HAL open science

Pertinence du formalisme des transitions de phase pour aborder la mécanique des objets géologiques

Franz Lahaie

To cite this version:

Franz Lahaie. Pertinence du formalisme des transitions de phase pour aborder la mécanique des objets géologiques. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2000. Français. NNT : . tel-00745548

HAL Id: tel-00745548

https://theses.hal.science/tel-00745548v1

Submitted on 25 Oct 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GEOLOGIE GRENOBLE UJF
D 050 035824 8

OBSERVATOIRE DE GRENOBLE
et
LABORATOIRE DE GEOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE

THESE

Présentée par

Franz LAHAIE

Pour obtenir le titre de DOCTEUR de

L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER – GRENOBLE 1
(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : Géophysique - Géomécanique

PERTINENCE DU FORMALISME DES TRANSITIONS DE PHASE POUR ABORDER LA MECANIQUE DES OBJETS GEOLOGIQUES

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
MAISON DES GEOSCIENCES
DOCUMENTATION
B.P. 53
F. 38041 GRENOBLE CEDEX
Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
Mail : ptalour@ujf-grenoble.fr
18 AOUT 2003

Date de soutenance : Mardi 18 Avril 2000

Composition du jury :

M. M. Campillo	Examinateur	LGIT Grenoble
M. P. Davy	Rapporteur	Université de Rennes
M. J. R. Grasso	Directeur de thèse	LGIT Grenoble
M. D. Sornette	Président	Université de Nice
M. S. Zapperi	Rapporteur	INFM Rome

Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

Titre de l'ouvrage :

Pertinence du formalisme des transitions de phase pour aborder la mécanique des objets géologiques.

Auteur :

Franz LAHAIE

Etablissement :

Observatoire de Grenoble
Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique

Résumé :

Dans ce travail de thèse, nous avons entrepris une analyse rigoureuse du concept de transition de phase et de sa pertinence pour aborder la dynamique non linéaire et invariante d'échelle des objets géologiques. En particulier, nous tentons de définir clairement les ingrédients nécessaires et les implications d'un état critique pour un système, et étudions dans quelle mesure ces ingrédients sont compatibles avec les caractéristiques géomécaniques des objets géologiques. Nous passons également en revue les approches récemment proposées pour aborder la rupture des matériaux, la déformation de la croûte ou le glissement sur une faille, en terme de transition de phase. Nous portons notre intérêt non seulement sur le concept d'état critique, mais aussi sur d'autres mécanismes susceptibles de générer des lois d'échelle.
Nous utilisons ensuite ce formalisme pour étudier trois exemples concrets : la mécanique des éruptions dans un volcan, la fracturation d'un réservoir d'hydrocarbure et la déformation viscoplastique d'un échantillon de glace. La variété de ces exemples illustre la généralité et la puissance d'analyse du concept de transition de phase pour aborder la mécanique des objets géologiques.
D'abord, nous proposons pour les volcans basaltiques un modèle de réservoir composé d'un grand nombre de lentilles de magma en interaction, dans lequel une éruption résulterait d'un phénomène de cascade initié par de faibles perturbations. Ce modèle est en accord avec les données du Piton de la Fournaise. Ensuite, nous isolons sur un site d'extraction d'hydrocarbure l'effet d'une variation basse fréquence de la vitesse de chargement du milieu sur son mode de fracturation (diffus/localisé). Nous discutons les implications de cet effet tant en termes industriels que pour la mécanique des séismes. Enfin, nous montrons que la déformation viscoplastique d'un matériau par mouvements de dislocations peut s'interpréter, comme la déformation cassante, dans le cadre des transitions de phase.

Mots clés : Transitions de phase, état critique, criticalité auto-organisée, automates cellulaires, mécanique de la déformation, rupture, facturation induite, volcans, dislocations.

OBSERVATOIRE DE GRENOBLE
et
LABORATOIRE DE GEOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE

THESE

Présentée par

Franz LAHAIE

Pour obtenir le titre de DOCTEUR de

L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER – GRENOBLE 1
(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : Géophysique - Géomécanique

PERTINENCE DU FORMALISME DES TRANSITIONS DE PHASE POUR ABORDER LA MECANIQUE DES OBJETS GEOLOGIQUES

Date de soutenance : Mardi 18 Avril 2000

Composition du jury :

M. M. Campillo	Examinateur	LGIT Grenoble
M. P. Davy	Rapporteur	Université de Rennes
M. J. R. Grasso	Directeur de thèse	LGIT Grenoble
M. D. Sornette	Président	Université de Nice
M. S. Zapperi	Rapporteur	INFM Rome

10221176

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier la société ELF, qui a financé en partie cette thèse, conjointement avec le CNRS. Je remercie également les membres du jury, pour leur présence et l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Merci notamment à Stefano Zapperi, avec qui de nombreux échanges de mails ont aidé à la rédaction du manuscrit.

Une partie de ce travail – modèle de réservoir volcanique – a été réalisée en collaboration avec l'IREMIA (laboratoire d'Informatique et de Mathématiques Appliquées à la Réunion). Je remercie les membres de ce laboratoire pour leur accueil chaleureux, et en particulier Stéphane Calderoni, pour son dynamisme et sa gentillesse. Merci également à Pierre Marcenac, avec qui j'ai apprécié travailler, à Sylvain Giroux, et aux autres membres de l'équipe "SMA". Je garde également un souvenir inoubliable de l'atmosphère de la cafet', des sorties randos et des soirées "dodo" (merci Jeff, Pierre, et les autres).

J'ai également eu la chance de bénéficier d'une collaboration avec l'IGPP et le "Department of Earth and Space Sciences" à UCLA (Los Angeles). Je remercie à ce titre Didier Sornette, qui m'a accueilli là-bas pendant 6 mois, et avec qui les discussions ont toujours été extrêmement enrichissantes.

Je remercie toutes les personnes du LGIT qui m'ont soutenu durant ces trois années, notamment Christophe et Pascal, pour m'avoir longuement hébergé à mon retour de Los Angeles, Francois, pour avoir respecté un long silence durant la fin de ma rédaction (bon, quand est-ce que tu signes ma préface ?). Merci à ceux-là et à Ludo, Bruno, et les autres pour leur aide durant mes déménagements successifs. Merci également aux footeux, et aux taroteux divers, qui m'ont permis de me détourner de nourritures trop spirituelles.

Je n'oublie pas évidemment les discussions échevelées avec Jean-Robert (Grasso), Jérôme (Weiss), et David (Amitrano), au sein de l'équipe "critique".

Mes pensées vont également à ma famille et à mes parents. Merci à Anne, ma tendre épouse, pour son soutien moral et les sacrifices qu'elle a pu faire pendant ces trois années.

Enfin, j'ai une profonde reconnaissance pour mon directeur de thèse, Jean-Robert Grasso, qui m'a donné goût à la recherche, et m'a ouvert sur le monde formidable de la "complexité". Je le remercie de m'avoir fait bénéficié des meilleures conditions de travail (IREMIA, UCLA, conférences diverses), et de m'avoir laissé une grande part d'initiative, tout en ayant été d'un soutien constant. J'ai tiré une grande richesse de nos discussions, tant au travail qu'en dehors, et je le remercie d'avoir souvent pu me faire oublier la limite entre travail et détente.

Résumé

Dans ce travail de thèse, nous avons entrepris une analyse rigoureuse du concept de transition de phase et de sa pertinence pour aborder la dynamique non linéaire et invariante d'échelle des objets géologiques. En particulier, nous tentons de définir clairement les ingrédients nécessaires et les implications d'un état critique pour un système, et étudions dans quelle mesure ces ingrédients sont compatibles avec les caractéristiques géomécaniques des objets géologiques. Nous passons également en revue les approches récemment proposées pour aborder la rupture des matériaux, la déformation de la croûte ou le glissement sur une faille, en terme de transition de phase. Nous portons notre intérêt non seulement sur le concept d'état critique, mais aussi sur d'autres mécanismes susceptibles de générer des lois d'échelle.

Nous utilisons ensuite ce formalisme pour étudier trois exemples concrets : la mécanique des éruptions dans un volcan, la fracturation d'un réservoir d'hydrocarbure et la déformation viscoplastique d'un échantillon de glace. La variété de ces exemples illustre la généralité et la puissance d'analyse du concept de transition de phase pour aborder la mécanique des objets géologiques.

D'abord, nous proposons pour les volcans basaltiques un modèle de réservoir composé d'un grand nombre de lentilles de magma en interaction, dans lequel une éruption résulterait d'un phénomène de cascade initié par de faibles perturbations. Ce modèle est en accord avec les données du Piton de la Fournaise. Ensuite, nous isolons sur un site d'extraction d'hydrocarbure l'effet d'une variation basse fréquence de la vitesse de chargement du milieu sur son mode de fracturation (diffus/localisé). Nous discutons les implications de cet effet tant en termes industriels que pour la mécanique des séismes. Enfin, nous montrons que la déformation viscoplastique d'un matériau par mouvements de dislocations peut s'interpréter, comme la déformation cassante, dans le cadre des transitions de phase.

Abstract

In this work, we analyze in detail the concept of phase transitions and discuss how it can be useful to understand the non linear and scale invariant dynamics of the Earth crust. In particular, we attempt to clarify the necessary conditions and the implications of the critical state of a system, and discuss whether the geomechanical properties of the Earth crust fit these conditions. We review recent approaches which have been proposed to interpret the rupture of materials, the large scale deformation of the Earth crust, or the friction along a fault, in the framework of phase transitions. We shed light not only on the concept of criticality, but also on other mechanisms of phase transitions which produce scale invariance.

We then apply concretely this formalism on three different problems : the mechanics of eruptions in a volcano, the deformation of an hydrocarbon reservoir, and the viscoplastic deformation of an ice sample. The variety of these applications illustrates that the formalism of phase transitions is a general and powerful tool to analyze geomechanical problems.

First, we propose a model for reservoirs of basaltic volcanoes composed of many magma lenses in interaction, where eruptions result from a cascade redistribution of magma from lens to lens up to the surface. This model is in agreement with the statistics of eruptions recorded on the Piton de la Fournaise (Reunion island). We then focus on a hydrocarbon field (Lacq, France), where we observe that very low-frequency variations of the loading rate induced by gas extraction has an impact on the fracturing pattern of the reservoir. We discuss the implications of this finding for industrial purposes as well as for the mechanics of the Earth crust. Lastly, we show that dislocation-driven viscoplastic deformation of materials, like brittle deformation, exhibit scale invariance and can be understood in the framework of phase transitions.

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
MAISON DES GEOSCIENCES
DOCUMENTATION
B.P. 53
F. 38041 GRENOBLE CEDEX
Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
Mail : ptalour@ujf-grenoble.fr
18 AOUT 2003

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE **15**

PARTIE I.BASE CONCEPTUELLE : TRANSITIONS DE PHASE ET ÉTATS CRITIQUES **23**

I.1. Un nouveau domaine de recherche : l'étude de la complexité **27**
I.1.1. Définition de la complexité 27
I.1.2. Etude de la complexité ou étude des phénomènes d'émergence. 30
I.1.3. Quelques phénomènes d'émergence 31
I.1.3.1. Somme de variables aléatoires 32
I.1.3.2. Agrégation par diffusion limitée 32
I.1.3.3. Chaos 33
I.1.3.4. Criticalité 34
I.1.3.5. « Intelligence » collective 34

I.2. Transitions de phase **36**
I.2.1. Définitions générales 36
I.2.2. Caractérisation et classification des transitions de phase 38
I.2.3. Théories des transitions de phase 42

I.3. Systèmes critiques : Propriétés à l'équilibre **43**
I.3.1. Exemples expérimentaux 43
I.3.1.1. Transition ferromagnétique 43
I.3.1.2. Transition liquide-gaz d'un fluide au point critique 46
I.3.2. Modèle d'Ising 51
I.3.2.1. Définition du modèle 51
I.3.2.2. Comportement des variables macroscopiques au voisinage de la transition et définition des exposants critiques 52
I.3.2.3. Valeurs des exposants critiques et lois scalantes pour le modèle d'Ising 59
I.3.3. Modèle de percolation 63
I.3.3.1. Définition du modèle 63
I.3.3.2. Analyse de la transition de percolation dans le formalisme des transitions de phase .. 64

I.3.3.3. Niveaux de généralité et lois scalantes dans le modèle de percolation 67
I.3.4. Universalité des systèmes critiques 72
I.3.4.1. Hypothèse d'universalité 72
I.3.4.2. Interprétation générique de la valeur des exposants critiques dans un système en équilibre 76

I.4. Méthodes de résolution des systèmes à grand nombre de degré de liberté 80
I.4.1. Principe de la physique statistique : Une théorie des probabilités avec contraintes 80
I.4.2. Résolution exacte 82
I.4.3. Approximation de champ moyen 82
I.4.4. Méthode du groupe de renormalisation 84
I.4.5. Résolution numérique 90

I.5. Systèmes critiques : Propriétés dynamiques 92
I.5.1. Propriétés de transport des systèmes critiques statiques 93
I.5.1.1. Perméabilité (conductance) 93
I.5.1.2. Coefficient de diffusion 94
I.5.1.3. Module d'Young et résistance à la rupture d'un matériau 95
I.5.2. Introduction d'exposants critiques dynamiques 97
I.5.2.1. Taille des avalanches, s 97
I.5.2.2. Durée des avalanches ou temps de relaxation, d 98
I.5.2.3. Extension spatiale des avalanches, n 99
I.5.2.4. Susceptibilité, χ 99
I.5.3. Systèmes critiques dynamiques ordinaires 100
I.5.3.1. Description générale 100
I.5.3.2. Ingrédients d'un système critique dynamique ordinaire 101
I.5.3.2.1. Conditions nécessaires 101
I.5.3.2.2. Caractéristiques observationnelles 102
I.5.4. Systèmes critiques auto-organisés 103
I.5.4.1. Modèle du tas de sable de Bak Tang et Wiesenfeld 103
I.5.4.1.1. Image conceptuelle 104
I.5.4.1.2. Automate cellulaire 105
I.5.4.1.3. Description de champ moyen de Vespignani et Zapperi [1998] 106
I.5.4.2. Ingrédients d'un système critique auto-organisé 110
I.5.4.2.1. Conditions nécessaires 110
I.5.4.2.2. Caractéristiques observationnelles 112
I.5.4.3. Implications de la criticalité auto-organisée d'un système 112
I.5.4.4. Ce que n'implique pas la criticalité auto-organisée 113

I.6. Effets de taille finie 117
I.6.1. Problématique et méthode des lois d'échelle en taille finie 117
I.6.2. Effet sur la valeur du seuil critique 120

I.6.3. Effet sur les grandeurs macroscopiques du système 122
I.6.4. Effet sur les distributions statistiques des grandeurs macroscopiques du système 124
I.6.5. Synthèse 125

I.7. Autres mécanismes générant des lois de puissance 127
I.7.1. Processus multiplicatifs avec répulsion sur un seuil 127
I.7.2. Balayage d'un point critique 130
I.7.3. Transition du premier ordre en présence d'hétérogénéïtés 131

I.8. Remarques et perspectives 133
I.8.1. Autres implications de la criticalité d'un système 133
I.8.2. Vers une base d'interprétation générique du comportement des objets géologiques dans le formalisme des transitions de phase 136

GLOSSAIRE 143

PARTIE II.TRANSPOSITION DU CONCEPT DE TRANSITION DE PHASE À LA MÉCANIQUE DE LA DÉFORMATION 149

II.1. Revue des différentes approches 153
II.1.1. La rupture vue comme une transition de phase ordinaire 154
II.1.2. La déformation vue comme un phénomène critique auto-organisé 159
II.1.2.1. Croûte 159
II.1.2.2. Expériences de fracturation 161

II.2. Un modèle d'automates cellulaires pour décrire les mouvements de fluide dans un massif rocheux : Application au volcan de la Fournaise (Réunion) 163
II.2.1. Introduction 163
II.2.2. Article publié dans « Journal of Geophysical Research » 164
II.2.3. Interprétation de la coupure pour les faibles volumes d'éruption 179
II.2.4. Volcans : systèmes critiques auto-organisé ? 181

II.3. Influence du taux de chargement sur le mode de fracturation de la croûte supérieure : Mise en évidence sur un site d'hydrocarbures et implications pour la fracturation induite 190
II.3.1. Introduction 190
II.3.2. Article publié dans « Journal of Geophysical Research » 190
II.3.3. Compléments d'information 205

II.4. Mise en évidence de lois d'échelle dans la dynamique des dislocations au cours de la déformation viscoplastique d'un matériau : Interprétation dans le cadre de la physique des transitions de phase 206

CONCLUSION GÉNÉRALE **217**

ANNEXES **223**

ANNEXE 1 : ILLUSTRATION DE L'APPROCHE DE PHYSIQUE STATISTIQUE DANS LE CAS D'UN SYSTÈME THERMIQUE **225**

ANNEXE 2 : RÉSOLUTION DU MODÈLE D'ISING PAR LA MÉTHODE DU CHAMP MOYEN (MÉTHODE DE WEISS) **229**

ANNEXE 3 : QUELQUES OUTILS DE RECONNAISSANCE D'ORGANISATION **231**

A.3.1 Coefficient de corrélation 231
A.3.2 Fonction de corrélation 232
A.3.3 Fonction de covariance 233
A.3.4 Intégrale de corrélation et dimension de corrélation 234
A.3.5 Dimension fractale 235
A.3.6 Entropie 236
A.3.7 Coefficient de variation 237

RÉFÉRENCES **239**

Introduction générale

Un des grands enseignements des sciences de la fin du XIXe et du début du XXe siècle est la remarquable simplicité et universalité des lois de la physique à l'échelle microscopique. On peut en effet exprimer en quelques lignes les équations de Maxwell, l'équation de Schrödinger, ou les lois de la relativité générale. On envisage même la possibilité de regrouper ces quelques lois fondamentales en une seule théorie unificatrice, rendant compte de l'ensemble des interactions possibles dans la nature [par ex. la théorie des « supercordes », voir Gell-Mann, 1997]. Il est fascinant de penser que ces quelques lois simples sont à l'origine de tous les phénomènes, aussi complexes soient-ils, que nous observons à l'échelle macroscopique[1]. Comment comprendre cette complexité et cette diversité offertes par la nature, quand les lois qui la régissent au niveau le plus élémentaire sont aussi simples et universelles ?

Depuis une vingtaine d'années, un courant de recherche multidisciplinaire s'intéresse à l'émergence de structures et de comportements collectifs dans des systèmes composés d'un grand nombre d'entités. Le but de cette démarche est de comprendre comment des propriétés peuvent apparaître à une échelle donnée (celle du système) sans qu'elles aient été introduites à l'échelle inférieure (celle des éléments). Ce nouveau domaine de recherche est généralement baptisé « étude de la complexité ». Une telle démarche de déduction de propriétés collectives à partir de la connaissance de propriétés individuelles n'est pas nouvelle dans les sciences, puisqu'elle constitue le fondement même de la physique statistique, dont les bases ont été établies par L. Boltzmann et J.W. Gibbs vers 1877. Ce qui est véritablement nouveau, depuis une vingtaine d'années, est l'utilisation des outils et concepts de physique statistique dans des domaines beaucoup plus variés (biologie, économie, sciences de la Terre, etc.) que ceux auxquels ils étaient habituellement attachés (physique des matériaux, thermodynamique), et où ils permettent d'interpréter des faits et lois empiriques, jusqu'alors inexpliqués par d'autres approches. La physique statistique s'impose ainsi dans de nombreuses disciplines comme un outil puissant d'analyse et d'interprétation de la complexité des phénomènes observés.

Une situation typique où l'on observe de tels phénomènes collectifs est la situation où un système est proche d'une transition de phase, et en particulier, d'une transition critique. De manière générale, une transition de phase est le passage brutal d'un système d'un état plus

---

[1] La plupart des chercheurs admettent en effet l'hypothèse « réductionniste » [voir par ex. Anderson, 1972], selon laquelle les sciences s'organisent en niveaux hiérarchiques, allant du plus fondamental au plus complexe, et où toute loi observée à un niveau quelconque dérive en principe des lois du niveau inférieur, et par suite, du niveau le plus fondamental. Dans cette hiérarchie des sciences, on trouve successivement, la physique des particules élémentaires, la physique atomique, la chimie et la physique des matériaux (et en particulier des roches), la biologie cellulaire, la biologie des organismes multicellulaires, jusqu'à éventuellement la psychologie et la sociologie.

ordonné à un état moins ordonné (ou inversement). Dans certains cas, ce passage se fait de façon *discontinue* – nous verrons plus tard au sens de quel paramètre – et sans signes annonciateurs au niveau macroscopique. On parle alors d'une transition de phase « du premier ordre ». Dans d'autres cas, en revanche, ce passage est toujours brutal, mais se fait de façon *continue* et s'accompagne de phénomènes typiques au niveau macroscopique. En particulier, la distance de corrélation entre les éléments augmente, créant des phénomènes « d'avalanches », c'est-à-dire qu'une petite instabilité à un endroit du système peut entraîner, sans qu'on puisse le prévoir, aussi bien un événement mineur qu'un événement catastrophique (réorganisation de tous les éléments). Ces phénomènes d'avalanches sont typiques des transitions de phase continues que l'on appelle aussi des transitions *critiques*.

Si l'on s'intéresse de plus en plus aux transitions critiques dans différents domaines, ce n'est pas seulement parce qu'elles présentent un intérêt théorique pour la compréhension générale des processus qui mènent à la complexité, mais c'est aussi parce que les phénomènes (collectifs) qui apparaissent au voisinage d'une transition critique sont fréquemment observés dans la nature. Lors d'une transition critique, en effet, un système est particulièrement instable et répond de façon fortement non linéaire à toute perturbation extérieure. D'autre part, un système au voisinage d'une transition critique – on dit simplement « système critique » – présente un caractère invariant d'échelle, qui s'exprime par de nombreuses lois de puissance dans les variables macroscopiques du système. Ce caractère à la fois instable, non linéaire, et invariant d'échelle se retrouve dans de nombreux objets naturels, sans qu'une interprétation générale et unificatrice ait jusque là été proposée.

Le concept de transition critique offre un cadre séduisant pour interpréter l'existence de nombreux systèmes dans la nature qui manifestent ce genre de comportement. Il a par exemple été proposé pour décrire la turbulence, la propagation des feux de forêt, la dynamique des marchés économiques, etc. Son succès peut s'apparenter à celui du chaos déterministe, il y a quelques années, dans le cadre duquel un certain nombre de phénomènes naturels non linéaires ont pu être interprétés (météo, etc.). A la différence du chaos déterministe, le concept de transition critique permet d'interpréter non seulement la non linéarité, mais aussi et surtout l'invariance d'échelle des objets étudiés, ce que ne prédit pas naturellement le concept de chaos déterministe.

En sciences de la Terre, l'idée d'appliquer le concept de transition critique à la fracturation est apparue au début des années 80 [Vere-Jones, 1977; Allègre et al., 1982]. La fracturation, et plus généralement la déformation des objets géologiques[2], est en effet caractérisée par de nombreuses lois d'échelle (par ex. la loi de Gutenberg-Richter), qu'il a été proposé d'interpréter comme le reflet d'un d'état critique[3] des objets géologiques au cours de leur déformation. Mais

[2] Nous entendons par « objet géologique » la croûte dans son ensemble, ainsi que tous les éléments qui la constituent (plaque tectonique, région intraplaque, volcan, champ d'hydrocarbure, mine, échantillon de roche, etc...).

[3] Au sens « état caractéristique d'une transition critique » et non au sens usuel de « état proche de la rupture ».

le concept qui a véritablement popularisé ces idées en géophysique, et qui reste encore très débattu aujourd'hui, est sans conteste celui qui consiste à voir la croûte comme un système « critique auto-organisé » (CAO), c'est-à-dire un système qui tend spontanément vers un état critique. Dans ce scénario, la croûte serait en permanence dans un état critique, « hésitant » entre une phase ordonnée, où tous les éléments sont corrélés – lorsqu'un élément bouge, tous les autres bougent – et une phase désordonnée, où chaque élément a un comportement indépendant. La loi de Gutenberg-Richter – distribution en loi de puissance de l'énergie relâchée par les séismes – serait alors le résultat de cette « hésitation », dans laquelle une petite perturbation, liée par exemple au chargement tectonique, peut déclencher aussi bien un séisme mineur (seuls quelques éléments bougent) qu'un séisme catastrophique (tous les éléments bougent). Ce scénario implique d'une certaine manière une imprédictibilité *intrinsèque* de la taille de chaque séisme, ce qui pourrait expliquer l'échec de tous les schémas de prédiction proposés ces trente dernières années, et suscite de vifs débats au sein de la communauté géophysique (voir par ex. le débat sur le site électronique de *Nature*, 25 fev-8 avr 1999).

En dehors de l'idée d'une croûte CAO, il a été également proposé de voir la phase de préparation d'un séisme majeur, ou la phase d'endommagement précédent la rupture macroscopique d'un matériau, comme l'approche d'un point critique, c'est-à-dire le résultat d'une corrélation à portée de plus en plus longue du champ de contrainte dans la zone de préparation de la rupture. Ce scénario serait en accord avec l'augmentation en loi de puissance du taux d'énergie sismique relâchée parfois observée avant un séisme majeur dans la zone de préparation de ce séisme, ainsi que l'observation, en laboratoire, d'une augmentation en loi de puissance du taux d'énergie acoustique émise durant la phase d'endommagement précédant la ruine d'un échantillon.

Ce rapide état des lieux des idées actuelles sur l'analogie entre les transitions de phase – en particulier les transitions critiques – et la mécanique de la croûte ne doit en aucun cas être perçu comme exhaustif et consensuel. En fait, de nombreux problèmes, non abordés ci-dessus, subsistent dans cette analogie. Le but de cette thèse est de dresser un bilan complet de la pertinence du formalisme des transitions de phase pour décrire la mécanique de la déformation des objets géologiques. Il est aussi de discuter les implications de cette analogie éventuelle entre transitions de phase et mécanique des objets géologiques, et son utilité à la fois pour mieux comprendre l'origine physique du comportement non linéaire et invariant d'échelle de ces objets, et pour mieux appréhender leur comportement (aléa sismique, volcanique, etc.).

Ce mémoire est divisé en deux parties. Dans une première partie, nous introduirons les aspects généraux relatifs au concept de transition de phase. Nous présenterons les différents types de transitions de phase (transition du premier ordre, transition critique, criticalité auto-organisée). Nous insisterons sur les ingrédients nécessaires et les implications de chacun de ces mécanismes. Nous ferons également un point sur les principales techniques de physique statistique (champ moyen, groupe de renormalisation, lois d'échelle en taille finie, outils de reconnaissance de forme), qu'il s'avère aujourd'hui indispensable de maîtriser pour décrire ou pour modéliser des systèmes géophysiques complexes, à grand nombre de degrés de liberté. Nous présenterons également quelques mécanismes de transition de phase, moins connus que

celui de transition critique, mais qui permettent également de produire de façon assez générique des lois de puissance, propriété récurrente des objets géologiques. Nous avons jugé utile de bâtir cette synthèse conséquente sur les transitions de phase et les systèmes critiques car il n'existe pas, à notre connaissance, de synthèse en français sur ce thème, qui soit à la fois relativement complète et accessible au géophysicien. Cette première partie se veut une tentative dans ce sens.

Nous allons ensuite nous appuyer sur cette base théorique pour examiner comment on peut aborder la mécanique de la déformation dans le formalisme de transitions de phase. Nous ferons d'abord une revue générale des différentes approches qui ont été proposées récemment pour aborder le problème de la rupture, de la déformation des objets géologiques, ou de glissement sur une faille, en terme de transition de phase. Nous verrons dans quelle mesure les propriétés géomécaniques et statistiques de la croûte (conditions de chargement, distribution fréquence-taille des séismes, etc.) s'accordent avec les prédictions des différents modèles de transition de phase. Nous verrons également comment le manque de contraintes sur les données en sciences de la Terre limite la possibilité de valider (ou d'invalider) ces différents modèles.

Nous aborderons ensuite trois problèmes concrets, à travers quatre articles : Les deux premiers articles aborderont le problème de la mécanique des éruptions dans les volcans basaltiques. Nous testerons, à travers un modèle d'automates cellulaires, l'idée que la statistique en loi de puissance et le comportement non linéaire de ces volcans pourraient résulter de phénomènes d'avalanches dans un système réservoir composé de nombreuses poches magmatiques, mimant ainsi le comportement d'un système critique auto-organisé. Ensuite, nous étudierons le cas d'un réservoir d'hydrocarbures (Lacq), dans lequel nous mettrons en évidence une relation entre le taux de chargement en contrainte du réservoir, induit par l'extraction d'hydrocarbures, et le mode de fracturation de celui-ci, allant d'un mode « ductile » pour un faible taux de chargement à un mode plus « fragile » pour un taux de chargement plus fort. Nous verrons également comment il est possible de rationaliser la forme particulière de la distribution fréquence-magnitude des séismes sur ce site (forme bimodale) dans le formalisme des transitions de phase. Enfin, nous réduirons notre échelle d'observation en nous intéressant à la déformation viscoplastique d'un échantillon de glace, considéré comme matériau analogue d'une roche. Nous révélerons une statistique en loi de puissance des émissions acoustiques émises par les mouvements de dislocations durant le fluage de ce matériau, et tenterons d'interpréter ces observations dans le cadre de la physique des transitions de phase.

Partie I. Base conceptuelle : Transitions de phase et états critiques

***

Nous allons dans cette partie introduire un certain nombre de concepts généraux relatifs aux transitions de phase et aux phénomènes critiques. Nous testerons ensuite (Partie II) la pertinence de ces concepts pour aborder la mécanique des objets géologiques.

Cette première partie va nous permettre de nous familiariser avec quelques principes de base de physique statistique, d'introduire un jargon parfois obscure au géophysicien, et de présenter quelques techniques utiles pour la résolution de systèmes à grand nombre de degrés de liberté. Ce sera également l'occasion de rappeler le sens strict de notions à la mode dans la littérature géophysique, comme « complexité », « fractals » ou « criticalité » dont l'utilisation parfois excessive et non spécifique a abouti à une certaine confusion. Un glossaire est également fourni à la fin de cette première partie.

***

I.1. Un nouveau domaine de recherche : l'étude de la complexité

L'intérêt actuel pour les transitions de phase et les phénomènes critiques s'inscrit dans une mouvance plus générale, qui est de comprendre les mécanismes génériques qui font qu'un système présente des propriétés collectives différentes de celles de ses composants individuels. Ce domaine de recherche relativement jeune, qui regroupe physiciens, biologistes, économistes, est généralement appelé « étude de la complexité ». Un système qui exhibe de telles propriétés collectives, différentes de ses propriétés individuelles, est qualifié de « système complexe » (voir par ex. cahier spécial dans *Science*, v.284, p. 79-109, 1999). Avant de voir plus en détail en quoi consiste ce courant de recherche, et de justifier son appellation (« étude de la complexité »), il convient de donner une définition précise de la complexité au sens général.

I.1.1. *Définition de la complexité*

Qu'entend-on réellement par le mot « complexe », quand on parle de « la complexité du phénomène sismique » ou « la structure complexe d'un réseau de faille » ? La notion de « complexité », dans le langage courant, reste une notion très intuitive, et désigne vaguement quelque chose de difficile à comprendre ou à décrire. En fait, il existe toute une activité de recherche visant à définir le sens usuel de la complexité.

Une façon de voir la complexité d'un objet est de la définir comme la *longueur de description* de cet objet, ou plus exactement, comme « la longueur du plus court message possible décrivant cet objet ». Gell-Mann [1997] l'appelle la « complexité brute ». Examinons par exemple la Figure I-1, où sont représentées quelques structures de connexions de huit points. D'après la définition ci-dessus, la structure A, sans aucune connexion, est plus simple que B, qui elle-même est plus simple que C. La structure F, qui peut sembler à première vue la plus complexe de toutes, puisqu'elle présente le plus de connexions, est, au sens de la définition ci-dessus, tout aussi simple que A, dans la mesure où la phrase « tous les points connectés » n'est pas plus longue que la phrase « aucun point connecté ». De manière générale, des structures complémentaires auront sensiblement la même complexité, car l'ajout du mot « complément » n'allonge pas de manière significative la description de l'objet. Pour conclure sur cet exemple, il ressort qu'au sens de la complexité brute, A et F sont les structures les plus simples, suivies de B et E, et enfin, de C et D.

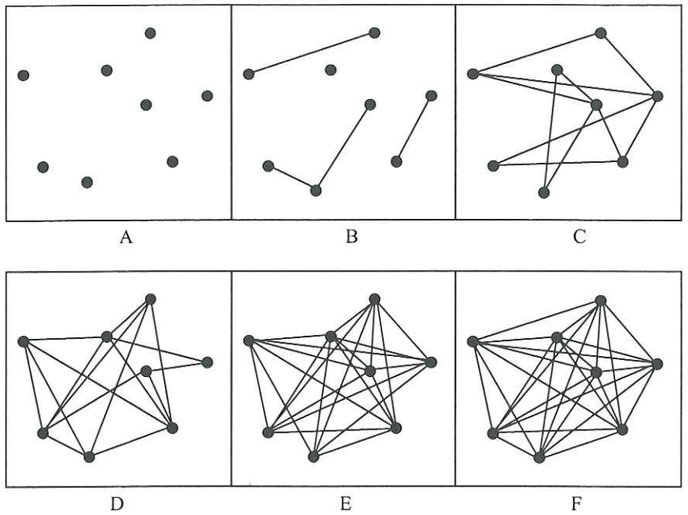


Figure I-1. Quelques structures de connexions de huit points [d'après Gell-Mann, 1997]

Une définition équivalente, mais plus technique, a été introduite par Kolmogorov [1965] et Chaitin [1966; 1996] sous le nom de « complexité algorithmique » ou « contenu d'information algorithmique » (CIA). Elle consiste à décrire l'objet dans un langage donné, puis à l'encoder en une chaîne de 0 et de 1 au moyen d'une procédure standard. La longueur du plus court programme ayant pour effet que l'ordinateur imprime exactement cette chaîne est définie comme le CIA de la chaîne.

En fait, dans ces deux définitions, la complexité est essentiellement une mesure du désordre (Figure I-2.a). En effet, plus l'objet a de régularités (c'est-à-dire plus il est ordonné), plus sa description pourra être compressée, et plus sa complexité sera faible. Au contraire, plus l'objet est désordonné, plus sa description sera longue (car essentiellement constituée de cas particuliers), et sa complexité élevée. Par exemple, la chaîne 110110110110110110...110 peut être produite par un programme très court ordonnant d'imprimer 110 un nombre défini de fois ; elle aura donc un CIA très bas. A l'inverse, une chaîne aléatoire, c'est-à-dire sans aucune régularité, aura un CIA maximum.

Or, le désordre n'est pas nécessairement ce que nous entendons par le mot « complexité », lorsque nous l'utilisons dans le langage de tous les jours ou dans la littérature scientifique. En effet, un milieu ou un phénomène totalement aléatoire peut même nous apparaître extrêmement simple, la notion « d'aléatoire » étant pour nous, êtres humains, porteuse d'un sens précis. Pour prendre en compte ce caractère éventuel de l'observateur (par exemple un être humain) à considérer le désordre comme simple, et obtenir ainsi une définition de la complexité plus proche du sens que l'homme lui donne couramment, on peut redéfinir la complexité comme « la longueur du plus court message possible décrivant les *régularités* d'un objet ». Gell-Mann

[1997] l'appelle la « complexité effective ». Autrement dit, toute la partie aléatoire de l'objet, qui faisait l'essentiel de la complexité brute, n'apporte plus aucune contribution dans la complexité effective. La complexité effective est donc une fonction convexe du désordre, c'est-à-dire qu'elle est très proche de zéro si l'objet est totalement régulier ou totalement aléatoire, et qu'elle est maximum pour un système qui n'est ni trop ordonné, ni trop désordonné (Figure I-2.b).

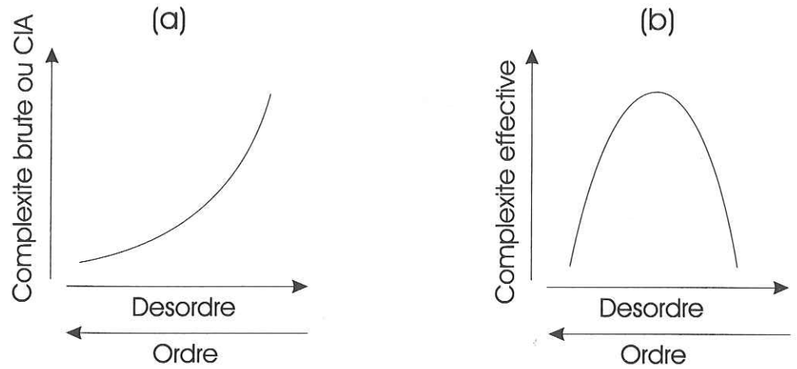


Figure I-2. Complexité brute et complexité effective, exprimées en fonction du désordre [modifié d'après Shiner et al., 1999]. Désordre est synonyme d'aléatoire ; ordre est synonyme de régularité.

L'introduction de la complexité effective comme définition plus « humaine » de la complexité appelle à une remarque importante, à savoir que la complexité est une notion essentiellement *subjective* et *arbitraire*. En effet, la longueur de description d'un objet varie en fonction du niveau de détail auquel on choisit de le décrire, mais aussi du langage utilisé, et surtout de la connaissance et de la compréhension du monde que partagent au préalable les correspondants. Autrement dit, un observateur ne peut chercher dans l'objet qu'il doit décrire que des régularités de classes données, correspondant à des modèles (mentaux ou numériques) qu'il s'est construit ou dont on l'a doté (dans le cas d'un ordinateur), mais ne peut chercher *tous* les genres de régularités. On ne peut donc jamais prouver qu'il n'existe pas une description plus courte d'un objet donné, ou autrement dit, on ne peut jamais prouver qu'un objet est réellement aléatoire. Ainsi, on ne pourra jamais assigner à la complexité brute (ou au CIA) qu'une valeur supérieure.

En résumé, une bonne façon de définir la complexité d'un objet est de la définir comme la *longueur de description* de cet objet, en n'oubliant pas qu'il s'agit d'une notion subjective et arbitraire, et qu'elle n'a de sens que si est précisé le niveau de détail auquel est décrit l'objet, le langage utilisé, et surtout les connaissances que partagent au préalable les correspondants. Dans la suite de ce mémoire, nous parlerons toujours de « complexité » en faisant référence à la complexité effective.

I.1.2. *Etude de la complexité ou étude des phénomènes d'émergence.*

A l'échelle où nous la regardons, la nature est complexe, au sens où elle présente une variété de formes, de lois, ou autrement dit, de régularités, dont la description complète serait extrêmement fastidieuse. En revanche, si l'on se place à l'échelle des particules élémentaires, la nature devient extrêmement simple, puisqu'une description complète de ses régularités à cette échelle résiderait en quelques lois fondamentales, et ne prendrait donc pas plus de quelques lignes. Une question importante est de comprendre comment une telle simplicité à l'échelle microscopique a pu générer une telle diversité de formes et de propriétés à l'échelle macroscopique.

Depuis essentiellement une vingtaine d'années[4], des chercheurs de différentes disciplines étudient des mécanismes susceptibles de générer à une certaine échelle (l'échelle d'un système par exemple) des propriétés non présentes à l'échelle inférieure (celle de ses éléments). On dit alors qu'il s'agit de propriétés « émergentes ». Cette recherche s'appuie sur des modèles discrets, composés en général d'un grand nombre d'entités, où chaque élément est défini par des règles de comportement relativement simples – par ex., un organisme peut ou non en manger un autre ; un investisseur peut acheter, vendre, ou conserver des parts d'actions ; un élément de faille peut continuer de glisser ou s'arrêter – et dont on étudie le comportement macroscopique, dans l'espoir qu'il affiche des propriétés « nouvelles », non présentes à l'échelle des éléments individuels. De nombreux exemples de ces modèles, que l'on appelle des modèles « d'automates cellulaires », sont proposés dans Wolfram [1984; 1986].

Ce nouveau domaine de recherche est appelé « étude de la complexité », dans le sens où il vise à comprendre l'origine de la complexité de la nature à l'échelle macroscopique. Mais cela ne signifie pas pour autant qu'un comportement ou une structure émergente soit nécessairement complexe. On trouve en effet tout type d'émergence, allant de l'émergence de désordre – par exemple dans un système chaotique, voir §.I.1.3.3 – à l'émergence d'ordre – on parle alors « d'auto-organisation » – avec, dans ce dernier cas, différents degrés de complexité possibles. Par exemple, on assiste chez les animaux à des phénomènes d'auto-organisation où les structures émergentes peuvent être très simples – par ex. un rouleau formé par un banc de poisson qui s'agrègent, voir §.I.1.3.5 et Figure I-4 – comme très complexes – par ex. une ruche ou une fourmilière. Pour éviter d'associer l'étude de la complexité à l'idée que les phénomènes émergents sont nécessairement complexes, nous préférerons parler « d'étude des phénomènes d'émergence ».

L'intérêt de l'étude des phénomènes d'émergence est de pouvoir proposer, dans la collectivité et les interactions, une interprétation alternative aux phénomènes observés dans la nature, qui complète les approches plus « classiques », basées soit sur une interprétation du phénomène à son échelle propre (interprétation macroscopique), soit sur une recherche du

[4] Même si ce mouvement a été initié dès la fin du XIXe siècle avec les débuts de la physique statistique.

même phénomène aux échelles inférieures. Un des objectifs de cette thèse, au sens le plus général, est de montrer qu'une telle approche des phénomènes en terme « collectif » peut apporter de nouvelles contraintes sur la mécanique des objets géologiques, et ainsi compléter les approches plus classiques.

Imaginons par exemple que l'on veuille modéliser et interpréter le comportement élasto-plastique d'un échantillon de roche, c'est-à-dire une roche ayant une déformation élastique à faible contrainte et plastique à partir d'un certain seuil. Plusieurs voies sont alors possibles : la première, triviale, est de modéliser l'échantillon de roche à l'échelle macroscopique, c'est-à-dire de représenter la roche comme un seul bloc doté d'une loi de comportement élasto-plastique. Une seconde possibilité est de représenter la roche comme un ensemble d'éléments (plus ou moins nombreux selon l'échelle à laquelle on veut modéliser l'échantillon) ayant chacun un comportement élasto-plastique. Dans ce cas, le comportement macroscopique du modèle sera lui aussi élasto-plastique, mais le résultat, là non plus, n'est pas surprenant. D'autre part, cela repousse le problème sur l'origine du comportement élasto-plastique des éléments individuels. Une troisième voie, nettement moins triviale, consiste à modéliser le matériau comme un ensemble d'éléments *élasto-fragiles*, en ajoutant comme ingrédient au modèle un facteur d'endommagement, c'est-à-dire qu'à chaque rupture d'un élément, son module d'élasticité diminue d'un certain pourcentage. Des modèles de ce type [Zapperi et al., 1997b; Amitrano et al., 1999] ont montré que l'on obtient dans ce cas une loi de comportement macroscopique élasto-plastique, bien que chaque élément soit doté d'un comportement élasto-fragile. Autrement dit, on a l'émergence d'un comportement macroscopique différent des comportements individuels, et on montre ainsi que la plasticité d'un matériau à une certaine échelle ne résulte pas nécessairement d'un comportement plastique aux échelles inférieures. C'est un cas simple où une approche en terme « collectif » permet de proposer une autre voie d'interprétation à un phénomène observé.

Enfin, nous souhaitons récuser l'idée, parfois rencontrée dans la littérature, selon laquelle l'émergence d'un phénomène collectif serait incompatible avec des règles d'évolution déterministes à l'échelle microscopique. En fait, de nombreux modèles d'automates cellulaires sont dotés de règles purement déterministes à l'échelle microscopique – au sens où l'état de chaque élément est connu à tout moment de façon exacte et où les lois d'interactions entre les éléments ne font intervenir aucune loi de probabilité – et exhibent cependant de nombreuses propriétés collectives. Autrement dit, la stochasticité n'est pas une condition nécessaire à l'émergence de phénomènes collectifs.

I.1.3. *Quelques phénomènes d'émergence*

Les mécanismes qui génèrent des structures ou des comportements émergents sont nombreux et encore difficiles à classifier. Nous en présentons ici quelques exemples (résumés dans le Tableau I-1), qui illustrent la variété des mécanismes possibles et des types de phénomènes émergents que l'on peut rencontrer. Cette thèse portera essentiellement sur l'un de

ces mécanismes, le mécanisme de transition de phase, qui semble être l'un des plus pertinents pour décrire la déformation des objets géologiques.

I.1.3.1. Somme de variables aléatoires

C'est sans doute l'un des mécanismes les plus simples et les plus courants. Il est énoncé dans le théorème de la limite centrée :

Si $(x_j)_{j=1\ldots N}$ *sont N variables aléatoires, indépendantes, et identiquement distribuées, de moyenne* $<x>$ *et de variance* σ^2 *finie, la variable aléatoire* $X = \sum_{j=1}^{n}(x_j - \langle x \rangle)/\sqrt{N}$ *converge en loi vers la loi gaussienne de variance* σ^2,

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{X^2}{2\sigma^2}}$$

Autrement dit, quelle que soit la distribution de probabilité selon laquelle se répartissent ces variables, leur somme tend presque toujours[5] vers une gaussienne. Nous avons là un exemple de comportement émergent qui apparaît sans qu'il y ait d'interactions entre les éléments – les variables sont indépendantes. Remarquons également qu'une définition courante que l'on donne d'un « système complexe » est « un ensemble d'éléments dont le comportement macroscopique diffère de la somme des comportements individuels ». Prise au sens strict, cette assertion est fausse puisque le théorème de la limite centrée montre précisément que la simple opération « somme » peut mener à un comportement émergent.

Ce mécanisme est par exemple proposé comme à l'origine de la loi de diffusion macroscopique (loi de Fick). On peut également étendre ce mécanisme aux processus multiplicatifs, en remarquant qu'après un changement de variable (passage en log), le produit de N variables aléatoires se ramène à une somme, et le théorème de la limite centrée peut alors s'appliquer (voir par ex. §.I.7.1). Le produit de N variables indépendantes converge alors vers une loi normale après passage en log, c'est-à-dire une loi log-normale.

I.1.3.2. Agrégation par diffusion limitée

L'agrégation de particules en diffusion peut donner naissance à l'émergence de structures fractales. Le modèle classique pour illustrer ce phénomène est le modèle dit « d'agrégation par diffusion limitée », introduit par Witten et Sander [1981]. Une version simple de ce modèle

[5] … presque, car si la variance est infinie, le théorème ne s'applique plus. Par ex. si la distribution de probabilité est une loi de puissance du type $P(x) \sim x^{-(1+\mu)}$, avec $\mu<2$, la somme des variables ne tend plus vers une loi gaussienne mais vers une autre limite, la loi de Lévy [voir par ex. Sornette, 2000].

consiste à placer une particule à l'origine d'une grille, puis à déposer une à une des particules à une certaine distance autour de l'origine (Figure I-3.a). Chaque particule effectue une marche aléatoire sur la grille, c'est-à-dire qu'à chaque pas de temps, la particule se déplace d'une case aléatoirement dans une direction. Lorsque la particule arrive sur une case voisine de l'agrégat déjà formé, celle-ci se fixe à l'agrégat et une nouvelle particule est déposée sur la grille. Pour limiter les temps de calcul, on élimine les particules qui diffusent au delà d'une certaine distance de l'agrégat formé. Un agrégat typique obtenu après le dépôt de 10000 particules sur la grille est reporté sur la Figure I-3.b. L'objet obtenu a une structure fractale de dimension 1.71 à deux dimensions et 2.5 à trois dimensions.

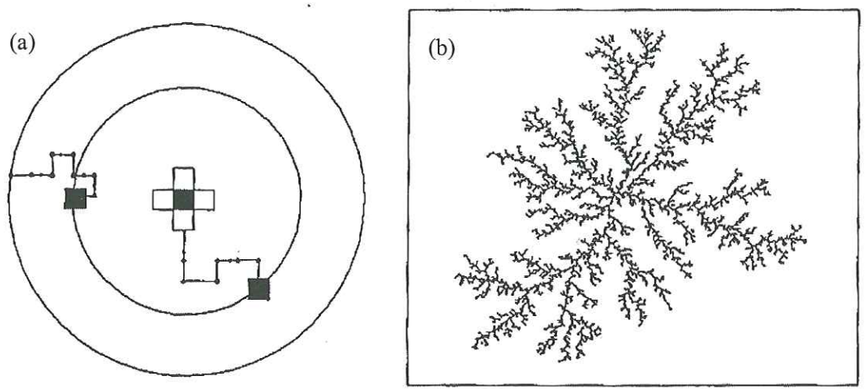


Figure I-3. Modèle d'agrégation par diffusion limitée. (a) Le cercle intérieur est le lieu des points où sont déposées les particules. Son rayon est choisi de tel sorte qu'il soit légèrement plus grand que l'agrégat formé à l'origine. La distance à partir de laquelle les particules sont éliminées de la grille (cercle extérieur) est typiquement 10 fois cette distance. (b) Agrégat typique obtenu après le dépôt de 10000 particules [d'après Bunde et Havlin, 1995].

Ce mécanisme, comme le précédent, est très général. Les particules sont régies par une simple marche au hasard, et la structure fractale émerge spontanément.

I.1.3.3. Chaos

L'émergence de propriétés macroscopiques requiert en général la présence d'un grand nombre d'éléments. Néanmoins, certains systèmes à faible nombre de degrés de liberté parviennent à générer des comportements collectifs, du fait du très fort couplage (boucles de rétroaction) entre leurs éléments. La forme extrême de cette situation est l'émergence de chaos déterministe dans les systèmes à faible nombre de degrés de liberté.

Un système chaotique entraîne à la fois une émergence d'ordre et une émergence de désordre. En effet, une des caractéristiques majeures d'un système chaotique est que chacun de ses éléments, pris séparément, a un comportement parfaitement prédictible ; par contre, lorsqu'on les fait interagir, leur comportement global devient totalement aléatoire et

manque page 34

Figure I-4 Exemple d'agrégation animale chez les poissons [d'après Parrish et Edelstein-Keshet, 1999].

Mécanisme d'émergence	**Phénomènes collectifs observés**	**Domaines d'application possibles pour les phénomènes naturels**
Somme de variables aléatoires	Loi gaussienne	Processus additifs : diffusion Processus multiplicatifs : turbulence, fragmentation
Agrégation	Géométrie fractale	Flocons de neige Dépôts par électrolyse Croissance de colonies de bactéries Croissance des villes
Chaos	Comportement temporel aléatoire Attracteur étrange Divergence exponentielle de deux états initiaux infiniment proches	Ecologie Météo Turbulence Séismes
Criticalité	Corrélations à grande distance Invariance d'échelle Fluctuations et instabilité	Fracturation Ferromagnétisme Percolation Erosion Drainage Turbulence Feux de forêt Trafic routier Crashs boursiers

Tableau I-1 Quelques mécanismes génériques d'émergence et domaines d'applications possibles.

I.2. Transitions de phase

Les phénomènes d'émergence qui vont nous intéresser dans la suite de ce mémoire sont ceux qui apparaissent au voisinage d'une transition de phase, et en particulier d'une transition critique. Pendant longtemps, la recherche sur les transitions de phase s'est limitée à l'étude des changements d'états de la matière et des propriétés des corps ferromagnétiques. On entrevoit aujourd'hui la portée très générale du concept de transition de phase, qui trouve des applications dans des domaines aussi variés qu'inattendus (trafic routier, économie, biologie). Notre objectif est ici d'estimer la pertinence de ce concept pour décrire la mécanique des objets géologiques. Mais avant cela, il nous faut introduire la vocabulaire et les notions essentielles relatives au concept de transition de phase, ce qui est l'objet de la suite de ce premier chapitre.

Nous commençons ici (§.I.2) par donner quelques définitions générales, présenter les différents types de transitions de phase, ainsi que les approches théoriques qui ont été développées pour en aborder la compréhension. Nous nous focaliserons ensuite sur un type particulier de transition de phase que sont les transitions critiques (§.I.3 et I.5.2). Celles-ci ont l'avantage majeur de prédire naturellement l'existence de lois d'échelles, et donc, constituent un cadre théorique intéressant pour comprendre les phénomènes invariants d'échelles en Sciences de la Terre. Nous verrons dans cette partie (§.1.3 et 1.4) plusieurs exemples de transitions de phase, qui nous permettront d'illustrer sur des exemples concrets les définitions générales données au §.I.2.

I.2.1. *Définitions générales*

Au sens général, une transition de phase désigne le passage *brutal* d'un système d'un état macroscopique plus ordonné à un état macroscopique moins ordonné (ou inversement)[6]. Ce changement d'ordre peut être lié à l'organisation spatiale des éléments – par exemple l'organisation des molécules dans une substance lorsque celle-ci passe de l'état liquide à l'état solide cristallin – ou aux propriétés des éléments – par exemple l'orientation des spins atomiques dans un matériau, au passage de la phase paramagnétique à la phase ferromagnétique (voir §.I.3.1). Dans tous les cas, ce changement d'ordre implique une diminution (ou une

[6] Par soucis de conserver à cette notion tout son intérêt, on restreint ici le terme de « transition de phase » à son sens strict, c'est-à-dire à des changements brutaux qui apparaissent dans des *systèmes composés d'un grand nombre d'éléments* (en toute rigueur un nombre infini). D'autre part, on se limite ici aux transitions *ordre-désordre* exclusivement.

augmentation) du nombre de micro-états possibles du système, c'est-à-dire un changement d'entropie (voir définition de l'entropie, p.236). Outre la notion d'ordre, la notion de symétrie peut également servir à différencier les phases d'un système. La phase la plus symétrique (ou isotrope) correspond à la phase la moins ordonnée, et la phase la moins symétrique à la phase la plus ordonnée. On dit qu'une transition de phase correspond à une « brisure de symétrie ». Par exemple, même si cela n'a pas véritablement été posé de cette façon pour l'instant, on pourrait voir la transition fragile-ductile dans le comportement d'un matériau comme une sorte de transition de phase, dans laquelle le mode de déformation « ductile », associée à une déformation diffuse, correspondrait à la phase désordonnée (ou plus symétrique), et le mode de déformation « fragile », associée à une déformation localisée, correspondrait à la phase ordonnée (ou moins symétrique).

Une première étape vers la caractérisation d'une transition de phase est l'identification d'un *paramètre d'ordre*. On appelle « paramètre d'ordre » (notation usuelle ϕ) toute quantité macroscopique qui, dans la limite thermodynamique, est nulle dans la phase « désordonnée » et non nulle dans la phase « ordonnée ». Il n'existe pas de recette générale pour définir un paramètre d'ordre ; chaque système physique doit être considéré individuellement. Le paramètre d'ordre n'est pas nécessairement un scalaire ; il peut s'agir d'un vecteur ou d'un tenseur. On peut également s'intéresser aux « fluctuations » du paramètre d'ordre, c'est-à-dire aux variations du paramètre d'ordre dans des fenêtres spatiales ou temporelles inférieures à l'échelle du système dans son ensemble. Ces fenêtres peuvent aller jusqu'à l'échelle d'un seul élément, c'est-à-dire l'échelle microscopique.

Une transition de phase est obtenue en agissant sur une ou plusieurs variables que l'on appelle des *paramètres de contrôle* (notation usuelle ε). Il s'agit de variables thermodynamiques intensives qui influencent l'équilibre ou l'évolution du système sans être influencées en retour. Un paramètre de contrôle exprime en général l'influence d'un facteur extérieur – température, pression extérieure, intensité d'un champ ou d'une force appliquée, taux avec lequel on injecte de l'énergie dans le système. Par exemple, dans le cas de la transition fragile-ductile, les paramètres de contrôle possibles sont la température, la pression de confinement, le taux de chargement, etc. Un diagramme qui représente les conditions d'existence des différentes phases d'un système, et par là même, les conditions d'apparition des transitions de phase, en fonction de la valeur des paramètres de contrôle est appelé un « diagramme de phase ». Quelques exemples de diagrammes de phase, sur lesquels nous reviendrons un peu plus tard, sont reportés sur la Figure I-7.

Une notion importante dans l'étude des transitions de phase, et en particulier des systèmes critiques, est la notion de *longueur de corrélation* (notation usuelle ξ). Cette notion est assez intuitive et ne possède pas de définition stricte et unique. Elle correspond de façon générale à la distance maximum (ou moyenne) d'influence entre les éléments. Dans le modèle d'Ising (§.I.3.2) il s'agira de la distance maximum sur laquelle le retournement d'un spin peut affecter les autres spins ; dans le modèle de percolation (§.I.3.3), ce sera la distance maximum sur laquelle le retrait (ou l'ajout) d'un lien va affecter les propriétés de connexion (et donc de transport) des autres sites ; dans le modèle du tas de sable (§.I.5.4.1), ce sera l'extension

spatiale maximale d'une avalanche, etc. Une autre façon de voir la longueur de corrélation est de la considérer comme l'extension spatiale des fluctuations d'une quantité physique (typiquement le paramètre d'ordre) autour de sa valeur moyenne. Nous verrons comment on peut donner, sur des exemples concrets, une définition plus précise de la longueur de corrélation d'un système.

Enfin, une autre quantité importante est la *susceptibilité*, aussi appelée « fonction de réponse » (notation usuelle χ). Elle mesure la réponse macroscopique du système en terme de variation du paramètre d'ordre, lorsqu'on modifie de façon infinitésimale un de ses paramètres de contrôle (que l'on notera h par analogie avec l'exemple du ferromagnétisme où ce paramètre est le champ extérieur), tous les autres paramètres de contrôle ε_i étant fixes :

$$\chi \equiv \left(\frac{\partial \phi}{\partial h}\right)_{\varepsilon_i} \tag{I.1}$$

Nous verrons sur des exemples concrets (§.I.3.2 et I.3.3) comment on peut estimer la susceptibilité d'un système, sans avoir nécessairement à appliquer un champ extérieur.

I.2.2. *Caractérisation et classification des transitions de phase*

La caractérisation d'une transition de phase réside en trois tâches principales :

1. Identifier les conditions qui président au changement de phase. Autrement dit, identifier les valeurs des paramètres de contrôle (température, pression, etc.) pour lesquelles le changement de phase a lieu ;
2. Caractériser les différentes phases, c'est-à-dire essentiellement définir un paramètre d'ordre ;
3. Etudier le comportement des variables macroscopiques du système (paramètre d'ordre, longueur de corrélation, susceptibilité, etc.) au voisinage de la transition.

On distingue alors deux types de transitions, selon le comportement des variables macroscopiques du système au passage de la transition.

- **Transitions « du premier ordre »**, dont les caractéristiques communes sont :
  - Une discontinuité du paramètre d'ordre. Par contre, ses dérivées de part et d'autre de la transition restent finies (voir Figure I-5.a) ;
  - Une production de chaleur latente, liée à une discontinuité de l'entropie ;
  - Toutes les variables macroscopiques restent finies (par ex. la longueur de corrélation) ;
  - Des phénomènes d'hystérésis (voir Figure I-5.a).

  Ex : transition solide-liquide, solide-gaz, liquide-gaz (sauf au point critique).

- **Transitions « critiques »** ou « continues » ou « du deuxième ordre »[7], dont les caractéristiques communes sont :
  - Une continuité du paramètre d'ordre. Par contre, toutes ses dérivées divergent (voir Figure I-5.b) ;
  - Pas de production de chaleur latente, c'est-à-dire pas de saut d'entropie ;
  - Certaines variables macroscopiques divergent (ex : longueur de corrélation, susceptibilité, chaleur spécifique) ;
  - De nombreuses lois d'échelle (voir §.I.3).

  Ex : transition liquide-gaz au point critique, transition ferromagnétique, percolation.

La Figure I-5 illustre la différence de comportement du paramètre d'ordre selon le type de transition (premier ordre ou critique). Si l'on parcourt de gauche à droite l'axe du paramètre de contrôle ε, on note que dans les deux cas, il existe une valeur critique $\varepsilon=\varepsilon_c$ où le système passe d'un état d'équilibre stable à un état d'équilibre instable (voir définitions précises de la stabilité et de l'instabilité au §.I.2.3). ϕ prend alors une valeur non nulle, positive ou négative, et ce avec la même probabilité. La différence entre les deux transitions est que dans une transition critique, le paramètre d'ordre reste continu en $\varepsilon=\varepsilon_c$, ce qui n'est pas le cas dans une transition du premier ordre. En revanche, la dérivée du paramètre d'ordre diverge en $\varepsilon=\varepsilon_c$, alors que dans une transition du premier ordre, celle-ci reste finie de part et d'autre de ε_c. On constate aussi que dans une transition du premier ordre, si l'on parcourt l'axe ε dans l'autre sens, le « saut » du paramètre d'ordre a lieu en une valeur ε'_c, différente de ε_c. Imaginons alors que l'on fasse varier le paramètre ε successivement dans un sens puis dans l'autre, on observera alors le phénomène d'hystérésis schématisé par des flèches sur la Figure I-5.a.

---

[7] L'appellation « premier ordre », « deuxième ordre » a pour origine une classification proposée par Ehrenfest en 1933, et basée sur des critères thermodynamiques. Ehrenfest définit une transition d'ordre n comme une transition au cours de laquelle les dérivées des potentiels thermodynamiques jusqu'à l'ordre n-1 sont continues et où leurs dérivées n-ième sont discontinues. Cette classification a permis de poser certaines bases, mais ne rend pas parfaitement compte des changements qui apparaissent lors d'une transition critique. Par exemple, elle prédit une discontinuité de la chaleur spécifique $C_P=-T(\partial^2G/\partial T^2)$ et de la compressibilité $\kappa_P=-(1/V)(\partial^2G/\partial P^2)$ lors d'une transition du second ordre, alors que, nous le verrons au §.I.3.1, la chaleur spécifique et la compressibilité ne sont pas seulement discontinues, mais *divergent* lors d'une transition du second ordre. D'autre part, cette classification se limite à une vision thermodynamique et ne fait pas référence par exemple à des critères tels que la longueur de corrélation. Elle est donc délaissée par le langage moderne, qui distingue seulement deux types de transitions, « transitions du premier ordre » d'une part et « transitions continues » ou « transitions critiques » d'autre part.

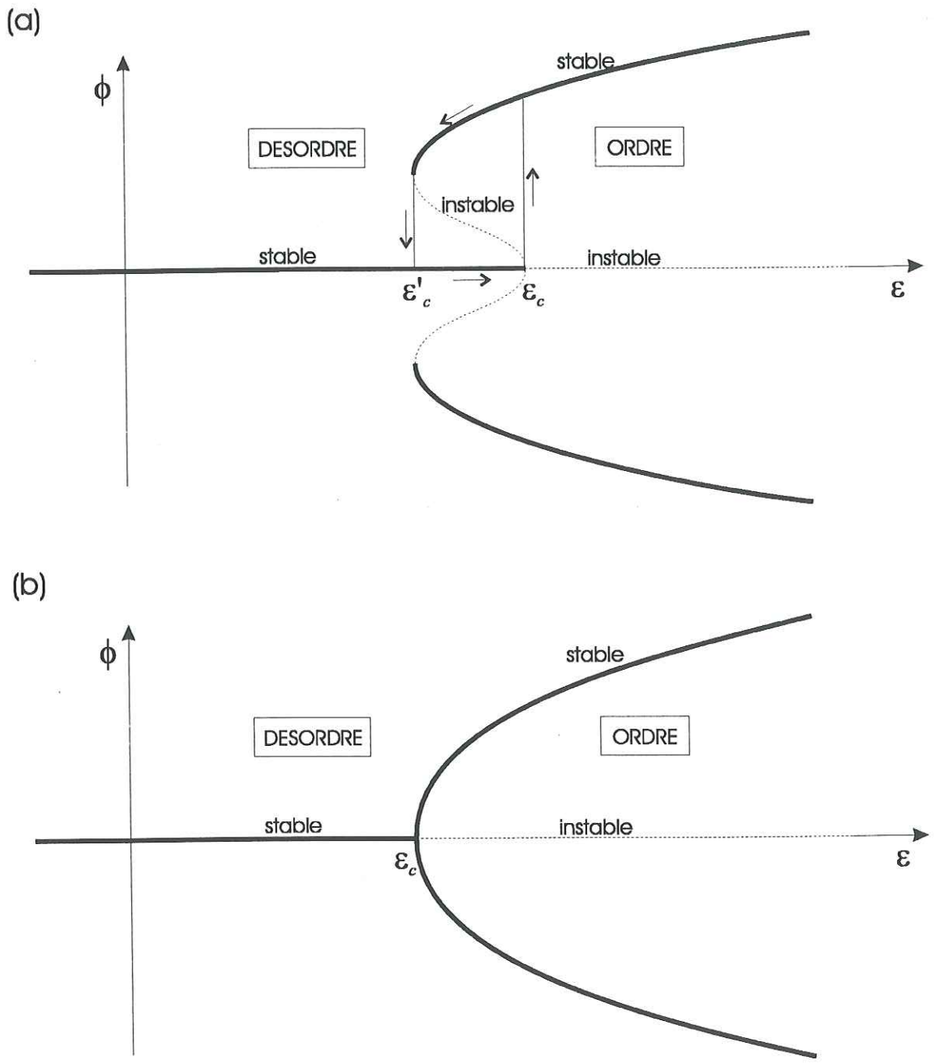


Figure I-5. Diagrammes de phases typiques d'une transition du premier ordre (a) et d'une transition critique (b). ϕ représente un paramètre d'ordre et ε un paramètre de contrôle. Les traits épais correspondent aux états d'équilibre stables du système et les traits en pointillés aux états d'équilibre instables. De tels diagrammes sont aussi appelés « diagrammes de bifurcation ». On les retrouve dans bien d'autres contextes que les transitions de phase, notamment dans l'étude des systèmes dynamiques. Dans ce contexte là, le schéma (a) est représentatif d'une bifurcation « surcritique » ou « normale » et le schéma (b) d'une bifurcation « sous-critique » (à ne pas confondre avec les états « surcritique » et « sous-critique » d'un système lorsqu'il se situe de part et d'autre d'un point critique, voir §.I.3).

Une autre façon d'éclairer la différence entre une transition du premier ordre et une transition critique est de représenter l'énergie libre f (par unité de volume) du système en fonction du paramètre d'ordre (Figure I-6). Pour être concret, on se place dans le cas d'un système ferromagnétique (voir §.I.3.1.1 et I.3.2), où le paramètre d'ordre est l'aimantation m du système par unité de volume. L'énergie libre est un potentiel thermodynamique, c'est-à-dire que ses valeurs minimales vont déterminer les états d'équilibre du système (voir définition de l'équilibre au §I.2.3). Sur l'exemple de la Figure I-6, à haute température ($T>T_C$), le minimum du potentiel est situé en m=0, que la transition soit du premier ordre ou critique. L'aimantation du système est donc nulle à haute température. Si on diminue la température, la fonction $f(m)$ va se déformer jusqu'à l'apparition d'un deuxième minimum en une valeur $m\neq0$. C'est la façon dont ce deuxième minimum apparaît qui va être très différente selon le type de transition.

Dans une transition du premier ordre (Figure I-6.a), le deuxième minimum apparaît de façon relativement indépendante du premier. Il existe une barrière de potentiel qui sépare les deux minima, de sorte que si le système vient à franchir cette barrière (sous l'effet de l'agitation thermique ou d'une perturbation extérieure par exemple), il « saute » brutalement à la valeur $m\neq0$. Dans une transition critique, au contraire (Figure I-6.b), le deuxième minimum n'apparaît que lorsque le premier a véritablement cessé d'être un minimum. Autrement dit, les deux minima ne sont jamais séparés par une barrière. En $T=T_C$, le système « glisse » de façon *continue* d'une valeur m=0 à une valeur $m\neq0$, même si les variations d'aimantation peuvent être brutales, du fait du caractère plat de la fonction $f(m)$ en $T=T_C$.

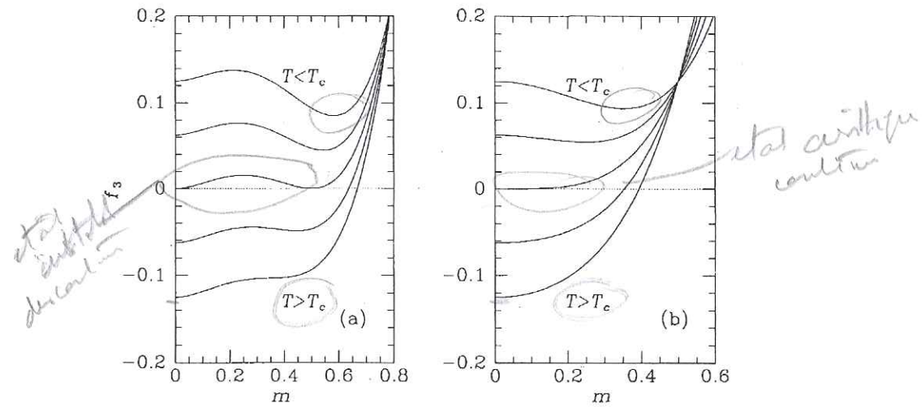


Figure I-6. Energie libre d'un système ferromagnétique en fonction de l'aimantation, pour différentes valeurs de la température. (a) dans le cas d'une transition du premier ordre (b) dans le cas d'une transition critique. Seule la partie positive de l'aimantation m est représentée sur ce diagramme. La partie négative peut être obtenue par simple symétrie par rapport à l'axe m=0. L'énergie libre est ici notée f_3 [d'après Binney et al., 1992].

I.2.3. *Théories des transitions de phase*

Il existe deux grandes approches théoriques pour aborder les transitions de phase, une approche macroscopique et une approche microscopique.

L'approche macroscopique (ou thermodynamique) consiste à définir un critère de stabilité thermodynamique d'une phase et de dire qu'il y a changement de phase lorsque ce critère est violé. Sans rentrer dans les détails, on rappellera qu'en thermodynamique, une phase est à l'équilibre si ses potentiels thermodynamiques F et G sont minimum ($\delta F=0$ et $\delta G=0$) ou de façon plus générale encore, si son entropie est maximum ($\delta S=0$). Cet équilibre est « stable » si pour toutes perturbations dans les variables du système, la variation d'entropie ΔS correspondante est négative (autrement dit, si $\delta^2 S$, $\delta^3 S$, $\delta^4 S$...<0). L'équilibre est « métastable » si la condition $\Delta S<0$ est violée pour certaines perturbations (autrement dit, $\delta^2 S<0$ mais on peut avoir $\delta^3 S$, $\delta^4 S$...>0). Enfin, l'équilibre est « instable » si certaines perturbations satisfont à la condition $\delta^2 S>0$. C'est donc la condition $\delta^2 S=0$ (ou de façon équivalente $\delta^2 F=0$ ou $\delta^2 G=0$) qui délimite la zone de stabilité d'une phase. La courbe dans l'espace des phases qui correspond à cette condition s'appelle la « spinodale ». Lorsqu'un matériau, à partir d'un état initialement stable, subit une transformation telle qu'il satisfait à cette condition, il passe de la métastabilité à l'instabilité, on observe alors une transition de phase [Papon et al., 1999].

Cette approche peut permettre de décrire toutes les caractéristiques d'une transition de phase, notamment le comportement des variables thermodynamiques du système au voisinage de la transition. En revanche, elle suppose de se donner une forme analytique pour le potentiel thermodynamique, c'est-à-dire en fait, de se donner un modèle simplifié de la réalité physique. Une exemple d'approche macroscopique, appliquée à la description des transitions critiques, est la « théorie d'échelle » proposée par Widom [1963].

La deuxième façon de modéliser les transitions de phase est de faire appel à une approche de physique statistique (voir §.I.4.1), c'est-à-dire de partir de la connaissance des forces et des interactions qui régissent les éléments au niveau microscopique, et d'essayer d'en déduire les propriétés macroscopiques du système à la transition. La différence avec l'approche thermodynamique, est qu'ici, on déduit les potentiels thermodynamiques des propriétés microscopiques du système, plutôt que de leur donner une forme analytique a priori. En revanche, cela suppose à la fois une connaissance des processus microscopiques, et également de pouvoir réaliser l'intégration des petites vers les grandes échelles, ce qui est loin d'être un problème trivial lorsqu'on a à faire à un grand nombre d'éléments. Pour cela, un ensemble de méthodes ont été développées en physique statistique (méthodes de champ moyen, méthodes numériques, groupe de renormalisation, etc.). Nous les aborderons au §.I.4.

I.3. Systèmes critiques : Propriétés à l'équilibre

Après cette introduction générale sur les phénomènes d'émergence et les transitions de phase, nous allons maintenant aborder le mécanisme central de cette thèse, à savoir le mécanisme de transition critique. Nous allons commencer par décrire ce mécanisme à travers l'étude de deux exemples expérimentaux, la transition ferromagnétique et la transition liquide-gaz d'un corps pur au point critique. Les similitudes entre ces deux types de transitions, a priori très différentes, vont nous amener naturellement aux propriétés universelles des systèmes critiques (§.I.3.4). Nous ne nous intéressons pour l'instant qu'à des systèmes *à l'équilibre*, c'est-à-dire que les propriétés que nous allons décrire sont essentiellement des propriétés statiques. Les aspects dynamiques des systèmes critiques seront abordés au §.I.5. D'autre part, nous ne nous intéressons pour l'instant qu'au comportement *thermodynamique* des systèmes critiques (c'est-à-dire le comportement correspondant au cas théorique d'un système infini). Les effets de taille finis seront abordés au §.I.6. Enfin, les phénomènes que nous allons décrire dans cette partie sont des phénomènes critiques que nous qualifierons *d'ordinaires*, par opposition aux phénomènes critiques *auto-organisés*, qui seront abordés au §.I.5.4.

I.3.1. *Exemples expérimentaux*

I.3.1.1. Transition ferromagnétique

Un certain nombre de matériaux, dits « ferromagnétiques », ont la propriété de s'aimanter au dessous d'une certaine température, connue sous le nom de « température de Curie » (T_c). T_c est de 1044K pour le fer. Le ferromagnétisme est essentiellement une propriété quantique, résultant du spin de l'électron. Chaque électron tournant sur lui-même, il possède un moment magnétique ou spin, que l'on peut représenter par un vecteur. L'aimantation totale du matériau peut alors être vue comme la somme de tous ces vecteurs.

Le diagramme de phase d'un matériau ferromagnétique est reporté sur la Figure I-7.a. Il représente l'aimantation moyenne m du matériau par unité de volume, en fonction de la température T et du champ magnétique appliqué h. Les Figure I-7.c, e, et g représentent les projections de ce diagramme dans les plans (m,h), (h,T), et (m,T), respectivement. Le point de Curie, qui est aussi le point critique de la transition ferromagnétique, est symbolisé par la lettre C.

Au dessus de la température de Curie, et en l'absence d'un champ externe, l'aimantation moyenne du matériau est nulle (voir Figure I-7.g). Cette phase est dite « paramagnétique ». Si

l'on applique un champ h, l'aimantation m est simplement proportionnelle au champ appliqué : $m \approx \mu_0 h$ (Figure I-7.c), où μ_0 est le moment magnétique par unité de volume.

Lorsqu'on refroidit le matériau en champ nul, l'aimantation m reste nulle en moyenne jusqu'à ce que l'on atteigne la température de Curie : le matériau acquiert alors brutalement et spontanément – c'est-à-dire sans nécessité d'appliquer un champ externe – une aimantation macroscopique (Figure I-7.g). On est alors dans la phase « ferromagnétique ». En l'absence d'un champ externe, le système « choisit » indifféremment une aimantation positive ou négative, les deux aimantations ayant exactement la même probabilité. On reconnaît ici un diagramme de bifurcation du même type que celui de la Figure I-5.b, où T joue le rôle du paramètre de contrôle et m celui du paramètre d'ordre. La croissance de l'aimantation dans la phase ferromagnétique se fait selon une loi de puissance :

$$m \sim \pm(T_c - T)^{\beta} \tag{I.2}$$

Si on applique alors un champ de direction opposée à l'aimantation existante, l'aimantation s'aligne quasi instantanément dans la direction du champ. Si au contraire on applique un champ de même direction que l'aimantation existante, l'aimantation varie peu. Le paramètre qui mesure la sensibilité de l'aimantation à une variation infinitésimale du champ externe est la susceptibilité magnétique. En champ nul, elle s'écrit :

$$\chi_T \equiv \left(\frac{\partial m}{\partial h}\right)_{T,h=0} \tag{I.3}$$

On reconnaît ici l'expression générale d'une susceptibilité (définie au §.I.2.1), en prenant m comme paramètre d'ordre. De part et d'autre de la température de Curie, et en champ nul, la susceptibilité magnétique est faible (pente de la courbe $m(h)$ en h=0 sur la Figure I-7.c). En revanche, à des températures proches de T_c, elle diverge selon une puissance de T-T_c

$$\chi_T \sim |T - T_c|^{-\gamma} \tag{I.4}$$

Autrement dit, en T=T_c, une variation infinitésimale du champ externe provoque une forte variation de l'aimantation. D'ailleurs, en T=T_c, et pour $h \to 0$, l'aimantation varie également en fonction du champ externe selon une loi de puissance (Figure I-7.c)

$$m \sim |h|^{1/\delta} sgn(h) \tag{I.5}$$

D'autres propriétés macroscopiques des matériaux ferromagnétiques présentent également un comportement invariant d'échelle au voisinage du point de Curie. C'est par exemple le cas

de la chaleur spécifique, $C_h \equiv (\partial U/\partial T)_h$, U étant l'énergie interne du système. En h=0 et $T \to T_c$, on a en général[8] :

$$C_h \sim |T - T_c|^{-\alpha} \tag{I.6}$$

Autrement dit, l'énergie U du matériau augmente de manière très rapide au franchissement de la température de Curie.

Les propriétés que nous avons énumérées jusqu'à présent (aimantation, susceptibilité, chaleur spécifique, etc.) sont des propriétés facilement mesurables en laboratoire. D'autres, en revanche, sont moins directement accessibles. Qu'en est-il par exemple de la longueur de corrélation ? Dans le cas d'un système ferromagnétique, nous verrons au §.I.3.2 que le couplage entre les éléments du système, ici les spins atomiques, tend à orienter ceux-ci dans la même direction, et donc à favoriser l'apparition *d'amas* de spins de même direction. Une façon de mesurer la longueur de corrélation, c'est-à-dire la distance maximale d'influence entre les spins, est de mesurer le rayon maximal de ces amas[9]. On y a accès expérimentalement en projetant sur le matériau des rayons de particules (dans ce cas des neutrons). Lorsque la longueur de corrélation atteint la longueur d'onde du rayon projeté, on observe une diffraction des particules : c'est le phénomène « d'opalescence critique ».

Ces expériences de diffraction, menées en champ nul, montrent que la longueur de corrélation, c'est-à-dire le rayon maximal des amas, diverge en loi de puissance quand $T \to T_c$:

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu} \tag{I.7}$$

On peut également estimer la décroissance de la corrélation entre les spins en fonction de la distance r qui les sépare. Celle-ci est reflétée par la fonction d'autocovariance[10] $\Gamma(r)$ de la valeur locale de l'aimantation. On observe que cette fonction a une décroissance différente selon que l'on se trouve près ou loin de la température critique. En dehors du point critique ($T \neq T_c$), les mesures montrent que $\Gamma(r)$ décroît de façon exponentielle

---

[8] Dans certains cas, la divergence de C_h au point critique est extrêmement lente et se fait plutôt de façon logarithmique. C_h peut même présenter une valeur finie en T=T_c [Binney et al., 1992, p.5]. Mais le plus souvent, une divergence en loi de puissance de C_h en T=T_c est observée.

[9] En toute rigueur, la longueur de corrélation est effectivement définie par le rayon maximal des amas, mais en prenant une définition quelque peu différente des « amas », c'est-à-dire pas simplement « un ensemble de spins voisins orientés dans la même direction ». Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe consacré au modèle d'Ising (§.I.3.2.2).

[10] La définition de $\Gamma(r)$ est au donnée en Annexe 3.3. Cette fonction est souvent citée sous le nom de « fonction de corrélation » ou simplement « corrélation » dans la littérature, bien que la définition d'une fonction de corrélation soit différente (voir Annexe 3.2).

$$\Gamma(r) \sim e^{-r/\xi} \tag{I.8}$$

où la distance caractéristique ξ peut être vue comme la longueur de corrélation. En revanche, en $T=T_c$, la décroissance de $\Gamma(r)$ est beaucoup moins rapide : elle suit une loi de puissance[11] :

$$\Gamma(r) \sim r^{-(d-2+\eta)} \tag{I.9}$$

Au voisinage du point critique ($T \approx T_c$), $\Gamma(r)$ peut être décrit par une expression qui englobe les deux cas précédents :

$$\Gamma(r) \sim \frac{e^{-r/\xi}}{r^{d-2+\eta}} \tag{I.10}$$

où $\xi \to \infty$ quand $T \to T_c$.

Il ressort donc de ces expériences de diffraction qu'au point critique, deux spins séparés d'une distance très grande ont encore une certaine probabilité, faible mais non nulle, d'influer l'un sur l'autre. C'est là une des caractéristiques majeures des systèmes critiques. Au point critique, des corrélations à longue portée apparaissent entre les éléments, bien que ceux-ci ne soient pas directement reliés les uns aux autres, de sorte qu'une petite perturbation à un endroit du système (par ex. le renversement d'un spin) peut se propager en cascade sur de très grandes distances. C'est la présence de ces phénomènes collectifs qui font d'un système critique l'exemple type d'un système complexe.

La transition ferromagnétique est un des exemples expérimentaux sur lequel a été construit le formalisme général des transitions critiques présenté au chapitre précédent. Le point de Curie joue le rôle du point critique, la température et le champ externe sont les deux paramètres de contrôle, et l'aimantation moyenne par unité de volume, qui reste nulle au dessus du point de Curie et devient non-nulle en dessous, correspond au paramètre d'ordre. Quant à la susceptibilité magnétique, elle correspond évidemment à la susceptibilité (au sens générique). On observe au voisinage de la transition ferromagnétique un grand nombre de lois d'échelles, ce qui est typique d'une transition critique. Les exposants de ces lois d'échelles sont appelés des « exposants critiques » et permettent de caractériser quantitativement le comportement du système au voisinage du point critique. La définition et les valeurs typiques de ces exposants, dans le cas d'un système ferromagnétique, sont résumés dans le Tableau I-2.

I.3.1.2. Transition liquide-gaz d'un fluide au point critique

La transition critique d'un fluide est sans doute l'exemple le plus connu de transition critique. Pour autant, sa compréhension et son recadrage dans le formalisme général des

[11] La notation d-2+η est liée à des raisons historiques.

transitions critiques (§.I.2) sont peut être moins évidents que pour la transition ferromagnétique.

Le diagramme de phase d'un corps pur est représenté sur la Figure I-7.b. Il représente le volume massique v du corps en fonction de la température T et de la pression P. Les Figure I-7.d, f, et h sont les projections de ce diagramme de phase dans les plans (v,P), (P,T), et (v,T), respectivement. La mise en correspondance de ces diagrammes avec les diagrammes équivalents de la transition ferromagnétique (Figure I-7.a, c, e, g) est destinée à mettre en avant les similitudes – mais aussi les différences – entre les deux transitions. Le point critique de la transition liquide-gaz est repéré par la lettre C (P_c=21,7 MPa, T_c=647K, v_c=3.096cm^3.g^{-1} pour l'eau).

