



HAL
open science

Géométrie des surfaces de faille et dépliage 3D : méthodes et applications

Muriel Thibaut

► **To cite this version:**

Muriel Thibaut. Géométrie des surfaces de faille et dépliage 3D : méthodes et applications. Tectonique. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1994. Français. NNT : . tel-00745509

HAL Id: tel-00745509

<https://theses.hal.science/tel-00745509v1>

Submitted on 25 Oct 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

PRÉSENTÉE
 À L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER – GRENOBLE I
 (arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

POUR OBTENIR LE TITRE DE
 DOCTEUR

Mention : *Sciences de la Terre*
 Spécialité : *Mécanique*

PAR

Muriel THIBAUT

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
 MAISON DES GEOSCIENCES
 DOCUMENTATION
 B.P. 53
 F. 38041 GRENOBLE CEDEX
 Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
 Mail : ptalour@ujf-grenoble.fr

25 AOÛT 2003

Sujet de la thèse :

GÉOMÉTRIE DES SURFACES DE FAILLE ET DÉPLIAGE 3D (MÉTHODES ET APPLICATIONS)

Soutenue le 13 décembre 1994 devant la commission d'examen :

MM. G. PERRIER	Professeur Université de Grenoble	Président
D. APPRATO	Professeur Université de Pau	Rapporteur
P. COBBOLD	Directeur de recherches Université de Rennes	Rapporteur
J.-P. GRATIER	Physicien de l'observatoire Université de Grenoble	Directeur de thèse
J.-M. MORVAN	Professeur Université de Lyon	Directeur de thèse
M. LÉGER	Ingénieur Institut français du pétrole	Examineur

RESUME

Tester la compatibilité cinématique de la géométrie d'une surface de faille (1) et la géométrie d'une écaille qui glisse le long de cette surface de faille (2) est un problème compliqué que nous avons partiellement résolu. Nous avons considéré le problème (1) dans le contexte de blocs rigides et le problème (2) pour une écaille plissée.

Nous proposons un critère de moindres carrés permettant de contraindre la forme des failles de façon compatible avec l'approximation blocs rigides, i.e., les deux blocs restent en contact et glissent l'un sur l'autre sans déformation. Si cette condition est satisfaite, la surface de faille est un *filetage*, i.e., une surface qui est partout tangente à un champ de vecteurs (torseur) non nul. Nous contraignons la surface à être le plus près possible des points de données (données de puits ou données sismiques), et régulière (minimisation des courbures principales). Le critère de filetage donne des résultats plus plausibles que la minimisation d'un critère basé seulement sur des dérivées secondes ou sur la matrice de courbure. Il donne aussi une direction de stries. Nous avons testé l'effet de ce critère sur différents exemples naturels (les failles de la Cléry et de San Cayetano).

La restauration d'une structure géologique à une époque antérieure est un bon moyen de critiquer et d'améliorer l'interprétation de la structure actuelle. Nous nous sommes intéressés au glissement banc sur banc avec conservation des longueurs et du volume. Nous avons déplié un feuilletage par optimisation de différents critères de moindres carrés : horizontalité des isochrones, conservation des longueurs et du volume. Nous avons introduit des contraintes d'égalité pour traduire la conservation de la reliure (pin-surface). La reliure représente une surface transverse à l'ensemble des feuilles de la structure conservée après dépliage. Nous avons testé notre formulation sur des exemples synthétiques et expérimentaux.

ABSTRACT

Testing the kinematic compatibility of the geometry of a fault surface (1) and the geometry of the structure (2) which slips on the fault surface is a complex problem that we solved partially. We considered problem (1) in context of rigid blocks and problem (2) for a folded foliation.

In the general context of macro-model determination by inversion techniques, we propose a specific least-squares criterion to constrain the shape of faults so as to be compatible with the rigid block approximation, i.e., the two blocks remain in contact and slip on each other without strain. If this condition is met, the fault surface is a *thread*, i.e., a surface that is everywhere tangent to a nonzero twistor vector field. Besides, we constrain the surface to be close to given points (well data or pickings on a depth-migrated seismic 3D cube), and to be smooth (principal curvature minimization). The rigid block criterion yields more plausible results than conventional approximation techniques based on second derivatives or curvature minimization, and it also predicts the direction of striae. We tested its effect on different natural examples (Cléry and San Cayetano faults).

Restoration of a geological structure at earlier times is a good means to criticize, and next to improve its interpretation. We focused ourselves on the interbedding slip phenomenon, with bed-length and volume conservation. We unfolded a (geometrical) foliation by optimizing following least-squares criteria : horizontalness, bed-length and volume conservation, under equality constraints related to the position of the "binding" or "pin-surface". We tested our formulation on different synthetic and experimental examples.

THÈSE

PRÉSENTÉE
À L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I
(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

POUR OBTENIR LE TITRE DE
DOCTEUR

Mention : *Sciences de la Terre*
Spécialité : *Mécanique*

PAR

Muriel THIBAUT

Sujet de la thèse :

GÉOMÉTRIE DES SURFACES DE FAILLE ET DÉPLIAGE 3D (MÉTHODES ET APPLICATIONS)

Soutenue le 13 décembre 1994 devant la commission d'examen :

- | | | |
|----------------|---|--------------------|
| MM. G. PERRIER | Professeur Université de Grenoble | Président |
| D. APPRATO | Professeur Université de Pau | Rapporteur |
| P. COBBOLD | Directeur de recherches
Université de Rennes | Rapporteur |
| J.-P. GRATIER | Physicien de l'observatoire
Université de Grenoble | Directeur de thèse |
| J.-M. MORVAN | Professeur Université de Lyon | Directeur de thèse |
| M. LÉGER | Ingénieur Institut français du pétrole | Examineur |

10132987

THÈSE

1964

DE

SCIENCE

ET DE LA VIE

PAR

MARCEL THIBAUT

GRANDS THÈMES DE LA VIE ET DE LA MORT
(MÉTAPHYSIQUES ET APPLICATIONS)

A mes parents, des personnes formidables

Remerciements

Je tiens à remercier :

- monsieur Perrier qui me fait l'honneur de présider mon jury de thèse.
- monsieur Cobbold qui a accepté d'être mon rapporteur et donc de s'investir dans un travail qui intègre les mathématiques et la géologie.
- monsieur Apprato qui a accepté, lui aussi, d'être rapporteur. Il fait partie des personnes que j'ai eu le plaisir de rencontrer lors de mon stage de maîtrise à Pau.
- monsieur Gratier qui a été mon directeur de thèse en géologie. Je pense que nous avons réussi tout au long de ces 3 années à dialoguer, à travailler ensemble même si à la base nos formations étaient bien différentes. Je tiens à remercier sa femme Danièle, ses enfants Rémi et Pierre qui m'ont accueillie très gentiment à Santa Barbara, et avec qui j'ai passé de très bons moments.
- monsieur Morvan qui a été mon directeur de thèse en mathématiques. Son esprit très vif et clair m'a aidé à comprendre des concepts compliqués, son intérêt pour la géométrie a été très communicatif.
- monsieur Léger, qui a été mon encadrant tout au long de cette thèse. Sans lui, évidemment cette thèse n'aurait pas cette qualité. Il m'a non seulement initiée à la géologie, mais il m'a formée au travail de recherche. De plus, il a toujours été là pour me conseiller.
- monsieur Marle, qui est à l'origine de l'idée du torseur tangent à la surface de faille. Cette idée très ingénieuse a été largement exploitée dans ma thèse.
- monsieur Trémolières, qui m'a accueillie lors du stage d'immersion en géologie. Ces qualités humaines, son esprit ouvert sont remarquables. Je suis très contente de l'avoir rencontré.
- monsieur Biju-Duval, qui m'a donné de très nombreuses explications en géologie.
- monsieur Klein, qui a relu une partie de ma thèse et a fait des critiques constructives.
- monsieur Nguyen Luc, qui s'est occupé de la représentation graphique de la plupart des dessins présentés dans la thèse, ce qui n'est pas une mince affaire.
- messieurs les géologues de l'Institut Français du Pétrole, monsieur Letouzey, monsieur Lecomte, monsieur Colletta, qui m'ont encouragée et conseillée dans mon travail.

Je remercie tous les autres et parmi eux, il y a Juju, Evelyne, Caro et son goût pour l'équitation, et la charmante Axelle.

Un mot particulier pour mes parents qui sont des personnes formidables....

Une attention particulière pour mon ami Damien, qui me supporte au quotidien depuis déjà longtemps, et j'espère pour encore très longtemps.

Un clin d'oeil à mes amis, Chantal et Zoé, Tinou, le toon roux Caro, le toon noir Couro, Régis et Karima, et un autre à mes copains de l'ENSPM, Jean-Claude, Alain, Dédé, Bertrand et Marc qui m'ont donné des cours du soir en géophysique et géologie.

SOMMAIRE

25 AOÛT 2003
Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
MAISON DES GEOSCIENCES
DOCUMENTATION
B.P. 53
F. 38041 GRENOBLE CEDEX
Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
Mail: plalour@ujf-grenoble.fr

INTRODUCTION	
PARTIE 1 : LE FILETAGE	
Chapitre 1 : Rappels de géométrie et d'analyse fonctionnelle	
Notions de géométrie différentielle	5
Courbure	7
Chapitre II : Problème inverse et formulation discrète	
Problème inverse	11
Les splines	12
Les fonctions-coût	14
Les contraintes d'égalité	16
L'optimisation par Gauss-Newton	16
La méthode de Gauss-Newton avec contraintes d'égalité	18
Annexe 1 : algorithme de Levenberg-Marquardt	21
Chapitre III : Modélisation du problème fonctionnel dans $H^2(U, R^3)$	
Définitions et propriétés	23
Application du théorème de Lax-Milgram	26
Existence et unicité dans $H^2(U, R^3)$	27
Exemples synthétiques	31
Critère aux points de données	35
Conclusions	37
Annexe 1 : les matrices jacobiennes J_{L_a} et J_{L_p}	38
Chapitre IV : Minimisation géométrique	
Motivations	41
Seconde forme fondamentale d'une application	42
Double inégalité	47
Critère additionnel	48
Comparaison entre les résultats obtenus avec la seconde forme fondamentale de la surface et celle de l'application	51
Relation entre la matrice de courbure C et les dérivées secondes	54
Conclusions	57
Annexe 1 : les matrices jacobiennes	58
Chapitre V : Filetage	
Blocs rigides	63
Filetage	63
Espace des torseurs	64
Mouvement hélicoïdal ou vissage	71
Fonctions-coût filetage et normalisation	74

Exemples numériques	75
Conclusions	82
Annexe 1 : les matrices jacobiennes	83
Chapitre VI : Exemples réels : faille de la Cléry et faille de San Cayetano	
Introduction géologique des filetages	85
Etude des miroirs, des erreurs	87
La faille de la Cléry (Vercors)	88
Conclusions	104
La faille de San Cayetano (Californie)	105
Conclusions	126
Annexe 1 : aspects numériques (faille de la Cléry)	127
Annexe 2 : modèle initial pour l'optimisation du miroir de la faille de la Cléry ..	129
Annexe 3 : coûts informatiques pour la faille de San Cayetano	130
Annexe 4 : modèles initiaux pour l'optimisation de la faille de San Cayetano ..	130
Annexe 5 : validation de l'approximation de la courbure par les dérivées secondes	132
PARTIE 2 : LE DÉPLIAGE	
Chapitre VII : Dépliage de structures 3D (méthodologie)	
Motivation géologique	135
Hypothèses géologiques	135
Formulation géométrique	137
Critères de moindres carrés	140
Point de vue fonctionnel	142
Problème inverse	144
Point de vue discret	144
Annexe 1 : les vecteurs de base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$	145
Annexe 2 : les vecteurs de base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$	146
Annexe 3 : le tenseur de déformation ε	147
Chapitre VIII : Dépliage de structures 3D (exemples)	
Rappel du problème inverse	149
Etude des exemples	149
Pli cylindrique peu plié	151
Pli cylindrique plus ou moins épais	153
Maillage tordu	158
Pli d'épaisseur variable	160
Etude d'un "exemple réel" : l'annuaire	163
Conclusions	167
CONCLUSIONS GÉNÉRALES	169
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	173

INTRODUCTION

Une des clefs de l'exploration pétrolière est la détermination de la géométrie des structures car elle permet de découvrir les pièges et de préciser leur forme. Dans ce but, dans une première partie, nous avons cherché à obtenir une meilleure détermination de la forme des surfaces de faille en contexte de blocs rigides. Nous appelons filetages les surfaces de faille qui vérifient cette hypothèse. Dans une seconde partie, nous avons abordé la restauration de structures pliées 3D (dépliage) dont le but est d'améliorer la détermination des structures actuelles.

L'inversion est une méthode très utilisée en géophysique car elle permet d'intégrer des données, des informations de types différents (sismique, gravimétrique, géologique, ...). C'est pour cette raison que nous avons adopté cette approche. Le plus souvent, l'inversion consiste à optimiser un modèle en fonction de critères de moindres carrés construits à partir des données. L'optimisation de ces critères nous donne, dans la première partie, une surface de faille, dans la seconde, une structure (partielle) restaurée. Nous avons utilisé le langage de la géométrie différentielle pour décrire les structures et formuler les deux problèmes, que nous avons résolus dans le cas paramétrique.

Dans les deux cas, nous avons adopté la même démarche. A partir du problème physique, nous avons d'abord défini l'inconnue, c'est à dire la surface ou la structure à déterminer, et nous avons listé l'ensemble des données, ou informations, permettant de documenter au mieux notre surface de faille ou notre structure à déplier. Ces données sont appelées les données observées. Le problème inverse revient à comparer les données observées et les données calculées au moyen de critères de moindres carrés. C'est un problème plus difficile à résoudre que le problème direct qui consiste à appliquer des lois physiques ou géométriques à la structure pour en déduire des observations et les confronter aux mesures. Dans nos cas, l'inconnue est la structure et la relation qui détermine la structure à partir des données n'est pas définie. C'est pour cela que nous adoptons l'inversion.

Dans l'introduction, les **chapitres I et II** visent à faciliter la compréhension des deux problèmes inverses.

Dans le chapitre **I**, nous présentons quelques rappels de géométrie différentielle (*Berger et Gostiaux, [1987]*) concernant les surfaces et les feuilletages. Si on néglige l'épaisseur de la zone broyée, les surfaces modélisent correctement les failles, et, en contexte sédimentaire, les feuilletages (empilements continus de surfaces) modélisent bien les structures. Les feuilles du feuilletage représentent alors les isochrones de dépôt. Nous avons opté pour la *représentation paramétrique* de ces surfaces et ces feuilletages. Une représentation explicite aurait été maladroite car elle ne permet pas de représenter correctement les surfaces de faille presque verticales ou les plis couchés. Pour décrire localement la forme de la surface de faille, nous avons considéré la matrice de courbure.

Le *processus d'inversion* est décrit dans le chapitre **II**. Les fonctions-coût mesurent l'écart entre les données observées sur le terrain et les données calculées sur un modèle numérique. Lorsque les données observées sont incertaines, les critères mesurant cet écart sont exprimés sous forme de moindres carrés, ce qui permet de prendre en compte les incertitudes rattachées à chacune d'elle. Par contre, lors du dépliage d'une écaille tectonique, on utilise des contraintes d'égalité pour exprimer le cisaillement nul à l'arrière. La minimisation de la somme des

fonctions-coûts pondérées nous donne un modèle solution. Les poids mesurent le degré de confiance attribuées à chaque information (Tarantola, [1987])

La première partie d'application de ces méthodes d'inversion comprend les chapitres III à VI et traite des filetages. Dans ces chapitres, sont développés la méthodologie, puis sont étudiés différents exemples synthétiques et réels.

Lorsque deux blocs rigides glissent l'un sur l'autre, ils engendrent une surface de faille particulière appelée un *filetage*. L'hypothèse des blocs rigides est restrictive car elle ne tient pas compte des déformations internes mais elle est acceptable dans certains cas (les blocs crustaux au dessus d'un niveau ductile en contexte extensif, compressif ou en décrochement).

Les failles sont documentées par des points de donnée qui peuvent avoir des origines variées. En sismique 3D, on peut migrer des images temps tridimensionnelles si on connaît le champ des vitesses. Le pointé des différentes isochrones de dépôt forment des surfaces qui sont éventuellement découpées par des failles décrites par leurs intersections avec ces isochrones. Lorsque l'on fore, les puits peuvent traverser les surfaces de faille et dans ce cas on a des données de puits. Lorsque la faille est visible à l'affleurement, on a bien sûr des données d'affleurement. L'ensemble de ces points de données sont des observations qui nous renseignent sur la forme et la position de la surface de faille dans l'espace.

Pour avoir une idée correcte de la forme d'une surface à partir de points de donnée dispersés, il est nécessaire de les interpoler (la surface passe par les points) ou de les approcher (la surface passe près des points) ce qui implique d'introduire un critère de régularisation.

Dans le **chapitre III**, nous résolvons le problème d'approximation qui consiste à minimiser simultanément un critère de proximité aux points donnés et un critère de régularisation par les dérivées secondes. Nous avons pu vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram (Ciarlet, [1982]) et en conclure qu'il existe une et une seule solution au problème pour une paramétrisation fixée décrivant la surface de faille. En d'autres termes, le problème est bien posé. Sur les exemples synthétiques, nous avons considéré plusieurs paramétrisations pour décrire la même surface et nous avons constaté que l'on obtenait des solutions différentes au problème d'approximation. Cette méthode n'est pas intrinsèque car elle est liée au choix de la paramétrisation.

Dans le **chapitre IV**, pour remédier à ceci, nous avons formulé notre problème d'approximation non plus en termes fonctionnels mais en termes géométriques, c'est-à-dire de surfaces au lieu de paramétrisations et de courbures au lieu de dérivées secondes.

Cette approche présente deux inconvénients. D'une part, l'existence et l'unicité de la solution ne sont plus assurées car le théorème de Lax-Milgram ne s'applique plus. D'autre part, le critère de courbure ne contrôle que les perturbations dans les directions normales à la surface, de sorte que les perturbations tangentielles ne sont pas contraintes. Nous avons donc introduit un critère appelé additionnel contrôlant ces perturbations tangentielles. Il s'agit d'un critère de moindres carrés dont la minimisation revient à choisir une paramétrisation parmi celles qui résolvent le problème physique (Rakotoarisoa, [1992]).

Pour ce problème, nous avons établi une double inégalité. Elle encadre le problème de minimisation en courbure par le problème en dérivées secondes. Dans ce chapitre, nous avons refait les expériences du chapitre III sur les différentes paramétrisations décrivant la même surface, et nous avons vérifié que la solution était unique. Ce résultat montre l'intérêt de poser le problème en termes géométriques.

Dans le **chapitre V**, nous montrons que la surface de faille associée au glissement d'un bloc rigide sur un autre ne peut être qu'une surface particulière que nous appelons filetage. Parmi les exemples de filetage, on peut citer les surfaces cylindriques, dont les stries sont des droites, les surfaces de révolution, dont les stries sont des cercles de même axe, les hélicoïdes, dont les stries sont des hélices de même pas et de même axe. Les filetages ont la propriété caractéristique d'être tangents à un champ de vecteurs particulier qui est un torseur (Rougée, [1982]) non nul. Les lignes de champ du torseur sont des hélices qui peuvent être interprétés comme des stries lorsque le filetage est parfait. Lorsque l'on a presque un filetage, les stries correspondent aux lignes de champ de la projection du torseur sur la surface.

Pour introduire l'hypothèse des blocs rigides dans le problème d'approximation, nous avons défini un critère de filetage. Ce critère de moindres carrés mesure l'angle entre le torseur et le plan tangent à la surface. Dans le cas général, le torseur est inconnu, au même titre que la surface. A partir d'un couple (torseur-surface) initial, l'optimisation corrige la surface et le torseur de façon à les rendre au mieux compatibles avec les critères de filetage, de distance aux points de données et de régularisation.

Dans les cas particuliers où l'on a des informations sur les stries, soit à l'affleurement, soit par les mécanismes au foyer, celles-ci peuvent aider à documenter le torseur, et par contrecoup la surface, via le critère de filetage. On résout alors un problème d'approximation avec un critère de filetage à torseur fixé.

Nous avons testé sur exemples synthétiques l'effet de l'introduction du critère de filetage et nous avons pu comparer les solutions du problème d'approximation avec minimisation des critères de courbure et proximité aux points de données et la solution du même problème avec introduction du critère de filetage.

Dans le **chapitre VI**, nous avons traité deux *exemples réels* qui illustrent l'intérêt et parfois les limites de notre critère de filetage.

Le premier miroir de faille est un miroir de faille d'échelle décimétrique dont nous avons effectué le levé topographique : le miroir de faille de la Cléry (Vercors, France). Pour ce miroir, les données sont des données d'affleurement.

Le second exemple est une faille d'échelle kilométrique : la faille de San Cayetano (Californie, USA). Pour le miroir situé à l'ouest de Sespe Creek, les données proviennent de la numérisation d'une carte interprétée, et pour le miroir à l'est de Sespe Creek, nous avons des données de puits.

D'un point géologique, ces deux failles sont différentes. La faille de la Cléry est un décrochement tandis que la faille de San Cayetano est un chevauchement.

Pour ces miroirs, nous avons fait les expériences suivantes. D'abord, nous avons résolu un problème d'approximation avec minimisation des critères de courbure et proximité aux points de données. Ensuite, nous avons résolu un nouveau problème d'approximation avec critère de filetage (torseur inconnu) en plus des deux précédents. Dans certaines expériences, nous avons fixé le torseur lorsque l'on avait des informations sur les stries (par exemple, des stries d'affleurement pour la faille de la Cléry, ou des données de mécanismes au foyer pour la faille de San Cayetano). Puis avons comparé l'ensemble des résultats.

D'une manière générale, l'effet du critère de filetage est surtout visible dans les zones où l'on a le moins de données, notamment lorsque ces zones sont situées aux coins du domaine étudié. L'application du critère de filetage sans a priori sur la direction des stries ne s'avère

efficace que si la surface n'est pas strictement plane ou cylindrique circulaire car dans ce cas, il y a indétermination sur le choix du torseur.

Alors que dans cette première partie, nous avons étudié les surfaces de faille sous l'hypothèse de blocs rigides, nous allons nous intéresser dans une seconde partie au *dépliage* d'une écaïlle tectonique 3D sous l'hypothèse de glissement banc sur banc.

Dans cette thèse, nous n'abordons pas le problème de la restauration à différentes époques de structures complexes, mais seulement celui du dépliage d'une écaïlle. Nous entendons ici par écaïlle un morceau de structure à l'intérieur duquel nous négligeons les failles et les discordances. Nous pouvons alors modéliser une écaïlle par un feuilletage.

Dans le chapitre VII, nous proposons une méthodologie de dépliage d'une écaïlle et dans le chapitre VIII, nous l'appliquons à des exemples synthétiques et un "exemple réel".

Dans le **chapitre VII**, nous présentons le problème géologique du dépliage d'une écaïlle supposée connue dans son état actuel et nous en donnons la formulation géométrique.

La première hypothèse géologique est la conservation du volume. Ceci est une hypothèse raisonnable si on considère des roches ayant subies une compaction avant leur déformation.

La deuxième hypothèse est l'absence de déformations tangentielles. Nous considérons que notre écaïlle est une succession de bancs compétents, qui ne se déforment que par flexion, et incompétents, qui permettent le glissement banc sur banc.

La troisième hypothèse est l'horizontalité initiale des couches.

La dernière hypothèse est l'absence de cisaillement à l'arrière de l'écaïlle. Nous considérons qu'il existe une surface transverse sur l'ensemble des couches où celles-ci ne sont pas déformées.

Les trois premières hypothèses ont été formulées sous forme de critères de moindres carrés et la dernière par des contraintes d'égalité.

Dans le **chapitre VIII**, nous avons testé notre programme sur différents exemples synthétiques et un "exemple réel". Parmi les exemples synthétiques traités, nous avons considéré une écaïlle à feuilles cylindriques, une écaïlle à feuilles non parallèles, une écaïlle décrite par une paramétrisation qui nous donne un maillage distordu. En dernier exemple, nous avons utilisé les données issues de l'expérience suivante. Un "annuaire" a été construit par empilement de feuilles de couleurs différentes, puis relié, plié et calé dans une boîte avant d'être immergé dans de la résine. Le bloc ainsi obtenu a été découpé en tranches parallèles qui ont été numérisées. Comme ce processus conduit à des données entachées d'erreur, nous considérons cet exemple comme un "exemple réel".

En conclusion pour la partie sur les filetages, nous pouvons envisager les perspectives suivantes. Dans le domaine pétrolier où les techniques de tomographie 3D se développent, le critère de filetage pourrait aider à la détermination de la géométrie des failles. En géologie structurale ou sismologie, on pourrait prendre en compte de façon plus souple l'information relative aux stries en formulant celle-ci à l'aide d'un critère de moindres carrés.

En ce qui concerne le dépliage, un problème très important reste à résoudre qui est le raccord à l'état déplié des différents feuilletages constituant une structure. Il serait aussi intéressant de restaurer les structures de manière cohérente à différentes époques et en tenant compte de la compaction.

Chapitre I

Rappels de géométrie et d'analyse fonctionnelle

Nous rappelons quelques notions de géométrie différentielle et d'analyse fonctionnelle qui seront utilisées par la suite.

Nous définissons une surface paramétrée, le plan tangent en tout point d'une surface, la matrice de courbure, la seconde forme fondamentale.

D'un point de vue fonctionnel, les définitions sont toujours données dans le cas paramétrique car cela constitue le cadre de notre travail.

Pour plus de détails, une référence en géométrie différentielle peut être (*Berger, Gostiaux, [1987]*)

I.1 Notions de géométrie différentielle

I.1.1 Surface paramétrée

On peut représenter une surface de R^3 (espace euclidien de dimension 3) d'au moins trois façons différentes :

1. soit par une représentation explicite en disant que la surface est le graphe d'une fonction ϕ

$$z = \phi(x, y),$$

où pour un couple $(x, y) = m$ de coordonnées cartésiennes est associé un point z , image du couple sur la surface.

2. soit par une représentation implicite, avec la surface définie par

$$\phi(x, y, z) = 0,$$

les coordonnées x, y, z sont liées entre elles.

3. soit encore par une représentation paramétrique en disant que la surface est l'image d'une immersion ($d\phi \neq 0$) en tout point de la surface) d'un ouvert U (domaine borné) de R^2 (espace euclidien de dimension 2) dans R^3 (Fig. 1),

$$\begin{aligned} U \subset R^2 &\longrightarrow S \subset R^3 \\ (u, v) &\longrightarrow \phi(u, v) = (x, y, z). \end{aligned}$$

Dans ce cas, à tout couple (u, v) de coordonnées curvilignes est associé un point de la surface de coordonnées cartésiennes (x, y, z) image du couple (u, v) . On dit que ϕ est

une immersion si tout point de U est régulier ($d\phi \neq 0$) en tout point.

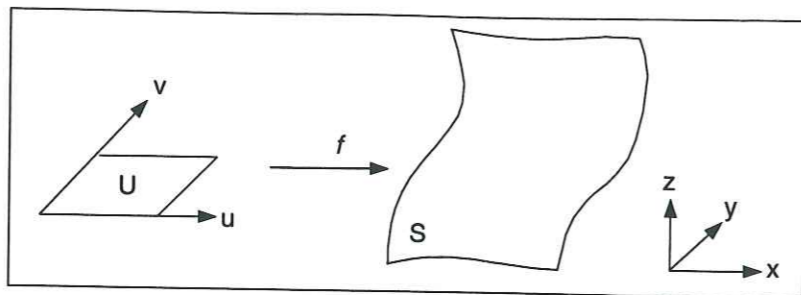


Figure 1 Représentation paramétrique d'une surface, image d'un domaine de coordonnées curvilignes.

C'est cette représentation que nous avons adoptée car elle permet la représentation d'objets géologiques qui n'ont pas de représentation explicite. Par exemple, les dômes de sel, les plis couchés. Pour les failles presque verticales (à fort pendage), une représentation explicite est maladroite (Fig. 2).

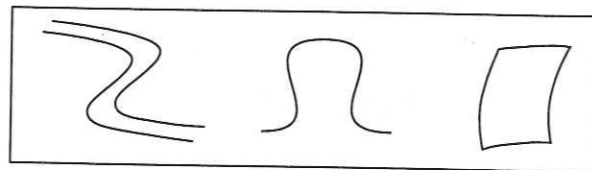


Figure 2 Pli couché, dôme de sel et faille verticale.

I.1.2 Plan tangent

Soit $M_o = \phi(u_o, v_o)$, un point régulier de la surface image du point de coordonnées curvilignes (u_o, v_o) , alors les dérivées $\phi_{,u}(u_o, v_o)$ (dérivée partielle de ϕ par rapport à u encore notée $\frac{\partial \phi}{\partial u}$) et $\phi_{,v}(u_o, v_o)$ (dérivée partielle de ϕ par rapport à v encore notée $\frac{\partial \phi}{\partial v}$) sont des vecteurs linéairement indépendants. Le plan vectoriel $T_{M_o}S$ engendré par ces deux vecteurs est le plan tangent (Fig. 3).

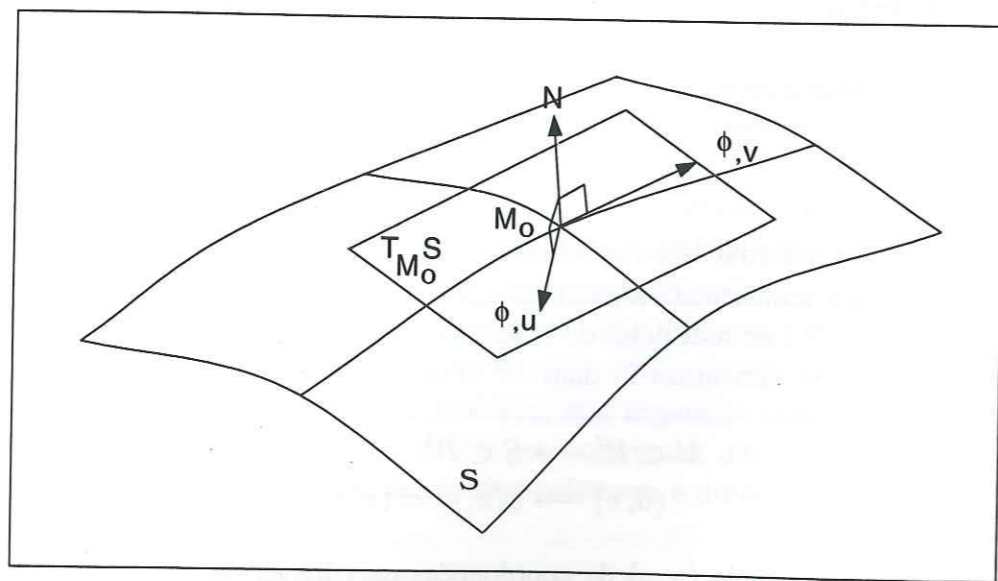


Figure 3 Représentation du plan tangent à la surface S en M_o .

I.1.3 Vecteur normal

Si M_o est un point régulier, on sait que $\phi_{,u}(u_o, v_o)$ et $\phi_{,v}(u_o, v_o)$ sont linéairement indépendants, c'est à dire que le produit vectoriel de $\phi_{,u}(u_o, v_o)$ et $\phi_{,v}(u_o, v_o)$ (noté $\phi_{,u}(u_o, v_o) \wedge \phi_{,v}(u_o, v_o)$) est différent de zéro et est orthogonal au plan tangent à la surface. Dans la suite, nous appellerons

$$N = \frac{\phi_{,u}(u_o, v_o) \wedge \phi_{,v}(u_o, v_o)}{\|\phi_{,u}(u_o, v_o) \wedge \phi_{,v}(u_o, v_o)\|}$$

le vecteur normal normalisé en M_o à la surface (Fig. 3).

I.2 Courbure

I.2.1 Première forme fondamentale

Nous étudions une surface S plongée R^3 . L'idée est d'étudier sa géométrie intrinsèque, en se promenant sur S "avec défense d'en sortir dans R^3 et seule permission de mesurer les longueurs". Soit M un point de S . Comme le plan tangent à la surface au point M est dans R^3 ($T_M S \subset R^3$), on peut le munir du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et d'une norme $(\|\cdot\|)$ induits par ceux de R^3 . On note ϕ_1 la forme bilinéaire symétrique ainsi construite sur le plan tangent. ϕ_1 s'appelle la première forme fondamentale de S . Dans la base $(\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}) = (\phi_{,u}, \phi_{,v})$, la matrice c de ϕ_1 s'écrit

$$c = (\phi_1(\phi)) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\frac{\partial \phi}{\partial u}\|^2 & \langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \rangle \\ \langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \rangle & \|\frac{\partial \phi}{\partial v}\|^2 \end{pmatrix}$$

La longueur d'une courbe $([a, b], \gamma)$ sur la surface S a pour expression

$$long(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\gamma_{,u}(u, v))^2 + (\gamma_{,v}(u, v))^2} ds.$$

On appelle distance de deux points $M_1, M_2 \in S$ la borne inférieure des longueurs des courbes de S qui les joignent.

$$d(M_1, M_2) = \inf\{long(\gamma); \gamma \text{ courbe de } S \text{ telle que } \gamma(a) = M_1, \gamma(b) = M_2\}.$$

On obtient ainsi la métrique intrinsèque de S .

I.2.2 Opérateur de Weingarten

Considérons le vecteur normal unitaire $N(u, v)$ (défini précédemment) en $M(u, v)$. Comme $\|N(u, v)\| = 1$, on a

$$\langle \frac{\partial N}{\partial u}(u, v), N(u, v) \rangle = \langle \frac{\partial N}{\partial v}(u, v), N(u, v) \rangle = 0,$$

donc $\frac{\partial N}{\partial u}$ et $\frac{\partial N}{\partial v}$ appartiennent au plan tangent $T_M S$. Soit X un vecteur appartenant au plan tangent. On peut écrire

$$X = \left\langle x_1, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle + \left\langle x_2, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle.$$

Soit L l'application définie de $T_M S \rightarrow T_M S$ par

$$L_{(u,v)}(X) = - \left\langle x_1, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle - \left\langle x_2, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle.$$

L s'appelle l'endomorphisme de Weingarten. Il nous permettra de définir les courbures.

I.2.3 Deuxième forme fondamentale

Considérons ϕ_2 la forme bilinéaire associée à L par

$$\phi_2(u,v)(X,Y) = X L_{(u,v)}(Y) = L_{(u,v)}(X) Y, \quad \forall X, Y \in T_M S.$$

On l'appelle aussi seconde forme fondamentale de (S, ϕ) . La matrice C de ϕ dans la base $\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}\right)$ s'écrit

$$C = (\phi_2(\phi)) = \begin{pmatrix} l(u,v) & m(u,v) \\ m(u,v) & n(u,v) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} l(u,v) &= - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle \\ m(u,v) &= - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle, \\ n(u,v) &= - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle. \end{aligned}$$

La matrice C s'appelle matrice de courbure. l s'appelle la courbure normale dans la direction $\frac{\partial \phi}{\partial u}$, n la courbure normale dans la direction $\frac{\partial \phi}{\partial v}$, m la torsion géodésique.

I.2.4 Courbures principales

Comme C est une matrice symétrique, on peut la diagonaliser pour trouver ses valeurs propres λ_1 et λ_2 . On les appelle les courbures principales de l'opérateur de Weingarten. La forme quadratique Q_2 définie par

$$Q_2(X) = X L_{(u,v)}(X),$$

atteint son maximum pour deux vecteurs X_1 et $-X_1$ et son minimum en deux vecteurs X_2 et $-X_2$ qui sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 . X_1 et X_2 sont les directions principales (Fig. 4). La matrice de courbure dans la base des vecteurs propres X_1 et X_2 s'écrit donc

$$C = \begin{pmatrix} l(u,v) & m(u,v) \\ m(u,v) & n(u,v) \end{pmatrix}_{T_M S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}_{(X_1, X_2)}.$$

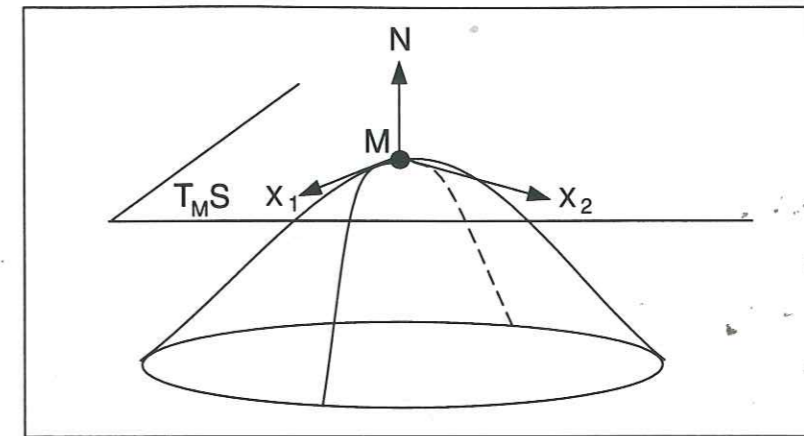


Figure 4 Représentations de la base de vecteurs propres pour les deux courbures principales λ_1, λ_2 .

Les courbures moyenne et totale sont définies à partir des racines du polynôme caractéristique de L . Ce sont les invariants de base de la matrice C . On a le déterminant de $L_{(u,v)} - \lambda Id$ qui est égal à

$$\begin{aligned} Det(L_{(u,v)} - \lambda Id) &= \lambda^2 + Tr(L_{(u,v)})\lambda + Det(L_{(u,v)}) \\ &= \lambda^2 + 2\lambda_m \lambda + \lambda_T, \end{aligned}$$

où Tr est l'opérateur trace.

La courbure totale λ_T est définie par

$$\lambda_T = \lambda_1(u,v)\lambda_2(u,v) = Det(L)$$

$$= \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

et la courbure moyenne λ_m est définie par

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{LG + EN - 2FM}{H^2}, \end{aligned}$$

où

$$E = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|^2, \quad F = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle, \quad G = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|^2,$$

$$H = \sqrt{EG - F^2},$$

$$L = \frac{1}{H} \left[\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \right], \quad M = \frac{1}{H} \left[\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} \right],$$

$$N = \frac{1}{H} \left[\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right].$$

Le crochet $[\cdot]$ représente le produit mixte. Un point tel que $\lambda_1 = \lambda_2$ est un ombilic.

La courbure totale nous renseigne sur la développabilité locale de la surface. Une surface développable est une surface localement isométrique à un ouvert du plan ($\lambda_T = 0$).

Chapitre II

Problème inverse et formulation discrète

Dans ce chapitre, nous présentons un procédé très utilisé en géophysique, l'inversion - ou optimisation multicritère -. Cette méthode est très appréciée car elle permet de tenir compte de données de nature différente. A chaque donnée est associée une fonction-coût. La somme des fonctions-coûts est minimisée dans une phase d'optimisation.

Nous utilisons les fonctions splines pour discrétiser notre problème. Ce sont des polynômes de degré 3 de classe C^2 . Nous allons les présenter, et définir les paramètres de splines.

Puis nous allons linéariser la fonction-coût globale, somme des différentes fonctions-coût, autour d'un modèle de référence et expliciter le système linéaire que nous allons résoudre par l'algorithme de Gauss-Newton.

Lorsque l'on travaille sur des problèmes non linéaires, des méthodes de recherche linéaire sont souvent adoptées pour faire converger l'algorithme. Nous présentons celui de Levenberg-Marquardt.

II.1 Problème inverse

La méthode d'inversion — ou optimisation multicritère — se compose de trois étapes:

1. la modélisation,
2. le problème direct,
3. et le problème inverse.

II.1.1 La modélisation

La modélisation définit l'inconnue p . Dans notre cas, il s'agit d'une surface de faille qui sera représentée paramétriquement.

II.1.2 Le problème direct

Le problème direct consiste à mettre en regard des données observées disponibles d_{obs} , des données synthétiques (ou calculées) d , exprimées en fonction de notre inconnue p sous la forme

$$d = f(p).$$

Les données observées peuvent être des temps de parcours, des pendages, des valeurs du champ de pesanteur, ...

On peut noter que si l'on pouvait calculer exactement la fonction f^{-1} , on exprimerait directement le modèle recherché en fonction des données par

$$p = f^{-1}(d).$$

Mais en général, f^{-1} n'est pas définie ou les approximations faites pour l'évaluer sont inacceptables.

II.1.3 Le problème inverse

Le problème inverse estime les incertitudes sur les données disponibles et en déduit des critères de moindres carrés. Lorsque les incertitudes sont nulles ou très petites, on utilise des contraintes d'égalité. A chacune des informations, on associe une fonction-coût qui mesure l'écart entre les données observées et les données synthétiques calculées sur le modèle courant. La somme pondérée de ces fonctions-coût fournit une fonction-coût globale qui est d'autant plus petite que les données sont mieux satisfaites.

L'optimisation d'un modèle initial (a priori quelconque) par rapport à ce critère donne un modèle final qui sera considéré comme la solution du problème.

II.2 Les splines

Une mise en oeuvre informatique nécessite un nombre fini de paramètres. Ainsi, une discrétisation est nécessaire. Nous avons opté pour une représentation discrète de notre paramétrisation ϕ par des produits tensoriels de B-splines cubiques (fonctions polynômiales par morceaux). En effet, les quantités que nous avons à étudier sur la surface font intervenir des dérivées d'ordre 2 de la paramétrisation (terme en courbure). Ces fonctions splines seront aussi utiliser dans la deuxième partie de la thèse pour les volumes.

Généralement, une fonction spline s'écrit

$$\phi(u, v) = \sum_n p_n B_n(u, v),$$

où les B_n s'appellent les fonctions de base et les coefficients p_n les paramètres de splines. Ce sont des vecteurs de R^3 .

Cas volumique

L'espace des paramètres U est le produit de 3 intervalles

$$U = [u_{min}, u_{Max}] \times [v_{min}, v_{Max}] \times [w_{min}, w_{Max}],$$

sur lesquels sont définis respectivement les 3 fonctions de base polynômiales $b_i^1(u), b_j^2(v), b_k^3(w)$. Ainsi la fonction de base 3D est

$$B_{ijk}(u, v, w) = b_i^1(u) b_j^2(v) b_k^3(w)$$

telle que

$$(x, y, z) = \phi(u, v, w) = \sum_{ijk} p_{ijk} b_i^1(u) b_j^2(v) b_k^3(w)$$

où $p_{ijk} = (p_{ijk}^1, p_{ijk}^2, p_{ijk}^3)$. Les p_{ijk}^l sont les paramètres de splines et les b_i^l les fonctions de base cubiques.

Cas surfacique

Si U est le domaine des coordonnées curvilignes défini par

$$U = [u_{min}, u_{Max}] \times [v_{min}, v_{Max}],$$

B_n est le produit tensoriel de $b_i(u)$ défini sur $[u_{min}, u_{Max}]$ et de $b_j(v)$ sur $[v_{min}, v_{Max}]$ par

$$B_n(u, v) = B_{ij}(u, v) = b_i(u) b_j(v).$$

On peut réécrire ϕ sous la forme

$$\phi(u, v) = (x, y, z) = \sum_{i,j,k} p_{ijk}^k b_i(u) b_j(v).$$

Cas linéique

Nous allons détailler l'expression des fonctions de base dans le cas 1D. Soient $u \in [u_{min}, u_{Max}]$ et $b(u)$ une fonction de base,

$$x = \phi(u) = \sum_i p_i b_i(u).$$

Soit u_j une suite de points entre u_{min} et u_{Max} , on choisit $u_{j-1} - u_j = cste$, c'est à dire une suite nodale à pas constant. La fonction ϕ est de classe C^2 , il faut donc que

$$\begin{aligned} \phi_{j-1}(u_j) &= \phi_j(u_j) \\ \phi_{j-1}^{(1)}(u_j) &= \phi_j^{(1)}(u_j) \\ \phi_{j-1}^{(2)}(u_j) &= \phi_j^{(2)}(u_j), \end{aligned}$$

si $\phi^{(d)}$ est la dérivée d'ordre d de ϕ . Choisissons à présent les fonctions de base telles que

$$b_j(u_j) = 0, b_j(u_{j+2}) = \max(b_j(u), b_j(u_j)) = 0 \text{ pour } u \leq u_j \text{ et } u \geq u_{j+4}.$$

Alors, ϕ_i est une combinaison linéaire de quatre fonctions de bases: $b_{j-3}, b_{j-2}, b_{j-1}, b_j$.

Définissons un paramètre local \bar{u} , à chaque intervalle $[u_{i-1}, u_i]$ tel que

$$\bar{u} = \frac{u - u_j}{u_{j+1} - u_j}.$$

Chaque portion de b_j non nulle est une cubique. Elle est alors constituée de quatre segments $s_0(\bar{u}), s_1(\bar{u}), s_2(\bar{u}), s_3(\bar{u})$ (Fig. 1). Chaque segment étant un polynôme de degré 3, il est déterminé par quatre coefficients. D'où seize coefficients à définir pour chaque fonction de base.

Ecrivons analytiquement les conditions imposées sur chaque segment.

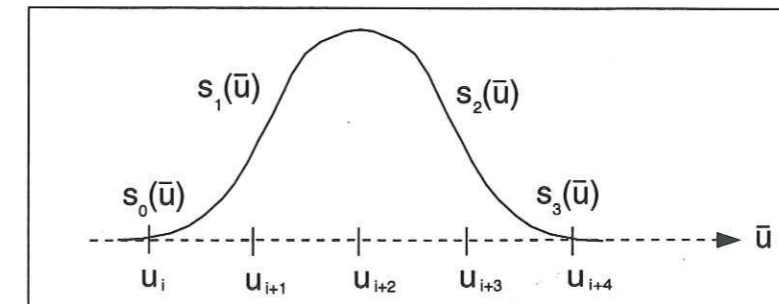


Figure 1 Représentation d'une fonction de base composée de quatre segments.

1. $b_j(u)$ est identiquement nulle pour $u \geq u_{j+4}$, et $u \leq u_j$

$$0 = s_0(0), \quad 0 = s_3(1).$$

2. $b_j^{(1)}(u)$ est identiquement nulle pour $u \geq u_{j+4}$, et $u \leq u_j$

$$0 = s_0^{(1)}(0), \quad 0 = s_3^{(1)}(1).$$

3. $b_j^{(2)}(u)$ est identiquement nulle pour $u \geq u_{j+4}$, et $u \leq u_j$

$$0 = s_0^{(2)}(0), \quad 0 = s_3^{(2)}(1).$$

4. Il y a continuité en $u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}$,

$$s_0(1) = s_1(0), \quad s_1(1) = s_2(0), \quad s_2(1) = s_3(0).$$

5. Il y a continuité de la dérivée première en $u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}$,

$$s_0^{(1)}(1) = s_1^{(1)}(0), \quad s_1^{(1)}(1) = s_2^{(1)}(0), \quad s_2^{(1)}(1) = s_3^{(1)}(0).$$

6. Il y a continuité de la dérivée seconde en $u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}$,

$$s_0^{(2)}(1) = s_1^{(2)}(0), \quad s_1^{(2)}(1) = s_2^{(2)}(0), \quad s_2^{(2)}(1) = s_3^{(2)}(0).$$

Donnons nous de plus, une condition de normalité

$$s_0(0) + s_1(0) + s_2(0) + s_3(0) = 1.$$

Nous obtenons seize équations pour seize inconnues. Après résolution, on trouve

$$s_0(\bar{u}) = \frac{1}{6}\bar{u}^3$$

$$s_1(\bar{u}) = \frac{1}{6}(1 + 3\bar{u} + 3\bar{u}^2 - 3\bar{u}^3)$$

$$s_2(\bar{u}) = \frac{1}{6}(4 - 6\bar{u}^2 + 3\bar{u}^3)$$

$$s_3(\bar{u}) = \frac{1}{6}(1 - 3\bar{u} + 3\bar{u}^2 - \bar{u}^3).$$

Ces quatre segments définissent une fonction de base de B-splines cubiques uniformes. Par construction, ϕ_i est définie sur l'intervalle $[u_i, u_{i+1}[$ par quatre fonctions de base. Si nous divisons $[u_{min}, u_{Max}]$ en m intervalles, il faut $m + 3$ fonctions de bases, c'est-à-dire $m + 3$ paramètres p_j pour pouvoir définir entièrement cet intervalle.

Pour représenter une surface, l'expression discrète de la représentation paramétrique est

$$x^i = \sum_{j,k=1}^4 p_{jk}^i B_j(u) B_k(v), \quad i = 1, 3.$$

II.3 Les fonctions-coût

II.3.1 Point de vue géologique

Une fonction-coût mesure l'écart entre des données observées et des données synthétiques calculées sur un modèle courant. D'un point de vue géologique, on a deux types d'informations sur la structure à déterminer:

1. des observations "certaines" qui peuvent être exprimées en termes de contraintes d'égalité,
2. des observations "incertaines" qui peuvent être exprimées sous forme de fonctions-coût en termes de moindres carrés. Ceci permet de prendre en compte les incertitudes rattachées à chacune d'elles.

II.3.2 Point de vue fonctionnel

La représentation paramétrique que nous allons choisir pour décrire la faille (resp. le feuilletage) sera un difféomorphisme ϕ d'un domaine $U \subset R^2$ (resp. $U \subset R^3$) dans $S \subset R^3$ (resp. $\mathcal{F} \subset R^3$). L'introduction de la paramétrisation ϕ définissant la faille S (resp. le feuilletage \mathcal{F}) nous permet d'exprimer les fonctions-coût précédentes en termes de ϕ par le biais d'un changement de variable et d'obtenir des intégrales définies dans l'espace des coordonnées curvilignes $U = \{m = (u, v)\}$ (resp. $U = \{m = (u, v, w)\}$)

$$Q_*(\phi) = \int_U \|\ast \circ \phi\|_*^2 |J\phi| dU$$

où $|J(\phi)|$ est le jacobien de ϕ , et $\ast \circ \phi$ représente la quantité \ast étudiée.

II.3.3 Point de vue discret

La discrétisation des fonctions-coût consiste simplement à approcher les intégrales par des sommes discrètes

$$Q_*(\phi) \approx \sum_{m \in G_{uv} \text{ (resp. } m \in G_{uvw})} \|\ast \circ \phi(m)\|_*^2 |J\phi(m)| dU$$

où G_{uv} (resp. G_{uvw}) est une grille régulière de points m dans U et dU la surface d'une maille de G_{uv} (resp. le volume d'une maille de G_{uvw}). Plus précisément, U est défini par $[u_{min}, u_{Max}] \times [v_{min}, v_{Max}]$ (resp. $[u_{min}, u_{Max}] \times [v_{min}, v_{Max}] \times [w_{min}, w_{Max}]$) et les coordonnées curvilignes des points de G_{uv} (resp. G_{uvw}) sont

$$u_i = u_{min} + \left(\frac{2i-1}{2N_u}\right)(u_{Max} - u_{min}), \quad 1 \leq i \leq N_u$$

(resp. pour v, w) où N_u (resp. N_v, N_w) est le nombre de points de discrétisation dans la direction u (resp. pour v, w). L'élément d'aire (resp. volume) dU s'écrit

$$dU = \frac{(u_{Max} - u_{min})(v_{Max} - v_{min})}{N_u N_v},$$

$$\left(\text{resp. } dU = \frac{(u_{Max} - u_{min})(v_{Max} - v_{min})(w_{min} - w_{Max})}{N_u N_v N_w}\right)$$

II.3.4 Les incertitudes

Dans les expressions précédentes, nous avons introduit des normes $\|\cdot\|_*$ rattachées à chaque donnée. Le choix de ces normes doit tenir compte des incertitudes sur chaque quantité \ast . Ces incertitudes pourraient éventuellement provenir, par exemple, d'études géostatistiques sur la structure considérée. Nous avons fait le choix d'une norme L^2 sur les données pondérées par des coefficients multiplicatifs C_* . Nous définissons une fonction-coût physique globale

$$Q_{totale} = \sum_i Q_i = \sum_i C_i Q_i^{L^2}.$$

Les coefficients C_* peuvent être reliés à la variance de σ_*^2 de \ast et aux longueurs de corrélation $\lambda_{*\xi}$ et λ_{*T} dans les directions orthogonale et tangente respectivement

$$C_* = \frac{1}{2\sigma_*^2 \lambda_{*\xi} \lambda_{*T}}.$$

Le détail de la relation entre le choix d'une norme et le modèle de covariance correspondant est développé dans (Tarantola, [1987]).

II.4 Les contraintes d'égalité

Dans la deuxième partie de la thèse, nous avons des contraintes d'égalité pour la conservation de la reliure entre l'état actuel et restauré.

Pour la reliure du feuilletage, l'image $M_k = (x_k, y_k, z_k)$ d'un point $m_k = (u_k, v_k, w_k)$ du domaine de coordonnées curvilignes U est conservé du feuilletage plié au feuilletage déplié.

En utilisant les splines, nous pouvons traduire ceci par

$$M_k = \sum_j p_j B_j(m_k),$$

$$M_k = C(m_k)p,$$

si p est le vecteur contenant les paramètres de splines p_j et $C(m)$ la matrice contenant les fonctions de base $B_j(m)$.

Soit e le vecteur dont les coordonnées sont les M_k , $k = 1, \dots, N_u N_v$ et C la matrice formée par l'empilement des matrices $C(m_k)$. Les contraintes d'égalité à la reliure se traduisent par le système linéaire suivant

$$Cp = e$$

où C est une matrice de dimension $N_c N_p = (N_u N_v) N_p$. N_p est le nombre de paramètres.

II.5 L'optimisation par Gauss-Newton

La minimisation de la fonction-coût globale peut se faire par une méthode itérative. Nous avons choisi la méthode de Gauss-Newton.

II.5.1 Recherche des points critiques

Le problème que nous avons à résoudre est un problème classique d'optimisation d'une fonctionnelle Q . Au lieu de chercher à minimiser Q , on peut chercher les points critiques de dQ , la différentielle de Q , c'est à dire les points p_i tels que $dQ_{p_i} = 0$ dans un ouvert. Les points trouvés ne sont pas forcément des minima, (on peut trouver des maxima ou des points selles). Une étude plus approfondie de la fonctionnelle est alors nécessaire. Nous nous plaçons à partir de maintenant dans un voisinage du minimum.

II.5.2 Problème discrétisé

Soient N_p la dimension de l'espace des paramètres p , N_d la dimension de l'espace des données d , et d_{obs} le vecteur contenant les données observées.

Soit

$$f : R^{N_p} \rightarrow R^{N_d}$$

$$p \mapsto f(p) = d.$$

Nous minimisons la fonctionnelle

$$Q(p) = \frac{1}{2} \|f(p) - d_{obs}\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \int_S (f(p) - d_{obs})^2 ds.$$

On pourra se référer au chapitre III pour une définition plus précise de L^2 .

II.5.3 Linéarisation des fonctions-coûts

Nous allons maintenant linéariser la fonction-coût $Q(p)$. Lorsque l'on écrit un développement en série de Taylor autour d'un point p_0 de la fonction f qui associe les données aux paramètres, nous négligeons tous les termes d'ordre supérieur ou égal à deux

$$f(p) \simeq f(p_0) + df_{p_0}(p - p_0).$$

D'où

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(p) &= \frac{1}{2} \langle f(p_0) + df_{p_0}(p - p_0) - d_{obs}, f(p_0) + df_{p_0}(p - p_0) - d_{obs} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle f(p_0), f(p_0) - df_{p_0}p_0 - d_{obs} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle f(p_0) - df_{p_0}p_0 - d_{obs}, f(p_0) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle df_{p_0}p, f(p_0) - df_{p_0}p_0 - d_{obs} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle f(p_0) - df_{p_0}p_0 - d_{obs}, df_{p_0}p \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle df_{p_0}p, df_{p_0}p \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle Ap, p \rangle - \langle b, p \rangle + Cste, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= (df_{p_0})^T (df_{p_0}), \\ \langle b, p \rangle &= - \langle df_{p_0}p, f(p_0) - df_{p_0}p_0 - d_{obs} \rangle, \\ Cste &= \langle f(p_0), f(p_0) - df_{p_0}p_0 - d_{obs} \rangle + \langle f(p_0) - df_{p_0}p_0 - d_{obs}, f(p_0) \rangle. \end{aligned}$$

$\tilde{Q}(p)$ la fonction-coût associée au problème linéarisé. C'est une fonctionnelle quadratique car elle s'écrit sous la forme

$$J : v \in R^{N_p} \rightarrow J(v) = \frac{1}{2} \langle Av, v \rangle - \langle b, v \rangle + c,$$

où A est une matrice symétrique donnée, b un vecteur de R^{N_p} donnée et c une constante réelle. L'hypothèse de travail qui consiste à considérer le problème linéarisé comme proche du problème réel nous permet de dire qu'il existe un minimum unique à la fonction-coût associée au problème linéarisé.

D'un point de vue matriciel, $\tilde{Q}(p)$ s'écrit

$$\tilde{Q}(p) = \frac{1}{2} p^T H p + b^T p + c,$$

avec $H = (J^T J)$. H s'appelle la matrice hessienne, c'est une matrice réelle, symétrique et positive. J s'appelle la matrice jacobienne. C'est une matrice de dimension $M_\beta \times N_p$ si M_β est le nombre de données observées du type β (pendage, courbure, ..). Chaque élément de la matrice s'écrit

$$J^{ij} = \frac{\partial \beta^i}{\partial p_j}$$

Comme la relation $d = f(p)$ n'est pas linéaire, la fonction-coût globale peut présenter plusieurs extrema.

II.5.4 Les contraintes d'égalité

Lorsque l'on a des contraintes d'égalité, le problème que nous avons à résoudre consiste à minimiser la fonction coût totale $Q(p)$ sous les contraintes $Cp = e$. Les contraintes peuvent s'écrire sous la forme de contraintes affines

$$\varphi^i(p) = \sum_{j=1, N_p} C_{ij} p^j - e^i, \quad i = 1, N_c.$$

Chercher à minimiser la fonction-coût revient à chercher les points critiques de la différentielle dQ dans $\Omega = \{p \in R^{N_p}, \varphi^i(p) = 0, i = 1, \dots, N_c\}$. Le problème à résoudre est un problème classique d'optimisation sous contraintes.

II.5.5 La méthode de Newton sans contraintes d'égalité

Nous avons adopté la méthode directe de Gauss-Newton, puis nous faisons des corrections successives sur le modèle solution trouvé par résolution du système.

Problème P

Minimiser une fonctionnelle quadratique à N_p variables s'écrivant sous la forme

$$\tilde{Q}(p) = \frac{1}{2} p^T H p + b^T p + c.$$

Cette fonction a pour dérivée

$$\text{grad}(\tilde{Q}(p)) = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial p} = H p + b.$$

On suppose l'existence d'un minimum p^* pour la fonction \tilde{Q} et p_0 un modèle quelconque initial de paramètres. On a la relation

$$\text{grad}(\tilde{Q}(p^*)) - \text{grad}(\tilde{Q}(p_0)) = H(p^* - p_0),$$

et de plus $\text{grad}(\tilde{Q}(p^*)) = 0$. D'où

$$H(p^* - p_0) = -\text{grad}(\tilde{Q}(p_0)),$$

le vecteur $-H^{-1} \text{grad}(\tilde{Q}(p_0))$ constitue une direction de descente du modèle p_0 au modèle optimal p^* pour la fonction-coût \tilde{Q} qui est quadratique. Il faut dans ce cas résoudre le système linéaire suivant

$$H_k(p_{k+1} - p_k) = -J_k^T(f(p_k) - d_{obs})$$

et itérer jusqu'à convergence de la solution.

II.6 La méthode de Gauss-Newton avec contraintes d'égalité

Pour résoudre le problème avec contraintes d'égalité, le théorème suivant nous donne une démarche pour trouver l'extrémum relatif.

Théorème

Soit \mathcal{O} un ouvert de R^{N_p} , soient $\varphi_i : \mathcal{O} \rightarrow R, 1 \leq i \leq N_c$, des fonctions de classe C^1 sur \mathcal{O} et soit p_s un point de l'ensemble \mathcal{O} en lequel les dérivées $d\varphi_i(p_s) \in \mathcal{L}(R^{N_p}, R), 1 \leq i \leq N_c$ sont linéairement indépendantes.

Soit $Q : \mathcal{O} \rightarrow R$ une fonctionnelle différentiable en p_s , si la fonction Q admet en p_s un extrémum relatif par rapport à l'ensemble \mathcal{O} , il existe N_c nombres $\lambda_i(p_s), 1 \leq i \leq N_c$ définis de façon unique tels que

$$dQ_{p_s} + \lambda_1(p_s) d\varphi_1(p_s) + \dots + \lambda_{N_c}(p_s) d\varphi_{N_c}(p_s) = 0 \quad (1)$$

La démonstration de ce théorème est dans (Ciarlet, [1982]).

Appliquons le théorème à notre cas, l'équation (1) s'écrit

$$dQ(p_s) + \sum_{i=1}^{N_c} \lambda_i(p_s) d\varphi_i(p_s) = 0,$$

où p_s est l'ensemble des paramètres solution. Si on applique cette équation au problème linéarisé, on a

$$d\tilde{Q} = A p - b,$$

où $d\tilde{Q}$ est la fonction-coût linéarisé e autour d'un point $p_0, A = J_{p_0}^T \cdot J_{p_0}$ le hessien, J_{p_0} la matrice jacobienne, b le gradient $b = J_{p_0}^T (J_{p_0} + d_s - f(p_0))$.

Nous pouvons vérifier les hypothèses du théorème sur le problème linéarisé. Les contraintes étant des fonctions affines, elles sont de classe C_1 et leurs différentielles sont des applications constantes et non nulles. Elles sont linéairement indépendantes. La fonction $d\tilde{Q}$ est quadratique et dérivable. Nous avons les bonnes hypothèses pour appliquer le théorème de l'extrémum relatif au problème linéarisé.

Finalement, la recherche du point critique p_s revient à résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned} d\tilde{Q}(p) + \sum_{i=1, N_c} \lambda_i(p) d\varphi_i(p) &= 0 \\ \varphi^1(p) &= 0 \\ &\vdots \\ \varphi^{N_c}(p) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Introduisons $V \in R^{N_p+N_c}$ tel que $V = (p^1, p^2, \dots, p^{N_p}, \lambda_1, \dots, \lambda_{N_c})^T$, les λ_i sont les multiplicateurs de Lagrange.

L'écriture matricielle de l'équation (1) est

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} J_{p_0}^T & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} J_{p_0}^T (J_{p_0} + d_s - f(p_0)) \\ e \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} J_{p_0}^T & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p - p_0 \\ \lambda - \lambda_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} J_{p_0}^T (J_{p_0} + d_s - f(p_0)) - C^T \lambda_0 \\ e - C p_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Nous avons supposé l'existence et l'unicité d'un vecteur p_s de R^{N_p} minimisant la fonction-coût et vérifiant les contraintes. Le théorème de condition nécessaire d'extremum relatif nous assure l'unicité des λ_i . Dès lors que nous avons choisi le point p_0 proche de p_s , nous pouvons conclure que l'équation (2) a une solution unique. Cela signifie que la matrice

$$\begin{pmatrix} J_{p_0}^T J_{p_0} & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible, que ses valeurs propres sont strictement positives.

La résolution du système linéaire nous permet d'obtenir un couple solution $V_s = (p_s, \lambda_s)$ à partir duquel nous pouvons extraire p_s solution du problème de minimisation sous contraintes. L'écriture de ce système linéaire a été obtenu par linéarisation de la fonction Q autour d'un point p_0 qui doit être voisin de la solution. Nous allons procéder par itérations en utilisant la méthode de Gauss-Newton.

Soit $V = \begin{pmatrix} p \\ \lambda \end{pmatrix}$ un vecteur de dimension $R^{N_p+N_c}$ et F une fonction de $R^{N_p+N_c} \rightarrow R^{N_p+N_c}$

$$F(V) = \begin{pmatrix} J_p^T (f(p) - d_s) + C^T \lambda \\ e - Cp \end{pmatrix}.$$

Rechercher $V_s = (p_s, \lambda_s)$ tel que $F(V_s) = 0$ revient à trouver p_s et λ_s tels que le système (2) soit vérifié. On a

$$dF(V) = \begin{pmatrix} J_p^T & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix}.$$

Si à l'étape ($k=1$), nous choisissons un point p_k (le modèle initial) dans un voisinage de la solution, on peut supposer que les valeurs propres de la matrice sont non nulles, dont que la matrice est inversible. Alors, la méthode converge. Ainsi à toutes les étapes suivantes la matrice sera inversible. La résolution de l'équation (2) par itération à partir d'un p_k nous fournit p_{k-1} .

Soit $F : R^{N_p+N_c} \rightarrow \mathcal{L}(R^{N_p+N_c}, R)$ une fonction de classe C^1 . Si dF est inversible en tout point, alors la suite V_k définie par

$$DF(V_{k+1} - V_k) = -F(V_k)$$

converge vers V_s , solution de l'équation $F(V) = 0$.

L'équation (2) peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} J_{p_k}^T & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{k+1} - p_k \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_{p_k}^T (f(p_k) - d_s) \\ e - Cp_k \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, on n'introduit pas dans le calcul les λ_i obtenus lors de l'itération précédente.

Posant $H_{p_k} = J_{p_k}^T J_{p_k}$, $G_{p_k} = J_{p_k}^T (f(p_k) - d_s)$, $\delta p_{k+1} = p_{k+1} - p_k$, nous obtenons finalement

$$\begin{pmatrix} H_{p_k} & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta p_{k+1} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_{p_k} \\ e - Cp_k \end{pmatrix}.$$

L'optimisation revient finalement à la résolution de ce système linéaire. Lorsque le programme a convergé, nous obtenons une solution dans l'espace des paramètres de splines, que nous pouvons analyser, visualiser, corriger.

La composition des paramètres de splines avec la matrice des fonctions de base nous donne un ensemble de points $\{M_k = (x_k, y_k, z_k), k = 1, N_u N_v N_w\}$ qui décrivent le feuilletage déplié (dans le cas 3D).

