



**HAL**  
open science

# Sur la robustesse d'une méthode de décomposition de domaine mixte avec relocalisation non linéaire pour le traitement des instabilités géométriques dans les grandes structures raidies

Jorge Andrés Hinojosa Rehbein

► **To cite this version:**

Jorge Andrés Hinojosa Rehbein. Sur la robustesse d'une méthode de décomposition de domaine mixte avec relocalisation non linéaire pour le traitement des instabilités géométriques dans les grandes structures raidies. Autre. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2012. Français. NNT : 2012DENS0010 . tel-00745225

**HAL Id: tel-00745225**

**<https://theses.hal.science/tel-00745225>**

Submitted on 25 Oct 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-20XX/XXX



THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Présentée par

**Jorge Andrés HINOJOSA REHBEIN**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Sujet de la thèse

**Sur la robustesse d'une méthode de  
décomposition de domaine mixte avec  
relocalisation non linéaire pour le traitement des  
instabilités géométriques dans les grandes  
structures raidies**

Document provisoire 26 janvier 2012

Soutenance prévue à Cachan le 10 février 2012 devant le jury composé de :

Daniel Rixen	Professeur, Delft University of Technology	Rapporteur
David Dureisseix	Professeur, INSA de Lyon	Rapporteur
Hachmi Ben Dhia	Professeur, Ecole Centrale de Paris	Examineur
Sergio Idelsohn Barg	Professeur, Universidad Nacional del Litoral	Examineur
Philippe Cresta	Ingénieur de recherche, EADS-IW	Examineur
Olivier Allix	Professeur, ENS de Cachan	Directeur de thèse
Pierre-Alain Guidault	Maître de Conférences, ENS de Cachan	Co-encadrant

**LMT-Cachan**

ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris  
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France



# Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	ix
Introduction	1
<b>Partie I</b> Modélisation et simulation des structures élancées de grande taille	<b>7</b>
<b>1 Structures élancées en grandes transformations</b>	<b>9</b>
1 Formulation des problèmes en grandes transformations . . . . .	11
1.1 Problème de référence . . . . .	11
1.2 Modèles de comportement en élasticité non-linéaire . . . . .	13
1.2.1 Objectivité - changement de référentiel . . . . .	13
1.2.2 Matériaux hyperélastiques . . . . .	15
1.2.3 Matériaux hypoélastiques . . . . .	15
1.2.4 Matériau néo-hookéen . . . . .	16
1.3 Principe des puissances virtuelles . . . . .	16
1.4 Formulation du problème non-linéaire . . . . .	17
1.4.1 Formulation lagrangienne totale . . . . .	17
1.4.2 Formulation lagrangienne réactualisée . . . . .	19
2 Modélisation des structures élancées et discrétisation . . . . .	21
2.1 Introduction . . . . .	21
2.2 Modèles basés sur une théorie simplifiée . . . . .	21
2.2.1 Théories des poutres . . . . .	22
2.2.2 Théories des plaques . . . . .	24
2.2.3 Théories des coques . . . . .	25
2.3 Formulation corotationnelle . . . . .	26
3 Stabilité des structures élancées . . . . .	33
3.1 Analyse des solutions d'équilibre . . . . .	34
3.2 Flambage linéarisé . . . . .	37

3.3	Analyse simplifiée du post-flambage dans le cas d'un flambage atteint en HPP . . . . .	40
4	Résolution de problèmes non-linéaires . . . . .	42
4.1	Méthodes de Newton . . . . .	42
4.2	Méthodes de continuation . . . . .	46
4.3	Méthode Asymptotique Numérique . . . . .	47
4.4	Détection de points limites et de points de bifurcation . . . . .	50
5	Bilan du chapitre . . . . .	50
<b>2</b>	<b>Stratégies non-linéaires de calcul pour des problèmes de grande taille</b>	<b>51</b>
1	Problématique . . . . .	53
2	Quelques approches classiques et leurs limitations . . . . .	54
2.1	Condensation statique . . . . .	54
2.2	Approches descendantes . . . . .	54
2.3	Techniques de raffinement local . . . . .	55
2.4	Illustration de l'apport et des limites des approches descendantes en non-linéaire géométrique . . . . .	55
3	Méthodes basées sur la théorie de l'homogénéisation . . . . .	63
3.1	Homogénéisation des milieux périodiques en élasticité . . . . .	63
3.2	Extensions de la théorie de l'homogénéisation au non-linéaire . . . . .	65
3.2.1	Eléments finis à deux niveaux : méthode <i>FE2</i> . . . . .	66
3.2.2	Milieux continus généralisés au niveau macroscopique . . . . .	66
4	Méthodes de superposition et adaptatives . . . . .	68
4.1	Méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique . . . . .	68
4.2	Méthode Arlequin . . . . .	68
4.3	Méthodes multigrilles . . . . .	69
4.4	Méthodes basées sur la partition de l'unité . . . . .	70
4.5	Méthode variationnelle multiéchelle . . . . .	71
5	Méthodes de Décomposition de Domaine . . . . .	72
5.1	Problème de référence et notations . . . . .	72
5.2	Méthode Primale . . . . .	73
5.3	Méthode Duale . . . . .	75
5.4	Méthode Mixte . . . . .	77
5.4.1	Méthode Mixte mono-échelle . . . . .	77
5.4.2	Méthode Mixte multiéchelle . . . . .	80
5.5	Autres méthodes . . . . .	82
5.6	Méthodes de résolution des problèmes non-linéaires de grande taille . . . . .	83
5.6.1	Méthode de type Newton-Krylov-Schur . . . . .	83
5.6.2	Méthode de décomposition de domaine mixte basée sur la LaTIn . . . . .	85
6	Bilan . . . . .	86

<b>Partie II</b>		<b>Méthode de décomposition de domaine mixte pour les structures élancées en non-linéaire géométrique</b>	<b>89</b>
<b>3</b>	<b>Stratégie de calcul multiéchelle avec relocalisation non-linéaire</b>		<b>91</b>
1	Principe de la méthode - intérêt de la relocalisation . . . . .		93
2	Méthodes de décomposition de domaine avec relocalisation non-linéaire		95
2.1	Cas d'une décomposition de domaine primale . . . . .		95
2.1.1	Étape globale non-linéaire d'interface . . . . .		95
2.1.2	Étape locale non-linéaire par sous-structure . . . . .		98
2.1.3	Algorithme version primale . . . . .		99
2.2	Cas d'une décomposition de domaine mixte . . . . .		101
2.2.1	Étape locale non-linéaire par sous-structure . . . . .		102
2.2.2	Étape globale, problème tangent d'interface . . . . .		102
2.2.3	Algorithme version mixte . . . . .		105
2.3	Choix des directions de recherche . . . . .		105
2.3.1	Interprétation de la direction de recherche locale, $\mathbf{k}^s$		105
2.3.2	Choix de la direction de recherche globale, $\hat{\mathbf{k}}^s$ . . . . .		108
2.4	Définition des critères d'arrêt local et global . . . . .		108
3	Étude de robustesse sur des structures globalement stables et instables		110
3.1	Intérêt de la relocalisation . . . . .		110
3.1.1	Structures à comportement stable monotone . . . . .		110
3.1.2	Structure à comportement de type <i>snap-through</i> . . . . .		112
3.1.3	Structure à comportement de type <i>snap-back</i> . . . . .		114
3.1.4	Synthèse des résultats . . . . .		116
3.2	Influence des paramètres de la stratégie . . . . .		117
3.2.1	Mise en évidence d'un choix optimal du critère d'arrêt local . . . . .		117
3.2.2	Influence de la direction de recherche locale pour l'approche mixte . . . . .		119
4	Méthode de continuation condensée aux interfaces . . . . .		122
4.1	Méthode de continuation pour le problème sous-structuré . . . . .		122
4.2	Analyse d'une branche d'équilibre par la méthode de continuation . . . . .		126
5	Bilan . . . . .		127
<b>4</b>	<b>Parallélisation du problème d'interface</b>		<b>129</b>
1	Environnement de travail et ressources . . . . .		131
1.1	Architecture matériel dédiée au calcul parallèle . . . . .		131
1.2	Librairies de calcul parallèle . . . . .		131
1.3	Librairie de calcul LMTpp . . . . .		133
1.4	Parallélisme et équilibrage de charge . . . . .		133
2	Parallélisation de la stratégie de calcul, principe et difficultés . . . . .		135
2.1	Identification des étapes parallélisables . . . . .		136

2.2	Remarques sur la résolution des problèmes locaux . . . . .	137
2.3	Parallélisation du problème global . . . . .	137
2.3.1	Parallélisation du problème global avec la méthode BDD . . . . .	138
2.3.2	Définition d'un préconditionneur issu de la méthode BDDC . . . . .	140
2.4	Choix de la décomposition . . . . .	141
3	Validation de l'implémentation en élasticité linéaire . . . . .	141
3.1	Analyse d'extensibilité numérique de différentes méthodes de décomposition de domaine . . . . .	142
3.1.1	Extensibilité numérique de la méthode BDDC im- plémentée . . . . .	144
3.2	Étude de speed-up . . . . .	145
4	Bilan . . . . .	146
<b>5</b>	<b>Premières mises en œuvre de la méthode sur architecture parallèle</b>	<b>149</b>
1	Simulation en parallèle : sous-structures homogènes . . . . .	151
1.1	Analyse d'extensibilité . . . . .	156
2	Simulation en parallèle : sous-structures hétérogènes . . . . .	157
2.1	Discussion . . . . .	159
3	Influence de la décomposition . . . . .	161
4	Bilan . . . . .	165
	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>167</b>
<b>A</b>	<b>Construction d'une préconditionneur de type BDDC</b>	<b>169</b>
1	La méthode BDDC . . . . .	169
2	Demarche pour la construction du préconditionneur . . . . .	171
<b>B</b>	<b>Résolution du problème global préconditionné avec GMRES</b>	<b>173</b>
1	Initialisation . . . . .	173
1.1	Initialisation des opérateurs de la BDDC . . . . .	173
1.2	Initialisation du résidu . . . . .	173
2	Algorithme GMRES . . . . .	173
	<b>Bibliographie</b>	<b>175</b>

# Table des figures

1.1	Définition du problème . . . . .	11
1.2	Définition des configurations . . . . .	12
1.3	Différentes types de structures, [Batoz et Dhatt, 1990a] . . . . .	22
1.4	Différentes configuration, repères associés et opérateurs de rotation . . . . .	28
1.5	Schéma d'implémentation de la procédure corotationnelle indépendante des éléments . . . . .	28
1.6	Cinématique corotationnelle d'un élément. . . . .	29
1.7	Illustration de branches fondamentales et bifurquées . . . . .	33
1.8	Répresentation schématique de la notion de stabilité . . . . .	36
1.9	Cas d'un point limite . . . . .	37
1.10	Cas de points de bifurcation. Bifurcation angulaire (à gauche) et bifurcation tangente (à droite). . . . .	38
1.11	Principe de la méthode de Newton . . . . .	42
1.12	Méthode de Newton modifiée, avec $f'$ constante. . . . .	43
1.13	Divergence de la méthode de Newton modifiée, direction constante. . . . .	44
1.14	Méthode de Newton modifiée, direction sécante. . . . .	44
1.15	Comportement de type snapthrough et snapback . . . . .	46
1.16	Méthodes de type Riks et Crisfield . . . . .	47
1.17	Principe de la MAN. . . . .	48
2.1	Géométrie du panneau raidi étudié . . . . .	56
2.2	Solution à $t = t_1$ . . . . .	57
2.3	Solution à $t = t_2$ . . . . .	57
2.4	Solution à $t = t_3$ . . . . .	57
2.5	Evolution du déplacement suivant $y$ du point d'application de l'effort . . . . .	57
2.6	Ré-analyse local sur un panneau raidi en flexion : modèles associés à chaque échelle . . . . .	58
2.7	Illustration d'une technique de collage cinématique sur une structure de panneau raidi en flexion . . . . .	58
2.8	Evolution du déplacement en $y$ du point d'application de l'effort. $t = 0$ à 1 . . . . .	59
2.9	Evolution du déplacement en $y$ du point d'application de l'effort (zoom). $t = 0$ à 0.3 . . . . .	59

2.10	Comparaison de la solution de référence (analyse globale fine) et la solution obtenue par ré-analyse locale. Les couleurs représentent le déplacement hors-plan (suivant $z$ ) . . . . .	60
2.11	Evolution du déplacement hors-plan du point $A$ pour les trois modèles introduits . . . . .	61
2.12	Volume élémentaire représentatif (VER) . . . . .	64
2.13	Problème de référence . . . . .	72
2.14	Découplage en sous-domaines . . . . .	72
2.15	Notations relatives à un sous-domaine . . . . .	73
2.16	Schéma d'une itération de la méthode LATIN. . . . .	78
2.17	Principes de la méthode NKS. . . . .	83
2.18	Résolution avec une méthode incrémentale . . . . .	86
2.19	Résolution LaTIn . . . . .	86
3.1	Principes de la méthode de relocalisation non-linéaire. . . . .	93
3.2	Schéma itératif global du problème d'interfaces, pour un pas de chargement . . . . .	104
3.3	Evolution de la déformée d'une structure stable monotone . . . . .	105
3.4	Détermination des nœuds du voisinage d'une interface ( $p=2$ ) . . . . .	107
3.5	Détermination des nœuds du voisinage d'un nœud interface ( $p=2$ ) . . . . .	108
3.6	Structure avec comportement de type monotone et sous-structuration. . . . .	110
3.7	Comportement de la structure globalement stable, avec les points convergés de la méthode de relocalisation mixte . . . . .	110
3.8	Evolution de la déformée de la structure stable monotone (FIG. 3.6 et 3.7) au cours des itérations globales de la méthode de relocalisation NL mixte, pour un incrément de chargement égal au chargement total . . . . .	112
3.9	Structure à comportement de type <i>snap-through</i> et sous-structuration. . . . .	113
3.10	Comportement de la structure <i>snap-through</i> , avec les points convergés de la méthode de relocalisation mixte . . . . .	113
3.11	Premières itérations globales et configuration finale de la structure de type <i>snap-through</i> (FIG. 3.9 et 3.10), résolu avec la méthode de relocalisation NL mixte pour un chargement appliqué en un seul incrément . . . . .	114
3.12	Structure à comportement de type <i>snap-back</i> et sous-structuration . . . . .	115
3.13	Comportement de la structure <i>snap-back</i> , avec les points convergés de la méthode de relocalisation mixte . . . . .	115
3.14	Premières itérations et configuration finale de la structure de type <i>snap-back</i> (FIG. 3.12 et 3.13), résolu avec la méthode de relocalisation NL mixte, pour un chargement total appliqué en un seul incrément . . . . .	116
3.15	Convergence du critère d'erreur global et du critère d'erreur local par sous-structure à chaque itération globale . . . . .	118
3.16	Nombre moyen d'itérations locales à chaque itération globale . . . . .	119
3.17	Influence de $\alpha$ sur le nombre d'itérations globales pour les différentes structures traitées (FIG. 3.6, FIG. 3.9 et FIG. 3.12) . . . . .	120

3.18	Definition des ddls de chaque sous-structure . . . . .	123
3.19	Méthode de longueur d'arc pour un d.d.l. . . . .	124
3.20	Comportement de la structure globalement instable ( <i>snap-back</i> , FIG. 3.12). Les étoiles représentent le différent points de convergence de la méthode à longueur d'arc . . . . .	127
4.1	Structure de la plateforme de calcul LMTpp . . . . .	133
4.2	Mise en œuvre parallèle de l'algorithme de résolution avec relocalisation non-linéaire . . . . .	134
4.3	Temps de calcul et transferts de données entre processeurs pour une structure décomposée en 5 sous-domaines . . . . .	134
4.4	Barre en traction et décomposition en sous-domaines . . . . .	142
4.5	Cas test . . . . .	143
4.6	Plaque plane soumise à un chargement de traction et de flexion dans le plan . . . . .	144
4.7	Plaque plane soumise à un chargement de flexion hors-plan . . . . .	144
4.8	Étude extensibilité : cas de plaque en traction et flexion dans le plan . . . . .	145
4.9	Étude extensibilité numérique : cas de plaque en flexion . . . . .	146
4.10	Résultats de l'étude de <i>speed-up</i> . . . . .	147
5.1	Géométrie du caisson raidi . . . . .	151
5.2	Conditions aux limites et chargement . . . . .	152
5.3	Décomposition de domaine et maillages associés . . . . .	152
5.4	Solution déformée ( $\times 3$ ) du caisson raidi en flexion pour le chargement final . . . . .	152
5.5	Zoom sur la zone de fixation du caisson raidi en flexion pour le chargement final . . . . .	153
5.6	Solutions convergées du caisson raidi pour chaque pas de chargement de la méthode NKS classique. . . . .	154
5.7	Solutions intermédiaires du caisson raidi à chaque itération globale pour la méthode de relocalisation mixte (1 seul pas de chargement). . . . .	155
5.8	Évolution de l'erreur en fonction des itérations pour différents nombres des sous-structures . . . . .	156
5.9	Géométrie du panneau raidi et conditions limites imposées . . . . .	157
5.10	Décomposition du panneau raidi . . . . .	158
5.11	Comportement non-linéaire du panneau raidi . . . . .	159
5.12	Nouvelle décomposition du panneau raidi . . . . .	161
5.13	Comparation de la déformée pour les deux types de décomposition . . . . .	162
5.14	Comparaison des courbes charge déplacement pour les deux décompositions . . . . .	163
5.15	Iterations pour le pas de chargement conduisant au flambage local : nouvelle décomposition . . . . .	164
5.16	Iterations pour le pas de chargement conduisant au flambage local : première décomposition . . . . .	165

---

A.1	Représentation graphique de l'opérateur $\Psi_j^s$ . . . . .	170
A.2	Représentation graphique de $z$ . . . . .	171

# Liste des tableaux

2.1	Récapitulatif des temps de calcul pour les différents modèles . . . . .	59
3.1	Résultats de convergence de différentes méthodes pour la structure à comportement de type stable monotone . . . . .	111
3.2	Résultats de convergence des différentes méthodes pour la structure à comportement de type <i>snap-through</i> . . . . .	113
3.3	Résultats pour la structure à comportement de type <i>snap-back</i> . . . . .	115
3.4	Influence du critère d'arrêt local pour la structure à comportement de type <i>snap-through</i> (FIG. 3.9 et 3.10) pour $\eta_{glo}^{crit} = 10^{-6}$ . . . . .	117
3.5	Influence du critère d'arrêt local pour la structure à comportement de type <i>snap-back</i> (FIG. 3.12 et 3.13) pour $\eta_{glo}^{crit} = 10^{-6}$ . . . . .	118
3.6	Nombre d'itérations de la méthode de relocalisation mixte (Reloc-M) et la stratégie monolithique (Pb. Monolit.) avec une technique de longueur d'arc, appliquée sur une structure globalement instable ( <i>snap-back</i> , FIG. 3.12) . . . . .	126
4.1	Caractéristiques du cluster au LMT . . . . .	131
4.2	Résultats d'extensibilité numérique . . . . .	143
5.1	Résultats de convergence des différentes méthodes pour le caisson raidi	156
5.2	Résultats de convergence de différentes méthodes pour le panneau raidi	160



# Introduction

La conception des structures telles que celles rencontrées dans le domaine de l'aéronautique nécessitent un grand nombre d'essais à différentes échelles, allant des essais microscopiques (coupons matériau par exemple) jusqu'aux essais à l'échelle de l'avion complet en passant par toutes les échelles intermédiaires que ce soit des détails structuraux (jonctions boulonnées, liaisons par soudure...) ou des sous-ensembles (aile, tronçon de fuselage, train d'atterrissage...). Afin de réduire les coûts de développement, les industriels intègrent de plus en plus les simulations numériques au sein du processus de conception pour guider, compléter ou remplacer une partie de l'approche expérimentale.

Les avancées en calcul des structures ont permis de mieux comprendre l'influence des détails structuraux, de l'interaction des différents phénomènes et mécanismes de dégradation mettant en jeu des non-linéarités matériaux et/ou géométriques sur le comportement global de l'ensemble et, en particuliers, sur la charge maximale avant rupture. Cela permet de réduire les temps de développement et, le cas échéant, d'identifier les éventuels problèmes de conception avant même la réalisation des premiers prototypes.

Les structures aéronautiques sont constituées d'éléments élancés susceptibles de flamber au-delà d'une charge critique. Lors des essais de certification, réalisés sur des fuselages complets, des zones de flambage de peau formant des cloques entre les raidisseurs peuvent être observées. Ces zones exhibant un comportement non-linéaire géométrique peuvent s'étendre et provoquer des redistributions de contraintes dans la structure. Même si les matériaux restent dans leur domaine élastique, celles-ci peuvent provoquer des concentrations de contraintes à la base des raidisseurs et induire des décollements locaux pouvant mener à la rupture globale. De façon plus générale, l'interaction entre non-linéarités géométriques (influence des défauts, grands déplacements, réorientations de fibres des matériaux composites...) et non-linéarités matériaux jouent un rôle important dans l'initiation et l'enchaînement des scénarios de dégradation.

La nécessité d'une compréhension de plus en plus fine de ces mécanismes poussent les ingénieurs à introduire des échelles d'étude et des niveaux de modélisation et de représentation de plus en plus complexes. Le calcul direct à l'échelle la plus fine,

tant spatiale que temporelle, des structures industrielles est encore cependant inaccessible en raison du coût de calcul prohibitif et/ou de capacité mémoire insuffisante et ceci malgré les évolutions du matériel informatique (calculateurs à architecture parallèle, *Cluster*).

De nos jours, le besoin d'approches multiéchelles s'affirme de plus en plus dans l'industrie aéronautique. La plupart des démarches classiquement utilisées en milieu industriel s'appuient sur des analyses valides dans le cadre linéaire. Dans le domaine du non-linéaire pour lequel le besoin d'approches multiéchelles est sans doute encore plus important, peu de stratégies existent. Elles sont souvent restreintes aujourd'hui à des analyses « descendantes », c'est-à-dire du global vers le local, le « retour » (approche « ascendante ») étant souvent ignoré faute de méthodes adéquates ou, tout simplement, faute de temps pour les mettre en œuvre.

Les démarches classiquement utilisées dans le milieu aéronautique sont celles du zoom structural et de la ré-analyse locale. Elles s'appuient sur une suite de modèles emboîtés ou « gigognes » plus ou moins raffinés. La structure complète de l'avion est associée à un modèle linéaire discrétisé grossièrement à l'aide d'éléments finis plaque ou poutre sans représenter fidèlement les détails structuraux (liaisons boulonnées, trous, fixations...). Ce niveau de modèle permet d'avoir une bonne estimation des flux d'effort dans la structure. Ce calcul global permet ainsi de définir les conditions limites en déplacement ou en effort à imposer sur la zone d'intérêt (sous-système, composant) décrite par un modèle (matériau et géométrique) plus fin. L'opération peut être répétée jusqu'à atteindre la précision requise pour décrire les phénomènes à décrire. Cette approche de zoom descendant n'offre cependant qu'un dialogue limité entre les différents niveaux de modèle et ne peut rendre compte de l'effet qu'aurait une non-linéarité spatialement localisée sur la réponse globale de la structure.

Afin de mener un calcul véritablement couplé, une approche courante consiste à raffiner localement le modèle dans la zone d'intérêt. Dans le cas où les maillages sont compatibles sur la frontière de la zone, une condensation statique (super élément) peut être réalisée. Dans le cas contraire, une technique de couplage de maillages doit être introduite. La définition faite *a priori* de la taille de la zone d'intérêt ne permet pas de décrire fidèlement les phénomènes non-linéaires lorsque ceux-ci s'étendent en dehors de la zone et les résultats obtenus deviennent vite erronés sans une technique élaborée de remaillage adaptatif qui peut s'avérer être vite laborieuse. Bien qu'une description multiéchelle de la solution soit introduite sous la forme de maillages de finesse différentes, la stratégie de résolution n'est pas véritablement « multiéchelle » et n'exploite pas les effets multiéchelles des phénomènes. Le problème est ici résolu de façon directe, monolithique, ce qui peut, d'ailleurs, poser des problèmes de conditionnement.

Peu d'approches multiéchelles sont réellement dédiées aux problèmes non-linéaires.

La plupart ont été développées pour le traitement des non-linéarités matériaux et s'appuient généralement sur la théorie de l'homogénéisation. Malheureusement, les hypothèses sous-jacentes (par exemple périodicité, séparation des échelles, comportement linéaire...) sont souvent trop restrictives pour le calcul non-linéaire des structures industrielles. Aussi, la tendance est de traiter le problème initial avec le modèle de la finesse requise et de faire appel aux méthodes de décomposition de domaine, sans hypothèse *a priori*, pour résoudre le système de grande taille obtenu. Les développements réalisés dans ce domaine de recherche ont été principalement faits dans le cadre linéaire. Pour les problèmes non-linéaires, l'approche classiquement utilisée consiste à utiliser les méthodes de décomposition de domaine pour résoudre le problème tangent. Cette approche n'exploite cependant pas efficacement les possibilités offertes par ce type de méthode et les algorithmes et stratégies de résolution associées méritent d'être revisités.

L'enjeu industriel de ce travail de thèse est de proposer une stratégie de calcul robuste et efficace basée sur une méthode de décomposition de domaine et adaptée au matériel informatique actuel (machines parallèles, *Cluster*) pour la simulation de grandes structures raidies industrielles en non-linéaire.

Dans le cadre du travail mené en collaboration avec EADS Innovation Works, on souhaite prédire le comportement post-flambage de structures aéronautiques. Il s'agit de se donner la possibilité d'analyser les éventuels problèmes causés par l'apparition et le développement de phénomènes de flambage localisés dans de grandes structures et, en particuliers, de déterminer si ces flambages peuvent entraîner une redistribution des flux d'effort ou des ruptures locales par concentration de contrainte avant même l'apparition de non-linéarités matériaux ; les structures élancées étudiées subissant principalement des grands déplacements et des petites déformations et le matériau restant dans son domaine d'élasticité. On ne traite donc dans cette étude que des non-linéarités géométriques (grands déplacements, petites déformations).

Dans les premiers travaux réalisés par P. Cresta [Cresta *et al.*, 2007], deux méthodes de décomposition de domaine ont été testées : une mixte et une primale. Il a été montré, en particuliers, qu'en incluant une étape de calcul qualifiées de « relocalisation non-linéaire » dans l'algorithme de résolution, un traitement adapté des non-linéarités était observé et permettait d'obtenir des gains de calculs intéressants, en particuliers pour la version mixte, en autorisant des incréments de chargement plus importants que dans les approches classiques décrites précédemment. Testée sur des structures raidies académiques au comportement globalement stable monotone, il avait été montré comment la stratégie était capable de capturer efficacement les effets globaux d'un flambage localisé.

Nous proposons ici d'étendre ces travaux dans le cas de structure au comportement globalement instable (*snap-through* et *snap-back*) et sur des cas de complexité

et de taille proche des applications visées par EADS IW. Pour ce faire, les performances de l'approche sont analysées vis-à-vis de sa robustesse (capacité à donner une solution convergée de façon systématique), son efficacité (capacité à converger rapidement) et de sa fiabilité (capacité à donner une solution au problème initial).

Deux contributions majeures sont à souligner :

- La première concerne **l'étude de la robustesse** de la méthode de décomposition de domaine mixte avec relocalisation non-linéaire [Cresta *et al.*, 2007]. En particuliers, une étude de l'influence des paramètres de la stratégie (critères d'arrêt, choix des directions de recherche) a permis de mettre en évidence des choix optimaux. Ce point a nécessité l'introduction d'une stratégie de pilotage (de type *Arc-length* [Crisfield, 1981] ) au sein de ce type de méthode de décomposition de domaine pour passer les éventuels points limites.
- La deuxième concerne **la parallélisation** sous *MPI* (*Message Passing Interface*) complète du code en langage *C++* de P. Cresta afin d'adresser des problèmes de taille plus conséquente. Plus précisément, le travail a consisté en la parallélisation de la résolution du problème global d'interface à l'aide d'une méthode BDD-C [Dohrmann, 2003; Mandel et Dohrmann, 2003] et un solveur itératif de type GMRES [Saad et Schultz, 1986] (adapté à la résolution de problème non-symétrique dû à la formulation corotationnelle retenue pour les éléments finis plaques en grands déplacements et petites déformations).

La rédaction de ce document est organisée en deux parties. Dans la première partie, une étude bibliographique concernant la formulation et la simulation des problèmes de structure élancées en grands déplacements est proposée.

- Le chapitre 1 présente le cadre de l'étude et la problématique, ainsi que les techniques classiques de résolution pour le traitement des problèmes non-linéaires géométriques.
- Le chapitre 2 décrit les méthodes et techniques de résolution classiquement utilisées dans l'industrie pour de problèmes de grande taille : approches multiéchelles et méthodes de décomposition de domaine.

Dans la seconde partie, la méthode de relocalisation non-linéaire est présentée et une étude de robustesse est menée. La méthode est alors parallélisée et l'extensibilité et *speed-up* sont vérifiés. Finalement, la méthode est appliquée aux grandes structures tridimensionnelles. Cette partie donne lieu à deux chapitres :

- Le chapitre 3 présente une technique de relocalisation non-linéaire dans les méthodes de décomposition de domaine classiques. Une étude de robustesse et l'influence des différents paramètres sont aussi abordées.
- Le chapitre 4 est consacré à la parallélisation de la stratégie de relocalisation non-linéaire. Pour paralléliser le problème global, une méthode BDD-C résolue avec un algorithme de type GMRES est utilisée. Finalement, une étude d'extensibilité et *speed-up* est menée en élasticité linéaire.
- Le chapitre 5 présente l'application des méthodes de relocalisation non-linéaire

aux structures tridimensionnelles de plaques et coques. Un gros calcul est mené sur un tronçon de fuselage simplifié.



# Première partie

## Modélisation et simulation des structures élancées de grande taille



# Chapitre 1

## Structures élancées en grandes transformations

*Dans ce chapitre, le cadre de l'étude et la problématique sont présentés, ainsi que les techniques classiques de résolution pour le traitement des problèmes non-linéaires géométriques. Dans les deux premières sections sont introduites les formulations pour des problèmes en grandes transformations et les modèles pour les structures élancées. Puis, dans les sections suivantes, la stabilité des structures élancées est présentée et, finalement, sont évoquées les techniques les plus courantes de résolution de problèmes non-linéaires.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Formulation des problèmes en grandes transformations . . .</b>	<b>11</b>
1.1	Problème de référence . . . . .	11
1.2	Modèles de comportement en élasticité non-linéaire . . . . .	13
1.3	Principe des puissances virtuelles . . . . .	16
1.4	Formulation du problème non-linéaire . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Modélisation des structures élancées et discrétisation . . .</b>	<b>21</b>
2.1	Introduction . . . . .	21
2.2	Modèles basés sur une théorie simplifiée . . . . .	21
2.3	Formulation corotationnelle . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Stabilité des structures élancées . . . . .</b>	<b>33</b>
3.1	Analyse des solutions d'équilibre . . . . .	34

3.2	Flambage linéarisé . . . . .	37
3.3	Analyse simplifiée du post-flambage dans le cas d'un flambage atteint en HPP . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Résolution de problèmes non-linéaires . . . . .</b>	<b>42</b>
4.1	Méthodes de Newton . . . . .	42
4.2	Méthodes de continuation . . . . .	46
4.3	Méthode Asymptotique Numérique . . . . .	47
4.4	Détection de points limites et de points de bifurcation . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Bilan du chapitre . . . . .</b>	<b>50</b>

---

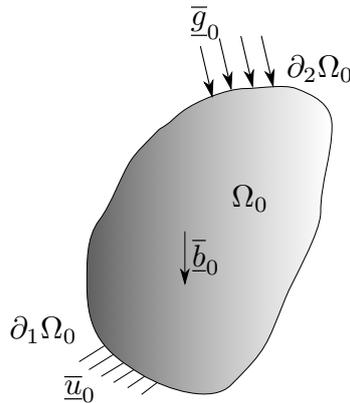
# 1 Formulation des problèmes en grandes transformations

Nous présentons dans cette section quelques notions de la mécanique des milieux continus en grandes transformations. Nous nous restreignons aux structures au comportement hyperélastique, soumises à des chargements quasistatiques et isothermes, les charges étant non-suiveuses et conservatives.

## 1.1 Problème de référence

On considère un solide déformable en mouvement dans un référentiel  $\mathbf{R}$ . Son volume est noté  $\Omega_0$ , son bord  $\partial\Omega$ . Cette configuration, libre de contraintes, est appelée configuration de référence et est notée  $C_0$ . Elle correspond à l'état du milieu au repos.

Ce solide est soumis à un chargement volumique  $\bar{b}_0$  sur  $\Omega_0$  et un chargement surfacique  $\bar{g}_0$  sur  $\partial_2\Omega_0$ , ainsi qu'à des conditions aux limites de Dirichlet  $\bar{u}_0$  sur la partie complémentaire de  $\partial\Omega_0$ ,  $\partial_1\Omega_0$  (FIG. 1.1). Sous l'action de ces sollicitations, le solide se déforme.



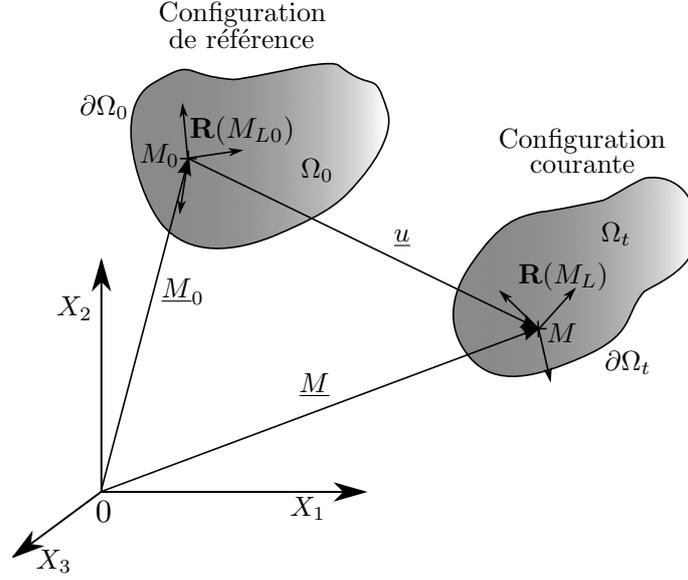
**Figure 1.1:** Définition du problème

Dans le cadre général des grandes transformations (grands déplacements/rotations, grandes déformations), on distingue la configuration courante déformée  $C_t(\Omega_t)$  de la configuration de référence  $C_0(\Omega_0)$ , (FIG. 1.2). On distingue classiquement les coordonnées lagrangiennes,  $\underline{M}_0$  pour  $M_0$  (configuration de référence), et eulériennes,  $\underline{M}$  pour  $M$  (configuration courante).

On introduit le vecteur déplacement  $\underline{u}(\underline{M}_0, t)$ , soit :

$$\underline{M} = \underline{M}_0 + \underline{u}(\underline{M}_0, t) \quad (1.1)$$

On note  $\underline{F}(\underline{M}_0, t)$  le tenseur gradient de la transformation défini par :



**Figure 1.2:** Définition des configurations

$$\underline{\underline{F}}(M_0, t) = \frac{\partial \underline{M}}{\partial \underline{M}_0} = \underline{\underline{I}}_d + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{M}_0} \quad (1.2)$$

Ce tenseur permet de passer de  $M_0$  à  $M$ .

On préfère souvent définir deux tenseurs de déformations : le tenseur de Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}$  sur  $\Omega_0$  qui est défini par :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}_d) \quad (1.3)$$

et le tenseur d'Euler-Almansi  $\underline{\underline{A}}$  sur  $\Omega$  défini par :

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{F}}^{-1t} \underline{\underline{E}} \underline{\underline{F}}^{-1} \quad (1.4)$$

En particulier, si l'on introduit le vecteur déplacement, on obtient pour les composantes du tenseur des déformation de Green-Lagrange l'expression classique :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{M}_0} + \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{M}_0} \right)^t + \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{M}_0} \right)^t \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{M}_0} \right) \quad (1.5)$$

Cette expression est souvent utilisée pour introduire dans une théorie essentiellement linéaire quelques éléments de non-linéarité (théorie des plaques de Von Kármán par exemple).

D'un point de vue pratique pour les coques il est commode d'introduire des repères locaux liés à la géométrie de la coque. Pour ne pas alourdir la notation, on

garde une notation tensorielle pour indiquer les changements de repère correspondant. Un point de la configuration de référence, est repéré grâce à un repère local, noté  $\mathbf{R}_{L0}(x_{L0}, y_{L0}, z_{L0})$  (FIG. 1.2), dont la direction  $x_{L0}$  est normale à la coque. Ce repère local est défini par une matrice de passage  $\underline{\underline{G}}_{L0}$  :

$$\underline{\underline{M}}_{L0} = \underline{\underline{G}}_{L0} \underline{\underline{M}}_0 \quad (1.6)$$

Le tenseur gradient de la transformation entre le repère initial et le repère actuelle,  $\mathbf{R}(x, y, z)$  (FIG. 1.2) est donné par :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{L}}\underline{\underline{L}}0} \underline{\underline{G}}_{L0} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{L}}} = \frac{\partial \underline{\underline{M}}}{\partial \underline{\underline{M}}_{L0}} \quad (1.7)$$

Le tenseur de Green-Lagrange sur  $\mathbf{R}_{L0}(x_{L0}, y_{L0}, z_{L0})$ , devient :

$$\underline{\underline{E}}_{L0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \underline{\underline{u}}_{L0}}{\partial \underline{\underline{M}}_{L0}} + \left( \frac{\partial \underline{\underline{u}}_{L0}}{\partial \underline{\underline{M}}_{L0}} \right)^t + \left( \frac{\partial \underline{\underline{u}}_{L0}}{\partial \underline{\underline{M}}_{L0}} \right)^t \frac{\partial \underline{\underline{u}}_{L0}}{\partial \underline{\underline{M}}_{L0}} \right) \quad (1.8)$$

L'hypothèse des contraintes planes nécessite d'appliquer la loi de comportement dans un plan tangent à la coque au point considéré. On définit le repère tangent  $\mathbf{R}_L(x_L, y_L, z_L)$ , dont la direction  $z_L$  est normale à la coque. Finalement, le tenseur d'Euler-Almansi défini dans  $\mathbf{R}_L$  donne :

$$\underline{\underline{A}}_{\underline{\underline{L}}} = \underline{\underline{G}}_{\underline{\underline{L}}} \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{L}}}^{-1t} \underline{\underline{E}}_{L0} \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{L}}}^{-1} \underline{\underline{G}}_{\underline{\underline{L}}}^t \quad (1.9)$$

où  $\underline{\underline{G}}_{\underline{\underline{L}}}$  permet le passage depuis  $M$  vers  $M_L$ .

## 1.2 Modèles de comportement en élasticité non-linéaire

Comme en petites déformations, la loi de comportement permet de relier les contraintes aux déformations. C'est elle qui traduit le comportement physique du matériau et l'on imagine bien qu'en correspondance avec la diversité des comportements observés, il existera une grande variété de modèles de comportements, on peut citer : le matériau de *Saint Venant-Kirchhoff*, les matériaux hyperélastiques, les matériaux hypoélastiques, le matériau élastique de Cauchy, le matériau *Néo-Hooke*, entre autres.

Pour des matériaux à comportement non linéaire (plasticité, endommagement, etc.), dont le comportement en petites perturbations est écrit par des lois d'évolution, la base repose naturellement sur la définition de lois en taux en transformation finie. Dans ce travail, nous sommes intéressés qu'à l'élasticité. Cependant les lois en taux sont également utilisées pour la définition de comportement hypoélastique.

### 1.2.1 Objectivité - changement de référentiel

Lorsque, en grandes déformations, on postule une loi de comportement, la première chose à faire sera donc de vérifier qu'elle est objective, c'est-à-dire indépendante

de l'observateur. Elle devra donc s'exprimer comme une relation entre des quantités elles-mêmes objectives. Il faut donc discerner, parmi tous les tenseurs possibles, ceux qui sont objectifs de ceux qui ne le sont pas. Notons qu'une dérivée temporelle d'un opérateur objectif n'est pas objective (de même que la vitesse dépend de l'observateur).

Il existe plusieurs taux objectifs, mais les plus utilisées dans les éléments finis sont : le taux de Jaumann et le taux de Truesdell.

### Taux objectifs de Jaumann

Le taux objectif de Jaumann des contraintes de Cauchy,  $\sigma$ , est obtenu à partir de :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\nabla\mathcal{J}} = \frac{D\underline{\underline{\sigma}}}{Dt} - \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{W}}^T \quad (1.10)$$

où  $\bullet^\nabla$  désigne un taux objectif, et  $\bullet^{\mathcal{J}}$  désigne le taux de Jaumann.  $W$  est le tenseur de rotation défini comme :

$$\underline{\underline{W}}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.11)$$

### Taux objectifs de Truesdell

La relation entre le taux de Truesdell et le taux de Jaumann peut-être vérifiée en remplaçant le gradient des vitesses par ses parties symétrique et antisymétrique, ce qui donne :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\nabla\mathcal{T}} = \frac{D\underline{\underline{\sigma}}}{Dt} + \text{div}(v)\underline{\underline{\sigma}} - (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}}) \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}})^T \quad (1.12)$$

où  $\bullet^{\mathcal{T}}$  désigne le taux de Truesdell.  $\underline{\underline{D}}$  est le tenseur des taux de déformation défini comme :

$$\underline{\underline{D}}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.13)$$

Le taux de Truesdell fait intervenir le même tenseur que celui de Jaumann, mais aussi le taux de déformation. Si l'on considère une rotation de corps rigide ( $\underline{\underline{D}} = 0$ ), le taux de Truesdell devient :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\nabla\mathcal{T}} = \frac{D\underline{\underline{\sigma}}}{Dt} - \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{W}}^T \quad (1.14)$$

Le taux de Truesdell est donc équivalent à celui de Jaumann, quand il n'existe pas de déformation.

### 1.2.2 Matériaux hyperélastiques

Les matériaux caractérisés par une fonction d'énergie stockée, un potentiel, sont appelés hyperélastiques ou « matériaux de Green ».

L'existence d'un potentiel implique un processus de déformation réversible, indépendant de l'histoire de chargement et en absence de dissipation d'énergie.

Ainsi, la puissance des efforts intérieurs exprimée par rapport à la configuration initiale en termes du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et du tenseur des déformations de Green-Lagrange peut s'écrire comme :

$$P_i = - \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{E}}} d\Omega_0 = - \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{\partial \psi(\underline{\underline{E}})}{\partial \underline{\underline{E}}} : \underline{\underline{\dot{E}}} d\Omega_0 \quad (1.15)$$

où  $\psi(\underline{\underline{E}})$  est le potentiel appelé « énergie libre spécifique ». Alors, le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est défini par :

$$\underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \frac{\partial \psi(\underline{\underline{E}})}{\partial \underline{\underline{E}}} \quad (1.16)$$

La relation la plus simple en grandes transformations provient d'un potentiel qui dépend de manière quadratique de  $\underline{\underline{E}}$ , c'est-à-dire,  $\psi = \frac{1}{2\rho_0} K_0 \underline{\underline{E}}^2$ , tel que :

$$\underline{\underline{\pi}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\underline{E}} \partial \underline{\underline{E}}} \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{K}}_0 \underline{\underline{E}} \quad (1.17)$$

D'après l'équation (1.17) la relation de comportement entre les tenseurs  $\underline{\underline{\pi}}$  et  $\underline{\underline{E}}$  est linéaire. Dans l'hypothèse de petites déformations l'expression (1.17) correspond à la « loi de Hooke ».

Les matériaux hyperélastiques fournissent un cadre naturel pour la formulation de la réponse des matériaux anisotropiques, en prenant en compte l'anisotropie dans le potentiel.

Différentes expressions pour les contraintes sont obtenues à partir de transformations appropriées, par exemple la contrainte de Cauchy est reliée à la contrainte de Piola-Kirchhoff par la relation :

$$\sigma = J^{-1} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{\pi}} \underline{\underline{F}}^t \quad (1.18)$$

où  $J = \det(F)$  est le Jacobien de la transformation.

### 1.2.3 Matériaux hypoélastiques

Les matériaux hypoélastiques associent le taux de contraintes au taux de déformation. Pour assurer le principe d'objectivité, le taux de contraintes doit être objectif et doit être relié à un taux de déformation aussi objectif. Une forme générale de matériaux hypoélastiques est :

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^\nabla = f(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}, \underline{\underline{D}}) \quad (1.19)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}^\nabla$  est un taux objectif de contraintes de Cauchy et  $\underline{\underline{D}}$  est le taux de déformation, aussi objectif. La fonction  $f$  doit être une fonction objective de la contrainte et du taux de déformation.

#### 1.2.4 Matériau néo-hookéen

Le matériau de Néo-Hooke est une extension de la loi de Hooke (élasticité linéaire isotrope) pour les grandes déformations. La fonction d'énergie stockée d'un matériau néo-hookéen est :

$$\psi(\underline{\underline{C}}) = \frac{1}{2}\lambda_0(\ln J)^2 - \mu_0 \ln J + \frac{1}{2}\mu_0(\text{trace } \underline{\underline{C}} - 3) \quad (1.20)$$

où  $\underline{\underline{C}}$  est le tenseur droite de Cauchy-Green,  $\lambda_0$  et  $\mu_0$  sont les constantes de Lamé de la théorie linéarisée et  $J = \det F$ . Les contraintes sont obtenues à partir de :

$$\underline{\underline{\pi}} = \lambda_0 \ln J \underline{\underline{C}}^{-1} + \mu_0(I - \underline{\underline{C}}^{-1}), \quad \underline{\underline{\tau}} = \lambda_0 \ln J I + \mu_0(\underline{\underline{B}} - I) \quad (1.21)$$

où  $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$  est le tenseur gauche de Cauchy-Green.

Tous ces matériaux et taux objectifs sont bien détaillés dans [Belytschko *et al.*, 2000; Ogden, 1984].

### 1.3 Principe des puissances virtuelles

La configuration courante  $M$  est la plus naturelle pour écrire le principe des puissances virtuelles, mais on préfère en général la ramener sur la configuration de référence.

En vue des formulations variationnelles, on peut obtenir, comme en petites déformations, le théorème des travaux virtuels. La puissance des efforts intérieurs dans un champs de vitesse virtuelle  $u^*$  s'exprime :

$$P_i(u^*) = - \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{E}}}(u^*) d\Omega_0 \quad (1.22)$$

où  $\underline{\underline{\pi}}$  est le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, qui mesure relativement à  $M_0$  l'état de contrainte sur  $M$ , et  $\underline{\underline{\dot{E}}}(u^*)$  le taux virtuel de déformation lagrangien, défini par :

$$\underline{\underline{\dot{E}}}(u^*) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^*}{\partial M_0} + \frac{\partial u^*}{\partial M_0}{}^t \right) + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial M_0} \right)^t \cdot \frac{\partial u^*}{\partial M_0} + \left( \frac{\partial u^*}{\partial M_0} \right)^t \cdot \frac{\partial u}{\partial M_0} \right) \quad (1.23)$$

Les contraintes de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{\pi}}$  et le tenseur de Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}$  vérifient la loi de comportement linéaire défini par :

$$\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{K}} \underline{\underline{E}}(\underline{u}) \quad (1.24)$$

ce qui donne :

$$P_i(\underline{u}^*) = - \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\dot{E}}}(\underline{u}^*) : \underline{\underline{K}} \underline{\underline{E}}(\underline{u}) \, d\Omega_0 \quad (1.25)$$

$$P_e(\underline{u}^*) = \int_{\Omega_0} \frac{d\Omega}{d\Omega_0} \bar{b}_0 \underline{u}^* \, d\Omega_0 + \int_{\partial_2\Omega_0} \frac{dS}{dS_0} \bar{g}_0 \underline{u}^* \, dS_0 \quad (1.26)$$

et finalement l'expression pour le PPV :

$$\begin{aligned} P_i(\underline{u}^*) + P_e(\underline{u}^*) &= - \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\dot{E}}}(\underline{u}^*) : \underline{\underline{K}} \underline{\underline{E}}(\underline{u}) \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} J \bar{b}_0 \underline{u}^* \, d\Omega_0 \\ &+ \int_{\partial_2\Omega_0} \frac{dS}{dS_0} \bar{g}_0 \underline{u}^* \, dS_0 = 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

On peut définir, sur la configuration initiale, le premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff (appelé aussi : tenseur de Boussinesq ou tenseur nominal de contraintes).

$$\underline{\underline{P}} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{M}}, t) \quad (1.28)$$

## 1.4 Formulation du problème non-linéaire

### 1.4.1 Formulation lagrangienne totale

Dans une formulation Lagrangienne totale, les équations sont écrites sur la configuration initiale non réactualisée. Lors d'un traitement par éléments finis des problèmes sont rencontrés en cas de grandes distorsions des éléments, ce qui n'est pas le cas dans les applications traitées.

#### Forme faible de la formulation lagrangienne totale

À partir du principe de puissances virtuelles, décrit dans la section 1.3, la forme faible de la Formulation Lagrangienne Totale s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\dot{E}}}(\underline{u}^*) : \underline{\underline{K}} \underline{\underline{E}}(\underline{u}) \, d\Omega_0 &= \int_{\Omega_0} J \bar{b}_0 \underline{u}^* \, d\Omega_0 \\ &+ \int_{\partial_2\Omega_0} \frac{dS}{dS_0} \bar{g}_0 \underline{u}^* \, dS_0 \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{ad,0} \end{aligned} \quad (1.29)$$

### Formulation Lagrangienne total à partir du problème discretisé

Le domaine  $\Omega_0$  est discretisé dans  $N_e$  éléments de volume  $\Omega_0^E$ , tels que  $\Omega_0 = \cup \Omega_0^E$ . On choisit d'approcher le champ de déplacements de chaque élément  $E$  par une interpolation des valeurs nodales :

$$\underline{u} = \mathbf{N}(\underline{M}_0) \cdot \underline{q}(t) , \quad \forall \underline{M}_0 \in \Omega_0^E \quad (1.30)$$

où,  $\mathbf{N}(\underline{M}_0)$  est la matrice rassemblant les fonctions de forme élémentaires et  $\underline{q}(t)$  le vecteur des déplacements nodaux de l'élément  $E$ . De la même manière, le champ de vitesses virtuelles est obtenu par dérivation des déplacements, ainsi :

$$\underline{U}^* = \mathbf{N}(\underline{M}_0) \cdot \underline{u}^*(t) , \quad \forall \underline{M}_0 \in \Omega_0^E \quad (1.31)$$

Le tenseur de Green-Lagrange devient :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{M}_0} + \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{M}_0} \right)^t + \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{M}_0} \right)^t \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{M}_0} \right] \\ &= \mathbf{B}_L \underline{q} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL}(\underline{q}, \underline{q}) \end{aligned} \quad (1.32)$$

où  $\mathbf{B}_L$  est la partie linéaire de l'opérateur de déformation et  $\mathbf{B}_{NL}$  est la partie quadratique. De même, le taux de déformation lagrangien peut s'exprimer comme :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{E}}} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \underline{U}^*}{\partial \underline{M}_0} + \left( \frac{\partial \underline{U}^*}{\partial \underline{M}_0} \right)^t + \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{M}_0} \right)^t \frac{\partial \underline{U}^*}{\partial \underline{M}_0} + \left( \frac{\partial \underline{U}^*}{\partial \underline{M}_0} \right)^t \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{M}_0} \right] \\ &= \mathbf{B}_L \underline{q}^* + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL}(\underline{q}, \underline{q}^*) \end{aligned} \quad (1.33)$$

La formulation lagrangienne totale se base sur l'expression du Principe des puissances virtuelles exprimé sur la configuration de référence  $M_0$  (1.27). En substituant dans cette expression les relations précédents, on obtient :

$$\begin{aligned} - \underline{q}^* \cdot \underbrace{\int_{\Omega_0} (B_L^t + B_{NL}^t(\underline{q}, \cdot)) \cdot K \cdot (B_L \cdot \underline{q} + \frac{1}{2} B_{NL}(\underline{q}, \underline{q})) d\Omega_0}_{\underline{F}_{int}^E(\underline{q})} \\ + \underbrace{\underline{q}^* \int_{\Omega_0} \mathbf{N}^t \rho_0 \underline{f}_d d\Omega + \underline{q}^* \int_{\partial_2 \Omega_0} \mathbf{N}^t \frac{dS}{dS_0} \underline{F}_d dS_0}_{\underline{F}_{ext}^E} = 0 , \quad \forall \underline{q}^*(\underline{M}_0, t) \in \mathcal{U}_{ad,0} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ce qui mène à :

$$F_{int}(\underline{q}) + F_{ext} = 0 \quad (1.35)$$

En linéarisant ce problème autour d'une configuration  $M$  à l'instant  $t$ , on obtient l'opérateur de raideur tangente  $K_T$  :

$$K_T = \frac{\partial F_{int}}{\partial \underline{q}} \quad (1.36)$$

d'où on obtient :

$$\begin{aligned} K_T = & \underbrace{\int_{\Omega_0} (B_{NL}^t(\cdot, \cdot)) \cdot K_0(B_L \cdot \underline{q} + \frac{1}{2} B_{NL}(\underline{q}, \underline{q})) d\Omega_0}_{\mathbf{K}_T^G} + \underbrace{\int_{\Omega_0} B_L^t \cdot K_0 \cdot B_L d\Omega_0}_{\mathbf{K}_T^E} \\ & + \underbrace{\int_{\Omega_0} [B_L^t \cdot K_0 \cdot B_{NL}^t(\underline{q}, \cdot) + B_{NL}^t(\underline{q}, \cdot)] \cdot K_0 \cdot B_L^t + B_{NL}^t(\underline{q}, \cdot) \cdot K_0 \cdot B_{NL}^t(\underline{q}, \cdot)}_{\mathbf{K}_T^D} d\Omega_0 \quad (1.37) \end{aligned}$$

$$K_T = K_T^G + K_T^E + K_T^D \quad (1.38)$$

où  $K_T^G$  représente la matrice de raideur géométrique associée à l'état de contrainte existant sur la configuration courante  $M$  et calculé sur la configuration de référence  $M_0$ ,  $K_T^E$  la matrice de raideur élastique construite sur la configuration de référence  $M_0$ , et  $K_T^D$  la matrice fonction des déplacements  $\underline{q}$  à l'instant  $t$ , appelé matrice des déplacements initiaux.

#### 1.4.2 Formulation lagrangienne réactualisée

Cette formulation est basée sur le Principe des puissances virtuelles exprimé dans une configuration  $M_R$  plus proche de la configuration actuelle que  $M_0$ . Elle est utilisée dans les approches incrémentales, où l'on utilise la configuration  $M$  à l'instant  $t$  pour déterminer la solution du problème à l'instant  $t + \Delta t$ .

Cette formulation est souvent utilisée avec des remaillages lorsque les distorsions deviennent trop importantes.

#### Forme faible de la formulation lagrangienne réactualisée

À partir du principe de puissances virtuelles, décrit dans la section 1.3, la forme faible de la Formulation Lagrangienne Totale s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{d}}}(u^*) d\Omega_t = & \int_{\Omega_t} \bar{b}_t \cdot u^* d\Omega_t \\ & + \int_{\partial_2 \Omega_t} \bar{g}_t \cdot u^* dS_t \quad \forall u^* \in \mathbf{U}_{ad,0} \quad (1.39) \end{aligned}$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur de contraintes de Cauchy et  $\underline{\underline{\dot{d}}}$  est le taux de déformation.

### Formulation lagrangienne réactualisée discretisé

Dans cette formulation, l'opérateur de raideur tangente  $K_T$  devient :

$$K_T = K_T^G + K_T^E \quad (1.40)$$

où

$$K_T^G = \int_{\Omega_R} (B_{NL}^t(\cdot, \cdot)) \cdot K(B_L \cdot \underline{u} + \frac{1}{2} B_{NL}(\underline{u}, \underline{u})) d\Omega_R \quad (1.41)$$

$$K_T^E = \int_{\Omega_R} B_L^t \cdot K \cdot B_L d\Omega_R \quad (1.42)$$

La matrice des déplacements initiaux disparaît dans cette formulation. Il est nécessaire de transporter la loi de comportement sur la configuration  $M_R$  et l'intégration doit se faire sur la géométrie déformée.

## 2 Modélisation des structures élancées et discrétisation

Nous nous intéressons dans le cadre de ces travaux aux structures élancées, c'est-à-dire aux structures dont les éléments constitutifs ont une ou plusieurs dimensions petites par rapport aux autres. C'est le cas des structures de poutres, de plaques ou de coques, que l'on retrouve dans de nombreux produits de l'industrie automobile ou de l'aéronautique. Du fait de leurs caractéristiques géométriques, les structures élancées sont susceptibles de connaître des grands déplacements et de grandes rotations.

### 2.1 Introduction

Les structures élancées (poutres, arcs, plaques, coques, etc.) sont des solides avec au moins une dimension caractéristique, appelée épaisseur, très petite par rapport aux deux autres (voir FIG. 1.3).

De part cette particularité géométrique, les théories de structures minces se basent sur le choix d'une cinématique spéciale par rapport à celle générale d'un solide, ce qui permet des hypothèses (et des simplifications) sur l'état de contrainte ou de déformation.

Les théories plus couramment utilisées sont celles dites au premier ordre, c'est-à-dire où le champ de déplacements est supposé varier linéairement suivant l'épaisseur, ce qui entraîne que les sections droites restent planes et indéformables.

Des modèles non-linéaires pour les grandes transformations (c'est-à-dire grands déplacements, grandes rotations et déformations, finies) de structures élancées ont été introduits plus récemment.

Ils existent aussi, des modèles de deuxième ou troisième ordre employés pour les matériaux multicouches.

De nombreuses structures minces sont rencontrées dans le génie civil, mécanique ou aéronautique (réservoirs, tabliers de ponts, coques de bateaux, châssis et carrosserie d'automobiles, fuselages et ailes d'avion, etc.), donc l'analyse du comportement et la conception de ces structures sont des activités importantes sur les plans technique et économique.

Dans la section 2.2 on présente les théories qui ont été développées pour décrire les structures élancées dans le cadre de petites et grandes transformations.

### 2.2 Modèles basés sur une théorie simplifiée

Dans cette section on introduira les éléments fondamentaux sur les différents modèles de poutres, plaques et coques. Par contre, une description plus détaillée de ces théories peut se retrouver, par exemple dans les ouvrages de [Batoz et Dhatt, 1990a,b].

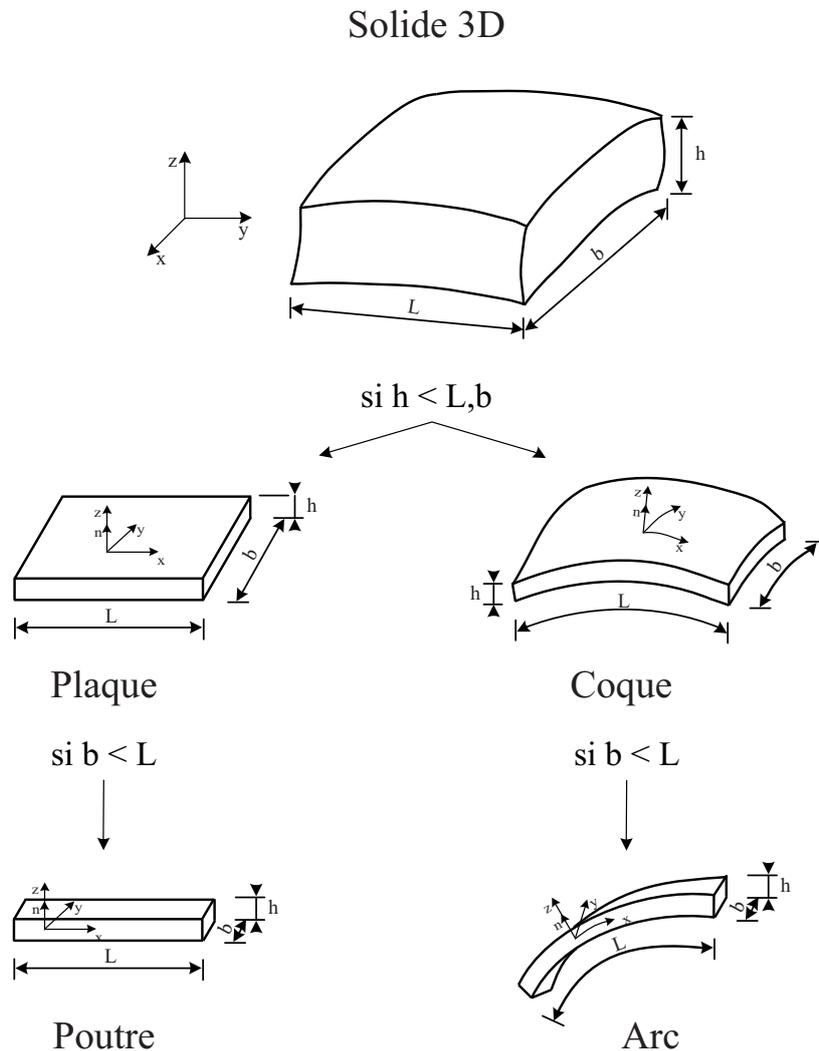


Figure 1.3: Différents types de structures, [Batoz et Dhatt, 1990a]

### 2.2.1 Théories des poutres

La première théorie de poutres largement acceptée est née à partir des développements de Leonhard Euler et Jacques Bernoulli vers 1750. Ce modèle est parfois appelé théorie classique des poutres, théorie d'Euler, théorie de Bernoulli ou théorie d'Euler-Bernoulli.

