



**HAL**  
open science

# Comportement anisotrope du grès des Vosges : élasto-plasticité, localisation, rupture

Anne Millien

► **To cite this version:**

Anne Millien. Comportement anisotrope du grès des Vosges : élasto-plasticité, localisation, rupture. Mécanique [physics.med-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1993. Français. NNT: . tel-00749405

**HAL Id: tel-00749405**

**<https://theses.hal.science/tel-00749405>**

Submitted on 7 Nov 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TS 93/GRE1/0164  
double

TS 93 / GRE1 / 0164

DOUBLE

SSP

# THESE

présentée par

Anne MILLIEN

Pour obtenir le titre de DOCTEUR de

## L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)

Spécialité : Mécanique

---

### Comportement anisotrope du grès des Vosges : élasto-plasticité, localisation, rupture

---

Date de soutenance : 27 octobre 1993

Composition du jury :

M. G. PERRIER	Président
M. P. BEREST	Rapporteurs
M. V. MAURY	
M. J.P. BOEHLER	Directeur de Thèse
M. P. ANTOINE	Examineurs
M. P. SIRIEYS	

Thèse préparée au sein de l'équipe Mécanique des Milieux Anisotropes  
Institut de Mécanique de Grenoble, Laboratoire Sols Solides Structures  
Laboratoire de l'UJF, de l'INP.G. URA 1511 du C.N.R.S.



**THESE de DOCTORAT de  
l'Université Joseph Fourier - Grenoble I  
(application de l'arrêté ministériel du 30 mars 1992)**

*Titre de l'ouvrage:*

**Comportement anisotrope du grès des Vosges :  
élasto-plasticité, localisation, rupture**

*Nom de l'auteur:*

**Anne MILLIEN**

*Etablissement:*

**Université Joseph Fourier - Grenoble I**

**RESUME**

L'objet de ce travail est l'analyse expérimentale et théorique du comportement mécanique anisotrope d'un grès des Vosges, dans les domaines des déformations élasto-plastiques, de la localisation des déformations et de la rupture.

Un intérêt particulier porte sur l'influence de l'orthotropie de révolution initiale du matériau sur l'orientation des bandes de cisaillement apparaissant pour des états de compressions sous pressions de confinement.

Un programme expérimental a été développé pour la caractérisation mécanique du comportement de la roche sous compressions isotropes, compressions orientées sous pressions de confinement et tractions simples orientées. Des méthodes expérimentales spécifiques pour les mesures de toutes les composantes du tenseur des déformations élasto-plastiques d'une roche poreuse sous pressions de confinement ont été conçues et développées dans le souci permanent d'obtenir des données expérimentales fiables. Les essais réalisés ont permis, d'une part, d'obtenir un ensemble de résultats réalistes et cohérents sur les caractéristiques élasto-plastiques orthotropes de révolution de la roche, et d'autre part, de mettre en évidence l'orientation privilégiée des bandes de cisaillement par rapport aux structures internes orientées du matériau. Une méthode de détection du seuil de localisation des déformations a également été développée.

Parallèlement, l'orientation privilégiée des bandes de cisaillement apparaissant dans des roches orthotropes de révolution soumises à des compressions triaxiales de révolution a été modélisée. Cette modélisation a été réalisée par l'introduction des structures matérielles dans l'analyse de Rice de la localisation des déformations élasto-plastiques, grâce aux formes générales invariantes des lois de comportement anisotrope.

**MOTS CLES**

Grès des Vosges - Orthotropie de révolution - Déformations élasto-plastiques - Critère de rupture - Modes de rupture - Localisation des déformations - Orientations des bandes de cisaillement - Essais triaxiaux de révolution - Compressions isotropes - Variations de volume

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Données actuelles</b>	<b>5</b>
1.1 Une approche unifiée pour la formulation des lois de comportement anisotrope : la théorie de représentations des fonctions tensorielles .....	5
1.1.1 Représentations des fonctions tensorielles .....	6
1.1.2 Formulation du comportement élastique d'un matériau orthotrope de révolution .....	9
1.1.3 Formulation du comportement plastique parfait d'un matériau orthotrope de révolution .....	12
1.1.4 Conclusions .....	17
1.2 Aspects théoriques et expérimentaux du comportement mécanique des roches anisotropes .....	17
1.2.1 Comportement élastique .....	17
1.2.1.1 Symétries élastiques a priori inconnues .....	18
1.2.1.2 Symétries élastiques connues a priori .....	20
1.2.2 Comportement dans le domaine des déformations irréversibles .....	26
1.2.2.1 Critères empiriques.....	31
1.2.2.2 Critères phénoménologiques tensoriels invariants à une branche .....	37
1.2.2.3 Critères phénoménologiques invariants à deux branches.....	41
1.2.2.4 Critères proposés par différentes méthodes de passage micro-macro .....	45