Annexe 1 : algorithme de Levenberg-Marquardt

Pour améliorer la convergence, nous détaillons dans ce paragraphe l'algorithme de Levenberg-Marquardt (Scales, [1985]) qui s'applique à des problèmes non linéaires non contraints. Le minimum de la fonction-coût globale \tilde{Q} est atteint par corrections successives d'une valeur initiale. A chaque pas, le problème est approché par un développement de Taylor à l'ordre 2,

$$\tilde{Q}(p + \delta p) = \tilde{Q}(p) + \delta p^T \delta \tilde{Q} + \frac{1}{2} \delta p^T \delta^2 \tilde{Q} \delta p$$

avec $\delta \tilde{Q}$ qui est le gradient de \tilde{Q} en p et $\delta^2 \tilde{Q}$ est la matrice hessienne de C avec $\delta^2 \tilde{Q} = (J^T J)$, J étant la jacobienne de la fonctionnelle \tilde{Q} . Cette approximation de la matrice hessienne par $J^T J$ est exacte dans les cas linéaires, valable dans les cas faiblement non linéaires et plus ou moins hasardeuse dans les autres cas. Pour trouver l'extrémum, on dérive $\tilde{Q}(p + \delta p)$ et on l'égalise à zéro.

$$\frac{\partial (\tilde{Q}(p + \delta p))}{\partial (\delta p)} = 0 = \delta \tilde{Q} + \delta^2 \tilde{Q} \delta p.$$

Soit matriciellement

$$\delta^2 \tilde{Q}(p) \delta p = -\delta \tilde{Q}(p).$$

Ce système instable dans les cas non linéaires, est régularisé par l'ajout d'un terme sur la diagonale de la hessienne

$$(\delta^2 C(p) + \mu I) \delta p = -\delta C(p)$$

où I est la matrice identité, ce qui revient à minimiser la fonction

$$\tilde{Q}(p) = \tilde{Q}(p) + \mu (\delta p)^T (\delta p).$$

Le coefficient μ doit permettre à la matrice $(\delta^2 \tilde{Q}(p) + \mu I)$ d'être définie positive. Cette méthode est un compromis entre la méthode de Gauss-Newton ($\mu \rightarrow 0$) et de plus grande pente ($\mu \rightarrow \infty$). μ est géré de la façon suivante

1. si une itération est efficace (la valeur du gradient diminue), alors μ est diminué et tend vers zéro.
2. sinon μ est augmenté, on ne tient pas compte du résultat de cette itération mais on essaie d'améliorer la stabilité en augmentant le poids de la diagonale de la hessienne (Fig. 2).

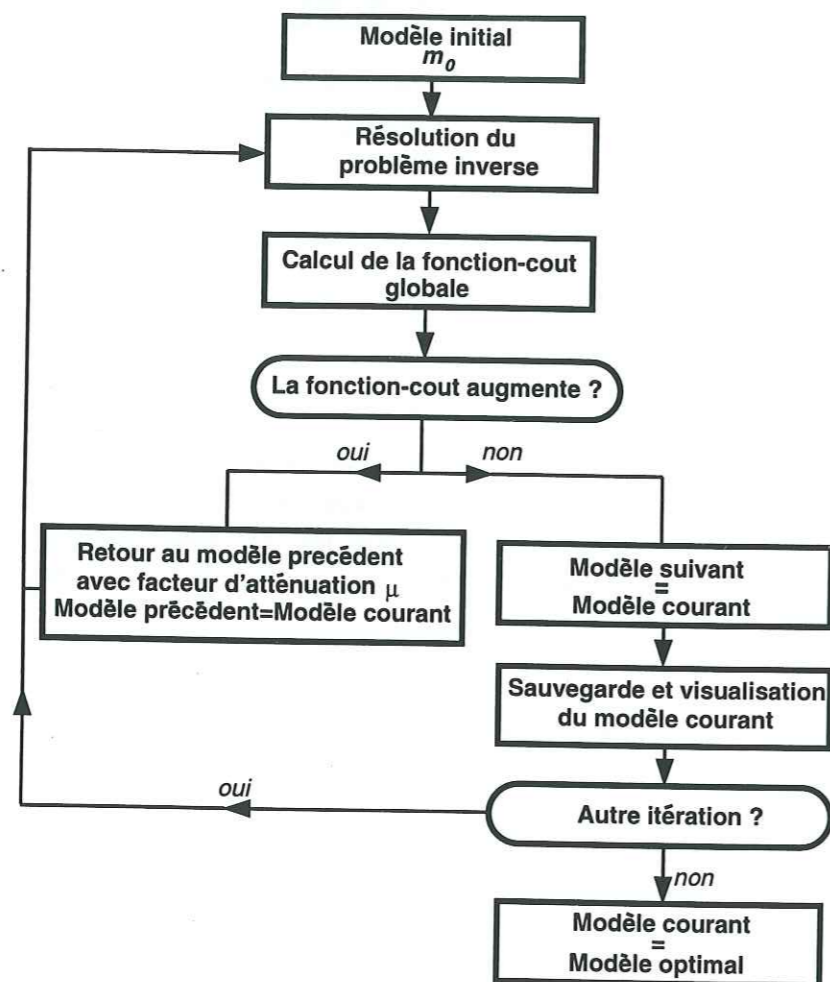


Figure 2 Algorithme de Levenberg-Marquardt.

Chapitre III

Modélisation du problème fonctionnel dans $H^2(U, R^3)$

Dans ce chapitre, nous montrons que le problème d'approximation d'une surface par minimisation des dérivées secondes est un problème bien posé qui admet une et une unique solution. Nous faisons d'abord quelques rappels d'analyse fonctionnelle. Puis, nous rappelons le problème physique de minimisation. Nous montrons par application du théorème de Lax-Milgram que le problème est bien posé. Enfin, nous montrons sur des exemples synthétiques que la surface solution est liée au choix du domaine de coordonnées curvilignes.

III.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1 Norme

Soit H un espace vectoriel. Une norme sur H est une application de H vers R^+ qui à un vecteur X de H associe un nombre positif ou nul noté $\|X\|$ (norme de X), cette application ayant les propriétés suivantes:

1. $\|X\| = 0 \iff X = 0, \forall X,$
2. $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|, \forall X \in H, \forall \lambda \in R,$
3. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|, \forall X, Y \in H.$

Définition 1.2 Suite de Cauchy dans un espace normé

On dit qu'une suite $\{x_n\}_{n=0,1,\dots}$ d'éléments d'un espace normé est une suite de Cauchy (ou vérifie la condition de Cauchy) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \left. \begin{array}{l} n > N \\ m > N \end{array} \right\} \implies \|(x_n, x_m)\| < \varepsilon,$$

L'intérêt de la condition de Cauchy est qu'elle ne porte que sur les termes de la suite et n'oblige pas à introduire son éventuelle limite.

Définition 1.3 Espace complet

On dit qu'un espace normé H est complet si toute suite de Cauchy d'éléments de H converge dans H .

Définition 1.4 Espace de Hilbert

Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire sur H est une application qui à chaque couple X, Y d'éléments de H fait correspondre un nombre réel noté $\langle X, Y \rangle$, cette application ayant les propriétés suivantes:

1. Symétrie: $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle, \forall X, Y \in H,$
2. Linéarité: $\langle X_1 + X_2, Y \rangle = \langle X_1, Y \rangle + \langle X_2, Y \rangle, \forall X_1, X_2, Y \in H,$
 $\langle \lambda X, Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle, \forall \lambda \in R, \forall X, Y \in H,$
3. Positivité: $\langle X, X \rangle \geq 0, \forall X \in H,$
 $\langle X, X \rangle = 0 \iff X = 0.$

Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire s'appelle un *espace euclidien* ou *préhilbertien*. L'application qui à un élément X de H fait correspondre le nombre réel positif ou nul $\sqrt{\langle X, X \rangle}$, noté $\|X\|$, définit une norme sur l'espace vectoriel H . Si H muni de cette norme est complet, on dit que H a une structure d'espace de Hilbert. Ce sont des espaces très intéressants car nous retrouvons à partir du produit scalaire les notions fondamentales de géométrie (angles, perpendiculaires, orthogonalité, bases orthonormées, ...).

Lemme 1.5 Forme linéaire et continue sur un espace de Hilbert H

Soit H un espace de Hilbert, de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme $\| \cdot \|_H$. Soit $L, L : v \in H \rightarrow L(v) \in R$ une forme linéaire sur H . Elle est continue si et seulement si

$$\exists c \in R^+, \forall v \in H, |L(v)| \leq c \|v\|_H.$$

Définition 1.6 Coercivité

Nous dirons qu'une forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ définie sur un espace de Hilbert H est coercive si

$$\exists M > 0, \forall v \in H, a(v, v) \geq M \|v\|_H^2.$$

Définition 1.7 Espace $L^2(U, R^3)$

Soit U un ouvert quelconque non vide de R^2 . Soit i un doublet $\{i_1, i_2\}$ d'entiers positifs, on pose

$$|i| = \sum_{k=1,2} i_k, \quad D^i \phi = \frac{\partial^{i_1+i_2} \phi}{\partial^{i_1} x_1 \partial^{i_2} x_2}.$$

On note $L^2(U, R^3)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur U :

$$L^2(U, R^3) = \left\{ f : U \rightarrow R^3 \text{ mesurable sur } U \text{ telle que } \int_U \langle f(u), f(u) \rangle dU < \infty \right\}.$$

On munit $L^2(U, R^3)$ du produit scalaire habituel:

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_U \langle f(u), g(u) \rangle dU.$$

La norme $\| \cdot \|_{L^2}$ sur $L^2(U, R^3)$ associée au produit scalaire a pour expression

$$\|f\|_{L^2(U, R^3)} = \|f\|_{L^2} = \left(\int_U \langle f(u), f(u) \rangle dU \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.8 Espace $H^m(U, R^3)$

On définit l'espace de Hilbert

$$H^m(U, R^3) = \{ f \in L^2(U, R^3) / \forall |i| \leq m, D^i f \in L^2(U, R^3), \forall m \geq 1 \}.$$

Il est muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{H^m} = \sum_{i=0, m} \int_U \langle D^i f(u), D^i g(u) \rangle dU.$$

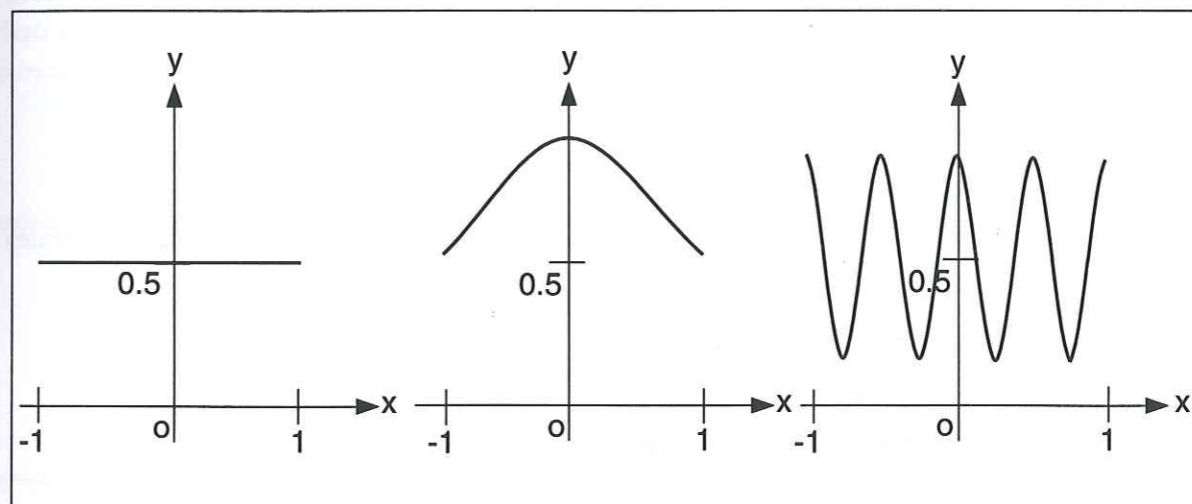
La norme associée est donnée par

$$\|f\|_{H^m(U, R^3)} = \|f\|_{H^m} = \left(\sum_{0 \leq |i| \leq m} \|D^i f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

III.1.9 Influence du choix de la norme

Nous présentons sur des exemples simples l'importance du choix d'une norme. Considérons pour cela trois fonctions $f_1, f_2, f_3 \in C^2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ d'équation respective

$$\begin{aligned} f_1 &= 0.5 \\ f_2 &= 0.5 + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ f_3 &= 0.5 + \frac{1}{3} \cos(4\pi x) \end{aligned}$$



	f_0	f_1	f_2	$f_1 - f_0$	$f_2 - f_0$	$f_2 - f_1$
$\ \cdot \ _{L^2}$	0.5	1.03	0.61	0.11	0.11	0.226
$\ \cdot \ _{H^2}$	0.5	1.98	2788.	1.06	2788.	2791.

Figure 1 Représentation des variations des fonctions f_1, f_2, f_3 sur l'intervalle $[-1, 1]$. Rappels: $\|f\|_{L^2} = \int_a^b (f(x))^2 dx$, $\|f\|_{H^1} = \int_a^b (f(x))^2 + (f'(x))^2 dx$, f' dérivée première de f par rapport à la variable x .

On peut lire sur le tableau 1 qu'en norme H^1 , la fonction f_1 est plus proche de f_0 que f_2 , alors qu'en norme L^2 , f_1 et f_2 sont aussi proches de f_0 .

Considérons un autre exemple. Soit une suite de fonctions f_n ,

$$f_n(x) = a_n \sin(\pi n x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^1 (f_n(x))^2 dx = a_n^2,$$

$$\|f_n\|_{H^1}^2 = \int_{-1}^1 (f_n(x))^2 + (f_n'(x))^2 dx = a_n^2 + \frac{a_n^2 n^2 \pi^2}{2}.$$

Si $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{H^1} = \infty.$$

Définition 1.10 Espace $C^k(U, R^3)$

On définit $C^k(U, R^3)$, avec k entier naturel, comme l'espace des fonctions de $U \rightarrow R^3$, k -fois différentiable. On appelle $C^k(\bar{U}, R^3)$ l'espace des fonctions $f \in C^k(U, R^3)$ prolongeables, ainsi que toutes les dérivées partielles d'ordre $|\alpha| \leq k$ sur \bar{U} , muni de la norme *sup*

$$\|f\|_{C^k} = \sup_{x \in \bar{U}} \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|.$$

Inclusions de Sobolev

Si U est un ouvert borné, connexe de R^2 , non vide, à frontière lipschitzienne (i.e. les pentes des tangentes de f sont bornées), alors on a l'injection continue suivante

$$H^2(U, R) \subset C^0(\bar{U}, R), \quad H^2(U, R^3) \subset C^0(\bar{U}, R^3).$$

III.2 Application du théorème de Lax-Milgram

Le modèle m que l'on recherche est une surface régulière, qui est l'image par la représentation paramétrique ϕ d'un ouvert U de R^3 . Les données observées ϕ_{obs}^i sont les valeurs en certains points de la paramétrisation. Le problème d'optimisation (P) associé à ce problème peut se formuler de la façon suivante.

III.2.1 Formulation variationnelle du problème P

Problème P

Trouver ϕ

$$\phi \in H^2(U, R^3), \text{ telle que } J(\phi) = \inf_{\varphi \in H^2(U, R^3)} J(\varphi),$$

où U est un ouvert borné de l'espace vectoriel R^2 et $J : H^2(U, R^3) \rightarrow R$ une fonction donnée. On va caractériser la solution éventuelle du problème (P) , c'est à dire énoncer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un élément φ de $H^2(U, R^3)$ soit solution du problème (P) .

Précisons et définissons le problème (P') dans le contexte qui nous intéresse:

Problème P'

Soit U un ouvert borné de R^2 , soient $\{a_1, a_2, \dots, a_P\}$ P points de U , dont au moins 3 sont non alignés et $\{\varphi_{obs}^1, \varphi_{obs}^2, \dots, \varphi_{obs}^P\}$ P points de R^3 . Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ des poids arbitraires (constantes réelles). Soit $J : H^2(U, R^3) \rightarrow R$, la fonctionnelle définie par

$$J(\varphi) = \varepsilon_1^2 \sum_{i=1, P} \|\varphi(a_i) - \varphi_{obs}^i\|_{R^3}^2 + \varepsilon_2^2 \int_U \langle D^2 \varphi, D^2 \varphi \rangle dU, \quad \forall \varphi \in H^2(U, R^3),$$

Trouver $\phi \in H^2(U, R^3)$ telle que

$$J(\phi) = \inf_{\varphi \in H^2(U, R^3)} J(\varphi),$$

On va montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (P') en appliquant le théorème de Lax-Milgram.

Théorème III.2.2 Théorème de Lax-Milgram

Soit H un espace de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur H . $L(\cdot)$ une forme linéaire et continue sur H . Alors le problème variationnel suivant: trouver $u \in H$ tel que

$$\forall v \in H, a(u, v) = L(v)$$

admet une unique solution.

De plus, si $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2}a(u, u) - \langle L, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \right\}.$$

C'est cette formulation que nous allons utiliser pour montrer l'existence et l'unicité de la solution.

III.3 Existence et unicité dans $H^2(U, R^3)$

Nous prenons $H = H^2(U, R^3)$. Posons $\varphi(a_i) = \varphi^i$,

$$a(\varphi, \varphi) = 2\varepsilon_1^2 \sum_{i=1, P} \|\varphi^i\|_{R^3}^2 + 2\varepsilon_2^2 \int_U \langle D^2 \varphi, D^2 \varphi \rangle dU,$$

$$b(\varphi) = \varepsilon_1^2 \sum_{i=1, P} \left(2 \langle \varphi^i, \varphi_{obs}^i \rangle - \|\varphi_{obs}^i\|_{R^3}^2 \right).$$

25 AOÛT 2003
 Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
 MAISON DES GEOSCIENCES
 DOCUMENTATION
 F. 38041 B.P. 53
 Tél. 04 76 63 54 21 - Fax 04 76 51 40 58
 Mail: phatour@ujf-grenoble.fr

On a

$$\begin{aligned} J(\varphi) &= \frac{1}{2}a(\varphi, \varphi) - b(\varphi) \\ &= \varepsilon_1^2 \sum_{i=1, P} \|\varphi^i\|_{R^3}^2 + \varepsilon_2^2 \int_U \langle D^2\varphi, D^2\varphi \rangle dU - 2\varepsilon_1^2 \sum_{i=1, P} \langle \varphi^i, \varphi_{obs}^i \rangle + \varepsilon_1^2 \sum_{i=1, P} \|\varphi_{obs}^i\|_{R^3}^2 \\ &= \varepsilon_2^2 \int_U \langle D^2\varphi, D^2\varphi \rangle dU + \varepsilon_1^2 \sum_{i=1, P} \|\varphi^i - \varphi_{obs}^i\|_{R^3}^2. \end{aligned}$$

Chercher le minimum de $J(\varphi)$ est équivalent à minimiser $\tilde{J}(\varphi)$ avec

$$\tilde{J}(\varphi) = J(\varphi) - \varepsilon_1^2 \sum_{i=1, P} \langle \varphi_{obs}^i, \varphi_{obs}^i \rangle \text{ car } \varepsilon_1^2 \sum_{i=1, P} (\varphi_{obs}^i) = Cste.$$

Vérifions les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

III.3.1 Bilinéarité, continuité, coercivité de $a(., .)$

Posons

$$a(\varphi_1, \varphi_2) = 2\varepsilon_1^2 \sum \varphi_1^i \varphi_2^i + 2\varepsilon_2^2 \int_U (D^2\varphi_1 D^2\varphi_2) dU, \quad \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in H.$$

Bilinéarité

Les relations qui suivent sont évidentes,

$$\begin{aligned} \forall (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in H, a(\varphi_1 + \varphi_2, \varphi_3) &= a(\varphi_1, \varphi_3) + a(\varphi_2, \varphi_3), \\ \forall (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in H, a(\varphi_3, \varphi_1 + \varphi_2) &= a(\varphi_3, \varphi_1) + a(\varphi_3, \varphi_2), \\ \forall \lambda \in R, \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in H, a(\lambda\varphi_1, \varphi_2) &= \lambda.a(\varphi_1, \varphi_2), \\ \forall \lambda \in R, \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in H, a(\varphi_1, \lambda\varphi_2) &= \lambda.a(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

D'où $a(., .)$ est bilinéaire.

Continuité et coercivité

Pour démontrer ces deux propriétés, nous aurons besoin du théorème suivant.

Théorème III.3.1.1.1 Équivalence des normes: cas tridimensionnel

Soit U un domaine borné de R^2 , soient $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_N\}$ ($N \geq 3$) N points de U dont au moins trois sont non alignés. Alors il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que

$$\forall v \in H^2(U, R^3) \quad c_1 \|v\|_{H^2} \leq \left[\|D^2v\|_{L^2} + \sum_{i=1, N} |v(a_i)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq c_2 \|v\|_{H^2}.$$

La démonstration de ce théorème se fait en plusieurs étapes et utilise d'abord un résultat classique (Nečas, [1967]):

Proposition 3.1.1.2 Équivalence des normes: cas unidimensionnel

Soit U un intervalle borné de R , soit P_1 l'espace des polynômes de degré ≤ 1 , soient f_i des fonctions définies sur $H^2(U, R)$ telles que pour tout $w \in P_1$, on ait

$$\sum_{i=1, l} |f_i(w)|^2 = 0 \iff w = 0.$$

Alors il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que

$$c_1 \|v\|_{H^2} \leq \left[\|D^2v\|_{L^2} + \sum_{i=1, l} |f_i(v)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq c_2 \|v\|_{H^2}, \quad \forall v \in H^2(U, R).$$

On a d'autre part le lemme suivant:

Lemme III.3.1.1.3

Soient $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_N\}$ ($N \geq 3$) N points de U dont au moins trois sont non alignés, soient $L_i, i = 1, N$ formes linéaires définies sur $H^2(U, R)$ par

$$L_i(f) = f(a_i), \quad \forall f \in H^2(U, R).$$

Soit v un polynôme de degré ≤ 1 sur H . Alors on a

$$\sum_{i=1, N} |L_i(v)|^2 = 0 \iff v = 0. \quad (1)$$

Démonstration du lemme III.3.1.1.3 Démontrons l'équivalence:

⇒

L'expression $L_i(f)$ a un sens car on suppose f continue puisque $H^2(U, R) \subset C^0(\bar{U}, R)$. En effet, $f \in H^2(U, R)$, et $H^2(U, R) \subset C^0(\bar{U}, R)$. Si $\sum_{i=1, N} |L_i(v)|^2 = 0$ alors $\forall i$, on a $L_i(v) = v(a_i) = 0$.

Si v est un polynôme de degré 1 sur U , v peut s'écrire $v(u_1, u_2) = Au_1 + Bu_2 + C$ avec $A, B, C \in R$. Soient $\{a_1, a_2, a_3\}$, 3 points non alignés, alors on a pour chacun d'eux

$$L_i(v) = v(a_i) = Aa_i^1 + Ba_i^2 + C = 0, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Pour les trois points, on obtient un système linéaire qui admet une solution indépendamment de la solution triviale ($v = 0$), si le déterminant associé s'annule.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Or, si les trois sont non alignés, ce déterminant ne peut s'annuler. D'où

$$\sum_{i=1, N} |L_i(v)|^2 = 0 \implies v = 0.$$

⇐ La réciproque est immédiate car $L_i(f)$ est linéaire.

Fin de la démonstration du théorème III.3.1.1.1

L'expression $v(a_i)$ a un sens car

$$v \in H^2(U, R^3), \text{ et } H^2(U, R^3) \subset C^0(\bar{U}, R^3).$$

Soient $\{a_i\}$, $i = 1, \dots, N$, ($N \geq 3$), des points de U dont au moins trois sont non alignés. Posons

$$\forall v \in H^2(U, R^3), v(u_1, u_2) = (v^1(u_1, u_2), v^2(u_1, u_2), v^3(u_1, u_2))$$

avec $v^i(u_1, u_2) \in R$. Considérons l'application linéaire $L_i^k(v)$ de $H^2(U, R)$ dans R telle que

$$L_i^k(v) = v^k(a_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, 2, 3.$$

Nous avons montré que

$$\sum |L_i^k(v)|^2 = 0 \iff v = 0, \quad v \in P_1, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\text{donc, } \sum_{i=1, N} \sum_{k=1, 3} |L_i^k(v)|^2 = 0 \iff v = 0.$$

Considérons l'application linéaire

$$L_i : H^2(U, R^3) \longrightarrow R^3, \quad i = 1, \dots, N$$

telle que $L_i = (L_i^1, L_i^2, L_i^3)$, alors on a

$$\sum_{i=1, N} |L_i(v)|^2 = 0 \iff v = 0, \quad v \in P_1.$$

Le théorème III.3.1.1.1 nous donne l'existence de deux constantes c_1, c_2 positives telles que

$$\forall v \in H^2(U, R^3), \quad c_1 \|v\|_{H^2} \leq \left[\|D^2 v\|_{L^2} + \sum_{i=1, N} |v(a_i)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq c_2 \|v\|_{H^2}.$$

La continuité et la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ sont une conséquence directe du théorème.

III.3.2 Linéarité et continuité de b

Linéarité

Posons

$$\forall \varphi \in H^2(U, R^3), \quad b(\varphi) = \varepsilon_1^2 \sum_{i=1, P} \langle 2\varphi^i, \varphi_{obs}^i \rangle,$$

les relations qui suivent sont évidentes,

$$\begin{aligned} \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in H^2(U, R^3), \quad b(\varphi_1 + \varphi_2) &= b(\varphi_1) + b(\varphi_2), \\ \forall \lambda \in R, \forall \varphi \in H^2(U, R^3) \quad b(\lambda \cdot \varphi) &= \lambda \cdot b(\varphi). \end{aligned}$$

Continuité

Vérifions que b est une application continue sur $H^2(U, R^3)$. C'est à dire que:

$$\exists M > 0, \quad \forall \varphi \in H^2(U, R^3), \quad |b(\varphi)| \leq M \|\varphi\|_{H^2(U, R^3)}.$$

On a

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in H^2(U, R^3), \quad |b(\varphi)| &= \left| 2\varepsilon_1^2 \sum_{i=1, P} \langle \varphi^i, \varphi_{obs}^i \rangle \right| \\ &\leq 2\varepsilon_1^2 \sup_i |\varphi_{obs}^i| \sum_{i=1, P} |\varphi^i| \\ &\leq 2\varepsilon_1^2 \sup_i (\varphi_{obs}^i) \|\varphi\|_{H^2(U, R^3)}. \end{aligned}$$

D'où la continuité de b .

On a vérifié les différentes hypothèses du théorème de Lax-Milgram, on a donc l'existence et l'unicité de la solution pour le problème (P') .

III.4 Exemples synthétiques

Le problème en dérivées secondes est bien posé pour une paramétrisation fixée. Nous allons voir sur des exemples synthétiques que changer de domaine U revient à modifier la surface S car on est amené à minimiser une autre fonctionnelle. Cela nous amenera à conclure que notre solution dépend de la paramétrisation choisie au départ ce que nous ne voulons pas. Considérons deux domaines U_1, U_2 de coordonnées curvilignes tel qu'il existe un difféomorphisme g de U_1 à U_2 (Fig. 2).

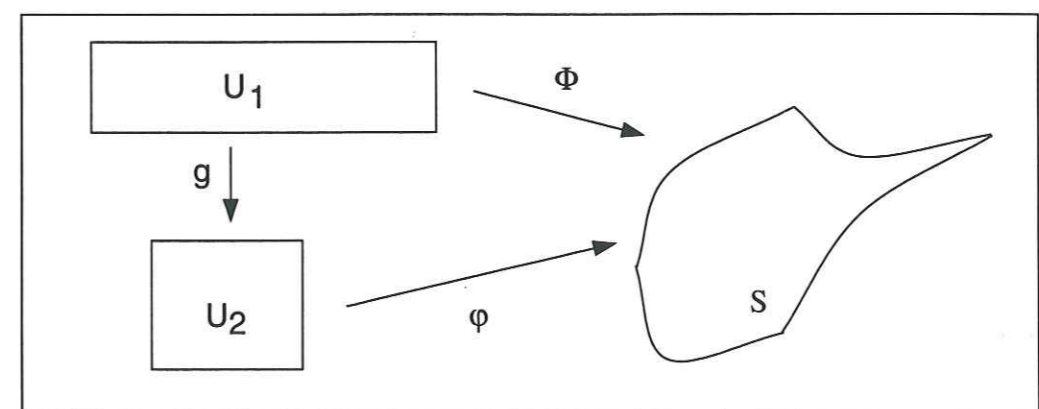


Figure 2 Représentation des domaines de coordonnées curvilignes U_1, U_2 .

Par définition, on a $\phi(U_1) = \phi(U_2)$. Mais en général, $D^2\phi \neq D^2\phi$ n'implique pas

$$\int_{U_1} (D^2\phi) dU_1 \neq \int_{U_2} (D^2\phi) dU_2.$$

En effet, on a

$$\int_{U_1} (D^2\phi)^2 dU_1 = \int_{U_2} (D^2\phi)^2 |Jg| dU_2,$$

où $|Jg|$ est le jacobien de g (déterminant de dg). Ainsi, on résout un problème différent de minimisation pour U_1 et U_2 .

Nous présentons différents exemples numériques pour trois domaines différents U_1, U_2, U_3 de coordonnées curvilignes (Fig. 2) et nous comparons les résultats en optimisation. Nous avons considéré des exemples particuliers qui vérifient sur le modèle solution

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v} \right\rangle &\simeq 0, \\ \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial u} \right\rangle &\simeq \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial v}, \frac{\partial\phi}{\partial v} \right\rangle. \end{aligned}$$

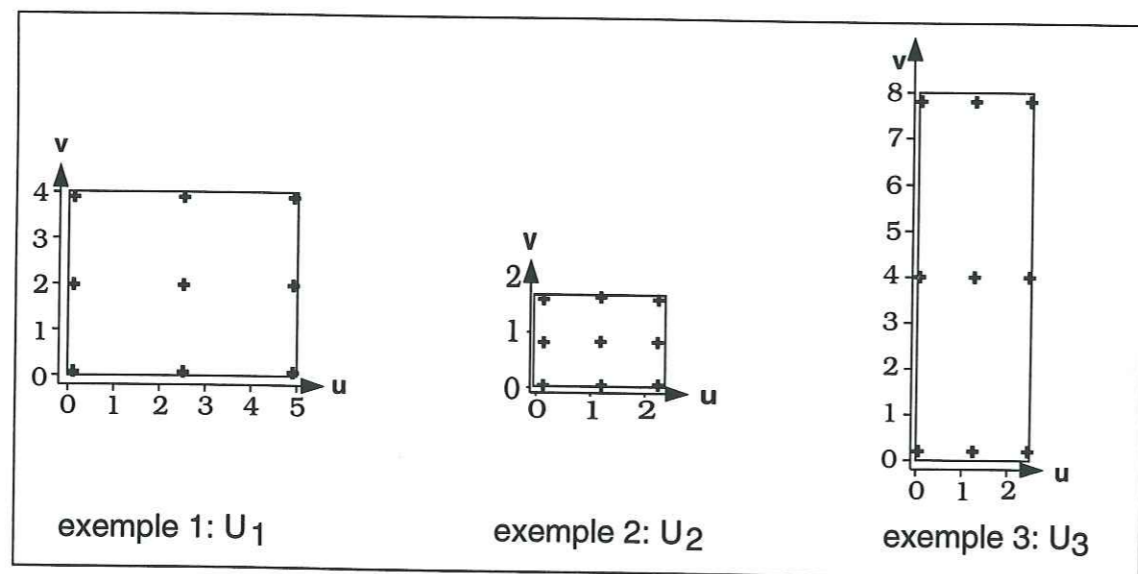


Figure 3 Représentation des différents domaines de coordonnées curvilignes. Les croix représentent les coordonnées curvilignes des points de la surface qui sont associés aux points d'observation.

Pour vérifier l'hypothèse (2), on a calculé l'espérance et la variance avec

$$\begin{aligned} \text{espérance} = E &= \frac{1}{N_u N_v} \sum_{\substack{i=1, N_u \\ j=1, N_v}} X_{ij} = \bar{X}, \\ \text{variance} = V &= \overline{X^2} - (\bar{X})^2. \end{aligned}$$

$N_u N_v$ est le nombre de points de discrétisation dans les directions u et v , X_{ij} la variable au point u_i, v_j .

Exemple 1	$X = \left\ \frac{\partial\phi}{\partial u} \right\ $	$X = \left\ \frac{\partial\phi}{\partial v} \right\ $	$X = \sqrt{\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v} \right\rangle}$
Modèle initial	1	1	0
Modèle final	E = 1.0184	E = 1.0394	E = 5.29e-03
	V = 0.2076e-03	V = 0.999e-03	V = 0.53635e-03

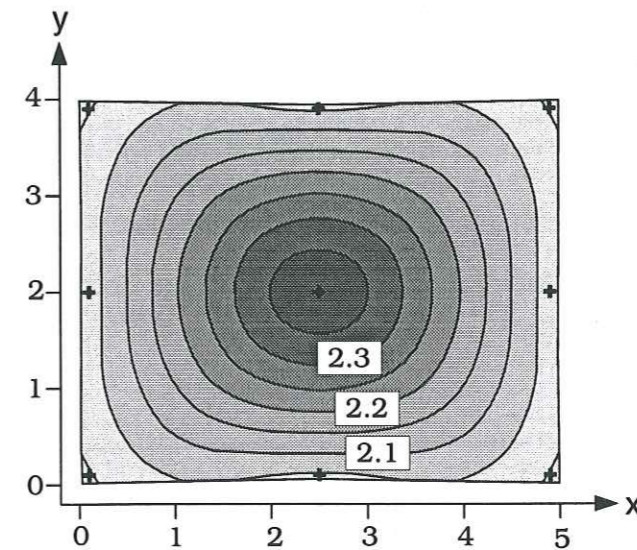


Figure 4 Modèle solution obtenu après optimisation des critères de dérivées secondes et proximité aux points à partir du domaine U_1 . Les croix représentent les coordonnées cartésiennes des points de données.

Dans cet exemple, la paramétrisation est une simple isométrie du domaine U .

Exemple 2	$X = \left\ \frac{\partial\phi}{\partial u} \right\ $	$X = \left\ \frac{\partial\phi}{\partial v} \right\ $	$X = \sqrt{\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v} \right\rangle}$
Modèle initial	2	2	0
Modèle final	E = 2.1993	E = 2.1133	E = 5.83e-03
	V = 0.10922e-01	V = 0.22217e-01	V = 0.57064e-02

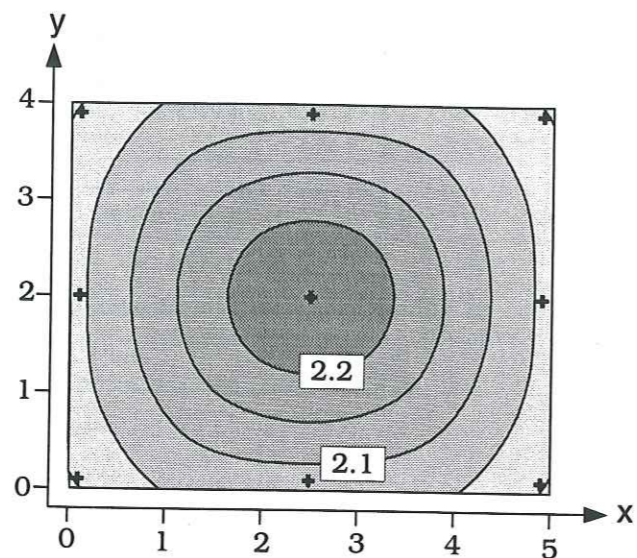


Figure 5 Modèle solution obtenu après optimisation des critères de dérivées secondes et proximité aux points à partir du domaine U_2 . Les croix représentent les coordonnées cartésiennes des points de données.

Dans cet exemple, la paramétrisation introduit un lissage isotrope dans les directions x, y .

Exemple 3	$X = \left\ \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\ $	$X = \left\ \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\ $	$X = \sqrt{\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle}$
Modèle initial	2	0.5	0
Modèle final	$E = 2.0348$	$E = 0.680$	$E = 2.75e-03$
	$V = 0.23218e-01$	$V = 0.28637e-01$	$V = 0.71703e-02$

Dans ce dernier cas, le domaine U ayant perdu ses symétries, on remarque que la surface obtenue par rapport à l'exemple 2 est lissée de façon anisotrope.

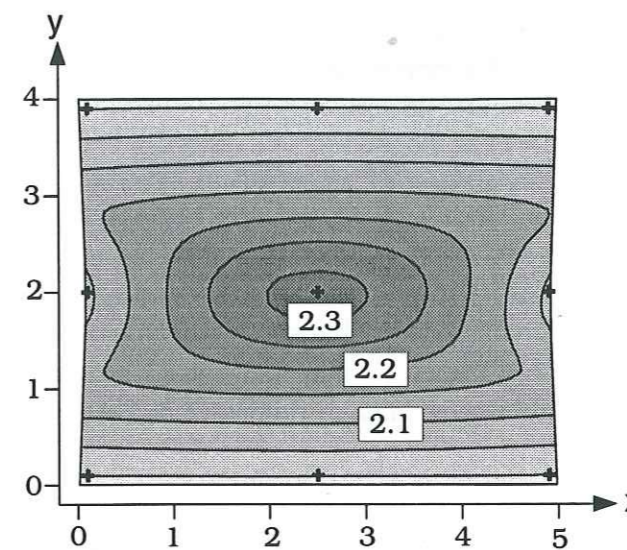


Figure 6 Modèle solution obtenu après optimisation des critères de dérivées secondes et proximité aux points à partir du domaine U_3 . Les croix représentent les coordonnées cartésiennes des points de données.

Remarque: Lien avec les courbures

Ceci est très intéressant. Les expressions des courbures totale et moyenne de la surface solution, et donc aussi de la matrice de courbure C sont simples à évaluer. En effet, on a (réf. Chap.I.2.4)

$$\lambda_T = \frac{LN - M^2}{E^2} = \lambda_1 \lambda_2,$$

$$\lambda_m = \frac{L + N}{2E} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2),$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{L^2 + N^2 + 2M^2}{E^2} = \frac{\langle D^2 \phi, N \rangle^2}{E^2} = \text{Tr}(C^T C),$$

$$\int_S (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) ds = \int_S \frac{\langle D^2 \phi, N \rangle^2}{E^2} ds = \int_S \text{Tr}(C^T C) ds$$

$$= \int_{U_2} \langle D^2 \phi, N \rangle^2 \left(\frac{|J\phi|}{E^2} \right) dU_2$$

$$= \int_{U_1} \langle D^2 \phi, N \rangle^2 \left(\frac{|J\phi|}{E^2} \right) dU_1.$$

Ce cas particulier permet de comparer la projection des dérivées secondes de la surface dans la direction normale N , avec l'expression intrinsèque $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$. Ceci est dû au choix très particulier des différentes paramétrisations.

III.5 Critère aux points de données

Dans la formulation du problème d'optimisation, nous avons introduit une somme discrète $\sum_{i=1, P} (\varphi^i - \varphi_{obs}^i)^2$ en disant que les φ_{obs}^i sont des données observées, et les φ^i les valeurs au point i de la paramétrisation. Les points de données ont une signification géologique.

III.5.1 Les points de lèvres de faille

En sismique 3D, on peut migrer en profondeur des images temps tridimensionnelles si on connaît le champ des vitesses. Le pointé des différents réflecteurs (isochrones de dépôt) forment des surfaces qui sont éventuellement découpés par des failles, qui sont décrites par l'ensemble des lèvres de faille. Les lèvres sur ces horizons sont données par une liste de points.

III.5.2 Point de vue numérique

Nous n'avons pas résolu exactement le problème (P'). Nous avons choisi de projeter le vecteur $\varphi^i - \varphi_{obs}^i$ dans la base associée au plan tangent en chaque point M de la surface. Ceci pourrait engendrer des problèmes dans le traitement de certains autres exemples.

III.5.3 Fonctions-coût

Chaque point d'observation $\varphi_{obs}^i = P_i$ est donné par ses coordonnées cartésiennes $(x_{obs}^i, y_{obs}^i, z_{obs}^i)$ et ses coordonnées curvilignes (u_{obs}^i, v_{obs}^i) . Par souci de simplicité, on a choisi a priori plusieurs points $(x^i, y^i, z^i) = \varphi^i = M_i$ sur la surface (autant que de points d'observation) avec les mêmes coordonnées curvilignes (u_{obs}^i, v_{obs}^i) . Puis, on cherche à minimiser la proximité de M_i à P_i . Pour cela, on a projeté $P_i M_i$ sur la base orthonormée (X_i, Y_i, N_i) , avec X_i, Y_i vecteurs du plan tangent et N_i vecteur normal à la surface. On appelle Q_{Lp} , la fonction-coût lèvre physique,

$$Q_{Lp} = \sum_{i=1, P} \langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, N_i \rangle^2$$

et Q_{La} , la fonction-coût lèvre additionnelle,

$$Q_{La} = \sum_{i=1, P} \langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, X_i \rangle^2 + \langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, Y_i \rangle^2.$$

La projection $(P_i M_i)_\perp$ sur le vecteur normal est assez proche de la distance qui sépare la surface S du point P_i si la distance est beaucoup plus petite que le rayon de courbure de S .

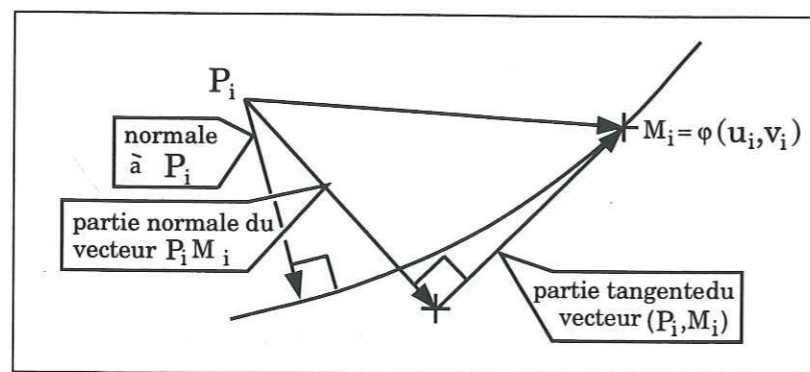


Figure 7 Représentation de la partie normale du vecteur $P_i M_i$ et de la normale à la surface passant par P_i .

III.6 Conclusions

Nous venons de démontrer qu'il existe une et une unique solution pour le problème d'approximation d'une surface par minimisation des dérivées secondes, mais que cette solution dépend du choix de la paramétrisation. Ceci s'explique par le fait que la minimisation par les dérivées secondes n'est pas intrinsèque. Pour remédier à ce problème, nous allons l'aborder d'un point de vue géométrique et non plus fonctionnel dans le chapitre suivant. Nous allons résoudre un problème d'approximation de surface par minimisation d'un critère de courbure, et nous allons montrer que la solution, si elle existe, est indépendante du choix de la paramétrisation.

Annexe 1 : les matrices jacobiennes J_{L_p} et J_{L_a}

Nous allons détailler les matrices jacobiennes J_{L_p}, J_{L_a} qui ont servi à résoudre le problème discret. Nous avons

$$Q_{L_p} = \sum_{i=1, P} \langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, N_i \rangle^2.$$

$$\tilde{Q}_{L_p} = \sum_{i=1, P} \langle \varphi^i(u_i, v_i) - \varphi_{obs}^i, N_i(u_i, v_i) \rangle^2$$

$$= \sum_{i=1, P} (f_{L_p}^T \cdot f_{L_p}).$$

et

$$Q_{L_a} = \sum_{i=1, P} \langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, X_i \rangle^2 + \langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, Y_i \rangle^2.$$

$$\tilde{Q}_{L_a} = \sum_{i=1, P} \langle \varphi^i(u_i, v_i) - \varphi_{obs}^i, X_i(u_i, v_i) \rangle^2 + \langle \varphi^i(u_i, v_i) - \varphi_{obs}^i, Y_i(u_i, v_i) \rangle^2$$

$$= \sum_{i=1, P} (f_{L_a}^X \cdot f_{L_a}^X) + (f_{L_a}^Y \cdot f_{L_a}^Y).$$

La matrice J_{L_p}

C'est une matrice de dimension N_p (N_p nombre de paramètres de splines).

$$\frac{\partial f_{L_p}}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} (\langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, N_i \rangle)$$

$$= \frac{\partial}{\partial p_i} (\langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, N_i \rangle) \langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, N_i \rangle$$

$$= \left(\langle \frac{\partial}{\partial p_i} \varphi^i, N_i \rangle + \langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, \frac{\partial}{\partial p_i} N_i \rangle \right) \langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, N_i \rangle.$$

On a

$$J_{L_p} = \left(\frac{\partial f_{L_p}}{\partial p_k} \right).$$

La matrice J_{L_a}

C'est une matrice de dimension $(2, N_p)$.

$$\frac{\partial f_{L_a}^1}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} (\langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, X_i \rangle)$$

$$= \frac{\partial}{\partial p_i} (\langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, X_i \rangle) \langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, X_i \rangle$$

$$= \left(\langle \frac{\partial}{\partial p_i} \varphi^i, X_i \rangle + \langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, \frac{\partial}{\partial p_i} X_i \rangle \right) \langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, X_i \rangle$$

$$\frac{\partial f_{L_a}^2}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} (\langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, Y_i \rangle)$$

$$= \frac{\partial}{\partial p_i} (\langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, Y_i \rangle) \langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, Y_i \rangle$$

$$= \left(\langle \frac{\partial}{\partial p_i} \varphi^i, Y_i \rangle + \langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, \frac{\partial}{\partial p_i} Y_i \rangle \right) \langle \varphi^i - \varphi_{obs}^i, Y_i \rangle$$

On a

$$J_{L_a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{L_a}^1}{\partial p_k} \\ \frac{\partial f_{L_a}^2}{\partial p_k} \end{pmatrix}.$$

Chapitre IV

Minimisation géométrique

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que l'approximation d'une surface par minimisation des dérivées secondes nous donnent une unique solution mais qu'elle est liée au choix de la paramétrisation, ce qui n'est pas satisfaisant. Dans ce chapitre, nous introduisons la seconde forme fondamentale d'une surface qui est une quantité géométrique intrinsèque. Pour le problème non linéaire, nous avons établi une double inégalité qui montre que si la solution existe, on peut l'encadrer.

IV.1 Motivations

Les difficultés pour l'approximation d'une surface par minimisation des dérivées secondes viennent du choix de la paramétrisation. Il est donc préférable de minimiser une quantité indépendante de la paramétrisation. C'est pour cela que nous avons introduit la seconde forme fondamentale h de la surface. Elle mesure la courbure de la surface et ne tient pas compte du domaine des coordonnées curvilignes U . A priori, notre problème de minimisation (P'') sera modifié et s'écrira comme suit

Problème P''

Soit $Imm(\bar{U}, R^3)$ l'ensemble des immersions de $U \subset R^2 \rightarrow R^3$, soit

$$J : Imm(\bar{U}, R^3) \rightarrow R^3$$

la fonctionnelle définie par

$$J(\psi) = \sum_{i=1, P} \langle \psi^i - \psi_{obs}^i, \psi^i - \psi_{obs}^i \rangle + \int_S \|h\|^2 ds.$$

Trouver $\psi \in Imm(\bar{U}, R^3)$ telle que

$$J(\varphi) = \min_{\psi \in Imm(U, R^3)} J(\psi).$$

Remarque

Si le problème (P'') est de nature géométrique, les techniques développées dans le chapitre précédent ne s'applique évidemment plus. En effet, $Imm(\bar{U}, R^3)$ n'est pas un espace vectoriel. De plus, puisque plusieurs immersions peuvent engendrer la même surface, une éventuelle solution de (P'') ne sera jamais unique. Le but de ce chapitre est de comparer les problèmes (P') et (P'') . Dans le chapitre III, nous avons étudié la norme des dérivées secondes de l'application (cas a). Dans ce chapitre, nous l'avons comparé à celle de la seconde forme fondamentale de la surface engendrée par l'application (cas b), qui est reliée aux courbures de la surface. Les espaces de départ sont différents, l'espace de départ est le domaine des coordonnées curvilignes pour le cas (a), alors que pour le cas (b), l'espace de départ est la surface. En étudiant le cas (a), le point de vue est fonctionnel alors que pour le cas (b), le point de vue est géométrique.

IV.2 Seconde forme fondamentale d'une application

Nous définissons dans un cas simple la seconde forme fondamentale d'une application ((Berger et Gostiaux, [1987]) pour les notions de géométrie riemannienne) et montrons qu'il y a équivalence entre la seconde forme fondamentale d'une application et les dérivées secondes de cette application dans le cas simple où l'espace de départ est R^2 et l'espace d'arrivée R^3 .

IV.2.1 Dérivée directionnelle sur R^k (l'opérateur ∇)

Si U est un ouvert de R^k muni de la base canonique (e_1, e_2, \dots, e_k) , A, B deux champs de vecteurs définis sur U :

$$A = \sum_{i=1, k} A_i e_i, \quad B = \sum_{i=1, k} B_i e_i.$$

La dérivée directionnelle dans R^k de B dans la direction A est le champ de vecteurs

$$\nabla_A B = \sum_{i, j=1, k} \left(A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i} e_j \right).$$

On vérifie aisément que l'opérateur ∇ est indépendant de la base choisie.

IV.2.2 Propriétés de l'opérateur

Soient A, B, C, D quatre champs de vecteurs définis sur R^k et f une fonction C^∞ à valeur réelle définie sur U . Alors, on a

- i. $\nabla_A(B + D) = \nabla_A B + \nabla_A D$,
- ii. $\nabla_{A+C}(B) = \nabla_A B + \nabla_C B$,
- iii. $\nabla_{f \cdot A}(B) = f \cdot \nabla_A B$,
- iv. $\nabla_A(f \cdot B) = (A \cdot f)B + f \cdot \nabla_A B$,

où $(A \cdot f) = \langle A, \text{Grad}(f) \rangle$.

Nous avons ainsi défini un opérateur qui nous permet d'évaluer les dérivées des vecteurs dans une direction donnée.

IV.2.3 Définition (seconde forme fondamentale)

Soit $f : U \subset R^k \rightarrow R^p$, une immersion (réf. Chap I.1.2). On pose

$$\sigma(X, Y) = \nabla'_{f_* X} f_* Y - f_*(\nabla_X Y), \quad \forall X, Y \in TU,$$

où X, Y appartiennent à TU , l'espace tangent à U et f_* désigne la différentielle de f . ∇ est la dérivée directionnelle dans R^k , et ∇' dans R^p . On dit que σ est la seconde forme fondamentale de l'application f .

Remarque

Bien que nous ayons défini la seconde forme fondamentale dans le cas où les espaces de départ et d'arrivée sont des espaces euclidiens, le cadre naturel de cette définition est la géométrie riemannienne (Berger et Gostiaux, [1987]).

La seconde forme fondamentale d'une application est équivalente à la différentielle seconde lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont euclidiens. Nous allons le vérifier en détails lorsque $k = 2, p = 3$.

Soient (X, Y) vecteurs de U tels que

$$\begin{aligned} X &= X_1 e_1 + X_2 e_2 & Y &= Y_1 e_1 + Y_2 e_2 \\ &= X_1 \frac{\partial}{\partial u} + X_2 \frac{\partial}{\partial v}, & &= Y_1 \frac{\partial}{\partial u} + Y_2 \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

Les vecteurs $(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}) = (e_1, e_2)$ sont des vecteurs de base fixes normés dans l'espace de départ donc

$$\nabla_{e_i} e_j = 0 \quad \forall i, j = 1, 2.$$

Soient $f_*(X), f_*(Y)$ les images de X, Y par l'application $df = f_*$ et

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

les vecteurs de base de S . On a

$$\begin{aligned} f_* X = df(X) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u} X_1 + \frac{\partial f^1}{\partial v} X_2 \\ \frac{\partial f^2}{\partial u} X_1 + \frac{\partial f^2}{\partial v} X_2 \\ \frac{\partial f^3}{\partial u} X_1 + \frac{\partial f^3}{\partial v} X_2 \end{pmatrix}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)} & , f_* Y = df(Y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u} Y_1 + \frac{\partial f^1}{\partial v} Y_2 \\ \frac{\partial f^2}{\partial u} Y_1 + \frac{\partial f^2}{\partial v} Y_2 \\ \frac{\partial f^3}{\partial u} Y_1 + \frac{\partial f^3}{\partial v} Y_2 \end{pmatrix}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)} \\ &= A\varepsilon_1 + B\varepsilon_2 + C\varepsilon_3 & &= D\varepsilon_1 + E\varepsilon_2 + F\varepsilon_3. \end{aligned}$$

Les vecteurs $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ sont les vecteurs de base fixes dans l'espace d'arrivée, donc

$$\nabla_{\varepsilon_i} \varepsilon_j = 0 \quad \forall i, j = 1, 3.$$

Calculons dg tel que $dg \circ df = Id$

$$\begin{aligned} dg : \quad R^3 &\rightarrow R^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow (u, v) \end{aligned}$$

$$dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x} & \frac{\partial g^1}{\partial y} & \frac{\partial g^1}{\partial z} \\ \frac{\partial g^2}{\partial x} & \frac{\partial g^2}{\partial y} & \frac{\partial g^2}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Avec comme relation (a) qui suit entre f et g

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^1}{\partial x} \cdot \frac{\partial f^1}{\partial u} + \frac{\partial g^1}{\partial y} \cdot \frac{\partial f^1}{\partial v} + \frac{\partial g^1}{\partial z} \cdot \frac{\partial f^1}{\partial u} &= 1, \\ \frac{\partial g^1}{\partial x} \cdot \frac{\partial f^1}{\partial v} + \frac{\partial g^1}{\partial y} \cdot \frac{\partial f^2}{\partial v} + \frac{\partial g^1}{\partial z} \cdot \frac{\partial f^3}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial g^2}{\partial x} \cdot \frac{\partial f^1}{\partial u} + \frac{\partial g^2}{\partial y} \cdot \frac{\partial f^2}{\partial u} + \frac{\partial g^2}{\partial z} \cdot \frac{\partial f^3}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial g^2}{\partial x} \cdot \frac{\partial f^1}{\partial v} + \frac{\partial g^2}{\partial y} \cdot \frac{\partial f^2}{\partial v} + \frac{\partial g^2}{\partial z} \cdot \frac{\partial f^3}{\partial v} &= 1. \end{aligned} \tag{a}$$

La composante sur ε_3 s'écrit

$$\begin{aligned} & (\nabla'_{f_*X} f_*Y)_{\varepsilon_3} \\ &= \left(\frac{\partial f^1}{\partial u} X_1 + \frac{\partial f^1}{\partial v} X_2 \right) \left[\left(\frac{\partial^2 f^3}{\partial u^2} Y_1 + \frac{\partial^2 f^3}{\partial u \partial v} Y_2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 f^3}{\partial u^2} Y_1 + \frac{\partial^2 f^3}{\partial u \partial v} Y_2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ &+ \left(\frac{\partial f^2}{\partial u} X_1 + \frac{\partial f^2}{\partial v} X_2 \right) \left[\left(\frac{\partial^2 f^3}{\partial u^2} Y_1 + \frac{\partial^2 f^3}{\partial u \partial v} Y_2 \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 f^3}{\partial u^2} Y_1 + \frac{\partial^2 f^3}{\partial u \partial v} Y_2 \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ &+ \left(\frac{\partial f^3}{\partial u} X_1 + \frac{\partial f^3}{\partial v} X_2 \right) \left[\left(\frac{\partial^2 f^3}{\partial u^2} Y_1 + \frac{\partial^2 f^3}{\partial u \partial v} Y_2 \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 f^3}{\partial u^2} Y_1 + \frac{\partial^2 f^3}{\partial u \partial v} Y_2 \right) \frac{\partial v}{\partial z} \right] \\ &+ X_1 \left(\frac{\partial f^3}{\partial u} \frac{\partial Y^1}{\partial u} + \frac{\partial Y^2}{\partial u} \right) + X_2 \left(\frac{\partial f^3}{\partial u} \frac{\partial Y^1}{\partial v} + \frac{\partial f^3}{\partial v} \frac{\partial Y^2}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \nabla'_{f_*X} f_*Y - f_*(\nabla_X Y) \\ &= \left(\frac{\partial f^1}{\partial u} X_1 + \frac{\partial f^1}{\partial v} X_2 \right) \left[\left(\frac{\partial^2 f^1}{\partial u^2} Y_1 + \frac{\partial^2 f^1}{\partial u \partial v} Y_2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 f^1}{\partial u \partial v} Y_1 + \frac{\partial^2 f^1}{\partial v^2} Y_2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \varepsilon_1 \\ &+ \left(\frac{\partial f^1}{\partial u} X_1 + \frac{\partial f^1}{\partial v} X_2 \right) \left[\left(\frac{\partial^2 f^2}{\partial u^2} Y_1 + \frac{\partial^2 f^2}{\partial u \partial v} Y_2 \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 f^2}{\partial u \partial v} Y_1 + \frac{\partial^2 f^2}{\partial v^2} Y_2 \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \varepsilon_2 \\ &+ \left(\frac{\partial f^1}{\partial u} X_1 + \frac{\partial f^1}{\partial v} X_2 \right) \left[\left(\frac{\partial^2 f^3}{\partial u^2} Y_1 + \frac{\partial^2 f^3}{\partial u \partial v} Y_2 \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 f^3}{\partial u \partial v} Y_1 + \frac{\partial^2 f^3}{\partial v^2} Y_2 \right) \frac{\partial v}{\partial z} \right] \varepsilon_3 \\ &+ \left(\frac{\partial f^2}{\partial u} X_1 + \frac{\partial f^2}{\partial v} X_2 \right) \left[\left(\frac{\partial^2 f^1}{\partial u^2} Y_1 + \frac{\partial^2 f^1}{\partial u \partial v} Y_2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 f^1}{\partial u \partial v} Y_1 + \frac{\partial^2 f^1}{\partial v^2} Y_2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \varepsilon_1 \\ &+ \left(\frac{\partial f^2}{\partial u} X_1 + \frac{\partial f^2}{\partial v} X_2 \right) \left[\left(\frac{\partial^2 f^2}{\partial u^2} Y_1 + \frac{\partial^2 f^2}{\partial u \partial v} Y_2 \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 f^2}{\partial u \partial v} Y_1 + \frac{\partial^2 f^2}{\partial v^2} Y_2 \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \varepsilon_2 \\ &+ \left(\frac{\partial f^2}{\partial u} X_1 + \frac{\partial f^2}{\partial v} X_2 \right) \left[\left(\frac{\partial^2 f^3}{\partial u^2} Y_1 + \frac{\partial^2 f^3}{\partial u \partial v} Y_2 \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 f^3}{\partial u \partial v} Y_1 + \frac{\partial^2 f^3}{\partial v^2} Y_2 \right) \frac{\partial v}{\partial z} \right] \varepsilon_3 \\ &+ \left(\frac{\partial f^3}{\partial u} X_1 + \frac{\partial f^3}{\partial v} X_2 \right) \left[\left(\frac{\partial^2 f^1}{\partial u^2} Y_1 + \frac{\partial^2 f^1}{\partial u \partial v} Y_2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 f^1}{\partial u \partial v} Y_1 + \frac{\partial^2 f^1}{\partial v^2} Y_2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \varepsilon_1 \\ &+ \left(\frac{\partial f^3}{\partial u} X_1 + \frac{\partial f^3}{\partial v} X_2 \right) \left[\left(\frac{\partial^2 f^2}{\partial u^2} Y_1 + \frac{\partial^2 f^2}{\partial u \partial v} Y_2 \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 f^2}{\partial u \partial v} Y_1 + \frac{\partial^2 f^2}{\partial v^2} Y_2 \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \varepsilon_2 \\ &+ \left(\frac{\partial f^3}{\partial u} X_1 + \frac{\partial f^3}{\partial v} X_2 \right) \left[\left(\frac{\partial^2 f^3}{\partial u^2} Y_1 + \frac{\partial^2 f^3}{\partial u \partial v} Y_2 \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 f^3}{\partial u \partial v} Y_1 + \frac{\partial^2 f^3}{\partial v^2} Y_2 \right) \frac{\partial v}{\partial z} \right] \varepsilon_3. \end{aligned}$$

En réorganisant les termes de cette égalité, on a

$$\nabla'_{f_*X} f_*Y - f_*(\nabla_X Y) = \sum_{k=1,3} \sum_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2}} X_i Y_j \left(\frac{\partial f^k}{\partial u_i} \frac{\partial^2 f^k}{\partial u \partial u_j} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f^k}{\partial u_i} \frac{\partial^2 f^k}{\partial v \partial u_j} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \varepsilon_k$$

avec

$$u_1 = u, u_2 = v.$$

Donc $\sigma(X, Y) = D^2 f(X, Y)$, le résultat que l'on cherchait à obtenir.

IV.3 Double inégalité

Après avoir décrit analytiquement les éléments matriciels de la seconde forme fondamentale d'une application, nous allons procéder à la décomposition en projection normale et tangentielle des dérivées secondes, puis introduire la seconde forme fondamentale de la surface pour établir une double inégalité sur l'existence de la solution du problème non linéaire.

IV.3.1 Décomposition des dérivées secondes

Soit f une immersion de $R^2 \rightarrow R^3$, telle que $f(U) = S$. Soient e_1, e_2 une base orthonormée de R^2 . La différentielle seconde $D^2 f$ peut se décomposer en chaque point de la façon suivante

$$D^2 f(e_i, e_j) = pr_{TS}(D^2 f(e_i, e_j)) + pr_{T^\perp S}(D^2 f(e_i, e_j)), \quad i = 1, 2, j = 1, 2$$

où pr_{TS} est la projection dans le plan tangent, et $pr_{T^\perp S}$ la projection dans le plan perpendiculaire au plan tangent. Par définition, on a

$$pr_{T^\perp S}(D^2 f(e_i, e_j)) \stackrel{\text{déf}}{=} h^3(f_*(e_i), f_*(e_j)).$$

Calculons $\|D^2 f\|^2$. On a:

$$\|D^2 f\|^2 = \sum_{i,j} pr_{TS}(D^2 f(e_i, e_j))^2 + pr_{T^\perp S}(D^2 f(e_i, e_j))^2.$$

Attention, $pr_{T^\perp S}(D^2 f(e_i, e_j))^2$ n'est pas la norme de la seconde forme fondamentale h de la surface. En effet,

$$\|sff\|^2 = \|h\|^2 = \sum_{i,j} (h^3(\varepsilon_i, \varepsilon_j))^2,$$

où $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ est une base orthonormée du plan tangent à la surface. Or, dans la définition de $\|D^2 f\|^2$, il n'y a a priori aucune raison pour que $(f_*(e_i), f_*(e_j))$ soient orthonormés.

(En particulier, la minimisation du problème en dérivées secondes n'est pas identique à la minimisation de la seconde forme fondamentale). On a cependant le résultat suivant:

IV.3.2 Une double inégalité

Théorème

Soit U un domaine borné de R^2 et soient a, A deux constantes positives. Soit $f : \bar{U} \rightarrow R^3$ une immersion (au moins C^2) de U dans R^3 telle que

$$a \leq \|f_*(X)\| \leq A, \quad \forall X \in TU / \|X\| = 1.$$

Alors il existe deux constantes c, C indépendantes de a, A telles que:

$$\|pr_{TS}(D^2 f)\|^2 + c\|h\|^2 \leq \|D^2 f\|^2 \leq \|pr_{TS}(D^2 f)\|^2 + C\|h\|^2.$$

Démonstration

⇒

En un point m de la surface, nous avons

$$\begin{aligned} \|pr_{T^\perp S}(D^2 f)\|_m^2 &= (pr_{T^\perp S}(D^2 f(e_i, e_i)))_m^2 \\ &= (h^3(f_*(e_i), f_*(e_i)))_m \\ &\leq \|h\|_m^2 \cdot \|f_*\|_m^2, \end{aligned}$$

comme \bar{U} est compact, $\sup_m \|f_*\|$ existe. On considère $c = \sup_m \|f_*\|$. Alors,

$$\forall m, \exists c, \|pr_{T^\perp S}(D^2(f))\|^2 \leq c\|h\|^2,$$

$$\exists c, \|D^2 f\|^2 = \|pr_{TS}(D^2(f))\|^2 + \|pr_{T^\perp S}(D^2(f))\|^2 \leq c\|h\|^2 + \|pr_{TS}(D^2(f))\|^2$$

Soit m un point de la surface, $X' = \frac{f_*(x)}{\|f_*(x)\|}$ un vecteur normé du plan tangent à la surface, nous avons

$$\forall m \in S, \sup_{\|x'\|=1} h(X', X')_m = \sup_{\|x'\|=1} h\left(\frac{f_*(x)}{\|f_*(x)\|}, \frac{f_*(x)}{\|f_*(x)\|}\right)_m$$

$$= \|f_*(x)\|_m^{-2} \sup_{\|x'\|=1} h(f_*(x), f_*(x))_m$$

$$\leq \|f_*(x)\|_m^{-2} \|pr_{T^\perp S}(D^2 f)\|_m,$$

comme U est borné, $\sup_m \|f_*(x)\|$ existe. On considère $C = \sup_m \|f_*\|$. Alors,

$$\forall m, \exists C, \|pr_{T^\perp S}(D^2(f))\|^2 \geq C\|h\|^2,$$

$$\exists C, \|D^2 f\|^2 = \|pr_{TS}(D^2(f))\|^2 + \|pr_{T^\perp S}(D^2(f))\|^2 \geq C\|h\|^2 + \|pr_{TS}(D^2(f))\|^2$$

IV.4 Critère additionnel

IV.4.1 Motivations

Si l'on compare les problèmes (P') du chapitre précédent et (P'') au vue de l'inégalité précédente, il apparaît qu'il faut modifier (P'') en ajoutant la composante tangente de la différentielle seconde.

Notre nouveau problème s'écrit

Problème P'''

Soit U un ouvert borné de R^2 , soient $\{a_1, a_2, \dots, a_P\}$, P points de U dont 3 au moins ne sont pas alignés et $\{\varphi_{obs}^1, \varphi_{obs}^2, \dots, \varphi_{obs}^P\}$, P points de R^3 . Soit $Imm(\bar{U}, R^3)$ l'ensemble des immersions de $U \subset R^2 \rightarrow R^3$, soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ des poids arbitraires (constantes réelles). Soit $J : Imm(\bar{U}, R^3) \rightarrow R^3$ la fonctionnelle définie par

$$J(\varphi) = \sum_{i=1, P} \langle \varphi(a_i) - \varphi_{obs}^i, \varphi(a_i) - \varphi_{obs}^i \rangle + \int_U \|pr_{TS}(D^2\varphi)\|^2 dU + \int_S \|h\|^2 ds,$$

$$\forall \varphi \in Imm(\bar{U}, R^3),$$

où S désigne $\varphi(U)$ et h la seconde forme fondamentale de S .

Trouver $\phi \in Imm(\bar{U}, R^3)$ telle que

$$J(\phi) = \inf_{\varphi \in Imm(\bar{U}, R^3)} J(\varphi).$$

Précisons:

Nous allons expliciter la projection des dérivées secondes dans le plan tangent, $pr_{TS}(D^2\varphi)$. Nous avons vu dans le chapitre précédent que le problème en dérivées secondes

est bien posé. Cependant, la multiplicité des paramétrages définissant la même solution pose un problème d'indétermination. C'est à dire que le problème en terme de représentations paramétriques est mal posé. Une méthode pour lever l'indétermination est d'introduire un critère, que l'on appelle critère additionnel basé sur la $pr_{TS}(D^2\varphi)$ qui s'annule pour un seul des paramétrages admissibles.

