HAL open science

Algèbres de Hecke cyclotomiques : représentations, fusion et limite classique

Loïc Poulain d'Andecy

To cite this version:

Loïc Poulain d'Andecy. Algèbres de Hecke cyclotomiques : représentations, fusion et limite classique. Théorie des représentations [math.RT]. Aix-Marseille Université, 2012. Français. NNT : . tel-00748920

HAL Id: tel-00748920

https://theses.hal.science/tel-00748920

Submitted on 6 Nov 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Aix-Marseille Université
U.F.R Sciences de Luminy

Thèse de doctorat

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

Spécialité : Physique Théorique et Mathématique

par

Loïc POULAIN D'ANDECY

Algèbres de Hecke cyclotomiques : représentations, fusion et limite classique

---

Soutenance le 03 juillet 2012 devant le jury composé de :

M.	Christian DUVAL	(Président du jury)
M.	Nicolas JACON	(Membre invité)
M.	Oleg OGIEVETSKY	(Directeur de thèse)
M.	Vladimir ROUBTSOV	(Rapporteur)
M.	Senya SHLOSMAN	(Membre invité)
M.	Paul ZINN-JUSTIN	(Rapporteur)

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que je remercie chaleureusement mon directeur de thèse Oleg Ogievetsky. Oleg a été mon superviseur pendant les stages en Master, et ensuite pendant les 3 années de thèse, et je lui suis très reconnaissant pour sa grande disponibilité et son infinie patience vis-à-vis de toutes les questions que j'ai pu lui poser. Je le remercie également pour toutes les questions toujours intéressantes que lui m'a soumises (et auxquelles je suis loin d'avoir répondu en intégralité !), qui m'ont donné l'opportunité d'aborder de nombreux sujets et permis de progresser dans ma formation. Le côtoyer pendant ces cinq dernières années a été un grand plaisir, tant au niveau personnel que scientifique. Un grand merci !

Je remercie Christian Duval d'avoir très gentiment accepté de me faire l'honneur d'être le président de mon jury de thèse, ainsi que Nicolas Jacon et Senya Shlosman qui ont bien voulu faire partie du jury. Je suis également reconnaissant envers Vladimir Roubtsov et Paul Zinn-Justin, qui ont aimablement accepté d'être rapporteurs pour ma thèse. Je les remercie vivement pour leur intérêt pour mes travaux, ainsi que pour les commentaires et remarques intéressants qu'ils ont faits sur le manuscrit.

Je remercie bien sûr tous les membres du Centre de Physique Théorique que j'ai côtoyés pendant ma thèse, ainsi que mes collègues du master, avec une pensée particulière pour les amis, Adeline, Denis, Grégory, Julien, Manue, Thibault, que je m'y suis fait.

Enfin, je remercie tous mes proches pour leur inestimable soutien.

Table des matières

Introduction générale **1**

Organisation et contenu de la thèse 9
Perspectives de recherche 11

Liste de publications **13**

Chapitre I. Généralités sur les chaînes d'algèbres **14**

I.1 Chaînes d'algèbres 15
I.2 Diagrammes de Bratteli 28
I.3 Algorithme de Coxeter–Todd 36

Chapitre II. Algèbres de Hecke cyclotomiques : éléments de Jucys–Murphy, représentations et limite classique **40**

II.1 Introduction 41
II.2 Algèbres de Hecke cyclotomiques et éléments de Jucys–Murphy 47
II.3 Spectre des éléments de Jucys–Murphy et m-tableaux de Young 49
II.4 Construction des représentations 54
II.5 Complétude 78
II.6 Limite classique 82
Appendice II.A Exemples 109

Chapitre III. Forme normale et procédure de fusion pour l'algèbres de Hecke cyclotomique **113**

III.1 Introduction 114
III.2 Procédure de fusion pour le groupe $G(m, 1, n)$ 117
III.3 Procédure de fusion pour l'algèbre $H(m, 1, n)$ 127
III.4 Forme normale et représentations induites des algèbres de Hecke cyclotomiques et affines de type A 138

Chapitre IV. Sous-groupes alternés des groupes de Coxeter **154**

IV.1 Introduction 154
IV.2 Sous-groupes alternés des groupes de Coxeter 157
IV.3 Extensions centrales des sous-groupes alternés des groupes de Coxeter 162
IV.4 Sous-algèbres alternées des algèbres de Hecke 166
IV.5 Sous-groupes alternés des groupes de tresses 173
IV.6 Algorithme de Coxeter–Todd et formes normales pour les sous-groupes alternés de type A, B ou D 178

Bibliographie **188**

Introduction générale

1. Les concepts de symétrie et d'invariance sont très importants dans les théories physiques modernes. L'étude des symétries est liée à la notion algébrique de groupes en mathématiques. En effet, les transformations de symétrie qui agissent sur un système forment un ensemble muni de la loi de composition vérifiant les axiomes d'un groupe.

Les origines de la théorie des groupes remontent au XIXème siècle. Très rapidement, la théorie des groupes s'est développée et s'est avérée être connectée avec de nombreux domaines des mathématiques (algèbre, géométrie, théorie des nombres, *etc*). A la suite de ses nombreux développements, la théorie des groupes a mené à la définition de diverses structures algébriques, qui sont maintenant grandement étudiées et utilisées ; citons les groupes et algèbres de Lie (et toute la théorie, dite de Lie, qui s'en suit, qui est d'une grande importance, par exemple, pour les théories de jauge en physique), les algèbres associatives, les supergroupes et superalgèbres de Lie, et également les groupes quantiques (ou plus généralement les algèbres de Hopf).

La théorie des représentations d'un groupe, ou d'une structure algébrique associative, étudie les possibilités de "représenter" les éléments du groupe par des matrices, de telle sorte que la multiplication du groupe devienne la multiplication des matrices. Cela permet d'utiliser, dans l'étude des structures algébriques, les outils de l'algèbre linéaire. De plus, dans les applications en physique, une structure algébrique abstraite (comme un groupe de symétrie) intervient très souvent par l'intermédiaire de son action sur un espace, c'est-à-dire au travers de ses représentations.

2. Un objet fondamental, qui est apparu dès le début de la théorie des groupes, est le groupe symétrique. Le groupe symétrique S_n est le groupe formé par toutes les permutations d'un ensemble à n éléments. L'ensemble des groupes symétriques forment une chaîne ascendante de groupes

$$S_0 \subset S_1 \subset \dots S_n \subset \dots , \tag{0.1}$$

c'est-à-dire que pour tout entier naturel k, le groupe S_k est un sous-groupe du groupe S_{k+1} ; plus précisément, le sous-groupe S_k de S_{k+1} est formé par les permutations d'un ensemble à $k+1$ éléments qui laissent fixe le $(k+1)$-ème élément. L'étude des groupes symétriques a été le point de départ de la théorie combinatoire des groupes. Les objets combinatoires qui apparaissent dans la théorie des représentations des groupes symétriques sont les partitions (ou, de manière équivalente, les diagrammes de Young) et les tableaux de Young.

L'algèbre de Hecke de type A, notée $H_n(q)$, est une déformation à un paramètre q de l'algèbre du groupe symétrique S_n. L'algèbre de Hecke de type A joue un rôle important dans de nombreux

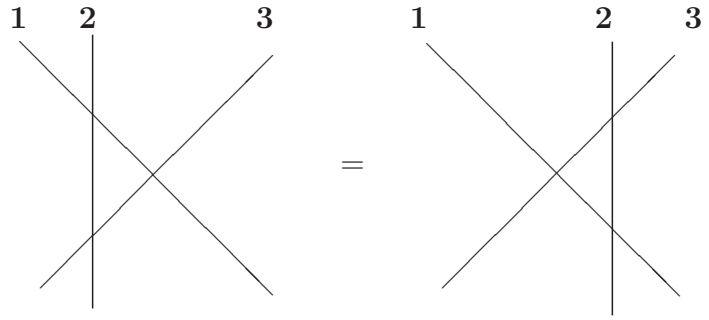
domaines : nous mentionnons juste la théorie des noeuds, la dualité de Schur-Weyl pour le groupe linéaire quantique ; la théorie des représentations de l'algèbre de Hecke $H_n(q)$, où q est une racine de l'unité (pour une valeur générique du paramètre q, l'algèbre de Hecke est isomorphe à l'algèbre du groupe symétrique S_n), est reliée à la théorie des représentations modulaires du groupe symétrique. Les algèbres de Hecke forment une chaîne d'algèbres

$$H_0(q) \subset H_1(q) \subset \ldots H_n(q) \subset \ldots .$$

(La définition que nous utilisons de chaînes d'algèbres ou de groupes, dont nous venons de donner deux exemples, sera rappelée dans le premier chapitre.)

La principale relation intervenant dans la définition de l'algèbre de Hecke (et qui est aussi présente au niveau des groupes symétriques) est la relation d'Artin, qui est très liée avec l'équation de Yang–Baxter. L'équation de Yang–Baxter a suscité de nombreux travaux et intervient dans les modèles statistiques, et plus généralement dans la physique en 2 dimensions [29], dans le groupe des tresses, dans la théorie des noeuds et de leurs invariants [55, 58], dans les systèmes intégrables [55], etc. Elle a contribué à la découverte des groupes quantiques qui sont, d'un certain point de vue parmi beaucoup d'autres, des "machines" à produire des solutions de l'équation de Yang–Baxter [13, 24, 28, 39, 51, 58, 60, 83]. Cette équation a été formulée indépendamment par Yang et par Baxter.

L'équation de Yang–Baxter apparaît comme condition de *factorisabilité* de la matrice S (la matrice de diffusion) dans un modèle de particules relativistes à $1+1$ dimensions, *i.e.* sur une droite [108] (voir aussi *e.g.* [29, 39]). La factorisabilité signifie que tout évènement peut se décomposer en séquence d'évènements n'impliquant que deux particules. L'équation de Yang–Baxter peut être représentée graphiquement :



Dans la figure ci-dessus, chaque ligne représente une particule, le temps s'écoule de bas en haut et chaque intersection représente une interaction entre deux particules. En terme de la matrice de diffusion pour deux particules, notée R, l'équation représentée ci-dessus est :

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12},$$

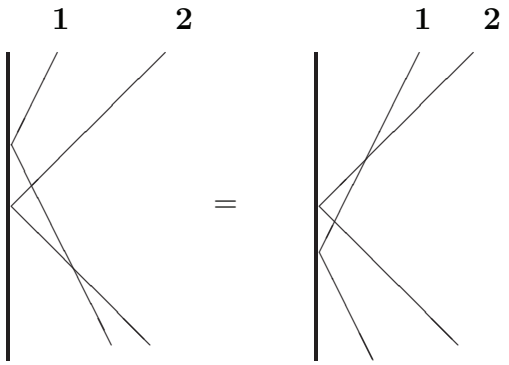
où la notation R_{12} signifie que R agit sur les espaces correspondant aux particules **1** et **2**, et ainsi de suite pour R_{13} et R_{23} (pour simplifier, on a omis les paramètres spectraux). L'équation ci-dessus est l'équation de Yang–Baxter.

Dans les travaux de Baxter [5], l'équation apparaît dans les systèmes statistiques à 2 dimensions (spatiales), dits *vertex models*. Prenons un réseau rectangulaire. En chaque sommet du réseau, l'énergie

dépend de l'état des 4 arêtes qui s'y joignent, les états étant labellisés par un indice discret (par exemple deux états : spin up ou spin down). Les coefficients de la matrice R sont reliés aux différents poids de Boltzmann associés à chaque possibilité pour un sommet. Ici, l'équation de Yang–Baxter pour la matrice R est une condition qui permet de diagonaliser la matrice de transfert, et ainsi de calculer la fonction de partition du système (voir par exemple [55]) dans la limite thermodynamique.

Une autre équation, qui joue un rôle similaire à celui de l'équation de Yang–Baxter, a été découverte et a donné lieu à de nombreuses études. C'est l'équation dite *équation de réflexion*. Comme nous l'avons déjà dit, la relation d'Artin apparait dans le groupe de tresses usuel ; quand on rajoute d'une certaine manière l'équation de réflexion, on obtient le groupe de tresses affine [1]. La structure algébrique associée à cette équation est appelée une *algèbre de réflexion* [63].

L'équation de réflexion apparaît aussi dans les modèles de particules relativistes à 1+1 dimensions, mais cette fois-ci lorsqu'on considère la diffusion sur une demi-droite, voir [14, 39, 63]. En plus de la matrice R de diffusion pour les évènements à 2 particules, il existe aussi une matrice de diffusion K pour l'interaction entre une particule et le bord de la demi-droite. La condition de factorisabilité pour la matrice de diffusion, en plus de l'équation de Yang–Baxter pour la matrice R, est représentée ainsi



Dans la figure ci-dessus, les lignes **1** et **2** représentent des particules et la ligne verticale épaisse représente le bord. Le temps s'écoule de bas en haut et chaque intersection représente soit une interaction entre deux particules, soit une interaction entre une particule et le bord. L'équation représentée graphiquement ci-dessus est :

$$K_1 R_{12} K_2 R_{21} = R_{12} K_2 R_{21} K_1,$$

où K_1 (respectivement, K_2) intervient pour l'interaction de la particule **1** (respectivement, **2**) avec le bord. Cette équation est l'équation de réflexion (pour simplifier, on a omis les paramètres spectraux).

3. En plus de l'algèbre de Hecke de type A, une autre algèbre de Hecke est naturellement associée au groupe symétrique ; c'est l'algèbre de Hecke affine de type A. La principale relation qui est ajoutée

1. Dans le groupe de tresses usuel, les générateurs correspondant au tressage de deux brins voisins satisfont à la relation d'Artin. Le groupe de tresses affine est formé à partir du groupe de tresses usuel, en rajoutant une barre fixe à côté du premier brin autour de laquelle ce brin peut venir s'enrouler ; le générateur correspondant au tressage des deux premiers brins et le générateur correspondant à l'enroulement du premier brin autour de la barre fixe satisfont à l'équation de réflexion.

dans la définition de l'algèbre de Hecke affine de type A, et qui gouverne la commutativité des éléments appelés éléments de Jucys–Murphy (voir plus bas) est l'équation de réflexion. Les éléments de Jucys–Murphy et l'équation de réflexion apparaissent dans beaucoup d'applications : la diffusion sur une demi-droite [14], la théorie des noeuds sur le tore (voir, *e.g.*, [64] et les références à l'intérieur), le complexe standard et les opérateurs BRST pour les algèbres de Lie quantiques [31, 47], les intégrales matricielles [110], l'algèbre multilinéaire quantique [48], la construction de l'espace de Minkowski quantique [23, 85], les versions quantiques des isomorphismes accidentels [50], *etc.*

Les algèbres de Hecke affines ont été introduites dans le cadre de l'étude des groupes p-adiques [49], puis ont donné lieu à beaucoup de travaux [1, 3, 6, 93, 99, 109], en raison de leurs nombreuses applications, par exemple dans l'étude des polynômes symétriques et leurs généralisations [68] (dans ce cadre, des algèbres de Hecke doublement affines ont aussi été introduites par I. Cherednik [17]). L'algèbre de Hecke affine de type A et sa théorie des représentations trouve également des applications dans la construction de systèmes intégrables, basés sur les chaînes de spin avec un bord [45].

L'algèbre de Hecke affine de type A contient un large sous-ensemble commutatif engendré par les éléments de Jucys–Murphy [2]. Il existe un homomorphisme surjectif de l'algèbre de Hecke affine de type A vers l'algèbre de Hecke $H_n(q)$ de type A. Les images des éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre de Hecke affine par cet homomorphisme sont les éléments de Jucys–Murphy pour $H_n(q)$ et engendrent un ensemble commutatif maximal dans $H_n(q)$. La limite classique (de $H_n(q)$ dans l'algèbre de groupe $\mathbb{C}S_n$ du groupe symétrique) de ces éléments sont les éléments de Jucys–Murphy usuels du groupe symétrique ; ils engendrent un ensemble commutatif maximal dans $\mathbb{C}S_n$.

Dans [86], Okounkov et Vershik ont développé une approche inductive pour la théorie des représentations de la chaîne des groupes symétriques. Dans le cadre de cette approche, la description des représentations irréductibles, le graphe de Young et la forme orthogonale de Young proviennent de l'étude du spectre de la famille des éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}S_n$. Cette approche a ensuite été généralisée avec succès aux représentations projectives du groupe symétrique [96], au produit en couronne $G \wr S_n$ d'un groupe fini arbitraire G par le groupe symétrique [87], aux algèbres de Hecke de type A [44] et aux algèbres de Birman-Murakami-Wenzl de type A [46].

Le groupe symétrique S_n est un cas particulier de groupe de Coxeter fini. Les groupes de Coxeter sont une abstraction des groupes engendrés par des réflexions dans un espace euclidien [19]. Les groupes de Coxeter finis (dont les groupes symétriques font partie) coïncident exactement avec les groupes de réflexions finis d'un espace euclidien [20, 37]. Un analogue de l'algèbre de Hecke (et du groupe de tresses) existe pour tout groupe de Coxeter, et également pour tout groupe de réflexions complexe. Les groupes de réflexions complexes généralisent les groupes de Coxeter au cas des pseudo-réflexions (les transformations non-triviales qui fixent point par point un hyperplan d'un espace vectoriel complexe), et la liste complète des groupes de réflexions complexes finis et irréductibles consiste en la série de groupes notés $G(m,p,n)$, où m,p,n sont des entiers positifs tels que p divise m, et 34 groupes exceptionnels [95], voir aussi [11].

L'algèbre de Hecke, notée $H(m,1,n)$, du groupe de réflexions complexe $G(m,1,n)$ est appelée

2. Les éléments de Jucys–Murphy sont historiquement des éléments de l'algèbre du groupe symétrique. Leurs généralisations pour différentes algèbres sont également appelés éléments de Jucys–Murphy.

l'algèbre de Hecke cyclotomique (ou aussi algèbre de Ariki-Koike), et est apparue indépendamment dans [4, 10, 16]. L'algèbre $H(m,1,n)$ est un quotient de l'algèbre de Hecke affine de type A, et hérite des éléments de Jucys–Murphy. C'est le premier objectif de cette thèse que de généraliser l'approche de Okounkov et Vershik pour le groupe symétrique à la théorie des représentations de la chaîne des algèbres de Hecke cyclotomiques $H(m,1,n)$ (plus bas, nous décrivons plus en détail les résultats obtenus).

4. Une algèbre semisimple de dimension finie (par exemple, l'algèbre sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes d'un groupe fini, ou les algèbres de Hecke génériques associées aux groupes de réflexions finis) est isomorphe à une somme directe d'algèbres matricielles, la somme portant sur les représentations irréductibles non-isomorphes deux à deux de l'algèbre. Il y a donc, dans l'algèbre, un projecteur canonique associé à chaque représentation irréductible, qui projette sur l'algèbre matricielle correspondant à la représentation. De plus, si on fixe une base dans chaque représentation irréductible, il existe, pour chaque vecteur de base de chaque représentation irréductible, un projecteur qui projette sur la droite engendrée par ce vecteur. L'ensemble de ces projecteurs forme un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux deux à deux. Si on note $\{\mathsf{p}_i\}_{i=1,\dots,k}$ l'ensemble de ces projecteurs (l'entier k est la somme des dimensions des représentations irréductibles), cela signifie que

$$\sum_{i=1}^{k} \mathsf{p}_i = 1 \quad \text{et} \quad \mathsf{p}_i\mathsf{p}_j = \delta_{i,j}\mathsf{p}_i \text{ pour tout } i,j = 1,\dots,k,$$

où l'élément 1 est l'élément neutre de l'algèbre et $\delta_{i,j}$ est le delta de Kronecker ; de plus, aucun p_i ne peut se décomposer en une somme de deux projecteurs orthogonaux.

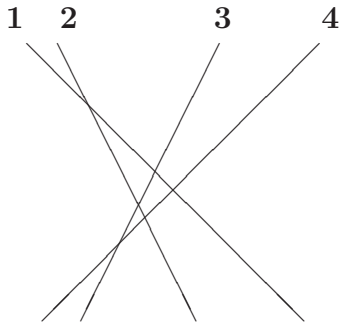
Dans [57], une construction d'un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux deux à deux de l'algèbre du groupe symétrique a été donnée ; la construction, appelée maintenant *procédure de fusion*, met en jeu une fonction rationnelle à plusieurs variables, et les idempotents sont obtenus en prenant certaines valeurs limites de cette fonction. Nous renvoyons à [15, 32, 35, 53, 79, 80, 82] pour différents aspects et applications de la procédure de fusion pour le groupe symétrique. Il existe des analogues de la procédure de fusion pour l'algèbre de Hecke de type A [33, 81], et pour l'extension spinorielle du groupe symétrique [54, 78] (voir [56] pour son q-analogue).

Dans la version de la procédure de fusion pour le groupe symétrique donnée dans [75], les idempotents sont obtenus par évaluations consécutives d'une fonction rationnelle. Un analogue de cette procédure de fusion existe pour l'algèbre de Hecke de type A [41], l'algèbre de Brauer [40, 42] et l'algèbre de Birman–Murakami–Wenzl de type A [43]. La fonction rationnelle utilisée pour le groupe symétrique [75] et pour l'algèbre de Hecke de type A [41] est construite de la façon suivante. Il faut prendre l'élément le plus long dans le groupe symétrique [3] (respectivement, dans l'algèbre de Hecke de type A), et remplacer chaque générateur intervenant dans son expression par sa version "Baxterisée". La Baxterisation est un procédé consistant à construire une solution de l'équation de Yang–Baxter avec paramètre spectral à partir d'une solution de l'équation de Yang–Baxter sans paramètre spectral.

3. L'élément le plus long est bien défini pour tout groupe de Coxeter fini. Cet élément a beaucoup de propriétés algébriques et géométriques remarquables.

Le terme *fusion* est à l'origine utilisé pour désigner un procédé permettant de construire de nouvelles solutions de l'équation de Yang–Baxter (*i.e.* des matrices R) à partir d'anciennes (voir par exemple [52, 61, 62]). Il s'avère que la combinaison des générateurs Baxterisés dans la fonction rationnelle utilisée pour le groupe symétrique (ou l'algèbre de Hecke de type A) reproduit la combinaison des solutions de l'équation de Yang–Baxter utilisée dans la procédure de fusion pour les matrices R.

La procédure de fusion pour les matrices R peut être décrite par une figure dans le même esprit que les figures dessinées ci-dessus. La nouvelle matrice R "fusionnée" est reliée au processus d'interaction de plusieurs particules avec plusieurs particules (alors que l'ancienne matrice R, voir figure plus haut, correspondait à l'interaction de 1 seule particule avec 1 seule autre). Nous donnons l'exemple de deux particules avec deux particules :

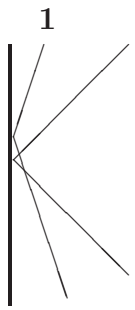


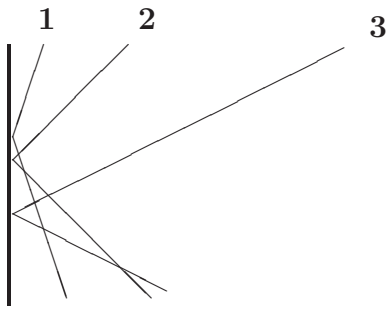
La combinaison d'anciennes matrices R correspondant à la figure ci-dessus est (pour simplifier, nous omettons encore les paramètres spectraux) :

$$R_{12}R_{13}R_{14}R_{23}R_{24}R_{34} \ .$$

L'opérateur obtenu est une nouvelle matrice R (*i.e.* une nouvelle solution de l'équation de Yang–Baxter). L'expression ci-dessus peut être traduite en une écriture de l'élément le plus long du groupe symétrique S_4 (ou de l'algèbre de Hecke associée) en termes des générateurs standards.

La procédure de fusion existe également pour les solutions de l'équation de réflexion [63, 71, 107]. Nous en donnons la représentation graphique pour deux particules, puis trois particules, qui arrivent sur le bord :





La combinaison des anciennes matrices R et K correspondant aux deux figures ci-dessus sont (pour

simplifier, nous omettons encore les paramètres spectraux), respectivement :

$$K_1R_{12}K_2R_{21} \quad \text{et} \quad K_1R_{12}K_2R_{21}R_{23}R_{13}K_3R_{31}R_{32} \ .$$

Les opérateurs obtenus sont de nouvelles solutions de l'équation de réflexion.

Pour le groupe de réflexions complexe $G(m,1,n)$ et l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$, il n'existe pas la notion d'élément le plus long comme dans les groupes de Coxeter finis. Néanmoins, étant donnés un ensemble de générateurs et une forme normale pour les éléments du groupe $G(m,1,n)$ (respectivement, une base de $H(m,1,n)$), nous pouvons considérer les éléments de cette forme normale qui ont l'écriture la plus longue en termes des générateurs. Nous avons construit dans cette thèse une forme normale pour les éléments du groupe $G(m,1,n)$, et nous avons généralisé ce résultat en une base de $H(m,1,n)$. Cette base a plusieurs applications intéressantes (nous y reviendrons plus tard), et elle possède un élément le plus long dans un certain sens.

Lorsque l'on prend l'expression de l'élément le plus long de la base en termes des générateurs de $H(m,1,n)$, on obtient une combinaison de générateurs qui reproduit les expressions obtenues avec la procédure de fusion pour l'équation de réflexion (voir les deux exemples ci-dessus).

Nous montrons dans cette thèse qu'un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux deux à deux de l'algèbre du groupe $G(m,1,n)$ et de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$ peuvent être obtenus par évaluations consécutives d'une fonction rationnelle ; cette fonction rationnelle est obtenue en Baxterisant certains générateurs dans l'expression, sous la forme normale obtenue auparavant, de l'élément le plus long. Ces résultats semblent reliés à la procédure de fusion pour l'équation de réflexion, de la même manière que la procédure de fusion du groupe symétrique et de l'algèbre de Hecke de type A est reliée à la procédure de fusion pour l'équation de Yang–Baxter.

Notons qu'il existe un procédé de Baxterisation pour l'équation de réflexion, c'est-à-dire un procédé consistant à construire une solution de l'équation de réflexion avec paramètre spectral à partir d'une solution de l'équation de réflexion sans paramètre spectral, dans le cadre des algèbres de Hecke et des algèbres de Birman-Murakami-Wenzl [45]. Mais, et c'est peut-être surprenant, la solution Baxterisée de l'équation de réflexion n'intervient pas dans la procédure de fusion construite ici pour l'algèbre de Hecke cyclotomique.

La base, différente de celles obtenues dans [4, 8], de l'algèbre $H(m,1,n)$ présentée ici a plusieurs applications intéressantes (notons qu'une base semblable est étudiée dans [64], mais cette étude s'appuie sur la base présentée dans [4], et donc sur la théorie des représentations). Tout d'abord, nous n'utilisons pas la théorie des représentations dans la démonstration, ce qui donne une preuve de la platitude de la déformation indépendante de la théorie des représentations. Ensuite, cette base est, par construction, bien adaptée à la structure de chaîne des algèbres $H(m,1,n)$; elle permet d'écrire explicitement les matrices des générateurs pour les représentations de l'algèbre $H(m,1,n)$ induites par rapport à $H(m,1,n-1)$ (en particulier, nous donnons un analogue de la représentation de Burau). Enfin, nous définissons une forme linéaire sur les éléments de base, que nous prouvons, par un calcul explicite, être centrale. Ces résultats fournissent une description, différente de celle dans [8], d'une forme symétrisante sur l'algèbre de Hecke cyclotomique.

5. Une autre chaîne de groupes est associée naturellement à la chaîne des groupes symétriques ; c'est la chaîne des groupes alternés. Pour tout groupe de Coxeter, il existe un sous-groupe d'indice 2 appelé le sous-groupe alterné, formé par les éléments qui s'écrivent comme produit d'un nombre pair de générateurs standards. Dans le cas des groupes de Coxeter finis (qui coïncident avec les groupes de réflexions finis), le sous-groupe alterné est le sous-groupe des rotations. Pour le groupe symétrique S_n, le sous-groupe alterné A_{n-1}^+ [4] est le sous-groupe des permutations paires, c'est-à-dire des permutations qui s'écrivent comme produit d'un nombre pair de transpositions. Les groupes alternés (de type A) forment une chaîne de groupes

$$A_0^+ \subset A_1^+ \subset A_2^+ \subset \cdots \subset A_n^+ \subset \dots ,$$

qui peut être vue comme une sous-chaîne de la chaîne des groupes symétriques.

La théorie des représentations des groupes alternés de type A est bien connue, car A_{n-1}^+ est un sous-groupe d'indice 2 de S_n. Néanmoins, une approche inductive et indépendante, à la Okounkov-Vershik, pour la théorie des représentations de cette chaîne de groupes n'existe pas pour l'instant, comme cela a été noté dans [96]. Les propriétés de la chaîne des groupes symétriques qui entrainent la commutativité des éléments de Jucys–Murphy, et qui permettent d'utiliser une approche inductive, sont les propriétés de localité et de stationnarité de la présentation standard (de Artin) de la chaîne ; voir chapitre I pour les définitions précises. Ces propriétés (qui peuvent être affaiblies, par exemple, la stationnarité remplacée par la stationnarité retardée) sont un ingrédient essentiel dans l'approche de Okounkov et Vershik pour la théorie des représentations des groupes symétriques.

Il existe une présentation par générateurs et relations pour le sous-groupe alterné de tout groupe de Coxeter, donnée comme un exercice par Bourbaki [7, 9]. Pour cette présentation, on doit choisir arbitrairement un sommet du graphe de Coxeter, et les générateurs sont ensuite indexés par les autres sommets du graphe. La présentation dépend en général du choix du sommet distingué.

Dans cette thèse, nous donnons une nouvelle présentation des groupes alternés de tous les groupes de Coxeter. Dans le cas où le graphe de Coxeter est connexe (c'est-à-dire, le groupe de Coxeter associé est irréductible), les générateurs sont indexés par les arêtes du graphe de Coxeter et aucun sommet n'est distingué. Dans le cas où le graphe de Coxeter n'est pas connexe, nous fixons une extension connexe de ce graphe en rajoutant des arêtes "virtuelles". Les générateurs sont indexés par les arêtes et les arêtes virtuelles. Pour le type A, cette présentation de la chaîne des groupes alternés est locale et stationnaire (une présentation semblable, mais légèrement différente a été obtenue seulement pour le type A dans [101]). Pour les types B et D, cette présentation de la chaîne des groupes alternés est locale et stationnaire retardée.

La présentation à la Bourbaki et notre présentation avec les arêtes du graphe de Coxeter sont ensuite généralisées à plusieurs structures reliées aux groupes alternés : les extensions spinorielles, les algèbres de Hecke alternées et les sous-groupes alternés des groupes de tresses.

Les extensions spinorielles des groupes alternés sont des extensions centrales. Dans le cas des groupes alternés des groupes de Coxeter finis et affines, ces extensions dérivent des extensions spino-

4. La notation A_{n-1}^+, qui est celle qui sera utilisée dans la thèse, vient du fait que le groupe symétrique S_n est isomorphe au groupe de Coxeter de type A et de rang $n-1$, noté A_{n-1}.

rielles des groupes de rotations $SO(n)$, et sont non-triviales [76]. Notons que l'étude de ces extensions centrales est reliée à l'étude des représentations projectives des groupes alternés.

La notion de groupe alterné peut être étendue aux groupes de tresses associé à un groupe de Coxeter. Le groupe de tresses associé à un groupe de Coxeter est obtenu en prenant des générateurs indexés par les sommets du graphe, comme pour le groupe, avec les relations définissantes qui sont les mêmes que pour le groupe excepté le fait que l'on supprime la relation de la forme "$s^2 = 1$" pour les générateurs. Pour le type A, on obtient ainsi le groupe de tresses usuel. Le sous-groupe alterné d'un groupe de tresses est défini comme le sous-groupe d'indice 2 formé par les éléments qui s'écrivent comme produit d'un nombre pair de générateurs et de leurs inverses.

Les algèbres de Hecke alternées sont les analogues des algèbres de Hecke pour les groupes alternés [5]. En effet, ce sont des déformations de l'algèbre de groupe des groupes alternés. Ce sont également des sous-algèbres des algèbres de Hecke. En raison de la déformation de l'équation caractéristique pour les générateurs de l'algèbre de Hecke ($s^2 = 1$ devient $g^2 = (q - q^{-1})g + 1$), les éléments qui s'écrivent comme produit d'un nombre pair de générateurs standards ne forment pas une sous-algèbre. Nous devons donc d'abord définir de nouveaux générateurs dans les algèbres de Hecke, avant de pouvoir prendre la sous-algèbre des éléments qui s'écrivent comme produit d'un nombre pair de ces générateurs. Une conséquence de ce fait est que l'algèbre de Hecke alternée n'est pas un quotient du sous-groupe alterné du groupe de tresses (contrairement au cas "non-alterné", où l'algèbre de Hecke est un quotient du groupe de tresses).

Les présentations avec les générateurs reliés aux arêtes du graphe de Coxeter ont la particularité suivante : les relations définissantes pour les algèbres de Hecke alternées sont obtenues à partir des relations définissantes pour les groupes alternés en ne déformant que l'équation caractéristique pour les générateurs (ce phénomène reproduit la situation "non-alternée") ; ce n'est pas le cas pour les présentations à la Bourbaki. De plus, pour le type A (respectivement, B et D), les présentations, avec les générateurs reliés aux arêtes du graphe de Coxeter, des chaînes des extensions spinorielles, des chaînes des algèbres de Hecke alternées et des chaînes des sous-groupes alternés des groupes de tresses sont locales et stationnaires (respectivement, stationnaires retardées).

Organisation et contenu de la thèse

Nous décrivons brièvement l'organisation de la thèse, et indiquons plus précisément les résultats obtenus dans chaque chapitre. Chaque chapitre contient sa propre introduction spécifique. La numérotation des formules redémarre à 0 à chaque Section, et est de la forme "(C.S.f)" pour la formule numéro f de la Section S du Chapitre C. La numérotation des définitions, des lemmes, des propositions, des théorèmes et des corollaires redémarre à 0 à chaque Chapitre, et est de la forme "**C.x**" pour la définition/lemme/... numéro x du Chapitre C.

5. Pour les types A et B, elles ont été définies et étudiées dans [73, 74] ; dans le cas général, une définition peut être trouvée dans [90], mais aucune présentation n'est prouvée, même si des générateurs à la Bourbaki sont identifiés et certaines relations calculées.

Chapitre I. Dans le Chapitre I, nous rappelons quelques définitions et propriétés générales concernant les chaînes d'algèbres (et les chaînes de groupes), car les objets étudiés dans le reste de la thèse rentreront dans ce cadre théorique. Les résultats présentés dans ce Chapitre sont connus. Pour chaque notion, des exemples sont donnés, et nous nous appuyons en particulier sur la chaîne des groupes symétriques.

Nous rappelons la définition de chaînes d'algèbres et de présentations par générateurs et relations, et donnons la définition d'une présentation locale et stationnaire car nous retrouverons ces propriétés tout au long des travaux présentés ci-après. L'information sur les sous-algèbres commmutatives maximales est également présente. Une Section est consacrée aux diagrammes de Bratteli, et nous expliquons leur apparition en théorie des représentations. Enfin, une Section traite de l'algorithme de Coxeter–Todd, et explique son utilisation dans le cas d'une chaîne de groupes.

Chapitre II. Le Chapitre II contient les premiers résultats obtenus dans cette thèse. Il correspond aux articles [A1,A4,A5]. Nous développons une approche inductive pour la théorie des représentations des algèbres de Hecke cyclotomiques $H(m,1,n)$, reposant sur l'étude des analogues d'éléments de Jucys–Murphy. Nous étudions le spectre commun de ces éléments dans les représentations en utilisant les représentations de l'algèbre de Hecke affine la plus simple ; nous prouvons que ce spectre est inclus dans un ensemble en bijection avec l'ensemble des m-tableaux standards.

Puis, les représentations irréductibles de $H(m,1,n)$ sont construites à l'aide d'une nouvelle algèbre associative dont l'espace vectoriel sous-jacent est le produit tensoriel de l'algèbre de Hecke cyclotomique avec l'algèbre associative libre engendrée par les m-tableaux standards. Nous concluons, de façon standard, que toutes les représentations irréductibles sont obtenues dans cette approche, que le spectre commun des éléments de Jucys–Murphy est en bijection avec l'ensemble des m-tableaux standards et nous retrouvons que ces éléments engendrent une sous-algèbre commutative maximale dans $H(m,1,n)$.

Enfin, nous étudions l'analogue de toute la construction dans le cas du groupe de réflexions complexe $G(m,1,n)$ (la limite classique de $H(m,1,n)$). Comme nous l'avons déjà dit plus haut, l'approche de Okounkov et Vershik a déjà été généralisée au produit en couronne d'un groupe fini arbitraire par le groupe symétrique (dont le groupe $G(m,1,n)$ est un cas particulier). Les résultats nouveaux obtenus ici concernent tout d'abord la façon d'obtenir les éléments de Jucys–Murphy pour les groupes $G(m,1,n)$ à partir des éléments de Jucys–Murphy de $H(m,1,n)$. Nous montrons que l'analogue classique cyclotomique (qui dépend de m) de l'algèbre de Hecke affine peut être obtenue par une certaine procédure de limites à partir de l'algèbre de Hecke affine. L'analogue de la construction des représentations semble également être nouvelle au niveau classique. Pour finir, nous discutons les connections entre les opérateurs d'entrelacement de l'algèbre de Hecke affine et les opérateurs d'entrelacement au niveau classique. En particulier, nous montrons que ces derniers peuvent être obtenus comme limite classique de certains opérateurs d'entrelacement (attentivement choisis) de l'algèbre de Hecke affine.

Chapitre III. Dans le Chapitre III, nous étudions tout d'abord l'algèbre $H(m,1,n)$ d'un point de vue plus structurel, avant de retourner à la théorie des représentations en présentant des procédures de fusion. Les résultats présentés dans ce Chapitre ont donné lieu à [A2,A7,A8].

Nous présentons tout d'abord les résultats de l'algorithme de Coxeter–Todd pour la chaîne des

groupes $G(m,1,n)$. La forme normale qui en résulte donne des expressions réduites pour les éléments du groupe, et se généralise en une base de l'algèbre $H(m,1,n)$. Nous donnons la démonstration sans utiliser la théorie des représentations, et écrivons explicitement les formules pour les représentations induites. Nous définissons également une forme symétrisante sur $H(m,1,n)$ à l'aide de cette base.

Nous prouvons ensuite une procédure de fusion pour l'algèbre $H(m,1,n)$ et le groupe $G(m,1,n)$. Un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux deux à deux de l'algèbre $H(m,1,n)$ (respectivement, de l'algèbre du groupe $G(m,1,n)$) sont obtenus par évaluations consécutives d'une fonction rationnelle ; la forme de cette fonction rationnelle est reliée à la forme de l'élément le plus long parmi les éléments de la base présentée précédemment.

Chapitre IV. Dans le Chapitre IV, nous étudions les groupes alternés des groupes de Coxeter, leurs extensions spinorielles, leurs déformations et leurs généralisations au niveau des groupes de tresses. Les résultats présentés ici ont donné lieu à [A3,A6].

Le principal résultat est une nouvelle présentation pour les groupes alternés des groupes de Coxeter. Dans cette présentation, les générateurs sont reliés aux arêtes du graphe de Coxeter. Pour les types A, B et D, nous présentons les résultats de l'algorithme de Coxeter–Todd pour trois présentations du groupe alterné : la présentation à la Bourbaki, la présentation à la Carmichael (généralisée ici pour les types B et D) et la nouvelle présentation. Cela donne trois formes normales différentes pour les éléments des groupes alternés de chaque type.

Ensuite, nous rappelons la définition des algèbres de Hecke alternées, comme la sous-algèbre de l'algèbre de Hecke constituée des éléments de degré 0 pour une certaine graduation. Nous étendons cette définition au cas des algèbres de Hecke avec plusieurs paramètres.

L'idée de la preuve de la présentation à la Bourbaki des groupes alternés est généralisée pour prouver une présentation à la Bourbaki des extensions spinorielles des groupes alternés, des algèbres de Hecke alternés et des sous-groupes alternés des groupes de tresses. Enfin, une présentation avec les générateurs identifiés avec les arêtes du graphe de Coxeter est également donnée pour ces trois objets.

Perspectives de recherche

Nous listons quelques perspectives de recherche, qui se situent dans la continuité des travaux présentés dans cette thèse, et que nous aimerions explorer par la suite.

- La forme symétrisante sur l'algèbre de Hecke cyclotomique est un exemple particulier d'analogue d'une trace de Markov pour les algèbres $H(m,1,n)$. Avec l'aide de la base étudiée dans cette thèse (Chapitre III), et d'une manière similaire à la construction de la forme symétrisante, nous pouvons construire des traces de Markov sur l'algèbre de Hecke cyclotomique. Il serait intéressant de comparer les traces obtenues avec celles déjà existantes et de calculer les poids de ces traces de Markov (ici, la formule de fusion pour les algèbres de Hecke cyclotomiques peut fournir une nouvelle approche au calcul de ces poids). De plus, nous sommes intéressés par la possibilité de définir, avec l'aide de la base, une "espérance conditionnelle" sur l'algèbre de Hecke cyclotomique (et aussi sur l'algèbre de Hecke affine de type A), généralisant ainsi le cas de l'algèbre de Hecke usuelle. Une perspective intéressante est la connection avec d'éventuels analogues, pour l'algèbre

de Hecke cyclotomique et l'algèbre de Hecke affine de type A, des sous-algèbres de Bethe de l'algèbre de Hecke usuelle.

- L'approche que nous avons développée (Chapitre II) pour la théorie des représentations des algèbres de Hecke cyclotomiques est également pertinente pour les algèbres de Hecke affines de type A. Il serait possible de décrire, avec cette méthode, une certaine classe de représentations de l'algèbre de Hecke affine, paramétrisée par les multiplets de partitions tordues. En particulier, la classification de ces représentations de l'algèbre de Hecke affine de rang n proviendra, de manière inductive, de l'étude de l'algèbre de Hecke affine de rang 2 (l'algèbre de Hecke affine non-triviale la plus simple).
- Un objectif futur est de généraliser l'approche décrite ci-dessus pour l'algèbre de Hecke affine de type A aux algèbres de Hecke affines d'autres types. Une étape intermédiaire est la définition et l'étude d'analogues de l'algèbre de Hecke cyclotomique pour tous les types. De nouvelles structures algébriques pourraient émerger, et leurs théories des représentations seront intéressantes à étudier (par exemple, en ce qui concerne les objets combinatoires jouant un rôle analogue aux multiplets de partitions et de partitions tordues).
- Pour le type A (respectivement les types B et D), la chaîne des groupes alternés est munie (Chapitre IV) d'une présentation locale et stationnaire (respectivement, stationnaire retardée). Une question ouverte est de développer, pour ces chaînes de groupes, l'analogue de l'approche inductive de Okounkov et Vershik à la théorie des représentations de la chaîne des groupes symétriques. En particulier, il serait intéressant de trouver de bons analogues des éléments de Jucys–Murphy, et de comprendre quelle serait la structure algébrique remplaçant l'algèbre de Hecke affine dégénérée dans l'étude du spectre de ces éléments. En particulier, cela fournirait une approche à la théorie des représentations des groupes alternés indépendante de la théorie des représentations du groupe symétrique. Les représentations des extensions spinorielles et des déformations (algèbres de Hecke alternées) pourraient aussi être étudiées selon cette approche.
- Pour le groupe de Coxeter de type A - le groupe symétrique-, il existe une déformation plate de l'extension spinorielle (qui peut aussi être vue comme une extension centrale de l'algèbre de Hecke). L'analogue de cette structure existe aussi pour les groupes alternés de type A. Or (Chapitre IV), les extensions spinorielles et les algèbres de Hecke (alternées) existent pour tous les types. Une perspective intéressante est de chercher une déformation plate des extensions spinorielles pour les groupes de Coxeter finis (qui généraliseraient le cas des groupes symétriques). La question se pose de la même façon aux niveaux des groupes alternés.

Liste de publications

[A1] *"On representations of cyclotomic Hecke algebras"*,
O. Ogievetsky and L. Poulain d'Andecy,
Mod. Phys. Lett. A 26 No. 11 (2011) 795-803. arXiv:1012.5844

[A2] *"Fusion formula for the complex reflection groups of type $G(m,1,n)$"*,
O. Ogievetsky and L. Poulain d'Andecy,
(2011) submitted. arXiv:1111.6293

[A3] *"Alternating subgroups of Coxeter groups and their spinor extensions"*,
O. Ogievetsky and L. Poulain d'Andecy,
(2011) submitted. arXiv:1112.6347

[A4] *"On representations of complex reflection groups G(m,1,n)"*,
O. Ogievetsky and L. Poulain d'Andecy,
(2012) submitted. arXiv:1205.3459

[A5] *"Jucys–Murphy elements and representations of cyclotomic Hecke algebras"*,
O. Ogievetsky and L. Poulain d'Andecy,
(2012) submitted. arXiv:1206.0612

[A6] *"Alternating subalgebras of Hecke algebras and alternating subgroups of braid groups"*,
O. Ogievetsky and L. Poulain d'Andecy,
(2012) (in preparation)

[A7] *"Normal form and induced representations of cyclotomic Hecke algebras and affine Hecke algebra of type A"*,
O. Ogievetsky and L. Poulain d'Andecy,
(2012) (in preparation)

[A8] *"Fusion formula for cyclotomic Hecke algebras"*,
O. Ogievetsky and L. Poulain d'Andecy,
(2012) (in preparation)

Chapitre I

Généralités sur les chaînes d'algèbres

Sommaire

I.1 Chaînes d'algèbres **15**
I.1.1 Définitions 15
I.1.2 Présentations locales et stationnaires 17
I.1.3 Règles de branchement 21
I.1.4 Sous-algèbre commutative maximale d'une chaîne d'algèbres 23
Appendice I.1.A Centralisateurs pour la chaîne des groupes symétriques 27
I.2 Diagrammes de Bratteli **28**
I.2.1 Définition 29
I.2.2 Produits de diagrammes de Bratteli 30
I.2.3 Puissances du graphe de Young 32
Appendice I.2.A Diagramme de Bratteli pour la chaîne des groupes symétriques . . . 33
Appendice I.2.B Diagramme de Bratteli pour la chaîne des groupes alternés 34
Appendice I.2.C Carré du graphe de Young 36
I.3 Algorithme de Coxeter–Todd **36**
I.3.1 Principe de l'algorithme 36
I.3.2 Exemple pour la chaine des groupes symétriques 37

Dans ce Chapitre, nous présentons le cadre théorique commun aux objets étudiés par la suite dans cette thèse, à savoir les chaînes ascendantes d'algèbres et de groupes. Ce Chapitre a pour but de rappeler certaines définitions et d'exposer des résultats standards, qui seront ensuite utilisés dans les Chapitres suivants. Il ne contient pas de résultats nouveaux.

Nous rappelons dans la Section I.1 la définition que nous utiliserons de chaînes d'algèbres (ou de groupes), et de présentations par générateurs et relations d'une chaîne d'algèbres. Nous donnons ensuite la définition de présentation locale, de présentation stationnaire et de présentation stationnaire retardée pour une chaîne d'algèbres. Plusieurs exemples de telles chaînes sont présentés. Nous rappelons ensuite ce que sont les règles de branchement d'une algèbre par rapport à une sous-algèbre, et étudions les connections entre les règles de branchement pour une chaîne d'algèbres et les sous-algèbres

commutatives maximales. Certaines parties de cette Section s'appuient sur des définitions inspirées de [100], et sur certains résultats présents dans [86].

Dans la Section I.2, nous présentons des définitions et résultats standards sur les diagrammes de Bratteli et leurs produits, ainsi que leurs connections avec la théorie des représentations des chaînes d'algèbres. Nous traitons en détail le cas du graphe de Young (le diagramme de Bratteli de la chaîne des groupes symétriques) et de ses puissances. Ces résultats seront explicitement utilisés dans le Chapitre II, car les puissances du graphe de Young s'avèreront être les diagrammes de Bratteli associés aux chaînes des algèbres de Hecke cyclotomiques. Nous dessinons, comme exemples, les débuts des diagrammes de Bratteli pour les chaînes des groupes symétriques et des groupes alternés, ainsi que le début du carré du graphe de Young.

La Section I.3 concerne les chaînes de groupes. Nous rappelons le principe de l'algorithme de Coxeter–Todd, qui a été donné dans [22], pour un groupe G et un sous-groupe H, et expliquons comment obtenir, à partir du résultat de l'algorithme, une forme normale pour les éléments du groupe G. Nous illustrons l'utilité de l'algorithme dans le cas de la chaîne des groupes symétriques ; nous expliquons en détail sa réalisation, ainsi que son utilisation pour prouver la présentation standard du groupe symétrique et pour obtenir une forme normale.

Nous travaillerons dans ce Chapitre sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.
Nous notons $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls, et $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers.
Pour un espace vectoriel (complexe) V, notons $End(V)$ l'algèbre des endomorphismes de V.
Nous notons $Mat(n)$, $n \geq 0$, l'algèbre des matrices carrées de taille n avec des entrées complexes.

I.1 Chaînes d'algèbres

I.1.1 Définitions

Nous donnons la définition d'une chaîne ascendante d'algèbres. Comme les chaînes considérées seront toujours ascendantes, nous omettrons très souvent par la suite de le préciser, et parlerons simplement de *chaînes d'algèbres*.

Définition I.1. *Une chaîne (ascendante) d'algèbres est la donnée de :*

(a) *un ensemble d'algèbres* $(\mathfrak{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *;*

(b) *pour tout* $i \in \mathbb{N}$*, un morphisme injectif de* $\mathfrak{A}_i$ *vers* $\mathfrak{A}_{i+1}$*.*

On note la chaîne

$$\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{A}_n \subset \dots \ . \tag{I.1.1}$$

Les chaînes d'algèbres étudiées dans cette thèse vérifieront que $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{C}$ (en particulier, dans ce cas, les algèbres $\mathfrak{A}_i$, $i \in \mathbb{N}$, sont unitales). Dans la suite, nous supposerons donc que cette condition est vérifiée.

Le point (b) de la définition équivaut à dire que $\mathfrak{A}_i$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathfrak{A}_{i+1}$. L'isomorphisme n'est, en général, pas unique ; la spécification de l'isomorphisme, pour tout $i \in \mathbb{N}$, fait partie de la définition.

Une chaîne (ascendante) de groupes :

$$G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n \subset \ldots \tag{I.1.2}$$

est définie de manière similaire. Les chaînes de groupes étudiés dans cette thèse vérifieront toutes que $G_0 = \{e\}$, le groupe réduit à l'élément neutre. Dans la suite de cette Section, nous donnons les définitions pour les chaînes d'algèbres ; les définitions sont similaires dans le cas des chaînes de groupes. L'étude de la chaîne de groupes (I.1.2) peut être remplacée par l'étude de la chaîne des algèbres de groupes

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{C}G_1 \subset \cdots \subset \mathbb{C}G_n \subset \ldots \tag{I.1.3}$$

(Rappelons que l'algèbre $\mathbb{C}G$ d'un groupe G est formée par l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de G à coefficients complexes ; la loi de multiplication dans $\mathbb{C}G$ provient de la loi de multiplication de G étendue par linéarité.)

Présentations par générateurs et relations d'une chaîne d'algèbres. Soit $\mathfrak{F}$ l'algèbre libre (sur $\mathbb{C}$) engendrée par des éléments $a_1, \ldots, a_k$ (une base de $\mathfrak{F}$ est constituée par les mots en $a_1, \ldots, a_k$, et la multiplication dans $\mathfrak{F}$ provient de la concaténation des mots étendues par linéarité). Soit R un ensemble d'éléments de $\mathfrak{F}$. Par définition, on dit qu'une algèbre $\mathfrak{A}$ est engendrée par les éléments $a_1, \ldots, a_k$ avec l'ensemble de relations définissantes R lorsque $\mathfrak{A}$ est isomorphe au quotient de $\mathfrak{F}$ par l'idéal engendré par les éléments de R. Nous dirons souvent que $\mathfrak{A}$ est l'algèbre engendrée par les éléments $a_1, \ldots, a_k$ avec les relations définissantes :

$$r = 0 \quad \text{pour } r \in R\ .$$

La donnée des éléments $a_1, \ldots, a_k$ et de l'ensemble R est appelée une présentation par générateurs et relations (ou, par abus de langage, une présentation) de l'algèbre $\mathfrak{A}$.

Définition I.2. *Soient un ensemble d'éléments $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, et une chaîne d'ensembles*

$$\varnothing \subset R_1 \subset \cdots \subset R_n \subset \ldots, \tag{I.1.4}$$

telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble R_i est un ensemble formé par des combinaisons linéaires (à coefficient complexes) de mots en les éléments $x_1, \ldots, x_i$.

La donnée de l'ensemble $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et de la chaîne (I.1.4) est une présentation (par générateurs et relations) de la chaîne d'algèbres

$$\mathbb{C} \subset \mathfrak{A}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{A}_n \subset \ldots$$

lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) *pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}_i$ est isomorphe à l'algèbre engendrée par $x_1, \ldots, x_i$ avec l'ensemble de relations définissantes R_i ;*

(b) *pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}_i$ est isomorphe à la sous-algèbre de $\mathfrak{A}_{i+1}$ engendrée par $x_1, \ldots, x_i$.*

Remarques. **(i)** A priori, la notation pour les générateurs $x_1, \ldots, x_i$ devrait être différente selon que ces éléments sont considérés comme des éléments de l'algèbre $\mathfrak{A}_i$, ou de l'algèbre $\mathfrak{A}_{i+1}$, ou de l'algèbre $\mathfrak{A}_{i+2}$, etc. La notation dans la définition ci-dessus ne prête pas à confusion, et est donc justifiée, seulement lorsque la condition (b) de la définition est vérifiée.

(ii) Dans cette remarque, nous donnons un exemple montrant que, en général, la condition (b) de la définition ci-dessus n'est pas automatiquement vérifiée. Soit A_1 l'algèbre engendrée par un élément $\tilde{x}$ avec la relation définissante

$$\tilde{x}^4 = 1 \ ,$$

et soit A_2 l'algèbre engendrée par deux éléments x, y avec les relations définissantes

$$x^4 = 1 \ , \quad yxy^3 = 1 \ \text{ et } \ y^4 = 1 \ .$$

Il est facile de vérifier que l'appplication $\tilde{x} \mapsto y$ définit un morphisme injectif de A_1 dans A_2. Donc, $\mathbb{C} \subset A_1 \subset A_2$ est le début d'une chaîne d'algèbres.

Par contre, les relations définissantes de l'algèbre A_2 impliquent que $yx = y^{-3}$ et ensuite, en multipliant par la gauche par y^3, que $x = 1$. Ainsi, dans cet exemple, l'algèbre A_1 n'est pas isomorphe à la sous-algèbre de A_2 engendrée par l'élément x.

(iii) On peut considérer le cas où l'on ne rajoute pas qu'un seul générateur à chaque étage de la chaîne, mais un nombre arbitraire de générateurs. C'est-à-dire que l'on considère une chaîne d'ensembles :

$$\varnothing \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \ldots ,$$

et une chaîne d'ensembles

$$\varnothing \subset R_1 \subset \cdots \subset R_n \subset \ldots$$

telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble R_i est un ensemble formé par des combinaisons linéaires de mots en les éléments de X_i. La donnée des deux chaînes ci-dessus est une présentation par générateurs et relations de la chaîne d'algèbres

$$\mathbb{C} \subset \mathfrak{A}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{A}_n \subset \ldots$$

lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}_i$ est isomorphe à l'algèbre engendrée par les éléments de X_i avec l'ensemble de relations définissantes R_i ;

(b) pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}_i$ est isomorphe à la sous-algèbre de $\mathfrak{A}_{i+1}$ engendrée par les éléments de X_i.

La situation de la définition I.2 correspond au cas où $X_i = \{x_1, \ldots, x_i\}$, $i \in \mathbb{N}$. Il est facile d'adapter les définitions ci-dessous à la situation plus générale présentée dans cette remarque.

I.1.2 Présentations locales et stationnaires

Soit une chaîne d'algèbres

$$\mathfrak{A}_0 = \mathbb{C} \subset \mathfrak{A}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{A}_n \subset \ldots \tag{I.1.5}$$

Nous noterons symboliquement par $\{R\}$ une chaîne de relations, comme dans (I.1.4), pour la chaîne (I.1.5).

Définition I.3. *Une présentation par générateurs et relations, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{R\}$, de la chaîne d'algèbres (I.1.5) est locale lorsqu'il existe un entier non-négatif k_0 tel que, pour tout $i = 1, 2, \ldots$, on ait :*

$$x_i x_{i+k} = x_{i+k} x_i \qquad \textit{pour tout } k \textit{ tel que } k > k_0.$$

Prenons pour k_0 le plus petit entier non-négatif vérifiant la propriété ci-dessus. On dit que la présentation est locale de profondeur k_0.

Par exemple, toute présentation d'une chaîne d'algèbres commutatives est locale de profondeur 0.

Définition I.4. *Une présentation par générateurs et relations, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{R\}$, de la chaîne d'algèbres (I.1.5) est stationnaire lorsque pour tout $p, q \in \mathbb{N}$:*

l'ensemble R_p, dans lequel on effectue les remplacements $x_1 \mapsto x_{1+q}$, $\ldots$, $x_p \mapsto x_{p+q}$, coïncide avec l'ensemble $R_{p+q} \backslash R_q$ (en d'autres mots, les relations concernant les générateurs $x_1, \ldots, x_p$ ont la même forme que les relations concernant les générateurs $x_{1+q}, \ldots, x_{p+q}$).

Nous distinguons la notion de présentation stationnaire de la notion plus forte (voir Remarque **(i)** ci-dessous) de chaîne stationnaire.

Définition I.5. *Une chaîne (I.1.5), munie d'une certaine présentation par générateurs et relations, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{R\}$, est stationnaire lorsque pour tout $p, q \in \mathbb{N}$:*

l'algèbre $\mathfrak{A}_p$ est isomorphe à la sous-algèbre de $\mathfrak{A}_{p+q}$ engendrée par $x_{1+q}, \ldots, x_{p+q}$.

On dit que la présentation munit la chaîne d'algèbres d'une structure de chaîne stationnaire.

Remarques. (i) Supposons qu'une présentation, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{R\}$, munit une chaîne d'algèbres d'une structure de chaîne stationnaire. Ceci implique que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, les relations définissantes concernant les générateurs $x_1, \ldots, x_p$ sont vérifiées lorsqu'on effectue les remplacements $x_1 \mapsto x_{1+q}$, $\ldots$, $x_p \mapsto x_{p+q}$. Inversement, les relations définissantes concernant les générateurs $x_{1+q}, \ldots, x_{p+q}$ sont vérifiées lorsqu'on effectue les remplacements $x_{1+q} \mapsto x_1$, $\ldots$, $x_{p+q} \mapsto x_p$. Ainsi, il est facile de voir que, quitte à rajouter des relations définissantes qui ne modifient pas les structures d'algèbres, il est possible d'obtenir une présentation stationnaire (en gardant les mêmes générateurs).

(ii) La réciproque de la remarque précédente n'est pas vraie en général. En effet, une présentation stationnaire ne munit pas forcément la chaîne d'une structure de chaîne stationnaire. Par exemple, prenons l'algèbre A_1 engendrée par un élément $\tilde{x}$ avec la relation définissante

$$\tilde{x}^4 = 1 \ .$$

Soit l'algèbre A_2 engendrée par des éléments x et y avec les relations définissantes

$$x^4 = 1, \quad y^4 = 1, \quad xy^2x^3 = y \ .$$

On peut vérifier que l'algèbre A_1 est isomorphe à la sous-algèbre de A_2 engendrée par x. Mais, bien que la relation concernant seulement le générateur x et la relation concernant seulement le générateur y soient les mêmes, il n'est pas vraie que la sous-algèbre de A_2 engendrée par y est isomorphe à A_1. En effet, nous avons, dans l'algèbre A_2, $y^2 = xy^4x^{-1} = 1$.

Les notions de stationnarité peuvent être affaiblies quelque peu, pour prendre en compte la situation où la stationnarité n'est effective qu'à partir d'un certain niveau de la chaîne.

Définition I.6. *Une présentation par générateurs et relations, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{R\}$, de la chaîne d'algèbres (I.1.5) est stationnaire retardée lorsque il existe un entier non-négatif r tel que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on ait :*
l'ensemble $R_{r+p}\backslash R_r$, dans lequel on effectue les remplacements $x_{r+1} \mapsto x_{r+1+q}$, ..., $x_{r+p} \mapsto x_{r+p+q}$, coïncide avec l'ensemble $R_{r+p+q}\backslash R_{r+q}$ (en d'autres mots, les relations concernant les générateurs $x_{r+1}, \ldots, x_{r+p}$ ont la même forme que les relations concernant les générateurs $x_{r+1+q}, \ldots, x_{r+p+q}$).

Prenons pour r le plus petit entier non-négatif vérifiant la propriété ci-dessus. On dit que la présentation est stationnaire retardée de retard r.

Définition I.7. *Une chaîne (I.1.5), munie d'une certaine présentation par générateurs et relations, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{R\}$, est stationnaire retardée lorsque il existe un entier non-négatif r tel que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on ait :*
les sous-algèbres de $\mathfrak{A}_{r+p+q}$ engendrées respectivement par $x_{r+1}, \ldots, x_{r+p}$, et par $x_{r+1+q}, \ldots, x_{r+p+q}$, sont isomorphes.

Prenons pour r le plus petit entier non-négatif vérifiant la propriété ci-dessus. On dit que la présentation munit la chaîne d'algèbres d'une structure de chaîne stationnaire retardée de retard r.

La notion de stationnarité retardée avec un retard égal à 0 correspond simplement à la notion de stationnarité. Les deux remarques suivant la Définition I.5 se généralisent tout de suite à la notion de stationnarité retardée.

Exemples. **(a)** Le groupe de Coxeter de type A, A_n [1], (*i.e.* le groupe symétrique S_{n+1}) est engendré par les éléments $s_1, \ldots, s_n$ avec les relations définissantes :

$$\begin{aligned} &s_i^2 = 1 && \text{pour } i = 1, \ldots, n, \\ &s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} && \text{pour } i = 1, \ldots, n-1, \\ &s_i s_j = s_j s_i && \text{pour } i, j = 1, \ldots, n \text{ tels que } |i-j| > 1. \end{aligned} \tag{I.1.6}$$

Il est connu que le sous-groupe de A_n engendré par $s_1, \ldots, s_{n-1}$ est isomorphe à A_{n-1} [2] (nous en donnons une preuve s'appuyant sur l'algorithme de Coxeter–Todd à la fin de ce Chapitre). Ainsi, on obtient une présentation de la chaîne des groupes symétriques. Cette présentation est stationnaire et locale de profondeur 1. De plus, il s'avère que la chaîne des groupes symétriques, munie de cette présentation, est stationnaire (voir également fin du Chapitre).

(b) L'algèbre de Hecke de type A, H_n, est une déformation, à un paramètre q, de l'algèbre du groupe de Coxeter de type A. L'algèbre H_n est engendrée par les éléments $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ avec les relations

1. La notation A_n est souvent utilisée pour le sous-groupe alterné du groupe symétrique ; dans cette thèse, pour la cohérence avec le dernier Chapitre, nous noterons toujours par A_n^+ le sous-groupe alterné.

2. L'isomorphisme entre le groupe engendré par les éléments $s_1, \ldots, s_n$ avec les relations définissantes (I.1.6) et le groupe des permutations d'un ensemble à $n+1$ éléments est donné par $s_i \mapsto (i, i+1)$, où $(i, i+1)$ est la transposition de i et $i+1$; on peut voir ainsi que le plongement de A_{n-1} dans A_n (*i.e.* de S_n dans S_{n+1}) défini dans cet exemple coïncide avec celui évoqué dans le paragraphe **2.** de l'Introduction générale.

définissantes :

$$\begin{aligned}
&\sigma_i^2 = (q-q^{-1})\sigma_i + 1 && \text{pour } i = 1,\dots,n,\\
&\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} && \text{pour } i = 1,\dots,n-1,\\
&\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i && \text{pour } i,j = 1,\dots,n \text{ tels que } |i-j| > 1.
\end{aligned} \tag{I.1.7}$$

La sous-algèbre de H_n engendrée par les éléments $\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$ est isomorphe à H_{n-1} (voir exemple ci-dessous pour $m = 1$). Ainsi, on obtient une présentation de la chaîne des algèbres de Hecke de type A. Cette présentation est stationnaire et locale de profondeur 1. De plus, il s'avère que la chaîne des des algèbres de Hecke de type A, munie de cette présentation, est stationnaire.

(c) Les algèbres de Hecke cyclotomiques, $H(m,1,n)$, sont des déformations des algèbres des groupes de réflexions complexes de type $G(m,1,n)$. Pour $m = 1$, l'algèbre $H(1,1,n)$ est l'algèbre de Hecke de type A, H_{n-1}, et pour $m = 2$, l'algèbre $H(2,1,n)$ est l'algèbre de Hecke de type B. L'algèbre $H(m,1,n)$ est engendrée par les éléments $\tau,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$ avec les relations définissantes :

$$\begin{aligned}
&(\tau - v_1)\dots(\tau - v_m) = 0\ ,\\
&\sigma_i^2 = (q-q^{-1})\sigma_i + 1 && \text{pour } i = 1,\dots,n-1,\\
&\tau\sigma_1\tau\sigma_1 = \sigma_1\tau\sigma_1\tau\ ,\\
&\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} && \text{pour } i = 1,\dots,n-2,\\
&\tau\sigma_i = \sigma_i\tau && \text{pour } i > 1,\\
&\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i && \text{pour } i,j = 1,\dots,n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1.
\end{aligned} \tag{I.1.8}$$

Les paramètres $q, v_1,\dots,v_m$ sont les paramètres de déformation. La chaîne des algèbres $H(m,1,n)$ est le principal objet d'étude des deux Chapitres suivants. La sous-algèbre de $H(m,1,n)$ engendrée par les éléments $\tau,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$ est isomorphe à l'algèbre $H(m,1,n-1)$ (une démonstration de ce résultat connu est présente dans le Chapitre III). Ainsi, on obtient une présentation de la chaîne des algèbres de Hecke cyclotomiques. Cette présentation est locale de profondeur 1 et stationnaire retardée de retard 1. De plus, il s'avère que la chaîne des des algèbres de Hecke cyclotomiques, munie de cette présentation, est stationnaire retardée de retard 1 (voir également Chapitre III).

(d) Soit $\mathfrak{sl}_n$ l'algèbre de Lie de type A_{n-1} : c'est l'algèbre de Lie des matrices carrées de taille n et de trace nulle. L'algèbre universelle enveloppante $U(\mathfrak{sl}_n)$ est engendrée par les éléments e_i, h_i, f_i, $i = 1,\dots,n-1$ avec les relations définissantes

$$\begin{aligned}
&[e_i,f_j] = \delta_{ij}h_i,\quad h_ih_j = h_jh_i && \text{pour } i,j = 1,\dots,n-1,\\
&[h_i,e_j] = \begin{cases} 2e_j & \text{si } i = j,\\ -e_j & \text{si } |i-j| = 1,\\ 0 & \text{si } |i-j| > 1,\end{cases} && \text{and}[h_i,f_j] = \begin{cases} -2f_j & \text{si } i = j,\\ f_j & \text{si } |i-j| = 1,\\ 0 & \text{si } |i-j| > 1,\end{cases}\\
&e_i^2e_j - 2e_ie_je_i + e_je_i^2 = 0 && \text{si } |i-j| = 1,\\
&f_i^2f_j - 2f_if_jf_i + f_jf_i^2 = 0 && \text{si } |i-j| = 1,\\
&[e_i,e_j] = 0,\quad [f_i,f_j] = 0 && \text{si } |i-j| > 1,
\end{aligned} \tag{I.1.9}$$

où δ_{ij} est le delta de Kronecker, et $[a, b]$ représente le commutateur de deux éléments, $[a, b] := ab - ba$. Grâce au théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt, on peut montrer que la sous-algèbre de $U(\mathfrak{sl}_n)$ engendrée par les éléments e_i, h_i, f_i, $i = 1, \ldots, n-2$ est isomorphe à $U(\mathfrak{sl}_{n-1})$. Ainsi, on obtient une présentation de la chaîne des algèbres $U(\mathfrak{sl}_n)$. Cette présentation est stationnaire et locale de profondeur 1. De plus, il s'avère que la chaîne des algèbres $U(\mathfrak{sl}_n)$, munie de cette présentation, est stationnaire (ceci est encore une conséquence du théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt). Notons que c'est un exemple de présentation d'une chaîne d'algèbres où l'on rajoute à chaque étage plusieurs générateurs.

I.1.3 Règles de branchement

Nous considérons dans cette Sous-Section les règles de branchement d'une algèbre semi-simple vers une sous-algèbre semi-simple. Nous reviendrons à la situation des chaînes d'algèbres dans la prochaine Sous-Section. Par commodité, nous allons nous restreindre aux algèbres semi-simples de dimension finie.

Nous rappelons une définition possible de la semi-simplicité d'une algèbre de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$.

Définition I.8. *Une algèbre $\mathfrak{A}$ de dimension finie, sur le corps $\mathbb{C}$, est semi-simple lorsque tout module sur $\mathfrak{A}$ (*i.e. *toute représentation de $\mathfrak{A}$) peut se décomposer en somme directe de modules simples (*i.e. *de représentations irréductibles).*

Pour comprendre la théorie des représentations d'une algèbre semi-simple de dimension finie sur $\mathbb{C}$, il suffit donc de considérer les représentations irréductibles. De plus, la structure de l'algèbre est encodée dans l'ensemble de ses représentations irréductibles. En effet, on a le théorème suivant, qui est un cas particulier du théorème d'Artin–Wedderburn,

Théorème I.9. *Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre semi-simple de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$. On a l'isomorphisme d'algèbres*

$$\mathfrak{A} \cong \bigoplus_k End(V_k) \ , \tag{I.1.10}$$

où la somme directe porte sur les représentations irréductibles non-isomorphes deux à deux de $\mathfrak{A}$.

Une algèbre semi-simple de dimension finie est donc une algèbre multi-matricielle, c'est-à-dire une algèbre qui se décompose en une somme directe d'algèbres matricielles, voir [30]. D'après le théorème, tout élément $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{A}$ peut être vu, par l'isomorphisme (I.1.10), comme une matrice par blocs de taille $\sum_k dim(V_k)$; chaque bloc sur la diagonale correspond à un terme de la somme (I.1.10), et est l'image de $\mathfrak{a}$ dans la représentation irréductible correspondante ; les blocs hors de la diagonale sont nuls.

Soient A une algèbre semi-simple et B une sous-algèbre semi-simple de A. Toute représentation irréductible de A se décompose par rapport à B, c'est-à-dire se décompose en somme directe de représentations irréductibles de B. Ces décompositions sont appelées les règles de branchement pour la paire (A, B).

Définition I.10. *On dit que les règles de branchement pour la paire (A, B) sont simples (ou sans multiplicité) lorsque, dans la décomposition de toute représentation irréductible de A, chaque représentation irréductible de B apparait avec la multiplicité égale à 0 ou 1.*

Rappelons que le centralisateur de B dans A est l'ensemble des éléments de A qui commutent avec tous les éléments de B. C'est une sous-algèbre de A que nous notons $\mathcal{Z}_A(B)$. Il existe une caractérisation de la simplicité des règles de branchement pour la paire (A, B) en termes de $\mathcal{Z}_A(B)$.

Proposition I.11. *Soient une algèbre A semi-simple de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et B une sous-algèbre semi-simple de A.*
Les règles de branchement pour la paire (A, B) sont simples si et seulement si le centralisateur $\mathcal{Z}_A(B)$ est commutatif.

Nous présentons une preuve de ce résultat connu, en utilisant le Lemme de Schur :

Lemme I.12. *Soient $\rho : A \to End(V)$ et $\rho' : A \to End(V')$ deux représentations irréductibles de l'algèbre A. Soit X un opérateur d'entrelacement entre ces deux représentations, c'est-à-dire tel que $\rho(a)X = X\rho'(a)$ pour tout $a \in A$. On a alors :*
- *Si ρ et ρ' sont non-isomorphes comme représentations de A, alors $X = 0$.*
- *si ρ et ρ' sont isomorphes, alors on les identifie et on a $X = \lambda \cdot \mathrm{Id}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, où Id est l'endomorphisme identité de V.*

Preuve de la Proposition. Supposons que les règles de branchement de la paire (A, B) soient simples. Soit V une représentation irréductible de A de dimension n. Dans la représentation V, il existe une base telle que les éléments de B sont représentés par des matrices diagonales par blocs, de la forme :

$$\begin{pmatrix} (\dots) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (\dots) \end{pmatrix} \qquad \text{(les 0 représentent des blocs nuls).} \tag{I.1.11}$$

Les blocs correspondent aux représentations irréductibles de B intervenant dans la décomposition de V. Par hypothèse, ces représentations sont non-isomorphes 2 à 2. D'après le lemme de Schur, les seuls éléments dans $End(V)$ qui commutent avec tous les éléments de la forme (I.1.11) sont les matrices diagonales, où les valeurs sur la diagonale sont constantes dans chaque bloc. Donc les éléments de $\mathcal{Z}_A(B)$ commutent entre eux dans toute représentation irréductible V de A. D'après l'isomorphisme (I.1.10), cela implique que le centralisateur $\mathcal{Z}_A(B)$ est commutatif.

Réciproquement, supposons que les règles de branchement de la paire (A, B) ne soient pas simples. Il existe donc une représentation irréductible V de A telle que, dans la décomposition de V par rapport à B, une représentation irréductible $\rho : B \to End(W)$ apparait avec la multiplicité au moins égale à 2. Dans la représentation V, en se restreignant à un sous-espace isomorphe à $W \oplus W$ (qui existe par hypothèse), il existe une base telle que tout élément x de B a pour image :

$$\begin{pmatrix} \rho(x) & 0 \\ 0 & \rho(x) \end{pmatrix}.$$

Par le lemme de Schur, dans cette base de $W \oplus W$, les éléments de A qui commutent avec toutes les images d'éléments de B sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha \cdot \mathrm{Id} & \beta \cdot \mathrm{Id} \\ \gamma \cdot \mathrm{Id} & \delta \cdot \mathrm{Id} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \tag{I.1.12}$$

où Id est l'endomorphisme identité de W. Les éléments (I.1.12) forment une algèbre isomorphe à l'algèbre des matrices carrées de taille 2, qui est une algèbre non-commutative. Ainsi, $\mathcal{Z}_A(B)$ n'est pas commutatif. □

Exemple. La Proposition I.11 relie une information sur la théorie des représentations à un résultat structurel sur l'algèbre A et sa sous-algèbre B. Nous illustrons son utilité sur l'exemple de la chaîne des algèbres des groupes symétriques dans l'Appendice I.1.A à cette Section. Nous rappelons une preuve connue [86] du fait que le centralisateur $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}S_n}(\mathbb{C}S_{n-1})$ est commutatif pour tout $n \geq 1$, ce qui implique la simplicité des règles de branchement pour la chaîne des groupes symétriques.

I.1.4 Sous-algèbre commutative maximale d'une chaîne d'algèbres

Sous-algèbre commutative maximale d'une algèbre. Considérons une algèbre semi-simple $\mathfrak{A}$ de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Pour toute représentation irréductible V_k de $\mathfrak{A}$, notons p_k l'élément de $\mathfrak{A}$ qui est l'image de l'endomorphisme identité de V_k par l'isomorphisme (I.1.10) [3]. L'élément p_k appartient au centre de $\mathfrak{A}$ et l'opérateur de multiplication (à gauche ou à droite) par cet élément est un projecteur de $\mathfrak{A}$ sur sa sous-algèbre isomorphe à $End(V_k)$: $p_k\mathfrak{A} \cong End(V_k)$; ainsi, on a

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_k p_k\mathfrak{A} \ ,$$

où la somme directe porte sur les représentations irréductibles non-isomorphes deux à deux de $\mathfrak{A}$.

Les éléments p_k forment un ensemble complet d'idempotents centraux orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire qu'ils vérifient les relations $p_ip_j = \delta_{ij}p_i$ et $\sum_k p_k = 1$. De plus, l'ensemble des éléments p_k, pour k parcourant l'ensemble des représentations irréductibles non-isomorphes deux à deux de $\mathfrak{A}$, forment une base du centre de $\mathfrak{A}$. Par la suite, nous allons très souvent identifier les sous-algèbres $p_k\mathfrak{A}$ avec les blocs $End(V_k)$, et pour la simplicité de l'exposé, nous omettrons la référence à l'isomorphisme (I.1.10).

Remarque. Les éléments p_k ne sont pas en général des idempotents primitifs. En effet, si la représentation irréductible V_k est de dimension supérieure ou égale à 2, alors l'élément p_k peut se décomposer en une somme d'idempotents orthogonaux deux à deux :

$$p_k = p_{k,1} + p_{k,2} + \cdots + p_{k,dim(V_k)} \quad \text{avec } p_{k,i_k}p_{k,j_k} = \delta_{i_k,j_k}p_{k,i_k} \text{ pour tout } i_k, j_k = 1, \ldots, dim(V_k).$$

3. Du point de vue "multi-matriciel", l'élément p_k est la matrice constituée de 0 partout sauf dans le bloc correspondant à la représentation V_k, où il contient la matrice identité de taille $dim(V_k)$. Ce point de vue permet de vérifier immédiatement les propriétés données ici des éléments p_k.

Il suffit de prendre pour les p_{k,i_k}, $i_k = 1, \ldots, dim(V_k)$, les idempotents associés aux vecteurs de base pour une base quelconque de V_k [4]. L'ensemble des p_{k,i_k}, k labellisant les représentations irréductibles de $\mathfrak{A}$ non-isomorphes deux à deux, et $i_k = 1, \ldots, dim(V_k)$, forment un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux deux à deux ; ils consituent une base d'une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}$. En particulier, on voit que le centre de $\mathfrak{A}$ (dont une base est formée par les éléments p_k) est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}$ si et seulement si l'algèbre $\mathfrak{A}$ est commutative (car dans ce cas les représentations irréductibles sont de dimension 1). $\square$

Fixons maintenant une base dans chaque représentation irréductible V_k, ce qui donne une base pour l'écriture multi-matricielle d'un élément de $\mathfrak{A}$ (notons que la forme des projecteurs p_i ne dépend pas du choix de cette base). L'ensemble des matrices diagonales dans cette base forment une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}$. On va noter une telle algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{A}}$ (elle dépend des bases choisies).

Reprenons A et B comme dans la Proposition I.11 : A est une algèbre semi-simple de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et B est une sous-algèbre semi-simple de A. Ecrivons

$$A = \bigoplus_{i=1}^{x_A} a_i A \cong \bigoplus_{i=1}^{x_A} End(W_i) \quad \text{et} \quad B = \bigoplus_{\alpha=1}^{x_B} b_\alpha B \cong \bigoplus_{\alpha=1}^{x_B} End(U_\alpha),$$

où les sommes directes portent sur l'ensemble des représentations irréductibles non-isomorphes deux à deux de A (respectivement, de B), et x_A (respectivement, x_B) est le cardinal de cet ensemble. L'élément a_i (respectivement, b_α) est le projecteur central associé à W_i (respectivement, à U_α), comme expliqué plus haut. Notons d_i la dimension de W_i et d_α la dimension de U_α.

Soit $\mu_{\alpha i}$ la multiplicité de U_α dans la décomposition de W_i en somme de représentations irréductibles de B. La donnée des nombres entiers positifs $\mu_{\alpha i}$ équivaut à connaitre les règles de branchement pour la paire (A, B). On a, par définition des nombres $\mu_{\alpha i}$,

$$d_i = \sum_\alpha \mu_{\alpha i} d_\alpha \ .$$

Notons $\mathcal{D}_B$ la sous-algèbre commutative maximale de B constituée, du point de vue multi-matriciel pour B, par les matrices diagonales dans une base quelconque. Fixons une base de A compatible avec la restriction par rapport à B ; c'est-à-dire, telle que chaque bloc $a_i A$ se décompose en sous-blocs lorsque l'on se restreint à B, ces sous-blocs correspondant aux représentations irréductibles de B (celles qui interviennent dans la décomposition de $a_i A$). Notons $\mathcal{D}_A$ la sous-algèbre commutative maximale de A constituée des matrices diagonales dans cette base.

Soit $\mathcal{Z}_A$ le centre de A, et soit $\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A \rangle$ la sous-algèbre de A engendrée par l'union des sous-algèbres $\mathcal{D}_B$ et $\mathcal{Z}_A$.

Lemme I.13. *Les sous-algèbres $\mathcal{D}_A$ et $\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A \rangle$ coïncident si et seulement si les règles de branchement pour la paire (A, B) sont simples.*

4. Du point de vue "multi-matriciel", l'élément p_{k,i_k}, $i_k \in \{1, \ldots, dim(V_k)\}$, est la matrice constituée de 0 partout sauf dans le bloc correspondant à la représentation V_k, où il contient la matrice diagonale de taille $dim(V_k)$ avec un 1 en i_k-ème position et des 0 partout ailleurs.

Preuve. Nous commençons par prouver les formules suivantes :

$$dim(\mathcal{D}_A) = \sum_{i=1}^{x_A} d_i = \sum_{i=1}^{x_A} \sum_{\alpha=1}^{x_B} \mu_{\alpha i} d_\alpha \ , \tag{I.1.13}$$

$$dim(\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A \rangle) = \sum_{i=1}^{x_A} dim(a_i \mathcal{D}_B) = \sum_{i=1}^{x_A} \sum_{\substack{\alpha \text{ tels que} \\ \mu_{\alpha i} \neq 0}} d_\alpha \ , \tag{I.1.14}$$

La formule (I.1.13) est immédiate.

En ce qui concerne (I.1.14), la première égalité vient de :

$$\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A \rangle = \bigoplus_{i=1}^{x_A} a_i \mathcal{D}_B \ ; \tag{I.1.15}$$

ceci est une conséquence directe du fait que les projecteurs a_i forment une base de $\mathcal{Z}_A$. La sous-algèbre $a_i\mathcal{D}_B$ est la projection de l'algèbre $\mathcal{D}_B$ dans le bloc a_iA.

Il reste à prouver la deuxième égalité de (I.1.14). Fixons $i \in \{1, \ldots, x_A\}$, et soit $\alpha \in \{1, \ldots, x_B\}$ tel que $\mu_{\alpha i} \neq 0$. Considérons les éléments de $a_i\mathcal{D}_B$ qui ont pour écriture multi-matricielle les matrices formées de 0 partout, sauf dans le sous-bloc de a_iA de taille $\mu_{\alpha i} d_\alpha$ correspondant à la somme directe de $\mu_{\alpha i}$ copies de la représentation U_α. De plus, dans ce bloc, considérons les éléments qui ont la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} D & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & D \end{pmatrix}, \tag{I.1.16}$$

où $D \in b_\alpha \mathcal{D}_B$ est une matrice carrée diagonale de taille d_α, et il y a $\mu_{\alpha i}$ blocs D. Tout élément de $a_i\mathcal{D}_B$ est une combinaison linéaire d'éléments décrits ci-dessus, avec α parcourant $\{1, \ldots, x_B\}$ tout en vérifiant $\mu_{\alpha i} \neq 0$. De plus, il est immédiat que deux de ces éléments sont indépendants lorsqu'ils correspondent à deux α différents. En conclusion pour chaque α tel que $\mu_{\alpha i} \neq 0$, il y a une contribution à la dimension de $a_i\mathcal{D}_B$ égale à d_α. Ceci termine la preuve de la formule (I.1.14).

En comparant les formules (I.1.13) et (I.1.14), on voit que les dimensions de $\mathcal{D}_A$ et de $\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A \rangle$ sont égales si et seulement si les multiplicités $\mu_{\alpha i}$ sont égales à 0 ou 1. Comme de plus, $\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A \rangle$ est contenue dans $\mathcal{D}_A$, ces 2 algèbres coïncident si et seulement si les nombres $\mu_{\alpha i}$ appartiennent à l'ensemble $\{0, 1\}$. □

Retour au cas d'une chaîne d'algèbres. Soit la chaîne d'algèbres semi-simples de dimensions finies

$$\mathfrak{A}_0 := \mathbb{C} \subset \mathfrak{A}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{A}_n \subset \ldots \tag{I.1.17}$$

On dit que les règles de branchement de la chaîne sont simples si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, les règles de branchement pour la paire $(\mathfrak{A}_{i+1}, \mathfrak{A}_i)$ sont simples. Le résultat suivant relie la simplicité des règles de branchement avec une information sur les algèbres commutatives maximales [86].

Proposition I.14. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout $k \geq 0$, la sous-algèbre engendrée par l'union des centres des $\mathfrak{A}_i$, $i = 0, \ldots, k$, est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}_k$.*

(ii) *Les règles de branchement de la chaîne (I.1.17) sont simples.*

(iii) *Pour tout $k \geq 1$, la sous-algèbre engendrée par l'union des centres des $\mathfrak{A}_i$, $i = 0, \ldots, k$, coïncide avec la sous-algèbre engendrée par l'union des centralisateurs $\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}_i}(\mathfrak{A}_{i-1})$, $i = 1, \ldots, k$.*

Preuve. Supposons que (i) est vérifiée. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'assertion dans (i) pour $k = n$ et pour $k = n+1$ implique, par le Lemme (I.1.15), que les règles de branchement pour la paire $(\mathfrak{A}_{n+1}, \mathfrak{A}_n)$ sont simples. Donc, les règles de branchement de la chaîne (I.1.17) sont simples.

Supposons maintenant que (ii) est vérifiée. Nous prouvons (i) par récurrence sur k. La base de récurrence, pour $k = 0$, est triviale car $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{C}$ est commutative. Supposons que la sous-algèbre engendrée par l'union des centres des $\mathfrak{A}_i$, $i = 0, \ldots, k$, est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}_k$. Alors, comme les règles de branchement pour la paire $(\mathfrak{A}_{k+1}, \mathfrak{A}_k)$ sont simples, on obtient par le Lemme I.1.15 que la sous-algèbre engendrée par l'union des centres des $\mathfrak{A}_i$, $i = 0, \ldots, k+1$, est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}_{k+1}$.

L'équivalence entre (ii) et (iii) est une conséquence de l'équivalence entre (i) et (ii) et de la Proposition I.11. Tout d'abord (ii) implique (iii). En effet, Supposons que les règles de branchement de la chaîne (I.1.17) sont simples, et soit $k \geq 1$. D'après la Proposition I.11, la sous-algèbre engendrée par l'union des centralisateurs $\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}_i}(\mathfrak{A}_{i-1})$, $i = 1, \ldots, k$ est commutative. De plus, elle contient, par définition, la sous-algèbre engendrée par l'union des centres des $\mathfrak{A}_i$, $i = 0, \ldots, k$, qui est une sous-algèbre commutative maximale d'après l'équivalence entre (i) et (ii). Donc, les deux sous-algèbres coïncident.

Enfin, (iii) implique (ii). En effet, si pour tout $k \geq 1$, la sous-algèbre engendrée par l'union des centres des $\mathfrak{A}_i$, $i = 0, \ldots, k$, coïncide avec la sous-algèbre engendrée par l'union des centralisateurs $\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}_i}(\mathfrak{A}_{i-1})$, $i = 1, \ldots, k$, alors $\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}_{k+1}}(\mathfrak{A}_k)$ est commutatif pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après la Proposition I.11, cela implique que les règles de branchement de la chaîne (I.1.17) sont simples. □

Remarque. Dans la démonstration de la Proposition I.11, nous avons considéré le cas de 2 représentations irréductibles isomorphes de B intervenant dans la décomposition d'une représentation irréductible de A. Dans la terminologie de cette Sous-Section, cela correspond à l'existence d'un $\mu_{\alpha i} = 2$ pour certains α et i. Nous avons vu que cette situation implique la présence d'un terme isomorphe à $Mat(2)$ dans la décomposition en somme directe du centralisateur $\mathcal{Z}_A(B)$. Plus généralement, dans le cas d'un $\mu_{\alpha i} \neq 0$, le terme dans la somme directe est isomorphe à $Mat(\mu_{\alpha i})$. On obtient facilement

$$\mathcal{Z}_A(B) \cong \bigoplus_{i,\,\alpha \text{ tels que } \mu_{\alpha i} \neq 0} Mat(\mu_{\alpha i}).$$

On calcule en fonction des multiplicités la dimension suivante :

$$dim(\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A(B) \rangle) = \sum_{i=1}^{x_A} \sum_{\alpha=1}^{x_B} \mu_{\alpha i}^2 d_\alpha, \tag{I.1.18}$$

où $\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A(B) \rangle$ est la sous-algèbre de M engendrée par l'union de $\mathcal{D}_B$ et du centralisateur $\mathcal{Z}_A(B)$ de B dans A. En effet, on a

$$\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A(B) \rangle \cong \bigoplus_{i,\,\alpha \text{ tels que } \mu_{\alpha i} \neq 0} b_\alpha \mathcal{D}_B \otimes Mat(\mu_{\alpha i}). \tag{I.1.19}$$

C'est l'analogue ici de la somme directe (I.1.15) : pour chaque i et α tels que $\mu_{\alpha i} \neq 0$, $b_\alpha \mathcal{D}_B \bigotimes Mat(\mu_{\alpha i})$ est la sous-algèbre formée par les produits d'éléments de la forme (I.1.16) avec les éléments de la forme (les analogues pour $\mu_{\alpha i} > 2$ des éléments (I.1.12)) :

$$\begin{pmatrix} c_1^1 \cdot \mathrm{Id} & \dots & c_{\mu_{\alpha i}}^1 \cdot \mathrm{Id} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{\mu_{\alpha i}} \cdot \mathrm{Id} & \dots & c_{\mu_{\alpha i}}^{\mu_{\alpha i}} \cdot \mathrm{Id} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } c_k^l \in \mathbb{C} \text{ pour } k, l \in \{1, \dots, \mu_{\alpha i}\}, \tag{I.1.20}$$

où Id est la matrice identité de taille d_α. Pour i et α tels que $\mu_{\alpha i} \neq 0$, la dimension de cette sous-algèbre est $\mu_{\alpha i}^2 d_\alpha$, ce qui donne la formule (I.1.18).

En utilisant (I.1.18) avec les formules (I.1.13) et (I.1.14), on obtient à nouveau l'équivalence entre les 3 assertions de la proposition précédente. En fait, on a les inclusions d'algèbres

$$\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A \rangle \subset \mathcal{D}_A \subset \langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A(B) \rangle \ ,$$

ce qui implique les inégalités

$$\dim(\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A \rangle) \leq \dim(\mathcal{D}_A) \leq \dim(\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A(B) \rangle) \ .$$

De plus, si les règles de branchement de la paire (A, B) sont simples, il y a égalité entre les 3 termes, et si les règles de branchement de la paire (A, B) ne sont pas simples, les inégalités sont strictes.

Appendice I.1.A Centralisateurs pour la chaîne des groupes symétriques

Nous donnons ici une démonstration (voir [86]), indépendante de la théorie des représentations, de la commutativité du centralisateur de $\mathbb{C}S_{n-1}$ dans $\mathbb{C}S_n$, pour tout $n \geq 1$; ceci prouve, d'après la Proposition I.11, la simplicité des règles de branchement pour la paire (S_n, S_{n-1}), $n \geq 1$, et donc la simplicité du diagramme de Bratteli des groupes symétriques (voir Section suivante).

Tout d'abord, rappelons ce qu'est l'écriture cyclique d'une permutation. Le cycle $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ de S_n, avec $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ différents deux à deux, est la permutation de S_n qui envoie i_1 à i_2, i_2 à i_3 et ainsi de suite jusqu'à i_{k-1} à i_k, qui envoie i_k à i_1 et qui envoie tout $j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ à lui-même. Un cycle est invariant par permutation cyclique des éléments qui le composent.

L'ensemble $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ est appelé le support du cycle $(i_1, i_2, \dots, i_k)$. Deux cycles dont les supports ne s'intersectent pas commutent. L'inverse d'un cycle est un cycle de même support, mais les éléments du support sont ordonnés à l'inverse du cycle original :

$$(i_1, i_2, \dots, i_k)^{-1} = (i_k, \dots, i_2, i_1) \ .$$

L'action par conjugaison d'un élément de S_n sur un cycle est la suivante :

$$\pi(i_1, i_2, \ldots, i_k)\pi^{-1} = (\pi(i_1), \pi(i_2), \ldots, \pi(i_k)) \text{ pour tout } \pi \in S_n.$$

Notons en particulier que le cycle $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ est conjugué à son inverse par la permutation qui envoie i_1 à i_k, i_2 à i_{k-1} et ainsi de suite.

Toute permutation peut s'écrire comme produit de cycles à supports disjoints deux à deux. L'inverse d'une permutation est le produit des inverses des cycles qui la composent.

Proposition I.15. *Pour tout $n \geq 1$, le centralisateur $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}S_n}(\mathbb{C}S_{n-1})$ de $\mathbb{C}S_{n-1}$ dans $\mathbb{C}S_n$ est commutatif.*

Preuve. Soit π une permutation de S_n. Il est possible (voir ci-dessus) d'écrire π et π^{-1}, avec l'écriture cyclique, de la manière suivante

$$\begin{aligned} \pi &= (a_1, a_2, \ldots, a_i) \ldots (\ldots) \ldots (n, b_1, \ldots, b_j) \\ \pi^{-1} &= (a_i, \ldots, a_2, a_1) \ldots (\ldots) \ldots (n, b_j, \ldots, b_1). \end{aligned}$$

On vérifie aisément avec l'écriture ci-dessus que π^{-1} est conjugué à π, par la permutation qui envoie : $a_1 \mapsto a_i$, $a_2 \mapsto a_{i-1}$, ... , $n \mapsto n$, $b_1 \mapsto b_j$, $b_2 \mapsto b_{j-1}$ et etc. Ainsi, π et π^{-1} sont conjuguées par un élément de S_{n-1}.