<b>II</b>	<b>Matériau et techniques expérimentales</b>	<b>49</b>
2.1	Matériau testé .....	49
2.2	Préparation des éprouvettes .....	51
2.3	Instrumentation par jauges .....	54
2.4	Réalisation des essais de traction simple .....	58
2.5	Réalisation des essais de compression sous pression de confinement et de compression isotrope .....	60
2.6	Acquisition des données .....	63
2.7	Méthodes de dépouillement des données expérimentales .....	64
2.7.1	Calcul des contraintes .....	64
2.7.2	Calcul des déformations .....	68
2.7.3	Incertitude sur les mesures brutes .....	69
<b>III</b>	<b>Caractéristiques mécaniques anisotropes du matériau</b>	<b>71</b>
3.1	Comportement élasto-plastique anisotrope sous contraintes isotropes .....	72
3.1.1	Méthodes expérimentales et mesures brutes .....	73
3.1.2	Déformations totales, irréversibles et élastiques .....	77
3.1.3	Degré d'irréversibilité et degré d'anisotropie des déformations .....	78
3.1.4	Modules d'incompressibilité .....	82
3.2	Comportement élasto-plastique anisotrope en compressions sous pressions de confinement .....	86
3.2.1	Courbes contraintes - déformations .....	86
3.2.2	Coefficients élastiques anisotropes .....	89
3.2.3	Directions principales du tenseur des déformations .....	111
3.2.4	Variations de volume .....	114
3.2.5	Déformations axiales limites .....	118
3.2.6	Résistances limites directionnelles .....	121
3.3	Comportement anisotrope en traction simple .....	123
3.3.1	Courbes contraintes-déformations .....	123
3.3.2	Coefficients élastiques anisotropes .....	127
3.3.3	Déformations axiales limites .....	129
3.3.4	Contraintes axiales limites .....	131
3.4	Critère de rupture .....	133

<b>IV</b>	<b>Bandes de cisaillement dans les roches anisotropes</b>	
	<b>Etude expérimentale</b>	<b>137</b>
4.1	Orientations privilégiées des bandes de cisaillement et modes de rupture pour le grès des Vosges .....	137
4.2	Méthodes de détection du seuil de localisation .....	143
4.2.1	Etude de la microfracturation .....	143
4.2.2	Inhomogénéités de la déformation .....	144
4.2.3	Résultats de la littérature .....	145
4.3	Seuils de localisation pour le grès des Vosges .....	145
4.3.1	Méthode de détection des seuils .....	147
4.3.2	Valeurs des déformations axiales et des surcharges axiales au seuil de localisation .....	147
4.3.3	Corrélations entre les seuils de localisation et les variations de volume .....	153
4.4	Conclusions .....	153
<b>V</b>	<b>Bandes de cisaillement dans les roches anisotropes</b>	
	<b>Etude théorique</b>	<b>159</b>
5.1	Introduction .....	159
5.2	Modèle de localisation élasto-plastique de Rice .....	161
5.3	Généralisation du modèle de Rice pour un matériau orthotrope de révolution .....	162
5.4	Analyse de la localisation des déformations à l'aide du modèle de Rice généralisé .....	166
5.4.1	Equations du problème .....	166
5.4.2	Cas du glissement astructural .....	171
5.4.3	Cas du glissement structural .....	175
5.5	Discussion des résultats .....	176
5.5.1	Glissement astructural .....	176
5.5.1.1	Cas $\delta = 0$ .....	176
5.5.1.2	Cas $\delta = \frac{\pi}{2}$ .....	179
5.5.1.3	Cas $\delta \neq 0$ et $\frac{\pi}{2}$ .....	185
5.5.2	Glissement structural .....	186
5.6	Présentation des résultats et conclusions .....	188
	<b>Conclusions</b>	<b>191</b>
	<b>Références</b>	<b>193</b>

## Introduction

## Chapitre I

### Données actuelles

#### 1.1 Une approche unifiée pour la formulation des lois de comportement anisotrope : la théorie des représentations des fonctions tensorielles

L'anisotropie structurale d'un milieu peut être innée ou induite par déformations irréversibles; elle influence le comportement mécanique du milieu. Les phénomènes anisotropes observés étant complexes et généralement non linéaires, leurs modélisations théoriques ne peuvent être menées à bien que dans le cadre d'un formalisme adéquat et unificateur : la théorie des représentations des fonctions tensorielles. En effet, par leur généralité, elles permettent de modéliser les différents phénomènes anisotropes observés ; elles établissent les formes invariantes les plus générales des lois de comportement aptes à décrire un phénomène anisotrope donné et indiquent, de façon claire, les variables essentielles (en nombre et en type) devant être mesurées expérimentalement pour l'identification des équations constitutives.

Dans cette partie, nous exposons les formes générales des représentations des fonctions tensorielles anisotropes utilisées dans la suite de notre mémoire, ainsi que leurs applications à la description du comportement élastique et du comportement plastique parfait d'un milieu orthotrope de révolution. Les techniques mathématiques employées et les résultats obtenus sont issus de nombreux travaux de Boehler (1975, 1978, 1979, 1987, par exemple), qui ont résulté en une théorie générale du comportement mécanique des milieux anisotropes.

