



**HAL**  
open science

# Écoulements d'un fluide dans une cavité en précession : approches numérique et expérimentale

Jerome Noir

► **To cite this version:**

Jerome Noir. Écoulements d'un fluide dans une cavité en précession : approches numérique et expérimentale. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2000. Français. NNT: . tel-00745620v1

**HAL Id: tel-00745620**

**<https://theses.hal.science/tel-00745620v1>**

Submitted on 26 Oct 2012 (v1), last revised 9 Aug 2014 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**OBSERVATOIRE DE GRENOBLE**  
et  
**LABORATOIRE DE GÉOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE**

**Thèse**

présentée par

**Jérôme NOIR**

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I**

**Spécialité: Géophysique - Géochimie - Géomécanique**

**Écoulements d'un fluide dans une cavité en précession:  
approches numérique et expérimentale.**

Date de soutenance : 17 novembre 2000

Composition du jury :

|                  |                       |   |
|------------------|-----------------------|---|
| Mme. C. Staquet  | présidente            | Professeur, Grenoble.                     |
| M. M. Rieutord   | rapporteur            | Professeur, Pau.                          |
| M. J. L. Lemouël | rapporteur            | Physicien, IPGP Paris.                    |
| M. D. Jault      | directeur de thèse    | Directeur de recherche au CNRS, Grenoble. |
| M. P. Cardin     | co-directeur de thèse | Chargé de recherche au CNRS, Grenoble.    |
| M. F. Busse      | examineur             | Professeur, Bayreuth.                     |
| M. K. Aldridge   | examineur             | Professeur, Toronto.                      |

Thèse de Doctorat de l'Université  
Joseph Fourier - Grenoble I

*Titre de l'ouvrage :*

Écoulements d'un fluide dans une cavité en  
précession:  
approches numérique et expérimentale.

*Auteur :*

Jérôme NOIR

*Etablissement :*

Observatoire de Grenoble  
Laboratoire de Géophysique Interne  
et Tectonophysique

*Résumé :* Nous savons aujourd'hui que le champ magnétique terrestre est créé au sein du noyau par des processus dynamo. Pour pouvoir comprendre la création et l'évolution de ce champ nous devons connaître la dynamique de la partie liquide du noyau terrestre.

Le soleil et la lune exercent sur la Terre un couple de gravité moyen entraînant un mouvement de précession de l'axe de rotation de notre planète. Comment le noyau liquide réagit-il à ce forçage luni-solaire? Pour pouvoir aborder cette question nous avons considéré un modèle physique simple constitué d'une cavité remplie d'eau dont nous imposons la vitesse de rotation et la vitesse de précession.

La première partie de ce travail porte sur une approche numérique du problème dans le cas particulier d'un conteneur sphérique, nous avons pu ainsi étudier le rôle de la viscosité. Nous montrons en particulier que l'écoulement laminaire se superposant à la rotation solide du fluide est contrôlé par une couche limite visqueuse localisée au voisinage de la paroi. Une étude détaillée nous a permis d'identifier des lois de comportement asymptotiques pour la vitesse.

Dans une seconde partie nous présentons l'expérience de précession CICERON au cours de laquelle nous nous sommes attachés d'une part à décrire le mouvement de rotation solide du fluide, d'autre part à caractériser les différents régimes d'écoulement secondaire. Nous proposons à l'issue de cette étude expérimentale que la principale source d'instabilité soit de type cisailante. Bien que nos connaissances ne soient pas encore suffisantes pour pouvoir décrire précisément la dynamique du noyau terrestre induite par la précession, nous pouvons penser d'après nos résultats que l'écoulement n'est certainement pas laminaire. D'autres études, notamment expérimentales, sont envisagées pour poursuivre ce travail.

*Mots Clefs :* Précession, Terre, noyau liquide, ondes inertielles, écoulement géostrophique, turbulence, instabilités, couche d'Ekman, couplages non-linéaires.

OBSERVATOIRE DE GRENOBLE  
et  
LABORATOIRE DE GÉOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE

Thèse

présentée par

Jérôme NOIR

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I

Spécialité: Géophysique - Géochimie - Géomécanique

Écoulements d'un fluide dans une cavité en précession:  
approches numérique et expérimentale.

Date de soutenance : 17 novembre 2000

Composition du jury :

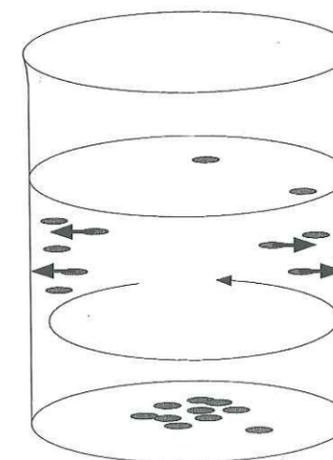
|                  |                       |   |
|------------------|-----------------------|---|
| Mme. C. Staquet  | présidente            | Professeur, Grenoble.                     |
| M. M. Rieutord   | rapporteur            | Professeur, Pau.                          |
| M. J. L. Lemouël | rapporteur            | Physicien, IPGP Paris.                    |
| M. D. Jault      | directeur de thèse    | Directeur de recherche au CNRS, Grenoble. |
| M. P. Cardin     | co-directeur de thèse | Chargé de recherche au CNRS, Grenoble.    |
| M. F. Busse      | examineur             | Professeur, Bayreuth.                     |
| M. K. Aldridge   | examineur             | Professeur, Toronto.                      |

A «Antoine Cardin the 4<sup>th</sup>», qui aura eu la gentillesse de bien vouloir attendre la fin de ce manuscrit pour pousser ses premiers cris...

## AVANT PROPOS

Il existe en physique des problèmes d'une grande simplicité apparente qui lorsque nous cherchons à les résoudre se révèlent être d'une grande richesse et d'une non moins grande complexité. C'est généralement le cas des fluides en rotation. Nous pourrions citer un grand nombre de situations où notre intuition est mise en défaut simplement par ce que «ÇA TOURNE!!!».

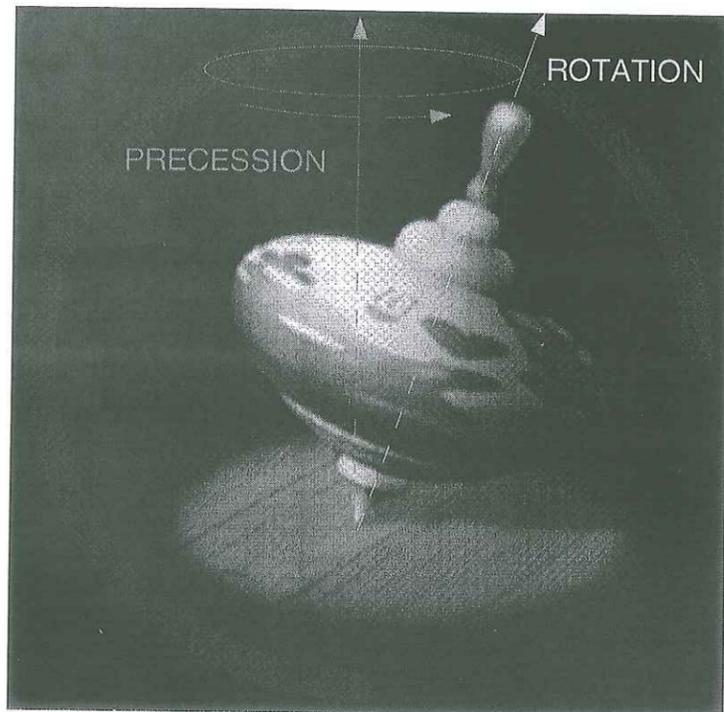
Un des exemples les plus connus et qui illustre parfaitement ces propos est celui de l'expérience de la tasse de thé. Le principe est simple, prenez un verre, transparent et si possible à fond plat, remplissez le avec de l'eau, ajoutez une pincée de thé (pas un sachet, du vrai thé), les feuilles de thé une fois mouillées sont plus denses que l'eau et tombent au fond de la tasse. Jusque là rien d'extraordinaire. Touillez à l'aide d'une cuillère, que se passe-t-il? S'il reste des feuilles de thé en volume elles vont être, comme nous pouvions l'imaginer, expulsées vers les bords sous l'effet de la force centrifuge. Si maintenant vous regardez ce qui se passe au fond du verre vous observerez que les feuilles de thé, toujours plus denses que l'eau, ont tendance à se regrouper au centre.



Il s'agit là d'un effet lié à la viscosité dans une fine couche située juste sur le fond du verre. Ce phénomène appelé «pompage» ou «suction» d'Ekman est omniprésent dans les fluides visqueux en rotation, nous verrons qu'il contrôle une grande partie de la dynamique des écoulements.

Le problème que nous nous proposons d'aborder dans cette thèse est un peu plus compliqué mais tout aussi surprenant.

Imaginons une toupie à l'intérieur de laquelle nous aurions creusé une cavité presque sphérique, remplissons cette dernière avec de l'eau et faisons tourner la dite toupie. Si l'axe de la toupie reste vertical il ne se produit rien de particulier, la toupie tourne sur elle même, sans plus. Que ce passe-t-il maintenant si nous basculons son axe de rotation ?



Le corps de la toupie se met à décrire dans l'espace ce que nous appelons un mouvement de précession. Il s'agit de la combinaison de la ROTATION propre de cet objet et du mouvement circulaire de son axe autour d'une direction verticale, appelée axe de précession. La question que nous nous posons est de savoir comment le fluide enfermé dans la cavité va se comporter. Va-t-il simplement suivre le mouvement du corps de la toupie ou bien existe-t-il un écoulement plus compliqué ? Nous verrons dans l'introduction de ce travail qu'il a fallu attendre la deuxième moitié du XX<sup>e</sup> siècle pour commencer à avoir des idées plus claires sur cette question, pourtant fort simple en apparence.

La compréhension de ce système est importante pour les géophysiciens, nous verrons au cours de ce travail qu'il existe une certaine ressemblance entre le comportement de cette «toupie fluide» et celui de notre planète.

## Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction générale</b>   | <b>7</b>  |
| 1.1      | Formulation mathématique   | 16        |
| 1.1.1    | Les différents référentiels :  | 19        |
| 1.1.2    | Le cas particulier d'un fluide non-visqueux.   | 22        |
| 1.1.3    | La limite des faibles viscosités.  | 31        |
| 1.2      | Les observations expérimentales.   | 43        |
| 1.2.1    | L'écoulement de Poincaré.  | 44        |
| 1.2.2    | L'écoulement secondaire.   | 45        |
| 1.3      | Plan du mémoire.   | 49        |
| <b>2</b> | <b>Approche numérique de la précession d'une cavité sphérique.</b>                             | <b>53</b> |
| 2.1      | Introduction   | 54        |
| 2.1.1    | La décomposition poloïdale-toroïdale du champ de vitesse.                                      | 55        |
| 2.1.2    | La décomposition des scalaires poloïdaux et toroïdaux sur la base des harmoniques sphériques : | 56        |
| 2.1.3    | Le problème de la précession.  | 60        |
| 2.1.4    | Le problème du spin-over.  | 64        |
| 2.2      | Résultats et discussion.   | 64        |
| <b>3</b> | <b>Approche expérimentale de la précession. (CICERON)</b>                                      | <b>91</b> |
| 3.1      | Introduction.  | 92        |
| 3.2      | Dispositif expérimental.   | 93        |
| 3.2.1    | Le conteneur.  | 96        |
| 3.2.2    | Motorisation.  | 97        |
| 3.2.3    | Transmission des données.  | 98        |
| 3.3      | Étude du mouvement de rotation en bloc.  | 98        |
| 3.3.1    | Visualisation directe de l'axe de rotation solide du fluide.                                   | 98        |
| 3.3.2    | Détermination de la direction du vecteur de rotation solide par une mesure de la pression.     | 102       |
| 3.3.3    | Discussion   | 113       |
| 3.4      | Étude de l'écoulement secondaire   | 118       |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.4.1    | Principe de la méthode. . . . .  | 118        |
| 3.4.2    | Dispositif expérimental. . . . .                                       | 118        |
| 3.4.3    | Résultats. . . . .   | 119        |
| 3.4.4    | Discussion. . . . .  | 129        |
| 3.5      | Conclusion. . . . .  | 139        |
| <b>4</b> | <b>Conclusion générale et perspectives. . . . .</b>                    | <b>143</b> |
| 4.1      | Conclusions. . . . .   | 144        |
| 4.2      | Perspectives expérimentales. . . . .                                   | 148        |
| 4.3      | Perspectives numériques. . . . .                                       | 152        |
| 4.4      | Le mot de la fin. . . . .  | 154        |
|          | <b>Annexes . . . . .</b>   | <b>142</b> |
| <b>A</b> | <b>Calcul de l'écoulement de rotation solide, Busse 1968 . . . . .</b> | <b>155</b> |
| A.1      | Principe de la détermination analytique : . . . . .                    | 156        |
| A.2      | Discussion . . . . .   | 157        |
| <b>B</b> | <b>Rappels sur les harmoniques sphériques. . . . .</b>                 | <b>163</b> |
| B.1      | Définitions . . . . .  | 163        |
| B.2      | Propriété d'orthogonalité. . . . .                                     | 163        |
| B.3      | Les fonctions associées de Legendre. . . . .                           | 164        |
| B.4      | Expression de quelques harmoniques sphériques. . . . .                 | 165        |
| B.5      | Les harmoniques sphériques forment une base. . . . .                   | 165        |
| <b>C</b> | <b>Le dioptrique cylindrique. . . . .</b>                              | <b>167</b> |
| C.1      | Calcul théorique de la déformation. . . . .                            | 167        |
| C.2      | Détermination expérimentale de la déformation. . . . .                 | 168        |

# Chapitre 1

## Introduction générale

Le problème simple d'une «toupie fluide» que nous avons présenté en Avant propos a été étudié principalement par deux communautés, l'aérospatiale et les sciences de la Terre.

Un moyen couramment utilisé pour stabiliser les trajectoires des satellites dans l'espace consiste à leur donner une composante de rotation propre. Le carburant liquide embarqué est alors entraîné en rotation par frottement sur les parois du réservoir. En l'absence de perturbation l'ensemble du système est en rotation solide. Lorsque pour diverses raisons le satellite est mis en mouvement, le changement de direction de l'axe de rotation entraîne une dissipation d'énergie mécanique dans le réservoir pouvant conduire à une modification majeure de la rotation du système et donc de sa stabilité. Cette dissipation interne d'énergie a motivé un certain nombre d'études aussi bien expérimentales que numériques. Certaines d'entre elles sont sorties du cadre spécifique des applications industrielles aérospatiales pour contribuer de manière significative à l'étude générale du problème de la dynamique d'une cavité fluide en précession (Vanyo et al. 1995[42]).

D'un point de vue géophysique le problème de la précession de l'axe de rotation de la Terre est beaucoup plus ancien. La première mesure de la précession est donnée par Hipparque de Nicée (II<sup>e</sup> siècle av. J.-C.) qui, travaillant à Alexandrie, a pu comparer ses observations astronomiques d'autres deux siècles plus anciennes, il en conclut que la sphère céleste (La Terre étant à l'époque supposée être au centre de l'univers) devait avoir un mouvement lent par rapport au plan de l'équateur terrestre. L'explication du mouvement de précession de l'axe de rotation de la Terre est donnée par Newton au début du XVIII<sup>e</sup> siècle (Deparis et Legros 2000). Il propose alors que l'attraction simultanée de la lune et du soleil sur le bourrelet équatorial de la Terre puisse entraîner un mouvement circulaire de l'axe de rotation du globe ( $\omega_c$ ) autour d'une direction perpendiculaire au plan de l'écliptique ( $\Omega_p$ ) (figure 1.1). Newton ne connaissant pas à l'époque les équations de rotation des corps, il faudra attendre 1749 avec les travaux de d'Alembert et d'Euler pour avoir les premières théories de la précession-nutation des corps rigides. Ces derniers démontrent en particulier que la période du mouvement dépend à la fois de l'amplitude du couple lunisolaire et des deux moments d'inertie de la Terre,  $C$  suivant l'axe de rotation principal et  $A$  suivant une direction équatoriale.

Sautons toute une partie de l'histoire jusqu'à nous retrouver au début du 20<sup>e</sup> siècle, les mathématiques et la physique ont beaucoup évolué depuis Newton, Euler et D'Alembert et le problème de la précession commence à être posé en termes différents. Le grand dilemme de l'époque était de savoir si le centre de la Terre était liquide ou solide. Kelvin dans un premier temps puis Poincaré à sa suite se sont intéressés au cas de la précession d'une cavité ellipsoïdale remplie d'un fluide incompressible non visqueux. La conclusion des travaux de Poincaré fut que pour un modèle de Terre liquide les périodes de nutation sont plus courtes

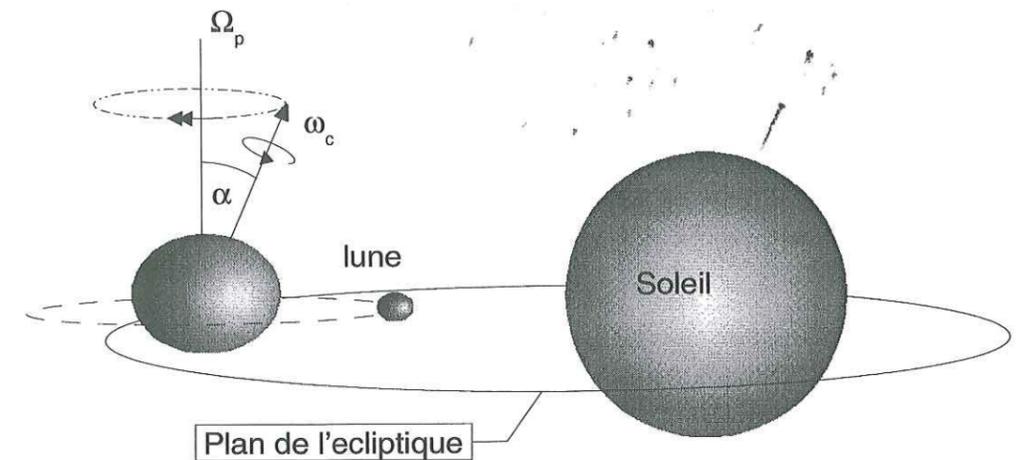


FIG. 1.1 – L'attraction lunisolaire responsable du mouvement de précession ( $\Omega_p$ ) de l'axe de rotation de la Terre ( $\omega_c$ ). Cette explication fut avancée pour la première fois par Newton au XVIII<sup>e</sup> siècle.  $\alpha = 23.5^\circ$ .

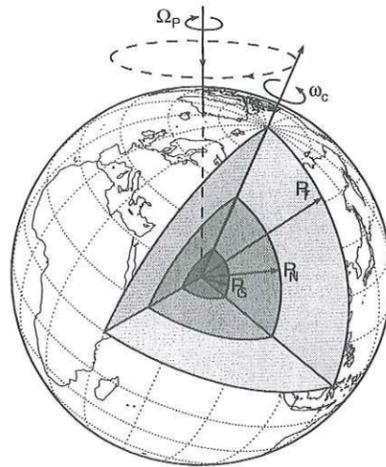


FIG. 1.2 – Coupe schématique de la structure de la Terre.  $R_T$ ,  $R_N$ ,  $R_G$  sont respectivement le rayon de la Terre, le rayon du noyau externe et le rayon de la graine. Les valeurs sont indiquées dans la table (1.1).

| $R_T$   | $R_N$   | $R_G$   | $\nu$                          | $\alpha$     | $\Omega_p^{-1}$ | $\omega_c^{-1}$ | $\eta$       |
|---------|---------|---------|--------------------------------|--------------|-----------------|-----------------|--------------|
| 6370 km | 3480 km | 1220 km | $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ | $23.5^\circ$ | 25800 ans       | 1 jour          | $\sim 1/400$ |

TAB. 1.1 – Quelques caractéristiques physiques et dynamiques de la Terre.

que pour un modèle de Terre solide, or les périodes observées par des méthodes astronomiques sont au contraire plus longues. Il conclut donc que la Terre doit être entièrement solide. Nous savons aujourd'hui que cet effet est lié à l'élasticité du manteau ainsi qu'à des échanges entre ce dernier et les océans ou l'atmosphère. Avec l'avènement de la géophysique moderne, nous avons une vision plus claire de la structure du globe, en particulier nous savons depuis 1926 avec les travaux de Harold Jeffreys qu'il existe un noyau liquide. La formulation mathématique du problème proposée par Poincaré reste néanmoins une référence. Il démontra en particulier que pour un fluide sans viscosité le mouvement induit en son sein par la précession de son conteneur était un écoulement de vorticités uniforme, résultat sur lequel s'appuie un grand nombre d'études de couplage entre le noyau et le manteau. Comme nous le verrons au cours de ce travail ce mode propre non-visqueux de la cavité fluide joue un rôle fondamental, c'est de lui que découle toute la dynamique du système.

Pour ce qui nous concerne, la Terre peut-être considérée comme une structure à trois couches, le manteau, le noyau liquide et la graine solide (figure 1.2).

La couche la plus externe, le manteau, d'une épaisseur de 2890 km est principalement constituée de silicates. Cette structure apparaît solide sur des échelles de temps courtes ( $\sim 1 \text{ jour}$ ). Cette approximation doit être révisée si nous considérons des constantes de temps plus longues, sur quelques milliers d'années le manteau peut être décrit comme un corps visco-élastique, sur plusieurs dizaines de milliers d'années il se comporte comme un fluide très visqueux. Dans le cadre de notre étude nous considérerons que ce dernier est solide, il pourra représenter le corps de la «toupie» que nous avons introduit en Avant propos. Le manteau est animé d'une vitesse de rotation autour de l'axe  $\omega_c$  avec une période de 24 heures et d'un mouvement de précession autour de l'axe  $\Omega_p$  avec une période de 25800 ans. (figure 1.2)

Le noyau, qui s'étend de 2900 km de profondeur jusqu'au centre de la Terre, peut être décomposé en deux sous-couches, le noyau externe et la graine. Le noyau externe est constitué de fer liquide et de 10 à 20% d'éléments moins denses. La viscosité cinématique du fer liquide aux pressions et températures du noyau

$$(130 \text{ GPa} < P < 330 \text{ GPa}) \quad (1.1)$$

$$(4000 \text{ K} \pm 1000 \text{ K} < T < 5000 \text{ K} \pm 1000 \text{ K}) \quad (1.2)$$

est sensiblement celle de l'eau ( $10^{-7} - 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ) à pression et température ambiante (Poirier 1988[25]). L'interface noyau-manteau est un ellipsoïde aplati au niveau des pôles, de révolution autour de l'axe principal de rotation du manteau, son ellipticité vaut  $\sim 1/400$ . Nous négligerons dans notre approche les irrégularités de la topographie de cette surface.

Enfin la structure la plus interne, la graine ou noyau solide, est constituée principalement de fer à l'état solide. Cette sphère dont le rayon actuel estimé à partir de données sismologiques est de 1220 km, soit 1/3 du rayon du noyau, continuerait à croître au cours du temps par cristallisation du fer liquide qui l'entoure. Cette cristallisation est à l'origine d'une composante importante de la dynamique du noyau liquide. Elle donne lieu d'une part à la libération d'éléments légers qui sous l'effet de la force d'Archimède vont entraîner une convection dite solutale, et d'autre part à la libération de chaleur latente à laquelle est associée une convection thermique.

Pour pouvoir appliquer un modèle simple comme celui d'une «toupie remplie de fluide», dont le mouvement de précession serait maintenu constant, à un objet aussi complexe que la Terre il nous faut faire certaines hypothèses supplémentaires.

Nous allons considérer par la suite le cas d'un fluide homogène et incompressible. Les variations de densité lorsque nous nous enfonçons dans le noyau (PREM : il existe un écart relatif de 2/11 entre la densité à l'interface noyau-manteau et celle à l'interface noyau externe-graine) sont telles que nous sommes

à la limite de l'approximation des fluides incompressibles, toutefois cette simplification encore raisonnable est en pratique nécessaire pour pouvoir aborder le problème d'un point de vue analytique.

Enfin le problème que nous avons abordé dans ce travail suppose que le volume fluide occupe l'ensemble du noyau, nous ne tiendrons pas compte de la présence d'une graine dans le système. Cette hypothèse doit être perçue comme une simplification permettant une première approche du système dynamique.

Il est aujourd'hui communément admis que le champ magnétique terrestre est créé par des processus dynamo au sein du noyau liquide. L'identification des mécanismes permettant de rendre compte de cette dynamo auto-entretenu est un des enjeux de la géophysique actuelle. Les simulations numériques récentes de dynamo magnéto-convective (Glatzmaier et Roberts 1995[5], Kuang et Bloxham 1999[16], Olson et al 1999[20]) ont montré que les écoulements associés à la convection pouvaient produire un champ magnétique principalement dipolaire, donc proche de celui que nous observons à la surface de la Terre. Bien que les paramètres introduit dans ces modèles restent loin de ceux du noyau, la convection reste le candidat le plus probable pour expliquer la dynamo terrestre. Il n'en reste pas moins que l'énergie disponible à travers le forçage précessionnel du manteau sur le noyau est a priori suffisante pour pouvoir entretenir une dynamo (Malkus 1994[18]). Cette condition n'est toutefois pas suffisante, la nature même de l'écoulement au sein du fluide doit être compatible avec les processus de création d'un champ magnétique.

En l'absence de précession le fluide tourne en bloc avec son conteneur, lorsque l'axe de ce dernier précesse il apparaît dans le fluide, comme l'a montré Poincaré (1910[24]), une composante de rotation solide du fluide perpendiculaire à l'axe de la coquille. Sous l'effet de la viscosité, cette composante de rotation équatoriale induit un écoulement secondaire se superposant au mouvement d'ensemble. Les études antérieures montrent qu'il existe plusieurs régimes d'écoulement secondaire, l'un laminaire, les autres plus ou moins turbulents. Le régime laminaire est constitué d'une part d'un mouvement oscillant à la fréquence de rotation d'ensemble du fluide et d'autre part d'un mouvement géostrophique stationnaire. Nous montrerons comment à partir d'une étude linéaire en géométrie sphérique nous pouvons estimer l'ordre de grandeur des vitesses qui leur sont associés (chapitre II). Une application directe de ce modèle simple au cas terrestre semble montrer que le nombre de Reynolds magnétique<sup>1</sup> associé à ces structures est trop petit pour qu'elles puissent jouer un rôle dans un processus dynamo. Les régimes turbulents sont beaucoup plus difficiles à appréhender d'un point de vue numérique ou analytique, nous devons alors avoir recours aux expériences pour les

<sup>1</sup>Le nombre de Reynolds magnétique  $R_m$  caractérise le rapport entre l'advection du champ magnétique par l'écoulement et sa diffusion liée au fait que le noyau n'est pas un conducteur parfait.

étudier. Nous présenterons dans le chapitre III une étude expérimentale au cours de laquelle nous avons exploré les différents régimes afin d'essayer d'identifier les grandeurs physiques caractérisant la transition de l'état laminaire vers l'état turbulent. Pour des raisons techniques, toutes ces expériences sont nécessairement loin des paramètres du noyau terrestre, or actuellement nos connaissances sont insuffisantes pour pouvoir trancher quant au régime dans lequel le noyau liquide doit se trouver.

Cette question a d'autres implications que la création du champ magnétique. Pais et al. (1999[22]) se sont intéressés aux mécanismes pouvant rendre compte de la forte variation de l'obliquité (angle entre l'axe de rotation de la Terre et le plan de l'écliptique) à laquelle serait associée la «glaciation paradoxale du Précambrien supérieur». Les auteurs concluent qu'en ne considérant que l'écoulement de rotation solide associé à la précession, les interactions entre le noyau liquide et le manteau ne peuvent expliquer une telle variation de la position de l'axe de rotation de la Terre par rapport au plan de l'écliptique. Pais et al. (1999[22]) posent alors la question de savoir si ce résultat resterait valable si l'écoulement lié à la précession était plus complexe, en particulier s'il était turbulent.

La précession n'est pas le seul mouvement de l'axe de rotation de la Terre par rapport à un référentiel d'inertie, il en existe de plus petite amplitude et de plus courte période appelés nutations (figure 1.3). Certaines de ces nutations résultent d'un forçage externe, d'autres, telles que la oscillation de Chandler ou la nutation libre du noyau («Free Core Nutation», ou FCN), sont associées à l'excitation de modes propres d'un système constitué du modèle simple de Terre à trois couches auquel nous devons rajouter l'atmosphère et les océans. En l'absence de forçage extérieur, ce système conserve son moment cinétique global  $H$ .

Considérons plus particulièrement le cas de la FCN. Cette nutation est associée à un mouvement de rotation solide du noyau liquide suivant un vecteur perpendiculaire à l'axe principal d'inertie du manteau  $\hat{e}_3^2$ . Ce mouvement solide est en fait le mode propre de tout système fluide non visqueux en rotation déjà décrit ci-dessus dans le cas de la précession. Ce mode peut être excité de multiples façons, circulation atmosphérique, tremblement de terre, etc... Il suffit simplement d'un mouvement de l'axe de rotation du manteau par rapport à celui du noyau pour lui donner naissance, la conservation du moment cinétique global  $H$  induit alors deux mouvements de l'axe de rotation instantané de la Terre, l'un par rapport à  $H$  dans le référentiel d'inertie, la FCN de période  $\sim 431$  jours<sup>3</sup>, et l'autre

<sup>2</sup> $\hat{e}_3$  est le vecteur unitaire suivant la direction de l'axe de symétrie de révolution du manteau.

<sup>3</sup>La période théorique de cette nutation est de 460 jours, celle observée est de 431 jours (Florsch et al. 1994 [4] à partir des données de gravimétrie, Jiang et Smylie 1995[12] à partir des données VLBI). Actuellement l'écart entre la valeur prédite et les observations est attribuée à l'ellipticité (1/390) utilisée dans les modèles. Une augmentation de 5% de cette dernière permet

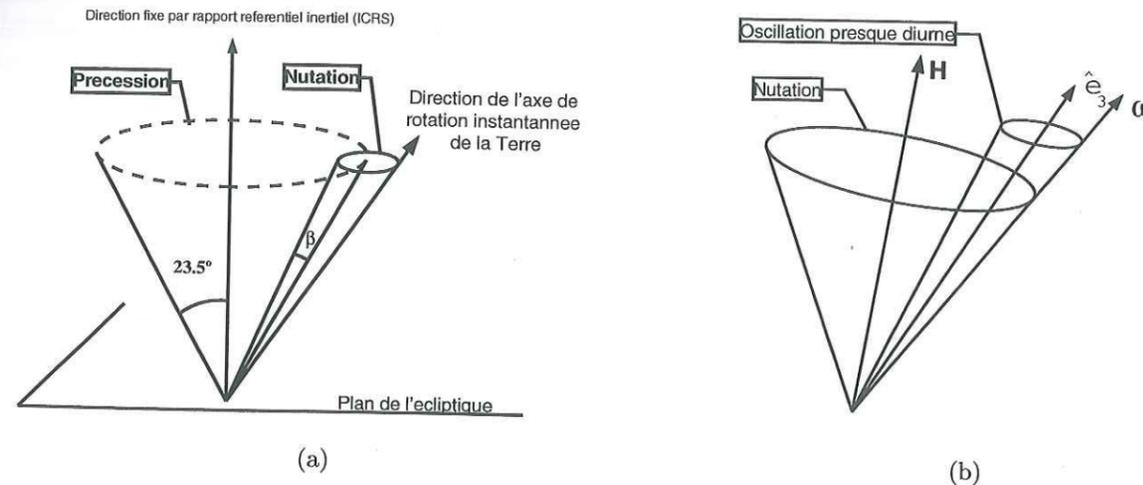


FIG. 1.3 – a) Les mouvements de nutation de l'axe de rotation instantané de la Terre se superposant à la précession. b) Le mouvement de nutation de période  $\sim 431$  jours et l'oscillation libre presque diurne (période  $\sim 1$  jour).

par rapport à l'axe d'inertie  $\hat{e}_3$  dans le référentiel du manteau (figure 1.3). Ce dernier d'amplitude beaucoup plus faible que la nutation (Toomre 1974[36]) est appelé oscillation libre presque diurne («Nearly Diurnal Free Wobble») (période  $\sim 1$  jour). Si d'un point de vue théorique cette oscillation presque diurne et la nutation associée étaient prédites depuis plus d'un siècle par Hough (1895[11]) et Poincaré (1910[24]), leur observation n'a été rendue possible que très récemment grâce au développement de techniques de mesure très précises des mouvements de l'axe de rotation de la Terre telles que le VLBI («Very Long Baseline Interferometry») <sup>4</sup> (Jiang et Smylie 1995[12]), et des méthodes d'observation des variations du champ de gravité utilisant les nouvelles générations de gravimètres supraconducteurs. L'analyse des données VLBI semble mettre en évidence des variations temporelles de l'amplitude de la FCN (Florsch et al. 1994[4], Roosbeek et al. 1999[29], Hinderer et al. 2000[9]) (figure 1.4).

Ces observations sont généralement interprétées en termes de variations du mode propre de rotation du noyau. Une augmentation de cette amplitude correspondant à une période d'excitation, une diminution à l'atténuation de ce mode par couplage visqueux et magnétique entre le noyau liquide et le manteau.

Les études théoriques portant sur la FCN supposent que le mode propre du

de rendre compte de la période mesurée.

<sup>4</sup>La méthode VLBI est basée sur l'observation depuis deux points très éloignés à la surface de la Terre d'une source radio lointaine telle qu'un quasar.

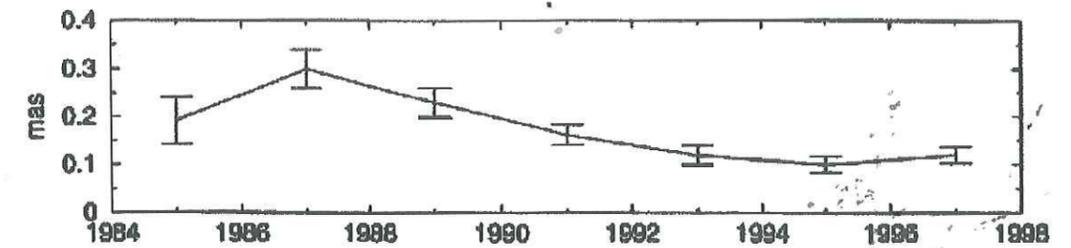


FIG. 1.4 – Variations temporelles de l'amplitude de la nutation libre du noyau obtenues à partir de l'analyse des données VLBI, (Hinderer et al. 2000[9]).

noyau peut être décrit comme un pur écoulement de vorticité uniforme, or comme nous venons de le mentionner la viscosité induit en volume un écoulement secondaire. Il est alors important de savoir dans quelle mesure nous pouvons négliger cette composante pour ne considérer que le mouvement principal.

Comme dans le cas de la précession, l'étude de la dynamique du noyau associée aux nutations peut être décomposée en deux parties :

1. Quelle est la rotation équatoriale au sein du noyau permettant de rendre compte des observations ?
2. Comment cette rotation équatoriale est-elle modifiée par la viscosité ? Ou dit autrement quel écoulement secondaire s'y superpose ?

Pour de faibles amplitudes du mode de rotation du noyau (petites au sens où nous pouvons négliger les effets non-linéaires dans l'écoulement secondaire), d'une part nous pouvons considérer séparément le problème de la précession et celui de la FCN, d'autre part l'approximation de mouvement de rotation solide permet de décrire correctement la dissipation visqueuse à l'interface noyau-manteau (Chapitre II), il n'en est probablement pas de même lorsque l'amplitude du mode devient assez grande et que l'écoulement secondaire est turbulent. Les travaux récents de Greff-Lefftz et Legros (1999[7]) suggèrent qu'il y ait pu y avoir dans l'histoire de la Terre des épisodes géologiques majeurs corrélés avec des périodes d'excitation anormalement grandes des modes de rotation du noyau dues à des phénomènes de résonance avec certaines nutations lunisolaires. Selon ces auteurs l'amplitude de la rotation solide pourrait alors atteindre <sup>5</sup>  $\sim 0.032^\circ$  soit  $10^4$  fois sa valeur actuelle et ce sur des périodes de l'ordre du million d'années. La rotation équatoriale induite par la précession du manteau étant de l'ordre de  $0.00027^\circ$  (Greff-Lefftz et Legros 1999[7]) devient alors inférieure à celle associée à la nutation. Qu'en est-il de la dynamique du noyau dans ces conditions, l'écoulement

<sup>5</sup>Nous appelons ici amplitude l'angle entre l'axe d'inertie  $\hat{e}_3$  du manteau et le vecteur rotation solide totale du fluide ( $\omega$ ), l'oscillation presque diurne correspond alors à la projection de ce vecteur dans le plan équatorial ( $\omega \sin(0.032^\circ)$ ).

est-il laminaire ou turbulent ? Nos connaissances actuelles des paramètres caractérisant la transition de l'écoulement secondaire d'un état laminaire vers un état turbulent ne nous permettent pas de répondre à cette question.

Indépendamment de ses implications directes sur la dynamique du noyau liquide, la précession apparaît donc comme un moyen d'étudier le comportement d'un mode propre particulier du noyau impliqué dans les problèmes de nutations.

Nous verrons apparaître au fur et à mesure de ce travail les paramètres pertinents du problème de la précession. Leurs valeurs pour le noyau de la Terre restent inaccessibles aussi bien numériquement qu'expérimentalement. La démarche que nous avons suivie dans ce travail consiste alors à chercher des lois d'échelle caractérisant la dynamique du système en fonction de ces paramètres et de proposer d'extrapoler nos résultats au cas terrestre lorsque cela nous semblait raisonnable.

### 1.1 Formulation mathématique

Considérons un fluide homogène de densité  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$  remplissant une sphère rigide de rayon  $R$ . Le conteneur est animé d'un mouvement de rotation rapide selon un vecteur  $\hat{k}_c$  à la fréquence  $\omega_c$ , et d'un mouvement de précession autour du vecteur  $\hat{k}_p$  à la fréquence  $\Omega_p$ . La position relative des vecteurs rotation  $\hat{k}_c$  et  $\hat{k}_p$  est caractérisée par l'angle  $\alpha$  comme indiqué sur la figure (1.5). Les variables de temps et d'espace sont adimensionnées respectivement par  $\omega_c^{-1}$  et  $R$ . Nous introduisons ici le nombre d'Ekman qui apparaît dans les équations comme une viscosité adimensionnée (section 1.1).

$$E = \frac{\nu}{\omega_c R^2}. \quad (1.3)$$

Physiquement, ce nombre mesure le rapport entre les effets visqueux et les effets associés à la force de Coriolis. Pour des questions de clarté, nous avons conservé dans toute la suite les mêmes notations pour les grandeurs adimensionnées que précédemment, de sorte que la vitesse angulaire adimensionnée  $\Omega_p$  est en fait le rapport des grandeurs vraies  $\frac{\Omega_p}{\omega_c}$ , de même le vecteur rotation  $\omega_c$  adimensionné s'écrit simplement  $\hat{k}_c$ .

Pour pouvoir décrire ce problème d'un point de vue mathématique il est nécessaire de choisir un référentiel dans lequel nous allons pouvoir écrire les équations fondamentales de la dynamique des fluides. Ce choix n'est pas trivial, certains référentiels peuvent apparaître utiles du point de vue de la résolution numérique ou analytique sans être pour autant les plus adaptés à une compréhension physique du système.

Considérons le référentiel inertiel, qui dans les expériences correspondrait au référentiel du laboratoire. Soit  $U_i$  et  $P_i$ , la vitesse et la pression du fluide dans

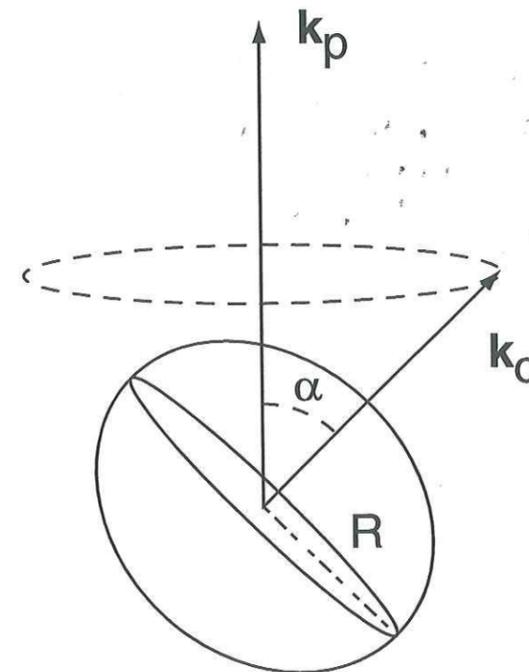


FIG. 1.5 – Le conteneur, rempli d'un fluide homogène et incompressible, est animé d'un mouvement de rotation rapide selon le vecteur  $\hat{k}_c$  à la fréquence  $\omega_c$ , et d'un mouvement de précession autour du vecteur  $\hat{k}_p$  à la fréquence  $\Omega_p$ . La position relative des vecteurs rotation  $\hat{k}_c$  et  $\hat{k}_p$  est caractérisée par l'angle  $\alpha$ .

ce référentiel, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + \mathbf{U}_i \cdot \nabla \mathbf{U}_i = -\nabla P_i + E\Delta \mathbf{U}_i. \quad (1.4)$$

Le fluide étant supposé incompressible, la conservation de la masse s'exprime par :

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_i = 0. \quad (1.5)$$

Afin de tenir compte des propriétés visqueuses du fluide et de rigidité du conteneur nous imposons sur la surface de la sphère des conditions de non glissement et de non pénétration :

$$\mathbf{U}_i = (\Omega_p + \hat{\mathbf{k}}_c) \times \mathbf{r}. \quad (1.6)$$

Dans ce référentiel nous pouvons décrire le mouvement de précession de l'axe de rotation du conteneur par :

$$\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{k}}_c}{\partial t}\right)_i = (\Omega_p \times \hat{\mathbf{k}}_c), \quad (1.7)$$

où l'indice «i» fait référence au référentiel d'inertie.

Avant d'aller plus loin dans la description des équations, nous voudrions revenir sur la justification de notre approche de la précession aussi bien numérique qu'expérimentale. Fondamentalement nous allons nous reposer l'idée que pour décrire l'écoulement au sein du noyau sous l'effet du couple lunisolaire s'appliquant sur la Terre, il suffit de se donner le mouvement du manteau, c'est à dire l'état d'équilibre pour lequel nous connaissons la vitesse de précession, le vecteur rotation propre de la Terre et l'angle que fait ce dernier avec le plan de l'écliptique.

Chaque élément de volume  $dV$  du noyau liquide est soumis à une force d'attraction lunisolaire  $\mathbf{F}$  de sorte que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + \mathbf{U}_i \cdot \nabla \mathbf{U}_i = -\nabla P_i + \frac{\mathbf{F}}{\rho} + E\Delta \mathbf{U}_i, \quad (1.8)$$

où  $P_i$  est la pression du fluide. Or l'attraction lunisolaire dérivant d'un potentiel de gravitation  $\Phi$  (Pais 1999[21]) nous pouvons réécrire l'équation (1.8),

$$\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + \mathbf{U}_i \cdot \nabla \mathbf{U}_i = -\nabla \left( P_i - \frac{\Phi}{\rho} \right) + E\Delta \mathbf{U}_i. \quad (1.9)$$

Qu'il s'agisse des calculs numériques ou des expériences en laboratoire, le rôle de l'attraction lunisolaire est alors joué par la pression. Les équations étant identiques, les écoulements que nous pourrions trouver en imposant le mouvement du manteau sont ceux correspondant au problème géophysique. Dans les expériences, où nous n'avons pas de couple de gravitation, l'énergie introduite dans le noyau liquide par le couple lunisolaire, est fournie par les deux moteurs permettant de maintenir constante, la vitesse de rotation du conteneur et le taux de précession.

### 1.1.1 Les différents référentiels :

D'une manière très générale nous pouvons considérer un référentiel tournant attaché à un vecteur rotation quelconque  $\omega_r$  de l'espace dont la direction peut dépendre du temps. Pour transformer les équations fondamentales de la dynamique du référentiel inertiel vers ce référentiel tournant nous utilisons la propriété suivante sur les dérivées temporelles :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r + \omega_r \times \cdot, \quad (1.10)$$

où l'indice «r» caractérise les grandeurs propres au référentiel tournant. En appliquant cette relation au vecteur position  $\mathbf{r}$  nous obtenons l'exemple le plus intuitif de cette relation :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)_i = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)_r + \omega_r \times \mathbf{r}, \quad (1.11)$$

soit,

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_r + \omega_r \times \mathbf{r}. \quad (1.12)$$

En utilisant cette règle nous pouvons réécrire les équations (1.4, 1.5) dans le référentiel tournant :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{U}_r}{\partial t} + \mathbf{U}_r \cdot \nabla \mathbf{U}_r\right) + 2\omega_r \times \mathbf{U}_r + \omega_r \times (\omega_r \times \mathbf{r}) + \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial t}\right)_i \times \mathbf{r} = -\nabla P_r + \nu \Delta \mathbf{U}_r \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_r = 0. \quad (1.14)$$

La condition aux limites s'écrit alors :

$$\mathbf{U}_r = (\hat{\mathbf{k}}_c + \Omega_p - \omega_r) \times \mathbf{r}. \quad (1.15)$$

Il apparaît dans ce référentiel trois nouvelles accélérations, la «force» centrifuge ( $\omega_r \times (\omega_r \times \mathbf{r})$ ), la force de Coriolis ( $2\omega_r \times \mathbf{U}_r$ ), et la force de Poincaré ( $\left(\frac{\partial \omega_r}{\partial t}\right)_i \times \mathbf{r} = (\Omega_p \times \omega_r) \times \mathbf{r}$ ).

L'accélération de Coriolis est omniprésente en mécanique des fluides en rotation rapide, rares sont les situations où elle ne joue aucun rôle. Ses effets sont généralement mieux connus des enfants que des adultes. En effet cette force est celle que nous ressentons lorsqu'étant sur une plateforme en rotation, un tourniquet par exemple, nous cherchons à nous déplacer, les enfants ne tiennent pas en place... Si nous voulons nous rapprocher du centre (figure 1.6) la «force» de Coriolis va nous déséquilibrer dans le même sens que la rotation (vers la droite pour une rotation anti horaire). De la même manière elle influence à chaque instant le trajet des particules du fluide.

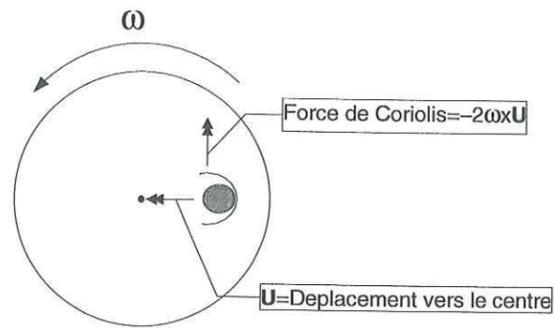


FIG. 1.6 – Illustration de l'effet de la force de Coriolis. Si nous voulons nous rapprocher du centre la «force» de Coriolis va nous déséquilibrer dans le même sens que la rotation (vers la droite pour une rotation anti-horaire).

La «force» de Poincaré est quant à elle indépendante des mouvements de chaque particule, elle s'apparente à une force gyroscopique mais au lieu de s'appliquer à un ensemble de molécules solidement liées elle s'applique à chaque particule du fluide. Pour de faible taux de précession elle apparaît parfois localement négligeable (voir section 1.1.3.1) devant les autres accélérations, en revanche le couple volumique qui lui est associé reste toujours un élément important dans les équilibres fondamentaux (voir sections 1.1.2.1, 1.1.3.2).

L'accélération centrifuge qui est généralement la plus connue des trois ne joue pratiquement aucun rôle dans la dynamique de l'écoulement. Pour les fluides homogènes que nous considérons, elle apparaît en fait comme un gradient de pression.

En utilisant la propriété vectorielle suivante :

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (1.16)$$

avec,

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{r}, \quad (1.17)$$

Le gradient de vitesse d'une rotation solide étant nul suivant une ligne de courant, nous pouvons exprimer l'accélération centrifuge sous la forme :

$$(\boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{r})) = -\nabla \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{r} \right)^2 \quad (1.18)$$

nous introduisons alors la pression réduite  $\pi$ , définie par :

$$\pi = P + \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{r} \right)^2. \quad (1.19)$$

Deux référentiels tournants apparaissent naturellement dans ce problème, il s'agit du référentiel du conteneur d'une part et du référentiel attaché au vecteur précession d'autre part.

En remplaçant  $\boldsymbol{\omega}_r$  par  $\boldsymbol{\omega}_c + \boldsymbol{\Omega}_p$  dans (1.13), nous obtenons l'équation du mouvement dans le référentiel du conteneur,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + 2 (\hat{\mathbf{k}}_c + \boldsymbol{\Omega}_p) \times \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} + (\boldsymbol{\Omega}_p \times \hat{\mathbf{k}}_c) \times \mathbf{r} = -\nabla \pi + E \Delta \mathbf{U} \quad (1.20)$$

Avec comme conditions aux limites :

$$\mathbf{U} = 0. \quad (1.21)$$

Le mouvement du fluide reste au premier ordre dans le cas de la sphère une pure rotation solide autour d'un vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  fixe dans le référentiel de précession. Ce dernier référentiel semble alors le plus adapté à la description de ce mouvement primaire. En identifiant  $\boldsymbol{\omega}_r$  à  $\boldsymbol{\Omega}_p$  dans (1.13), l'accélération de Poincaré disparaît formellement du problème et nous obtenons pour l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + 2 \boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla \pi + E \Delta \mathbf{U} \quad (1.22)$$

Les conditions aux limites restent stationnaires,

$$\mathbf{U} = \hat{\mathbf{k}}_c \times \mathbf{r}. \quad (1.23)$$

Enfin en anticipant sur la suite de notre étude, si nous cherchons à caractériser l'écoulement secondaire se superposant à la rotation solide du fluide, le référentiel le plus naturel est alors celui attaché au vecteur rotation propre du fluide ( $\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_p$ ), nous obtenons l'expression de l'équation du mouvement dans le référentiel du fluide :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + 2 (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_p) \times \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_p) \times \mathbf{r} = -\nabla \pi + E \Delta \mathbf{U} \quad (1.24)$$

Avec cette fois ci des conditions aux limites qui dépendent du temps à travers le vecteur rotation du conteneur,

$$\mathbf{U} = (\hat{\mathbf{k}}_c(t) - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}. \quad (1.25)$$

### 1.1.2 Le cas particulier d'un fluide non-visqueux.

#### 1.1.2.1 L'écoulement de Poincaré.

Poincaré au début du siècle propose une méthode particulièrement élégante pour résoudre le problème avec une viscosité nulle. Plaçons nous dans le référentiel de précession, considérons le repère (Ox,Oy,Oz) tel que Oz soit aligné avec l'axe du conteneur et Ox soit dans le plan défini par les vecteurs  $(\hat{k}_c, \hat{k}_p)$ . Poincaré (1910[24]) propose de ne considérer que ce qu'il appelle des mouvements simples, c'est à dire tels que les composantes  $(U_x, U_y, U_z)$  de la vitesse soit des combinaisons linéaires des coordonnées. Il montre alors que si une solution est simple à un instant donné elle le restera. La démarche suivie par Poincaré consiste alors à utiliser la transformation de l'espace permettant de passer de l'ellipsoïde à une sphère «virtuelle». En prenant comme équation de l'ellipsoïde :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1, \quad (1.26)$$

nous voyons immédiatement que la transformation géométrique de l'ellipsoïde vers la sphère est une dilatation des coordonnées suivant les trois directions d'espace. Nous obtenons ainsi une correspondance entre les coordonnées d'un point de l'ellipsoïde  $(x, y, z)$  et celles de son point image dans la sphère  $(x', y', z')$  :

$$\begin{aligned} x' &= x/a, \\ y' &= y/a, \\ z' &= z/c. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Le temps restant invariant par cette transformation la vitesse d'une particule fictive de la sphère s'écrit :

$$\begin{aligned} U'_x &= U_x/a, \\ U'_y &= U_y/a, \\ U'_z &= U_z/c. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Le premier résultat de Poincaré est que l'hypothèse d'un écoulement simple conduit dans la sphère à une solution de rotation solide pour les particules «fictives».

$$\mathbf{U}' = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}', \quad (1.29)$$

Où  $\boldsymbol{\omega}'$  est un vecteur quelconque pouvant dépendre du temps. En appliquant la transformation géométrique en sens inverse nous obtenons un champ de vitesse dans l'espace physique.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{a}{c}\omega'_y z - \omega'_z y \\ \omega'_z x - \frac{a}{c}\omega'_x z \\ \frac{c}{a}\omega'_x y - \frac{c}{a}\omega'_y x \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Nous allons maintenant chercher les écoulements simples solutions de notre problème, c'est à dire solutions de l'équation d'Euler (1.22 avec  $E = 0$ ) et vérifiant les conditions aux limites de non pénétration, ce type d'écoulement est généralement appelé écoulement de Poincaré. La formulation Lagrangienne établie par Poincaré étant assez longue nous proposons ici de suivre la démarche proposée par Andréas Tilgner dans sa thèse d'habilitation (1999[33]).

Soit  $\boldsymbol{\omega}$  la vorticité de l'écoulement ( $\mathbf{U}$ ),

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)\omega'_x \\ \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)\omega'_y \\ 2\omega'_z \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Le vecteur  $\boldsymbol{\omega}'$  étant indépendant des coordonnées d'espace  $(x', y', z')$ , la vorticité  $\boldsymbol{\omega}$  est uniforme. En utilisant (1.31) et (1.30) nous pouvons exprimer une solution quelconque  $\mathbf{U}$  en fonction des trois composantes de la vorticité  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ .

Le rotationnel de l'équation d'Euler déduite de (1.22) en posant  $E = 0$ , conduit alors au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \omega_x - \frac{\eta}{\eta+2} \omega_z \omega_y - 2 \frac{\eta+1}{\eta+2} \omega_y \Omega_{p,z} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \omega_y - \frac{\eta}{\eta+2} \omega_z \omega_x - \omega_z \Omega_{p,x} + 2 \frac{\eta+1}{\eta+2} \omega_x \Omega_{p,z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_z + \frac{2}{\eta+2} \omega_y \Omega_{p,x} = 0$$

où  $\eta = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$  est l'ellipticité du conteneur,  $(\Omega_{p,x}, 0, \Omega_{p,z})$  sont les coordonnées du vecteur précession dans le repère (Ox,Oy,Oz). Nous voyons alors qu'à tout vecteur de rotation solide  $\boldsymbol{\omega}'$  dans la sphère virtuelle correspond une vorticité uniforme de l'écoulement dans le sphéroïde dont la dépendance en temps est donnée par le système (1.32).