IV.4.2 Paramètres physiques et non physiques

Nous considérons une surface S et un point m de la surface (Fig. 1). Une perturbation de m

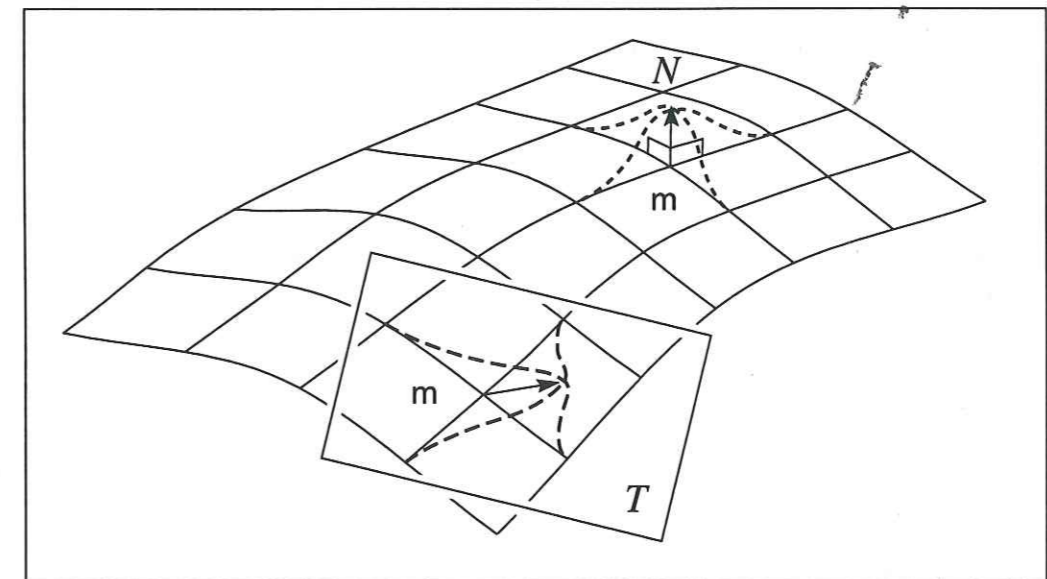


Figure 1 Perturbations physiques et non physiques. La représentation paramétrique change pour les deux perturbations mais, seule la perturbation du point dans la direction normale modifie la physique.

dans le plan tangent à la surface conduit à une autre paramétrisation définissant au premier ordre, la même surface. Nous dirons que cette perturbation ne modifie pas la géométrie de la surface. C'est de cette perturbation que nous tenons compte dans le critère additionnel. D'un point de vue discret, une représentation est modélisée par un ensemble de paramètres de splines. Il existe des combinaisons de paramètres dont une perturbation ne modifie pas la géométrie. Par opposition, les perturbations normales sont physiques. Elles modifient la forme de la surface. Elles interviennent dans le critère de courbure. La figure 2 détaille les différents cas de perturbations physiques et non physiques. Au point A, intérieur à la surface, les perturbations tangentes à la surface sont des perturbations non physiques, les perturbations normales sont physiques, en B, point du bord, les perturbations sont physiques, et en C les perturbations sont toutes physiques.

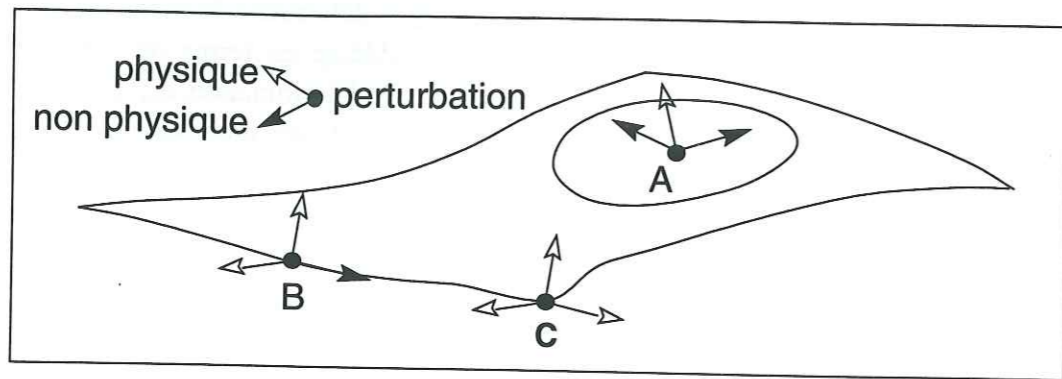


Figure 2 Les flèches représentent en différents points les perturbations physiques et non physiques.

IV.4.3 Choix du critère

L'idée du critère additionnel est d'être suffisamment contraignant pour assurer l'unicité de la paramétrisation, et peu contraignant pour ne pas modifier la géométrie de la surface. Ce sont deux étapes différentes. L'idée la plus simple aurait été de se donner une norme sur φ qui mesure l'écart à l'identité, par exemple $\|\varphi - Id\|_{L^2}$. La norme L^2 présente l'inconvénient de varier à une translation près. La norme H^2 qui "contient" la norme L^2 présente le même inconvénient. Une norme qui aurait tenu compte du jacobien de φ présente le même inconvénient à une rotation près. Ainsi, la norme sur les dérivées secondes semble adaptée. Hery Rakotoarisoa a montré dans sa thèse qu'il existait une fonction-coût pour ce critère. Ici, nous n'explicitons que le gradient.

IV.4.4 Point de vue discret

Pour ce critère, il faut calculer la matrice de projection sur le plan tangent. Pour ceci, parmi les paramètres qui décrivent notre surface, on va faire le tri entre les paramètres qui modifient la surface et les autres. On ne va laisser agir le critère additionnel que sur les paramètres non physiques. La démarche qui est exposée dans la suite, est similaire à celle qui a été développée dans la thèse d'Héry Rakotoarisoa en 3D pour les structures complexes feuilletées. Pour ce critère, nous avons introduit

- la grille des paramètres G_p de dimension $N_p N_p$ qui sert à projeter la jacobienne, qu'il ne faut pas confondre avec
- la grille des points d'évaluation G_{uv} de dimension $N_u N_v$ avec laquelle on évalue les fonctions-coût sur la surface.

Pour découpler les paramètres, on va faire un changement de variable local associé à chaque point de la grille des paramètres. A ce stade, les coordonnées des points sont données dans le repère cartésien. Il est donc difficile d'évaluer à ce niveau les perturbations locales en un point. La première étape pour le calcul de la jacobienne consiste à se définir une matrice L inversible composée des fonctions de base des splines cubiques qui lient les coordonnées cartésiennes des points de contrainte aux coefficients de splines

$$q = Lp,$$

q vecteur des coordonnées cartésiennes des points de contrainte, de dimension N_p et p le vecteur des splines de dimension N_p . L est une matrice bande. Cette matrice L modifie la

jacobienne relativement aux nouveaux paramètres, telle que

$$J_{\alpha p} = J_{\alpha} \cdot L^{-1}.$$

Faire le tri n'est pas encore aisé car les coordonnées sont données dans la base cartésienne. On va faire un changement de base adaptée. En chaque point M de la surface, on peut se définir le plan tangent $T_M S$ et se construire une base, que l'on a choisi orthonormée à partir de deux vecteurs X et Y orthonormés du plan tangent et N le vecteur normal à la surface. On peut exprimer

$$\begin{aligned} OM &= x_1 i + x_2 j + x_3 k \\ &= y_1 X + y_2 Y + y_3 N. \end{aligned}$$

Ce qui nous amène à introduire une matrice M^* de dimension 3×3 telle que

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^* & M_{12}^* & M_{13}^* \\ M_{21}^* & M_{22}^* & M_{23}^* \\ M_{31}^* & M_{32}^* & M_{33}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

D'un point de vue global, on obtient une matrice M diagonale par bloc de dimension $N_p N_p$. On se définit la nouvelle jacobienne

$$J_{\alpha r} = J_{\alpha p} \cdot M = J_{\alpha} \cdot L^{-1} \cdot M.$$

Le critère additionnel ne doit agir que lorsque les perturbations ont un sens non physique. Ceci se traduit en pratique par l'annulation des colonnes de la jacobienne pour les paramètres physiques. Cela revient à multiplier par une matrice identité dans laquelle on a annulé les colonnes correspondantes aux paramètres physiques P_r . Nous obtenons la matrice projetée

$$J_{\alpha}^P = J_{\alpha} \cdot L^{-1} \cdot M \cdot P_r \cdot M^{-1} \cdot L,$$

et le hessien pour le problème de minimisation $H_{\alpha}^P = (J_{\alpha}^P)^T \cdot (J_{\alpha}^P)$.

IV.5 Comparaison entre les résultats obtenus avec la seconde forme fondamentale de la surface et celle de l'application

Nous reprenons les trois domaines de coordonnées curvilignes du chapitre précédent (Fig. 3) et nous résolvons le problème d'approximation associé en courbure. Comme on

considère des grandeurs intrinsèques, ou géométriques, les résultats de l'approximation sont indépendants de la paramétrisation (Fig. 4).

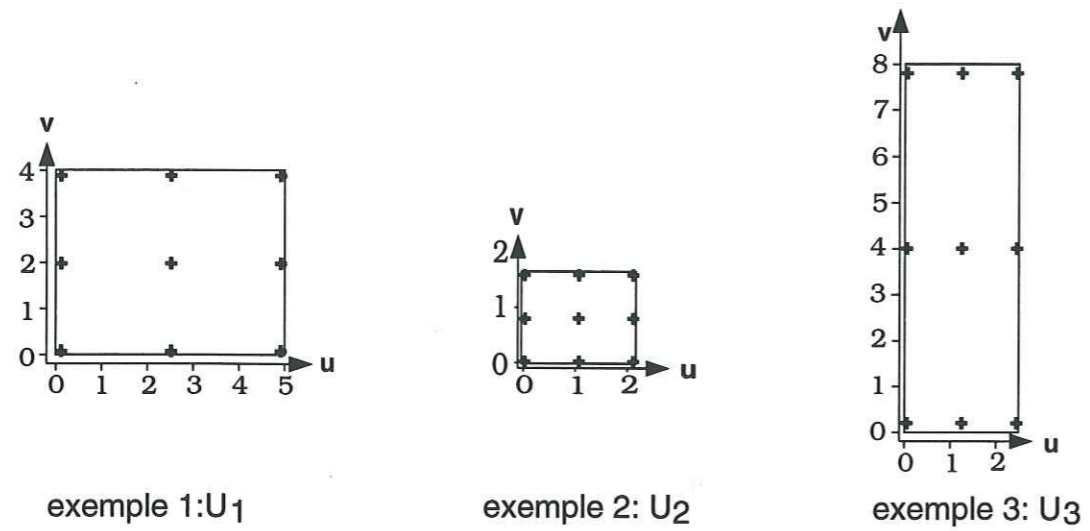


Figure 3 Représentation des différents domaines de coordonnées curvilignes.

Nous obtenons les trois figures qui suivent, qui visualisent le fait que la seconde forme fondamentale d'une surface est une quantité intrinsèque, indépendante de la paramétrisation. Il n'y a pas d'effet de lissage, d'anisotropie.

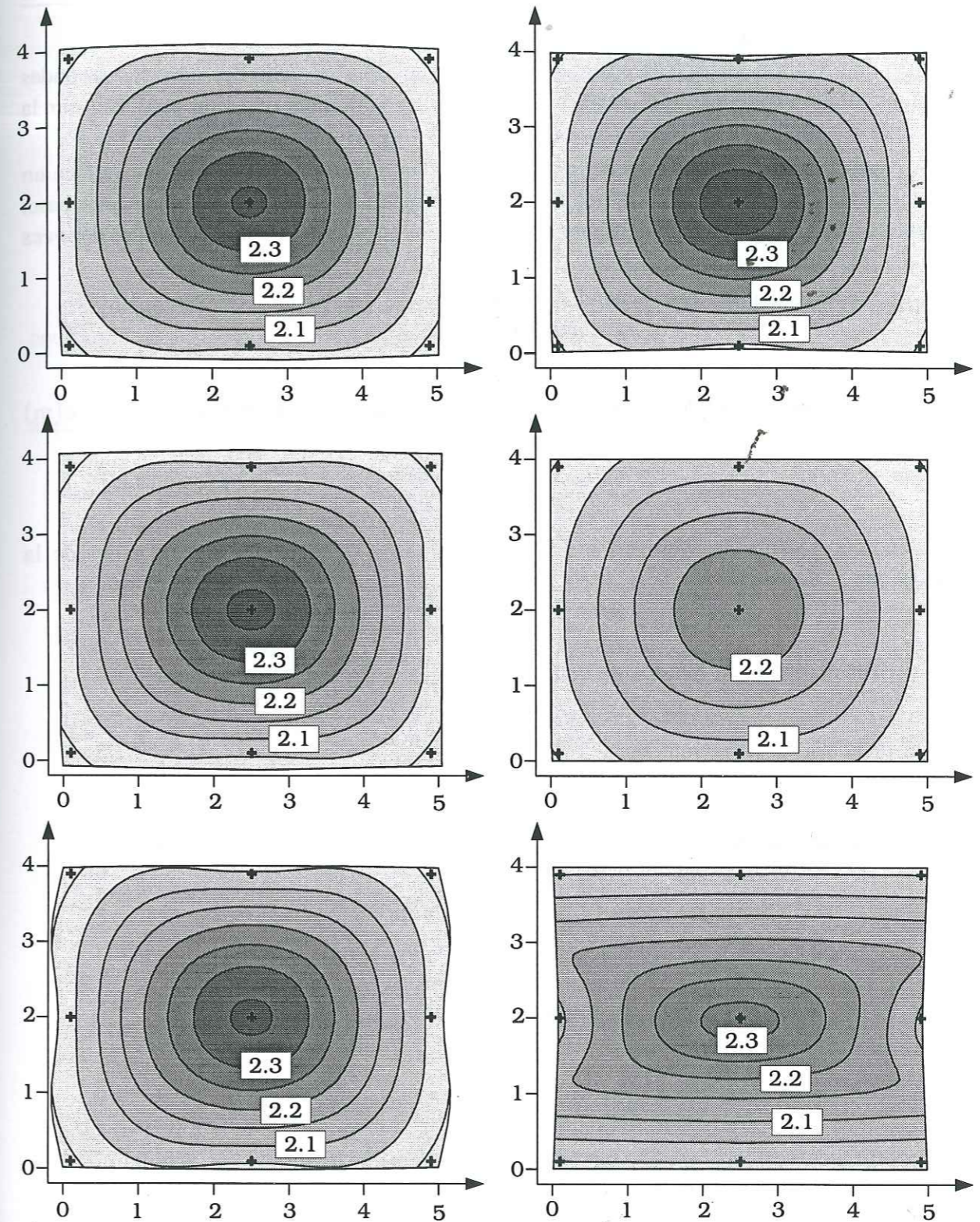


Figure 4 Représentation des surfaces solution obtenues, à droite, après optimisation des critères de dérivées secondes et proximité aux points de données et, à gauche pour les critères de courbure, proximité aux points de données et critère additionnel.

IV.6 Relation entre la matrice de courbure C et les dérivées secondes

IV.6.1 Cas général

Il existe une relation matricielle entre la matrice de courbure et celle des dérivées secondes que nous allons expliciter. Elle permet d'expliquer les variations que l'on peut voir sur la figure 4.

A partir d'une paramétrisation de la surface, on peut définir en tout point de la surface un plan tangent $\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}$, et en déduire une base orthonormée (X, Y, N) . A partir de cette base, on peut se définir la matrice de courbure C en tout point, qui est liée à la matrice des dérivées secondes par une relation matricielle.

On considère une surface S paramétrée par ϕ :

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow R^3 \\ (u, v) &\rightarrow M = \phi(u, v) = (x, y, z). \end{aligned}$$

Pour chaque point $m(u, v)$ de U , on peut calculer $N(u, v)$ le vecteur normal à S en $M = \phi(m)$ avec

$$N(u, v) = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|}$$

L'endomorphisme de Weingarten L défini de $T_M S \rightarrow T_M S$ en chaque point de la surface par

$$L(V) = -x_1 \frac{\partial N}{\partial u} - x_2 \frac{\partial N}{\partial v}, \text{ si } V = x_1 \frac{\partial \phi}{\partial u} + x_2 \frac{\partial \phi}{\partial v},$$

nous permet de définir la matrice de courbure C . Il est symétrique, c'est à dire

$$\forall V_1, V_2 \in T_M S, L(V_1) \cdot V_2 = V_1 \cdot L(V_2).$$

De plus, par construction, on a

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot N = \frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot N = 0,$$

d'où par dérivation

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(N \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) - N \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u} = -N \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u} \\ \frac{\partial N}{\partial v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial v} \left(N \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} \right) - N \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = -N \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial N}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(N \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} \right) - N \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} = -N \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \\ \frac{\partial N}{\partial v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \left(N \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) - N \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} = -N \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

A partir des vecteurs $\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}$, on peut en tout point de la surface se définir une base orthonormée (X, Y, N) avec

$$X = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|} \frac{\partial \phi}{\partial u} = x_1 \frac{\partial \phi}{\partial u},$$

$$Y = \frac{-\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \rangle}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|} \frac{\partial \phi}{\partial v} + \frac{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|} \frac{\partial \phi}{\partial v} = y_1 \frac{\partial \phi}{\partial u} + y_2 \frac{\partial \phi}{\partial v}.$$

Calculons de façon générale, $\langle L(V_1), V_2 \rangle$, avec

$$V_1 = \lambda_1 \frac{\partial \phi}{\partial u} + \mu_1 \frac{\partial \phi}{\partial v}, \quad V_2 = \lambda_2 \frac{\partial \phi}{\partial u} + \mu_2 \frac{\partial \phi}{\partial v}.$$

$$\begin{aligned} \langle L(V_1), V_2 \rangle &= \left\langle \left(-\lambda_1 \frac{\partial N}{\partial u} - \mu_1 \frac{\partial N}{\partial v} \right), \left(\lambda_2 \frac{\partial \phi}{\partial u} + \mu_2 \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) \right\rangle \\ &= -\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial N}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} - \mu_1 \lambda_2 \frac{\partial N}{\partial v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} - \mu_2 \lambda_1 \frac{\partial N}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v} - \mu_1 \mu_2 \frac{\partial N}{\partial v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v} \\ &= \lambda_1 \lambda_2 N \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + (\mu_1 \lambda_2 + \mu_2 \lambda_1) \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} + \mu_1 \mu_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

Appliquons cette relation aux vecteurs X, Y pour trouver les éléments de la matrice de courbure

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \langle L(X), X \rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|^2} \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}, N \rangle \\ \sigma_{xy} &= \langle L(X), Y \rangle = -\frac{\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \rangle}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|^2} \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}, N \rangle + \frac{1}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|} \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}, N \rangle \\ \sigma_{yy} &= \langle L(Y), Y \rangle = \frac{\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \rangle^2}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|^2} \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}, N \rangle - 2 \frac{\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \rangle}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|^2} \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}, N \rangle \\ &\quad + \frac{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|^2}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|^2} \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}, N \rangle \end{aligned}$$

En terme de matrice, cela nous donne

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|^2} & 0 & 0 \\ -\frac{\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \rangle}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|^2} & \frac{1}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|} & 0 \\ \frac{\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \rangle^2}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|^2} & -\frac{\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \rangle}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|^2} & \frac{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|^2}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}, N \rangle \\ \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}, N \rangle \\ \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}, N \rangle \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}, N \rangle \\ \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}, N \rangle \\ \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}, N \rangle \end{pmatrix}.$$

On a ainsi une relation matricielle qui lie les termes de la matrice de courbure aux dérivées secondes. Les termes de cette matrice A sont homogènes aux dérivées premières.

IV.6.2 Cas particuliers

Si on compare les fonctions-coût en courbure et en dérivées secondes, cela nous donne

$$f_c = \int_S Tr(C^T C) ds = \int_U (\sigma_{xx}^2 + 2\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yy}^2) |d\phi| dU$$

$$f_{sec} = \int_U \left(\left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}, N \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}, N \right\rangle^2 + \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}, N \right\rangle^2 \right) dU.$$

Lorsque l'on considère le cas particulier de la figure 4.a, la matrice A s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$f_c = \int_U \left(\left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}, N \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}, N \right\rangle^2 + \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}, N \right\rangle^2 \right) |d\phi| dU$$

$$= f_{sec}.$$

Comme on le voit sur la figure 4.a, le résultat de la minimisation du critère d'approximation par les dérivées secondes est équivalent à celui obtenu par les courbures. C'est un cas très particulier.

Lorsque l'on considère le cas de la figure 4.b, la matrice A s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

D'où

$$f_c = \frac{1}{4} \int_U \left(\left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}, N \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}, N \right\rangle^2 + \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}, N \right\rangle^2 \right) |d\phi| dU$$

$$= \frac{1}{2} f_{sec}, \text{ car } |d\phi| = 2.$$

Comme on le voit sur la figure 4.b, le résultat de la minimisation du critère d'approximation par les dérivées secondes dans ce cas introduit un effet de lissage isotrope.

Lorsque l'on considère le cas de la figure 4.c, la matrice A s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$f_c = \int_U \left(\frac{1}{16} \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}, N \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}, N \right\rangle^2 + 16 \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}, N \right\rangle^2 \right) |d\phi| dU$$

$$= \int_U \left(\frac{1}{16} \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}, N \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}, N \right\rangle^2 + 16 \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}, N \right\rangle^2 \right) dU, \text{ car } |d\phi| = 1.$$

Comme on le voit sur la figure 4.c, le résultat de la minimisation du critère d'approximation par les dérivées secondes dans ce cas introduit un effet de lissage anisotrope. La manipulation est équivalente à pondérer différemment dans les différentes directions les dérivées secondes.

En conclusion, dans des cas particuliers, on peut facilement retrouver la matrice qui lie les dérivées secondes à la matrice de courbure. Mais en général, la paramétrisation est choisie de façon quelconque, car il existe une infinité de paramétrage pour la surface. Il n'y a aucune raison de choisir un paramétrage plutôt qu'un autre. Dans ces cas, on peut obtenir des résultats très différents entre eux pour la minimisation par les dérivées secondes, et identiques en courbure.

IV.7 Conclusions

Nous avons établi une double inégalité pour le problème non linéaire (P'''), qui implique que si la solution existe, on peut l'encadrer. Et enfin, sur des exemples numériques, nous avons vérifié que la surface solution est indépendante de la paramétrisation choisie.

Annexe 1 : les matrices jacobiennes

Nous allons détailler la matrice jacobienne J_C qui a servi à résoudre le problème discret. Nous avons

$$\begin{aligned} Q_C &= \int_S (\sigma_{XX}^2 + 2\sigma_{XY}^2 + \sigma_{YY}^2) ds \\ &= \int_U (\sigma_{XX}^2 + 2\sigma_{XY}^2 + \sigma_{YY}^2) |det(D\phi)| dU. \\ \tilde{Q}_C &= \sum_{\substack{i=1, N_u \\ j=1, N_v}} (\langle \sigma_{XX}(u_i, v_j), \sigma_{XX}(u_i, v_j) \rangle + \langle \sqrt{2} \sigma_{XY}(u_i, v_j), \sqrt{2} \sigma_{XY}(u_i, v_j) \rangle \\ &\quad + \langle \sigma_{YY}(u_i, v_j), \sigma_{YY}(u_i, v_j) \rangle) |det(d\phi)|_{(u_i, v_j)} dU \\ &= \sum_{\substack{i=1, N_u \\ j=1, N_v}} \langle f_{C_{ij}^{XX}}^T, f_{C_{ij}^{XX}} \rangle + \langle f_{C_{ij}^{XY}}^T, f_{C_{ij}^{XY}} \rangle + \langle f_{C_{ij}^{YY}}^T, f_{C_{ij}^{YY}} \rangle. \end{aligned}$$

les matrices jacobiennes J_C

J_C est de dimension $(N_u \times N_v, N_p)$, avec N_u, N_v nombres de points de discrétisation dans les directions u et v , et N_p le nombre de paramètres de splines définissant la surface. La quantité à dériver s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{C_{ij}^{XX}}}{\partial p_k} &= \frac{\partial}{\partial p_k} (\sigma_{XX}(u_i, v_j) \sqrt{det(D\phi)} \sqrt{dU}) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_k} (\langle D_{X(u_i, v_j)} N(u_i, v_j), X(u_i, v_j) \rangle \sqrt{det(D\phi)} \sqrt{dU}) \\ \frac{\partial f_{C_{ij}^{XY}}}{\partial p_k} &= \frac{\partial}{\partial p_k} (\sqrt{2} \sigma_{XY}(u_i, v_j) \sqrt{det(D\phi)} \sqrt{dU}) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_k} (\langle D_{X(u_i, v_j)} N(u_i, v_j), Y(u_i, v_j) \rangle \sqrt{det(D\phi)} \sqrt{dU}) \\ \frac{\partial f_{C_{ij}^{YY}}}{\partial p_k} &= \frac{\partial}{\partial p_k} (\sigma_{YY}(u_i, v_j) \sqrt{det(D\phi)} \sqrt{dU}) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_k} (\langle D_{Y(u_i, v_j)} N(u_i, v_j), Y(u_i, v_j) \rangle \sqrt{det(D\phi)} \sqrt{dU}). \end{aligned}$$

Les quantités $\langle D_X N, X \rangle, \langle D_X N, Y \rangle, \langle D_Y N, Y \rangle$ sont calculées dans une base (i, j, k) qui est la base cartésienne. Nous allons faire un changement de base et travailler dans une base orthonormée (X, Y, N) engendrée par les vecteurs du plan tangent X et Y . Le passage d'une base à l'autre s'écrit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{(i, j, k)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} (X, Y, N)$$

La matrice T s'écrit

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\phi_{,1}\| & \frac{\langle \phi_{,1}, \phi_{,2} \rangle}{\|\phi_{,1}\|} \\ 0 & \frac{\|\phi_{,1} \wedge \phi_{,2}\|}{\|\phi_{,1}\|} \end{pmatrix},$$

et

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\phi_{,1}\|} & -\frac{\langle \phi_{,1}, \phi_{,2} \rangle}{\|\phi_{,1}\|} \frac{1}{\|\phi_{,1} \wedge \phi_{,2}\|} \\ 0 & \frac{\|\phi_{,1}\|}{\|\phi_{,1} \wedge \phi_{,2}\|} \end{pmatrix}.$$

L'expression des termes de la matrice de courbure dans la base (X, Y, N) est

$$\begin{aligned} \sigma_{XX}(u_i, v_j) &= \langle \frac{\partial N(u_i, v_j)}{\partial u} T_{11}, X(u_i, v_j) \rangle \sqrt{|det(D\phi)|} \sqrt{dU}, \\ \sigma_{XY}(u_i, v_j) &= \langle \frac{\partial N(u_i, v_j)}{\partial u} T_{11}, Y(u_i, v_j) \rangle \sqrt{|det(D\phi)|} \sqrt{dU}, \\ \sigma_{YY}(u_i, v_j) &= \langle \frac{\partial N(u_i, v_j)}{\partial u} T_{12} + \frac{\partial N(u_i, v_j)}{\partial v} T_{22}, Y(u_i, v_j) \rangle \sqrt{|det(D\phi)|} \sqrt{dU}, \end{aligned}$$

avec $det(\phi) = \|\phi_{,1} \wedge \phi_{,2}\|$. D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{XX}(u_i, v_j)}{\partial p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\langle \frac{\partial N(u_i, v_j)}{\partial u} T_{11}, X(u_i, v_j) \rangle \sqrt{|det(\phi)|} \sqrt{dU} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\langle \frac{\partial N}{\partial u} T_{11}, X(u_i, v_j) \rangle \right) \left(\sqrt{|det(\phi)|} \sqrt{dU} \right) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sqrt{|det(\phi)|} \right)_{(u_i, v_j)} \sqrt{dU} \langle \frac{\partial N}{\partial u} T_{11}, X(u_i, v_j) \rangle \\ \frac{\partial \sigma_{XY}(u_i, v_j)}{\partial p_i} &= \langle \frac{\partial N(u_i, v_j)}{\partial u} T_{11}, Y(u_i, v_j) \rangle \sqrt{|det(\phi)|} \sqrt{dU} \\ &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\langle \frac{\partial N(u_i, v_j)}{\partial u} T_{11}, Y(u_i, v_j) \rangle \right) \left(\sqrt{|det(\phi)|} \sqrt{dU} \right) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sqrt{|det(\phi)|} \right)_{(u_i, v_j)} \sqrt{dU} \langle \frac{\partial N(u_i, v_j)}{\partial u} T_{11}, Y(u_i, v_j) \rangle \\ \frac{\partial \sigma_{YY}(u_i, v_j)}{\partial p_i} &= \langle \frac{\partial N(u_i, v_j)}{\partial u} T_{12} + \frac{\partial N(u_i, v_j)}{\partial v} T_{22}, Y(u_i, v_j) \rangle \sqrt{|det(\phi)|} \sqrt{dU} \\ &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\langle \frac{\partial N(u_i, v_j)}{\partial u} T_{12} + \frac{\partial N(u_i, v_j)}{\partial v} T_{22}, Y(u_i, v_j) \rangle \right) \left(\sqrt{|det(\phi)|} \sqrt{dU} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sqrt{|det(\phi)|} \right)_{(u_i, v_j)} \sqrt{dU} \langle \frac{\partial N(u_i, v_j)}{\partial u} T_{12} + \frac{\partial N(u_i, v_j)}{\partial v} T_{22}, Y(u_i, v_j) \rangle. \end{aligned}$$

Chapitre V

Filetage

Dans ce chapitre, nous montrons que la surface de faille que nous étudions a une forme particulière, c'est un filetage. Ceci vient de notre hypothèse géologique de blocs approximativement rigides. Nous introduisons la notion de torseur, champ de vecteur tangent à notre surface, ses propriétés et nous montrons l'équivalence entre le filetage et une famille invariante par une famille à un paramètre de déplacements. Puis nous présentons différents exemples synthétiques qui montrent en quoi l'introduction d'un critère de filetage améliore la détermination de la forme d'une surface de faille.

V.1 Blocs rigides

La surface de faille que l'on considère est la surface de contact entre deux blocs rigides. Cette approximation est restrictive car elle ne tient pas compte des déformations internes dans les blocs, ni de l'histoire de la faille. Mais cette approximation est plus ou moins vérifiée dans certains cas.

Dans les blocs crustaux, ceci semble réaliste car les blocs ne jouent qu'au dessus du niveau ductile qui est la croûte inférieure.

Dans les horsts et grabens, les déplacements sont principalement des translations. Par contre, il est évident que pour les failles listriques, cette approximation n'est pas correcte, car il y a sédimentation et compaction, donc déformation pendant le jeu de la faille (Fig.1). Si

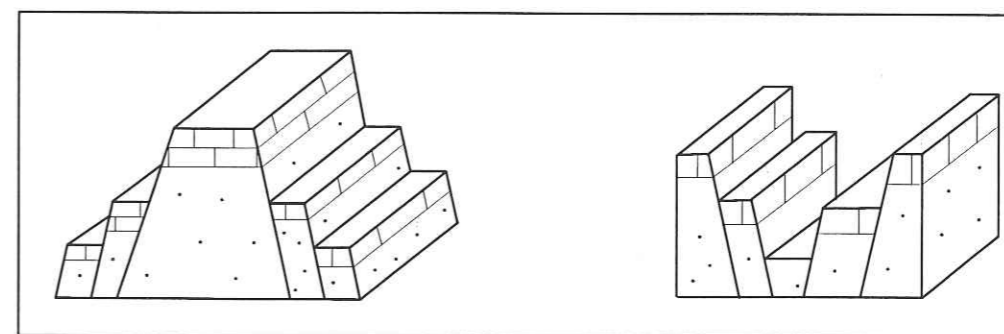


Figure 1 Représentation d'un horst et d'un graben.

l'on admet l'hypothèse des blocs approximativement rigides, la surface de contact décrite par le glissement d'un bloc sur un autre est approximativement un filetage.

V.2 Filetage

Les filetages sont des surfaces qui peuvent glisser sur elles mêmes en restant inchangées. Darboux dans son livre Théorie Générale des Surfaces publié en 1913, écrivait déjà ceci sur les hélicoïdes.

“Les surfaces de révolution jouissent d'une propriété cinématique importante. Elles ne cessent de glisser sur elles-mêmes, lorsqu'on leur imprime un mouvement de rotation autour de l'axe. Cette propriété qu'elles possèdent de pouvoir être déplacées de manière continue sans

cesser de coïncider avec elles-mêmes, appartient aux cylindres et à une classe plus étendue de surfaces, les hélicoïdes, qui comprennent comme cas limite les cylindres et les surfaces de révolution”.

L’usage ayant, depuis, réservé le mot hélicoïde aux surfaces décrites par les perpendiculaires communes à une droite et une hélice centrée sur cette droite, nous introduisons le mot *filetage*. Nous l’avons choisi par analogie à une vis et un écrou. La surface générée par le glissement d’un bloc rigide sur l’autre est une surface filetage. On considérera par la suite différents cas, pas de vis nul, infini, à calculer.

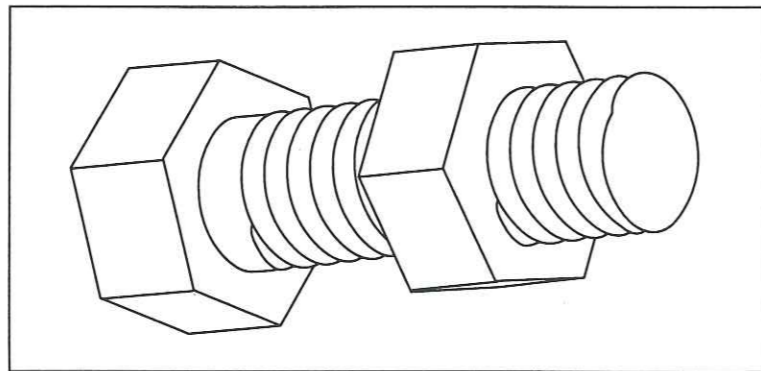


Figure 2 Représentation d’un écrou et d’une vis, par analogie avec une surface filetage.

Notre surface *filetage* est donc une surface ayant des propriétés cinématiques remarquables qui peuvent être décrites par un torseur. L’idée qu’un filetage est partout tangent à un torseur est due au professeur Marle. Nous allons montrer dans le paragraphe suivant l’équivalence entre un filetage qui est une surface invariante par une famille à un paramètre de déplacement et un torseur.

V.3 Espace des torseurs

Nous rappelons la définition d’un torseur ainsi que ces propriétés.

Un champ de vecteurs est une application f de R^3 dans R^3 . Il est dit affine si pour toute paire (M, P) de points de R^3 , $f(M) - f(P)$ est l’image du vecteur PM par une application linéaire F de $R^3 \rightarrow R^3$ indépendante de M et P . Ce sont les champs de vecteurs affines antisymétriques que l’on appelle torseur de l’espace R^3 .

Définition V.3.1

Un torseur de R^3 est un champ de vecteurs $T, R^3 \rightarrow R^3$ tel qu’il existe un élément de R^3 , noté T et appelé vecteur du torseur T , tel que l’on ait

$$(\forall M \in R^3) (\forall P \in R^3) \quad T(M) = T(P) + T \wedge PM.$$

On note \mathcal{T} l’espace des torseurs, c’est un sous espace vectoriel de l’espace des champs de vecteurs de dimension 6.

V.3.2 Coordonnées vectorielles

Soit A un point, R et G deux vecteurs, le champ $M \rightarrow G + R \wedge AM$ est un torseur. Nous noterons $\begin{bmatrix} G \\ R \end{bmatrix}_A$ ce torseur, caractérisé par la donnée de A, R, G . Il suffit de faire P égal A dans la définition du torseur pour constater que tout torseur est de la forme du torseur qui précède. On a donc

$$(\forall T \in \mathcal{T}) \quad T = \begin{bmatrix} T(A) \\ T \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} T(A) + T \wedge AM \\ T \end{bmatrix}_M$$

Il en résulte qu’une fois le point A choisi arbitrairement, tout torseur T est caractérisé par la donnée des deux vecteurs $T, T(A)$. Cela vient de l’aspect affine des torseurs et on pourra le rapprocher avec le fait qu’une droite est déterminée par la donnée d’un de ses points et de sa direction.

Les vecteurs T et $T(A)$ sont appelés parfois les éléments de réduction en A du torseur T , ou coordonnées vectorielles en A .

V.3.3 Lignes de champ du torseur et stries

Nous allons étudier le champ des vitesses \mathcal{V} . Rappelons une propriété standard des torseurs: le champ de vecteurs associé à une norme constante le long de ses courbes intégrales. Nous pouvons en déduire très facilement que les lignes de champ du torseur

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} V(M) \\ \Omega \end{bmatrix}_M$$

sont des hélices. Pour cela, une des caractéristiques des hélices est que les tangentes aux hélices font un angle constant avec une direction fixe. Soit Ω , la direction fixe, on a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{V(M)}{\|V(M)\|}, \Omega \right\rangle &= \left\langle \frac{V(O) + \Omega \wedge OM}{\|V(M)\|}, \Omega \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{V(O)}{\|V(M)\|}, \Omega \right\rangle = Cste, \end{aligned}$$

puisque $\|V(M)\| = Cste$. Donc, les lignes de champ du torseur \mathcal{V} sont des hélices. On appelle les *stries* calculées, les lignes de champ de la projection du torseur sur la surface (Fig. 3). Les stries sont très intéressantes en géologie, elles nous renseignent sur le sens de déplacement des blocs.

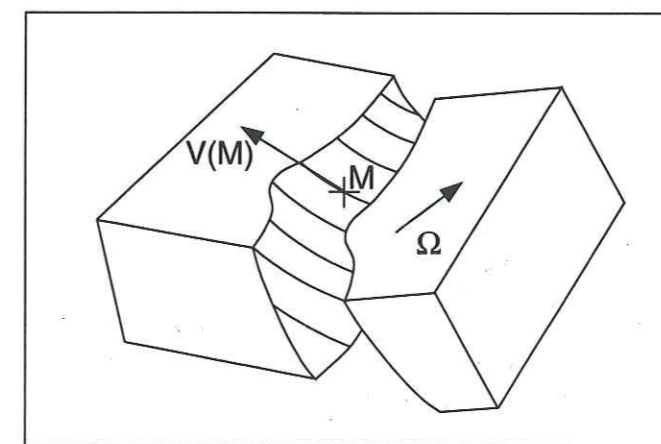


Figure 3 Représentation des lignes de champs de la projection du torseur \mathcal{V} sur la surface de faille.

Courbure et torsion des hélices

Considérons l'arc régulier γ qui a pour vecteur tangent en tout point le vecteur $V(M)$. Le vecteur tangent unitaire $\vec{\tau}$ s'écrit

$$\tau = \frac{V(M)}{\|V(M)\|}.$$

La courbure $\rho(M)$ de γ est par définition

$$\rho(M) = \left\| \frac{\partial \tau}{\partial M} \right\| = \left\| \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{V(M)}{\|V(M)\|} \right) \right\|.$$

Calculons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial M} &= \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{V(M)}{\|V(M)\|} \right) = \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{V(O) + \Omega \wedge OM}{\|V(M)\|} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{1}{\|V(M)\|} \right) V(M) + \frac{1}{\|V(M)\|} (\Omega \wedge V(M)) \\ &= -\frac{1}{\|V(M)\|^3} \langle \frac{\partial V(M)}{\partial M}, V(M) \rangle + \frac{1}{\|V(M)\|} (\Omega \wedge V(M)) \\ &= -\frac{1}{\|V(M)\|^3} \langle \Omega \wedge V(M), V(M) \rangle + \frac{1}{\|V(M)\|} (\Omega \wedge V(M)) \\ &= \frac{1}{\|V(M)\|} (\Omega \wedge V(M)). \end{aligned}$$

D'où la courbure s'écrit

$$\rho(M) = \left\| \frac{\partial \tau}{\partial M} \right\| = \frac{\|\Omega \wedge V(M)\|}{\|V(M)\|}.$$

La normale principale ν est définie pour toute valeur M telle que $\rho(M) \neq 0$ par

$$\nu = \frac{1}{\rho(M)} \frac{\partial \tau}{\partial M}.$$

Calculons

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial M} = \frac{\|V(M)\|}{\|\Omega \wedge V(M)\|} \frac{1}{\|V(M)\|} (\Omega \wedge V(M)) \\ &= \frac{(\Omega \wedge V(M))}{\|\Omega \wedge V(M)\|}. \end{aligned}$$

Toujours, si γ est sans point d'inflexion, on peut construire une repère orthonormé (repère de Serret-Frenet) $(M, \tau(M), \nu(M), \beta(M))$, avec

$$\beta = \tau \wedge \nu.$$

Calculons

$$\begin{aligned} \beta = \tau \wedge \nu &= \frac{V(M)}{\|V(M)\|} \wedge \left(\frac{\Omega \wedge V(M)}{\|\Omega \wedge V(M)\|} \right) \\ &= \frac{1}{\|V(M)\|} \frac{1}{\|\Omega \wedge V(M)\|} (V(M) \wedge (\Omega \wedge V(M))) \\ &= \frac{1}{\|V(M)\|} \frac{1}{\|\Omega \wedge V(M)\|} (\Omega \langle V(M), V(M) \rangle - V(M) \langle \Omega, V(M) \rangle) \\ &= \frac{1}{\|V(M)\|} \frac{1}{\|\Omega \wedge V(M)\|} (\Omega \langle V(M), V(M) \rangle - V(M) \langle \Omega, V(O) \rangle) \end{aligned}$$

Par construction, les fonctions vectorielles ν et β vérifient

$$\beta^2 = 1, \quad \langle \beta, \tau \rangle = 0, \quad \langle \beta, \nu \rangle = 0.$$

En dérivant la première et seconde des relations, on obtient

$$\beta \frac{\partial \beta}{\partial M} = 0, \quad \beta \frac{\partial \tau}{\partial M} + \tau \frac{\partial \beta}{\partial M} = 0,$$

d'où en tenant compte de la définition de β et de la dernière relation, on obtient

$$\tau \frac{\partial \beta}{\partial M} = 0.$$

On en déduit que le vecteur $\frac{\partial \beta}{\partial M}$ est nul ou colinéaire à ν , d'où l'existence d'un nombre θ vérifiant

$$\frac{\partial \beta}{\partial M} = \theta \nu.$$

La fonction θ est appelée la fonction torsion de l'arc γ .

Calculons la torsion θ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial M} &= \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{1}{\|V(M)\|} \frac{1}{\|\Omega \wedge V(M)\|} (\Omega \langle V(M), V(M) \rangle - V(M) \langle \Omega, V(O) \rangle) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{1}{\|V(M)\|} \frac{1}{\|\Omega \wedge V(M)\|} \right) (\Omega \langle V(M), V(M) \rangle - V(M) \langle \Omega, V(O) \rangle) + \\ &\quad \frac{1}{\|V(M)\|} \frac{1}{\|\Omega \wedge V(M)\|} \frac{\partial}{\partial M} (\Omega \langle V(M), V(M) \rangle - V(M) \langle \Omega, V(O) \rangle), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{1}{\|V(M)\|} \frac{1}{\|\Omega \wedge V(M)\|} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{1}{\|V(M)\|} \right) \frac{1}{\|\Omega \wedge V(M)\|} + \frac{1}{\|V(M)\|} \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{1}{\|\Omega \wedge V(M)\|} \right) \\ &= -\frac{1}{\|V(M)\|^3} \langle \frac{\partial V(M)}{\partial M}, V(M) \rangle + \frac{1}{\|\Omega \wedge V(M)\|} \\ &\quad - \frac{1}{\|V(M)\|} \frac{1}{\|\Omega \wedge V(M)\|^3} \langle \frac{\partial (\Omega \wedge V(M))}{\partial M}, (\Omega \wedge V(M)) \rangle \\ &= -\frac{1}{\|V(M)\|^3} \langle \Omega \wedge V(M), V(M) \rangle + \frac{1}{\|\Omega \wedge V(M)\|} \\ &\quad - \frac{1}{\|V(M)\|} \frac{1}{\|\Omega \wedge V(M)\|^3} \langle \Omega \wedge \frac{\partial V(M)}{\partial M}, \Omega \wedge V(M) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial M} (\Omega \langle V(M), V(M) \rangle - V(M) \langle \Omega, V(O) \rangle) \\ &= \Omega \frac{\partial}{\partial M} (\langle V(M), V(M) \rangle) - \frac{\partial V(M)}{\partial M} \langle \Omega, V(O) \rangle \\ &= 2\Omega \langle \frac{\partial V(M)}{\partial M}, V(M) \rangle - \langle \Omega \wedge V(M), \langle \Omega, V(O) \rangle \rangle \\ &= -\langle \Omega \wedge V(M), \langle \Omega, V(O) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial M} &= \frac{-1}{\|V(M)\| \|\Omega \wedge V(M)\|} \langle \Omega \wedge V(M), \langle \Omega, V(O) \rangle \rangle \\ &= -\frac{\langle \Omega, V(O) \rangle}{\|V(M)\|} \nu \\ &= \theta \nu, \end{aligned}$$

avec

$$\theta = -\frac{\langle \Omega, V(O) \rangle}{\|V(M)\|}.$$

Si la torsion est positive, on "monte" sur l'hélice dans le sens rétrograde autour de Ω , si la torsion est négative, on "monte" sur l'hélice en tournant dans le sens direct autour de Ω . Si on fait des comparaisons avec le monde physique, en l'orientant de façon usuelle (règle du bonhomme d'Ampère), les vis usuelles (et en particulier, le tire-bouchon) sont des hélices de torsion positive (mis à part quelques cas particuliers, comme celui des bouteilles de butane).

Position d'un point sur l'axe, pas des hélices.

L'axe de l'hélice est défini par son vecteur Ω , et un point A dont nous allons calculer la position. On suppose connu le vecteur Ω et la valeur du torseur en un point, par exemple, $V(O)$ avec O origine du repère. D'où,

$$\Omega \wedge V(A) = \Omega \wedge (V(O) + \Omega \wedge OA) = 0.$$

La formule du double produit vectoriel donne

$$\Omega \wedge V(O) - OA \|\Omega\|^2 = 0$$

si A est la projection orthogonale de O sur l'axe. D'où

$$OA = \left(\frac{\Omega \wedge V(O)}{\|\Omega\|^2} \right).$$

On définit le pas p d'une hélice comme la distance axiale parcourue par un point de l'hélice au cours d'une révolution,

$$p = \frac{\langle T(M), \Omega \rangle 2\pi}{\|\Omega\|^2}.$$

On parlera de filetage à gauche lorsque l'hélice s'enroule sens contraire d'horloge, en s'éloignant, par rapport à un observateur axiale et de filetage à droite lorsque l'hélice s'enroule sens d'horloge en s'éloignant, par rapport à un observateur axial.

Dans certains livres, le pas p d'une hélice est défini comme le rapport de la torsion sur la courbure,

$$p = \frac{\theta}{\rho} = -\frac{\langle \Omega, V(O) \rangle}{\|\Omega \wedge V(M)\|},$$

mais nous n'avons pas adopté cette formulation.

On retrouve les surfaces de translation si $p = \infty$ et les surfaces de révolution si $p = 0$.

Les caractéristiques des hélices vont nous être très utiles pour commenter les exemples numériques. Elles aident à l'interprétation des dessins.

V.3.4 Torseurs particuliers

V.3.4.1 Les couples

Les torseurs de vecteur nul sont des torseurs dont les champs sont uniformes et réciproquement. Les torseurs de ce type sont appelés couples. Pour tout élément G de R^3 , le couple constitué par le champ uniformément égal à G est appelé couple de moment G . Ses coordonnées sont en tout point A , $\vec{0}$ et G . Les surfaces engendrées par ce champ de vecteurs sont, par exemple, des surfaces cylindriques.

V.3.4.2 Les glisseurs

Un glisseur est un torseur \mathcal{G} dont la valeur en un point au moins est nulle. Si A est ce point, et si G est le vecteur de \mathcal{G} , on a donc

$$(\forall M) G(M) = G \wedge AM, \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix}_A.$$

Si G est nul, le glisseur est nul en tout point. Le seul torseur simultanément couple et glisseur est le torseur nul.

Si G est non nul, l'ensemble des points M , où $G(M)$ est nul est la droite Δ passant par A et parallèle à G . Cette droite est l'axe central de glisseur \mathcal{G} . En tout point M , $G(M)$ est orthogonal au plan contenant Δ et M est proportionnel à la distance de M à Δ . La figure 4 montre l'aspect d'un champ de vecteurs G . On remarquera qu'il est invariant par rotation autour de Δ , par translation parallèle à Δ et par affinité par rapport à Δ . Les surfaces engendrées par de tels champs de vecteurs sont par exemple des surfaces de révolution.

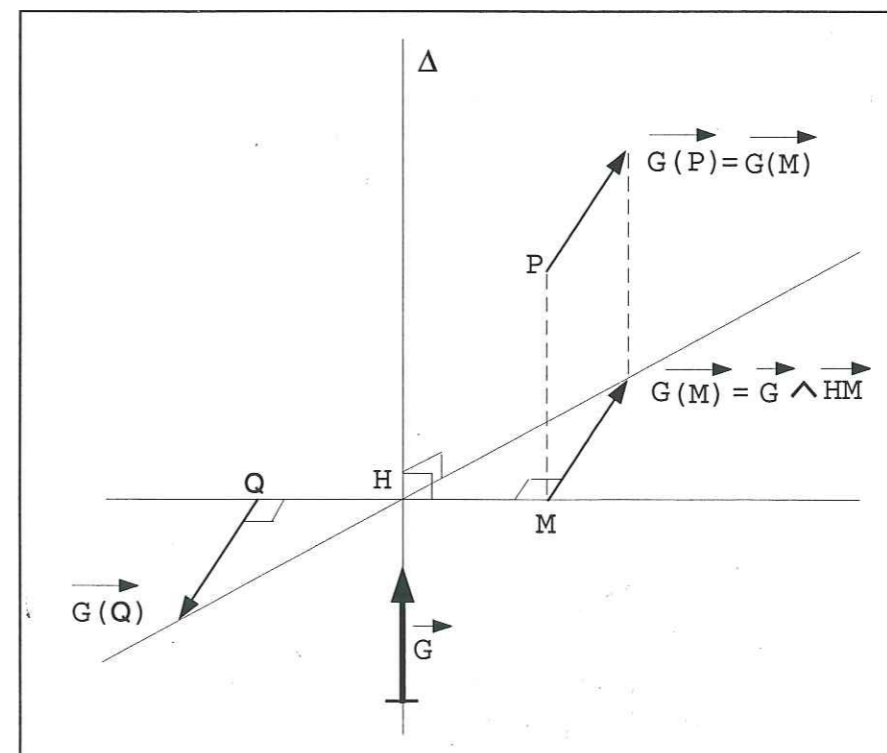


Figure 4 Représentation de l'axe central d'un glisseur \mathcal{G} .

Théorème V.3.4.3 Pour qu'un torseur \mathcal{T} de vecteur T non nul soit un glisseur, il faut et il suffit que M étant un point particulier choisi arbitrairement, le scalaire

$$\langle T, T(M) \rangle = 0.$$

V.3.5 Éléments centraux. Décomposition centrale.

Soit un torseur de vecteur T non nul, décomposons $T(M)$ en une projection orthogonale sur T et une direction orthogonale

$$T(M) = C(M) + G(M)$$

avec $C(M) // T$ et $G(M) \perp T$. Cette décomposition, qui est unique et intrinsèque fait apparaître le champ \mathcal{T} comme somme de deux champs \mathcal{C} et \mathcal{G} orthogonaux en chaque point. Le vecteur $C(M)$ étant la projection orthogonale de $T(M)$ sur T , on a

$$C(M) = \left[\frac{\langle T, T(M) \rangle}{\|T\|^2} \right] \frac{T}{\|T\|} = I,$$

indépendant de M . Le champ \mathcal{C} est donc un champ uniformément égal au vecteur I défini ci dessus, invariant vectoriel. C'est un couple. Le champ \mathcal{G} apparaît alors comme différence des deux torseurs \mathcal{C} et \mathcal{T} . C'est donc un torseur, de vecteur G et égal à T puisque le vecteur de \mathcal{C} est nul. En outre, $\langle G, G(M) \rangle = \langle T, G(M) \rangle = 0$ qui prouve que \mathcal{G} est un glisseur. L'axe (ou support) Δ du glisseur est par définition l'axe central de \mathcal{T} . En tout point M de cet axe, $T(M)$ est égal à I qui, de ce fait est encore appelé moment central de \mathcal{T} . Les trois éléments T, I, Δ sont parallèles entre eux. Contrairement à la décomposition en un point, qui dépend du point, la décomposition centrale est intrinsèque.

La figure 5 montre la distribution du champ \mathcal{T} autour de l'axe Δ , lorsque le point M décrit une droite D orthogonale en tout point H à l'axe Δ , l'extrémité M' du vecteur $(M, T(M))$ décrit une droite orthogonale à Δ en $H' = H + I$. Enfin, le torseur présente les mêmes invariances que celles que nous avons signalées pour les glisseurs, à savoir dans les déplacements hélicoïdaux d'axe Δ et dans les affinités à Δ .

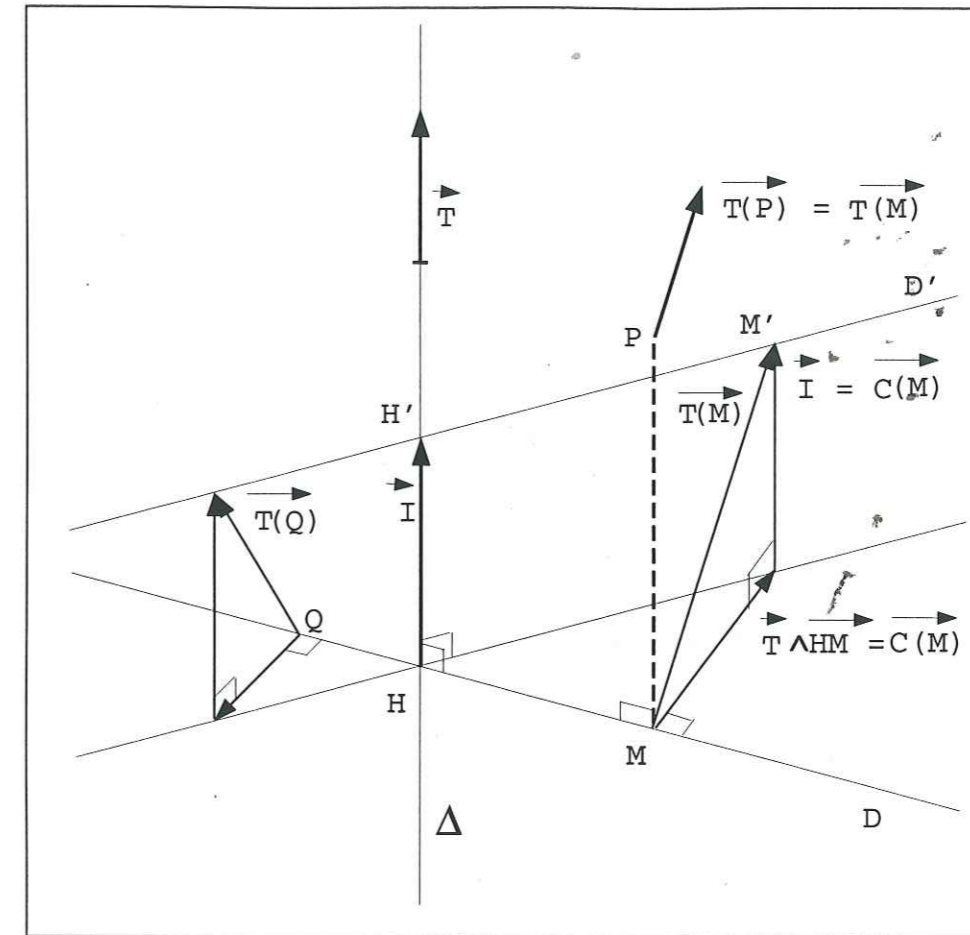


Figure 5 Représentation des éléments centraux du torseur \mathcal{T} .

On vérifie aisément par exemple, que l'axe central Δ est l'ensemble des points M

1. où les coordonnées vectorielles $T(M)$ et T de \mathcal{T} sont parallèles,
2. où la norme de $T(M)$ est minimale,
3. où $T(M)$ est égal à l'invariant vectoriel I .

V.4 Mouvement hélicoïdal ou vissage

Nous allons énoncer un théorème qui fait le lien entre notre surface et l'espace des torseurs.

Définition V.4.1

Une surface S est un filetage, si et seulement si, il existe une famille à un paramètre de déplacements qui conserve la surface.

Parmi les surfaces invariantes par une famille à un paramètre de déplacement, on peut citer les surfaces de translation, de révolution et hélicoïdales ou vissage. *J.-M. Morvan* a montré qu'il n'existait pas d'autres surfaces.

Théorème V.4.2

Une surface S est un filetage, si et seulement si, il existe un torseur partonon nul tangent à la surface.

Démonstration

⇒

Nous allons considérer séparément les trois classes de surfaces (de translation, de révolution, de vissage) et montrer qu'il existe pour chacune d'elle un torseur tangent à la surface. Dans les trois cas, on considérera que la surface S est la surface de contact engendré par le mouvement d'un solide Q par rapport à un solide R .

Les surfaces de translation

Une surface de translation est engendrée par le mouvement de translation d'un solide Q par rapport au solide R . Il existe une base commune (e_1, e_2, e_3) à Q et R . Dans cette base, tout vecteur constant pour un solide est constant pour l'autre, toute droite fixe pour un solide est fixe pour l'autre. Ainsi, tous les points fixes dans Q ont la même vitesse \vec{V} dans R . Le vecteur rotation du mouvement de Q par rapport à R est nul car on a un mouvement de translation pure. Ainsi étudier le champ des vitesses à la surface S , champ tangent à la surface, revient à étudier le couple

$$C = \mathcal{V}_{Q/R} = \begin{bmatrix} V(M) \\ 0 \end{bmatrix}_M$$

Les lignes de champ de ce torseur engendrent une surface de translation.

Les surfaces de révolution

Une surface de révolution est engendrée par le mouvement de rotation d'un solide Q par rapport à R . Il existe une droite commune D à Q et R . Il suffit pour cela qu'il existe deux points fixes A et B dans Q et R . Il existe deux bases (O, e_1, e_2, e_3) et $(O, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ respectivement, associées à Q et R avec l'axe Oe_3 commun porté par D . L'angle $\psi = (e_1, \varepsilon_1) = (e_2, \varepsilon_2)$ est alors par définition l'angle du mouvement de rotation de Q par rapport à R autour de Oe_3 . Ce paramètre permet à lui seul de repérer la position de Q par rapport à R . Le point O est lié à Q , et il a une vitesse nulle dans R . Ainsi, étudier le champ des vitesses à la surface S , champ tangent à la surface, revient à étudier le glisseur

$$G = \mathcal{V}_{Q/R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial t} \vec{Z} \\ 0 \end{bmatrix}_O$$

Les lignes de champ de ce torseur engendrent une surface de révolution.

Les surfaces vissages

Une surface vissage est engendrée par le mouvement hélicoïdal d'un solide Q par rapport à un solide R . Il existe une droite fixe dans Q et une droite fixe dans R ayant à chaque instant globalement la même position D dans l'espace sans toutefois que les points de l'une restent fixes sur l'autre. Ce mouvement est un mouvement de rotation et de glissement autour de la droite D . Il existe deux bases (O, e_1, e_2, e_3) et $(K, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec Ke_3 et Oe_3 repérant tous deux la droite D , l'un comme droite fixe dans Q et l'autre comme droite fixe dans R . La position de Q par rapport à R est alors caractérisé par les deux scalaires (paramètres de position) (Fig. 6)

$$\gamma = \overline{OA}, \quad \psi = (e_1, \varepsilon_1)/e_3.$$

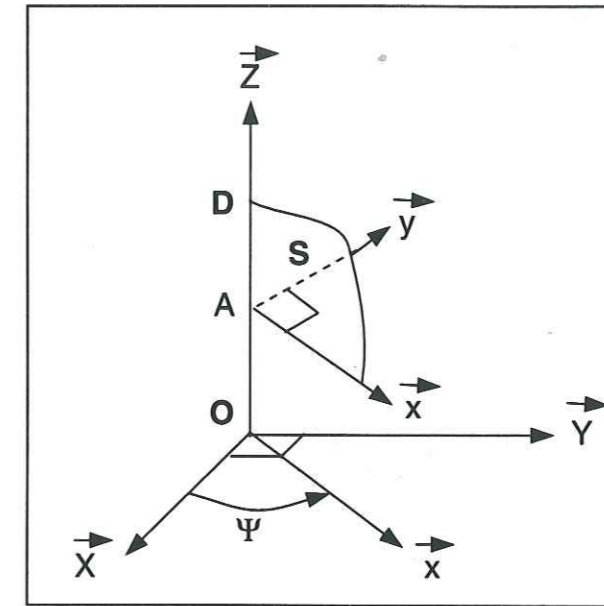


Figure 6 Représentation des solides Q et R .

Ainsi, étudier le champ des vitesses à la surface S , champ tangent à la surface, revient à étudier le torseur

$$T = \mathcal{V}_{Q/R} = \begin{bmatrix} G \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} \end{bmatrix}_K$$

Les lignes de champ de ce torseur engendrent une surface de vissage.

⇐

Nous allons considérer qu'il existe un torseur \mathcal{V} partout tangent à la surface, et montrer que ce torseur ne peut engendrer qu'une surface filetage. Dire que le torseur est partout tangent à la surface, s'écrit,

$$\forall M \in S, \quad \langle V(M), N(M) \rangle = 0,$$

où $N(M)$ est le vecteur normal à la surface en tout point M . Ceci s'écrit encore

$$\exists O \in S, \quad \langle V(O) + \Omega \wedge OM, N(M) \rangle = 0, \quad \forall M.$$

• Si $\Omega = 0$, alors

$$\exists O \in S, \quad \langle V(O), N(M) \rangle = 0, \quad \forall M.$$

De telles surfaces sont des surfaces de translation, c'est à dire invariante par une famille à un paramètre de déplacement.

• Si $V(O) = 0$, alors

$$\exists O \in S, \quad \langle \Omega \wedge OM, N(M) \rangle = 0, \quad \forall M.$$

Notre torseur est dans ce cas un glisseur. Le champ de vecteurs $V(M)$ de ce torseur est invariant par rotation autour de Δ , droite portée par Ω , par translation parallèle à Δ , il engendrent une surface de révolution, cas particulier des filetages.

• Si Ω et $V(O)$ sont quelconques, la projection de ce champ de torseur sur la surface engendrent une surface invariante par rotation autour d'une droite de vecteur Ω et invariante par glissement le long de cette droite. C'est à dire une surface filetage.

Remarque

On sait que les courbes intégrales du champ de vecteur $V(M)$ sont des hélices. Une surface filetage est finalement, une surface feuilletée par ces courbes intégrales.

V.5 Fonctions-coût filetage et normalisation

Nous allons exprimer sous forme de moindres carrés le fait que notre surface est partout tangente à un torseur \mathcal{V} . Cela peut s'écrire

$$Q_F = \int_S \langle V(M), N(M) \rangle^2 ds$$

$$= \int_S \langle V(O) + \Omega \wedge OM, N(M) \rangle^2 ds.$$

où $N(M)$ est le vecteur normal à la surface en M . Cette fonction-coût mesure l'écart au parallélisme entre le torseur et la surface.

Si le torseur est nul en tout point de la surface alors la fonction-coût Q_F sera minimisée pour n'importe quelle surface. Pour empêcher cela, nous avons décidé de le normaliser en moyenne sur la surface. Nous avons introduit un critère Q_N de moindres carrés sans signification physique, c'est à dire qui ne vient pas perturber la géométrie de la surface. La fonction-coût normalisation associée à ce critère s'écrit

$$Q_N = \left| \int_S \|V(M)\|^2 ds - \int_S ds \right|^2.$$

Le problème (P^{IV}) de minimisation s'écrit

Problème (P^{IV})

Soit U un ouvert borné de R^2 , soient $\{a_1, a_2, \dots, a_P\}$ P points de U dont au moins 3 sont non alignés et $\{\varphi_{obs}^1, \varphi_{obs}^2, \dots, \varphi_{obs}^P\}$ P points de R^3 . Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ des poids arbitraires (constantes réelles). Soit $J : H^2(U, R^3) \rightarrow R$ la fonctionnelle définie par

$$J(\varphi, \mathcal{V}) = \varepsilon_1^2 \sum_{i=1, P} \|\varphi(a_i) - \varphi_{obs}^i\|^2 + \varepsilon_2^2 \int_U pr_{T_s} \|D^2 \varphi\|^2 dU + \varepsilon_3^2 \int_S \|h\|^2 ds +$$

$$\varepsilon_4^2 \int_S \langle V(M), N(M) \rangle^2 ds + \varepsilon_5^2 \left| \int_S \|V(M)\|^2 ds - \int_S ds \right|^2.$$

Trouver $(\phi, T) \in H^2(U, R^3) \times R^6$, minimisant la fonctionnelle $J(\phi, T)$ telle que

$$J(\phi, T) = \min_{\varphi \in H^2(U, R^3), \mathcal{V} \in R^6} J(\varphi, \mathcal{V}).$$

Remarque

On ne peut pas normaliser directement le vecteur du torseur. Par exemple, avec une fonction-coût

$$Q = \int_S (\|V(M)\|^2 - 1)^2 ds,$$

le résultat de l'optimisation nous donnerait un couple, $\mathcal{V} = [V(O), 0]_M$, quelque soit M . Ce qui n'est pas du tout satisfaisant, car on a restreint l'ensemble de nos surfaces solutions aux surfaces cylindriques.

V.6 Exemples numériques

Nous présentons différents exemples numériques qui montrent l'effet du critère de filetage. Pour chaque résultat, nous donnons la valeur des coefficients de pondération, ainsi que quelques quantités repères qui donnent des informations complémentaires qualitatives sur les représentations graphiques que l'on visualise. Les stries sont représentées par des lignes en tireté.

V.6.1 Présentation des points de données

Les différents points de donnée qui servent à la détermination de la surface sont représentés sur la figure 7. Nous avons fait coïncider les domaines de coordonnées curvilignes et cartésiennes par souci de simplification.

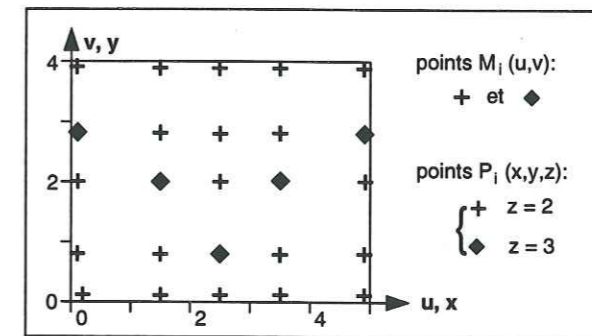


Figure 7 Représentation des points de données.

D'un point de vue description quantitative, nous avons $N_p = 3 N_{p_u} N_{p_v} = 300$, nombre total de paramètres de splines définissant le modèle, et $N_{G_{uv}} = N_u N_v = 480$, nombre total de points de discrétisation pour les intégrales.

V.6.2 Quantités repères

Nous nous sommes définis des quantités repères qui permettent une meilleure appréciation de notre surface. Nous en avons trois sortes.