Il est d'abord intéressant de soulever un point sémantique. On parle généralement de la « transition liquide-gaz » d'un corps pur au point critique. En fait, par analogie avec la transition ferromagnétique, il serait plus approprié de parler d'une transition d'un état « fluide », qui joue ici le rôle de la phase moins ordonnée, à un état liquide ou gaz, qui constituent les deux formes de la phase plus ordonnée, et qui correspondent respectivement aux régions $m<0$ et $m>0$ pour un système ferromagnétique. La différence par rapport à un système ferromagnétique est que, contrairement aux régions $m<0$ et $m>0$, gaz et liquide n'ont pas le même niveau d'ordre, c'est-à-dire la même entropie. Il se trouve donc qu'il existe aussi une transition liquide-gaz – dont les conditions d'apparition sont symbolisées sur la Figure I-7.f par la ligne L+G à l'exception du point critique – qui elle n'est pas critique, mais du premier ordre. Néanmoins, pour employer la terminologie usuelle, nous parlerons également de la transition « liquide-gaz » au point critique.

Pour en venir à la transition elle-même, imaginons que l'on fixe la pression à $P=P_c$ et que l'on diminue la température à partir d'une température $T>T_c$. Dans la phase $T>T_c$, la substance est dans ce qu'on appelle la phase « fluide », c'est-à-dire qu'on ne peut pas vraiment la définir comme un liquide ou un gaz, mais plutôt comme un mélange de petites gouttes de liquide intimement mêlées à des bulles de gaz. Elle est l'équivalent de la phase paramagnétique pour un aimant, où des amas de spins orientés dans une direction sont intimement mêlés à des amas de spins orientés dans l'autre direction. Dans cette phase, la longueur de corrélation, que l'on peut voir comme la taille caractéristique des gouttelettes (ou des bulles) reste faible. Le volume massique moyen v du corps est donc intermédiaire entre celui d'un liquide et celui d'un gaz et vaut $v=v_c$ aux abords du point critique (Figure I-7.h)

Au fur et à mesure que la température diminue, la taille des gouttelettes (et celle des bulles) augmente. Lorsqu'on arrive au point critique ($T=T_c$), elles varient sur toutes les échelles de longueur. La longueur de corrélation devient alors infinie, ce qui s'observe expérimentalement, comme dans le cas d'un système ferromagnétique, par un phénomène d'opalescence critique.

Enfin, lorsque $T<T_c$ (toujours en $P=P_c$) le système rentre dans la phase ordonnée, c'est-à-dire qu'il y a une bifurcation vers l'un des deux états ordonnés, de la même façon qu'un système ferromagnétique « bifurque » vers l'état $m>0$ ou $m<0$. La différence majeure est qu'ici, la

bifurcation s'effectue toujours vers l'état liquide, qui a une entropie plus faible. La quantité v-v_c, devient donc toujours négative pour $T<T_c$.

On retrouve donc, à quelques détails près, les mêmes comportements que pour un système ferromagnétique. Le paramètre d'ordre n'est plus ici l'aimantation mais la quantité v-v_c, le champ h est remplacé par P_c-P, la température joue toujours le rôle du paramètre de contrôle, et la compressibilité du fluide est l'équivalent de la susceptibilité magnétique. Enfin, le point remarquable est que l'on retrouve, près du point critique de la transition liquide-gaz, les mêmes comportements en loi de puissance que ceux observés lors d'une transition ferromagnétique (Tableau I-2 et Tableau I-3). Il s'agit là d'une des propriétés majeures des systèmes critiques, à savoir que des systèmes très différents se comportent près de leur point critique de façon remarquablement similaire. Cette propriété essentielle est appelée « propriété d'universalité» des systèmes critiques. Nous verrons au §.I.3.4 que les physiciens ne s'arrêtent pas à une discrimination en loi de puissance mais regroupent les systèmes en « classes d'universalité » lorsque leurs exposants critiques sont les mêmes. Dans le cas présent, les exposants associés à la transition liquide-gaz et ceux associés à la transition ferromagnétique diffèrent (Tableau I-2 et Tableau I-3). Transition liquide-gaz et transition ferromagnétique n'appartiennent donc pas à la même classe d'universalité. Nous reviendrons sur ces propriétés d'universalité au §.I.3.4.

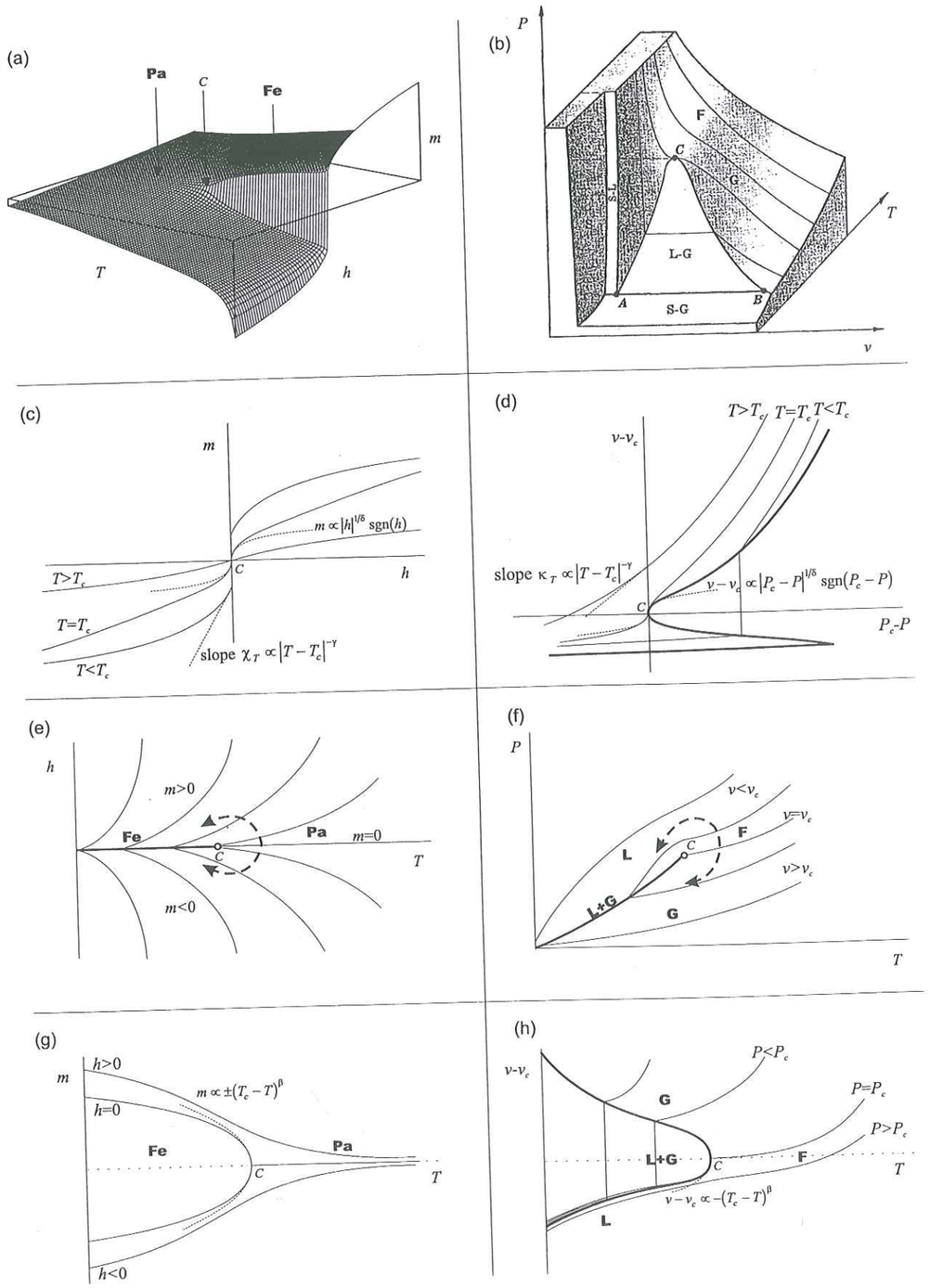
Exposant	Définition	Conditions	Valeurs typiques	ref
α	$C_h \sim \lvert T-T_c \rvert^{-\alpha}$	$T \to T_c$, $h=0$	0.003	1
β	$m \sim \pm(T_c-T)^{\beta}$	$T \to T_c$ ($T \leq T_c$), $h=0$	0.36	1
γ	$\chi_T \sim \lvert T-T_c \rvert^{-\gamma}$	$T \to T_c$, $h=0$	1.33	1-2
δ	$m \sim \lvert h \rvert^{1/\delta} sgn(h)$	$T=T_c$, $h \to 0$	4.5	1
η	$\Gamma(r) \sim r^{-(d-2+\eta)}$	$T=T_c$, $h=0$	$0 \leq \eta \leq 0.1$	2
ν	$\xi \sim \lvert T-T_c \rvert^{-\nu}$	$h=0$	2/3	2

Tableau I-2. Définitions et valeurs typiques des exposants critiques pour un corps ferromagnétique. Refs : 1-Papon et al. [1999], 2- Binney et al. [1992].

Exposant	Définition	Conditions	Valeurs typiques	ref
α	$C_V \sim \lvert T-T_c \rvert^{-\alpha}$	$T \to T_c$, $P=P_c$	0.101-0.116	2
β	$v-v_c \sim -(T_c-T)^{\beta}$	$T \to T_c$ ($T \leq T_c$), $P=P_c$	0.316-0.327	2
γ	$\kappa_T \sim \lvert T-T_c \rvert^{-\gamma}$	$T \to T_c$, $P=P_c$	1.23-1.25	2
δ	$v-v_c \sim \lvert P_c-P \rvert^{1/\delta} sgn(P_c-P)$	$T=T_c$, $P \to P_c$	4.80	1
η	$\Gamma(r) \sim r^{-(d-2+\eta)}$	$T=T_c$, $P=P_c$	0.016-0.06	3
ν	$\xi \sim \lvert T-T_c \rvert^{-\nu}$	$P=P_c$	0.625±0.006	2

Tableau I-3. Définitions et valeurs typiques des exposants critiques pour un fluide. C_V : chaleur spécifique à volume constant, $C_V=(1/V)(\partial U/\partial T)_V$; κ_T : compressibilité isotherme, $\kappa_T=-(1/V)(\partial V/\partial P)_T$. La fonction d'autocovariance $\Gamma(r)$ est ici celle de la valeur locale du volume massique. Refs : 1- Papon et al. [1999], 2- Binney et al. [1992], 3- Goldenfeld [1993].

Figure I-7. Diagrammes de phase d'un corps ferromagnétique (colonne de gauche) et d'un fluide (colonne de droite). m : aimantation moyenne par unité de volume, h : champ magnétique extérieur, T : température, P : pression, v : volume massique, v_c : volume massique au point critique, P_c : pression au point critique, C : point critique, Pa : paramagnétique, Fe : ferromagnétique, L : liquide, G : gaz, F : fluide. (a) modifié d'après Binney et al. [1992], (b) d'après Abbott et Van Ness [1983].



I.3.2. *Modèle d'Ising*

Les deux exemples précédents nous ont permis de découvrir un certain nombre de comportements typiques des systèmes critiques, en restant toutefois dans les limites liées à l'expérimentation (incertitudes, accès à un nombre limité d'observables, etc.). Les modèles que nous allons aborder maintenant (modèle d'Ising et modèle de percolation) vont nous permettre, sur des systèmes mieux contrôlés, d'aller un plus loin dans la description et la compréhension des phénomènes critiques. Notamment, nous allons profiter de ces modèles pour présenter des méthodes concrètes permettant de calculer la longueur de corrélation et la susceptibilité. Nous allons également introduire de nouveaux exposants critiques, et donner les relations qui lient ces exposants, que nous appellerons des « lois scalantes ». Ces deux parties (§.I.3.2 et I.3.3) seront donc nécessairement plus techniques que les précédentes, mais également indispensables à une description précise, et donc une compréhension profonde, des phénomènes qui apparaissent au voisinage d'un point critique.

Le modèle d'Ising, qui fut étudié pour la première fois par Lenz et Ising en 1925, avait initialement pour objectif de reproduire les caractéristiques essentielles des systèmes ferromagnétiques. Bien qu'il puisse paraître un peu détaché des problèmes de fracturation, nous lui accordons ici une grande importance, non seulement parce que, historiquement, il a joué un rôle prédominant dans la compréhension des phénomènes critiques, mais aussi et surtout parce que (i) il renferme les ingrédients essentiels qui caractérisent tout système à l'état critique, et est souvent cité comme modèle de référence, y compris en géophysique, (ii) c'est un des cas les mieux quantifiés de transition critique, (iii) il offre des richesses que n'offre pas, par exemple, le modèle de percolation ; notamment, la présence de couplage entre les éléments (intéressante pour les problèmes de fracturation où il existe des couplages élastiques entre les éléments), l'influence d'un champ extérieur, etc.

I.3.2.1. Définition du modèle

Le modèle représente un corps ferromagnétique par un ensemble de N spins, disposés aux nœuds d'un réseau à d dimensions. Si on note L la longueur de chaque côté du réseau (l'unité étant la longueur d'une maille) on a $N=L^d$ dans un réseau de maille carrée, et plus généralement, $N \sim L^d$. On suppose que les spins ne peuvent s'orienter que dans deux directions, vers le haut ou vers le bas. Ainsi, l'état s_i de chaque spin peut être décrit par une variable binaire $s_i=1$ ou $s_i=-1$. Ces spins sont soumis à deux influences majeures, d'une part un couplage entre spins voisins qui tend à aligner les spins dans la même direction, et d'autre part une agitation thermique, c'est-à-dire des renversements aléatoires des spins, qui ont un effet désordonnant sur leur orientation.

Le couplage entre les spins est introduit à travers une énergie d'interaction

$$E_{ij} = -Js_i s_j \tag{I.11}$$

où J est une constante de couplage positive et où s_i et s_j sont deux spins plus proches voisins. Le niveau d'énergie le plus bas correspond bien au cas où les deux spins pointent dans la même

direction[12]. En l'absence d'un champ magnétique extérieur, l'énergie d'une configuration $[s]=(s_i)_{i=1...N}$ du système est donc :

$$E_{[s]} = -J\sum_{i=1}^{N}\sum_{j} s_i s_j \qquad \text{(I.12)}$$

où N est le nombre de spins et où la somme sur j porte sur les plus proches voisins du spin d'indice i. $E_{[s]}$ est appelé « l'hamiltonien » du système[13].

Les fluctuations thermiques sont introduites en utilisant le formalisme de l'ensemble canonique (voir Annexe 1) ; autrement dit, on suppose que la probabilité que le système soit dans une configuration $[s]$ d'énergie $E_{[s]}$ suit la loi de Boltzmann :

$$\mathrm{P}([s]) = \frac{e^{-\beta E_{[s]}}}{Z} \qquad \text{(I.13)}$$

où le facteur de normalisation

$$Z = \sum_{[s]} e^{-\beta E_{[s]}} \qquad \text{(I.14)}$$

est appelé « fonction de partition », $\beta=1/k_B T$ est la « température inverse », et k_B la constante de Boltzmann.

On définit l'aimantation totale du système, M, comme le nombre de spins orientés vers le haut moins le nombre de spins orientés vers le bas :

$$M = \sum_{i=1}^{N} s_i \qquad \text{(I.15)}$$

L'aimantation moyenne par spin, qui joue ici le rôle du paramètre d'ordre, est simplement $m=M/N$.

I.3.2.2. Comportement des variables macroscopiques au voisinage de la transition et définition des exposants critiques

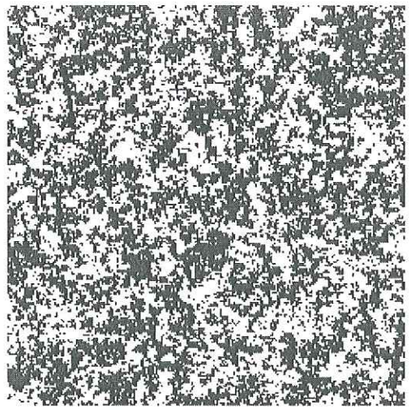
La Figure I-8 présente une image du réseau à différentes températures, lors d'une simulation effectuée par une méthode de Monte Carlo (voir §.I.4.5).

---

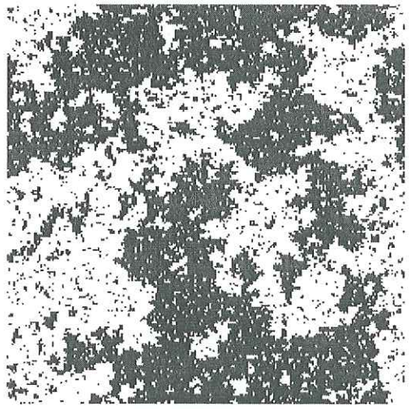
[12] Il existe de nombreuses variantes de ce modèle. Par exemple, $J<0$ correspond aux systèmes « antiferromagnétiques » (systèmes où les spins ont tendance à s'aligner dans des directions opposées). J aléatoirement positif ou négatif correspond aux « verres de spins », etc…

[13] On peut tenir compte de l'effet d'un champ extérieur h en ajoutant à l'hamiltonien un terme de champ : $E_{[s]} = -J\sum_{i=1}^{N}\sum_{j} s_i s_j - \mu_0 h \sum_{i=1}^{N} s_i$, où μ_0 est le moment magnétique par spin.

a)
$T=1.25T_c$



b)
$T=T_c$



c)
$T=0.95T_c$

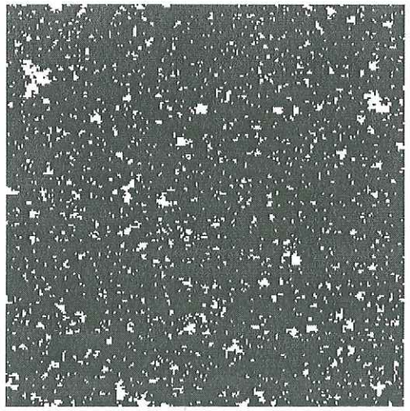


Figure I-8. Modèle d'Ising en champ nul et à différentes températures. Le réseau est de 240x240. Les spins dirigés vers le haut sont en gris foncé et ceux dirigés vers le bas en blanc. La résolution numérique a été effectuée par l'algorithme de Metropolis (voir §.I.4.5).

♦ **A haute température ($T>T_c$, Figure I-8.a)**

L'agitation thermique domine les effets d'interactions entre les spins. Autrement dit, l'orientation de chaque spin est relativement indépendante de l'orientation de ses voisins. Ceci est reflété dans la fonction d'autocovariance $\Gamma(r)$ de la variable s_i, qui décroît de façon exponentielle

$$\Gamma(r) \sim e^{-r/\xi} \tag{I.16}$$

où ξ est une mesure de la longueur de corrélation du système. Visuellement, cette longueur de corrélation correspond sur la Figure I-8.a au rayon maximal des amas finis[14], où un « amas » correspond grossièrement à un ensemble de spins voisins de même direction[15]. Notons qu'il existe deux autres façons de mesurer la longueur de corrélation, l'une à partir du moment d'ordre 2 de $\Gamma(r)$ [e.g. Stauffer, 1990],

$$\xi^2 \equiv \frac{\sum_{r=0}^{\infty} r^2 \Gamma(r)}{\sum_{r=0}^{\infty} \Gamma(r)} \tag{I.17}$$

(le dénominateur est simplement un facteur de normalisation qui permet de ramener la fonction $\Gamma(r)$ à une distribution de probabilité), l'autre en calculant le rayon moyen des amas finis [e.g. Stauffer et Aharony, 1994],

$$\xi^2 \equiv \frac{\sum_{n=1}^{\infty} R_n^2 n^2 D(n)}{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 D(n)} \tag{I.18}$$

[14] En fait, dans cette phase désordonnée ($T>T_c$), tous les amas sont finis. Néanmoins, l'intérêt d'une telle représentation de la longueur de corrélation comme le rayon maximal des amas *finis* est qu'elle est valable également dans la phase ordonnée ($T<T_c$).

[15] La définition rigoureuse d'un « amas » pour les systèmes ferromagnétiques (c'est-à-dire celle qui représente effectivement la longueur de corrélation des éléments) consiste à considérer deux spins voisins de même orientation, et à les connecter avec une probabilité p=1-exp($2J/k_BT$) [Coniglio et Klein, 1980; Stauffer, 1990, p.13].

où n est la taille d'un amas[16] (en nombre de sites appartenant à cet amas), $D(n)$ est le nombre d'amas finis de taille n divisé par le nombre total de sites (autrement dit $nD(n)=P(n)$ est la probabilité qu'un site appartienne à un amas fini de taille n), et R_n est le « rayon de giration » moyen d'un amas de taille n, c'est-à-dire :

$$R_n^2 \equiv \frac{\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|^2}{n} \tag{I.19}$$

$\mathbf{r}_i$ étant le vecteur position de chaque site de l'amas et $\mathbf{r}_0$ le vecteur position de son « centre de masse », $\mathbf{r}_0=1/n\sum_i \mathbf{r}_i$. Ces définitions de la longueur de corrélation sont très générales, et serviront dans beaucoup d'autres modèles, notamment le modèle de percolation (voir §I.3.3).

Dans cette phase désordonnée, compte tenu de la relative indépendance des spins, l'aimantation M est nulle en moyenne et les fluctuations[17] de M sont de l'ordre de $\sqrt{N}$, conformément au théorème de la limite centrée.

La susceptibilité, d'après la définition générale (§.I.2.1), correspond à la variation de l'aimantation m lorsqu'on modifie de façon infinitésimale le champ extérieur h. Une façon de l'estimer, sans nécessiter l'application d'un champ extérieur, est de considérer que cette variation d'aimantation va être globalement proportionnelle à la taille moyenne $\langle n \rangle$ des amas finis. Cette hypothèse, qui consiste à estimer la réponse dynamique du système à une perturbation extérieure à partir de ses caractéristiques géométriques à l'équilibre est connue sous le nom de « théorème de la réponse linéaire ». C'est une hypothèse fondamentale pour étudier la dynamique des systèmes critiques.

Comme pour la longueur de corrélation, il existe différentes façons d'estimer $\langle n \rangle$ (c'est-à-dire χ), soit en intégrant la fonction d'autocovariance $\Gamma(r)$,

$$\chi \sim \langle n \rangle \sim \sum_{r=0}^{\infty} \Gamma(r) r^{d-1} \tag{I.20}$$

soit à partir de la densité d'amas de taille n, $D(n)$,

[16] Nous allons ici utiliser pour décrire la taille des amas les notations n, $D(n)$, n_c, τ_n et σ_n au lieu des notations classiques s, n_s, s_c, τ-1 et σ, car ces dernières sont également utilisées classiquement (et seront utilisées dans la suite de ce manuscrit) pour décrire la taille des « avalanches » dans les systèmes dynamiques (voir §. I.5.2).

[17] Même si le système est en équilibre d'un point de vue thermodynamique, l'aimantation M fluctue constamment autour d'une valeur moyenne du fait de l'agitation thermique, ces fluctuations étant d'autant plus grandes que le système est proche du point critique.

$$\chi \sim \langle n \rangle \equiv \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 D(n)}{\sum_{n=1}^{\infty} n D(n)} \tag{I.21}$$

soit encore, à partir de la variance des fluctuations de M à l'équilibre[18] :

$$\chi \sim \frac{1}{N}(\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2) \tag{I.22}$$

où < > désigne ici une moyenne temporelle. Cette dernière équation est aussi connue sous le nom de « théorème de fluctuation-dissipation ».

Dans cette phase désordonnée, la taille moyenne $\langle n \rangle$ des amas, et par conséquent la susceptibilité, restent faibles.

♦ Lorsque la température diminue ($T \approx T_c$, Figure I-8.b)

Le couplage entre les spins joue un rôle de plus en plus important, et se manifeste par la formation d'amas de plus en plus grands. A une température critique T_c, assimilable à la température de Curie, le rayon maximal de ces amas, qui représente la longueur de corrélation, devient infini :

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu} \tag{I.23}$$

Si l'amas le plus grand devient infini, les amas de petite taille ne disparaissent pas pour autant ; ils forment simplement une structure plus fine qui se superpose à la structure à grande échelle. Plus précisément, la proportion de sites appartenant à un amas de taille n, $P(n)$, suit une loi de puissance au voisinage de $T=T_c$:

$$P(n) \sim n^{-\tau_n} f(n/n_c) \tag{I.24}$$

où n_c est une taille de coupure, qui diverge elle-même en loi de puissance quand $T \to T_c$,

[18] En quoi la variance de ces fluctuations est-elle représentative de la taille moyenne $\langle n \rangle$ des amas, et donc de la susceptibilité ? La réponse intuitive est la suivante [Sornette, 2000]. A toute température, le système peut être vu comme un système de n_a amas indépendants, comportant chacun environ $\langle n \rangle$ spins. Le théorème de la limite centrée peut alors s'appliquer à ce système de n_a amas, d'où l'on déduit que les fluctuations de M (c'est-à-dire leur écart-type) sont de l'ordre de $\langle n \rangle n_a^{1/2}$, ou autrement dit que la variance de M est de l'ordre de $\langle n \rangle^2 n_a = \langle n \rangle^2 N / \langle n \rangle = \langle n \rangle N$. La variance de M, divisée par N, est donc bien représentative de $\langle n \rangle$.

$$n_c \sim |T - T_c|^{-\frac{1}{\sigma_n}} \tag{I.25}$$

f est une « fonction de coupure » ou « fonction d'échelle ». C'est une fonction d'une seule variable ($x=n/n_c$), qui est pratiquement constante pour $x \ll 1$ et qui décroît rapidement pour $x>1$. Elle représente un effet de troncature qui affecte la distribution $P(n)$ dès que $T \neq T_c$ (voir Figure I-20). De telles fonctions de coupure affectent plus généralement toutes les distributions de probabilité de toutes les variables macroscopiques du système, dès lors que l'on s'écarte du point critique. Le fait que l'on puisse ainsi représenter l'influence d'un écart au seuil critique par une fonction d'une seule variable a d'abord été postulé à partir d'observations par Widom [1963] – c'est la base de sa « théorie d'échelle » – puis démontré plus tard par la méthode du groupe de renormalisation. On aurait pu également écrire (I.24) sous la forme $P(n) \sim n^{-\tau_n} g(R_n/\xi)$, où g est une autre fonction de coupure, dépendante du rapport entre le rayon de giration R_n et la longueur de corrélation ξ.

Cette variation sur toutes les échelles de longueur de la corrélation des spins est également exprimée à travers la fonction d'autocovariance de l'aimantation locale (ici la variable s_i) qui, comme dans le cas d'un système ferromagnétique réel, décroît de façon algébrique au voisinage de $T=T_c$:

$$\Gamma(r) \sim \frac{e^{-r/\xi}}{r^{d-2+\eta}} \tag{I.26}$$

(la fonction exponentielle au numérateur est un autre exemple de fonction de coupure). En $T=T_c$, la longueur de corrélation ξ est infinie. On peut alors utiliser la relation (I.20) pour en déduire la susceptibilité en $T=T_c$:

$$\chi \sim \langle n \rangle \sim \lim_{L\to\infty} \sum_{r=0}^{L} \frac{r^{d-1}}{r^{d-2+\eta}} \sim \lim_{L\to\infty} L^{2-\eta} \tag{I.27}$$

Dans la limite thermodynamique ($L \to \infty$), la susceptibilité est donc infinie en $T=T_c$. Au voisinage de $T=T_c$, la longueur de corrélation n'est plus infinie. La susceptibilité est donc elle aussi finie :

$$\chi \sim \langle n \rangle \sim \lim_{L\to\infty} \sum_{r=0}^{L} \frac{e^{-r/\xi} r^{d-1}}{r^{d-2+\eta}} \sim \sum_{r=0}^{\xi} \frac{r^{d-1}}{r^{d-2+\eta}} \sim \xi^{2-\eta} \tag{I.28}$$

Comme dans les systèmes ferromagnétiques réels, on peut décrire la divergence de la susceptibilité au voisinage de $T=T_c$ par une loi de puissance :

$$\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma} \tag{I.29}$$

avec, d'après (I.23) et (I.28), $\gamma = \nu(2-\eta)$. C'est une des nombreuses relations qui lient les exposants critiques et sur lesquelles nous reviendrons au paragraphe suivant.

Une autre observation intéressante en $T=T_c$ est le caractère fractal des amas, qui concerne aussi bien les amas finis que l'amas infini. En effet, la « masse » n d'un amas fini est reliée à son rayon de giration R_n par :

$$n \sim R_n^{\ D} \tag{I.30}$$

où D a valeur d'une dimension fractale. De même, si on choisit un spin de l'amas infini et que l'on note $N(R)$ le nombre de spins appartenant à l'amas infini dans un rayon R autour de ce spin, on a en $T=T_c$:

$$N(R) \sim R^D \tag{I.31}$$

avec de plus le même exposant D que pour les amas finis. Au voisinage de $T=T_c$, les amas ne sont fractals que jusqu'à une certaine échelle, ξ; au delà de cette échelle, le système apparaît comme homogène. Ceci se traduit mathématiquement; pour $T>T_c$, par [Stauffer et Aharony, 1994] :

$$N(R) \sim R^D f(R/\xi) \tag{I.32}$$

où f est une fonction de coupure, telle que pour $R>>\xi$, on ait $N(R)\sim R^d$.

Enfin, l'aimantation est toujours nulle en moyenne, mais les fluctuations de M sont beaucoup plus importantes que dans la phase $T>>T_c$. Elles sont de l'ordre de N^θ en $T=T_c$ avec $\theta>1/2$[19]. Par analogie avec les phénomènes de diffusion, on peut voir cela comme une « super-diffusion » de l'aimantation autour de sa valeur moyenne[20].

♦ A basse température ($T<T_c$, Figure I-8.c)

Dès que la température devient inférieure à T_c, le couplage entre les spins devient le facteur dominant et brutalement, plus de la moitié des spins prennent une même direction. L'aimantation devient alors soit positive, soit négative (le choix définitif d'une orientation donnée est le fruit du hasard ou d'une petite perturbation sur le système), et augmente en valeur absolue selon une loi de puissance

---

[19] On peut montrer [par ex. Sornette, 2000] que $\theta=(d+2-\eta)/2d$. En effet, nous avons vu en note n°18 qu'à toute température, le système pouvait être vu comme un ensemble de n_a amas indépendants, comportant chacun $<n>$ spins, et que les fluctuations de M étaient donc de l'ordre de $\sqrt{<n>N}$. Or, en $T=T_c$, on a d'après (I.27), $<n>\sim N^{(2-\eta)/d}$. On en déduit que les fluctuations de M en $T=T_c$ sont de l'ordre de $N^{(d+2-\eta)/2d}$.

[20] On dit qu'une loi de diffusion est « normale » quand les fluctuations (écart-type) de la somme de N variables aléatoires (ici l'aimantation) sont de l'ordre de N^θ avec $\theta=1/2$ (conformément au théorème de la limite centrée). Lorsque $\theta\neq1/2$, on parle de diffusion « anormale » (*anomalous diffusion* en anglais). Le cas $1/2<\theta<1$ correspondant à une « super-diffusion » et le cas $0<\theta<1/2$ à une « sous-diffusion ».

$$m \sim \pm(T_c - T)^\beta \tag{I.33}$$

Notons que les deux valeurs possibles de l'aimantation (positive ou négative) sont liées au fait que pour $T<T_c$, l'énergie libre possède deux minima de même hauteur en fonction de m, séparés par un maximum pour $m=0$ (ceci est illustré partiellement sur la Figure I-6.b, où seule la partie positive de l'aimantation est représentée).

En conséquence, dans cette phase, le système n'est plus symétrique vis à vis d'un renversement des spins – si on change s_i en $-s_i$ pour tous les spins, le système n'a plus les mêmes variables macroscopiques – même si les lois qui le gouvernent à l'échelle microscopique (exprimées à travers l'hamiltonien) sont, elles, toujours symétriques. On dit alors qu'il y a « brisure spontanée de symétrie ». C'est un autre exemple de phénomène (au delà des lois d'échelles) qui apparaît à l'échelle macroscopique sans être a priori prévisible à partir de la connaissance des processus microscopiques. C'est l'exemple type d'un phénomène d'émergence. Il n'est plus alors possible au système, dès lors qu'il a « choisi » une orientation donnée (par exemple $m>0$) de repasser dans l'état opposé ($m<0$). Notons toutefois que ceci n'est vrai que dans le cas d'un système infini. Dans un système fini, l'aimantation pourra éventuellement passer de la zone $m>0$ à la zone $m<0$ (et inversement), et ceci avec d'autant plus de facilités que N est petit, que la température est élevée (tout en restant inférieure à T_c), et que le temps d'observation est long.

Enfin, dans cette phase, la longueur de corrélation redevient faible. Elle correspond grossièrement sur la Figure I-8.c à la taille maximum des amas de spins orientés en sens inverse de l'aimantation macroscopique. La fonction $\Gamma(r)$ suit à nouveau une loi exponentielle (Eq. I.16) et les fluctuations de M obéissent à nouveau au théorème de la limite centrée, c'est-à-dire qu'elles sont de l'ordre de $\sqrt{N}$.

On peut résumer les principales caractéristiques de cette transition de phase sous forme d'une fiche (p.61), qui servira de trame pour l'analyse des transitions de phase suivantes.

I.3.2.3. Valeurs des exposants critiques et lois scalantes pour le modèle d'Ising

De façon globale, le modèle d'Ising reproduit, au voisinage du point critique, les comportements invariants d'échelle observés dans un système ferromagnétique réel. En revanche, si l'on compare le Tableau I-4 avec le Tableau I-2, on s'aperçoit que les exposants critiques diffèrent. La raison à cela est que le modèle d'Ising simplifie de façon grossière la réalité, en ne prenant en compte que deux états possibles pour l'orientation des spins ($s_i=1$ et $s_i=-1$), c'est-à-dire en ne considérant qu'un seul degré de liberté pour l'orientation des spins, ce qui n'est pas le cas dans la réalité (les spins peuvent s'orienter dans toutes les directions). Or, nous verrons que le nombre de degrés de libertés des éléments d'un système est un des paramètres qui influent sur la valeur des exposants critiques (§.I.3.4), expliquant ainsi la différence d'exposants entre le modèle d'Ising et les systèmes ferromagnétiques réels.

En fait, le modèle d'Ising peut également servir d'analogue à un fluide au voisinage de sa transition critique [par ex. Stanley, 1971]. Les spins orientés vers le haut correspondent alors à

un site occupé par une molécule et les spins orientés vers le bas à un site vide. Les régions dont la plupart des spins sont tournés vers le haut sont identifiées à un liquide et celles dont la plupart des spins sont tournés vers le bas sont identifiées à un gaz. Il se trouve que les exposants critiques prédits par le modèle d'Ising sont beaucoup plus en accord avec ceux d'un fluide réel (comparer Tableau I-4 et Tableau I-3) que ceux d'un système ferromagnétique réel. Ceci est lié au fait que dans les deux systèmes (modèle d'Ising et fluide réel), les éléments ont le même nombre de degrés de liberté : orientation d'un spin selon une seule direction dans le modèle d'Ising, état d'un site défini par un scalaire (présence ou non d'une molécule) dans un fluide. Nous dirons que la classe d'universalité du modèle d'Ising est la même que celle d'un fluide réel (voir §.I.3.4).

Un autre point important, que l'on a déjà évoqué au paragraphe précédent, est que les exposants critiques ne sont pas tous indépendants. On peut, à partir d'arguments dimensionnels et statistiques, dériver un certain nombre de relations entre ces exposants (voir Tableau I-5). Ces relations sont appelées des « lois d'échelles » ou « lois scalantes »[21]. On montre ainsi que seuls *deux* exposants sont indépendants – c'est-à-dire que la connaissance de deux d'entre eux permet de déduire tous les autres. Ces lois scalantes sont propres à chaque modèle, même si on retrouve certaines d'entre elles dans un grand nombre de modèles.

Pour conclure sur le modèle d'Ising, nous soulignons qu'il s'agit d'un modèle très général, qui peut en fait représenter tout système où l'on a à la fois une tendance des éléments à s'ordonner du fait de leurs interactions, et d'autre part un facteur désordonnant (bruit aléatoire), qui perturbe la synchronisation des éléments [Sornette, 2000]. Dans les types de problèmes qui nous intéressent, on peut par exemple imaginer qu'un spin représente un élément de roche, pouvant prendre deux états – intact ou endommagé – avec une énergie d'interaction telle que deux éléments voisins tendent à être dans le même état : l'endommagement de l'un entraîne l'endommagement de l'autre, la cicatrisation de l'un favorise la cicatrisation de l'autre. Plusieurs modèles de séismes basés sur ce principe ont été proposés [Lomnitz-Adler et al., 1992; Gabrielov et al., 1994].

[21] On préfère retenir le terme de « loi scalante », de façon à ne pas faire d'interférence avec l'autre définition d'une « loi d'échelle », c'est-à-dire au sens « loi de puissance ».

Conditions d'apparition du changement de phase	
Paramètres de contrôle	Température T Champ externe h
Point critique	$T=T_c$, $h=0$
Caractérisation des différentes phases	
Phase désordonnée	Phase paramagnétique ($T>T_c$)
Phase ordonnée	Phase ferromagnétique ($T<T_c$)
Paramètre d'ordre	Aimantation moyenne par spin m ($m=0$ si $T>T_c$, $m\neq 0$ si $T<T_c$)
Type de transition de phase	
Transition critique	$m(T, h=0)$ continue en $T=T_c$ Divergence de la longueur de corrélation en $T=T_c$ Lois d'échelle (voir Tableau I-4)

Exposant	**Définition**	**Conditions**	**Valeurs typiques**		**Champ moyen**
			***d*=2**	***d*=3**	
α	$C_h \sim \lvert T-T_c\rvert^{-\alpha}$	$T\to T_c$, $h=0$	0	0.119±.006	0
β	$m \sim \pm(T_c-T)^{\beta}$	$T\to T_c$ ($T\leq T_c$), $h=0$	1/8	0.326±.004	1/2
γ	$\chi_T \sim \lvert T-T_c\rvert^{-\gamma}$	$T\to T_c$, $h=0$	7/4=1.75	1.239±.003	1
δ	$m \sim \lvert h\rvert^{1/\delta} sgn(h)$	$T=T_c$, $h\to 0$	15	4.80±.05	3
η	$\Gamma(r) \sim r^{-(d-2+\eta)}$	$T=T_c$, $h=0$	1/4	0.024±.007	0
ν	$\xi \sim \lvert T-T_c\rvert^{-\nu}$	$T\to T_c$, $h=0$	1	0.627±.002	1/2
θ	$\left\langle (M-\langle M\rangle)^2\right\rangle^{1/2} \sim N^{\theta}$	$T=T_c$, $h=0$	15/16=0.94	0.829	/
σ_n	$n_c \sim \lvert T-T_c\rvert^{-1/\sigma_n}$	$T\to T_c$, $h=0$	8/15=0.53	0.643	/
τ_n	$P(n) \sim n^{-\tau_n}$	$T=T_c$, $h=0$	16/15=1.07	1.207	/
D	$n \sim R_n^{\ D}$; $n_c \sim \xi^D$	$T=T_c$, $h=0$	15/8=1.87	2.480	/

Tableau I-4 Définitions et valeurs des exposants critiques pour le modèle d'Ising. Les valeurs correspondant au cas d=2 sont des valeurs exactes, obtenues par Onsager [1944]. Les valeurs correspondant au cas d=3 sont des valeurs approchées, obtenues par une méthode de Monte Carlo [Ferrenberg et Landau, 1991]. Le modèle d'Ising à d=1 ne possède pas de point critique. Les valeurs des exposants prédits par la théorie de champ moyen (voir §.I.4.3) sont données pour comparaison. Adapté de Binney et al. [1992]. Notons que les exposants θ, τ_n, σ_n, et D sont rarement étudiés dans le cadre du modèle d'Ising – ils le sont davantage dans le modèle de percolation. Aussi, nous n'avons pas trouvé leurs valeurs typiques dans la littérature. Les valeurs correspondantes ont été déduites à partir des autres exposants et en utilisant les lois scalantes (voir Tableau I-5). Nous avons voulu mentionner ces exposants ici pour renforcer l'analogie avec le modèle percolation.

Lois scalantes	
$2\beta+\gamma=2-\alpha$	(loi de Rushbrooke)
$2\beta\delta-\gamma=2-\alpha$	(loi de Griffiths)
$\gamma=\nu(2-\eta)$	(loi de Fisher)
$\nu d=2-\alpha$	(loi de Josephson)
$\delta=(d+2-\eta)/(d-2+\eta)$	[par ex. Binney et al., 1992]
$D=d-\beta/\nu$	[par ex. Stauffer, 1990]
$d-2+\eta=2\beta/\nu$	[par ex. Stauffer et Aharony, 1994]
$D=1/\sigma_n\nu$	[par ex. Hansen, 1990]
$\tau_n=\sigma_n\beta+1$	[par ex. Hansen, 1990]
$\tau_n=2-\gamma\sigma_n$	[par ex. Hansen, 1990]
$\theta=(d+2-\eta)/2d$	[par ex. Sornette, 2000]
$\beta=d\nu(1-\theta)$	[par ex. Sornette, 2000]

Tableau I-5 Lois scalantes pour le modèle d'Ising.

I.3.3. *Modèle de percolation*

Le modèle de percolation fut introduit par Broadbent et Hammersley en 1957. Son domaine d'application est très général : transport électrique, propagation d'épidémies, feux de forêt, etc. Ce modèle a également été largement étudié ces vingt dernières années en géophysique, dans le domaine de la fracturation et des écoulements de fluide en milieu poreux. Aussi, nous en donnerons un développement succinct, en nous intéressant essentiellement à la façon dont la transition de percolation s'inscrit dans le formalisme général des transitions de phase. Pour plus de détails, nous renvoyons à l'ouvrage de Stauffer et Aharony [1994] ou à celui de Hermann et Roux [1990] pour son application à la fracturation. Des applications au transport de fluides en milieux poreux sont également traitées dans Sahimi [1995].

I.3.3.1. Définition du modèle

Considérons un réseau de dimension d, de géométrie fixée (maille carrée, triangulaire, etc.), et constitué de N sites. Nous rappelons que nous nous plaçons ici dans le cas d'un système infini, c'est-à-dire que nous étudions le comportement du modèle dans la limite $N\rightarrow\infty$. Le modèle de percolation existe en plusieurs versions (Figure I-9) :

- Percolation de liens : tous les sites sont occupés, et on établit au hasard des connections entre sites voisins avec une probabilité p.
- Percolation de sites : on occupe au hasard les sites du réseau avec une probabilité p, les sites occupés étant automatiquement connectés s'ils sont plus proches voisins.
- Percolation de sites-liens : c'est un hybride des deux précédents ; on part d'un modèle de sites dans lequel les liens entre deux sites occupés ne sont présents qu'avec une probabilité conditionnelle p_B.
- Percolation dirigée : on reprend le modèle de percolation de liens en ajoutant une orientation aléatoire sur chaque lien.

Dans tous les cas, la question posée est la suivante : quelles vont être les propriétés de connexion (et donc de transport) du réseau à grande échelle, étant données les règles de connexion définies à petite échelle (et énumérées ci-dessus pour chaque type de modèle). Nous nous limiterons ici à l'étude de la percolation de site et de la percolation de lien. Dans la suite, on appellera un « amas » un ensemble de sites connectés.

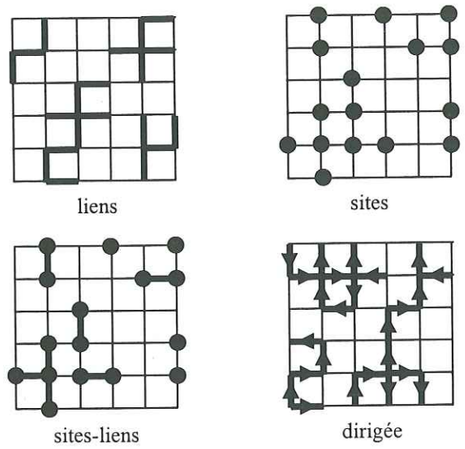


Figure I-9 Les différentes versions du modèle de percolation [d'après Lesné, 1996]

I.3.3.2. Analyse de la transition de percolation dans le formalisme des transitions de phase

Lorsque p est faible, très peu de sites sont connectés et les seuls amas présents sont de petite taille. Si on augmente progressivement la probabilité p à partir de p=0, des amas de plus en plus grands vont apparaître jusqu'à la formation d'un « amas infini » ou « amas percolant »[22] en une valeur $p=p_c$, appelée « seuil de percolation » (Figure I-10). Pour un modèle de taille finie, comme c'est le cas sur la Figure I-10, ce seuil pourra fluctuer d'une réalisation à l'autre du modèle, mais il tendra vers une valeur bien déterminée dans la limite d'un système infini. Ce seuil va séparer une phase « non percolante » ($p<p_c$), où une information (par ex. un fluide, un courant électrique, une force, etc.) ne pourra pas se propager d'un bord à l'autre du réseau, d'une phase « percolante » ($p>p_c$), où celle-ci pourra traverser le réseau.

[22] C'est-à-dire un amas qui joint deux bords opposés du réseau. Dans un modèle fini, on parle plutôt « d'amas percolant ».

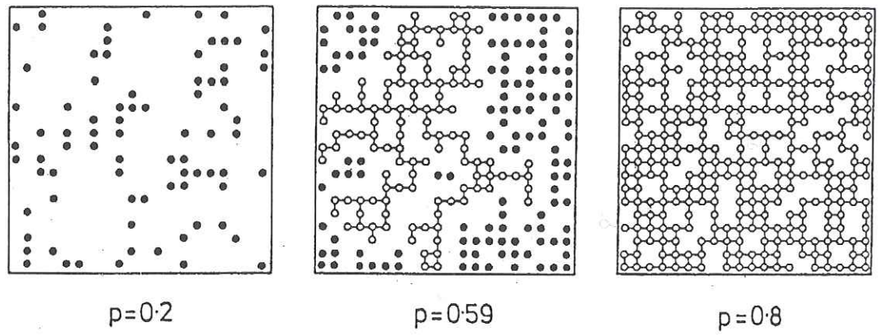


Figure I-10 Modèle de percolation de sites à différentes probabilités d'occupations p. La taille du réseau est 20x20. Les sites faisant partie d'un amas fini sont en cercles pleins et ceux faisant partie de l'amas infini en cercles vides.

Cette transition de phase[23], qui ne possède qu'un seul paramètre de contrôle, p, présente toutes les caractéristiques d'une transition critique, comme nous allons le voir maintenant à travers le comportement des variables macroscopiques suivantes :

- **Proportion de sites appartenant à l'amas percolant, P :** Il s'agit du paramètre d'ordre de cette transition. Pour $p<p_c$, il n'existe pas d'amas percolant, P=0 ; pour $p>p_c$, P>0. Cette quantité aurait pu également être définie comme paramètre d'ordre dans le modèle d'Ising.

- **Densité d'amas de taille n, $D(n)$:** Comme dans le modèle d'Ising, c'est le nombre d'amas *finis* de taille n divisé par le nombre total N de sites. $P(n)=nD(n)$ est donc la proportion de sites appartenant à un amas fini de taille n. On a :

$$\sum_n nD(n) + P = p \qquad \text{(I.34)}$$

- **Densité totale d'amas, D_a :** C'est le nombre total d'amas finis divisé par le nombre total N de sites. On a :

$$D_a = \sum_n D(n) \qquad \text{(I.35)}$$

[23] Bien que cela apparaisse moins clairement que dans le modèle d'Ising, on peut mettre en correspondance la transition de percolation avec les transitions ordre-désordre classiques (via un modèle plus général appelé « modèle de Potts » [Wu, 1982]). La transition de percolation rentre donc bien dans la définition générale d'une « transition de phase » que nous avons donnée au début de ce chapitre (§.I.2.1). La phase désordonnée correspond ici à la phase non percolante et la phase ordonnée à la phase percolante.

- **Longueur de corrélation, ξ :** Nous l'avons défini de façon générale (§.I.2.1) comme la distance maximale d'influence entre les éléments. Dans ce modèle, il n'y a pas de couplage physique entre les éléments. Par contre, le retrait ou l'ajout d'un lien peut avoir une influence sur la connexité des sites environnants. La longueur de corrélation peut alors être vue comme « l'échelle maximale à laquelle le retrait ou l'ajout d'un lien va modifier la connexité du système ». Par exemple, pour $p<<p_c$, l'échelle de connexité du réseau est très faible (seuls quelques sites sont connectés) ; par conséquent, l'ajout ou le retrait d'un lien va au plus permettre de connecter ou de déconnecter quelques sites, et ne va pas modifier de beaucoup l'échelle de connexité du système. De même, pour $p>>p_c$, la plupart des sites sont connectés sous forme d'un amas infini ; l'ajout ou le retrait d'un lien ne va pas modifier la connexité du système à grande échelle. Les seuls changements dans la connexité du système seront à l'échelle de quelques sites. Par conséquent, dans ces deux cas, la longueur de corrélation reste faible. En revanche, en $p=p_c$, la présence de l'amas infini, c'est-à-dire la connexité du système à grande échelle, ne repose que sur la présence de quelques liens dits « sensibles », dont la disparition peut séparer l'amas infini en deux parties non connectées. Autrement dit, en $p=p_c$, l'ajout ou le retrait d'un lien peut avoir des conséquences à grande échelle (en fait infinie) sur la connexité du système ; la longueur de corrélation est alors infinie. Une façon simple de mesurer cette longueur de corrélation est de la voir, comme dans le modèle d'Ising, comme le rayon typique des amas finis[24]. Cette distance peut s'estimer quantitativement à partir de la pente de la décroissance de la fonction $\Gamma(r)$ (Eq. I.16), ou à partir de la variance de $\Gamma(r)$ (Eq. I.17), ou encore à partir d'une mesure directe du rayon des amas finis (Eq. I.18).

- **Fonction de corrélation, $C(r)$:** Elle n'est pas définie dans ce modèle au sens usuel d'une « fonction de corrélation » (§.A.3.2). Elle est définie comme la probabilité qu'un site situé à une distance r d'un site occupé (et n'appartenant pas à l'amas infini) appartienne au même amas. La décroissance de cette fonction permet d'estimer la taille caractéristique des amas finis, c'est-à-dire la longueur de corrélation.

- **Susceptibilité, χ :** Elle est définie dans ce modèle comme la taille moyenne $<n>$ des amas finis. Notons que cette définition correspond bien, dans la phase ordonnée, à la définition générale donnée au §.I.2.1, c'est-à-dire l'effet d'une petite perturbation (ici, l'ajout ou du retrait d'un lien) sur la valeur du paramètre d'ordre (ici, la proportion de sites appartenant à l'amas infini). En revanche, dans la phase désordonnée, cette définition ne coïncide pas avec la définition générale donnée au §.I.2.1. : dans cette phase, l'ajout ou le retrait d'un lien ne peut pas avoir d'incidence sur la proportion de sites appartenant à l'amas infini, puisque celui-ci n'existe pas. En ce sens, le modèle de percolation est différent du modèle d'Ising. Dans ce dernier, même dans la phase désordonnée, toute fluctuation locale du paramètre d'ordre (c'est-à-dire tout changement dans l'aimantation locale) a automatiquement un effet sur sa valeur globale, puisque celle-ci est simplement la *somme* des aimantations locales. Ici, dans la phase désordonnée, les fluctuations locales de la connexité n'ont aucun effet sur la connexité à grande échelle, et donc aucune influence sur la proportion de site appartenant à l'amas infini, qui reste nulle. Ceci nous rappelle que le formalisme présenté au §.I.2.1 fournit une base générale pour définir des paramètres comme la susceptibilité ou la longueur de corrélation, mais ne doit en aucun cas être considéré comme un cadre strict, qui engloberait tout type de modèle.

[24] Dans la phase percolante, on peut la voir également comme la taille des « vides » à l'intérieur de l'amas percolant.

- **Taille caractéristique du plus grand amas fini, n_c :** Comme dans le modèle d'Ising, elle est définie par la taille de coupure de la fonction $P(n)$ (Eq. I.24).

Les lois d'échelles suivies par ces variables, ainsi que la valeur des exposants critiques correspondants, sont reportés dans le Tableau I-6. Nous rappelons que nous ne nous sommes intéressés ici qu'aux propriétés *géométriques* du modèle ; les aspects dynamiques (propriétés de transport) seront abordés au §.I.5.1. Il faut noter également qu'au delà du caractère fractal de l'amas percolant dans son ensemble, représenté par la dimension D, celui-ci possède un certain nombre de sous-structures géométriques (voir Figure I-18), elles aussi fractales, et dont les dimensions fractales n'ont pas été reportées dans ce tableau. C'est le cas par exemple du « squelette » (*backbone*), c'est-à-dire l'amas percolant duquel ont été retirés les « bras morts », des « liens sensibles » (*red bonds*), c'est-à-dire les passages obligés pour l'information et qui contrôlent les coefficients de transport, des « blobs », c'est-à-dire les parties de l'amas percolant où le transport se fait en parallèle, des bras morts (*dead ends*), etc. Les dimensions fractales correspondantes sont fournies par exemple dans Dubois [1995].

I.3.3.3. Niveaux de généralité et lois scalantes dans le modèle de percolation

On distingue dans ce modèle au moins trois niveaux de généralité, que l'on retrouve également dans le modèle d'Ising et dans la plupart des modèles présentant un comportement critique (voir Figure I-11) :

- **La valeur du seuil critique** correspond, dans un modèle infini, à une valeur bien déterminée du (des) paramètre (s) de contrôle (ici $p=p_c$), ne dépendant que de la géométrie du réseau (carré, triangulaire, etc.), de la dimensionnalité d du système (voir Tableau I-7), et pour le modèle de percolation, du modèle de percolation choisi (site ou lien), et non de l'interprétation physique des éléments (fissures, fusibles, etc.), ni de la façon dont approche le point critique (par ex., en augmentant p à partir de $p=0$ ou en diminuant p à partir de $p=1$) ;

- **Les exposants critiques** ne dépendent, eux, que de la dimensionnalité d du réseau, et non de la géométrie du réseau (carré, hexagonal, etc.), du modèle de percolation choisi, de l'interprétation physique des éléments, ou de la façon dont on approche le point critique ;

- **Les lois scalantes** (relations entre les exposants critiques) sont vérifiées quelle que soit la dimensionnalité d du réseau, et ne dépendent que du type de modèle (Ising, percolation, etc.).

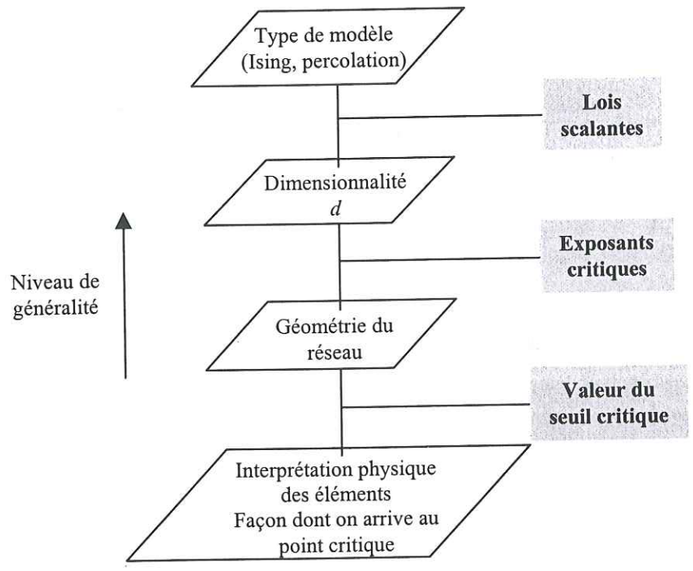


Figure I-11 Niveaux de généralité dans les modèles présentant un comportement critique.

On retrouve également dans ce modèle la plupart des exposants et des lois scalantes du modèle d'Ising (Tableau I-8), à la différence près qu'il n'existe pas ici, comme dans le modèle d'Ising, de « fluctuations critiques » du paramètre d'ordre, et que par conséquent, l'exposant θ n'est pas défini ; d'autre part, il n'y a pas non plus de champ extérieur, et donc pas d'équivalent de la loi de Griffith pour le modèle d'Ising.

Encore une fois, ce modèle montre comment à partir de règles extrêmement simples à l'échelle microscopique (uniquement une probabilité p de connexion entre deux sites) peut émerger un comportement tout à fait inattendu à l'échelle macroscopique : lois d'échelle, changement de la densité de liens percolants avec l'échelle d'observation (liée à la structure fractale de l'amas percolant en $p=p_c$, voir §.I.8.1), changement des propriétés de transport (par ex. la perméabilité) avec l'échelle d'observation (voir §.I.8.1), etc. Le modèle de percolation est très général, et peut décrire tout type de phénomène au cours duquel de petites structures statistiquement indépendantes se couplent de façon purement géométrique pour former une macro-structure. En ce qui concerne la fracturation, le modèle de percolation peut décrire la coalescence de fissures dans un matériau sous contraintes dans les situations où l'on peut considérer que les fissures apparaissent de façon indépendante, c'est-à-dire dans les situations où le couplage entre les fissures est négligeable. Cela peut être le cas par exemple dans un

matériau extrêmement hétérogène, où les effets de concentration de contraintes en pointe de fissures sont dominés par l'hétérogénéité du matériau, ou encore dans un matériau relativement ductile, telle que la fracturation se fait de façon diffuse, etc.

Conditions d'apparition du changement de phase	
Paramètres de contrôle	Probabilité d'occupation des sites (ou de présence des liens) p
Point critique	$p=p_c$
Caractérisation des différentes phases	
Phase désordonnée	Phase non percolante ($p<p_c$)
Phase ordonnée	Phase percolante ($p>p_c$)
Paramètre d'ordre	Proportion de sites appartenant à l'amas infini P (P=0 si $p<p_c$, P>0 si $p>p_c$)
Type de transition de phase	
Transition critique	$P(p)$ continue en $p=p_c$ Divergence de la longueur de corrélation en $p=p_c$ Lois d'échelle (voir Tableau I-6)

Exposant	Définition	Conditions	Valeurs typiques		Champ moyen
			d=2	d=3	
α	$D_a \sim \lvert p-p_c \rvert^{2-\alpha}$	$p \to p_c$	-2/3=-0.66	-0.64	-1
β	$P \sim (p-p_c)^{\beta}$	$p \to p_c$ ($p \geq p_c$)	5/36=0.14	0.44	1
γ	$\langle n \rangle \sim \lvert p-p_c \rvert^{-\gamma}$	$p \to p_c$	43/18=2.39	1.76	1
η	$C(r) \sim r^{-(d-2+\eta)}$	$p=p_c$	5/24=0.21	0	0
ν	$\xi \sim \lvert p-p_c \rvert^{-\nu}$	$p \to p_c$	4/3=1.33	0.88	1/2
σ_n	$n_c \sim \lvert p-p_c \rvert^{-1/\sigma_n}$	$p \to p_c$	36/91=0.39	0.45	1/2
τ_n	$P(n) \sim n^{-\tau_n}$	$p=p_c$	96/91=1.05	1.20	5/2
D	$n \sim R_n^{\ D}$; $n_c \sim \xi^D$	$p=p_c$	91/48=1.89	2.50	4

Tableau I-6. Définitions et valeurs des exposants critiques pour le modèle de percolation. Modifié d'après Hansen [1990], Dubois [1995] et Stauffer [1994]. Ces valeurs ont été obtenues soit par simulation numérique soit par des méthodes de renormalisation, voir §.I.4.4. Seuls sont présentés ici les exposants liés à la géométrie du modèle. Les exposants prédits par une approche de champ moyen sont donnés pour comparaison.

	Réseaux	Percolation de site	Percolation de lien	Champ moyen
d=2	Carré	0.59273	1/2	1/2
	Triangulaire	1/2	2 sin(π/18)=0.3473	1/3
	Hexagonal	0.6962	1-2sin(π/18)=0.6527	2/3
d=3	Cubique simple	0.3116	0.2488	1/3
	Cubique centré	0.245	0.1785	/
	Cubique faces centrées	0.198	0.119	/
	Diamant	0.428	0.388	/

Tableau I-7. Valeurs du seuil de percolation p_c en fonction de la géométrie du réseau, de la dimension d du réseau, et du type de modèle (site ou lien). Modifié d'après Hansen [1990] et Dubois [1995]. Les seuils prédits par une approche de champ moyen sont également donnés.

Lois scalantes	
$2\beta+\gamma=2-\alpha$	(loi de Rushbrooke)
$\gamma=\nu(2-\eta)$	(loi de Fisher)
$\nu d=2-\alpha$	(loi de Josephson)
$D=d-\beta/\nu$	[par ex. Stauffer, 1990]
$d-2+\eta=2\beta/\nu$	[par ex. Stauffer et Aharony, 1994]
$D=1/\sigma_n\nu$	[par ex. Hansen, 1990]
$\tau_n=\sigma_n\beta+1$	[par ex. Hansen, 1990]
$\tau_n=2-\gamma\sigma_n$	[par ex. Hansen, 1990]

Tableau I-8 Lois scalantes pour le modèle de percolation.

I.3.4. *Universalité des systèmes critiques*

I.3.4.1. Hypothèse d'universalité

On peut considérer qu'un état critique est un état relativement universel, au sens où il ne requiert que des conditions très génériques, qui peuvent être rencontrées dans des systèmes de natures très variées. Par exemple, des systèmes aussi différents qu'une forêt en feu, un réseau routier aux heures de pointe, ou un aimant près de la température de Curie possèdent tous les mêmes caractéristiques aux abords de leur point critique respectif : invariance d'échelle dans la taille des amas (d'arbres, de voitures, de spins), longueur de corrélation infinie (un feu peut se propager sur des distances très grandes, un rétrécissement peut créer un bouchon sur des kilomètres, le retournement d'un spin peut affecter un grand nombre d'autres spins), etc…

Au delà de ces propriétés génériques (invariance d'échelle, susceptibilité, etc.), les physiciens ont remarqué depuis longtemps une étonnante similarité dans la valeur des exposants critiques de systèmes a priori très différents. Nous avons vu par exemple que les exposants du modèle d'Ising sont remarquablement similaires à ceux d'un fluide réel. Ces observations laissent penser que les exposants critiques, eux aussi, ne dépendent que de facteurs très génériques, relativement indépendants de la physique « fine » de chaque système. Cette hypothèse très importante, connue sous le nom « d'hypothèse d'universalité », a été confirmée par des modèles (théorie de champ de Landau-Ginzburg), et par des analyses effectuées par la méthode du groupe de renormalisation. Il ressort de ces études que la valeur des exposants critiques ne dépendrait, en tout cas dans les systèmes en équilibre, que de trois paramètres :

- **La dimensionnalité du système, d** ;
- **La dimensionnalité du paramètre d'ordre, d'** : c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté du paramètre d'ordre, ou encore, son groupe de symétrie. Dans le modèle d'Ising, l'aimantation peut prendre une seule direction (s_i=±1) ; on a donc d'=1. C'est la même chose pour un fluide réel, où le paramètre d'ordre est un scalaire (volume massique) on a donc également d'=1. Pour un système ferromagnétique réel, l'aimantation peut prendre en général toutes les directions ; on a donc d'=3, etc.) ;
- **La portée des interactions ou connectivité, c** : on parle ici des couplages physiques entre les éléments. Les exposants vont en effet être modifiés selon que les couplages sont à courte portée (limitée aux plus proches voisins ou restant dans un rayon fini) ou à longue portée (étendus au système tout entier).

Il existe par exemple une grande classe de systèmes, regroupant entre autre le modèle d'Ising, les systèmes ferromagnétiques, ou les fluides réels, et pour lesquels les couplages physiques

sont à courte portée (limités aux plus proches voisins) ; dans cette classe de systèmes, la valeur des exposants critiques ne dépend que de d et de d', comme l'illustre la Figure I-12.

On peut ainsi en théorie regrouper les systèmes, en fonction de la valeur de leurs exposants critiques, dans des « classes d'universalité », à l'intérieur desquelles tous les systèmes sont supposés avoir les mêmes paramètres génériques (d, d', c).

Une des implications importantes de cette hypothèse est qu'à partir du moment où l'on a identifié leur classe d'universalité, on peut étudier des systèmes réels très compliqués au voisinage de leur point critique (volcan, croûte terrestre, etc.) avec des systèmes modèles simples (du type Ising, percolation, ou tas de sable, voir définition au §.I.5.4.1), la seule condition étant qu'ils aient les mêmes propriétés essentielles de symétrie, de dimensionnalité, et de distance d'interaction. C'est pourquoi il est essentiel (et c'est l'une des préoccupations majeures des physiciens) de déterminer de façon précise les exposants critiques d'un système, et de les comparer à ceux d'autres systèmes, pour déterminer s'ils appartiennent à la même classe d'universalité.

En pratique, il peut être laborieux de déterminer de façon précise les exposants critiques d'un système. Les problèmes qui apparaissent peuvent être de sources variées. Dans les modèles numériques, on est confronté à des effets de taille finie, qui peuvent créer des biais dans la valeur des exposants (voir §.I.5.4.2). Il faut alors pouvoir travailler avec des systèmes très grands, et même dans ce cas, ces effets peuvent ne pas pouvoir être traités de façon simple [voir par ex. Tebaldi et al., 1999]. Il existe d'autres méthodes que les méthodes numériques pour déterminer les exposants critiques d'un modèle (voir §.I.4 pour une revue), mais celles-ci peuvent être soit difficiles à mettre en œuvre (méthode du groupe de renormalisation), soit ne fournir des exposants critiques corrects que sous certaines conditions (par ex., une forte dimensionnalité du système dans le cas des méthodes de champ moyen).

Sur le terrain, et dans une moindre mesure en laboratoire, une source de problèmes est la pauvreté des données, à la fois en terme de qualité et de quantité (particulièrement dans le cas des séismes), ce qui limite la statistique sur les lois d'échelles. Le faible nombre de données est liée d'une part à la dynamique extrêmement lente, relativement à l'échelle humaine, des objets auxquels on s'intéresse (dans le cas de la croûte par exemple), et d'autre part au fait que l'on ne dispose bien souvent que d'une fenêtre d'observation limitée, fenêtre spatiale (par ex. une couverture végétale qui empêche l'observation de failles en surface), temporelle (la durée limitée d'un catalogue de séismes), ou énergétique (la limite de résolution d'un réseau sismique qui empêche la détection des petits séismes). D'autre part, les variables pertinentes pour le calcul des exposants critiques, par exemple la taille des amas ou des « avalanches » dans les systèmes dynamiques (voir §.I.5.2) sont souvent cachées, et ne sont accessibles qu'indirectement, à partir par exemple des émissions acoustiques qu'elles génèrent (dans le cas des « avalanches »).

Compte tenu de ces limitations, il est largement hors de portée aujourd'hui de pouvoir déterminer les exposants critiques, et donc la classe d'universalité de la dynamique d'un objet géologique. Par contre, on peut éventuellement établir que deux objets géologiques (volcans)

ou deux régions distinctes ne font pas partie d'une même classe, si leurs exposants critiques apparents (par ex. le coefficient b de la loi de Gutenberg-Richter ou la dimension fractale des failles) diffèrent au delà des barres d'erreur. Ceci est déjà très instructif, et permet de faire un tri grossier entre différentes régions, et de chercher les raisons physiques de leurs différences de comportement.

Il faut noter enfin que les paramètres énumérés ci-dessus (d, d', c), ont été établis *uniquement dans le cas des systèmes en équilibre*. Pour les systèmes dynamiques (qui nous intéressent plus directement en sciences de la Terre), la situation est un peu moins claire. On accepte également dans ces systèmes l'hypothèse d'universalité, c'est-à-dire l'idée que la valeur des exposants critiques n'est dirigée que par des paramètres très génériques. Ces paramètres génériques comprennent entre autre les trois paramètres ci-dessus, mais il est possible qu'il existe également d'autres paramètres importants, propres aux systèmes dynamiques, et encore mal identifiés. Nous reviendrons au §.I.8.2. sur les paramètres susceptibles d'influer sur la valeur des exposants dans les systèmes dynamiques.

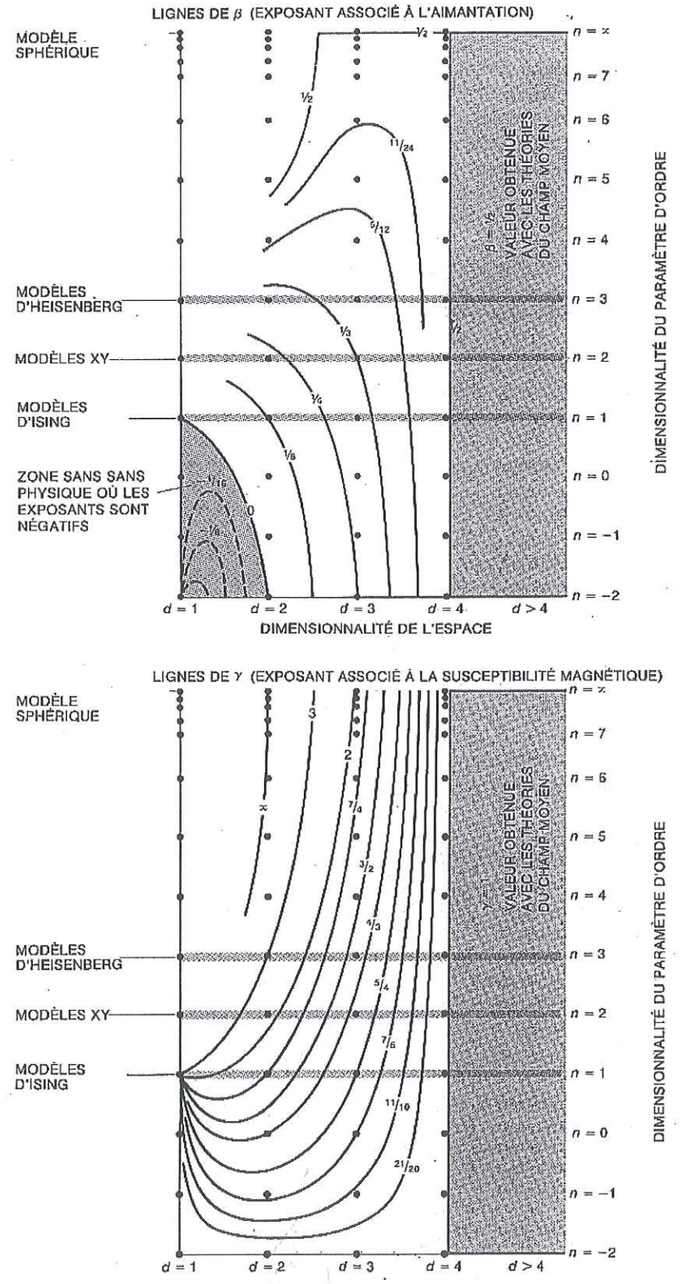


Figure I-12. Valeurs des exposants critiques β et γ en fonction de la dimensionnalité de l'espace, d, et la dimensionnalité du paramètre d'ordre (ici notée n) pour une grande classe de systèmes thermiques à l'équilibre et caractérisés par des couplages à faible portée. Pour $d \geq 4$, les exposants critiques sont les mêmes que ceux fournis par les théories de champ moyen (voir §.I.4.3). D'après Wilson [1992].

I.3.4.2. Interprétation générique de la valeur des exposants critiques dans un système en équilibre

Nous avons vu au paragraphe précédent que l'existence de lois d'échelle dans les objets naturels, ainsi que les exposants de ces lois d'échelle, semblent gouvernés par des paramètres très génériques, largement indépendants de la physique fine de chaque objet[25], et qui sont essentiellement[26] :

- **La dimensionnalité du système, *d* ;**
- **La dimensionnalité du paramètre d'ordre, *d'* ;**
- **La portée des interactions, *c* (finie ou infinie).**

Cette information, souvent ignorée des géophysiciens, est très importante pour les nombreux observateurs ou expérimentateurs qui recherchent une interprétation à la valeur des exposants des lois d'échelle observés dans les systèmes naturels. Par exemple, une littérature imposante en géophysique est consacrée à l'interprétation des valeurs du coefficient *b* de la loi de Gutenberg-Richter. Au sens le plus générique, et dans l'hypothèse où la loi de Gutenberg-Richter a pour origine un état critique de la croûte (voir §.II.1), on peut considérer que la valeur de *b*, et ses fluctuations éventuelles dans l'espace ou dans le temps, est contrôlée par ces trois paramètres essentiels (plus éventuellement quelques autres, propres aux systèmes dynamiques). Bien sûr, ces paramètres sont très génériques, et peuvent être déclinés concrètement en un grand nombre de paramètres plus « physiques », propres à chaque contexte (volcan, faille, etc.), mais une connaissance des paramètres fondamentaux qui contrôlent en amont la valeur des exposants des lois d'échelle nous paraît essentielle, non seulement pour fournir une base d'interprétation générique à la valeur des exposants rencontrés dans la nature, mais aussi pour permettre de raccrocher à une base commune l'ensemble des paramètres plus « physiques » supposés influencer la valeur des exposants, et mis en évidence de façon empirique (par ex., le degré d'hétérogénéité [Mogi, 1962] ou le niveau de contrainte [Scholz, 1968; Urbancic et al., 1992] pour ce qui est du coefficient *b* de la loi de Gutenberg-Richter, voir §.I.8.2).

Intuitivement, on peut essayer de comprendre pourquoi les paramètres génériques énumérés ci-dessus jouent un rôle si important sur la valeur des exposants critiques. Comme nous l'avons dit, un état critique résulte d'une compétition entre deux facteurs, d'une part une tendance des éléments à s'organiser (par l'intermédiaire de couplages physiques ou géométriques), et d'autre part un facteur désordonnant, par ex. un bruit stochastique, qui perturbe la synchronisation des éléments. Ce qui va déterminer la brutalité de la transition, et donc la valeur des exposants critiques (qui sont des marqueurs de la brutalité de la transition) va être la facilité avec laquelle

[25] en admettant l'hypothèse d'universalité, et en supposant également que ces lois d'échelle ont pour origine un état critique ; il existe en effet d'autres formalismes pour rationaliser l'existence de lois d'échelle, voir §.I.7.

[26] il est possible que, dans les systèmes dynamiques, il existe d'autres facteurs importants (voir §.I.8.2).

l'ordre va pouvoir se propager au sein du système. Si on augmente par exemple la dimensionnalité, *d*, on augmente le nombre de chemins entre deux points quelconques du système, et par conséquent, on facilite la propagation des corrélations d'un point à l'autre. La transition va donc être plus douce, puisque les corrélations vont commencer à apparaître assez loin du point critique. Ceci va notamment se traduire par une diminution de γ, ν, et une augmentation de β ou τ_n. (voir l'évolution des exposants avec la dimensionnalité *d* du système dans les Tableau I-4, Tableau I-6 et sur la Figure I-12).

La connectivité, *c*, va avoir un effet similaire. Une connectivité infinie (par rapport à une connectivité finie) va avoir pour effet d'augmenter le nombre de chemins d'un point à l'autre du système, et donc à faciliter le transport des corrélations. Une connectivité infinie va donc rendre la transition plus douce. C'est la situation qui correspond, par exemple, aux approches de champ moyen (voir §.I.4.3). On note en effet une diminution de γ et ν, et une augmentation de β ou τ_n quand on tend vers une approche de champ moyen (voir Tableau I-4, Tableau I-6, et Figure I-12).

En revanche, la dimensionnalité du paramètre d'ordre, *d'*, va avoir l'effet inverse. Plus on augmente *d'*, c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté du paramètre d'ordre, plus on augmente la liberté des éléments de ne pas s'ordonner les uns avec les autres éléments [voir par ex. Goldenfeld, 1993, p.55], et par conséquent, plus on retarde le moment où les éléments vont s'ordonner. Imaginons par exemple un système ferromagnétique dans lequel les spins peuvent s'orienter dans toutes les directions (d'=3). On aura beaucoup plus de mal dans un tel système à ordonner les spins (autrement dit il faudra descendre à une température plus basse) que dans un système où les spins ne peuvent s'orienter que dans deux directions (haut ou bas). En revanche, lorsque les spins vont s'ordonner, ils vont le faire de façon beaucoup plus brutale. On peut donc s'attendre à une augmentation de γ et ν, et une diminution de β et τ_n lorsque *d'* augmente.

En résumé, une augmentation de *d* a pour effet de rendre la transition plus douce (c'est-à-dire notamment de diminuer γ, ν, et d'augmenter β et τ_n), et de rentrer dans la phase ordonnée plus tôt (par ex., augmenter T_c dans le modèle d'Ising ou diminuer p_c dans le modèle de percolation). Ceci est démontré notamment par l'évolution des exposants critiques du modèle d'Ising et de percolation avec la dimensionnalité *d* (Tableau I-4, Tableau I-6, Figure I-12). De même, la présence de couplages infinis dans un système (par rapport au cas où les couplages sont finis) a également pour effet de rendre la transition plus douce. Ceci est démontré notamment par les valeurs de champ moyen des exposants critiques dans le cas du modèle d'Ising et de percolation (Tableau I-4, Tableau I-6). Enfin, on peut penser qu'une augmentation de *d'* va avoir au contraire pour effet de rendre la transition plus brutale et de retarder l'entrée dans la phase ordonnée [voir par ex. Goldenfeld, 1993, p.55], même si nous n'avons là aucun élément quantitatif pour le confirmer. La Figure I-13 et le Tableau I-9, résument schématiquement ces résultats.

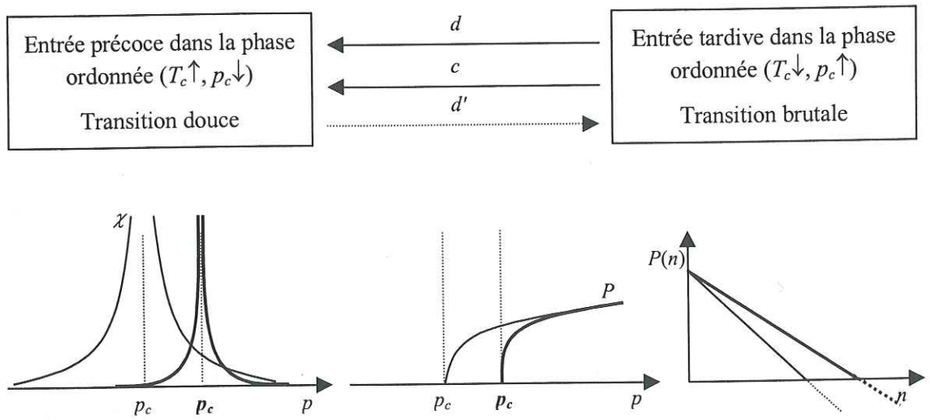


Figure I-13. Effet des paramètres d, c, et d' sur la nature plus ou moins brutale d'une transition critique. Les diagrammes du bas représentent schématiquement le comportement de la susceptibilité χ, du paramètre d'ordre P, et de la proportion de sites appartenant à un amas de taille n dans l'exemple de la transition de percolation. Les exposants correspondants sont γ, β, et τ_n. En traits fins le cas d'une transition douce, provoquée par exemple par une augmentation de d ou c ; en trait épais celui d'une transition brutale, provoquée par exemple par une diminution de d ou de c. La flèche du haut concernant d' a été mise en pointillés pour signifier que l'effet de d' sur la nature de la transition est à prendre avec plus de prudence. Nous l'avons déduit de la discussion qualitative de Goldenfeld [1993, p.55], mais n'avons pas d'élément pour le démontrer de façon quantitative.

	α	β	γ	η	ν	σ_n	τ_n	D
d	–	+	–	–	–	+	+	+
c	–	+	–	–	–	+	+	+
d'	+	+	+	+	+	–	–	–

Tableau I-9. Evolution de la valeur des exposants critiques en fonction de la variation des paramètres d (dimensionnalité du système), c (connectivité), et d' (dimensionnalité du paramètre d'ordre). Un signe + indique une corrélation, un signe moins une anticorrélation. La ligne concernant d' est à prendre avec plus de prudence (voir ci-dessus).

L'évolution de l'exposant τ_n avec les paramètres d, d', et c, est d'un intérêt particulier puisque, comme nous le verrons au §.I.5.2.1, cet exposant (ou plus précisément l'exposant τ, qui caractérise la distribution de taille des avalanches dans les systèmes dynamiques) peut être mis en relation avec le coefficient b de la loi de Gutenberg-Richter. On constate, d'après le Tableau I-9, que τ_n (et donc b) augmente avec la dimensionnalité du système, ainsi qu'avec la portée des interactions (c'est-à-dire lorsque la portée des interactions est infinie par comparaison au cas où la portée des interactions reste finie). On peut s'attendre, notamment, à ce que les modèles de séismes qui prennent en compte le caractère longue portée des interactions élastiques fournissent globalement des exposants b plus grands que ceux dont les interactions sont restreintes aux plus proches voisins (automates celulaires, blocs-ressort). Par exemple, Chen et al. [1991] ont adapté le modèle de tas de sable (voir §.I.5.4.1) au contexte des séismes, en prenant en compte le caractère longue portée des interactions élastiques. Ils observent effectivement que le coefficient b prédit par leur modèle est plus grand, et aussi plus réaliste (b~1), que celui fournit par le modèle du tas de sable (b~0.1).

De façon plus générale, le Tableau I-9 fournit une base d'interprétation à la valeur et aux variations des exposants critiques rencontrés dans la nature. On retiendra notamment que la connectivité (longue portée ou non) et la dimensionnalité du système influencent la valeur des exposants.

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
MAISON DES GEOSCIENCES
DOCUMENTATION
B.P. 53
F. 38041 GRENOBLE CEDEX
Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
Mail : ptalour@ujf-grenoble.fr
18 AOUT 2003

I.4. Méthodes de résolution des systèmes à grand nombre de degré de liberté

Nous avons décrit précédemment les comportements critiques de deux systèmes – le modèle d'Ising et le modèle de percolation, et de donner la valeur de leurs exposants critiques, sans toutefois nous intéresser aux méthodes qui ont permis d'obtenir ces résultats. Or, ce n'est pas une tâche triviale a priori que de déterminer le comportement macroscopique d'un système lorsque celui-ci est composé d'un très grand nombre d'éléments (voire un nombre infini d'éléments si on s'intéresse au comportement thermodynamique du système, comme c'est le cas dans les exemples précédents). En fait, c'est un des objectifs majeurs de la physique statistique que de proposer des méthodes permettant de déduire du comportement individuel d'un grand nombre d'éléments le comportement qui va en résulter à l'échelle macroscopique. Nous proposons ici de faire une légère parenthèse dans la trame générale de notre exposé, pour passer en revue quelques unes de ces méthodes de physique statistique (au sens large), qu'il est important de connaître lorsque l'on souhaite modéliser des phénomènes de transition de phase (par ex., en géophysique, explorer des modèles de fracturation ou de friction sur un plan de faille).

I.4.1. Principe de la physique statistique : Une théorie des probabilités avec contraintes

Autant il est simple en principe de construire un modèle, autant il peut être difficile d'évaluer son comportement macroscopique. Lorsqu'un modèle est constitué de peu d'éléments, le problème ne se pose pas. Il suffit de décrire le comportement individuel de chaque élément, et on peut ainsi extraire à tout moment les grandeurs macroscopiques qui nous intéressent. En revanche, dans un modèle constitué d'un grand nombre d'éléments, il devient vite impossible en pratique de décrire le comportement individuel de chaque élément. L'idée de la physique statistique est donc de décrire le système de façon *statistique*, c'est-à-dire de faire le sacrifice d'informations sur l'état individuel de chaque élément, mais en contrepartie, de tirer avantage du grand nombre d'éléments en présence (loi des grands nombres) pour obtenir par des *moyennes statistiques* une bonne estimation des grandeurs macroscopiques réelles (thermodynamiques) du système.