Soit $f = \sum_{\pi \in S_n} f_\pi \cdot \pi$ un élément du centralisateur de $\mathbb{C}S_{n-1}$ dans $\mathbb{C}S_n$, où $f_\pi \in \mathbb{C}$. Pour $\pi_0 \in S_n$ quelconque, il existe $\sigma_{\pi_0} \in S_{n-1}$ telle que $\sigma_{\pi_0}\pi_0\sigma_{\pi_0}^{-1} = \pi_0^{-1}$. De plus, comme f est dans le centralisateur de $\mathbb{C}[S_{n-1}]$, on a

$$\sigma_{\pi_0} f \sigma_{\pi_0}^{-1} = f,$$

d'une part, et d'autre part

$$\sigma_{\pi_0} f \sigma_{\pi_0}^{-1} = \sum_{\pi \neq \pi_0} f_\pi \cdot \sigma_{\pi_0}\pi\sigma_{\pi_0}^{-1} \quad + f_{\pi_0} \cdot \pi_0^{-1}.$$

En identifiant les coefficients devant π_0^{-1} obtenus dans les deux cas, il vient que $f_{\pi_0} = f_{\pi_0^{-1}}$, et ceci pour tout $\pi_0 \in S_n$. Donc, tout élément f du centralisateur de $\mathbb{C}S_{n-1}$ dans $\mathbb{C}S_n$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $(\pi + \pi^{-1})$ avec $\pi \in S_n$.

Soit S l'antiautomorphisme de $\mathbb{C}S_n$ défini sur les éléments de base par $S(\pi) = \pi^{-1}$ pour tout $\pi \in S_n$, et étendu par linéarité. D'après l'analyse ci-dessus, nous avons que $S(f) = f$ pour tout élément f du centralisateur de $\mathbb{C}S_{n-1}$ dans $\mathbb{C}S_n$.

Donc, pour tout $f, f' \in \mathcal{Z}_{\mathbb{C}S_n}(\mathbb{C}S_{n-1})$, nous avons

$$f \cdot f' = S(f \cdot f') = S(f') \cdot S(f) = f' \cdot f.$$

Ainsi, le centralisateur de $\mathbb{C}S_{n-1}$ dans $\mathbb{C}S_n$ est commutatif. □

I.2 Diagrammes de Bratteli

Dans cette Section, nous rappelons plusieurs faits sur les diagrammes de Bratteli (voir, e.g., [30]) et leurs produits gradués. Nous expliquons les connections avec la théorie des représentations des chaînes d'algèbres. Ensuite, nous rappelons l'information, dont on aura besoin dans les autres chapitres, sur les dimensions des sommets des puissances du graphe de Young.

I.2.1 Définition

Un diagramme de Bratteli est un graphe gradué ; cela signifie qu'il existe une fonction, appelée *degré*, de l'ensemble des sommets à l'ensemble des entiers non-négatifs. Il y a un seul sommet de degré 0 qui est noté $\varnothing$. Les arêtes du graphe ne peuvent connecter que deux sommets voisins ("voisins" signifie que la valeur absolue de la différence de leurs degrés est égale à 1). Quand on dessine un diagramme de Bratteli, il est pratique de placer au niveau a tous les sommets de degré a (le niveau a correspond à la valeur de l'ordonnée $(-a)$). Ensuite, un sommet du niveau a a des arêtes "entrantes" du niveau $a-1$ et des arêtes "sortantes" vers le niveau $a+1$. La dimension du sommet x est le nombre de chemins qui descendent du sommet $\varnothing$ vers x.

En théorie des représentations, on associe un diagramme de Bratteli à une chaîne ascendante

$$\mathcal{A}_0 = \mathbb{C} \subset \mathcal{A}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{A}_n \subset \ldots \tag{I.2.1}$$

d'algèbre associatives : les sommets de degré k correspondent aux représentations (selon les circonstances, indécomposables, irréductibles *etc.*) de l'algèbre $\mathcal{A}_k$, et les arêtes du diagramme de Bratteli retracent les règles de branchement des paires $(\mathcal{A}_{k+1}, \mathcal{A}_k)$, $k \in \mathbb{N}$; plus précisément, il y a $\mu_{\alpha i}$ arêtes entre le sommet correspondant à la représentation U_α de $\mathcal{A}_k$ et le sommet correspondant à la représentation V_i de $\mathcal{A}_{k+1}$, lorsque U_α intervient avec la multiplicité $\mu_{\alpha i}$ dans la décomposition de V_i.

Dans cette situation, la dimension d'un sommet est simplement égale à la dimension de la représentation correspondante.

De la même manière, un diagramme de Bratteli est associé à une chaîne ascendante de groupes

$$G_0 = \{e\} \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n \subset \ldots \tag{I.2.2}$$

La simplicité des règles de branchement pour la chaîne d'algèbres (I.2.1) (respectivement, pour la chaîne de groupes (I.2.2)) correspond au fait que, dans le diagramme de Bratteli associé à la chaîne, il n'y a jamais plus d'une arête reliant deux sommets voisins. Cela motive la définition suivante

Définition I.16. *Un diagramme de Bratteli est simple lorsque le nombre d'arêtes entre deux sommets voisins est toujours égal à 0 ou 1.*

Exemples. **(a)** Dans l'Appendice I.2.A, nous rappelons les définitions d'une partition et de son diagramme de Young associé, et nous donnons le début du diagramme de Bratteli pour la chaîne des groupes symétriques. Il correspond au diagramme de Hasse de l'ensemble partiellement ordonné des partitions. En effet, les représentations irréductibles du groupe symétrique S_n sont labellisées par les partitions de taille n, et les règles de branchement retranscrivent la notion d'inclusion d'une partition de taille $n-1$ dans une partition de taille n. La graduation du diagramme de Bratteli est donnée ici par la taille des partitions. Ce diagramme de Bratteli est simple.

(b) Dans l'Appendice I.2.B, nous donnons le début du diagramme de Bratteli pour la chaîne des groupes alternés. Rappelons que le groupe alterné est un sous-groupe d'ordre 2 de S_n, défini comme

le noyau de la signature[5]. Nous notons $\overline{\lambda}$ la partition conjuguée à la partition λ (nous rappelons la définition dans l'Appendice I.2.B).

Les sommets du diagramme de Bratteli de la chaîne des groupes alternés sont les suivants. Pour les partitions λ vérifiant $\lambda \neq \overline{\lambda}$, un sommet du graphe correspond à la classe d'équivalence de λ par la conjugaison ; appelons-le le sommet $[\lambda]$. Pour les partitions λ auto-conjuguées, c'est-à-dire vérifiant $\lambda = \overline{\lambda}$, deux sommets du graphe correspondent à λ ; appelons-les $[\lambda]$ et $[\lambda]'$. Il n'y a pas d'autres sommets.

La graduation est donnée par la taille des partitions. En ce qui concerne les arêtes, soient μ une partition de taille n et λ une partition de taille $n+1$, telles que μ soit une sous-partition de λ ou de $\overline{\lambda}$. Il y a 4 cas à considérer :

- Si μ et λ ne sont ni l'une ni l'autre auto-conjuguées, alors une arête relie les sommets $[\mu]$ et $[\lambda]$.
- Si μ est auto-conjuguée et λ ne l'est pas, alors une arête relie les sommets $[\mu]$ et $[\lambda]$, et une arête relie les sommets $[\mu]'$ et $[\lambda]$.
- Si μ n'est pas auto-conjuguée et λ l'est, alors une arête relie les sommets $[\mu]$ et $[\lambda]$, et une arête relie les sommets $[\mu]$ et $[\lambda]'$.
- Si μ et λ sont auto-conjuguées, alors une arête relie les sommets $[\mu]$ et $[\lambda]$, et une arête relie les sommets $[\mu]'$ et $[\lambda]'$.

Il n'y a pas d'autres arêtes.

Remarque. Le procédé permettant d'obtenir le diagramme de Bratteli de la chaîne des groupes alternés à partir du diagramme de Bratteli de la chaîne des groupes symétriques est un exemple d'un procédé général. Considérons un diagramme de Bratteli et une involution sur l'ensemble des sommets de ce diagramme respectant la graduation. Alors, on peut répéter la même construction que dans l'exemple **(b)** ci-dessus, avec l'involution jouant le rôle de la conjugaison des partitions. Cette construction apparait naturellement en théorie des représentations lorsque l'on considère une chaîne de groupes possédant une sous-chaîne de sous-groupes d'indice 2. C'est donc le cas, par exemple, pour les groupes alternés des groupes de Coxeter, dont l'exemple **(b)** ci-dessus est un cas particulier.

I.2.2 Produits de diagrammes de Bratteli

Soient $\mathfrak{G}^{(1)}$ et $\mathfrak{G}^{(2)}$ deux diagrammes de Bratteli. Les sommets du produit $\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)}$ sont par définition les couples (x, y) où x est un sommet de $\mathfrak{G}^{(1)}$ et y est un sommet de $\mathfrak{G}^{(2)}$. Le degré de (x, y) est la somme du degré de x et du degré de y. Le sommet tout en haut de $\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)}$, qui est encore noté $\varnothing$, est $(\varnothing, \varnothing)$. Si il existe une arête entre x et x' dans $\mathfrak{G}^{(1)}$, on dessine une arête entre (x, y) et (x', y) pour tout y ; nous dirons que ces arêtes sont de type 1. Si il existe une arête entre y et y' dans $\mathfrak{G}^{(2)}$, on dessine une arête entre (x, y) et (x, y') pour tout x ; nous dirons que ces arêtes sont de type 2. Par définition, ce sont toutes les arêtes : toute arête est soit de type 1, soit de type 2.

En itérant, on définit le produit d'un nombre arbitraire m de diagrammes de Bratteli.

5. La signature est l'unique homomorphisme de S_n vers $\{-1, 1\}$ qui envoie s_i à -1 pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, où les éléments s_i sont les générateurs dans la présentation (I.1.6) de S_n.

Dimensions des sommets du produit. Soit $\mathfrak{G}$ un diagramme de Bratteli. Notons $\mathfrak{P}(\mathfrak{G})$ l'ensemble des chemins qui commencent au sommet tout en haut de $\mathfrak{G}$, et qui descendent. Pour $p \in \mathfrak{P}(\mathfrak{G})$, notons $\mathcal{E}(p)$ la collection des arêtes de p, et $\mathrm{end}(p)$ le sommet final de p ; si $z = \mathrm{end}(p)$, alors $\deg(z)$ est égal à la longueur de p, le cardinal de $\mathcal{E}(p)$. L'ensemble $\mathcal{E}(p)$ est naturellement ordonné : les arêtes du chemin se suivent l'une après l'autre.

Soit (x, y) un sommet de $\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)}$. Soit p un élément de $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)})$ avec $\mathrm{end}(p) = (x, y)$. L'ensemble $\mathcal{E}(p)$ est l'union disjointe de deux sous-ensembles, $\mathcal{E}_1(p)$ et $\mathcal{E}_2(p)$, où $\mathcal{E}_1(p)$ (respectivement, $\mathcal{E}_2(p)$) est le sous-ensemble de $\mathcal{E}(p)$ consistant en les arêtes de type 1 (respectivement, de type 2). Chaque arête de $\mathcal{E}_1(p)$ définit naturellement une arête de $\mathfrak{G}^{(1)}$ et l'ensemble des arêtes ainsi défini forme un chemin p_1 dans le graphe $\mathfrak{G}^{(1)}$, descendant du sommet $\varnothing$ de $\mathfrak{G}^{(1)}$ vers x, $p_1 \in \mathfrak{P}(\mathfrak{G}^{(1)})$; de la même façon, chaque arête dans $\mathcal{E}_2(p)$ définit naturellement une arête dans le graphe $\mathfrak{G}^{(2)}$, et l'ensemble des arêtes ainsi défini forme un chemin p_2 dans le graphe $\mathfrak{G}^{(2)}$, descendant du sommet $\varnothing$ de $\mathfrak{G}^{(2)}$ vers y, $p_2 \in \mathfrak{P}(\mathfrak{G}^{(2)})$. Nous avons ainsi une application de $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)})$ vers le produit $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^{(1)}) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{G}^{(2)})$, définie par

$$\pi : p \mapsto (p_1, p_2) \ . \tag{I.2.3}$$

On ne peut pas reconstruire uniquement le chemin p connaissant les chemins p_1 et p_2. Soit a le degré de x et b le degré de y. Tout ordre $\succ$ sur l'union $\mathcal{E}(p_1) \cup \mathcal{E}(p_2)$ qui est compatible avec les ordres naturels sur $\mathcal{E}_1(p)$ et $\mathcal{E}_2(p)$ (dans le sens que si une étape γ est après une étape γ' dans $\mathcal{E}_1(p)$ ou $\mathcal{E}_2(p)$, alors γ est après γ' par rapport à l'ordre $\succ$) détermine un chemin de $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)})$ En d'autres mots, dans la séquence de $a + b$ arêtes d'un chemin de longueur $a + b$ de $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)})$, on peut assigner le type 1 à un sous-ensemble arbitrairement choisi de a arêtes, et donc le cardinal de la préimage de l'élément (p_1, p_2) par rapport à l'application π, donnée par (I.2.3), est $\begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix}$; ce cardinal dépend seulement des sommets finaux x et y des chemins p_1 et p_2, donc nous avons

$$\dim((x, y)) = \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix} \dim(x) \dim(y) \ . \tag{I.2.4}$$

Pour un diagramme de Bratteli $\mathfrak{G}$, définissons $D(\mathfrak{G})_a$ par

$$D(\mathfrak{G})_a := \sum_{x \,:\, \deg(x) = a} \big(\dim(x)\big)^2 \ . \tag{I.2.5}$$

Quand le diagramme de Bratteli est associé à une chaîne ascendante d'algèbres associatives semi-simples de dimension finie, comme (I.2.1), et les sommets correspondent aux représentations irréductibles, le nombre $D(\mathfrak{G})_a$ est la dimension de l'algèbre $\mathcal{A}_a$.

Par (I.2.4), nous avons pour le produit

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)})_c &= \sum_{\substack{a, b \,:\, a+b=c \\ x \,:\, deg(x)=a \\ y \,:\, deg(y)=b}} \dim\big((x, y)\big)^2 = \sum_{\substack{a, b \,:\, a+b=c \\ x \,:\, deg(x)=a \\ y \,:\, deg(y)=b}} \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix}^2 \big(\dim(x)\big)^2 \big(\dim(y)\big)^2 \\ &= \sum_{a=0}^{c} \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix}^2 D(\mathfrak{G}^{(1)})_a \ D(\mathfrak{G}^{(2)})_{c-a} \ . \end{aligned} \tag{I.2.6}$$

I.2.3 Puissances du graphe de Young

Comme nous le verrons dans le Chapitre suivant, Section II.3 (respectivement, la Section II.6), les sommets du diagramme de Bratteli de la chaîne (par rapport à n) des algèbres $H(m,1,n)$ (respectivement, des groupes $G(m,1,n)$) correspondent naturellement aux m-partitions (voir Chapitre suivant pour la définition des m-partitions, m-tableaux, etc) ; le niveau a consiste en toutes les m-partitions de taille a ; les arêtes sortantes du niveau a correspondent à l'inclusion des m-partitions de taille a dans les m-partitions de taille $a+1$. Ainsi, le diagramme de Bratteli pour $H(m,1,n)$ (ou $G(m,1,n)$) est la m-ème puissance du graphe de Young.

1. Dimensions. Nous aurons besoin de connaître les dimensions des sommets des puissances du graphe de Young. Nous rappelons la définition de la *longueur de crochet*, et la formule pour les dimensions des sommets du graphe de Young. Pour une case α d'un diagramme de Young, le crochet de α est un ensemble de cases, qui contient α et les cases qui sont placées soit au-dessous de α dans la même colonne, soit à la droite de α dans la même ligne. La longueur h_α du crochet de α est le nombre de cases dans le crochet de α. La dimension d'une représentation (d'un groupe symétrique) correspondant à une partition λ de n est donnée par la formule des crochets,

$$\dim(V_\lambda) = \frac{n!}{\prod\limits_{\alpha\in\lambda} h_\alpha} \ , \tag{I.2.7}$$

où le produit $\prod\limits_{\alpha\in\lambda} h_\alpha$ signifie le produit de la longueur de crochet de toutes les cases α du diagramme de Young de forme λ.

Considérons une m-partition $\lambda^{(m)} := (\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ telle que $|\lambda^{(m)}| = n$ (nous rappelons que $|\lambda^{(m)}| = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_m|$). Anticipons le Chapitre suivant, et notons $V_{\lambda^{(m)}}$ la représentation irréductible de $H(m,1,n)$ associée à $\lambda^{(m)}$. Par la généralisation de (I.2.4) au produit de m diagrammes de Bratteli, la dimension de $V_{\lambda^{(m)}}$ est

$$\dim(V_{\lambda^{(m)}}) = \frac{n!}{|\lambda_1|!\dots|\lambda_m|!}\ \frac{|\lambda_1|!}{\prod\limits_{\alpha\in\lambda_1} h_\alpha}\cdots\frac{|\lambda_m|!}{\prod\limits_{\alpha\in\lambda_m} h_\alpha} = \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{\alpha\in\lambda_i} h_\alpha} \ , \tag{I.2.8}$$

Lemme I.17. *Nous avons*

$$\sum_{\lambda^{(m)}} (\dim(V_{\lambda^{(m)}}))^2 = n!m^n \ , \tag{I.2.9}$$

où la somme porte sur toutes les m-partitions $\lambda^{(m)} = (\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ telles que $|\lambda^{(m)}| = n$.

Preuve. Pour $m=1$, nous savons que les représentations V_λ où λ est une partition de n sont toutes les représentations irréductibles du groupe symétrique S_n, et donc :

$$\sum_\lambda (\dim(V_\lambda))^2 = \sum_\lambda \left(\frac{n!}{\prod\limits_{\alpha\in\lambda} h_\alpha}\right)^2 = n! \ . \tag{I.2.10}$$

La preuve de (I.2.9) est par récurrence sur m. Nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda^{(m)}:|\lambda^{(m)}|=n}(\dim(V_{\lambda^{(m)}}))^2 &= \sum_{j=0}^{n}\left(\tfrac{n!}{(n-j)!j!}\right)^2 \sum_{\lambda^{(1)}:|\lambda^{(1)}|=j}\left(\dim(V_{\lambda^{(1)}})\right)^2 \sum_{\lambda^{(m-1)}:|\lambda^{(m-1)}|=n-j}\left(\dim(V_{\lambda^{(m-1)}})\right)^2 \\ &= \sum_{j=0}^{n}\left(\left(\tfrac{n!}{(n-j)!j!}\right)^2 \cdot j!\cdot(n-j)!\cdot(m-1)^{n-j}\right) \\ &= n!\cdot\sum_{j=0}^{n}\tfrac{n!}{(n-j)!j!}(m-1)^{n-j} = n!\,m^n\ ;\end{aligned}$$

ici $\lambda^{(1)}$ est une partition usuelle et $\lambda^{(m-1)}$ est une $(m-1)$-partition. Dans la première égalité, nous avons utilisé (I.2.6) ; dans la seconde égalité, nous avons utilisé (I.2.10) et l'hypothèse de récurrence ; nous avons simplifié le résultat dans la troisième égalité, et utilisé le théorème binomial dans la quatrième. □

Remarque. La m-ème puissance du graphe de Young est un *poset* m-différentiel (la terminologie poset vient de "partially ordered set", et signifie donc un ensemble partiellement ordonné) ; la formule (I.2.9) est vérifiée pour un poset m-différentiel quelconque (voir [98] pour les définitions et les détails).

2. m-tableaux standards et dimensions. Il est bien connu que la dimension d'une représentation du groupe symétrique correspondant à une certaine partition λ est égale à la dimension du sommet correspondant du graphe de Young, et est égale au nombre de tableaux standards de forme λ. Il est immédiat de généraliser ces égalités au cas cyclotomiques : la dimension d'une représentation du groupe $G(m,1,n)$ correspondant à un certain m-diagramme de Young $\lambda^{(m)}$ est égale à la dimension du sommet correspondant dans la m-ème puissance du graphe de Young, et est égale au nombre de m-tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$.

Avec l'aide du Lemme I.17, nous vérifions d'ores et déjà que la somme des carrés des dimensions des représentations qui seront construites dans la Sous-Section II.4.3 (respectivement, dans la Sous-Section II.6.5) est égale à la dimension de $H(m,1,n)$ (respectivement, au cardinal du groupe $G(m,1,n)$) :

$$\sum_{\lambda^{(m)}}(\dim(V_{\lambda^{(m)}}))^2 = \dim(H(m,1,n)) = |G(m,1,n)|\ . \tag{I.2.11}$$

Appendice I.2.A Diagramme de Bratteli pour la chaîne des groupe symétriques

Rappelons qu'une partition est un multiplet : $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_k)$, avec $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ des entiers strictement positifs tels que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k$. La taille d'une partition λ est notée $|\lambda|$, et est par définition $|\lambda| := \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$.

Nous représentons une partition par son diagramme de Young (appelé aussi diagramme de Ferrers) : Le diagramme de Young associé à une partition $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k)$ est un ensemble de cases constitué de k lignes, telles que la i-ème ligne contienne λ_i cases ; par convention, les lignes sont numérotées de haut en bas, et sont alignées sur la gauche (ci-dessous, et dans l'Appendice suivant, nous avons placé

des points à la place des cases). Nous dirons que le diagramme de Young associé à une partition λ est *de forme* λ.

Par exemple, les 5 sommets du 5-ème étage du diagramme de Bratteli ci-dessous correspondent, de gauche à droite, aux 5 partitions de taille 4 suivantes :

$$(4)\,,\quad (3,1)\,,\quad (2,2)\,,\quad (2,1,1)\ \text{ et }\ (1,1,1,1)\ .$$

Nous avons tracé ci-dessous le début du diagramme de Bratteli de la chaîne des groupes symétriques (les 8 premiers niveaux), voir exemple **(a)** de la Section I.2. Nous indiquons à côté de chaque sommet sa dimension.

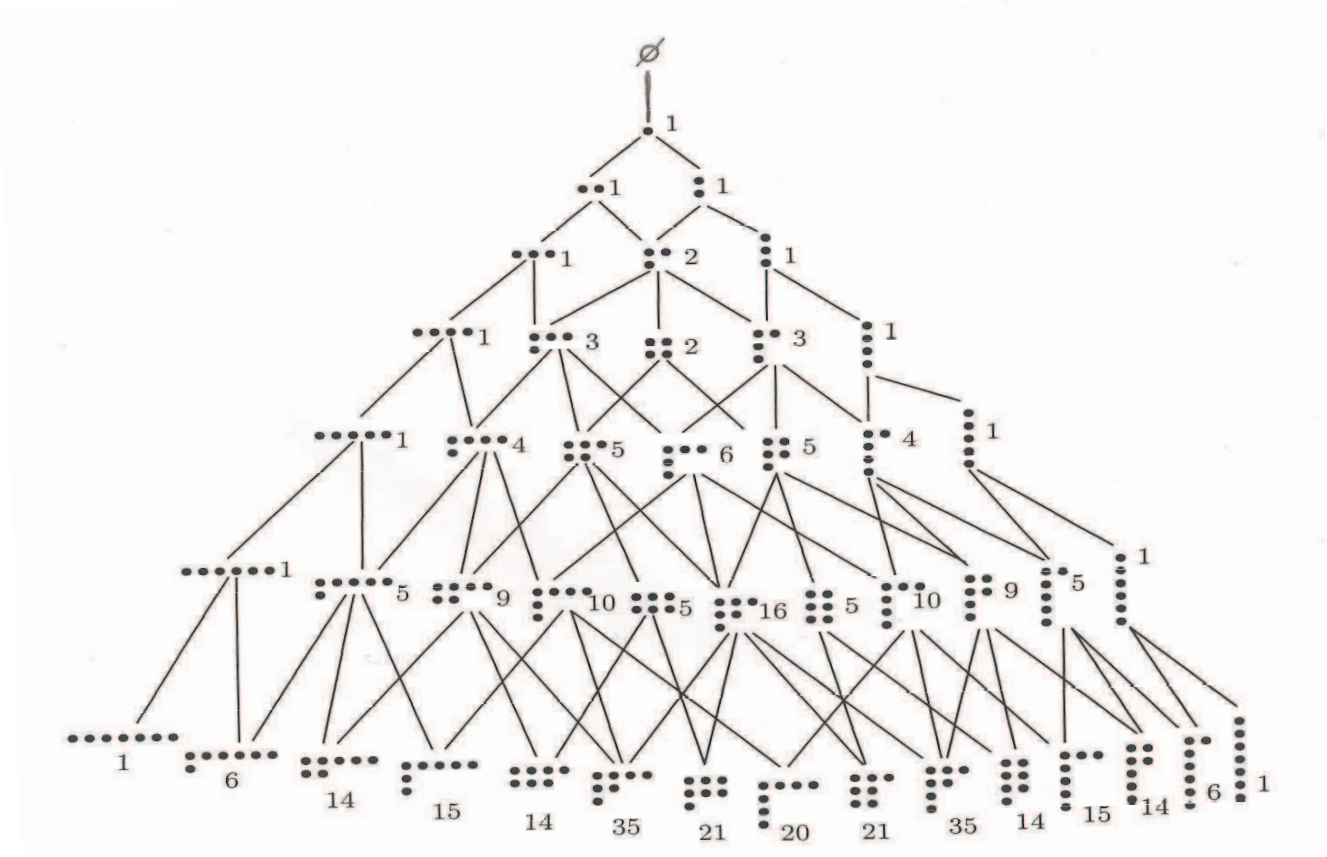


Fig. I.1. *Diagramme de Bratteli (huit premiers niveaux) pour la chaîne des groupes symétriques.*

Appendice I.2.B Diagramme de Bratteli pour la chaîne des groupes alternés

Rappelons la notion de partitions conjuguées : la conjugaison d'une partition λ correspond à la réflexion de son diagramme de Young par rapport à la diagonale partant du coin en haut à gauche. Par exemple, et sont deux partitions conjuguées l'une à l'autre ; la partition est auto-conjuguée.

Dans le cas d'une partition auto-conjuguée, deux sommets du graphe correspondent à cette partition ; ci-dessous, le premier sommet est noté par le diagramme de Young de la partition, et le deuxième par le diagramme de Young avec un $'$.

Nous traçons les diagrammes de Young de la même façon que dans l'Appendice précédent. Nous avons tracé ci-dessous le début du diagramme de Bratteli de la chaîne des groupes alternés (les 9 premiers niveaux), voir l'exemple **(b)** de la Section I.2. Nous indiquons à côté de chaque sommet sa dimension.

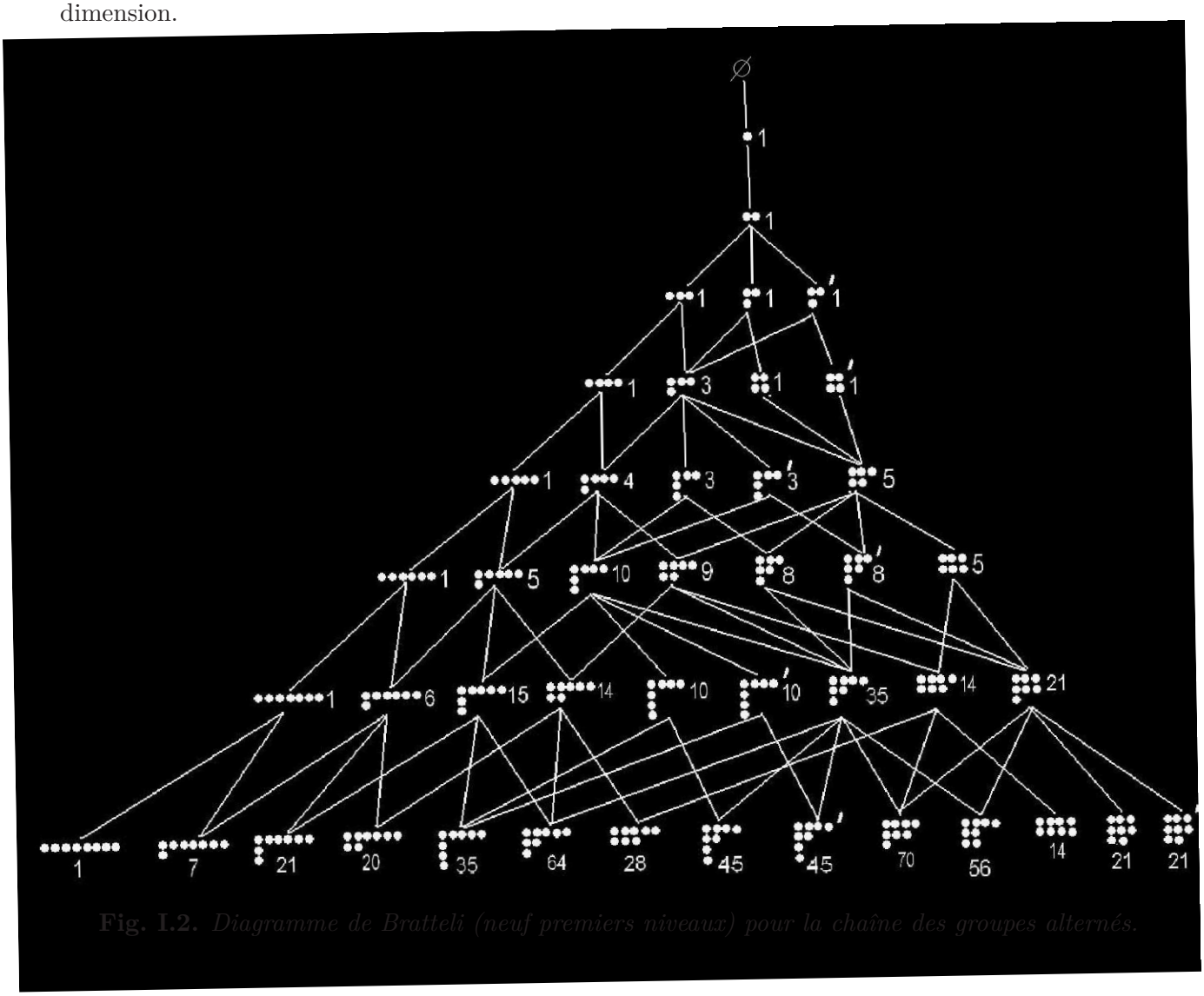


Fig. I.2. *Diagramme de Bratteli (neuf premiers niveaux) pour la chaîne des groupes alternés.*

Appendice I.2.C Carré du graphe de Young

Ci-dessous, le début du diagramme de Bratteli pour la chaîne d'algèbres $H(2,1,n)$, le carré du graphe de Young, est dessiné.

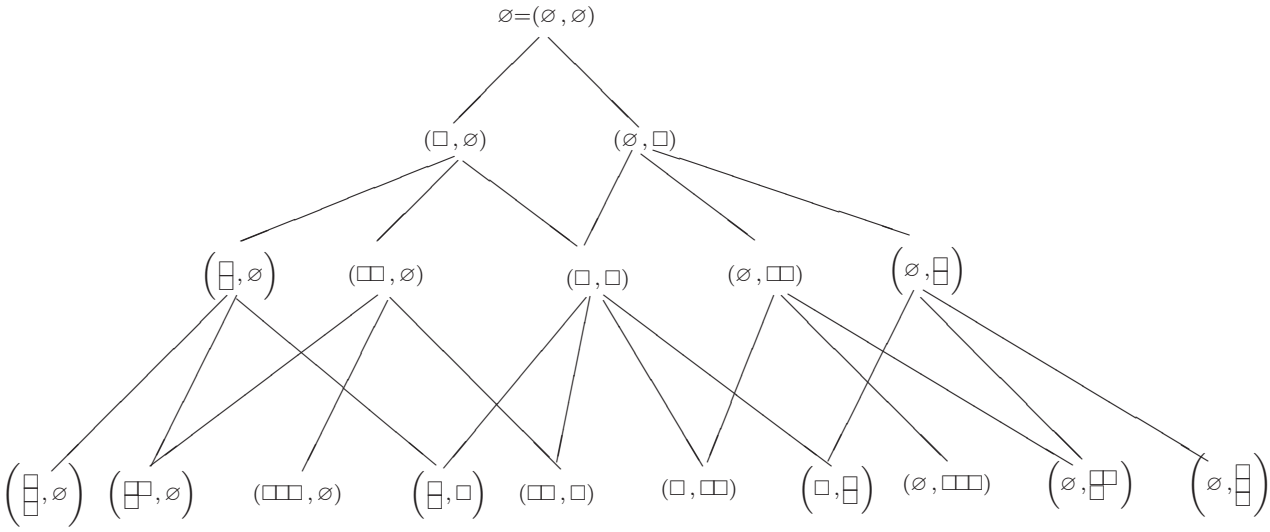


Fig. I.3. *Diagramme de Bratteli (quatre premiers niveaux) pour $H(m,1,n)$ avec $m=2$.*

I.3 Algorithme de Coxeter–Todd

Nous présentons dans cette Section l'algorithme de Coxeter–Todd. Cette algorithme s'applique à une paire constituée d'un groupe, muni d'une présentation par générateurs et relations, et d'un sous-groupe engendré par un sous-ensemble des générateurs. Nous expliquons son utilisation dans le cadre d'une chaîne de groupes, et traitons en détail l'exemple de la chaîne des groupes symétriques. Nous utiliserons l'algorithme de Coxeter–Todd dans les Chapitres III et IV.

I.3.1 Principe de l'algorithme

Soit G un groupe fini avec une présentation donnée par des générateurs $g_1,\dots,g_m$ et un ensemble de relations définissantes $\mathcal{R}$. Soit I un sous-ensemble de $\{1,\dots,m\}$ et H le sous-groupe de G engendré par g_a, $a\in I$. L'algorithme de Coxeter–Todd pour la paire (G,H) construit l'ensemble des classes à gauche de H dans G, et l'action des générateurs sur cet ensemble [22]. Le résultat de l'algorithme de Coxeter–Todd est une figure dont les sommets sont labellisés par les classes à gauche, et des flèches représentent l'action des générateurs.

Rappelons que les classes à gauche de H dans G sont les classes d'équivalence par la relation d'équivalence suivante :

$$x\sim y \quad\Leftrightarrow\quad \text{il existe } h\in H \text{ tel que } x=yh.$$

La classe d'un élément $x\in G$ est notée xH, et nous avons, soit $xH=yH$ ($\Leftrightarrow x\sim y$), soit $xH\cap yH=\varnothing$.

L'ensemble des classes à gauche de H dans G est noté G/H ; le groupe G agit sur cet ensemble par multiplication à gauche : pour tout $x, y \in G$, l'élément x envoie la classe yH à la classe xyH. La classe notée H est la classe de l'élément neutre (elle est consituée par les éléments de H).

L'algorithme commence en plaçant la classe H ; seulement les générateurs g_a, $a \notin I$, peuvent agir non-trivialement sur cette classe et produire de nouveaux sommets. La première étape consiste donc à placer les classes g_aH, $a \notin I$, avec une flèche labellisée par g_a de H vers g_aH. Ensuite, nous analysons, en utilisant les relations de $\mathcal{R}$, l'action des générateurs sur les sommets, et dessinons de nouveaux sommets, ou identifions deux sommets existants. Plus précisément, à chaque sommet déjà existant, nous appliquons, pour chaque relation, la partie gauche de la relation, puis la partie droite, et identifions le résultat. Au cours de ce procédé, il peut être nécessaire de placer de nouveaux sommets. Ces nouveaux sommets devront ensuite aussi être étudiés de la même façon. L'algorithme est terminé lorsque nous connaissons l'action de chaque générateur sur chaque sommet.

L'algorithme de Coxeter–Todd pour (G, H) liste les classes à gauche de H dans G, et fournit ainsi une forme normale pour les éléments de G par rapport à H. L'algorithme implique une borne supérieure pour le cardinal de G. A savoir, soit $\tilde{H}$ le groupe abstrait avec des générateurs $\tilde{g}_a$, $a \in I$; les relations définissantes de $\tilde{H}$ reproduisent les relations de $\mathcal{R}$ qui concernent seulement les générateurs g_a, $a \in I$. En raison du morphisme surjectif naturel de $\tilde{H}$ vers H, $\tilde{g}_a \mapsto g_a$, $a \notin I$, le cardinal de G est inférieur ou égal au nombre de sommets de la figure, multiplié par le cardinal de $\tilde{H}$.

Pour une chaîne

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n \subset \ldots$$

de groupes, à partir du résultat de l'algorithme de Coxeter–Todd pour chaque paire (G_k, G_{k-1}), on peut construire récursivement une forme normale globale pour les éléments de tout G_n, en utilisant la forme normale de G_k par rapport à G_{k-1}, $k = 1, 2, \ldots, n$.

I.3.2 Exemple pour la chaine des groupes symétriques

Considérons la chaîne des groupes symétriques

$$\{e\} = S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_n \subset \ldots$$

Rappelons, (I.1.6), que le groupe S_n (que nous noterons souvent aussi A_{n-1}, car il est isomorphe au groupe de Coxeter de type A et de rang $n-1$) est engendré par des éléments $s_1, \ldots, s_{n-1}$ avec les relations définissantes

$$\begin{aligned} &s_i^2 = 1 && \text{pour } i = 1, \ldots, n-1, \\ &s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} && \text{pour } i = 1, \ldots, n-2, \\ &s_i s_j = s_j s_i && \text{pour } i, j = 1, \ldots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1. \end{aligned} \tag{I.3.1}$$

Nous allons utiliser l'algorithme de Coxeter–Todd pour montrer que la présentation ci-dessus est bien une présentation du groupe symétrique S_n, pour montrer que le sous-groupe engendré par $s_1, \ldots, s_{n-2}$ est isomorphe à S_{n-1}, et enfin pour construire une forme normale globale pour les éléments de S_n.

Nous raisonnons par récurrence. Il n'y a rien à prouver pour la base, $n = 1$, de la récurrence. Notons H_n le groupe engendré par les éléments $s_1, \ldots, s_{n-1}$ vérifiant les relations (I.3.1). Notons H le sous-groupe de H_n engendré par $s_1, \ldots, s_{n-2}$. Nous allons réaliser l'algorithme de Coxeter–Todd pour la paire (H_n, H). Dans la figure suivante, on a remplacé les paires de flèches ayant une orientation opposée (qui apparaissent car on considère des générateurs d'ordre 2) par des segments non-orientés.

Fig. I.4. *Figure de Coxeter–Todd pour la paire* (H_n, H).

La première classe est H. Le seul générateur de H_n qui ne laisse pas H invariante est s_{n-1}, on place donc une nouvelle classe $s_{n-1}H$ (cf figure I.4). Ensuite, $s_1, \ldots, s_{n-3}$ commutent avec s_{n-1} et laissent la classe H invariante, donc ils laissent la classe $s_{n-1}H$ invariante également. Il y a ainsi une seule nouvelle classe qui est $s_{n-2}s_{n-1}H$. De même, les générateurs $s_1, \ldots, s_{n-4}$ laissent invariante cette classe, et de plus :

$$\begin{aligned} s_{n-1} \cdot s_{n-2}s_{n-1}H &= s_{n-2}s_{n-1}s_{n-2}H \\ &= s_{n-2}s_{n-1}H \end{aligned} .$$

On place donc une seule nouvelle classe, $s_{n-3}s_{n-2}s_{n-1}H$. Plus généralement, nous avons :

$$s_i \cdot s_k s_{k+1} \ldots s_{n-1}H = s_k s_{k+1} \ldots s_{n-1}H \qquad \text{pour } i < k-1,$$

et, pour $i \in \{k+1, \ldots, n-1\}$,

$$\begin{aligned} s_i \cdot s_k s_{k+1} \ldots s_{n-1}H &= s_k \ldots s_i s_{i-1} s_i \ldots s_{n-1}H \\ &= s_k \ldots s_{i-1} s_i s_{i-1} \ldots s_{n-1}H \\ &= s_k \ldots s_{i-1} s_i \ldots s_{n-1} s_{i-1}H \quad \text{car } s_{i-1} \text{ commute avec } s_{i+1}, \ldots, s_{n-1} \\ &= s_k \ldots s_{i-1} s_i \ldots s_{n-1}H \\ &= s_k \ldots s_{n-1}H \ . \end{aligned}$$

Donc, pour la classe $s_k s_{k+1} \ldots s_{n-1}H$, les seuls générateurs qui ne la laissent pas stable sont s_k, qui l'envoie à $s_{k+1} \ldots s_{n-1}H$, et s_{k-1} qui crée une nouvelle classe. Ainsi, on arrive jusqu'à la classe $s_1 s_2 \ldots s_{n-1}H$ et l'algorithme est terminé.

La borne supérieure pour le cardinal du groupe H_n ainsi obtenu est, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $n \cdot |S_{n-1}| = n!$.

L'inégalité inverse provient du morphisme surjectif de H_n dans S_n suivant :

$$s_i \mapsto (i,\, i{+}1) \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n-1,$$

où $(i,\, i+1)$ est la transposition qui échange i et $i+1$. Les groupes H_n et S_n ont donc le même cardinal, et ainsi le morphisme ci-dessus est un isomorphisme. De plus, le cardinal du groupe engendré

par $s_1, \ldots, s_{n-2}$ est égal à $(n-1)!$, le cardinal de S_{n-1}, et donc on obtient que ce sous-groupe est isomorphe à S_{n-1}.

L'algorithme fournit une forme normale globale pour les éléments de S_n. Soient

$$R_k := \{1, s_{k-1}, s_{k-2}s_{k-1}, \ldots, s_1 s_2 \ldots s_{k-1}\} \quad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, n \ (R_1 := \{1\}).$$

Tout élément de S_n appartient à l'une des classes de la figure I.4, et donc peut s'écrire de manière unique comme $u_n h$ où $u_n \in R_n$ et $h \in S_{n-1}$. Ainsi, par récurrence, on obtient :

Proposition I.18 *Soit $x \in S_n$. L'élément x s'écrit de façon unique comme $x = u_n u_{n-1} \ldots\ldots u_1$ où $u_k \in R_k$ pour tout $k = 1, \ldots, n$.*

Corollaire I.19 *La chaîne des groupes symétriques, munie de la présentation (I.3.1), est stationnaire.*

Preuve. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Le sous-groupe de S_{p+q+1} engendré par les éléments $s_{1+q}, \ldots, s_{p+q}$ est isomorphe à S_{p+1}. En effet, il suffit de compter le nombre d'éléments de S_{p+q+1} qui s'écrivent, selon la forme normale donnée par la Proposition I.18, seulement en termes de $s_{1+q}, \ldots, s_{p+q}$. On trouve qu'il y en a $p!$, ce qui est égal au cardinal de S_{p+1}. Ainsi, le morphisme surjectif qui envoie $s_1 \mapsto s_{1+q}$, ..., $s_p \mapsto s_{p+q}$ est l'isomorphisme requis. $\square$

Remarque. Le résultat de l'algorithme de Coxeter–Todd pour la paire (S_k, S_{k-1}) est, pour tout k, similaire à la Fig. I.4 (seul le nombre de segments dans la Fig. I.4 change). C'est la propriété de stationnarité de la chaîne des groupes symétriques munie de la présentation (I.3.1) qui est responsable de ce phénomène. De façon générale, la stationnarité (ou la stationnarité retardée) d'une chaîne de groupes est très utile pour l'obtention d'une forme normale globale avec l'algorithme de Coxeter–Todd (voir les Chapitres III et IV pour d'autres exemples).

Chapitre II

Algèbres de Hecke cyclotomiques : éléments de Jucys–Murphy, représentations et limite classique

Sommaire

II.1 Introduction **41**
II.1.1 Organisation du chapitre 43
II.2 Algèbres de Hecke cyclotomiques et éléments de Jucys–Murphy **47**
II.3 Spectre des éléments de Jucys–Murphy et m-tableaux de Young **49**
II.4 Construction des représentations **54**
II.4.1 Eléments Baxterisés 54
II.4.2 Produit smash 56
II.4.3 Représentations 60
II.4.4 Produit scalaire 62
Appendice II.4.A Structure de module sur les produits tensoriels 67
II.4.A.1 Définition du produit tensoriel $\hat{\otimes}$ 68
II.4.A.2 Règles de décomposition 70
II.5 Complétude **78**
II.6 Limite classique **82**
II.6.1 Groupe de réflexions complexe $G(m,1,n)$ 84
II.6.2 Eléments de Jucys–Murphy 85
II.6.3 Algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique 85
II.6.4 Spectre des éléments de Jucys–Murphy classiques 89
II.6.5 Construction des représentations 93
II.6.5.1 Eléments Baxterisés 94
II.6.5.2 Produit smash classique 95
II.6.5.3 Représentations 97
II.6.5.4 Produit scalaire 98
II.6.6 Complétude 101
Appendice II.6.A Structure de l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique . . . 103

Appendice II.6.B Opérateurs d'entrelacement classiques 104
Appendice II.A Exemples 109

II.1 Introduction

L'algèbre de Hecke de type A, $H_n(q)$, est une déformation à un paramètre de l'algèbre du groupe symétrique (voir le Chapitre *Introduction générale*). Nous omettrons la plupart de temps la référence au paramètre de déformation q et écrirons simplement H_n (pour les autres familles d'algèbres apparaissant dans ce Chapitre, la référence aux paramètres sera aussi très souvent omise).

Les algèbres de Hecke H_n forment, par rapport à n, une chaîne ascendante d'algèbres. Ces algèbres possèdent un ensemble d'éléments de Jucys–Murphy. C'est un ensemble commutatif maximal (pour q générique et dans la limite classique) dont les avantages sont : description explicite (comparativement aux autres ensembles maximaux commutatifs découverts dans l'étude des modèles de chaînes de spin) et une relation simple avec les centralisateurs des membres de la chaîne. De plus, la formule inductive pour les éléments de Jucys–Murphy peut être relevée au niveau universel : il existe une chaîne d'algèbres de Hecke affines $\hat{H}_n$ pour lesquelles on définit également les éléments de Jucys–Murphy ; la sous-algèbre de $\hat{H}_n$ engendrée par les éléments de Jucys–Murphy est isomorphe à une algèbre polynômiale et il existe une surjection $\hat{H}_n \to H_n$ qui envoie les éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre de Hecke affine aux éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre de Hecke H_n.

Le principal objet d'étude de ce Chapitre est l'algèbre de Hecke, que nous notons $H(m,1,n)$, associée au groupe de réflexions complexe $G(m,1,n)$. L'algèbre $H(m,1,n)$ a été introduite dans [4, 10, 16] et est appelée l'algèbre de Hecke cyclotomique (ou aussi algèbre de Ariki–Koike). Pour $m=1$ elle est l'algèbre de Hecke de type A, et pour $m=2$ elle est l'algèbre de Hecke de type B. La théorie des représentations de l'algèbre $H(m,1,n)$ a été développée dans [4] (et dans [36] pour l'algèbre de Hecke de type B) ; les représentations irréductibles de l'algèbre $H(m,1,n)$ sont labellisées, comme pour le groupe $G(m,1,n)$, par les m-uplets de diagrammes de Young.

Les algèbres de Hecke cyclotomiques $H(m,1,n)$ forment aussi (comme les algèbres de Hecke usuelles), par rapport à n, une chaîne ascendante d'algèbres. De plus, l'algèbre $H(m,1,n)$ est naturellement un quotient de l'algèbre de Hecke affine $\hat{H}_n$ et hérite ainsi de l'ensemble d'éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre de Hecke affine. Un objectif de ce Chapitre est de reproduire la théorie des représentations de l'algèbre de Hecke cyclotomique en analysant le spectre des éléments de Jucys–Murphy. Nous généralisons l'approche de Okounkov et Vershik à la théorie des représentations de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$; nous construisons les représentations irréductibles et montrons que l'utilisation de cette approche permet de décrire toutes les représentations irréductibles de $H(m,1,n)$ sous certaines conditions (légèrement plus fortes que les conditions de semi-simplicité) sur les paramètres de l'algèbre $H(m,1,n)$.

Nous insistons sur le fait que notre objectif ici n'est pas la construction de la théorie des représentations en soi - elle a déjà été construite dans [4] - mais nous voulons retrouver les représentations directement à partir de l'analyse des opérateurs de Jucys–Murphy, encoder les bases des représentations en terme d'ensembles de nombres qui satisfont à des règles simples, et qui sont en fait les ensemble

de valeurs propres communes des éléments de Jucys–Murphy, et réinterpréter les multi-tableaux de Young en terme de lignes de valeurs propres des éléments de Jucys–Murphy. Il suit de la construction des bases des représentations que l'ensemble des éléments de Jucys–Murphy est commutatif *maximal* (cette observation est présente dans [4]). L'approche, basée sur les opérateurs de Jucys–Murphy, est de nature récursive - elle utilise la structure de chaîne ascendante, par rapport à n, des algèbres cyclotomiques $H(m,1,n)$.

Comme l'algèbre de Hecke cyclotomique est un quotient de l'algèbre de Hecke affine, une représentation de l'algèbre de Hecke cyclotomique est aussi une représentation de l'algèbre de Hecke affine. Les représentations des algèbres de Hecke affines sont habituellement exprimées dans un langage différent, voir [1, 3, 6, 93, 99, 109] pour les papiers originaux et des articles de revues sur les situations classique et q-déformée.

Une nouveauté de la construction présentée ici des représentations de l'algèbre de Hecke cyclotomique consiste en l'introduction d'une nouvelle algèbre associative. Nous équipons d'une structure d'algèbre le produit tensoriel de l'algèbre $H(m,1,n)$ avec une algèbre libre associative engendrée par les m-tableaux standards correspondant aux m-partitions de n. Nous notons l'algèbre qui résulte de cette construction par $\mathfrak{T}$. Les représentations sont ensuite construites par évaluation à droite avec l'aide de la représentation unidimensionnelle la plus simple de $H(m,1,n)$. Il existe un homomorphisme "d'évaluation" naturel de $\mathfrak{T}$ vers $H(m,1,n)$ envoyant le générateur associé à un m-tableau standard à l'idempotent correspondant de l'algèbre $H(m,1,n)$.

Une conséquence intéressante de l'existence de ce "produit smash" avec l'algèbre libre est une structure de $H(m,1,n)$-module sur le produit tensoriel de représentations correspondant à deux (en général, un nombre arbitraire de) m-partitions. Nous déterminons les règles de décomposition de ces produits tensoriels en sommes directes de représentations irréductibles. Les règles de décomposition elles-mêmes sont plutôt simples : $V_{\lambda^{(m)}}\hat{\otimes}V_{\lambda'^{(m)}} \cong \dim(V_{\lambda'^{(m)}})\ V_{\lambda^{(m)}}$; pourtant un opérateur d'entrelacement, établissant l'isomorphisme, est difficile à décrire explicitement - déjà pour de petits n le choix le plus simple d'un opérateur d'entrelacement est relativement complexe. Par ailleurs, pour obtenir les règles de décomposition nous avons besoin du résultat de complétude qui assure que tout $H(m,1,n)$-module est isomorphe à une somme directe de $H(m,1,n)$-modules correspondant à des m-partitions de n ; pourtant la définition de la structure de module sur le produit tensoriel n'utilise pas la complétude. Nous pensons que la structure de module sur le produit tensoriel mérite une étude plus poussée.

L'espace vectoriel d'une représentation obtenue avec l'aide du produit smash est équipé d'une base distinguée qui est analogue à la base semi-normale pour les représentations du groupe symétrique. Il s'avère qu'il existe plusieurs analogues d'un produit scalaire invariant sur les espaces des représentations. L'un est bilinéaire, les définitions des autres utilisent la conjugaison complexe, ainsi que l'involution $\omega\colon\ q \to q^{-1},\ v_j \to v_j^{-1},\ j = 1,\dots,m$ (q et v_j, $j = 1,\dots,m$, sont les paramètres de l'algèbre $H(m,1,n)$, voir Section II.2 pour les définitions précises). Nous calculons ces produits pour toute représentation irréductible de $H(m,1,n)$, construisant ainsi les analogues des représentations orthogonales du groupe symétrique. En conséquence, une large classe de représentations irréductibles de dimension finie de l'algèbre de Hecke affine sont unitarisables dans un certain sens. Si les paramètres q et v_j, $j = 1,\dots,m$, de l'algèbre $H(m,1,n)$ prennent des valeurs dans le cercle unitaire (dans $\mathbb{C}$)

alors un de ces produits devient un produit Hermitien usuel.

L'approche inductive pour la théorie des représentations de l'algèbre de Hecke usuelle (de type A) utilise de manière cruciale la théorie des représentations de l'algèbre de Hecke affine de type A. On pourrait s'attendre à ce que il soit nécessaire d'utiliser ici les représentations de l'algèbre de Hecke affine de type B (voir [25, 72] pour les définitions) pour la théorie des représentations des algèbres de Hecke cyclotomiques. Mais – et cela peut être surprenant – dans le cas non-dégénéré, la théorie des représentations des algèbres $H(m,1,n)$, par l'approche inductive, requiert également l'étude de l'algèbre de Hecke affine de type A. Pourtant, dans la limite classique, une certaine version d'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique, que nous notons $\mathfrak{A}_{m,n}$ dans le texte, apparaît ; les représentations de l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique la plus simple,$\mathfrak{A}_{m,2}$, servent pour l'étude de la théorie des représentations du groupe de réflexions complexe $G(m,1,n)$ – la limite classique de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$.

Les algèbres $\mathfrak{A}_{m,n}$ pour tout $m = 1, 2, \ldots$ peuvent être obtenues par une certaine limite à partir d'une seule et même algèbre de Hecke affine $\hat{H}_n$.

La théorie des représentations de $G(2,1,n)$ (le groupe de Coxeter de type B) a été étudiée par Young dans [106] et la théorie des représentations du produit en couronne $A \wr S_n$ d'un groupe fini arbitraire A par le groupe symétrique (dont $G(m,1,n)$ est un cas particulier) a été étudiée par Specht dans [97]. Etant donné un groupe fini A, les produits en couronne $A \wr S_n$ forment, par rapport à n, une chaîne ascendante de groupes. L'approche de Okounkov et Vershik a été étendue à la théorie des représentations du produit en couronne d'un groupe fini quelconque par le groupe symétrique dans [87]. Les règles de branchement de la chaîne des groupes $A \wr S_n$ sont sans multiplicité si et seulement si le groupe A est abélien. La chaîne des groupes $G(m,1,n)$ est l'exemple le plus simple (ici A est un groupe cyclique) d'une chaîne sans multiplicité de produits en couronne $A \wr S_n$.

Dans ce travail, nous décrivons attentivement la limite classique de toute la construction faite pour $H(m,1,n)$, incluant en particulier le produit smash, cette fois de l'algèbre du groupe $G(m,1,n)$, avec l'algèbre libre associative des m-tableaux standards. Certaines parties de cette construction s'avèrent être plus compliquées que dans le cas non-dégénéré. Nous omettrons systématiquement les preuves dans la limite classique quand elles sont pratiquement une répétition des preuves de l'assertion correspondante pour l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$. Mais quand la situation dans le cas dégénéré ne suit pas exactement le cas non-dégénéré, nous donnons toute l'information nécessaire. Cela concerne, en particulier, la structure des algèbre de Hecke affines dégénérées cyclotomiques et leurs ensembles commutatifs, et aussi certaines subtilités concernant les opérateurs d'entrelacement.

Les représentations obtenues avec l'aide du produit smash sont les analogues, pour $G(m,1,n)$, des représentations semi-normales du groupe symétrique. Nous déterminons le produit scalaire Hermitien $G(m,1,n)$-invariant sur les espaces de représentations et décrivons les analogues des représentations orthogonales du groupe symétrique.

II.1.1 Organisation du chapitre

Dans la Section II.2 nous rappelons les définitions de diverses chaînes de groupes et d'algèbres intervenant plus tard, et la définition des éléments de Jucys–Murphy de la chaine des groupes de

tresses et des chaînes des quotients de l'algèbre du groupe de tresses.

Les Sections II.3, II.4 et II.5 sont consacrées à la théorie des représentations de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$.

Dans la Section II.3 nous commençons l'étude de la théorie des représentations de la chaîne, par rapport à n, des algèbres de Hecke cyclotomiques $H(m,1,n)$, généralisant l'approche de Okounkov et Vershik de la théorie des représentations du groupe symétrique. Un outil important ici est la liste des représentations, satisfaisant certaines propriétés naturelles, de l'algèbre de Hecke affine $\hat{H}_2$. Nous relions l'ensemble des m-tableaux standards de Young avec l'ensemble $\mathrm{Spec}(J_1,\ldots,J_n)$ des valeurs propres communes des éléments de Jucys–Murphy $J_1,\ldots,J_n$ dans une certaine classe de représentations (que nous appelons C-représentations) de $H(m,1,n)$. Plus précisément, nous montrons que toute ligne de nombres appartenant à $\mathrm{Spec}(J_1,\ldots,J_n)$ est contenue dans un ensemble appelé $\mathrm{Cont}_m(n)$ qui est en bijection avec l'ensemble des m-tableaux standards de Young.

Dans la Section II.4 nous équipons, pour toute m-partition $\lambda^{(m)}$ de n, l'espace $\mathbb{C}[\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}]\otimes H(m,1,n)$ d'une structure d'algèbre associative. Ici $\mathbb{C}[\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}]$ est l'algèbre libre associative dont les générateurs $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ sont labellisés par les m-tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$. Pour définir la structure d'algèbre, il est pratique d'utiliser la forme Baxterisée de (seulement) une partie des générateurs de $H(m,1,n)$. Etant donnée une représentation unidimensionnelle de l'algèbre $H(m,1,n)$, nous construisons, avec l'aide de la structure d'algèbre sur $\mathbb{C}[\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}]\otimes H(m,1,n)$, une représentation $V_{\lambda^{(m)}}$ sur l'espace vectoriel dont une base est paramétrée par les m-tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$. Cette construction implique que l'ensemble $\mathrm{Spec}(J_1,\ldots,J_n)$ des valeurs propres communes des éléments de Jucys–Murphy dans les C-représentations coïncide avec l'ensemble $\mathrm{Cont}_m(n)$ et ainsi avec l'ensemble des m-tableaux standards. A la fin de la Section II.4 nous calculons des analogues d'un produit scalaire invariant pour toute représentation $V_{\lambda^{(m)}}$.

Dans l'Appendice à la Section 4 nous expliquons comment la structure d'algèbre sur l'espace $\mathbb{C}[\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}]\otimes H(m,1,n)$ induit une structure tensorielle sur l'ensemble des C-représentations de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$; plus généralement, étant donné un $H(m,1,n)$-module W, la structure d'algèbre sur $\mathbb{C}[\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}]\otimes H(m,1,n)$ permet de définir une structure de $H(m,1,n)$-module sur l'espace $V_{\lambda^{(m)}}\otimes W$, où $V_{\lambda^{(m)}}$ est la C-représentation correspondant à la m-partition $\lambda^{(m)}$. Nous déterminons les règles de décomposition des produits tensoriels de C-représentations en sommes directes de représentations irréductibles. Au cours de la preuve nous donnons plusieurs exemples explicites de telles décompositions. Cet Appendice est plutôt technique et n'est pas nécessaire pour la compréhension du reste du chapitre. Il peut être sauté lors d'une première lecture.

Dans la Section II.5 nous complétons la théorie des représentations des algèbres de Hecke cyclotomiques ; nous montrons que les représentations construites sont irréductibles et non-isomorphes deux à deux (la preuve est inclue pour être complet ; elle est adoptée de [4]). Utilisant une borne supérieure (prouvée indépendamment dans le Chapitre III) pour la dimension de l'algèbre de Hecke cyclotomique et certains résultats sur les produits de diagrammes de Bratteli (rappelés dans le Chapitre I, Section I.2), nous concluons de façon standard que la classe des C-représentations irréductibles contient toutes les représentations irréductibles de l'algèbre de Hecke cyclotomique, quand les paramètres de l'algèbre satisfont les restrictions de la Section II.2.

De plus, nous incluons dans la Section II.5 plusieurs conséquences directes de la théorie des représentations (valides soit dans le cadre générique, soit sous les restrictions sur les paramètres considérées dans ce chapitre) : la semi-simplicité de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$, la simplicité des règles de branchement pour les représentations de l'algèbre $H(m,1,n)$ [1] et la maximalité dans $H(m,1,n)$ de l'ensemble commutatif formé par les éléments de Jucys–Murphy. Nous mentionnons aussi l'information, impliquée par la théorie des représentations développée, sur la structure du centralisateur de l'algèbre $H(m,1,n-1)$ considérée comme une sous-algèbre de $H(m,1,n)$.

La limite classique de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$ est l'algèbre du groupe de réflexions complexe $G(m,1,n)$. La Section II.6 est entièrement consacrée au groupe $G(m,1,n)$.

La théorie des représentations de $H(m,1,n)$ développée dans les Sections II.3, II.4 et II.5 peut être utilisée pour obtenir immédiatement la théorie des représentations du groupe $G(m,1,n)$: on doit seulement prendre la limite classique des paramètres dans les formules pour les éléments matriciels des générateurs. Néanmoins il est intéressant de construire la théorie des représentations de la chaîne des groupes indépendamment du cas non-dégénéré. Nous présentons la limite classique de toute l'approche développée dans les Sections II.3, II.4 et II.5, établissant l'approche inductive à la théorie des représentations de la chaîne, par rapport à n, des groupes $G(m,1,n)$.

Tout d'abord, nous expliquons comment obtenir les éléments de Jucys–Murphy classiques de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G(m,1,n)$ à partir des éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre de Hecke cyclotomique non-dégénérée $H(m,1,n)$ (nous étendons ainsi un résultat de [88] sur les groupes de Weyl et leurs algèbres de Hecke). En ce qui concerne la relation avec l'algèbre de Hecke affine, la situation se complique au niveau classique ; nous introduisons une algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique $\mathfrak{A}_{m,n}$. Les algèbres de Hecke affines dégénérées cyclotomiques forment aussi une chaîne par rapport à n. Nous établissons la commutativité d'un certain ensemble d'éléments de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,n}$; nous appelons les éléments de cet ensemble commutatif les éléments de Jucys–Murphy "classiques universels". Il existe une surjection $\mathfrak{A}_{m,n} \to \mathbb{C}G(m,1,n)$ et les éléments de Jucys–Murphy classiques sont les images des éléments de Jucys–Murphy classiques universels de $\mathfrak{A}_{m,n}$ par cette surjection ; nous obtenons ainsi, indépendamment du cadre non-dégénéré, une preuve de la commutativité de l'ensemble formé par les éléments de Jucys–Murphy classiques.

Ensuite nous répétons *grosso modo* les mêmes étapes que dans le cas non-dégénéré. Nous étudions une certaine classe de représentations de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$ et déduisons que le spectre des éléments de Jucys–Murphy classiques dans les C-représentations est inclus dans un ensemble $\mathrm{cCont}_m(n)$ qui est en bijection avec l'ensemble des m-tableaux de Young standards. Nous introduisons une structure d'algèbre sur le produit tensoriel de $\mathbb{C}G(m,1,n)$ avec une algèbre libre associative engendrée par les m-tableaux standards. Nous expliquons brièvement l'analogue de la construction des représentations de $H(m,1,n)$ dans le cadre classique et concluons que les représentations construites contiennent toutes les représentations irréductibles du groupe $G(m,1,n)$. Nous ne donnons pas les preuves des

1. L'article [34] défend le point de vue que c'est l'algèbre de Hecke affine "qui est responsable du phénomène des multiplicités égales à 1" ; pour les représentations génériques de dimension finie, la simplicité des règles de branchement (le phénomène des multiplicités égales à 1) de l'algèbre de Hecke affine est une conséquence de la simplicité des règles de branchement des algèbres de Hecke cyclotomiques car dans une représentation générique de dimension finie, le spectre de l'élément de Jucys–Murphy J_1 est fini, et donc une telle représentation est en fait une représentation d'un quotient cyclotomique de l'algèbre de Hecke affine.

propriétés concernant $G(m,1,n)$ quand elles suivent les mêmes lignes que dans le cas non-dégénéré ; nous indiquons seulement les modifications quand elles apparaissent.

La Section II.6 se termine avec deux appendices. Le premier traite la structure des algèbres de Hecke affines dégénérées cyclotomiques $\mathfrak{A}_{m,n}$; nous construisons une base de $\mathfrak{A}_{m,n}$, ce qui donne une forme normale pour les éléments de $\mathfrak{A}_{m,n}$. Dans le deuxième appendice, nous étudions les opérateurs d'entrelacement classiques, utiles dans l'analyse du spectre des opérateurs de Jucys–Murphy ; nous montrons comment obtenir les opérateurs d'entrelacement classiques comme des limites classiques de certains opérateurs d'entrelacement de l'algèbre de Hecke affine non-dégénérée $\hat{H}_n$.

Certains des résultats de la Section II.6 peuvent être trouvés dans la littérature. Les éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre de groupe du produit en couronne d'un groupe fini A par le groupe symétrique (dont $\mathbb{C}G(m,1,n)$ est un exemple particulier) ont été définis indépendamment dans [87] et [104] ; les éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre du groupe de Coxeter $G(2,1,n)$ ont été introduits dans [88]. Dans [87], l'approche de Okounkov et Vershik est étendue aux produits en couronne d'un groupe fini quelconque A par le groupe symétrique. Egalement, il s'avère que l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique $\mathfrak{A}_{m,n}$ coïncide avec l'algèbre de Hecke en couronne adaptée à notre situation ; l'algèbre de Hecke en couronne a été définie et étudiée dans [103] (voir aussi [102]). L'algèbre $\mathfrak{A}_{m,n}$, définie différemment, apparait aussi dans [89] comme un analogue pour $G(m,1,n)$ d'une algèbre de Hecke graduée. Dans notre présentation, nous insistons spécialement sur les connections entre le traitement pour les groupes $G(m,1,n)$ avec notre traitement pour les algèbres $H(m,1,n)$; en particulier, comme nous l'avons dit plus haut, nous obtenons les éléments de Jucys–Murphy pour $G(m,1,n)$ (respectivement, les opérateurs d'entrelacement de $\mathfrak{A}_{m,n}$) en prenant la limite dans certaines expressions impliquant les éléments de Jucys–Murphy de $H(m,1,n)$ (respectivement, les opérateurs d'entrelacement de $\hat{H}_n$).

Ce chapitre se termine avec l'Appendice A, qui contient plusieurs exemples des relations définissantes de l'algèbre sur le produit tensoriel de $H(m,1,n)$ avec l'algèbre libre associative engendrée par les m-tableaux standards ; les formules explicites pour les éléments matriciels des générateurs dans des représentations irréductibles de $H(m,1,n)$ de basse dimension sont données.

Notations.

Dans ce chapitre, le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Le spectre d'un opérateur $\mathcal{T}$ est noté $\mathrm{Spec}(\mathcal{T})$.
Nous notons, pour $k,l \in \mathbb{Z}$ avec $k<l$, par $[k,l]$ l'ensemble des entiers $\{k,k+1,\ldots,l-1,l\}$.
Le q-nombre j_q est défini par $j_q := \dfrac{q^j - q^{-j}}{q-q^{-1}}$.
La matrice diagonale qui a pour entrées $z_1, z_2, \ldots, z_k$ (sur la diagonale) est notée $\mathrm{diag}(z_1, z_2, \ldots, z_k)$.

II.2 Algèbres de Hecke cyclotomiques et éléments de Jucys–Murphy

Le groupe de tresses B_n de type A (ou simplement le groupe de tresses) à n brins est engendré par les éléments $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ avec les relations définissantes :

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & \text{pour } i = 1, \ldots, n-2 \ , \qquad \text{(II.2.1)} \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } i, j = 1, \ldots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1 \ . \qquad \text{(II.2.2)} \end{cases}$$

Le groupe de tresses αB_n de type B (parfois appelé groupe de tresses *affine*) est obtenu en ajoutant aux générateurs $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ le générateur τ avec les relations définissantes (II.2.1), (II.2.2) et :

$$\begin{cases} \tau\sigma_1\tau\sigma_1 = \sigma_1\tau\sigma_1\tau \ , & \text{(II.2.3)} \\ \tau\sigma_i = \sigma_i\tau \qquad \text{pour } i > 1 \ . & \text{(II.2.4)} \end{cases}$$

Les éléments J_i, $i = 1, \ldots, n$, du groupe de tresses de type B définis de manière inductive par la condition initiale et la récursion suivantes :

$$J_1 = \tau \ , \quad J_{i+1} = \sigma_i J_i \sigma_i \ , \tag{II.2.5}$$

sont appelés éléments de Jucys–Murphy. Il est connu que ces éléments forment un ensemble commutatif. De plus, J_i commute avec tous les σ_k, exceptés σ_{i-1} et σ_i,

$$J_i\sigma_k = \sigma_k J_i \quad \text{si} \ \ k > i \ \ \text{ou} \ \ k < i-1 \ . \tag{II.2.6}$$

L'algèbre de Hecke affine $\hat{H}_n$ est le quotient de l'algèbre du groupe de tresses affine αB_n par :

$$\sigma_i^2 = (q - q^{-1})\sigma_i + 1 \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n-1 \ . \tag{II.2.7}$$

L'algèbre de Hecke usuelle de type A, H_n, est l'algèbre engendrée par les éléments $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ avec les relations (II.2.1)–(II.2.2) et (II.2.7).

L'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$ est le quotient de l'algèbre de Hecke affine $\hat{H}_n$ par

$$(\tau - v_1) \ldots (\tau - v_m) = 0 \ . \tag{II.2.8}$$

Ainsi, l'algèbre $H(m, 1, n)$ est engendrée par les éléments $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ avec les relations définissantes (II.2.1)–(II.2.4) et (II.2.7)–(II.2.8). En particulier, $H(1, 1, n)$ est l'algèbre de Hecke de type A et $H(2, 1, n)$ est l'algèbre de Hecke de type B. La sous-algèbre de $H(m, 1, n)$ engendrée par les éléments $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ est isomorphe à l'algèbre de Hecke de type A (voir, par exemple, Chapitre suivant).

L'algèbre $H(m, 1, n)$ est une déformation de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ du groupe de réflexions complexe $G(m, 1, n)$. Le groupe $G(m, 1, n)$ est isomorphe à $S_n \wr C_m$, le produit en couronne du groupe cyclique à m éléments par le groupe symétrique S_n. Nous rappelons la présentation standard du groupe $G(m, 1, n)$ dans la Section II.6.

La déformation de $\mathbb{C}G(m,1,n)$ vers l'algèbre $H(m,1,n)$ est plate dans le sens où $H(m,1,n)$ est un $\mathbb{C}[q,q^{-1},v_1,\ldots,v_m]$-module libre de dimension égale au cardinal de $G(m,1,n)$, c'est-à-dire :

$$\dim(H(m,1,n)) = n! \cdot m^n \ . \tag{II.2.9}$$

La platitude est prouvée dans [4] avec l'aide de la théorie des représentations, et dans le Chapitre III, Section III.4, dans le cadre de la théorie des algèbres associatives.

La spécialisation de $H(m,1,n)$ est semi-simple si et seulement si les valeurs numériques des paramètres satisfont (voir [2])

$$1 + q^2 + \cdots + q^{2N} \neq 0 \ \text{ pour tout } \ N: \ N < n \tag{II.2.10}$$

et

$$q^{2i}v_j - v_k \neq 0 \ \text{ pour tout } \ i,j,k \ \text{ tels que } \ j \neq k \text{ et } \ -n < i < n \ . \tag{II.2.11}$$

Par la suite, nous travaillons soit avec une algèbre de Hecke cyclotomique générique (c'est-à-dire, v_1, $\ldots$, v_m et q sont des indéterminées), soit dans le cas semi-simple avec une condition supplémentaire :

$$v_j \neq 0 \ , \ j = 1,\ldots,m \ . \tag{II.2.12}$$

En faisant varier n, les algèbres $H(m,1,n)$ forment une chaîne ascendante d'algèbres, au sens du Chapitre I, Section I.1 :

$$H(m,1,0) = \mathbb{C} \subset H(m,1,1) \subset \cdots \subset H(m,1,n) \subset \ldots \tag{II.2.13}$$

(les éléments τ et $\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-2}$ de $H(m,1,n)$ engendrent une sous-algèbre isomorphe à $H(m,1,n-1)$, voir Chapitre III, Section III.4). De la même manière, les groupes de tresses, les groupes de tresses affines et les algèbres de Hecke affines forment des chaînes ascendantes d'algèbres. Ainsi, la référence à n (comme dans H_n, $H(m,1,n)$, etc.) dans la notation pour les générateurs peut être omise.

La théorie des représentations de l'algèbre générique $H(m,1,n)$ a été étudiée dans [4]. Ici, nous présentons une autre approche qui est une généralisation de l'approche de Okounkov et Vershik de la théorie des représentations du groupe symétrique [86], et qui fait référence à la structure de chaine (II.2.13).

Nous noterons par les mêmes symboles J_i les images des éléments de Jucys–Murphy dans l'algèbre de Hecke cyclotomique. Comme conséquence de la théorie des représentations de l'algèbre générique $H(m,1,n)$, l'ensemble des éléments de Jucys–Murphy $\{J_1,\ldots,J_n\}$ est commutatif maximal dans $H(m,1,n)$; plus précisément, l'algèbre des polynômes en les éléments de Jucys–Murphy coïncide avec l'algèbre engendrée par l'union des centres de $H(m,1,k)$ pour $k = 1,\ldots,n$.

Remarque. Nous utilisons la même notation "σ_i" pour les générateurs de différents groupes et algèbres : ce sont les groupes de tresses usuels et affines et les algèbres de Hecke usuelles, affines et cyclotomiques. Le symbole τ est aussi utilisé pour un générateur de plusieurs différents objets. Cela ne devrait pas prêter à confusion, il sera clair selon le contexte quel(le) est le groupe/algèbre en question.

II.3 Spectre des éléments de Jucys–Murphy et m-tableaux de Young

Nous entamons le développement d'une approche, basée sur les éléments de Jucys–Murphy, à la théorie des représentations de la chaîne (par rapport à n) des algèbres de Hecke cyclotomiques $H(m,1,n)$. Cela généralise l'approche développée par Okounkov et Vershik dans [86].

1. La première étape consiste en l'étude des représentations de $H(m,1,n)$ vérifiant deux conditions. Premièrement, les éléments de Jucys–Murphy $J_1,\dots,J_n$ sont représentés par des opérateurs semi-simples (diagonalisables). Deuxièmement, pour tout $i=1,\dots,n-1$, l'action de la sous-algèbre engendrée par J_i, J_{i+1} et σ_i est complètement réductible. Nous utiliserons le nom de C-représentations (C vient de la première lettre de "complètement réductible") pour de telles représentations. A la fin de la construction, nous verrons que toutes les représentations irréductibles de $H(m,1,n)$ sont des C-représentations.

En analogie avec [86], nous notons $\mathrm{Spec}(J_1,\dots,J_n)$ l'ensemble des lignes de valeurs propres des éléments de Jucys–Murphy dans l'ensemble des C-représentations : $\Lambda=(a_1^{(\Lambda)},\dots,a_n^{(\Lambda)})$ appartient à $\mathrm{Spec}(J_1,\dots,J_n)$ si il existe un vecteur e_Λ dans l'espace d'une C-représentation tel que $J_i(e_\Lambda)=a_i^{(\Lambda)}e_\Lambda$ pour tout $i=1,\dots,n$. Toute C-représentation possède une base formée par des vecteurs e_Λ (ceci est une reformulation de la première condition dans la définition des C-représentations). Comme σ_k commute avec J_i pour $k>i$ et $k<i-1$, l'action de σ_k sur un vecteur e_Λ, $\Lambda\in\mathrm{Spec}(J_1,\dots,J_n)$, est "locale" dans le sens où $\sigma_k(e_\Lambda)$ est une combinaison linéaire de vecteurs $e_{\Lambda'}$ tels que $a_i^{(\Lambda')}=a_i^{(\Lambda)}$ pour $i\neq k,k+1$.

2. Algèbre de Hecke affine $\hat{H}_2$. Considérons l'algèbre de Hecke affine $\hat{H}_2$, engendrée par X, Y et σ avec les relations :

$$XY=YX,\quad Y=\sigma X\sigma,\quad \sigma^2=(q-q^{-1})\sigma+1\ . \tag{II.3.1}$$

Pour tout $i=1,\dots,n-1$, la sous-algèbre de $H(m,1,n)$ engendrée par J_i, J_{i+1} et σ_i est un quotient de $\hat{H}_2$. Nous reproduisons ici les résultats de [44] concernant la classification des représentations irréductibles avec X et Y diagonalisables de l'algèbre $\hat{H}_2$.

On trouve des représentations irréductibles de dimension 1 et de dimension 2.

– Les représentations irréductibles unidimensionnelles sont données par

$$X\mapsto a,\quad Y\mapsto q^{2\varepsilon}a,\quad \sigma\mapsto \varepsilon q^{\varepsilon},\qquad \text{où } \varepsilon=\pm1. \tag{II.3.2}$$

– Les représentations irréductibles de dimension 2 sont données par

$$\sigma\mapsto\begin{pmatrix}0&1\\1&q-q^{-1}\end{pmatrix},\quad X\mapsto\begin{pmatrix}a&-(q-q^{-1})b\\0&b\end{pmatrix},\quad Y\mapsto\begin{pmatrix}b&(q-q^{-1})b\\0&a\end{pmatrix},$$

avec $b\neq a$ pour que X et Y soient diagonalisables, et avec $b\neq q^{\pm2}a$ pour assurer l'irréductibilité. Par un changement de base, nous mettons X et Y sous forme diagonale :

$$\sigma\mapsto\begin{pmatrix}\frac{(q-q^{-1})b}{b-a}&1-\frac{(q-q^{-1})^2ab}{(b-a)^2}\\1&-\frac{(q-q^{-1})a}{b-a}\end{pmatrix},\quad X\mapsto\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix},\quad Y\mapsto\begin{pmatrix}b&0\\0&a\end{pmatrix}. \tag{II.3.3}$$

3. Nous retournons aux lignes de valeurs propres des éléments de Jucys–Murphy.

Proposition II.1. *Soit* $\Lambda = (a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \mathrm{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ *et soit* e_Λ *un vecteur correspondant.*

(a) On a $a_i \neq a_{i+1}$.

(b) Si $a_{i+1} = q^{2\varepsilon} a_i$ *avec* $\varepsilon = \pm 1$, *alors* $\sigma_i(e_\Lambda) = \varepsilon q^\varepsilon e_\Lambda$.

(c) Si $a_{i+1} \neq q^{\pm 2} a_i$, *alors* $\Lambda' = (a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_n) \in \mathrm{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ *; de plus, le vecteur* $\sigma_i(e_\Lambda) - \frac{(q-q^{-1})a_{i+1}}{a_{i+1}-a_i} e_\Lambda$ *correspond à la ligne* Λ' *(voir (II.3.3) avec* $b = a_{i+1}$ *et* $a = a_i$*).*

C'est une conséquence directe de la théorie des représentations de l'algèbre $\hat{H}_2$, décrite ci-dessus (cf. la Proposition 4.1 dans [86] et la Proposition 3 dans [44]).

4. Lignes de contenus.

Définition II.2. *Une ligne de contenus* $(a_1, \dots, a_n)$ *est une ligne de nombres satisfaisant les conditions suivantes :*

(c1) $a_1 \in \{v_1, \dots, v_m\}$ *;*

(c2) pour tout $j > 1$ *: si* $a_j = v_k q^{2z}$ *pour un certain* k *et* $z \neq 0$, *alors* $\{v_k q^{2(z-1)}, v_k q^{2(z+1)}\} \cap \{a_1, \dots, a_{j-1}\} \neq \varnothing$ *;*

(c3) si $a_i = a_j = v_k q^{2z}$ *avec* $i < j$ *pour un certain* k *et un certain* z, *alors* $\{v_k q^{2(z-1)}, v_k q^{2(z+1)}\} \subset \{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\}$.

Nous notons $\mathrm{Cont}_m(n)$ *l'ensemble des lignes de contenus de longueur* n *.*

La proposition suivante est l'analogue "cyclotomique" du Théorème 5.1 dans [86] et de la Proposition 4 dans [44]. Nous adaptons la preuve, en portant une attention particulière aux endroits où les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) sont essentielles.

Proposition II.3. *Si une ligne de nombres* $(a_1, \dots, a_n)$ *appartient à* $\mathrm{Spec}(J_1, \dots, J_n)$, *alors elle appartient à* $\mathrm{Cont}_m(n)$.

Preuve. Comme $J_1 = \tau$, la condition (c1) est impliquée par l'équation caractéristique de τ.

Supposons que (c2) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire il existe une ligne $(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ telle que, pour un certain $j > 1$, un certain k et un certain $z \neq 0$, on a $a_j = v_k q^{2z}$ mais $a_i \neq v_k q^{2(z-1)}$ et $a_i \neq v_k q^{2(z+1)}$ pour tout i plus petit que j. Par des applications successives du point (c) de la Proposition II.1, nous obtenons un élément de $\mathrm{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ avec $v_k q^{2z}$ en première position. Les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) impliquent $v_k q^{2z} \neq v_i$ pour tout $i = 1, \dots, m$, ce qui contredit la condition (c1).

Nous prouvons la condition (c3) par récurrence sur $j - i$. La base de la récurrence est le point (a) de la Proposition II.1. Supposons qu'il existe i et j tels que $i < j$ et $a_i = a_j = v_k q^{2z}$ pour une certaine ligne $(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{Spec}(J_1, \dots, J_n)$. Par récurrence nous supposons que la condition (c3) est vérifiée pour tout i', j' tels que $|j' - i'| < j - i$. Si $\{v_k q^{2(z-1)}, v_k q^{2(z+1)}\} \cap \{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\} = \varnothing$, alors par une

application du point (c) de la Proposition II.1, nous bougeons a_j vers la gauche dans la position $(j-1)$ (notons que $(j-1)$ est toujours plus grand que i par le point (a) de la Proposition II.1) et obtenons un élément de $\mathrm{Spec}(J_1,\ldots,J_n)$ qui contredit l'hypothèse de récurrence. Maintenant supposons que seulement un élément parmi $\{v_k q^{2(z-1)}, v_k q^{2(z+1)}\}$ est présent dans $\{a_{i+1},\ldots,a_{j-1}\}$. Par hypothèse de récurrence, cet élément apparait seulement une fois dans $\{a_{i+1},\ldots,a_{j-1}\}$. Si $j-i>2$, alors,par une application du point (c) de la Proposition II.1, nous obtenons un élément de $\mathrm{Spec}(J_1,\ldots,J_n)$ contredisant l'hypothèse de récurrence. Donc $j-i=2$, ce qui est impossible car la relation de tresse $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ est incompatible avec $\sigma_i \mapsto -\varepsilon q^{-\varepsilon}$ et $\sigma_{i+1} \mapsto \varepsilon q^{\varepsilon}$, où $\varepsilon = \pm 1$ (ces valeurs viennent du point (b) de la Proposition II.1). $\square$

Remarque. Soit E_S un espace vectoriel avec une base $\{e_\Lambda\}$ dont les vecteurs sont labellisés par $\Lambda \in \mathrm{Spec}(J_1,\ldots,J_n)$. Soit E_C un espace vectoriel avec une base $\{e_\mu\}$ dont les vecteurs sont labellisés par $\mu \in \mathrm{Cont}_m(n)$. D'après la Proposition II.3, $\mathrm{Spec}(J_1,\ldots,J_n) \subset \mathrm{Cont}_m(n)$ et donc E_S est naturellement un sous-espace vectoriel de E_C. L'espace E_S est équipé avec une action de l'algèbre $H(m,1,n)$: l'opérateur correspondant au générateur τ est simplement J_1 ; les formules pour l'action des générateurs σ_i, $i=1,\ldots,n-1$, sont données dans la Proposition II.1.

La Définition II.2 implique immédiatement que si $(a_1,\ldots,a_i,a_{i+1},\ldots,a_n) \in \mathrm{Cont}_m(n)$ avec $a_{i+1} \neq q^{\pm 2}a_i$, alors $(a_1,\ldots,a_{i+1},a_i,\ldots,a_n) \in \mathrm{Cont}_m(n)$. C'est pourquoi les opérateurs correspondant aux générateurs τ et σ_i, $i=1,\ldots,n-1$, ont un sens en tant qu'opérateurs sur l'espace E_C. Le but de la Sous-Section II.4.3 ci-dessous est de montrer que ces opérateurs continuent de définir une action de l'algèbre $H(m,1,n)$ - maintenant sur le, en principe, plus grand espace E_C. On pourrait construire les représentations en travaillant directement avec les lignes de nombres, mais il est pratique et intéressant de réinterpréter l'ensemble $\mathrm{Cont}_m(n)$ en termes plus géométriques de multi-tableaux de Young.

A la fin de toute la construction, on aura, voir la Section II.5, que les espaces E_S et E_C en fait coïncident.

5. En utilisant les opérateurs "d'entrelacement" $U_{i+1} := \sigma_i J_i - J_i\sigma_i$, $i=1,\ldots,n-1$, on peut prouver, comme dans [44], que :

$$\mathrm{Spec}(J_{i+1}) \subset \mathrm{Spec}(J_i) \cup q^{\pm 2}\cdot \mathrm{Spec}(J_i). \tag{II.3.4}$$

Comme $\mathrm{Spec}(J_1) \subset \{v_1,\ldots,v_m\}$, nous arrivons à la conclusion suivante.

Proposition II.4. *Pour tout $i=1,\ldots,n$,*

$$\mathrm{Spec}(J_i) \subset \{v_k q^{2\,[1-i,i-1]},\ k=1,\ldots,m\}\ . \tag{II.3.5}$$

La Proposition II.4 provient également des Propositions II.1 et II.3. En effet, supposons que pour la ligne $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathrm{Spec}(J_1,\ldots,J_n)$ la Proposition II.4 n'est pas vraie. Soit i l'entier le plus petit pour lequel $a_i \notin \{v_k q^{2\,[1-i,i-1]},\ k=1,\ldots,m\}$. En utilisant le point (c) de la Proposition II.1 nous bougeons a_i vers la gauche jusqu'à ce qu'il atteigne la première position dans la ligne, et nous obtenons ainsi un élément de $\mathrm{Spec}(J_1,\ldots,J_n)$ qui ne vérifie pas la condition (c1). Cela contredit la Proposition II.3.

6. m-diagrammes et m-tableaux de Young . Une m-partition, ou m-diagramme de Young, est un m-uplet de partitions $\lambda^{(m)} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Nous identifions les partitions avec leurs diagrammes de Young, voir Chapitre I, Appendice I.2.A.

La taille d'une partition λ est le nombre de cases du diagramme et est notée $|\lambda|$. Par définition, la taille d'un m-uplet $\lambda^{(m)} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ est

$$|\lambda^{(m)}| := |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_m| \ . \tag{II.3.6}$$

Nous rappelons la terminologie standard. Pour une partition usuelle λ, une case α est appelée *supprimable* si l'ensemble des cases obtenu à partir de λ en enlevant la case α est toujours une partition ; Une case β, qui n'est pas dans λ, est appelée *ajoutable* si l'ensemble des cases obtenu à partir de λ par ajout de β est toujours une partition.

Nous étendons cette terminologie pour les m-partitions. Dans ce but, nous définissons la notion de *m-case* : une m-case $\alpha^{(m)}$ est un couple (α, p) consistant en une case usuelle α et un entier p avec $1 \leq p \leq m$. Par *la case de la m-case* $\alpha^{(m)}$, nous ferons référence à α, et nous écrirons $\mathrm{case}(\alpha^{(m)}) = \alpha$; Par *la position de la m-case* $\alpha^{(m)}$, nous ferons référence à l'entier p et nous écrirons $\mathrm{pos}(\alpha^{(m)}) = p$. Avec cette définition, une m-partition $\lambda^{(m)}$ est un ensemble de m-cases tel que, pour tout p entre 1 et m, le sous-ensemble consistant en les m-cases $\alpha^{(m)}$ avec $\mathrm{pos}(\alpha^{(m)}) = p$ forme une partition usuelle.

Soit $\lambda^{(m)}$ une m-partition de taille n. Une m-case $\alpha^{(m)}$ de $\lambda^{(m)}$ est appelée *supprimable* si l'ensemble des m-cases obtenu à partir de $\lambda^{(m)}$ en enlevant $\alpha^{(m)}$ est toujours une m-partition. Une m-case $\beta^{(m)}$, qui n'est pas dans $\lambda^{(m)}$, est appelée *ajoutable* si l'ensemble des m-cases obtenu à partir de $\lambda^{(m)}$ en rajoutant $\beta^{(m)}$ est toujours une m-partition. La m-partition obtenue à partir de $\lambda^{(m)}$ en enlevant une m-case supprimable $\alpha^{(m)}$ sera notée $\lambda^{(m)} \backslash \{\alpha^{(m)}\}$. Pour toute m-partition $\lambda^{(m)}$, on note $\mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})$ l'ensemble des m-cases supprimables de $\lambda^{(m)}$ et $\mathcal{E}_+(\lambda^{(m)})$ l'ensemble des m-cases ajoutables de $\lambda^{(m)}$.

Une m-partition dont les m-cases sont remplies par des nombres est un m-tableau.

Soit n la taille de la m-partition $\lambda^{(m)}$. Nous plaçons maintenant les nombres $1, \ldots, n$ dans les m-cases de $\lambda^{(m)}$ de telle manière que, dans tout diagramme, les nombres dans les m-cases soient en ordre croissant le long des lignes vers la droite, et le long des colonnes vers le bas. Ceci est un m-tableau de Young *standard* de forme $\lambda^{(m)}$.

Nous associons à chaque m-case d'une m-partition un nombre (le "contenu") qui est $v_k q^{2(s-r)}$ pour la m-case $\alpha^{(m)}$ telle que $\mathrm{pos}(\alpha^{(m)}) = k$ et $\mathrm{case}(\alpha^{(m)})$ se trouve dans la ligne r et la colonne s (de manière équivalente, nous disons que la m-case $\alpha^{(m)}$ se trouve dans la ligne r et la colonne s du k-ème diagramme de la m-partition). Notons que la notion de contenu a un sens pour une m-case arbitraire d'un ensemble arbitraire de m-cases.

Pour un ensemble arbitraire de m-cases, deux m-cases sur la même diagonale du même diagramme ont le même contenu, ce qui permet de parler du "contenu d'une diagonale".

Nous donnons ci-dessous un exemple de m-tableau standard avec $m = 2$ et $n = 10$ (les contenus des m-cases sont indiqués) :

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ v_1 & v_1q^2 & v_1q^4 \\ \hline 6 & 9 & \\ v_1q^{-2} & v_1 & \\ \cline{1-2} 7 & & \\ v_1q^{-4} & & \\ \cline{1-1} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 8 & 10 \\ v_2 & v_2q^2 & v_2q^4 \\ \hline 5 & & \\ v_2q^{-2} & & \\ \cline{1-1} \end{array} \right) . \tag{II.3.7}$$

Proposition II.5. *On a une bijection entre l'ensemble des m-tableaux de Young standards de taille n et l'ensemble* $\mathrm{Cont}_m(n)$.

Preuve. A tout m-tableau de Young standard de taille n, nous associons une ligne de nombres $(a_1, \ldots, a_n)$ telle que a_i pour $i = 1, \ldots, n$ est le contenu de la m-case dans laquelle le nombre i est placé. Cette ligne appartient à $\mathrm{Cont}_m(n)$. En effet, la condition (c1) est immédiatement vérifiée. La condition (c2) est vraie : si i occupe une m-case dont le contenu est v_kq^{2z}, avec $z \neq 0$, d'un m-tableau standard de forme $\lambda^{(m)}$, alors il existe soit une m-case juste au-dessus dans la même colonne, soit une m-case juste sur la gauche dans la même ligne, du même diagramme de $\lambda^{(m)}$; cette case porte un nombre plus petit que i, et donc son contenu, qui est $v_kq^{2(z+1)}$ ou $v_kq^{2(z-1)}$, apparait avant v_kq^{2z} dans la ligne. La condition (c3) est vraie parce que si $a_i = a_j = v_kq^{2z}$ pour $i < j$, alors en raison des restrictions (II.2.10)–(II.2.12) les m-cases portant i et j sont sur la même diagonale du même tableau du m-tableau. Ainsi, la m-case juste au-dessus de la m-case portant le nombre j, et la m-case juste sur la gauche de la m-case portant le nombre j sont présentes dans $\lambda^{(m)}$; ces m-cases ont les contenus $v_kq^{2(z+1)}$ et $v_kq^{2(z-1)}$ et sont occupées par les nombres k and l avec $k, l \in \{i+1, \ldots, j-1\}$ car le m-tableau est standard.

Réciproquement, à toute ligne $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Cont}_m(n)$ nous associons tout d'abord un ensemble de m-cases de cardinal n. De plus, cette association distribue les nombres de 1 à n dans ces m-cases ; chaque m-case porte un nombre et différentes m-cases portent des nombres différents. Ensuite nous vérifions que le m-uplet obtenu est un m-tableau standard. La construction est la suivante.

Les m-cases sont construites l'une après l'autre. Etant donné une ligne $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Cont}_m(n)$ et en supposant que $(i-1)$ m-cases sont déjà construites, nous ajoutons à l'étape numéro i une m-case sur la première place non-occupée de la diagonale dont le contenu est a_i ; nous plaçons le nombre i dans cette m-case. Cette construction est sans ambigüité car les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) assurent que deux diagonales différentes de m-cases ont des contenus différents. La construction d'un ensemble de m-cases de cardinal total n est terminée.

Nous allons montrer que l'ensemble de m-cases construit est un m-tableau standard. Supposons par récurrence que pour $i = 1, \ldots, n-1$ l'ensemble obtenu de m-cases après i étapes est un m-tableau standard (pour $i = 1$ il n'y a rien à prouver ; l'hypothèse de récurrence est justifiée car, pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Cont}_m(n)$, il est clair d'après la Définition II.2 que $(a_1, \ldots, a_i) \in \mathrm{Cont}_m(i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$). Il reste à ajouter une m-case à la position dictée par la valeur $a_n = v_kq^{2z}$, à placer le nombre n à l'intérieur et à vérifier que l'on obtient bien un m-tableau standard.