Considérons le cas particulier des solutions stationnaires. En imposant  $\partial/\partial t = 0$  dans le système (1.32) nous obtenons directement d'après l'équation en «z» que  $\omega_y = 0$ . L'équation suivant «x» est alors automatiquement vérifiée. Physiquement cela signifie que l'axe de rotation solide du fluide  $\boldsymbol{\omega}$  est toujours dans le plan  $(\hat{k}_c, \hat{k}_p)$ .

Pour une précession non nulle ( $\Omega_{p,x} \neq 0$ ) le système (1.32) se réduit à,

$$\omega_x \left( \frac{\eta}{\eta+2} \omega_z + 2 \frac{\eta+1}{\eta+2} \Omega_{p,z} \right) = \omega_z \Omega_{p,x}. \quad (1.33)$$

Quelque soit  $\omega_z$  tel que  $\omega_z \neq -2(\eta + 1)\Omega_{p,z}/\eta$ , il existe une solution  $\omega_x$  vérifiant l'équation (1.33).

La vitesse  $\mathbf{U}$  s'écrit alors (Malkus 1994[18]) :

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \nabla\psi. \quad (1.34)$$

Où  $\nabla\psi$  est l'écoulement irrotationnel permettant d'assurer la condition de non pénétration aux bords, nous obtenons l'expression de cette grandeur à partir de (1.30) et (1.34). En utilisant une formulation vectorielle (Tilgner 1999[33]),

$$\psi = \frac{-(\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{k}}_c)\eta}{(\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{k}}_c)\eta + 2(1 + \eta)\Omega_p \cdot \hat{\mathbf{k}}_c} (\Omega_p \times \hat{\mathbf{k}}_c) \cdot \mathbf{r} (\hat{\mathbf{k}}_c \cdot \mathbf{r}) \quad (1.35)$$

Il existe alors une infinité de solutions stationnaires de vorticité uniforme au problème non-visqueux. Une première approximation dans la limite des faibles taux de précession, ce qui est le cas de la Terre, consiste à poser  $\omega_z = 1$ . En considérant les paramètres du noyau terrestre (table 1.1) nous obtenons la composante de rotation équatoriale adimensionnée  $\omega_x = 1.7 \cdot 10^{-5}$ .

Comme nous le verrons par la suite, dans le cas général, il est nécessaire de réintroduire la viscosité pour réduire le nombre de solutions du système, voir garantir l'unicité dans certaines conditions (Busse 1968[2]).

### 1.1.2.2 Les ondes inertielles.

Dans la limite des faibles ellipticités l'écoulement  $\mathbf{U}$  stationnaire dans le référentiel de précession peut être décrit principalement comme une rotation solide  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ . Nous proposons ici de voir comment une perturbation de faible amplitude se superposant à cette rotation solide se propage dans le système.

Nous pouvons distinguer deux classes de perturbations, celles de grande longueur d'onde pour lesquelles le volume est considéré comme fini et celles de petite longueur d'onde pour lesquelles nous faisons l'hypothèse que les parois sont repoussées à l'infini. Nous ne discuterons pas dans cette section la première classe de solutions.

Considérons un volume infini de fluide homogène, incompressible et non visqueux en rotation autour d'un axe  $\boldsymbol{\omega}$ . L'amplitude  $\varepsilon$  de la perturbation que nous allons considérer est supposée suffisamment petite pour que nous puissions négliger les termes d'ordre  $O(\varepsilon^2)$ . En posant,

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{u} \quad (1.36)$$

Dans le référentiel tournant attaché à  $\boldsymbol{\omega}$  l'équation d'Euler et la conservation de la masse s'écrivent d'après (1.13) et (1.14) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla\pi, \quad (1.37)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.38)$$

Ces équations admettent des solutions en ondes planes de la forme (Greenspan 1968[6]),

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda t)}, \quad (1.39)$$

$$\pi = \pi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda t)}, \quad (1.40)$$

$\mathbf{k}$  étant le vecteur d'ondes et  $\lambda$  la fréquence. L'équation du mouvement (1.37) nous permet d'obtenir la relation de dispersion de ces ondes,

$$\lambda = \pm 2\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \pm 2\omega \cos(\theta) \quad (1.41)$$

où  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$  est la direction du vecteur d'onde,  $k$  le nombre d'onde et  $\theta$  est l'angle entre  $\hat{\mathbf{k}}$  et  $\boldsymbol{\omega}$ . Nous voyons d'après la relation de dispersion que de telles solutions en ondes planes n'existe que si,

$$|\lambda| < 2\omega. \quad (1.42)$$

En introduisant (1.39) dans (1.38), nous obtenons que ces ondes planes sont transverses,

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0. \quad (1.43)$$

La vitesse de groupe correspondant à la vitesse de propagation de l'énergie dans le système est (Greenspan 1968[6]),

$$\mathbf{V}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \lambda = 2 \frac{\hat{\mathbf{k}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{k}})}{k}. \quad (1.44)$$

Ceci traduit le fait que dans les fluides incompressibles l'énergie associée à ces ondes se propage perpendiculairement au vecteur d'onde.

La vitesse de phase correspondant à la vitesse suivant  $\hat{\mathbf{k}}$  à laquelle il faut se déplacer pour que la phase  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda t)$  reste constante est alors,

$$\mathbf{V}_p = 2 \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{k}}}{k} \hat{\mathbf{k}}. \quad (1.45)$$

**Les surfaces caractéristiques.** Il existe dans de tels systèmes des surfaces particulières appelées surfaces caractéristiques le long desquelles une discontinuité de la vitesse parallèle à ces dernières peut se propager. Soit  $\delta \mathbf{u}(t)$  le saut de vitesse de part et d'autre d'une surface caractéristique en un point de l'espace. Nous pouvons définir le saut de vitesse normale  $\delta \mathbf{u}_\perp$  et le saut de vitesse tangentielle  $\delta \mathbf{u}_\parallel$  à cette surface par,

$$\delta \mathbf{u}_\perp = (\delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.46)$$

$$\delta \mathbf{u}_{//} = \delta \mathbf{u} - (\delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.47)$$

Les surfaces caractéristiques sont telles que le saut d'accélération inertielle ( $\partial \delta \mathbf{u}_{//} / \partial t$ ) de part et d'autre est équilibré par le saut de l'accélération de Coriolis ( $2\boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{u}_{//}$ ). Dans le cadre des ondes planes que nous avons considéré, l'équation (1.37) est de type hyperbolique, les surfaces caractéristiques sont alors des cônes de révolution autour de la direction  $\boldsymbol{\omega}$  dont le demi-angle au sommet est défini par :

$$\cos(\theta) = \lambda / 2\omega. \quad (1.48)$$

La direction selon laquelle une perturbation peut se propager dépend donc de sa fréquence.

Il existe le long des cônes caractéristiques une variation de l'amplitude de la vitesse. Introduisons le système de coordonnées cylindriques  $(s, \phi, z)$  associé au repère  $(\hat{\mathbf{e}}_s, \hat{\mathbf{e}}_\phi, \hat{\mathbf{e}}_z)$  tel que  $\hat{\mathbf{e}}_z = \boldsymbol{\omega} / \omega$ . En négligeant les variations de la vitesse le long de la caractéristique devant les variations perpendiculaires (ce qui en volume fini suppose que la longueur d'onde de la perturbation est petite devant la taille caractéristique du système) Rieutord et Valdettaro (1997[26]) ont démontré que la vitesse divergeait comme  $1/\sqrt{s}$  quand  $s \rightarrow 0$ .

Dans le cas particulier  $\lambda = 0$  les surfaces caractéristiques sont des cylindres alignés avec l'axe de rotation solide du fluide  $\boldsymbol{\omega}$ . En prenant le rotationnel de l'équation d'Euler (1.37) avec  $\lambda = 0$  ( $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$ ) nous obtenons pour la vitesse le long d'un cylindre caractéristique,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0. \quad (1.49)$$

Cette équation est généralement connue sous le nom de condition de Proudman-Taylor. Elle traduit le fait que dans les systèmes en rotation une perturbation stationnaire localisée tend à acquérir une structure en colonne le long de laquelle l'écoulement est invariant, l'accélération de Coriolis est alors en équilibre avec le gradient de pression. Les cylindres caractéristiques sont alors appelés cylindres géostrophiques. La vitesse étant parallèle aux surfaces caractéristiques  $u_s = 0$ , si nous imposons à l'infini une condition de non pénétration ( $u_z(\infty) = 0$ ), nous déduisons alors par conservation de la masse,

$$\frac{\partial}{\partial \phi} u_\phi = 0. \quad (1.50)$$

L'écoulement est alors purement azimutal et axisymétrique. La condition que nous obtenons est en fait plus forte que le théorème de Proudman-Taylor habituel qui n'impose pas a priori de dépendance sur les composantes  $u_\phi$  et  $u_s$ .

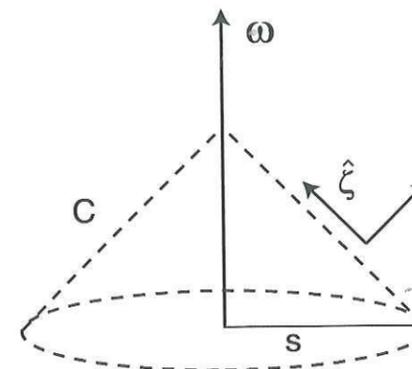


FIG. 1.7 – Définition du repère associé au cône caractéristique  $C$ .

La «rigidification» de l'écoulement induit par une perturbation stationnaire apparaît donc comme un cas particulier de la propagation d'une perturbation quelconque le long des surfaces caractéristiques.

Soit  $(\zeta, \xi, \phi)$  le système de coordonnées local attaché à un cône caractéristique  $C$  (figure 1.7).

En nous déplaçant sur la caractéristique  $C$  à  $\phi$  constant nous pouvons écrire une condition analogue à la condition de Proudman-Taylor pour une perturbation de fréquence quelconque  $0 < |\lambda| < 2\omega$ ,

$$(\hat{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \nabla) \mathbf{u} \propto \frac{1}{\sqrt{s}}. \quad (1.51)$$

**Réflexion des ondes inertielles sur une paroi.** Les propriétés de réflexion de ces ondes sont très différents de celles des ondes acoustiques ou électromagnétiques. Lors d'une réflexion d'une onde plane inertielle sur un «mur» il y a conservation de l'angle entre  $\boldsymbol{\omega}$  et  $\hat{\mathbf{k}}$  (figure 1.8).

$$\hat{\mathbf{k}}_1 \times \boldsymbol{\omega} = \hat{\mathbf{k}}_2 \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1.52)$$

où les indices «1» et «2» désignent respectivement l'onde incidente et l'onde réfléchie. Il existe alors une situation particulière lorsque (Greenspan 1968[6]),

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \pm \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{k}}_1, \quad (1.53)$$

pour laquelle  $\hat{\mathbf{k}}_2$  et  $\hat{\mathbf{n}}$  sont alors colinéaires. La vitesse  $\mathbf{u}_2$  associée à l'onde réfléchie est dans ces conditions parallèle à la surface.

Cette approche des perturbations en terme d'ondes inertielles conserve un sens en volume fini si la longueur d'onde de la perturbation reste petite devant la taille

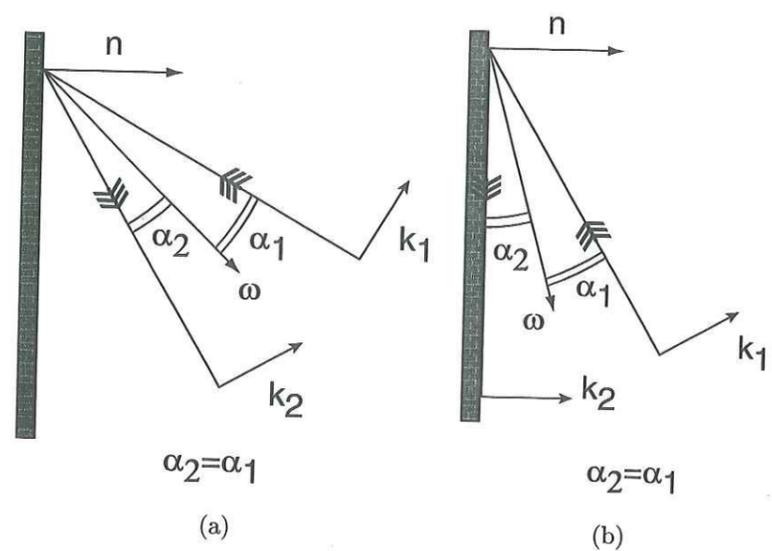


FIG. 1.8 – Propriétés de réflexion des ondes planes inertielles non visqueuses. Lors d'une réflexion d'une onde plane inertielle sur un «mur» il y a conservation de l'angle entre  $\omega$  et  $\hat{k}_1$ . a) Cas d'une ondes réfléchi dans le volume, b) Cas d'une onde réfléchi «absorbée» à la surface.

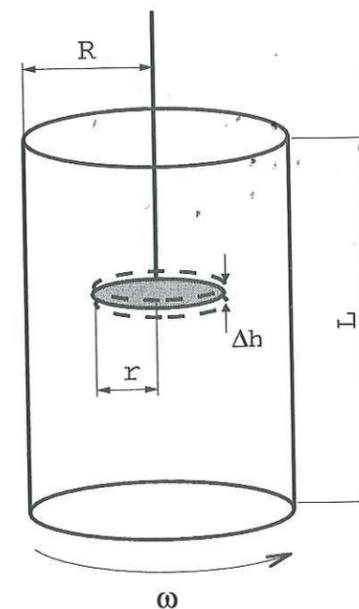


FIG. 1.9 – Schéma de principe de l'expérience de Görtler (1957[8]). Un cylindre ( $L * R$ ) rempli de fluide est en rotation rapide autour de son axe de symétrie à la fréquence  $\omega$ . Un disque horizontal de rayon  $r \ll R$  est animé dans le référentiel tournant d'un mouvement vertical d'amplitude  $\Delta h$ .

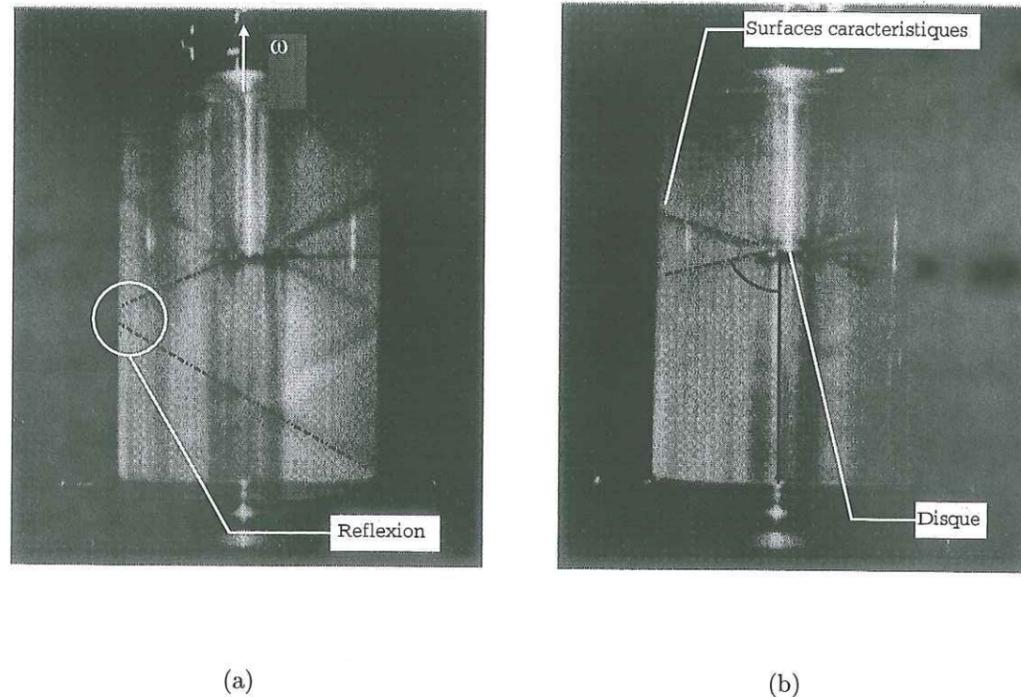


FIG. 1.10 – Ondes inertielles générées par les oscillations verticales d'un disque dans le plan équatorial d'un cylindre en rotation. a)  $\frac{\lambda}{\omega} = 1.75$  le demi angle au sommet mesuré est de  $59^\circ$  pour une valeur théorique de  $56^\circ$ . b) le demi angle au sommet augmente avec le rapport  $\frac{\lambda}{\omega}$ . (Görtler 1957[8])

caractéristique du système. Nous pouvons illustrer l'ensemble de ces propriétés par les résultats de l'expérience de Görtler (1957[8]), dans laquelle un cylindre ( $L * R$ ) rempli d'eau est en rotation rapide autour de son axe de symétrie à la fréquence  $\omega$ . Un disque horizontal de rayon  $r < R$  est animé, dans le référentiel tournant, d'un mouvement vertical d'amplitude infinitésimale  $\Delta h \ll (L, R)$  à la fréquence  $\lambda$  (figure 1.9). En faisant varier le rapport  $\lambda/\omega$  Görtler met en évidence les propriétés que nous venons de décrire sur les ondes inertielles à savoir que la perturbation reste localisée sur les surfaces caractéristiques, que le demi-angle au sommet des cônes caractéristiques dépend de la fréquence d'excitation  $\lambda$ . (figure 1.10). Cette expérience illustre également les propriétés de réflexion des ondes inertielles sur les parois.

### 1.1.3 La limite des faibles viscosités.

#### 1.1.3.1 La couche d'Ekman

Une démarche classique en mécanique des fluides consiste à négliger la viscosité en volume lorsque celle-ci est assez faible et à ne considérer les effets visqueux que dans une couche limite localisée sur la paroi. Négliger les effets visqueux en volume ne veut pas dire que la viscosité elle-même est très petite, mais que le terme dissipatif qui apparaît dans les équations ( $E\Delta U$ ) est localement négligeable devant les autres. En disant cela nous faisons une hypothèse sur la forme même de l'écoulement en volume, en particulier nous supposons qu'il n'y a pas de cisaillement fort sur des petites échelles. Physiquement ces couches limites se développent lorsqu'il existe en volume un écoulement primaire  $U$  qui ne vérifie pas les conditions aux limites de non-glissement. À ces couches est alors associé un écoulement  $\tilde{u}$  tel que sur la paroi :

$$U + \tilde{u} = U_{paroi} \quad (1.54)$$

Les couches limites ne sont pas propres aux écoulements en rotation, cependant l'apparition de l'accélération de Coriolis ( $2\omega \times \tilde{u}$ ) dans l'équilibre des forces pour un système en rotation leur confère des propriétés particulières, elles sont alors appelées couches d'Ekman. De nombreux exemples sont donnés dans la littérature (Greenspan 1968[6], Tritton 1988[37]), pour un écoulement primaire stationnaire dans le référentiel en rotation. Lorsque l'écoulement  $\tilde{u}$  est petit nous pouvons négliger les effets non linéaires devant la force de Coriolis, la dynamique de la couche est alors déterminée par un équilibre entre l'accélération de Coriolis, le gradient de pression et le terme de dissipation visqueuse. L'épaisseur naturelle de ces couches stationnaires est  $(\frac{\nu}{\omega})^{1/2}$ . Par conservation de la masse il existe alors un écoulement proportionnel à  $|U - U_{paroi}| E^{1/2}$  allant de la couche limite vers l'intérieur du fluide perpendiculairement à la paroi, appelé «suction» ou «pompage d'Ekman».

Le cas de la précession est un peu particulier, l'écoulement non visqueux est comme nous l'avons vu principalement une rotation solide autour d'un axe  $\omega$  différent de celui de la coquille, il existe de ce fait une couche limite visqueuse permettant de raccorder la vitesse en volume à celle de la paroi. Dans le référentiel de rotation solide du fluide, l'axe de rotation de la coquille tourne dans le sens rétrograde à la fréquence  $\omega$ . La condition au limite (1.54) nous montre que l'écoulement de couche limite doit alors avoir la même dépendance temporelle que la rotation du conteneur dans ce référentiel, c'est à dire :

$$\tilde{u} \propto e^{-i\omega t} \quad (1.55)$$

Supposons que la forme du conteneur soit sphérique, il s'agit ici d'une simplification nous permettant de décrire analytiquement de manière simple la résolution

du problème de couche limite, les conclusions restent justes dans la limite des faibles ellipticités. La démarche mathématique classique consiste d'une part à supposer que la vitesse varie plus rapidement perpendiculairement que parallèlement à la couche ( $\partial/\partial r \gg (\partial/\partial \theta, \partial/\partial \phi)$ ) et d'autre part que les composantes tangentes de la vitesse sont grandes devant la composante normale ( $\tilde{u}_r \ll (\tilde{u}_\theta, \tilde{u}_\phi)$ ). La couche d'Ekman ainsi obtenue est d'épaisseur  $E^{1/2}$  partout sauf pour certaines colatitudes critiques définie par

$$\cos(\theta_c) = \pm 1, \theta_c = 60, 120^\circ, \quad (1.56)$$

pour lesquelles elle devient infiniment épaisse, le pompage d'Ekman est alors divergeant. La condition vectorielle générale (pas simplement pour le cas d'une sphère) définissant les colatitudes critiques est,

$$\lambda = \pm 2\omega \cdot \hat{n}. \quad (1.57)$$

Cette discontinuité est liée au fait qu'il existe pour ces colatitudes un équilibre entre l'accélération inertielle ( $\partial \tilde{u}/\partial t$ ) et l'accélération de Coriolis, étant données les hypothèses du calcul le terme de dissipation ne peut plus être équilibré.

En réalité il existe une variation rapide de la vitesse à la fois suivant  $\hat{r}$  et suivant  $\hat{\theta}$  autour de la colatitude critique. Nous proposons en nous appuyant sur la démarche suivie par Roberts et Stewartson (1963[27]) d'obtenir la valeur finie du pompage d'Ekman et la variation de la structure de la couche autour des colatitudes critiques.

Nous considérons pour cela un conteneur sphérique en rotation suivant  $\hat{k}_c$ , le fluide est supposé en rotation solide autour de  $\omega$ . Soit  $\tilde{u}$  l'écoulement de couche limite permettant de raccorder la rotation solide du fluide à celle du conteneur.

$$\tilde{u} = (\omega - \hat{k}_c) \times \mathbf{r}. \quad (1.58)$$

Nous supposons que l'écart entre la rotation du fluide et celle de la coquille est faible de sorte que les termes non-linéaires restent négligeables devant la force de Coriolis. Le système de coordonnées sphériques que nous utilisons est représenté sur la figure (1.11). Les hypothèses du calcul sont les suivantes :

1.  $\Omega_p \ll 1$ , nous négligeons la contribution de la précession lente à l'accélération de Coriolis dans l'équation du mouvement (1.24). D'autre part, pour une précession nulle, le fluide et le conteneur tournent en bloc suivant  $\hat{k}_c$ . Nous supposons que pour de faibles taux de précession l'écart entre l'axe du fluide et celui de la coquille reste petit,

$$\varepsilon = |(\omega - \hat{k}_c) \times \mathbf{r}| \ll 1. \quad (1.59)$$

La condition aux limites (1.58) nous conduit à,

$$\tilde{u}_{\theta, \phi} = O(\varepsilon), \quad (1.60)$$

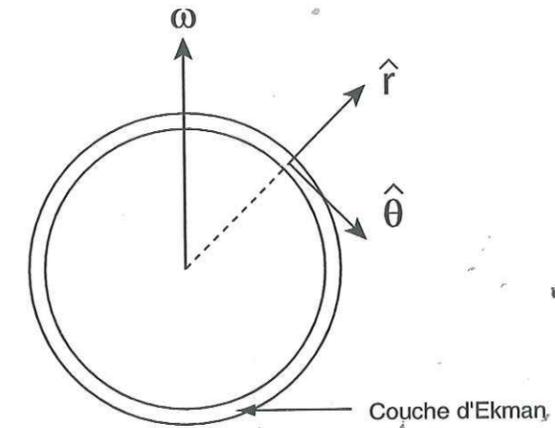


FIG. 1.11 – Définition du système de coordonnées sphériques utilisé pour le calcul de la structure de la couche limite autour de  $\theta_c$ . L'épaisseur de la couche étant petite devant la taille caractéristique du système nous pouvons considérer  $r = cte = 1$ . La direction du vecteur unitaire  $\hat{\phi}$  est définie par  $\hat{\phi} = \hat{r} \times \hat{\theta}$ .

En négligeant les termes d'ordre  $O(\varepsilon^2)$  dans l'équation du mouvement (1.24) nous ne considérerons pas les effets non-linéaires.

2. Les dérivées en  $r$  et  $\theta$  sont grandes devant celle en  $\phi$  (Roberts et Stewartson 1963[27]) :

$$\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta} \gg \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (1.61)$$

De plus nous supposons,

$$\frac{\partial}{\partial r} = O(E^{-p}), \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = O(E^{-q}). \quad (1.62)$$

avec,  $1/2 > p > q > 0$ . Nous ne retiendrons donc que les dérivées secondes radiales suivant  $r$  pour le Laplacien.

3. La dépendance en temps de  $\tilde{u}$  est donnée par

$$\tilde{u} \propto e^{-i\omega t}.$$

L'équation de conservation de la masse se met sous la forme,

$$\frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}_r + \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{u}_\theta = 0. \quad (1.63)$$

Nous en déduisons  $\tilde{u}_r = O(E^{p-q})$ ,  $p$  étant supérieur à  $q$  nous négligerons les termes d'ordre  $O(E^{2(p-q)})$ .

Nous nous plaçons dans le référentiel du fluide, les trois composantes de l'équation du mouvement (1.24) s'écrivent,

$$-i\omega\tilde{u}_r - 2\omega\tilde{u}_\phi \sin(\theta) = E \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{u}_r - \frac{\partial}{\partial r} \tilde{\pi}, \quad (1.64)$$

$$-i\omega\tilde{u}_\theta - 2\omega\tilde{u}_\phi \cos(\theta) = E \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{u}_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{\pi} - ((\Omega_p \times \omega) \times \mathbf{r}) \cdot \hat{\theta}, \quad (1.65)$$

$$-i\omega\tilde{u}_\phi + 2\omega(\cos(\theta)\tilde{u}_\theta + \sin(\theta)\tilde{u}_r) = E \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{u}_\phi - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \tilde{\pi} - ((\Omega_p \times \omega) \times \mathbf{r}) \cdot \hat{\phi}. \quad (1.66)$$

L'approche classique conduisant à une discontinuité consiste à ce stade d'une part à négliger  $\tilde{u}_r$  devant  $\tilde{u}_\theta$  d'autre part à négliger  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  devant  $\frac{\partial}{\partial r}$ . Ces simplifications seraient valables loin des colatitudes critiques, c'est à dire pour  $(1 \pm 2 \cos(\theta) \neq 0)$ .

L'approche suivie par Roberts et Stewartson (1963[27]) pour résoudre la discontinuité consiste alors à développer l'équation du mouvement autour de  $\theta = \theta_c$  en tenant compte des dérivées dans la direction  $\theta$ .

D'après (1.62),  $\frac{\partial}{\partial \phi} \tilde{\pi} \ll \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{\pi}$ , or  $\tilde{u}_\phi$  étant du même ordre de grandeur que  $\tilde{u}_\theta$  nous pourrions négliger le gradient de pression dans l'équation (1.66), nous en déduisons  $\tilde{\pi} = O(E^{1-2p+q}\tilde{u}_{\phi,\theta})$ .

Considérons les deux termes de droite de l'équation suivant  $\mathbf{r}$  (1.64),

$$E \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{u}_r = O(E^{1-p-q}\tilde{u}_{\phi,\theta}), \quad (1.67)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \tilde{\pi} = O(E^{1-3p+q}\tilde{u}_{\phi,\theta}). \quad (1.68)$$

donc,

$$\frac{E \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{u}_r}{\frac{\partial}{\partial r} \tilde{\pi}} = O(E^{2(p-q)}). \quad (1.69)$$

Nous pourrions donc négliger le terme visqueux devant le gradient de pression dans l'équation (1.64).

En appliquant  $\partial/\partial r$  à (1.65) et (1.66), en utilisant (1.64) pour éliminer le gradient de pression et (1.63) pour éliminer  $\tilde{u}_r$ , nous obtenons

$$i\omega \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{u}_r - i\omega \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}_\theta - 2\omega \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}_\phi + 2\omega \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{u}_\phi = E \frac{\partial^3}{\partial r^3} \tilde{u}_\theta, \quad (1.70)$$

$$-i\omega \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}_\phi + 2\omega \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}_\theta - 2\omega \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{u}_\theta = E \frac{\partial^3}{\partial r^3} \tilde{u}_\phi. \quad (1.71)$$

$\mathbf{r}$  pouvant être considéré comme constant nous négligeons les variations radiales de l'accélération de Poincaré. De plus, d'après (1.62) et (1.63)

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{u}_r}{\frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}_\theta} = O(E^{2(p-q)}), \quad (1.72)$$

nous pourrions donc négliger le terme  $\frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{u}_r$  dans l'équation (1.70). En prenant  $(i \cdot (1.70) + (1.71))$  et  $((1.70) + i \cdot (1.71))$ , nous trouvons,

$$\omega \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}_\pm \pm 2\omega \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}_\pm \pm 2\omega \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{u}_\pm = iE \frac{\partial^3}{\partial r^3} \tilde{u}_\pm \quad (1.73)$$

avec,

$$\tilde{u}_\pm = \tilde{u}_\theta \pm i\tilde{u}_\phi, \quad (1.74)$$

Pour obtenir un développement autour de  $\theta_c$ , posons  $\theta = \theta_c + \delta\theta$ , avec

$$\delta\theta = O(E^q). \quad (1.75)$$

Le terme d'ordre  $O(1)$  en  $\delta\theta$  de l'accélération de Coriolis  $(2\omega/\cos(\theta_c) \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}_\pm)$  étant équilibré par l'accélération inertielle  $(\frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}_\pm)$  nous devons pousser le développement à l'ordre  $O(\delta\theta)$  pour obtenir une détermination unique de  $p$  et  $q$ .

L'équation (1.73) devient ainsi,

$$\pm 2\omega \sin(\theta_c) \delta\theta \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}_\pm = -iE \frac{\partial^3}{\partial r^3} \tilde{u}_\pm \pm 2\omega \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{u}_\pm. \quad (1.76)$$

En utilisant (1.62) et (1.75) la condition nécessaire et suffisante pour que ces trois termes puissent s'équilibrer est,

$$p = \frac{2}{5}, \quad q = \frac{1}{5}.$$

A partir de l'équation de conservation de la masse nous obtenons,

$$\tilde{u}_r = O(\varepsilon E^{1/5}). \quad (1.77)$$

Nous regroupons l'ensemble des caractéristiques de cette couche limite sur le schéma (1.12). Les zones situées autour des colatitudes critiques sont généralement appelées éruptions de la couche d'Ekman.

### 1.1.3.2 Modification de l'écoulement en volume par la viscosité.

En l'absence de viscosité le mouvement du fluide est comme nous l'avons vu une rotation solide autour d'un axe  $\omega$  fixe dans le référentiel de précession plus une composante irrotationnelle  $\nabla\phi$  (1.34). Il existe alors une infinité de solutions  $(\omega, \phi)$  telles que l'équilibre entre le couple inertiel et le couple de pression soit respecté. Le fait de réintroduire la viscosité induit comme nous l'avons vu une recirculation en volume. Ce pompage d'Ekman est alors susceptible de modifier l'écoulement en volume.

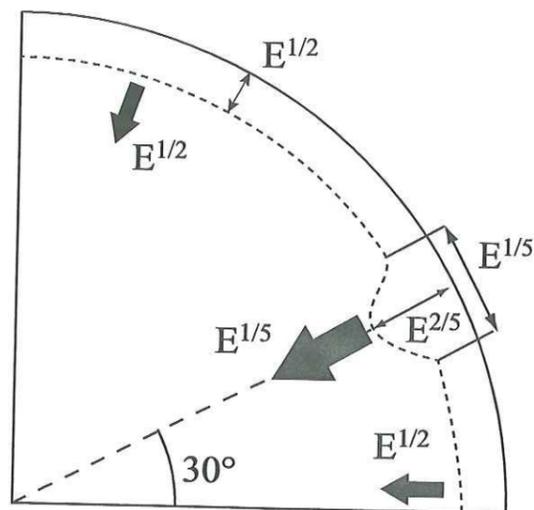


FIG. 1.12 - Couche d'Ekman dans le cas d'une précession faible.

**L'écoulement de Poincaré dans la limite des faibles viscosités.** Pour des faibles taux de précession, la viscosité introduit une composante de rotation solide du fluide perpendiculaire au plan  $(\hat{k}_c, \hat{k}_p)$  (Roberts et Stewartson 1963[27]). Contrairement au cas non-visqueux il existe alors généralement une solution unique de l'écoulement de rotation solide du fluide.

L'approche la plus générale de l'écoulement de rotation solide du fluide dans la limite des faibles viscosités est celle proposée par Busse (1968[2]) que nous présentons dans l'annexe (A1). En négligeant la viscosité en volume et en supposant que l'écoulement est principalement une rotation solide  $\omega \times r$ , Busse détermine le vecteur  $\omega$  tel que le couple inertiel, le couple de pression et le couple exercé par la couche limite sur le volume soient en équilibre. Comme nous l'avons vu, à tout écoulement de couche limite est associé un pompage d'Ekman en volume, cette étude montre que pour qu'un tel pompage soit solution des équations non-visqueuses en volume il existe une condition sur la rotation solide qui lui donne naissance. Cette condition, dite de solvabilité, s'exprime par,

$$\omega \cdot \hat{k}_c = \omega^2. \quad (1.78)$$

Physiquement cela signifie que dans le référentiel en rotation avec le fluide, la composante de rotation de la coquille suivant l'axe de rotation du fluide est nulle, la seule rotation différentielle entre le fluide et la coquille est suivant un axe équatorial, il n'y a donc pas de spinup. Une conséquence directe de cette condition de solvabilité est que l'amplitude de la rotation solide du fluide est nécessairement inférieure à celle de son conteneur, ce qui n'est pas le cas dans l'approche de Stewartson et Roberts(1963[32], 1965[28]) qui eux supposent que

le fluide tourne en bloc avec la coquille suivant  $\hat{k}$  et qu'il existe en plus une composante de rotation équatoriale du fluide.

En négligeant les éruptions de la couche d'Ekman la résolution de l'écoulement de couche limite conduit à une détermination implicite du vecteur rotation solide du fluide (Busse 1968[2]) :

$$\omega = \omega^2 \hat{k}_c + \frac{A\omega^2}{A^2 + B^2} \hat{k}_c \times (\hat{k}_p \times \hat{k}_c) + \frac{B\omega^2}{A^2 + B^2} \hat{k}_c \times \hat{k}_p, \quad (1.79)$$

avec,

$$A = \frac{0.259}{\gamma_\nu \sqrt{\omega}} + \cos(\alpha) + \frac{\omega^2}{\gamma_e}, \quad (1.80)$$

$$B = \frac{2.62\omega}{\gamma_\nu}. \quad (1.81)$$

$$\gamma_e = \frac{\Omega_p}{\eta}, \quad \gamma_\nu = \frac{\Omega_p}{E^{1/2}}$$

Le domaine de validité de cette détermination est donné par :

$$\min \left( \frac{|\Omega_p| \sin(\alpha)}{\sqrt{E}}, \frac{\alpha}{|\Omega_p \cdot \hat{k}_c + \eta|}, \frac{|\Omega_p|}{|\eta|} \right) \ll 1. \quad (1.82)$$

En précession prograde ( $\hat{k}_c \cdot \Omega_p > 0$ ), quelque soit  $(\Omega_p, \alpha, E, \eta)$  tels que l'inégalité (1.82) soit respectée, il existe une solution unique  $\omega$  à l'équation (A.11). La rotation du fluide varie continuellement de l'axe du conteneur ( $\Omega_p \ll 1$ ) à une rotation autour d'un axe parallèle au vecteur de précession lorsque le taux de précession augmente.

En précession rétrograde, pour certaines valeurs des paramètres  $(\gamma_e, \gamma_\nu)$ , l'équation (A.11) admet 2 ou 3 solutions  $(\omega_i)$ , chacune d'elles vérifiant l'équilibre des couples sur lequel repose cette détermination analytique. Nous n'avons aucune évidence expérimentale d'une telle indétermination, ceci suggère alors qu'il existe un critère de stabilité permettant de sélectionner une solution unique dans le système. Nous discuterons plus en détail ce point dans le chapitre III.

### 1.1.3.3 Les éruptions de la couche d'Ekman, une source d'écoulement secondaire en volume ?

Dans la limite des faibles viscosités, comme nous venons de le voir il existe une couche limite visqueuse dont l'épaisseur loin des colatitudes critiques ( $\theta_c = 60, 120 \text{ deg}$ ) est  $\propto E^{1/2}$  la recirculation en volume associée est alors  $\propto E^{1/2}$ . Dans le référentiel en rotation avec le fluide les éruptions en  $\theta_c$  apparaissent alors pour le volume

non-visqueux comme une perturbation des conditions aux limites de fréquence  $\omega$  dont la taille caractéristique est  $\propto E^{1/5} \ll 1$ . Dans le référentiel en précession, cette même perturbation est stationnaire.

La question de savoir si de telles perturbations pouvaient se propager en volume est longtemps restée sans réponse. Sans qu'ils aient pu résoudre formellement le problème, Bondi et Lyttleton (1953[1]) suggèrent qu'aux discontinuités de la couche limite puisse être associée une perturbation de l'écoulement en volume localisée sur les cônes caractéristiques attachés aux colatitudes critiques que nous avons introduites dans la section (1.1.2.2) (figure 1.13). Ils concluaient à l'époque que si de telles structures existaient elles seraient probablement instables, les surfaces caractéristiques  $(T_1CT_2)$  et  $(T_3DT_4)$  conduisant à une turbulence localisée autour des éruptions  $(T_1, T_2, T_3, T_4)$  alors que les cônes  $(T_1ST_2)$  et  $(T_3NT_4)$  entraîneraient une turbulence en volume.

Walton (1975[43]) démontre en s'appuyant sur un modèle de «slip disk» analogue à celui de Stewartson (1957[31]) qu'un cisaillement ponctuel de fréquence adimensionnée  $\lambda$  se propage en volume suivant les cônes caractéristiques de l'équation du mouvement. Dans la limite des faibles viscosités, la structure cisailante induite en volume a alors une taille naturelle  $\propto E^{1/3}$  (figure 1.14). Cette détermination peut être obtenue en suivant une démarche assez semblable à celle que nous avons présentée pour la couche limite. Le long de la caractéristique il existe un équilibre à l'ordre  $O(1)$  entre le saut d'accélération inertielle et le saut d'accélération de Coriolis, en introduisant l'ordre suivant il apparaît alors un équilibre entre l'accélération de Coriolis et la dissipation visqueuse.

En considérant le même modèle de «slip disk», Kerswell (1995[14]) s'intéresse au cas plus général où la perturbation est de taille finie  $\delta$ . Il conclut en distinguant deux cas,

1. si  $\delta < E^{1/3}$  la perturbation produit en volume une couche de cisaillement se mettant à l'échelle en  $E^{1/3}$ .
2. si  $\delta > E^{1/3}$  la taille caractéristique de la structure cisailante est  $\propto \delta$ . Les effets visqueux en volume associés à ce cisaillement sont alors négligeables.

Dans le cas de la précession, la taille caractéristique des éruptions de la couche limite étant  $E^{1/5} > E^{1/3}$ , la perturbation associée au pompage d'Ekman autour des latitudes critiques induit des zones de cisaillement en volume s'appuyant sur les cônes caractéristiques, sur une échelle  $\propto E^{1/5}$ . De telles structures ont été mises en évidence numériquement (Hollerbach et Kerswell 1995[14], Tilgner 1999[35],[34]), nous avons pu confirmer par une approche numérique la mise à l'échelle en  $E^{1/5}$  de l'épaisseur des structures en volume, ceci fera l'objet d'une partie du chapitre II, nous montrerons également que l'amplitude varie comme  $\varepsilon E^{1/5}$  ( $\varepsilon$  étant défini par 1.59). La dépendance en temps du champ de vitesse en volume associé aux structures caractéristiques est déterminée par celle de la perturbation de couche

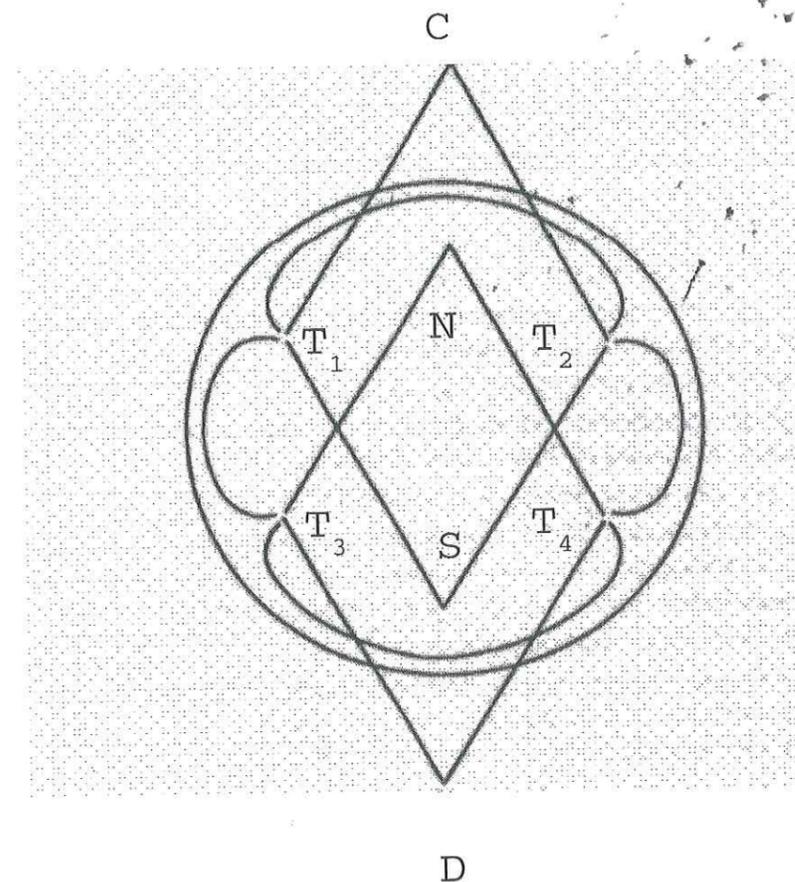


FIG. 1.13 – Propagation en volume des singularités de la couche d'Ekman proposé par Bondi et Lyttleton en 1953 ([1]).

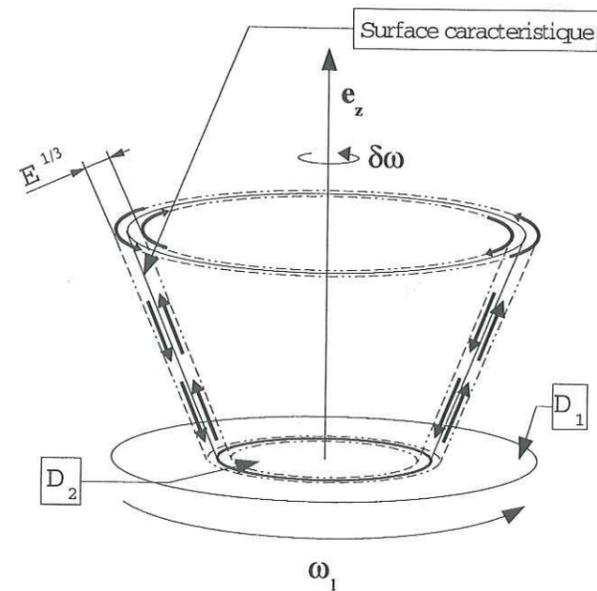


FIG. 1.14 – Zones de cisaillement en volume produites par une discontinuité ponctuelle dans le cas du «slip-disk» (Walton 1975[43]). Le fluide incompressible et les disques  $D_1, D_2$  étant en rotation à la fréquence  $\omega_1$  autour de l'axe  $\hat{e}_z$ , le disque interne  $D_2$  est animé d'un mouvement oscillant  $\delta\omega\hat{e}_z$  de faible amplitude à la fréquence  $\lambda$ .

limite qui lui donne naissance. Cette dernière étant de fréquence  $\omega$  dans le référentiel de rotation solide du fluide, la vitesse d'une particule de fluide, c'est à dire le champ de vitesse Lagrangien, oscille à la même fréquence. Dans le référentiel en précession la couche d'Ekman est stationnaire, la vitesse en un point donné de ce référentiel, c'est à dire le champ de vitesse Eulérien, est également stationnaire.

Les zones de cisaillement obliques sont généralement décrites comme des paquets d'ondes inertielles (Tilgner 1999[33]), localisés dans l'espace. Le nombre d'onde étant alors  $k = \delta^{-1}$ . Il n'y a pas à proprement parler de propagation suivant  $\hat{k}$ , les effets visqueux entraînant une décroissance rapide de l'amplitude perpendiculairement aux surfaces caractéristiques. Nous montrerons numériquement que dans le cas d'un conteneur sphérique, cette décroissance est exponentielle (chapitre II).

Les propriétés géométriques de réflexion sur les parois de ces cisaillements en volume sont les mêmes que celles des ondes inertielles sans viscosité. Quantitativement, chaque réflexion s'accompagne en présence de viscosité d'une diminution de l'amplitude de la vitesse (Phillips 1963[23]) d'un facteur  $E^{1/2}$ . Après  $E^{-1/2}$  réflexions, l'onde est alors totalement dissipée, ce qui correspond à un temps caractéristique de l'ordre du temps de spin-up ( $E^{1/2}\omega^{-1}$ ). Cette dissipation itérative de l'onde n'est plus valable dans le cas particulier introduit dans la section (1.1.2.2) où l'onde réfléchie est parallèle à la paroi, en présence de viscosité il y a alors absorption totale de l'énergie. Cette situation particulière a lieu pour,

$$\omega \cdot \hat{k} = \pm \omega \cdot \hat{n}, \quad (1.83)$$

où  $\hat{n}$  est le vecteur normal sortant à la paroi. En fréquence, cette condition s'écrit,

$$\lambda = \pm 2\omega \cdot \hat{n}. \quad (1.84)$$

Avec dans le cas de la précession  $\lambda = \omega$ . Nous retrouvons ici la condition définissant les colatitudes critiques associées aux éruptions de la couche d'Ekman. Les réflexions totales sont donc localisées au même endroit que les éruptions de la couche d'Ekman. La relation de cause à effet entre ce phénomène d'absorption totale, qui peut apparaître comme une source d'instabilité pour la couche, et les éruptions qui sont à l'origine des structures cisailantes en volume peut parfois porter à confusion. Pour le cas d'un conteneur de forte ellipticité ( $\eta \gg E^{1/5}$ ), l'onde dont la source serait une éruption de la couche limite se réfléchit indéfiniment dans le système, la dissipation est alors itérative (figure 1.15, a), l'énergie introduite en volume est restituée en un grand nombre de points de la couche visqueuse. Le cas d'un conteneur sphérique est quant à lui singulier puisque les cônes caractéristiques associés aux cercles critiques ( $\theta = \theta_c$ ) se réfléchissent sur eux mêmes (figure 1.15, b). Si nous cherchons à avoir la même démarche que précédemment, l'onde «émise» par les éruptions ne se dissipe pas de manière itérative,

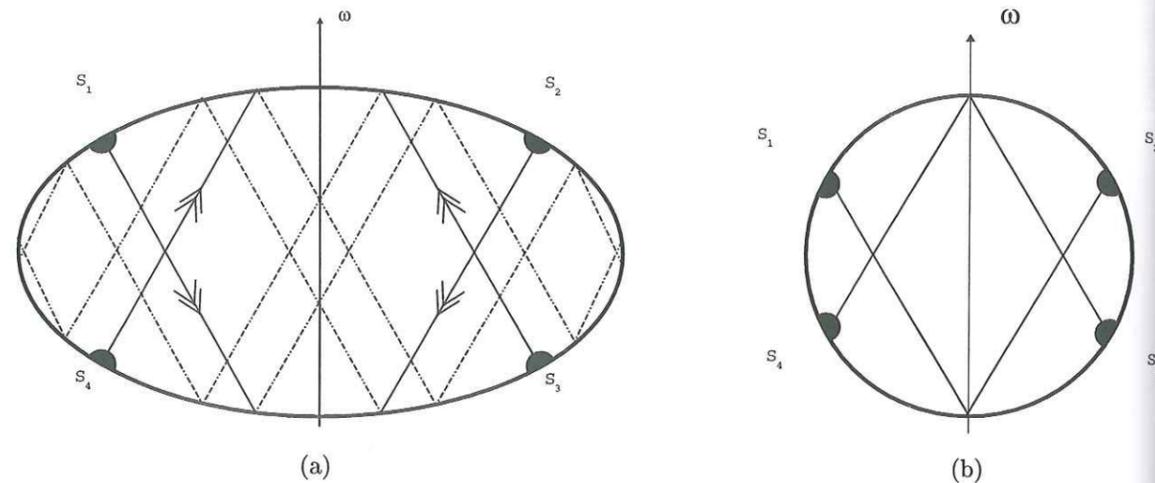


FIG. 1.15 – Réflexions des structures de cisaillement internes produites par les éruptions de la couche limite ( $S_1, S_2, S_3, S_4$ ).

a) Cas d'un conteneur ellipsoïdal, l'énergie associée au cisaillement en volume est dissipée en de multiples points de réflexion.

b) Cas d'un conteneur sphérique, les cônes caractéristiques se recouvrent par réflexion, l'énergie est dissipée dans les éruptions de la couche d'Ekman.

au contraire elle est totalement absorbée dès la seconde réflexion. L'énergie introduite dans le volume par le pompage d'Ekman est alors totalement restituée à la couche limite à l'endroit même des sources. Il y a alors une sorte d'auto excitation du phénomène qui fait de la sphère un cas singulier, toutes les implications de ces propriétés ne sont pas actuellement clairement établies.

Tout ce que nous venons de voir repose sur une approche linéaire asymptotique de la couche limite visqueuse. Busse (1968[2]) envisage l'effet des interactions non linéaires de l'écoulement dans la couche d'Ekman dans la limite des faibles viscosités. Le problème de couche limite à l'ordre  $O(\varepsilon)$  étant résolu, les équations à l'ordre  $O(\varepsilon^2)$  sont considérées.

La réponse linéaire de la couche limite étant de fréquence  $\omega$ , la réponse non linéaire est constituée de deux composantes, l'une de fréquence  $2\omega$ , l'autre de fréquence nulle. Si de telles perturbations devaient se propager en volume, les surfaces caractéristiques de la première seraient d'après (1.48) des plans perpendiculaires à l'axe de rotation  $\omega$ , celles de la seconde seraient comme nous l'avons vu des cylindres parallèles à  $\omega$ . Motivé par les observations de structures géostrophiques dans les expériences (Malkus 1968[17]) que nous présentons dans la section suivante, Busse s'est intéressé à la composante stationnaire de la réponse

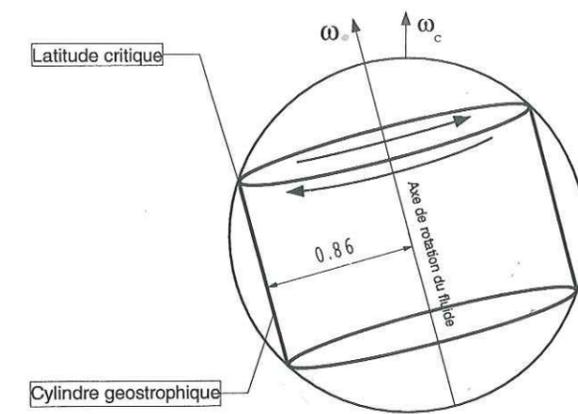


FIG. 1.16 – Représentation schématique du cisaillement géostrophique induit par les non linéarités de la couche limite en  $\theta = \theta_c$ .

non linéaire de la couche d'Ekman. Il démontre que l'équation de couche limite à l'ordre  $O(\varepsilon^2)$  admet des solutions si et seulement si, il existe en volume un écoulement géostrophique de la forme,

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} f \left( \frac{|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|}{\omega} \right). \quad (1.85)$$

La fonction  $f$  est définie par une condition de solvabilité du problème en volume à l'ordre  $O(\varepsilon^2 E^{1/2})$ . La discontinuité stationnaire en  $\theta = \theta_c$  entraîne alors un cisaillement axisymétrique infini de part et d'autre du cylindre caractéristique attaché aux latitudes critiques ( $s = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|/\omega = 0.86$ ) (figure 1.16). Nous retrouvons ici à travers la fonction  $f$  les singularités obtenues lors de l'étude linéaire de la couche d'Ekman. Les observations expérimentales faites par Malkus (1968[17], section 1.2-figure 1.18) semblent mettre en évidence un cisaillement de grande amplitude localisé en  $s \sim 0.86$ . Busse propose que les effets visqueux en volume fixent la taille et l'amplitude finie du cisaillement, nous montrerons dans le chapitre II que les mises à l'échelle de ces grandeurs obtenues numériquement et théoriquement, respectivement  $E^{1/5}$  et  $\varepsilon^2 E^{-3/10}$ , suggèrent plutôt qu'il s'agit d'un effet visqueux dans la couche limite.