V.6.2.1 Repères en lèvre: $r_{L\perp}, r_{L//}$

$r_{L\perp}$ (resp. $r_{L//}$) mesure l'écart moyen entre la surface et les points d'observation dans la direction normale N (resp. dans les directions du plan tangent X et Y).

$$r_{L\perp} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1, N_{points}} \langle \varphi(a_i) - \varphi_{obs}^i, N^i \rangle^2}{N_{points}}}$$

et

$$r_{L_{//}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1, N_{points}} \langle \varphi(a_i) - \varphi_{obs}^i, X^i \rangle^2 + \sum_{i=1, N_{points}} \langle \varphi(a_i) - \varphi_{obs}^i, Y^i \rangle^2}{N_{points}}}$$

$r_{L_{\perp}}, r_{L_{//}}$ apprécient la proximité de la surface par rapport aux points de données. Plus les quantités repères sont "petites", plus la surface, en moyenne quadratique, est proche des points de données.

V.6.2.2 Repère en courbure: r_C

r_C mesure "la développabilité" de la surface,

$$r_C = \sqrt{\frac{\sum_{\substack{i=1, N_u \\ j=1, N_v}} (\lambda_1^2(m_{ij}) + \lambda_2^2(m_{ij}))}{N_u N_v}}$$

où λ_1, λ_2 sont les courbures principales, m_{ij} un point dans le domaine des coordonnées curvilignes.

V.6.2.3 Repère en filetage: r_F

r_F mesure l'écart quadratique moyen entre la surface et le torseur,

$$r_F = \sqrt{\frac{\sum_{\substack{i=1, N_u \\ j=1, N_v}} \langle V(m_{ij}), N(m_{ij}) \rangle^2}{N_u N_v}}$$

Comme $V(M)$ et $N(M)$ sont proches de 1, r_F est homogène à un angle.

V.6.3 Approximation d'une surface

Comme modèle initial, nous avons choisi un plan. Ce choix est dû au fait qu'un plan est une surface invariante par une famille à deux paramètres de déplacement.

La figure 8 est le résultat du problème d'approximation par minimisation des critères de courbure et de proximité aux points. Les coefficients de pondération sont $C_{\alpha} = 0.01, C_c = 0.05, C_{L_p} = 0.1, C_{L_{\alpha}} = 0.1$. Cette surface est régulière et aussi que proche que possible des points de données. Les quantités repères nous donnent $r_{L_{//}} = 0.0298, r_{L_{\perp}} = 0.30, r_C = 0.0436$. On note la présence de deux bosses, à gauche et à droite, qui sont dues à la position des points de donnée. Ces deux bosses sont naturelles pour un résultat d'approximation de surface, mais font que la surface ne peut pas être une surface de glissement entre deux blocs.

Les lignes en tireté sur la figure 8 représentent les stries calculées, c'est à dire les lignes de champs de la projection du torseur. Ce torseur a été choisi de façon quelconque très loin du torseur solution. Il va servir de torseur initial pour l'inversion à torseur inconnu. Ses coordonnées sont

$$V = \begin{bmatrix} V(O) \\ \Omega \end{bmatrix}_O = \begin{bmatrix} (0, 0, 1) \\ (1.7, -4.5, 0) \end{bmatrix}_O$$

La norme du gradient décroît de 0.11 à 0.021 en 7 itérations. D'un point de vue informatique, l'optimisation nécessite 6 secondes *cpu* par itération sur une machine *Fujitsu* (machine vectorielle comparable au *CRAY*) pour un programme vectorisé à 60%.

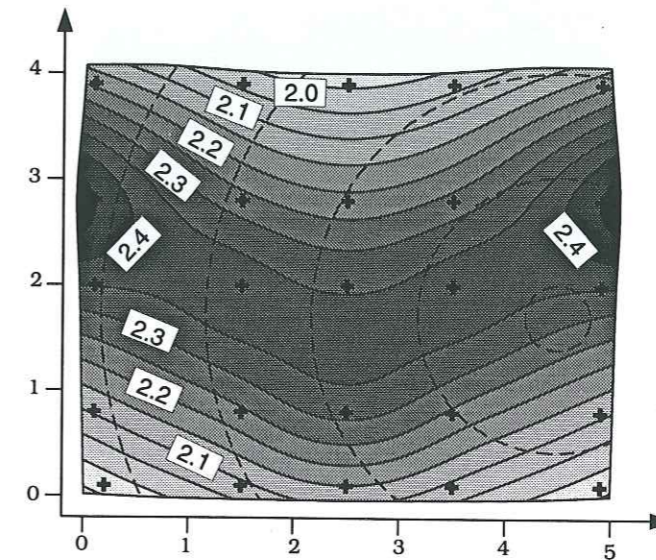


Figure 8 Surface obtenue après minimisation des critères de courbure et de proximité aux points de donnée. Les poids sont $C_{\alpha} = 0.01, C_c = 0.05, C_{L_p} = 0.1, C_{L_{\alpha}} = 0.1$.

V.6.4 Influence du poids en courbure

Les deux figures 9 et 10 qui suivent nous montrent l'influence des coefficients de pondération. Plus on pondère en courbure, plus on lisse la surface.

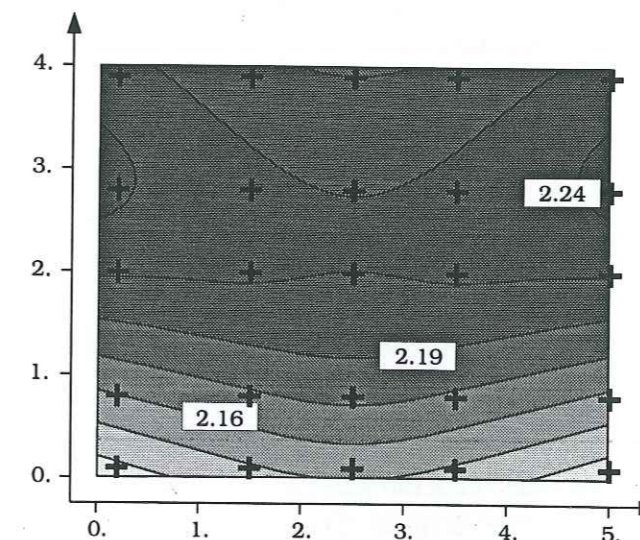


Figure 9 Représentation de la surface solution obtenue après minimisation des critères de courbure et proximité aux points de données. Les poids sont $C_{\alpha} = 0.1, C_c = 1.0, C_{L_p} = 0.1, C_{L_{\alpha}} = 0.1$.

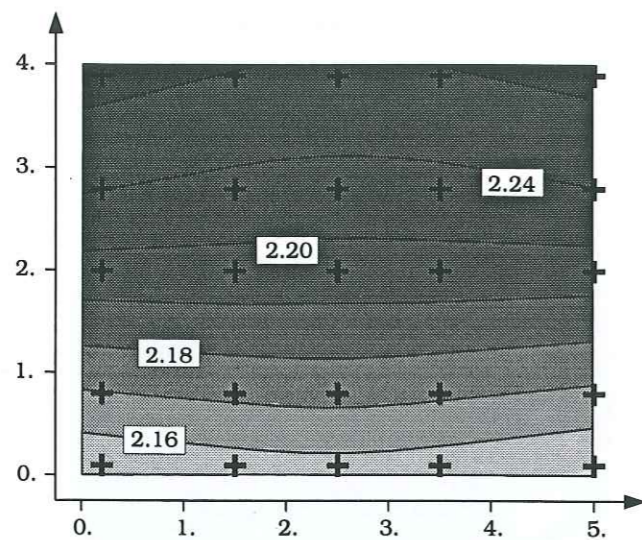


Figure 10 Représentation de la surface solution obtenue après minimisation des critères de courbure et proximité aux points de données. Les poids sont $C_\alpha = 0.1, C_c = 5, C_{L_p} = 0.1, C_{L_\alpha} = 0.1$.

V.6.5 Résolution à torseur fixe

Prenant comme modèle initial, la surface solution de l'approximation, nous imposons le torseur. Les coefficients de pondération sont $C_\alpha = 0.01, C_c = 0.05, C_{L_p} = 0.1, C_{L_\alpha} = 0.1, C_F = 10$. Nous choisissons un couple

$$c = \begin{bmatrix} V(O) \\ \Omega \end{bmatrix}_O = \begin{bmatrix} (1, 0, 0) \\ 0 \end{bmatrix}_O$$

comme torseur fixe. La figure 11 devient presque un cylindre. Les stries sont presque des lignes droites représentant les génératrices du cylindre. La surface est régulière, et presque aussi proche des points de données que la surface 8. Les repères sont égaux à $r_{L_{//}} = 0.032, r_{L_\perp} = 0.35, r_C = 0.028, \text{angle} = 0.2 \text{ degré}$. (l'angle mesure l'écart angulaire entre le plan tangent et le torseur en chaque point). La norme du gradient décroît de 0.53 à $4.6e-03$ en 5 itérations en 60 secondes *cpu* sur *Fujitsu*.

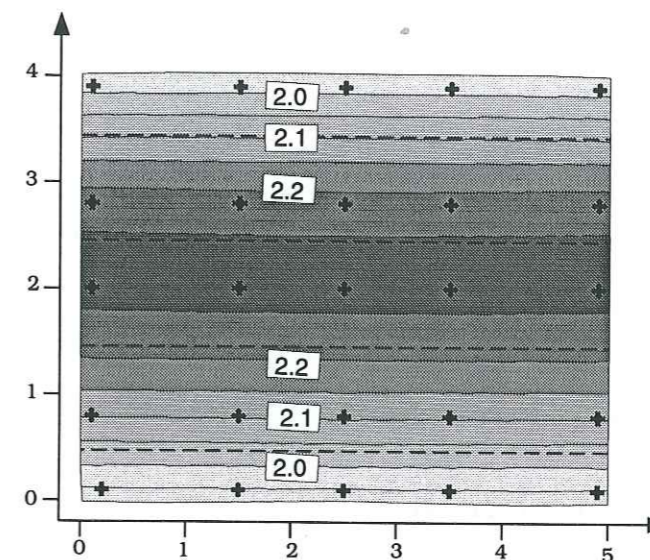


Figure 11 Représentation de la surface solution obtenue après optimisation des critères de courbure et de proximité aux points de donnée avec torseur fixe. Les poids sont $C_\alpha = 0.01, C_c = 0.05, C_{L_p} = 0.1, C_{L_\alpha} = 0.1, C_F = 10$.

V.6.6 Résolution à splines fixées

Nous fixons les coefficients de splines de la surface, et nous cherchons le torseur qui est le plus tangent à la surface. Les coefficients de pondération sont $C_\alpha = 0.01, C_c = 0.05, C_{L_p} = 0.1, C_{L_\alpha} = 0.1, C_F = 1.0, C_N = 0.1$. Ce torseur solution s'écrit

$$v = \begin{bmatrix} V(O) \\ \Omega \end{bmatrix}_O = \begin{bmatrix} 1.388, 0.542, -4.122 \\ 0.0001, -0.016, 0.216 \end{bmatrix}_O$$

Les repères sont égaux à $r_{L_{//}} = 0.029, r_{L_\perp} = 0.30, r_C = 0.043$. La norme du gradient décroît de 0.24 à 0.007 en 6 itérations. L'angle moyen mesurant l'écart à la surface 12 est 0.16 degré. Les stries calculées sont représentées par des lignes en tireté.

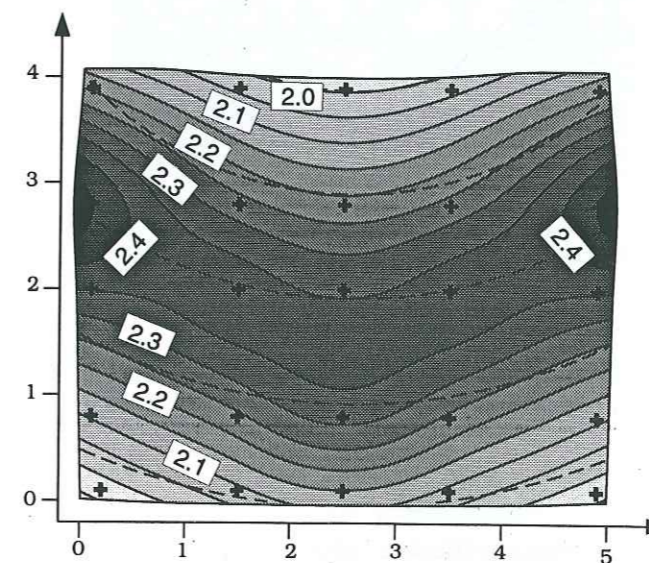


Figure 12 Représentation du modèle solution après minimisation des critères de courbure, proximité aux points de données, et filetage. Les poids sont $C_\alpha = 0.01, C_c = 0.05, C_{L_p} = 0.1, C_{L_\alpha} = 0.1$.

V.6.7 Résolution à torseur inconnu

Nous prenons comme modèle initial la surface solution de l'approximation (Fig. 8) et nous cherchons en modifiant la surface, le torseur qui sera le plus tangent à la surface. Les coefficients de pondération sont $C_\alpha = 0.01, C_c = 0.05, C_{L_p} = 0.1, C_{L_\alpha} = 0.1, C_F = 1., C_N = 0.1$. La surface solution 13 est régulière, aussi proche que possible des points de données et, est un filetage. La surface obtenue est une surface de révolution, c'est à dire une surface de glissement entre deux blocs rigides. Les éléments de réduction du torseur sont

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} V(O) \\ \Omega \end{bmatrix}_O = \begin{bmatrix} 1.32, -0.50, 0.009 \\ -0.0003, 0.003, 0.20 \end{bmatrix}_O$$

L'axe du torseur Δ est défini paramétriquement par

$$\Delta = \left\{ M/O\vec{M} = O\vec{A} + \mu\vec{V} / \mu \in R \right\}$$

avec $A = (-2.2, -6.6, -0.104)$ et $\vec{V} = (-0.0079, 0.082, 5)$. Le pas p du filetage est égal à 0.023 et le filetage tourne à droite. Les repères sont égaux à $C_\alpha = 0.01, C_c = 0.05, C_{L_p} = 0.1, C_{L_\alpha} = 0.1, C_F = 1., C_N = 0.1$. La norme du gradient décroît de 2942 à 0.0065 en 11 itérations. L'angle moyen mesurant l'écart à la surface est 1 degré. Dans ce cas, les stries nous donnent des informations sur le sens du mouvement des deux blocs.

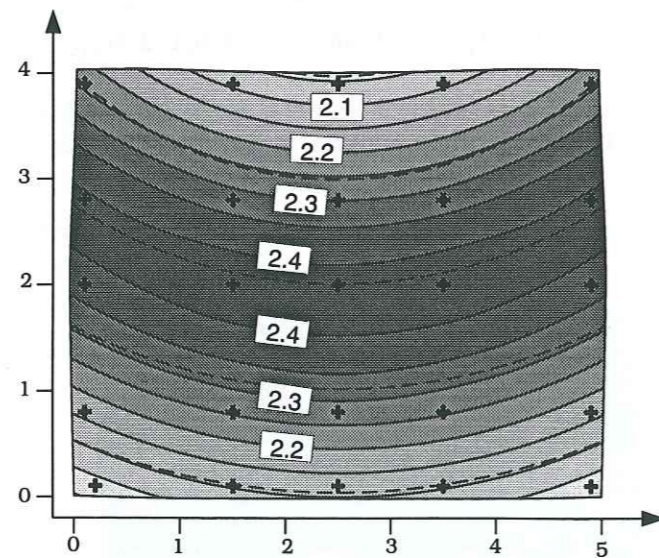


Figure 13 Représentation de la surface solution obtenue après optimisation des critères de courbure, proximité aux points de données, et filetage. $C_\alpha = 0.01, C_c = 0.05, C_{L_p} = 0.1, C_{L_\alpha} = 0.1, C_F = 1., C_N = 0.1$.

V.6.8 Influence du poids en filetage

Plus on pondère le coefficient en filetage, plus la surface est un filetage, plus la surface tend à être lisse, plus nous sommes loin en moyenne quadratique des points de donnée. Les figures 14 et 15 traduisent cette remarque (et inversement).

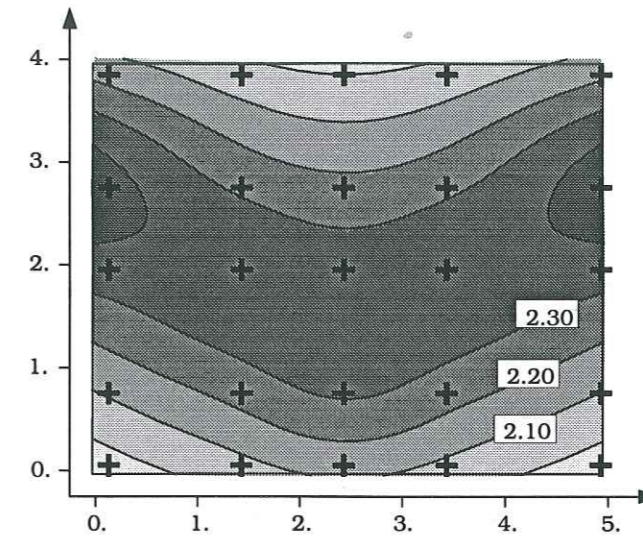


Figure 14 Représentation de la surface précédente avec un poids $C_F = 0.01$.

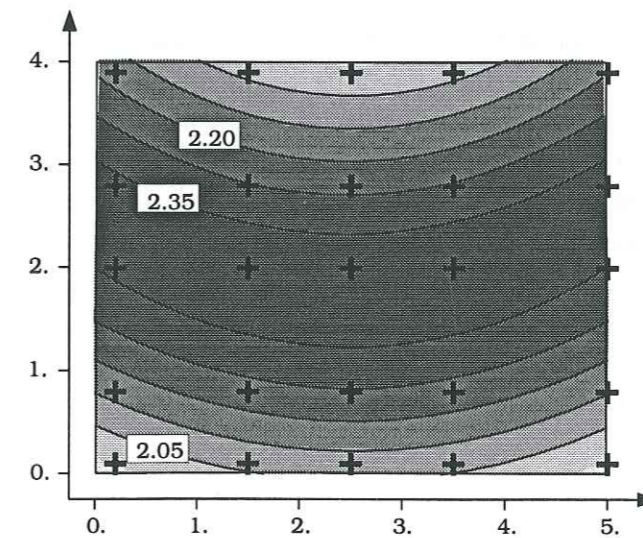


Figure 15 Représentation de la surface précédente avec un poids $C_F = 10$.

V.6.9 Indépendance vis à vis du poids en normalisation

Le critère Q_N n'a aucune signification physique. Ainsi, le poids ne doit pas modifier la surface solution. Nous avons vérifié que pour une plage de poids C_i , la solution obtenue après convergence reste la même et donc est indépendante de la valeur de ce coefficient. Nous prenons comme modèle initial le modèle solution en filetage. La figure 16 représente les valeurs respectives des fonctions-coût physiques, en fonction de la valeur de C_i , après convergence des itérations.

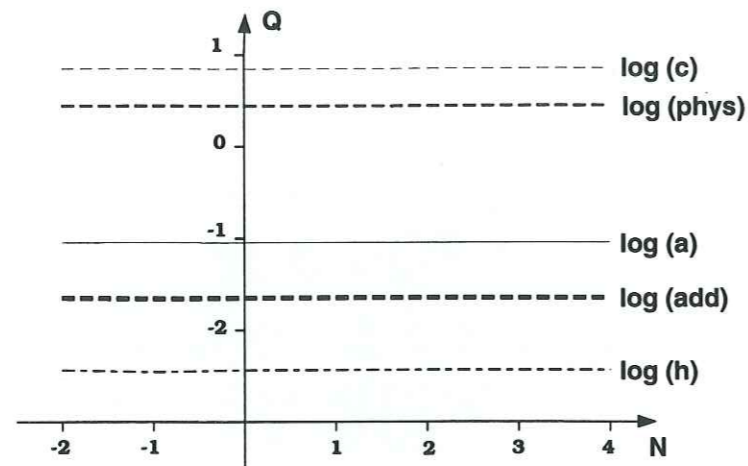


Figure 16 Représentation des fonctions-coûts pour différentes valeurs du poids en normalisation.

Il apparaît sur la figure 16 une plage de valeurs de C_i ($10^{-2} \leq C_i \leq 10^4$) pour ce modèle telle que la solution obtenue ne dépend pas du choix de ce paramètre. Si C_i devient très grand ou très petit, les problèmes d'imprécision numérique apparaîtront. Nous avons donc vérifié numériquement cette indépendance.

V.7 Conclusions

Les résultats numériques sur l'exemple synthétique nous ont montré qu'il est possible de contraindre la forme de la surface de faille de façon plus précise en introduisant des informations géologiques. La forme de la surface est mieux déterminée dans ce cas, que par une simple approximation avec un critère de proximité aux points de données. L'introduction du torseur nous donne des informations cinématiques très intéressantes sur le déplacement des différents blocs. Il peut nous renseigner sur la nature de la faille (décrochement, faille en ciseau ...) à l'aide des stries. Son inconvénient réside dans le fait que l'approximation blocs rigides doit être plus ou moins valide et que cela est assez restrictif. Mais, ce que l'on peut mesurer comme grandeur intéressante, c'est justement cet écart à la rigidité qui pourrait "être interprétée" comme une mesure de la déformation.

Annexe 1 : les matrices jacobienes J_F et J_N

Nous allons détailler les matrices jacobienes J_F , J_N qui ont servi à résoudre le problème discret. Nous avons

$$Q_F = \int_S \langle V(M), N(M) \rangle^2 ds$$

$$= \int_U \langle V(M), N(M) \rangle^2 |det(D\varphi)| dU.$$

$$\tilde{Q}_F = \sum_{\substack{i=1, N_u \\ j=1, N_v}} \left(\langle V(u_i, v_j), N(u_i, v_j) \rangle^T \langle V(u_i, v_j), N(u_i, v_j) \rangle \right) |det(D\varphi)|_{(u_i, v_j)} dU$$

$$= \sum_{\substack{i=1, N_u \\ j=1, N_v}} \langle f_{Fij}^T \cdot f_{Fij} \rangle.$$

Et

$$Q_N = \left\| \int_S \|V(M)\|^2 ds - \int_S ds \right\|^2$$

$$= \left\| \int_U \|V(M)\|^2 |det(D\varphi)| dU - \int_U |det(D\varphi)| dU \right\|^2,$$

$$\tilde{Q}_N = \left(\sum_{\substack{i=1, N_u \\ j=1, N_v}} \langle V(u_i, v_j), V(u_i, v_j) \rangle |det(D\varphi)|_{(u_i, v_j)} dU \right)^2$$

$$= \left(\sum_{\substack{i=1, N_u \\ j=1, N_v}} \left(f_{Nij}^T \cdot f_{Nij} \right) \right)^2.$$

La matrice J_F

C'est une matrice de dimension $N_p + 6$ (N_p nombre de paramètres). Commençons par dériver par rapport aux paramètres de splines,

$$\frac{\partial f_{Fij}}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k} \left[\langle V(u_i, v_j), N(u_i, v_j) \rangle \sqrt{|det(D\varphi)|} \sqrt{dU} \right]$$

$$= \left[\left(\Omega \wedge \frac{\partial}{\partial p_k} (OM) \right) N(u_i, v_j) \sqrt{|det(D\varphi)|} \sqrt{dU} \right]$$

$$+ \frac{\partial N(u_i, v_j)}{\partial p_k} [V(u_i, v_j) \sqrt{|det(D\varphi)|} \sqrt{dU}]$$

$$+ \frac{\partial \left(\sqrt{|det(D\varphi)|} \right)}{\partial p_k} \langle V(u_i, v_j), N(u_i, v_j) \rangle \sqrt{dU}.$$

Puis rapport aux composantes du torseur,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{F_{ij}}}{\partial V(O)} &= \frac{\partial}{\partial V(O)} [(V(u_i, v_j) \cdot N(u_i, v_j)) \sqrt{|det(D\varphi)|} \sqrt{dU}] \\ &= N(u_i, v_j) \sqrt{|det(D\varphi)|} \sqrt{dU} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{F_{ij}}}{\partial \Omega} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} [(V(u_i, v_j) N(u_i, v_j)) \sqrt{|det(D\varphi)|} \sqrt{dU}] \\ &= \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} \wedge OM \right) N(u_i, v_j) \sqrt{|det(D\varphi)|} \sqrt{dU}. \end{aligned}$$

La jacobienne est

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{F_{ij}}}{\partial p_k} \\ \frac{\partial f_{F_{ij}}}{\partial V(O)} \\ \frac{\partial f_{F_{ij}}}{\partial \Omega} \end{pmatrix}.$$

La matrice J_N

C'est une matrice de dimension $N_p + 6$. Commençons par dériver par rapport aux paramètres de splines,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{N_{ij}}}{\partial p_k} &= \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\sum_{\substack{i=1, N_u \\ j=1, N_v}} (V^2(u_i, v_j) - 1) dU det(D\varphi) \right) \\ &= \sum_{\substack{i=1, N_u \\ j=1, N_v}} dU \left[(V^2(u_i, v_j) - 1) \frac{\partial det(D\varphi)}{\partial p_k} + det(D\varphi) \frac{\partial V^2(u_i, v_j)}{\partial p_k} \right]. \end{aligned}$$

Puis par rapport aux composantes du torseur,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{N_{ij}}}{\partial V(O)} &= \frac{\partial}{\partial V(O)} ((V^2(u_i, v_j) - 1) dU det(D\varphi)) \\ &= 2 dU det(D\varphi) V(u_i, v_j), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{N_{ij}}}{\partial \Omega} &= \frac{\partial}{\partial \Omega} (dU det(D\varphi) (V^2(u_i, v_j) - 1)) \\ &= 2 dU det(D\varphi) \left\langle \frac{\partial V(u_i, v_j)}{\partial \Omega}, V(u_i, v_j) \right\rangle \\ &= dU det(D\varphi) \left\langle \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} \wedge OM, V(u_i, v_j) \right\rangle. \end{aligned}$$

La jacobienne est

$$J_N = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{N_{ij}}}{\partial p_k} \\ \frac{\partial f_{N_{ij}}}{\partial V(O)} \\ \frac{\partial f_{N_{ij}}}{\partial \Omega} \end{pmatrix}.$$

Chapitre VI

Exemples réels: faille de la Cléry et faille de San Cayetano

Les exemples synthétiques ont permis d'expliquer l'effet et le fonctionnement du critère de filetage (réf. Chap. V.6). On a pu vérifier sur des exemples synthétiques comment l'introduction du critère de filetage améliore la détermination de la géométrie des surfaces de faille, comment le critère modifie la forme de la surface pour la rendre compatible avec l'hypothèse de blocs approximativement rigides.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à des exemples réels qui illustrent l'intérêt et les limites de ce critère sur des données réelles. Le premier exemple est un miroir de faille d'échelle décimétrique dont nous avons effectué le levé topographique: le miroir de la faille de la Cléry (Vercors, France). Le second exemple est un miroir de faille d'échelle kilométrique: la faille de San Cayetano (Californie, USA).

VI.1 Introduction géologique des filetages

En contexte de blocs approximativement rigides, le glissement d'un bloc sur un autre engendre une surface de faille particulière qui est un filetage (Fig. 1).

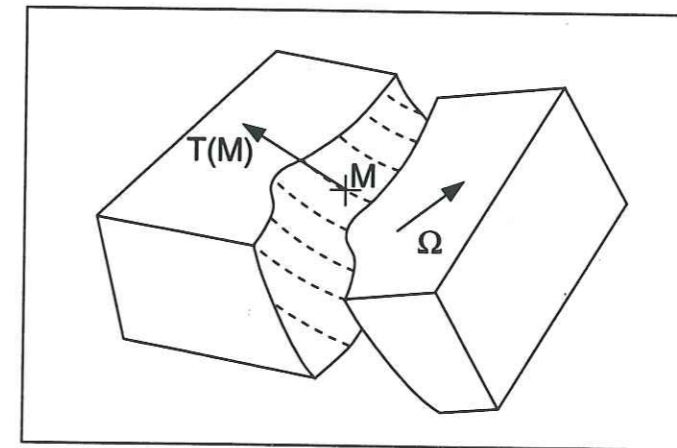


Figure 1 Représentation de deux blocs glissant l'un sur l'autre et engendrant une surface de faille. Si les blocs sont rigides, cette surface est appelée un filetage. Les lignes en pointillé représentent des stries.

Un filetage peut être caractérisé par un champ de vecteurs particulier appelé torseur (réf. Chap. V.3). Les lignes de champs de ce torseur sont des hélices qui peuvent être interprétées sur la surface comme des stries calculées. Elles peuvent être comparées aux stries naturelles lorsqu'on les connaît. Sur la figure 1, les lignes en pointillé représentent ces hélices. $T(M)$ représente la valeur du champ de vecteurs en M , c'est un vecteur tangent à la surface. Sur la même figure 1, Ω est un vecteur parallèle à l'axe du filetage.

Parmi les différents filetages, on peut citer les surfaces cylindriques dont les stries sont des droites, qui peuvent être vues comme des hélices à pas infini (Fig. 2a), les surfaces de révolution dont les stries sont des cercles (hélices à pas nul) centrés sur l'axe de révolution

(Fig. 2b), et les filetages quelconques (que Darboux, [1917] appelait hélicoïdes) dont les stries sont des hélices de même axe, de même pas (Fig. 2c).

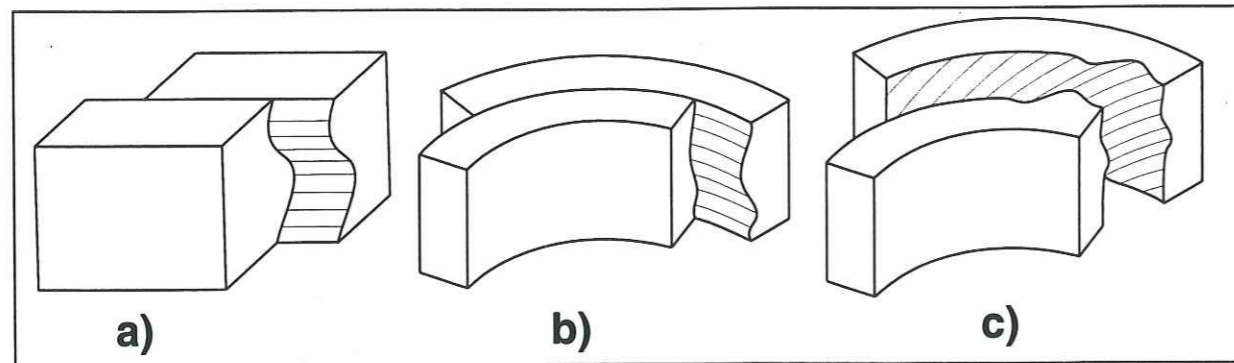


Figure 2 Représentation des différents filetages possibles. Les surfaces cylindriques sont représentées en a), les surfaces de révolution en b) et les hélicoïdes en c).

Dans les cas, où la surface n'est pas exactement un filetage, les stries calculées sont les lignes de champ de la projection du torseur sur la surface.

Dans les cas, où la surface de faille est contrainte par des données de puits ou d'affleurement, notre démarche consiste dans une première étape à déterminer la surface de faille qui approche au mieux les données par une méthode d'approximation où l'on minimise un critère de proximité aux points de donnée et un critère de courbure (réf. Chap. IV). Ensuite, on corrige la forme de la surface solution du problème d'approximation en introduisant le critère de filetage, de façon à la rendre compatible avec l'hypothèse de blocs rigides. On obtient une surface à peu près filetée, qui résulte de la minimisation des critères de proximité aux points, de courbure et de filetage. Le critère de filetage relie la surface à un torseur qui est une inconnue auxiliaire. On lui donne une valeur initiale, qui est corrigée au fil des itérations pour être compatible avec les données.

On obtient ainsi un torseur optimal associé à la surface améliorée par le critère de filetage et il est possible ensuite de le confronter aux marqueurs de glissement mesurés sur le terrain (stries, glissement sur failles sismiques par les mécanismes au foyer).

Dans les cas, où l'on a aussi des informations sur les stries, ou sur les mécanismes aux foyers, il est possible d'introduire ces informations comme des données supplémentaires dans le critère de filetage. Dans ce cas, on en déduit des données de stries disponibles, un torseur fixé a priori considéré comme un vecteur de glissement tangent à la projection des lignes de champ du torseur. Cette direction fixée pour le champ de vecteur modifie la forme de la surface dans le sens du torseur, de façon à la rendre compatible avec la direction de glissement qui nous ait donnée.

VI.2 Étude des miroirs, des erreurs.

Pour chacun des miroirs, nous avons adopté la même démarche. Nous avons résolu dans une première étape, un problème d'approximation de surface avec minimisation des critères de courbure et de proximité aux points (réf. Chap. IV). Puis prenant ce modèle comme modèle initial, nous avons corrigé la forme de la surface en introduisant en plus le critère de filetage. Nous avons ainsi un modèle solution en approximation sans critère de filetage et avec critère de filetage. Les résultats sont présentés sous forme de cartes en pseudo-courbes de niveau. Ce sont des isolignes en y .

Sur les cartes isolignes du résultat de l'optimisation après introduction du critère de filetage, on peut représenter en tireté les lignes de champ de la projection du torseur sur la surface, que nous appellerons *les stries calculées*. En commentaire, nous donnerons la valeur optimale du torseur que nous avons trouvé, le sens de son pas (à gauche ou à droite), la valeur du torseur en un point de l'axe qui indique la direction de cet axe. Ceci est important en géologie car la direction des stries nous renseigne sur la nature de la faille (en ciseau, en décrochement, ...).

Nous avons aussi fait une étude des erreurs résiduelles qui permet d'apprécier la qualité de nos résultats. Pour chaque critère, nous avons des cartes d'erreurs qui illustrent l'écart à l'optimalité, c'est à dire l'écart entre la surface calculée à partir des hypothèses de régularité et les données. Plus les résidus sont petits, plus les contraintes que l'on a imposées à la surface sont vérifiées, meilleurs sont les résultats.

La carte de résidus en angle mesure l'angle en degrés que font le plan tangent et le torseur en chaque point. Elle permet d'apprécier les zones où l'approximation blocs rigides est plus ou moins valide. Cette approximation sera d'autant mieux vérifiée que l'angle sera petit. La formule de l'angle est

$$\text{angle} = \arctg \left(\frac{\langle T(m), N(m) \rangle}{\|T(m) \wedge N(m)\|} \right) \cdot \frac{180}{\pi},$$

avec $N(m)$ le vecteur normal à la surface en m , et $T(m)$ la valeur du torseur en m .

Sur les cartes de résidus d'angle, nous avons reporté la projection normale de l'écart entre chaque point de données m_0 et son homologue sur la surface m . Ces écarts, calculés de la façon suivante

$$\text{écart} = Pr_{\perp}(m - m_0),$$

sont représentés sur les figures par des boîtes.

Nous avons aussi des cartes de résidus en courbure. En chaque point m de notre surface, nous avons calculé la courbure quadratique σ en m définie par

$$\sigma_m = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2},$$

où λ_1 , λ_2 sont les courbures principales. Une courbure de 1 est celle d'un cylindre de rayon unitaire, ou celle d'une sphère de rayon $\sqrt{2}$. En comparant avec le simple problème d'approximation, nous pouvons voir par comparaison les zones où le critère de filetage a agi.

VI.3 La faille de la Cléry (Vercors)

VI.3.1 Introduction géologique

Le décrochement dextre de la faille de la Cléry recoupe l'ensemble du Vercors (Fig. 3). C'est un des marqueurs de déformation de la couverture sédimentaire lié à la formation des Alpes. Le rejeu de cette zone de faille peut être estimé de plusieurs manières. Le décalage de niveaux repères (limite sud de calcaires à débris du Barrémien inférieur (Robert, [1976], Arnaud, [1981]) indique un déplacement de l'ordre de 3.5 km sur ce décrochement de la Cléry.

La mesure de la différence de raccourcissement sur deux coupes parallèles au décrochement de la Cléry (Fig. 5) (Gratier et al, [1991]) confirme cette valeur du déplacement de l'ordre de 3.5 km.

Ce déplacement est maximal dans la partie NE de la faille (Est du Vercors) alors que dans sa partie SW ce décrochement vient s'amortir sur les failles NS du Diois. Admettant une durée de fonctionnement de cette faille de l'ordre de 10MA (Gratier et al, [1989]), le taux de glissement devrait être de l'ordre de 0.4 mm/an. Des séismes sont enregistrés le long de ce décrochement qui semble encore actif et qui pourrait se poursuivre au Nord à travers le massif de Belledonne (Fig. 3) où des séismes ont aussi été enregistrés. Dans le détail, cette zone de faille de la Cléry comporte plusieurs miroirs de faille plus ou moins parallèles et c'est l'un d'eux qui a été mesuré. On ne peut donc pas connaître précisément le déplacement relatif sur ce miroir en particulier.

Les mécanismes de glissement sur les failles sont de type sismique avec des marqueurs de broyage et de cataclase. Les surfaces très lisses et brillantes peuvent témoigner de déplacements rapides. Mais il faut souligner aussi autour de ces failles des marques de déformation ductile (schistosité, stylolites) qui indique un fonctionnement alternativement ductile et fragile. On peut remarquer aussi autour de la zone de faille majeure de nombreuses failles conjuguées obliques entre le Pré Peyret (carré noir) et le Roc Mazilier (triangle noir) d'après photoaérienne complétée par des levés de terrain (Arnaud, [1971]) (Fig. 6) qui sont associés au mouvement de décrochement. La part de la déformation ductile comme l'effet des fractures annexes reste cependant suffisamment faible pour que le concept de blocs rigides puissent, en première approximation, être considéré comme acceptable.

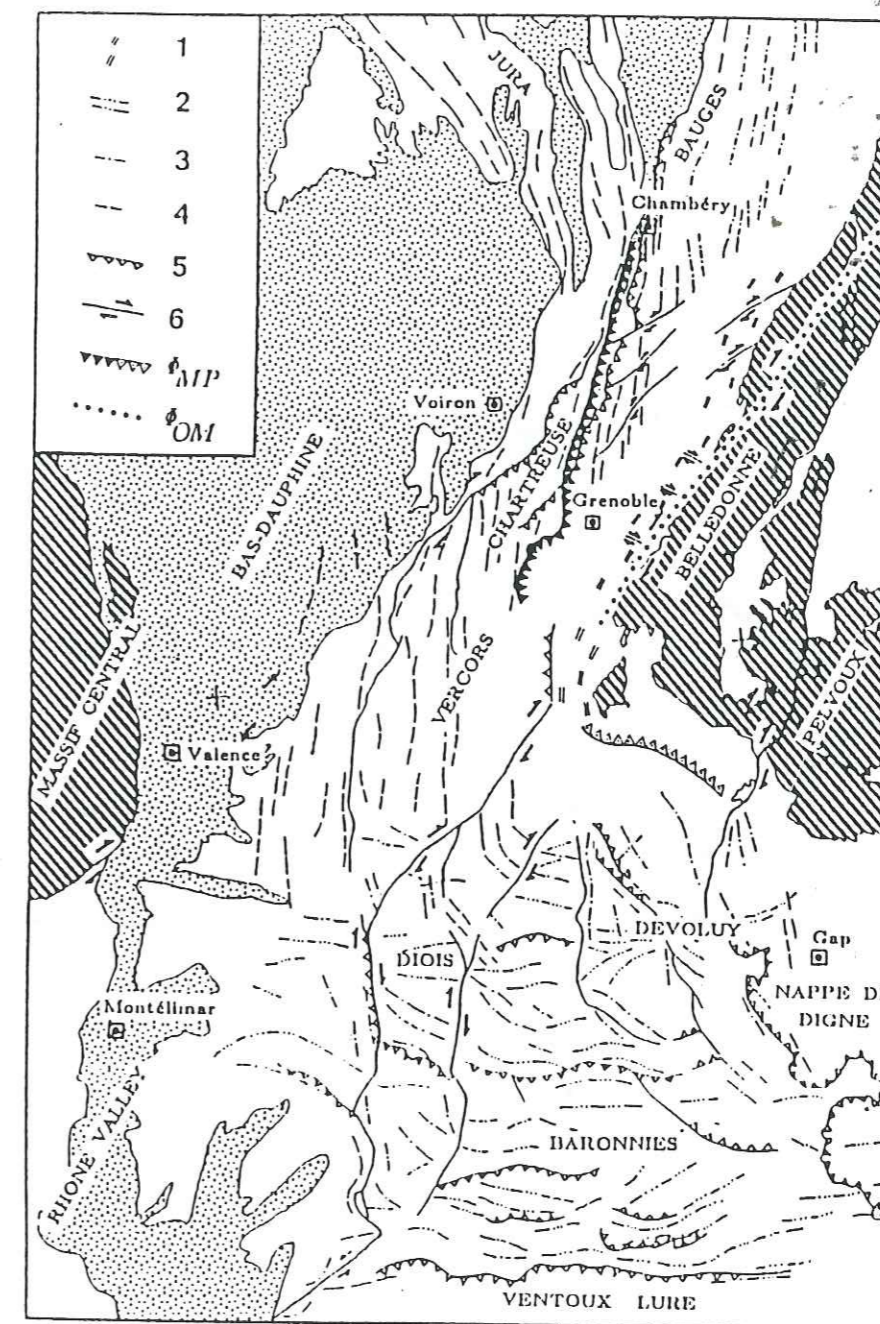


Figure 3 Carte structurale de la chaîne subalpine montrant les différentes structures de la région: 1- clivages espacés dans les ardoises du Jurassique de la couverture de la Belledonne, 2-3-4- axes de plis d'âges différents, 2- plis pyrénéen-provençaux, 3- plis alpins (oligo-miocène), 4- plis alpins (miocène-quaternaire), 5- failles importantes, 6- décrochements importants, ϕ_{OM} -oligo-miocène, ϕ_{MP} -miocène-quaternaire (dans Gratier et al, [1989]).

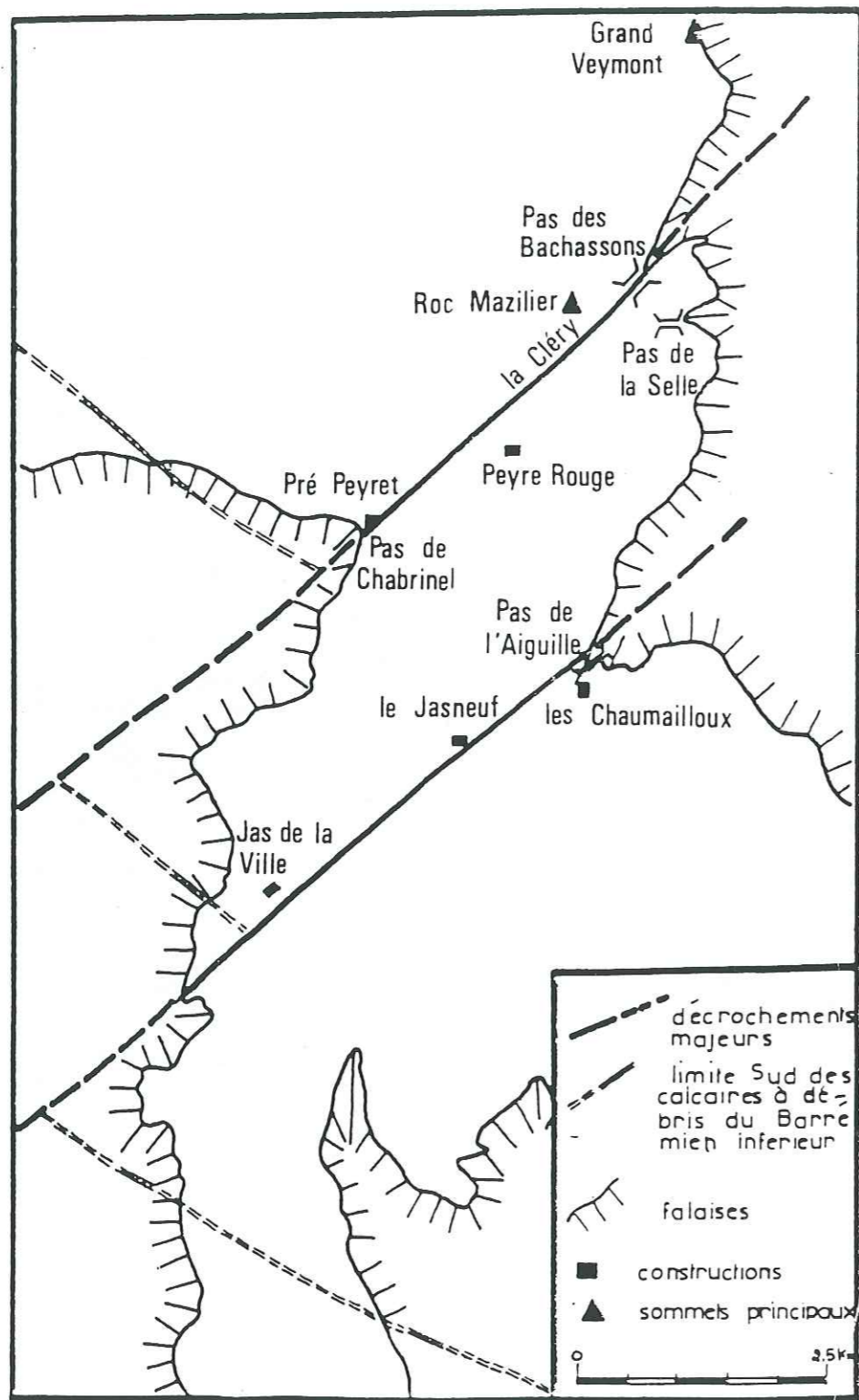


Figure 4 Mise en évidence du décalage de la limite d'extension Sud des calcaires à débris de l'ensemble 2 supérieur (Barrémien inférieur) (H.Arnaud [1971]).

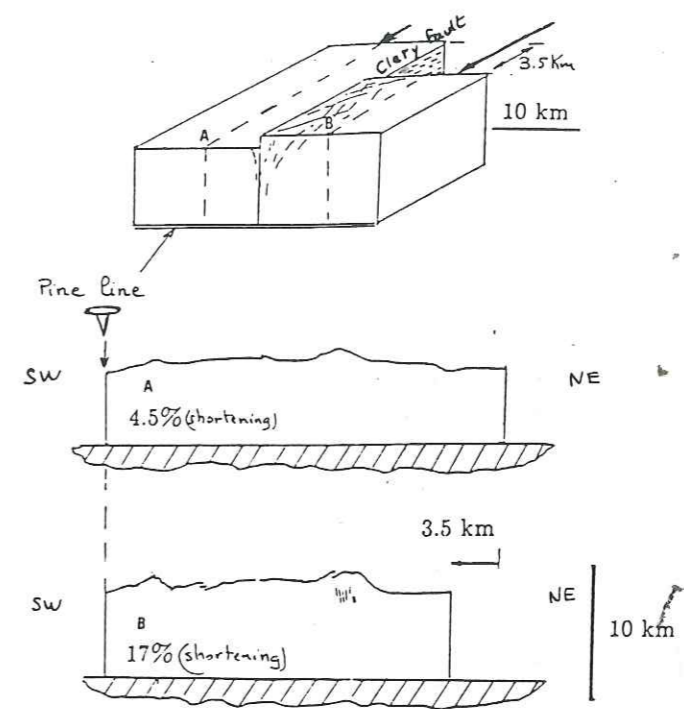


Figure 5 Représentation de la mesure du raccourcissement pour le décrochement de la faille de la Cléry (Gratier et al., [1991]).

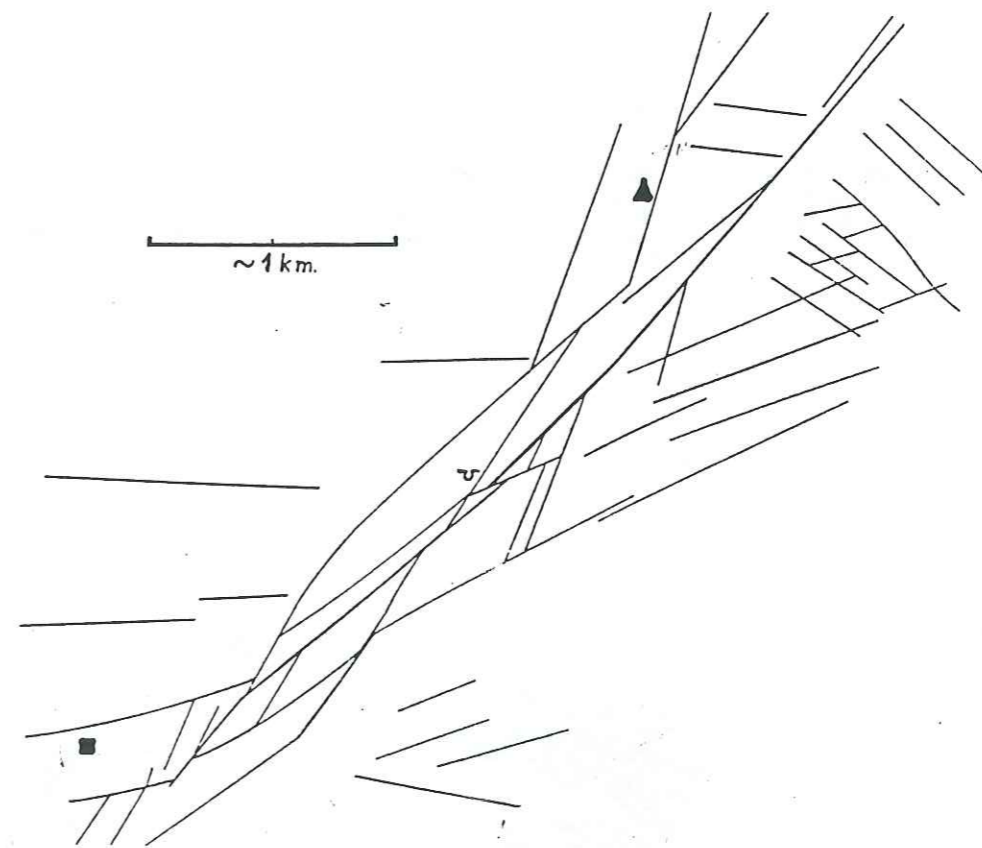


Figure 6 Représentation du réseau de fractures entre le Pré Peyret et le Roc Mazilier (Robert, [1976]).

VI.3.2 Acquisition des données (levé topographique)

Nous avons levé au théodolite et au distancemètre à infrarouge un miroir d'échelle décimétrique associé à cette zone de la faille de la Cléry à proximité du Pas des Bachassons (Fig. 4). Nous avons levé 126 points dont 108 appartiennent effectivement à ce miroir de faille. Ces levés sont raccordés au réseau IGN par un cheminement issu du Roc Mazilier, ce qui nous permet de les définir par leurs coordonnées Lambert et leur altitude. La figure 7 schématise le miroir de faille, la figure 8 est une photographie de ce miroir. La figure 9 est l'élévation de ce miroir, l'ordonnée (coordonnée Z) est l'altitude diminuée de 1880 mètres, l'abscisse (coordonnée X) est la distance horizontale par rapport au point de coordonnées $X = 71$ et $Z = 67$ dans la direction faisant un angle de 45 degrés avec le Nord Lambert (coordonnée Y). Enfin, la valeur des points cotés est la distance par rapport au plan des abscisses comptée positivement vers le NW.

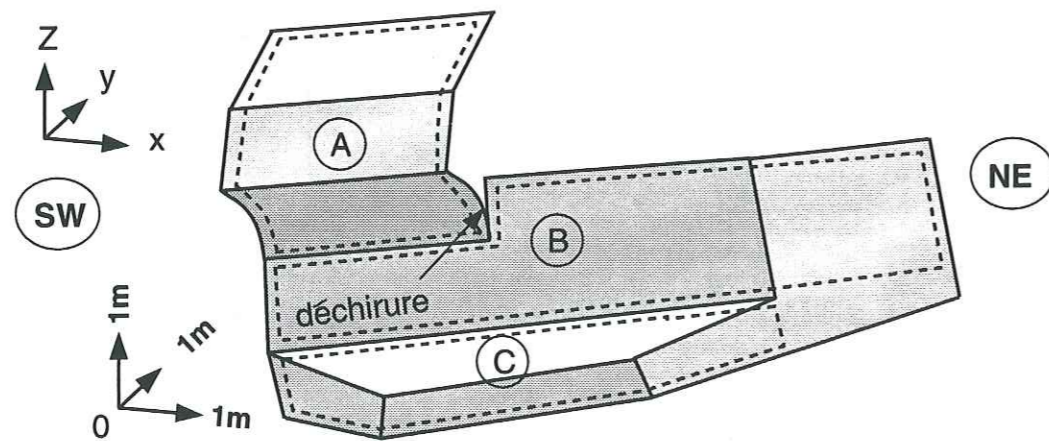


Figure 7 Schéma du miroir de la faille de la Cléry.

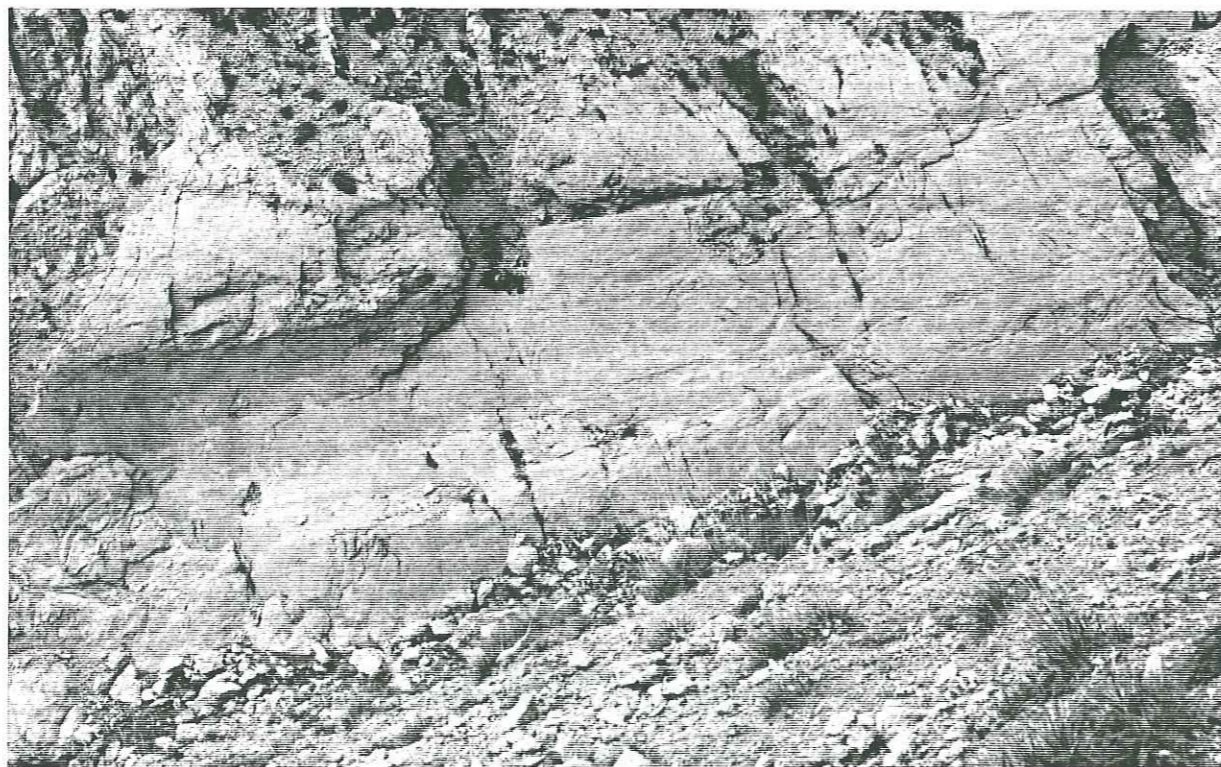


Figure 8 Représentation photographique du miroir de la faille de la Cléry.

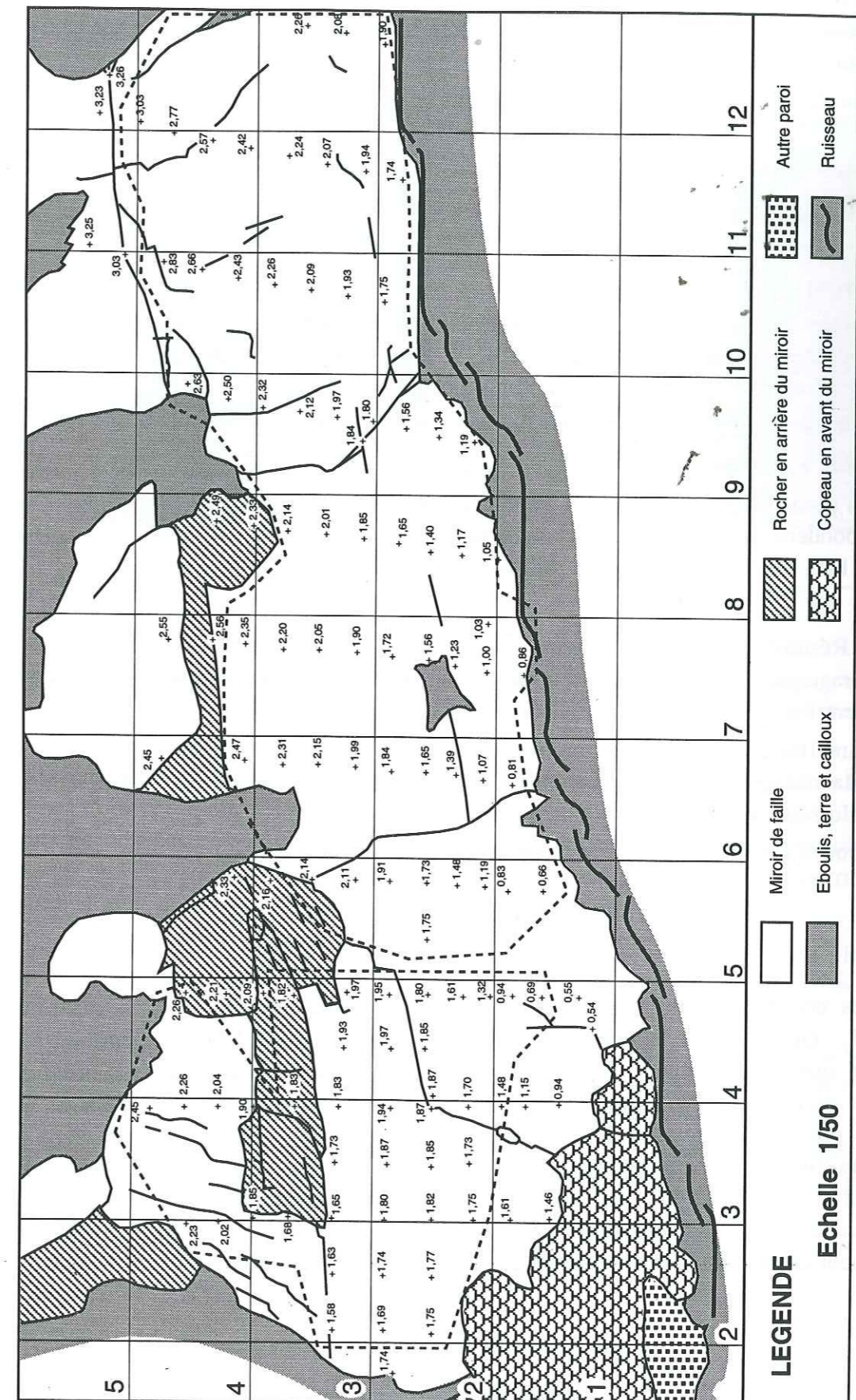


Figure 9 Élévation du miroir étudié (faille de la Cléry, Drôme, France) et trace en pointillés des deux miroirs 1 (gauche) et miroir 2 (droite).

La surface de faille se compose d'une partie plane B (Fig 7), d'une moulure A en surplomb en haut à gauche (Fig 7) et en bas d'une "banquette" C (Fig 7). Le plan visible sur la droite fait un angle très faible avec le plan principal.

A cause de la déchirure visible sur le schéma (Fig. 7), nous avons divisé la surface de faille en deux, le miroir 1 et le miroir 2 (en tireté sur la figure 9).

VI.3.3 Le traitement des données

VI.3.3.1 Miroir 1

Pour ce miroir, nous avons $N_p = 180$ paramètres de splines pour décrire la surface de faille dans l'espace des paramètres (réf. Chap. V.6), et $N_{uv} = 1728$ points de discrétisation pour le calcul des intégrales pour l'étape d'optimisation.

Les poids sont $C_{L_a} = 1.0$, $C_{L_p} = 1.0$, $C_C = 0.1$, $C_{Ad} = 0.01$.

Les poids en filetage sont $C_F = 1000$, $C_N = 1$.

Plus un poids est pondéré, plus on impose à la surface de vérifier cette contrainte. On a fortement pondéré en filetage car on cherche une surface de glissement qui soit une surface qui vérifie bien l'hypothèse de blocs rigides.

VI.3.3.1.1 Résolution à torseur inconnu

Dans ce paragraphe, nous cherchons le torseur optimal qui fera de notre surface, une surface de glissement entre deux blocs approximativement rigides.

La figure 10a est le résultat du problème d'approximation sans le critère de filetage, la figure 10b la surface corrigée après l'introduction du critère de filetage. Le torseur optimal est obtenu lorsque le programme a convergé.

On a trouvé comme champ de vecteurs optimal, ou torseur optimal

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} T(O) \\ T \end{bmatrix}_O = \begin{bmatrix} 1.054, 0.164, -0.006 \\ 0.056, 0.0207, 0.0403 \end{bmatrix}_O$$

Ce sont les coordonnées du torseur qui sont données entre crochets dans le repère de la figure 7. On note que le torseur a une forte composante $T(O)$ par rapport à T ce qui suggère que le mouvement de glissement du bloc sur l'autre est composé d'une forte composante en translation et d'une faible en rotation, ce qui s'interprète d'un point de vue géologique par le fait que l'on a un décrochement car la composante verticale en y est faible. D'un point de vue mécanique, l'axe de l'hélice passe par le point A de coordonnées $A = (-0.165, 0.900, -4.389)$. Le point A est la projection orthogonale sur l'axe du point O. La comparaison du pas du filetage qui est de 75m avec la taille du miroir confirme que le mouvement est proche d'une translation pure.

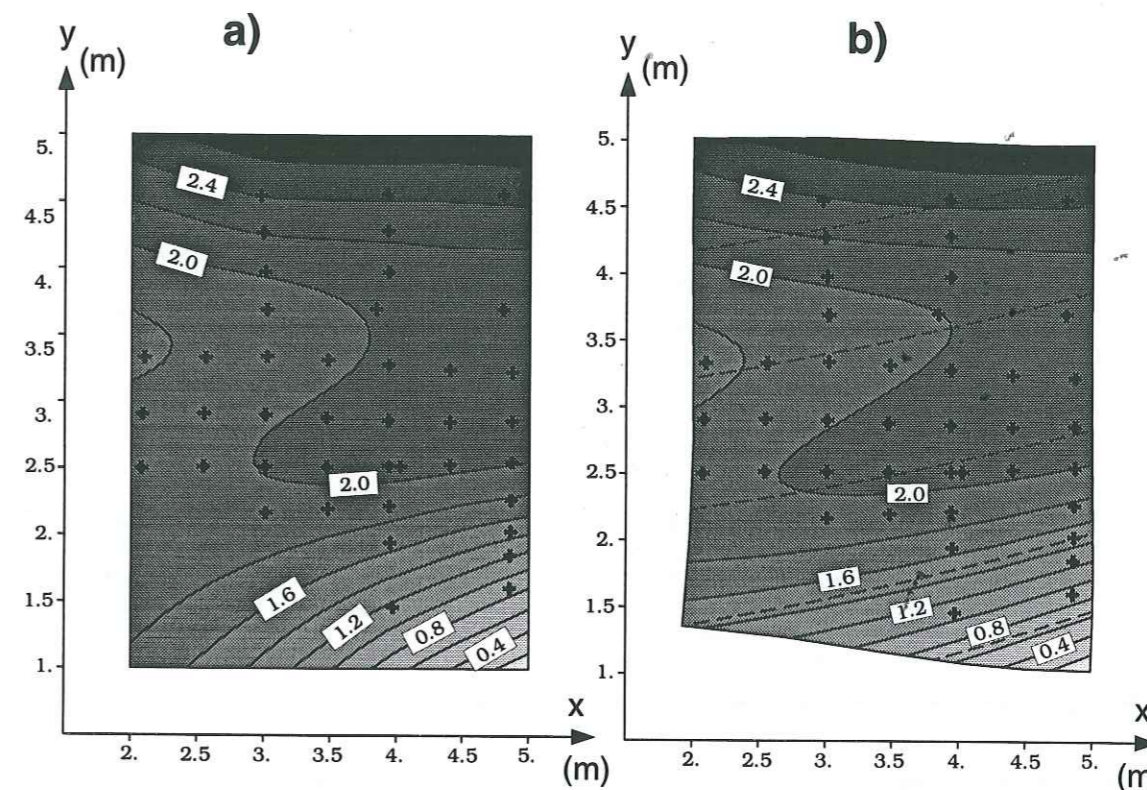


Figure 10 Représentation des surfaces obtenues après résolution du problème d'approximation sans le critère de filetage (a), et avec le critère de filetage (b). Les croix représentent les points de données.

L'introduction du critère de filetage modifie la forme de la surface, c'est à dire les pseudo-courbes de niveau. On constate que les deux figures sont très semblables dans la zone des points de données et qu'elles diffèrent sensiblement ailleurs. Dans les zones où on a des données, le critère de proximité aux points de données est prépondérant et contraint bien la surface, l'effet du critère de filetage n'apparaît pas nettement.

Par contre, dans les zones où on n'a pas de données, le critère de filetage prévaut sur le critère de courbure en corrigeant nettement la surface comme on peut le voir à gauche en haut et en bas des figures 10a et 10b.

Les lignes en tireté représentent les stries calculées. Elles nous renseignent sur la direction relative de déplacement des deux blocs approximativement rigides. Ces lignes de champ sont peu penchées, elles indiquent que la faille a joué essentiellement en décrochement (Fig. 10b). Sur le terrain, on avait des mesures de pitch autour de 9-11 degrés, sur le dessin 10b, les valeurs de pitch calculées sont de 10 degrés, c'est à dire une erreur ± 1 degré par rapport aux mesures. Ceci est un résultat très satisfaisant.

