédiée à une revue rapide de ces modèles.

La plupart des modèles existant pour la rupture sismique sont des modèles cinématiques (Archuleta et Frazier (1978) par exemple), où le glissement sur la faille est imposé, et où on cherche à retrouver les champs de déplacement enregistrés par des appareils sismométriques autour de la faille. On calcule ainsi le champ d'onde rayonné par une source donnée.

Les modèles de rupture « spontanée », où le système évolue librement à partir d'une condition initiale et en suivant une loi de frottement donnée, sont le plus souvent des modèles en différences finies. Celles-ci ont l'avantage d'être faciles à implémenter et peu coûteuses en calcul. Elles permettent aussi de modéliser le comportement du milieu avec un ordre élevé, et les dislocations sur la faille peuvent être aisément introduites.

Examinons les principaux résultats obtenus par des méthodes de différences finies. Andrews (1976) implémente les différences finies en mode II (plan). La rupture 3-D est résolue avec une grille décalée en espace et en temps par Virieux et Madariaga (1982), avec une loi de frottement de Coulomb, et par Day (1982) avec un schéma de différences finies plus classique et une loi de frottement dépendant du glissement. Madariaga et al. (1998) reprennent la grille décalée en espace et en temps avec un schéma du quatrième



ordre en espace et une loi de frottement dépendant du glissement mais, les glissements et les contraintes sur la faille étant décalés, la précision du schéma ne peut pas dépasser le premier ordre près de la faille : le schéma donne une épaisseur à la faille qui dépend de la discrétisation. Ce schéma a été utilisé à de multiples reprises. Ionescu et Campillo (1999) utilisent pour le mode III (antiplan) une formulation en vitesse-contraintes sur une grille non décalée : leur méthode d'intégration dans le milieu est fondée sur la combinaison d'une méthode de directions alternées et du schéma de Lax-Wendroff; pour la condition aux limites, ils utilisent une expression, reliant la vitesse de glissement à la contrainte de cisaillement, provenant de l'intégration le long de lignes caractéristiques perpendiculaires à la faille. Favreau (2000) généralise ce schéma pour l'initiation de la rupture 3-D. Le cas bi-matériaux est étudié par Andrews et Ben-Zion (1997) en mode plan et avec un schéma proche de celui de Andrews (1976). Andrews (1999) discute de l'équivalence de l'introduction de la faille avec des « split nodes » dans une grille non décalée, ou avec une discontinuité de déplacement dans une grille décalée.

Les différences finies permettent un ordre élevé, mais les méthodes les plus précises sont les méthodes intégrales. La connaissance des fonctions de Green en chaque point de la frontière permet de résoudre le problème en ne discrétisant que celle-ci. L'absence d'erreurs dues à la propagation des ondes dans le milieu permet une meilleure précision. Pour des formulations intégrales de la rupture, on pourra consulter par exemple Boatwright et Quin (1986) pour la rupture 3-D, Andrews (1985) pour la rupture 2-D avec une loi dépendant du glissement. Bizzarri et al. (2001) dressent une comparaison des méthodes intégrales et des méthodes de différences finies. En contrepartie de leur précision, les méthodes intégrales interdisent toute hétérogénéité du milieu, dans la mesure où la fonction de Green doit être connue à l'avance. C'est pourquoi leurs applications restent limitées. Des modèles réalistes de séismes ont toutefois été réalisés par Aochi et Fukuyama (2001), Aochi et Madariaga (2003).

Les éléments finis (Oglesby, 1999; Aagaard, 2000) sont largement moins répandus, parce qu'il sont moins aisés à implémenter, en particulier si l'on veut un schéma d'ordre élevé. Avec un ordre faible, dès lors que des ondes se propagent dans le modèle, on est alors confronté à des problèmes de dissipation numérique dès que la taille du maillage excède une fraction de longueur d'onde. Néanmoins, les éléments finis gagnent petit à petit en popularité dans le milieu de la modélisation de la source sismique, parce qu'ils permettent de modéliser des géométries complexes. La courbure des failles peut être approchée de façon aussi précise qu'avec les méthodes intégrales. Oglesby et al. (1998, 2000) modélisent la rupture sur des failles hétérogènes et planes par segments. Des modèles réalistes de tremblements de terre connus ont été proposés, par exemple par Oglesby et Day (2001).

Une classe particulière d'éléments finis, appelée éléments spectraux (Bernardi & Maday, 2001), a été développée par Komatitsch et Vilotte (1998), Komatitsch et Tromp (1999) pour la propagation d'onde 3-D en élastodynamique. Ces éléments finis d'ordre élevé ont été étudiés en particulier pour réduire les coûts de calcul (condensation de masse) ainsi que la dispersion numérique. Depuis, Ampuero (2002) a implémenté les conditions de contact et frottement pour modéliser la rupture sur des failles de géométrie complexe.

## Enjeux de l'approche spectrale

Les expériences numériques détaillées ci-dessus, de même que celles que nous exposons dans le Chapitre 2, ne permettent pas suffisamment de précision dans la simulation du glissement pendant l'initiation. Pour les schémas explicites, la condition de stabilité (CFL) ne permet pas de simuler une initiation suffisamment longue. Quant à notre schéma éléments finis, il est inconditionnellement stable mais présente un problème de dispersion numérique pour les grands pas de temps.

L'idée d'une approche spectrale s'est d'abord imposée parce que le problème de l'initiation, qui permet de caractériser l'apparition des instabilités, est attaché à une échelle de temps caractéristique largement supérieure à celle de la propagation des ondes (mais inférieure à celle du fluage). Ce temps caractéristique pose des problèmes de stabilité et/ou de dispersion d'un schéma en temps. Le calcul spectral permet de s'affranchir de ces limitations, puisqu'il ne donne pas la solution évolutive complète mais calcule le mode propre porteur de la forme caractéristique de cette solution.

En dehors de l'approche spectrale que nous développons, il existe peu de modèles mathématiques de l'initiation. Dieterich (1992) étudie la localisation du glissement quasi-statique sur une faille plane isolée soumise à une loi *rate and state*. Avec la même loi de frottement, Lapusta et Rice (2003) étudient les prémices de la localisation et de la propagation de la rupture en élastodynamique (mode III antiplan). On compte encore moins de modèles réalisant une analyse de stabilité. Les premiers étaient des modèles simplifiés de masse-ressort (Rice & Ruina, 1983; Gu et al., 1984), surtout utilisés pour modéliser le cycle sismique entier.

Dans le cadre d'une loi de frottement dépendant du glissement, Campillo et Ionescu (1997), Ionescu et Campillo (1999) ont développé une approche spectrale de l'initiation, qui est reprise dans le chapitre 3 pour des géométries plus complexes (voir aussi Ionescu et Wolf (2003), Wolf et al. (2003)). L'initiation est alors vue comme une petite perturbation obtenue par linéarisation autour d'un état d'équilibre dans lequel tous les points de la



faille sont au seuil de résistance statique. Ils montrent que, lors de la phase d'initiation, le glissement se décompose en une partie radiative rapidement négligeable et une partie non radiative dominante, qui peut se calculer comme le premier mode du problème linéarisé. L'essentiel de leurs résultats est résumé dans le chapitre 3. Dans la suite de ce même chapitre, nous généralisons cette approche au cas de géométries de failles quelconques, ce qui permet de quantifier l'effet de l'interaction des failles.

Le problème spectral associé au problème dynamique permet donc de déterminer une forme de glissement caractéristique de l'initiation, pour une géométrie et un taux d'affaiblissement du frottement (en fonction du glissement) donnés. Ce résultat conduit à définir la notion de *signature* de l'initiation, développée par Voisin et al. (2002) pour une faille plane segmentée. C'est cette notion qui nous permet de relier l'étude de l'initiation avec le problème de la prédiction à court terme des tremblements de terre.

On peut aussi étudier la version statique de ce problème spectral, et on obtient une condition de stabilité qui s'exprime par un taux d'affaiblissement critique, c'est-à-dire la pente critique de la loi de frottement dépendant du glissement : au-delà de cette pente, le glissement donnera lieu à une rupture sismique ; en-deçà, le glissement restera stable. Signalons que Uenishi et Rice (2002), en étudiant le cas d'une faille soumise à un chargement hétérogène, ont retrouvé les résultats de Ionescu et Campillo (1999), Dascalu et al. (2000) concernant la limite de stabilité, définie par une constante universelle, et concernant la taille critique de la zone de glissement. Ils montrent aussi que ces résultats sont indépendants de la forme du chargement.

Lorsque l'affaiblissement prend exactement la valeur critique, le mode obtenu peut s'interpréter comme un glissement quasi-statique qui relie une position d'équilibre à une autre position d'équilibre : il s'agit en quelque sorte d'une initiation infinie, où le glissement critique ne serait jamais atteint. On peut imaginer que ce mode caractéristique de déformation soit observé sur une famille de failles qui subiraient une succession de cycles comportant une phase de glissement stable suivie par une phase de restauration de la résistance du matériau, cette dernière permettant le rechargement des contraintes en vue du prochain cycle. Dans le chapitre 4, qui reprend Wolf et al. (2003), ce raisonnement nous permet de comparer, avec un certain succès, ce mode statique calculé sur une géométrie de faille réaliste avec des observations effectuées sur le terrain.

L'approche spectrale apparaît donc comme une bonne solution pour simuler une évolution lente d'un réseau de failles donné, qu'il s'agisse d'un glissement quasi-statique ou d'une initiation lente.

## Aperçu du contenu de la thèse

Le problème mathématique construit pour modéliser l'évolution spontanée d'un réseau de failles est envisagé sous des angles divers - résultats théoriques, numériques, puis comparaisons avec les observations - dans les différents chapitres de la thèse. Les hypothèses de départ sont les suivantes :

- le milieu environnant les failles a un comportement élastique
- la loi de frottement est de type Tresca (déplacement normal nul, contrainte normale imposée) avec un coefficient de frottement dépendant du glissement
- le glissement sur chaque segment de faille est positif ou nul (selon une normale choisie arbitrairement)

Cette dernière hypothèse vient du fait que le signe du glissement est imposé par l'orientation globale des contraintes régionales. Etant donné que la résistance statique des failles est forte vis-à-vis des variations de contraintes occasionnées par les épisodes de glissement, il faut que les contraintes régionales soient également fortes pour qu'un épisode de glissement se produise. On peut donc supposer que les contraintes appliquées sur un même segment de faille ne changent pas de signe au cours du glissement. Dès lors, il suffit d'orienter correctement la normale sur chaque faille du réseau pour que l'hypothèse de positivité du glissement soit justifiée. Ce n'est que près de la surface libre, dans un modèle tridimensionnel complexe dépassant le cadre de la thèse, que des changements de signe sont envisagés. Les observations montrent peu d'exemples possibles de tels comportements. Par ailleurs, lorsque les contraintes sont localement faibles, le glissement peut rester localement nul. Il en résulte que la géométrie de la zone de glissement n'est pas imposée : l'interface que nous définissons contient simplement l'ensemble des points candidats au glissement. Pour commencer, le chapitre 1 contient des résultats concernant l'existence (dans le cas bidimensionnel) et l'unicité (dans le cas unidimensionnel) de la solution du problème d'évolution. Dans le chapitre 2, ce problème est résolu numériquement (en mode III antiplan, c'est-à-dire dans un cas 2-D scalaire) par un schéma de Newmark en temps et une discrétisation en espace par éléments finis. L'observation du glissement correspondant aux solutions fait apparaître des premières manifestations de l'interaction des failles, qui se traduisent « mathématiquement » par l'impossibilité de résoudre le problème par linéarisation de la loi de frottement. On doit alors utiliser une méthode de correction par sous-espaces (*subspace correction method*). Il en existe de nombreuses. Nous avons choisi une méthode de décomposition de domaine, la méthode de Schwarz, qui s'apparente dans les cas simples à une méthode de relaxation de type Gauss-Seidel.

Dans le chapitre 3, les interactions sont étudiées sous l'angle de l'analyse spectrale non linéaire. Les solutions du problème statique, ainsi que les solutions « explosives » du



problème dynamique, sont aussi solutions d'un problème de recherche de la plus grande valeur propre d'un opérateur non linéaire, défini uniquement sur la faille par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange. La première valeur propre est approchée par le quotient de Rayleigh de l'opérateur non linéaire, que nous calculons par la méthode des puissances. Cette méthode itérative très simple implique, à chaque étape du calcul, la résolution d'un nouveau problème d'optimisation (de taille nettement inférieure au problème de départ) par une méthode classique de dualité.

Les deux outils numériques développés dans les chapitres 2 et 3 sont utilisés pour des applications géophysiques dans le chapitre 4. Sous certaines hypothèses, l'analyse spectrale du problème statique permet de retrouver certaines caractéristiques des profils de glissement de réseaux de failles normales en Afar (Afrique de l'Est) et de les interpréter en termes de propagation et d'interaction des segments de faille. En nous appuyant sur des travaux de recherche concernant l'apparition de zones de relai entre deux segments de failles se propageant l'un vers l'autre, nous montrons que les paramètres géométriques favorables correspondent dans nos simulations à l'apparition des phénomènes d'interaction non coplanaire (zones d'ombre). Enfin, des simulations dynamiques montrent l'influence de la fracturation secondaire (endommagement) sur la forme des profils de glissement.

## Chapitre 1

### Le problème d'évolution : résultats d'existence et d'unicité

Dans ce chapitre, nous étudions l'évolution dynamique d'un corps élastique en contact unilatéral avec frottement avec un support rigide. Pour rendre compte du contact, nous utilisons le modèle de Tresca (contrainte normale imposée, déplacement normal nul) et une loi de frottement dépendant du glissement. Nous prouvons l'existence d'une solution dans le cas bidimensionnel (mode antiplan ou plan), en régularisant l'opérateur de frottement puis en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin pour construire une suite de solutions approchées en dimension finie. L'unicité de la solution est démontrée dans le cas unidimensionnel. Nous montrons aussi que le problème viscoélastique a une solution unique qui converge, lorsque la viscosité tend vers zéro, vers une solution du problème élastique. Ce résultat est important parce que le problème viscoélastique peut être considéré comme une régularisation du problème élastique, en particulier dans le cadre de la modélisation des tremblements de terre, qui sont des phénomènes dont l'échelle de temps caractéristique est trop courte pour permettre des effets de viscosité importants.

Cette étude a fait l'objet d'un article (Ionescu, Nguyen et Wolf, publié dans *Non-linear Analysis*) retranscrit ci-dessous. Dans l'étude de la rupture sismique, ces résultats peuvent s'appliquer à l'évolution spontanée d'un réseau de failles initialement dans une position d'équilibre et soumis à une petite perturbation, par exemple une onde émise par un séisme lointain.



## Slip dependent friction in dynamic elasticity

Ioan R. IONESCU<sup>1</sup>, Quoc-Lan NGUYEN<sup>2</sup> & Sylvie WOLF<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mathématiques, Université de Savoie, Campus Scientifique,  
73376 Le Bourget-du-Lac Cedex, France

<sup>2</sup> National Polytechnic Institute, Ho-Shi-Minh,  
143/2D Xo Viet nghe Tinh (he m), P25, Q.BT, Ho-Shi-Minh, Vietnam

<sup>3</sup> Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Université Joseph Fourier,  
BP 53X, 38041 Grenoble Cedex 9, France

### Abstract

The dynamic evolution with frictional contact of an elastic body is considered. The contact is described by the Tresca model and a slip dependent friction law. The existence of a solution is proved in the two-dimensional case. The uniqueness is proved for the one-dimensional shearing problem. The unique solution of the viscoelastic problem is shown to converge, for a vanishing viscosity, to a solution of the elastic problem.

*Keywords* : slip dependent friction, dynamic elasticity, Tresca contact, existence, uniqueness, viscoelasticity, vanishing viscosity

## 1.1 Introduction

Many applications in solid mechanics and geophysics involve frictional contact problems between elastic structures. The first existence and uniqueness results for contact problems with friction in elastodynamics were obtained by Duvaut and Lions (1976). Then Martins and Oden (1987) relaxed, a few years later, the non-penetrability of mass by considering the normal compliance model of contact with friction. In the viscoelastic case they obtained in Martins and Oden (1987) existence and uniqueness results (see also Kuttler (1997)).

In the study of some frictional processes, such as stick-slip motions and earthquakes modeling, it is important to consider that the friction coefficient  $\mu$  varies during the slip process from a "static" value  $\mu_s$  down to a "dynamic" or "kinetic" value  $\mu_d$ . Three current models of such a variation are considered in geophysics and solid mechanics. The first one, discussed latter, corresponds to a smooth dependence of the friction coefficient on the slip  $u_T$ , i.e.  $\mu = \mu(|u_T|)$ . The second one deals with a slip rate dependence of the friction coefficient (Oden & Martins, 1985; Scholz, 2002), i.e.  $\mu = \mu(|\dot{u}_T|)$ . For this model, the

solution of the mathematical problem in dynamic elasticity is not uniquely determined and presents shocks (Ionescu & Paumier, 1993, 1994) though the problem is well-posed in dynamic viscoelasticity (Kuttler & Schillor, 1999; Ionescu, 2002). The third model uses a rate and state dependent friction law : see for instance Ruina (1983), Rice and Ruina (1983), Dieterich (1994), Perrin et al. (1995). A stability analysis and a comparison with the slip rate model are given by Favreau et al. (1999).

The physical model of slip weakening friction (i.e. the decrease of the friction force with slip) was introduced by Rabinowicz (1951) in the geophysical context of earthquakes modeling. Many experimental studies, e.g. Ohnaka et al. (1987), pointed out the good agreement of this model with experimental data. Since the slip dependent friction model is rate independent and can describe a large variation of the slip rate, it was intensively used in the description of earthquake initiation (Campillo & Ionescu, 1997; Ionescu & Campillo, 1999; Favreau et al., 1999; Dascalu et al., 2000).

The first mathematical results for the slip weakening model of friction in elastostatics were obtained by Ionescu and Paumier (1996). They proved the existence of at least a solution and gave sufficient conditions for uniqueness and stability. Moreover, they analyzed the bifurcation points between different branches of solutions. More recently, the quasi-static evolution of an elastic body with slip dependent friction was studied by Corneschi et al. (2002). An existence result, for a sufficiently small friction coefficient, was proved. In dynamics, only the viscoelastic case was considered by Ionescu and Nguyen (2003) where an existence and uniqueness result was obtained in the general three-dimensional case. However, in some physical applications, such as earthquakes, the characteristic time of the phenomenon is too small to allow significant viscosity effects. Therefore, the asymptotic limit for vanishing viscosity must be considered to study the elastic problem.

The aim of this paper is to study the dynamic evolution of an elastic body which is in frictional contact with a rigid foundation. The contact is described by the Tresca model and a slip dependent friction law. In Section 2 the problem is stated and after some preliminaries (Section 3) the variational formulation is given as a second order hyperbolic inequality

$$(\ddot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle.$$

As far as we know, there exists neither existence nor uniqueness result for this variational inequality under general assumptions on  $j$ . Indeed, the main difficulty is the non-monotone dependence of  $j$  with respect to the first variable. This loss of monotony is due to the slip weakening friction model used here. However, in modeling unstable pheno-



mena, such as earthquakes, we have to expect "bad" mathematical properties of the operators involved in the abstract problem. The existence of a solution in the two-dimensional case (in-plane and anti-plane problems) is proved in Section 4. The proof, based on the Galerkin method, is classical and constructive, and uses regularization techniques and compactness arguments. In order to obtain sufficient a priori estimates, a smooth variation of  $j$  with respect to the first variable is assumed. Since the technique used here is specific to the two-dimensional case, the existence of a solution of the three-dimensional problem remains an open question.

The one-dimensional shearing problem is studied in section 5 and the uniqueness of the solution is proved. Bearing in mind this last encouraging result, one can conjecture the uniqueness of the solution in the general case.

In Section 6 we consider a viscoelastic material with a small viscosity instead of a perfect elastic body. Since this new problem is well posed (i.e. it has a unique solution) one can consider it as the regularized problem of the elastic case. We study this singular perturbation problem and we prove that the asymptotic limit (for a vanishing viscosity) of the viscoelastic solution is a solution of the elastic problem.

## 1.2 Problem statement

Let  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$  be a bounded domain, representing the interior of a viscoelastic body, with a smooth boundary  $\Gamma = \partial\Omega$  which is divided into three disjoint parts  $\Gamma = \bar{\Gamma}_d \cup \bar{\Gamma}_c \cup \bar{\Gamma}_f$  with  $meas(\Gamma_d) > 0$ . The mechanical problem (MP) consists in finding the displacement field  $u : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$  such that :

$$\rho \ddot{u}(t) = \operatorname{div} \sigma(t) + r(t) \quad \text{in } \Omega, \quad (1.1)$$

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\epsilon(u(t)) \quad \text{in } \Omega, \quad (1.2)$$

$$u(t) = 0 \quad \text{on } \Gamma_d, \quad \sigma(t)n = F(t) \quad \text{on } \Gamma_f, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_N(t) &= -S, \quad S \geq 0 \quad \text{on } \Gamma_c, \\ \sigma_T(t) &= -S\mu(|u_T(t)|) \frac{\dot{u}_T(t)}{|\dot{u}_T(t)|} \quad \text{if } \dot{u}_T(t) \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_c, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$|\sigma_T(t)| \leq S\mu(|u_T(t)|) \quad \text{if } \dot{u}_T(t) = 0 \quad \text{on } \Gamma_c,$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1 \quad \text{in } \Omega, \quad (1.5)$$

where  $\rho > 0$  is the density,  $\mathcal{A}$  is a fourth order tensor,  $\sigma$  is the stress tensor,  $\epsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$  is the small strain tensor,  $n$  is the unit outward normal vector on  $\Gamma$ ,  $\sigma_N = \sigma n \cdot n$  is the normal stress,  $\sigma_T = \sigma n - \sigma_N n$  is the tangential stress,  $u_N = u \cdot n$  is the normal displacement,  $u_N^+$  is its positive part, and  $u_T = u - u_N n$  is the tangential displacement. Here  $r$  represents the given body forces and  $F$  is the load on  $\Gamma_f$ .

Equations (1.4) represent the contact with slip dependent friction along the surface  $\Gamma_c$  with a rigid and fixed body. We consider here the Tresca model, i.e. the contact surface is given and we impose a non-positive normal stress  $-S$ . Equations (1.4) assert the tangential (friction) stress is bounded by the normal stress multiplied by the value of the friction coefficient  $\mu(|u_T(t)|)$ . If such a limit is not attained, sliding does not occur. Otherwise, the friction stress is opposed to the slip rate and its absolute value depends on the slip.

**Remark 1.2.1.** *Since  $\mu$  is a function of  $u_T$ , the friction model considered here is slip dependent. The physical model of slip dependent friction was introduced in the geophysical context of earthquakes modeling. In this context, it is usual to suppose that the slip rate  $\dot{u}_T$  (on the fault  $\Gamma_c$ ) has a single direction and a single sense during the slip, i.e. there exists a tangential vector  $\tau$  and a scalar  $s$ , with  $s \geq 0$  (or  $s \leq 0$ ) such that  $\dot{u}_T = s\tau$ . Even in this case, only the sequence "stick-slip-stick" (i.e.  $s = 0$ ;  $s > 0$ ;  $s = 0$ ) has to be considered. Indeed, without an explicit loading/unloading criterion, the slip dependent friction model (in the form used here) is more related to a surface potential than to a friction law, except for local monotonic loading.*

**Remark 1.2.2.** *In order to state the anti-plane problem we have to consider a domain  $\Omega \times \mathbf{R}$  with  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ ,  $d = 1, 2$  and an isotropic elastic material with the Lamé constants  $\lambda, G > 0$ . The anti-plane mechanical problem (AMP) consists in finding the displacement in the  $Ox_3$  direction  $u : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  such that :*

$$\rho \ddot{u}(t) = G \nabla^2 u(t) + r(t) \quad \text{in } \Omega, \quad (1.6)$$

$$u(t) = 0 \quad \text{on } \Gamma_d, \quad G \partial_n u = F(t) \quad \text{on } \Gamma_f, \quad (1.7)$$

$$|G \partial_n u| \leq S\mu(|u(t)|) \quad \text{if } \dot{u}(t) = 0 \quad \text{on } \Gamma_c, \quad (1.8)$$

$$G \partial_n u = -S\mu(|u(t)|) \frac{\dot{u}(t)}{|\dot{u}(t)|} \quad \text{if } \dot{u}(t) \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_c, \quad (1.9)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1 \quad \text{in } \Omega, \quad (1.10)$$

where  $\partial_n$  is the outward normal derivative.



### 1.3 Assumptions, notations and preliminaries

In the study of problem (1.1)-(1.5) we suppose that  $\mathcal{A}$  is a symmetric and positively defined fourth-order tensor, i.e.

$$\mathcal{A}_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad \mathcal{A}(x)\epsilon : \sigma = \mathcal{A}(x)\sigma : \epsilon, \quad \mathcal{A}(x)\epsilon : \epsilon \geq \alpha|\epsilon|^2 \quad (1.11)$$

with  $\alpha > 0$ , a.e.  $x \in \Omega$ , for all  $i, j, k, l = \overline{1, d}$  and  $\sigma, \epsilon \in \mathbf{R}_S^{d \times d}$ .

We suppose that the friction coefficient  $\mu : \Gamma_c \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  is two times differentiable with respect to the second variable and there exist  $M_1, M_2, \mu_0 > 0$  such that

$$0 \leq \mu(x, u) \leq \mu_0 \quad \text{a.e. } x \in \Gamma_x \quad \forall u \in \mathbf{R}_+, \quad (1.12)$$

$$|\partial_u \mu(x, u)| \leq M_1, \quad |\partial_{uu} \mu(x, u)| \leq M_2, \quad \forall u \in \mathbf{R}_+ \quad \text{a.e. } x \in \Gamma_c \quad (1.13)$$

and the functions  $x \rightarrow \mu(x, u)$ ,  $x \rightarrow \partial_u \mu(x, u)$  and  $x \rightarrow \partial_{uu} \mu(x, u)$  are measurable for all  $u \in \mathbf{R}_+$ .

We shall also suppose that the density  $\rho \in L^\infty(\Omega)$  is positive, i.e. there exists  $\rho_0$  such that  $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ . Finally, the body forces  $r$  and the loads  $F, S$  are assumed to satisfy

$$r \in W^{2,2}(0, T, [L^2(\Omega)]^d), \quad F \in W^{2,2}(0, T, [L^2(\Gamma_f)]^d), \quad (1.14)$$

$$S(s) \geq 0, \quad S \in L^\infty(\Gamma_c). \quad (1.15)$$

Let us denote  $H := [L^2(\Omega)]^d$  endowed with the inner product

$$(u, v) := \int_\Omega \rho u \cdot v dx, \quad \forall u, v \in H$$

which generates an equivalent norm denoted by  $|\cdot|$ . Let us denote by  $\|\cdot\|$  the norm in  $[H^1(\Omega)]^d$  and let  $V_0$  be the closed subspace of  $[H^1(\Omega)]^d$  given by

$$V_0 := \{v \in [H^1(\Omega)]^d; v = 0 \text{ on } \Gamma_d\}.$$

Since  $V_0$  is dense in  $H$ , we identify  $H$  and  $H'$  and we write  $V_0 \subset H = H' \subset V_0'$ . We shall suppose that

$$u_0, u_1 \in V_0. \quad (1.16)$$

If we denote by  $a : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbf{R}$  the following bilinear and symmetric application

$$a(u, v) := \int_\Omega \mathcal{A}\epsilon(u) : \epsilon(v),$$

then from (1.11) and Korn inequality we find  $M, D > 0$  such that

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|, \quad a(v, v) \geq D\|v\|^2 \quad \forall v, u \in V_0. \quad (1.17)$$

Finally we define  $j : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbf{R}$  and  $f : V_0 \rightarrow V_0'$  as follows :

$$j(u, w) = \int_{\Gamma_c} S(s)\mu(s, |u_T(s)|)|w_T(s)| ds, \quad u, w \in V_0, \quad (1.18)$$

$$\langle f(t), v \rangle = (r(t), v) + \int_{\Gamma_f} F(t, s) \cdot v(s) ds + \int_{\Gamma_c} S(s)v_N(s) ds, \quad v \in V_0. \quad (1.19)$$

Using these notations one can easily deduce that any solution of (1.1)-(1.5) satisfies the following variational problem (VP) : Find  $u : [0, T] \rightarrow V_0$  such that for all  $v \in V_0$  we have

$$(\ddot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle, \quad (1.20)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1. \quad (1.21)$$

**Remark 1.3.1.** *The anti-plane problem (AMP) has the same variational formulation. Indeed, if we put*

$$a(u, w) = G \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w, \quad j(u, w) = \int_{\Gamma_c} S(s)\mu(s, |u(s)|)|w(s)| ds, \quad (1.22)$$

$$\langle f(t), v \rangle = (r(t), v) + \int_{\Gamma_f} F(t, s)v(s) ds, \quad (1.23)$$

then from (1.6)-(1.10) we deduce (1.20)-(1.21).

## 1.4 Existence of a solution

In order to prove the existence of a solution for the above problem we will suppose in addition that

$$\partial_u \mu(s, 0) = 0, \quad (1.24)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{A}\varepsilon(u_0) \in H, \quad \sigma(u_0)n = F(0) \text{ on } \Gamma_f, \quad \sigma_N(u_0) = -S \text{ on } \Gamma_c, \quad (1.25)$$

$$\sigma_T(u_0) = 0, \quad u_{1T} = 0 \text{ on } \Gamma_c. \quad (1.26)$$

The first condition (1.24), on the slip derivative of  $\mu$  calculated in  $u = 0$ , is specific to a slow initiation phase of an earthquake. The importance of the initial slope  $\partial_u \mu(s, 0)$  in the duration of initiation was pointed out by Ionescu and Campillo (1999). Eq. (1.25) gives the regularity of the initial data and ensures the compatibility between the initial data and the boundary conditions. Finally, (1.26) imply that at the initial time  $t = 0$  there is no frictional process on  $\Gamma_c$ .

The main result of this section is the following :

**Theorem 1.4.1.** *If we suppose (1.24)-(1.26) and  $d \leq 2$ , then there exists a solution  $u$  of (VP) with the following regularity :*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T, V_0) \cap W^{2,\infty}(0, T, H). \quad (1.27)$$

**Remark 1.4.2.** *If we replace (1.25)-(1.26) by*

$$\nabla^2 u_0 \in H, \quad G\partial_n u_0 = F(0) \text{ on } \Gamma_f, \quad \partial_n u_0 = 0, \quad u_1 = 0 \text{ on } \Gamma_c,$$

*then we obtain a similar existence result for the anti-plane problem (AMP).*

We recall here from Ionescu (2002) the following lemma which will be useful in the proof of the theorem.

**Lemma 1.4.3.** *Let  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$  be as above and let  $\alpha \in [2, \frac{2(d-1)}{d-2}]$  if  $d \geq 3$  and  $\alpha \geq 2$  if  $d = 2$ . Then, for  $\beta = \frac{d(\alpha-2)+2}{2\alpha}$  if  $d \geq 3$  or if  $d = 2$  and  $\alpha = 2$ , and for all  $\beta \in ]\frac{\alpha-1}{\alpha}, 1[$  if  $d = 2$  and  $\alpha > 2$ , there exists a constant  $C = C(\beta)$  such that :*

$$\|v\|_{L^\alpha(\Gamma)} \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1-\beta} \|v\|_{H^1(\Omega)}^\beta, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (1.28)$$

**Proof of Theorem 1.4.1** In order to prove the existence of the solution  $u$  of (VP) we shall use the Faedo-Galerkin method. For this, let us consider  $\varphi_i \in V_0$  a sequence of linear independent functions such that  $V_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$  where  $V_m = \operatorname{Span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ . We shall suppose that  $V_m$  is chosen such that for  $m$  large enough we have :

$$u_0, u_1 \in V_m.$$

Let us extend  $\mu$  as an even function for  $u < 0$ , i.e. we consider  $\tilde{\mu} : \Gamma_c \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$  given by

$$\tilde{\mu}(s, u) = \mu(s, |u|), \quad s \in \Gamma_c, \quad u \in \mathbf{R}.$$

We consider the family of convex and differentiable functions  $\Psi_\varepsilon : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  given by

$$\Psi_\varepsilon(v) = \sqrt{|v|^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon, \quad v \in \mathbf{R}.$$

for all  $\varepsilon$  positive, and we define  $j_\varepsilon : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbf{R}$ , a family of regularized frictional functionals, depending on  $\varepsilon > 0$  :

$$j_\varepsilon(u, v) = \int_{\Gamma_c} S\tilde{\mu}(s, u_T(s)) \Psi_\varepsilon(v_T(s)) ds, \quad u, v \in V_0, \quad (1.29)$$

The functionals  $j_\varepsilon$  are Gâteaux-differentiable with respect to the second argument and represent an approximation of  $j$ , i.e. there exists a constant  $C$  such that

$$|j_\varepsilon(u, v) - j(u, v)| \leq C\varepsilon \quad \forall u, v \in V_0. \quad (1.30)$$

We denote by  $J_\varepsilon : V_0 \times V_0 \rightarrow V_0'$  the derivative of  $j_\varepsilon$  with respect to the second variable given by

$$\langle J_\varepsilon(w, v), z \rangle = \int_{\Gamma_c} S\tilde{\mu}(s, w_T(s)) \Psi'_\varepsilon(v_T(s)) z_T(s) ds, \quad w, v, z \in V_0, \quad (1.31)$$

We can introduce now the following variational problem with regularized friction ( $VP_\varepsilon^m$ ) in the finite-dimensional space  $V_m$  : Find  $u_\varepsilon^m : [0, T] \rightarrow V_m$  such that for all  $v \in V_m$  we have

$$(\ddot{u}_\varepsilon^m(t), v) + a(u_\varepsilon^m(t), v) + \langle J_\varepsilon(u_\varepsilon^m(t), \dot{u}_\varepsilon^m(t)), v \rangle = \langle f(t), v \rangle, \quad (1.32)$$

$$u_\varepsilon^m(0) = u_0, \quad \dot{u}_\varepsilon^m(0) = u_1. \quad (1.33)$$



Since  $(u; v) \rightarrow J_\varepsilon(u, v)$  is a Lipschitz continuous function on  $V_m \times V_m$ , we deduce that (1.32) - (1.33) has a unique (global) solution  $u_\varepsilon^m \in C^2([0, T]; V_m)$ .

The continuation of the proof is divided into two parts. We begin by proving some a priori estimates. Only after that, we shall prove that when  $\varepsilon \rightarrow 0$  and  $m \rightarrow +\infty$  the limit, in a appropriate sense, of  $u_\varepsilon^m$  is a solution of (VP).

In order to simplify the notations we shall omit the indices  $\varepsilon$  and  $m$  in the first part of the proof.

i) *A priori estimates*

Since  $\langle J_\varepsilon(u, w), w \rangle \geq 0$  for all  $u, w \in V_0$ , if we let  $v = \dot{u}(t)$  in (1.32), we obtain

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|\dot{u}(t)|^2 + a(u(t), u(t))] \leq \langle f(t), \dot{u}(t) \rangle.$$

If we integrate this inequality over  $(0, t)$  and we use the the coercivity of  $a$ , then we find

$$\begin{aligned} |\dot{u}(t)| + D\|u(t)\|^2 &\leq |u_1|^2 + a(u_0, u_0) + 2 \langle f(t), u(t) \rangle - 2 \langle f(0), u_0 \rangle \\ &\quad - 2 \int_0^t \langle \dot{f}(\tau), u(\tau) \rangle d\tau. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Let us denote by  $C > 0$  a generic constant independent of  $m$  and  $\varepsilon$ . The following inequality can be deduced

$$|\dot{u}(t)|^2 + \|u(t)\|^2 \leq C + C \int_0^t (|\dot{u}(\tau)|^2 + \|u(\tau)\|^2) d\tau.$$

and from the Gronwall lemma we have :

$$\begin{cases} \{u_\varepsilon^m\}_{\varepsilon, m} & \text{is bounded in } L^\infty(0, T; V_0), \\ \{\dot{u}_\varepsilon^m\}_{\varepsilon, m} & \text{is bounded in } L^\infty(0, T; H). \end{cases} \quad (1.35)$$

Since  $u_\varepsilon^m \in W^{3, \infty}(0, T; V_m)$  we compute the derivative of (1.32) with respect to  $t$  and we let  $v = \ddot{u}(t)$  to obtain

$$(\ddot{u}(t), \ddot{u}(t)) + a(\dot{u}(t), \ddot{u}(t)) + \left\langle \frac{d}{dt} J_\varepsilon(u(t), \dot{u}(t)), \ddot{u}(t) \right\rangle = \langle \dot{f}(t), \ddot{u}(t) \rangle.$$

After some algebra we have

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} J_\varepsilon(u(t), \dot{u}(t)), \ddot{u}(t) \right\rangle &= \int_{\Gamma_c} S \partial_u \tilde{\mu}(u_T(t)) \dot{u}_T(t) \Psi'_\varepsilon(\dot{u}_T(t)) \ddot{u}_T(t) ds \\ &\quad + \int_{\Gamma_c} S \tilde{\mu}(u_T(t)) \frac{\varepsilon^2 \dot{u}_T^2(t)}{(\dot{u}_T^2(t) + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} ds \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} &\geq \int_{\Gamma_c} S \partial_u \tilde{\mu}(u_T(t)) \dot{u}_T(t) \Psi'_\varepsilon(\dot{u}_T(t)) \ddot{u}_T(t) ds \\ &= \int_{\Gamma_c} S \partial_u \tilde{\mu}(u_T(t)) \frac{d}{dt} \{P(\dot{u}_T(t))\} ds, \end{aligned} \quad (1.37)$$

where we have denoted  $P(x) = \int_0^x \xi \Psi'_\varepsilon(\xi) d\xi$ . Using (1.37) in the last equality we find

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|\ddot{u}(t)|^2 + a(\dot{u}(t), \dot{u}(t))] + \int_{\Gamma_c} S \partial_u \tilde{\mu}(s, u_T(t)) \frac{d}{dt} \{P(\dot{u}_T(t))\} ds \leq \langle \dot{f}(t), \ddot{u}(t) \rangle$$

and after an integration over  $(0, t)$  we have

$$\begin{aligned} |\ddot{u}(t)|^2 + d\|\dot{u}(t)\|^2 &\leq a(u_1, u_1) + |\ddot{u}(0)|^2 + 2 \int_0^t \langle \dot{f}(\tau), \ddot{u}(\tau) \rangle d\tau \\ &\quad - 2 \int_0^t \int_{\Gamma_c} S \partial_u \tilde{\mu}(s, u_T(\tau)) \frac{d}{d\tau} \{P(\dot{u}_T(\tau))\} ds d\tau. \end{aligned} \quad (1.38)$$

In order to estimate  $|\ddot{u}(0)|$  we put  $t = 0$  in (1.32) to find

$$(\ddot{u}(0), v) = (r(0), v) + \int_{\Gamma_f} F(0) \cdot v ds - \int_{\Gamma_c} S v_N ds - a(u_0, v) - \langle J_\varepsilon(u_0, u_1), v \rangle$$

and we use (1.25) - (1.26) to deduce

$$\ddot{u}(0) = r(0) - \text{div } \mathcal{A}\varepsilon(u_0)$$

hence  $|\ddot{u}(0)|$  is bounded. After an integration by parts, the first integral of (1.38) can be estimate as follows

$$\int_0^t \langle \dot{f}(\tau), \ddot{u}(\tau) \rangle d\tau \leq C + \frac{D}{3} \|\dot{u}(t)\|^2 + C \int_0^t \|\dot{u}(\tau)\|^2 d\tau.$$



The second integral of (1.38) is majorized by

$$\left| \int_0^t \int_{\Gamma_c} S \partial_u \tilde{\mu}(s, u_T(\tau)) \frac{d}{dt} \{P(\dot{u}_T(\tau))\} ds d\tau \right| \leq C + \int_{\Gamma_c} |\partial_u \tilde{\mu}(s, u_T(t))| |P(\dot{u}_T(t))| ds + \int_0^t \int_{\Gamma_c} |\partial_{uu}^2 \tilde{\mu}(s, u_T(\tau))| |\dot{u}_T(\tau)| |P(\dot{u}_T(\tau))| ds d\tau.$$

Since  $|P(x)| \leq x^2$  for all  $x$  we obtain

$$\left| \int_0^t \int_{\Gamma_c} S \partial_u \tilde{\mu}(s, u_T(\tau)) \frac{d}{dt} \{P(\dot{u}_T(\tau))\} ds d\tau \right| \leq C + M_1 \int_{\Gamma_c} |\dot{u}_T(t)|^2 ds + M_2 \int_0^t \int_{\Gamma_c} |\dot{u}_T(\tau)|^3 ds d\tau, \quad (1.39)$$

and from Lemma 1.4.3 we find

$$\int_{\Gamma_c} |\dot{u}_T(t)|^2 ds \leq \frac{3M_1 C^2}{4D} |\dot{u}(t)|_{2,\Omega}^2 + \frac{d}{3M_1} \|\dot{u}(t)\|^2, \int_0^t \int_{\Gamma_c} |\dot{u}_T(\tau)|^3 ds d\tau \leq C \int_0^t \|\dot{u}(\tau)\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\dot{u}(\tau)\| d\tau.$$

The Galiardo - Nirenberg interpolation inequality for  $d \leq 2$  can be used now to deduce

$$\int_0^t \int_{\Gamma_c} |\dot{u}_T(\tau)|^3 ds d\tau \leq C \int_0^t |\dot{u}(\tau)| \|\dot{u}(\tau)\|^2 d\tau$$

and from (1.35) the last integral of (1.38) is estimated as

$$\left| \int_0^t \int_{\Gamma_c} S \partial_u \tilde{\mu}(s, u_T(\tau)) \frac{d}{dt} \{P(\dot{u}_T(\tau))\} ds d\tau \right| \leq C + \frac{D}{3} \|\dot{u}(t)\|^2 + C \int_0^t \|\dot{u}(\tau)\|^2 d\tau.$$

Finally, we obtain

$$|\ddot{u}(t)|^2 + \|\dot{u}(t)\|^2 \leq C + C \int_0^t (|\ddot{u}(\tau)|^2 + \|\dot{u}(\tau)\|^2) d\tau$$

and from the Gronwall lemma we find that :

$$\begin{cases} \{\dot{u}_\varepsilon^m\}_{\varepsilon,m} & \text{is bounded in } L^\infty(0, T; V_0), \\ \{\ddot{u}_\varepsilon^m\}_{\varepsilon,m} & \text{is bounded in } L^\infty(0, T; H). \end{cases} \quad (1.40)$$

ii) Passage to the limit in  $m$  and  $\varepsilon$

The a priori estimates (1.35) and (1.40) are used now to deduce that there exist  $u \in W^{1,\infty}(0, T, V) \cap W^{2,\infty}(0, T, H)$  and a subsequence of  $\{u_\varepsilon^m\}_{\varepsilon,m}$ , denoted again by  $\{u_\varepsilon^m\}_{\varepsilon,m}$ , such that for  $\varepsilon \rightarrow 0$  and  $m \rightarrow +\infty$  we have

$$\begin{cases} u_\varepsilon^m \overset{*}{\rightharpoonup} u, & \dot{u}_\varepsilon^m \overset{*}{\rightharpoonup} \dot{u} \text{ weak* in } L^\infty(0, T; V_0), \\ \ddot{u}_\varepsilon^m \overset{*}{\rightharpoonup} \ddot{u} \text{ weak* in } L^\infty(0, T; H). \end{cases} \quad (1.41)$$

One can also deduce that  $u_\varepsilon^m(T) \rightharpoonup u(T)$  weakly in  $V_0$ . If we denote  $\Omega_1 = \Omega \times ]0, T[$ , then we obtain from (1.35) and (1.40) that

$$\{u_\varepsilon^m\}_{\varepsilon,m}, \{\dot{u}_\varepsilon^m\}_{\varepsilon,m} \text{ are bounded } H^1(\Omega_1).$$

Having in mind that  $\partial\Omega_1 = (\partial\Omega \times ]0, T[) \cup (\Omega \times \{0\}) \cup (\Omega \times \{T\})$ , and since the trace map from  $H^1(\Omega_1)$  to  $L^2(\partial\Omega_1)$  is completely continuous, we find

$$\begin{cases} u_\varepsilon^m \rightarrow u, & \dot{u}_\varepsilon^m \rightarrow \dot{u} \text{ strongly in } L^2(\Gamma \times ]0, T[), \\ u_\varepsilon^m(T) \rightarrow u(T), & \dot{u}_\varepsilon^m(T) \rightarrow \dot{u}(T) \text{ strongly in } H. \end{cases} \quad (1.42)$$

We prove now that  $u$  is a solution of (1.20) - (1.21). Let  $w \in L^2(0, T; V_0)$  and  $\{w^m\} \subset L^2(0, T; V_m)$  such that  $w^m \rightarrow w$  strongly in  $L^2(0, T; V_0)$ . If we put  $v = w^m(t) - \dot{u}_\varepsilon^m(t)$  in (1.32), after an integration from 0 to  $T$ , we get

$$\begin{aligned} & \int_0^T [(\ddot{u}_\varepsilon^m(t), w^m(t) - \dot{u}_\varepsilon^m(t)) + a(u_\varepsilon^m(t), w^m(t) - \dot{u}_\varepsilon^m(t))] dt \\ & + \int_0^T [j_\varepsilon(u_\varepsilon^m(t), w^m(t)) - j_\varepsilon(u_\varepsilon^m(t), \dot{u}_\varepsilon^m(t))] dt \geq \int_0^T \langle f(t), w^m(t) - \dot{u}_\varepsilon^m(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

If we use (1.30), after some computations we obtain

$$\begin{aligned} C\varepsilon + \int_0^T (\ddot{u}_\varepsilon^m(t), w^m(t)) dt + \frac{1}{2} (|u_1|^2 - |\dot{u}_\varepsilon^m(T)|^2) + \int_0^T a(u_\varepsilon^m(t), w^m(t)) dt + a(u_0, u_0) \\ + \int_0^T [j(u_\varepsilon^m(t), w^m(t)) - j(u_\varepsilon^m(t), \dot{u}_\varepsilon^m(t))] dt \geq a(u_\varepsilon^m(T), \dot{u}_\varepsilon^m(T)) \\ + \int_0^T \langle f(t), w^m(t) - \dot{u}_\varepsilon^m(t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (1.43)$$



From (1.42), (1.12) and (1.13), and since  $w^m \rightarrow w$  strongly in  $L^2(0, T; V_0)$ , we find

$$\begin{aligned} \int_0^T j(u_\varepsilon^m(t), \dot{u}_\varepsilon^m(t)) dt &\rightarrow \int_0^T j(u(t), \dot{u}(t)) dt, \\ \int_0^T j(u_\varepsilon^m(t), w^m(t)) dt &\rightarrow \int_0^T j(u(t), w(t)) dt. \end{aligned}$$

If we pass to the limit in (1.43) with  $\varepsilon \rightarrow 0$  and  $m \rightarrow +\infty$ , we have

$$\begin{aligned} \int_0^T (\ddot{u}(t), w(t)) dt + \frac{1}{2} (|u_1|^2 - |\dot{u}(T)|^2) + \int_0^T [j(u(t), w(t)) - j(u(t), \dot{u}(t))] dt + a(u_0, u_0) \\ + \int_0^T a(u(t), w(t)) dt \geq \liminf_{m \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0} a(u_\varepsilon^m(T), \dot{u}_\varepsilon^m(T)) + \int_0^T \langle f(t), w(t) - \dot{u}(t) \rangle \\ \geq a(u(T), \dot{u}(T)) + \int_0^T \langle f(t), w(t) - \dot{u}(t) \rangle, \end{aligned}$$

From this inequality we find

$$\begin{aligned} \int_0^T [(\ddot{u}(t), w(t) - \dot{u}(t)) + a(u(t), w(t) - \dot{u}(t)) + j(u(t), w(t)) - j(u(t), \dot{u}(t))] dt \\ \geq \int_0^T \langle f(t), w(t) - \dot{u}(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

and the point-wise inequality (1.20) follows. ■

**Remark 1.4.4.** In the above proof, the assumption  $d \leq 2$  cannot be removed. Indeed, a priori estimate (1.40) is obtained by an interpolation inequality which holds only for  $d \leq 2$ . As far as we know, the existence of a solution in the three-dimensional case ( $d = 3$ ) remains an open problem.

## 1.5 Uniqueness in the one-dimensional case

We consider here the one-dimensional case of the anti-plane problem (see Remark 1.2.2 with  $d = 1$ ). Let  $\Omega = [0, L]$ ,  $\Gamma_f = \phi$ ,  $\Gamma_d = \{L\}$ , and  $\Gamma_c = \{0\}$ . With these assump-

tions, (AMP) consists in finding  $u : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  such that

$$\rho \ddot{u}(t, x) - G \partial_{xx}^2 u(t, x) = r(t) \quad \text{for all } t \in ]0, T[, x \in ]0, L[, \quad (1.44)$$

$$u(t, L) = 0 \quad \text{for all } t \in ]0, T[, \quad (1.45)$$

$$|G \partial_x u(t, 0)| \leq S \mu(|u(t, 0)|) \quad \text{if } \dot{u}(t, 0) = 0, \quad (1.46)$$

$$G \partial_x u(t, 0) = S \mu(|u(t, 0)|) \text{ sign}(\dot{u}(t, 0)) \quad \text{if } \dot{u}(t, 0) \neq 0, \quad (1.47)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \dot{u}(0, x) = u_1(x). \quad (1.48)$$

For the sake of simplicity, and without any loss of generality, we will suppose that  $T \leq T^* = H/c$ , where  $c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$  is the wave velocity. If we put

$$j(u, w) = S \mu(s, |u(0)|) |w(0)|, \quad \langle f(t), w \rangle = (r(t), w) \quad \forall u, w \in V_0, \quad (1.49)$$

then (1.20)-(1.21) is the variational formulation of (1.44)-(1.48). Let us give now the main result of this section.

**Theorem 1.5.1.** Problem (1.20) - (1.21) in the one-dimensional case ( $d = 1$ ) has a unique solution  $u$  with the regularity (1.27).

**Proof.** Let us suppose that  $u_1, u_2$  are two solutions of (1.20) - (1.21). If we let  $v = \dot{u}_2(t)$  and  $v = \dot{u}_1(t)$  in (1.20), for  $u = u_1$  and  $u = u_2$ , respectively, and if we denote  $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$ , then we find

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (|\dot{w}(t, x)|^2 + c^2 |\partial_x w(t, x)|^2) dx \\ \leq \frac{S}{G} [\mu(|u_1(t, 0)|) - \mu(|u_2(t, 0)|)] [|\dot{u}_1(t, 0)| - |\dot{u}_2(t, 0)|] \\ \leq \frac{SM_1}{G} |w(t, 0)| |\dot{w}(t, 0)|. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Since  $w$  is a solution of the wave equation

$$\ddot{w}(t, z) - c^2 \partial_{xx}^2 w(t, x) = 0, \quad (1.51)$$

one can use the characteristic lines  $x + ct = \text{const}$  to deduce that

$$\dot{w}(t, 0) + c \partial_x w(t, 0) = \dot{w}(0, ct) + c \partial_x w(0, ct) = 0, \quad \forall t \in [0, T^*]. \quad (1.52)$$



If we have in mind that

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [(\dot{w}(t, x))^2 + c^2 (\partial_x w(t, x))^2] = c^2 \frac{\partial}{\partial x} [\dot{w}(t, x) \partial_x w(t, x)],$$

we integrate over  $(0, L)$  and we use (1.52), then we get

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (|\dot{w}(t, x)|^2 + c^2 |\partial_x w(t, x)|^2) dx = c \dot{w}^2(t, 0) \quad \forall t \in [0, T^*]. \quad (1.53)$$

We use now (1.50) and (1.53) to obtain :

$$|\dot{w}(t, 0)| \leq C |w(t, 0)| \leq C \int_0^t |\dot{w}(\tau, 0)| d\tau,$$

and from Gronwall lemma we have  $\dot{w}(t, 0) = 0$ . This equality has to be introduced in (1.50) to get that  $w \equiv 0$ . ■

## 1.6 Asymptotic behavior for vanishing viscosity

Unlike in elasticity, in viscoelasticity the general three-dimensional dynamic problem with slip-dependent friction is well posed (Ionescu & Nguyen, 2003), i.e. a unique solution exists. Hence the viscoelastic problem can be considered as the regularized problem of the elastic case. We prove here that the asymptotic limit (for a vanishing viscosity) of the viscoelastic solution is a solution of the elastic problem. Moreover, in some physical applications, such as earthquakes, the characteristic time of the phenomenon is too small to allow significant viscosity effects. This is why the viscoelastic model is useful to regularize the elastic model.