## 1.2 Les observations expérimentales.

Il n'existe que deux approches expérimentales du problème de la précession, l'expérience de Malkus (1968[17]) et celle de Vanyo (1971-2000,[40], [41], [42], [39]). Elles peuvent être schématisées comme indiqué sur la figure (1.17). Un

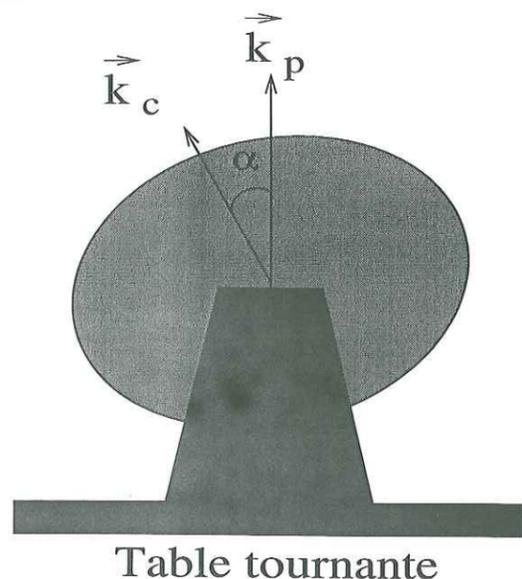


FIG. 1.17 – Schéma de principe des expériences de précession.

|                                 | Vanyo et al. (1995[42])                 | Malkus (1968[17])    |
|---------------------------------|---|----------------------|
| R(rayon)                        | 0.252 m                                 | 0.250 m              |
| $\eta$ (ellipticité)            | 1/100                                   | 1/25                 |
| $\alpha$                        | 23.5 °                                  | 30 °                 |
| $\omega_c$                      | 200 rév/min                             | 60 rév/min           |
| $\Omega_p$                      | -11.5 à +11.5 rév/min (min= $\pm 0.1$ ) | -0.75 à -1.33rév/min |
| $Ek = \frac{\nu}{\omega_c R^2}$ | $7.51 \cdot 10^{-7}$                    | $2.5 \cdot 10^{-6}$  |

TAB. 1.2 – Caractéristiques techniques des expériences de Vanyo et al. 1995 et Malkus 1968. Dans les deux cas, le fluide utilisé est de l'eau.

conteneur de forme ellipsoïdal contenant un fluide incompressible de viscosité  $\nu$  est mis en rotation autour d'un axe  $\hat{k}_c$  à la fréquence  $\omega_c$ , l'ensemble est posé sur une table tournant autour d'un axe  $\hat{k}_p$  parallèle à la gravité locale à la fréquence  $\Omega_p$ .  $\hat{k}_c$  est incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à  $\hat{k}_p$ . Le tableau (1.2) résume les principales caractéristiques techniques de ces deux expériences.

### 1.2.1 L'écoulement de Poincaré.

La seule approche expérimentale quantitative de l'écoulement de rotation solide que nous ayons est celle de Vanyo et al. (1991[38] et 1995[42]). Les auteurs utilisent des éponges de densité plus faible que celle de l'eau en suspension dans

le fluide. Sous l'effet de la force centripète elles se regroupent sur l'axe de rotation solide et sous l'effet de la gravité terrestre elles se localisent sous la surface. Contrairement à ce que nous avons obtenu lors de notre étude numérique en géométrie sphérique, la détermination analytique de Busse (Busse 1968[2]) de l'axe de rotation solide ne semble pas pouvoir rendre compte de leurs observations (Pais thèse 1999[21]). Comme nous le verrons dans le chapitre II, la vorticité déduite d'un échantillonnage superficiel du fluide n'est pas nécessairement représentative de la vorticité moyenne en volume. Pour cette raison, nous pensons que les résultats déduits de ces expériences ne remettent pas en question l'approche asymptotique de Busse. Il apparaît en particulier nécessaire de mettre au point une méthode de localisation de l'axe de rotation solide échantillonnant l'ensemble du volume fluide.

### 1.2.2 L'écoulement secondaire.

Pour l'écoulement se superposant à la rotation solide, une des techniques utilisées dans ces deux expériences consiste à mettre des particules réfléchissantes de densité neutre et de forme aplatie en suspension dans le fluide et à éclairer un plan du sphéroïde par une tranche lumineuse. Ces particules s'alignent dans les zones de cisaillement qu'il est alors possible d'observer en se plaçant à 90 °. Il est important de noter ici une des limitations de cette méthode, dans ces deux expériences. L'interface air-plexiglass étant de forme ellipsoïdale (quasi sphérique), elle se comporte comme un dioptre, entraînant une déformation de l'image que nous percevons de l'intérieur. Ceci se traduit par une dilatation linéaire de l'image jusqu'à des rayons de l'ordre de  $0.8R$ , ensuite la déformation s'accroît de plus en plus de sorte que la coquille de fluide s'étendant de  $0.8R$  à  $R$  nous apparaît comme une couche très fine. Nous avons illustré ceci dans l'annexe C de ce travail dans le cas de notre expérience. Nous pensons que la structure géostrophique prédites par Busse (Busse 1968[2]) située à un rayon cylindrique de  $0.86 \times R_{sphere}$  est trop déformée par le dioptre pour être visible sur les clichés (1.21, 1.22).

Pour la première fois en 1968, Malkus ([17]) a pu mettre en évidence par cette technique trois régimes différents d'écoulement secondaire (figure 1.21), un régime de cisaillement laminaire figure (a), une première instabilité quasi-géostrophique figure (b) et enfin un état de turbulence développée figure (c-d). Pour un faible taux de précession, l'écoulement secondaire peut être décrit comme une série de cylindres concentriques orientés parallèlement à l'axe de rotation solide du fluide (figure 1.21, (a)).

Trente ans après celle de Malkus l'expérience de Vanyo et al vient confirmer l'existence en précession rétrograde de ces trois régimes, laminaire, turbulent quasi 2D et enfin de turbulence développée. La figure (1.22) illustre les résultats obtenus par ces derniers auteurs en utilisant la même technique de visualisation. Par

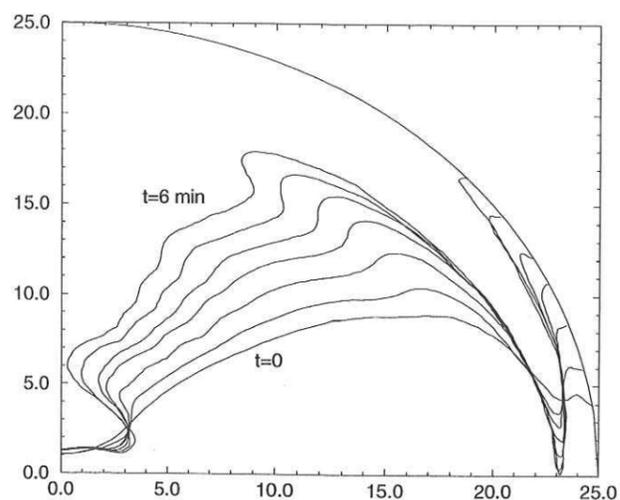


FIG. 1.18 – Mesure de l'écoulement secondaire géostrophique en régime laminaire (figure 1.21 (a)). Les axes sont gradués en cm. L'écart de rotation solide suivant  $\hat{k}_c$  entre le fluide et la coquille se caractérise par un mouvement d'ensemble rétrograde («Westward drift») de  $5.5^\circ/min$ , deux cisaillements très marqués à 4.5 cm et 21.5 cm de rayon sont observés. (Malkus 1968[17])

comparaison avec les résultats de Malkus, il apparaît clairement une variation en rayon beaucoup plus riche dans l'ensemble du volume. Les structures mises en évidence par cette méthode dépendent en grande partie de la sensibilité des paillettes au cisaillement. Comme nous allons le voir, une même série de cylindres peut produire différentes structures de «bandes claires et sombres» (figure (1.20)).

Parallèlement à cette visualisation directe, Malkus a effectué une mesure quantitative de la composante azimutale du champ de vitesse associée aux structures géostrophiques, par une méthode très originale. Le principe en est le suivant, du bleu de thymol étant en solution dans le fluide, il utilise un fil électrique s'étendant dans le plan équatorial du centre du sphéroïde à la surface pour introduire une différence de potentiel pouvant modifier localement le pH de l'eau par ionisation produisant ainsi une coloration localisée. Il matérialise de cette manière un rayon de fluide. Ayant retiré sa «sonde» il met le conteneur en précession. En prenant une photographie depuis le pôle sud de la sphère toutes les minutes (en regardant dans la direction du vecteur rotation de la coquille), il peut suivre la déformation de cette ligne de colorant au cours du temps. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure (1.18).

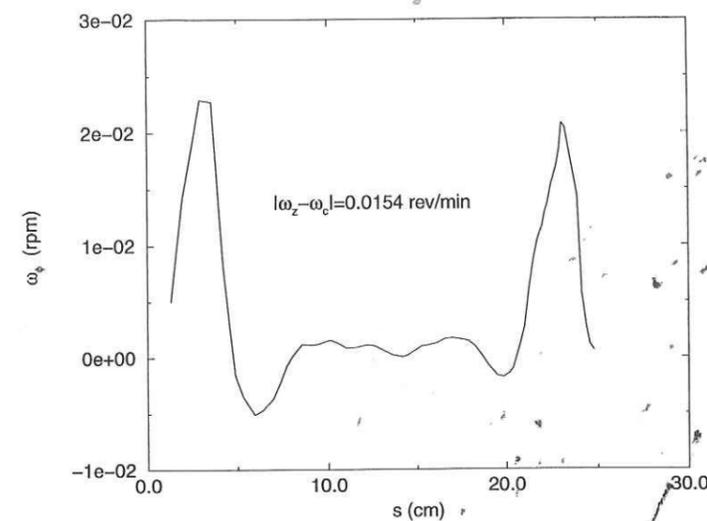


FIG. 1.19 – Vitesse angulaire se superposant à la rotation solide du fluide, en fonction du rayon cylindrique. Cette courbe est déduite de la figure (1.18).

Nous reconstituons à partir de cette étude l'amplitude de la vorticité associée aux structures g eostrophiques en fonction de la distance au centre  $\omega_{geos}(s)$  (figure 1.19), ainsi que la rotation diff erentielle r etrograde entre le fluide et la coquille suivant  $\hat{k}_c$ .

Alors que l'approche analytique de Busse ne pr evoyait qu'un seul cisaillement g eostrophique à l'aplomb de la singularité de la couche limite ( $S=21.5$  cm), nous pouvons observer à travers cette étude la pr esence d'autres cisaillements dont l'un dominant se trouve en  $S \simeq 4.5$  cm (figure 1.19). Nos études num eriques nous ont permis de montrer que le cisaillement le plus externe était associé à l'interaction non-linéaire de l'écoulement de couche limite au niveau de la latitude critique. Comme nous le montrerons dans le chapitre II, une étude purement sphérique permet de rendre compte également du cisaillement interne, et des oscillations de la vorticité entre les deux principaux cylindres. Bien que Vanyo et al. (1995[42]) n'aient pas effectué ce type de mesures, nous pouvons penser étant donné les paramètres qu'ils utilisent, qu'ils obtiendraient sensiblement les mêmes résultats. Or, la visualisation par la méthode des paillettes semble mettre en évidence une différence de structure radiale de l'écoulement g eostrophique entre ces deux expériences. Comment pouvons nous relier les mesures quantitatives de Malkus aux différentes visualisations obtenues en utilisant des particules réfléchissantes? Pour cela nous pouvons partir de l'hypothèse que les paillettes s'alignent suivant le sens

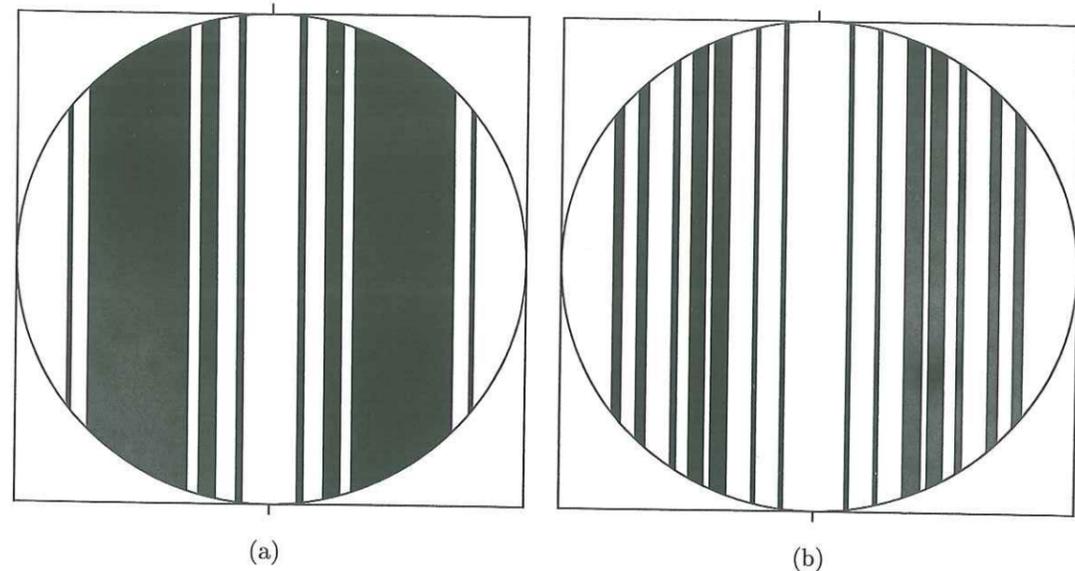


FIG. 1.20 – Images synthétiques produites par un même cisaillement pour deux seuils de sensibilité différents des particules réfléchissantes. a)  $C_s = 0.02$ , b)  $C_s = 0.007$ . (Le cisaillement est déduit de la figure 1.19)

de cisaillement si celui-ci dépasse une certaine valeur. Ce seuil pouvant dépendre de la taille et de la nature des particules il peut donc être différent d'une expérience à l'autre. A partir de la figure (1.19) nous avons calculé le cisaillement axisymétrique  $C = s \frac{\partial \omega}{\partial s}$  associé à un tel écoulement. En considérant que lorsque le cisaillement atteignait un seuil  $C_s$  les particules pouvaient s'aligner nous avons reproduit des images synthétiques (figures 1.20) de ce que nous pourrions observer. Les bandes blanches correspondent à  $|C| > C_s$ , les bandes noires à  $|C| < C_s$ . Il ne s'agit pas ici de reproduire quantitativement ou qualitativement les résultats obtenus dans les expériences, mais simplement de montrer comment à partir d'un même cisaillement nous pouvons obtenir des images complètement différentes par ce type de méthode.

Nous montrerons dans le chapitre II de cette thèse que pour les paramètres des expériences de Vanyo et al et de Malkus, l'amplitude de la vitesse le long des cônes caractéristiques devrait être du même ordre de grandeur que celle observée pour les cylindres, or ces zones internes de cisaillement n'ont jamais été observées dans les expériences de précession. Ces structures ont été mises en évidence dans des expériences en géométrie cylindrique (Görtler 1957[8], McEwan 1970[19]) utilisant une visualisation par paillettes plus ou moins sophistiquée, pour lesquelles le forçage n'était pas induit par la précession du conteneur. Dans le cas des ex-

périences de Görtler il s'agit de l'oscillation d'un disque horizontal (voir section 1.1.2.2). L'expérience de McEwan étant plus complexe, nous renvoyons le lecteur à la description détaillée qui en est faite dans son article de 1970. Ceci pose la question de savoir pourquoi ces cisaillements s'appuyant sur les surfaces caractéristiques n'ont pas été observés en précession.

La méthode des paillettes ne permettant pas d'avoir accès au transport de fluide, Vanyo et al utilisent un colorant injecté à la surface pour suivre les particules de fluide au cours du temps. Ils mettent ainsi en évidence des tourbillons de petite échelle organisés en anneaux (figure 1.23). Une des questions importantes est de savoir si cette instabilité de petite échelle se prolonge en volume en conservant une structure en spirale. Les auteurs notent également un transport du fluide parallèle à l'axe de rotation solide du fluide confiné à l'intérieur des cylindres géostrophiques. Des courants ascendant et descendant se succèdent d'un cylindre à l'autre, cet écoulement traversant le plan équatorial. Or, les équations du problème conservent la symétrie des solutions par parité, les conditions aux limites étant antisymétriques par cette transformation seule une perturbation symétrique par parité dans le système peut permettre d'expliquer de tels mouvements.

### 1.3 Plan du mémoire.

Au cours de ce travail nous avons abordé le problème de la dynamique d'une cavité fluide soumise à la précession de son conteneur à travers une étude numérique et une étude expérimentale.

Le second chapitre de cette thèse porte sur une approche numérique en géométrie sphérique de l'écoulement induit. Il n'existe alors pas de couplage topographique entre le fluide et le conteneur, nous avons pu de cette manière identifier le rôle de la viscosité. Nous montrerons en particulier que les mécanismes et les lois d'échelle associés aux structures géostrophiques obtenus dans une sphère nous permettent de rendre de compte quantitativement des observations faites dans un ellipsoïde par Malkus en 1968 ([17]).

Le chapitre III porte sur l'expérience de précession que nous avons menée dans un ellipsoïde de révolution. Nous nous attacherons d'une part à l'étude du mouvement de rotation solide du fluide, d'autre part à la caractérisation des différents régimes de l'écoulement secondaire se superposant au mouvement d'ensemble.

Nous aborderons les perspectives de recherche numériques et expérimentales que nous envisageons dans un chapitre de conclusion.

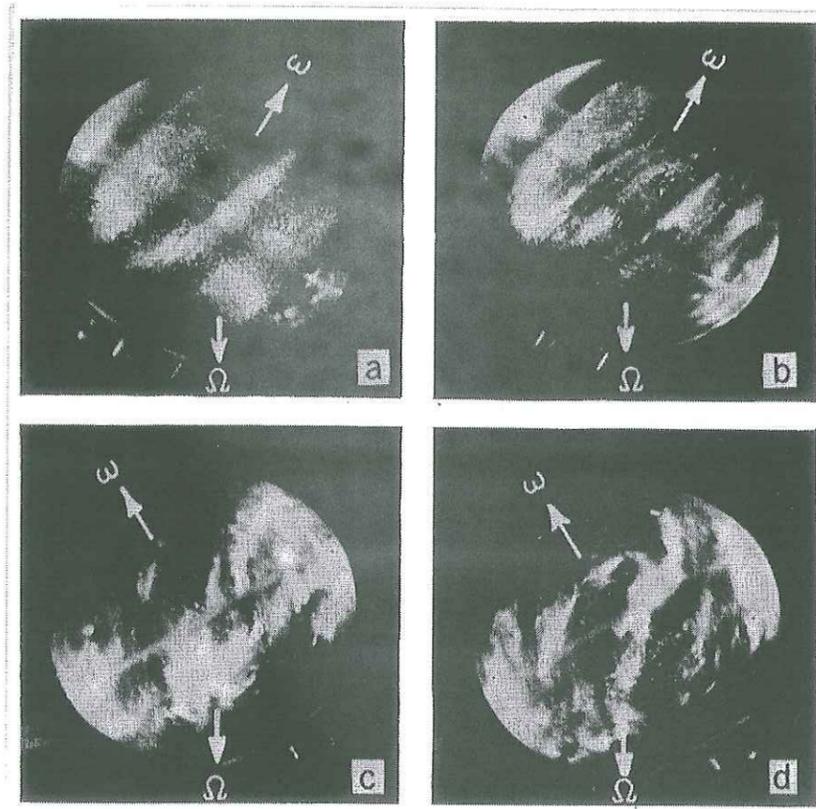
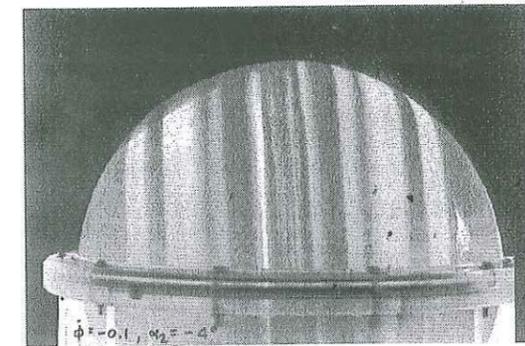
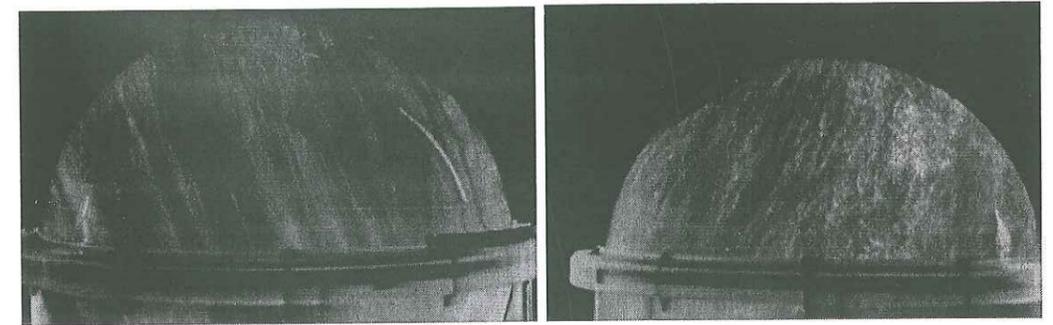


Fig. 2. Precessional flow in a laboratory spheroid. (a) Laminar nonlinear flow; (b) initial wavelike instability; (c and d) turbulent flow.

FIG. 1.21 – Visualisation de l'écoulement secondaire à l'aide de paillettes réfléchissantes.  $\omega_c = 60$  rév/min, (a) régime laminaire  $\Omega_p = -0.75$  rév/min, (b) régime turbulent bidimensionnel  $\Omega_p = -1$  rév/min, (c-d) régime de turbulence développée  $\Omega_p = -1.33$  rév/min (Malkus 1968[17])



(a)



(b)

(c)

FIG. 1.22 – Visualisation de l'écoulement secondaire à l'aide de paillettes réfléchissantes.  $\omega_c = 200$  rév/min, (a) régime laminaire  $\Omega_p = -0.2$  rév/min, (b) régime turbulent bidimensionnel  $\Omega_p = -0.82$  rév/min, (c-d) régime de turbulence développée  $\Omega_p = -11.5$  rév/min (Vanyo et al. 1995[42])

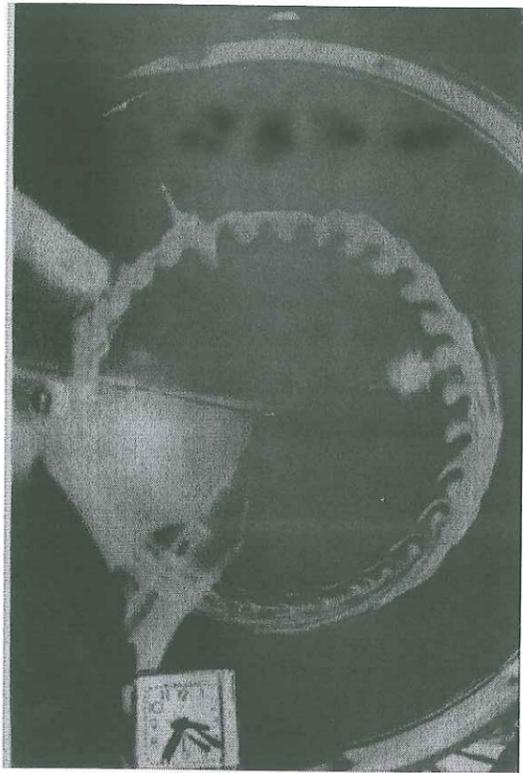


FIG. 1.23 – Transport de fluide visualisé par injection de colorants. Cette technique met en évidence une turbulence de petite échelle organisée en tourbillons répartis sur un anneau en surface. Ces structures sont localisées entre deux cylindres géostrophiques.  $\omega_c = 200$  rév/min,  $\Omega_p = -0.1$  rév/min. (Vanyo et al. 1995[42])

## Chapitre 2

Approche numérique de la  
précession d'une cavité sphérique.

## 2.1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans l'introduction générale de ce travail, le problème de la précession d'une cavité fluide est caractérisé par des échelles de temps et d'espace très différentes. En effet si nous voulons décrire la réponse principale du fluide, qui est une rotation solide dans l'ensemble du volume, nous devons résoudre avec une grande précision l'écoulement dans la couche limite. Or cette dernière est d'autant plus fine que nous diminuons le nombre d'Ekman, nécessitant une discrétisation de plus en plus grande de l'espace, le degré de difficulté dépend alors de la limite que nous cherchons à atteindre. S'il est raisonnable de chercher à décroître le nombre d'Ekman jusqu'aux valeurs représentatives des expériences de laboratoire ( $\sim 10^{-7}$ ), il est clair en revanche que le cas terrestre ( $E \sim 10^{-12} - 10^{-15}$ ) est hors de portée des capacités des ordinateurs. Est-il cependant nécessaire de résoudre les équations pour de si petites viscosités pour pouvoir appréhender la dynamique du noyau? Probablement que non, du moins c'est l'hypothèse sur laquelle repose les approches numériques, dont le but est de mettre en évidence un comportement asymptotique du système. Nous verrons à travers ce chapitre comment les outils numériques nous permettent, d'une part de vérifier certaines conclusions des approches analytiques et d'autre part de nous guider vers l'identification des mécanismes physiques mis en jeu dans la dynamique du système.

Une des motivations de ce travail numérique était de comprendre les observations expérimentales que nous avons présentées précédemment et qui semblent résister aux approches théoriques. Il s'agit plus particulièrement de comprendre l'absence de structures cisailantes s'appuyant sur les cônes caractéristiques dans les expériences et l'existence d'une structure de l'écoulement géostrophique apparemment plus riche que celle prédite analytiquement (Busse 1968[2]).

L'étude des régimes de turbulence développée reste actuellement du domaine des expériences et, si par des astuces classiques que nous présenterons ultérieurement, il est possible de décrire les mouvements de petites échelles dans la couche limite visqueuse, il n'est pas envisageable d'en faire de même dans l'ensemble du volume. Là encore ce sont les capacités des ordinateurs qui nous limitent dans ce type d'approches.

Au cours de ce travail nous avons abordé deux problèmes. Nous avons tout d'abord considéré le cas d'un fluide homogène incompressible en rotation solide avec son conteneur. A l'instant initial  $t=0$ , nous ajoutons une composante de rotation solide du fluide infinitésimale perpendiculaire à l'axe de rotation de la cavité. Nous avons alors étudié l'état transitoire entre cet instant initial et l'état final pour lequel cette composante de rotation équatoriale a été totalement dissipée, le fluide tournant de nouveau en bloc avec le conteneur. L'expérience que nous pourrions associer à cette étude consisterait à mettre en rotation un conte-

neur contenant le fluide et à basculer brusquement l'axe de rotation de la coquille d'une quantité infinitésimale. Le mode propre de rotation équatoriale ainsi excité, que nous avons déjà discuté dans l'introduction, est généralement appelé mode de «spin-over». La question de savoir comment ce mode non visqueux est modifié par la viscosité est directement reliée comme nous l'avons vu au problème de la «Free Core Nutation». Cette étude n'est pas sans rapport non plus avec le problème de la précession pour lequel Poincaré a montré que la réponse principale du fluide était précisément une rotation suivant un axe différent de celui de son conteneur. Dans la limite des taux de précession très faibles l'écart entre l'axe du fluide et celui du conteneur est infiniment petit de sorte que nous pouvons décomposer le vecteur rotation solide du fluide de la manière suivante :

$$\omega = \hat{k}_c + \alpha \hat{\omega}' \quad (2.1)$$

Où  $\alpha$  est l'angle entre l'axe du fluide et celui de la coquille et  $\hat{\omega}'$  un vecteur unitaire perpendiculaire à  $\hat{k}_c$ . Les équations linéarisées de la précession sont alors similaires à celles du problème linéaire du spin-over, si ce n'est que le forçage par les conditions aux limites est maintenu constant. L'étude linéaire du spin-over peut alors apparaître comme une alternative au problème de la précession. Le mouvement continu de l'axe de rotation du conteneur peut alors être décrit par une succession de changements de direction infinitésimaux. Cette vision discrète de la précession reste valable tant que nous pouvons considérer,

$$\cos(\alpha) \sim 1 \text{ et } \sin(\alpha) \sim \alpha. \quad (2.2)$$

Nous avons dans un deuxième temps abordé le problème complet de la précession en tenant compte des effets non linéaires. L'ensemble des résultats que nous avons obtenus sont présentés ici sous la forme d'un article écrit en anglais.

Nous avons cherché au cours de ce travail à isoler les effets liés à la viscosité de ceux pouvant être associés à l'ellipticité du conteneur, nous avons donc choisi un conteneur sphérique. Ceci nous a permis comme nous allons le voir de bénéficier des méthodes de calcul spectrales pour lesquelles nous avons utilisée une décomposition des champs scalaires sur une base de fonction propre de certains opérateurs. Dans le cas d'une sphère ces fonctions sont bien connues, il s'agit des harmoniques sphériques, fonction propre de l'opérateur Laplacien.

### 2.1.1 La décomposition poloïdale-toroïdale du champ de vitesse.

Le fluide étant considéré comme incompressible, la conservation de la masse s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.3)$$

En l'absence de source dans le volume, la divergence du rotationnel d'un vecteur étant nulle, nous pouvons décomposer la vitesse  $\mathbf{u}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{u} = \nabla \times (T(r, \theta, \phi, t) \mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (P(r, \theta, \phi, t) \mathbf{r}). \quad (2.4)$$

T et P sont deux scalaires appelés respectivement toroïdaux et poloïdaux. Chacun de ces scalaires est une fonction des coordonnées d'espace et du temps. Nous avons choisi une représentation en coordonnées sphériques qui apparaît comme la plus naturelle étant donné la forme du conteneur.  $\mathbf{r}$  est le vecteur position.

De manière explicite, nous pouvons exprimer les coordonnées vecteur  $\mathbf{u}$  par :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} L^2(P) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rP) \right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} T \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rP) \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} T \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

où  $L^2$  est l'opérateur laplacien angulaire défini par :

$$L^2(P) = -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} P \right) - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} P. \quad (2.6)$$

En utilisant la propriété suivante :

$$\nabla \times \nabla \times (P\mathbf{r}) = \nabla \left( \frac{\partial}{\partial r} (rP) \right) - r\Delta P, \quad (2.7)$$

nous pouvons écrire le rotationnel de la vitesse :

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\Delta P\mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (T\mathbf{r}). \quad (2.8)$$

La vorticit  tant par d  finition de divergence nulle nous pouvons l'exprimer par deux scalaires poloïdaux et toroïdaux ( $P_{rot}$ ,  $T_{rot}$ ). Nous avons la relation suivante :

$$T_{rot} = -\Delta P, \quad (2.9)$$

$$P_{rot} = T. \quad (2.10)$$

### 2.1.2 La d  composition des scalaires poloïdaux et toroïdaux sur la base des harmoniques sph  riques :

T et P   tant    chaque instant des fonctions d  finies sur la sph  re nous pouvons d  composer ces deux scalaires sur la base des harmoniques sph  riques dont nous pr  sentons en annexe (A2) les propri  t  s couramment utilis  es.

$$P = \sum_{l,m} P_l^m(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.11)$$

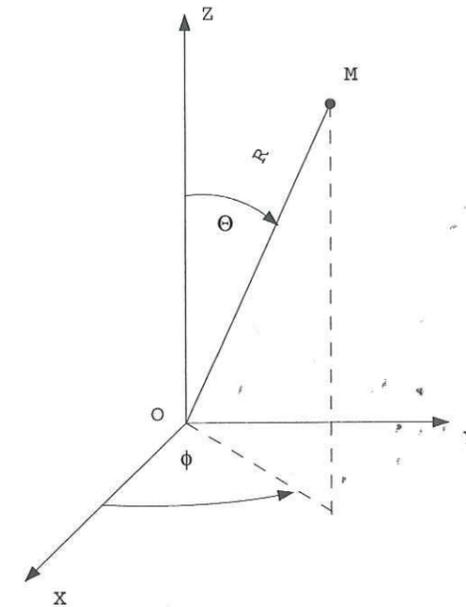


FIG. 2.1 - D  finition des coordonn  es sph  riques associ  es au rep  re ( $Ox, Oy, Oz$ ).

$$T = \sum_{l,m} T_l^m(r) Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (2.12)$$

Nous appellerons par la suite espace spectral, l'espace des fonctions  $Y_{lm}(\theta, \phi)$ , les coordonn  es spectrales de la vitesse sont alors les fonctions complexes  $P_l^m$ ,  $T_l^m$ .

#### 2.1.2.1 D  composition d'une rotation sur la base des harmoniques sph  riques :

Consid  rons un rep  re ( $Ox, Oy, Oz$ ) de l'espace, nous d  finissons les coordonn  es sph  riques ( $r, \theta, \phi$ ) comme indiqu   sur la figure (2.1). Soit  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  une rotation solide,

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{cases} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{cases}, \quad (2.13)$$

un tel mouvement se décompose uniquement sur les scalaires toroïdaux  $T_1^0$  et  $T_1^1$ ,

$$T_1^0 = \frac{r\omega_z}{\sqrt{3}}. \quad (2.14)$$

$$T_1^1 = \left( \frac{-r\omega_x}{\sqrt{3}} + i \frac{r\omega_y}{\sqrt{3}} \right). \quad (2.15)$$

### 2.1.2.2 Calcul de la composante de rotation solide d'un écoulement quelconque dans la sphère.

Nous verrons qu'au cours des calculs il nous est utile de pouvoir calculer à chaque itération la composante de rotation solide du fluide. La manière la plus économique d'effectuer cette opération d'un point de vue numérique consiste à travailler directement sur les composantes spectrales des scalaires toroïdaux du champ de vitesse.

Nous avons défini les trois composantes de rotation solide  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  par,

$$\omega_x = \frac{\int_V \mathbf{u} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{r}) dV}{\int (\hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{r}) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{r}) dV}, \quad (2.16)$$

$$\omega_y = \frac{\int_V \mathbf{u} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_y \times \mathbf{r}) dV}{\int (\hat{\mathbf{e}}_y \times \mathbf{r}) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_y \times \mathbf{r}) dV}, \quad (2.17)$$

$$\omega_z = \frac{\int_V \mathbf{u} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}) dV}{\int (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}) dV}. \quad (2.18)$$

Où l'indice «V» représente le volume de la sphère. Nous pouvons vérifier ces relations dans le cas où  $\mathbf{u}$  est une pure rotation solide,

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (2.19)$$

En utilisant la propriété vectorielle suivante

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})), \quad (2.20)$$

nous obtenons,

$$\frac{\int_V (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{r}) dV}{\int_V (\hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{r}) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{r}) dV} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \int_V \mathbf{r} \times (\hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{r}) dV}{\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \int_V \mathbf{r} \times (\hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{r}) dV}. \quad (2.21)$$

Sachant que,

$$\int_V \mathbf{r} \times (\hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{r}) dV = \frac{4\pi}{15} \hat{\mathbf{e}}_x,$$

nous retrouvons,

$$\frac{\int_V (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{r}) dV}{\int_V (\hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{r}) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{r}) dV} = \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = \omega_x. \quad (2.22)$$

Par permutations circulaires nous pouvons vérifier les deux autres relations (2.17, 2.18).

Pour un écoulement  $\mathbf{u}$  quelconque, les trois intégrales (2.16, 2.17, 2.18) déterminent la rotation totale du fluide. En effet, en posant

$$\mathbf{u} = \omega_x \hat{\mathbf{e}}_x + \omega_y \hat{\mathbf{e}}_y + \omega_z \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{u}',$$

nous obtenons par définition de  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ ,

$$\frac{\int_V \mathbf{u}' \cdot (\hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{r}) dV}{\int_V (\hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{r}) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{r}) dV} = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{\int_V \mathbf{u}' \cdot (\hat{\mathbf{e}}_y \times \mathbf{r}) dV}{\int_V (\hat{\mathbf{e}}_y \times \mathbf{r}) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_y \times \mathbf{r}) dV} = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{\int_V \mathbf{u}' \cdot (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}) dV}{\int_V (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}) dV} = 0.$$

En utilisant la décomposition poloïdale-toroïdale du champ de vitesse  $\mathbf{u}$ , et la décomposition d'une rotation solide sur la base des harmoniques sphériques introduite précédemment, nous pouvons réécrire les composantes de rotation solide de l'écoulement  $\mathbf{u}$  de la manière suivante :

$$\omega_x = -\sqrt{3} \frac{\int_0^1 r^3 \Re(T_1^1) dr}{\int_0^1 r^4 dr}, \quad (2.25)$$

$$\omega_y = \sqrt{3} \frac{\int_0^1 r^3 \Im(T_1^1) dr}{\int_0^1 r^4 dr}, \quad (2.26)$$

$$\omega_z = \sqrt{3} \frac{\int_0^1 r^3 \Re(T_1^0) dr}{\int_0^1 r^4 dr}. \quad (2.27)$$

Où  $\Re, \Im$  désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la quantité entre parenthèses.

### 2.1.3 Le problème de la précession.

Nous présentons en annexe de l'article qui suit le schéma numérique que nous avons utilisé pour résoudre les équations du mouvement et de la conservation de la masse. Ce code est une adaptation de celui développé par E.Dormy et P.Cardin (Dormy 1997[3]) pour étudier le problème de la convection thermique dans le noyau. La décomposition du champ de vitesse que nous avons introduit, nous permet d'avoir une approche totalement spectrale en  $\phi$ , la résolution en  $\theta$  se fera soit spectralement soit par collocation, suivant la nature des termes qui apparaissent dans les équations. Radialement nous avons utilisé un schéma aux différences finies. La dimension de la grille est (NLONGxNLATxNR), où NLONG correspond au nombre de points en longitude, NLAT en latitude et NR en rayon. Pour pouvoir décrire précisément la couche limite visqueuse nous avons déformé la grille radiale en augmentant la densité de coquilles près de la paroi, le modèle ne possédant pas de graine nous avons dilaté cette grille au voisinage de  $r = 0$ .

Nous présentons en annexe de l'article la formulation du système d'équations en utilisant la représentation poloïdale-toroïdale du champ de vitesse, ainsi que le principe de la démarche numérique que nous avons suivie. Une description plus détaillées du schéma en temps et de la résolution des différents termes linéaires est donnée dans la thèse d'Emmanuel Dormy (Dormy 1997[3]).

#### 2.1.3.1 Le calcul du terme non linéaire.

Le terme non linéaire  $\mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u}) = -\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$  ne peut être traité dans l'espace spectral. Une technique couramment utilisée consiste alors à passer des composantes spectrales,  $(P_{lm}, T_{lm})$ , au champ de vitesse  $\mathbf{u}(r, \theta, \phi)$  dans l'espace physique, et à calculer explicitement les interactions non linéaires en chaque point de la grille. Il faut ensuite redécomposer cette accélération sur la base des harmoniques sphériques. Les passages de l'espace spectral vers l'espace physique, et réciproquement, nécessitent un grand nombre d'opérations numériques. Nous avons utilisé dans ce travail une méthode totalement spectrale en  $\phi$  pour traiter la partie non linéaire du problème, nous avons conservé une résolution par collocation en  $\theta$ . Cette technique consiste à traiter analytiquement la dépendance en  $\phi$  du terme non linéaire.

Pour cela nous faisons apparaître explicitement la dépendance en  $\phi$  de la vitesse, nous utilisons la notation «\*» pour le complexe conjugué,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{Mmax} [A_m(r, \theta) e^{im\phi} + A_m^*(r, \theta) e^{-im\phi}], \quad (2.28)$$

où  $A_m(r, \theta)$  est définie d'après (sections 2.1.1, et 2.1.2),

$$A_m = \sum_{l=0}^{Lmax} [\nabla \times (T_{lm} \varphi_l^m(\cos \theta) \mathbf{r}) + \nabla \times (\nabla \times (P_{lm} \varphi_l^m(\cos \theta) \mathbf{r}))]. \quad (2.29)$$

$\varphi_l^m(\cos \theta)$  est le polynôme de Legendre de degré  $l$  et d'ordre  $m$ , introduit dans l'annexe B.

Le rotationnel s'écrit alors,

$$\nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{Mmax} [B_n(r, \theta) e^{in\phi} + B_n^*(r, \theta) e^{-in\phi}], \quad (2.30)$$

où le vecteur complexe  $B_n$  est défini par,

$$B_n(r, \theta) = \nabla \times A_n(r, \theta). \quad (2.31)$$

Nous pouvons alors réécrire le terme non linéaire,

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \sum_{p=0}^{Mmax} C_p(r, \theta) e^{ip\phi}, \quad (2.32)$$

où les coefficients  $C_p(r, \theta)$  sont calculés en chaque point de la grille dans l'espace physique, en considérant pour chaque  $m$  et chaque  $n$  les différentes contributions,

Si  $m = 0$  et  $n = 0$  :

$$C_0 = C_0 + \Re(A_0) \Re(B_0). \quad (2.33)$$

Si  $m = 0$  et  $Mmax > n \neq 0$  :

$$C_n = C_n + \Re(A_0) B_n. \quad (2.34)$$

Si  $Mmax > m \neq 0$  et  $n = 0$  :

$$C_m = C_m + \Re(B_0) A_m. \quad (2.35)$$

Si  $m + n < Mmax$  :

$$C_{m+n} = C_{m+n} + \frac{1}{2} [\Re(A_m) \Re(B_n) - \Im(A_m) \Im(B_n)] \\ + \frac{i}{2} [\Re(A_m) \Im(B_n) + \Im(A_m) \Re(B_n)]$$

Si  $Mmax > m > n$  :

$$C_{m-n} = C_{m-n} + \frac{1}{2} [\Re(A_m) \Re(B_n) + \Im(A_m) \Im(B_n)] \\ - \frac{i}{2} [\Re(A_m) \Im(B_n) - \Im(A_m) \Re(B_n)]$$

Si  $Mmax > n > m$  :

$$C_{n-m} = C_{n-m} + \frac{1}{2} [\Re(A_m) \Re(B_n) + \Im(A_m) \Im(B_n)] \\ + \frac{i}{2} [\Re(A_m) \Im(B_n) - \Im(A_m) \Re(B_n)]$$

Si  $Mmax > m = n$  :

$$C_0 = C_0 + \frac{1}{2} [\Re(A_m) \Re(B_n) + \Im(A_m) \Im(B_n)]$$

Cette méthode, totalement spectrale en  $\phi$ , s'est avérée plus performante et surtout plus rapide d'un point de vue numérique que le traitement explicite et classique dans l'espace physique. Ce dernier qui fait appel à des transformées de Fourier ne devient intéressant que pour des ordres  $Mmax$  élevés.

### 2.1.3.2 Le choix du référentiel.

Nous nous sommes avant tout intéressés à l'écoulement se superposant au mouvement de rotation solide instantané du fluide. Vu depuis le référentiel d'inertie, le fluide tourne autour d'un axe  $\omega + \Omega_p$ , où  $\omega$  est le vecteur de rotation du fluide dans le référentiel de précession.

L'équation de Navier-Stokes que nous cherchons à résoudre s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + 2(\omega + \Omega_p) \times \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + (\omega \times \Omega_p) \times \mathbf{r} = -\nabla \pi + E \Delta \mathbf{u} \quad (2.36)$$

La condition d'incompressibilité étant :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.37)$$

Avec cette fois ci des conditions aux limites qui dépendent du temps à travers le vecteur rotation du conteneur,

$$\mathbf{u} = (\hat{\mathbf{k}}_c(t) - \omega) \times \mathbf{r}. \quad (2.38)$$

nous imposons comme condition initiale en tout point de la sphère,

$$\mathbf{u}(r, \theta, \phi) = 0.$$

Nous utilisons dans un premier temps la détermination analytique de Busse (1968[2]) pour obtenir une première approximation du vecteur rotation solide du fluide. En utilisant la méthode présentée dans la section précédente, nous calculons à chaque instant la rotation solide résiduelle du fluide qui traduit l'écart entre la prédiction analytique de départ et la rotation effective du fluide. Lorsqu'après  $N$

itérations en temps cette dernière semble se stabiliser, nous substituons le nouveau vecteur rotation solide à la détermination a priori et effectuons un changement de repère du champ de vitesse. Nous poursuivons ainsi le calcul de manière itérative si cela est nécessaire. En procédant de la sorte, nous tendons vers la situation la plus favorable pour laquelle le référentiel tournant où nous résolvons les équations tend à être confondu avec celui de rotation solide instantané du fluide.

### 2.1.3.3 Le choix du repère.

Le choix du repère est fondamental pour des codes spectraux tels que celui que nous utilisons. En effet, le nombre d'opérations que nous effectuons dépend du degré  $Lmax$  et de l'ordre  $Mmax$  auxquels nous tronquons notre décomposition en harmoniques sphériques du champ de vitesse. Comme nous l'avons fait remarquer dans l'introduction, dans la limite des faibles taux de précession, l'écoulement secondaire s'organiserait principalement soit sur des cônes, soit sur des cylindres. Dans un cas comme dans l'autre ces structures sont de révolution autour de l'axe de rotation du fluide.

Considérons le repère  $(\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z)$  tel que,

$$\hat{\mathbf{e}}_z = \omega/\omega, \hat{\mathbf{e}}_y = \frac{\Omega_p \times \hat{\mathbf{e}}_z}{|\Omega_p \times \hat{\mathbf{e}}_z|}, \hat{\mathbf{e}}_x = \hat{\mathbf{e}}_y \times \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (2.39)$$

Les harmoniques sphériques  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  sont alors définies par rapport à  $\hat{\mathbf{e}}_z$ . Les conditions aux limites dans le référentiel de rotation solide du fluide se réduisant à une rotation de la coquille suivant un axe perpendiculaire à  $\hat{\mathbf{e}}_z$ , elle se décompose dans l'espace spectral sur le toroïdal  $T_1^1$ . Les perturbations associées à la réponse linéaire de couche limite se propageant sur les cônes caractéristiques sont alors également de symétrie  $m = 1$ . L'écoulement géostrophique est quant à lui axisymétrique autour de  $\hat{\mathbf{e}}_z$ . Par des effets non linéaires d'autres composantes spectrales vont pouvoir être peuplées, ces dernières définissent l'ordre  $Mmax$ .

Si nous choisissons maintenant un repère quelconque tel que  $\hat{\mathbf{e}}_z \neq \omega/\omega$ , nous ne pouvons plus décrire la vitesse associée aux cônes uniquement avec des termes d'ordre  $m = 1$ , ni celle associée aux cylindres géostrophiques avec des termes d'ordre  $m = 0$ . Il nous faut dans ce cas un ordre  $Mmax$  pour décrire ces structures d'autant plus grand que l'axe  $\hat{\mathbf{e}}_z$  du repère que nous considérons diffère de l'axe de rotation solide du fluide.

Le repère attaché au vecteur rotation solide du fluide dans le référentiel en précession,  $\omega$ , s'impose donc a priori comme celui pour lequel l'ordre  $Mmax$  nécessaire pour assurer la convergence des calculs reste le plus faible.  $Lmax$  est quant à lui peu sensible au choix du repère. Dans ce cas, seule la composante  $2\omega \times \mathbf{u}$  du terme de Coriolis peut être traitée spectralement. Nous avons traité la partie  $2\Omega_p \times \mathbf{u}$  de la manière suivante :

En posant,

$$2\Omega_p = \nabla \times (\Omega_p \times \mathbf{r}), \quad (2.40)$$

nous pouvons réécrire cette composante de l'accélération de Coriolis sous la forme,

$$2\Omega_p \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times (\nabla \times (\Omega_p \times \mathbf{r})). \quad (2.41)$$

Elle peut ainsi être traitée avec le terme non-linéaire.

#### 2.1.4 Le problème du spin-over.

D'un point de vue numérique le problème du spin-over apparaît comme une simplification de celui de la précession que nous venons de présenter. Comme nous l'avons mentionné au début de ce chapitre nous ne considérons ici que le cas où la composante de rotation équatoriale du fluide que nous ajoutons à l'instant  $t=0$  est infinitésimale. Ceci nous autorise donc à négliger les termes non linéaires dans l'équation du mouvement. Dans le référentiel du conteneur, l'équation de Navier-Stokes pour la vitesse  $\mathbf{u}$  se superposant au mouvement de rotation en bloc du fluide et de la coquille est :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + 2\hat{\mathbf{k}}_c \times \mathbf{u} = -\nabla \pi + E\Delta \mathbf{u}. \quad (2.42)$$

La conservation de la masse et les conditions aux limites s'écrivent,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{u} = 0. \quad (2.44)$$

Formellement nous passons de l'équation du mouvement dans le cas de la précession (2.36) à celle du spin-over (2.42) en posant  $\Omega_p = 0$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \hat{\mathbf{k}}_c$  et en négligeant les termes non linéaires. Nous avons donc utilisé le même code que précédemment pour résoudre le problème du spin-over, le système étant linéaire la résolution est purement spectrale.

Nous avons imposé comme conditions initiales,

$$\mathbf{u} = \delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (2.45)$$

## 2.2 Résultats et discussion.

## Numerical study of the motions within a slowly precessing sphere, at low Ekman number

By JÉRÔME NOIR<sup>1</sup>, D. JAULT<sup>1,2</sup> AND P. CARDIN<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>LGIT, Université Joseph Fourier de Grenoble, BP 537, Grenoble, France

<sup>2</sup>CNRS, France

(Received )

A geostrophic circulation and a pair of oblique oscillating shear layers arise in a spherical fluid cavity contained in a slowly precessing rigid body. Both are caused by the breakdown of the Ekman boundary layer at two critical circles. We rely on numerical modelling to characterize these motions for very small Ekman numbers. Both the  $O(E^{1/5})$  amplitude of the velocity in the oscillating shear layer and the width (also  $O(E^{1/5})$ ) of these oblique layers are the result of influx into the interior from the regions where the Ekman layer breaks down. The oscillating motions are confined to narrow shear layers and their amplitude decays exponentially away from the characteristic surfaces. Nonlinear interactions inside the boundary layer drive the geostrophic shear layer attached to the critical circles. This steady layer, again of  $O(E^{1/5})$  thickness, contains  $O(E^{-3/10})$  velocities. Our results are in good agreement with the experimental measurement by Malkus of the geostrophic velocity arising in a slowly precessing spheroid.

## 1. Introduction

Motions, with diurnal period, are produced, inside the Earth's fluid core, by the slow precession of the Earth's rotation axis. The amplitude of these motions is unknown as they do not cause changes in the magnetic field measured at the Earth's surface. They have been neglected in numerical studies of the geodynamo because the magnetic diffusion time of the Earth's core is large compared to diurnal periods. However, nonlinear interaction between these motions may yield slowly varying flows that can play a role in the generation of the magnetic field (Malkus 1968).

In the absence of either direct or indirect observations, laboratory experiments, theoretical investigations and numerical calculations have been particularly important for our understanding of fluid motions inside the Earth's core due to the precession of the mantle. Neglecting viscous friction at the core-mantle boundary, Poincaré (1910) calculated the response of the fluid to the precession of its spheroidal boundary. It is little different from a rotation about an equatorial axis, the (2, 1, 1) mode, as denoted in the classification of Greenspan (1968) for spherical inertial modes, and it has to be considered in studies of nutation of the Earth's axis of rotation. The correction to this mode due to viscous friction at the boundary is not easily calculated because the Ekman layer of width  $E^{1/2}$  (where  $E$  is the Ekman number) is singular at the critical circles. There, the viscous term does not enter the balance of forces at the main order. As a consequence, the radial length scale is large compared to  $E^{1/2}$ . Roberts & Stewartson (1963) found indeed that the depth of the boundary layer scales as  $E^{2/5}$  in a region of  $O(E^{1/5})$  dimension around the critical latitude (at  $30^\circ$  latitude in the sphere). Then, Busse (1968) calculated the viscous correction to the Poincaré motion in a precessing spheroid. He obtained his solution by assuming a double expansion involving two small parameters  $E^{1/2}$  and  $\varepsilon$ , the amplitude of the boundary layer flow. Busse found that at the order  $E^{1/2}\varepsilon$  the interior

flow can be expressed as  $\omega \times \mathbf{r}$ , where  $\mathbf{r}$  is the position vector and  $\omega$  is a rotation vector, which is constant in the frame of reference which rotates with the precession rate. He showed that the critical circles at which the Ekman layer breaks down occur with respect to  $\omega$ .

The interior sees the breakdown of the  $E^{1/2}$ -layer as a singularity since there the flow emitted by the boundary layer does not scale as  $E^{1/2}$ . Kerswell (1995) realized that the Ekman layer breakdown spawns an inertial wave into the interior and he conjectured that the scaling of its wavelength stems directly from the  $O(E^{1/5})$  size of the source. The scaling of the influx into the interior from the critical zones of the boundary layer was given by Stewartson & Roberts (1963), in their study of the motion in a precessing spheroid. It is  $O(E^{1/5})$  instead of  $O(E^{1/2})$  away from the singularities. We may then anticipate that the velocity in the oscillating shear layers scale also as  $E^{1/5}$  (rather than  $E^{3/10}$  as suggested by Kerswell). The singularity is propagated along the characteristic surfaces of the equation governing inertial waves with diurnal period. The characteristic surfaces are cones symmetric about the fluid's rotation axis which have semi-angle  $30^\circ$ . In a sphere, there are two characteristic surfaces each associated with one of the two critical circles (Hollerbach & Kerswell 1995). Both cones meet the rotation axis at a pole on the boundary and this makes the spherical problem special. Numerical modelling can validate the conjectures listed above about the behaviour of the solution as  $E \rightarrow 0$ . We give also particular attention to the decay of the shear away from the characteristics attached to the Ekman layer breakdown. We rely, for this study, on the spin-over problem, which may be described as a linearization of the precession problem.

However, explaining the geostrophic circulation exhibited by Malkus (1968) necessitates nonlinear studies. Malkus was particularly interested by the turbulence that he witnessed at large precession rate of an oblate spheroid but he also visualized, at smaller

precession rate, a geostrophic circulation. To date, the Malkus' observations give the only quantitative measure of the geostrophic circulation arising in a precessing spheroid (see our figure 8). Greenspan (1969) proved that the nonlinear interaction of inviscid inertial modes cannot produce a geostrophic flow. This highlighted the importance of the study by Busse (1968). This author showed that nonlinear interactions between different parts of the boundary-layer flow, of amplitude  $\varepsilon$ , yield, at the order  $\varepsilon^2$ , a geostrophic shear extending into the interior. The findings of Busse explained well the experimental results of Malkus (1968), notwithstanding the divergence of the solution at the critical circles where the  $O(E^{1/2})$  scaling for the width of the Ekman layer fails. In order to remedy the divergence of the solution found by Busse, a study of the nonlinearities in the boundary layer at the two critical circles is required. The complete asymptotic theory appears difficult to obtain. Our numerical investigation of the full precession problem allows us nevertheless to outline such a study. We propose asymptotic laws for the thickness of the axial shear layer and for the velocities that it contains. As showed by Busse, we do not lose generality here by studying only the spherical case. It enables us also to describe finite viscosity effects, such as possible nonlinear interaction of the motions inside the oblique shear layers.