### 1.1.1 Représentations des fonctions tensorielles

Les lois de la physique sont soumises à deux conditions d'invariance : d'une part, elles doivent respecter les conditions d'invariance par changement de repère, d'autre part, elles doivent être invariantes dans le groupe  $S$  des transformations orthogonales caractérisant les symétries matérielles du milieu considéré. Pour que la première condition soit vérifiée, il est commode d'exprimer les lois de comportement par des relations tensorielles. La seconde condition impose des restrictions aux formes de ces relations. La théorie des représentations des fonctions tensorielles permet d'établir, pour chaque type de loi et chaque type d'anisotropie, une forme canonique, ou représentation, vérifiant automatiquement les symétries imposées par le milieu.

Nous présentons, dans ce paragraphe, les représentations des fonctions tensorielles, non nécessairement polynomiales, de tenseurs symétriques du second ordre, pour un milieu isotrope et pour un milieu orthotrope de révolution. Nous considérons donc le cas particulier d'une loi de comportement s'exprimant sous la forme :

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) \quad (I.1)$$

où  $\mathbf{T}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$  sont des tenseurs symétriques du second ordre dans un espace à trois dimensions.

Les représentations des lois (I.1) ont été établies, pour un milieu isotrope, par Smith (1965) et Spencer (1971) dans le cas de fonctions polynomiales, et par Rivlin et Ericksen (1955), Wang (1970), Smith (1971) et Boehler (1977) dans le cas de fonctions quelconques (non nécessairement polynomiales). Pour les milieux anisotropes, les représentations des lois (I.1) ont été établies par Adkins (1960) et Kiral et Smith (1974) dans le cas des fonctions polynomiales ; dans le cas des fonctions quelconques, les représentations ont été établies par Boehler (1975, 1978, 1979, 1987) pour l'anisotropie la plus générale, l'orthotropie et l'orthotropie de révolution. Seules les représentations des fonctions quelconques seront présentées ici. Elles ne font appel, en effet, à aucune hypothèse restrictive sur la forme des fonctions considérées et sont, en général, constituées par un nombre moins élevé de variables indépendantes, permettant des écritures plus concises des lois de comportement (Boehler, 1978) ; notons que, pour un seul argument tensoriel, les deux types de représentations (fonctions polynomiales et fonctions quelconques) sont similaires dans les cas particuliers de l'isotropie et de l'orthotropie de révolution.

Le problème de la représentation de la fonction (I.1) est de déterminer un ensemble de tenseurs générateurs  $\mathbf{G}_i$ , tenseurs symétriques du second ordre formellement invariants dans le groupe orthogonal caractérisant les symétries matérielles, tel que le tenseur  $\mathbf{T}$  puisse être exprimé par la combinaison linéaire :

$$\mathbf{T} = \alpha_i \mathbf{G}_i \quad (I.2)$$

où  $\alpha_i = \alpha_i(I_1, I_2, \dots, I_p)$  sont des fonctions scalaires arbitraires des invariants scalaires ( $I_1, I_2, \dots, I_p$ ) d'une base fonctionnelle des arguments ( $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ ). On appelle base fonctionnelle des variables ( $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ ), dans le groupe  $S$ , un ensemble d'invariants scalaires de ces arguments, tel que tout invariant scalaire de ces arguments dans le groupe  $S$  puisse s'exprimer comme une fonction explicite des éléments de la base.

Une telle représentation est dite irréductible si la base fonctionnelle ( $I_1, I_2, \dots, I_p$ ) est irréductible (aucun de ses éléments n'est une fonction explicite des autres) et si aucun des générateurs  $\mathbf{G}_i$  n'est une combinaison linéaire des autres formée avec des fonctions arbitraires  $\alpha_i$ .

Dans le cas d'un matériau isotrope, une représentation irréductible pour un tenseur symétrique  $\mathbf{T}$ , fonction isotrope non nécessairement polynomiale de deux tenseurs symétriques  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  est donnée par :

$$\mathbf{T} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \alpha_3 \mathbf{A}_1^2 + \alpha_4 \mathbf{A}_2^2 + \alpha_5 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \alpha_6 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^2) + \alpha_7 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1) \quad (I.3)$$

$$\alpha_i = \alpha_i(\text{tr} \mathbf{A}_1, \text{tr} \mathbf{A}_2, \text{tr} \mathbf{A}_1^2, \text{tr} \mathbf{A}_2^2, \text{tr} \mathbf{A}_1^3, \text{tr} \mathbf{A}_2^3, \text{tr} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2, \text{tr} \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2, \text{tr} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2, \text{tr} \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^2) \quad .$$

Elle fait intervenir huit tenseurs générateurs :

$$\mathbf{I}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_1^2, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_2^2, \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^2, \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1 \quad (I.4)$$

et dix invariants scalaires :

$$\text{tr} \mathbf{A}_1, \text{tr} \mathbf{A}_1^2, \text{tr} \mathbf{A}_1^3, \text{tr} \mathbf{A}_2, \text{tr} \mathbf{A}_2^2, \text{tr} \mathbf{A}_2^3, \text{tr} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2, \text{tr} \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2, \text{tr} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2, \text{tr} \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^2 \quad (I.5)$$

Une représentation irréductible pour un tenseur symétrique  $\mathbf{T}$ , fonction isotrope d'un seul tenseur symétrique  $\mathbf{A}_1$ , est obtenue en supprimant les termes contenant  $\mathbf{A}_2$  dans les expressions (I.3).