Let us consider in this section a viscous perturbation of problem (1.1)-(1.5). Let  $\eta > 0$  be a "small" viscosity parameter and let us replace the elastic law (1.2) with the following linear viscoelastic constitutive equation

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\epsilon(u(t)) + \eta \mathcal{C}\epsilon(\dot{u}(t)) \quad \text{in } \Omega, \quad (1.54)$$

where  $\mathcal{C}$  is a symmetric and positively defined fourth order tensor, i.e.

$$\mathcal{C}_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad \mathcal{A}(x)\epsilon : \sigma = \mathcal{C}(x)\sigma : \epsilon, \quad \mathcal{C}(x)\epsilon : \epsilon \geq \alpha|\epsilon|^2, \quad (1.55)$$

a.e.  $x \in \Omega, \forall i, j, k, l = \overline{1, d}$  and for all  $\sigma, \epsilon \in \mathbf{R}_s^{d \times d}$ .

The viscous mechanical problem  $(VMP)_\eta$  consists in finding the displacement field

$u_\eta : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$  solution of (1.1), (1.54) and (1.3)-(1.5). If we denote by  $c : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbf{R}$  the following bilinear and symmetric application :

$$c(u, v) := \int_\Omega \mathcal{C}\epsilon(u) : \epsilon(v),$$

then the variational formulation of  $(VMP)_\eta$  is : Find  $u_\eta : [0, T] \rightarrow V_0$  such that

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t)) + a(u_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t)) + \eta c(\dot{u}_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t)) \\ & + j(u_\eta(t), v) - j(u_\eta(t), \dot{u}_\eta(t)) \geq \langle f(t), v - \dot{u}_\eta(t) \rangle, \quad \forall v \in V_0 \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \dot{u}_\eta(0) = u_1. \quad (1.57)$$

We recall from Ionescu and Nguyen (2003) the following existence and uniqueness result.

**Theorem 1.6.1.** *For all  $\eta > 0$  there exists a unique solution  $u_\eta$  of (1.56)-(1.57) with the following regularity :*

$$u_\eta \in W^{1, \infty}(0, T, V) \cap W^{2, 2}(0, T, H) \quad (1.58)$$

In order to prove the convergence of the solution  $u_\eta$  of  $(VMP)_\eta$  to a solution  $u$  of  $(MP)$  when  $\eta \rightarrow 0$ , we shall suppose that

$$\text{there exists } u_2 \in H \text{ such that } c(u_1, v) = (u_2, v) \quad \forall v \in V_0. \quad (1.59)$$

The main result of this section is the following.

**Theorem 1.6.2.** *If, in addition to the assumptions of Theorem 1.4.1S for  $d \leq 2$ , we suppose (1.59), then  $\ddot{u}_\eta \in L^2(0, T; V_0)$  and there exists a subsequence of  $\{u_\eta\}_\eta$ , denoted again by  $\{u_\eta\}_\eta$ , such that when  $\eta \rightarrow 0$  we have*

$$u_\eta \overset{*}{\rightharpoonup} u, \quad \dot{u}_\eta \overset{*}{\rightharpoonup} \dot{u} \quad \text{weak* in } L^\infty(0, T; V_0), \quad (1.60)$$

$$\ddot{u}_\eta \overset{*}{\rightharpoonup} \ddot{u} \quad \text{weak* in } L^\infty(0, T; H), \quad (1.61)$$

where  $u$  is a solution of (1.20)-(1.21).

**Proof.** If we introduce, as in the proof of Theorem 1.4.1, the family of convex differentiable regularized functions and functionals  $\Psi_\epsilon, j_\epsilon$  (given by (1.29)) and  $J_\epsilon$  (given by (1.31)), then we obtain the following regularized version of (1.56)-(1.57) : Find  $u_{\epsilon\eta} :$



$[0, T] \rightarrow V_0$  such that for all  $v \in V_0$  we have

$$(\ddot{u}_{\varepsilon\eta}(t), v) + a(u_{\varepsilon\eta}(t), v) + \eta c(\dot{u}_{\varepsilon\eta}(t), v) + \langle J_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}(t), \dot{u}_{\varepsilon\eta}(t)), v \rangle = \langle f(t), v \rangle, \quad (1.62)$$

$$u_{\varepsilon\eta}(0, x) = u_0(x), \quad \dot{u}_{\varepsilon\eta}(0, x) = u_1(x). \quad (1.63)$$

If we let  $v = \dot{u}_{\varepsilon\eta}(t)$  in (1.62) then we get

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|\dot{u}_{\varepsilon\eta}(t)|^2 + a(u_{\varepsilon\eta}(t), u_{\varepsilon\eta}(t))] + \eta c(\dot{u}_{\varepsilon\eta}(t), \dot{u}_{\varepsilon\eta}(t)) \leq \langle f(t), \dot{u}_{\varepsilon\eta}(t) \rangle.$$

Let us denote by  $C$  a generic constant independent of  $\eta$ . From the above inequality and an integration by parts (as in (1.34)) we deduce :

$$\|u_{\varepsilon\eta}(t)\| + |\dot{u}_{\varepsilon\eta}(t)| \leq C, \quad \eta \int_0^T \|\dot{u}_{\varepsilon\eta}(t)\|^2 dt \leq C. \quad (1.64)$$

We take now the derivative of (1.62) with respect to  $t$  and we let  $v = \ddot{u}_{\varepsilon\eta}(t)$  to find

$$(\ddot{u}_{\varepsilon\eta}(t), \ddot{u}_{\varepsilon\eta}(t)) + a(\dot{u}_{\varepsilon\eta}(t), \ddot{u}_{\varepsilon\eta}(t)) + \eta c(\ddot{u}_{\varepsilon\eta}(t), \ddot{u}_{\varepsilon\eta}(t)) + \langle \frac{d}{dt} J_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}(t), \dot{u}_{\varepsilon\eta}(t)), \ddot{u}_{\varepsilon\eta}(t) \rangle = \langle \dot{f}(t), \ddot{u}_{\varepsilon\eta}(t) \rangle. \quad (1.65)$$

If we use the estimate (1.37) and integrate (1.65) over  $(0, t)$ , we obtain

$$|\ddot{u}_{\varepsilon\eta}(t)|^2 + d \|\dot{u}_{\varepsilon\eta}(t)\|^2 + \eta \int_0^t |\ddot{u}_{\varepsilon\eta}(\tau)|^2 d\tau \leq a(u_1, u_1) + |\dot{u}_{\varepsilon\eta}(0)|^2 + 2 \int_0^t \langle \dot{f}(\tau), \ddot{u}_{\varepsilon\eta}(\tau) \rangle d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_c} S \partial_u \tilde{\mu}(s, u_{\varepsilon\eta}(\tau)) \frac{d}{d\tau} \{P(\dot{u}_{\varepsilon\eta}(\tau))\} ds d\tau. \quad (1.66)$$

Let us give now a suitable estimate for  $|\ddot{u}_{\varepsilon\eta}(0)|$ . If we put  $t = 0$  in (1.62), we have

$$(\ddot{u}_{\varepsilon\eta}(0), v) + a(u_0, v) + \eta c(u_1, v) = (r(0), v) + \int_{\Gamma_f} F(0) \cdot v dx - \int_{\Gamma_c} S v_N dx \quad \forall v \in V_0, \quad (1.67)$$

and from (1.59), we obtain :

$$a(u_0, v) + \eta c(u_1, v) = (\operatorname{div} \mathcal{A}\varepsilon(u_0), v) + \eta(u_2, v) + \int_{\Gamma_f} F(0) \cdot v ds - \int_{\Gamma_c} S v_N ds.$$

From these two equalities we have

$$\ddot{u}_{\varepsilon\eta}(0) = r(0) - \operatorname{div} \mathcal{A}\varepsilon(u_0) - \eta u_2 \quad \text{bounded in } H.$$

If we use in (1.66) the technique used in the proof of theorem 1.4.1 to estimate (1.38), we obtain

$$\|\dot{u}_{\varepsilon\eta}(t)\| + |\ddot{u}_{\varepsilon\eta}(t)| \leq C, \quad \eta \int_0^T \|\ddot{u}_{\varepsilon\eta}(t)\|^2 dt \leq C. \quad (1.68)$$

Passing to the limit with  $\varepsilon \rightarrow 0$  in (1.64) and (1.68), we get  $\ddot{u}_\eta \in L^2(0, T; V_0)$  and

$$\|u_\eta(t)\| + \|\dot{u}_\eta(t)\| + |\ddot{u}_\eta(t)| \leq C, \quad \eta \int_0^T \|\ddot{u}_\eta(t)\|^2 dt \leq C. \quad (1.69)$$

The a priori estimate (1.69) is used now to deduce that there exists  $u$  with the regularity (1.27) and a subsequence of  $\{u_\eta\}_\eta$ , denoted again by  $\{u_\eta\}_\eta$ , such that (1.60) and (1.61) hold when  $\eta \rightarrow 0$ . We only have to check that  $u$  is a solution of (1.20)-(1.21). Indeed, if we let  $v = v(t)$  in (1.56), where  $v \in L^2(0, T; V_0)$ , then we find

$$\begin{aligned} & \int_0^T [(\ddot{u}_\eta(t), v(t)) + a(u_\eta(t), v(t)) + j(u_\eta(t), v(t)) - \langle f(t), v(t) - \dot{u}_\eta(t) \rangle] dt \\ & + \int_0^T \eta c(\dot{u}_\eta(t), v(t)) dt \\ & \geq \int_0^T [(\ddot{u}_\eta(t), \dot{u}_\eta(t)) + a(u_\eta(t), \dot{u}_\eta(t)) + j(u_\eta(t), \dot{u}_\eta(t))] dt \\ & \geq \frac{1}{2} (|\dot{u}_\eta(T)|^2 - |u_1|^2) + \frac{1}{2} [a(u_\eta(T), u_\eta(T)) - a(u_0, u_0)] + \int_0^T j(u_\eta(t), \dot{u}_\eta(t)) dt. \end{aligned}$$

Since

$$\left| \int_0^T \eta c(\dot{u}_\eta(t), v) dt \right| \leq C \eta \|\dot{u}_\eta\|_{L^\infty(0, T; V_0)} \|v\|_{L^2(0, T; V_0)} \leq C \eta,$$

from (1.60) - (1.61) and (1.69), when  $\eta \rightarrow 0$  we find

$$\begin{aligned} & \int_0^T [(\ddot{u}(t), v(t)) + a(u(t), v(t)) + j(u(t), v(t)) - \langle f(t), v(t) - \dot{u}(t) \rangle] dt \\ & \geq \frac{1}{2} \liminf_{\eta \rightarrow 0} a(u_\eta(T), u_\eta(T)) + \frac{1}{2} [|\dot{u}(T)|^2 - |u_1|^2 - a(u_0, u_0)] + \int_0^T j(u(t), \dot{u}(t)) dt \\ & \geq \frac{1}{2} (|\dot{u}(T)|^2 - |u_1|^2) + \frac{1}{2} [a(u(T), u(T)) - a(u_0, u_0)] + \int_0^T j(u(t), \dot{u}(t)) dt \\ & = \int_0^T [(\ddot{u}(t), \dot{u}(t)) + a(u(t), \dot{u}(t)) + j(u(t), \dot{u}(t))] dt, \end{aligned}$$



for all  $v \in L^2(0, T; V_0)$ , and the point-wise inequality (1.20) follows. ■

## Chapitre 2

# Modélisation numérique de la rupture : initiation et propagation

### 2.1 Introduction

Le chapitre précédent est une étude mathématique théorique d'un problème dynamique général de contact avec frottement, qui contient en particulier le problème de l'évolution spontanée d'un corps élastique contenant un système de failles soumises à une loi de frottement dépendant du glissement dans un corps élastique. Nous allons maintenant chercher à approcher la solution de ce problème avec une démarche numérique.

Un résumé concernant les schémas numériques existant pour la rupture dynamique est développé dans l'Introduction générale. Rappelons que les modèles éléments finis ne sont pas les plus abondants, et que le schéma d'éléments spectraux de Bernardi et Maday (2001) en est un cas particulier qui se distingue par un ordre élevé et une faible dispersion numérique, et qui fut adapté pour la modélisation de la rupture sismique sur des réseaux de failles de géométrie complexe par Ampuero (2002).

Si on quitte le domaine de la modélisation de la rupture sismique, il faut citer d'autres schémas éléments finis intéressants. Par exemple, Bécache et al. (2002) ont développé une classe spéciale d'éléments finis mixtes, adaptée par Tsogka (1999) pour la propagation d'ondes dans des milieux contenant des fissures soumises à une condition de surface libre. De même que les éléments spectraux, ces éléments permettent la condensation de masse, c'est-à-dire que la matrice de masse est diagonalisée pour éviter de lourdes inversions matricielles. En utilisant un schéma explicite en temps, on obtient alors une résolution espace-temps à faible coût de calcul. Mais le revers de la médaille est une condition de stabilité (CFL) qui oblige à diminuer le pas de temps en même temps que le pas



d'espace. Pour pallier cet inconvénient, Bécache et al. (2001) ont introduit la méthode des domaines fictifs, qui consiste à coupler un maillage régulier dans le domaine avec un maillage irrégulier sur la fissure. L'utilisation d'un maillage régulier dans le domaine permet de contrôler facilement la stabilité, tandis que les degrés de liberté sur la fissure sont résolus par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange sur un second maillage indépendant du premier. De cette façon, il est aisé de modéliser des fissures de géométrie complexe, sans pour autant alourdir le calcul de la propagation des ondes dans le milieu élastique linéaire.

Dans cette thèse, nous ne nous intéressons pas à un problème linéaire de propagation d'ondes, mais aux solutions instables « explosives » d'un problème non linéaire, c'est-à-dire les solutions du problème d'initiation qui ont une croissance exponentielle en temps. Pour pouvoir simuler une initiation longue, il nous faut choisir un schéma implicite en temps qui permet des pas de temps plus grands. Quant au maillage en espace, il doit pouvoir s'adapter à des géométries de faille complexes, mais aussi à la forme de la solution du problème. En effet, il est très important, dans le cadre de l'initiation et de la propagation de la rupture sismique, de bien approcher les singularités des contraintes au niveau des pointes de faille. De même, une courbure importante de la faille peut entraîner un champ de contraintes complexe dans le milieu avoisinant. Notre maillage est constitué de triangles P1, qui permettent d'implémenter très facilement une procédure de raffinement local.

Pour résoudre en partie le problème du schéma implicite qui mène à la résolution d'un grand problème non linéaire à chaque pas de temps, nous avons développé une méthode de décomposition de domaine, détaillée dans ce chapitre. Cette méthode permet de décomposer chaque grand problème non linéaire, dont la représentation matricielle change au cours du temps, en :

- un grand système linéaire dont la représentation matricielle est constante, ce qui permet d'assembler les matrices une fois pour toutes
- une série de petits problèmes non linéaires, à deux inconnues chacun, très simples à résoudre

## 2.2 Résolution numérique dans le cas de failles de géométrie complexe

Dans cette section, qui a fait l'objet d'un article (Badea, Ionescu et Wolf, soumis à *Journal of Computational Physics*), nous résolvons numériquement le problème de l'évolution spontanée d'un réseau de failles soumis à une loi de frottement dépendant du

glissement.

La discrétisation en temps utilise un schéma implicite de type Newmark, ce qui nous permet d'écrire le problème à résoudre à chaque pas de temps comme une inégalité variationnelle elliptique. La première valeur propre du problème linéarisé nous fournit une borne supérieure pour le pas de temps, décrivant une condition suffisante d'unicité du problème. Remarquons que cette condition de convergence de l'algorithme est moins restrictive qu'une condition de stabilité de type CFL, puisque le pas de temps maximal correspondant est 10 à 100 fois plus grand.

Le problème est ensuite discrétisé en espace avec une méthode classique d'éléments finis, et l'inégalité variationnelle est résolue en utilisant une méthode de décomposition de domaine multiplicative de type Schwarz : les éléments de la discrétisation connectés aux points de la faille sont ainsi séparés des points de l'intérieur du domaine élastique, qui ont un comportement linéaire beaucoup plus simple. Ainsi, la résolution du problème contraint est localisée sur un domaine contenant uniquement le support des fonctions d'interpolation associées aux points situés sur les segments de faille. L'article se termine par une série de résultats numériques qui illustrent la convergence de la méthode de Schwarz et du schéma de discrétisation en temps, suivis par une première application illustrant l'interaction des failles.



## Domain decomposition method for dynamic faulting under slip-dependent friction

Lori BADEA<sup>1</sup>, Ioan R. IONESCU<sup>2</sup> & Sylvie WOLF<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Institute of Mathematics of the Romanian Academy,  
PO Box 1-764, RO 70700 Bucharest, Romania  
e-mail : Lori.Badea@imar.ro

<sup>2</sup> Laboratoire de Mathématiques, Université de Savoie, Campus Scientifique,  
73376 Le Bourget-du-Lac Cedex, France, Fax 33.4.79.75.81.42, ionescu@univ-savoie.fr,  
swolf@univ-savoie.fr

<sup>3</sup> Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Université Joseph Fourier,  
BP 53X, 38041 Grenoble Cedex, France

### Abstract

The anti-plane shearing problem on a system of finite faults under a slip-dependent friction in a linear elastic domain is considered. Using a Newmark method for the time discretization of the problem, we have obtained an elliptic variational inequality at each time step. An upper bound for the time step size, which is not a CFL condition, is deduced from the solution uniqueness criterion using the first eigenvalue of the tangent problem. Finite element form of the variational inequality is solved by a Schwarz method in which the inner nodes of the domain and the nodes on the fault lie in two different subdomains. Numerical experiments are performed to illustrate the convergence for a single time step (convergence of the Schwarz algorithm, influence of the mesh size, influence of the time step), convergence in time (instability capturing, energy dissipation, optimal time step) and an application to a relevant physical problem (interacting parallel fault segments).

**Keywords :** domains with cracks, slip-dependent friction, wave equation, earthquake initiation, domain decomposition methods, Schwarz method

**2000 Mathematics Subject Classification :** 65M55, 65N55, 74L05, 74S05, 86A15, 86A17

### 2.2.1 Introduction

In numerical modeling of the earthquake source dynamics (initiation, crack propagation and arrest) we need accurate and robust numerical schemes. Two methods have been widely used : boundary integral methods (Aochi & Fukuyama, 2001; Das & Aki, 1977; Chan & Matew, 1994; Geubelle & Rice, 1995; Fukuyama & Madariaga, 1995; Bouchon &

Streiff, 1997) and finite difference methods (Madariaga et al., 1998; Bizzarri et al., 2001; Ionescu & Campillo, 1999; Virieux & Madariaga, 1982). Finite element models (Aochi & Fukuyama, 2001; Oglesby, 1999; Aagaard, 2000) are much less frequent in earthquake rupture simulation, because they are more difficult to implement than finite differences, and because low order schemes can lead to undesirable dissipation. However, they are more and more used because they can handle strong heterogeneities as well as complex geometries (Oglesby et al., 2000; Oglesby & Day, 2001). A special case of finite elements, called spectral elements (Bernardi & Maday, 2001), combines high order precision and geometrical flexibility. Komatitsch and Tromp (1999), Komatitsch and Vilotte (1998), Komatitsch et al. (1999) validated the use of spectral elements for 3-D wave propagation. Applications in the propagation of seismic rupture were investigated by Ampuero (2002). Even if it does not deal with rupture propagation, we have to mention here the model of Tsogka (1999), Bécache et al. (2001, 2002), built for the propagation of 3-D elastic waves in a medium containing (stress free) cracks : it is based on a new class of mixed finite elements and it uses the fictitious domain method to couple a regular mesh in the medium and an irregular mesh on the cracks, using Lagrange multipliers.

The earthquake nucleation (or initiation) phase, preceding the dynamic rupture, has been recently pointed out by detailed seismological observations (Iio, 1992; Ellsworth & Beroza, 1995), laboratory experiments on friction (Ohnaka et al., 1987) and by theoretical studies (Campillo & Ionescu, 1997; Ionescu & Campillo, 1999; Ampuero et al., 2002; Dascalu et al., 2000; Uenishi & Rice, 2002). Since the initiation phase is characterized by an unstable evolution with an exponential growth in time, the behavior of the solution was described, as it is here, by its "dominant part" through an eigenvalue analysis (Campillo & Ionescu, 1997; Favreau et al., 1999; Dascalu et al., 2000; Favreau et al., 2002; Dascalu & Ionescu, 2003). Only few numerical schemes can capture this unstable behavior of the solution during the initiation phase. One of them was proposed by Ionescu and Campillo (1999), for the anti-plane problem, and developed thereafter by Favreau et al. (1999, 2002) for the plane and 3D problems, but the use of a finite difference method restricts the applications on the planar fault geometries.

The aim of this paper is to propose a numerical scheme able to describe the initiation and the rupture propagation on a fault system with a complex geometry. The duration of the initiation phase may be very large (Campillo & Ionescu, 1997; Ionescu & Campillo, 1999; Dascalu et al., 2000) and it may not scale with the characteristic time of the wave equation (i.e. characteristic length / wave speed). That is why we need an implicit time discretization scheme with a much larger time step than the critical CFL time step. In particular, we do not use mass lumping as in the spectral elements or special mixed finite



element schemes described above. The use of an implicit scheme for the wave equation with frictional type conditions on the faults will imply that we have to solve a nonlinear problem, given by a variational inequality, at each time step. We propose in this paper a domain decomposition method for the solution of this variational inequality.

The domain decomposition methods have received considerable attention in the past decades, and the literature on them is too large to survey here. We can see, for instance, the papers in the proceedings of the 15 annual conferences on domain decomposition methods starting in 1988 with Glowinski et al. (1988). Also, we can see the bibliography given by Chan and Matew (1994), Le Tallec (1994), Xu and Zou (1998), or that in the books by Quarteroni and Valli (1999), Smith et al. (1996). The variational inequality in our problem comes from the constraint minimization over a convex set of a non-quadratic functional. Besides, the convex set is not of an obstacle type, for which most of the convergence results are given in the literature. The domain decomposition method we propose to solve our problem is of the multiplicative Schwarz type, and it has been introduced by Badea (1991), where the convergence has been proved for the minimization of quadratic functionals. This method has been extended to one- and two-level methods by Badea (2003a). Also, its convergence for the constraint minimization of the non-quadratic convex functionals in a reflexive Banach space is proved by Badea (2003a). Using the general convergence theorem of Badea (2003a), error estimates are given by Badea (2003b) for the one-, two- and multilevel methods, when they are applied to the solution of the variational inequalities coming from the constraint minimization of the non-quadratic functionals over enough general convex sets.

Let us give here the sketch of the paper. In section 3.3.2, we consider the anti-plane shearing on a system of finite faults under a slip-dependent friction in a linear elastic domain. A Newmark method for the time discretization is used to deduce an elliptic variational inequality at each time step. In order to have uniqueness of this nonlinear problem, an upper bound of the time step size is deduced using the first eigenvalue of the tangent problem. In all the physical applications we have considered, this restriction, which is not a CFL-type condition, gives large critical time steps (10 up to 100 times larger than the critical CFL time step). After a finite element space discretization we present the Schwarz algorithm we use to solve the variational inequality. Using an overlapping decomposition with two or three subdomains, we solve in each iteration an algebraic linear system corresponding to the inner nodes of the domain, and some small nonlinear problems, of two unknowns, corresponding to the nodes on the fault. Numerical results, presented in section 3.3.5, include convergence tests for a single time step (influence of the mesh size, convergence of the Schwarz algorithm, influence of the time step), convergence

in time (instability capturing, energy dissipation, optimal time step) and an application to a relevant physical problem (interacting parallel fault segments).

## 2.2.2 Problem Statement

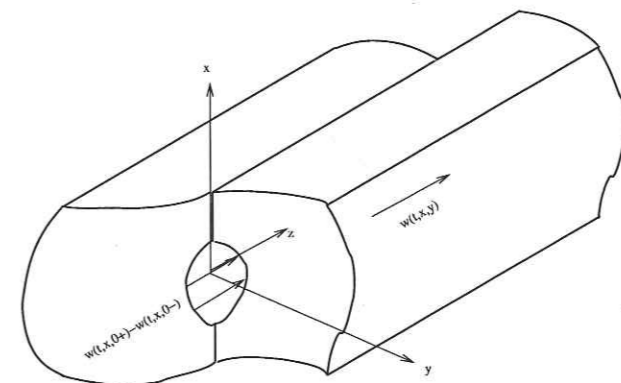


Figure 2.1 *The antiplane shearing of one finite fault*

Consider, as Dascalu and Ionescu (2003), Dascalu et al. (2000), Uenishi and Rice (2002), the anti-plane shearing on a system of finite faults under a slip-dependent friction in a linear elastic domain. Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  be a domain, not necessarily bounded, containing a finite number of cuts. Its boundary  $\partial\Omega$  is supposed to be smooth and divided into two disjoint parts : the exterior boundary  $\Gamma_d = \partial\bar{\Omega}$  and the internal one  $\Gamma$  composed of  $N_f$  bounded connected arcs  $\Gamma_f^i, i = 1, \dots, N_f$ , called cracks or faults. We suppose that the displacement field  $u = (u_1, u_2, u_3)$  is 0 in directions  $Ox_1$  and  $Ox_2$  and that  $u_3$  does not depend on  $x_3$ . The displacement is therefore denoted simply by  $w = w(t, x_1, x_2)$ . A schematic representation of the antiplane shearing of a single finite fault lying on  $Ox_1$  is plotted on Figure 2.1. The elastic medium has the shear rigidity  $G$ , the density  $\rho$  and the shear velocity  $c = \sqrt{G/\rho}$  with the following regularity

$$\rho, G \in L^\infty(\Omega), \quad \rho(x) \geq \rho_0 > 0, \quad G(x) \geq G_0 > 0, \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

The non-vanishing shear stress components are  $\sigma_{31} = \tau_1^\infty + G\partial_1 w$ ,  $\sigma_{32} = \tau_2^\infty + G\partial_2 w$ , and  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -S$ , where  $\tau^\infty$  is the pre-stress and  $S > 0$  is the normal stress on the faults, such that

$$S, \tau_1^\infty, \tau_2^\infty \in C^0(\bar{\Omega}).$$

On  $\Gamma$  we denote by  $[ \ ]$  the jump across  $\Gamma$ , (i.e.  $[w] = w^+ - w^-$ ) and by  $\partial_n = \nabla \cdot n$  the corresponding normal derivative with the unit normal  $n$  outwards the positive side. We suppose that we can choose the orientation of the unit normal  $n$  of each connected



fault (cut) of  $\Gamma$  such that

$$q(x) = \tau_1^\infty(x)n_1(x) + \tau_2^\infty(x)n_2(x) \leq q_0 < 0, \quad \text{a.e. } x \in \Gamma. \quad (2.1)$$

This is the case in many concrete applications, when the pre-stress  $\tau^\infty$  gives a dominant direction of slip.

On the contact zone  $\Gamma$  we have

$$[G\partial_n w] = 0,$$

and we consider a slip dependent friction law. The friction force is depending on the slip  $[w]$  through a friction coefficient  $\mu = \mu([w])$  which is multiplied by the normal stress  $S$ :

$$G\partial_n w + q = -\mu(|[w(t)]|)S \text{sign}(\partial_t[w]), \quad \text{if } \partial_t[w] \neq 0, \quad (2.2)$$

$$|G\partial_n w + q| \leq \mu(|[w]|)S \quad \text{if } \partial_t[w] = 0, \quad (2.3)$$

The above equations assert that the tangential (frictional) stress is bounded by the normal stress  $S$  multiplied by the value of the friction coefficient  $\mu$ . If such a limit is not attained sliding does not occur. Otherwise the friction stress is opposed to the slip rate  $\partial_t[w]$  and its absolute value depends on the slip through  $\mu$ .

Concerning the regularity of  $\mu : \Gamma \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , we suppose that the friction coefficient is a Lipschitz function, with respect to the slip, and let  $f$  be

$$f(x, s) = S(x)\mu(x, s) + q(x).$$

We suppose that there exists  $L > 0$ , such that

$$|f(x, s_1) - f(x, s_2)| \leq L|s_1 - s_2|, \quad (2.4)$$

a.e.  $x \in \Gamma$ , and for all  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}_+$ .

A quite often used friction law is piecewise linear and has the form :

$$\begin{aligned} \mu(x, u) &= \mu_s(x) - \frac{\mu_s(x) - \mu_d(x)}{2D_c(x)}u & \text{if } u \leq 2D_c(x), \\ \mu(x, u) &= \mu_d(x) & \text{if } u > 2D_c(x), \end{aligned} \quad (2.5)$$

where  $u$  is the relative slip,  $\mu_s$  and  $\mu_d$  ( $\mu_s > \mu_d$ ) are the static and dynamic friction coefficients, and  $D_c$  is the critical slip. This piecewise linear function is a reasonable approximation of the experimental observations reported by Ohnaka et al. (1987), and

will be used in our numerical experiments. If we put

$$L = \sup_{x \in \Gamma} S(x) \frac{\mu_s(x) - \mu_d(x)}{2D_c(x)}, \quad (2.6)$$

then (2.4) holds.

Since we are looking for dynamic perturbations of the equilibrium  $w \equiv 0$ , and since the slip direction is given by  $\tau^\infty$  and  $q$  (see 2.1), we can restrict the above friction law to the case of nonnegative slip rate  $\partial_t[w] \geq 0$ . Since the initial slip can also be supposed nonnegative, we have  $[w(t)] \geq 0$  also. These are usual assumptions in the geophysical approach of earthquake source dynamics.

Using the above assumptions, the momentum balance law  $\text{div} \sigma = \rho \partial_{tt} u$  and the boundary conditions, we obtain the following dynamic problem (DP) :

Find  $w : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , solution of the wave equation :

$$\rho \partial_{tt} w(t) = \text{div}(G \nabla w(t)) \quad \text{in } \Omega, \quad (2.7)$$

with boundary conditions of the Signorini type,

$$w(t) = 0 \quad \text{on } \Gamma_d, \quad [G\partial_n w(t)] = 0, \quad [\partial_t w(t)] \geq 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (2.8)$$

$$G\partial_n w(t) + f([w(t)]) \geq 0, \quad [\partial_t w(t)] (G\partial_n w(t) + f([w(t)])) = 0 \quad \text{on } \Gamma. \quad (2.9)$$

The initial conditions are

$$w(0) = w_0, \quad \partial_t w(0) = w_1 \quad \text{in } \Omega. \quad (2.10)$$

Any solution of the above problem satisfies the following variational problem (VP) :

Find  $w : [0, T] \rightarrow V$  such that

$$\begin{aligned} \partial_t w(t) \in W_+, \quad \int_{\Omega} \rho \partial_{tt} w(t) (v - \partial_t w(t)) dx + \int_{\Omega} G \nabla w(t) \cdot \nabla (v - \partial_t w(t)) dx \\ + \int_{\Gamma} f([w(t)]) ([v] - [\partial_t w(t)]) d\sigma \geq 0 \quad \forall v \in W_+, \end{aligned} \quad (2.11)$$

where

$$W = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \quad \text{on } \Gamma_d\}, \quad W_+ = \{v \in W : [v] \geq 0 \quad \text{on } \Gamma\}. \quad (2.12)$$

The main difficulty in the study of the above evolution variational inequality is the



non-monotone dependence of  $f$  with respect to the slip  $[w]$ . The existence of a solution  $w$  having the regularity

$$w \in W^{1,\infty}(0, T, W) \cap W^{2,\infty}(0, T, L^2(\Omega)) \quad (2.13)$$

can be deduced for two-dimensional bounded domains using the method developed by Ionescu et al. (2003).

### Time discretization

We consider here the Newmark method, with parameters  $\beta = 1/4$  and  $\gamma = 1/2$  (see for instance Fung (1997)), for the time discretization of the dynamic problem (2.10-2.11). To this end, let  $\Delta t > 0$  be the time step,  $N$  the maximum number of steps, and  $T = N\Delta t$ . We denote by  $w^n, \dot{w}^n, \ddot{w}^n$  the discretization of the solution at the time  $t = n\Delta t$ , i.e.  $w^n \approx w(n\Delta t), \dot{w}^n \approx \partial_t w(n\Delta t), \ddot{w}^n \approx \partial_{tt} w(n\Delta t)$  for all  $0 \leq n \leq N$ . The initial conditions (2.10) become

$$w^0 = w_0, \quad \dot{w}^0 = w_1, \quad \ddot{w}^0 = \rho^{-1} \operatorname{div}(G\nabla w_0) \quad (2.14)$$

which is the starting point of a recursive problem. Suppose that we have constructed the solution up to  $t = n\Delta t$ , i.e. we have  $w^k, \dot{w}^k, \ddot{w}^k$  for all  $k \leq n$ . In the Newmark method, the numerical solution  $w^{n+1}, \dot{w}^{n+1}, \ddot{w}^{n+1}$  of (2.11) at  $t = (n+1)\Delta t$  is obtained from

$$w^{n+1} = w^n + \Delta t \dot{w}^n + \frac{(\Delta t)^2}{4} (\ddot{w}^{n+1} + \ddot{w}^n), \quad \dot{w}^{n+1} = \dot{w}^n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{w}^{n+1} + \ddot{w}^n) \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{w}^{n+1} \in W_+, \quad \int_{\Omega} \rho \ddot{w}^{n+1} (v - \dot{w}^{n+1}) dx + \int_{\Omega} G \nabla w^{n+1} \cdot \nabla (v - \dot{w}^{n+1}) dx \\ + \int_{\Gamma} f([w^{n+1}])([v] - [\dot{w}^{n+1}]) d\sigma \geq 0 \quad \forall v \in W_+ \end{aligned} \quad (2.16)$$

In terms of the velocity, the above problem can be written as the following variational inequality :

Find  $\dot{w}^{n+1} \in W_+$  such that

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \dot{w}^{n+1} (v - \dot{w}^{n+1}) dx + \frac{(\Delta t)^2}{4} \int_{\Omega} G \nabla \dot{w}^{n+1} \cdot \nabla (v - \dot{w}^{n+1}) dx \\ + \int_{\Gamma} h_n([\dot{w}^{n+1}])([v] - [\dot{w}^{n+1}]) d\sigma \geq F_n(v - \dot{w}^{n+1}) \quad \forall v \in W_+, \end{aligned} \quad (2.17)$$

where  $h_n$  and  $F_n$  are given by

$$\begin{aligned} h_n(x, s) &= \frac{\Delta t}{2} f(x, [w^n](x) + [\dot{w}^n](x) + (\Delta t)s/2) \\ F_n(v) &= \int_{\Omega} \rho (\dot{w}^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{w}^n) v dx - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} G \nabla (w^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{w}^n) \cdot \nabla v dx. \end{aligned} \quad (2.18)$$

If  $\dot{w}^{n+1}$  is obtained, then one can deduce  $w^{n+1}$  and  $\ddot{w}^{n+1}$  through

$$w^{n+1} = w^n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{w}^n + \dot{w}^{n+1}), \quad \ddot{w}^{n+1} = 2 \frac{\dot{w}^{n+1} - \dot{w}^n}{\Delta t} - \ddot{w}^n. \quad (2.19)$$

### 2.2.3 Elliptic problem of each time step

First let us remark that if we put

$$F = F_n, \quad \gamma = \frac{(\Delta t)^2}{4} G, \quad h = h_n, \quad u = w^{n+1} \quad (2.20)$$

then (2.17) becomes the following elliptic variational problem :

Find  $u \in W_+$  such that

$$\int_{\Omega} \rho u (v - u) dx + \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx + \int_{\Gamma} h([u])([v] - [u]) d\sigma \geq F(v - u), \quad (2.21)$$

for all  $v \in W_+$ . From the above assumptions we have that  $F \in W'$ ,  $\gamma \in L^\infty(\Omega)$  with  $\gamma(x) \geq \gamma_0 > 0$  a.e.  $x \in \Omega$ , and that  $h : \Gamma \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  is a Lipschitz function.

Let us introduce the energy function  $J : W \rightarrow \mathbb{R}$  given by

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho v^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \gamma |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma} H([v]) d\sigma - F(v), \quad (2.22)$$

where  $H$  is the antiderivative of  $h$

$$H(x, u) = \int_0^u h(x, s) ds, \quad \text{a.e. } x \in \Gamma, \quad \forall u \geq 0.$$

The following result can be obtained using the same technique as Ionescu and Paumier (1996).

**Theorem 2.2.1.** *If  $u \in W_+$  is a local minimum for  $J$ , then  $u$  is a solution of (2.21). Moreover there exists at least a global minimum for  $J$ , i.e. there exists  $u \in W$  such that*

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in W_+. \quad (2.23)$$



Let  $\eta \in L^\infty(\Gamma)$  be

$$\eta(x) = - \inf_{s \in \mathbb{R}_+} \partial_s h(x, s) \quad (2.24)$$

and for all  $\beta \geq 0$  let consider the following eigenvalue problem connected to (2.21) : Find  $\Phi \in W, \Phi \neq 0$  and  $\lambda^2 \in \mathbb{R}$  such that

$$\operatorname{div}(\gamma \nabla \Phi) = \lambda^2 \rho \Phi \quad \text{in } \Omega, \quad (2.25)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{on } \Gamma_d, \quad [\gamma \partial_n \Phi] = 0, \quad \gamma \partial_n \Phi = \beta \eta[\Phi] \quad \text{on } \Gamma. \quad (2.26)$$

The above eigenvalue problem played a key role in the study of the nucleation phase of earthquakes (Campillo & Ionescu, 1997; Ampuero et al., 2002; Dascalu et al., 2000; Uenishi & Rice, 2002; Wolf et al., 2003). Through the first eigenvalue, important physical properties (characteristic time, critical fault length, etc.) were deduced.

The variational formulation of the eigenvalue problem is

$$\Phi \in W, \quad \int_{\Omega} \gamma \nabla \Phi \cdot \nabla v \, dx + \lambda^2 \int_{\Omega} \rho \Phi v \, dx = \beta \int_{\Gamma_f} \eta[\Phi][v] \, dx, \quad \forall v \in W \quad (2.27)$$

and we recall from Dascalu and Ionescu (2003) the following result

**Theorem 2.2.2.** *Let  $\Omega$  be bounded then*

*i) For all  $\beta$  the eigenvalues and eigenfunctions of (2.25)-(2.26) consist of a sequence  $(\lambda_n^2(\beta), \Phi_n(\beta))_{n \in \mathbb{N}}$  with  $\lambda_0^2(\beta) \geq \lambda_1^2(\beta) \geq \dots$  and  $\lambda_n^2(\beta) \rightarrow -\infty$ .*

*ii) The function  $\beta \rightarrow \lambda_0^2(\beta)$  is convex and the following inequality holds*

$$\int_{\Omega} \gamma |\nabla v|^2 \, dx + \lambda_0^2(\beta) \int_{\Omega} \rho v^2 \, dx \geq \beta \int_{\Gamma} \eta[v]^2 \, dx, \quad \forall v \in W. \quad (2.28)$$

*iii) If  $\eta \geq 0$  then  $\beta \rightarrow \lambda_0^2(\beta)$  is an increasing function.*

Note that, in general,  $\lambda_0^2$  is not negative, hence there exist at most a finite number of positive eigenvalues.

**Theorem 2.2.3.** *Let  $\Omega$  be bounded,  $\eta \geq 0$  and let  $\lambda_0^2$  be given by the above theorem. Then  $J'$  is a Lipschitz functional, i.e. there exists a real constant  $b$  such that*

$$\|(J'(u_1) - J'(u_2))\|_{W'} \leq b \|u_1 - u_2\|_W. \quad (2.29)$$

Moreover, if

$$\lambda_0^2(1) < 1 \quad (2.30)$$

then  $J$  is an uniformly convex functional, i.e. there exists  $a > 0$  such that

$$J'(u_1)(u_1 - u_2) - J'(u_2)(u_1 - u_2) \geq a \|u_1 - u_2\|_W^2, \quad \forall u_1, u_2 \in W, \quad (2.31)$$

and (2.23) has a unique solution  $u$  which is also the unique solution of (2.21).

*Proof.* For  $u_1, u_2, v \in W$ , we get that

$$\begin{aligned} |(J'(u_1) - J'(u_2))(v)| &\leq \int_{\Omega} |\rho| |u_1 - u_2| |v| + \int_{\Omega} |\gamma| |\nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla v| + \int_{\Gamma} |h([u_1]) - h([u_2])| |[v]| \\ &\leq \|\rho\|_{\infty} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma\|_{\infty} \|u_1 - u_2\|_W \|v\|_W + l_h \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)}, \end{aligned}$$

where  $l_h$  is the Lipschitz constant of  $h$ . Therefore, using the continuity of the trace operator and equations (2.4), (2.18) and (2.20), there exists a real constant  $b$

$$b := Cl_h + \max\{\|\gamma\|_{\infty}, \|\rho\|_{\infty}\}, \quad (2.32)$$

(here  $C$  is a constant) such that (2.29) holds. From (2.24), we get

$$(h(x, s_1) - h(x, s_2))(s_1 - s_2) \geq -\eta(x) |s_1 - s_2|^2, \quad \forall s_1, s_2 \geq 0, \quad \text{a.e. } x \in \Gamma. \quad (2.33)$$

After some computations, we obtain from the above inequality,

$$J'(u_1)(u_1 - u_2) - J'(u_2)(u_1 - u_2) =$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \gamma |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx + \int_{\Omega} \rho(u_1 - u_2)^2 \, dx + \int_{\Gamma} (h([u_1]) - h([u_2]))(u_1 - u_2) \, dx \geq \\ &\int_{\Omega} \gamma |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx + \int_{\Omega} \rho(u_1 - u_2)^2 \, dx - \int_{\Gamma} \eta[u_1 - u_2]^2 \, dx, \end{aligned}$$

and, from (2.28), we get

$$(J'(u_1) - J'(u_2))(u_1 - u_2) \geq \frac{\beta - 1}{\beta} \int_{\Omega} \gamma |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx + \frac{\beta - \lambda_0^2(\beta)}{\beta} \int_{\Omega} \rho(u_1 - u_2)^2 \, dx.$$

Bearing in mind that  $\lambda_0^2$  is an increasing function, from (2.30) we get that there exists  $\bar{\beta} > 1$  such that  $\lambda_0^2(\bar{\beta}) < 1$ , and (2.31) follows with

$$a := \frac{\bar{\beta} - 1}{\bar{\beta}} \min\{\gamma_0, \rho_0\}. \quad (2.34)$$

Since the functional  $J$  is convex, problems (2.23) and (2.21) are equivalent. The uniqueness of  $u$  comes from the strict convexity of the functional  $J$ . ■



### Return to the dynamic process

Let us analyze here what are the conditions to be imposed on the parameters  $\Delta t, G, \rho$  and  $\partial_s f$ , such that the strong coercivity condition (2.31) holds. To this end, let us consider the following eigenvalue problem connected to (2.17) :

Find  $\Phi \in W, \Phi \neq 0$  and  $\alpha^2 \in \mathbb{R}$  such that

$$\operatorname{div}(G\nabla\Phi) = \alpha^2\rho\Phi \quad \text{in } \Omega, \quad (2.35)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{on } \Gamma_d, \quad [G\partial_n\Phi] = 0, \quad G\partial_n\Phi = g[\Phi] \quad \text{on } \Gamma, \quad (2.36)$$

where  $g(x) = -\inf_{s \in \mathbb{R}_+} \partial_s f(x, s)$ . Since, following (2.20), we have

$$\eta(x) = \frac{(\Delta t)^2}{4}g(x) = -\frac{(\Delta t)^2}{4}S(x) \inf_{s \in \mathbb{R}_+} \partial_s \mu(x, s),$$

the eigenvalue problem (2.35)-(2.36) corresponds to (2.25)-(2.26) through  $\lambda^2 = (\Delta t)^2\alpha^2/4$  and  $\beta = 1$ . The following proposition comes from Theorem 3.3.

**Proposition 2.2.4.** *Let  $\alpha_0^2$  be the largest eigenvalue of (2.35)-(2.36), and let  $\gamma, F$  and  $h$  be given by (2.20). If*

$$\frac{(\Delta t)^2}{4}\alpha_0^2 < 1 \quad (2.37)$$

*then  $J'$  is a strongly monotone and Lipschitz operator, i.e. (2.31) and (2.29) hold. Moreover, the constants  $a$  and  $b$  can be taken as*

$$\begin{aligned} a &= \frac{\bar{\beta} - 1}{\bar{\beta}} \min\left\{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 G_0, \rho_0\right\} \\ b &= CL\frac{\Delta t}{2} + \max\left\{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \|G\|_\infty, \|\rho\|_\infty\right\}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

where  $C$  is a constant.

The above condition (2.37) on the time step  $\Delta t$  is not a CFL-type condition. If the process is stable, i.e.  $\alpha_0^2 \leq 0$ , then there are no condition on the time step. If the process is unstable, i.e.  $\alpha_0^2 > 0$ , then (2.37) is just a convergence criterion for the domain decomposition method which solves a non quadratic minimization problem at each time step. In all the physical applications we have considered, the critical time step  $\Delta t_{cr} = 2/\alpha_0$  was found to be very large (10 up to 100 times larger than the critical CFL time step).

### 2.2.4 Domain decomposition method

We describe in the following the domain decomposition method we have applied to solve variational inequality (2.21). We point out that this inequality is equivalent with the constraint minimization problem (2.23), in which the functional  $J$  is not quadratic. Moreover, the convex set of the constraints,  $W_+$ , is not of obstacle type for which most of the convergence results for the domain decomposition methods are obtained in the literature.

#### 2.2.4.1 Multiplicative Schwarz method

Over the domain  $\Omega$  of problem (2.21), we consider a regular triangular mesh  $\mathcal{T}_h$  (Ciarlet, 1978), of mesh size  $h$ , such that the nodes on the sides of the fault  $\Gamma$  can be associated two by two having the same coordinates (one of them being located on a side of  $\Gamma$  and the other one on the other side). We shall denote in the following by  $x_i, i = 1, \dots, n_d$  the interior nodes of  $\mathcal{T}_h$  in  $\Omega$ , and by  $(x_i^+, x_i^-), i = 1, \dots, n_f$ , the pairs of nodes on both sides of  $\Gamma$ . We use the linear finite element spaces, and the functions in the nodal basis associated with these nodes will be denoted by  $\varphi_i, i = 1, \dots, n_d$ , and  $(\varphi_i^+, \varphi_i^-), i = 1, \dots, n_f$ , respectively.

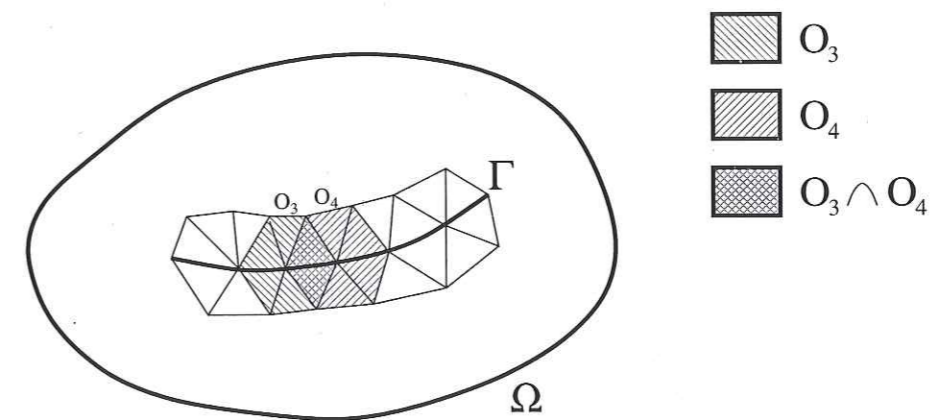


Figure 2.2 *Decomposition of  $\Omega$ . Here, domains  $O_3$  and  $O_4$  have been shaded.*

We first consider an overlapping domain decomposition  $\{O_i\}_{1 \leq i \leq M}, M = n_f + 1$ , of the domain  $\Omega$ , given by the subdomains  $O_1 = \Omega$  and  $O_i = \operatorname{Int}(\operatorname{supp} \varphi_{i-1}^+) \cup \operatorname{Int}(\operatorname{supp} \varphi_{i-1}^-), i = 2, \dots, n_f + 1$ , i.e. the domains  $O_i, i = 2, \dots, n_f + 1$ , are the union of the triangles having as a vertex either the node  $x_i^+$  or the node  $x_i^-$  on  $\Gamma$  (see Fig. 2.2). It is easy to see that these subdomains can be marked with three colors such that the subdomains with the same color do not intersect with each other : the first color corresponds to  $O_1$



and the other two colors are used for  $O_i$ ,  $i = 2, \dots, n_f + 1$ . The union of the subdomains  $O_j$  having the color  $i$  will be denoted by  $\Omega_i$ , i.e.,  $\Omega_1 = O_1$ , and  $\Omega_2$  and  $\Omega_3$  are unions of subdomains  $O_i$ ,  $i = 2, \dots, M$ , corresponding to the second and third color, respectively. In this way, we have obtained a new overlapping decomposition

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^3 \Omega_i. \quad (2.39)$$

Evidently, the overlap size  $\delta$  of the domain decomposition (2.39) is the mesh size  $h$ .

As we already said, we use linear finite element spaces. We associate to the space  $W$  defined in (2.12) the space

$$W^h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_{\tau} \in P_1(\tau), \tau \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ on } \Gamma_d\}. \quad (2.40)$$

Also, we associate to the subdomains  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  and  $\Omega_3$  the subspaces of  $W^h$ ,

$$\begin{aligned} W_1^h &= \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_{\tau} \in P_1(\tau), \tau \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ on } \partial\Omega\} \\ W_2^h &= \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_{\tau} \in P_1(\tau), \tau \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ in } \Omega \setminus \Omega_2\} \\ W_3^h &= \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_{\tau} \in P_1(\tau), \tau \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ in } \Omega \setminus \Omega_3\}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

respectively. The convex set  $W_+^h$  corresponding to  $W_+$  defined in (2.12) is

$$W_+^h = \{v \in W^h : v(x_i^+) - v(x_i^-) \geq 0, i = 1, \dots, n_f\}. \quad (2.42)$$

The spaces  $W^h$  and  $W_i^h$ ,  $i = 1, 2, 3$ , are considered as subspaces of  $H^1(\Omega)$ . We point out that the subspace  $W_1^h$  corresponds to Dirichlet boundary conditions, and the Neumann boundary conditions corresponding to the space  $W^h$  are taken into consideration through the subspaces  $W_2^h$  and  $W_3^h$ .

Another decomposition of the domain  $\Omega$  using only two subdomains can be obtained taking

$$\Omega_1 = O_1 \text{ and } \Omega_2 = \bigcup_{i=1}^{n_f} O_{i+1}. \quad (2.43)$$

Naturally, as in the previous case, the space  $W^h$  and the convex set  $W_+^h$  are defined in (2.40) and (2.42), respectively. Also, the subspaces  $W_1^h$  and  $W_2^h$  are written as in (2.41). Evidently, this decomposition with two domains has the same overlapping size as the previous one,  $\delta = h$ . In the following we shall denote by  $m = 2, 3$  the number of subdomains in the decomposition.