The inertial waves, that make the shear layers, are not much affected by viscous forces because their length scale is large compared to the  $E^{1/3}$  natural scale. Away of the critical circles, they obey the no-penetration condition (at the order  $E^{1/2}$ ), crucial to Greenspan's proof. As a result, their nonlinear interaction does not yield, in the limit of vanishing viscosity, a steady geostrophic circulation, notwithstanding the geostrophic shear attached to the critical circles and pointed out by Busse (1968). On the other hand, Vanyo *et al.* (1995) have observed several axial shear structures in an oblate precessing spheroid filled with water (their figure 2). Because of light refraction at the interface

between Plexiglas and air, the photographs of Vanyo *et al.* (1995) do not show the shear predicted by Busse and observed by Malkus but instead axial shear layers occurring at smaller distances to the rotation axis. Hence, Hollerbach & Kerswell (1995), in the course of their investigation of the unforced spin-over mode in a sphere, suggested that, in addition to the geostrophic shear found by Busse, which can be explained by the breakdown of the Ekman layer only, other shear zones arise as the result of nonlinear interaction between the inertial waves in the interior. If true, it is a finite viscosity effect. Investigating the precessionally forced mode in the sphere allows us to question the suggestion put forward by Hollerbach & Kerswell to explain these structures. The ellipticity of the oblate spheroid that has been used in the experiment of Vanyo *et al.* (1995) is indeed small compared to  $E^{1/5}$ . We may thus consider it spherical. Finally, a recent study by Tilgner (1999b) of the flow in a precessing spherical shell is best discussed, in the light of our results, at the end of the article.

§2 describes the equations that are solved and the numerical method. §3 treats the linear problem. It is focussed on the scaling of the inertial waves emitted by the singularity in the Ekman layer. Results about the full precession problem are given in §4. We treat it as an initial value problem. We conclude with a discussion that includes a comparison between the quantitative measurements of Malkus (1968) and our numerical solution. Possible implications for Earth's core dynamics are considered also.

## 2. Equations of the problem

An incompressible fluid of kinematic viscosity  $\nu$  is enclosed in a spherical container of radius  $R$ . The sphere is spinning with a frequency  $\omega_c$  along  $\mathbf{k}_c$ , and precessing at  $\omega_c \Omega_p$  along  $\mathbf{k}_p$ . Units of length and time are chosen as  $R$  and  $\omega_c^{-1}$  respectively,  $E = \nu / \omega_c R^2$  is the Ekman number. Following Busse (1968), we assume that the main response of the

fluid to the precession of the container is a solid-body rotation  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  on which a secondary flow is superimposed and that the rotation vector  $\boldsymbol{\omega}$  is also precessing at  $\omega_c \Omega_p$ . We write the momentum equation in a referential frame attached to the solid-body rotation of the fluid. Including the centrifugal force in the reduced pressure  $\varphi$ , the momentum equation for  $\mathbf{u}$  reads:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2 \left( \Omega_p \hat{\mathbf{k}}_p(t) + \boldsymbol{\omega} \right) \times \mathbf{u} + \left( \Omega_p \hat{\mathbf{k}}_p(t) \times \boldsymbol{\omega} \right) \times \mathbf{r} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \varphi + E \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.1)$$

Boundary conditions are no-slip and no-penetration at  $r=1$ :

$$\mathbf{u} = \left( \hat{\mathbf{k}}_c(t) - \boldsymbol{\omega} \right) \times \mathbf{r}. \quad (2.2)$$

The vectors  $\hat{\mathbf{k}}_p(t)$  and  $\hat{\mathbf{k}}_c(t)$  are time-dependent.

The equation (2.1) is invariant under parity transformation  $P : \mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}, \mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{u}$ . We can thus divide the solutions of this equation into two sets. The forcing at the boundary is symmetric under parity. Antisymmetric motions may thus arise only as a consequence of a bifurcation. Hence, we leave aside this set of velocity fields in §3.

We have found that the choice of the rotation vector  $\boldsymbol{\omega}$  is crucial to obtain an accurate solution of the precession problem. To obtain the same level of accuracy, a much larger truncation level  $M$  (see (A 2) and (A 3)) would be required if the choice of the rotation vector were not appropriate. We start our time-stepping calculations with the rotation vector analytically determined by Busse (1968). Then, we correct it by the residual solid-body rotation that we have inferred numerically. In addition, this procedure makes also the analysis of the results easier as the location of the different shear layers are determined with respect to  $\boldsymbol{\omega}$ . The final solution is steady in the frame of reference that rotates with the precession rate. Time integration is on the order of a few spin-up times  $E^{-1/2} \omega_c^{-1}$ . Other details of the numerical method are left for the Appendix.

### 3. Viscous correction to the spinover mode

We study first the linear problem. Neglecting the nonlinear terms allows us to calculate the solution for very low values of the Ekman number (down to  $E = 10^{-8}$ ), and to determine the structure of the shear layer spawned by the Ekman layer breakdown at  $30^\circ$  latitude. Let us again consider a fluid rotating with its spherical container at  $\omega_c$ . We assume that the axis of rotation of the shell is suddenly tilted by an infinitesimal quantity, so that the problem is linear. The momentum equation in the co-ordinate system rotating with  $\boldsymbol{\omega}_c$  is:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2 \hat{\mathbf{k}}_c \times \mathbf{u} = -\nabla \varphi + E \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3.1)$$

with the rigid boundary condition:

$$\mathbf{u} = 0. \quad (3.2)$$

It amounts to the equation (2.1) with  $\Omega_p \ll 1$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \hat{\mathbf{k}}_c$  and the nonlinear terms neglected. We consider as initial condition a differential rotation between the fluid and the solid container around an axis in the equatorial plane. Then, the primary velocity is a rotation about an equatorial axis fixed in the inertial space, referred to as the (2, 1, 1) mode by Greenspan (1968). Denote  $\boldsymbol{\omega}_1$  the rotation vector. We look on the viscous correction to this inviscid mode. Only ( $m = 1$ ) terms need to be considered (see (A 4) for the definition of  $m$ ).

#### 3.1. The (2, 1, 1) mode

Taking into account the viscous boundary layer, Greenspan gives the exponential decay  $-2.62 E^{1/2}$  of the amplitude of the mode (2, 1, 1) and the viscous correction  $-0.259 E^{1/2}$  to its eigenfrequency. In the numerical study of Hollerbach & Kerswell (1995) as in ours, the observed decay factor seems to approach asymptotically the coefficient determined

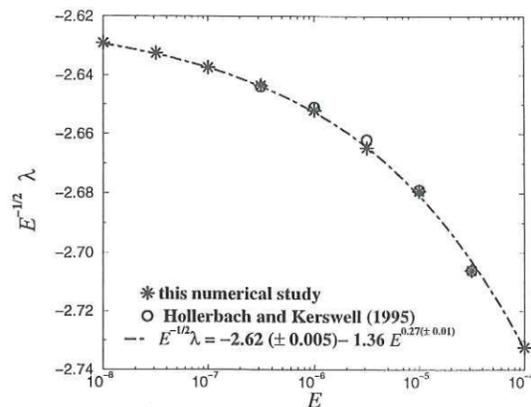


FIGURE 1. Viscous decay of the mode (2,1,1). An exponential fit to the calculated decay rate  $\lambda$  is also reported.

analytically. Figure 1 shows the decay factor  $\lambda$  for different Ekman numbers. It transpires that the expansion (Greenspan 1968) in powers of  $E^{1/2}$  holds at first order. The oblique shear layers studied below do not have a significant effect on the viscous damping of the spin-over mode. As a result, we may expect that the expression (see equation(4.1)) given by Busse (1968) for the solid-body rotation of a fluid enclosed in a precessing spherical cavity is very accurate also. Indeed, Busse has assumed the same expansion in powers of  $E^{1/2}$  to determine the boundary-layer effects.

### 3.2. The internal shear layer

The numerical calculations of Hollerbach & Kerswell (1995) have showed internal shear zones spawned by singularities in the Ekman boundary layer at the critical latitude of  $30^\circ$ . Kerswell (1995) argued that the  $O(E^{1/5})$  width of the region where the Ekman layer breaks down determines the length scale of the shear layer because it is larger than the  $O(E^{1/3})$  natural length scale. In order to study the shear layer, we first remove a solid body rotation about an equatorial axis (the (2, 1, 1) component of the velocity

field). In this subsection, the velocity unit is  $\omega_1 R$ . Figure 2 shows the three components of the residual velocity for Ekman numbers ranging from  $10^{-6}$  to  $10^{-8}$ . Internal shear layers organized along characteristic surfaces of the equation (3.1), which is hyperbolic for diurnal motions, are clearly visible.

Let us consider a cross-section of the internal shear zone. At the constant  $30^\circ$  latitude, the velocity components are given as a function of radius (figure 3). With this choice, both  $u_\theta$  and  $u_\phi$  are parallel to the characteristic surface ( $(r, \theta, \phi)$  are spherical co-ordinates). The cross-section is directed along the wave vector and the shear layer is centred on ( $r = 0.5$ ), in the meridional plane defined by  $\hat{k}_c$  and  $\omega_1$ . We reckon that the wavelength scales as  $E^{1/5}$ , as anticipated by Kerswell, with a prefactor on the order of the sphere radius. The velocities tangential to the characteristic cones scale also as  $E^{1/5}$  and decay exponentially away from the shear layers. In order to illustrate these effects, we have rescaled both the distance from the shear layer  $r^* - 0.5 = E^{-1/5}(r - 0.5)$  and the velocity amplitude  $u^* = E^{-1/5}u$  (figure 3). Table 1 shows the extrema of  $u_\phi$  as a function of the distance to the characteristic surface. We find that the decay exponent is  $O(E^{-1/5})$ , as the wavenumber. In each meridional plane, the velocity is almost invariant along the characteristic lines. It changes as  $s^{-1/2}$  (Rieutord & Valdettaro 1997), where  $s$  is the cylindrical radius. It is dictated by the radial velocity either entering or leaving the boundary layer at the critical circles. Let us recall, for future reference, the elucidation of this boundary layer by Roberts & Stewartson (1963).

These authors write the momentum equation in the boundary layer near a critical circle. Retaining both the radial and the tangential derivative  $\partial/\partial\theta$ , they obtain:

$$(1 \pm 2 \cos \theta) \frac{\partial u_\pm}{\partial r} = -iE \frac{\partial^3 u_\pm}{\partial r^3} \pm \frac{2 \sin \theta}{r} \frac{\partial u_\pm}{\partial \theta}, \quad \text{with } u_\pm = u_\theta \pm iu_\phi. \quad (3.3)$$

Away from the critical circles ( $2 \cos \theta_0 \neq \pm 1$ ), they recover a classical Ekman layer and

| $r^*$ | $u_\phi^*$ | $\ln( u_\phi^* )/ r^* $ | $r^*$ | $u_\phi^*$ | $\ln( u_\phi^* )/ r^* $ |
|-------|------------|-------------------------|-------|------------|-------------------------|
| -7.64 | 0.00034    | -1.05                   | 1.07  | 0.36554    | -0.94                   |
| -6.69 | 0.00198    | -0.91                   | 2.80  | -0.19402   | -0.58                   |
| -5.75 | -0.00179   | -1.13                   | 4.11  | 0.03195    | -0.84                   |
| -4.92 | 0.00386    | -1.11                   | 5.05  | -0.01050   | -0.90                   |
| -3.93 | -0.01639   | -1.05                   | 5.89  | 0.00171    | -1.05                   |
| -2.68 | 0.08951    | -0.90                   | 6.55  | -0.00153   | -1.02                   |
| -1.10 | -0.31819   | -1.05                   | 7.14  | 0.00035    | -1.02                   |

TABLE 1. Distance to the characteristic surface and value of the extrema of  $u_\phi^* = E^{-1/5}u_\phi$  (as inferred from figure 3).  $r^* = E^{-1/5}(r-0.5)+0.5$ .  $E = 10^{-8}$ . The third columns show exponential decay of the velocity amplitude away from the characteristic surface located at  $r^* = 0$ .

the third term can be neglected. In the critical zone (of the Northern hemisphere to be specific), they write  $(\theta = \theta_0 + \psi)$  in order to transform the equation (3.3) into:

$$2 \sin \theta_0 \psi \frac{\partial u_-}{\partial r} = -iE \frac{\partial^3 u_-}{\partial r^3} - \frac{2 \sin \theta_0}{r} \frac{\partial u_-}{\partial \psi}. \quad (3.4)$$

Thus, they obtain the scaling as  $E^{2/5}$  along the radius and  $E^{1/5}$  in the  $\theta$ -direction. In our problem, the horizontal velocity scales as  $\varepsilon = \omega_1 = |\omega - \hat{\mathbf{k}}_c|$ , where  $\omega$  is the solid-body rotation in the interior. From the mass conservation equation, it follows that  $u_r$  is  $O(\varepsilon E^{1/5})$  (Stewartson & Roberts 1963). Figure 4 illustrates these different scalings.

That explains the amplitude of the velocity field along the characteristic surfaces. The remaining  $O(\varepsilon E^{1/5})$  discontinuity in the horizontal components would be removed at the next order of an expansion in powers of  $E^{1/5}$ . This result differs from the predictions ( $E^{3/10}$  scaling, algebraic decay) based on an analytical study of the coaxial disc system. Kerswell (1995) applied the work of Walton (1975), who had studied the inertial waves

propagating from an abrupt discontinuity in the boundary conditions, to the singularity associated with the breakdown of the Ekman layer at  $30^\circ$  latitude. A first difficulty arises because of the spherical geometry of our model. In the coaxial disc system and in an oblate spheroid as well, the characteristic surfaces meet the boundary away from the rotation axis: reflection of the wave generates another shear layer as do subsequent reflections on the boundary. At each reflection, energy is dissipated in the boundary layer. Such a phenomenon does not take place in the sphere and this makes the spherical problem special. On the other hand, we think that the origin of the discrepancy between the prediction by Kerswell (1995) of the velocity along the characteristics and our results can be traced to the modelling by this author of the singularity as a change in the boundary conditions, on an  $O(E^{1/5})$  distance, for the tangential velocity field.

#### 4. Nonlinear study of the full precession problem

##### 4.1. Symmetry of the solution

As noted in § 2, the boundary conditions are symmetric under parity transformation. On the other hand, Vanyo *et al.* (1995) and Vanyo & Dunn (2000) did observe motions symmetric about the axis of rotation that cross the equatorial plane. These motions do not share the parity symmetry of the boundary conditions. They can arise only as a result of a symmetry-breaking bifurcation. As Tilgner (1999b), we have found no evidence of such a bifurcation. It is possible also that we have neglected forces (such as buoyancy) that are important in laboratory experiments.

##### 4.2. Comparison of the fluid solid-body rotation with Busse's prediction

In the case of the spherical cavity the expression derived by Busse (1968) for  $\omega$  reduces to

$$\boldsymbol{\omega} = \omega^2 \left( \hat{\mathbf{k}}_c + \gamma \frac{2.62\omega^{1/2} \hat{\mathbf{k}}_c \times \hat{\mathbf{k}}_p + \hat{\mathbf{k}}_c \times (\hat{\mathbf{k}}_p \times \hat{\mathbf{k}}_c) (0.259\omega^{-1/2} + \gamma \hat{\mathbf{k}}_p \cdot \hat{\mathbf{k}}_c)}{(0.259\omega^{-1/2} + \gamma \hat{\mathbf{k}}_p \cdot \hat{\mathbf{k}}_c)^2 + 2.62^2\omega} \right), \quad (4.1)$$

with  $\gamma = \Omega_p E^{-1/2}$ . This expression involves only the dimensionless number  $\gamma$  because we have restricted the general expression of Busse (his expression 3.19) to the case of the spherical cavity. Busse showed that this expression is valid when  $\gamma \sin \alpha \ll 1$ , where  $\alpha$  is the angle which  $\hat{\mathbf{k}}_p$  makes with  $\hat{\mathbf{k}}_c$ . The calculations are for  $\alpha = 23.5^\circ$ .

Figures 5 present a comparison between the numerical determination of  $\boldsymbol{\omega}$  and the analytical prediction. Very small values of the Ekman number need to be considered to show convergence to the theoretical limit. On the other hand, the component along  $\hat{\mathbf{k}}_c$  is not displayed as it is very well recovered. The difference between the numerical estimate of  $\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{k}}_c$  and the value predicted by (4.1) scales as  $\gamma^2$ . The Busse's equation still gives a fair approximation of the solution for  $\gamma = 1$ . As  $\gamma$  is further increased, the solid-body rotation ceases to predominate over other motions and indeed it has proved impossible to calculate a numerical solution for the equation (2.1) with  $\boldsymbol{\omega}$  given by (4.1) for  $\gamma = 10$  and  $E \leq 10^{-4.5}$ . The agreement between the expression 4.1 and our numerical determination shows again (see §3.1) that the singularity of the Ekman boundary layer at the critical circles does not affect the viscous correction to the spin-over mode (2, 1, 1) calculated as an expansion in powers of  $E^{1/2}$ .

The differential rotation between the interior flow and the solid boundary spawns once again oblique internal shear layers. We rely on the linear calculations, performed at much smaller Ekman number, to describe these structures. The novel feature is the geostrophic shear.

## 4.3. Geostrophic shear

As long as the equation (4.1) is valid, we can identify the amplitude  $\varepsilon$  of the boundary layer flow with  $\gamma \sin \alpha$ . Figure 6 shows the part of the flow symmetric around  $\boldsymbol{\omega}$  for  $\gamma = 0.1$ . The flow is almost completely geostrophic. It is mainly azimuthal and it is very much invariant in the  $\boldsymbol{\omega}$  direction. The numerous strong axial shear layers found by Hollerbach & Kerswell (1995) (their figure 4), in their study of the unforced spin-over mode, are not recovered. The meridional component is confined to the boundary layer in the critical region as the Ekman number is decreased. Figure 7 (left) shows the geostrophic component as a function of the distance to the  $\boldsymbol{\omega}$  axis, again for  $\gamma = 0.1$ . With decreasing Ekman number, the axial shear gets localized on the cylinder intersecting the boundary at the critical circles, at the distance  $\cos(\pi/3)$  of the axis. As predicted by Busse (1968), the geostrophic velocity scales as  $\gamma^2$  (figure 7, right). This steady interior circulation arises in response to nonlinear effects in the viscous boundary layer. According to Busse, away of the singularity, it becomes independent of the Ekman number in the limit of vanishing  $E$ . Our calculations are for too high Ekman numbers to show unambiguously this behaviour. On the other hand, we find that the width of the shear layer scales as  $E^{1/5}$  (see table 2). Hence, it is defined by the size of the singularity at the boundary. Viscous effects in the interior do not play a dominant role because they would smooth the shear on  $O(E^{1/4})$  distances (Stewartson 1966; Moore & Saffman 1969), small compared to the lateral extension of the singularity. Finally, we find that the velocity jump across the shear layer shows a dramatic increase as the Ekman number is lowered. The amplitude of the geostrophic velocity  $\mathbf{u}_G$  in the axial layer attached to the critical circles follows from a comparison of the orders of magnitude.

As noted by Busse (1968), the angular velocity of the container parallel to  $\boldsymbol{\omega}$  is equal to  $\boldsymbol{\omega}$ . As a result, the component of  $\mathbf{u}$  that is symmetric around  $\boldsymbol{\omega}$  vanishes at the boundary.

| $E$         | $\delta u_\phi$      | $\delta s$ | $u_\phi$             | $s$   |
|-------------|----------------------|------------|----------------------|-------|
| $10^{-5}$   | $0.8 \cdot 10^{-4}$  | 0.192      | $0.17 \cdot 10^{-4}$ | 0.135 |
| $10^{-5.5}$ | $1.15 \cdot 10^{-4}$ | 0.147      | $0.21 \cdot 10^{-4}$ | 0.116 |
| $10^{-6}$   | $1.61 \cdot 10^{-4}$ | 0.121      | $0.23 \cdot 10^{-4}$ | 0.085 |

TABLE 2. Geostrophic flow.  $\delta u_\phi$  is the jump of the geostrophic velocity across the cylinders attached the critical circles, and  $\delta s$  is the radial distance between the velocity extrema on either side of the shear layer. The last two columns give the amplitude and the position of the peak located near the axis.

A classical Ekman boundary layer of  $O(E^{1/2})$  thickness sets in when an axially symmetric interior circulation is present. In the critical regions, this layer is interior to the boundary layer for the oscillating flow. The viscous drag on the ends of the geostrophic cylinders can be determined by considering the flux in the boundary layer. It scales as  $E^{1/2} \mathbf{u}_G$ . On the other hand, the dominant nonlinear terms in the  $\phi$ -direction, in the  $O(E^{2/5})$  boundary layer are

$$u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta}. \quad (4.2)$$

Since the tangential and radial velocities in the critical region are respectively  $O(\gamma)$  and  $O(\gamma E^{1/5})$ , the amplitude of the nonlinear effects amounts to  $\gamma^2 E^{-1/5}$  in a layer of  $O(E^{2/5})$  thickness. It follows that the geostrophic velocity scales as  $\gamma^2 E^{-3/10}$ . Finally, the table 2 (second column) shows that the  $E^{-3/10}$  scaling for the geostrophic circulation is definitely buttressed by the numerical evidence. The numerical exponent inferred from the values reported in table 2 is 0.30. In addition to the shear layer identified by Busse, we find some weak shear, distributed in the interior. It is tiny in comparison with the main shear except in the vicinity of the rotation axis.

## 5. Discussion

We now compare our numerical results with experimental observations, which have been obtained in oblate spheroids. We have showed that the oscillating layers and the geostrophic circulation as well are the consequences of differential rotation between the fluid and its container. Busse (1968) discussed the region in the parameter space for which the fluid motion is predominantly a solid-body rotation. According to Busse, a measure of our parameter  $\gamma$  is given by the smallest of the two quantities  $\Omega_p E^{-1/2}$  and  $\Omega_p \eta^{-1}$ , where  $\eta$  is the flattening. His theory applies as one of these two parameters is small compared to 1. With  $\Omega_p \eta^{-1} \ll \Omega_p E^{-1/2}$ , the expression derived by Busse (1968) for  $\omega$  reduces to

$$\omega = \omega^2 \hat{\mathbf{k}}_c + \Omega_p \eta^{-1} \hat{\mathbf{k}}_c \times (\hat{\mathbf{k}}_p \times \hat{\mathbf{k}}_c), \quad (5.1)$$

and the parameter  $\gamma$  is estimated as  $2.62 \Omega_p \eta^{-1}$  instead of  $\Omega_p E^{-1/2}$ . We have thus obtained a way to transfer results obtained in the spherical case to the ellipsoidal case. According to §3.2, the velocity in the oscillating internal shear layers scales as  $\gamma E^{1/5}$  whereas the steady geostrophic velocity scales as  $\gamma^2 E^{-3/10}$  (see §4.3). However, the equations (4.1) or (5.1) become not very accurate as  $\Omega_p E^{-1/2}$  or  $\Omega_p \eta^{-1}$  are comparable or of order 1. Hence, in order to compare the experimental measurement of Malkus (1968) of the geostrophic velocity ( $\gamma = 0.8$ , see below) with our numerical prediction, we do not rely on (5.1). Instead, we use the solvability condition (3.14) of Busse (1968) to infer the equatorial component of the differential rotation from the measured axial component (the average westward drift of the dye line photographed by Malkus). Then, we rely on our numerical calculation and on the  $E^{-3/10}$  scaling to predict the geostrophic circulation from the equatorial rotation for  $E = 2.5 \cdot 10^{-6}$ , the Ekman number in the

Malkus' experiment. The figure 8, which is drawn after the figure 3 (left) of Malkus (1968), shows the good agreement between our numerical findings in a full sphere and the experimental results in an ellipsoidal cavity. Because the oblique oscillating layers have  $O(E^{1/5})$  thickness, we suspect indeed that the flattening  $\eta$  is negligible, except for the determination of the differential rotation, as  $\eta \ll E^{1/5}$ .

On the other hand, the inertial waves, that are conspicuous in the numerical solutions, have never been visualized in precession experiments (Malkus 1968; Vanyo *et al.* 1995). Vanyo *et al.* (1995) used a shell of flattening  $\eta = 1/100$ . The precession axis makes an angle  $\alpha = 23.5^\circ$  with the rotation axis as in the geophysical case and our calculation. The rotation rate of the spheroid was held constant. It corresponded to an Ekman number  $E \sim 8 \cdot 10^{-7}$ . With these figures, we find that  $\eta \ll E^{1/5}$ . Vanyo *et al.* (1995) varied the precession rate by two orders of magnitude. For the smallest value of  $\Omega_p$ , we find  $\gamma = 0.13$  and the theory of Busse (1968) applies. The set of parameters representative of the Vanyo *et al.* experiment is close to a set ( $\gamma = 0.1$ ;  $E = 10^{-6}$ ) discussed at length in § 4.3. For this numerical solution, the velocity inside the oblique shear layers is 20 times larger than the steady geostrophic circulation. Neither did Malkus (1968) observe the oblique shear layers. With ( $\gamma = 0.8$ ;  $E = 2.5 \cdot 10^{-6}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ), we still expect the velocity along the characteristic cones to be 3 times larger than the geostrophic velocity. Hence, it is likely that these layers have not been visualized because of their oscillatory nature and, indeed, McEwan (1970) had to rely on sophisticated methods to see these layers in a rotating fluid cylinder.

Until the work of Vanyo & Dunn (2000), which has just been published, the experiments had not included an inner core, which may be important for the geophysical application. The flow in a precessing spherical shell has been recently investigated numerically by Tilgner (1999b). His study has encompassed the effect of an imposed magnetic field

on the flow. The solution of Tilgner is dominated by internal layers driven by the shear at the inner core boundary (see also Hollerbach & Kerswell (1995), Rieutord & Valdetarro (1997) and Tilgner (1999a)). The axisymmetric component of the flow mainly features oblique shear layers that are probably the result of nonlinear interaction of the flow in the internal oscillating layers attached to the inner core at the critical circles. In our view, the emergence of oscillating layers from the boundary with the inner sphere is not yet fully understood but, in any event, the velocities in these layers are small compared to  $\gamma$  (Tilgner (1999b) has assumed that the two boundaries are corotating). It follows that the velocities in the oblique axisymmetric layers are small compared to  $\gamma^2$  and are negligible to the  $O(\gamma^2 E^{-3/10})$  geostrophic velocity in the axial shear layer attached to the critical circles of the outer boundary. The latter layer dominates the axisymmetric part of the flow in the asymptotic limit of small Ekman numbers and it is possible that, in a spherical shell, this occurs only at much smaller Ekman numbers than numerically attainable. Thus, we anticipate that our conclusions about the axial layer are valid also for a model including an inner core, and it seems indeed that an axial layer shows up, not far from the critical circles, in the solution of Tilgner (1999b) (his figure 8a, right), as the Ekman number is decreased. Finally, we may ponder on the existence of another axial cylindrical layer attached to the critical circles of the inner boundary.

In the Earth's core, the value of the dimensionless numbers that are important to determine the effects of the mantle precessional motion are ( $\eta = 1/400$ ,  $\gamma = 1.1 \cdot 10^{-4}$ ,  $E = 10^{-15}$ ). Thus, the  $O(E^{1/5})$  width of the shear layers is not very small compared to the flattening  $\eta$ . The numerical modelling yields a prefactor of order one for the thickness of these layers. As a result, the inertial waves spawned by the breakdown of the outer boundary layer in the Earth's core are perhaps best modelled in the oblate spheroid geometry. On the other hand, the most significant feature, from the geophysical viewpoint,

is the steady axial shear. The mechanism behind the development of this interior circulation does not depend on the ellipticity, of which the only role is to determine the value of the parameter  $\gamma$ . From the numerical values above and the scaling laws determined in §4.3, it follows that  $u_G = 2.10^{-5} m.s^{-1}$ . It is comparable to the velocities of the core surface motions inferred from the secular variation of the Earth's magnetic field ( $10^{-4} m.s^{-1}$ ). On the other hand, the magnetic Reynolds number based on  $u_G$  and the thickness of the axial layer is only  $10^{-1}$ , implying that magnetic field generation in the shear layer itself is unimportant.

### Appendix. Numerical method

Since the fluid we consider is incompressible the velocity field  $\mathbf{u}$  can be expressed in terms of poloidal and toroidal functions:

$$\mathbf{u} = \nabla \times (T\mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (P\mathbf{r}), \quad (\text{A } 1)$$

where  $\mathbf{r}$  is the position vector. We expand  $P$  and  $T$  as

$$P = \sum_{l \leq L, m \leq \min(l, M)} F_l^m(r, t) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (\text{A } 2)$$

$$T = \sum_{l \leq L, m \leq \min(l, M)} G_l^m(r, t) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (\text{A } 3)$$

where  $(r, \theta, \phi)$  are spherical co-ordinates,  $t$  is time,  $L$  and  $M$  are truncation levels,

$$Y_l^m(\theta, \phi) = C_l^m P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}, \quad (\text{A } 4)$$

$P_l^m(\cos(\theta))$  denotes associated Legendre functions, and  $C_l^m$  is a coefficient of normalization. Let us define  $\hat{\mathbf{e}}_z = \boldsymbol{\omega}/\omega$ . Operating with  $\mathbf{r} \cdot \nabla \times$  and  $\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times$  on (2.1), we obtain

the following set of equations for  $T$  and  $P$ :

$$\begin{aligned} (E\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}) L_2 T + 2\omega (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}) \cdot \nabla T - 2\omega Q_3 P - 2\mathbf{r} \cdot (\Omega_p \hat{\mathbf{k}}_p(t) \times \boldsymbol{\omega}) \\ = \mathbf{r} \cdot \nabla \times (2\Omega_p \hat{\mathbf{k}}_p(t) \times \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}), \\ (E\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}) L_2 \nabla^2 P + 2\omega (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}) \cdot \nabla (\nabla^2 P) + 2\omega Q_3 T = -\mathbf{r} \cdot \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (\text{A } 5)$$

$Q_3$  and  $L_2$  are classically defined as:

$$Q_3 = \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \nabla - \frac{1}{2} (L_2 \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \nabla + \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \nabla L_2), \quad (\text{A } 6)$$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - r^2 \nabla^2. \quad (\text{A } 7)$$

The boundary conditions are ( $r = 1$ ):

$$P = T = \frac{\partial P}{\partial r} = 0. \quad (\text{A } 8)$$

As in Dormy *et al.* (1998), we use a Crank-Nicholson scheme for the diffusion term and an Adams-Bashford scheme for all the others. Calculation in the radial direction is done by finite-differences. In order to have an accurate enough resolution of the Ekman boundary layer, we increase the number of points in the vicinity of the outer surface, and conversely, we stretch the radial grid at the centre of the fluid to deal with reasonable time steps and angular resolution. As an example, in order to calculate the flow in a precessing sphere for  $\gamma = 0.1$  (see equation 4.1 for the definition of  $\gamma$ ) and  $E = 10^{-6}$ , we use a deformed grid of 1000 radial points (our radial scheme is second-order accurate), with  $L = 127$ ,  $M = 7$  and  $10^{-2}$  as time step. Calculations in the  $\phi$  direction are fully spectral. Nonlinear terms and the last term on the left-hand side of the first equation (A 5) are calculated by collocation in the  $\theta$ -direction. The benefits of linearizing (A 5) without neglecting also the terms involving  $\Omega_p$  would thus be limited.

## REFERENCES

- BUSSE, F. H. 1968 Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell. *J. Fluid Mech.* **33**, 739–751.
- DORMY, E., CARDIN, P. & JAULT, D. 1998 Mhd flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field. *Earth and Planetary Science Letters* **160**, 15–30.
- GREENSPAN, H. P. 1968 *The theory of rotating fluids*. Cambridge: Cambridge University Press.
- GREENSPAN, H. P. 1969 On the non-linear interaction of inertial modes. *J. Fluid Mech.* **36**, 257–264.
- HOLLERBACH, R. & KERSWELL, R. R. 1995 Oscillatory internal shear layers in rotating and precessing flows. *J. Fluid Mech.* **298**, 327–339.
- KERSWELL, R. R. 1995 On the internal shear layers spawned by the critical regions in oscillatory Ekman boundary layers. *J. Fluid Mech.* **298**, 311–325.
- MALKUS, W. V. R. 1968 Precession of the Earth as the cause of geomagnetism. *Science* **160**, 259–264.
- MCEWAN, A. D. 1970 Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder. *J. Fluid Mech.* **40**, 603–640.
- MOORE, D. W. & SAFFMAN, P. G. 1969 The structure of free vertical shear layers in a rotating fluid and the motion produced by a slowly rising body. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **264**, 597–634.
- POINCARÉ, R. 1910 Sur la précession des corps déformables. *Bull. Astr.* **27**, 321–356.
- RIEUTORD, M. & VALDETARRO, L. 1997 Inertial waves in a rotating spherical shell. *J. Fluid Mech.* **341**, 77–99.
- ROBERTS, P. H. & STEWARTSON, K. 1963 On the stability of a Maclaurin spheroid of small viscosity. *Astrophys. J.* **137**, 777–790.
- STEWARTSON, K. 1966 On almost rigid rotations. part 2. *J. Fluid Mech.* **26**, 131–144.
- STEWARTSON, K. & ROBERTS, P. H. 1963 On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body. *J. Fluid Mech.* **17**, 1–20.
- TILGNER, A. 1999a Non-axisymmetric shear layers in precessing fluid ellipsoidal shells. *Geophys. J. Int.* **136**, 629–636.

- TILGNER, A. 1999b Magnetohydrodynamic flow in precessing spherical shells. *J. Fluid Mech.* **379**, 303–318.
- VANYO, J. P. & DUNN, J. R. 2000 Core precession: flow structures and energy. *Geophys. J. Int.* **142**, 409–425.
- VANYO, J. P., WILDE, P., CARDIN, P. & OLSON, P. 1995 Experiments on precessing flows in the Earth's liquid core. *Geophys. J. Int.* **121**, 136–142.
- WALTON, I. C. 1975 Viscous shear layers in an oscillating rotating fluid. *Proc. R. Soc. Lond. A* **344**, 101–110.

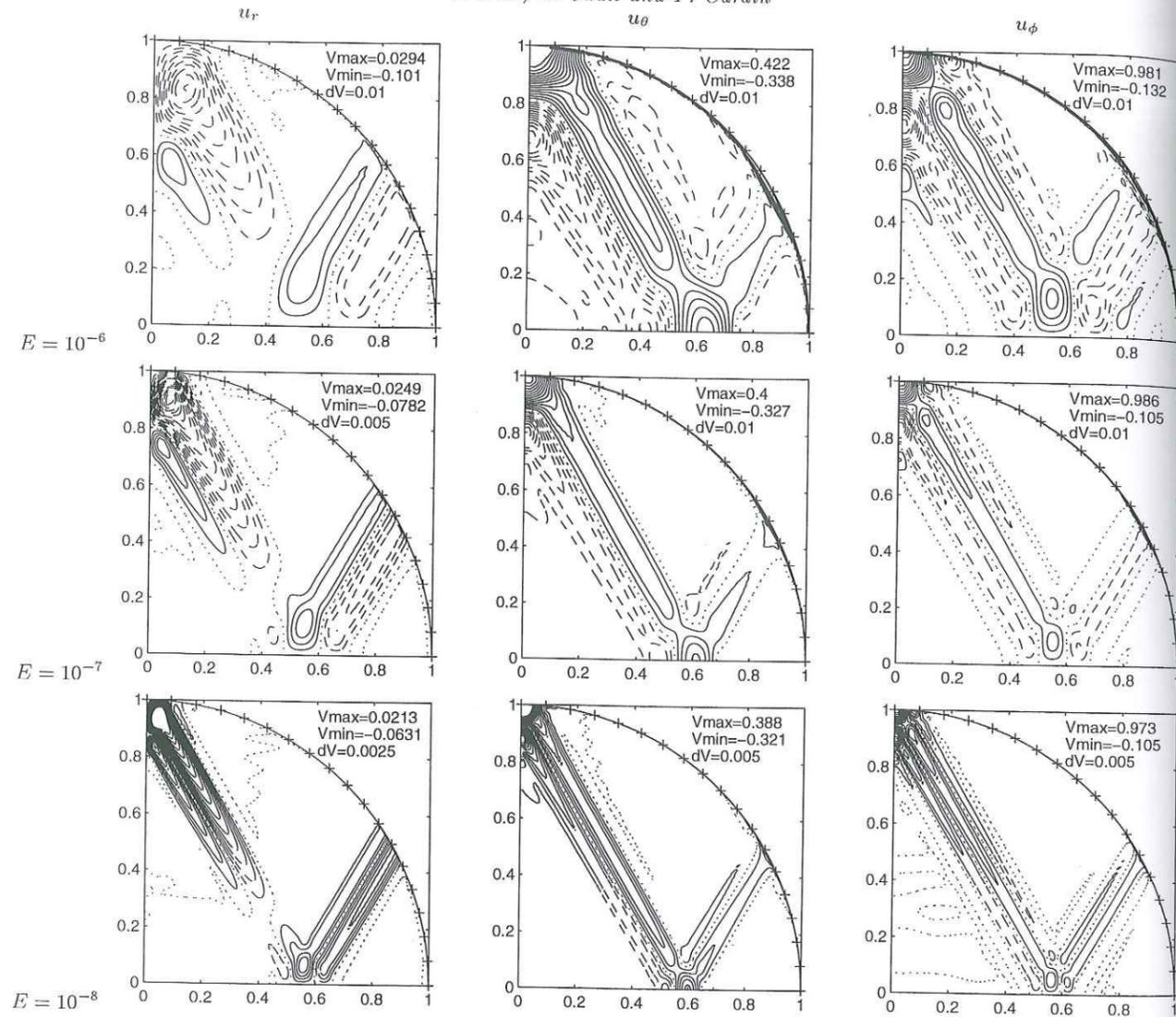


FIGURE 2. The three components of the flow in the meridional plane containing  $\hat{k}_c$  and  $\omega_1$ . Left column:  $u_r$ . Middle column:  $u_\theta$ . Right column:  $u_\phi$ . From top to bottom:  $E = 10^{-6}$ ,  $E = 10^{-7}$ ,  $E = 10^{-8}$ . Contour intervals  $dV$ , maxima  $V_{max}$ , and minima  $V_{min}$  are indicated on each figures. Full (dashed) lines: positive (negative) values. Dotted line: zero isocontour line. Only fifteen isocontour lines are showed and large values are not plotted.

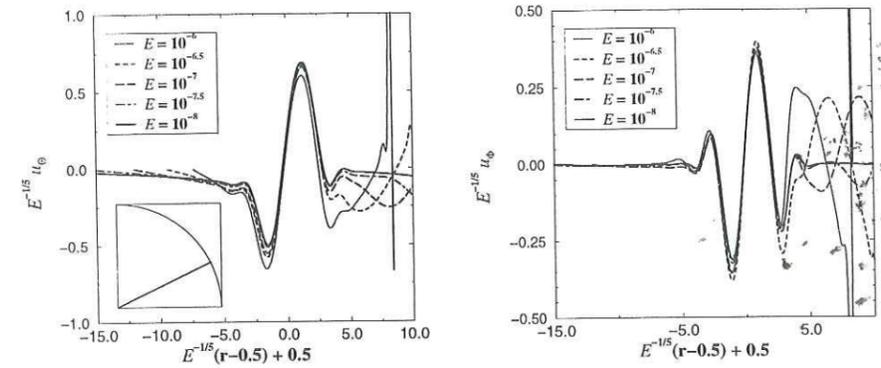


FIGURE 3. Structure of the internal shear layer at  $\theta = \pi/3$ , for which the radial direction is normal to the characteristic surface ( $r = 0.5$ ). The radial coordinate is stretched by the factor  $E^{-1/5}$ . A diagram showing the cross-section in a meridional plane is inserted into the left figure. Left (right) figure:  $E^{-1/5} u_\theta$  ( $E^{-1/5} u_\phi$ ) as a function of the distance to the characteristic surface, for different values of the Ekman number  $E$ . Shear in the boundary layer (here of width  $O(E^{2/5})$ ) causes spikes on the left of the two figures for  $E = 10^{-6}$ .

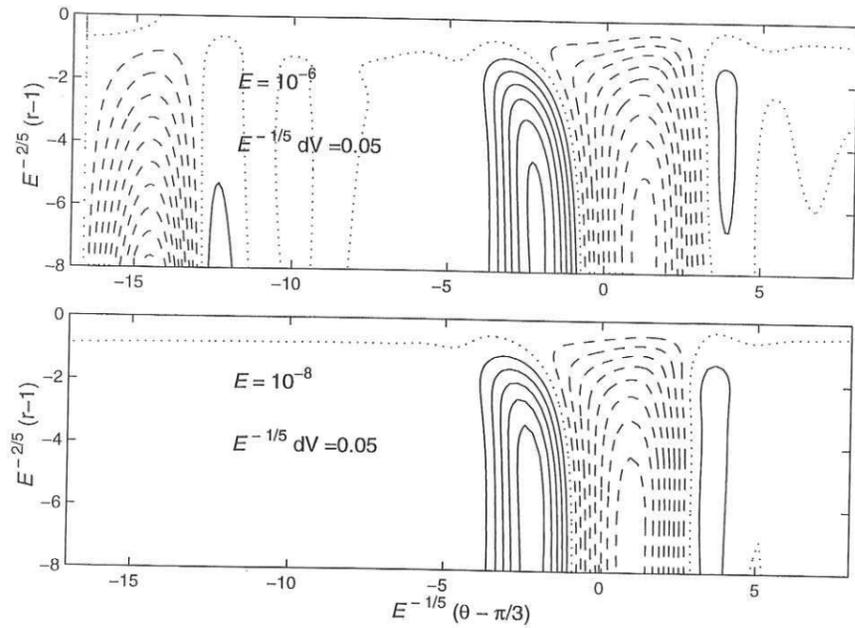


FIGURE 4. Scaling of the boundary layer around the critical latitude ( $\theta = \pi/3$ ). Radial velocity, scaled by  $E^{1/5}$ , as a function of the latitude and the distance to the surface. Top (bottom) figure: blow-up of the solution for  $E = 10^{-6}$  ( $E = 10^{-8}$ ). Same isocontour lines for the two figures.

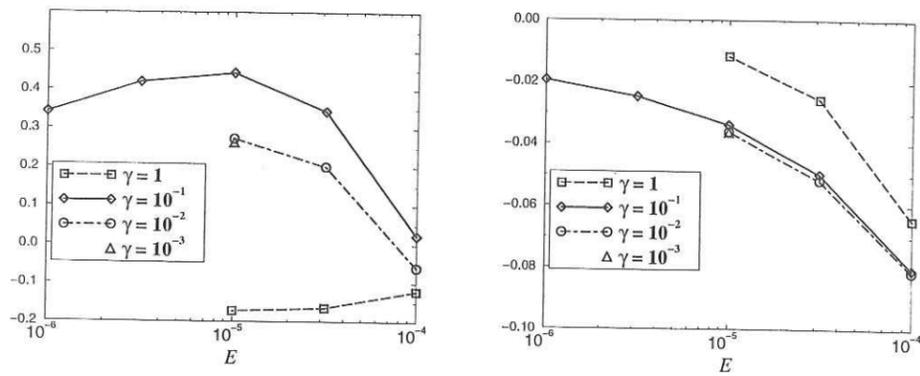


FIGURE 5. Comparison between the numerical determination and the theoretical expression, as given by 4.1, of the equatorial components of the rotation vector  $\omega$ . Relative differences are showed, with the rotation unit given by 4.1, as a function of the Ekman number  $E$ . Left (right): equatorial component in the meridional plane defined by  $\hat{k}_c$  and  $\hat{k}_p$  ( $\hat{k}_c$  and  $\hat{k}_c \times \hat{k}_p$ ).

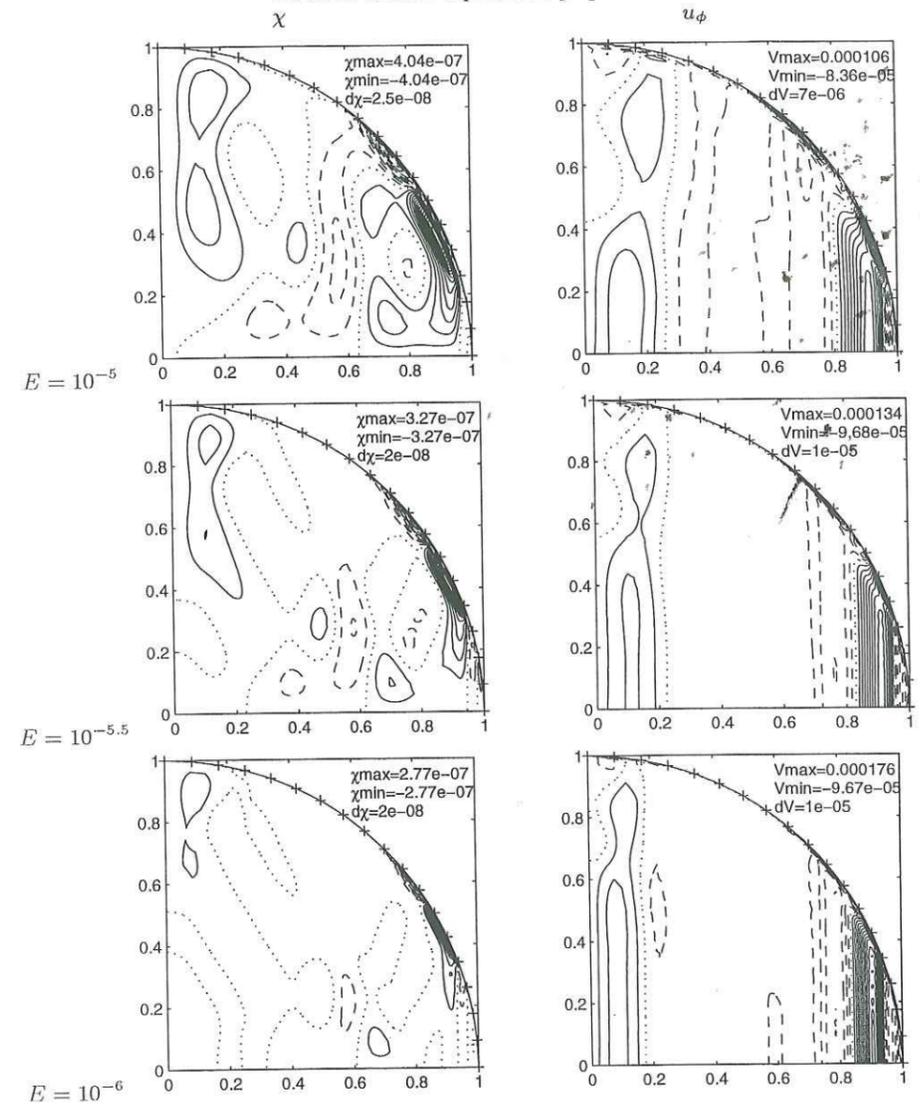


FIGURE 6. Axisymmetric component  $\hat{e}_\phi \times \nabla(\chi(r, \theta)) + u_\phi(r, \theta)\hat{e}_\phi$  of the flow in a precessing sphere ( $\hat{e}_\phi$  is the unit vector in the azimuthal direction). Left column: meridional flow  $\chi$ . Right column: azimuthal velocity  $u_\phi$ . From top to bottom:  $E = 10^{-5}$ ,  $E = 10^{-5.5}$ , and  $E = 10^{-6}$ .  $\gamma = 0.1$ . Contour intervals  $dV$  and  $d\chi$  are indicated.

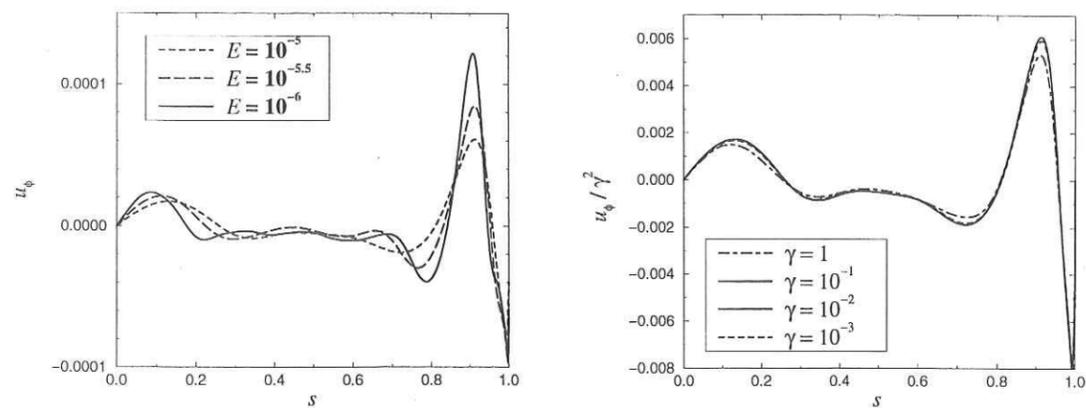


FIGURE 7. Geostrophic velocity as a function of the distance to the axis of the fluid solid-body rotation. On the left,  $\gamma = 0.1$  and  $E$  varies from  $10^{-5}$  to  $10^{-6}$ . On the right,  $E = 10^{-5}$  and  $\gamma$  varies from 1 to  $10^{-3}$ . The geostrophic flow is scaled by  $\gamma^2$ .

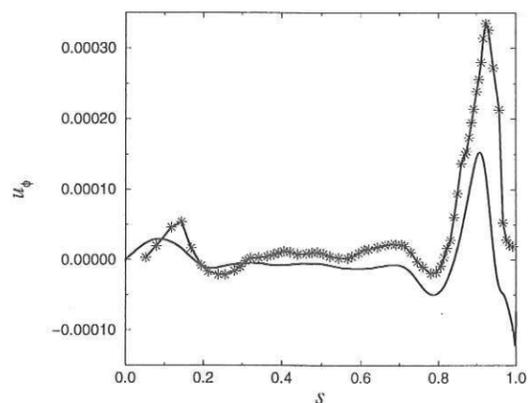


FIGURE 8. Geostrophic velocity as a function of the distance to the axis of the fluid solid-body rotation. Stars correspond to the Malkus experimental data. The solid line is deduced from the numerical results ( $\gamma = 0.1$ ,  $E = 10^{-6}$ ) and the observed axial differential rotation between the fluid and its container (see text).

## Chapitre 3

Approche expérimentale de la  
précession. (CICERON)

### 3.1 Introduction.

Les études numériques que nous avons menées nous ont permis de progresser dans la compréhension physique de la dynamique d'une cavité fluide soumise à la précession de son conteneur. Bien que les capacités des ordinateurs évoluent très rapidement, nous ne sommes pas capables à l'heure actuelle de décrire précisément certains régimes comme la turbulence développée ou la limite des très faibles viscosités ( $Ek \ll 10^{-8}$ ) tout en conservant des temps de calculs raisonnables. Les études expérimentales, telles que celles que nous avons présentées en introduction, nous donnent accès quant à elles assez facilement aux régimes turbulents et sont en ce sens complémentaires des études numériques.

L'évolution de notre compréhension du problème nous a amenée à concevoir une expérience de précession, appelée C.I.C.E.R.O.N, nous permettant de compléter les observations faites lors des études antérieures (Malkus 1968[17], Vanyo et al. 1995[42]). Le travail présenté dans ce chapitre constitue la première étape d'une étude expérimentale de la précession visant à utiliser les techniques modernes de mesures de vitesses telles que la PIV (mesure de vitesse basée sur le suivi de particule) ou la vélocimétrie Doppler (mesure du déphasage Doppler d'une onde ultra sonore réfléchiée par une particule en mouvement).

Dans l'annexe A1 nous présentons les résultats analytiques de Busse (1968[2]) sur la détermination de l'axe de rotation solide du fluide. Nous avons déjà discuté en partie ces résultats dans le chapitre II dans le cas d'un conteneur sphérique. Pour une ellipticité non nulle il existe en précession rétrograde une gamme de paramètres  $(\omega_c, \Omega_p)^1$  pour laquelle plusieurs vecteurs rotation solide du fluide sont solutions des équations. Si comme nous le proposons nous pouvons distinguer deux branches stables de solutions, il faut nous attendre alors à une variation brusque de la direction de l'axe de rotation lorsque le système, pour une valeur critique du taux de précession, saute d'une branche à l'autre. Ce phénomène n'est mentionné ni dans l'article de Busse (1968[2]), ni dans aucune des études qui ont suivi qu'elles soient théoriques ou expérimentales. Nous nous sommes donc intéressés dans un premier temps à la caractérisation de l'écoulement de rotation solide du fluide. Pour cela nous avons mis au point une méthode nous permettant de déterminer la longitude et la latitude du vecteur rotation solide par une mesure de la pression due à l'accélération centrifuge du fluide. En utilisant cette technique nous avons pu observer expérimentalement un des changements brusques de direction de l'axe de rotation solide prédit à partir de l'étude théorique de Busse (1968[2]).

Les expériences antérieures (Malkus 1968[17], Vanyo et al. 1995[42]) rendent compte de l'existence de trois régimes d'écoulement secondaire se superposant à la

<sup>1</sup>Où  $\omega_c$  et  $\Omega_p$  sont respectivement, la vitesse angulaire du conteneur et la vitesse angulaire de la table tournante. Nous définissons la précession prograde par  $\omega_c \Omega_p > 0$  et rétrograde par  $\omega_c \Omega_p < 0$ .

rotation solide du fluide, l'un laminaire, les deux autres plus ou moins turbulents (voir Introduction). Ni les mécanismes, ni même la nature de ces bifurcations n'ont été identifiés. En particulier aucune étude systématique de l'espace des paramètres accessibles expérimentalement n'a été faite. Nous avons donc cherché à caractériser la transition entre les différents régimes, ainsi que le mécanisme pouvant rendre compte de ces instabilités. Aucune réponse claire n'a pu être apportée pour l'instant, nous suggérons toutefois que la première bifurcation puisse correspondre à une déstabilisation des structures de cisaillement géostrophiques du régime laminaire.

La première section consiste en une description du dispositif expérimental que nous avons utilisé. La section 2 est consacrée à l'étude de l'écoulement de rotation solide. Nous présenterons d'abord un ensemble d'observations directes de l'axe de rotation du fluide utilisant une suspension de billes de céramique. Nous introduirons ensuite la méthode que nous avons développée pour déterminer la direction du vecteur rotation à partir de mesures de pression. Après avoir présenté les résultats ainsi obtenus, nous proposerons une discussion générale portant sur l'ensemble de la section. Dans la troisième partie nous présenterons les différents régimes d'écoulement secondaire que nous avons observés et discuterons des mécanismes pouvant être associés aux instabilités.