Cependant, c'est Galileo Galilei en 1658 qui réalise les premiers travaux sur la flexion des poutres bien qu'il ait erronément supposé une distribution constante des efforts dans les sections. Après la découverte du texte *Codex Madrid I* dans la Librairie Nationale d'Espagne en 1967, et publié dans [da Vinci, 1974], on a découvert non seulement que les travaux de Leonardo da Vinci (1493) ont précédé ceux de Galilei, mais aussi qu'il avait bien identifié la distribution linéaire d'efforts

et déformations dans les sections.

La théorie d'Euler-Bernoulli est la plus utilisée pour les poutres élancées où les effets de cisaillement sont peu importants. Elle s'appuie sur l'hypothèse cinématique de sections droites et sous la condition supplémentaire qu'elles restent orthogonales à la fibre moyenne au cours de la déformation.

La théorie de Lord Rayleigh (John William Strutt) donne une amélioration au modèle d'Euler-Bernoulli en permettant que les sections droites ne restent pas forcément normales à la fibre moyenne [Strutt, 1877].

Pour les poutres épaisses, [Timoshenko, 1921] a introduit une théorie qui prend en compte le cisaillement et l'effet de rotation des sections droites.

Les modèles en grandes transformations de poutres bidimensionnelles sont dus à [Reissner, 1972, 1973] et pour le cas tridimensionnel à [Reissner, 1981; Simo, 1985].

Des modèles d'ordre supérieur de poutres planes basés sur des distributions plus générales des champs de déplacements sont définis dans les références suivantes [Levinson, 1981; Rychter, 1987].

## Modélisation de poutres

Les deux principaux modèles de poutres largement répandus pour la modélisation des structures élancées sont : le modèle de Timoshenko et le modèle de Euler-Bernoulli.

Pour les poutres de Timoshenko, on fait l'hypothèse cinématique que les sections droites restent planes et indéformables dans leur plan. La position  $\underline{x}$  à un instant donné  $t$  d'un point  $M$ , repéré par  $\underline{M}_0$  dans la configuration initiale de la poutre (FIG. 1.2), s'écrit alors :

$$\underline{x}(\underline{M}_0, t) = \underline{M}_0 + \underline{\bar{u}}(X, t) + \underline{\underline{R}}(X, t) \cdot \underline{M}_{section} \quad (1.43)$$

où le vecteur  $\underline{\bar{u}}$  caractérise la translation de la section droite, et  $\underline{\underline{R}}$  sa rotation,  $\underline{M}_{section}$  repérant  $M$  dans la section par rapport à son centre d'inertie. Si on se restreint à des petites perturbations, on peut approximer la rotation des sections par :

$$\underline{\underline{R}}(X, t) \cdot \underline{M}_{section} \approx \underline{\underline{\omega}}(X, t) \wedge \underline{M}_{section} \quad (1.44)$$

Pour la poutre de Navier-Bernoulli, en plus de l'hypothèse précédente, on se place dans le cas d'une poutre suffisamment élancée pour négliger les effets inertiels associés aux rotations de sections devant les effets associés aux translations de la ligne moyenne :

$$\hat{\underline{\omega}}(\underline{M}_0, t) = \underline{e}_x \wedge \frac{\underline{\bar{u}}}{dx} + \hat{\underline{\Omega}}_x(\underline{M}_0) \underline{e}_x \quad (1.45)$$

où  $\underline{e}_x$  est le vecteur unitaire suivant l'axe de la poutre. Cette hypothèse permet de réduire les champs inconnus du problème aux trois composantes du déplacement

de la ligne moyenne et à la rotation axiale. En effet la rotation de la section est alors directement liée au déplacement de la ligne moyenne.

En pratique, le modèle de poutre de Navier-Bernoulli est ainsi réservé aux poutres très élancées, celui de Timoshenko pour les poutres plus épaisses, pour lesquelles l'énergie de déformation de cisaillement n'est pas négligable.

### Eléments de poutres

Pour le modèle classique de poutres sans cisaillement, l'élément le plus utilisé dans la formulation en déplacement est celui à 2 noeuds avec une interpolation cubique de Hermite pour les déplacements transverses, et une interpolation linéaire pour les déplacements axiaux. Si l'on prend en compte les effets de cisaillement on utilise ce même élément en ajoutant une interpolation linéaire pour les rotations des sections droites, ce qui fait un élément à 8 ddl dans le plan.

Des formulations mixtes de poutres se trouvent dans [Reissner, 1950; Washizu, 1982].

#### 2.2.2 Théories des plaques

Des cinématiques analogues à celles des poutres ont été proposées pour les plaques. La première théorie satisfaisante de flexion de plaques a été proposée par [Kirchhoff, 1850]. Dans [Love, 1888] on retrouve une théorie pour les poutres élancées inspirées par les hypothèses de Kirchhoff.

Les hypothèses de Kirchhoff-Love pour les plaques minces sont équivalentes à celles d'Euler-Bernoulli pour les poutres.

La théorie des plaques épaisses a été consolidée par [Mindlin, 1951] à partir des travaux de Rayleigh [Strutt, 1877; Timoshenko, 1921; Reissner, 1945; Hencky, 1947; Uflyand, 1948].

Le modèle en grands déplacements d'une plaque mince est décrit par des équations différentielles non-linéaires qui ont été formulées par [Föppl, 1907] et [von Kármán, 1910], puis modifiées par [Marguerre, 1938] pour les plaques courbées.

Les premières théories d'ordre supérieur de plaques ont été introduites par [Levy, 1877], [Bolle, 1947] et [Reissner, 1985].

### Eléments de plaques

Le premier élément fini pour représenter les déplacements de membrane de plaques minces a été introduit par [Turner *et al.*, 1956]. [Adini et Clough, 1961] émettent le premier élément de flexion.

Le premier élément triangulaire largement utilisé sous l'hypothèse de Kirchhoff-Love a été celui de [Clough et Tocher, 1965], parfois appelé HCT (de Hsieh-Clough-Tocher), puis l'élément DKT « Discrete Kirchhoff Triangle » développé par [Stricklin *et al.*, 1969]. Les éléments HCT et DKT ont chacun 9 ddl.

On trouve dans [Herrmann, 1967] un élément triangulaire mixte à 6 ddl pour les plaques de Kirchhoff-Love.

Les plaques plus épaisses sont traitées par des éléments s'appuyant sur la théorie de Reissner-Mindlin, prenant en compte le cisaillement transverse.

### 2.2.3 Théories des coques

En analogie avec les plaques, si l'on se place dans le cadre de coques minces où les déformations transverses restent faibles, alors l'hypothèse cinématique est celle de Kirchhoff-Love, laquelle stipule que les fibres normales à la surface moyenne de la coque restent normales au cours de la déformation [Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1940; Koiter, 1960].

Tandis que pour les coques épaisses (aussi pour les plaques épaisses) le cisaillement transverse est pris en compte sous l'hypothèse dite de Reissner-Mindlin, qui implique que les fibres normales à la surface moyenne de la coque restent droites, mais pas nécessairement normales à la surface moyenne [Naghdi, 1963; Reissner, 1974].

Parmi les modèles en grandes rotations on peut citer ceux de [Simmonds et Danielson, 1972; Pietraszkiewicz, 1977] et en grandes déformations on fait référence aux modèles de [Pietraszkiewicz, 1984; Reissner, 1982; Basar et Krätzig, 1989]. Un modèle qui considère les effets de vrillage ou « *drilling rotations* » est dû à [Ibrahimbegovic, 1994].

Les structures de coques peuvent être discrétisées de deux façons : soit en utilisant un assemblage en 3 dimensions d'éléments de plaques classiques, soit en développant des éléments prenant en compte cette géométrie particulière, au moyen d'éléments iso-paramétriques par exemple. Dans le cas d'assemblage d'éléments plans, une attention particulière doit être portée au degré de liberté correspondant aux rotations selon la normale à l'élément. Celle-ci n'entre pas en compte dans l'expression de la formulation variationnelle, ce qui peut mener, dans le cas d'éléments coplanaires juxtaposés, à une indétermination. Ce problème peut être résolu soit en éliminant les inconnus posant un problème, soit en leur attribuant une raideur arbitraire, soit encore en définissant une déformation associée et en modifiant l'expression du travail des efforts intérieurs [Allman, 1984; Bergan et Felippa, 1985].

### Eléments de coques

Les éléments finis de coques peuvent être classés en quatre grandes familles [Batoz et Dhett, 1990b; MacNeal, 1998] :

- Les éléments finis basés sur l'approximation isoparamétrique de la géométrie et des déplacements. Ces éléments sont dits isoparamétriques ou tridimensionnels dégénérés et ont été introduits dans [Ahmad *et al.*, 1970].
- Les éléments finis fondés sur une approche par facettes planes [Clough et Johnson, 1968]. Ce type d'élément est obtenu en combinant des éléments de mem-

- brane et des éléments de flexion. Le couplage est réalisé au niveau de l'assemblage.
- Les éléments finis construits à partir d'une formulation curviligne où les variables nodales sont les composantes curvilignes des déplacements et des rotations (représentées indépendamment de la géométrie) [Brebbia et Connor, 1967]. Le couplage membrane/flexion apparaît directement au niveau de l'élément.
  - réutilisation des éléments 3D linéaires classiques et adaptation de leur comportement pour qu'ils puissent représenter correctement le comportement de structures élancées (c.f. par exemple [Klinkel et Wagner, 1997; Brank *et al.*, 2002]). L'objectif majeur est alors d'avoir une représentation correcte de l'évolution des contraintes et déformation dans l'épaisseur ou le plan de l'élément. Deux méthodes sont principalement utilisées, et souvent combinées, la méthode ANS (Assumed Natural Strain) et la méthode EAS (Enhanced Assumed Strain).

La plupart de ces éléments ont été initialement développés dans le cadre linéaire des petites perturbations. Leur mise en œuvre en grandes déformations exige d'utiliser la forme complète du tenseur des déformations de Green-Lagrange ce qui peut mener, dans le cas le plus général des éléments incurvés, à des développements relativement complexes.

Nous avons retenus, pour les structures composées des poutres, les éléments de poutres de Navier-Bernoulli. Pour les structures plus réalistes, structures de section d'avion ou de voilure, on a retenu le modèle de Reissner-Mindlin, largement répandu pour le calcul de structures élancées, associé à un modèle de membrane pour le comportement dans le plan. Le modèle de Reissner-Mindlin est adapté aux plaques relativement épaisses et prend en compte les contraintes de cisaillement transverse dans l'élément. Il a été mis en œuvre pour des éléments triangulaires et quadrangulaires à fonctions d'interpolation linéaires.

### 2.3 Formulation corotationnelle

Si les formulations précédentes permettent bien de mener des calculs analytiques ou des simulations numériques, elles s'avèrent peu commodes pour diverses raisons.

Les déformations de Green-Lagrange et les contraintes de Piola-Kirchhoff sont les plus couramment utilisées en analyse non-linéaire, car elles sont à la fois objectives, conjuguées et adaptées aux grandes déformations. Cependant, leur interprétation n'est pas évidente, et l'expression des lois de comportement en grandes transformations passe le plus souvent par une conversion du tenseur de Piola-Kirchhoff en tenseur des contraintes de Cauchy, opération qui peut être coûteuse.

Par ailleurs, la prise en compte des grands déplacements exige de redévelopper des modèles de plaques et coques adaptés à part pour les formulations plaques ou coques 3D, ainsi que les éléments finis associés. Ces développements peuvent mener à des modèles relativement complexes, et leur implémentation doit être réalisée

pour chacun des types d'éléments précédemment introduits. Or, très souvent, les grandes transformations des structures élancées ne sont associées qu'à de petites déformations de leurs éléments constitutifs. Les mouvements sont ainsi majoritairement constitués d'une composante rigidifiante.

La formulation corotationnel propose de choisir comme configuration de référence une configuration obtenue par une rotation rigidifiante, et d'exprimer les déformations et les contraintes dans un repère tournant avec la matière. Cette approche fait l'hypothèse de petites perturbations dans le repère corotationnel. Elle a ainsi pour avantage de permettre la réutilisation des opérateurs des éléments linéaires classiques et des modèles matériaux développés en petites perturbations déjà existants dans la plupart des codes éléments finis.

Les premières travaux sur le sujet ont été réalisés par Biot dans les années 1930s. Un bilan de ses développements se trouve dans [Biot, 1965], mais ils ont été ignorés très longtemps.

Le concept de corotationnel (CR) a été utilisé en premier par [Truesdell et Toupin, 1960] en mécanique des milieux continus. Ce concept a été introduit dans la méthode des éléments finis par [Wempner, 1969; Belytschko et Hsieh, 1973].

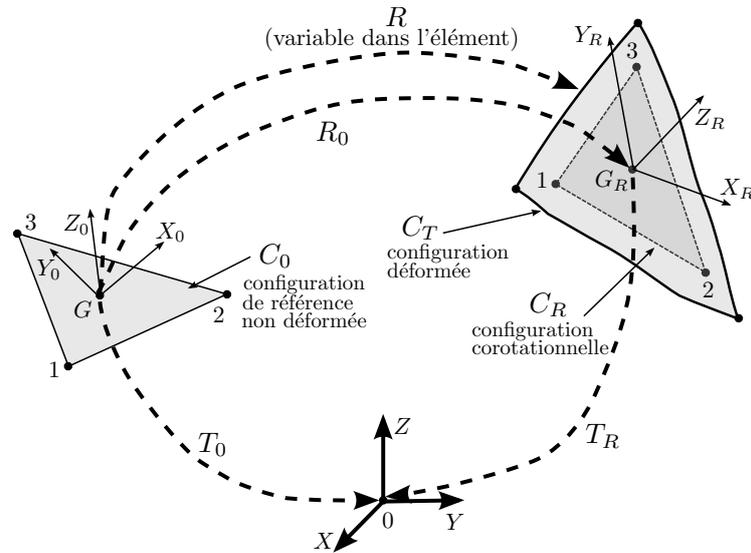
Dans [Veubeke, 1976], on introduit un cadre dynamique qui suit la structure complète comme une « ombre » à travers le mouvement continu rigide de la configuration inertiel de base. L'idée d'avoir un cadre corotationnel (CR) attaché à un élément individuel a été introduite par [Horrigmoe et Bergan, 1976, 1978].

Un bilan des développements réalisés jusqu'à 1989 a été fait par Nygard dans [Nygard et Bergan, 1989], où la configuration dans le repère CR est appelé « élément ombre ». Crisfield a développé le concept de « formulation corotationnelle consistante » [Crisfield, 1990; Crisfield et Moita, 1996; Crisfield *et al.*, 1997].

[Rankin et Brogan, 1986] a introduit le concept d'« élément corotationnel indépendant » (EICR, pour le nom en anglais). Dans la thèse de Haugen [Hagen, 1994] est proposé le développement de la formulation utilisée par [Felippa et Haugen, 2005]. C'est cette formulation que nous détaillerons.

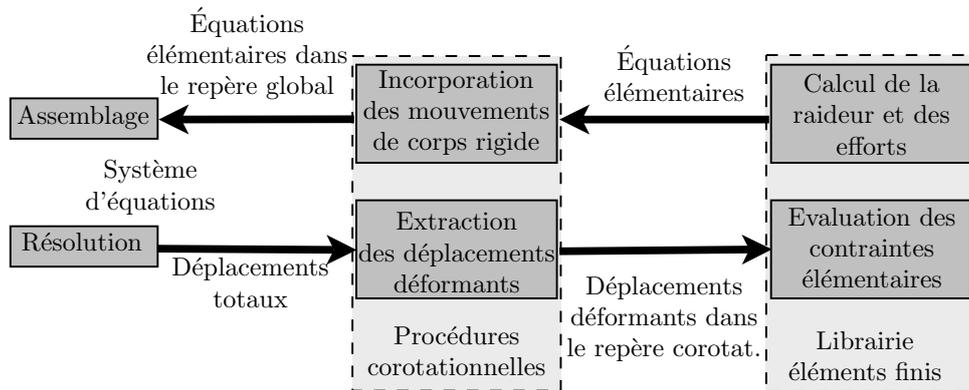
Pour les structures élancées, on préfère en général choisir un repère corotationnel lié à la géométrie des éléments, et tournant avec eux (FIG. 1.4). L'idée est de faire que les déformations restent linéaires dans le repère corotationnel, et de porter les non-linéarités des grands déplacements sur les changements de repère. Une synthèse complète des éléments finis corotationnels est présentée dans [Felippa et Haugen, 2005].

L'implémentation de la procédure corotationnelle est indépendante des éléments. Elle se fait entre le calcul de la matrice de raideur élémentaire et l'assemblage de l'opérateur global. Dans la FIG. 1.5 est présentée sa mise en œuvre. Les deux blocs appelés « procédure corotationnelle » correspondent à l'extraction des déplacements et rotations déformants et à une phase de transport du problème tangent dans le repère global. Les deux blocs à droite, appelées « librairie éléments finis » représentent les fonctions élémentaires classiques. Et les deux blocs à gauche, représentent les



**Figure 1.4:** Différentes configuration, repères associés et opérateurs de rotation

méthodes d'assemblage et de résolution de l'algorithme de calcul.

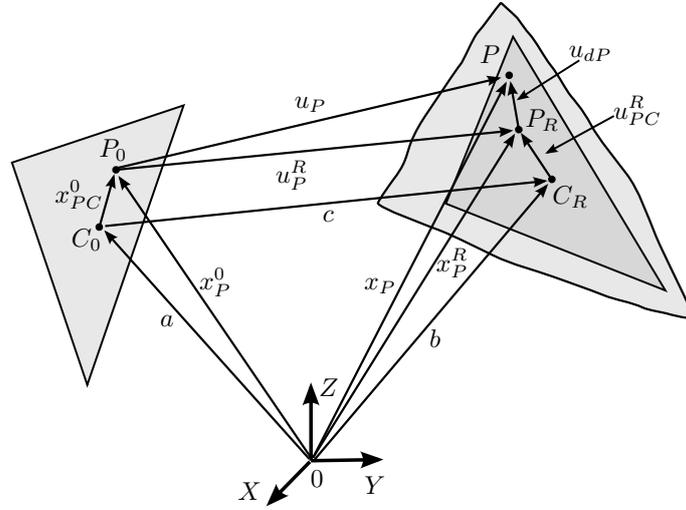


**Figure 1.5:** Schéma d'implémentation de la procédure corotationnelle indépendante des éléments

Cette extraction des déplacements et rotations déformante a été tirée de [Felippa et Haugen, 2005].

#### – Extraction des déplacements et rotations déformantes

L'idée est d'extraire les déplacements et rotations de corps rigides pour obtenir seulement les déplacements et rotations déformantes. Cette opération est réalisée en trois étapes, pour un point  $P$ , FIG. 1.6, de position initiale  $x_p^0$  dans le repère global (ici on ne met pas de traits sous les vecteurs) :



**Figure 1.6:** Cinématique corotationnelle d'un élément.

1. Les coordonnées initiales (non-déformée) du point  $P^0$  dans le repère global sont  $x_P^0$ , qui dans le repère de base ( $C_0$ ) devient :

$$x_{PC}^0 = x_P^0 - a \quad (1.46)$$

où  $a$  est le centre de gravité de l'élément considéré.

Ici on obtient les coordonnées (position) du point  $P^0$  par rapport au centre du gravité de l'élément, pour la configuration initial  $C_0$ .

2. Calcul du déplacement du centre de gravité de l'élément déformé,  $c = (b - a)$ , puis détermination des coordonnées du point  $P$  pour calculer le déplacement total  $u_P$ . Calcul de l'opérateur de rotation de corps rigide  $R_0$  (repère corotationnel). Calcul des coordonnées du point  $P_R$  :

$$x_{PC}^R = R_0 \cdot x_{PC}^0 \quad (1.47)$$

Ce qui fournit les coordonnées (position) du point  $P_R$  (déformation rigide), par rapport au centre de gravité de l'élément dans la configuration corotationnelle  $C_R$ .

3. Calcul des déplacements déformants  $u_{dP}$  et de l'opérateur de rotation déformant  $R_{dP}$ .

$$\begin{aligned} u_{dP} &= (x_{PC}^0 + u_P) - (c + x_{PC}^R) \\ u_{dP} &= (u_P - c) + x_{PC}^0 - x_{PC}^R \\ u_{dP} &= (u_P - c) + x_{PC}^0 - R_0 \cdot x_{PC}^0 \\ u_{dP} &= (u_P - c) + (\mathbb{I} - R_0) \cdot x_{PC}^0 \end{aligned}$$

Finalement, les déplacement déformants dans le repère corotationnel,  $\bar{u}_{dP}$  :

$$\bar{u}_{dP} = T_R u_{dP} \quad (1.48)$$

L'opérateur de rotation déformant est défini par  $\bar{R}_{dP} = T_R R_P T_0^t$  ( $T_R$  et  $T_0$  ont été définies en FIG. 1.4), où  $R_P$  est la rotation déformante du point  $P$  entre la configuration  $C_0$  et la configuration finale  $C_T$ , puis on peut extraire les angles de rotation déformants  $\theta_{dP}$ , à partir du vecteur axial de  $\bar{R}_{dP}$ .

### – Passage du repère corotationnel au repère global

Cette étape consiste à ramener le problème tangent (défini dans le repère corotationnel) dans le repère global.

#### 1. Efforts internes :

Si l'on se place dans le cas d'un matériau élastique avec l'hypothèse de petites déformations, on peut écrire les efforts intérieurs  $\bar{F}_{int}^e$  (repère corotationnel) comme dérivant d'un potentiel élastique  $\mathbf{P}^e$  :

$$\bar{F}_{int}^e = \frac{\partial \mathbf{P}^e}{\partial \bar{q}_d^e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}^e}{\partial \bar{u}_d^e} \\ \frac{\partial \mathbf{P}^e}{\partial \bar{\theta}_d^e} \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

où le terme à droite sépare les efforts de déplacement et de rotation. Pour les écrire par rapport au repère global, il est nécessaire d'obtenir une relation entre les variations cinématiques locales-globales. Finalement en utilisant le jacobien  $J^e$  :

$$J^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}_d^e}{\partial u^e} & \frac{\partial \bar{u}_d^e}{\partial \omega^e} \\ \frac{\partial \bar{\theta}_d^e}{\partial u^e} & \frac{\partial \bar{\theta}_d^e}{\partial \omega^e} \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

on obtient l'expression des effort internes dans le repère global :

$$F_{int}^e = J^{et} \bar{F}_{int}^e \quad (1.51)$$

Il est pratique de décomposer le jacobien en  $J^e = HPT$ . Où  $P$  est le projecteur qui extrait la partie déformante des déplacements et rotations,  $T$  s'écrit en fonction de l'opérateur de rotation  $T_R^e$  (voir FIG. 1.4) :

$$T = \begin{bmatrix} T_R^e & 0 \\ 0 & T_R^e \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

et  $H$  est la dérivée du vecteur de rotation axial par rapport au vecteur spin axial. C'est-à-dire  $H$  est l'opérateur reliant les variations du vecteur des rotations  $\bar{\theta}_d^e$  dans le repère corotationnel aux variations du vecteur de Spin  $\bar{\omega}_d^e$  adapté aux rotations finies dans le repère global, soit :

$$H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{\theta}_d^e}{\partial \bar{\omega}_d^e} \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

## 2. Opérateur de raideur tangente :

La matrice de rigidité tangente  $K_T^e$  d'un élément  $e$  est définie comme la dérivée des efforts internes par rapport aux degrés de liberté  $q^e$  globaux :

$$K_T^e = \frac{\partial F_{int}^e}{\partial q^e} \quad (1.54)$$

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned} \delta \bar{F}^e &= \delta T^t P^t H^t \bar{F}_{int}^e + T^t \delta P^t H^t \bar{F}_{int}^e + T^t P^t \delta H^t \bar{F}_{int}^e \\ &\quad + T^t P^t H^t \delta \bar{F}_{int}^e \\ &= (K_{GR}^e + K_{GP}^e + K_{GM}^e + K_M^e) \delta q^e \end{aligned} \quad (1.55)$$

où  $K_{GR}^e$  est appelée « matrice géométrique de rotation », qui correspond au gradient entre l'effort interne par rapport à la rotation rigide de l'élément.  $K_{GP}^e$  est la « matrice géométrique de projection de l'équilibre ».  $K_{GM}^e$  est la « matrice géométrique de correction du moment ». Et  $K_M^e$  est la « matrice de raideur matérielle ».

Pour plus de détails, on pourra se référer à l'article [Felippa et Haugen, 2005].

## Bilan

Pour résumer, la formulation corotationnelle aboutit, pour les efforts intérieurs et l'opérateur de raideur élémentaires, aux expressions suivantes :

$$F_{int}^e = \mathbf{T}^t \mathbf{P}^t \mathbf{H}^t \bar{\mathbf{K}}^e \tilde{q}_d^e \quad (1.56)$$

$$\mathbf{K}_T^e = \mathbf{T}^t (\mathbf{P}^t \mathbf{H}^t \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{H} \mathbf{P} + \mathbf{P}^t \mathbf{L} \mathbf{P} - \mathbf{F}_{nm} \mathbf{G} - \mathbf{G}^t \mathbf{F}_n^t \mathbf{P}) \mathbf{T} \quad (1.57)$$

On peut démontrer que l'opérateur de raideur assemblé ainsi calculé devient symétrique quand on approche l'équilibre, pour des efforts imposés conservatifs.

Moyennant certaines approximations, des versions simplifiées des expressions précédentes peuvent être obtenues. Ainsi, en faisant l'hypothèse que  $\mathbf{H} = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$  on obtient la variante proposée [Nygard et Bergan, 1989] :

$$F_{int}^e = \mathbf{T}^t \tilde{\mathbf{K}}^e \tilde{q}_d^e \quad (1.58)$$

$$\mathbf{K}_T^e = \mathbf{T}^t \left( \tilde{\mathbf{K}}^e \mathbf{H} \mathbf{P} - \mathbf{F}_{nm} \mathbf{G} \right) \mathbf{T} \quad (1.59)$$

La symétrie de l'opérateur est alors perdue, même à l'équilibre, ce qui impose l'utilisation d'un solveur adapté pour conserver de bonnes propriétés de convergence. Par ailleurs, les approximations faites imposent de travailler avec un maillage relativement fin.

Enfin, une version intermédiaire consiste à faire l'hypothèse que  $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ . On obtient alors :

$$F_{int}^e = \mathbf{T}^t \mathbf{P}^t \tilde{\mathbf{K}}^e \tilde{q}_d^e \quad (1.60)$$

$$\mathbf{K}_T^e = \mathbf{T}^t \left( \mathbf{P}^t \tilde{\mathbf{K}}^e \mathbf{H} \mathbf{P} - \mathbf{F}_{nm} \mathbf{G} - \mathbf{G}^t \mathbf{F}_n^t \mathbf{P} \right) \mathbf{T} \quad (1.61)$$

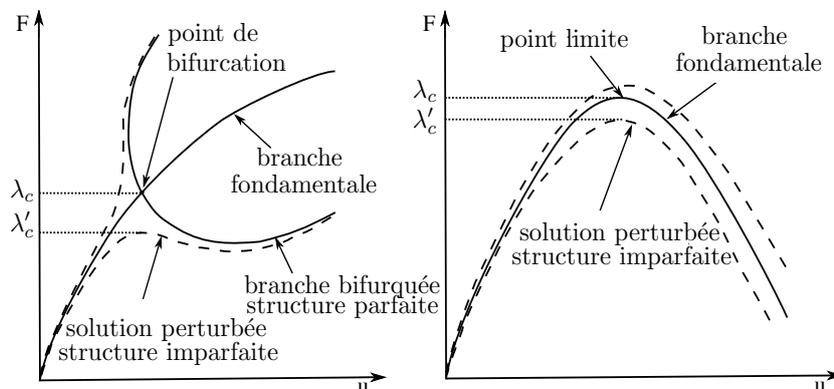
Dans cette approche, l'opérateur de raideur assemblé tend de nouveau vers un opérateur symétrique à l'équilibre. La convergence quadratique sera donc assurée avec une version symétrisée de l'opérateur, à condition d'utiliser un maillage suffisamment fin, pour respecter l'approximation introduite. Dans notre cas, on ne fait pas la symétrisation de l'opérateur, et le système est résolu avec un solveur de type GMRES. **Cette formulation sera celle qui sera retenue dans la suite de ces travaux.**

### 3 Stabilité des structures élancées

Une particularité du comportement des structures élancées est leur sensibilité au flambage, qui correspond à une instabilité de l'équilibre de la structure, liée aux non-linéarités géométriques par des transformations finies.

La problématique du flambage est de première importance dans le dimensionnement de structures élancées, car celui-ci s'avère être un des modes de ruine prépondérants, ou ayant un rôle significatif dans le processus de dégradation. Elle a fait l'objet d'une très grande quantité d'études, aussi bien analytiques, numériques qu'expérimentales.

Les premières études théoriques de stabilité sont attribuées à Euler [Euler, 1744], qui détermina la charge critique de flambage d'une poutre élancée en compression. La charge limite de flambage est appelée *charge limite de flambement eulérien*. Cette charge limite  $\lambda_c$  peut correspondre soit à un point limite soit à un point de bifurcation. Les différents comportements sont illustrés en FIG. 1.7. Dans le premier cas, la branche d'équilibre fondamentale croise une autre branche d'équilibre de la structure (appelée branche bifurquée) au point de bifurcation. Cette branche est associée, privilégiée à un potentiel inférieur à celui de la branche fondamentale et sera privilégiée par la structure. Le second cas correspond à un niveau de chargement admissible maximal (appelée point limite) sur la branche d'équilibre fondamentale de la structure.



**Figure 1.7:** Illustration de branches fondamentales et bifurquées

Les charges limites et charges critiques, notamment pour les cas de bifurcation asymétrique, peuvent être très sensibles aux imperfections géométriques, de chargement ou matériau. En présence de tels défauts, les chemins d'équilibre de la structure sont modifiés (lignes discontinues sur la FIG. 1.7), et la charge limite peut être fortement réduite.

La première étude de plaque a été faite par [Bryan, 1891] qui propose un calcul analytique de la charge critique. La charge ultime fut déterminée dans une analyse de post-flambage par [von Kármán *et al.*, 1932]. Par contre, Wagner avait déjà

déterminé une formule approchée de la charge ultime dans [Wagner, 1929]. Suite aux travaux de Wagner, la théorie de stabilité de plaques non-linéaires a été fortement développée [Cox, 1934; Trefftz et Marguerre, 1937; Marguerre, 1937; Friedrichs et Stoker, 1941; Levy, 1945].

Le comportement de post-flambage de coques fut expliqué dans [von Kármán et Tsien, 1939; von Kármán *et al.*, 1940; von Kármán et Tsien, 1941] sous l'hypothèse non-linéaire de grands déplacements. Dans [Koiter, 1945, 1963], Koiter introduit une première théorie de flambage et post-flambage des structures élastiques. Il a utilisé une méthode de perturbation pour montrer les différents types d'instabilité et l'influence des imperfections. Une étude bibliographique des premiers travaux théoriques sur le post-flambage jusqu'à 1970 est proposée [Hutchinson et Koiter, 1970].

Pour l'analyse en post-flambage les problématiques sont nombreuses. On peut citer, entre autres, celle du pilotage des calculs, de la détection des bifurcations ou du suivi des chemins d'équilibre. Ces différents points sont abordés dans [Arbocz *et al.*, 1987]. D'une manière générale, les calculs au post-flambage sont souvent difficiles à mener et à interpréter, et très coûteux en ressources de calcul.

Des ouvrages plus récents développent la théorie des instabilités de structures de façon plus moderne [Nguyen, 1995]. Un ouvrage récent traitant des différents et nombreux problèmes de stabilité des structures est celui de Bazant Cedolin [Bazant et Cedolin, 1991].

### 3.1 Analyse des solutions d'équilibre

Pour simplifier l'analyse du problème de solution d'équilibre multiple on considère un problème avec un paramètre de charge  $\lambda$ . La configuration du système est paramétrée par le vecteur  $u \in \mathbb{R}^n$ . Le problème en dynamique s'écrit sous la forme :

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = F(u, \lambda) \quad (1.62)$$

qui caractérise le principe fondamental de la dynamique pour le problème étudié ( $F$  dérivable).

Les solutions d'équilibre statique correspondent à  $F(u, \lambda) = 0$ ,

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n \quad (1.63)$$

$$(u, \lambda) \rightarrow F(u, \lambda) \quad (1.64)$$

On connaît la solution d'équilibre statique  $(u_e, \lambda_e)$ . On cherche d'autres solutions d'équilibre autour de  $u_e$ .

Soit  $(u_e + \delta u, \lambda_e + \delta \lambda)$  une solution d'équilibre statique voisine. Elle vérifie  $F(u_e + \delta u, \lambda_e + \delta \lambda) = 0$

$$\begin{aligned}
F(u_e + \delta u, \lambda_e + \delta \lambda) &= F(u_e, \lambda_e) + \delta F + \frac{1}{2} \delta F^2 \\
&= \underbrace{F(u_e, \lambda_e)}_{=0} + F_{,u}(u_e, \lambda_e) \delta u + F_{,\lambda}(u_e, \lambda_e) \delta \lambda + \underbrace{\frac{1}{2} \delta F^2}_{\text{négligeable}} = 0
\end{aligned} \tag{1.65}$$

L'équation d'équilibre linearisée autour de  $(u_e, \lambda_e)$  est :

$$F_{,u} \delta u + F_{,\lambda} \delta \lambda = 0 \tag{1.66}$$

où  $F_{,u} = K_T(u_e, \lambda_e)$  est la rigidité tangente, c'est à dire :

$$K_T \delta u = -F_{,\lambda} \delta \lambda \tag{1.67}$$

$K_T$  est non-linéaire. Si  $K_T$  est inversible on a une solution, mais si  $K_T$  est singulière on a plusieurs solutions ou aucune.

**Remarque :** on a deux types de points d'équilibre.

- les points réguliers où une seule courbe d'équilibre passe par  $(u_e, \lambda_e)$  ces points sont caractérisés par  $K_T(u_e, \lambda_e) = F_{,u}(u_e, \lambda_e)$  et sont tels que  $\det(K_T) \neq 0$ , c'est à dire que  $K_T$  est inversible.
- Les points singuliers sont tels que  $K_T$  n'est pas inversible, c'est à dire :  $\det(K_T) = 0$ .

**Cas des systèmes conservatifs en mécanique,**  $F$  dérivé d'une potentielle  $E_P$

$$F(u, \lambda) = -\frac{\partial E_P}{\partial u}(u, \lambda) \tag{1.68}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
F_{,u} &= -\frac{\partial^2 E_P}{\partial u^2} \\
&= K_T(u_e, \lambda_e)
\end{aligned} \tag{1.69}$$

Après le point singulier, il faut vérifier si les points sont stables ou pas.

**Cas de points réguliers :** dans ce cas  $K_T$  est inversible.

Pour un point régulier, on a :

$$\delta u = -[K_T]^{-1}(F_{,\lambda}) \delta \lambda \tag{1.70}$$

On connaît la solution d'équation  $(u_e, \lambda_e)$ .  $u_e$  est très légèrement perturbé par une perturbation des données initiales.

$$u = u_e + ve^{\beta t} \quad (1.71)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(u = u_e + ve^{\beta t}) = \beta^2 ve^{\beta t} = F(u_e + ve^{\beta t}, \lambda_e) = F_{,u}(u_e, \lambda_e)ve^{\beta t}$$

où  $v$  et  $\beta$  sont solutions de  $K_T v = \beta v$

Pour un problème dérivant d'une énergie potentielle, on a :

$$\left[ \frac{\partial^2 E_P}{\partial u^2} \right] \underline{v} = -\beta^2 \underline{v} \quad (1.72)$$

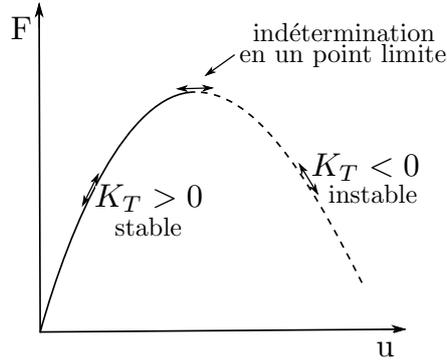
Si  $K_T$  est définie, symétrique et positive, l'unique solution est  $\beta = 0$  (stable).

On obtient le critère de positivité de la variation seconde de l'énergie potentielle

$$\left[ \frac{\partial^2 E_P}{\partial u^2} \right] [\delta v, \delta v] > 0 \quad (1.73)$$

c'est-à-dire  $\delta^2 E_P > 0$ , alors la solution est stable.

Si l'on schématise en 1D on obtient la FIG. 1.8.



**Figure 1.8:** Représentation schématique de la notion de stabilité

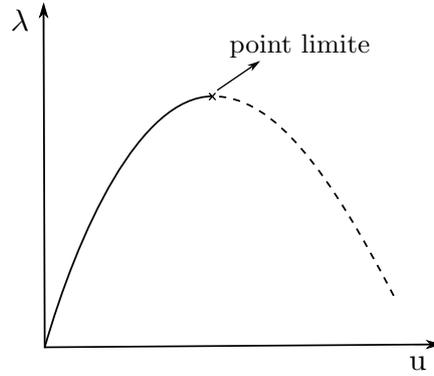
### Cas des points singuliers :

Les points singuliers correspondent à  $K_T$  singulière. En supposant que  $K_T$  est symétrique et que 0 est valeur propre simple de vecteur propre  $v$ ,  $K_T v = 0$ . Ainsi, d'après (1.66) :

$$\begin{aligned} \underline{v}^t K_T \delta u + \underline{v}^t F_{,\lambda} \delta \lambda &= 0 \\ \delta u^t \underbrace{K_T v}_{=0} + \underline{v}^t F_{,\lambda} \delta \lambda &= 0 \\ \implies \underline{v}^t F_{,\lambda} \delta \lambda &= 0 \end{aligned} \quad (1.74)$$

## – Cas 1 :

Cas de points limites,  ${}^tF_{,\lambda}v \neq 0 \implies \delta\lambda = 0$ . On passe par une tangente horizontale dans la courbe  $(u, \lambda)$  (FIG. 1.9)



**Figure 1.9:** Cas d'un point limite

puisque  $\delta\lambda = 0 \implies K_T\delta u = 0 \implies \delta u = \alpha v$ , la solution est unique et passe par un maximum (ou minimum) appelée souvent force de claquage. Et il y a un échange de stabilité (passage stable  $\rightarrow$  instable).

## – Cas 2 :

Cas de bifurcation (plusieurs courbes d'équilibre). Si  ${}^tF_{,\lambda}v = 0$ , alors le système d'équilibre local :

$$K_T\delta u + \underbrace{(F(u, \lambda))_{,\lambda}}_{\neq 0}\delta\lambda = 0 \quad (1.75)$$

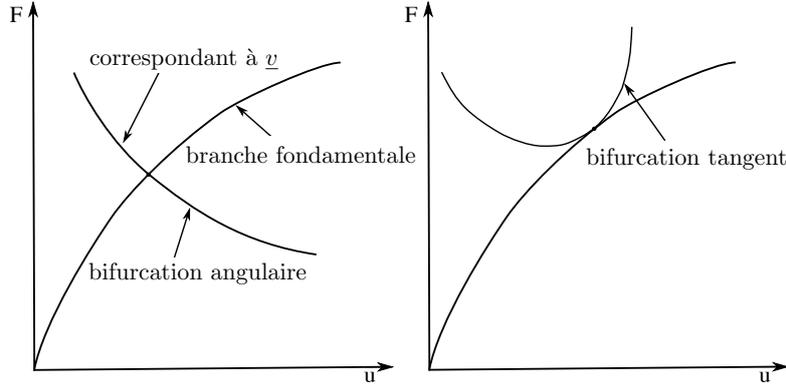
A plusieurs solutions constituées de la somme d'une solution particulière  $(\delta u_0, \delta\lambda_0)$  et d'une solution générale de l'équation sans seconde membre  $\delta u = \alpha v, \delta\lambda = 0$ . On peut trouver une illustration des différents cas de bifurcation en FIG. 1.10.

### 3.2 Flambage linéarisé

On considère une énergie de déformation sous la forme :

$$E_D(\underline{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} Tr[K\underline{e}(\underline{u})\underline{e}(\underline{u})]d\Omega_0 \quad \text{Modèle hyperélastique}$$

avec  $\underline{e}(\underline{u})$  le tenseur de déformation de Green-Lagrange :



**Figure 1.10:** Cas de points de bifurcation. Bifurcation angulaire (à gauche) et bifurcation tangente (à droite).

$$\underline{\underline{e}}(\underline{u}) = \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial M_0} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial M_0}^t \right)}_{\underline{\underline{e}}(\underline{v})} + \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial M_0} \right)^t \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial M_0} \right) \quad (1.76)$$

On fait l'hypothèse de charge morte. Le chargement  $\underline{F}_d$  ne dépend pas de la configuration actuelle.

Il existe une énergie potentielle,

$$E_P(\underline{u}, \lambda) = E_D(\underline{u}) + \lambda \langle \underline{F}_d, \underline{u} \rangle$$

où

$$\langle \underline{F}_d, \underline{u} \rangle = \int_{\Omega_0} \underline{f}_d \underline{u} d\Omega_0 + \int_{\partial_2 \Omega_0} \underline{F}_d \underline{u} d\Omega_0$$

En développant  $\underline{\underline{e}}(\underline{u})$  en puissance de  $\eta$ , on obtient :

$$\underline{\underline{e}}(\underline{u} + \eta \underline{v}) = \underline{\underline{e}}(\underline{u}) + \eta \underline{\underline{L}}_{\underline{u}}(\underline{v}) + \frac{1}{2} \eta^2 \underline{\underline{Q}}(\underline{v}, \underline{v}) \quad (1.77)$$

Le calcul de la première variation de  $E_P$ , donne :

$$E_P(\underline{u} + \eta \underline{v}) - E_P(\underline{u}) \simeq \eta \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} Tr[\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{e}}(\underline{u})} \underline{\underline{L}}_{\underline{u}}(\underline{v})] d\Omega_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} Tr[\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{L}}_{\underline{u}}(\underline{v})} \underline{\underline{e}}(\underline{u})] d\Omega_0 - \lambda \langle \underline{F}_d, \underline{v} \rangle \right] \quad (1.78)$$

L'équation d'équilibre pour  $\lambda$  donné est caractérisé par le problème :

Trouver  $\underline{u}_e$ ,

$$\int_{\Omega_0} Tr[\underline{\underline{K}} \underline{\underline{e}}(\underline{u}_e) \underline{\underline{L}}_u(\underline{v}^*)] d\Omega_0 - \lambda \langle \underline{F}_d, \underline{v}^* \rangle = 0 \quad (1.79)$$

Supposons que l'état d'équilibre  $\underline{u}_e$  soit atteint en petites perturbations. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{e}}(\underline{u}_e) &\simeq \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_e) \\ \underline{\underline{L}}_u(\underline{v}) &= \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) + \underbrace{\left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial M_0} \right)^t \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial M_0} \right)}_{\text{négligeable}} \end{aligned}$$

Le problème devient : trouver  $\underline{u}_e$

$$\int_{\Omega} Tr[\underline{\underline{K}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_e) \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*)] d\Omega - \lambda \langle \underline{F}_d, \underline{v}^* \rangle = 0$$

### Analyse de l'existence de point singulier

Calcul de la variation seconde de l'énergie potentielle.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_P}{\partial \underline{u}^2}(\underline{u})(\underline{v}, \underline{v}) &= \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} Tr[\underline{\underline{K}} \underline{\underline{L}}_u(\underline{v}) \underline{\underline{L}}_u(\underline{v})] d\Omega_0 \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} Tr[\underline{\underline{K}} \underline{\underline{e}}(\underline{u}) \underline{\underline{Q}}(\underline{v}, \underline{v})] d\Omega_0 \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} Tr[\underline{\underline{K}} \underline{\underline{Q}}(\underline{v}, \underline{v}) \underline{\underline{e}}(\underline{u})] d\Omega_0 \right] \quad (1.80) \end{aligned}$$

Les points singuliers sont caractérisés par :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} Tr[\underline{\underline{K}} \underline{\underline{L}}_u(\underline{v}) \underline{\underline{L}}_u(\underline{v})] d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} Tr[\underline{\underline{K}} \underline{\underline{e}}(\underline{u}) \underline{\underline{Q}}(\underline{v}, \underline{v})] d\Omega_0 = 0 \quad (1.81)$$

Les point singuliers sont obtenus en cherchant quand  $\frac{\partial^2 E_P}{\partial \underline{u}^2}$  cesse d'être défini positif (s'annule).

ou encore :

$$\int_{\Omega_0} Tr \left[ \underline{\underline{\pi}} \frac{\partial \underline{v}}{\partial M_0} \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial M_0} \right] d\Omega_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} Tr [\underline{\underline{K}} \underline{\underline{L}}_u(\underline{v}) \underline{\underline{L}}_u(\underline{v}^*)] d\Omega_0 = 0 \quad (1.82)$$

où  $\underline{\underline{\pi}}$  est la contrainte de Piola-Kirchhoff,  $\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{K}} \underline{\underline{e}}(\underline{u})$

**Commentaire :** En général  $\underline{\pi}$  est une fonction non-linéaire de  $\underline{u}$ . Pour le calcul de  $\underline{\pi}$ , on teste à chaque pas si l'équation (1.82) est vérifiée, si ce n'est pas le cas, on se trouve dans un point où  $\underline{\underline{K}}(\underline{u})$  est singulière (c.-à-d. on se trouve en un point critique).

**Simplification courante :** dans le cas où  $\underline{u}$  est atteint en transformation infinitésimale, on a :

$$\underline{\pi} = \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) \simeq \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) \quad \text{Linéarisation} \quad (1.83)$$

et donc le problème d'équilibre de  $\underline{u}$  s'écrit :

$$\int_{\Omega_0} Tr \left[ \underline{\underline{L}}_{\underline{u}}(\underline{v}^*) \right] d\Omega_0 - \lambda \int_{\Omega_0} \underline{F}_d \underline{v}^* d\Omega_0 = 0 \quad (1.84)$$

devient

$$\int_{\Omega_0} Tr \left[ \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*) \right] d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \lambda \underline{F}_d \underline{v}^* d\Omega_0 = 0 \quad (1.85)$$

C'est un problème classique d'élasticité linéaire et  $\underline{u}$  dépend linéairement de  $\lambda$ ,  $\underline{u} = \lambda \underline{u}_F$  (où  $\underline{u}_F$  est la solution pour  $\lambda=1$ ).

### 3.3 Analyse simplifiée du post-flambage dans le cas d'un flambage atteint en HPP

On traite le problème de stationnarité de l'énergie potentielle par rapport aux paramètres de configuration en exploitant l'information obtenue sur les modes de flambage du problème linéarisé. On cherche, la solution sous la forme :

$$\underline{u} = \alpha_0 \underline{u}_F + \sum_{i=1}^m \alpha_i \underline{v}_i \quad (1.86)$$

où  $\underline{u}_F$  est la solution fondamentale du problème avant flambage et  $\underline{v}_i$  sont les "m" premiers modes de flambage calculés.

Dans le cas où  $K_T(n, n)$  est de rang  $n - 1$  au point critique, la solution au voisinage du point critique est de la forme  $\alpha_0 \underline{u}_F + \alpha_1 \underline{v}_1$ . En pratique on ne retient que quelques modes.

Les problématiques liées à ce type d'analyse sont nombreuses, par exemple : détection des points de bifurcation et points limites, calcul d'une branche bifurquée, pilotage d'instabilités, etc. Les calculs de post-flambage sont souvent très coûteux en ressource de calcul. En section 4.1 sont présentés quelques techniques de résolution de tels problèmes non-linéaires.

## Bilan

L'analyse de stabilité permet de déterminer les charges critiques de flambage d'une structure. L'analyse détaillée du phénomène passe par une simulation complète de la stabilité dans des conditions de chargement de la structure en service. Pour certaines structures devant être certifiées pour des chargements extrêmes, et dans le but de déterminer le scénario de ruine, il peut être nécessaire d'effectuer un calcul non-linéaire complet. **C'est ce type d'analyse qui fait l'objet des travaux de cette thèse.**

Concernant plus particulièrement les structures aéronautiques qui nous intéressent ici, on observe, lors des essais et des simulations réalisés sur des structures représentatives, une première bifurcation correspondant à un flambage de la « peau » entre les raidisseurs. La structure reste cependant le plus souvent globalement stable, du fait de sa conception raidie, et peut admettre une augmentation de la charge relativement importante, accompagnée éventuellement de changements de modes de flambage. Dans un deuxième temps seulement, se développe un mode de flambage plus global, au niveau des raidisseurs, entraînant la ruine de la structure. **Nous nous intéresserons à ces deux phases du calcul non-linéaire, c'est-à-dire à la phase locale et globale de l'instabilité.**

Dans leur phase de flambage initial, globalement stable, les structures de panneaux raidis que nous considérons sont relativement peu sensibles aux imperfections. Ici encore, l'expérience éprouvée de la conception aéronautique et des méthodes de fabrication justifie que nous ne prenions pas en compte par la suite les imperfections des structures.

## 4 Résolution de problèmes non-linéaires

Dans cette section on présente les méthodes les plus couramment employées pour la résolution de systèmes d'équations non-linéaires (méthodes de Newton), ainsi que quelques approches particulièrement adaptées aux non-linéarités géométriques : les méthodes de continuation et la méthode asymptotique numérique.

### 4.1 Méthodes de Newton

#### – Méthodes de Newton classique

La méthode de Newton ou méthode de Newton-Raphson est une méthode itérative de résolution des problèmes non linéaires, du type  $f(u) = F$ . Elle a été proposée par [Newton, 1671]. Elle repose sur l'approximation de  $u^{(i+1)}$  par le résultat de l'itération précédent  $u^{(i)}$  :

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} - \frac{(f(u^{(i)}) - F)}{f'(u^{(i)})} \quad (1.87)$$

L'interprétation géométrique de (1.87) est simple : l'itéré  $u^{(i+1)}$  est déterminé en cherchant le point d'intersection de l'axe  $f(u) = F$  avec la droite tangente au point  $(u^{(i)}, f(u^{(i)}))$  à la courbe  $(u, f(u))$  (FIG. 1.11).

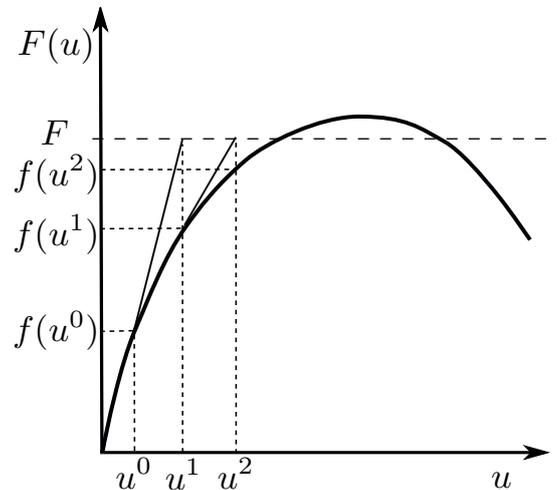
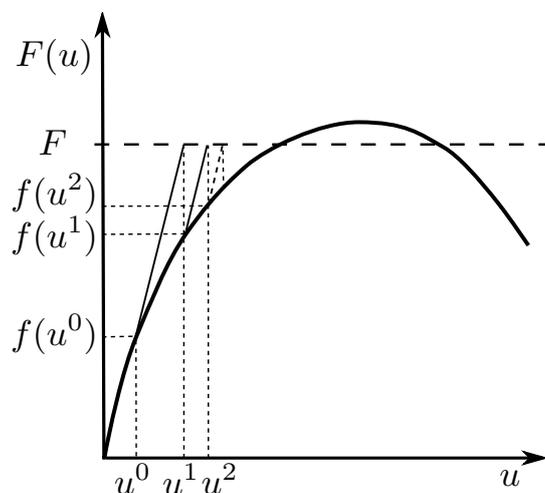


Figure 1.11: Principe de la méthode de Newton

Le processus itératif est stoppé lorsque le résidu  $(f(u^{(i)}) - F)$  est suffisamment faible.

Dans le cas du flambage, un point critique ne peut être directement franchi. En effet cette méthode ne peut converger, car  $f'(u^{(i)})$  (dérivée seconde de l'énergie potentielle s'annule) devient singulière au voisinage du point critique.

- Méthode de Newton modifiée : direction constante.



**Figure 1.12:** Méthode de Newton modifiée, avec  $f'$  constante.

La méthode de Newton modifiée à direction constante (aussi appelée Pseudo-Newton), est une variante consistant à remplacer  $f'(u^{(i)})$  par une constante  $K$  dans (1.87), ce qui donne :

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} - \frac{(f(u^{(i)}) - F)}{K} \quad (1.88)$$

où  $K$  peut être la droite tangente au point  $(u^{(0)}, f(u^{(0)}))$  à la courbe  $(u, f(u))$  (FIG. 1.12).

Cette méthode diverge dans le cas d'un point critique à efforts imposés (FIG. 1.13).

- Méthode de Newton modifiée : direction sécante.

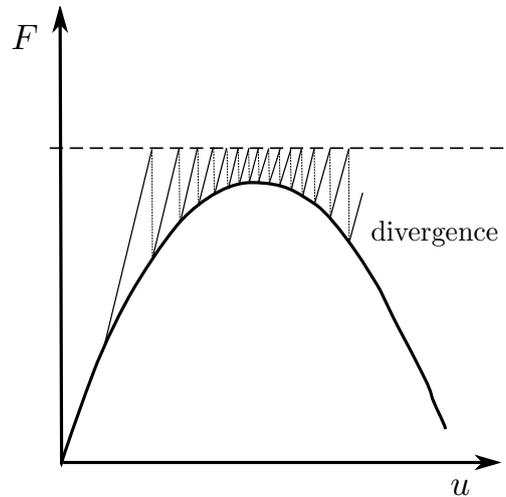
Dans cette méthode, on remplace  $f'(u^{(i)})$  par une approximation :

$$f'(u^{(i)}) \approx \frac{f(u^{(i)}) - f(u^{(i-1)})}{u^{(i)} - u^{(i-1)}} \quad (1.89)$$

on obtient alors la relation de récurrence suivante :

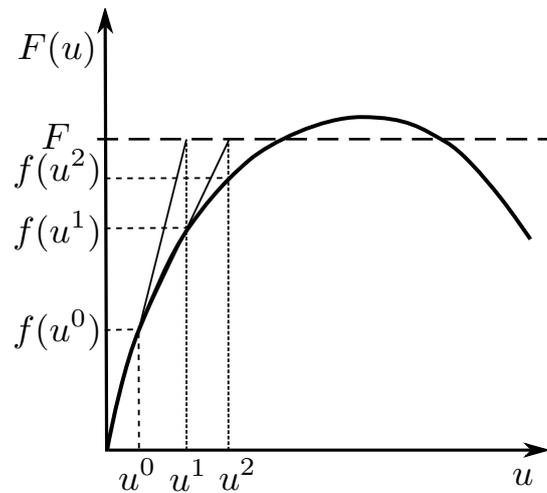
$$u^{(i+1)} = u^{(i)} - \frac{u^{(i)} - u^{(i-1)}}{f(u^{(i)}) - f(u^{(i-1)})} (f(u^{(i)}) - F) \quad (1.90)$$

Cette méthode est illustrée en FIG. 1.14. Le calcul de l'opérateur tangent n'est pas nécessaire, mais la convergence (de l'ordre de  $(1+\sqrt{5})/2$ ) est plus lente que



**Figure 1.13:** Divergence de la méthode de Newton modifiée, direction constante.

la méthode de Newton classique (convergence *quadratique*), mais meilleure par rapport à la méthode de Newton avec direction constante (convergence d'ordre 1).



**Figure 1.14:** Méthode de Newton modifiée, direction sécante.

#### – Les méthodes quasi-Newton

Sont des généralisations de la méthode *sécante* du cas unidimensionnel. Cette dernière consiste à remplacer  $K^{(i)}$  par la pente de la droite sécante passant par les points  $(u^{(i-1)}, f(u^{(i-1)}))$  et  $(u^{(i)}, f(u^{(i)}))$  correspondant aux deux itérés précédents :

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} - \frac{u^{(i)} - u^{(i-1)}}{f(u^{(i)}) - f(u^{(i-1)})} r(u^{(i)}) .$$

Pour le cas multidimensionnel, ces méthodes consistent à définir une matrice  $\tilde{K}^{(i)}$  telle que :

$$\tilde{K}^{(i)}(u^{(i)} - u^{(i-1)}) = -(r(u^{(i)}) - r(u^{(i-1)}))$$

Dans un espace vectoriel de dimension  $N$ , une telle matrice n'est pas unique, l'ensemble des matrices vérifiant cette propriété est de dimension  $N(N - 1)$ . Différentes techniques permettent de construire ces matrices, sous la forme suivante :

$$\tilde{K}^{(i)} = \tilde{K}^{(i-1)} + \delta\tilde{K}^{(i)} ,$$

c'est-à-dire en corrigeant successivement une matrice à chaque itération, en partant d'une estimation  $\tilde{K}^{(0)}$  de la matrice tangente initiale. Les termes  $\delta\tilde{K}^{(i)}$  sont calculés en fonction des variations de la solution  $\delta u^{(i)} = u^{(i)} - u^{(i-1)}$  et du résidu  $\delta r^{(i)} = r(u^{(i)}) - r(u^{(i-1)})$ . En pratique, ces matrices sont de faible rang. Parmi, les formules quasi-Newton les plus populaires, on peut citer :

- **La méthode BFGS** (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shannokaka) donne un  $\delta\tilde{K}^{(i)}$  symétrique de rang 2 et une matrice  $\tilde{K}^{(i)}$  définie positive si la matrice initiale l'est également. L'approximation, de l'opérateur tangent est faite au moyen des vecteurs des efforts internes précédents [Broyden, 1970]. Cette technique est implémentée dans de nombreux logiciels éléments finis, le plus souvent à l'aide de la version proposée dans [Matthies et Strang, 1979]. Une version à mémoire limitée (L-BFGS) est développé dans [Liu et Nocedal, 1989].
- **La méthode DFP** (Davidon-Fletcher-Powell) propose aussi une matrice de correction symétrique de rang 2. Cette technique est plus ancienne, mais dans la pratique elle est en général remplacée par la méthode BFGS qui est plus efficace.
- **La méthode SR1** (Symmetric Rank 1) suggère des  $\delta\tilde{K}^{(i)}$  symétriques et de rang 1. Elle est plus simple que les méthodes BFGS et DFP, mais peut conduire à la construction de matrices non définies positives.
- **La méthode de Broyden** qui aboutit à des matrices de correction non symétriques de rang 1.

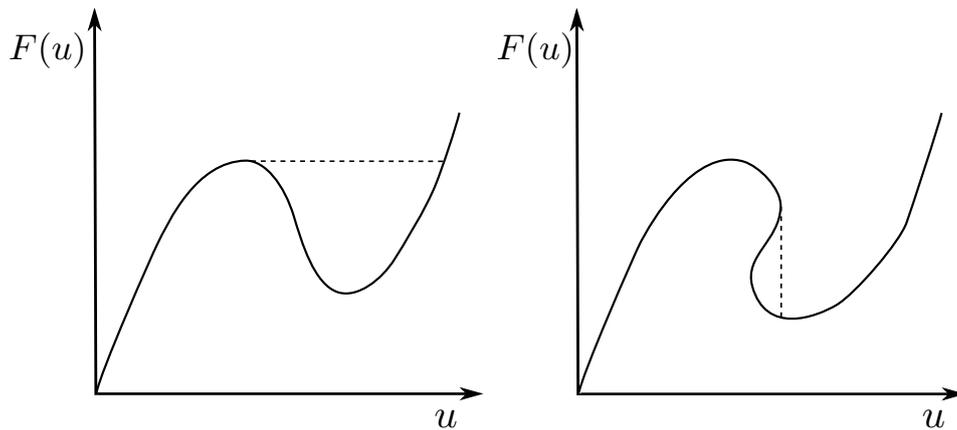
Un aspect important de ces techniques est qu'elles ne demandent ni d'assembler ni de factoriser les matrices ainsi définies (dehors  $\tilde{K}^{(0)}$ ). En pratique, des techniques d'algèbre linéaire sont employées pour atteindre directement la solution du système  $\tilde{K}^{(i)}\delta u^{(i)} = -r^{(i)}$  à partir de la factorisation de  $\tilde{K}^{(0)}$ , moyennant une succession de produits scalaires et le stockage de quelques vecteurs.