Pour illustrer ceci, considérons par exemple un système de N éléments. On suppose qu'à chaque élément est associée une variable d'état s_i, de sorte que l'état du système est défini par une configuration $[s]=(s_i)_{i=1...N}$. On note Ω l'ensemble des configurations possibles. L'objectif fondamental de la physique statistique est de rechercher la distribution de probabilité $P([s])$ des

configurations $[s]$ du système, étant donné un certain nombre de contraintes sur le système (nombre d'éléments, énergie moyenne, probabilité p de connexion entre sites, etc.). Dans le contexte des transitions de phase, nous avons appelé ces contraintes des paramètres de contrôle. La connaissance de $P([s])$ permet en principe de déduire les distributions de probabilité (et donc les moyennes statistiques) de toutes les variables macroscopiques du système. Pour une variable macroscopique X quelconque (par ex. l'aimantation dans le modèle d'Ising, la perméabilité dans le modèle de percolation, etc.) on obtient sa moyenne statistique par :

$$\langle X \rangle = \sum_{[s]\in\Omega} X_{[s]} P([s]) \tag{I.36}$$

où $X_{[s]}$ est la valeur de la variable X dans la configuration $[s]$. Ainsi, en étudiant l'évolution de $P([s])$ en fonction des différentes contraintes, on peut caractériser complètement l'évolution du système. Une illustration de ce principe, dans le cas d'un système thermique, est reportée en Annexe 1. On trouvera davantage de détails sur l'approche générale de la physique statistique, ainsi qu'une discussion de ses limitations, dans Binney et al. [1992] ou Sornette [2000].

Notons que cette approche est très générale et rejoint en fait la théorie de l'information. Elle permet de partir d'une distribution a priori de l'état d'un système, d'apporter successivement de nouvelles contraintes, et de déduire à chaque fois la distribution a posteriori qui tient compte au mieux de ces nouvelles contraintes, ou en terme plus technique, qui minimise l'entropie du système. Ce formalisme a par exemple été adopté récemment dans l'étude de la distribution d'énergie des séismes [Sornette et Sornette, 1999]. Les auteurs sont partis de l'hypothèse a priori que cette distribution suivait une loi de puissance (loi de Gutenberg-Richter), et ont recherché quel était le modèle statistique pour cette distribution qui tenait compte au mieux du fait que la vitesse de chargement d'une région (par ex. le chargement tectonique) a toujours une valeur finie. Il est apparu que ce « meilleur » modèle était une loi gamma, c'est-à-dire une loi de puissance avec une troncature exponentielle pour les séismes de forte énergie. Ceci donne une interprétation possible à l'existence de troncatures dans la loi de Gutenberg-Richter, parfois observées dans certaines régions.

Remarque : La physique statistique repose sur une hypothèse fondamentale qui est l'hypothèse « d'ergodicité ». Cette hypothèse consiste à considérer que sur une période de temps assez longue, τ, le système va occuper avec la même fréquence l'ensemble des configurations qui lui sont en principe accessibles (c'est-à-dire Ω), ce qui permet d'identifier la moyenne statistique d'une variable macroscopique sur l'ensemble Ω et sa moyenne réelle observée sur la période τ. Or, il existe certaines situations où la moyenne statistique sur l'ensemble Ω ne coïncide pas avec la moyenne temporelle, même si celle-ci était effectuée sur une période de temps infinie. Ce sont les cas où il y a brisure spontanée de symétrie, comme par exemple dans la phase ordonnée du modèle d'Ising. Dans cette phase, si l'on calcule par exemple l'aimantation m en effectuant une moyenne statistique sur toutes les configurations possibles du système, on trouve une aimantation nulle. Or, dans la « réalité » – c'est-à-dire tel qu'on peut l'observer dans les simulations numériques ou le démontrer par des méthodes de renormalisation – l'aimantation du modèle d'Ising est toujours non nulle dans la phase ordonnée (dans la limite thermodynamique), et ceci quel que soit le temps sur lequel on l'observe (même si celui-ci était

infini). Ceci s'explique par le fait qu'en réalité, le système n'occupe pas l'ensemble des configurations Ω. Pour passer par exemple d'un des deux états les plus probables – celui où tous les spins pointent dans une direction – à l'autre de ces deux états – celui où tous les spins pointent dans l'autre direction – le système doit passer par une succession d'états de très haute énergie, et la probabilité que le système franchisse cette barrière d'énergie devient nulle dans la limite d'un système infini. Par conséquent, dans cette limite, le modèle d'Ising restera toujours piégé dans l'un des deux domaines $m>0$ ou $m<0$. Pour faire coïncider dans ce cas les prédictions de la physique statistique avec les grandeurs macroscopiques réelles, il faudra effectuer une moyenne statistique non pas sur l'ensemble Ω tout entier, mais seulement sur une partie de cet ensemble, correspondant à $m>0$ ou à $m<0$.

I.4.2. *Résolution exacte*

Nous venons de voir que le comportement macroscopique d'un système pouvait en principe être déduit complètement de la distribution de probabilité $P([s])$ de ses configurations microscopiques. En pratique, le calcul de $P([s])$ s'avère souvent impossible dès que N devient grand. En effet, il faut pour cela effectuer une sommation sur toutes les configurations $[s]$ du système (voir Annexe 1, Eq. A1.1). Or, ce nombre croît de façon exponentielle avec N. Par exemple, dans le cas le plus simple où chaque élément ne peut prendre que deux états – comme par exemple dans le cas du modèle d'Ising – il y a 2^N configurations possibles. Pour N=100, on atteint déjà 10^{30} configurations ! Il faudra donc en général faire appel à des méthodes d'approximations.

Un exemple (rare) de modèle qui a pu être résolu de façon exacte est le modèle d'Ising dans le cas d=2 et h=0 [Onsager, 1944]. La découverte de cette solution exacte a été très importante, car elle a permis, par comparaison, d'estimer la validité des méthodes d'approximation. En revanche, on ne possède toujours pas de solution exacte du modèle d'Ising pour d=2, $h\neq0$ ou d=3, ni du modèle de percolation pour $d\geq2$.

Dans la suite, nous présentons trois des principales méthodes d'approximations, à savoir la méthode de champ moyen, la méthode du groupe de renormalisation, et l'approche par la simulation numérique. Mentionnons simplement qu'il existe également d'autres méthodes importantes de résolution en physique statistique, telles que par exemple le développement à haute température [Domb et Green, 1976] ou la méthode dite « du développement epsilon », [voir Wilson, 1992].

I.4.3. *Approximation de champ moyen*

Les théories (ou approximations) de champ moyen consistent à négliger le caractère local des interactions et à considérer que chaque élément interagit avec tous les autres, c'est-à-dire que la portée des couplages est infinie. Chaque élément ressent ainsi une même influence

« moyenne », identique à un champ qui serait fixé de l'extérieur. Par exemple, dans le modèle d'Ising, l'approximation de champ moyen consiste à supposer que c'est l'aimantation totale, et non uniquement celle des proches voisins, qui agit sur chaque spin. On est ainsi ramené à l'analyse de N éléments *indépendants* soumis à un champ extérieur. Cette indépendance des éléments simplifie radicalement la résolution du modèle, et permet d'estimer les valeurs moyennes des variables macroscopiques. Une illustration de cette approche, dans le cas du modèle d'Ising, est reportée en Annexe 2 (pour ce qui concerne le modèle de percolation, se référer à Binney et al. [1992, p.161]).

Les théories de champ moyen ont été les premiers essais de formulation mathématique d'un phénomène critique [Wilson, 1992]. On y trouve par exemple la théorie de Van der Waals pour les fluides (1873), la théorie de Weiss pour les systèmes magnétiques (1907), ou la théorie de Landau (1937), qui est une formulation générale des théories de champ moyen. Elles fournissent en général une bonne intuition de ce qui se passe au voisinage d'un point critique : notamment, elles prévoient l'existence d'un point critique et de lois d'échelle au voisinage de ce point critique. Aujourd'hui encore, elles sont couramment utilisées en première approche, pour dégager la physique essentielle d'un nouveau type de transition de phase.

En revanche, elles sont moins satisfaisantes d'un point de vue quantitatif puisqu'elles ne permettent pas de reproduire les valeurs exactes des exposants critiques, observées expérimentalement ou estimées par d'autres approches, telles que la méthode du groupe de renormalisation (voir par ex. Tableau I-4 et Tableau I-6). D'autre part, elles n'estiment pas correctement le seuil critique auquel apparaît la transition : elles surestiment T_c dans le modèle d'Ising ou sous-estiment p_c dans le modèle de percolation (voir Figure I-14 et Tableau I-7).

Cette incapacité des théories de champ moyen à prévoir les véritables exposants critiques est liée au fait que, près d'un point critique, les fluctuations locales des grandeurs macroscopiques (par ex. l'aimantation dans le modèle d'Ising ou la connexité dans le modèle de percolation) sont d'extension infinie. Par conséquent, on n'a plus le droit de négliger ces fluctuations locales dans l'analyse du comportement macroscopique du système. Néanmoins, les prédictions des théories de champ moyen s'améliorent au fur et à mesure que la dimension d du système augmente. Elles fournissent même des résultats exacts, comme l'illustre la Figure I-12, à partir d'une certaine dimension d_s appelée « dimension critique supérieure » (par exemple, d_s=4 pour le modèle du type Ising ou d_s=6 pour le modèle de percolation). Ceci n'est pas tout à fait surprenant. En effet, l'hypothèse fondamentale des théories de champ moyen est que la portée des couplages est infinie. Or, le nombre de plus proches voisins augmente avec la dimension du réseau. Par conséquent, lorsque d augmente, l'influence d'un élément voisin particulier est de moins en moins importante et la situation physique correspond de mieux en mieux à l'hypothèse principale faite dans les théories de champ moyen. Par contre, on ne sait toujours pas pourquoi il existe une frontière brusque (d_s) au delà de laquelle les exposants prédits par ces théories sont exacts [Wilson, 1992].

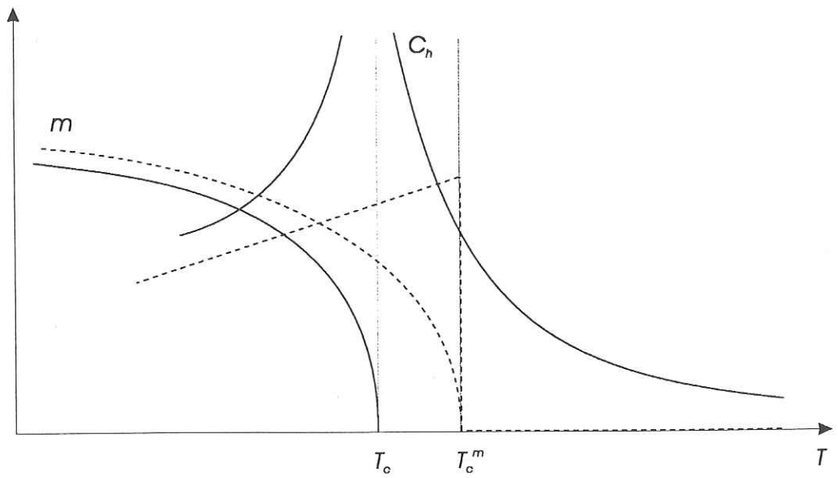


Figure I-14. Comparaison schématique entre les prévisions des théories de champ moyen (en traits pointillés) et les résultats obtenus par la méthode du groupe de renormalisation (en traits pleins) dans le cas du modèle d'Ising. m est l'aimantation moyenne par spin, C_h la chaleur spécifique, T_c la température critique exacte et T_c^m la température critique prévue par la théorie de champ moyen [modifié d'après Papon et al., 1999].

I.4.4. Méthode du groupe de renormalisation

L'incapacité des méthodes de champ moyen à rendre compte quantitativement des phénomènes critiques a conduit les physiciens à chercher d'autres méthodes de résolution, plus adaptées aux conditions particulières de corrélations à grande distance et d'invariance d'échelle propres aux systèmes critiques. La méthode du groupe[27] de renormalisation, introduite par L. P. Kadanoff [1966] et développée ensuite par K. Wilson dans les années 70 [Wilson et Kogut, 1974] s'est révélée être un outil particulièrement puissant et adapté à l'étude des phénomènes critiques. Elle utilise précisément l'invariance d'échelle du système au point critique pour considérer le point critique comme un *point invariant* par transformations d'échelles successives.

Pour illustrer cette méthode, plaçons nous dans le cas d'un modèle discret sur réseau. On note L l'extension du réseau, c'est-à-dire la longueur de chacun de ses côtés. Le principe général consiste à effectuer par itérations une succession de changements d'échelle, en partant de l'échelle microscopique (celle où sont fixées en principe les règles du système) et en remontant vers les grandes échelles. Chaque changement d'échelle ($n \rightarrow n+1$), que l'on appelle une « renormalisation », consiste en trois étapes :

[27] Le terme de « groupe » est lié à la notion mathématique de « groupe » [voir par ex. Lesné, 1996].

La première étape consiste à remplacer un petit groupe d'éléments ou « bloc » de niveau n par un élément unique de niveau n+1. Il existe différentes façons de grouper les éléments. La seule contrainte est que le réseau de niveau supérieur doit être exactement identique, après contraction de ses longueurs par un facteur k, au réseau initial, ceci afin de permettre de procéder par itérations. Sur la Figure I-15 sont illustrées trois façons appropriées de grouper un réseau carré.

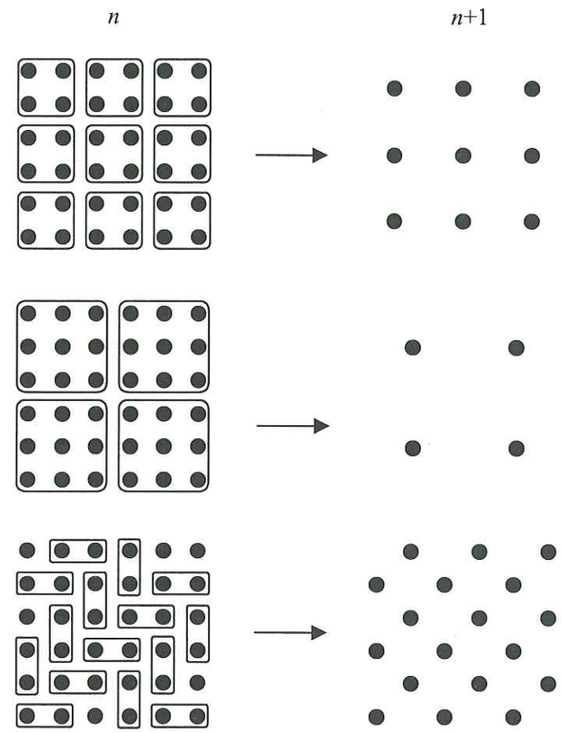


Figure I-15 Trois façons de renormaliser un réseau carré. Dans chaque cas, le réseau de niveau n+1 est exactement identique aux réseau de niveau n après contraction des distances par un facteur $k=\sqrt{2}$, k=2, et k=3, respectivement. Dans ce dernier cas, une rotation de 45° est également nécessaire. Le nombre d'éléments dans le réseau de niveau n+1 a été réduit d'un facteur k^2=2, k^2=4, et k^2=9, respectivement. Inspiré de Binney et al. [1992].

La deuxième étape consiste à déterminer les propriétés du système au niveau n+1, c'est-à-dire :

- l'ensemble des états occupés par les éléments de niveau n+1 (par ex., vers le haut ou vers le bas dans le modèle d'Ising, perméable ou imperméable dans le modèle de percolation).

- la distribution de probabilité associée à ces différents états (par ex., probabilité p_{n+1} que deux spins de niveau n+1 soient parallèles, probabilité 1-p_{n+1} qu'ils soient antiparallèles ; probabilité p_{n+1} qu'un lien de niveau n+1 soit perméable, probabilité 1-p_{n+1} qu'il soit imperméable)
- toutes les propriétés des éléments de niveau n+1 qui dépendent de cette distribution (par ex., les constantes de couplages effectives entre spins voisins de niveau n+1)
- l'ensemble des grandeurs thermodynamiques du système au niveau n+1 (aimantation moyenne par spin de niveau n+1, fonction d'autocovariance, probabilité P_{n+1} qu'un site de niveau n+1 appartienne à l'amas infini, etc.)

Pour cela, on utilise d'une part les propriétés des éléments au niveau n (distribution de probabilité de leurs différents états) et d'autre part une règle dite « de décimation », qui fixe comment un élément de niveau n+1 va apparaître, étant donné l'état des éléments de niveau n. Cette règle fixe en quelque sorte la façon dont on va moyenner l'information à l'échelle inférieure. C'est de cette règle que dépend le succès de la méthode : celle-ci doit reproduire le plus fidèlement possible l'effet réel des transformations d'échelle sur les propriétés physiques du système étudié.

Dans le modèle d'Ising, c'est souvent la « règle de la majorité » qui est utilisée : la direction prise par un spin de niveau n+1 est celle de la majorité des spins de niveau n (Figure I-16.a). Mais on pourrait également choisir de donner au spin de niveau n+1 la direction d'un spin de niveau n tiré au hasard. Dans le modèle de percolation, on peut par exemple décider qu'un site de niveau n+1 est « occupé » s'il existe un chemin continu de sites occupés reliant le bord gauche au droit du bloc de niveau n (Figure I-16.b). Il existe d'autres règles de décimation pour le modèle de percolation [voir par ex. Lesné, 1996, p.327]. Dans un modèle plus appliqué à la fracturation, qui reste comme la première formulation du problème de fracturation en terme de phénomène critique, Allègre et al. [1982] ont utilisé la règle dite du « pilier résistant » ou « pilier sain » : un élément de roche à l'échelle n+1 est considéré comme « résistant » (par opposition à « fragile ») si un pilier d'éléments résistants compose le bloc de niveau n (Figure I-16.c). Pour chaque modèle, on peut ainsi varier la règle de décimation ou le nombre d'éléments dans chaque bloc, l'objectif étant de reproduire le plus fidèlement possible les processus physiques réels.

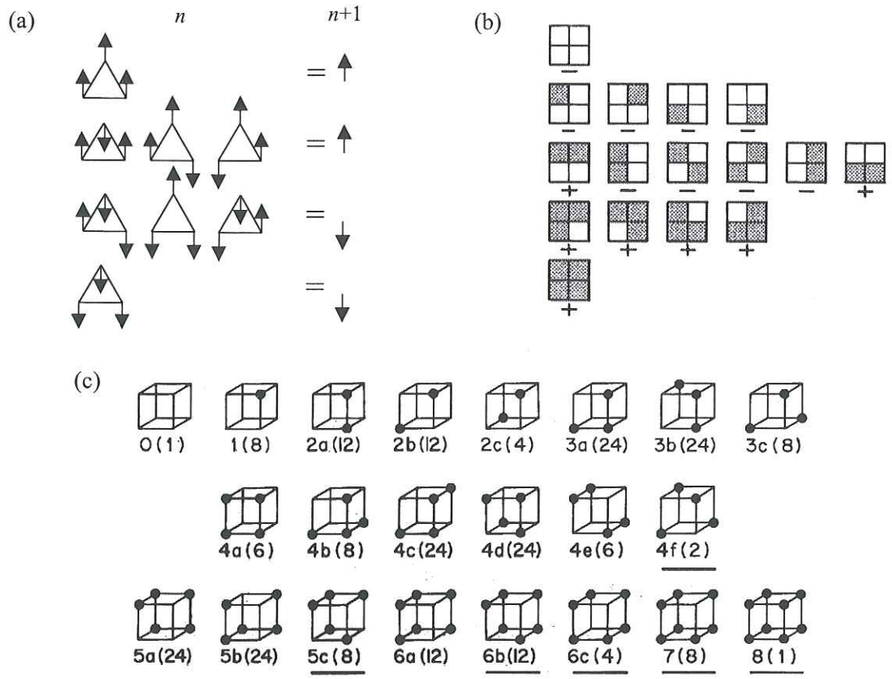


Figure I-16 Quelques règles de décimation pour trois modèles différents. (a) modèle d'Ising sur réseau triangulaire à deux dimensions. (b) modèle de percolation de site sur réseau carré à 2 dimensions [d'après Turcotte, 1992] (c) modèle de fracturation d'Allègre et al. [1982]. Les règles de décimation utilisées pour chaque modèle sont les suivantes : (a) La direction prise par le spin de niveau n+1 est la direction majoritaire des spins de niveau n. (b) Une cellule de niveau n+1 est perméable s'il existe un chemin continu de cellules perméables reliant le bord gauche au bord droit du bloc de niveau n. En gris, les cellules perméables, en blanc les cellules imperméables. Les configurations perméables sont indiquées par un signe +. (c) Un élément de niveau n+1 est résistant s'il existe un pilier (c'est-à-dire deux éléments sur une même arête) d'éléments résistants de niveau n. Les sites occupés par un point noir indiquent les sites fragiles ; les autres sont les sites résistants. Les configurations fragiles sont soulignées par un tiret.

Enfin, la troisième étape consiste à diviser toutes les longueurs par k de façon à obtenir un réseau exactement identique à l'original, c'est-à-dire avec une longueur de maille a, mais avec des propriétés différentes.

On peut ainsi itérer un grand nombre de fois ces trois opérations, en changeant à chaque fois l'échelle d'observation d'un facteur k. En général, c'est-à-dire en dehors d'un point critique, non seulement les longueurs caractéristiques du système changent à chaque renormalisation (extension du système, $L_{n+1}=L/k$, nombre d'élément, $N_{n+1}=N_n/k^d$, longueur de corrélation, $\xi_{n+1}=\xi_n/k$), mais également les propriétés du système (distribution de probabilité de l'état des éléments, $p_{n+1}=f(p_n)$, constantes de couplage entre les éléments, $K_{n+1}=g(K_n)$, et toutes les

grandeurs thermodynamiques du système). En fait, chaque changement d'échelle revient à changer la valeur apparente des paramètres de contrôle (p_n dans le modèle de percolation, T_n et h_n dans le modèle d'Ising). Ce « flot »[28] de la valeur des paramètres de contrôle (on les note ici de façon générique ε) en fonction de l'échelle d'observation n peut s'exprimer mathématiquement par :

$$\varepsilon_{n+1} = R_n(\varepsilon_n) \tag{I.37}$$

où R_n est un opérateur dit « de renormalisation ». Il est crucial pour la mise en œuvre de la méthode (c'est-à-dire pour pouvoir utiliser l'opérateur de façon récursive), que celui-ci garde exactement la même forme à chaque renormalisation, c'est-à-dire, que R_k ne dépende pas de k (on peut alors simplement le noter R). Dans le modèle de percolation, et en utilisant la règle de décimation décrite plus haut, on aboutit à l'équation de renormalisation suivante :

$$p_{n+1} = 2p_n^2(1-p_n)^2 + 4p_n^3(1-p_n) + p_n^4 \tag{I.38a}$$

$$p_{n+1} = 2p_n^2 - p_n^4 \tag{I.38b}$$

On peut alors facilement déterminer le point critique d'un système comme le point pour lequel les propriétés du système restent inchangées par l'application successive d'un nombre infini de renormalisations. Notamment, on pourra déterminer la valeur critique ε_c du paramètre de contrôle en cherchant le point invariant ou « point fixe » de l'équation (I.37), c'est-à-dire la solution de l'équation : $\varepsilon_c=R(\varepsilon_c)$. Cette solution peut être obtenue graphiquement, comme l'illustre la Figure I-17 dans le cas du modèle de percolation. On peut également, à partir de la vitesse du flot des paramètres de contrôle par rapport à leur valeur critique, déterminer la valeur des exposants critiques :

$$X_n = (\varepsilon_n - \varepsilon_c)^m \tag{I.39}$$

où X_n est la valeur d'une variable macroscopique X à l'échelle n.

28 Ce terme, qui provient de l'anglais *flow*, est spécifique au langage de la renormalisation, et signifie simplement « évolution ».

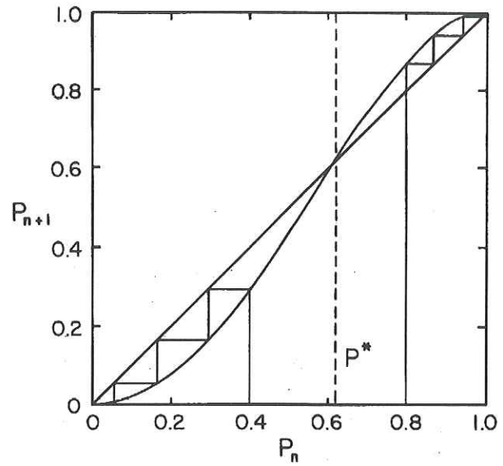


Figure I-17. Recherche graphique du point fixe de l'opérateur de renormalisation dans le cas du modèle de percolation et pour la règle de décimation décrite dans le texte [d'après Turcotte, 1989]. Le seuil critique (ici noté p^*) correspond à l'intersection de la fonction $f(p)=p$ et de la fonction $R(p)=2p^2-p^4$. Cette figure illustre également le flot du paramètre de contrôle : pour une valeur initiale p_0 inférieure ou supérieure à p^*, la valeur de p_n s'éloigne de p^* à chaque renormalisation, et tend respectivement vers les points 0 ou 1, qui sont les deux points fixes *stables* de l'opérateur de renormalisation, le point $p=p^*$ étant quant à lui un point fixe *instable*. Le caractère instable (ou répulsif) du point critique $p=p^*$ est lié au fait que la dérivée de la fonction $R(p)$ en $p=p^*$ est supérieure à 1.

En fait, la méthode du groupe de renormalisation revient à transférer le problème fondamental de la physique statistique, c'est-à-dire décrire la distribution de probabilité $P([s])$ des états microscopiques pour un grand système et son évolution en fonction de la valeur des paramètres de contrôle, dans la recherche de la distribution $P([s])$ pour une succession de systèmes plus petits (représentant chacun une échelle donnée) et de son évolution en fonction de l'échelle de ces systèmes.

La méthode du groupe de renormalisation permet de retrouver des exposants critiques en bon accord avec les exposants réels. D'autre part, elle démontre l'existence de lois d'échelles, qui n'avaient jusque là été que postulées à partir d'observations expérimentales et d'arguments dimensionnels [par ex. Widom, 1963]. Elle démontre également le caractère universel des systèmes critiques (voir §.I.3.4) : en effet, on s'aperçoit que les détails du système tels que la géométrie du réseau (maille carrée, triangulaire, etc.) disparaissent dès les premières renormalisations.

En revanche, l'inconvénient de cette méthode est qu'elle est souvent difficile à mettre en œuvre techniquement et ne peut s'appliquer que dans des cas simples. Elle requiert en effet de trouver pour chaque modèle une façon particulière de grouper les éléments telle que l'opérateur de renormalisation garde la même forme à chaque renormalisation, et que l'ensemble des états pris par les éléments (par exemple –1 et 1 pour le modèle d'Ising) restent également les mêmes. En fait, techniquement, la renormalisation s'avère souvent plus facile à réaliser dans l'espace de

Fourier plutôt que dans l'espace réel. Pour avoir plus de détails sur cette méthode relativement sophistiquée, on renvoie à la lecture de Lesné [1996] ou de Binney et al. [1992].

I.4.5. Résolution numérique

La simulation numérique est de loin la méthode la plus utilisée en géophysique pour explorer les modèles de fracturation et de génération de séismes mettant en jeu un grand nombre d'éléments (§.I.8.2). Contrairement aux autres méthodes, qui se basent sur une description statistique du système, elle consiste à décrire exactement le comportement individuel de chaque élément. Le traitement statistique d'une série d'observations – c'est-à-dire par exemple la réalisation du modèle un grand nombre de fois (dans le cas de modèle statiques comme la percolation) ou l'observation du comportement du modèle sur un temps très long (dans le cas de systèmes dynamiques comme le modèle du tas de sable, voir §.I.5.4.1) – permet d'obtenir les grandeurs macroscopiques recherchées.

Le problème inévitable des modèles numériques est leur taille *finie*. De ce fait, ils ne peuvent décrire fidèlement le comportement thermodynamique du modèle (c'est-à-dire celui que l'on observerait dans un système infini) que lorsque la longueur de corrélation ξ est inférieure à la taille L du système. Lorsque ξ devient supérieure à L, comme par exemple au voisinage d'un point critique, il apparaît des biais dans les variables macroscopiques du système (par ex., le seuil critique n'est pas celui observé dans la limite thermodynamique, la distribution en taille des amas, $P(n)$, est tronquée aux grandes valeurs, etc.) et il faut alors faire des hypothèses – hypothèses dites de « lois d'échelles en taille finie » – pour étendre les résultats du modèle fini à la limite thermodynamique. Nous reviendrons sur ces effets de taille finie au §.I.6. Une façon usuelle de tenter d'éviter des effets de bord est de choisir des conditions aux limites périodiques, c'est-à-dire que l'on « enroule » le réseau en joignant ses bords opposés. Mais même dans ce cas, il peut subsister des problèmes si la longueur de corrélation ξ est supérieure à L [voir par ex. Mouritsen, 1984].

Dans le cas du modèle de percolation, la méthode de résolution numérique consiste simplement à occuper les sites (ou à couper les liens) aléatoirement avec une probabilité p. On réalise cette opération un grand nombre de fois, et on déduit les propriétés du système en effectuant une moyenne sur toutes ces réalisations.

En ce qui concerne le modèle d'Ising, la méthode de résolution numérique la plus classique est l'algorithme de Metropolis. La simulation est effectuée à température constante. On part d'une configuration initiale du système, choisie par exemple de manière aléatoire. On tire au sort un spin i du système que l'on se propose de faire éventuellement changer d'état ($s_i \rightarrow -s_i$). On évalue la différence d'énergie $\Delta E = E_2 - E_1$ entre les configurations 1, celle où le spin i est dans son état initial, et 2, celle où le spin i est dans l'état modifié. On calcule la probabilité p_{12} de transition de la configuration 1 vers la configuration 2, qui est donnée d'après la loi de Boltzmann par

$$p_{12} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\Delta E}{kT}\right)} \tag{I.40}$$

et on effectue la transition vers la configuration 2 avec la probabilité p_{12}. On réitère cette procédure avec un nouveau spin tiré au sort, jusqu'à ce que les variables globales du système (aimantation, etc.) se stabilisent en moyenne.

Nous citerons au §.I.8.2 une ensemble de modèles, appliqués à la fracturation, qui pour la plupart ont été résolus de façon numérique.

I.5. Systèmes critiques : Propriétés dynamiques

Les systèmes que nous avons abordés jusqu'à présent (Ising, percolation) sont des systèmes à l'équilibre (voir définition au §.I.2.3). Par conséquent, les propriétés que nous avons décrites sont pour la plupart des propriétés *statiques* (taille des amas, densité de l'amas percolant, etc.). Nous avons vu cependant que certains systèmes, bien qu'« à l'équilibre » au sens thermodynamique, sont en fait soumis en permanence à une agitation thermique, qui leur confère un certain nombre de propriétés dynamiques (fluctuations du paramètre d'ordre, susceptibilité, etc.). Ici, nous allons nous intéresser exclusivement aux propriétés dynamiques des systèmes critiques.

En dehors des systèmes à l'équilibre soumis à une agitation thermique, il existe deux types de situations dans lesquelles on peut rencontrer des phénomènes critiques dynamiques :

- Le cas où un système critique purement *statique*, comme un réseau de percolation, sert de support géométrique à un phénomène de transport (fluide, électricité, maladie, feu). Dans ce cas, le système lui-même n'est pas modifié au cours du temps. On cherche typiquement à établir comment les propriétés géométriques critiques du système vont influer sur ses propriétés de transport.
- Le cas d'un système critique *dynamique* ou *hors d'équilibre*. Un système critique hors d'équilibre est par définition un système qui n'est pas dans un état d'énergie libre minimum, et est constamment en train de se réajuster face à des changements dans les conditions extérieures (variations de température, variations du champ extérieur, apport d'un flux d'énergie). Le système reste néanmoins non loin de son point critique, de telle sorte qu'il exhibe un certain nombre de propriétés critiques dynamiques. Dans ce cas, le système est modifié au cours du temps, et ce à quoi on s'intéresse typiquement est la *réponse* du système à ces sollicitations extérieures (temps de retour du système à l'équilibre, nombre d'éléments perturbés au cours de la relaxation, etc.). La frontière n'est pas toujours nette entre un système à l'équilibre et un système dynamique, car la dynamique de ce dernier n'est pas nécessairement continue ; elle peut être intermittente, marquée par des épisodes (avalanches) durant lesquels le système passe d'un état métastable à un autre, entrecoupés de périodes « calmes », où le système est momentanément à l'équilibre. C'est le cas par exemple d'un système critique auto-organisé, que nous verrons plus loin.

La classe des systèmes critiques dynamiques peut être elle-même découpée en deux catégories :

- Les systèmes **critiques dynamiques ordinaires (CDO)**. Ce sont simplement des systèmes critiques qui sont mis hors d'équilibre par un changement de leur(s) paramètre(s) de contrôle. Imaginons par exemple un aimant, dans lequel on ferait varier la température alternativement au dessus et au dessous de la température de Curie.

- Les systèmes **critiques auto-organisés (CAO)**. Ce sont des systèmes soumis à une sollicitation lente (typiquement un flux d'énergie), et qui fluctuent spontanément autour leur point critique sans que l'on ait à ajuster leur « paramètre de contrôle ». Nous verrons précisément dans quel sens il faut entendre cette « absence de paramètres de contrôle » dans les systèmes CAO. Un grand nombre de modèles de séismes ou de structuration de la croûte à grande échelle possèdent ce caractère critique auto-organisé.

L'étude des phénomènes critiques dynamiques est un domaine relativement nouveau, en tout cas beaucoup moins connu que celui des phénomènes critiques à l'équilibre. C'est un des domaines de recherche les plus actifs actuellement en physique statistique, et aussi le plus intéressant pour ce qui nous concerne en science de la Terre, où l'on cherche essentiellement à comprendre des phénomènes dynamiques (séismes, réponse d'un réservoir d'hydrocarbures à des changements de pression, transport de contaminant dans la croûte, etc.). Il est donc important de rester au fait des avancées les plus récentes dans ce domaine.

I.5.1. Propriétés de transport des systèmes critiques statiques

La première situation que nous allons étudier est celle d'un système critique purement statique, par exemple le modèle de percolation, servant de support géométrique à un phénomène de transport (propagation de fluide dans un édifice volcanique, propagation d'un feu dans une forêt, propagation d'un courant électrique sur un réseau, etc.). Les quantités qui vont alors nous intéresser sont des « coefficients de transport », c'est-à-dire des quantités qui relient un flux (par ex. un flux de chaleur, une intensité électrique, un débit hydraulique) à une force qui est à l'origine de ce flux (différence de température, différence de potentiel électrique, différence de pression), et qui expriment l'efficacité du transport. Des exemples de coefficients de transport sont la conductance thermique, la conductance électrique, la perméabilité hydraulique, les coefficients de diffusion, la viscosité, le module d'Young, etc. La question que l'on se pose est de savoir comment les propriétés géométriques critiques d'un système vont influer sur ses coefficients de transport. On se placera dans les exemples suivants dans le cas du modèle de percolation.

I.5.1.1. Perméabilité (conductance)

Imaginons un réseau de percolation où chaque lien activé représente une fissure, et dans lequel on injecte un fluide. On suppose, dans cet exemple simple, que chaque fissure a « en gros » la même ouverture, c'est-à-dire la même perméabilité. On cherche à établir le lien entre la densité de fissures, p, et la perméabilité du réseau à grande échelle.

Pour une densité de fissures $p<p_c$, il est bien évident que la perméabilité sera nulle, puisqu'il n'existe pas encore d'amas joignant deux bords opposés du réseau. A $p=p_c$, un amas percolant va apparaître. Le fluide va alors pouvoir s'écouler, mais très difficilement, car il va devoir emprunter des chemins obligés (liens sensibles), qui vont diriger toute la perméabilité à grande

échelle (voir Figure I-18). Celle-ci va donc rester faible, c'est-à-dire de l'ordre de la perméabilité d'une seule fissure. Au fur et à mesure que p augmente à partir de p_c, le nombre de chemins en parallèle participant au transport va devenir plus important, et la perméabilité macroscopique va ainsi augmenter. Plus précisément, l'augmentation de la perméabilité avec la densité de fissures p va suivre une loi de puissance :

$$K \sim (p - p_c)^{\mu} \tag{I.41}$$

La perméabilité augmente beaucoup moins vite dans la phase percolante que la taille de l'amas percolant (μ est en effet supérieur à β, voir Tableau I-10 et Tableau I-6, par ex. en 2D, μ=1.3 alors que β=0.14) exprimant le fait que seule une petite fraction de celui-ci intervient dans l'écoulement au voisinage du point critique.

On observerait exactement le même type de phénomène si l'on remplaçait le fluide par un courant électrique, et que l'on s'intéressait cette fois à la conductance électrique du réseau au voisinage du point critique. La conductance suivrait la même augmentation en loi de puissance au dessus du seuil critique (équation (I.41)), avec le même exposant μ. A l'heure actuelle, il n'a pas été établi de loi scalante claire reliant μ aux autres exposants critiques. Pour l'heure, μ doit donc être considéré comme un nouvel exposant indépendant.

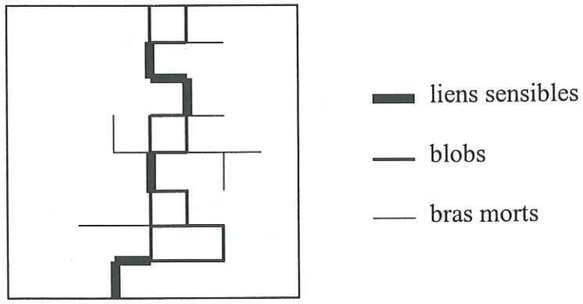


Figure I-18 Représentation de l'amas percolant au point critique de percolation, dans un réseau carré à 2 dimensions. Les liens sensibles correspondent aux passages obligés pour l'écoulement, les blobs sont les liens où l'écoulement se fait en parallèle, les bras morts ceux où il n'y a pas d'écoulement [modifié d'après Bour, 1997].

I.5.1.2. Coefficient de diffusion

Un problème intéressant, en particulier pour le stockage de déchets, est de savoir comment va diffuser une particule ou un contaminant dans un système critique statique [Stauffer et Aharony, 1994; Lesné, 1996; Sornette, 2000]. Supposons qu'une particule soit placée sur l'amas percolant d'un réseau de percolation, et effectue une marche aléatoire selon les règles suivantes : A chaque pas de temps, elle choisit une direction au hasard ; si le lien correspondant à cette direction est activé, la particule se déplace d'un site dans cette direction, sinon, elle reste

au même endroit et choisit à nouveau une direction au hasard. On recherche quelle va être la distance quadratique moyenne parcourue par la particule au cours du temps, pour différentes densités p de liens présents sur le réseau.

Pour p=1, la particule va suivre une loi de diffusion classique :

$$R^2 \sim D_f t \tag{I.42}$$

où R^2 est la distance quadratique moyenne effectuée par la particule pendant un temps t. D_f est le coefficient de diffusion (ou diffusivité). Lorsqu'on enlève des liens du réseau, tout en restant au dessus du seuil critique ($p_c<p<1$), la particule va être freinée dans sa diffusion et le coefficient de diffusion va diminuer pour atteindre une valeur nulle en $p=p_c$ [Stauffer et Aharony, 1994] :

$$D_f \sim (p - p_c)^{\mu} \tag{I.43}$$

On remarque que l'exposant critique du coefficient de diffusion, μ, est le même que l'exposant de la perméabilité (ou de la conductance électrique).

Au point critique va se produire un phénomène particulier, à savoir que la diffusion va devenir « anormale », c'est-à-dire du type :

$$R \sim t^k \tag{I.44}$$

Avec $k \neq 1/2$. Il s'agit plus précisément d'un phénomène de sous-diffusion (*sub-diffusion*) car $k<1/2$. Concrètement, cela signifie que plus on s'éloigne du point d'injection, plus la diffusion de la particule se fait lentement. En d'autres termes, le coefficient de diffusion est dépendant de l'échelle[29]. Ceci permet d'attirer l'attention sur le fait que la diffusion d'un contaminant dans un réseau de fissures au seuil de percolation est extrêmement lent, et que la contamination d'un site situé à une distance donnée d'un site de stockage peut s'effectuer sur une échelle de temps beaucoup plus longue que ne le prévoient les lois de diffusion classique [voir par ex. Sornette, 2000, p.72].

Un même phénomène de diffusion anormale (sous-diffusion) de la contrainte après un séisme a été remarqué par certains auteurs [Marsan et al., 1999]. Ceux-ci ont mis en évidence une expansion géométrique de la zone de répliques après un séisme selon une loi du type $R \sim t^k$ (équation (I.44)), avec k=0.18 à 0.34. Un tel phénomène peut s'interpréter en terme d'une géométrie fractale des failles qui « diffusent » la contrainte au cours des répliques.

I.5.1.3. Module d'Young et résistance à la rupture d'un matériau

[29] Le coefficient de diffusion n'est qu'une des nombreuses quantités qui dépendent de l'échelle au point critique. Nous reviendrons sur ces effets d'échelle au §.I.8.1.

On s'intéresse ici à un autre coefficient de transport, en rapport notamment avec les problèmes de fracturation, qui est le module d'Young d'un matériau élastique. On considère à nouveau un réseau de percolation, dans lequel cette fois les liens présents sur le réseau représentent de petites barres élastiques, ayant chacune un certain module d'Young E_0. On cherche à déterminer le module d'Young macroscopique, E, du matériau en fonction de la densité de barres élastiques présentes sur le réseau.

Pour $p<p_c$, le matériau n'a aucune résistance à la déformation, puisqu'il n'existe pas d'amas percolant de barres élastiques traversant le réseau. A $p=p_c$, le matériau acquiert une certaine rigidité, mais faible ($E \sim E_0$), car la charge n'est supportée que par quelques barres, celles correspondant aux liens sensibles. Pour $p \geq p_c$ le module d'Young augmente lentement en suivant une loi de puissance [par ex. Stauffer et Aharony, 1994, p.112] :

$$E \sim (p - p_c)^T \tag{I.45}$$

avec $T=\mu+2\nu$ (on rappelle que μ est l'exposant de la conductivité, voir §.I.5.1.1, et ν celui de la longueur de corrélation). La valeur de T est donnée dans le Tableau I-10.

Si maintenant on considère que chaque barre élastique a une certaine résistance à la rupture F_0, on peut déterminer de la même façon la résistance à la rupture du système à l'échelle macroscopique en fonction de la densité de barres présentes sur le réseau. Celle-ci augmente également en loi de puissance pour $p>p_c$ [Guyon et al., 1987; Gilabert et al., 1990]:

$$F \sim (p - p_c)^f \tag{I.46}$$

avec un exposant $f=2\nu$.

De nombreux modèles de ce type ont été proposés pour étudier la rupture d'un matériau soumis à une charge croissante [par ex. Allègre et al., 1982; Arcangelis et al., 1989; Hermann et Roux, 1990; Andersen et al., 1997; Zapperi et al., 1997a]. Tous reposent sur l'idée que l'endommagement d'un matériau (ou d'une roche) peut être vue comme la rupture progressive de liens dans un système élastique, chaque lien rompu correspondant à l'apparition d'une fissure (ou à la croissance d'une fissure existante). La plupart d'entre eux sortent du cadre strict de la percolation, au sens où ils prennent en compte les effets de concentration de contrainte en tête de fissure (c'est-à-dire que la probabilité d'apparition des fissures n'est plus uniforme) ou bien la présence d'hétérogénéités. Certains de ces modèles prévoient l'existence d'une transition critique (c'est-à-dire notamment une diminution continue du module d'Young et du seuil de rupture vers une valeur nulle au point critique), alors que d'autres sont plus en accord avec une transition du premier ordre, c'est-à-dire avec une discontinuité de ces paramètres. Nous reviendrons au §.II.1.1. sur les différentes façons d'aborder la fracturation en terme de transition de phase.

Exposant	Définition	Conditions	Valeurs typiques	
			d=2	d=3
μ	$K=(p-p_c)^{\mu}$	$p \to p_c$ ($p \geq p_c$)	1.30	2.02
k	$R=t^k$	$p=p_c$	0.33	0.20
T	$E=(p-p_c)^T$	$p \to p_c$ ($p \geq p_c$)	3.96	3.80
f	$F=(p-p_c)^f$	$p \to p_c$ ($p \geq p_c$)	2.66	1.76

Tableau I-10 Définitions et valeurs des exposants critiques associés aux phénomènes de transport dans le modèle de percolation. K : perméabilité ; R : racine carrée de la distance quadratique moyenne parcourue par une particule en diffusion. ; E : module d'Young ; F : résistance à la rupture.

I.5.2. *Introduction d'exposants critiques dynamiques*

Avant d'en venir à la description des systèmes critiques dynamiques proprement dit, il nous faut définir un certain nombre de quantités et d'exposants critiques propres à ces systèmes. Un système dynamique, nous l'avons dit, est un système qui répond à une sollicitation extérieure. Selon la nature des éléments (par ex., la capacité des éléments à emmagasiner de l'énergie dans les systèmes à seuils) et le rapport d'échelle de temps entre la sollicitation et la relaxation du système, cette réponse va se faire de façon continue ou sous la forme d'événements intermittents que l'on appelle des « avalanches ». Une avalanche peut en fait être décomposée en une somme de relaxations élémentaires, dans chacune desquelles un élément transmet une perturbation (par ex. une certaine quantité d'énergie) à d'autres éléments (généralement ses plus proches voisins). On caractérise ces avalanches par leur taille, leur durée, et leur extension spatiale. Nous allons ci-dessous définir chacune de ces variables, et décrire leur distribution de probabilité au voisinage d'un point critique. Dans tous les modèles de transition de phase appliqués à la fracturation, ces avalanches sont assimilées aux séismes, et leur taille, définie ci-dessous, est considérée comme proportionnelle à l'énergie (ou au moment sismique) du séisme correspondant.

I.5.2.1. Taille des avalanches, s

Il s'agit du nombre de relaxations élémentaires qui ont lieu au cours d'une avalanche. Hormis dans certains modèles, dans lesquels on interdit à un élément de devenir plusieurs fois instable au cours d'une avalanche, il est possible en principe qu'un élément contribue plusieurs fois à la taille de l'avalanche.

Au voisinage d'un point critique ($\varepsilon \approx \varepsilon_c$), la taille des avalanches devient invariante d'échelle, c'est-à-dire que leur distribution de probabilité $P(s)$ est décrite par une loi de puissance :

$$P(s) \sim s^{-\tau} f_1(s/s_c) \tag{I.47}$$

f_1 étant une fonction d'échelle (ou fonction de coupure) et s_c une taille de coupure, qui est fonction de la longueur de corrélation du système :

$$s_c \sim \xi^{D_s} \tag{I.48}$$

Lorsque le système s'approche du point critique ($\varepsilon \to \varepsilon_c$), la taille de coupure tend vers l'infini :

$$s_c \sim \left|\varepsilon - \varepsilon_c\right|^{-1/\sigma} \tag{I.49}$$

avec, d'après (I.48), (I.49) et (I.7) : $D_s = 1/\sigma\nu$. Il peut donc en principe se produire au point critique des avalanches de taille infinie, même si, comme l'indique la décroissance en loi de puissance de l'équation (I.47), les grandes avalanches sont beaucoup plus rares que les petites. Compte tenu de l'analogie entre la taille des avalanches et l'énergie des séismes réels, l'équation (I.47) peut être considérée comme l'analogue dans les modèles de la loi de Gutenberg-Richter [Ishimoto et Iida, 1939; Gutenberg et Richter, 1949] :

$$P(M) \sim M^{-1-B} \tag{I.50}$$

où $P(M)$ est la probabilité d'occurrence d'un séisme de moment sismique M dans une région et une période de temps données et où l'exposant B vaut environ 2/3 [Kagan, 1997; Sornette et Sornette, 1999][30].

I.5.2.2. Durée des avalanches ou temps de relaxation, d[31]

C'est simplement le temps que met le système à retrouver l'équilibre à partir du moment où l'avalanche se déclenche. Dans les modèles numériques, c'est en général chaque relaxation élémentaire qui donne la base de temps sur laquelle on calcule la durée d'une avalanche. Ce temps est bien entendu lié à la longueur de corrélation du système : plus on est proche du point critique, plus le temps de relaxation augmente. C'est ce que l'on appelle le phénomène de « ralentissement critique ». Cette lenteur de relaxation près du point critique fige le système vis-à-vis d'influences extérieures trop rapidement variables. En d'autres termes, le système a une certaine « viscosité ».

Au voisinage d'un point critique, la durée des avalanches suit également une distribution en loi de puissance :

[30] B est relié à l'exposant b de la distribution fréquence-magnitude des séismes (*b-value*) par $B=b/c$, où $c \approx 1.5$ [Kanamori et Anderson, 1975].

[31] Nous utilisons pour la durée des avalanches la même notation que la dimension du système (d), sans risque toutefois de les confondre car elles seront utilisées dans des contextes très différents.

$$P(d) \sim d^{-\tau_d} f_2(d/d_c) \tag{I.51}$$

f_2 est une fonction de coupure et d_c est la durée maximum des avalanches, qui dépend de la longueur de corrélation :

$$d_c \sim \xi^z \tag{I.52}$$

On attribue généralement à z le qualificatif d'« exposant critique dynamique »[32]. Lorsqu'on se rapproche du point critique ($\varepsilon \to \varepsilon_c$), ce temps de relaxation maximum tend vers l'infini :

$$d_c \sim \left(\varepsilon - \varepsilon_c\right)^{-1/\sigma_d} \tag{I.53}$$

avec, d'après (I.52), (I.53) et (I.7) : $z = 1/\sigma_d\nu$.

I.5.2.3. Extension spatiale des avalanches, n

C'est le nombre d'éléments *distincts* impliqués dans une avalanche (en général, $n \neq s$ car un élément peut participer plusieurs fois à une même avalanche). n a une interprétation géométrique simple : c'est la taille de l'amas formé par l'ensemble des éléments impliqués dans une avalanche. Nous adoptons pour cette variable (et pour ses exposants critiques) les mêmes notations que la taille des amas dans les systèmes à l'équilibre, c'est-à-dire n, τ_n, σ_n, et D.

Au voisinage d'un point critique, nous avons :

$$P(n) \sim n^{-\tau_n} f_3(n/n_c) \tag{I.54}$$

$$n_c \sim \left|\varepsilon - \varepsilon_c\right|^{-1/\sigma_n} \tag{I.55}$$

$$n_c \sim \xi^D \tag{I.56}$$

où $P(n)$ est la distribution de probabilité qu'une avalanche implique un nombre n d'éléments distincts, n_c est l'extension spatiale maximum des avalanches, et D la dimension fractale de l'amas formé par les éléments impliqués dans une avalanche. On a, d'après (I.55), (I.56) et (I.7) : $D = 1/\sigma_n\nu$.

I.5.2.4. Susceptibilité, χ

La susceptibilité, dans les systèmes dynamiques, est définie comme la taille moyenne des avalanches, $\langle s \rangle$ [Vespignani et Zapperi, 1998]. Comme dans les systèmes à l'équilibre, la susceptibilité augmente en loi de puissance au voisinage du point critique :

[32] Même si tous les exposants que nous introduisons ici peuvent être qualifiés d'exposants critiques dynamiques, ce qualificatif se rapporte plus particulièrement, dans la littérature, à l'exposant z.

050 035824 8

$$\chi \sim |\varepsilon - \varepsilon_c|^{-\gamma} \tag{I.57}$$

I.5.3. *Systèmes critiques dynamiques ordinaires*

I.5.3.1. Description générale

Les systèmes critiques dynamiques ordinaires (CDO) sont des systèmes critiques dont la dynamique est liée à la variation d'un des paramètres de contrôle autour de sa valeur critique. Nous avons évoqué l'exemple d'un aimant, dont on ferait varier la température (ou le champ externe) autour sa valeur critique. Nous verrons également que cela peut correspondre à la situation où l'on charge un matériau en contrainte jusqu'au seuil de rupture (§.II.1.1). Si la variation du paramètre de contrôle (dans ce cas l'augmentation de contrainte) est suffisamment lente, le système va alors répondre sous forme d'avalanches, distribuées au voisinage du point critique en loi de puissance, à la fois en taille, en durée, et en extension spatiale (équations (I.47), (I.51), et (I.54)).

A priori, ce scénario semble ne pouvoir être obtenu que dans des circonstances très particulières. En effet, nous avons vu qu'il était nécessaire, pour qu'un système exhibe un comportement critique, d'ajuster ses paramètres de contrôle à une valeur précise (par ex. $T=T_c$, $h=0$ pour le modèle d'Ising, $p=p_c$ pour le modèle de percolation). D'autre part, il faut rendre le système dynamique en imposant à l'un des paramètres de contrôle des variations autour de sa valeur critique, sans trop s'en éloigner pour que le système ne perde pas son caractère critique.

Nous allons voir sur un exemple que ces conditions ne sont pas nécessairement rares dans la nature. Prenons le cas d'un volcan, qui émet en surface des petits craquements, par un effet de contraction thermique de la lave lors de son refroidissement. Diodati et al. [1991] ont montré, en plaçant des capteurs d'émissions acoustiques à la surface du Stromboli, que les distributions d'amplitude et de durée des ondes élastiques générées par ces craquements suivaient une loi de puissance. Ces distributions peuvent s'interpréter facilement dans le formalisme des transitions de phase, en considérant un modèle de type barres élastiques ou percolation (voir §.II.1.1), dont l'endommagement progressif correspondrait dans le cas du volcan à l'augmentation progressive de la densité de fissures, sous l'effet du refroidissement de la lave. Le problème est que dans ces modèles, des distributions en loi de puissance ne sont observées que tout près du point critique, c'est-à-dire sur une gamme très faible du paramètre de contrôle (densité de fissures ou indirectement la température). Pourquoi alors sur le volcan observe t'on si facilement de telles distributions ? On peut voir à cela trois raisons :

- le refroidissement de la lave, comme de nombreux processus géophysiques, est un processus très lent. Cette variation très lente du paramètre de contrôle (température) peut faire que le système reste longtemps au voisinage du point critique ;

- la zone échantillonnée par les mesures d'émissions acoustiques peut être très grande par rapport à la taille des processus impliqués dans la fracturation, de sorte qu'il y ait pratiquement à tout moment au moins un endroit de cette zone qui se retrouve à sa température critique ;
- mais probablement la raison majeure est que, comme l'a montré Sornette [1994a], il n'est pas nécessaire qu'un système dynamique soit précisément à sa valeur critique pour exhiber une distribution en loi de puissance dans la taille des événements. En effet, le seul fait que le paramètre de contrôle varie de façon constante en franchissant le point critique (comme c'est le cas ici avec la température) et d'intégrer dans une même distribution des événements enregistrés sur une toute une gamme de valeurs du paramètre de contrôle, peut mener à l'observation d'une pure loi de puissance, bien que le système ne soit pas exactement, et constamment, au point critique. Ce mécanisme dit de « balayage » d'un point critique sera décrit plus précisément au §.I.7.2. La découverte de ce mécanisme a été très importante, car elle a redonné une pertinence au formalisme de transition critique ordinaire pour interpréter l'existence de lois de puissance dans la nature, formalisme qui auparavant semblait beaucoup trop particulier.

Nous verrons au §.II.1.1 que le formalisme de transition critique ordinaire est un des trois formalismes dans lequel on peut interpréter la fracturation, en compétition avec le formalisme de transition du premier ordre en milieu désordonné, et celui de criticalité auto-organisée.

I.5.3.2. Ingrédients d'un système critique dynamique ordinaire

Nous tentons de dresser ci-dessous une liste des ingrédients génériques qui caractérisent un système CDO, le but étant de fournir une base sur laquelle on puisse tester de façon systématique la criticalité (ordinaire) d'un objet naturel. Une liste similaire sera proposée au §.I.5.4.2 pour les systèmes critiques auto-organisés.

I.5.3.2.1. Conditions nécessaires

Un système CDO est avant tout un système dans un état de transition de phase, c'est-à-dire un état intermédiaire entre ordre et désordre. Il doit donc posséder au minimum :

(1) **un facteur ordonnant :** couplage physique (Ising), ou géométrique (percolation) entre les éléments ; action d'un champ extérieur, etc… ;

(2) **un facteur désordonnant :** celui-ci peut prendre diverses formes. Dans le modèle d'Ising, c'est un bruit stochastique (température) qui limite les corrélations entre les spins. Dans le modèle de percolation, c'est le taux de remplissage des sites (paramètre p) qui détermine si un ordre géométrique à grande distance peut s'établir ou non ;

(3) **Un grand nombre d'éléments :** En théorie, la notion de criticalité, comme la notion de transition de phase en général, n'est définie que dans la limite d'un système infini. Concrètement, on exigera que le système soit composé d'un grand nombre d'éléments, et on

essaiera de s'affranchir au mieux des effets de taille finie en utilisant, lorsque c'est possible, la méthode des lois d'échelle en taille finie (voir §.I.6) ;

(4) **l'ajustement d'un ou plusieurs paramètres de contrôle à une valeur précise :** par exemple, $T=T_c$ et $h=0$ dans le modèle d'Ising ; $p=p_c$ dans le modèle de percolation.

(5) **une séparation infinie entre l'échelle de temps de la sollicitation et l'échelle de temps de la relaxation du système**. En pratique, cela veut dire que les variations du paramètre de contrôle doivent être très lentes, afin d'éviter un recouvrement des avalanches (c'est-à-dire le fait qu'une avalanche se développe avant que la précédente soit terminée). Cette condition est aussi une condition nécessaire dans le cas de la criticalité auto-organisée.

I.5.3.2.2. Caractéristiques observationnelles

Ses caractéristiques observationnelles sont d'abord celles de tout système critique (à l'équilibre ou hors d'équilibre) :

(6) **continuité du paramètre d'ordre au point critique** (si celui-ci a été identifié) ;

(7) **divergence de la longueur de corrélation** ;

(8) **lois d'échelle** (voir Tableau I-6)

La séparation d'échelle de temps entre le chargement et la relaxation va s'exprimer à travers une

(9) **dynamique intermittente**, c'est-à-dire des épisodes de relaxation d'énergie (avalanches), entrecoupées de périodes stables.

D'autre part, un système CDO sera également caractérisé par un certain nombre de

(10) **lois d'échelle typiques des systèmes dynamiques**, c'est-à-dire une distribution en loi de puissance de la taille des avalanches, de leur durée, et de leur extension spatiale (voir §.I.5.2). La criticalité, en revanche, n'implique pas nécessairement de corrélations temporelles entre les avalanches, et en particulier, n'implique pas de loi de puissance dans les intervalles de temps entre les avalanches. Nous reviendrons au §.I.5.4.4 sur cette remarque, qui vaut également pour les systèmes critiques auto-organisés.

Enfin, un système CDO va présenter un certain nombre de

(11) **phénomènes à l'approche du point critique**. Une des caractéristiques majeures des transitions de phase, qu'elles soient du premier ordre ou critiques, est leur caractère brutal. Néanmoins, une transition critique préserve une continuité des variables macroscopiques au passage de la transition, et est « annoncée » à son approche par une évolution caractéristique de certains paramètres, comme par exemple une divergence de la susceptibilité ou de la longueur de corrélation. En ce sens, une transition critique est prédictible, alors qu'une transition du premier ordre ne l'est pas (sauf au voisinage d'une spinodale, voir §.I.7.3). Pour avoir une vue plus complète des paramètres qui évoluent de façon caractéristique au voisinage du point critique, voir Tableau I-6, §.I.5.1, et §.I.5.2).

I.5.4. Systèmes critiques auto-organisés

Les systèmes critiques auto-organisés [Bak et al., 1987; Bak et al., 1988] sont des systèmes soumis à une sollicitation lente (typiquement un flux d'énergie), et qui fluctuent spontanément autour leur point critique sans que l'on ait à ajuster leur « paramètre de contrôle » – comme si par exemple la température dans le modèle d'Ising s'ajustait d'elle-même à $T=T_c$. Cette idée d'attraction vers le point critique a fait du concept de criticalité auto-organisée (*Self-organized criticality* ou *SOC* en anglais) un des concepts les plus populaires (et les plus séduisants) pour interpréter l'omniprésence de lois de puissance dans la nature. Cet engouement a eu le mérite, d'autre part, de susciter dans le domaine des sciences naturelles un intérêt plus large pour les transitions de phase en général.

Cette image messianique de la CAO, véhiculée par les auteurs du concept eux-mêmes [Bak, 1998], a eu la contrepartie d'encourager un certain nombre de publications présentant la CAO comme une explication à tous les phénomènes invariants d'échelle observables dans la nature, sans qu'un examen rigoureux de cette hypothèse ait été effectué. Une confusion courante a notamment été de mêler l'idée « d'universalité » ou « d'attraction vers l'état critique » avec la croyance que la CAO ne nécessite aucune condition pour s'établir. Par exemple, I. Main [1996], dans sa revue, a présenté certains modèles de sismogénèse (par ex. le modèle de bloc-ressort de Rundle et Klein [1993]) comme des systèmes « non réellement CAO au sens strict » en donnant pour argument que ces systèmes montrent une certaine « sensibilité aux conditions extérieures » (en l'occurrence, la vitesse de la plaque et l'hétérogénéïté des seuils). Or, il est bien évident que la CAO requiert certaines conditions (même si ces conditions sont génériques), et qu'un modèle peut très bien se comporter de façon CAO pour certaines configurations de paramètres et non pour d'autres, sans pour autant qu'il soit qualifié de « non CAO au sens strict ». La CAO ne doit pas être définie sur la base d'une robustesse à tous changements de paramètres, sinon cette notion n'a plus d'intérêt.

Nous allons présenter ici l'archétype des systèmes critiques auto-organisés, le modèle du « tas de sable » [Bak et al., 1987; Bak et al., 1988]. La simplicité et le caractère physiquement intuitif de ce modèle a largement contribué à la popularité du concept de CAO. Notons que ce modèle n'est qu'un exemple d'une grande classe de systèmes CAO, qui ont les propriétés d'être des systèmes dynamiques, dissipatifs, à seuils, et soumis à un flux lent d'énergie. C'est uniquement à cette classe de systèmes CAO[33] que nous allons nous intéresser, car elle recouvre la quasi-totalité des modèles qui ont abordé la mécanique des séismes, ou de la déformation en général, en terme de processus critique auto-organisé (voir §.I.8.2).

I.5.4.1. Modèle du tas de sable de Bak Tang et Wiesenfeld

[33] existe-t'il d'ailleurs des systèmes CAO qui ne rentrent pas dans cette catégorie ?

I.5.4.1.1. Image conceptuelle

L'image conceptuelle est celle d'un tas de sable disposé sur une table, sur lequel on ajoute lentement des grains un à un (Figure I-19.a). Lorsque la pente du tas, localement, dépasse un certain seuil, le grain de sable situé à cet endroit tombe sur ses voisins, qui lui-même peut devenir instable et en cascade, déclencher une avalanche. L'avalanche se développe jusqu'à ce que la pente redevienne en tout point inférieure au seuil. Au cours d'une avalanche, un ou plusieurs grains peuvent éventuellement tomber hors de la table. Dans les premiers temps de l'expérience, et en supposant que la pente moyenne du tas soit initialement faible, cette pente va grandir, sans donner lieu à de grandes avalanches. Progressivement, la pente moyenne va atteindre une valeur critique, autour de laquelle elle va tendre à rester indéfiniment. Si la pente est supérieure à cette pente critique, de grandes avalanches vont se développer et contribuer à faire tomber un nombre important de grains hors de la table. La pente va ainsi revenir progressivement à sa valeur critique. De même, si la pente est trop faible, les grains ajoutés sur le tas vont simplement s'accumuler, jusqu'à ramener la pente à sa valeur critique. Le choix des conditions initiales – par exemple le fait de préparer initialement le tas dans une position quasi-verticale –n'a pas d'influence sur le comportement asymptotique du système. Autrement dit, la dynamique du système est « attirée » vers cette pente moyenne critique.

Le qualificatif de « pente critique » a d'autant plus de signification que l'état correspondant à cette pente critique, toujours dans le cadre d'une image conceptuelle idéale, a toutes les caractéristiques d'un état critique au sens d'une transition de phase du second ordre. La valeur de la pente, que l'on pourrait voir ici comme un paramètre de contrôle, règle l'état du système entre une phase ordonnée (celle où l'instabilité d'un grain tend à entraîner tous les autres, de sorte que les avalanches qui se produisent sont globalement de la taille du système) et une phase désordonnée (où la chute d'un grain a peu d'influence sur ses voisins, et où seules de petites avalanches se développent). Au point critique, la longueur de corrélation diverge, s'exprimant par le fait que les plus grandes avalanches deviennent infinies. La distribution de taille de ces avalanches, qui mesure « en gros » la distribution de la portée des corrélations au sein du système, décroît en loi de puissance. Autrement dit, la chute d'un grain de sable peut entraîner – ce qui est le cas le plus souvent – une petite avalanche, mais aboutira parfois à une avalanche catastrophique. La différence essentielle avec une transition critique ordinaire est qu'il n'a pas été nécessaire, dans ce cas, d'ajuster la pente moyenne à sa valeur critique. Le qualificatif de « paramètre de contrôle » pour cette pente moyenne n'est plus alors justifié.

On sait aujourd'hui que ce modèle conceptuel n'est pas valable dans le cas des tas de sable réels [Jaeger et al., 1989], hormis éventuellement dans le cas des petits tas de sable [Held et al., 1990; Grumbacher et al., 1993] – mais la gamme d'échelles limitée sur laquelle sont mesurées les avalanches, inhérente à la taille du tas, ne permet pas de trancher clairement – ou dans le cas particulier de grains très allongés [Frette et al., 1996]. En réalité, un tas de sable se comporte généralement selon une transition du premier ordre. Il présente en effet deux pentes critiques (l'équivalent des valeurs ε et ε' sur la Figure I-5.a), une pente critique supérieure à partir de laquelle les avalanches se déclenchent, et une pente critique inférieure à laquelle le tas de sable se relaxe après chaque avalanche. Les avalanches ont par conséquent une taille relativement

régulière, correspondant en gros au nombre de grains qu'il faut ajouter sur le tas pour que le système passe de sa sa pente critique inférieure à sa pente critique supérieure. Il n'en reste pas moins que la métaphore du tas de sable a apporté un éclairage nouveau sur de nombreux systèmes physiques (par ex. le comportement de la croûte à longue échelle de temps ou bien le glissement le long d'une faille), soumis à un flux lent d'énergie (chargement tectonique), et dont la dynamique (séismes) ne se développe qu'à partir d'un certain seuil (contrainte de coulomb ou seuil de friction pour les séismes).

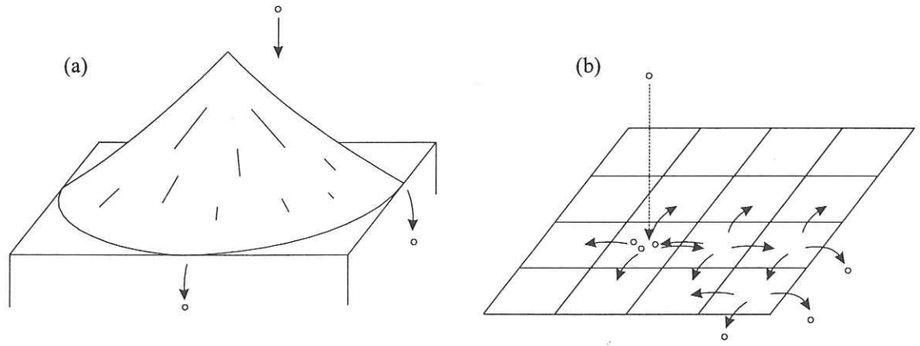


Figure I-19 Modèle de tas de sable de Bak, Tang et Wiesenfeld [1987]. (a) Image conceptuelle (b) modèle d'automates cellulaires à deux dimensions.

I.5.4.1.2. Automate cellulaire

Bak et al. ont accompagné leur modèle conceptuel d'un automate cellulaire, représenté schématiquement sur la Figure I-19.b. Malgré sa simplicité, ce modèle a monopolisé l'énergie d'un grand nombre de physiciens depuis 10 ans, sans être encore totalement élucidé aujourd'hui [voir par ex. Ktitarev et al., 2000; Lübeck, 2000; Tebaldi et al., 1999]. Il s'agit d'un réseau à d dimensions. Chaque site (ou cellule) est caractérisée par une variable z_i. Dans le cas du tas de sable, z_i représente la pente locale du tas, c'est-à-dire la différence de hauteur entre deux sites voisins, mais dans un cas plus général z_i peut être vu comme une contrainte ou une énergie stockée en chaque site. On charge le système en choisissant un des sites aléatoirement et en augmentant son énergie d'une unité, $z_i \rightarrow z_i+1$, reflétant par exemple l'ajout d'un grain de sable sur le tas ou une augmentation unitaire de la contrainte sur une aspérité d'un plan de faille. Lorsqu'un site atteint un seuil d'énergie $z_c=2d$, ce site se relaxe, c'est-à-dire redistribue de l'énergie équitablement sur ses plus proches voisins selon la règle :

$$z_i \rightarrow z_i - z_c \tag{I.58a}$$

$$z_j \rightarrow z_j + y_j \tag{I.58b}$$

où j représente les sites plus proches voisins du site i et $y_j=1$ dans ce modèle. Les sites voisins peuvent éventuellement devenir instables à leur tour, et engendrer ainsi une avalanche de redistributions d'énergie. Une nouvelle unité d'énergie (ou « particule ») n'est ajoutée sur la grille que lorsque tous les sites ont retrouvé un état stable. Par cette règle, on considère

implicitement que le processus de chargement du système est infiniment plus lent que le processus de relaxation (ce qui est vérifié dans le cas des séismes puisque le chargement tectonique s'effectue sur des années voire des milliers d'années, alors que la relaxation lors du séisme ne dure pas plus de quelques dizaines de secondes). Enfin, le système est conservatif, c'est-à-dire $\Sigma y_i = z_c$, hormis sur les bords, où l'énergie est perdue (conditions aux limites ouvertes).

Après un temps suffisamment long, et indépendamment des conditions initiales, le système atteint un état statistiquement stationnaire, où l'énergie moyenne par site $<z>$ est constante, $<z>=<z>_c$, et où la dynamique des avalanches est invariante d'échelle. La taille, la durée ou l'extension spatiale des avalanches suivent en effet des distributions en lois de puissance :

$$P(s) \sim s^{-\tau} \tag{I.59a}$$

$$P(d) \sim d^{-\tau_d} \tag{I.59b}$$

$$P(n) \sim n^{-\tau_n} \tag{I.59c}$$

Les exposants correspondants sont fournis dans Bak [1994] ou Christensen et al. [1991]. Par exemple, τ=1.1 en 2D et τ=1.31 en 3D.

On observe donc dans ce modèle, fidèlement à l'image conceptuelle du tas de sable, une attraction vers un niveau d'énergie moyen constant, $<z>=<z>_c$, où le système présente toutes les caractéristiques d'un système critique, « sans nécessiter d'ajuster un paramètre de contrôle ». Cette notion d'absence de paramètre de contrôle dans les systèmes CAO est à mettre entre guillemets, car la criticalité auto-organisée nécessite bien évidemment certaines conditions (voir §.I.5.4.2.1), c'est-à-dire en quelques sorte, l'ajustement de certains paramètres de contrôle. Nous dirons donc simplement – en tout cas dans ces systèmes à seuils où c'est le niveau d'énergie moyen $<z>$ qui contrôle la corrélation entre les éléments – qu'un système CAO est un système qui tend spontanément vers son niveau d'énergie moyen critique $<z>_c$, sans que celui-ci ait besoin d'avoir été ajusté.

De nombreuses variantes de ce modèle ont été étudiées, en modifiant par exemple les conditions aux limites (périodiques, semi-périodiques), le nombre de voisins sur lesquels est redistribuée l'énergie (voisins plus éloignés, l'ensemble des cellules), le type de redistribution (redistribution stochastique de l'énergie plutôt que déterministe), le type de chargement (augmentation uniforme et déterministe de l'énergie plutôt que stochastique), le lieu du chargement (en un seul site par exemple), le caractère conservatif du système (à chaque relaxation élémentaire, une proportion d'énergie est perdue), ou en introduisant une hétérogénéité dans les caractéristiques des éléments (par ex. dans la distribution des seuils).

I.5.4.1.3. Description de champ moyen de Vespignani et Zapperi [1998]

Vespignani et Zapperi [1998] ont étudié dans un contexte plus général le comportement du modèle du tas de sable, en utilisant une approche de type « champ moyen ». Ils ont identifié clairement qu'il existait dans tous les modèles dynamiques dissipatifs à seuils présentant un

caractère CAO, au moins deux paramètres de contrôle qui doivent être ajustés à une valeur nulle pour que le système exhibe réellement un comportement critique :

- **Le taux de chargement, h** : c'est-à-dire la quantité d'énergie reçue par le système par unité de volume (ou par site) et par unité de temps. Le flux total d'énergie rentrant dans le système étant quant à lui : $J_{in}=hL^d$;
- **Le taux de dissipation, ε**. c'est-à-dire la proportion d'énergie perdue par chaque site actif[34] au cours de sa relaxation. Le flux total d'énergie sortant étant : $J_{out}=\varepsilon\rho_a L^d$, où ρ_a est la densité de sites actifs.

La CAO, au sens strict, n'est obtenue que dans la limite $h\to 0$, $\varepsilon\to 0$, $h/\varepsilon\to 0$:

$h\to 0$: Autrement dit, l'énergie reçue par chaque site par unité de temps doit être infiniment faible, ceci pour éviter que cet apport d'énergie ne dépasse la valeur du seuil. Le non respect de cette condition a pour effet d'interdire de petites avalanches, et de créer un effet de troncature aux petites échelles dans la distribution $P(s)$ de taille des avalanches [voir par ex. Cafiero et al., 1995].

$\varepsilon\to 0$: Autrement dit, le caractère un peu paradoxal des systèmes CAO est qu'ils doivent être dissipatifs (sinon l'énergie du système augmenterait indéfiniment), mais leur taux de dissipation doit être infiniment faible.

$h/\varepsilon\to 0$: le taux de chargement doit être infiniment plus faible que le taux de dissipation de l'énergie. Cette condition nécessaire à la CAO avait déjà été pressentie dès les toutes premières études sur la CAO. Cette condition est forcée dans la plupart des simulations numériques par le fait qu'on attend qu'une avalanche soit terminée avant de réinjecter de l'énergie

On peut, à partir des écarts à ces conditions théoriques idéales, identifier deux régimes :

Régime sous-critique : C'est le cas où le taux de dissipation a une valeur finie. Cette dissipation crée un effet de troncature sur la distribution de taille des avalanches[35], illustré schématiquement sur la Figure I-20d.

Régime surcritique : C'est le cas où le taux de chargement h n'est pas nul. Par conséquent, les avalanches se recouvrent (c'est-à-dire que l'une commence avant que l'autre ne soit terminée), et la distribution de taille des avalanches – ou indifférent les distributions de durée ou d'extension spatiale des avalanches – est schématiquement de la forme représentée sur la Figure I-20.f.

On peut représenter ces différents régimes dans un diagramme de phase, en fonction de la valeur des deux paramètres de contrôle h et ε (Figure I-21).

---

[34] On appelle « site actif » un site dont le niveau d'énergie z est supérieur au seuil critique z_c.

[35] ou indifféremment la distribution de durée $P(d)$ ou d'extension spatiale $P(n)$ des avalanches

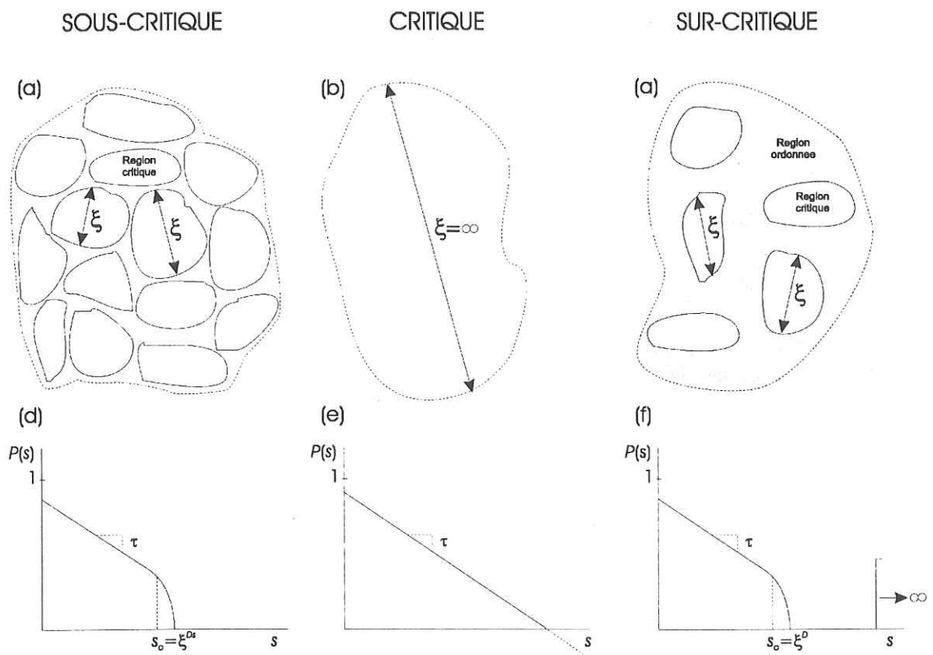


Figure I-20 : Représentation schématique d'un système critique, sous-critique, et sur-critique. Les pointillés sur les schémas du haut représentent le fait que l'on considère un système infini, seule limite dans laquelle la notion de transition critique est réellement définie. En dessous est représentée de façon schématique la distribution de probabilité $P(s)$ d'une avalanche de taille s (les échelles sont bi-logarithmiques). Dans le cas d'un système critique, la distribution en loi de puissance se prolonge à l'infini sans échelle caractéristique, alors que dans un système sous- ou sur-critique, elle est tronquée par la longueur de corrélation finie du système. Le pic à l'extrême droite de la courbe sur-critique correspond à une avalanche infinie.

Conditions d'apparition du changement de phase	
Paramètres de contrôle	Taux de chargement par site h Taux de dissipation par site actif ε
Point critique	$h \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $h/\varepsilon \to 0$
Caractérisation des différentes phases	
Phase désordonnée	Phase sous-critique ($h \to 0$, $\varepsilon > 0$)
Phase ordonnée	Phase sur-critique ($h > 0$, $h < \varepsilon$)
Paramètre d'ordre	Densité de sites actifs ρ_a ($\rho_a \to 0$ si $h/\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$; $\rho_a > 0$ si $h > 0$, $h < \varepsilon$)

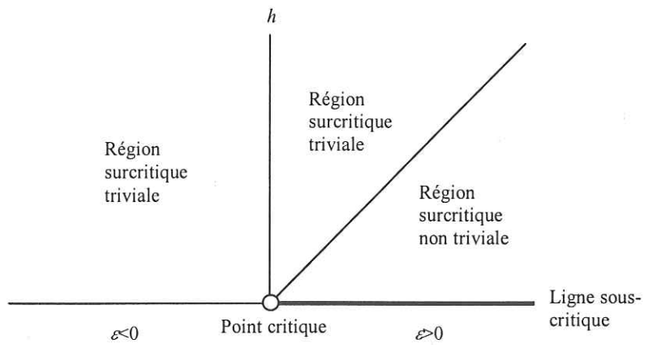


Figure I-21 Diagramme de phase des grands systèmes dissipatifs à seuil, soumis à un flux d'énergie, dans le cadre de la description de champ moyen de Vespignani et Zapperi [1998].

I.5.4.2. Ingrédients d'un système critique auto-organisé

Ce récapitulatif donne l'ensemble des ingrédients actuellement connus qui permettent de tester la criticalité auto-organisée d'un objet.

I.5.4.2.1. Conditions nécessaires

La recherche des ingrédients qui dirigent la CAO d'un système a longtemps été (et constitue toujours) une des motivations premières d'un grand nombre de physiciens. On connaît aujourd'hui un petit peu mieux quels sont ces ingrédients.

Un système CAO requiert au minimum les conditions suivantes :

(1) **Un grand nombre d'éléments :** En théorie, la notion de CAO, comme la notion de transition de phase en général, n'est définie que dans la limite d'un système infini. Concrètement, on exigera que le système soit composé d'un grand nombre d'éléments, et on essaiera de s'affranchir au mieux des effets de taille finie en utilisant, lorsque c'est possible, la méthode des lois d'échelle en taille finie (voir §.I.6)

(2) **Un facteur désordonnant :** un minimum de désordre est nécessaire pour empêcher la synchronisation des éléments. Ce désordre peut être introduit à travers l'état initial des éléments (par ex. un désordre initial dans la variable d'énergie z_i), un désordre évolutif (*annealed*) ou figé (*quenched*) dans les caractéristiques des éléments (par ex. dans les seuils d'énergie), ou encore une certaine stochasticité dans le chargement du système (par ex. une unité d'énergie chargement aléatoire des cellules).

D'autre part, comme nous l'avons dit, nous nous intéressons ici uniquement à une grande classe de systèmes CAO qui ont la particularité d'être des systèmes :

(3) **soumis à un flux d'énergie,**

(4) **dissipatifs,** et caractérisé par

(5) **une dynamique à seuils.**

Ces systèmes, pour montrer un comportement CAO, doivent posséder :

(6) **un taux de chargement infiniment faible ($h \to 0$)**

(7) **un taux de dissipation infiniment faible ($\varepsilon \to 0$)**

(8) **un taux chargement infiniment plus faible que le taux de dissipation ($h/\varepsilon \to 0$)**

Enfin, ce qui n'apparaît pas dans le modèle du tas de sable, mais qui est une condition fondamentale dans les systèmes naturels, est qu'il doit y avoir une

(9) **cicatrisation instantanée des éléments par rapport à la durée de l'avalanche**, c'est-à-dire que chaque élément qui vient d'être instable doit être aussitôt capable de ré-accumuler de l'énergie. Autrement dit, les éléments ne doivent pas garder « mémoire » de leur passé.

Il existe donc de nombreuses conditions nécessaires à la CAO, contrairement peut-être à une idée répandue au départ. Au sens strict, la CAO, comme la criticalité ordinaire d'ailleurs, est même irréalisable dans les systèmes naturels, puisqu'elle n'est atteinte que par passage à la limite, limite d'un système infini d'une part (condition 1), et limite d'un chargement et d'une dissipation infiniment faibles d'autre part (conditions 6, 7, 8). Il faut noter également qu'il existe probablement d'autres conditions nécessaires à la CAO, non encore clairement identifiées. Par exemple, on peut se demander quel est le rôle de l'hétérogénéité dans un tel système (hétérogénéité des seuils, hétérogénéité du module d'Young dans le cas d'éléments élastiques). C'est précisément dans l'objectif d'identifier ces « autres » paramètres que nous souhaitons faire une revue des modèles existants, comme nous allons le voir au §.I.8.

Examinons maintenant plus en détail chacune des conditions ci-dessus, et estimons dans quelles limites ces conditions peuvent être satisfaites dans les objets naturels :

Condition (1) : On a souvent à faire dans la nature à des systèmes d'une extension spatiale très grande par rapport à la taille caractéristique des éléments qui sont à l'origine de leur dynamique ;

Condition (2) : Cette condition est en fait très peu restrictive car un système naturel n'est jamais totalement homogène. Il possède toujours au moins de légers défauts, qui peuvent suffir, à plus ou moins long terme, à désynchroniser les éléments au cours de la dynamique.

Condition (3) : la plupart des systèmes naturels, et en tout cas l'ensemble de ceux qui nous intéressent dans le cadre de la mécanique de la déformation, sont soumis à un flux d'énergie. Ce flux d'énergie peut avoir une origine naturelle (par ex. la convection dans le manteau qui entraine la déformation des plaques) ou humaine (par ex. la construction d'un barrage qui engendre une déformation du sous-sol).