### 3.2 Dispositif expérimental.

L'étude de l'expérience que nous allons présenter a été réalisée au sein de notre équipe avec J.P. Masson. Les plans dont ont été extraites les vues de la figure (3.1) ont été réalisés par J-C. Jay du bureau d'étude du LEGI. Enfin la réalisation de ce prototype a été confiée à la société SFMM pour la partie mécanique et à la société UFP pour l'usinage du conteneur. L'ensemble de l'expérience a été financé par la région Rhône-Alpes dans le cadre du programme «Émergence».

Le dispositif expérimental est présenté sur la figure (3.1), il est constitué d'un conteneur en plexiglas transparent (3.1, (1)) entraîné en rotation rapide par un moteur sans balai de 3 kW (3.1, (2)). Le positionnement de l'axe de rotation par rapport à la verticale locale est assuré par le groupement de pièces (3). Cet ensemble est posé sur une table tournante (3.1, (4)) dont la rotation est assurée par un second moteur sans balai de 4 kW. La photo (3.2) est une vue d'ensemble de l'expérience. Afin d'éviter les projections d'objet pendant la rotation nous avons construit autour de l'appareil une cabane en polycarbonate de 4 mm d'épaisseur. Je tiens à remercier le Madylam et en particulier Mr. Bolcato pour nous avoir donné la table tournante. L'ensemble des caractéristiques techniques est présenté dans le tableau (3.1).

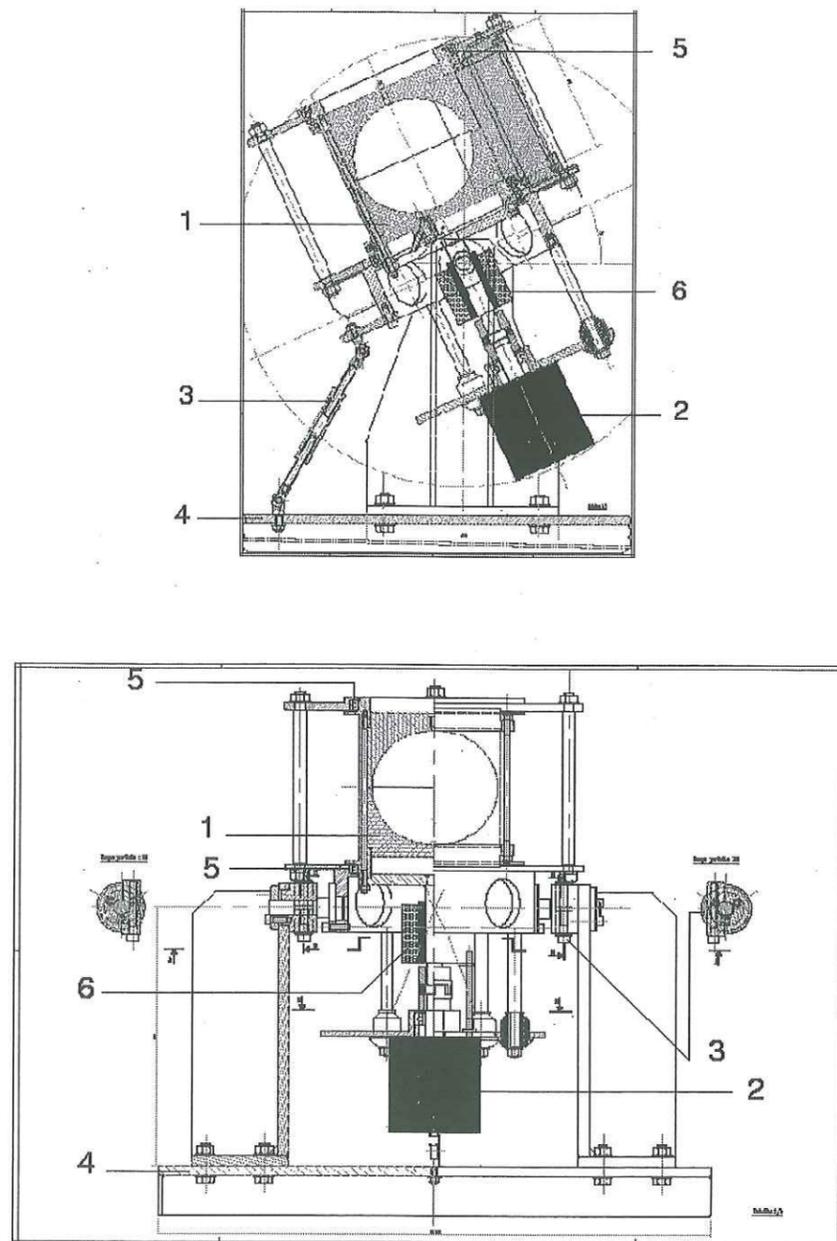


FIG. 3.1 – Dispositif expérimental CICERON. 1-Conteneur, 2-Moteur sans balai, 3-Positionnement angulaire, 4-Table tournante, 5-Roulements à billes, 6-Collecteurs tournants.



FIG. 3.2 – Vue d'ensemble du dispositif expérimental CICERON.

|                                 |   |
|---------------------------------|---|
| R                               | 12 – 12.5 cm $\pm 0.02$ mm                  |
| $\eta$                          | 1/25  |
| $\alpha$                        | 0-45 °                                      |
| $\omega_c$                      | 50-1600 rév/min                             |
| $\Omega_p$                      | -10 à +10 rév/min (min= $\pm 0.1$ )         |
| $Ek = \frac{\nu}{\omega_c R^2}$ | $1.2 \times 10^{-5}$ - $3.8 \times 10^{-7}$ |

TAB. 3.1 – Caractéristiques techniques de l'expérience de précession. Le fluide utilisé est de l'eau à pression et température ambiante.

### 3.2.1 Le conteneur.

Le conteneur est constitué de deux demi-cylindres dans lesquels nous avons fait usiner deux demi-ellipsoïdes de révolution. En choisissant une forme externe cylindrique pour le conteneur la déformation verticale d'un plan méridien de la cavité n'est liée qu'au changement d'indice entre l'eau (1.33) et le plexi (1.49) et reste donc assez faible. En revanche, nous conservons un dioptré cylindrique. Nous décrivons dans l'annexe C la déformation associée à ce dioptré. Comme dans les expériences de Vanyo et al. (1995[42]) et de Malkus (1968[17]) la déformation est d'autant plus importante que nous regardons des structures situées loin de l'axe du cylindre, c'est en particulier le cas de la zone de cisaillement géostrophique en  $s/R = 0.86$ .

Le choix d'une cavité ellipsoïdale nous est pour ainsi dire imposé par des limitations technologiques. Bien qu'il soit possible de faire réaliser une cavité sphérique dans du plexiglas avec une assez grande précision, il est impossible de pouvoir garantir l'absence de déformation radiale à la fois sous l'effet des variations de température et sous l'effet des forces centrifuges associées à la rotation rapide de la pièce. C'est pourquoi nous avons opté pour une ellipticité assez forte ( $\eta = 1/25$ ), de manière à pouvoir négliger les variations dynamiques du rayon devant l'ellipticité.

Au cours des expériences à fort taux de rotation du cylindre ( $\omega_c > 700$  rév/min) nous avons observé quelques secondes après la mise en route du moteur la présence dans la cavité d'une bulle d'air qui disparaît presque instantanément lorsque nous coupons la rotation du conteneur. Le temps de réponse de cette bulle étant très court nous pensons qu'il s'agit d'une déformation de la cavité plutôt que d'un dégazage du liquide sous l'effet de la rotation solide du fluide. Nous avons estimé la taille en surface de cette bulle à  $\sim 2$  cm, ce qui représente une variation de volume de l'ordre de  $16 \text{ cm}^3$ . Une déformation radiale de la cavité de  $0.017$  cm, soit  $\sim 2/100^{\text{ème}}$  de la différence entre le grand axe et le petit axe de la cavité, permet de rendre compte de cette observation.

Un certain nombre de trous ont été effectués dans le conteneur pour pouvoir

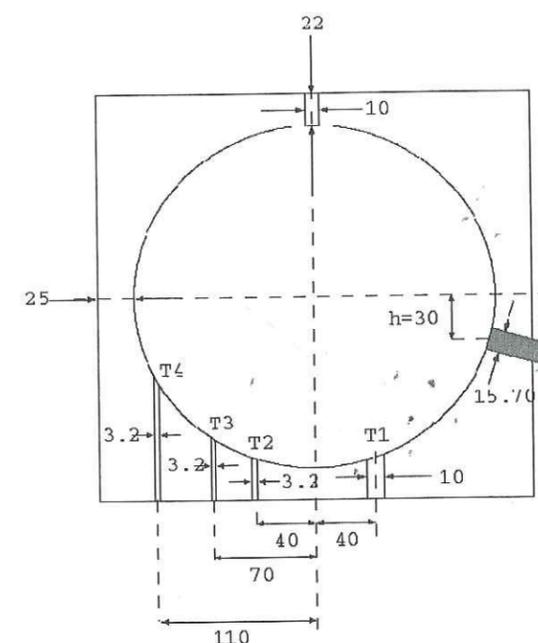


FIG. 3.3 – Schéma du conteneur. Nous avons reporté les trous ainsi que l'emplacement d'un des deux capteurs de pression. Les cotes sont données en mm.

remplir, vider, injecter des colorants et mettre en place des capteurs de pression (figure 3.3). Les deux capteurs de pression sont à 90 ° l'un de l'autre. Les trous T2, T3, T4 sont espacés angulairement de 120 ° les uns des autres, ils sont bouchés par des micro-vannes situées sur la partie externe du cylindre. Deux simblots pouvant remplacer les capteurs de pression (C), ainsi que la vanne permettant de remplir et vidanger le conteneur ont été usinés avec la cavité de manière à épouser au mieux la surface.

### 3.2.2 Motorisation.

La rotation rapide du cylindre est assurée par un moteur de type sans balai YASKAWA de 3 kW. Nous avons utilisé un accouplement mécanique entre le cylindre et le moteur afin de corriger un désaxement éventuel entre ces pièces. Le guidage en rotation du conteneur se fait par deux roulements à billes (3.1, (5)).

Pour la rotation de la table tournante nous avons utilisé un second moteur sans balai YASKAWA de 4 kW et une transmission par courroie nous autorisant une démultiplication suffisante pour pouvoir obtenir des vitesses angulaires allant de 0.1 rév/min à 10 rév/min.

Ces deux moteurs sont réglés en vitesse; nous avons pu observer au cours des expériences une stabilité à mieux que 0.5%.

Ce système de motorisation a l'inconvénient de générer un bruit électromagnétique assez important que nous n'avons pas été en mesure d'éliminer totalement.

### 3.2.3 Transmission des données.

Le traitement des données se faisant en dehors de la table tournante, nous avons utilisé deux collecteurs tournants pour transmettre tous les signaux. Le premier (3.1, (6)) permet de passer du cylindre à la table tournante, le second (non représenté sur la figure 3.1) est utilisé pour échanger des informations entre la table en rotation et le poste de travail.

## 3.3 Étude du mouvement de rotation en bloc.

### 3.3.1 Visualisation directe de l'axe de rotation solide du fluide.

Dans un premier temps, nous avons utilisé une méthode de visualisation directe de l'axe de rotation solide du fluide pour déterminer sa direction (longitude, latitude). La technique des éponges utilisée par Vanyo et al (Vanyo et al. 1995[42]) ne pouvant sonder qu'une partie superficielle du fluide nous avons préféré utiliser des billes de céramique de densité 0.7 à 0.8  $g/cm^3$  et de rayon 40 à 70  $\mu m$ , pour lesquelles le temps de suspension est suffisamment grand pour que nous puissions observer en volume les effets de la rotation solide.

Sous l'effet de la force centripète les billes se regroupent le long de l'axe de «rotation». En éclairant le fluide par une tranche de lumière, nous avons pu mettre en évidence la zone de dépression associée à l'axe de rotation (figure 3.4).

#### 3.3.1.1 Mesure de la longitude et de la colatitude de l'axe de rotation.

Nous décrivons la direction de l'axe de rotation solide du fluide par deux angles ( $\theta$ ,  $\phi$ ) que nous appelons respectivement colatitude et longitude.  $\theta$  est défini comme l'angle entre l'axe du cylindre et l'axe de rotation du fluide,  $\phi$  est défini comme l'angle entre le plan ( $\omega_c$ ,  $\omega$ ) et le plan ( $\Omega_p$ ,  $\omega_c$ ).  $\theta$  varie de 0 à  $\pi$ ,  $\phi$  de 0 à  $2\pi$ .

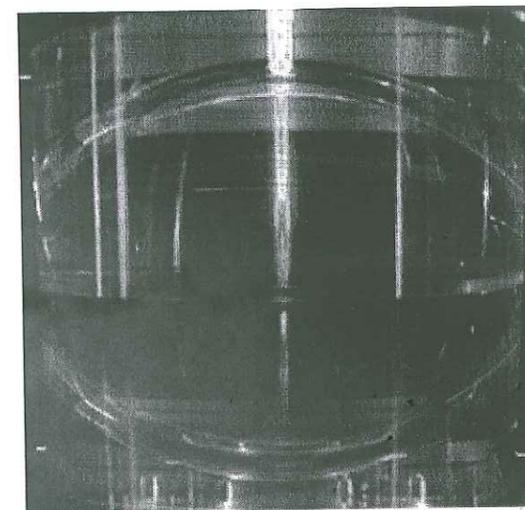


FIG. 3.4 – Visualisation de l'axe de rotation solide.  $\alpha = 25^\circ$ ,  $\omega_c = 300$  rév/min,  $\Omega_p = 0$  rév/min. La colonne de billes de céramique se trouve à l'aplomb du simpleau que nous utilisons comme soupape.

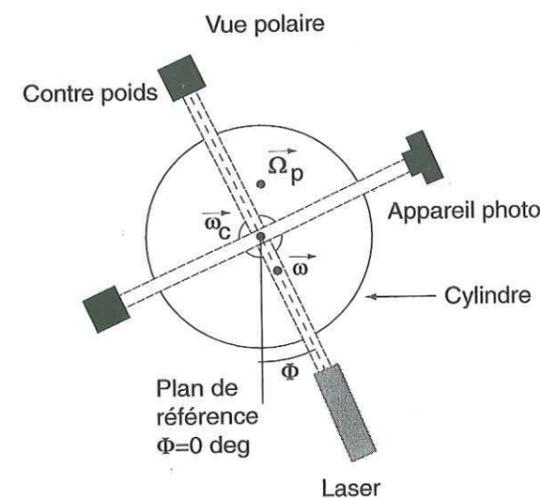


FIG. 3.5 – Système de positionnement de la tranche lumineuse.

Pour déterminer la longitude de l'axe de rotation solide, nous utilisons le système de positionnement de la tranche lumineuse schématisé sur la figure (3.5). La tranche lumineuse est obtenue en faisant diverger un faisceau laser de faible puissance sur un capillaire en verre de diamètre  $d = 5 \text{ mm}$ . L'ensemble du dispositif est monté à l'extrémité d'un des bras d'une croix métallique centrée sur l'axe du cylindre. La longitude zéro correspond à la position de la croix telle que la tranche de lumière contienne l'axe du cylindre et l'axe de rotation de la table. La longitude de l'axe de rotation correspond alors à l'angle dont il faut tourner la croix pour que la tranche lumineuse contienne l'axe du cylindre et l'axe de rotation solide du fluide. Le repérage angulaire est obtenu en fixant sur l'axe de la croix un potentiomètre dont la tension aux bornes est proportionnelle à l'angle. La précision sur le positionnement angulaire de la croix est inférieure à  $1^\circ$ .

Lorsque la longitude est déterminée, une photo est prise à  $90^\circ$  de la tranche lumineuse, nous mesurons la colatitude directement sur le cliché.

### 3.3.1.2 Résultats.

La vitesse de rotation du cylindre étant fixée à 300 révolutions par minute nous avons fait varier le taux de précession de 0 à 10 révolutions par minute dans le sens rétrograde.

Pour des valeurs de  $\Omega_p$  inférieures à 5.5 révolutions par minute les billes de céramique s'alignent suivant un axe bien défini dans l'ensemble du volume (figure 3.6, (a), (b), (c)). Au delà de cette valeur les billes de céramique semblent réparties en volume sans qu'aucune structure même de grande échelle ne leur soit associée (figure 3.6, (e)). Dans certaines expériences, nous pouvons observer un cycle au cours duquel une structure centrale allongée apparaît puis se déstabilise (figure 3.6, (f)) avec une périodicité d'une dizaine à une trentaine de secondes. En diminuant la vitesse de rotation de la table en dessous de 5.5 révolutions par minute nous observons de nouveau un axe de rotation solide avec les latitudes et longitudes présentées sur la figure (3.7).

Pour des taux de précession inférieurs à 5.5 révolutions par minute, nous observons une déformation de la structure matérialisée par les billes de céramique à proximité de la surface du conteneur. L'axe semble se vriller autour de sa direction principale. Comme nous pouvons le voir sur la figure (3.6, (b), (c)), cet effet, pratiquement absent à 3 révolutions par minute, est bien identifié à 4 révolutions par minute. Nous retrouvons cette déformation de manière très marquée pour les taux de précession les plus importants lorsque l'axe se stabilise pendant quelques secondes (figure 3.6, (f)). L'écart entre la direction principale de l'axe de rotation solide et la trace en surface de cette structure peut atteindre  $20^\circ$  en longitude et en colatitude. Ceci nous montre qu'une méthode n'échantillonnant que la partie superficielle du fluide, comme celle utilisée par Vanyo (Vanyo et al. 1995[42]) peut nous amener à faire un erreur importante quant à la direction de la vorticité moyenne en volume du fluide.

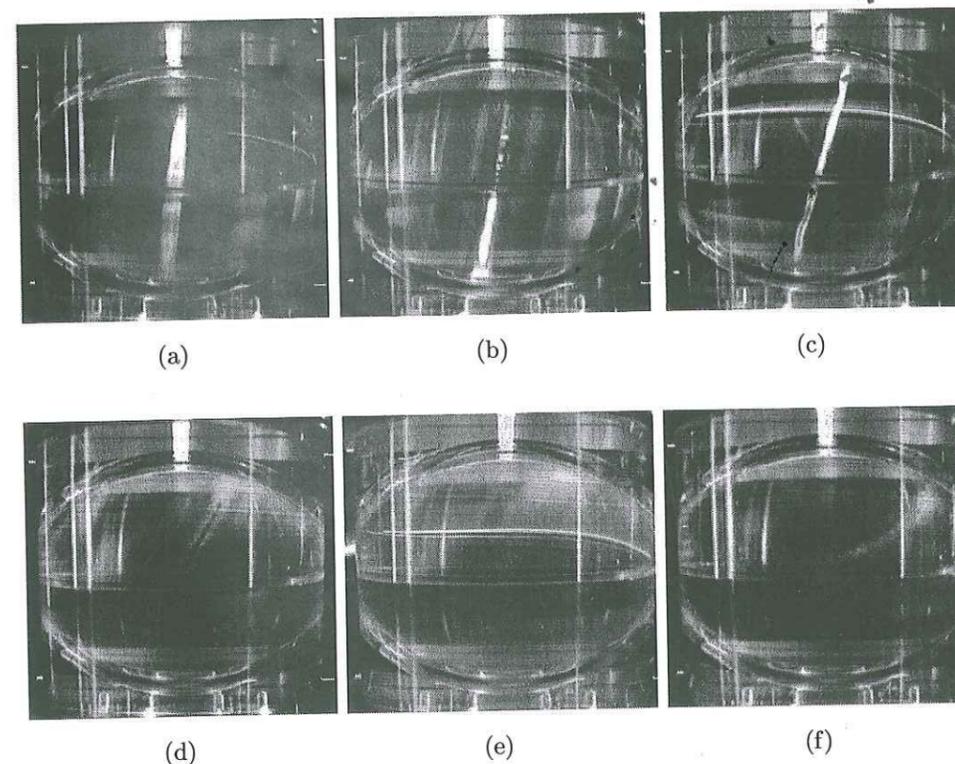


FIG. 3.6 – Visualisation de l'axe de rotation solide du fluide, les photos sont prises à  $90^\circ$  du plan  $(\omega_c, \omega)$ . Conditions expérimentales :  $\omega_c = 300 \text{ révolutions par minute}$ ,  $\alpha = 25^\circ$ , précession rétrograde, (a)  $\Omega_p = -2 \text{ révolutions par minute}$ , (b)  $\Omega_p = -3 \text{ révolutions par minute}$ , (c)  $\Omega_p = -4 \text{ révolutions par minute}$ , (d)  $\Omega_p = -5.5 \text{ révolutions par minute}$ , (e)  $\Omega_p = -5.7 \text{ révolutions par minute}$ , (f)  $\Omega_p = -6.6 \text{ révolutions par minute}$ .

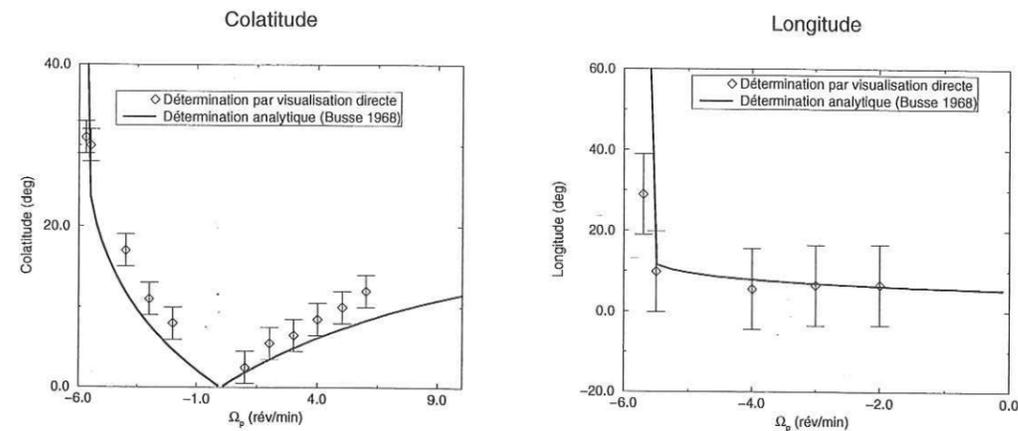


FIG. 3.7 – Colatitude et longitude de l'axe de rotation solide du fluide déterminées par visualisation directe de l'axe en utilisant des billes de céramique.  $\omega_c = 300$  rév/min,  $\alpha = 25^\circ$ . La courbe en trait plein correspond à la détermination analytique de Busse (Busse 1968[2]).

Nous avons déterminé la longitude et la colatitude de l'axe de rotation solide moyen du fluide pour des taux de précession rétrograde compris entre 2 et 5.5 rév/min (figure 3.7). Pour des taux de précession  $\leq 2$  rév/min l'axe du fluide est pratiquement confondu avec celui de la coquille, le plan  $(\omega_c, \omega)$  n'est plus défini.

En précession prograde nous observons un axe de rotation solide sur l'ensemble de la gamme des vitesses angulaires de la table (+0.1 à +10 rév/min), l'angle entre le plan  $(\omega_c, \omega)$  et le plan  $(\Omega_p, \omega_c)$  est toujours inférieur à  $10^\circ$ , nous n'avons pas pu obtenir de mesure significative de la longitude. La latitude a été mesurée sur les clichés après avoir placé la tranche lumineuse à une longitude moyenne de  $5^\circ$ .

L'ensemble des résultats est représenté sur la figure (3.7). Les barres d'erreurs sur la longitude correspondent à l'intervalle angulaire pour lequel nous observons dans le plan lumineux l'axe du cylindre et l'axe du fluide, nous avons reporté sur les figures la médiane de cet intervalle (symboles).

### 3.3.2 Détermination de la direction du vecteur de rotation solide par une mesure de la pression.

Afin de nous affranchir de la caractérisation visuelle de l'axe de rotation solide du fluide pour déterminer sa longitude et sa colatitude nous avons mis au point une technique basée sur la mesure de la pression associée à la force centrifuge résultant de la rotation solide du fluide.

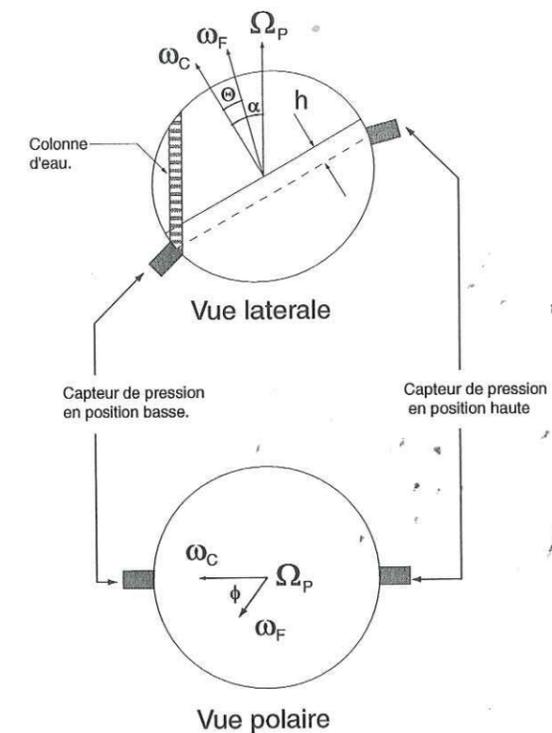


FIG. 3.8 – Schéma de principe de la mesure de pression.

#### 3.3.2.1 Principe de la méthode.

Considérons un capteur de pression affleurant à la surface du conteneur placé dans l'hémisphère sud à une distance  $h$  du plan équatorial (figure 3.8). Soit  $\alpha$  l'angle entre l'axe de la table tournante  $(\Omega_p)$  et celui du cylindre  $(\omega_c)$  et  $\theta$  l'angle entre l'axe du fluide  $(\omega_f)$  et celui du cylindre. Ne considérant que le mouvement de rotation solide du fluide nous pouvons exprimer la pression exercée par le liquide sur le capteur de la manière suivante :

$$P = P_h + P_d, \quad (3.1)$$

où  $P_h$  est la pression dans le système en l'absence de précession et  $P_d$  est due à la force centrifuge  $F_c$  associée à la rotation solide du fluide. Nous choisissons la pression atmosphérique comme référence.

$$F_c = \omega \times (\omega \times r), \quad (3.2)$$

Ces deux champs de pression sont stationnaires dans le référentiel de la table tournante, le capteur étant lui en rotation avec le conteneur ces deux signaux

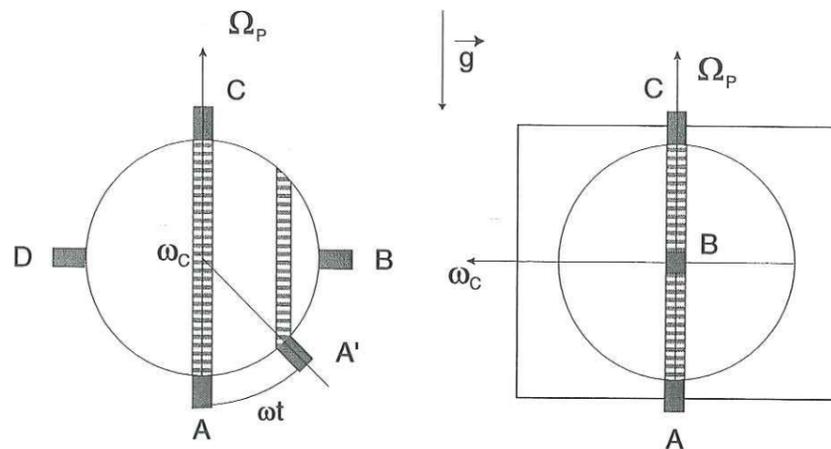


FIG. 3.9 -

vont dépendre du temps. Dans les expériences nous nous restreindrons aux cas où,  $\Omega_p^2 \ll \omega_c^2$ . Nous pourrions alors négliger la force centrifuge associée à la rotation de la table tournante devant celle  $F_c$ .

Le signal  $P_h$  est principalement associé à la colonne d'eau se situant au dessus du capteur (3.8), il est dominé par une composante de fréquence  $\omega_c$ . Pour nous en convaincre nous pouvons nous placer dans un cas où l'angle  $\alpha$  entre l'axe du conteneur  $\omega_c$  et la verticale serait de  $90^\circ$  (figure 3.9).

En A, la pression hydrostatique est maximum et vaut :

$$P_h = \rho g D, \quad (3.3)$$

où  $D$  est le diamètre du conteneur. En B, C, D la pression est nulle, enfin en A' :

$$P_h = \rho g D \cos(\omega t). \quad (3.4)$$

Bien que dans les expériences  $\alpha < 45^\circ$ , la pression hydrostatique reste principalement un signal de fréquence  $\omega_c$  (figure 3.14). Le maximum de pression hydrostatique correspond toujours à un instant  $t$  où le capteur de pression se trouve en position basse (figure 3.8), c'est à dire dans le plan  $\phi = 0$ .

Le signal  $P_d$  est quant à lui plus complexe, en particulier sa dépendance en temps est comme nous allons le voir bimodale.

Soit  $s(t)$  la distance entre le capteur et l'axe de rotation solide  $\omega$ . La pression  $P_d$  associée à la force centrifuge  $F_c$  (3.2) s'écrit :

$$P_d = \rho \frac{\omega^2}{2} s^2(t). \quad (3.5)$$

En exprimant  $s(t)$  à partir des paramètres  $(h, \theta, \phi, \omega_c)$ , nous obtenons :

$$P_d = \rho \frac{\omega^2}{2} \left( R^2(h) + \left( h^2 - \frac{R^2(h)}{2} \right) \sin^2(\theta) \right) + \rho \frac{\omega^2}{2} (2hR(h) \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\omega_c t - \phi)) - \rho \frac{\omega^2}{2} \left( \frac{R^2(h)}{2} \sin^2(\theta) \cos(2(\omega_c t - \phi)) \right), \quad (3.6)$$

Avec

$$R(h) = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{(1-\eta)^2}}. \quad (3.7)$$

Où  $\eta$  est l'ellipticité. Pour  $h \neq 0$  (capteur hors du plan équatorial), le signal de pression est bimodal de fréquences  $\omega_c$  et  $2\omega_c$ .

Dans les équations suivantes, les grandeurs mesurables sont soulignées afin de pouvoir être facilement identifiées, nous avons également introduit les exposants 1 et 2 pour identifier les composantes de fréquence  $\omega_c$  et  $2\omega_c$ . Nous faisons l'hypothèse que tous les signaux peuvent être décrits par des séries de Fourier.

Soit  $P_h^1$  la composante de fréquence  $\omega_c$  de la pression hydrostatique :

$$P_h^1 = A_h^1 \cos(\omega_c t - \phi_e^1). \quad (3.8)$$

Nous avons choisi de prendre comme instant initial ( $t = 0$ ) le moment où le capteur se trouve dans le plan  $\phi = 0$ . Comme nous allons le voir dans la description du dispositif expérimental nous avons utilisé un détecteur optique pour repérer le passage du capteur dans ce plan. En l'absence de déphasage dû à l'électronique nous devrions observer un maximum de  $P_h^1$  en  $t = 0 + (2k\pi/\omega_c) k$  étant un entier, en pratique nous observons systématiquement un retard. Afin d'en tenir compte nous introduisons dès maintenant le déphasage  $\phi_e$  dans nos signaux. Ce déphasage pouvant dépendre de la fréquence nous avons distingué  $\phi_e^1$  et  $\phi_e^2$  les déphasages à  $\omega_c$  et à  $2\omega_c$ .

Soit  $P_d^1$  la composante de fréquence  $\omega_c$  associée à l'écoulement de rotation solide décrite par (3.6) :

$$P_d^1 = A_d^1 \cos(\omega_c t - \phi_e^1 - \phi), \quad (3.9)$$

avec d'après (3.6),

$$A_d^1 = \rho \omega^2 h R(h) \cos(\theta) \sin(\theta). \quad (3.10)$$

soit  $P^1$  la composante de fréquence  $\omega_c$  de la pression totale :

$$P^1 = A^1 \cos(\omega_c t - \phi^1), \quad (3.11)$$

$$= P_h^1 + P_d^1, \quad (3.12)$$

$$(3.13)$$

en développant  $P_h^1$  et  $P_d^1$  d'après (3.8) et (3.9) nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \underline{A^1} \cos(\underline{\phi^1}) = \underline{A_h^1} \cos(\underline{\phi_e^1}) + A_d^1 \cos(\phi + \underline{\phi_e^1}), \\ \underline{A^1} \sin(\underline{\phi^1}) = \underline{A_h^1} \sin(\underline{\phi_e^1}) + A_d^1 \sin(\phi + \underline{\phi_e^1}). \end{cases} \quad (3.14)$$

Nous en déduisons :

$$A_d^1 = \sqrt{\left(\underline{A^1} \cos(\underline{\phi^1}) - \underline{A_h^1} \cos(\underline{\phi_e^1})\right)^2 + \left(\underline{A^1} \sin(\underline{\phi^1}) - \underline{A_h^1} \sin(\underline{\phi_e^1})\right)^2}, \quad (3.15)$$

ainsi que la longitude  $\phi$  de l'axe de rotation :

$$\phi = \arctan \left( \frac{\underline{A^1} \sin(\underline{\phi^1}) - \underline{A_h^1} \sin(\underline{\phi_e^1})}{\underline{A^1} \cos(\underline{\phi^1}) - \underline{A_h^1} \cos(\underline{\phi_e^1})} \right) - \underline{\phi_e^1}.$$

Considérons maintenant les composantes de fréquence  $2\omega_c$ .

$$P_h^2 = \underline{A_h^2} \cos(2\omega_c t - \underline{\phi_e^2}). \quad (3.16)$$

Soit  $P_d^2$  la composante de fréquence  $2\omega_c$  associée à l'écoulement de Poincaré :

$$P_d^2 = A_d^2 \cos(2\omega_c t - \underline{\phi_e^2} - 2\phi), \quad (3.17)$$

$$A_d^2 = -\rho \frac{\omega^2}{4} R^2(h) \sin^2(\theta). \quad (3.18)$$

La composante à  $2\omega_c$  de la pression totale s'écrit :

$$\underline{P^2} = \underline{A^2} \cos(2\omega_c t - \underline{\phi^2}), \quad (3.19)$$

$$= \underline{P_h^2} + P_d^2, \quad (3.20)$$

en développant  $\underline{P_h^2}$  et  $P_d^2$  d'après (3.16) et (3.17) nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \underline{A^2} \cos(\underline{\phi^2}) = \underline{A_h^2} \cos(\underline{\phi_e^2}) + A_d^2 \cos(2\phi + \underline{\phi_e^2}), \\ \underline{A^2} \sin(\underline{\phi^2}) = \underline{A_h^2} \sin(\underline{\phi_e^2}) + A_d^2 \sin(2\phi + \underline{\phi_e^2}). \end{cases} \quad (3.21)$$

Nous en déduisons :

$$A_d^2 = -\sqrt{\left(\underline{A^2} \cos(\underline{\phi^2}) - \underline{A_h^2} \cos(\underline{\phi_e^2})\right)^2 + \left(\underline{A^2} \sin(\underline{\phi^2}) - \underline{A_h^2} \sin(\underline{\phi_e^2})\right)^2}, \quad (3.22)$$

En nous reportant aux définitions des grandeurs  $A_d^1$  (3.10) et  $A_d^2$  (3.18) nous obtenons pour  $\omega$  et  $\beta$  le système suivant :

$$\begin{cases} A_d^2 = -\rho \frac{\omega^2}{4} R^2(h) \sin^2(\theta), \\ A_d^1 = \rho \omega^2 h R(h) \cos(\theta) \sin(\theta). \end{cases} \quad (3.23)$$

Nous en déduisons :

$$\theta = \arctan \left( -\frac{4h}{R(h)} \frac{-\sqrt{\left(\underline{A^2} \cos(\underline{\phi^2}) - \underline{A_h^2} \cos(\underline{\phi_e^2})\right)^2 + \left(\underline{A^2} \sin(\underline{\phi^2}) - \underline{A_h^2} \sin(\underline{\phi_e^2})\right)^2}}{\sqrt{\left(\underline{A^1} \cos(\underline{\phi^1}) - \underline{A_h^1} \cos(\underline{\phi_e^1})\right)^2 + \left(\underline{A^1} \sin(\underline{\phi^1}) - \underline{A_h^1} \sin(\underline{\phi_e^1})\right)^2}} \right)$$

$$\omega = \sqrt{-\frac{4A_d^2}{\rho R^2(h) \sin^2(\theta)}}$$

Avant d'introduire le protocole expérimental que nous avons suivi il est important de rappeler l'hypothèse forte de ce calcul, à savoir que l'écoulement peut être décrit comme une rotation solide.

### 3.3.2.2 Dispositif.

D'après ce que nous venons de voir la détermination de  $(\omega, \theta, \phi)$  se ramène à une mesure des grandeurs  $(A_h^1, A_h^2, A^1, A^2, \phi_e^1, \phi_e^2)$ .

Pour la mesure de pression nous avons utilisé des capteurs dynamiques piézo-électriques à quartz Piézo-tronics modèle 106B50, dont les principales caractéristiques techniques sont reportées dans le tableau suivant.

| Modèle                               | 106B50      |
|--------------------------------------|-------------|
| Gamme de sensibilité dynamique(kPa)  | 0.0007-34.5 |
| Sensibilité (mV/kPa)                 | 72.5        |
| Pression statique maximum(kPa)       | 3450        |
| Fréquence de résonance (khz)         | >40         |
| Fréquence minimum (Hz)               | 0.5         |
| Diamètre de la surface sensible (mm) | 12.62       |

Le capteur de pression est fixé dans le conteneur de manière à être affleurant à la surface de la cavité. Nous avons placé le capteur à 3 cm du plan équatorial. Nous avons réalisé après construction de l'expérience que cette position n'était pas la plus favorable, «mais presque».  $h$  est déterminé de manière à ce que l'amplitude des signaux de fréquence  $\omega$  et  $2\omega$  dans (3.6) soit la plus grande possible, cela revient donc à maximiser simultanément les facteurs géométriques  $2hR(h)$  et  $R^2(h)/2$ . Nous avons représenté sur la figure (3.10) ces deux fonctions pour différentes valeurs de  $h$ , il apparaît que notre choix ( $h = 3 \text{ cm}$ ) n'est pas le meilleur compromis, une distance de l'ordre de  $h = 5 \text{ cm}$  semble plus appropriée. Le signal délivré par les capteurs de pression étant trop faible pour pouvoir être transmis directement à travers les collecteurs tournant nous avons utilisé une électronique fixée sur le conteneur pour l'amplifier. Cependant, les moteurs sans balai utilisés pour les deux rotations génèrent un bruit électromagnétique important. Toutes

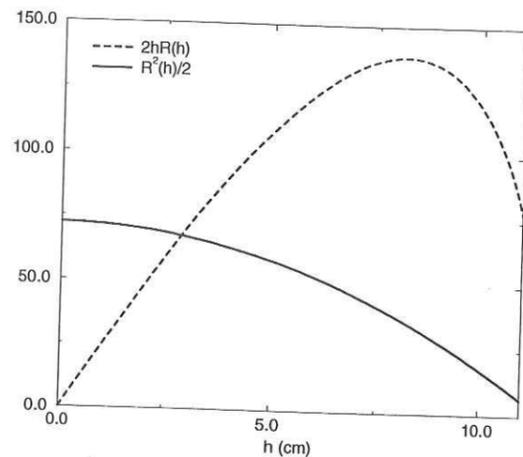


FIG. 3.10 – Facteurs géométriques  $2hR(h)$  et  $R^2(h)/2$  intervenant dans les amplitudes des composantes du signal de pression à  $\omega$  et  $2\omega$  dans l'équation (3.6). L'échelle des ordonnées est graduée en  $cm^2$ . Le choix que nous avons fait a priori n'apparaît pas comme le meilleur compromis, il reste néanmoins raisonnable.

les connections ne pouvant être blindées, elles se comportent comme des antennes réceptrices. Le signal recueilli en dehors de la table tournante est alors dominé par un bruit à 50 kHz. Les signaux en pression étant de fréquences comprises entre 0 et 60 Hz environ, nous avons utilisé un filtre analogique passe bas avec une fréquence de coupure de 200 Hz avant d'enregistrer les signaux de pression à l'aide d'un oscilloscope numérique. La fréquence d'échantillonnage étant fixée à 2.5 kHz nous avons pu enregistrer pour chaque mesure 20 s de signal. Le dispositif d'acquisition est résumé par l'organigramme (3.11).

Ne pouvant disposer du matériel nécessaire à un étalonnage de l'électronique situé en aval des capteurs de pression, nous ne connaissons les amplitudes des

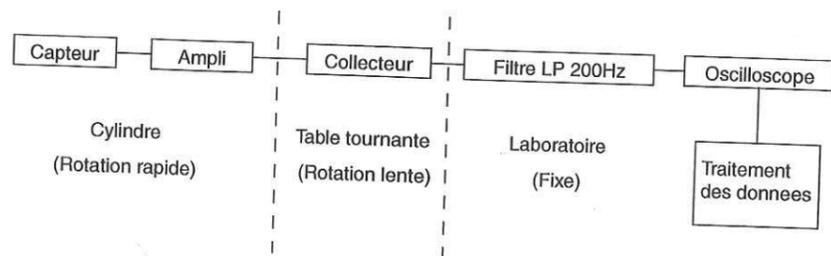


FIG. 3.11 – Dispositif d'acquisition des signaux de pression.

signaux de pression qu'à un facteur multiplicatif près que nous notons  $K_e$  :

$$\begin{aligned} A^1(\text{mesure}) &= K_e \cdot A^1(\text{vrai}) \\ A^2(\text{mesure}) &= K_e \cdot A^2(\text{vrai}) \\ A_h^1(\text{mesure}) &= K_e \cdot A_h^1(\text{vrai}) \\ A_h^2(\text{mesure}) &= K_e \cdot A_h^2(\text{vrai}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

En utilisant un générateur de signaux périodiques, nous avons pu vérifier que le filtre analogique, monté en passe bas avec une fréquence de coupure de 200 Hz, introduisait le même facteur multiplicatif sur l'ensemble de la gamme de fréquence [0-60Hz]. Nous avons donc pu déterminer les grandeurs ne faisant intervenir que des rapports d'amplitude, c'est à dire  $\phi$  et  $\theta$ .  $\omega$  nécessitant une mesure absolue de  $A_d^2$ , l'étalonnage du système est indispensable pour pouvoir obtenir une détermination de cette grandeur.

Nous avons extrait les composantes à  $\omega_c$  et à  $2\omega_c$  après enregistrement par un filtrage numérique en temps. Afin de conserver les déphasages, nous avons systématiquement effectué deux passages d'un filtre passe bande sur les données, le premier dans le sens des temps croissant, le second en renversant la série temporelle. Les fréquences de coupure ont été déterminées à partir des transformées de Fourier du signal brut. Ce traitement numérique a été effectué en utilisant le logiciel SAC (Seismic Analysis Code). Un exemple est donné sur la figure (3.12)

La mesure de la position du capteur de pression est obtenue par un système optique constitué d'une photodiode placée dans le référentiel de la table tournante et d'un réflecteur collé sur le cylindre à l'aplomb du capteur de pression (figure 3.13).

La table tournante étant au repos nous avons incliné le cylindre, le signal se réduit alors à la pression hydrostatique. Ainsi nous pouvons déterminer  $(A_h^1, A_h^2, \phi_c^1)$ . Nous illustrons la détermination du déphasage et de l'amplitude sur la figure (3.14).

Il apparaît clairement que la pression hydrostatique est principalement un signal de fréquence  $\omega_c$  (figure 3.14). Comme attendu nous avons pu vérifier que pour chaque jeu de paramètres  $(\alpha, \omega_c, \Omega_p)$ , la composante filtrée à  $2\omega_c$  était négligeable devant celle à  $\omega_c$ . Nous en déduisons

$$A_h^2 = 0, \quad (3.25)$$

$$A_d^2 = A^2. \quad (3.26)$$

### 3.3.2.3 Protocole expérimental

Le signal de pression hydrostatique ne dépendant que de l'angle  $\alpha$  entre l'axe du cylindre et l'axe de précession et de la vitesse de rotation  $\omega_c$ , nous avons procédé de la manière suivante :

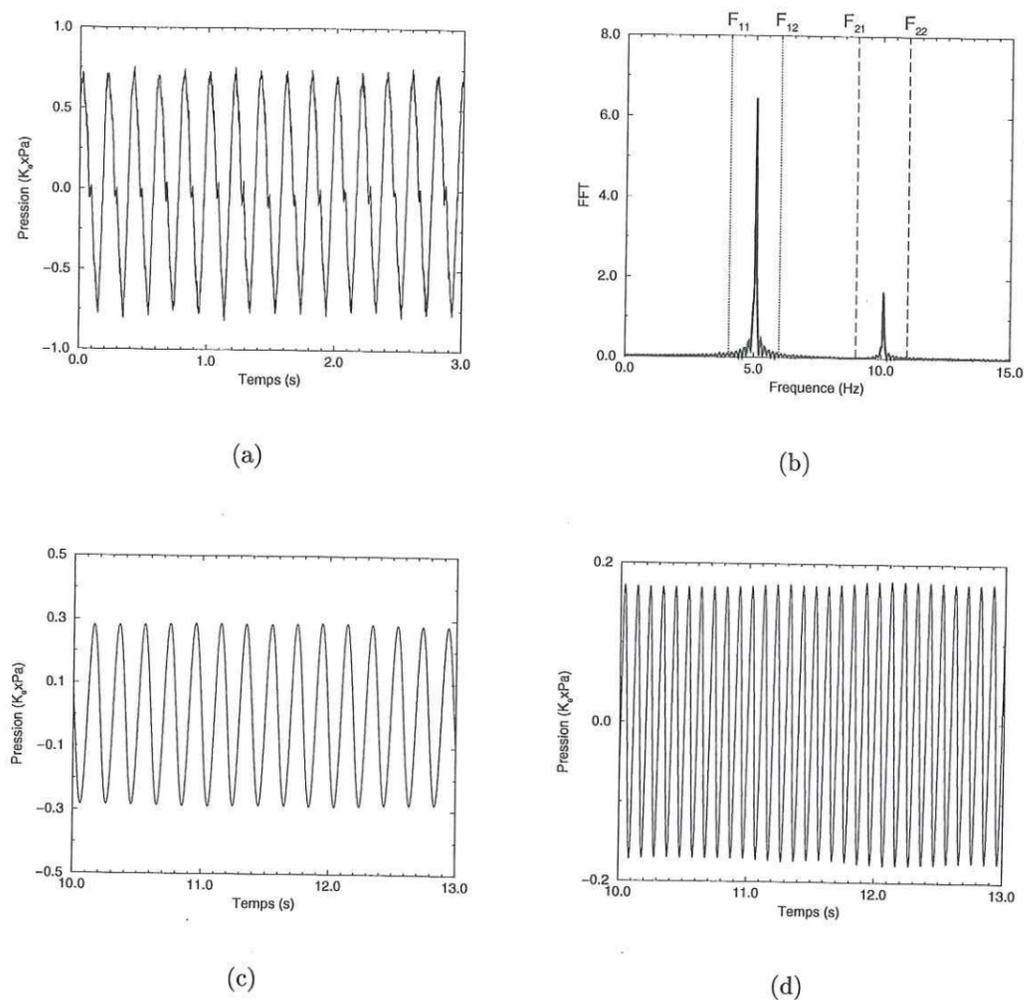


FIG. 3.12 – Exemple de filtrage numérique pour  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\omega_c = 300$  rév/min, précession rétrograde à  $\Omega_p = -5$  rév/min. a) signal brut, b) FFT du signal brut. Choix des fréquences de coupures, c) Composante filtrée numériquement à  $\omega_c$ , d) Composante filtrée numériquement à  $2\omega_c$ . Pour des raisons de clarté, nous n'avons représenté que 3 secondes des signaux de pression sur les 20 dont nous disposons pour chaque enregistrement. De même le spectre en fréquence s'étend de 0 à 200 Hz, toutefois le signal au delà de 15 Hz ne comportant pas d'information nous ne l'avons pas fait figurer sur le graphique.

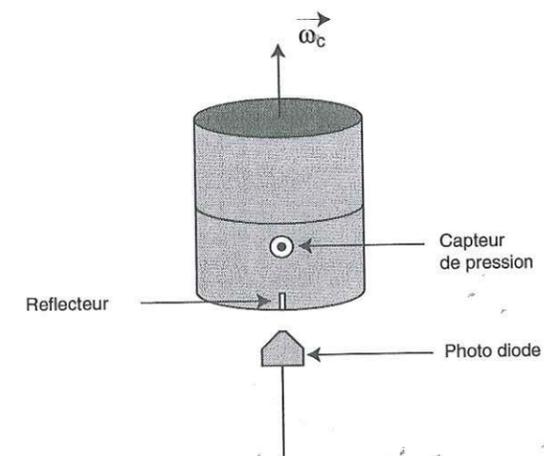


FIG. 3.13 – Système de positionnement du capteur de pression.

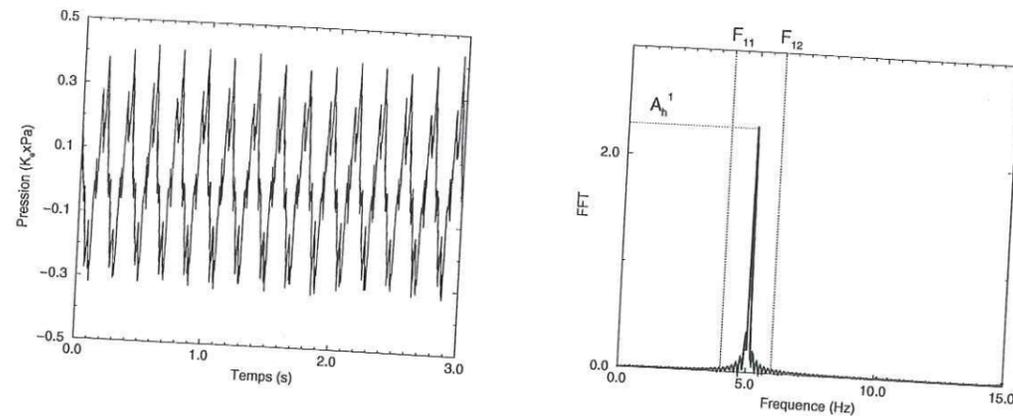
1.  $\omega_c$  et  $\alpha$  sont fixés,  $\Omega_p = 0$ . Enregistrement simultané de la pression et du signal de positionnement. La pression totale correspond à la pression hydrostatique. A partir de cette mesure nous pouvons déterminer  $(A_h^1, \phi_e^1)$ .
2.  $\omega_c$  et  $\alpha$  reste inchangés, nous **augmentons** progressivement le taux de précession. Pour chaque valeur de  $\Omega_p$  nous mesurons simultanément la pression et le signal de positionnement. Par cette mesure nous déterminons  $(A^1, A^2, \phi^1, \phi^2)$ .

### 3.3.2.4 Résultats.

Comme nous l'avons vu lors de la visualisation directe de l'axe de rotation solide (section 3.3.1), l'écart entre les plans  $(\omega_c, \omega)$  et  $(\Omega_p, \omega_c)$  est de l'ordre de  $5$  à  $10^\circ$  en précession prograde. Les barres d'erreur sur la détermination de la longitude et de la latitude étant comme nous allons le voir de l'ordre de  $5^\circ$  également, cette technique ne nous a pas permis jusqu'à présent d'obtenir de mesures significatives de la position de l'axe de rotation en régime prograde.

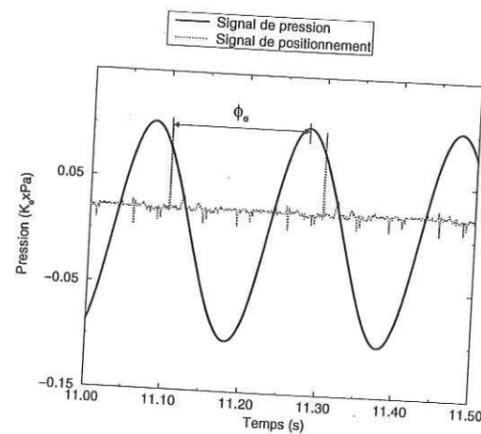
Cette méthode étant nouvelle nous avons procédé par étapes successives en nous limitant dans un premier temps à une gamme de paramètres pour laquelle nous pouvons supposer d'après les résultats de la partie (3.3.1) que l'écoulement est dominé par une rotation d'ensemble du fluide ( $|\Omega_p| < 5.5$  rév/min en précession rétrograde,  $\alpha = 25^\circ$  et  $\omega_c = 300$  rév/min). L'incertitude sur la mesure provient essentiellement de la détermination des paramètres  $\phi_e^1$  et  $\phi^1$  (figure 3.14). Nous retrouvons par cette technique les résultats déduits d'une visualisation directe de l'axe de rotation solide pour des taux de précession inférieurs à  $5.5$  rév/min. (figure 3.15)

En effectuant des mesures de pression pour des vitesses de rotation de la table



(a)

(b)



(c)

FIG. 3.14 – Exemple de détermination des caractéristiques de la pression hydrostatique pour  $\alpha = 25^\circ$ ,  $\omega_c = 300$  rév/min,  $\Omega_p = 0$  rév/min. . a) signal brut, b) FFT du signal brut. Choix des fréquences de coupure, c) Composante filtrée numériquement à  $\omega_c$ , mesure de  $(A_h^1, \phi_e^1)$ . En pointillé, le signal de positionnement optique.