Considérons maintenant un milieu orthotrope de révolution admettant  $\mathbf{v}_3$  comme axe privilégié ou axe de révolution de l'orthotropie, et soit  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  un repère orthonormé. Le groupe orthogonal  $S$  des symétries matérielles est défini par :

$$S = \{ -\mathbf{I}, +\mathbf{I}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{R}_\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \} \quad (I.6)$$

où  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$  sont les symétries par rapport aux plans de base du repère  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  et  $\mathbf{R}_\theta$  les rotations d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\mathbf{v}_3$ . Dans Boehler (1975), les propriétés suivantes ont été démontrées :

- le tenseur  $\mathbf{M} = \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_3$  est un tenseur symétrique du second ordre, dont le groupe d'invariance est exactement le groupe orthotrope de révolution (I.6) :

$$Q \in S \Leftrightarrow QMQ^t = M ; \quad (I.7)$$

ce tenseur est appelé tenseur de structure du matériau orthotrope de révolution ;

- une représentation d'un tenseur symétrique du second ordre  $T$ , fonction tensorielle orthotrope de révolution d'un tenseur symétrique du second ordre  $A$  est obtenue par une représentation de la fonction tensorielle :

$$T = F(A, M) , \quad (I.8)$$

où  $F$  est une fonction isotrope par rapport à l'ensemble des arguments  $A$  et  $M$ .

La représentation irréductible de la fonction  $F$ , isotrope par rapport à  $A$  et  $M$ , donnée par l'expression (I.3) avec  $A_1 = A$  et  $A_2 = M$ , n'est plus nécessairement irréductible lorsqu'elle est considérée comme une représentation de la fonction  $F$  orthotrope de révolution par rapport au seul argument  $A$ . Ceci est dû aux propriétés particulières du tenseur  $M$  :

$$\begin{aligned} M^n &= M, \forall n \in \mathbb{N}^* , \\ \text{tr}M &= 1 . \end{aligned} \quad (I.9)$$

Après réduction, une représentation irréductible d'un tenseur symétrique  $T$ , fonction orthotrope de révolution non nécessairement polynomiale du tenseur symétrique  $A$ , est donnée par :

$$\begin{aligned} T &= \alpha_0 I + \alpha_1 M + \alpha_2 A + \alpha_3 (MA + AM) + \alpha_4 A^2 + \alpha_5 (MA^2 + A^2M) , \\ \alpha_i &= \alpha_i(\text{tr}A, \text{tr}A^2, \text{tr}A^3, \text{tr}MA, \text{tr}MA^2) . \end{aligned} \quad (I.10)$$

Elle fait intervenir six tenseurs générateurs :

$$I, M, A, MA + AM, A^2, MA^2 + A^2M , \quad (I.11)$$

et cinq invariants de base :

$$\text{tr}A, \text{tr}A^2, \text{tr}A^3, \text{tr}MA, \text{tr}MA^2 . \quad (I.12)$$

En considérant  $T$  comme le tenseur des contraintes et  $A$  comme un tenseur cinématique, à partir de cette représentation, nous pouvons observer la propriété fondamentale suivante, caractéristique de l'anisotropie : si  $A$  admet  $v_3$  comme direction principale, alors  $T$  et  $A$  ont les mêmes directions principales ; si  $A$  n'admet pas  $v_3$  comme direction principale, alors, en général,  $T$  et  $A$  ont des directions principales différentes. Cette propriété caractéristique des matériaux anisotropes est à l'origine des difficultés pour la réalisation correcte des essais "hors axes", où les directions principales des sollicitations ne coïncident pas avec les directions privilégiées des symétries matérielles (Boehler, 1975, Boehler et Sawczuk, 1976, Boehler, 1984).

Une application directe des représentations établies précédemment est l'écriture des lois de comportements élastique et plastique parfait. Pour le comportement élastique, contrairement aux formulations classiques, les écritures obtenues ne font intervenir que des combinaisons linéaires de tenseurs du second ordre, aussi bien dans le cas linéaire, que dans le cas non-linéaire. Pour le comportement plastique parfait, l'application des représentations permet d'obtenir les formes invariantes les plus générales du critère et de la loi d'écoulement, sans qu'il soit nécessaire d'introduire l'hypothèse restrictive de l'existence d'un potentiel plastique, distinct ou non du critère, pour la loi d'écoulement.