Concernant la convergence de cette variante de la méthode de Newton, on peut montrer qu'elle est d'ordre  $(1 + \sqrt{5})/2$ . La convergence de cette méthode est ainsi moins bonne que celle obtenue par la méthode standard, mais meilleure que celle avec direction constante.

Pour détecter la convergence, divergence ou stagnation des méthodes de Newton, différents critères d'erreur sont possibles. Les plus courants sont basés sur la norme du résidu et celle du chargement  $\frac{\|r^{(i)}\|}{\|f\|}$ , sur la variation relative de la solution  $\frac{\|\delta u^{(i)}\|}{\|u^{(i)}\|}$  et sur le comptage d'itérations.

## 4.2 Méthodes de continuation

Les méthodes de type Newton permettent la résolution de nombreux problèmes non-linéaires, mais il y a certains comportements (souvent rencontrés dans les structures élancées) où cette méthode est peu robuste ou inopérante. Les deux cas typiques sont les comportements de type snap-through (ou claquage) et de snap-back, schématiquement représentés sur les courbes effort-déplacements des FIG. 1.15. Pour le comportement de type snap-through, un pilotage en déplacement peut permettre de contourner la difficulté à condition de ne pas se retrouver au court des itérations sur le point critique (où l'opérateur tangent devient nul). En revanche, pour le comportement de type snap-back, pilotages en déplacement échouent.



**Figure 1.15:** Comportement de type snapthrough et snapback

Des méthodes dites de continuation ont été développées, entre autres par Riks [Riks, 1972] et Crisfield [Crisfield, 1981]. Elles permettent de réaliser un pilotage mixte en effort et en déplacement en recherchant la solution à l'intersection avec un hyperplan ou une hypersphère de l'espace  $F-U$ .

La méthode de Riks (FIG. 1.16, gauche), revient à chercher le nouveau couple  $(u^{(i+1)}, f(u^{(i+1)}))$  sur la même direction que la méthode de Newton, passant par un point  $(u^{(i)}, f(u^{(i)}))$  vérifiant la loi de comportement, et sur une direction orthogonale à  $(\Delta u^{(i)}, \Delta f(u^{(i)}))$  passant par le dernier point  $(u^{(i)}, \lambda^{(i)}q)$  obtenu, et où  $\lambda_i$  est la fraction de la force  $f^{(i)} = \lambda^{(i)}q$  appliquée sur la structure.

La méthode de Crisfield (FIG. 1.16, droite), est basée sur une longueur d'arc qui peut s'écrire :

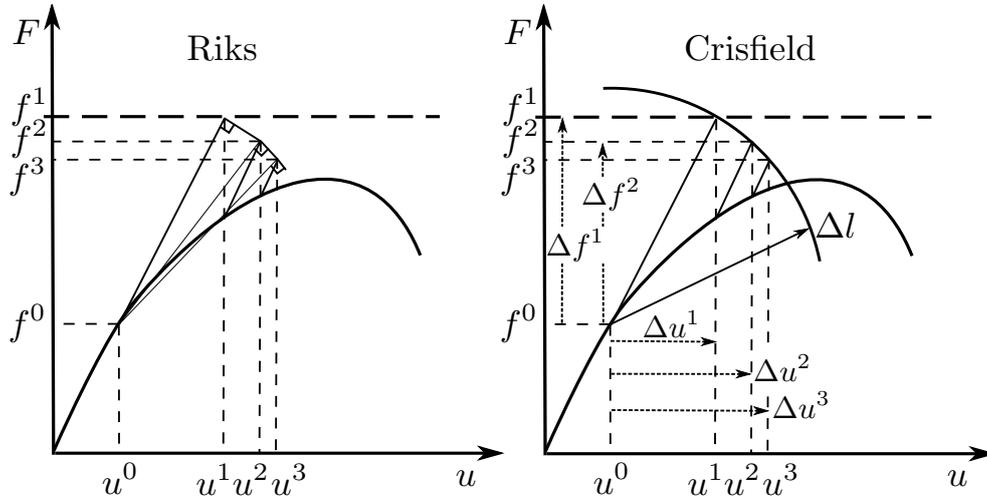


Figure 1.16: Méthodes de type Riks et Crisfield

$$(\Delta u^{(i)})^2 + (\Delta f^{(i)})^2 = \Delta l^2 \quad (1.91)$$

ou de la même façon

$$(\Delta u^{(i)})^2 + \Delta(\lambda^{(i)})^2 q^2 = \Delta l^2 \quad (1.92)$$

Cette méthode conduit à une équation du second degré en  $\Delta\lambda^{(i)}$ .

Les méthodes de Riks et Crisfield permettent de franchir les points critiques. On peut citer plusieurs variantes : la méthode de longueur d'arc linéarisé [Riks, 1972, 1979], longueur d'arc cylindrique [Ramm, 1981a,b; Padovan et Arechaga, 1982] et longueur d'arc sphérique [Crisfield, 1988]. Pour dépasser des snap-backs très forts, on se référera à [Hellweg et Crisfield, 1998].

Les performances des méthodes de type longueur d'arc avec la méthode de Newton modifiée peuvent être largement améliorées si elles sont combinées avec des schémas de type « line-search », comme démontré par [Crisfield, 1983]. Dans [Schweizerhof et Wriggers, 1986], un schéma « line-search » simple a été utilisé et comparé avec une technique de relaxation numérique. Les deux méthodes ont amélioré la convergence de la méthode. [Alfano et Crisfield, 2003] ont appliqué une technique dite de « double line-search » pour le délaminage des matériaux composites.

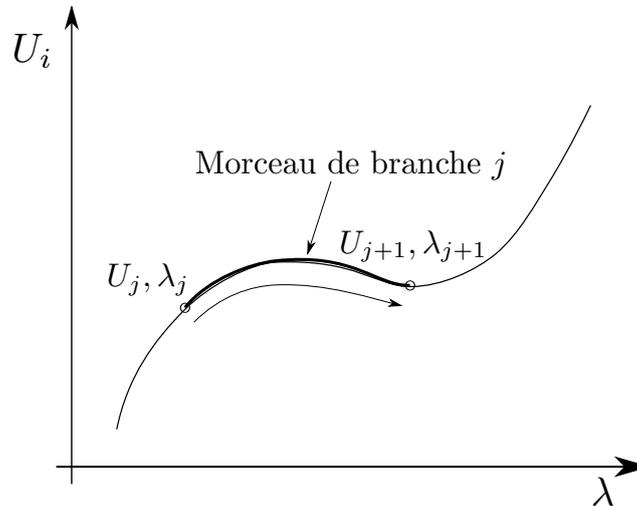
### 4.3 Méthode Asymptotique Numérique

La Méthode Asymptotique Numérique (MAN), est basée sur les méthodes de perturbation [Koiter, 1945] et la méthode des éléments finis. Les premiers travaux sur ce sujet ont été proposés par [Thompson et Walker, 1968]. Ces travaux ont été poursuivis par [Damil et Potier-Ferry, 1990] sous le nom de la MAN. Cochelin

dans [Cochelin, 1994] a démontré sa fiabilité. Elle a été appliquée dans le calcul de branches bifurquées par [Azrar *et al.*, 1991], dans le calcul de comportement post-flambage par [Azrar *et al.*, 1993], pour le calcul de rotations finies des coques par [Zahrouni *et al.*, 1999] et une application à des vibrations non-linéaires a été réalisée dans [Azrar *et al.*, 1999]. Une extension de la méthode à des problèmes non-linéaires élastiques se trouve dans [Cochelin, 1994; Cochelin *et al.*, 1994].

La MAN, qui repose sur des techniques de développement en séries entières de courbes de solutions, est une alternative aux méthodes de continuation classiques pour les approches incrémentales.

Dans la MAN, l'idée est de déterminer numériquement la branche de solution en générant, non pas une séquence de points, mais une séquence de « morceaux » de branches : morceau<sup>1</sup>, morceau<sup>2</sup>, ... morceau<sup>*j*</sup>, morceau<sup>*j*+1</sup> ... (voir FIG. 1.17).



**Figure 1.17:** Principe de la MAN.

Chaque morceau de branche est représenté de façon continue par un développement en série entière tronquée à un ordre élevé, par rapport à un paramètre de chemin  $a$ . L'analyse *a posteriori* de la série tronquée permet d'estimer la fin du morceau de branche  $a_{max}$ , au-delà duquel l'approximation n'est plus valable.

La détermination complète de la branche repose sur trois techniques. D'abord l'identification des séries permet de transformer le problème non linéaire à résoudre en une suite de problèmes linéaires (technique de perturbation). Ensuite, ces problèmes linéaires sont résolus numériquement par éléments finis ou différences finies (techniques de discrétisation). Enfin une fois le morceau<sup>*j*</sup> défini, on continue le processus en définissant un nouveau point de départ  $j + 1$  (techniques de continuation).

**Techniques de perturbation :** soit le problème non linéaire dépendant d'un paramètre réel  $\lambda$ ,

$$R(u, \lambda) = 0 \quad (1.93)$$

où  $u \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur inconnu et  $R \in \mathbb{R}^n$ , est un vecteur rassemblant  $n$  équations.  $R$  est supposée être une fonction “suffisamment régulière” de ses arguments  $u$  et  $\lambda$ .

En partant d’un point connu  $(u^j, \lambda^j)$ , on génère un nouveau morceau de branche le représentant en série entière par rapport à un paramètre de chemin  $a$  :

$$\begin{aligned} u(a) &= u^j + \sum_{p=1}^n a^p u_p = u^j + a u_1 + a^2 u_2 + \cdots + a^n u_n \\ \lambda(a) &= \lambda^j + \sum_{p=1}^n a^p \lambda_p = \lambda^j + a \lambda_1 + a^2 \lambda_2 + \cdots + a^n \lambda_n \end{aligned} \quad (1.94)$$

$$a = (u - u_0) \cdot u_1 + (\lambda - \lambda_0) \lambda_1$$

où  $n$  est l’ordre de troncature de la série,  $u_0$  et  $\lambda_0$  son les quantités initiales de  $u$  et  $\lambda$ , et le paramètre  $a$  peut être identifié comme une pseudo-longueur d’arc.

Cette branche (1.94) doit être solution de l’équation (1.93), ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} 0 &= R \left( u^j + \sum_{p=1}^n a^p u_p, \lambda^j + \sum_{p=1}^n a^p \lambda_p \right) \\ &= R(u^j, \lambda^j) + \frac{\partial R}{\partial u} \Big|_j (a u_1 + a^2 u_2 + \cdots) + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \Big|_j (a \lambda_1 + a^2 \lambda_2 + \cdots) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial u^2} \Big|_j (a u_1 + a^2 u_2 + \cdots) (a u_1 + a^2 u_2 + \cdots) \end{aligned} \quad (1.95)$$

En imposant  $R(u^j, \lambda^j) = 0$ , et en ordonnant les termes suivant les puissances croissantes de  $a$ , on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= a \left\{ \frac{\partial R}{\partial u} \Big|_j u_1 + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \Big|_j \lambda_1 \right\} \\ &\quad + a^2 \left\{ \frac{\partial R}{\partial u} \Big|_j u_2 + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \Big|_j \lambda_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial u^2} \Big|_j u_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial \lambda^2} \Big|_j \lambda_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial \lambda \partial u} \Big|_j \lambda_1 u_1 \right\} \\ &\quad + a^3 \left\{ \frac{\partial R}{\partial u} \Big|_j u_3 + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \Big|_j \lambda_3 + \text{termes dépendants de } u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2 \right\} \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (1.96)$$

ce qui donne sous la forme condensée :

$$R(u(a), \lambda(a)) = a R_1 + a^2 R_2 + \cdots = 0 \quad (1.97)$$

Cette relation devant être vérifiée pour toute valeur de  $a$ , cela conduit à :

$$R_p = 0 \quad \text{pour } p \geq 1 \quad (1.98)$$

Dans [Cochelin *et al.*, 2007], on trouve une description complète de la MAN, ainsi que des améliorations et des applications dans : la mécanique de milieux déformables, l’équation de Navier-Stokes stationnaire, l’élasticité non linéaire géométrique, les milieux à comportement non linéaire et le contact unilatéral.

## 4.4 Détection de points limites et de points de bifurcation

Pour la détection de points critiques il y a deux types de méthodes :

- **Les méthodes directes** : une condition d'existence du point critique est incluse dans le système d'équations à résoudre (système étendu). Cette condition d'existence est une fonction scalaire qui disparaît dans le point critique, et reste suffisamment continue autour du point. La solution du système étendu est exactement le point critique. [Seydel, 1979, 1983, 1988; Weitschke, 1985; Werner et Spence, 1984; Moore et Spence, 1980; Keener et Keller, 1973; Abbott, 1978].
- **Les méthodes indirectes** : consistent à calculer plusieurs solutions dans le voisinage du point critique par une méthode de continuation. En même temps, un critère est évalué pour tous  $(u(\lambda), \lambda)$ . Les fonctions test les plus utilisées sont le déterminant ou la valeur propre la plus petite de la matrice de rigidité tangente. Plusieurs auteurs ont travaillé sur ce problème [Riks, 1992; Ramm, 1981b; Wriggers *et al.*, 1988; Wriggers et Simo, 1990; Wagner et Wriggers, 1988] et ont démontré l'utilité de cette méthode dans différentes applications.

Dans le cadre de la MAN, un indicateur pour la détection de points de bifurcation a été proposé par [Boutyourn, 1994]. Un algorithme efficace pour la détection de points de bifurcation a été proposé dans [Vannucci *et al.*, 1998] mais l'algorithme nécessite cependant un calcul précis de la branche fondamentale ce qui augmente considérablement le coût de calcul. Une amélioration a été proposée par [Boutyourn *et al.*, 2004] en utilisant l'approximation de Padé, qui permet de réduire le nombre de pas pour décrire la branche. Dans ce cas, le point de bifurcation ne limite pas la longueur de pas. La technique de détection consiste à analyser les pôles de l'approximation de Padé, les pôles représentant les points de bifurcation.

## 5 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté le problème de référence et les formulations Lagrangiennes et corotationnelle pour les problèmes en grandes transformations. Nous avons ainsi présenté les différents modèles et discrétisations pour la modélisation des structures élancées (poutres, plaques et coques), l'analyse de stabilité des structures élancées ainsi que les méthodes classiques pour la résolution des problèmes non-linéaires.

# Chapitre 2

## Stratégies non-linéaires de calcul pour la résolution des problèmes de grande taille

*Dans ce chapitre, nous présentons des méthodes et techniques de résolution classiquement utilisées dans l'industrie adaptées à la résolution des problèmes de grande taille. Deux familles de stratégies sont présentées : les approches multi-échelles et les méthodes de décomposition de domaine. Finalement les principes des méthodes de Newton-Krylov-Schur qui servent de base à la résolution des problèmes non-linéaires sont rappelés. De même les principes de la stratégie LaTin avec laquelle les méthodes développées dans ce travail présentent une certaine proximité est évoquée.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Problématique . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>2</b>	<b>Quelques approches classiques et leurs limitations . . . . .</b>	<b>54</b>
2.1	Condensation statique . . . . .	54
2.2	Approches descendantes . . . . .	54
2.3	Techniques de raffinement local . . . . .	55
2.4	Illustration de l'apport et des limites des approches descendantes en non-linéaire géométrique . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Méthodes basées sur la théorie de l'homogénéisation . . . . .</b>	<b>63</b>

3.1	Homogénéisation des milieux périodiques en élasticité . . . . .	63
3.2	Extensions de la théorie de l'homogénéisation au non-linéaire . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Méthodes de superposition et adaptatives . . . . .</b>	<b>68</b>
4.1	Méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique . . . . .	68
4.2	Méthode Arlequin . . . . .	68
4.3	Méthodes multigrilles . . . . .	69
4.4	Méthodes basées sur la partition de l'unité . . . . .	70
4.5	Méthode variationnelle multiéchelle . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Méthodes de Décomposition de Domaine . . . . .</b>	<b>72</b>
5.1	Problème de référence et notations . . . . .	72
5.2	Méthode Primale . . . . .	73
5.3	Méthode Duale . . . . .	75
5.4	Méthode Mixte . . . . .	77
5.5	Autres méthodes . . . . .	82
5.6	Méthodes de résolution des problèmes non-linéaires de grande taille . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Bilan . . . . .</b>	<b>86</b>

---

# 1 Problématique

Pour de grandes structures possédant des détails structuraux fins, le nombre d'inconnues peut devenir important, classiquement de l'ordre de plusieurs millions. Le développement d'ordinateurs parallèles à nombre important de cœurs invite à revisiter les méthodologies de calculs dans le but d'utiliser leurs capacités. Bien sûr la base concerne les méthodes permettant un traitement efficace de problèmes linéaires de grandes tailles issus d'une discrétisation E.F. L'extension aux problèmes non-linéaires, motivation de cette thèse, dans le cas de non-linéarités géométriques a été beaucoup moins étudiée. Dans le domaine linéaire deux grandes classes de méthodes ont été proposées : les méthodes multiéchelles de type hiérarchiques et les méthodes de décomposition de domaine qui pour être efficaces doivent également introduire un aspect multiéchelle par l'intermédiaire d'un problème appelé grossier, macroscopique.

Dans les approches multi-échelles, on utilise des hypothèses particulières du problème de base pour le simplifier et le rendre abordable. Parmi celles-ci, on peut citer : les approches descendantes utilisées dans l'industrie, les méthodes basées sur la théorie de l'homogénéisation construisant un problème global macroscopique de plus petite taille représentatif du problème initial ou les méthodes de superposition ou d'enrichissement qui superposent à la solution d'un problème macroscopique, dans les zones d'intérêt, un enrichissement microscopique.

Les méthodes basées sur les techniques de sous-structuration et de décomposition de domaine cherchent à résoudre le problème fin complet en effectuant un partitionnement du problème initial en problèmes de taille inférieure.

Dans le domaine du calcul des structures, la plupart des travaux ont été réalisés dans le cadre de l'élasticité linéaire. Les applications en non-linéaire sont moins nombreuses et s'intéressent davantage aux non-linéarités matériau qu'aux non-linéarités géométriques pour lesquelles la littérature est bien moins importante.

## 2 Quelques approches classiques et leurs limitations

### 2.1 Condensation statique

Cette méthode, aussi appelée communément « super-élément », permet de réduire de manière importante le nombre de degrés de liberté d'un calcul, en éliminant les inconnues internes de certaines zones. Des calculs initialement trop coûteux peuvent ainsi devenir accessibles. On peut noter que la résolution du problème condensé, suivi par une étape de détermination des solutions internes, permet d'obtenir la solution du problème discrétisé initial. Par ailleurs, elle est adaptée au processus de développement en usage dans l'industrie, et permet des échanges de modèles discrets entre partenaires industriels, via les opérateurs condensés, sans dévoiler les détails structuraux internes. Ces approches sont cependant aujourd'hui limitées au cas linéaire, voire au cas de grands déplacements/rotations de sous-structures au comportement élastique linéaire [Belesis et Labeas, 2010]. Par ailleurs, la matrice condensée obtenue présente l'inconvénient d'être une matrice pleine.

### 2.2 Approches descendantes

Les approches descendantes reprennent la structure organisationnelle classique de la pyramide des essais et des modèles E.F., elles reposent sur un grand nombre de modèles numériques « emboîtés », adaptés à chaque échelle de modélisation, de sorte à maîtriser la taille et la complexité de chacun des problèmes à résoudre [Cornuault, 1998]

Dans le secteur aéronautique, on associe par exemple à la structure complète de l'avion un modèle linéaire très grossier, constitué d'éléments de plaques et poutres, où les détails structuraux (fixations, passages de câbles, ...) ne sont pas représentés ou bien sont idéalisés (raidisseurs remplacés par des poutres). Etant donné la taille des structures considérées, ces modèles atteignent cependant vite des tailles conséquentes, en dépit des approximations réalisées. Ils permettent cependant, par application des efforts aérodynamiques calculés par ailleurs, d'avoir une approximation raisonnable des flux d'effort dans la structure. Aux échelles inférieures, on utilise des modèles plus précis sur des zones restreintes de la structure, comme des tronçons de fuselage ou d'aile. Les géométries peuvent être un peu mieux respectées (ex. forme des raidisseurs), les maillages sont plus fins, certains détails structuraux apparaissent, des analyses non-linéaires peuvent être menées. A un niveau de modélisation encore plus fin, on peut envisager des géométries encore plus réalistes, tridimensionnelles, ou des détails technologiques très fins : on peut citer pour exemples des zones de fixation avec modélisations des alésages et des rivets, et avec prise en compte des zones de contact, ou bien encore des zones endommagées : fissure, délaminage, ... Ces approches sont ainsi souvent qualifiées de méthodes de « zoom structural », ou de ré-analyse locale.

Le point faible de ces approches réside dans les techniques de couplage mises en œuvre. En effet, il ne s'agit le plus souvent que d'une transmission unidirectionnelle des informations, du modèle global grossier vers les modèles raffinés, d'où leur qualification d'approches descendantes. En pratique, des quantités mécaniques, déplacement ou flux d'effort, sont extraites de la solution globale grossière pour servir de conditions aux limites aux calculs raffinés à l'échelle inférieure, après interpolation aux noeuds du maillage fin. Des règles métiers ont été définies pour assurer le conservatisme, i.e. la surestimation de la charge critique ou de rupture, de telles approches dans les cas considérés. Cependant, elles ne peuvent prendre en compte au niveau global les effets tels que les redistributions de contrainte induits par des comportements locaux adoucissants. Elles sont ainsi limitées aux cas où le comportement local n'a pas d'influence notable sur la réponse globale de la structure.

Une première famille de méthodes permettant de faire dialoguer les échelles [Hirai *et al.*, 1984; Mao et Sun, 1991; Whitcomb, 1991], s'appuie sur ces approches descendantes en permettant un certain retour d'information du modèle local vers le modèle global.

Ces méthodes proposent en général de prendre en compte les résultats du modèle local pour corriger le modèle global, et éventuellement d'itérer jusqu'à vérifier l'équilibre. Elles restent cependant limitées à des géométries simples, des comportements globaux linéaires ou des cas de chargement restreints.

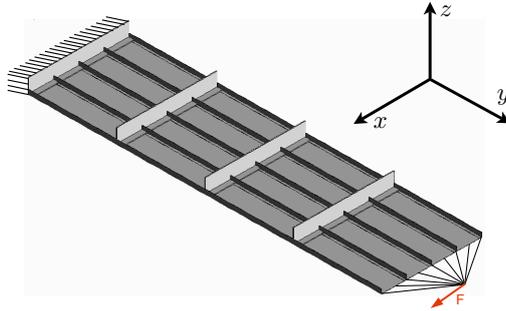
## 2.3 Techniques de raffinement local

La méthode de raffinement local par collage est aussi utilisée dans les bureaux d'étude, en particulier dans les zones les plus complexes. Elle consiste à coller un modèle fin de la zone d'intérêt au modèle grossier du reste de la structure par l'intermédiaire d'éléments d'interface. Le calcul est réalisé sur l'ensemble de la structure et permet de prendre en compte un réel couplage entre les modèles. La technique de collage cinématique introduit des contraintes cinématiques au moyen de multiplicateurs de Lagrange pour assurer que les déplacements des noeuds du maillage fin, dit « esclaves », suivent la cinématique des noeuds, arêtes ou facettes du maillage global, dit « maître ». Cette technique permet de coupler des maillages de raffinement différents sans avoir à réaliser d'adaptation des maillages sur les zones de collage.

Le principal problème avec ce type des méthodes vient de la nécessité de connaître *a priori* la zone de développement de la non-linéarité, car si la non-linéarité se développe en dehors de cette zone les résultats ne sont pas satisfaisants.

## 2.4 Illustration de l'apport et des limites des approches descendantes en non-linéaire géométrique

Pour illustrer les intérêts et limites de ces approches, P. Cresta [Cresta, 2008] a proposé de les étudier à travers leur mise en œuvre pour le calcul d'un panneau raidi avec flambage.



**Figure 2.1:** Géométrie du panneau raidi étudié

La géométrie du cas-test retenue est un panneau raidi (FIG. 2.1), fixé à son extrémité gauche et où l'on bloque les déplacements verticaux des cadres (raidisseurs transverses) afin d'éviter un mode de flambage global. Un chargement en effort de  $10000\text{ N}$  est imposé par l'intermédiaire d'éléments rigides liés à l'extrémité droite, de sorte à mettre globalement la structure en flexion dans le plan  $xy$ . Le matériau utilisé est de l'aluminium ( $E = 70000\text{ Mpa}$ ). L'épaisseur de la peau est de  $1\text{ mm}$ , pour des dimensions de la structure de  $2400\text{ mm} \times 680\text{ mm}$ .

### Calcul de référence

La structure a été maillée finement, pour mener un calcul direct en non-linéaire géométrique. Le modèle comporte plus de 127000 degrés de liberté. Le problème a été résolu avec le logiciel Samcef (module Mecano), selon une méthode de Newton-Raphson avec une station de travail de type PC (processeur Opteron, 1Go de RAM). Les FIG. 2.2, 2.3 et 2.4 représentent les solutions obtenues pour trois niveaux de chargement différents.

On observe l'apparition de flambages locaux dans la zone de compression maximale, qui se propagent au reste de la structure au fur et à mesure de l'augmentation du chargement. Le tracé du déplacement du point d'application de l'effort en fonction du niveau de chargement (FIG. 2.5) met bien en évidence le caractère non-linéaire de la réponse globale. Les trois niveaux de chargement correspondant aux figures précédentes sont repérés par des ronds pleins sur cette courbe.

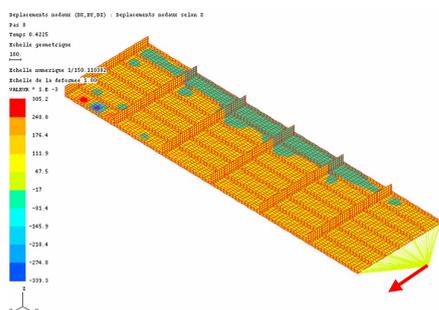


Figure 2.2: Solution à  $t = t_1$

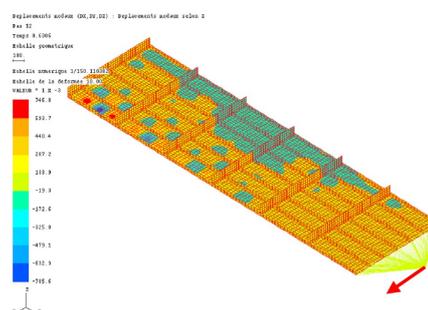


Figure 2.3: Solution à  $t = t_2$

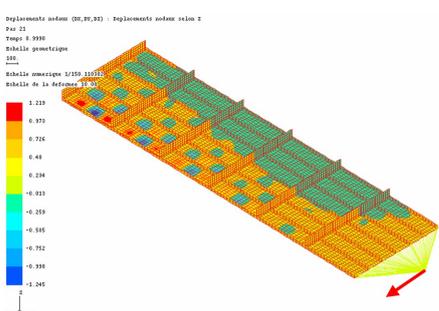


Figure 2.4: Solution à  $t = t_3$

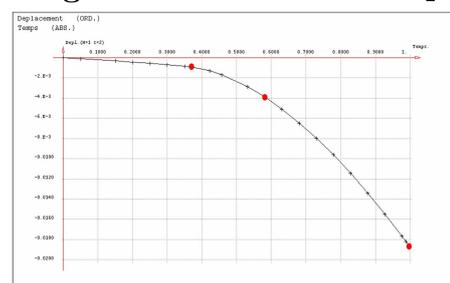


Figure 2.5: Evolution du déplacement suivant  $y$  du point d'application de l'effort

## Méthodes alternatives

### Approches descendantes :

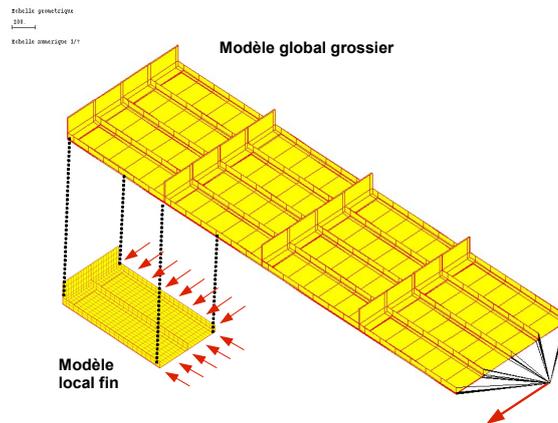
Deux nouveaux modèles numériques sont définis : un modèle grossier de l'ensemble de la structure et un modèle fin de la zone où le phénomène de flambage est susceptible de s'initier. La commande *.ZOOM* de Samcef est utilisée pour la liaison entre ces deux modèles. La FIG. 2.6 illustre les maillages des différents modèles et leur interaction.

La procédure de calcul suit les étapes suivantes :

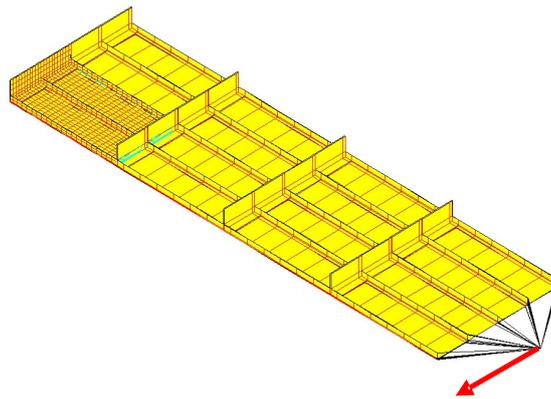
- un premier calcul non-linéaire sur le modèle global grossier est réalisé, en imposant le chargement extérieur.
- un calcul non-linéaire sur le modèle local fin est ensuite mené, en utilisant comme conditions aux limites les déplacements obtenus à chaque incrément de l'étape globale, et en interpolant linéairement entre ces points.

### Raffinement local :

Pour cette stratégie de calcul, une zone du maillage global est remplacée par le maillage fin. C'est la fonction *.STICK* de Samcef qui effectue un collage cinématique des nœuds du maillage fin sur les facettes des éléments du maillage grossier. La FIG. 2.7 représente le maillage résultant. Le calcul non-linéaire est mené de la même manière sur le problème couplé défini plus haut.



**Figure 2.6:** Ré-analyse local sur un panneau raidi en flexion : modèles associés à chaque échelle



**Figure 2.7:** Illustration d'une technique de collage cinématique sur une structure de panneau raidi en flexion

## Analyse des résultats

### Temps de calcul

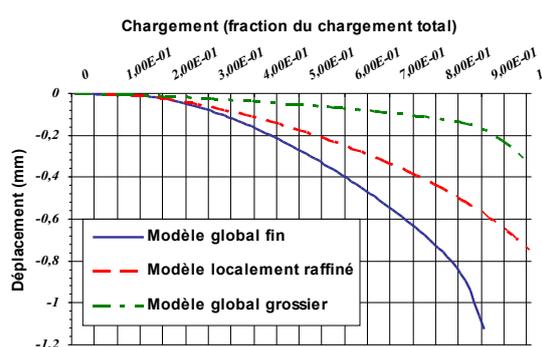
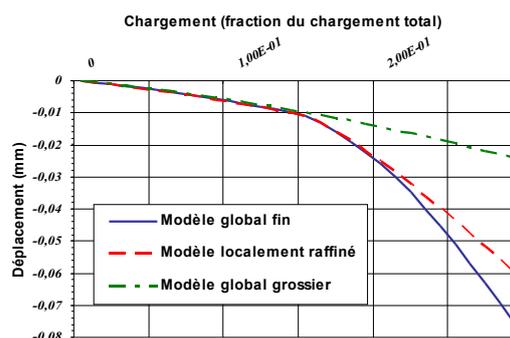
Les temps de calcul pour les différentes méthodes sont récapitulés dans le tableau 2.4. On peut constater ici la différence en terme de temps de calcul entre l'analyse globale fine et les méthodes présentées ci-dessus. Ces écarts expliquent l'intérêt suscité par de telles stratégies dans les bureaux d'études. L'analyse qualitative des résultats souligne cependant les limites de telles approches.

**Table 2.1:** Récapitulatif des temps de calcul pour les différents modèles

Problème	Nombre de d.d.l.	Nombre d'itérations globales	Temps CPU pour la résolution N.L.
Global Fin	127123	319	1h 31min 54s
Global grossier	17965	211	6min 6s
puis : Local fin	17058	309	8min 29s
Localement raffiné	32469	333	16min 54s

### Reponse au niveau global

Les FIG. 2.8 et 2.9 présentent l'évolution du déplacement selon  $y$  du point d'application de la force sur la structure globale, pour un chargement compris respectivement entre 0 et 10000  $N$  ( $t = 0$  à  $t = 1$ ) et entre 0 et 3000  $N$  ( $t = 0$  à  $t = 0.3$ ). On  $y$  compare les courbes obtenues pour le modèle global fin de référence, le modèle global grossier utilisé pour l'approche descendante, et pour le modèle localement raffiné. On peut remarquer que les trois courbes sont tout d'abord concordantes jusqu'à  $t = 0.15$ , première apparition du flambage de peau. La solution est en effet linéaire et les trois méthodes sont presque équivalentes. On observe ensuite une divergence des trois courbes. La solution du calcul global grossier reste pratiquement linéaire jusqu'à un niveau de chargement plus élevé qui correspond au flambage global de la structure à  $t = 0.8$ . La solution du calcul avec raffinement local présente quant à elle la même bifurcation que la solution complète, correspondant à l'apparition du flambage dans la zone raffinée, pour  $t = 0.15$  jusqu'à  $t = 0.2$ . Au-delà de ce niveau de chargement, on a en effet l'apparition du flambage dans la zone non-raffinée, ce que le modèle avec raffinement local ne peut prendre en compte.

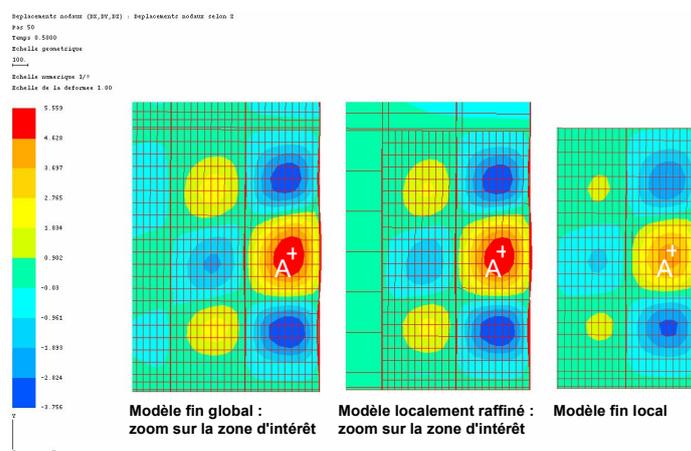

**Figure 2.8:** Evolution du déplacement en  $y$  du point d'application de l'effort.  $t = 0$  à 1

**Figure 2.9:** Evolution du déplacement en  $y$  du point d'application de l'effort (zoom).  $t = 0$  à 0.3

En résumé, la méthode de ré-analyse locale ne permet pas de prendre en compte les non-linéarités au niveau global, du fait du caractère unidirectionnel du transfert

de champ. La méthode de raffinement local, quant à elle, est une bonne approximation tant que les non-linéarités restent dans la zone raffinée.

### Réponse au niveau local

Nous nous intéressons maintenant à la solution locale dans la zone d'intérêt, où se produit le phénomène non-linéaire de flambage. La FIG. 2.10 présente ainsi les solutions déformées obtenues par les trois méthodes, à savoir, le calcul complet, la méthode de raffinement local avec collage et la méthode de ré-analyse locale, pour un chargement de 2000  $N$ . Les couleurs représentent l'amplitude du déplacement hors-plan (suivant l'axe  $z$ ).



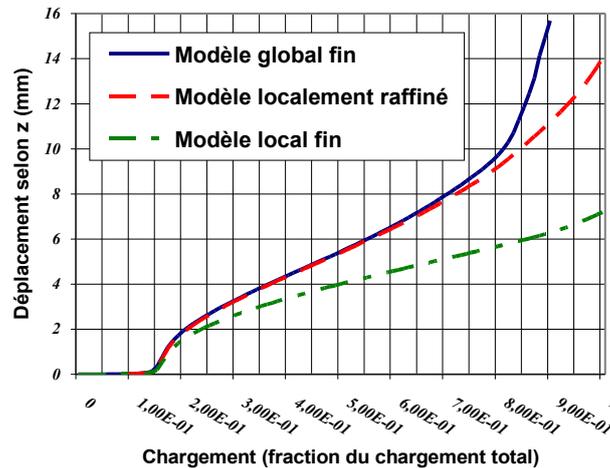
**Figure 2.10:** Comparaison de la solution de référence (analyse globale fine) et la solution obtenue par ré-analyse locale. Les couleurs représentent le déplacement hors-plan (suivant  $z$ )

Si les résultats obtenus par la méthode de raffinement local sont très proches des résultats du calcul complet à ce niveau de chargement, on observe ici un écart relativement important (de l'ordre de 20% pour les déplacements hors-plan) pour les résultats obtenus par la méthode de ré-analyse locale. Plus grave encore, on peut noter que le phénomène de flambage est ici sous-estimé. Le flambage pouvant être à l'origine de la rupture des raidisseurs, on voit ici une limitation de cette méthode d'analyse. En effet, les déplacements obtenus à partir du modèle grossier, plus rigide, sont forcément sous-estimés par rapport à la solution de référence.

**Remarque :** *On peut nuancer quelque peu ces propos. En effet, on n'a pu ici tester que des conditions aux limites en déplacement, la récupération des conditions aux limites en effort n'étant pas implémentée dans Samcef. Or, les efforts obtenus à partir du modèle grossier sont au contraire surestimés. Les résultats obtenus en récupérant les flux d'effort devraient donc être plutôt conservatifs, tout en restant*

relativement éloignés de la solution de référence. Dans tous les cas, on peut remarquer que la méthode ne permet pas l'échange d'informations entre les échelles et reste donc extrêmement approximative pour les phénomènes étudiés ici.

Afin de comparer plus précisément les méthodes, la FIG. 2.11 représente l'évolution du déplacement hors-plan d'un point  $A$  de la structure, situé en milieu de zone de flambage et marqué d'une croix sur la FIG. 2.10, pour chacune de ces stratégies. On peut remarquer que les trois modèles donnent une valeur identique pour la charge de première bifurcation, à  $t = 0.15$ . Ceci est un résultat plutôt attendu, car il s'agit ici de la zone présentant les premières non-linéarités. La structure conserve un comportement global linéaire jusqu'au flambage de cette zone, pour lequel les méthodes sont presque équivalentes. La prédiction de la charge globale critique dépend cependant d'un choix approprié de la zone de raffinement, laissé au savoir-faire du métier.



**Figure 2.11:** Evolution du déplacement hors-plan du point  $A$  pour les trois modèles introduits

Si l'on s'intéresse maintenant au comportement en post-flambage, on remarque que la solution obtenue par raffinement local est assez proche de la solution de référence pour un chargement inférieur à  $t = 0.7$ , c'est-à-dire avant que les phénomènes de flambage global n'apparaissent. Au contraire, la solution par ré-analyse locale est sensiblement différente. Cet écart provient des conditions aux limites imposées, issues du calcul grossier et qui ne prennent pas en compte le comportement local et la redistribution des flux d'efforts dans la structure. Il est ainsi difficile d'utiliser ces résultats pour calculer des critères de rupture locaux par exemple. Dans le cas de conditions aux limites imposées en déplacement, on peut cependant estimer *a posteriori* la qualité de la solution locale en mesurant la non-vérification de l'équilibre entre les modèles local et global sur l'interface.

L'écart observé à partir de  $t = 0.7$  s'explique par l'échelle du phénomène en jeu.

Ce dernier n'est plus un phénomène local puisqu'on observe un flambage global de la structure inter-cadres et le maillage grossier utilisé est trop peu raffiné pour une analyse précise du phénomène. Les méthodes étudiées ici ne permettent pas de le prendre en compte.

## **Bilan**

Cet exemple d'application nous a permis d'illustrer les intérêts et limites des deux approches classiquement utilisées en bureaux d'étude.

On a ainsi observé que les deux méthodes permettaient de bien prévoir la charge limite initiale de flambage, pour un coût de calcul bien inférieur au coût de calcul global finement discrétisé, ce qui explique pour une grande part leur succès dans un contexte industriel. Cependant, la solution en post-flambage peut présenter des écarts plus ou moins importants avec la solution de référence, en fonction de la modélisation choisie et du niveau de chargement. Par ailleurs, toutes ces méthodes nécessitent de connaître *a priori* la zone à raffiner, où le comportement va être non-linéaire, de s'assurer que les non-linéarités éventuelles restent bien confinées dans cette partie du modèle. De même, l'opération de mise en donnée peut s'avérer fastidieuse si elle n'est pas automatisée par le code EF utilisé.

### 3 Méthodes basées sur la théorie de l'homogénéisation

Plusieurs méthodes multi-échelles reposent sur le principe d'homogénéisation. Les premiers travaux, basés sur des études analytiques ou semi-analytiques à l'échelle macroscopique, ont permis de mettre en place des méthodes d'homogénéisation pour le matériaux, aboutissant ainsi à l'identification d'un comportement macroscopique entre des quantités moyennes « effectives » [Eshelby, 1957; Hashin, 1962; Hill, 1965; Mori et Tanaka, 1973]. Cependant, ces dernières ne permettent pas de remonter aux propriétés locales. L'introduction de méthodes de plus en plus complexes au niveau microscopique ont donné lieu à des méthodes appelées « Unit Cell Methods » [Christman *et al.*, 1989; Tvergaard, 1990; Sluis *et al.*, 1999b]. Elles permettent d'identifier un modèle macroscopique par des « essais numériques » sur un volume élémentaire représentatif (VER) de la structure et d'obtenir des informations locales sur la solution.

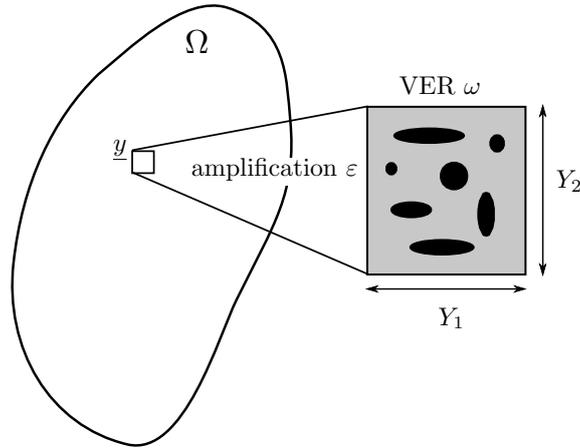
Une méthode d'homogénéisation particulière utilisée dans le cas des milieux périodiques est celle proposé par Sanchez-Palencia [Sánchez-Palencia, 1974; Bensoussan *et al.*, 1978; Sánchez-Palencia, 1980] qui a servi de base à plusieurs extensions numériques (*FE2*) Malheureusement, la définition *a priori* d'un modèle macroscopique reste très compliqué pour des problèmes non-linéaires ou présentant de forts gradients.

Notons que toutes les méthodes d'homogénéisation reposent sur une hypothèse de séparation d'échelles. Ces hypothèses ne sont plus valides pour des singularités (cas des bords, d'introduction d'efforts). De plus, leur extension aux problèmes non-linéaires est problématique.

#### 3.1 Homogénéisation des milieux périodiques en élasticité

Cette technique, basée sur l'analyse asymptotique, est utilisable dans le cas où la structure résulte de la répétition périodique d'un motif de base appelé volume élémentaire représentatif (VER) comme sur la FIG. 2.12. Elle a été notamment utilisée pour l'étude des matériaux composites. Dans ce cas de figure, la solution à l'échelle de la microstructure est quasi-périodique (superposition d'une valeur moyenne quasi-constante par maille et d'une solution microscopique, dont la forme se reproduit d'une maille à l'autre) au moins loin des bords de la structure, et d'autant mieux que la structure est grande par rapport à la maille élémentaire ( $l \ll L$ ). On peut alors tenir compte de cette propriété pour découpler les effets aux différentes échelles.

L'idée consiste alors à introduire deux variables (une par échelle) pour décrire la solution : une variable de position macroscopique  $\underline{X}$  à l'échelle de la structure ( $L$ ), et une variable de position  $\underline{y}$  à l'intérieur de la maille dont l'amplitude varie dans un intervalle de largeur  $l$  (FIG. 2.12). En notant le rapport d'échelles  $\varepsilon = \frac{l}{L}$ , on peut définir une variable  $\underline{Y} = \frac{\underline{y}}{\varepsilon}$  (*zoom*) pour qu'elle soit comparable en amplitude à  $\underline{X}$ .



**Figure 2.12:** Volume élémentaire représentatif (VER)

La solution en déplacement du problème s'écrit alors  $\underline{u}(M) = \underline{u}(\underline{X}, y)$  et l'opérateur de Hooke est  $\underline{\underline{K}}(M) = \underline{\underline{K}}(y)$  puisqu'il est périodique d'une maille à l'autre. L'idée consiste alors à développer la solution sous la forme d'un développement asymptotique en  $\varepsilon$ . Ainsi :

$$\underline{u}(\underline{X}, y) = \underline{u}_0(\underline{X}, y) + \varepsilon \underline{u}_1(\underline{X}, y) + \varepsilon^2 \underline{u}_2(\underline{X}, y) + \dots \quad (2.1)$$

Ce développement est d'autant plus judicieux que  $\varepsilon$  est petit. La deuxième étape consiste à développer les équations d'équilibre,  $(\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f}_d = 0$ , où  $\underline{f}_d$  est une force volumique et  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{K}}(\underline{\underline{\epsilon}})$ , puis à les écrire séparément pour les différentes puissances du paramètre  $\varepsilon$  qui apparaissent. Les méthodes d'homogénéisation du premier ordre tronquent le développement à l'ordre 1 et permettent ainsi de déterminer le champs macroscopique  $\underline{u}_0$  et le champ microscopique  $\underline{u}_1$ . On peut alors écrire une succession de problèmes aux différents ordres en  $\varepsilon$  :

**Problème en  $\underline{u}_0(\varepsilon^{-2})$  :**  $\text{div}_Y(\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{\epsilon}}_Y}(\underline{u}_0) = \underline{0})$ . permet de montrer que  $\underline{u}_0$  est indépendant de  $y$  :  $\underline{u}_0(M) = \underline{u}_0(\underline{X})$ . On notera  $\underline{\underline{\epsilon}}_0 = \underline{\underline{\epsilon}}_x(\underline{u}_0)$ ,

**Problème en  $\underline{u}_1(\varepsilon^{-1})$  :**  $\text{div}_Y(\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{\epsilon}}_Y}(\underline{u}_1) = \text{div}_Y(\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{\epsilon}}_0})$ . Ce problème s'écrit sur un VER  $\omega$  ( $\underline{X}$  étant fixé, la variable courante étant  $\underline{Y}$  dans le VER et  $\underline{\underline{\epsilon}}_0$  étant considéré connu et uniforme sur  $\omega$ ). Ce problème correspond à la détermination d'une solution périodique fonction de  $\underline{Y}$  pour toutes les déformations macroscopiques  $\underline{\underline{\epsilon}}_0$ . Ce problème admet une unique solution en déformation. Il existe un champ de tenseur  $\underline{\underline{H}}(y)$  (opérateur de localisation des déformations) d'ordre 4, qui relie la déformation locale à la déformation macroscopique  $\underline{\underline{\epsilon}}_0$  :

$$\underline{\underline{\epsilon}}_Y(\underline{u}_1) = \underline{\underline{H}}(y) \underline{\underline{\epsilon}}_0 \quad (2.2)$$

D'où, en notant  $\underline{\underline{\epsilon}}_m = \underline{\underline{\epsilon}}_0 + \underline{\underline{\epsilon}}_Y(u_1)$ , la valeur principale de la déformation locale (déformation à l'ordre 0) :

$$\underline{\underline{\epsilon}}_m = \underline{\underline{\epsilon}}_0 + \underline{\underline{H}}(y)\underline{\underline{\epsilon}}_0 = (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{H}})\underline{\underline{\epsilon}}_0 \quad (2.3)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_m = \left( \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{H}}(y) \right) \underline{\underline{\epsilon}}_0 \quad (2.4)$$

**Problème en  $\underline{\underline{u}}_2(\varepsilon^0)$  :**  $\text{div}_X(\underline{\underline{K}} \underline{\underline{\epsilon}}_0) + \text{div}_Y(\underline{\underline{K}} (\underline{\underline{\epsilon}}_X(u_1) + \underline{\underline{\epsilon}}_Y(u_2))) + \underline{\underline{f}}_d = 0$ . Les méthodes d'homogénéisation du premier ordre ne tiennent pas compte de la solution à ce problème mais uniquement de la condition d'existence d'une solution qui s'écrit :

$$\int_{\omega} \text{div}_X(\underline{\underline{\sigma}}_m) + \underline{\underline{f}}_d d\omega = 0 \quad (2.5)$$

En notant  $\langle \cdot \rangle_{\omega} = \int_{\omega} \cdot d\omega$  l'opérateur moyenne sur le VER  $\omega$  et en utilisant les résultats du problème à l'ordre 0, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{div}_x(\langle \underline{\underline{\sigma}}_m \rangle_{\omega}) + \langle \underline{\underline{f}}_d \rangle_{\omega} &= 0 \\ \underline{\underline{\sigma}}_M = \langle \underline{\underline{\sigma}}_m \rangle_{\omega} &= \langle \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{H}} \rangle_{\omega} \langle \underline{\underline{\epsilon}}_0 \rangle_{\omega} \\ \text{avec } \langle \underline{\underline{\epsilon}}_0 \rangle_{\omega} &= \underline{\underline{\epsilon}}_x(u_0) \end{aligned}$$

La condition d'existence du problème en puissance 0 de  $\underline{\underline{\epsilon}}$  nous a donc donné la formulation d'un problème dit macroscopique sur des quantités moyennes (contrainte macro  $\underline{\underline{\sigma}}_M$ , déformation macro  $\underline{\underline{\epsilon}}_M = \langle \underline{\underline{\epsilon}}_0 \rangle_{\omega}$  et déplacement macro  $\underline{\underline{u}}_M = \underline{\underline{u}}_0$ ). De plus, on a obtenu un opérateur de comportement homogénéisé  $\underline{\underline{K}}_M = \langle \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{H}} \rangle_{\omega}$ .

Cette approche est donc une véritable stratégie de calcul à deux échelles puisqu'elle permet non seulement de formuler un problème à l'échelle macroscopique mais aussi de remonter aux propriétés locales de la solution. En effet, connaissant la solution macroscopique  $\underline{\underline{u}}_M$ , le champ de contraintes locales est obtenu grâce à l'opérateur de localisation  $\left( \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{H}} \right)$ . L'hypothèse de périodicité n'est plus vérifiée près des bords ou des zones à forts gradients, et un traitement spécifique est nécessaire [Auriel *et al.*, 1982; Dumontet, 1986].

### 3.2 Extensions de la théorie de l'homogénéisation au non-linéaire

La théorie classique de l'homogénéisation des milieux périodiques a donné lieu à diverses extensions au cadre non-linéaire. Certaines approches s'appuient sur des développements asymptotiques de toutes les variables du problème (déformations

anélastiques, paramètre d'endommagement) [Devries *et al.*, 1989; Fish *et al.*, 1997]. Ces approches sont limitées à des comportements matériaux et des géométries microscopique simples.

D'autres méthodes, basées sur une résolution de deux problèmes imbriqués : un à l'échelle macroscopique (résolu par une technique éléments finis standard), et l'autre à l'échelle microscopique (résolu par une technique éléments finis standard [Smit *et al.*, 1998; Feyel et Chaboche, 2000] ou par d'autres techniques comme la « Voronoï Cell Finite Element Method » [Ghosh *et al.*, 1995]). Elles ne nécessitent pas d'hypothèses *a priori* sur le modèle macroscopique, parce qu'elles déduisent la relation entre les quantités duales macroscopique en chaque point d'intérêt de la structure par simulation numérique en résolvant des problèmes à l'échelle microscopique.

### 3.2.1 Eléments finis à deux niveaux : méthode FE2

La méthode des éléments finis à deux niveaux (FE2) [Feyel et Chaboche, 2000], propose de discrétiser la structure macroscopique par des éléments finis et d'associer à chaque point d'intégration un modèle microscopique d'un VER. On cherche, alors, une solution sur chaque cellule comme une décomposition en partie macro ( $M$ ), et en partie micro ( $m$ ), à qui on impose des conditions de périodicité. Le découplage s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) &= \underline{\underline{\sigma}}_M + \underline{\underline{\sigma}}_m(\underline{x}) \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\sigma}}_M = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_\omega \\ \underline{\underline{u}}(\underline{x}) &= \underline{\underline{u}}_M(\underline{x}) + \underline{\underline{u}}_m(\underline{x}) = \underline{\underline{\epsilon}}_M \underline{x} + \underline{\underline{u}}_m \\ \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) &= \underline{\underline{\epsilon}}_M + \underline{\underline{\epsilon}}_m(\underline{x}) \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\epsilon}}_M = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_\omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

où  $\underline{x}$  désigne la coordonnée locale associée au VER.  $\underline{\underline{\sigma}}_M$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}_M$  sont constants sur la cellule et correspondent aux valeurs de la contrainte macro et de la déformation macro au point de Gauss considéré.

Le problème micro non-linéaire est résolu de manière itérative sur chaque cellule avec les conditions limites précédentes. Une série de problèmes « micro » peuvent alors être résolus pour obtenir un opérateur tangent homogénéisé  $\underline{\underline{K}}_{\equiv M}$ . Le problème macro consiste à assembler cet opérateur et résoudre le problème macro pour obtenir un incrément de déformation macroscopique  $\Delta \underline{\underline{\epsilon}}_M$ . La convergence est atteinte lorsque la contrainte moyenne  $\underline{\underline{\sigma}}_M$  vérifie les équations d'équilibre macro. Les calculs micro sont complètement indépendants et sont donc parallélisables.

Cette méthode présente les mêmes limitations que la théorie classique ; elle n'est valable que lorsque les échelles sont bien séparées.

### 3.2.2 Milieux continus généralisés au niveau macroscopique

Dans le cas où les échelles ne peuvent être séparées, une amélioration consiste à introduire au niveau macroscopique des milieux continus généralisés de type Cosserat ou second gradient [Zhu *et al.*, 1997; Forest et Sab, 1998; Sluis *et al.*, 1999a;

Kouznetsova *et al.*, 2002; Feyel, 2003] afin de mieux rendre compte des forts gradients au niveau macroscopique. Le comportement du milieu continu généralisé, généralement très difficile à construire, est ici déterminé de manière automatique.

La stratégie proposée dans [Kouznetsova *et al.*, 2002] considère à l'échelle macroscopique un milieu continu du second gradient. A l'échelle microscopique, la solution est alors recherchée sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) &= \underline{\underline{\sigma}}_M(\underline{x}) + \underline{\underline{\sigma}}_m(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}}_M + Q_M \cdot \underline{x} + \underline{\underline{\sigma}}_m(\underline{x}) \\ \underline{\underline{u}}(\underline{x}) &= \underline{\underline{u}}_M(\underline{x}) + \underline{\underline{u}}_m(\underline{x}) = E_M \cdot \underline{x} + \frac{1}{2} G_M : (\underline{x} \otimes \underline{x}) + \underline{\underline{u}}_m(\underline{x}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

où  $\underline{\underline{\Sigma}}_M$  et  $E_M$  sont des tenseurs symétriques d'ordre 2 constants sur la cellule.  $Q_M$  et  $G_M$  sont des tenseurs d'ordre 3 également constants sur la cellule et possédant des propriétés de symétrie *ad hoc*. On impose aux quantités « micro » des conditions de périodicité sur les frontières de la cellule. La stratégie de résolution suit le même principe que les stratégies du premier ordre.

## 4 Méthodes de superposition et adaptatives

Les approches décrites précédemment et basées sur des techniques d'homogénéisation permettent de définir un problème macroscopique à partir d'études à l'échelle microscopique (passage du micro vers le macro). Les stratégies étudiées dans cette section adoptent un point de vue différent et cherchent plutôt à superposer à la solution d'un problème macroscopique un enrichissement microscopique dans les zones d'intérêt. Nous présentons, dans la suite, les principes de base de ces différentes méthodes.

### 4.1 Méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique

La méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique (HDPM) [Zohdi *et al.*, 1996; Oden et Zohdi, 1997; Oden *et al.*, 1999] consiste à résoudre un problème homogénéisé sur un maillage dont un élément représente une cellule représentative du matériau considéré. Une correction est alors apportée sur certains éléments de ce maillage en résolvant sur les cellules correspondantes un problème aux conditions limites homogènes de type Dirichlet. Un estimateur d'erreur *a posteriori* est proposé afin de déterminer la qualité de la solution corrigée. Si le critère d'erreur n'est pas satisfait, l'opérateur homogénéisé est amélioré pour certaines cellules et on résout à nouveau le problème micro-macro. Le lien de parenté de cette approche avec les méthodes adaptatives est évident. Si, dans les démarches adaptatives, diminuer l'erreur consiste à raffiner le maillage dans les zones les plus erronées, dans la HDPM, cela consiste à adapter plutôt l'échelle de modélisation du matériau : ce qui constitue toute la force de l'approche. L'extension de ces méthodes basée sur l'homogénéisation au non-linéaire reste problématique.

### 4.2 Méthode Arlequin

La méthode Arlequin, proposée par Ben Dhia [Ben Dhia, 1998; Ben Dhia et Rateau, 2001] est une méthode originale proposant de superposer à un problème macroscopique une analyse plus fine dans des régions d'intérêt. Le raccord est écrit de manière faible sur le volume et non pas sur les interfaces comme c'est le cas dans les approches plus classiques. Ainsi, dans ces zones, la superposition des modèles est gérée par l'introduction de fonctions de pondération dans le principe des puissances virtuelles utilisé pour l'écriture de la formulation globale.

La méthode Arlequin s'avère particulièrement intéressant pour l'étude de l'influence d'un détail structural ou d'un défaut micro sur une structure de grande taille. L'avantage de la méthode est de pouvoir positionner le modèle micro à divers endroits sans avoir à remailler le modèle global, et ainsi d'explorer à moindre coût les différents scénarios. Néanmoins une difficulté persiste dans le choix de l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange permettant de recoller en volume les deux modèles dans leur zone de jonction. Par ailleurs, le problème matri-

ciel à résoudre résultant de l'assemblage des deux modèles grossier peut poser des problèmes du fait de sa taille ou de son conditionnement.

### 4.3 Méthodes multigrilles

L'idée des méthodes multigrilles [Southwell, 1935; Fedorenko, 1964] est d'associer à la résolution itérative du système linéaire, une résolution globale de manière à diminuer rapidement l'erreur commise sur les modes aux valeurs propres les plus basses.

La méthode 2-grilles pour résoudre un système  $\underline{\underline{K}}_m \underline{q}_m = \underline{f}_m$ , met en place une démarche de calcul dit cycle en « V » entre une grille grossière et une grille fine « emboîtée ». Le maillage grossier permet de capturer l'erreur résiduelle à grande longueur de variation. La réalisation d'un cycle en « V » sur deux échelles comporte trois étapes :

- Faire diminuer les hautes fréquences de l'erreur, en réalisant plusieurs itérations sur la grille fine avec la méthode itérative choisie.
- Le résidu  $\underline{r}_m^{(i)} = \underline{f}_m - \underline{q}_m^{(i)}$  obtenu est alors restreint à la grille grossière par un opérateur de restriction  $\mathbf{R}$  :  $\underline{r}_M^{(i)} = \mathbf{R}\underline{r}_m^{(i)}$ . Puis, on résout le problème de résidu  $\underline{\underline{K}}_M \underline{e}_M^{(i)} = \underline{r}_M^{(i)}$  associé au maillage grossier où  $\underline{\underline{K}}_M$  est l'opérateur  $\underline{\underline{K}}_m$  restreint à la grille grossière.
- La solution obtenue est prolongée sur la grille fine et permet de corriger  $\underline{q}_m^{(i)}$  comme suit :  $\tilde{\underline{q}}_m^{(i)} = \underline{\underline{P}} \underline{e}_M^{(i)} + \underline{q}_m^{(i)}$  où  $\underline{\underline{P}}$  est l'opérateur de prolongement. Des opérations de lissage supplémentaires peuvent ensuite être effectuées afin de gommer les perturbations induites par l'opérateur de prolongement.

Les méthodes multigrilles permettent d'accélérer la convergence des méthodes itératives classiques. Le passage par une grille grossière permet d'obtenir une approximation du résultat sur une grille plus fine et ainsi de diminuer rapidement l'erreur commise sur les modes aux valeurs propres les plus basses. Par un couplage avec l'échelle grossière, le résultat de l'échelle fine est alors corrigé. Il est cependant difficile de donner un sens au problème grossier associé à la grille grossière. Aussi, il est difficile par cette démarche purement numérique de tenir compte de la spécificité du problème mécanique traité.