The finite element form of the equivalent problems (2.21) and (2.23) are written as

$$u \in W_+^h : \int_{\Omega} \rho u(v - u) dx + \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla(v - u) dx + \int_{\Gamma} h([u])([v] - [u]) d\sigma \geq F(v - u) \text{ for any } v \in W_+^h \quad (2.44)$$

and

$$u \in W_+^h : J(u) \leq J(v) \text{ for any } v \in W_+^h, \quad (2.45)$$

respectively. The proposed algorithm corresponding to the subspaces  $W_1^h, \dots, W_m^h$  and the convex set  $W_+^h$  is written as a subspace correction method as follows

**Algorithm 2.2.5.** We start the algorithm with an arbitrary  $u^0 \in W_+^h$ . At iteration  $n + 1$ , having  $u^n \in W_+^h$ ,  $n \geq 0$ , we compute sequentially for  $i = 1, \dots, m$ ,  $w_i^{n+1} \in W_i^h$  satisfying

$$w_i^{n+1} = \arg \min_{\substack{u^{n+\frac{i-1}{m}} + v_i \in W_+^h \\ v_i \in W_i^h}} G(v_i), \text{ with } G(v_i) = J(u^{n+\frac{i-1}{m}} + v_i), \quad (2.46)$$

and then we update

$$u^{n+\frac{i}{m}} = u^{n+\frac{i-1}{m}} + w_i^{n+1}.$$

We notice that this algorithm does not assume a decomposition of the convex set  $W_+^h$  depending on the subspaces  $W_i^h$ . Problem (2.46) has a unique solution and it also satisfies the variational inequality

$$\begin{aligned} w_i^{n+1} \in W_i^h, u^{n+\frac{i-1}{m}} + w_i^{n+1} \in W_+^h : \\ \langle J'(u^{n+\frac{i-1}{m}} + w_i^{n+1}), v_i - w_i^{n+1} \rangle \geq 0 \quad \forall v_i \in W_i^h, u^{n+\frac{i-1}{m}} + v_i \in W_+^h. \end{aligned} \quad (2.47)$$

We point out that, in fact, inequalities (2.47) corresponding to  $\Omega_1 = O_1$  become equations, in both cases  $m = 3, 2$ . Consequently, at the iteration  $n$ , we have to solve a linear algebraic system having as unknowns the corrections  $w_1^{n+1} = (w_1^{n+1}(x_1), \dots, w_1^{n+1}(x_{n_d}))$  at the nodes  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n_d$ , of  $\mathcal{T}_h$  which are interior in  $O_1$ .

For  $m = 3$ , since the subdomains  $O_i$  composing  $\Omega_2$  or  $\Omega_3$  are disjoint, we obtain independent inequalities (2.47) of two unknowns for each of them. More precisely, for the subdomains  $O_{i+1}$ ,  $i = 1 \dots n_f$ , we solve inequalities having as unknowns the corrections  $w^{n+1}(x_i^+)$  and  $w^{n+1}(x_i^-)$  at the nodes  $x_i^+$  and  $x_i^-$ , respectively. The solutions of these inequalities can be found by the following procedure :

1) We first solve the system of two equations corresponding to the unconstrained minimization, finding  $\tilde{w}^{n+1}(x_i^+)$  and  $\tilde{w}^{n+1}(x_i^-)$ , and then we write  $\tilde{u}^{n+\frac{i+1}{M},+} = u^{n+\frac{i}{M},+} +$



$\tilde{w}^{n+1}(x_i^+)$  and  $\tilde{u}^{n+\frac{i+1}{M},-} = u^{n+\frac{i}{M},-} + \tilde{w}^{n+1}(x_i^-)$ .

2) If  $\tilde{u}^{n+\frac{i+1}{M},+} - \tilde{u}^{n+\frac{i+1}{M},-} \geq 0$ , we take  $u^{n+\frac{i+1}{M},+} = \tilde{u}^{n+\frac{i+1}{M},+}$  and  $u^{n+\frac{i+1}{M},-} = \tilde{u}^{n+\frac{i+1}{M},-}$ , as the approximations at the iteration  $n$  and the subdomain  $O_{i+1}$ ,  $i = 1 \dots n_f$ , of  $u(x_i^+)$  and  $u(x_i^-)$ , respectively.

3) If  $\tilde{u}^{n+\frac{i+1}{M},+} - \tilde{u}^{n+\frac{i+1}{M},-} < 0$ , then the solution of the constraint minimization problem lies on the boundary of the convex set, i.e.,  $u^{n+\frac{i}{M},+} + w^{n+1}(x_i^+) = u^{n+\frac{i}{M},-} + w^{n+1}(x_i^-)$ , and using it, we can find  $w^{n+1}(x_i^+)$  and  $w^{n+1}(x_i^-)$  by solving an unconstrained minimization problem of only one unknown.

For  $m = 2$ , inequality (2.47) corresponding to  $\Omega_2$  contains as unknowns all the corrections  $w^{n+1}(x_i^+)$  and  $w^{n+1}(x_i^-)$  at the nodes  $x_i^+$  and  $x_i^-$ ,  $i = 1 \dots n_f$ . We have solved this inequality by Algorithm 2.2.5, too, in which we have considered the spaces corresponding to the decomposition  $O_2, \dots, O_{n_f+1}$  of  $\Omega_2$ . Naturally, the corrections  $w^{n+1}(x_i^+)$  and  $w^{n+1}(x_i^-)$  corresponding to the subdomains  $O_i$  are found by the above procedure 1)-3). In fact, the difference between the cases  $m = 2$  and  $m = 3$  is that in an iteration, for  $m = 2$ , the linear system corresponding to  $\Omega_1$  is solved only after the convergence over all  $O_{i+1}$ ,  $i = 1 \dots n_f$ , is achieved. For  $m = 3$ , in an iteration, we solve only once inequalities (2.47) corresponding to the subdomains  $O_{i+1}$  and then again the linear algebraic system.

#### 2.2.4.2 Convergence of the method

The convergence of a general Algorithm 2.2.5 for the minimization of convex non-quadratic functionals over a convex set in a reflexive Banach space has been given by Badea (2003a). The proof of the convergence is made under a certain assumption on the convex set and the space decomposition. In the case of the finite linear spaces, this assumption holds if the convex set has a certain property (Badea, 2003b). Using our spaces and convex set, it can be written as :

**Property.** There are some unity partitions  $\{\theta_j^i\}_{j=i, \dots, m}$  associated with  $\cup_{j=i}^m \Omega_j$ ,  $i = 1, \dots, m$ , (i.e., for any  $i = 1, \dots, m$ ,  $\theta_j^i \in C^1(\Omega_j)$ ,  $\text{supp} \theta_j^i \subset \Omega_j$  and  $0 \leq \theta_j^i \leq 1$  for  $j = i, \dots, m$ , and  $\sum_{j=i}^m \theta_j^i = 1$  on  $\cup_{j=i}^m \Omega_j$ ) such that

$$|\partial_{x_k} \theta_j^i| \leq C/\delta, \text{ for any } i = 1, \dots, m, j = i, \dots, m, \text{ and } k = 1, 2,$$

and for any  $v, w \in W_+^h$  we have  $L_h(\theta_i^i v + (1 - \theta_i^i)w) \in W_+^h$ ,  $i = 1, \dots, m$ . The constant  $C$  does not depend on either the mesh or the domain decomposition parameters.

We have denoted above by  $L_h$  the  $P_1$ -Lagrangian interpolation operator which uses the function values at the nodes of the mesh  $\mathcal{T}_h$ . We see that, from the choice of the subdomains  $O_i$ ,  $i = 2, \dots, M$ , the convex set  $W_+^h$  satisfies this property. Consequently, we have (Badea, 2003a)

**Theorem 2.2.6.** For any initial  $u^0 \in W_+^h$ , Algorithm 2.2.5 converges and we have

$$\begin{aligned} J(u^n) - J(u) &\leq \left(\frac{\hat{C}}{\bar{C}+1}\right)^n [J(u^0) - J(u)], \\ \|u^n - u\|^2 &\leq \frac{\hat{C}+1}{\bar{C}} \left(\frac{\hat{C}}{\bar{C}+1}\right)^n [J(u^0) - J(u)], \end{aligned} \quad (2.48)$$

where  $u^n$  are obtained from Algorithm 2.2.5 at iteration  $n \geq 1$ , and  $u$  is the solution of problem (2.45). The constants  $\hat{C}$  and  $\bar{C}$  are written as

$$\hat{C} = \frac{2b}{a} m \left(1 + 2C_0 + \frac{2b}{a} m \frac{C_0^2}{\eta}\right) \frac{1}{1-\eta}, \quad (2.49)$$

$$\bar{C} = \frac{(2-\eta)a}{2(1-\eta)}. \quad (2.50)$$

In the above theorem,  $m = 2, 3$  is the number of subdomains, and  $a$  and  $b$  are the constants in (2.31) and (2.29), respectively. The value of  $\eta$  in the expression of  $\hat{C}$  and  $\bar{C}$  can be arbitrary in  $(0, 1)$ , but there is an  $\eta_0 \in (0, 1)$  such that  $\hat{C}(\eta_0) \leq \hat{C}(\eta)$  for any  $\eta \in (0, 1)$ ; this value  $\eta_0$  can be found by solving an algebraic equation. The constant  $C_0$  can be taken of the form (Badea, 2003b),

$$C_0 = C(m+1)\left(1 + \frac{m-1}{\delta}\right), \quad (2.51)$$

where  $C$  is independent of the mesh and domain decomposition parameters.

Since the number  $m$  of the subdomains  $\Omega_i$  is in fact the number of the colors of the domains  $O_i$ , in the qualitative error estimations, it can be considered as depending only on the dimension of the real space in which the domain  $\Omega$  lies, i.e. it is assimilated to a constant (in general,  $m \leq 4$  for problems in plane). However, since the solution of the linear algebraic system corresponding to the subproblem on  $\Omega_1$  takes the most part of the computing time in an iteration, and, as our error estimate shows, the number of iterations for  $m = 2$  is less than that for  $m = 3$ , we shall see in the numerical examples in the next section that the algorithm with two subdomains is more profitable (from the point of view of the total computing time) than the one with three subdomains.

As we have already said in the previous subsection, we have  $\delta = h$  for our domain decompositions. Consequently, from above error estimate, it follows that the number of iterations to achieve a given error is an increasing function of  $1/h$ .



Finally, the above theorem shows that the number of iterations is an increasing function of  $b/a$ . It follows from (2.38) that  $b$  is an increasing function and  $a$  is a decreasing one of the time step  $\Delta t$ . Consequently, the number of iterations to achieve a given error is an increasing function of  $\Delta t$ .

The above remarks concerning the dependence of the convergence rate on the parameters  $m$ ,  $h$  and  $\Delta t$  will be illustrated in the next section by numerical examples. We mention that, in order to obtain a convergence rate which is independent of mesh and domain decomposition parameters, a two- or multi- level Schwarz method (Badea, 2003b) can be applied to solve problem (2.45). This will be done in a subsequent paper.

## 2.2.5 Numerical results

Numerical simulations were performed using a single processor IBM RS/6000 SP Power 3-II (375 MHz). In all these simulations,  $\Omega$  is a square and  $\Gamma$  is a set of parallel planar cuts. The friction coefficient is piecewise linear, as suggested in (2.5), with  $D_c$ ,  $S$ ,  $\mu_s$  and  $\mu_d$  constant on  $\Gamma$ . We recall from Dascalu and Ionescu (2003) that the stability of the system is characterized by the slope of the friction law,  $\beta = S \frac{\mu_s - \mu_d}{2D_c}$ , and the fault geometry. In the considered examples, the initial state is an unstable equilibrium position ( $w \equiv 0$  with  $q = -S\mu_s$ ) perturbed by a small velocity impulse (i.e.  $w_0 = 0$ ,  $|w_1| \ll 1$ ). The shape and location of this perturbation has no influence on the behavior of the unstable solution. However, for computational reasons, we chose it as a continuous function on  $\Omega$  having a small support in the neighborhood of the fault system.

The time step is chosen to satisfy (2.37), hence the domain decomposition method exposed in section 4 converges at each time iteration. We denote by  $\dot{w}_k^n$  the velocity at time  $n\Delta t$  obtained after  $k$  Schwarz iterations.

The stopping criterion of the iterative algorithm is defined on  $\frac{\|\dot{w}_{k+1}^n - \dot{w}_k^n\|_2}{\|\dot{w}_{k+1}^n\|_2}$ , i.e. the computation is stopped as soon as  $\frac{\|\dot{w}_{k+1}^n - \dot{w}_k^n\|_2}{\|\dot{w}_{k+1}^n\|_2} \leq \varepsilon$ . We have chosen  $\varepsilon = 10^{-4}$  in all the numerical tests.

For the sake of simplicity, the numerical examples presented in this paper concern parallel plane faults. Note that, since we use triangular meshes, the method can be applied to curved faults without any difficulty.

### 2.2.5.1 Convergence tests for a single time step

In order to discriminate the errors due to the time discretization from the error due to the Schwarz algorithm, we first focus on the case of a single time step. In all the convergence tests, we have taken  $\Gamma = [-1, 1] \times \{0\}$ ,  $\Omega = (-2, 2) \times (-2, 2) \setminus \Gamma$ , and  $\beta = 1.4$ . Let us remark that, since  $\beta$  is larger than the universal constant  $\beta_0 = 1.15777\dots$  (Dascalu et al., 2000; Uenishi & Rice, 2002), then the equilibrium is unstable. Hence, we deal with an exponential growth of the perturbation, prescribed at  $t = 0$  as a velocity jump  $w_1$  on the fault. Since we are looking for the effect of the mesh size, we consider in this test a perturbation having a large support.

#### Influence of the mesh size

Computations were performed on five regular meshes described in TAB. 2.1, with  $\Delta t = 0.5s$ . Since the mesh is regular we have taken, in this table, the length of the smallest edge instead of the usual mesh size definition.

| Mesh | Mesh size<br>( $h$ ) | Number<br>of nodes | Number of edges<br>on the fault | Nb. of iterations |         |
|------|----------------------|--------------------|---------------------------------|-------------------|---------|
|      |                      |                    |                                 | $m = 2$           | $m = 3$ |
| 1    | 0.5                  | 90                 | 4                               | 4                 | 5       |
| 2    | 0.2                  | 490                | 10                              | 8                 | 11      |
| 3    | 0.1                  | 1858               | 20                              | 13                | 19      |
| 4    | 0.05                 | 7240               | 40                              | 27                | 36      |
| 5    | 0.025                | 29459              | 80                              | 50                | 65      |

TAB. 2.1 Convergence tests for the Schwarz method with 2 or 3 subdomains

Both decomposition methods ( $m = 2$  and  $m = 3$ ) have been tested. The number of iterations required to achieve the prescribed accuracy on each mesh are presented on TAB. 2.1. The first method ( $m = 2$ ) requires 20% to 30% Schwarz iterations less. At each iteration, the intermediary convergence on  $\Omega_2$  requires a few iterations more (from 1 up to 8), but the computational cost of these additional calculations is negligible, so that the running time is also 20% to 30% smaller in the case  $m = 2$ . Hence, in the following, the convergence tests only concern this method.

The initial perturbation is plotted for the finest mesh in Figure 2.3 (left). The right part of Figure 2.3 shows the slip rate profile on the fault obtained after one time step, at  $t = 0.5s$ , i.e.  $[\dot{w}(0.5, x_1, 0)]$ ,  $x_1 \in [-1, 1]$ , for all the five meshes of TAB. 2.1.

We remark that the numerical solutions are very close for meshes 3 to 5, which



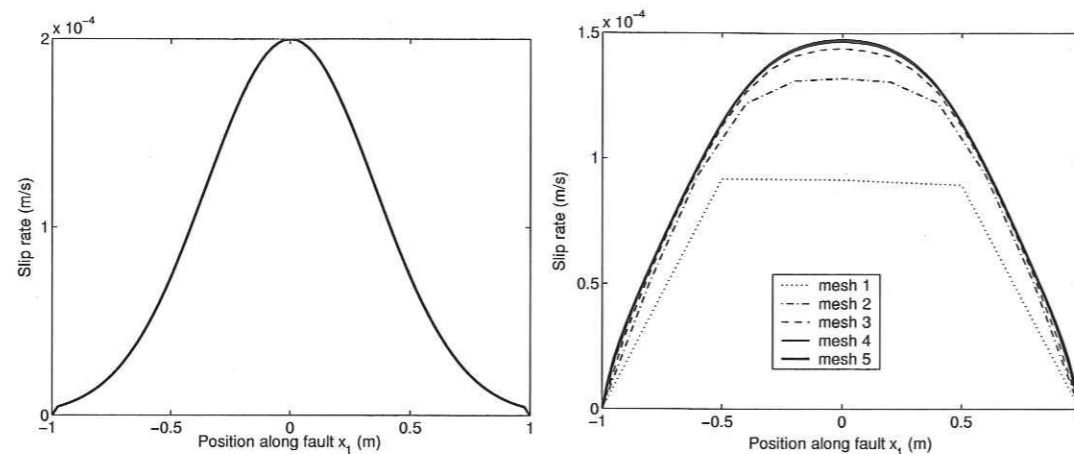


Figure 2.3 *Left : velocity jump  $[w_1]$  on the fault at  $t = 0$   
Right : velocity jump after one time step ( $\Delta t = 0.5s$ )*

illustrates that the convergence to the continuum solution is achieved. But in terms of computation time, a very large number of nodes is expensive, as shown on Figure 2.4. The number of required iterations is almost proportional to the number of nodes on  $\Gamma$ , whereas the computation time of each iteration is governed by the total number of nodes. Since we are mainly interested in computing accurate approximations of the displacement and stress fields in the neighborhood of the fault, for numerical simulations involving a large number of time steps, nonregular meshes have to be used. In this way, the discretization should be fine on and around the fault, so that the velocity distribution on it is well approached, but the discretization away from the fault should be coarser to reduce running time.

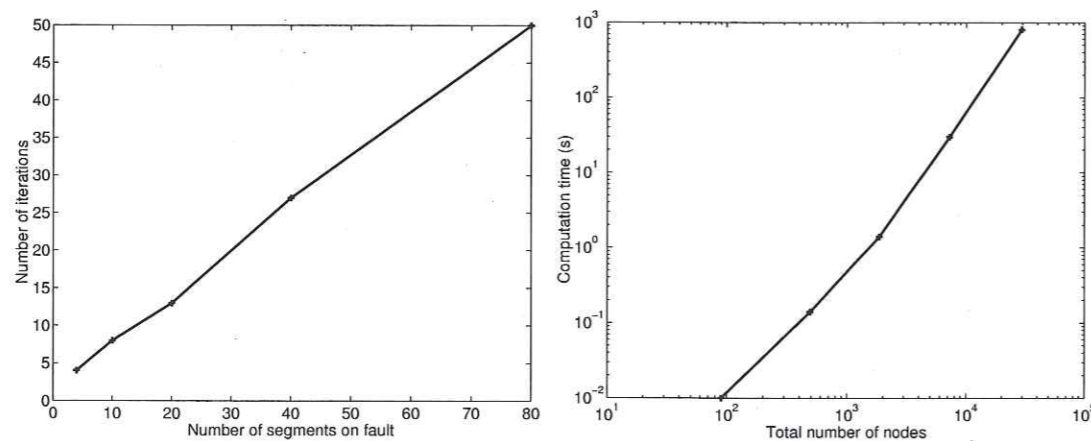


Figure 2.4 *Left : number of iterations vs. fault discretization  
Right : logarithm of computation time vs. logarithm of mesh size*

**Repartition of the error**

On mesh 4, Schwarz algorithm requires 27 iterations to achieve the prescribed accuracy ( $\epsilon = 10^{-4}$ ). The local error, defined by

$$\frac{(\dot{w}_{k+1}^1(x_1^+, 0) - \dot{w}_k^1(x_1^+, 0))^2}{\dot{w}_{k+1}^1(x_1^+, 0)^2} + \frac{(\dot{w}_{k+1}^1(x_1^-, 0) - \dot{w}_k^1(x_1^-, 0))^2}{\dot{w}_{k+1}^1(x_1^-, 0)^2}, \quad x_1 \in ]-1, 1[$$

was computed at each iteration : it concentrates on the fault, and particularly in the neighborhood of its tips (end points), where  $\dot{w}$  tends to zero. It is plotted on Figure 2.5 for iterations 2, 13 and 27.

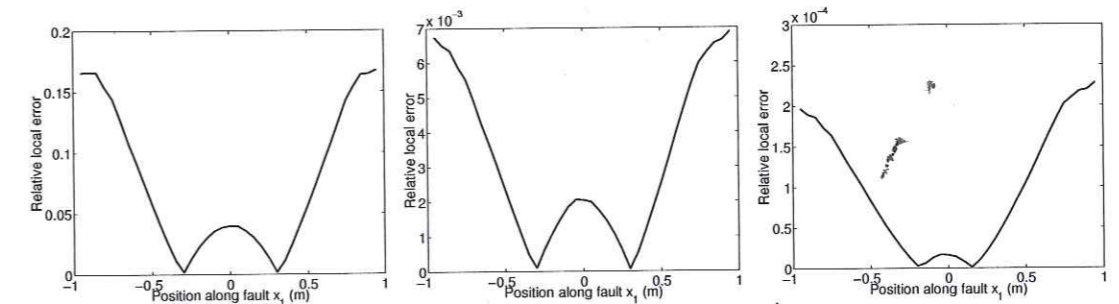


Figure 2.5 *Relative local error on the fault at iterations 2, 13 and 27 (the final iteration), computed on mesh 4. Note that it is not defined at  $x = \pm 1$ .*

Note that no error value is given at the fault tips, since  $\dot{w}^{n+1}(\pm 1, 0) = 0$ . The maximal local error is about  $10^{-1}$  at iteration 2, about  $10^{-3}$  at iteration 13, and finally, about  $10^{-4}$  at iteration 27. As expected, the relative local error is maximal at the fault tips, due to singularities of the exact solution and due to the fact that  $\dot{w}_{k+1}^1$  tends to zero.

In conclusion, the approximation is satisfactory along the fault, but the error due to singularities has to be handled by other discretization techniques.

**Influence of the time step**

The dependence of the convergence rate on the time step size has been tested using mesh 4. As stated at the end of previous section, the number of iterations is expected to be an increasing function of the time step. One can see on Figure 2.6 that this was confirmed by the numerical experiments, since the number of iterations is almost proportional to  $\Delta t$ .

When simulating the evolution of the system for a long period of time, a small value of  $\Delta t$  would guarantee a small number of iterations per time step. But the total computation time is proportional to the total number of time steps, which increases as  $\Delta t$  decreases. In conclusion, the optimal value of  $\Delta t$  depends on the whole evolution process.



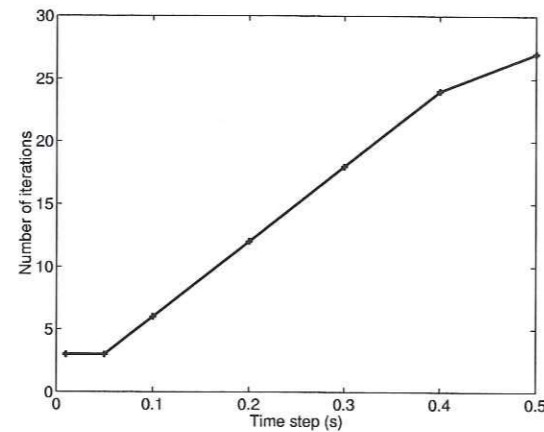


Figure 2.6 Number of iterations vs.  $\Delta t$  for a single time step on mesh 4.

This point will be discussed later.

### 2.2.5.2 Convergence in time

To get a numerical simulation on the time interval  $[0, T]$  with  $T = 5s$ , computations on several successive time steps were performed on a heterogeneous mesh, with 6996 nodes and 40 edges on the fault. As it follows from Figure 2.3, this mesh is fine enough to give a satisfactory approximation of the solution on the fault. A small velocity perturbation is applied at the fault center, and the evolution of the system is observed for 6 different values of  $\Delta t$  : 0.5s, 0.2s, 0.1s, 0.05s, 0.02s and 0.01s. The friction parameter is  $\beta = 3.0$ .

### Instability capturing

Figure 2.7 shows the evolution of the logarithm of the slip rate at fault center, i.e.  $t \rightarrow \log([\dot{w}(t, 0, 0)])$ . The evolution is fast (due to a large value of  $\beta$ , here 3.0), and the slip rate at fault center is exponentially growing. The linear shape of  $t \rightarrow \log([\dot{w}(t, 0, 0)])$  is expected during the initiation phase of instabilities (e.g. Dasalu et al. (2000)). Indeed,  $\dot{w}(t) \simeq \text{Const } e^{\alpha_0 t} \Phi_0$ , where  $\alpha_0$ ,  $\Phi_0$  are the first eigenvalue and eigenfunction of problem (2.35)-(2.36), respectively. The three smallest time steps ( $\Delta t = 0.05s$ ,  $\Delta t = 0.02s$  and  $\Delta t = 0.01s$ ) lead to quasi-identical profiles. This shows that the numerical algorithm based on Newmark and Schwarz methods is efficient in capturing time instabilities, when the solutions have an exponential time growth. Indeed, the Newmark scheme with parameters  $\beta = 1/4$ ,  $\gamma = 1/2$ , also called average acceleration method, is known to be unconditionally stable and non dissipative. It only leads to some dispersion for large time steps.

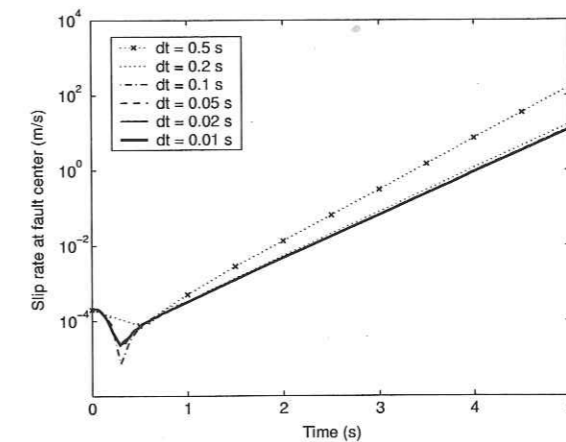


Figure 2.7 Evolution of the logarithm of the slip rate at fault center, for 6 different values of  $\Delta t$

### Energy conservation

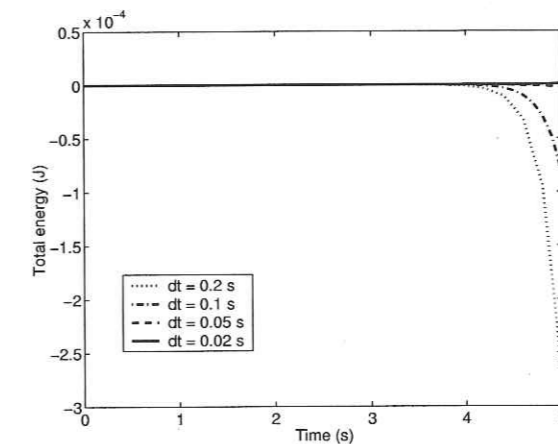


Figure 2.8 Evolution of the renormalized total energy, for the 4 intermediary values of  $\Delta t$ .

Figure 2.8 investigates the energy dissipation of the numerical algorithm. The test consists in considering the evolution of the sum of potential energy, kinetic energy and frictional energy, i.e.

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_p(t) + \mathcal{E}_w(t) = \int_{\Omega} \rho(\dot{w}(t)^2 - w_1^2) dx + \int_{\Omega} G|\nabla w(t)|^2 dx - \int_{\Gamma} F([w(t)]) d\sigma$$

where  $F$  is the antiderivative of  $f$ . On Figure 2.8,  $\mathcal{E}$  is renormalized by the final value of  $\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ . Theoretically,  $\mathcal{E}$  should be constant. We remark that the numerical scheme is strongly conservative : the normalized final value of  $\mathcal{E}$  is smaller than the error criterion  $\varepsilon = 10^{-4}$  multiplied by the number of time steps. Hence, Schwarz method is dissipative,



but this dissipation can be controlled by the choice of the error criterion.

### Optimal time step

The time step is a very important parameter, not only in terms of stability and accuracy of the solution, but also in terms of computation time. As we chose an implicit scheme, we have no stability condition. About its accuracy, the above results imply that any time step smaller than  $0.05s$  gives satisfactory approximations. Running times of these computations are plotted on Figure 2.9. Obviously, they are governed by the total number of Schwarz iterations needed to compute the entire period of time  $[0, 5s]$ . Indeed, a small value of  $\Delta t$  would imply a large number of time steps, but the corresponding number of Schwarz iterations at each time step is small (see the previous subsection). For  $\Delta t < 0.05s$ , the average number of Schwarz iterations is approximately the same, 4, so that computation times blow up for small time steps. Then, the average number of Schwarz iterations is 4 for  $\Delta t = 0.05s$  (100 time steps), 7 for  $\Delta t = 0.1s$  (50 time steps), 18 for  $\Delta t = 0.2s$  (25 time steps), so that the total number of iterations is almost the same, approximately 400. Finally, for  $\Delta t = 0.5s$ , the average number of iterations is 90, so that the computation time is much larger. Hence, in this particular case, it seems that the optimal value is  $\Delta t = 0.05s$ .

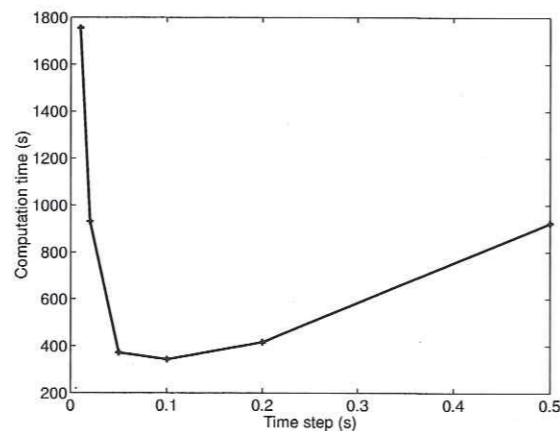


Figure 2.9 Graph of the computation time of a 5s simulation plotted against  $\Delta t$

### 2.2.5.3 Application to interacting parallel fault segments

Two parallel fault segments  $\Gamma_1 = [-1.5, 0.5] \times \{-0.1\}$  and  $\Gamma_2 = [-0.5, 1.5] \times \{0.1\}$  are considered (see Figure 2.10). A small velocity perturbation is applied at  $t = 0$  at an

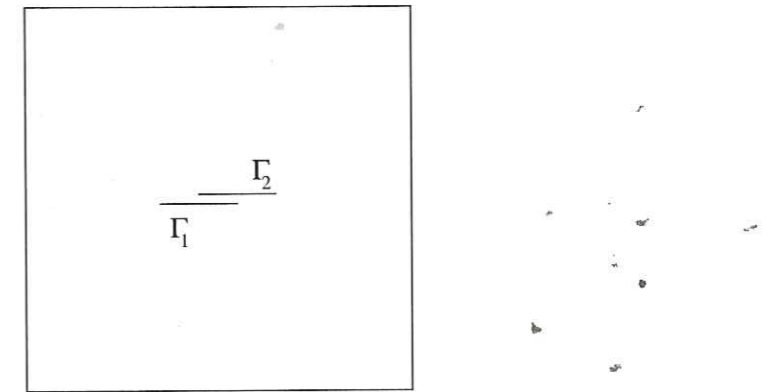


Figure 2.10 Geometry of the fault system, made of two segments  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$

arbitrary point, here  $(1, 0)$ . We chose  $\Omega = (-5, 5)^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ ,  $\beta = 2.0$  and  $\Delta t = 0.03s$ . The mesh has 6938 nodes, and 66 edges on each fault.

Figure 2.11 displays the evolution of the velocity jump on the fault system, for  $0s \leq t \leq 4s$ . The perturbation first reaches  $\Gamma_2$ , where it propagates and is finally reflected by both tips of  $\Gamma_2$ . On  $\Gamma_1$ , once the perturbation has propagated from the right tip of  $\Gamma_2$ , we can see another wave coming from the left tip of  $\Gamma_2$ . Then, one can see the beginning of the *initiation phase*, i.e. the slip rate grows exponentially. Note that a part of  $\Gamma_1$  remains locked, since the static friction level has not been exceeded. At last, the critical slip is reached on  $\Gamma_2$ , close to the center of the fault segment, and then the stage of *rupture propagation* begins.

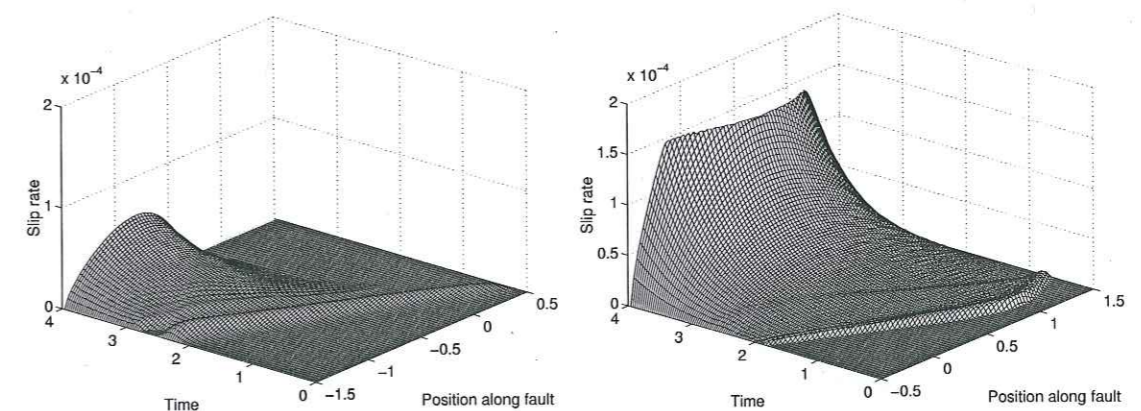


Figure 2.11 Slip rate evolution on two interacting parallel faults (left :  $\Gamma_1$ , right :  $\Gamma_2$ )

On Figure 2.12, one can see the entire velocity field for different values of  $t$ . The initial perturbation propagates and first reaches  $\Gamma_2$ , so that slip occurs rapidly on the entire fault segment.  $\Gamma_1$  is also perturbed, but the previous slip event on  $\Gamma_2$  has already induced a stress change on its neighborhood. The static friction level cannot be overcome



on a significant part of  $\Gamma_1$ , which is therefore inhibited for a while. Such interaction between the fault segments is responsible for the asymmetric velocity profile of  $\Gamma_1$ , with a single singularity and a locked zone at the other tip of the fault. Then the characteristic pattern of the initiation phase dominates at  $t = 1.8s$  and  $t = 2.4s$ , with the slip rate growing exponentially, such that the remaining waves cannot be seen any longer. As the slip grows exponentially, it finally reaches the critical value  $2D_C$ , here  $10^{-4}$ , first at the center of  $\Gamma_2$ . One can see the rupture propagating at  $t = 3.0s$  and  $t = 3.6s$ .

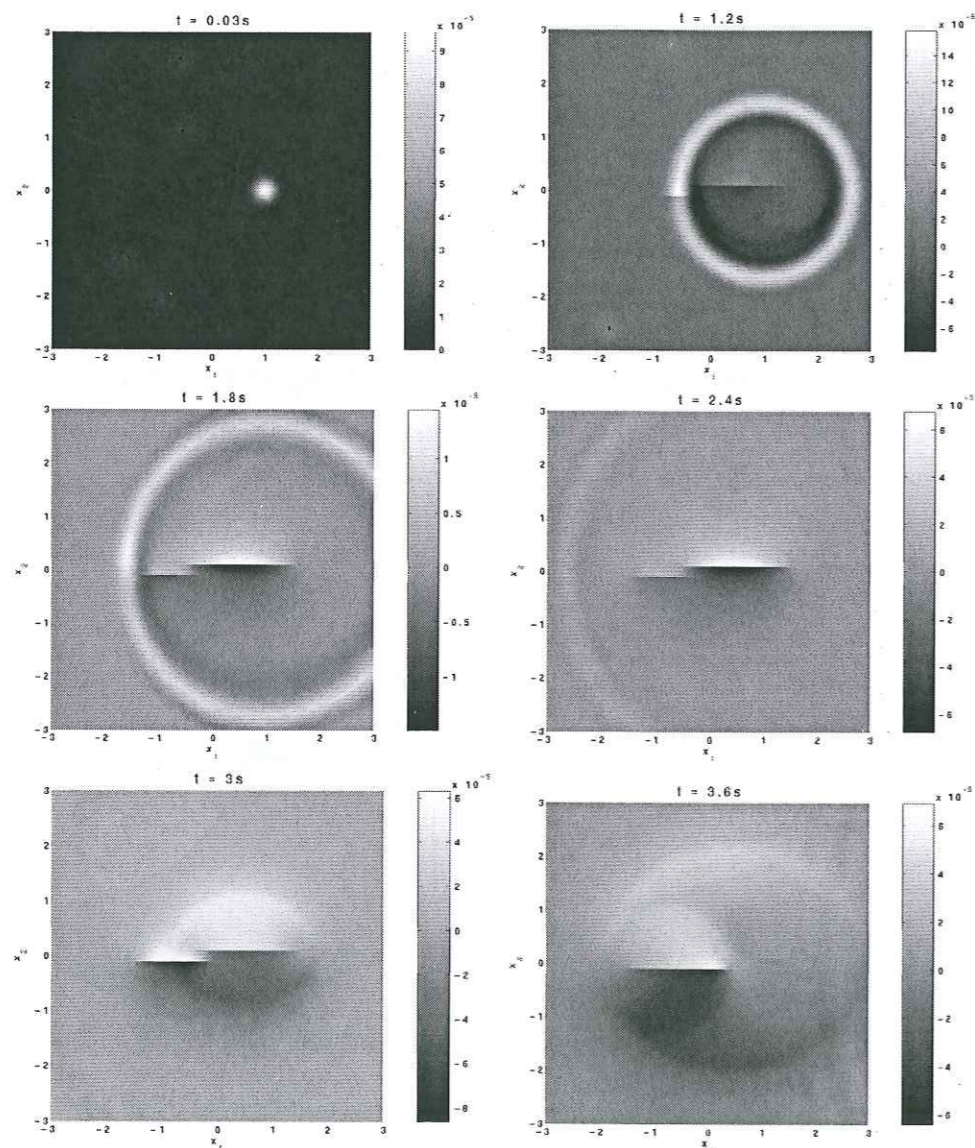


Figure 2.12 Evolution of the velocity field in the vicinity of  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$ . The velocity is plotted at  $t = 0.03s$ ,  $t = 1.2s$ ,  $t = 1.8s$ ,  $t = 2.4s$ ,  $t = 3s$  and  $t = 3.6s$ .

### 2.3 Remarques sur le choix de la méthode numérique

Revenons sur la résolution du problème qui doit être résolu à chaque pas de temps, dans le cas où on considère une loi de frottement homogène dépendant du glissement.

Connaissant la solution à l'instant  $n$ , on cherche le champ de vitesse  $\dot{u}^{n+1} \in W_+$  comme solution de

$$\int_{\Omega} \rho \dot{u}^{n+1} (v - \dot{u}^{n+1}) dx + \frac{\Delta t^2}{4} \int_{\Omega} G \nabla \dot{u}^{n+1} \cdot \nabla (v - \dot{u}^{n+1}) dx + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma} \mu ([u^n] + \frac{\Delta t}{2} [\dot{u}^n + \dot{u}^{n+1}])([v] - [\dot{u}^{n+1}]) d\sigma \geq F_n(v - \dot{u}^{n+1}) \quad \forall v \in W_+$$

avec  $F_n(v) = \int_{\Omega} \rho (\dot{u}^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}^n) v dx - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} G \nabla (u^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{u}^n) \nabla v dx$ .

Ce problème peut s'écrire comme un problème d'optimisation sous des contraintes s'exprimant comme des inégalités. On peut le résoudre directement en utilisant une méthode de dualité, c'est-à-dire en reportant les contraintes sur un multiplicateur défini sur la faille. Cela équivaut à une formulation en *éléments finis mixtes*, puisque le multiplicateur introduit sur la faille est, à une transformation près, égal à la contrainte de cisaillement sur la faille. On utilise alors l'algorithme d'Usawa, qui n'est autre qu'une méthode de descente dans le nouvel espace des inconnues. On optimise la fonctionnelle alternativement dans l'espace des inconnues de départ et dans l'espace des multiplicateurs. Dans le premier cas, on minimise une fonctionnelle convexe sans contrainte. Dans le second cas, on se déplace dans la direction du gradient, selon un pas fixe, en prenant soin de toujours respecter les contraintes. Cette méthode a été implémentée avec succès, mais les calculs sont longs. La convergence est parfois difficile à atteindre, en particulier à cause du choix du pas de descente de l'algorithme : s'il est trop grand, on risque de « sauter » sans fin au-dessus de la solution ; s'il est trop petit, il ralentit la convergence et compromet la précision du résultat, liée au nombre d'itérations. Cette technique est reprise, dans le chapitre 3, pour l'analyse modale de l'initiation.

Ces difficultés sont d'autant plus décevantes que seuls les degrés de liberté liés à la faille empêchent de formuler le problème comme un simple système linéaire. L'idée de décomposer le problème en un grand système linéaire (défini partout en dehors de la faille) et un petit problème d'optimisation sous contraintes (restreint aux degrés de liberté liés à la faille) est dès lors tout à fait naturelle, et les méthodes de décomposition de domaine s'imposent comme le cadre théorique adéquat.

Afin de ne pas nuire à l'anisotropie du maillage éléments finis, il est important de



ne pas ajouter de frontières fictives arbitraires entre les sous-domaines. Il suffit alors de faire coïncider ces frontières avec les arêtes des triangles. En particulier, on peut isoler les points de la faille en sélectionnant tous les triangles qui les contiennent (Figure 2.2). Sur ce domaine, les degrés de liberté correspondent aux vitesses de part et d'autre de la faille. La taille du problème d'optimisation a donc largement chuté, mais les problèmes de convergence évoqués plus haut subsistent. Pour s'en débarrasser définitivement, il suffit de pousser plus loin la décomposition, en définissant un sous-domaine différent pour chaque point géométrique de la faille. Sur chacun d'entre eux, on doit maintenant résoudre un problème à deux degrés de liberté. Bien sûr, cette simplification drastique a son prix, puisque le nombre d'itérations nécessaire pour faire converger la méthode de décomposition de domaine est de l'ordre du nombre de sous-domaines. Ce prix reste toutefois modique comparé à l'économie réalisée.

Par ailleurs, parmi ces sous-domaines, on peut définir deux sous-groupes, dans lesquels les domaines sont distincts deux à deux. Les problèmes correspondants peuvent être résolus indépendamment, et la résolution pourrait donc être parallélisée sans problème. Quant au grand système linéaire, il pourrait être découpé en morceaux pour être parallélisé, mais cela ne changerait rien à la convergence globale, et cela rajouterait à la complexité de la définition des sous-domaines. C'est pourquoi aucune parallélisation n'a été réalisée jusqu'à maintenant.

Une fois les sous-domaines bien définis, la méthode la plus simple et la plus intuitive consiste à résoudre chaque problème successivement, en prenant pour chacun des conditions de Dirichlet au bord correspondant à l'approximation précédente. Dans ce cas, si l'on repense à la première décomposition envisagée (avec seulement deux domaines, un grand et un petit), cela revient à résoudre à nouveau le grand système linéaire sans avoir atteint la convergence sur le petit domaine. Puisque c'est la résolution du grand système linéaire qui est la plus coûteuse en temps de calcul, il vaut mieux ne la relancer que lorsque le processus concurrent a convergé. C'est pourquoi, avec notre décomposition, il vaut mieux recommencer la résolution successive de l'ensemble des petits problèmes jusqu'à convergence. On constate en effet une diminution du temps de calcul de 20% à 30%.

La résolution du grand système linéaire consiste pour l'essentiel à inverser la matrice  $M + \frac{\Delta t^2}{4}R$ , où  $M$  et  $R$  sont les matrices de masse et de rigidité du domaine privé des points de la faille. On trouve ici un autre avantage de notre décomposition : cette matrice est constante, et peut donc être assemblée une fois pour toutes au début des calculs. Pour accélérer les inversions, on peut aussi la décomposer une fois pour toutes ou, si une méthode itérative de type *gradient conjugué* est utilisée, effectuer une seule et unique fois

son préconditionnement. Cela n'aurait pas été possible si cette matrice avait contenu la matrice de bord sur la faille, qui varie suivant que les points sont sur la partie affaiblissante ou sur la partie constante de la loi de frottement. La non-linéarité du problème sur la faille est très facilement résolue puisque celui-ci est décomposé en sous-problèmes de tailles très réduites. Cela a aussi pour conséquence qu'on peut très facilement implémenter des lois de frottement plus complexes que notre loi linéaire par morceaux, qui varieraient éventuellement le long de la faille.

Pour finir, remarquons que la méthode que nous employons est finalement très proche d'une méthode de relaxation par blocs. En effet, une fois discrétisé, notre problème peut s'écrire de façon matricielle comme suit : on cherche  $u \in W_+$  tel que

$$(v - u)^T Au \geq (v - u)^T F \quad \forall v \in W_+$$

$A$  contient les matrices de masse et de rigidité du système, mais aussi un terme de bord défini sur la faille dont la représentation matricielle peut changer au cours du temps (en particulier lorsque les points de la faille atteignent le glissement critique, mais on peut aussi envisager une loi de frottement non linéaire).

Supposons que nous travaillons avec trois domaines  $O_1 = \Omega$ ,  $O_2$  (qui contient les points correspondant à la moitié des sous-domaines, définis de manière à ne pas se recouvrir) et  $O_3$  (qui contient l'autre moitié). On cherche donc  $u$  sous la forme  $u = (u_1, u_2, u_3)$ . Notre méthode consiste à résoudre à chaque itération :

$$\begin{aligned} A_{11}u_1^n + A_{12}u_2^{n-1} + A_{13}u_3^{n-1} &= F_1 \\ (A_{21}u_1^n + A_{22}u_2^n + A_{23}u_3^{n-1})(v_2 - u_2^n) &\geq F_2(v_2 - u_2^n) \quad \forall v_2 \in W_+^2 \\ (A_{31}u_1^n + A_{32}u_2^n + A_{33}u_3^n)(v_3 - u_3^n) &\geq F_3(v_3 - u_3^n) \quad \forall v_3 \in W_+^3 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à une méthode de Gauss-Seidel par blocs, puisque nous résolvons

$$(v - u^n)^T M u^n \geq (v - u^n)^T N u^{n-1} + (v - u^n)^T F \quad \forall v \in W_+$$

après avoir décomposé la matrice  $A$  sous la forme  $A = M - N$  avec

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & 0 & A_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette correspondance n'est pas tout à fait une surprise, puisque les méthodes de relaxation, de même que les méthodes de décomposition de domaine, sont avant tout des méthodes de correction par sous-espaces (*subspace correction methods*). On remarquera



toutefois que le formalisme de la méthode de Schwarz permet beaucoup plus de flexibilité dans la conduite des itérations (en particulier dans la version qui consiste à itérer la résolution sur  $O_2$  et  $O_3$  jusqu'à convergence, dans le cas où la décomposition ne comporte que deux domaines  $O_1$  et  $O_2 \cup O_3$ ). De même, si nous introduisons davantage de non-linéarité dans la loi de frottement, une conséquence pourrait être que le problème résolu à chaque itération de la méthode de Schwarz s'écrive plus difficilement sous forme matricielle.

On pourra aussi remarquer que la loi de frottement pourrait aussi être introduite par une formulation forte, en chaque point. C'est la méthode choisie par Ampuero (2002) pour résoudre le problème de la rupture dynamique. Le problème résolu à chaque pas de temps prend alors la forme d'un problème de complémentarité linéaire (PCL), pour lequel des méthodes de résolution efficaces existent (Cottle et al., 1992).

## 2.4 Stabilité et précision du schéma espace-temps

La précision d'un schéma de discrétisation espace-temps, c'est-à-dire sa capacité à reproduire la solution continue, est d'abord liée à la discrétisation spatiale. Dans le cas d'éléments finis P1, il est évident que les détails du champ calculé à l'instant  $t$  ne pourront pas être plus petits que la taille du maillage en chaque point. De même, les variations en temps ne pourront pas être de période plus petite que le pas de temps choisi.

Au-delà de ces considérations de bon sens, il faut parler des caractéristiques de dispersion et de dissipation attachées à chaque schéma en temps. Celui que nous avons choisi, un cas particulier du schéma de Newmark appelé *average acceleration method*, est inconditionnellement stable et non dissipatif, mais il est dispersif pour les grands pas de temps. On peut donc s'attendre à un défaut de précision du schéma si le pas de temps est plus grand que la plus petite période des ondes émises. Ce problème est illustré par la Figure 2.7. Remarquons qu'avec notre méthode, une autre source d'erreur doit être évaluée : les itérations de la méthode de Schwarz. La convergence en est assurée si le pas de temps ne dépasse pas une valeur donnée par la relation (2.37), qui assure la stricte convexité de la fonctionnelle à minimiser. Cette borne supérieure est toutefois plus avantageuse qu'une condition de type CFL. Comme toute méthode de résolution itérative de système linéaire, l'erreur (*bruit*) numérique augmente avec le nombre d'itérations, toutefois on constate qu'elle reste négligeable devant le critère d'arrêt choisi dans nos expériences numériques. La Figure 2.8 montre que l'erreur résultante s'exprime par de la dissipation.

Pour résumer, dès que le phénomène étudié comporte des détails à haute fréquence géométriquement ou temporellement (et même les deux dans le cas de la propagation

d'ondes), le maillage doit permettre une discrétisation raisonnable de ces détails, et le pas de temps doit être au plus égal au temps que les ondes mettent pour traverser une maille. On voit bien que ces considérations sont très restrictives pour la modélisation de la propagation de la rupture sismique, puisque les singularités du champ de contraintes nécessitent une maille très fine localement. En revanche, la phase d'initiation est un phénomène peu radiatif, avec une distribution de glissement très régulière en espace. On peut donc espérer pouvoir choisir un pas de temps assez long pour pouvoir simuler une initiation lente. C'est dans ce but que nous avons choisi un schéma de Newmark implicite inconditionnellement stable. En effet, ce choix nous libère de toute condition de type CFL, qui nous empêcherait de choisir un petit pas d'espace pour un grand pas de temps. En cela, les caractéristiques de notre schéma sont très différentes de celles des éléments spectraux, ou des éléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse : notre schéma est moins bien adapté à la propagation d'ondes, mais plus apte à modéliser l'initiation des tremblements de terre ou tout autre phénomène de glissement dont l'échelle de temps dépasse largement celle de la propagation des ondes, et surtout plus apte à en capturer les solutions instables.



## Chapitre 3

### La phase d'initiation. Analyse spectrale non linéaire.

#### 3.1 Introduction

Dans le chapitre 2, la simulation de l'évolution spontanée du glissement sur une faille à laquelle on a appliqué une petite perturbation initiale montre l'existence d'une phase préliminaire de glissement stable, peu radiative, qui a lieu entre l'occurrence de cette perturbation et le début de la rupture. Cette phase d'initiation fait ici l'objet d'une étude plus précise qui montre l'existence d'un mode propre portant la signature de l'initiation. Il s'agit de la première fonction propre d'un opérateur qui, pour satisfaire la condition de positivité du glissement sur la faille et rendre compte d'éventuelles *zones d'ombre*, est non linéaire. Cette étude permet par ailleurs de caractériser la stabilité d'un réseau de failles, puisqu'elle détermine le taux d'affaiblissement minimal capable de faire évoluer la faille vers un comportement instable lorsqu'elle est confrontée à une perturbation (fluage, séisme lointain...). D'un point de vue technique, nous développons ici une méthode numérique de type *éléments finis mixtes* en définissant sur les points de la faille des multiplicateurs de Lagrange qui correspondent, à une transformation près, à la contrainte de cisaillement.

Dans le chapitre 4, la version quasi-statique de cette étude modale servira à ébaucher une classification des réseaux de failles normales.



### 3.2 Initiation sur une faille plane

Le cas d'une faille plane a déjà été étudié, en mode antiplan et plan, ainsi qu'en 3-D. L'analyse spectrale consiste à décomposer la solution du problème d'évolution de l'initiation (c'est-à-dire en supposant l'affaiblissement des contraintes proportionnellement au glissement) sur une famille de fonctions propres d'un opérateur linéaire. Celles qui correspondent à des valeurs propres négatives donnent des composantes ondulatoires de la solution, et celles qui correspondent à des valeurs propres positives donnent des composantes instables de la solution qui ont une croissance exponentielle avec le temps. Dans le cas particulier d'une valeur propre nulle, le mode propre correspondant est une composante statique. La stabilité d'une faille est donc caractérisée par l'apparition d'une valeur propre strictement positive.

Les résultats principaux concernant la stabilité d'une faille plane en configuration antiplane sont résumés ci-dessous. Pour l'initiation plane et tridimensionnelle, ou pour plus de détails sur l'initiation antiplane, on pourra se référer à Favreau (2000).