Condition (4) : De même, la loi de conservation globale de l'énergie dans la croûte impose que s'il y a chargement, il doit aussi y avoir dissipation. Les objets géologiques peuvent dissiper de l'énergie sous forme de déformation (élastique ou inélastique), de chaleur (par ex. par friction lors d'un séisme), ou d'émission d'ondes élastiques.

Condition (5) : Un grand nombre de processus dans la nature sont contrôlés par des seuils (seui de rupture, seuils de friction, etc.)

Condition (6) : Cette condition est une certaine manière de dire que l'objet doit avoir une capacité à emmagasiner (à retenir) l'énergie. C'est là aussi une condition relativement triviale dans les objets naturels. Dans la croûte, si on néglige la chaleur, l'essentiel de l'énergie qui sert à la déformation est stockée sous forme d'énergie élastique.

Condition (7) : Cette condition est plus problématique. En effet, la perte d'énergie n'est pas négligeable lors de la dynamique d'un système naturel. Lors d'un séisme, par exemple, la part d'énergie élastique « perdue » sous forme d'ondes élastiques est de l'ordre de 10% (c'est-à-dire un taux de dissipation $\varepsilon \sim 0.1$ au sens de Vespignani et Zapperi [1998]). Par conséquent, au sens strict, la croûte devrait être considérée comme sous-critique. Ceci étant, la longueur de

corrélation dans la croûte peut rester très grande par rapport à la taille typique des plus gros séismes enrégistrés (quelques centaines de km). Nous reviendrons sur ce point au §.II.1.2.

Condition (8) : Cette condition est assez souvent remplie dans le cas des objets géologiques, dont l'échelle de temps du chargement est en général beaucoup plus grande que celle de la relaxation.

Condition (9) : Cette condition est une des plus restrictives en ce qui concerne la déformation des objets géologiques. Dans le cas de la fracturation, il y a en effet souvent endommagement irréversible des éléments. Cette condition est vérifiée, en revanche, dans le cas d'une déformation viscoplastique (voir §.II.4). Certains auteurs [par ex. Lomnitz-Adler et al., 1992] ont testé l'effet d'une mémoire « temporaire » des éléments, en considérant le cas où un élément ne re-cicatrise pas instantanément lors d'une avalanche, mais a eu le temps de re-cicatriser pour l'avalanche suivante (dans le contexte de séismes sur une faille, cela signifie que la faille se recolle dans la période intersismique). Ceci a pour effet de rendre le système sur-critique. Autrement dit, une cicatrisation instantanée par rapport à la durée globale de l'avalanche semble un ingrédient indispensable de la CAO.

I.5.4.2.2. Caractéristiques observationnelles

Ses caractéristiques observationnelles sont d'abord celles de tout système critique :

(10) **Continuité du paramètre d'ordre au point critique**,

(11) **Divergence de la longueur de corrélation**,

(12) **Lois d'échelles** (voir Tableau I-6)

La séparation d'échelle de temps entre le chargement et la relaxation s'exprime à travers une

(13) **dynamique intermittente**, c'est-à-dire des épisodes de relaxation d'énergie (avalanches), entrecoupées de périodes stables.

Il y a ensuite l'idée d'attraction vers le point critique, exprimée à travers une

(14) **insensibilité aux conditions initiales** de la dynamique asymptotique du système.

Il y a également l'idée de stationnarité, exprimée à travers une :

(15) **une valeur stationnaire du niveau d'énergie moyen** : C'est-à-dire $<z>$=cte. Cette stationnarité est assurée d'une part, par la loi de conservation, c'est-à-dire la condition (8), et d'autre part, par le fait que le système s'endommage pas (condition (9)), c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'augmentation de l'énergie moyenne $<z>$ dans les autres éléments lorsqu'un élément vient à rompre.

(16) **stationnarité statistique dans les lois d'échelles** : Autrement dit, un système doit persister pendant un temps infiniment long dans un état critique pour être considéré comme CAO.

I.5.4.3. Implications de la criticalité auto-organisée d'un système

Les implications qui suivent sont propres également aux systèmes critiques dynamiques ordinaires (CDO) :

♦ **Imprédictibilité de la taille des événements individuels**

Un trait majeur des systèmes CAO est l'impossibilité de prévoir la taille d'une avalanche particulière. Même en supposant que l'on sache quel site va devenir instable, et que l'on connaisse exactement l'état du champ de contrainte (on parle ici en terme de contrainte par analogie avec les séismes), il est extrêmement difficile de déterminer, au seul examen de ce champ de contrainte autour du site d'initiation quelle va être la taille de l'avalanche qui va se développer. En effet, cette taille va dépendre de façon subtile de la répartition du champ de contrainte, et la seule façon de savoir réellement si cette avalanche va être grande ou petite est de la déclencher effectivement. Autrement dit, le champ de contrainte ne laisse pas apparaître de corrélations à longue portée. Par exemple, si on calcule dans le modèle du tas de sable la fonction d'autocovariance de la variable contrainte (ou énergie, c'est-à-dire z_i), on s'aperçoit que cette fonction d'autocovariance décroît très vite ; elle est typiquement nulle au delà de quelques sites. C'est là une différence majeure par rapport au modèle de percolation ou au modèle d'Ising, où les corrélations entre sites pouvaient s'estimer facilement à partir de la fonction d'autocovariance de leur variable d'état (direction des spins, connexion des sites). Ici, les corrélations spatiales entre sites ne sont pas reflétées à travers la valeur de leur variable d'état (niveau d'énergie ou de contrainte), et on ne peut donc pas estimer la longueur de corrélation simplement par une fonction de corrélation. La seule façon de calculer la longueur de corrélation est de déclencher des avalanches.

Cette implication est bien-sûr fondamentale pour l'aléa sismique car elle interdit toute prédiction, au sens déterministe, de la taille d'un séisme particulier. Celle-ci serait en fait, dans l'hypothèse d'un état CAO de la croûte, intrinsèquement imprédictible.

♦ **Prédictibilité statistique de la taille des événements**

En revanche, l'hypothèse d'une croûte CAO, en rationalisant la loi de Gutenberg-Richter et en impliquant une stationnarité de celle-ci au cours du temps, apporte une justification théorique à l'utilisation de la loi de Gutenberg-Richter dans l'estimation de l'aléa dans une région donnée. Ceci suppose néanmoins que les caractéristiques du système (caractéristiques de la roche, conditions de chargement, etc.) ne changent pas au cours du temps, ce qui est somme toute raisonnable à l'échelle humaine ou à l'échelle de quelques centaines d'années.

I.5.4.4. Ce que n'implique pas la criticalité auto-organisée

♦ **Imprédictibilité des événements individuels dans l'espace**

Contrairement à une idée répandue, la CAO n'implique pas nécessairement une imprédictibilité des événements (séismes par exemple) dans l'espace. Le chargement du système peut être très local – autrement dit, on peut connaître exactement le site qui va devenir

instable – sans que le système perde son caractère critique auto-organisé. Certains modèles ont testé cette hypothèse en chargeant le modèle du tas de sable toujours au même endroit. On observe dans ce cas toujours une loi de puissance dans la taille des avalanches.

♦ **Corrélations spatiales ou temporelles entre les événements :**

Contrairement à ce que l'on pense parfois, un regroupement spatial ou temporel des événements (par ex. une distribution fractale des séismes dans l'espace ou dans le temps) n'est pas une implication directe de la criticalité auto-organisée. Si l'on se place dans les conditions théoriques où la dissipation est infiniment faible ($\varepsilon \to 0$), alors on ne verra, dans le modèle du tas de sable par exemple, aucune corrélation spatiale ou temporelle entre les événements. Autrement dit, les avalanches ont lieu de façon indépendante ; le système ne garde pas mémoire des avalanches précédentes. Dès lors que le système a un taux de dissipation finie ($\varepsilon > 0$), en revanche, l'endroit ou a eu lieu une avalanche est déchargé (de façon plus ou moins importante selon la valeur de ε), et par conséquent, juste après cette avalanche, la probabilité pour qu'une autre avalanche se développe au même endroit est plus faible qu'ailleurs.

C'est la même chose dans le domaine temporel [voir par ex. Olami et Christensen, 1992; Pepke et Carlson, 1994; Sammis et Smith, 1999] : la dissipation d'énergie lors d'une avalanche a tendance à baisser le niveau d'énergie moyen du système $\langle z \rangle$, de façon proportionnelle à la taille de l'événement[36]. Par conséquent, cela diminue la probabilité d'occurrence d'un autre événement aussitôt après, et ce d'autant plus que l'événement précédent a été important : des corrélations temporelles apparaissent. Ceci rationalise le fait que l'on observe souvent une distribution en loi de puissance des intervalles de temps entre événements dans les systèmes (modèles ou réels) qui sont à la fois dissipatifs, et dont les événements sont distribués en loi de puissance. L'intervalle de temps entre deux événements étant déterminé en moyenne par la taille du premier événement, il est logique que si l'on observe une distribution en loi de puissance pour les tailles d'avalanches, on l'observe aussi pour les intervalles de temps. Mais il faut insister sur le fait que l'observation d'une loi de puissance pour les intervalles de temps entre événements est liée, dans ce cas, au caractère dissipatif du système, et n'est pas observée dans le cas théorique où le taux de dissipation tend vers zéro ($\varepsilon \to 0$). Elle est donc à la fois la marque d'une certaine corrélation à grande distance du système (tailles d'avalanches en loi de puissance), tout en étant le reflet de la non criticalité parfaite de celui-ci (puisque le système est dissipatif).

Il faut noter que la dissipation n'est pas la seule façon de créer des corrélations, au moins spatiales, entre les événements. Par exemple, Cowie et al. [1993] introduisent une hétérogénéité dans la distribution des seuils et observent une localisation des événements dans les régions

[36] en supposant que la quantité d'énergie dissipée soit proportionnelle à la taille de l'événement, ce qui est le cas pour les séismes.

faibles. Les effets de concentration de contrainte, par exemple, en tête de fissure ont également pour effet de regrouper les événements dans l'espace.

Par conséquent, la CAO qui est souvent présentée comme un paradigme pour expliquer l'invariance d'échelle dans l'espace, le temps ou et taille, ne l'est en fait strictement que dans le domaine « taille ». Dans l'espace et dans le temps, la CAO ne suffit pas, à elle seule, à expliquer l'invariance d'échelle ; il faut d'autres ingrédients : par exemple, de la dissipation, une l'hétérogénéité des seuils, des concentrations de contrainte (c'est-à-dire en fait une anisotropie des redistribution d'énergie, etc.).

♦ **Géométrie fractale des « surfaces de rupture »**

Nous avons vu que la CAO n'impliquait pas nécessairement une répartition fractale des avalanches dans l'espace. Elle n'implique pas non plus une géométrie fractale de la surface impliquée dans une avalanche (surface de rupture pour les séismes). En effet, dans le modèle du tas de sable par exemple, l'exposant D reliant le nombre n d'éléments distincts impliqués dans une avalanche à son rayon de giration R est entier, et égal à la dimension de l'espace ($D=d$). Autrement dit, la surface des avalanches n'est pas fractale[37], mais compacte. [voir par ex. Pietronero et Schneider, 1991; Christensen et al., 1991; Lübeck, 2000].

♦ **Organisation fractale des failles**

Si on considère que les failles sont formées par l'action répétée des séismes, et étant donnés que ceux-ci ne sont pas nécessairement corrélés dans l'espace dans un système CAO, il n'y a pas non plus de raison de penser, contrairement à ce que l'on trouve parfois [par ex. Syropoulos et al., 1999] qu'un système CAO implique nécessairement une organisation fractale des failles.

♦ **Proximité globale au seuil de rupture**

Contrairement à une idée parfois répandue, un système critique auto-organisé n'est pas un système en tout point proche de la rupture [voir Grasso et Sornette, 1998]. Le champ de contrainte est très hétérogène et un site peut très bien se trouver près du seuil tandis que son voisin est totalement déchargé. Ceci rationalise, dans l'hypothèse d'une croûte CAO, le fait qu'à certains endroit, il suffit d'une augmentation de contrainte très faible (induite par un chantier géotechnique par exemple) pour déclencher des séismes, tandis que dans d'autres endroits ce n'est pas le cas.

En résumé, la CAO *n'implique pas* :

- une répartition fractale des séismes dans l'espace,

[37] Au sens strict du mot « fractal », c'est-à-dire, non entière.

- une répartition fractale des séismes dans le temps,
- une distribution en loi de puissance des intervalles de temps entre événements,
- une géométrie fractale des surfaces de rupture,
- une organisation fractale des failles,
- une proximité globale au seuil de rupture

I.6. Effets de taille finie

I.6.1. Problématique et méthode des lois d'échelle en taille finie

Tous les comportements critiques que nous avons décrits jusqu'à présent sont valables dans la limite d'un système infini. Au sens strict, il n'y a que dans cette limite que les singularités qui révèlent une transition critique apparaissent, et que par conséquent, une transition critique est réellement définie. Dans la nature, ou dans les simulations numériques, on a bien évidemment à faire à des systèmes de taille finie. Ces effets de taille finie peuvent introduire des distorsions, parfois majeures, dans le comportement des grandeurs macroscopiques du système, et en particulier, dans la valeur des exposants critiques. Par exemple, il est encore difficile aujourd'hui de donner la valeur précise de l'exposant τ du modèle de tas de sable de Bak et al. [Ktitarev et al., 2000; Lübeck, 2000; Tebaldi et al., 1999], car les avalanches qui s'y produisent – y compris les plus petites – sont affectées par des effets de taille finie particulièrement subtiles, qui ne peuvent être traités par des méthodes simples (du type lois d'échelle en taille finie, voir ci-après).

Il est donc important de comprendre ces effets de taille finie, d'une part pour mieux déterminer la valeur précise des exposants critiques, et donc la classe d'universalité associée à chaque système, et d'autre part parce que ces effets de taille finie sont une signature des caractéristiques géométriques et dynamiques du système, et qu'en identifiant ces effets de taille finie dans la nature – par ex. ceux qui apparaissent sur la loi de Gutenberg-Richter ou à travers d'autres lois d'échelles – on peut espérer en déduire certaines propriétés géométriques, voire mécaniques, sur l'objet physique étudié. Volant et Grasso [1994], par exemple, ont validé le fait que des dimensions caractéristiques d'un objet géomécanique (dans ce cas l'épaisseur des bancs fragiles dans un réservoir d'hydrocarbure) pouvaient s'exprimer par des changements de pente dans la loi fréquence-magnitude des séismes observés sur ce site. Une étude équivalente menée à l'échelle de la croûte [Pacheco et al., 1992; Sornette et al., 1996] a permis d'interpréter un changement de pente dans la loi fréquence-magnitude des séismes globaux autour de M=6.8 comme la signature de l'épaisseur de la couche sismogénique (~15km).

On se placera donc dorénavant dans le cas d'un système fini. Il pourra s'agir d'un modèle numérique ou bien d'un objet réel (plaque tectonique, faille bien délimitée, échantillon de roche). En règle générale, la taille L du système commence réellement à influer sur le comportement des grandeurs macroscopiques à partir du moment où L devient inférieure à la

longueur de corrélation[38], ξ. Cette situation devient notamment inévitable lorsqu'on se rapproche d'un point critique, où ξ est infinie.

Une méthode couramment utilisée pour prendre en compte ces effets de taille finie est la méthode ou théorie dite « des lois d'échelles en taille finie » (*finite size scaling* en anglais) [Fisher, 1970; Fisher et Barber, 1972]. On suppose par cette théorie que les effets de taille finie peuvent être décrits par une fonction universelle, appelée « fonction d'échelle », qui ne dépend que du seul rapport L/ξ. On entend ici par « universelle » le fait que la forme fonctionnelle de la fonction d'échelle ne varie pas avec la taille du système. Par contre, celle-ci va dépendre de nombreux détails du système comme par exemple sa forme (carré, rectangulaire, circulaire, etc.), ses conditions aux limites (ouvertes, périodiques, semi-périodiques, etc.), la répartition spatiale du chargement (uniforme, en quelques sites choisis au hasard, en un site uniquement), la portée des couplages (proches voisins, voisins plus éloignés, tous les sites), les lois d'évolution (« cicatrisation » instantanée des sites ou non), etc.

Prenons le cas d'une variable macroscopique X, qui dans un système infini est décrite au voisinage du point critique par $X \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^Y$ (par ex., la susceptibilité χ, la longueur de corrélation ξ, la densité de sites appartenant à l'amas infini P, l'aimantation m, le module d'Young E, la perméabilité K, la taille maximale des avalanches s_c, etc.). Dans un système fini de taille L, on suppose alors que X peut s'écrire sous la forme :

$$X(\varepsilon, L) \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^Y f_1(L/\xi) \tag{I.60a}$$

c'est-à-dire :

$$X(\varepsilon, L) \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^Y f_1(L(\varepsilon - \varepsilon_c)^\nu) \tag{I.60b}$$

ou encore :

$$X(\varepsilon, L) \sim L^{-Y/\nu} f_2(L^{1/\nu}(\varepsilon - \varepsilon_c)) \tag{I.60c}$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions d'échelles. Si l'hypothèse de loi d'échelle en taille finie est vérifiée, on doit donc observer, en traçant $XL^{Y/\nu}$ en fonction de $(\varepsilon - \varepsilon_c) L^{1/\nu}$ pour différentes tailles du système, une superposition des différentes courbes. Dans le cas le plus général, Y, ν, et ε_c ne sont pas connus a priori ; c'est d'ailleurs souvent la valeur de ces paramètres que l'on recherche. Le jeu consiste alors à balayer l'ensemble de leurs valeurs possibles jusqu'à ce que l'on observe une superposition des courbes pour différentes tailles du système[39]. Ceci n'est possible que

[38] Notons néanmoins que dans certains cas, des effets de taille finie non négligeables peuvent apparaître y compris pour $L \gg \xi$, notamment dans le cas où l'on charge le système de façon uniforme, et donc également près les bords (modèle du tas de sable par ex.). Dans ce cas, même les avalanches les plus petites sont affectées par la taille finie du système. Dans le modèle du tas de sable, on pense que cet effet de la grille joue un rôle prépondérant dans la dynamique observée, et est à l'origine du fait qu'on a des difficultés à déterminer les véritables exposants [Tebaldi et al., 1999].

[39] Notons que dans le cas où X est la longueur de corrélation ξ, le nombre de paramètres ajustables est réduit à deux, car on a alors $Y = \nu$.

lorsque l'on dispose de données nombreuses et peu bruitées, ce qui est souvent le cas dans des simulations numériques, mais qui est plus difficile à obtenir en laboratoire, où les conditions expérimentales limitent bien souvent le nombre et la qualité des données. Dans certains cas, heureusement, un des exposants (ou bien la valeur du seuil) est connu par avance, ce qui réduit le nombre de paramètres ajustables. On peut également utiliser le fait qu'il existe certaines contraintes sur le système, par exemple une loi de conservation [voir Kadanoff et al., 1989, p.6527 dans l'exemple du tas de sable], une condition de normalisation [voir par ex. Christensen et al., 1996] pour déduire une relation entre les exposants Y et ν.

Cette méthode, que nous venons de voir dans le cas d'une variable macroscopique X décrite par $X \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^Y$, peut également s'appliquer à une distribution de probabilité $P(X)$ d'une variable macroscopique X, décrite dans un système infini et au point critique, par $P(X) \sim X^Y$ (par ex., la distribution $P(s)$ de la taille des avalanches, la probabilité $P(n)$ qu'un site appartienne à une amas de taille n, la distribution de masse $N(r)$ de l'amas infini, la distribution $\Gamma(r)$ de la corrélation entre sites, etc.). Dans un système fini de taille L et au point critique ($\varepsilon = \varepsilon_c$), on suppose alors que X va suivre une distribution du type :

$$P(X, L, \varepsilon = \varepsilon_c) \sim X^Y f_3(X / L^{D_X}) \tag{I.61a}$$

ou de façon équivalente :

$$P(X, L, \varepsilon = \varepsilon_c) \sim L^{YD_X} f_4(X / L^{D_X}) \tag{I.61b}$$

f_3 et f_4 sont des fonctions d'échelles – on les appelle aussi « fonction de coupure » dans ce cas, car elle « coupent » la distribution $P(X)$ aux fortes valeurs – et D_x est un exposant qui relie la taille L du système à la valeur maximale de X imposée par la taille du système, $X_c = L^{D_x}$. Par exemple, $D_X = 1$, 1, D_s, D, et z, pour les distributions $\Gamma(r)$, $N(r)$, $P(s)$, $P(n)$, et $P(t)$, respectivement.

Dans le cas où le système n'est pas au point critique ($\varepsilon \neq \varepsilon_c$), la situation est un peu plus compliquée car, alors, deux fonctions de coupure vont affecter la distribution $P(X)$, une fonction associée à la taille L du système, et une fonction associée à la longueur de corrélation ξ, qui est elle aussi finie. On aura dans ce cas :

$$P(X, L, \varepsilon \neq \varepsilon_c) \sim X^Y f(X / \xi^{D_X}) g(X / L^{D_X}) \tag{I.62}$$

où f et g sont les fonctions de coupure associées à la longueur de corrélation et à la taille du système, respectivement. En général, la forme de la fonction f est relativement simple. Elle est typiquement proche de 1 pour $X < \xi^{D_x}$ et décroît rapidement (de façon exponentielle) pour $X > \xi^{D_x}$. Des exemples de telles fonctions de coupure ont déjà été rencontrés à travers les équations (1.24), (1.26), (1.32), ou (1.47) par exemple. Par contre, la forme de la fonction g peut être beaucoup plus chahutée et beaucoup plus variée, car elle dépend entre autre de la forme géométrique du système, des conditions aux limites, de la répartition spatiale du chargement, des lois d'évolution, etc. Nous verrons au §.I.6.4 des exemples de fonction de coupure appliquées à la distribution de taille des avalanches.

Evidemment, cette méthode des lois d'échelle en taille finie n'est utilisable que lorsque l'on peut varier effectivement la taille du système, c'est-à-dire dans les modèles numériques, ou

éventuellement dans les expériences en laboratoire (si les contraintes expérimentales le permettent). En revanche, cette méthode ne peut pas s'appliquer pour des objets géologiques à grande échelle, sauf dans des cas très particuliers où l'on connaît l'extension spatiale des objets. Par exemple, un certain nombre d'études ont montré récemment que la statistique du volume des éboulements rocheux suivait une répartition en loi de puissance [Grasso, 2000]. Le volume des éboulements ayant été mesuré sur différents sites, on peut penser que ce volume va être limité sur chaque site par la taille de la falaise correspondante. On observe effectivement, pour chaque falaise, une troncature de la distribution fréquence-volume des éboulements aux fortes valeurs. La méthode des lois d'échelle en taille finie consisterait alors à essayer de superposer les courbes obtenues pour différentes falaises, c'est-à-dire pour différentes tailles de système, en ajustant un ensemble d'exposants adéquats. Cette étude est actuellement en cours.

D'autre part, l'hypothèse simple sous-jacente à cette méthode, selon laquelle la forme fonctionnelle de la fonction de coupure reste la même quelle que soit la taille du système, et qu'il ne suffit que de deux exposants (Y et ν) pour décrire complètement les effets de taille finie, n'est pas toujours vérifiée. On note en effet dans certains cas une dépendance plus compliquée. Il faut alors, pour décrire les effets de taille finie, faire appel à un formalisme multifractal [voir par ex. Kadanoff et al., 1989; Tebaldi et al., 1999], c'est-à-dire introduire tout un ensemble d'exposants, et non seulement deux comme c'était le cas précédemment. Néanmoins, dans les situations les plus courantes, l'hypothèse simple de loi d'échelle en taille finie est suffisante.

Après ces considérations générales sur les effets de taille finie et la façon de les prendre en compte, voyons maintenant concrètement quel va être l'effet de la taille finie d'un système sur des grandeurs physiques comme la valeur du seuil critique, la susceptibilité ou la distribution de taille des avalanches.

I.6.2. *Effet sur la valeur du seuil critique*

Nous avons vu que dans un système infini, une transition critique correspondait à une valeur bien déterminée des paramètres de contrôle, $\varepsilon=\varepsilon_c$. Dans un système fini, en revanche, cette transition aura lieu en général à une valeur différente de ε_c, décrite par une certaine distribution de probabilité, non centrée sur ε_c.

Prenons l'exemple du modèle de percolation. La densité de sites occupés, qui coïncide dans un système infini avec la probabilité p d'occupation des sites (d'après la loi des grands nombres), devient dans un système fini une variable aléatoire, distribuée de façon gaussienne autour de p. De même, la valeur de p à laquelle l'amas percolant va apparaître, qui a une valeur bien déterminée p_c dans un système infini, va devenir dans un système fini une variable aléatoire $\hat{p}_c$, décrite par une certaine distribution de probabilité. Si on note $\Pi(p,L)$ la densité de probabilité qu'un réseau de dimension L ait un amas percolant à une probabilité p d'occupation des sites, sa dérivée $d\Pi/dp$ est la densité de probabilité qu'un réseau de dimension L percole exactement à la valeur p. Autrement dit, $d\Pi/dp$ est la densité de probabilité du seuil de

percolation $\hat{p}_c$. $\Pi(p,L)$, ainsi que sa dérivée, sont représentées schématiquement sur la Figure I-22.

On remarque sur cette figure que dans un système fini, la distribution $d\Pi/dp$ a une certaine largeur, c'est-à-dire que le seuil de percolation n'a pas une valeur bien déterminée, mais peut prendre en fait toute une gamme de valeurs. La largeur de la distribution diminue au fur et à mesure que la taille du système augmente, et tend vers 0 lorsque $L\rightarrow\infty$. On remarque également que cette distribution n'est pas centrée sur p_c : sa valeur moyenne, $p_m(L)$, est inférieure à p_c. Autrement dit, dans un système fini, le seuil de percolation apparaît plus tôt que dans un système infini. Ceci se comprend facilement par le fait que, dans un système fini, l'amas percolant atteint plus vite les bords du système (en fait, dès que $\xi\geq L$). Ce seuil moyen de percolation $p_m(L)$ tend progressivement vers p_c lorsque la taille du système tend vers l'infini. On montre en effet que [Stauffer et Aharony, 1994] :

$$p_m(L) - p_c \sim L^{-1/\nu} \tag{I.63}$$

Cette variation de $p_m(L)$ avec la taille du système est d'ailleurs une façon de déterminer pratiquement l'exposant ν: on trace $p_m(L)$ en fonction de L dans un diagramme log-log, et la pente nous donne directement la valeur de ν. On peut également montrer [Stauffer et Aharony, 1994] que l'écart-type Δ de la distribution $d\Pi/dp$ (ou tout autre mesure de la largeur de cette distribution) varie comme

$$\Delta \sim L^{-1/\nu} \tag{I.64}$$

fournissant ainsi une autre façon de déterminer l'exposant ν. Enfin, si la qualité des données n'a pas permis de déterminer précisément l'exposant ν par ces deux méthodes, et si ν n'est pas connu par ailleurs, on peut encore déterminer p_c en combinant (I.63) et (I.64).

Au §.I.8.1, nous reviendrons spécifiquement sur les implications de cette dépendance de la valeur du seuil critique à la taille du système (ou à l'échelle d'observation) pour les problèmes de fracturation.

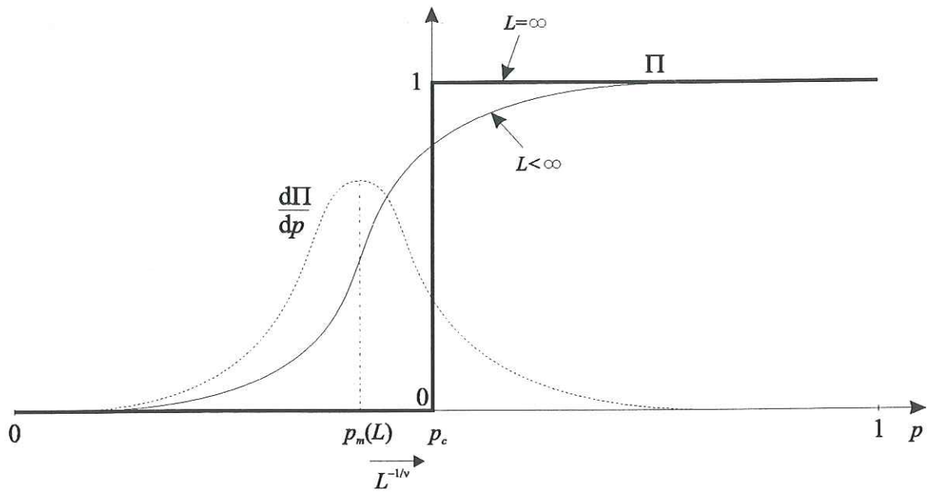


Figure I-22 Effet de la taille finie d'un système sur la valeur du seuil de percolation [modifié d'après Stauffer et Aharony, 1994]. Π est la probabilité qu'un système soit percolant pour une probabilité d'occupation p. Sa dérivée, $d\Pi/dp$ est la probabilité qu'un système de taille L percole exactement à la valeur p. p_c est le seuil de percolation théorique pour un système infini, et $p_m(L)$ le seuil de percolation moyen dans un système de taille finie L.

I.6.3. *Effet sur les grandeurs macroscopiques du système*

Une autre conséquence de la taille finie du système va concerner l'évolution des variables macroscopiques au voisinage du point critique. Considérons une variable X, qui dans un système infini est décrite par $X \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^{\gamma}$ au voisinage de $\varepsilon = \varepsilon_c$. Pour être concret, prenons le cas de la susceptibilité dans le modèle de percolation, c'est-à-dire $\chi \sim (p-p_c)^{-\gamma}$. Dans un système fini, la susceptibilité ne va plus diverger au point critique, puisque la taille moyenne des amas est nécessairement limitée par la taille du système. La susceptibilité va alors présenter un pic plus ou moins large (selon la taille du système), centré en moyenne non pas sur $p=p_c$, mais sur le seuil de percolation moyen pour un système de taille L, c'est-à-dire $p_m(L)$ (voir Figure I-24). De façon plus mathématique – et en supposant que l'hypothèse de loi d'échelle en taille finie est vérifiée (équation (I.60.c)) – on peut écrire χ sous la forme :

$$\chi(p,L) \sim L^{\gamma/\nu} f(L^{1/\nu}(p-p_c)) \tag{I.65}$$

où $f(x)$ est une fonction d'échelle, avec un maximum en $x=x_0$. Le pic de la susceptibilité apparaît donc en une valeur $p_m(L)$, décalée par rapport à p_c d'une quantité : $p_m(L)-p_c = x_0/L^{1/\nu} \sim L^{-1/\nu}$. On retrouve ainsi le résultat exposé au paragraphe précédent (équation (I.64)). On s'attend également à retrouver, pour p proche de p_c et $L \to \infty$, $\chi \sim (p-p_c)^{-\gamma}$. Ceci implique que $f(x) \to x^{-\gamma}$ pour $x \to \infty$.

Imaginons maintenant la situation typique où l'on veut déterminer l'exposant γ. En

supposant que l'on ne connaisse ni ε_c, ni ν, la méthode la plus générale, exposée au §.I.6.1, consiste à déterminer $\chi(p, L)$ pour différentes tailles du système, et à rechercher un jeu de paramètres (γ, ν, p_c) tel que les courbes de susceptibilité pour différentes tailles du système se superposent. Ceci est évidemment valable pour d'autres variables que la susceptibilité. Par exemple, la Figure I-23 illustre une application de cette méthode à l'aimantation m dans le cas du modèle d'Ising.

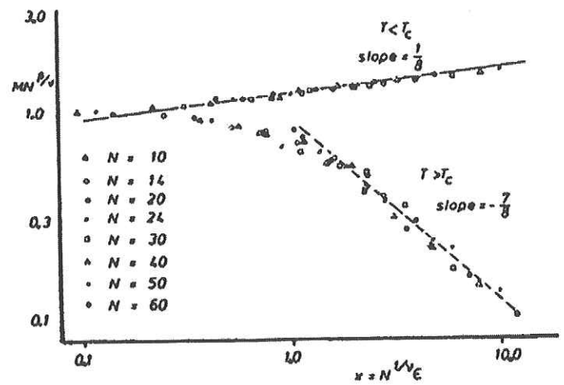


Figure I-23 Illustration de la méthode de lois d'échelles en taille finie sur l'aimantation m dans le cadre du modèle d'Ising à deux dimensions [d'après Landau, 1976]. m, L, et T-T_C sont ici notés M, N, et ε, respectivement. On note une superposition des courbes $mL^{\beta/\nu}$ versus $(T-T_C)L^{1/\nu}$ pour différentes tailles du système.

Une telle approche peut se révéler très vite impraticable, d'une part parce qu'il faut ajuster simultanément trois paramètres, ce qui nécessite des données de bonne qualité, et d'autre part parce qu'il faut estimer la variable macroscopique que l'on étudie (par ex. χ) pour différentes valeurs du paramètre de contrôle, ce qui peut poser des problèmes dans le cas des systèmes thermiques (par ex. le modèle d'Ising), où le temps de relaxation du système à l'équilibre peut être très long (phénomène de ralentissement critique). On peut éviter ce problème si on connaît a priori la valeur du seuil critique (par ex. p_C). Dans ce cas, on se place exactement en $p=p_C$ et on mesure la susceptibilité pour différentes tailles du système. f est alors une constante, égale à $f(0)$, et la susceptibilité s'écrit :

$$\chi(p = p_c, L) \sim L^{\gamma/\nu} \tag{I.66}$$

On obtient ainsi la valeur de l'exposant γ/ν. De la même façon, et toujours dans le cas où l'on connaît a priori la valeur de p_C, on peut obtenir les valeurs de α/ν, β/ν, μ/ν, T/ν, $1/\sigma\nu$, $1/\sigma_n\nu$, et $1/\sigma_d\nu$.

Enfin, si on ne connaît pas la valeur de p_C, on peut utiliser le fait qu'au niveau du pic de susceptibilité ($x=x_0$), f est une constante, égale à $f(x_0)$. On aura donc :

$$\chi_{\max}(L) \sim L^{\gamma/\nu} \tag{I.67}$$

Ainsi en mesurant la hauteur du pic de susceptibilité pour différentes tailles de système, on peut déterminer γ/ν (et de la même façon α/ν, $1/\sigma\nu$, $1/\sigma_v\nu$ et $\Delta=1/\sigma_d\nu$).

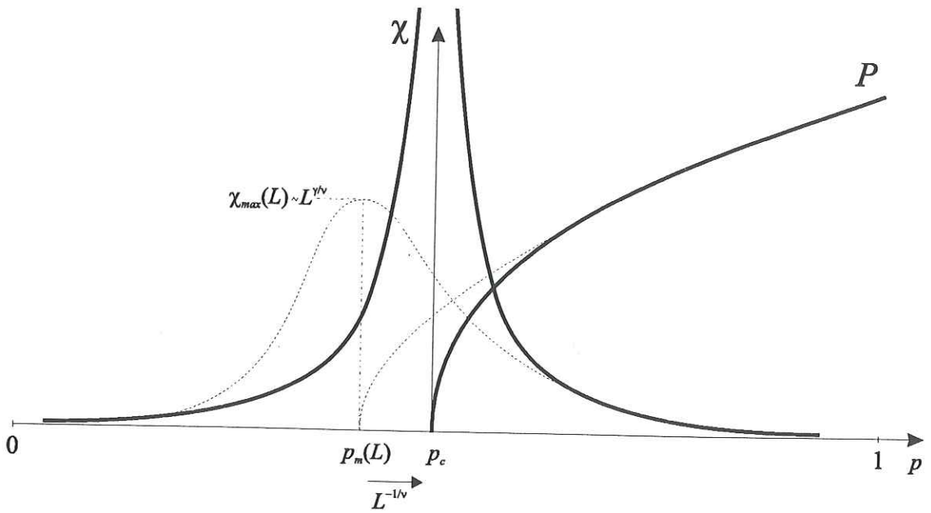


Figure I-24 Représentation schématique d'un effet de la taille finie du système sur le comportement de la susceptibilité χ et de la proportion de sites appartenant à l'amas percolant P dans le modèle de percolation. En traits gras les comportements théoriques pour un système infini. En pointillés les comportements moyens observés pour un système fini de taille L.

I.6.4. *Effet sur les distributions statistiques des grandeurs macroscopiques du système*

Un troisième type de variable sur laquelle la taille finie du système va avoir une influence vont être les distributions statistiques de certaines grandeurs macroscopiques comme par exemple la distribution de taille des amas $P(n)$, la distribution de taille des avalanches $P(s)$, la distribution de durée des avalanches $P(d)$, la distribution de la corrélation entre les sites $\Gamma(r)$, ou encore la distribution de masse de l'amas infini $N(r)$. Prenons le cas de la distribution de taille des avalanches, qui est d'intérêt pour la sismologie car c'est la distribution que l'on peut associer à la distribution fréquence-taille des séismes. Si le système est au point critique, la méthode des lois d'échelle en taille finie consiste alors à écrire la distribution de taille des avalanches sous la forme :

$$P(s,L) \sim L^{-\tau D_s} f(s/L^{D_s}) \tag{I.68}$$

Si l'hypothèse de loi d'échelle en taille finie est vérifiée, on doit alors observer, en traçant $P(s,L)L^{\tau D_s}$ en fonction de s/L^{D_s} pour différentes tailles du système, une superposition des différentes courbes. Un exemple d'application de cette méthode dans le cas de deux modèles de type « tas de sable » est illustré sur la Figure I-25.

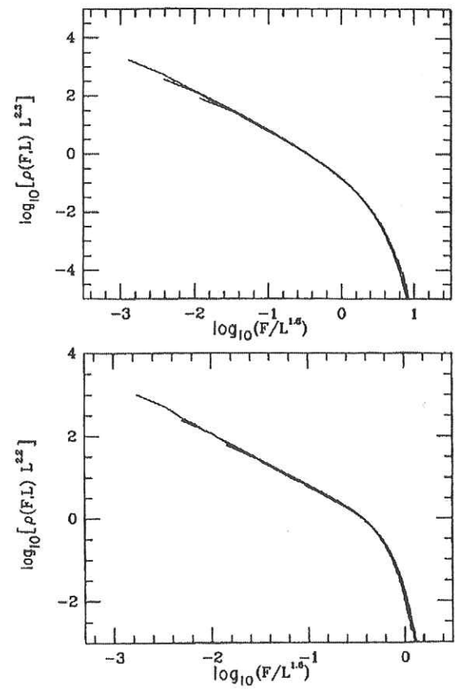


Figure I-25 Application de la méthode des lois d'échelle en taille finie à la distribution en taille des avalanches, ici notées $\rho(F, L)$, pour deux variantes du modèle du tas de sable [d'après Kadanoff et al., 1989]

Notons que dans la littérature géophysique, la méthode des lois d'échelle en taille finie est peu utilisée. Dans ce contexte, on peut émettre un certain doute sur la plupart des résultats obtenus dans ces modèles (valeur des exposants, forme des distributions), car des effets de taille finie peuvent concerner non seulement les événements de plus grande taille, mais peuvent également s'étendre dans l'ensemble de la distribution ($P(s)$ par exemple).

I.6.5. *Synthèse*

La taille finie d'un système a pour effet d'atténuer les singularités qui caractérisent son comportement au point critique. En particulier, elle décale la valeur du seuil critique, elle empêche la divergence des variables macroscopiques comme la susceptibilité ou la longueur de

corrélation, et elle modifie la forme des distributions statistiques, notamment la distribution de taille des avalanches ou de taille des amas.

Nous avons vu qu'il existait une méthode simple, dite « de lois d'échelle en taille finie », qui permettait de décrire ces effets de la taille finie, et de déduire le comportement du système dans sa limite thermodynamique à partir de son comportement réel en taille finie. Voici en résumé les principes de cette méthode :

1- On peut déterminer l'exposant ν en mesurant la valeur moyenne du seuil critique empirique ($p_m(L)$) pour différentes tailles de système (expression (I.63)), ou bien la largeur de la distribution des seuils empiriques pour différentes tailles de système (expression (I.64)).

2- On peut déterminer ensuite la valeur réelle du seuil critique (p_c) à partir de (I.63) ou (I.64), ou si la qualité des données n'a pas permis de déterminer ν, en combinant (I.63) et (I.64).

3- On détermine la valeur de α, β, γ, μ, T, σ, σ_n, σ_d, en plaçant le système au point critique (si on connaît a priori la valeur du seuil critique), et en mesurant la variable correspondante pour différentes tailles du système (expression (I.66)). Si on ne connaît pas a priori la valeur du seuil critique, et si la variable en question est une variable qui diverge au point critique (C_v, n_a, χ, s_c, n_c, ou d_c), on peut alors mesurer la hauteur du pic pour différentes tailles du système et ainsi déterminer α/ν, γ/ν, $1/\sigma\nu$, $1/\sigma_n\nu$, $1/\sigma_d\nu$, respectivement (équation (I.67)). Enfin, dans un cas plus général, on peut utiliser l'expression (I.65), c'est-à-dire qu'on ajuste les paramètres à déterminer jusqu'à ce que les courbes pour différentes tailles du système se superposent.

4- On détermine la valeur de τ, τ_n, τ_d, η, D, en utilisant l'expression (I.61b). Notons que si l'on a déterminé auparavant γ/ν, $1/\sigma\nu$, etc. (point 3), on peut aussi déduire η et D à partir des lois scalantes (p.71).

I.7. Autres mécanismes générant des lois de puissance

L'invariance d'échelle étant une propriété récurrente des systèmes géologiques, nous allons nous intéresser ici à un certain nombre de mécanismes, autres que le mécanisme de transition critique, qui peuvent générer cette invariance d'échelle. Ces mécanismes sont autant de formalismes dans lesquels il est possible d'interpréter l'existence de lois d'échelle dans la nature (ou la non existence de ces lois d'échelle), ainsi qu'éventuellement des variations dans les exposants. Notons que la plupart d'entre eux (balayage d'un point critique, transition du premier ordre en présence d'hétérogénéités), restent en fait dans le cadre général des transition de phase. Il semble finalement que le formalisme des transitions de phase soit aujourd'hui le seul formalisme dans lequel on soit capable d'interpréter la présence de lois d'échelle dans la nature. L'unique mécanisme qui semble plus difficile à englober dans ce cadre général sont les « processus multiplicatifs avec répulsion sur un seuil », que nous allons voir ci-dessous. Mais là encore, il est possible que l'on puisse calquer ce mécanisme sur un processus de transition de phase.

I.7.1. *Processus multiplicatifs avec répulsion sur un seuil*

Ce modèle a été introduit par Kesten [1973] et revisité notamment par Sornette et Cont [1997]. Considérons une variable x_t positive, définie par :

$$x_{t+1} = a_t x_t \tag{I.69}$$

où a_t est une variable aléatoire positive. Pour fixer les idées, imaginons que x_t représente l'évolution du nombre d'individus dans une population (poissons, bactéries, etc..) au cours du temps. (I.69) se ramène à :

$$x_{t+1} = a_t x_t = a_t a_{t-1} x_{t-1} = a_t a_{t-1} \ldots a_0 x_0 \tag{I.70}$$

c'est-à-dire,

$$\log x_{t+1} = \log x_0 + \sum_{i=1}^{t} \log a_i \tag{I.71}$$

Selon le théorème de la limite centrée, la variable $\Sigma_{i=1}^{t} \log a_i$ tend vers une loi normale centrée sur $t\langle \log a \rangle$, c'est-à-dire que x_t tend vers une loi log-normale. La moyenne $\langle x_t \rangle$, va dépendre du signe de $\langle \log a \rangle$. Si $\langle \log a \rangle < 0$, alors $\langle \log x_t \rangle$ va décroître à vitesse constante vers $-\infty$, c'est-à-dire que $\langle x_t \rangle$ va tendre vers 0 (la population meurt).

Si maintenant on complète l'équation (I.69) d'un terme additif :

$$x_{t+1} = a_t x_t + b_t \tag{I.72}$$

où b_t est une variable aléatoire positive. Cela signifie que l'on ré-injecte à chaque pas de temps de nouveaux éléments dans la population. Cette opération, qui évite que x_t n'atteigne des valeurs trop faibles (on impose un seuil minimum, d'où le terme de « répulsion »), permet à x_t de rester sensible aux fluctuations de a_t, et donc à certains moments, d'effectuer de larges excursions vers les grandes valeurs (Figure I-26.a). On peut alors montrer que x_t ne suit plus une loi log-normale mais une loi de puissance [Sornette et Cont, 1997] :

$$P(x_t) \sim x_t^{-(1+\mu)} \tag{I.73}$$

où μ est la solution de l'équation $\langle a^{\mu} \rangle = 1$. Ceci est illustré sur la Figure I-26.b.

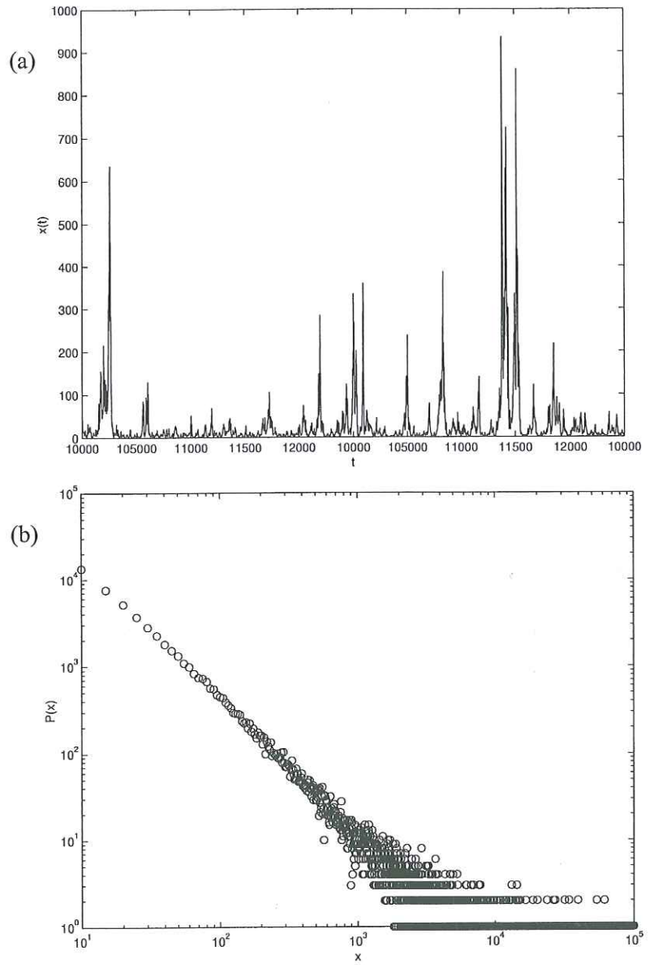


Figure I-26 Simulation d'un processus multiplicatif avec répulsion sur un seuil. On a pris pour b_t une distribution uniforme entre 0 et 1 et pour a_t une distribution uniforme entre 0.2 et 1.9. On observe effectivement une loi de puissance avec une pente conforme à la pente théorique attendue (μ=1.62 dans ce cas).

Le modèle est très robuste dans le sens où l'on peut prendre b_t fixe, sans que cela ait d'incidence sur l'existence ou l'exposant de la loi de puissance. De même, la forme de la distribution de probabilité qui décrit la variable a_t n'a pas non plus d'incidence sur les résultats, pourvu qu'elle conserve la condition $\langle \log a \rangle < 0$.

Ce mécanisme très général résulte donc de la combinaison de deux processus, un processus multiplicatif ($x_{t+1} = a_t x_t$ avec $\langle \log a \rangle < 0$) qui permet de larges excursions de la variable x_t, et un processus additif ($+b_t$) qui empêche x_t de tendre vers 0. Ce mécanisme a par exemple été proposé en finance, ou pour modéliser l'évolution des épidémies, l'évolution des populations,

l'immigration, etc. On peut très bien imaginer le même mécanisme dans le cas où $\langle \log a \rangle > 0$, mais avec cette fois un seuil maximum. Cette situation correspondrait davantage au contexte des séismes, où la variable x_t représenterait le niveau de contrainte sur une faille, la condition $\langle \log a \rangle > 0$ exprimerait le chargement tectonique, et où le seuil maximum serait le seuil de rupture. Il reste néanmoins à déterminer par quel mécanisme le chargement en contrainte s'effectuerait selon un processus multiplicatif et non un processus additif (comme on le conçoit généralement dans les modèles), c'est-à-dire pourquoi les variations de la contrainte sur la faille devraient dépendre du niveau de contrainte lui-même. A notre connaissance, il n'y a pas eu de tentative d'appliquer ce mécanisme général à la mécanique des tremblements de terre.

I.7.2. *Balayage d'un point critique*

Ce mécanisme, proposé par Sornette [1994a; 1994b] est directement lié au concept de transition critique. C'est en fait une façon pour un système d'exhiber un comportement apparemment critique (c'est-à-dire sans échelle caractéristique), tout en n'étant pas exactement placé au point critique. Il concerne des systèmes hors d'équilibre, dont l'un des paramètres de contrôle est modifié à vitesse constante en s'éloignant (ou en se rapprochant) d'un point critique. Il n'y a donc pas ici d'ajustement du paramètre de contrôle à une valeur précise, mais simplement un « balayage » du point critique par une variation constante du paramètre de contrôle. Ce mécanisme est donc probablement aussi général que la criticalité auto-organisée, et a redonné en fait un intérêt majeur au concept de transition critique ordinaire, qui semblait jusque là beaucoup trop particulier.

Considérons par exemple la distribution de taille des avalanches, $P(s)$. Pour une valeur ε du paramètre de contrôle, nous avons vu (équation (I.47)) que cette distribution suivait une loi de puissance tronquée du type :

$$P(s,\varepsilon) \sim s^{-\tau} f(s / s_c(\varepsilon)) \tag{I.74}$$

avec

$$s_c \sim \left|\varepsilon - \varepsilon_c\right|^{-1/\sigma} \tag{I.75}$$

où f est une fonction de coupure, typiquement de forme exponentielle négative, qui devient négligeable pour $s > s_c$.

Supposons maintenant que l'on varie lentement et à vitesse constante la valeur du paramètre de contrôle entre une valeur $\varepsilon_1 < \varepsilon_c$ et une valeur supérieure $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_c$, où ε_c est la valeur critique du paramètre de contrôle. Le nombre total d'avalanches de taille s observé entre ces deux valeurs va suivre une distribution $P'(s)$ définie par :

$$P'(s) \sim \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} s^{-\tau} f(s / s_c(\varepsilon)) d\varepsilon \tag{I.76}$$

En effectuant le changement de variable $\varepsilon \rightarrow s_c(\varepsilon)$, on obtient :

$$P'(s) \sim s^{-\tau} \int_{a}^{+\infty} s_c^{-(\sigma+1)} f(s / s_c) ds_c \tag{I.77}$$

où $a = s_c(\varepsilon_1)$. En utilisant le fait que la fonction f devient négligeable pour $s > s_c$, on obtient :

$$P'(s) \sim s^{-\tau} \int_{s}^{+\infty} s_c^{-(\sigma+1)} ds_c \tag{I.78}$$

c'est-à-dire

$$P'(s) \sim s^{-(\tau+\sigma)} \tag{I.79}$$

Autrement dit, la distribution $P'(s)$ observée est une distribution en loi de puissance, non tronquée, avec un exposant différent (plus grand) que celui de $P(s)$, égal à $\tau+\sigma$. De la même façon, si on construit la distribution de la taille des amas, $P'(n)$, ou la distribution de la durée des avalanches, $P'(d)$, au cours de ce « balayage », on va observer des distributions en loi de puissance, d'exposants respectifs $\tau_n+\sigma_n$ et $\tau_d+\sigma_d$.

C'est ce mécanisme qui est probablement à l'œuvre dans les expériences d'émissions acoustiques en laboratoire, dans lesquelles on augmente progressivement la contrainte dans un matériau à vitesse de chargement constante, et où l'on intègre souvent dans une même distribution les événements enregistrés sur toute la durée de l'expérience [voir par ex. Guarino et al., 1998; Garcimartin et al., 1997]. Mais cette situation peut également se rencontrer dans la nature, dans un contexte où la déformation s'opère à contrainte imposée.

Notons qu'en réalité, si l'on tient compte des événements de taille inférieure à $s_c(\varepsilon_1)$, on observera pour $P'(s)$ une distribution bimodale :

$$P'(s) \sim s^{-\tau} \quad \text{pour } s < a \tag{I.80}$$

$$P'(s) \sim s^{-(\tau+\sigma)} \quad \text{pour } s > a \tag{I.81}$$

Ceci est très important, car cela fournit une interprétation à l'existence de lois bimodales dans la nature, alternative à l'interprétation que l'on en donne couramment, à savoir un effet de taille finie [Volant et Grasso, 1994]. Nous reviendrons sur ce point au §.II.3.

I.7.3. *Transition du premier ordre en présence d'hétérogénéïtés*

Ce mécanisme, qui rentre une nouvelle fois dans le cadre général des transitions de phase, est décrit en détail dans Zapperi et al.[1999] ou Sethna et al.[1993]. Il s'agit d'une façon pour un système de produire un comportement invariant d'échelle, bien que celui-ci opère une transition de phase du premier ordre. Les conditions nécessaires pour que ce mécanisme apparaisse sont :

- **que le système soit proche d'une spinodale**[40]. Cette condition implique que la portée des interactions (connectivité) soit grande (en théorie infinie) ;
- **la présence d'hétérogénéité**, qui permet au système d'évoluer en avalanches vers l'instabilité finale.

Il se trouve que ces conditions sont précisément réunies dans le cas des matériaux élastiques, puisque les interactions élastiques sont des interactions à longue portée (décroissant en $1/r^3$), et que de plus, la plupart des matériaux ont un certain degré d'hétérogénéité. Ce mécanisme a donc été proposé comme alternative au concept de transition critique pour aborder la rupture dans les matériaux (voir §.II.1.1).

[40] c'est-à-dire un point de l'espace des phases séparant un état métastable d'un état instable du système (voir §.I.2.3).

I.8. Remarques et perspectives

Nous avons présenté dans la première partie de ce travail un certain nombre de concepts généraux permettant de rationaliser l'existence de lois de puissance dans la nature. Ces concepts s'inscrivent pour la plupart dans le cadre général des transitions de phase, qui semble être le cadre théorique adapté pour appréhender les phénomènes invariants d'échelle dans la nature. Nous nous sommes particulièrement intéressés au concept de transition critique, qui outre le fait de prédire naturellement l'existence de lois d'échelle, a un certain nombre d'implications, que nous n'avons pas encore mentionnées jusqu'à présent. Nous allons dans un premier temps signaler ces implications générales, puis présenter quelques perspectives de travail dans la continuité de ce travail théorique.

I.8.1. Autres implications de la criticalité d'un système

- **Impossibilité de séparer les échelles de description**

L'absence de longueur caractéristique dans un système critique implique par définition qu'il n'y a aucune échelle à laquelle on va pouvoir obtenir un échantillon représentatif du système, hormis l'échelle du système tout entier. Cette absence d'échelle caractéristique invalide les approches classiques basées sur une description moyenne du système (méthodes d'homogénéisation, milieux effectifs, etc…) et nécessite d'utiliser des approches qui tiennent compte de tout le spectre d'échelles de longueur qui caractérisent le système : l'analyse doit être globale[41]. Si on considère par exemple une région sismotectonique comme les Alpes, il n'y pas actuellement d'élément pour apprécier la dimension dynamique de cet objet géologique. En effet, la loi fréquence-magnitude à l'échelle des Alpes ne montre pas de troncature vers le bas similaire à celle représentée sur la Figure I-20.d [Volant et Scotti, 1998]. Ceci implique que la longueur de corrélation dans l'objet Alpes est au moins de la taille du plus gros séisme enrégistré dans cette région pendant la période instrumentale, c'est-à-dire de l'ordre de la dizaine de kilomètres. Par contre, il n'y a d'élément pour dire que l'extension dynamique de cet objet ne dépasse pas la limite géographique déssinée sur les cartes géologiques. De façon plus

[41] Dans un système qui n'est pas tout à fait à l'état critique (sous- ou sur-critique), on peut obtenir un échantillon représentatif du système à condition que sa taille (ou l'échelle d'observation à laquelle on se place) soit supérieure à la longueur de corrélation du système.

générale, l'hypothèse de criticalité dans la croûte implique que les zones dites « stables » sont aussi propices à développer un gros séisme que les zones dites « actives », la seule différence étant la plus grande échelle de temps sur laquelle ces gros séismes apparaissent, due à un chargement tectonique plus lent.

♦ Effets d'échelle

Dans un système critique, un certain nombre de propriétés varient avec l'échelle d'observation. Nous avons vu par exemple sur la Figure I-24 que la probabilité qu'un amas soit percolant pour une densité d'occupation p (densité de fissures par exemple) dépend de la taille du système, ou autrement dit de l'échelle d'observation. Un système de petite taille a tendance à percoler plus vite (c'est-à-dire pour un p plus faible) qu'un système de grande taille. Interprété en terme de fracturation (modèle d'Allègre et al. [1982] par exemple), cela signifie qu'un échantillon en laboratoire va devenir « fragile » (c'est-à-dire atteindre le seuil de rupture) pour une densité de fissures plus faible qu'un objet géologique à grande échelle (Figure I-27). Ce sont des données à prendre en compte dans l'extrapolation à grande échelle des expériences de laboratoire. D'autre propriétés comme la perméabilité [Bour, 1997] le module d'Young, ou le coefficient de diffusion d'un réseau de percolation vont également dépendre de l'échelle d'observation.

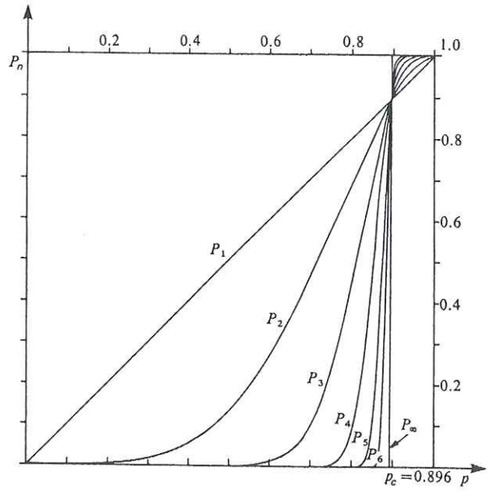


Figure I-27 Effet de la taille du système sur le seuil de rupture d'un matériau, dans le modèle d'Allègre et al. [1982] (voir description au §.I.4.4). P_1, P_2,..., P_n sont les distributions de probabilité qu'un élément soit « fragile » à l'échelle 1, 2,..., n. Pour une densité fixée d'éléments « fragiles » à l'échelle microscopique ($p<p_c$), la probabilité que le système soit « fragile » à une échelle n diminue avec n. Autrement dit, la probabilité que le système soit fragile diminue quand la taille du système augmente.

Un autre exemple d'effet d'échelle concerne la densité des amas, qui va diminuer avec l'échelle d'observation au voisinage du point critique. En effet, le caractère fractal des amas s'exprime par le fait que leur masse croit en r^D (équation (1.31)), c'est-à-dire que leur densité décroît en r^{d-D} et donc tend vers 0 quand $r \rightarrow \infty$. Ceci est illustré sur la Figure I-28, dans le cas du modèle de percolation. Autrement dit, les amas contiennent de plus en plus de « vides » au fur et à mesure que leur échelle croît. Cela signifie concrètement, par exemple dans le contexte de la recherche d'hydrocarbures, qu'on aura beaucoup moins de chances, en creusant un puits, de rencontrer l'amas percolant à l'échelle du réservoir qu'à l'échelle de l'échantillon. Là aussi, c'est quelque chose dont il faut tenir compte lorsqu'on extrapole les résultats de laboratoire à grande échelle.

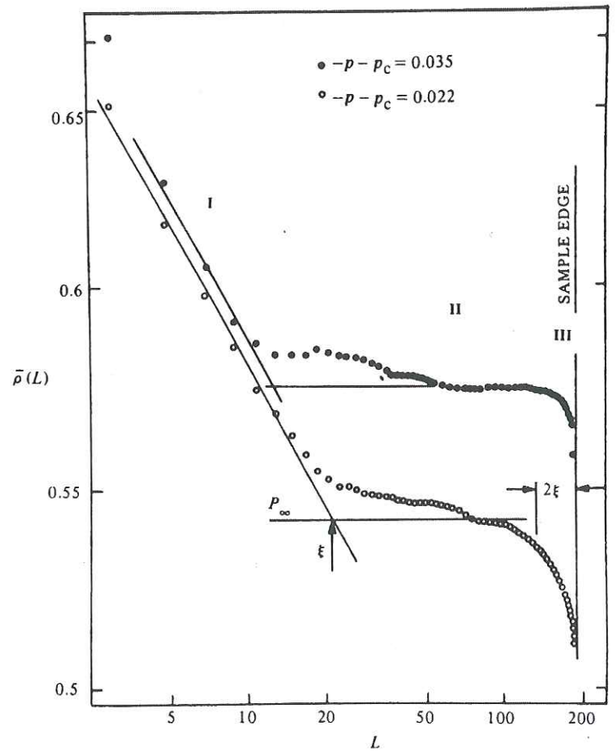


Figure I-28 Densité de sites appartenant à l'amas percolant (notée $\rho(L)$) dans un rayon L autour d'un point de référence appartenant à l'amas percolant, dans un réseau de percolation carré à 2 dimensions. Cercles pleins : p-p_c=0.035 ; Cercles vides : p-p_c=0.022. La figure montre une décroissance de la densité de l'amas percolant en fonction de l'échelle (de pente D-d=0.1), jusqu'à une distance de coupure correspondant à la longueur de corrélation ξ. Au delà de cette longueur de corrélation, l'amas percolant peut être considéré comme homogène (avec des inclusions de taille ξ), et sa densité tend vers un plateau de la valeur du paramètre d'ordre $P(p)$ (ici noté P_∞) (d'après Stauffer [1994], original de Kapitulnik et al. [1984]).

I.8.2. Vers une base d'interprétation générique du comportement des objets géologiques dans le formalisme des transitions de phase

Un de nos objectifs majeurs est de comprendre l'origine de l'invariance d'échelle observée de manière récurrente dans les objets naturels, ainsi que l'origine des écarts éventuels à ce comportement de référence. Les lois de puissance semblent en effet être la règle plutôt que l'exception en sciences de la Terre, et il est aussi important de comprendre pourquoi un objet géophysique s'écarte d'un comportement invariant d'échelle que de comprendre pourquoi il le génère. Nous souhaitons également comprendre la signification de la valeur des exposants qui décrivent ces lois d'échelle, et pouvoir fournir une interprétation à d'éventuelles variations (spatiales ou temporelles) dans la valeur de ces exposants.

Pour progresser vers ces objectifs, l'originalité de notre approche est d'utiliser non seulement des corrélations empiriques entre les comportements statistiques observés et les données géomécaniques de terrain (par ex., observation d'une variation du coefficient b de la loi de Gutenberg-Richter avec la profondeur [Mori et Abercrombie, 1997], ou d'une variation de b avec le contexte tectonique intraplaque / extraplaque / zones de subduction [Kagan, 1997], etc.) ou les résultats d'expériences en laboratoire (par ex., variation de b avec le niveau de contrainte [Scholz, 1968], variation de b avec le degré d'hétérogénéité [Mogi, 1962]), mais aussi d'utiliser des informations plus génériques, apportées par des concepts et des modèles de physique statistique. Nous pensons en effet qu'il y a bénéfice à essayer de replacer les observations empiriques faites en géophysique dans un cadre plus général de physique statistique, où de gros efforts ont été déployés depuis une quarantaine d'années pour essayer de dégager les facteurs génériques essentiels qui contrôlent l'origine des lois d'échelle et leurs exposants. L'idée est donc de profiter de ce support théorique fort pour aborder la compréhension des objets géologiques par des méthodes moins empiriques que les méthodes utilisées actuellement en géophysique.

Le travail des physiciens n'est pas complètement « affirmé » et il reste de nombreuses inconnues quant à l'origine des lois d'échelle et de leurs exposants. L'étude des systèmes à l'équilibre a déjà permis de dégager quelques renseignements précieux, notamment le fait que l'invariance d'échelle, ou la valeur des exposants, sont contrôlés par des facteurs très génériques. Par exemple, la valeur des exposants n'est déterminée, dans ces systèmes, que par trois paramètres : la dimensionnalité du système, la dimensionnalité du paramètre d'ordre, et la portée des interactions. Dans les systèmes dynamiques, il est possible qu'il existe d'autres facteurs déterminants, mais ceux-ci sont moins clairement identifiés. Une analyse préléminaire des modèles de physique statistique montre par exemple qu'un effet de mémoire des éléments [Lomnitz-Adler et al., 1992; Lübeck et Usadel, 1993], une directionnalité dans les avalanches [Kadanoff et al., 1989; Amaral et Lauritsen, 1997; Ben-Hur et Biham, 1996], une hétérogénéité dans la valeur des seuils [Amaral et Lauritsen, 1996; Christensen et al., 1996], ou une non

conservation de l'énergie[42] [Olami et al., 1992; Manna et al., 1999], semblent engendrer une modification du comportement des systèmes, soit dans la forme de la distribution des avalanches générées, soit dans la valeur des exposants.

Un travail en cours, sortant du cadre de cette thèse, consiste à faire une synthèse de tous ces modèles, en extrayant de chaque modèle les paramètres génériques qui semblent influer sur son comportement. La clé qui permet d'extraire ainsi des informations intéressantes sur la mécanique de la déformation à partir de modèles aussi détachés en apparence de ce contexte (tas de sable, systèmes ferromagnétiques, etc.) est que tous les systèmes « se ressemblent » au voisinage d'un point critique, et que seuls quelques facteurs génériques dirigent le comportement des systèmes à l'état critique (hypothèse d'universalité). Mais nous allons évidemment inclure également dans cette synthèse des modèles plus appliqués à la mécanique de la déformation (fusibles, barres élastiques, blocs-ressort, etc.), ainsi que les résultats d'expériences de déformation en laboratoire (roche, glace, bois, sable-miel-silicone, expériences de friction, patins-ressorts, etc.). Ces modèles et expériences proposeront des ingrédients plus spécifiques, semblant influer sur le comportement et sur les exposants des systèmes (loi de friction, pression de confinement, vitesse de déformation, etc.), qu'il faudra mettre en relation avec les ingrédients génériques identifiés auparavant.

Pour illustrer la richesse de la littérature dans ce domaine, nous avons dressé ci-dessous une liste d'articles (voir tableau) sur laquelle nous allons nous baser pour construire cette synthèse. Nous nous sommes limités ici aux articles :

- appliqués au contexte de la déformation (fracturation, friction, ou déformation plastique). Cette limite est plus ou moins subjective mais permet de faire un tri grossier.
- qui présentent parmi les résultats du modèle au moins la distribution fréquence-taille des événements, que nous considérons comme l'observable le mieux contraint en sismologie. Ce critère rejette donc tous les modèles purement géométriques (modèle de percolation, certains modèles de fusibles, modèle d'Allègre et al. [1982], etc.) qui ne donnent pas d'information sur la dynamique, et donc sur la statistique des événements.

Les lignes du tableau où se trouvent plusieurs articles correspondent à un même modèle, exploré à travers plusieurs articles successifs. Cette liste n'est probablement pas exhaustive, mais recense selon nous l'essentiel des articles parus ces dernières années. Nous aboutissons à un total d'environ 120 articles.

---

[42] Le rôle de la non conservation d'énergie est très débattu chez des physiciens. Certains proposent que la non conservation d'énergie dans les systèmes dynamiques à seuils a pour effet de rendre le système sous-critique [Vespignani et Zapperi, 1998] alors que d'autres proposent que la non conservation d'énergie modifie la classe d'universalité du système [Olami et al., 1992].

Nous proposons également une liste des travaux expérimentaux sur laquelle nous allons nous baser pour notre travail de synthèse, et choisis selon les mêmes critères. Nous aboutissons ainsi à 23 articles.

MODELES

[Allègre et al., 1998]
[Amitrano et al., 1999; Amitrano, 1999]
[Bak et al., 1987; Bak et al., 1988; Bak et Tang, 1989; Christensen et al., 1991; Vespignani et Zapperi, 1998] [Pepke et Carlson, 1994]
[Barriere et Turcotte, 1991]
[Barriere et Turcotte, 1994]
[Bebbington et al., 1990]
[Bebbington, 1997]
[Wang, 1997]
[Ben-Zion et Rice, 1993; Dahmen et al., 1998; Ben-Zion et al., 1999; Ben-Zion et Rice, 1995]
[Bhagavatula et al., 1995]
[Blanter et al., 1997]
[Brown et al., 1991]
[Burridge et Knopoff, 1967]
[Cafiero et al., 1995]
[Caldarelli et al., 1996]
[Carlson et Langer, 1989]
[Carlson, 1991a]
[Carlson, 1991b]
[Carlson et al., 1991]
[Chen et al., 1991] [Pepke et Carlson, 1994]
[Cowie et al., 1993; Cowie et al., 1995; Miltenberger et al., 1993; Sornette et al., 1994; Sornette et al., 1995]
[Ding et Lu, 1993]
[Fisher et al., 1997]
[Gabrielov et al., 1994]
[Gomez et al., 1995]
[Gomez et Pacheco, 1997]
[Gross, 1996]
[Hähner et Drossinos, 1999]
[Hainzl et al., 1999; Hainzl et al., 2000]
[Hallglass et al., 1997]
[Heimpel, 1996; Heimpel et Malin, 1998]
[Narteau et al., 2000]
[Hamilton et McCloskey, 1997]
[Heimpel, 1997]
[Henderson et al., 1994]
[Henderson et Maillot, 1997]
[Hooge et al., 1994]
[Huang et al., 1992]
[Huang et al., 1998]
[Ito et Matsuzaki, 1990]
[Kinouchi et Prado, 1999]
[Knopoff et al., 1992]
[Kumagai et al., 1999]
[Lahaie et Grasso, 1998]
[Leung et al., 1998]
[Lin et Taylor, 1994]
[Liu et al., 1995]
[Lomnitz-Adler et al., 1992]

[Lomnitz-Adler, 1992]
[Lomnitz-Adler, 1993]
[Lu et Ding, 1993]
[Lu et al., 1999]
[Main, 1992]
[Main et al., 1994b; Main et al., 1994a]
[Main et al., 2000]
[Matsuzaki et Takayasu, 1991]
[McCloskey et al., 1993]
[Morein et al., 1997]
[Myers et al., 1996]
[Nakanishi, 1990]
[Nakanishi, 1991]
[Nakanishi, 1992]
[Newman et Sneppen, 1996]
[Olami et Christensen, 1992; Christensen et Olami, 1992a; Christensen et Olami, 1992b] [Pepke et Carlson, 1994]
[Otsuka, 1972]
[Räisänen et al., 1998]
[Rubeis et al., 1996]
[Rundle et Jackson, 1977]
[Rundle, 1989]
[Rundle et Brown, 1991]
[Rundle et Klein, 1992]
[Rundle et Klein, 1993]
[Rundle, 1993]
[Rundle et Klein, 1995]
[Rundle et al., 1996]
[Schmittbuhl et al., 1996]
[Sammis et Smith, 1999]
[Shaw, 1993]
[Shaw, 1994]
[Shnirman et Blanter, 1999b; Shnirman et Blanter, 1999a]
[Sornette et Sornette, 1989]
[Sornette et Vanneste, 1996]
[Sousa Vieira, 1992]
[Sousa Vieira et al., 1993]
[Sousa Vieira, 1996b]
[Sousa Vieira, 1996a]
[Steacy et McCloskey, 1999]
[Takayasu et Matsuzaki, 1988]
[Tang, 1997]
[Tzschichholz et Herrmann, 1995]
[Wang, 1995]
[Wang, 1996]
[Wilson et al., 1996]
[Xu et al., 1992]
[Xu et Knopoff, 1994]
[Yamashita, 1993]
[Yoshino, 1998]
[Zapperi et al., 1997b]
[Zapperi et al., 1997a; Zapperi et al., 1999]

EXPERIMENTAL

[Amitrano, 1999]
[Anifrani et al., 1995]
[Bobrov et al., 1991]
[Canneli et al., 1993b]
[Ciliberto et Laroche, 1994]
[Feder et Feder, 1991]
[Garcimartin et al., 1997; Guarino et al., 1998]
[Johansen et al., 1993]
[Lockner et al., 1991; Lockner, 1993]
[Maes et al., 1998]
[Meredith et Atkinson, 1983]
[Mogi, 1962]
[Petri et al., 1994]
[Rubio et Galeano, 1994]
[Sammonds et Ohnaka, 1998]
[Scholz, 1968]
[Vinogradov, 1962]
[Vives et al., 1994; Vives et al., 1995]
[Weeks et al., 1978]
[Weiss et Grasso, 1997; Weiss et al., 2000]

Glossaire

Automates cellulaires : Classe de modèles qui consistent en un certain nombre de cellules placées sur un réseau. Chaque cellule évolue par pas de temps successifs selon une règle déterminée, qui dépend à la fois de l'état de cette cellule et de l'état de ses voisines. L'évolution des cellules est synchrone, c'est-à-dire que le nouvel état de chaque cellule ne prend effet que lorsque toutes les cellules ont été visitées.

Auto-similarité : Invariance d'échelle isotrope. Un objet auto-similaire est un objet qui reste invariant après changement d'échelle d'un même facteur dans toutes les directions. Un objet invariant d'échelle non isotrope est dit **auto-affine**.

Brisure spontanée de symétrie : Perte de symétrie dans l'état macroscopique d'un système (observé sur un temps infini) sans perte de symétrie dans sa règle de structure (lois d'évolution, hamiltonien). Une brisure spontanée de symétrie n'apparaît que dans la limite d'un système infini, et est nécessairement accompagnée d'une brisure d'ergodicité. En revanche, le contraire n'est pas vrai.

Bruit blanc : Signal aléatoire dont les échantillons ne sont pas corrélés les uns avec les autres. Un bruit blanc est le signal qui résulte d'un **processus poissonien**.

Chaos déterministe : Sensitivité extrême de la dynamique d'un système aux conditions initiales. Un système chaotique est caractérisé par un accroissement exponentiel au cours du temps de la distance entre deux états initialement proches. L'exposant de cette croissance exponentielle est appelé **exposant de Lyapunov**.

Complexité : longueur du plus court message décrivant un objet, à un niveau de description donné, au moyen d'un langage, d'une connaissance et d'une compréhension que les deux parties partagent au préalable. Dans le cas particulier où l'observateur est un être humain, il s'agit de la longueur du plus court message décrivant les *régularités* d'un objet, à un niveau de description donné, au moyen d'un langage, d'une connaissance et d'une compréhension que les deux parties partagent au préalable. On parle alors de **complexité effective**.

Emergence : Apparition dans un système de propriétés macroscopiques non présentes à l'échelle de ses composants individuels.

Criticalité : (ou état critique) Etat d'un système qui opère une transition de phase critique. Cet état est caractérisé par des corrélations à grande distance entre les éléments du système et une invariance d'échelle du système vis à vis de nombreuses variables.

Criticalité auto-organisée : Caractère de certains grands systèmes dissipatifs à seuil, soumis à un flux lent d'énergie, d'être attiré vers un état critique sans avoir à ajuster leur niveau d'énergie moyen par site, $<z>$.

Degrés de liberté : Variables dynamiques indépendantes d'un système.

Dimension fractale : Dimension de recouvrement d'un objet. Au sens strict [Mandelbrot, 1982], cette dimension n'est dite fractale que lorsqu'elle est non entière. On étend ici cette définition au cas général où la dimension de recouvrement est entière. La notion de « fractale » est une notion purement géométrique, et n'est qu'un sous-ensemble de la notion plus générale d'invariance d'échelle.

Echelle macroscopique : (ou échelle d'observation) C'est l'échelle à laquelle on veut décrire les propriétés du système que l'on étudie et généralement, celle à laquelle on impose les contraintes de l'extérieur. L'échelle d'observation coïncide en général (mais pas nécessairement) avec l'échelle maximale du système.

Echelle microscopique : (ou échelle de discrétisation) Echelle des éléments qui composent le système. C'est l'échelle à laquelle on spécifie les ingrédients du système, comme les états des éléments, les interactions, les lois d'évolution, etc. De façon générale, les échelles microscopique et macroscopique n'ont qu'une signification relative. Les éventuelles échelles intermédiaires entre microscopique et macroscopique sont dites **mésoscopiques**.

Ergodicité : Hypothèse fondamentale en physique statistique selon laquelle un système, sur un temps suffisamment long, va occuper l'ensemble des états microscopiques qui lui sont accessibles. Dans ces conditions, on peut identifier la moyenne temporelle d'une variable macroscopique sur cette période de temps et sa moyenne statistique sur l'ensemble des états microscopiques du système. Lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, on dit qu'il y a « brisure d'ergodicité ».

Invariance d'échelle : Un système est invariant d'échelle – ou ne possède pas d'échelle caractéristique – vis à vis d'une mesure M si quel que soit l'échelle considérée x, $M(\lambda x) = \lambda^{\alpha} M(x)$. Autrement dit, une dilatation de l'échelle $x \rightarrow \lambda x$, laisse invariante la mesure de l'objet, à un facteur d'échelle λ^{α} près. Une telle relation est appelée **loi d'échelle** et α, l'**exposant** de la loi d'échelle. La seule fonctionnelle pour M qui vérifie cette relation est une **loi de puissance**, c'est-à-dire $M(x) = Ax^{\alpha}$. Pour cette raison, une loi de puissance est aussi appelée loi d'échelle.

Invariance d'échelle discrète : Invariance d'un objet par un ensemble discret de changement d'échelles. Des exemples d'invariance d'échelle discrète sont fournis par les fractales déterministes (c'est-à-dire construites mathématiquement) telles que l'ensemble de Cantor, la courbe de Van Koch, etc. L'invariance d'échelle discrète est caractérisée par des exposants d'échelles *complexes*, dont la signature est l'existence d'oscillations **log-périodiques** dans les lois d'échelles.

Limite thermodynamique : Pour un système spatialement étendu, limite dans laquelle la taille linéaire L du système peut être considérée comme infinie à l'échelle des constituants élémentaires et où par conséquent les effets de bord peuvent être négligés. Prendre la limite thermodynamique de grandeurs macroscopiques d'un système consiste à les diviser par L^d pour se ramener à des grandeurs volumiques puis à faire tendre L vers l'infini à densité constante.

Ordre : Existence de relations intelligibles entre différents éléments. L'adjectif « intelligibles » souligne le fait que la notion d'ordre, comme la notion de désordre ou de complexité, est une notion subjective. *Syn* : régularités ; *Ant* : **désordre**, aléatoire.

Paramètre de contrôle : Variable intensive dont la valeur influence l'équilibre ou l'évolution d'un système sans être influencée en retour. Réglable à l'échelle macroscopique, le paramètre de contrôle fournit un moyen de « contrôler » le comportement du système.

Paramètre d'ordre : Dans le contexte des transitions de phase, variable macroscopique qui, dans la limite thermodynamique, est nulle dans la phase moins ordonnée et non nulle dans la phase plus ordonnée. Le paramètre d'ordre révèle la transition et sa nature.

Percolation : Terme utilisé dans de nombreux domaines (épidémiologie, feux de forêt, trafic routier, etc.) pour exprimer le fait qu'il existe au moins un chemin continu reliant deux bords opposé d'un système, et que par conséquent, une information quelconque (fluide, électricité, feu, épidémie, etc.) va pouvoir s'y propager de part en part.

Physique statistique : (ou mécanique statistique) Branche de la Physique de la matière condensée dont l'objectif est de décrire les propriétés macroscopiques (thermodynamiques) des systèmes à partir des propriétés de leurs constituants élémentaires, en utilisant des arguments statistiques appropriés.

Régime asymptotique : Equivalent temporel de la limite thermodynamique, il désigne une évolution d'un système observée sur un intervalle de temps $[t_0, t_0+T]$, où t_0 est pris assez grand pour qu'un éventuel régime permanent (s'il existe) se soit établi et que les conditions initiales soient ainsi écartées de la description, et où T est pris assez grand pour que toutes les caractéristiques de l'évolution, même celles à très long terme, soient observées.

Système : Ensemble d'éléments reliés entre eux par un certain nombre de relations. Un système peut désigner aussi bien un objet réel qu'une représentation physique de cet objet à une échelle donnée. Au sens strict, un système n'est pas nécessairement *interactif*, car les

relations entre les éléments sont purement structurelles, et ne servent pas nécessairement de support à des interactions.

Universalité : Notion qui caractérise les systèmes critiques, et qui connote le fait que des systèmes de natures très différentes peuvent, près de leurs points critiques respectifs, présenter un comportement remarquablement similaire. Au point critique, un système n'est plus défini que par la valeur de ses **exposants critiques**. On regroupe les systèmes de mêmes exposants critiques dans des **classes d'universalité**.

Partie II. Transposition du concept de transition de phase à la mécanique de la déformation

***

Nous avons présenté dans la première partie un ensemble de concepts permettant de rationaliser l'existence de lois d'échelle dans les objets naturels, et fournissant dans le même temps des clés d'interprétation à des écarts éventuels à ces lois d'échelle. Un grand nombre d'entre eux rentrent dans le formalisme général des transitions de phase, qui semble en fait être l'unique scénario générique qui permette d'obtenir des lois d'échelle.

Nous allons maintenant voir concrètement sous forme de synthèse comment ce concept de transition de phase peut s'appliquer de façon générale à divers aspects de la mécanique de la déformation, incluant les problèmes de fracturation, friction, ou déformation plastique. Nous n'avons pas encore vraiment cerné les limites des applications que ce formalisme permet d'englober. Il s'agit en fait un schéma d'analyse très général qui peut s'appliquer à beaucoup de domaines dans les sciences naturelles.

Dans un second temps, nous l'illustrerons de façon détaillée à travers trois exemples, qui ont donné lieu chacun à la publication d'au moins un article : la mécanique des éruptions dans un volcan, la déformation d'un réservoir d'hydrocarbure, et la déformation viscoplastique d'un échantillon de glace. La variété de ces applications illustre à elles seules la puissance et la généralité de ce formalisme. Il faut noter que, chronologiquement, la base théorique que nous avons présentée en première partie n'a été mise en place de façon solide qu'après la publication des deux premiers articles. Aussi, nous allons accompagner ces articles de compléments d'information, dans lequel nous allons ré-analyser à la lumière de cet apport théorique certains points qui n'avaient pas été développés dans ces articles.

***

II.1. Revue des différentes approches

L'idée d'associer la rupture d'un matériau ou la génération d'un séisme à une transition de phase paraît assez naturelle, même si elle n'a été proposée que de façon relativement récente [Vere-Jones, 1977; Allègre et al., 1982; Bak et Tang, 1989; Sornette et Sornette, 1989]. Ruptures et séismes sont en effet des phénomènes brutaux, macroscopiques, résultant en général de la compétition entre un facteur ordonnant – un élément de faille qui glisse tend à entraîner d'autres éléments, la propagation d'une fissure crée une accumulation de contraintes à son extrémité, qui tend à la propager davantage, etc. – et un facteur désordonnant – hétérogénéité du milieu, dissipation d'énergie par les ondes élastiques, etc. D'ailleurs, la théorie de Griffith elle-même, qui a été la première approche théorique de la mécanique de la fracture, est en de nombreux points similaire à la théorie de la nucléation dans les transitions de phase du premier ordre [Zapperi et al., 1999]. D'autre part, l'hypothèse de criticalité auto-organisée comme description pertinente de la déformation de la croûte à grande échelle de temps est relativement bien admise aujourd'hui, même si un débat subsiste sur les implications de cette criticalité auto-organisée [voir par ex. Main, 1999].