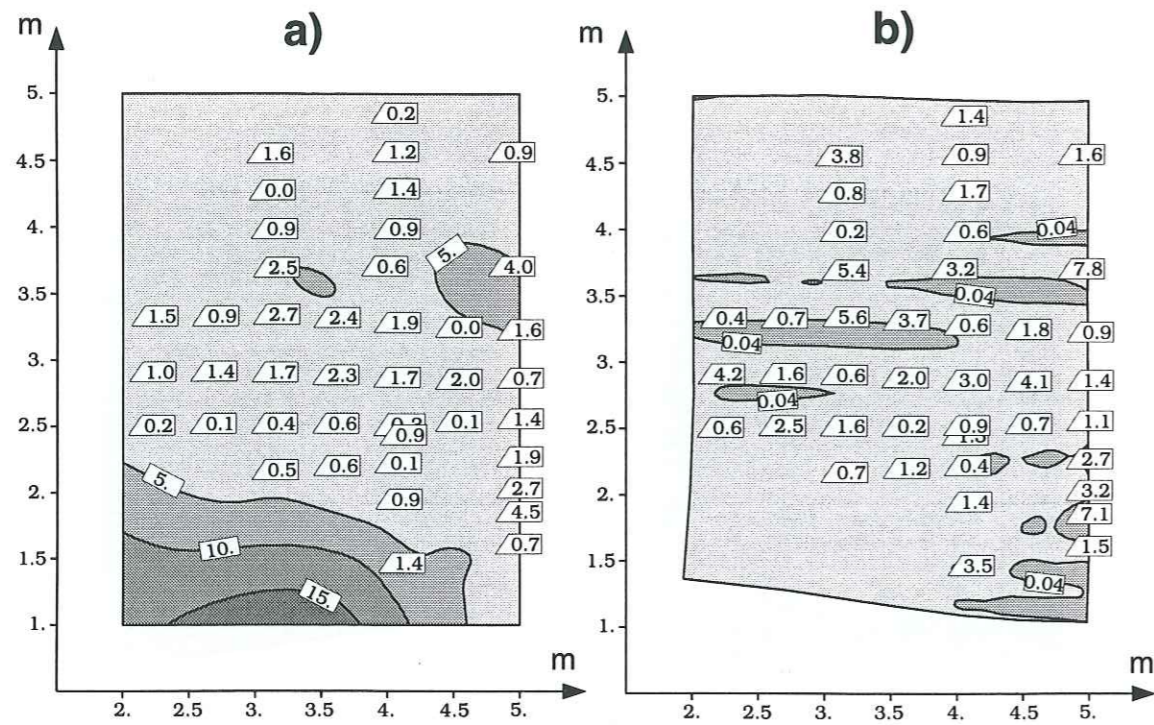


Figure 11 Cartes de l'angle résiduel (en degrés) entre la surface de la figure 10a, en a), ou de la figure 10b, en b), et le torseur associé à la surface de la figure 10b. L'angle aigu des boîtes trapézoïdales désigne les points de donnée, dont la distance à la surface est indiquée en cm dans les boîtes.

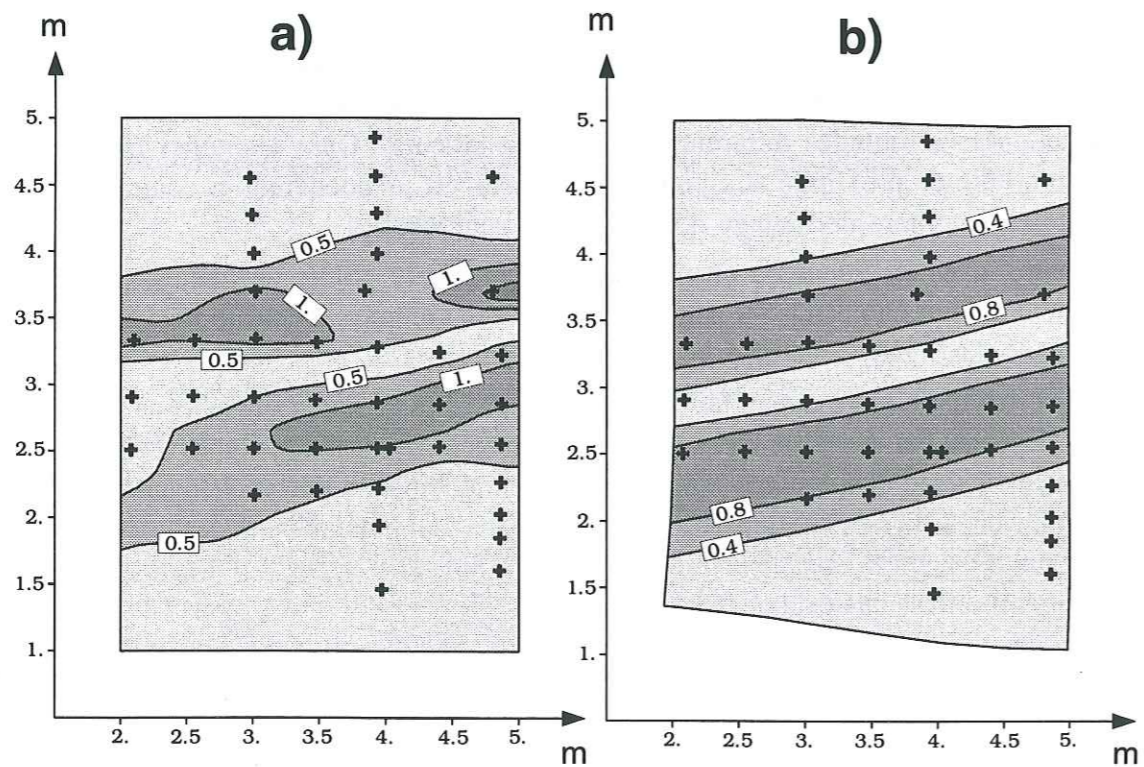


Figure 12 Représentation des résidus de courbure (m^{-1}) relatifs aux surfaces des figures 10a, en a), et 10b, en b). Les croix représentent les données.

Sur les cartes de résidus (Fig. 11a), la surface est en moyenne à 1.3 cm des points de données pour la surface approchée, et à 2.3 cm pour la surface filetée (en b). On note donc une faible augmentation de la distance des points de donnée aux points calculés car l'introduction du critère de filetage a tendance à lisser la surface. Par contre, de la figure 11a à la figure 11b, l'angle entre le torseur et la surface diminue considérablement puisqu'il passe de 8 degrés à moins de 1 degré (diminution d'un facteur 8). Sans beaucoup modifier la forme de la surface, on a trouvé un torseur quasiment tangent à la surface.

Sur la carte des résidus en courbure, on peut constater que l'introduction du critère de filetage (Fig. 12a) tend à "régulariser" la surface dans la direction des stries calculées. On remarque que les résidus en courbure sont quasiment invariants dans la direction des stries ce qui confirme la remarque précédente.

VI.3.3.1.2 Résolution à torseur fixé

Pour ce miroir de faille où les stries sont mesurables, il est intéressant de confronter les résultats que nous venons d'obtenir sans imposer a priori la direction des stries avec une autre approche qui consiste à imposer la direction de glissement a priori.

En introduisant la direction du torseur comme étant la direction des stries mesurées sur le terrain, on peut modifier la forme de la surface de faille. Le torseur imposé est normé à 1, de coordonnées $T(O) = (0.98, 0.17, 0.0)$. La figure 13 est le résultat obtenu avec l'utilisation du critère de filetage avec torseur fixé. On peut remarquer qu'il y a peu de différences entre l'allure des pseudo-courbes de niveau à torseur fixé (c'est à dire à stries connues) et à torseur inconnu, ce qui est satisfaisant, mais on peut remarquer que le torseur fixé était proche du torseur optimal.

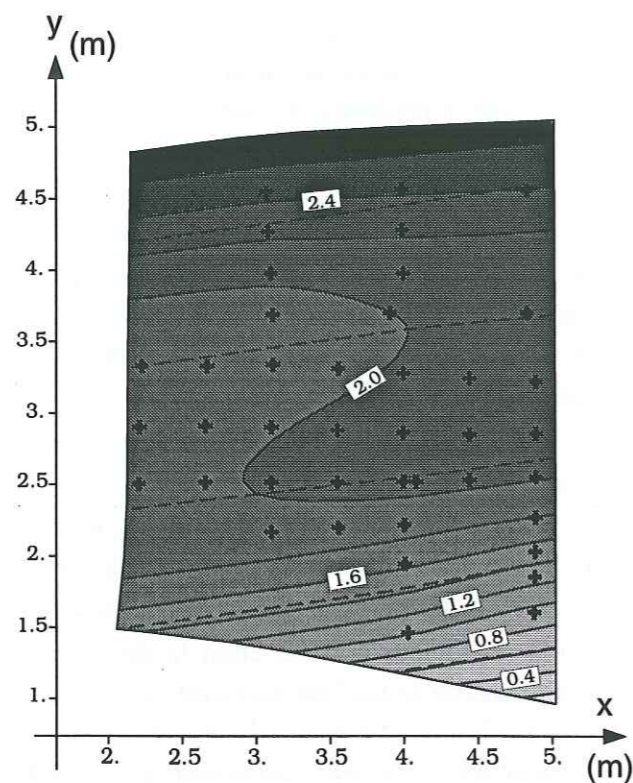


Figure 13 Représentation de la surface obtenue après résolution du problème d'approximation avec un torseur fixé. Les croix représentent les données.

On note une variation dans le coin en haut à gauche par rapport à la figure 10b, les pseudo-courbes de niveau s'élargissent pour la figure 10b, et pas sur la figure 13 où toutes les pseudo-courbes de niveau sont orientés dans le sens du vecteur glissement. Ceci peut s'expliquer comme suit. Pour la figure 10b, le critère de filetage modifie la surface de façon à rendre valide l'approximation blocs rigides. La forme de la surface est corrigée en tenant compte du poids imposé sur le critère de filetage. Comme le poids en filetage est moyennement pondéré, cela a peu modifié la forme de la surface par rapport au résultat de l'approximation. Pour la figure 13, le torseur fixé agit de façon prioritaire sur les autres critères, et modifie plus la surface. Il agit comme une forte pondération en terme de critère de filetage.

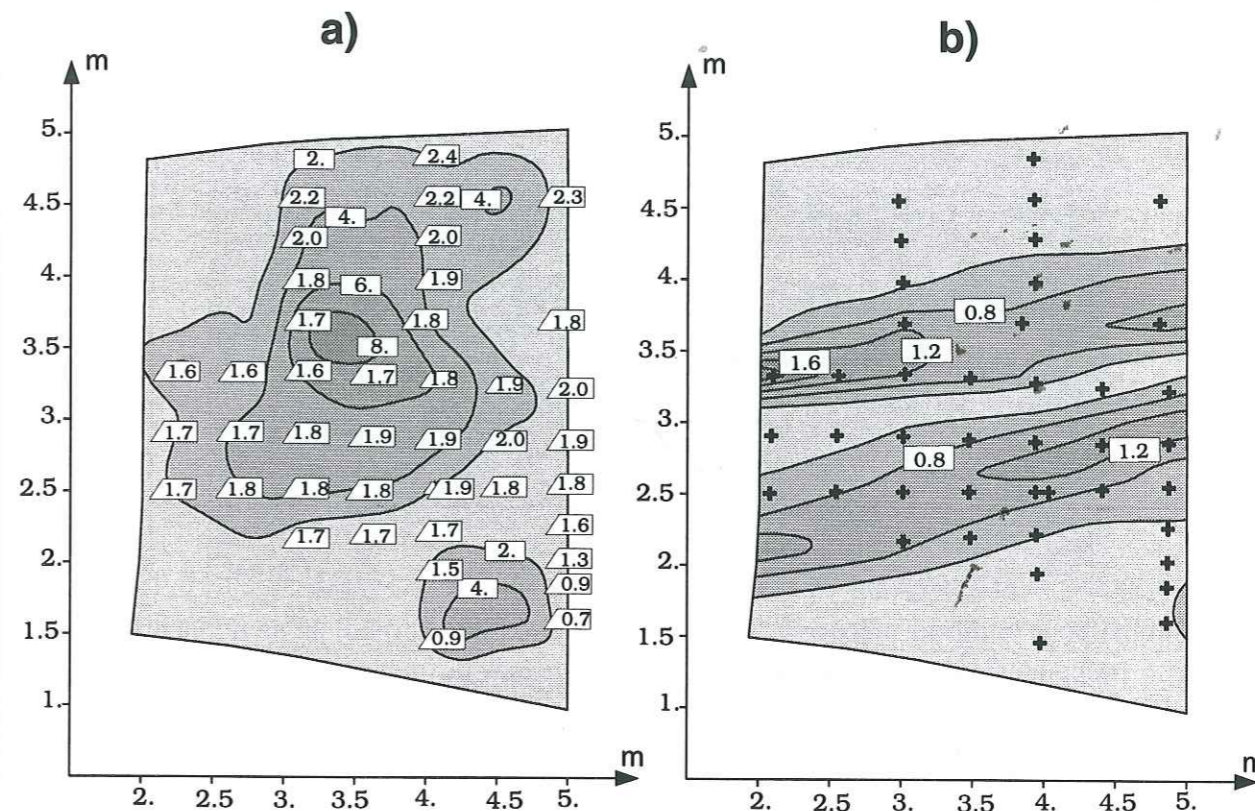


Figure 14 Carte de l'angle résiduel (en degrés) entre la surface de la figure 13 et le torseur fixé. L'angle aigu des boîtes trapézoïdales désigne les points de donnée, dont la distance à la surface est indiquée en cm dans les boîtes (Fig. 14a). Représentation des résidus de courbure (m^{-1}) relatifs à la surface figure 13 (Fig. 14b). Les croix représentent les données.

Sur les cartes de résidus en courbure (Fig. 14b), on peut voir que les résidus sont les plus petits là où il n'y a peu de donnée, c'est à dire dans les zones où les critères de courbure et filetage peuvent agir librement. Les résidus sont répartis dans la direction du vecteur de glissement. Sur la carte de résidus en angle (Fig. 14a), on peut voir que les résidus sont plus importants que pour le torseur inconnu. Ceci s'explique ainsi, dans le cas précédent d'optimisation à torseur inconnu, le programme a trouvé le torseur le plus tangent à la surface, dans ce cas, le torseur est fixé, le critère de filetage modifie la forme de la surface avec ce torseur. Une petite erreur de mesure sur le torseur nous donne des résidus plus importants. D'un point de vue proximité aux points de données, la surface est en moyenne à 1.7cm des points de données.

050 035784 5

VI.3.3.2 Miroir 2

VI.3.3.2.1 Résolution à torseur inconnu

Pour ce miroir, nous avons $N_p = 180$ paramètres de splines pour décrire la surface de faille dans l'espace des paramètres (réf. Chap. V.6), et $N_{uv} = 1728$ points de discrétisation pour le calcul des intégrales (réf. Chap. V.6).

Les poids sont $C_{L_a} = 1.0$, $C_{L_p} = 1.0$, $C_C = 0.1$, $C_{Ad} = 0.01$.

Les poids en filetage sont $C_F = 1000$, $C_N = 1$.

La figure 15a est le résultat de l'approximation sans le critère de filetage, la figure 15b la surface corrigée par l'introduction du critère de filetage. On a trouvé comme torseur optimal

$$T = \begin{bmatrix} T(O) \\ T \end{bmatrix}_O = \begin{bmatrix} 0.610, 0.459, -0.041 \\ -0.044, 0.016, -0.087 \end{bmatrix}_O$$

Pour ce torseur, l'axe passe par le point A de coordonnées $A = (4.02, -5.62, -3.06)$.

Comme pour le miroir précédent, les critères de proximité aux points de donnée agissent de façon prépondérante dans les zones où on a beaucoup de points de données et laissent agir ailleurs le critère de courbure. L'effet du critère de filetage est nettement moins visible dans cet exemple car la surface est quasiment plane et donc une surface filetée particulière. On observe malgré tout une modification de l'allure des pseudo-courbes de niveaux dans la partie supérieure.

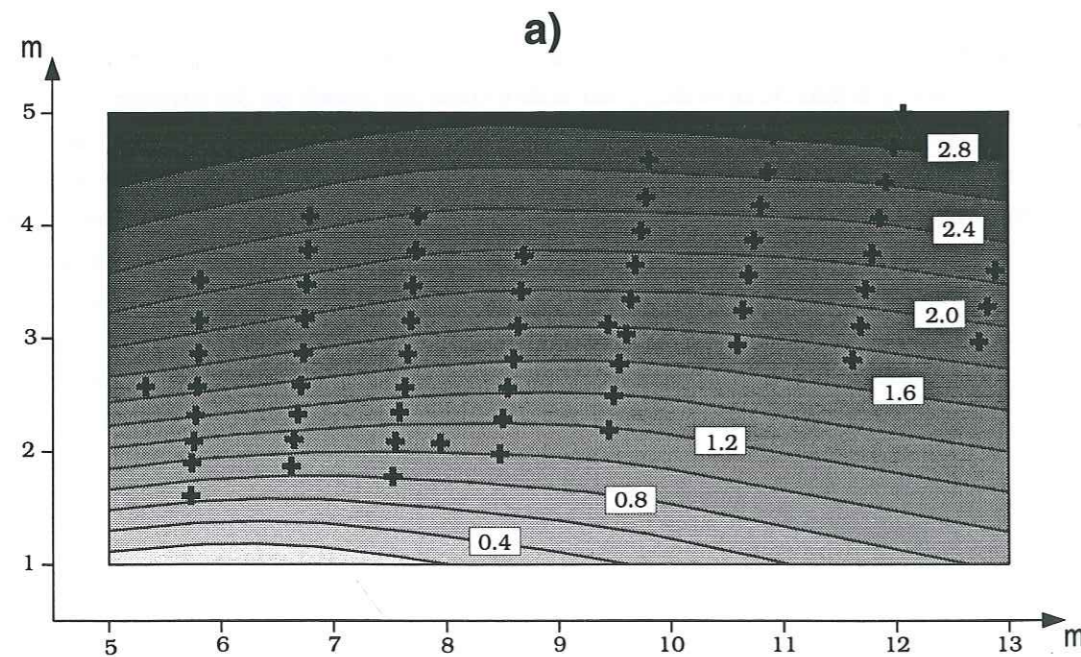


Figure 15 Représentation de la surface obtenue après résolution du problème d'approximation sans le critère de filetage (a), avec le critère de filetage (b). Les croix représentent les données. (Continued) ...

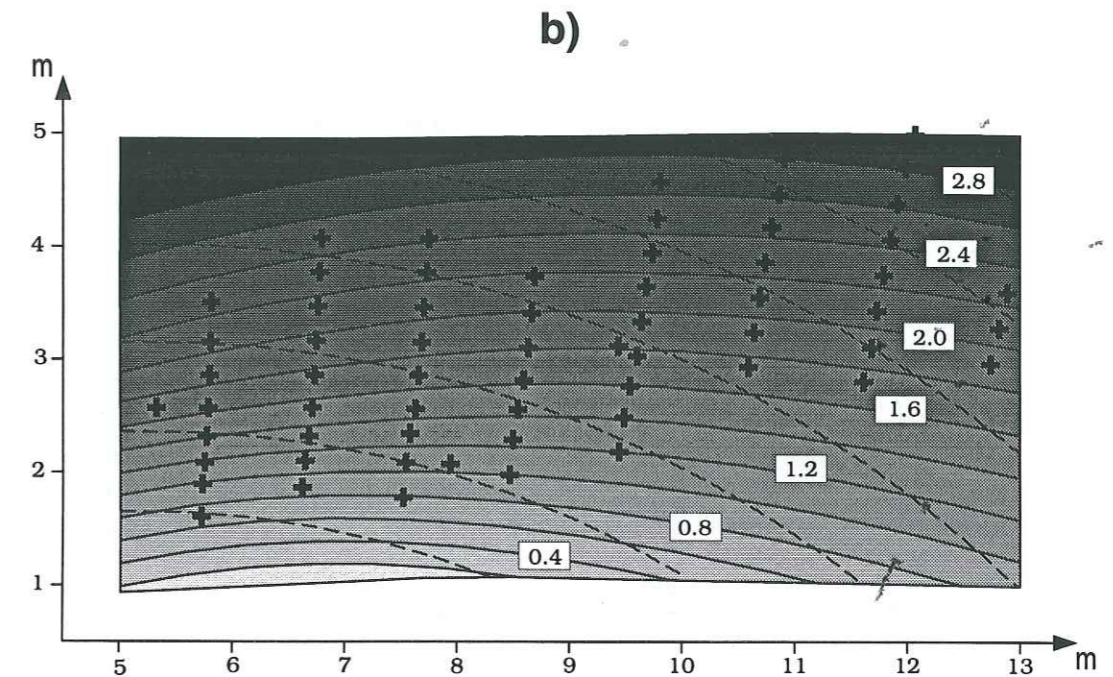


Figure 15 Représentation de la surface obtenue après résolution du problème d'approximation sans le critère de filetage (a), avec le critère de filetage (b). Les croix représentent les données.

Les stries calculées sont penchées, ceci suggère une faille en ciseau pour le miroir 2 alors que les observations de terrain indiquent clairement une faille en décrochement. Ceci est dû au fait que la surface est quasiment plane, le rayon de courbure est en moyenne de 25 mètres pour un miroir de 6 mètres. Or un plan est tangent à plusieurs torseurs non nuls différents (par exemple, 2 translations orthogonales). En conséquence, le problème inverse qui consiste, rappelons le à déterminer le couple (surface, torseur) optimal, n'a pas de solution unique puisque plusieurs torseurs conviennent. Ce implique que le torseur associé aux surfaces presque planes et presque indéterminé. *Il y a ici clairement indétermination sur le choix du torseur.* Le torseur peut être une pure translation, une pure rotation. Dans ce cas, on ne peut pas considérer le torseur que l'on a trouvé comme très fiable. On est dans un cas où simplement les points de donnée d'affleurement ne suffisent pas. *Il faut absolument dans ce cas d'indétermination des informations sur les stries naturelles.*

Les cartes de résidus en courbure (Fig. 17a et b) et distance aux points (Fig. 16a et b) expliquent bien les remarques faites précédemment. Cela se traduit par des résidus en proximité aux points de données en angle et en courbure qui se ressemblent.

Sur les cartes de résidus pour les points de donnée, on peut voir que la surface est en moyenne à 2.9 cm des points de donnée pour la surface approchée, et à 3.6 cm pour la surface filetée.

Malgré tout, sur les cartes de résidus en angle, on peut voir les zones où le critère de filetage a agi de façon prépondérante, par exemple dans les coins inférieur droit et supérieur gauche. Ceci correspond encore une fois aux zones où il n'y a peu de donnée.

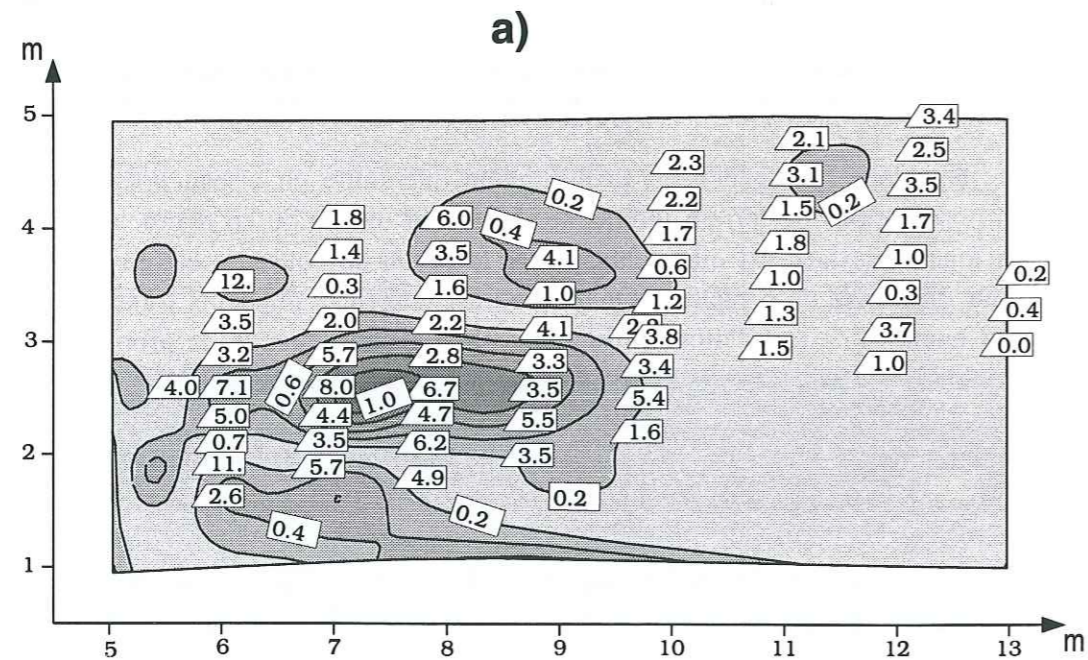
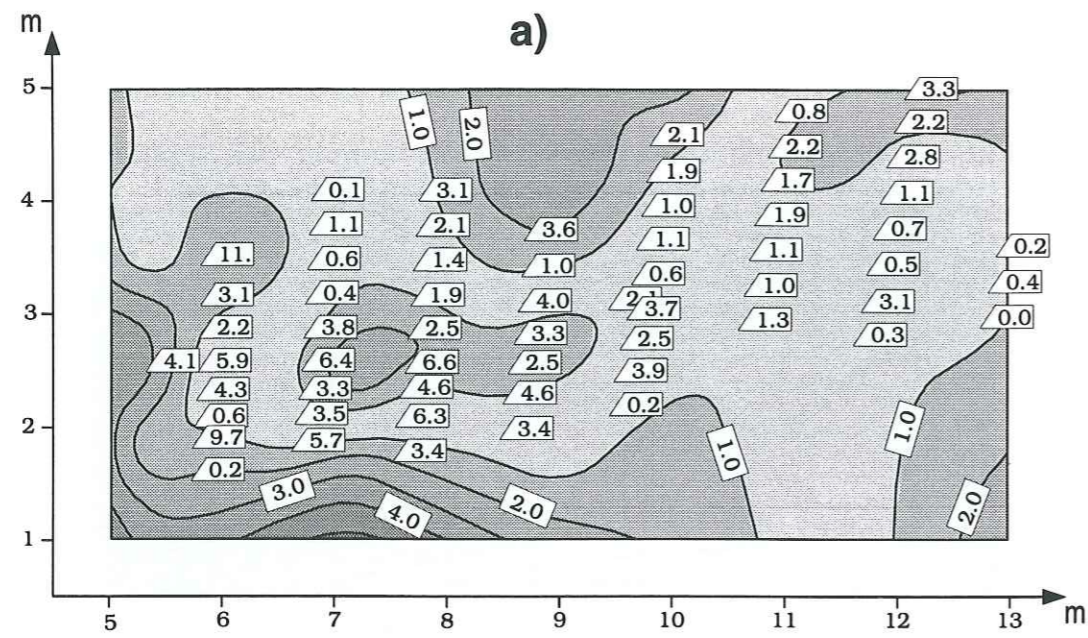


Figure 16 Représentation de la carte de résidus en angle et pour les points de donnée pour la surface solution du problème d'approximation sans le critère de filetage (a), avec le critère de filetage (b).

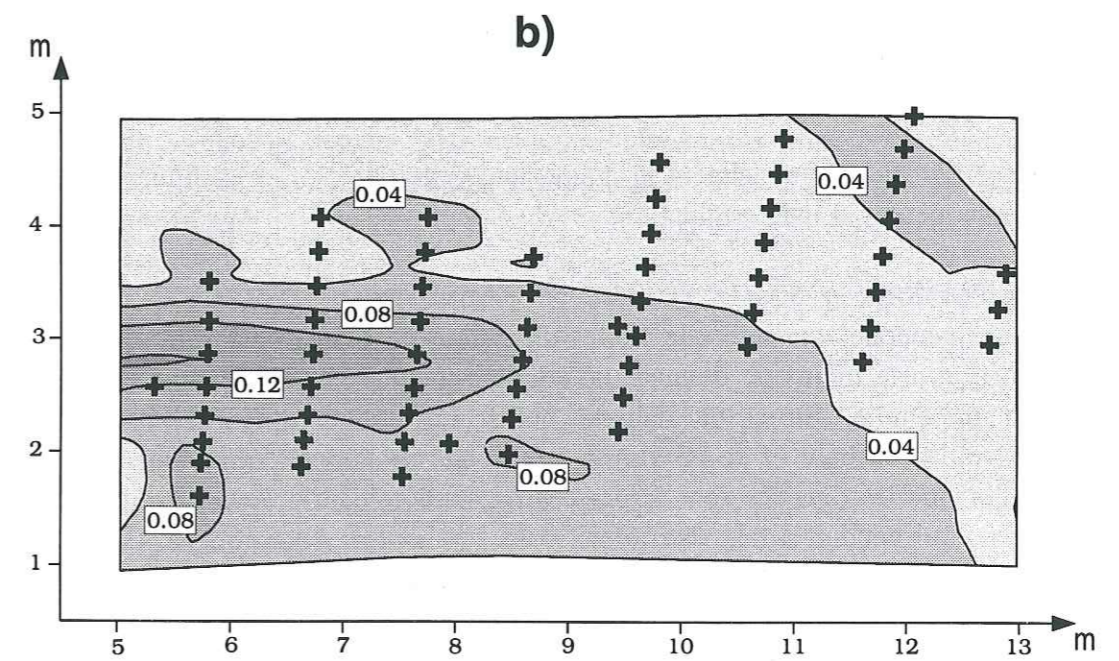
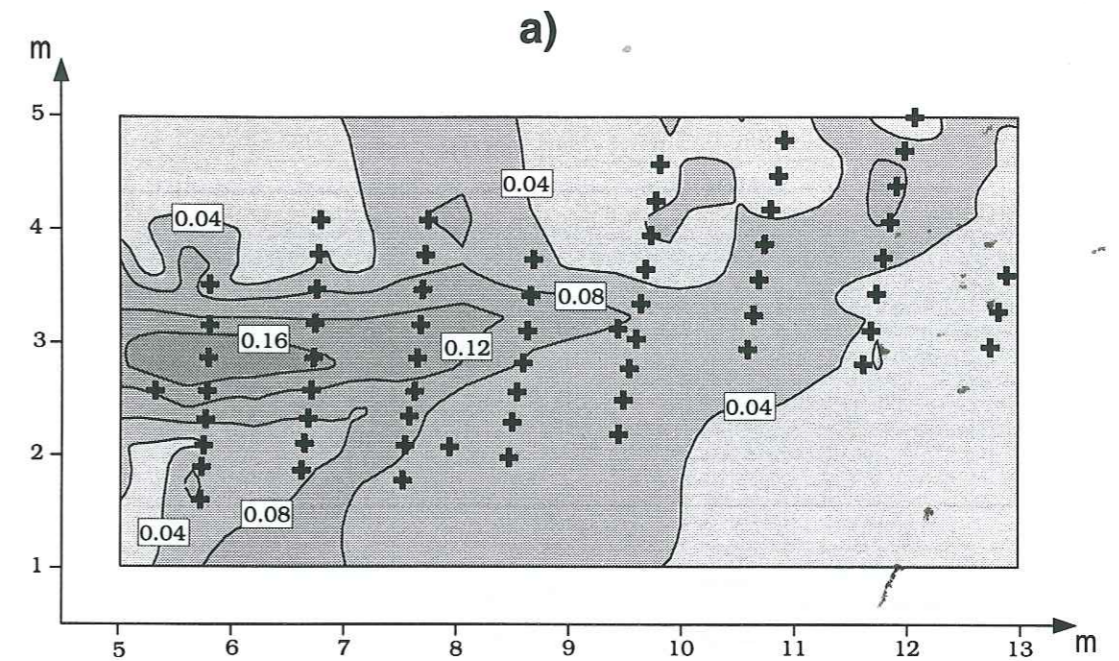


Figure 17 Représentation de la carte en résidus de courbure pour la surface solution du problème d'approximation sans critère de filetage. Les croix représentent les données.

VI.3.3.2 Résolution à torseur fixé

Nous allons introduire la mesure de stries obtenue sur le terrain. On reprend la valeur du torseur pour le miroir 1. La figure 18 est le résultat de l'optimisation à torseur fixé.

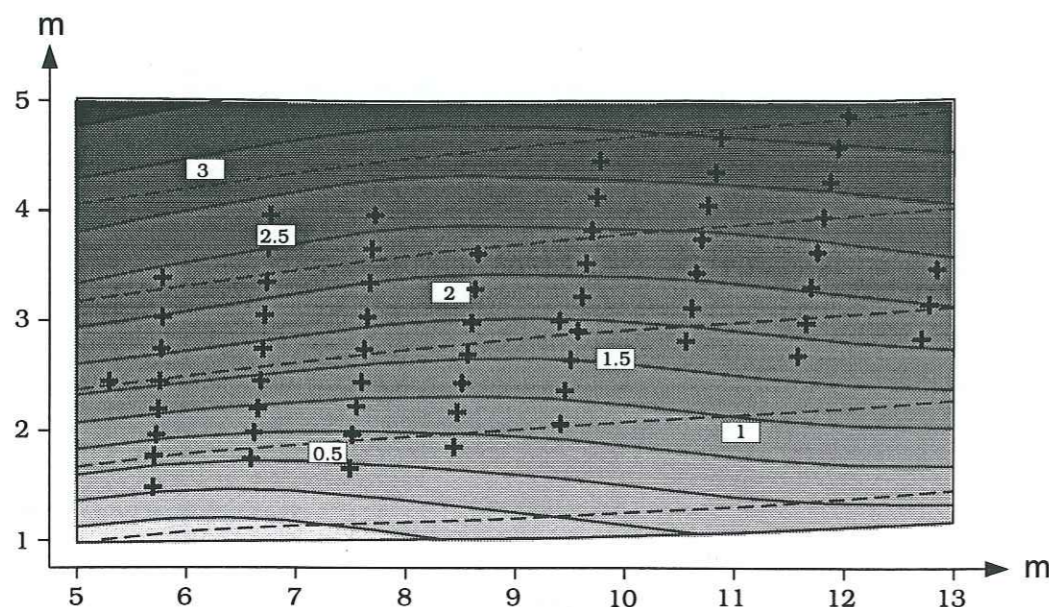


Figure 18 Représentation de la surface solution obtenue après optimisation des critères de proximité aux points, de courbure, et de filetage à torseur fixé. Les croix représentent les données.

La surface obtenue est quasiment la même que celle que l'on a en figure 15b, mais il n'y a plus dans ce cas d'indétermination.

VI.3.4 Conclusions

D'une manière générale, on note que l'effet du critère de filetage est surtout visible dans les zones où l'on a le moins de données notamment lorsque ces zones sont situées soit au bord du domaine étudié, soit surtout dans les coins. Les critères d'approximation classique avec un critère de courbure et de proximité aux points de donnée amplifient beaucoup les irrégularités lorsque les données sont dispersées particulièrement près des limites du champ des données ce qui conduit à des aberrations dans ces zones. Au contraire, l'utilisation du critère de filetage permet d'imposer une régularité d'approximation tout à fait spectaculaire et intéressante qui s'avère bien plus conforme aux données que les interprétations classiques et qui supprime les approximations aberrantes.

L'application du critère de filetage sans a priori sur la direction des stries ne s'avère efficace que si la surface n'est pas strictement plane ou sphérique ou cylindrique circulaire. Ainsi pour le premier miroir de faille, l'introduction du critère de filetage améliore bien l'ajustage de la surface avec les données, ceci particulièrement dans les zones où les données sont les plus dispersées. Si sur ce type de surface, on introduit les stries comme des données, ce choix a priori de torseur ne modifie assez peu le résultat obtenu précédemment mais il a pour effet d'imposer une surface encore plus conforme à une surface filetée. Pour la deuxième surface quasiment plane, la simple utilisation du critère de filetage sans a priori sur les stries ne donne pas de bons résultats. Ce type de surface ne permet pas de déterminer précisément la direction de glissement.

D'un point de vue général, on constate un ordre de priorité dans les critères. Le critère de proximité est prépondérant dans les zones où on a des données, le critère de courbure est effectif dans les autres zones. L'introduction du critère de filetage est visible sur toute la surface mais nettement plus près des zones non documentées. On remarquera que l'ordre de priorité semble lié à l'ordre de dérivées des critères. Mais on ne doit pas oublier que l'influence des critères est liée aussi au choix des pondérations.

VI.4 La faille de San Cayetano (Californie)

Après avoir étudié une surface de faille d'échelle décimétrique, nous allons nous intéresser à un miroir de faille d'échelle kilométrique: la faille de San Cayetano (Californie, USA). Comme pour l'exemple précédent, nous allons montrer l'effet de l'introduction du critère de filetage, et comment il améliore la géométrie de la surface de faille.

VI.4.1 Introduction géologique

La faille de San Cayetano limite au Nord le bassin de Ventura dans les Transverse Range en Californie (Fig. 19). Il s'agit d'une zone de faille active probablement complexe dans le détail qui chevauche des sédiments récents d'une épaisseur considérable (6000m de dépôt ces 5 derniers millions d'années). Les raisons du choix de cette structure sont multiples. Il s'agit d'un bel exemple de chevauchement pour lequel des déplacements importants sont bien démontrés. Selon certains auteurs, cette faille aurait pu fonctionner en décrochement avant de fonctionner en chevauchement. Il était donc intéressant de retrouver d'éventuelles traces de cet épisode. Enfin, de nombreux gisements de pétrole ont été forés dans ce secteur. La faille est traversée par des dizaines de puits, ce qui constitue une opportunité exceptionnelle.

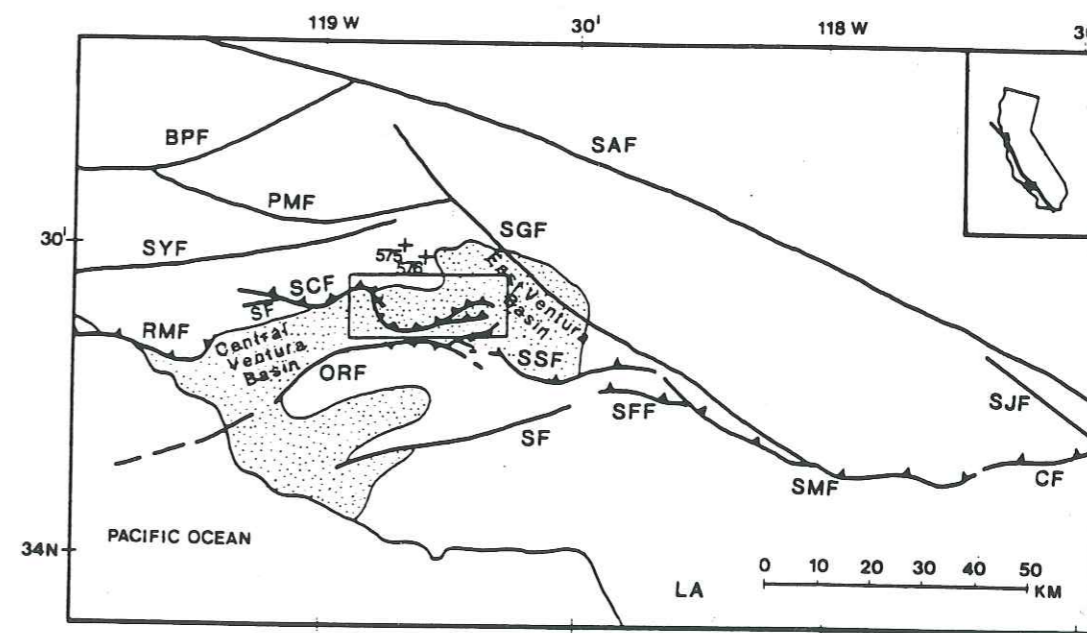


Figure 19 Carte régionale de tectonique montrant les différentes failles potentiellement actives dans la région de Transverse Ranges (carte modifiée par Yeats [1983] et Rockwell [1982]). Les failles plongeant au nord: CF, faille de Cucamonga, RMF, la faille de Red Mountain, SCF, la faille de San Cayetano, SFF, la faille de San Fernando, SSF, la faille de Santa Susana. Les autres failles: BPF la faille de Big Pine, PMF, la faille de Pine Mountain, SAF, la faille de San Andreas, SGF, la faille de San Gabriel, ORF, la faille de Oak Ridge, SIF, la faille de Simi, SJF, la faille de San Jacinto, SMF, la faille de la Sierra Madre, SYF, la faille de Santa Ynez. Les villes: LA, Los Angeles, V, Ventura.

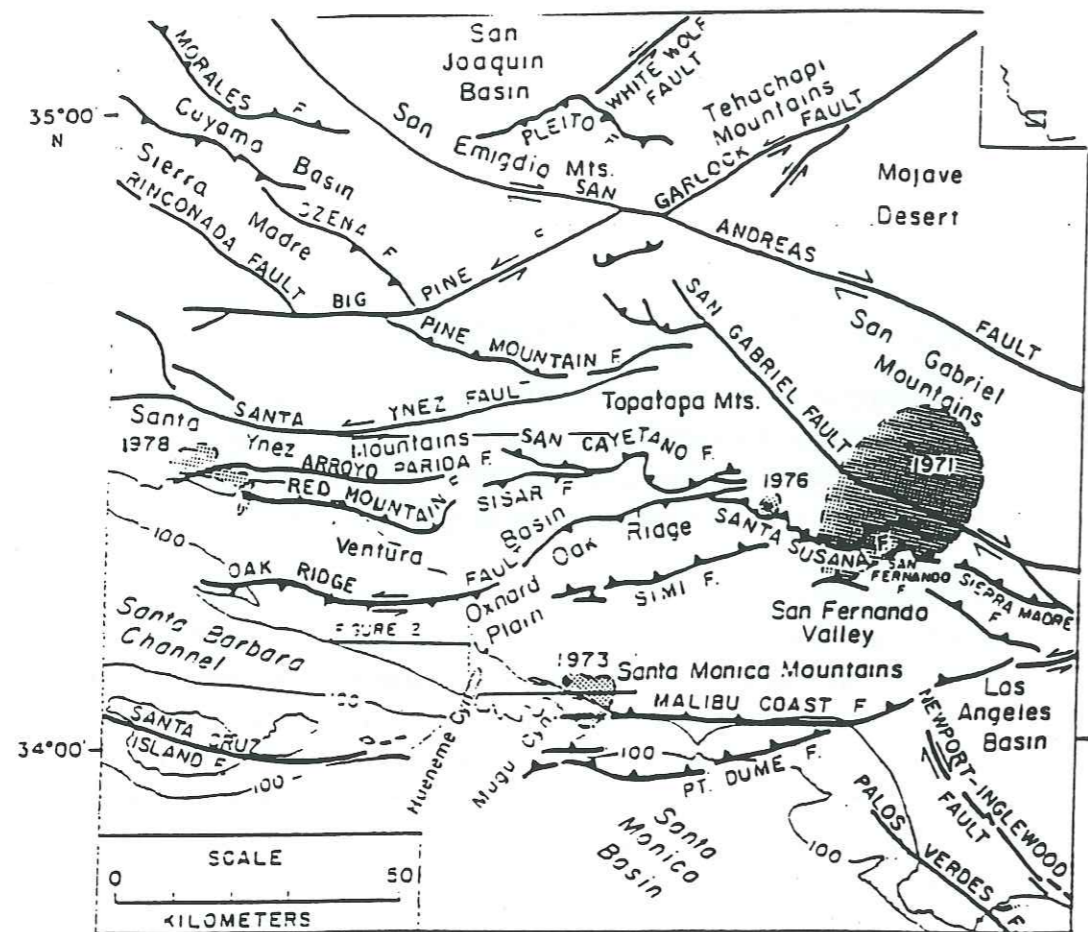


Figure 20 Carte représentant la partie ouest des Transverse Ranges, avec le bassin de Ventura, les failles de Oak Ridge, Red Mountain et San Cayetano, Yeats [1988].

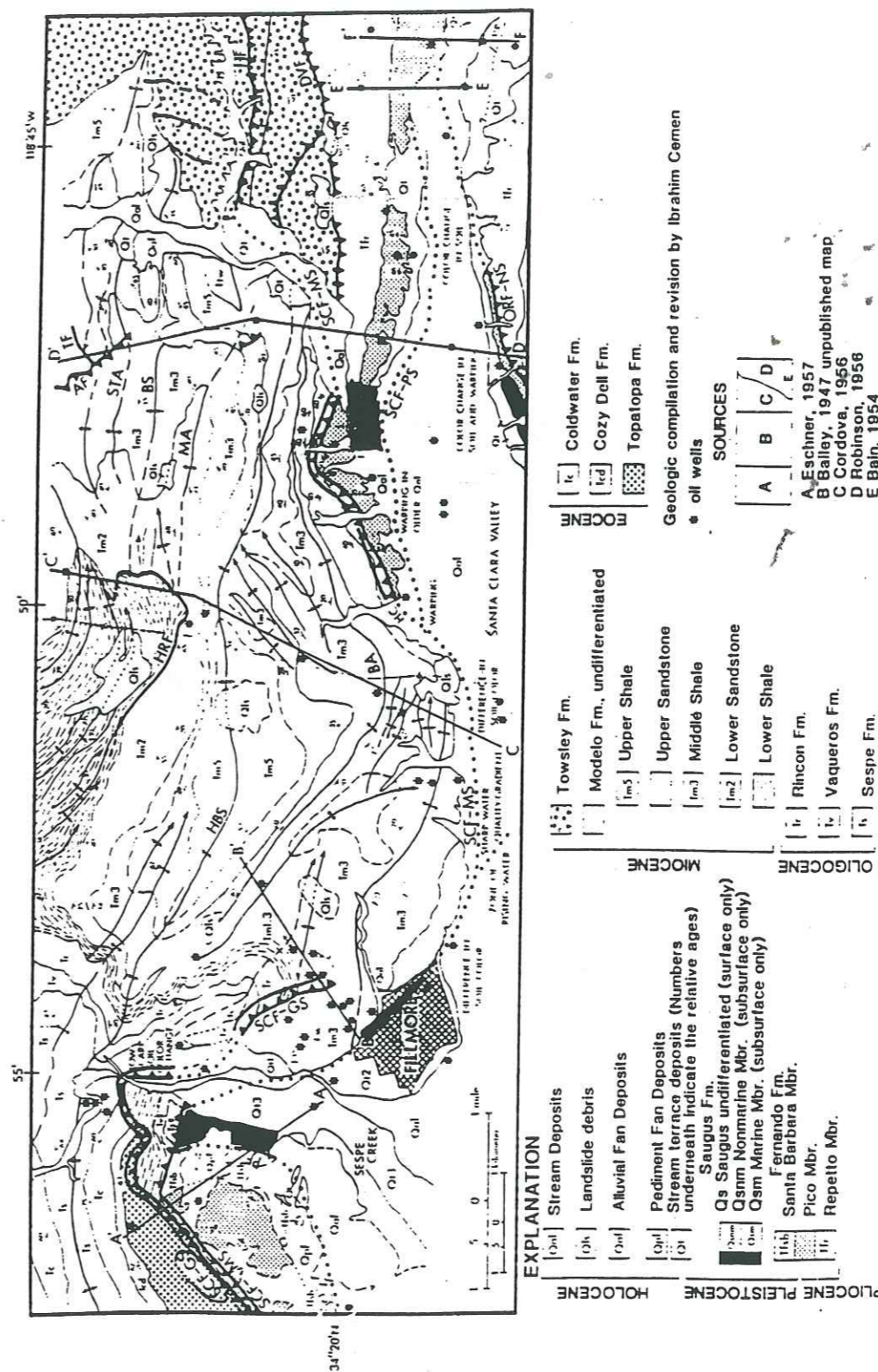


Figure 21 Carte géologique de la région de Fillmore-Piru. Abréviations: AF, faille d'Arundel; BA, anticlinal de Buckhorn; BS, synclinal de Blanchard; DVF, faille de Dell Valle; EF, Faille Eureka; HF, faille Holser; HBS, synclinal Hopper Basin; HC, canyon Hopper; HRF, faille Hopper Ranch; MA, anticlinal Modelo; ORF-NS, faille de Oak Ridge, North Strand; SC, Sespe Creek; SCF-GS, faille de San Cayetano, Goodenough Strand; SCF-MS, faille de San Cayetano, Main Strand; SCF-PS, faille de San Cayetano, Piru Strand; STA, anticlinal South Temescal; TF, faille Temescal, (Cemen, [1989]).

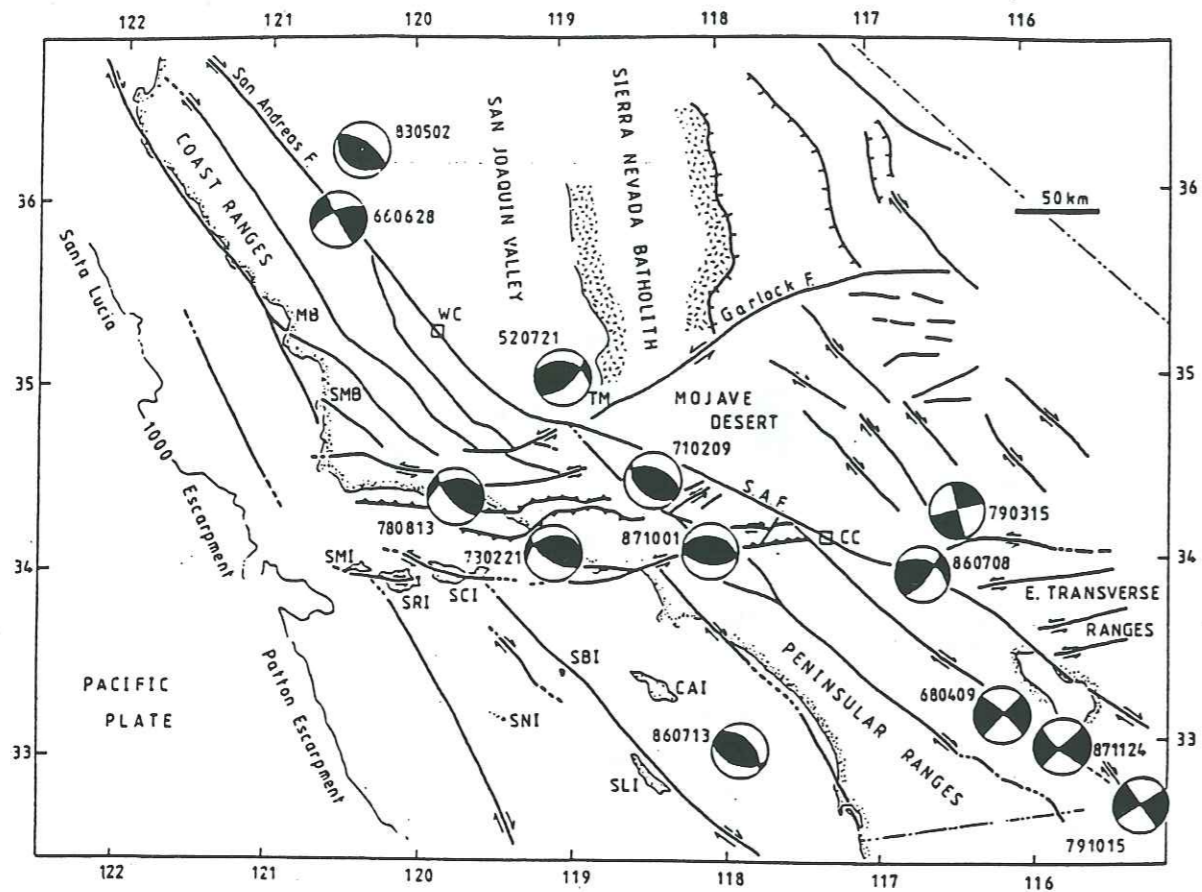


Figure 22 Carte du sud de la Californie avec les failles majeures responsables des tremblements de Terre. Les zones noires et blanches des projections stéréographiques de l'hémisphère inférieur des sphères focales montre les mouvements de compression et dilatation. Les failles sont celles montrées par *Hornafius et al.*, [1986]. Les abréviations sont (CAI) Santa Catalina Island, (CC) Cajon Creek, (MB) Morro Bay, (SAF) faille de San Andreas, (SBI) Santa Barbara Island, (SCI) Santa Clara Island, (SRI) Santa Cruz Island, (SMB) bassin de Santa Barbara, (SMI) San Miguel Island, (SNI) San Nicolas Island, (SRI) Santa Rosa Island, (TM) montagnes de Tehachapi, et (WC) Wallace Creek (*Jackson et Molnar*, [1990]).

VI.4.2 Acquisition des données

Les données disponibles pour San Cayetano ont été synthétisés dans un rapport *San Cayetano fault, Field Trip*, 1977, Pacific Section, AAPG. Dans cet ouvrage, la faille est considérée comme unique mais cette interprétation est contestée par certains travaux pétroliers récents. Nous avons donc traité séparément les parties Est et Ouest en introduisant une coupure comme une zone de rampe latérale NS et surtout zone où il y a le minimum de donnée.

Pour le miroir à l'ouest de Sespe Creek (miroir 1), nous avons numérisé les différentes courbes de niveau de la surface de faille interprétée contenue dans le rapport (Fig. 23).

Nous avons numérisé 176 points sur la surface, ces points numérisés sont les points de données.

Puis, parmi ces 176 points, nous avons choisi 12 points représentatifs pour faire une expérience avec moins de points et nous avons comparé l'expérience à 12 points de données et celle à 176 points.

La surface de faille à l'est de Sespe Creek (miroir 2) a été beaucoup forcée dans le cadre de l'exploration pétrolière. On a 13 puits répartis sur la surface et 5 points de données de la faille à l'affleurement. Nous avons considéré pour ce miroir les données de puits et d'affleurement c'est à dire les données originelles, au lieu de données déjà interprétées dans le cas du miroir ouest.

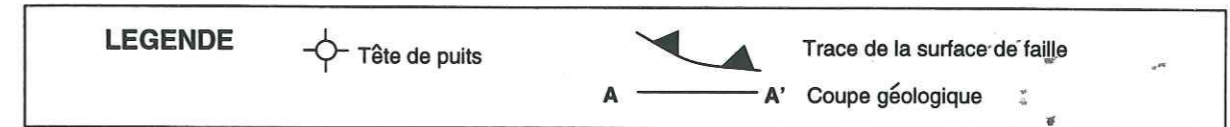
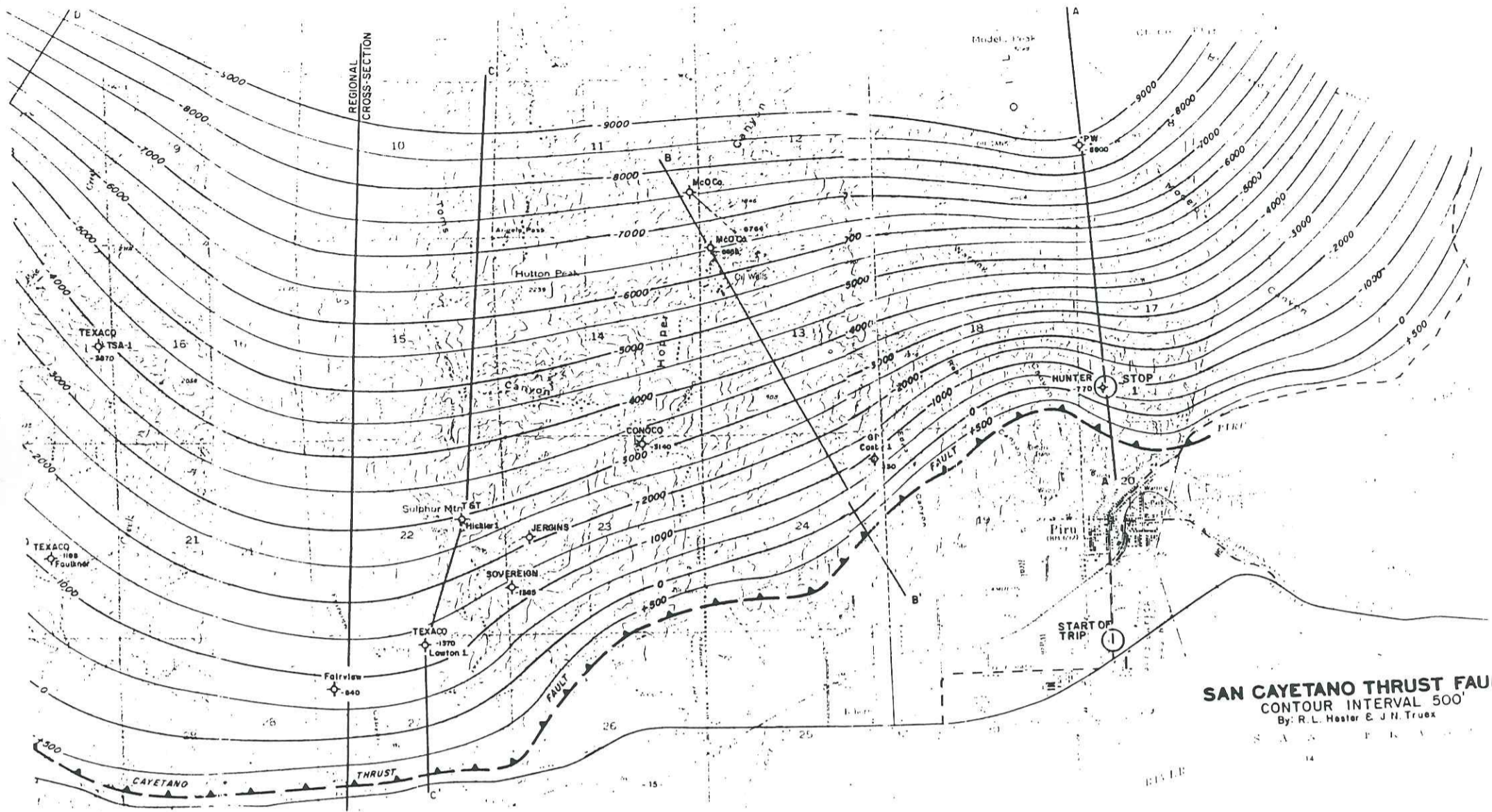
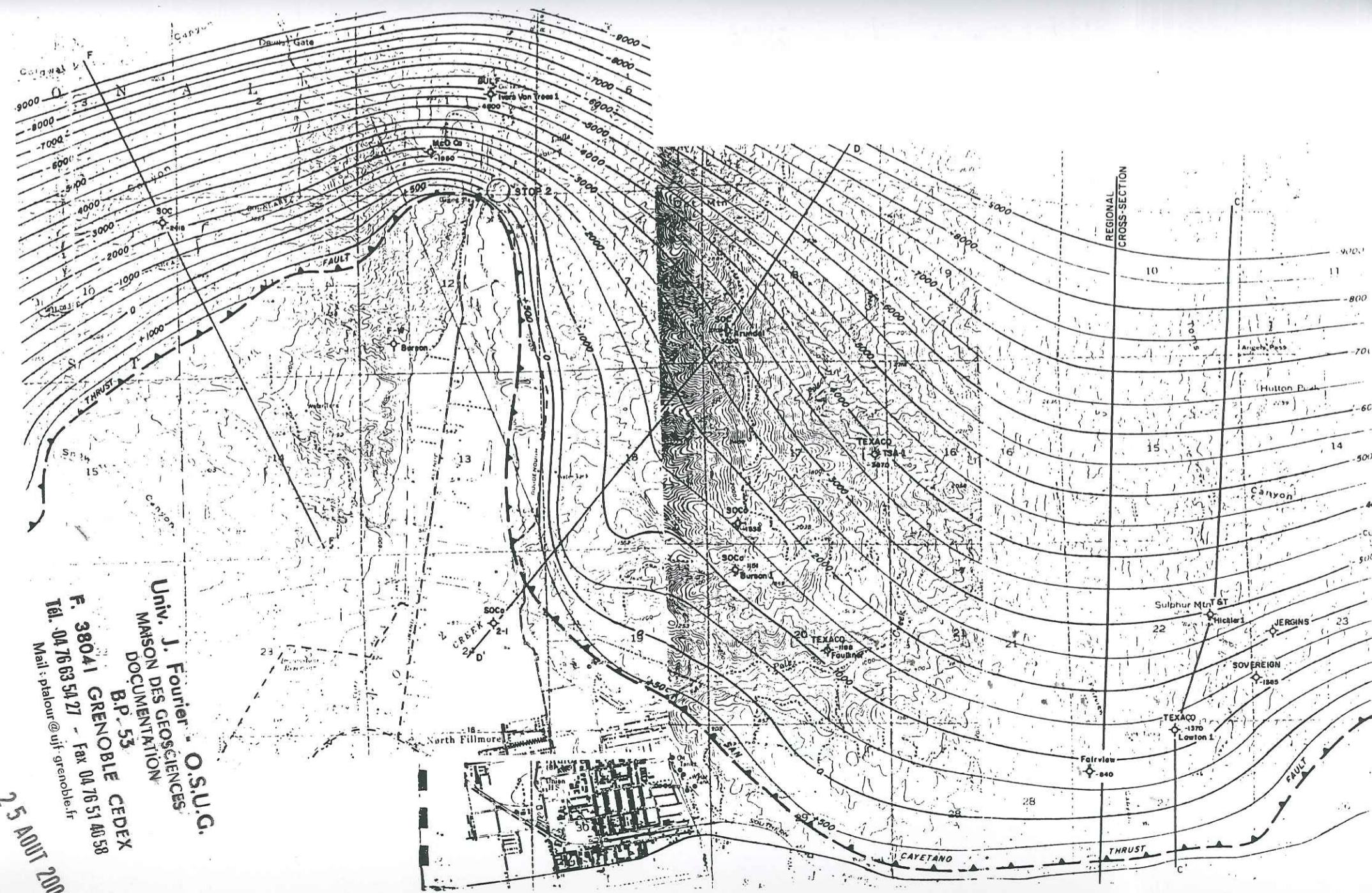


Figure 23 Représentation de la surface de faille de San Cayetano en courbes de niveau (rapport sur la faille de San Cayetano, *R.L. Hester, J.N. Truex*, [1977]). Entre deux courbes de niveaux, on a 500'.



SAN CAYETANO THRUST FAULT
 CONTOUR INTERVAL 500'
 By: R.L. Hester & J.N. Truex



Univ. J. Fourier - O.S.U.C.
 MAISON DES GEOSCIENCES
 DOCUMENTATION
 BP 53
 38041 GRENOBLE CEDEX
 F. 38041 GRENOBLE CEDEX
 Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
 Mail: platour@univ-grenoble.fr

25 AOUT 2003

VI.4.3 Traitement des données

VI.4.3.1 Miroir 1

Le miroir de faille à l'ouest de Sespe Creek est une surface assez simple que l'on peut schématiser par un dièdre. Les y-isolignes que l'on voit sur les surfaces solutions sont transformées en km.

VI.4.3.1.1 Expérience à 176 points

Pour ce miroir, nous avons $N_p = 480$ paramètres de splines pour décrire la surface de faille dans l'espace des paramètres (réf. Chap. V.6), et $N_{uv} = 4800$ points de discrétisation pour le calcul des intégrales pour l'étape d'optimisation, et 176 points de données repartis sur la surface.

Les poids sont $C_{L_a} = 1.0, C_{L_p} = 1.0, C_{Sec} = 0.1$.

Les poids en filetage sont $C_F = 10, C_N = 1$.

La figure 24a est le résultat du problème d'approximation sans le critère de filetage, la figure 24b la surface corrigée après introduction des critères de filetage. Le torseur optimal est obtenu lorsque le programme a convergé.

On a trouvé comme torseur optimal,

$$T = \begin{bmatrix} T(O) \\ T \end{bmatrix}_O = \begin{bmatrix} 0.43, -0.73, 0.60 \\ 0.06, 0.03, 0.03 \end{bmatrix}_O,$$

où les coordonnées du torseur sont données entre crochets. Le pas de l'hélice est de 25.5 km.

D'un point de vue mécanique, l'axe passe par le point A de coordonnées $OA = (7.3, -4.3, -10.5)$. Par rapport au point B de coordonnées $(9, 6, 2)$, l'axe se trouve à une distance de 16 km.

L'introduction du critère de filetage n'a pas beaucoup modifié la forme de la surface ce qui est naturel, car la surface est assez plane, donc déjà un filetage particulier. A partir d'une bonne solution en approximation, l'effet du critère de filetage n'est pas très apparent sur la figure 24b. Sur les cartes de résidus, notamment sur la figure 26, on peut malgré tout voir où a agi le critère de filetage dans les différents coins.

Sur les cartes de résidus aux points de données, la surface est en moyenne à 20 m pour la surface approchée, et à 30 m pour la surface filetée. On note une assez forte augmentation de la distance aux points pour la surface filetée. Le critère de filetage a davantage "lissé" la surface, même si cela ne se voit pas bien sur la figure 24.

Sur les cartes de résidus en courbure, on peut constater que l'introduction du critère de filetage a tendance à "régulariser" la surface dans la direction des stries calculées. Les résidus petits pour la surface approchée, sont restés petits pour la surface filetée qui était déjà presque un filetage.

Par contre sur la figure 26 de résidus en angle, on peut constater que l'angle entre le torseur et la surface passe de 3 à moins de 1 degré. On peut constater l'effet significatif du critère de filetage, même si ces angles sont faibles.

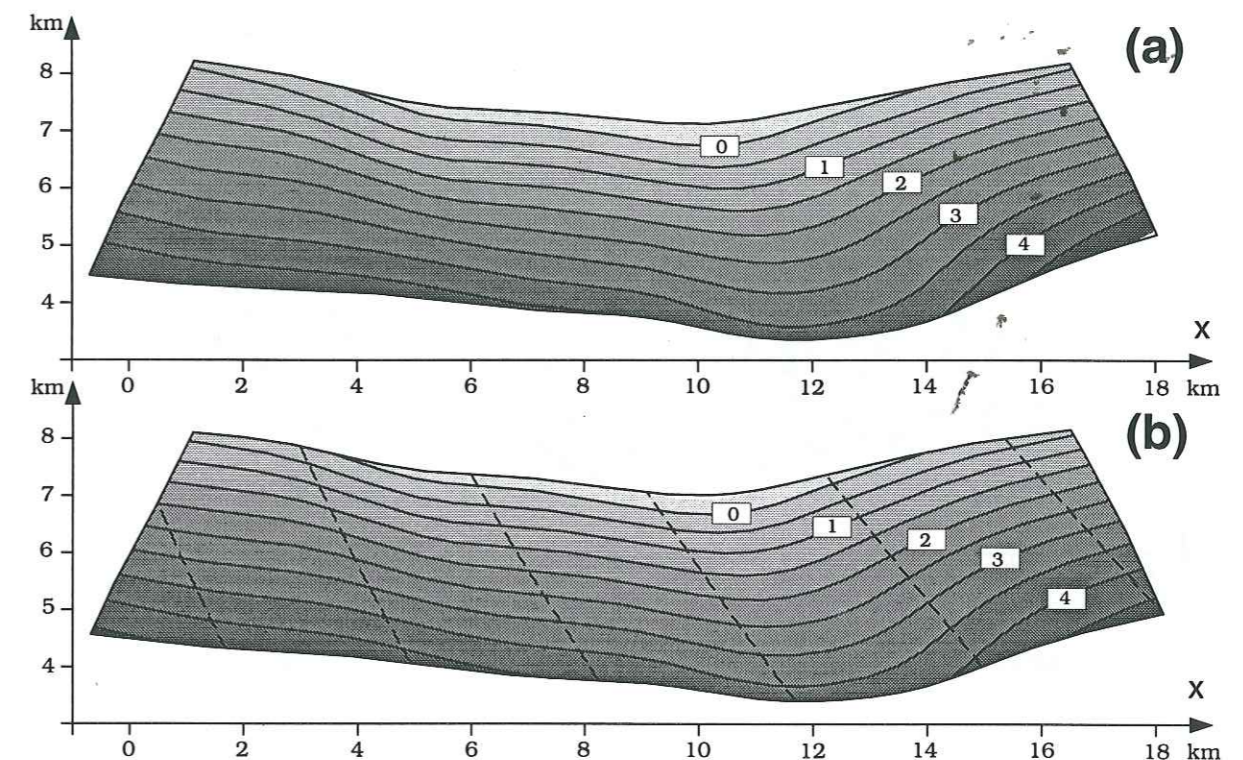


Figure 24 Représentation des surfaces obtenues après résolution du problème d'approximation sans critère de filetage (a), et avec le critère de filetage (b).