Si, pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, le nombre a_i est différent du nombre a_n, alors la n-ème m-case est ajoutée à la première place de la diagonale correspondant. Si $z = 0$, alors il n'y a rien à prouver, donc supposons que $z > 0$ (la situation avec $z < 0$ est similaire) ; la n-ème m-case est ajoutée dans la première ligne et nous devons prouver qu'il existe un certain i, $0 < i < n$, tel que $a_i = v_k q^{2(z-1)}$. Supposons que ce n'est pas le cas ; alors par la condition (c2) de la Définition II.2 il existe un certain i, $0 < i < n$, tel que $a_i = v_k q^{2(z+1)}$. Comme $v_k q^{2z}$ n'est pas présent dans la ligne avant la i-ème position, l'ensemble de m-cases construit à l'étape i ne peut pas être un m-tableau standard, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.

Supposons qu'il existe un certain i, $0 < i < n$, tel que $a_i = a_n$. Nous prenons le plus grand entier i satisfaisant cette propriété. Par construction, nous ajoutons la n-ème m-case sur la première place non-occupée de la diagonale qui contient la m-case portant le nombre i. Le résultat est un m-tableau standard seulement si la m-case juste sur la droite de la m-case portant le nombre i et la m-case juste en dessous de la m-case portant le nombre i sont présentes. Et ceci vient de la condition (c3) de la Définition II.2 et de l'hypothèse de récurrence. □

Dans l'exemple (II.3.7) le 2-tableau de Young standard est associé à la ligne de nombres :

$$(v_1, v_1q^2, v_2, v_1q^4, v_2q^{-2}, v_1q^{-2}, v_1q^{-4}, v_2q^2, v_1, v_2q^4).$$

Remarque. La condition "$z \neq 0$" dans la partie (c2) de la Définition II.2 peut être supprimée pour l'algèbre de Hecke de type A ; mais cette condition est nécessaire dès lors que $m > 1$. C'est transparent du point de vue géométrique. Pour l'algèbre de Hecke de type A, si $a_j = 1$ (c'est-à-dire, $z = 0$) pour un certain $j > 1$, alors le nombre j est placé sur la diagonale principale, mais pas dans le coin en haut à gauche, du tableau de Young standard ; c'est pourquoi les deux valeurs q^2 et q^{-2} sont présentes dans ligne $\{a_1, \ldots, a_{j-1}\}$. Néanmoins, pour $m > 1$, si $a_j = v_k$ pour un certain k et un certain $j > 1$, le nombre j peut occuper le coin en haut à gauche d'un tableau du m-tableau standard ; dans ce cas, il peut clairement arriver que aucune des valeurs v_kq^2 et v_kq^{-2} n'apparaisse dans $\{a_1, \ldots, a_{j-1}\}$.

II.4 Construction des représentations

Nous procédons de manière analogue à [84]. Nous définissons premièrement une structure d'algèbre sur le produit tensoriel de l'algèbre $H(m, 1, n)$ avec une algèbre libre associative engendrée par les m-tableaux standards correspondant aux m-partitions de n ; les éléments Baxterisés sont utiles ici. Ensuite, par évaluation (avec l'aide de la représentation unidimensionnelle la plus simple de $H(m, 1, n)$) sur la droite, nous construisons les représentations.

En utilisant le produit tensoriel de l'algèbre $H(m, 1, n)$ avec l'algèbre libre associative engendrée par les m-tableaux standards, nous définissons et étudions dans l'Appendice à cette Section une structure de module sur le produit tensoriel de deux représentations correspondant à des m-partitions.

II.4.1 Eléments Baxterisés

Dans la définition du produit tensoriel de l'algèbre $H(m, 1, n)$ avec une algèbre libre associative, nous allons utiliser fréquemment les éléments Baxterisés.

Définissons, pour tout σ_i parmi les générateurs $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ de $H(m,1,n)$, les éléments Baxterisés $\sigma_i(\alpha,\beta)$ par

$$\sigma_i(\alpha,\beta) := \sigma_i + (q-q^{-1})\frac{\beta}{\alpha-\beta} \ . \tag{II.4.1}$$

Les paramètres α et β sont appelés les paramètres spectraux. Nous rappelons certaines relations utiles pour les générateurs Baxterisés σ_i. Soit

$$f(\alpha,\beta) = \frac{q\alpha - q^{-1}\beta}{\alpha-\beta} \ . \tag{II.4.2}$$

Proposition II.6. *Les relations suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} \sigma_i(\alpha,\beta)\sigma_i(\beta,\alpha) &= f(\alpha,\beta)f(\beta,\alpha), \\ \sigma_i(\alpha,\beta)\sigma_{i+1}(\alpha,\gamma)\sigma_i(\beta,\gamma) &= \sigma_{i+1}(\beta,\gamma)\sigma_i(\alpha,\gamma)\sigma_{i+1}(\alpha,\beta), \\ \sigma_i(\alpha,\beta)\sigma_j(\gamma,\delta) &= \sigma_j(\gamma,\delta)\sigma_i(\alpha,\beta) \qquad\qquad si \ \ |i-j|>1. \end{aligned} \tag{II.4.3}$$

Preuve. C'est un calcul direct et bien connu. □

Pendant la construction des représentations, nous allons souvent vérifier des relations pour les éléments Baxterisés, comme dans [84]. Les relations seront vérifiées pour certaines valeurs des paramètres spectraux. Le lemme suivant montre que les relations d'origine sont impliquées par les relations pour les éléments Baxterisés avec des valeurs fixées des paramètres spectraux.

Lemme II.7. *Soient A et B des éléments d'une algèbre associative unitale arbitraire $\mathcal{A}$. Notons $A(\alpha,\beta) := A + (q-q^{-1})\frac{\beta}{\alpha-\beta}$ et $B(\alpha,\beta) := B + (q-q^{-1})\frac{\beta}{\alpha-\beta}$ où α et β sont des paramètres.*

(i) Si

$$A(\alpha,\beta)A(\beta,\alpha) = f(\alpha,\beta)f(\beta,\alpha) \ ,$$

où f est définie par (II.4.2), pour certaines valeurs (arbitrairement) fixées des paramètres α et β ($\alpha \neq \beta$), alors

$$A^2 - (q-q^{-1})A - 1 = 0 \ .$$

(ii) Si

$$A^2 - (q-q^{-1})A - 1 = 0 \ , \ B^2 - (q-q^{-1})B - 1 = 0$$

et

$$A(\alpha,\beta)B(\alpha,\gamma)A(\beta,\gamma) = B(\beta,\gamma)A(\alpha,\gamma)B(\alpha,\beta)$$

pour certaines valeurs (arbitrairement) fixées des paramètres α,β et γ ($\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$), alors

$$ABA = BAB \ .$$

(iii) Si

$$A(\alpha,\beta)B(\gamma,\delta) = B(\gamma,\delta)A(\alpha,\beta)$$

pour certaines valeurs (arbitrairement) fixées des paramètres α,β,γ et δ ($\alpha \neq \beta$ et $\gamma \neq \delta$), alors

$$AB = BA \ .$$

Preuve. (i) Nous avons

$$\begin{aligned}
& A(\alpha,\beta)A(\beta,\alpha) = f(\alpha,\beta)f(\beta,\alpha) \\
\Rightarrow\quad & A^2 + (q-q^{-1})\left(\frac{\beta}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)A - (q-q^{-1})^2\frac{\alpha\beta}{(\beta-\alpha)^2} = \frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta(q^2+q^{-2})}{(\beta-\alpha)^2} \\
\Rightarrow\quad & A^2 - (q-q^{-1})A - 1 = 0\ .
\end{aligned}$$

(ii) Nous avons

$$\begin{aligned}
& A(\alpha,\beta)B(\alpha,\gamma)A(\beta,\gamma) - B(\beta,\gamma)A(\alpha,\gamma)B(\alpha,\beta) = 0 \\
\Rightarrow\quad & ABA - BAB + (q-q^{-1})(A^2-B^2)\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}+ \\
& +(q-q^{-1})^2(A-B)\left(\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}(\frac{\beta}{\alpha-\beta}+\frac{\gamma}{\beta-\gamma}) - \frac{\gamma}{\beta-\gamma}\frac{\beta}{\alpha-\beta}\right) = 0 \\
\Rightarrow\quad & ABA - BAB + (q-q^{-1})^2(A-B)\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\alpha-\beta}+\frac{\gamma}{\beta-\gamma}-\frac{\beta(\alpha-\gamma)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}\right) = 0 \\
\Rightarrow\quad & ABA - BAB = 0\ .
\end{aligned}$$

(iii) Il est immédiat que $A(\alpha,\beta)B(\gamma,\delta) = B(\gamma,\delta)A(\alpha,\beta)$ implique $AB = BA$. □

II.4.2 Produit smash

Nous passons à la définition d'une structure d'algèbre associative sur le produit tensoriel de l'algèbre $H(m,1,n)$ avec une algèbre libre associative dont les générateurs sont indexés par les m-tableaux standards correspondant aux m-partitions de n. Nous noterons $\mathfrak{T}$ l'algèbre qui résulte de cette construction.

Soit $\lambda^{(m)}$ une m-partition de taille n. Considérons un ensemble de générateurs libres labellisés par les m-tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$; pour un m-tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$, nous notons $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ le générateur libre correspondant et $c(X_{\lambda^{(m)}}|i)$ le contenu (voir la Section précédente pour la définition) de la m-case portant le nombre i.

Dans la suite, nous utiliserons les générateurs d'Artin (ou de Coxeter) du groupe symétrique. Rappelons que le groupe symétrique (dont l'algèbre de groupe est la limite classique de l'algèbre de Hecke de type A H_n), dans la présentation d'Artin (ou de Coxeter), est engendré par les éléments s_i, $i = 1, ..., n-1$, avec les relations définissantes

$$\begin{cases}
s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1} & \text{pour } i = 1,\dots,n-2\ , \qquad \text{(II.4.4)} \\
s_is_j = s_js_i & \text{pour } i,j = 1,\dots,n-1 \text{ tels que } |i-j|>1\ , \qquad \text{(II.4.5)} \\
s_i^2 = 1 & \text{pour } i = 1,\dots,n-1\ . \qquad \text{(II.4.6)}
\end{cases}$$

Soit $X_{\lambda^{(m)}}$ une m-partition de n dont les m-cases sont remplies par les nombres de 1 à n ; ainsi, différentes m-cases du m-tableau $X_{\lambda^{(m)}}$ portent différents nombres. Le m-tableau $X_{\lambda^{(m)}}$ n'est pas nécessairement standard. Par définition, pour un tel m-tableau $X_{\lambda^{(m)}}$ et pour toute permutation $\pi \in S_n$, le m-tableau $X^{\pi}_{\lambda^{(m)}}$ est obtenu à partir du m-tableau $X_{\lambda^{(m)}}$ en appliquant la permutation π aux nombres occupant les m-cases de $X_{\lambda^{(m)}}$; par exemple, $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ est le m-tableau obtenu à partir de $X_{\lambda^{(m)}}$ en échangeant les nombres i et $(i+1)$ dans le m-tableau $X_{\lambda^{(m)}}$. Nous avons par construction :

$$c(X^{\pi}_{\lambda^{(m)}}|i) = c(X_{\lambda^{(m)}}|\pi^{-1}(i)) \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n. \tag{II.4.7}$$

Pour un m-tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$, le m-tableau $X^{\pi}_{\lambda^{(m)}}$ n'est pas nécessairement standard. En ce qui concerne les générateurs de l'algèbre libre associative, nous notons $\mathcal{X}^{\pi}_{\lambda^{(m)}}$ le générateur correspondant au m-tableau $X^{\pi}_{\lambda^{(m)}}$ si le tableau $X^{\pi}_{\lambda^{(m)}}$ est standard. Et si le m-tableau $X^{\pi}_{\lambda^{(m)}}$ n'est pas standard, alors nous posons $\mathcal{X}^{\pi}_{\lambda^{(m)}} = 0$.

Proposition II.8. *Les relations*

$$\Big(\sigma_i + \frac{(q-q^{-1})c(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)}{c(X_{\lambda^{(m)}}|i) - c(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)}\Big) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot \Big(\sigma_i + \frac{(q-q^{-1})c(X_{\lambda^{(m)}}|i)}{c(X_{\lambda^{(m)}}|i+1) - c(X_{\lambda^{(m)}}|i)}\Big) \tag{II.4.8}$$

et

$$\Big(\tau - c(X_{\lambda^{(m)}}|1)\Big) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = 0 \tag{II.4.9}$$

sont compatibles avec les relations pour les générateurs $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ *de l'algèbre* $H(m,1,n)$.

Avant la preuve nous expliquons le sens du mot "compatible" dans la formulation de la Proposition.

Soit $\mathcal{F}$ l'algèbre libre associative engendrée par $\tilde{\tau}$, $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_{n-1}$. L'algèbre $H(m,1,n)$ est naturellement le quotient de $\mathcal{F}$.

Soit $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ l'algèbre libre associative dont les générateurs $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ parcourent l'ensemble des m-tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$ pour toutes les m-partitions $\lambda^{(m)}$ de n.

Considérons une structure d'algèbre sur l'espace $\mathbb{C}[\mathcal{X}] \otimes \mathcal{F}$ pour laquelle : (i) l'application $\iota_1 : x \mapsto x \otimes 1$, $x \in \mathbb{C}[\mathcal{X}]$, est un isomorphisme de $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ avec son image par ι_1 ; (ii) l'application $\iota_2 : \phi \mapsto 1 \otimes \phi$, $\phi \in \mathcal{F}$, est un isomorphisme de $\mathcal{F}$ avec son image par ι_2 ; (iii) les formules (II.4.8)-(II.4.9), étendues par associativité, donnent les règles pour récrire les éléments $(1 \otimes \phi)(x \otimes 1)$, $x \in \mathbb{C}[\mathcal{X}]$, $\phi \in \mathcal{F}$, comme des élément de $\mathbb{C}[\mathcal{X}] \otimes \mathcal{F}$.

La "compatibilité" signifie que nous avons une structure induite d'algèbre associative, notée $\mathfrak{T}$, sur l'espace $\mathbb{C}[\mathcal{X}] \otimes H(m,1,n)$. Plus précisément, si on multiplie une relation de l'algèbre $H(m,1,n)$ (la relation est vue comme un élément de l'algèbre libre $\mathcal{F}$) par la droite par un générateur $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ (c'est une combinaison de la forme "une relation de $H(m,1,n) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$") et utilisons les "instructions" (II.4.8)-(II.4.9) pour déplacer les $\mathcal{X}$'s qui apparaissent vers la gauche (le générateur libre change mais l'expression reste toujours linéaire en $\mathcal{X}$), alors nous obtenons une combinaison linéaire de termes de la forme "$\mathcal{X}^{\pi}_{\lambda^{(m)}} \cdot$ une relation de $H(m,1,n)$", avec $\pi \in S_n$.

Preuve. Nous récrivons la relation (II.4.8) en utilisant la forme Baxterisée des générateurs σ_i :

$$\sigma_i\Big(c(X_{\lambda^{(m)}}|i), c(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)\Big) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot \sigma_i\Big(c(X_{\lambda^{(m)}}|i+1), c(X_{\lambda^{(m)}}|i)\Big) .$$

Pour simplifier la suite, nous définissons $c^{(k)} := c(X_{\lambda^{(m)}}|k)$ pour $k = 1, \ldots, n$.

Nous allons vérifier la compatibilité des "instructions" (II.4.8)-(II.4.9) avec l'ensemble des relations définissantes (II.2.1)–(II.2.4) et (II.2.7)–(II.2.8). Nous commençons avec les relations n'impliquant que les générateurs σ_i. Nous utilisons ici la forme Baxterisée des relations et le Lemme II.7.

Ci-dessous nous utiliserons sans les mentionner les inégalités $c^{(k)} \neq c^{(k+1)}$, $c^{(k)} \neq c^{(k+2)}$, $c^{(k+1)} \neq c^{(k+2)}$ (pour tout k) qui proviennent des restrictions (II.2.10)–(II.2.12).

(a) Considérons tout d'abord la relation $\sigma_i^2 = (q - q^{-1})\sigma_i + 1$. Si le m-tableau $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ est standard, nous analysons cette relation dans sa forme équivalente, donnée dans (i) du Lemme II.7. Nous avons

$$\begin{aligned} & \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)})\ \sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+1)}) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \\ = \ & \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \cdot \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \\ = \ & \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \cdot \sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+1)})\ \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)})\ . \end{aligned} \tag{II.4.10}$$

Nous avons utilisé (II.4.7) dans la seconde inégalité. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \Big(\sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)})\ \sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+1)}) - f(c^{(i+1)}, c^{(i)}) f(c^{(i)}, c^{(i+1)})\Big) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \\ = \ & \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \cdot \Big(\sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+1)})\ \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) - f(c^{(i+1)}, c^{(i)}) f(c^{(i)}, c^{(i+1)})\Big) \end{aligned}$$

et la compatibilité pour cette relation est vérifiée, car l'expression sur la droite de $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ appartient, par la Proposition II.6, à l'idéal engendré par les relations.

Si le m-tableau $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ n'est pas standard, alors $(i+1)$ est placé dans le même tableau du m-tableau $X_{\lambda^{(m)}}$ que i, et est situé juste sur la droite ou juste en dessous de i. Dans cette situation, la relation (II.4.8) peut être récrite comme $\sigma_i \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = w\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$, où w est égal à q ou à $(-q^{-1})$, et la vérification de la compatibilité de la relation $\sigma_i^2 - (q - q^{-1})\sigma_i - 1 = 0$ avec les instructions (II.4.8)-(II.4.9) est directe.

(b) Nous analysons la relation $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ dans sa forme équivalente, donnée dans (ii) du Lemme II.7. Nous avons

$$\begin{aligned} & \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i+2)})\sigma_{i+1}(c^{(i)}, c^{(i+2)})\sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+1)}) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \\ = \ & \mathcal{X}^{s_i s_{i+1} s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot \sigma_i(c^{(i+2)}, c^{(i+1)})\sigma_{i+1}(c^{(i+2)}, c^{(i)})\sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \end{aligned} \tag{II.4.11}$$

et

$$\begin{aligned} & \sigma_{i+1}(c^{(i)}, c^{(i+1)})\sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+2)})\sigma_{i+1}(c^{(i+1)}, c^{(i+2)}) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \\ = \ & \mathcal{X}^{s_{i+1} s_i s_{i+1}}_{\lambda^{(m)}} \cdot \sigma_{i+1}(c^{(i+1)}, c^{(i)})\sigma_i(c^{(i+2)}, c^{(i)})\sigma_{i+1}(c^{(i+2)}, c^{(i+1)})\ . \end{aligned} \tag{II.4.12}$$

Nous avons utilisé plusieurs fois la relation (II.4.7).

On pourrait penser que, comme pour la relation $\sigma_i^2 - (q - q^{-1})\sigma_i - 1 = 0$, nous devrions considérer séparément le cas où, dans le processus de transformation, le m-tableau devient non-standard. Mais on vérifie que pour un m-tableau standard arbitraire $Y_{\lambda^{(m)}}$:

– Si le m-tableau $Y^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ n'est pas standard, alors les m-tableaux $Y^{s_i s_{i+1}}_{\lambda^{(m)}}$ et $Y^{s_i s_{i+1} s_i}_{\lambda^{(m)}}$ ne sont pas standard non plus ;
– Si le m-tableau $Y^{s_{i+1}}_{\lambda^{(m)}}$ n'est pas standard, alors les m-tableaux $Y^{s_{i+1} s_i}_{\lambda^{(m)}}$ et $Y^{s_{i+1} s_i s_{i+1}}_{\lambda^{(m)}}$ ne sont pas standards non plus.

Il vient donc que

– Si le m-tableau $Y^{s_i s_{i+1} s_i}_{\lambda^{(m)}}$ est standard, alors les m-tableaux $Y^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ et $Y^{s_i s_{i+1}}_{\lambda^{(m)}}$ sont standards aussi ;
– Si le m-tableau $Y^{s_{i+1} s_i s_{i+1}}_{\lambda^{(m)}}$ est standard, alors les m-tableaux $Y^{s_{i+1}}_{\lambda^{(m)}}$ et $Y^{s_{i+1} s_i}_{\lambda^{(m)}}$ sont standards aussi.

Ainsi, nous ne pouvons pas retourner à un m-tableau standard si un des m-tableaux intermédiaires n'est pas standard. Les égalités (II.4.11) et (II.4.12) sont toujours valides, contrairement à (II.4.10).

Nous remplaçons $\mathcal{X}^{s_{i+1} s_i s_{i+1}}_{\lambda^{(m)}}$ par $\mathcal{X}^{s_i s_{i+1} s_i}_{\lambda^{(m)}}$ dans la partie droite de (II.4.12) et soustrayons (II.4.12) à (II.4.11). Dans le résultat, l'expression à la droite de $\mathcal{X}^{s_i s_{i+1} s_i}_{\lambda^{(m)}}$ appartient, par la Proposition II.6, à l'idéal engendré par les relations.

(c) Nous analysons la relation $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i-j| > 1$ dans sa forme équivalente, donnée dans (iii) du Lemme II.7. Nous avons

$$\begin{aligned} & \Big(\sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+1)})\sigma_j(c^{(j)}, c^{(j+1)}) - \sigma_j(c^{(j)}, c^{(j+1)})\sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+1)})\Big) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \\ = \; & \mathcal{X}^{s_i s_j}_{\lambda^{(m)}} \cdot \Big(\sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)})\sigma_j(c^{(j+1)}, c^{(j)}) - \sigma_j(c^{(j+1)}, c^{(j)})\sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)})\Big) \; . \end{aligned} \tag{II.4.13}$$

De même, comme pour la relation précédente, une inspection directe montre que (II.4.13) est toujours valide.

L'expression à la droite de $\mathcal{X}^{s_i s_j}_{\lambda^{(m)}}$ dans la partie droite de (II.4.13) appartient encore à l'idéal engendré par les relations, d'après la Proposition II.6.

(d) Il reste à analyser les relations impliquant le générateur τ.

La vérification de la compatibilité des relation $(\tau - v_1) \dots (\tau - v_m) = 0$ et $\tau \sigma_i = \sigma_i \tau$ pour $i > 1$ avec les instructions (II.4.8)-(II.4.9) est immédiate.

La compatibilité de la relation restante $\tau \sigma_1 \tau \sigma_1 = \sigma_1 \tau \sigma_1 \tau$ avec les instructions (II.4.8)-(II.4.9) est une conséquence directe du Lemme ci-dessous. □

Lemme II.9. *Les relations (II.4.8)-(II.4.9) impliquent les relations :*

$$\big(J_i - c(X_{\lambda^{(m)}}|i)\big) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = 0 \quad \textit{pour } i = 1, \dots, n \; . \tag{II.4.14}$$

Preuve. Pour simplifier, posons $c^{(k)} := c(X_{\lambda^{(m)}}|k)$ pour $k = 1, \dots, n$.

Rappelons que $J_1 = \tau$ et que $J_{i+1} = \sigma_i J_i \sigma_i$. Nous raisonnons par récurrence sur i. Pour $i = 1$ la relation (II.4.14) est la relation (II.4.9).

Supposons tout d'abord que le m-tableau $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ est standard. Alors

$$\begin{aligned}
\sigma_i J_i \sigma_i \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} &= \sigma_i J_i \cdot \Big(-(q-q^{-1})\tfrac{c^{(i+1)}}{c^{(i)}-c^{(i+1)}}\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} + \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)})\Big) \\
&= \sigma_i \cdot \Big(-(q-q^{-1})c^{(i)}\tfrac{c^{(i+1)}}{c^{(i)}-c^{(i+1)}}\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} + c^{(i+1)}\mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)})\Big) \\
&= (q-q^{-1})^2 c^{(i)}\tfrac{c^{(i+1)}c^{(i+1)}}{(c^{(i+1)}-c^{(i)})^2}\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} - (q-q^{-1})\tfrac{c^{(i)}c^{(i+1)}}{c^{(i)}-c^{(i+1)}}\mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \\
&\quad -(q-q^{-1})\tfrac{c^{(i+1)}c^{(i)}}{c^{(i+1)}-c^{(i)}}\mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) + c^{(i+1)}\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \cdot \sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+1)})\sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \\
&= c^{(i+1)}\Big((q-q^{-1})^2\tfrac{c^{(i)}c^{(i+1)}}{(c^{(i+1)}-c^{(i)})^2} + \tfrac{c^{(i)}c^{(i)}+c^{(i+1)}c^{(i+1)}-c^{(i)}c^{(i+1)}(q^2+q^{-2})}{(c^{(i+1)}-c^{(i)})^2}\Big)\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \\
&= c^{(i+1)}\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \ .
\end{aligned}$$

Ici, nous avons déplacé l'élément σ_i vers la droite en utilisant la relation (II.4.8) ; nous avons utilisé ensuite les relations (II.4.7), l'hypothèse de récurrence et la première relation dans la Proposition II.6.

Ensuite supposons que le m-tableau $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ n'est pas standard. Cela signifie que les m-cases portant les nombres i and $(i+1)$ sont adjacentes (voisines dans la même ligne ou la même colonne d'un tableau du m-tableau). Dans cette situation, nous avons $c^{(i)} = q^{\pm 2}c^{(i+1)}$ et

$$\begin{aligned}
\sigma_i J_i \sigma_i \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} &= \sigma_i J_i \cdot \Big(-(q-q^{-1})\tfrac{c^{(i+1)}}{q^{\pm 2}c^{(i+1)}-c^{(i+1)}}\Big)\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \\
&= \sigma_i \cdot \Big(-(q-q^{-1})\tfrac{q^{\pm 2}c^{(i+1)}c^{(i+1)}}{q^{\pm 2}c^{(i+1)}-c^{(i+1)}}\Big)\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \\
&= (q-q^{-1})^2\ \tfrac{q^{\pm 2}c^{(i+1)}c^{(i+1)}c^{(i+1)}}{(q^{\pm 2}c^{(i+1)}-c^{(i+1)})^2}\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \\
&= c^{(i+1)}\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \ .
\end{aligned}$$

Nous avons déplacé l'élément σ_i vers la droite en utilisant la relation (II.4.8) ; nous avons utilisé ensuite l'hypothèse de récurrence. □

II.4.3 Représentations

La Proposition II.8 fournit un outil effectif pour la construction des représentations de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$.

Soit $|\rangle$ un "vide" - un vecteur de base d'un $H(m,1,n)$-module unidimensionnel ; par exemple,

$$\sigma_i|\rangle = q|\rangle \ \text{ pour tout } i \text{ et } \ \tau|\rangle = v_1|\rangle \ . \tag{II.4.15}$$

En déplaçant, dans les expressions $\phi\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}|\rangle$, $\phi \in H(m,1,n)$, les éléments $\mathcal{X}$'s vers la gauche et en utilisant la structure de module (II.4.15), nous construisons, grâce à la compatibilité, une représentation de $H(m,1,n)$ sur l'espace vectoriel $U_{\lambda^{(m)}}$ avec la base $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}|\rangle$. Nous allons, par un léger abus de notation, noter $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}|\rangle$ encore par $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$. Cette procédure mène aux formules suivantes pour l'action des générateurs $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ sur les vecteurs de base $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ de $U_{\lambda^{(m)}}$:

$$\sigma_i \ : \ \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \mapsto \ \frac{(q-q^{-1})c(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)}{c(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)-c(X_{\lambda^{(m)}}|i)}\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} + \ \frac{qc(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)-q^{-1}c(X_{\lambda^{(m)}}|i)}{c(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)-c(X_{\lambda^{(m)}}|i)}\mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \tag{II.4.16}$$

et

$$\tau \,:\, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \mapsto c(X_{\lambda^{(m)}}|1)\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \ . \tag{II.4.17}$$

Comme avant, nous supposons ici que $\mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} = 0$ si $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ n'est pas un m-tableau standard. Notons $V_{\lambda^{(m)}}$ ce $H(m,1,n)$-module.

Supposons que le m-tableau $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ est standard. Le sous-espace de dimension 2 de $U_{\lambda^{(m)}}$ engendré par $\{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}\}$ est σ_i-invariant. Pour un usage futur, nous écrivons la matrice donnant l'action du générateur σ_i sur ce sous-espace :

$$\frac{1}{c^{(i+1)} - c^{(i)}} \begin{pmatrix} (q-q^{-1})c^{(i+1)} & q^{-1}c^{(i+1)} - qc^{(i)} \\ qc^{(i+1)} - q^{-1}c^{(i)} & -(q-q^{-1})c^{(i)} \end{pmatrix} \ , \tag{II.4.18}$$

où nous avons posé $c^{(i)} = c(X_{\lambda^{(m)}}|i)$ et $c^{(i+1)} = c(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$.

Remarques.

(a) Dans notre construction des représentations, la Baxterisation du générateur τ (qui est dans [45]) n'est jamais utilisé tandis que les générateurs Baxterisés σ_i, $i = 1, \ldots, n-1$, apparaissent. La relation (II.4.9) assure que τ, placé avant $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$, peut être immédiatement remplacé par un nombre. C'est similaire à la situation de l'élément σ_1 dans la théorie des représentations de l'algèbre de Hecke ($m = 1$). En effet, si $m = 1$, alors pour tout tableau standard X_λ, le tableau $X^{s_1}_\lambda$ est non-standard et donc σ_1, placé avant $\mathcal{X}_\lambda$, peut être immédiatement remplacé par un nombre ; en particulier, l'action de σ_1 est donnée par une matrice diagonale dans la base $\mathcal{X}_\lambda|\rangle$ de U_λ ; le comportement de τ étend ce phénomène à $m > 1$.

(b) Il vient de la remarque précédente que l'action des générateurs dans les représentations construites ne dépend pas de la valeur de τ sur le vide $|\rangle$. De plus, les représentations construites ne dépendent pas (à un isomorphisme près) de la valeur de σ_i, $i = 1, \ldots, n-1$, sur le vide. En effet, si on prend pour le vide un vecteur de base $|\rangle'$ du $H(m,1,n)$-module unidimensionnel tel que $\sigma_i|\rangle' = -q^{-1}|\rangle'$ pour tout i et $\tau|\rangle' = v_1|\rangle'$, la procédure décrite dans cette sous-section conduit à des représentations $\tilde{V}_{\lambda^{(m)}}$ de $H(m,1,n)$. Par construction, $V_{\lambda^{(m)}}$ et $\tilde{V}_{\lambda^{(m)}}$ ont le même espace vectoriel sous-jacent $U_{\lambda^{(m)}}$. On peut vérifier directement que pour toute m-partition $\lambda^{(m)}$, il existe un isomorphisme de $H(m,1,n)$-modules entre $V_{\lambda^{(m)}}$ et $\tilde{V}_{\lambda^{(m)}}$; les opérateurs pour la représentation $\tilde{V}_{\lambda^{(m)}}$ sont obtenus à partir des opérateurs pour la représentation $V_{\lambda^{(m)}}$ par le changement de base diagonal de $U_{\lambda^{(m)}}$ suivant :

$$\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \mapsto \mathfrak{c}_{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \ , \quad \text{où} \quad \mathfrak{c}_{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}} = \prod_{i\,:\,\mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \neq 0} \Big(q\ c(X_{\lambda^{(m)}}|i) - q^{-1}c(X_{\lambda^{(m)}}|i+1) \Big) \ .$$

Par construction, $\mathfrak{c}_{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}} \neq 0$.

(c) Dans le cas de l'algèbre de Hecke ($m = 1$), les coefficients apparaissant dans l'action des générateurs peuvent être exprimés en termes des longueurs $l_{j,j+1}$ entre cases (voir, e.g., [84]). Nous ne définissons pas la notion de longueur entre des cases qui n'appartiennent pas au même tableau du m-tableau ; la forme de l'action, faisant référence à la longueur, n'est plus utile ici.

(d) L'action des générateurs construite dans les représentations $V_{\lambda^{(m)}}$ coïncide avec l'action donnée dans [4].

(e) L'action des opérateurs d'entrelacement $U_{i+1} = \sigma_i J_i - J_i \sigma_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, (voir paragraphe **5** de la Section II.3) dans une représentation $V_{\lambda^{(m)}}$ est :

$$U_{i+1}(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) = \left(q^{-1}c^{(i)} - qc^{(i+1)}\right) \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \ , \tag{II.4.19}$$

où $c^{(i)} = c(X_{\lambda^{(m)}}|i)$, $i = 1, \ldots, n$. En effet, nous récrivons $U_{i+1} = \sigma_i J_i - \sigma_i^{-1} J_{i+1} = \sigma_i(J_i - J_{i+1}) + (q - q^{-1})J_{i+1}$, et donc, par le Lemme II.9,

$$U_{i+1}(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) = (c^{(i)} - c^{(i+1)}) \left(\sigma_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) + \frac{(q-q^{-1})c^{(i+1)}}{c^{(i)} - c^{(i+1)}} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \right) \ .$$

En utilisant (II.4.16), nous obtenons la formule (II.4.19).

II.4.4 Produit scalaire

Les représentations construites sur les espaces $U_{\lambda^{(m)}}$, où $\lambda^{(m)}$ est une m-partition de taille n, sont des analogues pour $H(m,1,n)$ des représentations semi-normales du groupe symétrique. Nous calculons ici des analogues, pour les espaces de représentations de $H(m,1,n)$, des produits scalaires invariants sur les espaces de représentations du groupe symétrique.

S-invariance. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative, U un $\mathcal{A}$-module, $\mathcal{O}$ un groupe abélien et $\langle , \rangle : U \times U \to \mathcal{O}$ une application bi-additive. Soit S un ensemble de générateurs de $\mathcal{A}$.

Définition II.10. *Nous disons que $\langle , \rangle$ est S-invariant si, pour tout $u, v \in U$ et pour tout $\mathsf{a} \in \mathsf{S}$,*

$$\langle \mathsf{a}(u), \mathsf{a}(v) \rangle = \langle u, v \rangle \ . \tag{II.4.20}$$

Nous disons que $\langle , \rangle$ est S^--invariant si, pour tout $u, v \in U$ et pour tout $\mathsf{a} \in \mathsf{S}$,

$$\langle \mathsf{a}(u), \mathsf{a}^{-1}(v) \rangle = \langle u, v \rangle \ . \tag{II.4.21}$$

Pour un S-invariant $\langle , \rangle$ nous avons, pour tout $u, v \in U$,

$$\langle \mathsf{a}_1 \ldots \mathsf{a}_k(u),\, \mathsf{a}_1 \ldots \mathsf{a}_k(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \text{pour} \quad k \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_k \in \{\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\} \ .$$

Pour un S^--invariant $\langle , \rangle$ nous avons, pour tout $u, v \in U$,

$$\langle \mathsf{a}_1 \ldots \mathsf{a}_k(u),\, \mathsf{a}_1^{-1} \ldots \mathsf{a}_k^{-1}(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \text{pour} \quad k \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_k \in \{\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\} \ .$$

Note. Dans ce qui suit, $\mathcal{A} = H(m,1,n)$ et nous choisirons toujours $\mathsf{S} = \{\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\}$.

L'anneau $\mathfrak{R}$. Soit

$$\mathfrak{D} := \{1 + q^2 + \cdots + q^{2N}\}_{N=1,\ldots,n} \cup \{q^{2i} v_j - v_k\}_{i,j,k\colon j\neq k;\, -n<i<n}$$

et soit $\mathfrak{R}$ l'anneau $\mathbb{C}[q, q^{-1}, v_1, v_1^{-1}, \ldots, v_m, v_m^{-1}]$ des polynômes de Laurent en les variables $q, v_1, \ldots, v_m$ localisé par rapport à l'ensemble multiplicatif engendré par $\mathfrak{D}$.

Dans cette Sous-section nous travaillerons avec l'algèbre de Hecke cyclotomique générique, ce qui signifie ici l'algèbre de Hecke cyclotomique sur $\mathfrak{R}$. Nous notons par le même symbole $U_{\lambda^{(m)}}$ le module libre, maintenant sur l'anneau $\mathfrak{R}$, avec la base $\mathfrak{B} := \{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\}$. Comme précédemment, les générateurs $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ de l'algèbre $H(m, 1, n)$ agissent sur $U_{\lambda^{(m)}}$ d'après les formules (II.4.16)–(II.4.17).

Nous allons définir une application $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{R}$ que nous noton s par le même symbole $\langle , \rangle$ comme ci-dessus, car elle sera étendue en plusieurs applications bi-additives $U_{\lambda^{(m)}} \times U_{\lambda^{(m)}} \to \mathfrak{R}$.

Soit $\lambda^{(m)}$ une m-partition de taille n et soient $X_{\lambda^{(m)}}$ et $X'_{\lambda^{(m)}}$ deux m-tableaux standards différents de forme $\lambda^{(m)}$. Nous posons $c^{(i)} = c(X_{\lambda^{(m)}}|i)$ pour $i = 1, \ldots, n$. L'application $\langle , \rangle$ est donnée par

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}'_{\lambda^{(m)}} \rangle = 0 \ , \tag{II.4.22}$$

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \rangle = \prod_{j,k\colon j<k\,,\, c^{(j)}\neq c^{(k)}\,,\, c^{(j)}\neq c^{(k)}q^{\pm 2}} \frac{q^{-1}c^{(j)} - qc^{(k)}}{c^{(j)} - c^{(k)}} \ . \tag{II.4.23}$$

Notons que, si $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ est un m-tableau standard, nous avons

$$\langle \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \rangle = \frac{qc^{(i)} - q^{-1}c^{(i+1)}}{q^{-1}c^{(i)} - qc^{(i+1)}} \langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \rangle \ . \tag{II.4.24}$$

Nouvelle base. Dans la situation générique, un analogue pour $H(m, 1, n)$, correspondant à la m-partition $\lambda^{(m)}$, d'une représentation orthogonale du groupe symétrique sera défini sur une extension $\tilde{\mathfrak{R}}_{\lambda^{(m)}}$ de l'anneau $\mathfrak{R}$. Soit $\mathfrak{F}_{\lambda^{(m)}}$ l'ensemble des m-tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$. Soit aussi $\mathfrak{E}_{X_{\lambda^{(m)}}} := \{(j,k) | j < k\,,\, c^{(j)} \neq c^{(k)}\,,\, c^{(j)} \neq c^{(k)}q^{\pm 2}\}$ (c'est l'ensemble sur lequel le produit dans la partie droite de (II.4.23) est pris). Introduisons, pour chaque m-tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$, une collection de variables $\varsigma^{jk}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ et soit

$$\tilde{\mathfrak{R}}_{\lambda^{(m)}} := \mathfrak{R}\left[\varsigma^{jk}_{X_{\lambda^{(m)}}}\right]_{X_{\lambda^{(m)}}\in\mathfrak{F}_{\lambda^{(m)}},(j,k)\in\mathfrak{E}_{X_{\lambda^{(m)}}}} \Big/ \mathfrak{I} \ ,$$

où $\mathfrak{I}$ est l'idéal engendré par $\left\{\left(\varsigma^{jk}_{X_{\lambda^{(m)}}}\right)^2 - \dfrac{c^{(j)} - c^{(k)}}{q^{-1}c^{(j)} - qc^{(k)}}\right\}_{X_{\lambda^{(m)}}\in\mathfrak{F}_{\lambda^{(m)}},(j,k)\in\mathfrak{E}_{X_{\lambda^{(m)}}}}$.

Nous définissons une nouvelle base $\{\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda^{(m)}}\}$ du $\tilde{\mathfrak{R}}_{\lambda^{(m)}}$-module $\tilde{\mathfrak{R}}_{\lambda^{(m)}} \otimes_{\mathfrak{R}} U_{\lambda^{(m)}}$ par le changement de base (diagonal) suivant :

$$\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \mapsto \tilde{\mathcal{X}}_{\lambda^{(m)}} := \mathfrak{d}_{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}}\ \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \ , \quad \text{où} \quad \mathfrak{d}_{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}} = \prod_{j,k\colon (j,k)\in\mathfrak{E}_{X_{\lambda^{(m)}}}} \varsigma^{jk}_{X_{\lambda^{(m)}}} \tag{II.4.25}$$

pour tout m-tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$ de forme $\lambda^{(m)}$.

1. Produit scalaire bilinéaire.

1.1. Soit U un module libre sur $\mathfrak{R}$. Nous appelons *produit scalaire bilinéaire* sur U une application bi-additive $\langle , \rangle_{\text{bilin}} \colon U \times U \to \mathfrak{R}$ avec la propriété

$$\langle f\, u, g\, v\rangle_{\text{bilin}} = f\, g\, \langle u, v\rangle_{\text{bilin}}\ ,\ \ f, g \in \mathfrak{R}\,,\quad u, v \in U\ . \tag{II.4.26}$$

Soit $\mathfrak{B}$ une base de U. Une application arbitraire $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{R}$ s'étend, par bi-additivité et par (II.4.26), en un produit scalaire bilinéaire sur U.

Ainsi les formules (II.4.22)–(II.4.23) définissent un produit scalaire bilinéaire, noté $\langle , \rangle_{\text{bilin}}$, sur le $H(m, 1, n)$-module $U_{\lambda^{(m)}}$. Rappelons que $\mathsf{S} = \{\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\}$.

Proposition II.11. *Le produit scalaire bilinéaire $\langle , \rangle_{bilin}$ sur $U_{\lambda^{(m)}}$ est S^--invariant.*

Preuve. il est immédiat que (II.4.21) est valide pour le générateur τ de $H(m, 1, n)$. La vérification de la S^--invariance de (II.4.22) pour le générateur σ_i de $H(m, 1, n)$ est non-triviale seulement si $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ est standard et $X'_{\lambda^{(m)}} = X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$. Cette vérification se fait par un calcul direct de $\langle \sigma_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}), \sigma_i^{-1}(\mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}})\rangle_{\text{bilin}}$ (l'action de σ_i^{-1} sur l'espace à deux dimensions engendré par $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ est facilement obtenue à partir de (II.4.18)) ; le produit $\langle \sigma_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}), \sigma_i^{-1}(\mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}})\rangle_{\text{bilin}}$ est égal à

$$-\frac{(q-q^{-1})c^{(i+1)}}{(c^{(i)}-c^{(i+1)})^2}\Big((qc^{(i)}-q^{-1}c^{(i+1)})\langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\rangle_{\text{bilin}} + (qc^{(i+1)}-q^{-1}c^{(i)})\langle \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}\rangle_{\text{bilin}}\Big)\ ,$$

ce qui fait 0 grâce à (II.4.24).

Si $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ n'est pas standard, alors $\sigma_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) = \epsilon q^{\epsilon}\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$, $\epsilon = \pm 1$, et la S^--invariance de (II.4.23) pour σ_i suit.

Si $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ est standard, alors un calcul direct donne que $\langle \sigma_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}), \sigma_i^{-1}(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}})\rangle_{\text{bilin}}$ est égal à

$$\frac{(q-q^{-1})^2c^{(i)}c^{(i+1)}\langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\rangle_{\text{bilin}} + (q^{-1}c^{(i)}-qc^{(i+1)})^2\langle \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}\rangle_{\text{bilin}}}{(c^{(i)}-c^{(i+1)})^2}\ .$$

En utilisant (II.4.24), on obtient

$$\langle \sigma_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}), \sigma_i^{-1}(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}})\rangle_{\text{bilin}} = \langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\rangle_{\text{bilin}}\ .$$

La preuve de la Proposition est terminée. □

Remarques.

(a) Notons que (II.4.26) est compatible avec toute spécialisation des paramètres q et v_j, $j = 1, \ldots, m$.

(b) Pour $m = 1$, c'est-à-dire pour l'algèbre de Hecke usuelle $H(1,1,n)$, nous avons $c^{(i)} = q^{2cc^{(i)}}$ où $cc^{(i)}$ est le contenu classique de la case contenant i, et la formule (II.4.23) peut être récrite sous la forme suivante

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \rangle_{\text{bilin}} = \prod_{j,k\colon j<k\,,\, c^{(j)} \neq c^{(k)}\,,\, c^{(j)} \neq c^{(k)} q^{\pm 2}} \frac{(cc^{(j)} - cc^{(k)} - 1)_q}{(cc^{(j)} - cc^{(k)})_q} \ . \tag{II.4.27}$$

1.2. Soit A la matrice correspondant au générateur $\mathsf{a} \in \{\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\}$ de $H(m,1,n)$ dans la base $\{\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda^{(m)}}\}$, voir (II.4.25). Alors

$$\mathsf{A}\,(\mathsf{A}^{-1})^T = \mathbf{Id}\ , \tag{II.4.28}$$

où $\mathbf{Id}$ est la matrice identité et, étant donnée une matrice x, x^T signifie la matrice transposée

2. Produits scalaires sesquilinéaires.

2.1. Pour tout polynôme de Laurent $f \in \mathbb{C}[q, q^{-1}, v_1, v_1^{-1}, \ldots, v_m, v_m^{-1}]$, notons par $\gamma(f)$ le polynôme de Laurent en $q, v_1, \ldots, v_m$ obtenu en conjuguant les coefficients de f. L'involution γ s'étend à l'anneau $\mathfrak{R}$. Soit U un $\mathfrak{R}$-module libre. Nous appelons *produit scalaire γ-sesquilinéaire* sur U une application bi-additive $\langle , \rangle_\gamma \colon U \times U \to \mathfrak{R}$ avec la propriété (remplaçant (II.4.26))

$$\langle f\,u, g\,v \rangle_\gamma = f\,\gamma(g)\,\langle u, v \rangle_\gamma\ ,\ \ f, g \in \mathfrak{R}\,,\quad u, v \in U\ . \tag{II.4.29}$$

Soit $\mathfrak{B}$ une base de U. Une application arbitraire $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{R}$ s'étend, par bi-additivité et par (II.4.29), en un produit scalaire γ-sesquilinéaire sur U.

Ainsi les formules (II.4.22)–(II.4.23) définissent un produit scalaire γ-sesquilinéaire sur $U_{\lambda^{(m)}}$ qui est S^--invariant, où $\mathsf{S} = \{\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\}$; la vérification répète la preuve de la Proposition II.11.

Les $\mathbb{C}$-spécialisations compatibles avec la définition d'un produit scalaire γ-sesquilinéaire sont celles où q et v_j, $j = 1, \ldots, m$, sont des nombres réels ; pour de telles spécialisations, le produit scalaire γ-sesquilinéaire devient un produit scalaire Hermitient usuel sur un espace vectoriel complexe.

2.2. Notons par ω l'involution sur $\mathbb{C}[q, q^{-1}, v_1, v_1^{-1}, \ldots, v_m, v_m^{-1}]$ qui envoie q à q^{-1} et v_j à v_j^{-1}, $j = 1, \ldots, m$. L'involution ω est compatible avec la localisation par rapport à l'ensemble multiplicatif engendré par $\mathfrak{D}$, et s'étend donc à $\mathfrak{R}$. Soit U comme avant un module libre sur $\mathfrak{R}$. Nous appelons *produit scalaire ω-sesquilinéaire* une application bi-additive $\langle , \rangle_\omega \colon U \times U \to \mathfrak{R}$ avec la propriété

$$\langle f\,u, g\,v \rangle_\omega = f\,\omega(g)\,\langle u, v \rangle_\omega\ ,\ \ f, g \in \mathfrak{R}\,,\quad u, v \in U\ . \tag{II.4.30}$$

Soit $\mathfrak{B}$ une base de U. Une application arbitraire $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{R}$ s'étend, par bi-additivité et par (II.4.30), en un produit scalaire ω-sesquilinéaire sur U.

Ainsi, les formules (II.4.22)–(II.4.23) définissent un produit scalaire ω-sesquilinéaire sur $U_{\lambda^{(m)}}$ qui est S-invariant, où $\mathsf{S} = \{\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\}$; la vérification est similaire à la preuve de la Proposition II.11.

les seules $\mathbb{C}$-spécialisations compatibles avec la définition d'un produit scalaire ω-sesquilinéaire sont celle où q et v_j, $j = 1, \ldots, m$, appartiennent à $\{-1, 1\}$.

2.3. Les involutions γ et ω commutent. Soit ϖ l'involution sur $\mathfrak{R}$ définie comme la composition de γ et ω, $\varpi(f) := \omega(\gamma(f))$ pour $f \in \mathfrak{R}$. Nous appelons *produit scalaire ϖ-sesquilinéaire* une application bi-additive $\langle , \rangle_\varpi \colon U \times U \to \mathfrak{R}$ avec la propriété

$$\langle f\, u, g\, v\rangle_\varpi = f\, \varpi(g)\, \langle u, v\rangle_\varpi \ , \ \ f, g \in \mathfrak{R}\,, \quad u, v \in U \ . \tag{II.4.31}$$

Soit $\mathfrak{B}$ une base de U. Une application arbitraire $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{R}$ s'étend, par bi-additivité et par (II.4.31), en un produit scalaire ϖ-sesquilinéaire sur U.

Ainsi, les formules (II.4.22)–(II.4.23) définissent un produit scalaire ϖ-sesquilinéaire sur $U_{\lambda^{(m)}}$ qui est S-invariant, où $\mathsf{S} = \{\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\}$; la vérification est similaire à la preuve de la Proposition II.11.

Les $\mathbb{C}$-spécialisations compatibles avec la définition d'un produit scalaire ϖ-sesquilinéaire sont celles où q et v_j, $j = 1, \ldots, m$, sont des nombres complexes de norme 1 ; pour de telles spécialisations, le produit scalaire ϖ-sesquilinéaire devient un produit scalaire Hermitient usuel sur un espace vectoriel complexe.

2.4. Réintroduisons les paramètres de déformation $q, v_1, \ldots, v_m$ dans la notation pour l'algèbre de Hecke cyclotomique : $H_{q,v_1,\ldots,v_m}(m, 1, n)$. Il existe une autre façon d'interpréter des formules (II.4.22)-(II.4.23) dans les situations ω-sesquilinéaire et ϖ-sesquilinéaire. A savoir, ces formules définissent un couplage $\langle , \rangle$ entre les espaces de représentations $U_{\lambda^{(m)}}$ et $U'_{\lambda^{(m)}}$ où le premier espace $U_{\lambda^{(m)}}$ porte la représentation de l'algèbre $H_{q,v_1,\ldots,v_m}(m, 1, n)$, et le second espace $U'_{\lambda^{(m)}}$porte la représentation de l'algèbre $H_{q^{-1},v_1^{-1},\ldots,v_m^{-1}}(m, 1, n)$. Dans la situation ω-sesquilinéaire, le couplage est bilinéaire au sens usuel, $\langle fu, gv\rangle = fg\langle u, v\rangle$, $f, g \in \mathfrak{R}$. Dans la situation ϖ-sesquilinéaire, le couplage est γ-sesquilinéaire, $\langle fu, gv\rangle = f\gamma(g)\langle u, v\rangle$, $f, g \in \mathfrak{R}$.

Les deux espaces $U_{\lambda^{(m)}}$ et $U'_{\lambda^{(m)}}$ ont la même base $\mathfrak{B} = \{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\}$. La formule (II.4.20), clamant la S-invariance du couplage, est vérifiée ; maintenant, dans la formule (II.4.20), $x(u)$ est compris comme le résultat de l'action du générateur $x \in H_{q,v_1,\ldots,v_m}(m, 1, n)$ sur le vecteur $u \in U_{\lambda^{(m)}}$, tandis que $x(v)$ est le résultat de l'action du générateur $x \in H_{q^{-1},v_1^{-1},\ldots,v_m^{-1}}(m, 1, n)$ sur le vecteur $v \in U'_{\lambda^{(m)}}$.

2.5. Comme chaque facteur $\dfrac{c^{(j)} - c^{(k)}}{q^{-1}c^{(j)} - qc^{(k)}}$ dans le produit dans la partie droite de (II.4.23) est stable par rapport aux involutions γ et ω, on peut étendre les involutions γ et ω à l'anneau $\tilde{\mathfrak{R}}_{\lambda^{(m)}}$ par les règles $\gamma\left(\varsigma^{jk}_{X_{\lambda^{(m)}}}\right) = \varsigma^{jk}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ et $\omega\left(\varsigma^{jk}_{X_{\lambda^{(m)}}}\right) = \varsigma^{jk}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ pour tout $X_{\lambda^{(m)}} \in \mathfrak{F}_{\lambda^{(m)}}$ et tout $(j, k) \in \mathfrak{E}_{X_{\lambda^{(m)}}}$.

Soit A la matrice correspondant au générateur $\mathsf{a} \in \{\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\}$ de $H(m, 1, n)$ dans la base $\{\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda^{(m)}}\}$, voir (II.4.25). Alors

$$\mathsf{A}\,\gamma(\mathsf{A}^{-1})^T = \mathbf{Id}\ , \quad \mathsf{A}\,\omega(\mathsf{A})^T = \mathbf{Id} \quad \text{et} \quad \mathsf{A}\,\varpi(\mathsf{A})^T = \mathbf{Id}\ . \tag{II.4.32}$$

Pour une spécialisation où q et v_j, $j = 1, \ldots, m$, sont des nombres complexes de norme 1, les matrices des générateurs de $H(m, 1, n)$ dans la base $\{\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda^{(m)}}\}$ sont unitaires au sens usuel.

3. Soit $\rho\colon \hat{H}_n \to \mathrm{End}(\mathcal{V})$ une représentation irréductible de l'algèbre de Hecke affine $\hat{H}_n$ sur un espace vectoriel complexe $\mathcal{V}$ de dimension finie L. Supposons que l'opérateur $\rho(\tau)$ est diagonalisable et que le spectre de $\rho(\tau)$ est $\{(v_1)_{\mathfrak{l}_1}, (v_2)_{\mathfrak{l}_2}, \ldots, (v_m)_{\mathfrak{l}_m}\}$; ici, les nombres $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ sont différents deux à deux, $\mathfrak{l}_j$ est la multiplicité de la valeur propre v_j, $j = 1, \ldots, m$. Alors, la représentation ρ passe au quotient cyclotomique $H_{q,v_1,\ldots,v_m}(m,1,n)$ de l'algèbre de Hecke affine. Supposons que les paramètres $q, v_1, \ldots, v_m$ satisfont aux restrictions (II.2.10)-(II.2.12). Par le résultat de complétude de la Section II.5, la représentation ρ est isomorphe, en tant que représentation de $H_{q,v_1,\ldots,v_m}(m,1,n)$, à $V_{\lambda^{(m)}}$ pour une certaine m-partition $\lambda^{(m)}$. Notons que, étant donnée la connaissance des valeurs de q et v_j, $j = 1, \ldots, m$, la base $\{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\}$ est uniquement déterminée, à un facteur global constant près – si il y avait deux base, alors l'opérateur transformant l'une en l'autre contredirait à l'irréducibilité de la représentation ρ. Le changement de base diagonal ne pose aucun problème : dans le produit dans (II.4.25), $\varsigma^{jk}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ peut être choisie comme une racine carrée arbitraire de $\dfrac{c^{(j)} - c^{(k)}}{q^{-1}c^{(j)} - qc^{(k)}}$, $(j,k) \in \mathfrak{E}_{X_{\lambda^{(m)}}}$.

Soit A la matrice du générateur $\mathsf{a} \in \{\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\}$ de $\hat{H}_n$ dans la base $\{\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda^{(m)}}\}$. Alors

$$\mathsf{A}\,(\mathsf{A}^{-1})^T = \mathbf{Id}_{\mathcal{V}}\ ,$$

où $\mathbf{Id}_{\mathcal{V}}$ est l'opérateur identité sur l'espace $\mathcal{V}$.

Si les paramètres q et v_j, $j = 1, \ldots, m$ sont des nombres complexes de norme 1, les matrices des générateurs, dans la base $\{\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda^{(m)}}\}$, sont unitaires au sens usuel, $\mathsf{A}\,\mathsf{A}^\dagger = \mathbf{Id}_{\mathcal{V}}$, où $A^\dagger$ est la matrice transposée conjuguée.

Appendice II.4.A Structure de module sur les produits tensoriels

Les résultats qui suivent ne sont pas nécessaires pour la compréhension du reste du Chapitre et la preuve du résultat principal est un peu longue ; c'est pourquoi nous les avons placés dans un Appendice, qui peut donc être sauté lors d'une première lecture.

L'algèbre $\mathfrak{T}$, définie dans la Sous-Section II.4.2, a été utilisée dans la Sous-Section II.4.3 pour construire les modules sur l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$. Une extension de cette construction équipe les produits tensoriels des espaces sous-jacents des $H(m,1,n)$-modules, correspondant aux m-partitions de n, d'une structure de $H(m,1,n)$-module. Dans cet Appendice, nous donnons les définitions précises et étudions le produit tensoriel, noté $\hat{\otimes}$, des représentations.

Dans la Section II.5, nous prouvons que, sous les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) sur les paramètres de $H(m,1,n)$, les représentations irréductibles de $H(m,1,n)$ sont toutes des représentations correspondant à des m-partitions de n. Notre méthode pour étudier le produit tensoriel $\hat{\otimes}$ est inductive, et repose largement sur le résultat de complétude de la Section II.5. A priori, nous ne connaissons pas la nature des représentations apparaissant dans la décomposition du produit tensoriel $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}}$ de deux représentations correspondant aux m-partitions $\lambda^{(m)}$ et $\lambda'^{(m)}$. C'est à ce moment-là que nous avons besoin d'un résultat fort de complétude, assurant que tout $H(m,1,n)$-module est isomorphe à une somme directe de $H(m,1,n)$-modules correspondant à des m-partitions de n. Notons que le résultat de complétude est établi dans la Section II.5 indirectement, en comptant des dimensions.

Les règles de décomposition du produit tensoriel $\hat{\otimes}$ sont données dans la Proposition II.12 de cet Appendice. Qualitativement, le résultat est formulé très facilement : le produit tensoriel $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}}$

est isomorphe à la somme directe de $\dim(V_{\lambda'^{(m)}})$ copies de la représentation $V_{\lambda^{(m)}}$. Pour quelques choix parmi les plus simples de $\lambda^{(m)}$ et $\lambda'^{(m)}$, la décomposition du produit tensoriel $V_{\lambda^{(m)}}\hat{\otimes}V_{\lambda'^{(m)}}$ peut être faite par un calcul direct. Néanmoins, malgré la simplicité de la formulation du résultat de la Proposition II.12, nous n'avons pu trouver un moyen de faire un calcul explicite pour deux m-partitions arbitraires. En outre, les partitions rectangulaires jouent un rôle particulier dans notre façon de prouver la Proposition II.12, mais pas dans la formule finale des règles de décomposition. Il serait intéressant de trouver une façon plus explicite de prouver la Proposition II.12, sans utiliser le résultat de complétude de la Section II.5.

Par construction dans la Sous-Section II.4.3, la représentation $V_{\lambda^{(m)}}$ correspondant à une m-partition $\lambda^{(m)}$ est équipée avec la base naturelle $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ indexée par les m-tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$. La forme explicite de l'isomorphisme $V_{\lambda^{(m)}}\hat{\otimes}V_{\lambda'^{(m)}} \cong \dim(V_{\lambda'^{(m)}})\ V_{\lambda^{(m)}}$ est assez complexe, indiquant à nouveau que le produit tensoriel $\hat{\otimes}$ requiert probablement une meilleure compréhension. Nous donnons plusieurs exemples.

Certaines assertions ci-dessous sont valides dans une situation plus générale, sans le résultat de complétude de la Section II.5. Pour formuler précisément ces assertions, nous dirons qu'une représentation de l'algèbre $H(m,1,n)$ appartient à la classe $\mathcal{S}$ si elle est isomorphe à une somme directe de représentations correspondant à des m-partitions.

II.4.A.1 Définition du produit tensoriel $\hat{\otimes}$

1. Etant donnée une m-partition $\lambda^{(m)}$ de taille n, rappelons que $U_{\lambda^{(m)}}$ est l'espace vectoriel avec la base choisie $\{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\}$. Nous insistons sur le fait que $U_{\lambda^{(m)}}$ est compris seulement comme un espace vectoriel, sans structure de $H(m,1,n)$-module spécifiée, alors que $V_{\lambda^{(m)}}$ est compris comme le $H(m,1,n)$-module donné par les formules (II.4.16)-(II.4.17) avec l'espace vectoriel sous-jacent $U_{\lambda^{(m)}}$. En particulier, une représentation de $H(m,1,n)$ est dans la classe $\mathcal{S}$ si elle est isomorphe à une somme directe de représentations de la forme $V_{\lambda^{(m)}}$.

Soient $\lambda^{(m)}$ et $\lambda'^{(m)}$ deux m-partitions de taille n. Les instructions de la Proposition II.8 sont homogènes en les générateurs $\mathcal{X}$. Une base du produit tensoriel de $U_{\lambda^{(m)}}$ et $U_{\lambda'^{(m)}}$ est naturellement indexée par les produits $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\mathcal{X}_{\lambda'^{(m)}}$, où $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ est le générateur labellisé par le m-tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$ (de la forme $\lambda^{(m)}$) et $\mathcal{X}_{\lambda'^{(m)}}$ est le générateur labellisé par le m-tableau standard $X_{\lambda'^{(m)}}$ (de la forme $\lambda'^{(m)}$).

Maintenant, en déplaçant les éléments $\mathcal{X}$'s vers la gauche (d'après les instructions de la Proposition II.8) dans les expressions $\phi\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\mathcal{X}_{\lambda'^{(m)}}|\rangle$, où $\phi \in H(m,1,n)$, et en évaluant, avec l'aide de (II.4.15), les éléments de $H(m,1,n)$ sur le vide, nous définissons la structure de $H(m,1,n)$-module sur le produit tensoriel $U_{\lambda^{(m)}} \otimes U_{\lambda'^{(m)}}$ des espaces vectoriels sous-jacents aux représentations $V_{\lambda^{(m)}}$ et $V_{\lambda'^{(m)}}$. Notons $V_{\lambda^{(m)}}\hat{\otimes}V_{\lambda'^{(m)}}$ la représentation résultante de $H(m,1,n)$.

En principe, le produit tensoriel $\hat{\otimes}$ est défini pour un m et un n donnés, et devrait être noté $\hat{\otimes}_{m,n}$. Pour la clarté de l'exposition, nous omettrons m dans la notation pour le produit, la valeur de m étant fixée ici. En ce qui concerne n, nous introduisons ci-dessous l'opération de restriction de n à $(n-1)$ et expliquons que le produit tensoriel $\hat{\otimes}$ est compatible avec la restriction ; grâce à la compatibilité, nous omettrons aussi n dans la notation pour le produit tensoriel.

Notons que pour tout produit $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\mathcal{X}_{\lambda'^{(m)}}$, le générateur τ ne passe jamais à travers $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ vers la droite (en raison de la forme particulière (II.4.9) des instructions pour le générateur τ). Seulement les générateurs $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ passent à travers $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ et ensuite agissent sur $\mathcal{X}_{\lambda'^{(m)}}|\rangle$. La sous-algèbre de $H(m,1,n)$ engendrée par $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ est isomorphe à l'algèbre de Hecke $H(1,1,n)$ (ceci est une conséquence de la forme normale prouvée dans le Chapitre III, Section III.4, Corollaire III.20). Ainsi, cela a du sens de considérer le produit tensoriel $V_{\lambda^{(m)}}\hat{\otimes}V$, où V est une représentation de $H(1,1,n)$, comme une représentation de $H(m,1,n)$. De plus, par construction, la représentation $V_{\lambda^{(m)}}\hat{\otimes}V_{\lambda'^{(m)}}$ est naturellement isomorphe à la représentation $V_{\lambda^{(m)}}\hat{\otimes}W$, où W est la restriction de la représentation $V_{\lambda'^{(m)}}$ à la sous-algèbre engendrée par $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$.

Produit $\hat{\otimes}$: exemples simples. Soit $\varpi^{(m)}$ la m-partition $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ de taille n telle que λ_1 est la partition à une seule ligne (n) et $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sont des partitions vides. Il existe un seul m-tableau standard de forme $\varpi^{(m)}$ que nous notons $X_{\varpi^{(m)}}$. Pour cette m-partition particulière, les formules (II.4.8)–(II.4.9) deviennent :

$$(\sigma_i - q)\mathcal{X}_{\varpi^{(m)}} = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n-1 \quad \text{et} \quad (\tau - v_1)\mathcal{X}_{\varpi^{(m)}} = 0 \ . \tag{II.4.33}$$

Ainsi la représentation $V_{\varpi^{(m)}}$ est isomorphe à la représentation de dimension 1 de l'algèbre $H(m,1,n)$ engendrée par le vide $|\rangle$. Par construction, les propriétés suivantes sont vérifiées (les isomorphismes doivent être compris comme isomorphismes de $H(m,1,n)$-modules) : pour toute m-partition $\lambda^{(m)}$ de taille n,

$$V_{\lambda^{(m)}}\hat{\otimes}V_{\varpi^{(m)}} \cong V_{\lambda^{(m)}} \ , \tag{II.4.34}$$

et

$$V_{\varpi^{(m)}}\hat{\otimes}V_{\lambda^{(m)}} \cong V_{\varpi^{(m)}} \oplus \cdots \oplus V_{\varpi^{(m)}} \cong \dim(V_{\lambda^{(m)}})\ V_{\varpi^{(m)}} \ . \tag{II.4.35}$$

En fait, dans les formules (II.4.34)–(II.4.35), on peut remplacer $\varpi^{(m)}$ par toute m-partition $\varpi'^{(m)}$ telle que $V_{\varpi'^{(m)}}$ est de dimension 1 ; ce sont les m-partitions $(\lambda_1, ..., \lambda_m)$ avec une seule partition λ_j non-vide qui est égale à (n) ou (1^n). Pour la validité de (II.4.34) pour $\varpi'^{(m)}$ voir, par exemple, la Remarque **(b)** après les formules (II.4.16)–(II.4.17) ; la validité de (II.4.35) pour $\varpi'^{(m)}$ est immédiate.

Les formules (II.4.34)–(II.4.35) sont obtenues de manière directe. La Proposition II.12 ci-dessous décrit le produit $V_{\lambda^{(m)}}\hat{\otimes}V_{\lambda'^{(m)}}$ de représentations correspondant à deux m-partitions arbitraires de même taille. Pourtant la preuve de la formule (II.4.38) n'est pas directe et repose sur le résultat de complétude, qui repose à son tour sur les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) sur les paramètres de $H(m,1,n)$.

Restriction. Un rôle essentiel, dans notre étude du produit $\hat{\otimes}$, est joué par l'opération de restriction qui permet d'utiliser des arguments de type récursifs.

Pour toute représentation $\mathcal{W}$ de l'algèbre $H(m,1,n)$, nous notons $\mathrm{Res}^n_{n-1}(\mathcal{W})$ la restriction de $\mathcal{W}$ à la sous-algèbre de $H(m,1,n)$ engendrée par $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}$; d'après les résultats du Chapitre III, Section III.4 (l'assertion (ii) de la Proposition III.19), cette sous-algèbre est isomorphe à $H(m,1,n-1)$. Cela justifie la notation Res^n_{n-1}.

La classe $\mathcal{S}$ de représentations est stable par rapport à la restriction Res^n_{n-1}. En effet, les formules (II.4.8)-(II.4.9) impliquent que pour toute m-partition $\lambda^{(m)}$ de taille n,

$$\mathrm{Res}^n_{n-1}(V_{\lambda^{(m)}}) \cong \bigoplus_{\alpha^{(m)}:\ \alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})} V_{\lambda^{(m)} \setminus \{\alpha^{(m)}\}}\ , \tag{II.4.36}$$

où nous rappelons que $\mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})$ est l'ensemble des m-cases supprimables de $\lambda^{(m)}$. La stabilité vient de (II.4.36).

Géométriquement, il est clair que l'on peut reconstruire une m-partition $\lambda^{(m)}$ à partir de l'ensemble $\mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})$ de ses m-cases supprimables. C'est pourquoi, par (II.4.36), pour un $H(m,1,n)$-module irréductible V, appartenant à la classe $\mathcal{S}$, $V \cong V_{\lambda^{(m)}}$, sa restriction $\mathrm{Res}^n_{n-1}(V)$ caractérise la représentation V de $H(m,1,n)$ uniquement à un isomorphisme près.

De plus, on voit directement que l'opération $\hat{\otimes}$ sur les représentations appartenant à la classe $\mathcal{S}$ est compatible avec l'opération de restriction dans le sens suivant : soient deux $H(m,1,n)$-modules $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$ appartenant à $\mathcal{S}$, nous avons

$$\mathrm{Res}^n_{n-1}(\mathcal{W}\hat{\otimes}\mathcal{W}') \ \cong\ (\mathrm{Res}^n_{n-1}(\mathcal{W}))\hat{\otimes}(\mathrm{Res}^n_{n-1}(\mathcal{W}'))\ . \tag{II.4.37}$$

Ici, le symbole $\hat{\otimes}$ dans la partie gauche est le produit pour $H(m,1,n)$; dans la partie droite, c'est le produit pour $H(m,1,n-1)$. La formule (II.4.37) justifie l'usage du symbole $\hat{\otimes}$ à la place d'un plus rigoureux $\hat{\otimes}_n$.

Notons que (II.4.36) et (II.4.37) sont valides dès que (II.4.8) a un sens pour les représentations concernées (c'est-à-dire, dès que les dénominateurs dans (II.4.8) ne s'annulent pas) ; nous n'avons pas besoin ici du résultat de complétude de la Section II.5.

II.4.A.2 Règles de décomposition

Sous les contraintes (II.2.10)–(II.2.12) sur les paramètres $H(m,1,n)$, le produit $\hat{\otimes}$ de deux représentations de la classe $\mathcal{S}$ appartient encore à la classe $\mathcal{S}$, en raison du résultat de complétude de la Section II.5. La Proposition suivante donne les règles de décomposition pour le produit tensoriel $\hat{\otimes}$ de représentations de la classe $\mathcal{S}$.

Proposition II.12. *Soient $\lambda^{(m)}$ et $\lambda'^{(m)}$ deux m-partitions arbitraires de taille n. Supposons que les conditions (II.2.10)–(II.2.12) sur les paramètres de $H(m,1,n)$ sont vérifiées. Alors la représentation $V_{\lambda^{(m)}}\hat{\otimes}V_{\lambda'^{(m)}}$ de $H(m,1,n)$ est isomorphe à la somme directe de $\dim(V_{\lambda'^{(m)}})$ copies de $V_{\lambda^{(m)}}$:*

$$V_{\lambda^{(m)}}\hat{\otimes}V_{\lambda'^{(m)}} \cong \dim(V_{\lambda'^{(m)}})\ V_{\lambda^{(m)}}. \tag{II.4.38}$$

Preuve. Nous allons utiliser ici que deux représentations $V_{\pi_1^{(m)}}$ et $V_{\pi_2^{(m)}}$ de $H(m,1,n)$ correspondant à deux m-partitions différentes $\pi_1^{(m)}$ et $\pi_2^{(m)}$ de n ne sont pas isomorphes, et que toute représentation de $H(m,1,n)$ appartient à la classe $\mathcal{S}$ (ceci est prouvé, sous les contraintes (II.2.10)–(II.2.12), dans la Section II.5).

Nous allons utiliser le Lemme suivant.

Lemme II.13. *(i) Soit $\lambda^{(m)}$ une m-partition de taille n satisfaisant les conditions suivantes :*

- *$\lambda^{(m)}$ est différente des m-partitions de la forme $(\varnothing, \ldots, \varnothing, \lambda, \varnothing, \ldots, \varnothing)$ où λ est une partition telle que $|\lambda| \leq 2$ ou $\lambda = (2,1)$ ou $\lambda = (2,1,1)$ ou $\lambda = (3,1)$;*
- *$\lambda^{(m)}$ est différente des m-partitions de la forme $(\varnothing, \ldots, \varnothing, \square, \varnothing, \ldots, \varnothing, \square, \varnothing, \ldots, \varnothing)$.*

(ii) Soit $\mathfrak{L} = \{\lambda_1^{(m)}, \ldots, \lambda_l^{(m)}\}$ un l-uplet de m-partitions de taille n différentes de $\lambda^{(m)}$, $\lambda_j^{(m)} \neq \lambda^{(m)}$ pour $j = 1, ..., l$.

Alors les deux ensembles suivants de m-partitions

$$\lambda^{(m)-} := \{\lambda^{(m)} \backslash \{\alpha^{(m)}\}\}_{\alpha^{(m)} :\, \alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})} \quad \textit{et} \quad \mathfrak{L}^- := \{\lambda_j^{(m)} \backslash \{\alpha_j^{(m)}\}\}_{j :\, j=1,\ldots,l\,;\ \alpha_j^{(m)} :\, \alpha_j^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda_j^{(m)})}$$

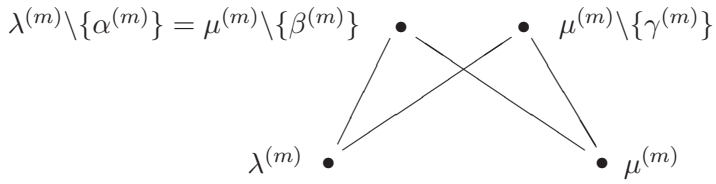
ne coïncident pas.

Le Lemme II.13 est un résultat purement combinatoire. Sa preuve le sera, combinatoire, également. Nous allons prouver que si $\lambda^{(m)-}$ est contenue dans $\mathfrak{L}^-$, alors il existe une sous-m-partition de taille $n-1$ de l'une des $\lambda_j^{(m)} \in \mathfrak{L}$ qui n'est pas une sous-m-partition de $\lambda^{(m)}$. La traduction pour la théorie des représentations de la dernière phrase est la suivante.

Corollaire II.14. *Supposant les conditions (i) et (ii) vérifiées. Si $\mathrm{Res}_{n-1}^n(V_{\lambda^{(m)}})$ est isomorphe à une sous-représentation de $\mathrm{Res}_{n-1}^n(V_{\lambda_1^{(m)}} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_l^{(m)}})$, alors il existe une m-partition $\nu^{(m)}$ de taille $n-1$ telle que $V_{\nu^{(m)}}$ est isomorphe à une sous-représentation de $\mathrm{Res}_{n-1}^n(V_{\lambda_1^{(m)}} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_l^{(m)}})$, mais pas à une sous-représentation de $\mathrm{Res}_{n-1}^n(V_{\lambda^{(m)}})$.*

Preuve du Lemme. Supposons que le l-uplet $\mathfrak{L} = \{\lambda_1^{(m)}, \ldots, \lambda_l^{(m)}\}$, formé par des m-partitions différentes de $\lambda^{(m)}$, est tel que $\lambda^{(m)-}$ est contenu dans $\mathfrak{L}^-$. Alors pour chaque $\alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})$, la m-partition $\lambda^{(m)} \backslash \{\alpha^{(m)}\}$ de $n-1$ est une sous-m-partition d'une certaine m-partition de $\mathfrak{L}$; pour une m-case $\alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})$ donnée, il peut exister plusieurs m-partitions de $\mathfrak{L}$ avec cette propriété ; choisissons-en une et notons-là $\mu^{(m)}$. D'après la condition (ii), la m-partition $\mu^{(m)}$ est obtenue à partir de $\lambda^{(m)} \backslash \{\alpha^{(m)}\}$ en ajoutant une m-case $\beta^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\lambda^{(m)} \backslash \{\alpha^{(m)}\})$ différente de $\alpha^{(m)}$.

Pour une m-case supprimable $\gamma^{(m)}$ de $\mu^{(m)}$, il est géométriquement clair que la m-partition $\mu^{(m)} \backslash \{\gamma^{(m)}\}$ n'est pas une sous-m-partition de $\lambda^{(m)}$ si et seulement si $\gamma^{(m)}$ est différente de $\beta^{(m)}$; en effet, comme pour les partitions ordinaires, le graphe d'inclusion (voir Chapitre I, Section I.2 pour la définition) des m-partitions est un réseau ; en particulier, il ne peut pas contenir de sous-graphe de la forme



Donc, si $\mu^{(m)}$ admet une m-case supprimable $\gamma^{(m)}$ différente de $\beta^{(m)}$, alors $\mu^{(m)} \backslash \{\gamma^{(m)}\}$ est une sous-m-partition de l'une des $\lambda_j^{(m)} \in \mathfrak{L}$ et n'est pas une sous-m-partition de $\lambda^{(m)}$. Ainsi, il suffit de

montrer qu'il existe une m-case $\alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})$ telle que, pour toute m-partition $\mu^{(m)}$ obtenue en ajoutant à $\lambda^{(m)} \backslash \{\alpha^{(m)}\}$ une m-case $\beta^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\lambda^{(m)} \backslash \{\alpha^{(m)}\})$, différente de $\alpha^{(m)}$, il existe une m-case supprimable $\gamma^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\mu^{(m)})$, différente de $\beta^{(m)}$.

Une telle m-case $\gamma^{(m)}$ n'existe pas si et seulement si la m-partition $\mu^{(m)}$ a une seule m-case supprimable, c'est-à-dire que

$$\begin{array}{l}\text{seulement une partition du } m\text{-uplet } \mu^{(m)} \text{ n'est pas vide} \\ \text{et cette partition est de forme rectangulaire.}\end{array} \tag{II.4.39}$$

Ainsi, une m-partition $\lambda^{(m)}$ contredisant les affirmations du Lemme II.13 doit vérifier cette propriété : pour tout $\alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})$, il existe $\beta^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\lambda^{(m)} \backslash \{\alpha^{(m)}\})$, différente de $\alpha^{(m)}$, telle que la m-partition $\mu^{(m)}$, obtenue en ajoutant à $\lambda^{(m)} \backslash \{\alpha^{(m)}\}$ la m-case $\beta^{(m)}$, est décrite par (II.4.39). On voit directement que ces m-partitions sont exactement celles qui sont exclues par la partie (i) de la formulation du Lemme II.13. □

Nous revenons maintenant à la preuve de la Proposition II.12.

Nous procédons par récurrence sur n ; la formule (II.4.38) est triviale pour $n = 0$, c'est-à-dire pour $\lambda^{(m)} = (\varnothing, \ldots, \varnothing)$. Comme la vérification de l'étape récursive, ci-dessous, de la récurrence le montre, nous allons avoir besoin de vérifier séparément plusieurs cas pour compléter la preuve de la Proposition II.12.

Etape récursive. Soient $\lambda^{(m)}$ et $\lambda'^{(m)}$ deux m-partitions de taille n telles que $\lambda^{(m)}$ satisfait aux conditions de la partie (i) du Lemme II.13. D'après les formules (II.4.36)–(II.4.37),

$$\mathrm{Res}^n_{n-1}(V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}}) \cong \bigoplus_{\substack{\alpha^{(m)}, \alpha'^{(m)} \ : \ \alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda^{(m)}) \\ \alpha'^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda'^{(m)})}} V_{\lambda^{(m)} \backslash \{\alpha^{(m)}\}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)} \backslash \{\alpha'^{(m)}\}}. \tag{II.4.40}$$

L'hypothèse de récurrence est : la formule (II.4.38) est valide pour les produits dans la partie droite de (II.4.40). En supposant l'hypothèse de récurrence vérifiée, nous transformons la partie droite de (II.4.40),

$$\mathrm{Res}^n_{n-1}(V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}}) \cong \dim(V_{\lambda'^{(m)}}) \ \mathrm{Res}^n_{n-1}(V_{\lambda^{(m)}}). \tag{II.4.41}$$

Maintenant, nous allons utiliser plusieurs fois le résultat de complétude de la Section II.5. Premièrement, la représentation $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}}$ appartient à $\mathcal{S}$, donc nous pouvons écrire $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}} = c \ V_{\lambda^{(m)}} \oplus W$ où

– W appartient à $\mathcal{S}$ et n'a pas de composant irréductible isomorphe à $V_{\lambda^{(m)}}$,
– c est un entier non-négatif ; $c \leq \dim(V_{\lambda'^{(m)}})$ par un argument de dimension.

Si $c < \dim(V_{\lambda'^{(m)}})$, nous utilisons encore les résultats de la Section II.5 pour obtenir une contradiction. En effet, en raison de la semi-simplicité au niveau $n-1$ (notons que les conditions (II.2.10)–(II.2.12) au niveau $n-1$ sont impliquées par les conditions (II.2.10)–(II.2.12) au niveau n), le monoïde des représentations de $H(m, 1, n-1)$ admet un procédé d'annulation : en d'autres termes, nous pouvons simplifier (II.4.41) par $c\,\mathrm{Res}^n_{n-1}(V_{\lambda^{(m)}})$ des deux côtés. Nous obtenons :

$$\mathrm{Res}^n_{n-1}(W) \cong \Big(\dim(V_{\lambda'^{(m)}}) - c\Big) \ \mathrm{Res}^n_{n-1}(V_{\lambda^{(m)}}) \ .$$

Comme $\mathrm{Res}^n_{n-1}(V_{\lambda^{(m)}})$ est isomorphe à une sous-représentation de $\mathrm{Res}^n_{n-1}(W)$, le Corollaire II.14 implique l'existence d'une m-partition $\nu^{(m)}$ de $n-1$ telle que $\nu^{(m)}$ n'est pas une sous-m-partition de $\lambda^{(m)}$ mais $V_{\nu^{(m)}}$ est isomorphe à une sous-représentation de $\mathrm{Res}^n_{n-1}(W)$. Mais maintenant la représentation $\mathrm{Res}^n_{n-1}(W)$ est isomorphe à une somme directe de plusieurs copies de $\mathrm{Res}^n_{n-1}(V_{\lambda^{(m)}})$ impliquant qu'une telle $\nu^{(m)}$ ne peut pas exister, une contradiction. Ainsi $c = \dim(V_{\lambda'^{(m)}})$ et

$$V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}} \cong \dim(V_{\lambda'^{(m)}})\ V_{\lambda^{(m)}}.$$

La preuve de l'étape récursive est terminée.

Fin de la preuve de la Proposition II.12. Si la formule (II.4.38) est vérifiée pour une m-partition $\lambda^{(m)}$ et toute m-partition $\lambda'^{(m)}$ de même taille que $\lambda^{(m)}$, nous dirons simplement que (II.4.38) est vérifiée pour $\lambda^{(m)}$. Notre façon de prouver l'étape récursive fait référence au Lemme II.13. Donc si la formule (II.4.38) est établie pour toute m-partition de taille n, alors elle est établie pour toutes les m-partitions $\lambda^{(m)}$ de taille $(n+1)$ sauf si $\lambda^{(m)}$ est une des m-partitions listées dans la partie (i) du Lemme II.13. Pour les m-partitions listées dans la partie (i) du Lemme II.13, une preuve indépendante est requise. Par (II.4.35), la formule (II.4.38) est déjà établie pour les m-partitions $\lambda^{(m)}$ de 1, c'est-à-dire, pour $\lambda^{(m)} = (\varnothing, \ldots, \varnothing, \square, \varnothing, \ldots, \varnothing)$, et pour les m-partitions de la forme

$$(\varnothing, \ldots, \varnothing, \lambda, \varnothing, \ldots, \varnothing)\,, \text{ où } \lambda \text{ est } (2) \text{ ou } (1,1)\ . \tag{II.4.42}$$

Ci-dessous, nous allons vérifier séparément que la formule (II.4.38) est vraie pour les autres m-partitions $\lambda^{(m)}$ listées dans la partie (i) du Lemme II.13, c'est-à-dire, les m-partitions $\lambda^{(m)}$ de la forme

$$(\varnothing, \ldots, \varnothing, \lambda, \varnothing, \ldots, \varnothing)\,, \text{ où } \lambda \text{ est } (2,1)\,,\ (2,1,1) \text{ ou } (3,1) \tag{II.4.43}$$

ou de la forme

$$(\varnothing, \ldots, \varnothing, \square, \varnothing, \ldots, \varnothing, \square, \varnothing, \ldots, \varnothing)\ . \tag{II.4.44}$$

Preuve de (II.4.38) pour les m-partitions de la forme (II.4.43) ou (II.4.44). Nous rappelons ici que, pour toutes $\lambda^{(m)}$, $\lambda'^{(m)}$, la représentation $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}}$ est naturellement isomorphe à la représentation $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} W$ où W est une représentation de l'algèbre de Hecke $H(1,1,n)$ (voir la fin du paragraphe 1 de la Sous-Section II.4.4 de cet appendice). E raison du résultat de complétude de la Section II.5, il est suffisant de considérer les cas $W \cong V_\lambda$ pour toutes partitions λ.

Pour les m-partitions $\lambda^{(m)}$ de la forme (II.4.43), le générateur τ agit comme une constante dans $V_{\lambda^{(m)}}$ et il est donc suffisant de travailler avec l'algèbre de Hecke $H(1,1,n)$.

Réintroduisons pour ce paragraphe le paramètre de déformation q dans la notation pour l'algèbre de Hecke : $H_q(1,1,n)$. Grâce aux relations (II.2.1)–(II.2.2) et (II.2.7), nous avons un isomorphisme d'algèbres $\theta\colon H_q(1,1,n) \to H_{-q^{-1}}(1,1,n)$, définis sur les générateurs par $H_q(1,1,n) \ni \sigma_i \mapsto \sigma_i \in H_{-q^{-1}}(1,1,n)$. La composition avec θ d'une représentation de $H_{-q^{-1}}(1,1,n)$, correspondant à une partition λ, envoie les représentations $V_{(3,1)}$, $V_{(2,2)}$ et $V_{(2,1,1)}$ de $H_{-q^{-1}}(1,1,n)$ à, respectivement, les représentations $V_{(2,1,1)}$, $V_{(2,2)}$ et $V_{(3,1)}$ de $H_q(1,1,n)$. Ainsi, la formule (II.4.38) pour $\lambda = (3,1)$ est une conséquence de la formule (II.4.38) pour $\lambda = (2,1,1)$.

Nous rappelons que (II.4.38) a déjà été prouvée pour toute m-partition $\lambda'^{(m)}$ telle que $V_{\lambda'^{(m)}}$ est de dimension 1, voir (II.4.35).

Pour les m-partitions $\lambda^{(m)}$ de la forme (II.4.44), la preuve de (II.4.38) est réduite à la situation où $V_{\lambda'^{(m)}}$ est remplacée par $V_{\lambda'}$ où λ' est (2) ou $(1,1)$, auxquels cas la représentation $V_{\lambda'}$ est unidimensionnelle et la formule (II.4.38) est vérifiée.

1. Pour la m-partition $\lambda^{(m)}$ de la forme (II.4.43) avec $\lambda = (2,1)$, nous avons réduit la preuve à la situation $m = 1$, et il reste à établir le résultat (II.4.38) seulement pour $V_\lambda \hat{\otimes} V_\lambda$.

L'espace vectoriel sous-jacent de V_λ a une base $\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2\}$ où $\mathcal{X}_1 := \mathcal{X}_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}}$ et $\mathcal{X}_2 := \mathcal{X}_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}}$. Dans cette base, les générateurs σ_1 et σ_2 sont réalisés comme suit :

$$\sigma_1 \mapsto \mathrm{diag}(q, -q^{-1}) \ , \ \sigma_2 \mapsto \frac{1}{2_q} \begin{pmatrix} -q^{-2} & 3_q \\ 1 & q^2 \end{pmatrix} . \tag{II.4.45}$$

Nous ordonnons la base $\mathcal{X}_i \mathcal{X}_j$ de l'espace vectoriel sous-jacent de $V_\lambda \hat{\otimes} V_\lambda$ lexicographiquement ; c'est-à-dire que nous choisissons l'ordre $\{\mathcal{X}_1\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_2\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2\mathcal{X}_2\}$. Dans cette base, les matrices de σ_1 et σ_2 sont :

$$\sigma_1 \mapsto \mathrm{diag}(q, q, -q^{-1}, -q^{-1}) \ , \ \sigma_2 \mapsto \frac{1}{2_q} \begin{pmatrix} -q^{-2} & 0 & 0 & 3_q \\ 0 & -q^{-2} & 1 & q^2 + q^{-2} \\ -q^2 - q^{-2} & 3_q & q^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix} .$$

Les deux sous-espaces avec les bases

$$\begin{gathered} \{\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2, 3_q\mathcal{X}_2\mathcal{X}_1\} \ , \\ \{\mathcal{X}_1\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_1\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_2\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2\mathcal{X}_2\} \end{gathered} \tag{II.4.46}$$

portent la représentation (II.4.45), ce qui implique (II.4.38) dans ce cas. Comme $V_\lambda \hat{\otimes} V_\lambda$ se décompose en somme directe de deux représentations isomorphes, le choix (II.4.46) des sous-espaces n'est pas unique. Nous faisons seulement (ici et pour les autres cas ci-dessous) un choix simple.

2. Pour la m-partition $\lambda^{(m)}$ de la forme (II.4.43) avec $\lambda = (2,1,1)$, nous avons réduit la preuve à la situation $m = 1$, et il reste à établir le résultat (II.4.38) seulement pour $V_\lambda \hat{\otimes} V_{\lambda'}$ avec $\lambda' = (2,2), (2,1,1)$ et $(3,1)$.

L'espace vectoriel sous-jacent de V_λ a une base $\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3\}$ où $\mathcal{X}_1 := \mathcal{X}_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}}$, $\mathcal{X}_2 := \mathcal{X}_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}}$ et

$\mathcal{X}_3 := \mathcal{X}_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1}\end{array}}$. Dans cette base, les générateurs σ_1, σ_2 et σ_3 sont réalisés comme suit :

$$\sigma_1 \mapsto \mathrm{diag}(q, -q^{-1}, -q^{-1}) \ ,$$

$$\sigma_2 \mapsto \tfrac{1}{2_q} \begin{pmatrix} -q^{-2} & 3_q & 0 \\ 1 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-1}2_q \end{pmatrix} \ , \ \sigma_3 \mapsto \tfrac{1}{3_q} \begin{pmatrix} -q^{-1}3_q & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-3} & 4_q \\ 0 & 2_q & q^3 \end{pmatrix} \ . \tag{II.4.47}$$

2a. $\lambda' = (2,2)$.

Le sous-espace vectoriel sous-jacent à $V_{\lambda'}$ a une base $\{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2\}$, où $\mathcal{Y}_1 := \mathcal{X}_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}}$ et $\mathcal{Y}_2 := \mathcal{X}_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array}}$.
Nous ordonnons la base $\mathcal{X}_i\mathcal{Y}_j$ de l'espace vectoriel sous-jacent de $V_\lambda \hat{\otimes} V_{\lambda'}$ lexicographiquement. Dans cette base, les générateurs σ_1, σ_2 et σ_3 sont réalisés comme suit :

$$\sigma_1 \mapsto \mathrm{diag}(q, q, -q^{-1}, -q^{-1}, -q^{-1}, -q^{-1}) \ ,$$

$$\sigma_2 \mapsto \frac{1}{2_q} \begin{pmatrix} -q^{-2} & 0 & 0 & 3_q & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-2} & 1 & q^2+q^{-2} & 0 & 0 \\ -q^2-q^{-2} & 3_q & q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1}2_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1}2_q \end{pmatrix} \ ,$$

$$\sigma_3 \mapsto \frac{1}{3_q} \begin{pmatrix} -q^{-1}3_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1}3_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-3} & 0 & 4_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-3} & 0 & -2_q \\ 0 & 0 & 2_q & 0 & q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4_q & 0 & q^3 \end{pmatrix} \ .$$

Les deux sous-espaces avec les bases

$$\{\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_2, 3_q\mathcal{X}_2\mathcal{Y}_1, 3_q\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_1\} \ ,$$

$$\{\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_1\mathcal{Y}_2, \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_2, \mathcal{X}_3\mathcal{Y}_1 - (q^2+q^{-2})\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_2\}$$

portent la représentation (II.4.47), ce qui implique (II.4.38) dans ce cas.

2b. $\lambda' = \lambda = (2,1,1)$.

Nous ordonnons la base $\mathcal{X}_i\mathcal{X}_j$ de l'espace vectoriel sous-jacent de $V_\lambda \hat{\otimes} V_\lambda$ lexicographiquement. Dans cette base, les générateurs σ_1, σ_2 et σ_3 sont réalisés comme suit :

$$\sigma_1 \mapsto \mathrm{diag}(q, q, q, -q^{-1}, -q^{-1}, -q^{-1}, -q^{-1}, -q^{-1}, -q^{-1}) \ ,$$

$$\sigma_2 \mapsto \frac{1}{2_q}\begin{pmatrix} -q^{-2} & 0 & 0 & 0 & 3_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-2} & 0 & 1 & q^2+q^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -q^2-q^{-2} & 3_q & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3_q & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1}2_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1}2_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1}2_q \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma_3 \mapsto \frac{1}{3_q}\begin{pmatrix} -q^{-1}3_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1}3_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-1}3_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-3} & 0 & 0 & -2_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-3} & 0 & 0 & 0 & 4_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-3} & 0 & 2_q & q^3+q^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & -4_q & 0 & 0 & q^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q^3-q^{-3} & 4_q & 0 & q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2_q & 0 & 0 & 0 & q^3 \end{pmatrix} .$$

Les trois sous-espaces avec les bases

$$\{\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_2, 3_q\mathcal{X}_2\mathcal{Y}_1, -3_q(q^2+q^{-2})\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_1\} ,$$

$$\{\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_1+\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_2, \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_1+\mathcal{X}_2\mathcal{Y}_2, -(q^2+q^{-2})\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_1 - \frac{q^3+q^{-3}}{2_q}\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_2+\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_3\} ,$$

$$\{\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_3, -3_q\mathcal{X}_2\mathcal{Y}_3, -3_q(q^2+q^{-2})\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_2\}$$

portent la représentation (II.4.47), ce qui implique (II.4.38) dans ce cas.

2c. $\lambda' = (3,1)$.