L'obstacle majeur qui limite aujourd'hui la validation de ces idées sur les objets réels, et qui empêche d'aller au delà de la simple analogie entre transitions de phase et déformation est le manque de données. Il y a en effet une distance entre l'univers bien contraint de la physique statistique (expériences reproductibles, mesures précises, paramètres peu nombreux et bien contrôlés) et le contexte réel de la croûte (en général une seule réalisation, mesures peu contraintes, paramètres nombreux et non contrôlés). D'autre part, les variables pertinentes pour une analyse de la déformation en terme de transition de phase (par ex., contrainte, taux de déformation, qui jouent généralement le rôle de paramètres de contrôle) sont souvent mal connues, et sont au mieux accessibles indirectement, par d'autres paramètres qui les représentent plus ou moins bien (vitesse de déplacement, énergie sismique libérée, etc.). Les seuls cas où l'on dispose de données relativement nombreuses et où l'on a accès plus ou moins directement à la valeur des paramètres de contrôle sont les cas de déformation induite, qui constituent à cet égard de véritables laboratoires pour tester les différents concepts de transition de phase à grande échelle [voir par ex. Grasso et Sornette, 1998].

En fait, les trois grands types de transition de phase que sont les transitions du premier ordre, les transitions critiques ordinaires, et la criticalité auto-organisée ont été proposés pour interpréter la mécanique de la déformation. Nous allons voir ci-dessous comment ces trois mécanismes ont été appliqués.

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
MAISON DES GEOSCIENCES
DOCUMENTATION
B.P. 53
F. 38041 GRENOBLE CEDEX
Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
Mail : ptalour@ujf-grenoble.fr
18 AOUT 2003

II.1.1. La rupture vue comme une transition de phase ordinaire

Ces vingt dernières années, de nombreux travaux ont proposé l'idée que la phase d'endommagement d'un matériau avant la rupture, ou la phase de préparation d'un séisme, corresponde à l'approche d'une transition de phase. Sous l'effet d'une augmentation de contrainte, et d'une augmentation correspondante de la densité de fissures, le matériau (ou la région considérée) subirait au moment de la rupture (ou du séisme principal) une sorte de transition entre un état « sain » et un état « rompu », coïncidant avec l'apparition d'un amas percolant de fissures (ou de failles) à travers le matériau (ou la région considérée). Selon les modèles, on considère comme paramètre de contrôle soit la contrainte macroscopique, soit la déformation macroscopique. Dans le contexte des séismes, où ces paramètres de contrôle sont mal connus, on fait l'hypothèse qu'ils évoluent de façon linéaire dans le temps et on utilise alors le temps comme paramètre de contrôle. Par la suite, on notera d'une façon générique ε le paramètre de contrôle et ε_c sa valeur critique, que celui-ci soit la contrainte, la déformation, ou le temps.

Pour tester ce concept de fracturation comme une transition de phase, les auteurs se sont appuyés essentiellement sur des modèles élastiques, inspirés du modèle de percolation (voir §.I.3.3 et §.I.5.1), mais prenant en compte des ingrédients supplémentaires, comme par exemple l'effet du report de contrainte d'un élément sur les autres éléments lorsque celui-ci vient à rompre, ou l'effet des hétérogénéités du milieu. Certains de ces modèles peuvent être résolus de façon analytique, et se prêtent donc facilement à l'investigation. C'est le cas par exemple du modèle démocratique de fibres et de liens (*democratic fiber-bundle model*) [Daniels, 1945; Andersen et al., 1997]. Les autres sont des modèles sur réseau (*lattice models*), qui doivent être résolus de façon numérique. Les plus courants sont les modèles de fusibles [Arcangelis et Herrmann, 1985; Hermann et Roux, 1990; Sornette et Vanneste, 1992], qui utilisent l'analogie entre l'électricité et l'élasticité : un fusible qui brûle correspond à la rupture d'un élément élastique, le courant électrique correspond à la contrainte, la tension à la déformation, et la conductivité au module d'Young[43].

Un point commun à tous ces modèles est que lorsqu'un élément rompt, il ne peut plus accumuler de l'énergie (son module élastique ou sa résistance électrique deviennent nuls). Autrement dit, il n'y a pas de cicatrisation des éléments. C'est un des points les plus importants qui différencient ces modèles des modèles de systèmes critiques auto-organisés. Ainsi, non seulement la charge appliquée sur le matériau augmente, mais de plus, chaque élément qui rompt augmente un peu plus la charge de ses voisins (rétroaction positive) et peut déclencher ainsi une avalanche de ruptures.

[43] Notons que cette analogie ne vaut que dans une certaine mesure, car les modèles de fusibles ne prennent pas en compte la nature tensorielle des interactions élastiques.

Un certain nombre d'expériences en laboratoire [Canneli et al., 1993b; Petri et al., 1994; Anifrani et al., 1995; Garcimartin et al., 1997; Maes et al., 1998] ou des études de la sismicité dans la phase de préparation de séismes majeurs [Bowman et al., 1998; Jaumé et Sykes, 1999] ont également exploré l'idée d'associer fracturation et transition de phase.

Les conclusions de tous ces travaux sont assez controversées. En fait, essentiellement deux écoles s'affrontent : certains voient la rupture d'un matériau (ou la génération d'un séisme) comme une transition de phase du premier ordre [par ex. Zapperi et al., 1999; Rundle et al., 1999], d'autres la voient comme une transition du deuxième ordre (ou critique) [par ex. Allègre et al., 1982; Smalley et al., 1985; Sornette et Andersen, 1998]. La distinction est d'importance, car si la rupture correspond à une transition du deuxième ordre, celle-ci doit être « annoncée » par une évolution caractéristique de certaines variables (susceptibilité, longueur de corrélation, etc.), c'est-à-dire qu'il existe des précurseurs à la rupture (ou à l'occurrence d'un séisme). Si à l'inverse la rupture correspond à une transition du premier ordre, ces précurseurs n'existent pas (hormis au voisinage d'une spinodale). Dans le contexte de la fracturation, les variables sur lesquelles les auteurs se basent pour séparer une transition du premier ordre d'une transition du deuxième ordre sont les suivantes :

(1) La susceptibilité χ. Dans les modèles, la susceptibilité est exprimée à travers la taille moyenne des avalanches, $<s>$; dans les expériences d'émissions acoustiques en laboratoire ou dans le cas séismes, la susceptibilité est exprimée à travers le taux d'énergie élastique libéré dM/dt. Dans l'hypothèse où la rupture correspond à une transition du premier ordre, la susceptibilité doit rester finie en $\varepsilon=\varepsilon_c$. Dans le cas où elle correspond à une transition du deuxième ordre, elle doit diverger en loi de puissance (équation I.57) au voisinage de $\varepsilon=\varepsilon_c$ (voir Figure II-1).

(2) La taille maximum des avalanches, s_c, ou le moment sismique maximum des séismes. Si la transition est du deuxième ordre, on doit observer dans la distribution fréquence-taille des événements un rejet de la taille de coupure s_c vers des valeurs de plus en plus grandes au fur et à mesure que l'on se rapproche de la transition (équation (I.47)). Si la transition est du premier ordre, on ne doit pas observer un tel rejet.

(3) Le module d'Young macroscopique du matériau, E. Une telle variable n'est accessible en principe que dans les modèles ou dans les expériences de laboratoire. Si la transition est du deuxième ordre, on doit observer une diminution en loi de puissance du module d'Young vers une valeur nulle (équation (I.45)). Si la transition est du premier ordre, le module d'Young doit être discontinu en $\varepsilon=\varepsilon_c$;

(4) conductance électrique macroscopique du matériau, Σ. Là aussi, une telle variable est difficile d'accès dans le cas des séismes. Si la transition est du deuxième ordre, on doit voir une diminution en loi de puissance de la conductance électrique du matériau, ou de façon équivalente, une divergence en loi de puissance de sa résistance électrique. Si la transition est du premier ordre, la conductance doit rester finie en $\varepsilon=\varepsilon_c$.

Nous n'avons pas cité parmi ces observations discriminantes l'observation d'une loi de puissance dans la distribution de taille des avalanches (ou des séismes), car nous avons vu au

§.I.7.3 qu'une transition du premier ordre pouvait générer des lois de puissance en présence d'hétérogénéités.

Notons également que certains auteurs [Sornette, 1998] ont proposé que les exposants critiques associés à ces « précurseurs » soient en fait des nombres complexes (au sens mathématique), ce qui se refléterait par des fluctuations log-périodiques[44] des variables ci-dessus. Pour l'instant, à partir quelques études de cas [par ex. Johansen et al., 1996], l'existence de ces fluctuations log-périodiques dans les systèmes géologiques n'a pas été clairement démontrée.

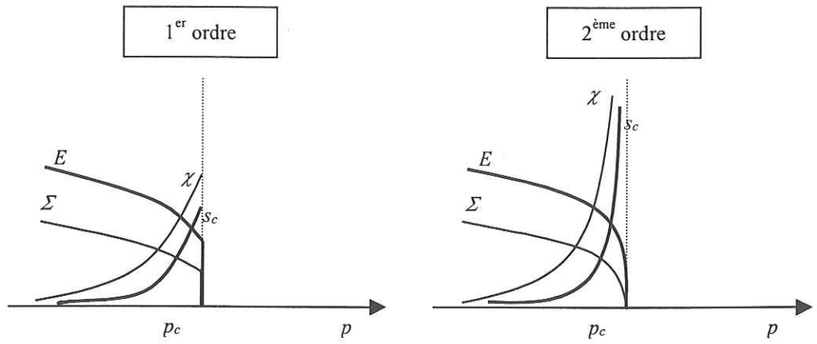


Figure II-1 Evolution de variables caractéristiques de la fracturation au voisinage d'une transition de phase du premier ordre et d'une transition de phase du deuxième ordre (voir texte pour la définition de ces variables).

Nous n'allons pas ici donner de réponse définitive sur la nature (premier ordre ou deuxième ordre) de la transition correspondant à la rupture d'un matériau (ou à l'occurrence d'un séisme), mais citer simplement quelques unes des avancées les plus récentes dans ce domaine, qui ont permis d'apporter des arguments en faveur de l'une ou l'autre des hypothèses.

Modèles

Il apparaît dans les modèles que la nature de la transition entre la phase « saine » et la phase « rompue » (c'est-à-dire respectivement les phases désordonnée et ordonnée, par analogie avec le modèle de percolation) dépend essentiellement du degré d'hétérogénéité du matériau, c'est-à-dire, du degré de désordre introduit dans la valeur des seuils des éléments. Si le matériau est totalement homogène, les éléments vont se charger élastiquement jusqu'à leur seuil de rupture, où ils vont rompre simultanément. La transition est alors du premier ordre, et s'exprime sur une

[44] c'est-à-dire des fluctuations périodiques en prenant en abscisse la variable $\log(\varepsilon_c-\varepsilon)$.

courbe contrainte-déformation par un mode de rupture dit « fragile » (Figure II-2.a, κ=4). Si au contraire le matériau est hétérogène, le matériau va présenter une phase d'endommagement progressif, dans laquelle les éléments vont rompre sous forme d'avalanches de tailles variées. La transition est alors du deuxième ordre, et s'exprime sur une courbe contrainte-déformation par un mode de rupture dit « ductile » (Figure II-2.a, κ=0.75). Selon chaque cas, le module d'Young va passer soit de façon discontinue d'une valeur positive à une valeur nulle (premier ordre), soit décroître de façon continue en loi de puissance vers une valeur nulle (deuxième ordre). La Figure II-2.b illustre à travers le module d'Young ce passage d'une transition du premier ordre à une transition du deuxième ordre, en fonction du degré d'hétérogénéité. On remarque que l'exposant T de la loi de puissance associée au module d'Young (encadré sur la Figure II-2.b) diminue lorsque le désordre diminue (c'est-à-dire lorsque κ augmente).

Un débat parmi les physiciens est de savoir si la rupture devient une transition critique dès lors que l'on introduit un minimum d'hétérogénéité [Sornette et Andersen, 1998], ou bien si au contraire, la rupture ne devient critique que dans la limite d'une hétérogénéité infinie [Zapperi et al., 1999]. Pour appuyer la première idée, Sornette et Andersen [1998] réexaminent un modèle de fusible proposé par Sornette et Vanneste [1992], et montrent dans ce modèle que la rupture reste critique pour toute valeur non nulle du degré d'hétérogénéité, mais que pour un faible niveau d'hétérogénéité, la gamme de valeurs du paramètre de contrôle (c'est-à-dire de la contrainte appliquée) sur laquelle la phase critique de préparation de la rupture peut être observée devient très petite, et peut donc porter à croire que la rupture est alors une transition premier ordre (donc sans précurseurs).

A l'opposé, certains auteurs [Rundle et Klein, 1989; Zapperi et al., 1999] pensent que la rupture d'un matériau correspond toujours à une transition du premier ordre, et que cette transition ne devient critique que dans la limite d'un désordre infini. Leur idée est d'interpréter la rupture comme une instabilité qui apparaîtrait à proximité d'une spinodale. Ceci serait rendu possible par le caractère à longue portée des interactions élastiques. Du fait de la présence d'hétérogénéités dans le matériau, le processus de nucléation de la phase ordonnée (« rompue ») se ferait alors de façon intermittente, sous forme d'avalanches distribuées en loi de puissance [Unger et Klein, 1984], fournissant ainsi une interprétation alternative à l'observation de lois de puissance à l'approche de la rupture dans les matériaux [Guarino et al., 1998; Petri et al., 1994].

Il semble donc qu'il n'y ait pas de réponse définitive fournie par les modèles en ce qui concerne la nature exacte de la transition correspondant à la rupture d'un matériau. La seule certitude est que le degré d'hétérogénéité semble avoir un rôle prépondérant dans le mode de rupture, ce qui avait été constaté par Mogi [1962] lors d'expériences sur échantillons de roche.

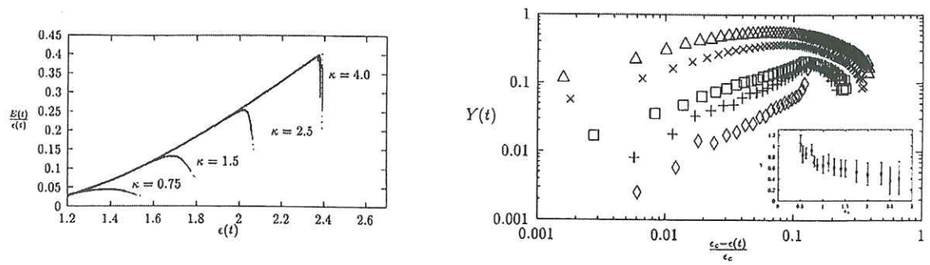


Figure II-2 Effet de l'hétérogénéité sur le mode de rupture d'un matériau dans le modèle d'Andersen et al. [1997]. κ est un paramètre qui représente l'inverse de l'hétérogénéité ($1/\kappa$ est donc le degré d'hétérogénéité) (a) courbe contrainte-déformation pour différentes valeurs de κ. (b) valeur du module d'Young, ici noté Y, en fonction de la distance du paramètre de contrôle à sa valeur critique ε-ε_c, pour différentes valeurs de κ=0.5(◊), 0.75(+), 0.875(□), 1.4(×), et 2.0(Δ) Dans ce modèle, le paramètre de contrôle ε est la déformation imposée au matériau.

Expériences

Les observations expérimentales tendent plutôt à montrer que la fracturation serait un phénomène critique [Anifrani et al., 1995; Guarino et al., 1998]. Ces études montrent en effet une augmentation en loi de puissance du taux d'énergie élastique émise sous forme d'émissions acoustiques avant la rupture d'un échantillon [Guarino et al., 1998] ou d'un container à usage industriel [Anifrani et al., 1995]. Néanmoins, un balayage plus important des conditions expérimentales – type de matériau, mode de chargement, température, pression de confinement – est nécessaire pour vérifier la robustesse de ces observations.

Séismes

Certains auteurs ont identifié dans la sismicité précédant quelques séismes majeurs (M≥6.5), une accélération en loi de puissance du taux d'énergie sismique relâchée (précurseur 1 ci-dessus) [Bowman et al., 1998; Jaumé et Sykes, 1999] (Voir par ex. Figure II-3.a). Jaumé [1999] ont également montré une augmentation de la magnitude de coupure dans la loi de Gutenberg-Richter des séismes précédant certains événements majeurs (précurseur 2) (voir Figure II-3.b). Même s'il est difficile d'attester de la fiabilité statistique de telles études, qui ne reposent souvent que sur des études de cas et sur un faible nombre de séismes (voir par ex. Figure II-3.b), elles fournissent une certaine base observationnelle à l'idée que la phase de préparation d'un séisme puisse correspondre effectivement à l'approche d'un point critique.

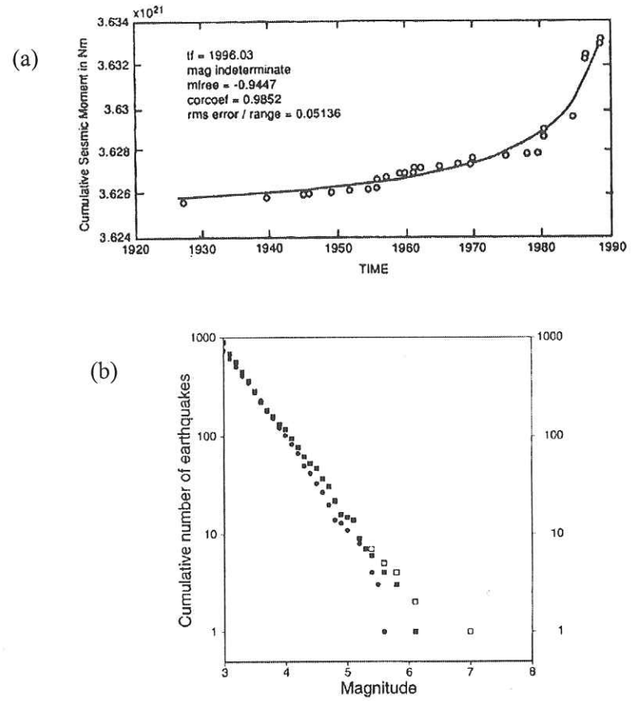


Figure II-3 Test de l'hypothèse de point critique sur le séisme de Loma Prieta (1989) (a) Evolution de la sismicité dans la région de la baie de San Francisco avant le séisme [d'après Bufe et Varnes, 1993] (b) évolution de la loi fréquence-magnitude des séismes situés à une distance de moins de 100 km de l'épicentre [d'après Jaumé et Sykes, 1999]. Cercles pleins : période 1942-1965, carrés : période 1965-1989, carrés vides : même chose que cercles pleins mais en incluant le séisme de Loma Prieta. On note un rejet vers les grandes échelles de la magnitude de coupure au fur et à mesure que l'on se rapproche du séisme.

En conclusion, le débat n'est pas tranché en ce qui concerne la nature de la transition correspondant à la rupture d'un matériau ou à la génération d'un séisme (premier ordre ou deuxième ordre). Une recherche plus systématique des « précurseurs » énumérés ci-dessus (non seulement dans le cas de séismes « majeurs » mais aussi dans le cas de séismes induits) permettra probablement d'apporter des éléments de réponse à cette question.

II.1.2. La déformation vue comme un phénomène critique auto-organisé

II.1.2.1. Croûte

Depuis l'introduction du concept de CAO en 1987, la croûte a toujours été présentée comme l'un des meilleurs exemples de systèmes naturels présentant un comportement CAO [Bak et Tang, 1989; Sornette et Sornette, 1989; Cowie et al., 1993]. Si on reprend point par point les conditions de la CAO énumérées au §.I.5.4.2, on peut effectivement dire que la croûte est un système étendu, hétérogène, soumis à un flux d'énergie (convection), dissipatif (déformation, chaleur), dont la dynamique est régie par des seuils (seuils de friction, seuils de rupture, etc.), et qui possède une certaine capacité à emmagasiner de l'énergie (sous forme d'énergie élastique et de chaleur). La croûte est également caractérisée par une grande séparation d'échelles de temps entre le chargement tectonique d'une part, et la relaxation d'énergie au cours des séismes d'autre part. Les séismes sont alors interprétés comme des avalanches, qui permettent de maintenir le système à un niveau d'énergie moyen constant. Enfin, l'observation majeure qui valide l'hypothèse de CAO pour la croûte est bien sûr la loi de Gutenberg-Richter (équation I.50). Les autres observables invariants d'échelles en sciences de la Terre, souvent présentés comme des signatures de la CAO (répartition fractale des failles, répartition fractale des séismes, distribution en loi de puissance de la longueur des failles, distribution en loi de puissance des intervalles de temps entre séismes) ne sont pas, nous l'avons dit, des manifestations directes de l'état CAO de la croûte. Elles résultent d'autres facteurs, comme par exemple la présence d'hétérogénéités [voir par ex. Cowie et al., 1993] ou l'effet de la dissipation.

Concernant précisément le caractère dissipatif de la croûte, nous avons déjà évoqué le fait qu'une partie non négligeable (au sens où la condition $\varepsilon \to 0$ n'est pas respectée [Vespignani et Zapperi, 1998], voir §.I.5.4.1.3) de l'énergie élastique disponible à la déformation était dissipée lors d'un séisme (chaleur, ondes élastiques), et que par conséquent, la croûte devrait en théorie être considérée comme un système sous-critique. En fait, une des questions n'est pas de savoir si la croûte est sous-critique (elle l'est probablement à l'échelle globale puisqu'elle dissipe de l'énergie lors de sa déformation), mais de savoir quelle est la longueur de corrélation dans la croûte. Parmi les géophysiciens, il y a principalement deux écoles, ceux qui pensent que les séismes « majeurs » dissipent suffisamment d'énergie pour décharger une partie de la croûte et générer une période de lacune sismique (partisans de l'hypothèse de « cycle sismique ») [Shimazaki et Nakata, 1980; Nishenko, 1991] ; autrement dit, dans cette hypothèse, la longueur de corrélation dans la croûte serait de l'ordre la taille des plus gros séismes enrégistrés dans la croûte supérieure (quelques centaines de km). A l'inverse, certains pensent qu'il n'y a aucune corrélation temporelle entre les séismes, ou autrement dit, que deux événements « majeurs » peuvent avoir lieu au même endroit dans une période rapprochée [Kagan et Jackson, 1999]. Cette deuxième hypothèse suppose implicitement une longueur de corrélation dans la croûte supérieure à la taille des plus gros séismes enrégistrés (quelques centaines de km). Si l'on s'en tient à la loi fréquence-taille des séismes globaux [Kagan, 1991; Sornette et al., 1996], il n'y a actuellement pas d'évidence de troncature exponentielle aux grandes échelles qui pourrait indiquer l'effet d'une longueur de corrélation. Le changement de pente observé aux alentours de M=7.3 (qui serait dû à l'épaisseur de la couche sismogénique) n'altère pas la forme générale de la distribution aux magnitudes supérieures, qui reste en loi de puissance [Sornette et al., 1996]. Autrement dit, les données ne rejettent pas l'hypothèse que la longueur de corrélation soit

supérieure à quelques centaines de km, et que par conséquent, des séismes supérieurs à cette taille soit possibles dans la croûte supérieure.

Le dernier ingrédient essentiel de la CAO que nous n'avons pas encore examiné est la condition de cicatrisation instantanée des éléments par rapport à l'échelle de temps d'une avalanche. Il est difficile de déterminer si cette condition est effectivement remplie lors d'un séisme. Certains modèles de génération de séisme se basent sur l'idée qu'il y a endommagement au cours de la rupture (par ex., par le choix d'une loi de friction dépendante du déplacement, traduisant un affaiblissement du matériau au cours du glissement). Ces modèles vont donc à l'encontre de l'hypothèse de CAO, et mènent typiquement à un comportement du type « sur-critique » [Nakanishi, 1990; Lomnitz-Adler et al., 1992]. Ces modèles sont validés par le fait que si l'on isole les séismes situés sur une faille bien déterminée, la distribution fréquence-taille de ces séismes semble s'écarter d'une loi de Gutenberg-Richter et tendre plutôt vers une distribution du type sur-critique (*weak characteristic distribution*) [Wesnousky, 1994]. D'autres au contraire considèrent le matériau comme intact au cours du glissement, et sont donc compatibles avec l'hypothèse de CAO.

En conclusion, la croûte rassemble une grande partie des ingrédients propres aux systèmes CAO, mais il n'est pas définitivement acquis que la croûte soit vraiment critique. D'une part, la dissipation d'énergie a plutôt tendance à rendre la croûte globalement sous-critique. D'autre part, l'endommagement (ou autrement dit, l'effet mémoire) du matériau lors des séismes aurait plutôt pour effet de la rendre sur-critique [Lomnitz-Adler et al., 1992] à l'échelle d'une faille (séisme caractéristique). Dans cette dernière hypothèse, la loi de Gutenberg-Richter observée à l'échelle globale de la croûte serait simplement le reflet de l'invariance d'échelle des failles, et n'aurait pas une origine dynamique. A l'heure actuelle, les données ne sont pas en mesure de valider l'une ou l'autre de ces hypothèses.

II.1.2.2. Expériences de fracturation

Dans les expériences de fracturation en laboratoire, le matériau s'endommage généralement de façon irréversible, c'est-à-dire qu'il y a pas de cicatrisation des fissures. Dans ces conditions, l'hypothèse de CAO, a priori, ne peut pas s'appliquer [voir par ex. discussion Sornette, 1994a; Canneli et al., 1993a]. Néanmoins, certains auteurs [Zapperi et al., 1997b; Amitrano et al., 1999] ont tenté de réconcilier l'hypothèse de CAO avec un tel contexte d'endommagement, en prenant en compte l'endommagement non pas sous la forme d'une rupture irréversible des éléments, mais sous la forme d'une diminution progressive du module d'Young des éléments à chaque fois que ceux-ci sont impliqués dans une avalanche. Autrement dit, on se place ici à une échelle mésoscopique, c'est-à-dire supérieure à l'échelle d'une seule fissure. Ces modèles évoluent alors vers un comportement plastique, ayant toutes les caractéristiques d'un système CAO (avalanches en loi de puissance, niveau d'énergie moyen constant, etc.).

Une condition très importante pour que la CAO puisse décrire ce type d'expériences (ou aussi bien les modèles numériques correspondant) est que l'expérience s'effectue à déformation imposée, et non à contrainte imposée. En effet, si l'on impose la contrainte dans le système, on

impose l'énergie élastique moyenne stockée dans les éléments (l'équivalent de la variable $<z>$ dans le modèle du tas de sable). Ceci est incompatible avec la CAO, où ce paramètre doit être laissé libre, et s'ajuster de lui-même à sa valeur « critique ».

II.2. Un modèle d'automates cellulaires pour décrire les mouvements de fluide dans un massif rocheux : Application au volcan de la Fournaise (Réunion)

II.2.1. Introduction

Comme nous l'avons vu au §.I.8.2, de nombreux modèles ont été proposés ces dernières années, inspirés des modèles conceptuels de transition de phase, mais adaptés à des contextes géophysiques particuliers (simulation du comportement de la croûte à grande échelle, simulation du glissement sur une faille, etc.). Le modèle présenté ici propose de décrire les mouvements de fluide à l'intérieur d'un édifice volcanique, et les éruptions qui en résultent, comme un phénomène d'avalanche dans un système constitué d'un grand nombre de poches de fluide (magma) en interaction. Ce système à seuils, alimenté de façon lente par les remontées de magma du manteau, serait à l'origine de phénomènes d'amplification, et de l'invariance d'échelle observée dans les volumes d'éruptions émis sur certains volcans basaltiques (Piton de la Fournaise, Réunion, Springerville, Arizona).

L'objectif de ce modèle n'est pas le même qu'un modèle conceptuel de transition de phase, qui doit contenir un minimum de paramètres, de façon à pouvoir simuler de grands systèmes et caractériser au mieux le comportement du modèle dans sa limite thermodynamique. Le modèle proposé ici, comme la plupart des modèles appliqués à un contexte plus spécifique, possède une paramétrisation plus complexe. Pour autant, il ne viole pas le principe du rasoir d'Occam[45]. Il s'attache simplement à reproduire un champ plus vaste d'observations. Le modèle se veut donc le plus simple possible, tout en collant de façon réaliste au contexte d'un volcan.

Les données dont nous disposons sont caricaturales de la faiblesse des données en sciences de la Terre. Bien que le Piton de la Fournaise soit un des volcans les plus actifs à la surface du globe, nous ne disposons que de 76 éruptions pour la période 1920-1992. La particularité de la distribution des volumes observés, par rapport à une loi d'échelle classique, est l'existence d'une

[45] principe de base dans les sciences selon lequel on doit toujours privilégier de deux modèles qui reproduisent le même jeu d'observations, celui d'entre eux qui contient le moins de paramètres. Autrement dit, de deux solutions, il faut toujours choisir la plus simple.

troncature aux petites échelles, qui se traduit dans un diagramme cumulé par une partie plate pour les volumes inférieurs à 3 10^6 m^3 (voir Figure 3a de l'article). Cette troncature n'est pas due à la limite de détection des volumes d'éruptions, qui se situe un ordre de grandeur plus bas, et appelle donc à une interprétation plus physique. Nous proposerons à la suite de cet article une interprétation possible à cette troncature. Nous développerons également certains aspects qui ne figurent pas dans l'article.

II.2.2. Article publié dans « Journal of Geophysical Research »

JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, VOL. 103, NO. B5, PAGES 9637–9649, MAY 10, 1998

A fluid-rock interaction cellular automaton of volcano mechanics: Application to the Piton de la Fournaise

Franz Lahaie and Jean Robert Grasso

Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Observatoire de Grenoble, Grenoble, France

Abstract. We developed a cellular automata model of fluid circulation within a rock matrix to test whether considering a volcano as a complex system helps understand the observed eruptive and seismicity patterns of the Piton de la Fournaise (PF) volcano. In this model, fluid and rock cells interact through locally defined rules, including a steady increase of pressure, a threshold dynamics, a fluid redistribution algorithm, and an energy dissipation process. Comparison of the model results and observations for more than 40 simulations provides information on the mechanics of the PF volcano and basaltic volcanoes in general. First, we demonstrate that the multiple lenses magma storage model for the summit reservoir of basaltic volcanoes is consistent with the PF 1920-1992 eruptive pattern, proposing an alternative to the macrochamber model. Second, we show that the great number of interactions between magma storage lenses in a critical state may work as a nonlinear filter, modifying a possible uniform increase of pressure in the input, induced by deep magma supply and gas exsolution during crystallization, into a nonlinear fluid flow emergence in time and size, both unpredictable and organized in nonrandom scaling statistics. The fluid-rock cellular automaton allows us to explore scales ranging from global Earth mantle to porous rock matrix, thus rationalizing the power law volume distribution of total eruptions on the Earth surface [*Mc Clelland et al.*, 1989] and the hierarchical organization that is reported for many types of fluid-induced seismicity [*Grasso*, 1993; *Miller et al.*, 1996], respectively.

1. Introduction

Volcanoes belong to a class of natural phenomena hurricanes, floodings, earthquakes, that exhibit nonlinear unpredictable behavior and a remarkable scaling organization in the space, time, and energy domains that often take the form of power laws. As suggested by *Shaw and Chouet* [1991], this apparent ubiquitous scaling organization may cover more than 15 decades in time (1 s to about 60 m.y.) and 10 orders of magnitude in length (0.1 mm to 10^3 km) and applies to a variety of phenomena including volcanic signals (tremors and high-frequency emissions) [*Diodati et al.*, 1991; *Nishimura and Hamaguchi*, 1993; *Shaw and Chouet*, 1991], eruptive activities [*Grasso and Bachèlery*, 1995a; *Mc Clelland et al.*, 1989; *Sornette et al.*, 1991; *Wickmann*, 1966], earthquakes [*Grasso and Bachèlery*, 1995a,b], geometry of lava flows [*Bruno et al.*, 1992; *Grasso and Bachèlery*, 1995a], and ground deformation [*Cortini et al.*, 1991]. Classical mechanical laws fail to explain such observations.

In the last decade, a multidisciplinary research community has taken advantage of results obtained for composite systems in statistical physics, by considering the natural phenomena described previously as "complex systems," that is, distributed systems of entities, whose interactions make the global emerging behavior substantially different from the sum of each entity's local behavior. Computer simulations and particularly cellular automata have proved useful in treating such complex problems. A cellular automaton consists of a number of cells arranged in a lattice. The cells evolve in discrete time steps, and the state of each cell in the next time step is determined, according to a deterministic transition law, as a function of the present state of the cell itself and the states of its neighbors [*Rapaport and Meyer*, 1994].

Here we test whether considering a volcano as a complex system helps understand some of its global dynamics. Accordingly, we develop a generic cellular automaton of interacting fluid and rock cells that includes the simplest processes that are believed to operate in a volcano, and we try to capture the essential features of its complex behavior. We build the model on the assumption proposed by many authors [*Duffield et al.*, 1982; *Fiske and Kinoshita*, 1969; *Ryan et al.*, 1981; *Shaw and Chouet*, 1991; *Swanson et al.*, 1976; *Wilson and Head*, 1988] that the shallow reservoir of basaltic volcanoes is rather made of a system of magma storage units than a single magma macrochamber.

The validity of the model is tested on observables of the Piton de la Fournaise (PF) volcano, Reunion, during the 1920-1992 period. The model shows interesting behavior in the sense that it captures, for specific input parameters, the basic processes observed on the PF volcano, including the frequency-size distributions of eruptions, the power law Gutenberg-Richter relation for earthquake magnitudes, and the temporal non-linearity of the volcano eruptive pattern observed for this period. In the following section we review the reported observational basis of our model assumptions, namely, the numerous evidences that basaltic volcanoes, and especially the PF volcano, can be considered as complex systems of interacting entities.

Copyright 1998 by the American Geophysical Union.

Paper number 98JB00202.
0148-0227/98/98JB-00202$09.00

2. Observational Evidence for Complexity on Volcanoes

2.1. Structure of the Summit Reservoir

The Piton de la Fournaise is a hot spot basaltic volcano similar in many aspects to the Hawaiian volcanic shield. Studies on most basaltic volcanoes have converged toward the presence of a shallow magma storage beneath the summit area in which magma resides temporarily before erupting (see, e.g., *Tilling and Dvorak* [1993] for a review). Constraints from gravitational forces lead to a consensus on the shallow reservoir depth (3-4 km), but one knows little about its structure, and one particularly fundamental question is whether the shallow reservoir is a single or multiple magma storage.

With the exception of a few supporters for the single-chamber model [*Yang et al.*, 1992], many authors [*Duffield et al.*, 1982; *Fiske and Kinoshita*, 1969; *Ryan et al.*, 1981; *Shaw and Chouet*, 1991; *Swanson et al.*, 1976; *Wilson and Head*, 1988] have suggested that the shallow magma reservoir of Kilauea, undoubtedly the most studied volcano in the world, was a laterally elongate, planar, compartmentalized body of dikes and sills rather than a simple, spherical magma chamber. Other studies complement this model, on the basis of apparent shifts in the location of pressure centers during and between eruptions [*Decker*, 1987] or travel time tomography [*Rowan and Clayton*, 1993]. The latter also suggests the presence of magma pockets centered at 0-2 km depth beneath the rift zone area.

Similar conclusions have been inferred on Piton de la Fournaise from seismic, gravimetric, ground deformation, and geochemical studies, leading to propose the schematic model of the PF magma storage structure shown in Figure 1 [*Lénat and Bachèlery*, 1990]. This conceptual model proposes the presence, at shallow depth beneath the summit area, of a network of magma storage units that could be viewed as a plexus of dykes and sills. Recent studies on geochemical composition of lavas [*Albarède et al.*, 1997] and seismic tomography [*Nercessian et al.*, 1996; *Sapin et al.*, 1996] also seem to suggest that the PF magma storage is multiple. Whatever the details of the different models, a great deal of observations argue for the shallow reservoir of basaltic volcanoes to be compartmentalized in many magma storage units that we refer to as "lenses" on account of their generally observed elongated shape.

2.2. Physics of Eruptions: A Threshold Process

An eruption is a threshold process that is typically known to start when the pressure increase in one storage unit triggers the rupture of the surrounding wall rock [*Parfitt et al.*, 1993; *Tait et al.*, 1989; *Tilling and Dvorak*, 1993]. Pressure may increase by addition of new magma volume or exsolution of volcanic gases as the magma cools. These two processes will be referred to in the paper as deep magma supply and magma crystallization, respectively.

2.3. Evidence of Criticality

PF displays an endemic temporal criticality, both highlighted by its strong exogenous activity, for example, 23 eruptions have occurred since 1985, and its strong endogenous activity, for example, a daily seismic activity is registered, including during the apparent volcano repose period [*Grasso and Bachèlery*, 1995a, Figure 2]. The observation of the Gutenberg-Richter law for earthquakes over more than 2 orders of magnitude in the short 1990-1992 period [*Grasso and Bachèlery*, 1995a, Figure 1a] also argues for the PF endemic criticality. This temporal criticality is the signature of the extreme sensitivity of the volcano to minute perturbations as further mapped by the non-random daily occurrence of earthquakes [*Grasso and Bachèlery*, 1995a, Figure 3].

2.4. Nonlinear Unpredictable Behavior

Piton de la Fournaise, as most volcanoes, has highly nonlinear behavior, making the time and size pattern of the future eruption quite difficult to predict to this day [*Grasso et al.*, 1994; *Nercessian et al.*, 1996; *Sapin et al.*, 1996; *Toutain et al.*, 1992]. During the last 1992 PF eruption, tourists were still within the summit caldera when lava flow occurred! The time lapse between an increase in the seismicity rate and an eruption, the most effective tool for eruption prognosis, ranges from a few days to just a few hours on PF. Sometimes, such an increase in the seismicity rate does not even lead to any exogenous lava flow [*Grasso and Bachèlery*, 1995a, Figure 2]. In spite of an 11 months repose mean time in the 1920-1992 period and the occurrence of 23 eruptions between 1983 and 1992, the volcano is inactive since 1992, that is almost 5 years, further exemplifying the volcano unpredictability. When focusing on the temporal evolution of the PF cumulative volume of eruptions in the 1920-1992 period, Figure 2 shows that neither time-predictable nor size-predictable behavior, as defined in earthquakes terminology [*Shimazaki and Nakata*, 1980], can reasonably be assigned to the volcano eruptive pattern for the 1920-1992 period.

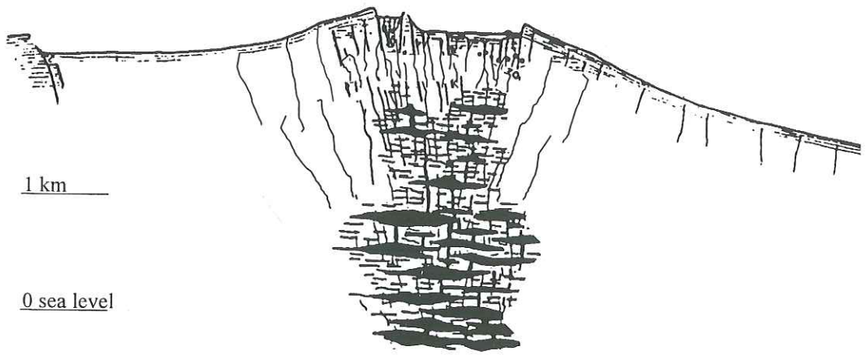


Figure 1. Conceptual vertical cross section of the Piton de la Fournaise shallow structure that results from seismic, gravimetric, ground deformation, and geochemical studies [adapted from *Lénat and Bachèlery*, 1990]. The volcano structure is described as a network of temporary connected magma storage lenses, embodied within a rock matrix.

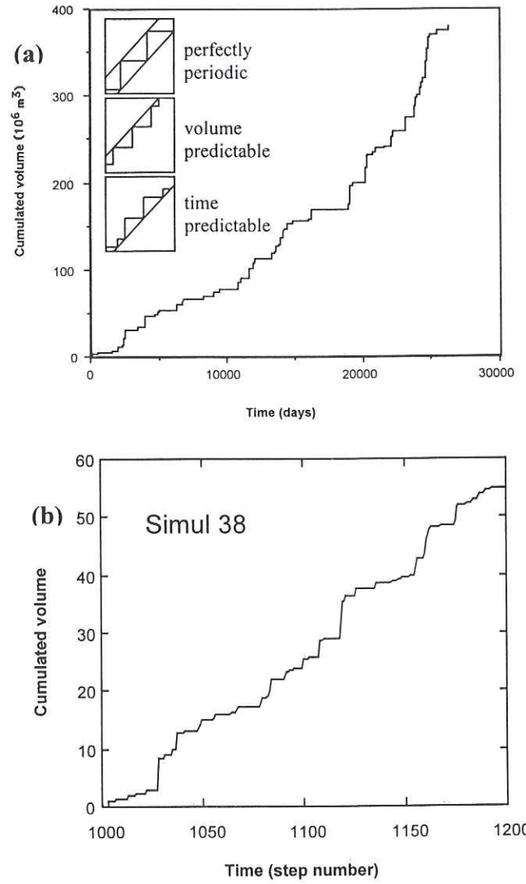


Figure 2. (a) Cumulative volume of eruptions observed on PF as a function of time, during the 1920-1992 period. Note the strong nonlinearity of the PF eruptive behavior. The perfectly periodic, time and volume predictable models are indicated for comparison (inset). (b) Cumulative volume of G-outflows as a function of time yielded by the model (see text for definition of G-outflows). Simul 38, in a certain time window, has been chosen for illustration.

2.5. Scaling Organization

The scaling organization of volcanoes, that generally takes the form of a power law distribution of volcanic observables, is a well-documented phenomenon [*Bruno et al.*, 1992; *Cortini et al.*, 1991; *Diodati et al.*, 1991; *Grasso and Bachèlery*, 1995a; *Mc Clelland et al.*, 1989; *Nishimura and Hamaguchi*, 1993; *Shaw and Chouet*, 1991; *Wickmann*, 1966]. On PF, power law organization includes both the volcano structure, hierarchical geometry of dykes and fractures, and the volcano dynamics, hierarchical size distribution of induced earthquakes, eruptions, and intermissions [*Grasso and Bachèlery*, 1995a, Figure 1].

In this study we focus on the distribution of erupted volumes observed on PF in the 1920-1992 period (Figure 3a). The distribution of erupted volumes is nonuniform (see comparison with a uniform distribution on Figure 3a). *Grasso and Bachèlery* [1995a] proposed a correlation of the distribution with a power law statistical model over a finite scale range, that is volumes $>3*10^6$ m^3 (Figure 3a, inset). For small volumes ($<3*10^6$ m^3) the distribution is truncated and rather correlates with a Gaussian-like model. We note that the $3*10^6$ m^3 cut-off threshold in the power law fit is 1 order of magnitude larger than the estimated $0.3*10^6$ m^3 measurement resolution [*Grasso and Bachèlery*, 1995a]. Therefore the loss of organization for small volumes should not be viewed as a defect in the data catalogue but as an inherent feature of the volcano dynamics.

Sufficiently long databases are always necessary in order to test whether a natural system behaves as a complex system. The short time of observation (10^2-10^3 years for volcanoes) compared to the duration of a given natural process ($>10^6$ years to build a volcanic edifice) raises a legitimate question: is the PF scaling organization (based on 76 events) observed for the 1920-1992 period really characteristic of the volcano dynamics? We address this problem by considering a longer time series (366 events in the 2.1-0.3 Ma period) collected on another basaltic volcano (Springerville volcanic field, Arizona) by mapping of individual lava flows [*Condit and Connor*, 1996]. The distribution of lava flow area (Figure 3b) exhibits the very same scaling pattern as those observed on PF, that is, a power law for large areas, over 2 orders of magnitude (inset), and a Gaussian-like roll-off for small areas. Because the variability of eruption volumes, for constant lava viscosity, is rather driven by their surface than their thickness, lava flow volumes can be grossly extrapolated from lava flow areas by multiplying by a constant thickness. In such conditions, the lava flow volume distribution for the Springerville volcanic field has the same shape as the area distribution of Figure 3b. Such similarities between two volcano eruptive patterns (PF and Springerville, Figures 3a and 3b), over timescales that range from 10^2 to 10^6 years, argue for the particular PF scaling organization not only to be characteristic of the single PF dynamics but also in a certain extent the dynamics of basaltic volcanoes in general.

3. Model Description

In keeping with the observational features stated in the previous section, we test a model of basaltic volcano reservoir as a plexus of many lenses of magma storage, embodied within a rock matrix. When pressure exceeds a given threshold in one of these lenses, the lens fails and magma propagates in the rock matrix until it reaches one or several neighboring magma lenses, that may fail in turn, thus triggering an avalanche of magma lens failures. We conceptually test that the power law behavior observed on several basaltic volcanoes (at least PF and Springerville) is the fingerprint of the threshold response of a multilens magma storage system to a steady increase of pressure induced by magma supply or magma crystallization.

The model basic assumptions are observations 1-3 of the previous section. We primarily test the model validity by recovering the PF erupted volume distribution in the 1920-1992 period (observation 5, Figure 3a). We also investigate the consistency of the model with the observed PF temporal eruptive

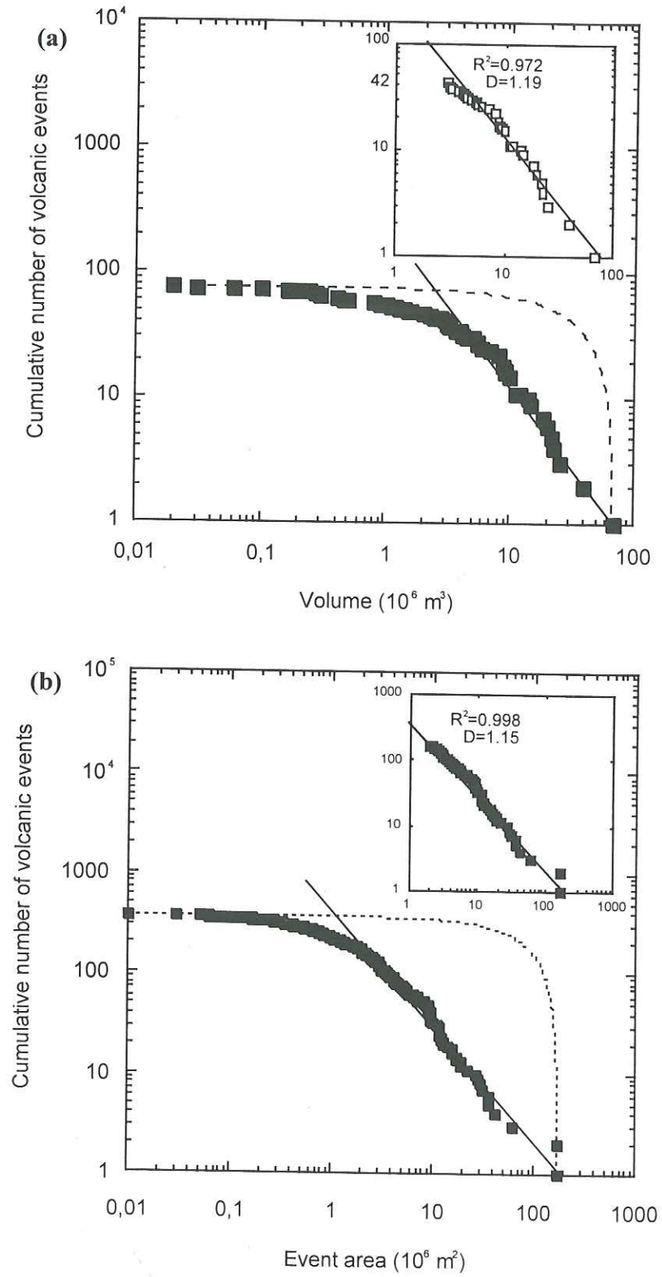


Figure 3. Cumulative distribution of (a) the PF erupted volumes in the 1920-1992 period (76 eruptions) [adapted from *Grasso and Bachèlery*, 1995a] and (b) areas covered by lava flows in the Springerville volcanic field, Arizona, between 2.1 Ma and 0.3 Ma (366 lava flows [adapted from *Condit and Connor* 1996]). First, note the nonuniform aspect of both distributions, by comparison with a uniform distribution (dashed lines) of 76 erupted volumes in the range 0.02-70 10^6 m^3 (Figure 3a) and 366 lava flow areas in the range 0.01-174 10^6 m^2 (Figure 3b). Second, note the similarities between the two distributions, that is, a power law correlation for large volumes (areas) and a Gaussian-like roll-off for small volumes (areas). Insets show magnifications of the two distributions in the range scale of their power law correlation. R^2 is the correlation coefficient and D is the slope of the power law. The validity of the model is mostly tested by focusing on the recovery of distribution (Figure 3a).

Table 1. Model Parameters and Their Range of Values Investigated in This Study

Parameter	Symbol	Range of Values
Number of lens cells	N	25→2500
Connectivity	C	4→40
Lens cell volume distribution	V	homogeneous (10) or power law [1;1000]
Rock cell resistance distribution	R	homogeneous (5) → heterogeneous [3;7]
Lens agent criticality parameter	γ	0.9→0.999
Loading process	L process	local or global or local+global
Distribution of incremental injected volumes	ΔV_0	homogeneous (0.1) or power law [0.1;10]
Incremental value of pressure buildup	α	0.001→0.01

pattern (observation 4, Figure 2) and the PF frequency-size distribution of earthquakes (observation 5, [*Grasso and Bachèlery*, 1995a, Figure 1a]).

As a typical tool to study complex systems, we develop a generic cellular automata model for fluid circulation within a rock matrix. All the model parameters and associated ranges of values investigated in this study are reported in Table 1.

3.1. Topology

The model involves two types of computational elements, called lens and rock cells. Lens cells simulate "lenses," that is, fluid storage matrices. Rock cells simulate "rocks," that is, blocks of solid rock matrix encompassing lenses. Nearest-neighbor relations are introduced (between lens and rock cells only) that define for a lens cell (rock cell) the rock cells (lens cells) to which it is likely to transfer fluid. Our model is not a geometrical model. Nevertheless, several topological representations of the model can be used. On Figure 4a, the model is represented as a topological graph, that is, a system of sites interconnected by bonds, where lens and rock cells are the sites of the graph, and bonds represent their nearest-neighbor relations. In this study we use another representation: lens and rock cells are arranged in a square grid, where a lens cell is surrounded by four rock cells and a rock cell by two lens cells (Figure 4b). Using such a systematic scheme, the number of rock cells is approximately twice the number of lens cells. We define the size of the system in terms of the number N of lens cells in the grid. Here we investigate the model size in the range N=25 to N=2500.

We define as "connectivity" the number of rock cells included in the nearest-neighborhood of a single lens cell. One characteristic of this model relative to other cellular automata

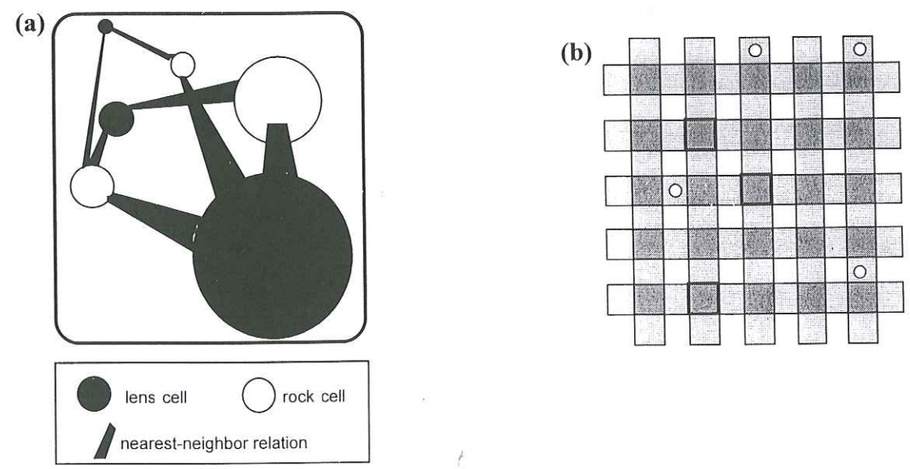


Figure 4. Two topological representations of the fluid-rock cellular automata model. Medium gray cells represent lens cells and light gray cells represent rock cells. (a) Graph representation: the model is represented as a system of sites interconnected by bonds, where sites represent lens and rock cells, and bonds represent their nearest-neighbor relations. (b) Grid representation: lens and rock cells are arranged in a grid. White surfaces have no relevance and are "no cell." In the grid representation, the cells nearest-neighbor relations are not explicitly represented on the grid but are defined implicitly according to a systematic scheme (Figure 5). Bold outlines represent injective lens cells and white circles represent eruptive rock cells. The choice of injective lens cells and eruptive rock cells on the grid is free, but once chosen, they remain the same for all simulations of the same grid size. In this study, for practical reasons of systematization and visualization of the cells nearest-neighbor relations (Figure 5), we used a grid representation of the model. The geometry of the representation must not be mistaken with (1) the geometry of the model, which has no geometry or (2) the geometry of the simulated real world. For instance, the grid shown in Figure 4b must in no way be viewed as a cross section of the PF volcano shallow structure, similar to Figure 1.

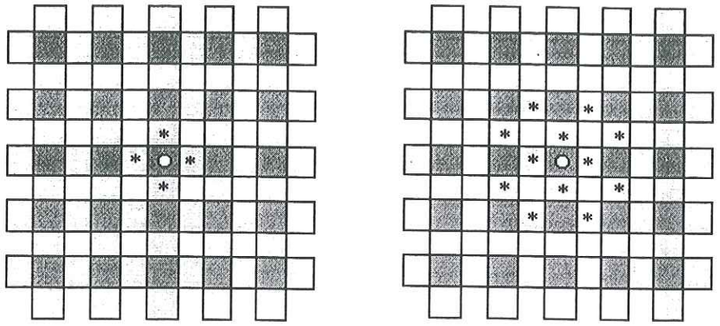


Figure 5. The fluid redistribution scheme. We show for (left) connectivity 4 and (right) connectivity 12 a lens cell (white circle) and the location of its nearest-neighbor rock cells (black asterisks). Fluid is redistributed from a lens to a rock cell or from a rock to a lens cell but not directly from a lens to a lens cell or from a rock to a rock cell. Nearest-neighbors are the cells to which fluid is likely to be redistributed. The rule of the redistribution depends on the cell type. A rock cell redistributes fluid to all its nearest-neighbor lens cells, while a lens cell redistributes fluid only to its nearest-neighbor rock cells whose resistance is lower than the lens cell supracritical pressure (P_s). However, in the case of an homogeneous rock cell resistance distribution, rock and lens cells have the same redistribution scheme.

used in geophysics [*Bak et al.*, 1988; *Ito and Matsuzaki*, 1990] is that the connectivity (C) is a model parameter. For each value of the connectivity, the nearest-neighbors are arranged according to a systematic pattern relative to their cell of reference. Figure 5 shows for C=4 and C=12 the location of the rock cell nearest-neighbors relatively to a lens cell of reference. Note that as a result of the finite extent of the grid, cells located on the border of the grid, called "border cells," have a reduced number of nearest-neighbors (Figure 6).

Specific "injective lens cells", are defined as the sites where fluid is introduced in the system. Similarly, specific "eruptive rock cells" are defined as the sites where fluid is released from the system. When transposed to the volcano, injective lens cells mimic the interface between the deep magma supply and the shallow lenses plexus. Eruptive rock cells mimic the interface between the shallow lenses plexus and the volcano ground surface. The choice of injective lens cells and eruptive rock cells among all the cells of the system is free (Figure 4b). The locations and the respective ratios of injective lens cells and eruptive rock cells to the total number of lens and rock cells (4% and 5% respectively), are parameters that we have not tested in this basic model.

3.2. Cells Dynamics

A lens cell is defined by three parameters: a volume (V), a fluid pressure (P), and a critical pressure (P_c). A rock cell is defined by only one parameter: a "resistance" (R) to fluid flow. The basic rule of the model is that fluid flows through rock matrix when P of a lens cell is greater than R of one of its nearest-neighbor rock cells. Therefore R can be viewed as a percolation threshold for fluid propagation through the rock matrix.

The volume unit is arbitrary. We consider that the PF lenses volume have been unchanged for the 1920-1992 period. Accordingly, V is taken time invariant during simulation. Lens cell volumes are taken either homogeneous (V=10 for all lenses), or distributed following a cumulative power law in the interval [1;1000]. In the latter case, where lens cell volumes are different, volumes are allocated randomly, at initialization, to the different lens cells of the system. In cumulative statistics, the slope of the power law depends, for a fixed [1;1000] range of volumes, on the number of lens cells in the system (N). In this study the slope ranges from 0.46 (for N=25) to 1.13 (for N=2500). In the volcano application, the assumption of a power law volume distribution of lens cells allows us to test the possible control of the PF exogenous power law observables by a fractal intrinsic geometry [*Grasso and Bachèlery*, 1995a].

A lens cell is considered as a sealed system, except when the fluid pressure causes lens cell failure and fluid redistribution (see further). Assuming isothermal conditions, the pressure buildup (ΔP) of a compressible fluid in a sealed system in isochoric and isothermal conditions, supplied with a fluid volume ΔV is

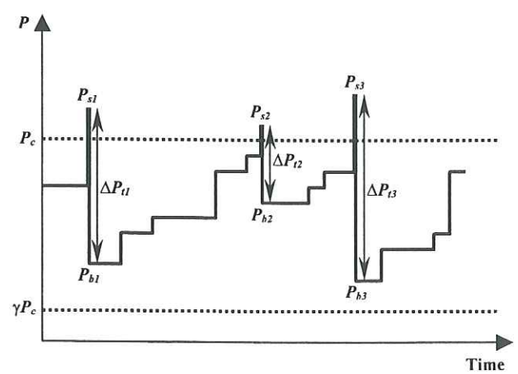


Figure 6. Sketch of the temporal evolution of a given lens cell internal pressure (P) during simulation. P_c is the lens cell pressure threshold. P_s is the supracritical pressure before fluid ejection. P_b is the back-pressure after fluid ejection; P_b is chosen randomly between γP_c and P_c. $\Delta P_t = P_s - P_b$ is the pressure drop linked to the fluid ejection. The ejected fluid volume (ΔV_t) is deduced from ΔP_t by $\Delta V_t = \beta V \Delta P_t$, V being the volume of the lens cell.

$$\Delta P = (1/\beta)\Delta V / V_s \qquad (1)$$

where β is the fluid compressibility and V_s is the system volume. Accordingly, when a lens cell of volume V receives a volume of fluid ΔV_t, its pressure P builds up to an amount ΔP according to (1), with $\Delta V = \Delta V_s$ and $V_s = V$. The β value is arbitrary. We choose β=0.1.

The lens cell failure threshold (P_c) is not an intrinsic lens cell parameter but depends on the properties of the lens cell surrounding rock matrix, that is, neighbor rock cell resistances. P_c is defined for a lens-cell as the lowest of all its nearest-neighbor rock-cell resistances. When $P > P_c$, i.e. when P reaches a "supracritical pressure" (P_s), the lens cell fails and recovers a subcritical pressure or "back pressure" (P_b), which is chosen randomly between γP_c and P_c, γ being a parameter of the model that defines the distance of lens cells to their critical threshold (γ ranging from 0.9 to 0.999 in our study). Accordingly, a volume of fluid ΔV_t, corresponding to the pressure drop $\Delta P_t = P_s - P_b$, is redistributed equitably into the nearest-neighbor rock cells whose resistance R is lower than P_s. ΔV_t is determined by (1) (with $\Delta V = \Delta V_t$; $\Delta P = \Delta P_t$; $V_s = V$). A sketch of the variation of P for a given lens cell during simulation is proposed in Figure 6.

We consider that on the timescale of the 1920-1992 period, any magma flow that occurred in the volcano did not globally alter the resistance of the rock matrix to further magma flows. Accordingly, the rock cell parameter R is taken time invariant during simulation. At initialization, rock cell resistances are randomly chosen in a certain range, and next, they are randomly allocated to the rock cells of the system. The range of resistances is a model parameter that determines the rock matrix heterogeneity. Here R equals 5 in the homogeneous case and ranges in the interval [3;7] in the most heterogeneous case. The dynamics of a rock cell consists in redistributing a given volume of fluid equitably to all its lens cell nearest-neighbors. Eruptive rock cells represent the only sites where volume is lost outside the system.

It is important to notice that the fluid redistribution algorithm is different for lens and rock cells. The former redistributes fluid only to the rock cell neighbors whose resistance R is lower than P_s, while the latter redistributes fluid to all its lens cell neighbors. In this sense, rock cells play an important part in the complexity of fluid flow from lens to lens cells.

The two parameters that also determine the number of degrees of freedom for fluid flow in the system are the connectivity and the range covered by the rock cell resistance. Large connectivity and weak heterogeneity of rock cell resistances are conditions that favor the spreading of fluid in a large number of rock cells when ejected from a lens cell, that enhance mixing of magma in the system, and that increase the number of lens cell interactions. Weak connectivity and a high heterogeneity of rock cell resistances, on the other hand, restrict fluid redistribution to only one or a few rock cells and constrain fluid to flow along deterministic paths of lower resistance, annihilating lens cell interactions. In the volcano paradigm the two end cases mentioned above may correspond to different fluid flow characteristics of the volcano rock medium, a diffusive rock matrix and a directive rock matrix, respectively.

Last, let us focus on a distinctive computational feature of our cellular automaton relatively to standard cellular automata. In a standard cellular automaton, cells evolve in a synchronous way. In other words, when an avalanche of fluid redistributions develops, fluid redistributions proceed simultaneously through the system, such that a lens cell always views different fluid arrivals in the same redistribution step, as a unique volume. In the volcano simulation, this computational method assumes that the duration of lens to lens magma transfer is constant or at least that the duration difference between magma transfers is low compared to lenses healing timescale. In our cellular automaton we use an object language (Smalltalk 80), as opposed to standard cellular automata that use a procedural language (C, fortran, etc...). The advantage of an object language lies in the possibility of programming cells evolution either with the synchronous or with the asynchronous method. In the latter method, cells always treat different fluid arrivals as distinct arrivals. We chose the asynchronous method in the volcano simulation, in order to study the effect of assuming that, after failure, the characteristic timescale of lens healing is lower than that of lens to lens fluid transfer. It is important to realize that to this day there is no reason to prefer one method or the other.

3.3. Loading Processes

The loading of the system is carried out by two processes. The "local loading," that mimics the deep magma supply in the volcano analogy, consists in the steady injection of an incremental fluid volume (ΔV_0) in the injective lens cells. At each injection, ΔV_0 is shared out equitably between all the injective lens cells. Here 10,000 injections are carried out in all simulations. ΔV_0 is taken either invariant (ΔV_0=0.1) or distributed following a cumulative power law in the interval [0.1;10], that is, an exponent of 2 for the power law (with 10,000 injections). In the volcano application the assumption of a power law distribution of injected volumes allows us to test the possible control of the PF exogenous scaling observables by a hierarchical organization of magma supply.

This steady injection of incremental volumes serves as a time reference, each new injection representing the beginning of a new time step. A new injection is carried out only at the end of the fluid redistribution avalanche linked to the previous injection, that is, when all cells have recovered a stable state ($P < P_c$). In other words, we choose a time step for fluid injection that is longer than the duration of any fluid redistribution avalanche.

The "global loading," that mimics magma crystallization in the volcano analogy, consists in an incremental pressure buildup in all lens cells at each time step. As for local loading, a new step is carried out only when all cells have recovered a stable state. The amount of the pressure buildup is a percentage (α) of the lenses internal pressure; α is a parameter that ranges from 0.001 to 0.01 in our application.

Local and global loading processes may operate either simultaneously or separately. In the former case, they have the same time reference, that is, both local and global injections are carried out in the same time step.

4. Numerical Results

4.1. Simulation Procedures and Estimators of the Model Dynamics

Forty three simulations were carried out (parameters listed in Table 2). Each simulation consisted of 10,000 time steps, namely, 10,000 loading steps. When at least one lens cell redistribution occurs, in response to an injection, we consider that an "endogenous event" has occurred. An endogenous event could result in turn in an "exogenous event," that is, an outflow at one or several eruptive rock cells.

Table 2. Parameter Sets of the 43 Simulations Carried Out in This Study

Simulation Reference	N	C	V	R	γ	L process	ΔV_0	α
Simul 1	25*	4	10	[3;7]	0.9	local	0.1	/
Simul 2	100*	4	10	[3;7]	0.9	local	0.1	/
Simul 3	400*	4	10	[3;7]	0.9	local	0.1	/
Simul 4	900*	4	10	[3;7]	0.9	local	0.1	/
Simul 5	400	4	power law*	[3;7]	0.9	local	0.1	/
Simul 6	900	4	power law*	[3;7]	0.9	local	0.1	/
Simul 7	400	4	10	[3;7]	0.9	local	power law*	/
Simul 8	900	4	10	[3;7]	0.9	local	power law*	/
Simul 9	25	4	10	[3;7]	0.95*	local	0.1	/
Simul 10	25	4	10	[3;7]	0.98*	local	0.1	/
Simul 11	25	4	10	[3;7]	0.99*	local	0.1	/
Simul 12	25	4	10	[3;7]	0.999*	local	0.1	/
Simul 13	25	12*	10	5	0.9	local	0.1	/
Simul 14	25	24*	10	5	0.9	local	0.1	/
Simul 15	400	4	10	[4.8;5.2]*	0.9	local	0.1	/
Simul 16	25	4	10	5	0.9	local	0.1	/
Simul 17	400	4	10	5	0.9	local	0.1	/
Simul 18	400	4	10	[4;6]*	0.9	local	0.1	/
Simul 19	400	12*	10	[4;6]*	0.9	local	0.1	/
Simul 20	400*	12*	power law*	[3;7]	0.9	local	0.1	/
Simul 21	2500*	4*	power law*	[3;7]	0.9	local	0.1	/
Simul 22	2500	4*	10	5	0.9	local	0.1	/
Simul 23	2500	12*	10	5	0.9	local	0.1	/
Simul 24	400	12	10	5	0.9	local*	0.1	/
Simul 25	400	12	10	[3;7]*	0.9	local+global*	0.1	0.001
Simul 26	2500	4	10	5	0.99*	local	0.1	/
Simul 27	2500	12*	10	[4.8;5.2]*	0.9	local	0.1	/
Simul 28	400	4	10	5	0.9	local+global	0.1	0.01*
(Simul 29)	2500	4	power law*	5	0.9	local	power law*	/
Simul 30	2500	4	power law	[4;6]*	0.9	local	0.1	/
Simul 31	400	40*	10	5	0.9	local	0.1	/
Simul 32	2500	12*	10	5	0.99*	local+global*	0.1	0.001
Simul 33	900	4	power law*	5	0.99*	local+global*	0.1	0.01
Simul 34	900	4	10	[3;7]*	0.9	global*	/	0.01
(Simul 35)	2500	24*	10	5	0.9	local	0.1	/
Simul 36	400	4	power law*	[3;7]*	0.9	local	0.1	/
Simul 37	900	40*	10	[4;6]*	0.9	local	0.1	/
(Simul 38)	400	4	10	5	0.9	local+global	0.1	0.001*
SImul 39	400	24	10	5	0.9	local+global	0.1	0.01
(Simul 40)	400	4	10	5	0.9	global*	/	0.01
Simul 41	2500	40*	10	5	0.9	local	0.1	/
Simul 42	400	4	10	[4.8;5.2]*	0.9	local+global*	0.1	0.01
Simul 43	400	12*	10	[4;6]*	0.9	local+global*	0.1	0.001

Simulations in parentheses are the four simulations that best fit the PF volcano dynamics.
*Parameters whose influence is mostly investigated, for each simulation.

The global response of the model to the steady increase of pressure induced by fluid and/or pressure injections was evaluated using two estimators: (1) the size of endogenous events, that is, the number of lens to rock cell redistributions that occur during an avalanche event. The number of lens to rock cell redistributions is distinct from the number of lens cells activated during an avalanche event since a lens cell may fail more than once in an event; (2) the global outflow volume (G-outflow volume), that is, the total volume of fluid released from the system during an avalanche event.

We analyzed the model dynamics through the frequency-size distribution and the temporal evolution of these two estimators. After a transient period at the beginning of all simulations, the system was found to reach a stationary regime, where the estimators 1 and 2 fluctuated around a stable mean value and where their frequency-size distributions became reproducible as a function of time. We analyzed the response of the model only when this stationary regime was reached. By testing different parameter sets, we checked that whatever the initial state we chose for lens cell pressure (unloaded, P=0 for all lens cells; minimally stable, $P=P_c$ for all lens cells; or critical, P is randomly chosen between γP_c and P_c), the system evolved into the very same stationary regime, characterized by the same frequency-size distributions and temporal features of the model dynamics estimators. Therefore we could consider the response of the model in this stationary regime as characteristic of the simulation parameter set.

4.2. Comparison of Simulation Results With Observations

To simulate the PF eruptive behavior for the 1920-1992 period (Figure 3a), we waited for the system to reach its stationary regime and then collected a set of 76 successive G-outflows and analyzed their cumulative volume distribution. We also checked that whatever the sample of 76 successive G-

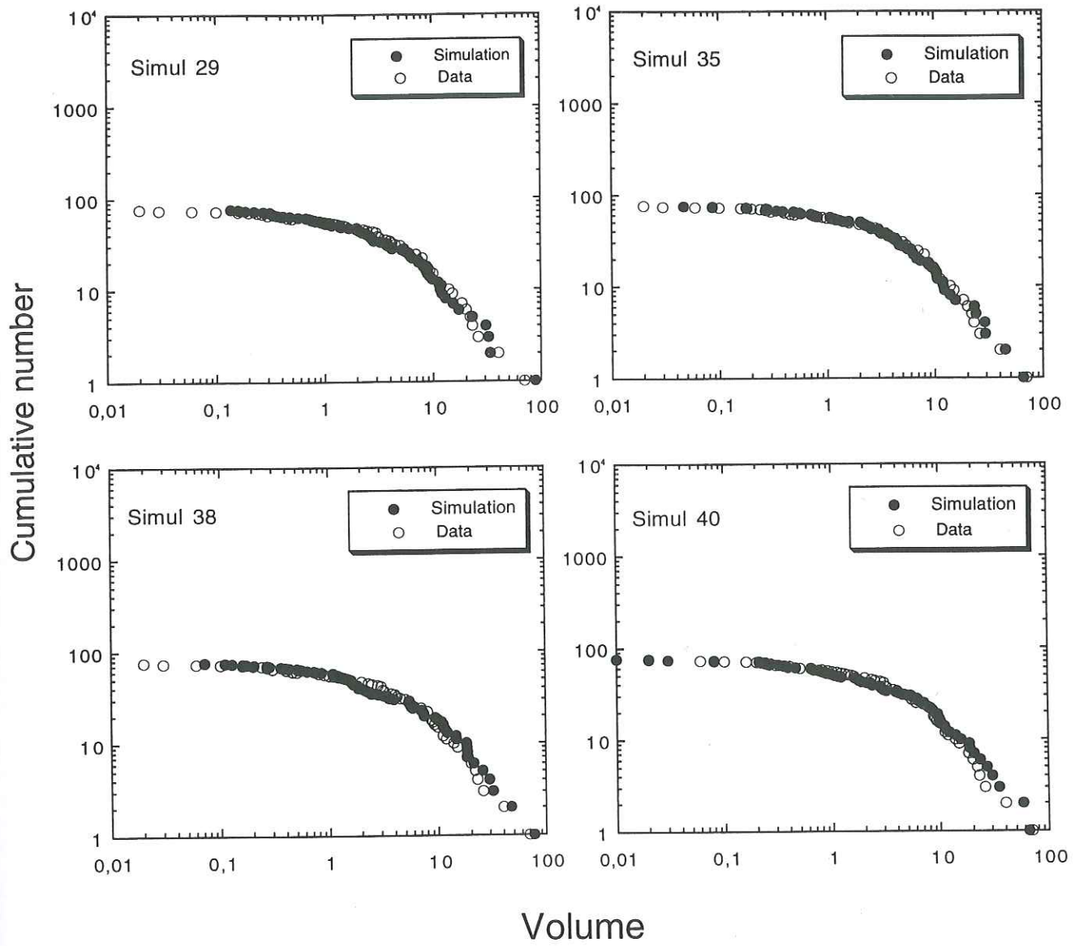


Figure 7. Correlation between the frequency-size distributions of 76 successive G-outflows (see text for definition of G-outflows) collected during Simul 29, 35, 38, and 40 (Table 2) and the frequency-size distribution of erupted volumes observed on PF in the 1920-1992 period (Figure 3a). To correlate both distributions, we multiplied the arbitrary simulated volume unit for G-outflows by a factor, close to 10 in all simulations. In both real and simulated data, the distributions are power law for large volumes (>3 and >0.3, respectively) and a Gaussian-like roll-off for small volumes (<3 and <0.3, respectively).

outflows we took in the simulated catalogue, the distribution was the same, such that it could be considered as characteristic of the model.

We obtained four simulations (Simul 29, 35, 38, and 40; see Table 2) which G-outflow pattern correlates with the data, that is, scale invariance in a certain range scale with a similar power law exponent and a Gaussian-like falloff at small volumes. Figure 7 shows the correlation between observed and simulated frequency-size distributions of eruptions for each of these four simulations. Notice also that on average 70% of the injections triggered an endogenous avalanche, and 30% triggered an outflow for Simul 29, 35, 38, and 40 (Table 3).

When focusing on the frequency-size statistics of endogenous events, we observed, for a wide variety of parameter sets, the emergence of a strong power law organization (Figure 8). The falloff for large sizes is typical of a finite size effect. This power law organization reproduces in a certain extent the observed distribution of volcano seismicity (Figure 8). We just note that the power law exponent is generally a bit lower than that observed on the data. Such correlation in terms of frequency-size statistics between the simulated fluid flow avalanches and the real seismicity reinforces the presumptions for a coupling between the dynamics of fluid flow and induced seismicity processes [*Byerlee*, 1993; *Miller et al.*, 1996].

Last, a strong nonlinearity in the cumulated volume versus time curve is observed for most simulations (Figure 2b) and in particular for Simul 29, 35, 38, and 40. Such nonlinearity is reminiscent of those observed on the PF volcano (Figure 2a).

Table 3. Statistics of Endogeneous Events and G-Outflows for the Four Succeeding Parameter Sets

	Simul 29	Simul 35	Simul 38	Simul 40
Number of injections	10,000	10,000	10,000	10,000
Number of endogenous events	6552	7677	7249	7641
Number of G-outflows	2479	3565	3472	2849

5. Discussion

The purpose of this study was to test the ability to capture the basic features of volcano complexity using a cellular automaton of fluid-rock interaction. Such a model displays a complex and nonunique behavior that for specific input parameter sets (Simul 29, 35, 38, 40) shows correlations with PF observables, that is nonlinear temporal eruptive pattern (Figures 2a and 2b), endogenous power law organization (Figure 8), and truncated exogenous power law organization (Figure 7). The correlation between simulation results and observation is enhanced by the model behavior where on average 30% injections lead to an outflow (Table 3), that is, 76 outflows for 250 injections. Transposed to the real volcano, since 76 eruptions occurred in 72 years (1920-1992), it means that the interval between two injections in the model simulates a 3.5 months time gap in the real world. Because none of the PF eruptions exceeds 2.5 months in duration on this period [*Grasso and Bachèlery*, 1995a], we validate the model assumption that the time recurrence of fluid injection is longer than the duration of any fluid redistribution avalanche (see text in loading processes section). Note that the correlation of the model results with the PF erupted volumes can be extrapolated to the Springerville volcanic field erupted volumes, since the two distributions have approximately the same pattern (Figures 3a and 3b).

Our purpose was not to explore the whole parameter space but was just to find a few parameter sets that approach the data, to show that the multiple magma storage model is consistent with the mechanics of basaltic volcanoes. In this study we show that at least four parameter sets show correlations with the observations. For most volcanologists, Simul 38, which involves the two types of feeding processes, magma supply and magma crystallization, will appear as the most convenient parameter set. A global investigation of the whole parameter space is in progress.

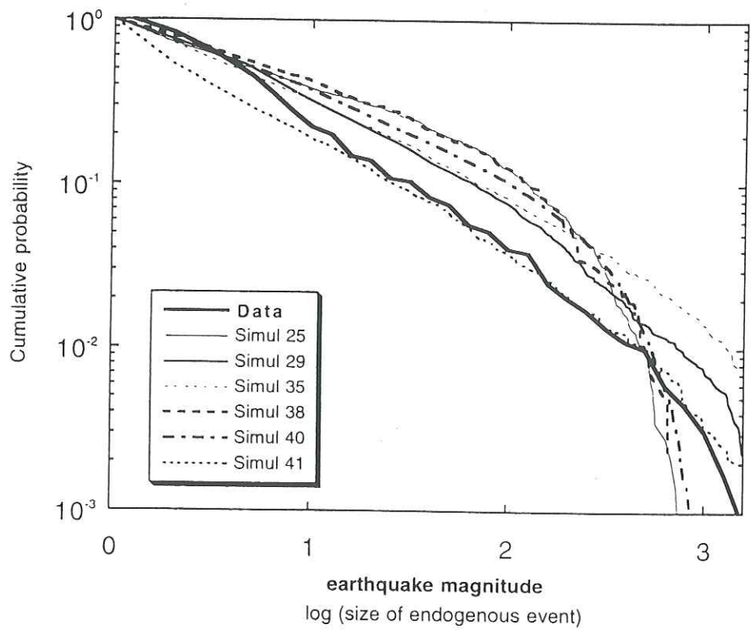


Figure 8. Examples of the frequency-size distribution of endogenous events produced by the model. The size of an endogenous event is measured by counting the number of lens to rock cell fluid redistributions that occur during an avalanche. A strong power law organization is observed for most simulations (at least 2 orders of magnitudes for the simulations reported on the graph). Such distributions show global analogies with the frequency-magnitude distribution of the PF seismicity (adapted from Grasso and Bachèlery [1995a] relevant to the 1990-1992 period). For comparison, all distributions have been normalized. Just notice that the exponent of the power law is generally a bit lower for simulations (exponents of 0.43, 0.55, 0.57, 0.53, 0.43, 0.47, and 0.75 for Simul 25, 29, 35, 38, 40, and 41 respectively) than for real data (exponent of 0.82). Using the *Olami et al.* [1992] model results, such difference in the power law exponent between simulated and real earthquake distributions can be interpreted as the expression that our model is less dissipative than the real earthquake process. In a future version of the model we plan to test the influence of the dissipation on the power law exponent of endogenous events, by modifying the ratio of eruptive rock cells versus the total number of rock cells (fixed to 5% in the present model).

Our fluid-rock cellular automaton already allows us to capture several basic information on volcano dynamics. First, the PF dynamics can be reproduced without introducing any specific macro magma chamber size. An interactive network of many entities, with either uniform (Simul 35, 38, 40) or hierarchical (Simul 29) size distributions, succeeds in reproducing the PF eruptive pattern, without a need for any specific macro lens cell size. This provides a first quantitative information in favor of a multiple magma storage for the summit reservoir of basaltic volcanoes, as proposed by *Duffield et al.* [1982], *Fiske and Kinoshita* [1969], *Ryan et al.* [1981], *Shaw and Chouet* [1991], *Swanson et al.* [1976], and *Wilson and Head* [1988]. According to our model results, if a macroreservoir exists on PF, it must not have been activated during the 1920-1992 period.

Next, an homogenous distribution of rock cell resistances appears to be a better model for simulating the PF behavior. Note that the succeeding parameter sets (Simul 29, 35, 38, and 40) all have homogeneous rock cell resistances. Simulation results with heterogeneous rock cell resistances (e.g., Simul 5, 7, and 12; Figure 8) never show similitudes with the data. This suggests that the PF rock matrix should be grossly viewed as an homogeneous and diffusive structure with respect to fluid flow, at the length scale of the distance between two lenses, that is, at the hectometric or decametric length scale.

In our model the parameter γ determines the proximity of the lens cells mean pressure to their threshold pressure. For values of γ close to 0.99 the model fails to reproduce the PF volume distribution of eruptions (e.g., Simul 12 and 26; Figure 8). For values of γ close to 0.9, on the other hand, the model appears to capture the PF exogenous feature (Simul 29, 35, 38, and 40; Figure 7). Such a result allows us to quantify the criticality (i.e., the mean to threshold pressure ratio) of the PF presumed lenses to a level of 0.9 rather than 0.99 value order. Based on the model results, the connectivity cannot be considered as a discriminant parameter to approach the PF data (C=24 for Simul 35; C= 4 for Simul 29, 38, and 40).

It is often a matter of debate whether complexity arises from the geometry or from the dynamics of the system. The four best simulations of this study show that both origins are possible. According to Simul 29, a hierarchical loading process and a fractal organization of the volcano (proposed by *Grasso and Bachèlery* [1995a] and *Shaw and Chouet* [1991]) can reproduce the PF observables, just as well as Simul 35, 38, and 40 with uniform volumes of lens cells and uniform loading. The latter cases are conceptually more interesting because they show that the presumed system of lenses can operate as a nonlinear filter, able to modify a uniform increase of pressure in the input into an extremely diverse response in terms of erupted volumes (about four scale orders on Figures 3a and 3b), power law organized on a certain range, and nonlinear as a function of time.

6. Fluid-Rock Interactions: A Key Process at All Scales

In this study, we applied our fluid-rock interaction model to the shallow structure of basaltic volcanoes. However, since a cellular automaton has no characteristic scale, it could be transposed to other scales where fluid circulation is believed to operate in the Earth. At the scale of the lithosphere, the model may simulate the dynamics of magma plumes, when rising from the upper mantle to the volcano summit reservoir. It is indeed believed that as magma rises into the brittle lithosphere it collects in pockets, perhaps as melt-filled cracks connected by faults [*Shaw*, 1980]. At the scale of the Earth, our model may simulate the global fluid circulation in the Earth's mantle. When the Earth mantle is viewed as a system of interactive cells in a critical state, a change of conditions in one cell implies perturbations in other cells and can generate some plume ascent in any Earth volcanic system. Such a framework conceptually reproduces the global Earth power law organization of eruption volumes [*Mc Clelland et al.*, 1989].

When we collapse our model to the scale of the PF rock matrix, the same generic model becomes a network of pores embedded within a granular scale rock matrix. Thereby we extend the Bak et al. [1988] model for earthquakes to a model where earthquake complexity emerges from the interactions between fluid flow and stress, as proposed by *Byerlee* [1993] and *Miller et al.* [1996]. In such a context, the good correlation between the PF Gutenberg-Richter distribution of earthquakes and the simulated size distribution of endogenous avalanches (Figure 8) is not a surprising result. This model provides a framework to understand the hierarchical organization of seismicity that is reported on most volcanoes [*Grasso et al.*, 1994] and further argues for a coupling between fluid transfers and fluid-induced seismicity, elsewhere proposed for fault mechanics [*Miller et al.*, 1996] or gas reservoir depletion [*Grasso*, 1993]. We thus have evidence for a rare universal process in terms of implied scales, allowed by the fact that the model control parameter (i.e., the fluid pressure) does not need to be re-normalized at each scale.

The origin of the strong power law emergence of endogenous events, as many other characteristics of our model, may be discussed in the light of theoretical concepts developed in statistical physics to explain the ubiquitous observation of power law statistics in nature, particularly the concept of self-organized criticality (SOC) introduced by *Bak et al.* [1988]. Nevertheless, our model does not fall under the category of cellular automata models that are used in statistical physics to capture the essential ingredients of the emergence of scaling [*Bak et al.*, 1988; *Flyvbjerg*, 1996]. Here, even if we test the few simplest physical parameter sets that are proposed by the major part of the volcanologist community to operate in a volcano, the number of remaining parameters is still too large for a definite demonstration of the SOC nature of our model, supposing that ingredients of a SOC system were clearly stated, to be possible. In some sense, in order to achieve greater physical realism, we have sacrificed some of the ability to make claims about the SOC nature of our model. The advantage of our model lies in its reproduction of both the volcano power law exogenous organization on its range of validity and the truncation observed for small volumes above the detection threshold (Figure 3), not yet explained by theoretical concepts. The question of the possible physical processes for such departure for small events is deferred to future work.