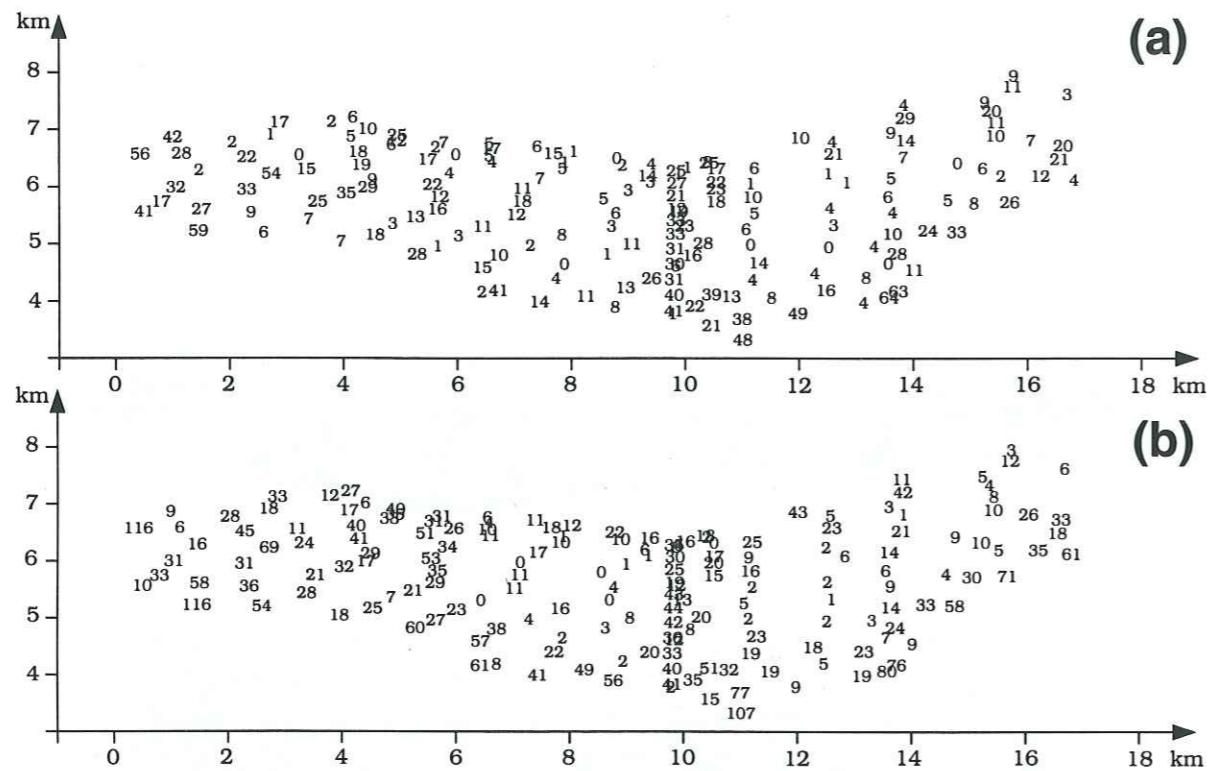


Figure 25 Evaluation de la distance en m des points de données à la surface, pour la solution approchée sans le critère de filetage en a) et avec le critère de filetage en b).

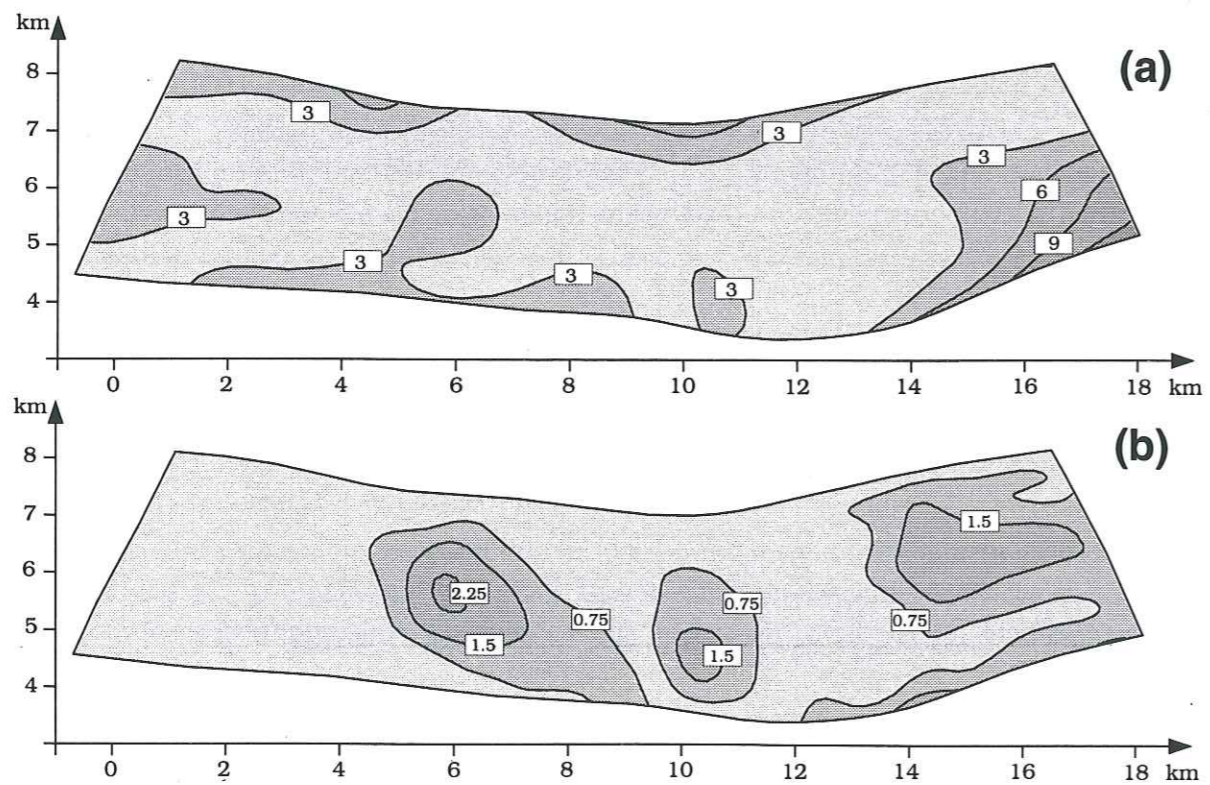


Figure 26 Carte de résidus en angle en degrés pour la surface approchée sans le critère de filetage en a) et avec le critère de filetage en b).

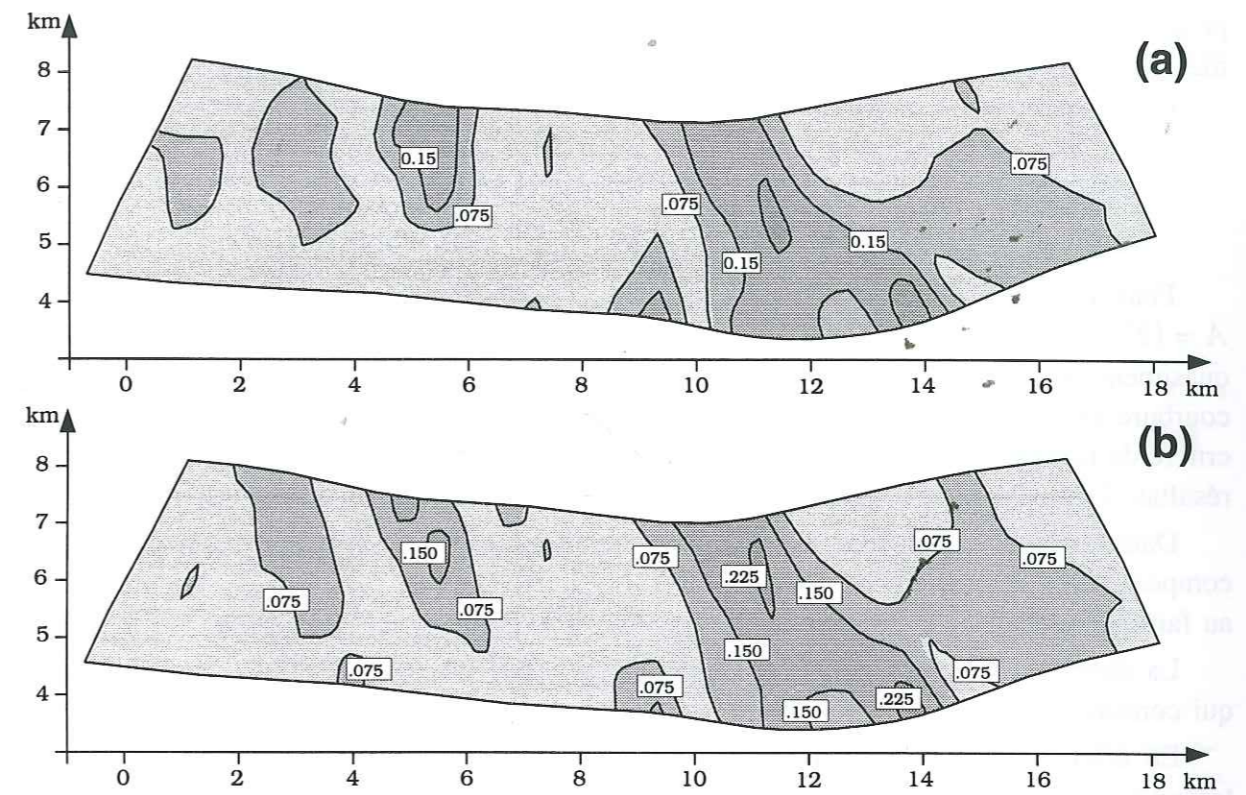


Figure 27 Représentation des résidus de courbure (km^{-1}) relatifs aux surfaces des figures 24.a, 24.b.

On note que les stries calculées représentées en tireté sur la figure 24b sont penchées mais linéaires ce qui suggère une surface cylindrique. Le fait que les stries soient linéaires, nous dit que les blocs glissent l'un sur l'autre, et ne tournent pas. D'un point géologique, on peut dire que les blocs ont plutôt joué en chevauchement et peu en décrochement (dextre). Les stries calculées ont un plongement N-W alors que l'on s'attend à un plongement Nord pour une faille E-W chevauchante. Cet effet est discuté plus loin.

Vue la simplicité de la forme de la surface solution en approximation sans le critère de filetage et avec le critère de filetage, on peut considérer que 176 points "surdocumentent" la surface. C'est pour cela que nous avons refait l'expérience avec beaucoup moins de points, et nous avons comparé les résultats obtenus.

VI.4.3.1.2 Expérience à 12 points

Nous avons choisi de refaire l'expérience avec 12 points répartis sur la surface que nous avons choisi arbitrairement parmi les 176 précédents.

Nous avons modifié la valeur des poids de façon à retrouver des résidus du même ordre de grandeur que précédemment. Nous avons augmenté le poids pour le critère de proximité aux points pour rendre l'information donnée par les 12 points aussi "significative" qu'avec 176 points.

Les différents poids sont $C_{La} = 5.0$, $C_{Lp} = 1.5$, $C_{Sec} = 0.1$, et en filetage et normalisation, $C_F = 0.1$, $C_N = 0.5$.

La figure 28a est le résultat du problème de minimisation des critères de courbure et proximité aux points, la figure 28b la surface corrigée après introduction des critères de filetage et normalisation.

On a trouvé comme torseur optimal

$$T = \begin{bmatrix} T(O) \\ T \end{bmatrix}_O = \begin{bmatrix} 0.517, -0.87, 0.857 \\ 0.012, 0.027, 0.036 \end{bmatrix}_O$$

Pour ce torseur, l'hélice tourne à gauche et l'axe passe par le point A tel que $A = (27.15, 3.83, -11.2)$. Etant donné que l'on a moins de points, et que le miroir est quasiment un dièdre, il est très bien approché. On peut le voir sur les cartes de résidus de courbure et d'angle qui sont petits dès la résolution du problème d'approximation sans le critère de filetage. L'introduction du critère de filetage a tendance à améliorer légèrement le résultat. Les résultats sont sensibles sur les cartes de résidus d'angle, et courbure.

Dans les deux expériences, on note une forte composante en chevauchement et une petite composante en décrochement. On note qu'il y a aussi une petite composante de rotation liée au fait que les isovaleurs de y sont plus serrées au nord qu'au sud sur toutes ces figures.

La direction des stries nous est donnée par la droite d'intersection entre les deux plans qui constituent le miroir, cette direction est plus ou moins juste.

En effet, nous avons considéré des points de données numérisés sur une surface interprétée, il y a toujours une possibilité d'erreur dans l'interpolation des courbes. Une petite erreur sur la valeur des normales aux différents plans et donc sur la direction de la droite d'intersection nous donne un champ de stries bien différent. Cela peut expliquer les variations entre les torseurs que l'on a trouvé pour 176 points et 12 points, mais aussi, la différence entre le torseur trouvé numériquement et celui que l'on attend d'après la géologie régionale (chevauchement N100-110).

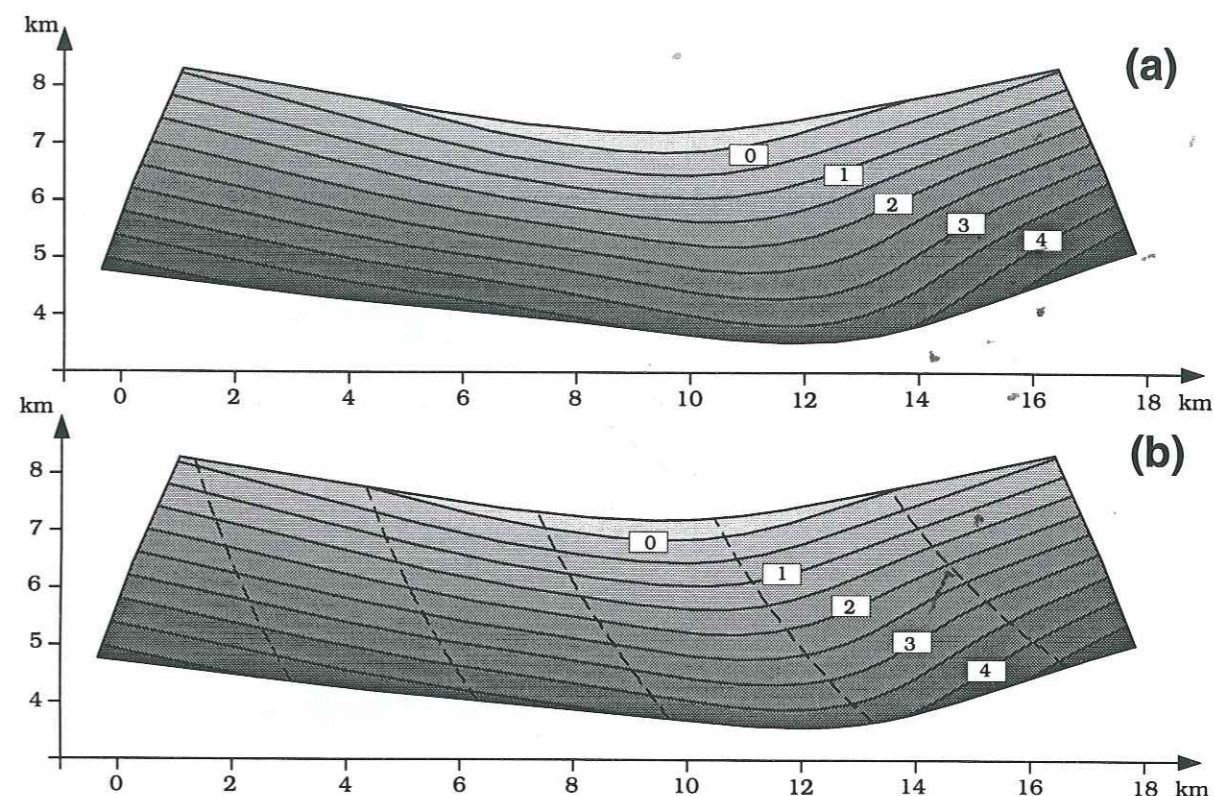


Figure 28 Représentation des surfaces obtenues après résolution du problème d'approximation sans critère de filetage (a), et après introduction des critères de filetage (b).

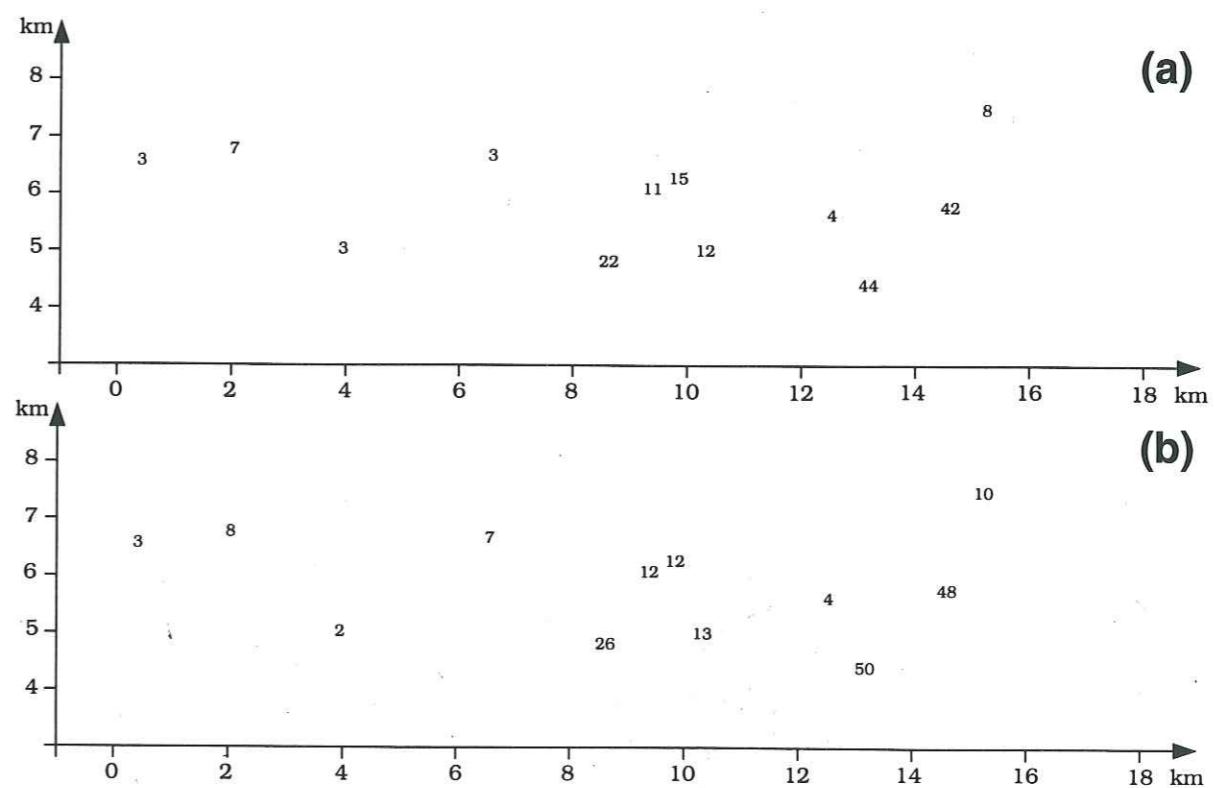


Figure 29 Evaluation de la distance des points de données à la surface en m.

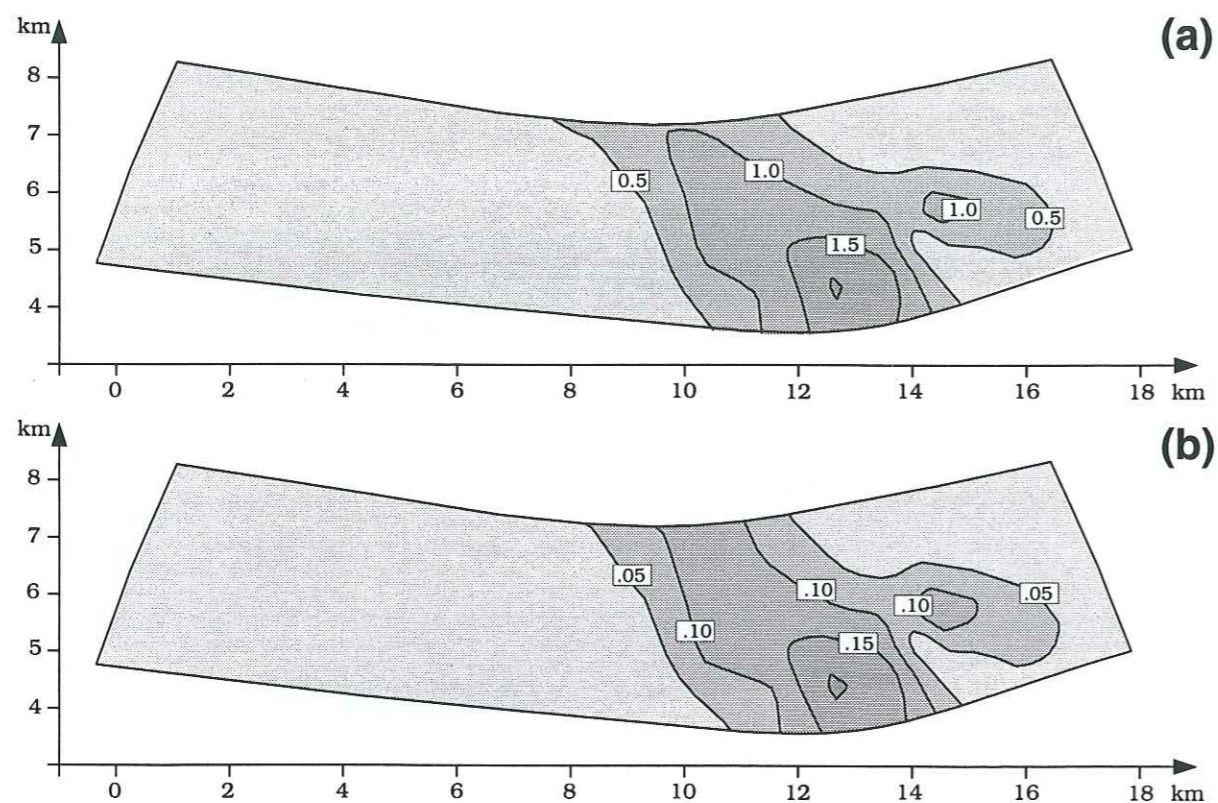


Figure 30 Représentation des résidus de courbure (km^{-1}) relatifs aux surfaces solutions sans critère de filetage et avec critère de filetage.

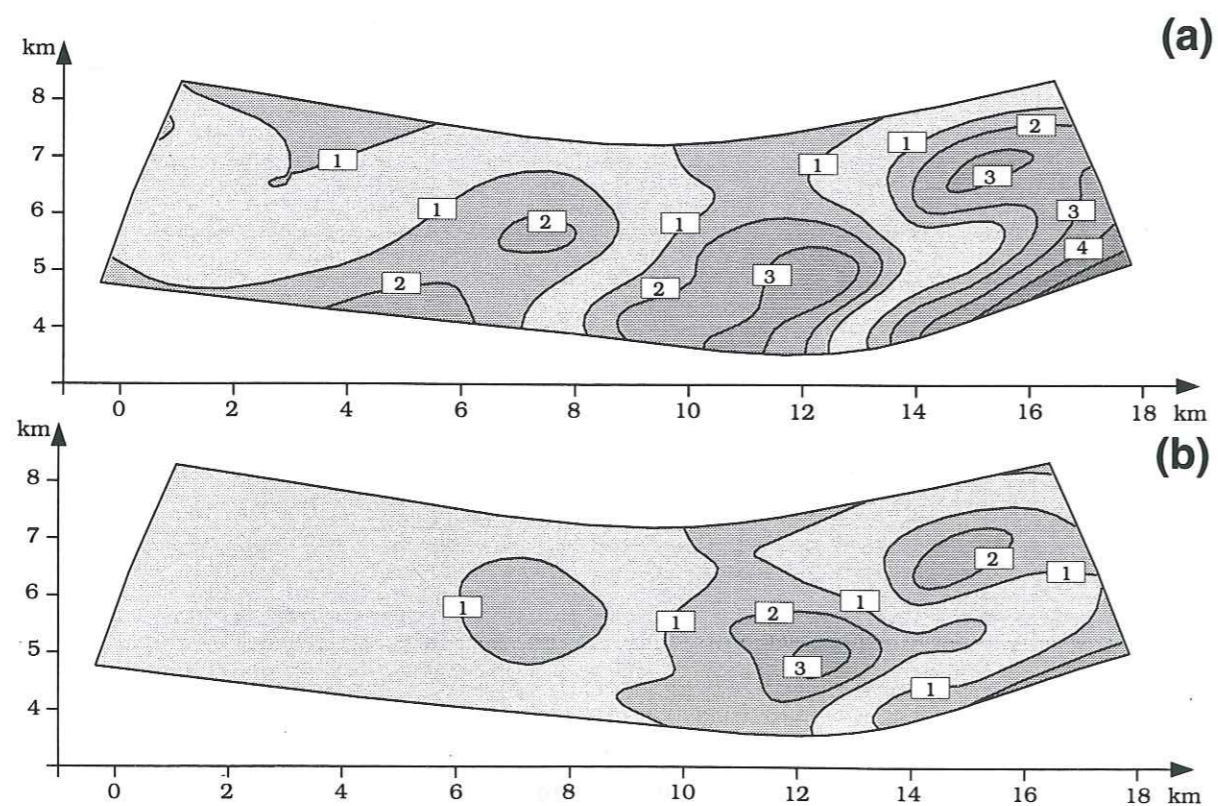


Figure 31 Carte de l'angle résiduel entre la surface et le torseur optimal.

VI.4.3.1.3 Comparaison avec le sens de chevauchement donné

Il existe une différence entre la direction des stries calculées numériquement et celles envisagées par les géologues. Nous allons donner une explication possible. Les données avec lesquelles on a travaillé sont des données numérisées sur une surface interprétée (Fig. 23). Il peut y avoir eu erreur sur l'interprétation de la surface, ce qui entraîne une erreur lorsque l'on a numérisé la surface. Nous allons montrer qu'une erreur sur l'interprétation de la surface donc sur l'orientation de chacun des plans du dièdre que forme la direction de l'arête du dièdre, donc sur le miroir à l'ouest de Sespe Creek peut entraîner une erreur plus importante sur celle du torseur.

Schématisons le miroir à l'ouest de Sespe Creek par le dièdre représenté sur la figure 32. Les normales n_1 et n_2 aux plans P_1 et P_2 sont calculées à partir des courbes de niveau de la surface interprétée. Nous avons

$$n_1 = \begin{pmatrix} 0.148 \\ 0.764 \\ 0.628 \end{pmatrix}, n_2 = \begin{pmatrix} -0.247 \\ 0.679 \\ 0.691 \end{pmatrix}, \langle n_1, n_2 \rangle = 0.916.$$

L'angle dièdre (dans l'espace) entre les deux plans est de 23 degrés.

Si les courbes de niveau des surfaces que l'on a numérisées ne sont pas rigoureusement justes, la normale calculée pour chacun des plans est calculée avec une certaine erreur.

Lorsque l'on fait une erreur sur les composantes des normales dans le plan engendré par les normales, cela ne modifie pas la direction de la droite d'intersection. Cela ne modifie que le module du vecteur directeur. Par contre, si on perturbe les composantes perpendiculairement au plan engendré, cela perturbe la direction d'intersection du dièdre. Considérons un dièdre d'angle θ , et un repère tel que les normales à chacun des plans soient $n_1 = (0, 0, 1)$ et $n_2 = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, 0)$. Alors l'orientation de l'arête du dièdre est celle du vecteur unitaire

$$n = \frac{n_1 \wedge n_2}{\|n_1 \wedge n_2\|} = \frac{(-\sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\theta, 0)}{\|\sqrt{\sin^2\theta}\|}.$$

Considérons que $\sqrt{\sin^2\theta} = \sin\theta$, d'où $n = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$.

On a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial n_2}{\partial \theta} \right\| &= 0, & \left\| \frac{\partial n}{\partial \theta} \right\| &= 0, \\ \left\| \frac{\partial n_2}{\partial \varphi} \right\| &= \sin\theta, & \left\| \frac{\partial n}{\partial \varphi} \right\| &= 1, \\ \left\| \frac{\partial n}{\partial \varphi} \right\| &= \frac{1}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

Ainsi, une variation dans le plan des normales ne modifie pas l'orientation de la normale n . Par contre, une variation de φ (pour φ petit) donc normale au plan engendré par les normales n_1, n_2 entraîne une variation de $1/\sin\theta$. Il y a un facteur d'amplification de l'erreur sur la direction de la normale n dans ce cas.

Appliquons ceci à nos données, si on considère une variation de 1% sur chacune des composantes qui peut venir d'une erreur de mesure sur les courbes de niveau, ou d'une erreur d'interpolation sur les données, cela nous donne

$$(n_1 + \Delta n_1) \cdot (n_2 \wedge \Delta n_2) = \begin{pmatrix} 0.158 \\ 0.774 \\ 0.638 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.257 \\ 0.689 \\ 0.701 \end{pmatrix} = 0.940.$$

L'angle entre les deux plans est maintenant de 20 degrés, soit une variation de 14% sur l'angle, ce qui est considérable vue la petite variation sur les composantes. Ceci peut expliquer la différence de direction entre les stries calculées qui nous donne un chevauchement avec une composante en décrochement et l'hypothèse envisagée par les géologues qui est un chevauchement.

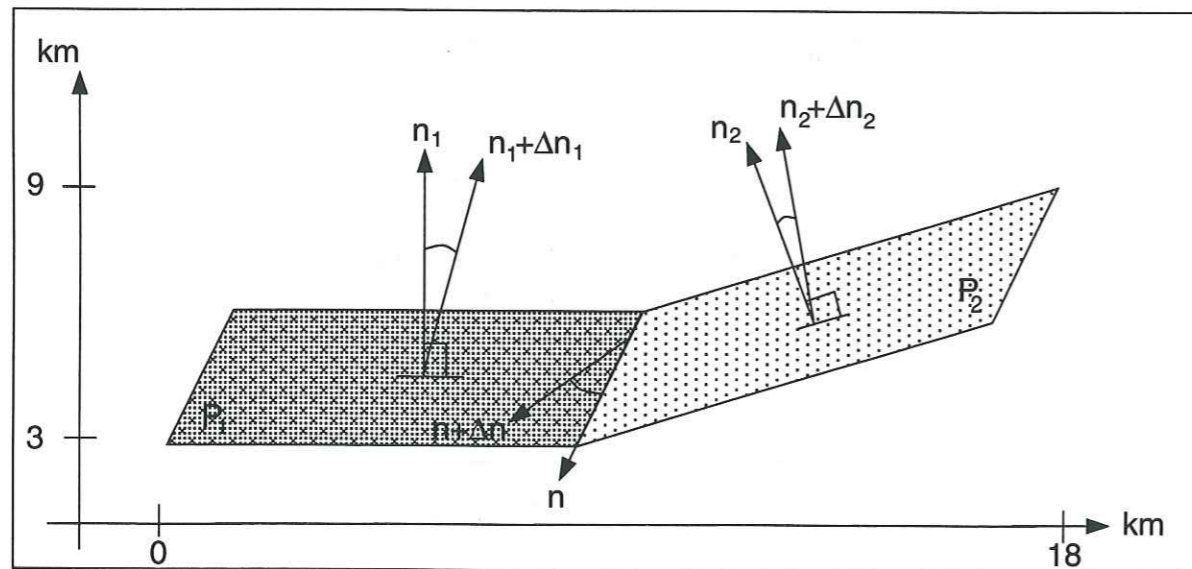


Figure 32 Représentation de la variation dans la direction des stries pour une variation sur les normales aux plans.

VI.4.3.1.4 Introduction du sens de glissement connu comme donnée

Nous allons utiliser les informations sur le sens de glissement, données par les mécanismes au foyer de la figure 22. Selon R. Madariaga et G. Perrier, [1991], "les mécanismes au foyer permettent de déterminer à partir du rayonnement sismique l'orientation de la faille responsable d'un tremblement de Terre et la direction de glissement sur celle-ci. Une faille est déterminée par son orientation par rapport à l'horizontale: on imagine un plan qui coïncide avec la faille et on définit son orientation par l'intersection de ce plan avec la surface. On définit l'angle que fait la direction de glissement sur ce plan avec l'horizontale. La figure 33 illustre les trois principaux types de faille en (a), (b), et (c)".

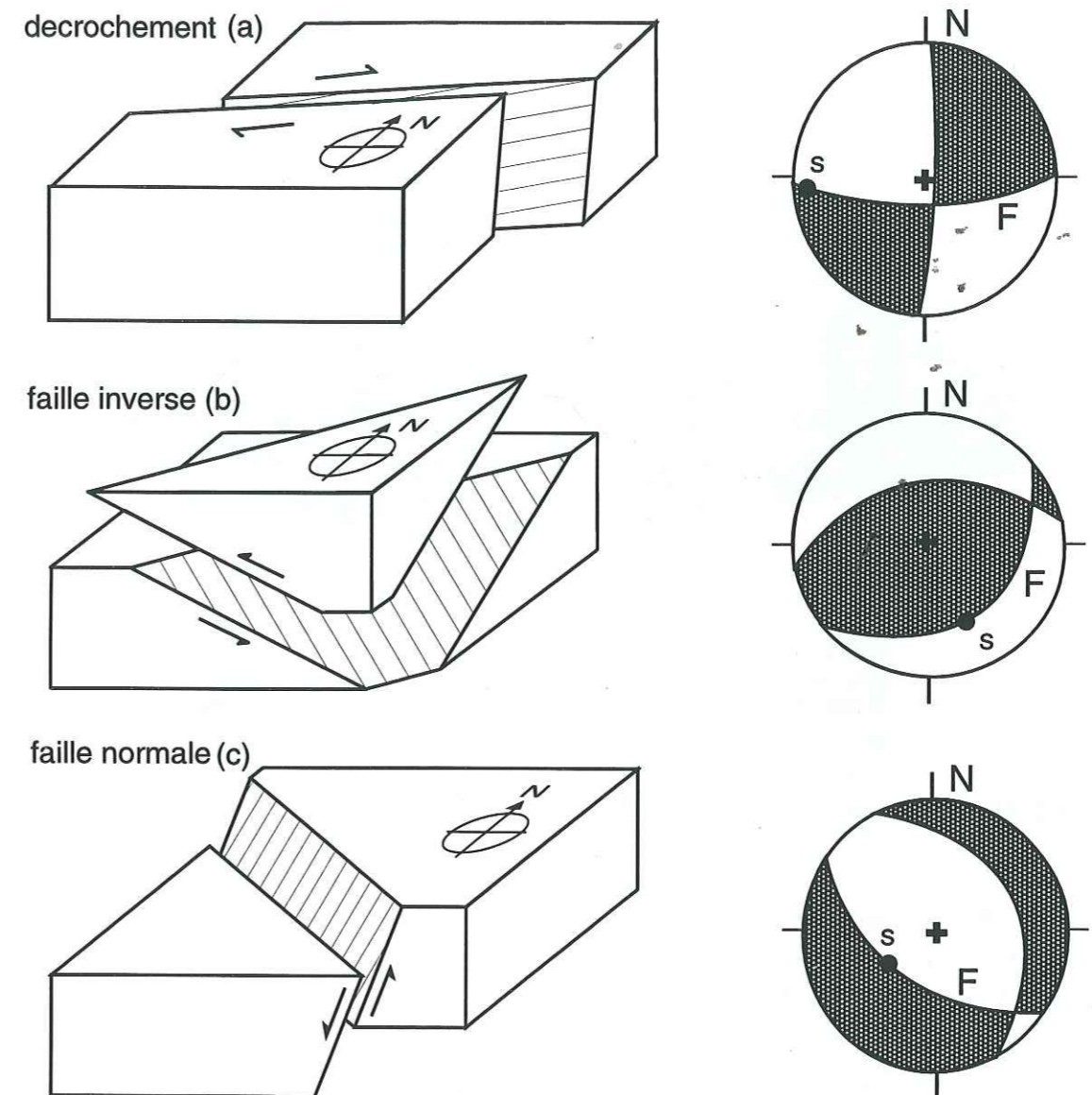


Figure 33 Les trois principaux types de failles et les diagrammes de mécanisme au foyer correspondants: (a), décrochement; (b), faille inverse; (c), faille normale. s représente l'orientation de la strie (projection sur l'hémisphère inférieur). La figure est tirée du livre de R.Madariaga et G.Perrier, [1991].

On a plusieurs mécanismes de failles inverses près de la faille de San Cayetano, qui sont en moyenne orientées N100-110. Pour un pur chevauchement, le glissement est de l'ordre de N10-20E. Ceci nous fixe au moins deux composantes sur 6 pour le torseur. Nous considérons le torseur T avec

$$T = \begin{bmatrix} T(O) \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.25, 0.95, T^z(O)) \\ \Omega^x, \Omega^y, \Omega^z \end{bmatrix}_O$$

La détermination des autres composantes est obtenue lorsque le programme a convergé. Les coordonnées du torseur obtenu sont

$$T = \begin{bmatrix} 0.25, 0.95, -0.76 \\ -3.83, -0.68, 0.14 \end{bmatrix}_O$$

La figure 34 est le résultat de l'optimisation des critères de courbure, proximité aux points, et filetage avec un torseur "fixé" dans ces conditions. Etant donné que la surface est toujours quasiment un dièdre, il y a peu de modifications visibles sur les pseudo-courbes de niveaux. Malgré tout, la surface obtenue est celle compatible avec le nouveau torseur T .

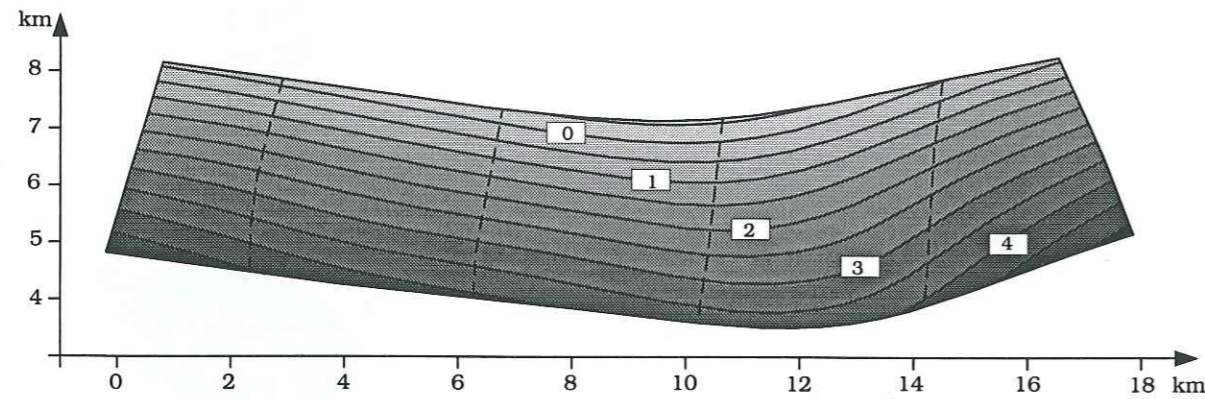


Figure 34 Représentation de la surface solution obtenue après optimisation des différents critères de proximité aux points, courbure et filetage à torseur à composantes fixées.

VI.4.3.2 Miroir2

VI.4.3.2.1 Résolution à torseur inconnu

Pour ce miroir, nous avons $N_p = 792$ paramètres de splines pour décrire la surface de faille, $N_{uv} = 4800$ points de discrétisation pour le calcul des intégrales, 13 données de puits réparties sur la surface et 5 données d'affleurement (Fig. 23).

Les poids sont $C_{La} = 1.0, C_{Lp} = 10.0, C_{Sec} = 0.01$.

Les poids en filetage sont $C_F = 1, C_N = 0.01$.

On a trouvé comme torseur optimal, ou champ de vecteurs le plus tangent à la surface

$$T = \begin{bmatrix} T(O) \\ T \end{bmatrix}_O = \begin{bmatrix} -0.034, 2.378, -0.155 \\ -0.054, -0.014, -0.062 \end{bmatrix}_O$$

Pour ce torseur, l'axe passe par le point A tel que $OA = (18.1, -4.96, 7.73)$.

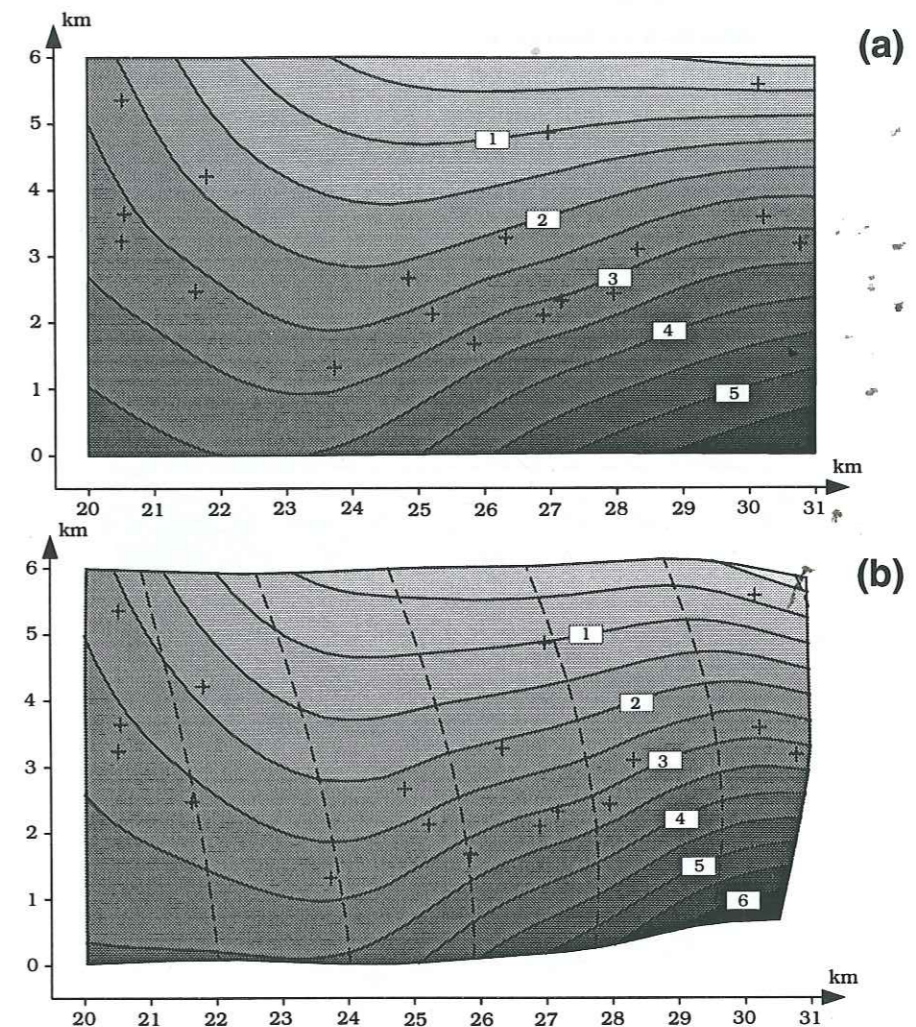


Figure 35 Représentation des surfaces obtenues après résolution du problème d'approximation sans critère de filetage (a), et avec critère de filetage (b). Les croix représentent la position des puits.

L'introduction du critère de filetage a modifié la forme de la surface, c'est à dire les courbes de niveau. On constate que les deux surfaces sont très semblables dans les zones de maximum de points de données et qu'elles diffèrent sensiblement ailleurs. Dans les zones bien documentées, le critère de proximité aux points de données est prépondérant, par contre dans les zones moins documentées, l'effet du critère de filetage est visible.

Par exemple, dans les coins gauche et droit en bas, pour la figure 35a, l'effet du critère de courbure apparaît nettement. Il a tendance à lisser "régulièrement" la surface et à annuler la courbure de la surface dans ces zones. Par contre pour la figure 35b, c'est le critère de filetage qui est prépondérant. Il a tendance à onduler la forme de la surface. Il la modifie pour la rendre compatible avec l'hypothèse de blocs rigides. Ceci est très visible dans les différents coins.

Les stries calculées à partir du torseur optimal sont à peu près nord-sud. Elles indiquent que ce miroir de faille a une forte composante en chevauchement et une petite en décrochement car les stries sont obliques. Sur les cartes de résidus (Fig. 36), la surface est en moyenne quadratique à 5.30 m des données de puits pour la surface approchée, et à 5.70 m pour la surface filetée. On note donc une faible augmentation de la distance aux points.

Par contre de la figure 36a à la figure 36b, on constate que l'angle entre le torseur et la surface dépassait 12 degrés à certains endroits passe à moins de 1 degré presque partout. L'angle entre le plan tangent à la surface en chaque point et le champ de vecteurs est très petit. Sur les cartes de résidus de courbure (Fig. 37), on peut constater que l'introduction du critère de filetage tend à "régulariser" la surface dans la direction des stries.

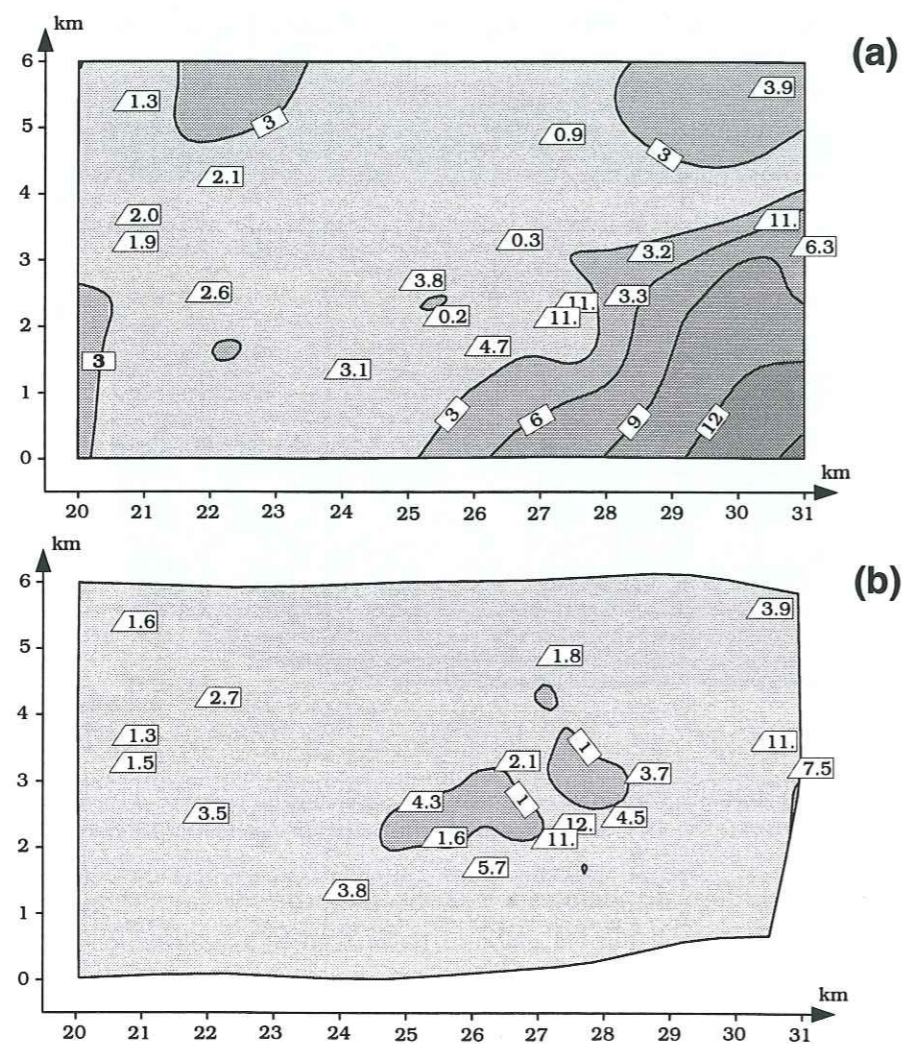


Figure 36 Cartes de l'angle résiduel (en degrés) entre la surface et le torseur optimal, pour le problème en approximation sans critère de filetage (a), et avec critère de filetage (b). Représentation de la distance en m des points de données à la surface solution du problème d'approximation sans critère de filetage dans les boîtes trapézoïdales.

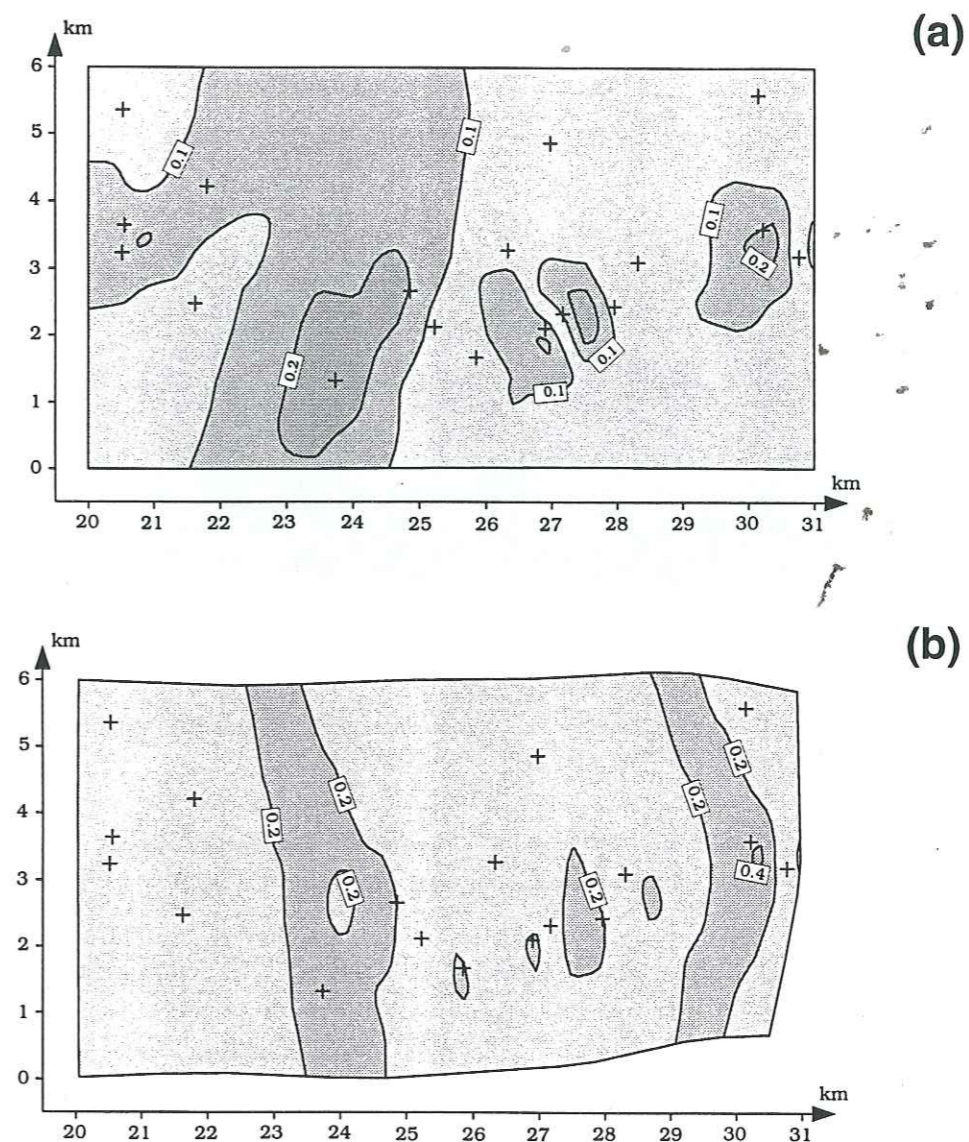


Figure 37 Représentation des résidus de courbure (km^{-1}) relatifs aux surfaces 35a et 35b

VI.4.3.2.2 Introduction de la direction de glissement comme une donnée

Pour ce miroir, nous avons considéré les données de mécanisme au foyer de la figure 22. Nous avons minimisé les critères de courbure, proximité aux points et filetage avec pour torseur initial T de composantes

$$T = \begin{bmatrix} 0.25, 0.96, 0.0 \\ 0.0, 0.0, 0.0 \end{bmatrix}_O,$$

ce qui correspond à des stries orientées N15E et horizontales.

La figure est le résultat de l'optimisation avec le nouveau torseur.

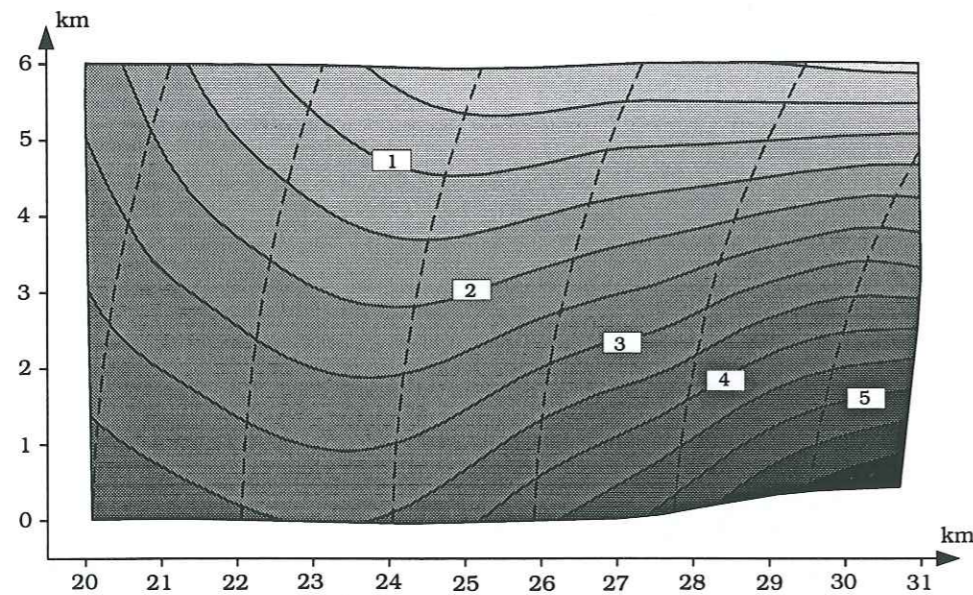


Figure 38 Représentation de la surface obtenue après optimisation des critères de proximité aux points de données, courbure et filetage.

D'un point de vue distance au point, la surface est en moyenne à 10m des points de données. L'angle entre le plan tangent et le torseur est en moyenne de 8 degrés. On a trouvé un torseur optimal.

Cette surface vérifie bien nos critères. On peut en conclure que cette surface admet une direction de stries NS, mais qu'il faut introduire plus d'informations géologiques pour savoir si les stries sont N10E ou N10W. C'est ce que nous avons fait dans cette expérience en guidant le torseur.

VI.4.3.2.3 Expérience du "test blanc"

Sur ce miroir, nous avons expérimenté un système de "test blanc". C'est une expérience numérique très pratiquée chez les statisticiens qui permet de valider une méthode. Dans notre cas, ce test permet de savoir si le critère de filetage que l'on a introduit comme critère supplémentaire, permet de mieux déterminer la géométrie de notre surface de faille.

Les poids pour la solution du problème d'approximation sont $C_{L_a} = 1.0, C_{L_p} = 10, C_{Sec} = 0.01$, et ceux pour la surface solution en filetage sont $C_{L_a} = 1.0, C_{L_p} = 10, C_{Sec} = 0.01, C_F = 1.0, C_N = 0.01$.

Nous avons considéré les 13 puits répartis sur la surface (Fig. 39). A chaque manipulation, nous avons retiré un puits et nous avons cherché la solution en approximation et en filetage

avec 12 puits, puis nous avons comparé les résidus. Nous avons surtout mis en évidence l'écart quadratique moyen entre la surface et les points de données.

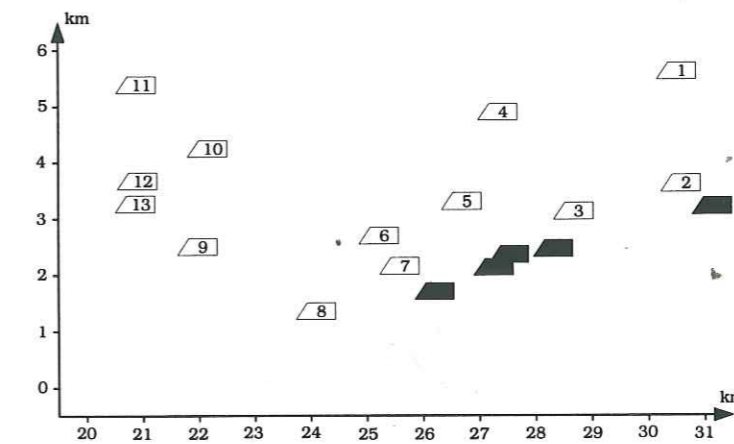


Figure 39 Représentation des différents puits numérotés repartis sur la surface. Les boîtes trapézoïdales remplies sont des points d'affleurement dont on n'a pas tenu compte dans le "test blanc".

Effet du puits numéro	Distance de la surface aux points de données	
	Surface approchée	Surface filetée
1	47.69	42.67
2	7.38	7.85
3	2.35	3.05
4	4.05	8.11
5	1.40	3.27
6	3.50	3.33
7	1.25	1.57
8	13.81	11.36
9	9.13	5.77
10	8.82	6.23
11	14.21	7.66
12	2.03	1.45
13	2.28	1.85

Figure 40 Tableau représentant les écarts entre la surface et les points de données en m lorsque l'on enlève un puits. La distance de la surface aux points de donnée est la projection normale de la différence $\phi^i - \phi_{obs}^i$ (réf. Chap. V.6.2).

Lorsque l'on considère les 13 puits, la surface solution du problème d'approximation est en moyenne quadratique à 1.24m alors que la surface solution en filetage est à 2m. On note une faible augmentation de la distance.

Sur le tableau 40, l'expérience du "test blanc" montre que chaque puits a une influence différente, ceci est prévisible. Par exemple, les puits du bord (1,8,11) sont très importants, ils positionnent la surface dans l'espace. Les résultats en approximation sont nettement détériorés lorsque l'on retire un de ces puits, ce qui est logique. Le critère de courbure tend à minimiser la courbure de la surface dans les zones mal documentées, alors que le critère de filetage tend

à documenter ces zones. C'est pour cela que la distance aux points de donnée est nettement moins mauvaise pour la surface solution en filetage.

Pour les puits (2,3,4), on note une faible détérioration pour les résultats en filetage lorsque l'on retire un de ces puits. Ceci est prévisible, cela correspond à une zone où les angles résiduels entre le plan tangent à la surface et le torseur optimal sont importants (ex. 36). L'introduction du critère de filetage diminue largement ces angles, mais fait que l'on perd un peu en proximité aux points.

Il y a certains puits qui sont redondants comme les puits 6,7 ou le puits 2 et la donnée d'affleurement. Dans ces cas, lorsque l'on retire un de ces puits, la distance entre les points de données et la surface ne se trouve pas affectée.

En conclusion de cette expérience, l'introduction du critère de filetage améliore la détermination de la géométrie de la surface de faille (en moyenne quadratique, la surface filetée est 14% mieux déterminée que la surface approchée lorsque l'on tient compte de 12 puits sur 13 et que l'on cherche l'écart par rapport au treizième. Ce que nous considérons satisfaisant. On observe une meilleure stabilité des résultats lorsque l'on introduit le critère de filetage

VI.4.3.3 Conclusions

En conclusion, cet exemple est intéressant, il nous a permis de travailler à une échelle kilométrique et de mettre en évidence l'effet du critère de filetage.

On a pu voir que lorsque la surface est assez plane, on n'a pas besoin de beaucoup de points de donnée, l'expérience à 176 points pour le miroir à l'ouest de Sespe Creek n'a pas apporté plus d'informations que celle faite avec 12 points de donnée.

Les résultats en filetage que l'on a obtenu sur ce miroir ont montré qu'une faible erreur sur les données nous amène à faire une erreur plus importante sur la détermination du torseur, et donc peut remettre en cause sa détermination.

Par contre le miroir à l'est de Sespe Creek, on a travaillé avec des données de puits, donc des données fiables. Dans ce cas, les résultats en filetage sont nettement plus satisfaisants et fiables. On a obtenu une direction de stries NS comme celle qui nous venait de l'information des mécanismes au foyer.

Les stries obtenues à partir du torseur optimal pour le premier miroir nous permettent de dire que la faille a joué en chevauchement plutôt qu'en décrochement. L'étude du deuxième miroir a donné de meilleurs résultats quant au chevauchement.

Les résultats du "test blanc" sur le miroir à l'est de Sespe Creek sont *très satisfaisants*. Ils mettent en valeur l'effet du critère de filetage, qui documente les zones de faille sans donnée, en ne perturbant pas la géométrie de la surface dans les zones où la faille est bien contrainte par les puits. *L'utilisation du critère de filetage améliore de 14% la détermination de la géométrie de la surface de faille par rapport à une simple approximation*, lorsque l'on enlève une donnée de puits.

Annexe 1 : aspects numériques du miroir de faille de la Cléry

Nous présentons dans cette annexe des résultats numériques. Des ordres de grandeur sur le nombre d'itérations pour obtenir la convergence de l'algorithme de Gauss-Newton sont donnés, ainsi que des coûts informatiques, ou les courbes de variation des différentes fonctions-coûts qui constituent un des tests d'arrêt de notre algorithme. Le programme tourne sur le calculateur vectoriel *Fujitsu* en double précision (64 bits) et a été vectorisé à 60 %, nous donnons le temps *Cpu* par itération.

Miroir 1 à torseur inconnu

D'un point de vue informatique, le programme calcule chaque itération en 18 secondes (respectivement . 25 secondes) pour la surface approchée (resp. surface filetée) dont 15 secondes (resp. 11 secondes) dans le calculateur vectoriel . Nous pouvons traiter un exemple réel dans des temps qui sont relativement raisonnables vu le nombre d'essais qui sont nécessaires.

Nous avons tracé les courbes de décroissance des différents gradients (Fig. 41), car ceci constitue un des tests d'arrêt de notre programme.

On peut observer que la norme du gradient décroît d'un facteur 10^6 (resp. 10^9) en 9 itérations dans le cas de la surface approchée (resp. surface filetée).

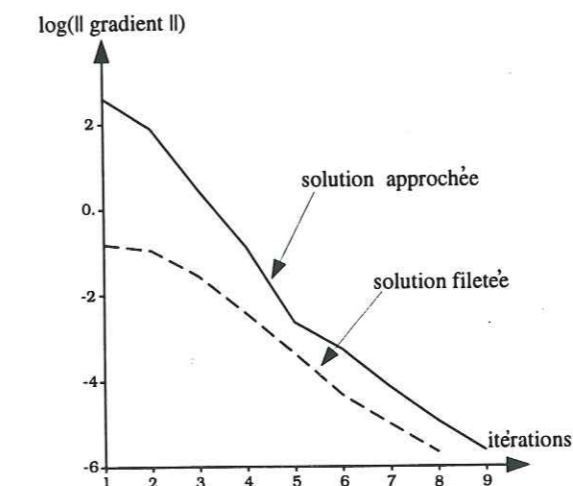


Figure 41 Courbes de décroissance de la norme du gradient pour les solutions approchée et filetée.

Nous présentons les courbes de décroissance des fonctions-coût pour les deux solutions. Pour la fonction-coût additionnelle, il s'agit de la norme L_2 sur les dérivées secondes. Le programme a convergé lorsque les différentes fonctions-coût stagnent (Fig. 42a, b).

On peut constater que si la mise en oeuvre informatique est assez compliquée à cause des calculs des jacobiniennes, le résultat converge assez rapidement vers une solution par la méthode de Gauss-Newton non seulement dans le cas de l'approximation mais aussi dans le cas de l'approximation avec filetage.

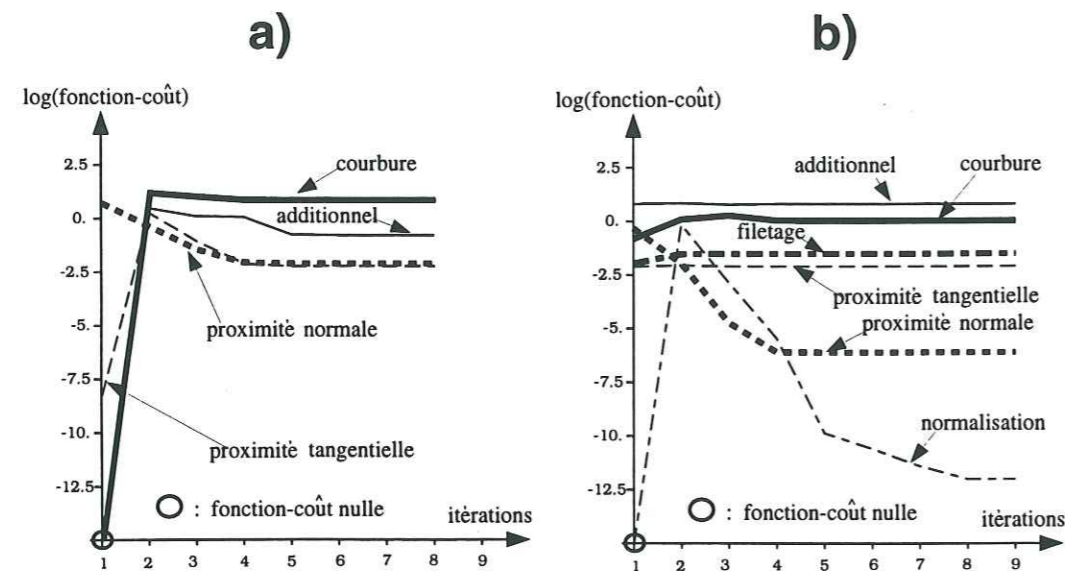


Figure 42 Représentation graphique de la décroissance des différentes fonctions-coût pour les surfaces approchée (a) et filetée (b). On appelle proximité normale, l'écart entre les données observées et les données calculées projeté sur le vecteur normal, et proximité tangentielle la somme des écarts entre les données observées et les données calculées projetée sur les vecteurs du plan tangent.

Miroir 2 à torseur inconnu

D'un point de vue informatique, le programme calcule chaque itération en 20 secondes (resp. 28 secondes) dont 11 secondes (resp. 14 secondes) dans le calculateur vectoriel pour la solution approchée (resp. surface filetée). Pour cet exemple, il a fallu beaucoup plus d'itérations que pour le miroir précédent à cause du problème d'indétermination due à une surface assez plane.

Nous avons tracé les courbes de décroissance des différents gradients (Fig. 43). Nous pouvons lire sur la figure comment se traduit le problème d'indétermination. On a une courbe qui décroît progressivement en "dent de scie" pour la solution filetée.