### 1.1.2 Formulation du comportement élastique d'un matériau orthotrope de révolution

La loi de comportement élastique s'exprime par une relation biunivoque et instantanée entre le tenseur  $T$  des contraintes et le tenseur  $E$  des déformations,  $T$  et  $E$  étant des tenseurs duaux. Dans le cas de l'orthotropie de révolution, une représentation irréductible d'une telle loi s'écrit :

$$\begin{aligned} T &= \alpha_0 I + \alpha_1 M + \alpha_2 E + \alpha_3 (ME + EM) + \alpha_4 E^2 + \alpha_5 (ME^2 + E^2M) , \\ \alpha_i &= \alpha_i(\text{tr}E, \text{tr}E^2, \text{tr}E^3, \text{tr}ME, \text{tr}ME^2) . \end{aligned} \quad (I.13)$$

La forme (I.13) est la forme invariante la plus générale de l'élasticité non linéaire orthotrope de révolution. Nous pouvons remarquer qu'elle ne fait intervenir que des tenseurs du second ordre, à la différence des formulations classiques impliquant le plus souvent des tenseurs d'ordres pairs, égaux ou supérieurs à quatre (Goldenblatt, 1962).

La restriction linéaire de la représentation (I.13) s'exprime par :

$$\begin{aligned} T &= \alpha_0 I + \alpha_1 M + \alpha_2 E + \alpha_3 (ME + EM) \\ \text{où : } \alpha_0 &= a_0 + b_0 \text{tr}E + c_0 \text{tr}ME , \\ \alpha_1 &= a_1 + b_1 \text{tr}E + c_1 \text{tr}ME , \\ \alpha_2 &= a_2 , \quad \alpha_3 = a_3 . \end{aligned} \quad (I.14)$$

Elle fait intervenir huit constantes matérielles indépendantes  $a_i, b_i, c_i$ . L'hypothèse de l'existence d'un état neutre :

$$E = 0 \Rightarrow T = 0 , \quad (I.15)$$

implique immédiatement :

$$a_0 = a_1 = 0 , \quad (I.16)$$

le nombre de constantes matérielles indépendantes étant ramené à six.

Si l'on suppose, de plus, que le comportement est hyperélastique, c'est-à-dire qu'il existe un potentiel scalaire  $W(E)$  fonction énergie de déformation élastique, tel que :

$$T = \frac{\partial W}{\partial E} \quad , \quad (I.17)$$

les conditions d'intégrabilité de  $W$  imposent que :

$$c_0 = b_1 \quad , \quad (I.18)$$

réduisant le nombre de constantes matérielles élastiques indépendantes à cinq.

Finalement, la forme générale invariante de l'hyperélasticité linéaire orthotrope de révolution est donnée par (Boehler, 1975, 1987) :

$$T = (b_0 \text{tr}E + b_1 \text{tr}ME) I + (b_1 \text{tr}E + c_1 \text{tr}ME) M + a_2 E + a_3 (ME + EM) \quad . \quad (I.19)$$

Cette expression ne fait intervenir que des combinaisons linéaires de tenseurs symétriques du second ordre et la généralisation de (I.19) au cas non linéaire est directe, à la différence des formulations classiques.

Rappelons que la formulation classique de la loi de l'hyperélasticité linéaire orthotrope de révolution s'écrit :

$$T = C^{-1} : E \quad , \quad (I.20)$$

où  $C^{-1}$  est le tenseur du quatrième ordre des rigidités du matériau ; le symbole ":" désigne le produit deux fois contracté de deux tenseurs.

Dans un repère privilégié  $(., ., v_3)$  du matériau, le tenseur s'exprime par le Tableau tronqué suivant, constitué par les six premières lignes et les six premières colonnes de sa matrice :

$$C^{-1} = \begin{vmatrix} a & f & d & 0 & 0 & 0 \\ f & f & d & 0 & 0 & 0 \\ d & d & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(a-f)}{2} \end{vmatrix} (., ., v_3) \quad , \quad (I.21)$$

où  $a, c, d, g, f$  sont cinq constantes matérielles indépendantes. Lors de l'utilisation du Tableau (I.21), les composantes des trois dernières colonnes doivent être doublées. Les relations entre

les cinq constantes de la formulation classique et les cinq constantes de la formulation invariante sont données par (Boehler, 1975) :

$$\begin{aligned} b_0 &= f \quad ; \quad b_1 = d - f \quad ; \\ c_1 &= c + a - 2d - 4g \quad ; \\ a_2 &= a - f \quad ; \quad a_3 = 2g - a + f \quad . \end{aligned} \quad (I.22)$$

La détermination expérimentale des coefficients élastiques  $a, c, d, f, g$  est délicate, car elle nécessite d'imposer des restrictions cinématiques. Les essais étant généralement effectués en imposant des restrictions statiques, il est plus aisé et plus usuel d'utiliser la forme inverse de la relation (I.20) :

$$E = C : T \quad , \quad (I.23)$$

où  $C$  est le tenseur du quatrième ordre des complaisances élastiques du matériau.

Dans un repère privilégié  $(., ., v_3)$  du matériau, le tenseur  $C$  s'exprime par le Tableau tronqué :

$$C = \begin{vmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_1}{E_1} & -\frac{\nu_3}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_3}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_3}{E_3} & -\frac{\nu_3}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\nu_1)}{2E_1} \end{vmatrix} (., ., v_3) \quad , \quad (I.24)$$

où  $E_1, E_3$  sont les deux modules d'Young,  $\nu_1, \nu_3$  les deux coefficients de Poisson et  $G$  le module de cisaillement, caractéristiques du comportement hyperélastique linéaire orthotrope de révolution du matériau, l'utilisation du Tableau (I.24) étant identique à celle du Tableau (I.21).