Pour résoudre des problèmes non-linéaires, des versions plus récentes, comme la méthode « Full Approximation Storage » (FAS) proposent de traiter le problème non-linéaire directement, sans l'étape de linéarisation, en plaçant les non-linéarités à l'intérieur des itérations multigrilles et en réalisant des relaxations non-linéaires au moyen d'une méthode de Jacobi par bloc. La méthode permet ainsi de réaliser des calculs sans avoir à assembler de matrices globales, mais les résultats obtenus démontrent que pour certains problèmes le coût de calcul peut être pénalisé par un nombre plus élevé d'itérations globales et d'évaluations du résidu non-linéaire

[Mavriplis, 2001].

#### 4.4 Méthodes basées sur la partition de l'unité

- **PUM**

La méthode de la partition de l'unité (PUM) [Melenk et Babuska, 1996] peut-être vue comme une généralisation de la méthode des éléments finis. Elle propose en effet un cadre mathématique rigoureux pour la construction d'espaces d'approximation conforme qui ne sont pas forcément des espaces de fonctions polynomiales. Ces fonctions notées  $\psi_j(\underline{x})$  sont pondérées par les fonctions de forme  $\varphi_i(\underline{x})$  (souvent de type éléments finis) formant une partition de l'unité sur le domaine :  $\sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\underline{x}) = 1$ . Le déplacement solution s'écrit alors :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \underline{u}_i \varphi_i(\underline{x}) + \sum_{i \in \mathbf{I}} \sum_{j \in \mathbf{J}_i} a_j^{(i)} \psi_j(\underline{x}) \varphi_i(\underline{x}) \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{I}$  représente une partition sans recouvrement de la structure et les  $a_j^{(i)}$  sont des coefficients constants, inconnus de notre problème. Cette approximation est capable de reproduire n'importe quelle fonction.

- **GFEM et XFEM**

La méthode des éléments finis généralisés GFEM [Strouboulis *et al.*, 2000] et la méthode des éléments finis étendus XFEM [Moës *et al.*, 1999] combinent une approche éléments finis standard (FEM) avec la méthode de partition de l'unité. L'espace d'approximation FEM est enrichi par des fonctions spéciales provenant d'une certaine connaissance du problème que l'on cherche à traiter. Des fonctions spéciales peuvent être ajoutées sur les éléments proches d'une singularité géométrique puisque'on connaît en ces endroits une expression analytique de la solution.

La méthode GFEM propose de construire ces fonctions en résolvant numériquement à l'échelle fine un certain nombre de problèmes élémentaires, appelés « handbooks ». Cette technique permet en particulier de traiter des problèmes de structures contenant des centaines ou des milliers de trous ou d'inclusions. Dans ce cas, une série de handbooks peut-être associée à un élément du maillage grossier. Les inclusions intersectant cet élément sont isolées. On résout alors une série de problèmes sur un domaine comprenant uniquement ces inclusions et pour des chargements simples de type Dirichlet ou Neumann. La méthode XFEM propose un choix de fonctions spéciales pour traiter des problèmes où la solution présente des discontinuités en s'affranchissant des problèmes de maillage. Les discontinuités peuvent par exemple apparaître sur le déplacement en présence de fissures ou sur sa dérivée normale sur une surface entre des matériaux de nature différente. La description géométrique de ces surfaces de discontinuité est réalisée par la technique des level-sets, qui consiste à représenter une surface  $\Gamma$  comme l'iso-zero d'une fonction. Un choix classique

consiste à prendre la fonction distance signée à cette surface. La description numérique de cette fonction est une interpolation éléments finis classique sur le maillage initial ou un maillage raffiné. Les fonctions spéciales introduites sont de plusieurs types selon les zones à traiter : des fonctions de Heaviside pour les discontinuités, les solutions asymptotiques pour les champs en pointe de fissure.

Les approches basées sur la partition de l'unité permettent d'obtenir une amélioration conséquente de la qualité de la solution par rapport aux approches éléments finis standards en s'affranchissant des problèmes de maillage. Cependant, une attention particulière doit être portée sur le choix des fonctions spéciales afin d'éviter les problèmes de dépendances linéaires avec les fonctions éléments finis classiques. En effet, dans ce cas, le problème devient singulier. Des techniques de factorisation incomplète ou de pénalisation peuvent être utilisées pour pallier ce problème. Une autre limitation de cette approche concerne l'intégration numérique des formulations variationnelles. Les fonctions spéciales ajoutées peuvent en effet être très complexes et nécessiter un effort conséquent pour leur intégration lors de la construction du problème discrétisé. Le gain en temps de calcul obtenu sur les problèmes de maillage et de remaillage est donc en partie compensé par le coût de l'intégration numérique.

## 4.5 Méthode variationnelle multiéchelle

Cette méthode, initialement proposée par Hughes [Hughes, 1995], part du principe que toutes les échelles présentes dans un problème ne sont pas solubles numériquement. L'utilisation d'une discrétisation standard au niveau macroscopique fournit une solution souvent médiocre. L'idée est alors de proposer un principe de superposition consistant à prendre en compte de manière analytique, des problèmes « locaux ». L'effet des petites échelles est alors condensé au niveau macroscopique, ce qui conduit à la définition d'un problème macroscopique « quasi-exact ».

Un point crucial de cette méthode repose sur une bonne approximation de la solution des problèmes micro. Cette méthode, bien adaptée aux méthodes spectrales ou méthodes de Fourier, ne s'applique cependant pas facilement aux éléments finis pour lesquelles les espaces d'approximation ne sont pas suffisamment réguliers. Notons en particulier que dans le cas où l'échelle macroscopique est représentée par des éléments finis linéaires classiques, les opérateurs différentiels doivent être réinterprétés au sens des distributions.

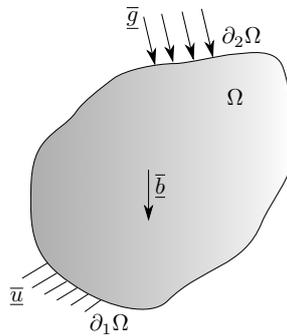
De plus, la problématique de l'interaction éventuelle des échelles fines de ces méthodes reste largement ouverte.

## 5 Méthodes de Décomposition de Domaine

### 5.1 Problème de référence et notations

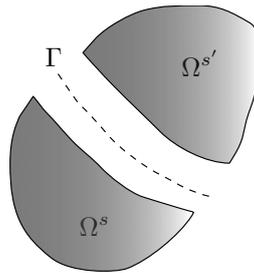
Nous nous plaçons ici dans le cadre de l'élasticité linéaire sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP).

La structure élastique étudiée occupe un domaine  $\Omega$  dont la frontière est notée  $\partial\Omega$ . Elle est soumise à un chargement composé de force de volume  $\bar{b}$  et de forces surfaciques  $\bar{g}$  sur la portion de frontière  $\partial_2\Omega$  de  $\partial\Omega$ . Sur la portion de frontière  $\partial_1\Omega$ , complémentaire de  $\partial_2\Omega$ , le déplacement  $\bar{u}$  est imposé (FIG. 2.13).



**Figure 2.13:** Problème de référence

Les techniques de résolution par décomposition de domaine consistent à établir une partition du domaine initial en  $n$  sous-domaines, comme illustré dans la FIG. 2.14 pour le cas  $n = 2$ .



**Figure 2.14:** Découplage en sous-domaines

Le bord du sous-domaine  $\Omega^s$  sera noté  $\partial\Omega^s$ , dont l'éventuelle partie où le déplacement est imposée est notée  $\partial_1\Omega^s = \partial_1\Omega \cap \partial\Omega^s$ , celle où les efforts sont imposés,  $\partial_2\Omega^s = \partial_2\Omega \cap \partial\Omega^s$ , et la partie complémentaire  $\partial_i\Omega^s$ . On a donc

$$\partial\Omega^s = \partial_1\Omega^s \cup \partial_2\Omega^s \cup \partial_i\Omega^s \quad (2.9)$$

L'interface  $\Gamma$  entre deux sous-domaines est définie par :

$$\Gamma = \partial\Omega^s \cap \partial\Omega^{s'} \quad (2.10)$$

Les notations relative à un sous-domaines sont illustrées dans la FIG. 2.15, où les quantités notées  $\hat{\cdot}$  représentant des quantités d'interfaces.

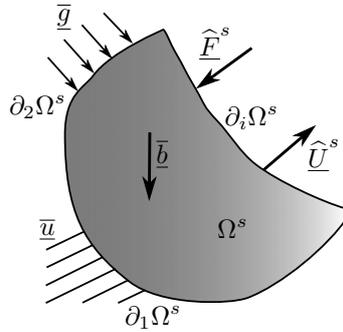


Figure 2.15: Notations relatives à un sous-domaine

## 5.2 Méthode Primale

Cette méthode a semble-t-il été introduite dans [Przemieniecki, 1963]. Elle fut d'abord employée sans souci de parallélisme pour une analyse de structure où les non-linearités étaient confinées dans une zone *a priori* déterminée (un sous-domaine) comme dans [Dodds et Lopez, 1980; Le Tallec *et al.*, 1991].

La méthode de Schur primale consiste à imposer a priori la continuité des déplacements d'interfaces. Le problème est formulé en termes de déplacements. Le système d'équations peut s'écrire sous la forme  $Ku = f$ . Dans ce système on peut partitionner les degrés de liberté internes et d'interface de chaque sous-domaine pour obtenir le système

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^s & 0 & K_{ib}^s \\ 0 & K_{ii}^{s'} & K_{ib}^{s'} \\ K_{bi}^s & K_{bi}^{s'} & (K_{bb}^s + K_{bb}^{s'}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^s \\ u_i^{s'} \\ u_b^s = u_b^{s'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i^s \\ f_i^{s'} \\ (f_b^s + f_b^{s'}) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

où,  $(\cdot)_i$  fait référence aux degrés de liberté internes de chaque sous-structure ( $s$  et  $s'$ ) et  $(\cdot)_b$  fait référence aux degrés de liberté d'interface. En éliminant, condensant, les inconnues internes  $u_i^s$  et  $u_i^{s'}$  on obtient le système (2.12) :

$$[\mathcal{S}] [u_b] = [b] \quad (2.12)$$

où

$$[\mathcal{S}] = \sum_{s \in \mathcal{S}} K_{bb}^s - K_{bi}^s (K_{ii}^s)^{-1} K_{ib}^s \quad (2.13)$$

$$[b] = \sum_{s \in \mathbf{S}} f_b^s - K_{bi}^s (K_{ii}^s)^{-1} f_i^s \quad (2.14)$$

$\mathcal{S}$  est appelée *matrice du complément de Schur* [Bjørstad et Widlund, 1986] et  $b$  est le résultat de la condensation des efforts généralisés  $f$  sur  $\Gamma$ .

La méthode primale consiste à résoudre l'équation (2.12) pour les interfaces, les déplacements internes sont déduits à l'aide de l'équation (2.15).

$$u_i^s = K_{ii}^{s-1} (f_i^s - K_{ib}^s u_b^s) \quad (2.15)$$

Le problème (2.12) étant très coûteux à assembler, une méthode itérative est utilisée. Dans l'ALG. 1, on présente la méthode de Schur primale qui a été résolue avec gradient conjugué.

---

**Algorithme 1** : Méthode de Schur primale avec gradient conjugué

---

**Calculer** :  $r^{(0)} = b - \mathcal{S}u^{(0)}$ ,  $d^{(0)} = r^{(0)}$ ;

**pour**  $i = 0$  à  $m$  **faire** // jusqu'à convergence

$$\left| \begin{array}{l} \alpha^{(i)} = \frac{r^{(i)T} r^{(i)}}{d^{(i)T} \mathcal{S} d^{(i)}}; \\ u^{(i+1)} = u^{(i)} + \alpha^{(i)} d^{(i)}; \\ r^{(i+1)} = r^{(i)} - \alpha^{(i)} \mathcal{S} d^{(i)}; \\ \beta^{(i+1)} = \frac{r^{(i+1)T} r^{(i+1)}}{r^{(i)T} r^{(i)}}; \\ d^{(i+1)} = r^{(i+1)} + \beta^{(i+1)} d^{(i)} \end{array} \right.$$

**fin**

---

Le problème de cette méthode est qu'elle n'est pas numériquement extensible. La méthode ne conserve pas son efficacité pour un nombre croissant de sous-domaines. Pour palier cette difficulté, Mandel [Mandel, 1993] a proposé la *Balancing Domain Decomposition method*, *BDD* qui est présentée ci-après.

### Balancing domaine decomposition, BDD

Pour avoir extensibilité de la méthode primale, Mandel [Mandel, 1993; Mandel et Brezina, 1996] a proposé une amélioration de cette méthode, où le préconditionnement s'apparente à celui de Neumann tout en utilisant un problème global sur toute la structure :

$$\tilde{\mathcal{S}}^{-1} = \sum_s \mathcal{S}_d^s \quad (2.16)$$

où  $\mathcal{S}_d^s$  est le complément de Schur dual, qui est un opérateur linéaire qui permet de calculer le déplacement d'interfaces à partir des efforts d'interfaces. Il existe différentes façons de calculer ce preconditionneur. Le complément de Schur dual d'une structure simplifiée (avec les degrés de liberté les plus proches à l'interface) est une possibilité. On trouvera une description des différents preconditionneurs

dans [Gosselet et Rey, 2006]. Comme le préconditionneur est utilisé sur le résidu  $r$ , la condition d'optimalité associée au résidu s'écrit

$$H^T r = 0 \quad (2.17)$$

où  $H$  est l'ensemble des mouvements de solides rigides possibles des différentes sous-structures. Cette condition peut-être interprétée comme un algorithme de Krylov-augmenté. Pour résoudre le système, on utilise une méthode de gradient conjugué en utilisant comme projecteur :

$$P = I - H(H^T S H)^{-1} H^T S \quad (2.18)$$

Dans l'ALG. 2 on présente la méthode BDD résolue avec le gradient conjugué préconditionné projeté.

---

**Algorithme 2** : Méthode BDD avec gradient conjugué préconditionné projeté

---

**Calculer** :  $P = I - H(H^T S H)^{-1} H^T S$ ;  
 $u^{(0)} = H(H^T S H)^{-1} H^T b$ ;  
 $r^{(0)} = P^T (b - S u^{(0)})$  ;  
 $d^{(0)} = \tilde{S}^{-1} r^{(0)}$ ;  
 $z^{(0)} = d^{(0)}$ ;

**pour**  $i = 0$  à  $m$  **faire** // jusqu'à convergence

$p^{(i)} = P^T S P z^{(i)}$ ;  
 $\alpha^{(i)} = \frac{r^{(i)T} d^{(i)}}{z^{(i)T} p^{(i)}}$ ;  
 $u^{(i+1)} = u^{(i)} + \alpha^{(i)} z^{(i)}$ ;  
 $r^{(i+1)} = r^{(i)} - \alpha^{(i)} p^{(i)}$  ;  
 $d^{(i+1)} = \tilde{S}^{-1} r^{(i+1)}$ ;

**pour**  $0 \leq j \leq i$  **faire**

$\beta_i^j = -\frac{d^{(i+1)T} p^j}{z^{(j)T} p^{(j)}}$ ;

**fin**

$z^{(i+1)} = d^{(i+1)} + \sum_{j=1}^i \beta_i^j z^{(j)}$ ;

**fin**

$u_{ii}^s = [K_{ii}^s]^{-1} ([b^s] - [K_{ib}^s] u^{(m)})$ ;

---

### 5.3 Méthode Duale

La méthode FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting), consiste à imposer la continuité des efforts d'interfaces. Pour le cas de deux sous-domaines, le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{aligned}
K^s u^s + B^{sT} F^s &= f^s \\
K^{s'} u^{s'} + B^{s'T} F^s &= f^{s'} \\
B^s u^s + B^{s'} u^{s'} &= 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

où les  $B^s$  sont les matrices de restriction aux noeuds bord et  $F^s$  les efforts généralisés (multiplicateurs de Lagrange) du sous-domaine  $\Omega^s$  sur  $\Omega^{s'}$  ( $F^{s'} = -F^s$ ). Dans ce type de méthodes certains des sous-domaines sont « flottants », c'est-à-dire qu'aucune portion de frontière des sous-domaines ne possède de condition en déplacement imposé. Dans ce cas, le déplacement n'est alors connu qu'à un mouvement de solide rigide infinitésimal près [Farhat et Roux, 1991, 1992; Farhat, 1992]

$$u^s = K^{s+}(f^s - B^{sT} F^s) + R^s \alpha^s \tag{2.20}$$

où  $K^{s+}$  est l'inverse généralisée de la rigidité  $K^s$ ,  $R^s$  est l'ensemble des mouvements de solide rigide possibles du sous-domaine  $\Omega^s$  et  $\alpha^s$  les coefficients d'une combinaison linéaire d'entre eux.

Le chargement ne doit pas travailler dans les déplacement de solide rigide, ce qui se traduit par :

$$R^{sT}(f^s - B^{sT} F^s) = 0 \tag{2.21}$$

Le système à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix} \Lambda & -R_B \\ -R_B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -d \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

avec

$$\begin{aligned}
[\Lambda] &= \sum_{s \in \mathbf{s}} B^s (K^s)^+ B^{sT} = \sum_{s \in \mathbf{s}} \Lambda^s \\
[c] &= \sum_{s \in \mathbf{s}} B^s (K^s)^+ f^s = \sum_{s \in \mathbf{s}} c^s
\end{aligned}$$

Dans la FETI une condition d'orthogonalité du chargement est imposée par la relation  $-R_B^T F = -d$ , où  $R_B$  est la matrice ligne des mouvements de solide rigide bord  $B^s R^s$ , et  $d$  la matrice colonne des déséquilibres  $R^{sT} f^s$ .

La méthode FETI consiste à résoudre le système (2.22) par gradient conjugué préconditionné projeté, la projection est associée à la contrainte d'équilibre des sous-domaines. Un projecteur doit donc intervenir [Farhat et Roux, 1994] :

$$P = I - R_B (R_B^T R_B)^{-1} R_B^T \tag{2.23}$$

Pour définir le préconditionneur  $\tilde{\Lambda}^{-1}$  il existe différentes façons de le faire. Par exemple une somme de contribution locale de chaque sous-domaine peut être utilisée [Rixen et Farhat, 1999]. On trouvera une description de différents preconditionneurs (« lumped » et « Dirichlet ») dans [Gosselet et Rey, 2006].

Dans ALG. 3 on présente la méthode *FETI* résolue avec le gradient conjugué préconditionné projeté. Le notation  $()^\diamond$  est utilisée pour décrire la notation par bloc :

$$u^\diamond = \begin{Bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^s \end{Bmatrix} \quad K^\diamond = \begin{Bmatrix} K^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & K^s \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

où  $u^s$  est un vecteur et  $K^s$  est une matrice associée au sous-domaine  $s$ .

---

**Algorithme 3** : Méthode FETI avec gradient conjugué préconditionné projeté
 

---

**Calculer** :  $P = I - R_B(R_B^T R_B)^{-1} R_B^T$ ;  
 $F^{(0)} = -R_B(R_B^T R_B)^{-1} d$ ;  
 $r^{(0)} = P^T(c - \Lambda F^{(0)})$ ;  
 $z^{(0)} = P\tilde{\Lambda}^{-1} r^{(0)}$ ,  $d^{(0)} = z^{(0)}$ ;

**pour**  $i = 0$  à  $m$  **faire** // jusqu'à convergence

$p^{(i)} = P^T \Lambda d^{(i)}$ ;  
 $\alpha^{(i)} = \frac{r^{(i)T} z^{(i)}}{p^{(i)T} d^{(i)}}$ ;  
 $F^{(i+1)} = F^{(i)} + \alpha^{(i)} d^{(i)}$ ;  
 $r^{(i+1)} = r^{(i)} - \alpha^{(i)} p^{(i)}$ ;  
 $z^{(i+1)} = P\tilde{\Lambda}^{-1} r^{(i+1)}$ ;  
**pour**  $0 \leq j \leq i$  **faire**  
 |  $\beta_i^j = -\frac{z^{(i+1)T} p^{(j)}}{d^{(j)T} p^{(j)}}$ ;  
**fin**  
 $d^{(i+1)} = z^{(i+1)} + \sum_{j=1}^i \beta_i^j d^{(j)}$ ;

**fin**

$\alpha^\diamond = (R_B^T R_B)^{-1} R_B^T r^{(m)}$ ;  
 $w^\diamond = K^{\diamond+} F^{(m)} + R^{s\diamond} \alpha^\diamond$ ;

---

Cette phase de projection peut être considérée comme un problème macroscopique, mais il est relativement pauvre puisqu'il est simplement associé aux modes rigides qui sont des modes à énergie nulle. Pour palier ce problème, la méthode FETI2 [Farhat *et al.*, 1996] apporte une amélioration consistant à vérifier des contraintes supplémentaires sur les déplacements, telle que la continuité en moyenne sur les interfaces.

## 5.4 Méthode Mixte

### 5.4.1 Méthode Mixte mono-échelle

La méthode mixte impose une relation entre le déplacement et les efforts aux interfaces. L'interprétation mécanique est l'introduction d'un ressort pour connec-

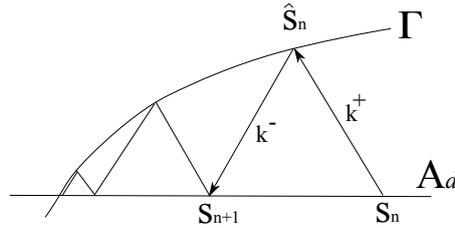
ter les sous-domaines. Il existe plusieurs versions d'approches mixtes, selon qu'elles s'appuient sur un formalisme de type Lagrangien augmenté [Fortin et Glowinski, 1983; Glowinski et Le Tallec, 1989, 1990] ou sur un algorithme de résolution à deux direction de recherche de type LaTIn (*L*ARge *T*IME *I*Ncrement) décrite dans [Ladevèze, 1985] ou celle appelée FETI à deux champs (ou à deux multiplicateurs de Lagrange) proposée par [Series *et al.*, 2003].

Nous présentons ici l'approche mixte basée sur la LaTIn dans le cas particulier de l'élasticité linéaire.

L'approche consiste à partitionner les équations en deux groupes :

- Le groupe  $\Gamma$  contenant les équations locales en variable d'espace éventuellement non-linéaires.
- Le groupe  $A_d$  de équations linéaires éventuellement globales.

L'algorithme consiste alors à rechercher alternativement une solution vérifiant le groupe  $\Gamma$  à partir d'une solution de  $A_d$  (étape globale) puis une solution du groupe  $A_d$  à partir d'une solution de  $\Gamma$  (étape locale) tout en satisfaisant des directions de recherche ( $k^+$  et  $k^-$ ), FIG. 2.16.



**Figure 2.16:** Schéma d'une itération de la méthode LATIN.

L'étape locale consiste, connaissant une solution approchée équilibrant les sous-domaine à déterminer les efforts et déplacements aux interfaces ( $\widehat{W}$  et  $\widehat{F}$ ), en vérifiant la direction de recherche  $k^+$  en chaque point de l'interface :

$$\begin{aligned} (\underline{F}^s - \widehat{F}^s) - k^+(W^s - \widehat{W}^s) &= 0 \\ (\underline{F}^{s'} - \widehat{F}^{s'}) - k^+(W^{s'} - \widehat{W}^{s'}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

où  $k^+$  est un opérateur local en variable d'espace,  $\underline{F}$  et  $\underline{W}$  sont les efforts et déplacements équilibrant les sous-domaines à l'étape globale précédente,  $\widehat{F}$  et  $\widehat{W}$  sont les efforts et déplacements recherchés aux interfaces. Les conditions aux limites sont prise en compte par des interfaces et des relations de comportement particulières.

La solution de l'étape locale doit également satisfaire la relation de comportement de l'interface qui s'écrit tout simplement dans le cas d'un interface parfaite :

$$\begin{aligned} \widehat{W}^s &= \widehat{W}^{s'} \\ \widehat{F}^s + \widehat{F}^{s'} &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

En particulier pour une interface parfaite, on a explicitement en combinant (2.25) et (2.26) :

$$\begin{aligned}\widehat{W}^s &= \widehat{W}^{s'} = \frac{1}{2}(W^s + W^{s'}) - \frac{1}{2k^+}(F^s + F^{s'}) \\ \widehat{F}^s &= -\widehat{F}^{s'} = \frac{1}{2}(F^s - F^{s'}) - \frac{1}{2}k^+(W^s - W^{s'})\end{aligned}\quad \forall M \in \Gamma \quad (2.27)$$

Il est possible d'inclure d'autres type de comportements d'interface comme le contact avec ou sans frottement [Ladevèze *et al.*, 2002].

A l'étape globale, on introduit les directions de recherche suivantes :

$$\begin{aligned}(\underline{F}^s - \widehat{F}^s) + k^-(W^s - \widehat{W}^s) &= 0 \\ (\underline{F}^{s'} - \widehat{F}^{s'}) + k^-(W^{s'} - \widehat{W}^{s'}) &= 0\end{aligned}\quad (2.28)$$

L'équilibre d'un sous-domaine et la vérification de (2.28) conduit au problème discrétisé suivant pour la structure  $s$  :

$$([K^s] + [k^{s-}]) [W^s] = [\widehat{F}^s + k^{s-}\widehat{W}^s] + \underline{b}^s \quad (2.29)$$

où  $\underline{b}^s$  est une force volumique. Sous réserve de stricte positivité de  $k^{s-}$ ,  $([K^s] + [k^{s-}])$  est symétrique définie positive.

Dans ALG. 4 on présente la méthode mixte monoéchelle résolue avec la LaTIn,

---

**Algorithme 4** : Méthode Mixte monoéchelle basée sur la LaTIn

---

**Initialisation** : Création de  $[K^s]$  et  $[k^s]$ ;  
 Assemblage de  $[K^s] + [k^s]$ ;  
**pour**  $i = 0$  à  $m$  **faire** // jusqu'à convergence  
 Étape locale (interfaces),  $\forall M \in \Gamma$ ;  
 $\widehat{W}^s = \widehat{W}^{s'} = \frac{1}{2}(W^s + W^{s'}) - \frac{1}{2k^+}(F^s + F^{s'})$ ;  
 $\widehat{F}^s = -\widehat{F}^{s'} = \frac{1}{2}(F^s - F^{s'}) - \frac{1}{2}k^+(W^s - W^{s'})$ ;  
 Étape globale (sous-domaines);  
 $[u^s] = ([K^s] + [k^s])^{-1}[\widehat{F}_d^s]$ ;  
 $W^s = \text{Trace}(u^s)$ ;  
 $[F^s] = \widehat{F}^s + k^-\widehat{W}^s - k^-W^s + f^s$ ;  
**fin**

---

La méthode mixte mono-échelle (LaTIn) a été testée en élasticité bidimensionnelle dans [Ladevèze et Lorong, 1992], et aussi pour des assemblages de structures [Blanzé *et al.*, 1996]. Elle a été aussi appliquée à des problèmes de contact [Blanzé *et al.*, 1996; Champaney *et al.*, 1999].

La méthode mixte a le même problème que la méthode de Schur primale, elle n'est pas numériquement extensible. Pour palier ce problème, on doit introduire un problème grossier (Macro), qui est décrit dans la section suivante.

### 5.4.2 Méthode Mixte multiéchelle

L'approche mixte micro-macro basée sur la méthode LaTIn a été développée par [Ladevèze et Dureisseix, 1998, 1999, 2000; Ladevèze *et al.*, 2001; Nouy et Ladevèze, 2004], la méthode FETI-2LM [Roux, 1997] est une méthode très proche de celle de la LaTIn. La différence réside dans le choix du préconditionneur du problème. La méthodologie pour préconditionner la méthode à FETI-2LM est basée sur le traitement des sous-structures flottantes de façon similaire à la méthode FETI [Farhat et Roux, 1991]. Elle consiste à résoudre pour chaque itération un problème de type « grille grossière » pour lequel les « éléments » de cette grille sont les sous-domaine et les nœuds sont les valeurs des champs déplacements correspondant aux modes rigides des sous-structures. Cette technique assure au résidu du problème condensé d'être nulle pour les déplacements de corps rigide des sous-domaines.

Dans l'approche LaTIn, un problème réduit d'interface est construit à partir d'une procédure d'homogénéisation automatique qui exploite les modes rigides d'interfaces. Nous détaillons ici cette dernière approche. Elle s'articule autour de deux points fondamentaux et la vérification partielle des conditions de transmission :

**Aspect multiéchelle introduit au niveau des interfaces** Les quantités d'interface s'écrivent ainsi comme la somme d'une partie macro et d'une partie micro :

$$\underline{F}^s = \underline{F}_M^s + \underline{F}_m^s \quad \text{et} \quad \underline{W}^s = \underline{W}_M^s + \underline{W}_m^s \quad (2.30)$$

Elles vérifient la relation de découplage des travaux micro et macro d'interface qui s'écrit :

$$\int_{\Gamma} \underline{F} \cdot \underline{W} ds = \int_{\Gamma} (\underline{F}_M \cdot \underline{W}_M + \underline{F}_m \cdot \underline{W}_m) ds \quad (2.31)$$

Les quantités macro sont obtenues par projection sur une base de vecteurs qui extraient les composantes de translation, rotation et allongement (resp. résultante, moment, extension) pour un déplacement (resp. effort) d'interface. En 2D,  $\underline{W}_M$  aura ainsi 4 composantes (2 translations, 1 rotation et 1 allongement).

Classiquement on prend un projecteur macro qui extrait la partie linéaire d'un champ d'interface mais on peut enrichir cette description, arbitrairement, en proposant un projecteur macroscopique qui extrait la partie cubique, quadratique, voir discontinue par morceaux pour la propagation de fissure [Loiseau, 2001; Guidault *et al.*, 2008].

**Vérification partielle des conditions de transmission.** Les efforts macro d'interface doivent systématiquement vérifier les conditions de transmission *a priori* entre deux sous-domaines  $s$  et  $s'$ .

$$\underline{F}_M^s + \underline{F}_M^{s'} = 0 \quad (2.32)$$

## Résolution :

L'écriture du problème d'équilibre des sous-domaines est similaire à celle de la méthode mixte monoéchelle (2.29). Seule la direction de recherche de l'étape linéaire est modifiée.

On introduit le multiplicateur de Lagrange  $\widetilde{W}_M$  [Nouy et Ladevèze, 2004], qui permet de lever la contrainte d'admissibilité des efforts macro (2.32).

$$\begin{aligned} (\underline{F}^s - \widehat{F}^s) + k^-(\underline{W}^s - \widehat{W}^s - \widetilde{W}_M^s) &= 0 \\ (\underline{F}^{s'} - \widehat{F}^{s'}) + k^-(\underline{W}^{s'} - \widehat{W}^{s'} - \widetilde{W}_M^{s'}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

ce qui conduit au problème discrétisé sur une sous-structure  $s$  suivant :

$$([K] + [k]) [\underline{W}^s] = \left[ \widehat{F}_d^s \right] + \left[ k^- \widetilde{W}_M^s \right] \quad (2.34)$$

où  $\left[ \widehat{F}_d^s \right]$  est le chargement associé aux données de l'étape linéaire :  $\underline{\bar{b}}^s$  et  $(\underline{F}^s + k^- \widehat{W}^s)$ .

Le chargement  $[k^- \widetilde{W}_M^s]$  est obtenu en résolvant le problème macro :

$$[L_F]_{e_M} \left[ \widetilde{W}_M \right]_{e_M} = \left[ \widehat{F}_{M,d} \right]_{e_M} + \left[ \underline{F}_{M,d} \right]_{e_M} \quad (2.35)$$

où  $\left[ \widehat{F}_{M,d} \right]_{e_M}$  est associé à la partie macro de la solution du problème des sous-domaines (2.34) résolu pour  $[k^- \widetilde{W}_M^s]$  nul.  $\left[ \underline{F}_{M,d} \right]_{e_M}$  est associé à la contribution macroscopique des efforts imposés  $\underline{\bar{g}}$  sur les structures.  $[L_F]_{e_M}$  est un opérateur d'homogénéisation linéaire qui fait le couplage entre les différentes échelles. Il est obtenu en assemblant les opérateurs d'homogénéisation  $[L_F^s]$  de chaque sous-domaine déterminés en résolvant (2.34) pour des chargement  $[k^- \widetilde{W}_M^s]$  donnés et des données  $\underline{\bar{b}}^s$  et  $\underline{\bar{b}}^s$  nulles. [Ladevèze et Nouy, 2002, 2003] ont développé une procédure d'homogénéisation à la fois en espace et en temps.

Dans ALG. 5 on présente la méthode mixte multiéchelle à deux échelles.

Le problème (2.35) ne porte que sur un nombre réduit d'inconnus macros d'interface. Cependant, ce problème peut avoir un taille trop importante dans le cas d'un grand nombre d'interfaces pour pouvoir être résolu par un solveur directe. Une première approche consiste à résoudre par un solveur itératif le problème macroscopique (ici formulé en déplacement  $\widetilde{W}_M$ ). Ainsi dans [Kerfriden *et al.*, 2009] un solveur BDD est utilisé à cet effet pour des problèmes de délaminage de composites 3D.

Une seconde approche [Loiseau *et al.*, 2002; Nouy, 2003] consiste à introduire une troisième échelle (super-macro) permettant une résolution du problème macroscopique.

**Algorithme 5** : Méthode Mixte à deux échelles

---

Pour chaque sous-domaine  $s$ ;

- Création de  $[K^s]$  et  $[k^s]$ ;
- Assemblage de  $[K^s] + [k^s]$ ;
- Détermination de l'opérateur homogénéisé  $[L_F^s]$ ;
- Assemblage de la rigidité du problème Macro  $[L_F]_{e_M}$ ;

**pour**  $i = 0$  à  $m$  **faire** // jusqu'à convergence

Étape locale (interfaces);

$$\widehat{W}^s = \widehat{W}^{s'} = \frac{1}{2}(W^s + W^{s'}) - \frac{1}{2k^+}(F^s + F^{s'});$$

$$\widehat{F}^s = -\widehat{F}^{s'} = \frac{1}{2}(F^s - F^{s'}) - \frac{1}{2}k^+(W^s - W^{s'});$$

Étape linéaire (sous-domaines), pb micro 1;

$$[u_1^s] = ([K^s] + [k^s])^{-1}[\widehat{F}_d^s];$$

$$[F_1^s] = \widehat{F}^s + k^-\widehat{W}^s - k^-W_1^s \longrightarrow [\widehat{F}_{M,d}^s];$$

Problème Macro;

$$[\widetilde{W}_M] = [L_F]_{e_M}^{-1}([\widehat{F}_{M,d}]_{e_M} + [F_{M,d}]_{e_M});$$

Problème micro 2;

$$[u_2^s] = ([K^s] + [k^s])^{-1}[k^-\widetilde{W}];$$

$$[u^s] = [u_1^s] + [u_2^s];$$

$$[F^s] = \widehat{F}^s - k^-(W^s - \widehat{W}^s - \widetilde{W}_M^s);$$

**fin**

---

## 5.5 Autres méthodes

### Trois-Champs :

La méthode à trois-champs a été proposée dans [Brezzi et Marini, 1992; Brezzi, 1994], et est basée sur la formulation hybride de [Tong, 1970] pour l'élasticité, où la principale modification introduite par Brezzi et Marini est de travailler au niveau d'un sous-domaine et non au niveau des éléments. Cette méthode a été analysée dans [Brezzi et Marini, 2000a,b] et appliquée à l'élasticité dans [Brezzi et Marini, 2005].

La méthode « Algebraically partitioned FETI » est aussi une méthode à trois-champs, elle est décrite dans [Park *et al.*, 1997] et analysée dans [Justino *et al.*, 1997; Rixen *et al.*, 1999].

### Hybride :

Les travaux réalisés par Farhat pour améliorer la méthode duale ont ainsi donné lieu à une version plus aboutie appelée FETI-DP (méthode FETI Duale-Primale) [Farhat *et al.*, 2000a, 2001]. Un bilan des développements de la méthode FETI duale et duale-primale est décrite dans [Klawon et Widlund, 2001].

Une autre méthode aussi appelée hybride a été proposée et appliquée à un problème de poroélasticité dans [Gosselet *et al.*, 2004]. Elle propose un cadre unifié pour les deux approches primales et duales, et permet de choisir pour chaque inconnue du problème de la traiter de façon primale ou duale.

Une autre méthode hybride (FETI-DP micro-macro) a été présentée par [Moba-sher Amini *et al.*, 2009; Amini *et al.*, 2009]. Elle est basée sur la méthode FETI-DP, et permet d'utiliser des discrétisations différentes dans chaque sous-domaine : un maillage fin (micro) pour les sous-domaines dans une zone d'intérêt et un maillage grossier (macro) pour le reste de la structure.

## 5.6 Méthodes de résolution des problèmes non-linéaires de grande taille

### 5.6.1 Méthode de type Newton-Krylov-Schur

Les méthodes de décomposition de domaine (BDD, FETI, Mixte, etc.) permettent la résolution de problèmes linéaires de grand taille sur des calculateurs à architecture distribuée. En les utilisant avec des schémas de type Newton pour la résolution de problèmes non-linéaires, on obtient une famille de méthodes dites Newton-Krylov-Schur (NKS). Ces méthodes ont été décrites par [De Roeck *et al.*, 1992] pour des problèmes non-linéaires élastiques, pour le calcul de grandes structures élancées par [Farhat *et al.*, 2000a,b] et pour les problèmes multi-contacts par [Barboteu *et al.*, 2001].

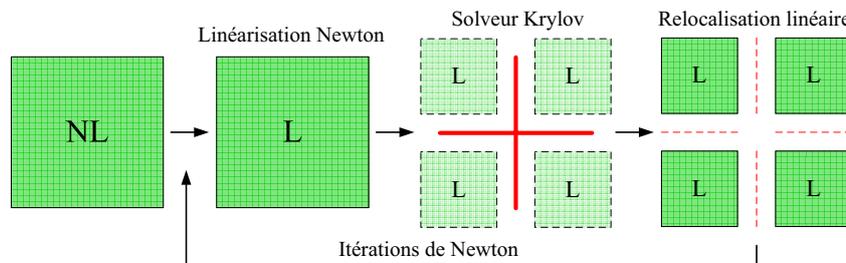


Figure 2.17: Principes de la méthode NKS.

Ces types de méthodes sont basées sur :

- la méthode de Newton pour la linéarisation et le schéma itératif incrémental,
- la sous-structuration et la condensation de Schur du problème tangent pour l'écriture du problèmes aux interfaces,
- le solveur itératif parallèle de Krylov pour la résolution du problème linéaire condensé aux interfaces.

La FIG. 2.17 et ALG. 6 illustrent les différentes étapes de la méthode NKS.

**Algorithme 6** : Méthode Newton-Krylov-Schur

---

```

Initialisation :  $F_{ext} = 0$ ,  $\Delta F = \theta.F_{ext}^{tot}$ ,  $u = 0$ ;
pour  $p=0$  à  $p_{max}$  faire // schéma incrémental
   $F_{ext} = F_{ext} + \Delta F$  ;
  si  $\|F_{ext}\| > \|F_{ext}^{tot}\|$  alors  $F_{ext} = F_{ext}^{tot}$ ;
  pour  $i = 0$  à  $i_{max}$  faire // itération de Newton
    - Assemblage des opérateurs locaux tangents  $K_T^s$  par sous-domaine;
    - Factorisation des  $K_{T_{ii}}^s$ ;
    - Calcul du résidu condensé par sous-domaine :  $r^s$ ;
    - Résolution du problème condensé [Solveur itératif de Krylov] :
       $S_T \cdot \Delta u_b = r$ ;
    - Calcul des solutions intérieures :  $\Delta u_b^i = K_{T_{ii}}^s^{-1}(f_i^s - K_{ib}^s \Delta u_b)$ ;
    - Mise à jour de  $u_b$  et  $u_i^s$ ;
    - Calcul de l'erreur  $\eta = \frac{\|r\|}{\|F_{ext}\|}$ ;
    si  $\eta < \eta^{crit}$  alors Sortie
  fin
  si  $\eta > \eta^{crit}$  alors // non-convergence
    Réduction de l'incrément de chargement;
     $F_{ext} = F_{ext} - \Delta F$ ;
     $\Delta F = \Delta F/2$ ;
  sinon // convergence
    si  $F_{ext} = F_{ext}^{tot}$  alors Sortie [fin du calcul] ;
  fin
fin

```

---

Le problème avec cette méthode est que l'on doit résoudre un grand nombre de systèmes linéaires, qui engendre de nombreuses communications entre les différents processeurs (assemblage du résidu global). Des techniques d'accélération de convergence ont ainsi été proposées pour accélérer les processus itératifs de Krylov. Par exemple la stratégie GIRKS (Generalized Iterative Reuse of Krylov Subspaces) [Risler et Rey, 2000] est la combinaison de la technique d'initialisation IRKS (Iterative Reuse of Krylov Subspaces) et du préconditionnement [Rey, 1996]. Un inconvénient de la méthode GIRKS est la possibilité de stagnation, nécessitant une remise à zéro des espaces de Krylov stockés, l'approche SRKS (Selective Reuse of Krylov Subspaces) [Gosselet et Rey, 2002] propose une amélioration pour pallier ce problème.

Ces types de méthodes ne sont pas bien adaptées aux problèmes non-linéaires de grande taille, en particulier dans les cas où les non-linéarités ne sont pas équitablement réparties. Dans le cas d'un problème non-linéaire géométrique, un grand nombre de pas de chargement est nécessaire pour passer un point de bifurcation ou un point limite. Ces itérations vont être réalisées sur la totalité de la structure, même si une grande partie de la structure reste dans le domaine linéaire.

Une solution à ce problème est de concentrer les efforts numériques sur les zones qui le nécessitent au moyen d'itérations locales, par sous-domaines. Ces types de méthodes sont appelées méthodes de relocalisations non-linéaires, ils sont décrits dans la section suivante.

### 5.6.2 Méthode de décomposition de domaine mixte basée sur la LaTIn

La méthode LaTIn (Large Time Increment), appelée initialement méthode à grands incréments de temps (MGIT) a été introduite par [Ladevèze, 1985] (version en anglais [Ladevèze, 1999]). Elle a été mise en œuvre par [Bussy *et al.*, 1990] pour des problèmes en grandes déformations, pour des problèmes de flambage par [Boucard et Ladevèze, 1997; Boucard *et al.*, 1997].

Les principes de la méthode ont été présentés dans les sections 5.4.1 et 5.4.2 dans le cas de l'élasticité linéaire sous l'hypothèse des petites perturbations, où le temps n'intervient pas. Aux deux premiers principes de la méthode LaTIn que sont la séparations des équations en deux groupes, et la résolution par un schéma itératif en deux étapes, il convient de rajouter un troisième point : la représentation adaptée des inconnues.

#### Représentation des inconnus

Les techniques usuelles permettant de résoudre les de problèmes d'évolution sont des techniques dites « incrémentales » qui utilisent des schémas d'intégration classiques.

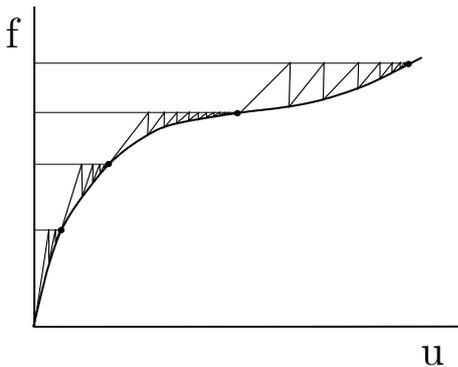
Contrairement aux approches incrémentales classiques, la méthode LaTIn cherche à chaque itération une approximation de la solution appartenant à  $A_d$  ou  $\Gamma$  (voir section 5.4.1 pour une description de  $A_d$  et  $\Gamma$ ) sur tout l'intervalle de temps. Cette approche globale en temps nécessite donc une représentation adaptée des inconnues afin de limiter la quantité de champs à stocker. La méthode LaTIn introduit une méthode de résolution alternative basée sur le concept de fonctions radiales : l'approximation radiale sur l'espace-temps [Ladevèze, 1999]. Cette méthode propose de construire la solution d'un problème d'évolution sous la forme d'une somme de produits d'une fonction temporelle par une fonction spatiale.

$$f(\underline{x}, t) \approx \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \Lambda_i(\underline{x}) \quad (2.36)$$

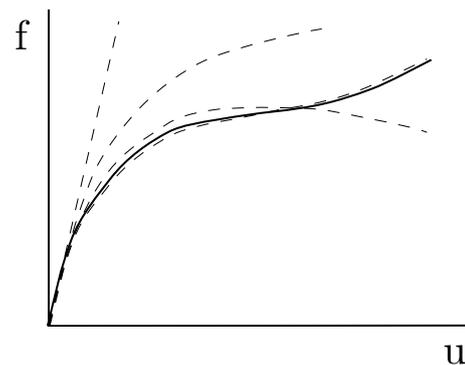
Cette écriture générale possède des similarités avec la POD (pour « Proper Orthogonal Decomposition ») qui consiste, connaissant une fonction du temps et de l'espace  $f(\underline{x}, t)$  à calculer sa meilleure décomposition de rang  $m$ . L'approximation radiale permet, quant-à-elle, de calculer l'approximation d'un problème d'évolution en calculant directement sa meilleure décomposition d'ordre  $m$ , sans qu'aucune solution ou base de fonctions ne soit connue au préalable. En cela, la méthode d'approximation radiale sur l'espace-temps peut-être vue comme une méthode qui généralise la POD.

Elle a d'ailleurs été récemment baptisée PGD (Proper Generalized Decomposition). Ce type d'approximation présente l'avantage de réduire le volume d'informations, puisqu'il conduit à une représentation réduite de la solution. De plus, la construction de l'approximation radiale conduit à la résolution d'un petit nombre de problèmes spatiaux et de problèmes temporels au lieu d'un problème spatio-temporel complet, ce qui a pour effet de réduire considérablement le coût de calcul. Outre ces avantages, l'intérêt majeur de ces méthodes est qu'elles servent de base à la construction de méthodes de réductions de modèles. En plus, dans ce type de traitement on trouve la solution sur tout l'intervalle de temps et sur toute la structure avec un seul grand pas de chargement. À chaque itération, une solution approchée est trouvée.

Les FIG. 2.18 et 2.19, illustrent les principes d'une méthode incrémentale et de la méthode LaTIn. Dans la méthode incrémentale, il faut itérer plusieurs fois pour obtenir quelques points d'équilibre, par contre, dans la méthode LaTIn, à chaque itération, une approximation de la solution sur tout l'intervalle de temps est obtenue.



**Figure 2.18:** Résolution avec une méthode incrémentale



**Figure 2.19:** Résolution LaTIn

La méthode LaTIn est bien adaptée à la résolution des problèmes mettant en oeuvre des matériaux non-linéaires où les non-linéarités sont locales. Avec un choix approprié de directions de recherche, la stratégie peut-être considérée comme une méthode de continuation permettant de piloter les phénomènes instables.

Elle apporte aussi une réponse intéressante à la problématique des études paramétriques, la méthode pouvant être initialisée par une solution d'un calcul précédent, et les fonctions d'espace pouvant être réutilisées [Boucard et Champaney, 2003; Roulet *et al.*, 2011].

## 6 Bilan

Nous avons présenté dans ce chapitre diverses méthodes permettant de résoudre des problèmes linéaires ou non-linéaires de grande taille. Une première famille d'approches propose de tirer partie de certaines hypothèses du problème initial pour le

traiter d'une manière adaptée, au prix d'approximations sur la solution finale. Les approches « globales-locales » permettent ainsi le calcul de modèles fins locaux avec des conditions aux limites provenant d'un calcul de la structure complète modélisée à une échelle supérieure. La méthode n'est cependant, en général, que descendante et est limitée aux phénomènes locaux n'ayant pas d'influence sur l'équilibre local.

La méthode d'homogénéisation propose de construire à partir d'une description fine de la structure un modèle grossier équivalent et de séparer les échelles « micro » et « macro ». Ces approches classiques restent cependant limitées aux cas où la séparation des échelles est suffisamment importante, rendant leur application au calcul de structures très difficile. Les idées de base de la théorie de l'homogénéisation peuvent être utilisées pour la définition de problèmes grossiers permettant d'assurer l'extensibilité des méthodes multiéchelles parallèles.

Les techniques de superposition de modèles permettent l'association de différentes échelles de modélisation, et assurent la communication entre ces différentes échelles. Elles sont cependant limitées à des problèmes où la zone d'intérêt est réduite et plus ou moins connue *a priori*.

Les méthodes de sous-structuration et de décomposition de domaine, proposent des solutions pour le calcul des grandes structures nécessitant une résolution du problème complet à l'échelle fine sans hypothèse particulière sur le couplage des échelles. Elles proposent des techniques de résolution itératives et parallèles des problèmes condensés aux interfaces. Associées à des préconditionneurs et à un problème grossier pertinent, elles sont très efficaces pour la résolution des problèmes linéaires de très grande taille.

Les approches Newton-Krylov-Schur, qui mettent en œuvre ces solveurs parallèles dans le cadre d'un schéma de Newton, apportent une première réponse à la problématique des grandes structures non-linéaires. Elles se sont révélées cependant peu adaptées aux cas où les non-linéarités sont non-équitablement réparties, ou bien localisées sur une zone de la structure. Dans le CHAP. 3, on présente une évolution de ces approches (et une étude paramétrique de la méthode) permettant de traiter de façon pertinente ces problèmes.



## Deuxième partie

# Méthode de décomposition de domaine mixte pour les structures élancées en non-linéaire géométrique



# Chapitre 3

## Stratégie de calcul multiéchelle avec relocalisation non-linéaire

*Dans ce troisième chapitre, nous présentons une famille de stratégies de calcul multiéchelle par décomposition de domaine utilisant une étape qualifiée de relocalisation non linéaire et dérivées des méthodes NKS classiques. Deux versions de la méthode sont présentées : une première version utilisant des conditions aux limites en déplacement et une seconde utilisant des conditions aux limites mixtes. Nous développons ensuite nos premières contributions à cette méthode : adaptation au passage de point critique, analyse de sa robustesse et influence des différents paramètres [Hinojosa et al., 2010, 2011a,b,c].*

### Sommaire

---

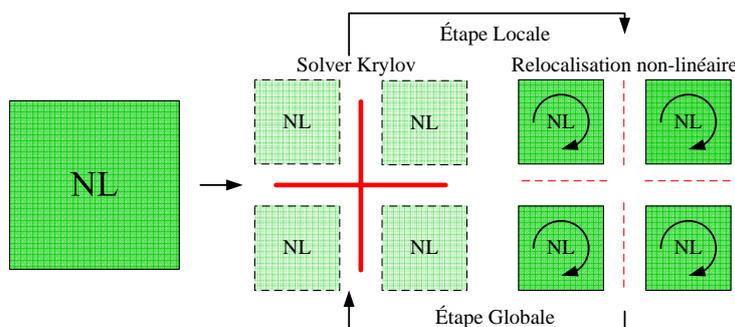
<b>1</b>	<b>Principe de la méthode - intérêt de la relocalisation . . . .</b>	<b>93</b>
<b>2</b>	<b>Méthodes de décomposition de domaine avec relocalisation non-linéaire . . . . .</b>	<b>95</b>
2.1	Cas d'une décomposition de domaine primale . . . . .	95
2.2	Cas d'une décomposition de domaine mixte . . . . .	101
2.3	Choix des directions de recherche . . . . .	105
2.4	Définition des critères d'arrêt local et global . . . . .	108
<b>3</b>	<b>Étude de robustesse sur des structures globalement stables et instables . . . . .</b>	<b>110</b>

3.1	Intérêt de la relocalisation . . . . .	110
3.2	Influence des paramètres de la stratégie . . . . .	117
<b>4</b>	<b>Méthode de continuation condensée aux interfaces . . . . .</b>	<b>122</b>
4.1	Méthode de continuation pour le problème sous-structuré . .	122
4.2	Analyse d'une branche d'équilibre par la méthode de continuation . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Bilan . . . . .</b>	<b>127</b>

---

# 1 Principe de la méthode - intérêt de la relocalisation

Quand le problème initial est décomposé avant linéarisation, l'équilibre linéaire de chaque sous-structure doit être assuré à chaque itération pour des quantités d'interfaces données. Le but recherché est de concentrer l'effort numérique sur les zones nécessitant réellement au moyen d'itérations locales, par sous-structures, c'est-à-dire à une échelle pertinente vis-à-vis du phénomène, et permettant de vérifier le comportement non-linéaire. Les itérations globales ont alors pour objectif d'assurer le couplage entre les sous-structures. Ce couplage peut être réalisé en assurant l'équilibre aux interfaces, par exemple, permettant ainsi la redistribution des efforts. Ce rééquilibrage est permis par la résolution d'un problème global tangent portant sur les inconnues d'interfaces et permettant d'assurer l'extensibilité de la méthode. Ce qui donne la stratégie décrite schématiquement dans la FIG. 3.1.



**Figure 3.1:** Principes de la méthode de relocalisation non-linéaire.

Par rapport à la méthode NKS classique (FIG. 2.17), le problème non-linéaire est résolu dans chaque sous-structure à l'étape locale. Dans les deux cas, la boucle de chargement incrémental associée au schéma de Newton global n'est pas représentée. La différence majeure concerne l'étape de calcul des déplacements internes par sous-structure, qui devient non-linéaire. Elle est assurée par un solveur itératif par sous-structure, éventuellement associé à un schéma incrémental indépendant. Chaque sous-structure peut ainsi être vue comme une sorte de super-élément non-linéaire dont le comportement est « intégré » au moyen d'un modèle élément fini associé à un solveur non-linéaire, par exemple un schéma de Newton. La stratégie peut aussi être rapprochée de l'approche *FE2* présentée dans le CHAP. 2, à la différence près que le transfert d'information entre les échelles est, ici, « exact » : aucune hypothèse de séparation d'échelle ou de périodicité n'est utilisée. La méthode reste ainsi valable dans les zones de fort gradient.

Dans la suite, cette étape de la stratégie est appelée « relocalisation non-linéaire ». Relocalisation non-linéaire fait référence aux techniques d'homogénéisation, dans laquelle une étape de « localisation linéaire » est faite pour obtenir le champ micro d'un

volume élémentaire représentatif (VER) en connaissant le champ macro. De façon similaire en décomposition de domaine, l'étape consistant à définir le déplacement des degrés de liberté internes dans chaque sous-structure en connaissant les quantités d'interface est par fois appelée « étape de localisation ». Dans notre cas, cette étape est non-linéaire, ce qui explique la nomenclature.

Cette méthode a été appliquée pour la simulation de structures raidies avec flambage local, avec une méthode de décomposition de domaine primale ou mixte, et comparée avec le méthode NKS classique par [Cresta *et al.*, 2007]. Une version duale, proposée par Gosselet, Pebrel et Rey, a été appliquée à des problèmes de structures avec endommagement par [Pebrel *et al.*, 2008].

## 2 Méthodes de décomposition de domaine avec relocalisation non-linéaire

### 2.1 Cas d'une décomposition de domaine primale

La structure étudiée occupe un domaine  $\Omega$  et est soumise aux chargements  $\bar{b}_0$  et  $\bar{g}_0$  définis dans le premier chapitre FIG. 1.1. Le problème de référence s'écrit de la manière suivante :

Trouver  $\underline{u}$  vérifiant :

– L'admissibilité statique sur  $\Omega$

$$\int_{\Omega_0} \underline{\pi}(\underline{u}) : \underline{\dot{E}}(\underline{u}^*) d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} J\bar{b}_0 \underline{u}^* d\Omega_0 + \int_{\partial_2\Omega_0} \frac{dS}{dS_0} \bar{g}_0 \underline{u}^* dS_0 \quad \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_{ad,0} \quad (3.1)$$

– L'admissibilité cinématique

$$\underline{u} = \bar{u}_0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_U \quad (3.2)$$

où  $\underline{\dot{E}}$  est le taux virtuel de déformation Lagrangien et  $\underline{\pi}$  est la contrainte de Piola-Kirkchoff. On a utilisé un modèle de comportement matériau hyperélastique ( $\underline{\pi} = \underline{\underline{K}} \underline{\underline{E}}$ ), comme défini en CHAP. 1.

Le problème est discrétisé par la méthode des éléments finis.  $\mathbf{N}$  étant la matrice de fonctions de forme, les déplacements nodaux  $\underline{u}$  sont définis,

$$\underline{u} = \mathbf{N}\underline{u} \quad (3.3)$$

Le problème de référence discrétisé s'écrit :

Trouver  $\underline{u}$  vérifiant  $\mathbf{f}_{int}(\underline{u}) + \mathbf{f}_{ext} = 0$ , avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ext} &= \int_{\Omega_t} J\mathbf{N}^t \bar{b}_0 d\Omega_0 + \int_{\partial_2\Omega_0} \frac{dS}{dS_0} \mathbf{N}^t \bar{g}_0 dS_t \\ \underline{u}^{*t} \mathbf{f}_{int} &= - \int_{\Omega_0} \underline{\pi} : \underline{\dot{E}}(\mathbf{N}\underline{u}^*) d\Omega_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Notons que pour le cas linéaire, on obtient :  $\mathbf{f}_{int}(\underline{u}) = -\mathbf{K} \underline{u}$

#### 2.1.1 Étape globale non-linéaire d'interface

La structure étant décomposée en sous-structures et interfaces, l'étape globale linéaire consiste à trouver une correction  $\delta\hat{\underline{u}}$  du champ de déplacement d'interface  $\hat{\underline{U}}$  permettant de vérifier l'équilibre des efforts interfaciaux ( $\underline{F}^s$ ), obtenus à l'étape locale non-linéaire précédente. Soit pour chaque interface  $\Gamma^{ss'}$  (sous forme faible) :

$$\underline{F}^s(\underline{u}^s) + \underline{F}^{s'}(\underline{u}^{s'}) = 0 \quad (3.5)$$

Cette correction n'est pas réalisée par interface, mais au niveau global sur le problème condensé aux interfaces. Plus précisément, on cherche à annuler le résidu non-linéaire d'équilibre aux interfaces, qui peut s'écrire comme une fonction non-linéaire des déplacements d'interfaces  $\widehat{U}^s$  :

$$\underline{F}^s = \mathcal{S}_{NL}^s(\widehat{U}^s; \mathbf{f}_{ext}^s) \quad (3.6)$$

où  $\mathcal{S}_{NL}^s$  est l'opérateur Steklov-Poincaré non-linéaire du problème de référence. Finalement, en utilisant (3.5), le problème non-linéaire condensé assemblé s'écrit :

$$\sum_s A^s(\mathcal{S}_{NL}^s(\widehat{U}^s; \mathbf{f}_{ext}^s)) = 0 \quad (3.7)$$

La résolution du problème obtenu par linéarisation de Newton de (3.7), donne formellement :

$$\mathcal{S}_T \delta \widehat{u} = \underline{R} \quad (3.8)$$

où  $\mathcal{S}_T$  et l'opérateur de Steklov-Poincaré tangent :

$$\mathcal{S}_T = \frac{\partial \mathcal{S}_{NL}(\widehat{U}; \mathbf{f}_{ext})}{\partial \widehat{U}} \quad (3.9)$$

et  $\underline{R}$  est l'assemblage des résidus non-linéaires locaux condensés aux interfaces :

$$\underline{R} = \sum_s A^s \underline{R}^s \quad (3.10)$$

Le problème (3.8) est identique à celui résolu à chaque itération de Newton dans les approches Newton-Krylov-Schur. La seule différence concerne le second membre  $\underline{R}$  : l'équilibre et le comportement des sous-structure étant vérifiés au cours de l'étape locale non-linéaire précédente, ce dernier ne provient que des défauts d'équilibre aux interfaces, soit  $\underline{F}^s + \underline{F}^{s'}$  pour une interface  $\Gamma^{ss'}$ .

Le processus itératif est arrêté lorsque l'ensemble des équations du problème de base sont vérifiées : équilibre et comportement non-linéaires des sous-structure et équilibre des efforts d'interface.

**Remarque :** Alors que les approches Newton-Krylov-Schur classiques proposent de condenser sur les interfaces le problème tangent global obtenu dans le cadre d'un schéma de Newton, l'approche présentée ici propose de résoudre par une stratégie de Newton le problème non-linéaire condensé aux interfaces (3.6). Vu de cette façon, l'étape non-linéaire locale n'est rien d'autre que l'étape de calcul du

résidu non-linéaire d'interface  $\underline{R}$ . De la même façon, cette remarque suffit à apporter la preuve de la convergence (quadratique) de la méthode, sous les hypothèses classiques de convergence de la méthode de Newton. Dans [Pebrel *et al.*, 2008], les auteurs présentent le même concept dans le cadre d'une méthode de décomposition duale.