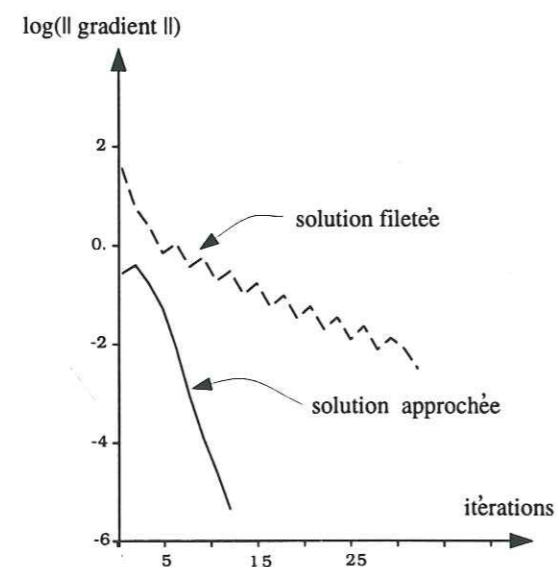


Figure 43 Courbes de décroissance de la norme du gradient pour les solutions approchée et filetée.

Sur la figure des courbes de décroissance des fonctions coûts (Fig. 44), on peut lire aussi le phénomène d'indétermination pour le critère de normalisation qui se traduit par une courbe qui décroît en "dents de scie" et qui se stabilise pour un torseur solution au bout de nombreuses itérations. Pour les autres critères, après 5 itérations les fonctions coût restent constantes.

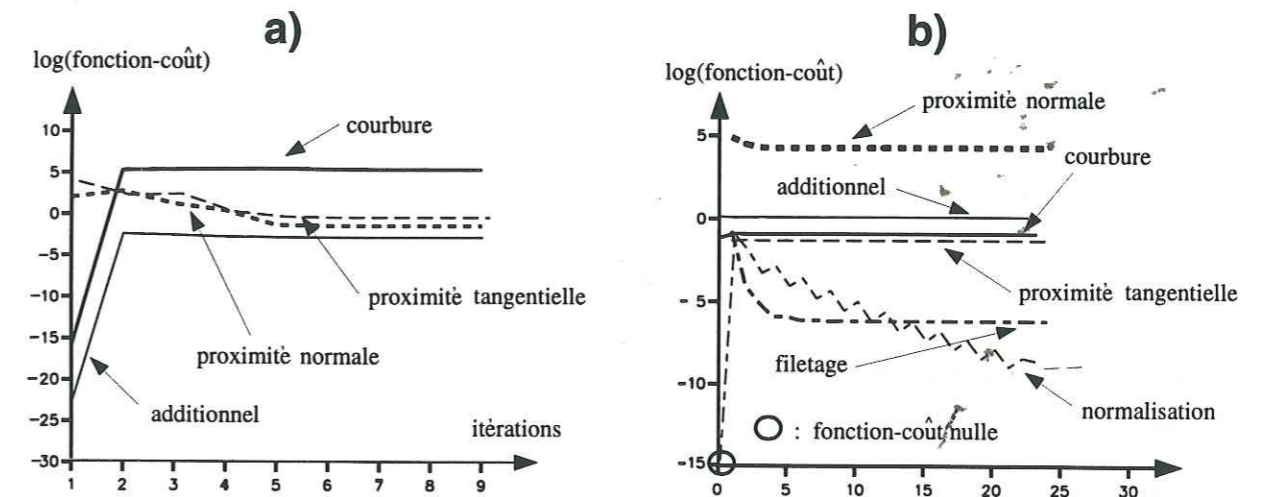


Figure 44 Représentation graphique de la décroissance des différentes fonctions-coûts pour les solutions approchée en a) et filetée en b).

Annexe 2 : modèle initial pour l'optimisation du miroir de faille de la Cléry

Dans tous les cas, l'optimisation requiert une surface initiale ainsi qu'un torseur initial dans les cas avec critère de filetage.

Celle-ci est décrite par le paramétrage initial suivant

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in U = [u_m, u_M] \times [v_m, v_M] \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \phi_0 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix},$$

où ϕ_0 est donc l'identité. La projection du i -ème point de donnée sur cette surface initiale nous donne le point (x_i, y_i, z_i) dont les coordonnées curvilignes par ϕ_0^{-1} sont (u_i, v_i) .

Le critère de proximité relie les points de données à l'image par le paramétrage inconnu ϕ de ces points (u_i, v_i) .

Pour résoudre un problème d'approximation, on prend en général un modèle initial plan par souci de simplicité. Pour un problème d'approximation avec critères de filetage, ce n'est pas possible. Un plan est invariant par une famille à trois paramètres de déplacements (2 en translation, 1 en rotation). Le critère de normalisation ne suffit pas à rendre unique le torseur solution. Par exemple, pour les translations, le fait de contraindre la norme ne nous donne pas la direction. C'est pour éviter ces indéterminations que nous utilisons le modèle solution en approximation comme modèle initial pour le problème avec filetage.

Annexe 3 : coûts informatiques pour la faille de San Cayetano

Miroir à l'ouest de Sespe Creek

D'un point de vue informatique, le programme met 45 secondes (resp. 39 secondes) en temps réel dont 28 secondes (resp. 22 secondes) dans le calculateur vectoriel *Fujitsu* pour la surface approchée (resp. surface filetée).

Miroir à l'est de Sespe Creek

D'un point de vue informatique, le programme met environ 20 secondes par itération sur le calculateur vectoriel *Fujitsu*, ce qui émerveille toujours l'utilisateur.

La norme du gradient décroît de 10 à 10^{-9} (resp. 7000 à 10^{-4}) en 8 itérations (resp. 10) pour la solution en approximation (resp. en filetage).

Annexe 4 : modèles initiaux pour l'optimisation de la faille de San Cayetano

Dans une première section, nous détaillons les différents modèles initiaux qui ont été utilisés pour l'optimisation: une couronne pour le miroir 1, un plan pour le miroir 2. Puis, dans une seconde section, comme nous sommes dans un cas favorable, nous vérifions que les dérivées secondes dans la direction normale sont une bonne approximation des courbures.

Miroir à l'ouest de Sespe Creek

Les points de données peuvent être répartis en moyenne sur une portion de cône. La détermination de cette portion de cône nous donne un modèle initial pour l'étape d'optimisation (Fig. 45). Puis, pour le critère de proximité aux points, nous allons projeter les coordonnées cartésiennes (x, y, z) des points de données sur ce cône pour déterminer les coordonnées curvilignes associées à chacun des points de donnée (Fig. 46).

La projection des points du cône dans un plan perpendiculaire à l'axe nous donne une couronne d'équation

$$x = x_0 + (R_0 + v_{min} - \alpha v) \cos(u/L) = 8.8 + (16.6 - 0.61v) \cos(u/16.6)$$

$$y = y_0 + (R_0 + v_{min} - \alpha v) \sin(u/L) = 21.7 + (16.6 - 0.61v) \sin(u/16.6)$$

avec $O = (x_0, y_0)$ les coordonnées du sommet du cône dans le plan, et $-8.6 \leq u \leq 8.5$, $-2.4 \leq v \leq 3.2$. Pour le cône lui-même, on a en plus

$$z = \beta v + \gamma = -0.79v + 1.850,$$

On en déduit les coordonnées curvilignes des points de donnée, d'où

$$u = L \cdot \arctan\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right),$$

$$v = \frac{z - 1.850}{-0.79}.$$

On a choisi une portion de cône plutôt qu'un rectangle de manière à adapter au mieux les bords de la surface étudiée à la répartition des points de données. La portion de cône

comme le rectangle sont des surfaces isométriques à un ouvert du plan. On peut trouver un paramétrage qui décrit la surface isométriquement. Ce sont des surfaces développables pour lesquelles l'approximation des courbures par la projection normale des dérivées secondes est valide. C'est un résultat que nous allons vérifier par la suite.

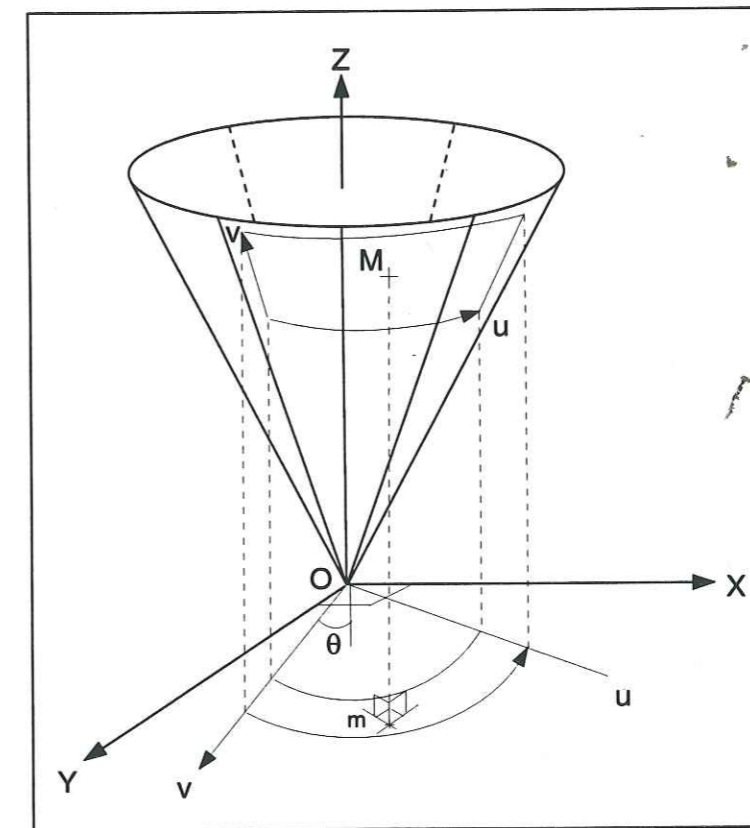


Figure 45 Représentation d'une portion de cône, et de sa projection dans un plan perpendiculaire à l'axe.

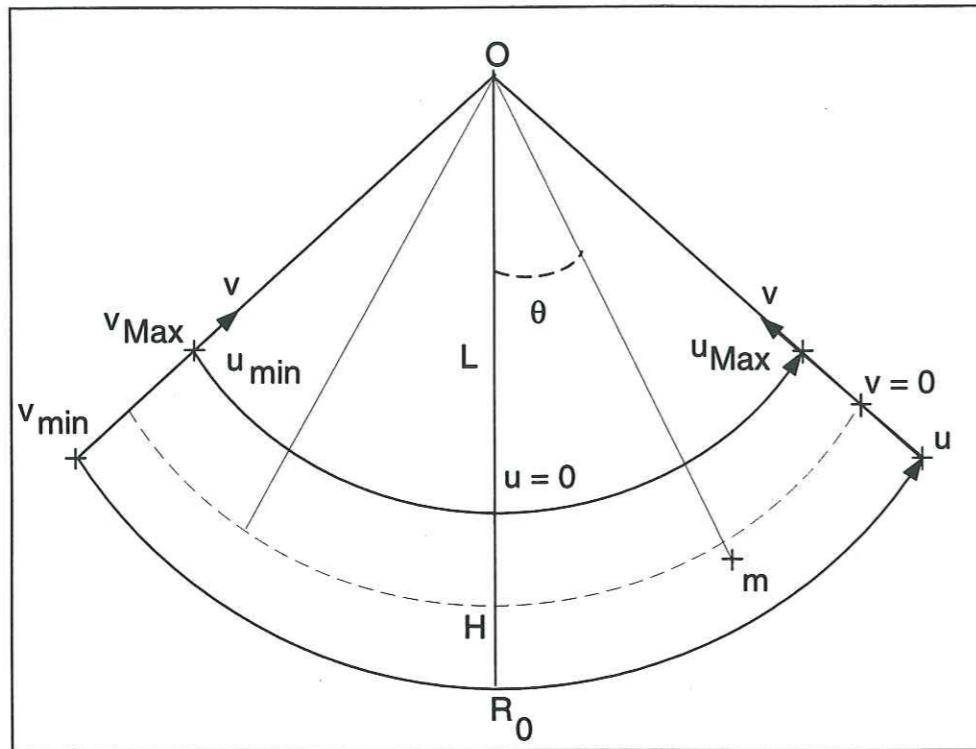


Figure 46 Représentation de la couronne dans le plan des coordonnées curvilignes.

Miroir à l'est de Sespe Creek

Pour ce miroir, les points de données peuvent être répartis en moyenne sur un plan que nous avons "grossièrement" déterminé. La projection des coordonnées cartésiennes des points de données sur ce plan nous donne les coordonnées curvilignes associées aux différents points de données. L'équation du plan est

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= 6 - v, \end{aligned}$$

avec $20 \leq u \leq 31$, $0.0 \leq v \leq 6.0$.

Annexe 5: validation de l'approximation de la courbure par les dérivées secondes

Pour obtenir la solution en approximation, nous n'avons pas minimisé le critère de courbure, mais le critère en dérivées secondes car nous sommes dans un cas favorable où l'approximation des courbures par la projection des dérivées secondes dans la direction normale est raisonnable.

Pour valider la remarque précédente, nous avons calculé et vérifié sur les modèles initial et solution les hypothèses suivantes

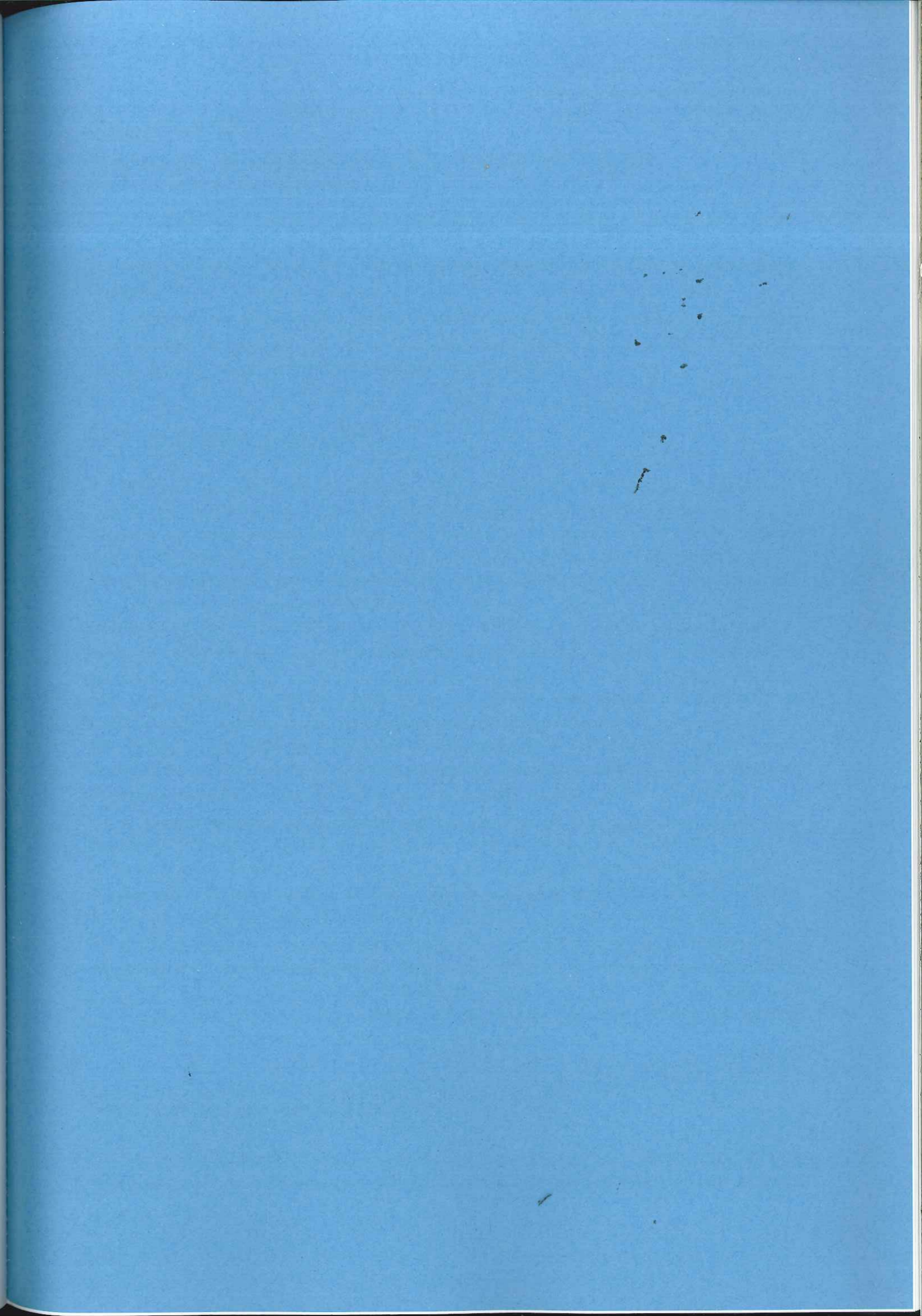
$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v} = 0, \quad \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\| = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|,$$

si ϕ est la paramétrisation de la surface (réf. Chap. III.4).

Modèle initial	Miroir à l'ouest à Sespe Creek			Miroir à l'est de Sespe Creek		
	$\left\ \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\ $	$\left\ \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\ $	$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle$	$\left\ \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\ $	$\left\ \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\ $	$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle$
Espérance	1.0	1.0	0.0	1.0	1.0	0.0
Modèle solution	Miroir à l'ouest à Sespe Creek			Miroir à l'est de Sespe Creek		
Espérance	1.004	1.018	0.004	1.03	1.11	0.06
Variance	0.038	0.013	0.027	0.009	0.020	0.022

Les résultats sont un peu moins bons pour le miroir à l'est de Sespe Creek, car le miroir a un certain pendage α dont on n'a pas tenu compte dans le choix du modèle dans le domaine des coordonnées curvilignes.

Figure 47 Tableau donnant pour les miroirs à l'est et à l'ouest de Sespe Creek l'espérance et la variance des hypothèses $X = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|, \forall v$, et $u = 0$, $Y = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|, \forall u, v$ puis $Z = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle, \forall u, v$.



Chapitre VII

Dépliage de structures 3D (méthodologie)

Ce chapitre présente la formulation géométrique que nous avons adoptée pour déplier certaines structures 3D supposées connues. Dans notre travail, nous n'avons considéré que des structures simples, des écaillés, à l'intérieur desquelles les failles et les discordances sont négligées.

En premier, nous présentons le problème en termes géologiques. Ensuite, nous exprimons les hypothèses géologiques sous forme de critères géométriques puis sous forme de moindres carrés. Et enfin, nous résolvons le problème inverse associé.

VII.1 Motivation géologique

Une structure géologique est le résultat d'une suite d'événements tectoniques qui se sont produits par exemple après le dépôt horizontal de couches sédimentaires. Lorsque le géologue interprète la structure actuelle, il essaie de reconstituer la géométrie 3D de cette structure à partir des informations disponibles. Comme ces informations sont toujours incomplètes, plusieurs interprétations sont possibles et il doit faire un choix. Un moyen de guider ce choix est d'essayer de reconstituer la structure initiale en tenant compte de l'interprétation de la structure actuelle et d'hypothèses sur son histoire. Si la structure initiale est géologiquement plausible, si par exemple les couches sédimentaires peuvent être restituées à l'horizontale, le géologue peut décider de garder l'interprétation qu'il avait fait de la structure actuelle, ou dans l'autre cas de corriger son interprétation. *Le dépliage*, c'est à dire la restauration de la structure initiale semble un très bon moyen pour améliorer par essai-erreur l'interprétation des structures actuelles. Cette approche permet en tenant compte de règles géométriques basées sur des concepts mécaniques, de proposer des géométries interprétatives des structures profondes qui soient compatibles avec les informations géologiques et géophysiques disponibles.

A l'heure actuelle, de nombreux logiciels de dépliage en coupe 2D existent déjà: *Groshong et Usdansky*, [1986]; *Jones et Linnser*, [1986]; *Kligfield et al.* [1979]; *Medwedeff et Suppe* [1986]. Pour la restauration de structures complexes, citons le logiciel LOCACE 2D (*Moretti et Larrère*, [1989]). En 3D, le logiciel UNFOLD déplie les surfaces complexes faillées et plissées (*Gratier et Guillier*, [1993]) en les discrétisant en éléments finis.

L'idée de notre travail est de proposer une méthode qui permette de déplier simultanément un ensemble de couches sédimentaires. Déplier une structure 3D est beaucoup plus difficile qu'en 2D. En 2D toute courbe est isométrique à une ligne droite, donc dépliable sans déformation, par contre en 3D, il existe peu de surfaces dépliables excepté les surfaces développables (*Lisle*, [1992], *Rakotoarisoa*, [1992], *Léger*, [1993]).

VII.2 Hypothèses géologiques

Dans le cadre de notre travail, la structure géologique actuelle est donnée. On cherche à la déplier sous certaines contraintes géométriques pour reconstituer l'état avant déformation.

VII.2.1 La structure actuelle

La structure dans son état actuel est obtenue en tenant compte d'informations de surface, ou de subsurface.

Selon les cas, on dispose de coupes géologiques complètes au voisinage de la surface, d'un certain nombre de valeurs de pendages, de certaines valeurs d'épaisseur de formations ou encore de la position de certaines failles, qui, dans notre cas, seront les limites du domaine déplié. Dans le cas de données de subsurface, on dispose parfois de données de forage (position et pendage de certaines couches en profondeur), de sismique sous forme d'horizons continus ou non.

VII.2.2 Déformation tangentielle

En contexte sédimentaire, la structure actuelle est un ensemble de couches plissées, donc un milieu hétérogène en 3D, mais à peu près homogène par couche. Le milieu est une succession de bancs compétents et incompétents. On peut considérer que les bancs compétents conservent les longueurs, et que les bancs incompétents permettent le glissement des différents bancs les uns sur les autres. Les déformations internes au sein des couches compétentes sont donc petites.

VII.2.3 Conservation du volume

La conservation du volume de la structure lors de la déformation est une hypothèse assez bien vérifiée dès lors que l'on a affaire à des roches ayant subies une compaction avant leur déformation. Nous allons considérer que le volume est conservé.

VII.2.4 Reliure ou "pin surface"

Nous allons aussi considérer que le passage de la structure actuelle (déformation finie) à la structure restaurée (état non déformé) se fait avec un cisaillement nul à l'arrière (c'est à dire qu'il existe une surface transverse sur l'ensemble des couches où celles-ci ne sont pas déformées). C'est l'équivalent d'une reliure dans le cas d'un livre plissé.

Cela signifie que les pendages des couches entre les structures actuelle et initiale sont conservés sur la "reliure".

VII.2.5 Horizontalisation

L'hypothèse d'un état initial horizontal est considérée comme satisfaisante (Ménard, [1988]).

En effet, la paléobathymétrie permet de reconstituer les paléopentes, mais ceci nécessite une interprétation avancée des structures que l'on a rarement. En fait, ces paléopentes sont généralement faibles et c'est pour cela qu'on les néglige.

Dans le cas de terrains sédimentaires, la restauration de la structure à l'état initial conduit donc à des couches planes et horizontales.

VII.3 Formulation géométrique

VII.3.1 But

Nous modélisons la structure actuelle par un feuilletage plissé $\tilde{\mathcal{F}}$ que nous allons déplier de façon à obtenir une structure initiale $\bar{\mathcal{F}}$ qui représente le feuilletage déplié. A cause de l'aspect graphique des signes " \sim " et " $-$ ", nous les utilisons respectivement pour noter l'état plié et l'état déplié.

Nous avons choisi de représenter notre structure géologique par un feuilletage, c'est à dire par un empilement de feuilles car, en prospection pétrolière, les terrains sont sédimentaires. Chaque feuille ou chaque surface représente une isochrone de dépôt. Ces couches empilées sont souvent interrompues par des failles ou des discordances. Mais dans le cadre de notre travail, nous nous intéressons qu'à un seul empilement de surfaces limité par des failles ou des discordances.

Pour passer de $\tilde{\mathcal{F}}$ à $\bar{\mathcal{F}}$, nous introduisons une application (dépliage) ψ , telle que

$$\psi(\tilde{\mathcal{F}}) = \bar{\mathcal{F}}.$$

Notre but est de trouver $\bar{\mathcal{F}}$, ou bien cette application dépliage connaissant le feuilletage plié et les conditions vérifiées par ψ (Fig 1).

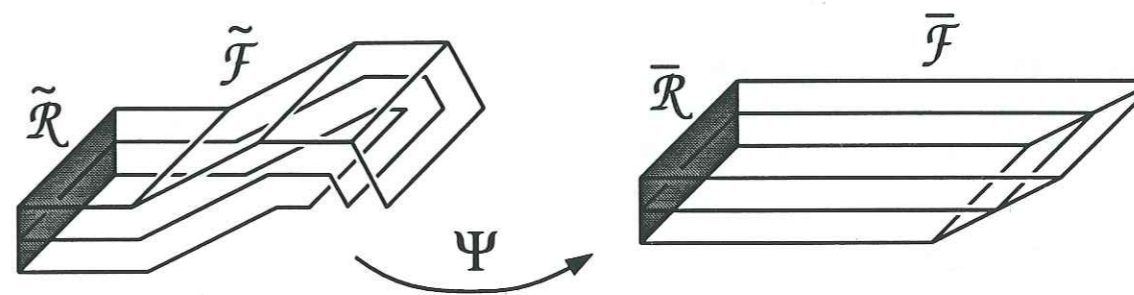


Figure 1 Représentation du feuilletage aux états actuel et initial.

Nous allons formuler géométriquement les hypothèses géologiques que doivent vérifier l'application dépliage ψ .

VII.3.2 Energie de déformation tangentielle

D'un point de vue géologique, on veut minimiser les déformations tangentielles, c'est à dire minimiser les elongations et les rotations internes au niveau des feuilles ce qui n'empêche pas les grands déplacements au niveau du feuilletage.

Considérons l'application $d\psi$, l'application linéaire tangente à ψ . On peut illustrer $d\psi$ en la considérant comme la transformation qui fait passer des rostrés de bélemnites de l'état plié à l'état initial, les rostrés illustrant la notion de vecteur. S'il y a conservation des longueurs, les rostrés de bélemnites ne sont pas tronçonnés, en cas d'allongement, ni stylolithésés, en cas de raccourcissement. Dans ce cas, $d\psi$ est une isométrie.

En fait, à cause du glissement des bancs les uns sur les autres, seules les bélemnites déposées à plat n'ont pas leur longueur modifiée. Géométriquement, si nous appelons $d\psi_T$ la restriction de $d\psi$ au plan tangent $T_{\tilde{m}}\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{m}}$ en \tilde{m} à la feuille $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{m}}$ du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ passant par le point \tilde{m} , $d\psi_T$ est une isométrie, c'est à dire

$$(\forall V_{\tilde{m}} \in T_{\tilde{m}}\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{m}}) \|d\psi_T(V_{\tilde{m}})\| = \|V_{\tilde{m}}\|.$$

En terme de base, en un point \tilde{m} , on se donne une base orthonormée $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ du plan tangent $T_{\tilde{m}}\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{m}}$ à la feuille locale. Puisque $d\psi_T$ est une isométrie, $(d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2))$ est une base également orthonormée du plan tangent à la feuille dépliée, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \|d\psi(\tilde{e}_1)\| &= \|\tilde{e}_1\| = 1, \\ \|d\psi(\tilde{e}_2)\| &= \|\tilde{e}_2\| = 1, \\ \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle &= \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

En pratique, l'isométrie n'est qu'une approximation et nous allons donc définir l'écart q_e à l'isométrie de $d\psi_T$ de la façon suivante

$$q_e = \frac{1}{2} \left((\|d\psi(\tilde{e}_1)\| - 1)^2 + (\|d\psi(\tilde{e}_2)\| - 1)^2 + \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle^2 \right).$$

Notre écart q_e met en évidence deux bases $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ et $(d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2))$ situées dans des espaces différents (feuilletage plié et feuilletage déplié). Ceci pose un problème lorsque l'on veut traduire les termes de l'expression q_e comme l'expression d'une densité d'énergie de déformation en petite déformations locales car il faudrait considérer un seul espace dans lequel on mesure l'écart q_e . C'est ce que nous allons faire en transportant la base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ en une base orthonormée (\bar{e}_1, \bar{e}_2) du plan tangent à la feuille dépliée $T_{\psi(\tilde{m})}\bar{\mathcal{F}}_{\psi(\tilde{m})}$ (Fig. 2).

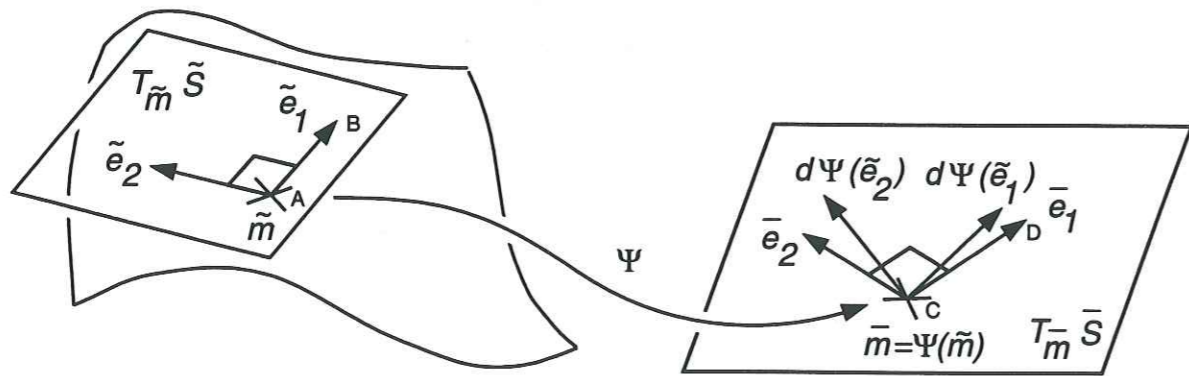


Figure 2 Représentation des différentes bases pour la structure pliée et dépliée.

Dans ces conditions, réécrivons l'écart à l'isométrie en comparant les bases $(d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2))$ et (\bar{e}_1, \bar{e}_2) (qui engendrent le même plan tangent à la différence de $(d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2))$ et $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$),

$$q_e = \frac{1}{2} (\|d\psi(\tilde{e}_1)\| - \bar{e}_1)^2 + (\|d\psi(\tilde{e}_2)\| - \bar{e}_2)^2 + \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle^2.$$

Les vecteurs $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ ont pour expression en fonction de ψ

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \frac{d\psi(\tilde{e}_1)}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|}, \\ \bar{e}_2 &= \frac{-\langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\| \|d\psi(\tilde{e}_2)\|} d\psi(\tilde{e}_1) + \frac{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\| \|d\psi(\tilde{e}_2)\|} d\psi(\tilde{e}_2), \\ \bar{e}_3 &= \frac{\langle d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2) \rangle}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\|}. \end{aligned}$$

Le détail du calcul pour l'expression des vecteurs de base est donné en annexe 1.

Dans la base (\bar{e}_1, \bar{e}_2) construite comme décrite en annexe 1, si $d\psi_T$ est approximativement une isométrie, alors on peut retrouver l'expression classique du tenseur de déformation ϵ dans le cas des petites rotations et petites déformations de la façon suivante

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{,j}^i + U_{,i}^j) - I_{ij}$$

avec

$$U_{,j}^i = \langle d\psi(\tilde{e}_i), \bar{e}_j \rangle,$$

et I_{ij} le tenseur identité, si $i=j$, $I_{ij}=1$, sinon $I_{ij}=0$.

Le tenseur de déformation a pour composantes dans la base (\bar{e}_1, \bar{e}_2)

$$\begin{aligned} \epsilon &= \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{pmatrix}_{(\bar{e}_1, \bar{e}_2)} \\ &= \begin{pmatrix} \|d\psi(\tilde{e}_1)\| - 1 & \frac{1}{2} \frac{\langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|} \\ \frac{1}{2} \frac{\langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|} & \frac{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\|}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|} - 1 \end{pmatrix}_{(\bar{e}_1, \bar{e}_2)}. \end{aligned}$$

Comme l'hypothèse de petites rotations et petits déplacements dans cette nouvelle base est raisonnable, on a les approximations suivantes au premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\|}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|} &\approx \|d\psi(\tilde{e}_2)\|, \\ \frac{\langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|} &\approx \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle. \end{aligned}$$

Les composantes ϵ_{11} (resp. ϵ_{22}) mesure l'allongement relatif dans la direction \bar{e}_1 (resp. \bar{e}_2). Les composantes ϵ_{12} (resp. ϵ_{21}) mesurent l'angle de rotation amenant $d\psi(\tilde{e}_1)$ (resp. $d\psi(\tilde{e}_2)$) à \bar{e}_2 (resp. \bar{e}_1).

D'un point de vue matriciel, cela s'écrit

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \|d\psi(\tilde{e}_1)\| - 1 & \frac{1}{2} \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle \\ \frac{1}{2} \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle & \|d\psi(\tilde{e}_2)\| - 1 \end{pmatrix}_{\bar{\mathcal{F}}}.$$

Dans ce cas, on retrouve l'expression mathématique sur l'isométrie $d\psi$ car $q_e = Tr(\epsilon^T \epsilon)$. Cette expression est une densité d'énergie de déformation tangentielle classique.

D'un point de vue moindre carré, la fonction-coût associée s'écrit

$$Q_e = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{F}}} \text{Tr}(\varepsilon^T \varepsilon) d\tilde{\mathcal{F}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{F}}} \left((\|d\psi(\tilde{e}_1)\| - 1)^2 + \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle^2 + (\|d\psi(\tilde{e}_2)\| - 1)^2 \right) d\tilde{\mathcal{F}}.$$

Remarque

La formulation de l'énergie est intrinsèque car $\text{Tr}(\varepsilon^T \varepsilon)$ est un invariant (indépendant de la base choisie) et ε est la représentation matricielle pour la base du plan tangent $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ d'un tenseur d'ordre 2 (forme bilinéaire symétrique). Ceci est important car notre formulation est géométrique donc intrinsèque.

VII.4 Critères de moindres carrés

Dans ce paragraphe, nous traduisons sous forme de critères de moindres carrés qui seront optimisés dans la phase d'inversion, les hypothèses géologiques présentées précédemment.

VII.4.1 Energie de déformation, ou conservation des longueurs

L'application dépliage $d\psi$ est contrainte à être une isométrie pour les feuilles du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$, la fonction coût Q_e s'écrit

$$Q_e = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{F}}} \left((\|d\psi(\tilde{e}_1)\| - 1)^2 + \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle^2 + (\|d\psi(\tilde{e}_2)\| - 1)^2 \right) d\tilde{\mathcal{F}}.$$

VII.4.2 Conservation du volume

Pour exprimer la conservation du volume, on a choisi la formulation moindres carrés intrinsèque suivante avec

$$Q_{vol} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{F}}} (\text{Tr} \|d\psi(\tilde{e}) - \tilde{e}\|)^2 d\tilde{\mathcal{F}} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{F}}} (\text{Tr} \varepsilon)^2 d\tilde{\mathcal{F}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{F}}} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 d\tilde{\mathcal{F}},$$

où ε est le tenseur d'ordre 3. Le tenseur s'écrit

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}_{(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)}$$

$$= \begin{pmatrix} \|d\psi(\tilde{e}_1)\| - 1 & \frac{1}{2} \langle d\psi(\tilde{e}_2), d\psi(\tilde{e}_1) \rangle & \frac{1}{2} \langle d\psi(\tilde{e}_3), d\psi(\tilde{e}_1) \rangle \\ \frac{1}{2} \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle & \|d\psi(\tilde{e}_2)\| - 1 & \frac{1}{2} \langle d\psi(\tilde{e}_3), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle \\ \frac{1}{2} \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_3) \rangle & \frac{1}{2} \langle d\psi(\tilde{e}_2), d\psi(\tilde{e}_3) \rangle & \|d\psi(\tilde{e}_3)\| - 1 \end{pmatrix}_{(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)}$$

Le rapport de dilatation entre le volume final et initial est égal à 1 pour une structure incompressible. En termes équivalents, on a

$$Q_{vol} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{F}}} \left(1 - \frac{\det(d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2), d\psi(\tilde{e}_3))}{\det(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)} \right)^2 d\tilde{\mathcal{F}}.$$

VII.4.3 Conservation de la reliure entre l'état initial et final

Pour exprimer l'absence de cisaillement à l'arrière entre l'état actuel et l'état initial, nous avons conservé la reliure ou "pin-surface" du feuilletage de $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$ (Fig. 1).

Cela s'écrit

$$\bar{\mathcal{R}} = \tilde{\mathcal{R}} = \psi(\tilde{\mathcal{R}}).$$

VII.4.4 Horizontalisation

Pour horizontaliser, on peut imposer la planéité d'une feuille, et construire le feuilletage parallèlement à cette feuille, ce qui revient à restaurer la structure au moment du dépôt de cette isochrone.

Cela conduit à une indétermination si la feuille choisie est telle que, partant de certains points du volume feuilleté, il n'est pas possible d'atteindre la feuille fixée en se déplaçant constamment perpendiculairement aux feuilles du feuilletage (Fig. 3(a)). Par contre, cela est possible pour le cas de la figure 3(b).

Pour lever cette indétermination, nous horizontalisons toutes les feuilles et, pour cela, nous introduisons un critère volumique sur le feuilletage qui minimise l'écart entre la normale en chaque point du feuilletage et le vecteur vertical. Nous formulons ceci sous forme de moindres carrés avec Q_{hor} ,

$$Q_{hor} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{F}}} \|e_3 - N\|^2 d\tilde{\mathcal{F}},$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{F}}} (N_1^2 + N_2^2 + (1 - N_3)^2) d\tilde{\mathcal{F}},$$

où $N = (N_1, N_2, N_3)$ est le champ des normales unitaires aux feuilles pour le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$, et e_3 le vecteur vertical en tout point.

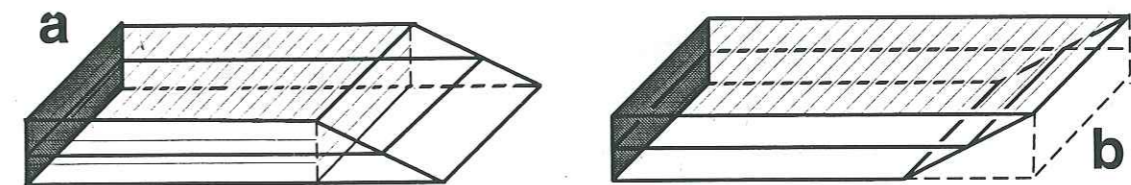


Figure 3 Représentation des cas d'indétermination.

VII.5 Point de vue fonctionnel

Notre étude se fait dans le cadre paramétrique pour différentes raisons. Si on interprète le bord du feuilletage comme étant une surface de faille, une description explicite, de type $z = f(x, y)$, serait maladroite pour toutes les surfaces de faille à fort pendage car une surface presque verticale est difficilement représentable explicitement. De plus pour les plis couchés ou les plis renversés une représentation paramétrique de type $(x, y, z) = f(u, v, w)$ est nécessaire.

Nous allons détailler les différentes fonctions-coût en fonction d'un paramétrage $\tilde{\phi}$ du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ connu (plié) et d'un paramétrage $\bar{\phi}$ du feuilletage $\bar{\mathcal{F}}$ déplié recherché (Fig. 4).

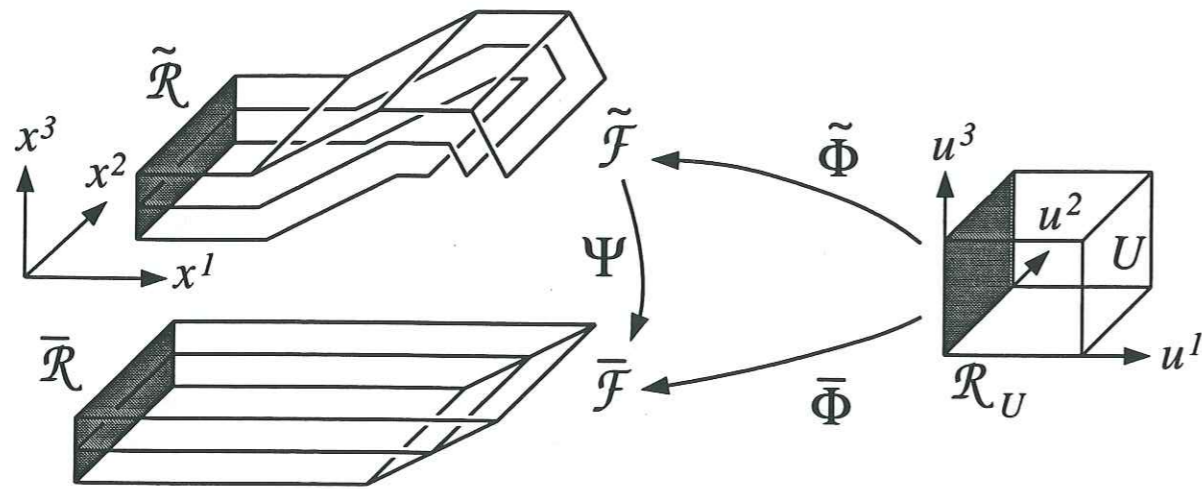


Figure 4 Représentation des différents paramétrages.

VII.5.1 Traduction de ψ à $\bar{\phi}, \tilde{\phi}$

Nous allons exprimer l'application dépliage ψ à l'aide des paramétrisations $\bar{\phi}, \tilde{\phi}$ qui représentent respectivement le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ plié et connu et le feuilletage déplié $\bar{\mathcal{F}}$ que nous recherchons. Nous choisissons le même espace de coordonnées curvilignes U pour les deux applications $\bar{\phi}, \tilde{\phi}$.

La figure 4 illustre les relations suivantes entre les paramétrages et l'application dépliage ψ

$$\begin{aligned}\psi &= \bar{\phi} \circ \tilde{\phi}^{-1}, \\ d\psi &= d(\bar{\phi} \circ \tilde{\phi}^{-1}) \\ &= d\bar{\phi} \cdot d\tilde{\phi}^{-1}.\end{aligned}$$

Nous allons maintenant exprimer les différentes fonctions coût en fonction des paramétrages.

VII.5.2 Fonctions-coût

Notons $|d\bar{\phi}|$ le déterminant de $d\bar{\phi}$, dU est l'élément de volume dans U .

L'énergie se traduit par

$$\begin{aligned}Q_e &= \int_{\tilde{\mathcal{F}}} (\varepsilon_{11}^2 + 2\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{22}^2) d\tilde{\mathcal{F}} \\ &= \int_U [(\|d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_1))\| - 1)^2 + (\|d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_2))\| - 1)^2 + \\ &\quad \langle d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_1)), d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_2)) \rangle] \circ \tilde{\phi} |d\tilde{\phi}| dU.\end{aligned}$$

La conservation du volume se traduit par

$$\begin{aligned}Q_{vol} &= \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{F}}} (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) d\tilde{\mathcal{F}} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{F}}} \left(1 - \frac{\det(d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2), d\psi(\tilde{e}_3))}{\det(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)}\right) d\tilde{\mathcal{F}}, \\ &= \frac{1}{2} \int_U \left(1 - \frac{\det(a, b, c)}{\det(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)}\right)^2 \circ \tilde{\phi} |d\tilde{\phi}| dU,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a &= \frac{d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_1))}{\|d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_1))\|} \\ b &= \frac{-\langle d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_1)), d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_2)) \rangle}{\| \langle d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_1)) \wedge d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_2)) \rangle \|} d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_1)) \\ &\quad + \frac{\|d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_1))\|}{\| \langle d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_1)) \wedge d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_2)) \rangle \|} d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_2)), \\ c &= \frac{\langle d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_1)) \wedge d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_2)) \rangle}{\| \langle d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_1)) \wedge d\bar{\phi}(d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{e}_2)) \rangle \|}.\end{aligned}$$

$$Q_{vol} = \int_U \varepsilon_{33}^2 \circ \tilde{\phi} |d\tilde{\phi}| dU.$$

La conservation de la reliure se traduit par

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{R}} &= \tilde{\mathcal{R}} = \psi(\tilde{\mathcal{R}}) = \bar{\phi} \circ \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\mathcal{R}}) \\ \bar{\phi}(\mathcal{R}_U) &= \tilde{\phi}(\mathcal{R}_U),\end{aligned}$$

où $\mathcal{R}_U = \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\mathcal{R}})$ est la reliure dans l'espace des coordonnées curvilignes.

Le critère d'horizontalisation se traduit par

$$\begin{aligned}Q_{hor} &= \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{F}}} \|N - e_3\|^2 d\tilde{\mathcal{F}}, \\ &= \frac{1}{2} \int_U (N_1^2 + N_2^2 + (1 - N_3^2)^2) \circ \tilde{\phi} |d\tilde{\phi}| dU.\end{aligned}$$

VII.6 Problème inverse

Nous présentons dans ce paragraphe le problème inverse (P) que nous avons résolu. Il est le suivant :

On cherche le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ déplié, résultat du feuilletage plié que l'on a déformé sous certaines contraintes (conservation du volume, des longueurs, de la reliure, et horizontalité des feuilles).

Problème (P)

Soit U un ouvert borné de R^3 , soient c_e, c_{vol}, c_h des poids arbitraires (constantes réelles strictement positives), soit $J : H^1(U, R^3) \rightarrow R$ la fonctionnelle définie par

$$J(\varphi) = \frac{c_e}{2} \int_{\tilde{\mathcal{F}}} (\|d\psi(\tilde{e}_1)\| - 1)^2 + \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle^2 + (\|d\psi(\tilde{e}_2)\| - 1)^2 d\tilde{\mathcal{F}} \\ + \frac{c_{vol}}{2} \int_{\tilde{\mathcal{F}}} (\|d\psi(\tilde{e}_1)\| - 1)^2 + (\|d\psi(\tilde{e}_2)\| - 1)^2 + (\|d\psi(\tilde{e}_3)\| - 1)^2 d\tilde{\mathcal{F}} \\ + \frac{c_h}{2} \int_{\tilde{\mathcal{F}}} \|e_3 - N(m)\|^2 d\tilde{\mathcal{F}}, \text{ avec } \varphi(R_U) = \tilde{\phi}(R_U)$$

où $\psi = \varphi \circ \tilde{\phi}^{-1}$, $\tilde{\phi}^{-1}$ est une fonctionnelle connue, $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ une base de vecteurs connus, e_3 le vecteur vertical dans la base euclidienne, $N(m)$ le vecteur normal en tout point m du feuilletage, R_U la reliure représentant un ensemble de coordonnées curvilignes (u, v) .

Trouver $\tilde{\phi} \in H^1(U, R^3)$, minimisant la fonctionnelle $J(\varphi)$ telle que

$$J(\tilde{\phi}) = \min_{\varphi \in H^1(U, R^3)} J(\varphi).$$

VII.7 Point de vue discret

Pour la mise en oeuvre informatique, nous avons utilisé des produits tensoriels de B-splines cubiques (cf. Chap. II).

Pour la résolution du problème (P), nous avons été amené à résoudre itérativement le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} H_{p_k} & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta p_{k+1} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_{p_k} \\ e - Cp_k \end{pmatrix}$$

avec $H_{p_k} = J_{p_k}^T \cdot J_{p_k}$ le hessien de la fonction-coût globale associé au problème linéarisé, $G_{p_k} = J_{p_k}^T (f(p_k) - d_{obs})$ le gradient, C la matrice des fonctions de base associées aux contraintes d'égalité, J_{p_k} la jacobienne à l'itération k , e la valeur des contraintes d'égalité dans R^3 , $\delta p_{k+1} = p_{k+1} - p_k$, et λ les multiplicateurs de Lagrange (cf. Chap. II.4 de la partie 1).

Annexe 1 : les vecteurs de base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

Nous voulons construire la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ orthonormée à partir de $d\psi(\tilde{e}_1)$ et $d\psi(\tilde{e}_2)$. Choisissons

$$\bar{e}_1 = \frac{d\psi(\tilde{e}_1)}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|}, \quad \bar{e}_3 = \frac{d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\|}.$$

Pour construire le troisième vecteur \bar{e}_2 , nous allons considérer les hypothèses suivantes

$$(a) \quad \|\bar{e}_2\|^2 = 1, \quad (b) \quad \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle = 0.$$

Posons $\bar{e}_2 = \alpha d\psi(\tilde{e}_1) + \beta d\psi(\tilde{e}_2)$, et cherchons (α, β) .

De (b), on a

$$0 = \langle \frac{d\psi(\tilde{e}_1)}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|}, \alpha d\psi(\tilde{e}_1) + \beta d\psi(\tilde{e}_2) \rangle \\ = \frac{\alpha}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|} \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_1) \rangle + \frac{\beta}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|} \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle,$$

$$(c) \quad \alpha = -\frac{\beta}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|^2} \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle.$$

De (a), on a

$$1 = \langle \alpha d\psi(\tilde{e}_1) + \beta d\psi(\tilde{e}_2), \alpha d\psi(\tilde{e}_1) + \beta d\psi(\tilde{e}_2) \rangle \\ = \alpha^2 \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_1) \rangle + \beta^2 \langle d\psi(\tilde{e}_2), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle + 2\alpha\beta \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle.$$

En remplaçant par (c), on a

$$1 = \beta^2 \frac{\langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle^2}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|^4} + \beta^2 \|d\psi(\tilde{e}_2)\|^2 - 2\beta^2 \frac{\langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle^2}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|^2} \\ \Rightarrow \beta^2 = \frac{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|^2}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\|^2},$$

d'après l'identité de Lagrange

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 + (\vec{x} \wedge \vec{y})^2 = \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2.$$

Si on considère

$$\beta = \frac{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\|}, \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{\langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\| \|d\psi(\tilde{e}_1)\|},$$

d'où

$$\bar{e}_2 = -\frac{\langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\| \|d\psi(\tilde{e}_1)\|} d\psi(\tilde{e}_1) + \frac{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\|} d\psi(\tilde{e}_2).$$

On a ainsi la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ avec

$$\bar{e}_1 = \frac{d\psi(\tilde{e}_1)}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|}, \\ \bar{e}_2 = -\frac{\langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\| \|d\psi(\tilde{e}_1)\|} d\psi(\tilde{e}_1) + \frac{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\|} d\psi(\tilde{e}_2), \\ \bar{e}_3 = \frac{d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\|}.$$

Annexe 2 : les vecteurs de base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$

Pour construire la base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$, nous avons comme hypothèse

$$\tilde{e}_1 = \frac{\tilde{\phi}_{,u}}{\|\tilde{\phi}_{,u}\|}, \quad \tilde{e}_3 = \frac{\tilde{\phi}_{,u} \wedge \tilde{\phi}_{,v}}{\|\tilde{\phi}_{,u} \wedge \tilde{\phi}_{,v}\|}.$$

Pour construire le troisième vecteur \tilde{e}_2 , nous allons considérer les hypothèses suivantes

$$\|\tilde{e}_2\|^2 = 1, \quad \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle = 0,$$

ce qui est formellement le même problème que celui traité dans l'annexe 1. En posant $\tilde{e}_2 = \alpha \tilde{\phi}_{,u} + \beta \tilde{\phi}_{,v}$, on obtient finalement

$$\beta = \frac{\|\tilde{\phi}_{,u}\|}{\|\tilde{\phi}_{,u} \wedge \tilde{\phi}_{,v}\|}, \quad \alpha = -\frac{\langle \tilde{\phi}_{,u}, \tilde{\phi}_{,v} \rangle}{\|\tilde{\phi}_{,u} \wedge \tilde{\phi}_{,v}\| \|\tilde{\phi}_{,u}\|},$$

d'où la base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ recherchée

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= \frac{\tilde{\phi}_{,u}}{\|\tilde{\phi}_{,u}\|}, \\ \tilde{e}_2 &= -\frac{\langle \tilde{\phi}_{,u}, \tilde{\phi}_{,v} \rangle}{\|\tilde{\phi}_{,u} \wedge \tilde{\phi}_{,v}\| \|\tilde{\phi}_{,u}\|} \tilde{\phi}_{,u} + \frac{\|\tilde{\phi}_{,u}\|}{\|\tilde{\phi}_{,u} \wedge \tilde{\phi}_{,v}\|} \tilde{\phi}_{,v}, \\ \tilde{e}_3 &= \frac{\tilde{\phi}_{,u} \wedge \tilde{\phi}_{,v}}{\|\tilde{\phi}_{,u} \wedge \tilde{\phi}_{,v}\|}. \end{aligned}$$

Annexe 3 : le tenseur de déformation ε

Dans le cadre de petites déformations, le tenseur de déformation ε a pour expression

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}_{(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{,j}^i + U_{,i}^j) - I_{ij}$$

avec $U_{,j}^i = \langle d\psi(\tilde{e}_i), \tilde{e}_j \rangle$.

D'où

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= U_{,1}^1 - 1 = \langle d\psi(\tilde{e}_1), \tilde{e}_1 \rangle - 1 \\ &= \langle d\psi(\tilde{e}_1), \frac{d\psi(\tilde{e}_1)}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|} \rangle - 1 \\ &= \frac{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|^2}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|} - 1 \\ &= \|d\psi(\tilde{e}_1)\| - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= U_{,2}^2 - 1 = \langle d\psi(\tilde{e}_2), \tilde{e}_2 \rangle - 1 \\ &= \langle d\psi(\tilde{e}_2), -\frac{\langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\| \|d\psi(\tilde{e}_1)\|} d\psi(\tilde{e}_1) + \frac{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\|} d\psi(\tilde{e}_2) \rangle - 1 \\ &= -\frac{\langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\| \|d\psi(\tilde{e}_1)\|} \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle + \\ &\quad \frac{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\|} \langle d\psi(\tilde{e}_2), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle - 1 \\ &= \frac{-\langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle^2 + \|d\psi(\tilde{e}_1)\|^2 \|d\psi(\tilde{e}_2)\|^2}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\| \|d\psi(\tilde{e}_1)\|} - 1 \\ &= \frac{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\|}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|} - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} (\langle d\psi(\tilde{e}_1), \tilde{e}_2 \rangle + \langle d\psi(\tilde{e}_2), \tilde{e}_1 \rangle) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle d\psi(\tilde{e}_1), -\frac{\langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\| \|d\psi(\tilde{e}_1)\|} d\psi(\tilde{e}_1) + \frac{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|}{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\|} d\psi(\tilde{e}_2) \rangle \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\langle d\psi(\tilde{e}_2), \frac{d\psi(\tilde{e}_1)}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|} \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2 \|d\psi(\tilde{e}_1)\|} \langle d\psi(\tilde{e}_2), d\psi(\tilde{e}_1) \rangle. \end{aligned}$$

Le tenseur ε s'écrit

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \|d\psi(\tilde{e}_1)\| - 1 & \frac{1}{2} \frac{\langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|} \\ \frac{1}{2} \frac{\langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|} & \frac{\|d\psi(\tilde{e}_1) \wedge d\psi(\tilde{e}_2)\|}{\|d\psi(\tilde{e}_1)\|} - 1 \end{pmatrix}_{(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)}$$

Chapitre VIII

Dépliage de structures 3D (exemples)

Dans ce chapitre, nous présentons différents exemples numériques qui montrent l'intérêt de notre méthode et ses limites.

D'abord, nous rappelons le problème inverse qui a été résolu. Nous rappelons la signification de chacun des termes de ce problème. Ensuite, nous détaillons l'étude faite sur chaque exemple. Puis, nous présentons différents exemples numériques de difficulté croissante. Enfin, nous appliquons notre méthode à un exemple "réel", un annuaire.

VIII.1 Rappel du problème inverse

A partir d'une structure $\tilde{\mathcal{F}}$ géologique connue (il s'agit d'une écaïlle), nous essayons de reconstituer la structure dépliée $\bar{\mathcal{F}}$ qui correspond à son état initial au moment du dépôt ou après compaction. Les structures pliées et dépliées, $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\bar{\mathcal{F}}$ sont modélisées par des feuilletages. L'application dépliage ψ qui à partir de $\tilde{\mathcal{F}}$ nous donne $\bar{\mathcal{F}}$, est contrainte par les hypothèses d'horizontalité initiale, de conservation du volume, des longueurs tangentielles, entre les états actuel et initial. De plus, il existe une surface située dans l'arrière pays non déformée ("pin surface" ou reliure). Les hypothèses sont exprimées sous forme de critères de moindre carré ou de contraintes d'égalité pour la reliure.

Le problème que nous avons résolu est le suivant. Connaissant la structure actuelle pliée $\tilde{\mathcal{F}}$, nous la déplaçons en minimisant Q_ψ , $Q_\psi = c_e Q_e + c_v Q_v + c_h Q_h$ avec Q_e la fonction-coût associée à la conservation des longueurs et des angles, Q_v la fonction-coût associée à la conservation du volume, Q_h la fonction-coût associée à l'horizontalisation des isochrones. Le passage de $\tilde{\mathcal{F}}$ à $\bar{\mathcal{F}}$ se fait avec un cisaillement nul à l'arrière, qui s'écrit $\tilde{\mathcal{R}} = \bar{\mathcal{R}}$ avec $\tilde{\mathcal{R}}$ une surface transverse à l'ensemble des couches, et $\bar{\mathcal{R}}$ la surface $\tilde{\mathcal{R}}$ conservée par l'application dépliage ψ . c_e, c_v, c_h sont des constantes réelles appelées poids. Ils sont plus ou moins pondérés suivant l'importance accordée à l'hypothèse.

VIII.2 Etude des exemples

Pour chaque exemple, nous avons introduit des indices d'erreur qui permettent d'apprécier la qualité des résultats

- l'indice d'erreur moyenne pour le volume,
- l'indice d'erreur moyenne dans les différentes directions de l'horizontalisation,
- l'indice d'erreur moyenne de conservation des longueurs et des angles.

Plus les indices sont petits, mieux les contraintes de conservation exprimées sous forme de moindres carrés sont vérifiées.

On définit un indice d'erreur de conservation du volume comme la moyenne quadratique, sur le feuilletage plié, de la variation relative de volume

$$i_v = \sqrt{\frac{\int_{\tilde{\mathcal{F}}} \left(\frac{\widetilde{vol} - \overline{vol}}{\overline{vol}}\right)^2 d\tilde{\mathcal{F}}}{\int_{\tilde{\mathcal{F}}} d\tilde{\mathcal{F}}}}$$

où \widetilde{vol} (resp. \overline{vol}) est un volume élémentaire pour le feuilletage plié (resp. déplié).

On définit un indice d'erreur d'horizontalisation comme la moyenne quadratique, évalué sur le feuilletage plié, d'une quantité évaluée sur le feuilletage déplié qui est l'angle entre la normale N aux feuilles et le vecteur vertical e_3

$$i_h = \sqrt{\frac{\int_{\tilde{\mathcal{F}}} \|e_3 - N\|^2 d\tilde{\mathcal{F}}}{\int_{\tilde{\mathcal{F}}} d\tilde{\mathcal{F}}}}$$

Remarquons qu'en toute rigueur, la quantité $\|e_3 - N\|$ vaut $2\sin(\theta/2)$ qui est proche de l'angle θ entre e_3 et N lorsque cet angle est petit.

On définit un indice d'erreur de conservation des longueurs tangentielles comme la moyenne quadratique, sur le feuilletage plié, de la densité d'énergie de déformation tangentielle

$$i_e = \sqrt{\frac{\int_{\tilde{\mathcal{F}}} \frac{1}{2} \left\{ (1 - \|d\psi(\tilde{e}_1)\|)^2 + (1 - \|d\psi(\tilde{e}_2)\|)^2 + \langle d\psi(\tilde{e}_1), d\psi(\tilde{e}_2) \rangle^2 \right\} d\tilde{\mathcal{F}}}{\int_{\tilde{\mathcal{F}}} d\tilde{\mathcal{F}}}}$$

où $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base du plan tangent au feuilletage plié.

Le programme de dépliage a été testé sur différents exemples qui ont permis de montrer l'intérêt et les limites de cette méthode. Nous avons considéré successivement un feuilletage peu plié, un feuilletage plié et cylindrique, un feuilletage plié non développable, et un autre qui permet de tester la non influence du choix du paramétrage. En dernière étude, nous avons considéré un exemple "réel". C'est un bloc de papier relié, analogue à un annuaire que nous avons plié, numérisé, et déplié. Pour l'ensemble des exemples, la reliure est verticale.

Pour chaque exemple, nous donnons la valeur des poids introduits lors de la modélisation, les valeurs des indices d'erreur, le nombre de points de discrétisation, le nombre de paramètres de splines, la valeur du volume plié. Nous donnons une visualisation graphique 3D du modèle plié, du modèle initial pour l'optimisation, du modèle déplié et parfois des sections pour les modèles non cylindriques. On a représenté les lignes iso-u et iso-v de la paramétrisation, ce qui dessine un maillage représentant celle-ci. La modélisation des structures par feuilletage correspond, même en discret, à une infinité de feuilles, dont nous avons choisi de visualiser un nombre arbitraire.

VIII.3 Pli cylindrique peu plié

Le feuilletage (Fig. 1a) est un pli cylindrique peu plié à feuilles parallèles. C'est un premier exemple assez simple car le feuilletage est constitué de surfaces développables. On sait que le feuilletage déplié doit avoir ses feuilles planes et parallèles. La résolution du problème inverse associé au dépliage est itérative, et donc nécessite un modèle initial. La figure 1c est le modèle initial pour l'optimisation de ce problème. On a choisi un parallélépipède.

Après 9 itérations, nous obtenons la structure dépliée $\tilde{\mathcal{F}}$ (Fig. 1b). La reliure est parfaitement conservée ce qui doit être toujours le cas pour les différents exemples étudiés car nous avons choisi des contraintes d'égalité pour modéliser cette surface. Les 4 feuilles du feuilletage représentées en figure 1b sont horizontales avec un indice d'erreur en horizontalisation de l'ordre du pourcent, les longueurs tangentielles et le volume sont conservés avec un indice d'erreur de l'ordre du pourcent, ce que nous considérons comme satisfaisant.

Pour cette structure, nous avons le tableau 1 suivant d'informations :

	Volume	Horizontalisation	Energie
Poids	$p_v = 1$	$p_h = 1$	$p_e = 1$
Indices d'erreur	$i_v = 0.010$	$i_h = 0.0051$	$i_e = 0.0265$
Nombre de paramètres de splines	$N_{p_u} N_{p_v} N_{p_w} = 360$		
Nombre de points de discrétisation	$N_u N_v N_w = 1440$		

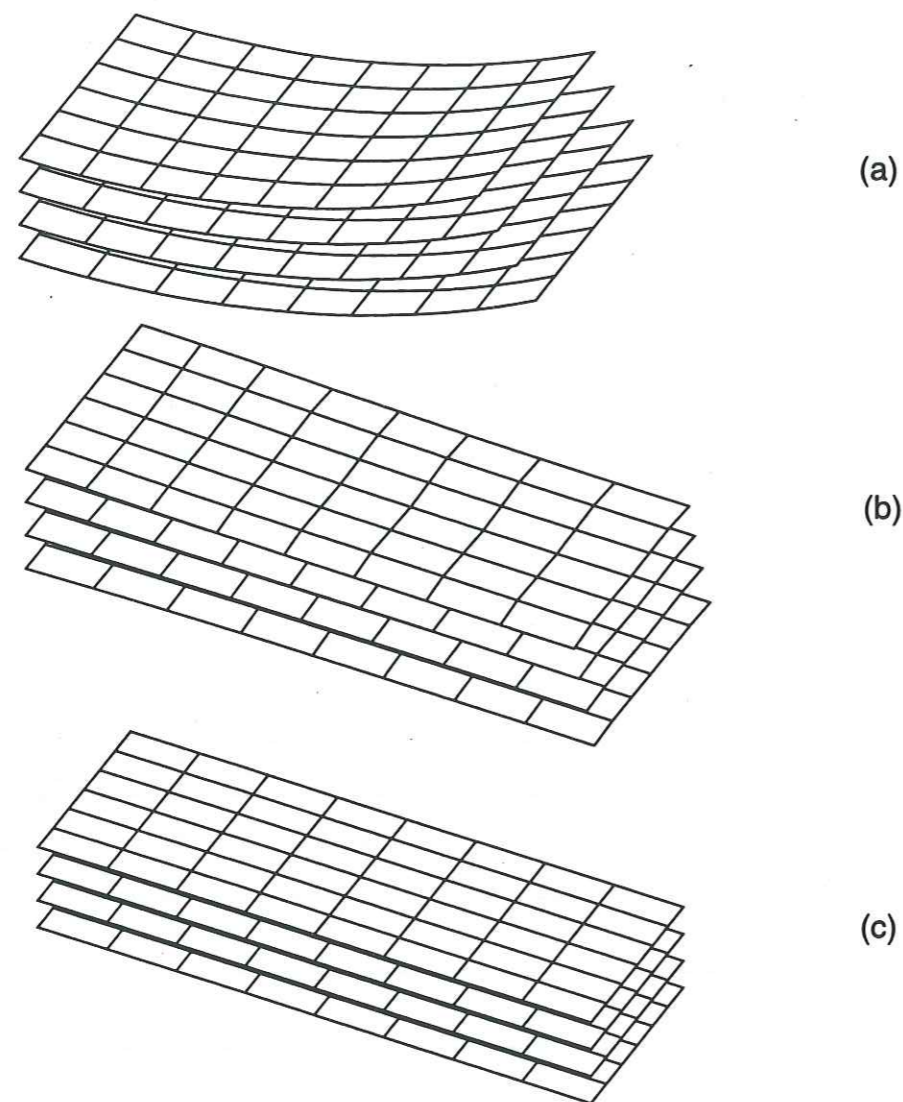


Figure 1 Modèle peu plié. En a), structure $\tilde{\mathcal{F}}$ peu pliée, en b), structure dépliée $\tilde{\mathcal{F}}$ et en c) modèle initial pour l'optimisation.

VIII.4 Pli cylindrique plus ou moins épais

La structure $\tilde{\mathcal{F}}$ que nous étudions dans ce paragraphe est une écaïlle de chevauchement posée sur un plan horizontal. Sous le plan horizontal se trouve l'autochtone (Fig. 2). Le pendage de la rampe est de 30 degrés et le pendage au front du chevauchement est de 60 degrés. Remarquons que cette écaïlle n'est pas rigoureusement équilibrée puisque le pendage du chevauchement après dépliage de l'écaïlle est de 31,6 degrés au lieu de 30 degrés.

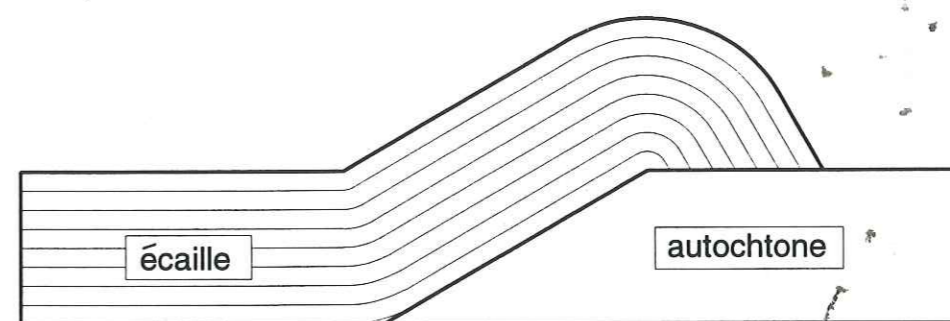


Figure 2 Représentation schématique en coupe de la structure cylindrique $\tilde{\mathcal{F}}$ étudiée. La rampe est inclinée à 30 degrés et le pendage au front du chevauchement est de 60 degrés.