Il faut noter que les coefficients élastiques  $E_1, E_3, \nu_1, \nu_3$  et  $G$  précédemment définis ont des domaines de variation limités par des exigences thermodynamiques : l'énergie de déformation élastique  $W(E)$  doit être une forme quadratique, définie positive, de  $E$ . Les restrictions imposées par cette condition ont été établies par Pickering (1970). Elles s'expriment par le système d'inégalités :

$$\begin{aligned} E_1 > 0 ; E_3 > 0 ; \\ G > 0 ; \\ |v_1| < 1 ; |v_3| < \sqrt{\frac{(1-v_1)E_3}{2E_1}} \end{aligned} \quad (I.25)$$

Ces résultats ont été retrouvés par Garnier (1973) et Théocaris et Philippidis (1992), ces derniers auteurs ayant également établi les domaines de variation des coefficients élastiques orthotropes.

La forme générale invariante alternative de la loi de comportement hyperélastique linéaire orthotrope de révolution, faisant intervenir les coefficients élastiques "classiques" du Tableau (I.24) est :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \left[ -\frac{v_1}{E_1} \text{tr} \mathbf{T} + \left( \frac{v_1}{E_1} - \frac{v_3}{E_3} \right) \text{tr} \mathbf{MT} \right] \mathbf{I} + \left[ \left( \frac{v_1}{E_1} - \frac{v_3}{E_3} \right) \text{tr} \mathbf{T} + \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_3} + \frac{2v_3}{E_3} - \frac{1}{G} \right) \text{tr} \mathbf{MT} \right] \mathbf{M} + \\ & + \left( \frac{1}{E_1} + \frac{v_1}{E_1} \right) \mathbf{T} + \left( \frac{1}{2G} - \frac{1}{E_1} - \frac{v_1}{E_1} \right) (\mathbf{MT} + \mathbf{TM}) \end{aligned} \quad (I.26)$$

### 1.1.3 Formulation du comportement plastique parfait d'un matériau orthotrope de révolution

L'application de la théorie des représentations des fonctions tensorielles anisotropes à la formulation du comportement plastique parfait permet d'obtenir les formes invariantes les plus générales du critère et de la loi d'écoulement, sans aucune hypothèse restrictive. Les formulations des critères ne sont pas réduites à une construction basée sur une algèbre des composantes du tenseur des contraintes, introduisant l'anisotropie par certains coefficients, mais sont tout à fait générales. Les règles de construction fournies par la théorie sont telles que les conditions d'invariance requises par les symétries matérielles sont automatiquement vérifiées.

Nous considérons donc un milieu orthotrope de révolution, d'axe privilégié  $v_3$ . Le comportement plastique parfait s'exprime par une relation entre le tenseur  $\mathbf{T}$  des contraintes et le tenseur  $\mathbf{D}$  des vitesses de déformations, ces deux tenseurs étant duaux. Une représentation irréductible de  $\mathbf{T}$ , fonction orthotrope de révolution non nécessairement polynomiale de  $\mathbf{D}$ , est, d'après (I.10) :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{D} + \alpha_3 (\mathbf{MD} + \mathbf{DM}) + \alpha_4 \mathbf{D}^2 + \alpha_5 (\mathbf{MD}^2 + \mathbf{D}^2 \mathbf{M}) , \\ \alpha_i = & \alpha_i (\text{tr} \mathbf{D}, \text{tr} \mathbf{D}^2, \text{tr} \mathbf{D}^3, \text{tr} \mathbf{MD}, \text{tr} \mathbf{MD}^2) \end{aligned} \quad (I.27)$$

La forme générale (I.27) ne représente un comportement plastique parfait que si elle satisfait la condition d'homogénéité d'ordre zéro par rapport au temps, ou encore, la seule

variable cinématique étant le tenseur  $\mathbf{D}$  des vitesses de déformations, la condition d'homogénéité d'ordre zéro par rapport à  $\mathbf{D}$  (Sawczuk & Stutz, 1968, Boehler, 1968, 1975) :

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{D}} : \mathbf{D} = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{D}} \neq 0 \quad (I.28)$$

L'application de la condition (I.28) à la forme générale (I.27) résulte en les équations d'Euler :

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial E_j} E_i + n \alpha_i = 0 \quad (I.29)$$

$$\text{où : } n = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \quad \text{si } i = \begin{cases} 0, 1 \\ 2, 3 \\ 4, 5 \end{cases} ; \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 ,$$

$$\text{et : } E_1 = \text{tr} \mathbf{D} , E_2 = \sqrt{\text{tr} \mathbf{D}^2} , E_3 = \sqrt[3]{\text{tr} \mathbf{D}^3} , E_4 = \text{tr} \mathbf{MD} , E_5 = \sqrt{\text{tr} \mathbf{MD}^2} .$$

Notons que si le matériau subit effectivement une déformation plastique, on a nécessairement  $E_2 > 0$ .