#### 3.2.1 Cas de la faille infinie

La géométrie antiplane est présentée dans le chapitre 1. Le déplacement est porté par la direction perpendiculaire au plan de faille. La loi de frottement utilisée par Campillo et Ionescu (1997) est la loi linéaire par morceaux utilisée dans l'ensemble de la thèse, toutefois elle n'envisage pas de comportement non linéaire (déchargement des contraintes à vitesse de glissement nulle). La Figure 3.1 permet de montrer que le premier mode propre définit la *partie dominante* de la solution dynamique, qui est la partie non radiative, rapidement dominante au cours du temps.

Ionescu et Campillo (1999) utilisent une loi de frottement plus proche des lois décrites par Ohnaka et al. (1987), dont on peut moduler l'affaiblissement pour un même glissement critique et des seuils statique et dynamique identiques (Figure 3.2). Ils montrent que le temps d'initiation est une fonction décroissante du taux d'affaiblissement initial, et que l'initiation est surtout contrôlée par le tout début du glissement instable, contrairement à la phase de propagation de la rupture.

#### 3.2.2 Cas de la faille finie

Le problème du glissement confiné sur une zone de glissement de longueur finie a été étudié numériquement par Ionescu et Campillo (1999), et analytiquement par Dascalu

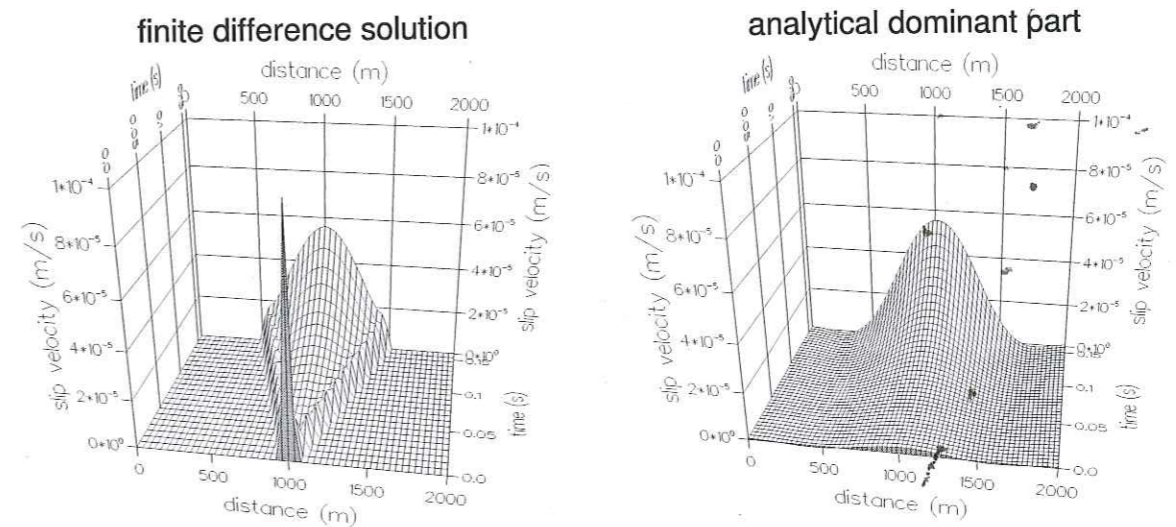


Figure 3.1 Comparaison de la solution dynamique complète, calculée par une méthode de différences finies, avec la "partie dominante" analytique. D'après Campillo et Ionescu (1997).

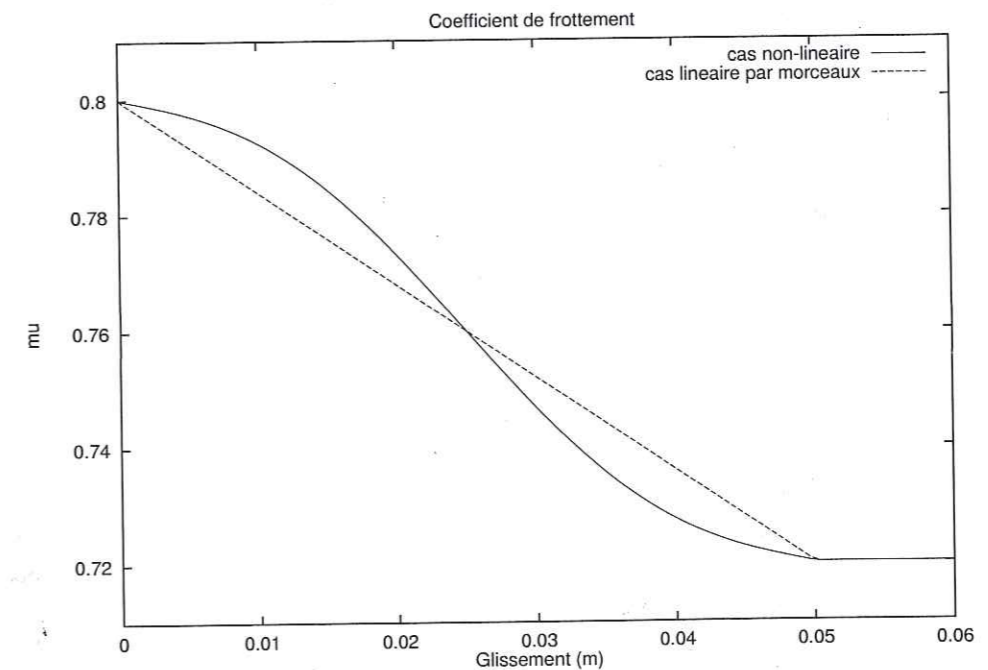


Figure 3.2 Lois de frottement non linéaires. D'après Nguyen (1999).



et al. (2000). A la différence d'une faille infinie, une faille finie n'évolue pas nécessairement de manière instable lorsqu'elle est portée au seuil de résistance statique et soumise à une légère perturbation. Son comportement devient instable à condition que le taux d'affaiblissement de la loi de frottement dépasse une certaine valeur critique, que Ionescu et Campillo (1999) puis Dascalu et al. (2000) identifient comme la plus petite valeur propre positive obtenue dans le cas statique par l'analyse spectrale adimensionalisée (c'est-à-dire normalisée par la taille de la faille).

Ce résultat signifie aussi que, pour un affaiblissement donné, il existe une taille de faille critique au-delà de laquelle celle-ci devient instable. Signalons que Uenishi et Rice (2002) ont retrouvé les résultats de Ionescu et Campillo (1999), Dascalu et al. (2000) concernant la limite de stabilité et la taille critique de la zone de glissement, en étudiant le cas d'une faille soumise à un chargement hétérogène ; ils ont montré par ailleurs que ce résultat est indépendant de la forme du chargement. Ionescu et Campillo (1999) montrent également que le temps d'initiation dans le cas instable dépend de la taille de la faille et tend vers l'infini lorsque celle-ci se rapproche de la taille critique.

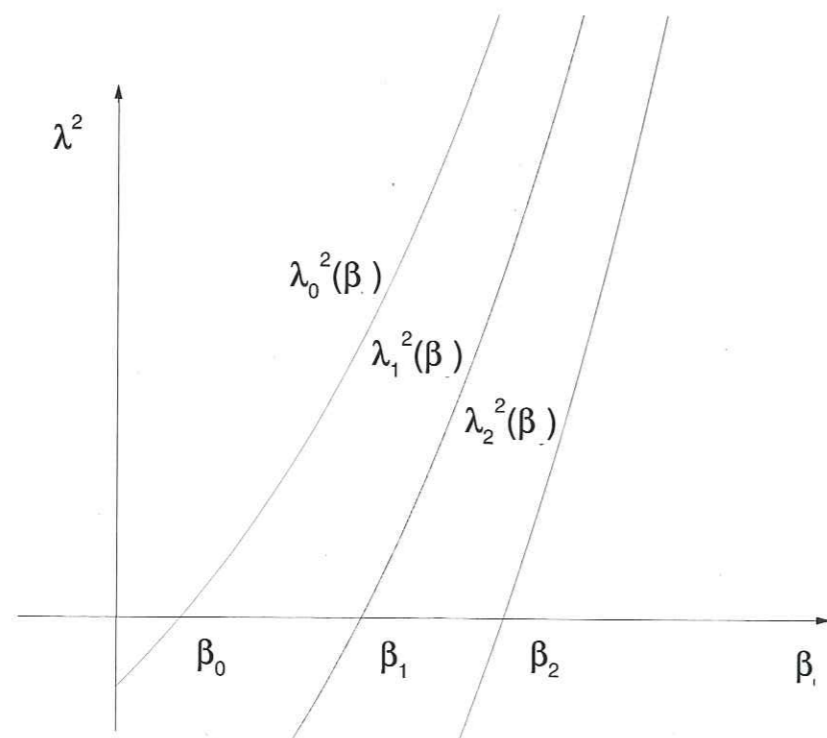


Figure 3.3 Les trois premières valeurs propres  $\lambda_n^2$  en fonction de l'affaiblissement. Les trois droites coupent l'axe  $\lambda^2 = 0$  en  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  qui sont les trois premières valeurs propres du problème spectral statique. D'après Dascalu et al. (2000).

Dans le cas instable, toujours pour un affaiblissement donné, Ionescu et Campillo (1999) montrent que les valeurs propres du problème spectral sont  $\lambda_0^2 > \lambda_1^2 > \dots$ , et que le

comportement de la faille pendant l'initiation est décrit par le mode propre correspondant à la plus grande valeur propre  $\lambda_0^2$ . La Figure 3.3 montre la dépendance des trois premières valeurs propres  $\lambda_n^2$  en fonction de l'affaiblissement  $\beta$ . La position de l'affaiblissement parmi les  $\beta_n$  renseigne sur la composition de la partie non radiative :

- Si  $\beta < \beta_0$ , alors aucun mode instable n'est excité ; la solution est donc entièrement ondulatoire.
- Si  $\beta_{n-1} < \beta < \beta_n$ , alors les  $n$  premiers modes instables sont excités ; la solution peut alors être approchée par  $\Phi_0(x)e^{|\lambda_0|t}$ , où  $\Phi_0$  est le premier mode, qui est aussi le plus instable.

### 3.3 Interaction des failles non coplanaires pendant l'initiation

Dans cette section, qui a fait l'objet d'un article (Ionescu et Wolf, soumis à *Mathematical Methods in the Applied Sciences*), nous résolvons le problème spectral non linéaire induit par la prise en compte des zones d'ombre sur des réseaux de failles parallèles dans un milieu élastique linéaire, borné ou non. Nous nous limitons au calcul de la première valeur propre, qu'on peut estimer grâce au quotient de Rayleigh. Celle-ci nous permet, entre autres, de donner un critère de stabilité des réseaux de faille. Ce calcul sera repris dans le chapitre 4 pour étudier le comportement des réseaux de failles normales en fonction de leur géométrie, et pour étudier les zones de relai dans un système de deux failles normales se propageant l'une vers l'autre.

La version statique de ce problème s'écrit comme la recherche des minima locaux d'une fonctionnelle d'énergie. Nous introduisons le problème spectral non linéaire statique et nous prouvons l'existence du premier mode propre, associé à un minimum local isolé de la fonctionnelle d'énergie. Dans le cas dynamique, nous étudions l'existence de solutions présentant une croissance exponentielle avec le temps et nous en déduisons le problème spectral non linéaire dynamique. Nous prouvons l'existence du premier mode propre, et nous étudions son comportement en fonction du paramètre de frottement. Nous décrivons une discrétisation du problème spectral en éléments finis mixtes ainsi qu'un algorithme de calcul du premier mode, qui se formule comme un problème d'optimisation sous contraintes défini seulement sur les points de la faille. Nous rapportons les résultats de tests de convergence numérique sur une faille isolée et sur un système de deux failles parallèles. Nous finissons par une comparaison du mode propre avec la solution du problème d'évolution, calculée grâce à la méthode décrite dans le chapitre 2.



## Interaction of faults under slip-dependent friction. Nonlinear eigenvalue analysis

Ioan R. IONESCU<sup>1</sup> & Sylvie WOLF<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mathématiques, Université de Savoie, Campus Scientifique,  
73376 Le Bourget-du-Lac Cedex, France, Fax 33.4.79.75.81.42, ionescu@univ-savoie.fr

<sup>2</sup> Laboratoire de Géophysique Interne, Université Joseph Fourier,  
BP 53X, 38041 Grenoble Cedex, France

### Abstract

We analyze the evolution of a system of finite faults by considering the nonlinear eigenvalue problems associated to static and dynamic solutions on unbounded domains. We restrict our investigation to the first eigenvalue (Rayleigh quotient). We point out its physical significance through a stability analysis and we give an efficient numerical algorithm able to compute it together with the corresponding eigenfunction.

We consider the anti-plane shearing on a system of finite faults under a slip-dependent friction in a linear elastic domain, not necessarily bounded. The static problem is formulated in terms of local minima of the energy functional. We introduce the non linear (static) eigenvalue problem and we prove the existence of a first eigenvalue/eigenfunction characterizing the isolated local minima. For the dynamic problem we discuss the existence of solutions with an exponential growth, to deduce a (dynamic) nonlinear eigenvalue problem. We prove the existence of a first dynamic eigenvalue and we analyze its behavior with respect to the friction parameter. We deduce a mixed finite element discretization of the nonlinear spectral problem and we give a numerical algorithm to approach the first eigenvalue/eigenfunction. Finally we give some numerical results which include convergence tests, on a single fault and a two faults system, and a comparison between the nonlinear spectral results and the time evolution results.

**Keywords :** domains with cracks, slip-dependent friction, wave equation, earthquake initiation, nonlinear eigenvalue problem, Rayleigh quotient, unilateral conditions, mixed finite element method

**2000 Mathematics Subject Classification :** 86A17, 86A15, 47J10, 65N25, 74L05.

### 3.3.1 Introduction

The earthquake nucleation (or initiation) phase, preceding the dynamic rupture, has been pointed out by detailed seismological observations (Iio, 1992; Ellsworth & Beroza,

1995) and it has been recognized in laboratory experiments (Dieterich, 1986; Ohnaka et al., 1987) to be related to slip-weakening friction (i.e. the decrease of the friction force with the slip). This physical model was thereafter used in the qualitative description of the initiation phase in unbounded (Campillo & Ionescu, 1997; Ampuero et al., 2002) and bounded (Dascalu et al., 2000; Uenishi & Rice, 2002) fault models:

Important physical properties of the nucleation phase (characteristic time, critical fault length, etc.) were obtained by Campillo and Ionescu (1997), Dascalu et al. (2000) through simple mathematical properties of the unstable evolution. In the description of the instabilities, the spectral analysis played a key role. Moreover, the shape of the eigenfunctions was shown to determine the signature of the initiation phase (Voisin et al., 2002), and the spectral equivalence was the main principle in the renormalization of a heterogeneous fault by Campillo et al. (2001).

For the anti-plane shear of an elastic plane containing a system of coplanar faults, the (linear) eigenvalue problem was solved by Dascalu and Ionescu (2003) through a semi-analytical integral equation technique to compute the set of eigenvalues and the shape of the eigenfunctions. For bounded domains, it was also proved that the spectrum consists of a decreasing and unbounded sequence of eigenvalues. To ensure the physical significance of the (linear) eigenvalue problem, the first eigenfunction must have a constant sign all along the fault. For a system of coplanar faults, it was found from numerical computations Dascalu and Ionescu (2003), Dascalu et al. (2000) that this property holds. Hence, in this case, the linear approach was sufficient to give a satisfactory model for the initiation of instabilities.

If the faults are not coplanar, then the unilateral condition is no longer satisfied, that is the first eigenfunction of the tangent (linear) problem has no physical significance. Hence, in modelling initiation of friction instabilities, a non-linear (unilateral) eigenvalue problem has to be considered. This difficulty arises with the effect of stress shadowing which does not exist for coplanar fault segments. From the mathematical point of view, the main novelty in this particular nonlinear eigenvalue problem is the presence of the convex cone of functions with non-negative jump across an internal boundary (a finite number of bounded connected arcs called faults).

This nonlinear eigenvalue variational inequality was considered by Ionescu and Radulescu (2003) by Ionescu and Radulescu. In the dynamic case they established, for a bounded domain, the existence of infinitely many solutions. They also proved that the number of solutions of the perturbed problem becomes greater and greater if the perturbation tends to zero with respect to an appropriate topology. Their proofs rely on algebraic topology methods developed by Krasnoselski, combined with adequate tools in the sense



of the Degiovanni non-smooth critical point theory.

Our goal here is to analyze the case of a finite fault system by considering the nonlinear eigenvalue problems associated to static and dynamic solutions on unbounded domains. We restrict our investigation to the first eigenvalue (Rayleigh quotient). We aim to point out its physical significance through a stability analysis and to find an efficient numerical algorithm able to compute it together with the corresponding eigenfunction. The nonlinear eigenvalue method presented in this paper is used by Wolf et al. (2003) for some geophysical applications, in particular the slip patterns of normal faults in Afar.

Let us sketch here the contents of the paper. In section 3.3.2, we consider the anti-plane shearing on a system of finite faults under a slip-dependent friction in a linear elastic domain, not necessarily bounded. We first formulate the static problem (section 3.3.3) and give its variational formulation in terms of local minima of the energy functional. We introduce the nonlinear eigenvalue problem and we prove the existence of a first eigenvalue/eigenfunction. We also prove that, if the nondimensional friction parameter  $\beta$  is less than the first eigenvalue  $\beta_0$ , then we deal with an isolated local minimum.

For the dynamic problem, we discuss (in section 3.3.4) the existence of solutions with an exponential growth to deduce a nonlinear eigenvalue problem depending on the parameter  $\beta$ . We prove the existence of a first eigenvalue  $\lambda_0^2$  and we analyze its behavior with respect to  $\beta$ . In section 3.3.5, we consider a mixed finite element discretization of the nonlinear spectral problem and we give a numerical algorithm to approach the first eigenvalue/eigenfunction. In all our tests and applications, we found that the algorithm is convergent. The proof of the convergence is beyond the scope of the present paper. These numerical results are detailed in section 3.3.6 : they include convergence tests, on a single fault and on a two-faults system, and a comparison between the solution of the nonlinear spectral analysis and the time evolution results.

### 3.3.2 Problem Statement

Consider, as Dascalu and Ionescu (2003), Dascalu et al. (2000), Uenishi and Rice (2002), Wolf et al. (2003), the anti-plane shearing on a system of finite faults under a slip-dependent friction in a linear elastic domain (see Figure 3.4). Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  be a domain, not necessarily bounded, containing a finite number of cuts. Its boundary  $\partial\Omega$  is supposed to be smooth and divided into two disjoint parts : the exterior boundary  $\Gamma_d = \partial\bar{\Omega}$  and the internal one  $\Gamma$  composed of  $N_f$  bounded connected arcs  $\Gamma_f^i, i = 1, \dots, N_f$ , called cracks or faults. We suppose that the displacement field  $u = (u_1, u_2, u_3)$  is 0 in directions  $Ox_1$  and  $Ox_2$  and that  $u_3$  does not depend on  $x_3$ . The displacement is therefore denoted simply

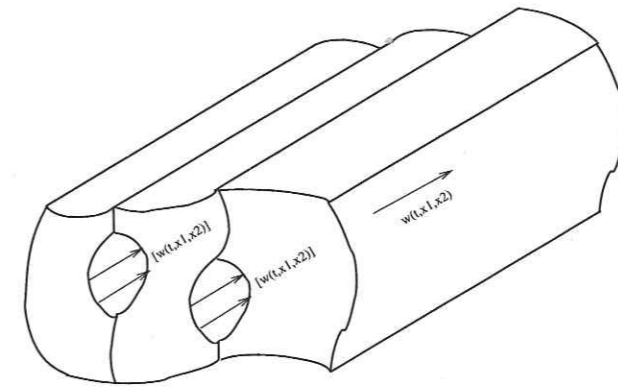


Figure 3.4 The antiplane shearing of a system of two parallel faults

by  $w = w(t, x_1, x_2)$ . The elastic medium has the shear rigidity  $G$ , the density  $\rho$  and the shear velocity  $c = \sqrt{G/\rho}$  with the following regularity

$$\rho, G \in L^\infty(\Omega), \quad \rho(x) \geq \rho_0 > 0, \quad G(x) \geq G_0 > 0, \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

The non-vanishing shear stress components are  $\sigma_{31} = \tau_1^\infty + G\partial_1 w$ ,  $\sigma_{32} = \tau_2^\infty + G\partial_2 w$ , and  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -S$ , where  $\tau^\infty$  is the pre-stress and  $S > 0$  is the normal stress on the faults, such that

$$S, \tau_1^\infty, \tau_2^\infty \in C^0(\bar{\Omega}).$$

We denote by  $[ ]$  the jump across  $\Gamma$  (i.e.  $[w] = w^+ - w^-$ ), and by  $\partial_n = \nabla \cdot n$  the corresponding normal derivative with the unit normal  $n$  outwards the positive side. On the contact zone  $\Gamma$ , we have

$$[G\partial_n w] = 0.$$

On the interface  $\Gamma$ , we consider a constitutive law of friction type. The friction force depends on the slip  $[w]$  through a friction coefficient  $\mu = \mu([w])$  which is multiplied by the normal stress  $S$ . Concerning the regularity of  $\mu : \Gamma \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  we suppose that the friction coefficient is a Lipschitz function, with respect to the slip, and let  $H$  be the antiderivative

$$H(x, u) := S(x) \int_0^u \mu(x, s) ds.$$

We suppose that there exist  $L, a \geq 0$ ,  $\gamma \in L^\infty(\Gamma)$ , and  $\beta \geq 0$  a nondimensional and nonnegative number such that

$$|\mu(x, s_1) - \mu(x, s_2)| \leq L|s_1 - s_2|, \quad H(x, s) - S(x)\mu(x, 0)s + \beta\gamma(x)s^2/2 + as^3 \geq 0, \quad (3.1)$$

a.e.  $x \in \Gamma$ , and for all  $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}_+$ .



A quite often used friction law (Palmer & Rice, 1973) is piecewise linear and has the following form :

$$\begin{cases} \mu(x, u) = \mu_s(x) - \frac{\mu_s(x) - \mu_d(x)}{2D_c(x)}u & \text{if } u \leq 2D_c(x) \\ \mu(x, u) = \mu_d(x) & \text{if } u > 2D_c(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

where  $u$  is the relative slip,  $\mu_s$  and  $\mu_d$  ( $\mu_s > \mu_d$ ) are the static and dynamic friction coefficients, and  $D_c$  is the critical slip (see Figure 3.5). This piecewise linear function is a reasonable approximation of the experimental observations reported by Ohnaka et al. (1987), and will be used in subsections 5 and 6. If we put

$$\beta := \frac{1}{G_0} \int_{\Gamma} \frac{(\mu_s(x) - \mu_d(x))S(x)}{2D_c(x)} d\sigma, \quad \gamma := \frac{1}{\beta} \frac{(\mu_s - \mu_d)S}{2D_c} \in L^\infty(\Gamma), \quad (3.3)$$

then (3.1) holds.

We suppose that we can choose the orientation of the unit normal of each connected fault (cut) of  $\Gamma$  such that

$$q(x) := \tau_1^\infty(x)n_1(x) + \tau_2^\infty(x)n_2(x) \leq q_0 < 0, \quad \text{a.e. } x \in \Gamma. \quad (3.4)$$

This holds in many concrete applications, where the pre-stress  $\tau^\infty$  gives a dominant direction of slip.

### 3.3.3 Static analysis

The slip dependent friction law on  $\Gamma$  in the static case is described by :

$$G\partial_n w + q = -\mu(|[w(t)]|) S \operatorname{sign}([w]), \quad \text{if } [w] \neq 0, \quad (3.5)$$

$$|G\partial_n w + q| \leq \mu(|[w]|)S \quad \text{if } [w] = 0, \quad (3.6)$$

The above equations assert that the tangential (frictional) stress is bounded by the normal stress  $S$  multiplied by the value of the friction coefficient  $\mu$ . If such a limit is not attained, sliding does not occur. Otherwise the frictional stress is opposed to the slip  $[w]$  and its absolute value depends on the slip through  $\mu$ .

Since we are looking for equilibrium positions in the neighborhood of  $w \equiv 0$ , and since the direction of slip is given by  $\tau^\infty$  (see (3.4)), we get that we can restrict the above friction law to the case of nonnegative slip ( $[w] \geq 0$ ). This is a usual assumption in ear-

thquake source geophysics. From the equilibrium equation and the boundary conditions, we get the following static problem (SP) : find  $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$\operatorname{div}(G\nabla w) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3.7)$$

$$w = 0 \quad \text{on } \Gamma_d, \quad [\partial_n w] = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (3.8)$$

$$[w] \geq 0, \quad G\partial_n w + q + S\mu([w]) \geq 0, \quad [w](G\partial_n w + q + S\mu([w])) = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (3.9)$$

We introduce, as Nguesteng and Sanchez-Palencia (1985), the functional space of finite elastic energy  $V$ . Let  $\mathcal{V}$  be the following subspace of  $H^1(\Omega)$  :

$$\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \quad \text{on } \Gamma_d, \quad \text{there exists } R > 0 \text{ such that } v(x) = 0 \text{ if } |x| > R\}$$

endowed with the norm  $\|\cdot\|_V$  generated by the following scalar product :

$$(u, v)_V = \int_{\Omega} G\nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \|u\|_V^2 = (u, u)_V, \quad \forall u, v \in \mathcal{V}. \quad (3.10)$$

We define  $V$  as the closure of  $\mathcal{V}$  in the norm  $\|u\|_V$  and by  $\int_{\Omega} G\nabla u \cdot \nabla v dx$  we mean  $(u, v)_V$ . The space  $V$  is continuously embedded in  $H^1(\Omega_R)$  for all  $R > 0$ , with  $\Omega_R := \{x \in \Omega / |x| < R\}$ . If  $\Omega$  is not bounded,  $V$  is not a subspace of  $H^1(\Omega)$ . Indeed, if  $v \in V$  then  $v(x)$  is not vanishing for  $|x| \rightarrow +\infty$ .

If we denote

$$V_+ := \{v \in V / [v] \geq 0 \quad \text{on } \Gamma\},$$

then the following quasi-variational inequality represents the variational approach of (SP) : Find  $w \in V_+$  such that

$$\int_{\Omega} G\nabla w \cdot \nabla(v - w) dx + \int_{\Gamma} S\mu([w])([v] - [w]) d\sigma + \int_{\Gamma} q([v] - [w]) d\sigma \geq 0, \quad (3.11)$$

for all  $v \in V_+$ .

We consider  $\mathcal{W} : V \rightarrow \mathbb{R}$  the energy function :

$$\mathcal{W}(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} G|\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma} H([v]) + q[v] d\sigma. \quad (3.12)$$

Then we have the following result :

**Theorem 3.3.1.** *If  $w \in V$  is a local extremum for  $\mathcal{W}$ , then  $w$  is a solution of (3.11). Moreover there exists at least a global minimum for  $\mathcal{W}$ .*



*Proof.* Let  $w$  be a local minimum, i.e. there exists  $\delta$  such that  $\mathcal{W}(w) \leq \mathcal{W}(u)$  for all  $u \in V_+$  with  $\|w - u\|_V \leq \delta$ . For all  $v \in V_+$  we put  $u = w + t(v - w)$ , with  $t > 0$  small enough, in the last inequality and we pass to the limit with  $t \rightarrow 0$  to deduce (3.11).

In order to prove that  $\mathcal{W}$  has a global minimum we remark that  $[\cdot] : V \rightarrow L^2(\Gamma)$  is compact. Hence  $v \rightarrow \int_{\Gamma} H([v]) + q[v] d\sigma$  is weakly continuous on  $V$ , which implies that  $\mathcal{W}$  is weakly lower semicontinuous. Bearing in mind that  $\liminf \mathcal{W}(v) = \infty$  for  $\|v\|_V \rightarrow \infty$ , from a Weierstrass type theorem we deduce that  $\mathcal{W}$  has at least a global minimum. ■

Let us consider the following nonlinear eigenvalue problem :

$$\begin{cases} \text{Find } \varphi \in V_+, \varphi \neq 0 \text{ and } \beta \in \mathbb{R}_+ \text{ such that} \\ \int_{\Omega} G \nabla \varphi \cdot \nabla (v - \varphi) dx \geq \beta \int_{\Gamma} \gamma[\varphi] [v - \varphi] d\sigma, \quad \forall v \in V_+. \end{cases} \quad (3.13)$$

The nonlinear eigenvalue problem (3.13) can be written as an eigenproblem involving the Laplace operator and Signorini-type boundary conditions :

$$\begin{aligned} &\text{Find } \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ and } \beta \in \mathbb{R} \text{ such that} \\ &\operatorname{div}(G \nabla u) = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \Gamma_d, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$[G \partial_n u] = 0, \quad [u] \geq 0, \quad G \partial_n u \geq \beta \gamma[u], \quad [u](G \partial_n u - \beta \gamma[u]) = 0 \text{ on } \Gamma. \quad (3.15)$$

The linear case, that is equation (3.14) with the boundary condition

$$[G \partial_n u] = 0, \quad G \partial_n u = \beta \gamma[u] \text{ on } \Gamma, \quad (3.16)$$

was analyzed by Ionescu and Paumier (1996). For bounded domains, they proved that the spectrum of (3.14),(3.16) consists of a nondecreasing and unbounded positive sequence of eigenvalues  $\beta$ . Let us remark that, if  $\varphi$  is a solution of (3.14), (3.16) and  $[\varphi] \geq 0$  on  $\Gamma$ , then  $\varphi$  is a solution for (3.14), (3.15), too. For colinear faults, the first eigenfunction  $\varphi_0$  corresponding to  $\lambda_0^2$  was found in numerical computations to have a positive slip on  $\Gamma$  (Dascalu & Ionescu, 2003; Dascalu et al., 2000), hence the linear case was sufficient to give a satisfactory model for the initiation of instabilities. If the faults are not colinear, then this condition is no longer satisfied, that is the first eigenfunction of the linear problem has no physical significance. The explanation lies in the linearization of the friction law around the equilibrium position  $w \equiv 0$  (see Figure 3.5) : an unconstrained linearization can lead to solutions lying on the dashed line of the friction law, whereas the constrained formulation ensures that the solutions lie on the solid line, so that the corresponding slip

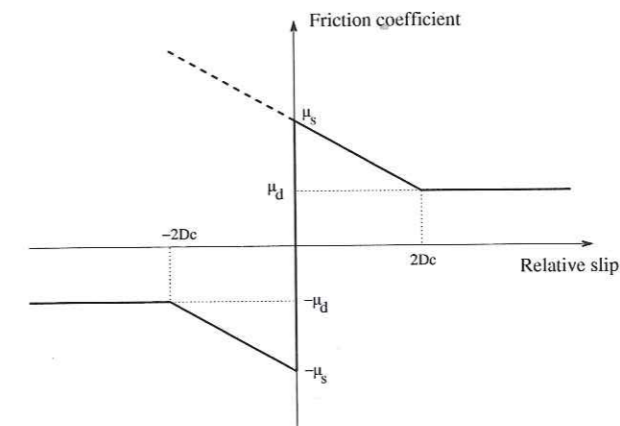


Figure 3.5 The piecewise linear slip weakening friction law (solid line). Without constraints on the sign of the slip and shear stress, the linearization can lead to solutions lying on the dashed line.

necessarily is of constant sign.

If  $\gamma(x) \geq \gamma_0 > 0$  then we can associate to the eigenvalue variational inequality (3.13) the Rayleigh quotient  $\beta_0$ ,

$$\beta_0 = \inf_{v \in V_+} \frac{\int_{\Omega} G |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Gamma} \gamma[v]^2 d\sigma}, \quad (3.17)$$

which is the smallest eigenvalue  $\beta$ . More precisely we have the following result, which holds for a rather general  $\gamma \in L^\infty(\Gamma)$ .

**Theorem 3.3.2.** Suppose that  $\gamma$  is such that  $S_+ = \{v \in V_+; \int_{\Gamma} \gamma[v]^2 d\sigma = 1\} \neq \emptyset$ . Then there exists  $(\varphi_0, \beta_0)$  a solution of the nonlinear eigenvalue problem (3.13) such that

$$\beta_0 = \int_{\Omega} G |\nabla \varphi_0|^2 dx = \beta_0 \int_{\Gamma} \gamma[\varphi_0]^2 d\sigma, \quad (3.18)$$

$$\int_{\Omega} G |\nabla v|^2 dx \geq \beta_0 \int_{\Gamma} \gamma[v]^2 d\sigma, \quad \forall v \in V_+, \quad (3.19)$$

and if  $(\varphi, \beta)$  is another solution of (3.13) then  $\beta \geq \beta_0$ .

*Proof.* Let  $\beta_0 := \inf_{v \in S_+} \|v\|_V$ , and let  $(v_n)$  be a sequence of  $S_+$  such that  $\|v_n\|_V \rightarrow \beta_0$ . Since  $(v_n)$  is a bounded sequence in  $V$ , we get that there exist  $\varphi_0 \in V$  and a subsequence, denoted again by  $(v_n)$ , with  $v_n \rightarrow \varphi_0$  weakly in  $V$ . Let  $R$  be such that  $\Gamma \subset \Omega_R$ , where  $\Omega_R = \Omega \cap B_R(0)$ . Bearing in mind that  $(v_n)$  is bounded in  $H^1(\Omega_R)$ , from the compact embedding of  $H^1(\Omega_R)$  in  $L^2(\Gamma)$  we deduce that  $\varphi_0 \in S_+$ . On the other hand,  $\|\varphi_0\|_V \leq \liminf \|v_n\|_V = \beta_0$ , hence  $\|\varphi_0\|_V = \beta_0 = \min_{v \in S_+} \|v\|_V$  and we obtain (3.18).

We prove now that (3.19) holds. Let  $v \in V_+$  and  $d := \int_{\Gamma} \gamma[v]^2 d\sigma$ . If  $d > 0$  then we put  $w = v/\sqrt{d} \in S_+$ , and from  $\|w\|_V \geq \beta_0$  the inequality (3.19) yields. If  $d \leq 0$  then the



inequality is obvious.

In order to prove that  $(\varphi_0, \beta_0)$  is a solution of (3.13), we replace  $v$  by  $\varphi_0 + t(v - \varphi_0) \in V_+$  in (3.19) and we pass to the limit with  $t \rightarrow 0+$ .

We prove now that  $\beta_0$  is the smallest eigenvalue. Let  $(\varphi, \beta)$  be another solution of (3.13). If we put  $v = 0$  and then  $v = 2\varphi$  in (3.13), we get  $\beta \int_{\Gamma} \gamma[\varphi]^2 d\sigma = \int_{\Omega} G|\nabla\varphi|^2 dx$ , hence  $\int_{\Gamma} \gamma[\varphi]^2 d\sigma > 0$ , and from (3.19) we get  $\beta \geq \beta_0$ . ■

Let us suppose in the following that  $w \equiv 0$  is a solution of (3.11). An equivalent condition is

$$q(x) + S(x)\mu(x, 0) \geq 0, \quad \text{a.e. } x \in \Gamma. \quad (3.20)$$

**Theorem 3.3.3.** *Suppose that (3.20) holds, let  $\beta$  be as in (3.1) and let  $\beta_0$  be given by the previous theorem. If  $\beta < \beta_0$  then  $w \equiv 0$  is an isolated local minimum for  $\mathcal{W}$ , i.e. there exists  $\delta > 0$  such that*

$$\mathcal{W}(0) < \mathcal{W}(v), \quad \forall v \in V_+, v \neq 0, \|v\|_V < \delta.$$

*Proof.* Let us suppose that  $w = 0$  is not a local minimum for  $\mathcal{W}$ , i.e. there exists  $v_n \rightarrow 0$  strongly in  $V$  such that  $\mathcal{W}(v_n) \leq \mathcal{W}(0) = 0$ . From (3.1) and (3.20) we get  $\mathcal{W}(v_n) \geq 1/2\|v_n\|_V^2 - \int_{\Gamma} (\gamma\beta/2[v_n]^2 + a[v_n]^3) d\sigma$ . If we make use of (3.19) then we deduce

$$0 \geq \mathcal{W}(v_n) \geq \frac{\beta_0 - \beta}{2\beta_0} \|v_n\|_V^2 - a \int_{\Gamma} [v_n]^3 d\sigma.$$

Since  $V$  is continuously embedded in  $L^3(\Gamma)$ , from the above inequality we get that  $(\beta_0 - \beta)/(2\beta_0) \leq aC\|v_n\|_V$ , a contradiction. ■

### 3.3.4 Dynamic analysis

The slip dependent friction law on  $\Gamma_f$  in the dynamic case is described by :

$$G\partial_n w(t) + q = -\mu([w(t)]) S \operatorname{sign}([\partial_t w(t)]), \quad \text{if } [\partial_t w(t)] \neq 0, \quad (3.21)$$

$$|G\partial_n w(t) + q| \leq \mu([w(t)]) S \quad \text{if } \partial_t[w(t)] = 0, \quad (3.22)$$

Unlike the static case, in dynamics the frictional stress is opposed to the slip rate  $[\partial_t w]$ . As in statics, the direction of slip is given by  $\tau^\infty$  (see (3.4)) and we can restrict the above friction law to the case of nonnegative slip rate ( $[\partial_t w(t)] \geq 0$ ). Since the initial slip can also

be supposed nonnegative, in addition we have  $[w(t)] \geq 0$ . Using the above assumptions, the momentum balance law  $\operatorname{div} \sigma = \rho \partial_{tt} u$  and the boundary conditions, we obtain the following dynamic problem (DP) : Find  $w : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  solution of the wave equation

$$\rho \partial_{tt} w(t) = \operatorname{div}(G\nabla w(t)) \quad \text{in } \Omega, \quad (3.23)$$

with boundary conditions of Signorini type :

$$w(t) = 0 \quad \text{on } \Gamma_d, \quad [G\partial_n w(t)] = 0, \quad [\partial_t w(t)] \geq 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (3.24)$$

$$G\partial_n w(t) + q + \mu([w(t)])S \geq 0, \quad [\partial_t w(t)](G\partial_n w(t) + q + \mu([w(t)])S) = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (3.25)$$

The initial conditions are

$$w(0) = w_0, \quad \partial_t w(0) = w_1 \quad \text{in } \Omega \quad (3.26)$$

Any solution of the above problem satisfies the following variational problem (VP) :

Find  $w : [0, T] \rightarrow V$  such that

$$\begin{aligned} \partial_t w(t) \in W_+, \quad \int_{\Omega} \rho \partial_{tt} w(t)(v - \partial_t w(t)) dx + \int_{\Omega} G\nabla w(t) \cdot \nabla(v - \partial_t w(t)) dx \\ + \int_{\Gamma} S\mu([w(t)])([v] - [\partial_t w(t)]) d\sigma \geq - \int_{\Gamma} q([v] - [\partial_t w(t)]) d\sigma, \quad \forall v \in W_+, \end{aligned} \quad (3.27)$$

where

$$W := \{v \in H^1(\Omega)/v = 0 \text{ on } \Gamma_d\}, \quad W_+ := \{v \in W/[v] \geq 0 \text{ on } \Gamma\} \quad (3.28)$$

The main difficulty in the study of the above evolution variational inequality is the non-monotone dependence of  $\mu$  with respect to the slip  $[w]$ . The existence of a solution  $w$  of the following regularity

$$w \in W^{1,\infty}(0, T, W) \cap W^{2,\infty}(0, T, L^2(\Omega)). \quad (3.29)$$

can be deduced for two-dimensional bounded domains using the method developed by Ionescu et al. (2003).

Since our intention is to study the evolution of the elastic system near an unstable equilibrium position, we shall suppose that  $q = -\mu(0)S$ . We remark that  $w \equiv 0$  is an equilibrium solution of (3.27), and  $w_0, w_1$  may be considered as small perturbations of this equilibrium.



For simplicity, let us assume in the following that the friction law is given by (3.2). Since the initial perturbation  $(w_0, w_1)$  of the equilibrium  $(w \equiv 0)$  is small, we have  $[w(t, x)] \leq 2D_c$  for  $t \in [0, T_c]$  and  $x \in \Gamma$ , where  $T_c$  is a critical time for which the slip on the fault reaches the critical value  $2D_c$  at least at one point. Hence for a first period  $[0, T_c]$ , called the initiation phase, we deal with a linear function  $\mu$ .

Our purpose is to analyze the evolution of the perturbation during this nucleation phase. That is why we are interested in the existence of solutions of the type

$$w(t, x) = \sinh(|\lambda|t)u(x), \quad w(t, x) = \sin(|\lambda|t)u(x), \quad \text{for } t \in [0, T_c]. \quad (3.30)$$

If we put the above expression in (3.27) and we have in mind that from (3.2) we get  $S\mu(s) + q = -\beta\gamma s$ , with  $\gamma$  and  $\beta$  given by (3.3), then we deduce that  $(u, \lambda^2)$  is the solution of the following nonlinear eigenvalue problem :

$$\begin{cases} \text{Find } u \in W_+ \text{ and } \lambda^2 \in \mathbb{R} \text{ such that} \\ \int_{\Omega} G\nabla u \cdot \nabla(v - u) dx - \beta \int_{\Gamma} \gamma[u] [v - u] d\sigma + \lambda^2 \int_{\Omega} \rho u(v - u) dx \geq 0 \quad \forall v \in W_+ \end{cases} \quad (3.31)$$

Solutions of the first type in (3.30) have an exponential growth in time and correspond to  $\lambda^2 > 0$ . Solutions of the second type have a constant amplitude during the initiation phase and correspond to  $\lambda^2 < 0$ .

The nonlinear eigenvalue problem (3.31) can be written as a classical eigenproblem for the Laplace operator with Signorini-type boundary conditions :

$$\begin{aligned} \text{Find } u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ and } \lambda^2 \in \mathbb{R} \text{ such that} \\ \operatorname{div}(G\nabla u) = \lambda^2 \rho u \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \Gamma_d, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$[G\partial_n u] = 0, \quad [u] \geq 0, \quad G\partial_n u \geq \beta\gamma[u], \quad [u](G\partial_n u - \beta\gamma[u]) = 0 \text{ on } \Gamma. \quad (3.33)$$

The linear case, that is equation (3.32) with the boundary condition

$$[G\partial_n u] = 0, \quad G\partial_n u = \beta\gamma[u] \text{ on } \Gamma, \quad (3.34)$$

was analyzed by Dascalu and Ionescu (2003). For bounded domains, they proved that the spectrum of (3.32), (3.34) consists of a decreasing and unbounded sequence of eigenvalues. The largest one,  $\lambda_0^2$ , which may be positive, is shown to be an increasing function of the friction parameter  $\beta$ . Let us remark that, if  $u$  is a solution of (3.32), (3.34) and  $[u] \geq 0$  on  $\Gamma$ , then  $u$  is a solution for (3.32), (3.33), too. For colinear faults, as in the static analysis, the first eigenfunction  $u_0$  corresponding to  $\lambda_0^2$  was found in numerical computations to have a

positive slip on  $\Gamma$  (Dascalu & Ionescu, 2003; Dascalu et al., 2000), hence the linear analysis was sufficient to give a satisfactory model for the initiation of instabilities. If the faults are not colinear, then this condition is no longer satisfied, that is the first eigenfunction of the linear problem has no physical significance. Hence, in modelling the initiation of friction instabilities, the nonlinear eigenvalue problem has to be considered. As reported by Wolf et al. (2003), where fault systems of realistic geometries were analyzed, there is an important gap between the first eigenvalues of the linear and nonlinear problems.

The nonlinear eigenvalue variational inequality (3.31) was considered by Ionescu and Radulescu (2003), where the existence of infinitely many solutions was established for bounded domains. The proof rely on algebraic topology methods developed by Krasnoselski, combined with adequate tools in the sense of the Degiovanni non-smooth critical point theory.

We restrict here our investigation to the first eigenvalue (Rayleigh quotient) and to the case of positive eigenvalues  $\lambda^2$ , which have important physical significance. Indeed, the unstable evolution of a perturbation during the initiation phase can be described by the solutions of type (3.30) which exhibit an exponential growth with time, i.e. by the eigenfunctions corresponding to positive eigenvalues  $\lambda^2$ .

We have the following result :

**Theorem 3.3.4.** *Suppose that  $\gamma$  is such that  $T_+ := \{v \in W_+; \int_{\Gamma} \gamma[v]^2 d\sigma = 1\} \neq \emptyset$  and let  $\beta_0$  be given by Theorem 3.2. Then we have*

*i) For all  $\beta > \beta_0$ , there exists  $(\Phi_0(\beta), \lambda_0^2(\beta))$  a solution of the nonlinear eigenvalue problem (3.31) with  $\lambda_0^2(\beta) > 0$  being the Rayleigh quotient*

$$\lambda_0^2(\beta) = - \min_{v \in W_+} \frac{\int_{\Omega} G|\nabla v|^2 - \beta \int_{\Gamma} \gamma[v]^2 d\sigma}{\int_{\Omega} \rho v^2 dx}. \quad (3.35)$$

*If  $(\Phi, \lambda^2)$  is another solution of (3.31) then  $\lambda^2 \leq \lambda_0^2(\beta)$ . Moreover,  $\beta \mapsto \lambda_0^2(\beta)$  is a positive convex function and*

$$\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_0(\beta)}{\beta} < +\infty, \quad \lim_{\beta \rightarrow \beta_0^+} \lambda_0^2(\beta) = 0.$$

*ii) If  $\beta \leq \beta_0$ , then there exists no solution of (3.31) with  $\lambda^2 > 0$ .*

*Proof.* Let  $s > 0$  be fixed and let us consider the minimization problem

$$\inf_{v \in T_+} J_s(v), \quad J_s(v) := \int_{\Omega} G|\nabla v|^2 dx + s \int_{\Omega} \rho|v|^2 dx.$$



We can use now the same arguments as in the proof of theorem 3.3.2 to deduce that there exists  $\Psi_0(s) \in T_+$  and  $b(s) > 0$  such that

$$b(s) = J_s(\Psi_0(s)) = \min_{v \in T_+} J_s(v), \quad (3.36)$$

Let us prove now that

$$\int_{\Omega} G|\nabla v|^2 dx + s \int_{\Omega} \rho v^2 dx - b(s) \int_{\Gamma} \gamma[v]^2 d\sigma \geq 0, \quad \forall v \in W_+. \quad (3.37)$$

For  $v \in W_+$  we put  $d := \int_{\Gamma} \gamma[v]^2 d\sigma$ . If  $d > 0$  then  $v/\sqrt{d} \in T_+$  and from (3.36) we obtain (3.37). If  $d \leq 0$  then (3.37) is obvious.

Let us prove now that  $\liminf_{s \rightarrow +\infty} b(s)/\sqrt{s} > 0$ . From (3.36) we obtain the following inequality for  $s > 1$ :

$$\|\Psi_0(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 + (s-1)\|\Psi_0(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Cb(s)\|\gamma\|_{L^\infty(\Gamma)}\|\Psi_0(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (3.38)$$

We use now the following inequality (see (Ionescu, 2002), Lemma 5.1 for a simple proof)

$$\|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq C\|v\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in V, \quad (3.39)$$

to get  $Cb(s)\|\gamma\|_{L^\infty(\Gamma)} \geq 1/B(s) + (s-1)B(s) \geq 2\sqrt{s-1}$  with

$$B(s) := \|\Psi_0(s)\|_{L^2(\Omega)} / \|\Psi_0(s)\|_{H^1(\Omega)}.$$

By passing to the limit in the above inequality, we deduce  $\liminf_{s \rightarrow +\infty} b(s)/\sqrt{s} > 0$ .

Since  $s \rightarrow J_s(v)$  is an affine function for all  $v \in T_+$ , we get from (3.36) that  $s \rightarrow b(s)$  is concave. This property and the fact that  $\liminf_{s \rightarrow +\infty} b(s) = +\infty$  imply that  $b$  is increasing. Let us denote  $b_0 = \lim_{s \rightarrow 0+} b(s)$ . Since  $b$  is one-to-one from  $(0, +\infty)$  to  $(b_0, +\infty)$ , we can define  $\lambda_0^2 : (b_0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  by  $\lambda_0^2(\beta) := b^{-1}(\beta)$ . From the above properties of  $b$  we get that  $\beta \mapsto \lambda_0^2(\beta)$  is a positive convex function with  $\limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \lambda_0(\beta)/\beta < +\infty$ .

We replace now  $v$  by  $\Psi_0(s) + t(v - \Psi_0(s)) \in W_+$  in (3.36) and pass to the limit with  $t \rightarrow 0+$  to get that

$$\int_{\Omega} G \nabla \Psi_0(s) \cdot \nabla (v - \Psi_0(s)) dx + s \int_{\Omega} \rho \Psi_0(s) (v - \Psi_0(s)) dx \geq b(s) \int_{\Gamma} \gamma[\Psi_0(s)][v - \Psi_0(s)] d\sigma.$$

If we put now  $\beta = b(s)$ ,  $s = \lambda^2(\beta)$  and  $\Phi_0(\beta) = \Psi_0(s)$ , we deduce that  $(\Phi_0(\beta), \lambda_0^2(\beta))$  is a solution of (3.31) for all  $\beta > b_0$ . Moreover, the inequality (3.35) yields from (3.37).

Let us prove now that  $\beta_0 = b_0$ . Bearing in mind that  $T_+ \subset S_+$ , from (3.36) we have  $b(s) \geq \inf_{v \in T_+} J_0(v) \geq \inf_{v \in S_+} J_0(v) = \beta_0$ . Passing to the limit with  $s$  we get  $b_0 \geq \beta_0$ . Let  $\varphi_0$  be as in theorem 3.3.2 and let  $(v_n) \subset \mathcal{V}$  be such that  $[v_n] \geq 0$  on  $\Gamma$  and  $v_n \rightarrow \varphi_0$  in  $V$ . Since  $\int_{\Gamma} \gamma[v_n]^2 d\sigma \rightarrow 1$  we have  $\int_{\Gamma} \gamma[v_n]^2 d\sigma > 0$  and  $b(s) \int_{\Gamma} \gamma[v_n]^2 d\sigma \geq b_0 \int_{\Gamma} \gamma[v_n]^2 d\sigma$  for all  $s > 0$ , and from (3.37) we deduce

$$\int_{\Omega} G|\nabla v_n|^2 dx + s \int_{\Omega} \rho v_n^2 dx \geq b_0 \int_{\Gamma} \gamma[v_n]^2 d\sigma.$$

We pass to the limit with  $s \rightarrow 0$  to get  $\int_{\Omega} G|\nabla v_n|^2 dx \geq b_0 \int_{\Gamma} \gamma[v_n]^2 d\sigma$ , then we take the limit with respect to  $n$  to deduce that  $\beta_0 = \|\varphi_0\|_V^2 \geq b_0 \int_{\Gamma} \gamma[\varphi_0]^2 d\sigma = b_0$ , i.e.  $\beta_0 \geq b_0$ .

Let  $(\Phi, \lambda^2)$  be another solution of (3.31). If we put  $v = 0$  and then  $v = 2\Phi$  in (3.31), we get

$$\int_{\Omega} G|\nabla \Phi|^2 dx + \lambda^2 \int_{\Omega} \rho \Phi^2 dx = \beta \int_{\Gamma} \gamma[\Phi]^2 d\sigma, \quad (3.40)$$

and  $\lambda^2 \leq \lambda_0^2(\beta)$  follows from (3.35). If  $\lambda^2 > 0$  then (3.40) implies that  $\int_{\Gamma} \gamma[\Phi]^2 d\sigma > 0$ , and from (3.37) we have  $\beta \int_{\Gamma} \gamma[\Phi]^2 d\sigma \geq b(\lambda^2) \int_{\Gamma} \gamma[\Phi]^2 d\sigma$ . Hence,  $\beta \geq b(\lambda^2) > \beta_0$ , i.e. there exists no solution of (3.31) with  $\lambda^2 > 0$  for  $\beta \leq \beta_0$ . ■

### 3.3.5 Mixed finite element approximation

In this subsection, we consider a mixed finite element discretization of the nonlinear spectral problem and we give a numerical algorithm to approach the first eigenvalue/eigenfunction. For the sake of simplicity, we shall suppose in this subsection that  $\Omega$  is bounded. We explain, at the beginning of the next subsection, how to handle unbounded domains using the infinite elements technique.