Le modèle initial pour l'optimisation est encore un parallélépipède (Fig. 5c).

VIII.4.1 Modèle épais

Nous avons choisi de décrire la structure à déplier par une paramétrisation qui a la particularité suivante : son jacobien s'annule d'une part sur le bord de la feuille du bas opposé à la reliure, c'est-à-dire en haut de la rampe, et d'autre part sur la feuille du haut en bas de la rampe (Fig. 5a). Ceci se traduit par l'aire nulle de certaines mailles comme on le voit sur la figure (ce maillage étant l'image d'un maillage régulier dans l'espace des coordonnées curvilignes).

Si le jacobien de la paramétrisation $\tilde{\phi}$ (cf. Fig. 4 du chapitre VII) s'annule, celle-ci n'est plus un difféomorphisme et ne fait plus partie de l'espace des paramétrisations admissibles. On peut s'attendre à d'importantes difficultés lors du dépliage puisque la conservation des longueurs implique la conservation des aires. En effet, la contribution des mailles d'aire nulle aux différentes fonctions-coûts est nulle, ce qui est une source d'indétermination.

Ayant choisi pour modèle initial, le parallélépipède (Fig. 5c), qui est paramétré par un difféomorphisme, nous avons constaté que le conditionnement de la matrice associée au système linéaire résolu à chaque itération se dégradait inexorablement au fur et à mesure que l'on se rapprochait de la solution. La figure 3 montre que la norme du gradient et le conditionnement diminuent tous deux d'un facteur 300 entre le modèle initial et le résultat

de la 19^{ème} itération. Après la 19^{ème} itération, le conditionnement est tellement mauvais que les solutions sont non significatives.

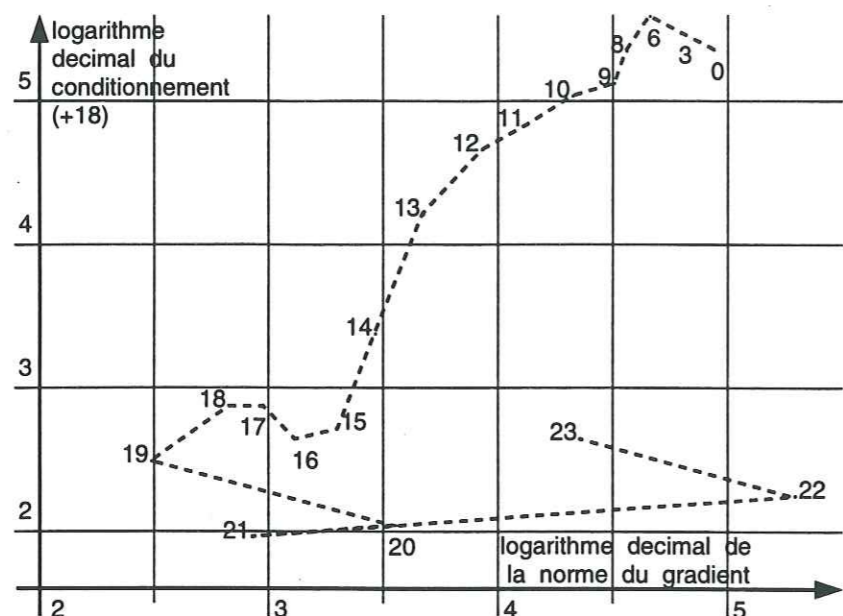


Figure 3 Représentation logarithmique du conditionnement en fonction de la décroissance logarithmique de la norme du gradient. La décroissance de la norme du gradient est un de nos tests de convergence de la méthode vers la solution. Le conditionnement est un indicateur de robustesse de la méthode, plus le conditionnement est petit, plus le système linéaire résolu lors de la résolution est mal résolu et sa solution approximative.

Nous avons introduit une matrice de préconditionnement qui est la matrice diagonale des inverses des éléments de la diagonale de la matrice. Nous avons de plus introduit une recherche linéaire du type Levenberg-Marquardt. Ces techniques nous ont permis d'approcher de la solution idéale (Fig. 5b), mais sans l'atteindre.

Cette approche est satisfaisante si on considère les indices d'erreur (en dessous du pourcent) mais ces indices cachent par leur caractère global, des problèmes très localisés : les mailles qui devraient être d'aire nulle sont seulement très petites. En conséquence, la face opposée à la reliure est courbe au lieu d'être plane, comme le montre le stéréogramme de 50 valeurs de pendage réparties sur cette face (Fig. 4). Le pendage moyen est de NOW40, avec une dispersion de 13 degrés, au lieu de NOW31,6.

Pour cette structure, nous avons le tableau 2 suivant d'informations:

	Volume	Horizontalisation	Energie
Poids	$p_v = 1$	$p_h = 1$	$p_e = 1$
Indices d'erreur	$i_v = 0.0046$	$i_h = 0.082$	$i_e = 0.0046$
Nombre de paramètres de splines	$N_{p_u} N_{p_v} N_{p_w} = 1200$		
Nombre de points de discrétisation	$N_u N_v N_w = 1920$		

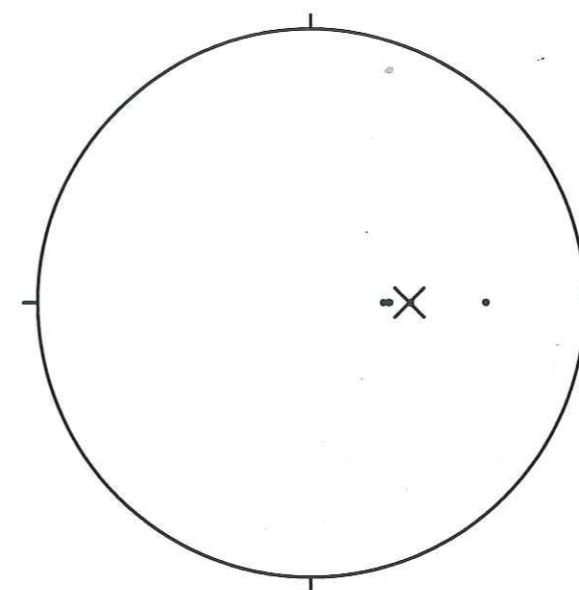


Figure 4 Stéréogramme. Les 50 valeurs de pendage sont représentées par des ronds noirs, la croix représente la valeur moyenne.

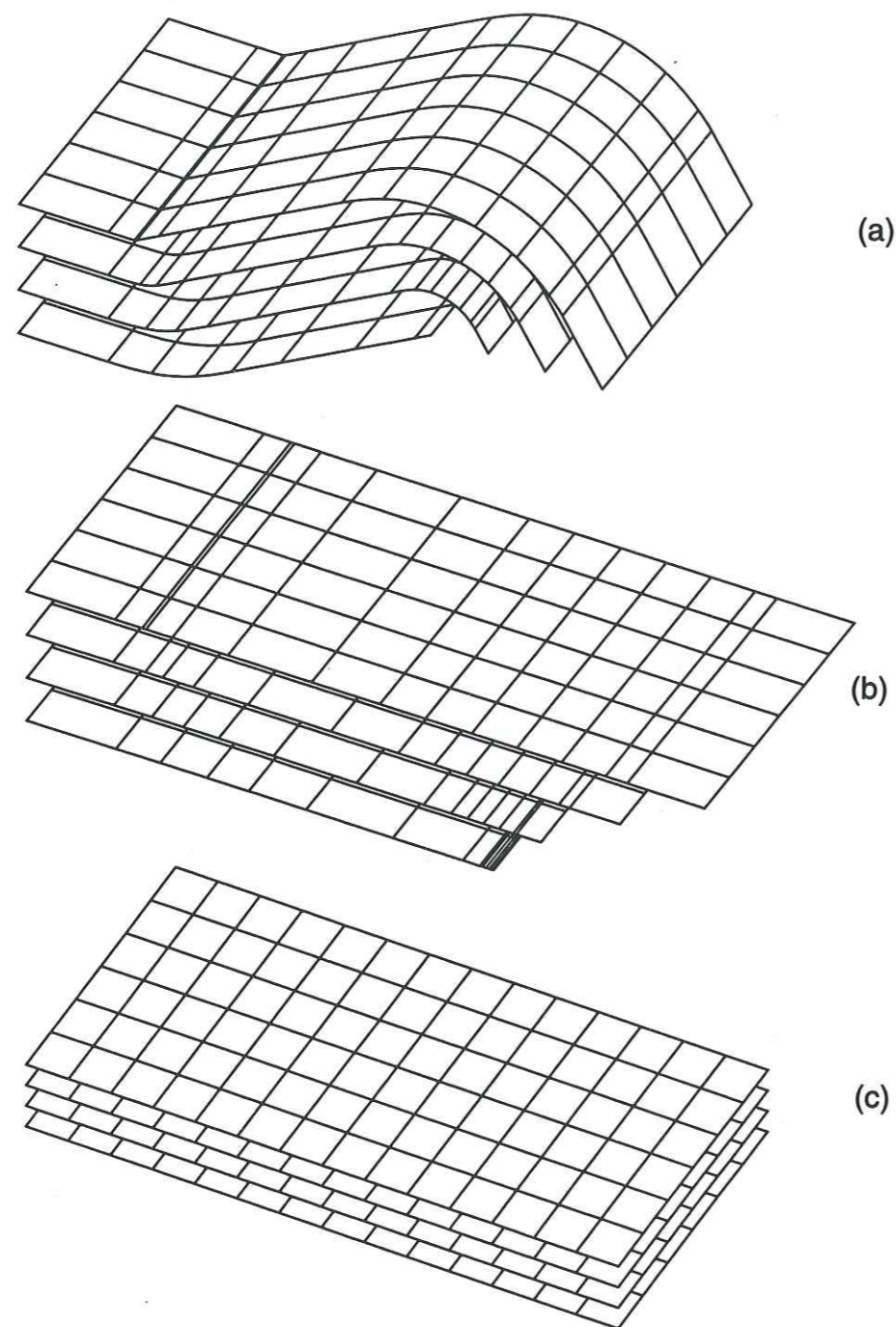


Figure 5 Modèle épais. Structure pliée $\tilde{\mathcal{F}}$ en a), structure dépliée \mathcal{F} en b), et modèle initial pour l'optimisation en c).

VIII.4.2 Modèle d'épaisseur réduite

Ce modèle est semblable au précédent mais l'épaisseur est réduite de 30% (15% en haut, 15% en bas). Le fait d'avoir changé d'épaisseur ne change rien par rapport à l'expérience. Le but de cette manipulation est de tester la robustesse de notre méthode à un maillage pour lequel les mailles peuvent être d'aire petite.

Ce qui veut dire que pour cette structure, le jacobien de la paramétrisation utilisée ne s'annule jamais, ce que traduit la figure 6a où l'on voit que les mailles sont parfois petites mais jamais d'aire nulle. Pour cette raison, la structure $\tilde{\mathcal{F}}$ se déplie facilement en \mathcal{F} (Fig. 6b).

On a des indices d'erreur pour le volume et en moyenne pour l'horizontalisation et la conservation des longueurs en dessous du pourcent (tableau 3).

	Volume	Horizontalisation	Energie
Poids	$p_v = 1$	$p_h = 1$	$p_e = 1$
Indices d'erreur	$i_v = 0.04$	$i_h = 0.006$	$i_e = 0.005$
Nombre de paramètres de splines	$N_{p_u} N_{p_v} N_{p_w} = 1200$		
Nombre de points de discrétisation	$N_u N_v N_w = 1920$		

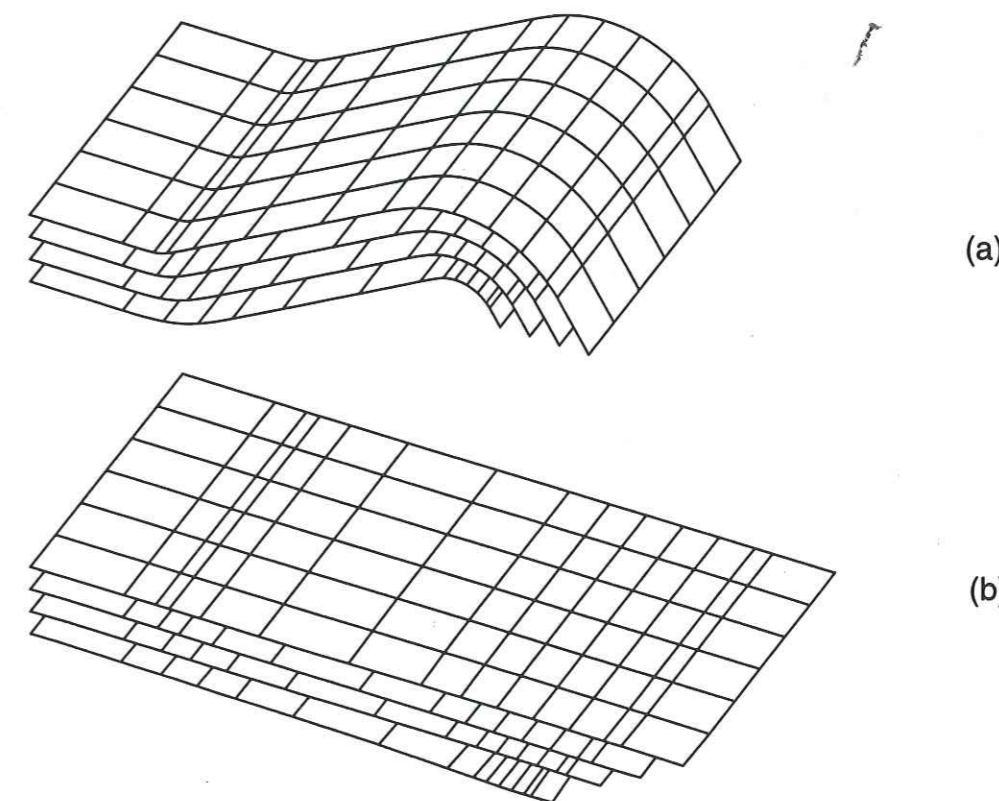


Figure 6 Modèle 70%. Structure $\tilde{\mathcal{F}}$ d'épaisseur 0.7 en a), structure dépliée \mathcal{F} en b), modèle initial pour l'optimisation en Fig. 5c.

VIII.5 Maillage tordu

La structure $\tilde{\mathcal{F}}$ (Fig. 8a) que nous étudions dans ce paragraphe, est la même que celle étudiée dans le paragraphe 4 (à ce détail près que l'épaisseur est de 50% du modèle épais au lieu de 70%). Mais l'épaisseur est un paramètre qui n'influe en rien sur l'expérience.

Tandis que dans le paragraphe 4, nous avons choisi une paramétrisation qui respectait la symétrie cylindrique du feuilletage, dans ce paragraphe, nous avons construit une paramétrisation à mailles distordues, mais les deux faces latérales du feuilletage sont, comme précédemment, planes, verticales et perpendiculaires à la reliure. Nous voulons montrer avec cet exemple que la solution (structure dépliée) est indépendante du choix du maillage de la paramétrisation lorsque le problème est formulé géométriquement.

La structure dépliée $\bar{\mathcal{F}}$ solution du problème de minimisation est donnée en figure 8b. Le résultat est satisfaisant car les indices d'erreur (tableau 4) sont petits. En plus de ces indices, nous avons calculé 50 valeurs de pendage réparties sur la face opposée à la reliure et nous les avons reportées sur le stéréogramme de la figure 7. Le pendage moyen est de N179,7W31,3 ce qui est très proche de la valeur théorique N0W31,6. La dispersion, très faible, est de 0,9 degré. La vue en perspective montre que le feuilletage est à feuilles planes et parallèles, et que le volume est bien conservé. La vue de dessus (Fig. 8c) permet de vérifier que les deux faces latérales sont restées quasiment verticales et orthogonales à la reliure.

La formulation géométrique associée à notre problème géologique montre bien que la solution est indépendante du choix de la paramétrisation (ou le maillage, en termes discrets) qui décrit la structure.

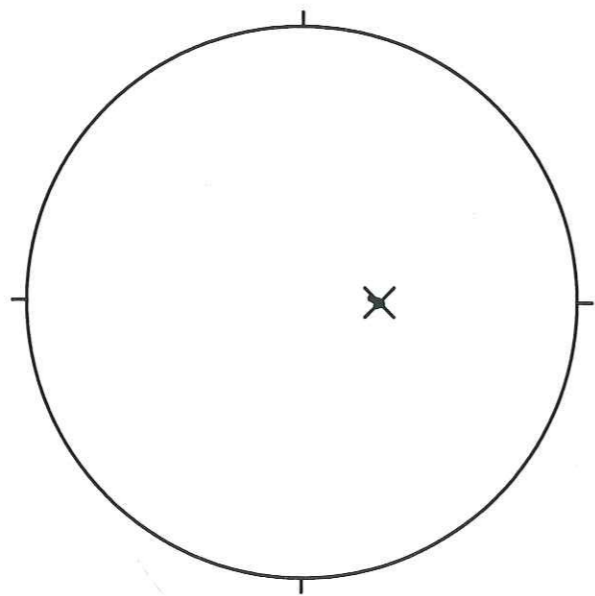


Figure 7 Stéréogramme. Les points noirs représentent les 50 valeurs de pendage, la croix la valeur moyenne.

	Volume	Horizontalisation	Energie
Poids	$p_v = 0.001$	$p_h = 10$	$p_e = 1$
Indices d'erreur	$i_v = 0.013$	$i_h = 0.0092$	$i_e^1 = 0.002$
Nombre de paramètres de splines	$N_{p_u} N_{p_v} N_{p_w} = 1200$		
Nombre de points de discrétisation	$N_u N_v N_w = 1920$		

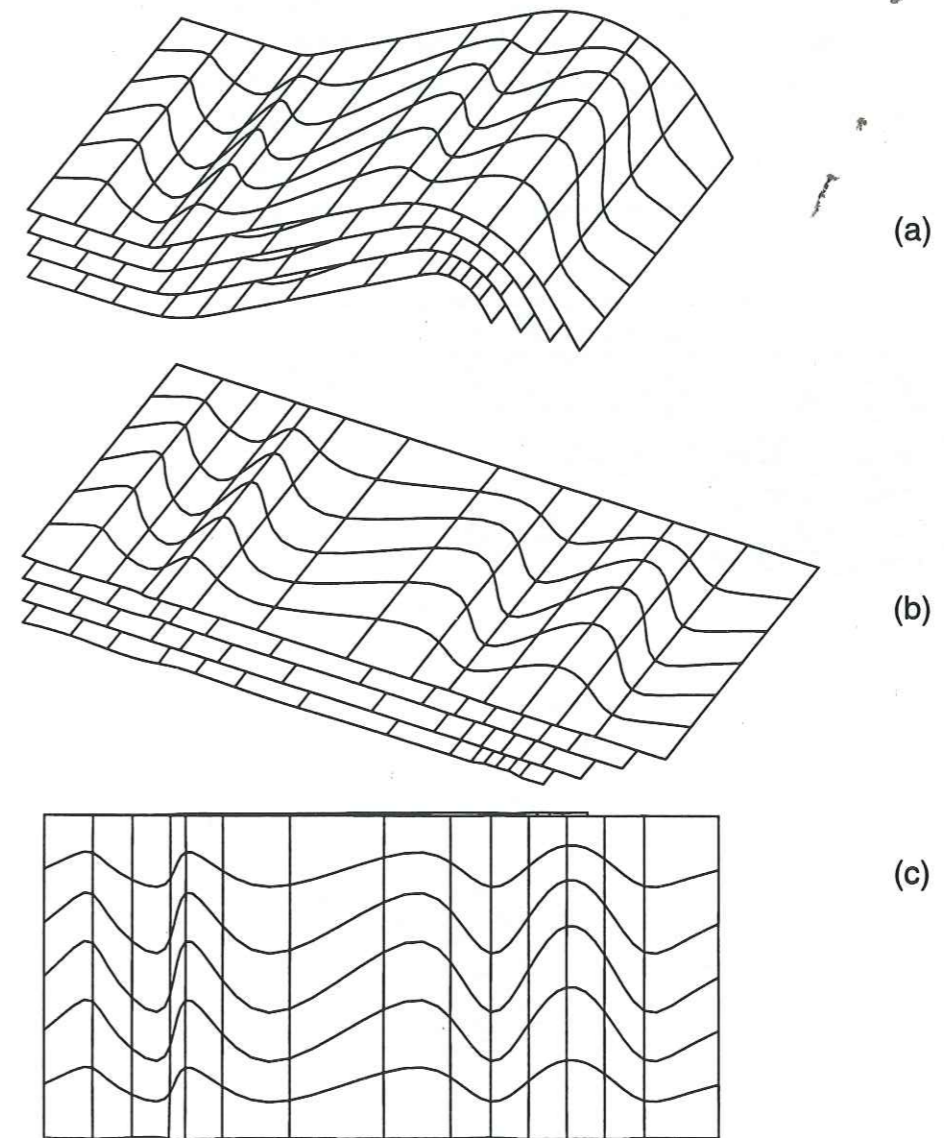


Figure 8 Représentation de la structure pliée $\tilde{\mathcal{F}}$ en a), la structure dépliée $\bar{\mathcal{F}}$ en b), avec vue de dessus de la structure dépliée en c).

VIII.6 Pli d'épaisseur variable

La structure $\tilde{\mathcal{F}}$ que nous étudions dans ce paragraphe est une écaille de chevauchement impliquant des terrains dont les couches ne sont pas parallèles (Fig. 9a). On pourrait invoquer un récif pour expliquer l'épaississement de la partie supérieure du feuilletage.

Nous avons conçu cet exemple pour tester le compromis entre l'horizontalisation, qui implique le parallélisme à l'état déplié, et la conservation du volume (équivalente à la conservation des variations d'épaisseur) qui implique le non parallélisme. C'est un exemple où on peut tester la sensibilité du résultat au choix des poids c_e, c_v, c_h . De plus, dans cet exemple, la notion de feuilletage s'avère intéressante. Dans les exemples précédents, les algorithmes de dépliage feuille par feuille qui existent à l'heure actuelle (Gratier et Guillier, [1993]) sont tout à fait efficaces pour trouver le modèle déplié $\tilde{\mathcal{F}}$. Au contraire, pour tous les exemples dont les feuilles sont non parallèles, le feuilletage qui résulte d'un dépliage feuille à feuille est horizontal, donc parallèle, et cela contredit l'hypothèse de conservation du volume.

Nous avons testé pour cette structure l'influence des poids en horizontalisation et en volume. Le modèle initial pour l'optimisation est donné en figure 9b.

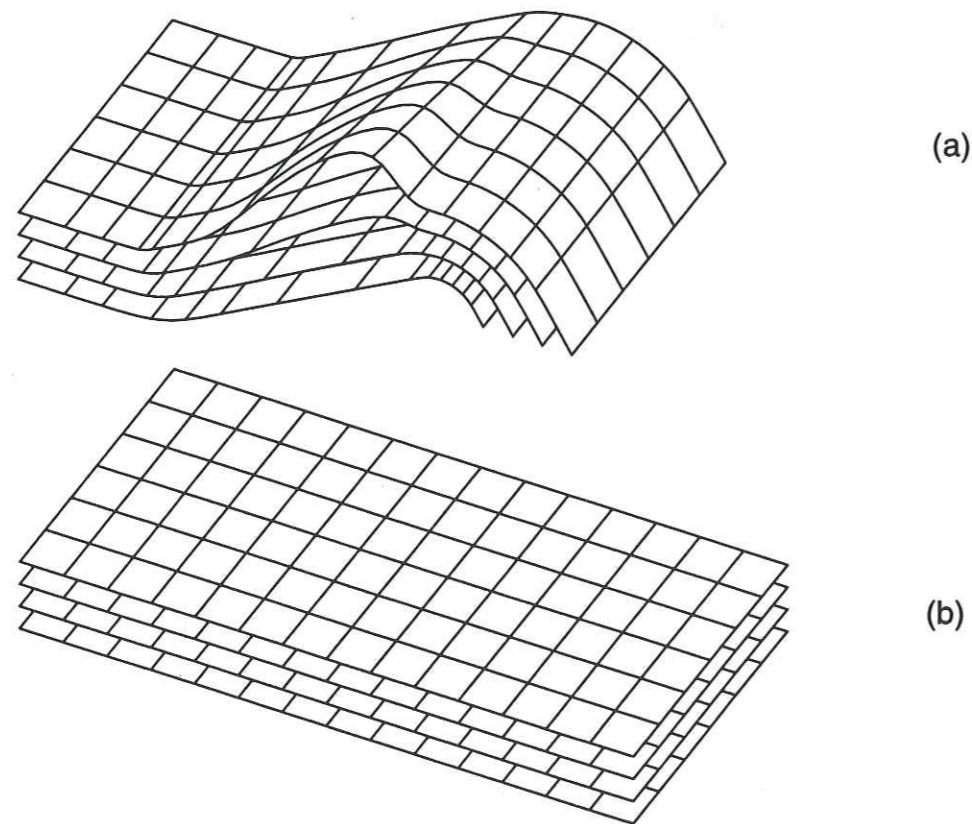


Figure 9 Modèle non parallèle. Structure pliée $\tilde{\mathcal{F}}$ en a), modèle initial pour l'optimisation en b).

VIII.6.1 Priorité à l'horizontalisation

Nous avons choisi un coefficient c_h important en horizontalisation afin de privilégier cette hypothèse. Dans ce cas, la structure dépliée $\tilde{\mathcal{F}}$ a des feuilles quasiment horizontales avec un indice d'erreur de moins de 1%, par contre l'indice d'erreur pour le volume est de 15% (Fig. 10a). En effet, comme le feuilletage n'est pas parallèle, il n'existe pas de structure $\tilde{\mathcal{F}}$ qui vérifie bien les hypothèses de conservation de volume et des longueurs en même temps que l'horizontalisation des isochrones de dépôt. Un poids très fort en horizontalisation avec une bonne conservation des longueurs pour la structure $\tilde{\mathcal{F}}$ a pour effet d'horizontaliser bien les isochrones de dépôt pour la structure $\tilde{\mathcal{F}}$, mais s'accompagne d'une perte de volume.

Comme la "bosse" est décentrée, sa mise à plat induit une rotation qui se traduit par un effet "boomerang" bien visible sur la feuille supérieure du feuilletage déplié $\tilde{\mathcal{F}}$ (Fig. 10b). Ce type d'hypothèse (priorité à l'horizontalisation) n'est évidemment pas conforme au dépliage de couches comportant un récif, par exemple.

Le tableau 5 donne les valeurs d'indices d'erreur pour cette expérience :

	Volume	Horizontalisation	Energie
Poids	$p_v = 0.01$	$p_h = 10$	$p_e = 1$
Indices d'erreur	$i_v = 0.15$	$i_h = 0.002$	$i_e = 0.0043$
Nombre de paramètres de splines	$N_{p_u} N_{p_v} N_{p_w} = 1200$		
Nombre de points de discrétisation	$N_u N_v N_w = 1920$		

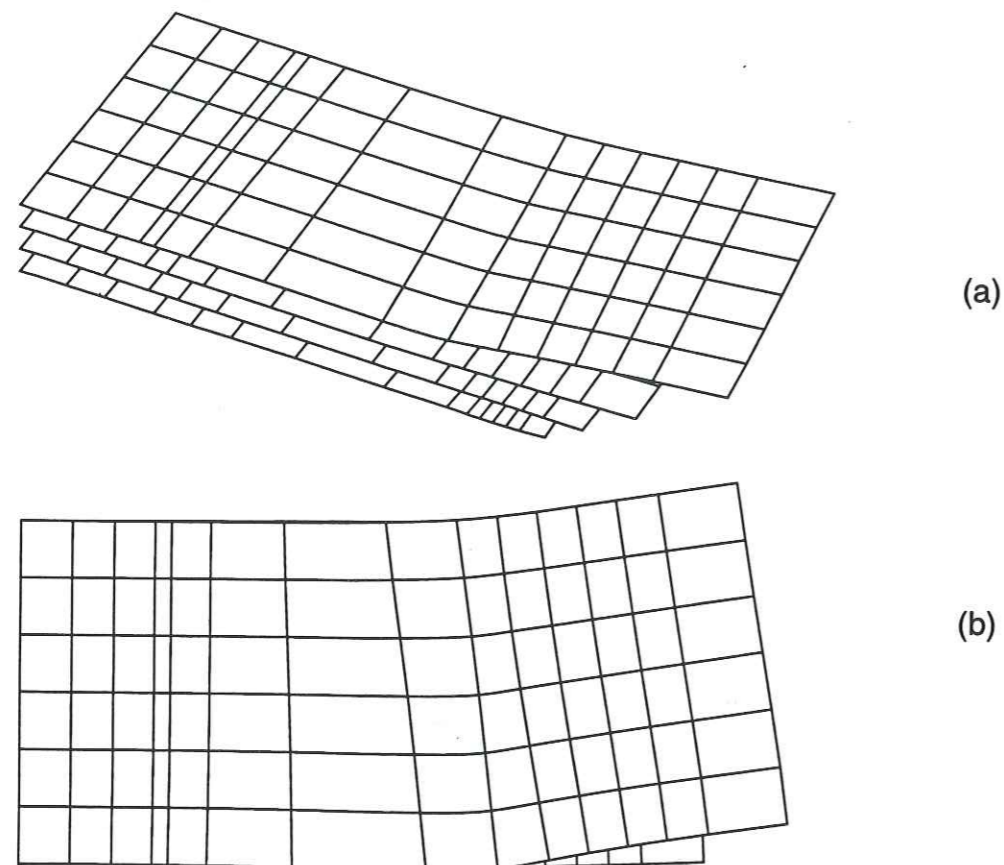


Figure 10 Modèle non parallèle avec priorité à l'horizontalisation. Structure dépliée \mathcal{F} , vue en perspective en a), vue de dessus en b).

VIII.6.2 Priorité à la conservation du volume

Nous avons choisi un coefficient c_v important pour favoriser la conservation du volume. Dans ce cas, l'horizontalisation est moins respectée, l'indice d'erreur est de l'ordre de quelques pourcents de 8% (tableau 6). Par contre, l'indice de conservation du volume est en dessous du pourcent. Ces indices corroborent ce que l'on voit sur la figure 11. Le critère d'horizontalisation a tendance à propager la bosse sur toute l'épaisseur du feuilletage déplié : la bosse est atténuée en haut, et apparaît en creux en bas. Ici, cette hypothèse permet de déplier une série comportant des variations d'épaisseur, le récif par exemple.

Nous avons le tableau 6 suivant :

	Volume	Horizontalisation	Energie
Poids	$p_v = 10$	$p_h = 0.01$	$p_e = 1$
Indices d'erreur	$i_v = 0.005$	$i_h = 0.08$	$i_e = 0.080$
Nombre de paramètres de splines	$N_{p_u} N_{p_v} N_{p_w} = 1200$		
Nombre de points de discrétisation	$N_u N_v N_w = 1920$		

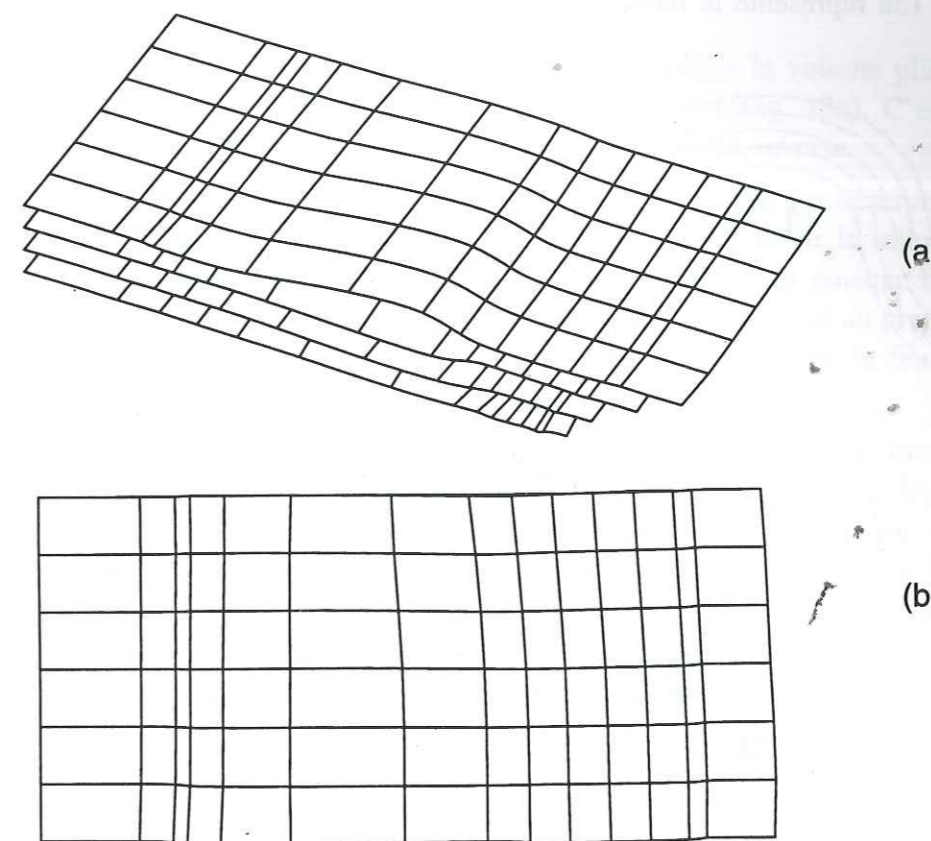


Figure 11 Modèle non parallèle avec priorité à la conservation du volume. Structure dépliée \mathcal{F} : vue en perspective en a), vue de dessus en b).

VIII.7 Etude d'un "exemple réel" : l'annuaire

VIII.7.1 Description de l'expérience

Les données ont été acquises par messieurs Gratier et Guiguet qui ont construit un "annuaire" en alternant des paquets de feuilles de papier blanc et bleu et en les reliant. Ils l'ont plié de façon à former une structure \mathcal{F} . Ils l'ont fixé dans une boîte à l'aide de cales en bois, puis ils ont injecté de la résine autour. Après polymérisation, ils l'ont découpé tous les 2cm en tranches parallèles et orthogonales à la reliure, ce qui représente 16 coupes. Ils ont photographié les différentes tranches et ils ont ensuite numérisé l'intersection de 5 feuilles avec ces différentes coupes (Fig. 12).

VIII.7.2 Traitement des données

Nous n'avons retenu que 13 coupes pour simplifier la construction du modèle initial. Celles-ci sont représentées en trait continu sur la figure 12. Par tâtonnements successifs, un ensemble de paramètres de splines a été trouvé, dont dérivent les coupes calculées, illustrées en trait pointillé sur la figure 12. On observe un écart entre certaines coupes numérisées et leur homologue calculée, mais cet écart est faible (de l'ordre du millimètre).

La figure 13a représente le modèle 3D que nous allons déplier.

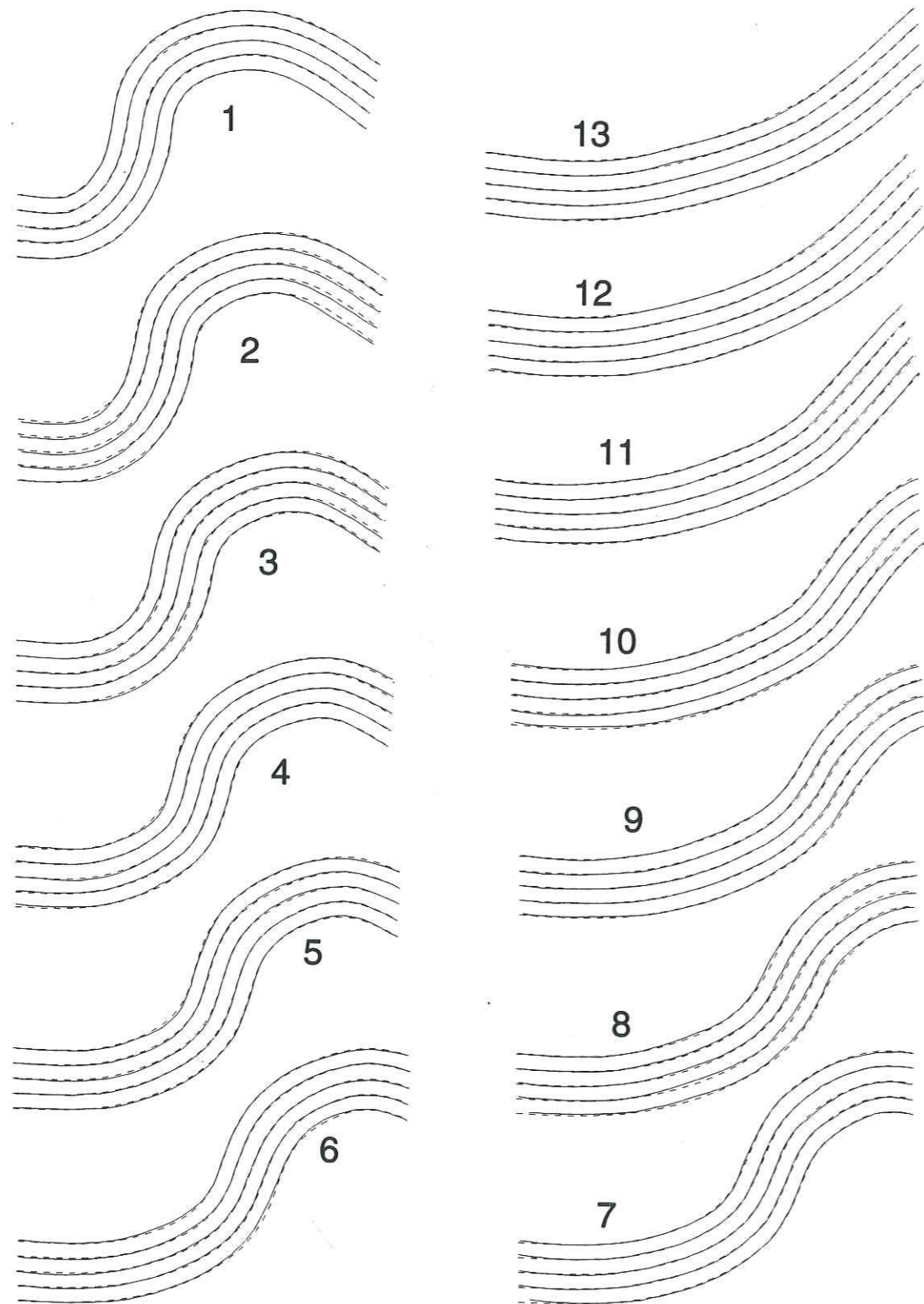


Figure 12 Représentation des différentes coupes prises en compte pour le modèle plié. Les courbes en trait plein sont les courbes numérisées, les courbes en trait pointillé sont les courbes calculées à partir du fichier de paramètres de splines. Le facteur de réduction par rapport à l'original est de 35%.

VIII.7.3 Les résultats

Nous avons choisi comme modèle initial pour l'optimisation le volume plié \tilde{F} , afin de montrer que le choix du modèle initial n'influe pas sur la solution (Fig. 13a). C'est un modèle pour initialiser notre méthode itérative de résolution du problème inverse.

Le modèle déplié est donné sur la figure 13b. Au dernier plan, on observe que la face latérale est un peu courbe, cela vient du fait que le pli est oblique sur la reliure, et que le modèle de splines ne représente qu'une partie du feuilletage physique puisque nous n'avons retenu que 13 coupes au lieu de 16. Au voisinage immédiat du coin situé au premier plan, on peut voir que les feuilles ne sont pas bien horizontalisées. Globalement, le feuilletage s'est déplié avec des indices d'erreur de l'ordre du pourcent.

Afin d'apprécier, quantitativement, la qualité du dépliage, nous avons évalué une cinquantaine de pendages sur la face opposée à la reliure et nous les avons reportés sur le stéréogramme (Fig. 14). On s'attend a priori à une valeur de N0W90, et nous trouvons une valeur moyenne de N0,5W89,4 avec une dispersion de 9 degrés. On note que la dispersion est beaucoup plus importante que dans le cas de la paramétrisation tordue (cf. paragraphe 6). Ce qui suggère que les erreurs ne sont pas seulement numériques, mais liées à l'ensemble des étapes (construction du modèle physique, numérisation, élaboration du modèle de splines,...). Le dépliage d'une des couches par le programme UNFOLD de messieurs Gratiot et Guillier montre d'ailleurs que la couche restaurée n'est pas exactement un rectangle. Les erreurs liées à l'acquisition des données restent néanmoins inférieur au pourcent.

Pour cet exemple, nous avons le tableau 7 d'erreur suivant:

	Volume	Horizontalisation	Energie
Poids	$p_v = 1$	$p_h = 1$	$p_e = 0.1$
Indices d'erreur	$i_v = 0.006$	$i_h = 0.011$	$i_e = 0.0169$
Nombre de paramètres de splines	$N_{p_u} N_{p_v} N_{p_w} = 1296$		
Nombre de points de discrétisation	$N_u N_v N_w = 4000$		

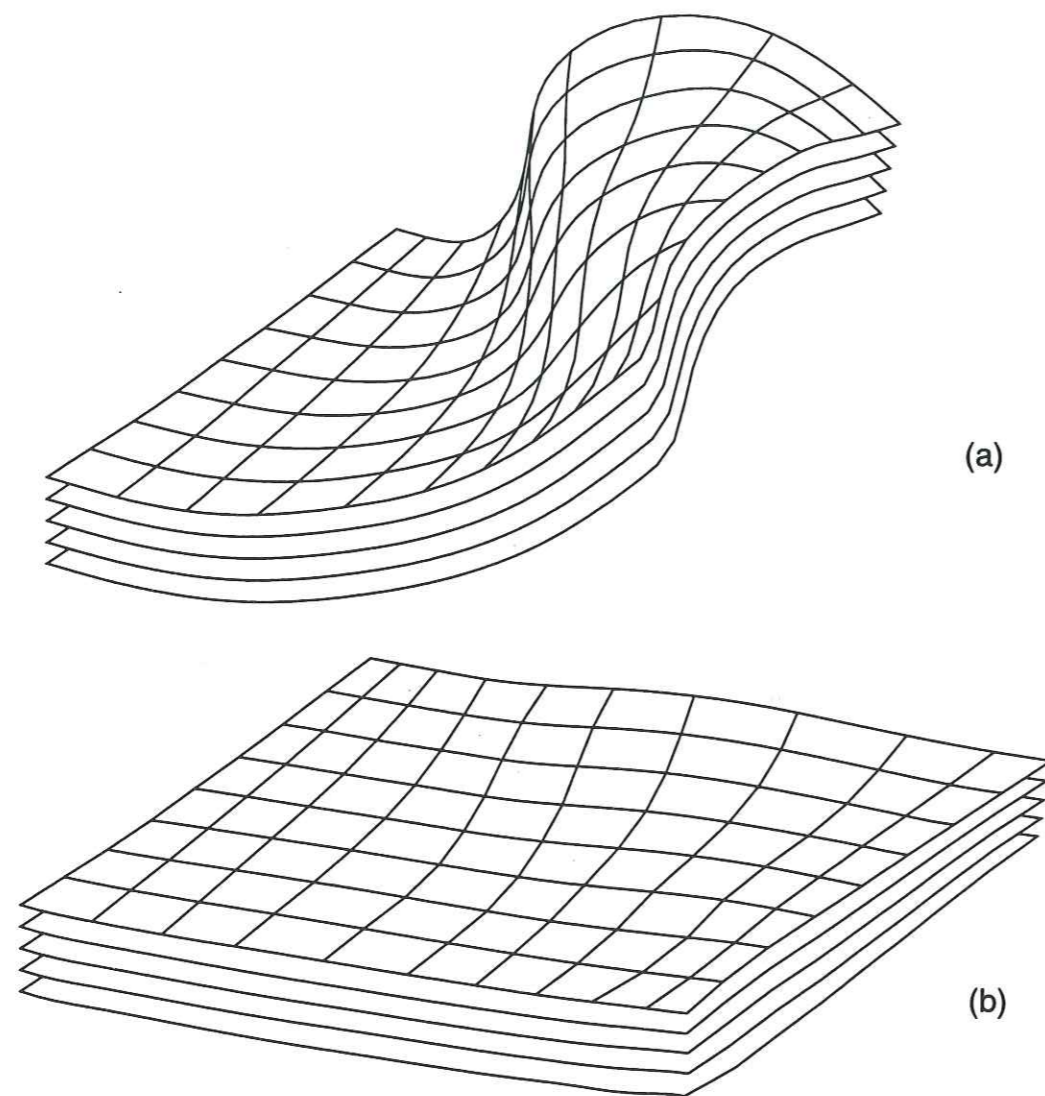
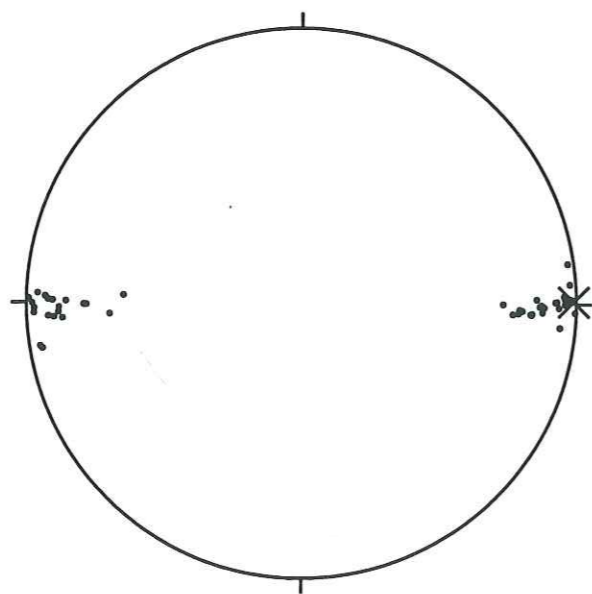
Figure 13 Représentation 3D de la structure $\tilde{\mathcal{F}}$ en a), et de la structure \mathcal{F} en b).

Figure 14 Stéréogramme. Les ronds noirs représentent les 50 valeurs de pendage, la croix la valeur moyenne

VIII.8 Conclusions

Après avoir exposé dans le chapitre précédent le principe de la méthode de dépliage, nous l'avons appliqué dans ce chapitre sur différents exemples synthétiques afin de valider notre formulation et d'en tester les limites.

Une des difficultés importantes du dépliage à 3D est qu'en général une surface ne peut être dépliée sans déformation. Une formulation de type moindres carrés est adéquate pour résoudre cette difficulté car elle permet de minimiser ces déformations.

L'étude de la structure décrite par un maillage tordu nous a montré tout l'intérêt d'une formulation géométrique du problème du dépliage. Les fortes distorsions du maillage à l'intérieur du modèle n'ont pas eu d'effet notable sur la qualité de la solution.

De plus, l'étude du modèle non parallèle a montré l'intérêt de déplier simultanément plusieurs surfaces, ce qui justifie l'usage du concept du feuilletage. En effet, pour déplier la structure, on ne déplie pas l'ensemble des feuilles une par une, comme si elles étaient indépendantes, mais on déplie globalement le feuilletage et il est alors possible de conserver les épaisseurs. Avec cette méthode, il est possible de déplier en 3D des structures comportant des variations d'épaisseur. En fait, la formulation de type moindre carré que nous avons adoptée permet enfin, de choisir le meilleur compromis entre l'horizontalité et la conservation des épaisseurs.

Nous avons considéré un exemple "réel". Cet exemple nous a permis de tester notre méthode lorsque les données sont entachées d'erreurs et nous avons néanmoins obtenu une solution satisfaisante.

Bien que nos résultats soient satisfaisants, ils restent très partiels si l'on considère l'ampleur du problème de la restauration complète des structures complexes à différentes époques. Entre autres, le raccord des écailles dépliées et la prise en compte de la compaction ne semblent pas des problèmes faciles à résoudre.

CONCLUSIONS GENERALES

Le filetage

Lorsque deux blocs sont approximativement rigides, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de déformation interne dans ceux-ci, les deux blocs glissent l'un sur l'autre. L'hypothèse de blocs approximativement rigides est restrictive mais valide pour les horsts et grabens, et les blocs crustaux. Dans ce cas, le mouvement de glissement d'un bloc sur l'autre peut se décomposer en un mouvement de rotation et de glissement autour d'une droite. La surface engendrée par ce mouvement est une surface particulière appelée un filetage.

D'un point de vue cinématique, nous avons caractérisé cette surface par un champ de vecteurs appelé un torseur. Un torseur est un champ de vecteur affine, c'est-à-dire un champ de vecteurs déterminé en tout point de la surface par sa valeur en un point et un vecteur constant dans l'espace. Les lignes de champ de ce torseur sont des hélices qui peuvent être interprétées comme des stries calculées. Elles nous donnent des informations sur la nature du mouvement d'un bloc sur l'autre (décrochement, chevauchement, ...).

Lorsque les blocs sont rigides, les lignes de champ du torseur sont tangentes à la surface. Lorsque les blocs sont approximativement rigides, ce sont les lignes de champ de la projection du torseur en tout point qui sont tangentes à la surface.

Nous avons opté pour l'inversion pour déterminer la géométrie de la surface de faille. Ainsi lorsqu'elle est contrainte par des points de données de puits ou d'affleurement, notre démarche consiste dans un premier temps à déterminer la surface de faille en minimisant la fonction-coût critère de proximité aux points de données et la fonction-coût courbure, critère géométrique de régularisation de la surface. De plus, lorsque l'hypothèse de blocs approximativement rigides est valide, on peut introduire un critère de moindres carrés de filetage qui contraint la surface à être en plus une surface de filetage. Ce critère modifie la forme de la surface tout en conservant la proximité aux points, la régularité. Dans ce cas, on peut représenter sur la surface les stries calculées et les confronter à d'éventuelles stries naturelles. Nous avons développé le cas où le torseur est une inconnue auxiliaire déterminé au fur et à mesure de l'optimisation, mais lorsque les stries sont connues, il est possible d'introduire cette information en initialisant le torseur.

Sur les exemples synthétiques, nous avons étudié différents filetages (une surface de translation, une surface de révolution), et nous avons testé l'influence des poids sur les fonctions-coût.

Sur les exemples réels, nous avons pu tester comment l'introduction de ce critère améliore dans certains cas la détermination de la surface de faille. Nous avons testé ces effets sur des exemples réels d'échelle différente (métrique et kilométrique) et de nature différente (décrochement et chevauchement).

Nous avons constaté que l'effet du critère de filetage est surtout visible dans les zones où l'on a le moins de données notamment lorsque les données étaient dans les coins ou aux bords du domaine étudié. Le critère de filetage a pour effet de laisser prépondérant l'effet du critère de proximité aux points de données et critère de courbure lorsque les zones sont documentées par les points de données, par contre il a tendance à documenter les zones où l'on

n'a pas de données de façon à rendre l'ensemble de la surface compatible avec l'hypothèse de blocs rigides.

Le critère de filetage n'a pas d'effet visible lorsque la surface est presque plane. En effet, dans ce cas, il existe plusieurs torseurs qui sont tangents à la surface et il y a un problème d'indétermination sur le torseur qui fait que la fonction-coût globale n'est pas minimisée.

Pour la faille de Californie, pour le miroir à l'est de Sespe Creek, nous avons fait une étude souvent pratiquée en statistique : le test blanc. Cette expérience consiste à tester la stabilité des résultats lorsque l'on enlève des données. Nous avons constaté que le problème d'approximation par minimisation des critères de proximité aux points de données et de courbure donnent des résultats nettement plus dégradés lorsque l'on enlève une donnée que le même problème résolu avec en plus le critère de filetage. On obtient une meilleure stabilité des résultats lorsque l'on introduit le critère de filetage.

Pour apprécier l'ensemble de nos résultats, nous avons des cartes de résidus en proximité aux points, en courbure et en filetage. Elles nous permettent d'apprécier localement l'influence des différents critères.

Nous avons aussi mis en évidence l'importance de formuler le problème en termes géométriques avant de l'explicitier en termes fonctionnels. Nous avons comparé la solution du problème d'approximation d'une surface par minimisation des critères de proximité aux points de données et de courbure (problème géométrique), avec celle du problème d'approximation d'une surface par minimisation des critères de proximité aux points de données et de la norme des dérivées secondes (problème fonctionnel). Nous avons constaté que les résultats sont liés au choix de la paramétrisation qui décrit la surface, pour le problème fonctionnel alors que ce n'est pas le cas pour le problème géométrique.

D'un point de vue mathématique, nous avons établi l'existence et l'unicité de la solution du problème fonctionnel pour une paramétrisation fixée. Pour le problème géométrique, nous avons établi une double inégalité qui encadre le problème géométrique par le problème fonctionnel.

Le dépliage

La restauration de structures 3D par le dépliage de celles-ci est un problème très complexe. Parmi les difficultés, on peut dire qu'en 2D, toute courbe est isométrique à une ligne droite, donc dépliable sans déformation, par contre en 3D, il existe peu de surfaces dépliables excepté les surfaces développables.

Dans cette partie, nous avons résolu le problème de dépliage d'une écaille sédimentaire connue dans son état actuel. Pour représenter cette écaille, nous avons utilisé le concept de feuilletage (empilement continu de feuilles) car en prospection pétrolière, les terrains sont sédimentaires.

Les hypothèses géologiques dont nous avons tenu compte sont la conservation du volume entre l'état actuel et l'état restauré, l'horizontalité des isochrones à l'état restauré, la minimisation des déformations tangentielles lors du dépliage et le cisaillement nul à l'arrière de l'écaille lors du passage de l'état plié (actuel) à l'état déplié (restauré).

Comme nous avons opté pour l'inversion, chacune des hypothèses a été formulée sous forme d'une fonction-coût mesurant l'écart entre les données observées et les données

calculées. Pour la conservation du volume, la donnée observée est le volume initial, pour l'horizontalité des isochrones au moment du dépôt, la donnée observée est nulle, et enfin pour les déformations tangentielles, la donnée observée est aussi nulle car les déformations internes au moment du dépôt sont petites. La fonction-coût globale, somme des différentes fonctions-coût pondérées a été minimisée dans la phase d'optimisation.

Nous avons testé notre programme sur des exemples synthétiques de difficulté croissante. Pour apprécier la qualité de nos résultats, nous avons introduit des indices d'erreur en énergie de déformation, en volume et horizontalité.

Le dépliage du modèle cylindrique nous a donné des indices d'erreur minima en énergie de déformation, en conservation du volume et horizontalité. Il s'est déplié sans problème car le modèle est développable par feuille.

Le dépliage du modèle à mailles dégénérées (mailles d'aire petite ou nulle) nous a permis de tester la robustesse de notre algorithme. On a obtenu un modèle restauré satisfaisant, mais qui a tendance à dégénérer de plus en plus au fur et à mesure que l'on s'approche de la solution.

Le dépliage du modèle à maillage quelconque a permis de vérifier que la solution que nous obtenions à l'état déplié est indépendante du paramétrage qui décrit la structure. Ceci est dû au fait que notre problème a d'abord été formulé en termes géométriques donc intrinsèques.

Le dépliage du modèle à épaisseur variable a été le premier exemple 3D qui a mis en évidence l'intérêt du concept de feuilletage. Le modèle solution est un compromis entre la conservation du volume et le critère d'horizontalité des isochrones qui sont des hypothèses contradictoires. En pondérant plus le critère de conservation du volume, on a obtenu une structure dépliée dont le volume était bien conservé, mais dont les isochrones de dépôt ne sont pas horizontaux. Par contre en pondérant plus le critère d'horizontalité, le volume n'est pas conservé entre les deux états mais les feuilles du feuilletage sont planes.

Enfin, nous avons construit un modèle "réel". C'est un annuaire construit feuille par feuille. On l'a ensuite coupé en tranches et numérisé. A partir des points numérisés, on a construit un modèle de splines nécessaires pour l'optimisation des différentes fonctions-coûts. Ces différentes opérations sont plus ou moins précises, ceci explique l'appellation modèle "réel". Les erreurs cumulées lors des différentes manipulations (numérisation, modèle de splines,...) perturbent la résolution du problème, comme pourraient le faire des données réelles. L'annuaire s'est déplié de façon satisfaisante mais avec des indices d'erreur supérieur à ceux obtenus pour les exemples synthétiques.

Bien que l'ensemble de nos résultats pour cette partie soient satisfaisants, ils représentent qu'une petite partie dans la restauration de structures complexes.

Références bibliographiques

- Arnaud, H., 1971. La zone de Borne: secteur intermédiaire entre le Vercors et le Dévoluy, principaux caractères et relations entre la tectonique et la paléogéographie. *C. R. As. Sc.* T.272, pp.12-15.
- Arnaud, H., 1981. De la plate forme urgonienne au bassin vocontien: le Barrémo-Bédoulien des Alpes occidentales entre Isère et Buech (Vercors méridional, Diois oriental, Dévoluy). *Thèse d'état de l'université de Grenoble.*
- Berger, M., Gostiaux, B., 1987. Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces. *Collection PUF.*
- Çemen, I., 1989. Near surface expression of the Eastern part of the San Cayetano fault : a potentially active thrust fault in the California Tranverse Ranges, *J. Geophys. Res.*, vol. 94, pp. 9665-9677.
- Ciarlet, P.-G., 1982. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. *Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Edition Masson.*
- Darboux, G., 1972. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Chelsea, New York.
- Darboux, G., 1917. *Principes de géométrie analytique*, Paris, Gautier-Villars.
- Donnellan, A., Hager, B., King, R., 1993. Discrepancy between geological and geodetic deformation rates in the Ventura basin, *letters to Nature*, vol. 366.
- Gamond, J-F., Odonne, F., 1984. Critères d'identification des plis induits par un décrochement profond : modélisation analogique et données de terrain. *Bulletin de la Société Géologique de France*, 7, XXVI, 115-128.
- Gratier, J-P., Ménard, G., Arpin, R., 1989. Strain-displacement compatibility and restoration of the Chaînes Subalpines of the Western Alps, *Alpine Tectonics, Geological Society Special Publications* No. 45, pp. 65-81.
- Gratier, J-P., Caron, J-M., Gamond, J-F., Boufette, J., 1991. Field Trip Alps, *Mechanical Instabilities in Rocks and Tectonics.*
- Gratier, J-P., Guillier, B., 1993. Compatibility constraints on folded and faulted stata and calculation of total displacement using computational restoration (UNFOLD program), *J. Struct. Geol.*, Vol. 15, pp. 391-402.
- Groshong, R.H., Usdansky, S.I., 1986. Using a micro computer for inetractive section construction and balancing (abs), *Bull. Am. Ass. Petrol. Geol.*, 70, 59.

- Hester, R.L., Truex, J.N., San Cayetano Fault Field Trip, 1977. Pacific session AAPG.
- Hornafius, J. S., B.P. Luyendyk, R.R. Terres, and M.J. Kamerling, 1986. Timing and extend of neogen tectonic rotation in the western Tranverse Ranges, California, *Geol. Soc. Am. Bull.*, 97, 1476-1487.
- Jackson, J., Molnar, P., 1990. Active faulting and block rotations in the western Tranverse Ranges, California, *J. Geophys. Res.*, vol. 95, pp. 22073-22087.
- Jones, P.B., Linnser, H., 1986. Computer synthesis of balanced structural cross sections by forward modeling (abs), *Bull. Am. Ass. Petrol. Geol.*, 70, 605.
- Kligfield, R., Geiser, P., Geiser, J., 1979. Construction of geologic cross section using microcomputer system, *Geobyte*, 1, 60-66.
- Léger, M., Morvan, J.-M., Thibaut, M., 1994. (*)*Least-squares optimization of fault surfaces using the rigid block approximation*. Accepté dans *Geophysical Journal International*.
- Léger, M., Morvan, J.-M., Thibaut, M., 1994. (*)*Least-squares optimization of thread surfaces*. Curves and Surfaces in Geometric Design, 293-300, A.K. Peters.
- Léger, M., Morvan, J.-M., Thibaut, M., 1994. (*)*3D foliation unfolding with volume and bed-length least-squares conservation*. 64th Annual S.E.G Meeting. Expanded Abstracts.
- Léger, M., Morvan, J.-M., Rakotoarisoa, H., Thibaut, M., 1994. (*)*Minimisation of geometrical criteria defined on a surface*. Accepté dans *Geometry and Topology of Submanifolds*.
- Léger, M., Morvan, J.-M., Thibaut, M., 1993. (*)*Least-squares optimization of fault surfaces using the rigid block approximation*. 63th Annual S.E.G Meeting. Expanded Abstracts, 154-157.
- Madariaga, R., Perrier, G., 1991. Les tremblements de Terre, *Presses du CNRS*.
- Medwedeff, D. A., Suppe, J., 1986. Kinematics, timing and rates of folding and faulting from synthetonic sediments geometry (abs), *EOS*, 67, 1223.
- Ménard, G., 1988. Méthodologie générale de construction des coupes équilibrées, extrait de "L'équilibrage de coupes géologiques, buts, méthodes, et applications". *Mémoire et documents du Centre Armoricaïn d'Etude Structurale des Socles*, no.20, coordinateur J-P Gratier.
- Moretti, L., Larrère, M., in press. LOCACE: computed aided construction of balanced geological cross section, *Geobyte*.
- Nadai, A.L., 1950. Theory of flow and fracture of solid. *MacGraw Hill ed.*
- Nagle, H. E., and E.S. Parker, 1971. Future oil and gas potential of onshore Ventura basin, California, *Future Petroleum Provinces of the United States-Thier Geology and Potential*, edited by I.H. Cram, *Mem. Am. Assoc. Pet. Geol.* 15, 254-29.
- Necas, J., 1967. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. *Edition Masson*.
- Rakotoarisoa, H., 1992. Modélisation géométrique et optimisation de structures géologiques 3D. *Thèse de doctorat de l'Université Claude Bernard-Lyon 1*.
- Robert, J-P, 1976. Les décrochements, fracturations et mouvements de blocs associés, exemples des massifs subalpins dauphinois, *thèse 3ème cycle*, Université de Grenoble.
- Rockwell, T.K., 1982. Style, rates, and recency of deformation along the San Cayetano fault, western Tranverse Ranges, California: *Geological Society of America Abstract with Programs*, v.14, p. 228.
- Rougée, P., 1982. Mécanique générale. *Edition Vuibert université*.
- Scales, L.E., 1985. Introduction to non-linear optimization. *Edition Macmillan*.
- Spivak, M., 1970-1979. A comprehensive introduction to differential geometry. *Publish or perish, Texas*.
- Tarantola A., 1987. Inverse problem theory. *Elsevier*.
- Thibaut, M., Gratier, J.-P., Léger, M., Morvan, J.-M., 1995. *An inverse method for determining three dimensional fault geometry with thread criterion: application to natural examples*. Soumis a *Journal of Structural Geology*.
- Yeats, R. S., 1983a. Large-scale Quaternary detachments in Ventura basin, southern California, *J. Geophys. Res.*, 88, 569-583.
- Yeats, R., S., 1983b. Heavy oil accumulations in the Oxnard field, Ventura basin, California, in *Petroleum Generation and Occurrence in the Miocene Monterey Formation, California*, edited by C. M. Isaacs and R. E. Garrison, pp. 85-98, Pacific Section, society of Economic Paleontologists and Mineralogists, Bakersfield, Calif.
- Yeats, R., S., 1988. Late quaternary slip rate ont the Oak Ridge fault, Tranverse Ranges, California: Implications for seismic risk, *J. Geophys. Res.*, vol.93, pp.137-149.
- Yerkes, R. F., and W. H. K. Lee, 1987. Late quaternary deformation in the western Tranverse Ranges, *U.S. Geol. Surv. Prof. Pap.*, 1339, 71-82, 1 plate.

(*) L'ordre adopté pour les références a été l'ordre alphabétique.

INSTITUT FRANÇAIS DU PÉTROLE

B.P. 311

92506 Rueil-Malmaison Cedex - France

Tél. : national (1) 47 49 02 14

international 33 (1) 47 49 02 14

Télex : IFP 634202 F

Télécopieur : 33 (1) 47 52 70 00

RESUME

Tester la compatibilité cinématique de la géométrie d'une surface de faille (1) et la géométrie d'une écaïlle qui glisse le long de cette surface de faille (2) est un problème compliqué que nous avons partiellement résolu. Nous avons considéré le problème (1) dans le contexte de blocs rigides et le problème (2) pour une écaïlle plissée.

Nous proposons un critère de moindres carrés permettant de contraindre la forme des failles de façon compatible avec l'approximation blocs rigides, i.e., les deux blocs restent en contact et glissent l'un sur l'autre sans déformation. Si cette condition est satisfaite, la surface de faille est un *filetage*, i.e., une surface qui est partout tangente à un champ de vecteurs (torseur) non nul. Nous contraignons la surface à être le plus près possible des points de données (données de puits ou données sismiques), et régulière (minimisation des courbures principales). Le critère de filetage donne des résultats plus plausibles que la minimisation d'un critère basé seulement sur des dérivées secondes ou sur la matrice de courbure. Il donne aussi une direction de stries. Nous avons testé l'effet de ce critère sur différents exemples naturels (les failles de la Cléry et de San Cayetano).

La restauration d'une structure géologique à une époque antérieure est un bon moyen de critiquer et d'améliorer l'interprétation de la structure actuelle. Nous nous sommes intéressés au glissement banc sur banc avec conservation des longueurs et du volume. Nous avons déplié un feuilletage par optimisation de différents critères de moindres carrés : horizontalité des isochrones, conservation des longueurs et du volume. Nous avons introduit des contraintes d'égalité pour traduire la conservation de la reliure (pin-surface). La reliure représente une surface transverse à l'ensemble des feuilles de la structure conservée après dépliage. Nous avons testé notre formulation sur des exemples synthétiques et expérimentaux.

ABSTRACT

Testing the kinematic compatibility of the geometry of a fault surface (1) and the geometry of the structure (2) which slips on the fault surface is a complex problem that we solved partially. We considered problem (1) in context of rigid blocks and problem (2) for a folded foliation.

In the general context of macro-model determination by inversion techniques, we propose a specific least-squares criterion to constrain the shape of faults so as to be compatible with the rigid block approximation, i.e., the two blocks remain in contact and slip on each other without strain. If this condition is met, the fault surface is a *thread*, i.e., a surface that is everywhere tangent to a nonzero twistor vector field. Besides, we constrain the surface to be close to given points (well data or pickings on a depth-migrated seismic 3D cube), and to be smooth (principal curvature minimization). The rigid block criterion yields more plausible results than conventional approximation techniques based on second derivatives or curvature minimization, and it also predicts the direction of striae. We tested its effect on different natural examples (Cléry and San Cayetano faults).

Restoration of a geological structure at earlier times is a good means to criticize, and next to improve its interpretation. We focused ourselves on the interbedding slip phenomenon, with bed-length and volume conservation. We unfolded a (geometrical) foliation by optimizing following least-squares criteria : horizontalness, bed-length and volume conservation, under equality constraints related to the position of the "binding" or "pin-surface". We tested our formulation on different synthetic and experimental examples.