7. Conclusion

We have presented a fluid-rock cellular automaton as a model for the complexity of Piton de la Fournaise volcano dynamics. This model reproduces, to a fair degree, the observables of the PF volcano for the 1920-1992 period, including the size distribution of eruptions, the temporal feature of the cumulative erupted volume, and the Gutenberg-Richter relation for earthquakes. It rationalizes the nonlinear unpredictable dynamics, the endemic criticality and the endogenous (faults, dikes, and seismicity) and exogenous (eruptions size and repose period)

hierarchical organization observed on PF as the signature of a shallow system of magma storage lenses in a critical state of pressure, embedded within the volcano rock matrix and submitted to a steady increase of pressure induced by magma feeding or gas exsolution during crystallization.

This model shows that it is possible to capture the basic features of the PF volcano without introducing any standard magma chamber. We thus provide elements in favor of a multiple storage for the summit reservoir of basaltic volcanoes. The PF rock matrix appears as an homogeneous and diffusive body with respect to fluid propagation, at the length scale of decametric to hectometric length order. We also show that the mean pressure of the presumed magma storage lenses is rather of the order of 0.9 than 0.99 times their threshold pressure, quantifying the proposed critical state of magma lenses. The absence of characteristic scale makes our model a powerful paradigm to tackle the dynamics of many geological objects that involve fluid and rock interactions in Earth sciences, including porous rock matrix, volcano, hydrocarbon reservoir, seismic fault, mantle dynamics.

Acknowledgments. This work was initiated when J.R.G. was scientific in charge of the Piton de la Fournaise volcano observatory. We thank P. Bachèlery, and D. Sornette for discussion. We thank S. Miller, C. Beans, and O. Scotti for constructive criticisms and help in improving the manuscript. We are also grateful to Y. Kagan, F. Mulargia, and W. I. Newman who provided constructive advice in the review of the manuscript and to C. D. Condit and C. B. Connor who provided data on Springerville. This work is part of the Geomas project (IREMIA, Université de la Réunion and LGIT, Observatoire de Grenoble). The model runs on an object-oriented platform (Visualworks 2.5.1). The code is available on http://lgit.obs.ujf-grenoble.fr:80:/~flahaie/flahaie.html as the file Geomas_v1.2.im. This study was supported by GdR, Géomécanique des roches profondes. F.L. is supported by ELF/CNRS grants.

References

Albarède, F., B. Luais, G. Fitton, M. Semet, E. Kaminski, B. G. Upton, P. Bachèlery, and J.L. Cheminée, The geochemical regimes of Piton de la Fournaise volcano (Réunion) during the last 530000 years, J. Petrol., 38 (1), 1-30, 1997.

Bak, P., C. Tang, and K. Wiesenfeld, Self-organized criticality, *Phys. Rev. A*, *38* (1), 364-374, 1988.

Bruno, B. C., G.J. Taylor, S. K. Rowland, and P. G. Lucey, Lava flows are fractals, *Geophys. Res. Lett.*, *19*, 305-308, 1992.

Byerlee, J. D., Model for episodic flow of high pressure water in fault zones before earthquakes, *Geology*, *21*, 303-306, 1993.

Condit, C. D., and C. B. Connor, Recurrence rates of volcanism in basaltic volcanic fields: An example from the Springerville volcanic field, Arizona, Geol. Soc. Am. Bull., *108* (10), 1225-1241, 1996.

Cortini, M., L. Cilento, and A. Rullo, Vertical ground movements in the Campi Flegri caldera as a chaotic dynamic phenomenon, *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, *48*, 103-113, 1991.

Decker, R. W., Dynamics of Hawaiian volcanoes: An overview, *U.S. Geol. Surv. Prof. Pap.*, *1350*, 997-1018, 1987.

Diodati, P., F. Marchesoni, and S. Piazza, Acoustic emissions from volcanic rocks: An example of self-organized criticality, *Phys. Rev. Lett.*, *67* (17), 2239-2242, 1991.

Duffield, W. A., R. L. Christiansen, R. Y. Koyanagi, and D. W. Peterson, Storage, migration and eruption of magma at Kilauea volcano, Hawaii, 1971-1972, *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, *13*, 273-307, 1982.

Fiske, R. S., and W. K. Kinoshita, Inflation of Kilauea volcano prior to 1967-68 eruption, *Science*, *165*, 341-349, 1969.

Flyvbjerg, H., Simplest possible self-organized critical system, *Phys. Rev. Lett.*, *76* (6), 940-943, 1996.

Grasso, J.R., Fluid and seismic instabilities: Implications for the mechanical behavior of the upper crust, state thesis, Univ. Joseph Fourier, Grenoble, France, 1993.

Grasso, J.R., and P. Bachèlery, Hierarchical organization as a diagnostic approach to volcano mechanics: Validation on Piton de la Fournaise, *Geophys. Res. Lett.*, *22*, 2897-2900, 1995a.

Grasso, J.R., and P. Bachèlery, Self-organized volcanic earthquakes as a diagnostic approach to volcano mechanics, in *IUGG XXI Proceedings*, p. A64, AGU, Boulder, Colo., 1995b.

Grasso, J.R., J. De Bernardy de Sigoyer, and OVPF staff, Sismicité du Piton de la Fournaise, 1990-1993, report, Obs. Volcanol. du Piton de la Fournaise, Réunion, France, 1994.

Ito, K., and M. Matsuzaki, Earthquakes as self-organized critical phenomena, *J. Geophys. Res.*, *95*, 6853-6860, 1990.

Lénat, J.F., and P. Bachèlery, Structure and dynamics of the central zone of Piton de la Fournaise volcano, in *Le volcanisme de la Réunion*, edited by Lénat, J.F., pp. 257-296, Cent. de Rech. Volcanol., Obs. Phys. Globe Clermont, France, 1990.

Mc Clelland, L., T. Simkin, M. Summers, E. Nielson, and T.C. Stein, *Global Volcanism 1975-1985*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1989.

Miller, S.A., A. Nur, and D.L. Olgaard, Earthquakes as a coupled shear stress - high pressure dynamical system, *Geophys. Res. Lett.*, *23*, 197-200, 1996.

Nercessian, A., A. Hirn, J.C. Lépine, and M. Sapin, Internal structure of Piton de la Fournaise volcano from seismic wave propagation and earthquake distribution, *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, *70*, 123-143, 1996.

Nishimura, T., and H. Hamaguchi, Scaling law of volcanic explosion earthquake, *Geophys. Res. Lett.*, 20, 2479-2482, 1993.

Olami, Z., H. J. S. Feder, and K. Christensen, Self-organized criticality in a continuous, non-conservative cellular-automaton modeling earthquakes, *Phys. Rev. Lett.*, *68*, 1244-1247, 1992.

Parfitt, E.A., L. Wilson, and J.W. Head, Basaltic magma reservoirs: Factors controlling their rupture characteristics and evolution, *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, *55*, 1-14, 1993.

Rapaport, D.C., and M. Meyer, Computer exploration of fractals, chaos, and cooperativity, in *Fractals in Science*, edited by A. Bunde, and S. Havlin, pp. 257-280, Springer-Verlag, New York, 1994.

Rowan, L.R., and R.W. Clayton, The three-dimensional structure of Kilauea volcano, Hawaii, from travel time tomography, *J. Geophys. Res.*, *98*, 4355-4375, 1993.

Ryan, M.P., R.Y. Koyanagi, and R.S. Fiske, Modeling the three-dimensional structure of macroscopic magma transport systems: Application to Kilauea volcano, Hawaii, *J. Geophys. Res.*, *86*, 7111-7129, 1981.

Sapin, M., A. Hirn, J.C. Lépine, and A. Nercessian, Stress, failure and fluid flow deduced from earthquakes accompanying eruptions at Piton de la Fournaise volcano, *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, *70*, 145-167, 1996.

Shaw, H.R., The fracture mechanisms of magma transport from the mantle to the surface, in *Physics of Magmatic Processes*, pp. 201-264, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1980.

Shaw, H.R., and B. Chouet, Fractal properties of magma transport in Hawaii and critical self-organization of Tremor, *J. Geophys. Res.*, *96*, 10,191-10,207, 1991.

Shimazaki, K. and T. Nakata, Time-predictable recurrence model for large earthquakes, *Geophys. Res. Lett.*, *7*, 279-282, 1980.

Sornette, A., J. Dubois, J.L. Cheminée, and D. Sornette, Are sequences of volcanic eruptions deterministically chaotic?, *J. Geophys. Res.*, *96*, 931-945, 1991.

Swanson, D.A., W.A. Duffield, and R.S. Fiske, Displacement of the south flank of Kilauea volcano: The result of forceful intrusion of magma into the rift zones, *U.S. Geol. Surv. Prof. Pap.*, *963*, 1-39, 1976.

Tait, S., C. Jaupart, and S. Vegniolle, Pressure, gas content and eruption periodicity of a shallow, crystallising magma chamber, *Earth Planet. Sci. Lett.*, *92*, 107-123, 1989.

Tilling, R.I., and J.J. Dvorak, Anatomy of a basaltic volcano, *Nature*, *363*, 125-133, 1993.

Toutain, J.P., P. Bachèlery, P.A. Blum, J.L. Cheminee, H. Delorme, L. Fontaine, P. Kowalski, and P. Taochy, Real time monitoring of vertical ground deformations during eruptions at Piton de la Fournaise, *Geophys. Res. Lett.*, *19*, 553-556, 1992.

Wickmann, F.E., Repose period patterns of volcanoes, *Ark. Mineral. Geol.*, *4*, 291-364, 1966.

Wilson, L., and J.W. Head, Nature of local magma storage zones and geometry of conduit systems below basaltic eruption sites: Puu Oo, Kilauea East Rift, Hawaii, example, *J. Geophys. Res.*, *93*, 14,785-14,792, 1988.

Yang, X., P. M. Davis, P. T. Delaney, and A. T. Okamura, Geodetic analysis of dike intrusion and motion of the magma reservoir beneath the summit of Kilauea volcano, Hawaii: 1970-1985, *J. Geophys. Res.*, *97*, 3305-3324, 1992.

J. R. Grasso and F. Lahaie, LGIT-IRIGM, Observatoire de Grenoble, BP53X, 38041 Grenoble cedex, France. (e-mail: Jean-Robert.Grasso@obs.ujf-grenoble.fr; Franz.Lahaie@obs.ujf-grenoble.fr)

(Received September 2, 1997; revised January 8, 1998; accepted January 15, 1998.)

II.2.3. *Interprétation de la coupure pour les faibles volumes d'éruption*

Une interprétation simple consiste à considérer que la partie en loi de puissance reflète le comportement collectif des lentilles, et que la partie « plate » reflète le comportement d'une seule lentille, c'est-à-dire, reflète la « taille de discrétisation » du système réservoir. Cette interprétation est confirmée sur la Figure II-4.b, qui représente la distribution de volume des éruptions « locales » (*L-outflow*), c'est-à-dire les volumes discrets recueillis en chaque roche éruptive au cours d'une avalanche. Le volume d'une éruption locale est en fait représentatif du volume rejeté par la dernière lentille avant que le magma ne sorte. Autrement dit, il est représentatif du volume rejeté par une seule lentille. On observe sur cette figure que la distribution de volume rejeté par une seule lentille est relativement gaussienne, et surtout, que le volume maximal des éruptions locales coïncide précisément avec le volume de coupure observé sur la distribution des éruptions globales (Figure II-4.a). On en déduit que la partie plate dans la distribution des éruptions globales correspond effectivement à la réponse d'une seule lentille, et que la partie en loi de puissance correspond à la réponse collective des lentilles.

A partir de cette interprétation, on peut estimer le volume maximal rejeté par une lentille réelle du volcan, soit 3.10^6 m^3 (voir Figure 3a de l'article). En considérant qu'une lentille rejette environ 10% de son volume [Bachèlery et Mairine, 1990], on en déduit le volume typique d'une lentille du volcan, $0.3.10^6$ m^3, correspondant à un rayon typique de l'ordre de 200m (en considérant en première analyse une lentille circulaire). C'est un exemple concret dans lequel le fait d'avoir interprété une loi de puissance (ici, dans les volumes d'éruptions d'un volcan) en terme de phénomène collectif (interactions entre lentilles) nous a permis d'interpréter un écart à cette loi de puissance comme le reflet d'une taille de discrétisation, et ainsi d'en déduire certaines propriétés géométriques du système (taille des lentilles).

Une telle partie plate est rarement observée (ou rarement décrite) dans les modèles de physique statistique, d'une part parce que les physiciens s'intéressent plus en général à la distribution de taille des avalanches ou de l'énergie des avalanches, plutôt qu'à l'énergie redistribuée par une seule cellule, et d'autre part parce que les quantités redistribuées par les cellules sont souvent discrètes (par ex., des « grains » dans le modèle du tas de sable), et ne représenteraient que quelques points sur la partie plate de la distribution. Autrement dit, en ajoutant de la complexité à notre modèle (variables continues plutôt que discrètes), nous reproduisons une certaine continuité dans la partie plate de la distribution, et nous rapprochons ainsi un peu mieux des données observées. Cela montre l'intérêt d'utiliser en parallèle les deux approches, c'est-à-dire à la fois des modèles génériques de physique statistique, qui donnent accès aux facteurs essentiels qui contrôlent le comportement statistique des objets géologiques, et d'autre part des modèles plus spécifiques tel que celui-ci, qui, en ajoutant un certaine complexité, permettent de reproduire des observables plus particuliers à chaque contexte (ici, la présence d'un partie plate dans la distribution des volumes d'éruptions).

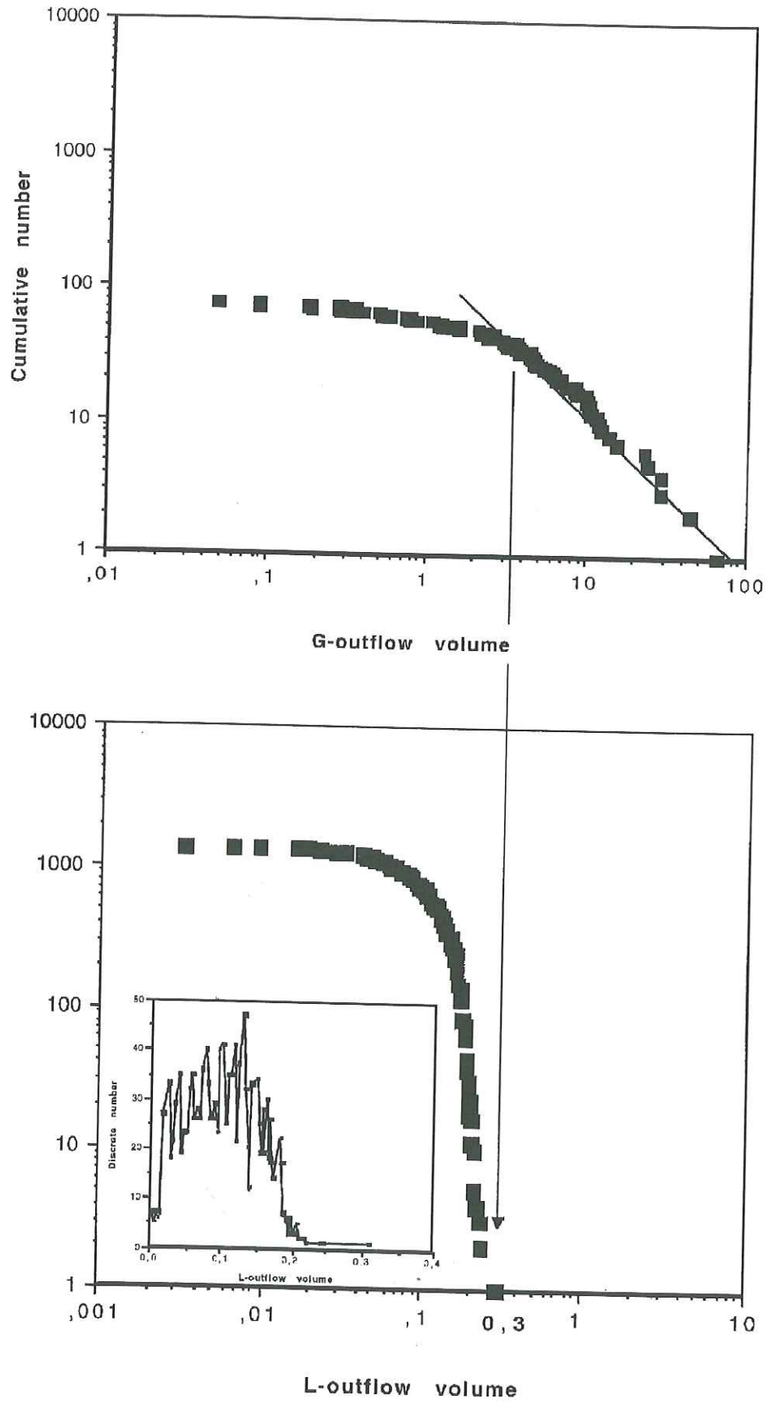


Figure II-4 Distribution du volume des éruptions globales (a) et locales (b) dans la simulation 38

II.2.4. Volcans : systèmes critiques auto-organisé ?

L'article proposé ci-dessous complète le premier article, en poussant plus loin l'idée d'un volcan comme un système critique auto-organisé. Notons qu'il s'agit plus de proposer une image conceptuelle que de valider véritablement l'hypothèse de CAO.

Les modèles M1, M2, M3, et M4 dans cet article correspondent respectivement aux simul 35, 38, 40, 29 de l'article précédent.

C.R. Acad. Sci. Paris,
t. 323, série II *a*,
p. 569 à 574,
1996

Modélisation de la dynamique auto-organisée des éruptions volcaniques : application au comportement du Piton de la Fournaise, Réunion

Franz Lahaie, Jean-Robert Grasso, Pierre Marcenac et Sylvain Giroux

J.-R. G. et F. L. : LGIT-IRIGM,
Observatoire de Grenoble,
BP n° 53X 38041 Grenoble, France ;

P. M. : IREMIA, Université de la Réunion,
15, avenue René-Cassin, BP n° 7151,
97715 Saint-Denis Messag. CEDEX 9,
La Réunion, France ;

S. G. : UER Science et Technologie,
Télé-Université, 1001 Sherbrooke Est,
Montréal, PQ, Canada.

Résumé Afin de comprendre l'émergence de l'organisation hiérarchique des éruptions du Piton de la Fournaise (PF), nous proposons un modèle du volcan basé sur le concept d'état critique auto-organisé. Ce modèle met en jeu un système de lentilles de magma en pression critique, sollicité par de faibles perturbations, relaxé par des éruptions organisées en loi d'échelle, et oscillant autour d'un niveau de charge moyen dynamiquement stable. Nous montrons que le comportement complexe du PF pendant la période 1920-1992 peut émerger de la simple interaction entre lentilles, sans apport externe de magma et sans concept de chambre principale.

Mots-clés : Volcans, Systèmes critiques auto-organisés, Phénomènes non linéaires.

Abstract **Self-organized criticality as a model for eruptions dynamics: validation on Piton de la Fournaise volcano, Réunion**

In order to analyse the hierarchical organization of Piton de la Fournaise (PF) eruptive behaviour, we propose a model based on the self-organized criticality concept. The model ingredients are a network of multi-magmatic lenses in critical pressure, controlled by weak perturbations, releasing energy through power-law distribution of eruptions and evolving into a marginally stationary state. We show that the complex behaviour of PF during the 1920-1992 period could emerge from a few basic rules controlling individual parts of the system (lenses), without specific size for the macro-reservoir concept, and without significant magma supply or change in magma supply.

Keywords: Volcanoes, Self-organized criticality, Non-linear behaviours.

Abridged English Version

INTRODUCTION

Classical models based on mechanical laws have failed both to understand the underlying physical processes and to predict the complex macrobehaviour of most natural phenomena including hurricanes, flooding, earthquakes, volcanoes. Nevertheless, common features have been uncovered for these phenomena: *e.g.* spatial and temporal scaling laws, small and slow driving perturbations, long-range interactions. These observations lead to the concept of Self-Organized Criticality (SOC) for these natural complex systems (Bak *et al.*, 1988; Sornette and Sornette, 1989.

With respect to volcanoes, a knowledge of non-linear processes that lead to the emergence of hierarchical organization of eruptions is central both for the characterization of volcano structure and for eruption forecast. Here, we propose to validate the SOC concept for volcanoes on Piton de la Fournaise (PF) that exhibits, beyond numerous ingredients, power law distributions for seismicity, fractures and erup-

Note

présentée par
Jean-Louis Le Mouël.

remise le 30 mai 1996,
acceptée après révision le 10 juin 1996.

1250-8050/96/03230569 • $ 2.00 © **Académie des Sciences**

tive behaviour, the hallmark of SOC (Grasso and Bachelery, 1995 ; Dubois and Cheminée, 1993).

MODEL

We explore the ability of models based on statistical physics to fit the organization of the PF eruptive behaviour. Our model is based on the Multi-Agent System concept, *i.e.* the emergence of macrobehaviours out of locally interacting microbehaviours produced by entities called *agents* (Giroux, 1995). In this application, the geophysical objects corresponding to the agents consist of a network of magmatic lenses, and its rock surroundings, in keeping with the PF conceptual shallow structure (Lénat and Bachelery, 1990) (**fig. 1 a**). Lens and rock agents evolve in a universe (**fig. 1 b**) whose structure is defined by the network connectivity, *i.e.* the number of rock agents linked to one single lens agent. We start from a 2D structure where each lens agent communicates with its 4 geometrically nearest rock agent neighbours, and extend up to 40 the network connectivity (**fig. 2**). For large connectivity (> 4), there are no references to euclidian geometry.

Lens agents possess an internal pressure and rock agents possess a rupture threshold, which works as a critical threshold for the neighbour lens agent internal pressure. When a lens agent receives some fluid, its internal pressure increases. If the lens agent's own pressure threshold is reached, the excess magma is transferred, through rocks, to other lens agents. The process repeats simultaneously within the receiving lens agents, producing avalanche behaviours. When such an avalanche behaviour allows the fluid to reach specific *eruptive* rock agents, we consider that an eruption has occurred. The mantellic magma supply is simulated by injecting magma volumes within specific *injective* lens agents, and the internal magma crystallization is simulated by periodically incrementing the pressure in all lenses.

RESULTS AND CONCLUSION

Though each agent was acting locally and was ruled by very simple laws, we succeeded in creating organized global dynamics and fitting the cumulative volume distribution of the 76 PF eruptions during the 1920-1992 period (M1-4 models, **table**) (**fig. 3**). Our model investigated processes that can neither be measured on volcanoes nor be modelled using classical linear mechanics. It provided three main results:

1) The power-law size distribution of simulated eruptions (**fig. 3**) implies that the complex PF behaviour apparently emerges from an amazingly small number of basic local rules. Such a simple modelling joins the modelling of other complex natural phenomena which have been proposed as examples of SOC, e.g. earthquakes, sandpiles, forest fires, urban fractal growth. Thus, we validate the SOC concept for the PF volcano, which appears as a critical system in a marginally stable state, driven by small perturbations and releasing energy through power-law distribution of eruptions.

2) The scaling organization emerges when a large collection of agents are involved (20 × 20 minimum for the M1-4 models), in keeping with the SOC theoretical aspects.

3) We recover the 1920-1992 PF eruption patterns with a network of homogeneous lens agents without any specific reservoir size (*see* M1-4), without magma supply or change in magma supply during this period (*see* M3) and without necessity of internal fractal geometry forcing (*see* M1-3), to drive the volcano hierarchical behaviour.

Such results have far-theaching consequences in the understanding of volcanoes macroscopic behaviour. By analysing such global volcanic behaviour, rather than local isolated eruptions with classical mechanical concepts, we provide new routes to capture eruption forecast.

INTRODUCTION

Le concept de Système Critique Auto-Organisé (SCAO), selon lequel certains grands systèmes hors d'équilibre reviennent naturellement vers un état critique instable sans échelle de temps ou de longueur caractéristique, a été proposé pour expliquer l'organisation hiérarchique de nombreux phénomènes naturels – séismes, feux de forêt, etc. (Bak *et al.*, 1988 ; Sornette et Sornette, 1989).

Le Piton de la Fournaise (PF), volcan actif de la Réunion, exhibe un panel étonnant de lois puissance, tant au niveau de sa structure – géométrie fractale des dykes et des fissures – que de sa dynamique – organisation hiérarchique de la sismicité, des tailles d'éruptions, des temps de repos (Grasso et Bachelery, 1995 ; Dubois et Cheminée, 1993).

Ici, on propose de valider l'hypothèse d'un SCAO pour le comportement du PF, et d'en analyser les implications sur le contexte géomécanique du volcan.

SUPPORTS OBSERVATIONNELS DE LA CRITICITÉ ET DE L'AUTO-ORGANISATION DU PITON DE LA FOURNAISE

Au-delà des lois d'échelle qui le décrivent, le PF possède de nombreux ingrédients caractéristiques d'un SCAO : un comportement fortement non-linéaire, qui rend toute prévision d'éruptions impossible, en temps comme en taille (Grasso *et al.*, 1994) ; une sensibilité à de très faibles perturbations – cycles solaires – et une sismicité permanente, y compris en période de repos apparent, tous deux indices de la criticité du volcan (Grasso et Bachelery, 1995) ; l'isolement du PF dont la dynamique, à l'écart de toute activité tectonique, est régie par de faibles et lentes perturbations – les remontées de magma essentiellement ; et enfin la structure même de la zone de stockage, proposée sur une base qualitative par les géologues comme un réseau superficiel de lentilles de magma temporairement connectées, au sein d'une matrice rocheuse (Lénat et Bachelery, 1990) (**fig. 1 a**).

Ces observations constituent la base du concept du PF comme système de lentilles de magma dont la pression est proche d'une pression seuil, telle qu'une légère surpression entraîne une rupture de la roche environnante, un transfert de magma vers d'autres lentilles, et en cascade, aboutisse en surface à des éruptions de tailles et de fréquences très variées. La mise en charge du système est assurée par des remontées de magma ou autres surpressions de nature physico-chimique, telle la cristallisation au sein des lentilles ; la relaxation d'énergie est assurée par les éruptions ; et le système oscille ainsi autour d'une position dynamiquement stable, caractérisée par de nombreuses lois puissance.

Sur la base de ce concept, nous avons créé un modèle, proche des modèles de physique statistique, afin d'étudier l'émergence des organisations hiérarchiques observées.

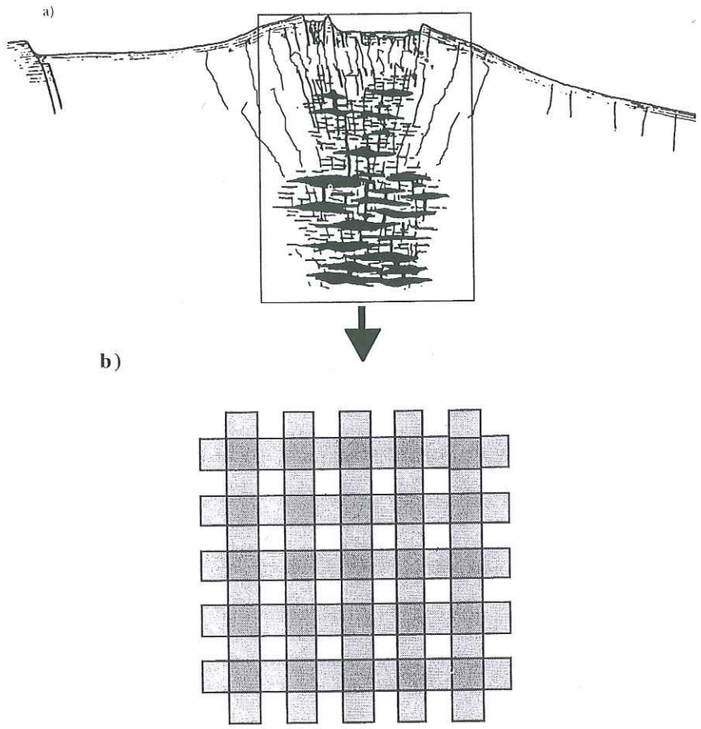


Fig. 1 Description du modèle : *a)* Image conceptuelle de la substructure du PF. *b)* Représentation du modèle. Les carrés noirs sont des agents lentille et les carrés gris sont des agents roche.

Model description *a)* Conceptual shallow structure of PF volcano. *b)* Image of lens and rock network. Black square is a lens, grey square is a rock.

MODÈLE

Notre modèle numérique est composé d'entités informatiques appelées *agents*. Les agents évoluent selon des règles locales déterministes qui dépendent de leur état et de celui de leurs voisins. Ces comportements locaux peuvent s'annihiler ou, au contraire, se coordonner jusqu'à l'émergence d'un comportement global observable (Giroux, 1995). Ce modèle rejoint donc, sur le prin-

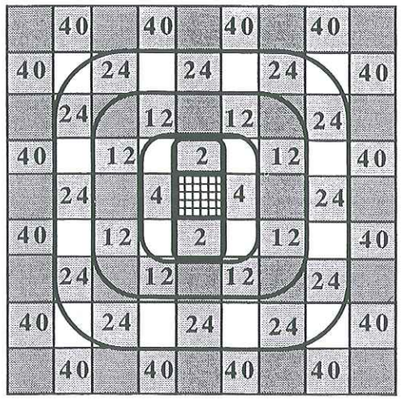


Fig. 2 Cartographie de la connectivité des agents : une lentille (en quadrillé) et son voisinage de roches. Les roches appartenant au voisinage de la lentille, pour une connectivité N (N allant de 2 à 40) sont celles dont le numéro est ≤ à N.

Mapping of agents' connectivity: A lens (in centre) and its rock-agent neighbourhood. The involved rock-agents for connectivity N (2 to 40) are those mapped with number ≤ N.

cipe, les modèles d'automates cellulaires rencontrés en physique statistique.

Ici, des agents *lentille* et des agents *roche*, ces derniers représentant le milieu compris entre deux lentilles, forment le réseau de la figure 1 b. Une *lentille* est définie par son volume et sa pression interne (Pi). Une *roche* est définie par sa « résistance » au passage du magma d'une *lentille* à une autre lentille. Une *lentille* de volume V, qui reçoit un volume de magma ΔV, subit une augmentation de pression proportionnelle à ΔV/V. Lorsque sa pression Pi devient supérieure à la résistance d'une de ses *roches* voisines, cette *roche* rompt et laisse passer le volume de magma nécessaire à la *lentille*, pour retrouver une pression sous-critique, appelée *pression de retour*. Ce volume est transmis à d'autres *lentilles* et peut, par un phénomène d'avalanche, déstabiliser l'ensemble du système. Les *roches* susceptibles de recevoir les volumes excédentaires d'une *lentille* sont dites *voisines* de cette *lentille*. Le nombre de roches voisines de chaque lentille est appelé *connectivité* du système.

La *connectivité* est le paramètre qui détermine la topologie du modèle. En effet, lorsque la *connectivité* se limite aux quatre *roches* géométriquement adjacentes à chaque lentille, le modèle de la figure 1 b peut être vu comme une coupe en deux dimensions du volcan, horizontale ou verticale selon l'orientation choisie. En revanche, dès lors que la connectivité dépasse 4 (**fig. 2**), le modèle devient a-dimensionnel.

L'alimentation mantellique est simulée par l'injection d'un volume incrémental au niveau de *lentilles* dites *injectives*, situées à la base du système ; les éruptions ont lieu au niveau de *roches* dites *éruptives*, situées en surface ; la cristallisation est simulée par une augmentation de pression dans l'ensemble des lentilles à intervalles de temps réguliers, indépendamment des injections mantelliques.

Tableau Quatre scenarii possibles de fonctionnement du PF : Les modèles M1-4 et leurs principaux paramètres.

Four possible processes for PF mechanics: M1-4 models and their main parameters.

Modèle		M1	M2	M3	M4
Nombre de lentilles		50 × 50	20 × 20	20 × 20	50 × 50
Connectivité		24	4	4	4
Distribution de tailles de lentille		Homogène	Homogène	Homogène	Fractale de pente 1.1
Distribution des résistances		Homogène	Homogène	Homogène	Homogène
Mode de sollicitation	Externe : Injections mantelliques	Oui	Oui	Non	Oui
	Interne : Cristallisation	Non	Oui	Oui	Non
Distribution des volumes incrémentaux injectés		Homogène	Homogène	/	Fractale de pente 2

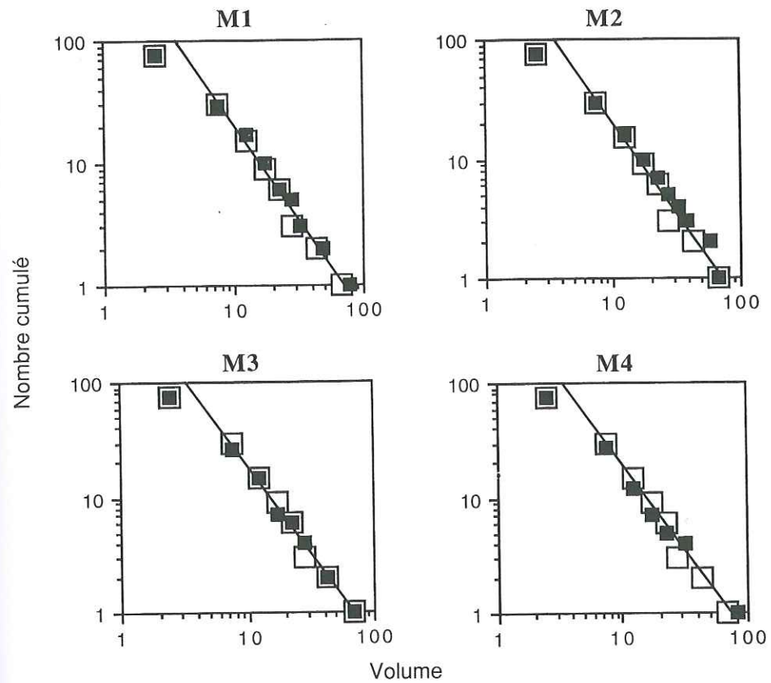


Fig. 3 Corrélation entre la distribution des volumes cumulés d'éruptions enregistrés au PF dans la période 1920-1992 (carrés blancs) et la distribution des volumes cumulés d'éruptions obtenus par simulation, sur les modèles M1-4 (carrés noirs). L'unité de volume est arbitraire. Un carré est représentatif de cinq unités de volume.

Fit to the data for models M1-4. Volume distributions, as cumulative number. Open squares are data recorded on 1920-1992 period on PF volcano. Black squares are simulation values. Arbitrary volume unit; one square represents 5 volume units.

RÉSULTATS

Nous avons recueilli, à chaque simulation, 76 éruptions successives dans un catalogue de plus de 300 événements. Nous avons comparé la distribution de volumes (en nombres cumulés) de ces 76 éruptions à celle des 76 éruptions observées au PF entre 1920 et 1992. En modifiant, entre autre, la taille du système (de 5 × 5 à 50 × 50 *lentilles*), sa *connectivité* (de 4 à 40), le modèle de sollicitation (injection mantellique et/ou cristallisation) et la gamme des résistances, nous avons pu extraire quatre jeux de paramètres (modèles M1-4, **tableau**) qui permettent de reproduire les données de façon remarquable (**fig. 3**).

CONCLUSION

La reproduction de données synthétiques en accord avec les observations, à l'aide d'un modèle d'agents interactifs, sans ajustement d'un paramètre de contrôle, atteste l'auto-organisation du PF et valide le concept d'un volcan-SCAO.

D'autre part, l'organisation hiérarchique globale des éruptions du PF a été obtenue :

1) sans introduction d'une macro-lentille, ce qui privilégie l'hypothèse d'un réservoir multi-lentilles plutôt que d'une seule chambre magmatique ;

2) sans nécessité d'une alimentation magmatique : M3 nous prouve en effet que la cristallisation seule suffit et que de manière générale, dans ce contexte de criticité, tout processus, même faible et isolé, est susceptible de perturber le système et de déclencher en cascade des éruptions de toutes tailles ;

3) sans introduction d'une géométrie fractale, à l'exception du modèle M4. La dynamique en loi puissance du PF peut donc, certes, être dirigée par une géométrie fractale sous-jacente (Grasso et Bachelery, 1995) (M4 le confirme), mais nous proposons que cette

géométrie fractale soit plutôt la résultante de l'état critique auto-organisé ambiant, qui engendre des transferts de fluides d'ampleurs variées, qui crée dikes et fissures de tailles aussi variées, et façonne en quelque sorte la géométrie du volcan à son image ;

4) avec nécessairement un grand nombre de lentilles (20 × 20 au minimum pour les modèles du tableau qui reproduisent les données), en accord avec les aspects théoriques des SCAO, selon lesquels une organisation ne peut émerger que d'un système suffisamment étendu.

Notons enfin que le modèle M2, avec injection mantellique plus cristallisation interne, est celui qui semble le plus conforme à ce que l'on sait des processus éruptifs. Toutefois, les modèles M1, 3 et 4 remplissent de la même manière les conditions de fonctionnement du système.

D'une manière plus générale, nous avons créé, par des comportements locaux très simples, un modèle qui reproduit de façon globale la complexité du comportement éruptif du PF, comportement inaccessible jusqu'à présent par des approches plus classiques. Nous entrevoyons ainsi, dans un contexte d'instabilité, un moyen de pallier les limites de la mécanique linéaire. Ce concept d'état critique donne accès, en isolant des échelles de temps spécifiques, à une autre approche de la compréhension, donc de la prédiction des éruptions volcaniques.

Remerciements : Nous remercions P. Bachelery ainsi que l'équipe de l'IREMIA pour son soutien informatique. Cette étude a été financée par le GdR, géomécanique des Roches profondes, l'IREMIA et l'Observatoire de Grenoble.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BAK, P., TANG, C. et WIESENFELD, K., 1988. Self-organized criticality, *Phys. review*, 38, 1, p. 364-374.

DUBOIS, J. et CHEMINÉE, J.L., 1993. Les cycles éruptifs du P.F. : analyse fractale, attracteurs, aspects déterministe, *Bull. Soc. géol. France*, 164, p. 3-16.

GIROUX, S., 1995. Agents and Actors: a necessary unity, *IJCAI Workshop on agents*, Montréal, Canada.

GRASSO, J.R. et BACHELERY, P., 1995. Hierarchical organization as a diagnostic approach to volcano mechanics: Validation on Piton de la Fournaise, *Geophys. Res. Lett.*, 22, p. 2897-2900.

GRASSO, J.R., DE BERNARDY DE SIGOYER, J. et l'équipe de l'Observatoire Volcanologique du Piton de la Fournaise, 1994. Sismicité du Piton de la Fournaise, Rapport OVPF, IPG Paris.

LÉNAT, J.F. et BACHELERY, P., 1990. Structure and dynamics of the central zone of Piton de la Fournaise volcano, *Le volcanisme de la Réunion, monographie*, LÉNAT, J.F., éd., Centre de Recherche Volcanologique, OPG Clermont, France, p. 257-296.

SORNETTE, A. et SORNETTE, D., 1989. Self-organized criticality and earthquakes, *Europhys. Lett.*, 9, p. 197-202

II.3. Influence du taux de chargement sur le mode de fracturation de la croûte supérieure : Mise en évidence sur un site d'hydrocarbures et implications pour la fracturation induite

II.3.1. Introduction

L'article qui va suivre présente un certain nombre d'observations faites sur un champ d'hydrocarbures (Lacq), qui tendent à montrer une influence du taux de chargement sur le mode de fracturation de la croûte. Jusqu'alors, un tel effet n'avait été mis en évidence que de façon expérimentale, et pour des taux de chargement beaucoup plus forts que ceux dont il est question ici. Le fait d'observer une sensibilité du mode de fracturation de la croûte à des variations si basse-fréquence du taux de chargement pose la question de la présence de processus très lents, qui contrôleraient ce mode de fracturation. Ce résultat pourrait également avoir de nombreuses implications dans des contextes de fracturation induite, en suggérant la possibilité de « diriger » le mode de fracturation du sous-sol, en ajustant le taux de chargement. Nous donnerons, à la suite de cet article, un éclairage supplémentaire sur les observations faites à Lacq dans le formalisme des transitions de phase.

II.3.2. Article publié dans « Journal of Geophysical Research »

JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, VOL. 104, NO. B8, PAGES 17,941–17,954, AUGUST 10, 1999

Loading rate impact on fracturing pattern: Lessons from hydrocarbon recovery, Lacq gas field, France

Franz Lahaie[1] and Jean Robert Grasso

Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Observatoire de Grenoble, Grenoble, France

Abstract. Using scaling parameters of induced seismicity in size and space domains (seismic *b* value and spatial correlation dimension *D*, respectively), we analyze the fracturing pattern of the gas reservoir of Lacq in correlation with the production rate. On the basis of previous observations and a previous model [*Segall et al.*, 1994], we assume that the cause of induced seismicity is a poroelastic stressing, such that the production rate can be viewed as a stress rate for the rocks adjacent to the reservoir. During the 20-year study period the production rate has decreased dramatically, leading to a change of poroelastic stress rate from 4.5×10^{-3} to 1.5×10^{-3} MPa/yr. Accordingly, we observe a significant decrease in the size of activated fractures and a reduction of the spatial clustering of fracturing, both arguing for a stress rate impact on the fracturing pattern in the gas field. We interpret these changes in terms of a change in the deformation mode of stressed rocks from a more brittle to a more ductile behavior as the stress rate was decreased. This hypothesis is supported by independent evidence from a number of experimental, numerical, and field studies. The loading rate thus appears as a possible candidate to drive changes of *b* and *D* in time and space. The apparent sensitivity of the Earth's crust fracturing pattern to loading rate variations of much lower frequency than the tidal variations suggests that the Earth's crust deformation mode itself be frequency dependent. Also, our observations may have strong implications in contexts where the loading rate is induced by human intervention (e.g., hydrocarbon recovery, mines), suggesting the possibility of adjusting the loading rate so as to shape the fracturing pattern locally according to human needs.

1. Introduction

The loading rate (applied stress or strain rate) is well known to be one of the key parameters influencing the deformation mode of rock materials. In a typical compressional test a decrease in the loading rate will generally cause the rock deformation mode to shift from a more brittle to a more ductile behavior, as evidenced from a number of macroscopic observables including rock strength [*Kumar*, 1968; *Sano et al.*, 1981; *Horseman and Handin*, 1990; *Lajtai et al.*, 1991], shape of the stress-strain curve [*Heard*, 1963; *Rutter*, 1974; *Chong et al.*, 1980], strain partitioning between plastic and cataclastic processes [*Hacker and Christie*, 1990], or geometrical pattern of damage [*Wu and Pollard*, 1992; *Rao and Kusunose*, 1995]. We refer here to the "brittle-ductile transition" as the broad range of deformational behaviors between the propagation of a single crack and pure plastic deformation with no microcracking at all.

One classical rationale for such a rate effect is that the mechanism of dislocation glide is rate-limited, essentially by thermal activation, so that the strain rate produced by dislocation motions at a given temperature is limited, the difference between the imposed strain rate and that due to dislocation motion being accommodated by microcracking [*Tullis and Yund*, 1977]. However, such a concept is not sufficient to explain the effect of the loading rate on rock fracturing style in the case where the deformation is solely accommodated by brittle (cataclastic) processes, as is essentially the case in the upper crust. Other theories which do not necessarily rely on the presence of plastic processes in deformation invoke the role of subcritical crack growth in the deformation process [*Sano et al.*, 1981; *Kemeny*, 1991; *Okui and Horii*, 1997] or shift the problem to a rate-dependent friction along cracks [*Renshaw and Schulson*, 1998].

While the loading rate effect on rock deformation style has been extensively studied in the laboratory in the last 30 years, little field evidence has been reported, as the loading conditions for naturally deformed rocks are difficult to isolate. The most vivid example for such a rate effect is the propagation of large earthquakes into the so-called "aseismic" layer [*Strehlau*, 1986; *Hobbs et al.*, 1986; *Scholz*, 1988; *Jackson and White*, 1989]. A possible explanation is that the strain rates may increase by as much as 10 orders of magnitude during the coseismic stage, so that rocks which deform plastically during the preseismic stage may deform in a more brittle manner during the rupture phase. *Gomberg and Davis* [1996] and *Rydelek et al.* [1992] also derived from an analysis of triggered seismicity in the Geysers and a study of tidal triggering on the Campi Flegri, respectively, that the threshold of earthquake triggering was dependent on the frequency content of the exciting source, or equivalently on the loading rate. However, their concern was more focused on the way the loading rate changes the triggering threshold than

[1]Also at Department of Earth and Space Sciences, University of California, Los Angeles.

Copyright 1999 by the American Geophysical Union.

Paper number 1999JB900139.
0148-0227/99/1999JB900139$09.00

the way it influences the fracturing pattern posterior to earthquake triggering.

In this study we focus on a gas field (Lacq, southwestern France) where the fact that the local deformation is essentially induced by gas extraction through a poroelastic stressing [*Segall et al.*, 1994] provides quantitative knowledge of the loading conditions. In such a setting, the loading rate of rocks surrounding the reservoir is directly proportional to the depletion rate and in some extent to the production rate of the reservoir. During the 1975-1995 period, fortunately, a dramatic decrease of the gas production rate, that is, the loading rate, was reported. As a result of monitoring the induced seismicity, quantitative constraints on the gas field fracturing pattern were also available. Thus we have the unique opportunity to test in situ the effect of loading rate on the deformation mode of crustal rocks.

One particularly challenging issue is that we are looking here for a possible dependency of the Earth's crust fracturing pattern on loading rate variations of much lower frequency than the tidal variations, namely, frequencies of loading rates induced by human intervention (hydrocarbon recovery, mines, reservoir impoundment, etc.). If such low-frequency variations are indeed shown to have an impact on the Earth's crust fracturing pattern, it would suggest in numerous cases where the loading rate can be humanly controlled the possibility of adjusting the loading rate so as to shape the fracturing pattern of the Earth's crust locally according to human needs. Some possible implications will be described further. Let us start with a brief description of the Lacq gas field geomechanical setting and a presentation of the poroelastic model, which will serve as a reference framework in the present study.

2. Poroelastic Model

The gas field of Lacq Profond is a large northwest trending anticlinal dome patterned by the Pyrenean stage (Figure 1). Since the onset of production in 1957, the field has produced more than 220×10^9 m^3 of gas, with a resulting depletion around 60 MPa (Figure 2). The first local $M\sim3$ seismic event was felt in 1969 (Figure 2). Since 1969, 40 $M\geq3$ earthquakes have occurred, the last schock being a $M\sim4$ in late December 1997. The local seismological survey network deployed in 1974 recorded more than 1000 $M>1$ earthquakes, with a maximum magnitude of 4.2 (September 18, 1978).

The Lacq seismicity is clearly separate both in space and time from the Pyrenean activity [*Grasso and Wittlinger*, 1990]. Before the onset of production neither historical nor instrumental seismicity had revealed any seismic activity in this zone for several hundred years [*Grasso and Wittlinger*, 1990], and the nearest historical events are located on the North Pyrenean fault, 30 km from the gas field. These observations have led one to attribute unequivocally the Lacq seismicity to gas extraction [*Grasso and Wittlinger*, 1990]. Although other similar examples of extraction-induced earthquakes have been reported [e.g., *Grasso et al.*, 1992], this situation appears paradoxical since the decrease in pore pressure induced by fluid withdrawal usually causes the actual

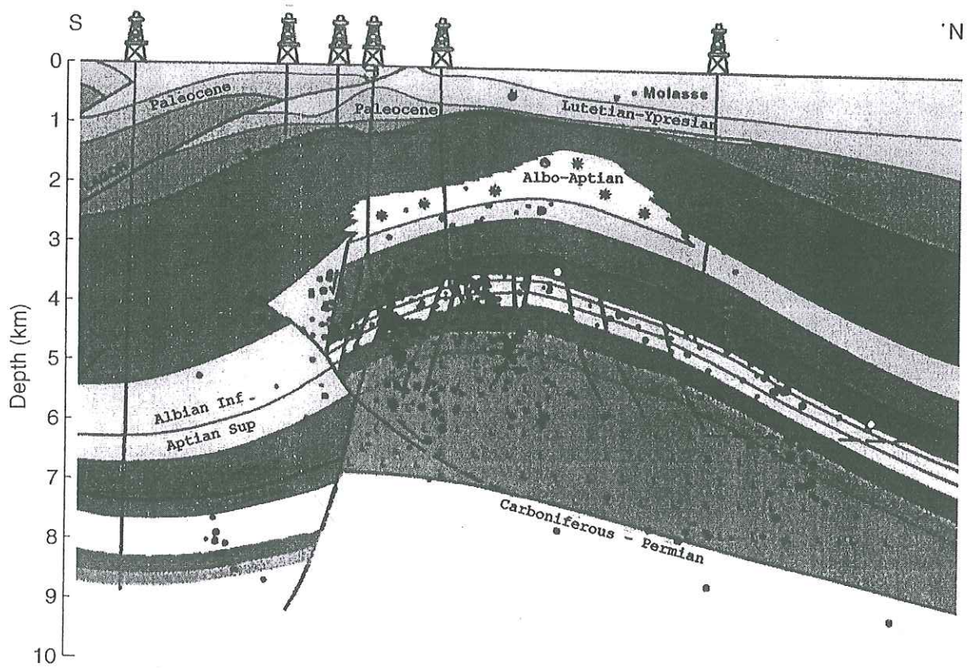


Figure 1. Structural cross section of the Lacq gas field, on which the hypocenters of level 1 (see text for explanation) are projected with solid circles. The small vertical bar on the right-hand side of the figure indicates the location of reservoir layers and the thickness of the reservoir. Note that the reservoir has an anticline shape with a top at 3 km depth.

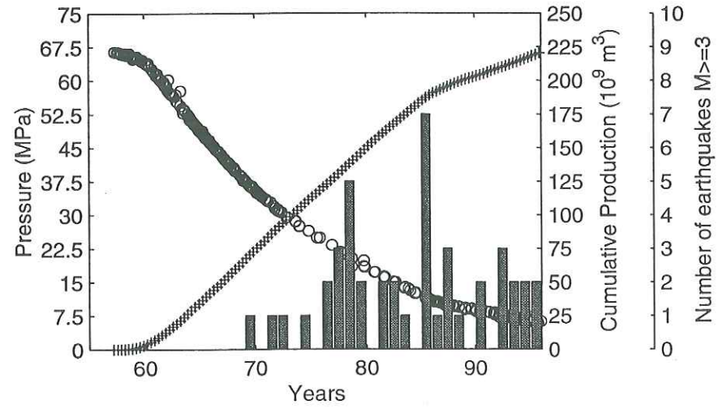


Figure 2. Variations of reservoir pressure (open circles), cumulative production (crosses), and annual number of $M\geq3$ earthquakes (vertical bars), during the period of production (1955-1995).

stress to increase, and thereby causes the Mohr circle to shift away from the rupture criterion.

There is now increasing evidence that such a phenomenon results from a poroelastic effect, that is, a contraction of reservoir rocks, which leads to the poroelastic stressing of surrounding geological beds [*Segall*, 1989; *Segall et al.*, 1994; *Segall and Fitzgerald*, 1998]. Such an effect modifies the natural tectonic stress field and may trigger earthquakes in areas where the change in actual shear stress promotes failure [*Segall et al.*, 1994]. The poroelastic model holds that stress and displacements in the vicinity of the reservoir are proportional to the pore pressure decline within the reservoir. All mathematical formulations are given in detail by *Segall* [1989] and *Segall et al.* [1994]. At Lacq the poroelastic model applies remarkably well, as attested by the linear relationship between surface subsidence (60 mm for the 40 years of production) and gas pressure drop [*Segall et al.*, 1994, Figure 7]. Furthermore, poroelastic calculations based on a priori knowledge of the reservoir geometry, pore pressure decline, and material properties have shown quite reasonable agreement between computed subsidence profiles and those measured by repeated leveling surveys [*Segall et al.*, 1994, Figure 9], as well as a good correlation between predicted failure zones and the observed spatial distribution of earthquakes, provided that the minimum regional compressive stress axis is chosen to be vertical [*Segall et al.*, 1994, Figures 11 and 13]. These numerical results, combined with the fact that few alternative models exist for extraction-induced earthquakes, give us confidence in assuming that the Lacq seismicity is driven by a poroelastic effect. The presence of seismicity within the reservoir itself (Figure 1) can be rationalized by the same poroelastic mechanism which can operate at smaller scale, that is, the reservoir block scale [*Rolando et al.*, 1997].

In such a poroelastic setting, the stress rate applied to rocks surrounding the reservoir is proportional to the depletion rate of the reservoir. At Lacq, poroelastic calculations predict a maximum increase of shear stress of 0.2 MPa for the 1957-1993 period [*Segall et al.*, 1994], that is, 36 years. We infer an average stress rate of a maximum of 5.5×10^{-3} MPa/yr. The symmetry between depletion and cumulative production (Figure 2), or equivalently, the similarity between Figures 3a and 3b, indicates that the production rate is roughly proportional to the depletion rate and, thereby, is also proportional to the stress rate. Since monitoring of the production rate is more accurate and cheaper than monitoring of the depletion rate, the production rate can be thought of as a useful way to estimate the stress rate of a gas field from a practical perspective (see section 4.3).

Measures of leveling carried out between 1887 and 1990 show that the major part of regional deformation recorded during that period is contemporary to the gas production [*Segall et al.*, 1994]. Therefore we consider that the contribution of tectonics in the stressing of the gas field is negligible, or at least constant, over the period of production. Another source of stressing of the gas field is the tidal stressing, which consists of short-period oscillatory variations of stress of up to 3×10^{-3} MPa at diurnal and semidiurnal periods, with stress rates reaching 1.5×10^{-3} MPa/h [*Melchior*, 1983; *Vidale et al.*, 1998], that is 3 to 4 orders of magnitude higher than the 5.5×10^{-3} MPa/yr poroelastic stress rate. Figure 4 shows the sum of these two presumed loading mechanisms, assuming for the tidal shear stress a sinusoid of period 12 hours with amplitude 3×10^{-3} MPa, which is the order of magnitude of the tidal shear stress calculated by *Vidale et al.* [1998] on the San Andreas fault. A priori, we would expect that the fracturing pattern of the gas field, if dependent on loading rate, be controlled by the higher-frequency variations of the loading rate, namely, the tidal variations. Opposite behavior, that is, a sensitivity to the poroelastic variations, would suggest that the rate dependency of the Earth's crust deformation pattern be itself frequency dependent. It is thus of special interest, both from a fundamental and a practical viewpoint (see section 4.3), to determine whether the Earth's crust is sensitive to low-frequency variations of the loading rate as poroelastic- or tectonic-induced variations.

3. Correlation Between Production Rate and Fracturing Pattern During the 1975-1995 Period

On the basis of the poroelastic model we examine the evolution of the Lacq fracturing pattern as a function of the production rate, that is, the poroelastic stress rate, between July 1975 and December 1995. We benefit from the fact that significant changes in reservoir parameters are reported during this period, in the form of a dramatic decrease of both the production rate and the depletion rate (Figures 3a and 3b). We constrain the fracturing pattern of the gas field using two parameters, the spatial correlation dimension D and the seismic b value, in order to characterize the spatial and size distribution of activated fractures, respectively. During the study period the Lacq seismicity catalog [*Grasso and Wittlinger*, 1990; *Volant and Grasso*, 1994; *Boyer*, 1996] is affected by two recording gaps due to technical defects: January 23, 1977 to September 20, 1977 and June 11, 1979 to December 2, 1981. Hypocenters have been computed using an a priori three-dimensional velocity model determined from deep borehole data and seismic profiles [*Guyoton et al.*, 1992; *Savin*, 1994; *Boyer*, 1996]. Within a total population of 785 events, we used three levels of confidence for hypocentral location, level 1, 2, and 3, including 611, 769, and 785 events, respectively. Level 1 provides the best location, with a 68% confidence limit under 200 m for latitude, 300 m for longitude, and 400 m for depth [*Boyer*, 1996].

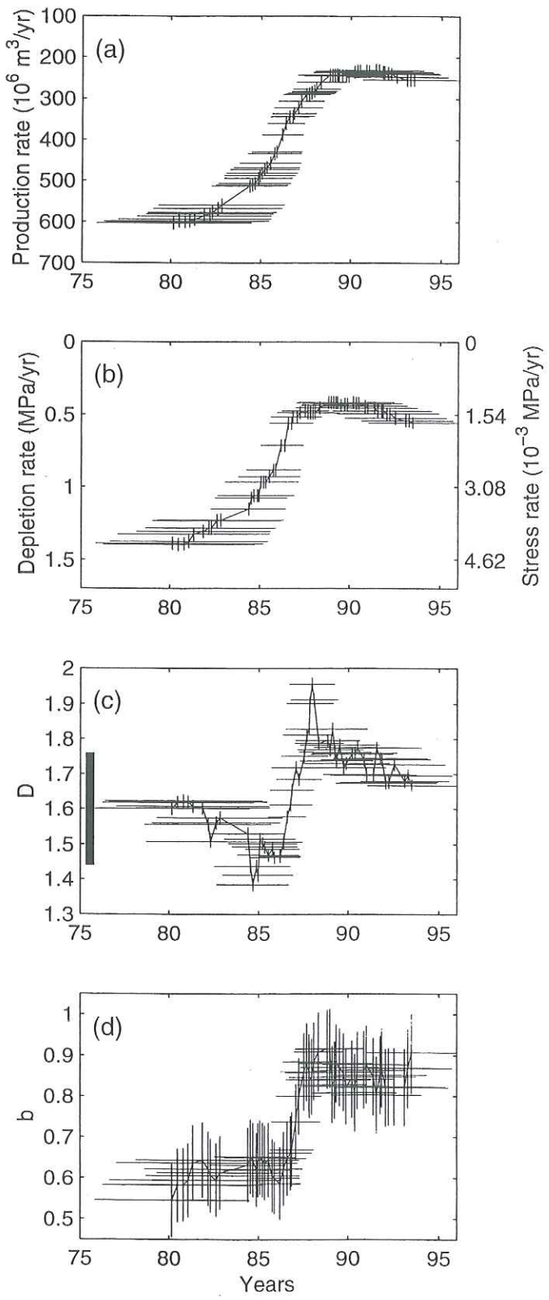


Figure 3. Variations of reservoir parameters (a) production rate and (b) depletion rate and scaling parameters of seismicity (c) spatial correlation dimension D and (d) b value during the 1975-1995 period. The corresponding poroelastic shear stress rate is also indicated on the right-hand scale of Figure 3b. To facilitate comparison, the reservoir parameter scales in Figure 3a and 3b have been inverted. For consistency, reservoir parameters are averaged using the same time windows (horizontal bars) as those for which b and D have been computed. The vertical bar in Figure 3c represents two standard deviations of the D value, computed from 200 subsets of 100 events each randomly extracted from the real data set (see text). Vertical bars in Figure 3d represent the error of the b value estimated by the formula of *Pickering et al.* [1995] (see text).

3.1. Spatial Distribution of Activated Fractures

The correlation integral method [*Grassberger and Procaccia*, 1983] is a way to quantify the spatial clustering of a set of points. We applied this tool to our catalog of hypocenters between 1975 and 1995 in order to detect variations in the spatial distribution of activated fractures that possibly interplay with the change of poroelastic stress rate during that period.

The principle of the method is to compute the distance between all pairs of events, and to plot the proportion $C(r)$ of pairs separated by a distance smaller than r:

$$C(r) = \frac{2}{N(N-1)} N(R < r) \qquad (1)$$

where $C(r)$ is the "correlation integral", N is the total number of events, and $N(R<r)$ is the number of pairs of events separated by a distance smaller than r. If the hypocentral distribution is fractal, one obtains the relation $C(r) \sim r^D$ for small values of r, where D is the correlation dimension [*Grassberger and Procaccia*, 1983]. The value of D will serve as an estimate of the degree of clustering of our set of hypocenters, and can theoretically range in a three-dimensional space from D=3 for a set of hypocenters distributed uniformly at random to D=0 in the case where all hypocenters are clustered into a few points.

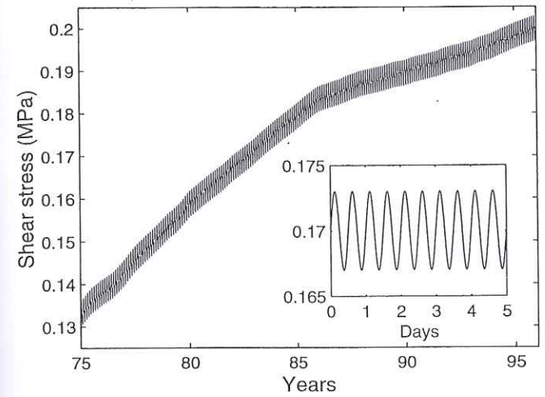


Figure 4. Sketch of the variations of shear stress applied to rocks surrounding the reservoir during the studied period (1975-1995). The curve is the sum of two presumed loading mechanisms, namely, the poroelastic and the tidal loading. The poroelastic contribution is derived from the curve of depletion (Figure 2) using the equivalency 0.2 MPa of induced shear stress for 60 MPa of depletion [*Segall et al.*, 1994]. The tidal contribution is assumed to be a sinusoid of period 12 hours with maximum amplitude 3×10^{-3} MPa. For clarity of the picture, we have used a sinusoid of period 73 times longer than the genuine 12-hour period. Inset is a magnification of the curve over 5 days, with the genuine 12-hour period. At this timescale, note that the poroelastic contribution to the variations of shear stress is negligible and that only tidal oscillations are visible. On the other hand, at the global timescale, the major visible process is the poroelastic loading, with a well-defined rate change (note the slope break) in 1986.

Since a good hypocentral location accuracy is required to apply this method, we used earthquakes of level 1 only. For the purpose of catalogue completeness, we did not take into account the events below the cut off detection limit (M=1.6), as determined from the Gutenberg-Richter relationship (Figure 5). The 388 events that correspond to this selection are encompassed in a volume of 20x15x10 km (Figure 6), and their correlation integral is shown in the upper plot of Figure 7.

The number of events necessary to get a reliable estimate of D [*Smith*, 1988; *Havstad and Ehlers*, 1989; *Eckmann and Ruelle*, 1992; *Eneva*, 1996], as well as the range on which the slope of the correlation integral must be computed [*Nerenberg and Essex*, 1990; *De Rubeis et al.*, 1993; *Eneva*, 1996] has been a matter of great debate in recent years. We shall essentially follow the recommendations of *Eneva* [1996], who studied thoroughly the applicability of the correlation integral method on small data sets. One of her results is that although the correlation integral method may strongly underestimate the genuine value of D when used with small data sets (e.g., 100 events), the method holds well for the purpose of evaluating temporal changes in the D value, as long as all conditions remain constant through time (number of events, size and geometry of the embedding space, location errors). Accordingly, we computed the D value in sliding windows containing the same number of events; we chose windows of 100 events, with increments of five events. Since the embedding space (parallelepiped of 20x15x10 km) and the location errors remain constant through the study period, we are confident that possible changes in D are not due to artifacts of the method used.

Following the strategy of *Eneva* [1996], we did not restrict a priori our range of analysis to that inferred from a theoretical formalism [e.g., *Nerenberg and Essex*, 1990]. We plotted $C(r)$ on all scales, and determined by the two-point slope method [*Eneva*, 1996; *Öncel*, 1996] the range where $C(r)$ exhibits a straight line most reasonably. Some examples of two-point slopes are shown in Figures 7 and 8 (bottom plots), together with their corresponding correlation integral $C(r)$ (upper plots). Apart from edge effects, characterized by a noisy slope at lower scales and a systematic bending of $C(r)$ at upper scales, the correlation integral generally exhibits a straight line in a given range, in which we computed the D value using a least squares fit. Such a range was found on average between 500 m and 1400 m. Note that although the two-slope method does reduce to some extent the subjectivity in the choice of the straight segment of the correlation integral, it does not eliminate totally the subjective character of the method. The lower bound at r=500 m may also be the signature of the influence of the location error, which would explain that $C(r)$ generally has a higher slope for $r \leq 500$ m than in the range [500 m, 1400 m] (Figures 7 and 8), in accordance with the finding of *Kagan and Knopoff* [1980] that location errors randomize the data and tend to increase the correlation dimensions.

The correlation integral for the whole population (Figure 7) exhibits a straight line within the range [500 m, 1600 m]. This indicates that at least in that range the population of hypocenters is fractal, or in other words, that the activated fractures are not uniformly distributed within the gas field. As stated above, not much significance has to be attributed to the absolute value of the slope estimate (D=1.84). When focusing on the temporal variations of D during the 1975-1995 period

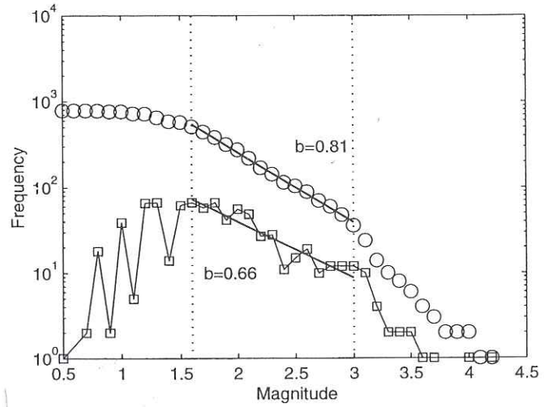


Figure 5. Discrete (squares) and cumulative (circles) frequency-magnitude distribution of earthquakes for the period 1975-1995 (level 3 earthquakes, 785 events). The vertical dashed lines indicate the magnitude of the supposed detection limit (M=1.6) and thickness of the brittle layers (M=3.0). The b values are computed from a least squares fit to the distribution within the range M=[1.6; 3.0].

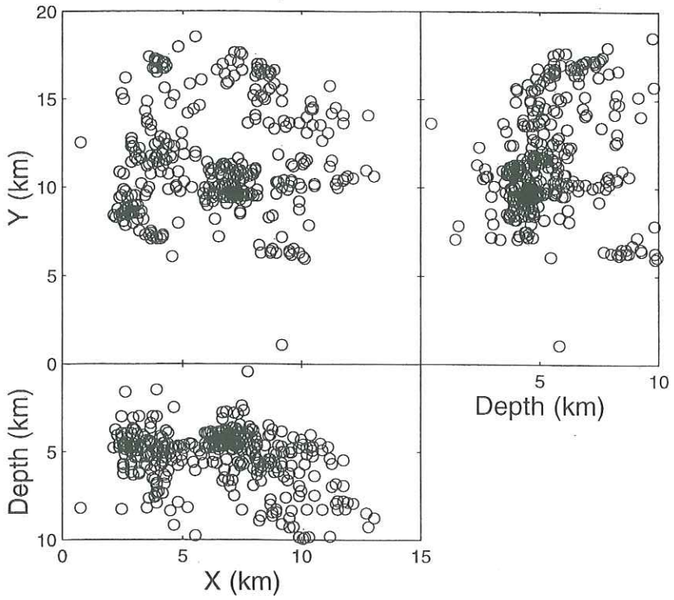


Figure 6. Spatial distribution of earthquakes used in the calculation of the correlation integral (level 1 earthquakes with $M \geq 1.6$).

(Figure 3c), the key feature is a steep increase of the D value in the years 1986 to 1988, mimicking the variation of reservoir parameters, that is, production rate and depletion rate, during the same period (Figures 3a and 3b). In order to determine whether or not the jump of the D value between 1986 and 1988 is significant, we need to calculate the error of the D estimate. Although commonly used, the calculation of the standard deviation on the least squares fit is useless in that case, since it is just an estimation of how straight the curve of $C(r)$ is, and in no way an estimate of the reliability of D value changes. We used here a method inspired by that proposed by *Eneva* [1996]. Its goal is to compare the jump in the D value in 1986-1988 with the "normal" fluctuations of D suggested by computing D on subsets randomly extracted from the same real data. In contrast with the approach of *Eneva* [1996], we assume a posteriori that the sets of events before and after the transition period (1986-1988) are two distinct fractal objects, so that we estimate the "normal" fluctuations of D on each of these two populations, consisting of 170 and 218 events, respectively. From each population, we performed 200 random extractions of 100 events, and calculated each time the corresponding D value by the same method as those previously used (two-point slope). We thus got two distributions of D values, whose standard deviations gave the amplitude of the "normal" fluctuations of D before and after the transition period, respectively. These standard deviations were found approximately comparable, and equal to 0.15. The double of this standard deviation is represented by a vertical bar on Figure 3c. Using this as reference, the change in the D value from 1986 to 1988 appears as significant, provided that one compares the values of D immediately preceding and following the transition period (D=1.5 and D=1.95, respectively, as extracted from Figure 3c) and not the mean values of D on the whole periods preceding and following that transition period (D=1.53 and D=1.76, respectively). Further support for the significance of the D value change, as well as a justification of our choice of comparing the D values immediately preceding and following the transition period, will be given in the section 4.1. We thus conclude from the observed D increase that the decrease of the poroelastic stress rate during the 1986-1988 period has been accompanied by a reduction of the spatial clustering of fracturing.

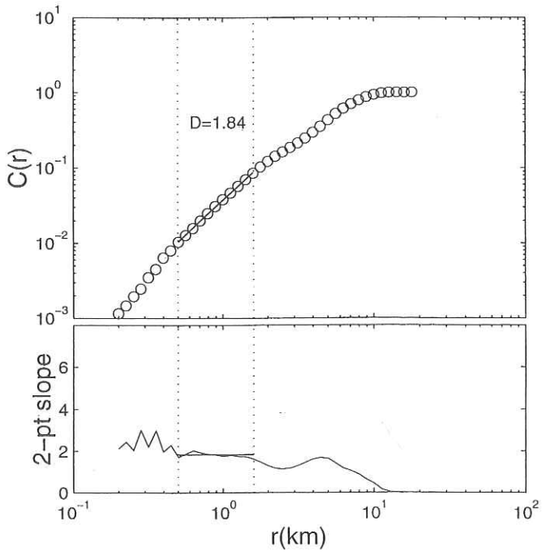


Figure 7. Correlation integral and its corresponding two-point slope curve for the whole period 1975-1995 (level 1 earthquakes, $M \geq 1.6$, 388 events). The dotted lines indicate the range on which we computed the D value. The solid line in the upper plot is the least squares fit to the points in that range.

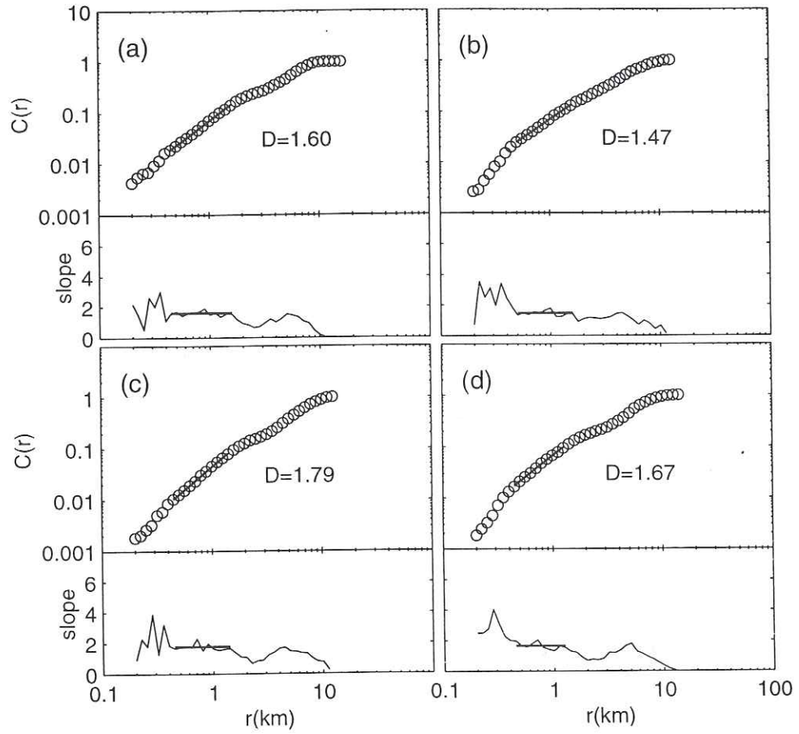


Figure 8. Four characteristic examples of the correlation integral and its corresponding two-point slope. The relevant time windows are (a) October 1975 to June 1984 (b) January 1985 to May 1987 (c) January 1987 to September 1989 (d) April 1989 to October 1994. Each window includes 100 events of level 1 with magnitude above 1.6. Figures 8a and 8b are part of the so-called "more brittle" period, while Figure 8c and 8d are part of the so-called "more ductile" period (see section 4.1).

3.2. Size Distribution of Activated Fractures

The seismic b value is the slope of the frequency-magnitude distribution of earthquakes and thereby characterizes the relative proportion of large to small earthquakes in a given population. Using the hypothesis of self-similarity, which means that the seismic moment is proportional to the rupture length, the b value is related to the exponent m of the length distribution of activated fractures by the relation $m=3b/c$, where c is the slope of the relationship between the logarithm of seismic moment and the magnitude. Thus the b value also characterizes the relative proportion of large to small fractures involved in the deformation.

The frequency-magnitude distribution of earthquakes for the whole 1975-1995 period is plotted in Figure 5, both in its discrete and cumulative representation. As no constraint on location is required here and in order to improve statistics, we used the largest catalog of earthquakes available, that is, the level 3 catalog. Above the limit of catalog completeness (M=1.6), the frequency-magnitude distribution shows a linear trend, with a slope break at M=3. One plausible explanation for the slope break is a characteristic size in local heterogeneity, like for instance a finite thickness of brittle layers in which earthquakes occur, so that large earthquakes (M>3) can only propagate in one direction [*Volant and Grasso*, 1994]. The same process has been proposed at the scale of the Earth's crust [*Scholz*, 1991; *Pacheco et al.*, 1992], even though the slope break for global seismicity is less well defined [*Sornette et al.*, 1996]. Our geometrical interpretation of the slope break at M=3 as a characteristic size effect led us to calculate the b value in the range supposedly not affected by these effects, that is, $1.6<M<3.0$.

We computed the b value in the same windows as those used for the calculation of D, namely, windows of 100 level 1 events with M>1.6. The number of level 3 earthquakes present in these windows varied between 132 and 253, with a median of 199 events. As an illustration, Figure 9 shows snapshots of the cumulative frequency-magnitude distribution at four different times. To check the consistency of our results, the calculation of b was made using three different methods, (1) a least squares fit to the cumulative frequency-magnitude distribution, (2) a maximum likelihood estimate [*Page*, 1968], and (3) a weighted least squares fit to the discrete frequency-magnitude distribution, with weights proportional to the

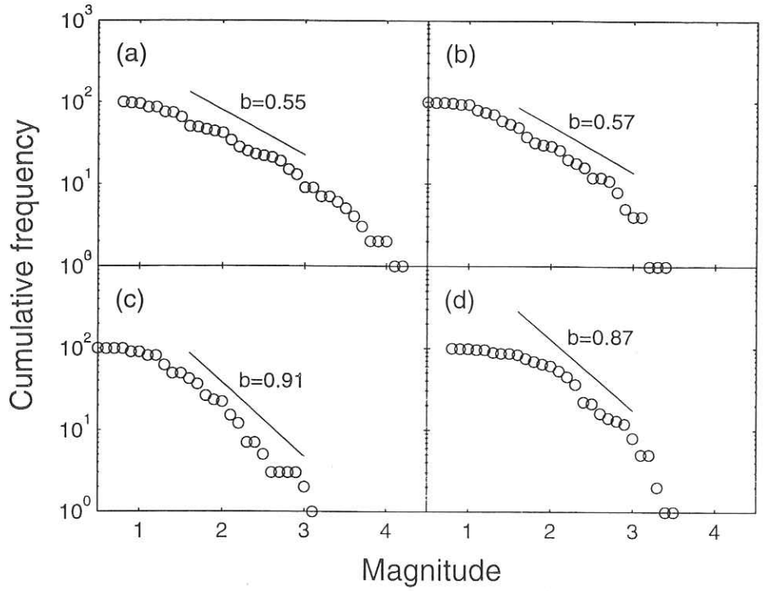


Figure 9. Four characteristic examples of the cumulative frequency-magnitude distribution. The relevant time windows for Figure 9a to 9d are the same as for Figure 8a to 8d, respectively. The b values shown are estimated using the maximum likelihood method. A straight line of the same slope is shown for reference.

square root of the number of events in each bin [*Pickering et al.*, 1995]. In the latter case the discrete frequency-magnitude distribution was previously smoothed using a three-point running average with the rule $(a+2b+c)/4$ [*Pickering et al.*, 1995]. This not only allows us to reduce the systematic underestimation of the b value inherent to the discrete representation of the frequency-magnitude distribution for small catalogs [*Pickering et al.*, 1995], but more importantly prevents us from encountering empty bins in the distribution which would lead to removal of these points from the fit, due to the "log of zero" problem.

The temporal changes of the b value provided by the three methods are shown in Figure 10, and the mean of these three curves is reported in Figure 3d for comparison with the variations of reservoir parameters. We estimated the error of the b value by using an empirical formula derived by *Pickering et al.* [1995] from a Monte Carlo simulation of the sampling effect on the exponent of a power law distribution. The formula is the same for the three methods used:

$$\sigma = kb\sqrt{\frac{1}{N}} \qquad b \geq 1 \qquad (2a)$$

$$\sigma = k\sqrt{\frac{b}{N}} \qquad b < 1 \qquad (2b)$$

where σ is the standard deviation of the b value estimate, N is the sample size, and k is a factor depending on the scale range of analysis and, for the discrete frequency-magnitude representation, on the bin size. In our case the scale range of analysis covers 1.5 magnitude units (M=1.6 to M=3.0), and the bin size is 0.1 magnitude unit. Based on the empirical values of k reported by *Pickering et al.* [1995, Table 1-3], we used k=1.4, which appeared suitable for all three methods.

First, it is interesting to note that the three methods show somewhat different patterns for the b value changes (Figure 10). Method 3 yields b values systematically lower than method 2, which yields itself b values systematically lower than method 1. This is consistent with the findings of *Pickering et al.* [1995], who showed that for small data sets a bias may affect the b value when estimated by the maximum likelihood and the discrete frequency-magnitude methods, the bias being more pronounced in the latter case. Since we are more interested in b value changes than absolute values, these biases do not represent a problem. Discrepancies are also visible in the shape of the three curves (Figure 10); however, these are small enough, as compared to error bars, not to be attributed any significance.

The most remarkable feature of these three graphs, or equivalently of Figure 3d is a steep increase of the b value in the 1986-1988 period well outside the error estimation, repeating the same pattern as both the reservoir parameters (Figures 3a and 3b) and the D value (Figure 3c). This b value increase is in agreement with the b value change suggested by Volant et al. [1992] using the Lacq catalog up to 1990. We checked that the b value increase was not due to a possible use of more events in the calculation of b in the second period (1988-1995), which would have led to a systematic reduction of the bias and shifted artificially the estimate of b toward greater values. Lastly, we applied a less sophisticated method than the b value, namely, a simple plot of the average magnitude of earthquakes as a function of time, considering all

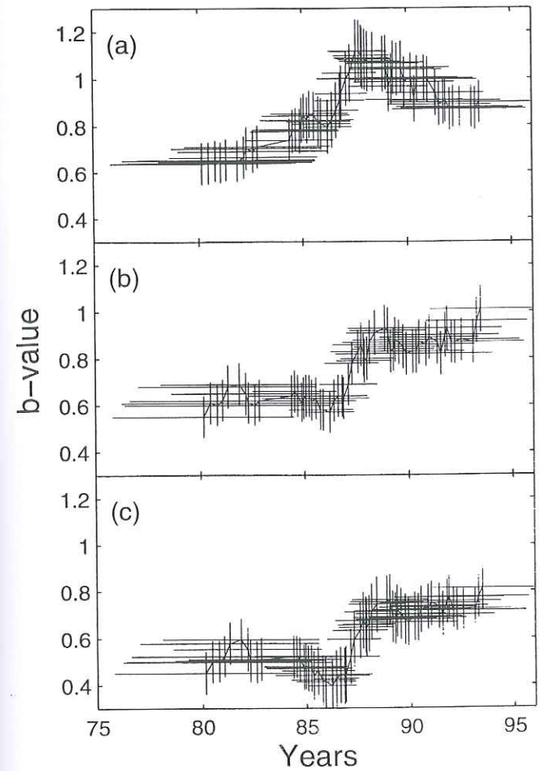


Figure 10. Temporal changes of the b value determined by (a) a least squares fit to the cumulative frequency-magnitude distribution, (b) a maximum likelihood estimation [*Page*, 1968], and (c) a weighted least squares fit to the discrete frequency-magnitude distribution, with weights proportional to the square root of the number of events in each interval [*Pickering et al.*, 1995]. The vertical bars represent the error of the b value.

$M \geq 1.6$ earthquakes. This method is equivalent to a maximum likelihood estimate of the b value, using Aki's [1965] formula. The method yields essentially the same results, that is, a decrease of the average magnitude in the years 1986 to 1988 (Figure 11). This is evidence that our choice of fitting the frequency-magnitude distribution over a limited scale range, that is, M=[1.6; 3.0], does not critically influence the results. We conclude from such a b increase that the decline of the poroelastic stress rate during the 1986-1988 period has not only reduced the spatial clustering of fracturing (Figure 3c), but has also reduced the proportion of large to small fractures involved in the deformation of the gas field (Figure 3d).

4. Discussion

The poroelastic model holds that the Lacq gas field has suffered a poroelastic stressing along its whole period of production, with a mean stress rate of 5×10^{-3} MPa/yr. However, the poroelastic stress rate did not remain constant over this period. In particular, it decreased significantly in the years 1986 to 1988 (from 4.5×10^{-3} to 1.5×10^{-3} MPa/yr; see Figure 3b) under a change of reservoir parameters. Accordingly, a significant change in the fracturing pattern of the gas field is observed, in the form of a decrease in the size of activated fractures (increase of the b by 0.3 units whatever the method used; see Figures 3d and 10) and a reduction of the spatial clustering of fracturing (increase of D by 0.45 units; see Figure 3c). These observations represent strong evidence for a stress rate impact on the fracturing pattern of the Lacq gas field. However, we cannot state with absolute certainty that the observed correlation is not pure chance rather than the signature of a genuine causal relationship. The arguments listed below further support such a correlation, either by reinforcing the significance of the b and D value change in the 1986-1988 period, by providing independent evidence for loading rate impact on the Lacq gas field, or by reporting laboratory experiments, field observations, and numerical results which all support that a decrease in the loading rate is accompanied by a reduction of activated fracture size and a reduction of fracture clustering.