### Mise en œuvre numérique, pour le cas linéaire

Après discrétisation, le problème global tangent d'interface s'écrit sous la forme d'un système matriciel :

$$\mathcal{S}_T \delta \hat{u} = \underline{R} \quad (3.11)$$

où  $\mathcal{S}_T$  est l'opérateur de Steklov-Poincaré, qui correspond sous sa forme discrétisée à l'opérateur de Schur primal classique, obtenu par l'assemblage des opérateurs tangents locaux condensés sur les interfaces  $\mathcal{S}_T^s$  (dans le cas linéaire) :

$$\mathcal{S}_T = \sum_s A^s \mathcal{S}_T^s (A^s)^T = \sum_s A^s (\mathbf{K}_{bb}^s - \mathbf{K}_{bi}^s \mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{K}_{ib}^s) (A^s)^T \quad (3.12)$$

où  $A^s$  est l'opérateur d'assemblage et  $\mathbf{K}^s$  est l'opérateur de raideur par sous-structure  $s$ , obtenu à la fin de l'étape non-linéaire locale précédente.

Le résidu condensé sur les interfaces  $\underline{R}$  est réactualisé à chaque itération globale. Dans le cas linéaire il s'écrit :

$$\underline{R} = \sum_s A^s \underline{R}^s = \sum_s A^s (\underline{r}_b^s - \mathbf{K}_{bi}^s \mathbf{K}_{ii}^{s-1} \underline{r}_i^s) \quad (3.13)$$

où  $\underline{R}^s$  est le résidu local par sous-structure.

On peut noter que le résidu global résulte de l'assemblage des résidus locaux condensés et que la convergence locale assure la convergence globale. En plus, dans le cas d'une résolution exacte des problèmes non-linéaires par sous-structures, les résidus intérieurs  $\underline{r}_i^s$  sont nuls, de sorte que le résidu condensé ne provient que des défauts d'équilibre des termes  $\underline{r}_b^s$  aux interfaces. En pratique, le terme  $\underline{r}_i^s$ , bien que très petit, n'est pas rigoureusement nul et il est préférable de conserver l'expression complète (3.13) pour le calcul du second membre  $\underline{R}$ , en particulier dans le cas où les critères de convergence locaux sont relâchés (voir section 3.2.1).

Le problème est ainsi, sur la forme, exactement identique au problème global condensé utilisé dans les méthodes NKS classiques. Sa résolution peut donc être réalisée exactement de la même manière, au moyen de solveurs itératifs parallèles de Krylov, avec les mêmes techniques de préconditionnement que dans les méthodes de décomposition de domaine (BDD, FETI, etc. ).

### 2.1.2 Étape locale non-linéaire par sous-structure

Étant donnés les déplacements d'interface  $\widehat{\underline{u}}$  (calculés à l'étape globale linéaire précédente, voir 2.1.1), on recherche sur chaque sous-structure une solution au problème non-linéaire soumis à un chargement externe, avec une condition de Dirichlet sur les interfaces.

En prenant en compte le problème de référence et les notations déjà présentés ou paragraphe 5.1 du CHAP. 2, cette étape revient à trouver, pour chaque sous-structure  $\Omega^s$ , le champ de déplacement solution  $\underline{u}^s$  vérifiant :

$$\mathbf{f}_{int}(\underline{u}) + \mathbf{f}_{ext} = 0 \quad (3.14)$$

$$\underline{u}^s = \bar{\underline{u}} \quad \text{sur} \quad \partial_1 \Omega^s \quad (3.15)$$

$$\underline{u}^s = \widehat{\underline{u}}^s \quad \text{sur} \quad \Gamma^s \quad (3.16)$$

La solution obtenue à la fin de cette étape vérifie donc toutes les équations du problème de base, hormis l'équilibre aux interfaces entre sous-structures, qui n'est pas assuré. C'est cette étape que nous nommons **étape de relocalisation non-linéaire**.

#### Mise en œuvre numérique

L'étape locale correspond à la résolution, par sous-structure, d'un problème non-linéaire géométrique à incrément de déplacement imposé  $\delta\widehat{\underline{u}}$ , sur les interfaces. Il peut être résolu par une méthode de Newton. Le problème tangent à résoudre est le suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Tii}^s(\underline{u}^s) & \mathbf{K}_{Tib}^s(\underline{u}^s) \\ \mathbf{K}_{Tbi}^s(\underline{u}^s) & \mathbf{K}_{Tbb}^s(\underline{u}^s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\underline{u}_i^s \\ \delta\underline{u}_b^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{r}_i^s \\ \underline{r}_b^s \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

où l'indice  $i$  correspond aux degrés de liberté internes,  $b$  aux degrés de liberté des interfaces,  $\underline{r}_i^s$  et  $\underline{r}_b^s$  représentent le résidu associé à l'équilibre de la sous-structure  $s$  à l'itération correspondant.

Pour résoudre ce problème, il existe plusieurs techniques classiques permettant d'imposer des déplacement  $\delta\widehat{\underline{u}}$  sur les interfaces, parmi lesquelles :

- L'élimination directe des inconnues d'interface  $\delta\underline{u}_b^s = \delta\widehat{\underline{u}}$  :

$$\delta\underline{u}_i^s = \mathbf{K}_{Tii}^s{}^{-1}(\underline{r}_i^s - \mathbf{K}_{Tib}^s \delta\widehat{\underline{u}}^s) \quad (3.18)$$

- La pénalisation, qui consiste à ajouter un terme de raideur  $k_p$  suffisamment grand aux termes diagonaux de la sous-structure  $\mathbf{K}_{Tbb}$  et à modifier le second membre pour obtenir :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Tii}^s & \mathbf{K}_{Tib}^s \\ \mathbf{K}_{Tbi}^s & \mathbf{K}_{Tbb}^s + k_p \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\underline{u}_i^s \\ \delta\underline{u}_b^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{r}_i^s \\ \underline{r}_b^s + k_p \cdot \delta\widehat{\underline{u}}^s \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Cette approche est largement répandue du fait de sa simplicité de programmation, mais elle n'est pas exacte et peut amener à des systèmes mal conditionnés.

- La dualisation via l'introduction de multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$ , menant à un problème du type :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Tii}^s & \mathbf{K}_{Tib}^s & 0 \\ \mathbf{K}_{Tbi}^s & \mathbf{K}_{Tbb}^s & \mathbf{B}^t \\ 0 & \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \underline{u}_i^s \\ \delta \underline{u}_b^s \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{r}_i^s \\ \underline{r}_b^s \\ \mathbf{B} \delta \hat{\underline{u}}^s \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Cette approche, assez courante, est exacte. Elle engendre cependant une augmentation de la taille du problème à résoudre, qui peut devenir coûteux. Par ailleurs, la matrice obtenue n'est plus définie positive mais inversible si  $\mathbf{B}$  est injective ( $\ker \mathbf{B} = \{0\}$ , si les relations sont indépendantes). Les techniques du Lagrangien augmenté et du double multiplicateur de Lagrange peuvent également être utilisées.

Le choix entre ces différentes techniques doit être fait en prenant en compte à la fois les considérations théoriques (vérification exacte ou approchée) et pratiques (facilité de programmation, disponibilité dans les outils utilisés, conditionnement des matrices, etc.). Il n'a cependant pas d'influence directe sur le comportement global de la stratégie. Pour les petits exemples, nous avons retenu une technique d'élimination directe (méthode développée en Matlab) et pour les exemples plus importants une technique de pénalisation (méthode développée en C++).

### 2.1.3 Algorithme version primale

L'encadré ALG. 7 reprend l'ensemble des étapes de la résolution de la méthode de relocalisation non-linéaire avec une approche primale. L'étape linéaire globale (identique à celle des approches NKS classiques) est résolue au moyen d'un solveur itératif de Krylov qui sera détaillé en CHAP. 4. Pour la majorité des exemples académiques développés sous Matlab, le problème d'interface tangent est assemblé et résolu par une méthode directe. L'objectif étant essentiellement dans ce cas de mettre en évidence l'influence du raccord et l'intérêt de la relocalisation. Sa mise en œuvre numérique est semblable en tout point.

Les résolutions non-linéaires par sous-structure sont réalisées au moyen de schémas de Newton-Raphson locaux. Il est important de noter qu'elles sont complètement indépendantes et donc aisément parallélisables.

L'implémentation de l'approche ne demande que très peu de modifications par rapport à une approche NKS classique. Par ailleurs, ces dernières ne concernent que l'étape locale par sous-structure et ne viennent modifier ni la structure de données, ni l'implémentation parallèle. Pour ces raisons, l'approche avec relocalisation non-linéaire à déplacements imposés peut être mise en œuvre assez rapidement dans tout code éléments finis disposant d'un solveur de type Newton-Krylov-Schur.

---

**Algorithme 7** : Relocalisation non-linéaire avec une approche primal (pour un seul pas de chargement)

---

```

pour  $t = 1$  à  $m_{max}$  faire // Étape globale linéaire, problème
d'interface
  - Assemblage des opérateurs locaux tangents  $\mathbf{K}_T^{s(t)}(\underline{u}^{(t-1)})$  ;
  - Factorisation  $\mathbf{K}_{Tii}^s$  ;
  - Assemblage des résidus locaux  $\underline{r}^{(t)}$ ;
  - Résolution du problème global tangent [Solveur de Krylov] :
 $\mathbf{S}_T^{(t)} \cdot \delta \widehat{\underline{u}}^{(t)} = \underline{R}^{(t)}$ ;
  - pour  $j = 1$  à  $n_{max}$  faire // Étape non-linéaire locale,
relocalisation non-linéaire
    si ( $j = 1$ ) alors
      |  $\delta \underline{u}_b = \delta \widehat{\underline{u}}^{(t)}$ ;
    fin
    - Calcul  $\delta \underline{u}_i^{(j)} = (\mathbf{K}_{Tii}^{(j)})^{-1}(\underline{r}_i^{(j)} - \mathbf{K}_{Tib}^{(j)} A^{sT} \delta \widehat{\underline{u}}^{(t)})$ ;
 $\underline{u}_i^{(j)} = \underline{u}_i^{(j-1)} + \delta \underline{u}_i^{(j)}$ ;
    - Mis-à-jour de  $\mathbf{K}^{(j+1)}(\underline{u}^{(j)})$  et  $\underline{r}_i^{(j)}(\underline{u}^{(j)})$ ;
    si  $\eta_{local} < \eta_{local}^{crit}$  alors
      | break
    fin
  fin
   $\underline{u}^{(t)} = \underline{u}^{(j)}$ ;
  si  $\eta_{global} < \eta_{global}^{crit}$  alors
    | break
  fin
fin

```

---

Au final, l'algorithme présente des schémas de Newton-Raphson imbriqués : un schéma global pour l'équilibrage des efforts aux interfaces, et des schémas locaux pour la résolution des problèmes non-linéaires par sous-structure. On pourrait ainsi qualifier cette approche de schéma de Newton « multi-niveaux ». A chacun de ces schémas est associé un critère de convergence  $\eta^{crit}$ , portant sur la vérification de l'équilibre dans chacune des sous-structures au niveau local, et sur l'équilibre des interfaces au niveau global.

Enfin, par souci de lisibilité, nous avons omis, dans ALG. 7, les schémas incrémentaux associés à chacune des procédures de Newton. Au niveau global, il s'agit d'un pilotage classique du chargement extérieur  $F_{ext}$ , mis en œuvre de la même manière que pour les approches NKS. Au niveau local, le schéma incrémental mis en place permet un pilotage différencié des calculs non-linéaires par sous-structure, en fonction des non-linéarités locales présentes.

## 2.2 Cas d'une décomposition de domaine mixte

Les méthodes de décomposition de domaine mixte sont introduites dans la littérature de deux manières. Dans une première approche, on s'appuie sur une méthode de Lagrangien augmentée. Trois champs d'interface sont utilisés : la trace sur les interfaces du déplacement d'une sous-structure, un déplacement d'interface (unique) additionnel et un multiplicateur de Lagrange localisé par sous-structure permettant d'assurer la continuité du déplacement bord des sous-structures avec le déplacement d'interface. [Series *et al.*, 2003; Brezzi et Marini, 2005]. Un problème d'interface formulé en déplacement ou en effort impliquant des résolutions de problèmes locaux par sous-structure avec conditions de Robin est ainsi défini. Un solveur de Krylov avec un préconditionneur *ad hoc* peut ainsi être utilisé pour le résoudre.

Dans le second type, un algorithme à deux directions de recherche est utilisé *a priori* sans introduire de Lagrangien augmenté. Trois couples effort-déplacement sont introduits : un pour chaque sous-structure et un pour l'interface. Par rapport à l'approche précédente, un champ d'effort d'interface supplémentaire est clairement introduit. Les deux directions de recherche permettent de fermer le problème. Dans ce cas, les efforts d'interfaces et les déplacements d'interfaces jouent un rôle symétrique [Fortin et Glowinski, 1983]. Les méthodes de décomposition de domaine mixte monoéchelle et multiéchelle basée sur la méthode LaTIn font partie de ce type d'approche [Ladevèze *et al.*, 2002; Ladevèze et Nouy, 2003; Ladevèze et Dureisseix, 1999; Champaney *et al.*, 1999; Guidault *et al.*, 2008; Kerfriden *et al.*, 2009].

Dans les travaux de [Glowinski et Le Tallec, 1990] les deux directions de recherche correspondent aux deux étapes d'augmentation des multiplicateurs de Lagrange dans l'algorithme de type UZAWA dans sa version ALG3. Des relations étroites entre cet algorithme et les méthodes de gradient [Glowinski et Le Tallec, 1989] permettent de montrer que les paramètres d'augmentation jouent le rôle des pas optimaux de directions de recherche. Cela permet une interprétation utile des directions de recherche pour choisir ces dernières. Leur choix étant crucial pour avoir des taux de convergence intéressants. Cela montre que, bien qu'introduites de façon différentes, les approches mixtes de la littérature sont fortement connectées et de nombreuses équivalences peuvent être mises à jour.

Dans la suite, la méthode de décomposition de domaine mixte étudiée est introduite par un schéma itératif à deux directions de recherche de façon similaire au formalisme de la méthode LaTIn avec deux directions de recherche. Les directions de recherche sont des paramètres de la méthode et sont introduites *a priori* sans précision particulière sur leur choix. Leur choix sera précisé au moment opportun. L'écriture du problème d'interface n'est ici pas classique par rapport aux approches de la littérature [Pebrel *et al.*, 2008; Gosselet et Rey, 2006] mais apporte un autre point de vue sur le rôle et le choix des paramètres de l'approche.

### 2.2.1 Étape locale non-linéaire par sous-structure

Étant donnés des efforts  $\widehat{\underline{F}}^s$  (équilibrés) et déplacements  $\widehat{\underline{U}}^s$  (continus aux interfaces), déterminés par un calcul global précédent (ou une étape d'initialisation), on recherche les champs d'efforts  $\underline{f}^s$  et de déplacement  $\underline{u}^s$ , par sous-structure  $\Omega^s$  vérifiant (problème de référence et notations données au paragraphe 5.1 du CHAP. 1) :

$$\mathbf{f}_{int}^s - \mathbf{k}^s \underline{u}^s + (\mathbf{k}^s \widehat{\underline{U}}^s + \widehat{\underline{F}}^s) + \mathbf{f}_{ext}^s = 0 \quad (3.21)$$

$$\underline{u}^s = \underline{\bar{u}} \quad \text{sur} \quad \partial_1 \Omega^s \quad (3.22)$$

$$(\underline{f}_{|\Gamma}^s - \widehat{\underline{F}}^s) + \mathbf{k}^s (\underline{u}_{|\Gamma}^s - \widehat{\underline{U}}^s) = 0 \quad (3.23)$$

Les quantités  $\widehat{\cdot}$  font référence à des quantités d'interface (2.2.2). Les conditions aux limites ( $\partial_1 \Omega^s$ ) sont prises en compte par une méthode d'élimination directe dans les étapes locales par sous-structure.

De manière incrémentale (3.21) donne :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Tii}^s(\underline{u}^s) & \mathbf{K}_{Tib}^s(\underline{u}^s) \\ \mathbf{K}_{Tbi}^s(\underline{u}^s) & \mathbf{K}_{Tbb}^s(\underline{u}^s) + \mathbf{k}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \underline{u}_i^s \\ \delta \underline{u}_b^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{r}_i^s \\ \underline{r}_b^s + \mathbf{k}^s \cdot \Delta \underline{U}^s + \widehat{\underline{F}}^s \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

où  $\Delta \underline{U}^s = \widehat{\underline{U}}^s - \underline{u}_b^s$  est la différence entre  $\widehat{\underline{U}}^s$  et  $\underline{u}_b^s$  est appelé « saut de déplacement ».

La direction de recherche  $\mathbf{k}^s$  est un paramètre de la méthode. C'est une matrice symétrique définie positive. L'interprétation et le choix de cette direction de recherche sont détaillés dans la section 3.2.2. Il est intéressant de noter que le caractère bien posé du problème local par sous-structure (3.24) provient de l'adjonction de la direction de recherche  $\mathbf{k}^s$ . Il ne nécessite pas d'introduire et de manipuler des modes rigides par sous-structure comme c'est le cas dans une approche duale. Cette opération peut en effet s'avérer être délicate dans la cas des grands déplacements qui nous intéressent.

### 2.2.2 Étape globale, problème tangent d'interface

La seconde étape, une fois les problèmes non-linéaires sur les sous-structures résolus, consiste à rechercher des champs d'effort  $\widehat{\underline{F}}$  et de déplacement  $\widehat{\underline{U}}$  admissibles aux interfaces, c'est-à-dire respectivement continus et équilibrés de part et d'autre d'une interface  $\Gamma$ ,

$$\widehat{\underline{U}}^s = \widehat{\underline{U}}^{s'} \quad \forall \Gamma \quad (3.25)$$

$$\widehat{\underline{F}}^s + \widehat{\underline{F}}^{s'} = 0 \quad \forall \Gamma \quad (3.26)$$

Connaissant  $\underline{f}_b^s$  et  $\underline{u}_b^s$  (effort et déplacements bords par sous-structure) déterminés à l'étape précédente pour les sous-structures  $\Omega$  connectés à  $\Gamma$ , on recherche les champs  $\widehat{\underline{U}}$  et  $\widehat{\underline{F}}$  vérifiant les équations (3.25) et (3.26) au moyen d'une direction de recherche non-linéaire  $\widehat{\mathbf{k}}^s$  défini de part et d'autre de l'interface :

$$\widehat{\mathbf{k}}^s(\widehat{\underline{U}}^s - \underline{u}_b^s) = \widehat{\underline{F}}^s - \underline{f}_b^s \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.27)$$

Si nous supposons que le problème non-linéaire local, section 2.2.1, possède une seule solution pour un couple  $(\widehat{\underline{F}}$  et  $\widehat{\underline{U}})$  donné. On peut définir un opérateur non-linéaire d'interface :

$$\underline{U}^s = S_{NL}^s \left( \underbrace{\widehat{\underline{F}}^s + \mathbf{k}\widehat{\underline{U}}^s}_{\underline{\mu}^s}; \underline{\mathbf{f}}_{ext}^s \right) \quad (3.28)$$

où  $S_{NL}^s$  est un opérateur non-linéaire de Steklov-Poincaré associé à chaque sous-structure. Par définition, il couple entre eux les champs d'effort et de déplacement de toutes les interfaces de chaque sous-structure.

Dans le cas linéaire et après discrétisation, cet opérateur,  $S_L$  s'écrit :

$$\begin{aligned} S_L^s(\underline{\mu}^s; \underline{\mathbf{f}}_{ext}^s) &= (\mathcal{S}_T^s + \mathbf{k}^s)^{-1} \underline{\mu}^s + \underline{\mathbf{b}}_p^s \\ \text{avec } \mathcal{S}_T^s &= \mathbf{K}_{bb}^s - \mathbf{K}_{bi}^s \mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{K}_{ib}^s \\ \underline{\mathbf{b}}_p^s &= (\underline{r}_b^s - \mathbf{K}_{bi}^s \mathbf{K}_{ii}^{s-1} \underline{r}_i^s) \end{aligned} \quad (3.29)$$

où  $\underline{\mathbf{b}}_p^s$  est le résidu global linéarisé condensé sur les interfaces. Ce résidu global est réactualisé à chaque itération globale.  $\underline{r}^s$  correspond au résidu non-linéaire local par sous-structure.

En utilisant cette direction de recherche particulière, on obtient alors le problème global suivant posé sur les déplacements d'interface (après discrétisation et linéarisation par une méthode de Newton) :

$$\mathcal{S}_T \delta \widehat{\underline{u}} = \sum_s A^s \left( \mathcal{S}_T^s \underline{u}_b^s + \underline{r}_b^s - \mathbf{K}_{Tbi}^s \mathbf{K}_{Tii}^{s-1} \underline{r}_i^s \right) = \underline{R} \quad (3.30)$$

$$\widehat{\underline{U}}^s = \widehat{\underline{U}}_{old}^s + \delta \widehat{\underline{u}}^s \quad (3.31)$$

Finalement, pour obtenir les efforts d'interface  $\widehat{\underline{F}}^s$ , on utilise la définition de la direction de recherche (3.27), ce qui donne pour le cas linéaire :

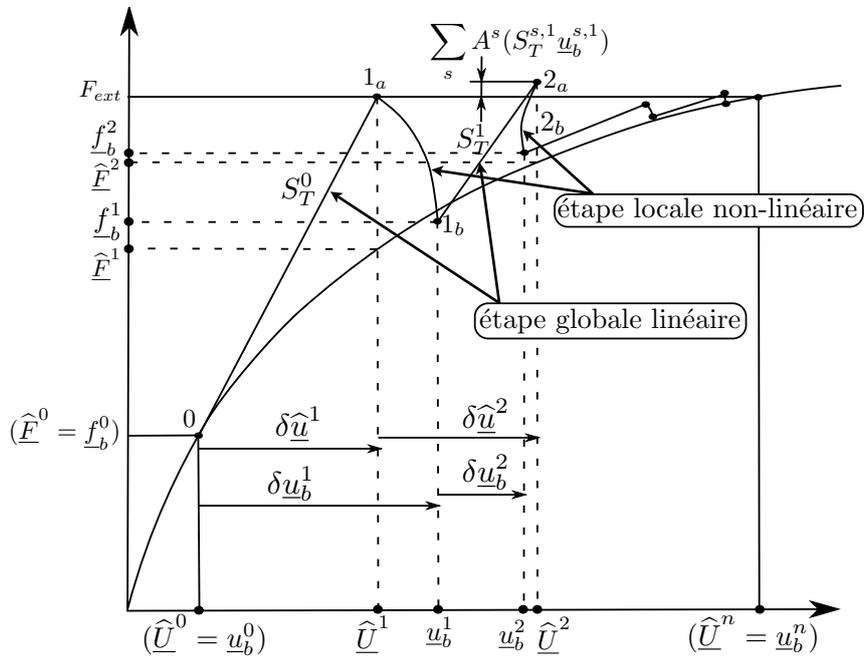
$$\widehat{\underline{F}}^s = \underline{f}_b^s + \mathcal{S}_T^s (\widehat{\underline{U}}^s - \underline{u}_b^s) \quad (3.32)$$

Le système (3.30) est similaire à celui de la méthode primale (3.11). La seule différence est le second membre  $\underline{R}$ . Ce problème peut être résolu de la même manière

que les méthodes NKS classiques, en particulier avec le même type de solveur itératif et préconditioneurs.

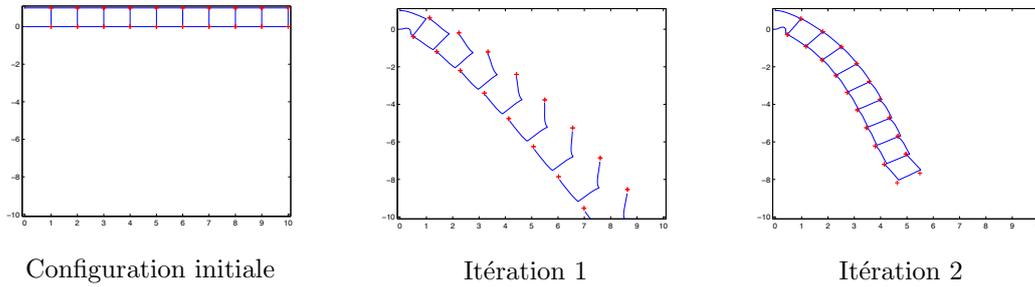
En connaissant les déplacements  $\widehat{U}^s$  à partir de (3.31) et en utilisant (3.32), on obtient les efforts d'interfaces équilibrés  $\widehat{F}^s$ . Cette résolution peut être traitée indépendamment dans chaque sous-structure et elle ne demande pas d'effort particulier.

Le principal avantage de la méthode par rapport à la version primale c'est sa capacité à relaxer les contraintes imposées par les conditions limites sur les problèmes non-linéaires. Cela permet à la méthode d'utiliser des pas de chargement globaux plus importants et ainsi de réduire les nombres de résolution globales qui sont les plus coûteuses et le nombre d'échanges d'information entre les processeurs.



**Figure 3.2:** Schéma itératif global du problème d'interfaces, pour un pas de chargement

La FIG. 3.2 présente le schéma itératif du problème non-linéaire d'interfaces avec les différentes étapes de la méthode. En commençant par un point d'équilibre connu (Point 0 sur FIG. 3.2 et configuration initiale en FIG. 3.3), la première itération « étape linéaire globale » consiste à calculer les efforts et déplacements d'interfaces ( $\widehat{F}^1$  et  $\widehat{U}^1$ ) en connaissant le résidu global (3.30) et le complément de Schur assemblé des différentes sous-structures,  $\mathcal{S}_T^0$  (3.12) (point  $1_a$  en FIG. 3.2). À partir des données d'interfaces ( $\widehat{F}^1$  et  $\widehat{U}^1$ ) une étape non-linéaire locale est menée dans chaque sous-structure afin d'obtenir les efforts et déplacement locaux ( $f_b^1$  et  $u_b^1$ ), qui ne sont pas nécessairement sur la courbe d'équilibre (point  $1_b$  en FIG. 3.2 ou itération 1 en FIG. 3.3). Après,  $\mathcal{S}_T^1$  et le résidu  $\underline{R}$  sont mis à jour et une nou-



**Figure 3.3:** Evolution de la déformée d'une structure stable monotone

velle itération globale linéaire est faite. Ce nouveau résidu ( $\underline{R}$ ) prend en compte les résidus par rapport à  $F_{ext}$  et aussi l'influence de saut de déplacement entre les sous-structures ( $\sum_s A^s(\mathcal{S}_T^s \underline{u}_b^{s,1})$ , point  $2_a$  en FIG. 3.2, itération 1 en FIG. 3.3). À ce point-là, une nouvelle estimation de  $\hat{\underline{F}}$  et  $\hat{\underline{U}}$  est obtenue, et une nouvelle étape locale non-linéaire est menée (itération 2 en FIG. 3.3).

Finalement, à convergence, l'équilibre de sous-structures, l'équilibre des interfaces et la continuité des déplacements aux interfaces sont assurés.

### 2.2.3 Algorithme version mixte

ALG. 8 reprend l'ensemble des étapes de la résolution de la méthode de Relocalisation non-linéaire version mixte.

Comme pour l'approche précédente, l'étape globale linéaire est résolue au moyen d'un solveur itératif de Krylov, qui peut être parallélisé. Les résolutions non-linéaires par sous-structure sont quant à elles complètement indépendantes et donc parallélisables. Ici encore, les schémas incrémentaux ne sont pas indiqués, afin de faciliter la lecture. Ils sont identiques dans leur principe à ce qui a été présenté pour la méthode de relocalisation non-linéaire à déplacements imposés.

## 2.3 Choix des directions de recherche

Les deux directions de recherche  $\mathbf{k}^s$  et  $\hat{\mathbf{k}}^s$  sont des paramètres de la méthode. Dans cette section, on donnera plus de détails sur le choix et l'interprétation de ces paramètres dans le cas de l'élasticité linéaire.

### 2.3.1 Interprétation de la direction de recherche locale, $\mathbf{k}^s$

La direction de recherche locale  $\mathbf{k}^s$  doit être un opérateur linéaire défini positif, représentant la raideur « vue » par la sous-structure considérée. Sa valeur optimale théorique est le complément de Schur primal du reste de la structure, mais il est trop coûteux à calculer. Ici, on présente trois approximations classiques :

1. Complément de Schur primal de la sous-structure voisine (Préconditionneur Dirichlet local de l'approche duale).

**Algorithme 8** : Relocalisation non-linéaire avec une MDD mixte

---

```

pour  $t = 1, \dots$  faire // Étape global linéaire, problème des
interfaces
- Assemblage des opérateurs locaux tangents  $\mathbf{K}_T^s(u^{(t-1)})$ ;
- Factorisation des  $\mathbf{K}_{Tii}^s$ ;
- Assemblage de second membre  $\underline{R}^{(t)}$ ;
si  $\eta_{global} < \eta_{global}^{crit}$  alors // Convergence globale
| Sortie;
fin
- Résolution du problème global condensé [Solveur itératif de Krylov] :
 $\mathbf{S}_T^{(t)} \cdot \delta \widehat{\underline{u}}^{(t)} = \underline{R}^{(t)}$ ;
- Calcul par sous-structure de l'effort admissible :
 $\widehat{\underline{F}}^{(t)} = \underline{f}_b^{(t-1)} + \mathbf{S}_T^{(t)} (\widehat{\underline{U}}^{(t-1)} + \delta \widehat{\underline{u}}^{(t)} - \underline{u}_b^{(t-1)})$ ;
pour  $j = 1, \dots$  faire // Étape local non-linéaire, par
sous-structure
- Calculer par sous-structure :
 $\delta \underline{u}^{(j)} = (\mathbf{K}_T^{(j)} + \mathbf{k})^{-1} (\underline{r}^{(j)} + \mathbf{k} \Delta \underline{U}^{(t)} + \widehat{\underline{F}}^{(t)})$ ;
-  $\underline{u}^{(j)} = \underline{u}^{(j-1)} + \delta \underline{u}^{(j)}$ ;
- Mise à jour de :  $\mathbf{K}_T^{(j+1)}(\underline{u}^{(j)})$  et  $\underline{r}^{(j+1)}(\underline{u}^{(j)})$ ;
si  $\eta_{local} < \eta_{local}^{crit}$  alors // Convergence locale
| Sortie;
fin
fin
-  $\underline{u}_b^{(t)} = \underline{u}_b^{(j)}$ ;
- Calculer  $\underline{f}_b^{(t)}$ ;
fin

```

---

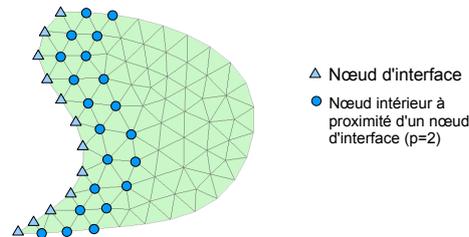
Une première approximation consiste à choisir pour chaque interface le complément de Schur de la sous-structure directement connectée. Ce choix peut cependant s'avérer coûteux lorsque les sous-structures comportent un grand nombre de degrés de liberté. Par ailleurs, l'opérateur obtenu est plein, de taille égale au nombre de degrés de liberté de l'interface. Outre les problèmes liés au stockage de l'opérateur et au transfert de données entre processeurs, ce choix vient fortement augmenter le coût de l'opération d'assemblage  $\mathbf{K} + \mathbf{k}^s$ ,  $\mathbf{K}$  ayant une structure de matrice creuse qu'il faudra alors largement modifier, de nombreux termes non nuls provenant de  $\mathbf{k}$ . Par ailleurs, la factorisation des opérateurs obtenus par sous-structure est extrêmement pénalisée, du fait de l'augmentation importante de leur largeur de bande.

Afin de contourner ces effets néfastes, on peut se contenter d'approximations de cet opérateur, notamment en ne conservant que :

- l'opérateur  $\mathbf{K}_{bb}$  (préconditionneur *lumped*),

- la diagonale de l’opérateur  $\mathbf{K}_{bb}$  (préconditionneur *super lumped*),
  - une bande diagonale d’une largeur réduite de la matrice de rigidité (le nombre d’inconnues nodales par exemple, soit 6 dans notre cas),
  - les termes correspondant à des termes non nuls déjà existant dans la structure de la matrice creuse de l’opérateur de raideur  $\mathbf{K}$ .
2. Complément de Schur du voisinage de l’interface.

Afin d’éviter le calcul explicite de l’opérateur de Schur complet de la sous-structure voisine, une autre approximation consiste à ne condenser que l’opérateur associé à une zone proche de l’interface [Paz et Storti, 2005]. La recherche de la zone est réalisée en considérant les connectivités du maillage : on ne retient que les nœuds dont la distance à l’interface (i.e. le chemin le plus court à un nœud de l’interface, en termes de nombre d’arêtes) est inférieure à un paramètre  $p$  donné. La FIG. 3.4 représente la zone pour  $p = 2$ .



**Figure 3.4:** Détermination des nœuds du voisinage d’une interface ( $p=2$ )

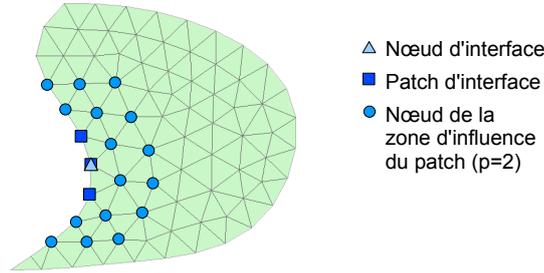
3. Assemblage de compléments de Schur locaux.

Une autre approche permettant de réduire la largeur de bande de l’opérateur d’interface  $\mathbf{k}^s$ , proposée initialement dans [Magoulès *et al.*, 2006]. Son principe repose sur une approximation de l’opérateur de raideur d’interface par une somme de contributions locales. Plus précisément, pour chaque nœud de l’interface, on calcule le complément de Schur d’une zone d’influence (quelques éléments de profondeur) sur un patch d’interface locale autour de ce nœud, comme illustré FIG. 3.5 pour une profondeur  $p = 2$ .

L’ensemble de ces contributions locales, éventuellement calculées en parallèle, sont ensuite rassemblées pour former l’opérateur  $\mathbf{k}^s$ . Il s’agit d’un opérateur creux qui a pour avantage de ne pas modifier la structure de remplissage de la matrice de raideur de la sous-structure. Il requiert cependant un grand nombre de calculs de compléments de Schur.

Il existe aussi, des approximations à deux-échelles [Gendre *et al.*, 2011], qui prend en compte une rigidité locale (voisinage de la sous-structure) tant que global de la structure (environnement complet).

Un point important est la réactualisation de cette direction de recherche. On a 4 possibilités :



**Figure 3.5:** Détermination des nœuds du voisinage d'un nœud interface (p=2)

- Utiliser pour tout le calcul, la direction de recherche calculée à la première itération globale.
- La réactualiser à chaque pas de chargement.
- La réactualiser à chaque itération globale.
- La réactualiser à chaque itération locale.

Pour l'étude présentée au paragraphe 3.2.2 on a choisi le complément de Schur du voisinage de l'interface de la sous-structure voisine,  $\mathbf{k}^s = \alpha \overline{\mathcal{S}}^s$ , réactualisé à chaque itération globale. Le choix du paramètre  $\alpha$  est analysé dans cette étude.

### 2.3.2 Choix de la direction de recherche globale, $\widehat{\mathbf{k}}^s$

Un choix optimal pour la direction de recherche globale du problème d'interface est l'opérateur de Schur tangent réactualisé local à chaque sous-structure, c'est cet opérateur qui est utilisé dans cette étude. L'interprétation de cette direction de recherche est motivée dans [Pebrel *et al.*, 2008].

Le problème d'interface (3.30) n'est pas assemble et n'est pas résolu par une méthode directe hormis pour les cas académiques développés sous Matlab pour lesquels l'objectif est d'étudier l'intérêt de la relocalisation et le choix du raccord (primal ou mixte). Un solveur de Krylov est utilisé (voir CHAP. 4)

Un aspect qui n'a pas été étudié est de prendre une direction de recherche globale non optimale à chaque incrément de chargement. On peut, par exemple, penser ne pas le réactualiser systématiquement, en prenant des versions approchées. Dans la suite, on notera que cet opérateur est actualisé systématiquement à la fin de chaque étape de relocalisation non-linéaire (voir ALG. 8).

## 2.4 Définition des critères d'arrêt local et global

Dans la méthode de relocalisation non-linéaire, des critères d'arrêt pour la boucle locale du solveur non-linéaire par sous-structure et pour la boucle globale du solveur non-linéaire associé au problème d'interface sont nécessaires. Pour les calculs sur les

sous-structures, on a utilisé le critère d'arrêt suivant :

$$\eta_{local} = \|r_{l,n}\|/\|r_{l,0}\| \quad (3.33)$$

où  $r_{l,n}$  est le résidu à l'itération  $n$  du système à résoudre ((3.20) pour la version primale et (3.24) pour la version mixte) et  $r_{l,0}$  est le résidu après la première itération de la boucle de Newton local. Pour les résultats présentés dans la section 3 on utilise  $\eta_{local}^{crit} < 10^{-3}$  (ce choix est justifié en paragraphe 3.2.1).

Une autre possibilité, consiste à ne pas actualiser  $r_{l,0}$  après chaque boucle locale, mais conserver celle de la première itération globale (prédiction élastique). En effet, réactualiser  $r_{l,0}$  à chaque itération globale, donne un critère très restrictif pour les dernières boucles locales. Cette possibilité n'a pas été testée et reste comme une perspective d'étude à très court terme.

Le critère d'arrêt global est défini :

$$\eta_{global} = \|\underline{R}_n\|/\|\underline{R}_0\| \quad (3.34)$$

où,  $\underline{R}_n$  est le résidu à l'itération globale  $n$ , (3.13) où (3.30). Dans le cas d'un problème à déplacement imposé (avec multiplicateur de Lagrange) :

$$\eta_{global} = \|(\underline{R}_n - \Lambda_n)\|/\|\underline{R}_0\| \quad (3.35)$$

où  $\Lambda_n$  est le multiplicateur de Lagrange à l'itération  $n$ .

Pour la version mixte le résidu  $\underline{R}_n$  assemblé, contient deux contributions : celui de l'équilibre de sous-structures  $(\underline{r}_b^s - \mathbf{K}_{Tbi}^s \mathbf{K}_{Tii}^{s-1} \underline{r}_i^s)$  et celui du saut de déplacements  $(\mathcal{S}_T^s \underline{u}_b^s)$ , ce saut est illustré à l'itération 2 globale de la FIG. 3.11.

Pour les résultats présentés dans la SEC. 3, le choix pour le critère global est  $\eta_{global}^{crit} < 10^{-6}$ .

Un premier choix pour le critère d'arrêt est basé sur une étude réalisée par [Cresta *et al.*, 2007], où il a été constaté que le critère d'arrêt local,  $\eta_{local}^{crit}$ , peut être choisi comme la racine carrée du critère d'arrêt global,  $\eta_{global}^{crit}$ . La convergence de la stratégie est contrôlée pour le critère d'arrêt global,  $\eta_{global}^{crit}$ . Une extension de cette étude est présentée au paragraphe 3.2.1.

### 3 Étude de robustesse sur des structures globalement stables et instables

Pour les deux versions de la méthode, primale (voir 2.1) et mixte (voir 2.2), un algorithme de type Newton-Raphson avec une adaptation du pas de chargement a été implémenté. En cas de convergence « lente », voir divergence, le pas de chargement est réduit à la moitié, pour deux convergences consécutives le pas est doublé. La définition des critères d'erreur est présentée au paragraphe 2.4.

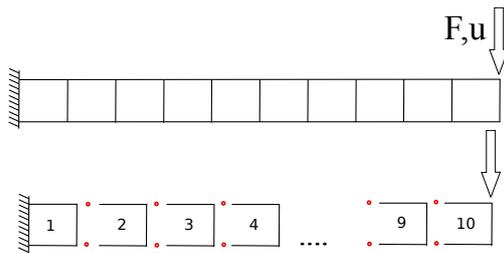
Dans cette section aucune technique de continuation n'est utilisée. Les problèmes sur les interfaces et sur les sous-structures sont résolus au moyen d'un solveur de type Newton-Raphson.

Dans les sections suivantes sont présentés les résultats pour la méthode NKS classique (NKS clas.) et pour la méthode de Relocalisation non-linéaire primale (Reloc-P) et mixte (Reloc-M).

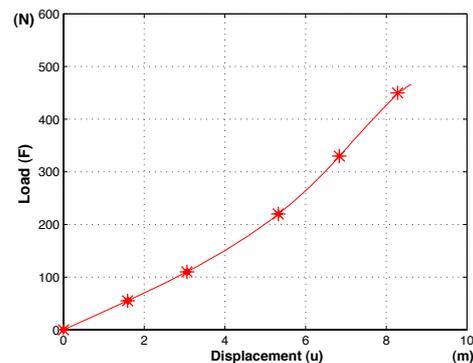
#### 3.1 Intérêt de la relocalisation

##### 3.1.1 Structures à comportement stable monotone

La structure étudiée est celle de la FIG. 3.6. Il s'agit d'un treillis de poutres décomposé en 10 sous-structures. Le matériau est élastique linéaire et ses caractéristiques sont un module de Young de 70 000 MPa et un coefficient de Poisson de 0,3. Chaque sous-structure est composée de 3 poutres, discretisées en 10 éléments de poutre (modèle de Navier-Bernoulli). Chaque sous-structure à 4 nœuds d'interface.



**Figure 3.6:** Structure avec comportement de type monotone et sous-structuration.



**Figure 3.7:** Comportement de la structure globalement stable, avec les points convergés de la méthode de relocalisation mixte

L'extrémité gauche de la structure est bloquée, et un chargement (effort ou déplacement  $F, u$ ) est appliqué au coin supérieur droit, de façon à mettre la structure en flexion. Les poutres supérieures se trouvent ainsi en extension alors que celles de

la zone inférieure, en compression, sont susceptibles de flamber. Pour assurer une instabilité locale (flambage local dans une sous-structure), la poutre inférieure de la sous-structure 1 a été affaiblie (réduction de la section à la moitié).

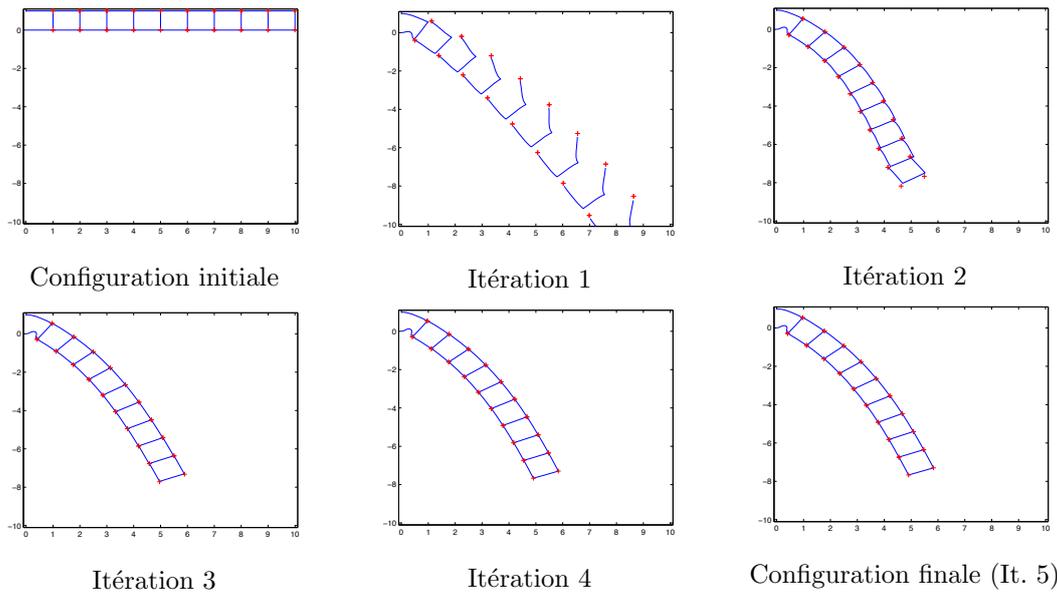
**Table 3.1:** Résultats de convergence de différentes méthodes pour la structure à comportement de type stable monotone

NKS Clas.		Reloc-P		Reloc-M		Reloc-M			
Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)	Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)	Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)	Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)		
55	8 (80)	55	8 (80)	55	4 (72)	450	5 (262)		
55	8 (80)	55	8 (80)	55	4 (75)				
110	diver.	110	11 (127)	110	5 (104)				
55	7 (70)	110	10 (108)	110	4 (85)				
55	6 (60)	120	9 (93)	120	5 (92)				
110	diver.								
55	6 (60)								
55	5 (50)								
110	diver.								
55	5 (50)								
55	12 (120)								
10	5 (50)								
450	62 (620)	450	46 (488)	450	22 (428)			450	5 (262)

Dans le TAB. 3.1 sont présentés les résultats pour le cas de la structure étudiée (FIG. 3.6). Le comportement global stable monotone de la structure est illustré en FIG. 3.7, dans laquelle sont aussi présentés les points de convergence pour la méthode de Relocalisation non-linéaire mixte (« Reloc-M », 3<sup>ème</sup> colonne de la TAB. 3.1). Deux pas de chargement sont envisagés : 55  $N$  et 450  $N$ . On essaye *a-priori* d'imposer le chargement en un seul pas de chargement. L'incrément de pas de chargement est éventuellement sous-découpé et des pas de calcul intermédiaires sont calculés en cas de non convergence selon la procédure décrite précédemment. On remarque que la méthode NKS classique, avec le pas de chargement le plus élevé (55  $N$ ), nécessite un nombre élevé d'itérations globales et locales (col. 1, « NKS clas. »). L'introduction de la relocalisation non-linéaire (col. 2) permet de réduire de façon importante le nombre d'itérations globales et locales. 5 pas intermédiaires ont été nécessaires contre 9 de la méthode « NKS Clas. ». L'utilisation d'une méthode de décomposition de domaine mixte permet de diminuer encore le nombre d'itérations globales à 22 (col. 3). En effet, la méthode NKS classique a besoin de plus des pas de chargement intermédiaire, par rapport aux méthodes de relocalisation, ce qui conduit à avoir moins des itérations locales et globales dans les méthodes de relocalisation. D'ailleurs, la version mixte de la méthode de relocalisation donne les meilleurs résultats en termes de nombre d'itérations locales et globales. Finalement, la seule méthode capable d'utiliser le chargement total (450  $N$ ) est la méthode de relocalisation non-linéaire version mixte (dernière colonne du TAB. 3.1), et elle converge en

réduisant le nombre des itérations locales et globales. La FIG. 3.8 présente l'évolution de la déformée de la structure au cours des itérations.

Cette étude montre que l'étape de relocalisation non-linéaire permet une réduction importante du nombre d'itérations globales et permet aussi l'utilisation d'incrément de chargement plus grands, tout en gardant le nombre d'itérations locales raisonnable. On peut noter que la version mixte admet des incréments de chargement très importants pour ce type des structures globalement stables.

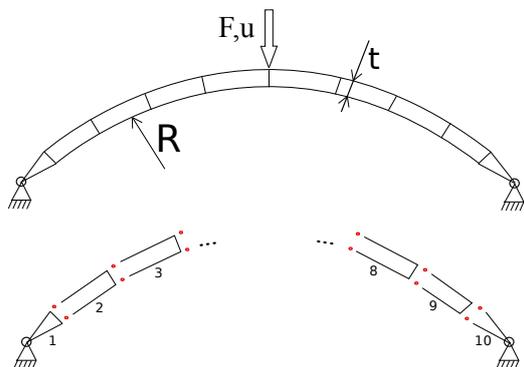


**Figure 3.8:** Evolution de la déformée de la structure stable monotone (FIG. 3.6 et 3.7) au cours des itérations globales de la méthode de relocalisation NL mixte, pour un incrément de chargement égal au chargement total

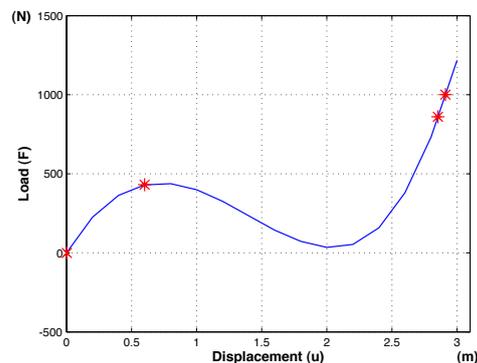
### 3.1.2 Structure à comportement de type *snap-through*

Dans cette section, on étudie les performances des différentes méthodes pour une structure exhibant un comportement de type *snap-through* (FIG. 3.9). La structure est un treillis de poutres en forme d'arche, avec un rayon  $R = 10 m$ , une épaisseur  $t = 0.6 m$ . Les propriétés matériau sont les mêmes que celles de l'exemple étudié au paragraphe 3.1.1. Le type d'éléments poutre utilisé pour la discrétisation du problème est également le même. Les deux extrémités sont articulées et un chargement est appliqué au milieu de la partie supérieure de l'arche. Pour favoriser le flambage (et aussi le comportement global de type *snap-through*) la poutre supérieure de la sous-structure 5 a été affaiblie. Le comportement de la structure est présentée dans la FIG. 3.10.

En TAB. 3.2 sont présentés les résultats pour cette structure (FIG. 3.9). La méthode NKS classique et la méthode de relocalisation NL primale n'arrivent pas à



**Figure 3.9:** Structure à comportement de type *snap-through* et sous-structuration.



**Figure 3.10:** Comportement de la structure *snap-through*, avec les points convergés de la méthode de relocation mixte

dépasser le point limite qui survient pour une force de  $430\text{ N}$  (col. 1 et 2). Pour les comparer, la méthode de relocation NL mixte a été aussi testée jusqu'au point limite (col. 1, 2 et 3, jusqu'à  $430\text{ N}$ ). La seule méthode qui permet de dépasser le point limite sans faire appel à une méthode de continuation est la méthode de relocation NL mixte (cas 4, pour un chargement initial de  $430\text{ N}$ ).

Finalement, le chargement total ( $F = 1000\text{ N}$ ) a été appliqué en un seul incrément avec méthode de relocation NL mixte (col. 4). Dans la FIG. 3.11 sont présentées la configuration initiale, et la configuration déformée de la structure à la fin des itérations globales 1, 2, 3, 4 et 10, pour le cas du chargement total appliqué en un seul incrément.

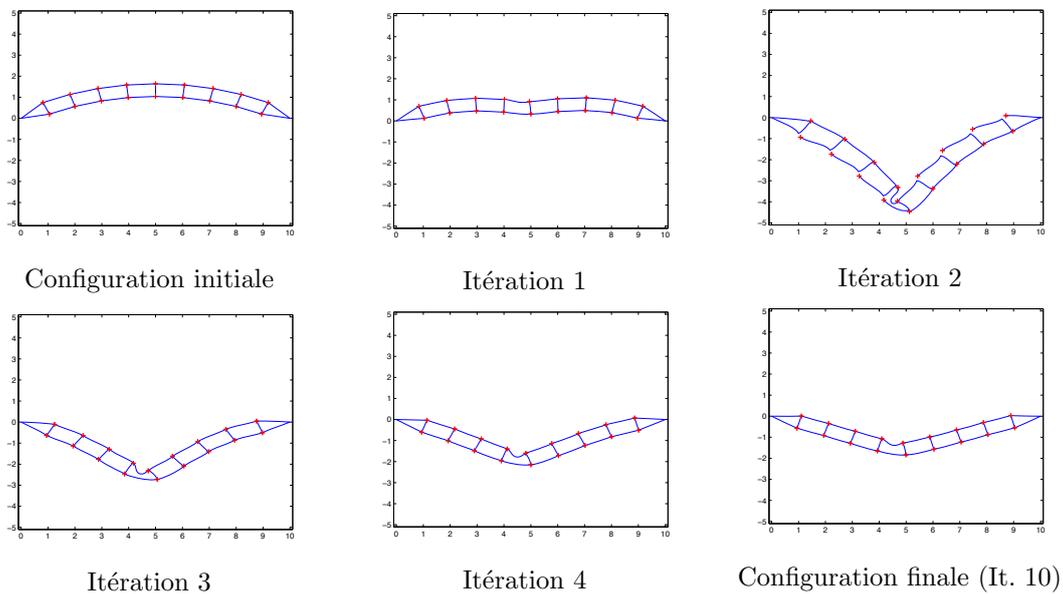
**Table 3.2:** Résultats de convergence des différentes méthodes pour la structure à comportement de type *snap-through*

NKS Clas.		Reloc-P		Reloc-M		Reloc-M	
Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)	Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)	Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)	Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)
430	7 (70)	430	7 (70)	430	6 (95)	1000	10 (234)
				430	8 (225)		
				140	3 (40)		
430	7 (70)	430	7 (70)	1000	17 (350)	1000	10 (234)

Aux conclusions de la section 3.1.1 on peut ajouter que la méthode de relocation mixte est plus robuste que la version primale, dans le sens où elle permet le passage d'un point limite de type *snap-through* ce qui n'est pas possible avec la version primale de la méthode (sans une méthode de continuation). La robustesse est due au paramètre  $\mathbf{k}^s$  de la méthode mixte. En effet,  $\mathbf{k}^s$  (3.24) peut être bénéfique pour le contrôle de singularités de la matrice de rigidité tangente  $\mathbf{K}^s$  quand un point limite est rencontré. Par conséquent, l'utilisation d'un algorithme de Newton est ici

rendu possible, dans ce cas de *snap-through*, sans faire appel à une méthode de continuation.

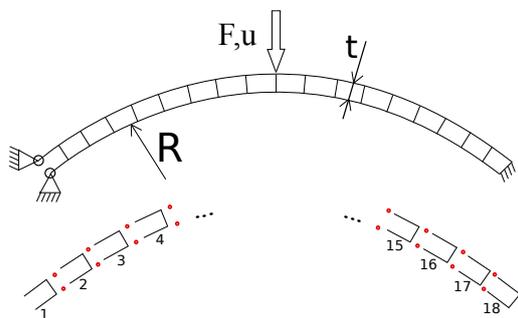
Si  $\mathbf{k}^s$  représente bien la rigidité de l'environnement de la sous-structure, aucune instabilité « artificielle » due à la sous-structuration du problème ne devrait apparaître. La FIG. 3.2 montre aussi, comment la méthode de relocalisation NL mixte pourrait permettre de dépasser un point limite global, grâce à l'étape locale non linéaire, qui relâche la condition d'incrément en déplacement. Bien évidemment le pilotage optimal de ce genre de méthodes reste un problème ouvert de même que le choix des pas de temps afin de ne pas rater de phénomènes importants tels que les points de bifurcation.



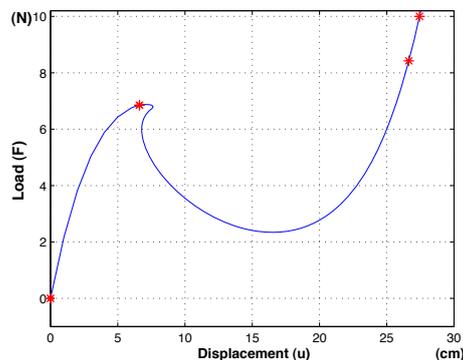
**Figure 3.11:** Premières itérations globales et configuration finale de la structure de type *snap-through* (FIG. 3.9 et 3.10), résolu avec la méthode de relocalisation NL mixte pour un chargement appliqué en un seul incrément

### 3.1.3 Structure à comportement de type *snap-back*

Les performances des différentes méthodes pour une structure avec un comportement de type *snap-back* (FIG. 3.12) sont présentées dans cette section. La structure est un treillis de poutres en forme d'arche, avec un rayon  $R = 2040 m$ , une épaisseur  $t = 2.9 m$ . Les propriétés matériau sont les mêmes que celles de l'exemple étudié au paragraphe 3.1.1. Le type d'éléments poutre utilisé pour la discrétisation du problème est également le même. Les deux extrémités à gauche sont articulées. L'extrémité droite est bloquée et un chargement est appliqué au milieu de la partie supérieure de l'arche. Pour favoriser le flambage (et aussi le comportement global de type *snap-back*) la poutre inférieure de la sous-structure 1 a été affaiblie. Le comportement de la structure est présenté dans la FIG. 3.13.



**Figure 3.12:** Structure à comportement de type *snap-back* et sous-structuration



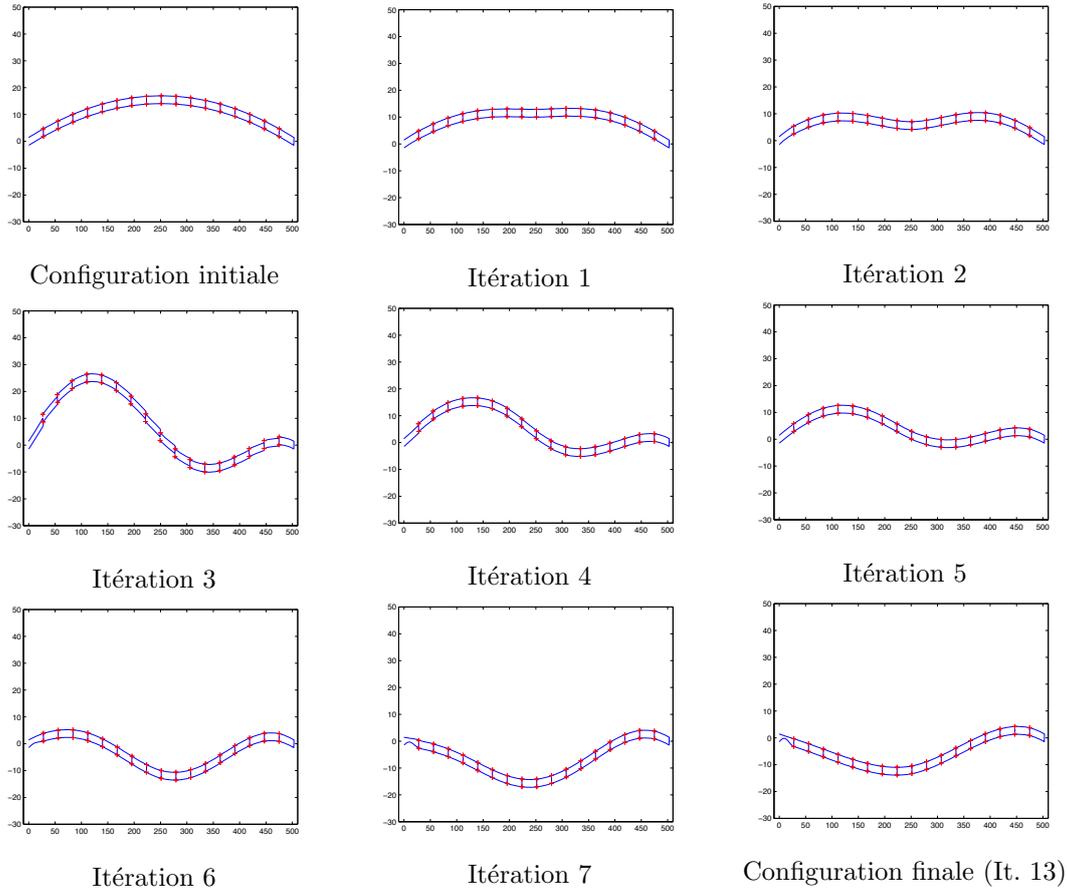
**Figure 3.13:** Comportement de la structure *snap-back*, avec les points convergés de la méthode de relocation mixte

En TAB. 3.3 sont présentés les résultats pour la structure avec comportement de type *snap-back* (FIG. 3.12). La méthode NKS classique (col. 1) et la méthode de relocation NL primale (col. 2) nécessite de faire un pas de calcul juste avant le point de *snap-back* pour le dépasser (charge = 6,85 N). Comme dans les deux cas précédents, le meilleur résultat est obtenu avec la méthode de relocation NL mixte, qui permet de faire des pas de chargement plus grands et de réduire le nombre d'itérations locales et globales.

Dans la FIG. 3.14 sont présentées : la configuration initiale, et la déformée de la structure à la fin des itérations globales 1 à 7 et 13, pour le cas du chargement total appliqué en un seul incrément.