L'espace vectoriel sous-jacent de $V_{\lambda'}$ a une base $\{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3\}$, où $\mathcal{Y}_1 := \mathcal{X}_{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}}$, $\mathcal{Y}_2 := \mathcal{X}_{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}}$ et $\mathcal{Y}_3 := \mathcal{X}_{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{4}\\\cline{1-1}\end{array}}$. Nous ordonnons la base $\mathcal{X}_i\mathcal{Y}_j$ de l'espace vectoriel sous-jacent de $V_\lambda \hat{\otimes} V_{\lambda'}$ lexicographiquement. Dans cette base, les générateurs σ_1, σ_2 et σ_3 sont réalisés comme suit :

$$\sigma_1 \mapsto \mathrm{diag}(q,q,q,-q^{-1},-q^{-1},-q^{-1},-q^{-1},-q^{-1},-q^{-1}) ,$$

$$\sigma_2 \mapsto \frac{1}{2_q}\begin{pmatrix} -q^{-2} & 0 & 0 & q^2+q^{-2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-2} & 0 & 3_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-2} & 0 & 0 & 3_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3_q & -q^2-q^{-2} & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1}2_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1}2_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1}2_q \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 \mapsto \frac{1}{3_q}\begin{pmatrix} -q^{-1}3_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1}3_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-1}3_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-3} & 0 & 0 & 4_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-3} & 0 & 0 & q^3+q^{-3} & 2_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-3} & 0 & 4_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2_q & 0 & 0 & q^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2_q & 0 & q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4_q & -q^3-q^{-3} & 0 & 0 & q^3 \end{pmatrix}.$$

Les trois sous-espaces avec les bases

$$\{\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_1, 3_q\mathcal{X}_2\mathcal{Y}_2, 3_q(q^2+q^{-2})\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_3\}\ ,$$

$$\{\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_1+\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_2, \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_1+\mathcal{X}_2\mathcal{Y}_2, \mathcal{X}_3\mathcal{Y}_1+(q^2+q^{-2})\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_3\}\ ,$$

$$\{\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_3, \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_3, \mathcal{X}_3\mathcal{Y}_2-\frac{q^3+q^{-3}}{2_q}\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_3\}$$

portent la représentation (II.4.47), ce qui implique (II.4.38) dans ce cas.

La preuve de la Proposition II.12 est terminée. □

Remarques.

(a) D'après la Proposition II.12, le produit tensoriel $\hat{\otimes}$ est évidemment associatif. Remarquons que si nous avions une preuve indépendante de l'associativité de $\hat{\otimes}$, cela impliquerait immédiatement la Proposition II.12 :

$$V_{\lambda^{(m)}}\hat{\otimes}V_{\lambda'^{(m)}} \cong (V_{\lambda^{(m)}}\hat{\otimes}V_{\varpi^{(m)}})\hat{\otimes}V_{\lambda'^{(m)}} \cong V_{\lambda^{(m)}}\hat{\otimes}(V_{\varpi^{(m)}}\hat{\otimes}V_{\lambda'^{(m)}}) \cong \dim(V_{\lambda'^{(m)}})\ V_{\lambda^{(m)}}\ ;$$

nous avons utilisé (II.4.34) pour le premier isomorphisme et (II.4.34)-(II.4.35) pour le dernier.

(b) Soit $\lambda^{(m)}$ une m-partition de taille n et $\rho\colon H(m,1,n) \to \mathrm{End}(\mathfrak{V})$ une représentation de $H(m,1,n)$. On peut construire une représentation de $H(m,1,n)$ sur l'espace $U_{\lambda^{(m)}} \otimes \mathfrak{V}$ en déplaçant

les éléments de $H(m,1,n)$ à travers les éléments de base $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ de $U_{\lambda^{(m)}}$ avec l'aide des instructions de la Proposition II.8, et ensuite en appliquant la représentation ρ. Appelons cette représentation $V_{\lambda^{(m)}} \boxtimes \mathfrak{V}$. Si ρ est une représentation de la classe S, cette construction est équivalente au produit $\hat{\otimes}$,

$$V_{\lambda^{(m)}} \boxtimes \mathfrak{V} \cong V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} \mathfrak{V} \ . \tag{II.4.48}$$

De manière similaire à la construction de la structure de $H(m,1,n)$-module sur l'espace $U_{\lambda^{(m)}} \otimes U_{\lambda'^{(m)}}$, on peut construire une structure de $H(m,1,n)$-module sur le produit tensoriel de l espaces correspondant à l m-partitions quelconques, avec $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. On doit remplacer dans la construction les combinaisons quadratiques $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\mathcal{X}_{\lambda'^{(m)}}$ par des combinaisons $\mathcal{X}_{\lambda_l^{(m)}}\mathcal{X}_{\lambda_{l-1}^{(m)}} \dots \mathcal{X}_{\lambda_1^{(m)}}$ de degré l, déplacer les éléments de $H(m,1,n)$ à travers ces combinaisons en utilisant les relations homogènes (en $\mathcal{X}$) (II.4.8)–(II.4.9), et en évaluant ces éléments sur le vide $|\rangle$. Appelons cette représentation $\mathfrak{W}_{\lambda_l^{(m)},\lambda_{l-1}^{(m)},\dots,\lambda_1^{(m)}}$. La représentation $\mathfrak{W}_{\lambda_l^{(m)},\lambda_{l-1}^{(m)},\dots,\lambda_1^{(m)}}$ est isomorphe à la somme directe de $\dim(V_{\lambda_1^{(m)}}) \times \dots \times \dim(V_{\lambda_{l-1}^{(m)}})$ copies de $V_{\lambda_l^{(m)}}$. En effet, par (II.4.48), $\mathfrak{W}_{\lambda_l^{(m)},\lambda_{l-1}^{(m)},\dots,\lambda_1^{(m)}}$ est équivalente à la représentation $V_{\lambda_l^{(m)}} \boxtimes \mathfrak{W}_{\lambda_{l-1}^{(m)},\dots,\lambda_1^{(m)}}$. Par récurrence (la base de la récurrence est la formule (II.4.38)), la représentation $\mathfrak{W}_{\lambda_{l-1}^{(m)},\dots,\lambda_1^{(m)}}$ est isomorphe à la somme directe de $\dim(V_{\lambda_1^{(m)}}) \times \dots \times \dim(V_{\lambda_{l-2}^{(m)}})$ copies de $V_{\lambda_{l-1}^{(m)}}$. Avec (II.4.38) et (II.4.48), l'affirmation est vérifiée.

(c) La partition $(2,1,1)$ apparait dans la liste de la partie (i) du Lemme II.13 parce que

$$\mathrm{Res}_3^4(V_{(2,1,1)}) \cong \mathrm{Res}_3^4(V_{(2,2)}) \oplus \mathrm{Res}_3^4(V_{(1,1,1,1)}) \ .$$

Pour la représentation $V_{(2,1,1)}$, la matrice de l'opérateur $\sigma_1\sigma_3$ est

$$\frac{1}{3_q}\begin{pmatrix} -3_q & 0 & 0 \\ 0 & q^{-4} & -q^{-1}4_q \\ 0 & -q^{-1}2_q & -q^2 \end{pmatrix} \ .$$

Ainsi, $\mathrm{tr}_{V_{(2,1,1)}}(\sigma_1\sigma_3) = -2 + q^{-2}$. Dans la représentation $V_{(1,1,1,1)}$, nous avons $\sigma_1, \sigma_3 \mapsto (-q^{-1})$ tandis que dans la représentation $V_{(2,2)}$ nous avons $\sigma_1, \sigma_3 \mapsto \mathrm{diag}(q, -q^{-1})$; donc $\mathrm{tr}_{V_{(1,1,1,1)}}(\sigma_1\sigma_3) + \mathrm{tr}_{V_{(2,2)}}(\sigma_1\sigma_3) = q^2 + 2q^{-2}$. Ceci est différent de $\mathrm{tr}_{V_{(2,1,1)}}(\sigma_1\sigma_3) = -2 + q^{-2}$ si et seulement si $(q+q^{-1})^2 \neq 0$ c'est-à-dire, $q + q^{-1} \neq 0$. C'est pourquoi, pour établir la formule (II.4.38) pour la représentation $V_{(2,1,1)}$, il est suffisant de calculer la trace de $\sigma_1\sigma_3$ dans les représentations $V_{(2,1,1)} \hat{\otimes} V_\lambda$ avec $\lambda = (2,2), (2,1,1)$ et $(3,1)$. Notons que cet argument marche en particulier dans la limite classique $q \to 1$.

II.5 Complétude

1. Dans la Section précédente, nous avons construit, pour toute m-partition $\lambda^{(m)}$, une représentation de $H(m,1,n)$. Le spectre des éléments de Jucys–Murphy $J_1, \dots, J_n$ dans cette représentation est l'ensemble des lignes de nombres correspondant aux m-tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$, voir le Lemme II.9. Cette construction fournit une inclusion de l'ensemble des m-tableaux standards de taille n dans $\mathrm{Spec}(J_1, \dots, J_n)$. D'un autre côté, la Proposition II.3 et la Proposition II.5 donnent une

inclusion de $\mathrm{Spec}(J_1, \ldots, J_n)$ dans l'ensemble des m-tableaux standards de taille n. Ces opérations sont, par construction, inverses l'une à l'autre. Nous compilons ces résultats.

Nous soulignons que les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) sont essentielles pour les affirmations ci-dessous.

Proposition II.15. *L'ensemble* $\mathrm{Spec}(J_1, \ldots, J_n)$*, l'ensemble* $\mathrm{Cont}_m(n)$ *et l'ensemble des m-tableaux standards sont en bijection.*

Corollaire II.16. *Le spectre des éléments de Jucys–Murphy est simple dans les représentations $V_{\lambda^{(m)}}$ (labellisées par les m-partitions).*

Cela signifie que pour deux m-tableaux standards différents (pas nécessairement de la même forme), les éléments de $\mathrm{Spec}(J_1, \ldots, J_n)$ qui leur sont associés par la Proposition II.15 sont différents (deux lignes $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(a'_1, \ldots, a'_n)$ sont différentes s'il existe un certain i tel que $a_i \neq a'_i$).

2. Il reste à vérifier que nous obtenons avec cette approche toutes les représentations irréductibles de l'algèbre $H(m, 1, n)$.

D'après des résultats sur les puissances du graphe de Young, exposés dans le Chapitre I, Section I.2, la somme des carrés des dimensions des représentations construites est égale à la dimension de $H(m, 1, n)$. Il est donc suffisant de prouver que les représentations construites sont irréductibles et non-isomorphes deux à deux. Ceci est fait dans le Théorème II.17.

Comme conséquence, nous obtenons que l'algèbre $H(m, 1, n)$ est semi-simple sous les restrictions (II.2.10)–(II.2.12).

Théorème II.17. *Les représentations $V_{\lambda^{(m)}}$ (labellisées par les m-partitions) de l'algèbre $H(m, 1, n)$, construites dans la Section II.4 sont irréductibles et non-isomorphes deux à deux.*

Preuve. La preuve peut-être trouvée dans [4] (ainsi que le résultat de semi-simplicité). Nous répétons brièvement l'argument pour être complet.

Dans la preuve, nous utilisons une récurrence sur n. Ceci est justifiée car les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) pour $H(m, 1, n)$ impliquent les restrictions (II.2.10)–(II.2.12), dans lesquelles n est remplacé par n', pour $H(m, 1, n')$ avec n' arbitraire vérifiant $0 < n' < n$.

Le Corollaire II.16 implique tout de suite que les représentations $V_{\lambda^{(m)}}$ et $V_{\lambda'^{(m)}}$ sont non-isomorphes si $\lambda^{(m)} \neq \lambda'^{(m)}$.

Supposons par récurrence que les représentations $V_{\mu^{(m)}}$, pour toutes les m-partitions $\mu^{(m)}$ de $n-1$, sont des représentations irréductibles de $H(m, 1, n-1)$. La base de la récurrence est $n = 1$; il n'y a rien à prouver dans ce cas.

Fixons une m-partition $\lambda^{(m)}$ avec $|\lambda^{(m)}| = n$. Soit $\{\mu_i^{(m)}\}$, $i = 1, \ldots, l$, l'ensemble des sous-m-partitions de $\lambda^{(m)}$ avec $|\mu_i^{(m)}| = n - 1$.

Pour chaque i, la représentation $V_{\mu_i^{(m)}}$ de $H(m, 1, n-1)$ est une sous-représentation de la restriction de la représentation $V_{\lambda^{(m)}}$ à $H(m, 1, n-1)$. La dimension de $V_{\lambda^{(m)}}$ (le nombre de m-tableaux standards

de forme $\lambda^{(m)}$) est la somme (sur i) des dimensions de $V_{\mu_i^{(m)}}$. Ainsi, la représentation $V_{\lambda^{(m)}}$ de $H(m,1,n)$ se décompose par rapport à $H(m,1,n-1)$ en la somme directe des représentations $V_{\mu_i^{(m)}}$.

Les sous-m-partitions $\mu_i^{(m)}$ sont différentes, et correspondent donc à des représentations irréductibles non-isomorphes de $H(m,1,n-1)$. Il s'ensuit que les positions de $V_{\mu_i^{(m)}}$ en tant que sous-espaces de $V_{\lambda^{(m)}}$ sont bien définies. C'est pourquoi, si $V_{\lambda^{(m)}}$ a un sous-espace non-trivial invariant U, alors U doit contenir au moins une des $V_{\mu_i^{(m)}}$, disons $V_{\mu_1^{(m)}}$.

Il suffit de montrer que, partant d'éléments de $V_{\mu_1^{(m)}}$, on peut obtenir un élément de $V_{\mu_j^{(m)}}$, quel que soit $j \neq 1$, par l'action d'opérateurs de $H(m,1,n)$. Un vecteur de base de $V_{\lambda^{(m)}}$, labellisé par un m-tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$ de forme $\lambda^{(m)}$, appartient au sous-espace $V_{\mu_j^{(m)}}$, où $\mu_j^{(m)}$ est la sous-m-partition de taille $(n-1)$ formée par les m-cases de $X_{\lambda^{(m)}}$ portant $1,\ldots,n-1$. Pour tout $j \neq 1$, la sous-m-partition $\mu_j^{(m)}$ est obtenue à,partir de $\mu_1^{(m)}$ en enlevant une m-case et en ajoutant une autre m-case, différente de celle enlevée ; Il est facile de voir que les deux m-cases impliquées ne sont pas adjacentes et, de plus, ne sont pas sur des diagonales voisines. Prenons le m-tableau standard de forme $\lambda^{(m)}$ pour lequel les nombres $1,\ldots,n-1$ sont placés dans la sous-m-partition $\mu_1^{(m)}$ de $\lambda^{(m)}$, et de plus le nombre $n-1$ est dans la seule m-case de $\mu_1^{(m)}$ qui n'est pas dans la sous-m-partition $\mu_j^{(m)}$. Le vecteur $\vec{v}$ de $V_{\lambda^{(m)}}$ labellisé par ce m-tableau appartient au sous-espace $V_{\mu_1^{(m)}}$, et est envoyé par σ_{n-1} à une combinaison du vecteur $\vec{v}$ et d'un vecteur appartenant à $V_{\mu_j^{(m)}}$. La formule (II.4.16) montre que le vecteur de $V_{\mu_j^{(m)}}$ n'est pas nul. $\square$

Soit $\mathcal{B}$ une sous-algèbre associative d'une algèbre associative $\mathcal{A}$. Une représentation indécomposable (irréductible si l'algèbre $\mathcal{A}$ est semi-simple) de l'algèbre $\mathcal{A}$ se décompose par rapport à la sous-algèbre $\mathcal{B}$, c'est-à-dire, se décompose an somme directe de représentations indécomposables (irréductibles si l'algèbre $\mathcal{B}$ est semi-simple) de $\mathcal{B}$. L'information sur les décompositions de toutes les représentations $\mathcal{A}$ par rapport à la sous-algèbre $\mathcal{B}$ est appelée *règles de branchement* pour le couple $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ (voir Chapitre I, Section I.1.

Comme corollaire de toute la construction, nous obtenons sous les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) les règles de branchement pour le couple $\big(H(m,1,n), H(m,1,n-1)\big)$; la représentation de l'algèbre $H(m,1,n)$ labellisée par une m-partition $\lambda^{(m)}$ de n se décompose en la somme directe des représentations de l'algèbre $H(m,1,n)$ labellisées par les sous-m-partitions de $\lambda^{(m)}$ de taille $n-1$. En particulier, nous obtenons le Corollaire suivant.

Corollaire II.18. *Sous les restrictions (II.2.10)–(II.2.12), les règles de branchement pour la chaîne, par rapport à n, d'algèbres $H(m,1,n)$ sont sans multiplicité.*

Cela signifie que, sous les restrictions (II.2.10)–(II.2.12), dans la décomposition d'une représentation irréductible de $H(m,1,n)$, chaque représentation irréductible de l'algèbre $H(m,1,n-1)$ apparait avec une multiplicité égale à 0 ou 1.

Par des arguments standards (voir Chapitre I, Section I.1, Proposition I.11), il vient que, sous les restrictions (II.2.10)–(II.2.12), le centralisateur de la sous-algèbre $H(m,1,n-1)$ dans l'algèbre

$H(m,1,n)$ est commutatif pour tout $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Il vient également de la théorie des représentations que, sous les restrictions (II.2.10)–(II.2.12),

- Le centralisateur de la sous-algèbre $H(m,1,n-1)$ dans l'algèbre $H(m,1,n)$ est engendré par le centre de $H(m,1,n-1)$ et l'élément de Jucys–Murphy J_n ;
- la sous-algèbre engendrée par les éléments de Jucys–Murphy $J_1, \ldots, J_n$ de l'algèbre $H(m,1,n)$ est maximale commutative.

Remarques.

(a) Pour tout m-tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$, définissons l'élément $\mathfrak{P}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$ par la récursion suivante. La condition initiale est $\mathfrak{P}_{\varnothing} = 1$. Soit $\alpha^{(m)}$ la m-case portant le nombre n dans $X_{\lambda^{(m)}}$; définissons $\mu^{(m)} := \lambda^{(m)} \backslash \{\alpha^{(m)}\}$. Notons $X_{\mu^{(m)}}$ le m-tableau standard avec les nombres $1, \ldots, n-1$ dans les mêmes m-cases que dans $X_{\lambda^{(m)}}$. La récursion est donnée par

$$\mathfrak{P}_{X_{\lambda^{(m)}}} := \mathfrak{P}_{X_{\mu^{(m)}}} \prod_{\beta^{(m)}\,:\,\beta^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\mu^{(m)})\,,\,\beta^{(m)} \neq \alpha^{(m)}} \frac{J_n - c(\beta^{(m)})}{c(\alpha^{(m)}) - c(\beta^{(m)})} \tag{II.5.1}$$

où $c(\beta^{(m)})$ est le contenu de la m-case $\beta^{(m)}$. En raison des résultats de complétude de cette Section, les éléments $\mathfrak{P}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ forment un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux deux à deux de l'algèbre $H(m,1,n)$ (voir Chapitre suivant, Section III.3).

De plus, nous allons prouver que il existe un homomorphisme bien défini $\varrho : \mathfrak{T} \to H(m,1,n)$, qui est l'identité sur les générateurs $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$, et qui envoie $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ à $\mathfrak{P}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ pour tout m-tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$. Après utilisation de la complétude, la seule vérification non-triviale que l'on doit faire est de vérifier que, pour tout m-tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$ tel que $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ est standard, la relation définissante (II.4.8) de l'algèbre $\mathfrak{T}$ est satisfaite par les images de σ_i, $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ et $\mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ par l'homomorphisme ϱ. La vérification se réduit à l'égalité suivante pour les matrices (voir (II.4.18)) :

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}, \tag{II.5.2}$$

où $A = \dfrac{qc^{(i)} - q^{-1}c^{(i+1)}}{c^{(i)} - c^{(i+1)}}$, $B = \dfrac{qc^{(i+1)} - q^{-1}c^{(i)}}{c^{(i+1)} - c^{(i)}}$, $C = \dfrac{(q-q^{-1})(c^{(i+1)} + c^{(i)})}{c^{(i+1)} - c^{(i)}}$ et $c^{(i)} := c(X_{\lambda^{(m)}}|i)$ pour $i = 1, \ldots, n$. Les éléments $\varrho(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}})$ sont les unités matricielles diagonales ; les éléments

$$\varrho\Big(\sigma_i + \frac{(q-q^{-1})c(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)}{c(X_{\lambda^{(m)}}|i) - c(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)}\Big)\ \varrho(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) = \varrho(\mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}})\varrho\Big(\sigma_i + \frac{(q-q^{-1})c(X_{\lambda^{(m)}}|i)}{c(X_{\lambda^{(m)}}|i+1) - c(X_{\lambda^{(m)}}|i)}\Big) \tag{II.5.3}$$

forment une partie des unités matricielles hors-diagonales (non-normalisées) - le calcul (II.5.2) montre que ces éléments ne sont pas nuls. Pour l'algèbre de Hecke usuelle $H(1,1,n)$, l'égalité (II.5.3) avait déjà été établie dans [77]. L'ensemble complet des unités matricielles hors-diagonales a été construit dans [84] pour l'algèbre de Hecke usuelle. La construction pour l'algèbre de Hecke cyclotomique est similaire, et nous laissons les détails au lecteur.

(b) Pour un sous-ensemble $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_l}\}$ avec $l < m$, soit $\mathfrak{z} := (\tau - v_{i_1})...(\tau - v_{i_l})$. En prenant le quotient de $H(m,1,n)$ par l'idéal engendré par $\mathfrak{z}$, nous obtenons un homomorphisme $\mathfrak{p}\colon H(m,1,n) \to H(l,1,n)$ où $H(l,1,n)$ est l'algèbre de Hecke cyclotomique avec les paramètres q, $v_{i_1}, \ldots, v_{i_l}$ (notons que les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) sont vérifiées pour ce choix de paramètres si elles sont vérifiées pour $q, v_1, \ldots, v_n$). Les représentations de $H(m,1,n)$ pour lesquelles les entrées diagonales de la matrice (diagonale) (II.4.17) appartiennent à $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_l}\}$ (ces représentations sont labellisées par les m-partitions avec des partitions vides aux places correspondant aux v_j qui ne sont pas dans $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_l}\}$) passent à travers l'image $\mathfrak{p}(H(m,1,n))$ dans $H(l,1,n)$. La somme des carrés des dimensions de ces représentations est égale à la dimensions de $H(l,1,n)$. Il vient donc que $\mathfrak{p}$ est surjectif.

Début du diagramme de Bratteli coloré de $H(2,1,n)$. Ci-dessous, le début du diagramme de Bratteli (quatre premiers étages) pour la chaîne des algèbres $H(2,1,n)$ est dessiné. Nous "colorons" les arêtes par les valeurs propres des éléments de Jucys–Murphy de $H(2,1,n)$, qui représentent l'ajout d'une m-case dans un m-tableau standard (les arêtes descendant du niveau i au niveau $i+1$ sont labellisés par les valeurs propres de l'élément J_{i+1} ; le sommet du haut est situé au niveau 0).

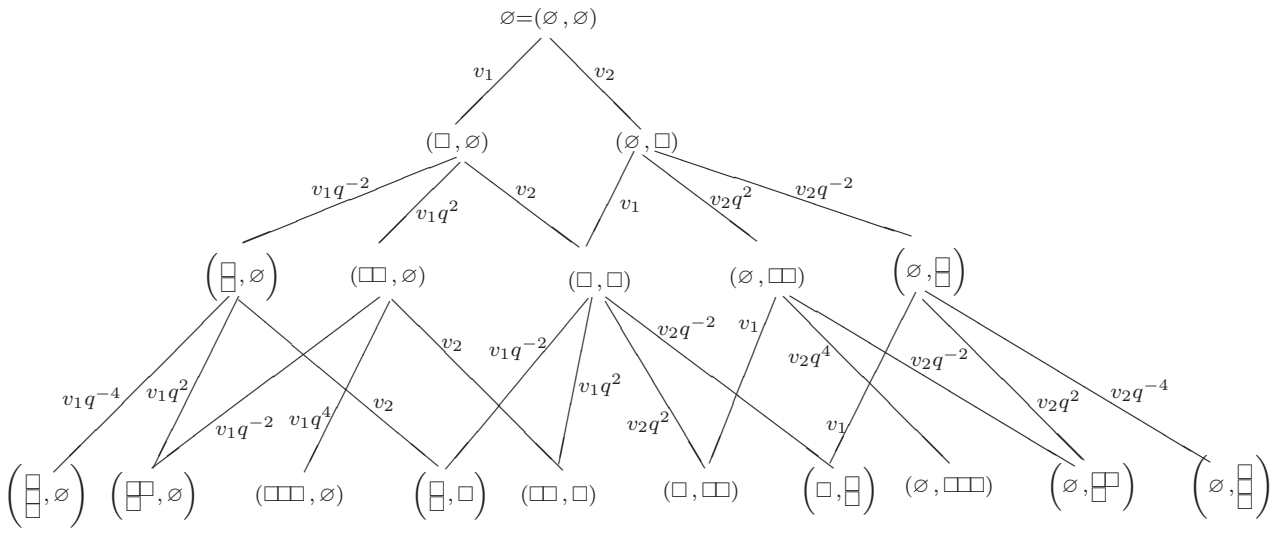


Fig. II.5. *Diagramme de Bratteli (quatre premiers niveaux) pour $H(m,1,n)$ avec $m = 2$.*

II.6 Limite classique

Nous étudions dans cette Section la limite classique de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$, c'est-à-dire l'algèbre du groupe de réflexions complexe $G(m,1,n)$. La théorie des représentations des groupes $G(m,1,n)$ est bien connue, voir [97] ou, *e.g.*, [67]. La théorie des représentations de $G(m,1,n)$

peut aussi être directement déduite de la théorie des représentations de $H(m,1,n)$ en prenant la limite

$$\begin{cases} v_i \to \xi_i & \text{pour } i = 1,\dots,m, \text{ où les } \xi_i\text{'s sont les racines } m\text{-ème de l'unité distinctes ,} \\ q \to \pm 1 \end{cases} \tag{II.6.1}$$

dans les formules pour les éléments matriciels. Néanmoins, il est intéressant de considérer la "limite classique" de toute l'approche développée ci-dessus établissant une approche pour la théorie des représentations du groupe $G(m,1,n)$ ne se référant pas à la théorie des représentations de $H(m,1,n)$. Notons également que cette approche ne fait pas appel à la théorie des représentations du groupe symétrique (rappelons que $G(m,1,n)$ est isomorphe au produit en couronne du groupe cyclique à m éléments par le groupe symétrique, voir ci-dessous). Par ailleurs, la construction d'une structure d'algèbre sur le produit tensoriel de l'algèbre $\mathbb{C}G(m,1,n)$ avec une algèbre libre associative engendrée par les m-tableaux standards correspondant aux m-partitions de n est intéressante en soi.

La théorie des représentations d'une classe plus générale de groupes, à savoir des produits en couronne de groupes finis avec le groupe symétrique, a été construite, dans l'esprit de [86], dans [87]. La construction dans [87] est élaborée dans le contexte de la théorie des groupes. Dans cette Section, nous allons voir comment cette approche est restaurée – sur l'exemple des groupes $G(m,1,n)$ – par la limite classique de l'approche développée dans les Sections précédentes pour $H(m,1,n)$. Nous verrons qu'il existe certaines subtilités lors du passage à la situation classique des groupes (on devra être prudent sur l'ordre des limites *etc*). Comme souvent, la situation classique apparait être plus compliquée que celle dans le cas non-dégénéré.

Nous résumons brièvement le contenu des prochaines Sous-Sections. Nous présentons tout d'abord, dans la Sous-Section II.6.2, les éléments de Jucys–Murphy classiques de l'algèbre du groupe $G(m,1,n)$, que nous obtenons comme des limites classiques de certaines expressions impliquant les éléments de Jucys–Murphy de $H(m,1,n)$. Comme dans le cas non-dégénéré, l'étude des éléments de Jucys–Murphy est l'objet principal dans notre construction de la théorie des représentations. Ensuite, nous répétons plus ou moins les mêmes étapes que dans le cas non-dégénéré.

Dans la Sous-Section II.6.3, nous montrons que les éléments de Jucys–Murphy de $\mathbb{C}G(m,1,n)$ sont les images d'éléments de Jucys–Murphy "universels" vivant dans une version d'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique (en opposition avec la situation non-dégénérée où l'algèbre de Hecke affine usuelle était utilisée), que nous notons $\mathfrak{A}_{m,n}$ (voir la Définition II.19 ci-dessous). Nous vérifions, au niveau classique, la commutativité de l'ensemble $\{x_1,\tilde{x}_1,\dots,x_n,\tilde{x}_n\}$ d'éléments de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,n}$. Il se trouve que l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,n}$ coïncide avec un cas particulier d'"algèbre de Hecke en couronne" définie dans [103], voir aussi [89] (nous n'avons pas inclus la commutativité de l'ensemble d'éléments $\{x_1,\tilde{x}_1,\dots,x_n,\tilde{x}_n\}$ dans les relations définissantes de $\mathfrak{A}_{m,n}$, contrairement à la définition de l'algèbre de Hecke en couronne de [103] ; comme corollaire de la commutativité de ces éléments, prouvée ici, les deux algèbres sont en fait isomorphes).

Dans la Sous-Section II.6.4, nous étudions tout d'abord la théorie des représentations de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$, qui est l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique non-triviale la plus simple. Ses représentations portent une information importante sur les propriétés récursives des éléments de Jucys–Murphy. Nous présentons la liste des représentations irréductibles de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$ avec $x_1,\tilde{x}_1,x_2$ et $\tilde{x}_2$ diagonalisables, et ensuite, presque sans preuve, les analogues des résultats des Sections II.3, II.4

et II.5 (les preuves suivent les mêmes lignes que les preuves des affirmations analogues des Sections II.3, II.4 et II.5) dans le contexte classique. En particulier, nous caractérisons les ensembles de valeurs propres communes des éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre du groupe $G(m,1,n)$, et établissons ensuite la relation avec les m-partitions.

Les représentations du groupe $G(m,1,n)$ sont construites, dans la Sous-Section II.6.5, avec l'aide d'une structure d'algèbre sur le produit tensoriel de $\mathbb{C}G(m,1,n)$ avec une algèbre associative libre engendrée par les m-tableaux standards correspondant aux m-partitions de n.

Finalement, dans la Sous-Section II.6.6, nous présentons le résultat de complétude et certaines conséquences, de manière analogue au contenu de la Section II.5.

Nous donnons aussi dans le premier Appendice à cette Section une preuve d'un théorème structurel (donnant une forme normale) pour l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique (c'est un cas particulier de la base PBW pour les algèbres de Hecke en couronne donnée dans [103]). Dans le deuxième Appendice, nous étudions les opérateurs d'entrelacement (introduits dans [103]) de l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique, qui fournissent certaines informations sur le spectre des éléments de Jucys–Murphy ; nous expliquons comment obtenir ces opérateurs d'entrelacement en prenant la limite classique de certains opérateurs d'entrelacement de l'algèbre de Hecke affine non-dégénérée.

Certains résultats présentés dans cette Section sont connus (les éléments de Jucys–Murphy [87, 104], la construction des représentations à partir de l'étude du spectre [87], l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique [103, 102]). Nous insistons ici sur les connections entre le traitement pour les groupes $G(m,1,n)$ avec le traitement pour les algèbres $H(m,1,n)$. Par ailleurs, la méthode pour construire les représentations donnée dans la Sous-Section II.6.5 semble être nouvelle.

II.6.1 Groupe de réflexions complexe $G(m,1,n)$

Le groupe $G(m,1,n)$ est engendré par les éléments t, s_1, ..., s_{n-1} avec les relations définissantes :

$$\begin{cases} s_i^2 = 1 & \text{pour } i = 1,\dots,n-1 \ , \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} & \text{pour } i = 1,\dots,n-2 \ , \\ s_i s_j = s_j s_i & \text{pour } i,j = 1,\dots,n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1 \end{cases} \tag{II.6.2}$$

et

$$\begin{cases} t^m = 1 \ , \\ t s_1 t s_1 = s_1 t s_1 t \ , \\ t s_i = s_i t \qquad \text{pour } i > 1 \ . \end{cases} \tag{II.6.3}$$

La notation "s_i", la même que pour les générateurs du groupe symétrique S_n, voir (II.4.4)-(II.4.6), ne devrait pas prêter à confusion ; le sous-groupe de $G(m,1,n)$ engendré par les éléments s_1, ..., s_{n-1} est isomorphe au groupe symétrique S_n.

Une étude structurelle du groupe $G(m,1,n)$ est réalisée dans le Chapitre III, Section III.4 (nous donnons une autre présentation, nous appliquons l'algorithme de Coxeter–Todd et donnons une forme normale) ; les résultats présentés dans le présent Chapitre sont plutôt rattachés à la théorie des représentations.

II.6.2 Eléments de Jucys–Murphy

Dans cette Sous-Section, nous obtenons une version des éléments de Jucys–Murphy de $G(m,1,n)$ à partir des éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$, plus précisément, par des limites de certaines expressions contenant les éléments de Jucys–Murphy de $H(m,1,n)$ (un procédé similaire a été utilisé dans [88] pour les groupes de Weyl). Les éléments de Jucys–Murphy ont été définis dans [87, 104] pour le produit en couronne d'un groupe fini quelconque A par le groupe symétrique. Les éléments de Jucys–Murphy obtenus ici par la procédure de limite coïncident avec ceux de [87, 104] quand A est le groupe cyclique.

Dans la suite, nous identifierons systématiquement les générateurs τ, σ_1, ..., σ_{n-1} de $H(m,1,n)$ avec, respectivement, t, s_1 ,..., s_{n-1} dès que la limite classique (II.6.1) aura été prise.

Eléments de Jucys–Murphy. Nous définissons les analogues classiques suivants des éléments de Jucys–Murphy J_i :

$$j_i := \lim_{q\to 1} \lim_{v_i\to\xi_i} \left(J_i\right) , \tag{II.6.4}$$

et

$$\tilde{j}_i := \frac{1}{m} \lim_{q\to 1} \lim_{v_i\to\xi_i} \left(\frac{J_i^m - 1}{q-q^{-1}}\right) . \tag{II.6.5}$$

Attention : l'ordre pour prendre les limites ici est important, nous prenons d'abord la limite par rapport aux variables v_i, et ensuite la limite par rapport à q ; il est peut-être plus instructif d'écrire (II.6.5) sous la forme $\tilde{j}_i := \frac{1}{m} \lim\limits_{q\to 1} \frac{\lim\limits_{v_i\to\xi_i}\left(J_i^m-1\right)}{q-q^{-1}}$.

II.6.3 Algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique

Les éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$ sont les images des éléments de Jucys–Murphy "universels" de l'algèbre de Hecke affine. De façon tout à fait similaire, les éléments j_i et $\tilde{j}_i$ sont les images de certains éléments "universels" d'une certaine algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique, que nous introduisons ici.

Définition II.19. *Soit $\mathfrak{A}_{m,n}$ l'algèbre engendrée par $\overline{s}_1,\ldots,\overline{s}_{n-1}$ et deux générateurs de plus, x_1 et $\tilde{x}_1$; les relations définissantes sont données en trois étapes. Premièrement, il y a les relations définissantes concernant seulement les générateurs $\overline{s}_1,\ldots,\overline{s}_{n-1}$:*

$$\begin{cases} \overline{s}_i^2 = 1 & \text{pour } i=1,\ldots,n-1, \\ \overline{s}_i\overline{s}_{i+1}\overline{s}_i = \overline{s}_{i+1}\overline{s}_i\overline{s}_{i+1} & \text{pour } i=1,\ldots,n-2, \\ \overline{s}_i\overline{s}_j = \overline{s}_j\overline{s}_i & \text{pour } i,j=1,\ldots,n-1 \text{ tels que } |i-j|>1\,; \end{cases} \tag{II.6.6}$$

deuxièmement, il y a les relations définissantes concernant aussi x_1 :

$$\begin{cases} x_1^m = 1 \ , \\ x_1\overline{s}_1x_1\overline{s}_1 = \overline{s}_1x_1\overline{s}_1x_1 \ , \\ x_1\overline{s}_i = \overline{s}_ix_1 \quad si \quad i>1\,; \end{cases} \tag{II.6.7}$$

le troisième groupe de relations concerne en plus le générateur $\tilde{x}_1$:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(\overline{s}_1\tilde{x}_1\overline{s}_1 + \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_1^p\overline{s}_1x_1^{-p}) = (\overline{s}_1\tilde{x}_1\overline{s}_1 + \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_1^p\overline{s}_1x_1^{-p})\tilde{x}_1 \ , \\ \tilde{x}_1\overline{s}_i = \overline{s}_i\tilde{x}_1 \quad si \quad i > 1 \ , \\ \tilde{x}_1x_1 = x_1\tilde{x}_1 \ , \\ \tilde{x}_1\overline{s}_1x_1\overline{s}_1 = \overline{s}_1x_1\overline{s}_1\tilde{x}_1 \ . \end{cases} \tag{II.6.8}$$

L'algèbre $\mathfrak{A}_{m,n}$ est appelée l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique.

En raison des relations (II.6.6)–(II.6.7), il existe un homomorphisme

$$\hat{\imath} \ : \ \mathbb{C}G(m,1,n) \to \mathfrak{A}_{m,n} \ , \quad \hat{\imath}(s_i) = \overline{s}_i \ \text{ pour } \ i = 1,\dots,n-1 \ , \ \hat{\imath}(t) = x_1 \ . \tag{II.6.9}$$

Soit π une application de l'ensemble des générateurs $\{\overline{s}_1,\dots,\overline{s}_{n-1},x_1,\tilde{x}_1\}$ vers $\mathbb{C}G(m,1,n)$ donnée par

$$\pi \ : \ \overline{s}_i \mapsto s_i \ \text{ pour } \ i = 1,\dots,n-1 \ , \ x_1 \mapsto t \ , \ \tilde{x}_1 \mapsto 0 \ . \tag{II.6.10}$$

Clairement, π s'étend en un homomorphisme, que nous notons par le même symbole π, de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,n}$ vers $\mathbb{C}G(m,1,n)$ (l'homomorphisme π est bien défini car les relations (II.6.8) sont trivialement satisfaites quand on envoie $\tilde{x}_1$ à 0). De plus, la composition $\pi \circ \hat{\imath}$ laisse les générateurs de $G(m,1,n)$ invariants et est ainsi l'homomorphisme identité de $\mathbb{C}G(m,1,n)$; en particulier, l'application $\hat{\imath}$ est injective ou, de manière équivalente, la sous-algèbre de $\mathfrak{A}_{m,n}$ engendrée par les éléments $\overline{s}_1,\dots,\overline{s}_{n-1}$ et x_1 est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}G(m,1,n)$.

Définissons des éléments "de degré plus élevé" x_i et $\tilde{x}_i$, pour $i = 2,\dots,n$, par

$$x_{i+1} = \overline{s}_ix_i\overline{s}_i \ , \quad i = 1,\dots,n-1 \ , \tag{II.6.11}$$

et

$$\tilde{x}_{i+1} = \overline{s}_i\tilde{x}_i\overline{s}_i + \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_i^p\overline{s}_ix_i^{-p} \ , \quad i = 1,\dots,n-1 \ . \tag{II.6.12}$$

La seconde relation de (II.6.7) peut être récrite comme

$$x_1x_2 = x_2x_1 \ ; \tag{II.6.13}$$

les première et quatrième relations de (II.6.8) peuvent être récrites, respectivement, comme

$$\tilde{x}_1\tilde{x}_2 = \tilde{x}_2\tilde{x}_1 \ \text{ et } \ \tilde{x}_1x_2 = x_2\tilde{x}_1 \ . \tag{II.6.14}$$

Lemme II.20. *Nous avons*

$$\pi(x_i) = j_i \quad et \quad \pi(\tilde{x}_i) = \tilde{j}_i \ . \tag{II.6.15}$$

Preuve. Nous devons vérifier que j_i (respectivement, $\tilde{j}_i$) vérifient la relation de récurrence (II.6.11) (respectivement, (II.6.12)) et la condition initiale $j_1 = t$ (respectivement, $\tilde{j}_1 = 0$).

Il vient de (II.6.4) directement que $j_1 = t$ et $j_{i+1} = s_i j_i s_i$, donc il reste seulement la vérification pour $\tilde{j}_i$.

En raison de (II.6.5), nous avons $\tilde{j}_1 = 0$. Ensuite nous calculons

$$\begin{aligned} J_{i+1}^m &= (\sigma_i J_i \sigma_i)^m \\ &= \sigma_i J_i \Big((1 + (q - q^{-1})\sigma_i) J_i \Big)^{m-1} \sigma_i \\ &= \sigma_i J_i^m \sigma_i + (q - q^{-1}) \Big(\sigma_i J_i \sigma_i J_i^{m-1} \sigma_i + \sigma_i J_i^2 \sigma_i J_i^{m-2} \sigma_i + \ldots + \sigma_i J_i^{m-1} \sigma_i J_i \sigma_i \Big) + O((q - q^{-1})^2) \ . \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{J_{i+1}^m - 1}{q - q^{-1}} &= \frac{\sigma_i J_i^m \sigma_i - 1}{q - q^{-1}} + \Big(\sigma_i J_i \sigma_i J_i^{m-1} \sigma_i + \sigma_i J_i^2 \sigma_i J_i^{m-2} \sigma_i + \ldots + \sigma_i J_i^{m-1} \sigma_i J_i \sigma_i \Big) + O(q - q^{-1}) \\ &= \frac{\sigma_i (J_i^m - 1) \sigma_i}{q - q^{-1}} + \sigma_i + \Big(\sigma_i J_i \sigma_i J_i^{m-1} \sigma_i + \sigma_i J_i^2 \sigma_i J_i^{m-2} \sigma_i + \ldots + \sigma_i J_i^{m-1} \sigma_i J_i \sigma_i \Big) + O(q - q^{-1}) \ . \end{aligned}$$

En prenant la limite, et en divisant par m nous obtenons :

$$\tilde{j}_{i+1} = s_i \tilde{j}_i s_i + \frac{1}{m} (s_i + \sum_{p=1}^{m-1} s_i j_i^p s_i j_i^{m-p} s_i) \ .$$

Finalement, nous utilisons que :

$$s_i j_i^p s_i j_i^q s_i = s_i j_i^p j_{i+1}^q = s_i j_{i+1}^q j_i^p = j_i^q s_i j_i^p \ ,$$

et nous remplaçons s_i par $j_i^m s_i j_i^0$ car $j_i^m = 1$. □

Comme les éléments de Jucys–Murphy J_i commutent dans l'algèbre $H(m, 1, n)$, il vient immédiatement des définitions (II.6.4) et (II.6.5) que les éléments j_i, $i = 1, \ldots, n$, et les éléments $\tilde{j}_i$, $i = 1, \ldots, n$, forment un ensemble commutatif. Nous n'avons pas inclus la commutativité de l'ensemble correspondant, formé par les éléments x_i, $i = 1, \ldots, n$, et les éléments $\tilde{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$, dans les relations définissantes de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,n}$: la commutativité de cet ensemble (et donc, par le Lemma II.20, de son image par le morphisme π, c'est-à-dire, de l'ensemble formé par les éléments j_i, $i = 1, \ldots, n$, et $\tilde{j}_i$, $i = 1, \ldots, n$) provient, comme on va le voir maintenant, des relations (II.6.6)–(II.6.8).

Proposition II.21. *Les relations (II.6.6)–(II.6.8) impliquent que :*

$$x_k x_l = x_l x_k, \ \tilde{x}_k \tilde{x}_l = \tilde{x}_l \tilde{x}_k \ \textit{et} \ x_k \tilde{x}_l = \tilde{x}_l x_k \quad \textit{pour} \ \ k, l = 1, \ldots, n \ . \tag{II.6.16}$$

Preuve. Nous commençons par :

Lemme II.22. *Les relations (II.6.6)–(II.6.8) impliquent que x_i et $\tilde{x}_i$ commutent avec $\overline{s}_k$ pour $k > i$ et $k < i - 1$.*

Preuve du Lemme. Il est bien connu (et facile à vérifier) que les relations (II.6.6)–(II.6.7) impliquent que x_i commute avec $\overline{s}_k$ pour $k > i$ et $k < i-1$.

Nous utilisons une récurrence sur i pour les éléments $\tilde{x}_i$. Par définition, l'élément $\tilde{x}_1$ commute avec l'élément $\overline{s}_k$ si $k > 1$; l'élément

$$\tilde{x}_{i+1} \;=\; \overline{s}_i\tilde{x}_i\overline{s}_i + \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_i^p\overline{s}_i x_i^{m-p} \tag{II.6.17}$$

commute, par l'hypothèse de récurrence, avec les éléments $\overline{s}_k$ pour $k > i+1$ et $k < i-1$. Il reste à vérifier la commutation de l'élément $\tilde{x}_{i+1}$ avec $\overline{s}_{i-1}$. Cette vérification n'est pas triviale seulement si $(i-1) > 0$; dans ce cas, nous décomposons les éléments $\tilde{x}_i$ et x_i dans la partie droite de (II.6.17) :

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{i+1} &= \overline{s}_i\tilde{x}_i\overline{s}_i + \tfrac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_i^p\overline{s}_i x_i^{m-p} \\
&= \overline{s}_i\overline{s}_{i-1}\tilde{x}_{i-1}\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i + \tfrac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} \overline{s}_i x_{i-1}^p\overline{s}_{i-1}x_{i-1}^{m-p}\overline{s}_i + \tfrac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} \overline{s}_{i-1}x_{i-1}^p\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i\overline{s}_{i-1}x_{i-1}^{m-p}\overline{s}_{i-1} \\
&= \overline{s}_i\overline{s}_{i-1}\tilde{x}_{i-1}\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i + \tfrac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} \left(x_{i-1}^p\overline{s}_i\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i x_{i-1}^{m-p} + \overline{s}_{i-1}x_{i-1}^p\overline{s}_i\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i x_{i-1}^{m-p}\overline{s}_{i-1}\right).
\end{aligned}$$

Pour tout p, l'expression dans la dernière somme a la forme $\xi + \overline{s}_{i-1}\xi\overline{s}_{i-1}$ (pour un certain ξ) et ainsi commute avec $\overline{s}_{i-1}$. Le premier terme commute aussi avec $\overline{s}_{i-1}$:

$$\overline{s}_i\overline{s}_{i-1}\tilde{x}_{i-1}\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i \cdot \overline{s}_{i-1} = \overline{s}_i\overline{s}_{i-1}\tilde{x}_{i-1}\overline{s}_i\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i = \overline{s}_i\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i\tilde{x}_{i-1}\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i = \overline{s}_{i-1}\cdot\overline{s}_i\overline{s}_{i-1}\tilde{x}_{i-1}\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i\ .$$

Nous concluons que $\tilde{x}_{i+1}$ commute avec $\overline{s}_{i-1}$. □

Nous revenons à la preuve de la Proposition II.21 qui est également faite par récurrence. L'élément $\tilde{x}_1$ commute avec x_1 par définition. En supposant que $x_1, \ldots, x_i, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_i$ forment un ensemble commutatif, nous devons prouver que x_{i+1} et $\tilde{x}_{i+1}$ commutent avec $x_1, \ldots, x_i$ et $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_i$, et également que x_{i+1} commute avec $\tilde{x}_{i+1}$.

(i) Comme $x_{i+1} = \overline{s}_i x_i\overline{s}_i$ et $\tilde{x}_{i+1} = \overline{s}_i\tilde{x}_i\overline{s}_i + \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_i^p\overline{s}_i x_i^{m-p}$, nous avons, par l'hypothèse de récurrence et le Lemme II.22, que x_{i+1} et $\tilde{x}_{i+1}$ commutent avec x_k et $\tilde{x}_k$ pour $k < i$.

(ii) Nous prouvons maintenant que les éléments x_{i+1} et $\tilde{x}_{i+1}$ commutent avec les éléments x_i et $\tilde{x}_i$.

Si $i > 1$, nous écrivons $x_i = \overline{s}_{i-1}x_{i-1}\overline{s}_{i-1}$ and $\tilde{x}_i = \overline{s}_{i-1}\tilde{x}_{i-1}\overline{s}_{i-1} + \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_{i-1}^p\overline{s}_{i-1}x_{i-1}^{m-p}$; Par le Lemme II.22 et la partie (i) de la preuve, les éléments x_{i+1} et $\tilde{x}_{i+1}$ commutent avec tous les éléments présents dans les expressions ci-dessus de x_i et $\tilde{x}_i$, et donc commutent avec x_i et $\tilde{x}_i$.

Pour $i = 1$, l'élément x_2 commute avec x_1 et $\tilde{x}_1$, et l'élément $\tilde{x}_2$ commute avec $\tilde{x}_1$ par définition. Pour finir la preuve du fait que x_{i+1} et $\tilde{x}_{i+1}$ commutent avec x_i et $\tilde{x}_i$, il reste à montrer que $x_1\tilde{x}_2 = \tilde{x}_2x_1$. Nous calculons

$$\begin{aligned}
x_1\tilde{x}_2 &= x_1\overline{s}_1\tilde{x}_1\overline{s}_1 + \tfrac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_1^{p+1}\overline{s}_1x_1^{-p} \quad \text{et} \quad \tilde{x}_2x_1 &&= \overline{s}_1\tilde{x}_1\overline{s}_1x_1 + \tfrac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_1^p\overline{s}_1x_1^{1-p} \\
&= \overline{s}_1x_2\tilde{x}_1\overline{s}_1 + \tfrac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_1^{p+1}x_2^{-p}\overline{s}_1 && = \overline{s}_1\tilde{x}_1x_2\overline{s}_1 + \tfrac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_1^px_2^{1-p}\overline{s}_1\ ,
\end{aligned}$$

et, comme $x_2\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1 x_2$, la différence entre $x_1\tilde{x}_2$ et $\tilde{x}_2 x_1$ est $\frac{1}{m}(x_1^{m+1}x_2^{-m} - x_1)\overline{s}_1$, ce qui fait 0 car $x_1^m = x_2^m = 1$.

(iii) Il reste à prouver que les éléments x_{i+1} et $\tilde{x}_{i+1}$ commutent. En utilisant les relations de commutativité déjà prouvées, nous calculons :

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{i+1}x_{i+1} &= \overline{s}_i\tilde{x}_i x_i\overline{s}_i + \tfrac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_i^p\overline{s}_i x_i^{m-p}x_{i+1} \\
&= \overline{s}_i x_i\tilde{x}_i\overline{s}_i + \tfrac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_i^p\overline{s}_i x_{i+1}x_i^{m-p} \\
&= \overline{s}_i x_i\tilde{x}_i\overline{s}_i + \tfrac{1}{m}\sum_{p=2}^{m+1} x_i^p\overline{s}_i x_i^{m-p+1} \ ,
\end{aligned}
\quad \text{et} \quad
\begin{aligned}
x_{i+1}\tilde{x}_{i+1} &= \overline{s}_i x_i\tilde{x}_i\overline{s}_i + \tfrac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_{i+1}x_i^p\overline{s}_i x_i^{m-p} \\
&= \overline{s}_i x_i\tilde{x}_i\overline{s}_i + \tfrac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_i^p x_{i+1}\overline{s}_i x_i^{m-p} \\
&= \overline{s}_i x_i\tilde{x}_i\overline{s}_i + \tfrac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_i^p\overline{s}_i x_i^{m-p+1} \ ,
\end{aligned}$$

et donc la différence entre $\tilde{x}_{i+1}x_{i+1}$ et $x_{i+1}\tilde{x}_{i+1}$ est égale à $\frac{1}{m}(x_i^{m+1}\overline{s}_i - x_i\overline{s}_i x_i^m)$ ce qui est 0 car $x_i^m = 1$. □

II.6.4 Spectre des éléments de Jucys–Murphy classiques

Représentations de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$. Comme dans le cas non-dégénéré, l'étape importante dans la compréhension du spectre des éléments de Jucys–Murphy et dans la construction des représentations est l'analyse des représentations de l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique non-triviale la plus simple, à savoir l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$. Nous présentons ici la liste des représentations irréductibles avec $x_1, \tilde{x}_1, x_2$ et $\tilde{x}_2$ diagonalisables de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$.

Considérons l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$ engendrée par x, y, $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ et s avec les relations :

$$\left\{\begin{array}{l}
xy = yx \ , \quad \tilde{x}\tilde{y} = \tilde{y}\tilde{x} \ , \quad x\tilde{x} = \tilde{x}x \ , \quad y\tilde{x} = \tilde{x}y \ , \\
y = sxs \ , \quad x^m = 1 \ , \quad \tilde{y} = s\tilde{x}s + \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x^p s x^{m-p} \ , \quad s^2 = 1 \ .
\end{array}\right. \tag{II.6.18}$$

Pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, la sous-algèbre de $\mathbb{C}G(m,1,n)$ engendrée par j_i, j_{i+1}, $\tilde{j}_i$, $\tilde{j}_{i+1}$ et s_i est un quotient de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$. Pour $m = 1$, l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$ se réduit à l'algèbre de Hecke affine dégénérée étudiée dans [86] pour la théorie des représentations du groupe symétrique S_n.

Les quatre éléments x, y, $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ commutent deux à deux, voir la Proposition II.21. Comme pour $H(m,1,n)$, nous étudions les représentations irréductibles de $\mathfrak{A}_{m,2}$ avec x, y, $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ diagonalisables. Soit e un vecteur propre commun de x, y, $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$, avec les valeurs propres a, b, $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$, respectivement,

$$x.e = ae \ , \quad y.e = be \ , \quad \tilde{x}.e = \tilde{a}e \ , \quad \tilde{y}.e = \tilde{b}e \ , \tag{II.6.19}$$

où $\mathfrak{x}.\mathfrak{v}$ représente l'action de $\mathfrak{x}$ de l'algèbre sur le vecteur $\mathfrak{v}$ de l'espace de la représentation. Nous avons $a^m = b^m = 1$. En utilisant $xs = sy$, $ys = sx$, $\tilde{x}s = s\tilde{y} - \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} y^p x^{m-p}$ et $\tilde{y}s = s\tilde{x} + \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} y^p x^{m-p}$, nous trouvons que

$$\begin{gathered}
x.(s.e) = bs.e \ , \quad y.(s.e) = as.e \ , \\
\tilde{x}.(s.e) = \tilde{b}s.e - \Big(\tfrac{1}{m}\textstyle\sum_{p=1}^{m} b^p a^{m-p}\Big)e \ , \quad \tilde{y}.(s.e) = \tilde{a}s.e + \Big(\tfrac{1}{m}\textstyle\sum_{p=1}^{m} b^p a^{m-p}\Big)e \ .
\end{gathered} \tag{II.6.20}$$

Ainsi, l'action des générateurs se ferme sur l'espace linéaire engendré par e et $s.e$, et les représentations irréductibles peuvent être seulement de dimension 1 ou de dimension 2. Nous arrivons directement à la liste complète des représentations irréductibles de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$ avec x, y, $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ diagonalisables.

– Le vecteur $s.e$ est proportionnel au vecteur e. Donc $s.e = \epsilon e$, où $\epsilon^2 = 1$; les représentations de ce type sont de dimension 1. L'action des générateurs est donnée par

$$x \mapsto a \ , \quad y \mapsto a \ , \quad \tilde{x} \mapsto \tilde{a} \ , \quad \tilde{y} \mapsto \tilde{a} + \varepsilon \ , \quad s \mapsto \varepsilon \ , \tag{II.6.21}$$

où $a^m = 1$ et $\varepsilon^2 = 1$.

– les vecteurs e et $s.e$ engendrent un espace de dimension 2. Si $a \neq b$, alors $\sum_{p=1}^{m} b^p a^{m-p} = 0$. Les représentations irréductibles sont dans ce cas de dimension 2. Les matrices des générateurs de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$ sont données par

$$\begin{gathered} s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad x \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \ , \quad y \mapsto \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \ , \\ \tilde{x} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ 0 & \tilde{b} \end{pmatrix} \ , \quad \tilde{y} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{b} & 0 \\ 0 & \tilde{a} \end{pmatrix} \ , \end{gathered} \tag{II.6.22}$$

où $a^m = b^m = 1$ et $a \neq b$.

– Les vecteurs e et $s.e$ engendrent un espace de dimension 2 et $a = b$. Alors $\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} b^p a^{m-p} = 1$. Par (II.6.19)–(II.6.20), l'action de $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ est diagonalisable si et seulement si $\tilde{a} \neq \tilde{b}$. Les représentations sont de dimension 2. Les matrices des générateurs de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$ dans la base $\{e, e'\}$, où $e' := s.e + \frac{1}{\tilde{a}-\tilde{b}}\, e$ sont données par

$$\begin{gathered} s \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{b}-\tilde{a}} & 1 - \frac{1}{(\tilde{b}-\tilde{a})^2} \\ 1 & -\frac{1}{\tilde{b}-\tilde{a}} \end{pmatrix} \ , \quad x \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \ , \quad y \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \ , \\ \tilde{x} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ 0 & \tilde{b} \end{pmatrix} \ , \quad \tilde{y} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{b} & 0 \\ 0 & \tilde{a} \end{pmatrix} \ . \end{gathered} \tag{II.6.23}$$

où $a^m = 1$ et $\tilde{b} \neq \tilde{a}$. La représentation (II.6.23) est irréductible si et seulement si $\tilde{b} \neq \tilde{a} \pm 1$.

Spectre classique. Dans ce paragraphe et les deux suivants, les analogues classiques des résultats de la Section II.3 sont donnés sans preuve (les preuves répètent essentiellement celles de la Section II.3).

Comme pour $H(m, 1, n)$, la première étape consiste en la construction de toutes les représentations de $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ vérifiant deux conditions. Premièrement, les éléments de Jucys–Murphy classiques $j_1, \ldots, j_n, \tilde{j}_1, \ldots, \tilde{j}_n$ sont représentés par des opérateurs semi-simples (diagonalisables). Deuxièmement, pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, l'action de la sous-algèbre engendrée par j_i, j_{i+1}, $\tilde{j}_i$, $\tilde{j}_{i+1}$ et s_i est complètement réductible. Nous allons garder le nom de C-représentations pour ces représentations. A la fin

de la construction, nous verrons que toutes les représentations irréductibles de $\mathbb{C}G(m,1,n)$ sont des C-représentations.

Définissons $\mathrm{Spec}\begin{pmatrix} j_1 & , \dots , & j_n \\ \tilde{j}_1 & , \dots , & \tilde{j}_n \end{pmatrix}$ l'ensemble des valeurs propres communes des éléments $j_1, \tilde{j}_1$, $\dots$, $j_n, \tilde{j}_n$ dans les C-représentations :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_1^{(\Lambda)} & , \dots , & a_n^{(\Lambda)} \\ \tilde{a}_1^{(\Lambda)} & , \dots , & \tilde{a}_n^{(\Lambda)} \end{pmatrix} \tag{II.6.24}$$

appartient à $\mathrm{Spec}\begin{pmatrix} j_1 & , \dots , & j_n \\ \tilde{j}_1 & , \dots , & \tilde{j}_n \end{pmatrix}$ si il existe un vecteur e_Λ dans l'espace d'une C-représentation tel que $j_i(e_\Lambda) = a_i^{(\Lambda)} e_\Lambda$ et $\tilde{j}_i(e_\Lambda) = \tilde{a}_i^{(\Lambda)} e_\Lambda$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Les éléments j_i et $\tilde{j}_i$ commutent avec s_k pour $k > i$ et $k < i-1$ (voir le Lemme II.22) ce qui implique que l'action de s_k sur $\mathrm{Spec}\begin{pmatrix} j_1 & , \dots , & j_n \\ \tilde{j}_1 & , \dots , & \tilde{j}_n \end{pmatrix}$ est "locale" dans le sens où $s_k(e_\Lambda)$ est une combinaison linéaire de $e_{\Lambda'}$ tels que $a_i^{(\Lambda')} = a_i^{(\Lambda)}$ et $\tilde{a}_i^{(\Lambda')} = \tilde{a}_i^{(\Lambda)}$ pour $i \neq k, k+1$.

Nous appellerons encore les tableaux de nombres de taille $2 \times n$ (II.6.24) des lignes, gardant ainsi le nom "ligne" qui était utilisé pour l'ensemble des valeurs propres des éléments de Jucys–Murphy pour l'algèbre $H(m,1,n)$.

Proposition II.23. *Soit* $\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & , \dots , & a_i & , & a_{i+1} & , \dots , & a_n \\ \tilde{a}_1 & , \dots , & \tilde{a}_i & , & \tilde{a}_{i+1} & , \dots , & \tilde{a}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Spec}\begin{pmatrix} j_1 & , \dots , & j_n \\ \tilde{j}_1 & , \dots , & \tilde{j}_n \end{pmatrix}$ *et soit* e_Λ *un vecteur correspondant. Alors*

(a) nous avons $a_i^m = 1$ *pour* $i = 1, \dots, n$ *; si* $a_i = a_{i+1}$*, alors* $\tilde{a}_i \neq \tilde{a}_{i+1}$.

(b) Si $a_{i+1} = a_i$ *et* $\tilde{a}_{i+1} = \tilde{a}_i + \varepsilon$*, où* $\varepsilon = \pm 1$*, alors* $s_i(e_\Lambda) = \varepsilon e_\Lambda$.

(c) Si $a_{i+1} \neq a_i$ *ou* $a_{i+1} = a_i$ & $\tilde{a}_{i+1} \neq \tilde{a}_i \pm 1$*, alors*

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} a_1 & , \dots , & a_{i+1} & , & a_i & , \dots , & a_n \\ \tilde{a}_1 & , \dots , & \tilde{a}_{i+1} & , & \tilde{a}_i & , \dots , & \tilde{a}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Spec}\begin{pmatrix} j_1 & , \dots , & j_n \\ \tilde{j}_1 & , \dots , & \tilde{j}_n \end{pmatrix} .$$

De plus, si $a_{i+1} \neq a_i$*, alors le vecteur* $s_i(e_\Lambda)$ *correspond à la ligne* Λ'*, voir les matrices (II.6.22) avec* $a = a_i$*,* $b = a_{i+1}$*,* $\tilde{a} = \tilde{a}_i$ *and* $\tilde{b} = \tilde{a}_{i+1}$ *; si* $a_{i+1} = a_i$ *et* $\tilde{a}_{i+1} \neq \tilde{a}_i \pm 1$*, alors le vecteur* $s_i(e_\Lambda) - \frac{1}{\tilde{a}_{i+1} - \tilde{a}_i} e_\Lambda$ *correspond à la ligne* Λ'*, voir les matrices (II.6.23) avec* $a = a_i = a_{i+1}$*,* $\tilde{a} = \tilde{a}_i$ *et* $\tilde{b} = \tilde{a}_{i+1}$.

Lignes de contenus classiques. Nous définissons l'analogue classique de l'ensemble $\mathrm{Cont}_m(n)$, que nous notons $\mathrm{cCont}_m(n)$.

Rappelons que $[k,l] = \{k, k+1, \dots, l-1, l\}$ pour deux entiers $k, l \in \mathbb{Z}$, $k < l$.

Définition II.24. *Une ligne de contenus classiques* $\begin{pmatrix} a_1 & , \dots , & a_n \\ \tilde{a}_1 & , \dots , & \tilde{a}_n \end{pmatrix}$ *est une ligne de colonnes de nombres satisfaisant :*

(1) $\tilde{a}_1 = 0$ *et* $a_i^m = 1$ *pour tout* $i = 1, \dots, n$.

(2) Pour tout $j > 1$ *: si* $\tilde{a}_j \neq 0$, *alors il existe* i, $i < j$, *tel que* $a_i = a_j$ *et* $\tilde{a}_i \in \{\tilde{a}_j - 1, \tilde{a}_j + 1\}$.

(3) Si $a_j = a_k$ *et* $\tilde{a}_j = \tilde{a}_k$ *pour* j, k, $j < k$, *alors il existe* $i_1, i_2 \in [j+1, k-1]$ *tels que* $a_{i_1} = a_{i_2} = a_j = a_k$, $\tilde{a}_{i_1} = \tilde{a}_j - 1$ *et* $\tilde{a}_{i_2} = \tilde{a}_j + 1$.

Nous notons l'ensemble des lignes de contenus classiques $\mathrm{cCont}_m(n)$.

Voici l'analogue classique de la Proposition II.3.

Proposition II.25. *Supposons qu'une ligne de colonnes de nombres* $\begin{pmatrix} a_1 & , \dots , & a_n \\ \tilde{a}_1 & , \dots , & \tilde{a}_n \end{pmatrix}$ *appartienne à l'ensemble* $\mathrm{Spec}\begin{pmatrix} j_1 & , \dots , & j_n \\ \tilde{j}_1 & , \dots , & \tilde{j}_n \end{pmatrix}$. *Alors elle appartient à l'ensemble* $\mathrm{cCont}_m(n)$.

Remarque. Il suit directement de la Définition II.24 que si

$$\begin{pmatrix} a_1 & , \dots , & a_i \ , & a_{i+1} & , \dots , & a_n \\ \tilde{a}_1 & , \dots , & \tilde{a}_i \ , & \tilde{a}_{i+1} & , \dots , & \tilde{a}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{cCont}_m(n)$$

avec $a_{i+1} \neq a_i$ ou avec $a_{i+1} = a_i$ & $\tilde{a}_{i+1} \neq \tilde{a}_i \pm 1$, alors

$$\begin{pmatrix} a_1 & , \dots , & a_{i+1} \ , & a_i & , \dots , & a_n \\ \tilde{a}_1 & , \dots , & \tilde{a}_{i+1} \ , & \tilde{a}_i & , \dots , & \tilde{a}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{cCont}_m(n).$$

Comme dans la remarque juste après la preuve de la Proposition II.3, l'action (décrite dans la Proposition II.23) des générateurs s_i, $i = 1, \dots, n-1$, sur l'espace vectoriel avec une base formée des vecteurs e_Λ, $\Lambda \in \mathrm{Spec}\begin{pmatrix} j_1 & , \dots , & j_n \\ \tilde{j}_1 & , \dots , & \tilde{j}_n \end{pmatrix}$, s'étend en une action sur l'espace vectoriel avec une base formée par les vecteurs e_μ, $\mu \in \mathrm{cCont}_m(n)$. Les analogues classiques des énoncés de la remarque juste après la preuve de la Proposition II.3 sont également valables ici.

Contenu classique d'une m-case dans une m-partition.

Proposition II.26. *Il existe une bijection entre l'ensemble des* m*-tableaux de taille* n *et l'ensemble* $\mathrm{cCont}_m(n)$.

Cet analogue classique de la Proposition II.5 est prouvé suivant les mêmes lignes que la Proposition II.5 ; nous avons seulement besoin de modifier la notion de contenu d'une m-case d'une m-partition.

Le contenu classique d'une case d'une partition usuelle est $(s - r)$ si la case est située dans la ligne r et la colonne s. Pour étendre cette définition aux m-partitions, nous devons spécifier dans

quelle partition de la m-partition est située la m-case ; ainsi, le contenu classique d'une m-case d'une m-partition est un couple de nombres, le premier nombre spécifiant une partition (dans laquelle la m-case est située) de la m-partition, et le second nombre est le contenu classique de la m-case dans la partition spécifiée. Pour relier cette information avec le spectre des éléments de Jucys–Murphy , fixons (arbitrairement) une bijection entre l'ensemble $[1, m]$ et l'ensemble des différentes racines m-ème de l'unité ; Soit ξ_k la racine de l'unité associée à $k \in [1, m]$ par cette bijection. Nous définissons le contenu classique d'une m-case qui est située dans la ligne r et la colonne s de la k-ème partition de la m-partition comme étant la colonne $\begin{pmatrix} \xi_k \\ s-r \end{pmatrix}$.

Maintenant, à un m-tableau standard de taille n, nous associons la ligne de colonnes de nombres $\begin{pmatrix} a_1 & , \dots , & a_n \\ \tilde{a}_1 & , \dots , & \tilde{a}_n \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} a_i \\ \tilde{a}_i \end{pmatrix}$ est le contenu classique de la m-case dans laquelle le nombre i est placé dans le m-tableau. Cette association fournit, comme dans la preuve de la Proposition II.5, la bijection énoncée dans la Proposition II.26.

Voici le même exemple que dans le paragraphe 6, Section II.3, mais dans le contexte classique :

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 6 & 9 & \\ -1 & 0 & \\ \cline{1-2} 7 & & \\ -2 & & \\ \cline{1-1} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & & \\ -1 & & \\ \cline{1-1} \end{array} \right) \tag{II.6.25}$$

La ligne, associée à ce 2-tableau standard, est :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & , & \xi_1 & , & \xi_2 & , & \xi_1 & , & \xi_2 & , & \xi_1 & , & \xi_1 & , & \xi_2 & , & \xi_1 & , & \xi_2 \\ 0 & , & 1 & , & 0 & , & 2 & , & -1 & , & -1 & , & -2 & , & 1 & , & 0 & , & 2 \end{pmatrix},$$

où $\{\xi_1, \xi_2\}$ est l'ensemble des différentes racines carrées de l'unité.

Remarque. Dans la limite classique, l'élément j_i sert de la même façon dans la théorie des représentations que les nombres v_k devant les puissances de q dans le spectre de l'élément J_i : les éléments j_i's distinguent les différents tableaux d'un m-tableau.

II.6.5 Construction des représentations

Ici, nous établissons un analogue de la construction de la Section II.4 dans le contexte classique : nous définissons une structure d'algèbre sur le produit tensoriel de $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ avec une algèbre libre associative engendrée par les m-tableaux standards correspondant aux m-partitions de n. Ensuite, par évaluation (avec l'aide de la représentation la plus simple de $G(m, 1, n)$) par la droite, nous construisons les représentations. Nous ne donnons pas les preuves des propositions quand elles sont complètement similaires aux preuves des propositions correspondantes de la Section II.4 ; nous indiquons seulement les modifications.

II.6.5.1 Eléments Baxterisés

Définissons, pour tout s_i parmi les générateurs $s_1, \ldots, s_{n-1}$ de $G(m,1,n)$, l'élément Baxterisé $s_i(\alpha,\beta)$ par

$$s_i(\alpha,\beta) := s_i + \frac{1}{\alpha-\beta} \ . \tag{II.6.26}$$

Les paramètres α et β sont appelés paramètres spectraux.

Proposition II.27. *Nous avons les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} s_i(\alpha,\beta)s_i(\beta,\alpha) &= 1 - \tfrac{1}{(\alpha-\beta)^2} \ , \\ s_i(\alpha,\beta)s_{i+1}(\alpha,\gamma)s_i(\beta,\gamma) &= s_{i+1}(\beta,\gamma)s_i(\alpha,\gamma)s_{i+1}(\alpha,\beta) \ , \\ s_i(\alpha,\beta)s_j(\gamma,\delta) &= s_j(\gamma,\delta)s_i(\alpha,\beta) \qquad\qquad si \ \ |i-j|>1 \ . \end{aligned} \tag{II.6.27}$$

Comme dans la situation non-classique, les relations originales sont impliquées par les relations pour les éléments Baxterisés pour une valeur fixée des paramètres spectraux.

Lemme II.28. *Soient A et B deux éléments d'une algèbre associative unitale arbitraire $\mathcal{A}$. Notons $A(\alpha,\beta) := A + \frac{1}{\alpha-\beta}$ et $B(\alpha,\beta) := B + \frac{1}{\alpha-\beta}$ où α et β sont des paramètres.*

(i) Si

$$A(\alpha,\beta)A(\beta,\alpha) = 1 - \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \ ,$$

pour certaines valeurs (arbitrairement) fixées des paramètres α et β ($\alpha \neq \beta$), alors

$$A^2 = 1 \ .$$

(ii) Si $A^2 = 1$, $B^2 = 1$ et

$$A(\alpha,\beta)B(\alpha,\gamma)A(\beta,\gamma) = B(\beta,\gamma)A(\alpha,\gamma)B(\alpha,\beta)$$

pour certaines valeurs (arbitrairement) fixées des paramètres α, β et γ ($\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$), alors

$$ABA = BAB \ .$$

(iii) Si

$$A(\alpha,\beta)B(\gamma,\delta) = B(\gamma,\delta)A(\alpha,\beta)$$

pour certaines valeurs (arbitrairement) fixées des paramètres α, β, γ et δ ($\alpha \neq \beta$ et $\gamma \neq \delta$), alors

$$AB = BA \ .$$

II.6.5.2 Produit smash classique

Soit $\lambda^{(m)}$ une m-partition de taille n. Considérons un ensemble de générateurs libres labellisés par les m-tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$; pour un m-tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$, nous notons, comme avant, $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ le générateur libre correspondant. Nous renvoyons à la Sous-Section II.4.2 pour la définition de $X^{\pi}_{\lambda^{(m)}}$ et $\mathcal{X}^{\pi}_{\lambda^{(m)}}$ pour $\pi \in S_n$.

Rappelons que le contenu classique d'une m-case, qui est située dans la ligne r et la colonne s de la k-ème partition de la m-partition, est la colonne $\begin{pmatrix} \xi_k \\ s-r \end{pmatrix}$, où $k \mapsto \xi_k$ est une bijection, arbitrairement choisie, entre l'ensemble $[1, m]$ et l'ensemble des différentes racines m-ème de l'unité. Pour un m-tableau standard, nous notons $\begin{pmatrix} p(X_{\lambda^{(m)}}|i) \\ cc(X_{\lambda^{(m)}}|i) \end{pmatrix}$ les entrées de la colonne de contenu de la m-case où i est placé.

Proposition II.29. *Les relations suivantes :*

– *si* $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) \neq p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$, *alors*

$$s_i \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot s_i \ ; \tag{II.6.28}$$

– *si* $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) = p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$, *alors*

$$\Big(s_i + \frac{1}{cc(X_{\lambda^{(m)}}|i) - cc(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)}\Big) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot \Big(s_i + \frac{1}{cc(X_{\lambda^{(m)}}|i+1) - cc(X_{\lambda^{(m)}}|i)}\Big) \tag{II.6.29}$$

et

$$\Big(t - p(X_{\lambda^{(m)}}|1)\Big) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = 0 \tag{II.6.30}$$

sont compatibles avec les relations pour les générateurs $t, s_1, \ldots, s_{n-1}$ *du groupe* $G(m, 1, n)$.

La compatibilité est comprise dans le même sens que dans les explications après la formulation de la Proposition II.8. Nous notons l'algèbre obtenue $\mathfrak{T}_c$.

Preuve. Notons que si $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) = p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$, la relation (II.6.29) peut être récrite en utilisant la forme Baxterisée des éléments s_i :

$$s_i\big(cc(X_{\lambda^{(m)}}|i), cc(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)\big) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot s_i\big(cc(X_{\lambda^{(m)}}|i+1), cc(X_{\lambda^{(m)}}|i)\big) \ .$$

(i) Si $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) = p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$, nous prouvons la compatibilité de la relation $s_i^2 = 1$ avec les instructions (II.6.28)–(II.6.30) par un calcul similaire à celui de la preuve de la Proposition II.8 ; sont utilisés ici la Proposition II.27 et le Lemme II.28 à la place de la Proposition II.6 et du Lemme II.7.

Si $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) \neq p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$, la compatibilité est immédiate.

(ii) Si $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) = p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1) = p(X_{\lambda^{(m)}}|i+2)$, nous prouvons la compatibilité de la relation $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ avec les instructions (II.6.28)–(II.6.30) par un calcul similaire à celui de la preuve de la Proposition II.8 (on utilise la Proposition II.27 et le Lemme II.28 à la place de la Proposition II.6 et du Lemme II.7).

Le cas $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) \neq p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1) \neq p(X_{\lambda^{(m)}}|i+2) \neq p(X_{\lambda^{(m)}}|i)$ est immédiat.

Il reste trois cas :

– $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) \neq p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$ et $p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1) = p(X_{\lambda^{(m)}}|i+2)$,
– $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) = p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$ et $p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1) \neq p(X_{\lambda^{(m)}}|i+2)$,
– $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) = p(X_{\lambda^{(m)}}|i+2)$ et $p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1) \neq p(X_{\lambda^{(m)}}|i+2)$.

Dans chacun de ces cas, nous réalisons un calcul direct en utilisant que, par définition, pour toute permutation $\pi \in S_n$,

$$cc(X^{\pi}_{\lambda^{(m)}}|k) = cc(X_{\lambda^{(m)}}|\pi^{-1}(k)) \text{ and } p(X^{\pi}_{\lambda^{(m)}}|k) = p(X_{\lambda^{(m)}}|\pi^{-1}(k)) \ .$$

Nous écrivons ce calcul uniquement pour $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) \neq p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$ et $p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1) = p(X_{\lambda^{(m)}}|i+2)$ (les deux autres calculs sont très similaires). Posons $cc^{(k)} = cc(X_{\lambda^{(m)}}|k)$. Nous avons

$$\begin{aligned} s_i s_{i+1} s_i \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} &= s_i s_{i+1} \cdot \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot s_i \\ &= s_i \cdot \mathcal{X}^{s_{i+1}s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot s_{i+1} s_i \\ &= -\tfrac{1}{cc^{(i+1)}-cc^{(i+2)}} \mathcal{X}^{s_{i+1}s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot s_{i+1}s_i + \mathcal{X}^{s_i s_{i+1} s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot (s_i + \tfrac{1}{cc^{(i+2)}-cc^{(i+1)}}) s_{i+1} s_i \ , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} s_{i+1} s_i s_{i+1} \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} &= s_{i+1} s_i \cdot \big(-\tfrac{1}{cc^{(i+1)}-cc^{(i+2)}} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} + \mathcal{X}^{s_{i+1}}_{\lambda^{(m)}} \cdot (s_{i+1} + \tfrac{1}{cc^{(i+2)}-cc^{(i+1)}})\big) \\ &= s_{i+1} \cdot \big(-\tfrac{1}{cc^{(i+1)}-cc^{(i+2)}} \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot s_i + \mathcal{X}^{s_i s_{i+1}}_{\lambda^{(m)}} \cdot s_i (s_{i+1} + \tfrac{1}{cc^{(i+2)}-cc^{(i+1)}})\big) \\ &= -\tfrac{1}{cc^{(i+1)}-cc^{(i+2)}} \mathcal{X}^{s_{i+1}s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot s_{i+1}s_i + \mathcal{X}^{s_{i+1}s_i s_{i+1}}_{\lambda^{(m)}} \cdot s_{i+1} s_i (s_{i+1} + \tfrac{1}{cc^{(i+2)}-cc^{(i+1)}}) \ . \end{aligned}$$

Ainsi $(s_i s_{i+1} s_i - s_{i+1} s_i s_{i+1}) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = \mathcal{X}^{s_i s_{i+1} s_i}_{\lambda^{(m)}} \cdot (s_i s_{i+1} s_i - s_{i+1} s_i s_{i+1})$ et donc la compatibilité de la relation $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ avec les instructions (II.6.28)–(II.6.30) est prouvée.

(iii) Si $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) = p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$ et $p(X_{\lambda^{(m)}}|j) = p(X_{\lambda^{(m)}}|j+1)$, nous prouvons la compatibilité de la relation $s_i s_j = s_j s_i$ avec les instructions (II.6.28)–(II.6.30) par un calcul similaire à celui de la preuve de la Proposition II.8 (en utilisant la Proposition II.27 et le Lemme II.28 à la place de la Proposition II.6 et du Lemme II.7).

Si $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) \neq p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$ ou $p(X_{\lambda^{(m)}}|j) \neq p(X_{\lambda^{(m)}}|j+1)$, la compatibilité provient d'un calcul facile.

La vérification de la compatibilité des relations $t^m = 1$ et $ts_i = s_i t$ pour $i > 1$ avec les instructions (II.6.28)–(II.6.30) est immédiate.

La compatibilité de la relation $ts_1 ts_1 = s_1 ts_1 t$ avec les instructions (II.6.28)–(II.6.30) est une conséquence directe du Lemme ci-dessous. □

Lemme II.30. *Les relations (II.6.28) impliquent les relations :*

$$\big(j_i - p(X_{\lambda^{(m)}}|i)\big) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = 0 \quad \textit{pour } i = 1, \ldots, n \ , \tag{II.6.31}$$

$$\big(\tilde{j}_i - cc(X_{\lambda^{(m)}}|i)\big) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = 0 \quad \textit{pour } i = 1, \ldots, n \ . \tag{II.6.32}$$

Preuve. Soit $X_{\lambda^{(m)}}$ un m-tableau standard et posons, dans un souci de brièveté, $p^{(i)} = p(X_{\lambda^{(m)}}|i)$ et $cc^{(i)} = cc(X_{\lambda^{(m)}}|i)$ pour $i = 1, \ldots, n$. Nous prouvons (II.6.31)-(II.6.32) par récurrence sur i. Rappelons que $j_{i+1} = s_i j_i s_i$ et $\tilde{j}_{i+1} = s_i \tilde{j}_i s_i + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} j_i^k s_i j_i^{-k}$. La base de la récurrence pour (II.6.31) est la relation (II.6.30) et la base de la récurrence pour (II.6.32) est triviale car $\tilde{j}_1 = 0$ et $cc^{(1)} = 0$.

Si $p^{(i+1)} = p^{(i)}$, alors la preuve de (II.6.31) est similaire à la preuve du Lemme II.9. Si $p^{(i+1)} \neq p^{(i)}$, alors (II.6.31) est immédiate.

Nous prouvons maintenant (II.6.32). Supposons tout d'abord que $X_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ n'est pas standard. Alors $p^{(i+1)} = p^{(i)}$, $cc^{(i+1)} = cc^{(i)} + \varepsilon$ et $s_i \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = \varepsilon \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ avec $\varepsilon = \pm 1$. Il est immédiat que $\tilde{j}_{i+1} \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = cc^{(i+1)} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$.

Ensuite supposons que $X_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ est standard et que $p^{(i+1)} \neq p^{(i)}$. Alors, $s_i \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \cdot s_i$ et nous obtenons

$$\tilde{j}_{i+1} \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = cc^{(i+1)} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} (p^{(i)})^{-k} (p^{(i+1)})^k \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} .$$

Comme $\sum_{k=1}^{m} (p^{(i)})^{-k} (p^{(i+1)})^k = 0$ (car $p^{(i+1)} \neq p^{(i)}$), nous avons $\tilde{j}_{i+1} \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = cc^{(i+1)} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$.

Enfin supposons que $X_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ est standard et que $p^{(i+1)} = p^{(i)}$. Des calculs directs mènent à

$$s_i \tilde{j}_i s_i \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = \left(cc^{(i+1)} + \frac{1}{cc^{(i)} - cc^{(i+1)}} \right) \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} - \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \cdot \left(s_i + \frac{1}{cc^{(i+1)} - cc^{(i)}} \right) ,$$

et

$$\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} j_i^k s_i j_i^{-k} \right) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = \frac{-1}{cc^{(i)} - cc^{(i+1)}} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} + \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \cdot \left(s_i + \frac{1}{cc^{(i+1)} - cc^{(i)}} \right) .$$

Additionnant ces deux égalités, nous obtenons $\tilde{j}_{i+1} \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = cc^{(i+1)} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$. □

II.6.5.3 Représentations

Pour construire les représentations de $G(m, 1, n)$ sur l'espace vectoriel $U_{\lambda^{(m)}}$ engendré par $\{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\}$, nous appliquons la même procédure que à la fin de la Section II.4. Nous utilisons comme "vide" $|\rangle$ le vecteur de base du $G(m, 1, n)$-module de dimension 1 défini par : $s_i|\rangle = |\rangle$ et $t|\rangle = \xi_1|\rangle$. Cette procédure amène aux formules suivantes pour l'action des générateurs $t, s_1, \ldots, s_{n-1}$ sur les vecteurs de base $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ de $U_{\lambda^{(m)}}$:

– Si $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) \neq p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$, alors

$$s_i \ : \ \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \mapsto \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} , \tag{II.6.33}$$

– Si $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) = p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$, alors

$$\begin{aligned} s_i \ : \ \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \quad \mapsto \quad & -\frac{1}{cc(X_{\lambda^{(m)}}|i) - cc(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \\ & + \left(1 + \frac{1}{cc(X_{\lambda^{(m)}}|i+1) - cc(X_{\lambda^{(m)}}|i)} \right) \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} , \end{aligned} \tag{II.6.34}$$

et

$$t \ : \ \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \mapsto p(X_{\lambda^{(m)}}|1)\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \ . \tag{II.6.35}$$

Comme avant, il est supposé ici que $\mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} = 0$ si $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ n'est pas un m-tableau standard.

Remarques.

(a) Comme pour l'algèbre $H(m,1,n)$ (voir les remarques à la fin de la Sous-Section II.4.3), certaines propriétés de l'action du générateur t répètent les propriétés de l'action du générateur s_1 dans la théorie des représentation du groupe symétrique.

De plus, encore comme pour l'algèbre $H(m,1,n)$, les représentations construites ne dépendent pas (à isomorphisme près) de la valeur des générateurs $s_1,\ldots,s_{n-1}$ et t sur le vide $|\rangle$.

(b) Comme pour l'algèbre de Hecke cyclotomique, la structure d'algèbre associative sur le produit tensoriel de l'algèbre $\mathbb{C}G(m,1,n)$ avec une algèbre associative libre engendrée par les m-tableaux standards permet d'équiper d'une structure de $\mathbb{C}G(m,1,n)$-module les produits tensoriels d'espaces de représentations correspondant à deux (en général, n'importe quel nombre de) m-partitions. Les règles de décomposition du produit tensoriel sont données par la même formule (II.4.38).

(c) Cette remarque est l'analogue, pour la situation classique, de la remarque **(e)** à la fin de la Sous-Section II.4.3. Dans l'Appendice III.6.B, nous présentons les opérateurs d'entrelacement classiques $\tilde{u}_{i+1} := \overline{s}_i\tilde{x}_i - \tilde{x}_i\overline{s}_i \in \mathfrak{A}_{m,n}$, $i = 1,\ldots,n-1$. L'image par l'application π, définie par (II.6.10), de l'élément $\tilde{u}_{i+1}$ est $\pi(\tilde{u}_{i+1}) = s_i\tilde{j}_i - \tilde{j}s_i \in \mathbb{C}G(m,1,n)$, $i = 1,\ldots,n-1$. L'action de $\pi(\tilde{u}_{i+1})$ dans une représentation $V_{\lambda^{(m)}}$ est :

$$\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \mapsto \left(cc^{(i)} - cc^{(i+1)} - \delta_{p^{(i)},p^{(i+1)}}\right)\mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \ , \tag{II.6.36}$$

où $cc^{(i)} = cc(X_{\lambda^{(m)}}|i)$, $p^{(i)} = p(X_{\lambda^{(m)}}|i)$, $i = 1,\ldots,n$; $\delta_{p,p'}$ est le symbole de Kronecker. En effet, récrivons $\tilde{u}_{i+1} = s_i(\tilde{j}_i - \tilde{j}_{i+1}) + \frac{1}{m}\sum\limits_{l=1}^{m} j_i^l j_{i+1}^{-l}$ et donc, par le Lemme II.30,

$$\tilde{u}_{i+1}(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) = (cc^{(i)} - cc^{(i+1)})\left(s_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) + \frac{\delta_{p^{(i)},p^{(i+1)}}}{cc^{(i)} - cc^{(i+1)}}\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\right) \ .$$

En utilisant (II.6.33)-(II.6.34), nous obtenons la formule (II.6.36).

II.6.5.4 Produit scalaire

Les représentations de $G(m,1,n)$ données par les formules (II.6.33)–(II.6.35) sont les analogues des représentations semi-normales du groupe symétrique. Dans cette Sous-Section, nous donnons des analogues pour $G(m,1,n)$ des représentations orthogonales du groupe symétrique. Les formules de cette Sous-Section pourraient être obtenues en prenant la limite classique dans les formules de la Sous-Section II.4.4. Néanmoins, nous donnons ici une présentation indépendante du cas non-dégénéré.

Soit $\lambda^{(m)}$ une m-partition et soient $X_{\lambda^{(m)}}$ et $X'_{\lambda^{(m)}}$ deux m-tableaux standards différents de forme $\lambda^{(m)}$. Nous posons $cc^{(i)} = cc(X_{\lambda^{(m)}}|i)$ et $p^{(i)} = p(X_{\lambda^{(m)}}|i)$ pour $i = 1,\ldots,n$. Définissons le produit

scalaire Hermitien suivant sur l'espace $U_{\lambda^{(m)}}$:

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}'_{\lambda^{(m)}} \rangle = 0 \ , \tag{II.6.37}$$

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \rangle = \prod_{j,k\colon j<k\,,\, p^{(j)}=p^{(k)}\,,\, cc^{(j)}\notin\{cc^{(k)},cc^{(k)}\pm 1\}} \frac{cc^{(j)} - cc^{(k)} - 1}{cc^{(j)} - cc^{(k)}} \ . \tag{II.6.38}$$

Le produit scalaire ainsi obtenu est défini positif.

Notons que, si $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ est un m-tableau standard, nous avons

$$\langle \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \rangle = \langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \rangle \quad \text{si } p^{(i)} \neq p^{(i+1)}, \tag{II.6.39}$$

et

$$\langle \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \rangle = -\frac{cc^{(i+1)} - cc^{(i)} - 1}{cc^{(i)} - cc^{(i+1)} - 1} \langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \rangle \quad \text{si } p^{(i)} = p^{(i+1)} \ . \tag{II.6.40}$$

Proposition II.31 *Ce produit scalaire Hermitien est invariant sous l'action du groupe $G(m,1,n)$ donnée par les formules (II.6.33)–(II.6.35) ; c'est-à-dire que, pour tout $u, v \in U_{\lambda^{(m)}}$,*

$$\langle \mathsf{a}(u), \mathsf{a}(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \textit{pour} \quad \mathsf{a} = t, s_1, \ldots, s_{n-1} \ . \tag{II.6.41}$$

Preuve. Il est immédiat que (II.6.37)–(II.6.38) sont invariantes sous l'action du générateur t de $G(m,1,n)$. La vérification de l'invariance de (II.6.37) sous l'action du générateur s_i de $G(m,1,n)$ est non-triviale seulement si $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ est standard et $X'_{\lambda^{(m)}} = X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$. Dans cette situation, supposons tout d'abord que $p^{(i)} \neq p^{(i+1)}$. Alors

$$\langle s_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}), s_i(\mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}) \rangle = \langle \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \rangle = 0.$$

Ensuite, supposons que $p^{(i)} = p^{(i+1)}$. On obtient de façon directe que $\langle s_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}), s_i(\mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}) \rangle$ est égal à

$$\frac{(cc^{(i+1)} - cc^{(i)} - 1)\langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \rangle + (cc^{(i)} - cc^{(i+1)} - 1)\langle \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}} \rangle}{(cc^{(i)} - cc^{(i+1)})^2}.$$

En utilisant la formule (II.6.40), nous obtenons

$$\langle s_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}), s_i(\mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}) \rangle = 0 \ ,$$

et la vérification que (II.6.37) est invariante sous l'action de $G(m,1,n)$ est terminée.

Si $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ n'est pas standard, alors $s_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) = \pm\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ et l'invariance de (II.6.38) s'ensuit. Supposons que $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ est standard et que $p^{(i)} \neq p^{(i+1)}$, alors $s_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) = \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ et donc, en utilisant (II.6.39),

$$\langle s_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}), s_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) \rangle = \langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \rangle \ .$$

Maintenant supposons que $X^{s_i}_{\lambda^{(m)}}$ est standard et que $p^{(i)} = p^{(i+1)}$. Un calcul direct donne

$$\langle s_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}), s_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}})\rangle = \frac{\langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\rangle + (cc^{(i)} - cc^{(i+1)} - 1)^2 \langle \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}^{s_i}_{\lambda^{(m)}}\rangle}{(cc^{(i)} - cc^{(i+1)})^2} \ .$$

En utilisant (II.6.40), on obtient

$$\langle s_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}), s_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}})\rangle = \langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\rangle \ ,$$

ce qui conclue la preuve de la Proposition. □

Remarques. **(i)** En conséquence, les opérateurs pour les éléments de $G(m,1,n)$ sont unitaires dans la base $\{\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda^{(m)}}\}$ où

$$\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda^{(m)}} := \left(\prod_{j,k:\ j<k\,,\, p^{(j)}=p^{(k)}\,,\, cc^{(j)} \notin \{cc^{(k)}, cc^{(k)}\pm 1\}} \left(\frac{cc^{(j)} - cc^{(k)} - 1}{cc^{(j)} - cc^{(k)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$$

pour tout m-tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$ de forme $\lambda^{(m)}$.

(ii) Une autre formule possible pour le produit scalaire Hermitien, au lieu de (II.6.38), est

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\rangle = \prod_{j,k:\ j<k\,,\, p^{(j)}=p^{(k)}\,,\, cc^{(j)} \notin \{cc^{(k)}, cc^{(k)}\pm 1\}} |cc^{(j)} - cc^{(k)} - 1| \ . \tag{II.6.42}$$

Les parties droites des formules (II.6.38) et (II.6.42) diffèrent seulement par un facteur de

$$\prod_{j,k:\ j<k\,,\, p^{(j)}=p^{(k)}\,,\, cc^{(j)} \notin \{cc^{(k)}, cc^{(k)}\pm 1\}} |cc^{(j)} - cc^{(k)}| \ .$$

Ce facteur ne dépend pas du m-tableau $X_{\lambda^{(m)}}$ de forme $\lambda^{(m)}$; il dépend seulement de la m-partition $\lambda^{(m)}$.

(iii) La formule (II.6.42) peut être récrite sans les valeurs absolues de la façon suivante. Définissons

$$\Upsilon(X_{\lambda^{(m)}}) := \prod_{j,k:\ j<k\,,\, p^{(j)}=p^{(k)}\,,\, cc^{(j)} \notin \{cc^{(k)}, cc^{(k)}\pm 1\}} \Big(cc^{(j)} - cc^{(k)} - 1 \Big) \ .$$

Alors

$$\Upsilon(X'_{\lambda^{(m)}}) = (-1)^{\ell(w)}\ \Upsilon(X_{\lambda^{(m)}}) \ ,$$

où $X_{\lambda^{(m)}}$ et $X'_{\lambda^{(m)}}$ sont deux m-tableaux standards de même forme $\lambda^{(m)}$ et $\ell(w)$ est la longueur de la permutation w qui transforme $X_{\lambda^{(m)}}$ en $X'_{\lambda^{(m)}}$. Ainsi, si nous fixons un m-tableau standard $X^{\circ}_{\lambda^{(m)}}$ de forme $\lambda^{(m)}$, alors

$$(-1)^{\ell(w(X_{\lambda^{(m)}}))}\ \Upsilon(X_{\lambda^{(m)}}) \ ,$$

où $X_{\lambda^{(m)}}$ est un autre m-tableau standard de forme $\lambda^{(m)}$ et $w(X_{\lambda^{(m)}})$ est la permutation transformant $X^{\circ}_{\lambda^{(m)}}$ en $X_{\lambda^{(m)}}$, a le même signe pour tout $X_{\lambda^{(m)}}$. Soit ε le signe de $\Upsilon(X^{\circ}_{\lambda^{(m)}})$. Alors la partie droite de (II.6.42) est égale à

$$\varepsilon\,(-1)^{\ell(w(X_{\lambda^{(m)}}))}\ \Upsilon(X_{\lambda^{(m)}}) \ .$$

II.6.6 Complétude

Nous présentons dans cette Sous-Section les analogues, pour la limite classique, des résultats de la Section II.5. Les preuves sont complètement similaires aux preuves de la Section II.5.