En introduisant les quatre variables cinématiques adimensionnelles :

$$p = \frac{E_1}{E_2} , q = \frac{E_3}{E_2} , r = \frac{E_4}{E_2} , s = \frac{E_5}{E_2} , \quad (I.30)$$

le système (I.29) admet alors les solutions :

$$\alpha_i = (E_2)^n \beta_i(p, q, r, s) , \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5 , \quad (I.31)$$

$$\text{où : } n = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ -2 \end{cases} \quad \text{si } i = \begin{cases} 0, 1 \\ 2, 3 \\ 4, 5 \end{cases} ;$$

et :  $\beta_i$  sont des fonctions scalaires arbitraires des quatre variables cinématiques adimensionnelles  $p, q, r, s$  précédemment définies.

Le report des solutions (I.31) dans la représentation (I.27) donne une forme générale invariante de la loi de comportement plastique parfait d'un matériau orthotrope de révolution :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{M} + \frac{\beta_2}{E_2} \mathbf{D} + \frac{\beta_3}{E_2} (\mathbf{MD} + \mathbf{DM}) + \frac{\beta_4}{E_2^2} \mathbf{D}^2 + \frac{\beta_5}{E_2^2} (\mathbf{MD}^2 + \mathbf{D}^2 \mathbf{M}) , \\ \beta_i = & \beta_i(p, q, r, s) \end{aligned} \quad (I.32)$$

La loi tensorielle (I.32) peut être exprimée, de façon équivalente, par un système de cinq équations scalaires (Boehler, 1978) spécifiant les cinq invariants orthotropes de révolution de la base fonctionnelle de  $\mathbf{T}$  :

$$\text{tr} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{T}^2, \text{tr} \mathbf{T}^3, \text{tr} \mathbf{MT}, \text{tr} \mathbf{MT}^2 , \quad (I.33)$$

en fonction des cinq invariants orthotropes de révolution de la base fonctionnelle de  $\mathbf{D}$  :

$$\text{trD}, \text{trD}^2, \text{trD}^3, \text{trMD}, \text{trMD}^2 \quad (I.34)$$

Les expressions des invariants (I.33) sont calculées à partir de la forme générale (I.32) et réduites par l'application du théorème de Cayley-Hamilton généralisé aux tenseurs du second ordre dans un espace à trois dimensions (Rivlin, 1955). En introduisant les variables cinématiques adimensionnelles  $p, q, r, s$  (I.30) dans ces expressions, il vient :

$$\begin{aligned} \text{trT} &= g_1(p, q, r, s) & ; \\ \text{trT}^2 &= g_2(p, q, r, s) & ; \\ \text{trT}^3 &= g_3(p, q, r, s) & ; \\ \text{trMT} &= g_4(p, q, r, s) & ; \\ \text{trMT}^2 &= g_5(p, q, r, s) & ; \end{aligned} \quad (I.35)$$

où les  $g_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) sont des fonctions scalaires des variables  $p, q, r, s$ . Le système de cinq équations (I.35) exprime donc les invariants (I.33) en fonction des quatre variables cinématiques homogènes (I.30).

Nous excluons de cette étude les cas particuliers où des liaisons cinématiques sont imposées (par exemple, le cas d'un milieu incompressible à écoulement plastique, (Boehler, 1975)). Les quatre variables cinématiques  $p, q, r, s$  sont donc supposées indépendantes. Leur élimination du système (I.35) résulte alors en une relation scalaire entre les cinq invariants orthotrope de révolution de la base fonctionnelle de  $T$  :

$$f(\text{trT}, \text{trT}^2, \text{trT}^3, \text{trMT}, \text{trMT}^2) = 0 \quad (I.36)$$

La relation (I.36) est une conséquence des conditions d'homogénéité (I.29). Elle doit être vérifiée pour que l'écoulement plastique ait lieu. Elle constitue la forme invariante la plus générale du critère de plasticité parfaite d'un matériau orthotrope de révolution. Cette forme générale fait intervenir, à côté des trois invariants isotropes classiques  $\text{trT}, \text{trT}^2, \text{trT}^3$ , les deux invariants mixtes  $\text{trMT}, \text{trMT}^2$ , spécifiant le caractère anisotrope de la réponse mécanique. Ces deux invariants représentent, en effet, des paramètres d'orientation des directions principales du tenseur des contraintes par rapport au milieu orthotrope de révolution.