**Table 3.3:** Résultats pour la structure à comportement de type *snap-back*

NKS Clas.		Reloc-P		Reloc-M		Reloc-M	
Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)	Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)	Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)	Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)
6,85	9 (162)	6,85	9 (162)	6,85	9 (162)	10	13 (350)
3,15	diver.	3,15	diver.	3,15	diver.		
1,58	diver.	1,58	diver.	1,58	13 (238)		
0,79	diver.	0,79	diver.	1,58	10 (180)		
0,39	13 (234)	0,39	13 (235)				
0,39	4 (72)	0,39	4 (72)				
0,79	4 (72)	0,79	4 (72)				
0,79	4 (72)	0,79	4 (72)				
0,79	4 (72)	0,79	4 (72)				
10	38 (684)	10	38 (685)	10	32 (580)	10	13 (350)



**Figure 3.14:** Premières itérations et configuration finale de la structure de type *snap-back* (FIG. 3.12 et 3.13), résolu avec la méthode de relocalisation NL mixte, pour un chargement total appliqué en un seul incrément

### 3.1.4 Synthèse des résultats

L'étape de relocalisation non-linéaire permet de réduire de façon importante le nombre d'itérations globales des méthodes classiques, en traitant les non-linéarités au niveau des sous-structures (niveau local). La méthode de relocalisation non-linéaire mixte semble globalement la méthode la plus efficace. Dans tous les cas analysés, elle conduit à un nombre d'itérations globales plus faible, mais le nombre d'itérations locales par itération globale devient bien entendu plus élevé, les effets de non-linéarité dans les sous-structures (au niveau local) étant plus importants pour des incréments de chargement importants. Cependant, le nombre total des itérations locales reste quasi-constant. Cette constatation provient du fait que la méthode mixte permet de traiter des pas de chargement plus importants que les autres méthodes, ce qui conduit à avoir moins de pas de chargement et moins d'itérations globales. Contrairement aux autres méthodes, la méthode de relocalisation mixte montre une grande robustesse dans tous les cas traités.

Dans cette étude, les problèmes par sous-structure sont non-linéaires et ont été résolus par une méthode de Newton sans avoir besoin d'une méthode de continuation.

### 3.2 Influence des paramètres de la stratégie

Un point très important est l'effet des paramètres de la méthode sur ses performances. Ici, on étudie l'influence du critère d'arrêt local (2.4) et de la direction de recherche locale,  $\mathbf{k}^s$ , pour la méthode de relocalisation non-linéaire mixte sur le nombre d'itérations globales et locales, pour pouvoir déterminer leurs valeurs optimales.

Comme critère d'arrêt locale on utilise la définition présentée au paragraphe 2.4, que nous rappelons ici :

$$\eta_{local} = \|r_{l,n}\|/\|r_{l,0}\| \quad (3.36)$$

où  $r_{l,0}$  correspond au première résidu de la méthode de Newton dans la sous-structure concernée et  $r_{l,n}$  est le résidu à l'itération  $n$ .

#### 3.2.1 Mise en évidence d'un choix optimal du critère d'arrêt local

La stratégie de relocalisation non-linéaire mixte propose d'introduire des résolutions non-linéaires locales sur chacune des sous-structures. Il est très important de déterminer l'influence du critère d'arrêt local (à chaque sous-structure) sur les performances globales de la méthode.

Dans [Cresta *et al.*, 2007], sur l'étude de cas de structure stables, il a été constaté qu'avec un critère d'arrêt global  $\eta_{glob}^{crit} = 10^{-6}$ , la valeur optimale pour le critère d'arrêt local est  $\eta_{loc}^{crit} = 10^{-3}$ . Cette valeur réduit le nombre d'itérations globales et locales. Dans cette section, on présente une étude similaire pour les structures à comportement de type *snap-through* (FIG. 3.9) et *snap-back* (FIG. 3.12).

**Table 3.4:** Influence du critère d'arrêt local pour la structure à comportement de type *snap-through* (FIG. 3.9 et 3.10) pour  $\eta_{glob}^{crit} = 10^{-6}$

Critère d'arrêt local	Nb. d'itér. globales	Nb. d'itér. locales
$\eta_{local}^{crit} = 10^{-2}$	68	680
$\eta_{local}^{crit} = \mathbf{10^{-3}}$	<b>10</b>	<b>234</b>
$\eta_{local}^{crit} = 10^{-4}$	9	275
$\eta_{local}^{crit} = 10^{-5}$	8	305
$\eta_{local}^{crit} = 10^{-6}$	8	335

Les TAB. 3.4 et 3.5, donnent le nombre d'itérations globales et locales en fonction du critère d'arrêt local. On observe que le nombre d'itérations globales diminue avant de se stabiliser pour des valeurs du critère inférieurs à  $10^{-3}$ . L'algorithme se contente

**Table 3.5:** Influence du critère d'arrêt local pour la structure à comportement de type *snap-back* (FIG. 3.12 et 3.13) pour  $\eta_{glo}^{crit} = 10^{-6}$

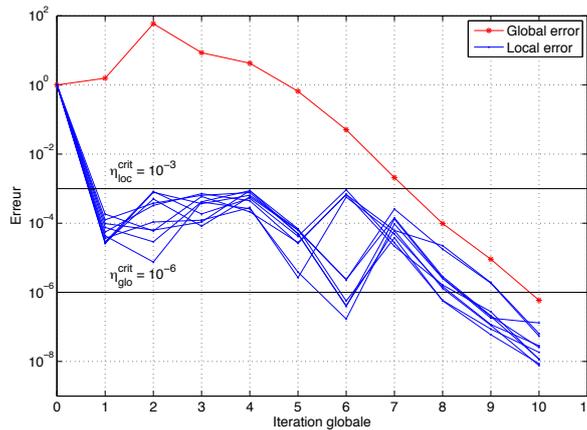
Critère d'arrêt local	Nb. d'itér. globales	Nb. d'itér. locales
$\eta_{local}^{crit} = 10^{-1}$	43	770
$\eta_{local}^{crit} = 10^{-2}$	29	585
$\eta_{local}^{crit} = \mathbf{10^{-3}}$	<b>13</b>	<b>350</b>
$\eta_{local}^{crit} = 10^{-4}$	12	440
$\eta_{local}^{crit} = 10^{-5}$	11	450
$\eta_{local}^{crit} = 10^{-6}$	11	525

d'un critère local bien plus élevé que le niveau d'erreur au niveau global. En ce qui concerne le nombre d'itérations locales, ils ont aussi une valeur minimale pour le même critère d'arrêt local de  $10^{-3}$ . Pour des valeurs inférieures ou supérieures à  $10^{-3}$  le nombre d'itérations locales augmentent.

En particulier, un critère d'arrêt local élevé, de l'ordre de la racine carré du critère global est suffisant pour le schéma non-linéaire local.

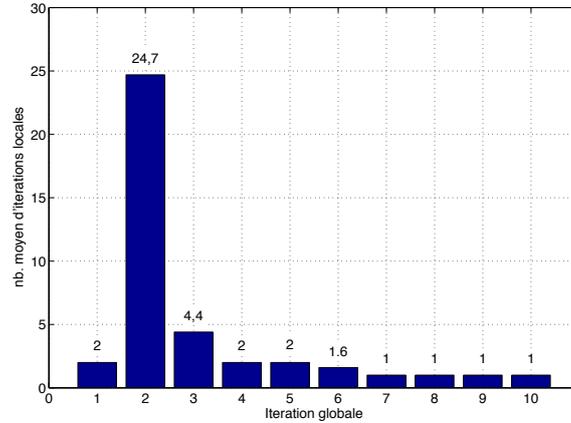
$$\eta_{local}^{crit} = \sqrt{\eta_{global}^{crit}} \quad (3.37)$$

La convergence de la méthode est contrôlée par le critère d'arrêt global, mais comme cette erreur globale est calculée avec l'assemblage des résidus locaux (3.30), si ceux-ci ne sont pas suffisamment petits (inférieure au critère global) la convergence globale n'est pas assurée.



**Figure 3.15:** Convergence du critère d'erreur global et du critère d'erreur local par sous-structure à chaque itération globale

Dans la FIG. 3.15 sont présentés les erreurs locales pour chaque sous-structure et l'erreur globale à chaque itération pour la structure à comportement de type



**Figure 3.16:** Nombre moyen d'itérations locales à chaque itération globale

*snap-through* (FIG. 3.9 et 3.10) résolu avec la méthode de relocalisation non-linéaire mixte et avec un seul pas de chargement. L'erreur globale augmente à la première itération, puis diminue pour satisfaire le critère d'arrêt à l'itération 10. L'erreur locale est toujours inférieure au critère d'arrêt local ( $\eta_{loc} < \eta_{loc}^{crit} = 10^{-3}$ ). On notera que, quand le critère global est atteint, l'erreur locale est inférieure à  $\eta_{glo}^{crit}$ .

La convergence globale implique la convergence locale au même critère d'arrêt, puisque le résidu global est construit à partir de l'assemblage des résidus locaux (3.30) et des discontinuités de déplacement ( $\sum_s A^s S_T^s u_b^s$ ).

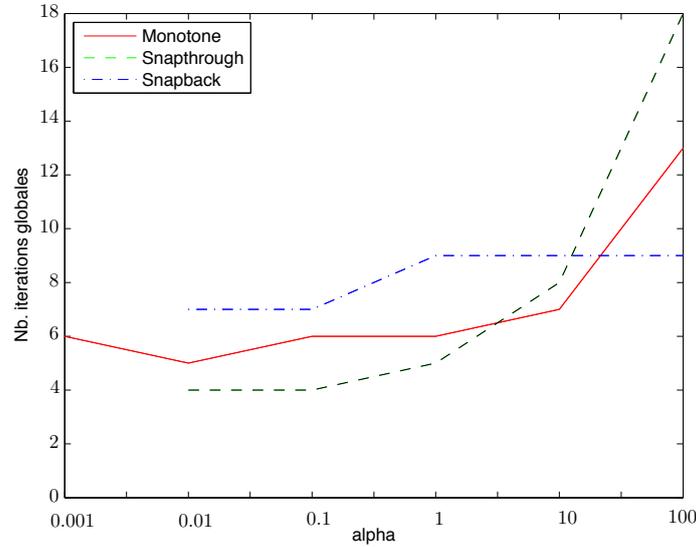
Le nombre d'itérations locales associées à la relocalisation non-linéaire est plus important en cas de variation forte de la configuration des interfaces. Dans le cas présent c'est lors de la seconde itération que le plus grand chargement de configuration se produit (FIG. 3.11) ce qui explique les résultats du tableau de la FIG. 3.16. Lors des dernières itérations globales les changements de configuration sont très faibles et une seule itération locale est alors nécessaire.

### 3.2.2 Influence de la direction de recherche locale pour l'approche mixte

Dans cette section, l'influence de la direction de recherche locale sur les performances de la méthode est étudiée.

Les différents choix pour obtenir une approximation de la direction de recherche ont été présentés en 2.3.1. Pour une sous-structure  $s$ , la direction de recherche  $\mathbf{k}^s$  correspond au complément de Schur du reste du domaine sur le bord de  $s$ . On choisit ici le complément de Schur de la sous-structure voisine,  $\bar{\mathcal{S}}^s$  multiplié par un coefficient  $\alpha$  ( $\mathbf{k}^s = \alpha \bar{\mathcal{S}}^s$ ), variant entre  $10^{-3}$  et  $10^2$ . On s'intéresse à l'évolution du nombre d'itérations globales de la méthode en fonction de  $\alpha$ . La FIG. 3.17 présente les résultats pour les différentes structures des FIG. 3.6, FIG. 3.9 et FIG. 3.12.

On constate qu'un domaine de variation de  $\alpha$  relativement grand assure de



**Figure 3.17:** Influence de  $\alpha$  sur le nombre d'itérations globales pour les différentes structures traitées (FIG. 3.6, FIG. 3.9 et FIG. 3.12)

bonnes performances de la méthode :

$$10^{-2} < \alpha < 10^0 \quad (3.38)$$

Les résultats pour les valeurs élevées et petites de  $\alpha$  s'expliquent de la façon suivante. Pour des valeurs petites de  $\alpha$  ( $\alpha < 10^{-3}$ ), la méthode se comporte comme une méthode de décomposition duale, cependant les mouvements de corps rigide doivent être contrôlés. Par contre, pour des valeurs élevées ( $\alpha > 10^2$ ), la méthode se comporte comme une méthode primale.

Idéalement, la valeur optimale de la direction de recherche  $\mathbf{k}^s$  doit être le complément de Schur du reste de la structure  $\bar{S}$ . En pratique, le complément de Schur de la structure voisine est utilisé  $\bar{S}^s$ . Cette valeur est plus raide que  $\bar{S}$ . Cependant, pour les structures en arches étudiées pour lesquelles un partitionnement particulier, linéique, en sous-domaines a été choisi une bonne approximation de  $\bar{S}$  est donnée par :

$$\bar{S} \sim \frac{1}{n} \bar{S}^s \quad (3.39)$$

où  $n$  est le nombre de sous-structures. Ceci explique pourquoi, dans ce cas, une valeur de  $\alpha$  de l'ordre de  $1/n$  ( $n \simeq 17$ ) est un bon choix.

Pour cette étude, une valeur de  $\alpha \simeq 10^{-1}$  donne en pratique de bonnes performances pour tous les cas traités.

Dans la suite, on utilise une valeur de  $\alpha \simeq \frac{1}{n}$ , où  $n$  représente le nombre de sous-structures, si la structure est décomposée de façon unidirectionnelle, ou une

moyenne du nombre de sous-structures dans les différentes directions d'intérêt.

## 4 Méthode de continuation condensée aux interfaces

Dans cette section, on présente l'implémentation d'une méthode de continuation, de type « arc-length » [Crisfield, 1981], au sein de la stratégie de relocalisation non-linéaire. Dans le cas du « snap-back », ces méthodes conduisent à une réduction du pas de chargement. Cette réduction est due à une contrainte additionnelle (longueur d'arc), qui remplace le contrôle en effort ou en déplacement. Dans ce cas les pas de chargement étant petits on s'attend à un comportement équivalent des différentes versions (primale et mixte) de l'algorithme proposé à l'approche d'un point limite. L'enjeu est de disposer au sein de la méthode, d'une méthode indispensable au suivi détaillé d'une (ou plusieurs) courbes d'équilibre au delà des points limites dans le cadre de simulations quasi-statiques. Une possibilité offerte par la décomposition de domaine est de réduire la recherche des solutions à un problème d'interface. C'est donc l'adaptation d'une méthode de continuation condensée au niveau du problème d'interface qui est développée dans la suite.

### 4.1 Méthode de continuation pour le problème sous-structuré

La technique utilisée, est celle appelée « longueur d'arc » (arc-length en anglais) [Crisfield, 1981] qui est une alternative à la méthode de Riks [Riks, 1979]. Cette méthode est caractérisée par l'introduction d'une longueur d'arc  $\Delta l$ , qui représente le rayon d'une sphère ou d'un cylindre centré sur le dernier point convergé. La solution est recherchée à une distance  $\Delta l$  du dernier point convergé. Le principe des méthodes de continuation est de relâcher le niveau de chargement en imposant une contrainte « mixte ».

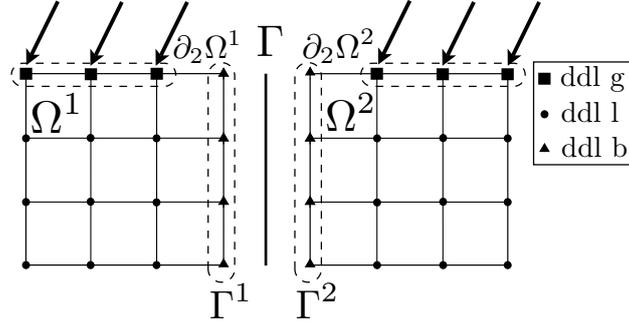
Le chargement extérieur imposé,  $\underline{P}^s$ , peut être décomposé selon les nœuds où elle est appliquée.

$$[\underline{P}^s] = \begin{bmatrix} \underline{P}_i^s \\ \underline{P}_b^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_l^s \\ \underline{P}_g^s \\ \underline{P}_b^s \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

où  $\underline{P}_i^s$  correspond au chargement sur les nœuds internes,  $\underline{P}_b^s$  sur les nœuds d'interfaces ( $\Gamma^s$ ). D'ailleurs, les nœuds  $i$  peuvent être séparés dans des nœuds où aucun effort surfacique n'est appliqué  $l$ , et les nœuds où les efforts externes sont appliqués  $g$ .

$$\begin{aligned} \underline{P}_l^s &= \bar{b}^s && \text{sur } \Omega^s \\ \underline{P}_g^s &= \bar{g}^s && \text{sur } \partial_2 \Omega^s \\ \underline{P}_b^s &= \bar{g}^s && \text{sur } \Gamma^s \end{aligned} \quad (3.41)$$

Les différents nœuds sont présentés dans la FIG. 3.18.



**Figure 3.18:** Definition des ddl de chaque sous-structure

Finalement, le problème condensé aux interfaces s'écrit :

$$\mathcal{S}_T^{(t)} \widehat{\underline{U}}_j = \sum_s A^s (\lambda^{(t)} \underline{P}_b^s - \mathbf{K}_{Tbi}^s (t) (\mathbf{K}_{Tii}^s (t))^{-1} \lambda^{(t)} \underline{P}_i^s) = \lambda^{(t)} \underline{B}_p \quad (3.42)$$

où  $\underline{B}_p$  est la condensation des efforts sur les interfaces et  $\lambda$  est le facteur de charge à l'itération  $(t)$ .  $\mathcal{S}_T$  est l'assemblage des différents compléments de Schur de chaque sous-structure  $\mathcal{S}_T^s$  (3.12).

Dans la suite, on suppose que seul un chargement surfacique sur les sous-structures est appliqué ( $\underline{P}_i = 0$ ). Ainsi,  $\lambda \underline{B}_p = \lambda \underline{P}_b$ .

La contrainte « longueur d'arc » s'écrit :

$$\Delta l^2 = \Delta \widehat{\underline{U}}^{(t)2} + \Delta \lambda^{(t)2} \psi^2 \underline{P}_b^2 \quad (3.43)$$

où  $\Delta \widehat{\underline{U}}^{(t)}$  est la correction de déplacement depuis le dernier point convergé,  $\Delta \lambda^{(t)}$  est la correction du facteur de charge,  $\psi$  est un facteur de forme caractérisant le type de méthode de continuation et  $\underline{P}_b$  est le vecteur de charge total. Par exemple  $\psi$  est égal à 1 pour une version sphérique de la longueur d'arc et égal à 0 pour la version cylindrique. Dans la suite la version cylindrique ( $\psi = 0$ ) est utilisée.

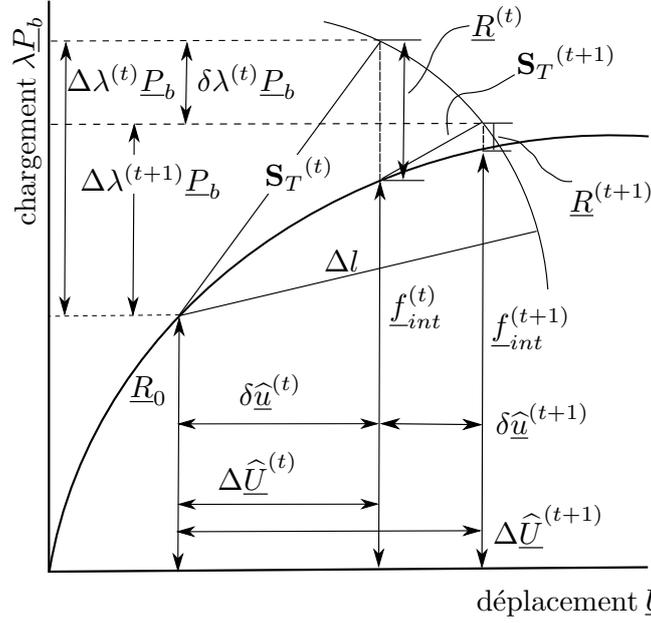
À partir du dernier point convergé (FIG. 3.19), la première itération consiste à calculer  $\delta \widehat{\underline{u}}^{(t)}$  avec :

$$\delta \widehat{\underline{u}}^{(t)} = \Delta \lambda^{(t)} (\mathcal{S}_T^{(t)})^{-1} \underline{P}_b \quad (3.44)$$

Pour  $t = 1$  on a  $\Delta \widehat{\underline{U}}^{(1)} = \delta \widehat{\underline{u}}^{(1)}$  (initialisation élastique). L'équation (3.43) avec  $\psi = 0$  donne :

$$\Delta \lambda^{(t)} = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{((\mathbf{S}_T^{(t)})^{-1} \underline{P}_b)^2}} = m \frac{\Delta l}{\sqrt{((\mathbf{S}_T^{(t)})^{-1} \underline{P}_b)^2}} \quad (3.45)$$

Cette équation a deux solutions suivant le signe de  $m$ .  $m = +1$  quand  $\mathcal{S}_T^{(t)}$  est défini positif et  $m = -1$  dans le cas contraire. Une première approximation de



**Figure 3.19:** Méthode de longueur d'arc pour un d.d.l.

$\delta\hat{\underline{u}}^{(t)}$  est obtenue en résolvant le système constitué des équation (3.44) et (3.45). Une nouvelle résolution non linéaire locale est ensuite effectuée, puis le résidu est calculé :

$$\underline{f}_{int}^{(t)} = \sum_s A^s \left( \mathbf{S}_T^{s,(t+1)} \underline{u}_b^{s,(t+1)} + \underline{f}_b^{s,(t+1)} - \mathbf{K}_{T_{bi}}^{s,(t+1)} (\mathbf{K}_{T_{ii}}^{s,(t+1)})^{-1} \underline{f}_i^{s,(t+1)} \right) \quad (3.46)$$

$$\underline{R}^{(t)} = ((\underline{f}_{int}^{(t)} - \underline{R}_0) - \Delta\lambda^{(t)} \underline{P}_b) \quad (3.47)$$

A l'itération suivante, une nouvelle estimation de  $\Delta\lambda^{(t+1)} = \Delta\lambda^{(t)} + \delta\lambda^{(t)}$  est effectuée, en remplaçant  $\Delta\hat{\underline{U}}^{(t+1)}$  dans (3.43) par :

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\underline{U}}^{(t+1)} &= \Delta\hat{\underline{U}}^{(t)} + \delta\hat{\underline{u}}^{(t+1)} \\ &= \Delta\hat{\underline{U}}^{(t)} - (\mathbf{S}_T^{(t+1)})^{-1} (\underline{R}^{(t)} - \delta\lambda^{(t)} \underline{P}_b) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Delta l^2 &= \left( \Delta\hat{\underline{U}}^{(t)} - (\mathbf{S}_T^{(t+1)})^{-1} (\underline{R}^{(t)} - \delta\lambda^{(t)} \underline{P}_b) \right)^2 \\ &= \left( \Delta\hat{\underline{U}}^{(t)} - (\mathbf{S}_T^{(t+1)})^{-1} \underline{R}^{(t)} + (\mathbf{S}_T^{(t+1)})^{-1} \delta\lambda^{(t)} \underline{P}_b \right)^2 \end{aligned}$$

Cette équation du second degré en  $\delta\lambda^{(t)}$  est écrite de la manière suivante :

$$a_1\delta\lambda^{(t)2} + a_2\delta\lambda^{(t)} + a_3 = 0 \quad (3.49)$$

avec,

$$\begin{cases} a_1 = \left( (\mathbf{S}_T^{(t+1)})^{-1} \underline{P}_b \right)^2 \\ a_2 = 2\Delta\widehat{U}^{(t)} (\mathbf{S}_T^{(t+1)})^{-1} \underline{P}_b - 2 \left( (\mathbf{S}_T^{(t+1)})^{-1} \underline{R}^{(t)} \right) \left( (\mathbf{S}_T^{(t+1)})^{-1} \underline{P}_b \right) \\ a_3 = \Delta\widehat{U}^{(t)2} + \left( (\mathbf{S}_T^{(t+1)})^{-1} \underline{R}^{(t)} \right)^2 - 2\Delta\widehat{U}^{(t)} \left( (\mathbf{S}_T^{(t+1)})^{-1} \underline{R}^{(t)} \right) - \Delta l^2 \end{cases}$$

Avec les deux racines de cette équation ( $\delta\lambda_{(1)}$  et  $\delta\lambda_{(2)}$ ), on obtient deux incréments de déplacement  $\delta\widehat{u}_{(1)}$  et  $\delta\widehat{u}_{(2)}$  (à partir de (3.48)) :

$$\begin{cases} \delta\widehat{u}_{(1)} = -(\mathbf{S}_T^{(t+1)})^{-1} \underline{R}^{(t)} + \delta\lambda_{(1)} (\mathbf{S}_T^{(t+1)})^{-1} \underline{P}_b \\ \delta\widehat{u}_{(2)} = -(\mathbf{S}_T^{(t+1)})^{-1} \underline{R}^{(t)} + \delta\lambda_{(2)} (\mathbf{S}_T^{(t+1)})^{-1} \underline{P}_b \end{cases}$$

Pour éviter le retour en arrière sur la branche d'équilibre effort-déplacement, la racine sélectionnée doit être celle qui donne l'angle minimal entre le vecteur d'incrément de déplacement,  $\Delta\widehat{U}^{(t)}$  avant l'itération actuelle, et le même vecteur, mais calculé après l'itération actuelle,  $\Delta\widehat{U}_{(1,2)}^{(t+1)}$  :

$$\begin{aligned} \cos\theta_{1,2} &= \frac{\Delta\widehat{U}^{(t)} \cdot \Delta\widehat{U}_{(1,2)}^{(t+1)}}{\Delta l^2} = \\ &= \frac{\Delta\widehat{U}^{(t)} \cdot \left( \Delta\widehat{U}^{(t)} - (\mathbf{S}_T^{(t+1)})^{-1} \underline{R}^{(t)} + \delta\lambda_{(1,2)} (\mathbf{S}_T^{(t+1)})^{-1} \underline{P}_b \right)}{\Delta l^2} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\Delta\lambda^{(t+1)} = \Delta\lambda^{(t)} + \delta\lambda_{(1,2)} \quad (3.50)$$

Un nouveau résidu est alors calculé,  $\underline{R}^{(t+1)}$ . Si le critère d'arrêt est accompli, la convergence du pas est atteinte, sinon une nouvelle estimation de  $\delta\lambda$  et de  $\delta\widehat{u}$  doit être faite (depuis (3.47) jusqu'à (3.50)).

Le premier incrément est réalisé en utilisant une longueur d'arc fixé,  $\Delta l$ , qui est divisé par 2 si le nombre d'itérations dans un incrément est trop élevé, ou est doublé après 3 convergence consécutive de la méthode.

Cette méthode de longueur d'arc est utilisée quand l'algorithme du Newton global, sur le problème d'interfaces ne converge pas.

Le comportement instable (*snap-through* et *snap-through*) se développe quand une partie locale et rigide de la structure perd sa rigidité, ce qui conduit à avoir une rigidité locale négative. On suppose que cette perte de rigidité n'induit pas d'instabilité locale (*snap-through* ou *snap-back*). Pour tous les cas traités dans cette thèse, cette situation-là n'a jamais été rencontrée. Dans le cas contraire il serait nécessaire pour cette méthode de subdiviser la sous-structure concernée de façon à que les problèmes non-linéaire locaux puissent être résolus avec un solveur de type Newton. L'implémentation de la technique de continuation est ainsi faite uniquement au niveau du problème d'interface limitant ainsi considérablement le nombre de degrés de liberté mis en jeu. L'introduction et le pilotage de méthodes de continuation au niveau global et au niveau local, imbriquées, peut s'avérer être délicate et mériterait le cas échéant une étude plus approfondie.

## 4.2 Analyse d'une branche d'équilibre par la méthode de continuation

Comme référence du calcul, la même technique de longueur d'arc, a été appliquée au problème de la FIG. 3.12 non-sousstructuré, monolithique. Dans le TAB. 3.6, sont présentés les résultats pour la méthode de décomposition de domaine mixte avec relocalisation non-linéaire (Reloc-M) et aussi pour le problème monolithique (Pb. Monolit.).

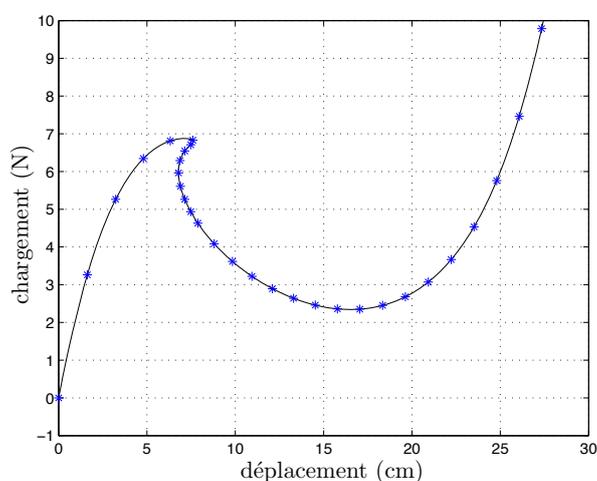
Comme attendu on constate que la réduction du pas de chargement imposée par les contraintes de longueur d'arc limite les gains en nombre d'itérations globales de la méthode. En effet, les incréments de chargement étant petits, une seule itération locale est nécessaire dans la majorité des problèmes par sous-structure. Aussi, l'intérêt de l'étape de relocalisation non-linéaire ainsi que les différences de comportement entre l'approche primale et mixte ne sont pas évidents.

**Table 3.6:** Nombre d'itérations de la méthode de relocalisation mixte (Reloc-M) et la stratégie monolithique (Pb. Monolit.) avec une technique de longueur d'arc, appliquée sur une structure globalement instable (*snap-back*, FIG. 3.12)

Méthode	Reloc-M	Pb. Monolit.
Nb. de pas	31	31
Itér. globales	440	494
Itér. locales totales	7920	-
Itér. locales moyenne (par sst.)	1,8	-

Dans la FIG. 3.20, est présenté le comportement de la structure de type *snap-back* (FIG. 3.12). Pour les deux méthodes (relocalisation non-linéaire mixte et problème

monolithique), les points de convergence sont les mêmes. Donc, la convergence est pilotée par la technique de continuation qui limite la taille des incréments au voisinage d'un point limite. Dans cette étude, l'intérêt de la relocalisation n'est donc pas concluante lorsque les incréments sont contraints à être petits. Soulignons cependant qu'en dehors de ces « points durs » et lorsque la méthode de continuation ne pilote plus le calcul, les gains présentés précédemment sont à nouveau au rendez-vous. Par ailleurs, l'écriture d'une méthode de continuation condensée aux interfaces dans le cadre de la sous-structuration réduit considérablement le coût de calcul, le pilotage induisant généralement la résolution de nombreux systèmes linéaires. La parallélisation du problème d'interface est décrite au CHAP. 4.



**Figure 3.20:** Comportement de la structure globalement instable (*snap-back*, FIG. 3.12). Les étoiles représentent le différent points de convergence de la méthode à longueur d'arc

## 5 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons présenté une famille de méthodes de décomposition de domaine avec relocalisation non-linéaire. Les travaux présentés dans [Cresta *et al.*, 2007] ont été adaptés pour le traitement robuste de structures exhibant des non-linéarités géométriques localisées (flambage) et globales (point limites, *snap-back* et *snap-through*).

Ces méthodes ont été comparées à une méthode NKS classique basée sur une décomposition de domaine primale appliquée sur les problèmes linéarisés et utilisée comme méthode de référence.

L'étude a montré la robustesse et l'efficacité de la méthode de relocalisation non-linéaire mixte. La robustesse est avérée par la possibilité d'utiliser des pas de chargement très grands sans difficulté de convergence particulière. L'efficacité est

principalement liée à la diminution importante du nombre de problèmes globaux à résoudre, problèmes les plus coûteux dans les méthodes de décomposition de domaine avec un grand nombre de domaines. Dans tous les exemples traités, la méthode de relocalisation non-linéaire mixte permet de déterminer une position d'équilibre correspondant à la charge totale en un seul pas de chargement. Ceci pose une question encore non étudiée, comment maîtriser et optimiser cet algorithme de façon à ne pas rater de bifurcation correspondant à la solution d'énergie minimale. Cet aspect fera l'objet de travaux ultérieurs.

Différents aspects de la méthode ont été approfondis, concernant le choix relatif des critères d'arrêt locaux et globaux, concernant une approximation à faible coût de la direction de recherche à partir du complément de Schur des structures adjacentes.

Enfin une méthode de continuation, indispensable pour un suivi détaillé des courbes d'équilibre en cas de *snap-back* et *snap-through* a été implantée. Appliquée aux méthodes de décomposition de domaine son intérêt est de réduire le problème à résoudre aux seuls degrés de liberté d'interface.

Ces résultats et conclusions doivent bien évidemment être validés sur des structures de grandes tailles, c'est l'objet des chapitres suivants. En particuliers, la parallélisation du problème d'interface reste à expliciter.

# Chapitre 4

## Parallélisation du problème d'interface

*Nous présentons dans ce chapitre la parallélisation de la méthode présentée dans le chapitre 3. Une étude d'extensibilité et speed-up est menée en élasticité linéaire pour vérifier la bonne mise en oeuvre de la résolution parallèle de la méthode.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Environnement de travail et ressources . . . . .</b>	<b>131</b>
1.1	Architecture matériel dédiée au calcul parallèle . . . . .	131
1.2	Librairies de calcul parallèle . . . . .	131
1.3	Librairie de calcul LMTpp . . . . .	133
1.4	Parallélisme et équilibrage de charge . . . . .	133
<b>2</b>	<b>Parallélisation de la stratégie de calcul, principe et difficultés</b>	<b>135</b>
2.1	Identification des étapes parallélisables . . . . .	136
2.2	Remarques sur la résolution des problèmes locaux . . . . .	137
2.3	Parallélisation du problème global . . . . .	137
2.4	Choix de la décomposition . . . . .	141
<b>3</b>	<b>Validation de l'implémentation en élasticité linéaire . . . . .</b>	<b>141</b>
3.1	Analyse d'extensibilité numérique de différentes méthodes de décomposition de domaine . . . . .	142
3.2	Étude de speed-up . . . . .	145

4	Bilan . . . . .	146
---	-----------------	-----

---

# 1 Environnement de travail et ressources

## 1.1 Architecture matériel dédiée au calcul parallèle

Les architectures parallèles sont devenues le paradigme dominant pour tous les ordinateurs depuis les années 2000. En effet, la vitesse de traitement qui est liée à l'augmentation de la fréquence des processeurs connaît des limites en raison d'une augmentation de la production thermique. C'est aussi la raison pour laquelle depuis longtemps déjà l'augmentation de la vitesse de calcul passe par une architecture comportant de nombreuses unités de calcul. La création de processeurs multi-cœurs, traitant plusieurs instructions en même temps au sein du même composant, résout ce dilemme pour les machines de bureau depuis le milieu des années 2000.

Les ordinateurs parallèles peuvent être grossièrement classés selon le niveau auquel le matériel prend en charge le parallélisme. D'une part, il y a les machines communes que ce soit avec multi-cœurs ou les machines multiprocesseurs et d'autre part les architectures en grappe de serveurs (clusters), les machines massivement parallèles et les structures formées à partir de grilles informatiques c'est-à-dire de milliers d'ordinateurs reliés par un réseau.

Au sein du LMT, on dispose actuellement d'un « cluster » avec 48 nœuds de calcul représentant 464 cœurs, avec les caractéristiques (mémoire vive et disque) présentées en TAB. 4.1. En plus, on dispose de 8 nœuds graphique représentant 64 cœurs, avec une carte graphique Geforce 8800 Ultra (768 Mo).

**Table 4.1:** Caractéristiques du cluster au LMT

Nb de nœuds	Mémoire vive	Mémoire disque
2	64 Go	2x250 Go
20	48 Go	1x250 Go
20	32 Go	2x250 Go
6	32 Go	80 Go

## 1.2 Bibliothèques de calcul parallèle

Il existe différentes façons de paralléliser des stratégies de calculs. La plus simple à mettre en œuvre est la « multi-threading », qui consiste à distribuer les différents processus entre les cœurs de la machine (station ou cluster). Une autre possibilité est d'utiliser des bibliothèques de type MPI (Message Passing Interface) pour faire communiquer différentes machines que ce soit dans un même réseau ou dans un *cluster*.

### Multi-thread

La parallélisation avec multithread est relativement facile à mettre en œuvre. Il s'agit d'indiquer à la bibliothèque les étapes de calcul parallélisables. Elle est,

cependant, limitée à quelques opérations indépendantes et le nombre de *threads* dépend du nombre de cœurs (nb cœurs = nb de *threads*).

Le langage C++ standard n'inclue pas de spécifications ou de support pour le multi-threads (le nouveau standard C++0, supportera le « multi-threading »). Pour palier cette limitation quelques bibliothèques C++ ont été développées. Parmi les plus populaires citons :

- **Boost**. Ce module inclut plusieurs bibliothèques, une d'entre elles est « threads ». Elle est portable, robuste et dans l'esprit des standards de C++, mais elle n'est pas très complète.
- **Intel<sup>®</sup> Threading Building Blocks (TBB)**<sup>1</sup>. Cette bibliothèque permet d'utiliser les cœurs de la machine sans avoir besoin d'être un expert. C'est un projet « open source ».
- **Adaptive Communication Environment (ACE)** est un environnement de programmation orientée objet, open source et écrit en C++. ACE contient plusieurs composants qui simplifient le développement de logiciel de communication. Les composants de l'ACE fournissent différents services comme la communication inter-processus (IPC), la gestion de mémoire, la synchronisation, la gestion des tâches, la gestion d'événements, la configuration de services répartis, etc.
- **Zthreads**<sup>2</sup>, est une bibliothèque de C++ de haut niveau et multiplateforme (Mac OS X, Unix, Windows). Elle correspond à une licence « MIT licence » (open source).

## MPI

MPI est une norme définissant une bibliothèque de fonctions, utilisable avec les langages C et FORTRAN. Elle permet d'exploiter des ordinateurs distants ou multiprocesseurs (de type cluster) par passage de messages. Par rapport au *multithread*, elle est plus difficile à mettre en œuvre. Elle n'a pas des limites théoriques sur le nombre de processeurs à utiliser. Les implémentations classiques sont en C/C++ et FORTRAN, mais il existe aussi des implémentations en Python, OCaml et Java. Dans notre cas particulière on utilise, sous licence libre, Open MPI<sup>3</sup>.

## PVM

PVM (*Parallel Virtual Machine*) est un logiciel constitué d'un ensemble de programmes et de bibliothèques permettant d'utiliser des machines de calcul hétérogènes, insérées dans un environnement de réseaux basés sur le protocole INTERNET (IP), pour mettre en œuvre des technologies de calcul parallèle et distribué. Elle utilise les langages de programmation normalisés FORTRAN et C.

---

1. <http://threadingbuildingblocks.org/>

2. <http://zthread.sourceforge.net/index.html>

3. <http://www.open-mpi.org/>

### 1.3 Librairie de calcul LMTpp

La plateforme logicielle LMTpp a été créée par Hugo Leclerc [Leclerc, 2007, 2008] dans le but de pérenniser les développements internes au laboratoire, de faciliter la maintenance et de diminuer les développements redondants tout en offrant des outils adaptés aux besoins des chercheurs.

Elle repose sur une triple exigence :

- offrir un développement aisé et accéléré, sur le modèle des langages interprétés de Matlab ou Scilab, à travers un langage concis et lisible, une architecture flexible et inter-opérable,
- garantir une vitesse d'exécution optimale pour la simulation de problèmes de grande taille, grâce à une programmation moderne en C++,
- offrir des fonctionnalités avancées pour la simulation en mécanique, permettant des analyses poussées comparables à celles rendues possibles par les codes EF commerciaux.

La solution développée propose, pour répondre à ces besoins, un ensemble d'outils d'assistance génériques à la création de codes (pré-calculs), un découplage des différents concepts (équations, représentation, méthode de résolution...), et une optimisation des opérations algébriques, constituant une plate-forme générique, flexible et performante. La structure de la plateforme de développement est résumée sur la FIG. 4.1. Nous en décrivons ici les principes de base.

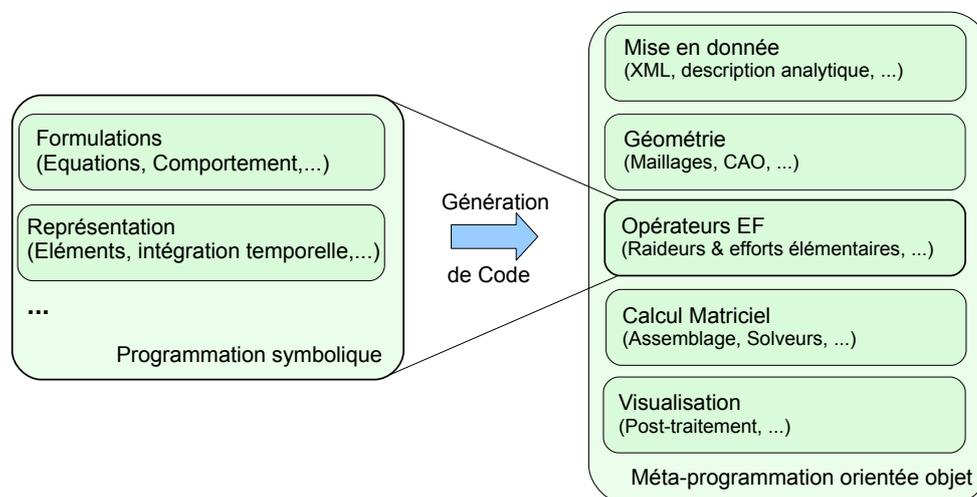


Figure 4.1: Structure de la plateforme de calcul LMTpp

### 1.4 Parallélisme et équilibrage de charge

Les stratégies avec relocalisation non-linéaire, tout comme les méthodes classiques Newton-Krylov-Schur auxquelles elles s'apparentent, sont naturellement adap-

tées aux architectures parallèles. La FIG. 4.2 illustre le déploiement de ces méthodes dans un environnement distribué. Le problème tangent d'interface, étape globale, est résolu au moyen d'un solveur itératif de Krylov qui ne nécessite que des produits locaux matrice-vecteur. Des échanges d'informations sont cependant nécessaires à chaque itération. À l'inverse, l'étape locale non-linéaire par sous-structure consiste en des calculs totalement indépendants.

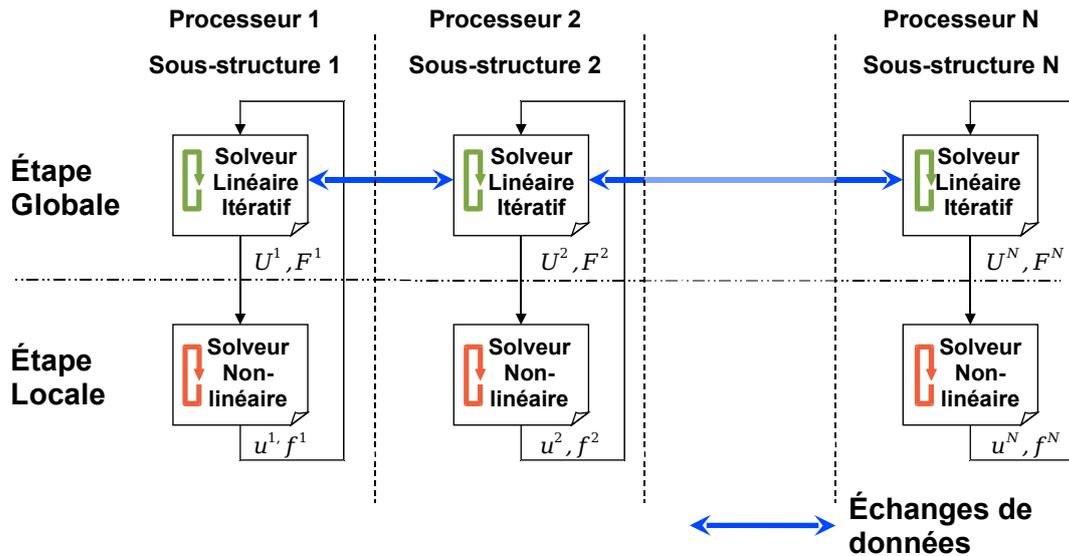


Figure 4.2: Mise en œuvre parallèle de l'algorithme de résolution avec relocalisation non-linéaire

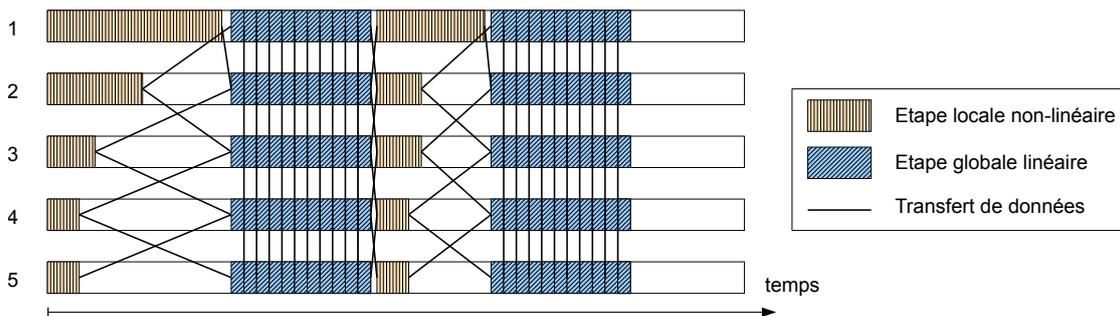


Figure 4.3: Temps de calcul et transferts de données entre processeurs pour une structure décomposée en 5 sous-domaines

Une mise en œuvre parallèle classique associe chaque sous-structure à un des processeurs d'un ordinateur distribué. Le déroulement de chacun des processus de l'algorithme peut être représenté en fonction du temps selon le diagramme présenté FIG. 4.3. Comme on peut le constater sur cette figure, dans le cas où les processus n'exigent pas un temps de traitement équivalent, certains processeurs peuvent passer

une grande partie du temps à attendre la fin des processus s'exécutant sur les autres processeurs. Dans le cas présenté ici, la résolution non-linéaire locale associée à la sous-structure 1 exige un temps plus important que pour les autres sous-structures, et la plupart des processeurs vont donc rester inactifs en attendant la fin de ce calcul. De tels temps d'attentes pénalisent l'efficacité de la méthode, et on cherche en général à répartir au mieux les charges sur les différents processeurs.

Cette problématique est déjà traitée pour la mise en œuvre efficace des méthodes de décomposition de domaine classiques, et des méthodes synchrones en général. La décomposition est effectuée de manière automatique de façon à ce que chacun des problèmes locaux (factorisation et résolution du système linéaire) représente un coût de calcul le plus uniforme possible, au moyen de l'algorithme de partitionnement de graphe METIS par exemple. En effet, dans ce cas, les coûts de calcul associés peuvent être estimés, en fonction de la taille des matrices ou de leur largeur de bande.

Dans le cas présent, il est beaucoup plus difficile d'évaluer *a priori* le coût des calculs non-linéaires par sous-structure, qui dépend non seulement des opérateurs, mais aussi du niveau de chargement. Une estimation possible consiste à considérer le nombre d'itérations nécessaires pour les résolutions non-linéaires locales à l'itération précédente. Cependant, ce coût peut évoluer au cours des itérations globales. Dans de telles situations, on peut envisager d'utiliser des méthodes de répartition dynamique, les processus étant alloués en cours d'exécution sur les noeuds de calcul disposant de ressources. L'utilisation d'un nombre de processeurs inférieur au nombre de sous-structures peut faciliter de telles optimisations de charge. Des réponses à cette problématique sont développées au sein de la communauté informaticienne [Diekmann *et al.*, 1997]. Les approches les plus prometteuses permettent l'affectation des processus sur une architecture distribuée de façon complètement transparente pour l'utilisateur, en transformant un *cluster* en une machine virtuelle unique<sup>4</sup> [Lottiaux *et al.*, 2005].

## 2 Parallélisation de la stratégie de calcul, principe et difficultés

L'objectif donné est la parallélisation complète du code de calcul : parallélisation de toutes les étapes de calcul y compris la parallélisation/distribution des données. Pour réaliser la parallélisation des données, chaque processeur doit seulement stocker l'information de ses sous-structures. Cette parallélisation de données permet de réduire la mémoire totale utilisée, par contre elle augmente la complexité dans la communication entre les différents processeurs.

Ainsi, une sous-structure doit pouvoir accéder à l'information (interfaces voisines, direction de recherche ...) de ses sous-structures voisines en communiquant le cas échéant avec le ou les processeurs en charge de celles-ci. Cette opération de détection

---

4. <http://www.kerrighed.org>, <http://openmosix.sourceforge.net>, <http://openssi.eu>

et génération des interfaces et directions de recherche, nécessite un nombre élevé de communications entre tous les processeurs.

Pour paralléliser le code, la librairie de calcul parallèle Open MPI a été retenue. Elle permet une parallélisation complète de toutes les étapes. Dans Open MPI, existent plusieurs fonctions optimisées pour faciliter l'implémentation de différentes actions entre deux ou plusieurs processeurs. Quelques fonctions disponibles sont :

- `MPI_Send()` : permet l'envoi d'information à une autre processeur ;
- `MPI_Recv()` : permet la réception d'information envoyée par un autre processeur ;
- `MPI_Bcast()` : permet l'envoi d'information d'un processeur vers tous les autres, de façon optimisée, pour réduire le temps total de communication ;
- `MPI_Allreduce()` : permet de conviner des valeurs appartenant à tous les processeurs et le résultat est distribué à tous ;
- `MPI_Barrier()` : permet la synchronisation des processeurs (utilisé seulement dans une phase de débogage) ;

Une liste de toutes les fonctions avec ses descriptions peut-être trouvée dans le site d'Open MPI ([www.open-mpi.org](http://www.open-mpi.org)).

Un point très important est la répartition de la charge, qui peut correspondre à une répartition « a priori » des sous-structures au niveau des processeurs ou à une répartition dynamique (les difficultés ne surviennent pas toujours dans les mêmes structures). La répartition dynamique serait à envisager, mais elle ajoute une difficulté assez colossale à la parallélisation de la méthode. Nous nous adopterons dans la suite une répartition *a priori* des sous-structures par processeur.

## 2.1 Identification des étapes parallélisables

Les différentes étapes à paralléliser sont :

- La lecture des maillages : Chaque processeur doit lire les maillages correspondants aux sous-structures qui lui sont assignées.
- La détermination des voisins : Chaque processeur doit connaître les sous-structures voisines avec lesquelles il partage une interface.
- La génération des interfaces : Les interfaces entre deux sous-structures sont générées au niveau de chaque processeur. Dans le cas d'une interface partagée par deux processeurs (ou plusieurs), l'interface est créée au niveau des deux processeurs. Pour favoriser une communication efficace, chaque processeur doit connaître la taille des opérateurs/vecteurs à partager (direction de recherche, déplacements d'interface...).
- L'assignation de matériaux : Chaque processeur doit connaître les caractéristiques matériau des sous-structures qu'il traite.
- L'affichage des résultats : Chaque processeur génère les résultats des sous-structures dont il a la charge. Il faut également générer le fichier qui gère la visualisation de tous les résultats de tous les processeurs en une seule image.

- Le calcul des opérateurs : Chaque processeur calcule les opérateurs (compléments de Schur et condensation de résidus) de ses sous-structures.
- Le calcul des directions de recherche locales : Chaque processeur doit calculer la direction de recherche qui correspond à son côté de l'interface et doit l'envoyer au processeur qui traite la sous-structure voisine le cas échéant.
- Le pilotage de la boucle de Newton globale : Tous les processus doivent être synchronisés. Par exemple en cas de non-convergence dans une sous-structure, l'incrément de chargement global doit être réduit. Cela signifie qu'on doit revenir au pas précédent (local) sur toutes les sous-structures.

Ces étapes ne seront pas abordées plus en détail dans la suite. Quelque précision concernant les problèmes locaux et la parallélisation du problème global restent néanmoins à apporter.

## 2.2 Remarques sur la résolution des problèmes locaux

Les problèmes locaux par sous-structures, résolus à l'étape de relocalisation non-linéaire, sont naturellement parallélisables, puisqu'ils n'ont besoin de communiquer ni avec les autres sous-structures ni avec les autres interfaces lors de leur résolution.

Pour l'implémentation en parallèle on a choisi d'utiliser comme direction de recherche le complément de Schur du voisinage de l'interface 2.3.1. Cet opérateur vient à modifier la structure de la matrice  $\mathbf{K}$  pendant l'opération  $\mathbf{K} + \mathbf{k}^s$  ce qui engendre une augmentation du temps de calcul pour la première itération. Pour les itérations locales suivantes, la structure de la matrice  $\mathbf{K} + \mathbf{k}^s$  reste inchangée même si cette matrice est modifiée.

Afin de diminuer le temps de calcul de cette opération pénalisante, l'opération  $\mathbf{K} + \mathbf{k}^s$  a été améliorée en faisant l'addition directement sur la structure définissant la matrice  $\mathbf{K}$ . Avec cette modification le temps de calcul de cette opération a été réduit de 50%. Une amélioration potentielle serait de déterminer *a priori* la structure de cette matrice pour l'allouer correctement depuis le début des calculs.

## 2.3 Parallélisation du problème global

La parallélisation du problème global d'interface formulé en déplacement (voir problèmes tangents (3.11) pour la version primale et (3.30) pour la version mixte) peut s'opérer de différentes manières.

Une solution consiste à utiliser des bibliothèques parallèles de résolution de systèmes linéaires (parallélisme numérique) par exemple : MUMPS (*MUltifrontal Massively Parallel Sparse direct Solver*), HIPS (*Hierarchical Iterative Parallel Solver*), PaStiX (*Parallel Sparse matrix package*). Le principal problème avec ces bibliothèques est que les résultats ne sont pas extensibles en fonction du nombre de processeurs. Ces bibliothèques restent néanmoins performantes pour un nombre modéré de processeurs (de l'ordre de 10-100 pour donner une idée), le *speed-up* se voyant souvent dégradé pour un nombre croissant de processeurs.

Un autre choix est l'utilisation des solveurs parallèles issus d'une parallélisation mécanique/physique des équations (type BDD ou FETI). Le problème d'interface étant formulé en déplacement, un solveur parallèle de type BDD [Mandel, 1993; Mandel et Brezina, 1996] a d'abord été retenu et amélioré par l'implémentation d'un préconditionneur de type BDDC (*Balancing Domain Decomposition by Constraints*) [Dohrmann, 2003]. Les contraintes additionnelles portent sur la continuité au nœuds coin des sous-structures ce qui s'avère être crucial pour la simulation des structures plaque.

La formulation corotationnelle retenue conduisant à un système non symétrique [Felippa, 2000; Felippa et Haugen, 2005], un algorithme de type GMRES [Saad, 2000] est utilisé.

### 2.3.1 Parallélisation du problème global avec la méthode BDD

La base de la méthode BDD a été présentée au paragraphe 5.2 de la section 2. On présente ici son implémentation en parallèle et sa résolution par un solveur GMRES.

Pour paralléliser la méthode BDD, il faut paralléliser toutes les étapes d'assemblage des opérateurs, ainsi que le produit scalaire nécessaire pour résoudre le système avec un solveur itératif GMRES.

#### Calcul du résidu en parallèle

Le résidu global consiste en l'assemblage des résidus locaux condensés. Le calcul des différents résidus locaux condensés est réalisé au niveau de chaque processeur. Un processeur "virtuel" correspondra à une sous-structure dans la suite pour simplifier. Pour l'approche primale, le résidu local est défini comme :

$$\underline{b}^s = \underline{r}_b^s - \mathbf{K}_{Tbi}^s \mathbf{K}_{Tii}^s{}^{-1} \underline{r}_i^s \quad (4.1)$$

L'idée derrière cette procédure est de ne pas faire de multiplications de matrices, coûteuses, mais uniquement des multiplications matrice-vecteur. Pour cela, il est nécessaire de construire deux matrices.

La première, une matrice carré de la dimension du nombre de degrés de liberté internes,  $\overline{\mathbf{K}}_{ii}^s \mathbf{I}$ ,

$$\overline{\mathbf{K}}_{ii}^s \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Tii}^s & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

où  $I$  est la matrice identité de dimension  $b$ . L'autre matrice est :

$$\overline{\mathbf{K}}_{bi}^s \mathbf{I} = [\mathbf{K}_{Tbi}^s \quad -I] \quad (4.3)$$

Pour obtenir le résidu local  $\underline{b}^s$  on doit multiplier la matrice  $\overline{\mathbf{K}}_{ii}^s \mathbf{I}$  par le vecteur résidu local :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{Tii}^s \cdot \underline{r}_i^s \\ \underline{r}_b^s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Tii}^s & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{r}_i^s \\ \underline{r}_b^s \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Le résidu condensé par sous-structure, est ensuite obtenu par,

$$\underline{b}^s = - [\mathbf{K}_{Tbi}^s \quad -I] \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{Tii}^s \cdot \underline{r}_i^s \\ \underline{r}_b^s \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Toutes ces opérations sont indépendantes par sous-structure et donc, parallélisables. L'étape finale, consiste à l'assemblage des différents résidus locaux condensés.

$$\underline{b} = \sum_s A^s \underline{b}^s \quad (4.6)$$

Il faut faire attention à la multiplicité de chaque d.d.l. d'interface. Les nœuds partagés par deux sous-structures ont une multiplicité égale à 2, celles partagées par trois sous-structures ont une multiplicité égale à 3, etc. Avant de les assembler, chaque valeur des vecteurs  $\underline{b}^s$  doit être divisée par la multiplicité correspondante.

Pour le cas du résidu global mixte, la procédure est la même, sauf qu'il faut ajouter l'influence des sauts de déplacement au moment de l'assemblage.

$$\underline{b} = \sum_s A^s (\underline{b}^s + \mathbf{S}^s \underline{u}_b^s) \quad (4.7)$$

La construction du produit matrice-vecteur,  $\mathbf{S}^s \underline{u}_b^s$  est présenté à continuation.

### Calcul distribué/parralélisé du produit matrice-vecteur

Dans cette partie, on cherche à construire le produit matrice-vecteur  $\mathbf{S} \underline{u}$ , qui résulte de l'assemblage de contributions locales :

$$\mathbf{S}^s \underline{u}^s = (\mathbf{K}_{bb}^s - \mathbf{K}_{bi}^s \mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{K}_{ib}^s) \underline{u}^s \quad (4.8)$$

La procédure utilisée est très similaire à celle utilisée pour l'assemblage du résidu. Pour construire  $\mathbf{S}^s \underline{u}^s$ , on utilise les matrices construites pour le résidu condensé ( $\overline{\mathbf{K}}_{ii}^s \mathbf{I}$  et  $\overline{\mathbf{K}}_{bi}^s \mathbf{I}$ ) ainsi que la matrice  $\overline{\mathbf{K}}_{ib/bb}^s$  définie par :

$$\overline{\mathbf{K}}_{ib/bb}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ib}^s \\ \mathbf{K}_{bb}^s \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

La procédure consiste à faire les multiplications matrice vecteur suivantes (donc de droite à gauche) :

$$\mathbf{S}^s \underline{u}^s = - [\mathbf{K}_{Tbi}^s \quad -I] \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Tii}^s & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ib}^s \\ \mathbf{K}_{bb}^s \end{bmatrix} \underline{u}^s \quad (4.10)$$

L'assemblage des contributions locales est finalement effectué :

$$\mathbf{S}\underline{u} = \sum_s A^s \mathbf{S}^s \underline{u}^s A^{sT} \quad (4.11)$$

Les trois matrices ( $\overline{\mathbf{K}}_{ii}^s \mathbf{I}$ ,  $\overline{\mathbf{K}}_{bi}^s \mathbf{I}$  et  $\overline{\mathbf{K}}_{ib/bb}^s$ ) sont stockées, puisque elles seront réutilisées itérativement pour résoudre le système.

### Produit scalaire en parallèle

Une étape de la méthode GMRES requiert le calcul d'un produit scalaire de deux vecteur chacun résultant de l'assemblage de contributions de chaque sous-structure.

La contribution du produit scalaire par sous-structure,

$$a^s = \underline{w}^{sT} \underline{v}^s \quad (4.12)$$

est assemblé en utilisant une fonction de la librairie de Open MPI, « MPI\_Allreduce (sum,  $a^s$ ) », qui permet de faire la somme des contributions de différents processeurs et envoi le résultat à tous les processeurs de façon optimisé, ce qui donne :

$$a = \sum_s a^s \quad (4.13)$$

en tenant compte des multiplicités des différentes interfaces.

### 2.3.2 Définition d'un préconditionneur issu de la méthode BDDC

La méthode GMRES utilisée pour résoudre le problème global (voir annexe B) nécessite l'utilisation d'un préconditionneur pour être efficace. Le préconditionneur choisi est le préconditionneur de la méthode BDDC (Balancing Domain Decomposition by Constraints) [Dohrmann, 2003; Mandel *et al.*, 2004]. La méthode BDDC est très proche de la méthode FETI-DP [Farhat *et al.*, 2001] dont elle est la version primale en quelque sorte. Elle a été étendue à des problèmes d'élasticité incompressible [Dohrmann, 2006], au système de Stokes [Li et Widlund, 2006], pour les écoulements de milieux poreux [Tu, 2005], adapté également aux éléments spectraux [Pavarino, 2007], pour des éléments plaques [Beirão da Veiga *et al.*, 2010].

La méthode BDDC introduit des contraintes supplémentaires (continuité des déplacements) dans les coins de sous-structures durant l'étape de préconditionnement. Cet approche est une réponse au problème de perte d'extensibilité due aux singularités de nœuds coins observées dans les problèmes plaques [Farhat et Mandel, 1998; Farhat *et al.*, 1998, 2000b; Roux, 1997; Le Tallec *et al.*, 1998]. Du point de vue pratique, les coins sont définis comme des points multiples (nœuds partagés par plusieurs sous-structures), qui peuvent être enrichis avec les nœuds des extrémités des interfaces. Le choix de ces « nœuds coins » doit être fait de façon à bloquer les modes rigides des sous-structures.