Proposition II.32. *L'ensemble* $\mathrm{Spec}\begin{pmatrix} j_1 & , \dots , & j_n \\ \tilde{j}_1 & , \dots , & \tilde{j}_n \end{pmatrix}$, *l'ensemble* $\mathrm{cCont}_m(n)$ *et l'ensemble des* m*-tableaux standards sont en bijection.*

Corollaire II.33. *Le spectre des éléments de Jucys–Murphy classiques est simple dans les représentations* $V_{\lambda^{(m)}}$ *(labellisées par les* m*-partitions).*

Cela signifie que pour deux m-tableaux standards (pas nécessairement de la même forme), les éléments de $\mathrm{Spec}\begin{pmatrix} j_1 & , \dots , & j_n \\ \tilde{j}_1 & , \dots , & \tilde{j}_n \end{pmatrix}$ qui leur sont associés par la Proposition II.32 sont différents (deux éléments $\begin{pmatrix} a_1 & , \dots , & a_n \\ \tilde{a}_1 & , \dots , & \tilde{a}_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a'_1 & , \dots , & a'_n \\ \tilde{a}'_1 & , \dots , & \tilde{a}'_n \end{pmatrix}$ sont différents si il existe un certain i tel que $a_i \neq a'_i$ ou $\tilde{a}_i \neq \tilde{a}'_i$).

Il reste à vérifier que nous obtenons dans cette approche toutes les représentations irréductibles du groupe $G(m,1,n)$. D'après le Chapitre I, Section I.2, la somme des carrés des dimensions des représentations construites est égale au cardinal de $G(m,1,n)$. Ainsi, la Proposition suivante complète la vérification.

Proposition II.34. *Les représentations* $V_{\lambda^{(m)}}$ *(labellisées par les* m*-partitions) du groupe* $G(m,1,n)$ *construites dans la Sous-Section précédente sont irréductibles et deux à deux non-isomorphes.*

Il résulte aussi que les règles de branchement pour $(G(m,1,n), G(m,1,n-1))$ (c'est-à-dire, pour la paire d'algèbres $(\mathbb{C}G(m,1,n), \mathbb{C}G(m,1,n-1))$) sont les mêmes que pour le cas non-dégénéré, pour la paire $(H(m,1,n), H(m,1,n-1))$.

Comme dans la situation non-dégénérée, nous obtenons les conclusions suivantes.

- Les règles de branchement de la chaîne, par rapport à n, des groupes $G(m,1,n)$ sont sans multiplicité.
- Le centralisateur de la sous-algèbre $\mathbb{C}G(m,1,n-1)$ dans l'algèbre $\mathbb{C}G(m,1,n)$ est commutatif pour tout $n = 1,2,3,\dots$
- Le centralisateur de la sous-algèbre $\mathbb{C}G(m,1,n-1)$ dans l'algèbre $\mathbb{C}G(m,1,n)$ est engendré par le centre de $\mathbb{C}G(m,1,n-1)$ et les éléments de Jucys–Murphy j_n et $\tilde{j}_n$.
- La sous-algèbre engendrée par les éléments de Jucys–Murphy $j_1,\dots,j_n,\tilde{j}_1,\dots,\tilde{j}_n$ de l'algèbre $\mathbb{C}G(m,1,n)$ est commutative maximale.

Début du diagramme de Bratteli coloré de $G(2,1,n)$. Ci-dessous, le début du diagramme de Bratteli (quatre premiers étages) pour la chaîne des groupes $G(2,1,n)$ est dessiné. Nous "colorons" les arêtes par les valeurs propres des éléments de Jucys–Murphy de $G(2,1,n)$, qui représentent l'ajout d'une m-case dans un m-tableau standard (les arêtes descendant du niveau i au niveau $i+1$ sont labellisés par les couples de valeurs propres du couple d'éléments $(j_{i+1}, \tilde{j}_{i+1})$; le sommet du haut est situé au niveau 0). Rappelons que $\{\xi_1, \xi_2\}$ est l'ensemble (arbitrairement ordonné) des racines carrées de l'unité.

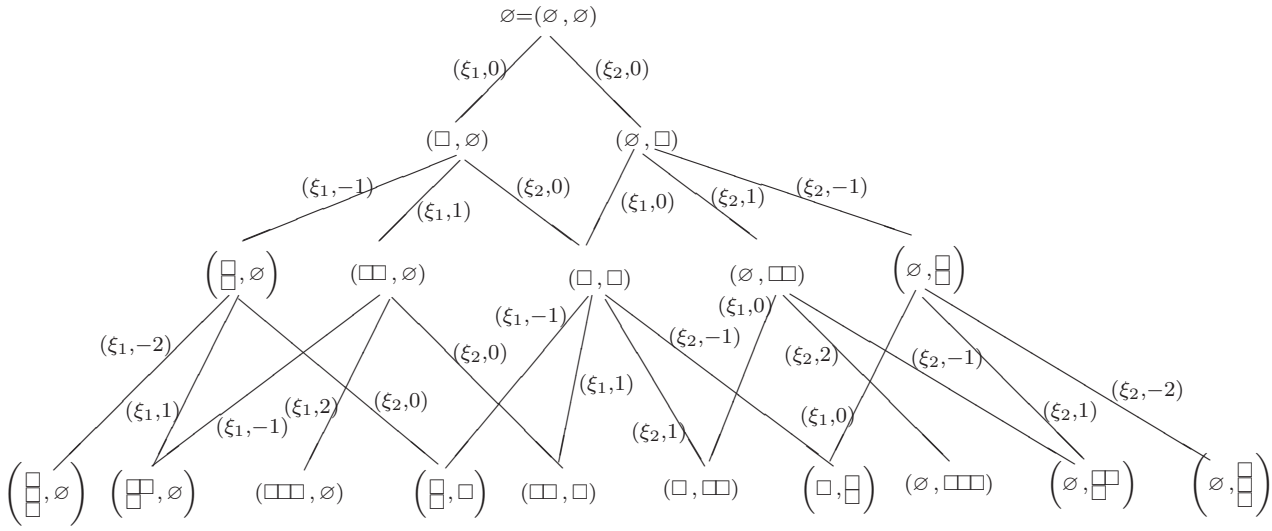


Fig. II.6. *Diagramme de Bratteli (quatre premiers niveaux) pour $G(m,1,n)$ avec $m=2$.*

Remarque. Cette remarque répète, dans la situation classique, la remarque **(a)** à la fin de la Section II.5. Pour tout m-tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$, définissons l'élément $\mathfrak{p}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ de l'algèbre $\mathbb{C}G(m,1,n)$ par la récursion suivante. La condition initiale est $\mathfrak{p}_{\varnothing} = 1$. Soit $\alpha^{(m)}$ la m-case occupée par le nombre n dans $X_{\lambda^{(m)}}$; définissons $\mu^{(m)} := \lambda^{(m)} \backslash \{\alpha^{(m)}\}$. Soit $X_{\mu^{(m)}}$ le m-tableau standard avec les nombres $1, \ldots, n-1$ aux mêmes m-cases que dans $X_{\lambda^{(m)}}$. La récursion est donnée par

$$\mathfrak{p}_{X_{\lambda^{(m)}}} := \mathfrak{p}_{X_{\mu^{(m)}}} \prod_{\substack{\beta^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\mu^{(m)}) \\ cc(\beta^{(m)}) \neq cc(\alpha^{(m)})}} \frac{\tilde{j}_n - cc(\beta^{(m)})}{cc(\alpha^{(m)}) - cc(\beta^{(m)})} \prod_{\substack{\beta^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\mu^{(m)}) \\ p(\beta^{(m)}) \neq p(\alpha^{(m)})}} \frac{j_n - p(\beta^{(m)})}{p(\alpha^{(m)}) - p(\beta^{(m)})}, \tag{II.6.43}$$

où $\begin{pmatrix} p(\beta^{(m)}) \\ cc(\beta^{(m)}) \end{pmatrix}$ est le contenu classique de la m-case $\beta^{(m)}$. En raison du résultat de complétude de cette Sous-Section, les éléments $\mathfrak{p}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ forment un ensemble complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux de l'algèbre $\mathbb{C}G(m,1,n)$ (voir Chapitre suivant, Section III.2).

Comme pour l'algèbre de Hecke cyclotomique, nous avons un homomorphisme bien défini $\mathfrak{T}_c \to \mathbb{C}G(m,1,n)$ qui est l'identité sur les générateurs $t, s_1, \ldots, s_{n-1}$ et envoie $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ à $\mathfrak{p}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ pour tout m-tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$. La vérification est similaire à celle pour l'algèbre $H(m,1,n)$ (voir la remarque **(a)** à la fin de la Section II.5). Nous la laissons au lecteur.

Appendice II.6.A Structure de l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique

Nous décrivons ici une forme normale pour les éléments de l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique $\mathfrak{A}_{m,n}$, voir la Définition II.19. Elle coïncide avec celle donnée dans [103] pour l'algèbre de Hecke en couronne si nous prenons, pour le groupe fini dans [103], le groupe cyclique d'ordre m. Néanmoins, pour être complet, nous donnons les étapes de la preuve dans notre situation. Fixons une base $\mathfrak{B}$ dans l'algèbre du groupe $G(m,1,n)$. Rappelons l'homomorphisme injectif $\hat{\imath}: \mathbb{C}G(m,1,n) \to \mathfrak{A}_{m,n}$ défini par (II.6.9).

Proposition II.35. *L'ensemble suivant est une base de $\mathfrak{A}_{m,n}$:*

$$\tilde{x}_1^{k_1} \ldots \tilde{x}_n^{k_n} \cdot \overline{w} \ , \tag{II.6.44}$$

où $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $\overline{w} \in \hat{\imath}(\mathfrak{B})$; ici $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ est l'ensemble des entiers non-négatifs.

Etapes de la preuve. Les relations définissantes (II.6.6)–(II.6.8), avec la Définition (II.6.12), la Proposition II.21 et le Lemme II.22 impliquent que tout élément de $\mathfrak{A}_{m,n}$ peut être écrit comme une combinaison linéaire d'éléments (II.6.44). Seulement l'indépendance linéaire des éléments (II.6.44) demande à être vérifiée. Soit E l'espace vectoriel avec la base

$$\tilde{u}_1^{k_1} \ldots \tilde{u}_n^{k_n} \ , \quad \text{où } k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{II.6.45}$$

L'élément correspondant à $k_1 = \cdots = k_n = 0$ sera noté 1.

Définissons les opérateurs $L_{\tilde{x}_i}$, $i = 1, \ldots, n$, sur E :

$$L_{\tilde{x}_i}(\tilde{u}_1^{k_1} \ldots \tilde{u}_i^{k_i} \ldots \tilde{u}_n^{k_n}) = \tilde{u}_1^{k_1} \ldots \tilde{u}_i^{k_i+1} \ldots \tilde{u}_n^{k_n} \ . \tag{II.6.46}$$

Clairement, $L_{\tilde{x}_i}$, $i = 1, \ldots, n$, forment un ensemble commutatif d'opérateurs.

Soit V un $G(m,1,n)$-module régulier à gauche. La base $\mathfrak{B}$ induit une base de V que nous notons par le même symbole $\mathfrak{B}$. Soit $F := E \otimes V$. Etendons les opérateurs $L_{\tilde{x}_i}$, $i = 1, \ldots, n$, à des opérateurs sur F agissant comme l'identité sur V. Nous avons

$$L_{\tilde{x}_1}^{k_1} \ldots L_{\tilde{x}_n}^{k_n}(1 \otimes v) = \tilde{u}_1^{k_1} \ldots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes v \ , \tag{II.6.47}$$

où v est un élément quelconque de V.

Définissons les opérateurs $L_{\overline{s}_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$ et L_{x_i}, $i = 1, \ldots, n$ sur F par les règles :

– L'action de $L_{\overline{s}_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$, (respectivement, L_{x_i}, $i = 1, \ldots, n$) sur le sous-espace formé par les éléments $1 \otimes v$, $v \in V$, est l'action régulière à gauche des éléments s_i (respectivement, de l'élément j_i) du groupe $G(m,1,n)$.

– Pour définir le résultat de l'action de $L_{\overline{s}_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$ et L_{x_i}, $i = 1, \ldots, n$ sur un élément $\tilde{u}_1^{k_1} \ldots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes v$, nous utilisons (II.6.47) pour écrire

$$\tilde{u}_1^{k_1} \ldots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes v = L_{\tilde{x}_1}^{k_1} \ldots L_{\tilde{x}_n}^{k_n}(1 \otimes v) \tag{II.6.48}$$

et ensuite déplaçant $L_{\overline{s}_i}$ (respectivement, L_{x_i}) vers la droite à travers $L_{\tilde{x}_1}^{k_1} \ldots L_{\tilde{x}_n}^{k_n}$ en postulant les relations de commutation suivantes :

$$L_{\overline{s}_i} L_{\tilde{x}_i} = L_{\tilde{x}_{i+1}} L_{\overline{s}_i} - \tfrac{1}{m} \textstyle\sum_{p=1}^m L_{x_i}^p L_{x_{i+1}}^{-p} \ , \ L_{\overline{s}_i} L_{\tilde{x}_{i+1}} = L_{\tilde{x}_i} L_{\overline{s}_i} + \tfrac{1}{m} \textstyle\sum_{p=1}^m L_{x_i}^p L_{x_{i+1}}^{-p} \ ,$$

$$L_{\overline{s}_i} L_{\tilde{x}_j} = L_{\tilde{x}_j} L_{\overline{s}_i} \ \text{ si } \ j \neq i, i+1 \ , \tag{II.6.49}$$

$$L_{x_i} L_{\tilde{x}_j} = L_{\tilde{x}_j} L_{x_i} \ \text{ pour } \ i, j = 1, \ldots, n \ .$$

Dans le processus de déplacement de $L_{\overline{s}_i}$ vers la droite à travers $L_{\tilde{x}_1}^{k_1} \ldots L_{\tilde{x}_n}^{k_n}$, des éléments L_{x_i} et $L_{x_{i+1}}$ apparaissent. Nous les déplaçons aussi vers la droite en utilisant les mêmes règles (II.6.49).

Il en résulte la formule explicite suivante pour l'action des générateurs $L_{\overline{s}_i}$, L_{x_i} sur l'espace F :

$$L_{\overline{s}_i}(\tilde{u}_1^{k_1} \ldots \tilde{u}_i^{k_i} \tilde{u}_{i+1}^{k_{i+1}} \ldots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes v) = \ \tilde{u}_1^{k_1} \ldots \tilde{u}_i^{k_{i+1}} \tilde{u}_{i+1}^{k_i} \ldots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes s_i v$$

$$+ \sum_{a=1}^{k_{i+1}} \tilde{u}_1^{k_1} \ldots \tilde{u}_i^{a-1} \tilde{u}_{i+1}^{k_i + k_{i+1} - a} \ldots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes \Pi_i v - \sum_{a=1}^{k_i} \tilde{u}_1^{k_1} \ldots \tilde{u}_i^{a-1} \tilde{u}_{i+1}^{k_i + k_{i+1} - a} \ldots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes \Pi_i v \ ,$$

où $\Pi_i = \frac{1}{m} \sum\limits_{p=1}^{m} j_i^p j_{i+1}^{-p}$, et

$$L_{x_i}(\tilde{u}_1^{k_1} \ldots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes v) \ = \ \tilde{u}_1^{k_1} \ldots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes j_i v \ .$$

On vérifie que les opérateurs L_{x_i}, $L_{\tilde{x}_i}$, $i = 1, \ldots, n$, et $L_{\overline{s}_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$, satisfont les relations définissantes (II.6.6)–(II.6.8) sur l'espace total F, et définissent ainsi une structure de $\mathfrak{A}_{m,n}$-module sur F.

Donc,

$$L_{\tilde{x}_1^{k_1} \ldots \tilde{x}_n^{k_n} \ . \ \overline{w}}(1 \otimes 1) \ = \ L_{\tilde{x}_1}^{k_1} \ldots L_{\tilde{x}_n}^{k_n} \ \cdot \ L_{\overline{w}}(1 \otimes 1) \ = \ \tilde{u}_1^{k_1} \ldots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes w \ ,$$

où $w \in \mathfrak{B}$ et $\overline{w}$ est l'image de w par l'application $\hat{\imath}$; ceci montre que les opérateurs $L_{\tilde{x}_1^{k_1} \ldots \tilde{x}_n^{k_n} . \overline{w}}$ sont linéairement indépendants et l'indépendance de l'ensemble (II.6.44) s'ensuit. □

Appendice II.6.B Opérateurs d'entrelacement classiques

Nous décrivons les opérateurs d'entrelacement dans l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique $\mathfrak{A}_{m,n}$; ils peuvent être utilisés pour étudier le spectre des éléments $\tilde{x}_i$ dans différentes représentations. Nous discutons l'origine de ces opérateurs d'entrelacement dans l'algèbre de Hecke affine (non-dégénérée). Nous redérivons aussi le spectre des éléments de Jucys–Murphy $\tilde{j}_i$ du point de vue de la théorie des perturbations. Les opérateurs d'entrelacement peuvent être introduits [103] dans le contexte plus général des algèbres de Hecke en couronne.

1. La Proposition suivante est l'analogue classique de la Proposition II.4.

Proposition II.36. *Nous avons*

$$\mathrm{Spec}(\tilde{j}_i) \subset [1-i, i-1] \quad \textit{pour} \;\; i = 1, \ldots, n. \tag{II.6.50}$$

La Proposition II.36 provient des Propositions II.23 et II.25, comme la Proposition II.4 vient des Propositions II.1 et II.3 dans la preuve donnée dans le paragraphe 5 de la Section II.3.

Pour donner une preuve alternative (dans l'esprit de [44]), mentionnée dans le paragraphe 5 de la Section II.3, nous introduisons les éléments suivants de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,n}$:

$$\tilde{u}_{i+1} := \overline{s}_i \tilde{x}_i - \tilde{x}_i \overline{s}_i \equiv \overline{s}_i(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1}) + P_{i+1} \ , \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{II.6.51}$$

où $P_{i+1} := \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m} \; x_i^p x_{i+1}^{-p}$. Clairement, les éléments P_{i+1} sont des idempotents

$$P_{i+1}^2 = P_{i+1} \tag{II.6.52}$$

et satisfont

$$\begin{cases} (x_i - x_{i+1}) P_{i+1} = 0 \ , & \text{(II.6.53)} \\ \overline{s}_i P_{i+1} = P_{i+1} \overline{s}_i \ . & \text{(II.6.54)} \end{cases}$$

Les éléments $\tilde{u}_i$ sont les "opérateurs d'entrelacement classiques", ils satisfont (la vérification est directe)

$$\begin{cases} \tilde{u}_{i+1} x_i = x_{i+1} \tilde{u}_{i+1} \ , \quad \tilde{u}_{i+1} x_{i+1} = x_i \tilde{u}_{i+1} \ , \; \tilde{u}_{i+1} x_j = x_j \tilde{u}_{i+1} \;\; \text{pour} \;\; j \neq i, i+1 \ , \\ \tilde{u}_{i+1} \tilde{x}_i = \tilde{x}_{i+1} \tilde{u}_{i+1} \ , \quad \tilde{u}_{i+1} \tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i \tilde{u}_{i+1} \ , \; \tilde{u}_{i+1} \tilde{x}_j = \tilde{x}_j \tilde{u}_{i+1} \;\; \text{pour} \;\; j \neq i, i+1 \ . \end{cases} \tag{II.6.55}$$

Ensuite, les éléments $\tilde{u}_i$ satisfont les relations d'Artin :

$$\tilde{u}_i \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_i = \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_i \tilde{u}_{i+1} \ . \tag{II.6.56}$$

Dans la vérification ici ;, il est pratique d'utiliser (II.6.55) pour transformer, disons, la partie gauche de (II.6.56), commençant ainsi :

$$\tilde{u}_i \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_i = \Big(\overline{s}_{i-1}(\tilde{x}_{i-1} - \tilde{x}_i) + P_i \Big) \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_i = \overline{s}_{i-1} \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_i (\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1}) + P_i \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_i \ .$$

En continuant de cette manière, nous déplaçons vers la droite tous les $\tilde{x}$'s ; La comparaison de la partie gauche et de la partie droite est plus ou moins directe après ceci. Pour la comparaison, les égalités $\overline{s}_i P_i \overline{s}_i = \overline{s}_{i-1} P_{i+1} \overline{s}_{i-1}$, $(\frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m} \; x_{i-1}^p x_{i+1}^{-p} - P_{i+1}) P_i = 0$ et $(\frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m} \; x_{i-1}^p x_{i+1}^{-p} - P_i) P_{i+1} = 0$ ont leur utilité ; la première égalité est un calcul direct, les seconde et troisième égalités viennent de (II.6.53).

Une propriété de plus des éléments $\tilde{u}_i$ est

$$\tilde{u}_{i+1}^2 = -(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1})^2 + P_{i+1} = -\Big(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1} + P_{i+1} \Big) \Big(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1} - P_{i+1} \Big) \ . \tag{II.6.57}$$

La relation (II.6.57) peut être vérifiée directement ou en suivant la méthode ci-dessus pour la vérification de (II.6.56).

Ainsi, pour un polynôme χ en une variable, nous avons

$$\tilde{u}_{i+1}\chi(\tilde{x}_i)\tilde{u}_{i+1} = \chi(\tilde{x}_{i+1})\tilde{u}_{i+1}^2 = -\chi(\tilde{x}_{i+1})\Big(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1} + P_{i+1}\Big)\Big(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1} - P_{i+1}\Big) \ . \tag{II.6.58}$$

Les éléments $\tilde{x}_i$, $\tilde{x}_{i+1}$ et P_{i+1} commutent. Dans une représentation ρ, le spectre de l'opérateur $\rho(P_{i+1})$ est contenu dans $\{0,1\}$; En prenant pour χ l'équation caractéristique pour $\rho(\tilde{x}_i)$, nous concluons que

$$\mathrm{Spec}(\rho(\tilde{x}_{i+1})) \subset \mathrm{Spec}(\rho(\tilde{x}_i)) \cup \Big(\mathrm{Spec}(\rho(\tilde{x}_i)) + 1\Big) \cup \Big(\mathrm{Spec}(\rho(\tilde{x}_i)) - 1\Big) \ . \tag{II.6.59}$$

En réalisant $\tilde{x}_i$ par $\tilde{j}_i$ dans une représentation du groupe $G(m,1,n)$, et prenant en compte la "condition initiale" $\tilde{j}_1 = 0$, nous redérivons (II.6.50).

Remarque. L'algèbre de Hecke affine dégénérée usuelle (qui correspond à $m = 1$) est distinguée dans le sens où les idempotents P_i deviennent triviaux : $P_i = 1$, en opposition avec l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique pour $m > 1$.

2. Soit $\hat{H}_n$ l'algèbre de Hecke affine. Nous notons les générateurs de $\hat{H}_n$ par $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ et y_1, le symbole y_1 étant utilisé ici à la place de τ. Notons y_i les éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre $\hat{H}_n$; rappelons que y_{i+1} pour $i > 0$ sont définis inductivement par $y_{i+1} := \sigma_i y_i \sigma_i$.

Des opérateurs d'entrelacement généraux $\mathfrak{U}_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, de l'algèbre de Hecke affine sont définis comme étant des opérateurs vérifiant

$$\begin{cases} \mathfrak{U}_{i+1} y_i = y_{i+1}\mathfrak{U}_{i+1} \ , \ \mathfrak{U}_{i+1} y_{i+1} = y_i \mathfrak{U}_{i+1} \ , \\ \mathfrak{U}_{i+1} y_k = y_k \mathfrak{U}_{i+1} \quad \text{pour} \quad k \neq i, i+1, \end{cases} \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n-1. \tag{II.6.60}$$

Les opérateurs d'entrelacement (les solutions $\mathfrak{U}_{i+1} := U_{i+1}$ de (II.6.60)) utilisées dans [44] sont

$$U_{i+1} := \sigma_i y_i - y_i \sigma_i \ . \tag{II.6.61}$$

Les opérateurs U_{i+1} satisfont, en plus de (II.6.60), l'équation d'Artin,

$$U_i U_{i+1} U_i = U_{i+1} U_i U_{i+1} \ , \tag{II.6.62}$$

et, élevés au carré, deviennent la fonction suivante des éléments de Jucys–Murphy :

$$U_i^2 = -(y_{i+1} - q^2 y_i)(y_{i+1} - q^{-2} y_i) \ . \tag{II.6.63}$$

Contrastant avec (II.6.57), la partie droite de (II.6.63) ne contient rien d'analogue au projecteur P_{i+1}. Nous allons expliquer l'apparition de ce projecteur dans la limite classique.

Nous pourrions travailler directement avec les opérateurs de Jucys–Murphy de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$ et utiliser les formules (II.6.4)-(II.6.5). Pourtant, on peut aussi procéder (et

nous préférons faire ainsi) au niveau de l'algèbre de Hecke affine, et prendre le quotient cyclotomique après. Nous avons la composition suivante :

$$\hat{H}_n \to H(m,1,n) \rightsquigarrow \mathbb{C}G(m,1,n) \tag{II.6.64}$$

Ici, l'homomorphisme de $\hat{H}_n$ vers $H(m,1,n)$ est donné par $\hat{H}_n \ni \sigma_i \mapsto \sigma_i \in H(m,1,n)$ et $y_1 \mapsto \tau$, où τ satisfait (II.2.8). Le symbole $\rightsquigarrow$ signifie la limite classique. La limite classique peut aussi être comprise comme un homomorphisme, comme l'autre flèche dans (II.6.64) ; à savoir, la limite classique ici est le quotient par l'idéal engendré par $\{v_i - \xi_i, i = 1, \ldots, n\}$ et $(q-1)$, où v_i et q sont considérés comme des générateurs centraux.

Les formules (II.6.4)-(II.6.5) montrent que les décompositions en séries de Taylor des opérateurs de Jucys–Murphy de l'algèbre $H(m,1,n)$ commencent ainsi

$$J_i = j_i + j_i\tilde{j}_i\alpha + O(\alpha^2) \ ; \tag{II.6.65}$$

ici α est le paramètre de déformation, $q^2 = 1 + \alpha + O(\alpha^2)$. Nous "relevons" la formule (II.6.65) à l'algèbre de Hecke affine $\hat{H}_n$ en supposant que les décompositions en séries de Taylor des opérateurs de Jucys–Murphy de $\hat{H}_n$ commencent ainsi

$$y_i = x_i + x_i\tilde{x}_i\alpha + O(\alpha^2) \ , \tag{II.6.66}$$

où x_i et $\tilde{x}_i$ appartiennent à l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique $\mathfrak{A}_{m,n}$, voir (II.6.6)-(II.6.8). La supposition (II.6.66) peut être vue en quelque sorte comme la considération du "premier voisinage infinitésimal" de l'homomorphisme de $\hat{H}_n$ vers $\mathbb{C}G(m,1,n)$ participant à (II.6.64).

Pour faire la limite classique, on prend en compte le début de la décomposition en série de Taylor des éléments σ_i :

$$\sigma_i = \overline{s}_i + \frac{\alpha}{2} + O(\alpha^2) \ . \tag{II.6.67}$$

Notons que les opérateurs U_{i+1}, donnés par (II.6.61) tendent, par (II.6.66) et (II.6.67), vers les opérateurs

$$u_{i+1} := \overline{s}_i x_i - x_i \overline{s}_i \equiv \overline{s}_i(x_i - x_{i+1}) \ . \tag{II.6.68}$$

Les opérateurs u_{i+1} satisfont toutes les relations pour les éléments $\tilde{u}_{i+1}$ listées dans (II.6.55) ; mais les opérateurs d'entrelacement u_{i+1} n'aident pas à comprendre le spectre des images des éléments $\tilde{x}_i$ dans les représentations.

Comme il a été remarqué dans [44], les opérateurs $\mathfrak{U}_{i+1} := U_{i+1} f(y_i, y_{i+1})$, où f est une fonction arbitraire, sont des opérateurs d'entrelacement qui satisfont l'équation d'Artin.

On montre par récurrence que pour tout entier non-négatif L,

$$\sigma_i y_i^L - y_i^L \sigma_i = U_{i+1} \cdot \sum_{b=0}^{L-1} \ y_i^{\,b} \ y_{i+1}^{L-1-b} \ . \tag{II.6.69}$$

C'est pourquoi les opérateurs $\sigma_i y_i^L - y_i^L \sigma_i$ sont des opérateurs d'entrelacement pour tout entier non-négatif L.

Sous l'hypothèse (II.6.66), les opérateurs $\sigma_i y_i^m - y_i^m \sigma_i \equiv \sigma_i(y_i^m - 1) - (y_i^m - 1)\sigma_i$ tendent vers 0 quand α tend vers 0. Ces opérateurs sont d'ordre $O(\alpha)$. Notons

$$\tilde{\mathcal{U}}_{i+1} := \frac{1}{m}\Big(\sigma_i \ \frac{y_i^m - 1}{\alpha} - \frac{y_i^m - 1}{\alpha} \ \sigma_i\Big) \ . \tag{II.6.70}$$

Clairement, $\tilde{\mathcal{U}}_{i+1}$ tend vers $\tilde{u}_{i+1}$ quand α tend vers 0 ($q - q^{-1} = \alpha + O(\alpha^2)$).

En utilisant (II.6.69) avec $L = m$, (II.6.60) avec $\mathfrak{U}_{i+1} := U_{i+1}$ et (II.6.63), nous obtenons

$$\begin{aligned}
(\sigma_i y_i^m - y_i^m \sigma_i)^2 &= U_{i+1} \cdot \sum_{b=0}^{m-1} \ y_i^b \, y_{i+1}^{m-1-b} \cdot U_{i+1} \cdot \sum_{c=0}^{m-1} \ y_i^c \, y_{i+1}^{m-1-c} \\
&= U_{i+1}^2 \cdot \Big(\sum_{b=0}^{m-1} \ y_i^b \, y_{i+1}^{m-1-b}\Big)^2 \\
&= -(y_{i+1} - q^2 y_i)(y_{i+1} - q^{-2} y_i)\Big(\sum_{b=0}^{m-1} \ y_i^b \, y_{i+1}^{m-1-b}\Big)^2 \\
&= -\Big((y_{i+1} - q^2 y_i)\sum_{b=0}^{m-1} \ y_i^b \, y_{i+1}^{m-1-b}\Big) \cdot \Big((y_{i+1} - q^{-2} y_i)\sum_{b=0}^{m-1} \ y_i^b \, y_{i+1}^{m-1-b}\Big) \ .
\end{aligned} \tag{II.6.71}$$

Soit $r := x_i / x_{i+1}$. Sous l'hypothèse (II.6.66), nous calculons

$$\sum_{b=0}^{m-1} \ y_i^b \, y_{i+1}^{m-1-b} = m x_i^{m-1} P_{i+1} + \alpha\Big(\tilde{x}_i x_{i+1}^{m-1} \sum_{b=0}^{m-1} b r^b + \tilde{x}_{i+1} x_i^{m-1} \sum_{b=0}^{m-1} b r^{-b}\Big) + O(\alpha^2) \tag{II.6.72}$$

et

$$\begin{cases}
y_{i+1} - q^2 y_i &= x_{i+1} - x_i + \alpha\Big((x_{i+1}\tilde{x}_{i+1} - x_i \tilde{x}_i) - x_i\Big) + O(\alpha^2) \ , \\
y_{i+1} - q^{-2} y_i &= x_{i+1} - x_i + \alpha\Big((x_{i+1}\tilde{x}_{i+1} - x_i \tilde{x}_i) + x_i\Big) + O(\alpha^2) \ .
\end{cases} \tag{II.6.73}$$

En écrivant $x_{i+1} - x_i = x_{i+1}(1 - r)$ ou $x_{i+1} - x_i = -x_i(1 - r^{-1})$, et utilisant l'identité

$$(1 - \mathfrak{c}) \sum_{b=0}^{m-1} \ b \, \mathfrak{c}^b = m(P - 1) \tag{II.6.74}$$

(où $P := \frac{1}{m}\sum_{b=0}^{m-1} \ \mathfrak{c}^b$ est le projecteur), valide pour un générateur $\mathfrak{c}$ du groupe cyclique C_m à m éléments, nous trouvons

$$\begin{cases}
(y_{i+1} - q^2 y_i)\sum_{b=0}^{m-1} \ y_i^b \, y_{i+1}^{m-1-b} &= m \, \alpha(\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i - P_{i+1}) + O(\alpha^2) \ , \\
(y_{i+1} - q^{-2} y_i)\sum_{b=0}^{m-1} \ y_i^b \, y_{i+1}^{m-1-b} &= m \, \alpha(\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i + P_{i+1}) + O(\alpha^2) \ .
\end{cases} \tag{II.6.75}$$

Substituant (II.6.75) dans (II.6.71), divisant par $(m\,\alpha)^2$ et prenant la limite $\alpha \to 0$, nous retrouvons le résultat (II.6.57) du point de vue perturbatif.

3. Les éléments j_i vérifiant $j_i^m = 1$, les équations caractéristiques pour les éléments j_i ne sont pas significatives au niveau classique. Il est facile d'obtenir l'équation caractéristiques pour $\tilde{j}_i$ partant de l'équation caractéristique pour J_i. Soit A_0 un opérateur semi-simple sur un espace vectoriel V. Considérons une perturbation de A_0 de la forme

$$A = A_0 + A_0 A_1 \alpha + O(\alpha^2) \ , \tag{II.6.76}$$

où A_1 est aussi semi-simple et les opérateurs A_0 et A_1 commutent. Soit $\mathfrak{r}$ une valeur propre de A_0 et $V_{\mathfrak{r}}$ l'espace propre correspondant. L'opérateur $A(\alpha)$ sur l'espace $V_{\mathfrak{r}}$ a, jusqu'à l'ordre α^2, la forme $\mathfrak{r}\,\mathrm{Id} + \mathfrak{r} A_1$, et ses valeurs propres sont $\mathfrak{r} + \mathfrak{r}\mathfrak{s}_l \alpha$ où $\{\mathfrak{s}_l\}$ est l'ensemble des valeurs propres de la restriction de A_1 à $V_{\mathfrak{r}}$.

Dans la situation particulière où $A_0 = j_i$, $A_1 = \tilde{j}_i$ et $A = J_i$, le spectre de A est, en général, un sous-ensemble de $\{v_l q^{2\eta},\ l = 1, \ldots, m \text{ and } \eta \in [1-i, i-1]\}$. Nous prenons tout d'abord la limite $v_l \to \xi_l$, $l = 1, \ldots, m$. Ensuite $\xi_l q^{2\eta} = \xi_l + \xi_l \eta \alpha + O(\alpha^2)$ (car $q^2 = 1 + \alpha + O(\alpha^2)$) ainsi le spectre de l'opérateur $\tilde{j}_i$ est un sous-ensemble de $[1-i, i-1]$ et nous retrouvons la Proposition II.36 d'un point de vue perturbatif.

Appendice II.A Exemples

Dans cet Appendice, nous illustrons la construction des représentations irréductibles des algèbres $H(m, 1, n)$ sur plusieurs exemples avec $m = 2$ et n petit. Pour ces exemples, nous écrivons les formules (II.4.8)-(II.4.9) et (II.4.16)-(II.4.17) de la Section II.4.

1. La représentation de $H(2,1,2)$ correspondant à la 2-partition $(\square, \square)$.

La dimension de cette représentation est 2. Nous choisissons la base

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{X}_{(\boxed{1}, \boxed{2})} \ , \quad \mathcal{X}_2 := \mathcal{X}_{(\boxed{2}, \boxed{1})} \ .$$

Les formules (II.4.8)-(II.4.9) prennent la forme

$$\left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2}{v_1 - v_2}\right) \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 \left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1}{v_2 - v_1}\right) \ , \quad \left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1}{v_2 - v_1}\right) \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 \left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2}{v_1 - v_2}\right)$$

et

$$(\tau - v_1)\mathcal{X}_1 = 0 \quad , \qquad (\tau - v_2)\mathcal{X}_2 = 0 \ .$$

Les matrices correspondant à l'action (II.4.16)-(II.4.17) des générateurs de $H(2,1,2)$ dans la base ci-dessus sont données par :

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} -(q-q^{-1})\frac{v_2}{v_1 - v_2} & \frac{qv_1 - q^{-1}v_2}{v_1 - v_2} \\ \frac{qv_2 - q^{-1}v_1}{v_2 - v_1} & -(q-q^{-1})\frac{v_1}{v_2 - v_1} \end{pmatrix} \ , \quad \tau \mapsto \mathrm{diag}(v_1, v_2) \ . \tag{II.A.1}$$

Dans la base $\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2\}$, la matrice de Gram du produit scalaire ω-sesquilinéaire invariant est

$$\mathrm{diag}\left(\frac{q^{-1}v_1 - qv_2}{v_1 - v_2}, \frac{qv_1 - q^{-1}v_2}{v_1 - v_2}\right) \ .$$

2. La représentation de $H(2,1,3)$ correspondant à la 2-partition $\left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}, \square\right)$.

La représentation est de dimension 3 et nous choisissons la base

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{X}_{\left(\begin{smallmatrix}\boxed{1}\\\boxed{2}\end{smallmatrix}, \boxed{3}\right)} \ , \quad \mathcal{X}_2 := \mathcal{X}_{\left(\begin{smallmatrix}\boxed{1}\\\boxed{3}\end{smallmatrix}, \boxed{2}\right)} \ , \quad \mathcal{X}_3 := \mathcal{X}_{\left(\begin{smallmatrix}\boxed{2}\\\boxed{3}\end{smallmatrix}, \boxed{1}\right)} \ .$$

Les formules (II.4.8)-(II.4.9) prennent la forme

$$\left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_1-v_1q^{-2}}\right)\mathcal{X}_1 = 0 \ , \qquad \left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2}\right)\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_3\left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1}\right) \ ,$$

$$\left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1}\right)\mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_2\left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2}\right) \ ,$$

$$\left(\sigma_2 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2}{v_1q^{-2}-v_2}\right)\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2\left(\sigma_2 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2-v_1q^{-2}}\right) \ , \quad \left(\sigma_2 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2-v_1q^{-2}}\right)\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1\left(\sigma_2 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2}{v_1q^{-2}-v_2}\right) \ ,$$

$$\left(\sigma_2 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_1-v_1q^{-2}}\right)\mathcal{X}_3 = 0 \ ,$$

et

$$(\tau - v_1)\mathcal{X}_1 = 0 \ , \quad (\tau - v_1)\mathcal{X}_2 = 0 \ , \quad (\tau - v_2)\mathcal{X}_3 = 0 \ .$$

Les matrices correspondant à l'action (II.4.16)-(II.4.17) des générateurs de $H(2,1,3)$ dans la base ci-dessus sont données par :

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} -q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2} & \frac{qv_1-q^{-1}v_2}{v_1-v_2} \\ 0 & \frac{qv_2-q^{-1}v_1}{v_2-v_1} & -\frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1} \end{pmatrix} \ , \quad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1q^{-2}-v_2} & \frac{v_1q^{-1}-q^{-1}v_2}{v_1q^{-2}-v_2} & 0 \\ \frac{qv_2-v_1q^{-3}}{v_2-v_1q^{-2}} & -\frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2-v_1q^{-2}} & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}$$

et

$$\tau \mapsto \mathrm{diag}(v_1, v_1, v_2) \ .$$

Dans la base $\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3\}$, la matrice de Gram du produit scalaire ω-sesquilinéaire invariant est

$$\mathrm{diag}\left(\frac{q^{-2}v_1 - q^2v_2}{v_1 - v_2}, 1, \frac{qv_1 - q^{-1}v_2}{q^{-1}v_1 - qv_2}\right) \ .$$

3. La représentation de $H(2,1,4)$ correspondant à la 2-partition $\left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}, \square\square\right)$.

La représentation est de dimension 6 et nous choisissons la base

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{X}_{\left(\begin{smallmatrix}\boxed{1}\\\boxed{2}\end{smallmatrix}, \boxed{3}\boxed{4}\right)} \ , \quad \mathcal{X}_2 := \mathcal{X}_{\left(\begin{smallmatrix}\boxed{1}\\\boxed{3}\end{smallmatrix}, \boxed{2}\boxed{4}\right)} \ , \quad \mathcal{X}_3 := \mathcal{X}_{\left(\begin{smallmatrix}\boxed{1}\\\boxed{4}\end{smallmatrix}, \boxed{2}\boxed{3}\right)} \ , \quad \mathcal{X}_4 := \mathcal{X}_{\left(\begin{smallmatrix}\boxed{2}\\\boxed{3}\end{smallmatrix}, \boxed{1}\boxed{4}\right)} \ ,$$

$$\mathcal{X}_5 := \mathcal{X}_{\left(\begin{smallmatrix}\boxed{2}\\\boxed{4}\end{smallmatrix}, \boxed{1}\boxed{3}\right)} \ , \quad \mathcal{X}_6 := \mathcal{X}_{\left(\begin{smallmatrix}\boxed{3}\\\boxed{4}\end{smallmatrix}, \boxed{1}\boxed{2}\right)} \ .$$

Les formules (II.4.8)-(II.4.9) prennent la forme

$$\left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_1-v_1q^{-2}}\right)\mathcal{X}_1 = 0\,, \qquad \left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2}\right)\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_4\left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1}\right)\,,$$

$$\left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2}\right)\mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_5\left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1}\right)\,, \quad \left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1}\right)\mathcal{X}_4 = \mathcal{X}_2\left(\sigma_1 + \tfrac{v_2}{(q-q^{-1})v_1-v_2}\right)\,,$$

$$\left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1}\right)\mathcal{X}_5 = \mathcal{X}_3\left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2}\right)\,, \quad \left(\sigma_1 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_2-v_2q^2}\right)\mathcal{X}_6 = 0\,,$$

$$\left(\sigma_2 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2}{v_1q^{-2}-v_2}\right)\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2\left(\sigma_2 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2-v_1q^{-2}}\right)\,, \quad \left(\sigma_2 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2-v_1q^{-2}}\right)\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1\left(\sigma_2 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2}{v_1q^{-2}-v_2}\right)\,,$$

$$\left(\sigma_2 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_2-v_2q^2}\right)\mathcal{X}_3 = 0\,, \qquad \left(\sigma_2 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_1-v_1q^{-2}}\right)\mathcal{X}_4 = 0\,,$$

$$\left(\sigma_2 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1-v_2q^2}\right)\mathcal{X}_5 = \mathcal{X}_6\left(\sigma_2 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1}{v_2q^2-v_1}\right)\,, \quad \left(\sigma_2 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1}{v_2q^2-v_1}\right)\mathcal{X}_6 = \mathcal{X}_5\left(\sigma_2 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1-v_2q^2}\right)\,,$$

$$\left(\sigma_3 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_2-v_2q^2}\right)\mathcal{X}_1 = 0\,, \qquad \left(\sigma_3 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1q^{-2}-v_2q^2}\right)\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_3\left(\sigma_3 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2q^2-v_1q^{-2}}\right)\,,$$

$$\left(\sigma_3 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2q^2-v_1q^{-2}}\right)\mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_2\left(\sigma_3 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1q^{-2}-v_2q^2}\right)\,, \quad \left(\sigma_3 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1q^{-2}-v_2q^2}\right)\mathcal{X}_4 = \mathcal{X}_5\left(\sigma_3 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2q^2-v_1q^{-2}}\right)\,,$$

$$\left(\sigma_3 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2q^2-v_1q^{-2}}\right)\mathcal{X}_5 = \mathcal{X}_6\left(\sigma_3 + \tfrac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1q^{-2}-v_2q^2}\right)\,, \quad \left(\sigma_3 + \tfrac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_1-v_1q^{-2}}\right)\mathcal{X}_6 = 0\,,$$

et

$$(\tau - v_1)\mathcal{X}_1 = 0\ , \quad (\tau - v_1)\mathcal{X}_2 = 0\ , \quad (\tau - v_1)\mathcal{X}_3 = 0\ ,$$

$$(\tau - v_2)\mathcal{X}_4 = 0\ , \quad (\tau - v_2)\mathcal{X}_5 = 0\ , \quad (\tau - v_2)\mathcal{X}_6 = 0\ .$$

Les matrices correspondant à l'action (II.4.16)-(II.4.17) des générateurs de $H(2,1,4)$ dans la base ci-dessus sont données par :

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} -q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2} & 0 & \frac{qv_1-q^{-1}v_2}{v_1-v_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2} & 0 & \frac{qv_1-q^{-1}v_2}{v_1-v_2} & 0 \\ 0 & \frac{qv_2-q^{-1}v_1}{v_2-v_1} & 0 & -\frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{qv_2-q^{-1}v_1}{v_2-v_1} & 0 & -\frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}\,,$$

$$\sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1q^{-2}-v_2} & \frac{v_1q^{-1}-q^{-1}v_2}{v_1q^{-2}-v_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{qv_2-v_1q^{-3}}{v_2-v_1q^{-2}} & -\frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2-v_1q^{-2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1-v_2q^2} & \frac{qv_1-v_2q}{v_1-v_2q^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{v_2q^3-q^{-1}v_1}{v_2q^2-v_1} & -\frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2q^2-v_1} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 \mapsto \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1q^{-2}-v_2q^2} & \frac{v_1q^{-1}-v_2q}{v_1q^{-2}-v_2q^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_2q^3-v_1q^{-3}}{v_2q^2-v_1q^{-2}} & -\frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2q^2-v_1q^{-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1q^{-2}-v_2q^2} & \frac{v_1q^{-1}-v_2q}{v_1q^{-2}-v_2q^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{v_2q^3-v_1q^{-3}}{v_2q^2-v_1q^{-2}} & -\frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2q^2-v_1q^{-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\tau \mapsto \mathrm{diag}(v_1, v_1, v_1, v_2, v_2, v_2)\ .$$

Dans la base $\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4, \mathcal{X}_5, \mathcal{X}_6\}$, la matrice de Gram du produit scalaire ω-sesquilinéaire invariant est $\mathrm{diag}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$ où

$$z_1 = \frac{(q^{-2}v_1-q^2v_2)(q^{-3}v_1-q^3v_2)}{(v_1-v_2)(q^{-1}v_1-qv_2)}\ , \quad z_2 = \frac{q^{-3}v_1-q^3v_2}{q^{-1}v_1-qv_2}\ , \quad z_3 = 1\ , \quad z_4 = \frac{(qv_1-q^{-1}v_2)(q^{-3}v_1-q^3v_2)}{(q^{-1}v_1-qv_2)^2}\ ,$$

$$z_5 = \frac{qv_1-q^{-1}v_2}{q^{-1}v_1-qv_2}\ , \quad z_6 = \frac{(v_1-v_2)(qv_1-q^{-1}v_2)}{(q^{-1}v_1-qv_2)(q^{-2}v_1-q^2v_2)}\ .$$

Chapitre III

Forme normale et procédure de fusion pour l'algèbres de Hecke cyclotomique

Sommaire

III.1 Introduction **114**
III.1.1 Organisation du chapitre 116
III.2 Procédure de fusion pour le groupe $G(m,1,n)$ **117**
III.2.1 Idempotents et éléments de Jucys–Murphy du groupe B_n 117
III.2.1.1 Définitions 117
III.2.1.2 Idempotents du groupe B_{n+1} 118
III.2.2 Formule de fusion pour les idempotents de B_{n+1} 120
III.2.3 Procédure de fusion pour le groupe de réflexions complexe $G(m,1,n+1)$ . . . 123
III.2.3.1 Définitions 124
III.2.3.2 Formule de fusion pour les idempotents de $G(m,1,n+1)$ 125
III.3 Procédure de fusion pour l'algèbre $H(m,1,n)$ **127**
III.3.1 Définitions 127
III.3.2 Idempotents et éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre $H(m,1,n)$ 130
III.3.3 Formule de fusion pour les idempotents de $H(m,1,n+1)$ 131
Appendice III.3.A Coefficient dans la formule de fusion 135
III.4 Forme normale et représentations induites des algèbres de Hecke cyclotomiques et affines de type A **138**
III.4.1 Forme normale pour le groupe $G(m,1,n)$ 138
III.4.1.1 Algorithme de Coxeter–Todd pour la chaîne des groupes $G(m,1,n)$. 139
III.4.1.2 Forme normale pour les éléments de $G(m,1,n)$. 140
III.4.2 Forme normale pour $H(m,1,n)$. Préparation 141
III.4.2.1 Un ensemble engendrant l'espace vectoriel de $H(m,1,n)$ 141
III.4.2.2 Construction d'un $H(m,1,n)$-module 143
III.4.3 Platitude de la déformation. Forme normale pour les éléments de $H(m,1,n)$ . . 146
III.4.3.1 Platitude de la déformation 146
III.4.3.2 Base de $H(m,1,n)$ 147
III.4.3.3 Représentations induites 148

III.4.3.4 Extension à l'algèbre de Hecke affine $\hat{H}_n$ 150
III.4.3.5 Autres bases similaires de $H(m,1,n)$ 151
III.4.4 Forme symétrisante sur l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$ 151

III.1 Introduction

Le premier but de ce Chapitre est de donner une procédure de fusion, dans l'esprit de [75], pour les algèbres de Hecke cyclotomiques $H(m,1,n)$ et les groupes de réflexions complexes $G(m,1,n)$. Comme dans [75], et plus tard dans [40, 41, 42, 43], nous utilisons les éléments de Jucys–Murphy. Ils ont été introduits pour l'algèbre $H(m,1,n)$ dans [4]. Dans le cas de $G(m,1,n)$ (la limite classique de $H(m,1,n)$), ils ont été introduits indépendamment dans [87] et [104]. Dans les deux situations (dégénérée et non-dégénérée), ils ont été utilisés dans le Chapitre précédent pour développer une approche inductive à la théorie des représentations de la chaîne d'algèbres $H(m,1,n)$ et de la chaîne de groupes $G(m,1,n)$. Les éléments de Jucys–Murphy de $H(m,1,n)$ forment une ligne J_i, $i=1,\dots,n$, tandis que les éléments de Jucys–Murphy de $G(m,1,n)$ forment deux lignes, j_i et $\tilde{j}_i$, $i=1,\dots,n$. Dans les deux cas, leur union est un ensemble commutatif maximal, de $H(m,1,n)$ ou de $\mathbb{C}G(m,1,n)$ [4, 87] (voir aussi Chapitre II).

Une représentation irréductible de $H(m,1,n)$ ou de $G(m,1,n)$ est codée par un m-uplet de partitions, et les éléments de la base semi-normale correspondent aux m-uplets de tableaux standards ; dans le cas du groupe $G(m,1,n)$, les valeurs propres de j_i contiennent l'information sur la "position" - la place d'un tableau dans le m-uplet - tandis que les valeurs propres de $\tilde{j}_i$ sont reliées aux contenus classiques des cases. Pour l'algèbre $H(m,1,n)$, ces deux informations sont contenues dans le spectre des éléments J_i. Dans le Chapitre II, Section II.6, les deux ensembles, j_i et $\tilde{j}_i$, $i=1,\dots,n$, apparaissent comme limites classiques d'expressions simples, impliquant le seul ensemble des éléments de Jucys–Murphy J_i, $i=1,\dots,n$, de l'algèbre $H(m,1,n)$. Par la maximalité, tous les éléments diagonaux matriciels de $H(m,1,n)$ (respectivement, de $\mathbb{C}G(m,1,n)$) peuvent être exprimés en termes des éléments de Jucys–Murphy J_i, $i=1,\dots,n$ (respectivement, j_i et $\tilde{j}_i$, $i=1,\dots,n$). Nous transformons cette expression en une procédure de fusion : toute unité matricelle diagonale peut être obtenue par une séquence d'évaluations d'une certaine fonction rationnelle à valeurs dans $H(m,1,n)$ (respectivement, dans $\mathbb{C}G(m,1,n)$). Notons que, dans le cas du groupe $G(m,1,n)$, les lignes j_i et $\tilde{j}_i$ jouent des rôles différents : les positions peuvent être évaluées simultanément tandis que les contenus doivent être évalués ensuite de 1 à n.

Le groupe $G(1,1,n)$ est isomorphe au groupe symétrique S_n, et notre procédure de fusion pour $m=1$ reproduit la procédure de fusion de [75]. Dans le cas non-dégénéré, l'algèbre $H(1,1,n)$ est isomorphe à l'algèbre de Hecke de type A, et notre procédure de fusion pour $m=1$ reproduit la procédure de fusion de [41].

Le groupe $G(2,1,n)$ est isomorphe au groupe hyperoctaédral B_n, le groupe de Coxeter de type B et l'algèbre $H(2,1,n)$ est isomorphe à l'algèbre de Hecke de type B. Ainsi, en particulier, nous obtenons une procédure de fusion pour le groupe de Coxeter de type B (respectivement, l'algèbre de Hecke de type B) et une description d'un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux deux à deux, en termes d'une seule fonction rationnelle à valeurs dans $\mathbb{C}\mathsf{B}_n$ (respectivement, dans l'algèbre de Hecke

de type B).

La procédure de fusion pour les groupes $G(m,1,n)$ peut être obtenue en prenant la limite classique de la procédure de fusion pour les algèbres $H(m,1,n)$. Néanmoins, nous préférons, dans le même esprit que le Chapitre précédent, présenter la situation classique des groupes $G(m,1,n)$ indépendamment de la présentation pour les algèbres $H(m,1,n)$.

De plus, pour la clarté de l'exposition, nous décrivons, dans le cas des groupes, la procédure de fusion pour le groupe de Coxeter B_n. Ce n'est pas seulement pour des raisons esthétiques : la fonction rationnelle à valeurs dans $\mathbb{C}\mathsf{B}_n$, menant à l'ensemble complet d'idempotents, peut être vue comme un mot pour l'élément le plus long de B_n, dans lequel certaines entrées sont "Baxterisées", de manière similaire à la fonction rationnelle pour le type A. Bien que $G(m,1,n)$ ne soit pas un groupe de Coxeter pour $m > 2$ et que donc la notion de longueur d'un élément ne soit pas définie, il existe un analogue d'un élément le plus long : il est le plus long par rapport à une certaine forme normale, qui sera présentée plus tard dans ce Chapitre ; la fonction rationnelle à valeurs dans $\mathbb{C}G(m,1,n)$, menant à l'ensemble complet d'idempotents, peut encore être vue comme un mot pour l'élément le plus long, avec certaines entrées Baxterisées. Dans le cas de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$, la situation est similaire : la fonction rationnelle à valeurs dans $H(m,1,n)$, menant à l'ensemble complet d'idempotents, peut être vue comme un mot pour l'élément le plus long d'une certaine base, présentée plus tard dans ce Chapitre, avec certaines entrées Baxterisées.

Nous soulignons que les algèbres $H(m,1,n)$ et les groupes $G(m,1,n)$ admettent une procédure de fusion pour tout entier positif m, et que notre construction est uniforme pour tout m. En particulier, pour tout m, le coefficient apparaissant devant les fonctions rationnelles, après la séquence d'évaluation, ne dépend pas du m-tableau standard, mais ne dépend que de la m-partition. Une autre façon de le dire est que ce coefficient ne dépend que de la représentation irréductible, et pas du vecteur de la base semi-normale considéré. Ce phénomène, connu pour $m = 1$ [41, 75], s'étend donc pour tout $m > 0$.

Au niveau des groupes, l'algorithme de Coxeter–Todd [22] (voir le Chapitre I, Section I.3) est une méthode puissante pour trouver une forme normale pour les éléments d'un groupe (par rapport à un sous-groupe donné). Pour une chaîne de groupes, l'algorithme de Coxeter–Todd fournit (récursivement) une forme normale globale pour les éléments du groupe. Dans ce Chapitre, nous appliquons l'algorithme de Coxeter–Todd à la chaîne, par rapport à n, des groupes $G(m,1,n)$. La forme normale qui en résulte est différente de celles obtenues dans [4, 8] ; comme dans [8], la forme normale présentée ici consiste en des expressions réduites en termes des générateurs standards de $G(m,1,n)$. De plus, elle admet une généralisation fournissant une forme normale pour les éléments de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$ (en d'autres mots, une base de $H(m,1,n)$). Ici encore, notre base est différente des bases données dans [4, 8] (notons qu'une base semblable est étudiée dans [64], mais cette étude s'appuie sur la base présentée dans [4], tandis que nous donnons ici une présentation indépendante).

L'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$ est une déformation de l'algèbre du groupe $G(m,1,n)$. La première application de notre base est qu'elle permet de prouver la platitude de la déformation (la platitude de la déformation a été prouvée dans [4] comme une conséquence de la théorie des représentations, après la classification des représentations irréductibles de $H(m,1,n)$). Notre preuve ne s'appuie pas sur la théorie des représentations ; elle est faite plus dans l'esprit des preuves classiques

pour les algèbres de Hecke (notons que pour le quotient cyclotomique de l'algèbre de Hecke dégénérée affine, une base similaire à celle de [4] est prouvée dans [59] sans utiliser la théorie des représentations).

La base présentée ici est bien adaptée à la structure de chaîne des algèbres $H(m,1,n)$; en particulier, les formules pour les représentations induites (de l'algèbre $H(m,1,n)$ à partir de l'algèbre $H(m,1,n-1)$) sont relativement faciles, et nous les écrivons explicitement. Une représentation de l'algèbre $H(m,1,n)$ induite à partir d'une représentation unidimensionnelle de l'algèbre $H(m,1,n-1)$ est un analogue naturel de la représentation de Burau.

De plus, la description de cette base est uniforme pour tout m, et elle s'étend naturellement en une base de l'algèbre de Hecke affine $\hat{H}_n$ de type A [1]. La preuve pour l'algèbre de Hecke affine est contenue dans la preuve pour les algèbres de Hecke cyclotomiques, et ne demande pas d'efforts supplémentaires.

Au cours de la construction de la base, le résultat de la multiplication (par la gauche) des éléments de base par les générateurs de $H(m,1,n)$ est obtenu. Il est aussi possible de donner une description explicite de la multiplication par la droite des éléments de base par les générateurs. Comme application de ces résultats, nous sommes capables de définir une forme linéaire sur l'algèbre $H(m,1,n)$, qui est donnée d'une façon simple sur les éléments de base, et de prouver que cette forme est centrale. Ces résultats fournissent une nouvelle description, indépendante, de la forme symétrisante sur l'algèbre de Hecke cyclotomique donnée dans [8] (voir aussi [69]). Ces résultats s'étendent immédiatement au cas de l'algèbre de Hecke affine de type A.

III.1.1 Organisation du chapitre

La Section III.2 contient la procédure de fusion pour les groupes $G(m,1,n)$. Nous rappelons tout d'abord la description des unités matricielles diagonales en termes des éléments de Jucys–Murphy de $\mathbb{C}G(m,1,n)$. Nous prouvons ensuite le Théorème III.2, qui donne la procédure de fusion pour le groupe B_n. Enfin, dans le Théorème III.6, nous étendons les résultats au cas général des groupes $G(m,1,n)$. Comme les preuves suivent principalement les mêmes lignes que dans le cas du groupe B_n, nous indiquons seulement les modifications nécessaires.

La Section III.3 contient la procédure de fusion pour les algèbres $H(m,1,n)$. Nous rappelons tout d'abord la description des unités matricielles diagonales (un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux deux à deux) en termes des éléments de Jucys–Murphy J_i, $i=1,\dots,n$. Nous prouvons ensuite le Théorème principal, Théorème III.9, qui donne la procédure de fusion pour les algèbres $H(m,1,n)$. Certains calculs techniques, concernant le coefficient apparaissant devant la fonction rationnelle, sont mis dans un Appendice à cette Section.

Dans la Section III.4, nous réalisons l'algorithme de Coxeter–Todd pour la chaîne (par rapport à n) des groupes $G(m,1,n)$. Nous établissons la forme normale résultante pour les éléments de $G(m,1,n)$.

La forme normale pour les éléments de $G(m,1,n)$ suggère une base pour l'algèbre $H(m,1,n)$. Nous montrons que c'est effectivement une base. Plusieurs faits connus sur la chaîne (par rapport à n) des algèbres $H(m,1,n)$ sont réétablis avec l'aide de cette base. Nous donnons aussi les formules pour les représentations induites.

1. Rappelons que, pour tout $m>0$, l'algèbre $H(m,1,n)$ est le quotient de l'algèbre de Hecke affine $\hat{H}_n$ par une équation caractéristique de degré m pour le générateur τ.

Nous terminons la Section en complétant l'information sur la multiplication par les générateurs des éléments de base de $H(m,1,n)$. Nous utilisons ces résultats pour donner, sur les éléments de base, une forme symétrisante de l'algèbre $H(m,1,n)$. Tous ces résultats sont étendus au cas de l'algèbre de Hecke affine de type A.

III.2 Procédure de fusion pour le groupe $G(m,1,n)$

III.2.1 Idempotents et éléments de Jucys–Murphy du groupe B_n

III.2.1.1 Définitions

Rappelons que le groupe de Coxeter A_n de type A (le groupe symétrique sur $n+1$ lettres) est engendré par les éléments $s_1,\dots,s_n$ avec les relations définissantes :

$$\begin{aligned} &s_i^2 = 1 && \text{pour } i=1,\dots,n,\\ &s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1} && \text{pour } i=1,\dots,n-1,\\ &s_is_j = s_js_i && \text{pour } i,j=1,\dots,n \text{ tels que } |i-j|>1. \end{aligned} \tag{III.2.1}$$

Le groupe de Coxeter B_{n+1} de type B (aussi appelé le groupe hyperoctaédral) est engendré par les éléments $s_1,\dots,s_n$ et t avec les relations définissantes (III.2.1), ainsi que

$$\begin{aligned} &ts_1ts_1 = s_1ts_1t,\\ &s_it = ts_i \qquad \text{pour } i=2,\dots,n \end{aligned} \tag{III.2.2}$$

et

$$t^2 = 1. \tag{III.2.3}$$

Pour tout $i=1,\dots,n$, posons

$$\mathbf{s}_i(p,p',a,a') := s_i + \frac{\delta_{p,p'}}{a-a'}, \tag{III.2.4}$$

où $\delta_{p,p'}$ est le delta de Kronecker. Pour $p=p'$, les éléments (III.2.4) sont appelés éléments Baxterisés ; les paramètres a et a' sont appelés les paramètres spectraux. Nous définissons aussi

$$\mathbf{t}(p) := \frac{1}{2}(1+pt). \tag{III.2.5}$$

La relation suivante est satisfaite, et sera utilisée plus tard :

$$\mathbf{s}_i(p,p',a,a')\mathbf{s}_i(p',p,a',a) = \frac{(a-a')^2-\delta_{p,p'}}{(a-a')^2} \quad \text{pour } i=1,\dots,n. \tag{III.2.6}$$

Rappelons que les éléments j_i, $i=1,\dots,n+1$, et $\tilde{j}_i$, $i=1,\dots,n+1$, de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}\mathsf{B}_{\mathsf{n+1}}$ sont définis par les conditions initiales et récursions suivantes :

$$j_1 = t\ , \quad j_{i+1} = s_ij_is_i \quad \text{et} \quad \tilde{j}_1 = 0\ , \quad \tilde{j}_{i+1} = s_i\tilde{j}_is_i + \frac{1}{2}(s_i + j_is_ij_i). \tag{III.2.7}$$

Les éléments j_i et $\tilde{j}_i$ sont les analogues, pour le groupe B_{n+1}, des éléments de Jucys–Murphy. Nous avons montré dans le Chapitre II, Section II.6, que les éléments j_i, $i = 1, \ldots, n+1$, et $\tilde{j}_i$, $i = 1, \ldots, n+1$, forment un ensemble commutatif maximal dans $\mathbb{C}\mathsf{B}_{n+1}$ (voir aussi [87, 88]), et que de plus, j_i et $\tilde{j}_i$ commutent avec tous les générateurs s_k, exceptés s_i et s_{i-1} :

$$j_i s_k = s_k j_i \text{ et } \tilde{j}_i s_k = s_k \tilde{j}_i \quad \text{si } k \neq i-1, i. \tag{III.2.8}$$

Nous renvoyons au Chapitre I, Appendice I.2.A pour les définitions de partitions et de diagrammes de Young, et au paragraphe **6** de la Section II.3, Chapitre II, pour les définitions concernant les m-cases, les m-partitions et les m-tableaux.

Rappelons seulement que pour une m-case $\alpha^{(m)} = (\alpha, k)$ située dans la ligne x et la colonne y du k-ème diagramme, nous notons $cc(\alpha^{(m)})$ le contenu classique de la case α, $cc(\alpha^{(m)}) := cc(\alpha) = y - x$. Soit $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ l'ensemble des racines m-ème de l'unité distinctes deux à deux, ordonné arbitrairement ; nous définissons alors $p(\alpha^{(m)}) := \xi_k$.

Pour un m-tableau standard $\mathcal{T}$ de forme $\lambda^{(m)}$, soit $\alpha_i^{(m)}$ la m-case de $\mathcal{T}$ avec le nombre i, $i = 1, \ldots, n+1$; nous posons $cc(\mathcal{T}|i) := cc(\alpha_i^{(m)})$ et $p(\mathcal{T}|i) := p(\alpha_i^{(m)})$.

Rappelons que le crochet d'une case α d'une partition ν est l'ensemble des cases de ν, qui consiste en la case α et en les cases qui se trouvent soit sous α dans la même colonne, soit à la droite de α dans la même ligne ; la longueur de crochet $h_\nu(\alpha)$ de α est le cardinal du crochet de α. Nous étendons cette définition aux m-cases. Pour une m-case $\alpha^{(m)} = (\alpha, k)$ d'une m-partition $\nu^{(m)}$, la longueur de crochet de $\alpha^{(m)}$ dans $\nu^{(m)}$, notée $h_{\nu^{(m)}}(\alpha^{(m)})$, est la longueur de crochet de α dans la k-ème partition de $\nu^{(m)}$. Définissons, pour la suite,

$$f_{\nu^{(m)}} := \Big(\prod_{\alpha^{(m)} \in \nu^{(m)}} h_{\nu^{(m)}}(\alpha^{(m)}) \Big)^{-1}. \tag{III.2.9}$$

III.2.1.2 Idempotents du groupe B_{n+1}

La théorie des représentations des groupes de Coxeter de type B a été développée par A. Young [106], voir aussi [67, 97] ou le Chapitre II, Section II.6. Les représentations irréductibles de B_{n+1} sont en bijection avec les 2-partitions de taille $n+1$. Les éléments de la base semi-normale de la représentation irréductible de B_{n+1} correspondant à la 2-partition $\lambda^{(2)}$ sont paramétrisés par les 2-tableaux standards de forme $\lambda^{(2)}$. Pour un 2-tableau standard $\mathcal{T}$, nous notons $E_{\mathcal{T}}$ l'idempotent primitif de B_{n+1} correspondant à $\mathcal{T}$ (voir Chapitre I, Sous-Section I.1.4 pour la définition des idempotents primitifs associés aux vecteurs de base [2]). Les éléments de Jucys–Murphy sont diagonaux dans la base semi-normale ; de plus, nous avons, pour tout $i = 1, \ldots, n+1$,

$$j_i E_{\mathcal{T}} = E_{\mathcal{T}} j_i = p_i E_{\mathcal{T}} \quad \text{et} \quad \tilde{j}_i E_{\mathcal{T}} = E_{\mathcal{T}} \tilde{j}_i = cc_i E_{\mathcal{T}} \ , \tag{III.2.10}$$

où $p_i := p(\mathcal{T}|i)$ et $cc_i := cc(\mathcal{T}|i)$ pour $i = 1, \ldots, n+1$. Grâce à la maximalité de l'ensemble commutatif $\{j_i, \tilde{j}_i\}_{i=1,\ldots,n+1}$ des éléments de Jucys–Murphy, l'idempotent $E_{\mathcal{T}}$ peut être exprimé en termes de $j_i, \tilde{j}_i$, $i = 1, \ldots, n+1$ (voir Remarque à la fin de la Sous-Section II.6.6, Chapitre II). Soit $\alpha^{(2)}$ la 2-case de $\mathcal{T}$

2. Le point de vue multi-matriciel expliqué là-bas permet de visualiser aisément les formules (III.2.10)–(III.2.12)

contenant le nombre $n+1$. Comme le 2-tableau $\mathcal{T}$ est standard, la 2-case $\alpha^{(2)}$ de $\lambda^{(2)}$ est supprimable. Soit $\mathcal{U}$ le 2-tableau standard obtenu à partir de $\mathcal{T}$ en supprimant la 2-case $\alpha^{(2)}$, et soit $\mu^{(2)}$ la forme de $\mathcal{U}$. La formule inductive pour $E_{\mathcal{T}}$ en termes des éléments de Jucys–Murphy est :

$$E_{\mathcal{T}} = E_{\mathcal{U}} \prod_{\substack{\beta^{(2)}\in\mathcal{E}_+(\mu^{(2)}) \\ cc(\beta^{(2)})\neq cc(\alpha^{(2)})}} \frac{\tilde{j}_{n+1} - cc(\beta^{(2)})}{cc(\alpha^{(2)}) - cc(\beta^{(2)})} \prod_{\substack{\beta^{(2)}\in\mathcal{E}_+(\mu^{(2)}) \\ p(\beta^{(2)})\neq p(\alpha^{(2)})}} \frac{j_{n+1} - p(\beta^{(2)})}{p(\alpha^{(2)}) - p(\beta^{(2)})} \ , \tag{III.2.11}$$

où nous rappelons que $\mathcal{E}_+(\mu^{(2)})$ est l'ensemble des 2-cases ajoutables de $\mu^{(2)}$. Notons que le second produit dans la partie droite de (III.2.11) ne contient qu'un seul terme (cela ne sera plus le cas pour les groupes $G(m,1,n)$ avec $m>2$). Nous avons $\mathsf{B}_0 \cong \mathbb{C}$ et $E_{\mathcal{U}_0} = 1$ pour l'unique 2-tableau $\mathcal{U}_0$ de taille 0.

Soit $\{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_k\}$ l'ensemble des 2-tableaux standards différents deux à deux qui peuvent être obtenus à partir de $\mathcal{U}$ en ajoutant une 2-case avec le nombre $n+1$. La formule suivante :

$$E_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{k} E_{\mathcal{T}_i}, \tag{III.2.12}$$

avec (III.2.10), implique que la fonction rationnelle

$$E_{\mathcal{U}} \ \frac{u - cc_{n+1}}{u - \tilde{j}_{n+1}} \ \frac{v - p_{n+1}}{v - j_{n+1}}$$

est non-singulière en $u = cc_{n+1}$ et $v = p_{n+1}$, et, de plus,

$$E_{\mathcal{U}} \ \frac{u - cc_{n+1}}{u - \tilde{j}_{n+1}} \ \frac{v - p_{n+1}}{v - j_{n+1}} \Big|_{\substack{u\,=\,cc_{n+1} \\ v\,=\,p_{n+1}}} = E_{\mathcal{T}} \ . \tag{III.2.13}$$

Comme j_{n+1} prend, dans toutes les représentations, les valeurs ± 1, la fonction rationnelle $\frac{v-p_{n+1}}{v-j_{n+1}}$ est non-singulière en $v = p_{n+1}$ et

$$\frac{v - p_{n+1}}{v - j_{n+1}}\Big|_{v=p_{n+1}} = \frac{1}{2}(1 + p_{n+1}j_{n+1}) \ . \tag{III.2.14}$$

Pour la clarté des calculs qui vont suivre, nous définissons, généralisant (III.2.5),

$$\mathbf{j}_i(p) := \frac{1}{2}(1 + pj_i) \ \text{ pour } i = 1, \ldots, n+1. \tag{III.2.15}$$

En combinant (III.2.13) et (III.2.14), nous obtenons la formule suivante pour l'idempotent $E_{\mathcal{T}}$:

$$E_{\mathcal{T}} = E_{\mathcal{U}} \ \mathbf{j}_{n+1}(p_{n+1}) \ \frac{u - cc_{n+1}}{u - \tilde{j}_{n+1}}\Big|_{u=cc_{n+1}} . \tag{III.2.16}$$

III.2.2 Formule de fusion pour les idempotents de B_{n+1}

Nous commençons par le Lemme suivant qui sera utile par la suite.

Lemme III.1. *Pour tout entier l, $1 \leqslant l \leqslant n$, nous avons*

(i) $\tilde{j}_{n+1} = s_n s_{n-1} \dots s_l \tilde{j}_l s_l \dots s_{n-1} s_n + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=l}^{n} s_n \dots s_{i+1} s_i s_{i+1} \dots s_n (1 + j_{n+1} j_i)$,

(ii) $\mathbf{j}_l(p) s_l \dots s_{n-1} s_n \tilde{j}_{n+1} = \mathbf{j}_l(p) \tilde{j}_l s_l \dots s_{n-1} s_n + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=l}^{n} s_l s_{l+1} \dots s_{i-1} \cdot s_{i+1} \dots s_{n-1} s_n \mathbf{j}_i(p)(1 + j_{n+1} j_i)$;

le produit $s_l s_{l+1} \dots s_{i-1}$ dans la partie droite de (ii) est compris comme égal à 1 si $i = l$.

Preuve. Nous prouvons (i) par récurrence sur $n - l$. La base de la récurrence est, pour $l = n$, la formule $\tilde{j}_{n+1} = s_n \tilde{j}_n s_n + \frac{1}{2}(s_n + s_n j_{n+1} j_n)$, qui vient de la définition (III.2.7) des éléments de Jucys–Murphy, à savoir $\tilde{j}_{n+1} = s_n \tilde{j}_n s_n + \frac{1}{2}(s_n + j_n s_n j_n)$ et $j_n s_n = s_n j_{n+1}$. Maintenant, supposons que

$$\tilde{j}_{n+1} = s_n s_{n-1} \dots s_{l+1} \tilde{j}_{l+1} s_{l+1} \dots s_{n-1} s_n + \frac{1}{2} \sum_{i=l+1}^{n} s_n \dots s_{i+1} s_i s_{i+1} \dots s_n (1 + j_{n+1} j_i),$$

et remplaçons $\tilde{j}_{l+1}$ par $s_l \tilde{j}_l s_l + \frac{1}{2}(s_l + j_l s_l j_l)$. On obtient l'assertion (i) en utilisant que $j_l s_{l+1} \dots s_{n-1} s_n = s_{l+1} \dots s_{n-1} s_n j_l$ et que $j_l s_l s_{l+1} \dots s_{n-1} s_n = s_l s_{l+1} \dots s_{n-1} s_n j_{n+1}$.

Utilisant (i), nous trouvons que

$$\mathbf{j}_l(p) s_l \dots s_{n-1} s_n \tilde{j}_{n+1} = \mathbf{j}_l(p) \Big(\tilde{j}_l s_l \dots s_{n-1} s_n + \frac{1}{2} \sum_{i=l}^{n} s_l s_{l+1} \dots s_{i-1} \cdot s_{i+1} \dots s_{n-1} s_n (1 + j_{n+1} j_i) \Big),$$

et (ii) suit car $j_l s_l s_{l+1} \dots s_{i-1} = s_l s_{l+1} \dots s_{i-1} j_i$ et j_i commute avec $s_{i+1} \dots s_{n-1} s_n$. □

Pour tout entier $k = 1, \dots, n+1$ et tout 2-tableau standard $\mathcal{T}$ de forme $\lambda^{(2)}_{\mathcal{T}}$ avec $|\lambda^{(2)}_{\mathcal{T}}| = k$, définissons

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}(u) := \frac{u - cc(\mathcal{T}|k)}{u} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(u - cc(\mathcal{T}|i))^2}{(u - cc(\mathcal{T}|i))^2 - \delta_{p(\mathcal{T}|i), p(\mathcal{T}|k)}} \ . \tag{III.2.17}$$

par convention, pour $k = 1$, le produit dans la partie droite ci-dessus est égal à 1.

Soit $\phi_1(v, u) := \mathbf{t}(v)$; pour $k = 1, \dots, n$, définissons

$$\begin{aligned} \phi_{k+1}(v_1, \dots, v_k, v, u_1, \dots, u_k, u) &:= \mathbf{s}_k(v, v_k, u, u_k) \phi_k(v_1, \dots, v_{k-1}, v, u_1, \dots, u_{k-1}, u) s_k \\ &= \mathbf{s}_k(v, v_k, u, u_k) \mathbf{s}_{k-1}(v, v_{k-1}, u, u_{k-1}) \dots \mathbf{s}_1(v, v_1, u, u_1) \mathbf{t}(v) s_1 \dots s_{k-1} s_k \ . \end{aligned} \tag{III.2.18}$$

Définissons la fonction rationnelle suivante, à valeurs dans l'algèbre du groupe B_{n+1} :

$$\Phi(v_1, \dots, v_{n+1}, u_1, \dots, u_{n+1}) := \overleftarrow{\prod_{k=0,\dots,n}} \phi_{k+1}(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) \ ; \tag{III.2.19}$$

la flèche sur $\prod$ indique que les facteurs sont pris, de gauche à droite, dans l'ordre décroissant (sur k).

Soit $\lambda^{(2)}$ une 2-partition de taille $n+1$ et $\mathcal{T}$ un 2-tableau standard de forme $\lambda^{(2)}$. Pour $i = 1, \dots, n+1$, posons $p_i := p(\mathcal{T}|i)$ et $cc_i := cc(\mathcal{T}|i)$.

Théorème III.2. *L'idempotent $E_{\mathcal{T}}$ correspondant au 2-tableau standard $\mathcal{T}$ de forme $\lambda^{(2)}$ peut être obtenu par les évaluations consécutives suivantes*

$$E_{\mathcal{T}} = f_{\lambda^{(2)}}\Phi(v_1,\dots,v_{n+1},u_1,\dots,u_{n+1})\Big|_{v_i=p_i,\ i=1,\dots,n+1}\Big|_{u_1=cc_1}\dots\Big|_{u_n=cc_n}\Big|_{u_{n+1}=cc_{n+1}}. \tag{III.2.20}$$

Preuve. Soit $\mathcal{U}$ le 2-tableau standard obtenu à partir de $\mathcal{T}$ en enlevant la 2-case avec le nombre $n+1$, et soit $\mu^{(2)}$ la forme de $\mathcal{U}$.

Proposition III.3. *Nous avons*

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}(u)\phi_{n+1}(p_1,\dots,p_n,p_{n+1},cc_1,\dots,cc_n,u)E_{\mathcal{U}} = \frac{u-cc_{n+1}}{u-\tilde{j}_{n+1}}\,\mathbf{j}_{n+1}(p_{n+1})E_{\mathcal{U}}. \tag{III.2.21}$$

Preuve. Nous prouvons (III.2.21) par récurrence sur n. Comme $cc_1 = 0$ et $\tilde{j}_1 = 0$, la base de la récurrence pour $n = 0$ est la formule $\mathbf{t}(p_1) = \mathbf{j}_1(p_1)$, qui est satisfaite par définition, voir (III.2.5) et (III.2.15).

Si $p_{n+1} \neq p_i$, $i = 2,\dots,n$, alors fixons $l = 1$. Sinon, fixons l tel que $p_{n+1} = p_l$ et $p_{n+1} \neq p_i$, $i = l+1,\dots,n$.

Notons $\mathcal{V}$ le 2-tableau standard obtenu à partir de $\mathcal{U}$ en supprimant les 2-cases contenant les nombres $l+1,\dots,n$, et notons $\mathcal{W}$ le 2-tableau standard obtenu à partir de $\mathcal{V}$ en supprimant la 2-case avec le nombre l. Nous allons utiliser que $E_{\mathcal{W}}E_{\mathcal{U}} = E_{\mathcal{U}}$, et que $E_{\mathcal{W}}$ commute avec s_i, pour $i = l, l+1,\dots,n$. Récrivons la partie gauche de (III.2.21) comme

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}(u)s_n\dots s_{l+1}\mathbf{s}_l(p_{n+1},p_l,u,cc_l)\cdot\phi_l(p_1,\dots,p_{l-1},p_{n+1},cc_1,\dots,cc_{l-1},u)E_{\mathcal{W}}\cdot s_l s_{l+1}\dots s_n E_{\mathcal{U}}\ .$$

Si $l > 1$, alors nous utilisons l'hypothèse de récurrence, à savoir

$$\phi_l(p_1,\dots,p_{l-1},p_l,cc_1,\dots,cc_{l-1},u)E_{\mathcal{W}} = (\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(u))^{-1}\frac{u-cc_l}{u-\tilde{j}_l}\mathbf{j}_l(p_l)E_{\mathcal{W}}\ ,$$

et remarquons que $p_{n+1} = p_l$.
Si $l = 1$, alors $E_{\mathcal{W}} = 1$, $\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(u) = 1$ et, par définition, $\phi_1(p_{n+1},u)$ est égal à $\mathbf{j}_1(p_{n+1})$. Ainsi, dans les deux cas (pour $l = 1$ et pour $l > 1$), nous obtenons pour la partie gauche de (III.2.21) :

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}(u)(\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(u))^{-1}s_n\dots s_{l+1}\mathbf{s}_l(p_{n+1},p_l,u,cc_l)\frac{u-cc_l}{u-\tilde{j}_l}\mathbf{j}_l(p_{n+1})s_l s_{l+1}\dots s_n E_{\mathcal{U}}\ .$$

Ainsi, l'égalité (III.2.21) est équivalente à

$$\begin{aligned}&\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}(u)(\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(u))^{-1}(u-cc_l)\mathbf{j}_l(p_{n+1})s_l s_{l+1}\dots s_n(u-\tilde{j}_{n+1})E_{\mathcal{U}}\\ &\quad=\frac{(u-cc_{n+1})(u-cc_l)^2}{(u-cc_l)^2-\delta_{p_l,p_{n+1}}}(u-\tilde{j}_l)\mathbf{s}_l(p_l,p_{n+1},cc_l,u)s_{l+1}\dots s_n\mathbf{j}_{n+1}(p_{n+1})E_{\mathcal{U}},\end{aligned} \tag{III.2.22}$$

où, en envoyant $s_n\dots s_{l+1}\mathbf{s}_l(p_{n+1},p_l,u,cc_l)\dfrac{1}{u-\tilde{j}_l}$ dans la partie droite et $\dfrac{1}{u-\tilde{j}_{n+1}}$ dans la partie gauche, nous avons utilisé que $\tilde{j}_{n+1}$ commute avec j_{n+1} et $E_{\mathcal{U}}$, et également la formule (III.2.6) pour prendre l'inverse de $\mathbf{s}_l(p_{n+1},p_l,u,cc_l)$.

Pour prouver l'égalité (III.2.22), notons tout d'abord que nous avons

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}(u)(\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(u))^{-1}(u-cc_l) = (u-cc_{n+1})\prod_{i=1}^{n}\frac{(u-cc_i)^2}{(u-cc_i)^2-\delta_{p_i,p_{n+1}}}\prod_{i=1}^{l-1}\left(\frac{(u-cc_i)^2}{(u-cc_i)^2-\delta_{p_i,p_l}}\right)^{-1},$$

ce qui donne, comme $p_i \neq p_{n+1}$ si $i > l$ et $p_l = p_{n+1}$ si $l > 1$,

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}(u)(\mathfrak{F}_{\mathcal{V}}(u))^{-1}(u-cc_l) = \frac{(u-cc_{n+1})(u-cc_l)^2}{(u-cc_l)^2-\delta_{p_l,p_{n+1}}}. \tag{III.2.23}$$

Donc, il nous reste à prouver que

$$\mathbf{j}_l(p_{n+1})s_l s_{l+1}\dots s_n(u-\tilde{j}_{n+1})E_{\mathcal{U}} = (u-\tilde{j}_l)\mathbf{s}_l(p_l,p_{n+1},cc_l,u)s_{l+1}\dots s_n\mathbf{j}_{n+1}(p_{n+1})E_{\mathcal{U}}. \tag{III.2.24}$$

Dans la partie droite de (III.2.24), développons $\mathbf{s}_l(p_l,p_{n+1},cc_l,u)$:

$$((u-\tilde{j}_l)s_l - \delta_{p_l,p_{n+1}}\frac{\tilde{j}_l-u}{cc_l-u})s_{l+1}\dots s_n\mathbf{j}_{n+1}(p_{n+1})E_{\mathcal{U}}\ . \tag{III.2.25}$$

Comme $\tilde{j}_l$ commute avec $s_{l+1}\dots s_n$ et j_{n+1}, et comme $\tilde{j}_l E_{\mathcal{U}} = cc_l E_{\mathcal{U}}$, nous trouvons que l'expression (III.2.25) est égale à

$$\Big((u-\tilde{j}_l)s_l s_{l+1}\dots s_n\mathbf{j}_{n+1}(p_{n+1}) - \delta_{p_l,p_{n+1}}s_{l+1}\dots s_n\mathbf{j}_{n+1}(p_{n+1})\Big)E_{\mathcal{U}}\ .$$

Ensuite, en utilisant que $s_l s_{l+1}\dots s_n j_{n+1} = j_l s_l s_{l+1}\dots s_n$, nous obtenons pour la partie droite de (III.2.24) :

$$((u-\tilde{j}_l)\mathbf{j}_l(p_{n+1})s_l s_{l+1}\dots s_n - \delta_{p_l,p_{n+1}}s_{l+1}\dots s_n\mathbf{j}_{n+1}(p_{n+1}))E_{\mathcal{U}}. \tag{III.2.26}$$

En utilisant le Lemme III.1, (ii), nous écrivons la partie gauche de (III.2.24) sour la forme

$$\Big(\mathbf{j}_l(p_{n+1})(u-\tilde{j}_l)s_l s_{l+1}\dots s_n - \frac{1}{2}\sum_{i=l}^{n}s_l s_{l+1}\dots s_{i-1}\cdot s_{i+1}\dots s_{n-1}s_n\mathbf{j}_i(p_{n+1})(1+j_{n+1}j_i)\Big)E_{\mathcal{U}}\ . \tag{III.2.27}$$

Comme $j_i E_{\mathcal{U}} = p_i E_{\mathcal{U}}$, $i = 1,\dots,n$, l'expression (III.2.27) est égale à

$$\Big(\mathbf{j}_l(p_{n+1})(u-\tilde{j}_l)s_l s_{l+1}\dots s_n - \frac{1}{2}\sum_{i=l}^{n}s_l s_{l+1}\dots s_{i-1}\cdot s_{i+1}\dots s_{n-1}s_n\frac{1}{2}(1+p_i p_{n+1})(1+p_i j_{n+1})\Big)E_{\mathcal{U}}\ . \tag{III.2.28}$$

En utilisant que $p_k p_{n+1} = -1$, $k = l+1,\dots,n$, nous obtenons finalement pour la partie gauche de (III.2.24) :

$$\Big(\mathbf{j}_l(p_{n+1})(u-\tilde{j}_l)s_l s_{l+1}\dots s_n - \delta_{p_l,p_{n+1}}s_{l+1}\dots s_{n-1}s_n\mathbf{j}_{n+1}(p_l))E_{\mathcal{U}}\ . \tag{III.2.29}$$

La comparaison de (III.2.29) et (III.2.26) prouve l'égalité (III.2.24). □

Proposition III.4. *La fonction rationnelle $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}(u)$, définie par (III.2.17), est régulière en $u = cc_{n+1}$, et de plus*

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}(cc_{n+1}) = f_{\lambda^{(2)}}(f_{\mu^{(2)}})^{-1}. \tag{III.2.30}$$

Preuve. La Proposition va suivre directement du résultat, utilisé dans [75], concernant les tableaux usuels. Nous donnons juste les grandes lignes de la preuve du résultat connu concernant les tableaux usuels (voir la preuve de la Proposition III.11 de la Section suivante pour une preuve détaillée dans le cas de l'algèbre de Hecke).

Soit λ une partition de taille $n'+1$, avec $n' \leq n$. Soit S un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n+1\}$ tel que S contienne le nombre $n+1$, et ait un cardinal égal à $n'+1$. Soit $\tilde{\mathcal{T}}$ un tableau de forme λ rempli avec les nombres appartenant à S, tel que les nombres dans les cases soient en ordre strictement croissant le long des lignes de gauche à droite, et le long des colonnes de haut en bas. Soit γ la case de $\tilde{\mathcal{T}}$ avec le nombre $n+1$ et μ la forme du tableau obtenu à partir de $\tilde{\mathcal{T}}$ en supprimant la case γ. Définissons la fonction rationelle suivante

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{\tilde{\mathcal{T}}}(u) = \frac{u - cc(\gamma)}{u} \prod_{\alpha \in \mu} \frac{(u - cc(\alpha))^2}{(u - cc(\alpha) + 1)(u - cc(\alpha) - 1)}. \tag{III.2.31}$$

Le produit dans la partie droite de (III.2.31) dépend seulement de la partition μ, et on a

$$\prod_{\alpha \in \mu} \frac{(u - cc(\alpha))^2}{(u - cc(\alpha) + 1)(u - cc(\alpha) - 1)} = u \prod_{\beta \in \mathcal{E}_-(\mu)} (u - cc(\beta)) \prod_{\alpha \in \mathcal{E}_+(\mu)} (u - cc(\alpha))^{-1} ,$$

où $\mathcal{E}_-(\mu)$ (respectivement, $\mathcal{E}_+(\mu)$) est l'ensemble des cases supprimables (respectivement, ajoutables) de μ. Ainsi, la fonction rationnelle $\tilde{\mathfrak{F}}_{\tilde{\mathcal{T}}}(u)$ est régulière en $u = cc(\gamma)$, et de plus

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{\tilde{\mathcal{T}}}(cc(\gamma)) = \prod_{\beta \in \mathcal{E}_-(\mu)} (cc(\gamma) - cc(\beta)) \prod_{\alpha \in \mathcal{E}_+(\mu) \setminus \{\gamma\}} (cc(\gamma) - cc(\alpha))^{-1} . \tag{III.2.32}$$

Il est connu que la partie droite de (III.2.32) est égale à

$$\prod_{\alpha \in \lambda} (h_\lambda(\alpha))^{-1} \prod_{\alpha \in \mu} h_\mu(\alpha). \tag{III.2.33}$$

Définissons $\tilde{\mathcal{T}}$ le tableau du 2-tableau standard $\mathcal{T}$, qui contient la case avec le nombre $n+1$. L'assertion de la Proposition III.4 provient des résultats ci-dessus, la seule observation que l'on doit faire est que les 2-cases (α, k) avec $p_k \neq p_{n+1}$ ne contribuent pas à (III.2.30). □

Le Théorème III.2 vient, par récurrence sur n, de la formule (III.2.16), et des Propositions III.3 et III.4. □

III.2.3 Procédure de fusion pour le groupe de réflexions complexe $G(m, 1, n+1)$

Nous étendons les résultats de la Sous-Section précédente aux groupes de réflexions complexes $G(m, 1, n+1)$ pour tout entier positif m. Nous sautons les preuves quand elles sont complètement similaires aux preuves de la Sous-Section précédente ; nous indiquons seulement les modifications.

III.2.3.1 Définitions

Rappelons que le groupe de réflexions complexe $G(m,1,n+1)$ est engendré par les éléments $s_1,\dots,s_n$ et t avec les relations définissantes (III.2.1), (III.2.2) et

$$t^m = 1. \tag{III.2.34}$$

En particulier, $G(1,1,n+1)$ est isomorphe au groupe symétrique S_{n+1} et $G(2,1,n+1)$ est isomorphe à B_{n+1}.

Nous étendons la définition (III.2.4) aux générateurs $s_1,\dots,s_n$ de $G(m,1,n+1)$:

$$\mathbf{s}_i(p,p',a,a') := s_i + \frac{\delta_{p,p'}}{a-a'}, \quad i=1,\dots,n\ . \tag{III.2.35}$$

Remarque. Pour les générateurs $s_1,\dots,s_n$ du groupe symétrique (voir (III.2.1)), la forme Baxterisée usuelle est la suivante :

$$s_i(a,a') := s_i + \frac{1}{a-a'}\ .$$

Ces éléments vérifient l'équation de Yang–Baxter avec paramètres spectraux (voir Chapitre II, Sous-Section II.6.5) :

$$s_i(a,a')s_{i+1}(a,a'')s_i(a',a'') = s_{i+1}(a',a'')s_i(a,a'')s_{i+1}(a,a')\ .$$

La définition (III.2.35) est une généralisation, pour le groupe $G(m,1,n)$, de la forme Baxterisée. En effet, on peut vérifier que les éléments $\mathbf{s}_i(p,p',a,a')$ vérifient, pour $i=1,\dots,n-1$, la relation :

$$\mathbf{s}_i(p,p',a,a')\mathbf{s}_{i+1}(p,p'',a,a'')\mathbf{s}_i(p',p'',a',a'') = \mathbf{s}_{i+1}(p',p'',a',a'')\mathbf{s}_i(p,p'',a,a'')\mathbf{s}_{i+1}(p,p',a,a')\ .$$

Les éléments de Jucys–Murphy pour le groupe $G(m,1,n+1)$ sont les éléments j_i, $i=1,\dots,n+1$, et $\tilde{j}_i$, $i=1,\dots,n+1$, de l'algèbre du groupe définis de façon inductive par les conditions initiales et récursions suivantes :

$$j_1 = t\ , \quad j_{i+1} = s_i j_i s_i \quad \text{et} \quad \tilde{j}_1 = 0\ , \quad \tilde{j}_{i+1} = s_i\tilde{j}_i s_i + \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} j_i^k s_i j_i^{m-k}. \tag{III.2.36}$$

Pour $m=1$, c'est-à-dire, pour S_{n+1}, $j_k=1$, $k=1,\dots,n+1$; la formule de récursion pour $\tilde{j}_{i+1}$ se réduit à $\tilde{j}_{i+1} = s_i\tilde{j}_i s_i + s_i$.