The body  $\Omega$  is discretized by using a family of triangulations  $(\mathcal{T}_h)_h$  made of finite elements of degree  $k \geq 1$ . The discretization parameter, defined as the largest edge of the triangulation  $\mathcal{T}_h$ , is denoted by  $h > 0$ . The set  $W_h$  approximating  $W$  becomes:

$$W_h := \left\{ v_h; v_h \in C(\bar{\Omega} \setminus \Gamma), v_h|_T \in P_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h = 0 \text{ on } \Gamma_d \right\}, \quad W_h^+ = W_h \cap W_+$$

where  $P_k(T)$  is the space of polynomial functions of degree  $k$  on  $T$ . Let us mention that we focus on the discrete problem and that any discussion concerning the convergence of the finite element problem towards the continuous model is out of the scope of this paper.



We suppose that we deal with a conforming mesh of  $\Omega$ , i.e. the two families of mono-dimensional meshes inherited by  $(\mathcal{T}_h)_h$  on each side of  $\Gamma$  coincide (and are denoted by  $(T_h)_h$ ). Set

$$F_h := \left\{ \tau; \tau = [v_h], v_h \in W_h \right\}, \quad F_h^+ := \left\{ \tau \in F_h; \tau \geq 0 \text{ on } \Gamma \right\},$$

which are included in the space of continuous functions on  $\Gamma$  being piecewise of degree  $k$  on  $(T_h)_h$ . We denote by  $p$  the dimension of  $F_h$  and by  $\psi_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , the corresponding canonical finite element basis functions of degree  $k$ .

The discrete problem derived from (3.31) is

For a given  $\beta$ , find  $(u_h, \tau_h) \in W_h^+ \times F_h$  and  $\lambda^2 > 0$  such that

$$\int_{\Omega} G \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx + \lambda^2 \int_{\Omega} \rho u_h v_h dx = \int_{\Gamma} \tau_h [v_h] d\sigma, \quad \forall v_h \in W_h \quad (3.41)$$

$$\int_{\Gamma} (\tau_h - \beta \gamma[u_h])(\sigma_h - [u_h]) \geq 0, \quad \forall \sigma_h \in F_h^+. \quad (3.42)$$

Since  $\beta \rightarrow \lambda_0^2(\beta)$  is one-to-one from  $(\beta_0, +\infty)$  to  $(0, +\infty)$ , we can choose to compute  $(\Phi_{0h}, \tau_h, b(s))$  for each  $s = \lambda_0^2$ , rather than  $(\Phi_{0h}, \tau_h, \lambda_0^2(\beta))$  for each  $\beta$ . In this case the above problem becomes :

For a given  $\lambda^2 \geq 0$ , find  $(u_h, \tau_h) \in W_h^+ \times F_h$  and  $\beta = \beta(\lambda^2) > 0$  such that (3.41) - (3.42) holds.

Note that in this way we can formulate both static and dynamic problems in one nonlinear eigenvalue problem (you just have to put  $\lambda^2 = 0$  for the static case).

Let us give here the formulation of (3.41) - (3.42) as an eigenvalue problem for a nonlinear operator. For this, let us denote by  $Q : W_h \rightarrow F_h$  the operator which associates to  $u_h \in W_h$  the stress  $\tau_h \in F_h$  through (3.41), and by  $R : F_h \rightarrow W_h$  the operator which associates to  $\tau_h \in F_h$  the unique solution  $u_h \in W_h$  of the equation (3.41). If we put now  $\sigma_h = [v_h]$  in (3.42) then we deduce

$$\int_{\Omega} G \nabla (u_h - \beta R(\gamma[u_h])) \cdot \nabla (v_h - u_h) dx + \lambda^2 \int_{\Omega} \rho (u_h - \beta R(\gamma[u_h])) (v_h - u_h) dx \geq 0, \quad (3.43)$$

for all  $v_h \in W_h^+$ . Let also denote by  $P : W_h \rightarrow W_h^+$  the projector map on  $W_h^+$ , with respect to the scalar product  $\langle v, w \rangle_W =: \int_{\Omega} G \nabla v \cdot \nabla w dx + \lambda^2 \int_{\Omega} \rho v w dx$ . From (3.43) we have  $\langle u_h - \beta R(\gamma[u_h]), v_h - u_h \rangle_W \geq 0$ , for all  $v_h \in W_h$  which is equivalent with  $u_h = P(\beta R(\gamma[u_h]))$ . For convenience, we define  $q_h := \gamma[u_h]$ . If we denote by  $\mathcal{P}_h : F_h \rightarrow F_h$  the

operator  $\mathcal{P}_h(\sigma_h) = \gamma[P(R(\sigma_h))]$  and we have in mind that  $P$  is positively homogeneous ( $W_+$  is a convex cone), then we get that (3.41) - (3.42) can be written as

$$q_h = \beta \mathcal{P}_h(q_h), \quad u_h = \beta P(R(q_h)), \quad \tau_h = Q(u_h). \quad (3.44)$$

Let  $\mathcal{L} : W_h \times F_h \rightarrow \mathbb{R}$  be the Lagrangian

$$\mathcal{L}(v, p) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} G |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \lambda^2 \int_{\Omega} \rho v^2 dx - \int_{\Gamma} p [v] d\sigma \quad (3.45)$$

The following algorithm will be used to obtain an approximation  $b_h = b_h(\lambda^2)$  of the smallest eigenvalue  $\beta(\lambda^2)$  of (3.41) - (3.42), and the corresponding approximate eigenfunction  $\Phi_{0h}$ .

**Algorithm 3.3.5.** The algorithm starts with an arbitrary  $p_h^0 \in F_h^+$ . At iteration  $n+1$ , having  $p_h^n \in F_h^+$ , we compute  $\psi_h^n \in W_h^+$  solution of

$$\mathcal{L}(\psi_h^n, p_h^n) \leq \mathcal{L}(v_h, p_h^n), \quad \text{for all } v_h \in W_h^+. \quad (3.46)$$

Then we update :

$$p_h^{n+1} = \gamma[\psi_h^n], \quad b_h^{n+1} = \frac{\|p_h^n\|_{L^2(\Gamma)}}{\|p_h^{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}}, \quad \Phi_{0h}^{n+1} = \frac{\psi_h^n}{\|p_h^{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}}$$

The algorithm stops when  $|b_h^{n+1} - b_h^n| + \|\Phi_{0h}^{n+1} - \Phi_{0h}^n\|$  is small enough. If we put  $\tau_h^n \in F_h$  such that

$$\int_{\Omega} G \nabla \Phi_{0h}^n \cdot \nabla v_h dx + \lambda^2 \int_{\Omega} \rho \Phi_{0h}^n v_h dx = \int_{\Gamma} \tau_h^n [v_h] d\sigma, \quad \forall v_h \in W_h,$$

then from (3.46) we get

$$\int_{\Gamma} (\tau_h^{n+1} - b_h^{n+1} \gamma[\Phi_{0h}^n])(\sigma_h - [\Phi_{0h}^{n+1}]) \geq 0, \quad \forall \sigma_h \in F_h^+.$$

Hence, if the convergence of the algorithm is assured, i.e.  $b_h^n \rightarrow b_h$ ,  $\Phi_{0h}^n \rightarrow \Phi_{0h}$ , then  $\tau_h^n \rightarrow \tau_h$  and  $\Phi_{0h}, \tau_h, b_h$  is a solution of (3.41) - (3.42).

Let us relate here the Algorithm 3.3.5 to the formulation (3.44) of the nonlinear eigenvalue problem. For this, let us remark that (3.46) is equivalent with  $\psi_h^n = P(R(p_h^n))$ ,



which means that

$$p_h^{n+1} = \mathcal{P}_h(p_h^n), \quad b_h^{n+1} = \frac{\|p_h^n\|_{L^2(\Gamma)}}{\|p_h^{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}}. \quad (3.47)$$

We see now that Algorithm 3.3.5 makes use of the successive iterates of the nonlinear operator  $\mathcal{P}_h$ : the ratio of the moduli of two consecutive iterates should converge towards the largest eigenvalue  $\frac{1}{b_h}$  of  $\mathcal{P}_h$ . Moreover, if we denote  $q_h^n = p_h^n / \|p_h^n\|_{L^2(\Gamma)}$ , then from the update of the algorithm we get the following formulation related to (3.44):

$$q_h^{n+1} = b_h^{n+1} \mathcal{P}_h(q_h^n), \quad \Phi_{0h}^{n+1} = b_h^{n+1} P(R(q_h^n)), \quad \tau_h^{n+1} = Q(\Phi_{0h}^{n+1}). \quad (3.48)$$

To minimize  $\mathcal{L}(\cdot, p_h^n)$  in (3.46), we use the Usawa algorithm. We start with an arbitrary  $s_h^0 \in F_H^+$ . At iteration  $k+1$ , having  $s_h^k \in F_h^+$ , we compute  $\psi_h^{n,k+1} \in W_h$  the solution of

$$\mathcal{L}(\psi_h^{n,k+1}, p_h^n + s_h^k) \leq \mathcal{L}(v_h, p_h^n + s_h^k), \quad \text{for all } v_h \in W_h \quad (3.49)$$

without any difficulty since we minimize here a quadratic functional. Then we update

$$s_h^{k+1} = (s_h^k - r\psi_h^{n,k+1})_+,$$

with some  $r > 0$  (here  $w_+$  is the positive part of  $w$ ). The algorithm stops when  $\|s_h^{k+1} - s_h^k\| + \|\psi_h^{k+1} - \psi_h^k\|$  is small enough. The process can be accelerated using the augmented Lagrangian, i.e. we put  $\tilde{\mathcal{L}}(v, p) = \mathcal{L}(v, p) + q \int_{\Gamma} [v]_-^2$  instead of  $\mathcal{L}$  in (3.49) (here  $w_-$  is the negative part of  $w$ ). It saves up to 20% of computation time in one step of algorithm 3.3.5.

In our case, Lagrange multipliers  $p_h^n$  are not stress components, as it is frequently in mixed formulations, but the displacement jump on the fault. Nevertheless, the tangential (shear) stress can be retrieved, for  $k$  large enough, as

$$\tau_h^{n+1} = b_h^{n+1} \gamma[\Phi_{0h}^n] + \frac{s_h^k}{\|\gamma[\psi_h^{n,k}]\|_{L^2(\Gamma)}} = \frac{p_h^n + s_h^k}{\|p_h^{n+1}\|_{L^2(\Gamma)}}. \quad (3.50)$$

The nonlinear eigenvalue method presented in this paper and the above algorithm were used by Wolf et al. (2003) for some geophysical applications, in particular to explain the slip patterns of normal faults in Afar. In all our tests and applications, we found that the algorithm is convergent; but the proof of the convergence is beyond the scope of the present paper.

### 3.3.6 Numerical results

Numerical simulations were performed with  $\Gamma$  being a set of parallel planar faults. Examples of curved faults were investigated by Wolf et al. (2003). The friction coefficient is piecewise linear, as suggested in (3.2), with  $D_c$ ,  $S$ ,  $\mu_s$  and  $\mu_d$  constant. The stability of the system is characterized by the comparison of the friction parameter  $\beta = S \frac{\mu_s - \mu_d}{2aD_c}$  (here  $a$  is a characteristic length) with the first eigenvalue  $\beta_0$ , as discussed in subsections 3 and 4.

The first eigenvalue/eigenfunction was found numerically using algorithm 3.3.5. In the stopping criterion (i.e.  $|b_h^{n+1} - b_h^n| + \|\Phi_{0h}^{n+1} - \Phi_{0h}^n\| < \varepsilon$ ), we chose  $\varepsilon = 10^{-6}$  for a single fault and  $\varepsilon = 10^{-4}$  for two-faults systems.

We used finite elements of degree  $k = 1$ . To handle unbounded domains,  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  was splitted in two parts  $\Omega^0$  and  $\Omega^\infty$  (see Figure 3.6). The first one ( $\Omega^0$ ) is a square containing  $\Gamma$ , and is covered by a classical triangulation. The second part ( $\Omega^\infty$ ) is covered by *infinite elements* (see Beer and Meek (1981) for a precise description). Infinite elements have two nodes on the exterior boundary of  $\Omega^0$  and a third one at infinity. Without them, we would have to clamp the boundary of  $\Omega^0$ , so that it would have to be far away from  $\Gamma$  and the resulting number of nodes would be very large. Note that infinite elements do not require any additional degree of freedom, since the points added at infinity necessarily have zero displacements. The solution is computed only on the nodes that lie along the boundary of  $\Omega^0$ , i.e. on two nodes per infinite element. This requires one single additional information, that is the overall behavior at infinity. For this, we assume that the shape of the solution at infinity is  $r^{-p}$ ,  $r$  being the distance to the center of  $\Omega^0$ . In the static case, we must take  $p > 0$  to obtain solutions of finite potential energy ( $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ). In the dynamic case, the kinetic energy also must be finite ( $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ), so that we must have  $p > 1$ . In the following, we have taken  $p = 1$  for  $\lambda^2 = 0$ , and  $p = 2$  for  $\lambda^2 > 0$ . An example of finite/infinite element mesh is presented in Figure 3.6.

In this case as well as in the case  $\Omega$  bounded (with its exterior boundary clamped), the assumptions we have to make on the shape of the solution outside the finite element mesh are reasonable only if the boundary of  $\Omega$  (or  $\Omega^0$ ) is far away from the fault. However, numerical examples showed that infinite elements are helpful.

The overall accuracy of any finite element model is deteriorated by local singularities. In our model, such singularities exist at the fault tips. To include them in the computed solution, and to reduce the size of computations without any loss of accuracy, we need to refine the mesh by increasing the number of nodes in the critical zones. The remeshing principle is an iterative process: from the computation of the local error of the solution



on each element, we deduce the local size of the mesh required to achieve a prescribed maximum error. At each step, a new mesh is built on the basis of these size requirements. The error estimator, given by Zienkiewicz and Zhu (1987), is based on an averaging of the gradient, which is a piecewise constant vector-field. The local error is estimated as the modulus of the difference between the gradient and its projection on the finite element space (which is piecewise of degree 1). We first build an initial homogeneous mesh then, using the above remeshing method, after a few iterations, we obtain an optimised mesh such as the example presented on Figure 3.6.

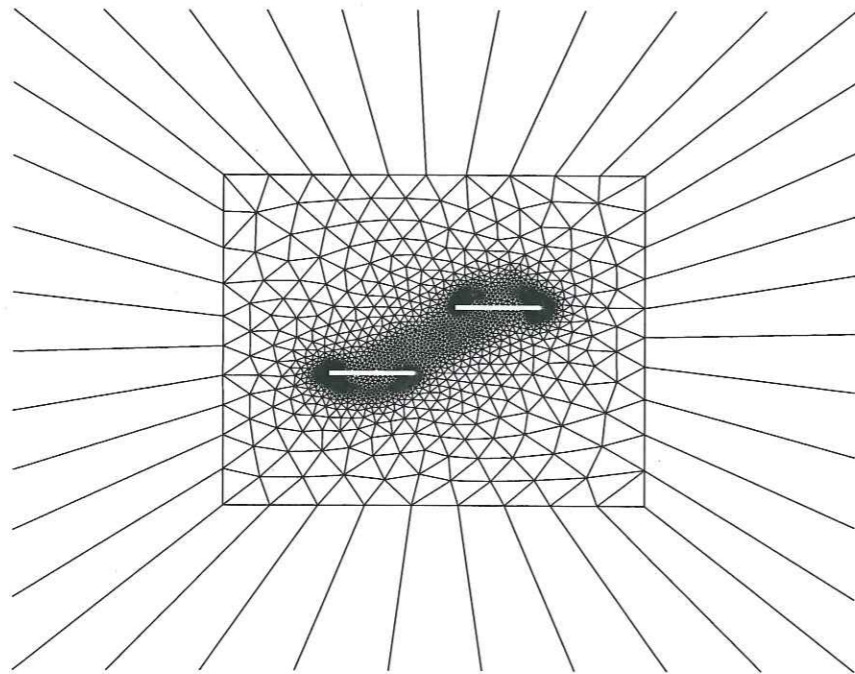


Figure 3.6 *Example of finite/infinite element mesh. Remark the density of the refined mesh around fault tips and in the zones of interaction.*

Several kinds of numerical tests are reported in the following. First of all, the convergence of algorithm 3.3.5 is investigated on a single planar fault, where (3.46) reduces to a simple linear system. Then the resolution of (3.46) is tested on a system of two parallel overlapping faults, where the existence of stress shadow zones induces, on the "shadowed" fault segment, an asymmetric slip profile with a single singularity and a locked zone at the other tip. The computed eigenfunction being the most unstable mode of deformation, it is also compared with dynamic simulations.

3.3.6.1 Convergence tests on a single fault

Computations were performed on four regular and two optimized meshes, described in TAB. 3.1, with  $\Gamma = [-1, 1] \times \{0\}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ ,  $\Omega^0 = [-10, 10]^2 \setminus \Gamma$ ,  $\Gamma_d = \partial\bar{\Omega} = \phi$  and  $\lambda^2 = 0$ . The mesh size given by TAB. 3.1 is defined as the length of the largest edge. Note that  $\Gamma$  is made up of one single planar fault.

| Mesh | Mesh size | Nb. of nodes | Nb. of edges on the fault | Nb. of iterations |
|------|-----------|--------------|---------------------------|-------------------|
| 1    | 0.4       | 2969         | 5                         | 10                |
| 2    | 0.2       | 11625        | 10                        | 10                |
| 3    | 0.1       | 46130        | 20                        | 10                |
| 4    | 0.05      | 183818       | 40                        | 11                |
| 5    | -         | 24483        | 131                       | 11                |
| 6    | -         | 21522        | 281                       | 11                |

TAB. 3.1 *Description of the six meshes considered in the convergence analysis. The first four are regular meshes, whereas meshes 5 and 6 are optimized.*

In the case of a single planar fault, the first eigenvalue is the universal constant  $\beta_0 = 1.15777\dots$  which has been accurately computed by Dascalu et al. (2000). Slip profiles resulting from the eigenfunctions computed on meshes 1, 2, 3, 6 can be compared on Figure 3.7 : the optimized mesh, having more nodes in the fault vicinity, allows a more accurate approximation of the fault-tip singularities. Note that the number of iterations in algorithm 3.3.5 is independent of the mesh size.

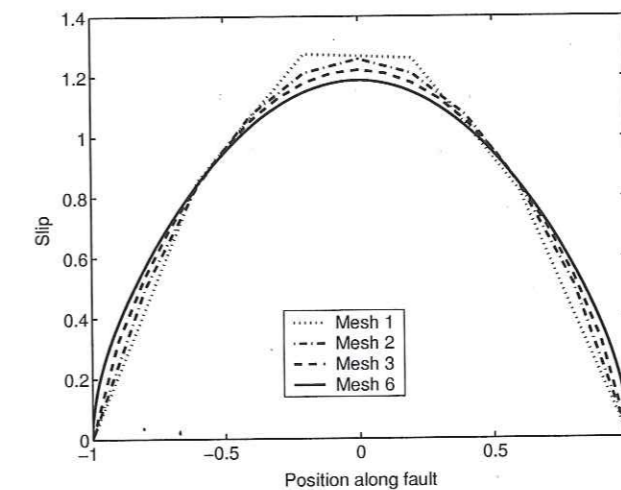


Figure 3.7 *Slip profiles  $[\Phi_{0h}]$  on the fault (corresponding to the first eigenfunction  $\Phi_{0h}$ ) for regular meshes 1, 2, 3 and optimized mesh 6 of TAB. 3.1.*

The corresponding computed eigenvalues  $b_n$  are plotted with respect to the number of edges on the fault on Figure 3.8. The reference value  $\beta_0$ , represented by the dashed



line, requires a large number of fault nodes to be approached. This remark justifies the use of mesh refinement.

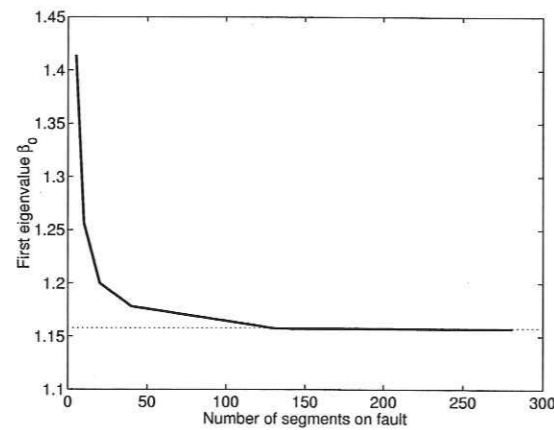


Figure 3.8 *Dependence of the computed eigenvalue  $b_h$  on the fault discretization. The dashed line corresponds to the universal constant  $\beta_0 = 1.15777\dots$*

Note that, in the above computations, the unbounded domain is represented by infinite elements. The corresponding eigenvalue on mesh 5 is  $b_h = 1.15712$ . The same calculus performed without infinite elements, with  $\tilde{\Omega} = \Omega^0$  and  $\tilde{\Gamma}_d = \partial\tilde{\Omega}^0$ , leads to  $\tilde{b}_h = 1.16565$ . Hence, the use of infinite elements does not allow to reduce strongly the number of nodes or the size of  $\Omega$ , but it significantly increases accuracy.

### 3.3.6.2 Interaction of two parallel faults

The nonlinear nature of our slip-dependent friction law expresses through fault interaction. Indeed, as reported by Wolf et al. (2003), for systems of two overlapping parallel faults, a fully linear numerical model leads to modes of deformation which do not fulfill the condition on the sign of the slip, with both faults sliding in opposite senses. A nonlinear approach must be used to handle the configurations where one of the fault segments lies in a stress shadow zone and has an asymmetric slip profile, with a single tip-singularity, and a large zone where slip is inhibited. These profiles are found on systems of overlapping faults.

Two parallel fault segments  $\Gamma_1 = [-1.5, 0.5] \times \{-0.1\}$  and  $\Gamma_2 = [-0.5, 1.5] \times \{0.1\}$  are considered (see Figure 3.9). Here,  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ ,  $\Omega^0 = [-7, 7]^2 \setminus \Gamma$ ,  $\Gamma_d = \partial\tilde{\Omega} = \phi$  and  $\lambda^2 = 1.0$ . The optimized mesh has 8781 nodes, and 154 edges on  $\Gamma$ . The two faults overlap each other, so that a constrained optimization problem must be solved at each iteration. Here, the augmented Lagrangian is used in the Usawa algorithm.

Figure 3.10 depicts the convergence of algorithm 3.3.5. The displacement jump  $[\Phi_{0h}^n]$

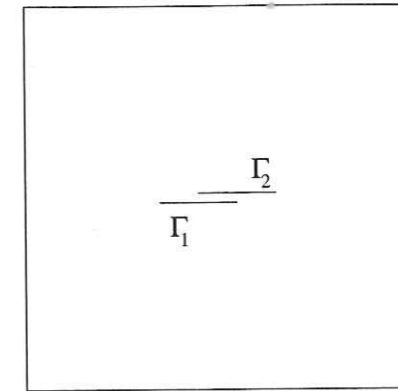


Figure 3.9 *Geometry of the two-faults system.*

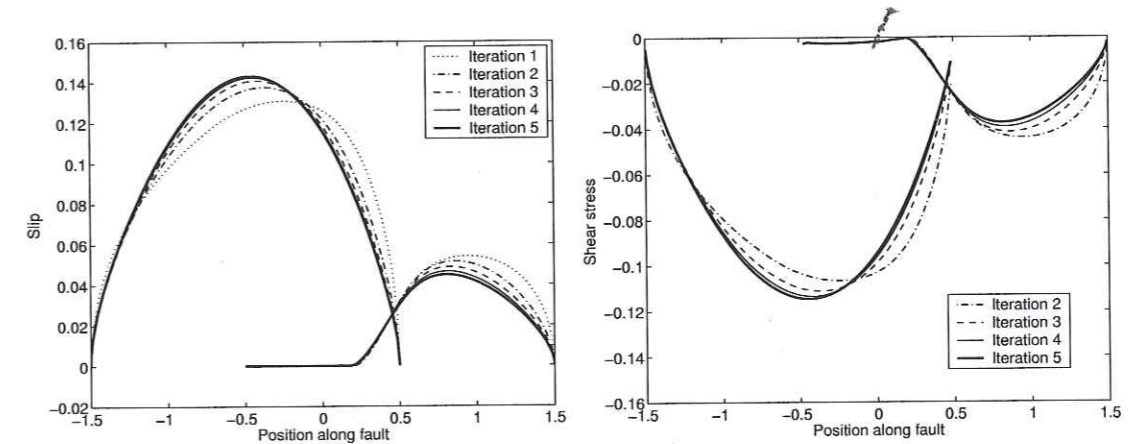


Figure 3.10 *The slip ( $[\Phi_{0h}^n]$  : left) and stress profiles ( $-\tau_h^n$  : right) at the first five steps  $n$  of algorithm 3.3.5.*

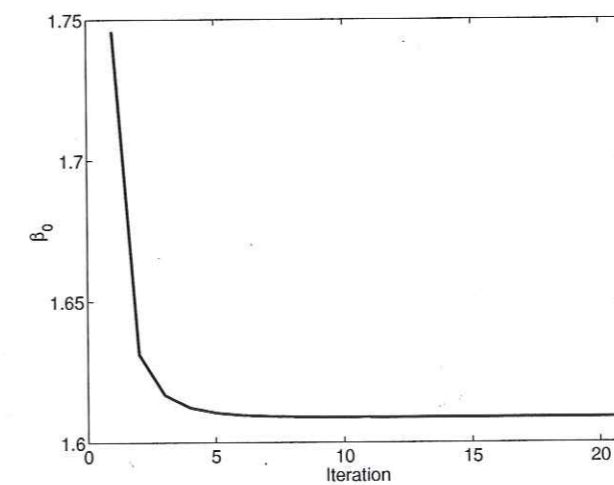


Figure 3.11 *The approximate value of the first eigenvalue  $b_h^n$  computed at each step  $n$  of algorithm 3.3.5.*



and the shear stress  $-\tau_h^n$  are plotted after each of the first five iterations  $n$ . 21 iterations are required to reach the desired precision. Note that the length of the locked zone of the shadowed fault is found after a very short number of iterations. Computing the shape of the slip profile on the rest of the fault takes a few iterations more. As expected, the slip and stress profiles only differ by a multiplicative constant on the sliding zone, and the shear stress is negative on the locked zone. The corresponding values of  $b_h^n$  are plotted on Figure 3.11.

### 3.3.6.3 Spectral analysis vs. time evolution on two parallel faults

Dynamic simulations were performed on the above configuration, using a Newmark finite difference scheme and a domain decomposition method (see Badea et al. (2003) for a detailed description). Such simulations can be used to check the validity of the computed value of  $\beta_0$  (found with  $\lambda^2 = 0$ ). As suggested by Theorem 3.3.4, the system is supposed to be stable if  $\beta < \beta_0$ , and unstable with an exponentially growing slip of the shape of the first dynamic eigenfunction if  $\beta > \beta_0$ . The spectral analysis detailed in the previous subsection gives  $\beta_0 \simeq 1.1$ . The evolution of the velocity field is presented on Figure 3.12 for  $\beta = 1.0$  (left) and  $\beta = 1.2$  (right).

At  $t = 0s$ , a small gaussian velocity perturbation is applied at an arbitrary point, here  $(0, -0.5)$ . At  $t = 0.05s$  and  $t = 2.5s$ , the shear waves propagate in a similar way, except that the slip grows faster for  $\beta = 1.2$ . Then, between  $t = 2.5s$  and  $t = 5s$ , the initiation phase begins in the unstable case ( $\beta = 1.2 > 1.1 = \beta_0$ ), i.e. slip rate has the shape of  $\Phi_{0h}$  and grows exponentially, as shown in details on Figure 3.15. Note that part of  $\Gamma_1$  remains locked, since the static friction level has not been exceeded. Meanwhile, the slip on the first configuration is rapidly stabilized ( $\beta = 1.0 < \beta_0$ ). Hence, this dynamic computation illustrates the physical meaning of the first eigenvalue, as a critical value of the friction parameter regarding the stability of the system.

Figure 3.13 shows the corresponding stress fields at  $t = 10s$ . The unstable configuration (right) exhibits three stress concentrations only : due to the effects of stress shadowing, the left tip of  $\Gamma_1$  is inhibited. On the stable configuration (right), the stress concentrations have all vanished.

Figure 3.14 displays the evolution of the velocity jump on the fault system, for  $0s \leq t \leq 4s$  in the unstable case ( $\beta > \beta_0$ ). The perturbation first reaches  $\Gamma_2$ , where it propagates and is finally reflected by both tips of  $\Gamma_2$ . On  $\Gamma_1$ , once the perturbation has

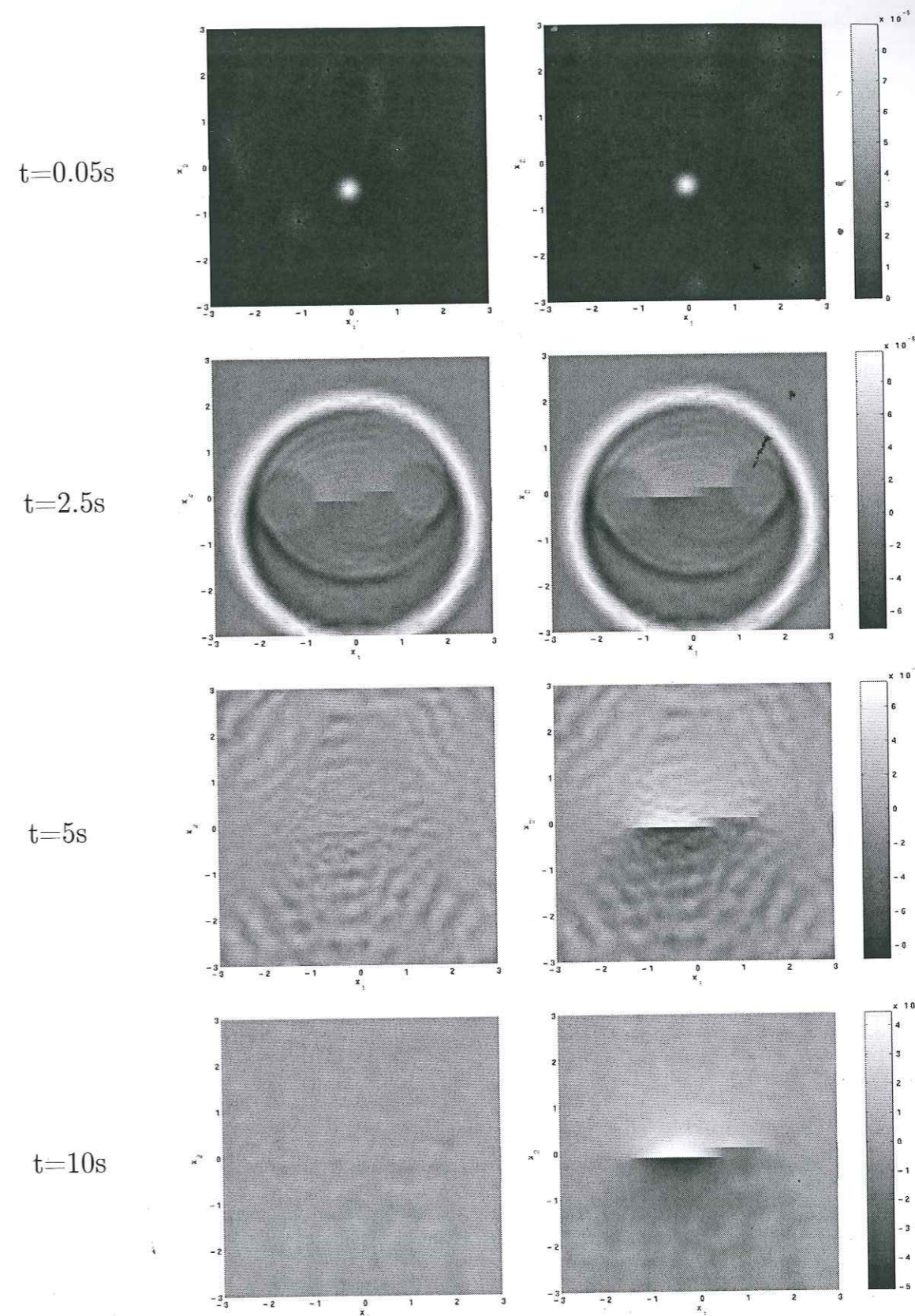


Figure 3.12 Dynamic evolution of the velocity distribution,  $(x_1, x_2) \rightarrow \partial_t w(t, x_1, x_2)$ , in the stable case  $\beta = 1.0 < 1.1 = \beta_0$  (left) and in the unstable case  $\beta = 1.2 > 1.1 = \beta_0$  (right).



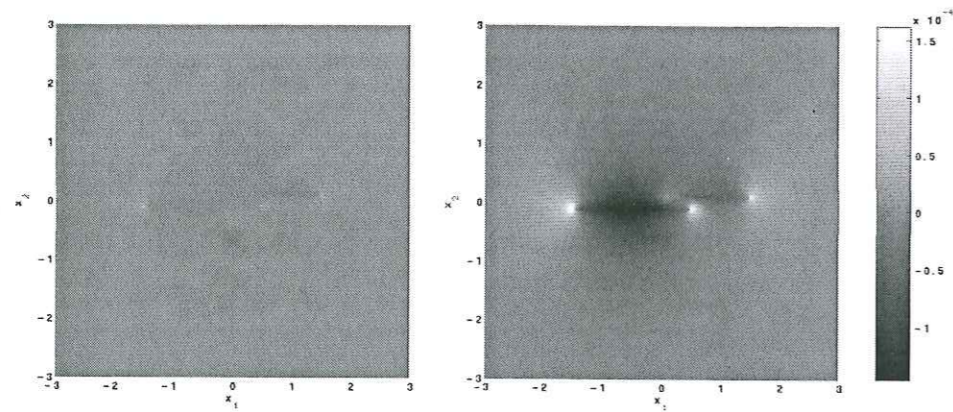


Figure 3.13 Shear stress distribution,  $(x_1, x_2) \rightarrow G\partial_y w(t, x_1, x_2)$  at the final stage ( $t = 10s$ ) of the dynamic process, for the stable case  $\beta = 1.0 < 1.1 = \beta_0$  (left) and for the unstable case  $\beta = 1.2 > 1.1 = \beta_0$  (right).

propagated from the right tip to the left one, we can see another wave coming from the left tip of  $\Gamma_2$ . Then, one can see the beginning of the initiation phase, i.e. the slip rate grows exponentially. Note that a part of  $\Gamma_1$  remains locked, since the static friction level has not been exceeded.

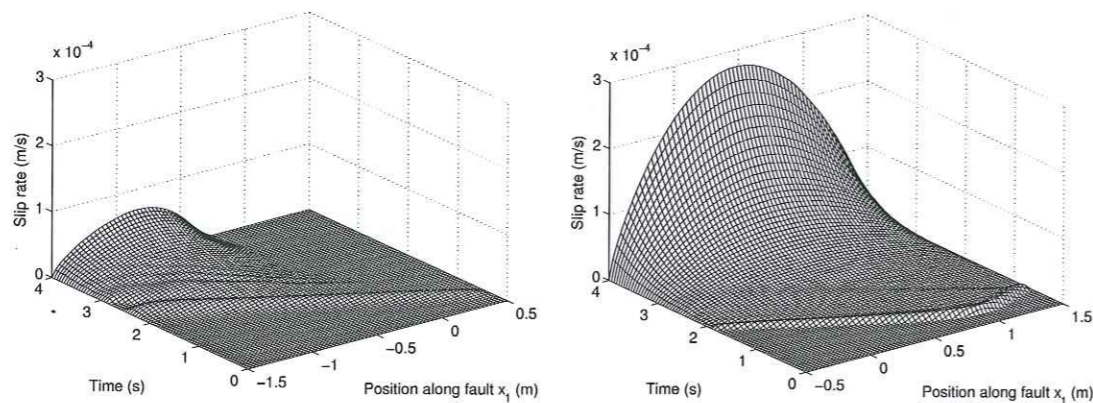


Figure 3.14 The time evolution of the slip rate  $[\partial_t w]$  on two interacting parallel faults (left :  $\Gamma_1$ , right :  $\Gamma_2$ )

Figure 3.15 compares the slip profile on the fault system during the initiation phase, at  $t = 4s$  and  $t = 5s$ , and the first eigenfunction  $\Phi_{0h}$ , computed both for  $\beta = 1.6$ , on the same mesh. As the effects of the propagation of the initial perturbation vanish, the slip profile resulting from the dynamic simulation becomes more and more similar to the profile predicted by the spectral analysis. Indeed, since the slip rate is growing exponentially, the characteristic pattern of the initiation phase dominates and the remaining waves cannot be seen any longer. Small scale differences may persist, because of the mesh size away from the fault. A coarse mesh is reasonable for spectral analysis, but it can increase local

error when wave propagation is involved. However, the first eigenfunction gives a sharp description of the pattern of the initiation phase.

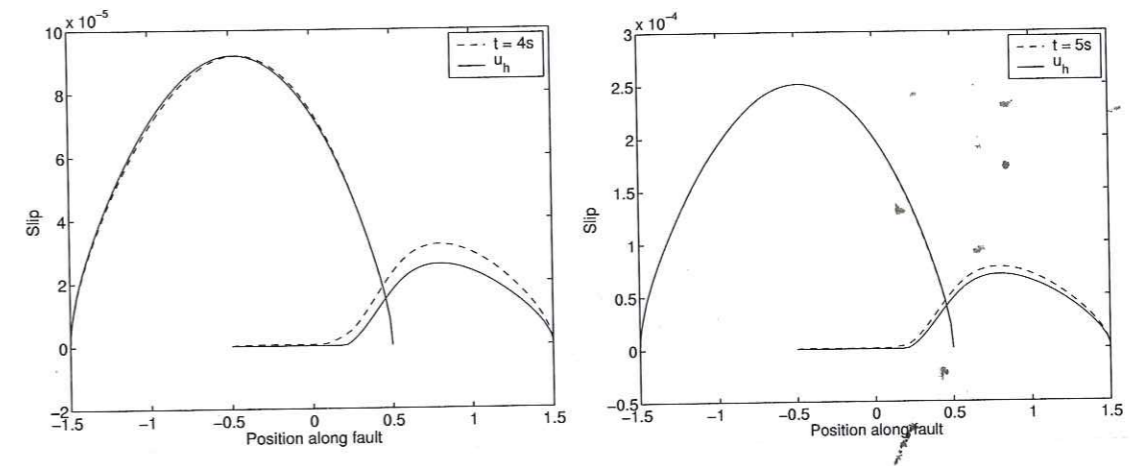


Figure 3.15 Comparison of the slip rate profiles resulting from the spectral analysis ( $[\Phi_0]$  : solid line) and from a dynamic simulation ( $[w(t)]$  : dashed line) at  $t = 4s$  (left) and  $t = 5s$  (right). Note that the first eigenfunction gives a sharp description of the pattern of the initiation phase.

### 3.4 Pourquoi (et comment) un calcul de spectre non linéaire ?

Nous revenons dans cette section sur les raisons qui ont mené à la formulation du modèle numérique décrit dans la section précédente. Dans le cas d'une faille plane, la simple linéarisation du problème d'évolution le long de la partie affaiblissante de la loi de frottement (Figure 3.16) suffit pour trouver la partie dominante du glissement pendant la phase d'initiation, quelle que soit la géométrie de la faille. Les points de la faille étant tous initialement au seuil de résistance (point A de la Figure 3.16), rien ne s'oppose à ce qu'ils glissent en relâchant des contraintes, décrivant ainsi la pente descendante de la loi de frottement.

Essayons maintenant d'appliquer cette analyse à une faille non plane. Le cas le plus simple est un système de deux segments identiques non coplanaires parallèles. Nous supposons de plus qu'ils se recouvrent sur la moitié de leur longueur (voir la Figure 3.9). Les profils de glissement des deux premières fonctions propres sont tracés sur la Figure 3.17. On remarque que, sur la première fonction propre, l'interaction s'oppose à ce que les deux failles, initialement au point A, décrivent chacune la pente descendante de la loi de frottement. Or la linéarisation fait que la solution doit rester sur cette même droite, de



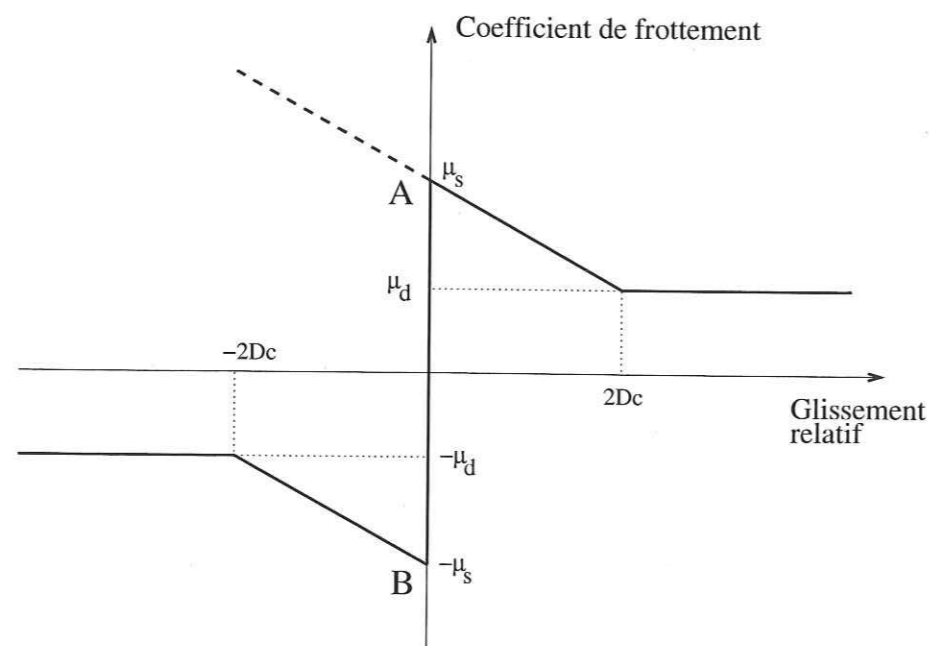


Figure 3.16 Loi de frottement dépendant du glissement (en trait plein) dans laquelle l'évolution du glissement ne peut avoir lieu qu'avec un relâchement des contraintes de cisaillement. Dans le cas contraire, le point reste collé. Cette loi correspond à une linéarisation sous contraintes autour des points d'équilibre A ou B. La ligne en tirets montre la loi qu'on obtient avec une linéarisation sans contraintes autour du point A. Le choix du point d'équilibre qu'il faut considérer (A ou B) est donné par le signe des contraintes régionales qui chargent le système jusqu'à l'amener au seuil de résistance statique.

sorte que certains points se retrouvent sur la demi-droite en tirets. Puisqu'on a supposé que les failles étaient soumises à un champ de contraintes à l'infini non négligeable et de signe constant, il n'est pas admissible que les deux segments de faille glissent chacun dans des sens opposés (ce qui pourrait arriver si l'un des segments de faille se trouvait initialement au point B) : la loi qu'il faut suivre est constituée des lignes en trait plein sur la Figure 3.16, si bien qu'au voisinage du point A, les points doivent soit glisser en décrivant la pente descendante, soit rester à la verticale du point A, en dessous. Le premier mode propre linéaire doit donc être rejeté : il ne peut pas être excité dans des conditions normales de chargement. Intéressons-nous donc au second. Celui-ci a un profil de glissement parfaitement admissible physiquement. Si on se borne au modèle purement linéaire, il doit donc porter la signature de la phase d'initiation, et être le mode le plus instable ; autrement dit, celui qui correspond à la plus petite valeur propre. Or, dans le cas statique, celle-ci vaut environ 1.17, ce qui est supérieur à  $\beta_0^* = 1.15777$ , valeur universelle mesurant la stabilité d'une faille isolée. Ainsi, aucun mode linéaire admissible n'est plus instable que le mode caractéristique d'une faille isolée. Devant cette contradiction, il faut donc

chercher ailleurs le mode responsable de la partie dominante du glissement dans cette configuration.

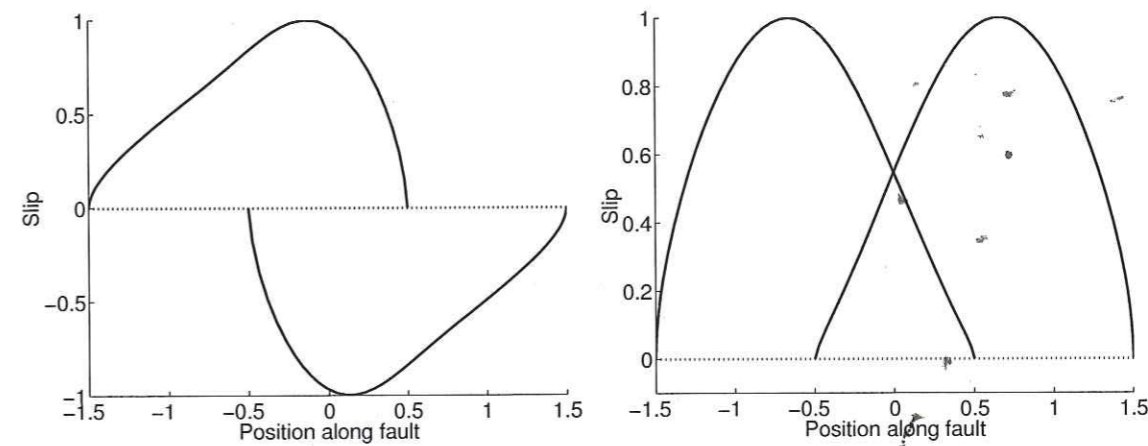


Figure 3.17 Les profils de glissement des deux premières fonctions propres du problème spectral linéaire. La première fonction propre doit être rejetée parce qu'elle ne respecte pas notre loi de frottement (Figure 3.16). La seconde est physiquement admissible, mais n'est pas le mode le plus instable du problème.

Pour savoir dans quelle direction chercher, on peut s'inspirer d'une simulation dynamique effectuée sur ce réseau de failles et illustrée par les Figures 2.11 et 2.12. Pendant l'initiation, on y voit distinctement un mode dominant, qui ne ressemble à aucun des modes linéaires, non plus qu'à une combinaison de certains d'entre eux. En particulier, le segment inférieur reste en partie collé (zone d'ombre), ce qui n'est jamais observé sur un mode linéaire. Dans le modèle spectral linéaire, un point de la faille ne peut être collé que si la contrainte de cisaillement reste identiquement nulle durant toute l'initiation. Pourtant, il doit être possible que ce point soit déchargé, c'est-à-dire soumis à une contrainte négative. Ces considérations mènent à la loi de frottement de la Figure 3.16. En ajoutant au modèle spectral cette possibilité de déchargement sans glissement, on obtient un problème non linéaire dont le premier mode est tracé sur la Figure 3.18. Ce mode est très proche de celui qu'on peut discerner sur les Figures 2.11 et 2.12. De plus, la valeur propre associée vaut environ 1.06 ; elle est donc inférieure à  $\beta_0^*$ , ce qui fait de ce mode un bon candidat pour décrire l'initiation sur le système de failles considéré.

Dans le chapitre 1, nous avons vu que les résultats présentés au début du présent chapitre pour une faille plane ne sont plus tous valables si on prend en compte la possibilité du déchargement à glissement nul. En particulier, nous ne pouvons rien dire, connaissant le paramètre d'affaiblissement du frottement, sur le nombre de modes propres excités. Nous savons seulement que le premier de ces modes est excité pour  $\beta > \beta_0$ , ce qui signifie que  $\beta_0$  est une valeur suffisante du taux d'affaiblissement pour que le système devienne instable.



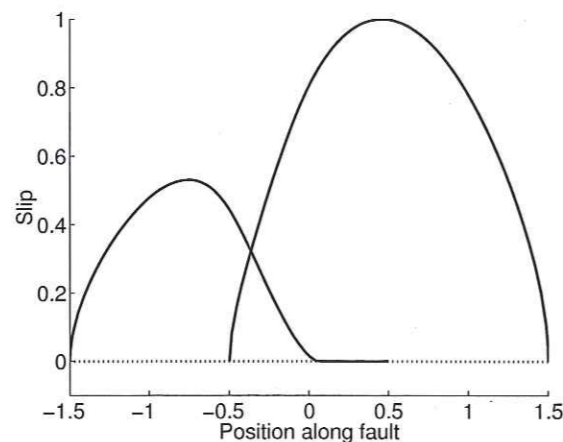


Figure 3.18 Le profil de glissement de la première fonction propre du problème spectral non linéaire, qui se révèle porter la signature de l'initiation sur le réseau de failles de la figure 3.9.

Toutefois, il n'est pas prouvé que  $\beta > \beta_0$  soit une condition nécessaire d'instabilité.

Une fois cerné le problème posé par l'existence éventuelle de zones d'ombre, où la faille serait déchargée et ne pourrait donc pas dépasser le seuil statique pour commencer à glisser, une première idée vient rapidement à l'esprit : puisque dans les observations une faille se définit comme un ensemble de points qui glissent, pourquoi inclure dans notre définition géométrique de la faille des points qui ne glissent pas ? Cette remarque aboutit à une méthode qui fournit la solution dans les cas simples, mais que nous avons rapidement abandonnée en raison de ses nombreuses limitations. Il faut en effet retirer les points « collés » de notre ensemble  $\Gamma$  pour que la solution linéaire vérifie toutes les équations, y compris les conditions de signe portant sur le glissement et la contrainte de cisaillement. Remarquons que, si l'on retire trop de points, on verra apparaître une quatrième singularité de contraintes, ce qui est très différent de la solution de la Figure 3.18. En pratique, on constate que la transition entre les géométries qui donnent deux profils de glissement de signes contraires et les géométries qui comptent quatre singularités est très brutale. Il faut donc opérer en douceur lors de l'amputation d'un morceau de faille. On en déduit très simplement une méthode itérative qui permet de trouver la zone de glissement en même temps que la première valeur propre et la fonction propre associée. Il suffit d'ajouter progressivement des points à la faille, dans la région qu'on suppose déchargée, jusqu'à ce que les contraintes de cisaillement soient négatives partout sur la faille. Evidemment, cette méthode est très lourde, surtout si la faille est très segmentée.

Revenons donc au problème initial, dans le cas  $\lambda^2 = 0$  pour simplifier. Il s'écrit

comme une inéquation variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On cherche } u_h \in W_+ \text{ et } \beta \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que} \\ \int_{\Omega} G \nabla u_h \cdot \nabla (v - u_h) dx - \beta \int_{\Gamma} \gamma[u_h] [v - u_h] d\sigma \geq 0 \quad \forall v \in W_+ \end{array} \right. \quad (3.51)$$

Si  $(\beta, u_h)$  n'est pas mode propre d'un opérateur linéaire, peut-être aura-t-on la chance de l'écrire comme mode propre d'un opérateur non linéaire ? Puisqu'on cherche la plus petite valeur propre positive, on pourra alors chercher ce mode en utilisant une méthode simple, appelée *méthode des puissances*, qui permet de trouver la plus grande valeur propre d'un opérateur en calculant ses itérées successives et à attendre que le rapport des modules de deux solutions consécutives converge. On considère pour cela l'opérateur inverse de cet opérateur non linéaire (dont  $\frac{1}{\beta}$  est la plus grande valeur propre). Cet opérateur est déterminé dans la section 3.3.5 : le problème (3.51) s'écrit  $u_h = \beta P(R([u_h]))$ , où  $R : L^2(\Gamma) \rightarrow V$  est l'opérateur défini par

$$\int_{\Omega} \nabla R(f) \cdot \nabla v dx = \int_{\Gamma} f[v] d\sigma \quad \forall v \in V$$

et  $P$  est défini sur  $W$  et désigne la projection sur  $W_+$  par rapport au produit scalaire  $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} G \nabla u \cdot \nabla v dx$ . On en déduit que  $\frac{1}{\beta}$  est la plus grande valeur propre de l'opérateur non linéaire  $[P \circ \mathcal{T}]$  défini sur  $L^2(\Gamma)$ . On peut donc chercher  $(\beta, \varphi)$  en utilisant l'algorithme décrit dans la section 3.3.5. Remarquons que l'intervention de l'opérateur de projection  $P$  sur l'espace des modes admissibles (ceux qui ont un glissement positif sur chaque faille) est la seule différence de ce calcul par rapport au cas purement linéaire. La méthode des puissances consiste alors à calculer de manière itérative :

$$u_h^{n+1} = P \circ R([u_h^n]), \quad b_n = \frac{\|\varphi_n\|}{\|\varphi_{n+1}\|}$$

La première valeur propre statique est alors  $\beta_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , et le mode propre correspondant est  $\Phi_{0h} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_h^n$ .