La définition des « nœuds coins », peut conduire à des problèmes importants en 3D (beaucoup de contraintes, mauvaise convergence ...). Une solution, proposée

dans [Lesoinne et Pierson, 1999], consiste à trouver trois nœuds sur chaque interface qui définissent le triangle de surface maximale.

Dans notre cas, les interfaces sont des lignes, courbes et assemblages de ligne et de courbes. Le choix effectué consiste en la sélection des deux nœuds les plus distant par interface. Cela conduit à avoir 4 nœud par plaque qui permettent de bloquer les modes rigides de la sous-structure. Tous les degrés de liberté des « nœuds coins » sont bloqués.

Pour le cas d'interfaces fermées, la même procédure est utilisée (2 nœuds par interface), on cherche, dans un premier temps, le nœud ( $a$ ) le plus distant du premier nœud de la liste des nœuds de l'interface. Dans un second temps, on cherche le nœuds ( $b$ ) le plus distant du premier rencontré ( $a$ ).

La construction du préconditionneur est présentée dans l'annexe A et l'algorithme de résolution GMRES associé dans l'annexe B

L'implémentation de la BDDC permet de réduire, de façon importante, le nombre d'itérations du GMRES. Dans la section 3, on présente une étude de validation de l'implémentation de la BDDC en élasticité linéaire. En particulier, on s'intéresse aux questions d'extensibilité et de *speed-up*.

## 2.4 Choix de la décomposition

Décomposé une structure pour l'utilisation de la méthode présentée ici est un problème complexe. Quelques algorithmes et codes existants pour faciliter cette tâche ont été proposés dans [Farhat et Simon, 1993; Walshaw *et al.*, 1995; Karypis et Kumar, 1998]. Ces approches permettent d'obtenir des problèmes locaux équilibrés, en réduisant la taille des interfaces (pour obtenir un problème global condensé le plus petit possible). Tout en éliminant les modes rigides de sous-structures.

Un autre point important est d'avoir des problèmes locaux bien conditionnés, ce qui est assuré par un rapport hauteur sur largeur voisin de l'unité, la contrepartie étant la largeur de bande importante de ces problèmes qui deviennent ainsi plus coûteux.

## 3 Validation de l'implémentation en élasticité linéaire

On note par  $H$  une longueur caractéristique des sous-domaines, et par  $h$  une longueur caractéristique des éléments (FIG. 4.4). Travailler à  $h$  constant revient à conserver un problème de référence de taille constante. Travailler à  $H$  constant revient à garder le même nombre de sous-domaines. Enfin, un autre paramètre intéressant est  $\frac{H}{h}$  : travailler à  $\frac{H}{h}$  constant conserve des problèmes locaux par sous-domaine de taille constante, la taille du problème de référence augmentant avec le nombre de sous-domaines.

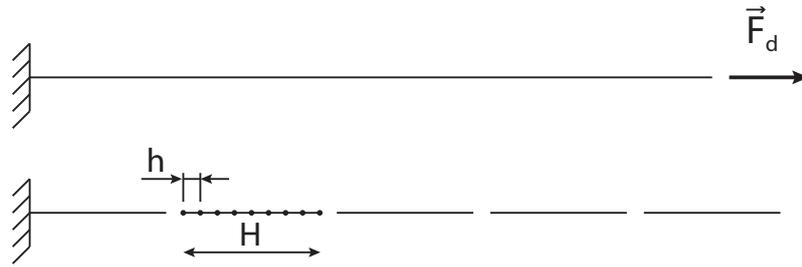


Figure 4.4: Barre en traction et décomposition en sous-domaines

Une méthode de décomposition de domaine est dite :

- **numériquement extensible** si, en travaillant à  $\frac{H}{h}$  constant, le nombre d'itérations pour converger ne dépend que peu du nombre de sous-domaines (donc de  $H$ );
- **optimale** pas de dépendance vis à vis de  $\frac{H}{h}$ ;
- **parallèlement extensible** si le temps de calcul est peu dépendant de  $H$ .

De façon caractéristique pour les approches monoéchelles, on observe clairement une décroissance du taux de convergence avec le nombre de sous-structures (voir 3.1). Il apparaît que pour obtenir la propriété d'extensibilité, une méthode de décomposition de domaine doit impérativement être multiéchelle.

Pour valider la méthode BDDC, deux études sont menées pour assurer l'extensibilité numérique (et optimalité) et le *speed-up* (extensibilité parallèle) de la méthode en élasticité linéaire. Ces questions sont d'abord illustrées sur un exemple 1D élémentaire.

### 3.1 Analyse d'extensibilité numérique de différentes méthodes de décomposition de domaine

L'exemple traité est une poutre en traction sur lequel sont appliquées diverses méthodes de décomposition de domaines.

La FIG. 4.5 présente la structure retenue pour analyser l'extensibilité numérique de différentes méthodes de décomposition de domaine. Il s'agit d'un problème unidimensionnel d'une poutre en traction. La structure est décomposée en 3 et 4 sous-structures. Chacune de sous-structures a 3 éléments internes. L'extrémité gauche de la structure est bloquée, et un déplacement (déplacement horizontal  $U$ ) est appliqué à l'extrémité droite.

Les méthodes testées sont :

- la méthode primale, son problème interface est résolu avec un méthode de gradients conjugué. La méthode et l'algorithme sont décrits en CHAP. 2 section 5.2;

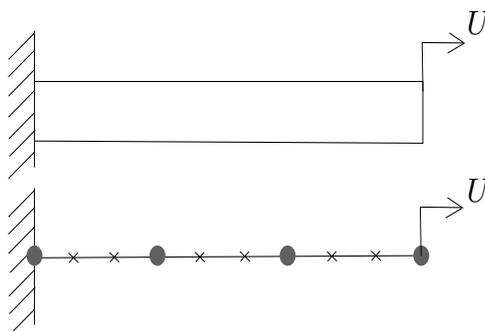


Figure 4.5: Cas test

- la méthode duale, correspond à la méthode FETI résolu avec un gradient conjugué. La méthode et l'algorithme sont décrits en CHAP. 2 section 5.3 ;
- la méthode mixte mono-échelle, est décrits en CHAP. 2 section 5.4.1 ;
- la méthode BDD, correspond à une méthode primale résolu avec un gradient conjugué préconditionné projeté. Une descriptions de la méthode et de l'algorithme en CHAP. 2 section 5.2 ;
- la méthode mixte multiéchelle, est décrits en CHAP. 2 section 5.4.2, elle correspond à la méthode LaTIn micro-macro ;

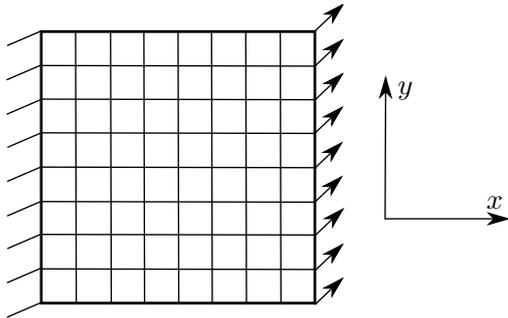
Les résultats de l'étude sont présentés en TAB. 4.2. Comme attendu les méthodes Duale, BDD et Mixte micro-macro (multi-échelle) sont numériquement extensibles. Le nombre d'itérations à convergence est inchangé lorsque le nombre de sous-structures augmente. Par contre les méthodes primale et mixte mono-échelle ne le sont pas.

Table 4.2: Résultats d'extensibilité numérique

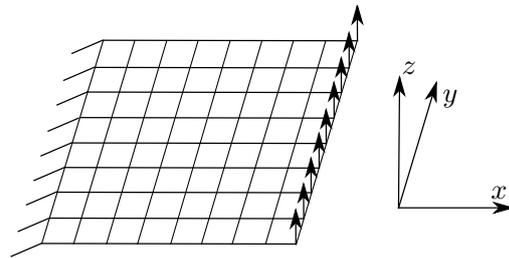
Méthode	Sous-structures	Itérations	Extensible
Primale	3	2	NON
	4	3	
Duale	3	1	OUI
	4	1	
Mixte	3	3	NON
	4	4	
BDD	3	1	OUI
	4	1	
Mixte m-M	3	1	OUI
	4	1	

### 3.1.1 Extensibilité numérique de la méthode BDDC implémentée

Pour vérifier l'extensibilité numérique de la méthode BDDC en élasticité linéaire, l'on étudie l'influence de l'augmentation du nombre de sous-structures sur le nombre d'itérations GMRES pour résoudre le système global. Chaque sous-structure a le même rapport  $H/h$ . Pour chaque calcul, une seule sous-structure a été calculée par processeur.



**Figure 4.6:** Plaque plane soumise à un chargement de traction et de flexion dans le plan



**Figure 4.7:** Plaque plane soumise à un chargement de flexion hors-plan

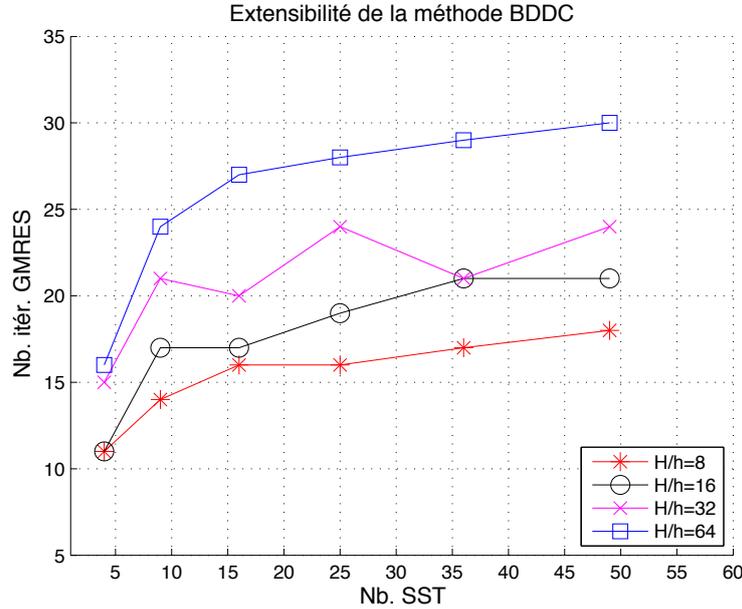
La structure retenue est une plaque plane, encastree d'un côté et soumise à deux types de chargement : le premier consiste en une traction et flexion dans le plan (FIG. 4.6), et l'autre en une flexion hors-plan (FIG. 4.7). Pour les différentes décompositions utilisées, on a mis autant de sous-structures dans les deux directions.

En FIG. 4.8 sont présentés les résultats pour la plaque soumise à un chargement de traction et de flexion dans le plan. Les différentes courbes représentent différents rapports  $H/h$ . Pour un nombre croissant de sous-structures, le nombre d'itérations GMRES augmente, mais il semble atteindre une limite différente pour chaque  $H/h$  (comportement asymptotique).

En FIG. 4.9 sont présentés les résultats pour la plaque soumise à un chargement de flexion hors-plan. Le comportement est semblable à celui du cas précédent. Le nombre d'itérations pour chaque rapport  $H/h$  semble tendre asymptotiquement vers une limite. Ces résultats sont très similaires à celles obtenues par [Beirão da Veiga *et al.*, 2010] et [Gosselet et Rey, 2006] pour une plaque en flexion hors-plan.

On constate, pour les cas traités, que l'extensibilité numérique semble bien vérifiée. Pour les différentes valeurs du rapport  $H/h$ , le nombre d'itérations augmente de la même façon pour tous les cas traités. Par contre, il existe une dépendance vis-à-vis de  $H/h$ , ainsi la méthode n'est pas optimale. Une possibilité d'amélioration consiste à utiliser plus de nœuds coins dans le préconditionneur.

Finalement, pour la définition des nœuds coins utilisées, des valeurs de  $H/h < 32$ , permettent d'assurer une bonne extensibilité de la méthode.



**Figure 4.8:** Étude extensibilité : cas de plaque en traction et flexion dans le plan

### 3.2 Étude de speed-up

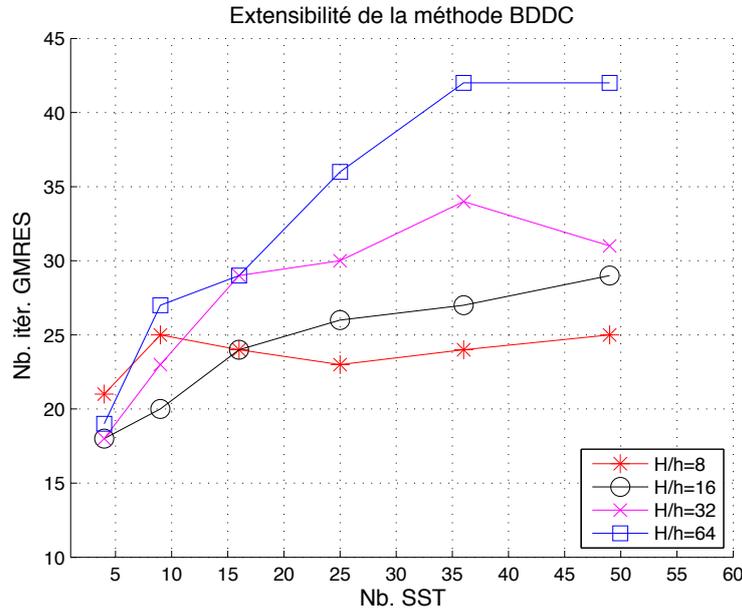
Le *speed-up* d'un algorithme parallèle est défini comme le rapport entre la vitesse de calcul lorsqu'on utilise un seul processeur et celle avec l'utilisation de  $N$  processeurs pour résoudre un problème de taille fixé ( $h$  constant et  $H$  variable). Toutes les étapes ne pouvant être parallélisées, ce nombre est en général inférieur à  $N$  et s'exprime selon la loi d'Amdahl [Amdahl, 1988] :

$$S(N) = \frac{T(1)}{T(N)} = \frac{T_s + T_p}{T_s + T_p/N} \quad (4.14)$$

où  $T_p$  est le temps correspondant à la partie parallélisable du calcul et  $T_s$  à la partie séquentielle, non parallélisable.

**Remarque :** En pratique le *speed-up* peut atteindre des valeurs supérieures à  $N$ , du fait d'une utilisation optimisée des ressources pour la résolution de problèmes de plus petite taille, comme la mémoire vive par exemple.

Pour vérifier le *speed-up* de la méthode, on étudie l'effet du nombre de sous-structures sur le temps de calcul total du problème. Le maillage de la structure est fixé. Au fur et à mesure que le nombre de sous-structures augmente, la taille du problème globale devient plus importante, tandis que la taille des problèmes locaux par sous-structure s'est réduite.



**Figure 4.9:** Étude extensibilité numérique : cas de plaque en flexion

La structure étudiée est la même que pour l'étude d'extensibilité (FIG. 4.6), mais pour un chargement de traction uniquement. Dans l'étude, trois niveaux de raffinement du maillage ont été testés. Pour chaque calcul, chaque processeur n'est en charge que d'une sous-structure.

FIG. 4.10 présente les résultats de l'étude pour les trois niveaux de raffinement du maillage. On constate, un *speed-up* très proche de la valeur optimale au moins pour des valeurs de rapport  $H/h$  raisonnable. En effet, pour les trois cas de raffinement, il existe une valeur optimale de nombre de processeurs (sous-structures) qui donne le meilleur *speed-up*. Cette valeur, dépend du maillage de la structure (paramètre  $H/h$ ). Pour des valeurs de  $H/h > 20$ , on est sur la courbe de *speed-up* optimale. Quand on augmente le nombre de sous-structures,  $H/h < 20$ , le *speed-up* est détérioré (on passe plus de temps à communiquer les processus qu'à résoudre le problème global).

Finalement, pour avoir un bon « *speed-up* » il faut assurer un rapport  $H/h$  supérieur à 20. Dans la suite, on choisit des valeurs élevées du rapport  $H/h$  pour assurer de bon « *speed-up* » dans les calculs.

## 4 Bilan

Dans ce chapitre nous avons présenté deux façons de paralléliser la méthode de résolution, le « multi-thread » et le « MPI » (*message passing interface*). Finalement, le « MPI » a été retenu car il permet un parallélisation complète (parallélisme « mécanique/physique ») du code de calcul. Nous avons aussi présenté la

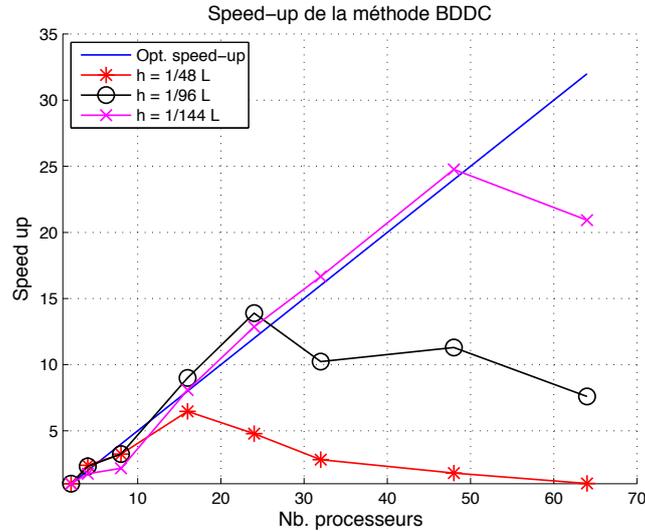


Figure 4.10: Résultats de l'étude de *speed-up*

librairie de calcul LMTpp, qui offre un développement accéléré et des fonctionnalités avancées pour la simulation en mécanique. Ainsi, quelques idées sur le parallélisme et l'équilibrage de charge ont été données.

Pour avoir une parallélisation complète de la méthode, la résolution du problème global a été parallélisée avec une méthode de type BDD résolu avec un solveur GMRES. Cette résolution n'est pas efficace et nécessite beaucoup d'itération GMRES pour converger. Pour pallier ce problème, un preconditionneur de type BDDC (Balancing Domain Decomposition by Constraints) a été utilisé.

La validation de l'implémentation a été testée en élasticité linéaire, afin de vérifier l'extensibilité numérique et le *speed-up* de la méthode BDDC avec GMRES. On a constaté que les courbes d'extensibilité numérique ont un comportement asymptotique, similaire à celui observé dans [Beirão da Veiga *et al.*, 2010] et [Gosselet et Rey, 2006] pour une plaque en flexion.

Pour le *speed-up*, on a constaté que pour différentes tailles du maillage on obtient une valeur maximale différente. Cette valeur maximale, provient du fait que la résolution du problème global est saturée après un certain moment et on ne gagne rien en le parallélisant davantage. Cette saturation dépend de la taille du problème, qui dépend aussi de la taille du maillage.

Pour avoir une bonne extensibilité une valeur de  $H/h < 32$  est nécessaire. D'autre part, pour obtenir un bon *speed-up*, le rapport  $H/h$  doit être supérieur à 20. Finalement, une valeur de  $20 < H/h < 32$  permet d'assurer l'extensibilité et le *speed-up* de la méthode.



# Chapitre 5

## Premières mises en œuvre de la méthode sur architecture parallèle

*La mise en œuvre de ces méthodes sur architecture parallèle, objet de ce chapitre est une étape indispensable, mais lourde. Faute de temps la méthode de continuation n'a pas encore été implantée sur architecture parallèle ce qui limite la portée des exemples analysés. Deux exemples de nature assez différente ont été traités. Le premier exemple est un caisson raidi traité comme un assemblage de sous-structures répétitives. Dans ce cas, la méthode montre les performances attendues. Le second exemple concerne des structures raidies où la topologie invite à traiter les raidisseurs en tant que sous-structures indépendantes et donc à introduire dans la décomposition de domaine des sous-structures très différentes. Ce second exemple montre à la fois l'intérêt de la relocalisation, mais également des pistes d'améliorations à apporter sur la méthode mixte pour obtenir des gains par rapport à une méthode de relocalisation primale.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Simulation en parallèle : sous-structures homogènes . . . .</b>	<b>151</b>
1.1	Analyse d'extensibilité . . . . .	156
<b>2</b>	<b>Simulation en parallèle : sous-structures hétérogènes . . . .</b>	<b>157</b>
2.1	Discussion . . . . .	159
<b>3</b>	<b>Influence de la décomposition . . . . .</b>	<b>161</b>

4	Bilan . . . . .	165
---	-----------------	-----

---

L'objet de ce chapitre est de tester les méthodes proposées et étudiées dans ce travail sur architecture parallèle sur des structures en aluminium (module d'Young  $E = 70\,000\text{ MPa}$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ ) inspirées de cas industriels. Deux cas sont analysés :

- un caisson raidi traité comme un assemblage de sous-structures répétitives,
- un panneau raidi où les raidisseurs sont traités comme des sous-structures.

Ces deux exemples, différents par leur nature, montrent à la fois les apports, mais aussi les limites actuelles des méthodes dans la perspective du traitement de structures industrielles de grandes tailles.

## 1 Simulation sur architecture parallèle d'un caisson raidi modélisé comme un assemblage de sous-structures homogènes

La FIG. 5.1 présente la géométrie du caisson de section rectangulaire et raidi par 8 raidisseurs internes. Il est encastré à l'une de ces extrémités et est soumis à un déplacement vertical sur l'autre de  $0,8\text{ m}$  (FIG. 5.2). L'épaisseur des parois est de  $2\text{ mm}$ , la longueur totale de  $8\text{ m}$ . Cette structure de nature répétitive est décomposée en 8 sous-domaines identiques (FIG. 5.3). Les éléments choisis sont des éléments triangulaires de Mindlin à 3 nœuds. Le maillage de chacune des sous-structures introduit environ 2400 inconnues (déplacements et rotations nodales), soit de l'ordre de 20000 inconnues pour l'ensemble de la structure.

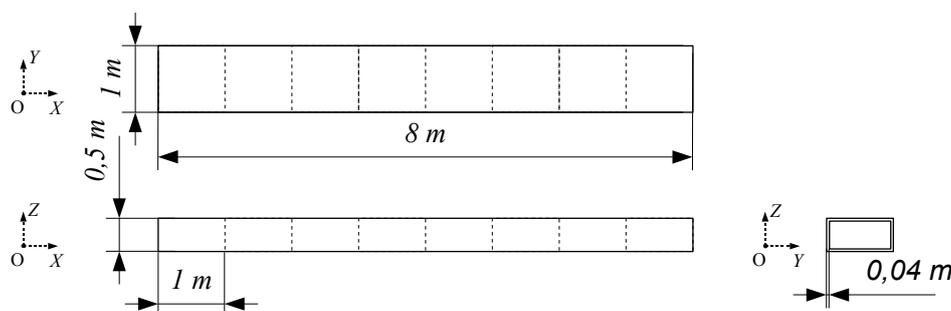
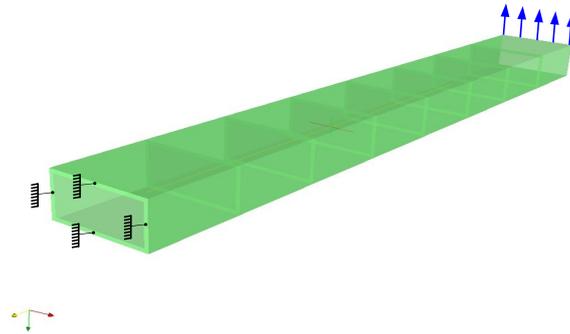
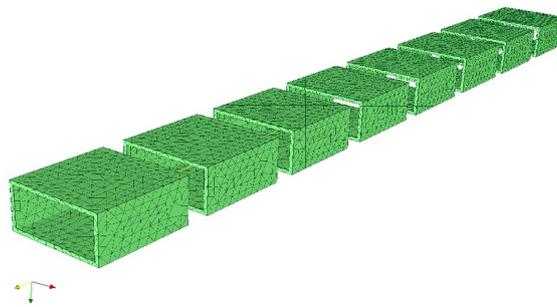


Figure 5.1: Géométrie du caisson raidi

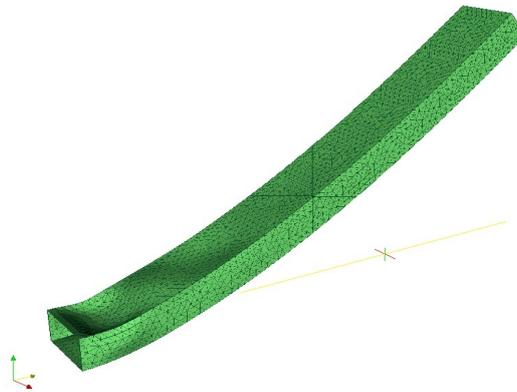
Les différentes approches, Newton-Krylov-Schur (méthode de référence), méthode de relocalisation primale et mixte sont comparées. La FIG. 5.4 présente la solution déformée du caisson obtenue par les différentes approches (dont les résultats à convergence donnent des différences indiscernables). Un zoom sur cette solution FIG. 5.5 permet de constater la présence de modes locaux de flambage à proximité de la zone de fixation, sur la face en compression.



**Figure 5.2:** Conditions aux limites et chargement



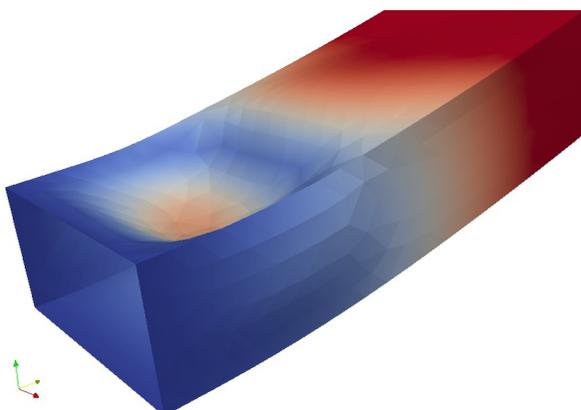
**Figure 5.3:** Décomposition de domaine et maillages associés



**Figure 5.4:** Solution déformée ( $\times 3$ ) du caisson raidi en flexion pour le chargement final

Pour la méthode de relocalisation mixte, la direction de recherche  $\mathbf{k}$  a été calculée selon la méthode de l'assemblage de compléments de Schur locaux décrite dans le CHAP. 3, avec un paramètre de profondeur  $p = 3$ . Le critère de convergence global a été fixé dans tous les cas à  $\epsilon_{glob} = 10^{-6}$  et le critère de convergence local à  $\epsilon_{loc} = 10^{-3}$ .

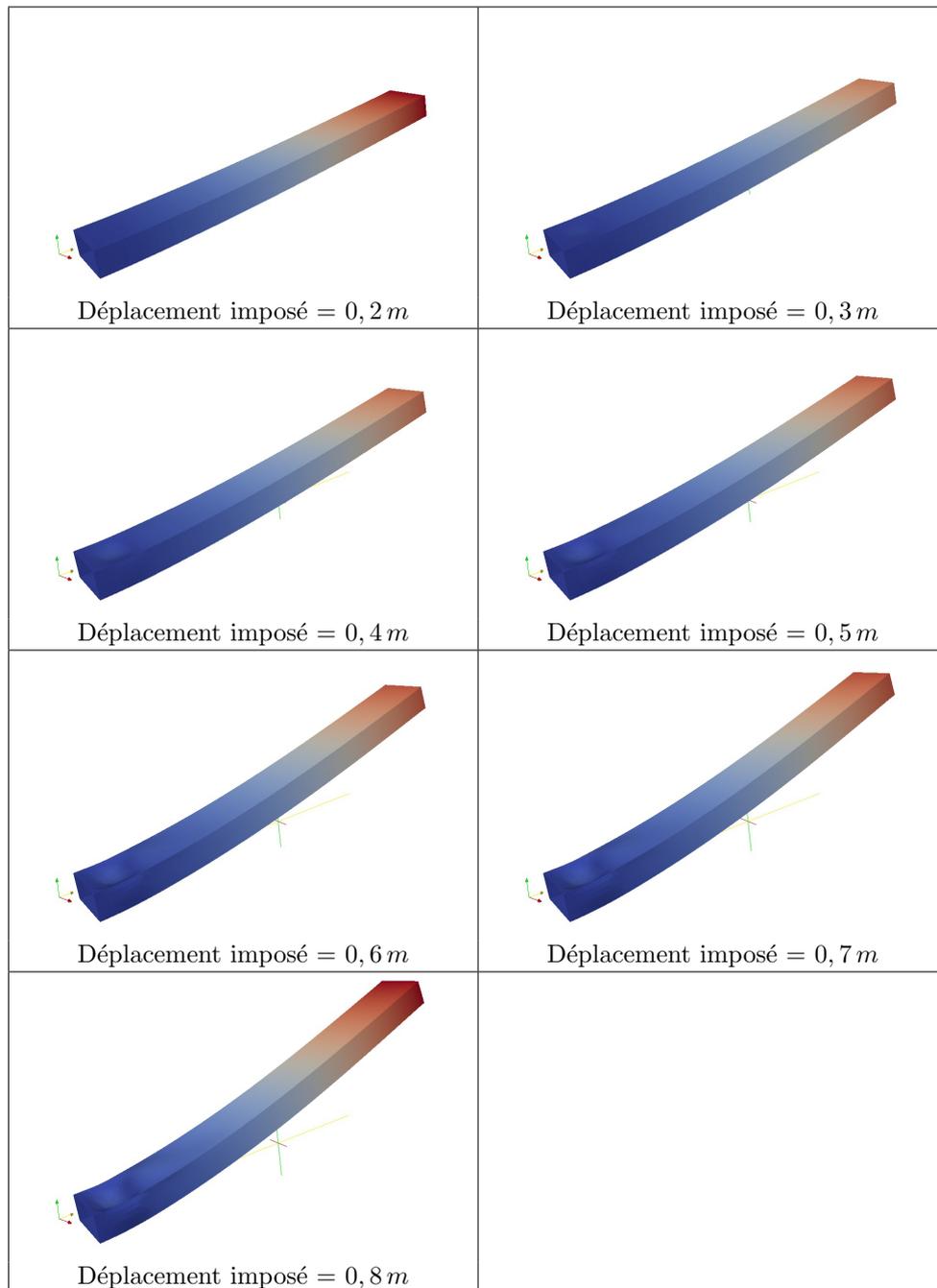
Le tableau TAB. 5.1 permet de constater que 7 incréments sont nécessaires pour



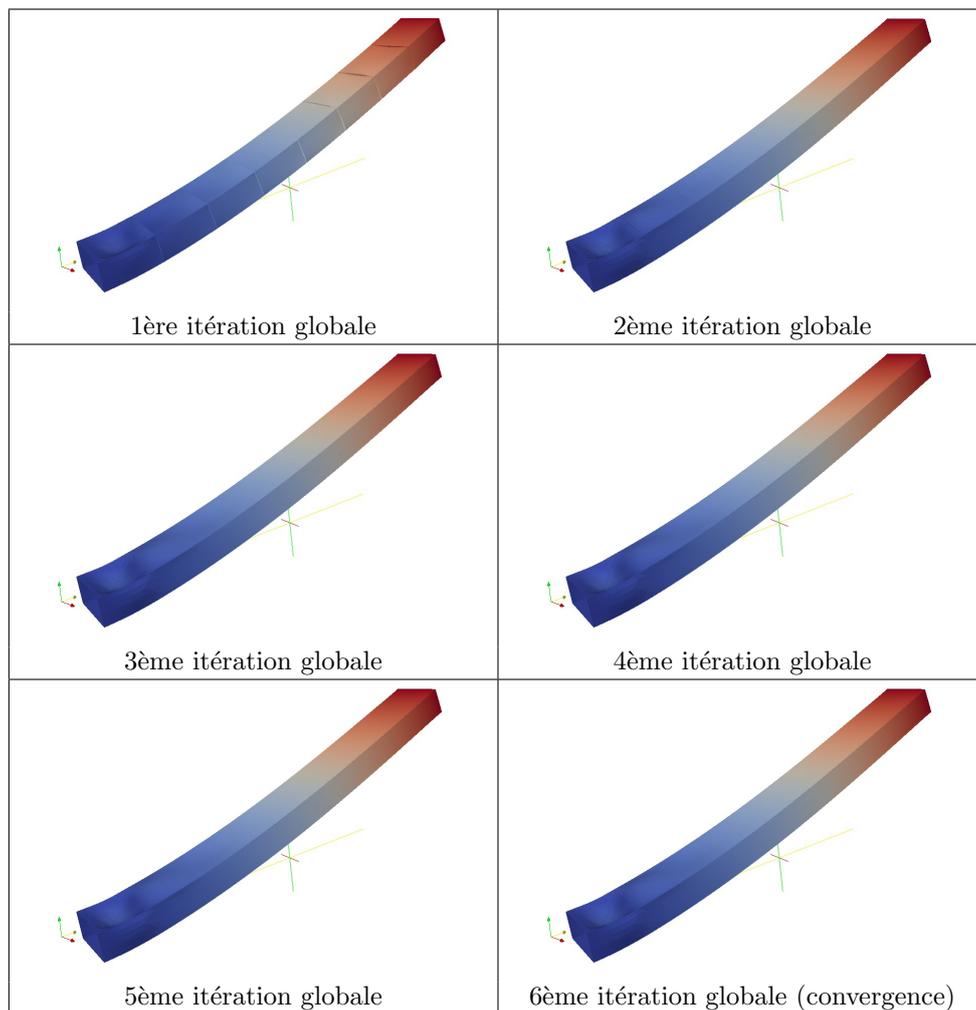
**Figure 5.5:** Zoom sur la zone de fixation du caisson raidi en flexion pour le chargement final

assurer la convergence avec une approche NKS classique, alors qu'il n'en faut plus que 2 avec la stratégie de relocalisation non-linéaire à déplacements imposés et un seul pour la méthode de relocalisation mixte. Si, comme dans les exemples des treillis la réduction du nombre de calculs locaux n'est pas significative (de l'ordre de 39%), le nombre de résolutions de problèmes globaux est quant à lui nettement diminué (gain d'un facteur de 5.8). Le point le plus significatif peut-être est celui de la robustesse puisque dans le cas mixte aucune divergence n'est apparue contrairement aux autres cas qui ont demandé une réduction des pas de temps toujours pénalisante pour obtenir la convergence.

Cette analyse permet d'observer la diminution significative du nombre d'itérations globales avec les méthodes de relocalisation non-linéaires. Bien qu'il soit toujours délicat de tirer des conclusions sur un seul exemple, il semble que dans le cas de structures répétitives la méthode exhibe les mêmes performances que celles obtenues dans le cas des treillis de poutre étudiés au CHAP. 3. Le FIG. 5.6 montre les différentes solutions convergées obtenues par la méthode NKS. Le FIG. 5.7 montre les solutions obtenues à chaque itération globale pour la méthode de relocalisation mixte pour laquelle le chargement final est appliqué en un pas de temps.



**Figure 5.6:** Solutions convergées du caisson raidi pour chaque pas de chargement de la méthode NKS classique.



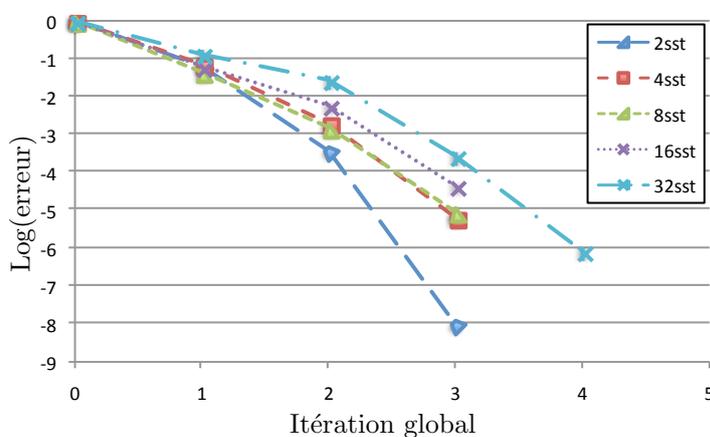
**Figure 5.7:** Solutions intermédiaires du caisson raidi à chaque itération globale pour la méthode de relocalisation mixte (1 seul pas de chargement).

**Table 5.1:** Résultats de convergence des différentes méthodes pour le caisson raidi

NKS Clas.		Reloc-P		Reloc-M	
Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)	Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)	Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)
0,8	diver.	0,8	diver.	0,8	6 (126)
0,4	diver.	0,4	5 (90)		
0,2	5 (40)	0,4	5 (79)		
0,2	diver.				
0,1	6 (48)				
0,1	5 (40)				
0,1	5 (40)				
0,1	5 (40)				
0,1	5 (40)				
0,1	5 (40)				
<b>0,8</b>	<b>35 (280)</b>	<b>0,8</b>	<b>10 (169)</b>	<b>0,8</b>	<b>6 (126)</b>

## 1.1 Analyse d'extensibilité

La méthode de relocalisation mixte fonctionnant comme attendu dans ce cas, nous avons mené une étude d'extensibilité de la méthode en fonction du nombre de sous-domaines étudiés.

**Figure 5.8:** Évolution de l'erreur en fonction des itérations pour différents nombres des sous-structures

L'étude est menée sur le caisson raidi encastré à l'une de ces extrémités et soumis à un déplacement vertical sur l'autre. Le déplacement vertical imposé sur chaque structure étant différent (proportionnelle à la longueur du caisson) de façon à avoir le même moment de flexion à l'extrémité encastré.

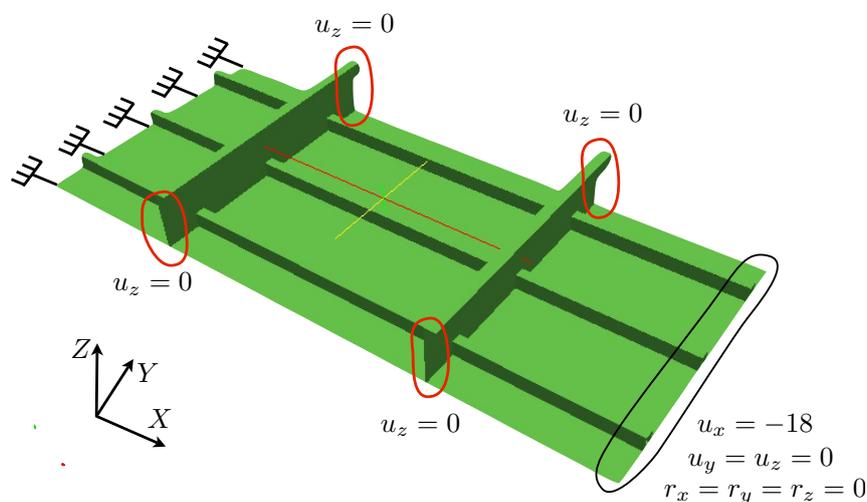
En FIG. 5.8 sont présentés les résultats qui nous semblent satisfaisants. On constate que le nombre d'itérations nécessaires pour converger reste constant. Bien

évidemment il serait néanmoins intéressant d'augmenter encore le nombre de sous-domaines pour avoir une vue plus large de la question.

## 2 Simulation sur architecture parallèle d'un panneau raidi modélisé comme un assemblage de sous-structures très hétérogènes entre elles

Le deuxième cas analysé est un panneau raidi. Sa topologie invite à traiter les raidisseurs en tant que sous structures indépendantes et donc à introduire dans la décomposition de domaine des sous-structures très différentes. Ce cas fourni par EADS Innovation Works présente l'intérêt de développer des modes locaux au niveau des peaux puis des modes globaux au niveau des raidisseurs.

La FIG. 5.9 présente la géométrie du panneau raidi par l'intermédiaire de 3 raidisseurs longitudinaux en Oméga et deux raidisseurs transversaux désignés aussi par cadres dans la suite. Le panneau est encastré à son extrémité gauche, à son extrémité droite un chargement de compression (déplacement selon  $X$ ) est appliqué, les rotations et les déplacements en  $Y$  et  $Z$  étant bloqués. Les extrémités des raidisseurs transversaux sont aussi également bloquées en déplacement normal (selon  $Z$ ).



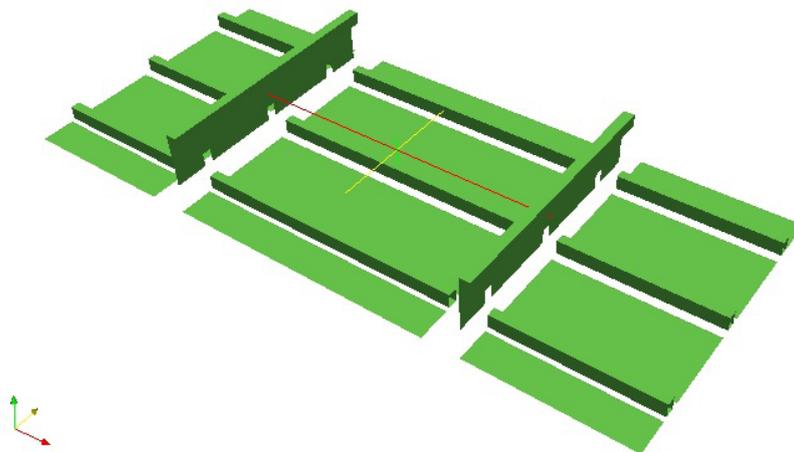
**Figure 5.9:** Géométrie du panneau raidi et conditions limites imposées

L'épaisseur de la plaque est de  $0.1\text{ mm}$ , celle des raidisseurs de  $0.2\text{ mm}$ , celles des cadres transversaux de  $0.4\text{ mm}$ .

Le partitionnement choisi est « naturel ». Le panneau est décomposé en 23 sous-structures (FIG. 5.10), 12 pour les plaques, 9 pour les raidisseurs longitudinaux, une pour chacun des cadres transversaux. Basé donc sur un découpage en entités technologiques de natures très différentes, on s'attend à ce que la réponse du modèle

reflète cette sous-structuration avec des réponses relativement différentes de chaque entité, réponses couplées par le biais des interfaces.

Le maillage, par sous-structure, comporte un nombre moyen de 2 250 ddl, soit un peu plus que 50 000 ddl pour l'ensemble de la structure.



**Figure 5.10:** Décomposition du panneau raidi

La réponse de la structure en fonction du niveau de chargement est illustrée par la figure FIG. 5.11. Le premier flambement de peau se développe pour un déplacement imposé d'environ  $3\text{ mm}$ . Une instabilité globale correspondant à un flambage des raidisseurs longitudinaux survient pour un déplacement imposé d'environ  $7\text{ mm}$  conduisant à un affaiblissement progressif, mais notable, de la raideur structurelle.

Le tableau TAB. 5.2 présente les résultats de convergence pour les différentes méthodes. Les résultats obtenus dans ce cas soulèvent bien des interrogations qui feront l'objet de quelques interprétations que faute de temps nous n'avons pu encore tester. Rappelons qu'à partir d'un essai de convergence en un seul pas de chargement à valeur finale imposée *a priori* ; le pas de chargement est réduit de moitié lorsque la convergence n'est pas atteinte. Cette opération est éventuellement réitérée jusqu'à convergence. Lorsque le pas de chargement à tester devient plus petit qu'une valeur minimale imposée, on considère qu'il y a divergence. Ce mode opératoire appliqué à la méthode NKS de référence permet d'atteindre le développement du flambement des peaux de la structure ( $3\text{ mm}$ ), mais conduit à considérer qu'il y a divergence au-delà et ne permet donc pas d'atteindre la charge finale ni d'atteindre l'apparition et le développement du flambage des raidisseurs longitudinaux. Les méthodes de relocalisation (primale et mixte) permettent d'atteindre le chargement final et donc de décrire une solution d'équilibre potentielle, mais au prix de plusieurs sous-

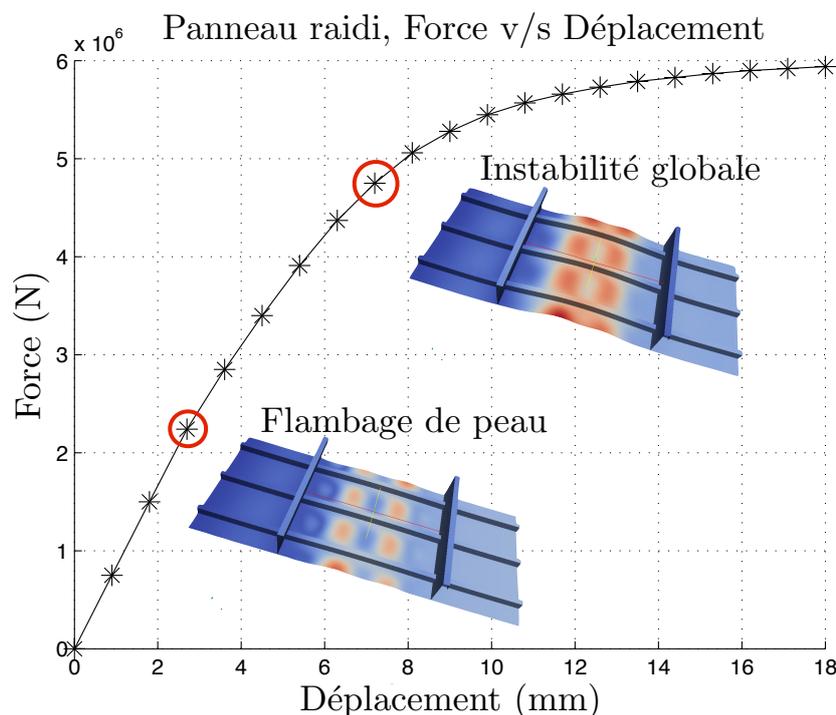


Figure 5.11: Comportement non-linéaire du panneau raidi

découpages. La relocalisation non-linéaire apporte donc un gain et une robustesse significatif, mais l'on ne constate pas d'intérêt sur cet exemple à la méthode mixte, les deux méthodes de relocalisation primale et mixte exhibant les mêmes performances en terme du nombre d'itérations locales et globales.

## 2.1 Discussion

Cette dernière constatation est à la fois surprenante et décevante eu égard aux résultats précédents. Le fait que les deux méthodes conduisent à des résultats identiques peut, a priori, avoir deux origines.

La première a déjà été rencontrée lors de l'application des méthodes de continuation, lorsqu'une méthode impose un pas très petit les non linéarités se développant sur le pas de chargement sont très réduites et toutes les méthodes exhibent les mêmes performances.

Ce n'est a priori pas ce phénomène qui est rencontré ici la méthode NKS de référence se comportant très différemment des deux autres et les redistributions non-linéaires par pas de chargement sont assez importantes. En effet, par sous-structure, de 4 à 6 itérations locales sont effectuées par pas de chargement.

La seconde raison envisagée est que les paramètres d'interface utilisés dans les deux méthodes de relocalisation sont très proches, c'est à dire en fait que les opérateurs de rigidité utilisés dans la méthode mixte sont très élevés (trop en fait).

**Table 5.2:** Résultats de convergence de différentes méthodes pour le panneau raidi

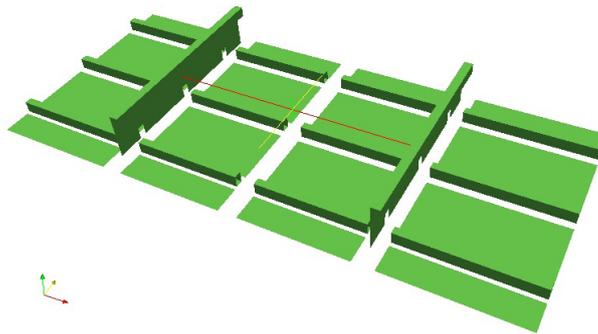
NKS Clas.		Reloc-P		Reloc-M	
Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)	Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)	Pas de charg.	Nb. itér. glo. (loc.)
-18	diver.	-18	diver.	-18	diver.
-9	diver.	-9	diver.	-9	diver.
-4,5	diver.	-4,5	diver.	-4,5	diver.
-2,25	3 (30)	-2,25	2 (162)	-2,25	2 (155)
-2,25	diver.	-2,25	diver.	-2,25	diver.
-1,125	3 (30)	-1,125	2 (184)	-1,125	2 (169)
-1,125	3 (30)	-1,125	2 (154)	-1,125	2 (141)
-1,125	diver.	-1,125	2 (138)	-1,125	2 (136)
-0,563	diver.	-1,125	2 (136)	-1,125	2 (136)
-0,281	diver.	-1,125	2 (140)	-1,125	2 (136)
-0,140	diver.	-1,125	2 (143)	-1,125	2 (138)
		-1,125	2 (137)	-1,125	2 (134)
		-1,125	2 (122)	-1,125	2 (128)
		-1,125	2 (132)	-1,125	2 (135)
		-1,125	2 (120)	-1,125	2 (122)
<b>-4,5</b>	<b>9 (90)</b>	<b>-18</b>	<b>22 (1568)</b>	<b>-18</b>	<b>22 (1530)</b>

La valeur optimale de cet opérateur a déjà été discutée c'est la contribution à l'interface considérée du complément de Schur du complément de la sous-structure considérée. L'utilisation de cet opérateur n'est bien sûr pas envisageable sous peine d'obtenir une méthode bien plus coûteuse qu'une méthode directe. Aussi avons nous proposé une approximation à courte échelle de cet opérateur dans le cas des structures répétitives, approximation tenant compte par le paramètre de profondeur de la taille de la structure réelle. Appliqué dans le cas des sous-structures de type raidisseur cette approximation à courte échelle conduite à utiliser comme approximation du complément de Schur la rigidité du raidisseur, et donc une approximation beaucoup trop rigide conduisant l'algorithme à se comporter de façon équivalente à une version primale.

Une solution à ce problème n'est pas difficile à trouver ; par exemple, mais pas seulement, dans l'esprit de travaux antérieurs sur une approximation à deux échelles du complément de Schur [Gendre *et al.*, 2011]. La mise en œuvre de ces approximations dans le cas de solveurs parallèles est cependant un travail demandant un minimum de temps et nous espérons pouvoir assez rapidement prouver le bien-fondé de cette hypothèse et retrouver ainsi les performances constatées de la méthode de relocalisation mixte obtenues dans le cas de sous structures répétitives.

### 3 Influence de la décomposition

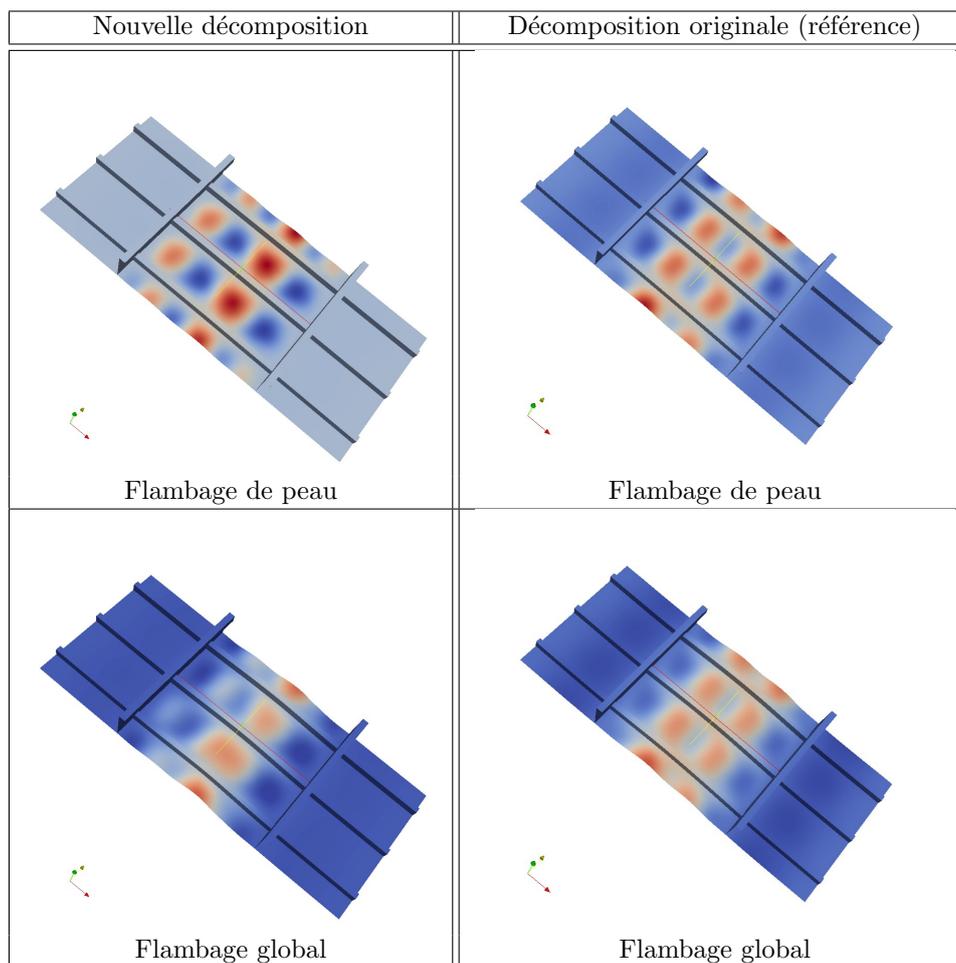
Les problèmes de flambage de structures complexes peuvent exhiber plusieurs solutions d'équilibre assez voisines. En pratique la sélection de l'une ou l'autre des solutions est pilotée par les défauts, en dehors des conditions aux limites, nous savons depuis les travaux de Koiter que les défauts géométriques les plus influents correspondent aux déformées « modales ». Dans les simulations effectuées les défauts ne sont pas introduits, mais la solution obtenue peut dépendre du « chemin numérique » suivi à savoir les configurations intermédiaires non convergées. Ces différents chemins sont bien évidemment affectés par la décomposition en sous-structure choisie *a priori*. Pour illustrer ce phénomène, nous appliquons maintenant à l'exemple précédent une nouvelle décomposition de domaine illustrée sur la FIG. 5.12. Cette décomposition a été obtenue en divisant transversalement les sous-structures centrales du panneau raidi en deux. On s'attend donc qu'en cas de solutions multiples proches cette dernière décomposition puisse faire apparaître un soutien énergiquement plus favorable, les « défauts numériques » étant plus importants dans ce dernier cas.



**Figure 5.12:** Nouvelle décomposition du panneau raidi

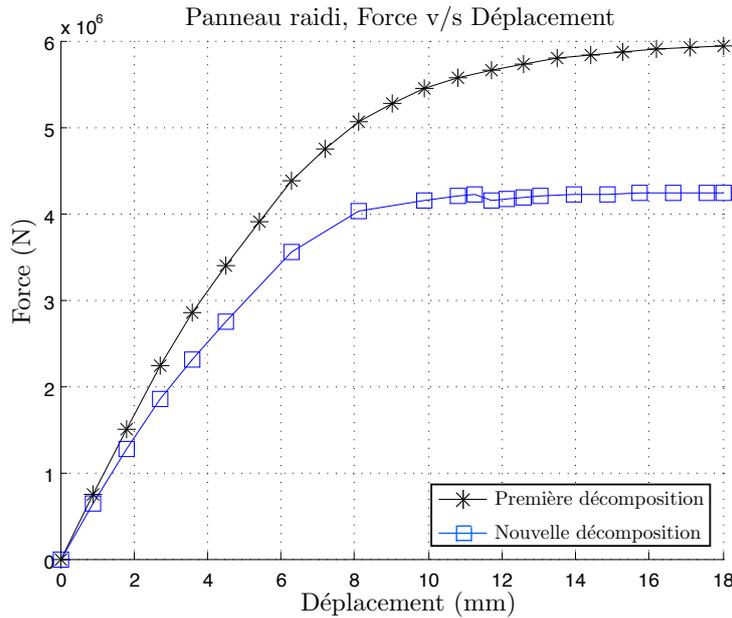
Pour le cas de la méthode de relocalisation mixte, les directions de recherche sur les nouvelles interfaces (zones de découpage) ont été multipliées par 1000, de façon à forcer la continuité des déplacements et rotations, c'est-à-dire en fait en adoptant un raccord primal en déplacement.

Sur la FIG. 5.13, les déformées obtenues par les méthodes de relocalisation mixtes correspondant aux deux types de sous-structuration sont comparées. On constate que la déformée pour le flambage de peau est différente à convergence pour les deux cas. Dans le cas de la décomposition d'origine, un flambage à cinq lobes se développe alors que dans la décomposition avec découpages des panneaux centraux c'est une solution à quatre lobes qui est observée. Le développement des flambages de peaux se développe légèrement avant dans le cas de la solution à quatre lobes qui est une solution d'équilibre plus favorable comme le montre la comparaison des courbes charge déplacement FIG. 5.14.



**Figure 5.13:** Comparation de la déformée pour les deux types de décomposition

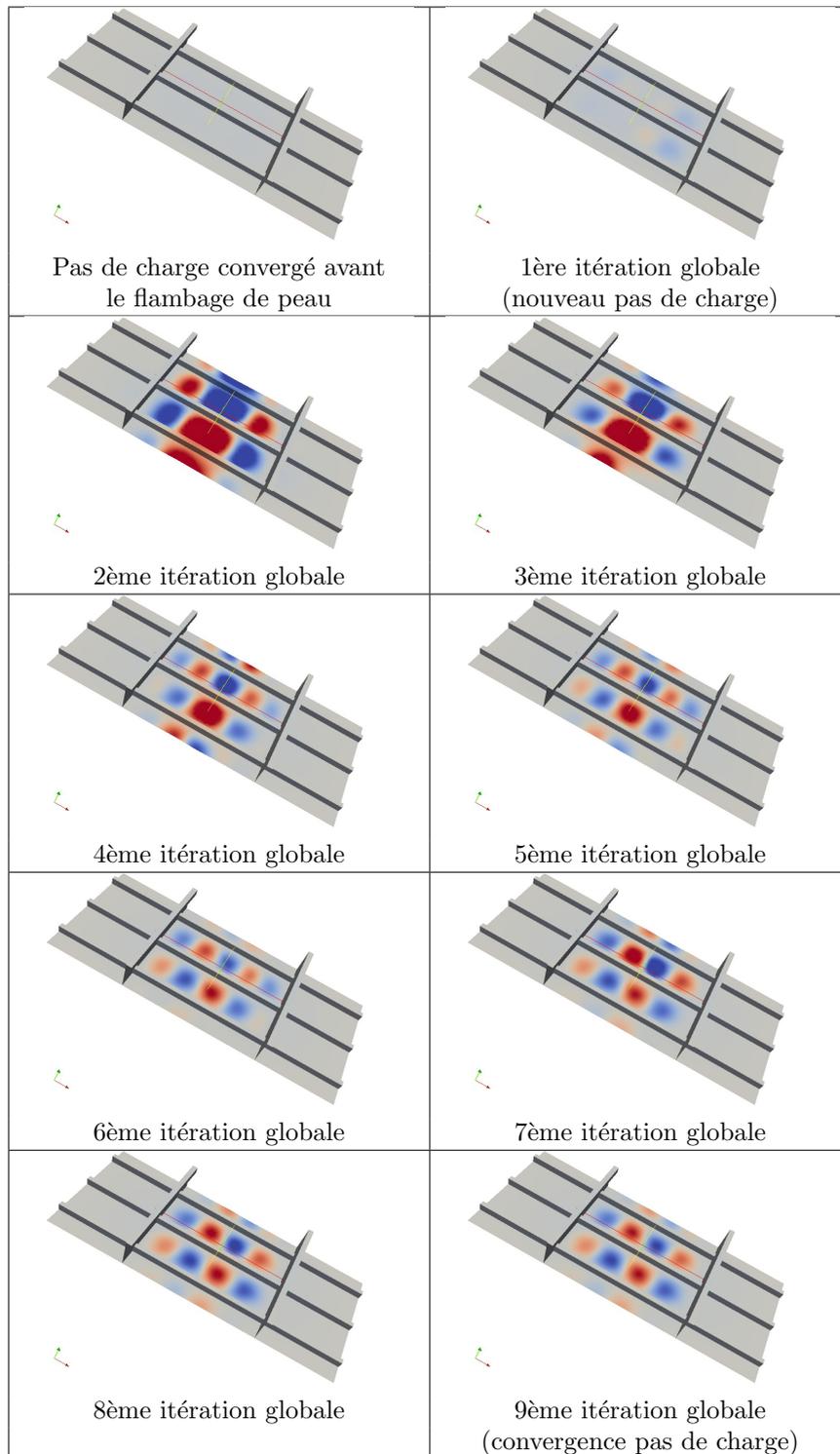
On peut s'étonner que le calcul avec la première décomposition *a priori* plus précise ne conduise pas à cette même distribution. En fait les itérations de convergence qui correspondent au pas de développement du flambage des peaux montre que pour la nouvelle décomposition la solution oscille entre les deux types de flambage à quatre ou cinq lobes FIG. 5.15. Il est de même pour la première décomposition FIG. 5.16, mais pour les critères choisis ce n'est finalement pas la même solution qui est sélectionnée. Aussi avons nous vérifié que le critère d'erreur local n'était pas responsable de ces solutions différentes. Le calcul fait par exemple sur la première décomposition avec une tolérance locale de  $10^{-6}$  montre que c'est bien la même solution qui est obtenue.