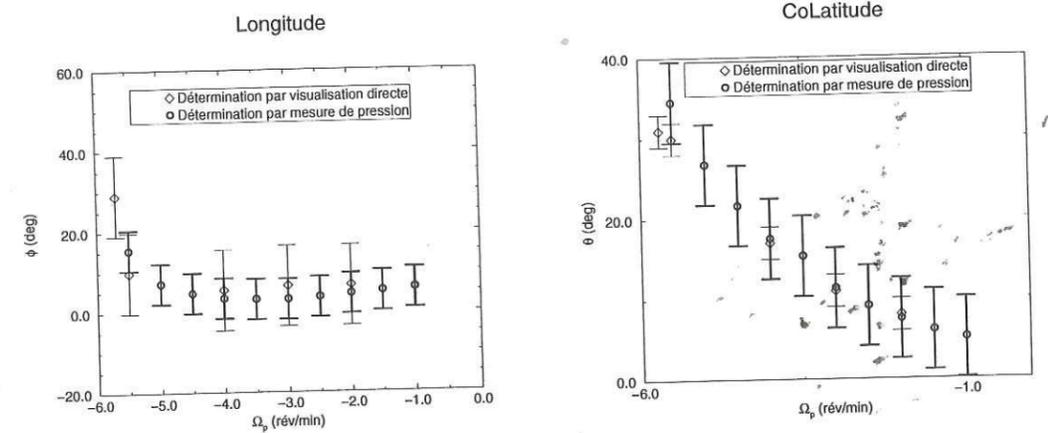


FIG. 3.15 – Longitude et colatitude de l'axe de rotation solide déterminées par une visualisation directe et par une mesure de pression.  $\alpha = 25^\circ$  et  $\omega_c = 300$  rév/min, précession rétrograde. Pour tous les points de mesure, l'écoulement est dominé par une rotation solide (figure 3.6).

pour lesquelles nous avons perdu la signature de l'axe de rotation du fluide en utilisant des billes de céramique, nous avons pu mettre en évidence un comportement singulier de la direction de l'axe de rotation solide du fluide autour de  $\Omega_p = -5.5$  rév/min. (figure 3.16).

Nous avons ensuite effectué des mesures pour différentes vitesses de rotation du cylindre (figure 3.17). Dans chaque cas, nous avons observé un régime correspondant à des faibles longitudes jusqu'à une valeur critique du taux de précession. Pour cette valeur il apparaît une brusque variation de la direction de l'axe de rotation solide; nous atteignons alors un deuxième régime de rotation solide pour lequel l'axe tend à être antiparallèle au vecteur précession.

### 3.3.3 Discussion

Nous proposons de discuter l'ensemble de nos résultats en nous appuyant sur l'étude asymptotique de Busse (Busse 1968[2]). Nous présentons dans l'annexe A1 les grandes lignes de cette étude qui nous sont utiles pour discuter les résultats que nous avons obtenus. Nous avons reporté sur la figure (3.18) les directions de l'axe de rotation solide du fluide déduites des mesures de pression ainsi que les 2 branches de solutions stables prédites par l'approche asymptotique de Busse (Annexe A1).

La valeur pour laquelle nous observons une variation brusque de la direction de l'axe correspond dans tous les cas à la limite  $\Omega_p(2)$  (Annexe A1) pour laquelle les solutions de la branche 1 n'existent plus. Jusqu'à ce taux critique de précession les

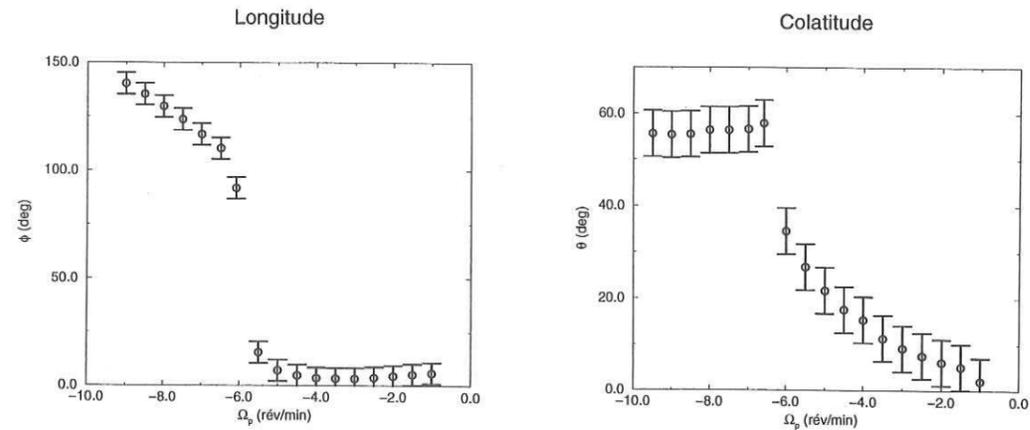


FIG. 3.16 – Direction de l'axe de rotation solide déterminée par mesure de pression.  $\alpha = 25^\circ$  et  $\omega_c = 300$  rév/min, précession rétrograde.

longitudes et latitudes prédites par l'étude linéaire de Busse nous permettent de rendre compte quantitativement de nos observations pour des vitesses de rotation du cylindre supérieures à 100 rév/min.

Au delà de cette valeur suivant les cas nous obtenons un accord quantitatif plus ou moins bon entre nos observations et les prédictions analytiques, en particulier autour de la zone de transition. D'après nos observations directes de l'axe de rotation solide il existe au delà de  $\Omega_p(2)$  une composante secondaire dans l'écoulement susceptible de destabiliser la colonne de billes de céramique (3.3.1), comme nous le verrons par la suite, cela correspond à un état de turbulence développée. La méthode que nous utilisons ainsi que l'étude asymptotique de Busse suppose que nous puissions décrire l'écoulement d'ordre 1 comme une rotation solide. Le fait que cette hypothèse soit violée pour  $|\Omega_p| > |\Omega_p(2)|$  peut expliquer les écarts que nous avons observés.

Comme nous l'avons fait remarquer dans la partie (3.3.1) si nous réduisons le taux de précession en dessous de  $|\Omega_p(2)|$  nous retrouvons par visualisation directe un axe de rotation compatible avec les solutions de la branche 1. Les solutions de la branche 2, si elles existent entre  $\Omega_p(1)$  et  $\Omega_p(2)$  ne sont jamais sélectionnées par le système.

En faisant l'hypothèse que pour  $|\Omega_p(1)| < |\Omega_p| < |\Omega_p(2)|$  les solutions de la branche 2 sont métastables, à l'image de certains changements d'état en thermodynamique, nous proposons que les instabilités que nous avons observées puissent faire basculer l'axe de rotation solide vers une solution de plus grande stabilité (branche 1). Dans ces conditions nous ne pourrions observer ces solutions métastables que pour des systèmes pour lesquels l'écoulement reste laminaire au delà de  $\Omega_p(2)$ . Comme nous allons le voir par la suite, nous n'avons jamais observé

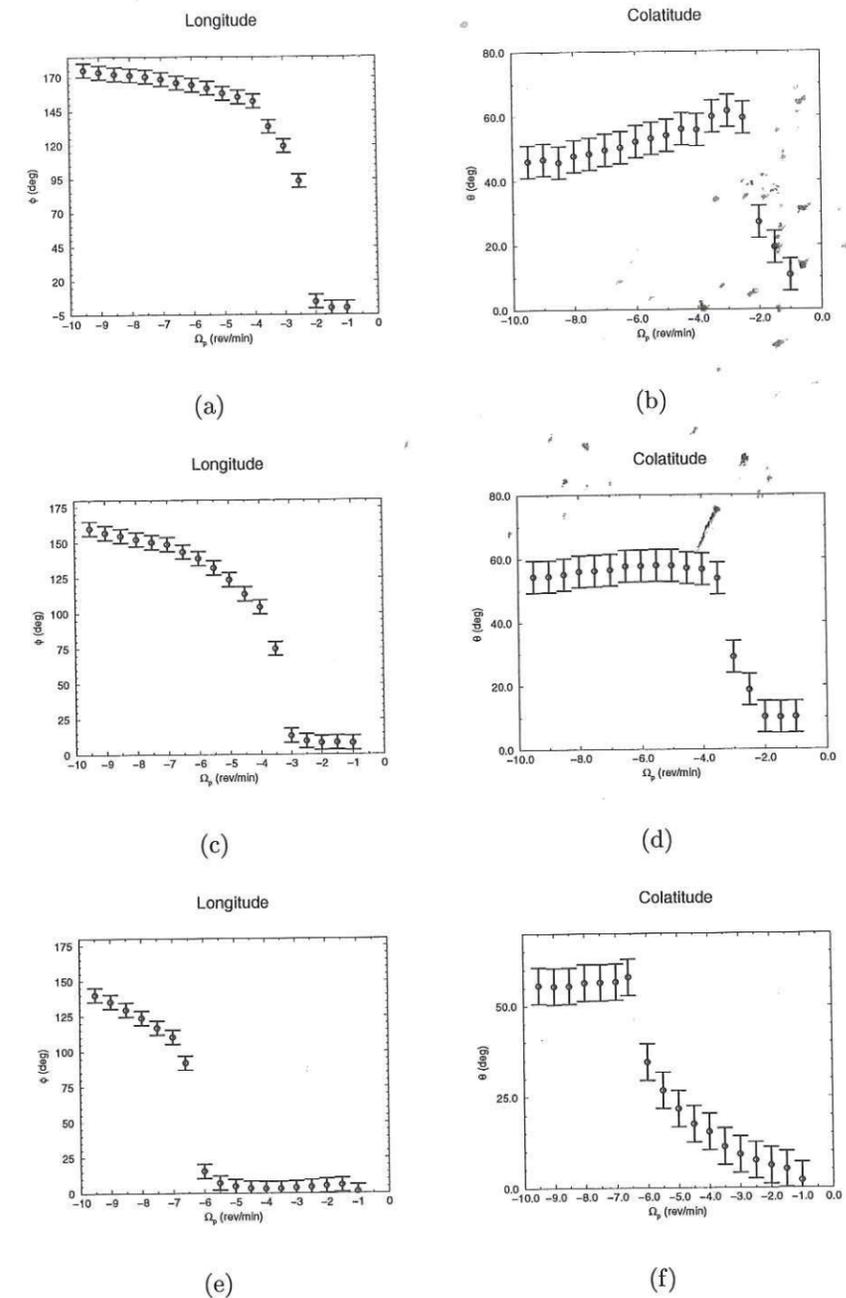


FIG. 3.17 – Détermination de la direction de l'axe de rotation du fluide en fonction du taux de précession pour différentes vitesses de rotation du conteneur par une mesure de pression, précession rétrograde.  $\alpha = 20^\circ$ , a,b)  $\omega_c = 100$  rév/min, c,d)  $\omega_c = 150$  rév/min, e,f)  $\omega_c = 300$  rév/min.

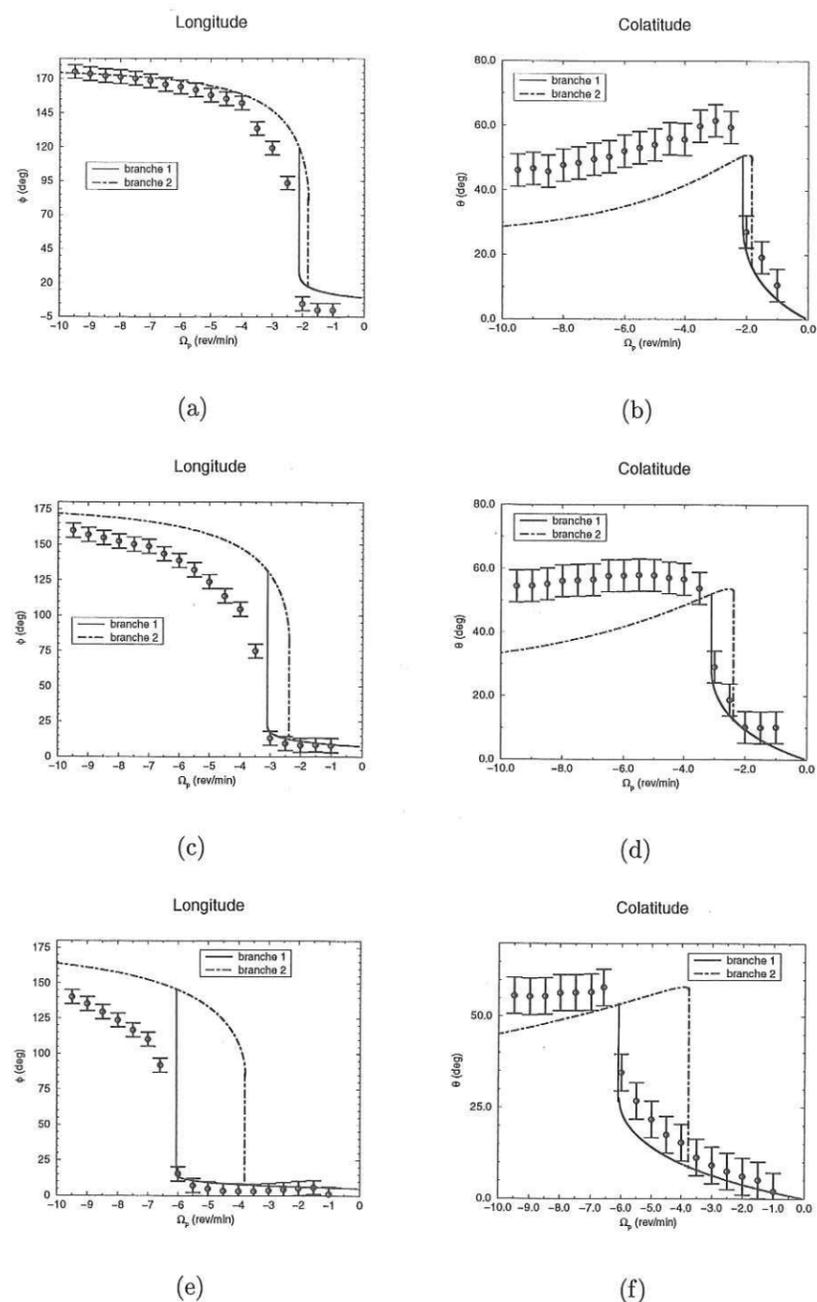


FIG. 3.18 – Comparaison des directions de l'axe de rotation solide du fluide obtenues par une mesure de pression avec celles déduites de l'approche asymptotique de Busse (Busse 1968[2]).  $\alpha = 20^\circ$ , a,b)  $\omega_c = 100$  rév/min, c,d)  $\omega_c = 150$  rév/min, e,f)  $\omega_c = 300$  rév/min.

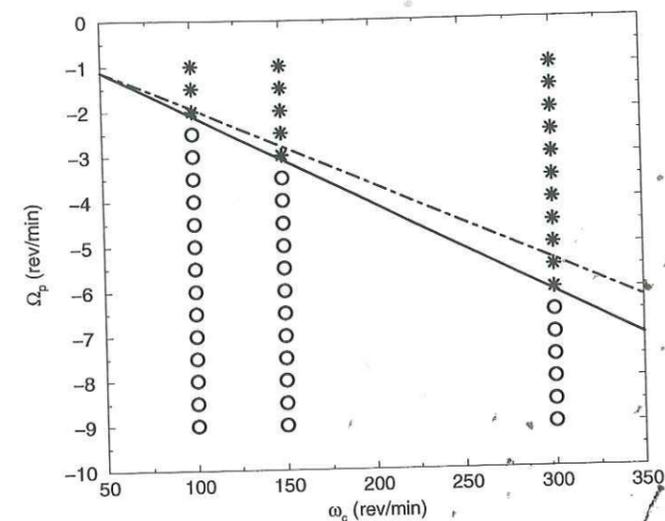


FIG. 3.19 – Diagramme de phase  $(\Omega_p, \omega_c)$  caractérisant la transition des solutions de la branche 1 (\*) vers celles de la branche 2 (o). Les lignes représentent les limites  $\Omega_p(1)$  (---) et  $\Omega_p(2)$  (—) déduites de l'approche asymptotique de Busse (Annexe A1)

cette situation dans nos expériences. Nous voyons qu'il est alors fondamental de pouvoir caractériser la transition vers la turbulence dans un tel système afin de voir s'il existe une gamme de paramètres pour laquelle l'écoulement reste laminaire pour  $|\Omega_p| > |\Omega_p(2)|$ . Si une telle situation n'existe pas alors l'hypothèse faite par Busse selon laquelle l'écoulement est dominé par une rotation solide n'est plus vérifiée et la détermination de l'axe par une approche linéaire en volume n'est plus justifiée.

Nous avons regroupé l'ensemble de ces résultats sur un diagramme de phase  $(\Omega_p, \omega_c)$  (figure 3.19). Nous avons défini les solutions de la branche 2 par  $\phi > 75^\circ$  et celles de la branche 1 par  $\phi < 30^\circ$ . Les limites  $\Omega_p(1), \Omega_p(2)$  ont été obtenues numériquement à partir des résultats de l'approche asymptotique de Busse. Il est important de noter ici que le comportement rectiligne des limites  $\Omega_p(1)$  et  $\Omega_p(2)$  n'a de sens que dans la gamme restreinte des paramètres correspondant à nos expériences.

### 3.4 Etude de l'écoulement secondaire

Comme nous venons de le voir à travers la détermination du vecteur rotation solide du fluide il existe un taux de précession critique auquel est associé un changement brusque de la direction de l'axe de rotation en bloc qui semble correspondre à un changement dans la dynamique de l'écoulement. Afin de caractériser la nature de l'écoulement qui se superpose à la rotation solide nous avons cherché à mettre en évidence les zones de cisaillement en volume par une méthode de visualisation directe utilisant des paillettes réfléchissantes.

#### 3.4.1 Principe de la méthode.

Le principe de la méthode que nous avons utilisée est similaire à celui présenté dans Vanyo et al. 1995 ([42]).

Après avoir obtenu par mélange une suspension la plus homogène possible de particules réfléchissantes dans l'ensemble du volume fluide, nous éclairons une tranche de fluide contenant l'axe du cylindre et l'axe de rotation solide du fluide (figure 3.20), nous nous sommes appuyés sur la détermination de la direction de l'axe présentée plus haut pour positionner le système. Le système est d'abord mis en rotation rapide. Lorsque le fluide tourne en bloc avec le cylindre (temps de spinup  $\sim E^{1/2} \omega_c^{-1}$ ), la table de précession est mise en rotation. Après plusieurs temps de spinup nous prenons des photos pour différentes orientations de l'appareil par rapport à la tranche de lumière. De cette manière, nous pouvons obtenir une image des cisaillements sur l'ensemble du plan lumineux, ce qui ne serait pas le cas si nous nous étions limités à des prises de vue à  $90^\circ$  de la tranche lumineuse en raison des aberrations optiques associées au dioptré cylindrique.

#### 3.4.2 Dispositif expérimental.

Nous avons obtenu une tranche de lumière en coupant l'éclair d'un flash de forte puissance à l'aide d'une fente métallique de quelques millimètres. La largeur effective de la tranche lumineuse dans l'ensemble du volume fluide est de l'ordre de 0.5 à 1 cm. La source de lumière est montée sur la croix métallique à la place du laser que nous avons utilisé pour visualiser l'axe de rotation solide du fluide (figure 3.20).

Nous avons réalisé la suspension de particules réfléchissantes en utilisant de l'AQ1000<sup>2</sup>. Nous avons testé l'influence de la concentration sur le rendu des images, une faible quantité (qqz ml) suffit à obtenir un contraste de luminosité suffisant autour des zones de cisaillement pour pouvoir faire des photos. La

<sup>2</sup>KALLIROSCOPE Corporation, 264 main street P.O Box 60. GROTON. MASSACHUSETTS 01450 USA. tel : 617-448-6302.

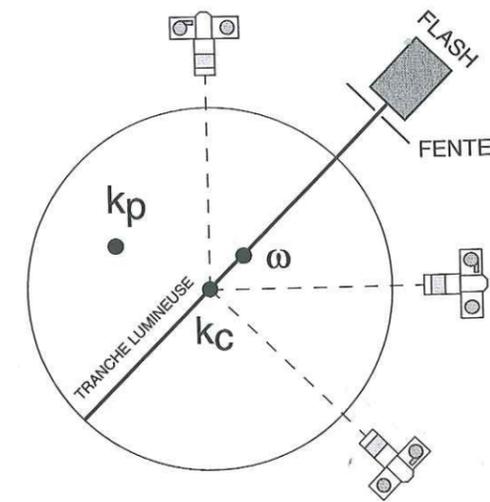


FIG. 3.20 – Système d'éclairage par tranche lumineuse.

densité des particules étant proche de celle de l'eau nous obtenons après mélange une suspension homogène stable sur plusieurs heures.

#### 3.4.3 Résultats.

##### 3.4.3.1 Précession prograde :

1. Pour  $\alpha < 30^\circ$ ,  $\omega_c > 100$  rév/min, quelque soit le taux de précession nous observons un régime laminaire constitué de structures géostrophiques (figure 3.21).
2. Pour  $\alpha = 33^\circ$ ,  $\omega_c = 50$  rév/min et  $\Omega_p > 2$  rév/min nous observons principalement une instabilité bidimensionnelle affectant une grande partie du volume (figure 3.23, b).

##### Les faibles forçages, un écoulement essentiellement laminaire :

Sur l'ensemble des expériences que nous avons réalisées, le régime laminaire en précession prograde se caractérise principalement par trois zones de cisaillement en volume alignées avec l'axe de rotation solide du fluide. Nous pouvons également observer en bas à gauche de la figure (3.21, c) la base d'une structure cisailante que nous ne pouvons identifier clairement qu'en nous plaçant à un angle entre la tranche lumineuse et l'appareil photo inférieur à  $60-70^\circ$ , ceci est lié à la déformation optique associée au dioptré cylindrique (Annexe C).

En changeant l'orientation de la tranche lumineuse nous avons pu retrouver qu'il s'agissait de structures axisymétriques par rapport à l'axe de rotation solide du fluide. Nous pouvons décrire cet écoulement secondaire comme un ensemble

de cylindres géostrophiques parallèles à l'axe de rotation emboîtés les uns dans les autres. Les vitesses angulaires différentielles entre ces cylindres se manifestent à travers les zones de cisaillement mises en évidence par les paillettes. Pour une vitesse de rotation du conteneur fixée nous observons des structures de plus en plus marquées dans l'ensemble du volume (figure 3.21,a,b,c), le nombre de structures géostrophiques semble constant au delà de  $\Omega_p = +3$  rév/min. Nous avons comparé les distances relatives entre l'axe de rotation solide du fluide et les différents cisaillements. Nous pouvons observer que la position des structures par rapport à l'axe du fluide ne dépend pas du taux de précession (figure 3.22). En accord avec nos observations de l'axe de rotation solide nous retrouvons que plus le taux de précession est grand et plus l'axe du fluide est incliné par rapport à celui de la coquille.

Nous notons également la présence d'une instabilité le long de l'axe de rotation solide du fluide à partir de  $\Omega_p = 5$  rév/min (figure 3.21,b,c). Cette structure ondulée stationnaire persiste même après plusieurs heures de rotation sans qu'aucune instabilité dans l'ensemble du volume n'apparaisse. En particulier les cisaillements géostrophiques ne semblent pratiquement pas affectés par cette distorsion de l'axe.

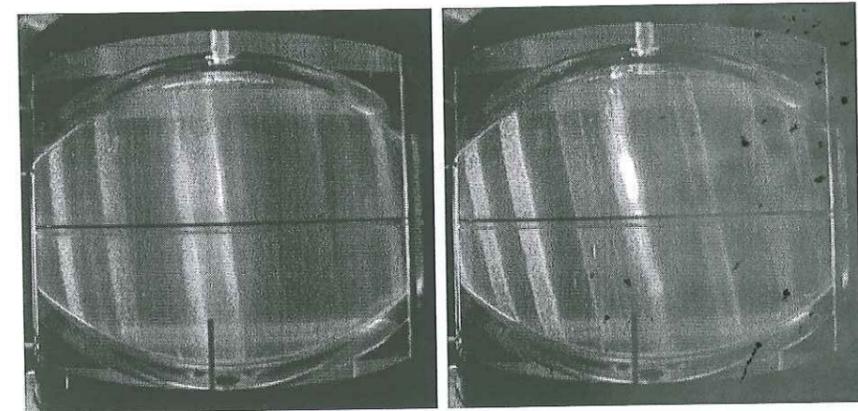
L'élément qu'il nous semble important de noter ici est qu'en régime laminaire, quelque soit le taux de précession, nous observons toujours des structures géostrophiques de grande échelle. En aucun cas nous n'avons mis en évidence des zones de cisaillement inclinées pouvant être associées aux ondes inertielles décrites dans le chapitre II.

#### Le cas des forçages importants :

$\alpha = 33^\circ$ ,  $\omega_c = 50$  rév/min, nous observons, pour  $\Omega_p > 2$  rév/min, une instabilité dans la partie centrale du volume (figure 3.23, b). Cette instabilité se traduit par une ondulation des structures géostrophiques (figure 3.23, b). Nous notons un battement de cette structure perpendiculairement à sa direction principale que nous ne pouvons pas mettre en évidence sur les photos.

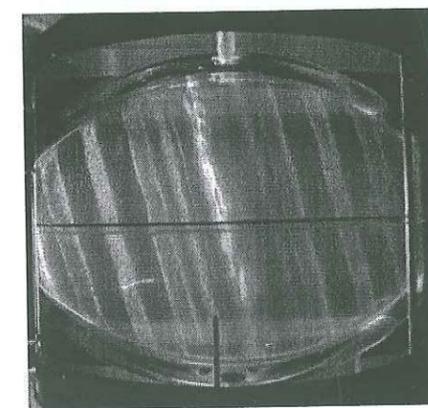
Nous n'avons pas observé de transition d'un état purement laminaire vers un régime d'instabilités, la perturbation localisée autour de l'axe de rotation pour des forçages faibles semble s'étendre progressivement des structures les plus internes vers les plus externes (3.23). Ces observations sont assez proches de ce que Malkus avait décrit comme une «wavelike instability» dans son expérience de 1968 (voir chapitre d'introduction, section «Les observations expérimentales»).

Nous notons également la présence de structures en «filaments» entre la partie cisillante la plus externe (que nous ne pouvons pas distinguer sur les photos) et la paroi du conteneur.



(a) 3 rev/min

(b) 7 rev/min



(c) 10 rev/min

FIG. 3.21 - Zones de cisaillement géostrophiques caractérisées par la méthode des paillettes réfléchissantes.  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\omega_c = 300$  rév/min, précession prograde, a)  $\Omega_p = 3$  rév/min, b)  $\Omega_p = 7$  rév/min, c)  $\Omega_p = 10$  rév/min. L'appareil photo est situé  $\sim 90^\circ$  de la tranche lumineuse.

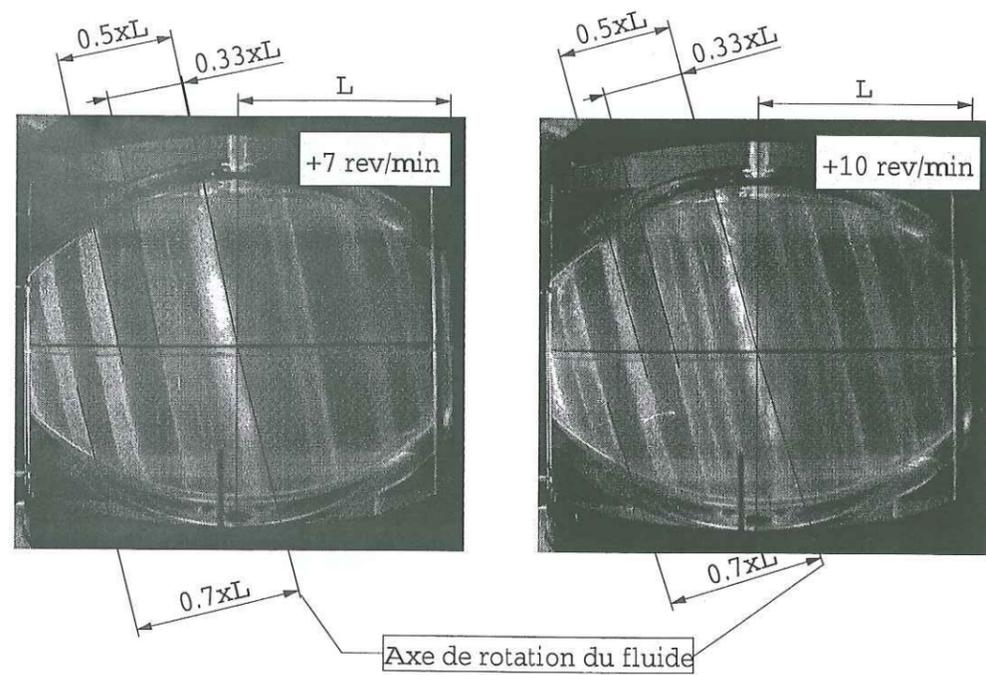


FIG. 3.22 – Nous avons défini l'axe de rotation du fluide comme étant la droite passant par le centre de la cavité parallèle aux structures cisailantes. En raison du dioptre cylindrique d'une part et de la déformation liée au système optique de l'appareil photo d'autre part, nous avons utilisé une longueur caractéristique  $L$  identique sur les deux clichés pour effectuer des mesures relatives de la position des structures cisailantes. Nous voyons sur cette figure que les cisaillements géostrophiques sont situés à la même distance de l'axe de rotation solide du fluide pour deux taux de précession différents.  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\omega_c = 300$  rév/min, précession prograde.

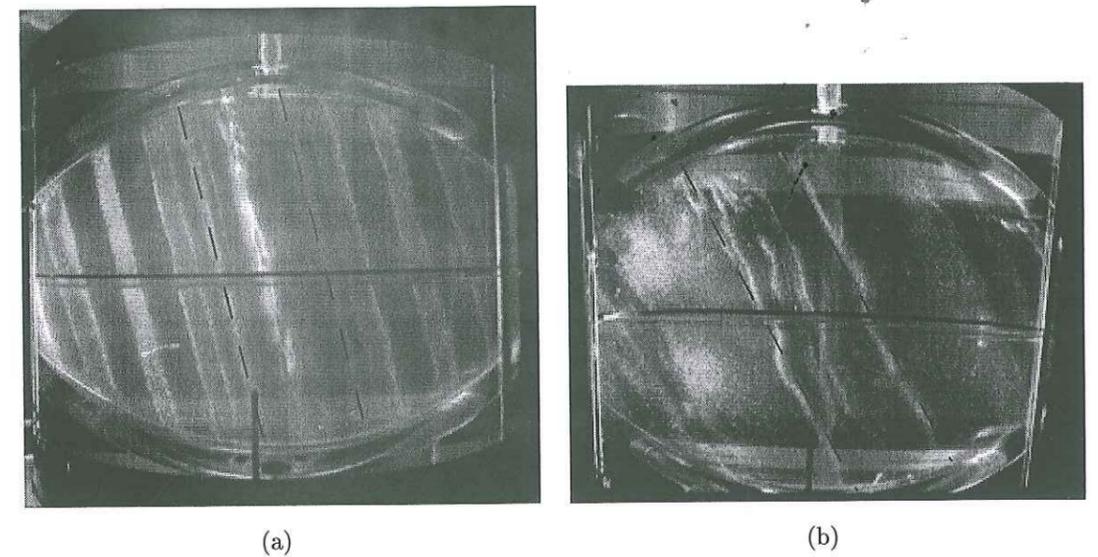


FIG. 3.23 – Comparaison entre la distorsion de l'axe observé en précession prograde pour a)  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\omega_c = 300$  rév/min,  $\Omega_p = 10$  rév/min, b)  $\alpha = 33^\circ$ ,  $\omega_c = 50$  rév/min,  $\Omega_p = 5$  rév/min. En pointillé une structure de cisaillement qui pour un faible forçage (a) n'est pas déformée. Comme nous l'avons montré la distance à l'axe des cisaillements géostrophiques ne dépend pas du forçage, nous avons alors reporté en pointillé sur la photo (b) cette même structure.

### 3.4.3.2 Précession rétrograde :

En précession rétrograde nous retrouvons les résultats obtenus par Malkus (1968[17]) et Vanyo et al. (1995[42]), à savoir qu'il existe trois régimes d'écoulement secondaire se superposant à la rotation solide (figure 3.24), un régime laminaire géostrophique (figure 3.24,a), un régime correspondant à une première instabilité principalement bidimensionnelle (figure 3.24,b,c) et enfin un régime de turbulence développée (figure 3.24,d). Ces trois types d'écoulements apparaissent successivement lorsque pour une vitesse de cylindre donnée nous augmentons le taux de précession.

#### Le régime laminaire :

Le régime géostrophique laminaire que nous observons en précession rétrograde (figure 3.24,a) est comparable à celui que nous avons obtenu en précession prograde, si ce n'est que nous n'obtenons dans ce cas qu'une seule structure dominante en volume au lieu de trois. En nous plaçant à  $45^\circ$  de la tranche lumineuse nous pouvons observer une zone de cisaillement géostrophique supplémentaire dans la partie la plus externe du fluide (figure 3.25), toujours pour des raisons de déformation liée au dioptre cylindrique cette structure n'est pas visible sur des photos prises à  $90^\circ$  de la tranche lumineuse.

Nous avons testé l'effet de la quantité de particules réfléchissantes sur le rendu des images afin de voir si nous pouvions rendre compte de la différence entre les régimes laminaires en précession prograde et rétrograde. La vitesse du cylindre étant fixée nous avons fait varier le taux de précession. La figure (3.26) illustre les résultats que nous avons obtenus avec 1ml, 2ml, 3ml d'AQ1000. Une grande partie des structures assez fines visibles avec 1ml de solution d'AQ1000 disparaissent lorsque nous augmentons la concentration de particules réfléchissantes. Nous n'obtenons jamais une image du cisaillement comparable à ce que nous avons pu observer en précession prograde. La différence entre les régimes laminaires ( $\Omega_p > 0$  et  $\Omega_p < 0$ ) correspondrait-elle à deux structures différentes du cisaillement axisymétrique en volume ?

#### L'instabilité bidimensionnelle :

L'instabilité 2D (figure 3.24,b,c) que nous observons en augmentant le taux de précession se caractérise par des structures fines allongées parallèles à l'axe de rotation du fluide. Cette instabilité semble apparaître d'abord dans les zones de cisaillement laminaire (figure 3.27) puis dans l'ensemble du fluide lorsque nous augmentons le taux de précession (figure 3.24,c). Nous n'avons pas pu à partir des clichés déterminer la géométrie complète de ces structures, il peut s'agir encore une fois de cylindres imbriqués les uns dans les autres ou bien de structures en filaments pour lesquelles les longueurs d'ondes radiales que nous observons sont représentatives de la dépendance en  $\phi$ . Il s'agirait alors de colonnes alignées suivant la direction de l'axe de rotation solide du fluide. La figure (3.27) semble

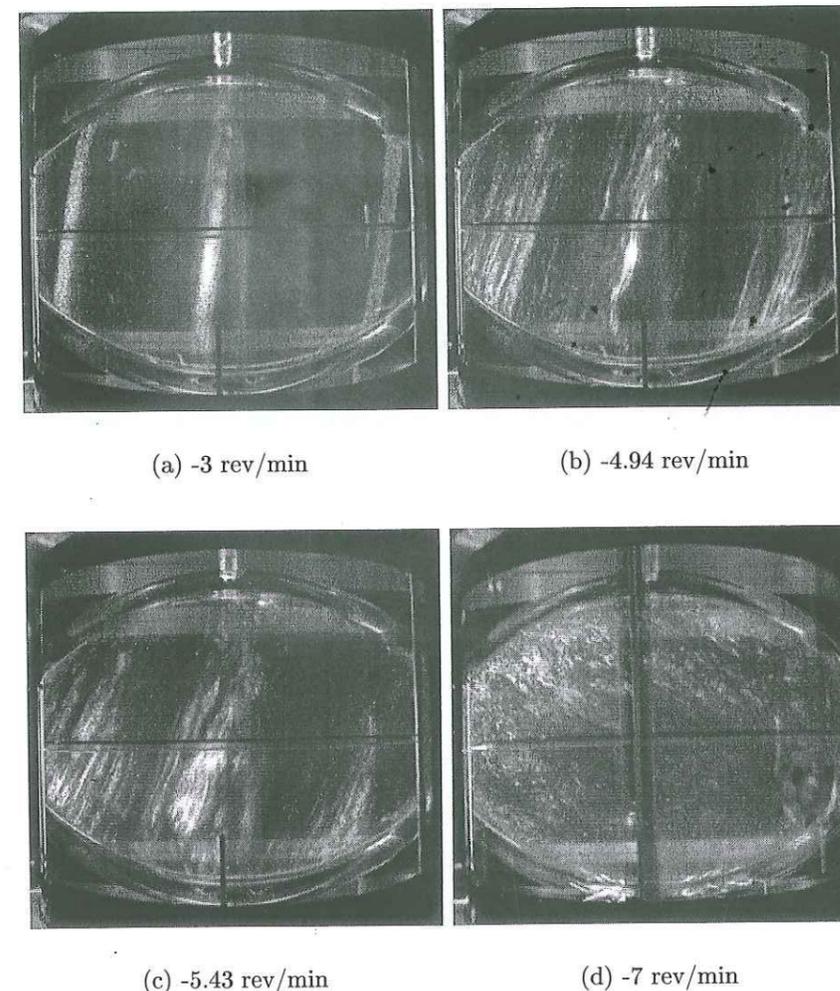


FIG. 3.24 - Différents régimes d'écoulement secondaire observés en précession rétrograde.  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\omega_c = 300$  rév/min. a)  $\Omega_p = -3$  rév/min : écoulement laminaire, b)  $\Omega_p = -4.94$  rév/min : instabilité 2D autour des structures laminaire, c)  $\Omega_p = -5.43$  rév/min : instabilité bidimensionnelle généralisée à l'ensemble du volume, d)  $\Omega_p = -7$  rév/min : turbulence développée.

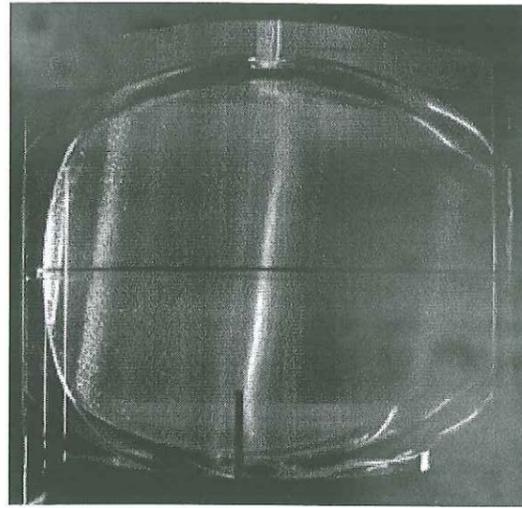


FIG. 3.25 - Visualisation de la zone de cisaillement la plus externe en régime laminaire.  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\omega_c = 300$  rév/min,  $\Omega_p = -3$  rév/min. L'appareil photo est placé à  $45^\circ$  de la tranche lumineuse.

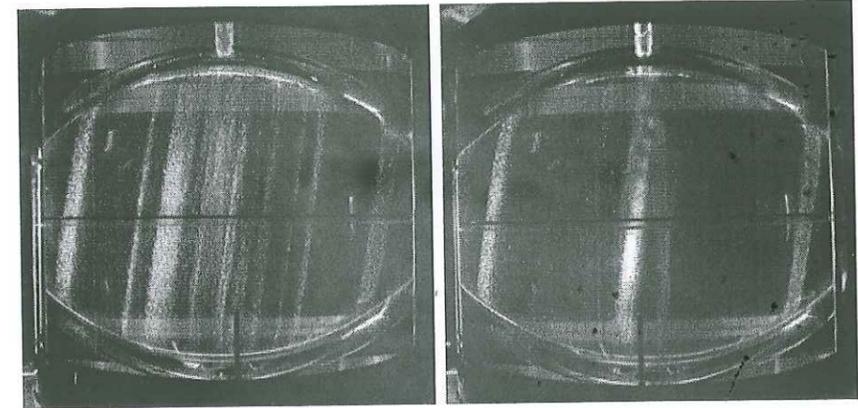
montrer une dissymétrie des structures de part et d'autre de l'axe de rotation dans la partie centrale du fluide. La lumière provenant de la gauche sur ce cliché, nous pensons qu'il peut s'agir d'un artéfact lié à la diminution de la luminosité dans la partie la plus éloignée de la source.

En plus de cette instabilité il apparaît une zone de cisaillement ondulée sur l'axe de rotation solide du fluide semblable à celle que nous avons observée en précession prograde.

#### Le régime de turbulence développée :

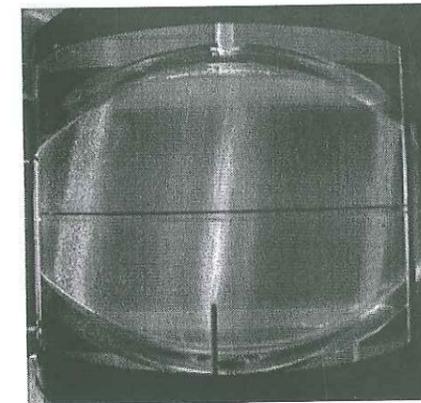
Le régime de turbulence développée (figure 3.24, d) apparaît systématiquement après le changement brusque de direction de l'axe de rotation solide du fluide. Bien que nous puissions distinguer dans certains cas une direction privilégiée des zones claires et sombres dans le plan de la tranche lumineuse, il semble que ce régime correspond plutôt à un écoulement 3D se superposant à la rotation solide. La technique des paillettes ne nous permet pas de caractériser ce type d'écoulements dans la mesure où ils n'impliquent pas de cisaillements stationnaires à grande échelle facilement identifiables avec les paillettes. En particulier il est assez difficile d'obtenir des images contrastées mettant en évidence l'aspect tridimensionnel de cet écoulement secondaire. La gamme de paramètres pour laquelle nous observons ce régime correspond à celle où la colonne de billes de céramique devient instable (3.3.1).

Nous avons reporté sur le diagramme de phase (3.28) l'ensemble de nos observations correspondant à une série d'expériences faites pour un angle  $\alpha = 25^\circ$ .



(a) 1 ml

(b) 2 ml



(c) 3 ml

FIG. 3.26 - Test de l'influence de la quantité de paillettes en suspension sur la caractérisation des zones de cisaillements en volume.  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\omega_c = 300$  rév/min,  $\Omega_p = -3$  rév/min. L'appareil photo est placé à  $90^\circ$  de la tranche lumineuse. a) 1ml d'AQ1000, b) 2ml d'AQ1000, c) 3ml d'AQ1000.

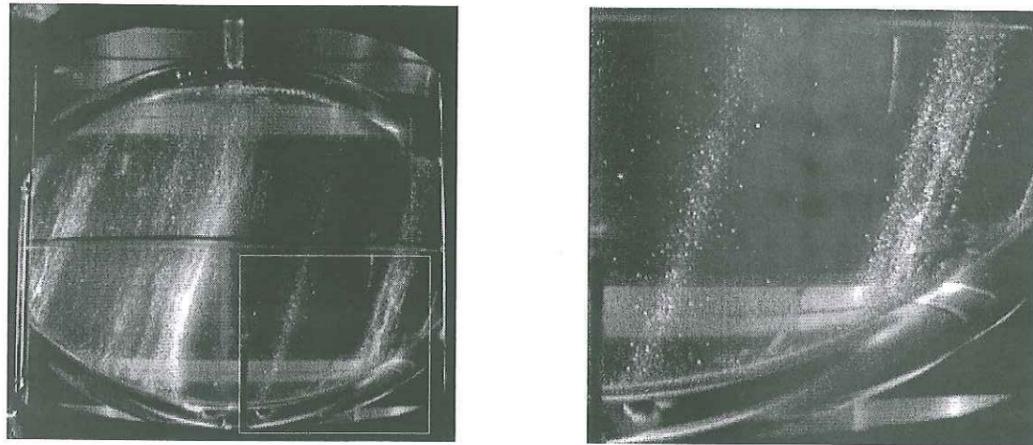
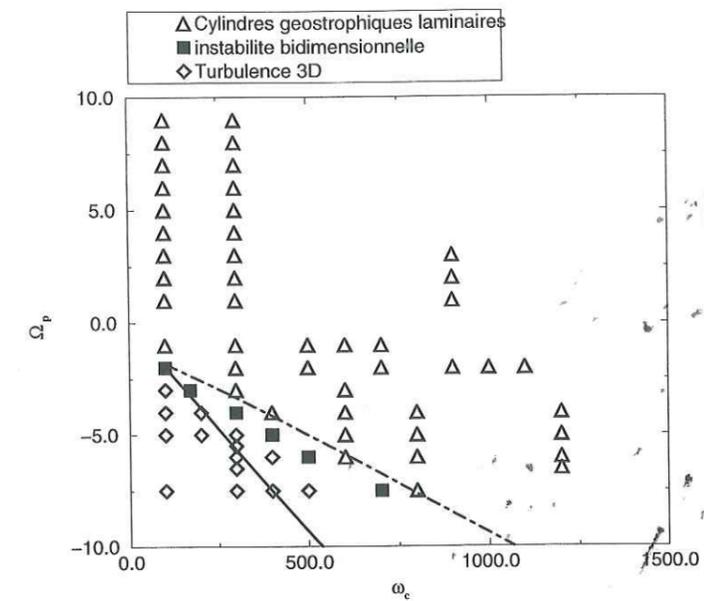


FIG. 3.27 - Déstabilisation de la structure cisailante géostrophique laminaire.  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\omega_c = 150$  rév/min,  $\Omega_p = -2.5$  rév/min. Nous voyons sur la vue d'ensemble des structures en «filaments» autour des zones de cisaillement externes. Le grossissement de la partie encadrée met en évidence une structure laminaire (les particules sont régulièrement réparties sur toutes la structure) et un cisaillement plus externe qui semble avoir une structure interne en «filaments». Ceci suggère que cette instabilité serait dans un premier temps localisée sur la zone de cisaillement majeure de l'écoulement laminaire.



(a)

FIG. 3.28 - Diagramme de phase  $(\omega_c, \Omega_p)$  regroupant les observations faites par une méthode des paillettes pour  $\alpha = 25^\circ$ . Les lignes sont les limites  $\Omega_p(1)$  (- · -) et  $\Omega_p(2)$  (-) déduites de l'approche asymptotique de Busse (Annexe A1). Notons que lors de l'étude de la direction de l'axe de rotation du fluide nous avons observé une variation brutale de la longitude et de la colatitude autour de la limite  $\Omega_p(2)$  (-) uniquement.

### 3.4.4 Discussion.

#### 3.4.4.1 Le régime laminaire :

Nous interprétons le cisaillement géostrophique le plus externe, visible uniquement lorsque nous nous plaçons à un angle inférieur à  $60 - 70^\circ$ , comme celui prédit analytiquement par Busse (1968[2]) (en  $s/R = 0.86$ ) et pour lequel nous avons proposé dans le chapitre II un mécanisme physique pour une viscosité finie. L'existence d'autres structures géostrophiques en volume reste une question ouverte, en particulier la différence que nous observons entre précession prograde et rétrograde pour ce régime est surprenante.

Nous avons cherché à savoir si la structure de cisaillement dominante sur les

clichés pris à  $90^\circ$  de la tranche lumineuse en précession rétrograde correspondait à un des cisaillements géostrophiques du régime de précession prograde. Pour cela nous avons mesuré sur les photos, le rayon cylindrique correspondant à cette structure en précession rétrograde puis nous avons cherché si sur les images obtenues en précession prograde nous pouvions trouver un cisaillement ayant une position et une taille équivalente (figure 3.29). Pour une position fixe de l'appareil photo par rapport à la tranche lumineuse, le grandissement optique est le même pour les deux clichés, nous pouvons donc effectuer des mesures relatives du rayon cylindrique sans nous préoccuper du facteur géométrique associé à la prise de vue. Nous avons remarqué en précession prograde que la position des cylindres par rapport à l'axe de rotation du fluide ne semblait pas dépendre du taux de précession, nous avons donc choisi de comparer deux photos qui semblent représentatives du régime laminaire pour les deux sens de rotation de la table tournante pour le même nombre d'Ekman (la vitesse de rotation du conteneur), à savoir ( $\omega_c = 300 \text{ rev/min}$ ,  $\Omega_p = +7 \text{ rev/min}$ ) et ( $\omega_c = 300 \text{ rev/min}$ ,  $\Omega_p = -3 \text{ rev/min}$ ). Il apparaît une correspondance (en position et en taille) entre les deux structures laminaires les plus externes (sur les clichés pris à  $90^\circ$  de la tranche lumineuse) en régime prograde et rétrograde. Pour cette structure particulière, non seulement sa position et sa taille caractéristique ne dépendent pas du taux de précession (voir description du régime laminaire en prograde), mais elles ne dépendent pas non plus du sens de rotation de la table. Pourquoi le reste du volume devrait-il se comporter différemment? Si nous regardons attentivement la photo (3.25) nous voyons qu'en plus des deux cylindres les plus marqués, il existe une structure évanescence assez fine plus interne en volume. Cette photo a été prise lors de la même expérience que le clichés (3.24, a) sur lequel elle n'apparaît pas. Entre ces deux images seule la position de l'appareil par rapport à la tranche lumineuse a changé, ceci nous montre la difficulté qu'il peut y avoir à interpréter ce type de données. Nous ne pouvons donc pas tirer de conclusion quant à la différence que nous observons entre les deux régimes laminaires en précession prograde et rétrograde. Il n'est pas certain que la structure radiale du cisaillement soit différente en précession prograde et rétrograde.

Nous avons également reporté sur ces clichés la zone de cisaillement géostrophique prédite théoriquement (Busse 1968[2]) en utilisant les lois de déformation du dioptre cylindrique présentés en annexe (C). Contrairement à ce à quoi nous pouvions nous attendre elle ne correspond à aucune structure claire. Ceci pose la question de savoir à quoi correspond une bande blanche sur les images. En l'absence de précession après plusieurs temps de spinup, le fluide n'est animé que d'un mouvement de rotation en bloc avec le conteneur, il n'y a donc pas de cisaillement dans le système. Nous avons pu alors observer sur les clichés que l'ensemble du volume était sombre. Ceci tend à montrer que les structures sombres correspondent à une zone de faible cisaillement par opposition aux structures claires.

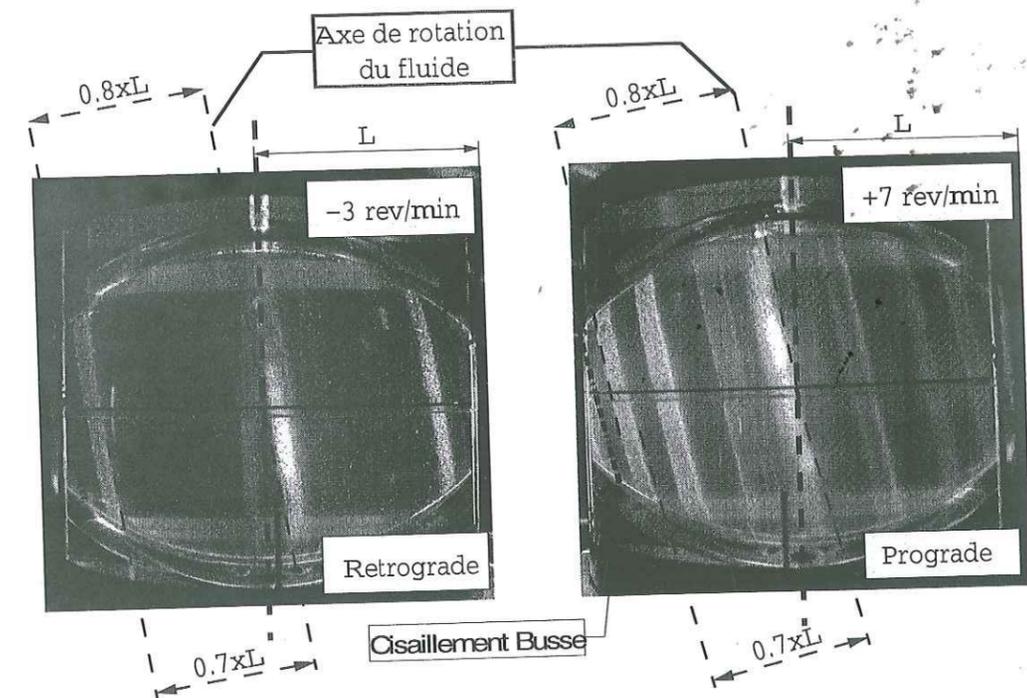


FIG. 3.29 – Comparaison entre le cisaillement géostrophique en régime de précession prograde et rétrograde.

Nous avons défini l'axe de rotation du fluide comme étant la droite passant par le centre de la cavité parallèle aux structures cisailantes. En raison du dioptre cylindrique d'une part et de la déformation liée au système optique de l'appareil photo d'autre part, nous avons utilisé une longueur caractéristique  $L$  identique sur les deux clichés pour effectuer des mesures relatives de la position et de la taille des structures cisailantes géostrophiques. Nous voyons d'après les images qu'il existe une correspondance (en position et en taille) entre les deux structures laminaires situées à  $0.7 * L$  en régime prograde et rétrograde. Nous avons fait figurer sur ces images la zone de cisaillement géostrophique prédite théoriquement.

Nous voyons ici la nécessité de développer d'une part une méthode quantitative permettant d'accéder à l'écoulement géostrophique dans les expériences, d'autre part des expériences simples pour lesquelles nous pourrions interpréter simple les structures de bandes mise en évidence par des paillettes réfléchissantes.

Que ce soit en précession prograde ou rétrograde, nous n'avons jamais observé de structure cisailante inclinée pouvant être associée aux ondes inertielles décrites comme la réponse linéaire se superposant à la rotation solide.

Dans le chapitre II, nous avons montré que les vitesses parallèles aux surfaces caractéristiques inclinées à  $30^\circ$  étaient proportionnelles à  $\varepsilon E^{1/5}$  et que celles associées à la réponse non-linéaire géostrophique du fluide se mettaient à l'échelle en  $\varepsilon^2 E^{-3/10}$ . L'ellipticité restant petite dans notre expérience devant la taille caractéristique des zones de cisaillement ( $\propto E^{1/5}$ ), nous pouvons comme nous l'avons proposé dans la discussion du chapitre II utiliser les résultats numériques obtenus dans la sphère pour estimer le rapport entre le cisaillement associé aux ondes inertielles et celui des cylindres géostrophiques.

$$C = s \frac{\partial(U_\phi/s)}{\partial s} = -\frac{1}{s} U_\phi + \frac{\partial U_\phi}{\partial s}. \quad (3.27)$$

Dès que nous nous éloignons de l'axe, seul le terme  $\frac{\partial U_\phi}{\partial s}$  est important. Le rapport entre le cisaillement inertiel et le cisaillement géostrophique se ramène alors au rapport des amplitudes des vitesses associées aux ondes inertielles à celles associées aux mouvements géostrophiques. Nous pouvons alors estimer le rapport des cisaillements à partir des résultats numériques par :

$$\left( \frac{U_\phi^{inertielle}}{U_\phi^{geostrophique}} \right)_{exp} = \left( \frac{U_\phi^{inertielle}}{U_\phi^{geostrophique}} \right)_{num} \frac{\varepsilon_{exp} E_{exp}^{1/2}}{\varepsilon_{num} E_{num}^{1/2}} \quad (3.28)$$

Où les indices «exp» et «num» font référence respectivement à l'expérience et au calcul numérique.