### 3.5 Remarques sur la résolution numérique

Dans cette section, nous détaillons la méthode de résolution des problèmes d'optimisation (c'est-à-dire le calcul des itérées de  $[P \circ T]$  qui intervient dans l'algorithme général 3.3.5), ainsi que les méthodes que nous avons choisies pour traiter un domaine infini  $(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$  et pour construire un maillage adapté au problème.



### 3.5.1 La méthode d'optimisation sous contraintes

Nous avons ci-dessus proposé une méthode de calcul de la première valeur propre du problème spectral non linéaire. L'algorithme 3.3.5 est inspiré de la *méthode des puissances* et fait appel, à chacune de ses itérations, à une procédure d'optimisation sous contraintes pour calculer  $[P \circ T]$ . Cette procédure consiste à introduire des multiplicateurs de Lagrange sur lesquels on reporte les contraintes du problème d'optimisation ; on obtient ainsi un problème « équivalent » sans contraintes sur les inconnues de départ, où les multiplicateurs interviennent dans un terme linéaire. La fonctionnelle qu'on doit alors optimiser est appelée Lagrangien, ou encore Lagrangien augmenté dans une forme incluant un terme de pénalisation. Cette approche a été utilisée pour des problèmes de contact avec frottement, par exemple par Alart et Curnier (1991).

Pour résoudre le problème du Lagrangien, la méthode la plus simple est l'algorithme d'Usawa, qui n'est rien d'autre qu'une méthode de descente bien adaptée à la forme du Lagrangien, formulée dans le nouvel espace des inconnues. A chaque étape du calcul, on résout successivement les inconnues de départ (c'est-à-dire un problème d'optimisation sans contraintes, convexe dans notre cas) puis on se déplace dans le sens du gradient pour les multiplicateurs de Lagrange (qui interviennent dans un terme linéaire).

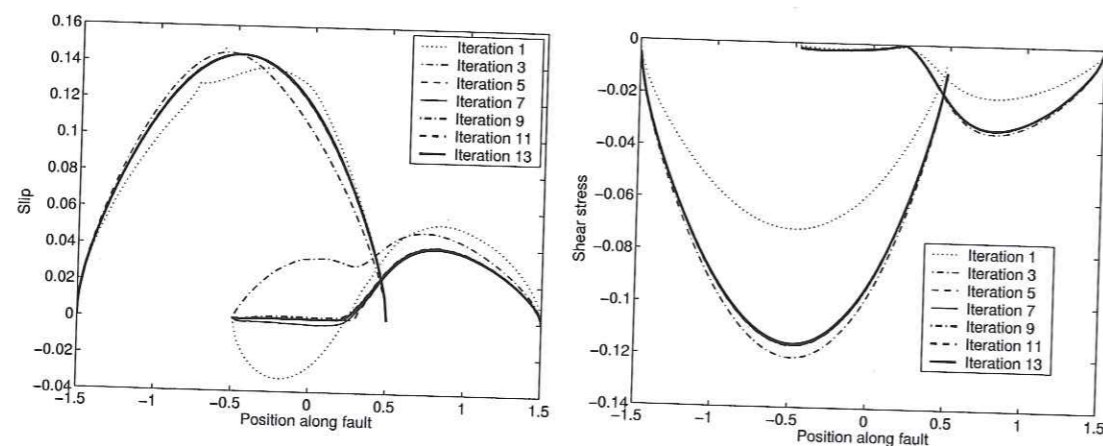


Figure 3.19 Profils de glissement ( $[\Phi_{0h}]$ , à gauche) et de contraintes ( $-\tau_h$ , à droite) à différentes étapes de la minimisation par l'algorithme d'Usawa, lors de la dernière itération de l'algorithme de recherche de la première valeur propre 3.3.5.

La Figure 3.19 montre l'évolution des profils de glissement ( $[\Phi_{0h}]$ ) et contraintes ( $-\tau_h$ ) lors de la minimisation. Pour réduire le nombre d'itérations nécessaire, on commence le calcul avec une valeur approchée déduite de l'étape précédente de l'algorithme 3.3.5. On peut voir que la convergence est très rapide. Avec une valeur initiale arbitraire, homogène par exemple, la convergence est un peu plus longue puisque les premiers profils

de glissement calculés ont tendance à être plutôt symétriques, sans zone bloquée.

### 3.5.2 Les éléments infinis

Notre problème initial est défini sur un domaine non borné. En première approximation, on se place généralement sur un domaine fini et de géométrie simple, dont les bords sont suffisamment éloignés de la zone de glissement pour qu'on puisse leur appliquer une condition de bord très simple. Dans notre cas, on leur impose un déplacement nul. Cette simplification est très restrictive, en particulier dans le cas statique où la solution est très étalée dans l'espace. Pour limiter l'erreur induite, il faut donc mailler un domaine très grand. Il est important de remarquer que, dans notre problème de recherche de fonction propre, les valeurs de la solution à l'intérieur et à l'extérieur du domaine ont une influence mutuelle. Le problème de la représentation du domaine extérieur au domaine éléments finis est donc très différent de celui qui se pose dans un problème de propagation d'ondes, où on veut simplement éviter la réflexion sur le bord. Dans le cadre de la propagation d'ondes, une fois que les ondes ont quitté le domaine, on peut leur appliquer n'importe quel traitement (en particulier les soumettre à une forte atténuation pour s'en débarrasser) puisqu'elles n'influencent plus la solution sur le domaine qui nous intéresse. Des méthodes très efficaces ont été développées pour la propagation d'ondes, en particulier les méthodes du type PML (*Perfectly Matched Layer*, voir Collino et Tsogka (1998) pour une application au problème élastodynamique), mais elles ne peuvent pas être utilisées pour notre problème.

Nous avons choisi la méthode des éléments infinis, introduite par Beer et Meek (1981), qui permet de prolonger à l'infini la solution éléments finis calculée sur un domaine borné maillé de façon classique. L'extérieur du domaine éléments finis est maillé lui aussi, mais les éléments de la discrétisation sont eux-mêmes de dimension infinie (voir figure 3.6). On ramène ces éléments infinis au carré unité par transformation (voir Figure 3.20). Bien sûr, il existe tout de même une simplification forte à effectuer : les fonctions tests intervenant sur ces éléments ont la forme de polynômes en  $\frac{1}{r}$ , où  $r$  est la distance radiale depuis le « centre » C du problème - qui reste à définir.

Pour chaque point P (resp. P1) de la frontière extérieur du domaine éléments finis, on définit un point Q (resp. Q1) de telle sorte que P (resp. P1) soit le milieu du segment CQ (resp. C1Q1). L'utilisation de ces points Q, Q1 permet d'obtenir une décomposition qui ne dépend pas de l'origine des axes. Les points R sont placés à l'infini sur chaque élément infini. Les fonctions de transformation, qui ramènent les éléments infinis au carré unité, ont la forme suivante ( $x$  et  $y$  sont les coordonnées dans l'élément infini,  $\xi$  et  $\eta$  sont



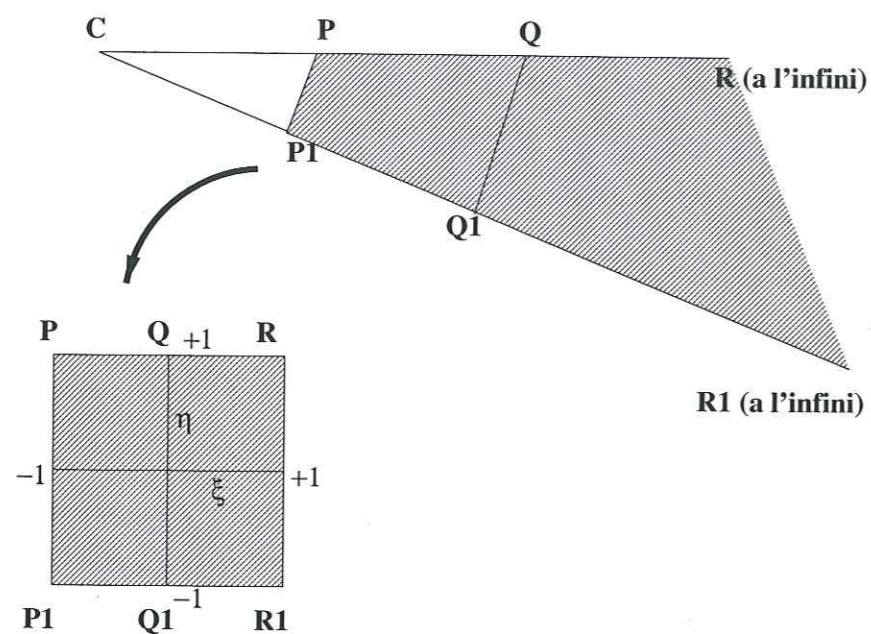


Figure 3.20 Fonction de transformation permettant de ramener chaque élément infini (hachuré en haut) au carré unité (hachuré en bas)

les coordonnées dans le carré unité) :

$$\begin{cases} x = \frac{1+\eta}{2} \left[ -\frac{\xi}{1-\xi} x_C + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right) x_Q \right] + \frac{1-\eta}{2} \left[ -\frac{\xi}{1-\xi} x_C + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right) x_{Q_1} \right] \\ y = \frac{1+\eta}{2} \left[ -\frac{\xi}{1-\xi} y_C + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right) y_Q \right] + \frac{1-\eta}{2} \left[ -\frac{\xi}{1-\xi} y_C + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right) y_{Q_1} \right] \end{cases}$$

On définit arbitrairement le centre C comme le centre du réseau de failles (c'est le point le plus logique pour représenter l'origine de la perturbation « vue » depuis l'infini). La disposition des éléments infinis est représentée sur la Figure 3.21 dans le cas d'une faille isolée. Dans le cas de failles multiples, la désignation du point C est plus délicate. On continuera pourtant à le placer au centre du domaine éléments finis, en ayant soin de placer les failles de telle sorte que leur barycentre coïncide approximativement avec lui (voir figure 3.6).

Dans notre cas, le champ calculé (qu'il s'agisse de déplacement ou de vitesse) tend vers zéro à l'infini. On introduit cette condition dans le modèle en annulant les degrés de liberté associés aux points R. Ici, les éléments finis sont des triangles et non des quadrangles, donc les fonctions de forme des éléments finis et infinis sont différentes. Néanmoins, les traitements respectifs des éléments finis et infinis sont très similaires. On remarquera

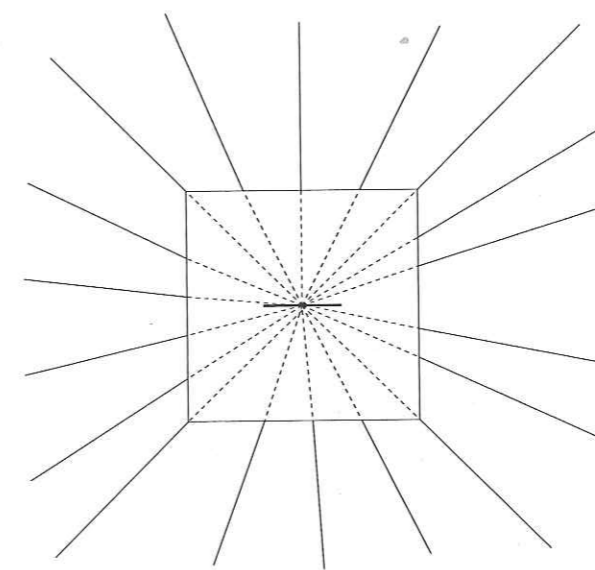


Figure 3.21 Disposition des éléments infinis autour de la zone éléments finis

aussi que les éléments infinis ne nécessitent pas de rajouter des points - donc des degrés de liberté - dans le modèle, et qu'ils ne nuisent pas au conditionnement des matrices du problème à résoudre. En revanche, on pourra leur reprocher qu'ils nécessitent une bonne connaissance du comportement à l'infini du champ qu'on désire calculer. Dans notre cas, nous savons que la réponse statique asymptotique d'un milieu élastique à une dislocation est en  $1/r$ , où  $r$  est la distance au centre de la dislocation. Pour un réseau de dislocations, on peut supposer la même relation,  $r$  représentant la distance au centre C du réseau. Dans le cas dynamique, nous faisons l'hypothèse que la réponse asymptotique est en  $1/r^p$ . Il faut encore choisir la valeur la plus judicieuse pour  $p$ . Remarquons que les solutions que nous cherchons doivent être d'énergie finie. Pour que l'énergie potentielle soit finie, il faut que le déplacement vérifie  $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , donc  $p > 0$ . Nous pouvons donc choisir  $p = 1$  dans le cas statique. Dans le cas dynamique, il faut en plus que l'énergie cinétique soit finie, c'est-à-dire que  $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , donc  $p > 1$ . Puisque rien ne justifie une grande différence de comportement à l'infini dans le cas statique et dans le cas dynamique avec  $\lambda$  petit, nous avons choisi  $p = 2$  pour le calcul dynamique. Dans tous les cas, puisque  $r$  est mesuré à partir du centre du réseau de failles, il faut que l'interface entre éléments finis et éléments infinis soit suffisamment éloignée du réseau. La méthode des éléments infinis ne permet donc pas de réduire fortement les dimensions du domaine éléments finis, mais elle donne des résultats plus précis qu'une simple condition de déplacement nul sur les bords extérieurs du domaine, en particulier dans le cas statique où le champ de déformation est moins localisé autour de la faille.

Remarquons que la connaissance du champ de déplacement créé à l'infini par une



dislocation pourrait aussi être utilisé, une fois que le premier calcul a donné une bonne approximation du glissement sur le réseau de failles, pour en déduire le déplacement sur le bord du domaine éléments finis et s'en servir comme conditions de Dirichlet dans un deuxième calcul sans éléments infinis. Pour cela, on pourrait considérer chaque arête de la discrétisation des failles comme une petite dislocation, puis sommer toutes ces contributions en chaque point du bord du domaine éléments finis.

### 3.5.3 Adaptation de maillage

Pour améliorer la précision d'un schéma éléments finis, on peut choisir d'augmenter l'ordre des éléments, ou de diminuer leur taille. Pour éviter de trop augmenter le coût des calculs, on peut effectuer ces changements uniquement dans les zones critiques nécessitant une grande précision, en utilisant des techniques d'adaptation de maillage. Dans notre cas, ces zones critiques sont en particulier les zones de singularités de contraintes à chaque pointe de faille non inhibée. Nous avons choisi une méthode de raffinement local de la taille du maillage.

#### Principe général

L'adaptation du maillage se fait par rapport à une évaluation de l'erreur effectuée sur la première fonction propre. Il s'agit tout d'abord d'établir une carte de l'erreur locale, qui doit servir ensuite à raffiner localement le maillage dans les zones où l'erreur dépasse un certain seuil, en calculant la taille des éléments requise dans ces zones. La méthode employée pour le calcul de l'erreur est celle de Zienkiewicz et Zhu (1987), qui utilise l'écart en énergie entre la contrainte (le gradient) calculée avec les éléments finis et une contrainte obtenue par lissage. Il s'agit donc d'un processus itératif, qui ne s'arrête que lorsque l'erreur locale est acceptable dans tout le domaine. A chaque pas, on recommence le calcul en utilisant la solution précédente comme valeur initiale. Le seul pré-traitement qu'il faut lui appliquer est une interpolation sur le nouveau maillage. Par exemple, dans le calcul de spectre non linéaire présenté dans ce chapitre, puisque le problème est défini sur des multiplicateurs de Lagrange qui « vivent » sur la faille, il suffit d'interpoler ces multiplicateurs sur la nouvelle discrétisation de la faille pour obtenir une valeur initiale performante pour le nouveau calcul.

#### Notations :

$u$  est la solution du problème.

$u_h$  est la solution Eléments Finis courante (sur le maillage  $\mathcal{T}$ ).

$u_h^*$  est la solution Eléments Finis calculée sur le nouveau maillage.

De manière générale, les expressions « étoilées » désignent des valeurs calculées sur le nouveau maillage.

$\mathcal{N}_h$  est l'ensemble des noeuds du maillage courant.

$\mathcal{N}_T$  est l'ensemble des noeuds connexes au triangle  $T$ .

$\omega_x$  est la réunion des éléments connexes au noeud  $x$ .

$e_T$  est l'erreur calculée sur le triangle  $T$ .

$e_0$  est l'erreur locale désignée comme acceptable (le critère d'arrêt).

$h_T$  est la taille du triangle  $T$ .

#### Calcul de l'erreur

On utilise la méthode de Zienkiewicz et Zhu (1987), qui consiste à « lisser » le gradient  $\nabla u_h$  de la solution sur le domaine, en calculant sa projection sur l'espace des fonctions continues et linéaires par morceaux  $S_h^{1,0}$ , parallèlement à l'espace des fonctions discontinues et linéaires par morceaux  $S_h^{1,-1}$ . Rappelons que le gradient  $\nabla u_h$  est une fonction de  $S_h^{1,-1}$ . On suppose que le résultat de cette projection est plus près de la solution que le gradient constant par morceaux, c'est pourquoi on calcule l'erreur comme étant la différence entre les deux.

#### Produit scalaire sur $S_h^{1,-1}$ :

$$(\sigma_h, \tau_h)_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{|T|}{3} \left[ \sum_{x \in \mathcal{N}_T} \sigma_{h|T}(x) \cdot \tau_{h|T}(x) \right]$$

où on définit  $\tau_{h|T}(x) = \lim_{y \in T, y \rightarrow x} \tau_h(y)$ .

Cette formule est une approximation au premier ordre, donc elle est exacte pour les fonctions linéaires. On note  $S_h$  la projection de  $\nabla u_h$  sur  $S_h^{1,0}$  parallèlement à  $S_h^{1,-1}$ , calculée grâce à cette formule approchée.  $S_h$  vérifie :

$$\begin{cases} S_h \in S_h^{1,0} \\ (S_h, \tau_h)_h = (\nabla u_h, \tau_h)_h \quad \forall \tau_h \in S_h^{1,-1} \end{cases}$$

donc  $S_h$  s'écrit :

$$S_h(x) = \sum_{T \subset \omega_x} \frac{|T|}{|\omega_x|} \nabla u_{h|T} \quad \forall x \in \mathcal{N}_h$$

L'erreur locale  $e_T = \|S_h - \nabla u_h\|_{0,2,T}$  est calculée grâce à la même formule approchée (on prend la norme correspondant au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_h$ ).



### Calcul de la taille des nouveaux éléments

Dans le cas où la solution exacte du problème est régulière, on peut alors supposer que l'erreur vérifie :

$$\|e_T\| = Ch_T^p$$

où  $p$  est le degré de l'interpolation utilisée, ici  $p = 1$ . Il est alors possible de déterminer  $C$  et  $h$  en calculant  $(e_T)_{T \in \mathcal{T}}$  pour 2 maillages différents. Mais dans le cas qui nous occupe, la solution exacte présente des singularités, et l'ordre de convergence de la solution éléments finis est modifié sur chaque point singulier. Il faut donc définir un ordre de convergence local  $p_T$  défini sur chaque élément, avec  $p_T = \alpha$  sur chaque triangle connecté à un point singulier,  $p_T = 1$  sinon. La taille des nouveaux éléments se déduit de celle des éléments courants par la formule :

$$\frac{e_T^*}{e_T} = \left[ \frac{h_T^*}{h_T} \right]^{p_T}$$

$$\text{avec } e_T^* = \sqrt{\sum_{T^* \subset T} e_{T^*}^2}$$

Pour avoir  $e_T^* = e_0$ , il faut donc que

$$h_T^* = h_T \left[ \frac{e_0}{e_T} \right]^{1/p_T}$$

On montre que, si la singularité est d'ordre  $\beta$ , c'est-à-dire si localement la solution vérifie  $U = r^\beta V(\theta) + W$  où  $(r, \theta)$  sont les coordonnées polaires autour de la singularité, alors  $\alpha = \beta$ . Notre cas est comparable à une fissure (« crack »), on peut donc considérer que la singularité est d'ordre  $1/2$ , d'où  $\alpha = 1/2$ .

### Détermination d'une carte de tailles d'éléments

Les maillages 2D adaptatifs, tel *BAMG* (Hecht, 1998) que nous avons utilisé ici, utilisent une carte de tailles d'éléments, c'est-à-dire une suite de coefficients  $h_i$  qui à chaque point associe une taille d'éléments en ce point.

On construit cette fonction à partir des coefficients  $h_T$  de la façon suivante :

$$h_i = \frac{1}{N_i} \sum_{T \in \mathcal{T}_i} h_T$$

où  $N_i$  est le nombre de triangles connectés au noeud  $i$ .

## 3.6 Généralisation aux failles courbes

Jusqu'ici, les résultats que nous avons présentés sont calculés sur des réseaux de failles planes parallèles. Toutefois, notre schéma éléments finis a été construit de manière à pouvoir traiter n'importe quelle géométrie de faille. L'influence de la courbure des failles sur la contrainte normale, et donc sur le déroulement d'une rupture a été démontré, par exemple par Aochi et al. (2000, 2002), dans le cas plan. Dans le cas antiplan, cette influence est plus limitée, mais la prise en compte de la courbure permet au moins de construire des modèles de failles (en particulier de failles normales) réalistes. Un exemple d'application sur un système de failles normales en Afar est détaillé dans le chapitre 4 (Wolf et al., 2003).

En pratique, il suffit de définir la normale locale en un point de l'interface  $\Gamma$  à partir de l'orientation des arêtes de droite et de gauche. Cette famille de vecteurs permet de calculer la contrainte normale en chaque point de la faille, mais elle est aussi très utile, lors de la génération du maillage initial, pour définir les deux bords (« inférieur » et « supérieur ») de l'interface.



## Chapitre 4

### Applications

#### 4.1 Introduction

Dans le chapitre 2, nous avons utilisé notre modèle d'évolution dynamique pour mettre en évidence l'existence d'une phase d'initiation correspondant à la phase d'affaiblissement de la loi de frottement dépendant du glissement. Dans le chapitre 3, nous avons vu que le calcul du premier mode propre de l'initiation nous renseignait dans le cas statique sur la stabilité d'un réseau de failles, et dans le cas dynamique sur la signature de l'initiation. Dans ce chapitre, nous tirons de nos modèles numériques d'autres applications géophysiques.

Dans la première section, nous étudions la limite de stabilité des réseaux de failles en fonction de leur géométrie, et nous tirons de la forme du glissement correspondant au premier mode statique une classification des réseaux de failles normales, en termes d'interaction. Par ailleurs, le premier mode statique correspond à une initiation infinie, ce qui peut aussi s'interpréter comme une évolution quasi-statique sous l'hypothèse supplémentaire que les contraintes se relâchent au fur et à mesure que les failles glissent. De façon plus réaliste, on peut aussi imaginer retrouver ce mode de glissement sur un réseau de failles qui subirait une série d'évènements se manifestant par un glissement stable ou instable, et séparés par des phases de restauration de la résistance du matériau permettant le rechargement des contraintes ; ces évènements aboutiraient rarement à une rupture sismique, de sorte que cela n'apparaîtrait pas dans le glissement cumulé. Nous admettons cette hypothèse dans le cas de réseaux de failles normales en Afar, et comparons les profils de glissement obtenus (en calculant le premier mode statique) avec les dénivelés mesurés en Afar. Nous montrons un bon accord dans les zones d'interaction des failles, mais un problème subsiste dans les zones de propagation d'une pointe de faille. En effet, dans ces



zones, on peut trouver une pointe de faille apparemment sans interaction notable avec une autre, mais ne présentant cependant pas de singularité de contrainte. Dans la deuxième section, nous montrons que ce désaccord peut être réduit en modélisant l'endommagement du milieu élastique au voisinage de la pointe de faille, sous la forme d'un réseau de petites failles secondaires. Dans la troisième section, nous utilisons l'analogie entre les glissements cumulés à l'échelle tectonique et les modes statiques pour interpréter des observations faites dans les zones de relai de deux failles normales se propageant l'une vers l'autre.

## 4.2 Application aux réseaux de failles normales

Dans cette section, qui a fait l'objet d'un article (Wolf, Manighetti, Campillo et Ionescu, soumis à *Geophysical Journal International*), nous étudions la limite de stabilité ainsi que le processus d'initiation des instabilités de glissement sur des réseaux de failles normales soumise à une loi de frottement qui prend en compte d'éventuelles zones d'ombre dans lesquelles le glissement est inhibé tandis que les contraintes se relâchent. L'analyse spectrale non linéaire présentée dans le chapitre 3 permet de définir la géométrie de ces zones d'ombre et la présence ou non de concentrations de contraintes en pointe de faille. Nous en déduisons une classification des réseaux de failles normales en fonction de leur type d'interaction (chargement ou déchargement). Nous faisons l'hypothèse qu'une analogie peut être faite entre les modes de déformation que nous obtenons à la limite de stabilité et les profils cumulés mesurés sur un système particulier de trois failles normales en échelon en Afar. Nous en déduisons la forme de l'affaiblissement, bien sûr hétérogène, qui doit être choisi sur ces trois failles pour expliquer les glissements observés. Il en résulte un champ de contraintes autour du réseau de failles qui peut être interprété en termes d'interaction, mais aussi en termes de possibilité de propagation des failles.

## Mechanics of normal fault networks subject to slip weakening friction

Sylvie WOLF<sup>1,2</sup>, Isabelle MANIGHETTI<sup>1,3</sup>, Michel CAMPILLO<sup>1</sup> & Ioan R. IONESCU<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Université Joseph Fourier et CNRS, BP 53X, 38041 Grenoble Cedex 9, France

<sup>2</sup> Laboratoire de Mathématiques, Université de Savoie et CNRS, Campus Scientifique, 73376 Le Bourget-du-Lac Cedex, France

<sup>3</sup> Department of Earth Sciences, University of Southern California, Los Angeles, CA 90089-0740, USA

### Abstract

We investigate the conditions of stability and the process of slip initiation in an antiplane non-coplanar fault system subject to a slip-dependent friction law that allows for rigid unloading, i.e. unloading without simultaneous slip. We perform a spectral (i.e. modal) analysis to find the conditions of stability of the system, the rate of growth of the initiation process and the associated eigenfunctions or slip patterns. We find that only a non-linear spectral analysis can provide appropriate solutions as, within a system of parallel, overlapping faults, stress shadow can occur that unloads one fault section and locks it. The non-linear analysis that we perform, based on a finite element method, allows us to determine the zones that are able to slip within a fault network, as well as the location of the stress singularities. The resulting slip profiles on the faults show only a few different shapes. This leads us to formulate a general classification of slip profiles that can be used to infer the degree of fault interaction within a system. We then assume that the slip patterns that we obtain at the limit of the stability represent sort of an analog of the cumulative (i.e. long term) slip profiles observed on real faults. Based on this assumption, we use our modeling to try reproducing the cumulative slip profiles of three en echelon large-scale normal faults in Afar. This leads us to infer the slip weakening functions on these three faults, as well as the stress distribution on and around their planes. We discuss the results in terms of fault interaction, fault propagation, barriers, and off-fault damage.

### 4.2.1 Introduction

Although most mechanical and seismological models consider faults and fault systems as planar (and/or co-planar) structures, real faults and systems rarely are that simple. At all scales, faults are segmented, and geologists have shown for long that such



segments rarely are co-planar along the fault to which they belong to. As a matter of fact, the en echelon arrangement of segments along faults is one of the most common fault geometry observed worldwide. Faults also rarely are isolated, but instead develop as systems where secondary, smaller faults form off a main fault plane and connect it. A classical example is that of "horsetail terminations" and branching secondary faults that are observed to form at many scales at the ends and along strike-slip faults. It results that the mechanics of non-coplanar fault networks is a key issue in the understanding of earthquake and faulting. Any slip occurring at one place of a planar fault (or system) loads the rest of its plane, so that anywhere the fault experiences a stress increase before it possibly slips. On the contrary, slip occurring at one spot of a non-coplanar fault system can either load or download the other parts of the system, depending on their position from the slip "spot". In other words, some portions of a fault (or system) may experience a stress increase while some others may experience a stress decrease (stress shadow). From a dynamic point of view, this means that some portions of a non-coplanar fault will slip as a response to slip occurring elsewhere on the fault, while some others will not. One critical issue therefore is to characterize these stress "interactions" that occur within a system once it has started to slip, for one to be able to anticipate which parts of the system will eventually slip and what the resulting slip function will be.

As slip on a fault is required by the friction laws to occur in the direction and sense of traction (i.e. no back-slip allowed), consistent slip solutions can only be found from non-linear analyses. Here, we develop and perform one of such analyses that allows us to predict the slip functions anywhere on a non-coplanar fault system that is subject to slip weakening friction. Our goal is to solve this problem for a system of non-coplanar faults having a quite simple geometry.

Stress interactions within non-coplanar fault systems have already been the matter of different studies, which we briefly review hereafter. However, none of these studies specifically addressed the question of the influence of complex friction laws on the natural slip distribution within strongly interacting faults.

Okada (1992), following Comninou and Dunders (1975), calculated the (static) stress changes due to an earthquake fault slip, and inferred the stress overload on adjacent faults, in the presence of a free surface. However, these calculations are linear, so that fault interaction is modeled as the superposition of the stress fields produced by each fault in the system. Although this cannot fully represent the real processes, these computations have since then been extensively used, with more or less success, in particular to predict the possible increase of seismic activity on faults adjacent to an earthquake rupture (King et al., 1994). More recently, a refined version of the model has been proposed (Fitzenz

& Miller, 2001) that also includes pre-stresses and fluid pressure on a system made of a dipping fault and a subvertical strike-slip fault; they showed that increased pore pressure (poroelastic effects) favors stress transfer and triggering of earthquakes from one fault to the other.

Considering faults as cracks in an elastic medium under compressive stresses (i.e. stress on cracks does not exceed the Coulomb limiting stress), Segall and Pollard (1980) computed the static state of stress around interacting non-coplanar faults and deduced possible resulting secondary fracturing. The model was subsequently extended to three dimensions by Willemse (1997), who pointed out that fault interaction depends on friction and results in asymmetric slip profiles. Using an equivalent 3-D model, Crider and Pollard (1998) showed that fault linkage is most favored when fault tips face each other. Baud and Reuschlé (1997) quantified the effect of interaction on the crack propagation path, and showed that interaction commonly favors branching and coalescence of faults within the system they belong to. Detailed methods of resolution of such problems (in particular theoretical determination of the stress intensity factors of interacting cracks) can be found in Pucik (1972) and Ishida (1973). Finally, Umeda et al. (1996) suggested that crack interaction can be responsible for rupture nucleation and/or arrest depending on the constructive or destructive "interferences" (up- or downloading) made by cracks. Yet, although useful, crack models cannot be retained as fully satisfactory as they ignore the possibility of progressive weakening.

Other models, which are neither dislocation nor crack models (i.e. neither the displacement nor the stress drop distributions are prescribed), deal with fault interaction. Robinson and Benites (1995) showed that fault interaction is a key factor in the organization of seismicity (using a model which simulates successive ruptures on two overlapping faults); an event on the first fault can change the time and magnitude of the next event on the second fault, resulting in complex stress fields, hence complex seismicity. Spyropoulos et al. (2002) studied crack growth and coalescence in a spring-block analog allowing some friction to be taken into account. They found scaling laws for crack slip and length, and pointed out the lack of symmetry of the resulting slip profiles. Depending on the rate of strain imposed at the boundaries of the system, faults grow isolated (with no or little interaction) or coalesce to others (strong interaction). These two behaviors lead to different distributions of fault sizes. Finally, Aochi and Madariaga (2003) simulated the propagation of the 1999 Izmit earthquake rupture using slip weakening friction, and showed that the dynamic interaction between the major non-coplanar segments much conditioned the rupture propagation.

All the models above point out the importance of stress interactions in non-planar



slip processes, whether these are seismic (i.e. resulting from one earthquake) or cumulative (i.e. resulting from several earthquakes and/or creep). However, very few of them investigated the coupling between these stress interactions and the constitutive friction laws on the faults, especially the weakening process. Here, we address this particular question. We start by posing the problem quite simply, as we only consider the behavior of a 2D antiplane fault network (i.e. normal faults) subject to a basic slip-weakening friction law.

During earthquakes, the weakening process is the one responsible for fault instability resulting in earthquake initiation followed by rupture propagation and slip. We define the earthquake initiation phase as the period of time extending between the first perturbation of the mechanical conditions on the fault (or system), and the onset of rupture propagation associated with wave radiation. Such a nucleation process has been observed in laboratory experiments (Ohnaka et al., 1987; Ohnaka & Kuwahara, 1990). The friction on the experimental nucleating faults could be satisfactorily described by a slip weakening law (Ohnaka et al., 1987).

Taking these experimental results as a basis, Dascalu et al. (2000) studied the antiplane shearing of a finite fault, and performed a spectral analysis to relate fault stability and slip weakening, using an integral equation method. This led them to introduce a universal non-dimensional constant  $\beta_0^*$  that appeared to only depend on the fault geometry. They showed that this constant alone allows to discriminate the stable and unstable configurations. Non-uniform stress loading on planar faults was then studied by Uenishi and Rice (2002), basically with the same modal approach than that of Dascalu et al. (2000). These authors reached the same conclusions regarding the value and interpretation of  $\beta_0^*$ . Then Campillo et al. (2001) used an argument of spectral equivalence as a renormalization technique to investigate the case of a heterogeneous fault. Finally, Voisin et al. (2002) used a finite element method to study the case of several coplanar fault segments. By computing the evolution of their stability limit  $\beta_0$  while they interact, they showed that coplanar interaction increases fault instability. In these works, the eigenfunction associated to  $\beta_0$  is shown to hold the characteristic pattern of the displacement field on the modeled faults when they are in a meta-stable position of equilibrium and subject to mechanical weakening.

Following these last works, we investigate here the stability limit of non-coplanar faults having different geometries. While the stability of a system made of co-planar faults simply increases with the distance between these faults, the stability of a non-coplanar system reveals to vary in a much more complex way, due to the effect of local stress shadows. Using the same modal approach than the one described above, we deduce meta-stable slip distributions on the modeled faults. Most of them exhibit long, quasi-linear

sections and therefore do not resemble the classical elliptical slip distributions expected for isolated faults in an elastic medium.

With the computation of the meta-stable mode, we build a simple model to try reproducing the cumulative slip distributions measured on three en echelon, 1 Ma-old active normal faults in Afar (East Africa). To do this, we will formulate two hypotheses. First, faulting is the result of an effective rock-weakening process that occurs as slip grows. The constitutive law on real long term faults can therefore be modeled by a simple slip-dependent friction law. Second, real fault systems always are at the limit of the stability (critical state, e.g. Sornette and Sornette (1989), and additional references from Scholz (2002)), so that we can reasonably consider that the meta-stable mode is representative of the actual state of the fault systems. Applied to the three example Afar faults, this reasonably allows us to infer their slip weakening functions, the state of stress on their planes and at their tips, and their possible subsequent evolution. Note that our objective is not to retrieve the details or chronology of fault growth and slip history.

#### 4.2.2 The time-dependent problem

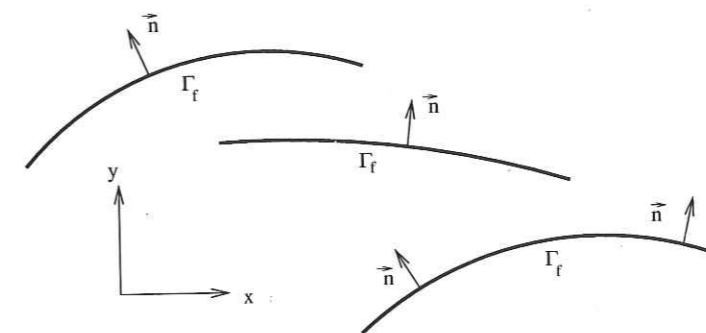


Figure 4.1 *Antiplane normal fault definition.* Fault segments lie in the  $xy$  plane. Their geometrical support is the segmented curve  $\Gamma_f$ . The local normal of  $\Gamma_f$  in the  $xy$  plane is denoted by  $n$ . Displacement  $u \equiv u_z$  and shear stresses  $\sigma_{zx}$  and  $\sigma_{zy}$  are perpendicular to the  $xy$  plane.

We consider the 2D antiplane shearing of two parallel finite fault segments in an unbounded homogeneous linear elastic space (see Figure 4.1). Systems of three or more segments will be investigated later. We denote by  $\Gamma_f$  the potential geometrical support of the fault system, but the effective fault segments, i.e. the effective slipping zones, which depend on fault interaction, will be determined by the calculations.

Let  $a$  be a characteristic length; when several fault segments of same length are considered,  $a$  will be their common half-length. In the following,  $x$  and  $y$  are non-dimensional



coordinates rescaled by  $a$ . The contact on the fault is described by a slip dependent friction law. We assume an antiplane configuration, that is, the displacement field  $u \equiv u_z$  is perpendicular to the faults, and does not depend on  $z$ . The displacement is therefore denoted simply by  $u(t, x, y)$ ,  $t$  being the time variable. The characteristic parameters of the elastic medium are the shear modulus  $G$ , the density  $\rho$  and the shear velocity  $c = \sqrt{G/\rho}$ . The nonvanishing shear stress components are  $\sigma_{zx}(t, x, y) = \sigma_{zx}^\infty(x, y) + \frac{G}{a} \partial_x u(t, x, y)$  and  $\sigma_{zy}(t, x, y) = \sigma_{zy}^\infty(x, y) + \frac{G}{a} \partial_y u(t, x, y)$ , where  $\sigma_{zx}^\infty$  and  $\sigma_{zy}^\infty$  are pre-stress components. On the fault support, i.e. for  $(x, y) \in \Gamma_f$ , we denote by  $\sigma_{nn}(x, y)$  the normal stress, and by  $\sigma_{zn}^\infty(x, y)$  the shear pre-stress. The equation of motion is the scalar wave equation :

$$\partial_t^2 u(t, x, y) = \frac{c^2}{a^2} \nabla^2 u(t, x, y) \quad (4.1)$$

which holds for  $t > 0$  and  $(x, y)$  outside  $\Gamma_f$ .

For  $t > 0$  and  $(x, y) \in \Gamma_f$ , let us denote by  $[w(t, x, y)]$  the jump of any variable  $w$  across  $\Gamma_f$  according to its local normal  $n$ .

The boundary conditions on  $\Gamma_f$  follow a slip-dependent friction law, with the additional constraint that the shear stress (including the pre-stress) cannot reverse on faults, so that the slip  $[u]$  and slip rate  $[\partial_t u]$  are nonnegative. This assumption is common at small time scales in earthquake dynamics modeling, but is also admitted at reasonably large tectonic time scales when plates are moving at quasi-constant rates. This statement will be the cause of strong non-linearities in the modeling. Therefore, we formulate the constitutive law on the fault by :

$$[\partial_t u(t, x, y)] \geq 0 \quad (4.2)$$

$$[\sigma_{zn}(t, x, y)] = 0 \quad (4.3)$$

$$\sigma_{zn}(t, x, y) = -\mu([u(t, x, y)]) \sigma_{nn}(x, y) \text{ if } [\partial_t u(t, x, y)] > 0 \quad (4.4)$$

$$\sigma_{zn}(t, x, y) \leq -\mu([u(t, x, y)]) \sigma_{nn}(x, y) \text{ if } [\partial_t u(t, x, y)] = 0 \quad (4.5)$$

for all  $(x, y) \in \Gamma_f$  and  $t > 0$ , where  $\sigma_{zn}$  is the shear stress acting on  $\Gamma_f$  and  $\mu([u])$  is the friction coefficient.

The initial conditions are denoted by  $u_0$  and  $u_1$ , that is,

$$u(0, x, y) = u_0(x, y), \quad \partial_t u(0, x, y) = u_1(x, y) \quad (4.6)$$

### 4.2.3 Non-linear spectral analysis

In this subsection, we define the non-linear problem associated to the time-dependent problem stated above. To do this, we have to assume a few simplifications. First, since our intention is to study the evolution of the system near an unstable equilibrium position, we shall suppose that, at each fault point,  $\sigma_{zn}^\infty = -\sigma_{nn} \mu_s$ , where  $\mu_s = \mu(0)$  is the static value of the friction coefficient. This is not a very restrictive assumption, since, to equilibrate the system, some of the points of  $\Gamma_f$  will be spontaneously unloaded by stress interaction and locked. We remark that taking  $u$  as a constant satisfies (4.1)-(4.5); hence  $u \equiv 0$  is a metastable equilibrium position, and  $(u_0, u_1)$  may be considered as a small perturbation of this equilibrium.

As a second assumption, we shall suppose that the friction law is piecewise linear :

$$\mu([u]) \leq \mu_s \text{ if } [u] = 0 \quad (4.7a)$$

$$= \mu_s - \frac{\mu_s - \mu_d}{2L_c} [u] \text{ if } 0 < [u] \leq 2L_c \quad (4.7b)$$

$$= \mu_d \text{ if } [u] > 2L_c \quad (4.7c)$$

where  $\mu_s$  and  $\mu_d$  are the static and dynamic friction coefficients ( $\mu_s > \mu_d$ ), and  $L_c$  is the critical half-slip. We can hereafter define the weakening rate  $\alpha$ , which can be heterogeneous :

$$\alpha(x, y) = \frac{-\sigma_{nn}(x, y)(\mu_s(x, y) - \mu_d(x, y))}{GL_c(x, y)} \quad (4.8)$$

Since we consider a *small* initial perturbation  $(u_0, u_1)$  of the equilibrium state  $u \equiv 0$ , we have a progressive slip growth such that  $[u(t, x, y)] \leq 2L_c(x, y)$  for  $t \in [0, T_c]$  along the faults, where  $T_c$  is the critical time at which the slip on the fault reaches the critical value  $2L_c$  at least at one point. Hence, for a first period  $[0, T_c]$ , called the initiation period, the boundary value problem on  $\Gamma_f$  is reduced to the following equations :

$$[u(t, x, y)] \geq 0 \text{ and } [\partial_n u(t, x, y)] = 0 \text{ for } (x, y) \in \Gamma_f \quad (4.9)$$

$$\partial_n u(t, x, y) = -\alpha(x, y)[u(t, x, y)] \text{ if } [u(t, x, y)] > 0 \quad (4.10)$$

$$\partial_n u(t, x, y) \leq 0 \text{ if } [u(t, x, y)] = 0 \quad (4.11)$$

We can now define the non-linear eigenvalue problem connected to (4.1), (4.6), (4.9)-(4.11) :



Find  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  and  $\lambda^2 \in \mathbb{R}$  such that  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2(x, y) dx dy = 1$  and

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = \lambda^2 \Phi(x, y) \quad (4.12a)$$

$$[\partial_y \Phi(x, y)] = 0 \text{ for } (x, y) \in \Gamma_f \quad (4.12b)$$

$$[\Phi(x, y)] \geq 0 \text{ and } \partial_y \Phi(x, y) \leq 0 \text{ for } (x, y) \in \Gamma_f \quad (4.12c)$$

$$\partial_y \Phi(x, y) = -a\alpha(x, y) [\Phi(x, y)] \text{ or } [\Phi(x, y)] = 0 \text{ for } (x, y) \in \Gamma_f \quad (4.12d)$$

The main novelty of our modeling is that it can handle locked zones :  $\Gamma_f$  is the potential geometrical support of the fault system, but the effective slipping zone, included in  $\Gamma_f$ , is not given a priori but instead determined as a result of the calculations, hence as a function of stress interaction. A linear analysis would be sufficient if we would remove the locked part of  $\Gamma_f$  in the modeling. The non-linearity of our problem comes from the fact that the geometry of the slipping zone is one of the unknowns. The stress interactions produce large locked zones, so that the resulting slip profiles are different from what they would have been deduced from a linear analysis ignoring stress shadowing.

Let us examine in details the linear and non-linear eigenfunctions for a particular system of two overlapping parallel segments (see the geometry on Figure 4.2). The first linear mode, plotted on Figure 4.2 (left), has the smallest eigenvalue ( $\beta_0^{lin} = 0.97$ ), but it cannot be retained because one of the segments is sliding backwards. The second linear mode (Figure 4.2, middle) has a positive slip and a slightly larger eigenvalue ( $\beta_1^{lin} = 1.17$ ). This mode is physically admissible (in that the slip is everywhere nonnegative), but the first non-linear mode (Figure 4.2, right)- admissible by construction - has a smaller eigenvalue ( $\beta_0^{nlin} = 1.06$ ). We recall here the physical meaning of the eigenvalue : if the weakening rate exceeds this value, the corresponding eigenmode is triggered and grows exponentially. Hence, the first non-linear mode is less stable than any linear (and admissible) one. It is worth noticing that the solution is not unique, for simple symmetry reasons : the dominant fault segment could have been the inhibited one, and vice versa.

Where fault segments do not or hardly overlap, the solutions of the linear system (4.12a), (4.12b), (4.12d) fulfill the inequality (4.12c) and the general solution of (4.1), (4.6), (4.9)-(4.11) can be decomposed on the infinite family of eigenfunctions of (4.12a), (4.12b), (4.12d) (see Dasalu et al. (2000) or Voisin et al. (2002) for coplanar segments). By contrast, within non-coplanar fault systems where segments significantly overlap, the linear analysis leads to solutions that do not fulfill the condition of positivity on the slip. Therefore a whole non-linear analysis must be carried out, and the decomposition above

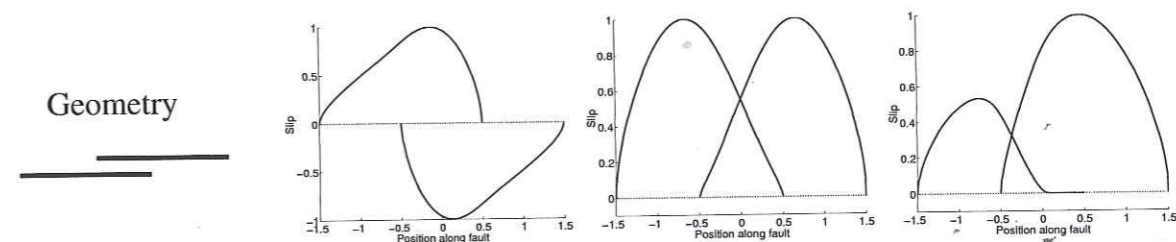


Figure 4.2 Left : the first linear eigenfunction. Middle : the second linear eigenfunction. Right : the first non-linear eigenfunction.

is no longer valid. However, one important result still holds : if we find an eigenfunction  $\Phi$  with a positive eigenvalue  $\lambda^2 \geq 0$ , then  $u(t, x, y) = e^{c|\lambda|t/a} \Phi(x, y)$  is a solution of (4.1), (4.6), (4.9)-(4.11) and  $u \equiv 0$  is an unstable configuration.

In order to find the critical physical properties of the problem (directly related to  $\alpha$ ), which correspond to the loss of stability, we will focus on the case  $\lambda^2 = 0$ . In this case, the unknown is the weakening rate, but there is an infinite number of heterogeneous solutions  $\alpha(x, y)$ . Therefore, we denote by  $\eta(x, y)$  the dimensionless function which defines the shape of  $\alpha(x, y)$  along  $\Gamma_f$ . We assume that  $a\alpha(x, y) = \beta\eta(x, y)$ , and the unknown is the nondimensional scaling factor  $\beta$ . The above eigenproblem becomes :

Find  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  and  $\beta > 0$  such that  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x, y) dx dy = 1$  and

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = 0 \quad (4.13a)$$

$$[\partial_n \varphi(x, y)] = 0 \text{ for } (x, y) \in \Gamma_f \quad (4.13b)$$

$$[\varphi(x, y)] \geq 0 \text{ and } \partial_n \varphi(x, y) \leq 0 \text{ for } (x, y) \in \Gamma_f \quad (4.13c)$$

$$\partial_n \varphi(x, y) = -\beta\eta(x, y)[\varphi(x, y)] \text{ or } [\varphi(x, y)] = 0 \text{ for } (x, y) \in \Gamma_f \quad (4.13d)$$

To discriminate the stable and unstable behaviors, we need to compute  $\beta_0$ , which is the smallest eigenvalue of (4.13a)-(4.13d). Indeed, if  $\beta > \beta_0$ , then the eigenproblem (4.12a)-(4.12d) has a positive eigenvalue  $\lambda^2$ , i.e.  $u \equiv 0$  is an unstable solution of the non-linear problem.

$$\text{If } \beta > \beta_0, \text{ then } u \equiv 0 \text{ is unstable.} \quad (4.14)$$

Hence, assuming that the shape  $\eta(x, y)$  of the weakening variations along the fault is known, the stability analysis of (4.1), (4.9)-(4.11) reduces to the computation of  $\beta_0$ . The



associated eigenfunction describes the pattern to which the system is infinitely slowly evolving.

#### 4.2.4 Numerical resolution of the non-linear spectral problem

In this subsection, we briefly describe the finite element numerical method used to solve the non-linear spectral problem, which is detailed by Ionescu and Wolf (2003)<sup>1</sup>. Later, we will present the computation of the time-dependent problem to test the spectral method. The method for the time-dependent problem is not described in this paper, but rather in Badea et al. (2003)<sup>2</sup>.

Let us state the variational formulation of the problem (4.12a)-(4.12d), with  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_f$ :

Find  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  and  $\lambda^2 \in \mathbb{R}$  such that

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi(x, y) \cdot \nabla v(x, y) dx dy - \beta \int_{\Gamma_f} [\Phi(x, y)][v(x, y)] dx \geq -\lambda^2 \int_{\Omega} \Phi(x, y)v(x, y) dx dy \quad (4.15)$$

for all test functions  $v$  such that  $[v] \geq 0$  on  $\Gamma_f$ .

The variational formulation of (4.13a)-(4.13d) is deduced from (4.15) by setting  $\lambda^2 = 0$ . In both cases, the problem reduces to the computation of the smallest eigenvalue of a non-linear operator. This can be done by considering the successive iterates of the non-linear operator, after choosing an initial guess. The detailed algorithm can be found in Ionescu and Wolf (2003). We only discuss here the properties of our spatial discretization.

The classical P1 finite element method consists in covering  $\Omega$  with a set of triangles and then approximating  $\Phi$  by a function which is continuous and affine over each triangle. The domain  $\Omega$  is unbounded, therefore it is divided in two parts. The first one is a square that contains  $\Gamma_f$  and which boundary is *far enough* from the fault system. It is possible to cover exactly this square with triangles. The second part is infinite and can be covered with *infinite elements* (Beer & Meek, 1981). The size of the elements in the square is automatically decreased in the regions where strong variations of the gradient are expected, using a *remeshing* strategy, based on the computation of the local error (Zienkiewicz & Zhu, 1987). The implementation of these two techniques in our model are described by Ionescu and Wolf (2003).

<sup>1</sup>section 3.3 de la thèse

<sup>2</sup>section 2.2 de la thèse

#### 4.2.5 Results for two parallel homogeneous identical straight segments

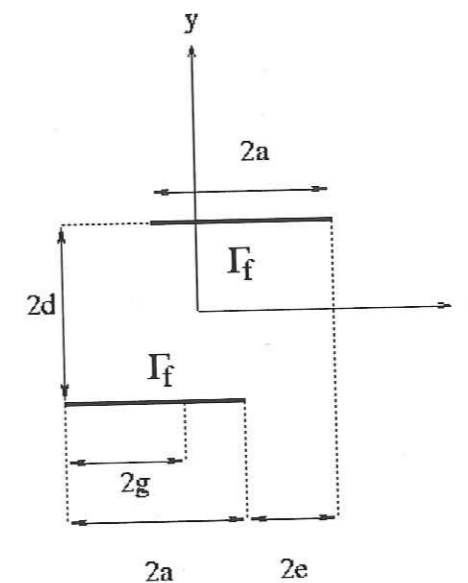


Figure 4.3 *Fault geometry : two parallel segments of same half-length  $a$ . The input parameters are the half-separation  $d$  and the half-offset  $e$ . The half-length  $g$  of the effective slipping zone on the lower segment is an output of the calculations. In what follows, the top and bottom segments are called “upper” and “lower” faults, respectively.*

Our numerical model can be applied to any antiplane fault geometry. However, we start by the simplest case of two parallel, homogeneous (i.e. with same homogeneous weakening rate and initially at the static threshold), identical faults oriented along  $x$  (Figure 4.3). The faults have a common half-length  $a$ . Their normal  $n$  lies along  $y$ . As shown on Figure 4.3, the geometry of the two-faults system is completely determined by two parameters  $d$  and  $e$ , which define the separation distance between the two faults and their along-strike offset (hence overlap), respectively. Length  $g$  is an output of the calculations : it is the half-length of the effective slipping zone on the lower segment, and can be any value between 0 and  $a$ .