Comme pour $m=2$, les éléments j_i, $i=1,\dots,n+1$, et $\tilde{j}_i$, $i=1,\dots,n+1$, forment un ensemble commutatif maximal dans $\mathbb{C}G(m,1,n+1)$, voir [87] ou Chapitre II, Section II.6 ; de plus, j_i et $\tilde{j}_i$ commutent avec tous les générateurs s_k, exceptés s_i et s_{i-1}.

Les représentations irréductibles de $G(m,1,n+1)$ sont paramétrisées par les m-partitions de taille $n+1$; pour une m-partition $\lambda^{(m)}$ donnée, les éléments de la base semi-normale de la représentation correspondante sont indexés par les m-tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$. Nous notons $E_{\mathcal{T}}$ l'idempotent de l'algèbre de groupe correspondant au m-tableau standard $\mathcal{T}$.

III.2.3.2 Formule de fusion pour les idempotents de $G(m,1,n+1)$

Soit $\lambda^{(m)}$ une m-partition de taille $n+1$; fixons un m-tableau standard $\mathcal{T}$ de forme $\lambda^{(m)}$. Soit $\mathcal{U}$ le m-tableau standard obtenu en supprimant de $\mathcal{T}$ la m-case contenant $n+1$, et soit $\mu^{(m)}$ la forme de $\mathcal{U}$. Posons, pour $i=1,\dots,n+1$, $p_i := p(\mathcal{T}|i)$ et $cc_i := cc(\mathcal{T}|i)$

Le même raisonnement que dans la Sous-Section III.2.1.2 mène à la formule suivante pour $E_{\mathcal{T}}$ (cf (III.2.13)) :

$$E_{\mathcal{U}}\ \frac{u-cc_{n+1}}{u-\tilde{j}_{n+1}}\ \frac{v-p_{n+1}}{v-j_{n+1}}\Big|_{\substack{u\,=\,cc_{n+1}\\ v\,=\,p_{n+1}}} = E_{\mathcal{T}}\ . \tag{III.2.37}$$

Comme j_{n+1} prend, dans toutes les représentations, ses valeurs parmi $\{\xi_1,\dots,\xi_m\}$ (les racines m-ème de l'unité distinctes deux à deux), la fonction rationnelle $\dfrac{v-p_{n+1}}{v-j_{n+1}}$ est non-singulière en $v=p_{n+1}$, et

$$\frac{v-p_{n+1}}{v-j_{n+1}}\Big|_{v=p_{n+1}} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} p_{n+1}^{m-k} j_{n+1}^{k}\ . \tag{III.2.38}$$

Cela vient de la formule $\dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\xi_i^{m-k}\xi_j^k = \delta_{i,j}$ pour $i,j=1,\dots,m$.

Un analogue de (III.2.15) est

$$\mathbf{j}_i(p) := \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} p^{m-k} j_i^k \quad \text{pour } i=1,\dots,n+1. \tag{III.2.39}$$

Pour $i=1$, nous écrirons $\mathbf{t}(p) := \frac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1} p^{m-k}t^k$ au lieu de $\mathbf{j}_1(p)$. Combinant (III.2.37) et (III.2.38), nous obtenons pour l'idempotent $E_{\mathcal{T}}$ (cf (III.2.16))

$$E_{\mathcal{T}} = E_{\mathcal{U}}\ \mathbf{j}_{n+1}(p_{n+1})\ \frac{u-cc_{n+1}}{u-\tilde{j}_{n+1}}\Big|_{u=cc_{n+1}}\ . \tag{III.2.40}$$

Nous généralisons le Lemme III.1 pour tout entier positif arbitraire m.

Lemme III.5. *Pour tout entier l, $1\leqslant l\leqslant n$, nous avons*

(i) $\tilde{j}_{n+1} = s_n s_{n-1}\dots s_l\tilde{j}_l s_l\dots s_{n-1}s_n + \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=l}^{n} s_n\dots s_{i+1}s_i s_{i+1}\dots s_n \sum\limits_{k=0}^{m-1} j_{n+1}^k j_i^{m-k}$.

(ii) $\mathbf{j}_l(p)s_l\dots s_{n-1}s_n\tilde{j}_{n+1} = \mathbf{j}_l(p)\tilde{j}_l s_l\dots s_{n-1}s_n + \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=l}^{n} s_l s_{l+1}\dots s_{i-1}\cdot s_{i+1}\dots s_{n-1}s_n\,\mathbf{j}_i(p)\sum\limits_{k=0}^{m-1} j_{n+1}^k j_i^{m-k}$;

le produit $s_l s_{l+1}\dots s_{i-1}$ dans la partie droite de (ii) doit être compris comme égal à 1 si $i=l$.

Preuve. La preuve est complètement similaire à la preuve du Lemme III.1. □

Pour tout entier $k=1,\dots,n+1$ et tout m-tableau standard $\mathcal{T}$ de forme $\lambda_{\mathcal{T}}^{(m)}$ avec $|\lambda_{\mathcal{T}}^{(m)}|=k$, définissons

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}(u) := \frac{u-cc(\mathcal{T}|k)}{u}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{(u-cc(\mathcal{T}|i))^2}{(u-cc(\mathcal{T}|i))^2-\delta_{p(\mathcal{T}|i),p(\mathcal{T}|k)}}\ . \tag{III.2.41}$$

par convention, pour $k=1$, le produit dans la partie droite ci-dessus est égal à 1.

Soit $\phi_1(v,u) := \mathbf{t}(v)$; pour $k=1,\dots,n$, définissons

$$\begin{aligned}\phi_{k+1}(v_1,\dots,v_k,v,u_1,\dots,u_k,u) &:= \mathbf{s}_k(v,v_k,u,u_k)\phi_k(v_1,\dots,v_{k-1},v,u_1,\dots,u_{k-1},u)s_k \\ &= \mathbf{s}_k(v,v_k,u,u_k)\mathbf{s}_{k-1}(v,v_{k-1},u,u_{k-1})\dots\mathbf{s}_1(v,v_1,u,u_1)\mathbf{t}(v)s_1\dots s_{k-1}s_k\ .\end{aligned} \tag{III.2.42}$$

La formule (III.2.42) s'écrit de la même façon pour tout m ; seule la définition de $\mathbf{t}(v)$ dépend de m.

Définissons la fonction rationnelle suivante à valeurs dans l'algèbre du groupe $G(m,1,n)$:

$$\Phi(v_1,\dots,v_{n+1},u_1,\dots,u_{n+1}) := \overleftarrow{\prod_{k=0,\dots,n}} \phi_{k+1}(v_1,\dots,v_k,v_{k+1},u_1,\dots,u_k,u_{k+1})\ ; \tag{III.2.43}$$

la flèche sur $\prod$ indique que les facteurs sont pris dans l'ordre décroissant.

Soit $\lambda^{(m)}$ une m-partition de taille $n+1$ et $\mathcal{T}$ un m-tableau standard de forme $\lambda^{(m)}$. Pour $i=1,\dots,n+1$, posons $p_i := p(\mathcal{T}|i)$ et $cc_i := cc(\mathcal{T}|i)$. Soit $\mathcal{U}$ le m-tableau standard obtenu à partir de $\mathcal{T}$ en enlevant la m-case avec le nombre $n+1$, et soit $\mu^{(m)}$ la forme de $\mathcal{U}$.

Théorème III.6. *L'idempotent $E_{\mathcal{T}}$ correspondant au m-tableau standard $\mathcal{T}$ de forme $\lambda^{(m)}$ peut être obtenu par les évaluations consécutives suivantes*

$$E_{\mathcal{T}} = f_{\lambda^{(m)}}\Phi(v_1,\dots,v_{n+1},u_1,\dots,u_{n+1})\Big|_{v_i=p_i,\ i=1,\dots,n+1}\Big|_{u_1=cc_1}\dots\Big|_{u_n=cc_n}\Big|_{u_{n+1}=cc_{n+1}}\ . \tag{III.2.44}$$

Preuve.

Proposition III.7. *Nous avons*

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}(u)\phi_{n+1}(p_1,\dots,p_n,p_{n+1},cc_1,\dots,cc_n,u)E_{\mathcal{U}} = \frac{u-cc_{n+1}}{u-\tilde{j}_{n+1}}\ \mathbf{j}_{n+1}(p_{n+1})E_{\mathcal{U}}. \tag{III.2.45}$$

Preuve. La preuve suit les mêmes lignes que la preuve de la Proposition III.3 ; en fait, elle est exactement la même jusqu'au calcul de $\mathbf{j}_l(p_{n+1})s_ls_{l+1}\dots s_n(u-\tilde{j}_{n+1})E_{\mathcal{U}}$, juste après la formule (III.2.26). Nous donnons la fin modifiée de la preuve.

Ici, nous récrivons $\mathbf{j}_l(p_{n+1})s_ls_{l+1}\dots s_n(u-\tilde{j}_{n+1})E_{\mathcal{U}}$ en utilisant le Lemme III.5, (ii) :

$$\Big(\mathbf{j}_l(p_{n+1})(u-\tilde{j}_l)s_ls_{l+1}\dots s_n - \frac{1}{m}\sum_{i=l}^{n} s_ls_{l+1}\dots s_{i-1}\cdot s_{i+1}\dots s_{n-1}s_n\mathbf{j}_i(p_{n+1})\sum_{k=0}^{m-1} j_{n+1}^k j_i^{m-k}\Big)E_{\mathcal{U}}\ . \tag{III.2.46}$$

Comme $j_iE_{\mathcal{U}} = p_iE_{\mathcal{U}}$ pour $i=1,\dots,n$, l'expression (III.2.46) est égale à

$$\Big(\mathbf{j}_l(p_{n+1})(u-\tilde{j}_l)s_ls_{l+1}\dots s_n - \frac{1}{m}\sum_{i=l}^{n} s_ls_{l+1}\dots s_{i-1}\cdot s_{i+1}\dots s_{n-1}s_n\sum_{k=0}^{m-1} p_{n+1}^k p_i^{m-k}\mathbf{j}_{n+1}(p_i)\Big)E_{\mathcal{U}}\ . \tag{III.2.47}$$

Avec $\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} p_{n+1}^k p_i^{m-k} = \delta_{p_i,p_{n+1}}$, nous obtenons que $\mathbf{j}_l(p_{n+1})s_ls_{l+1}\dots s_n(u-\tilde{j}_{n+1})E_{\mathcal{U}}$ est égal à

$$\Big(\mathbf{j}_l(p_{n+1})(u-\tilde{j}_l)s_ls_{l+1}\dots s_n - \delta_{p_l,p_{n+1}}s_{l+1}\dots s_{n-1}s_n\mathbf{j}_{n+1}(p_l)\Big)E_{\mathcal{U}}\ . \tag{III.2.48}$$

Ceci conclue la preuve. □

L'analogue de la Proposition III.4 est vérifié aussi.

Proposition III.8. *La fonction rationnelle $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}(u)$, définie par (III.2.41), est régulière en $u = cc_{n+1}$, et de plus*

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}(cc_{n+1}) = f_{\lambda^{(m)}}(f_{\mu^{(m)}})^{-1}. \tag{III.2.49}$$

Preuve. La preuve est tout à fait la même que la preuve de la Proposition III.4. □

De manière similaire au Théorème III.2, le Théorème III.6 provient, par récurrence sur n, de la formule (III.2.40), de la Proposition III.7 et de la Proposition III.8. □

Pour les calculs, il est parfois utile d'écrire Φ sous une forme légèrement différente. A savoir, soit $\tilde{\phi}_1(v,u) := 1$, et définissons

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_{k+1}(v_1,\dots,v_k,v,u_1,\dots,u_k,u) &:= \mathbf{s}_k(v,v_k,u,u_k)\tilde{\phi}_k(v_1,\dots,v_{k-1},v,u_1,\dots,u_{k-1},u)s_k \\ &= \mathbf{s}_k(v,v_k,u,u_k)\mathbf{s}_{k-1}(v,v_{k-1},u,u_{k-1})\dots\mathbf{s}_1(v,v_1,u,u_1)s_1\dots s_{k-1}s_k\ ,\end{aligned} \tag{III.2.50}$$

pour $k = 1,\dots,n$. Les éléments $\tilde{\phi}_{k+1}(v_1,\dots,v_k,v,u_1,\dots,u_k,u)$ ne font pas intervenir l'élément t, et $\Phi(v_1,\dots,v_{n+1},u_1,\dots,u_{n+1})$, définie par (III.2.43), est égale à

$$\prod_{k=0,\dots,n}^{\leftarrow} \tilde{\phi}_{k+1}(v_1,\dots,v_{k+1},u_1,\dots,u_{k+1})\cdot\mathbf{j}_1(v_1)\mathbf{j}_2(v_2)\dots\mathbf{j}_{n+1}(v_{n+1})\ . \tag{III.2.51}$$

Par exemple, soit $m = 2$; choisissons l'ordre $\{1,-1\}$ sur l'ensemble des racines carrées de 1. L'idempotent primitif, correspondant au 2-tableau standard $\left(\boxed{1}\boxed{3},\boxed{2}\right)$, s'écrit

$$s_2(1+s_1)s_2\mathbf{j}_1(1)\mathbf{j}_2(-1)\mathbf{j}_3(1)/2\ .$$

III.3 Procédure de fusion pour l'algèbre $H(m,1,n)$

III.3.1 Définitions

Rappelons que l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n+1)$ est engendrée par τ, $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ avec les relations définissantes

$$\begin{aligned}&\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} && \text{pour } i = 1\dots,n-1\ ,\\ &\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i && \text{pour } i,j = 1,\dots,n \text{ tels que } |i-j|>1\ ,\\ &\sigma_i^2 = (q-q^{-1})\sigma_i + 1 && \text{pour } i = 1,\dots,n\ ,\\ &\tau\sigma_1\tau\sigma_1 = \sigma_1\tau\sigma_1\tau\ , && \\ &\tau\sigma_i = \sigma_i\tau && \text{pour } i>1\ ,\\ &(\tau-v_1)\dots(\tau-v_m) = 0\ . &&\end{aligned} \tag{III.3.1}$$

Dans cette Section, nous travaillons avec une algèbre de Hecke cyclotomique générique (q, v_1, …, v_m, sont des indéterminées), ou dans une spécialisation pour laquelle les conditions (II.2.10)–(II.2.12), avec

n remplacée par $n+1$, sont satisfaites. Rappelons que l'algèbre du groupe $G(m,1,n+1)$ est obtenue en prenant la limite classique des paramètres : $q \mapsto \pm 1$ et $v_i \mapsto \xi_i$, $i = 1, \ldots, m$, où $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ est l'ensemble des racines m-ème de l'unité distinctes deux à deux.

Définissons, pour $i = 1, \ldots, n$,

$$\sigma_i(\alpha, \beta) := \sigma_i + (q - q^{-1}) \frac{\beta}{\alpha - \beta} \ . \tag{III.3.2}$$

Les éléments $\sigma_i(\alpha, \beta)$ sont appelés éléments Baxterisés, et les paramètres α et β sont appelés les paramètres spectraux. La formule suivante sera utilisée plus tard :

$$\sigma_i(\alpha, \beta)\sigma_i(\beta, \alpha) = \frac{(\alpha - q^2\beta)(\alpha - q^{-2}\beta)}{(\alpha - \beta)^2} \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n. \tag{III.3.3}$$

Remarque. L'analogue de la forme Baxterisée, voir (III.2.35), pour les générateurs $s_1, \ldots, s_n$ du groupe $G(m,1,n+1)$ peut être vue comme la limite classique de la forme Baxterisée ci-dessus pour les générateurs $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ de l'algèbre $H(m,1,n+1)$. En effet, prenons les paramètres spectraux de la forme suivante, $\alpha = v_p q^{2a}$ et $\alpha' = v_{p'} q^{2a'}$ avec $p, p' = 1, \ldots, m$. Alors, on peut vérifier que :

$$\lim_{q \to 1} \lim_{v_i \to \xi_i} \sigma_i(\alpha, \alpha') = s_i + \frac{\delta_{p,p'}}{a - a'} \ . \tag{III.3.4}$$

Définissons également la fonction rationnelle suivante à valeurs dans l'algèbre $H(m,1,n+1)$:

$$\tau(\rho) := \frac{(\rho - v_1)(\rho - v_2) \ldots (\rho - v_m)}{\rho - \tau} \ . \tag{III.3.5}$$

Remarques. (a) La fonction rationnelle $\tau(\rho)$ est en fait une fonction polynômiale en ρ. En effet, soient $a_0, a_1, \ldots, a_m$ les polynômes en $v_1, \ldots, v_m$ définis par

$$(X - v_1)(X - v_2) \ldots (X - v_m) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m \ ,$$

où X est une indéterminée. Soient les polynômes $\mathfrak{a}_i(\rho)$, $i = 0, \ldots, m$, en ρ, à valeurs dans $\mathbb{C}[v_1, \ldots, v_m]$, définis par

$$\mathfrak{a}_0(\rho) = a_0 + a_1\rho + \cdots + a_m\rho^m \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}_{i+1}(\rho) = \rho^{-1}(\mathfrak{a}_i(\rho) - a_i) \ \text{ pour } i = 1, \ldots, m.$$

Les polynômes $\mathfrak{a}_i(\rho)$, $i = 0, \ldots, m$, sont donnés explicitement par

$$\mathfrak{a}_i(\rho) = a_i + \rho\, a_{i+1} + \cdots + \rho^{m-i} a_m \qquad \text{pour } i = 0, \ldots, m.$$

Nous avons

$$\tau(\rho) = \mathfrak{a}_1(\rho) + \mathfrak{a}_2(\rho)\tau + \cdots + \mathfrak{a}_m(\rho)\tau^{m-1} = \sum_{i=0,\ldots,m-1} \mathfrak{a}_{i+1}(\rho)\tau^i \ . \tag{III.3.6}$$

En effet, il est facile de vérifier que

$$(\rho-\tau)\sum_{i=0,\dots,m-1}\mathfrak{a}_i(\rho)\tau^i=\mathfrak{a}_0(\rho)=(\rho-v_1)(\rho-v_2)\dots(\rho-v_m)\ .$$

Par exemple, pour $m=1$, on a $\tau(\rho)=1$; pour $m=2$, on a $\tau(\rho)=\tau+\rho-v_1-v_2$; pour $m=3$, on a $\tau(\rho)=\tau^2+(\rho-v_1-v_2-v_3)\tau+\rho^2-\rho(v_1+v_2+v_3)+v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3$.

(b) Il est direct de vérifier que

$$\lim_{v_i\to\xi_i}\mathfrak{a}_0(\rho)=\rho^m-1\qquad\text{et}\qquad\lim_{v_i\to\xi_i}\mathfrak{a}_i(\rho)=\rho^{m-i}\ \text{ pour } i=1,\dots,m.$$

Ainsi, d'après (III.3.6), on obtient que

$$\lim_{v_i\to\xi_i}\tau(u)=\frac{m}{u}\,\mathbf{t}(u)\ , \tag{III.3.7}$$

où $\mathbf{t}(u)$ est défini par (III.2.39).

Nous renvoyons au Chapitre I, Appendice I.2.A pour les définitions de partitions et de diagrammes de Young, et au paragraphe **6** de la Section II.3, Chapitre II, pour les définitions concernant les m-cases, les m-partitions et les m-tableaux.

Rappelons que pour une m-case $\alpha^{(m)}=(\alpha,k)$ d'une m-partition $\lambda^{(m)}$, située dans la ligne x et la colonne y du k-ème diagramme de $\lambda^{(m)}$, nous notons $\mathrm{pos}(\alpha^{(m)})=k$; le contenu classique $cc(\alpha^{(m)})$ est défini par $cc(\alpha^{(m)}):=y-x$ et le contenu $c(\alpha^{(m)})$ est défini par $c(\alpha^{(m)}):=v_kq^{2(y-x)}$. Pour un m-tableau standard $\mathcal{T}$ de forme $\lambda^{(m)}$, soit $\alpha_i^{(m)}$ la m-case de $\mathcal{T}$ avec le nombre i, $i=1,\dots,n+1$; nous posons $c(\mathcal{T}|i):=c(\alpha_i^{(m)})$.

Pour $j=1,\dots,m$, soient $\mathfrak{l}_{\lambda^{(m)},x,j}$ le nombre de cases de la ligne x du j-ème diagramme de $\lambda^{(m)}$, et $\mathfrak{c}_{\lambda^{(m)},y,j}$ le nombre de cases de la colonne y du j-ème diagramme de $\lambda^{(m)}$. La longueur de crochet, dans $\lambda^{(m)}$, de la m-case $\alpha^{(m)}$ située dans la ligne x et la colonne y du k-ème diagramme de $\lambda^{(m)}$ est égale, voir Section précédente, à

$$h_{\lambda^{(m)}}(\alpha^{(m)})=\mathfrak{l}_{\lambda^{(m)},x,k}+\mathfrak{c}_{\lambda^{(m)},y,k}-x-y+1\ .$$

Définissons une notion généralisée de longueur de crochet (voir aussi [18]) en définissant, pour $j=1,\dots,m$,

$$h^{(j)}_{\lambda^{(m)}}(\alpha^{(m)}):=\mathfrak{l}_{\lambda^{(m)},x,j}+\mathfrak{c}_{\lambda^{(m)},y,k}-x-y+1\ ,$$

pour la m-case $\alpha^{(m)}$ située dans la ligne x et la colonne y du k-ème diagramme de $\lambda^{(m)}$ (en particulier, $h^{(k)}_{\lambda^{(m)}}(\alpha^{(m)})=h_{\lambda^{(m)}}(\alpha^{(m)})$ est la longueur de crochet usuelle).

Pour une m-partition $\lambda^{(m)}$, définissons

$$\mathsf{F}_{\lambda^{(m)}}:=(q^{-1}-q)^n\prod_{\alpha^{(m)}\in\lambda^{(m)}}\Big(c(\alpha^{(m)})\prod_{k=1}^{m}\frac{q^{-cc(\alpha^{(m)})}}{v_{\mathrm{pos}(\alpha^{(m)})}q^{-h^{(k)}_{\lambda^{(m)}}(\alpha^{(m)})}-v_kq^{h^{(k)}_{\lambda^{(m)}}(\alpha^{(m)})}}\Big)\ . \tag{III.3.8}$$

L'élément $\mathsf{F}_{\lambda^{(m)}}$ peut aussi s'écrire comme

$$\mathsf{F}_{\lambda^{(m)}} = \prod_{\alpha^{(m)}\in\lambda^{(m)}} \left(\frac{q^{cc(\alpha^{(m)})}}{[h_{\lambda^{(m)}}(\alpha^{(m)})]_q} \prod_{\substack{k=1,\dots,m \\ k\neq \mathrm{pos}(\alpha^{(m)})}} \frac{q^{-cc(\alpha^{(m)})}}{v_{\mathrm{pos}(\alpha^{(m)})} q^{-h^{(k)}_{\lambda^{(m)}}(\alpha^{(m)})} - v_k q^{h^{(k)}_{\lambda^{(m)}}(\alpha^{(m)})}} \right), \tag{III.3.9}$$

où $[n]_q := \dfrac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$ pour tout entier positif n.

Remarque. La limite classique de $\mathsf{F}_{\lambda^{(m)}}$ est proportionnelle au nombre $f_{\lambda^{(m)}}$ défini dans la Section précédente, voir (III.2.9). Plus précisément, nous avons

$$\lim_{q\to 1}\lim_{v_i\to\xi_i} \mathsf{F}_{\lambda^{(m)}} = \mathfrak{x}_{\lambda^{(m)}} f_{\lambda^{(m)}} \ , \qquad \text{où } \mathfrak{x}_{\lambda^{(m)}} = \frac{1}{m^n} \prod_{\alpha^{(m)}\in\lambda^{(m)}} p(\alpha^{(m)}), \tag{III.3.10}$$

où nous rappelons que $p(\alpha^{(m)}) = \xi_k$ pour une m-case $\alpha^{(m)}$ placée dans le k-ème diagramme de $\lambda^{(m)}$. La formule (III.3.10) s'obtient directement à partir de (III.3.9), en utilisant que $\lim_{q\to 1}[n]_q = n$ pour tout entier positif n, et que $\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} (\xi_k - \xi_i) = m/\xi_k$, pour $k = 1, \dots, m$.

III.3.2 Idempotents et éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre $H(m, 1, n)$

Rappelons que les éléments de Jucys–Murphy J_i, $i = 1, \dots, n+1$, de l'algèbre $H(m, 1, n+1)$ sont définis par la condition initiale et la récursion suivante :

$$J_1 = \tau \quad \text{et} \quad J_{i+1} = \sigma_i J_i \sigma_i. \tag{III.3.11}$$

Nous avons montré dans le Chapitre II que les éléments J_i, $i = 1, \dots, n+1$, forment un ensemble commutatif maximal dans $H(m, 1, n+1)$ sous les restrictions (II.2.10)–(II.2.12). Rappelons de plus que

$$J_i\sigma_k = \sigma_k J_i \qquad \text{si } k \neq i-1, i. \tag{III.3.12}$$

Les représentations irréductibles de $H(m, 1, n+1)$ sont en bijection avec les m-partitions de taille $n+1$. Les éléments de la base semi-normale de la représentation irréductible de $H(m, 1, n+1)$ correspondant à la m-partition $\lambda^{(m)}$ sont paramétrisés par les m-tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$. Pour un m-tableau standard $\mathcal{T}$, nous notons $E_{\mathcal{T}}$ l'idempotent primitif de $H(m, 1, n+1)$ correspondant à $\mathcal{T}$ (voir Chapitre I, Sous-Section I.1.4 pour la définition des idempotents primitifs associés aux vecteurs de base [3]). Les éléments de Jucys–Murphy sont diagonaux dans la base semi-normale ; de plus, nous avons, pour tout $i = 1, \dots, n+1$,

$$J_i E_{\mathcal{T}} = E_{\mathcal{T}} J_i = c_i E_{\mathcal{T}} \ , \tag{III.3.13}$$

où $c_i := c(\mathcal{T}|i)$ pour $i = 1, \dots, n+1$. Grâce à la maximalité de l'ensemble commutatif formé par les éléments de Jucys–Murphy J_i, $i = 1, \dots, n+1$, l'idempotent $E_{\mathcal{T}}$ peut être exprimé en termes des J_i,

3. Le point de vue multi-matriciel expliqué là-bas permet de visualiser aisément les formules (III.3.13)–(III.3.15)

$i = 1, \ldots, n+1$ (voir Remarque **(a)** à la fin de la Sous-Section II.5, Chapitre II). Soit $\gamma^{(m)}$ la m-case de $\mathcal{T}$ contenant le nombre $n+1$. Comme le m-tableau $\mathcal{T}$ est standard, la m-case $\gamma^{(m)}$ de $\lambda^{(m)}$ est supprimable. Soit $\mathcal{U}$ le m-tableau standard obtenu à partir de $\mathcal{T}$ en supprimant la m-case $\gamma^{(m)}$, et soit $\mu^{(m)}$ la forme de $\mathcal{U}$. La formule inductive pour $E_{\mathcal{T}}$ en termes des éléments de Jucys–Murphy est :

$$E_{\mathcal{T}} = E_{\mathcal{U}} \prod_{\substack{\beta^{(m)}: \\ \beta^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\mu^{(m)}) \\ c(\beta^{(m)}) \neq c(\gamma^{(m)})}} \frac{J_{n+1} - c(\beta^{(m)})}{c(\gamma^{(m)}) - c(\beta^{(m)})} \ . \tag{III.3.14}$$

Nous avons $H(m,1,0) \cong \mathbb{C}$ et $E_{\mathcal{U}_0} = 1$ pour l'unique m-tableau $\mathcal{U}_0$ de taille 0.

Soit $\{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_k\}$ l'ensemble des m-tableaux standards différents deux à deux qui peuvent être obtenus à partir de $\mathcal{U}$ en ajoutant une m-case avec le nombre $n+1$. La formule suivante :

$$E_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{k} E_{\mathcal{T}_i}, \tag{III.3.15}$$

avec (III.3.13), implique que la fonction rationnelle

$$E_{\mathcal{U}} \ \frac{u - c_{n+1}}{u - J_{n+1}}$$

est non-singulière en $u = c_{n+1}$ et, de plus,

$$E_{\mathcal{U}} \ \frac{u - c_{n+1}}{u - J_{n+1}} \Big|_{u=c_{n+1}} = E_{\mathcal{T}} \ . \tag{III.3.16}$$

III.3.3 Formule de fusion pour les idempotents de $H(m,1,n+1)$

Pour tout entier $k = 1, \ldots, n+1$ et tout m-tableau standard $\mathcal{T}$ de forme $\lambda_{\mathcal{T}}^{(m)}$ avec $|\lambda_{\mathcal{T}}^{(m)}| = k$, définissons

$$F_{\mathcal{T}}(u) := \frac{u - c(\mathcal{T}|k)}{(u - v_1)\ldots(u - v_m)} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\big(u - c(\mathcal{T}|i)\big)^2}{\big(u - q^2 c(\mathcal{T}|i)\big)\big(u - q^{-2} c(\mathcal{T}|i)\big)} \ ; \tag{III.3.17}$$

par convention, pour $k = 1$, le produit dans la partie droite ci-dessus est égal à 1.

Soit $\phi_1(u) := \tau(u)$; pour $k = 1, \ldots, n$, définissons

$$\begin{aligned} \phi_{k+1}(u_1, \ldots, u_k, u) &:= \sigma_k(u, u_k)\phi_k(u_1, \ldots, u_{k-1}, u)\sigma_k^{-1} \\ &= \sigma_k(u, u_k)\sigma_{k-1}(u, u_{k-1}) \ldots \sigma_1(u, u_1)\tau(u)\sigma_1^{-1} \ldots \sigma_{k-1}^{-1}\sigma_k^{-1} \ . \end{aligned} \tag{III.3.18}$$

Définissons la fonction rationnelle suivante, à valeurs dans l'algèbre $H(m,1,n+1)$:

$$\Phi(u_1, \ldots, u_{n+1}) := \prod_{k=0,\ldots,n}^{\leftarrow} \phi_{k+1}(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}) \ ; \tag{III.3.19}$$

la flèche sur $\prod$ indique que les facteurs sont pris, de gauche à droite, dans l'ordre décroissant (sur k).

Soit $\lambda^{(m)}$ une m-partition de taille $n+1$ et $\mathcal{T}$ un m-tableau standard de forme $\lambda^{(m)}$. Pour $i = 1, \ldots, n+1$, posons $c_i := c(\mathcal{T}|i)$.

Théorème III.9. *L'idempotent $E_{\mathcal{T}}$ correspondant au m-tableau standard $\mathcal{T}$ de forme $\lambda^{(m)}$ peut être obtenu par les évaluations consécutives suivantes*

$$E_{\mathcal{T}} = \mathsf{F}_{\lambda^{(m)}} \Phi(u_1, \ldots, u_{n+1})\Big|_{u_1=c_1} \ldots \Big|_{u_n=c_n} \Big|_{u_{n+1}=c_{n+1}} . \tag{III.3.20}$$

Preuve. Soit $\mathcal{U}$ le m-tableau standard obtenu à partir de $\mathcal{T}$ en enlevant la m-case avec le nombre $n+1$, et soit $\mu^{(m)}$ la forme de $\mathcal{U}$.

Proposition III.10. *Nous avons*

$$F_{\mathcal{T}}(u)\phi_{n+1}(c_1, \ldots, c_n, u)E_{\mathcal{U}} = \frac{u - c_{n+1}}{u - J_{n+1}} E_{\mathcal{U}}. \tag{III.3.21}$$

Preuve. Nous prouvons (III.3.21) par récurrence sur n. Comme $J_1 = \tau$ et avec (III.3.5), nous avons que

$$\frac{u - c_1}{u - J_1} = \frac{u - c_1}{(u - v_1) \ldots (u - v_m)} \tau(u) ,$$

ce qui vérifie la base de la récurrence (pour $n = 0$).

Notons $\mathcal{W}$ le m-tableau standard obtenu à partir de $\mathcal{U}$ en supprimant la m-case avec le nombre n. Nous allons utiliser que $E_{\mathcal{W}} E_{\mathcal{U}} = E_{\mathcal{U}}$, et que $E_{\mathcal{W}}$ commute avec σ_n. Récrivons la partie gauche de (III.3.21) comme

$$F_{\mathcal{T}}(u)\sigma_n(u, c_n) \cdot \phi_n(c_1, \ldots, c_{n-1}, u)E_{\mathcal{W}} \cdot \sigma_n^{-1} E_{\mathcal{U}} .$$

Nous utilisons l'hypothèse de récurrence et obtenons pour la partie gauche de (III.3.21) :

$$F_{\mathcal{T}}(u)(F_{\mathcal{W}}(u))^{-1}\sigma_n(u, c_n)\frac{u - c_n}{u - J_n}\sigma_n^{-1} E_{\mathcal{U}} .$$

Ainsi, l'égalité (III.3.21) est équivalente à

$$F_{\mathcal{T}}(u)(F_{\mathcal{W}}(u))^{-1}(u - c_n)\sigma_n^{-1}(u - J_{n+1})E_{\mathcal{U}} = \frac{(u - c_{n+1})(u - c_n)^2}{(u - q^2 c_n)(u - q^{-2} c_n)}(u - J_n)\sigma_n(c_n, u)E_{\mathcal{U}} , \tag{III.3.22}$$

où nous avons utilisé que J_{n+1} commute avec $E_{\mathcal{U}}$, et également la formule (III.3.3) pour prendre l'inverse de $\sigma_n(u, c_n)$.

Tout d'abord, nous avons, d'après (III.3.17),

$$F_{\mathcal{T}}(u)(F_{\mathcal{W}}(u))^{-1}(u - c_n) = (u - c_{n+1})\frac{(u - c_n)^2}{(u - q^2 c_n)(u - q^{-2} c_n)}. \tag{III.3.23}$$

Donc, pour prouver l'égalité (III.3.22), il reste à montrer que

$$\sigma_n^{-1}(u - J_{n+1})E_{\mathcal{U}} = (u - J_n)\sigma_n(c_n, u)E_{\mathcal{U}}. \tag{III.3.24}$$

En remplaçant J_{n+1} par $\sigma_n J_n \sigma_n$, nous écrivons la partie gauche de (III.3.24) sous la forme

$$(u\sigma_n^{-1} - J_n\sigma_n)E_{\mathcal{U}} \ . \tag{III.3.25}$$

Dans la partie droite de (III.3.24), nous développons $\sigma_n(c_n, u)$ et, en utilisant que $J_n E_{\mathcal{U}} = c_n E_{\mathcal{U}}$, nous obtenons :

$$(u\sigma_n - J_n\sigma_n + (q - q^{-1})\frac{u - c_n}{c_n - u})E_{\mathcal{U}} \ . \tag{III.3.26}$$

Avec le fait que $\sigma_n^{-1} = \sigma_n - (q - q^{-1})$, la comparaison de (III.3.25) et (III.3.26) prouve l'égalité (III.3.24). □

Proposition III.11. *La fonction rationnelle $F_{\mathcal{T}}(u)$, définie par (III.3.17), est non-singulière en $u = c(\gamma^{(m)})$, et de plus*

$$F_{\mathcal{T}}(c(\gamma^{(m)})) = \mathsf{F}_{\lambda^{(m)}}\mathsf{F}^{-1}_{\mu^{(m)}} \ , \tag{III.3.27}$$

où $\gamma^{(m)}$ est la m-case de $\mathcal{T}$ contenant le nombre $n+1$.

Preuve. Posons $c_i := c(\mathcal{T}|i)$ pour $i = 1, \ldots, n+1$. Nous allons montrer la formule suivante par récurrence sur n :

$$F_{\mathcal{T}}(u) = (u - c_{n+1}) \prod_{\beta^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\mu^{(m)})} \Big(u - c(\beta^{(m)})\Big) \prod_{\alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\mu^{(m)})} \Big(u - c(\alpha^{(m)})\Big)^{-1} \ . \tag{III.3.28}$$

Pour $n = 0$, on a

$$F_{\mathcal{T}}(u) = \frac{u - c_1}{(u - v_1)\ldots(u - v_m)} \ ,$$

ce qui est immédiatement égal à la partie droite de (III.3.28).

Maintenant, pour $n > 0$, écrivons

$$F_{\mathcal{T}}(u) = \frac{u - c_{n+1}}{(u - v_1)\ldots(u - v_m)} \frac{(u - c_n)^2}{(u - q^2c_n)(u - q^{-2}c_n)} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(u - c_i)^2}{(u - q^2c_i)(u - q^{-2}c_i)} \ .$$

Soit $\nu^{(m)}$ la forme du m-tableau standard obtenu en supprimant de $\mathcal{U}$ la m-case contenant le nombre n (rappelons que le m-tableau standard $\mathcal{U}$ de forme $\mu^{(m)}$ est obtenu à partir de $\mathcal{T}$ en supprimant la m-case contenant le nombre $n+1$). En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$F_{\mathcal{T}}(u) = \frac{(u - c_{n+1})(u - c_n)^2}{(u - q^2c_n)(u - q^{-2}c_n)} \prod_{\beta^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\nu^{(m)})} \Big(u - c(\beta^{(m)})\Big) \prod_{\alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\nu^{(m)})} \Big(u - c(\alpha^{(m)})\Big)^{-1} \tag{III.3.29}$$

Notons $\delta^{(m)}$ la m-case de $\mu^{(m)}$ contenant le nombre n ; notons de plus, lorsqu'elles existent, $\delta_t^{(m)}$ et $\delta_b^{(m)}$ les m-cases qui sont, respectivement, juste au dessus et juste en dessous de $\delta^{(m)}$ dans la même colonne, et $\delta_l^{(m)}$ et $\delta_r^{(m)}$ les m-cases qui sont, respectivement, juste à gauche et juste à droite de $\delta^{(m)}$ dans la même ligne. Il est facile de voir que

– Si $\delta_t^{(m)}, \delta_l^{(m)} \notin \mathcal{E}_-(\nu^{(m)})$, alors

$$\mathcal{E}_-(\mu^{(m)}) = \mathcal{E}_-(\nu^{(m)}) \cup \{\delta^{(m)}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_+(\mu^{(m)}) = \Big(\mathcal{E}_+(\nu^{(m)}) \cup \{\delta_b^{(m)}, \delta_r^{(m)}\}\Big) \setminus \{\delta^{(m)}\} \ .$$

– Si $\delta_t^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\nu^{(m)})$ et $\delta_l^{(m)} \notin \mathcal{E}_-(\nu^{(m)})$, alors

$$\mathcal{E}_-(\mu^{(m)}) = \Big(\mathcal{E}_-(\nu^{(m)}) \cup \{\delta^{(m)}\}\Big) \setminus \{\delta_t^{(m)}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_+(\mu^{(m)}) = \Big(\mathcal{E}_+(\nu^{(m)}) \cup \{\delta_b^{(m)}\}\Big) \setminus \{\delta^{(m)}\} \ .$$

– Si $\delta_t^{(m)} \notin \mathcal{E}_-(\nu^{(m)})$ et $\delta_l^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\nu^{(m)})$, alors

$$\mathcal{E}_-(\mu^{(m)}) = \Big(\mathcal{E}_-(\nu^{(m)}) \cup \{\delta^{(m)}\}\Big) \setminus \{\delta_l^{(m)}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_+(\mu^{(m)}) = \Big(\mathcal{E}_+(\nu^{(m)}) \cup \{\delta_r^{(m)}\}\Big) \setminus \{\delta^{(m)}\} \ .$$

– Si $\delta_t^{(m)}, \delta_l^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\nu^{(m)})$, alors

$$\mathcal{E}_-(\mu^{(m)}) = \Big(\mathcal{E}_-(\nu^{(m)}) \cup \{\delta^{(m)}\}\Big) \setminus \{\delta_t^{(m)}, \delta_l^{(m)}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_+(\mu^{(m)}) = \mathcal{E}_+(\nu^{(m)}) \setminus \{\delta^{(m)}\} \ .$$

Dans tous les cas, on vérifie directement que la partie droite de (III.3.29) est égale à

$$(u - c_{n+1}) \prod_{\beta^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\mu^{(m)})} \Big(u - c(\beta^{(m)})\Big) \prod_{\alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\mu^{(m)})} \Big(u - c(\alpha^{(m)})\Big)^{-1} ,$$

ce qui conclue la preuve de la formule (III.3.28). Ainsi, la fonction rationnelle $F_{\mathcal{T}}(u)$, définie par (III.3.17), est non-singulière en $u = c(\gamma^{(m)})$, et de plus

$$F_{\mathcal{T}}(c(\gamma^{(m)})) = \prod_{\beta^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\mu^{(m)})} \Big(c(\gamma^{(m)}) - c(\beta^{(m)})\Big) \prod_{\alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\mu^{(m)}) \setminus \{\gamma^{(m)}\}} \Big(c(\gamma^{(m)}) - c(\alpha^{(m)})\Big)^{-1} , \quad \text{(III.3.30)}$$

Nous utilisons maintenant le Lemme III.12 ci-dessous pour terminer la preuve de la Proposition. □

Lemme III.12. *Nous avons*

$$\prod_{\beta^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\mu^{(m)})} \Big(c(\gamma^{(m)}) - c(\beta^{(m)})\Big) \prod_{\alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\mu^{(m)}) \setminus \{\gamma^{(m)}\}} \Big(c(\gamma^{(m)}) - c(\alpha^{(m)})\Big)^{-1} = F_{\lambda^{(m)}} F_{\mu^{(m)}}^{-1} \ , \quad \text{(III.3.31)}$$

Preuve. La preuve est faite par un calcul direct, mais un peu long, que nous présentons dans un Appendice à cette Section. □

Le Théorème III.9 vient, par récurrence sur n, de la formule (III.3.16), et des Propositions III.10 et III.11. □

Remarque. Avec les formules (III.3.4), (III.3.7) et (III.3.10), nous retrouvons la procédure de fusion pour le groupe $G(m, 1, n+1)$ présentée dans la Section précédente en prenant la limite classique de la procédure de fusion pour l'algèbre $H(m, 1, n+1)$.

Exemple. Reprenons l'exemple, pour $m = 2$, du 2-tableau standard $\left(\boxed{1}\boxed{3}, \boxed{2}\right)$ (voir à la toute fin de la Section précédente). L'idempotent de l'algèbre $H(2,1,3)$ correspondant à ce 2-tableau standard s'écrit, d'après le Théorème III.9,

$$\frac{\sigma_2(v_1q^2, v_2)\,\sigma_1(v_1q^2, v_1)\,\tau(v_1q^2)\,\sigma_1^{-1}\,\sigma_2^{-1}\,\sigma_1(v_2, v_1)\,\tau(v_2)\,\sigma_1^{-1}\,\tau(v_1)}{(q+q^{-1})(v_1q^{-1}-v_2q)(v_1-v_2)(v_2q^{-2}-v_1q^2)} \ .$$

Appendice III.3.A Coefficient dans la formule de fusion

Dans cet Appendice, nous donnons la démonstration du Lemme III.12 utilisé pour prouver le Théorème III.9.

1. Nous commençons par un résultat connu concernant les partitions usuelles. Nous détaillons le calcul présenté dans [41].

Soient λ une partition de $n+1$ et $\mathcal{T}$ un tableau standard de forme λ. Soit γ la case de $\mathcal{T}$ contenant $n+1$, et soit μ la forme du tableau standard obtenu à partir de $\mathcal{T}$ en supprimant γ.

Rappelons que, pour une partition usuelle λ, la définition (III.3.8) se réduit à

$$\mathsf{F}_\lambda := \prod_{\alpha^{(m)}\in\lambda} \frac{q^{cc(\alpha)}}{[h_\lambda(\alpha)]_q} \ .$$

Lemme III.13. *Nous avons*

$$\prod_{\beta\in\mathcal{E}_-(\mu)} (c(\gamma)-c(\beta)) \prod_{\alpha\in\mathcal{E}_+(\mu)\setminus\{\gamma\}} (c(\gamma)-c(\alpha))^{-1} = \frac{\mathsf{F}_\lambda}{\mathsf{F}_\mu} \ . \tag{III.3.32}$$

Preuve. Soient des entiers positifs $p_1 < p_2 < \cdots < p_s$ tels que $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{p_s})$ et de plus

$$\mu_1 = \cdots = \mu_{p_1} > \mu_{p_1+1} = \cdots = \mu_{p_2} > \ldots \cdots > \mu_{p_{s-1}+1} = \cdots = \mu_{p_s} > 0 \ .$$

Posons de plus $p_0 := 0$ et $\mu_{p_{s+1}} := 0$.

Soit $j \in \{1, \ldots, s+1\}$ tel que la case ajoutable γ soit dans la ligne $p_{j-1}+1$, et dans la colonne $\mu_{p_j}+1$. Le contenu classique de γ est alors $cc(\gamma) = \mu_{p_j} - p_{j-1}$.

La partie gauche dans (III.3.32) est égale à

$$\prod_{i=1}^{s} (q^{2(\mu_{p_j}-p_{j-1})} - q^{2(\mu_{p_i}-p_i)}) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s+1} (q^{2(\mu_{p_j}-p_{j-1})} - q^{2(\mu_{p_i}-p_{i-1})})^{-1} \ ,$$

Comme $\displaystyle\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s+1} q^{p_{i-1}-\mu_{p_i}} \prod_{i=1}^{s} q^{\mu_{p_i}-p_i} = q^{cc(\gamma)}$, nous obtenons, pour la partie gauche de (III.3.32),

$$q^{cc(\gamma)} \prod_{i=1}^{s} [\mu_{p_i} - p_i - \mu_{p_j} + p_{j-1}]_q \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s+1} ([\mu_{p_i} - p_{i-1} - \mu_{p_j} + p_{j-1}]_q)^{-1} \ . \tag{III.3.33}$$

Ensuite, remarquons que seules les cases de λ qui sont dans la même colonne ou la même ligne que γ donnent une contribution différente de 1 à la partie droite de (III.3.32). Cette contribution se calcule directement, et on obtient

$$q^{cc(\gamma)} \prod_{i=1}^{j-1} \Big(\prod_{k=p_{i-1}+1}^{p_i} \frac{[\mu_{p_i} - \mu_{p_j} + p_{j-1} - k]_q}{[\mu_{p_i} + \mu_{p_j} + p_{j-1} - k + 1]_q} \Big) \prod_{i=j}^{s} \Big(\prod_{k=\mu_{p_{i+1}}+1}^{\mu_{p_i}} \frac{[\mu_{p_j} + p_i - p_{j-1} - k]_q}{[\mu_{p_j} + p_i - p_{j-1} - k + 1]_q} \Big) ,$$

ce qui est égal à

$$q^{cc(\gamma)} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{[\mu_{p_i} - \mu_{p_j} + p_{j-1} - p_i]_q}{[\mu_{p_i} + \mu_{p_j} + p_{j-1} - p_{i-1}]_q} \prod_{i=j}^{s} \frac{[\mu_{p_j} + p_i - p_{j-1} - \mu_{p_i}]_q}{[\mu_{p_j} + p_i - p_{j-1} - \mu_{p_{i+1}}]_q} . \tag{III.3.34}$$

La comparaison de (III.3.33) et (III.3.34) conclue la preuve du Lemme. □

2. Nous présentons maintenant une extension de cette preuve pour le Lemme III.12 de la Sous-Section précédente, que nous rappelons tout d'abord (les notations sont celles des Sous-Sections précédentes).

Lemme III.14. *Nous avons*

$$\prod_{\beta^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\mu^{(m)})} \Big(c(\gamma^{(m)}) - c(\beta^{(m)}) \Big) \prod_{\alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\mu^{(m)}) \setminus \{\gamma^{(m)}\}} \Big(c(\gamma^{(m)}) - c(\alpha^{(m)}) \Big)^{-1} = \mathsf{F}_{\lambda^{(m)}} \mathsf{F}^{-1}_{\mu^{(m)}} . \tag{III.3.35}$$

Preuve. Supposons que la m-case $\gamma^{(m)}$ est située dans la ligne x et la colonne y du k-ème diagramme de $\lambda^{(m)}$.

Soit une m-partition $\nu^{(m)}$ égale, soit à $\lambda^{(m)}$, soit à $\mu^{(m)}$. Définissons

$$\mathsf{F}^{(k)}_{\nu^{(m)}} := \prod_{\alpha^{(m)} \in \nu^{(m)}} \frac{q^{cc(\alpha^{(m)})}}{\big[h_{\nu^{(m)}}(\alpha^{(m)})\big]_q} , \tag{III.3.36}$$

et, pour $j = 1, \ldots, m$ tel que $j \neq k$,

$$\mathsf{F}^{(j)}_{\nu^{(m)}} := \prod_{\substack{\alpha^{(m)} \in \nu^{(m)} \\ \mathrm{pos}(\alpha^{(m)}) = k}} \frac{q^{-cc(\alpha^{(m)})}}{v_k q^{-h^{(j)}_{\nu^{(m)}}(\alpha^{(m)})} - v_j q^{h^{(j)}_{\nu^{(m)}}(\alpha^{(m)})}} \prod_{\substack{\alpha^{(m)} \in \nu^{(m)} \\ \mathrm{pos}(\alpha^{(m)}) = j}} \frac{q^{-cc(\alpha^{(m)})}}{v_j q^{-h^{(k)}_{\nu^{(m)}}(\alpha^{(m)})} - v_k q^{h^{(k)}_{\nu^{(m)}}(\alpha^{(m)})}} . \tag{III.3.37}$$

Par construction nous avons, d'après (III.3.9), pour $\nu^{(m)} = \mu^{(m)}, \lambda^{(m)}$,

$$\mathsf{F}_{\nu^{(m)}} = \prod_{i=1}^{m} \mathsf{F}^{(i)}_{\nu^{(m)}} . \tag{III.3.38}$$

Nous allons montrer que, pour tout $j = 1, \ldots, m$ tel que $j \neq k$,

$$\prod_{\substack{\beta^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\mu^{(m)}) \\ \mathrm{pos}(\beta^{(m)}) = j}} \Big(c(\gamma^{(m)}) - c(\beta^{(m)}) \Big) \prod_{\substack{\alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\mu^{(m)}) \setminus \{\gamma^{(m)}\} \\ \mathrm{pos}(\alpha^{(m)}) = j}} \Big(c(\gamma^{(m)}) - c(\alpha^{(m)}) \Big)^{-1} = \mathsf{F}^{(j)}_{\lambda^{(m)}} (\mathsf{F}^{(j)}_{\mu^{(m)}})^{-1} . \tag{III.3.39}$$

Le Lemme est une conséquence de la formule (III.3.39), associée au Lemme III.3.32 et à la formule (III.3.38).

Preuve de (III.3.39). Fixons $j \in \{1, \dots, m\}$ tel que $j \neq k$. Soient des entiers positifs $p_1 < p_2 < \cdots < p_s$ tels que la j-ème partition de $\mu^{(m)}$ soit $(\mu_1, \dots, \mu_{p_s})$ avec

$$\mu_1 = \cdots = \mu_{p_1} > \mu_{p_1+1} = \cdots = \mu_{p_2} > \ldots \cdots > \mu_{p_{s-1}+1} = \cdots = \mu_{p_s} > 0 \ .$$

Posons de plus $p_0 := 0$, $p_{s+1} := +\infty$ et $\mu_{p_{s+1}} := 0$.

La partie gauche de (III.3.39) est égale à

$$\prod_{b=1}^{s} \left(v_k q^{2(y-x)} - v_j q^{2(\mu_{p_b} - p_b)} \right) \prod_{b=1}^{s+1} \left(v_k q^{2(y-x)} - v_j q^{2(\mu_{p_b} - p_{b-1})} \right)^{-1} \ . \tag{III.3.40}$$

Soit $t \in \{0, \dots, s\}$ tel que $p_t < x \leq p_{t+1}$ (rappelons que $\gamma^{(m)}$ est placée dans la ligne x et la colonne y du k-ème diagramme de $\lambda^{(m)}$). Il y a une contribution différente de 1 à la partie droite de (III.3.39) pour chaque m-case de $\lambda^{(m)}$ située dans la colonne y du k-ème diagramme ; pour les m-cases dans la colonne y et dans les lignes de 1 à p_t du k-ème diagramme de $\lambda^{(m)}$, cette contribution s'écrit :

$$\prod_{b=1}^{t} \Big(\prod_{a=p_{b-1}+1}^{p_b} \frac{v_k q^{-(\mu_{p_b} - y + x - a)} - v_j q^{(\mu_{p_b} - y + x - a)}}{v_k q^{-(\mu_{p_b} - y + x - a + 1)} - v_j q^{(\mu_{p_b} - y + x - a + 1)}} \Big);$$

pour les m-cases dans la colonne y et dans les lignes de $p_t + 1$ à x du k-ème diagramme de $\lambda^{(m)}$, cette contribution s'écrit :

$$\prod_{a=p_t+1}^{x-1} \Big(\frac{v_k q^{-(\mu_{p_{t+1}} - y + x - a)} - v_j q^{(\mu_{p_{t+1}} - y + x - a)}}{v_k q^{-(\mu_{p_{t+1}} - y + x - a + 1)} - v_j q^{(\mu_{p_{t+1}} - y + x - a + 1)}} \Big) \frac{q^{-cc(\gamma^{(m)})}}{v_k q^{-(\mu_{p_{t+1}} - y + 1)} - v_j q^{(\mu_{p_{t+1}} - y + 1)}} \ .$$

Il y a aussi une contribution différente de 1 à la partie droite de (III.3.39) pour chaque m-case de $\mu^{(m)}$ située dans la ligne x du j-ème diagramme, et cette contribution s'écrit :

$$\prod_{b=t+1}^{s} \prod_{a=\mu_{p_{b+1}}+1}^{\mu_{p_b}} \frac{v_j q^{-(y - a + p_b - x)} - v_k q^{(y - a + p_b - x)}}{v_j q^{-(y - a + p_b - x + 1)} - v_k q^{(y - a + p_b - x + 1)}} \ .$$

Il n'y a pas d'autres contributions à la partie droite de (III.3.39). En simplifiant et regroupant les 3 termes obtenus ci-dessus, on obtient pour la partie droite de (III.3.39)

$$q^{x-y} \prod_{b=1}^{s} \left(v_k q^{-(\mu_{p_b} - y + x - p_b)} - v_j q^{(\mu_{p_b} - y + x - p_b)} \right) \prod_{b=1}^{s+1} \left(v_k q^{-(\mu_{p_b} - y + x - p_{b-1})} - v_j q^{(\mu_{p_b} - y + x - p_{b-1})} \right)^{-1}. \tag{III.3.41}$$

La comparaison de (III.3.40) et (III.3.41) conclue la preuve de l'égalité (III.3.39). □

III.4 Forme normale et représentations induites des algèbres de Hecke cyclotomiques et affines de type A

III.4.1 Forme normale pour le groupe $G(m,1,n)$

Rappelons que le groupe $G(m,1,n)$ est engendré par les éléments t, s_1, ..., s_{n-1} avec les relations définissantes :

$$\begin{cases} s_i^2 = 1 & \text{pour } i = 1,\dots,n-1 \ , \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} & \text{pour } i = 1,\dots,n-2 \ , \\ s_i s_j = s_j s_i & \text{pour } i,j = 1,\dots,n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1 \end{cases} \tag{III.4.1}$$

et

$$\begin{cases} t^m = 1 \ , \\ t s_1 t s_1 = s_1 t s_1 t \ , \\ t s_i = s_i t \qquad \text{pour } i > 1 \ . \end{cases} \tag{III.4.2}$$

Il est connu que le groupe $G(m,1,n)$ est isomorphe au groupe $C_m \wr S_n$, le produit en couronne du groupe cyclique à m éléments, C_m, par le groupe symétrique S_n. Nous présentons ci-après une preuve de ce fait s'appuyant sur l'algorithme de Coxeter–Todd.

Soit γ un générateur du groupe C_m, c'est-à-dire $\gamma^m = e$ où e est l'élément neutre de C_m. Nous notons aussi e l'élément neutre de S_n. l'isomorphisme standard entre $G(m,1,n)$ et $C_m \wr S_n$ est défini sur les générateurs de $G(m,1,n)$ par :

$$t \mapsto \left(\begin{pmatrix} \gamma \\ e \\ \vdots \\ e \end{pmatrix}, e \right) , \quad s_i \mapsto \left(\begin{pmatrix} e \\ e \\ \vdots \\ e \end{pmatrix}, (i, i+1) \right) , \tag{III.4.3}$$

où les vecteurs sont des éléments du produit Cartésien de n copies de C_m.

Le groupe $G(m,1,n)$ admet la présentation équivalente suivante. Soit E l'ensemble $\{(\gamma^k, a),\ k = 0,\dots,m-1,\ a = 1,\dots,n\}$. Définissons l'action suivante de C_m sur cet ensemble : $\gamma \cdot (\gamma^k, a) = (\gamma^{k+1}, a)$. Notons $Perm(E)$ le groupe des permutations de l'ensemble E. Soit $Perm^0(E)$ le sous-groupe de $Perm(E)$ consistant en les éléments $\pi \in Perm(E)$ tels que :

$$\pi(\gamma^k, a) = \gamma^k \cdot \pi(e, a) \quad \text{pour } k = 1,\dots,m-1 \text{ et } a = 1,\dots,n \ . \tag{III.4.4}$$

Notons que pour spécifier un élément π de $Perm^0(E)$, il suffit de donner les images par π des éléments de l'ensemble $\{(e,a), a = 1,\dots,n\}$.

Le groupe $G(m,1,n)$ est isomorphe à $Perm^0(E)$. En effet, soit ϕ l'application de l'ensemble des générateurs de $G(m,1,n)$ vers $Perm^0(E)$ définie par :

$$\phi(t)(e,a) = \begin{cases} (\gamma, a) & \text{si } a = 1 \ , \\ (e, a) & \text{pour } a \neq 1 \, ; \end{cases} \tag{III.4.5}$$

$$\phi(s_i)(e,a) = (e, s_i(a)) \quad \text{pour } a = 1,\dots,n \text{ et } i = 1,\dots,n-1 \ .$$

L'application ϕ s'étend en un homomorphisme de groupe (il suffit de vérifier que les éléments $\phi(t)$, $\phi(s_1)$, ..., $\phi(s_{n-1})$ vérifient les relations définissantes de $G(m,1,n)$). De plus cet homomorphisme est surjectif ; c'est une conséquence du fait suivant : pour tout $j = 1, \ldots, n-1$,

$$\phi(s_j)\ldots\phi(s_1)\phi(t)\phi(s_1)\ldots\phi(s_j)(e,a) = \begin{cases} (\gamma, a) & \text{si } a = j+1 \ , \\ (e,a) & \text{pour } a \neq j+1 \ . \end{cases} \tag{III.4.6}$$

Enfin, il est facile de voir que le cardinal de $Perm^0(E)$ est égal à $n! \cdot m^n$, et donc, comme $G(m,1,n)$ et $Perm^0(E)$ ont le même cardinal, l'application ϕ est un isomorphisme.

III.4.1.1 Algorithme de Coxeter–Todd pour la chaîne des groupes $G(m,1,n)$

Le principe de l'algorithme de Coxeter–Todd est rappelé dans le Chapitre I, Section I.3.

1. Figure de Coxeter–Todd pour la chaîne des groupes $G(m,1,n)$. Soit W le sous-groupe engendré par les éléments $t, s_1, \ldots, s_{n-2}$. Nous présentons ici l'algorithme de Coxeter–Todd pour le groupe $G(m,1,n)$ par rapport à son sous-groupe W.

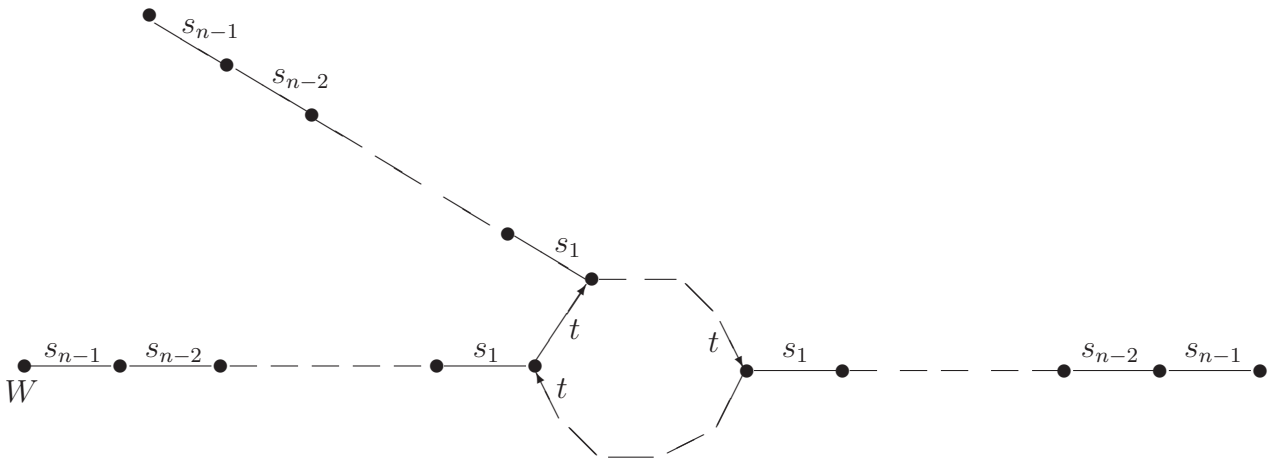


Fig. III.7. *Figure de Coxeter–Todd pour $G(m,1,n)$ par rapport à W*

L'action est indiquée par des arêtes orientées (labellisées par les générateurs). Pour un générateur d'ordre 2 (ce sont les générateurs $s_1, \ldots, s_{n-1}$ de $G(m,1,n)$ si $m \neq 2$), une arête non-orientée représente une paire d'arêtes avec des orientations opposées. Si un générateur laisse une classe invariante, l'arête correspondante est une boucle qui commence et finit au sommet représentant la classe. Pour la clarté de la figure, ces boucles ne sont pas dessinées (elles sont implicites) ; seulement les actions non-triviales sont présentes.

Au milieu de la Figure 1, il y a un m-gone avec des arêtes labellisées par t. A chaque sommet du m-gone part une queue de $n-1$ arêtes (labellisées de la même façon pour toutes les queues).

Pour illustrer l'utilité de la figure, nous recalculons le cardinal de $G(m,1,n)$, définis par générateurs et relations. La Figure 1 a mn sommets ; le groupe $G(m,1,n)$ agit sur l'ensemble des sommets et le stabilisateur du sommet nommé W est le sous-groupe W lui-même ; donc, le cardinal de $G(m,1,n)$ est égal à $mn|W|$. Clairement, W est un quotient de $G(m,1,n-1)$. Par hypothèse de récurrence[4], $|G(m,1,n-1)| = (n-1)!m^{n-1}$, et donc $|W| \leq (n-1)!m^{n-1}$ et $|G(m,1,n)| \leq n!m^n$. D'un autre côté, l'homomorphisme surjectif standard, voir (III.4.3), de $G(m,1,n)$ vers $C_m \wr S_n$ donne l'inégalité opposée $|G(m,1,n)| \geq n!m^n$ et nous concluons que

(a) le cardinal $|G(m,1,n)|$ de $G(m,1,n)$ est $n!m^n$,

(b) la surjection de $G(m,1,n)$ vers $C_m \wr S_n$ est un isomorphisme

et

(c) W est isomorphe à $G(m,1,n-1)$.

III.4.1.2 Forme normale pour les éléments de $G(m,1,n)$.

Grâce à l'algorithme, nous obtenons une forme normale pour les éléments de $G(m,1,n)$ par rapport à $G(m,1,n-1)$.

Proposition III.15. *Tout élément $x \in G(m,1,n)$ peut être écrit sous la forme :*

$$x = s_j s_{j-1} \dots s_1 t^\alpha s_1 s_2 \dots s_{n-1} w \ , \tag{III.4.7}$$

où $j \in \{0,\dots,n-1\}$, $\alpha \in \{0,\dots,m-1\}$ et $w \in W \simeq G(m,1,n-1)$. Ici, la notation usuelle est utilisée : le produit vide, e.g. $s_j s_{j-1} \dots s_1$ pour $j=0$, est égal à l'élément neutre 1.

Etant donnée une forme normale pour les élément de $G(m,1,n-1)$, la Proposition III.15 fournit une forme normale pour les éléments de $G(m,1,n)$. En particulier, nous pouvons utiliser la même (avec n remplacé par $n-1$) forme normale que dans la Proposition III.15 pour les éléments de $G(m,1,n-1)$, construisant ainsi récursivement une forme normale pour les éléments de $G(m,1,n)$.

Remarque. La forme normale globale pour les éléments de $G(m,1,n)$ obtenue par l'application récursive de la Proposition III.15 fournit des expressions réduites pour les éléments de $G(m,1,n)$ en termes des générateurs $t, s_1, \dots, s_{n-1}$. Ceci peut être prouvé en utilisant le même genre de méthode que dans [8]. Autrement, nous pouvons utiliser les résultats de [8], à savoir que tout élément de $G(m,1,n)$ peut être écrit sous la forme

$$\pi t_{n,a_n} \dots t_{2,a_2} t_{1,a_1}, \qquad \text{où } \pi \in S_n \text{ et } a_i = 0,\dots,m-1 \text{ pour } i = 1,\dots,n, \tag{III.4.8}$$

où S_n est le groupe symétrique sur n éléments, vu comme le sous-groupe de $G(m,1,n)$ engendré par $s_1,\dots,s_{n-1}$, et, pour $k = 1,\dots,n$,

$$t_{k,a} := \begin{cases} t^a s_1 \dots s_{k-1} & \text{pour } a > 0, \\ 1 & \text{pour } a = 0. \end{cases}$$

4. la récurrence commence avec le groupe $G(m,1,1)$ engendré par t seulement ; Clairement, $|G(m,1,1)| = m$.

De plus, si $\pi \in S_n$ est donné sous une forme réduite, alors l'expression (III.4.8) est réduite en termes des générateurs $t, s_1, \ldots, s_{n-1}$.

Maintenant, nous procédons par récurrence sur n. Supposons que l'élément $x \in G(m,1,n)$ est écrit sous la forme normale (III.4.7). Par l'hypothèse de récurrence, l'élément $w \in G(m,1,n-1)$ est réduit et donc w peut être écrit, pour certains $a_1, \ldots, a_{n-1} = 0, \ldots, m-1$ et une expressions réduite $\pi \in S_{n-1}$, comme

$$w = \pi t_{n-1,a_{n-1}} \ldots t_{1,a_1} \ .$$

Ainsi, nous avons, en utilisant seulement les relations de tresse[5] concernant les générateurs t, s_1, ..., s_{n-1},

$$x = s_j s_{j-1} \ldots s_1 \overline{\pi} t_{n,\alpha} t_{n-1,a_{n-1}} \ldots t_{2,a_2} t_{1,a_1},$$

où $\overline{\pi}$ est l'élément de S_n obtenu à partir de l'expression réduite π en remplaçant s_i par s_{i+1}, pour $i = 1, \ldots, n-2$. Comme $\overline{\pi}$ ne contient pas le générateur s_1, l'expression $s_j s_{j-1} \ldots s_1 \overline{\pi}$ est une expression réduite pour un élément de S_n. Nous concluons que la forme (III.4.7) est une expression réduite de l'élément x.

III.4.2 Forme normale pour $H(m,1,n)$. Préparation

Nous allons construire une base de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$ en plusieurs étapes. Cette base est l'analogue, dans le cas non-dégénéré, de la forme normale pour les éléments de $G(m,1,n)$ décrite auparavant.

III.4.2.1 Un ensemble engendrant l'espace vectoriel de $H(m,1,n)$

Rappelons que l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$ est engendrée par les éléments τ, $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ avec les relations définissantes :

$$\begin{aligned}
&(\tau - v_1) \ldots (\tau - v_m) = 0 \ , && \\
&\sigma_i^2 = (q - q^{-1})\sigma_i + 1 && \text{pour } i = 1, \ldots, n-1, \\
&\tau\sigma_1\tau\sigma_1 = \sigma_1\tau\sigma_1\tau \ , && \\
&\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} && \text{pour } i = 1, \ldots, n-2, \\
&\tau\sigma_i = \sigma_i\tau && \text{pour } i > 1, \\
&\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i && \text{pour } i, j = 1, \ldots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1.
\end{aligned} \tag{III.4.9}$$

La forme normale de la Proposition III.15 se généralise à l'algèbre $H(m,1,n)$. Nous commençons avec la Proposition suivante.

Proposition III.16. *Tout $x \in H(m,1,n)$ peut être écrit comme une combinaison linéaire d'éléments*

$$\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1} \ldots \sigma_1^{-1}\tau^{\alpha}\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_{n-1}\tilde{w} \ , \tag{III.4.10}$$

où $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\alpha \in \{0, \ldots, m-1\}$ et $\tilde{w} \in \tilde{W}$ avec $\tilde{W}$ la sous-algèbre engendrée par $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}$.

5. Les relations de tresse concernant les générateurs t, s_1, ..., s_{n-1} sont les deuxième et troisième relations dans (III.4.1), et les deuxième et troisième relations dans (III.4.2).

Preuve. L'élément neutre de $H(m,1,n)$ est dans l'ensemble d'éléments (III.4.10), ainsi que tous les générateurs. Nous devons seulement vérifier que l'espace vectoriel engendré par les éléments (III.4.10) est stable par multiplication par les générateurs (ainsi, l'espace vectoriel engendré par les éléments (III.4.10) sera une sous-algèbre contenant l'élément neutre et tous les générateurs, et sera donc l'algèbre elle-même). Considérons la multiplication à gauche. Nous multiplions, par la gauche, un élément quelconque E sous la forme (III.4.10) par chaque générateur $\mathsf{G} \in \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \tau\}$, et déplaçons dans le produit GE le générateur original G vers la droite ; l'expression se transforme ; nous continuons le processus jusqu'à ce qu'il soit clair que l'expression GE se récrit comme une combinaison linéaire d'éléments de la forme (III.4.10).

(i) Nous multiplions l'élément (III.4.10) à gauche par σ_i avec $i > j+1$. L'élément σ_i commute avec $\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1}\tau^\alpha$ et donc se déplace vers la droite à travers $\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1}\tau^\alpha$ sans changer ; ensuite σ_i se déplace à travers $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}$ vers la droite, devenant σ_{i-1} ; $\sigma_{i-1}\tilde{w}$ est encore dans $\tilde{W}$, et le processus est donc terminé.

(ii) Nous multiplions (III.4.10) à gauche par σ_i avec $i < j$. Quand σ_i passe à travers $\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1}$, il se transforme en σ_{i+1} ; l'élément σ_{i+1} commute avec τ^α et ensuite passe à travers $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}$ vers la droite, devenant σ_i ; Comme dans (i), $\sigma_i\tilde{w} \in \tilde{W}$.

(iii) L'assertion est immédiate quand nous multiplions (III.4.10) à gauche par σ_j.

(iv) Quand nous multiplions l'élément (III.4.10) à gauche par σ_{j+1}, il suffit pour la preuve d'écrire $\sigma_{j+1} = \sigma_{j+1}^{-1} + (q - q^{-1})$.

(v) Nous multiplions l'élément (III.4.10) à gauche par τ. Si $j = 0$, il n'y a rien à faire. Soit $j > 0$. L'élément τ se déplace vers la droite jusqu'à ce qu'il atteigne σ_1^{-1}. Ensuite, nous utilisons le Lemme III.17 ci-dessous et obtenons trois termes. Pour le premier terme :

$$\begin{aligned}\sigma_j^{-1}\dots\sigma_2^{-1}\cdot\tau\sigma_1\tau^\alpha\cdot\sigma_2\dots\sigma_{n-1}\cdot\tilde{w} &= \sigma_j^{-1}\dots\sigma_2^{-1}\cdot\tau\cdot\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}\cdot\tau^\alpha\tilde{w}\\ &= \tau\cdot\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}\cdot\sigma_{j-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1}\tau^\alpha\tilde{w}\end{aligned}$$

et $\sigma_{j-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1}\tau^\alpha\tilde{w} \in \tilde{W}$. Pour le second terme :

$$\sigma_j^{-1}\dots\sigma_2^{-1}\cdot\tau^{\alpha+1}\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}\cdot\tilde{w} = \tau^{\alpha+1}\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}\cdot\sigma_{j-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1}\tilde{w}$$

et $\sigma_{j-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1}\tilde{w} \in \tilde{W}$. Pour le troisième terme :

$$\sigma_j^{-1}\dots\sigma_1^{-1}\cdot\tau^\alpha\sigma_1\tau\sigma_2\dots\sigma_{n-1}\cdot\tilde{w} = \sigma_j^{-1}\dots\sigma_1^{-1}\cdot\tau^\alpha\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}\cdot\tau\tilde{w}$$

et $\tau\tilde{w} \in \tilde{W}$. □

Lemme III.17. *Pour $\alpha \geq 0$, nous avons :*

$$\tau\sigma_1^{-1}\tau^\alpha\sigma_1 = (q-q^{-1})\big(\tau\sigma_1\tau^\alpha - \tau^{\alpha+1}\sigma_1\big) + \sigma_1^{-1}\tau^\alpha\sigma_1\tau\ . \tag{III.4.11}$$

Preuve du Lemme. En multipliant l'égalité $\sigma_1\tau\sigma_1\tau^\alpha = \tau^\alpha\sigma_1\tau\sigma_1$ par σ_1^{-1} de la gauche et de la droite, nous obtenons

$$\tau\sigma_1\tau^\alpha\sigma_1^{-1} = \sigma_1^{-1}\tau^\alpha\sigma_1\tau\ . \tag{III.4.12}$$

En développant $\tau\sigma_1^{-1}\tau^\alpha\sigma_1 = \tau\big(\sigma_1 - (q-q^{-1})\big)\tau^\alpha\big(\sigma_1^{-1} + (q-q^{-1})\big)$ et utilisant (III.4.12), nous obtenons (III.4.11). □

III.4.2.2 Construction d'un $H(m,1,n)$-module

Considérons un $H(m,1,n-1)$-module quelconque M_{n-1}. Nous notons ses éléments par u, v etc. Soit $E = \mathbb{C}[z]/ < \chi >$ où $\chi(z)$ est le polynôme caractéristique pour τ. Soit V un espace vectoriel avec une base v_j, $j = 0, \ldots, n-1$. Soit $M_n := V \otimes E \otimes M_{n-1}$. Nous notons $\mathcal{V}_{j,\phi,u}$ l'élément $v_j \otimes \phi \otimes u$. Posons pour simplifier

$$\beta_j := \sigma_{j-1}^{-1} \ldots \sigma_1^{-1} \ .$$

Nous notons simplement ψu (sans aucun symbole pour l'action) le résultat de l'action de $\psi \in H(m,1,n-1)$ sur un élément $u \in M_{n-1}$.

Définissons des opérateurs F_{σ_i}, $i = 1, \ldots, n-1$, et F_τ sur l'espace M_n par (ci-dessous, le dernier indice $\mathcal{V}$ porte une information sur l'action des éléments de $H(m,1,n-1)$ sur le module M_{n-1} ; ϕ représente un élément de E, un polynôme en z, défini modulo $\chi(z)$; l'élément $\phi(\tau) \in H(m,1,n-1)$ qui apparait dans le dernier indice de $\mathcal{V}$ est ainsi bien défini) :

$$F_{\sigma_i} \ : \mathcal{V}_{j,\phi,u} \ \mapsto \ \begin{cases} \mathcal{V}_{j,\phi,\sigma_{i-1}u} \ , & j < i-1 \ , \\ (q-q^{-1})\, \mathcal{V}_{i-1,\phi,u} + \mathcal{V}_{i,\phi,u} \ , & j = i-1 \ , \\ \mathcal{V}_{i-1,\phi,u} \ , & j = i \ , \\ \mathcal{V}_{j,\phi,\sigma_i u} \ , & j > i \ , \end{cases} \tag{III.4.13}$$

et

$$F_\tau \ : \begin{cases} \mathcal{V}_{0,\phi,u} \ \mapsto \ \mathcal{V}_{0,z\phi,u} \ , \\ \mathcal{V}_{j,\phi,u} \ \mapsto \ (q-q^{-1})\, \mathcal{V}_{0,z,\beta_j\phi(\tau)u} - (q-q^{-1})\, \mathcal{V}_{0,z\phi,\beta_j u} + \mathcal{V}_{j,\phi,\tau u} \ , \quad j > 0 \ . \end{cases} \tag{III.4.14}$$

Soit, comme avant, $\tilde{W}$ la sous-algèbre de $H(m,1,n)$ engendrée par les éléments τ et $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}$. Prenons $\tilde{W}$ pour le $H(m,1,n-1)$-module M_{n-1} (en général, l'algèbre $\tilde{W}$ est un quotient de $H(m,1,n-1)$; nous définissons l'action de $H(m,1,n-1)$ comme étant la multiplication à gauche sur son quotient). Par un calcul direct, on vérifie que les formules (III.4.13) et (III.4.14) sont valides si on substitue $\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1} \ldots \sigma_1^{-1}\phi(\tau)\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_{n-1}u$, comme dans (III.4.10), pour $\mathcal{V}_{j,\phi,u}$. En fait, une affirmation plus forte est vraie. Les formules (III.4.13) et (III.4.14) ont la propriété universelle suivante.

Proposition III.18. *L'application $\sigma_i \mapsto F_{\sigma_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$, et $\tau \mapsto F_\tau$ équipe M_n d'une structure de $H(m,1,n)$-module.*

Preuve. Un calcul direct, bien que un peu long. Etant donnée une relation définissante de la liste (II.2.1)–(II.2.4) et (II.2.7)–(II.2.8), nous la vérifions sur chaque vecteur $\mathcal{V}_{j,\phi,u}$. Ci-dessous, nous mentionnons différents placements de l'indice j dans la vérification de la relation.

(i) Pour la relation $\sigma_i\sigma_k = \sigma_k\sigma_i$ avec $i < k-1$, on considère séparément les positions suivantes de l'indice j :

$$j < i-1 \ , \ j = i-1 \ , \ j = i \ , \ i < j < k-1 \ , \ j = k-1 \ , \ j = k \ \text{ et } \ j > k \ .$$

(ii) Pour la relation d'Artin $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$, on considère séparément les positions suivantes de l'indice j :

$$j < i-1 \ , \ j = i-1 \ , \ j = i \ , \ j = i+1 \ \text{ et } \ j > i+1 \ .$$

(iii) Pour la relation $\sigma_i^2 - (q-q^{-1})\sigma_i - 1 = 0$, on considère séparément les positions suivantes de l'indice j :

$$j < i-1 \ , \ j = i-1 \ , \ j = i \ \text{ et } \ j > i \ .$$

(iv) Pour la relation $\tau\sigma_i = \sigma_i\tau$ avec $i > 1$, on considère séparément les positions suivantes de l'indice j :

$$j = 0 \ , \ j < i-1 \ , \ j = i-1 \ , \ j = i \ \text{ et } \ j > i \ .$$

(v) Pour la relation $\tau\sigma_1\tau\sigma_1 = \sigma_1\tau\sigma_1\tau$, il suffit de considérer séparément les positions suivantes de l'indice j :

$$j = 0 \ , \ j = 1 \ \text{ et } \ j > 1 \ .$$

L'observation suivante simplifie la vérification ici :

$$F_\tau F_{\sigma_1} F_\tau : \begin{cases} \mathcal{V}_{0,\phi,u} \mapsto (q-q^{-1})\,\mathcal{V}_{0,z,\tau\phi(\tau)u} + \mathcal{V}_{1,z\phi,\tau u} \ , \\ \\ \mathcal{V}_{1,\phi,u} \mapsto (q-q^{-1})\,\mathcal{V}_{1,z,\tau\phi(\tau)u} - (q-q^{-1})\,\mathcal{V}_{1,z\phi,\tau u} + \mathcal{V}_{0,z\phi,\tau u} \ , \\ \\ \mathcal{V}_{j,\phi,u} \mapsto (q-q^{-1})^2\,\mathcal{V}_{0,z,\tau[\beta_j,\phi(\tau)]u} + (q-q^{-1})\,\mathcal{V}_{1,z,\tau\beta_j\phi(\tau)u} - (q-q^{-1})\,\mathcal{V}_{1,z\phi,\tau\beta_j u} \\ \qquad\qquad +(q-q^{-1})\,\mathcal{V}_{0,z,\beta_j\phi(\tau)\sigma_1\tau u} - (q-q^{-1})\,\mathcal{V}_{0,z\phi,\beta_j\sigma_1\tau u} + \mathcal{V}_{j,\phi,\tau\sigma_1\tau u} \ , \quad j > 1 \ . \end{cases} \tag{III.4.15}$$

Ci-dessus $[\beta_j, \phi(\tau)]$ est le commutateur de β_j et $\phi(\tau)$; dans la vérification de la relation $\tau\sigma_1\tau\sigma_1 = \sigma_1\tau\sigma_1\tau$ sur $\mathcal{V}_{j,\phi,u}$ avec $j > 1$, nous utilisons la formule (III.4.11) sous la forme

$$\tau\sigma_1^{-1}\phi(\tau)\sigma_1 = (q-q^{-1})\big(\tau\sigma_1\phi(\tau) - \tau\phi(\tau)\sigma_1\big) + \sigma_1^{-1}\phi(\tau)\sigma_1\tau \ .$$

(vi) Pour la relation $(\tau - v_1)\dots(\tau - v_m) = 0$, on considère séparément les positions suivantes de l'indice j :

$$j = 0 \ \text{ et } \ j > 0 \ .$$

La vérification de cette relation pour $j > 0$ est le seul endroit de la preuve qui requiert une explication. Pour $j > 0$, on prouve par récurrence la formule suivante :

$$F_\tau^l \ : \mathcal{V}_{j,\phi,u} \mapsto (q-q^{-1})\sum_{i=1}^{l}\mathcal{V}_{0,z^i,\beta_j\phi(\tau)\tau^{l-i}u} - (q-q^{-1})\sum_{i=1}^{l}\mathcal{V}_{0,z^i\phi,\beta_j\tau^{l-i}u} + \mathcal{V}_{j,\phi,\tau^l u} \ , \quad j > 0 \ . \tag{III.4.16}$$

La première somme dans (III.4.16) peut être vue comme l'image de l'élément

$$(z\otimes\phi)\cdot\frac{1\otimes z^l - z^l\otimes 1}{1\otimes z - z\otimes 1} \tag{III.4.17}$$

de l'espace $E \otimes E$ dans M_n par rapport à l'application κ_u, définie pour chaque $u \in M_{n-1}$ par

$$\kappa_u \ : \ f \otimes g \mapsto \mathcal{V}_{0,f,\beta_j g(\tau)u} \ .$$

Dans (III.4.17), la fraction $\frac{1\otimes z^l - z^l \otimes 1}{1\otimes z - z\otimes 1}$ est comprise comme l'image du polynôme qui est le résultat de la division du numérateur par le dénominateur (en tant que polynômes de deux variables non-restreintes) dans l'espace $E \otimes E$. De la même façon, la deuxième somme de (III.4.16) peut être comprise comme l'image de $(z\phi \otimes 1) \cdot \frac{1\otimes z^l - z^l \otimes 1}{1\otimes z - z\otimes 1}$ par rapport à la même application κ_u. Ainsi, la première somme moins la deuxième (la combinaison qui apparait dans (III.4.16)) est l'image de

$$(1 \otimes \phi - \phi \otimes 1) \cdot (z \otimes 1) \cdot \frac{1 \otimes z^l - z^l \otimes 1}{1 \otimes z - z \otimes 1} \ . \tag{III.4.18}$$

L'élément (III.4.18), déjà comme un polynôme (et donc aussi comme un élément de $E \otimes E$), peut être écrit sous la forme

$$\frac{1 \otimes \phi - \phi \otimes 1}{1 \otimes z - z \otimes 1} \cdot (z \otimes 1) \cdot (1 \otimes z^l - z^l \otimes 1) \ , \tag{III.4.19}$$

où la fraction $\frac{1\otimes\phi - \phi\otimes 1}{1\otimes z - z\otimes 1}$ est encore comprise comme l'image du polynôme qui est le résultat de la division du numérateur par le dénominateur (en tant que polynômes de deux variables non-restreintes) dans l'espace $E \otimes E$.

En écrivant maintenant $\chi(z) = \sum_{l=0}^{m} c_m z^m$, on vérifie la relation $\chi(F_\tau) = 0$ immédiatement avec l'aide de (III.4.19) (rappelons que $E = \mathbb{C}[z]/ < \chi >$). $\square$

Remarque. L'action de F_τ sur les vecteurs de la forme $\mathcal{V}_{j,1,u}$ avec $j > 0$ est simplement l'action de τ sur M_{n-1}, c'est-à-dire,

$$F_\tau \ : \ \mathcal{V}_{j,1,u} \ \mapsto \ \mathcal{V}_{j,1,\tau u} \quad \text{pour} \ \ j > 0 \ . \tag{III.4.20}$$

Remarque. Les opérateurs F_{σ_i} et F_τ définis dans (III.4.13) et (III.4.14) peuvent être représentés par des matrices de taille $n \times n$ (dont les indices correspondent à l'espace V), dont les éléments sont des opérateurs agissant sur l'espace $E \otimes M_{n-1}$. Nous notons par $\hat{z}$ l'opérateur de multiplication par z dans l'espace E. Pour faire rentrer les formules dans une ligne, nous notons l'opérateur $\mathrm{Id}_E \otimes \sigma_i$ simplement par σ_i, l'opérateur $\mathrm{Id}_E \otimes \tau$ simplement par τ et l'opérateur $\hat{z} \otimes \mathrm{Id}_{M_{n-1}}$ simplement par $\hat{z}$.

L'opérateur F_{σ_i} est (rappelons que les éléments de l'espace V sont labellisés par les entiers de 0 à $n-1$)

$$F_{\sigma_i} = \begin{pmatrix} \sigma_{i-1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \sigma_{i-1} & & & & \\ & & & q - q^{-1} & 1 & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & \sigma_i & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \ ; \tag{III.4.21}$$

ici le bloc de taille 2×2 avec des 1 (c'est-à-dire, des opérateurs identité) à l'extérieur de la diagonale principale est dans les $(i-1)^{\text{ème}}$ et $i^{\text{ème}}$ lignes et colonnes.

L'opérateur F_τ est

$$F_\tau = \begin{pmatrix} \hat{z} & (q-q^{-1})\hat{z}(\mu-1) & (q-q^{-1})\hat{z}\sigma_1^{-1}(\mu-1) & (q-q^{-1})\hat{z}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}(\mu-1) & \cdots \\ & \tau & & & \cdots \\ & & \tau & & \cdots \\ & & & \tau & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} ; \qquad \text{(III.4.22)}$$

ici, seulement la première ligne et la diagonale principale ne sont pas remplies de 0. L'opérateur μ sur l'espace $E \otimes M_{n-1}$ est défini ainsi :

$$\mu(\phi \otimes u) := 1 \otimes \phi(\tau)u \ ,$$

où ϕ est un polynôme en z. L'opérateur μ a les propriétés suivantes :

$$\mu\hat{z} = \tau\mu \ , \ \mu\tau = \tau\mu \ , \ \mu^2 = \mu \ .$$

III.4.3 Platitude de la déformation. Forme normale pour les éléments de $H(m,1,n)$

Nous sommes maintenant prêts pour prouver que la déformation $H(m,1,n)$ de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G(m,1,n)$ est plate, et pour donner la base de $H(m,1,n)$.

III.4.3.1 Platitude de la déformation

Comme ci-dessus, $\tilde{W}$ est la sous-algèbre de $H(m,1,n)$ engendrée par les éléments τ et $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}$.

Proposition III.19. *(i) L'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$ est une déformation plate de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G(m,1,n)$; en d'autres mots, $H(m,1,n)$ est un $\mathbb{C}[q,q^{-1},v_1,\ldots,v_m]$-module libre de dimension*

$$\dim(H(m,1,n)) = |G(m,1,n)| = n!m^n \ . \qquad \text{(III.4.23)}$$

(ii) De plus, la sous-algèbre $\tilde{W}$ est isomorphe à $H(m,1,n-1)$.

Preuve. Soit $\mathfrak{p} \ : \ H(m,1,n-1) \to \tilde{W}$ l'homomorphisme naturel qui envoie tout élément de $H(m,1,n-1)$ à son image dans la sous-algèbre $\tilde{W}$ de $H(m,1,n)$ engendré par $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}$. Soit une base arbitraire $\mathcal{B}_{n-1}$ de $H(m,1,n-1)$. La Proposition III.16 implique que les éléments

$$\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\ldots\sigma_1^{-1}\tau^\alpha\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-1}\mathfrak{p}(w) \ , \qquad \text{(III.4.24)}$$

où $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\alpha \in \{0, \ldots, m-1\}$ et $w \in \mathcal{B}_{n-1}$, engendrent $H(m,1,n)$ en tant qu'espace vectoriel. Nous allons montrer que ces éléments sont linéairement indépendants.

Soit M_{n-1} un module régulier à gauche pour $H(m,1,n-1)$; c'est-à-dire, l'espace du module est l'algèbre elle-même, et les éléments de l'algèbre agissent par multiplication à gauche.

Par la Proposition III.18, l'espace vectoriel $M_n = V \otimes E \otimes M_{n-1}$ a une structure de $H(m,1,n)$-module . Nous notons F_a l'opérateur correspondant à l'élément a. En utilisant les formules (III.4.13) et (III.4.14) pour l'action de $H(m,1,n)$ sur M_n, et aussi la formule (III.4.20), nous avons

$$F_{\sigma_j^{-1}\ldots\sigma_1^{-1}\phi(\tau)\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}u} \ : \ \mathcal{V}_{n-1,1,1} \ \mapsto \ \mathcal{V}_{j,\phi,u} \ . \tag{III.4.25}$$

Ainsi, nous voyons que les opérateurs $F_{\sigma_j^{-1}\ldots\sigma_1^{-1}\phi(\tau)\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}\mathfrak{p}(w)}$, $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\alpha \in \{0, \ldots, m-1\}$ et $w \in \mathcal{B}_{n-1}$, sont indépendants, ce qui implique l'indépendance de l'ensemble (III.4.24).

La platitude de la déformation de $G(m,1,n)$ vers $H(m,1,n)$ vient maintenant par récurrence sur n, la base de la récurrence pour l'algèbre $H(m,1,1)$ (avec un seul générateur τ) étant immédiate.

Si $\tilde{W}$ est un quotient non-trivial de $H(m,1,n-1)$, cela contredit l'indépendance des éléments (III.4.24), qui a déjà été établie. Le point (ii) suit, complétant la preuve de la Proposition. □

III.4.3.2 Base de $H(m,1,n)$

Nous pouvons, de la même façon que pour $G(m,1,n)$, construire récursivement une forme normale globale pour les éléments de $H(m,1,n)$, en utilisant maintenant la Proposition III.16 et la Proposition III.19, point (ii). Pour $k = 1, \ldots, n$, soit R_k l'ensemble d'éléments suivants

$$R_k := \{\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\ldots\sigma_1^{-1}\tau^\alpha\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{k-1},\ j = 0, \ldots, k-1,\ \alpha = 0, \ldots, m-1\} \ .$$

Corollaire III.20. *Tout élément $x \in H(m,1,n)$ peut être écrit de manière unique comme une combinaison linéaire d'éléments*

$$x = u_n u_{n-1} \ldots u_1 \ , \tag{III.4.26}$$

où $u_k \in R_k$ pour $k = 1, \ldots, n$.

En d'autres mots, les produits $u_n u_{n-1} \ldots u_1$, où u_k parcourt R_k pour $k = 1, \ldots, n$, forment une base de l'algèbre $H(m,1,n)$ en tant qu'espace vectoriel.

Remarque. Définissons l'homomorphisme $\varsigma : H_n \to H(m,1,n)$ de l'algèbre de Hecke H_n vers l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m,1,n)$ qui envoie le générateur σ_i de H_n vers le générateur σ_i de $H(m,1,n)$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. Les mots (III.4.26) dans lesquels τ n'entrent pas sont contenus dans la sous-algèbre $H(m,1,n)$ engendrée par σ_i, $i = 1, \ldots, n-1$, et donc dans l'image de H_n par l'application ς. Le cardinal de cet ensemble est égal à $n!$. Comme $\dim(H_n) = n!$, l'unicité établie dans le Corollaire III.20 implique que ς est un plongement.

Il y a une autre façon, sans utiliser le Corollaire III.20, de vérifier que ς est un plongement.Fixons un nombre e, $1 \leq e \leq m$. L'application qui envoie le générateur σ_i de $H(m,1,n)$ au générateur σ_i de H_n pour $i = 1, \ldots, n-1$, et le générateur τ de $H(m,1,n)$ au nombre v_e s'étend en un homomorphisme

$\pi_e : H(m,1,n) \to H_n$. On a $\pi_e \circ \varsigma = \mathrm{Id}_{H_n}$, et donc π_e est un inverse à gauche de ς (pour chaque e) ; en particulier, ς est injective.

Les applications utilisées dans le dernier argument jouent le même rôle que les applications $\hat{\imath}$ et π, voir (II.6.9) et (II.6.10), pour le plongement $\mathbb{C}G(m,1,n) \to \mathfrak{A}_{m,n}$. De la même manière, nous avons des plongements $H_n \to \hat{H}_n$ et, au niveau des groupes, $B_n \to \alpha B_n$ définis à chaque fois par une application tautologique sur les générateurs.

III.4.3.3 Représentations induites

Soit $\mathfrak{B}$ une sous-algèbre associative d'une algèbre associative $\mathfrak{A}$. Soit W un $\mathfrak{B}$-module à gauche. L'espace vectoriel $\mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{B}} W$ porte une structure naturelle de $\mathfrak{A}$-module définie par $\mathfrak{a}.(\mathfrak{a}' \otimes w) := \mathfrak{a}\mathfrak{a}' \otimes w$. C'est le $\mathfrak{A}$-module induit.

La Proposition III.19 (ou le Corollaire III.20) implique l'unicité de la forme (III.4.10) pour les éléments de $H(m,1,n)$. En prenant en compte la Proposition III.18, nous arrivons à la conclusion suivante.

Corollaire III.21. *Le module M_n est le $H(m,1,n)$-module induit (par rapport à $H(m,1,n-1)$ et au module M_{n-1} sur $H(m,1,n-1)$). Les formules (III.4.13) et (III.4.14) donnent une réalisation explicite du module M_n.*

Commentaires sur les formules (III.4.13) et (III.4.14).