4.1. Independent Supports for a Loading Rate Impact

First, there have been few investigations of the loading rate impact on b or D at the laboratory scale. The only report in this direction [Vinogradov, 1962] shows a dependence of the b value on the imposed strain rate, although this earlier study must be taken with caution due to the use of acoustic emissions only in the audio frequency range [Scholz, 1968]. On the other hand, the variations of b and D during compressional tests performed at constant loading rate have been widely investigated in recent years, with the aim of detecting precursory systematic variations of these parameters before failure. In such tests the b and D values, as measured from acoustic emissions, are generally observed to decrease as the rock sample is driven to failure [*Hirata et al.*, 1987; *Main et al.*, 1989; *Lockner*, 1993]. In fact, the context of Lacq during the 1975-1995 period constitutes an almost perfect analog of such experiments (progressive stressing of rocks) at larger space scale and timescale, except that the loading rate or, equivalently, the production rate, is not constant but changes

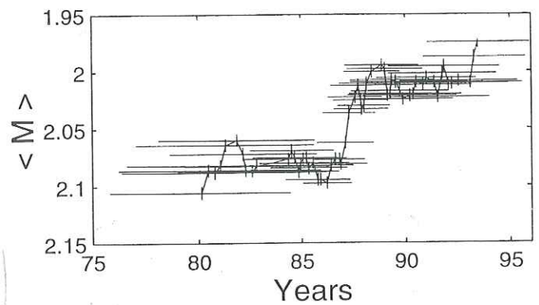


Figure 11. Average magnitude of earthquakes (level 3, $M \geq 1.6$) as a function of time. Averages were computed in the same time windows (horizontal bars) as those in which b and D have been computed.

during the "test" and that the macroscopic failure of the "sample" is never reached. Before and after the transition period (1986-1988), the slight decrease of the D value visible in Figure 3c can be viewed as a "normal" tendency in a regime of constant loading rate, consistent with experimental results. This justifies the use of the D values immediately before and after the transition period for evaluating the significance of the D value change during that period (see section 3.1). On the other hand, the b and D increases in the 1986-1988 period (Figure 3c and 3d) appear "abnormal" with regard to the decrease expected from laboratory [*Hirata et al.*, 1987; *Main et al.*, 1989; *Lockner*, 1993], which reinforces their significance. Furthermore, since the only parameter which basically distinguishes the Lacq context from laboratory experiments during that period is a nonconstant loading rate, we naturally attribute such unexpected behavior to the loading rate decrease, which has apparently changed the fracturing style of rocks while they were stressed.

A second source of independent evidence for a loading rate impact on the Lacq fracturing pattern can be drawn from the fact that no seismicity was felt for several hundred years in the Lacq area [*Grasso and Wittlinger*, 1990], and that the onset of felt seismicity (1969) roughly coincides with the onset of production (1957), notwithstanding a lag of 12 years which can be understood as the time which has been necessary for the actual shear stress to reach rupture threshold in some localized area. This indicates that as long as the only loading rate in progress was the natural tectonic loading rate, the length of fractures involved in the inelastic deformation, if any, was under the typical source size of an M~3 earthquake, say 200-400 m [*Feignier and Grasso*, 1991; *Volant and Grasso*, 1994]. The loading rate increase associated with the setup of poroelastic stressing has apparently changed the local mode of inelastic deformation so that activated fractures became sufficiently large to generate M>3 earthquakes. Such a hypothesis repeats at larger timescale the pattern observed during the 1975-1995 period, that is, a larger loading rate associated with larger activated fractures. However, another possibility cannot be rejected, which is that the local deformation may have been purely elastic over the last several hundred years before production, and that the gas field just started to deform inelastically 12 years after the onset of production.

Regarding other field studies we found no track of independent reports on the relationship between the fracturing pattern of the Earth's crust and the tectonic (or induced) loading rate imposed on it. *Amelung and King* [1997] noticed a b value decrease during the aftershock sequence of the Loma Prieta earthquake and interpreted it as a consequence of an increase of the loading rate after the Loma Prieta earthquake. However, we believe that a mainshock-aftershock sequence is better depicted as an instantaneous buildup of stress (infinite loading rate) during the mainshock, followed by a period of relaxation of that stress (no loading anymore) during which aftershocks occur. Therefore we would not associate the b value change observed by *Amelung and King* [1997] with a loading rate increase. Similarly, *McGarr* [1976] studied the dependence of the b value on daily and weekly changes of the strain rate associated with mining activity. However, the strain rate he referred to was associated not with the loading rate but with the relaxation rate of the medium in response to loading. In that particular case the loading rate was much higher than the relaxation rate, since loading occurred only during 5 min (explosions carried out at mine front each afternoon) while relaxation could last hours. That situation is very similar to the case of a mainshock- aftershock sequence described previously.

Recent numerical results provided good understanding of how the spatial pattern of the Earth's crust deformation could be sensitive to the loading rate. Inspired by previous laboratory works [*Sornette et al.*, 1993], *Davy et al.* [1995] introduced temporal effects in a brittle-elastic model of the Earth's crust deformation [*Cowie et al.*, 1993] by coupling a fuse network (electric analog of the brittle-elastic layer) with a capacitor network, supposedly representing an underlying viscous layer. Depending on the current frequency, or equivalently the strain rate, the model showed completely different patterns ranging from a localized deformation on a few major fault zones for higher strain rates to a uniform deformation for lower strain rates, consistent with the negative correlation observed at Lacq between the stress rate and the D value.

Finally, the loading rate effect has been widely studied in the laboratory, mainly in the search for the mechanisms responsible for the brittle-ductile transition. These experiments report that a decrease of the loading rate generally leads to an enhancement of rock ductility, as shown on various rock types, and different characterizations of rock ductility, including rock strength [*Kumar*, 1968; *Sano et al.*, 1981; *Horseman and Handin*, 1990; *Lajtai et al.*, 1991], degree of nonlinearity in the stress-strain curve [*Heard*, 1963; *Rutter*, 1974; *Chong et al.*, 1980], strain partitioning between plastic and cataclastic processes [*Hacker and Christie*, 1990], or geometrical pattern of damage [*Wu and Pollard*, 1992; *Rao and Kusunose*, 1995]. Since the hallmarks of an enhancement of ductility include a reduction of the spatial clustering of damage [*Evans et al.*, 1990; *Velde et al.*, 1993; *Hirth and Tullis*, 1994] and a reduction of fracture length [*Fredrich et al.*, 1989; *Velde et al.*, 1993], these experiments indirectly rationalize Lacq observations. *Wu and Pollard* [1992] also conducted an experiment of strain cycling at different strain rates and showed an increase in the length of produced fractures with the loading rate.

Therefore the hypothesis of a correlation between the stress rate decline in the 1986-1988 period and the simultaneous change of fracturing pattern of the gas field is supported by a large set of experimental, numerical, and field evidence. We thus propose that rocks surrounding the depleted zones have undergone a change in their deformation mode from more brittle to more ductile as the poroelastic stress rate was decreased in the 1986-1988 period. It is clear that the term "more ductile" refers here to a deformation mode which is still essentially brittle in terms of involved microscopic processes. We are dealing with behaviors ranging from the "brittle" to "semibrittle" field or "semibrittle faulting" to "semibrittle flow", in the classifications of *Evans et al.* [1990] and *Hirth and Tullis* [1994], respectively.

4.2. Loading Rate Effect: A Possible Frequency-Dependent Process

There is now increasing evidence that the threshold of earthquake triggering is dependent on the frequency of the exciting source [*Rydelek et al.*, 1992; *Gomberg and Davis*, 1996]. Such a dependency suggests that the mechanisms which trigger earthquakes may be more numerous than the simple exceedance of a given Coulomb threshold and that each frequency range may activate different mechanisms. Rectified diffusion [*Sturtevant et al.*, 1996] is an example of a recently proposed mechanism which can be activated only by high-frequency sources as, for instance, the passage of seismic waves.

Similarly, the apparent sensitivity of the Lacq deformation pattern to loading rate variations of much lower frequency than the tidal variations raises the hypothesis that the Earth's crust deformation mode is dependent on the frequency of loading rate variations. In other words, the mechanism which make the Earth's crust deform in a brittle fashion more than a ductile one (and conversely) at frequencies of the order of poroelastic or tectonic loading rates, say 10^{-3} MPa/yr, is apparently no longer activated at frequencies of the tidal loading rate (~10^{-3} MPa/h), leading to the nonsensitivity of the Earth's crust to those frequencies. In addition, evidence for brittle failure of the so-called "aseismic" layer during the propagation of large earthquakes [*Strehlau*, 1986; *Hobbs et al.*; 1986, *Scholz*, 1988; *Jackson and White*, 1989] indicates that the Earth's crust is again rate-sensitive at higher frequencies, namely, those of seismic waves (strain rates of ~10 μstrain/s). This suggests at those frequencies the presence of a mechanism, possibly different from the one operating at the poroelastic or tectonic frequency, which again influences the Earth's crust deformation pattern. We have listed in section 1 some possible candidates, including subcritical crack growth [*Sano et al.*, 1981; *Kemeny*, 1991; *Okui and Horii*, 1997], rate-dependent friction [*Renshaw and Schulson*, 1998], etc. However, it is clear that a more comprehensive knowledge of the rate-dependent mechanisms capable of controlling rock deformation mode must be achieved in order to identify the mechanisms which are more likely to operate in each frequency range.

Therefore, if validated with other geological objects, our results may have key implications on our understanding of the Earth's crust response to stress and can help to constrain physical models. Also, these results suggest strong potential implications in many fields where the Earth's crust is subjected to human-induced loading rates. We do not attempt here to make an exhaustive review but give the principles of such an idea by focusing on the example of hydrocarbon recovery.

4.3. Implications for Reservoir Productivity

It has been recently proposed that reservoir fracturing is one key factor for the increase of potential recovery during hydrocarbon extraction [*Rolando et al.*, 1997; *Segall and Fitzgerald*, 1998]. This idea was put forward from the observation in various fields of an increase, or at least a stability, of reservoir permeability during production [*Teufel et al.*, 1991; *Rolando et al.*, 1997] (Figure 12). Moreover, the hierarchical pattern of natural and induced seismicity [*Scholz*, 1991] argues for an intense small-scale fracturing (in the range of meters to hundreds of meters for the length of activated faults) to be activated during production and to be likely to improve reservoir productivity.

More than fracturing itself, the fracturing pattern will probably have crucial importance for the efficiency with which the reservoir productivity will be increased. The choice of optimizing the fracturing pattern in terms of reservoir

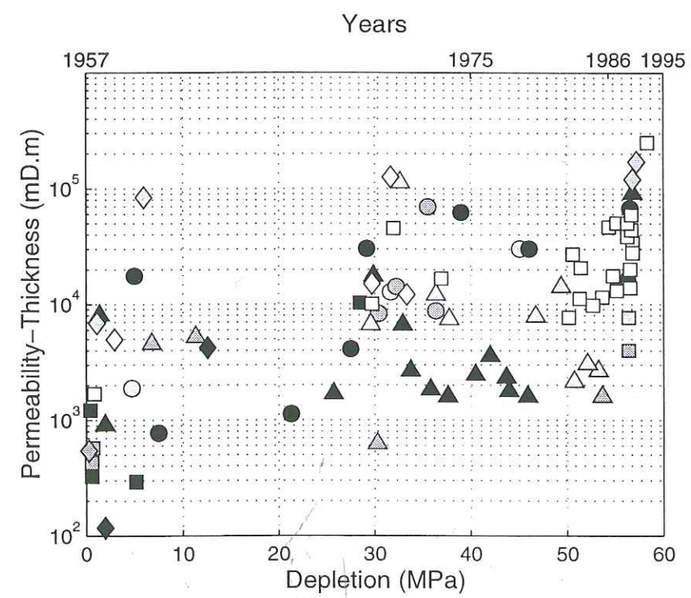


Figure 12. Variations of permeability-thickness with depletion in the Lacq gas field (adapted from *Rolando et al.* [1997]). Each marker type represents a given tested well. Note that the permeability has increased with the depletion of the gas field. However, it is difficult to assert from the present data whether there has been a change in the slope of the increase of permeability in the years 1986-1988 simultaneously with the decline of the loading rate during that period.

productivity is a trade-off between two requirements. On the one hand, fracturing must be diffuse in order to drain a maximum of trapped reserve; also, produced fractures must be small, that is, below the reservoir extension size. Such conditions are more likely to be met with a more ductile behavior, that is, a lower stress rate (Figure 13a). On the other hand, fractures must be sufficiently large and clustered to ensure a good connectivity of the reservoir, which is more likely to be met with a more brittle behavior, that is, a larger stress rate (Figure 13c). The above results suggest for the producer the possibility of adjusting the poroelastic stress rate, that is, the production rate, in such a way that the inelastic deformation mode of the medium is exactly at the point of most efficient fracturing for reservoir productivity (Figure 13b), between diffuse disconnected fractures on the one hand, and localized sets of large fractures on the other hand.

On the basis of this idea, we examined whether the decrease of the Lacq production rate in the years 1986-1988 was accompanied by an increase of reservoir productivity, that is, a change in the rate of increase of permeability. However, the temporal resolution of the data in Figure 12 did not allow us to reach a conclusion, even though a small tendency toward an improvement of the rate increase of permeability seems to emerge. This underlines the requirement for the permeability changes within hydrocarbon fields to be recorded more frequently, say monthly, for assessing the validity and feasibility of human control of the reservoir productivity by the production rate. Modeling can also help in such an assessment. For instance, *Siddiqi et al.* [1997] studied the effect of mechanical damage on transport properties by deforming rocks under conditions that favored mechanisms ranging from microcracking to dislocation creep and subsequently measuring the associated permeability. Although the authors used not the loading rate, but the confining pressure (P_c), as the control parameter (at room temperature), their results are very encouraging in that they observed a stage of increase of the permeability in going from P_c=0 to P_c=100 MPa followed by a stage of decrease of the permeability for P_c>100 MPa. In other words, they found a critical value of the confining pressure (P_c=100 MPa) for which the permeability was maximum. Such an experiment not only supports the idea that there exists a regime of optimal deformation between the pure brittle behavior and the pure plastic flow for which the ability of fluid to flow within a rock matrix is maximum, but also constitutes a miniature analog of what we propose to be achieved in the field, with the loading rate as the control parameter.

Therefore several routes are available for the producer to test the idea of a reservoir productivity controlled by the production rate. As stated above, such a concept of a human control on the Earth's crust fracturing pattern can easily be extended to other fields of application (mines, reservoir impoundment, engineering, etc.) using the same reasoning.

5. Conclusions

The correlated evolution of the production rate and the *b* and *D* parameters during the 1975-1995 period, as well as a number of experimental, numerical, and field results, argues that the poroelastic stress rate has profound impact on the fracturing pattern of the Lacq gas field, ranging from a localized damage with relatively large fractures to a more diffuse damage with relatively small fractures, for high and low values of the stress rate, respectively. Such behavior mimics in all respects that of a rock experiencing a transition from brittle to more ductile behavior when subjected to decreasing loading rates in laboratory. This suggests that the stressed rocks in the Lacq field have changed their deformation mode toward greater ductility as the poroelastic stress rate was decreased in the years 1986-1988. To our knowledge this is first in situ quantitative report of an impact of the loading rate on the deformation pattern of crustal rocks. Loading rate changes thus appear as a possible candidate to drive *b* and *D* changes in time and space. This is of special interest since few parameters controlling *b* and *D* have been clearly identified so far (see e.g., Wiemer and Wyss [1997] for a review of presently identified parameters which possibly control the *b* value.)

Another fundamental point is that such an impact is observed for variations of the loading rate of poroelastic type, which are of much lower frequency than the tidal variations. We conclude that the temporal dependency of the Earth's crust deformation style is possibly more complex than the monotonic increase of brittleness with loading rate observed in the laboratory and may involve different mechanisms, each operating in a given frequency range. The Earth's crust may thus act like a band-rejecting filter with regard to the loading rate effect, making it insensitive to loading rate variations of frequencies of the order of tidal phenomena. Similar dependency on frequency was proposed for earthquake triggering [*Rydelek et al.*, 1992; *Gomberg and Davis*, 1996].

Lastly, the possibility of shaping the fracturing pattern of a rock medium by suitably adjusting the loading rate opens new routes in contexts where the loading rate is induced by human intervention. For the hydrocarbon industry it suggests the possibility of using the production rate as a knob, so as to tune the response of the reservoir to a level of most efficient fracturing, in terms of hydrocarbon recovery. The existence of such an optimal fracturing pattern has been already demonstrated in the laboratory [*Siddiqi et al.*, 1997]. The validation of this idea within hydrocarbon fields as well as other geophysical objects requires as a primary condition a more systematic monitoring of the fracturing pattern in correlation to the loading rate.

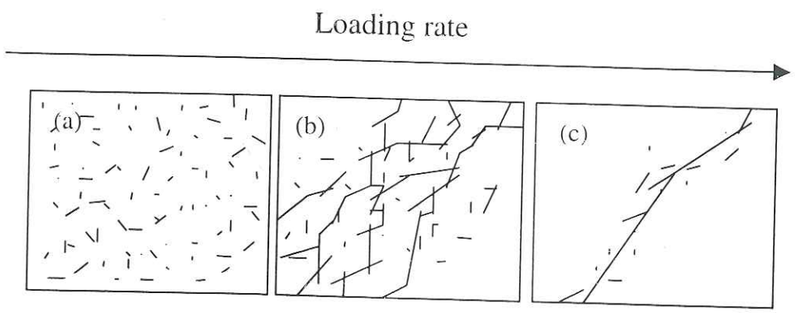


Figure 13. Schematic representation of the variations of fracturing pattern with the loading rate derived from experimental and numerical results. The supposed optimal pattern for reservoir productivity corresponds to the case illustrated in Figure 13b.

Acknowledgments. F.L. is grateful to D. Sornette for stimulating discussions and comments on the manuscript. We appreciate comments from the two reviewers, M. Eneva and K. Otsuki, as well as constructive criticisms from M. Wyss and I. Main. We thank the reservoir engineering division of ELF production for extensive discussion on the interrelation between induced seismicity and reservoir productivity. Special thanks to E. Chevallier, D. Massonat, F. Paux, and J.P. Rolando. F.L. is also grarteful for accommodation from the Department of Earth and Space Sciences and Institute of Geophysics and Planetary Physics in UCLA, where part of this paper was written. This study was partially supported by the FORPRO/ANDRA program, and the PNRN/INSU program. F.L. is supported by joint ELF/CNRS grants, whose ELF coordinator is D. Fourmaintraux.

References

Aki, K., Maximum likelihood estimate of *b* in the formula log*N*=*a*-*bM*, and its confidence limits, *Bull. Earth. Res. Inst.*, *43*, 237-239, 1965.
Amelung, F., and G. King, Earthquake scaling laws for creeping and non-creeping faults, *Geophys. Res. Lett.*, *24*, 507-510, 1997.
Boyer, E., Sismicité induite et production pétrolière, engineering report, Ecole et Observ. de Phys. du Globe, Strasbourg, France, 1996.
Chong, K. P., P. M. Hoyt, J. W. Smith, and B. Y. Paulsen, Effects of strain rate on oil shale fracturing, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, *17*, 35-43, 1980.
Cowie, A., C. Vanneste, and D. Sornette, Statistical physics model for the spatio-temporal evolution of faults, *J. Geophys. Res.*, *98*, 21,809-21,821, 1993.
Davy, P., A. Hansen, E. Bonnet, and S. Z. Zhang, Localization and fault growth in layered brittle-ductile systems: Implications for deformations of the continental lithosphere, *J. Geophys. Res.*, *100*, 6281-6294, 1995.
De Rubeis, V., P. Dimitriu, E. Papadimitriu, and P. Tosi, Recurrent patterns in the spatial behaviour of Italian seismicity revealed by the fractal approach, *Geophys. Res. Lett.*, *20*, 1911-1914, 1993.
Eckmann, J. P., and D. Ruelle, Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems, *Physica D*, *56*, 185-187, 1992.
Eneva, M., Effect of limited data sets in evaluating the scaling properties of spatially distributed data: An example from mining-induced seismic activity, *Geophys. J. Int.*, *124*, 773-786, 1996.
Evans, B., J. T. Fredrich, and T. F. Wong, The brittle-ductile transition in rocks: Recent experimental and theoretical progress, in *The Brittle-Ductile Transition in Rocks*, Geophys. Monogr. Ser., vol. 56, edited by A. G. Duba et al., pp. 1-20, AGU, Washington, D.C., 1990.
Feignier, B., and J.R. Grasso, Relation between seismic source parameters and mechanical properties of rocks: A case study, *Pure Appl. Geophys.*, *137*, 175-199, 1991.
Fredrich, J. T., B. Evans, and T. F. Wong, Micromechanics of the brittle to plastic transition in Carrara marble, *J. Geophys. Res.*, *94*, 4129-4145, 1989.
Gomberg, J. and S. Davis, Stress/strain changes and triggered seismicity at the Geysers, California, *J. Geophys. Res.*, *101*, 733-749, 1996.
Grassberger, P., and I. Procaccia, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D*, *9*, 189-208, 1983.
Grasso, J.R., and G. Wittlinger, 10 years of seismic monitoring over a gas field area, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *80*, 450-473, 1990.
Grasso, J. R., D. Fourmaintraux, and V. Maury, Le rôle des fluides dans les mécanismes d'instabilités de la croûte supérieure: L'exemple des exploitations d'hydrocarbures, *Bull. Soc. Géol. Fr.*, *163*, 27-36, 1992.
Guyoton, F., J.R. Grasso, and P. Volant, Interrelation between induced seismic instabilities and complex geological structure, *Geophys. Res. Lett.*, *19*, 705-708, 1992.
Hacker, R.H., and J.M. Christie, Brittle/ductile and plastic/cataclastic transitions in experimentally deformed and metamorphosed amphibolite, in *The Brittle-Ductile Transition in Rocks*, Geophys. Monogr. Ser., vol. 56, edited by A. G. Duba et al., pp. 127-147, AGU, Washington, D.C., 1990.
Havstad, J. W., and C. L. Ehlers, Attractor dimension of nonstationary dynamical systems from small data sets, *Phys. Rev. A*, *39*, 845-853, 1989.
Heard, H. C., Effect of large changes in strain rate in the experimental deformation of Yule marble, *J. Geol.*, *71*, 162-195, 1963.
Hirata, T., T. Satoh, and K. Ito, Fractal structure of spatial distribution of microfracturing in rock, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, *90*, 369-374, 1987.
Hirth, G., and J. Tullis, The brittle-plastic transition in experimentally deformed quartz aggregates, *J. Geophys. Res.*, *99*, 11,731-11,747, 1994.
Hobbs, B. E., A. Ord, and C. Teyssier, Earthquakes in the ductile regime?, *Pure Appl. Geophys.*, *124*, 309-336, 1986.
Horseman, S.T. and J. Handin, Triaxial-compression tests on rocksalt at temperatures from 50° to 200°C and strain rates from 10^{-4} to 10^{-9}/s, in *The Brittle-Ductile Transition in Rocks*, Geophys. Monogr. Ser., vol. 56, edited by A. G. Duba et al., pp. 103-110, AGU, Washington, D.C., 1990.
Jackson, J. A., and N. J. White, Normal faulting in the upper continental crust: Observations from regions of active extension, *J. Struct. Geol.*, *11*, 15-36, 1989.
Kagan, Y. Y., and L. Knopoff, Spatial distribution of earthquakes: The two-point correlation function, *Geophys. J. R. ast. Soc.*, *62*, 303-320, 1980.
Kemeny, J. M., A model for non-linear rock deformation under compression due to sub-critical crack growth, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, *28*, 459-467, 1991.
Kumar, A., The effect of stress rate and temperature on the strength of basalt and granite, *Geophysics*, *33*, 501-510, 1968.
Lajtai, E. Z., E. J. Duncan, and B. J. Carter, The effect of strain rate on rock strength, *Rock Mech. Rock Eng.*, *24*, 99-109, 1991.
Lockner, D., The role of acoustic emission in the study of rock fracture, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.* *30*, 883-899, 1993.
Main, I. G., G. Meredith, and C. Jones, A reinterpretation of the precursory seismic *b*-value anomaly from mechanics, *Geophys. J. Int.* *96*, 131-138, 1989.
McGarr, A., Dependence of magnitude statistics on strain rate, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *66*, 33-44, 1976.
Melchior, P. J., *The Tides of the Planet Earth*, 2nd ed., 641 pp., Pergamon, New York, 1983.
Nerenberg, M. A. H., and C. Essex, Correlation dimension and systematic geometric effects, *Phys. Rev. A*, *42*, 7065-7074, 1990.
Okui, Y., and H. Horii, Stress and time-dependent failure of brittle rocks under compression: A theoretical prediction, *J. Geophys. Res.*, *102*, 14,869-14,881, 1997.
Öncel, A. O., I. Main, Ö. Alptekin, and P. Cowie, Spatial variations of the fractal properties of seismicity in the Anatolian fault zones, *Tectonophysics*, *257*, 189-202, 1996.
Pacheco, J. F., C. H. Scholz, and L. R. Sykes, Changes in frequency-size relationship from small to large earthquakes, *Nature*, *355*, 71-73, 1992.
Page, R., Afterschocks and microafterschocks of the Great Alaska earthquake of 1964, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *58*, 1131-1168, 1968.
Pickering, G., J. M. Bull, and D. J. Sanderson, Sampling power-law distributions, *Tectonophysics*, *248*, 1-20, 1995.
Rao, M. V. M. S., and K. Kusunose, Failure zone development in andesite as observed from acoustic emission locations and velocity changes, *Phys. Earth Planet. Inter.*, *88*, 131-143, 1995.
Renshaw, C. E., and E. M. Schulson, Non-linear rate dependent deformation under compression due to state variable friction, *Geophys. Res. Lett.*, *25*, 2205-2208, 1998.
Rolando, J. P., G. J. Massonat, J. R. Grasso, F. Odonne, and R. Meftahi, Characterization and modelling of increasing permeability while producing a gas fractured reservoir, paper SPE 38711 presented at the 1997 SPE Annual Technical Conference, Soc. of Petrol. Eng., San Antonio, Tex., October 5-8, 1997.
Rutter, E. H., The influence of temperature, strain rate and interstitial water in the experimental deformation of calcite rocks, *Tectonophysics*, *22*, 311-334, 1974.
Rydelek, P. A., I. S. Sacks, and R. Scarpa, On tidal triggering of earthquakes at Campi Flegri, Italy, *Geophys. J. Int.*, *109*, 125-137, 1992.
Sano, O., I. Ito, and M. Terada, Influence of strain rate on dilatancy and strength of Oshima granite under uniaxial compression, *J. Geophys. Res.*, *86*, 9299-9311, 1981.
Savin, C., Relocalisation des séismes de la région de Lacq grâce à un nouveau modèle de vitesse 3D, report, Univ. de Grenoble, Grenoble, France, 1994.

Scholz, C. H., The frequency-magnitude relationship of microfracturing in rock and its relationships to earthquakes, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *58*, 399-415, 1968.
Scholz, C. H., The brittle-plastic transition and the depth of seismic faulting, *Geol. Rundsch.*, *77*, 319-328, 1988.
Scholz, C. H., Earthquakes and faulting: Self-organized critical phenomena with characteristic dimension, in *Spontaneous Formation of Space-Time Structures and Criticality*, edited by T. Riste and D. Sherington, pp. 41-56, Kluwer Acad., Norwell, Mass., 1991.
Segall, P., Earthquakes triggered by fluid extraction, *Geology*, *17*, 942-946, 1989.
Segall, P., and S. D. Fitzgerald, A note on induced stress changes in hydrocarbon and geothermal reservoirs, *Tectonophysics*, *289*, 117-128, 1998.
Segall, P., J. R. Grasso, and A. Mossop, Poroelastic stressing and induced seismicity near the Lacq gas field, southwestern France, *J. Geophys. Res.*, *99*, 15,423-15,438, 1994.
Siddiqi, G., B. Evans, G. Dresen, and D. Freund, Effect of semibrittle deformation on transport properties of calcite rocks, *J. Geophys. Res.*, *102*, 14,765-14,778, 1997.
Smith, L. A., Intrinsic limits in dimension calculations, *Phys. Lett. A*, *133*, 283-288, 1988.
Sornette, A., P. Davy, and D. Sornette, Fault growth in brittle-ductile experiments and the mechanics of continental collisions, *J. Geophys. Res.*, *98*, 12,111-12,139, 1993.
Sornette, D., L. Knopoff, Y. Y. Kagan, and C. Vanneste, Rank-ordering statistics of extreme events: Application to the distribution of large earthquakes, *J. Geophys. Res.*, *101*, 13,883-13,893, 1996.
Strehlau, J., A dicussion of the depth extent of rupture in large continental earthquakes, in *Earthquake Source Mechanics, Geophys. Monogr. Ser.*, vol. 37, edited by S. Das et al., pp. 131-146, AGU, Washington, D.C., 1986.
Sturtevant, B., H. Kanamori, and E. E. Brodsky, Seismic triggering by rectified diffusion in geothermal systems, *J. Geophys. Res.*, *101*, 25,269-25,282, 1996.
Teufel, L. W., D. W Rhett, and H. E. Farrell, Effect of reservoir depletion and pore pressure drawdown on in situ stress and deformation in the Ekofisk field, North Sea, in *Rock Mechanics as a Multidisciplinary Science*, edited by J. C. Rogiers, pp. 63-72, Balkema, Rotterdam, Netherlands, 1991.
Tullis, J., and R. A. Yund, Experimental deformation of dry Westerly granite, *J. Geophys. Res.*, *82*, 5705-5718, 1977.
Velde, B., D. Moore, A. Badri, and B. Ledesert, Fractal and length analysis of fractures during brittle to ductile changes, *J. Geophys. Res.*, *98*, 11,935-11,940, 1993.
Vidale, J. E., D. C. Agnew., M. J. S. Johnston, and D. H. Oppenheimer, Absence of earthquake correlation with Earth tides: An indication of high preseismic fault stress rate, *J. Geophys. Res.*, *103*, 24,567-24,572, 1998.
Vinogradov, S. D., Experimental study of the distribution of the number of fractures in respect to the energy liberated by the destruction of rocks, *Izv. Acad. Sci. USSR Geophys. Ser., Engl. Trans.*, 2, 119-125, 1962.
Volant, P. and J. R. Grasso, The finite extension of fractal geometry distribution of shallow earthquakes: A geomechanical effect, *J. Geophys. Res.*, *99*, 21,879-21,889, 1994.
Volant, P., J. R. Grasso, J. L. Chatelain, and M. Frogneux, *b*-value, aseismic deformation and brittle failure within an isolated geological object: Evidences from a dome structure loaded by fluid extraction, *Geophys. Res. Lett.*, *19*, 1149-1152, 1992.
Wiemer, S., and M. Wyss, Mapping the frequency-magnitude distribution in asperities: An improved technique to calculate recurrence times?, *J. Geophys. Res.*, *102*, 15,115-15,128, 1997.
Wu, H., and D. D. Pollard, Propagation of a set of opening-mode fractures in layered brittle materials under uniaxial strain cycling, *J. Geophys. Res.*, *97*, 3381-3396, 1992.

J.-R. Grasso and F. Lahaie, Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Boîte Postale 53X, 38041 Grenoble cedex 9, France. (e-mail: grasso@obs.ujf-grenoble.fr; flahaie@obs.ujf-grenoble.fr)

(Received November 17, 1998; revised April 7, 1999; accepted April 19, 1999.)

II.3.3. *Compléments d'information*

Rupture de pente dans la loi de Gutenberg-Richter : « balayage » d'un point critique ?

Dans l'article, la seule interprétation qui a été donnée pour expliquer la rupture de pente dans la loi de Gutenberg-richter à M=3.0 est une interprétation en terme d'effet de taille finie, c'est-à-dire un effet géométrique lié à l'épaisseur des bancs fragiles au sein du réservoir [Volant et Grasso, 1994]. Nous proposons ici une interprétation alternative.

Celle-ci consiste à voir la mise en charge progressive du champ de Lacq comme l'approche d'un point critique, c'est-à-dire l'approche d'une rupture macroscopique sous l'effet d'une augmentation de contrainte (paramètre de contrôle). Alors, nous avons vu que le phénomène de balayage d'un point critique (c'est-à-dire le fait d'intégrer dans une même distribution tous les événements ayant lieu sur une toute une gamme de valeur du paramètre de contrôle) pouvait aboutir à l'observation d'une loi bimodale, c'est-à-dire d'une rupture de pente dans la loi de fréquence-taille des événements (voir §.I.7.2). La première pente (M<3.0) correspondrait dans ce scénario à l'exposant critique τ, et la deuxième pente, à l'exposant $\tau+\sigma$. La valeur de coupure (M=3), quant à elle, donnerait une indication de la longueur de corrélation avant le chargement du site, c'est-à-dire dans ce cas, quelques centaines de mètres (pour une magnitude M=3). Au cours du chargement, c'est-à-dire de l'augmentation progressive du paramètre de contrôle, la longueur de corrélation aurait ainsi augmenté au delà du plus grand séisme enregistré à ce jour sur ce site (M=4.2), soit une rupture de l'ordre du kilomètre.

Cette interprétation a deux implications importantes :

- la longueur de corrélation dans la croûte, avant le chargement du site, était faible, de l'ordre de quelques centaines de mètres. Une si faible longueur de corrélation dans la croûte est surprenante, et irait à l'encontre de l'hypothèse de CAO pour la croûte.
- Il a suffi d'un faible chargement (environ 2 bars en 40 ans d'exploitation), pour faire passer la longueur de corrélation d'une valeur de quelques centaines de mètres à une valeur au moins supérieure au kilomètre. On ne peut pas actuellement rejeter l'éventualité d'un séisme supérieur à M=4.2 si on continue de charger le site de Lacq.

La continuité de ce travail est de vérifier si un tel effet du taux de chargement sur le mode de fracturation est observé dans d'autres contextes de fracturation induite, où l'on sait que le taux de chargement a été modifié au cours du temps (réservoirs d'hydrocarbure, mines, barrages hydrauliques). Il est également envisageable de comparer le mode de fracturation (coefficent de différentes régions se déformant à des vitesses différentes.

II.4. Mise en évidence de lois d'échelle dans la dynamique des dislocations au cours de la déformation viscoplastique d'un matériau : Interprétation dans le cadre de la physique des transitions de phase

Nous souhaitons apporter, avant la lecture de cet article, deux précisions :

1. Nous mentionnons dans l'article qu'une distribution en loi de puissance pour les intervalles de temps entre événements, ou bien une géométrie fractale des groupes de dislocations, sont des arguments en faveur d'un état critique. Nous avons vu au §.I.5.4.4 que ce n'était pas nécessairement le cas.
2. Nous mentionnons également que la criticalité apparente de la dynamique des dislocations implique une imprédictibilité des avalanches de dislocations dans l'espace, le temps, et l'énergie. Nous avons vu qu'au sens strict, ceci n'est vrai que dans la taille (c'est-à-dire l'énergie) de ces avalanches (voir §.I.5.4.4).

JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, VOL. 105, NO. B1, PAGES 433–442, JANUARY 10, 2000

Statistical analysis of dislocation dynamics during viscoplastic deformation from acoustic emission

Jérôme Weiss
Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement, CNRS, St Martin d'Hères, France

Franz Lahaie and Jean Robert Grasso
Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Grenoble, France

Abstract. We present experimental data of acoustic emission (AE) induced by dislocation motion during "pure" viscoplastic (ductile) deformation of singlecrystals and polycrystals of ice which provide opportunity to revisit collective dislocation dynamics as a critical phenomenon, as recently proposed for brittle fracturing. The data were recorded during compression and torsion creep experiments. AE statistics of power law type were systematically obtained under different experimental conditions. Among the possible candidates for such a system with threshold dynamics exhibiting power law statistics, critical points, disordered first-order transitions, and self-organized criticality should be considered. The revisitation of dislocation dynamics as a critical phenomenon allows rationalization of collective effects as well as of the heterogeneity and complexity of viscoplastic deformation of crystalline materials. Such critical behavior implies that dislocation avalanches and strain localizations are unpredictible, in a deterministic sense, in space, time, and energy domains and that large plastic instabilities account for most of the viscoplastic deformation.

1. Introduction

Within a material-dependent range of temperature and stress [*Ashby*, 1972], the viscoplastic deformation of crystalline materials involves the motion of a large number of dislocations. Dislocations are linear defects which interact through their associated stress fields. The interaction can be attractive or repulsive, and mutual annihilation is possible [see, e.g., *Friedel*, 1964]. The nature of the dynamics of an individual dislocation [*Weertmann and Weertmann*, 1980], as well as the interaction between a couple of dislocations [*Friedel*, 1964] are well established. However, the global dynamics of a system containing a large number of interacting dislocations, as during the viscoplastic deformation of crystalline materials, is poorly understood [*Neuhauser*, 1983]. Under conditions where dislocation motion is the dominant mechanism for viscoplastic deformation, when a material is deformed under constant load (creep test), a constant global strain rate regime usually appears after a transient stage. One traditionally explains this so-called secondary creep or viscoplastic steady state behavior by an equilibrium between the production (at dislocation sources like Frank-Read sources [*Friedel*, 1964]) and the elimination (at dislocation sinks like free surface or grain boundaries, or by mutual annihilation) of dislocations [*Poirier*, 1976]. In such a situation, the Orowan's relation predicts a constant strain-rate for the involved system:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \rho_m \, b \, v \qquad (1)$$

Copyright 2000 by the American Geophysical Union

Paper number 1999JB900312
0148-0227/00/1999JB900312$09.00

where b is the Burger's vector, ρ_m is the density of mobile dislocations, and v is the stress-dependent dislocation velocity. Relation (1), as well as the term "steady state," implicitely neglects a possible spatial and temporal variability of both dislocation velocity and dislocation density. However, the heterogeneous nature of dislocation slip process has been recognized [*Neuhauser*, 1983; *Hähner et al.*, 1998]. As a result of their interactions, dislocations tend to move cooperatively in groups to form slip lines rather than individually and independently. Moreover, moving dislocations can pile up against stable dislocation walls or boundaries. During the breakaway of a pileup or the activation of a source, theoretical calculations [*Campbell and Taylor*, 1963; *Neuhauser*, 1983] show that dislocation velocities vary by orders of magnitude through time and space. More generally, *Neuhauser* [1983] stressed the fact that at any moment, only a very small fraction of the potentially mobile dislocations ρ_m is indeed moving. Therefore (1), which is based on a mean field approach, strongly underestimates the genuine dislocation velocities. In some alloys, under specific loading-temperature conditions, strain localization is strong enough to be measurable as stress drops on a loading curve [*Estrin et al.*, 1993; *Hähner*, 1993]. This phenomenon is traced back to the diffusion of solute atoms, which act as moving obstacles to slip band propagation, leading to "macroscopic" plastic instabilities. This is the well-documented Portevin-Le Chatelier (PLC) effect [*Estrin et al.*, 1993; *Hähner*, 1993]. Therefore viscoplastic deformation driven by dislocation motion appears as heteregeneous in size, space and time domains, which is not accounted for in the mean field description of (1). Here we reveal further the heterogeneous character of collective dislocation dynamics by using experimental data from acoustic emission (AE) recorded during pure viscoplastic deformation of ice. The so-called steady state viscoplastic deformation is, in fact, shown to occur in bursts of relaxation following a power law distribution of energy and time separation. Such power law behavior is suggestive

of a critical dynamics of dislocations, similar to those argued for microfracturing [*Petri et al.*, 1994; *Guarino et al.*, 1998].

Attempts have been made to simulate the collective behavior of dislocations [*Lépinoux and Kubin*, 1987; *Kubin and Canova*, 1992; *Groma and Pawley*, 1994]. However, these numerical approaches, which succeeded in capturing some aspects of the collective behavior of dislocations, especially the spatial patterning of dislocations, did not rely on a general framework to explain the observed heterogeneous dynamics. In the present paper, we propose to embed these earlier results in the more general framework of critical systems. Such a critical framework has been recently proposed to describe brittle fracturing [e.g., *Hermann and Roux*, 1990; *Andersen et al.*, 1997], from the laboratory sample scale [*Petri et al.*, 1994; *Guarino et al.*, 1998] to the earth crust scale [*Main*, 1996].

2. Experimental Procedure

As a model material to study dislocation dynamics from acoustic emission, ice provides the following advantages: single crystals or polycrystals with various microstructures can be easily grown in the laboratory; transparency allows verification that AE activity is not related to microcracking; and an excellent coupling between the ice and the AE transducer can be obtained by fusion/freezing. Within the range of temperature and stress corresponding to our experimental conditions, diffusional flow is not a significant mechanism of deformation in ice, and viscoplastic deformation of hexagonal ice Ih occurs by dislocation motion [*Duval et al.*, 1983]. Hexagonal ice Ih presents a very strong plastic anisotropy of the single crystal [*Duval et al.*, 1983]. The resistance to shear on nonbasal planes is at least 60 times larger than that on the basal plane. Therefore viscoplastic deformation of single crystals occurs essentially by basal glide. In polycrystals, basal glide within neighboring grains with different crystallographic orientations leads to strain incompatibilities. By accomodation of these incompatibilities, dislocation climb on prismatic planes and possible glide on nonbasal planes [*Castelnau et al.*, 1996], allow extensive viscoplasticity of the polycrystals.

Uniaxial compression creep tests, each of them constituted by several steps of stress, were performed at -10°C on different types of artificial ice samples, including single crystals, one bicrystal, and polycrystals with different grain sizes. One torsion creep test, with steps of constant momentum, was also performed on a single crystal. Note that the duration of the stress steps varied arbitrarily from step to step and test to test, ranging from 10 min to ~ 2 hours. The characteristics of each test, including the type of loading, the type of ice, the *c* axis orientation (for single crystals) or the mean grain size (for polycrystals), are summarized in table 1. Ice samples were prepared from distilled, deionized, and degassed water. Single crystals grew in about 1 month, within a cylindrical mold frozen from the bottom, from a unique seed selected for the desired *c* axis orientation. For our artificial polycrystals the mold was filled with presieved fragments of ice, allowing us to control the grain size, then pumped down to 0.1 torr to avoid bubbles, filled with water, and finally, frozen in ~ 24 hours. The *c* axes orientations, on the contrary, were not controlled and so were isotropically distributed, leading to an isotropic macroscopic mechanical behavior for polycrystals.

During each mechanical test a piezoelectric transducer with a frequency band width of 0.1-1 Mhz was fixed by fusion/freezing to the side of the cylindrical samples. The amplitudes of AE events were recorded during each loading step. With the transducer fixed to an ice sample, without any loading, we recorded significant acoustic emission up to an amplitude threshold of 25 dB. During an experiment the event amplitude threshold was adjusted to 30 dB, or 3×10^{-3} Volts, i.e. about 5 dB above the noise level, and the envelope "dead time" (the minimum time seperation between two successive events to be recorded as individual events) was 50 μs. The dynamic range between the amplitude threshold (3×10^{-3} V) and the maximum recordable amplitude (10 V, or 100 dB) was 70 dB, i.e., 3.5 orders of magnitude. The calibration of the experimental device was performed previously using the Nielsen test. A linear relationship between the input and the output signals was verified [*Amitrano*, 1999].

Two different mechanisms can account for microseismic activity during the creep deformation of ice: high-velocity motion of dislocations (plastic instabilities) and crack nucleation and propagation. Thanks to the perfect transparency, it was easily verified that no cracks nucleated within any of the ice single crystals for all the creep stresses we applied. Rigorously, an absence of visual detection

Table 1. Characteristics of the Experimental Tests

Test	Type of Ice	Type of Test	*c* Axis Orientation (Relative to Loading Axis)	Mean Grain Size, mm	Number of Loading Steps
1	single crystal	compression	2° compression axis		4
2	single crystal	compression	45° compression axis		4
3	single crystal	torsion	parallel torsion axis		3
4	bi crystal	compression	3° compression axis		3
5	polycrystal	compression		1.5	2
6	polycrystal	compression		0.5	2
7	polycrystal	compression		0.5	1

ensures that no features are present with an opening > 0.3 μm, i.e., the lower bound for natural light wavelength. Owing to this very small detection limit (about 650 atomic spacings), crack nucleation is easily detected in fresh water ice. For polycrystals, depending on grain size and ice samples, microcracking was observed above a threshold load. Occurence of microcracking was clearly visible to the eye and correlated with the change of the shape of the AE amplitude distribution (breaking slope; see *Weiss et al.* [1996]). Since we only focused on dislocation dynamics as a source of AE, the loading steps during which cracking was observed were discarded for the present analysis. Moreover, experimental evidence for the recorded AE to be, indeed, related to dislocation motion in our experiments was provided as follows. By varying the orientation of the single-crystal *c* axis relative to the compression axis in the case of uniaxial compression tests on single crystals, for the same uniaxial compression creep stress, we observed an AE activity (defined in section 3 as $\dot{A}$) at least 2 orders of magnitude larger for a single crystal with *the c* axis inclined at 45° (test 2) to the compression axis than for a crystal with a quasi-vertical *c* axis (test 1). This agrees with an AE activity that highlights dislocation motion driven by the shear stress acting on the basal planes [*Weiss and Grasso*, 1997].

3. AE Source Model and Validation

One difficulty with AE is in relating the characteristics of the generated AE wave to physical processes. Usually, for AE induced by microcracking the assumption is made that the squared amplitude A^2 of the wave is proportional to the inelastic energy E liberated during the acoustic event [see, e.g., *Lockner et al.*, 1991; *Petri et al.*, 1994]. Here we base our analysis on a specific AE source model developed for dislocation dynamics, which relates the wave's characteristics to the characteristics of the plastic instability. This model has been proposed and detailed by *Weiss and Grasso* [1997] and validated from a comparison between global AE activity and global strain rate. We will summarize here the main features of this model and its validation.

In solid materials, sudden local changes of inelastic strain generate AE waves [*Malen and Bolin*, 1974]. In our experiments, given the amplitude threshold and the frequency range of our transducer, the detected AE are unlikely to be the result of a single moving dislocation but most probably are related to synchronized accelerations of dislocations, such as the activation of a dislocation source or a pileup breakaway [*Weiss and Grasso*, 1997]. From the theoretical analysis of *Rouby et al.* [1983] one can relate the maximum amplitude of the acoustic wave A resulting from a plastic instability, to the number of involved dislocations n and their velocity v [*Weiss and Grasso*, 1997]:

$$A = k\frac{nLbvt_0}{d} \qquad (2)$$

where k is a coefficient related to material properties and the piezoelectric constant of the transducer, b is the Burger's vector, L is the length of the n moving dislocations, t_0 is the travel time of the acoustic wave through the transducer (considered to be constant), and d is the source/transducer distance (supposed to be large compared to L). In this crude model, L and v are supposed to be identical for all the involved moving dislocations. The dislocation velocity v is considered to be zero before and after the event and constant during the event. The term $1/d$ represents the geometrical attenuation of the acoustic waves.

By comparing (1) and (2), *Weiss and Grasso* [1997] showed that the AE amplitude A is a measure of the local strain associated with the plastic instability. Therefore the rate of global AE activity $\dot{A}$, defined as the summation of the amplitudes of all the acoustic events recorded during a given time interval divided by this duration, should be proportional to the global strain rate of the sample, provided that (1) the nonrecordable part of AE (below the amplitude threshold of 3×10^{-3} V) is negligible or at least proportional to the recordeable part and (2) the dislocation dynamics within the volume of matter sampled by our single AE transducer is representative of the response of the full sample. The proportionality between global AE activity $\dot{A}$ and global strain rate has been verified on single crystals for uniaxial compression tests as well as for a torsion test, each of them containing several steps of stress [see *Weiss and Grasso*, 1997, Figure 3], thereby validating our AE source model (relation (2)) as well as points (1) and (2). Note that an independent validation of point (1) is given in the appendix and discussed further in section 4.

4. Statistical Distributions of AE Amplitudes and Time Intervals Between Events

As shown above, the AE amplitude A depends on the number of dislocations involved in the plastic instability, their length, and their velocity. The AE energy radiated by the acoustic wave is proportional to A^2. According to *Kiesewitter and Schiller* [1976], the energy dissipated by viscoplastic deformation during an event also scales with A^2. This results from an expression given by *Eshelby* [1962] for the energy dissipated at the source by a single screw dislocation of length L moving at a velocity v:

$$E = KL^2b^2v^2 \qquad (3)$$

where K is a coefficient depending on material constants, including the shear modulus and the velocity of acoustic transverse waves. A comparison of (2) and (3) with n=1 shows that $E \sim A^2$. This scaling between E and A^2 is similar to that assumed by *Lockner et al.* [1991] or *Petri et al.* [1994] for AE related to microcracking. In other words, A^2 expresses the energy liberated during an avalanche of dislocations. Therefore AE allows to study during deformation the dislocation dynamics in energy, time, and, possibly, space (if AE sources locations are determined with the help of multiple transducers) domains. In the present study, only one transducer was used, and so source locations were not accessible.

For each loading step of each test the distribution of AE amplitudes was recorded. Figures 1-3 show, for two compression tests (tests 1 and 2, see Table 1) and one torsion test (test 3) on single crystals, respectively the cumulative distributions of AE amplitudes for different resolved shear stresses on the basal planes. Reported distributions correspond to all the events recorded during a given loading step. Figure 4 shows a similar distribution for a polycrystal under uniaxial compression (test 7), for which only one loading step without microcracking was available. Figure 5 corresponds to one loading step of a bicrystal under uniaxial compression (test 4). The two distributions displayed in Figure 5 were recorded during the same loading step but for completely separated time intervals. Note that the large number of events recorded for the

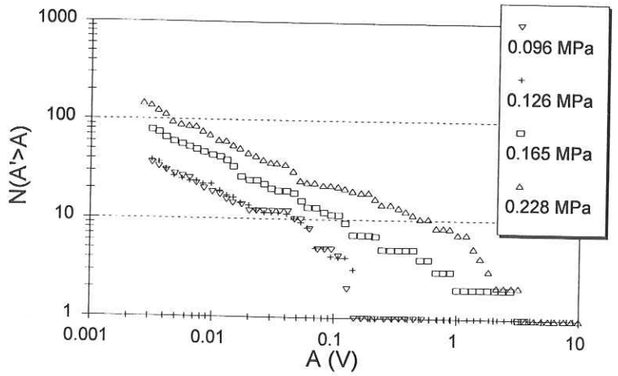


Figure 1. AE amplitude cumulative distributions for a uniaxial compression creep test (T=-10°C) on a quasi-vertical c axis single crystal of ice (test 1; see Table 1). The different sets of data correspond to different loading steps resulting in different resolved shear stresses on the glide (basal) plane.

bicrystal (Figure 5) compared with single crystals (Figures 1 and 2) is very likely the result of the grain boundary as a very active dislocation source. Power law statistics $N(A'>A) \sim A^{-\delta}$ are systematically observed for the different stress steps of the different tests, whatever the kind of ice (single crystals, bicrystal, or polycrystals) or the type of loading (torsion or compression). For some distributions the power law seems to be affected by a cutoff at high amplitudes which possibly depends on the shear stress (see Figure 1). However, this cutoff is far from being systematic (see, e.g., Figure 1,τ=0.165 MPa; and Figures 2-5) and has to be taken with caution owing to the limited number of recorded high amplitudes events. For all the tests performed, δ ranged between 0.2 and 1.2, with most of the δ values close to 0.6-0.7 (Figure 6). The error in the estimation of δ ranged between ±0.17 for large δ values and less than ±0.07 for low δ values. The δ values were estimated by a least squares fit on the linear part of the distributions below the cutoff (if any). Standard deviations of the δ values were estimated by using an empirical formula derived by *Pickering et al.* [1995] from a Monte Carlo simulation of the sampling effect on the exponent of a power law distribution. Considering that A^2 scales with the energy of the dislocation avalanche, $N(A'>A) \sim A^{-\delta}$ is equivalent to $N(E'>E) \sim E^{-\beta}$ with $\beta=\delta/2$. Therefore δ=0.6-0.7 implies β=0.3-0.35. From the source to the transducer the acoustic waves are attenuated (term $1/d$ in (2)). Because we used a single transducer, we were unable to correct this attenuation of the amplitudes. However, *Weiss* [1997] showed that for δ values < 3, as observed for all the present experiments, this attenuation modifies neither the shape of the distributions nor the δ values. Here δ decreased with increasing shear stress (Figure 6), except for one test (1) for which δ remained constant and equal to 0.6. A general tendency for decreasing δ with increasing shear stress is also observed when the δ values for all the experiments are compiled (Figure 6). During a given loading step the statistical properties of the system remained stationary through time, i.e. δ was constant (see, e.g., Figure 5).

For one loading step of one test (2; shear stress: 0.581 MPa) the time intervals t between two successive events of any

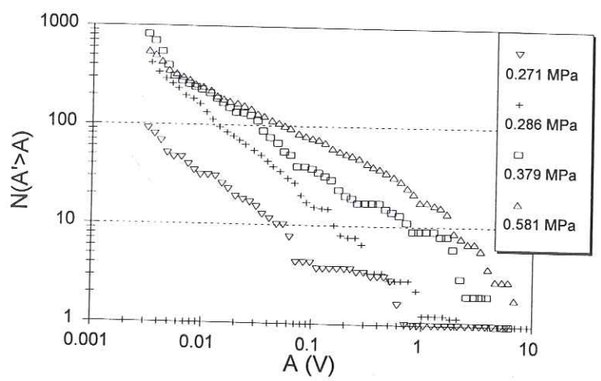


Figure 2. Similar to Figure 1, for a single crystal with an inclined (45°) c axis (test 2; see Table 1).

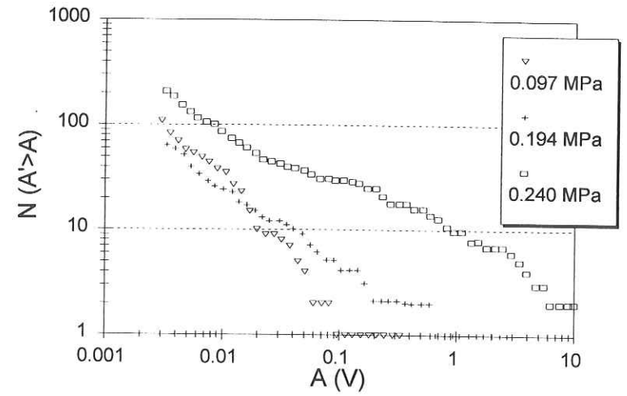


Figure 3. Similar to Figure 1, for a torsion creep test (test 3).

amplitude were recorded. The corresponding cumulative distribution is shown on Figure 7. A power law $N(t'>t) \sim t^{-\gamma}$ is observed with γ=1.0±0.34.

An important question concerns the contribution of the recordable plastic instabilities to the global viscoplastic strain (as noted above, under the applied testing conditions, dislocation creep is the unique mechanism which accounts for viscoplastic deformation of ice). Our investigation is experimentally limited toward small amplitudes by the detection threshold, and one can wonder whether the contribution of the nonrecordable part of the process is negligible or at least proportional to the recordable part. The proportionality observed between the rate of global AE activity $\dot{A}$ and the global strain rate [*Weiss and Grasso*, 1997] not only implies that the volume of matter sampled by the transducer is "representative" of the whole system (see above) but also that the viscoplastic strain corresponding to the recorded plastic instabilities is proportional to the global viscoplastic strain. The knowledge of the analytical form of the AE amplitude distribution (power law), supposing that smaller undetected events follow the same distribution, allows one to estimate the relative contribution of recordable and nonrecordable events. Calculations detailed in the appendix strongly suggest that the nonrecordable part is, indeed, negligible in terms of strain, as well as in terms of dissipated energy.

5. Discussion

We report here AE measurements that give insight into the collective dynamics of dislocations. Previous attempts to study dislocation dynamics from AE mainly focussed on continuous acoustic emission, i.e., the gross background noise level of AE during the loading of metallic samples [see, e.g., *Kiesewitter and Schiller*, 1976]. Here we examine the statistics of individual AE bursts, which show power law distributions for the amplitudes (Figures 1-5), as well as the time separation (Figure 7) of acoustic emissions. This pattern is recurrent, whatever the type of test (compression or torsion), the type of ice (single crystals or polycrystals), and the applied stress on the basal plane. This reveals a strong heterogeneity of dislocation

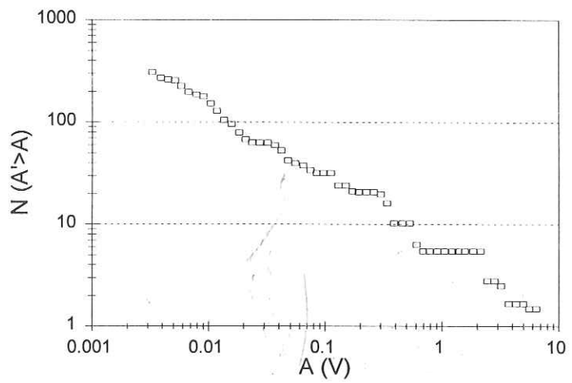


Figure 4. AE amplitude cumulative distribution for a uniaxial compression creep test (T=-10°C;σ_1=1.75 MPa) on a polycrystal of ice (test 7).

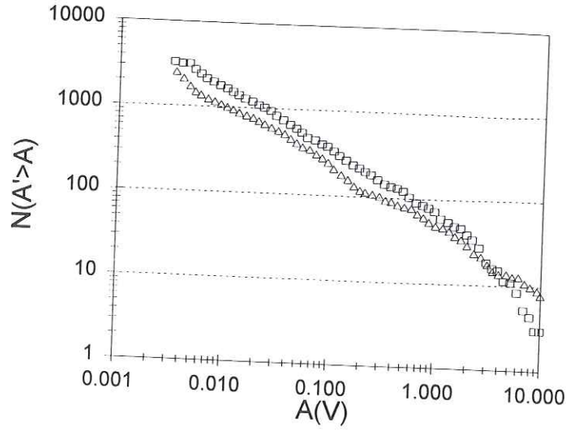


Figure 5. AE amplitude cumulative distributions recorded during the same loading step of test 4 but corresponding to two completely separated time intervals. The two distributions give the same δ value of 0.70±0.12.

dynamics in time and energy domains. Such scale-invariant behavior is strongly suggestive of a system near (or in) a critical state, i.e., in a situation where correlations between different parts of the system become long ranged, such that any small perturbation may cascade into large events. Other positive evidences for a critical state of crystalline solids during dislocation-driven viscoplastic deformation exist. First, a common feature of systems displaying criticality is to contain many interacting entities and to be ruled by threshold dynamics [e.g., *Lesne*, 1996]. Dislocations are known to be numerous and to interact through their associated stress fields, which decreases in $1/r$ [*Friedel*, 1964]. The activation of a dislocation source or any plastic instability is triggered above a threshold stress [*Friedel*, 1964; *Weiss and Grasso*, 1997]. For the smallest possible event, i.e., a single dislocation kink moving by a single atomic spacing, this threshold stress is the Peierls stress. Second, although an analysis of dislocation activation in the space domain was not accessible, other studies have documented a fractal patterning of dislocations that attest for scale invariance of dislocation dynamics in the space domain. *Sprusil and Hnilica* [1992] showed that slip line patterns of Cd single crystals were fractal. More recently, *Hähner et al.* [1998] reported fractal cellular dislocation patterning during plastic deformation of Cu single crystals. Third, in the energy domain, power law statistics were

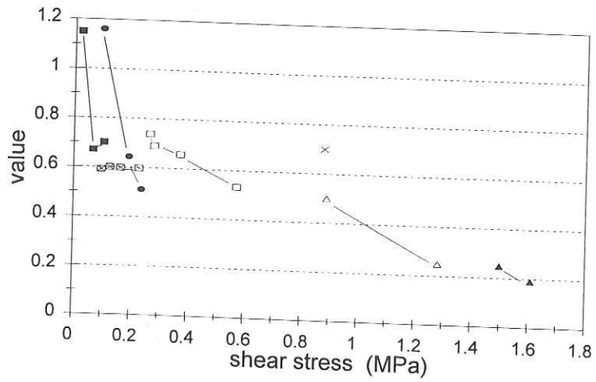


Figure 6. Evolution of the exponent δ with the resolved shear stress on the basal plane. The error on the estimation of δ ranged between ±0.17 (for large δ values, or low shear stresses) and less than ±0.07 (for low δ values, i.e., large shear stresses). The resolved shear stress reported for polycrystals was taken to be half the compression stress, implicitely assuming that most of the AE activity arose from crystals well oriented for basal glide. Crossed squares, test 1; Open squares, test 2; Circles, test 3; Closed squares, test 4; Open triangles, test 5; Closed triangles, test 6; Cross, test 7. Although a large amount of literature reports possible δ value change with mechanical parameters, to our knowledge, no definitive explanation of such anticorrelation between the exponent δ and the shear stress can be proposed so far.

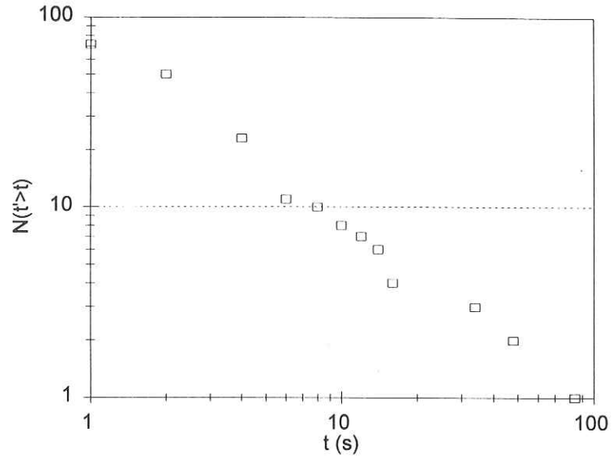


Figure 7. Cumulative distribution of the time interval t between two successive events of any amplitude for a uniaxial compression creep test on a single crystal of ice (test 2; T=-10°C; resolved shear stress on the glide plane: 0.581 MPa). For technical reasons it was impossible to record similar time distributions for each test performed.

also reported for the stress drops resulting from "macroscopic" instabilities associated with the PLC effect during strain rate controlled tests on Al-Mg alloys [*Lebyodkin et al.*, 1995].

From this evidence of scale invariance in space, time, and energy domains, coupled with the intrinsic properties of dislocations, we argue for the collective dislocation dynamics to display criticality not only in ice but more generally in crystalline materials experiencing dislocation-driven viscoplastic deformation.

One of the consequences of the critical state of dislocation-driven viscoplastic deformation is that dislocation avalanches and strain localizations are unpredictible, in a deterministic sense, in space, time, and energy domains; that is, one single event is not predictible. However, the power law scaling of time intervals (Figure 7) implies some kind of statistical predictability. The longer (shorter) it has been since the last event, the longer (shorter) the expected time till the next [*Davis et al.*, 1989; *Sornette and Knopoff*, 1997]. This comes from the correlation between events. Note that random dislocation dynamics would not lead to any kind of predictability, either deterministic or statistical [*Sornette and Knopoff*, 1997]. Another consequence of criticality is that most of the energy dissipated by the system is dissipated through major events/avalanches (see appendix). In the present situation this means that large plastic instabilities account for most of the viscoplastic deformation rather than independent movements of individual dislocations.

The next question remains the origin of such criticality. Different recognized mechanisms can lead to critical behavior. Among these, second-order (continuous) phase transitions and the self-organized criticality (SOC) concept [*Bak et al.*, 1987, 1988; *Vespignani and Zapperi*, 1998] should be considered. To definitively identify one of these possible mechanisms is beyond the scope of this paper. Moreover, observable standards for each of these critical processes remain partly unidentified, and the theoretical frameworks themselves are not completely "quenched" so far, especially for SOC [*Vespignani and Zapperi*, 1998; *Grasso and Sornette*, 1998]. Here we just review the observables that argue for (or disagree with) each critical mechanism. We also discuss alternative mechanisms which are proposed to display power law distributions, without strict reference to criticality, including disordered first-order transition [*Sethna et al.*, 1993; *Zapperi et al.*, 1997a], multiplicative noise [*Sornette and Cont*, 1997; *Sornette*, 1998], and the sweeping of an instability [*Sornette*, 1994].

The usual route toward criticality is second-order, or continuous, phase transitions, illustrated by the Ising model for ferromagnetic transition [e.g., *Goldenfeld*, 1993]. For the fracturing process, this mechanism is usually rejected [*Zapperi et al.*, 1997a] because of the final breakdown of the system. Such discontinuity is typical of a first-order phase transition. For dislocation dynamics during viscoplastic deformation, final breakdown never occurs. This allows us to consider second-order phase transition as a possible process to describe our observations. For second-order phase transition, criticality is obtained by fine tuning a control parameter (e.g., temperature). The system exhibits power law size distributions with an upper cutoff that is rejected toward larger values as the critical point is approached. The cutoffs on Figure 1, which apparently depend on the applied stress, are possible signatures of such a progressive approach to criticality, with the applied stress as the control parameter. Considering the relevance of self-organized criticality for dislocation dynamics, one positive argument is that the statistical properties of the system appear stationary through time, with a constant power law exponent δ (see Figure 5). As noted by many authors [e.g., *Grasso and Sornette*, 1998; *Zapperi et al.*, 1997b], this is an essential ingredient for SOC identification. One can also notice that the γ exponent (equal to 1; see above) observed for the distribution of time intervals between successive events is equal to the mean field exponent for SOC derived by *Sornette and Sornette* [1989] for earthquakes dynamics, while the theoretical mean field exponent for energy distribution is 0.5 [*Vespignani and Zapperi*, 1998], a value slightly larger than the β exponent of ~ 0.3-0.35

observed for most of the present experiments. In terms of atomic-scale physical mechanisms, dislocations display instantaneous healing and reversibility, which favor the stationnarity condition for SOC. However, if the upper cutoffs on energy (or amplitude) distributions were confirmed (far from clear on the present experimental basis), they would contradict the completely scale-free behavior admitted to characterize SOC below the finite length of the system. Moreover, one could notice that in numerical models of microfracturing, constant stress (creep) boundary conditions are not compatible with SOC, whereas constant strain rate conditions could be [*Zapperi et al.*, 1997b].

Alternative mechanisms to strict critical processes, which display power laws and truncated power laws, exist. First, some types of first-order phase transitions were recently shown to exhibit power law distributions, provided that a given amount of disorder is introduced in the system [*Sethna et al.*, 1993]. One central property of first-order phase transitions is the presence of a macroscopic instability (discontinuity of the order parameter) at the transition point. This framework was thus proposed to describe the global breakdown of a system in fracturing phenomena [*Andersen et al.*, 1997; *Zapperi et al.*, 1997a]. However, dislocation-driven viscoplastic deformation during viscoplastic steady state behavior does not lead to a breakdown (or macroscopic instability) of the system. This lack of breakdown is a negative argument for a disordered first-order transition to drive the power law dynamics of dislocations. Second, the mechanism of sweeping of an instability also provides robust power laws [*Sornette*, 1994]. This corresponds to an ordinary phase transition (first or second order) in which the control parameter is swept toward the transition point. In the case of a second-order phase transition this model predicts apparent nontruncated power law distributions. This is not supported by the possible truncations observed on Figure 1. Moreover, if we identify the applied stress as the control parameter for dislocation dynamics (see previous discussion), our experimental creep conditions (i.e., constant applied stress) preclude the sweeping of this control parameter during a given loading phase. Third, multiplicative noise generates power law distributions by product of random variables [*Sornette and Cont*, 1997]. In the case of dislocation dynamics we are unable to properly identify the possible relevant variables for such a process.

Therefore a definitive identification of the critical process implied in dislocation dynamics during creep of materials cannot be proposed at this stage. This stresses the need for more experimental as well as theoretical work, in order to determine the very nature of critical dislocation dynamics, to compare it with the critical fracturing behavior of materials, and to explain the evolution of δ with increasing shear stress (Figure 6).

6. Conclusion

In 1983, as a conclusion of his review on collective dislocation motion, *Neuhauser* [1983] stressed that at that time, it was not yet possible to explain all the collective effects of dislocations and the associated global deformation dynamics from the basic principles of dislocation theory, e.g. the knowledge of the dynamics of a single dislocation. A decade later, *Kubin and Canova* [1992] pointed out that understanding how dislocation dynamics and interactions could lead to an heterogeneous, constantly evolving but "organized" distribution of dislocations was one of the most fundamental challenges in dislocation theory.

Here we reported experimental results of acoustic emission (AE) generated by dislocation motions during viscoplastic deformation in crystalline materials. The data were recorded during compression and torsion creep experiments on single crystals, bicrystal and polycrystals of ice Ih. AE statistics of power law type were systematically obtained under different loading conditions, arguing for criticality. The revisitation of dislocation dynamics as a critical phenomenon allows the rationalization of collective effects as well as the heterogeneity and the complexity of viscoplastic deformation of crystalline materials, especially in terms of predictability and strain localization.

Appendix: Contribution of the Recordable Plastic Instabilities to the Global Viscoplastic Deformation

Power law distributions, $N(A'>A) \sim A^{-\delta}$, of AE amplitudes have been observed above a detection threshold of $A_{th} \approx 3\times10^{-3}$ V, with δ centered around 0.6-0.7. The question is, What portion of the global viscoplastic deformation corresponds to the plastic instabilities detected by AE events above A_{th}?

First, we assume that the power law distribution of AE amplitudes holds below A_{th}, down to infinitely low amplitudes, without lower cutoff. Because A is a measure of the local strain associated with the plastic instability, one can estimate the relative portion of the global viscoplastic deformation related to amplitudes larger than A_{th} (the recordable part $\gamma_>$), and the portion related to amplitudes smaller than A_{th} (the nonrecordable part $\gamma_<$).

$$\gamma_< \sim \int_0^{A_{th}} N(A+dA>A'>A)\,A\,dA \qquad \text{(A1)}$$

$$\gamma_> \sim \int_{A_{th}}^{A_{max}} N(A+dA>A'>A)\,A\,dA, \qquad \text{(A2)}$$

where $N(A+dA>A'>A)$ is the number of AE events with amplitudes between A and $A+dA$. During our experiments, the maximum recorded amplitude A_{max} ranged between 0.7 and 10 V (see Figures 1-5). Because $N(A'>A)$ scales with $A^{-\delta}$, $N(A+dA>A'>A)$ scales with $\delta\times A^{-\delta-1}$. Therefore

$$\gamma_< \sim \int_0^{A_{th}} A^{-\delta}\,dA = \frac{1}{-\delta+1}\left(A^{-\delta+1}\right)_0^{A_{th}} \qquad \text{(A3)}$$

$$\gamma_> \sim \int_{A_{th}}^{A_{max}} A^{-\delta}\,dA = \frac{1}{-\delta+1}\left(A^{-\delta+1}\right)_{A_{th}}^{A_{max}} \qquad \text{(A4)}$$

For δ values < 1, as observed in most of the experiments (see Figure 6), $\gamma_<$ is finite, and the relative portion of recordable viscoplastic deformation is given by

$$R = \frac{\gamma_>}{\gamma_< + \gamma_>} = \frac{A_{max}^{-\delta+1} - A_{th}^{-\delta+1}}{A_{max}^{-\delta+1}}. \qquad \text{(A5)}$$

For typical values A_{max}=10 V, A_{th}=3×10^{-3} V, and δ=0.6, one finds R=96%.

For δ values > 1, a situation observed twice under low applied shear stress (Figure 6), $\gamma_<$ calculated from (A3) diverges. However, this results from the assumption of the absence of lower cutoff, which is physically wrong. Indeed, a lower cutoff for AE amplitude distribution exists, which would correspond to the most elementary step in the process of dislocation glide, i.e., the motion of a kink along a dislocation by one lattice spacing. In (2), this would be expressed by n=1 and L=b. Note, however, that this lower cutoff A_{min}, which also depends on the distance between the source and the transducer, d, cannot be quantitatively estimated (k and t_0 are unkown constants). For δ values < 1 a lower cutoff implies that (A5) gives a lower estimate of R. Relation (A5) could overestimate R only if the AE amplitude distribution decays faster below A_{th} than above, for instance, like a power law distribution with an exponent $\delta'>\delta$. However, such a distribution below the detection threshold has neither experimental nor physical basis and would contradict with the linear relationship observed between the rate of global AE activity $\dot{A}$ and the global strain rate [*Weiss and Grasso*, 1997].

In terms of dissipated energy the negligibility of the nonrecordable part is even more obvious. Because this energy scales with A^2 (see section 4), the energy dissipated by the nonrecordable part $E_<$ and the recordable part $E_>$ are given by (neglecting a lower cutoff):

$$E_< \sim \int_0^{A_{th}} N(A+dA>A'>A)A^2\,dA \sim \int_0^{A_{th}} A^{-\delta+1}\,dA = \frac{1}{-\delta+2}\left(A^{-\delta+2}\right)_0^{A_{th}} \qquad \text{(A6)}$$

$$E_> \sim \int_{A_{th}}^{A_{max}} N(A+dA>A'>A)A^2\,dA \sim \int_{A_{th}}^{A_{max}} A^{-\delta+1}\,dA = \frac{1}{-\delta+2}\left(A^{-\delta+2}\right)_{A_{th}}^{A_{max}}. \qquad \text{(A7)}$$

$E_<$ estimated in such a way (no lower cutoff) is finite for δ values < 2, i.e., for all the experiments of the present work, and for the typical values A_{max}=10 V, A_{th}=3×10^{-3} V, and δ=0.6 the recordable energy $E_>$ represents > 99.99% of the total dissipated energy. For the most unfavorable case (A_{max}=0.7 V; δ=1.2) a lower estimate is 98.7%.

Acknowledgments. The comments of S. Zapperi, two reviewers, S. Ciliberto, and W. De Beer, and of the associate editor, D. Sornette, helped to clarify and improve the manuscript. Single crystals of ice were carefully prepared by O. Brissaud. This work was supported by the GdR "Géomécanique des Roches Profondes" of CNRS and the "Interieur de la Terre" as well as the "Action thématique innovante" programs of INSU. F.L. is supported by a CNRS grant. LGGE is a laboratory associated with University J. Fourier, Grenoble I.

References

Amitrano, D., Emission acoustique des roches et endommagement, Ph.D. Thesis, Univ. Joseph Fourier, Grenoble I, Grenoble, France, 1999.

Andersen, J.V., D. Sornette, and K.T. Leung, Tricritical behaviour in rupture induced by disorder, *Phys. Rev. Lett., 78*, 2140-2143, 1997.

Ashby, M.F., A first report on deformation-mechanism maps, *Acta Metall., 20*, 887-897, 1972.

Bak, P., C. Tang, and K. Wiesenfeld, Self-organized criticality: An explanation of 1/f noise, *Phys. Rev. Lett., 59*, 381-384, 1987.

Bak, P., C. Tang, and K. Wiesenfeld, Self-organized criticality, *Phys. Rev. A, 38*, 364-374, 1988.

Campbell, J.D., and D.B. Taylor, On the numerical solution of a wave propagation problem in the theory of dislocation motion, in *Stress Waves in Anelastic Solids*, edited by Kolsky and Prager, Springer-Verlag, New York, 54-68, 1963.

Castelnau, O., P. Duval, R.A. Lebensohn, and G. Canova, Viscoplastic modeling of texture development in polycrystalline ice with a self-consistent approach: Comparison with bound estimates, *J. Geophys. Res., 101*, 13,851-13,868, 1996.

Davis, P. M., D. D. Jackson, and Y. Y. Kagan, The longer it has been since the last earthquake, the longer the expected time till the next?, *Bull. Seismol. Soc. Am., 79*, 1439-1456, 1989.

Duval, P., M.F. Ashby, and I. Anderman, Rate-controlling processes in the creep of polycrystalline ice, *J. Phys. Chem., 87*, 4066-4074, 1983.

Eshelby, J.D., *Proc. Roy. Soc. London, 260*, 222, 1962.

Estrin, Y., L.P. Kubin, and E.C. Aifantis, Introductory remarks to the viewpoint set on propagative plastic instabilities, *Scr. Metall. Mater., 29*, 1147-1150, 1993.

Friedel, J., *Dislocations*, Pergamon Press, Tarrytown, N.Y., 1964.

Goldenfeld, N., *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Addison Wesley Publishing Compagny, Reading, Mass., 1993.

Grasso, J.R., and D. Sornette, Testing self-organized criticality by induced seismicity, *J. Geophys. Res., 103*, 29,965-29,988, 1998.

Groma, I., and G.S. Pawley, Dislocation cell formation in a 2D simulation, *Solid State Phenomena, 35-36*, 369-374, 1994.

Guarino, A., A. Garcimartín, and S. Ciliberto, An experimental test of the critical behaviour of fracture precursors, *Eur. Phys. J. B, 6*, 13-24, 1998.

Hähner, P., Modelling of propagative plastic instabilities, *Scr. Metall. Mater., 29*, 1171-1176, 1993.

Hähner, P., K. Bay, and M. Zaiser, Fractal dislocation patterning during plastic deformation, *Phys. Rev. Lett., 81*, 2470-2473, 1998.

Hermann, H.J., and S. Roux, *Statistical Models for the Fracture of Disordered Media*, chapter 5, North-Holland, New York, 1990.

Kiesewitter, N., and P. Schiller, The acoustic emission from moving dislocations in aluminium, *Phys. Status Solidi, 38*, 569-576, 1976.

Kubin, L.P., and G. Canova, The modelling of dislocation patterns, *Scr. Metall. Mater., 27*, 957-962, 1992.

Lebyodkin, M.A., Y. Brechet, Y. Estrin, and L.P. Kubin, Statistics of the catastrophic slip events in the Portevin-Le Châtelier effect, *Phys. Rev. Lett., 74*, 4758-4761, 1995.

Lépinoux, L., and L.P. Kubin, The dynamic organization of dislocation structures: A simulation, *Scr. Metall., 21*, 833-838, 1987.

Lesne, A., *Méthodes de Renormalisation*, chapter 1, Eyrolles Sci., Paris, 1996.

Lockner, D.A., J.D. Byerlee, V. Kuksenko, A. Ponomarev, and A. Sidorin, Quasi-static fault growth and shear fracture energy in granite, *Nature, 350*, 39-42, 1991.

Main, I., Statistical physics, seismogenesis and seismic hazard, *Rev. Geophys., 34*, 433-462, 1996..

Malen, K. and L. Bolin, A theoretical estimate of acoustic-emission stress amplitudes, *Phys. Status Solidi, 61*, 637-645, 1974

Neuhauser, H., Slip-line formation and collective dislocation motion, in *Dislocations in Solids*, Chaper 31, Edited by F.R.N. Nabarro, North-Holland, New York, 1983.

Petri, A., G. Paparo, A. Vespignani, A. Alippi, and M. Costantini, Experimental evidence for critical dynamics in microfracturing processes, *Phys. Rev. Lett., 73*, 3423-3426, 1994.

Pickering, G., J.M. Bull, and D.J. Sanderson, Sampling power-law distributions, *Tectonophysics, 248*, 1-20, 1995.

Poirier, J.P., *Plasticité à Haute Température des Solides Cristallins (High Temperature Plasticity of Crystalline Solids)*, Eyrolles Sci., Paris, 1976.

Rouby, D., P. Fleischmann, and C. Duvergier, Un modèle de sources d'émission acoustique pour l'analyse de l'émission continue et

de l'émission par salves, I, Analyse théorique, *Philos. Mag. A, 47*, 671-687, 1983.

Sethna, J.P., K. Dahmen, S. Kartha, J.A. Krumhansl, B.W. Roberts, and J.D. Shore, Hysteresis and hierarchies: Dynamics of disorder-driven first order phase transformations,*Phys. Rev. Lett., 70*, 3347-3350, 1993

Sornette, A., and D. Sornette, Self-organized criticality and earthquakes, *Europhys. Lett., 9*, 197-202, 1989.

Sornette, D., Sweeping of an instability: An alternative to self-organized criticality to get power laws without parameter tuning, *J. Phys. I, 4*, 209-221, 1994.

Sornette, D., and R. Cont, Convergent multiplicative processes repelled from zero: power laws and truncated power laws, *J. Phys. I France, 7*, 431-444, 1997

Sornette, D., and L. Knopoff, The paradox of the expected time until the next earthquake, *Bull. Seismol. Soc. Am., 87*, 789-798, 1997.

Sornette, D., Linear stochastic dynamics with nonlinear fractal properties, *Physica A, 250*, 295-314, 1998.

Sprusil, B., and F. Hnilica, Fractal character of slip lines of Cd single crystals, *Czech. J. Phys., 35*, 897-900, 1985.

Vespignani, A. and S. Zapperi, How self-organized criticality works: A unified mean-field picture,*Phys. Rev. E, 57, Stat. Phys. Plasmas Fluids relat. Interdiscip. Top.*, 6345-6362 ,1998.

Weertman, J., and J.R. Weertmann, Moving Dislocations, in *Dislocations in Solids,* Chapter 8, edited by F.R.N. Nabarro, North-Holland, New York, 1980

Weiss, J., J.R. Grasso and P. Martin, AE and scaling laws in microstructurally controlled ice samples, paper presented at 6th International Conference on AE/MS in Geological structures and Materials, Pa. State Univ., University Park, June 11-13, 1996.

Weiss, J., The role of attenuation on acoustic emission amplitude distributions and *b*-values, *Bull. Seismol. Soc. Am., 87*, 1362-1367, 1997.

Weiss, J., and J.R. Grasso, Acoustic emission in single-crystals of ice, *J. Phys. Chem. B., 101*, 6113-6117, 1997.

Zapperi, S., P. Ray, H.E. Stanley, and A. Vespignani, First-order transition in the breakdown of disordered media, *Phys. Rev. Lett., 78*, 1408-1411, 1997a.

Zapperi, S., A. Vespignani, and H.E. Stanley, Plasticity and avalanche behaviour in microfracturing phenomena, *Nature, 388*, 658-660, 1997b.

J.R. Grasso and F. Lahaie, Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, BP 53X, 38041 Grenoble Cedex 9, France. (grasso@obs.ujf-grenoble.fr)

J.Weiss, Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement, UPR CNRS 5151, BP 96, 38402 St Martin d'Hères Cedex, France. (weiss@glaciog.ujf-grenoble.fr)

(Received March 24, 1999; revised August 19, 1999; accepted August 31, 1999.)

Conclusion générale

Une des questions de fond qui a dirigé ce travail de thèse est de comprendre l'origine physique des lois d'échelles qui caractérisent de façon récurrente le comportement mécanique des objets géologiques (taille des séismes, répartition spatiale des foyers de séismes, longueur des failles, etc.). Il y a un peu plus d'une dizaine d'années, aucune interprétation claire et unificatrice n'était donnée à la présence de ces lois d'échelle dans les systèmes géologiques, ni d'ailleurs à l'observation d'écarts à ces lois d'échelle, ou de fluctuations (spatiales ou temporelles) dans la valeur de leurs exposants. Les outils fractals, apparus au début des années 70 [Mandelbrot, 1967] ont été utiles à la description et à la mise en évidence de ces lois d'échelle dans la nature. Mais pour ce qui concerne leur interprétation, ces lois d'échelles étaient admises sur une base empirique, et les seules interprétations données aux variations de leurs exposants (par exemple le coefficient b de la loi de Gutenberg-Richter) reposaient sur l'observation empirique, en laboratoire ou sur le terrain, de corrélations entre les fluctuations de certains paramètres (pression de confinement, profondeur, hétérogénéïté, niveau de contrainte) et les fluctuations de ces exposants.

En parallèle, depuis une quarantaine d'années, de gros efforts ont été déployés en physique statistique pour tenter de dégager des mécanismes génériques permettant de produire des lois d'échelle et d'interpréter des variations de leurs exposants. La plupart de ces mécanismes (transition critique ordinaire, criticalité auto-organisée, transition du premier ordre en présence d'hétérogénéïtés) font en fait partie d'un cadre théorique plus général, le formalisme des transitions de phase, et il semble aujourd'hui difficile d'interpréter des lois de puissance dans la nature sans faire appel à ce formalisme.

Ces travaux de physique statistique n'ont eu un retentissement que relativement récemment en géophysique (une dizaine d'années), mais ont donné lieu depuis à un foisonnement de modèles, tentant d'utiliser les notions théoriques de transitions de phase (et notamment le concept de criticalité auto-organisée) pour la compréhension de la déformation des objets géologiques (glissement sur une faille, fracturation de la croûte à grande échelle, etc.). Cette activité riche a aussi été accompagnée d'une certaine confusion dans la littérature géophysique, et d'une utilisation parfois non rigoureuse des notions théoriques de transition de phase. Dans la première partie de cette thèse, nous avons tenté d'éclaircir certaines de ces notions, et notamment, de définir les ingrédients et les implications de la criticalité d'un système. En particulier, nous avons vu que :

- la criticalité d'un système n'est pas automatiquement associée à un regroupement des avalanches (séismes) dans l'espace ou dans le temps ;
- une des conditions nécessaires pour qu'un système soit critique auto-organisé est non seulement qu'il soit chargé de façon (infiniment) lente par rapport à sa vitesse de

relaxation, mais également qu'il soit (infiniment) peu dissipatif et que la cicatrisation des éléments soit instantannée ;

- Il existe d'autres scénarii que la criticalité pour rationaliser la présence de lois d'échelles dans les systèmes naturels.