To illustrate stability, let us first present the results of two dynamical experiments with  $a = 1$ ,  $d = 0.5$ ,  $e = 0.1$ . The evolution of the velocity field is presented on Figure 9 of Ionescu and Wolf (2003)<sup>3</sup> for two homogeneous weakening rates  $\alpha = 1.0$  and  $\alpha = 1.2$ . At  $t = 0s$ , each point on the faults is at the static threshold, and a small gaussian velocity perturbation is applied at an arbitrary point. First, the shear waves propagate in a similar

<sup>3</sup>figure 3.12 de la thèse



way in both cases, but slip grows faster for  $\alpha = 1.2$ . Then the behavior changes depending on alpha. The slip on the faults with lower weakening rate ( $\alpha = 1.0$ ) is rapidly stabilized so that the faults stop slipping. By contrast, the initiation phase does begin for the faults with faster weakening rate ( $\alpha = 1.2$ ); the slip rate has a constant shape, with a locked zone on the lower fault, and it grows exponentially (see Badea et al. (2003) for details on the slip growth). Note that having each point originally at the threshold of failure does not force the system to slide globally. Instead, in both cases the lower fault is unloaded and thus locked by the upper one.

From result (4.14), and since  $a = 1$  and  $\eta(x, y) = 1$ , we expect  $1.0 < \beta_0 < 1.2$ . The non-linear spectral computation gives  $\beta_0 \simeq 1.06$ . Hence, the physical meaning of the first eigenvalue is validated. This confirms that  $\beta_0$  is a critical value of the friction parameter that governs the stability of the system. In addition, in the time-dependent experiment above, in the case where slip initiates, the half-length of the slipping zone ( $g \simeq 0.78$ ) is determined early and found to be independent of the location of the initial perturbation. Therefore, it seems to be reasonable to approach the slip pattern by some eigenmode having a slipping zone which is part of the unknowns. This argument justifies the non-linear spectral analysis.

To investigate the relationship between fault system stability and geometry, we look for the metastable modes, which correspond to  $\beta_0$ . We first study the case of two identical fault segments, i.e. with same length and weakening rate, that do not overlap. We examine the particular cases where  $e = 2a$  and  $e = a$  (see Figure 4.3). The first eigenvalue  $\beta_0$  is computed for a set of values of the separation distance  $d$ . In both cases, the two faults do not sustain any shadow effect, so that both are sliding globally ( $g = a$ ). As one can see on Figure 4.4,  $\beta_0$  increases with the distance  $d$  separating the faults, up to  $\beta_0^*$ . However,  $\beta_0$  is high and increases weakly with  $d$  in the case  $e = 2a$ . This means that the two faults hardly interact. By contrast, the variations of  $\beta_0$  are great for the case  $e = a$ , and the critical value  $\beta_0^*$  is reached sooner (due to the shape of the region of positive shear stress generated by each fault). Once this value is reached, the faults stop interacting and both segments start consequently sliding independently (the linear analysis holds, and the first linear eigenvalue is double).

We now examine how the stability of the two-faults system varies as a function of both overlap and separation distances between the two segments. Hence, we consider the evolution of  $\beta_0$  with respect to the half lateral offset  $e$  (see Figure 4.3), for two fixed separation distances  $d/a = 0.1$  and  $d/a = 0.3$ .  $\beta_0$  is computed for  $0 \leq e/a \leq 3$ , and plotted in Figure 4.5 (left figures). The evolution of the corresponding length of the slipping zone on the lower fault ( $g/a$ ) is shown in Figure 4.5 (right figures). Overall, whether  $d/a$  equals

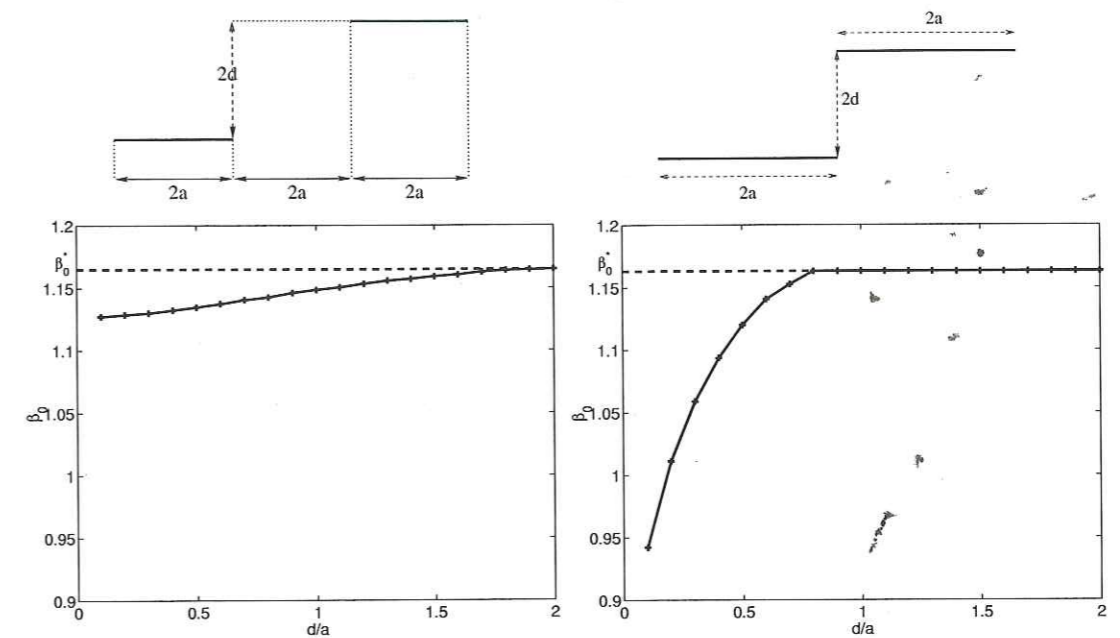


Figure 4.4 The first eigenvalue  $\beta_0$  as a function of the distance  $d/a$  between the faults, for  $e = 2a$  (left) and  $e = a$  (right).

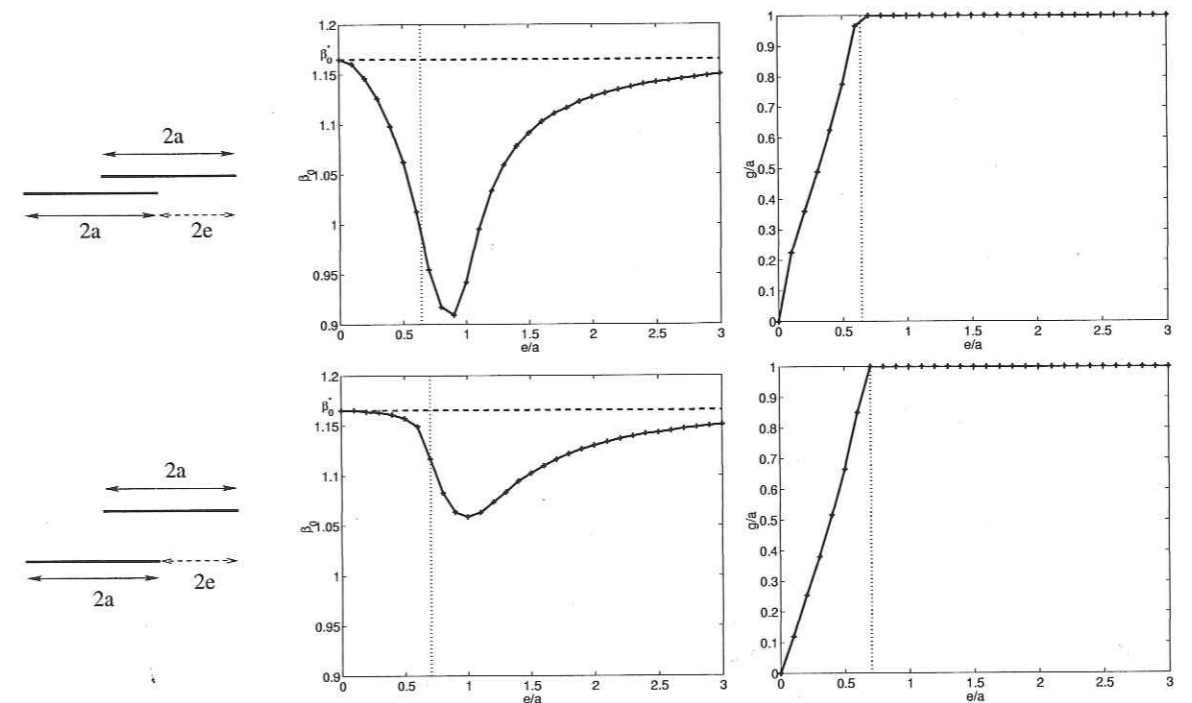


Figure 4.5 The stability limit  $\beta_0$  (left) and slipping zone  $g/a$  (right) as functions of the ratio  $e/a$ , for  $d/a = 0.1$  (top) and  $d/a = 0.3$  (bottom)



0.1 or 0.3, the system exhibits roughly the same dependence on  $e/a$ . For  $e/a = 0$  (the faults completely overlap each other), slip cannot initiate simultaneously on both segments because of strong shadow effects, so that the stability limit is  $\beta_0^*$  and the length of the slipping zone on the shadowed segment is 0. As the length of overlap decreases (i.e.,  $e/a$  increases), a collective instability occurs: the stability limit decreases and the slipping zone grows, rapidly for  $d/a = 0.1$ , slightly slower for  $d/a = 0.3$ . The minimum value of the lateral offset for which the shadow effect vanishes (no more locked zone,  $g/a = 1$ ) is found for  $e/a$  ranging between 0.6 and 0.7 for both values of  $d/a$ . It is interesting to note that  $\beta_0$  reaches a minimum, then increases and finally tends to  $\beta_0^*$  (the faults are independent). This minimum value of  $\beta_0$  indicates a configuration of greatest instability, but the meaning of this has to be balanced by the limited amplitude of the variations of  $\beta_0$ .

#### 4.2.6 Classification of two-faults systems.

Fault systems made of two parallel, similar, non-coplanar segments can be classified according to their global behavior which appears to depend on the system geometry. Three classes can be defined that only depend on the ratios  $d/a$  and  $e/a$ . In class I where the two segments do not or hardly overlap, instabilities develop all along both segments. Each segment tip therefore shows a stress singularity, so that four stress concentrations are observed in the medium (Figure 4.6a) ( $d/a = 0.2$  and  $e/a = 0.8$ ). In class II where segments significantly overlap, one of the segments is partly inhibited by the other. Hence, as one can see on Figure 4.6(b) ( $d/a = 0.2$  and  $e/a = 0.5$ ), only three stress singularities are observed, at both tips of the upper fault and at the outer tip only of the lower segment. Class III contains the configurations for which shadowing is complete, i.e. one segment is totally inhibited by the other and unable to slip. It therefore shows no stress concentration at any of its tips. This occurs when the two segments completely overlap ( $e = 0$ ). As considering this case further would not be very different from considering an isolated fault, class III will be left aside in the following. The three classes are plotted with respect to  $d/a$  and  $e/a$  on Figure 4.7.

We now discuss the slip and stress profiles associated with the different classes, by examining the particular points A, B, C, D of the class diagram of Figure 4.7. These points correspond to a constant separation distance  $d/a = 0.1$  between the two segments, but to different values of their overlap (i.e., different  $e/a$ ). Our computations show three different types of slip distributions on the faults, depending on the shape (and value) of the stress distribution in the vicinity of their tips (Figure 4.8). For an isolated fault,

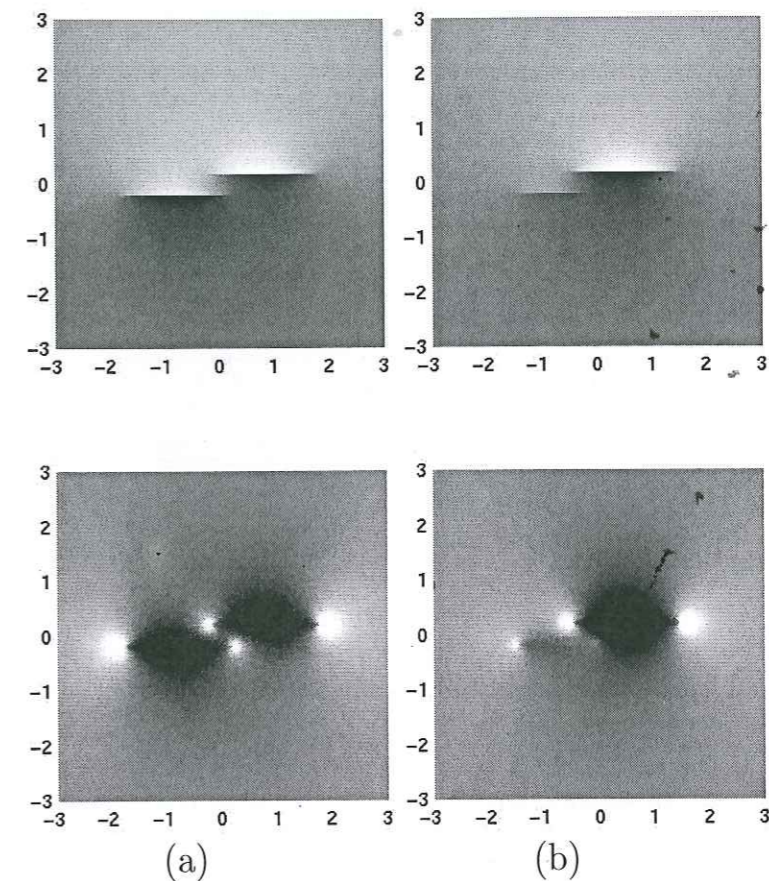


Figure 4.6 *Displacement (top) and stress (bottom) fields, obtained by the computation of the non-linear static eigenfunction  $(\beta_0, \varphi_0)$ . At left (class I,  $d/a = 0.2$ ,  $e/a = 0.8$ ), faults are mainly submitted to coplanar interaction and all fault tips have a stress singularity. At right (class II,  $d/a = 0.2$ ,  $e/a = 0.5$ ), non-coplanar interaction shadows the lower fault, creating a locked zone. As a consequence, the right tip of the lower fault has no stress singularity.*

the stress singularity at the fault tip can be approached by  $\mathcal{K}/\sqrt{2\pi x}$  (Pucik, 1972; Ishida, 1973), where  $\mathcal{K}$  is the stress intensity factor and  $x$  is the distance to the fault tip (the fault is supposed to lie on line  $y = 0$ ).  $\mathcal{K}$  can be numerically computed as  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{2\pi x} \tau(x, 0)$ . We use this formulation to determine the stress singularities at the tips of the faults we investigate below.

The first type of slip distribution is found on weakly interacting segments (point A, class I). In this case, each segment is slipping as a whole and shows an “ellipsoidal” slip profile. All fault tips also have a significant stress singularity (Figure 4.8a). The stress intensity factor  $\mathcal{K}$  of each singularity defines the medium’s resistance to fracture at the corresponding fault tip, hence the minimum strength that an hypothetical rigid barrier taken to lie at this tip would have to arrest the lateral propagation of the fault. In this



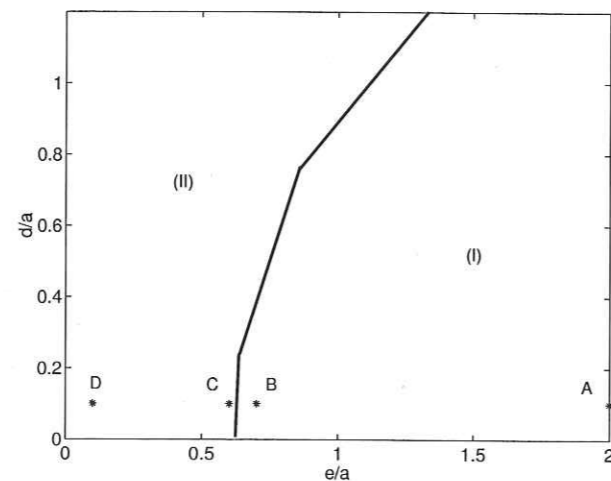


Figure 4.7 Diagram of fault systems classes.

This diagram allows systems made of two segments to be classified as a function of their geometry (i.e. normalized separation and overlap distances). The criterion of classification is the number of stress singularities at the tips of the faults, obtained by the computation of the non-linear static eigenfunction ( $\beta_0, \varphi_0$ ). In Class I, faults are loading each other and all fault tips show a stress singularity (total of  $2 + 2$  singularities). In Class II, fault interaction involves stress shadowing so that the shadowed fault tip has no singularity (total of  $2 + 1$  singularities). Points A, B, C and D refer to some particular computations that we have done and that are discussed in the text.

first case of weakly interacting faults, the computation of all stress intensity factors shows that all stress singularities have the same strength. Hence, in systems of class I where rigid barriers would be replaced by breakable ones, active segments would tend to propagate in both directions alike.

Another type of slip distribution is found for systems belonging to class I but very close to the limit with class II, as is the case of point B (Figure 4.7). On both segments, the ellipsoidal slip distribution appears "stretched", in a symmetrical way, so that the maximum slip is shifted outward from the zone where faults interact. The resulting slip distribution is still elliptical near the outer fault tips, but is roughly linear near the inner fault tips (see Figure 4.8b). The singularities at fault tips are all of the same order, but the stress intensity factors are higher at the outer fault tips, with ratios of about 100 between their maximum and minimum values (Figure 4.8b). This may explain why the slip profiles are "stretched" toward the outer fault tips. Also, if hypothetical rigid barriers at fault tips would be replaced by breakable ones, the outer barriers would be more damaged than the inner ones. If the medium has a homogeneous resistance to fracture, both segments will therefore preferentially propagate toward the exterior of the system.

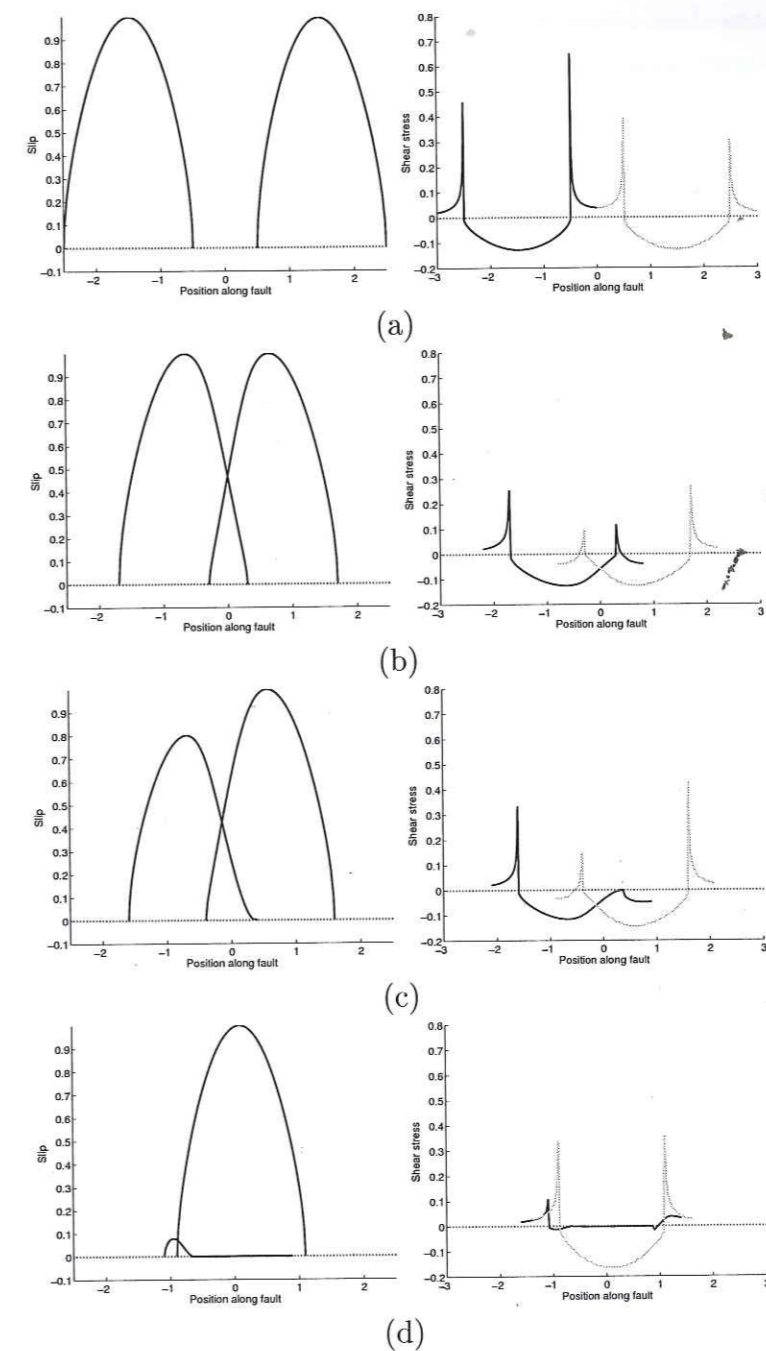


Figure 4.8 Slip and stress distributions deduced from the static eigenfunction for the different classes.

Slip is at left; shear stresses on the faults are at right, only highlighted in black for the lower segment. Note that the relevant feature about the strength of the singularities is the stress intensity factor  $K$ , whereas the value of the peak stress only depends on the discretization around the fault tip.

- (a) Point A : Two weakly interacting faults ( $d/a = 0.1$  and  $e/a = 1.5$ )
- (b) Point B : Just before class transition I-II ( $d/a = 0.1$  and  $e/a = 0.7$ )
- (c) Point C : Just after class transition I-II ( $d/a = 0.1$  and  $e/a = 0.6$ )
- (d) Point D : Highly interacting faults ( $d/a = 0.1$  and  $e/a = 0.1$ ).



As one leaves class I to enter class II, the shape of the slip profiles changes abruptly. A special case of this transition can be seen on Figure 4.5. The length of the slipping zone is seen to rapidly decrease as the lateral offset decreases for a constant separation, i.e. as the shadowing effect grows stronger. Faults in class II have asymmetric slip profiles : one segment has an undistorted "ellipsoidal" slip distribution (as on Figure 4.8a), while the slip profile of the other segment exhibits a quasi-linear long section in the inner part of the segment (as on Figure 4.8b). Along this linear section, the slip decreases from its maximum to zero. No stress singularity is observed at this linear tip, which appears connected to a locked zone (Figure 4.8(c) and Figure 4.8d). Indeed, the occurrence of stable slip on the upper fault prevents friction to exceed the static level on a significant part of the lower fault. This slip shadowing occurs regardless of the fact that the medium is everywhere homogeneous along both faults. In this case, the model predicts that the fault tip without stress singularity will not be able to propagate quasi-statically, whether there is a barrier or not.

Let us briefly summarize the meaning of the existence of non-linearity and the multiplicity of eigenvalues. In the above case of two identical faults, we can find one or two eigenfunctions  $\varphi_0$  for one eigenvalue  $\beta_0$ . When there is only one eigenfunction, it is necessarily geometrically symmetrical with respect to the center of the fault network (see for example Figure 4.8a or 4.8b). The interpretation of the multiplicity of eigenvalues is different whether they are found by a linear or non-linear analysis. In the linear case, a linear combination of the corresponding eigenfunctions is also an eigenfunction. In this case, each eigenfunction corresponds to one sliding segment, with the others being (almost) unaffected and therefore remaining stuck. In the non-linear case, a linear combination of the eigenfunctions of same eigenvalue is no longer a solution of our problem, because the segments do interact and the corresponding slipping zones are distinct. For example, in the case of two identical overlapping parallel fault segments, there are two symmetrical eigenfunctions with the same eigenvalue and symmetrical slip profiles (see Figure 4.2); both eigenfunctions are equivalent.

The above classification concerns the static problem (4.13a)-(4.13d), i.e.  $\lambda^2 = 0$ , but the same study can be performed for the dynamic one (4.12a)-(4.12d). We found that there is no abrupt transition between the quasi-static slip patterns and the ones corresponding to the dynamic onset of unstable slip. The slip distributions are quite similar in both cases, except that the strength of the interaction depends on  $\beta$ . More precisely, as  $\lambda_0^2$  grows, the length of the locked zone increases, and the maximum slip on the dominant fault grows as well. Thus, the strength of the instability tends to confine the slip during the initiation phase. This feature is illustrated by Figure 4.9. Note that this remark is not relevant to

the long term evolution of the system, since for  $\lambda_0^2 > 0$  the weakening behavior will be followed by a phase of rupture propagation, i.e. the occurrence of a seismic event. The computation of the entire process, from the initiation phase to the end of the propagation of the seismic waves, leads to the slip profile plotted on Figure 4.10 (here for  $\alpha = 2.0$ ). Slip has occurred all along both segments, even in the zone that was locked during the initiation phase, but the slip has a linear shape in this region.

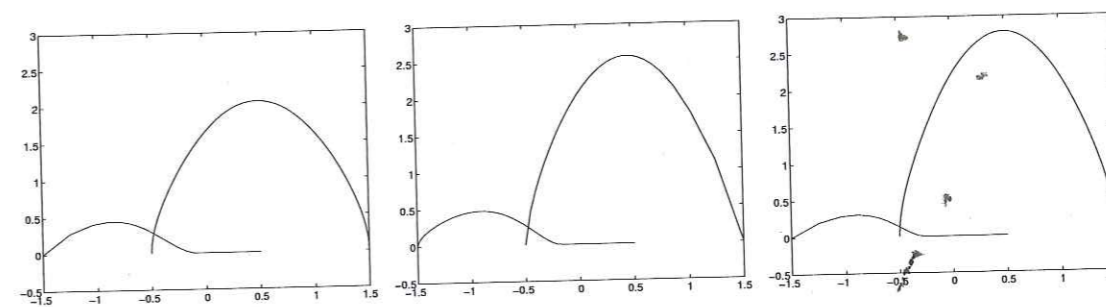


Figure 4.9 Slip profiles for increasing values of  $\lambda_0^2$  (0.0, 0.5 and 1.0)

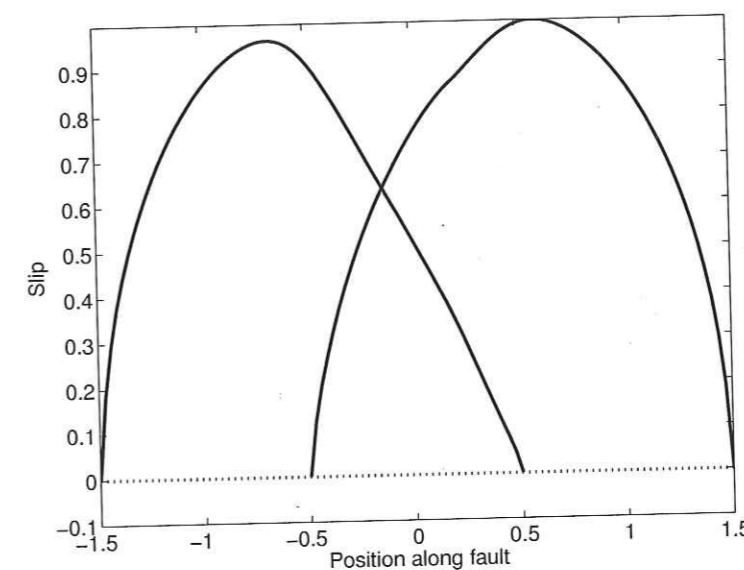


Figure 4.10 Slip profiles resulting from an entire seismic event for  $\alpha = 2.0$

Note that our classification does not solely apply to fault systems made of two identical segments, since the slipping zones on both segments eventually reveal not to be of same length in class II. Hence our classification applies to any system made of two parallel, not fully overlapping segments. Class I corresponds to the configurations (symmetrical if the faults are of same length) in which the four fault tips are arrested by a barrier, whereas class II contains the configurations in which one fault tip is arrested by shadowing. The limit between these two classes is so narrow that it is very difficult to



conclude, by considering only the geometry of a fault system, on the propagation of its faults and on the explanation (barrier or shadow) in case of arrest. However, we believe that, for a fault system having a geometry such that the system is close to the transition between classes I and II, it is reasonable to infer that one of its fault tips has stopped propagating because of shadow effects. This conclusion will be of considerable importance in the following.

#### 4.2.7 Application to a non-planar fault system in Afar, and implications on fault mechanics

Real faults grow as they accumulate slip during repeating earthquakes. Interseismic, more or less aseismic sliding may also occur and participate to their growth. The lack of observational data on repeating earthquakes on one given fault makes the mechanical processes of fault growth - i.e. slip accumulation and lateral propagation - difficult to depict and characterize. We suggest that our modeling can build part of the bridge that necessarily extends between the only two data types that we have so far to work on, i.e. instantaneous (seismic and dynamic) and cumulative (long-term and static) faulting. Faulting is the result of an effective rock-weakening process that occurs as slip accumulates. Indeed, the fact that shear stress is lower on major faults than in the surrounding fresh rocks demonstrates that some weakening occurs as slip accumulates, at least to a first order. The constitutive law on a cumulative, long-term fault can therefore be approximated by a simple slip-dependent friction law as the one taken in our modeling. Second, real fault systems have been shown to evolve at the limit of the stability (critical state, e.g. Sornette and Sornette (1989), and additional references from Scholz (2002)). This allows us to assume that the first non-linear static eigenmode of our model is representative of the state of real fault systems.

Hence, we feel that we can draw a reasonable comparison between our modeled slip profiles and those measured on real cumulative faults. If this is true, then reproducing the overall pattern of real cumulative slip profiles with our modeling may allow us to infer some mechanical and physical parameters on real faults.

As our model is built for antiplane slip, we compare our results to cumulative slip distributions measured on normal faults. Manighetti et al. (2001) measured slip distributions on about 300 active normal faults and systems in Afar (East Africa), with lengths and total vertical slip varying between about 0.1 and 100 km, and between about 1 and 1000m, respectively. The faults analyzed also have various ages, ranging between about 0.01 and 2 Ma. Hence, most of them have accumulated slip during hundreds of repeating

earthquakes. The major result of this analysis was to show that most cumulative slip profiles on these Afar faults have long, roughly linear sections, some of them run along the entire fault length. These linear slip profiles were also shown to taper in the direction of overall (long-term) fault or system propagation. They were found on both interacting and isolated faults. These observations, together with some others elsewhere (see references from Manighetti et al. (2001)), resemble some of those we made on Figure 4.8. This further suggests that a comparison between our modeled slip profiles and real ones can be drawn.

In the following, we focus on a real non-coplanar Afar normal fault system and seek which mechanical conditions are necessary on the system faults for our modeling to reproduce their slip profiles measured at the surface (see Manighetti et al. (2001) for a detailed description of faults and measurements). The system is made of three major fault segments (F1, F2, F3; see Figure 4.11; fault segment tips are denoted T1 to T6), en echelon arranged along a mean N125°E direction. Each segment is 20-30 km-long on average, while the overall system extends over about 70 km. Each segment is separated across-strike from the next by about 5-10 km ( $2d$ ), and overlaps its immediate neighbor by about 7-10 km ( $2a - 2e$ ). Their corresponding ratios  $d/a$  and  $e/a$  would therefore be about 0.2-0.5 and 0.5-0.8, respectively. These would make the two couples of segments F1-F2 and F2-F3 belonging to our class I, or to the transition zone between class I and class II. This remark is important because, in geological observations, faults are defined by slipping zones, so that we are not allowed to find large locked zones on the computed slip profiles. Finding each couple of segments outside class II gives us a chance to avoid such locked parts in the interacting triplet. In addition, as stated at the end of the previous subsection, finding a couple of faults close to the class transition gives precious information on the propagation of their inner tips.

The slip profiles measured on the three segments are shown in Figure 4.12b (measurements are projected in the mean N125°E direction of the overall fault system). The maximum cumulative vertical offsets measured at the surface on F1, F2, and F3 are about 800, 1200, and 1000 meters, respectively. On each segment, such huge slip has accumulated in the last million years (Manighetti et al., 2001), at a minimum vertical slip rate therefore averaging 1 mm/yr. The three profiles show different patterns. The slip distribution on F2 is rather symmetric and triangular, with high slip gradients on either side of the zone of maximum slip. The slip distribution on F3 is more asymmetric with the maximum slip being shifted toward the outer fault tip (T6), and slip decreasing roughly linearly from maximum to zero toward the other inner fault tip (T5). The slip distribution on F1 is even more asymmetric with the maximum slip being completely shifted at the



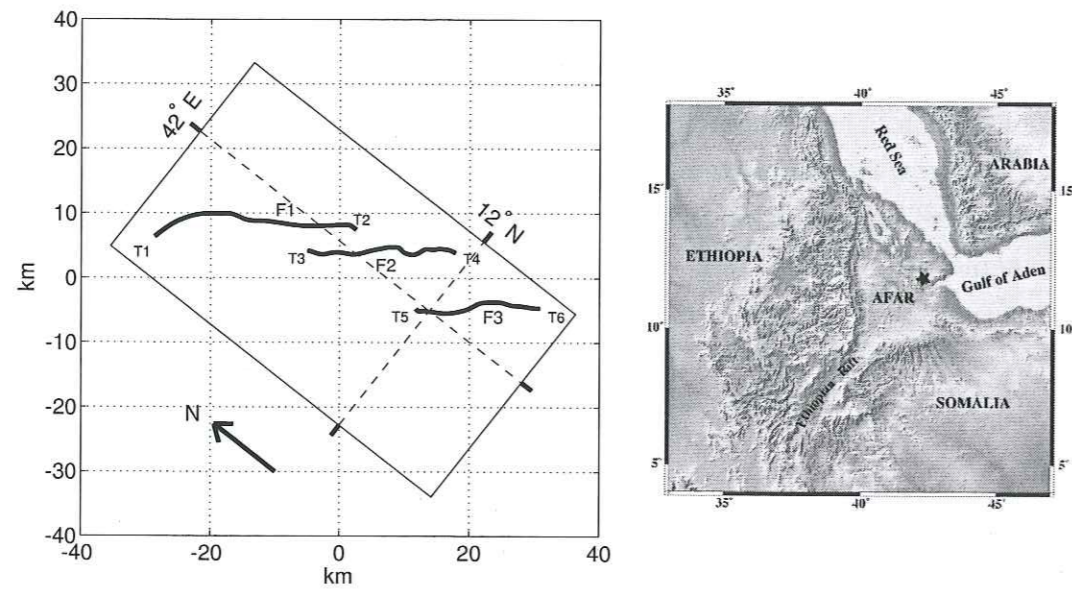


Figure 4.11 *Fault system in Afar made of three en echelon normal fault segments. Inset shows general setting of Afar, and star locates the analyzed fault system. Fault segments are denoted F1, F2 and F3 and fault tips T1, T2, ..., T6. This fault system geometry defines our geometrical support  $\Gamma_f = F1 \cup F2 \cup F3$  for the slip.*

inner fault tip (T2) and the rest of the slip decreasing linearly from its maximum to zero toward the other outer fault tip (T1). This later slip profile has been shown by Manighetti et al. (2001) to slant in the direction of F1 overall propagation. The high slip drop at the outer tip of F3 (T6) is taken to be due to the existence of a barrier (Manighetti et al., 2001). As a broad, thick, recent lava field crops out at this location, the barrier is likely to correspond to a magma chamber.

We use the average surface trace of the segments (Figure 4.11) as our geometrical support  $\Gamma_f$  for the calculation of slip.

Our goal is to find the weakening rates on the three fault segments that would make our modeling (computation of the first static eigenfunction  $(\beta_0, \varphi_0(x, y))$ ) capable of reproducing their observed slip profiles. As said above, we must find solutions lying either in class I or at the narrow limit between classes I and II. With these constraints in mind we sought through a trial-and-error approach for appropriate weakening shape functions  $\eta(x, y)$  able to reproduce the observed slip patterns. We started by testing simple hypotheses but those rapidly revealed not to be successful. In particular, considering a homogeneous weakening rate ( $\eta(x, y) = 1$ ) led to the development of large locked zones along the segments (class II) that are not observed in the data.

To retrieve the observed slip profiles, we eventually found that the weakening rate

on each fault must be roughly inversely proportional to its length. The weakening rate must also decrease toward  $x < 0$ , hence in the NW direction shown to be that of overall fault propagation (see Figure 4.12a). On fault F1, a linear northwestward decrease of the weakening rate was not sufficient to reproduce the linear section of the slip profile, what forced us to consider instead a cubic decrease (Figure 4.12a). On F2, we had to add a bump in the middle of the weakening profile to succeed in concentrating the slip at the fault center (Figure 4.12a). The final, more appropriate weakening rates that we could eventually find ( $\alpha(x, y) = \beta_0 \eta(x, y)$ ), are presented in Figure 4.12a, together with the corresponding observed and modeled slip profiles (Figure 4.12b) and the corresponding shear stress drops on the faults (Figure 4.12c). Note that, if the shadowing had not been included in our calculations, the weakening functions above would not have succeeded alone in reproducing the observed slip profiles; a very small change in the weakening can produce an abrupt change in the slip of interacting faults, whereas it has only a weak influence on an isolated fault.

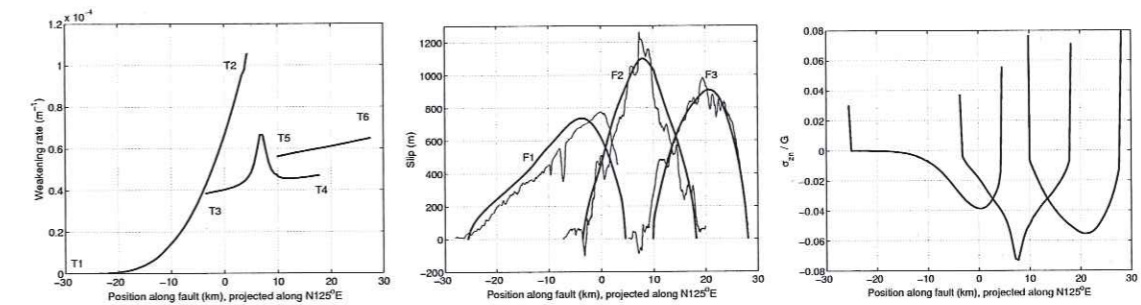


Figure 4.12 *Results of the trial-and-error search for the three-faults system in Afar. From left to right, respectively: the deduced profiles of weakening along the faults, the computed slip profiles (thick lines) compared to the observed ones (thin lines), and the computed shear stress profiles on the faults.*

Although we did not perform a strict inversion procedure, we found that the slip profile shapes that we produced were very sensitive to the shapes of the weakening rate functions, and even more to the fault geometry  $\Gamma_f$ . For instance, our capability of finding a solution entirely in class I strongly depends on the position we consider for tip T4. In this strongly interacting fault network, it actually revealed to be difficult to avoid producing locked zones and hence difficult to reproduce the observed slip distributions and slip partition between segments. As a matter of fact, although our final solution places both pairs of interacting segments in class I, they remain very close to class transition I-II. However, we claim that solutions obtained for F2 and F3 are quite similar to the observed profiles, hence are reasonable solutions. By contrast, the solution obtained for F1 is weaker, as we failed in reproducing the slip profile pattern close to tip T1. Indeed, our modeling produces an unlikely weak stress singularity at T1, which leads to a northwestward offset



of the modeled zone of maximum slip compared to the observed one. We think that this failure is due to the fact that F1 is presently propagating northwestward. Our modeling is not built to handle active fault propagation. The slip pattern at tip T1 could also result from strain being partly distributed on surrounding secondary faults which are not included in our geometrical model.

Knowing the optimal weakening rate functions on the three faults, we can now analyze the stress distributions on and around the equivalent modeled faults. This state of stress does not include the "pre-stresses", which are unknown. Computed shear stresses on the fault planes are shown in Figure 4.12c, while 2-D displacement and stress fields are represented in Figure 4.13.

Although the faults are non planar, the state of stress at the fault tips can be observed on  $\sigma_{zy}$  (Figure 4.12c) since the faults are mainly oriented along x. Tip T4 is observed to have the strongest stress intensity, while tip T2 has the weakest. This is because slip on F2 has put T2 in a stress shadow zone. Also, T2, together with T5, are close to the class transition I-II.

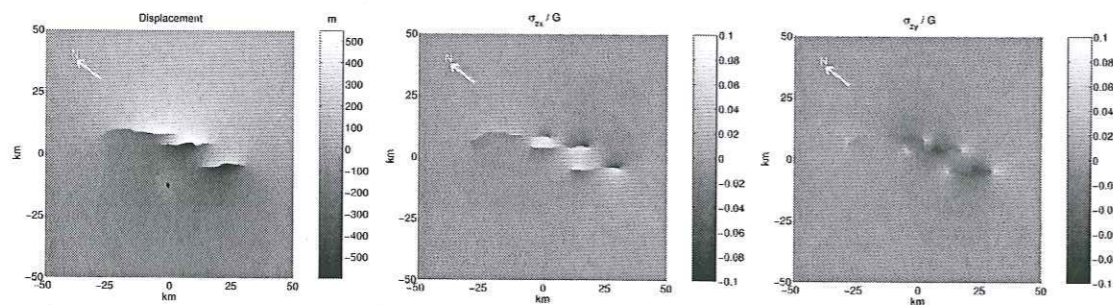


Figure 4.13 Displacement field, stress fields  $\sigma_{zx}$  and  $\sigma_{zy}$ .

Figure 4.14 shows the orientation of maximal shear solicitation and its corresponding magnitude, as we can compute them around the three segments. Strictly speaking, Figure 4.14 cannot be used to infer the location and orientation of the secondary faults likely to develop in the network, as Figure 4.14 has been computed without including any pre-stress (i.e. overall regional state of stress). This pre-stress obviously tends to create faulting in the mean direction of the fault network, whereas actual slip on F1, F2, and F3 privileges the orientations depicted in Figure 4.14. Both influences must be considered to infer secondary faulting. Shear orientation is expected to exhibit a radial distribution at fault tips where the stress singularity is high. This is observed at fault tip T6. This suggests that T6 is presently arrested by a strong barrier, as already suggested by observations (Manighetti et al., 2001). All other fault tips show quite different shear patterns. Stress orientations (without pre-stress) at tip T2 are strongly anisotropic and the stress

concentration in the orientation of the fault is weak, so that tip T2 appears about to stop or about to propagate in a different direction. In the region of interaction of F1 and F2, associated to tips T2 and T3, the shear orientation (without pre-stress) is roughly perpendicular to the faults and the magnitude is strong. An easy branching process can be expected (a starting connection is observed on the field). The situation is similar between F2 and F3, but shear stresses are weaker. As our model failed to reproduce the real slip profile close to T1, we cannot conclude on this fault tip. We however believe that T1 has not yet encountered any barrier and is still propagating northwestward. Note that our model predicts a low weakening near T1, so that F1 would be growing without producing a large stress drop (i.e. T1 would propagate without encountering any barrier). As suggested by Manighetti et al. (2003), we may think that the stress drop is actually dissipated and accommodated outside the main fault plane, through distributed damage.

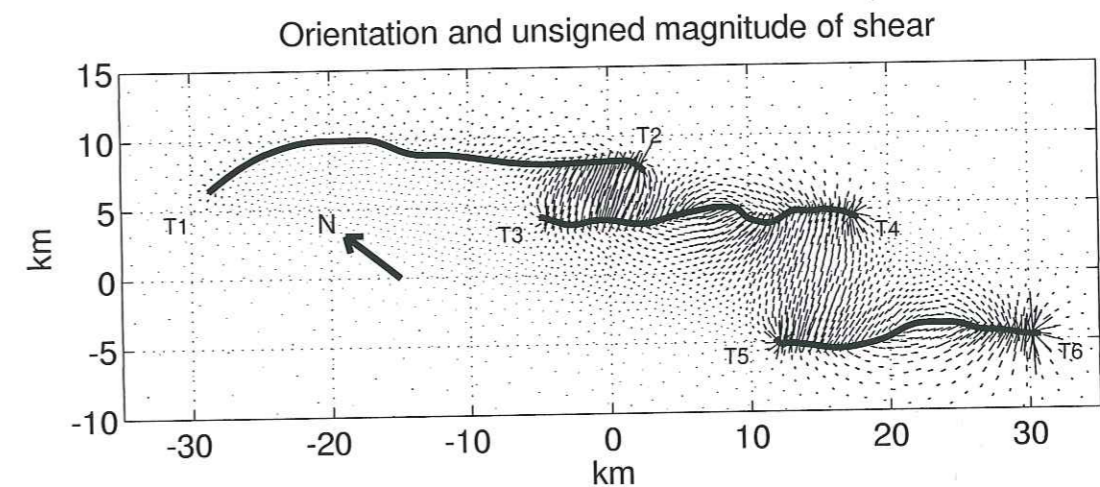


Figure 4.14 Orientation and unsigned magnitude of shear. At each point, the bar gives the orientation of the plane on which the shear stress is maximal, regardless of its sign. The length of the bar is proportional to the shear magnitude.

#### 4.2.8 Summary and discussion

The aim of this paper was to understand how the geometry and the slip weakening process combine within a non-coplanar, normal fault network to allow a slip instability to develop. We also tried to define the possible resulting slip and stress distributions in the system. The main result of our work is to show that, in non-coplanar normal fault systems, hence in most normal fault systems worldwide, the distribution and partition of the slip can be understood and predicted by using a modal approach of a meta-stable equilibrium that would basically only include a slip weakening process. The geometry of the fault



system also is, of course, an important parameter. However, many geological studies have shown that fault systems exhibit only a few self-similar geometries (Tchalenko, 1970; Aydin & Schultz, 1990), so that the arrangement of faults within a system is not random and can be precisely characterized and quantified at any scales. In particular, the non-coplanar fault geometry most commonly observed worldwide and at all scales, i.e. the en echelon arrangement of faults, has been shown to satisfy precise scaling-laws, the major ones linearly relate the overlap distance to fault length (i.e.,  $e/a = \text{constant}$ ), and the separation distance to the overlap distance (i.e.,  $d/a = \text{constant}$ ) (e.g. Acocella et al. (2000) and references therein). Hence, the geometrical parameters can be reasonably determined and fixed in any problem of the type we address, so that the weakening rate function remains the major parameter that we must know to solve the problem.

In the first part of our work, we have formalized the problem and explored its non-linear modal solutions. The static formulation of the problem led to compute a stability criterion and the corresponding (meta-stable) static eigenfunction. We showed that the effect of non-coplanar interaction on fault stability is much more complex than the one of coplanar interaction. Indeed, even though faults within a system are all submitted to similar conditions, slip will not occur homogeneously on them. This comes from the fact that, in non-coplanar configurations, a slip patch on a part of the system may, depending on the system geometry and on its "weakening configuration", enhance or impede slip on other sections of the system.

In the second part of our work, we used our modeling to try reproducing the slip profiles on three real normal faults forming a large-scale en echelon system, and simultaneously determine their corresponding weakening rate functions. This approach, based on the assumption that cumulative slip profiles can be compared to our first static modal solution  $(\beta_0, \varphi_0)$ , led to several results.

First, we were able to roughly reproduce the observed slip profiles. This is important because the slip profiles observed in Afar (Manighetti et al., 2001) reveal to have an overall shape very different from that predicted by simple models of faults (or cracks) without consistent friction law in a linear elastic medium. Such models predict that they should be elliptical or bell-shaped. Instead, most are triangular, asymmetric, with long roughly linear sections slanting in direction of overall fault propagation. Note that similar quasi-linear slip profiles have been observed elsewhere in the world on both dip-slip (see references from Manighetti et al. (2001)) and strike-slip faults (Manighetti et al., 2003a), and for both cumulative and seismic deformation (Manighetti et al., 2003b, 2003a). Our modeling produces similar linear slip profiles, both in the static ( $\lambda^2 = 0$ ) and dynamic cases, and also within a whole rupture event (Figure 4.10).

So far, one common explanation to the observed linear slip profiles has been to advocate that friction on faults reduces with increasing slip (Bürgmann et al., 1994). Although this general statement must be true at a certain scale, our results show that it does not alone explain observations. Indeed, although a linear slip weakening function succeeds in explaining the slip distribution on fault F3 (Figure 4.12a), linear weakening functions fail in explaining the other two slip profiles. In particular, we are forced to consider a cubic slip weakening decrease for F1, which exhibits the longest, most linear slip profile.

Another common explanation to the observed linear slip profiles is to advocate fault interaction (see references from Manighetti et al. (2001)). Our modeling clearly demonstrates that, indeed, fault interaction can account for the development of steep linear slants inside shadow zones between interacting segments. However, the fact that our model also roughly reproduces the linear slip profile on F1 where the later does not interact with any close overlapping neighboring segments, suggests that fault interaction alone is not sufficient to explain all observed linear slip profiles.

Non-uniform boundary stresses were also advocated to account for the observed Afar linear slip profiles (Bürgmann et al., 1994). Our results demonstrate that this condition is not required, as the boundary conditions in our modeling are homogeneous, and yet linear slip profiles are produced.

The Afar linear slip profiles were also shown to taper in the direction of overall fault propagation (Manighetti et al., 2001). Although our modeling cannot handle the process of fault propagation, we show that slip weakening rate distributions on the analyzed faults must, to be appropriate, decrease in the supposed direction of fault propagation. This gives supports to the propagation statement above.

Finally, our modeling also reproduces the high slip gradients observed at some fault tips. Such high slip drops, capable of dropping the slip from almost 1000m-high to 0 in a distance of less than 10 km, were attributed to the existence of barriers capable of resisting failure and sustaining high stresses (Manighetti et al., 2001). Our modeling also suggests the existence of such a barrier at the eastern tip of F3 where the overall fault system ends abruptly.

We end by noting that our calculations, that assume a perfect linear elastic medium, lead to values for  $\sigma_{zn}$  that can reach 8% of the shear modulus  $G$  (Figure 4.12). This value is much higher than the value of the normal compression expected at 10 km depth in the crust, which is about 0.1% of the classical instantaneous shear modulus  $G$  deduced from wave propagation speed. Of course, the tectonics reloads the fault, which compensates the



stress drop due to such large slip. However, if the surrounding crust is purely elastic with the instantaneous value of  $G$ , it will be unreasonably overloaded. If elastic crustal behavior is assumed, this suggests that the shear modulus appropriate for the Afar faults analyzed at this long time scale should be smaller than the instantaneous value by one or two orders of magnitude. This further supports the assumption that "crustal damage" occurs in the medium surrounding the faults, resulting in a lowered effective shear modulus. Such off-fault damage could contribute to produce the linear slip profiles on the faults, as recently suggested by Manighetti et al. (2003). We now are in the process of improving our modeling by including such damage in the medium.

#### 4.2.9 Discussion sur la propagation des failles du réseau

Nous avons vu dans l'exemple étudié ci-dessus que les trois failles semblent très proches de la disparition d'une ou plusieurs singularités de contrainte. On peut penser que cela signifie que certaines au moins des pointes de failles internes (dans les zones de forte interaction) sont sur le point de stopper leur propagation, du moins dans leur direction principale : il leur reste encore la possibilité de « brancher », c'est-à-dire de se propager dans une direction qui leur permettrait de se connecter au segment de faille avec lequel elles interagissent. Pour aller un peu plus loin dans ce raisonnement, on peut par exemple réitérer les calculs effectués ci-dessus, cette fois en allongeant légèrement la faille centrale (d'un kilomètre environ de chaque côté). On peut voir sur la Figure 4.15 que celle-ci a des singularités très faibles : elle est complètement stabilisée sous l'effet des zones d'ombre. Il y a donc maintenant peu de chances qu'elle possède les ressources (en termes de résistance à une éventuelle barrière) pour continuer à se propager et éventuellement se connecter avec les autres failles.

Si on revient à la configuration dans laquelle nous pensons que la faille centrale se trouve actuellement, on peut donc penser qu'elle est d'ores et déjà favorable à la connexion. En effet, si on suppose qu'elle va se propager plus loin dans sa direction principale, alors ses singularités vont devenir rapidement très faibles, ce qui signifie qu'elle pourra difficilement vaincre la résistance à la fracturation du milieu élastique. Sa seule possibilité d'évolution, dans sa position actuelle, semble être le branchement. Les observations montrent d'ailleurs que ses deux pointes changent actuellement d'orientation.