Pour estimer l'amplitude de l'écoulement de couche limite  $\varepsilon_{exp}$  dans l'expérience avons utilisé la relation entre la colatitude et  $\varepsilon$  découlant de l'approche asymptotique de Busse (1968[2]).

$$\varepsilon = \left| \frac{\omega - \omega_c}{\omega_c} \right|, \quad (3.29)$$

$$\omega \cdot \omega_c = \omega^2 \quad (3.30)$$

nous en déduisons

$$\sin^2(\theta) = \varepsilon^2. \quad (3.31)$$

En utilisant les résultats numériques ( $\gamma = 0.1$ ,  $E = 10^{-6}$ ) dans le cas de la sphère, nous avons estimé le rapport (3.28) pour différentes valeurs des paramètres ( $\omega_c$ ,  $\Omega_p$

| $\omega_c$ (rév/min) | $\Omega_p$ (rév/min) | $U_\phi^{inertielle}/U_\phi^{geostrophique}$ |
|----------------------|----------------------|--|
| 100                  | -1                   | 0.98   |
|                      | -3                   | 0.3643                                       |
| 150                  | -1                   | 1.2  |
|                      | -2                   | 0.4778                                       |
| 300                  | -2                   | 1.15   |
|                      | -5                   | 0.3375                                       |

TAB. 3.2 – Rapport (3.28) entre l'amplitude des ondes inertielles et l'amplitude de l'écoulement géostrophique dans les expériences à partir du calcul numérique obtenu dans la sphère pour ( $\gamma = 0.1$ ,  $E = 10^{-6}$ ).

) (table 3.2). Sur l'ensemble des expériences pour lesquelles nous observons un régime laminaire, l'amplitude des ondes inertielles ainsi obtenue est du même ordre de grandeur que l'amplitude de l'écoulement géostrophique. Or nous ne les avons jamais observées en utilisant les paillettes réfléchissantes.

Il existe cependant d'un point vue dynamique une différence fondamentale entre ces deux types de mouvements :

Si les cisaillements géostrophiques sont des structures stationnaires dans le référentiel en rotation solide, il n'en est pas de même pour les ondes inertielles. En effet pour une paillette située dans le référentiel tournant du fluide, les ondes inertielles apparaissent comme un cisaillement de fréquence  $\omega_c$ . Nous suggérons que la méthode simple des paillettes ne soit pas la plus adaptée à la visualisation de ce type de structures oscillantes. D'autres méthodes peuvent être envisagées pour essayer d'identifier cet écoulement, s'il existe. Nous aborderons ce point en conclusion générale de ce travail.

#### 3.4.4.2 Les instabilités :

##### La turbulence en précession rétrograde, une instabilité de cisaillement ?

Comme nous l'avons vu dans la section (3.3.2), il existe en précession rétrograde un changement brusque de la direction de l'axe de rotation solide du fluide. Nous avons cherché à savoir si ce phénomène était également associé à l'une ou l'autre des instabilités que nous observons en précession rétrograde. Pour cela nous avons reporté sur les diagrammes de colatitude en fonction de  $\Omega_p$ , les différents régimes que nous avons pu observer (figure 3.30).

Le fait que nous observions la première instabilité avant et après le saut brusque de l'axe de rotation solide nous montre que le mécanisme physique, encore non identifié, responsable de ce changement brusque de direction n'est probablement pas à l'origine de cette première bifurcation.

La comparaison entre la colatitude de l'axe du fluide et les différents régimes

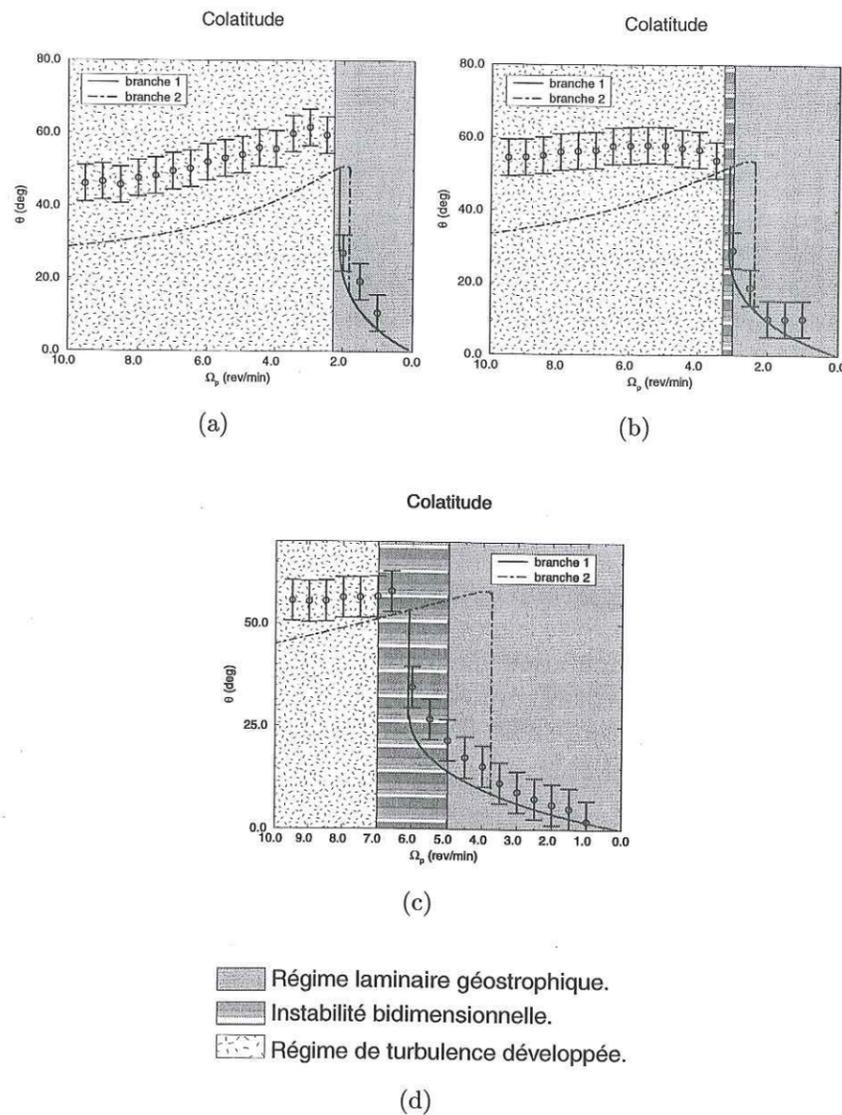


FIG. 3.30 – Comparaison entre l'évolution de la colatitude de l'axe de rotation solide et les différents régimes observés en utilisant des paillettes réfléchissantes en suspension dans le fluide.  $\alpha = 20^\circ$ , a)  $\omega_c = 100$  rév/min, b)  $\omega_c = 150$  rév/min, c)  $\omega_c = 300$  rév/min.

observés (figure 3.30) suggère qu'il existe pour **chaque vitesse de rotation du cylindre** une première valeur critique du taux de précession correspondant à l'apparition de l'instabilité bidimensionnelle et une seconde associée à la turbulence développée. A ces taux critiques de précession correspondent **des colatitudes critiques**  $\theta_c$ , que nous déduisons des diagrammes (3.18). Nous pouvons alors invoquer des effets visqueux et/ou des effets liés à la forme ellipsoïdale du conteneur pour tenter d'expliquer l'origine de nos observations. Dans un cas comme dans l'autre c'est l'écart entre la direction de rotation solide du fluide et la coquille qui joue un rôle important. En effet, plus l'axe du fluide est incliné par rapport à celui de la coquille et plus le cisaillement de couche limite  $\varepsilon$  sera grand, donc plus le cisaillement localisé sur les structures géostrophiques sera important. D'autre part l'écoulement, en particulier ses composantes géostrophiques, sera d'autant plus perturbé par la géométrie du conteneur que son axe de symétrie (axe de rotation solide du fluide) diffère de celui du conteneur ( $\hat{k}_c$ ).

L'existence d'une colatitude critique  $\theta_c$  est d'après (3.31) équivalente à celle d'une amplitude critique  $\varepsilon_c$  de l'écoulement de couche limite. Cette hypothèse selon laquelle le paramètre permettant de caractériser cette première bifurcation est  $\theta_c$  (ou  $\varepsilon_c$ ) est compatible avec le fait que nous n'observons pas d'instabilité en précession prograde pour  $\alpha = 20^\circ$ . En nous appuyant sur la formulation analytique de Busse, nous avons reporté sur la figure (3.31) les colatitudes critiques correspondant aux taux de précession critiques observés expérimentalement pour  $\alpha = 20^\circ$ . Nous obtenons que pour les vitesses de rotation prograde de la table accessibles dans cette expérience, les colatitudes prédites analytiquement sont toujours inférieures à la valeur critique. Ceci expliquerait donc l'absence de turbulence bidimensionnelle pour un angle  $\alpha = 20^\circ$  en précession prograde.

Comme nous l'avons fait remarquer l'instabilité bidimensionnelle semble apparaître dans un premier temps dans les zones de cisaillement les plus externes puis dans la structure cisillante en volume (figures 3.27, 3.24, b, c). La vitesse azimuthale dans la structure géostrophique en  $s/R = 0.86$  se mettant à l'échelle en  $\varepsilon^2 E^{-3/10}$  (Chapitre II), nous proposons d'interpréter la première bifurcation observée en précession rétrograde comme une déstabilisation des structures géostrophiques laminares lorsque la vitesse associée à ces cisaillements atteint une valeur critique :

$$U_\phi \propto \varepsilon_c^2 E^{-3/10}. \quad (3.32)$$

Nous pouvons ainsi construire un nombre de Reynolds associé à cette transition. Ce nombre mesure le rapport des effets non linéaires, donc du terme advectif dans l'équation du mouvement, aux effets visqueux. Il est défini par

$$R_e = UL/\nu,$$

où  $U$  et  $L$  sont respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques du système. D'après nos résultats numériques (Chapitre II) la taille caractéristique

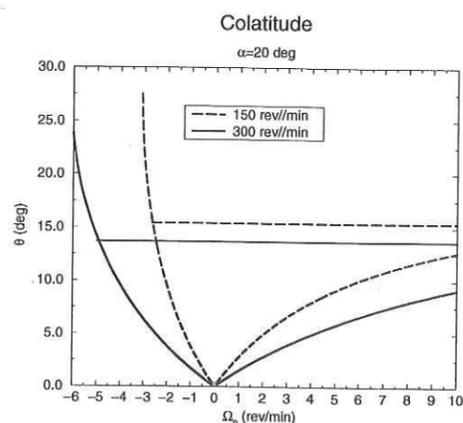


FIG. 3.31 -  $\alpha = 20^\circ$ . En reportant les taux de précession critiques correspondant à la première bifurcation sur les courbes analytiques de colatitude déduites de l'approche asymptotique de Busse (1968[2]), nous avons comparé les  $\theta_c$  correspondant à la première bifurcation en précession rétrograde aux valeurs théoriquement accessibles en précession prograde. Nous obtenons que pour les vitesses de rotation prograde de la table comprise entre 0 et +10 rév/min, les colatitudes prédites analytiquement sont toujours inférieures à la valeur critique. Ceci expliquerait donc l'absence de turbulence bidimensionnelle pour un angle  $\alpha = 20^\circ$  en précession prograde.

| $\omega_c$ (rév/min) | $R_e$            |
|----------------------|------------------|
| 150                  | $(3 \pm 1) 10^3$ |
| 300                  | $(3 \pm 1) 10^3$ |

TAB. 3.3 - Nombre de Reynolds caractérisant la première bifurcation en précession rétrograde.

des structures cisailantes se met à l'échelle en  $E^{1/5}$ . Comme précédemment nous avons utilisé les résultats numériques ( $\gamma = 0.1$ ,  $E = 10^{-6}$ ) pour estimer les vitesses azimutales associées aux structures géostrophiques :

$$U = R\omega_c \left( \frac{(U_\phi)_{num}}{\varepsilon_{num} E_{num}^{-3/10}} \varepsilon_{exp} E_{exp}^{-3/10} \right) = 7.10^{-3} R\omega_c \varepsilon_{exp} E_{exp}^{-3/10}, \quad (3.33)$$

$$L = R \left( \frac{\delta S_{num}}{E_{num}^{1/5}} \right) E_{exp}^{1/5} = 1.92 R E_{exp}^{1/5}. \quad (3.34)$$

Où  $\delta S_{num}$  est la taille caractéristique sur laquelle se fait le cisaillement géostrophique, nous avons utilisé la valeur donnée dans la table (2) de l'article du chapitre II.

$$R_e = 1.3 10^{-2} \varepsilon_{exp}^2 E_{exp}^{-11/10}. \quad (3.35)$$

Si nous avons pu observer cette première bifurcation sur un nombre de points ( $\Omega_p$ ,  $\omega_c$ ) raisonnables (figure 3.31), nous ne disposons en revanche que de trois expériences au cours desquelles nous avons effectué une détermination de la direction de l'axe de rotation solide autour de cette première bifurcation ( $\alpha = 20^\circ$ ,  $\omega_c = 100, 150, 300$  rév/min). Nous n'avons observé ce régime de turbulence bidimensionnelle que pour les deux dernières. Pour  $\omega_c = 100$  rév/min il est probable que ce régime, s'il existe, correspond à une plage très réduite de taux de précession, inférieure à la précision avec laquelle nous pouvons ajuster la vitesse de rotation de la table tournante. Ceci peut alors expliquer que nous ayons observé directement une transition du régime laminaire vers le régime de turbulence développée.

A partir des deux expériences à 150 et 300 rév/min nous avons calculé les nombres de Reynolds en utilisant la relation (3.31) pour déterminer  $\varepsilon$  (table 3.3). L'erreur de l'ordre de 5° que nous faisons sur la détermination de la colatitude introduit une erreur relative sur le nombre de Reynolds d'environ 30%. Il est difficile de tirer une conclusion quant à ce résultat avec simplement 2 observations, une étude sur une plus large gamme de vitesses de rotation de la coquille et d'angle  $\alpha$  est nécessaire. Il semble néanmoins que la valeur critique du nombre de Reynolds que nous obtenons ne dépend pas de la vitesse de rotation du cylindre et donc du nombre d'Ekman.

Une telle hypothèse suggère que l'ellipticité et l'angle dont nous inclinons l'axe de la coquille par rapport à l'axe de précession ne jouent un rôle que dans la détermination de la rotation solide du fluide et donc dans l'amplitude de l'écoulement géostrophique, ce serait alors les effets visqueux qui sont à l'origine de la déstabilisation des structures laminaires.

La seconde transition identifiée en précession rétrograde peut alors être décrite soit comme une seconde bifurcation du système de cylindres en rotation différentielle soit comme une instabilité d'une autre nature pour laquelle l'ellipticité pourrait jouer un rôle beaucoup plus direct. Dans les expériences que nous avons effectuées, lorsque pour une valeur critique du taux de précession le système atteint le régime de turbulence développée nous n'avons pas observé de retour à un état laminaire, même après plusieurs dizaines de minutes. Cette transition vers la turbulence est en ce sens assez différente de celle des instabilités elliptiques déjà observées expérimentalement (Malkus 1994[18], figure 3.32) pour lesquelles des cycles d'hystérésis sont mis en évidence.

#### La distorsion des structures géostrophiques, un effet de l'ellipticité?

La distorsion de l'axe de rotation solide et des structures géostrophiques que nous avons observée n'a pas encore fait l'objet d'une étude approfondie dans le cadre de cette expérience. En comparant cette structure (3.23) avec les observations de Malkus (1994[18]) lors d'une expérience au cours de laquelle il impose une perturbation elliptique par déformation de la paroi d'un cylindre en rotation (figure 3.32), nous pouvons penser qu'il s'agit d'une perturbation induite par l'ellipticité du conteneur. Kerswell (1993[13]), Seyed-Mahmoud et al. (2000[30]), Kerswell (1999[15]), ont montré que ce type d'instabilités pouvait dans certaines circonstances donner lieu à des résonances entraînant alors une déstabilisation complète de l'écoulement (figure 3.32, b). Nous interprétons donc cette distorsion des structures comme un effet dû à la seule forme ellipsoïdale du conteneur.

Comme nous l'avons mentionné, l'axe constitué de billes de céramique semble pour de forts taux de précession apparaître puis disparaître avec une certaine régularité. Malkus en 1989 (Malkus 1994[18]), a pu observer un phénomène comparable de croissance d'une instabilité suivi d'une turbulence développée puis d'un retour à un état laminaire s'accompagnant d'une nouvelle croissance (figure 3.32). La similitude entre nos observations et celles rapportées par Malkus suggère que nous puissions être en présence d'une instabilité de type elliptique. Il est important de noter ici que nous n'avons pas pu mettre en évidence un tel comportement cyclique de la distorsion des structures avec des paillettes réfléchissantes en précession prograde ou rétrograde. Les paramètres  $(\omega_c, \Omega_p, \alpha)$  pour lesquels nous avons observé ce comportement oscillant de l'axe de rotation correspondent à ce que nous avons identifié comme des régimes de turbulence développée par la technique des paillettes. Il n'existe alors aucune structure de cisaillement à grande

échelle pouvant mettre en évidence une déformation associée à l'ellipticité du conteneur. La seule structure de grande échelle qui persiste est la rotation solide à laquelle précisément les billes de céramique sont sensibles. Il est alors possible que nous ayons la superposition de deux instabilités, l'une de cisaillement mise en évidence par les paillettes l'autre due à l'ellipticité et perceptible à travers le comportement des billes de céramique. Cependant, contrairement aux paillettes, les billes de céramiques n'ont pas la même densité que le liquide, quel est alors le rôle des forces d'Archimède? Ceci pose la question de savoir si le caractère cyclique que nous avons observé n'est pas un artéfact lié aux traceurs que nous avons utilisés. D'autres études nous paraissent nécessaires afin de pouvoir conclure quant à l'occurrence de ce phénomène.

### 3.5 Conclusion.

Nous avons proposé dans ce chapitre une méthode quantitative basée sur la mesure de la pression associée à la rotation solide du fluide pour caractériser la direction du vecteur  $\omega$ .

En comparant la direction de l'axe de rotation du fluide déduite des mesures de pression avec une observation directe utilisant une suspension de billes de céramique nous avons pu «valider» cette technique dans une gamme de paramètres pour laquelle l'écoulement est laminaire. Cette méthode étant nouvelle, nous devons rester prudent quant au degré de validité de nos résultats lorsqu'un écoulement turbulent se superpose à la rotation solide du fluide.

Une approche analytique dans la limite des faibles viscosités (Busse 1968[2]) conduit dans certaines conditions à l'existence de plusieurs solutions pour la rotation solide du fluide. Nous avons montré à partir de nos déterminations expérimentales que le système sélectionnait toujours la solution correspondant au plus petit écart entre la direction de rotation du fluide et celle de la coquille. Le sens physique de cette observation n'est actuellement pas clairement établi. Pourquoi le système sélectionne-t-il une branche de solution plutôt qu'une autre? S'agit-il d'une minimisation de la dissipation visqueuse dans la couche d'Ekman, ou d'un changement d'équilibre entre les couples?

Nous avons également cherché à caractériser l'écoulement secondaire se superposant à la rotation solide en utilisant une méthode de visualisation directe. Nous avons ainsi retrouvé les résultats des études antérieures (Malkus 1968[17], Vanyo et al. 1995[42]) à savoir qu'en précession rétrograde il existe principalement trois régimes d'écoulement secondaire, un régime laminaire constitué de cylindres géostrophiques coaxiaux alignés avec l'axe de rotation solide du fluide, un régime de turbulence bidimensionnelle et un régime de turbulence développée. Nous proposons à l'issue de cette étude que la première bifurcation observée en précession

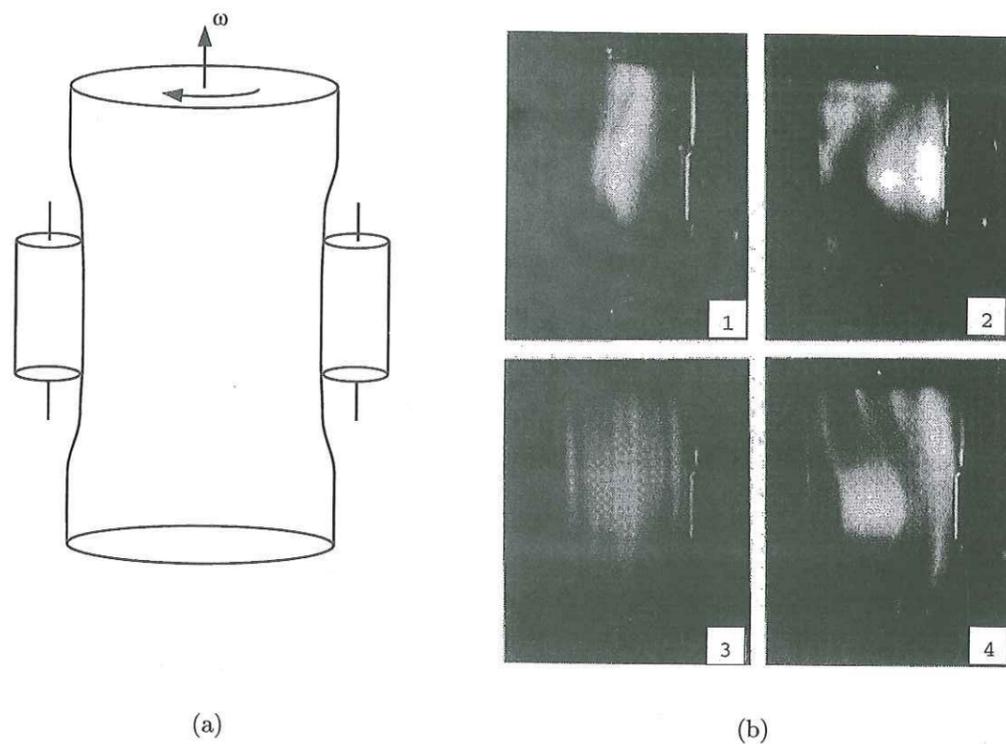


FIG. 3.32 – Croissance et explosion d'une instabilité elliptique observée expérimentalement (Malkus 1994[18]). Un cylindre rempli d'eau en rotation rapide est déformé radialement par pincement (a). La déformation elliptique des lignes de courant associées à la rotation solide du fluide est la source d'une onde inertielle (distorsion de l'axe de rotation solide (Kerswell 1999[15])) qui dans certaines conditions entraîne la croissance d'une instabilité (1) allant jusqu'à une déstabilisation complète de l'écoulement (2). Il apparaît alors un nouvel état transitoire de spin-up du fluide (3) puis le processus de croissance recommence avec une symétrie opposée (4).

rétrograde correspond à une déstabilisation des structures géostrophiques laminares sous l'effet d'un cisaillement trop important.

De manière apparemment indépendante de ces différentes bifurcations, il se développe dans le système une instabilité se caractérisant par une déformation des structures géostrophiques. Nous proposons que cette dernière soit due à l'ellipticité du conteneur, elle est alors d'autant plus importante que l'axe de rotation solide du fluide est incliné par rapport à celui de la coquille.

Une étude systématique par la méthode des paillettes que nous avons utilisée sur l'ensemble des paramètres accessibles avec cette expérience devrait pouvoir nous guider vers une compréhension physique de ces instabilités.



## Chapitre 4

Conclusion générale et perspectives.

## 4.1 Conclusions.

A travers une approche numérique en géométrie sphérique du problème de la précession nous avons montré que les éruptions de la couche d'Ekman naissant d'une rotation équatoriale différentielle entre le fluide et le conteneur induisaient en volume deux types d'écoulement. Un premier écoulement correspondant à la réponse linéaire du fluide aux interactions de couche limite peut être décrit par des cisaillements en volume le long des cônes caractéristiques émanant des latitudes critiques dont le demi-angle au sommet est de  $30^\circ$ . Nous avons pu vérifier que la taille caractéristique de ces structures correspondait à celle des éruptions de couche limite, c'est à dire proportionnelle à  $E^{1/5}$ . Nous avons trouvé que l'amplitude de la vitesse qui leur est associée était directement reliée à celle du pompage d'Ekman autour des latitudes critiques, c'est à dire  $u \propto E^{1/5}$ .

La réponse non linéaire du fluide s'organise quant à elle sur des surfaces caractéristiques cylindriques, parallèles à l'axe de rotation solide du fluide. La taille caractéristique du cisaillement géostrophique à l'aplomb des latitudes critiques est elle aussi définie par celle des éruptions ( $E^{1/5}$ ). La vitesse est cette fois déterminée par un équilibre entre l'accélération induite en volume par le pompage d'Ekman résultant des interactions non linéaires dans la couche limite et la dissipation visqueuse aux extrémités des cylindres géostrophiques. La couche limite à l'intérieur de laquelle s'effectue la dissipation est d'épaisseur  $E^{1/2}$ . Cette vitesse purement azimutale est proportionnelle à  $E^{-3/10}$ .

Nous avons pu montrer que les mécanismes associés à l'écoulement géostrophique identifiés dans la sphère permettaient de rendre compte de la mesure expérimentale du cisaillement géostrophique effectuée par Malkus en 1968 ([17]) dans un conteneur d'ellipticité  $1/25$ . Ceci tend à montrer que les mises à l'échelle que nous avons obtenues dans la sphère restent valables lorsque le conteneur est ellipsoïdal, du moins tant que nous pouvons approximer la paroi par une sphère sur l'échelle caractéristique de l'éruption de couche limite, c'est à dire tant que l'ellipticité est inférieure à  $E^{1/5}$ .

Au cours de cette thèse, nous avons réalisé une expérience de précession dans un ellipsoïde ( $\eta = 1/25$ ) dans le but d'étudier d'une part la rotation solide du fluide et d'autre part les différents régimes d'écoulement secondaire déjà mis en évidence par Malkus en 1968 ([17]) et Vanyo et al. en 1995 ([42]).

En développant une méthode de détermination de la direction du vecteur rotation solide du fluide basée sur une mesure de la pression, nous avons été à même de mettre en évidence un changement brusque de la direction de l'axe de rotation du fluide pour certains taux de précession. Bien que ce comportement singulier puisse être prédit en s'appuyant sur l'approche asymptotique de Busse (1968[2]), les mécanismes physiques qui le caractérise ne sont actuellement pas identifiés.

Nous avons également étudié les différents régimes d'écoulement se superposant à la rotation solide du fluide par une technique classique de visualisation directe utilisant des paillettes réfléchissantes. Il apparaît principalement trois régimes distincts sur l'ensemble des expériences que nous avons faites :

1. Un régime d'écoulement géostrophique laminaire. (Précession prograde et rétrograde)
2. Un régime de turbulence bidimensionnelle. (Précession rétrograde uniquement)
3. Un régime de turbulence développée. (Précession rétrograde uniquement)

Nous avons proposé d'interpréter la première bifurcation comme une instabilité de cisaillement des structures géostrophiques.

Il existe également une perturbation se caractérisant par une distorsion des structures géostrophiques, cette dernière est bien identifiée dans le cas de la précession prograde pour lequel aucune instabilité de cisaillement ne semble se développer. Ces observations sont compatibles avec l'idée d'une déformation due à la forme elliptique du conteneur, à l'image de ce qu'a pu observer Malkus dans son expérience de 1989 ([18]).

## Que pouvons déduire de ces résultats d'un point de vue géophysique ?

Une application au cas terrestre de nos résultats suppose que nous fassions comme nous l'avons mentionné dans l'introduction un certain nombre d'hypothèses fortes. Tout d'abord nous ne tenons pas compte des effets liés à la graine solide ; nous avons également supposé que le liquide était homogène et incompressible. Enfin nous n'avons pas pris en compte les interactions de cet écoulement avec le champ magnétique. Ces hypothèses nous conduisent à une première estimation de la dynamique du noyau liquide sous l'effet de la précession du manteau.

### La dynamique du noyau associée à la précession.

La première grandeur que nous pouvons estimer est l'amplitude de la composante de rotation différentielle entre le noyau liquide et le manteau associée à la précession de l'axe de rotation de ce dernier. Les paramètres caractérisant la précession dans le cas de la Terre nous autorisent à appliquer la formule analytique obtenue par Busse (1968[2]) pour déterminer la valeur du paramètre  $\varepsilon$ . Nous caractériserons par la suite les grandeurs associées au noyau terrestre par l'indice «*T*».

$$\varepsilon_T \sim 1.7 \cdot 10^{-5}. \quad (4.1)$$

Pour une viscosité  $\nu_T \sim 10^{-6}$ , le nombre d'Ekman calculé sur le rayon total du noyau liquide (3480 km) est quant à lui de l'ordre de  $10^{-15}$ .

Bien que l'ellipticité de la frontière noyau-manteau (1/400) soit de l'ordre de grandeur de la taille des éruptions de la couche d'Ekman ( $\sim 2E_T^{1/5} = 1/500$ ), nous pouvons faire l'hypothèse que le rapport des vitesses le long des cônes caractéristiques et de celles associées à l'écoulement géostrophique peut encore être déterminé en nous appuyant sur les résultats numériques obtenus pour un conteneur sphérique. En appliquant la même technique de mise à l'échelle que dans la discussion des résultats expérimentaux,

$$\left( \frac{U_\phi^{\text{inertielle}}}{U_\phi^{\text{géostrophique}}} \right)_T \sim 10^{-2}. \quad (4.2)$$

Il semble donc que dans le cas du noyau de la Terre, contrairement aux expériences de laboratoire, les ondes inertielles de fréquence diurne soient négligeables devant la composante stationnaire géostrophique. La vitesse azimutale associée à ces structures stationnaires peut être déduite des calculs numériques en appliquant toujours les mêmes règles de mise à l'échelle, nous obtenons ainsi,

$$(U_\phi)_T \sim 4 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-1}, \quad (4.3)$$

ce qui comme nous l'avons mentionné dans la conclusion du chapitre II est du même ordre de grandeur que les vitesses estimées à la surface du noyau  $\sim 10^{-4} \text{ ms}^{-1}$ . Ces mouvements stationnaires dans le référentiel du fluide. L'axe du noyau et celui du manteau étant presque confondus, ces mouvements sont donc quasi-stationnaires pour un observateur situé à la surface de la Terre, si de tels écoulements sont stables nous pouvons envisager de les détecter à partir des variations temporelles du champ magnétique à la surface noyau-manteau. La taille caractéristique de la zone de cisaillement géostrophique serait quant à elle de l'ordre de 3.5 km.

Un tel cisaillement géostrophique au sein du noyau peut-il être stable? Il est assez difficile de répondre de façon certaine à cette question tant que nous n'aurons pas mieux identifié dans les expériences les paramètres caractérisant les différentes transitions vers la turbulence. Le mouvement de précession du manteau de la Terre étant rétrograde, nous pouvons néanmoins comparer le nombre de Reynolds cinétique de cette structure pour le noyau à la valeur critique qui semble se dégager de l'étude expérimentale de la première bifurcation.

$$Re_T \sim 10^5. \quad (4.4)$$

Sous réserve que le nombre de Reynolds critique que nous avons obtenu dans les expériences ( $Re_c \sim 3 \cdot 10^3$ ) puisse être extrapolé au cas du noyau, c'est à

dire en supposant qu'il ne dépende ni du nombre d'Ekman ni de l'ellipticité, nous observons que ces structures ne peuvent pas rester laminaires. Nous n'avons actuellement pas identifié le paramètre permettant de caractériser la transition de la turbulence bidimensionnelle vers la turbulence développée, il est donc difficile de prédire quel est exactement le degré de turbulence du noyau associé à la précession.

En nous basant sur les mise à l'échelle des structures laminaires géostrophiques, nous pouvons obtenir une première estimation du nombre de Reynolds magnétique,

$$Rm_T \sim 0.2. \quad (4.5)$$

Cette valeur est certes trop petite pour pouvoir jouer un rôle important dans les processus dynamo, en particulier elle montre que pour de telles structures le champ magnétique induit reste petit devant le champ principal.

Comme nous venons de le montrer l'écoulement secondaire induit par la précession n'est certainement pas laminaire dans le cas du noyau. Nos observations expérimentales de la turbulence dans ce type de système suggèrent que les mouvements turbulents soient de plus petite échelle que les structures géostrophiques laminaires. Quel est alors le nombre de Reynolds cinétique de ces écoulements? Existe-t-il un effet moyen de grande échelle pouvant intervenir dans les processus dynamo au sein du noyau?

#### La dynamique associée à la nutation libre du noyau.

Les amplitudes actuelles des rotations équatoriales du noyau liquide associées aux différents forçages lunisolaires sont deux ordres de grandeur inférieure à celle induite par la précession (Greff-Lefftz et Legros 1999[7]). Il est alors raisonnable de penser que la contribution à la dynamique du noyau associée à la FCN reste négligeable. En revanche lors des résonances entre ce mode propre du noyau et certaines ondes de marée luni-solaire, l'amplitude du mode de rotation équatoriale croît de manière dramatique jusqu'à atteindre des valeurs 100 fois supérieures à celle associée à la précession d'après Greff-Lefftz et Legros 1999 ([7]). La dynamique du noyau n'est certainement pas insensible à ce type d'événements. L'amplitude des mouvements géostrophiques étant proportionnelle à  $\varepsilon^2$ , le nombre de Reynolds cinétique associé aux cisaillements en volume est alors  $10^4$  fois supérieur à celui que nous avons pu estimer pour la précession.

$$Re_T \sim 10^9. \quad (4.6)$$

Il est alors légitime de se poser la question de savoir si le noyau n'est pas dans ces conditions dans un état de turbulence développée. Quel est alors le rôle de ces écoulements turbulents sur le comportement du champ magnétique? Quelles sont les interactions entre ce noyau turbulent et le manteau ou la graine?

## 4.2 Perspectives expérimentales.

Toutes les questions géophysiques que nous venons de soulever nécessitent de quantifier davantage nos observations expérimentales.

### Les mesures de vitesse par effet Doppler.

L'effet Doppler est généralement associé à la mécanique relativiste, il est pourtant présent même dans les systèmes non relativistes. L'exemple le plus connu est certainement celui du son perçu par un observateur sur le bord de la route lorsque qu'un véhicule se rapproche ou s'éloigne de lui. Le mouvement de ce dernier par rapport à l'observateur entraîne une modification de la fréquence de l'onde acoustique émise par le moteur qui se traduit par un son de plus en plus aigu lorsque le véhicule se dirige vers l'observateur et de plus en plus grave lorsqu'il s'en éloigne.

L'effet Doppler est utilisé dans les expériences de mécanique des fluides pour mesurer une composante de la vitesse. Le principe de la mesure est schématisé sur la figure (4.1). Des particules en suspension de densité la plus proche possible de celle du liquide font office de traceurs dans l'écoulement, une sonde émet une onde dans la gamme des ultrasons dans une direction particulière ( $f \sim 4 \text{ MHz}$ ). Lorsque cette onde rencontre une particule, elle se réfléchit avec une fréquence légèrement différente  $f + \delta f$ , où  $\delta f$  est le décalage Doppler. Ce dernier est directement reliée à la composante de vitesse  $U$  du réflecteur parallèle à la direction d'émission.

Dans notre expérience de précession, nous envisageons d'utiliser cette technique pour étudier la vitesse associée à l'écoulement secondaire se superposant à la rotation solide du fluide. Pour cela nous devons choisir judicieusement l'emplacement de la sonde.

Si la sonde se trouve dans le référentiel de la table tournante nous savons décrire simplement l'ensemble des composantes laminaires de l'écoulement secondaire obtenues numériquement. L'axe de rotation solide du fluide est alors fixe dans l'espace, le champ de vitesse associé aux zones de cisaillement inclinées à  $30^\circ$  est stationnaire tout comme celui des cylindres géostrophiques. La seule position de la sonde permettant d'une part d'avoir un couplage mécanique avec le fluide ou le plexiglas et d'autre part d'être stationnaire dans le référentiel de la table tournante est suivant l'axe du conteneur. Dans notre expérience cela revient à placer la sonde dans l'orifice se trouvant dans la partie supérieure de la cavité, comme indiqué sur la figure (4.2).

Nous avons effectué quelques expériences préliminaires dont nous présentons très succinctement les résultats dans le paragraphe suivant.

Pour la première fois dans une expérience de précession nous pensons avoir mis en évidence la présence des «ondes inertielles» dans le volume.

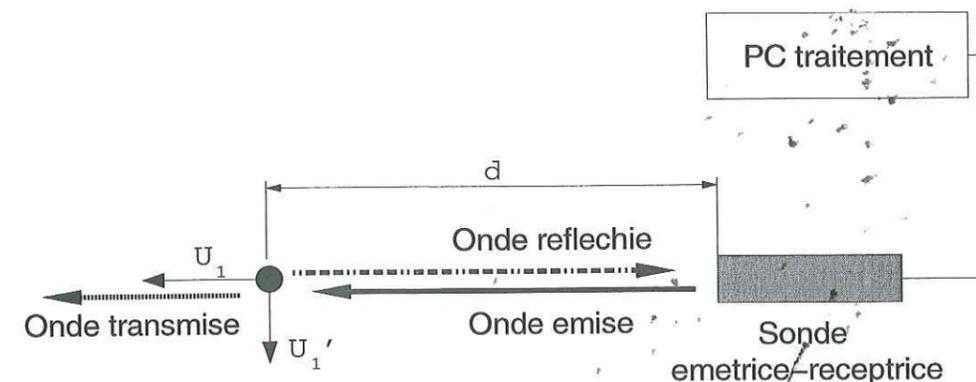


FIG. 4.1 – Schema de principe de la mesure de vitesse par effet Doppler. Considérons un fluide dans lequel se trouve des particules en suspension, chaque particule échantillonne le champ de vitesse locale du fluide. Nous nous sommes ramené dans cet exemple à un cas plan, où nous pouvons décrire la vitesse en chaque point du fluide par les deux composantes  $U$  et  $U'$ .

Une sonde émettrice-réceptrice immergée dans le fluide ou en contact avec la paroi, envoie une onde ultrasonore de fréquence  $f_{\text{émission}}$  dans une direction. Lorsque celle-ci rencontre une particule elle est en partie réfléchie avec une fréquence  $f_{\text{réflexion}} = f_{\text{émission}} + \delta f$ , où  $\delta f$  est le décalage Doppler proportionnel à l'amplitude de la composante de vitesse  $U$  parallèle à la direction d'émission. Cette technique permet donc d'obtenir la composante de la vitesse dans une direction donnée en fonction de la distance  $d$  à la sonde. Aucun décalage Doppler n'étant associé à la composante  $U'$  perpendiculaire à la direction d'émission nous n'avons accès par cette méthode qu'à une seule composante de la vitesse.

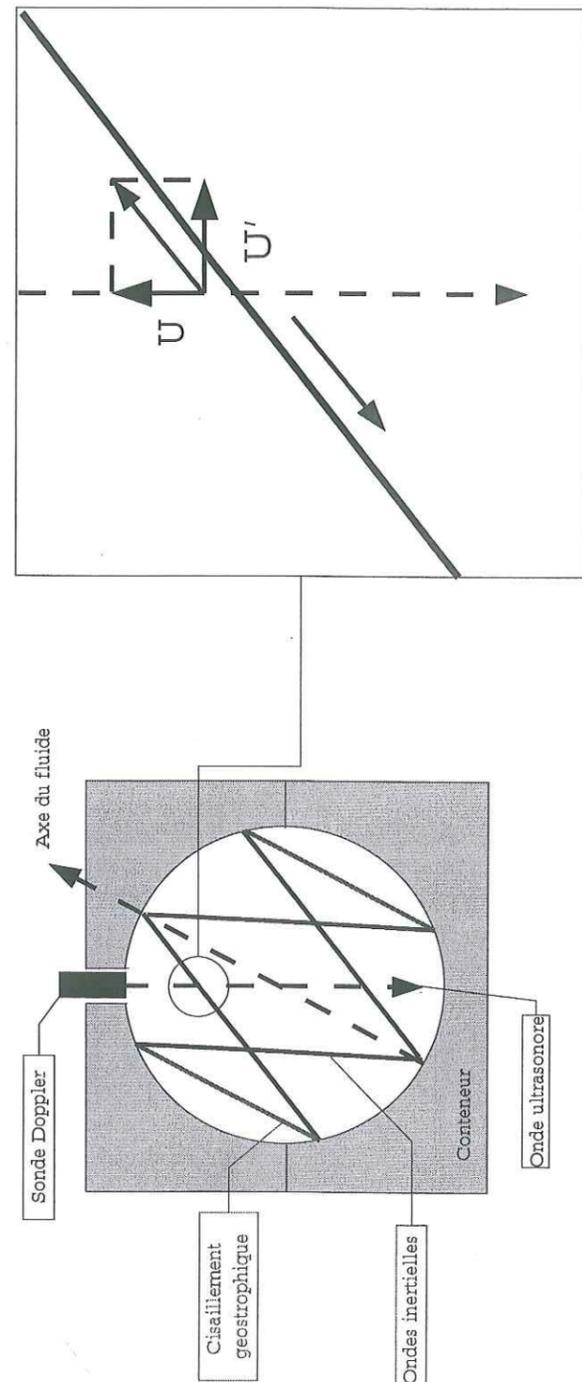


FIG. 4.2 - Schéma de l'expérience préliminaire que nous avons effectuée. L'axe du fluide étant incliné par rapport à celui de la coquille nous voyons que l'onde émise par la sonde coupe les cônes caractéristiques en deux points. D'après la figure de droite, une partie de la vitesse le long des surfaces caractéristiques se projette suivant la direction d'émission, cette composante ( $U$ ) est alors susceptible d'être mesurée.

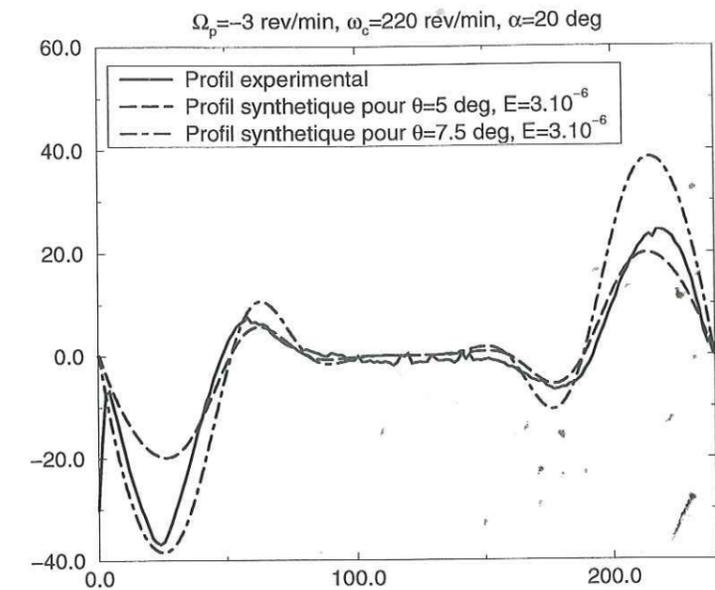


FIG. 4.3 - Comparaison entre les mesures de vitesse par effet Doppler et les profils synthétiques déduits des calculs numériques dans la sphère. L'angle  $\theta$  entre l'axe du fluide et celui du conteneur estimé à partir des déterminations expérimentales comportant des barres d'erreur de l'ordre de  $5^\circ$ , nous avons encadré les résultats expérimentaux par deux profils synthétiques correspondant à  $\theta = 5^\circ$  et  $\theta = 7.5^\circ$ . Cette figure semble montrer que nos observations expérimentales sont compatibles avec la présence d'ondes inertielles dans le système.

En utilisant les calculs numériques linéaires de spin-over dans la sphère et leur mise à l'échelle présentée dans le chapitre III, nous avons reproduit les résultats synthétiques que nous devrions observer par une mesure de la vitesse par effet Doppler dans l'expérience schématisée sur la figure (4.2). La comparaison entre synthétiques et mesures expérimentales (figure 4.3) semble montrer que la vitesse que nous mesurons correspond principalement à la trace des ondes inertielles dans le système. Ces résultats, s'ils sont confirmés, permettent de réconcilier les approches numériques ou théoriques avec les expériences. Si nous avons la preuve que des structures cisillantes inclinées à  $30^\circ$  existent, il nous faut plus que jamais nous poser la question de savoir pourquoi elles n'ont jamais pu être mises en évidence avec des paillettes réfléchissantes.

### La méthode des paillettes réfléchissantes.

Si la méthode des paillettes réfléchissantes est un moyen simple et économique de caractériser une partie de la dynamique de ce type de système, elle n'en reste pas moins essentiellement qualitative. Pour pouvoir aller plus loin dans l'interprétation de ce genre de données, il est important de pouvoir répondre à la question : Qu'est ce qui détermine le fait qu'une paillette s'oriente ou ne s'oriente pas suivant une direction privilégiée ? Nous avons jusque là considéré qu'il s'agissait d'une valeur seuil du cisaillement, dans ces conditions pourquoi ne voyons nous pas les ondes inertielles dans notre système. Une des différences fondamentales entre les structures inertielles et les structures géostrophiques est que si les dernières sont stationnaires dans le référentiel du fluide, les premières oscillent à la fréquence de rotation du conteneur. Le temps joue-t-il un rôle quant à l'alignement des paillettes suivant le cisaillement ? Des expériences assez simples devraient pouvoir nous permettre de mieux contraindre nos interprétations.

### Mesures de vitesse par PIV.

Nous envisageons également d'utiliser des systèmes de mesure de la vitesse par suivi automatique de particule. Ces techniques sont plus lourdes à mettre en oeuvre que la mesure par effet Doppler, elles ont l'avantage de nous permettre d'accéder à deux composantes de la vitesse. De telles techniques permettraient en particulier de confirmer la présence des ondes inertielles dans le système.

### 4.3 Perspectives numériques.

Plusieurs évolutions de notre approche numérique sont envisageables, nous pouvons chercher à explorer les effets d'une graine, de l'ellipticité ou du champ magnétique dans notre modèle. Nous disposons actuellement d'un code en géométrie sphérique nous permettant d'effectuer des calculs non linéaires à des nombres d'Ekman relativement bas pour lesquels nous avons pu identifier des lois de comportement asymptotique. Nous envisageons de reprendre notre étude en ajoutant une graine au centre de la cavité. nous présentons sur la figure (4.4) les premiers résultats que nous avons obtenus en reprenant le problème linéaire du spinover avec des conditions aux limites rigides semblent montrer qu'il existe, comme l'avait observés (Hollerbach et Kerswell 1995[10], Tilgner 1999[35]), des structures cisailantes en volume associées à certaines singularités de la couche limite à la surface de la graine. Comment ces structures se mettent-elles à l'échelle, existe-t-il un écoulement géostrophique associé aux éruptions de couche d'Ekman de la graine ?

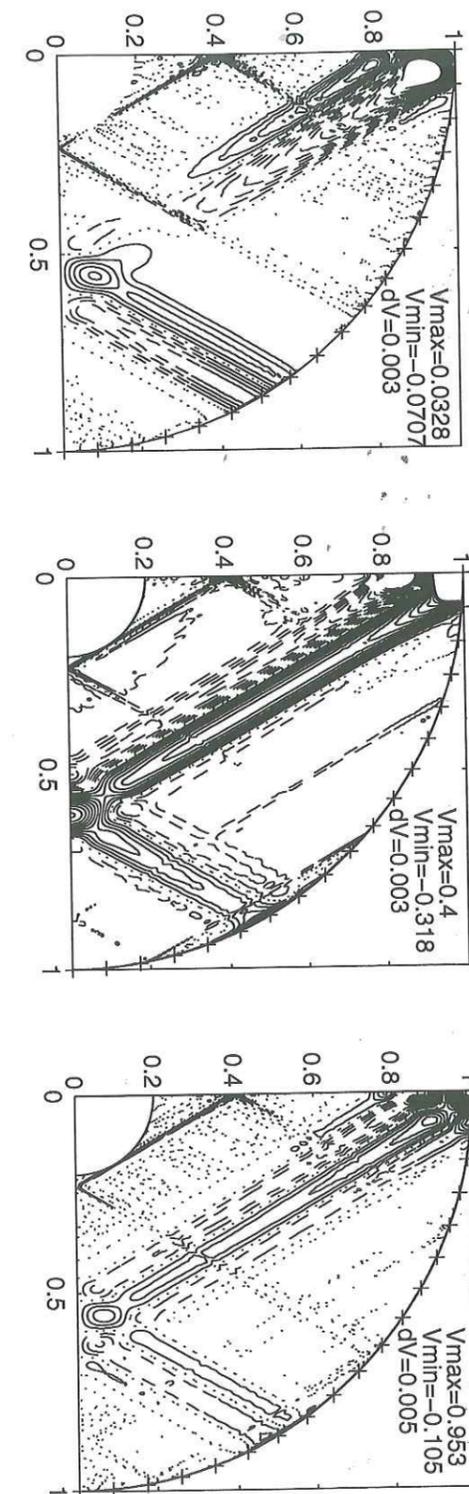


FIG. 4.4 – Calcul linéaire de «spinover» en présence d'une graine,  $E = 10^{-7.5}$ ,  $r_i = 0.2$ , où  $r_i$  est le rayon de la graine. De gauche à droite nous avons représenté,  $U_r$ ,  $U_\theta$ ,  $U_\phi$ , après avoir retiré la rotation solide. Il apparaît en plus des cisaillements associés aux éruptions de la couche d'Ekman en  $r = 1$  des structures cisailantes en volume propres à la graine.

L'autre voie que nous nous proposons d'explorer est celle des conteneurs elliptiques. Nous avons montré que pour de petites ellipticités une étude en géométrie sphérique permettait de rendre compte des observations expérimentales dans des ellipsoïdes faiblement aplatis. Qu'en est-il lorsque l'ellipticité devient suffisamment grande pour que les cônes caractéristiques ne se réfléchissent plus sur eux mêmes ? Les mises à l'échelle des structures que nous avons obtenues sont-elles encore valables ? Les cisaillements le long des cônes caractéristiques restent-ils aussi important et localisés ?

#### 4.4 Le mot de la fin.

A tout seigneur tout honneur, le mot de la fin sera de Henri Poincaré,

*«Mais tous mes efforts ne servirent d'abord qu'à mieux me faire connaître la difficulté, ce qui était déjà quelque chose.»*

H. Poincaré, extrait de *Science et méthode*, Flammarion, 1908.

## Annexe A

### Calcul de l'écoulement de rotation solide, Busse 1968

Nous proposons dans cette annexe de reprendre les grandes lignes de l'étude analytique de Busse (1968) portant sur la détermination du vecteur rotation solide du fluide, et d'en discuter certains résultats qui nous sont utiles lors des discussions dans les chapitres de cette thèse.

Le problème étudié est celui d'un conteneur rempli d'un liquide de faible viscosité ( $\nu$ ), de forme ellipsoïdale (rayon  $R$ , ellipticité  $\eta$ ), en rotation autour d'un axe  $\hat{k}_c$  à la fréquence  $\omega_c$  et en précession autour d'un axe  $\hat{k}_p$  à la fréquence  $\Omega_p$ .  $\omega_c$  étant supposé positif nous définissons le sens de précession prograde par  $\Omega_p > 0$  et le sens de précession retrograde par  $\Omega_p < 0$ . L'auteur propose une étude asymptotique de l'écoulement de rotation solide de Poincaré et de la réponse non linéaire géostrophique laminaire du liquide à l'excitation de précession du conteneur.

Le nombre d'Ekman est défini par  $E = \frac{\nu}{\omega_c R^2}$ , les variables de temps et d'espace sont adimensionnées respectivement par  $\omega_c^{-1}$  et  $R$ . Pour des raisons de lisibilité nous avons conservé les mêmes notations pour les grandeurs adimensionnées que pour les grandeurs dimensionnées en posant  $\omega_c = 1$ . Hypothèses :

Cette étude est une approche asymptotique reposant sur les hypothèses suivantes :

1. Le fluide est incompressible, et homogène :

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\rho = cte \quad (\text{A.2})$$

2. L'écoulement est stationnaire :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.3})$$

3. L'ellipticité est faible : les termes d'ordre  $O(\eta^2)$  sont négligeables.
4. La viscosité est suffisamment petite pour pouvoir négliger les termes d'ordre  $O(E)$ . L'auteur fait alors une approximation de couche limite en supposant que la viscosité ne joue aucun rôle en volume.
5. L'écoulement dans la couche limite est de faible amplitude ( $\varepsilon$ ),

$$\varepsilon = |\hat{k}_c - \omega| \quad (\text{A.4})$$

L'auteur introduit alors une double décomposition de la vitesse en fonction des paramètres  $\sqrt{E}, \varepsilon$  :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_0^0 + \varepsilon \mathbf{u}_0^1 + \dots + \varepsilon \sqrt{E} \mathbf{u}_1^1 + \dots \quad (\text{A.5})$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{u}}_0^1 + \dots + \varepsilon \sqrt{E} \tilde{\mathbf{u}}_1^1 + \dots \quad (\text{A.6})$$

$\mathbf{u}_i$  étant la vitesse en volume et  $\tilde{\mathbf{u}}$  la vitesse dans la couche limite.  $\mathbf{u}_0^0 = \hat{k}_c \times \mathbf{r}$ . La même décomposition est appliquée à la pression.

6. L'écoulement en volume d'ordre  $O(\varepsilon)$  est de vorticité uniform  :

$$\hat{k}_c \times \mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{u}_0^1 = \omega \times \mathbf{r} \quad (\text{A.7})$$

$\varepsilon \mathbf{u}_0^1$  : La réponse linéaire du fluide.