Nous avons insisté sur l'importance de faire le lien entre d'une part les paramètres génériques considérés en physique statistique comme essentiels pour le comportement statistique d'un système – dimensionnalité du système, dimensionnalité du paramètre d'ordre, portée des interactions – et d'autre part les paramètres plus spécifiques supposés influencer le comportement statistique des objets géologiques, et isolés soit par des observations empiriques (terrain, laboratoire), soit par des modèles appliqués au contexte de la croûte. Cet effort est notamment nécessaire pour arriver à une compréhension profonde de l'origine physique de la loi de Gutenberg-Richter, des écarts éventuels à cette loi, et des variations (spatiales ou temporelles) du coefficient *b* associé.

Dans une deuxième partie, nous avons tout d'abord proposé une synthèse de l'utilisation du formalisme des transitions de phase pour étudier le problème de la rupture des matériaux et de la déformation des objets géologiques. Nous avons vu notamment que deux mécanismes étaient proposés pour décrire la rupture d'un matériau : la rupture correspondrait soit à une transition critique, soit à une transition du premier ordre en présence d'hétérogénéité. Le débat n'est pas tranché, mais il est d'importance, à la fois sur un plan théorique, et aussi pour le problème de la prédictibilité de la rupture, et éventuellement, de la prédictibilité des séismes. Nous avons vu également que la déformation inélastique d'un matériau, dans un contexte où la vitesse de déformation est imposée, pouvait être abordée en terme de phénomène critique auto-organisé, même si nous avons mis en avant certains problèmes dans cette analogie. En effet, la dissipation d'énergie associée à la déformation inélastique d'un matériau (chaleur, émission d'ondes élastiques) a nécessairement pour effet d'introduire une longueur de corrélation finie dans ce matériau, et de rendre celui-ci sous-critique. Dans le cas de la croûte, toute la problématique est de savoir si la longueur de corrélation reste grande à l'échelle de la croûte, ou autrement dit, si la dissipation a un effet négligeable sur la dynamique de l'objet croûte. D'autre part, la condition de cicatrisation instantanée des éléments au cours d'une avalanche, qui semble nécessaire à l'établissement de la CAO dans un système, peut être mise en doute dans les objets géologiques. Un grand nombre de modèles de fracturation (ou de glissement sur un plan de faille) se basent au contraire sur l'idée qu'il y a endommagement au cours d'une avalanche (séisme), et que les éléments impliqués dans une avalanche ne recouvrent pas instantanément leur capacité à emmagasiner de l'énergie. Ainsi, il est loin d'être acquis, par exemple, que la croûte soit « véritablement » dans un état critique auto-organisé. En revanche, le concept de CAO est adapté dans un contexte de déformation viscoplastique, où la cicatrisation des éléments est dans ce cas instantanée.

Nous avons ensuite appliqué ce formalisme à l'étude de trois cas concrets : la mécanique des éruptions dans un volcan, la déformation d'un réservoir d'hydrocarbure et la déformation viscoplastique d'un échantillon de glace. Ces trois exemples, par leur variété, nous ont permis

d'illustrer la généralité et la puissance du concept de transition de phase pour analyser la mécanique des objets géologiques. Ils ont également permis de mettre en lumière la difficulté de valider les notions théoriques de transition de phase sur des objets réels, où les systèmes sont finis, les paramètres de contrôle parfois difficilement accessibles, et la statistique des événements relativement faible. Malgré ces difficultés, l'apport du formalisme des transitions de phase est manifeste dans les exemples que nous avons étudiés, et nous a permis de dégager plusieurs résultats importants :

Nous avons tout d'abord proposé un modèle de réservoir pour les volcans basaltiques, qui consiste à voir une éruption comme le résultat d'un phénomène d'avalanche dans un système multi-lentilles, initié par de faibles perturbations (surpressions liées à la cristallisation, alimentation en matériel mantellique). Ce modèle a été testé sur les catalogues d'éruptions de deux volcans basaltiques (Piton de la Fournaise, Springerville) et est en accord avec la statistique globale des volumes d'éruptions observée sur ces volcans. Dans le prolongement de ce modèle, nous avons exploré l'idée conceptuelle qu'un volcan basaltique puisse être vu comme un système critique auto-organisé, même si une validation définitive de ce concept n'a pu être fournie dans la limite des données dont nous disposons.

En apportant une justification théorique à l'existence de lois d'échelles dans les objets naturels, le formalisme des transitions de phase permet aussi d'interpréter certaines coupures, ou certains changements qui apparaissent dans ces lois d'échelle, et ainsi d'apporter des renseignements utiles sur la taille des objets impliqués ou l'extension des corrélations au sein de ces objets. Nous en avons donné l'illustration dans le cas du volcan de la Fournaise, où nous avons proposé une interprétation à la coupure observée dans la distribution des volumes d'éruptions aux petites échelles, comme une signature de la « taille de discrétisation » du système de lentilles, c'est-à-dire la taille typique d'une seule lentille. Nous en avons déduit un rayon typique de l'ordre de 200 m pour une lentille du volcan au Piton de la Fournaise.

Nous avons ensuite mis en évidence, sur un site d'extraction d'hydrocarbure (Lacq), l'effet d'une variation très basse-fréquence du taux de chargement sur les propriétés statistiques de la sismicité induite sur ce site. Nous avons interprété cette modification dans les caractéristiques de la sismicité comme la marque d'un changement dans le mode de fracturation du réservoir, passant d'une fracturation plus localisée (fragile) à une fracturation plus diffuse (ductile), lorsque le taux de chargement a diminué. Ce résultat semble montrer que le mode de fracturation de la croûte est contrôlé par des processus très lents. D'autre part, cela suggère la possibilité, dans des contextes de fracturation induite (extraction d'hydrocarbure, remplissage d'un réservoir hydraulique, stockage de déchets), de « diriger » le mode de fracturation du sous-sol en ajustant de façon adéquate son taux de chargement. Pour le producteur, par exemple, cela implique la possibilité d'ajuster le taux de production, de façon à générer un type de fracturation optimal pour le drainage du réservoir, et ainsi optimiser la productivité. De même, sur un site de stockage, cela suggère que la vitesse d'excavation peut diriger l'endommagement, ou encore, dans une mine, qu'une diminution de la vitesse d'avancement peut permettre d'éviter les coups de toit, etc.

Nous avons également proposé une interprétation de la forme bimodale de la loi fréquence-magnitude des séismes observée sur le champ de Lacq, comme la signature d'un rapprochement à un point critique – mécanisme de « balayage » – lié au chargement en contrainte du site au cours de l'exploitation. Cette interprétation impliquerait que la longueur de corrélation avant le chargement du site n'était que de l'ordre de quelques centaines de mètres, allant a priori à l'encontre de l'hypothèse de CAO pour la croûte.

Enfin, nous avons mis en évidence la présence de lois d'échelle dans la dynamique des dislocations au cours de la déformation viscoplastique d'un matériau, et avons discuté la pertinence des différents mécanismes de transition de phase pour décrire ces observations. Cette étude montre que la déformation viscoplastique des matériaux par mouvements de dislocations présente le même comportement statistique que leur déformation cassante (par création ou propagation de fissures), et semble pouvoir être décrite dans le même formalisme des transitions de phase.

En conclusion, le formalisme des transitions de phase ne doit en aucun cas être perçu comme un concept « miracle », donnant une réponse définitive à tout type de problème. Il faut plutôt le voir comme un cadre théorique fort, permettant de mieux aborder la complexité des phénomènes naturels, et de comprendre l'origine physique de cette complexité par des méthodes moins empiriques que les méthodes généralement utilisées en géophysique. Nous avons montré sur des exemples concrets l'utilité de ce support théorique très général, qui peut servir de cadre de réflexion pour aborder les problèmes les plus variés en sciences de la Terre, allant de la fracturation, à la mécanique des séismes, au transport de fluides en milieux poreux, à la géodynamo, ou aux éboulements de terrain.

Annexes

Annexe 1 : Illustration de l'approche de physique statistique dans le cas d'un système thermique

La plupart des systèmes étudiés en physique statistique sont des systèmes « thermiques ». On entend par là le fait qu'ils sont décrits à des échelles très petites (molécules de gaz, spins d'électrons, etc.), où l'agitation thermique se manifeste de façon directe, par des modifications aléatoires de l'état des éléments. Ce « bruit » stochastique, qui a un effet désordonnant sur le système, est généralement en compétition avec une fonction énergie, aussi appelée « hamiltonien », qui tend elle à ordonner les éléments. Elle exprime à la fois le couplage entre les éléments et les contraintes extérieures appliquées au système (nombre de particules, énergie moyenne, champ extérieur, etc.).

Typiquement, on distingue trois types de contraintes pour un tel système. Le premier cas, appelé « ensemble microcanonique », est celui où le nombre de particules et l'énergie du système sont constants ; c'est-à-dire que le système est isolé, n'échangeant ni masse, ni chaleur, ni travail avec l'extérieur. Le deuxième cas, appelé « ensemble canonique », est celui où le système est fermé (le nombre de particules est constant), mais son énergie n'est plus imposée qu'en moyenne. La situation typique est celle où la température est imposée de l'extérieur par un thermostat. Enfin, le troisième cas, appelé « ensemble grand canonique » est celui où à la fois l'énergie et le nombre de particules ne sont imposés qu'en moyenne.

Plaçons nous par exemple dans la situation où l'on impose la température T du système, c'est-à-dire la situation correspondant au modèle d'Ising (ensemble canonique). L'énergie associée à une configuration $[s]$ du système (l'hamiltonien) est notée $E_{[s]}$. La compétition entre l'agitation thermique et l'énergie est exprimée à travers la loi de Boltzmann, selon laquelle la probabilité $P([s])$ pour que le système se retrouve dans une configuration $[s]$ est proportionnelle à $\exp(-\beta E_{[s]})$, où $\beta=1/k_B T$ est appelée la « température inverse », et k_B est la constante de

Boltzmann[46]. Autrement dit, plus l'énergie $E_{[s]}$ d'une configuration $[s]$ est importante, moins cette configuration a de chance d'être occupée par le système, et ce d'autant moins que la température est faible (voir Figure II-5).

En introduisant le facteur de normalisation

$$Z \equiv \sum_{[s]} e^{-\beta E_{[s]}} \tag{A1.1}$$

appelé « fonction de partition », on obtient

$$\mathrm{P}([s]) = \frac{e^{-\beta E_{[s]}}}{Z} \text{ (distribution de Boltzmann-Gibbs)} \tag{A1.2}$$

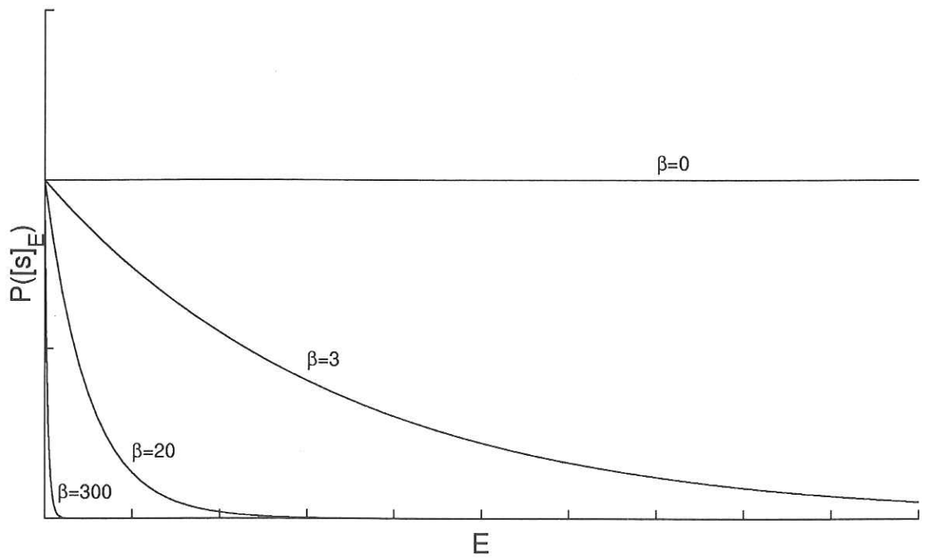


Figure II-5 Forme de la distribution de probabilité $P([s])$ en fonction de la température inverse β, dans la situation de l'ensemble canonique. A haute température (β faible), toutes les configurations ont la même probabilité, quelle que soit leur énergie. L'entropie, c'est-à-dire le manque d'information sur l'état du système, est alors maximum. Au fur et à mesure que la température diminue (β augmente), le système s'installe de préférence dans les états d'énergie minimum.

[46] La constante de Boltzmann n'a pour rôle que de donner au terme $k_B T$ la dimension d'une énergie. Sa valeur est en fait liée à la définition arbitraire de la température.

La connaissance de P([s]) (ou de Z) permet en principe de déduire les distributions de probabilité (et donc les moyenne statistiques) de toutes les variables macroscopiques du système. Il suffit pour cela de calculer, pour une variable macroscopique X quelconque :

$$\langle X \rangle = \sum_{[s]} X_{[s]} P([s]) \tag{A1.3}$$

où $X_{[s]}$ est la valeur de la variable X dans la configuration $[s]$.

Par exemple, l'énergie interne U du système est

$$U \equiv \langle E \rangle = \sum_{[s]} E_{[s]} P([s]) = \frac{1}{Z} \sum_{[s]} E_{[s]} e^{-\beta E_{[s]}} \tag{A1.4}$$

On peut également déduire U par dérivation de la fonction de partition :

$$U = -\left(\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} \right)_V \tag{A1.5}$$

De la même façon, on peut obtenir l'énergie libre à partir de la fonction de partition :

$$F = -\frac{1}{\beta} \log Z = -k_B T \log Z \tag{A1.6}$$

Toutes les autres variables thermodynamiques, qui dérivent de U ou de F, peuvent être déduites alors à leur tour. Par exemple,

l'entropie

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right) = -k_B \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\log Z}{\beta} \right) \tag{A1.7}$$

la chaleur spécifique

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = k_B \beta^2 \left(\frac{\partial^2 \log Z}{\partial \beta^2} \right)_V \tag{A1.8}$$

etc…

Annexe 2 : Résolution du modèle d'Ising par la méthode du champ moyen (méthode de Weiss)

Bien avant que le modèle d'Ising soit résolu de façon exacte dans le cas d=2 et h=0 par Onsager [1944], P. Weiss proposa en 1907 une résolution de ce modèle par une approche de champ moyen. La présentation qui va suivre est inspirée de Papon et al. [1999].

La méthode consiste à remplacer toutes le interactions subies par un spin par un champ unique appelé « champ moyen ». Autrement dit, on remplace dans l'hamiltonien (Eq. I.12) les spins voisins s_j par $\langle s \rangle$. En présence d'un champ extérieur, on réécrit donc :

$$E_{[s]} = -J\sum_{i=1}^{N}\sum_{j} s_i \langle s \rangle - \mu_0 h \sum_{i=1}^{N} s_i \tag{A2.1}$$

$$E_{[s]} = -zJ\langle s \rangle \sum_{i=1}^{N} s_i - \mu_0 h \sum_{i=1}^{N} s_i \tag{A2.2}$$

$$E_{[s]} = -\left[zJ\langle s \rangle + \mu_0 h\right]\sum_{i=1}^{N} s_i \tag{A2.3}$$

où z est le nombre de plus proches voisins ou « nombre de coordination ». Tout se passe donc comme si on avait un système de spins indépendants soumis à un champ effectif $h_{ef} = zJ\langle s \rangle / \mu_0 + h = h_W + h$, où h_W est souvent appelé le « champ de Weiss ». La fonction de partition est alors simplement

$$Z = 2^N \left[e^{\mu_0 h_{ef}/k_B T} + e^{-\mu_0 h_{ef}/k_B T} \right] \tag{A2.4}$$

D'où l'on peut déduire toutes les variables macroscopiques du système. Par exemple, sachant que $M = -(\partial F/\partial h)_T = -k_B T(\partial \log Z/\partial h)_T$, et en posant $M_\infty = N\mu_0$, qui représente l'aimantation à saturation, on en déduit

$$M = M_\infty \tanh\left(\frac{\mu_0 h}{k_B T} + \frac{zJM}{k_B T M_\infty}\right) \tag{A2.5}$$

Cette équation peut-être considérée comme l'équation d'état pour les systèmes magnétiques, analogue à l'équation de Van der Waals pour les fluides. La solution de (A2.5) peut être obtenue graphiquement. Si le champ magnétique est nul (h=0), on obtiendra l'aimantation M en cherchant les intersections des deux courbes

$$X = \frac{M}{M_\infty} = \tanh x \qquad\qquad X = \frac{T}{T_c} x$$

où l'on a posé $T_c = zJ/k_B$. Les solutions obtenues sont indiquées sur la Figure II-6.

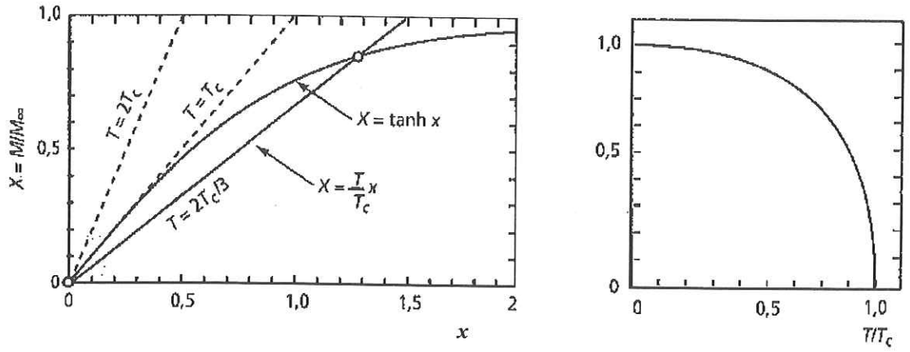


Figure II-6 Solution graphique de l'aimantation M en fonction de la température T dans le modèle de champ moyen de Weiss et en champ nul (h=0). D'après Papon et al. [1999].

On constate que pour $T<T_c$, il existe une solution unique $x\neq0$ (outre x=0 qui est toujours solution) qui dépend de la température. Si $T\to0$, $x\to1$, ce qui correspond à l'aimantation à saturation. Cette solution disparaît à $T=T_c$. Si le champ magnétique n'est plus nul ($h\neq0$), il n'y a plus de point critique, car l'aimantation est permanente ($M\neq0$, $\forall T$).

Le modèle reproduit donc qualitativement les caractéristiques à la fois des systèmes ferromagnétiques réels et du modèle d'Ising. Notamment, on observe des lois d'échelles similaires à celles observées dans ces deux cas. Par contre, les exposants critiques prédits par le modèle de Weiss diffèrent des exposants critiques réels : la méthode prévoit une discontinuité de la chaleur spécifique correspondant à α=0, ainsi que β=1/2, γ=1, δ=3, η=0, ν=1, à comparer avec les valeurs du Tableau I-4, p.61.

Annexe 3 : Quelques outils de reconnaissance d'organisation

Nous présentons ici quelques outils couramment utilisés pour déceler une organisation dans un ensemble d'objets (champ de séismes, champ de failles), à la fois dans le domaine spatial ou temporel. Nous nous en tenons ici à des techniques de base, comme la fonction d'autocorrélation, la méthode de la dimension fractale, ou les mesures d'entropie. Pour information, nous mentionnons simplement l'existence de techniques plus sophistiquées, comme par exemple le formalisme multifractal (voir Hentschel et Procaccia [1983], Ouillon [1995], Ouillon et Sornette [1996], Eneva [1996]), la technique de la transformation en ondelettes, très utilisée dans le domaine de l'analyse de signaux sismiques et acoustiques (voir par ex. Kumar et Foufoula-Georgiou [1997], [Ouillon, 1995]) ou les techniques basées sur l'apprentissage et la théorie de l'évolution (réseaux de neurones, etc.).

A.3.1 Coefficient de corrélation

Considérons deux variables x et y quelconques, de carré intégrable. Imaginons pour fixer les idées que x soit le nombre de séismes au cours des heures de la journée et y la valeur de la gravité au même instant. On souhaite savoir si le nombre de séismes est corrélé avec les variations journalières de la gravité. Une façon générale de mesurer la corrélation – ou l'indépendance – de deux variables est de calculer leur covariance :

$$\mathrm{cov}(x,y) = \langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle \qquad \text{(A3.1)}$$

où < > réfère à une moyenne statistique sur les différentes réalisations de la variable correspondante. (A.3.1) peut s'écrire également :

$$\mathrm{cov}(x,y) = \langle (x-\langle x\rangle)(y-\langle y\rangle)\rangle \qquad \text{(A3.2)}$$

qui montre de façon plus explicite que la covariance est une mesure de la corrélation des fluctuations de x et de y autour de leurs valeurs moyennes.

- cov(x, y)=0 $\Rightarrow$ x et y indépendants[47]

[47] ou plutôt, non linéairement dépendants (voir remarque)

- $\mathrm{cov}(x, y)\neq 0 \Rightarrow x$ et y corrélés

Cette mesure de la corrélation ne nous satisfait pas complètement car elle est dépendante de l'amplitude des fluctuations de chaque variable. Pour obtenir une mesure qui soit indépendante de ces amplitudes, on introduit une grandeur normalisée ρ, appelée « coefficient de corrélation », et définie par :

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} \qquad \text{(A3.3)}$$

où σ_x et σ_y sont les écarts types de chaque variable par rapport à leur valeur moyenne.

- $\rho=0 \Rightarrow x$ et y indépendants[47]
- $\rho=1 \Rightarrow$ il existe une relation linéaire entre x et y
- $0<\rho<1$ donne une estimation du degré de corrélation (linéaire) entre les variables.

Remarque : La covariance (ou le coefficient de corrélation) est surtout une mesure adaptée pour la recherche d'une corrélation linéaire entre deux variables. Plus la relation qui lie ces variables s'écarte d'une relation linéaire, plus le coefficient de corrélation diminue. Par exemple, si $y=e^x$ ($x\in[0;5]$), $\rho=0.858$; si $y=e^x$ ($x\in[-5;5]$), $\rho=0.693$. Le cas extrême est par exemple $y=x^2$ ($x\in\Re$), pour lequel $\rho=0$. Dans tous ces exemples, x et y sont totalement corrélés, dans le sens où la connaissance de l'un détermine totalement la connaissance de l'autre, et pour autant, leur coefficient de corrélation n'est pas 1. Il faut donc rester attentif sur la signification exacte du coefficient de corrélation.

A.3.2 Fonction de corrélation

Imaginons maintenant que l'on veuille savoir non seulement si le nombre de séismes et la hauteurs de la marée sont corrélés au même instant, mais aussi si le nombre de séismes au temps t n'est pas corrélé avec la hauteur de la marée au temps $t+\Delta t$, autrement dit, s'il n'y a pas un décalage dans leur corrélation. Pour ne pas rester dans le domaine temporel, on se place de façon plus générale dans un espace de dimension d et on considère deux champs scalaires x et y définis dans cet espace. Une façon de savoir s'il y a une corrélation, en moyenne, entre la valeur du champ x en un point de coordonnées $\mathbf{l}$ et la valeur du champ y en un point de coordonnées $\mathbf{l}'$ défini par $\mathbf{l}'=\mathbf{l}+\mathbf{k}$ (où $\mathbf{k}$ est un vecteur constant) est de calculer leur fonction de corrélation :

$$G(\mathbf{k}) = \langle x(\mathbf{l})y(\mathbf{l}+\mathbf{k})\rangle \qquad \text{(A3.4)}$$

où < > est une moyenne sur tous les points $\mathbf{l}$ de l'espace. Si les champs sont isotropes, la fonction de corrélation ne dépend que de la distance $r=|\mathbf{k}|$. On se placera par la suite dans ce cas. La fonction de corrélation est appelée « fonction d'intercorrélation », et notée $G_{xy}(r)$, lorsque x et y sont deux champs distincts, et « fonction d'autocorrélation », notée $G_x(r)$, lorsque x et y sont identiques (c'est-à-dire par exemple lorsqu'on veut savoir si le nombre de séismes au

temps t est corrélé avec le nombre de séismes au temps $t+\Delta t$). La fonction d'autocorrélation est bien sûr maximale pour $r=0$, où elle vaut $<x^2>$.

Si x est un champ dans lequel il n'y a aucune corrélation (bruit blanc), on a :

$$G_x(r) = \langle x^2 \rangle \quad (r=0) \qquad \text{(A3.5a)}$$

$$= \langle x \rangle^2 \quad (r\neq 0) \qquad \text{(A3.5b)}$$

De même, dans le cas où l'on compare deux champs x et y, et qu'il n'y a aucune corrélation entre eux, on a :

$$G_{xy}(r) = \langle x \rangle \langle y \rangle \quad (\forall r) \qquad \text{(A3.6)}$$

Pour plus d'informations, et notamment avoir une estimation de l'erreur sur la fonction de corrélation, voir Kunt [1981, p.256-291].

Remarque 1 : La fonction de corrélation, telle qu'elle est définie ici, est une fonction corrélation « à deux points », dans le sens où elle est calculée en faisant la multiplication de deux valeurs. On pourrait de la même façon calculer une fonction de corrélation à trois points, à quatre points, etc.

Remarque 2 : La fonction de corrélation est soumise à la même remarque que la covariance, à savoir qu'elle est adaptée à la recherche de corrélations linéaires mais ne rend pas bien compte d'éventuelles corrélations non linéaires entre deux champs.

A.3.3 Fonction de covariance

Ce qui nous intéresse en général n'est pas de savoir si deux champs sont corrélés en moyenne, mais plutôt de savoir si leurs fluctuations autour de leurs valeurs moyennes sont corrélées. Pour cela, on utilise la fonction de covariance, qui permet justement de s'affranchir des influences moyennes :

$$\Gamma(\mathbf{k}) = \langle x(\mathbf{l})y(\mathbf{l}+\mathbf{k})\rangle - \langle x(\mathbf{l})\rangle\langle y(\mathbf{l}+\mathbf{k})\rangle \qquad \text{(A3.7)}$$

Comme pour la fonction de corrélation, si les champs sont isotropes, la fonction de covariance ne dépend que de la distance $r=|\mathbf{k}|$. La fonction de covariance est appelée « fonction d'intercovariance », et notée $\Gamma_{xy}(r)$ lorsque x et y sont deux champs distincts, et « fonction d'autocovariance » lorsque x et y sont identiques. La fonction d'autocovariance est bien sûr maximum pour $r=0$, où elle vaut à σ_x^2.

Si x est un champ dans lequel il n'y a aucune corrélation (bruit blanc), on a :

$$\Gamma_x(r) = \sigma_x^2 \qquad (r=0) \qquad \text{(A3.8a)}$$

$$\Gamma_x(r) = 0 \qquad (r \neq 0) \tag{A3.8b}$$

De même, dans le cas où l'on compare deux champs x et y, et qu'il n'y a aucune corrélation entre eux, on a :

$$\Gamma_{xy}(r) = 0 \quad (\forall r) \tag{A3.9}$$

De la même façon que l'on a défini un coefficient de corrélation pour la covariance, on peut définir un « coefficient de corrélation » pour la fonction de covariance, c'est-à-dire une mesure de la corrélation entre fluctuations qui soit indépendante de l'amplitude de ces fluctuations :

$$\rho_x(r) = \frac{\Gamma_x(r)}{\sigma_x^2} \qquad \rho_{xy}(r) = \frac{\Gamma_{xy}(r)}{\sigma_x \sigma_y} \tag{A3.10}$$

On peut également exprimer la fonction d'autocovariance sous la forme d'une distribution de probabilité :

$$\gamma_x(r) = \frac{\Gamma_x(r)}{\int_0^\infty \Gamma_x(r)dr} \qquad \gamma_{xy}(r) = \frac{\Gamma_{xy}(r)}{\int_0^\infty \Gamma_{xy}(r)dr} \tag{A3.11}$$

Remarque : La terminologie varie selon les auteurs. Parfois, le terme de « fonction de corrélation » est en fait utilisé dans le sens de « fonction de covariance ». D'où la nécessité de s'assurer, lorsque l'on trouve ce terme dans la littérature, de sa signification exacte.

A.3.4 Intégrale de corrélation et dimension de corrélation

La méthode de l'intégrale de corrélation [Grassberger et Procaccia, 1983] permet de mesurer le regroupement (l'amassement) de points dans un espace de dimension d. D'implémentation simple, elle est souvent utilisée par exemple pour quantifier le regroupement spatial ou temporel de séismes.

Soit N événements (séismes par exemple) représentés par des points dans un espace de dimension d. La méthode consiste à calculer les distances l entre toutes les paires d'événements, et de tracer l'histogramme cumulé de ces distances entre événements :

$$C(r) = \frac{2}{N(N-1)} N(l < r) \tag{A3.12}$$

où $N(l<r)$ est le nombre d'événements séparés par une distance l inférieure à r. $C(r)$ est appelée « l'intégrale de corrélation ». Elle est reliée à la fonction d'autocorrélation, $G_x(r)$, par :

$$C(r) = \int_0^r G_x(l)dl \tag{A3.13}$$

Si l'objet constitué par cet ensemble de points est auto-similaire, on doit observer une relation du type :

$$C(r) = r^{D_c} \tag{A3.14}$$

où D_c est la « dimension de corrélation ». D_c est en fait une variante de la dimension fractale (voir §.A.3.5)

- $D_c=d \Leftrightarrow$ les événements sont répartis de façon uniforme dans l'espace
- $D_c=0 \Leftrightarrow$ tous les événements sont regroupés en un seul point
- $0<D_c<d$ donne une estimation du degré de localisation (ou de regroupement) des événements

En pratique, la valeur de D_c est très affectée par les effets de bords et le caractère fini du nombre d'événements. La valeur de D_c obtenue par cette méthode sera donc généralement inférieure à la véritable dimension de corrélation de l'objet. Une façon de corriger ces effets de bords est de calculer la dimension de corrélation pour une distribution aléatoire et uniforme du même nombre d'événements et dans le même volume [Eneva, 1996; Ouillon et Sornette, 1996]. La différence entre les deux dimensions (celle obtenue à partir de la population réelle et celle obtenue à partir de la population synthétique répartie de façon aléatoire et uniforme) permet d'estimer le niveau réel de regroupement de la population. Notons que cette méthode est très consommatrice en temps de calcul dès que le nombre d'événements devient grand (typiquement pour $N>1000$).

A.3.5 Dimension fractale

Comme la dimension de corrélation, la dimension fractale est une mesure quantitative du degré de localisation. A la différence cependant de la méthode de l'intégrale dimension, qui s'applique uniquement à un ensemble de points (par exemple des hypocentre de séismes), la méthode de la dimension fractale peut s'appliquer à des objets plus complexes (par exemple un champ de failles).

Considérons un objet quelconque (un champ de failles par exemple) dans un espace de dimension d. La méthode consiste tout d'abord à définir un domaine d'observation de l'objet, de dimension L^d, et à réaliser un pavage régulier de ce domaine, de résolution ε. La dimension fractale D de l'objet est alors définie par [Mandelbrot, 1982; Feder, 1988] :

$$N \sim \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^D \tag{A3.15}$$

où N est le nombre minimum de pavés de dimension ε^d nécessaires à recouvrir l'objet, dans cette fenêtre d'extension L. Cette mesure d'un objet par recouvrement est appelée « mesure de

Haussdorff-Besicovitch » et la dimension D correspondante, « dimension de Haussdorff-Besicovitch »[48]. En toute rigueur [Mandelbrot, 1982], la dimension de Haussdorff-Besicovitch n'est appelée « dimension fractale » que lorsqu'elle est non entière. Néanmoins, on étend généralement la notion de dimension fractale au cas où celle-ci est entière.

L'expression (A3.15) fait ressortir deux façons de mesurer pratiquement la dimension fractale d'un objet :

A. pour une résolution fixée ε, on varie le taille L du domaine d'observation. Le nombre de pavés nécessaires à recouvrir l'objet doit alors augmenter selon $N \sim L^D$. C'est le principe de la méthode dite « des cercles ».

B. pour un domaine d'observation fixé L, on varie la résolution ε. Le nombre de boîtes nécessaires à recouvrir l'objet doit alors diminuer avec la résolution selon $N \sim \varepsilon^{-D}$. C'est le principe de la méthode dite « des boîtes » (*box-counting*).

Pour un objet réparti de façon uniforme dans l'espace : $D=d$. Si l'objet n'est pas réparti de façon uniforme (c'est-à-dire s'il y a localisation), on a $D<d$. Là encore, la dimension fractale est sensible aux effets de bords, et de ce fait, peut être biaisée. On peut la corriger de la même manière que la dimension de corrélation, c'est-à-dire par comparaison avec un objet réparti de façon uniforme dans le même volume [Ouillon, 1995; Ouillon et Sornette, 1996].

Remarque : Smalley et al. [1987] proposent une méthode pour estimer le degré de localisation d'un ensemble de points qu'ils appellent « méthode de la poussière de Cantor ». En fait, cette méthode est la même que la méthode des boites, à la seule différence qu'ils normalisent le nombre N de boites recouvrant l'objet par le nombre total de boites, ε^d. De sorte qu'au lieu d'obtenir une relation du type $N \sim \varepsilon^{-D}$, ils obtiennent une relation du type $p(\varepsilon) \sim \varepsilon^{d-D}$.

A.3.6 Entropie

C'est une mesure très générale du désordre, ou de façon équivalente, du degré d'ignorance sur l'état microscopique d'un système, étant donné son état macroscopique.

Une première définition de l'entropie, formulée par Boltzmann en 1896, est :

$$S = k_B \log \Omega \qquad \text{(A3.16)}$$

où k_B est la constante de Boltzmann, et Ω est le nombre de configurations compatibles avec les contraintes macroscopiques imposées au système (volume, nombre de particules, énergie, etc.). Plus un système est riche en configurations possibles, plus notre ignorance sur la configuration exacte du système est grande, et donc, plus l'entropie est grande.

[48] on l'appelle aussi « dimension de recouvrement » ou « dimension de capacité ».

Une autre définition de l'entropie a été introduite par Shannon dans les années 1940, à partir des travaux sur la théorie de l'information. Supposons que l'on étudie un système caractérisé par une variable aléatoire X, admettant un nombre n de valeurs discrètes avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$. L'entropie est alors définie par :

$$S = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \qquad \text{(A3.17)}$$

Cette définition se ramène à la définition précédente si l'on suppose que X représente l'état macroscopique du système, n le nombre de configurations microscopiques possibles du système, et p_i la probabilité d'occurrence de chaque configuration. L'entropie est nulle quand l'une des configurations est certaine, c'est-à-dire $p_i=1$, les autres probabilités étant nulle. C'est le cas où notre ignorance sur le système est la plus faible. A l'inverse, l'entropie est maximale (égale à log n) lorsqu'il y a équipartition, c'est-à-dire lorsque toutes les probabilités p_i sont égales – notre ignorance est maximale. On remarque au passage que l'entropie augmente avec n.

L'entropie peut être utilisée pour mesurer le regroupement d'événements (par ex. séismes) dans l'espace ou dans le temps. Supposons par exemple que l'on étudie un volume de dimension L^d dans lequel sont répartis N foyers de séismes. On divise alors ce volume en cubes (ou boites) de dimension ε^d, obtenant ainsi $n=(L/\varepsilon)^d$ boites. Jusqu'ici, la procédure est la même que pour le calcul de la dimension fractale. On compte alors la proportion $p_i=N_i/N$ de séismes dans chaque boîte et on calcule l'entropie par la relation (A3.17). L'entropie étant influencée par la proportion entre le nombre de boites pleines et le nombre de boites vides, on normalise l'entropie par l'entropie correspondant à une équipartition des séismes, S_e=log n, de sorte que l'on obtient une entropie normalisée $s=S/S_e$.

- $s=0 \Leftrightarrow$ désordre total ; répartition aléatoire et uniforme des séismes dans l'espace
- $s=1 \Leftrightarrow$ regroupement extrême ; tous les séismes sont dans la même boîte
- $0<s<1$ donne une estimation du degré de localisation (ou de regroupement) des séismes

Garcimartin et al. [1997], par exemple, ont utilisé cette technique pour étudier l'évolution du regroupement des émissions acoustiques au cours d'une essai en compression sur échantillon de bois. Une analyse similaire peut s'effectuer dans le domaine temporel.

A.3.7 Coefficient de variation

Cette méthode simple, qui s'applique uniquement en 1D, permet de déterminer si une distribution de points sur une droite est aléatoire (poissonienne) ou non. On peut l'appliquer par exemple à un relevé de failles le long d'un profil ou à une série temporelle de séismes [voir par ex. Kagan et Jackson, 1991].

Si N points sont distribués de façon aléatoire et uniforme dans un intervalle de longueur L, on sait que la distribution des distances x entre points *successifs* suit une loi exponentielle :

$$P(x) = \frac{N}{L}\exp\left(-\frac{Nx}{L}\right) \qquad \text{(A3.18)}$$

Si maintenant on construit pour un ensemble de points quelconques la distribution des intervalles entre points successifs, on peut estimer l'écart de cette distribution à une distribution poissonnienne (A3.18) en calculant simplement la quantité :

$$C_V = \frac{\sigma_x}{\langle x \rangle} \qquad \text{(A3.19)}$$

où $\langle x \rangle$ est la moyenne de la distribution et σ_x sont écart-type. Cette quantité est appelée « coefficient de variation ». Pour une distribution aléatoire, on a C_v=1. Les autres situations possibles sont illustrées sur la Figure II-7.

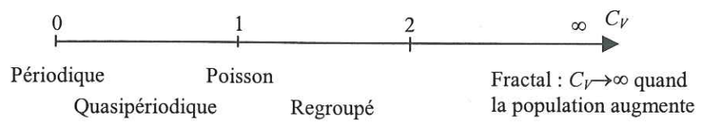


Figure II-7 Valeur du coefficient de variation en fonction de la distribution d'une population de points [modifié d'après Kagan et Jackson, 1991].

Références

Abbott, M. M. et Van Ness, H. C. (1983). *Théorie et applications de la thermodynamique*, McGraw-Hill, Paris.

Allègre, C. J., Le Mouel, J. L., et Provost, A. (1982). Scaling rules in rock fracture and possible implications for earthquake predictions, *Nature*, **297**, pp. 47-49.

Allègre, C. J., Shebalin, P., Le Mouël, J. L., et Narteau, C. (1998). Energetic balance in scaling organization of fracture tectonics, *Phys. Earth Planet. Int.*, **106**, pp. 139-153.

Amaral, L. A. N. et Lauritsen, K. B. (1996). Self-organized criticality in a rice-pile model, *Phys. Rev. E*, **54** (5), pp. R4512-R4515.

Amaral, L. A. N. et Lauritsen, K. B. (1997). Univerality classes for rice-pile models, *Phys. Rev. E*, **56** (1), pp. 231-234.

Amitrano, D. (1999). Emission acoustique des roches et endommagement, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Amitrano, D., Grasso, J. R., et Hantz, D. (1999). From diffuse to localised damage through elastic interaction, *Geophys. Res. Lett.*, **26**, pp. 2109-2112.

Andersen, J. V., Sornette, D., et Leung, K. T. (1997). Tricritical behavior in rupture induced by disorder, *Phys. Rev. Lett.*, **78**, pp. 2140-2143.

Anderson, P. W. (1972). More is different, *Science*, **177**, pp. 393.

Anifrani, J. C., Le Floc'h, C., Sornette, D., et Souillard, B. (1995). Universal log-periodic correction to renormalisation group scaling for rupture stress prediction from acoustic emissions, *J. Phys. I France*, **5**, pp. 631-638.

Arcangelis, L. D., Hansen, A., Herrmann, H. J., et Roux, S. (1989). Scaling laws in fracture, *Phys. Rev. B*, **40**, pp. 877-880.

Arcangelis, L. D. et Herrmann, H. J. (1985). *J. Phys. (Paris)*, **46**, pp. 585.

Bachèlery, P. et Mairine, P. (1990). Evolution volcano-structurale du Piton de la Fournaise depuis 0.53 Ma, dans *Le volcanisme de la Réunion, monographie*, édité par J. F. Lénat, Centre de Recherche Volcanologique, OPG Clermont, France, pp. 213-242.

Bak, P. (1998). *How nature works*, Academic Press, London.

Bak, P. et Creutz, M. (1994). Fractals and self-organized criticality, dans *Fractals in science*, édité par A. Bunde and S. Havlin, Springer-Verlag, New York.

Bak, P. et Tang, C. (1989). Earthquakes as a self-organized critical phenomenon, *J. Geophys. Res.*, **94**, pp. 15635-15637.

Bak, P., Tang, C., et Wiesenfeld, K. (1987). Self-organized criticality: an explanation of 1/f noise, *Phys. Rev. Lett.*, **59** (4), pp. 381-384.

Bak, P., Tang, C., et Wiesenfeld, K. (1988). Self-organized criticality, *Phys. Rev. A*, **38** (1), pp. 364-374.

Barriere, B. et Turcotte, D. L. (1991). A scale-invariant cellular-automata model for distributed seismicity, *Geophys. Res. Lett.*, **18** (11), pp. 2011-2014.

Barriere, B. et Turcotte, D. L. (1994). Seismicity and self-organized criticality, *Phys. Rev. E*, **49**, pp. 1151-1160.

Bebbington, M. (1997). A hierarchical stress release model for synthetic seismicity, *J. Geophys. Res.*, **102**, pp. 11677-11687.

Bebbington, M., Vere-Jones, D., et Zheng, X. (1990). Percolation theory: a model for rock fracture?, *Geophys. J. Int.*, **100**, pp. 215-220.

Ben-Hur, A. et Biham, O. (1996). *Phys. Rev. E*, **53**, pp. R1317.

Ben-Zion, Y., Dahmen, K., Lyakhovsky, V., Ertas, D., et Agnon, A. (1999). Self-driven mode switching of earthquake activity on a fault system, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **172**, pp. 11-21.

Ben-Zion, Y. et Rice, J. R. (1993). Earthquake failure sequences along a cellular fault zone in a three-dimensional elastic solid containing asperity and nonasperity regions, *J. Geophys. Res.*, **98**, pp. 14109-14131.

Ben-Zion, Y. et Rice, J. R. (1995). Slip patterns and earthquake populations along different classes of faults in elastic solids, *J. Geophys. Res.*, **100**, pp. 12959-12983.

Bhagavatula, R., Chen, K., et Jayaprakash, C. (1995). Earthquakes in a model of seismic zone with embedded pre-existing faults, *Geophys. Res. Lett.*, **22**, pp. 1301-1304.

Binney, J., Dowrick, N. J., Fisher, A. J., et Newman, M. E. J. (1992). *The theory of critical phenomena. An introduction to the renormalization group*, Oxford University Press, New York.

Blanter, E. M., Shirman, M. G., Le Mouël, J. L., et Allègre, C. J. (1997). Scaling laws in block dynamics and dynamic self-organized criticality, *Phys. Earth Planet. Int.*, **99**, pp. 295-307.

Bobrov, V. S., Zaitsev, S. I., et Lebedkin, M. A. (1991). Statistics of dynamic processes involved in low-temperature abrupt deformation of metals, *Sov. Phys. Solid State*, **32** (10), pp. 1776-1779.

Bonabeau, E. et Théraulaz, G. (1994). *Intelligence collective*, Hermes, Paris.

Bour, O. (1997). Transferts de fluides dans les milieux fracturés : effets d'échelle, Rennes.

Bowman, D. D., Ouillon, G., Sammis, C. G., Sornette, A., et Sornette, D. (1998). An observational test of the critical earthquake concept, *J. Geophys. Res.*, **103**, pp. 24359-24372.

Brown, S. R., Scholz, C. H., et Rundle, J. B. (1991). A simplified spring-block model of earthquakes, *Geophys. Res. Lett.*, **18**, pp. 215-218.

Bufe, C. G. et Varnes, D. J. (1993). Predictive modeling of the seismic cycle in the greater San Francisco bay region, *J. Geophys. Res.*, **98**, pp. 9871-9883.

Bunde, A. et Havlin, S. (1995). A brief introduction to fractal geometry, dans *Fractals in science*, édité par A. Bunde and S. Havlin, Springer-Verlag, Berlin, pp. 1-25.

Burridge, R. et Knopoff, L. (1967). Model and theoretical seismicity, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **57**, pp. 341-371.

Cafiero, R., Loreto, V., Pietronero, L., Vespignani, A., et Zapperi, S. (1995). Local rigidity and self-organized criticality for avalanches, *Europhys. Lett.*, **29** (2), pp. 111-116.

Caldarelli, G., Di Tolla, F. D., et Petri, A. (1996). Self-organization and annealed disorder in a fracturing process, *Phys. Rev. Lett.*, **77** (12), pp. 2503-2506.

Canneli, G., Cantelli, R., et Cordero, F. (1993a). *Phys. Rev. Lett.*, **72** (14), pp. 2307.

Canneli, G., Cantelli, R., et Cordero, F. (1993b). Self-organized criticality of the fracture processes associated with hydrogen in precipitation in niobium by acoustic emission, *Phys. Rev. Lett.*, **70** (25), pp. 3923-3926.

Carlson, J. M. (1991a). Time intervals between characteristic earthquakes and correlations with smaller events: an analysis based on a mechanical model of a fault, *J. Geophys. Res.*, **96**, pp. 4255-4267.

Carlson, J. M. (1991b). Two-dimensional model of a fault, *Phys. Rev. A*, **44**, pp. 6226-6232.

Carlson, J. M. et Langer, J. S. (1989). Properties of earthquakes generated by fault dynamics, *Phys. Rev. Lett.*, **62**, pp. 2632-2635.

Carlson, J. M., Langer, J. S., Shaw, B. E., et Tang, C. (1991). Intrinsic properties of a Burridge-Knopoff model of an earthquake fault, *Phys. Rev. A*, **44**, pp. 884-897.

Chaitin, G. (1966). *J. ACM*, **13**, pp. 547.

Chaitin, G. (1996). Les suites aléatoires, dans *Pour la science*, pp. .

Chen, K., Bak, P., et Obukhov, S. P. (1991). Self-organized criticality in a crack-propagation model of earthquakes, *Phys. Rev. A*, **43** (2), pp. 625-630.

Christensen, K., Corral, A., Frette, V., Feder, J., et Jossang, T. (1996). Tracer dispersion in a self-organized critical system, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, pp. 107.

Christensen, K., Fogedby, H. C., et Jensen, H. J. (1991). *J. Stat. Phys.*, **63**, pp. 653.

Christensen, K. et Olami, Z. (1992a). Scaling, phase transitions, and nonuniversality in a self-organized critical cellular-automaton model, *Phys. Rev. A*, **46** (4), pp. 1829-1838.

Christensen, K. et Olami, Z. (1992b). Variation of the Gutenberg-Richter *b* values and nontrivial temporal correlations in a spring-block model for earthquakes, *J. Geophys. Res.*, **97**, pp. 8729-8735.

Ciliberto, S. et Laroche, C. (1994). Experimental evidence of self-organized criticality in the stick-slip dynamics of two rough elastic surfaces, *J. Phys. I France*, **4**, pp. 223-235.

Coniglio, A. et Klein, W. (1980). Clusters and Ising critical droplets: a renormalisation group approach, *J. Phys. A*, **13** (8), pp. 2775-2780.

Cowie, P. A., Sornette, D., et Vanneste, C. (1995). Multifractal scaling properties of a growing fault population, *Geophys. J. Int.*, **122**, pp. 457-469.

Cowie, P. A., Vanneste, C., et Sornette, D. (1993). Statistical physics model for the spatio-temporal evolution of faults, *J. Geophys. Res.*, **98**, pp. 21809-21821.

Dahmen, K., Ertas, D., et Ben-Zion, Y. (1998). Gutenberg-Richter and characteristic earthquake behavior in simple mean-field models of heterogeneous faults, *Phys. Rev. E*, **58** (2), pp. 1494-1501.

Daniels, H. E. (1945). *Proc. R. Soc. London A*, **183**, pp. 405.

Ding, E. J. et Lu, Y. N. (1993). Analytical treatment for a spring-block model, *Phys. Rev. Lett.*, **70**, pp. 3627-3630.

Diodati, P., Marchesoni, F., et Piazza, S. (1991). Acoustic emissions from volcanic rocks: an example of self-organized criticality, *Phys. Rev. Lett.*, **67** (17), pp. 2239-2242.

Domb, C. et Green, M. S. (1976). *Phase transitions and critical phenomena. Vol. VI*, Academic Press, New York.

Dubois, J. (1995). *La dynamique non linéaire en physique du globe*, Masson, Paris.

Eneva, M. (1996). Effect of limited data sets in evaluating the scaling properties of spatially distributed data: an example from mining-induced seismic activity, *Geophys. J. Int.*, **124**, pp. 773-786.

Feder, H. J. (1988). *Fractals*, Plenum Press, New York.

Feder, H. J. S. et Feder, J. (1991). Self-organized criticality in a stick-slip process, *Phys. Rev. Lett.*, **66** (20), pp. 2669-2672.

Ferrenberg, A. M. et Landau, D. P. (1991). Monte-Carlo results for the *d*=3 Ising model, *Phys. Rev. B*, **44**, pp. 5081.

Fisher, D. S., Dahmen, K., Ramanathan, S., et Ben-Zion, Y. (1997). Statistics of earthquakes in simple models of heterogeneous faults, *Phys. Rev. Lett.*, **78**, pp. 4885-4888.

Fisher, M. E. (1970). , dans *Proceedings of the 1970 Enrico Fermi Institute School of Physics*, édité par M. S. Green, Academic, New York, pp. 1.

Fisher, M. E. et Barber, M. N. (1972). *Phys. Rev. Lett.*, **28**, pp. 1516.

Frette, V., Christensen, K., Malthe-Sorenssen, A., Feder, J., Jossang, T., et Meakin, P. (1996). Avalanche dynamics in a pile of rice, *Nature*, **379**, pp. 49-52.

Gabrielov, A., Newman, W. I., et Knopoff, L. (1994). Lattice models of fracture: sensitivity to the local dynamics, *Phys. Rev. E*, **50**, pp. 188-197.

Garcimartin, A., Guarino, A., Bellon, L., et Ciliberto, S. (1997). Statistical properties of fracture precursors, *Phys. Rev. Lett.*, **79** (17), pp. 3202-3205.

Gell-Mann, M. (1997). *Le quark et le jaguar*, Flammarion, Paris.

Gilabert, A., Benayad, M., Sornette, A., Sornette, D., et Vanneste, C. (1990). Conductivity and rupture in crack-deteriorated systems, *J. Phys. I France* (247-257), pp. .

Goldenfeld, N. (1993). *Lectures on phase transitions and the renormalization group*, Addison-Wesley Publishing Company, New York.

Gomez, J. B., Iniguez, D., et Pacheco, A. F. (1995). Size-frequency relation of earthquakes in load-transfer models of fracture, *Nonlinear Process. Geophys.*, **2**, pp. 131-135.

Gomez, J. B. et Pacheco, A. F. (1997). Size-frequency distribution of earthquakes in hierarchically organized load-transfer models, *Nonlinear Process. Geophys.*, **4**, pp. 207-211.

Grassberger, P. et Procaccia, I. (1983). Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D*, **9**, pp. 189-208.

Grasso, J. R. (2000). Eboulements et transitions de phase, PNRN, Grenoble, pp. .

Grasso, J. R. et Sornette, D. (1998). Testing self-organized criticality by induced seismicity, *J. Geophys. Res.*, **103**, pp. 29965-29987.

Gross, S. (1996). Magnitude distributions and slip scaling of heterogeneous seismic sources, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **86** (2), pp. 498-504.

Grumbacher, S. K., McEwen, K. M., Halvorson, D. A., Jacobs, D. T., et Lindler, J. (1993). *Am. J. Phys.*, **61**, pp. 329.

Guarino, A., Garcimartin, A., et Ciliberto, S. (1998). Fracture as a critical phenomenon, *Eur. Phys. J. B*, **6**, pp. 13.

Gutenberg, B. et Richter, C. F. (1949). *Seismicity of the Earth and Associated phenomena*, Princeton University Press, Princeton.

Guyon, E., Roux, S., et Bergman, D. J. (1987). Critical behaviour of electric failure thresholds in percolation, *J. Phys. I France*, **48**, pp. 903-904.

Hähner, P. et Drossinos, Y. (1999). Scale invariance and intermittency in a creep-slip model of earthquake faults, *Phys. Rev. E*, **59** (6), pp. R6231-R6234.

Hainzl, S., Zöller, G., et Kurths, J. (1999). Similar power laws for foreschock and afterschock sequences in a spring-block model for earthquakes, *J. Geophys. Res.*, **104**, pp. 7243-7253.

Hainzl, S., Zöller, G., Kurths, J., et Zschau, J. (2000). Seismic quiescence as an indicator for large earthquakes in a system of self-organized criticality, *Geophys. Res. Lett.*, **27** (5), pp. 597-600.

Hallglass, R., Loreto, V., mazzela, O., Paladin, G., et Pietronero, L. (1997). Earthquake statistics and fractal faults, *Phys. Rev. E*, **56**, pp. 1346-1356.

Hamilton, T. et McCloskey, J. (1997). Breakdown in power-law scaling in an analogue model of earthquake rupture and stick-slip, *Geophys. Res. Lett.*, **24**, pp. 465-468.

Hansen, A. (1990). Disorder, dans *Statistical models for the fracture of disordered media*, édité par H. J. Herrmann and S. Roux, Elsevier, North-Holland, pp. 115-158.

Heimpel, M. (1996). Earthquake size-frequency relations from an analytical stochastic rupture model, *J. Geophys. Res.*, **101**, pp. 22435-22448.

Heimpel, M. (1997). Critical behaviour and the evolution of fault strength during earthquake cycles, *Nature*, **388**, pp. 865-868.

Heimpel, M. et Malin, P. (1998). Aseismic slip in earthquake nucleation and self-similarity: evidence from Parkfield, California, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **157**, pp. 249-254.

Held, G. A., Solina, D. H., Keane, D. T., Haag, W. J., Horn, P. M., et Grinstein, G. (1990). Experimental study of critical-mass fluctuations in a evolving sandpile, *Phys. Rev. Lett.*, **65**, pp. 1120-1123.

Henderson, J., Main, I. G., McLean, C., et Norman, M. G. (1994). A fracture-mechanical cellular automaton model of seismicity, *Pure Appl. Geophys.*, **142**, pp. 545-565.

Henderson, J. R. et Maillot, B. (1997). The influence of fluid flow in fault zones on patterns of seismicity: a numerical investigation, *J. Geophys. Res.*, **102**, pp. 2915-2924.

Hentschel, H. G. E. et Procaccia, I. (1983). The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors, *Physica D*, **8**, pp. 435-444.

Hermann, H. J. et Roux, S. (1990). Statistical models for the fracture of disordered media, dans *Random materials and processes*, edité par H. E. Stanley and E. Guyon, Elsevier, Amsterdam, pp. .

Hooge, C., Lovejoy, S., Schertzer, D., Pecknold, S., Malouin, J. F., et Schmitt, F. (1994). Multifractal phase transitions: the origin of self-organized criticality in earthquakes, *Nonlinear Process. Geophys.*, **1**, pp. 191-197.

Huang, J., Narkounskaia, G., et Turcotte, D. L. (1992). A cellular automata, slider-block model for earthquakes II. Demonstration of self-organized criticality for a 2-D system, *Geophys. J. Int.*, **111**, pp. 259-269.

Huang, Y., Saleur, H., Sammis, C. G., et Sornette, D. (1998). Precursors, afterschocks, criticality and self-organized criticality, *Europhys. Lett.*, **41**, pp. 43-48.

Ishimoto, M. et Iida, K. (1939). Observations sur les séismes enrégistrés par le microsismographe construit dernièrement, *I. Bull. Earthq. Res. Inst.*, **17**, pp. 443-478.

Ito, K. et Matsuzaki, M. (1990). Earthquakes as self-organized critical phenomena, *J. Geophys. Res.*, **95**, pp. 6853-6860.

Jaeger, H. M., Liu, C. H., et Nagel, S. R. (1989). Relaxation at the angle of repose, *Phys. Rev. Lett.*, **62**, pp. 40-43.

Jaumé, S. C. et Sykes, L. R. (1999). Evolving toward a critical point: A review of accelerating seismic moment/energy release prior to large and great earthquakes, *Pure Appl. Geophys.*, **155**, pp. 279-306.

Johansen, A., Dimon, P., Ellegaard, C., Larsen, J. S., et Rugh, H. H. (1993). Dynamic phases in a spring-block system, *Phys. Rev. E*, **48**, pp. 4779-4790.

Johansen, A., Sornette, D., Wakita, H., Tsunogai, U., Newman, W. I., et Saleur, H. (1996). Discrete scaling in earthquake precursory phenomena: evidence in the Kobe earthquake, Japan, *J. Phys. I France*, **6**, pp. 1391-1402.

Kadanoff, L. P. (1966). *Physics*, **2**, pp. 263.

Kadanoff, L. P., Nagel, S. R., Wu, L., et Zhou, S. M. (1989). Scaling and universality in avalanches, *Phys. Rev. A*, **39**, pp. 6524-6537.

Kagan, Y. Y. (1991). Seismic moment distribution, *Geophys. J. Int.*, **106**, pp. 123-134.

Kagan, Y. Y. (1997). Seismic moment-frequency relation for shallow earthquakes: Regional comparison, *J. Geophys. Res.*, **102**, pp. 2835-2852.

Kagan, Y. Y. et Jackson, D. D. (1991). Long-term earthquake clustering, *Geophys. J. Int.*, **104**, pp. 117-133.

Kagan, Y. Y. et Jackson, D. D. (1999). Worldwide doublets of large shallow earthquakes, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **89**, pp. 1147-1155.

Kanamori, H. et Anderson, D. L. (1975). Theoretical basis of some empirical relations in seismology, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **65**, pp. 1073-1096.

Kapitulnik, A., Aharony, A., Deutscher, G., et Stauffer, D. (1984). *J. Phys. A*, **16**, pp. 269.

Kesten, H. (1973). Random difference equations and the renewal theory for products of random matrices, *Acta. Math.*, **131**, pp. 207-248.

Kinouchi, O. et Prado, C. P. C. (1999). Robustness of scale invariance in models with self-organized criticality, *Phys. Rev. E*, **59**, pp. 4964-4969.

Knopoff, L., Landoni, A., et Abinante, M. S. (1992). Dynamical model of an earthquake fault with licalization, *Phys. Rev. A*, **46**, pp. 7445-7449.

Kolmogorov, A. N. (1965). *Probl. Inf. Transm.*, **1**, pp. 3.

Ktitarev, D. V., Lübeck, S., Grassberger, P., et Priezzhev, V. B. (2000). Scaling of waves in the Bak-Tang-Wiesenfeld sandpile model, *Phys. Rev. E*, **61** (1), pp. 81-92.

Kumagai, H., Fukao, Y., Watanabe, S., et Baba, Y. (1999). A self-organized model of earthquakes with constant stress drops and the b-value of 1, *Geophys. Res. Lett.*, **26** (18), pp. 2817-2820.

Kumar, P. et Foufoula-Georgiou, E. (1997). Wavelet analysis for geophysical applications, *Rev. Geophys.*, **35**, pp. 385-412.

Kunt, M. (1981). *Traitement numérique des signaux*, Dunod, Paris.

Lahaie, F. et Grasso, J. R. (1998). A fluid-rock interaction cellular automaton of volcano mechanics: Application to the Piton de la Fournaise, *J. Geophys. Res.*, **103**, pp. 9637-9649.

Landau, D. P. (1976). *Phys. Rev. B* (13), pp. 2997.

Lesné, A. (1996). *Méthodes de renormalisation*, Eyrolles, Paris.

Leung, K., Andersen, J. V., et Sornette, D. (1998). Self-organized criticality in stick-slip models with periodic boundaries, *Phys. Rev. Lett.*, **80** (9), pp. 1916-1919.

Lin, B. et Taylor, P. L. (1994). Model of saptiotemporal dynamics of stick-slip motion, *Phys. Rev. E*, **49**, pp. 3940-3947.

Liu, W. S., Lu, Y. N., et Ding, E. J. (1995). Dynamical phase transitions and self-organized criticality in a theoretical spring-block model, *Phys. Rev. E*, **51**, pp. 1916-1928.

Lockner, D. (1993). The role of acoustic emission in the study of rock fracture, *Int. J. Rock. Mech.*, **30** (7), pp. 883-899.

Lockner, D. A., Byerlee, J. D., Kuksenko, V., Ponomarev, A., et Sidorin, A. (1991). Quasi-static fault growth and shear fracture energy in granite, *Nature*, **350**, pp. .

Lomnitz-Adler, J. (1992). Interplay of fault dynamics and fractal dimension in determining Gutenberg-Richter's *b*-value, *Geophys. J. Int.*, **108**, pp. 941-944.

Lomnitz-Adler, J. (1993). Automaton models of seismic fracture: constraints imposed by the magnitude-frequency relation, *J. Geophys. Res.*, **98**, pp. 17745-17756.

Lomnitz-Adler, J., Knopoff, L., et G., M.-M. (1992). Avalanches and epidemic models of fracturing in earthquakes, *Phys. Rev. A*, **45** (4), pp. 2211-2221.

Lu, C., Vere-Jones, D., et Takayasu, H. (1999). Avalanche behavior and statistical properties in a microcrack coalescence process, *Phys. Rev. Lett.*, **82**, pp. 347-350.

Lu, Y. N. et Ding, E. J. (1993). Self-organized criticality in a stochastic spring-block model, *Phys. Rev. E*, **48**, pp. 21-24.

Lübeck, S. (2000). Moment analysis of the probability distribution of different sandpile models, *Phys. Rev. E*, **61** (1), pp. 204-209.

Lübeck, S. et Usadel, K. D. (1993). *Fractals*, **1**, pp. 1030.

Maes, C., Van Moffaert, A., Frederix, H., et Strauven, H. (1998). Criticality in creep experiments on cellular glass, *Phys. Rev. B*, **57** (9), pp. 4987-4990.

Main, I. G. (1992). Damage mechanics with long-range interactions: correlation between the seismic b-value and the fractal two-point correlation dimension, *Geophys. J. Int.*, **111**, pp. .

Main, I. G. (1996). Statistical physics, seismogenesis, and seismic hazard, *Rev. Geophys.*, **34** (4), pp. 433-462.

Main, I. G. (1999). Is the reliable prediction of individual earthquakes a realistic scientific goal?, WWW Nature debates, pp. .

Main, I. G., G., O. B., et Henderson, J. R. (2000). Statistical physics of earthquakes: Comparison of distribution exponents for source area and potential energy and the dynamic emergence of log-periodic energy quanta, *J. Geophys. Res.*, **105**, pp. 6105-6126.

Main, I. G., Henderson, J. R., Meredith, P. G., et Sammonds, P. R. (1994a). Self-organised criticality and fluid-rock interactions in the brittle field, *Pure Appl. Geophys.*, **142**, pp. 529-543.

Main, I. G., Meredith, P. G., henderson, J. R., et Sammonds, P. R. (1994b). Positive and negative feedback in the earthquake cycle: the role of pore fluids on states of criticality in the crust, *Ann. Geophys.*, **XXXVII**, pp. 1461-1479.

Mandelbrot, B. B. (1967). How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension, *Science*, **155**, pp. 636-638.

Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, New York.

Manna, S. S., Chakrabarti, A. D., et Cafiero, R. (1999). Critical states in a dissipative sanspile model, *Phys. Rev. E*, **60** (5), pp. R5005-R5008.

Marsan, D., Bean, C. J., Steacy, S., et McCloskey, J. (1999). Spatio-temporal analysis of stress diffusion in a mining-induced seismicity pattern, *Geophys. Res. Lett.*, **26** (24), pp. 3697-3700.

Matsuzaki, M. et Takayasu, H. (1991). Fractal features of the earthquake phenomenon and a simple mechanical model, *J. Geophys. Res.*, **96**, pp. 19925-19931.

McCloskey, J., Bean, C. J., et O'Reilly, B. (1993). An earthquake model with magnitude-sensitive dynamics, *Geophys. Res. Lett.*, **20**, pp. 1403-1406.

Meredith, P. G. et Atkinson, B. K. (1983). Stress corrosion and acoustic emission during tensile crack propagation in Whin Sill dolerite and other basic rocks, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **75**, pp. 1-21.

Miltenberger, P., Sornette, D., et Vanneste, C. (1993). Fault self-organization as optimal random paths selected by critical spationtemporal dynamics of earthquakes, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, pp. 3604-3607.

Mogi, K. (1962). Study of the elastic shocks caused by the fracture of heterogeneous materials and its relation to earthquake phenomena, *Bull. Earthq. Res. inst.*, **40**, pp. 125-173.

Morein, G., Turcotte, D. L., et Gabrielov, A. (1997). On the statistical mechanics of distributed seismicity, *Geophys. J. Int.*, **131**, pp. 552-558.

Mori, J. et Abercrombie, R. E. (1997). Depth dependence of earthquake frequency-magnitude distributions in California: Implications for rupture initiation, *J. Geophys. Res.*, **102**, pp. 15081-15090.

Mouritsen, O. G. (1984). *Computer studies of phase transitions and critical phenomena*, Springer-Verlag, Berlin.

Myers, C. R., Shaw, B. E., et Langer, J. S. (1996). Slip complexity in a crustal-plane model of an earthquake fault, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, pp. 972-975.

Nakanishi, H. (1990). Cellular-automaton model of earthquakes with deterministic dynamics, *Phys. Rev. A*, **41**, pp. 7086-7089.

Nakanishi, H. (1991). Statistical properies of the cellular automaton model for earthquakes, *Phys. Rev. A*, **43**, pp. 6613-6621.

Nakanishi, H. (1992). Earthquake dynamics driven by a viscous fluid, *Phys. Rev. A*, **46** (8), pp. 4689-4692.

Narteau, C., Shebalin, P., Holschneider, M., Le Mouël, J. L., et Allègre, C. J. (2000). Direct simulations of the stress redistribution in the scaling organization of fracture tectonics (S.O.F.T.) model, *Geophys. J. Int.*, pp. sous presse.

Newman, M. E. J. et Sneppen, K. (1996). Avalanches, scaling, and coherent noise, *Phys. Rev. E*, **54**, pp. 6226-6231.

Nishenko, S. P. (1991). Circum-pacific seismic potential: 1989-1999, *Pure Appl. Geophys.*, **135**, pp. 169-259.

Olami, Z. et Christensen, K. (1992). Temporal correlations, universality, and multifractality in a spring-block model of earthquakes, *Phys. Rev. A*, **46** (4), pp. 1720-1723.

Olami, Z., Feder, H. J. S., et Christensen, K. (1992). Self-organized criticality in a continuous, non-conservative cellular automaton modeling earthquakes, *Phys. Rev. Lett.*, **68** (8), pp. 1244-1247.

Onsager, L. (1944). Crystal statistics: a two-dimensional model with an order-disorder transition, *Phys. Rev.*, **65**, pp. 117.

Otsuka, M. (1972). A simulation of earthquake reccurence, *Phys. Earth Planet. Int.*, **6**, pp. 311-315.

Ouillon, G. (1995). Application de l'analyse multifractale et de la transformée en ondelettes anisotropes à la caractérisation géométrique multi-échelle des réseaux de failles et de fractures, Université de Nice-Sophia Antipolis, Nice.

Ouillon, G. et Sornette, D. (1996). Unbiased multifractal analysis: Application to fault patterns, *Geophys. Res. Lett.*, **23** (23), pp. 3409-3412.

Pacheco, J. F., Sykes, L. R., et Scholz, C. H. (1992). Changes in frequency-size relationships from small to large earthquakes, *Nature*, **355**, pp. 71-73.

Papon, P., Leblond, J., et Meijer, P. H. E. (1999). *Physique des transitions de phase. Concepts et applications*, Dunod, Paris.

Parrish, J. K. et Edelstein-Keshet, L. (1999). Complexity, pattern, and evolutionary trade-offs in animal aggregation, *Science*, **284**, pp. 99-101.

Pepke, S. L. et Carlson, J. M. (1994). Predictability of self-organizing systems, *Phys. Rev. E*, **50** (1), pp. 236-242.

Petri, A., Paparo, G., Vespignani, A., Alippi, A., et Costantini, M. (1994). Experimental evidence for critical dynamics in microfracturing processes, *Phys. Rev. Lett.*, **73** (25), pp. 3423-3426.

Pietronero, L. et Schneider, W. R. (1991). *Phys. Rev. Lett.*, **66**, pp. 2336.

Räisänen, V. I., Alava, M. J., et Nieminen, R. M. (1998). Fracture of three-dimensional fuse networks with quenched disorder, *Phys. Rev. B*, **58** (21), pp. 14288-14295.

Rubeis, V., Hallglass, R., Loreto, V., Paladin, G., Pietronero, L., et Tosi, P. (1996). Slef-affine asperity model for earthquakes, *Phys. Rev. Lett.*, **76**, pp. 2599-2602.

Rubio, M. A. et Galeano, J. (1994). Stick-slip dynamics in the relaxation of stresses in a continuous elastic medium, *Phys. Rev. E*, **50**, pp. 1000-1004.

Rundle, J. B. (1989). Derivation of the complete Gutenberg-Richter magnitude-frequency relation using the principle of scale-invariance, *J. Geophys. Res.*, **94**, pp. 12337-12342.

Rundle, J. B. (1993). Magnitude-frequency relations for earthquakes using statistical mechanical approach, *J. Geophys. Res.*, **98**, pp. 21943-21949.

Rundle, J. B. et Brown, S. R. (1991). Origin of rate dependence in frictional sliding, édité , Plenum.

Rundle, J. B. et Jackson, D. D. (1977). Numerical simulation of earthquake sequences, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **67**, pp. 1363-1377.

Rundle, J. B. et Klein, W. (1989). *Phys. Rev. Lett.*, **63**, pp. 171.

Rundle, J. B. et Klein, W. (1992). Nonlinear dynamical models for earthquakes and frictional sliding: An overview, édité par Tillerson and Wewersik, Balkema, Rotterdam.

Rundle, J. B. et Klein, W. (1993). Scaling and critical phenomena in a cellular automaton slider-block model for earthquakes, *J. Stat. Phys.*, **72**, pp. 405-413.

Rundle, J. B. et Klein, W. (1995). Dynamical segmentation and rupture patterns in a "toy" slider-block model for earthquakes, *Nonlinear Process. Geophys.*, **2**, pp. 61-79.

Rundle, J. B., Klein, W., et Gross, S. (1996). Dynamics of a traveling density wave model for earthquakes, *Phys. Rev. Lett.*, **76**, pp. 4285-4288.

Rundle, J. B., Klein, W., et Gross, S. (1999). Physical basis for statistical patterns in complex earthquake populations: models, predictions and tests, *Pure Appl. Geophys.*, **155**, pp. 575-607.

Sahimi, M. (1995). *Flow and transport in porous media and fractured rock*, VCH, Weinheim.

Sammis, C. G. et Smith, S. W. (1999). Seismic cycles and the evolution of stress correlation in cellular automaton models of finite fault networks, *Pure Appl. Geophys.*, **155**, pp. 307-334.

Sammonds, P. et Ohnaka, M. (1998). Evolution of microseismicity during frictional sliding, *Geophys. Res. Lett.*, **25** (5), pp. 699-702.

Schmittbuhl, J., Vilotte, J. P., et Roux, S. (1996). A dissipation-based analysis of an earthquake fault model, *J. Geophys. Res.*, **101**, pp. 27741-27764.

Scholz, C. H. (1968). The frequency-magnitude relationship of microfracturing in rock and its relationships to earthquakes, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **58**, pp. 399-415.

Sethna, J. P., Dahmen, K., Kartha, S., Krumhansl, J. A., Roberts, B. W., et Shore, J. D. (1993). Hysteresis and hierarchies: Dynamics of disorder-driven first-order phase transformations, *Phys. Rev. Lett.*, **70** (21), pp. 3347-3350.

Shaw, B. (1993). Moment spectra in a simple model of an earthquake fault, *Geophys. Res. Lett.*, **20**, pp. 643-646.

Shaw, B. E. (1994). Complexity in a spatially uniform continuum fault model, *Geophys. Res. Lett.*, **21**, pp. 1983-1986.

Shimazaki, K. et Nakata (1980). Time-predictable recurrence model for large earthquakes, *Geophys. Res. Lett.*, **7**, pp. 279-282.

Shiner, J. S., Davison, M., et Landsberg, P. T. (1999). Simple measure of complexity, *Phys. Rev. E*, **59** (2), pp. 1459-1464.

Shnirman, M. G. et Blanter, E. M. (1999a). Mixed hierarchical model of seismicity: scaling and prediction, *Phys. Earth Planet. Int.*, **111**, pp. 295-303.

Shnirman, M. G. et Blanter, E. M. (1999b). Scale invariance and invariant scaling in a mixed hierarchical system, *Phys. Rev. E*, **60** (5), pp. 5111-5120.

Smalley, R. F., Chatelain, J. L., Turcotte, D. L., et Prévot (1987). A fractal approach to the clustering of earthquakes: Applications to the seismicity of the New Hebrides, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **77**, pp. 1368-1381.

Smalley, R. F., Turcotte, D. L., et Solla, S. A. (1985). A renormalization group approach to the stick-slip behavior of faults, *J. Geophys. Res.*, **90**, pp. 1894-1900.

Sornette, A. et Sornette, D. (1989). Self-organized criticality and earthquakes, *Europhys. Lett.*, **9** (3), pp. 197-202.

Sornette, D. (1994a). Power laws without parameter tuning: An alternative to self-organized criticality, *Phys. Rev. Lett.*, **72** (14), pp. 2306.

Sornette, D. (1994b). Sweeping of an instability: an alternative to self-organized criticality to get power laws without parameter tuning, *J. Phys. I France*, **4**, pp. 209-221.

Sornette, D. (1998). Discrete scale invariance and complex dimensions, *Phys. Reports*, **297**, pp. 239-270.

Sornette, D. (2000). *Critical phenomena in complex systems: concepts and tools for variability at many scales in natural sciences*, Springer-Verlag, in press.

Sornette, D. et Andersen, J. V. (1998). Scaling with respect to disorder in time-to-failure, *Eur. Phys. J. B*, **1**, pp. 353-357.

Sornette, D. et Cont, R. (1997). Convergent multiplicative processes repelled from zero: power laws and truncated power laws, *J. Phys. I France*, **7**, pp. 431-444.

Sornette, D., Knopoff, L., Kagan, Y. Y., et Vanneste, C. (1996). Rank-ordering statistics of exterme events: Application to the distribution of large earthquakes, *J. Geophys. Res.*, **101**, pp. 13883-13893.

Sornette, D., Miltenberger, P., et vanneste, C. (1994). Statistical physics of fault patterns self-organized by repeated earthquakes, *Pure Appl. Geophys.*, **142**, pp. 491-527.

Sornette, D., Miltenberger, P., et Vanneste, C. (1995). Statistical physics of fault patterns self-organized by repeated earthquakes: synchronization versus self-organized criticality, dans *Statistical mechanics and quantum field theory*, edité par P. Bouwknegt and al., World scientific, Los Angeles, pp. .

Sornette, D. et Sornette, A. (1999). General theory of the modified Gutenberg-Richter law for large seismic moments, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, pp. in press.

Sornette, D. et Vanneste, C. (1992). Dynamics and memory effects in rupture of thermal fuse networks, *Phys. Rev. Lett.*, **68**, pp. 612-615.

Sornette, D. et Vanneste, C. (1996). Faults self-organized by repeated earthquakes in a quasi-static antiplane crack model, *Nonlinear Process. Geophys.*, **3**, pp. 1-12.

Sousa Vieira, M. D. (1992). Self-organized criticality in a deterministic mechanical model, *Phys. Rev. A*, **46**, pp. 6288-6293.

Sousa Vieira, M. D. (1996a). Exponential distributions in a mechanical model for earthquakes, *Phys. Rev. E*, **54**, pp. 5925-5928.

Sousa Vieira, M. D. (1996b). Presence of chaos in a self-organized critical system, *Phys. Rev. E*, **53**, pp. 1441-1445.

Sousa Vieira, M. D., Vasconcelos, G. L., et Nagel, S. R. (1993). Dynamics of spring-block model: tuning to criticality, *Phys. Rev. E*, **47**, pp. 2221-2224.

Stanley, H. E. (1971). *Introduction to phase transitions and critical phenomena*, Oxford University Press, London.

Stauffer, D. (1990). Physics and geometry: the theory of finite size scaling, dans *Correlations and connectivity*, édité par H. E. Stanley and N. Ostrowsky, Kluwer Academic, Netherlands, pp. 3-20.

Stauffer, D. et Aharony, A. (1994). *Introduction to percolation theory*, Taylor and Francis.

Steacy, S. J. et McCloskey, J. (1999). Heterogeneity and the earthquake magnitude-frequency distribution, *Geophys. Res. Lett.*, **26** (7), pp. 899-902.

Syropoulos, C., Griffith, W. J., Scholz, C. H., et Shaw, B. E. (1999). Experimental evidence for different strain regimes of crack populations in a clay model, *Geophys. Res. Lett.*, **26** (8), pp. 1081-1084.

Takayasu, H. et Matsuzaki, M. (1988). Dynamical phase transition in threshold elements, *Phys. Lett. A*, **131**, pp. 244-247.

Tang, C. (1997). Numerical simulation of progressive rock failure and associated seismicity, *Int. J. Rock. Mech.*, **34** (2), pp. 249-261.

Tebaldi, C., Menech, M. D., et Stella, A. L. (1999). Multifractal scaling in the Bak-Tang-Wiesenfeld sandpile and edge events, *Phys. Rev. Lett.*, **83** (19), pp. 3952-3955.

Turcotte, D. L. (1989). Fractals in geology and geophysics, *Pure Appl. Geophys.*, **131** (1/2), pp. 172-196.

Turcotte, D. L. (1992). *Fractals and chaos in geology and geophysics*, Cambridge University press, New York.

Tzschichholz, F. et Herrmann, H. J. (1995). Simulations of pressure fluctuations and acoustic emission in hydraulic fracturing, *Phys. Rev. E*, **51** (3), pp. 1961-1970.

Unger, C. et Klein, W. (1984). *Phys. Rev. B*, **29**, pp. 2698.

Urbancic, T. I., Trifu, C. I., Long, J. M., et Toung, R. P. (1992). Space-time correlations of *b* values with stress release, *Pure Appl. Geophys.*, **139**, pp. 449-462.

Vere-Jones, D. (1977). *Mathematical geology*, **9**, pp. 455-481.

Vespignani, A. et Zapperi, S. (1998). How self-organized criticality works: A unified mean-field picture, *Phys. Rev. E*, **57** (6), pp. 6345-6362.

Vinogradov, S. D. (1962). Experimental study of the distribution of the number of fractures in respect to the energy liberated by the destruction of rocks, *Izv. Geophys. Ser.*, pp. 171-180.

Vives, E., Ortin, J., Manosa, L., Rafols, I., Pérez-Magrané, R., et Planes, A. (1994). Distributions of avalanches in martensitic transformations, *Phys. Rev. Lett.*, **72** (11), pp. 1694-1697.

Vives, E., Rafols, I., Manosa, L., Ortin, J., et Planes, A. (1995). Statistics of avalanches in martensitic transformations. I. Acoustic emission experiments, *Phys. Rev. B*, **52** (17), pp. 12644-12650.

Volant, P. et Grasso, J. R. (1994). The finite extension of fractal geometry and power law distribution of shallow earthquakes: a geochemical effect, *J. Geophys. Res.*, **99**, pp. 21879-21889.

Volant, P. et Scotti, O. (1998). Deviations from critical state: a case study in the western Alps, dans *AGU Fall Meeting*, San Francisco, pp. .

Wang, J. H. (1995). Effect of seismic coupling on the scaling of seismicity, *Geophys. J. Int.*, **121**, pp. 475-488.

Wang, J. W. (1996). Velocity-weakening friction as a factor in controlling the frequency-magnitude relation of earthquakes, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **86**, pp. 701-713.

Wang, J. W. (1997). Effect of frictional healing on the scaling of seismicity, *Geophys. Res. Lett.*, **24**, pp. 2527-2530.

Weeks, J., Lockner, D., et Byerlee, J. (1978). Changes in *b*-values during movement on cut surfaces in granite, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **68** (2), pp. 333-341.

Weiss, J. et Grasso, J. R. (1997). Acoustic emission in single crystals of ice, *Journal of Chemical Physics B*, **101**, pp. 6113-6117.

Weiss, J., Lahaie, F., et Grasso, J. R. (2000). Statistical analysis of dislocation dynamics during viscoplastic deformation from acoustic emission, *J. Geophys. Res.*, **105**, pp. 433-442.

Wesnousky, S. G. (1994). The Gutenberg-Richter or characteristic earthquake distribution, which is it?, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **84**, pp. 1940-1959.

Widom, B. (1963). *J. Chem. Phys.*, **43**, pp. 3898.

Wilson, K. G. (1992). Les phénomènes de physique et les échelles de longueur, dans *L'ordre du chaos*, édité , Pour la science, Paris.

Wilson, K. G. et Kogut, J. (1974). The renormalization group and the ε expansion, *Phys. Reports*, **12**, pp. 75-200.

Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

Titre de l'ouvrage :

Pertinence du formalisme des transitions de phase pour aborder la mécanique des objets géologiques.

Auteur :

Franz LAHAIE

Etablissement :

Observatoire de Grenoble
Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique

Résumé :

Dans ce travail de thèse, nous avons entrepris une analyse rigoureuse du concept de transition de phase et de sa pertinence pour aborder la dynamique non linéaire et invariante d'échelle des objets géologiques. En particulier, nous tentons de définir clairement les ingrédients nécessaires et les implications d'un état critique pour un système, et étudions dans quelle mesure ces ingrédients sont compatibles avec les caractéristiques géomécaniques des objets géologiques. Nous passons également en revue les approches récemment proposées pour aborder la rupture des matériaux, la déformation de la croûte ou le glissement sur une faille, en terme de transition de phase. Nous portons notre intérêt non seulement sur le concept d'état critique, mais aussi sur d'autres mécanismes susceptibles de générer des lois d'échelle.
Nous utilisons ensuite ce formalisme pour étudier trois exemples concrets : la mécanique des éruptions dans un volcan, la fracturation d'un réservoir d'hydrocarbure et la déformation viscoplastique d'un échantillon de glace. La variété de ces exemples illustre la généralité et la puissance d'analyse du concept de transition de phase pour aborder la mécanique des objets géologiques.
D'abord, nous proposons pour les volcans basaltiques un modèle de réservoir composé d'un grand nombre de lentilles de magma en interaction, dans lequel une éruption résulterait d'un phénomène de cascade initié par de faibles perturbations. Ce modèle est en accord avec les données du Piton de la Fournaise. Ensuite, nous isolons sur un site d'extraction d'hydrocarbure l'effet d'une variation basse fréquence de la vitesse de chargement du milieu sur son mode de fracturation (diffus/localisé). Nous discutons les implications de cet effet tant en termes industriels que pour la mécanique des séismes. Enfin, nous montrons que la déformation viscoplastique d'un matériau par mouvements de dislocations peut s'interpréter, comme la déformation cassante, dans le cadre des transitions de phase.

Mots clés : Transitions de phase, état critique, criticalité auto-organisée, automates cellulaires, mécanique de la déformation, rupture, facturation induite, volcans, dislocations.