(a) Avec l'aide des formules (III.4.13)–(III.4.14), nous avons construit une structure de $H(m,1,n)$-module sur l'espace $V \otimes E \otimes M_{n-1}$, où M_{n-1} est un $H(m-1,1,n)$-module quelconque. Pour le cas particulier où m est égal à 1, l'espace E est de dimension 1 et nous pouvons l'identifier canoniquement avec le corps $\mathbb{C}$. Comme résultat, nous obtenons les opérateurs F_{σ_i} agissant sur l'espace $V \otimes M_{n-1}$:

$$F_{\sigma_i} \ : \mathcal{V}_{j,u} \ \mapsto \begin{cases} \mathcal{V}_{j,\sigma_{i-1}u} \ , & j < i-1 \ , \\ (q-q^{-1})\,\mathcal{V}_{i-1,u} + \mathcal{V}_{i,u} \ , & j = i-1 \ , \\ \mathcal{V}_{i-1,u} \ , & j = i \ , \\ \mathcal{V}_{j,\sigma_i u} \ , & j > i \ . \end{cases} \tag{III.4.27}$$

La formule (III.4.27) construit, maintenant sur l'espace vectoriel $M_n := V \otimes M_{n-1}$, un module sur l'algèbre de Hecke H_n : l'opérateur F_τ n'était pas utilisé dans la vérification des relations de l'algèbre de Hecke (c'est-à-dire, les relations (II.2.1)–(II.2.2) et (II.2.7)) pour les générateurs F_{σ_i} (nous laissons la vérification de ce fait au lecteur) dans la preuve de la Proposition III.18.

Une autre façon d'arriver à (III.4.27) est de noter que, dans la formule (III.4.13) toute seule, le label ϕ des vecteurs $\mathcal{V}_{j,\phi,u}$ n'est pas touché par l'action des générateurs F_{σ_i}, donc on peut oublier le label ϕ et reproduire la formule (III.4.27).

(a′) En particuler, en prenant pour M_{n-1} le module unidimensionnel sur l'algèbre de Hecke H_{n-1} dans lequel les générateurs σ_i sont envoyés à q, le module résultant M_n est le module de Burau pour l'algèbre de Hecke H_n.

(b) En vérifiant les relations (II.2.3)–(II.2.4) pour les opérateurs F_{σ_i} et F_τ donnés par les formules (III.4.13) et (III.4.14), nous avons utilisé l'équation caractéristique pour σ, mais pas l'équation caractéristique pour τ (nous laissons la vérification de ce fait au lecteur). Donc en fait les formules (III.4.13) et (III.4.14) définissent un module sur l'algèbre de Hecke affine [6] $\hat{H}_n$, en partant d'un module sur l'algèbre de Hecke affine $\hat{H}_{n-1}$. Notons que $E = \mathbb{C}[z]$ dans cette situation.

(b′) En prenant maintenant pour M_{n-1} le module unidimensionnel de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H_{m,1,n-1}$ (respectivement, de l'algèbre de Hecke affine $\hat{H}_{n-1}$), dans lequel les générateurs σ_i sont envoyés à q et le générateur τ est envoyé à v_e pour un certain e, $1 \leq e \leq m$, (v_e est quelconque pour l'algèbre de Hecke affine), le $H_{m,1,n}$-module (respectivement, $\hat{H}_n$-module) résultant sur l'espace $M_n = V \otimes E$ est l'analogue naturel du module de Burau (avec $E = \mathbb{C}[z]$ dans le cas de l'algèbre de Hecke affine). L'action des générateurs σ_i est donnée par les matrices de Burau usuelles (ce sont les matrices (III.4.21) dans lesquelles σ est remplacé par q ; ces matrices agissent trivialement sur l'espace E), tandis que la matrice de l'opérateur τ est donnée par

$$F_\tau = \begin{pmatrix} \hat{z} & (q-q^{-1})\hat{z}(\mu_e - 1) & (q-q^{-1})q^{-1}\hat{z}(\mu_e-1) & (q-q^{-1})q^{-2}\hat{z}(\mu_e-1) & \cdots \\ & v_e & & & \cdots \\ & & v_e & & \cdots \\ & & & v_e & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} ; \qquad \text{(III.4.28)}$$

ici μ_e est défini par $\mu_e(\phi) := \phi(v_e)$, où ϕ est un polynôme en z.

(c) Naturalité.

pour un espace vectoriel M, soit $\Upsilon_A(M) := V \otimes M$ et $\Upsilon_B(M) := V \otimes E \otimes M$. Ici V est un espace vectoriel avec une base v_j, $j = 0, \ldots, n-1$. L'espace E sera spécifié ci-dessous. Pour une application $\alpha : M \to M'$ soit $\Upsilon_A(\alpha) := \mathrm{Id}_V \otimes \alpha$ et $\Upsilon_B(\alpha) := \mathrm{Id}_V \otimes \mathrm{Id}_E \otimes \alpha$.

Les constructions (III.4.13)–(III.4.14) et (III.4.27) possèdent les propriétés suivantes de fonctorialité. Elles proviennent de l'observation que les constructions (III.4.13)–(III.4.14) et (III.4.27) donnent des réalisations des représentations induites (voir le Corollaire III.21 pour l'algèbre $H(m,1,n)$; l'assertion sur les représentations peut être étendue aux deux autres cas listés ci-dessous) ; ces propriétés fonctorielles peuvent également être vérifiées directement.

6. nous rappelons que l'algèbre de Hecke affine $\hat{H}_n$ est l'algèbre engendrée par les éléments $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ et τ avec les relations définissantes (II.2.1)–(II.2.4) et (II.2.7).

– Υ_B est un foncteur de la catégorie des $H_{m,1,n-1}$-modules vers la catégorie des $H_{m,1,n}$-modules,

$$\Upsilon_B : H_{m,1,n-1}\text{-mod} \ \to \ H_{m,1,n}\text{-mod} \ ;$$

ici $E = \mathbb{C}[z]/ < \chi >$ où $\chi(z)$ est le polynôme caractéristique de τ.

– En particulier, pour $m = 1$, Υ_A est un foncteur de la catégorie des H_{n-1}-modules vers la catégorie des H_n-modules,

$$\Upsilon_A : H_{n-1}\text{-mod} \ \to \ H_n\text{-mod} \ .$$

– De plus, Υ_B est un foncteur au niveau des algèbres de Hecke affines

$$\Upsilon_B : \hat{H}_{n-1}\text{-mod} \ \to \ \hat{H}_n\text{-mod} \ .$$

Ici $E = \mathbb{C}[z]$.

La limite classique ne cause aucune difficulté : on prend simplement q égal à 1 dans les formules (III.4.13)–(III.4.14) et (III.4.27) (notons que les paramètres v_e participent aux formules (III.4.13)–(III.4.14) seulement à travers l'action de τ sur M_{n-1}).

III.4.3.4 Extension à l'algèbre de Hecke affine $\hat{H}_n$

Rappelons que l'algèbre de Hecke affine $\hat{H}_n$ de type A est l'algèbre engendrée par les éléments τ, $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ avec les relations définissantes (II.2.1)–(II.2.4) et (II.2.7).

Au vue des preuves des Propositions III.16, III.18 et III.19 (voir Remarque **(b)** ci-dessus), les résultats présentés ici pour les algèbres de Hecke cyclotomiques s'étendent immédiatement à l'algèbre $\hat{H}_n$.

Soit $\hat{\mathcal{B}}_{n-1}$ une base de l'algèbre $\hat{H}_{n-1}$.

Proposition III.22 (i) *Les éléments suivants forment une base de $\hat{H}_n$*

$$\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\ldots\sigma_1^{-1}\tau^{\alpha}\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-1}w \ , \tag{III.4.29}$$

où $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $w \in \hat{\mathcal{B}}_{n-1}$.

(ii) *L'algèbre $\hat{H}_n$ est une déformation plate du groupe affine $\hat{G}_n$ de type A* [7] *; en d'autres mots, une base de $\hat{H}_n$ est labellisée par les éléments de $\hat{G}_n$.*

(iii) *La sous-algèbre de $\hat{H}_n$ engendrée par les éléments $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}$ est isomorphe à l'algèbre $\hat{H}_{n-1}$.*

La généralisation de la forme normale globale pour les éléments de $H(m, 1, n)$ au cas de l'algèbre affine $\hat{H}_n$ est la suivante. Pour $k = 1, \ldots, n$, soit E_k l'ensemble d'éléments suivants

$$E_k := \{\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\ldots\sigma_1^{-1}\tau^{\alpha}\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{k-1}, \ j = 0, \ldots, k-1, \ \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \ .$$

7. La présentation du groupe affine $\hat{G}_n$ est obtenu en prenant la limite $q \to \pm 1$ dans les relations (II.2.1)–(II.2.4) et (II.2.7).

Corollaire III.23. *Tout élément $x \in \hat{H}_n$ peut être écrit de manière unique comme une combinaison linéaire d'éléments*

$$x = u_n u_{n-1} \dots u_1 \ , \tag{III.4.30}$$

où $u_k \in E_k$ pour $k = 1, \dots, n$.

III.4.3.5 Autres bases similaires de $H(m, 1, n)$

Il existe trois autres formes normales pour les éléments de $H(m, 1, n)$ par rapport à $\tilde{W}$ similaire à la forme normale de la Proposition III.16. Tout $x \in H(m, 1, n)$ peut être écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de l'ensemble

$$\begin{cases} \sigma_{k+1}\sigma_{k+2}\dots\sigma_{n-1}\tilde{w} \ , \text{ où } k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ et } \tilde{w} \in \tilde{W} \ , \\ \\ \sigma_j\sigma_{j-1}\dots\sigma_1\tau^\alpha\sigma_1\dots\sigma_{n-1}\tilde{w} \ , \text{ où } j \in \{0, \dots, n-1\}, \ \alpha \in \{1, \dots, m-1\} \text{ et } \tilde{w} \in \tilde{W} \ , \end{cases} \tag{III.4.31}$$

ou de l'ensemble

$$\sigma_j\sigma_{j-1}\dots\sigma_1\tau^\alpha\sigma_1^{-1}\dots\sigma_{n-1}^{-1}\tilde{w} \ , \text{ où } j \in \{0, \dots, n-1\}, \ \alpha \in \{0, \dots, m-1\} \text{ et } \tilde{w} \in \tilde{W} \ , \tag{III.4.32}$$

ou de l'ensemble

$$\begin{cases} \sigma_{k+1}^{-1}\sigma_{k+2}^{-1}\dots\sigma_{n-1}^{-1}\tilde{w} \ , \text{ où } k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ et } \tilde{w} \in \tilde{W} \ , \\ \sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1}\tau^\alpha\sigma_1^{-1}\dots\sigma_{n-1}^{-1}\tilde{w} \ , \text{ où } j \in \{0, \dots, n-1\}, \ \alpha \in \{1, \dots, m-1\} \text{ et } \tilde{w} \in \tilde{W} \ , \end{cases} \tag{III.4.33}$$

où $\tilde{W}$ est, comme avant, la sous-algèbre engendrée par $\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}$.

Concernant la forme normale (III.4.31), la preuve va selon les mêmes lignes que la preuve de la Proposition III.16.

Les formes (III.4.32) et (III.4.33) peuvent être réduites aux formes (III.4.10) et (III.4.31) en appliquant des automorphismes standards de l'algèbre de Hecke cyclotomique.

III.4.4 Forme symétrisante sur l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$

Multiplication à droite sur les éléments de base. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Pour $j = 0, \dots, k-1$, $a \in \mathbb{N}$ et $u \in H(m, 1, k-1)$, définissons l'élément suivant de $H(m, 1, n)$

$$T_{j,a,u}^{(k)} := \sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1}\tau^a\sigma_1\dots\sigma_{k-2}\sigma_{k-1}u \ .$$

Pour une base arbitraire $\mathcal{B}_{k-1}$ de $H(m, 1, k-1)$, les résultats de la Sous-Section précédente donnent que les éléments

$$T_{j,a,u}^{(k)} \quad \text{pour } j = 0, \dots, k-1, \ a = 0, \dots, m-1 \text{ et } u \in \mathcal{B}_{k-1}, \tag{III.4.34}$$

forment une base de $H(m, 1, k)$. En particulier, l'ensemble d'éléments (III.4.34) pour $k = n$ forment une base de l'algèbre $H(m, 1, n)$. De plus, les formules (III.4.13) et (III.4.14) (avec $\mathcal{V}_{j,\phi,u}$ remplacé par

$T^{(n)}_{j,a,u}$) donne l'action, par la multiplication à gauche, de l'algèbre $H(m,1,n)$ sur les éléments de base $T^{(n)}_{j,a,u}$.

Rappelons que $\beta_j := \sigma_{j-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1}$, $j=1,\dots,n$. Le Lemme suivant donne l'action, par la multiplication à droite, de l'algèbre $H(m,1,n)$ sur les éléments $T^{(n)}_{j,a,u}$. Ecrivons, dans la base rappelée ci-dessus de $H(m,1,n-1)$,

$$u = T^{(n-1)}_{k,b,w} = \sigma_k^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1}\tau^b\sigma_1\dots\sigma_{n-3}\sigma_{n-2}w\ ,$$

où $k=0,\dots,n-2$, $b=0,\dots,m-1$ et $w\in H(m,1,n-2)$.

Lemme III.24. *Nous avons les formules*

$$T^{(n)}_{j,a,u}\cdot\tau = T^{(n)}_{j,a,u\tau} \quad et \quad T^{(n)}_{j,a,u}\cdot\sigma_i = T^{(n)}_{j,a,u\sigma_i}\ ,\ pour\ i=1,\dots,n-2, \tag{III.4.35}$$

et

$$\begin{aligned} T^{(n)}_{j,a,u}\cdot\sigma_{n-1} &= (q-q^{-1})\Big(T^{(n)}_{j,a+b,\sigma_{k+1}\dots\sigma_{n-2}w} + \sum_{i=1}^{a}(T^{(n)}_{j,i,\beta_{k+1}\tau^{a+b-i}\beta_{n-1}^{-1}w} - T^{(n)}_{j,i+b,\beta_{k+1}\tau^{a-i}\beta_{n-1}^{-1}w})\Big) \\ &+ \begin{cases} T^{(n)}_{k+1,b,\beta_{j+1}\tau^a\beta_{n-1}^{-1}w} & si\ j\le k, \\ T^{(n)}_{k,b,\beta_j\tau^a\beta_{n-1}^{-1}w} - (q-q^{-1})T^{(n)}_{j,b,\beta_{k+1}\tau^a\beta_{n-1}^{-1}w} & si\ j>k. \end{cases} \end{aligned} \tag{III.4.36}$$

Preuve. Les formules dans (III.4.35) sont immédiates. Pour la formule (III.4.36), notons que σ_{n-1} commute avec w, et donc

$$u\sigma_{n-1} = \sigma_k^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1}\tau^b\sigma_1\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}w = T^{(n)}_{k,b,w}\ ,$$

ce qui donne

$$T^{(n)}_{j,a,u}\cdot\sigma_{n-1} = \sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\dots\sigma_1^{-1}\tau^a\sigma_1\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}T^{(n)}_{k,b,w}\ .$$

Ensuite, en utilisant la connaissance de la multiplication à gauche de $T^{(n)}_{k,b,w}$ par les générateurs de $H(m,1,n)$ (c'est-à-dire, les formules (III.4.13), (III.4.14) et (III.4.16)), un calcul direct mène à (III.4.36). □

Forme symétrisante sur $H(m,1,n)$. Soit la forme linéaire $L\ :\ H(m,1,n)\to\mathbb{C}[q,q^{-1},v_1,\dots,v_m]$ définie sur les éléments de base de $H(m,1,n)$ de la façon suivante. La forme L est définie par la condition initiale

$$L(\tau^a) = \delta_a^0,\ a=0,\dots,m-1, \tag{III.4.37}$$

où δ_a^0 est le delta de Kronecker, et la récursion, pour $k>1$,

$$L(T^{(k)}_{j,a,u}) = \delta_j^{k-1}\delta_a^0 L(u) \quad \text{pour } j=0,\dots,k-1,\ a=0,\dots,m-1 \text{ et } u\in H(m,1,k-1). \tag{III.4.38}$$

Proposition III.25. *La forme linéaire L est centrale, c'est-à-dire*

$$L(xx') = L(x'x) \quad pour\ x,x'\in H(m,1,n). \tag{III.4.39}$$

Preuve. Nous prouvons la Proposition par récurrence sur n. La base de la récurrence est immédiate car, pour $n = 1$, $H(m, 1, 1)$ est commutative. Il suffit de prouver la formule (III.4.39) pour x' sous la forme normale donnée par le Corollaire III.20, et $x = \tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$. Soit $x' = T^{(n)}_{j,a,u}$, avec $j = 0, \ldots, n-1$, $a = 0, \ldots, m-1$ et $u \in H(m, 1, n-1)$. Soit x l'un des générateurs $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}$. Alors

$$xx' = T^{(n)}_{j,a,xu} \quad \text{et} \quad x'x = T^{(n)}_{j,a,ux} \ ,$$

et donc

$$L(xx') = \delta_j^{n-1}\delta_a^0 L(xu) \quad \text{et} \quad L(x'x) = \delta_j^{n-1}\delta_a^0 L(ux) \ .$$

Le résultat suit de l'hypothèse de récurrence.

Une analyse directe, en utilisant la formule (III.4.13), conduit à

$$L(\sigma_{n-1}x') = \delta_j^{n-2}\delta_a^0 L(u) \ .$$

Maintenant, posons $u = T^{(n-1)}_{k,b,w}$ où $k = 0, \ldots, n-2$, $b = 0, \ldots, m-1$ et $w \in H(m, 1, n-2)$, comme dans le Lemme III.24. Soit $\mathfrak{v} := (-1)^m v_1 v_2 \ldots v_m$. En utilisant le Lemme III.24, formule (III.4.36), et la formule de récursion (III.4.38), nous écrivons

$$\begin{aligned} L(x'\sigma_{n-1}) = (q-q^{-1})\Bigg(&\delta_j^{n-1}\delta_k^{n-2}(\delta^0_{a+b} + \mathfrak{v}\delta^m_{a+b}) \\ &+ \sum_{i=1}^{a}\Big(\delta_j^{n-1}\delta_i^0\delta_k^{n-2}(\delta^0_{a+b-i} + \mathfrak{v}\delta^m_{a+b-i}) - \delta_j^{n-1}\delta_k^{n-2}\delta^0_{a-i}(\delta^0_{i+b} + \mathfrak{v}\delta^m_{i+b})\Big)\Bigg)L(w) \\ + \begin{cases} \delta_k^{n-2}\delta_b^0\delta_j^{n-2}\delta_a^0 L(w) & \text{si } j \le k, \\ \delta_k^{n-1}\delta_b^0\delta_j^{n-1}\delta_a^0 L(w) - (q-q^{-1})\delta_j^{n-1}\delta_b^0\delta_k^{n-2}\delta_a^0 L(w) & \text{si } j > k, \end{cases} \end{aligned}$$

Une analyse directe sur cette formule mène à

$$L(x'\sigma_{n-1}) = \delta_k^{n-2}\delta_b^0\delta_j^{n-2}\delta_a^0 L(w),$$

qui est égal à $\delta_j^{n-2}\delta_a^0 L(u)$. Ceci conclut la preuve de la Proposition. □

Remarques. (a) Soit $\mathcal{B}_n$ la base de $H(m, 1, n)$ donnée par le Corollaire III.20. Notons que l'élément neutre 1 pour la multiplication de $H(m, 1, n)$ appartient à $\mathcal{B}_n$. Sur les éléments de base $\mathcal{B}_n$, la forme linéaire L est simplement

$$L(1) = 1 \quad \text{et} \quad L(x) = 0, \ \text{pour tout élément } x \in \mathcal{B}_n \text{ tel que } x \neq 1.$$

(b) Les résultats de cette Sous-Section se généralisent directement à l'algèbre de Hecke affine de type A. Soit $\hat{\mathcal{B}}_n$ la base de l'algèbre affine $\hat{H}_n$ de type A donnée par le Corollaire III.23. Notons que l'élément neutre 1 pour la multiplication de $\hat{H}_n$ appartient à $\hat{\mathcal{B}}_n$. Définissons sur les éléments de la base $\hat{\mathcal{B}}_n$, la forme linéaire $\hat{L}$ par

$$\hat{L}(1) = 1 \quad \text{et} \quad \hat{L}(x) = 0, \ \text{pour tout élément } x \in \hat{\mathcal{B}}_n \text{ tel que } x \neq 1.$$

Notons que $\hat{L}$ peut également être donnée par les formules analogues à (III.4.37) et (III.4.38). La forme linéaire $\hat{L} \ : \ \hat{H}_n \to \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ est centrale (la démonstration est la même que pour la Proposition III.25).

Chapitre IV

Sous-groupes alternés des groupes de Coxeter

Sommaire

IV.1 Introduction **154**
IV.1.1 Organisation du chapitre 156
IV.2 Sous-groupes alternés des groupes de Coxeter **157**
IV.2.1 Définition 157
IV.2.2 Présentation dans le cas irréductible 157
IV.2.3 Présentation dans le cas général 160
IV.2.4 Chaînes des sous-groupes alternés de type A 161
IV.3 Extensions centrales des sous-groupes alternés des groupes de Coxeter . **162**
IV.4 Sous-algèbres alternées des algèbres de Hecke **166**
IV.4.1 Définition de la sous-algèbre alternée de l'algèbre de Hecke 166
IV.4.2 Présentation à la Bourbaki 167
IV.4.3 Présentation utilisant les arêtes du graphe de Coxeter 168
Appendice IV.4.A Coefficients dans les relations définissantes des algèbres $H^+(G)$ . . 170
IV.5 Sous-groupes alternés des groupes de tresses **173**
IV.5.1 Définition 173
IV.5.2 Présentation à la Bourbaki 173
IV.5.3 Présentation utilisant les arêtes du graphe de Coxeter 176
IV.6 Algorithme de Coxeter–Todd et formes normales pour les sous-groupes alternés de type A, B ou D **178**
IV.6.1 Type A 178
IV.6.2 Type B 181
IV.6.3 Type D 184

IV.1 Introduction

Soient (G, S) un système de Coxeter et G^+ le sous-groupe alterné de G. Une présentation de G^+ par générateurs et relations est donnée, comme un exercice, dans [7]. Un sommet (arbitraire) du graphe de Coxeter est distingué dans cette présentation.

Pour le groupe de Coxeter de type A (c'est-à-dire, le groupe symétrique) la présentation standard (de Artin) de la chaîne des groupes symétriques est locale et stationnaire. La théorie des représentations de la chaîne des groupes symétriques a été revisitée dans [86]. Il est souligné dans [86] que la méthode développée là-bas pour la théorie des représentations des groupes symétriques pourrait être applicable pour une large classe de chaînes de groupes ou d'algèbres, à savoir les chaînes de groupes ou d'algèbres munies de présentations locales et stationnaires (éventuellement retardées) ; voir le Chapitre I pour les définitions de localité, de stationnarité et de stationnarité retardée. Pour le type A, la présentation à la Bourbaki de la chaîne des sous-groupes alternés n'est pas locale. Néanmoins, une autre présentation a été donnée dans [101], et il est demandé là-bas comment généraliser cette présentation aux sous-groupes alternés de tous les groupes de Coxeter.

Un groupe de Coxeter discret G est un sous-groupe d'un groupe orthogonal O ; l'extension spinorielle de O se réduit à une extension centrale $\tilde{G}$ de G. Une présentation de $\tilde{G}$ peut être trouvée dans [76]. Le sous-groupe alterné G^+ d'un groupe de Coxeter discret G hérite aussi d'une extension centrale (spinorielle) $\tilde{G}^+$. En général, il existe des extensions centrales des sous-groupes alternés différentes des extensions spinorielles (voir [70] pour les multiplicateurs de Schur des sous-groupes alternés des groupes de Coxeter finis et pour une présentation à la Bourbaki).

Dans ce Chapitre, nous suggérons une autre présentation (que celle à la Bourbaki) pour les groupes G^+ et $\tilde{G}^+$ pour un système de Coxeter arbitraire (G, S). Dans la présentation à la Bourbaki, les générateurs sont indexés par les sommets du graphe de Coxeter (hormis le sommet distingué). Dans notre présentation, les générateurs sont indexés par les arêtes orientées du graphe de Coxeter. Pour le type A, les présentations obtenues pour la chaîne des groupes A_n^+ et $\tilde{A}_n^+$ sont locales et stationnaires. Pour les types B et D, nos présentations pour les chaînes des groupes B_n^+, $\tilde{B}_n^+$, D_n^+ et $\tilde{D}_n^+$ sont locales et stationnaires retardées.

Le groupe A_n^+ admet une présentation, appelée *présentation de Carmichael* dans [21]. Nous interprétons cette présentation géométriquement : ici, une arête orientée du graphe de Coxeter est distinguée. Avec cette interprétation, il existe des analogues des générateurs de Carmichael pour les autres systèmes de Coxeter. En général, ces éléments engendrent un sous-groupe de G^+. Néanmoins, pour le type B (avec un choix approprié de l'arête orientée distinguée) et le type D, tout le groupe G^+ est obtenu. Nous donnons des relations définissantes pour ces ensembles de générateurs pour les groupes B_n^+ et D_n^+.

L'algèbre de Hecke $H(G)$ associée au groupe de Coxeter G est une déformation plate de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G$. Dans [90], un analogue de l'algèbre de Hecke est défini, dans le cas à un paramètre, pour les sous-groupes alternés des groupes de Coxeter. Ici, nous étendons cette définition au cas général (algèbres de Hecke multiparamétriques [65]) et appelons l'algèbre résultante "la sous-algèbre alternée de l'algèbre de Hecke". Cette algèbre, que nous notons $H^+(G)$, est une sous-algèbre d'indice 2 (voir Section IV.4 pour les définitions précises) de l'algèbre de Hecke $H(G)$, et est une déformation plate de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G^+$. L'algèbre $H^+(G)$ est un exemple distingué parmi les déformations de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G^+$ étudiées dans [27]. Pour les types A et B, l'algèbre $H^+(G)$ a été étudiée dans [73, 74].

Par ailleurs, associé à un système de Coxeter (G, S), il existe un groupe de tresses $\mathcal{B}(G)$. De manière similaire au sous-groupe alterné G^+ de G, on peut définir un "sous-groupe alterné" $\mathcal{B}^+(G)$ du groupe

de tresses $\mathcal{B}(G)$.

Nous généralisons l'idée dans [7] pour donner une présentation à la Bourbaki pour la sous-algèbre alternée $H^+(G)$ de l'algèbre de Hecke et pour le sous-groupe alterné $\mathcal{B}^+(G)$ du groupe de tresses $\mathcal{B}(G)$. Ensuite, nous prouvons une présentation de $H^+(G)$ et une présentation de $\mathcal{B}^+(G)$ avec les générateurs reliés aux arêtes du graphe de Coxeter.

Comme dans le cadre des sous-groupes alternés, pour le type A, les présentations avec les générateurs reliés aux arêtes du graphe de Coxeter de la chaîne des algèbres $H^+(A_n)$ et de la chaîne des groupes $\mathcal{B}^+(A_n)$ sont locales et stationnaires ; pour les types B et D, ces présentations de la chaîne des algèbres $H^+(B_n)$ (respectivement, $H^+(D_n)$) et de la chaîne des groupes $\mathcal{B}^+(B_n)$ (respectivement, $\mathcal{B}^+(D_n)$) sont locales et stationnaires retardées.

Dans le cas du groupe de Coxeter G et du groupe de tresses $\mathcal{B}(G)$, le procédé de récriture de Reidemeister–Schreier [91, 92], voir aussi *e.g.* [66], permet d'obtenir des présentations des sous-groupes alternés G^+ et $\mathcal{B}^+(G)$. Les présentations obtenues avec ce procédé coïncident avec les présentations à la Bourbaki, tandis que les présentations avec les générateurs reliés aux arêtes du graphe de Coxeter n'apparaissent pas comme résultant de la procédure de Reidemeister–Schreier.

IV.1.1 Organisation du chapitre

Dans la Section IV.2, nous obtenons la présentation, avec les générateurs reliés aux arêtes orientées du graphe de Coxeter, du sous-groupe alterné G^+ pour un système de Coxeter (G, S). Nous traitons tout d'abord les systèmes de Coxeter irréductibles. Ensuite nous généralisons la présentation aux systèmes de Coxeter arbitraires, en introduisant une *extension connexe* du graphe de Coxeter.

La Section IV.3 est consacrée à la présentation, avec les générateurs reliés aux arêtes orientées du graphe de Coxeter, de $\tilde{G}^+$ pour un système de Coxeter arbitraire (G, S). Il est possible de donner les présentations - avec les générateurs reliés aux arêtes du graphe de Coxeter - pour toutes les extensions centrales des sous-groupes alternés des groupes de Coxeter finis. Nous l'illustrons sur deux exemples : A_5^+ et A_6^+.

Dans la Section IV.4, nous donnons la définition de la sous-algèbre alternée $H^+(G)$ de l'algèbre de Hecke, comme la sous-algèbre des éléments de degré pair pour une certaine graduation de $H(G)$. La présentation à la Bourbaki de $H^+(G)$ et la présentation de $H^+(G)$ avec les générateurs reliés aux arêtes du graphe de Coxeter sont prouvées. Dans l'Appendice à la Section IV.4, nous obtenons une relation de récurrence et la fonction génératrice pour les coefficients apparaissant dans les relations définissantes des sous-algèbres alternées des algèbres de Hecke. Pour le cas à un paramètre, nous rappelons une formule simple pour ces coefficients en termes de coefficients binomiaux.

Dans la Section IV.5, nous donnons les analogues, pour les sous-groupes alternés $\mathcal{B}^+(G)$ des groupes de tresses, des deux présentations de la sous-algèbre alternée de l'algèbre de Hecke.

Dans la Section IV.6, nous présentons les résultats de l'algorithme de Coxeter–Todd pour trois présentations - la présentation à la Bourbaki, notre présentation qui fait référence aux arêtes et la présentation à la Carmichael - des sous-groupes alternés de type A, B et D.

Notations. Dans le texte, quand un produit $\pi\sigma$ de deux permutations apparait, nous supposons que σ est appliquée en premier et ensuite π ; par exemple, $(1,2)(2,3) = (1,2,3)$.

Certaines relations définissantes dans ce Chapitre impliquent un paramètre $m \in \mathbb{N} \cup \infty$. Il sera sous-entendu que si $m = \infty$, la relation est absente.

Pour tout entier non-négatif k, $\{a,b\}_k$ est défini comme le produit $abab\dots$ avec k facteurs (par convention $\{a,b\}_0 := 1$) ; par exemple $\{a,b\}_1 := a$, $\{a,b\}_2 := ab$ et $\{a,b\}_3 := aba$. Nous définissons aussi, pour tout entier non-négatif k, $\{a,b\}_{-k} := \{b,a\}_k$.

Pour un entier p, nous écrivons $\lfloor p \rfloor$ pour la partie entière de p.

IV.2 Sous-groupes alternés des groupes de Coxeter

IV.2.1 Définition

Soit (G,S) un système de Coxeter : S est l'ensemble des générateurs, $S = \{s_0, \dots, s_{n-1}\}$; les relations définissantes de G sont encodées par une matrice

$$\mathfrak{m} = (m_{ij})_{i,j=0,1,\dots,n-1} \quad \text{avec } m_{ii} = 1 \text{ et } 2 \leq m_{ij} \in \mathbb{N} \cup \infty$$

de la manière suivante :

$$G := \langle\ s_0, \dots, s_{n-1} \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \text{ for } i,j = 0,1,\dots,n-1,\ i \leqslant j\ \rangle\,. \tag{IV.2.1}$$

Cette présentation de G peut être exprimée avec l'aide du *graphe de Coxeter* : ses sommets sont en bijection avec les générateurs $s_0, \dots, s_{n-1}$ et sont indexés par $0,1,\dots,n-1$; le sommet i est connecté au sommet j si et seulement si $m_{ij} \geq 3$; l'arête entre i et j est labellisée par le nombre m_{ij} si $m_{ij} \geq 3$ (par la suite, nous tracerons une ligne simple pour une arête labellisée par 3 et une ligne double pour une arête labellisée par 4). Nous notons $\mathcal{G}$ le graphe de Coxeter correspondant au système de Coxeter (G,S). Par la suite, l'arête entre deux sommets i et j sera notée (ij).

La signature est l'unique homomorphisme $\epsilon : G \to \{-1,1\}$ tel que $\epsilon(s_i) = -1$ pour $i = 0,\dots,n-1$. Son noyau $G^+ := \ker(\epsilon)$ est appelé le sous-groupe alterné de G. Rappelons la présentation à la Bourbaki [7] de G^+, voir [9] pour une preuve. Le sous-groupe alterné G^+ est isomorphe au groupe engendré par $R_1, \dots, R_{n-1}$ avec les relations définissantes :

$$\begin{cases} R_i^{m_{0i}} = 1 & \text{pour } i = 1,\dots,n-1, \\ (R_i^{-1} R_j)^{m_{ij}} = 1 & \text{pour } i,j = 1,\dots,n-1 \text{ tels que } i < j. \end{cases} \tag{IV.2.2}$$

L'isomorphisme avec G^+ est donné par $R_i \mapsto s_0 s_i$ pour $i = 1,\dots,n-1$. La présentation à la Bourbaki du sous-groupe alterné G^+ dépend du choix du générateur portant l'indice 0.

IV.2.2 Présentation dans le cas irréductible

Dans cette Sous-Section, nous supposons que le système de Coxeter (G,S) est irréductible (c'est-à-dire, le graphe de Coxeter $\mathcal{G}$ est connexe). Nous donnons une présentation de G^+ en termes de générateurs correspondant aux arêtes orientées du graphe de Coxeter ; aucun sommet du graphe n'est

distingué. Dans la prochaine Sous-Section, cette présentation sera généralisée aux systèmes de Coxeter arbitraires.

La présentation utilise une orientation - choisie arbitrairement - des arêtes du graphe de Coxeter. Concrètement, si il existe une arête entre i et j avec $i < j$, nous décidons de l'orienter de i vers j. Nous associons un générateur r_{ij} à chaque arête orientée, c'est-à-dire, à chaque paire (i, j), $i, j = 0, \ldots, n-1$, telle que $i < j$ et $m_{ij} \neq 2$. Pour un générateur r_{ij}, nous notons r_{ji} l'inverse, $r_{ji} := r_{ij}^{-1}$.

Définition IV.1 *Deux arêtes (ij) et (lm) de $\mathcal{G}$ sont dites non-connectées si $\{i, j\} \cap \{l, m\} = \varnothing$ et s'il n'existe pas d'arête connectant un sommet parmi $\{i, j\}$ avec un sommet parmi $\{l, m\}$.*

Proposition IV.2 *Soit (G, S) un système de Coxeter irréductible avec la matrice de Coxeter $\mathfrak{m}$. Le sous-groupe alterné G^+ de G est isomorphe au groupe avec les générateurs r_{ij} et les relations définissantes*

$$\begin{cases} (r_{ij})^{m_{ij}} = 1 & \textit{pour tout générateur } r_{ij}, & \text{(IV.2.3)} \\ r_{ii_1} r_{i_1 i_2} \ldots r_{i_a i} = 1 & \textit{pour tout cycle avec les arêtes } (ii_1), (i_1 i_2) \ldots, (i_a i), & \text{(IV.2.4)} \\ (r_{ij} r_{jk})^2 = 1 & \textit{pour } r_{ij}, r_{jk} \textit{ tels que } i < k \textit{ et } m_{ik} = 2, & \text{(IV.2.5)} \\ (r_{ij} r_{jk} r_{kl})^2 = 1 & \textit{pour } r_{ij}, r_{jk}, r_{kl} \textit{ tels que } i < l \textit{ et } m_{il} = 2, & \text{(IV.2.6)} \\ r_{ij} r_{lm} = r_{lm} r_{ij} & \textit{si } (ij) \textit{ et } (lm) \textit{ sont non-connectées.} & \text{(IV.2.7)} \end{cases}$$

Soient $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\mathfrak{l}$ un ensemble de générateurs du groupe fondamental de $\mathcal{G}$. Dans l'ensemble des relations définissantes, il suffit d'imposer la relation (IV.2.4) pour les cycles $\mathfrak{c}_\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} = 1, \ldots, \mathfrak{l}$. Si G est un groupe de Coxeter fini, son graphe de Coxeter ne contient pas de cycles, et donc la relation (IV.2.4) n'est pas nécessaire.

Preuve de la Proposition. Soit W^+ le groupe engendré par les éléments r_{ij} avec les relations définissantes (IV.2.3)–(IV.2.7). Définissons l'application ϕ de l'ensemble des générateurs de W^+ vers G^+ par

$$\phi \ : \ r_{ij} \mapsto \begin{cases} R_i^{-1} R_j & \text{si } i \neq 0, \\ R_j & \text{si } i = 0. \end{cases} \tag{IV.2.8}$$

On peut vérifier directement que les relations (IV.2.3)–(IV.2.6) sont satisfaites par les images des générateurs r_{ij} dans G^+. Pour la dernière relation, les arêtes (ij) et (lm) sont non-connectées, donc $m_{il} = m_{im} = m_{jl} = m_{jm} = 2$. Nous avons deux possibilités : soit $i \neq 0$ et $l \neq 0$, soit un des nombres, i ou l, est 0.

– Si $i \neq 0$ et $l \neq 0$, alors

$$R_i^{-1} R_j R_l^{-1} R_m = R_i^{-1} R_l R_j^{-1} R_m = R_l^{-1} R_i R_j^{-1} R_m = R_l^{-1} R_i R_m^{-1} R_j = R_l^{-1} R_m R_i^{-1} R_l, \tag{IV.2.9}$$

où nous avons utilisé plusieurs fois la deuxième ligne de (IV.2.2). Ainsi, nous obtenons que $\phi(r_{ij})\phi(r_{lm}) = \phi(r_{lm})\phi(r_{ij})$.

– Si, disons, $l = 0$, alors $i \neq 0$ et nous avons $R_i^2 = R_j^2 = 1$ car $m_{0i} = m_{0j} = 2$. Nous calculons

$$R_i^{-1} R_j R_m = R_i^{-1} R_m^{-1} R_j = R_m R_i^{-1} R_j; \tag{IV.2.10}$$

nous avons utilisé $(R_j^{-1} R_m)^2 = 1$ et $R_j^2 = 1$ dans la première égalité ; dans la seconde égalité, nous avons utilisé $(R_i^{-1} R_m)^2 = 1$ et $R_i^2 = 1$. Ainsi, $\phi(r_{ij})\phi(r_{lm}) = \phi(r_{lm})\phi(r_{ij})$ ici aussi.

Nous concluons que ϕ s'étend en un homomorphisme du groupe W^+ vers G^+, que nous appelons encore ϕ.

Définissons maintenant l'application ψ de l'ensemble des générateurs de G^+ vers W^+ par

$$\psi \ : \ R_i \mapsto \grave{R}_i := r_{0i_1} r_{i_1 i_2} \dots r_{i_k i} \ \text{ pour } i = 1, \dots, n-1, \tag{IV.2.11}$$

où $(0, i_1, i_2, \dots, i_k, i)$ est un chemin arbitraire du sommet 0 au sommet i dans le graphe de Coxeter (un tel chemin existe car le graphe de Coxeter est connexe). En raison de la relation (IV.2.4), l'élément $\grave{R}_i$ ne dépend pas du chemin choisi, et donc l'application ψ est bien définie. Nous prendrons pour $(0, i_1, i_2, \dots, i_k, i)$ un chemin le plus court possible (c'est-à-dire, avec un nombre minimal d'arêtes) entre 0 et i.

Si $j \neq i$, alors

$$\grave{R}_i^{-1} \grave{R}_j = r_{ii_k} \dots r_{i_1 0} r_{0 j_1} \dots r_{j_l j} \ , \text{ ou, encore par (IV.2.4), } \grave{R}_i^{-1} \grave{R}_j = r_{ii_a} \dots r_{i_b j},$$

où $(i, i_a, \dots, i_b, j)$ est un chemin le plus court possible entre i et j.

Nous allons vérifier que $\grave{R}_i^{m_{0i}} = 1$ pour $i = 1, \dots, n-1$, et $(\grave{R}_i^{-1} \grave{R}_j)^{m_{ij}} = 1$ pour $i, j = 1, \dots, n-1$ avec $i < j$. Il suffit de prouver que, pour tout $i, j = 0, \dots, n-1$ avec $i < j$, $(r_{ia_1} r_{a_1 a_2} \dots r_{a_k j})^{m_{ij}} = 1$ pour un chemin le plus court possible $(i, a_1, a_2, \dots, a_k, j)$ entre i et j.

Si $(k_1, k_2, \dots, k_l)$ est un chemin le plus court possible, alors il n'y a pas d'arête dans le graphe de Coxeter entre k_μ et k_ν avec $|\mu - \nu| > 1$. Si $m_{ij} \neq 2$, le chemin le plus court possible est formé par l'arête (ij) et nous avons $(r_{ij})^{m_{ij}} = 1$. Si $m_{ij} = 2$ et $k = 1$ (respectivement, $k = 2$), alors $(r_{ia_1} \dots r_{a_k j})^2 = 1$ d'après (IV.2.5) (respectivement, (IV.2.6)). Si $m_{ij} = 2$ et $k \geq 3$, nous avons :

$$\begin{aligned}(r_{ia_1} r_{a_1 a_2} \dots r_{a_k j})^2 &= r_{ia_1} r_{a_1 a_2} r_{a_2 a_3} \dots r_{a_k j} r_{ia_1} \dots r_{a_k j} = r_{a_2 a_3}^{-1} r_{a_1 a_2}^{-1} r_{ia_1}^{-1} \dots r_{a_k j} r_{ia_1} \dots r_{a_k j} \\ &= r_{a_1 a_2} r_{a_2 a_3} \dots r_{a_k j} r_{a_1 a_2} \dots r_{a_k j} = (r_{a_1 a_2} \dots r_{a_k j})^2.\end{aligned}$$

Dans la seconde égalité, nous avons utilisé que $(r_{ia_1} r_{a_1 a_2} r_{a_2 a_3})^2 = 1$ car $m_{ia_3} = 2$; dans la troisième égalité, nous avons utilisé que r_{ia_1} commute avec $r_{a_3 a_4} \dots r_{a_k j}$ et que, comme $m_{a_1 a_3} = 2$, $(r_{a_1 a_2} r_{a_2 a_3})^2 = 1$. Ces propriétés sont des conséquences de la minimalité du chemin $(i, a_1, a_2, \dots, a_k, j)$. L'affirmation vient par récurrence sur la longueur du chemin.

Nous concluons que l'application ψ s'étend en un homomorphisme de groupes de G^+ vers W^+, que nous appellerons encore ψ. Il est immédiat de voir que les morphismes ϕ et ψ sont mutuellement inverses, et sont donc des isomorphismes. □

L'isomorphisme entre le groupe engendré par les éléments r_{ij} avec les relations définissantes (IV.2.3)–(IV.2.7), et le sous-groupe alterné G^+ du groupe de Coxeter G est donné par :

$$r_{ij} \mapsto s_i s_j \quad \text{ pour tout générateur } r_{ij}. \tag{IV.2.12}$$

Remarque. Soit $(i, a_1, a_2, \dots, a_k, j)$ un chemin dans le graphe de Coxeter. Comme la preuve le montre, les relations (IV.2.3)–(IV.2.7) impliquent $(r_{ia_1} r_{a_1 a_2} \dots r_{a_k j})^{m_{ij}} = 1$. Ainsi, les relations définissantes (IV.2.3)–(IV.2.7) sont équivalentes aux relations suivantes :

$$\begin{cases} (r_{ia_1} r_{a_1 a_2} \dots r_{a_k j})^{m_{ij}} = 1 & \text{pour tout chemin } (i, a_1, a_2, \dots, a_k, j) \text{ dans le graphe de Coxeter,} \\ r_{ij} r_{lm} = r_{lm} r_{ij} & \text{si } (ij) \text{ et } (lm) \text{ sont non-connectées.} \end{cases}$$

IV.2.3 Présentation dans le cas général

Maintenant, supposons que le graphe de Coxeter $\mathcal{G}$ n'est pas connexe. Nous ajoutons certaines arêtes labellisées par 2 pour rendre le graphe connexe. Plus précisément, soit $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \sqcup \mathcal{G}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{G}_m$ une décomposition de $\mathcal{G}$ en union disjointe de ses composantes connexes. Pour $a = 1, \ldots, m$, choisissons un sommet i_a de $\mathcal{G}_a$; alors, pour tout $l = 1, \ldots, m-1$, nous ajoutons une arête entre i_l et i_{l+1}, et nous la labellisons par 2. Les arêtes labellisées par 2 seront représentées par des lignes en pointillés. Nous appelons le graphe obtenu une *extension connexe* de $\mathcal{G}$.

Une extension connexe n'est pas unique. Fixons une extension connexe $\mathcal{G}^c$ de $\mathcal{G}$, et associons un générateur r_{ij}, $i < j$, à chaque arête orientée de $\mathcal{G}^c$. Nous étendons la Définition IV.1 au graphe $\mathcal{G}^c$.

Définition IV.3 *Deux arêtes (ij) et (lm) de $\mathcal{G}^c$ sont dites non-connectées si $\{i,j\} \cap \{l,m\} = \varnothing$ et s'il n'existe pas d'arête (dans $\mathcal{G}^c$) connectant un sommet parmi $\{i,j\}$ avec un sommet parmi $\{l,m\}$.*

Avec ce choix d'un ensemble de générateurs, la formulation de la Proposition IV.2 reste la même pour un système de Coxeter arbitraire.

Proposition IV.4 *Soit (G,S) un système de Coxeter avec la matrice de Coxeter $\mathfrak{m}$. Le sous-groupe alterné G^+ de G est isomorphe au groupe engendré par les éléments r_{ij} avec les relations définissantes (IV.2.3)–(IV.2.7).*

Preuve. La preuve est exactement comme la preuve de la Proposition IV.2. Les isomorphismes sont toujours donnés par

$$\phi \ : \ r_{ij} \mapsto \begin{cases} R_i^{-1} R_j & \text{si } i \neq 0, \\ R_j & \text{si } i = 0, \end{cases} \tag{IV.2.13}$$

et

$$\psi \ : \ R_i \mapsto r_{0i_1} r_{i_1 i_2} \ldots r_{i_k i} \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n-1, \tag{IV.2.14}$$

où $(0, i_1, i_2, \ldots, i_k, i)$ est un chemin arbitraire du sommet 0 vers le sommet i dans $\mathcal{G}^c$. □

Ici aussi, voir (IV.2.12), l'isomorphisme entre le groupe engendré par les éléments r_{ij} avec les relations définissantes (IV.2.3)–(IV.2.7), et le sous-groupe alterné G^+ du groupe de Coxeter G est donné par :

$$r_{ij} \mapsto s_i s_j \quad \text{pour tout générateur } r_{ij}. \tag{IV.2.15}$$

Remarque. Notons $G^+(\mathcal{G})$ le groupe alterné correspondant au graphe $\mathcal{G}$. En utilisant l'isomorphisme (IV.2.15), il est immédiat que les générateurs r_{ij} et r_{kl} commutent si les arêtes (ij) et (kl) appartiennent à des composantes connexes différentes de $\mathcal{G}$.

Soit, comme ci-dessus, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \sqcup \mathcal{G}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{G}_m$; les groupes $G^+(\mathcal{G}_a)$, $a = 1, \ldots, m$, sont naturellement des sous-groupes de $G^+(\mathcal{G})$. Les arêtes labellisées par 2 forment un chemin dans $\mathcal{G}^c$, et on peut vérifier (avec l'isomorphisme (IV.2.15)) que les générateurs r_{st} correspondant à ces arêtes de $\mathcal{G}^c$ engendrent un sous-groupe $\mathcal{Y}$ isomorphe à C_2^{m-1}, où C_2 est le groupe cyclique à deux éléments. De même, on peut vérifier que chaque $G^+(\mathcal{G}_a)$, $a = 1, \ldots, m$, est stable par conjugaison par les éléments de $\mathcal{Y}$. Ainsi, chaque $G^+(\mathcal{G}_a)$, $a = 1, \ldots, m$, est normal dans $G^+(\mathcal{G})$; et $G^+(\mathcal{G})$ est isomorphe au produit semi-direct $(G^+(\mathcal{G}_1) \times G^+(\mathcal{G}_2) \times \cdots \times G^+(\mathcal{G}_m)) \rtimes \mathcal{Y}$.

Exemple. Considérons le groupe de Coxeter engendré par s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 avec la matrice de Coxeter $\mathfrak{m} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Le graphe de Coxeter a deux composantes connexes, que nous connectons en ajoutant une arête labellisée par 2 entre les sommets 2 et 3. La figure ci-dessous montre les arêtes orientées et les générateurs correspondant aux arêtes. Avec la Définition IV.3, il n'y a qu'une seule paire d'arêtes non-connectées : (12) et (45).

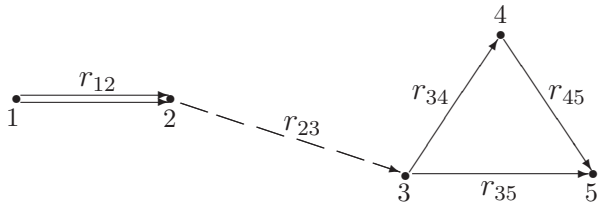


Fig. IV.8. *Exemple d'une extension connexe du graphe de Coxeter*

Les relations définissantes pour les générateurs r_{12}, r_{23}, r_{34}, r_{35} et r_{45} sont :

$$\begin{cases} (r_{12})^4 = 1,\ (r_{34})^3 = 1,\ (r_{35})^3 = 1,\ (r_{45})^3 = 1,\ (r_{23})^2 = 1, \\ r_{34}r_{45}r_{53} = 1, \\ (r_{12}r_{23})^2 = 1,\ (r_{23}r_{34})^2 = 1,\ (r_{23}r_{35})^2 = 1, \\ (r_{12}r_{23}r_{34})^2 = 1,\ (r_{12}r_{23}r_{35})^2 = 1,\ (r_{23}r_{34}r_{45})^2 = 1,\ (r_{23}r_{35}r_{54})^2 = 1, \\ r_{12}r_{45} = r_{45}r_{12}. \end{cases}$$

IV.2.4 Chaînes des sous-groupes alternés de type A

Nous écrivons explicitement la présentation de la Proposition IV.2 pour les sous-groupes alternés de type A. Le groupe de Coxeter A_n est isomorphe au groupe de permutations d'un ensemble à $n+1$ éléments (le groupe symétrique), et le sous-groupe alterné A_n^+ est isomorphe au sous-groupe des permutations paires. Nous utilisons la notation pour les générateurs expliquée par la figure suivante (rappelons que le sommet i correspond au générateur s_i du groupe de Coxeter, et qu'un générateur du groupe alterné est associé à chaque arête orientée une fois qu'une orientation est choisie ; nous avons posé $r_i := r_{i-1,i}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$) :

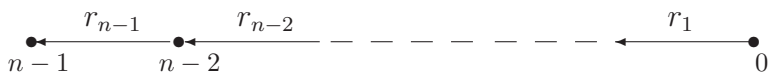


Fig. IV.9. *Graphe de Coxeter de type A*

D'après la Proposition IV.2, le groupe A_n^+ est engendré par r_i, $i = 1, \ldots, n-1$, avec les relations définissantes :

$$\begin{cases} {r_i}^3 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-1, \\ (r_i r_{i+1})^2 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-2, \\ (r_i r_{i+1} r_{i+2})^2 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-3, \\ r_i r_j = r_j r_i & \text{pour } i, j = 1, \ldots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 2. \end{cases} \tag{IV.2.16}$$

L'isomorphisme avec le groupe des permutations paires d'un ensemble à $n+1$ éléments est établi par $r_i \mapsto (i, i+1, i+2)$, où $(i, i+1, i+2)$ est la permutation cyclique de i, $i+1$ et $i+2$. Dans la Section IV.6, nous donnons une preuve différente, basée sur l'algorithme de Coxeter–Todd, de cette présentation de A_n^+. Nous vérifions également que cette présentation donne une présentation de la chaîne des groupes A_n^+ au sens du Chapitre I, Section I.1.

La présentation (IV.2.16) est une présentation locale de profondeur 2 et stationnaire de la chaîne des groupes A_n^+. Dans [101], une présentation du groupe A_n^+ est prouvée. Les générateurs sont $\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$ et les relations définissantes sont les mêmes que les relations définissantes (IV.2.16) pour les r_i, excepté que la troisième relation de (IV.2.16) est remplacée par $\rho_i \rho_{i+1}^2 \rho_{i+2} = \rho_{i+2} \rho_i$ pour $i = 1, \ldots, n-3$. L'équivalence des deux présentations est donnée par $\rho_i \mapsto r_i$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. En effet, nous avons

$$(\rho_i \rho_{i+1} \rho_{i+2})^2 = \rho_i \rho_{i+1} \cdot \rho_{i+2} \rho_i \cdot \rho_{i+1} \rho_{i+2} = \rho_i \rho_{i+1} \cdot \rho_i \rho_{i+1}^2 \rho_{i+2} \cdot \rho_{i+1} \rho_{i+2} = (\rho_i \rho_{i+1})^2 (\rho_{i+1} \rho_{i+2})^2 = 1.$$

Inversement,

$$r_{i+2} r_i = r_{i+1}^{-1} r_i^{-1} \cdot r_{i+2}^{-1} r_{i+1}^{-1} = r_i r_{i+1} \cdot r_{i+1} r_{i+2} = r_i r_{i+1}^2 r_{i+2}.$$

L'algorithme de Coxeter–Todd présenté dans la Section IV.6 fournit une forme normale, différente de la forme normale de [101], pour les éléments du groupe A_n^+ .

Remarque. Les deux premières relations de (IV.2.16) impliquent que :

$$\begin{cases} r_i r_{i+1}^2 r_i = r_i r_{i+1} \cdot r_{i+1} r_i = r_{i+1}^2 r_i^2 \cdot r_i^2 r_{i+1}^2 = r_{i+1}^2 r_i r_{i+1}^2, \\ r_i^2 r_{i+1} r_i^2 = r_i^2 r_{i+1}^2 \cdot r_{i+1}^2 r_i^2 = r_{i+1} r_i \cdot r_i r_{i+1} = r_{i+1} r_i^2 r_{i+1}, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n-2\,.$$

Ainsi, les générateurs $r_i' := r_i^{-1}$ pour i impair, et $r_i' := r_i$ pour i pair vérifient la relation d'Artin

$$r_i' r_{i+1}' r_i' = r_{i+1}' r_i' r_{i+1}' \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n-2.$$

IV.3 Extensions centrales des sous-groupes alternés des groupes de Coxeter

1. Soit (G, S) un système de Coxeter arbitraire avec $S = \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$ et la matrice de Coxeter $\mathfrak{m}$ (voir Section IV.2). Soit $\tilde{G}$ le groupe avec des générateurs $\tilde{s}_0, \ldots, \tilde{s}_{n-1}$, α et les relations définissantes

$$\begin{cases} (\tilde{s}_i \tilde{s}_j)^{m_{ij}} = 1 & \text{si } m_{ij} \text{ est impair}, \\ (\tilde{s}_i \tilde{s}_j)^{m_{ij}} = \alpha & \text{si } m_{ij} \text{ est pair}, \\ \alpha \text{ est central et } \alpha^2 = 1. \end{cases} \tag{IV.3.1}$$

Soit également $\tilde{G}'$ le groupe avec des générateurs $\tilde{s}'_0, \ldots, \tilde{s}'_{n-1}$, α' et les relations définissantes

$$\begin{cases} (\tilde{s}'_i \tilde{s}'_j)^{m_{ij}} = \alpha', \\ \alpha' \text{ est central et } \alpha'^2 = 1. \end{cases} \tag{IV.3.2}$$

Lorsque G est un groupe de réflexions discret, $\tilde{G}$ et $\tilde{G}'$ sont ses extensions centrales spinorielles, et elles sont non-triviales si il existe certains i, j, $i \neq j$, tels que m_{ij} est pair, [76]. En général, les groupes $\tilde{G}$ et $\tilde{G}'$ ne sont pas isomorphes. Notons que les groupes de Coxeter discrets admettent des extensions centrales non-triviales non-isomorphes à (IV.3.1) ou (IV.3.2) ; voir [38, 105] pour les multiplicateurs de Schur des groupes de Coxeter discrets.

Notons $\pi \colon \tilde{G} \to G$ et $\pi' \colon \tilde{G}' \to G$ les projections naturelles. Soient $\tilde{G}^+ := \pi^{-1}(G^+)$ et $\tilde{G}'^+ := \pi'^{-1}(G^+)$.

Notre but ici est de donner des présentations de $\tilde{G}^+$ et $\tilde{G}'^+$ dans l'esprit de la Section précédente. Nous verrons, comme une conséquence, que les groupes $\tilde{G}^+$ et $\tilde{G}'^+$ sont isomorphes.

Nous donnons tout d'abord une présentation à la Bourbaki de $\tilde{G}^+$.

Proposition IV.5 *Soit (G, S) un système de Coxeter avec la matrice de Coxeter $\mathfrak{m}$. Le groupe $\tilde{G}^+$ est isomorphe au groupe engendré par $\tilde{R}_1, \ldots, \tilde{R}_{n-1}$ et z avec les relations définissantes*

$$\begin{cases} (\tilde{R}_i)^{m_{0i}} = z^{m_{0i}-1} & \textit{pour } i = 1, \ldots, n-1, & \text{(IV.3.3)} \\ (\tilde{R}_i^{-1} \tilde{R}_j)^{m_{ij}} = z^{m_{ij}-1} & \textit{pour } i, j = 1, \ldots, n-1 \textit{ tels que } i < j, & \text{(IV.3.4)} \\ z \textit{ est central et } z^2 = 1. & & \text{(IV.3.5)} \end{cases}$$

Preuve. C'est une adaptation de la preuve, suggérée dans [7], de la présentation (IV.2.2) pour le groupe G^+ ; nous donnons une ébauche. Soit $\tilde{W}^+$ le groupe engendré par les éléments $\tilde{R}_1, \ldots, \tilde{R}_{n-1}$ et z avec les relations définissantes (IV.3.3)–(IV.3.5). Définissons l'application ϕ de l'ensemble des générateurs $\{\tilde{R}_1, \ldots, \tilde{R}_{n-1}, z\}$ vers $\tilde{G}^+$ par :

$$\phi(\tilde{R}_i) = \tilde{s}_0 \tilde{s}_i \ , \ i = 1, \ldots, n-1, \text{ et } \phi(z) = \alpha. \tag{IV.3.6}$$

Cette application s'étend en un homomorphisme surjectif de $\tilde{W}^+$ vers $\tilde{G}^+$, que nous notons par le même symbole ϕ. Nous allons montrer que ϕ est un isomorphisme.

On vérifie que l'application ω donnée par $\omega(\tilde{R}_i) = \tilde{R}_i^{-1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, et $\omega(z) = z$ s'étend en une involution de $\tilde{W}^+$, définissant ainsi le produit semi-direct $\tilde{W}^+ \rtimes C_2$, où C_2 est le groupe cyclique d'ordre 2. Soit s le générateur de C_2. On peut vérifier que les application suivantes

$$\tilde{s}_0 \mapsto s, \ \tilde{s}_i \mapsto s\tilde{R}_i, \ i = 1, \ldots, n-1, \ \alpha \mapsto z,$$

$$s \mapsto \tilde{s}_0, \ \tilde{R}_i \mapsto \tilde{s}_0 \tilde{s}_i, \ i = 1, \ldots, n-1, \ z \mapsto \alpha,$$

définissent des homomorphismes $\psi_1 : \tilde{G} \to \tilde{W}^+ \rtimes C_2$ et $\psi_2 : \tilde{W}^+ \rtimes C_2 \to \tilde{G}$ tels que $\psi_1 \psi_2 = \mathrm{Id}_{\tilde{W}^+ \rtimes C_2}$ et $\psi_2 \psi_1 = \mathrm{Id}_{\tilde{G}}$. La restriction de ψ_1 à $\tilde{G}^+$ induit l'homomorphisme inverse à ϕ. □

Rappelons que les générateurs r_{ij} de G^+ sont associés aux arêtes orientées du graphe $\mathcal{G}^c$ (voir Section IV.2). Associons un générateur $\tilde{r}_{ij}$ de $\tilde{G}^+$ à chaque générateur r_{ij} de G^+. Notons $\tilde{r}_{ji}$ l'inverse de $\tilde{r}_{ij}$, $\tilde{r}_{ji} := \tilde{r}_{ij}^{-1}$.

Proposition IV.6 *Soit (G,S) un système de Coxeter avec la matrice de Coxeter $\mathfrak{m}$. Le groupe $\tilde{G}^+$ est isomorphe au groupe engendré par les éléments $\tilde{r}_{ij}$ et z avec les relations définissantes*

$$\begin{cases} (\tilde{r}_{ij})^{m_{ij}} = z^{m_{ij}-1} & \textit{pour tout générateur } \tilde{r}_{ij}, \\ \tilde{r}_{ii_1}\tilde{r}_{i_1i_2}\dots\tilde{r}_{i_ai} = 1 & \textit{pour tout cycle avec les arêtes } (ii_1),(i_1i_2)\dots,(i_ai), \\ (\tilde{r}_{ij}\tilde{r}_{jk})^2 = z & \textit{pour } \tilde{r}_{ij},\tilde{r}_{jk} \textit{ tels que } i<k \textit{ et } m_{ik}=2, \\ (\tilde{r}_{ij}\tilde{r}_{jk}\tilde{r}_{kl})^2 = z & \textit{pour } \tilde{r}_{ij},\tilde{r}_{jk},\tilde{r}_{kl} \textit{ tels que } i<l \textit{ et } m_{il}=2, \\ \tilde{r}_{ij}\tilde{r}_{lm} = \tilde{r}_{lm}\tilde{r}_{ij} & \textit{si } (ij) \textit{ et } (lm) \textit{ sont non-connectées}, \\ z \textit{ est central et } z^2 = 1. \end{cases}$$

Nous sautons la preuve étant donné qu'elle suit exactement les mêmes lignes que la preuve de la Proposition IV.2.

Nous donnons sans détail les présentations pour le groupe $\tilde{G}'^+$. Les générateurs de la présentation de $\tilde{G}'^+$ analogue à celle donnée dans la Proposition IV.5 sont notés $\tilde{R}'_1,\dots,\tilde{R}'_{n-1}$ et z'. Les relations définissantes sont

$$\begin{cases} (\tilde{R}'_i)^{m_{0i}} = z' & \text{pour } i=1,\dots,n-1, \\ (\tilde{R}'^{-1}_i\tilde{R}'_j)^{m_{ij}} = z' & \text{pour } i,j=1,\dots,n-1 \text{ tels que } i<j, \\ z' \text{ est central et } z'^2 = 1. \end{cases}$$

Pour $\tilde{G}'^+$, les générateurs de la présentation analogue à celle donnée dans la Proposition IV.6 sont notés $\tilde{r}'_{ij}$ et z' avec les mêmes conventions qu'avant. Les relations définissantes sont

$$\begin{cases} (\tilde{r}'_{ij})^{m_{ij}} = z' & \text{pour tout générateur } \tilde{r}'_{ij}, \\ \tilde{r}'_{ii_1}\tilde{r}'_{i_1i_2}\dots\tilde{r}'_{i_ai} = z'^{a+1} & \text{pour tout cycle avec les arêtes } (ii_1),(i_1i_2)\dots,(i_ai), \\ (\tilde{r}'_{ij}\tilde{r}'_{jk})^2 = z' & \text{pour } \tilde{r}'_{ij},\tilde{r}'_{jk} \text{ tels que } i<k \text{ et } m_{ik}=2, \\ (\tilde{r}'_{ij}\tilde{r}'_{jk}\tilde{r}'_{kl})^2 = z' & \text{pour } \tilde{r}'_{ij},\tilde{r}'_{jk},\tilde{r}'_{kl} \text{ tels que } i<l \text{ et } m_{il}=2, \\ \tilde{r}'_{ij}\tilde{r}'_{lm} = \tilde{r}'_{lm}\tilde{r}'_{ij} & \text{si } (ij) \text{ et } (lm) \text{ sont non-connectées}, \\ z' \text{ est central et } z'^2 = 1. \end{cases}$$

Proposition IV.7 *Les extensions $\tilde{G}^+$ et $\tilde{G}'^+$ du groupe G^+ sont isomorphes.*

Preuve. L'homomorphisme $\tilde{G}^+ \to \tilde{G}'^+$ défini sur les générateurs par $\tilde{r}_{ij} \mapsto z'\tilde{r}'_{ij}$ et $z \mapsto z'$ établit l'isomorphisme requis. □

2. Fixons, pour le type A, la numérotation des sommets et l'orientation des arêtes comme indiqué dans la Figure IV.9, et posons $\tilde{r}_i := \tilde{r}_{i-1,i}$, $i=1,\dots,n-1$. Le groupe $\tilde{A}^+_n$ est l'extension spinorielle

du sous-groupe alterné A_n^+. La présentation de $\tilde{A}_n^+$ donnée par la Proposition IV.6 s'écrit

$$\begin{cases} \tilde{r}_i^3 = 1 & \text{pour } i = 1, \dots, n-1, \\ (\tilde{r}_i \tilde{r}_{i+1})^2 = z & \text{pour } i = 1, \dots, n-2, \\ (\tilde{r}_i \tilde{r}_{i+1} \tilde{r}_{i+2})^2 = z & \text{pour } i = 1, \dots, n-3, \\ \tilde{r}_i \tilde{r}_j = \tilde{r}_j \tilde{r}_i & \text{pour } i, j = 1, \dots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 2, \\ z \text{ est central et } z^2 = 1. \end{cases} \tag{IV.3.7}$$

Cette présentation équipe la chaîne des groupes $\tilde{A}_n^+$ d'une présentation locale (de profondeur 2) et stationnaire.

3. Les multiplicateurs de Schur pour les sous-groupes alternés de type A ont été calculés dans [94] ; Dans [70], cela a été généralisé aux sous-groupes alternés des groupes de Coxeter finis, et une présentation a été donnée, dans l'esprit de (IV.2.2), des extensions centrales correspondantes. Il est direct - mais un peu long - de transformer cette présentation (pour toutes les extensions centrales de tous les groupes de Coxeter finis) en une présentation qui utilise les générateurs reliés aux arêtes orientées du graphe de Coxeter.

Comme exemple nous donnons, sans aucun détail, les présentations pour le type A. Le multiplicateur de Schur pour A_n^+ est C_2 si $n \geqslant 3, n \neq 5, 6$, et $C_2 \times C_3$ si $n = 5, 6$; ici C_m est le groupe cyclique à m éléments. Nous décrivons les extensions centrales de A_5^+ et A_6^+ avec le noyau $C_2 \times C_3$; ces extensions sont des extensions centrales universelles car les groupes A_5^+ et A_6^+ sont parfaits (voir Remarque ci-dessous). Comme ci-dessus, nous associons un générateur $\tilde{r}_i$, $i = 1, \dots, n-1$, à chaque arête orientée du graphe de Coxeter, voir la Figure IV.9.

– L'extension centrale universelle de A_5^+ est engendrée par $\tilde{r}_1$, $\tilde{r}_2$, $\tilde{r}_3$, $\tilde{r}_4$, z et ζ avec les relations définissantes :

$$\begin{cases} \tilde{r}_i^3 = 1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, 4, \\ (\tilde{r}_1 \tilde{r}_2)^2 = z, \quad (\tilde{r}_2 \tilde{r}_3)^2 = z\zeta, \quad (\tilde{r}_3 \tilde{r}_4)^2 = z, \\ (\tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \tilde{r}_3)^2 = z, \quad (\tilde{r}_2 \tilde{r}_3 \tilde{r}_4)^2 = z, \\ \tilde{r}_1 \tilde{r}_4 = \zeta^2 \tilde{r}_4 \tilde{r}_1, \\ z^2 = 1 \text{ et } z \text{ est central}, \quad \zeta^3 = 1 \text{ et } \zeta \text{ est central}. \end{cases} \tag{IV.3.8}$$

– L'extension centrale universelle de A_6^+ est engendrée par $\tilde{r}_1$, $\tilde{r}_2$, $\tilde{r}_3$, $\tilde{r}_4$, $\tilde{r}_5$, z et ζ avec les relations définissantes :

$$\begin{cases} \tilde{r}_i^3 = 1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, 5, \\ (\tilde{r}_i \tilde{r}_{i+1})^2 = z \quad \text{pour } i = 1, \dots, 4, \\ (\tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \tilde{r}_3)^2 = z, \quad (\tilde{r}_2 \tilde{r}_3 \tilde{r}_4)^2 = z\zeta, \quad (\tilde{r}_3 \tilde{r}_4 \tilde{r}_5)^2 = z, \\ \tilde{r}_1 \tilde{r}_4 = \zeta \tilde{r}_4 \tilde{r}_1, \quad \tilde{r}_2 \tilde{r}_5 = \zeta \tilde{r}_5 \tilde{r}_2, \quad \tilde{r}_1 \tilde{r}_5 = \zeta^2 \tilde{r}_5 \tilde{r}_1, \\ z^2 = 1 \text{ et } z \text{ est central}, \quad \zeta^3 = 1 \text{ et } \zeta \text{ est central}. \end{cases} \tag{IV.3.9}$$

Remarque. Un groupe est dit *parfait* lorsqu'il coïncide avec son sous-groupe formé par les commutateurs. Le sous-groupe alterné de type A, A_n^+ avec $n > 1$, est parfait si et seulement si $n \geq 4$. En ce qui concerne les types B et D, le sous-groupe alterné de type B, B_n^+ avec $n > 1$, n'est jamais parfait quel que soit n, tandis que le sous-groupe alterné de type D, D_n^+ avec $n > 1$, est parfait si et seulement si $n \geq 5$.

IV.4 Sous-algèbres alternées des algèbres de Hecke

IV.4.1 Définition de la sous-algèbre alternée de l'algèbre de Hecke

Soit (G, S) un système de Coxeter avec la matrice de Coxeter $\mathfrak{m}$ (voir Section IV.2). Rappelons que les générateurs s_i et s_j de G sont conjugués dans le groupe G si et seulement si il existe des entiers $i_1, \ldots, i_r \in \{0, \ldots, n-1\}$ tels que $m_{ii_1}, m_{i_1 i_2}, \ldots, m_{i_r j}$ soient impairs (voir *e.g.* [37]). Soit $(q_0, \ldots, q_{n-1})$ un ensemble d'indéterminées telles que $q_i = q_j$ si m_{ij} est impair. Soit $\mathcal{A}$ l'anneau des polynômes de Laurent en q_i, $i = 0, \ldots, n-1$, sur $\mathbb{C}$. L'algèbre de Hecke $H(G)$ est l'algèbre sur $\mathcal{A}$ engendrée par $g_0, \ldots, g_{n-1}$ avec les relations définissantes :

$$g_i^2 = (q_i - q_i^{-1})g_i + 1 \quad \text{pour } i = 0, \ldots, n-1, \tag{IV.4.1}$$

$$\{g_i, g_j\}_{m_{ij}} = \{g_j, g_i\}_{m_{ij}} \quad \text{pour } i, j = 0, \ldots, n-1 \text{ tels que } i < j. \tag{IV.4.2}$$

L'algèbre $H(G)$ est une déformation plate de l'algèbre de groupe $\mathcal{A}G$: il existe une base de $H(G)$ dont les éléments sont en bijection avec les éléments de G (voir chap. IV, sec. 1, exercice 23 dans [7], [12], [26] et [37] pour différentes preuves).

L'application $g_i \mapsto -g_i^{-1}$ s'étend en un homomorphisme d'algèbres involutif $\phi\colon H(G) \to H(G)$, $\phi^2 = \mathrm{id}$. Ainsi, $H(G) = H^+(G) \oplus H^-(G)$, où $H^+(G)$ et $H^-(G)$ sont les espaces propres de ϕ correspondant aux valeurs propres $+1$ et -1 ; l'involution ϕ définit une $\mathbb{Z}_2$-graduation sur $H(G)$. La sous-algèbre $H^+(G)$ des éléments pairs est appelée la *sous-algèbre alternée* de l'algèbre de Hecke $H(G)$.

Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+ \oplus \mathcal{B}^-$ une algèbre associative $\mathbb{Z}_2$-graduée. Supposons que $\mathcal{B}^-$ contienne un élément inversible f. Alors, la multiplication (à gauche) par f donne un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{B}^+$ et $\mathcal{B}^-$. Nous disons dans ce cas que $\mathcal{B}^+$ est une *sous-algèbre d'indice 2* de $\mathcal{B}$. Définissons les éléments suivants de $H(G)$:

$$f_i := \frac{1}{q_i + q_i^{-1}}(g_i + g_i^{-1}) = \frac{2g_i - (q_i - q_i^{-1})}{q_i + q_i^{-1}}, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Comme $f_i^2 = 1$ et $\phi(f_i) = -f_i$, $i = 0, \ldots, n-1$, $H^+(G)$ est une sous-algèbre d'indice 2 de $H(G)$; ainsi, $H^+(G)$ est une déformation plate de l'algèbre de groupe $\mathcal{A}G^+$.

Les éléments f_i, $i = 0, \ldots, n-1$, forment un ensemble de générateurs de $H(G)$. L'algèbre $H^+(G)$ est engendrée par les éléments $f_i f_j$, $i, j = 0, \ldots, n-1$ et $i \neq j$.

Soient $\beta_i := \dfrac{q_i - q_i^{-1}}{q_i + q_i^{-1}}$, $i = 0, \ldots, n-1$. Comme l'expression $\{g_i, g_j\}_{m_{ij}} - \{g_j, g_i\}_{m_{ij}}$ est antisymétrique par rapport à $i \leftrightarrow j$, les relations définissantes (IV.4.2) de $H(G)$, en termes des éléments f_i, $i = 0, \ldots, n-1$, peuvent être récrites sous la forme

$$\sum_{k=1}^{m_{ij}} a_k^{(m_{ij})}(\{f_i, f_j\}_k - \{f_j, f_i\}_k) + \sum_{k=0}^{m_{ij}-1} b_k^{(m_{ij})}(\{f_i, f_j\}_k + \{f_j, f_i\}_k) = 0\ . \tag{IV.4.3}$$

Le coefficient $a_{m_{ij}}^{(m_{ij})}$ est différent de 0 et nous le normalisons à $a_{m_{ij}}^{(m_{ij})} = 1$. Avec ce choix, $a_k^{(m_{ij})}, b_k^{(m_{ij})} \in \mathbb{Z}[\beta_i, \beta_j]$ sont des polynômes en β_i, β_j à coefficients entiers ; $a_k^{(m_{ij})}$ est symétrique tandis que $b_k^{(m_{ij})}$ est antisymétrique par rapport à $i \leftrightarrow j$.

Lemme IV.8. *Nous avons*

$$a_k^{(m_{ij})} = 0 \quad \text{si} \quad k \not\equiv m_{ij} \,(\mathrm{mod}\, 2), \tag{IV.4.4}$$

$$b_k^{(m_{ij})} = 0 \quad \text{pour tout } k. \tag{IV.4.5}$$

Preuve. L'algèbre $\mathcal{D}_{ij}$ avec les générateurs g_i et g_j et les relations définissantes (IV.4.1)–(IV.4.2) est une déformation plate de l'algèbre du groupe diédral. Les éléments 1, $\{g_i, g_j\}_k$, $\{g_j, g_i\}_k$, $k = 1, \ldots, m_{ij}-1$, et $\{g_i, g_j\}_{m_{ij}}$ forment une base $\mathfrak{B}$ de $\mathcal{D}_{ij}$. Notons ρ_{ij} l'expression dans la partie gauche de (IV.4.3). Comme ϕ est un automorphisme de $\mathcal{D}_{ij}$, la relation $\phi(\rho_{ij}) = 0$ est vérifiée dans l'algèbre $\mathcal{D}_{ij}$. Supposons qu'il existe $k \not\equiv m_{ij} (\mathrm{mod}\, 2)$ tel que $a_k^{(m_{ij})} \neq 0$ ou $b_k^{(m_{ij})} \neq 0$. Alors $\rho_{ij} - (-1)^{m_{ij}} \phi(\rho_{ij}) = 0$ peut être récrit comme une relation entre les éléments de $\mathfrak{B}$, une contradiction. Ainsi,

$$a_k^{(m_{ij})} = 0 \quad \text{et} \quad b_k^{(m_{ij})} = 0 \qquad \text{si} \quad k \not\equiv m_{ij} \,(\mathrm{mod}\, 2). \tag{IV.4.6}$$

Si m_{ij} est impair, alors $\beta_i = \beta_j$, et ainsi l'expression $\{g_i, g_j\}_{m_{ij}} - \{g_j, g_i\}_{m_{ij}}$, récrite en termes des éléments f_i, f_j, est antisymétrique par rapport à $f_i \leftrightarrow f_j$; donc $b_k^{(m_{ij})}$ s'annule. Supposons que, pour m_{ij} pair, il existe un entier pair k tel que $b_k^{(m_{ij})} \neq 0$. Alors, en prenant en compte (IV.4.6), on peut récrire $\rho_{ij} + f_i \rho_{ij} f_i$ comme une relation entre les éléments de $\mathfrak{B}$, une contradiction. □

En conclusion, nous obtenons l'ensemble suivant de relations définissantes de $H(G)$:

$$f_i^2 = 1 \quad \text{pour } i = 0, \ldots, n-1, \tag{IV.4.7}$$

et, en multipliant la relation (IV.4.3) par $(-1)^{m_{ij}} \{f_i, f_j\}_{m_{ij}}$,

$$\sum_{k=1}^{m_{ij}} a_k^{(m_{ij})} \Big((f_i f_j)^{\frac{m_{ij}+k}{2}} - (f_i f_j)^{\frac{m_{ij}-k}{2}} \Big) = 0 \quad \text{pour } i, j = 0, \ldots, n-1 \text{ tels que } i < j, \tag{IV.4.8}$$

avec la restriction (IV.4.4).

Pour des paramètres égaux, $q_i = q$, les coefficients $a_k^{(m_{ij})}$ ont été calculés dans [90]. Nous étudions les coefficients $a_k^{(m_{ij})}$ avec q_i et q_j arbitraires dans l'Appendice à cette Section.

IV.4.2 Présentation à la Bourbaki

Nous rappelons tout d'abord la présentation de Bourbaki de G^+, voir Section IV.2. Le groupe G^+ est isomorphe au groupe engendré par $R_1, \ldots, R_{n-1}$ avec les relations définissantes :

$$\begin{cases} R_i^{m_{0i}} = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-1, \\ (R_i^{-1} R_j)^{m_{ij}} = 1 & \text{pour } i, j = 1, \ldots, n-1 \text{ tels que } i < j. \end{cases} \tag{IV.4.9}$$

Nous allons prouver dans cette Section une présentation de l'algèbre $H^+(G)$ similaire à la présentation de Bourbaki (IV.4.9) de G^+.

Proposition IV.9. *Pour un système de Coxeter (G,S) avec la matrice de Coxeter $\mathfrak{m}$, la sous-algèbre alternée $H^+(G)$ de l'algèbre de Hecke est isomorphe à l'algèbre engendrée par $Y_1^{\pm 1},\dots,Y_{n-1}^{\pm 1}$ avec les relations définissantes*

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m_{0i}} a_k^{(m_{0i})}\Big(Y_i^{\frac{m_{0i}+k}{2}} - Y_i^{\frac{m_{0i}-k}{2}}\Big) = 0 & \textit{pour } i=1,\dots,n-1, \\ \sum\limits_{k=1}^{m_{ij}} a_k^{(m_{ij})}\Big((Y_i^{-1}Y_j)^{\frac{m_{ij}+k}{2}} - (Y_i^{-1}Y_j)^{\frac{m_{ij}-k}{2}}\Big) = 0 & \textit{pour } i,j=1,\dots,n-1 \textit{ tels que } i<j. \end{cases} \tag{IV.4.10}$$

Preuve. Soit $\mathfrak{A}$ l'algèbre engendrée par $Y_1^{\pm 1},\dots,Y_{n-1}^{\pm 1}$ avec les relations définissantes (IV.4.10). Définissons une application ϕ de l'ensemble des générateurs $\{Y_1,\dots,Y_{n-1}\}$ vers l'algèbre $H^+(G)$ par

$$Y_i \mapsto f_0 f_i \quad \text{pour } i=1,\dots,n-1.$$

Grâce aux relations (IV.4.7)–(IV.4.8), cette application s'étend en un homomorphisme surjectif, que nous notons encore ϕ, de l'algèbre $\mathfrak{A}$ vers $H^+(G)$. Nous allons montrer que ϕ est un isomorphisme.

La partie gauche de la première relation dans (IV.4.10) est invariante sous la suite suivante d'opérations : remplacer Y_i par Y_i^{-1} et ensuite multiplier par $-Y_i^{m_{0i}}$. De même, pour la partie gauche de la seconde relation dans (IV.4.10), on peut vérifier directement qu'elle est invariante sous la suite suivante d'opérations : remplacer Y_i par Y_i^{-1}, Y_j par Y_j^{-1}, ensuite multiplier par la gauche par $-Y_j^{-1}(Y_jY_i^{-1})^{m_{ij}}$ et par la droite par Y_j . Ainsi, l'application définie par $\omega : Y_i \mapsto Y_i^{-1}$ s'étend en une involution de l'algèbre $\mathfrak{A}$.

Avec l'aide de ω, nous définissons le produit "smash" $\tilde{\mathfrak{A}}$ de l'algèbre $\mathfrak{A}$ avec le groupe cyclique C_2 à deux éléments. En tant qu'espace vectoriel, $\tilde{\mathfrak{A}}$ est isomorphe à $\mathfrak{A}\otimes\mathcal{A}C_2$; les générateurs de $\tilde{\mathfrak{A}}$ sont les éléments $Y_1^{\pm 1},\dots,Y_{n-1}^{\pm 1}$ avec les relations définissantes (IV.4.10), et en plus un générateur f avec les relations définissantes $f^2=1$ et $fY_i = Y_i^{-1}f$, $i=1,\dots,n-1$. L'application suivante

$$f \mapsto f_0 \quad \text{et} \quad Y_i \mapsto f_0 f_i \ \text{ pour } i=1,\dots,n-1,$$

s'étend en un morphisme d'algèbres $\psi_1 : \tilde{\mathfrak{A}} \to H(G)$. La vérification est directe en utilisant les relations (IV.4.7)–(IV.4.8). D'un autre côté, on peut aussi vérifier directement que l'application

$$f_0 \mapsto f \quad \text{et} \quad f_i \mapsto fY_i \ \text{ pour } i=1,\dots,n-1,$$

s'étend en un morphisme d'algèbres $\psi_2 : H(G) \to \tilde{\mathfrak{A}}$. De plus, les morphismes ψ_1 et ψ_2 sont inverses l'un à l'autre. La restriction de ψ_2 à $H^+(G)$ est le morphisme inverse à ϕ. □

IV.4.3 Présentation utilisant les arêtes du graphe de Coxeter

Fixons une extension connexe $\mathcal{G}^c$ du graphe de Coxeter $\mathcal{G}$, comme définie dans la Section IV.2. Nous rappelons la présentation du groupe G^+ qui utilise les arêtes du graphe $\mathcal{G}^c$, voir Section IV.2. Le groupe G^+ est isomorphe au groupe engendré par les éléments r_{ij}, définis dans la Section IV.2, avec

les relations définissantes

$$\begin{cases} (r_{ij})^{m_{ij}} = 1 & \text{pour tout générateur } r_{ij}, \\ r_{ii_1} r_{i_1 i_2} \dots r_{i_a i} = 1 & \text{pour tout cycle avec les arêtes } (ii_1), (i_1 i_2) \dots, (i_a i), \\ (r_{ij} r_{jk})^2 = 1 & \text{pour } r_{ij}, r_{jk} \text{ tels que } i < k \text{ et } m_{ik} = 2, \\ (r_{ij} r_{jk} r_{kl})^2 = 1 & \text{pour } r_{ij}, r_{jk}, r_{kl} \text{ tels que } i < l \text{ et } m_{il} = 2, \\ r_{ij} r_{lm} = r_{lm} r_{ij} & \text{si } (ij) \text{ et } (lm) \text{ sont non-connectées.} \end{cases} \tag{IV.4.11}$$

Nous généralisons cette présentation en une présentation de $H^+(G)$. Associons un élément y_{ij} à chaque générateur r_{ij} de G^+, et posons, pour tout y_{ij}, $y_{ji} := y_{ij}^{-1}$.

Proposition IV.10. *Pour un système de Coxeter (G, S) avec la matrice de Coxeter $\mathfrak{m}$, la sous-algèbre alternée $H^+(G)$ de l'algèbre de Hecke est isomorphe à l'algèbre engendrée par les éléments y_{ij} avec les relations définissantes*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{m_{ij}} a_k^{(m_{ij})} (y_{ij}^{\frac{m_{ij}+k}{2}} - y_{ij}^{\frac{m_{ij}-k}{2}}) = 0 & \textit{pour tout générateur } y_{ij}, & \text{(IV.4.12)} \\ y_{ii_1} y_{i_1 i_2} \dots y_{i_a i} = 1 & \textit{pour tout cycle avec les arêtes } (ii_1), (i_1 i_2) \dots, (i_a i), & \text{(IV.4.13)} \\ (y_{ij} y_{jk})^2 = 1 & \textit{pour } y_{ij}, y_{jk} \textit{ tels que } i < k \textit{ et } m_{ik} = 2, & \text{(IV.4.14)} \\ (y_{ij} y_{jk} y_{kl})^2 = 1 & \textit{pour } y_{ij}, y_{jk}, y_{kl} \textit{ tels que } i < l \textit{ et } m_{il} = 2, & \text{(IV.4.15)} \\ y_{ij} y_{lm} = y_{lm} y_{ij} & \textit{si } (ij) \textit{ et } (lm) \textit{ sont non-connectées.} & \text{(IV.4.16)} \end{cases}$$

Soient $\mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_\mathfrak{l}$ un ensemble de générateurs du groupe fondamental de $\mathcal{G}^c$. Dans l'ensemble des relations définissantes, il est suffisant d'imposer la relation (IV.4.13) pour les cycles $\mathfrak{c}_\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} = 1, \dots, \mathfrak{l}$.

Preuve de la Proposition. Notons que si $m_{0i} = 2$, alors la première relation de (IV.4.10) se réduit à $Y_i^2 = 1$, et aussi que, si $m_{ij} = 2$ alors la seconde relation de (IV.4.10) se réduit à $(Y_i^{-1} Y_j)^2 = 1$. En raison de ce fait, la preuve est très similaire à la preuve pour le cas non-déformé (c'est-à-dire, la preuve de la Proposition IV.4). Nous donnons donc juste les grandes lignes.

Soit $\mathfrak{Y}$ l'algèbre engendrée par les éléments y_{ij} avec les relations définissantes (IV.4.12)–(IV.4.16). L'application suivante

$$y_{ij} \mapsto \begin{cases} Y_i^{-1} Y_j & \text{si } i \neq 0, \\ Y_j & \text{si } i = 0, \end{cases} \tag{IV.4.17}$$

s'étend en un homomorphisme d'algèbres $\Phi : \mathfrak{Y} \to H^+(G)$.

Définissons maintenant l'application Ψ de l'ensemble des générateurs de $H^+(G)$ vers $\mathfrak{Y}$ par

$$\Psi \ : \ Y_i \mapsto \grave{Y}_i := y_{0i_1} y_{i_1 i_2} \dots y_{i_k i} \ \text{ pour tout } i = 1, \dots, n-1, \tag{IV.4.18}$$

où $(0, i_1, i_2, \dots, i_k, i)$ est un chemin arbitraire du sommet 0 vers le sommet i dans le graphe $\mathcal{G}^c$. L'application Ψ est bien définie car l'élément $\grave{Y}_i$ ne dépend pas du chemin choisi, grâce à la relation (IV.4.13). L'application Ψ s'étend en un homomorphisme d'algèbres de $H^+(G)$ vers $\mathfrak{Y}$, que nous notons encore par Ψ. Par construction, Ψ et Φ sont inverses l'un à l'autre. □

Remarque. Les relations définissantes (IV.4.12)–(IV.4.16) de l'algèbre $H^+(G)$ sont des déformations des relations définissantes (IV.4.11) du groupe G^+ (dans le sens où lorsque l'on prend $q_i = \pm 1$, $i = 0, \ldots, n-1$, dans les relations (IV.4.12)–(IV.4.16), on retrouve les relations (IV.4.11)). Seulement l'équation caractéristique pour les générateurs est déformée. Ceci est similaire au cas des algèbres de Hecke usuelles (en passant des relations (IV.2.1) aux relations (IV.4.1)–(IV.4.2), seulement l'équation caractéristique pour les générateurs est déformée). Ce phénomène n'est pas présent lorsque l'on déforme la présentation de Bourbaki (IV.4.9) de G^+ en la présentation à la Bourbaki (IV.4.10) de $H^+(G)$.

Exemple. La sous-algèbre alternée de l'algèbre de Hecke de type A a été étudiée dans [73] (avec la présentation à la Bourbaki). Fixons, pour le type A, la numérotation des sommets et l'orientation des arêtes comme indiqué dans la Figure IV.9, et posons $y_i := y_{i-1,i}$, $i = 1, \ldots, n-1$. La présentation de l'algèbre $H^+(A_n)$ donnée par la Proposition IV.6 s'écrit

$$\begin{cases} y_i^3 = \beta^2(y_i - y_i^2) + 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-1, \\ (y_i y_{i+1})^2 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-2, \\ (y_i y_{i+1} y_{i+2})^2 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-3, \\ y_i y_j = y_j y_i & \text{pour } i, j = 1, \ldots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 2. \end{cases} \tag{IV.4.19}$$

Cette présentation équipe la chaîne des algèbres $H^+(A_n)$ d'une présentation locale (de profondeur 2) et stationnaire (le fait que l'on ait bien une présentation de la chaîne des algèbres $H^+(A_n)$, au sens du Chapitre I, Section I.1, peut être obtenu à partir de la base de $H^+(A_n)$ donnée dans [73]).

Appendice IV.4.A Coefficients dans les relations définissantes des algèbres $H^+(G)$

Les coefficients $a_k^{(m_{ij})}$ apparaissant dans (IV.4.8), (IV.4.10) et (IV.4.12) se calculent facilement tant que m_{ij} n'est pas trop grand. Dans cet Appendice, nous définissons certains nombres entiers $\alpha_{k,l,l'}^{(m)}$ et $\alpha_{k,L}^{(m)}$, en termes desquels les éléments $a_k^{(m_{ij})}$, pour tout m_{ij}, peuvent être exprimés. Nous donnons une formule de récurrence satisfaite par les nombres $\alpha_{k,l,l'}^{(m)}$ (la récurrence est sur m) et trouvons la fonction génératrice de ces éléments. Dans le cas à un paramètre, cela permet de trouver une formule relativement simple pour les éléments $a_k^{(m_{ij})}$, en termes de coefficients binomiaux (nous retrouvons une formule présente dans [90]).

1. Soient f_1 et f_2 les générateurs d'une algèbre avec les relations définissantes $f_1^2 = f_2^2 = 1$. Définissons les éléments $\alpha_{k,l,l'}^{(m)} \in \mathbb{Z}$, avec $m, l, l' \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, par

$$\{(f_1 + x), (f_2 + y)\}_m = \sum_{l,l' \geq 0} x^l y^{l'} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{k,l,l'}^{(m)} \{f_1, f_2\}_k \ , \tag{IV.4.20}$$

Notons que, par construction, il n'y a, pour un m donné, qu'un nombre fini d'éléments $\alpha_{k,l,l'}^{(m)}$ non-nuls ; nous avons :

$$\alpha_{k,l,l'}^{(m)} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq |k| \leq m - l - l', \quad k \equiv m - l - l' (\mathrm{mod}\, 2), \quad l \leq \lfloor m+1 \rfloor \ \text{ et } \ l' \leq \lfloor m \rfloor \ .$$

En termes de ces éléments $\alpha^{(m)}_{k,l,l'}$, les coefficients $a^{(m_{ij})}_k$ peuvent être récrits

$$a^{(m_{ij})}_k = \sum_{l,l'\geq 0} \beta^l_i \beta^{l'}_j \left(\alpha^{(m_{ij})}_{k,l,l'} - \alpha^{(m_{ij})}_{-k,l',l}\right) .$$

Definissons

$$\alpha^{(m)}_{k,L} := \sum_{l,l'\geq 0\ :\ l+l'=L} \alpha^{(m)}_{k,l,l'} \tag{IV.4.21}$$

Si $q_i = q_j$ (et donc $\beta_i = \beta_j$), les coefficients $a^{(m_{ij})}_k$ s'écrivent, en termes des éléments $\alpha^{(m)}_{k,L}$,

$$a^{(m_{ij})}_k = \sum_{L\geq 0} \beta^L_i \left(\alpha^{(m_{ij})}_{k,L} - \alpha^{(m_{ij})}_{-k,L}\right) . \tag{IV.4.22}$$

Lemme IV.11. *Les éléments $\alpha^{(m)}_{k,l,l'}$ satisfont la condition initiale et la récursion suivantes :*

$$\begin{aligned} \alpha^{(0)}_{k,l,l'} &= \delta^0_k\, \delta^0_l\, \delta^0_{l'} \ , \\ \alpha^{(m+1)}_{k,l,l'} &= \alpha^{(m)}_{k-1,l',l} + \alpha^{(m)}_{-k,l',l-1} \ , \end{aligned} \tag{IV.4.23}$$

où δ^i_j est le delta de Kronecker.