## A.1 Principe de la détermination analytique :

Dans la première partie de son étude, l'auteur s'attache à déterminer le vecteur rotation solide du fluide ( $\omega$ ). Fondamentalement la détermination de cet axe repose sur l'équilibre entre le couple inertiel, le couple de pression et le couple visqueux. En nous plaçant dans le référentiel attaché à  $\hat{k}_p$  cet équilibre s'exprime par :

$$2\Omega_p \int (\hat{k}_p \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} dV + \oint \hat{n} \times p \mathbf{r} d\Sigma = E \oint (\hat{n} \cdot \nabla \mathbf{u} - 2\hat{n} \times \mathbf{u}) d\Sigma \quad (\text{A.8})$$

En négligeant le terme de dissipation et en intégrant sur le volume uniquement cet équilibre s'écrit :

$$2\Omega_p \int (\hat{k}_p \times \mathbf{u}_i) \times \mathbf{r} dV + \oint \hat{n} \times p_i d\Sigma = - \oint (\mathbf{u}_i \cdot \hat{n} \mathbf{u}_i) \times \mathbf{r} d\Sigma \quad (\text{A.9})$$

Suivant l'hypothèse selon laquelle l'écoulement en volume est principalement une rotation solide cette dernière équation peut être interprétée comme l'équilibre entre le couple inertiel associé à la rotation en bloc  $\omega \times \mathbf{r}$ , le couple

de pression et le couple exercé par la couche limite sur le volume fluide ( $\hat{n} \cdot \mathbf{u}_1^1 = \hat{n} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_1^1$ ).

L'auteur montre alors que la résolution complète du problème à l'ordre  $O(\varepsilon)$ , (détermination de  $\varepsilon \mathbf{u}_0^1$ ) suppose qu'il existe une solution  $\varepsilon \sqrt{E} \mathbf{u}_1^1$  en volume. Cette condition de solvabilité s'exprime par :

$$\omega \cdot \hat{k}_c = \omega^2. \quad (\text{A.10})$$

Physiquement cela signifie que le système s'organise de manière à ce qu'il n'y est pas de rotation différentielle entre le fluide et la coquille dans la direction  $\omega$ .

Finalement en résolvant l'écoulement de couche limite l'auteur obtient une formulation implicite du vecteur rotation solide (Busse 1968 3.19) qui ne dépend que de deux nombres sans dimension  $\gamma_e, \gamma_\nu$  :

$$\gamma_e = \frac{\Omega_p / \omega_c}{\eta}, \quad \gamma_\nu = \frac{\Omega_p / \omega_c}{E^{1/2}}$$

Elle s'exprime alors par :

$$\omega = \omega^2 \hat{k}_c + \frac{A\omega^2}{A^2 + B^2} \hat{k}_c \times (\hat{k}_p \times \hat{k}_c) + \frac{B\omega^2}{A^2 + B^2} \hat{k}_c \times \hat{k}_p, \quad (\text{A.11})$$

avec,

$$A = \frac{0.259}{\gamma_\nu \sqrt{\omega}} + \cos(\alpha) + \frac{\omega^2}{\gamma_e}, \quad (\text{A.12})$$

$$B = \frac{2.62\omega}{\gamma_\nu}. \quad (\text{A.13})$$

Le domaine de validité de cette détermination est donné par :

$$\min \left( \frac{|\Omega_p| \sin(\alpha)}{\sqrt{E}}, \frac{\alpha}{|\Omega_p \cdot \hat{k}_c + \eta|}, \frac{|\Omega_p|}{|\eta|} \right) \ll 1.$$

Cette formulation étant implicite nous obtenons les vitesses angulaires  $\omega$  solutions de (A.11) en résolvant l'équation :

$$\Delta(\omega) = (\omega \cdot \omega) - \omega^2 = 0. \quad (\text{A.14})$$

## A.2 Discussion

Notre propos ici n'est pas de faire une étude complète de cette détermination analytique, pour cette raison nous n'avons résolu numériquement l'équation

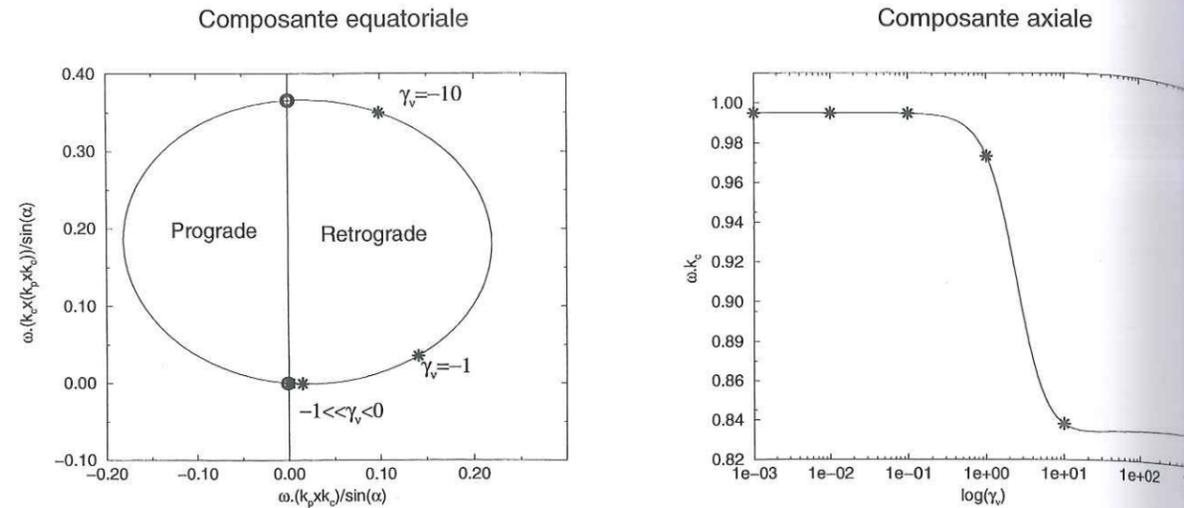


FIG. A.1 – Composante équatoriale et composante axiale du vecteur rotation solide adimensionné du fluide pour un conteneur sphérique. Les étoiles correspondent aux conditions dans lesquelles nous avons effectué des calculs numériques.

(A.14) que dans un certains nombres de cas utiles pour pouvoir discuter les résultats numériques et expérimentaux que nous avons obtenus pendant cette thèse. En nous restreignant à certains sous espaces  $(\gamma_e, \gamma_\nu)$  nous ne perdons pas la généralité des résultats obtenus.

**En géométrie sphérique** ( $\eta = 0$ ) le seul paramètre déterminant l'axe de rotation solide est  $\gamma_\nu$ , il existe alors quelque soit la valeur de ce dernier une solution unique à l'équation (A.14) à partir de laquelle nous déduisons d'après (A.11) une direction unique de l'axe de rotation solide du fluide. Nous avons illustré ceci en nous plaçant dans les conditions de notre étude numérique dans la sphère ( $\alpha = 23.5 \text{ deg}$ ,  $10^{-3} < |\gamma_\nu| < 10^3$ ). Qu'il s'agisse de précession prograde ou rétrograde l'axe de rotation solide du fluide passe continuellement d'une direction parallèle au vecteur rotation de la coquille ( $|\gamma_\nu| \ll 1$ ) à une direction antiparallèle au vecteur précession ( $|\gamma_\nu| \gg 1$ ) (figure A.1). **Pour un conteneur de forme ellipsoïdale** les résultats sont très différents.

En précession prograde il existe toujours une solution unique à l'équation (A.14), le vecteur rotation solide du fluide est alors parfaitement déterminé. Comme dans le cas d'une cavité sphérique la direction de l'axe passe continuellement de  $\hat{k}_c$  à  $-\hat{k}_p$ . Contrairement à la viscosité, l'ellipticité tend à ramener l'axe de rotation solide vers le plan  $(\hat{k}_c, \hat{k}_p)$ .

En précession rétrograde pour certaines valeurs des paramètres  $(\gamma_\nu, \gamma_e)$  il existe

plusieurs solutions  $(\omega_i)$  à l'équation (A.14). A chacune d'elle correspond alors un vecteur rotation solide  $\omega_i(\omega_i, \theta_i, \phi_i)$ , avec

$$\cos(\phi_i) = -\frac{\omega_i}{\omega_i} \cdot \frac{\hat{k}_c \times (\hat{k}_p \times \hat{k}_c)}{\sin(\alpha)}, \quad (\text{A.15})$$

$$\sin(\phi_i) = \frac{\omega_i}{\omega_i} \cdot \frac{\hat{k}_p \times \hat{k}_c}{\sin(\alpha)}, \quad (\text{A.16})$$

$$\cos(\theta_i) = \frac{\omega_i}{\omega_i} \cdot \hat{k}_c. \quad (\text{A.17})$$

Nous avons illustré ce résultat en nous plaçant dans les conditions d'une de nos expériences ( $\alpha = 25 \text{ deg}$ ,  $\eta = 1/25$ ,  $\omega_c = 300 \text{ rev/min}$ ) et en faisant varier le taux de précession (A.2). Dans ces conditions les paramètres sans dimensions  $(\gamma_\nu, \gamma_e)$  sont reliés linéairement, comme nous l'avons fait remarquer plus haut nous ne perdons pas pour autant la généralité des résultats ainsi obtenus. Le même type de représentation que celles que nous avons employées pour décrire la position de l'axe de rotation solide du fluide dans un conteneur sphérique devenant difficiles à interpréter nous avons reporté sur la figure (A.2) la longitude  $\phi_i$  et la colatitude  $\theta_i$  ainsi que le module de la rotation solide. Ces résultats servant à l'interprétation de nos observations expérimentales nous avons conservé les grandeurs dimensionnées.

Nous retrouvons les deux cas limites où l'axe de rotation du fluide est parallèle au vecteur rotation du conteneur pour  $\Omega_p \ll 1$  et antiparallèle au vecteur précession pour  $\Omega_p \gg 1$ . Entre ces deux limites apparaît une gamme de taux de précession  $(\Omega_p(1) - \Omega_p(2))$  pour laquelle il existe plusieurs vecteurs rotation solide vérifiant l'équation (A.14).

Nous distinguons sur la figure (A.2) trois branches de solutions, la branche 1 correspondant aux vecteurs de rotation de plus grande amplitude et de plus petite longitude, la branche 2 aux vecteurs rotation de plus petite amplitude et de plus grande longitude et enfin la branche 3 qui semble intermédiaire. Toutes ces solutions vérifient l'équilibre de couple (A.8), elles représentent donc toute un état stationnaire du système. L'existence d'une solution unique pour  $\Omega_p(1) > \Omega_p > \Omega_p(2)$  suppose alors que nous puissions définir un critère de stabilité, ce que nous n'avons pas été en mesure de faire jusqu'à présent.

Nous ne pouvons donc pas prédire a priori le chemin suivi par l'axe de rotation solide du fluide lorsque nous passons de  $(\Omega_p \ll 1)$  à  $(\Omega_p \gg 1)$ , ou inversement. Cependant, en l'absence de perturbation l'hypothèse qui nous semble la plus probable est que lorsque nous partons d'un état stable pour lequel l'axe de rotation est déterminé de manière unique,  $|\Omega_p(1)| < |\Omega_p|$  ou  $|\Omega_p| > |\Omega_p(2)|$ , le système va resté sur la même branche de solutions jusqu'à ce que celle-ci disparaissent complètement. En faisant cette hypothèse nous voyons immédiatement que les solutions de la branche 3 ne sont jamais sélectionnées par le système. Si

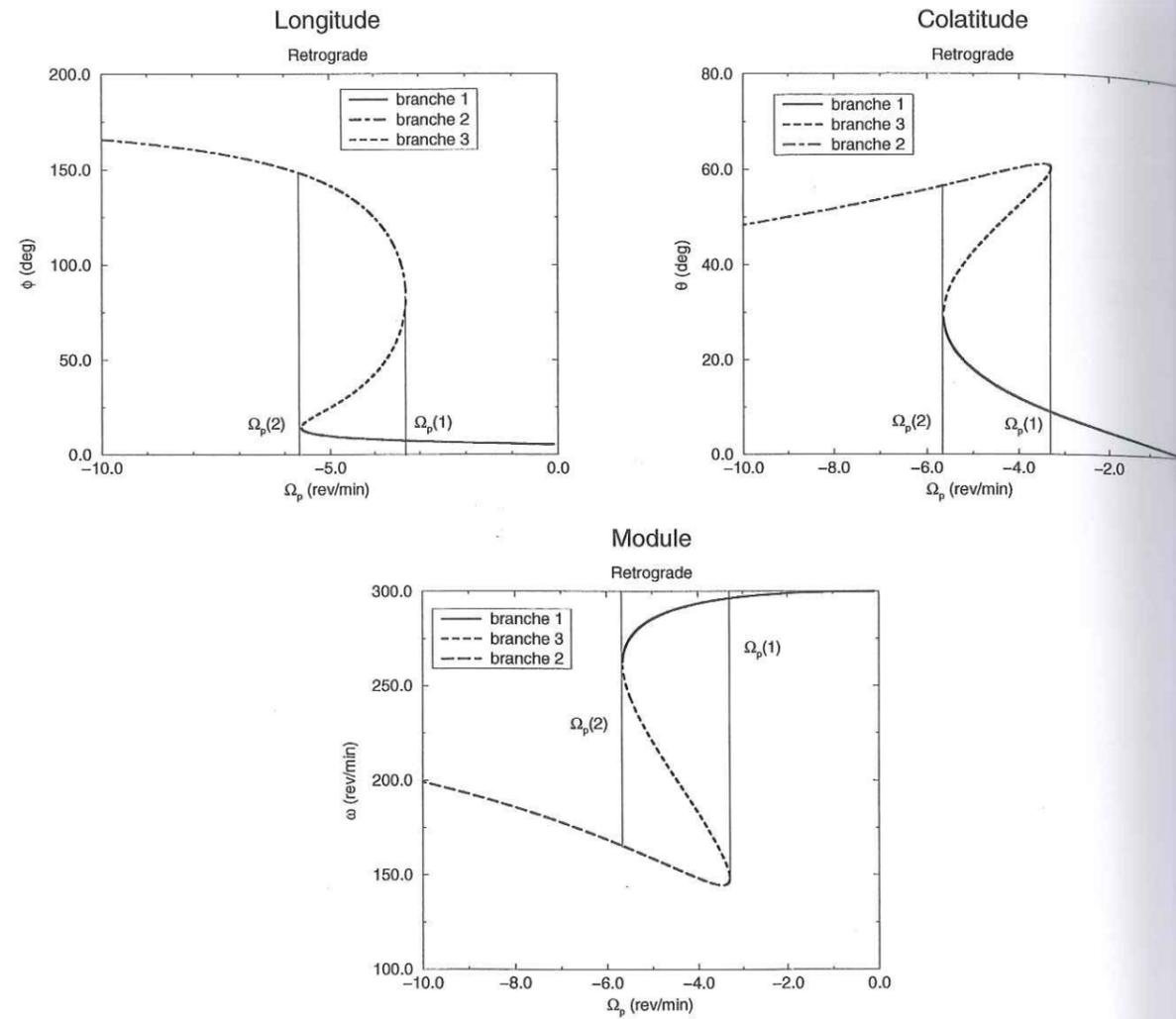


FIG. A.2 – Longitude, colatitude et module du vecteur rotation solide en précession rétrograde. ( $\alpha = 25 \text{ deg}$ ,  $\eta = 1/25$ ,  $\omega_c = 300 \text{ rev/min}$ ).

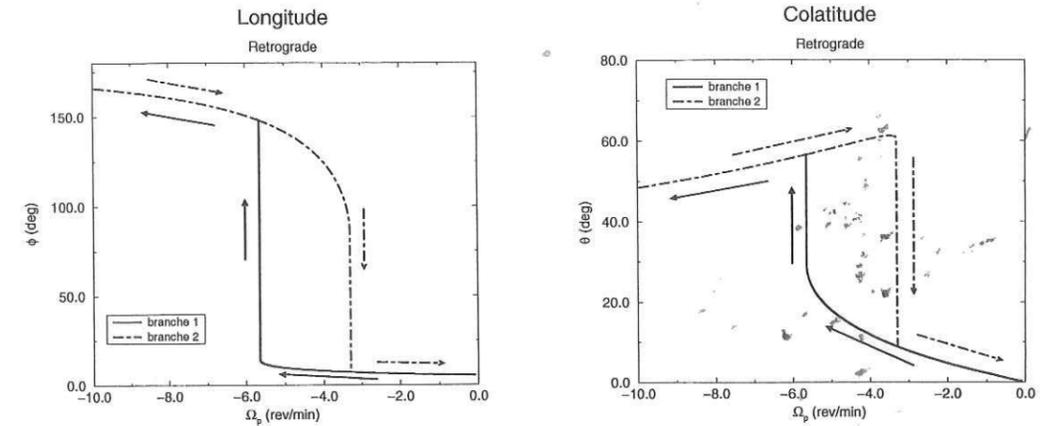


FIG. A.3 – Chemin suivi par l'axe de rotation du fluide en faisant l'hypothèse que lorsque nous partons d'un état stable pour lequel l'axe de rotation est déterminé de manière unique,  $|\Omega_p(1)| < |\Omega_p|$  ou  $|\Omega_p| > |\Omega_p(2)|$ , le système va resté sur la même branche de solutions jusqu'à ce que celle-ci disparaissent complètement.

nous reprenons les résultats (A.2) avec cette hypothèse il apparaît alors un cycle d'hystérésis (A.3) lorsque nous faisons varier le taux de précession. Il existe alors deux discontinuités de la direction de l'axe de rotation du fluide en  $\Omega_p(1)$  et en  $\Omega_p(2)$  où l'axe saute brutalement d'une branche de solutions à l'autre.

La compréhension du(des) mécanisme(s) physique(s) permettant de rendre compte des bornes ( $\Omega_p(1), \Omega_p(2)$ ) devrait nous éclairer sur la nature du critère de stabilité d'un tel système.

## Annexe B

### Rappels sur les harmoniques sphériques.

#### B.1 Définitions

Les harmoniques sphériques sont un ensemble de fonctions complexes  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  définies sur la sphère. Elles sont définies pour  $l = 0, 1, 2, \dots, +\infty$  et  $m = -l, \dots, 0, \dots, l$ . Leur expression est la suivante (conventions de Stacey) :

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = C_{lm} \varphi_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad \text{pour } \begin{cases} l = 0, 1, 2, \dots, +\infty \\ m = 0, 1, \dots, l \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Et, pour  $m$  négatif, elles sont définies par la relation de symétrie :

$$Y_{l-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi)$$

( $Y_{lm}^*$  désigne le conjugué de  $Y_{lm}$ ).

$C_{lm}$  est une constante de normalisation et  $\varphi_l^m$  est la fonction associée de Legendre de degré  $l$  et d'ordre  $m$ . Elles sont définies ci-après.

#### B.2 Propriété d'orthogonalité.

Les harmoniques sphériques ainsi définies sont intrinsèquement orthogonales deux à deux. On choisit généralement la constante de normalisation  $C_{lm}$  de manière à ce qu'elles soient orthonormées :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} Y_{lm}(\theta, \phi)^* Y_{l'm'}(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si  $i = j$  et 0 autrement.

Cette relation d'orthonormalisation donne implicitement une valeur à  $C_{lm}$  :

$$C_{lm} = \sqrt{(2 - \delta_{m0})(2l + 1) \frac{(l - m)!}{(l + m)!}}$$

### B.3 Les fonctions associées de Legendre.

La fonction associée de Legendre  $\varphi_l^m(x)$  est définie pour  $|x| \leq 1$  par (conventions de Stacey) :

$$\varphi_l^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} \varphi_l(x) \quad \text{pour } m \geq 0$$

où  $\varphi_l(x)$  est le polynôme de Legendre de degré  $l$ .

Cette relation n'est bien évidemment valable que pour  $m$  positif (définition de Ferrers). Afin de définir les fonctions associées de Legendre pour  $m$  négatif considérons une autre expression des polynômes de Legendre (formule de Rodrigues) :

$$\varphi_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\partial^l}{\partial x^l} (x^2 - 1)^l$$

Nous obtenons ainsi une nouvelle expression pour  $\varphi_l^m(x)$  :

$$\varphi_l^m(x) = \frac{(1 - x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{\partial^{l+m}}{\partial x^{l+m}} (x^2 - 1)^l \quad (\text{B.2})$$

En appliquant le théorème de Leibnitz nous trouvons la relation :

$$\varphi_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l - m)!}{(l + m)!} \varphi_l^m(x) \quad \text{pour } m > 0 \quad (\text{B.3})$$

Les  $\varphi_l^m(x)$  étant définis pour  $-l < m < l$ , nous pouvons généraliser l'expression des harmoniques sphériques pour  $m$  négatif. Nous rappelons enfin la définition des polynômes de Legendre  $\varphi_l(x)$  :

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 \\ \varphi_1(x) = x \\ (n + 1) \varphi_{n+1}(x) = (2n + 1) x P_n(x) - n \varphi_{n-1}(x) \quad \text{pour } n > 1 \end{cases}$$

### B.4 Expression de quelques harmoniques sphériques.

Nous donnons ci-dessous les expressions des harmoniques sphériques jusqu'au degré 2 compris :

$$Y_{00}(\theta, \phi) = 1$$

$$Y_{1-1}(\theta, \phi) = -\sqrt{3} \sin \theta e^{-i\phi} \quad Y_{10}(\theta, \phi) = \sqrt{3} \cos \theta \quad Y_{11}(\theta, \phi) = \sqrt{3} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$Y_{2-2}(\theta, \phi) = -\frac{\sqrt{15}}{2} \sin^2 \theta e^{-2i\phi} \quad Y_{2-1}(\theta, \phi) = \sqrt{15} \cos \theta \sin \theta e^{-i\phi}$$

$$Y_{20}(\theta, \phi) = \frac{\sqrt{5}}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_{21}(\theta, \phi) = \sqrt{15} \cos \theta \sin \theta e^{i\phi} \quad Y_{22}(\theta, \phi) = \frac{\sqrt{15}}{2} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

Propriété fréquemment utilisée.

Les harmoniques sphériques vérifient la propriété suivante :

$$L^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \phi^2} = l(l + 1) Y_{lm} \quad (\text{B.4})$$

qui est par exemple particulièrement intéressante pour exprimer le laplacien d'une fonction mise sous la forme  $F(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$  :

$$\Delta [F(r) Y_{lm}(\theta, \phi)] = Y_{lm}(\theta, \phi) \frac{1}{r^2} \left[ \frac{d}{dr} (r^2 F'(r)) - l(l + 1) F(r) \right]$$

### B.5 Les harmoniques sphériques forment une base.

L'ensemble des harmoniques sphériques forme une base de l'ensemble des fonctions définies sur la sphère. C'est-à-dire que toute fonction  $F(\theta, \phi)$  vérifiant :

$$F : [0, \pi] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{C}$$

avec  $\begin{cases} F(\theta, -\pi) = F(\theta, \pi) \\ F(0, \phi_1) = F(0, \phi_2) \\ F(\pi, \phi_1) = F(\pi, \phi_2) \end{cases} \quad \begin{cases} \forall \theta \in [0, \pi] \\ \forall (\phi_1, \phi_2) \in [-\pi, \pi]^2 \\ \forall (\phi_1, \phi_2) \in [-\pi, \pi]^2 \end{cases}$

se décompose sur cette base suivant :

$$F(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{B.5})$$

Les coefficients  $f_{lm}$  sont donnés par :

$$f_{lm} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} Y_{lm}^*(\theta, \phi) F(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (\text{B.6})$$

Cette propriété (le fait que les harmoniques sphériques forment une base des fonctions définies sur la sphère), ainsi que leurs caractéristiques, font que les décompositions en harmoniques sphériques sont tout à fait l'équivalent, dans la géométrie sphérique, des transformées de Fourier dans le cas plan.

*Remarque* : si  $F$  est une fonction réelle, alors  $f_{l-m} = (-1)^m f_{lm}^*$  et réciproquement.

## Annexe C

### Le dioptré cylindrique.

Cette annexe décrit comment nous avons évalué la déformation associée au dioptré cylindrique dans l'Expérience CICERON.

#### C.1 Calcul théorique de la déformation.

Pour effectuer le calcul théorique de la déformation géométrique, nous nous sommes placés dans l'approximation de l'optique géométrique. C'est à dire que nous avons considéré que notre appareil photo était situé à une distance infinie de la cavité. Les rayons lumineux parvenant sur le plan film sont alors parallèles à l'axe optique du système ( $\Delta$ ). Le conteneur que nous utilisons ayant une forme extérieure cylindrique nous n'avons pas de déformation parallèlement à l'axe de rotation de ce dernier, mais seulement suivant le rayon cylindrique  $s$ .

Nous avons considéré deux interfaces, une première interface air-plexiglas ( $S_1$ ), et une seconde plexiglas-eau ( $S_2$ ). Nous nous sommes donnés la distance  $s^*$  entre un point  $M^*$  du plan image (plan film de l'appareil) et l'axe optique et nous avons cherché à savoir quel était le point source ( $M$ ) du plan méridien de la cavité qui lui correspondait (figure C.1). Pour cela nous avons reconstruit le trajet lumineux de  $M^*$  à  $M$  en utilisant les lois de Descartes à chaque interface. Nous définissons les points intermédiaires ( $M_1, M_2$ ) du trajet optique comme indiqué sur la figure (C.1). Nous avons utilisé les indices de réfraction suivant pour les différents milieux.

| EAU          | PLEXIGLAS   | AIR       |
|--------------|-------------|-----------|
| $n_e = 1.33$ | $n_p = 1.5$ | $n_a = 1$ |

Nous avons reconstruit la trajet optique de  $M$  à  $M^*$  en appliquant les lois de Descartes en ( $M_1, M_2$ ) :

$$n_p \sin(i_1) = n_a \sin(j_1), \text{ en } M_1, \quad (\text{C.1})$$

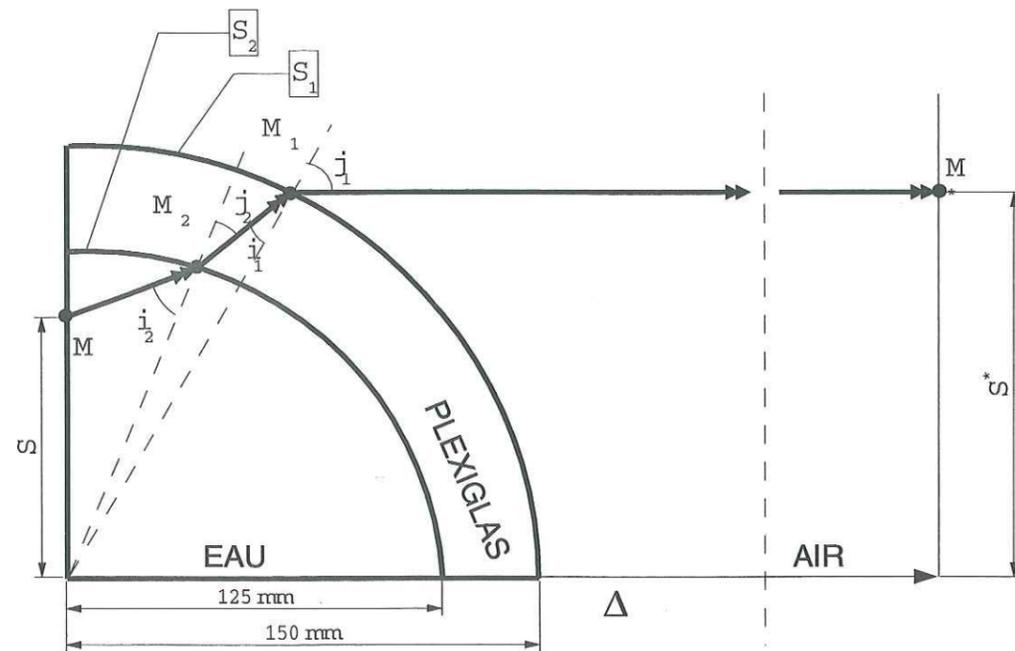


FIG. C.1 – Reconstitution du trajet optique d'un point source  $M$  vers un point image  $M^*$  à travers un dioptre cylindrique. Puisqu'il n'y a pas de déformation suivant l'axe du conteneur nous pouvons nous ramener à une étude à une dimension, celle du rayon cylindrique  $s$ . Cette figure représente la cavité vue de dessus.

$$n_e \sin(i_2) = n_p \sin(j_2), \text{ en } M_2. \quad (C.2)$$

Nous avons ainsi déterminé de manière implicite  $S$  en fonction de  $S^*$  (figure C.2, b).

### C.2 Détermination expérimentale de la déformation.

Nous avons ensuite vérifié expérimentalement que la déformation théorique ainsi obtenue permettait de rendre compte de l'image d'une grille régulière placée dans un plan méridien de la cavité à travers le dioptre. Pour pouvoir comparer l'image non déformée et l'image déformée nous avons ouvert le cylindre et n'avons rempli que le demi ellipsoïde inférieur de la cavité. La figure (C.3) illustre comment nous avons déterminé la déformation radiale associée au dioptre cylindrique.

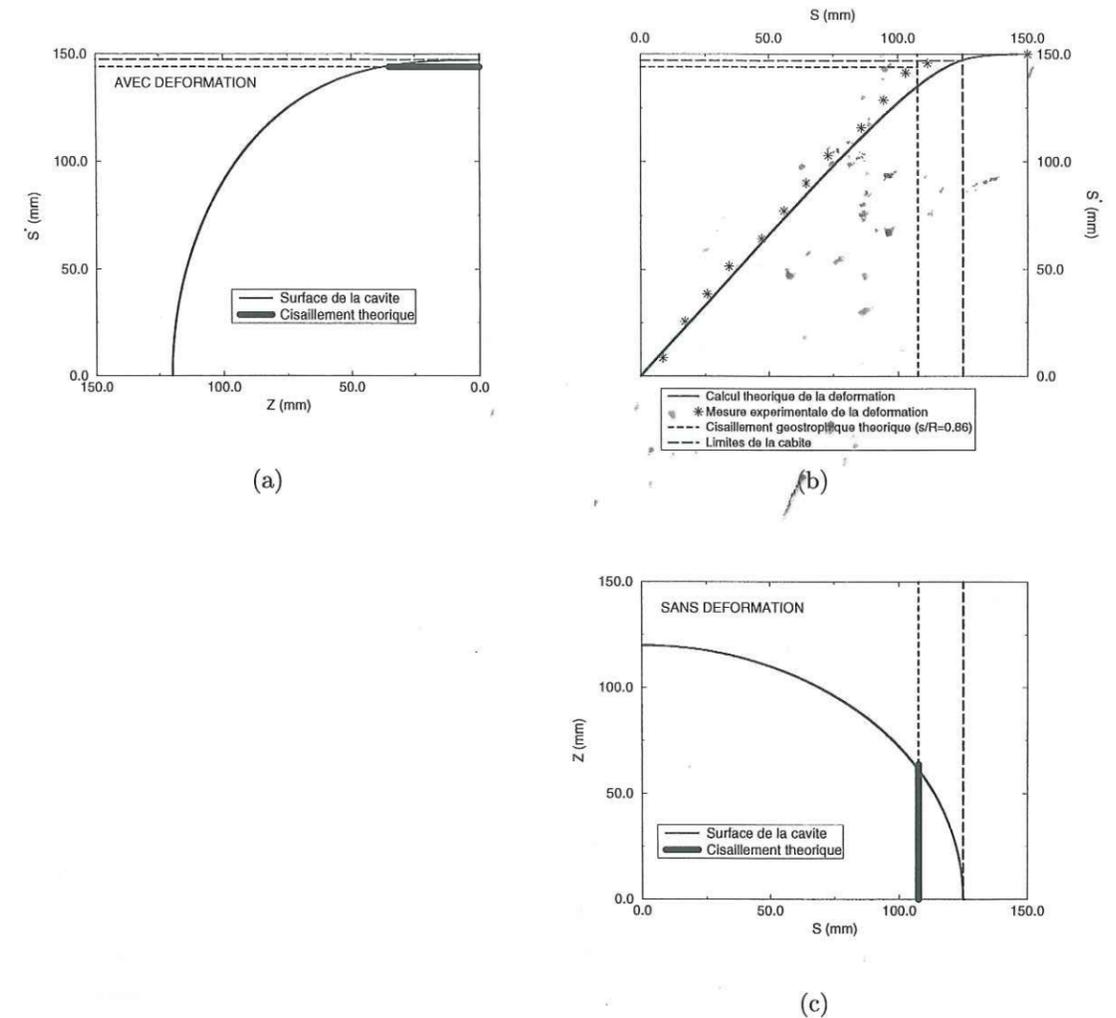


FIG. C.2 – Effet du dioptre cylindrique dans notre expérience sur l'image d'un plan méridien. a) Image déformée d'un plan méridien de la cavité b) comparaison entre la déformation radiale théorique obtenue en appliquant les lois de Descartes et la déformation observée expérimentalement sur le cliché (C.3). C'est à partir de cette figure que nous avons reconstruit l'image (a) d'un quart de plan méridien (c) au travers du dioptre. c) Plan méridien non déformé par le dioptre cylindrique. Nous avons reporté sur chacun des quart de plan méridien le cisaillement géostrophique prédit par l'approche analytique de Busse (1968). Dans un plan non déformé ce cisaillement est situé en  $s/R = 0.86$ , une fois déformé par le dioptre ce dernier nous apparaît en  $s^*/R^* = 0.96$ , où  $R^*$  est le rayon apparent de la cavité.

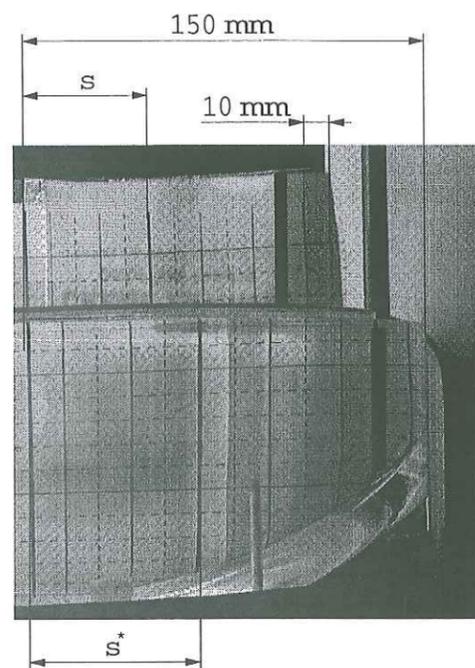


FIG. C.3 – Détermination expérimentale de la déformation de la grille. Nous reporté sur cette figure, les grandeurs mesurées  $s$  et  $s^*$ , ainsi que le pas de grille de 10 mm que nous avons choisi et l'emplacement de la zone de cisaillement géostrophique déterminée théoriquement par Busse (1968). Cette structure est située en  $s/R = 0.86$ , soit pour cette expérience en  $s = 107 \text{ mm}$ , nous avons reporté cette même structure sur la grille déformée, elle est alors en  $s^* = 144 \text{ mm}$ . La largeur que nous lui avons donnée est arbitraire.

Nous avons reporté sur la figure (C.2, b) la détermination expérimentale de la déformation associée au dioptré cylindrique. L'approximation de l'optique géométrique n'est certes pas tout à fait juste avec des dioptrés aussi prononcés, toutefois elle nous permet de rendre compte de manière satisfaisante de la déformation de la grille.

Nous avons utilisé les points expérimentaux de la figure (C.2, b) pour reporter la position théorique du cisaillement géostrophique sur les clichés du chapitre II.

## Bibliographie

- [1] H. Bondi and R. A. Lyttleton. Ii. the effect of precession on the motion of the liquid core. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 49 :498–515, 1953.
- [2] F. H. Busse. Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell. *J. Fluid Mech.*, 33 :739–751, 1968.
- [3] E. Dormy. *Modélisation numérique de la Dynamo Terrestre*. Thèse de l'Institut de Physique du Globe de Paris, IPGP, 1997.
- [4] N. Florsch, F. Chambat, J. Hinderer, and H. Legros. A simple method to retrieve the complex eigenfrequency of the earth's nearly diurnal free wobble :application to the strasbourg superconducting gravimeter data. *Geophys. J. Int.*, 116 :53–63, 1994.
- [5] G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts. A three dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature*, 377 :203–209, 1995.
- [6] H. P. Greenspan. *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press, Cambridge, 1968.
- [7] M. Greff-Lefftz and H. Legros. Correlation between some major geological events and resonances between the free core nutation and luni-solar tidal waves. *Geophys. J. Int.*, 139 :131–151, 1999.
- [8] H. Görtler. On forced oscillation in rotating fluids. *5th Midwestern Conf. on Fluid Mech.*, 3 :192–202, 1957.
- [9] J. Hinderer, J. P. Boy, P. Gegout, P. Defraigne, F. Roosbeek, and V. Dehant. Are the free core nutation parameters variable in time? *Phys. Earth Planet. Inter.*, 117 :37–49, 1998.
- [10] R. Hollerbach and R. R. Kerswell. Oscillatory internal shear layers in rotating and precessing flows. *J. Fluid Mech.*, 298 :327–339, 1995.
- [11] S. S. Hough. The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 186 :469, 1895.
- [12] X. Jiang and J. Hinderer. A search for free core nutation modes in vlbi nutation observations. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 90 :91–100, 1995.

- [13] R. R. Kerswell. The instability of precessing flow. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 72 :107–144, 1993.
- [14] R. R. Kerswell. On the internal shear layers spawned by the critical regions in oscillatory Ekman boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 298 :311–325, 1995.
- [15] R. R. Kerswell. Secondary instabilities in rapidly rotating fluids : inertial waves breakdown. *J. Fluid Mech.*, 382 :283–306, 1999.
- [16] W. Kuang and J. Bloxham. Numerical modeling of magnetohydrodynamic convection in a rapidly rotating spherical shell : Weak and strong field dynamo action. *Journal of Computational Physics*, 153 :51–81, 1999.
- [17] W. V. R. Malkus. Precession of the Earth as the cause of geomagnetism. *Science*, 160 :259–264, 1968.
- [18] W. V. R. Malkus. Energy sources for planetary dynamos. In M. R. E. Proctor and A. D. Gilbert, editors, *Lectures on Solar and Planetary Dynamos*, volume 2 of *Publications of the Newton Institute*, pages 161–179. Cambridge University Press, 1994.
- [19] A. D. McEwan. Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder. *J. Fluid Mech.*, 40 :603–640, 1970.
- [20] P. Olson, U. Christensen, and G. A. Glatzmaier. Numerical modeling of the geodynamo : Mechanisms of field generation and equilibration. *J. Geophys. Res.*, 104 :10,383–10,404, 1999.
- [21] M. A. Pais. *Sur quelques mouvements animant le noyau terrestre*. Thèse de l'Institut de Physique du Globe de Paris, IGP, 1999.
- [22] M. A. Pais, J. L. Le Mouél, K. Lambeck, and J. P. Poirier. Late precambrian paradoxical glaciation and obliquity of the earth—a discussion of dynamical constraints. *Earth and Planetary Science Letters*, 174 :155–171, 1999.
- [23] O. M. Phillips. Energy transfer in rotating fluids by reflection of inertial waves. *Phys. Fluids*, 1963.
- [24] R. Poincaré. Sur la précession des corps déformables. *Bull. Astr.*, 27 :321–356, 1910.
- [25] J. P. Poirier. Transport properties of liquid metals and viscosity of the earth's core. *Geophys. J. Int.*, 92 :99–105, 1988.
- [26] M. Rieutord and L. Valdettaro. Inertial waves in a rotating spherical shell. *J. Fluid Mech.*, 341 :77–99, 1997.
- [27] P. H. Roberts and K. Stewartson. On the stability of a Maclaurin spheroid of small viscosity. *Astrophys. J.*, 137 :777–790, 1963.
- [28] P. H. Roberts and K. Stewartson. On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body. ii. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 61 :279–288, 1965.

- [29] F. Roosbeek, P. Defraigne, M. Feissel, and V. Dehant. The free core nutation period is between 431 and 434 sidereal. *Geophys. Res. Lett.*, 26 :131–134, 1999.
- [30] B. Seyed-Mahmoud, G. A. Henderson, and K. Aldridge. A numerical model for elliptical instability of the earth's fluid outer core. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 103 :365–374, 1997.
- [31] K. Stewartson. On almost rigid rotations. *J. Fluid Mech.*, 3 :17–26, 1957.
- [32] K. Stewartson and P. H. Roberts. On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body. *J. Fluid Mech.*, 17 :1–20, 1963.
- [33] A. Tilgner. *Precession driven flow in spheroidal shells*. Habilitationsschrift, Bayreuth, 1999.
- [34] A. Tilgner. Non-axisymmetric shear layers in precessing fluid ellipsoidal shells. *Geophys. J. Int.*, 136 :629–636, 1999a.
- [35] A. Tilgner. Magnetohydrodynamic flow in precessing spherical shells. *J. Fluid Mech.*, 379 :303–318, 1999b.
- [36] A. Toomre. On the 'neraly diurnal wobble' of the earth. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 38 :335–348, 1974.
- [37] D. J. Tritton. *Physical Fluid Dynamics*. Oxford University Press, Oxford, 1988.
- [38] J. P. Vanyo. A geodynamo powered by luni-solar precession. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 59 :209–234, 1991.
- [39] J. P. Vanyo and J. R. Dunn. Core precession : flow structures and energy. *Geophys. J. Int.*, 142 :409–425, 2000.
- [40] J. P. Vanyo and P. W. Likins. Measurement of energy dissipation in a liquid-filled, precessing, spherical cavity. *Journal of Applied Mechanics, transaction of the ASME*, 93 :674–682, 1971.
- [41] J. P. Vanyo and P. W. Likins. Rigid-body approximation to turbulent motion in a liquid-filled, precessing, spherical cavity. *Journal of Applied Mechanics*, 39 :18–24, 1971.
- [42] J. P. Vanyo, P. Wilde, P. Cardin, and P. Olson. Experiments on precessing flows in the Earth's liquid core. *Geophys. J. Int.*, 121 :136–142, 1995.
- [43] I. C. Walton. Viscous shear layers in an oscillating rotating fluid. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 344 :101–110, 1975.

Je tiens à remercier mes directeurs de thèse Philippe Cardin et Dominique Jault pour m'avoir guidé tout au long de ce travail. Je leur suis particulièrement reconnaissant d'avoir toujours su m'écouter lorsque j'avais des doutes aussi bien scientifiques que personnels, de m'avoir encouragé dans les moments difficiles et surtout de m'avoir fait confiance pendant ces trois années. Ils sont devenus pour moi plus que des collaborateurs scientifiques.

Un grand merci à Jean-Paul Masson, notre « monsieur trouve tout » sans qui l'expérience « CICERON » n'aurait certainement pas donné autant de résultats en si peu de temps. Spéciale dédicace à tout le reste de l'équipe géodynamo, j'ai nommé Haricôt, l'ange gardien des étudiants, Villa-lobos, le seul Brasilio-Portuguech supporter du PSG, Julião Anti-Macdo, un normalien égaré. Leur simplicité, leurs talents et leur disponibilité m'ont fait découvrir le plaisir du travail en équipe dans une ambiance d'une rare convivialité.

Je souhaite remercier les membres du jury, Chantal Staquet, Michel Rieutord, Jean Louis Lemouël, Fritz Busse et Keith Aldridge, d'avoir accepté de juger ce travail.

Merci également aux trois drôles de dames, Jocelyne, France et Martine, dont l'élégance et la disponibilité me laisseront un grand souvenir.

Un grand merci à Catherine, digne représentante helvétique, perle du network...

Merci à Jean-Louis Lemouël, Alexandra Pais, Marianne Greff-Leftz, Gautier Hulot, Michel Rieutord, Andreas Tilgner, Richard Kerswell et bien d'autres pour les riches discussions que nous avons pu avoir et que nous aurons encore je l'espère.

Un grand merci à Keith Aldridge pour sa collaboration lors de son séjour à Grenoble et pour me recevoir à Toronto pour un post-doc qui s'annonce déjà froid et passionnant.

Je tiens à associer à ce travail ma famille ainsi que le posse parisien qui ont toujours eu une place importante, Philippe et Christine, Sylvie et Jean, Guillaume, Simone et Roland, Anne et Gaël, Maddy et Daddy, Valoche, Manou Guillaume et al, Virginie Olivier et al, Jacques et Gaby, Anne, Claire Philippe et al, Nico, Floflo, Jue, JC, Steph, Vince, Pop, Toph, Alex, Tof et Bonna, Djimou.

Merci à Vero, Popi, Britos, De Garambois, Gueguenos et al, Cornouc, AubertJ, Marielle, SMH, Gaillot et al, Le Hemlstetter sauvage, ainsi que tous ceux que j'aurai pu oublier...

Merci à Aisha notre fée du logis.

Merci au garde meuble Blunat et Cie, à Peter et Marc pour les balades hivernales et les grands crus classés.

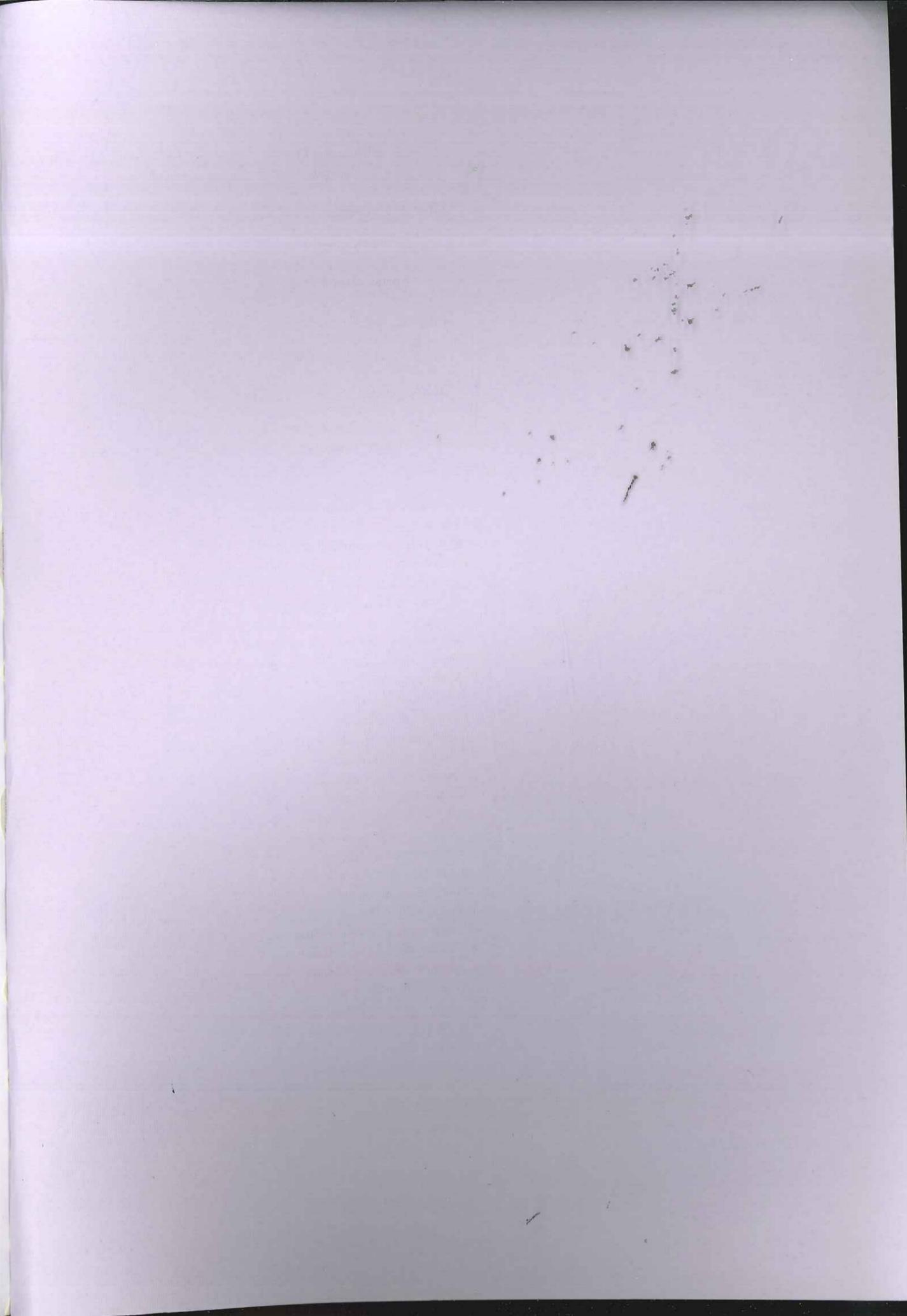
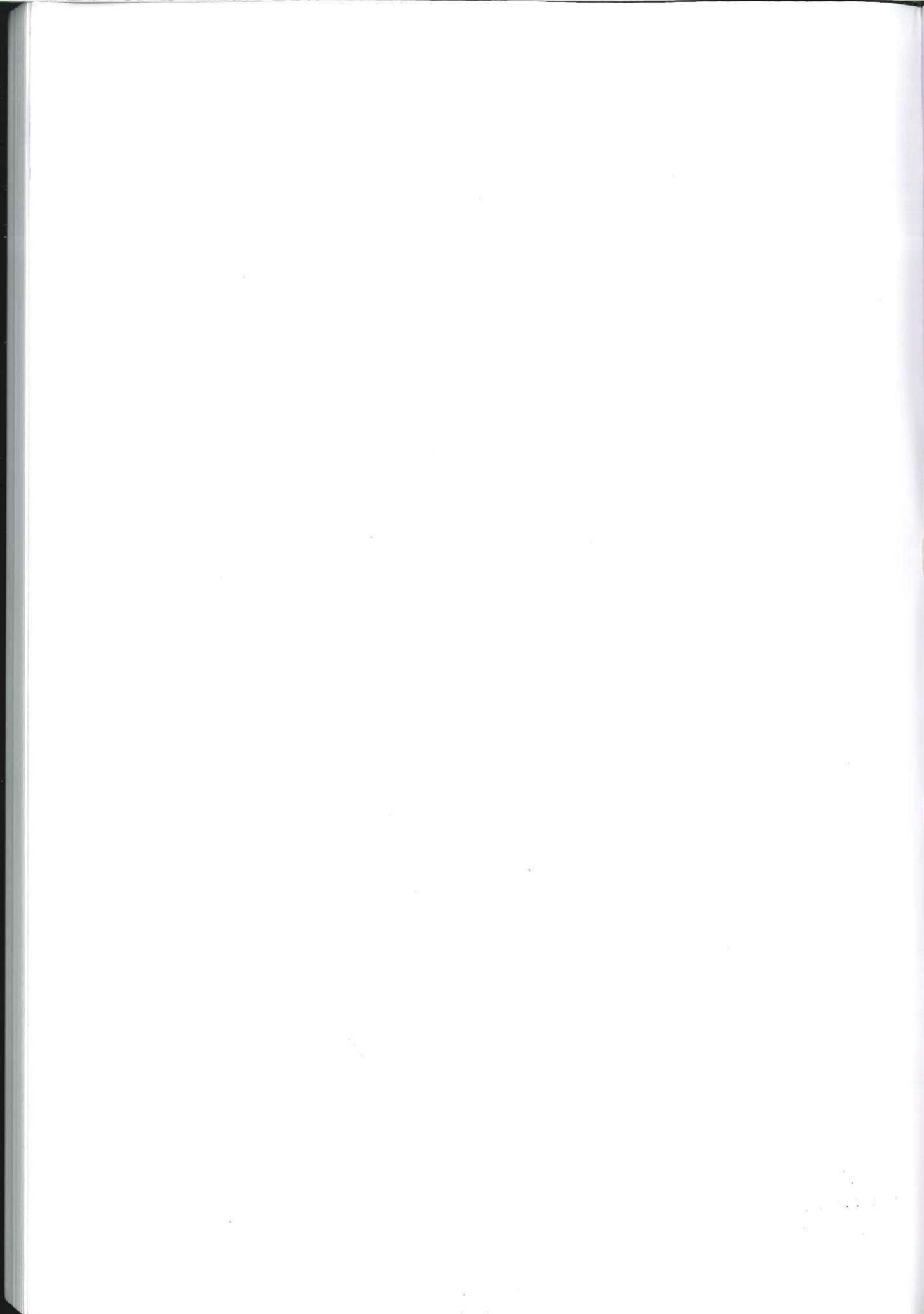
Merci à Marielle Collombet qui n'aura jamais déserté le bureau que pour faire des virages pour moi lorsque je ne tenais plus debout.

Merci à J. J. Lempereur et E. Pin kines officiels de la black-team.

Merci aux hôpitaux de la région Rhône-Alpes de m'avoir ouvert leurs portes chaque année, à Sébastien Grasso pour son sixième sens et son casque rouge...

Merci Sarah tu seras toujours une mère pour nous...

Enfin, je tiens à remercier très tendrement, Marie, ma douce moitié avec qui j'ai pu partager mes joies et mes peines et patati et patata...



Thèse de Doctorat de l'Université  
Joseph Fourier - Grenoble I

*Titre de l'ouvrage :*

Écoulements d'un fluide dans une cavité en  
précession:  
approches numérique et expérimentale.

*Auteur :*

Jérôme NOIR

*Etablissement :*

Observatoire de Grenoble  
Laboratoire de Géophysique Interne  
et Tectonophysique

*Résumé :* Nous savons aujourd'hui que le champ magnétique terrestre est créé au sein du noyau par des processus dynamo. Pour pouvoir comprendre la création et l'évolution de ce champ nous devons connaître la dynamique de la partie liquide du noyau terrestre.

Le soleil et la lune exercent sur la Terre un couple de gravité moyen entraînant un mouvement de précession de l'axe de rotation de notre planète. Comment le noyau liquide réagit-il à ce forçage luni-solaire? Pour pouvoir aborder cette question nous avons considéré un modèle physique simple constitué d'une cavité remplie d'eau dont nous imposons la vitesse de rotation et la vitesse de précession.

La première partie de ce travail porte sur une approche numérique du problème dans le cas particulier d'un conteneur sphérique, nous avons pu ainsi étudier le rôle de la viscosité. Nous montrons en particulier que l'écoulement laminaire se superposant à la rotation solide du fluide est contrôlé par une couche limite visqueuse localisée au voisinage de la paroi. Une étude détaillée nous a permis d'identifier des lois de comportement asymptotiques pour la vitesse.

Dans une seconde partie nous présentons l'expérience de précession CICERON au cours de laquelle nous nous sommes attachés d'une part à décrire le mouvement de rotation solide du fluide, d'autre part à caractériser les différents régimes d'écoulement secondaire. Nous proposons à l'issue de cette étude expérimentale que la principale source d'instabilité soit de type cisailante. Bien que nos connaissances ne soient pas encore suffisantes pour pouvoir décrire précisément la dynamique du noyau terrestre induite par la précession, nous pouvons penser d'après nos résultats que l'écoulement n'est certainement pas laminaire. D'autres études, notamment expérimentales, sont envisagées pour poursuivre ce travail.

*Mots Clefs :* Précession, Terre, noyau liquide, ondes inertielles, écoulement géostrophique, turbulence, instabilités, couche d'Ekman, couplages non-linéaires.