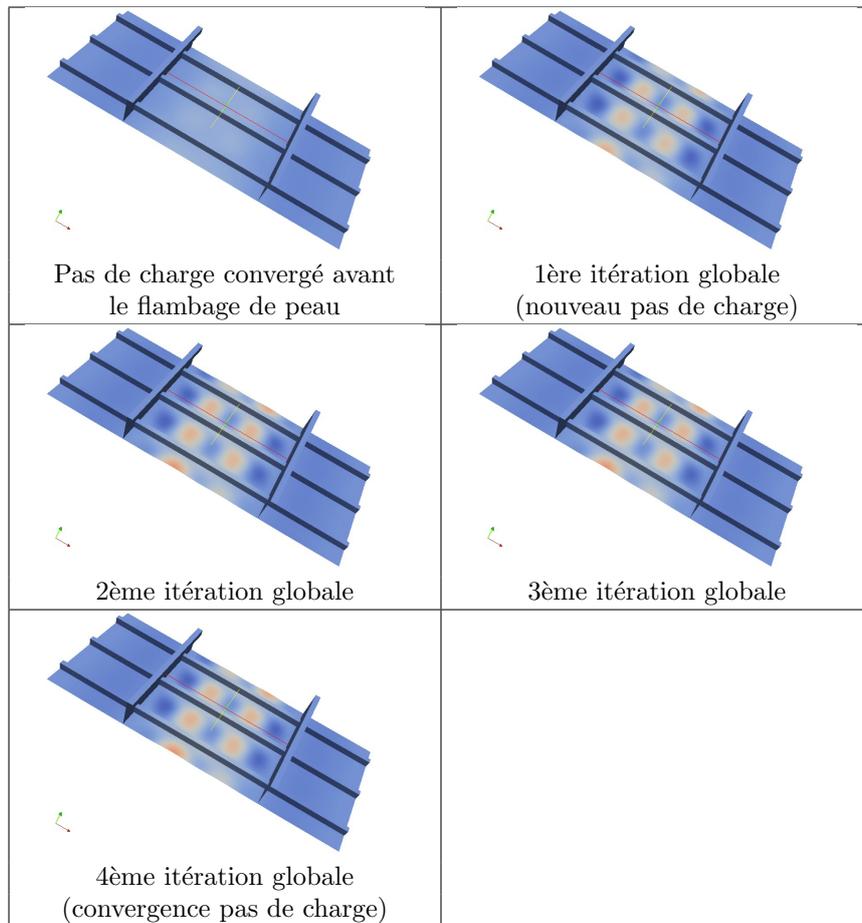
**Figure 5.14:** Comparaison des courbes charge déplacement pour les deux décompositions

Il apparaît donc possible que la sélection d'un ou de l'autre mode soit dans ce cas très sensible aux tolérances locales et qu'en fonction de cette tolérance on choisisse un peu arbitrairement un mode ou l'autre. Aussi avons-nous essayé de changer la tolérance dans le cas de la première décomposition.

L'idéal bien sûr serait de disposer d'une méthode permettant de calculer « toutes » les branches. Une solution de compromis qui nous semble abordable est de générer un certain nombre de modèles perturbés avec des défauts réalistes ou à défauts par des techniques de « nodes shaking ». Une telle approche serait rendue d'autant plus abordable pour des coûts d'analyse faibles ce que nous espérons obtenir dans tout les cas pour la méthode mixte. En ce qui concerne le choix de la décomposition il nous semble tant faire ce peut qu'une décomposition utilisant une seule sous-structure par « entité technologique » est un choix à privilégier et que dans tous les cas il serait nécessaire de faire des analyses avec défauts.



**Figure 5.15:** Iterations pour le pas de chargement conduisant au flambage local : nouvelle décomposition



**Figure 5.16:** Iterations pour le pas de chargement conduisant au flambage local : première décomposition

## 4 Bilan

Ce chapitre pose plus de questions qu'il n'offre de certitudes. Cette première implantation sur ordinateur parallèle a montré l'intérêt mais aussi les limites d'un certain nombre de choix fait dans ce travail et pour avancer plus avant il nous semble indispensable d'adapter la construction des opérateurs d'interface au cas de sous-structures de rigidité très différentes et également d'implanter la méthode de continuation. Ces outils en main nous espérons être à même de répondre aux différentes questions que ces premières applications nous ont amené à nous poser.



# Conclusions et Perspectives

Cette thèse est consacrée à la recherche de méthodes fiables et robustes pour la simulation multiéchelle de grandes structures élancées et raidies telles que celle couramment rencontrée en aéronautiques.

Après une étude bibliographique montrant les limites des méthodes multi-échelles dans le cadre de non-linéarité non équitablement répartis le travail s'est concentré sur les stratégies multiéchelles mixtes avec relocalisation non-linéaire. Faisant suite à un premier travail [Cresta *et al.*, 2007; Cresta, 2008] ayant posé les bases de la méthode dans le cadre de problèmes globalement stables, nos travaux ont porté sur :

- l'extension de la méthode pour des problèmes exhibant des instabilités globales ;
- l'étude détaillée du choix des paramètres caractéristiques de la méthode (directions de recherche et approximation à faible coût, critères d'arrêts locaux et globaux ...) en vue de l'optimisation de son efficacité et de sa robustesse ;
- la parallélisation de la méthode et l'étude de son extensibilité numérique sur une machine parallèle et l'étude d'aspects pratiques liés à la communication et à la mémoire disponible par processeur ;
- la mise en œuvre sur des exemples de grandes tailles inspirés de modèles industriels.

Les résultats obtenus montrent la robustesse et l'efficacité de la méthode de relocalisation non-linéaire mixte, qui, dans le cas de structures répétitives permet d'utiliser des pas de chargement très grands sans difficultés particulières. Cette propriété permet de diminuer parfois de façon très importante le nombre de problèmes globaux à résoudre, problèmes les plus coûteux dans les méthodes de décomposition de domaine avec un grand nombre de domaines. Dans tous les exemples traités de ce type, la méthode de relocalisation non-linéaire mixte permet de déterminer une position d'équilibre correspondant à la charge totale en un seul pas de chargement.

Ceci pose une question encore non étudiée, comment maîtriser et optimiser cet algorithme de façon à ne pas rater de bifurcation correspondant à la solution d'énergie minimale la plus proche de zéro ?. Plusieurs directions nous semblent pouvoir être explorées, la méthode asymptotique numérique tout d'abord. Plus généralement un autre aspect qui nous semble porteur est d'exploiter ce potentiel des méthodes de relocalisation dans le cadre des approches multi-échelles en temps (méthode pararéel [Lions *et al.*, 2001], méthode PGD-LaTIn [Ladevèze *et al.*, 2010; Ladevèze et Chamoïn, 2011] ..) puisque finalement la méthode permet d'estimer de façon précise la

solution temporelle sur une grille temporelle « arbitrairement » grossière.

Si on le souhaite, le suivi détaillé des courbes d'équilibre en cas de *snap-back* et *snap-through* a été rendu possible par l'implémentation d'une méthode de continuation dont l'intérêt est de réduire le problème à résoudre aux seuls degrés de liberté d'interface. Ces méthodes mènent cependant de façon intrinsèque à une sévère réduction des pas de charge conduisant à un comportement équivalent des différentes versions de l'algorithme dans les zones de *snap-back* et *snap-trough*.

La mise en œuvre de ces méthodes sur architecture parallèle est une étape indispensable, mais lourde. Nous n'avons pas encore implanté sur ordinateur parallèle la technique de continuation, mais avons pu réaliser des études de *speed-up* et d'extensibilité. La parallélisation du problème d'interface est effectuée à l'aide d'un préconditionneur BDDC et d'un solveur GMRES adapté aux problèmes non symétriques, le caractère non symétrique provenant de la formulation corotationnelle utilisée. Des cas d'application plus réalistes inspirées de structures industrielles pu commencer à être analysés. Dans les cas où des sous-structures de rigidité très différentes sont à utiliser et il nous semble que ces cas sont nombreux pour des structures industrielles complexes les résultats obtenus ne montre pas de différence entre les deux méthodes de relocalisation primale et mixtes. Il ne nous semble pourtant que cette dernière présente et de loin le potentiel le plus intéressant et nous allons travailler maintenant sur la piste privilégiée lors du chapitre 5 : l'adaptation des opérateurs d'interface à ce type de structure.

Outre les perspectives déjà signalées, une piste intéressante est la définition d'un problème macroscopique d'interface non-linéaire et également l'application de méthodes de réduction modales au niveau des problèmes de sous-structure. L'extension aux modèles de matériaux non-linéaire et plus particulièrement de modèle de plasticité et de rupture au niveau des peaux et des connecteurs nous semble un aspect pratique très important conduisant à des non-linéarités localisées impactant fortement la réponse globale demandant ici encore une optimisation voir une revisite des algorithmes proposés.

Maitriser le calcul de structures complexes sur calculateur parallèle dans le cas d'instabilités avec la possibilité de solutions multiples reste un défi qui nous semble d'importance. C'est bien sûr en traitant un certain nombre de cas de référence de plus en plus complexes que la méthode pourra arriver à la maturité requise pour répondre aux besoins industriels. Ce n'est qu'avec cet outil que nous pourrons envisager de fournir une enveloppe de réponse crédible dans le cas de ces structures avec des possibilités de solutions multiples, de *modes jumping* ...

# Annexe A

## Construction d'une préconditionneur de type BDDC

Pour résoudre de façon parallèle le problème global, on a choisi d'implémenter une méthode de décomposition de domaine primale avec un preconditionneur de type BDDC. Ici on présente sa construction, pour le cas linéaire.

### 1 La méthode BDDC

L'opérateur de la méthode BDDC est le même pour les deux approches : primale 3.12 et mixte 3.29.

$$\mathcal{S}_T = \sum A^s (K_{bb}^s - K_{bi}^s K_{ii}^{s-1} K_{ib}^s) A^{sT} \quad (\text{A.1})$$

Le résidu du problème global est :

$$\underline{r} = \mathcal{S}_T \underline{x}_0 - \underline{R} \quad (\text{A.2})$$

où  $\underline{x}_0$  est l'initialisation de la solution du système (vecteur des déplacements),  $\underline{R}$  est le résidu condensé aux interfaces, pour les deux méthodes : primal 3.13 et mixte 3.30.

Avant de présenter le preconditionneur, et est nécessaire de définir les noeuds coins. Les noeuds coins, font partie des noeuds appartenant à plusieurs interfaces (multiplicité  $> 1$ ), ils sont choisis de façon à bloquer les modes rigides des sous-structures. Dans notre cas, on choisit 2 noeuds par interface, les plus distants l'un de l'autre.

Le preconditionneur  $\tilde{S}^{-1}$  est définie comme :

$$\tilde{S}^{-1} \underline{r} = AD_P(\Psi \underline{u}_c + \underline{z}) \quad (\text{A.3})$$

où

$$\Psi^T S \Psi \underline{u}_c = \Psi^T D_P A \underline{r} \quad (\text{A.4})$$

$$S \underline{z} + C^T \mu = D_P^T A \underline{r} \quad (\text{A.5})$$

$$C \underline{z} = \underline{0} \quad (\text{A.6})$$

où  $A$  est l'opérateur d'assemblage (qui relie les ddl globaux aux ddl locaux),  $D_P$  est la diagonale de pondération qui est constituée par les diagonales de pondération de chaque sous-structure  $D_P^s$ ,

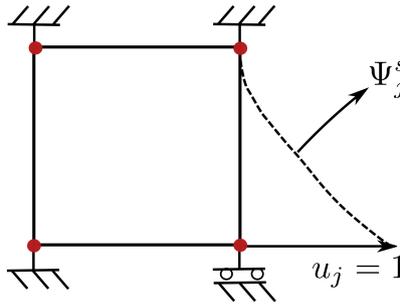
$$D_P = \begin{bmatrix} D_P^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & D_P^n \end{bmatrix}$$

Chaque  $D_P^s$  est une matrice diagonale, où chaque valeur de sa diagonale est égale à la multiplicité<sup>-1</sup> du ddl correspondant.

L'opérateur  $\Psi$  dans (A.3), correspond à l'assemblage des différents  $\Psi^s$ .  $\Psi^s$  est obtenu on résolvant, par sous-structure, le système :

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^s & K_{ir}^s & 0 \\ K_{ri}^s & K_{rr}^s & 0 \\ 0 & 0 & I_{cc}^s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i^s \\ \Psi_j^s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{ic}^s \\ -K_{rc}^s \\ I_{cc}^s \end{bmatrix}$$

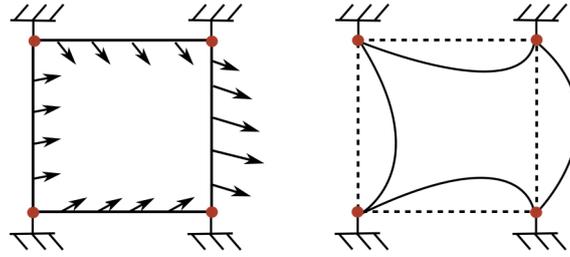
où  $i$  représente les noeuds internes de chaque sous-structure,  $c$  les noeuds coin,  $r$  le reste des noeuds d'interface et  $I_{cc}^s$  est une matrice identité de taille  $c$ .  $\Psi^s$  est la succession des  $\Psi_j^s$ , que représente la réponse de chaque sous-structure quand tous les degrés de liberté coin sont encastres sauf un,  $j$ , qui est excité avec une force ou une rotation égale à 1, FIG. A.1.



**Figure A.1:** Représentation graphique de l'opérateur  $\Psi_j^s$

$\underline{u}_c$  dans (A.3) est le déplacement des noeuds coin, obtenu à partir de (A.4).  $\underline{z}$  dans (A.3) est le déplacement du reste des noeuds d'interface, obtenu à partir de (A.5).  $\underline{z}$  représente le déplacement des noeuds d'interface en prenant comme chargement le résidu assemblé sur la sous-structure et avec les noeuds coins encastres, FIG. A.2.

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^s & K_{ir}^s & 0 \\ K_{ri}^s & K_{rr}^s & 0 \\ 0 & 0 & I_{cc}^s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i^s \\ z^s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{A}^s r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$



**Figure A.2:** Représentation graphique de  $z$

Finalement,  $C$  est un opérateur qui permet d'extraire le déplacement de noeud coin à partir du déplacement des noeuds d'interface :

$$C^s = A_c^{sT} Q_P^T A^s \quad (\text{A.8})$$

$$\underline{u}_c^s = A_c^s \underline{u}_c \quad (\text{A.9})$$

$$\underline{u}_c = Q_P^T \underline{u} \quad (\text{A.10})$$

$$\underline{u}_c = C \underline{u}, \quad \underline{u}_c^s = C^s \underline{u} \quad (\text{A.11})$$

où  $Q_P^T$  permet d'extraire les déplacements de nœuds coins à partir du vecteur de déplacement de tous les nœuds de la structure.

## 2 Demarche pour la construction du préconditionneur

1. La première étape consiste à déterminer les nœuds coins et à calculer  $D_P^s$ ,  $A^s$ ,  $Q_P$ ,  $C^s$  et  $\tilde{A}^s$  définis comme :

$$\tilde{A}^s = D_P^s A^s \quad (\text{A.12})$$

Tous ces opérateurs sont calculés une seule fois, dans la première initialisation du BDDC.

2. On calcule  $\Psi^s$  et  $z$  à partir de (A.7) par sous-structure. Ils sont réactualisés après les itérations locales, 1 fois par résolution du problème global.

3. Assemblage de l'opérateur  $\Psi^T S \Psi$ . Le premier pas consiste à calculer  $\Psi^{sT} S^s \Psi^s$  par sous-structure, pour finalement les assembler et construire  $\Psi^T S \Psi$ . Cet opérateur est construit au début de la résolution du problème global (1 seule fois par problème global). L'opérateur  $\Psi^T S \Psi$  doit être stocké dans tous les processeurs. La matrice utilisée pour stocker cet opérateur est de type « SPARSE ».
4. À chaque itération du GMRES on connaît  $\underline{r}$ , avec lequel l'on construit, d'abord  $\tilde{\underline{r}} = \tilde{A}^T \underline{r}$  et  $\Psi^{sT} \tilde{\underline{r}}^s$ . Après, il faut assembler les  $\Psi^{sT} \tilde{\underline{r}}^s$  pour obtenir  $\Psi^T \tilde{\underline{r}}$  (on utilise la fonction « MPI\_Allgather »). On résoud (A.4) pour obtenir  $\underline{u}_c$ . Finalement, il faut construire  $\tilde{S}^{-1} \underline{r}$  à partir de (A.3).

On présente dans l'annexe B la résolution par un solveur de Krylov (solveur de type GMRES) du problème global préconditionné.

# Annexe B

## Résolution du problème global préconditionné avec GMRES

### 1 Initialisation

#### 1.1 Initialisation des opérateurs de la BDDC

Une description complète des étapes pour calculer le preconditionneur de la méthode BDDC est présentée dans l'annexe A.

#### 1.2 Initialisation du résidu

Le résidu du problème est défini comme :

$$\underline{r} = \underline{R} - \mathcal{S}\underline{x}_0 = \sum_s (\underline{R}^s - \mathcal{S}^s \underline{x}_0^s) \quad (\text{B.1})$$

où  $\underline{R}$  représente le résidu linéarisé condensé aux interfaces, pour la méthode primale 3.13 et mixte 3.30.  $\mathcal{S}$  est l'opérateur global linéarisé pour la méthode primale 3.12 et mixte 3.29.

La procédure utilisée pour le calcul optimal (en parallèle et avec multiplication matrice/vecteur) de  $\underline{R}$  et  $\mathcal{S}\underline{x}_0$  a été présentée dans le CHAP. 4 section 2.3.1.

### 2 Algorithme GMRES

Le solveur GMRES (Generalized Minimal Residual) [Saad et Schultz, 1986] est une méthode itérative pour déterminer une solution numérique d'un système non symétrique d'équations linéaires. La méthode donne une approximation de la solution par un vecteur appartenant à un espace de Krylov avec un résidu minimal. Pour déterminer ce vecteur, on utilise la méthode itérative d'Arnoldi.

Pour résoudre le nouveau système préconditionné (BDDC) un solveur de type GMRES a été utilisé. Cette algorithme GMRES est présenté dans l'ALG. 9. La première partie, initialisation, a été détaillée au paragraphe 1.

Le produit scalaire peut être parallélisé. Dans chaque processeur est calculé le produit scalaire correspondant aux noeuds qui lui appartient ( $a^s = \underline{w}^{sT} \underline{v}^s$ ). Pour les assembler, la fonction « MPI\_Allreduce(SUM,  $a^s$ ) » de Open MPI, permet d'obtenir la somme de toutes les produits scalaires locaux,  $\sum_s a^s$ . Il faut tenir compte des multiplicités des différentes interfaces.

Le calcul des vecteurs préconditionnés ( $\tilde{S}^{-1} \underline{r}_0$  et  $\tilde{S}^{-1}(S \underline{v}_i)$ ) est fait comme décrit dans l'annexe A, en permettant la parallélisation de plusieurs étapes.

---

**Algorithme 9** : Résolution du problème global (BDD) avec un solveur GMRES

---

```

- Calculer :  $\underline{r}_0 = \tilde{\mathbf{S}}^{-1}(\underline{R} - \mathbf{S}\underline{u}_0)$ ,  $\beta = \|\underline{r}_0\|_2$  et  $\underline{v}_0 = \underline{r}_0/\beta$ ;
- Définition de la matrice :  $\overline{H}_m = \{h_{ij}\}_{1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq m}$ , faire  $\overline{H}_m = 0$  ;
et  $V_m = \{v_i\}_{1 \leq i \leq m+1}$ , faire  $V_m = 0$  ;
pour  $i = 1, \dots, m$  faire
|   -  $\underline{w}_i = \tilde{\mathbf{S}}^{-1}(\mathbf{S}\underline{v}_i)$ ;
|   pour  $j = 1, \dots, i$  faire
|   |   -  $h_{ij} = \underline{w}_i^T \underline{v}_j$ ;
|   |   -  $\underline{w}_i = \underline{w}_i - h_{ij} \underline{v}_j$ ;
|   fin
|   -  $h_{i+1,1} = \|\underline{w}_i\|_2$ ;
|   si ( $h_{i+1,i} \approx 0$ ) alors
|   |   m = j;
|   |   break
|   fin
|   -  $\underline{v}_i = \frac{\underline{w}_i}{h_{i+1,i}}$ 
fin
- Trouver  $y_m$  qui minimise  $\|\beta e_1 - \overline{H}_m y_m\|_2$  et  $\underline{u}_m = \underline{u}_0 + V_m y_m$ 

```

---

# Bibliographie

- ABBOTT, J. P. (1978). An efficient algorithm for the determination of certain bifurcation points. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 4(1):19 – 27.
- ADINI, A. et CLOUGH, R. W. (1961). Analysis of plate bending by the finite element method. Rapport technique Grant G7337, NSF Report.
- AHMAD, S., IRONS, B. M. et ZIENKIEWICZ, O. C. (1970). Analysis of thick and thin shell structures by curved elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2:419–451.
- ALFANO, G. et CRISFIELD, M. A. (2003). Solution strategies for the delamination analysis based on a combination of local-control arc-length and line searches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:999–1048.
- ALLMAN, D. (1984). A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *Computers and Structures*, 19(1-2):1 – 8. Special Memorial Issue.
- AMDAHL, G. M. (1988). Limits of expectation. *International Journal of High Performance Computing Applications*, 2:88 – 94.
- AMINI, A. M., DUREISSEIX, D., CARTRAUD, P. et BUANNIC, N. (2009). A domain decomposition method for problems with structural heterogeneities on the interface : Application to a passenger ship. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(41-44):3452 – 3463.
- ARBOCZ, J., POTIER-FERRY, M., SINGER, J. et TVERGAARD, V. (1987). *Buckling and Post-Buckling, Lecture Notes in Physics*, volume 288 de *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag.
- AURIEL, G., BOUBAL, G. et LADEVÈZE, P. (1982). Sur une méthode de calcul des effets locaux. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, pages 279–288.
- AZRAR, L., BENAMAR, R. et POTIER-FERRY, M. (1999). An asymptotic-numerical method for large-amplitude free vibrations of thin elastic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 220(4):695–727.

- AZRAR, L., COCHELIN, B., DAMIL, N. et POTIER-FERRY, M. (1991). An asymptotic numerical method to compute bifurcating branches. In LADEVÈZE, P. et ZIENKIEWICZ, O., éditeurs : *New Advances in Computational Structural Mechanics*, pages 117–131. Elsevier.
- AZRAR, L., COCHELIN, B., DAMIL, N. et POTIER-FERRY, M. (1993). An asymptotic numerical method to compute the post-buckling behavior of elastic plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:1251–1277.
- BARBOTEU, M., ALART, P. et VIDRASCU, M. (2001). A domain decomposition strategy for nonclassical frictional multi-contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(37-38):4785–4803.
- BASAR, Y. et KRÄTZIG, W. (1989). A consistent shell theory for finite deformations. *Acta Mechanica*, 76(1):73–87.
- BATOZ, J.-L. et DHATT, G. (1990a). *Modélisation des structures par éléments finis*, volume 2. Poutres et Plaques. Hermès, Paris.
- BATOZ, J.-L. et DHATT, G. (1990b). *Modélisation des structures par éléments finis*, volume 3 : Coques. Hermès, Paris.
- BAZĂNT, Z. P. et CEDOLIN, L. (1991). *Stability of Structures : Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. Oxford University Press Inc., New York.
- BEIRÃO DA VEIGA, L., CHINOSI, C., LOVADINA, C. et PAVARINO, L. F. (2010). Robust bddc preconditioners for reissner-mindlin plate bending problems and mitc elements. *SIAM J. Numerical Analysis*, 47(6):4214–4238.
- BELESIS, S. et LABEAS, G. (2010). Development of an efficient engineering methodology for non-linear damage and post-buckling analysis of large-scale structures. *International Journal of Structural Integrity*, 1(2):126–139.
- BELYTSCHKO, T. et HSIEH, B. J. (1973). Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7(3):255–271.
- BELYTSCHKO, T., LIU, W. K. et MORAN, B. (2000). *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Wiley.
- BEN DHIA, H. (1998). Multiscale mechanical problems : the arlequin method. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 326(12):899–904.
- BEN DHIA, H. et RATEAU, G. (2001). Analyse mathématique de la méthode Arlequin mixte. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 332(7):649 – 654.

- BENSSOUSSAN, A., LIONS, J. et PAPANICOLAOU, G. (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- BERGAN, P. G. et FELIPPA, C. A. (1985). A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50(1):25 – 69.
- BIOT, M. A. (1965). *The mechanics of incremental deformations*. McGraw-Hill, New York.
- BJØRSTAD, P. E. et WIDLUND, O. B. (1986). Iterative methods for the solution of elliptic problems on regions partitioned into substructures. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 23(6):1097–1120.
- BLANZÉ, C., CHAMPANEY, L., COGNARD, J.-Y. et LADEVÈZE, P. (1996). A modular approach for structures assembly computations : applications to contact problems. *Engineering computations*, 13(3).
- BOLLE, L. (1947). Contribution au problème linéaire de flexion d'une plaque élastique. *Bulletin Technique de la Suisse Romande*, 73:281–285, 293–298.
- BOUCARD, P. A. et CHAMPANEY, L. (2003). A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(9):1259–1281.
- BOUCARD, P.-A. et LADEVÈZE, P. (1997). Post-buckling analysis using a non-incremental method. In *15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics*, volume 3, pages 449–454.
- BOUCARD, P. A., LADEVÈZE, P., POSS, M. et ROUGÈE, P. (1997). A nonincremental approach for large displacement problems. *Computers and Structures*, 64(1-4): 499–508. Computational Structures Technology.
- BOUTYOUR, E. H. (1994). *Méthode asymptotique-numérique pour le calcul des bifurcations : application aux structures élastiques*. Thèse de doctorat, Université de Metz.
- BOUTYOUR, E. H., ZAHROUNI, H., POTIER-FERRY, M. et BOUDI, M. (2004). Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and Padé approximants. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:1987–2012.
- BRANK, B., KORELC, J. et IBRAHIMBEGOVIĆ, A. (2002). Nonlinear shell problem formulation accounting for through-the-thickness stretching and its finite element implementation. *Computers and Structures*, 80(9-10):699 – 717.

- BREBBIA, C. et CONNOR, J. (1967). Stiffness matrix for shallow rectangular shell element. *Proc. American Society of Civil Engineers, Journal of the Engineering Mechanics Division*, 93(EM5):43–65.
- BREZZI, F. et MARINI, L. (1992). A three-field domain decomposition method. In QUARTERONI, A., PERIAUX, J., KUZNETSOV, Y. A. et WIDLUND, O. B., éditeurs : *The Sixth International Conference on Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, pages 27–34.
- BREZZI, F. et MARINI, L. D. (2000a). Error estimates for the three-field formulation with bubble stabilization. *Mathematics of computation*, 70(235):911–934.
- BREZZI, F. et MARINI, L. D. (2000b). Implementation of the three-field formulation. *Advances in the theory of computational mathematics*, 3:59–70.
- BREZZI, F. et MARINI, L. D. (2005). The three-field formulation for elasticity problems. *GAMM Mitteilungen*, 28:124–153.
- BREZZI, F. et Marini, L. (1994). Macro hybrid elements and domain decomposition methods. In KUZNETSOVA, Y. A., PÉRIAUX, J., QUARTERONI, A. et WIDLUND, O. B., éditeurs : *of the 6th International Symposium on Domain Decomposition Methods for P.D.E.*, pages 27–34.
- BROYDEN, C. G. (1970). The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 1. general considerations. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 6(1): 76–90.
- BRYAN, G. H. (1891). On the buckling of simply supported rectangular plates uniformly compressed in one direction. *Proc. London Math. Soc.*, 22:54.
- BUSSY, P., ROUGÉE, P. et VAUCHEZ, P. (1990). The large time increment method for numerical simulation of metal forming processes. In *Numerical Methods in Engineering*, pages 102–109.
- CHAMPANEY, L., COGNARD, J. Y. et LADEVÈZE, P. (1999). Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions. *Computers and Structures*, 73(1-5):249–266.
- CHRISTMAN, T., NEEDLEMAN, A. et SURESH, S. (1989). An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites. *Acta Metallurgica*, 37(11):3029 – 3050.
- CLOUGH, R. W. et JOHNSON, C. P. (1968). A finite element approximation for the analysis of thin shells. *International Journal of Solids and Structures*, 4(1):43–60.
- CLOUGH, R. W. et TOCHER, J. L. (1965). Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending. In *Proc. Matrix Methods in Structural Analysis, Oct. 26-28 (1965)*, Ohio. Wright-Patterson Air Force Base.

- COCHELIN, B. (1994). A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers and Structures*, 53:1181–1192.
- COCHELIN, B., DAMIL, N. et POTIER-FERRY, M. (1994). Asymptotic-numerical method and Padé approximants for nonlinear elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 34:1187–1213.
- COCHELIN, B., DAMIL, N. et POTIER-FERRY, M. (2007). *Méthode asymptotique numérique*. Hermès - Lavoisier, 1 édition.
- CORNUAULT, C. (1998). Modélisation mécanique et optimisation des structures d'avions. *Nouvelle revue d'aéronautique et d'astronautique*, 1:35–53.
- COX, H. L. (1934). The buckling of thin plates in compression. *Aeron. Res. Comm., R. and M.*, 1554.
- CRESTA, P. (2008). *Décomposition de domaine et stratégies de relocalisation non-linéaire pour la simulation de grandes structures raidies avec flambage local*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- CRESTA, P., ALLIX, O., REY, C. et GUINARD, S. (2007). Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : Application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:1436–1446.
- CRISFIELD, M. A. (1981). A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snap-through'. *Computers and Structures*, 13:55–62.
- CRISFIELD, M. A. (1983). An arc-length method including line searches and accelerations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19:1269–1289.
- CRISFIELD, M. A. (1988). Non-linear finite-element analysis of solids and structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66.
- CRISFIELD, M. A. (1990). A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 81(2):131–150.
- CRISFIELD, M. A., JELENIC, G., MI, Y., ZHONG, H. G. et FAN, Z. (1997). Some aspects of the non-linear finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 27(1):19–40.
- CRISFIELD, M. A. et MOITA, G. F. (1996). A unified co-rotational framework for solids, shells and beams. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22):2969–2992.

- da VINCI, L. (1974). *The Madrid Codices*, volume Codex Madrid I. McGraw-Hill, Switzerland. Original Spanish title : *Tratado de Estatica y Mechanica en Italiano* (1493).
- DAMIL, N. et POTIER-FERRY, M. (1990). A new method to compute perturbed bifurcations : Application to the buckling of imperfect elastic structures. *International Journal of Engineering Science*, 28(9):943–957.
- DE ROECK, Y.-H., LE TALLEC, P. et VIDRASCU, M. (1992). A domain-decomposed solver for nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99:187–207.
- DEVRIES, F., DUMONTET, H., DUVAUT, G. et LENE, F. (1989). Homogenization and damage for composite structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 27(2):285–298.
- DIEKMANN, R., MONIEN, B. et PREIS, R. (1997). Load balancing strategies for distributed memory machines. In SATZ, H., KARSCH, F. et MONIEN, B., éditeurs : *Multi-Scale Phenomena and Their Simulation*, pages 255–266. World Scientific.
- DODDS, j. R. H. et LOPEZ, L. A. (1980). Substructuring in linear and non linear analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15:583–597.
- DOHRMANN, C. R. (2003). A preconditioner for substructuring based on constrained energy minimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(1):246–258.
- DOHRMANN, C. R. (2006). Preconditioning of saddle point systems by substructuring and a penalty approach. In WIDLUND, O. B. et KEYES, D., éditeurs : *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVI*, LNCSE 55, pages 53–64. Springer.
- DUMONTET, H. (1986). Study of a boundary layer problem in elastic composite materials. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 20(2):265–286.
- ESHELBY, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 241(1226):376–396.
- EULER, L. (1744). *Methodus inveniendi lineas curvas : maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Marcum-Michaelem Bousquet, Lausanne-Genève.
- FARHAT, C. (1992). A saddle-point principle domain decomposition method for the solution of solid mechanics problems. In KEYES, D. E., CHAN, T. F., MEURANT, G., SCROGGS, J. S. et VOIGT, R. G., éditeurs : *Domain decomposition methods for partial differential equations*, pages 271–292. SIAM.

- FARHAT, C., CHEN, P.-S., MANDEL, J. et ROUX, F. X. (1998). The two-level feti method part ii : Extension to shell problems, parallel implementation and performance results. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155(1-2):153 – 179.
- FARHAT, C., LESOINNE, M., LE TALLEC, P., PIERSON, K. et RIXEN, D. (2001). FETI-DP : A dual-primal unified FETI method - Part I : A faster alternative to the two-level FETI method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:1523–1544.
- FARHAT, C., LESOINNE, M. et PIERSON, K. (2000a). A scalable dual-primal domain decomposition method. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 7:687–714.
- FARHAT, C. et MANDEL, J. (1998). The two-level FETI method for static and dynamic plate problems Part I : An optimal iterative solver for biharmonic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155(1-2):129–151.
- FARHAT, C., PIERSON, K. et LESOINNE, M. (1996). A simple an unified framework for accelerating the convergence of iterative substructuring methods with lagrange multipliers : Applications to the design of new FETI coarse problems. Rapport technique CU-CAS-96-26, Center for Aerospace Structures, CU.
- FARHAT, C., PIERSON, K. et LESOINNE, M. (2000b). The second generation feti methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184(2-4):333 – 374.
- FARHAT, C. et ROUX, F.-X. (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:1205–1227.
- FARHAT, C. et ROUX, F. X. (1992). An unconventional domain decomposition method for an efficient parallel solution of large-scale finite element systems. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, 13(1):370–396.
- FARHAT, C. et ROUX, F. X. (1994). Implicit parallel processing in structural mechanics. *Computational Mechanics Advances*, 2:1–124.
- FARHAT, C. et SIMON, H. D. (1993). Top/domdec - a software tool for mesh partitioning and parallel processing. Rapport technique, NASA Ames.
- FEDORENKO, R. P. (1964). The speed of convergence of one iterative process. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4(3):227 – 235.
- FELIPPA, C. (2000). A systematic approach to the element-independent corotational dynamics of finite elements. Rapport technique CU-CAS-00-03, Department of

- aerospace engineering sciences and center for aerospace structures, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0429.
- FELIPPA, C. A. et HAUGEN, B. (2005). A unified formulation of small-strain corotational finite elements : I. theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(21-24):2285–2335.
- FEYEL, F. (2003). A multilevel finite element method (fe2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30):3233 – 3244. Multiscale Computational Mechanics for Materials and Structures.
- FEYEL, F. et CHABOCHE, J.-L. (2000). FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3-4):309 – 330.
- FISH, J., SHEK, K., PANDHEERADI, M. et SHEPHARD, M. S. (1997). Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization : Theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148(1-2):53 – 73.
- FÖPPL, A. (1907). *Vorlesungen über technische mechanik*, volume 5. Teubner, Leipzig.
- FOREST, S. et SAB, K. (1998). Cosserat overall modeling of heterogeneous materials. *Mechanics Research Communications*, 25(4):449 – 454.
- FORTIN, M. et GLOWINSKI, R. (1983). Chapter 1 augmented lagrangian methods in quadratic programming. In FORTIN, M. et GLOWINSKI, R., éditeurs : *Augmented Lagrangian Methods : Applications to the Numerical Solution of Boundary Value Problems*, volume 15 de *Studies in Mathematics and Its Applications*, pages 1–46. Elsevier.
- FRIEDRICHS, K. O. et STOKER, J. J. (1941). The non-linear boundary value problem of the buckled plate. *American J. of Math.*, 63:839–888.
- GENDRE, L., ALLIX, O. et GOSSELET, P. (2011). A two-scale approximation of the schur complement and its use for non-intrusive coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- GHOSH, S., LEE, K. et MOORTHY, S. (1995). Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and Voronoi cell finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 32(1):27 – 62.
- GLOWINSKI, R. et LE TALLEC, P. (1989). *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting in Nonlinear Mechanics*, volume 9. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia.

- GLOWINSKI, R. et LE TALLEC, P. (1990). Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping schwartz alternating method. *In Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 224–231. SIAM, Philadelphia, PA.
- GOSSELET, P., CHIARUTTINI, V., REY, C. et FEYEL, F. (2004). A monolithic strategy based on an hybrid domain decomposition method for multiphysics problems. application to poroelasticity. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 13(5/7):523–534.
- GOSSELET, P. et REY, C. (2002). On a selective reuse of krylov subspaces in newton-krylov approaches for nonlinear elasticity. *In 14th conference on Domain decomposition methods*, pages 419–426.
- GOSSELET, P. et REY, C. (2006). Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of computational methods in engineering*, 13(4): 515–572.
- GUIDAULT, P.-A., ALLIX, O., CHAMPANEY, L. et CORNUAULT, C. (2008). A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5):381 – 399.
- HAGEN, B. (1994). *Buckling and stability problems for thin shell structures using high performance finite elements*. Thèse de doctorat, Department of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado, Boulder, CO.
- HASHIN, Z. (1962). The elastic moduli of heterogeneous materials. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 29:143–150.
- HELLWEG, H. B. et CRISFIELD, M. A. (1998). A new arc-length method for handling sharp snap-backs. *Computers and Structures*, 66(5):704–709.
- HENCKY, H. (1947). Über die berücksichtigung der schubverzerrungen in ebenen platten. *Ingenieur Archiv*, 16(72-76).
- HERRMANN, L. (1967). Finite element bending analysis for plates. *Proc. American Society of Civil Engineers, Journal of the Engineering Mechanics Division*, 93(EM5):13–26.
- HILL, R. (1965). A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4):213 – 222.
- HINOJOSA, J., ALLIX, O., GUIDAULT, P. A. et CRESTA, P. (2010). Primal and mixed nonlinear domain decomposition methods for the post-buckling analysis of large structures. *In Proceedings of the IV European Conference on Computational Mechanics : Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*, Paris, France.

- HINOJOSA, J., ALLIX, O., GUIDAULT, P. A. et CRESTA, P. (2011a). Méthodes de décomposition de domaine primale et mixte pour la simulation de grandes structures avec instabilités. *In Actes du 10e Colloque National en Calcul des Structures*, Giens.
- HINOJOSA, J., ALLIX, O., GUIDAULT, P. A. et CRESTA, P. (2011b). Newton-krylov-schur method with nonlinear localisation : Parallel implementation for post-buckling analysis of large structures. *In IVÁNYI, P. et TOPPING, B., éditeurs : Proceedings of the Second International Conference on Parallel, Distributed, Grid and Cloud Computing for Engineering*, numéro 10, United Kingdom. Civil-Comp Press.
- HINOJOSA, J., ALLIX, O., GUIDAULT, P. A. et CRESTA, P. (2011c). On the robustness of a mixed domain decomposition method with nonlinear relocalization for handling geometrical instabilities. En révision.
- HIRAI, I., WANG, B. et PILKEY, W. (1984). An efficient zooming method for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:1671–1683.
- HORRIGMOE, G. et BERGAN, P. G. (1976). Incremental variational principles and finite element models for nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 7(2):201 – 217.
- HORRIGMOE, G. et BERGAN, P. G. (1978). Nonlinear analysis of free-form shells by flat finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 16(1):11–35.
- HUGHES, T. J. R. (1995). Multiscale phenomena : Green’s functions, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1-4):387 – 401.
- HUTCHINSON, J. W. et KOITER, W. T. (1970). Postbuckling theory. *Applied Mechanics Reviews*, 23(12):1353–1366.
- IBRAHIMBEGOVIC, A. (1994). Stress resultant geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations—part i. a consistent formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 118(3-4):265–284.
- JUSTINO, M. R., PARK, K. C. et FELIPPA, C. A. (1997). An algebraically partitioned FETI method for parallel structural analysis : Performance evaluation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:2739–2758.
- KARYPIS, G. et KUMAR, V. (1998). Multilevel algorithms for multi-constraint graph partitioning. Rapport technique, University of Minnesota, Department of Computer Science.

- KEENER, J. et KELLER, H. (1973). Perturbed bifurcation theory. *Archive for rational mechanics and analysis*, 50(3):159–175.
- KERFRIDEN, P., ALLIX, O. et GOSSELET, P. (2009). A three-scale domain decomposition method for the 3d analysis of debonding in laminates. *Computational Mechanics*, 44(3):343 – 362.
- KIRCHHOFF, G. R. (1850). Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen schein. *J. Reine und Angewandte Mathematik*, 40:51–88.
- KLAWON, A. et WIDLUND, O. B. (2001). Dual and primal-dual FETI methods for elliptic problems with discontinuous coefficients in three dimensions. In CHAN, T., KAKO, T., KAWARADA, H. et PIRONNEAU, O., éditeurs : *12th international conference on domain decomposition methods*.
- KLINKEL, S. et WAGNER, W. (1997). A geometrical non-linear brick element based on the eas-method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(24):4529–4545.
- KOITER, W. (1945). *On the stability of Elastic Equilibrium (in Dutch)*. Thèse de doctorat, Wright-Patterson Air Force Base, Hollande.
- KOITER, W. T. (1960). A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. In *Proc. Symp. on Theory of Thin Elastic Shells, Aug. 1959*, pages 12–33, Amsterdam.
- KOITER, W. T. (1963). Elastic stability and post-buckling behavior. In LANGER, R. E., éditeur : *Nonlinear Problems (Proc. on the Symp. conducted by the Mathematical Research Center, 30 April-2 May 1962)*, volume 8, pages 257–275, Madison. Mathematical Research Center, United States Army, The University of Wisconsin, The University of Wisconsin Press.
- KOUZNETSOVA, V., GEERS, M. et BREKELMANS, W. (2002). Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54:1235–1260.
- LADEVÈZE, P. (1985). Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *Comptes-Rendus de l’Académie des Sciences*, 300(2):41–44.
- LADEVÈZE, P. (1999). *Nonlinear computational structural mechanics - New Approaches and Non-incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag, Berlin.
- LADEVÈZE, P. et CHAMOIN, L. (2011). On the verification of model reduction methods based on the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(23-24):2032 – 2047.

- LADEVÈZE, P. et DUREISSEIX, D. (1998). A 2-level and mixed domain decomposition approach for structural analysis. *Contemporary mathematics*, pages 246–253.
- LADEVÈZE, P. et DUREISSEIX, D. (1999). Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 327:1244–1327.
- LADEVÈZE, P. et DUREISSEIX, D. (2000). A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1:18–28.
- LADEVÈZE, P., LOISEAU, O. et DUREISSEIX, D. (2001). A micro/macro approach for parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(1-2):121–138.
- LADEVÈZE, P. et LORONG, P. (1992). Sur une méthode à grand incrément de temps avec décomposition de domaine. premières implémentations sur calculateurs à architectures parallèle. *In StruCome 92*, pages 649–661, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris.
- LADEVÈZE, P. et NOUY, A. (2002). A multiscale computational method with time and space homogeneization. *C. R. Mécanique*, 330:1–7.
- LADEVÈZE, P. et NOUY, A. (2003). On a multiscale computational strategy with time and space homogeneization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3061–3087.
- LADEVÈZE, P., NOUY, A. et LOISEAU, O. (2002). A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(43):4869 – 4891.
- LADEVÈZE, P., PASSIEUX, J.-C. et NÉRON, D. (2010). The LaTIn multiscale computational method and the Proper Generalized Decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21-22):1287 – 1296. Multiscale Models and Mathematical Aspects in Solid and Fluid Mechanics.
- LE TALLEC, P., MANDEL, J. et VIDRASCU, M. (1998). A Neumann-Neumann domain decomposition algorithm for solving plate and shell problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 35:836–867.
- LE TALLEC, P., ROECK, Y. H. D. et VIDRASCU, M. (1991). Domain decomposition methods for large linearly elliptic three-dimensional problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 34(1):93–117.
- LECLERC, H. (2007). Plateforme metil : optimisations et facilités liées à la génération de code. *In Actes du 8e Colloque National en Calcul des Structures*.

- LECLERC, H. (2008). Toward higher performance fem implementations using lazy evaluation and symbolic programming. *In 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*.
- LESOINNE, M. et PIERSON, K. (1999). Feti-dp : An efficient, scalable, and unified dual-primal feti method. *In Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, pages 421–428.
- LEVINSON, M. (1981). A new rectangular beam theory. *Journal of Sound and Vibration*, 74(1):81–87.
- LEVY, M. (1877). Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 30:219–306.
- LEVY, S. (1945). Bending of rectangular plates with large deflections. Rapport technique 737, NACA Report.
- LI, J. et WIDLUND, O. B. (2006). Bddc algorithms for incompressible stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(2):250 – 271.
- LIONS, J.-L., MADAY, Y. et TURINICI, G. (2001). Résolution d’EDP par un schéma en temps “pararéel”. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 332(7):661 – 668.
- LIU, D. C. et NOCEDAL, J. (1989). On the limited memory bfgs method for large scale optimization. *Math. Program.*, 45:503–528.
- LOISEAU, O. (2001). *Une stratégie de calcul multiéchelle pour les structures hétérogènes*. Thèse de doctorat, Thèse de doctorat, ENS de Cachan.
- LOISEAU, O., LADEVÈZE, P. et DUREISSEIX, D. (2002). Sur une stratégie de calcul multiéchelle pour l’analyse des structures composites : discrétisation et performances. *Revue Européenne des Eléments finis*, 11(2):349–362.
- LOTTIAUX, R., GALLARD, P., VALLÉE, G., MORIN, C. et BOISSINOT, B. (2005). Openmosix, openssi and kerrighed : a comparative study. *In CCGRID’05 : Proceedings of the Fifth IEEE International Symposium on Cluster Computing and the Grid*, volume 2, pages 1016–1023, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.
- LOVE, A. E. H. (1888). On the small free vibrations and deformations of elastic shells. *Philosophical Transactions of The Royal Society of London, Series A - Mathematical and Physical Sciences*, (17):491–549.
- MACNEAL, R. (1998). Perspective on finite elements for shell analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 30:175–186.

- MAGOULÈS, F., ROUX, F. X. et SERIES, L. (2006). Algebraic dirichlet-to-neumann mapping for linear elasticity problems with extreme contrasts in the coefficients. *Applied Mathematical Modelling*, 30(8):702 – 713.
- MANDEL, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Communication in Applied Numerical Methods*, 9:233–241.
- MANDEL, J. et BREZINA, M. (1996). Balancing domain decomposition for problems with large jumps in coefficients. *Mathematics of Computation*, 65(216):1387–1401.
- MANDEL, J. et DOHRMANN, C. R. (2003). Convergence of a balancing domain decomposition by constraints and energy minimization. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 10:639–659.
- MANDEL, J., DOHRMANN, C. R. et TEZAUER, R. (2004). An algebraic theory for primal and dual substructuring methods by constraints. *Applied Numerical Mathematics*, 54(2):167 – 193. 6th IMACS.
- MAO, K. et SUN, C. (1991). A refined global-local finite element analysis method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:29–43.
- MARGUERRE, K. (1937). Die mittragende breite der gedrückten platte. *Luftfahrtforschung*, 14(3):121–128.
- MARGUERRE, K. (1938). Über die behandlung von stabilitätsproblemen mit hilfe der energetischen methoda. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 18.
- MATTHIES, H. et STRANG, G. (1979). The solution of nonlinear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(11): 1613–1626.
- MAVRIPLIS, D. J. (2001). Multigrid approaches to non-linear diffusion problems on unstructured meshes. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 8(8):499–512.
- MELLENK, J. M. et BABUSKA, I. (1996). The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):289 – 314.
- MINDLIN, R. D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics - Transactions of The ASME*, 18(1):31–38.
- MOBASHER AMINI, A., DUREISSEIX, D. et CARTRAUD, P. (2009). Multi-scale domain decomposition method for large-scale structural analysis with a zooming technique : Application to plate assembly. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.

- MOËS, N., DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131–150.
- MOORE, G. et SPENCE, A. (1980). The calculation of turning-points of non-linear equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 17(4):567–576.
- MORI, T. et TANAKA, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5):571 – 574.
- NAGHDI, P. (1963). Foundations of elastic shell theory. In SNEDDON, I. N. et HILL, R., éditeurs : *Progress in Solid Mechanics*, volume 4, Amsterdam. North-Holland.
- NEWTON, I. (1671). *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*. publié en 1736.
- NGUYEN, Q. S. (1995). Stabilité des structures élastiques. In GHIDAGLIA, J. et LASCAUX, P., éditeurs : *Mathématiques and Applications 18*. Springer-Verlag, 4th édition.
- NOUY, A. (2003). *Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace pour le calcul de structures fortement hétérogènes*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- NOUY, A. et LADEVÈZE, P. (2004). Multiscale computational strategy with time and space homogenization : a radial-type approximation technique for solving microproblems. *Int Jal for Multiscale Computational Engineering.*, 2(4):557–574.
- NYGARD, M. et BERGAN, P. G. (1989). Advances in treating large rotations for nonlinear problems. In NOOR, A. K. et ODEN, J. T., éditeurs : *State of the art surveys on computational mechanics (A90-47176 21-64)*, pages 305–332, New York. ASME.
- ODEN, J. T., VEMAGANTI, K. et MOÏS, N. (1999). Hierarchical modeling of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1-4):3 – 25.
- ODEN, J. T. et ZOHDI, T. I. (1997). Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous elastic structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148(3-4):367 – 391.
- OGDEN, R. W. (1984). *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover Publications.
- PADOVAN, J. et ARECHAGA, T. (1982). Formal convergence characteristics of elliptically constrained incremental Newton-Raphson algorithms. *International Journal of Engineering Science*, 20(10):1077–1097.

- PARK, K. C., JUSTINO, M. R. et FELIPPA, C. A. (1997). An algebraically partitioned FETI method for parallel structural analysis : Algorithm description. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:2717–2737.
- PAVARINO, L. F. (2007). Bddc and feti-dp preconditioners for spectral element discretizations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8): 1380 – 1388. Domain Decomposition Methods : recent advances and new challenges in engineering.
- PAZ, R. et STORTI, M. (2005). An interface strip preconditioner for domain decomposition methods : application to hydrology. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(13):1873–1894.
- PEBREL, J., REY, C. et GOSSELET, P. (2008). A nonlinear dual domain decomposition method : application to structural problems with damage. *International Journal of Multiscale Computational Engineering*, 6(3):251–262.
- PIETRASZKIEWICZ, W. (1977). Introduction to the nonlinear theory of shells. *Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik*, 10:1–159. Ruhr-Universität, Bochum.
- PIETRASZKIEWICZ, W. (1984). Lagrangian description and incremental formulation in the non-linear theory of thin shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 19(2):115–140.
- PRZEMIENIECKI, J. S. (1963). Matrix structural analysis of substructures. *American Institute of Aeronautics and Astrophysics Journal*, 1:138–147.
- RAMM, E. (1981a). The Riks/Wempner approach - an extension of the displacement control method in non-linear analysis. In HINTON, E., éditeur : *Non-linear Computational Mechanics*, pages 63–86, Pineridge. Swansea.
- RAMM, E. (1981b). Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In WUNDERLISH, W., STEIN, E. et BATHE, K., éditeurs : *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, pages 63–89, Berlin. Springer.
- RANKIN, C. C. et BROGAN, F. A. (1986). An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations. *Journal of pressure vessel technology*, 108(2):165–174.
- REISSNER, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics - Transactions of The ASME*, 12(2):A69–A77.
- REISSNER, E. (1950). On a variational theorem in elasticity. *Journal of Mathematics and Physics*, 29:90–95.

- REISSNER, E. (1972). One-dimensional finite-strain beam theory - plane problem. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 23(5):795–804.
- REISSNER, E. (1973). One-dimensional large displacement finite-strain beam theory. *Studies in Applied Mathematics*, 52(2):87–95.
- REISSNER, E. (1974). Linear and nonlinear theory of elastic shells. In FUNG, Y. C. et SECHLER, E. E., éditeurs : *Thin-shell structures : Theory, Experiment, and Design. Proceedings of the Symposium, Pasadena, California. 29-30 June 1972*, pages 29–44. Prentice-Hall, N.J.
- REISSNER, E. (1981). On finite deformations of space-curved beams. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 32(6):734–744.
- REISSNER, E. (1982). A note on two-dimensional finite-deformation theories of shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 17(3):217–221.
- REISSNER, E. (1985). Reflections on the theory of elastic plates. *Applied Mechanics Reviews*, 38(11):1453–1464.
- REY, C. (1996). Une technique d'accélération de la résolution de problèmes d'élasticité non linéaire par décomposition de domaine. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 322(IIb):601–606.
- RIKS, E. (1972). The application of Newton's methods to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, 39:1060–1065.
- RIKS, E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structure*, 15:524–551.
- RIKS, E. (1992). On formulation of path-following techniques for structural stability analysis. In LADEVÈZE, P. et ZIENKIEWICZ, O., éditeurs : *New Advances in Computational Structural Mechanics*, pages 65–79, Amsterdam. Elsevier.
- RISLER, F. et REY, C. (2000). Iterative accelerating algorithms with Krylov subspaces for the solution to large-scale nonlinear problems. *Numerical Algorithms*, 23:1–30.
- RIXEN, D. J. et FARHAT, C. (1999). A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(4):489–516.
- RIXEN, D. J., FARHAT, C., TEZAUR, R. et MANDEL, J. (1999). theoretical comparison of the FETI and algebraically partitioned FETI methods, and performance comparisons with a direct sparse solver. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(4):501–533.

- ROULET, V., CHAMPANEY, L. et BOUCARD, P.-A. (2011). A parallel strategy for the multiparametric analysis of structures with large contact and friction surfaces. *Advances in Engineering Software*, 42(6):347 – 358.
- ROUX, F. X. (1997). Parallel implementation of direct solution strategies for the coarse grid solvers in 2-level FETI method. Rapport technique, ONERA, Paris, France.
- RYCHTER, Z. (1987). On the accuracy of a beam theory. *Mechanics Research Communications*, 14(22):99–105.
- SAAD, Y. (2000). *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS.
- SAAD, Y. et SCHULTZ, M. H. (1986). Gmres : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, 7(3):856–869.
- SÁNCHEZ-PALENCIA, E. (1974). Comportements local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. *International Journal of Engineering Science*, 12(4):331 – 351.
- SÁNCHEZ-PALENCIA, E. (1980). *Non homogeneous media and vibration theory*, volume 127 de *Lecture Notes in Physics*. Springer Verlag, Berlin.
- SCHWEIZERHOF, K. H. et WRIGGERS, P. (1986). Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59:261–279.
- SERIES, L., FEYEL, F. et ROUX, F.-X. (2003). Une méthode de décomposition de domaine avec deux multiplicateurs de lagrange, application au calcul des structures, cas du contact. In *Actes du Sixième Colloque National en Calcul des Structures*, volume III, pages 373–380.
- SEYDEL, R. (1979). Numerical computation of branch points in nonlinear equations. *Numerische Mathematik*, 33:339–352.
- SEYDEL, R. (1983). Branch switching in bifurcation problems for ordinary differential equations. *Numerische Mathematik*, 41:93–116.
- SEYDEL, R. (1988). *From equilibrium to chaos. Practical bifurcation theory and stability analysis*. Elsevier, New York.
- SIMMONDS, J. G. et DANIELSON, D. A. (1972). Nonlinear shell theory with finite rotation and stress-function vectors. *Journal of Applied Mechanics - Transactions of The ASME*, 39(4):1085–1090.

- SIMO, J. C. (1985). A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part i. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(1): 55–70.
- SLUIS, O. V. D., SCHREURS, P. J. G. et MEIJER, H. E. H. (1999a). Effective properties of a viscoplastic constitutive model obtained by homogenisation. *Mechanics of Materials*, 31(11):743 – 759.
- SLUIS, O. V. D., VOSBEEK, P. H. J., SCHREURS, P. J. G. et MEIJER, H. E. H. (1999b). Homogenization of heterogeneous polymers. *International Journal of Solids and Structures*, 36(21):3193 – 3214.
- SMIT, R., BREKELMANS, W. et MEIJER, H. (1998). Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155:181–192.
- SOUTHWELL, R. V. (1935). Stress-calculation in frameworks by the method of “systematic relaxation of constraints”. In *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, volume 151, pages 56–95. The Royal Society.
- STRICKLIN, J. A., HAISLER, W. E., TISDALE, P. R. et GUNDERSON, R. (1969). A rapidly converging triangular plate element. *AIAA Journal*, 7(1):180–181.
- STROUBOULIS, T., BABUSKA, I. et COPPS, K. (2000). The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1-3):43 – 69.
- STRUTT, J. W. (1877). *Theory of Sound*. Macmillan Publications Co., Inc., London.
- THOMPSON, J. M. T. et WALKER, A. C. (1968). The non-linear perturbation analysis of discrete structural systems. *International Journal of Solids and Structures*, 4(8):757–768.
- TIMOSHENKO, S. P. (1921). On the corrections for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, 41:744–746.
- TIMOSHENKO, S. P. et WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1940). *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1st édition. 2nd ed. (1959).
- TONG, P. (1970). New displacement hybrid finite element models for solid continua. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2(1):73–83.
- TREFFTZ, E. et MARGUERRE, K. (1937). Über die tragfähigkeit eines längsbelasteten plattenstreifens nach überschreiten der beullast. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 17(2):85–100.

- TRUESDELL, C. et TOUPIN, R. (1960). *The classical field theory*, volume III/1 de *Handbuch Der Physik*, pages 226–790. Springer Verlag, Berlin, s. flügge édition.
- TU, X. (2005). A bddc algorithm for a mixed formulation of flow in porous media. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 20:164–179.
- TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C. et TOPP, L. J. (1956). Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23(9):805–823.
- TVERGAARD, V. (1990). Analysis of tensile properties for a whisker-reinforced metal-matrix composite. *Acta Metallurgica et Materialia*, 38(2):185 – 194.
- UFLYAND, Y. S. (1948). The propagation of waves in the transverse vibrations of bar and plates (in russian). *Akad. Nauk SSSR Prikl. Mat. i Meh.*, 12:287–300.
- VANNUCCI, P., COCHELIN, B., DAMIL, N. et POTIER-FERRY, M. (1998). An asymptotic numerical method to compute bifurcating branches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41:1365–1389.
- VEUBEKE, B. F. D. (1976). The dynamics of flexible bodies. *International Journal of Engineering Science*, 14(10):895 – 913.
- von KÁRMÁN, T. (1910). Festigkeitsprobleme im maschinenbau. *Encyklopedie der Mathematischen Wissenschaften*, 4:311–385.
- von KÁRMÁN, T., DUNN, L. G. et TSIEN, H.-S. (1940). The influence of curvature on the buckling characteristics of structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 7:276.
- von KÁRMÁN, T., SECHLER, E. E. et DONNELL, L. H. (1932). The strength of thin plates in compression. *Transactions of the ASME*, 54:53–58.
- von KÁRMÁN, T. et TSIEN, H.-S. (1939). The buckling of spherical shells by external pressure. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 7:43.
- von KÁRMÁN, T. et TSIEN, H.-S. (1941). The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 8:303.
- WAGNER, H. (1929). Ebene blechwandträger mit sehr dünnem stegblech. *Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt*, 20.
- WAGNER, W. et WRIGGERS, P. (1988). A simple method for the calculation of postcritical branches. *Engineering computations*, 5(2):103–109.
- WALSHAW, C., CROSS, M. et EVERETT, M. G. (1995). A parallelisable algorithm for optimising unstructured mesh partitions. Rapport technique, School of Mathematics, Statistics & Scientific Computing, University of Greenwich, London.

- WASHIZU, K. (1982). *Variational methods in elasticity and plasticity*. Pergamon Press, Oxford, 3rd édition. 1st ed. (1968), 2nd ed (1975).
- WEINITSCHKE, H. (1985). On the calculation of limit and bifurcation points in stability problems of elastic shells. *International Journal of Solids and Structures*, 21(1):79–95.
- WEMPNER, G. (1969). Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. *International Journal of Solids and Structures*, 5(2):117–153.
- WERNER, B. et SPENCE, A. (1984). The computation of symmetry-breaking bifurcation points. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 21(2):388–399.
- WHITCOMB, J. (1991). Iterative global/local finite element analysis. *Computers and Structures*, 40:1027–1031.
- WRIGGERS, P. et SIMO, J. (1990). A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30:155–176.
- WRIGGERS, P., WAGNER, W. et MIEHE, C. (1988). A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70(3):329–347.
- ZAHROUNI, H., COCHELIN, B. et POTIER-FERRY, M. (1999). Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175(1-2):71–85.
- ZHU, H. T., ZBIB, H. M. et AIFANTIS, E. C. (1997). Strain gradients and continuum modeling of size effect in metal matrix composites. *Acta Mechanica*, 121:165–176. 10.1007/BF01262530.
- ZOHDI, T. I., ODEN, J. T. et RODIN, G. J. (1996). Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 138(1-4):273 – 298.