Preuve. La condition initiale dans (IV.4.23) est évidemment vérifiée. Pour la relation de récurrence dans (IV.4.23), notons que $\{(f_1+x),(f_2+y)\}_{m+1} = (f_1+x)\{(f_2+y),(f_1+x)\}_m$; en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $f_1\{f_2,f_1\}_k = \{f_1,f_2\}_{k+1}$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, le résultat provient d'un calcul direct. □

2. En posant $C(t,u,v,s) := \sum_{m,l,l'\geq 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha^{(m)}_{k,l,l'}\, t^m u^l v^{l'} s^k$, nous récrivons les formules (IV.4.23) sous la forme suivante :

$$C(t,u,v,s) - 1 = tsC(t,v,u,s) + tuC(t,v,u,s^{-1}) . \tag{IV.4.24}$$

Echangeant u et v, ou remplaçant s par s^{-1}, ou en faisant les deux simultanément, dans (IV.4.24), nous obtenons le système suivant d'équations :

$$\begin{pmatrix} 1 & -ts & 0 & -tu \\ -ts & 1 & -tv & 0 \\ 0 & -tu & 1 & -ts^{-1} \\ -tv & 0 & -t/s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(t,u,v,s) \\ C(t,v,u,s) \\ C(t,u,v,s^{-1}) \\ C(t,v,u,s^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

En inversant la matrice carrée ci-dessus, nous trouvons la formule explicite suivante pour la fonction génératrice

$$C(t,u,v,s) = \frac{1 - t^2s^{-2} + tu + t^3v - t^2uv - t^3u^2v + ts - t^3s^{-1} + t^2us^{-1} - t^3u^2s^{-1} - t^2vs}{1 - t^2(s^2+s^{-2}) - 2t^2uv + t^4(u^2-1)(v^2-1)} . \tag{IV.4.25}$$

3. Dans le cas à un paramètre, nous obtenons, à partir de (IV.4.25), une formule assez simple pour les éléments $\alpha_{k,L}^{(m)}$, et donc ensuite pour les coefficients $a_k^{(m_{ij})}$. Cette formule apparaît dans [90].

Définissons $D(t,u,s) := \sum_{m,L\geq 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{k,L}^{(m)}\, t^m u^L s^k$. Nous avons par définition $D(t,u,s) = C(t,u,u,s)$. On vérifie directement, partant de (IV.4.25), que

$$D(t,u,s) = \frac{1 - ts^{-1} + tu}{1 - ts^{-1} - ts + t^2 - t^2u^2} = \frac{1 - ts^{-1} + tu}{-t^2u^2 + (ts-1)(ts^{-1}-1)} \ . \tag{IV.4.26}$$

Développant en série de Laurent en t, u et s, nous obtenons

$$D(t,u,s) = (1 - ts^{-1} + tu) \sum_{a,b,c\geq 0} \frac{(a+b)!(a+c)!}{a!\,a!\,b!\,c!}\ t^{2a+b+c}\ u^{2a}\ s^{b-c}\ .$$

En identifiant le coefficient devant $t^m\, u^L\, s^k$, il est direct d'obtenir la formule suivante pour les éléments $\alpha_{k,L}^{(m)}$, $L, m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} \alpha_{m,\,m}^{(m)} = 1, & \\ \alpha_{k,\,L}^{(m)} = \begin{pmatrix} \frac{m+k}{2} \\ \frac{L}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{m-k-2}{2} \\ \frac{L-2}{2} \end{pmatrix} & \text{si } 0 < |k| \leq m-L,\ \ L \equiv 0 (\bmod 2) \ \text{ et } \ m-k \equiv 0 (\bmod 2), \\ \alpha_{k,\,L}^{(m)} = \begin{pmatrix} \frac{m+k-1}{2} \\ \frac{L-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{m-k-1}{2} \\ \frac{L-1}{2} \end{pmatrix} & \text{si } 0 < |k| \leq m-L,\ \ L \equiv 1 (\bmod 2) \ \text{ et } \ m-k \equiv 1 (\bmod 2), \\ \alpha_{k,\,L}^{(m)} = 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifer que, pour $k \geq 0$, $\alpha_{-k,\,L}^{(m)} = \alpha_{k,\,L}^{(m)}$ si $L \equiv 1 (\bmod 2)$, et $\alpha_{-k,\,L}^{(m)} = \dfrac{m-k}{m+k}\alpha_{k,\,L}^{(m)}$ si $L \equiv 0 (\bmod 2)$. Avec (IV.4.22), ceci implique que

$$a_k^{(m_{ij})} = \sum_{L=1,\ldots,m_{ij}\ :\ L\equiv 0 (\bmod 2)} \beta^L\, \frac{2k}{m_{ij}+k} \alpha_{k,\,L}^{(m_{ij})} \quad \text{pour } k = 1, \ldots, m_{ij}. \tag{IV.4.27}$$

Exemples. Rappelons que $\beta_i = \dfrac{q_i - q_i^{-1}}{q_i + q_i^{-1}}$, $i = 0, \ldots, n-1$, et que $\beta_i = \beta_j$ si m_{ij} est impair. Nous écrivons ici la relation (IV.4.12) pour $m_{ij} \leq 6$ (c'est tout ce qui est nécessaire pour les groupes de Coxeter finis autres que les groupes diédraux Di_n avec $n > 6$) dans le cas multi-paramétrique :

- pour $m_{ij} = 2$, $y_{ij}^2 = 1$;
- pour $m_{ij} = 3$, $y_{ij}^3 = \beta_i^2(y_{ij} - y_{ij}^2) + 1$;
- pour $m_{ij} = 4$, $y_{ij}^4 = 2\beta_i\beta_j(y_{ij} - y_{ij}^3) + 1$;
- pour $m_{ij} = 5$, $y_{ij}^5 = 3\beta_i^2(y_{ij} - y_{ij}^4) + (\beta_i^4 + \beta_i^2)(y_{ij}^2 - y_{ij}^3) + 1$;
- pour $m_{ij} = 6$, $y_{ij}^6 = 4\beta_i\beta_j(y_{ij} - y_{ij}^5) + (3\beta_i^2\beta_j^2 + \beta_i^2 + \beta_j^2)(y_{ij}^2 - y_{ij}^4) + 1$.

La situation à un paramètre se retrouve en posant $\beta_i = \beta_j = \beta$.

IV.5 Sous-groupes alternés des groupes de tresses

IV.5.1 Définition

Soit (G, S) un système de Coxeter avec la matrice de Coxeter $\mathfrak{m}$ (voir Section IV.2). Le groupe de tresses $\mathcal{B}(G)$ est le groupe engendré par $g_0, \ldots, g_{n-1}$ avec les relations définissantes :

$$\{g_i, g_j\}_{m_{ij}} = \{g_j, g_i\}_{m_{ij}} \quad \text{pour } i, j = 0, \ldots, n-1 \text{ tels que } i < j. \tag{IV.5.28}$$

Etendons la signature au groupe $\mathcal{B}(G)$, c'est-à-dire, soit $\epsilon : \mathcal{B}(G) \to \{-1, 1\}$ tel que $\epsilon(g_i) = -1$ pour $i = 0, \ldots, n-1$. Son noyau $\mathcal{B}(G)^+ := \ker(\epsilon)$ est appelé le sous-groupe alterné du groupe $\mathcal{B}(G)$. Le groupe $\mathcal{B}^+(G)$ est engendré par les éléments $g_i g_j$, $i, j = 0, \ldots, n-1$ (et leurs inverses).

Remarque. L'homomorphisme involutif ϵ définit une $\mathbb{Z}_2$-graduation sur l'algèbre de groupe de $\mathcal{B}(G)$. Soit π la surjection naturelle de l'algèbre de groupe de $\mathcal{B}(G)$ vers l'algèbre de Hecke $H(G)$ (qui est le quotient de l'algèbre de groupe de $\mathcal{B}(G)$ par la relation (IV.4.1)). Rappelons la $\mathbb{Z}_2$-graduation de $H(G)$ définie par l'involution ϕ. Nous soulignons le fait que $\phi\pi \neq \pi\epsilon$, l'image de l'algèbre de groupe de $\mathcal{B}^+(G)$ par π n'appartient pas à $H^+(G)$; en d'autres mots, la graduation de $H(G)$ n'est pas induite, à travers π, par la graduation de l'algèbre de groupe de $\mathcal{B}(G)$.

IV.5.2 Présentation à la Bourbaki

Nous étendons les présentations à la Bourbaki (IV.4.9) et (IV.4.10) du groupe G^+ et de l'algèbre $H^+(G)$ au groupe $\mathcal{B}^+(G)$. La présentation dépend du choix d'un générateur g_0, portant l'indice 0, parmi les générateurs de $\mathcal{B}(G)$.

Proposition IV.12. *Pour un système de Coxeter (G, S) avec la matrice de Coxeter $\mathfrak{m}$, le sous-groupe alterné $\mathcal{B}^+(G)$ du groupe de tresses est isomorphe au groupe engendré par $\mathsf{R}_0, \ldots, \mathsf{R}_{n-1}$ et $\mathsf{R}'_0, \ldots, \mathsf{R}'_{n-1}$ avec les relations définissantes*

$$\begin{cases} \mathsf{R}'_0 = 1\,, \\ \{\mathsf{R}'_i, \mathsf{R}_j\}_{m_{ij}} = \left\{\mathsf{R}'_j, \mathsf{R}_i\right\}_{m_{ij}} & \textit{pour } i, j = 0, \ldots, n-1 \textit{ tels que } i < j, \\ \left\{\mathsf{R}_i, \mathsf{R}'_j\right\}_{m_{ij}} = \{\mathsf{R}_j, \mathsf{R}'_i\}_{m_{ij}} & \textit{pour } i, j = 0, \ldots, n-1 \textit{ tels que } i < j. \end{cases} \tag{IV.5.29}$$

Preuve. Soit B le groupe engendré par les éléments $\mathsf{R}_0, \ldots, \mathsf{R}_{n-1}$ et $\mathsf{R}'_0, \ldots, \mathsf{R}'_{n-1}$ avec les relations définissantes (IV.5.29). Définissons une application ϕ de l'ensemble des générateurs de B vers $\mathcal{B}^+(G)$ par

$$\mathsf{R}_i \mapsto g_0 g_i,\ i = 0, \ldots n-1, \quad \text{et} \quad \mathsf{R}'_i \mapsto g_i g_0^{-1},\ i = 0, \ldots n-1. \tag{IV.5.30}$$

On vérifie directement que ϕ s'étend en un homomorphisme, que nous appelons encore ϕ, de B vers $\mathcal{B}^+(G)$. De plus, l'homomorphisme ϕ est surjectif. En effet, pour $i, j = 0, \ldots, n-1$, nous avons $g_i g_j = \phi(\mathsf{R}'_i \mathsf{R}_j)$. Nous allons prouver que ϕ est un isomorphisme.

Définissons une application ω de l'ensemble des générateurs de B vers B par

$$\mathsf{R}_i \mapsto \mathsf{R}'_i \mathsf{R}_0,\ i = 0, \ldots n-1, \quad \text{et} \quad \mathsf{R}'_i \mapsto \mathsf{R}_0^{-1} \mathsf{R}_i,\ i = 0, \ldots n-1.$$

Il est direct de vérifier que ω définit un automorphisme de B. De plus, l'automorphisme ω^2 est un automorphisme intérieur : pour tout $x \in W$, nous avons $\omega^2(x) = \mathsf{R}_0^{-1} x \mathsf{R}_0$.

Soit C le groupe cyclique d'ordre infini. Définissons le produit semi-direct $B \rtimes C$, où l'action de C sur B est donnée par ω ; le groupe $B \rtimes C$ est engendré par les générateurs de B et un élément g, et on ajoute aux relations définissantes de B la relation $gxg^{-1} = \omega(x)$, pour chaque générateur x de B.

Maintenant, soit Q le quotient du groupe $B \rtimes C$ par la relation $g^2 = \mathsf{R}_0^{-1}$. L'application suivante

$$g \mapsto g_0^{-1}, \quad \mathsf{R}_i \mapsto g_0 g_i, \ i = 0, \ldots, n-1, \quad \text{et} \quad \mathsf{R}'_i \mapsto g_i g_0^{-1}, \ i = 0, \ldots, n-1,$$

définit un homomorphisme ψ_1 de Q vers $\mathcal{B}(G)$. La vérification est la même que pour l'application ϕ, donnée par (IV.5.30), avec en plus la vérification des relations dans Q concernant le générateur g ; celles-là sont satisfaites par construction.

L'application suivante

$$g_i \mapsto g^{-1}\mathsf{R}_i, \ i = 0, \ldots, n-1,$$

définit un homomorphisme ψ_2 de $\mathcal{B}(G)$ vers Q. Ici, nous omettons les calculs, qui sont directs.

De plus, les morphismes ψ_1 et ψ_2 sont inverses l'un à l'autre. La restriction de ψ_2 à $\mathcal{B}^+(G)$ est l'inverse de ϕ, montrant que l'homomorphisme ϕ, donné par (IV.5.30), est l'isomorphisme requis entre B et $\mathcal{B}^+(G)$. $\square$

Remarques. (i) Nous notons τ l'anti-automorphisme standard du groupe $\mathcal{B}(G)$, envoyant g_i à g_i, $i = 0, \ldots, n-1$. L'action de τ sur les générateurs de la présentation à la Bourbaki est donnée par

$$\mathsf{R}_i \to \mathsf{R}'_i \mathsf{R}_0 \quad \text{et} \quad \mathsf{R}'_i \to \mathsf{R}_0^{-1}\mathsf{R}_i, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

(ii) Le groupe de Coxeter G est le quotient du groupe de tresses $\mathcal{B}(G)$ par les relations $g_i^2 = 1$, $i = 0, \ldots, n-1$. Dans le cas alterné, nous avons un résultat similaire ; le sous-groupe alterné G^+ du groupe de Coxeter G est le quotient du groupe $\mathcal{B}(G)^+$ par les relations $\mathsf{R}_0 = 1$ et $\mathsf{R}'_i = \mathsf{R}_i^{-1}$, $i = 1, \ldots, n-1$. En effet, dans ce quotient, les relations (IV.5.29) se réduisent à

$$\begin{cases} \mathsf{R}_j^{m_{0j}} = 1 & \text{pour } j = 1, \ldots, n-1, \\ (\mathsf{R}_i^{-1}\mathsf{R}_j)^{m_{ij}} = 1 & \text{pour } i, j = 0, \ldots, n-1 \text{ tels que } i < j. \end{cases}$$

Ce sont les relations définissantes de la présentation de Bourbaki de G^+, voir (IV.4.9).

(iii) Le procédé de récriture de Reidemeister-Schreier [91, 92], voir aussi *e.g.* [66], permet d'obtenir une présentation d'un sous-groupe H d'un groupe G, étant données une présentation de G et certaines informations concernant H. Nous appliquons ce procédé au sous-groupe $\mathcal{B}^+(G)$ de $\mathcal{B}(G)$. Ecrivons $\mathcal{B}(G) = \mathcal{B}^+(G) \cup \mathcal{B}^+(G)g_0$, la décomposition de $\mathcal{B}(G)$ en l'union disjointe de ses classes à droite par rapport à $\mathcal{B}^+(G)$. Pour tout $a \in \mathcal{B}(G)$, on définit $\overline{a} \in \{1, g_0\}$ par $\mathcal{B}^+(G)a = \mathcal{B}^+(G)\overline{a}$. Des résultats généraux, connus sous le nom de procédé de récriture de Reidemeister-Schreier, appliqués à notre situation affirment que $\mathcal{B}^+(G)$ est isomorphe au groupe avec un ensemble de générateurs $\mathfrak{S}$ et un ensemble de relations définissantes $\mathfrak{D}$ tels que :

– Les éléments de $\mathfrak{S}$ sont en bijection avec les éléments $ag_i(\overline{ag_i})^{-1}$, $i = 0, \ldots, n-1$ et $a \in \{1, g_0\}$, tels que $ag_i(\overline{ag_i})^{-1} \neq 1$; nous obtenons ainsi des générateurs $\mathfrak{R}_i \in \mathfrak{S}$, $i = 0, \ldots, n-1$, correspondant à $g_0 g_i(\overline{g_0 g_i})^{-1} (= g_0 g_i)$, et des générateurs $\mathfrak{R}'_i \in \mathfrak{S}$, $i = 1, \ldots, n-1$, correspondant à $g_i(\overline{g_i})^{-1} (= g_i g_0^{-1})$. Définissons aussi, pour la suite, $\mathfrak{R}'_0 := 1$.
– Soit $w = g_{i_1} \ldots g_{i_k}$, où $i_1, \ldots, i_k \in \{0, \ldots, n-1\}$, un mot en les éléments g_i, $i = 0, \ldots, n-1$. Définissons $\rho(w) := \mathfrak{R}_{i_1} \mathfrak{R}'_{i_2} \mathfrak{R}_{i_3} \ldots$ (pour $j = 1, \ldots, k$, l'action de ρ remplace g_{i_j} par $\mathfrak{R}_{i_j}$ si j est impair et par $\mathfrak{R}'_{i_j}$ si j est pair). L'ensemble $\mathfrak{D}$ est formé par les relations $\rho(a\{g_i, g_j\}_{m_{ij}}) = \rho(a\{g_j, g_i\}_{m_{ij}})$, $a \in \{1, g_0\}$ et $i, j = 0, \ldots, n-1$ tels que $i < j$. Il est immédiat de constater que $\mathfrak{D}$ est formé par les relations $\{\mathfrak{R}'_i, \mathfrak{R}_j\}_{m_{ij}} = \left\{\mathfrak{R}'_j, \mathfrak{R}_i\right\}_{m_{ij}}$ et $\left\{\mathfrak{R}_i, \mathfrak{R}'_j\right\}_{m_{ij}} = \{\mathfrak{R}_j, \mathfrak{R}'_i\}_{m_{ij}}$, $i, j = 0, \ldots, n-1$ tels que $i < j$.

En conclusion, les générateurs et les relations donnés dans la Proposition IV.12 coïncident avec ceux qui sont obtenus par le procédé de récriture de Reidemeister-Schreier pour le sous-groupe $\mathcal{B}^+(G)$ de $\mathcal{B}(G)$. Notons que la preuve de la Proposition IV.12 présentée ci-dessus est directe et ne fait pas appel à la théorie générale des groupes nécessaire pour prouver les résultats de cette remarque.

(iv) Le nombre des générateurs dans la présentation de $\mathcal{B}(G)^+$ de la Proposition IV.12 n'est, en général, pas minimal. Par exemple, si il existe un certain $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $m_{0j} = 2$, alors les seconde et troisième relations dans (IV.5.29) (pour $i = 0$) impliquent que $\mathsf{R}'_j = \mathsf{R}_j \mathsf{R}_0^{-1} = \mathsf{R}_0^{-1} \mathsf{R}_j$. De plus, si il existe un certain $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que m_{0j} est impair, alors les seconde et troisième relations de (IV.5.29) (pour $i = 0$) impliquent que $\mathsf{R}_j^{\frac{m_{0j}-1}{2}} = (\mathsf{R}'_j \mathsf{R}_0)^{\frac{m_{0j}-1}{2}} \mathsf{R}'_j$ et $\mathsf{R}_0 (\mathsf{R}'_j \mathsf{R}_0)^{\frac{m_{0j}-1}{2}} = \mathsf{R}_j^{\frac{m_{0j}+1}{2}}$. Ainsi, nous avons

$$\mathsf{R}'_j = \mathsf{R}_j^{-\frac{m_{0j}+1}{2}} \mathsf{R}_0 \mathsf{R}_j^{\frac{m_{0j}-1}{2}} \quad \text{pour } j = 1, \ldots, n-1 \text{ tel que } m_{0j} \text{ est impair.}$$

Néanmoins, en général, les deux ensembles, R_i et R'_i, de générateurs sont nécessaires. Considérons par exemple le groupe de tresses U engendré par g_0 et g_1 et la relation définissante $g_0 g_1 g_0 g_1 = g_1 g_0 g_1 g_0$ (c'est-à-dire, $\{g_0, g_1\}_4 = \{g_1, g_0\}_4$). Dans ce cas, les générateurs du sous-groupe alterné suggérés par la Proposition IV.12 sont g_0^2, $g_0 g_1$ et $g_1 g_0^{-1}$. L'élément $g_1 g_0^{-1}$ n'appartient pas au sous-groupe engendré par g_0^2 et $g_0 g_1$. En effet, soit $\bar{U}$ le quotient de U par la relation $g_0^2 = 1$, et soit $\bar{g}_i$ les images des g_i dans $\bar{U}$. Il est connu (et on peut vérifier facilement) que $\bar{U}$ est isomorphe à $C^2 \rtimes S_2$, où S_2 est le groupe symétrique sur 2 éléments et C est le groupe cyclique infini ; S_2 agit sur C^2 en permutant les deux copies de C. Supposons qu'il existe un entier x tel que $\bar{g}_1 \bar{g}_0 = (\bar{g}_0 \bar{g}_1)^x$. Si $x = 1$, c'est-à-dire $\bar{g}_1 \bar{g}_0 = \bar{g}_0 \bar{g}_1$, alors le groupe $\bar{U}$ serait isomorphe à $C \times S_2$, ce qui n'est pas. Supposons que $x \neq 1$. Nous avons $(\bar{g}_1 \bar{g}_0)^2 = (\bar{g}_0 \bar{g}_1)^{2x}$ ce qui, avec la relation définissante $(\bar{g}_1 \bar{g}_0)^2 = (\bar{g}_0 \bar{g}_1)^2$, mène à $(\bar{g}_0 \bar{g}_1)^{2(x-1)} = 1$, contredisant le fait que $\bar{U}$ est infini. Un calcul similaire montre que l'élément $g_0 g_1 \in U$ n'appartient pas au sous-groupe engendré par g_0^2 et $g_1 g_0^{-1}$.

(v) Les éléments R_i, $i = 0, \ldots, n-1$, engendrent le sous-groupe alterné du groupe de tresses pour tous les types simplement lacés (c'est-à-dire, $m_{ij} = 2, 3$ pour tout couple $i \neq j$), voir remarque **(iv)**. Nous donnons la présentation du sous-groupe alterné du groupe de tresses de type A, utilisant seulement les générateurs R_i, $i = 0, \ldots, n-1$. Indexons les générateurs du groupe de tresses $\mathcal{B}(A_n)$ de la

manière standard ; c'est-à-dire, $\mathcal{B}(A_n)$ est engendré par $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ avec les relations définissantes :

$$\begin{cases} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} & \text{pour } i = 0, \ldots, n-2, \\ g_i g_j = g_j g_i & \text{pour } i, j = 0, \ldots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1. \end{cases} \tag{IV.5.31}$$

Le groupe $\mathcal{B}^+(A_n)$ est isomorphe au groupe engendré par $\mathsf{R}_0, \mathsf{R}_1, \ldots, \mathsf{R}_{n-1}$ avec les relations définissantes :

$$\begin{cases} \mathsf{R}_0\mathsf{R}_1\mathsf{R}_0 = \mathsf{R}_1^2\mathsf{R}_0^{-1}\mathsf{R}_1^2, & \\ \mathsf{R}_0\mathsf{R}_j = \mathsf{R}_j\mathsf{R}_0 & \text{pour } j = 2, \ldots, n-1, \\ \mathsf{R}_2\mathsf{R}_1\mathsf{R}_2 = \mathsf{R}_1^2\mathsf{R}_0^{-1}\mathsf{R}_2\mathsf{R}_0^{-1}\mathsf{R}_1^2, & \\ \mathsf{R}_2\mathsf{R}_1^2\mathsf{R}_2 = \mathsf{R}_0\mathsf{R}_1\mathsf{R}_2\mathsf{R}_0^{-1}\mathsf{R}_1\mathsf{R}_0, & \\ \mathsf{R}_1^2\mathsf{R}_j = \mathsf{R}_j\mathsf{R}_1\mathsf{R}_0, \quad \mathsf{R}_j\mathsf{R}_1^2 = \mathsf{R}_0\mathsf{R}_1\mathsf{R}_j & \text{pour } j = 3, \ldots, n-1, \\ \mathsf{R}_i\mathsf{R}_{i+1}\mathsf{R}_i = \mathsf{R}_{i+1}\mathsf{R}_i\mathsf{R}_{i+1} & \text{pour } i = 2, \ldots, n-2, \\ \mathsf{R}_i\mathsf{R}_j = \mathsf{R}_j\mathsf{R}_i & \text{pour } i, j = 2, \ldots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1. \end{cases} \tag{IV.5.32}$$

La vérification que cette présentation est équivalente à (IV.5.29) pour le type A est directe, une fois que l'on a noté que ici nous avons $\mathsf{R}_1' = \mathsf{R}_0^{-1}\mathsf{R}_1^2\mathsf{R}_0^{-1}$ et $\mathsf{R}_j' = \mathsf{R}_j\mathsf{R}_0^{-1} = \mathsf{R}_0^{-1}\mathsf{R}_j$ pour $j = 2, \ldots, n-1$.

Il est intéressant de remarquer que en termes des générateurs $\bar{\mathsf{R}}_0 = \mathsf{R}_0^{-1}$ et R_i, $i = 1, \ldots, n-1$, on peut récrire toutes les relations (IV.5.32) sans les inverses des générateurs, et définir ainsi un monoïde des éléments positifs.

IV.5.3 Présentation utilisant les arêtes du graphe de Coxeter

Le groupe $\mathcal{B}^+(G)$ admet une présentation similaire aux présentations du groupe G^+ et de l'algèbre $H^+(G)$, voir (IV.4.11) et Proposition IV.10. Associons, comme dans les Sections IV.2 et IV.4, un générateur r_{ij} à chaque arête orientée (une arête est orientée de i vers j si $i < j$) du graphe $\mathcal{G}^c$. Posons $\mathsf{r}_{ji} := \mathsf{r}_{ij}^{-1}$ pour tout générateur r_{ij}.

Proposition IV.13. *Pour un système de Coxeter (G, S) avec la matrice de Coxeter $\mathfrak{m}$, le sous-groupe alterné $\mathcal{B}^+(G)$ du groupe de tresses est isomorphe au groupe engendré par les éléments r_{ij} et $\mathsf{t}_0, \ldots, \mathsf{t}_{n-1}$ avec les relations définissantes*

$$\begin{cases} \mathsf{r}_{ii_1}\mathsf{r}_{i_1i_2}\ldots\mathsf{r}_{i_ai} = 1 & \textit{pour tout cycle avec les arêtes } (ii_1), (i_1i_2)\ldots, (i_ai), \\ \mathsf{r}_{ij}\mathsf{r}_{jk}\mathsf{t}_k = \mathsf{r}_{kj}\mathsf{r}_{ji}\mathsf{t}_i, \quad \mathsf{t}_k\mathsf{r}_{ij}\mathsf{r}_{jk} = \mathsf{r}_{kj}\mathsf{r}_{ji}\mathsf{t}_i & \textit{si } i < k \textit{ et } m_{ik} = 2, \\ \mathsf{r}_{ij}\mathsf{r}_{jk}\mathsf{r}_{kl}\mathsf{t}_l = \mathsf{r}_{lk}\mathsf{r}_{kj}\mathsf{r}_{ji}\mathsf{t}_i, \quad \mathsf{t}_l\mathsf{r}_{ij}\mathsf{r}_{jk}\mathsf{r}_{kl} = \mathsf{r}_{lk}\mathsf{r}_{kj}\mathsf{r}_{ji}\mathsf{t}_i & \textit{si } i < l \textit{ et } m_{il} = 2, \\ (\mathsf{r}_{ij}\mathsf{t}_j)^{\frac{m_{ij}}{2}} = (\mathsf{r}_{ji}\mathsf{t}_i)^{\frac{m_{ij}}{2}}, \quad (\mathsf{t}_j\mathsf{r}_{ij})^{\frac{m_{ij}}{2}} = (\mathsf{r}_{ji}\mathsf{t}_i)^{\frac{m_{ij}}{2}} & \textit{si } m_{ij} > 2 \textit{ et } m_{ij} \textit{ pair}, \\ (\mathsf{r}_{ij}\mathsf{t}_j)^{\frac{m_{ij}-1}{2}}\mathsf{r}_{ij} = (\mathsf{r}_{ji}\mathsf{t}_i)^{\frac{m_{ij}-1}{2}}, \quad (\mathsf{r}_{ij}\mathsf{t}_j)^{\frac{m_{ij}+1}{2}} = \mathsf{t}_i(\mathsf{r}_{ji}\mathsf{t}_i)^{\frac{m_{ij}-1}{2}} & \textit{si } m_{ij} > 2 \textit{ et } m_{ij} \textit{ impair}, \\ \mathsf{r}_{ij}\mathsf{r}_{lm} = \mathsf{r}_{lm}\mathsf{r}_{ij} \qquad \textit{si } (ij) \textit{ et } (lm) \textit{ sont non-connectées.} \end{cases} \tag{IV.5.33}$$

Preuve. La preuve est similaire à la preuve des Propositions IV.4 et IV.10. Nous sautons les calculs, qui sont directs mais un peu longs, et indiquons ci-dessous seulement les isomorphismes, inverses l'un à l'autre, entre le groupe engendré par les éléments r_{ij} et $\mathsf{t}_0, \dots, \mathsf{t}_{n-1}$ avec les relations définissantes (IV.5.33), et le groupe $\mathcal{B}^+(G)$ avec la présentation de la Proposition IV.12.

$$\mathsf{r}_{ij} \mapsto \mathsf{R}'_i \mathsf{R}'^{-1}_j \quad \text{et} \quad \mathsf{t}_i \mapsto \mathsf{R}'_i \mathsf{R}_i, \;\; i = 0, \dots, n-1,$$

et

$$\mathsf{R}_0 \mapsto \mathsf{t}_0, \;\; \mathsf{R}'_0 \mapsto 1, \qquad \mathsf{R}_i \mapsto \mathsf{r}_{0i_1}\mathsf{r}_{i_1 i_2} \dots \mathsf{r}_{i_a i}\mathsf{t}_i \;\; \text{et} \;\; \mathsf{R}'_i \mapsto \mathsf{r}_{i i_a} \dots \mathsf{r}_{i_2 i_1}\mathsf{r}_{i_1 0}, \;\; i = 1, \dots, n-1,$$

où, pour $i = 1, \dots, n-1$, $(0, i_1, i_2, \dots, i_a, i)$ est un chemin dans le graphe $\mathcal{G}^c$ du sommet 0 au sommet i. La seconde application est bien définie car l'image de R_i (respectivement, de R'_i) ne dépend pas du chemin choisi, en raison de la première relation dans (IV.5.33). □

L'isomorphisme entre le groupe engendré par les éléments r_{ij} et $\mathsf{t}_0, \dots, \mathsf{t}_{n-1}$ avec les relations définissantes (IV.5.33), et le sous-groupe $\mathcal{B}^+(G)$ du groupe de tresses $\mathcal{B}(G)$ est donné par :

$$\mathsf{r}_{ij} \mapsto g_i g_j^{-1} \quad \text{et} \quad \mathsf{t}_i \mapsto g_i^2, \;\; i = 0, \dots, n-1. \tag{IV.5.34}$$

Remarques. (i) L'action de l'anti-automorphisme standard τ de $\mathcal{B}^+(G)$ (voir remarque **(i)** après la preuve de la Proposition IV.10) sur les générateurs est

$$\mathsf{t}_i \to \mathsf{t}_i, \;\; i = 0, \dots, n-1, \quad \text{et} \quad \mathsf{r}_{ij} \to \mathsf{t}_j^{-1}\mathsf{r}_{ji}\mathsf{t}_i, \;\; \text{pour tout générateur } \mathsf{r}_{ij}.$$

(ii) Cette remarque est l'analogue, pour cette présentation, de la remarque **(ii)** après la preuve de la Proposition IV.12. Le sous-groupe alterné G^+ du groupe de Coxeter G est le quotient du groupe $\mathcal{B}^+(G)$, avec la présentation (IV.5.33), par les relations $\mathsf{t}_i = 1$, $i = 0, \dots, n-1$. En effet, dans ce quotient, les relations (IV.5.33) se réduisent aux relations définissantes (IV.4.11) de G^+.

(iii) Pour le type A, avec la même indexation du graphe de Coxeter que dans la remarque **(v)** après la preuve de la Proposition IV.12, la présentation utilisant les arêtes du graphe de Coxeter est la suivante : posons $\mathsf{r}_i := \mathsf{r}_{i-1i}$, $i = 1, \dots, n-1$; le groupe $\mathcal{B}^+(A_n)$ est engendré par $\mathsf{r}_1, \dots, \mathsf{r}_{n-1}$ et $\mathsf{t}_0, \dots, \mathsf{t}_{n-1}$ avec les relations définissantes :

$$\begin{cases} \mathsf{r}_i\mathsf{r}_{i+1}\mathsf{t}_{i+1} = \mathsf{r}_{i+1}^{-1}\mathsf{r}_i^{-1}\mathsf{t}_{i-1}, \quad \mathsf{t}_{i+1}\mathsf{r}_i\mathsf{r}_{i+1} = \mathsf{r}_{i+1}^{-1}\mathsf{r}_i^{-1}\mathsf{t}_{i-1} & \text{pour } i = 1, \dots, n-2, \\ \mathsf{r}_i\mathsf{r}_{i+1}\mathsf{r}_{i+2}\mathsf{t}_{i+2} = \mathsf{r}_{i+2}^{-1}\mathsf{r}_{i+1}^{-1}\mathsf{r}_i^{-1}\mathsf{t}_{i-1} & \text{pour } i = 1, \dots, n-3, \\ \mathsf{t}_{i+2}\mathsf{r}_i\mathsf{r}_{i+1}\mathsf{r}_{i+2} = \mathsf{r}_{i+2}^{-1}\mathsf{r}_{i+1}^{-1}\mathsf{r}_i^{-1}\mathsf{t}_{i-1} & \text{pour } i = 1, \dots, n-3, \\ \mathsf{r}_i\mathsf{t}_i\mathsf{r}_i = \mathsf{r}_i^{-1}\mathsf{t}_i^{-1}, \quad (\mathsf{r}_i\mathsf{t}_i)^2 = \mathsf{t}_{i-1}\mathsf{r}_i^{-1}\mathsf{t}_{i-1} & \text{pour } i = 1, \dots, n-1, \\ \mathsf{r}_i\mathsf{r}_j = \mathsf{r}_j\mathsf{r}_i \qquad \text{pour } i, j = 1, \dots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 2. \end{cases} \tag{IV.5.35}$$

On peut vérifier (avec l'aide de l'isomorphisme (IV.5.34)) que cette présentation donne une présentation de la chaîne des groupes $\mathcal{B}^+(A_n)$, au sens du Chapitre I, Section I.1.

De plus, il est immédiat de vérifier (encore avec l'isomorphisme (IV.5.34)) que les relations suivantes sont satisfaites

$$\mathsf{r}_i\mathsf{r}_j = \mathsf{r}_j\mathsf{r}_i, \;\; \mathsf{r}_i\mathsf{t}_j = \mathsf{t}_j\mathsf{r}_i, \;\; \mathsf{t}_i\mathsf{t}_j = \mathsf{t}_j\mathsf{t}_i \qquad \text{si } |i-j| > 2.$$

Ainsi, la présentation (IV.5.35) de la chaîne des groupes $\mathcal{B}^+(A_n)$ est locale de profondeur 2 et stationnaire.

IV.6 Algorithme de Coxeter–Todd et formes normales pour les sous-groupes alternés de type A, B ou D

Dans cette Section, nous présentons les résultats de l'algorithme de Coxeter–Todd (voir Chapitre I, Section I.3) pour les chaînes des sous-groupes alternés de types A, B and D avec la présentation de la Proposition IV.2. Pour comparer, nous donnons aussi dans chaque cas les figures de Coxeter–Todd pour les sous-groupes alternés avec la présentation (IV.2.2), pour les sous-groupes alternés avec une présentation à la Carmichael et pour les groupes de Coxeter avec la présentation standard (IV.2.1). A chaque fois, une forme normale est directement fournie par la figure de Coxeter–Todd ; nous l'illustrons sur l'exemple de la chaîne des sous-groupes alternés de type A.

Le sous-groupe choisi pour réaliser l'algorithme de Coxeter–Todd est toujours noté par H. Dans une figure de Coxeter–Todd, quand l'action d'un générateur g sur une classe Y n'est pas spécifiée, cela signifie que $gY = Y$. Pour un générateur d'ordre 2, une arête non-orientée représente une paire d'arêtes avec des orientations opposées. L'action d'un générateur d'ordre 3 (respectivement, 4) est souvent représentée par un triangle orienté (respectivement, un quadrilatère) ; le générateur est inscrit à l'intérieur. Nous indiquons explicitement la classe (sous la forme uH avec u un mot en les générateurs) à chaque sommet de la figure de Coxeter–Todd seulement pour le type A ; en général, cela peut être aisément trouvé en suivant les arêtes à partir du sommet H dans les figures.

IV.6.1 Type A

Les sommets et les arêtes orientées du graphe de Coxeter de type A sont labellisés comme dans la Figure IV.9, de la Section IV.2. Le groupe de Coxeter A_n est engendré par $s_0, \ldots, s_{n-1}$ avec les relations définissantes

$$\begin{cases} s_i^2 = 1 & \text{pour } i = 0, \ldots, n-1, \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} & \text{pour } i = 0, \ldots, n-2, \\ s_i s_j = s_j s_i & \text{pour } i, j = 0, \ldots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1. \end{cases} \tag{IV.6.1}$$

Le groupe A_n est isomorphe au groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. L'isomorphisme est donné par $s_i \mapsto (i+1, i+2)$, $i = 0, \ldots, n-1$.

Soit H le sous-groupe engendré par $s_0, \ldots, s_{n-2}$; voici la figure de Coxeter–Todd pour (A_n, H) :

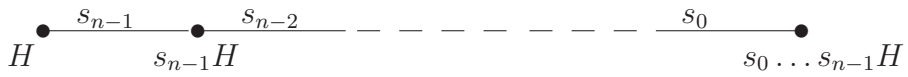


Fig. IV.10. *Figure de Coxeter–Todd pour (A_n, H) avec la présentation (IV.6.1)*

Nous donnons les figures de Coxeter–Todd pour trois présentations du sous-groupe alterné A_n^+. Dans chaque situation, H est le sous-groupe engendré par les $n-2$ premiers générateurs. Les deux premières présentations peuvent être trouvées dans [21]. La seconde est la présentation (IV.2.2). La troisième est la nouvelle présentation (IV.2.16). Pour illustrer l'utilité de l'algorithme de Coxeter–Todd, nous réétablissons que ce sont effectivement des présentations de A_n^+, et trouvons trois formes normales pour les éléments de A_n^+.

1. Dans la présentation de Carmichael [21], les générateurs sont $a_1, \ldots, a_{n-1}$ avec les relations définissantes

$$\begin{cases} a_i^3 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-1, \\ (a_i a_j)^2 = 1 & \text{pour } i, j = 1, \ldots, n-1 \text{ tels que } i < j. \end{cases} \tag{IV.6.2}$$

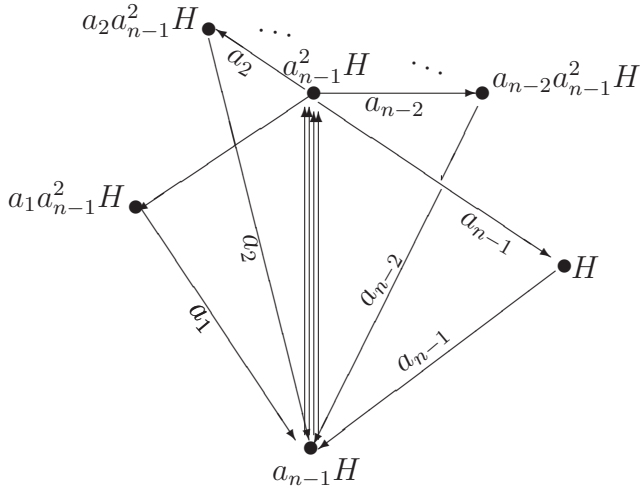


Fig. IV.11. *Figure de Coxeter–Todd pour* (A_n^+, H) *avec la présentation de Carmichael*

Nous interprétons géométriquement la présentation de Carmichael de la manière suivante : fixons l'arête orientée (01) dans le graphe de Coxeter de type A, et prenons $a_1 := s_0 s_1$. Les autres générateurs sont obtenus par conjugaisons successives du générateur a_1 par les générateurs de Coxeter, c'est-à-dire que $a_i := s_i a_{i-1} s_i$, $i = 2, \ldots, n-1$. L'ensemble $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ est un ensemble de générateurs pour le groupe A_n^+ avec les relations définissantes (IV.6.2).

2. La présentation de Moore [21] est la présentation (IV.2.2). Les générateurs sont $R_1, \ldots, R_{n-1}$ avec les relations définissantes

$$\begin{cases} R_1^3 = 1, & \\ R_i^2 = 1 & \text{pour } i = 2 \ldots, n-1, \\ (R_i^{-1} R_{i+1})^3 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-2, \\ (R_i^{-1} R_j)^2 = 1 & \text{pour } i, j = 1, \ldots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1. \end{cases} \tag{IV.6.3}$$

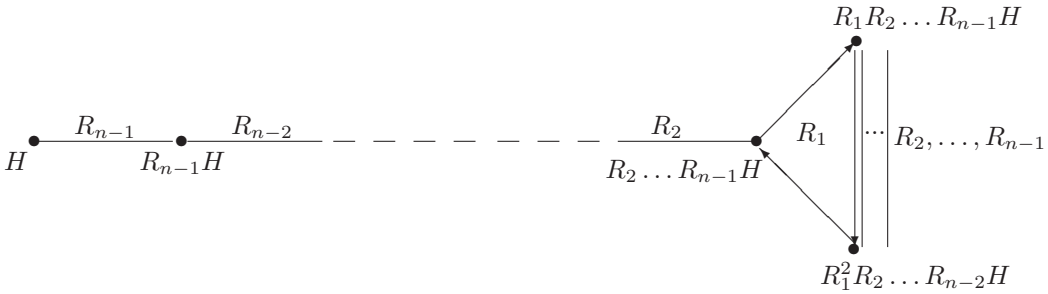


Fig. IV.12. *Figure de Coxeter–Todd pour* (A_n^+, H) *avec la présentation de Moore*

3. Dans la présentation (IV.2.16) de A_n^+, les générateurs sont $r_1, \ldots, r_{n-1}$ avec les relations définissantes

$$\begin{cases} r_i^3 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-1, \\ (r_i r_{i+1})^2 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-2, \\ (r_i r_{i+1} r_{i+2})^2 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-3, \\ r_i r_j = r_j r_i & \text{pour } i, j = 1, \ldots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 2. \end{cases} \tag{IV.6.4}$$

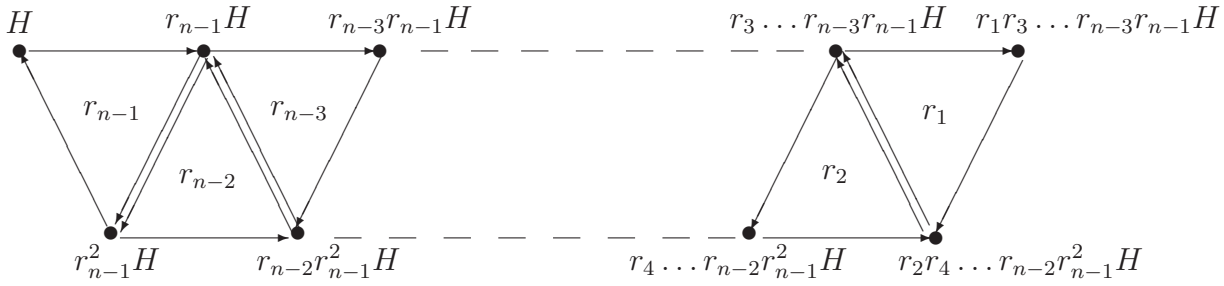


Fig. IV.13. *Figure de Coxeter–Todd pour (A_n^+, H) avec la présentation (IV.6.4), n pair*

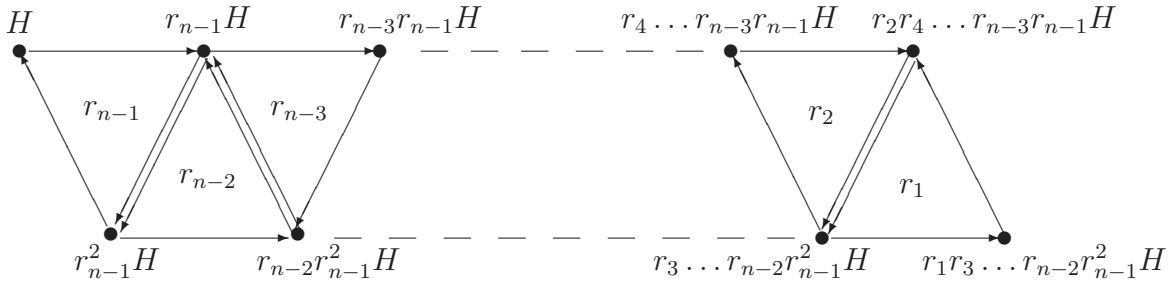


Fig. IV.14. *Figure de Coxeter–Todd pour (A_n^+, H) avec la présentation (IV.6.4), n impair*

4. Par récurrence sur n, une borne supérieure, impliquée par l'algorithme de Coxeter–Todd, pour le cardinal du groupe défini par (IV.6.2) ou (IV.6.3) ou (IV.6.4) est $n!/2$ dans chaque cas. L'inégalité inverse est impliquée par les morphismes surjectifs suivants sur le groupe des permutations paires de $n+1$ éléments :

- Pour la présentation de Carmichael (IV.6.2) : $a_i \mapsto (1, 2, i+2)$, $i = 1, \ldots, n-1$.
- Pour la présentation de Moore (IV.6.3) : $R_i \mapsto (1, 2)(i+1, i+2)$, $i = 1, \ldots, n-1$.
- Pour la présentation (IV.6.4) : $r_i \mapsto (i, i+1, i+2)$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Ceci conclue la preuve que chacun des groupes - defini par (IV.6.2) ou (IV.6.3) ou (IV.6.4) - a un cardinal égal à $n!/2$ et est isomorphe au groupe A_n^+ (ainsi les morphismes ci-dessus sont des isomorphismes). Cela prouve également que, dans chaque cas, le sous-groupe H est isomorphe au groupe A_{n-1}^+, ce qui montre que l'on a trois présentations de la chaîne des sous-groupes alternés de type A, au sens du Chapitre I, Section I.1.

Pour chacune de ces trois présentations, la figure de Coxeter–Todd donne une liste E_n d'éléments de A_n^+ telle que tout $x \in A_n^+$ peut être écrit comme $u_n h$ où $h \in A_{n-1}^+$ et $u_n \in E_n$; l'ensemble E_n est en bijection avec l'ensemble des sommets de la figure de Coxeter–Todd. L'élément h peut, à son tour, être écrit sous une forme normale par rapport aux éléments de A_{n-2}^+. En continuant le procédé, nous obtenons récursivement trois formes normales pour les éléments de A_n^+.

Proposition IV.14 *Soit A_n^+ donné par la présentation de Carmichael (IV.6.2). Tout élément $x \in A_n^+$ peut être écrit de manière unique comme $x = u_n u_{n-1} \dots u_2$ où $u_i \in E_i$, avec*

$$E_i = \left\{1, a_{i-1}, a_{i-1}^2, a_{i-2}a_{i-1}^2, \dots, a_2 a_{i-1}^2, a_1 a_{i-1}^2\right\} \ , \ i = 2, \dots, n.$$

Proposition IV.15 *Soit A_n^+ donné par la présentation de Moore (IV.6.3). Tout élément $x \in A_n^+$ peut être écrit de manière unique comme $x = u_n u_{n-1} \dots u_2$ où $u_i \in E_i$, avec*

$$E_i = \left\{1, R_{i-1}, R_{i-2}R_{i-1}, \dots, R_1 R_2 \dots R_{i-1}, R_1^2 R_2 \dots R_{i-1}\right\} \ , \ i = 2, \dots, n.$$

Proposition IV.16 *Soit A_n^+ donné par la présentation (IV.6.4). Tout élément $x \in A_n^+$ peut être écrit de manière unique comme $x = u_n u_{n-1} \dots u_2$ où $u_i \in E_i$, $i = 2, \dots, n$, avec*

- *si i est pair, $E_i := \{1, r_{i-1}, r_{i-3}r_{i-1}, \dots, r_1 r_3 \dots r_{i-3}r_{i-1}, r_{i-1}^2, r_{i-2}r_{i-1}^2, \dots, r_2 r_4 \dots r_{i-2}r_{i-1}^2\}$,*
- *si i est impair, $E_i := \{1, r_{i-1}, r_{i-3}r_{i-1}, \dots, r_2 r_4 \dots r_{i-3}r_{i-1}, r_{i-1}^2, r_{i-2}r_{i-1}^2, \dots, r_1 r_3 \dots r_{i-2}r_{i-1}^2\}$.*

Avec l'aide de la forme normale fournie par la Proposition IV.16, on peut montrer, comme dans la preuve du Corollaire I.19 du Chapitre I, Section I.3, que la chaîne des sous-groupes alternés de type A, munie de la présentation (IV.6.4), est stationnaire (au sens défini dans la Section I.1).

IV.6.2 Type B

Nous labellisons les sommets et les arêtes orientées du graphe de Coxeter de type B comme suit.

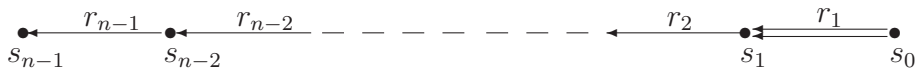


Fig. IV.15. *Graphe de Coxeter de type B*

Le groupe de Coxeter B_n est engendré par $s_0, \dots, s_{n-1}$ avec les relations définissantes

$$\begin{cases} s_i^2 = 1 & \text{pour } i = 0, \dots, n-1, \\ s_0 s_1 s_0 s_1 = s_1 s_0 s_1 s_0, & \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} & \text{pour } i = 1, \dots, n-2, \\ s_i s_j = s_j s_i & \text{pour } i, j = 0, \dots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1. \end{cases} \tag{IV.6.5}$$

Le groupe B_n est isomorphe au produit en couronne $C_2 \wr A_{n-1}$ [1] du groupe cyclique C_2 d'ordre 2 par le groupe symétrique A_{n-1}. Notons γ le générateur de C_2 et 1_{C_2} l'élément neutre de C_2. Pour

1. Par définition, le produit en couronne $C_2 \wr A_{n-1}$ est le produit semi-direct $C_2^n \rtimes A_{n-1}$, où l'action de A_{n-1} sur C_2^n se fait par permutation des n copies de C_2 ; la loi de multiplication est $(a, \pi)(a', \pi') := (a\pi(a'), \pi\pi')$, où $a, a' \in C_2^n$ et $\pi, \pi' \in A_{n-1}$ sont des permutations d'un ensemble à n éléments.

$i = 1, \ldots, n$, soit $\gamma^{(i)} := (1_{C_2}, \ldots, 1_{C_2}, \gamma, 1_{C_2}, \ldots, 1_{C_2})$ l'élément de C_2^n avec γ en position i et 1_{C_2} partout ailleurs ; soit $1_{C_2^n} := (1_{C_2}, \ldots, 1_{C_2})$ l'élément neutre de C_2^n et $1_{A_{n-1}}$ l'élément neutre de A_{n-1}. L'isomorphisme entre B_n et $C_2 \wr A_{n-1}$ est donné par $s_0 \mapsto (\gamma^{(1)}, 1_{A_{n-1}})$ et $s_i \mapsto (1_{C_2^n}, (i, i+1))$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Soit H le sous-groupe engendré par $s_0, \ldots, s_{n-2}$; voici la figure de Coxeter–Todd pour (B_n, H) :

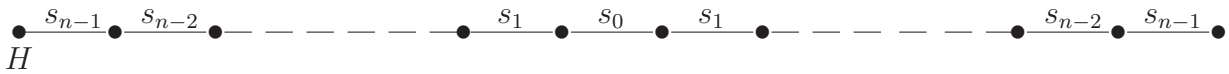


Fig. IV.16. *Figure de Coxeter–Todd pour (B_n, H) avec la présentation (IV.6.5)*

Nous donnons un analogue - pour le groupe B_n^+ - de la présentation de Carmichael (l'arête orientée distinguée est (01)) :

– le sous-groupe alterné B_n^+ est engendré par $a_1, \ldots, a_{n-1}$ avec les relations définissantes

$$\begin{cases} a_i^4 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-1, \\ (a_1 a_i)^3 = 1 & \text{pour } i = 2, \ldots, n-1, \\ (a_1^2 a_i)^2 = 1 & \text{pour } i = 2, \ldots, n-1. \\ (a_1 a_i a_1 a_j)^2 = 1 & \text{pour } i, j = 2, \ldots, n-1 \text{ tels que } i < j. \end{cases} \tag{IV.6.6}$$

La présentation (IV.2.2), respectivement la présentation de la Proposition IV.2, s'écrit :

– le groupe B_n^+ est engendré par $R_1, \ldots, R_{n-1}$ avec les relations définissantes

$$\begin{cases} R_1^4 = 1, & \\ R_i^2 = 1 & \text{pour } i = 2, \ldots, n-1, \\ (R_i^{-1} R_{i+1})^3 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-2, \\ (R_i^{-1} R_j)^2 = 1 & \text{pour } i, j = 1, \ldots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1\,; \end{cases} \tag{IV.6.7}$$

– respectivement, le groupe B_n^+ est engendré par $r_1, \ldots, r_{n-1}$ avec les relations définissantes

$$\begin{cases} r_1^4 = 1, & \\ r_i^3 = 1 & \text{pour } i = 2, \ldots, n-1, \\ (r_i r_{i+1})^2 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-2, \\ (r_i r_{i+1} r_{i+2})^2 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-3, \\ r_i r_j = r_j r_i & \text{pour } i, j = 1, \ldots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 2. \end{cases} \tag{IV.6.8}$$

Notons ϵ_0 la signature de A_{n-1}. Soit $\epsilon_{C_2^n} : C_2^n \to \{-1, 1\}$ l'homomorphisme défini par $\epsilon_{C_2^n}(\gamma^{(i)}) = -1$ pour $i = 1, \ldots, n$. Le sous-groupe alterné B_n^+ de type B est isomorphe au sous-groupe de $C_2 \wr A_{n-1}$ formé par les éléments (g, π), $\pi \in A_{n-1}$ et $g \in C_2^n$, tels que $\epsilon_{C_2^n}(g)\epsilon_0(\pi) = 1$. Les isomorphismes sont donnés par :

– pour la présentation (IV.6.6), $a_i \mapsto (\gamma^{(1)}, (1, i+1))$, $i = 1, \ldots, n-1$.

– pour la présentation (IV.6.7), $R_i \mapsto (\gamma^{(1)}, (i, i+1))$, $i = 1, \ldots, n-1$.

– pour la présentation (IV.6.8), $r_1 \mapsto (\gamma^{(1)}, (1,2))$ et $r_i \mapsto (1_{C_2^n}, (i-1, i, i+1))$, $i = 2, \ldots, n-1$.

Soit H le sous-groupe engendré par $a_1, \ldots, a_{n-2}$, ou par $R_1, \ldots, R_{n-2}$, ou par $r_1, \ldots, r_{n-2}$.

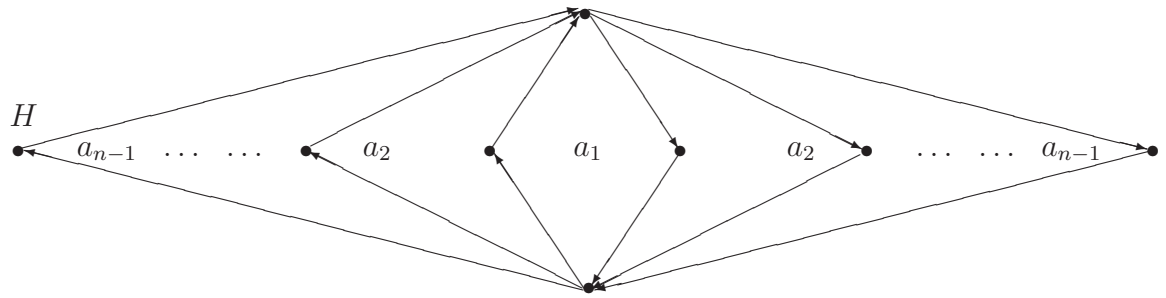


Fig. IV.17. *Figure de Coxeter–Todd pour (B_n^+, H) avec la présentation (IV.6.6)*

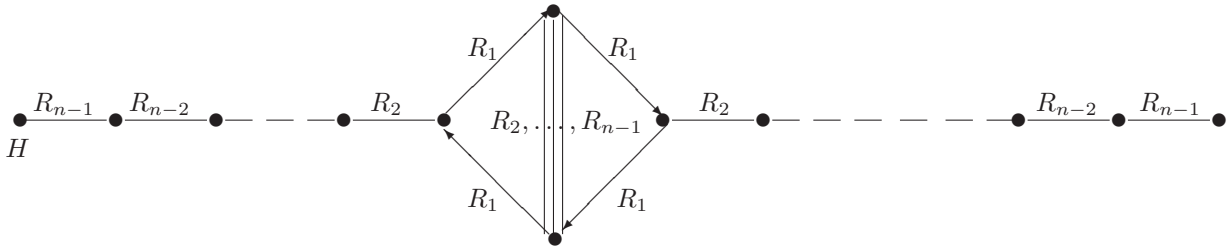


Fig. IV.18. *Figure de Coxeter–Todd pour (B_n^+, H) avec la présentation (IV.6.7)*

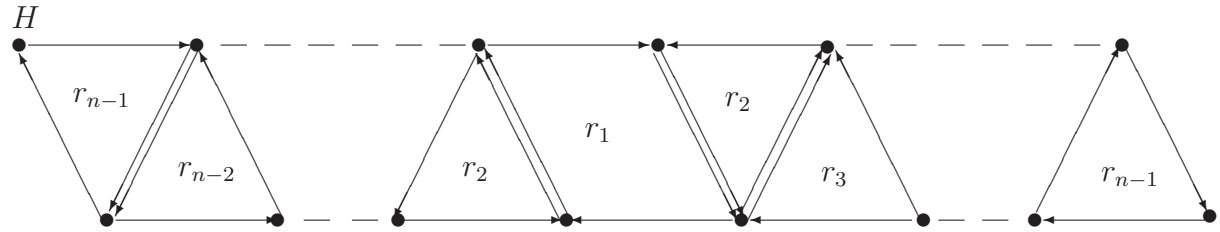


Fig. IV.19. *Figure de Coxeter–Todd pour (B_n^+, H) avec la présentation (IV.6.8), n pair*

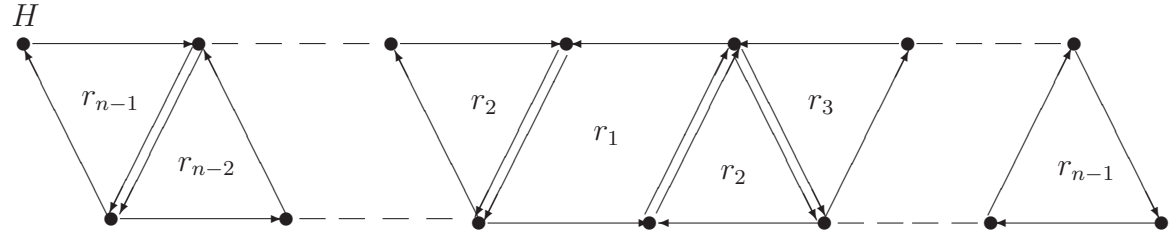


Fig. IV.20. *Figure de Coxeter–Todd pour (B_n^+, H) avec la présentation (IV.6.8), n impair*

Comme pour le type A, l'algorithme de Coxeter–Todd permet de montrer que le sous-groupe H

est, dans chaque cas, isomorphe au groupe B_{n-1}^+ ; on obtient donc trois présentations de la chaîne des sous-groupes alternés de type B, au sens du Chapitre I, Section I.1.

Les figures de Coxeter–Todd pour les présentations (IV.6.6), (IV.6.7) et (IV.6.8) fournissent trois formes normales pour les éléments de B_n^+. En particulier, cela permet de montrer, de manière similaire au type A (voir fin de la Sous-Section précédente), que la chaîne des sous-groupes alternés de type B, munie de la présentation (IV.6.8), est stationnaire retardée de retard 1 (au sens de la Section I.1). Nous omettons les détails.

Remarque. Le groupe de réflexions complexe $G(m,1,n)$ est engendré par $s_0, \ldots, s_{n-1}$ avec les mêmes relations définissantes que (IV.6.5), excepté que s_0^2 est remplacé par $s_0^m = 1$ (voir Chapitre III, Section III.4). Pour $m = 1$, $G(1,1,n)$ est le groupe A_{n-1} ; pour $m = 2$, $G(2,1,n)$ est le groupe B_n. Soit H le sous-groupe de $G(m,1,n)$ engendré par $s_0, \ldots, s_{n-2}$. La figure de Coxeter–Todd pour $(G(m,1,n), H)$, voir Chapitre III, Section III.4, généralise les Figures IV.10 et IV.16.

IV.6.3 Type D

Nous labellisons les sommets et les arêtes orientées du graphe de Coxeter de type D comme suit.

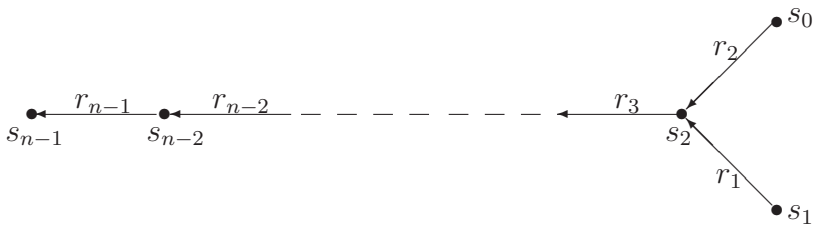


Fig. IV.21. *Graphe de Coxeter de type D*

Le groupe de Coxeter D_n est engendré par $s_0, \ldots, s_{n-1}$ avec les relations définissantes

$$\begin{cases} s_i^2 = 1 \quad \text{pour } i = 0, \ldots, n-1, \\ s_0 s_2 s_0 = s_2 s_0 s_2, \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n-2, \\ s_0 s_1 = s_1 s_0, \quad s_0 s_i = s_i s_0 \quad \text{pour } i = 3, \ldots, n-1, \\ s_i s_j = s_j s_i \quad \text{pour } i, j = 1, \ldots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1. \end{cases} \tag{IV.6.9}$$

Le groupe D_n est isomorphe au sous-groupe de $C_2 \wr A_{n-1}$ formé par les éléments (g, π), $\pi \in A_{n-1}$ et $g \in C_2^n$, tels que $\epsilon_{C_2^n}(g) = 1$. L'isomorphisme est donné par $s_0 \mapsto (\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}, (1,2))$ et $s_i \mapsto (1_{C_2^n}, (i, i+1))$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.

Soit H le sous-groupe engendré par $s_0, \ldots, s_{n-2}$; voici la figure de Coxeter–Todd pour (D_n, H) :

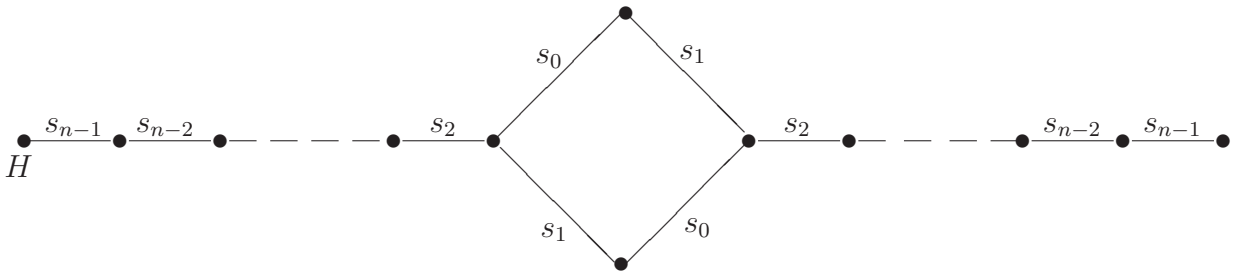


Fig. IV.22. *Figure de Coxeter–Todd pour (D_n, H) avec la présentation (IV.6.9)*

Nous donnons un analogue - pour le groupe D_n^+ avec $n \geq 3$ - de la présentation de Carmichael (l'arête orientée distinguée est (02)) :

– le sous-groupe alterné D_n^+, $n \geq 3$, est engendré par $a_1, \ldots, a_{n-1}$ avec les relations définissantes

$$\begin{cases} a_i^3 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-1, \\ (a_1 a_i)^2 = 1 & \text{pour } i = 2, \ldots, n-1, \\ (a_2^2 a_i)^2 = 1 & \text{pour } i = 3, \ldots, n-1, \\ (a_i a_j)^2 = 1 & \text{pour } i, j = 3, \ldots, n-1 \text{ tels que } i < j. \end{cases} \tag{IV.6.10}$$

La présentation (IV.2.2), respectivement la présentation de la Proposition IV.2, s'écrit :

– le groupe D_n^+ est engendré par $R_1, \ldots, R_{n-1}$ avec les relations définissantes

$$\begin{cases} R_2^3 = 1, & \\ R_i^2 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-1 \text{ and } i \neq 2, \\ (R_i^{-1} R_{i+1})^3 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-2, \\ (R_i^{-1} R_j)^2 = 1 & \text{pour } i, j = 1, \ldots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1\,; \end{cases} \tag{IV.6.11}$$

– respectivement, le groupe D_n^+, $n \geq 3$, est engendré par $r_1, \ldots, r_{n-1}$ avec les relations définissantes

$$\begin{cases} r_i^3 = 1 \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n-1, \\ (r_1 r_2^2)^2 = 1, \quad (r_1 r_3)^2 = 1, \quad (r_i r_{i+1})^2 = 1 \quad \text{pour } i = 2, \ldots, n-2, \\ (r_1 r_3 r_4)^2 = 1, \quad (r_i r_{i+1} r_{i+2})^2 = 1 \quad \text{pour } i = 2, \ldots, n-3, \\ r_1 r_i = r_i r_1 \quad \text{pour } i = 5, \ldots, n-1, \\ r_i r_j = r_j r_i \quad \text{pour } i, j = 2, \ldots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 2. \end{cases} \tag{IV.6.12}$$

Le sous-groupe alterné D_n^+ de type D est isomorphe au sous-groupe de $C_2 \wr A_{n-1}$ formé par les éléments (g, π), $\pi \in A_{n-1}$ et $g \in C_2^n$, tels que $\epsilon_{C_2^n}(g) = 1$ et $\epsilon_0(\pi) = 1$. Les isomorphismes sont donnés par :

– pour la présentation (IV.6.10),
$a_1 \mapsto (\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}, (1,2,3))$, $a_2 \mapsto (\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}, (1,3,2))$ et $a_i \mapsto (\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}, (1,2,i+1))$, $i = 3, \ldots, n-1$.

– pour la présentation (IV.6.11),
$R_1 \mapsto (\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}, 1_{A_{n-1}})$ et $R_i \mapsto (\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}, (1,2)(i,i+1))$, $i = 2, \ldots, n-1$.

– pour la présentation (IV.6.12),
$r_1 \mapsto (1_{C_2^n}, (1,2,3))$, $r_2 \mapsto (\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}, (1,2,3))$ et $r_i \mapsto (1_{C_2^n}, (i-1,i,i+1))$, $i = 3, \ldots, n-1$.

Soit H le sous-groupe engendré par $a_1, \ldots, a_{n-2}$, ou par $R_1, \ldots, R_{n-2}$, ou par $r_1, \ldots, r_{n-2}$.

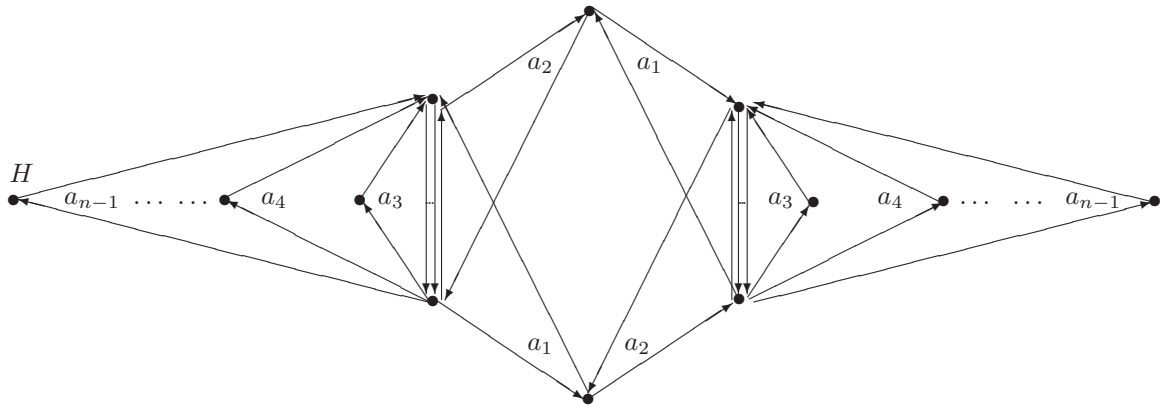


Fig. IV.23. *Figure de Coxeter–Todd pour* (D_n^+, H) *avec la présentation (IV.6.10)*

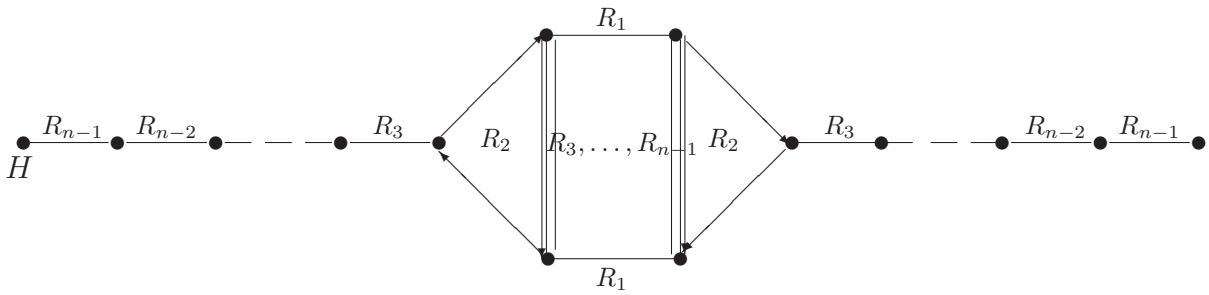


Fig. IV.24. *Figure de Coxeter–Todd pour* (D_n^+, H) *avec la présentation (IV.6.11)*

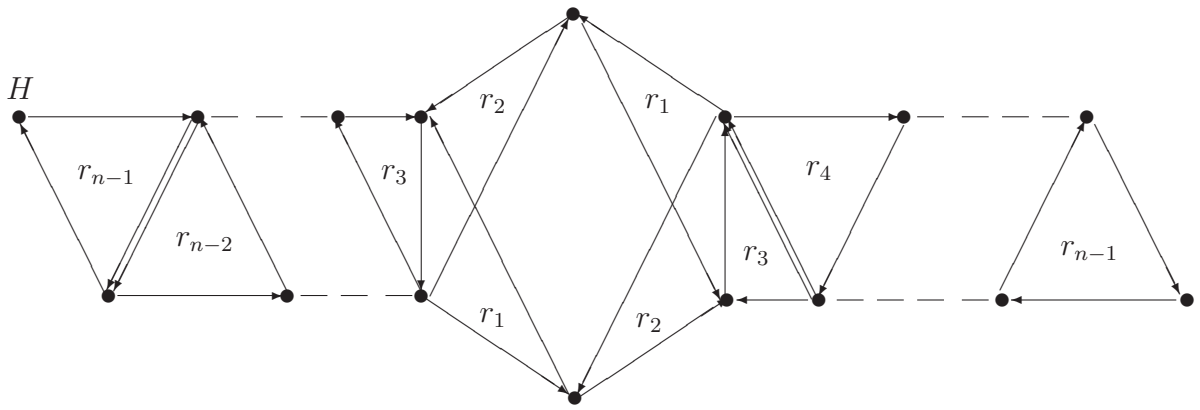


Fig. IV.25. *Figure de Coxeter–Todd pour* (D_n^+, H) *avec la présentation (IV.6.12), n pair*

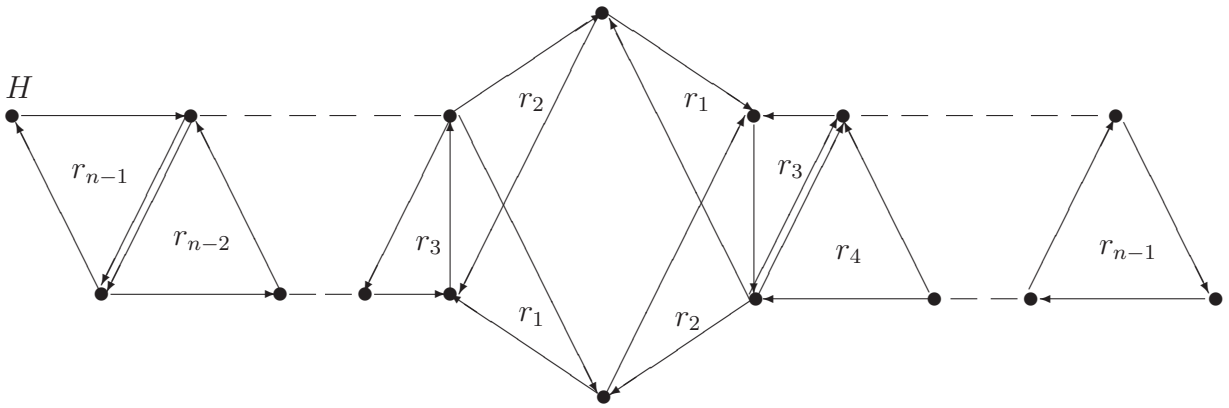


Fig. IV.26. *Figure de Coxeter–Todd pour* (D_n^+, H) *avec la présentation (IV.6.12), n impair*

Comme pour les types A et B, l'algorithme de Coxeter–Todd permet de montrer que le sous-groupe H est, dans chaque cas, isomorphe au groupe D_{n-1}^+ ; on obtient donc trois présentations de la chaîne des sous-groupes alternés de type D, au sens du Chapitre I, Section I.1.

Les figures de Coxeter–Todd pour les présentations (IV.6.10), (IV.6.11) et (IV.6.12) fournissent trois formes normales pour les éléments de D_n^+. En particulier, cela permet de montrer, de manière similaire au type A (voir fin de la Sous-Section sur le type A), que la chaîne des sous-groupes alternés de type D, munie de la présentation (IV.6.12), est stationnaire retardée de retard 1 (au sens de la Section I.1). Nous omettons les détails.

Bibliographie

[1] Arakawa T. and Suzuki T., *Duality between $sl_n(C)$ and the degenerate affine Hecke algebra*, J. Algebra 209 (1998) 288–304.

[2] Ariki S., *On the semi-simplicity of the Hecke algebra of* $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})\wr S_n$, J. Algebra 169 (1994) 216–225.

[3] Ariki S., Jacon N. and Lecouvey C., *The modular branching rule for affine Hecke algebras of type A*, preprint (2010). ArXiv : 1003.4838

[4] Ariki S. and Koike K., *A Hecke algebra of* $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr S_n$ *and construction of its irreducible representations*, Adv. in Math. 106 (1994) 216–243.

[5] Baxter R., *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press (1982).

[6] Bernstein I. and Zelevinsky A., *Induced representations of reductive p-adic groups. I.*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 10 (1977) 441–472.

[7] Bourbaki N., *Groupes et algèbres de Lie*, Springer (2002).

[8] Bremke K. and Malle G., *Reduced words and a length function for $G(e, 1, n)$*, Indag. Mathem. 8 (1997), 453–469.

[9] Brenti F., Reiner V. and Roichman Y., *Alternating subgroups of Coxeter groups*, J. Combin. Theo. A 115(5) (2008) 845–877. ArXiv : math/0702177

[10] Broué M. and Malle G., *Zyklotomische Heckealgebren*, Asterisque 212 (1993) 119–189.

[11] Broué M., Malle G. and Rouquier R., *Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras*, J. Reine und Angew. Math. 500 (1998) 127–190.

[12] Casselman B., *The construction of Hecke algebras associated to a Coxeter group*, in : Harmonic Analysis on Reductive, p-adic Groups, Contemporary Math. 543 (2011) 91–102.

[13] Chari V. and Pressley A., *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press (1995).

[14] Cherednik I., *Factorizing particles on a half-line and root systems*, english translation in : Theor. Math. Phys. 61 (1984) 977–983.

[15] Cherednik I., *On special bases of irreducible finite-dimensional representations of the degenerate affine Hecke algebra*, Funct. Analysis Appl. 20 (1986) 87–89.

[16] Cherednik I., *A new interpretation of Gelfand-Tzetlin bases*, Duke Math. J. 54 (1987) 563–577.

[17] Cherednik I. *Double affine Hecke algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series 319 (2005) Cambridge University Press.

[18] Chlouveraki M. and Jacon N., *Schur elements for the Ariki-Koike algebra and applications*, J. of Algebr. Comb. 35, 2 (2012) 291–311. ArXiv : 1105.5910

[19] Coxeter H., *Discrete groups generated by reflections*, Ann. Of Math. 35 (3) (1934) 588–621.

[20] Coxeter H., *The complete enumeration of finite groups of the form* $r_i^2 = (r_i r_j)^{k_{ij}} = 1$, J. London Math. Soc. 10 (1935) 21–25.

[21] Coxeter H. and Moser W., *Generators and relations for discrete groups*, Springer-Verlag, (1980).

[22] Coxeter H. and Todd J., *A practical method for enumerating cosets of a finite abstract group*, Proc. Edimburgh Math. Soc. 5 (1936) 26–34.

[23] de Azcarraga J.A., Kulish P. and Rodenas F., *Reflection equation and q-Minkowski space algebras*, Lett. Math. Phys. 32 (1994) 173–182. ArXiv : hep-th/9309036

[24] Drinfeld V., *Quantum groups*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians (A.M. Gleason, ed.), Amer. Math. Soc. (1986) 798–820.

[25] Enomoto N. and Kashiwara M., *Symmetric crystals and affine Hecke algebras of type B*, Proc. Japan Acad. 82, Ser. A, no. 8 (2006) 131–136. ArXiv : math/0608079 [math.RT]

[26] Eriksson K., *A combinatorial proof of the existence of the generic Hecke algebra and R-polynomials*, Math. Scand. 75 (1994) 169–177.

[27] Etingof P. and Rains E., *New deformations of Coxeter groups II*, Geom. Funct. Anal. 17 (2008) 1851–1871. ArXiv : math/0604519

[28] Faddeev L., Reshetikhin N. and Takhtadzhyan L. , *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Algebra i Analiz, 1:1 (1989) 178–206.

[29] Gomez C., Ruiz-Altaba M. and Sierra G., *Quantum groups in two-dimensional physics*, Cambridge University Press (1996).

[30] Goodman F., de la Harpe P. and Jones V., *Coxeter graphs and towers of algebras*, Springer (1989).

[31] Gorbounov V., Isaev A. and Ogievetsky O., *BRST operator for quantum Lie algebras : relation to bar complex*, Theor. Math. Phys. 139 (1) (2004) 473–485. ArXiv : 0711.4133 [math.QA]

[32] Grime J., *The hook fusion procedure*, Electron. J. of Comb. 12(1) (2005) R26. ArXiv : math/0502521

[33] Grime J., *The hook fusion procedure for Hecke algebras*, J. Algebra 309 (2007) 744–759. ArXiv : 0705.1086

[34] Grojnowski I. and Vazirani M., *Strong multiplicity one theorem for affine Hecke algebras of type A*, Transf. Groups. 6 (2001) 143–155.

[35] Guizzi V. and Papi P., *A combinatorial approach to the fusion process for the symmetric group*, Europ. J. Comb. 19 (1998) 835–845.

[36] Hoefsmit P., *Representations of Hecke algebras of finite groups with BN-pairs of classical type*, Ph. D. thesis, University of British Columbia (1974).

[37] Humphreys J., *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge studies in advanced mathematics, 29 (1990).

[38] Ihara S. and Yokonuma T., *On the second cohomology groups (Schur multipliers) of finite reflection groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I (1965) 155–171.

[39] Isaev A., *Quantum groups and Yang–Baxter equations*, MPIM preprint 2004-132.

[40] Isaev A. and Molev A., *Fusion procedure for the Brauer algebra*, Algebra i Analiz, 22:3 (2010) 142–154. ArXiv : 0812.4113

[41] Isaev A., Molev A. and Os'kin A., *On the idempotents of Hecke algebras*, Lett. Math. Phys. 85 (2008) 79–90. ArXiv : 0804.4214

[42] Isaev A., Molev A. and Ogievetsky O., *A new fusion procedure for the Brauer algebra and evaluation homomorphisms*, Int. Math. Res. Not. (2011) doi : 10.1093/imrn/rnr126. ArXiv : 1101.1336

[43] Isaev A., Molev A. and Ogievetsky O., *Idempotents for Birman-Murakami-Wenzl algebras and reflection equation*. ArXiv : 1111.2502

[44] Isaev A. and Ogievetsky O., *On representations of Hecke algebras*, Czech. Journ. Phys. 55 No. 11 (2005) 1433–1441. ArXiv : 0912.3701

[45] Isaev A. and Ogievetsky O., *On Baxterized solutions of reflection equation and integrable chain models*, Nucl. Phys. B 760 [PM] (2007) 167–183. ArXiv : math-ph/0510078

[46] Isaev A. and Ogievetsky O., *Jucys–Murphy elements for Birman-Murakami-Wenzl algebras*, Physics of Particles and Nuclei Letters 8 No. 3 (2011) 394–407. ArXiv : 0912.4010

[47] Isaev A. and Ogievetsky O., *BRST operator for quantum Lie algebras : explicit formula*, Int. Journ. of Mod. Phys. 19 supplement (2004) 240–247.

[48] Isaev A., Ogievetsky O. and Pyatov P., *On quantum matrix algebras satisfying the Cayley-Hamilton-Newton identities*, J. Phys. A : Math. Gen. 32 (1999) L115–L121. ArXiv : math/9809170

[49] Iwahori N. and Matsumoto H., *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 40 (1972) 81–116.

[50] Jain V. and Ogievetsky O., *Classical isomorphisms for quantum groups*, Modern Phys. Lett. A 7 no. 24 (1992) 2199–2209. ArXiv : hep-th/9205001

[51] Jimbo M., *A q-analogue of U(g) and the Yang–Baxter equation*, Lett. Math. Phys. 10 (1985) 63–69.

[52] Jimbo M., *Introduction to the Yang–Baxter equation*, in : "Braid group, knot theory and statistical mechanics", eds. CN Yang and ML Ge (World Scientific, Singapore) (1989).

[53] Jimbo M., Kuniba A., Miwa T. and Okado M., *The $A_n^{(1)}$ face models*, Commun. Math. Phys. 119 (1988) 543–565.

[54] Jones A., *The structure of the Young symmetrizers for spin representations of the symmetric group I*, J. Algebra 205 (1998) 626–660.

[55] Jones V., *Knots, braids and statistical mechanics*, in "Integrable systems and quantum groups", World Scientific Publishing (1992).

[56] Jones A. and Nazarov M., *Affine Sergeev algebra and q-analogues of the Young symmetrizers for projective representations of the symmetric group* Proc. London Math. Soc. 78 (1999) 481–512. ArXiv : q-alg/9712041

[57] Jucys A., *On the Young operators of the symmetric group*, Lietuvos Fizikos Rinkinys 6 (1966) 163–180.

[58] Kassel C., *Quantum groups*, Springer (1995).

[59] Kleshchev A., *Linear and projective representations of symmetric groups*, Cambridge University Press (2005).

[60] Klimyk A. and Schmüdgen K., *Quantum groups and their representations*, Springer (1998).

[61] Kulish P., Reshetikhin N. and Sklyanin E., *Yang–Baxter equation and representation theory : I*, Lett. Math. Phys. 5 (1981) 393–403.

[62] Kulish P. and Sklyanin E., *Quantum spectral transform method. Recent developments*, Lecture Notes in Physics, 151 Springer (1982) 61–119.

[63] Kulish P. and Sklyanin E., *Algebraic structures related to reflection equations*, J. Phys. A 25 (1992) 5963–5975.

[64] Lambropoulou S., *Knot theory related to generalized and cyclotomic Hecke algebras of type B*, J. Knot Theory and Its Ramifications 8 (1999) 621–658. ArXiv : math/0405504 [math.GT]

[65] Lusztig G., *Hecke algebras with unequal parameters*, CRM Monographs Ser. 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2003).

[66] Lyndon R. and Schupp P., *Combinatorial Group Theory*, Springer (1977).

[67] Macdonald I., *Symmetric functions and Hall polynomials*, Clarendon Press, Oxford (1998).

[68] Macdonald I., *Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials*, Cambridge University Press (2003).

[69] Malle G. and Mathas A., *symmetric cyclotomic Hecke algebras*, J. Algebra 205 (1998) 275–293.

[70] Maxwell G., *The Schur multipliers of rotation subgroups of Coxeter groups*, J. Algebra 53 (1978) 440–451.

[71] Mezincescu L. and Nepomechie R., *Fusion procedure for open chains*, J. Phys. A 25 (1992) 2533–2543.

[72] Miemietz V., *On the representations of affine Hecke algebras of type B*, Algebr. Represent. Theory 11 (2008) 369–405. ArXiv : 0709.4141

[73] Mitsuhashi H., *The q-analogue of the alternating group and its representations*, J. Algebra, 240(2) (2001) 535–558. ArXiv : math/9912121

[74] Mitsuhashi H., *$\mathbb{Z}_2$-graded Clifford system in the Hecke algebra of type B_n,* J. Algebra, 264(1) (2003) 231–250.

[75] Molev A., *On the fusion procedure for the symmetric group*, Reports Math. Phys. 61 (2008) 181–188. ArXiv :math/0612207

[76] Morris A., *Projective representations of reflection groups*, Proc. London Mat. Soc. 32(3) (1976) 403–410.

[77] Murphy G. E., *On the representation theory of the symmetric groups and associated Hecke algebras*, J. Algebra 152 (1992) 492–513.

[78] Nazarov M., *Young's symmetrizers for projective representations of the symmetric group*, Adv. Math. 127 (1997) 190–257.

[79] Nazarov M., *Yangians and Capelli identities*, in : "Kirillov's Seminar on Representation Theory" (G. I. Olshanski, Ed.) Amer. Math. Soc. Transl. 181, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1998) 139–163. ArXiv : q-alg/9601027

[80] Nazarov M., *Mixed hook-length formula for degenerate affine Hecke algebras*, Lecture Notes in Math. 1815 (2003) 223–236. ArXiv : math/9906148

[81] Nazarov M., *A mixed hook-length formula for affine Hecke algebras*, European J. Combinatorics 25 (2004) 1345–1376. ArXiv : math/0307091

[82] Nazarov M. and Tarasov V., *On irreducibility of tensor products of Yangian modules associated with skew Young diagrams*, Duke Math. J. 112 (2002) 343–378. ArXiv : math/0012039

[83] Ogievetsky O., *Uses of quantum spaces*, Contemp. Math. 294 (2002) 161–232.

[84] Ogievetsky O. and Pyatov P., *Lecture on Hecke algebras*, in Proc of the Int. School "Symmetries and Integrable Systems", Dubna (1999).

[85] Ogievetsky O., Schmidke W. B., Wess J. and Zumino B., *q-Deformed Poincaré algebra*, Commun. Math. Phys. 150 (1992) 495–518.

[86] Okounkov A. and Vershik A., *A new approach to representation theory of symmetric groups II*, Selecta Math (New series) 2 No. 4 (1996) 581–605. ArXiv : math/0503040

[87] Pushkarev I.A., *On the representation theory of wreath products of finite groups and symmetric groups*, J. Math. Sci. 96 (1999) 3590–3599.

[88] Ram A., *Seminormal representations of Weyl groups and Iwahori-Hecke algebras*, Proc. London Math. Soc. 75 No.3 (1997) 99–133. ArXiv :math/9511223

[89] Ram A. and Shepler A., *Classification of graded Hecke algebras for complex reflection groups*, Comment. Math. Helv. 78 (2003) 308–334. ArXiv : math/0209135

[90] Ratliff L., *The alternating Hecke algebra and its representations*, Ph-D thesis, University of Sydney (2007).

[91] Reidemeister K. , *Knoten und Gruppen*, Abhandlungen Hamburg, 5 (1926), 7–23.

[92] Schreier O., *Die Untergruppen der freien Gruppen*, Abhandlungen Hamburg, 5 (1927), 161–183.

[93] Rogawski J. D., *On modules over the Hecke algebra of a p-adic group*, Invent. Math. 79 (1985) 443–465.

[94] Schur I., *Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. Reine Angew. Math. 139 (1911) 155–250.

[95] Shephard G. and Todd J., *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math. 6 (1954) 274–304.

[96] Sergeev A. and Vershik A., *A new approach to representation theory of symmetric groups. IV : $\mathbb{Z}_2$ graded groups and algebras*, Mosc. Math. J. 8 (4) (2008) 813–842. ArXiv : 0801.2496

[97] Specht W., *Eine Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe*, Schriften Math. Seminar (Berlin) 1 (1932) 1–32.

[98] Stanley R., *Differential posets*, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988) 919–961.

[99] Vazirani M., *Parameterizing Hecke algebra modules : Bernstein–Zelevinsky multisegments, Kleshchev multipartitions, and crystal graphs*, Transform. Groups, 7 (3) (2002) 267–303. ArXiv : math.RT/0107052.

[100] Vershik A., *Local stationary algebras*, Amer. Math. Soc. Trans. 148(2) (1991) 1–13.

[101] Vershik A. and Vsemirnov M., *The local stationary presentation of the alternating groups and the normal form*, J. Algebra 319(10) (2008) 4222–4229. ArXiv : math/0703278

[102] Wan J., *Wreath Hecke algebras and centralizer construction for wreath products*, J. Algebra 323 (2010) 2371–2397. ArXiv : 0810.2767

[103] Wan J. and Wang W., *Modular representations and branching rules for wreath Hecke algebras*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2008) Art. ID rnn128, 31 pp. ArXiv : 0806.0196

[104] Wang W., *Vertex algebras and the class algebras of wreath products*, Proc. London Math. Soc. 88 (2004) 381–404. ArXiv : math/0203004

[105] Yokonuma T., *On the second cohomology groups (Schur multipliers) of infinite discrete reflection groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I (1965) 173–186.

[106] Young A., *On quantitative substitutional analysis, V*, Proc. London Math. Soc. (2) 31 (1930) 273–288.

[107] Yue, R. *Integrable High Spin Chains Related to the Elliptic Solution of the Yang–Baxter Equation*, J. Phys. A 27 (1994), 1633–1644.

[108] Zamolodchikov A. and Zamolodchikov Al., *Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field models*, Ann. Phys. 120 (1979) 253.

[109] Zelevinsky A., *Induced representations of reductive p-adic groups. II. On irreducible representations of GL(n)*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 13 :(2) (1980) 165–210.

[110] Zinn-Justin P., *Jucys–Murphy elements and Weingarten matrices*, Lett. Math. Phys. 91 (2010) 119–127. ArXiv : 0907.2719

Thèse de doctorat présentée par Loïc Poulain d'Andecy

Aix-Marseille Université
Centre de Physique Théorique
Directeur de thèse : Oleg OGIEVETSKY

Algèbres de Hecke cyclotomiques : représentations, fusion et limite classique

Résumé. Une approche inductive est développée pour la théorie des représentations de la chaîne des algèbres de Hecke cyclotomiques de type G(m,1,n). Cette approche repose sur l'étude du spectre d'une famille commutative maximale, formée par les analogues des éléments de Jucys–Murphy. Les représentations irréductibles, paramétrées par les multi-partitions, sont construites avec l'aide d'une nouvelle algèbre associative, dont l'espace vectoriel sous-jacent est le produit tensoriel de l'algèbre de Hecke cyclotomique avec l'algèbre associative libre engendrée par les multi-tableaux standards. L'analogue de cette approche est présentée pour la limite classique, c'est-à-dire la chaîne des groupes de réflexions complexes de type G(m,1,n).

Dans une seconde partie, une base des algèbres de Hecke cyclotomiques est donnée et la platitude de la déformation est montrée sans utiliser la théorie des représentations. Ces résultats sont généralisés aux algèbres de Hecke affines de type A. Ensuite, une procédure de fusion est présentée pour les groupes de réflexions complexes et les algèbres de Hecke cyclotomiques de type G(m,1,n). Dans les deux cas, un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux est obtenu par évaluation consécutive d'une fonction rationnelle.

Dans une troisième partie, une nouvelle présentation est obtenue pour les sous-groupes alternés de tous les groupes de Coxeter. Les générateurs sont reliés aux arêtes orientées du graphe de Coxeter. Cette présentation est ensuite étendue, pour tous les types, aux extensions spinorielles des groupes alternés, aux algèbres de Hecke alternées et aux sous-groupes alternés des groupes de tresses.

Abstract. An inductive approach to the representation theory of the chain of the cyclotomic Hecke algebras of type G(m,1,n) is developed. This approach relies on the study of the spectrum of a maximal commutative family formed by the analogues of the Jucys–Murphy elements. The irreducible representations, labelled by the multi-partitions, are constructed with the help of a new associative algebra, whose underlying vector space is the tensor product of the cyclotomic Hecke algebra with the free associative algebra generated by the standard multi-tableaux. The analogue of this approach is presented for the classical limit, that is for the chain of complex reflection groups of type G(m,1,n).

In a second part, a basis of the cyclotomic Hecke algebras is given and the flatness of the deformation is proved without using the representation theory. These results are extended to the affine Hecke algebras of type A. Then a fusion procedure is presented for the complex reflection groups and the cyclotomic Hecke algebras of type G(m,1,n). In both cases, a complete set of primitive orthogonal idempotents is obtained by successive evaluations of a rational fonction.

In a third part, a new presentation is obtained for the alternating subgroups of all Coxeter groups. The generators are related to oriented edges of the Coxeter graph. This presentation is then extended, for all types, to the spinor extensions of the alternating groups, the alternating Hecke algebras and the alternating subgroups of braid groups.