Remarquons que les conclusions que nous tirons pour les pointes de faille T1 et T3 sont de nature très différentes. Dans le cas de T1, la combinaison de l'existence d'une singularité et de la faiblesse des contraintes est due à la forme très particulière (« *ad hoc* ») de l'affaiblissement que nous avons choisi. Le modèle ne permet donc pas de faire

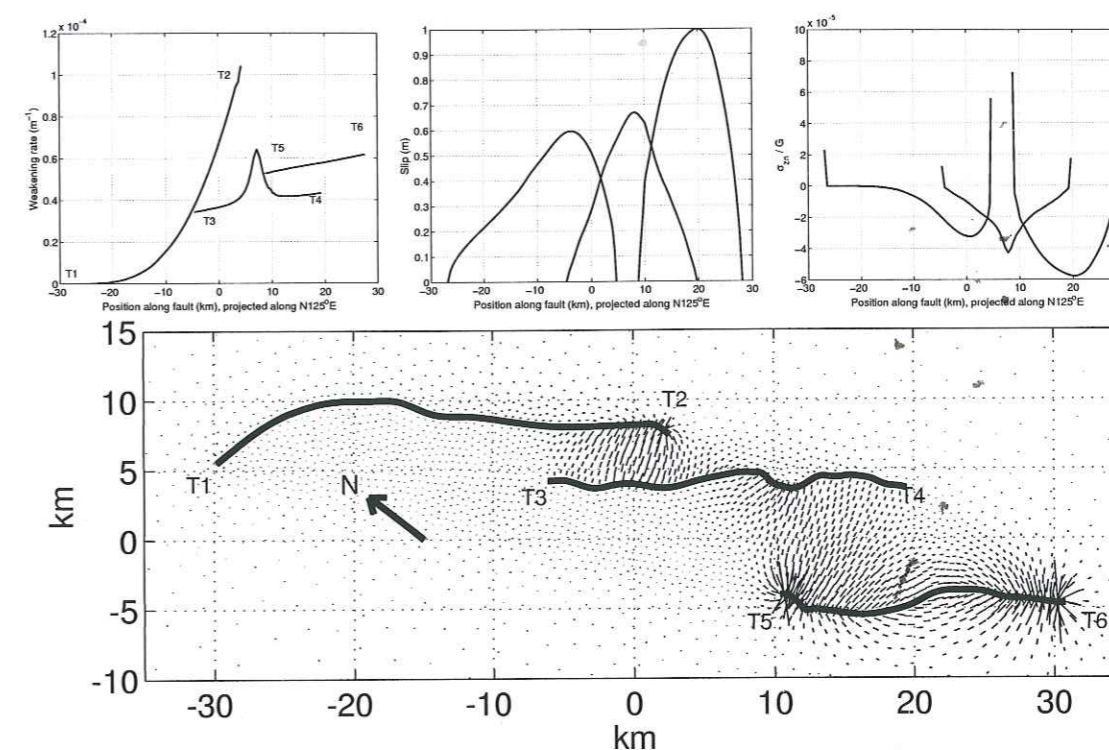


Figure 4.15 *Haut : affaiblissement, glissement et contrainte de cisaillement sur les trois segments de faille. Bas : directions privilégiées du cisaillement. La différence par rapport aux figures 4.12 et 4.14 est la longueur de la faille centrale, qui a été allongée d'un kilomètre à chaque extrémité.*

de prédiction sur l'évolution du système de failles au voisinage de T1 : nous observons une conséquence directe des paramètres que nous avons introduits dans le modèle. En revanche, dans le cas de T3, nous pouvons déduire certaines hypothèses de cette même combinaison (présence d'une singularité et faiblesse des contraintes), parce que celle-ci est due à un phénomène d'interaction qui est indépendant des paramètres de la simulation.

### 4.3 Influence de l'endommagement sur les profils de glissement

Nous venons de voir que notre modèle peut expliquer les profils de glissement linéaires dans les zones de forte interaction de deux failles, mais pas sur une faille en apparence isolée. Manighetti et al. (2003) ont utilisé un modèle de fissures (« cracks ») en mode I (ouverture) pour montrer que la présence d'endommagement, représenté par une famille de fissures secondaires au voisinage des pointes de la faille principale, peut expliquer la forme triangulaire du profil de glissement de celle-ci. Il s'agit donc tou-



jours d'interaction, mais avec des failles éventuellement beaucoup plus petites et qui ne se sont pas nécessairement formées dans les mêmes conditions que les failles principales des systèmes étudiés.

Avec notre modèle, il est possible de simuler l'évolution d'un tel système de failles. La Figure 4.16 en présente la géométrie. On le soumet à une perturbation initiale en vitesse, qui prend naissance dans le prolongement de la faille principale, du côté endommagé (sur la droite), en un point matérialisé sur la Figure 4.16 par une étoile. La Figure 4.17 présente le profil de glissement sur les sept segments de faille pendant une initiation lente ( $\alpha = 1.0$ ). Lorsque l'initiation s'est installée sur la faille principale, celle-ci présente deux singularités mais, tandis que la moitié gauche du profil est de la forme « ellipsoïdale » caractéristique des pointes de faille isolées, la moitié droite a une forme triangulaire semblable à celle que décrivent Manighetti et al. (2003). On peut vérifier sur la distribution de déplacement autour de la faille principale (Figure 4.18) que la déformation est effectivement accommodée de façon importante par la fracturation secondaire, ce qui explique l'asymétrie du profil de glissement observé sur la faille principale.

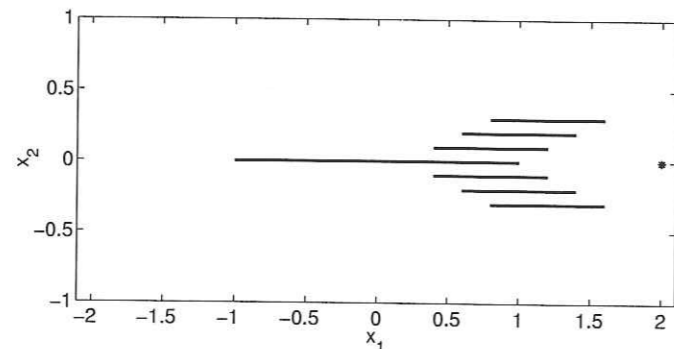


Figure 4.16 Géométrie du système de failles, composé d'une faille principale et d'une série de failles secondaires qui représentent l'endommagement entourant sa pointe droite. L'étoile représente le centre de la petite perturbation qui déclenche l'initiation du glissement.

Un tel comportement pourrait expliquer la forme du glissement observé sur le système de trois failles en échelon étudié dans la section 4.2.7, où la pointe de faille T1 présente comme ici une singularité d'ordre plus faible que celui que prédit notre modèle en l'absence de phénomène d'interaction. En effet, notre modèle géométrique ne contient que les failles principales du système, ce qui n'est peut-être pas suffisant pour les pointes de faille T1 et T6.

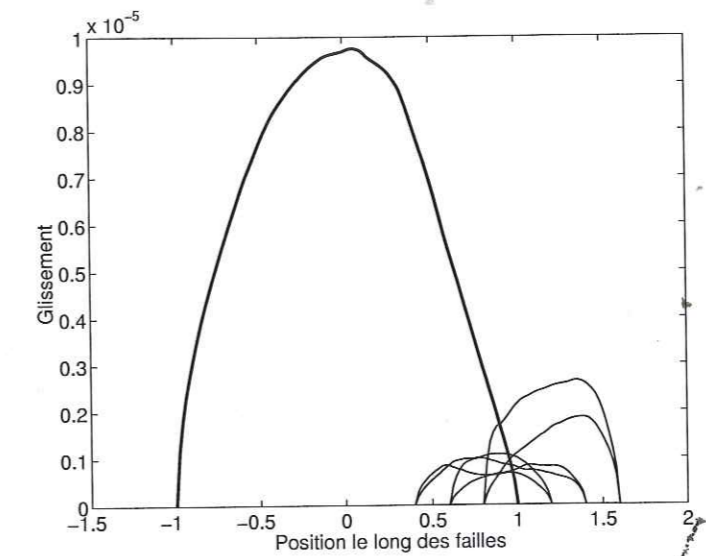


Figure 4.17 Profil de glissement pendant une initiation lente ( $\alpha = 1.0$ ) sur le système de failles. Le trait épais montre le glissement de la faille principale, tandis que les profils de glissement des failles secondaires sont représentés en trait fin.

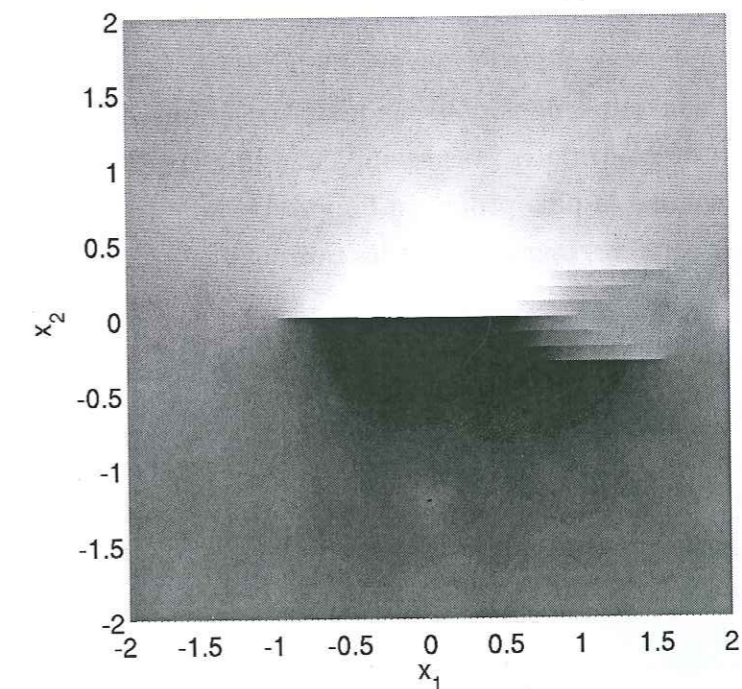


Figure 4.18 Distribution de déplacement autour de la faille principale. La pointe gauche présente une distribution typique d'une pointe isolée. La présence de fracturation secondaire au voisinage de la pointe droite a pour conséquence que celle-ci est moins sollicitée par la déformation élastique.



#### 4.4 Implications dans les zones de relai

Dans le système de failles observé en Afar que nous avons étudié dans la section 4.2.7, on voit que les failles qui se sont propagé l'une vers l'autre ont tendance à « brancher », c'est-à-dire qu'elles tournent l'une vers l'autre. On peut penser qu'elles finiront par se connecter par l'intermédiaire de failles secondaires qui se développent dans la zone de recouvrement (voir la discussion sur la Figure 4.14).

Soliva et Benedicto (2003) montrent, en étudiant les zones de relai de petits segments de faille normale sub-parallèles, que l'existence des différentes formes de relai (ouvert, « soft-linked » et « hard-linked »), est liée aux paramètres géométriques de la faille. En particulier, dans le cas de deux failles se propageant l'une vers l'autre, ils montrent que la longueur de recouvrement pour laquelle elles commencent à montrer des signes de connection est proportionnelle à leur distance de séparation, avec un facteur de proportionnalité de l'ordre de 4. Si on considère que l'interaction est mesurée par l'intensité des contraintes, alors ce résultat contredit les prédictions d'un modèle comme le nôtre, dans lequel l'intensité des contraintes aux pointes de failles qui se rapprochent l'une de l'autre sera maximale lorsque les deux singularités seront en regard l'une de l'autre ( $e = 0$  sur la Figure 4.3). En remarquant que ces singularités sont des artefacts dus au fait que nous supposons en pointe de faille l'existence de barrières de résistance infinie, ce résultat peut être ignoré. Néanmoins, nous pouvons peut-être étudier la coalescence des failles en calculant le champ de contraintes correspondant à la géométrie considérée par Soliva et Benedicto (2003) comme la plus propice à l'apparition du premier indice de connection, c'est-à-dire le moment où les pointes de failles tournent en se rapprochant l'une de l'autre.

Nous nous intéressons ici au phénomène du relai ouvert, puisque nos segments de faille ne sont pas connectés. Soliva et Benedicto (2003) étudient des failles très proches en regard de leurs longueurs, de telle sorte qu'on peut étudier la zone de recouvrement indépendamment du reste; avec le formalisme géométrique de la Figure 4.3, cela correspond à des petites valeurs de  $d/a$ , par exemple  $d/a = 0.1$ . Soliva et Benedicto (2003) montrent que la transition entre relai ouvert et « soft-linkage » apparaît lorsque le rapport recouvrement / séparation est compris entre 3 et 4.5. Pour  $d/a = 0.1$ , on en déduit que l'apparition d'une connection se fait pour une taille de recouvrement comprise entre 0.3 et 0.45, ce qui place notre second paramètre  $e/a$  entre  $1 - 0.3 = 0.7$  et  $1 - 0.45 = 0.55$ . La Figure 4.5 montre que ces deux valeurs encadrent la limite de disparition de la singularité sur une des pointes de faille internes. On peut donc envisager une correspondance entre ce phénomène et celui de l'apparition d'un relai.

Sur la Figure 4.19, on a tracé les directions de cisaillement privilégiées dans le milieu

$$e/a = 0.8 \rightarrow r/a = 0.2$$

$$e/a = 0.7 \rightarrow r/a = 0.3$$

$$e/a = 0.6 \rightarrow r/a = 0.4$$

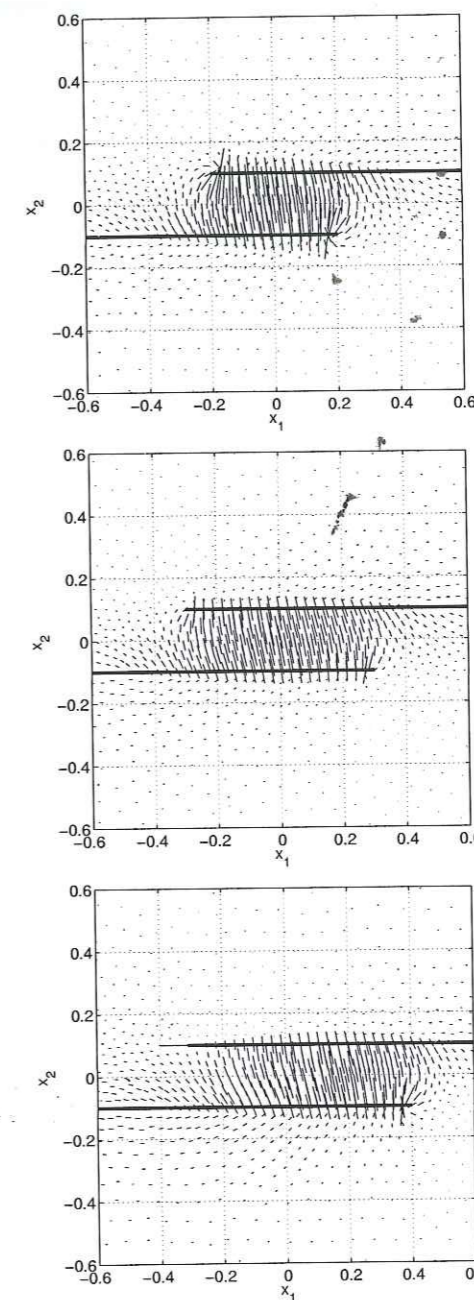


Figure 4.19 Directions privilégiées de cisaillement pour trois configurations différentes ayant la même distance de séparation ( $d/a = 0.1$ ) et des longueurs de recouvrement ( $r/a = 1 - e/a$ ) croissantes qui encadrent la valeur supposée critique pour l'apparition d'une connection. Les pointes de faille qui sont le plus susceptibles de tourner pour préparer la coalescence sont celles qui ont une distribution de contraintes anisotrope. La deuxième configuration est donc la plus favorable. Sur la dernière figure, on a tracé en trait fin la partie de faille qui est inhibée par un effet de zone d'ombre.



entourant la zone de recouvrement des deux failles. On y voit, centré en chaque point du maillage, un segment de droite dont la direction représente celle du plan soumis au plus fort cisaillement, et dont la longueur est proportionnelle à l'intensité du cisaillement. Il faut remarquer que ce calcul ne prend pas en compte les pré-contraintes (le chargement tectonique). Celui-ci est responsable de la formation des deux segments de faille préexistants, il doit donc être de nature à favoriser en chaque point la direction parallèle aux segments de faille. Le résultat de notre calcul doit être vu comme des contraintes qui, s'ajoutant aux pré-contraintes, tendent à réorienter le champ de contraintes total.

Les trois figures représentent trois valeurs différentes (croissantes) du recouvrement, pour la même distance de séparation. Il est difficile de dire pour quelle configuration l'apparition d'une faille secondaire est la plus probable, parce que la force du cisaillement dans la zone de recouvrement est comparable. Il est en revanche plus facile de conclure sur la tendance qu'ont les pointes de faille à tourner. Lorsque les quatre singularités de contraintes sont fortes (première figure, recouvrement  $r/a = 0.2$ ), les quatre pointes de failles présentent chacune une distribution de contraintes radiale, qui ne privilégie aucune direction : ajoutée à la pré-contrainte, elle favorise la propagation de la faille dans son propre plan. On remarque que, juste avant la disparition d'une des singularités (seconde figure, recouvrement  $r/a = 0.3$ ), les deux pointes internes ont une distribution de contraintes anisotrope qui privilégie une direction particulière : ajoutée à la pré-contrainte, elle semble favoriser la propagation de la faille avec un changement de direction. Cette configuration ( $e/a = 0.7$ ,  $r/a = 0.3$ ) semble donc une bonne candidate pour le début du branchement des deux segments de faille. Juste après la disparition de la singularité de contraintes (dernière figure,  $r/a = 0.4$ ), le branchement ne paraît plus possible, puisque l'une des pointes internes a retrouvé une singularité radiale, tandis que l'autre est soumise à des contraintes beaucoup plus faibles. Par ailleurs, cette configuration est d'autant plus improbable que la faille supérieure est « collée » au voisinage de la pointe externe. Il faut donc que le branchement ait eu lieu précédemment, c'est-à-dire entre  $r/a = 0.3$  et  $r/a = 0.4$ . Ce résultat est en accord avec les observations de Soliva et Benedicto (2003) qui prévoient le début du branchement entre  $r/a = 0.3$  et  $r/a = 0.45$ .

## 4.5 Conclusion sur les applications possibles

Nous avons montré que notre modèle d'évolution dynamique permet de simuler l'initiation et la propagation de la rupture sur des failles de géométrie quelconque en mode III (antiplan). Ce modèle nous a permis pour l'instant de valider notre approche spectrale de l'initiation. Nous avons vu qu'il permet aussi de comprendre l'existence de

profils de glissement triangulaires au voisinage de pointes de failles apparemment isolées, en utilisant un modèle d'endommagement (Figure 4.17). La généralisation du modèle d'évolution dynamique au mode 2 (plan) pourrait permettre d'envisager un autre type d'applications, par exemple la modélisation de séismes réels dont on connaît l'histoire spatio-temporelle grâce à des calculs d'inversion. La possibilité de modéliser finement la géométrie du système de failles se révélerait alors particulièrement utile pour étudier précisément les variations dynamiques de la contrainte normale le long des failles.

L'approche spectrale non linéaire permet essentiellement de caractériser l'interaction des failles lors d'un glissement non radiatif (initiation ou glissement cumulé à l'échelle de temps tectonique), par l'observation des contraintes calculées en pointe de faille. Toutefois, cette caractérisation ne peut s'appliquer qu'à des systèmes de failles dont la géométrie est fixée, c'est-à-dire des failles qui ne se propagent pas. Dans un tel cas, puisque le modèle suppose l'existence d'une barrière de résistance infinie à chaque pointe de faille, on peut tirer les conclusions suivantes :

- Si les contraintes sont singulières, cela signifie qu'une barrière est nécessaire pour justifier la terminaison de la faille. Dans ce cas, l'ordre et l'intensité de la singularité donnent la force minimale de cette barrière. Une conséquence importante est que, si la barrière est trop faible, alors on peut prédire que la faille se propagera plus loin.
- Si les contraintes ne sont pas singulières, la barrière est inutile pour expliquer la terminaison de la faille. L'interaction suffit à expliquer l'absence de glissement au-delà de la pointe de faille. Dans ce cas, on peut prédire que la faille est dans un état d'équilibre mécanique et ne se propagera pas plus loin.

Nous avons donc un moyen de reconnaître une faille qui est arrêtée par une barrière, ainsi qu'une faille arrêtée par un phénomène d'interaction. En revanche, que pouvons-nous dire des contraintes observées au voisinage d'une pointe de faille en train de se propager ? La pointe gauche de la faille F1 du réseau étudié en Afar semble être dans cette situation. Son profil de glissement mesuré sur le terrain (Figure 4.12, trait fin) semble montrer une concentration de contraintes d'ordre beaucoup plus faible que celui qu'on obtient par un calcul supposant la présence d'une barrière (trait épais). Il paraît normal qu'une étude modale ne puisse rendre compte d'un comportement propagatif, où la géométrie évolue au cours du temps. Quant à notre modèle d'évolution, s'il ne peut reproduire la fracturation dynamique du milieu élastique (c'est-à-dire la propagation des failles), il peut toutefois rendre compte d'une telle singularité d'ordre plus faible dans deux cas particuliers :

- sur un mode d'initiation où la zone de glissement couvre la faille entière, à condition d'invoquer la présence d'endommagement (voir Figure 4.17)



- à l'issue d'une rupture se propageant sur une portion de faille qui n'a pas initié parce qu'elle était déchargée par une faille voisine (voir Figure 4.10).

## Conclusion

Dans cette thèse, nous avons exploré l'interaction des failles sismiques, à travers la stabilité et les caractéristiques du glissement des réseaux de failles. On constate en effet de grandes différences par rapport au cas d'une faille isolée. En particulier, l'existence ou non d'une singularité de contraintes en pointe de faille est contrôlée par la présence de zones d'ombre, qui sont l'expression de l'interaction non coplanaire. Nous en avons déduit une classification des réseaux de failles normales en fonction de leur type d'interaction. L'influence de l'interaction sur les profils de glissement peut être vérifiée sur le terrain. Nous avons pour cela utilisé les résultats de campagnes de mesures effectuées dans les Afar. Les profils de glissement cumulé observés en surface peuvent être reproduits, et le calcul renseigne de plus sur le profil d'affaiblissement capable d'expliquer ce glissement. Par ailleurs, l'étude du champ de contraintes obtenu par la même occasion nous donne des indications sur l'aptitude des failles dans leur situation actuelle à se propager ou à se connecter les unes aux autres. En examinant les conséquences de l'interaction, nous avons aussi tenté d'expliquer d'autres données observées sur le terrain, concernant l'influence de l'endommagement sur les profils de glissement au niveau de pointes de failles qui se propagent, ainsi que la connection des failles dans les zones de relai.

Afin de modéliser l'interaction des failles, nous avons mené une analyse spectrale non linéaire et développé des simulations numériques, pour valider cette approche spectrale mais aussi pour mieux observer l'initiation et la propagation de la rupture sur des réseaux de failles en forte interaction. Pour nous donner les moyens techniques de cette étude, nous avons développé deux codes de calcul en éléments finis, dédiés l'un au calcul du spectre non linéaire, l'autre au calcul de la solution en temps. Pour cela, nous avons introduit dans le premier code une formulation mixte permettant d'écrire le problème comme un problème d'optimisation restreint aux points de la faille. Dans le second, en utilisant une technique de décomposition de domaine, nous avons développé une méthode qui s'avère bien adaptée au calcul des solutions instables du problème de l'initiation, et qui donne une bonne description de l'initiation et de la propagation de la rupture sur la faille, et de la déformation qui en résulte dans un voisinage proche. Dans les deux cas, nous arrivons ainsi



à résoudre un problème où la géométrie de la zone de glissement n'est pas fixée puisqu'elle dépend de l'histoire du glissement et en particulier des phénomènes d'interaction.

Pour envisager de nouvelles applications, on pourrait bien sûr généraliser ces techniques à l'évolution tridimensionnelle d'un réseau de failles. L'évolution actuelle rapide des mailleurs 3-D et des ressources, en termes de taille des calculs, devrait le permettre sans trop de difficultés. On pourrait aussi adapter les méthodes de calcul existantes pour tenter de modéliser les périodes de glissement quasi-statique sous chargement tectonique, ce qui nous permettrait d'observer d'autres phases du cycle sismique. En comparant la solution au premier mode statique, nous pourrions alors valider l'hypothèse selon laquelle ce mode serait responsable de la forme des profils cumulés observés (qui résultent de centaines de milliers d'années au moins de glissement sismique et/ou asismique).

D'un point de vue technique, pour améliorer la résolution du problème d'évolution, on peut aussi envisager de coupler notre méthode - éléments finis avec décomposition de domaine sur la faille - avec un schéma de type différences finies explicite dans le domaine élastique, de façon à obtenir un schéma capable de modéliser efficacement aussi bien la propagation des ondes dans le milieu élastique que les solutions instables peu radiatives localisées sur la faille. Pour modéliser un domaine non borné, nous avons montré l'efficacité des *éléments infinis* pour rendre compte du comportement de la composante non radiative. En revanche, les ondes nécessitent un traitement de type PML (*bords absorbants*) pour éviter les réflexions sur le bord fictif (la figure 3.12 montre de telles réflexions). Il faudra donc envisager une alternative qui combine les avantages de ces deux méthodes. Pour implémenter une PML, il peut s'avérer nécessaire de résoudre le problème d'évolution dans une formulation vitesse-contrainte, éventuellement avec un schéma d'ordre plus élevé en espace. Il peut être intéressant d'adapter automatiquement l'ordre des éléments, et non pas seulement leur taille comme nous le faisons déjà. Une autre piste pour mieux modéliser le comportement des failles est de rendre compte de leur formation ; il en résulterait un comportement encore plus complexe en pointe de faille, et cela permettrait de s'affranchir des encombrantes singularités de contraintes. Enfin, dans la perspective d'obtenir un modèle unifié pouvant rendre compte de phénomènes attachés à des échelles de temps très différentes, il faut envisager l'introduction d'un pas de temps adaptatif, aussi bien en temps qu'en espace. Avec l'introduction de toutes ces techniques nous espérons possible, à terme, de modéliser le cycle sismique entier.

## Bibliographie

- Aagaard, B. (2000). *Finite-element simulations of earthquakes*. Thèse de doctorat, Calif. Inst. of Technol., Pasadena.
- Acocella, V., Gudmundsson, A., & Funicello, R. (2000). Interaction and linkage of extension fractures and normal faults : examples from the rift zone of Iceland. *J. Struct. Geol.*, 22, 1233-1246.
- Alart, P., & Curnier, A. (1991). A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 92, 353-375.
- Ampuero, J.-P. (2002). *Etude physique et numérique de la nucléation des séismes*. Thèse de doctorat, Institut de Physique du Globe, Paris.
- Ampuero, J.-P., Vilotte, J.-P., & Sanchez-Sesma, F.-J. (2002). Nucleation of rupture under slip dependent friction law : simple models of fault zone. *J. Geophys. Res.*, 107(B12), 10.1029/2001JB000452.
- Andrews, D. (1985). Dynamic plane-strain shear rupture with a slip weakening friction law calculated by a boundary integral method. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 75, 1-21.
- Andrews, D. J. (1976). Rupture velocity of plane strain shear cracks. *J. Geophys. Res.*, 81, 5679-5687.
- Andrews, D. J. (1999). Test of two methods for faulting in finite difference calculations. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 89, 931-937.
- Andrews, D. J., & Ben-Zion, Y. (1997). Wrinkle-like slip on a fault between different materials. *J. Geophys. Res.*, 102, 553-571.
- Aochi, H., & Fukuyama, E. (2001). Three-dimensional nonplanar simulation of the 1991 Landers earthquake. *J. Geophys. Res.*, 107, 10.1028/2000JB000032.
- Aochi, H., Fukuyama, E., & Matsu'ura, M. (2000). Spontaneous rupture propagation on a non-planar fault in 3-d elastic medium. *Pure Appl. Geophys.*, 157, 2003-2027.
- Aochi, H., & Madariaga, R. (2003). The 1999 Izmit, Turkey, earthquake : non-planar



- fault structure, dynamic rupture process and strong ground motion. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 93(3), 1249-1266.
- Aochi, H., Madariaga, R., & Fukuyama, E. (2002). Effect of normal stress on rupture propagation along nonplanar faults. *J. Geophys. Res.*, 107(B2), 10.1029/2001JB000500.
- Archuleta, R., & Frazier, G. (1978). Three-dimensional numerical simulations of dynamic faulting in a half-space. *Bull. Seis. Soc. Am.*, 68.
- Aydin, A., & Schultz, R. A. (1990). Effect of mechanical interaction on the development of strike-slip faults with echelon patterns. *J. Struct. Geol.*, 12, 123-129.
- Badea, L. (1991). On the Schwarz alternating method with more than two subdomains for nonlinear monotone problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28, 179-204.
- Badea, L. (2003a). Convergence rate of a multiplicative Schwarz method for strongly nonlinear inequalities. In V. Barbu, I. Lasiecka, D. Tiba, & C. Varsan (Eds.), *Analysis and optimization of differential systems* (Kluwer Academic Publishers ed., p. 31-42). Boston/Dordrecht/London.
- Badea, L. (2003b). *Convergence rate of a Schwarz multilevel method for the constraint minimization of non-quadratic functionals*. Soumis à SIAM J. Num. Anal.
- Badea, L., Ionescu, I. R., & Wolf, S. (2003). *Domain decomposition method for dynamic faulting under slip-dependent friction*. Soumis à J. Comp. Phys.
- Baud, P., & Reuschlé, T. (1997). A theoretical approach to the propagation of interacting cracks. *Geophys. J. Int.*, 130, 460-468.
- Bécache, E., Joly, P., & Tsogka, C. (2001). Fictitious domains, mixed finite elements and perfectly matched layers for 2d elastic wave propagation. *J. Comp. Acous.*, 9(3), 1175-1203.
- Bécache, E., Joly, P., & Tsogka, C. (2002). A new family of mixed finite elements for the linear elastodynamic problem. *SIAM J. Num. Anal.*, 39(6), 2109-2132.
- Beer, G., & Meek, J. L. (1981). 'infinite domain' elements. *Int. J. num. Meth. Engng.*, 17, 43-52.
- Bernardi, C., & Maday, Y. (2001). Spectral, spectral element and mortar element methods. In J. Blowey, J. Coleman, & A. Craig (Eds.), *Theory and numerics of differential equations. 9th EPSRC numerical analysis summer school, Univ. of Durham, GB, July 10-21, 2000* (Springer. Universitext. ed., p. 1-57). Berlin.
- Bizzarri, A., Cocco, M., Andrews, D., & Boschi, E. (2001). Solving the dynamic rupture problem with different numerical approaches and constitutive laws. *Geophys. J. Int.*, 144, 656-678.

- Boatwright, J., & Quin, H. (1986). The seismic radiation from a 3-d dynamic model of a complex rupture process. Part i : confined ruptures. In S. Das, J. Boatwright, & C. Scholz (Eds.), *Earthquakes Source Mechanics* (Vol. 24, Union Monogr. ed., p. 97-109). Washington, D.C.
- Bouchon, M., & Streiff, D. (1997). Propagation of a shear crack on a nonplanar fault : a method of calculation. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 87, 61-66.
- Bürgmann, R., Pollard, D. D., & Martel, S. J. (1994). Slip distribution on faults : effects of stress gradients, inelastic deformation, heterogeneous host-rock stiffness, and fault interaction. *J. Struct. Geol.*, 16, 1675-1690.
- Campillo, M., Favreau, P., Ionescu, I. R., & Voisin, C. (2001). On the effective friction law of an heterogeneous fault. *J. Geophys. Res.*, 106, 16307-16322.
- Campillo, M., & Ionescu, I. R. (1997). Initiation of antiplane shear instability under slip-dependent friction. *J. Geophys. Res.*, 102, 20363-20371.
- Chan, T. F., & Matew, T. P. (1994). Domain decomposition algorithms. *Acta Numer.*, 61-143.
- Ciarlet, P. G. (1978). *The Finite Element Method for Elliptic Problems* (North-Holland ed.). Amsterdam.
- Collino, F., & Tsogka, C. (1998). *Application of the pml absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media* (Rapport de recherche No. 3471). INRIA Rocquencourt.
- Comninou, M. A., & Dunders, J. (1975). The angular dislocation in a half-space. *J. Elasticity*, 5, 203-216.
- Corneschi, C., Hoarau-Martel, T.-H., & Sofonea, M. (2002). A quasistatic contact problem with slip dependent coefficient of friction for elastic materials. *Journal of Applied Analysis*, 8, 59-80.
- Cottle, R. W., Pang, J.-S., & Stone, R. E. (1992). *The Linear Complementarity Problem* (Series on Computer Science and Scientific Computing, Academic Press ed.). Boston, San Diego, New York.
- Crider, G. C., & Pollard, D. D. (1998). Fault linkage : Three-dimensional mechanical interaction between echelon normal faults. *J. Geophys. Res.*, 103, 24373-24391.
- Das, S., & Aki, K. (1977). A numerical study of two-dimensional spontaneous rupture propagation. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 50, 643-668.
- Dascalu, C., & Ionescu, I. R. (2003). *Slip weakening friction instabilities : eigenvalue analysis*. soumis à Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS).



- Dascalu, C., Ionescu, I. R., & Campillo, C. (2000). Fault finiteness and initiation of dynamic shear instability. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 177, 163-176.
- Day, S. M. (1982). Three-dimensional simulation of spontaneous rupture : The effect of nonuniform prestress. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 72, 1881-1902.
- Dieterich, J. (1992). Earthquake nucleation on faults with rate and state dependent strength. *Tectonophysics*, 211, 115-134.
- Dieterich, J. H. (1979). Modeling of rock friction 1. Experimental results and constitutive equations. *J. Geophys. Res.*, 84, 2161-2175.
- Dieterich, J. H. (1986). A model for the nucleation of earthquake slip. In S. Das, J. Boatwright, & C. Scholz (Eds.), *Earthquake Source Mechanics* (Vol. 37, Geophys. Monogr. Ser. ed., p. 37-47). AGU, Washington, D. C.
- Dieterich, J. H. (1994). A constitutive law for rate of earthquake production and its application to earthquake clustering. *J. Geophys. Res.*, 99(B2), 2601-2618.
- Duvaut, G., & Lions, J.-L. (1976). *Inequalities in Mechanics and Physics* (Springer Verlag ed.). Berlin.
- Ellsworth, W., & Beroza, G. (1995). Seismic evidence for a seismic nucleation phase. *Science*, 268, 851-855.
- Favreau, P. (2000). *Initiation et propagation de la rupture sismique : instabilité de frottement en élastodynamique*. Thèse de doctorat, Univ. Joseph Fourier, Grenoble.
- Favreau, P., Campillo, M., & Ionescu, I. R. (1999). Initiation of inplane shear instability under slip dependent friction. *Bulletin of the Sismological Society of America*, 89(5), 1280-1295.
- Favreau, P., Campillo, M., & Ionescu, I. R. (2002). Initiation of instability under slip dependent friction in three dimension. *J. Geophys. Res.*, 107(B7), 2147.
- Favreau, P., Ionescu, I. R., & Campillo, M. (1999). On the dynamic sliding with rate and state dependent friction laws. *Geophysical Journal*, 139, 671-678.
- Fitzenz, D., & Miller, S. A. (2001). A forward model for earthquake generation on interacting faults including tectonics, fluids, and stress transfer. *J. Geophys. Res.*, 106(B11), 26689-26706.
- Fukuyama, E., & Madariaga, R. (1995). Integral equation method for plane crack with arbitrary shape in 3D elastic medium. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 85, 614-628.
- Fung, T. C. (1997). Unconditionally stable higher order Newmark methods by substepping procedure. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 147, 61-84.
- Geubelle, P., & Rice, J. (1995). A spectral method for 3D elastodynamic fracture problems. *J. Mech. Phys. Solids*, 43, 1791-1803.

- Glowinski, R., Golub, G. H., Meurant, G. A., & Périer, J. (Eds.). (1988). *First Int. Symp. on Domain Decomposition Methods*. Philadelphia.
- Gu, J. C., Rice, J. R., Ruina, A. L., & Tse, S. T. (1984). Slip motion of a single degree of freedom elastic system with rate and state dependent friction. *J. of the Mech. and Phys. of Solids*, 32, 167-196.
- Hecht, F. (1998). *BAMG : Bidimensional anisotropic mesh generator*. INRIA Rocquencourt, Tech. Report, draft version v0.58 October 1998.
- Iio, Y. (1992). Slow initial phase of the P-wave velocity pulse generated by microearthquakes. *Geophys. Res. Lett.*, 19(5), 477-480.
- Iio, Y. (1995). Observations of the slow initial phase generated by microearthquakes : implications for earthquake nucleation and propagation. *J. Geophys. Res.*, 100, 15333-15349.
- Ionescu, I. R. (2002). Viscosity solutions for dynamic problems with slip-rate dependent friction. *Quart. Appl. Math.*, LX(3), 461-476.
- Ionescu, I. R., & Campillo, M. (1999). The influence of the shape of the friction law and fault finiteness on the duration of initiation. *J. Geophys. Res.*, 104, 3013-3024.
- Ionescu, I. R., & Nguyen, Q.-L. (2003). *Dynamic contact problems with slip dependent friction in viscoelasticity*. Sous presse à Int. J. Appl. Math. Comp. Sci.
- Ionescu, I. R., Nguyen, Q.-L., & Wolf, S. (2003). Slip dependent friction in dynamic elasticity. *Nonlinear Analysis*, 53(3-4), 375-390.
- Ionescu, I. R., & Paumier, J. (1993). Dynamic stick-slip motions with sliding velocity-dependent friction. *Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris, s.I*, 316, 121-125.
- Ionescu, I. R., & Paumier, J. (1994). On the contact problem with slip rate dependent friction in elastodynamics. *European J. of Mech., A-Solids*, 13(4), 556-568.
- Ionescu, I. R., & Paumier, J.-C. (1996). On the contact problem with slip dependent friction in elastostatics. *Int. J. Eng. Sci.*, 34(4), 471-491.
- Ionescu, I. R., & Radulescu, V. (2003). Nonlinear eigenvalue problems arising in earthquake initiation. *Adv. Diff. Equations*, 8(7), 769-786.
- Ionescu, I. R., & Wolf, S. (2003). *Interaction of faults under slip-dependent friction. Nonlinear eigenvalue analysis*. Soumis à Math. Meth. Appl. Sci.
- Ishida, M. (1973). Method of Laurent series expansion for internal crack problems. In G. Sih (Ed.), *Mechanics of Fracture 1 : Methods of Analysis and Solutions of Cracks Problems* (Sithoff and Noordhoff ed.). Leyden, the Netherlands.
- King, G. C. P., Stein, R. S., & Lin, J. (1994). Static stress changes and the triggering of earthquakes. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 84, 935-953.



- Komatitsch, D., & Tromp, J. (1999). Introduction to the spectral-element method for 3-d seismic wave propagation. *Geophys. J. Int.*, 139, 806-822.
- Komatitsch, D., & Vilotte, J.-P. (1998). The spectral element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2d and 3d geological structures. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 88, 368-392.
- Komatitsch, D., Vilotte, J.-P., Vai, R., Castillo-Covarrubias, J.-M., & Sanchez-Sesma, F.-J. (1999). Spectral element approximation of elastic waves equations : application to 2-d and 3-d seismic problem. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 45, 1139-1164.
- Kuttler, K. L. (1997). Dynamic friction contact problems for general normal and friction laws. *Nonlinear Analysis, TMA*, 28(3), 559-575.
- Kuttler, K. L., & Schillor, M. (1999). Set-valued pseudomonotone maps and degenerate evolution inclusions. *Communications in Contemporary Mathematics*, 1, 87-123.
- Lapusta, N., & Rice, J. R. (2003). Nucleation and early seismic propagation of small and large events in a crustal earthquake model. *J. Geophys. Res.*, 108(B4), 10.1029/2001JB000793.
- Le Tallec, P. (1994). Domain decomposition methods in computational mechanics. In J. T. Oden (Ed.), *Computational Mechanics Advances* (Vol. 1, North-Holland ed., p. 121-220). Amsterdam.
- Madariaga, R., Olsen, K., & Archuleta, R. (1998). Modeling dynamic rupture in 3d earthquake fault model. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 88, 1182-1197.
- Manighetti, I., King, G., & Sammis, C. G. (2003). *The role of off-fault damage in the evolution of normal faults*. Sous presse à Earth Planet. Sci. Lett.
- Manighetti, I., King, G. C. P., Gaudemer, Y., Scholz, C. H., & Doubre, C. (2001). Slip accumulation and lateral propagation of active normal faults in Afar. *J. Geophys. Res.*, 106, 13667-13696.
- Manighetti, I., Sammis, C. G., King, G., & Campillo, M. (2003a). *Evidence for self-similar, triangular slip distributions on earthquake faults, and implications on fault and earthquake mechanics*. En prep. pour J. Geophys. Res.
- Manighetti, I., Sammis, C. G., King, G., & Campillo, M. (2003b). Evidence for self-similar, triangular slip distributions on earthquake faults, and implications on fault and earthquake mechanics. *AGU 2003*.
- Martins, J. A. C., & Oden, J. T. (1987). Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface law. *Nonlinear Analysis, TMA*, 11(3), 407-428.

- Nguesteng, G., & Sanchez-Palencia, E. (1985). Stress concentration for defects distributed near a surface. In P. L. eze (Ed.), *Local effects in the analysis of structures* (Elsevier ed.). Amsterdam.
- Oden, J. T., & Martins, J. A. C. (1985). Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 52, 527-634.
- Oglesby, D. (1999). *Earthquake dynamics on dip-slip faults*. Thèse de doctorat, Univ. of Calif., Santa Barbara.
- Oglesby, D., Archuleta, R., & Nielsen, S. (1998). Earthquakes on dipping faults : the effects of broken symmetry. *Science*, 280, 1055-1059.
- Oglesby, D., Archuleta, R., & Nielsen, S. (2000). Dynamics of dip-slip faulting : explorations in two dimensions. *J. Geophys. Res.*, 105, 13643-13653.
- Oglesby, D., & Day, S. (2001). The effect of fault geometry on the 1999 Chi-Chi (Taiwan) earthquake. *Geophys. Res. Lett.*, 28, 1831-1834.
- Ohnaka, M., & Kuwahara, Y. (1990). Characteristic features of local breakdown near a crack-tip in the transition zone from nucleation to unstable rupture during stick-slip shear failure. *Tectonophysics*, 175, 197-220.
- Ohnaka, M., Kuwahara, Y., & Yamamoto, K. (1987). Constitutive relations between dynamic physical parameters near a tip of the propagating slip zone during stick slip shear failure. *Tectonophysics*, 144, 109-125.
- Ohnaka, M., & Shen, L. (1999). Scaling of the shear rupture process from nucleation to dynamic propagation : Implication of geometry irregularity of the rupturing surfaces. *J. Geophys. Res.*, 104, 817-844.
- Okada, Y. (1992). Internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 82, 1018-1042.
- Palmer, A. C., & Rice, J. R. (1973). The growth of slip surfaces in the progressive failure of overconsolidated clay slopes. *Proc. Roy. Soc. London A*, 332, 527-548.
- Perrin, G., Rice, J. R., & Zheng, G. (1995). Self-healing slip pulse on a frictional surface. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(9), 1461-1495.
- Pucik, T. A. (1972). *Elastostatic interaction in an infinite plane*. Phd thesis, Calif. Inst. of Technol., Pasadena.
- Quarteroni, A., & Valli, A. (1999). *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations* (Oxford Science Publications ed.). London.
- Rabinowicz, E. (1951). The nature of the static and kinetic coefficients of friction. *J. Appl. Phys.*, 22(11), 1373-1379.



- Rice, J. R., & Ruina, A. L. (1983). Stability of steady frictional slipping. *Journal of Applied Mechanics*, 50, 343-349.
- Robinson, R., & Benites, R. (1995). Synthetic seismicity models of multiple interacting faults. *J. Geophys. Res.*, 100, 18229-18238.
- Ruina, A. L. (1983). Slip instabilities and state variable friction laws. *J. Geophys. Res.*, 88(B12), 10359-10370.
- Scholz, C. H. (2002). *The Mechanics of Earthquakes and Faulting, Second edition* (Cambridge University Press ed.). London.
- Segall, P., & Pollard, D. D. (1980). Mechanics of discontinuous faults. *J. Geophys. Res.*, 85, 4337-4350.
- Smith, B. F., Bjørstad, P. E., & Gropp, W. (1996). *Domain Decomposition : Parallel Multilevel Methods for Elliptic Differential Equations* (Cambridge University Press ed.). London.
- Soliva, R., & Benedicto, A. (2003). *A relay linkage criterion for segmented normal faults*. Soumis à J. Struct. Geol.
- Sornette, A., & Sornette, S. (1989). Self-organised criticality and earthquakes. *Europhys. Lett.*, 9, 197-202.
- Spyropoulos, C., Scholz, C., & Shaw, E. (2002). Transition regimes for growing crack populations. *Phys. Rev. E*, 65, 056105.
- Tchalenko, J. S. (1970). Similarities between shear zones of different magnitudes. *Geol. Soc. Am. Bull.*, 81, 1625-1640.
- Tsogka, C. (1999). *Modélisation mathématique et numérique de la propagation des ondes élastiques tridimensionnelles dans des milieux fissurés*. Thèse de doctorat, Université de Paris IX Dauphine, Paris.
- Uenishi, K., & Rice, J. R. (2002). Universal nucleation length for slip-weakening rupture instability under non-uniform fault loading. *J. Geophys. Res.*, 108(B1), 10.1029/2001JB001681.
- Umeda, Y., Yamashita, T., Tada, T., & Kame, N. (1996). Possible mechanism of dynamic nucleation and arresting of shallow earthquake faulting. *Tectonophysics*, 261, 179-192.
- Virieux, J., & Madariaga, R. (1982). Dynamic faulting studied by a finite difference method. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 72, 345-369.
- Voisin, C. (2000). *Les tremblements de terre : de l'initiation à l'arrêt de la rupture*. Thèse de doctorat, Univ. Joseph Fourier, Grenoble.

- Voisin, C., Campillo, M., Ionescu, I. R., Hassani, R., & Nguyen, Q.-L. (2002). Process and signature of initiation on a finite fault system : a spectral approach. *Geophys. J. Int.*, 148, 120-131.
- Willemsse, J. M. E. (1997). Segmented normal faults : Correspondance between three-dimensional mechanical models and field data. *J. Geophys. Res.*, 102, 675-692.
- Wolf, S., Manighetti, I., Campillo, M., & Ionescu, I. R. (2003). *Mechanics of normal fault networks subject to slip weakening friction*. Soumis à Geophys. J. Int.
- Xu, J., & Zou, J. (1998). Some nonoverlapping domain decomposition methods. *SIAM Rev.*, 40, 857-914.
- Zienkiewicz, O. C., & Zhu, J. Z. (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 24, 337-357.



### Fault interaction : mathematical and numerical modeling of slip instabilities

We model the processes of unstable slip, considering the complex geometry of fault systems and some friction law deduced from laboratory experiments. We define faults as interfaces of discontinuity in a perfect elastic body - the crust - and we use a slip weakening friction law, assuming that, as the slip grows, the medium's resistance decreases from the static to the dynamic threshold.

We propose two numerical methods. The first one models the spontaneous evolution of a fault network which is initially submitted to a given stress field, and to which we apply an initial velocity perturbation. A Newmark time scheme is used, together with a finite element mesh and a domain decomposition method. The model reveals to be efficient to capture slip instabilities, and in particular the initiation phase which occurs before the phase of rupture propagation and is characterized by a self-similar shape and an exponential growth with time of the slip. Numerical experiments show that fault interaction, on fault segments having a significant overlap, reveals through the existence of "shadow zones" in which the slip is inhibited by stress drop. In the case of two fault segments with an important overlap, slip profiles are strongly asymmetric as one of the stress singularities vanishes at one of the fault tips.

The second numerical scheme handles the nonlinear spectral analysis of the initiation problem, "pseudo-linearized" in the vicinity of the equilibrium position where the fault system is initially homogeneously at the static resistance threshold. The nonlinearity of the problem comes from the existence of shadow zones, which geometry is *a priori* unknown. Through this analysis, we find the eigenmode bearing the *signature* of initiation, i.e. the self-similar shape mentioned above. The static version of this modal analysis leads to the definition of a stability criterion for fault networks, i.e. the critical value of the weakening rate : beyond this value, an episode of stable slip will give rise to a seismic event.

We assume that the nonlinear static mode, characterizing a weakening behavior at the stability limit, can be used to describe the cumulative slip at tectonic time scale on a particular system of normal faults in Afar, knowing the slip profiles measured at the surface. We show a good fit between the observed slip patterns and the static mode, assuming a particular choice of the weakening profile. We draw some conclusions in terms of interaction, propagation and/or branching of the fault segments. Finally, we describe two additional physical applications of our modeling :

- the influence of secondary fracturing (damage) on the slip patterns
- the optimal geometrical parameters that favor the branching of two fault segments propagating toward each other.





## Interaction des failles sismiques : modélisation mathématique et numérique de l'instabilité du glissement

par Sylvie Wolf

Nous modélisons les **processus de glissement instable**, en tenant compte de la géométrie souvent complexe des systèmes de failles et des lois de frottement observées en laboratoire. Nous assimilons les failles à des interfaces de discontinuité dans un milieu élastique parfait, la croûte, et utilisons une **loi de frottement dépendant du glissement** déduite d'expériences qui montrent que la résistance du matériau diminue du seuil statique au seuil dynamique, proportionnellement au glissement. Nous proposons **deux méthodes numériques**. La première a pour but de simuler l'évolution temporelle spontanée d'un réseau de faille, soumis initialement à un champ de contraintes donné et auquel nous appliquons une perturbation initiale en vitesse. Elle utilise un schéma de type Newmark en temps, et une discrétisation spatiale en éléments finis avec décomposition de domaine. Elle se révèle capable de capturer efficacement les instabilités du glissement, et en particulier la **phase d'initiation**, qui précède la propagation de la rupture dynamique et qui se caractérise par une forme auto-similaire et une croissance exponentielle du glissement au cours du temps. Des expériences numériques montrent que l'interaction, sur des segments de faille présentant un recouvrement significatif, se manifeste par l'existence de « **zones d'ombre** » dans lesquelles les contraintes sont déchargées et le glissement inhibé. En cas de recouvrement important de deux segments de faille, on observe une dissymétrie des profils de glissement, correspondant à la disparition de la singularité de contraintes à l'une des pointes de faille.

Le deuxième schéma numérique réalise l'**analyse spectrale non linéaire** du problème de l'initiation « pseudo-linéarisé » autour de la position d'équilibre dans laquelle le système de failles est initialement au seuil de résistance statique. La non-linéarité du problème provient de la prise en compte des zones d'ombre dont on ne connaît pas la géométrie *a priori*. Cette analyse permet de trouver le mode qui porte la *signature* de l'initiation, c'est-à-dire la forme auto-similaire remarquée plus haut. La version statique de cette analyse modale fournit un **critère de stabilité** des réseaux de failles, c'est-à-dire la valeur limite du taux d'affaiblissement au-delà de laquelle un épisode de glissement donnera lieu à un événement sismique.

Nous faisons l'hypothèse que le mode non linéaire statique, qui caractérise un comportement en affaiblissement à la limite de la stabilité, peut être utilisé pour décrire le **glissement cumulé** à l'échelle tectonique sur un réseau de failles normales particulier en Afar, dont nous connaissons les glissements mesurés en surface. Nous montrons qu'un choix judicieux du profil d'affaiblissement « équivalent » à l'échelle tectonique permet un bon accord entre le glissement observé et le mode statique. Nous en tirons des conclusions en termes d'interaction, mais aussi de propagation et/ou branchement des segments de failles. Enfin, nous décrivons deux autres applications :

- l'influence de la **fracturation secondaire** (endommagement) sur la forme du glissement
- les paramètres géométriques favorables à l'apparition d'une **zone de relai** entre deux segments de faille se propageant l'un vers l'autre.