La forme générale invariante de la loi d'écoulement plastique parfait est obtenue en inversant la relation (I.27) et en introduisant les solutions (I.31) des conditions d'homogénéité (I.29). Les techniques mises en oeuvre et le détail des calculs ont été présentés par Boehler (1975). Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{D}{\sqrt{\text{trD}^2}} &= \psi_0 I + \psi_1 M + \psi_2 T + \psi_3 (MT + TM) + \psi_4 T^2 + \psi_5 (MT^2 + T^2M) & , \\ \psi_i &= \psi_i(p, q, r, s) & . \end{aligned} \quad (I.37)$$

Dans l'expression (I.37), l'inversion n'est pas complète, puisque les fonctions scalaires  $\psi_i$  ont pour arguments les quatre variables cinématiques adimensionnelles  $p, q, r, s$ . Ces variables

peuvent être exprimées, à partir des équations (I.35), en fonction des cinq invariants orthotropes de révolution du tenseur  $T$  :  $\text{trT}, \text{trT}^2, \text{trT}^3, \text{trMT}, \text{trMT}^2$ . Il n'y a pas, dans ce calcul, passage de quatre variables indépendantes à cinq, puisque les invariants (I.33) ne sont plus des variables indépendantes : ils doivent vérifier le critère (I.36) pour que l'écoulement plastique ait lieu. Après inversion, l'expression (I.37) admet la forme équivalente :

$$\begin{aligned} \frac{D}{\sqrt{\text{trD}^2}} &= \psi_0 I + \psi_1 M + \psi_2 T + \psi_3 (MT + TM) + \psi_4 T^2 + \psi_5 (MT^2 + T^2M) & , \\ \psi_i &= \psi_i(\text{trT}, \text{trT}^2, \text{trT}^3, \text{trMT}, \text{trMT}^2) & , \\ f(\text{trT}, \text{trT}^2, \text{trT}^3, \text{trMT}, \text{trMT}^2) &= 0 & . \end{aligned} \quad (I.38)$$

La relation (I.38) est la forme invariante la plus générale de la loi d'écoulement plastique parfait d'un matériau orthotrope de révolution. Elle exprime le tenseur  $D$  à la grandeur multiplicative  $\sqrt{\text{trD}^2}$  près. La présence des tenseurs générateurs  $M, MT + TM$  et  $MT^2 + T^2M$  dans le second membre est une caractéristique de l'anisotropie du milieu. Il en résulte la non-coïncidence, en général, des directions principales des tenseurs  $D$  et  $T$  lorsque le tenseur  $T$  n'admet pas comme direction principale la direction privilégiée  $v_3$  du milieu. La forme générale de la loi d'écoulement ainsi obtenue ne provient que de la loi (I.27) et des conditions (I.28) : aucune hypothèse restrictive du type existence d'un potentiel plastique, associé ou non au critère, n'est nécessaire. Les six fonctions  $\psi_i$  sont arbitraires ; elles doivent être déterminées expérimentalement.

Considérons le cas particulier où la loi d'écoulement dérive d'un potentiel scalaire  $g$ , fonction à valeur scalaire du tenseur  $T$  des contraintes. Cette fonction potentiel peut être ou non confondue avec la fonction critère  $f$  (I.36) précédemment définie. La théorie des représentations des fonctions à valeurs scalaires permet d'établir une forme invariante la plus générale de  $g$ . Dans le cas d'un milieu orthotrope de révolution, il vient (Boehler, 1975) :

$$g = g(\text{trT}, \text{trT}^2, \text{trT}^3, \text{trMT}, \text{trMT}^2) \quad (I.39)$$

où  $g$  est une fonction arbitraire des invariants de la base fonctionnelle orthotrope de révolution de  $T$ .

Compte-tenu de l'hypothèse du potentiel plastique et en utilisant (I.39), nous pouvons écrire la loi d'écoulement plastique parfait du milieu sous la forme :

$$2\lambda D = \frac{\partial g(\text{trT}, \text{trT}^2, \text{trT}^3, \text{trMT}, \text{trMT}^2)}{\partial T} \quad (I.40)$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur scalaire plastique.

Sachant que (Boehler, 1987) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr} \mathbf{T}}{\partial \mathbf{T}} &= \mathbf{I} ; \quad \frac{\partial \text{tr} \mathbf{T}^2}{\partial \mathbf{T}} = 2\mathbf{T} ; \quad \frac{\partial \text{tr} \mathbf{T}^3}{\partial \mathbf{T}} = 3\mathbf{T}^2 ; \\ \frac{\partial \text{tr} \mathbf{MT}}{\partial \mathbf{T}} &= \mathbf{M} ; \quad \frac{\partial \text{tr} \mathbf{MT}^2}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{MT} + \mathbf{TM} , \end{aligned} \quad (\text{I.41})$$

la forme invariante la plus générale de la loi d'écoulement plastique parfait (I.40) dérivant d'un potentiel scalaire s'écrit alors, pour un milieu orthotrope de révolution :

$$2\lambda \mathbf{D} = \frac{\partial g}{\partial \text{tr} \mathbf{T}} \mathbf{I} + \frac{\partial g}{\partial \text{tr} \mathbf{MT}} \mathbf{M} + 2 \frac{\partial g}{\partial \text{tr} \mathbf{T}^2} \mathbf{T} + \frac{\partial g}{\partial \text{tr} \mathbf{MT}^2} (\mathbf{MT} + \mathbf{TM}) + 3 \frac{\partial g}{\partial \text{tr} \mathbf{T}^3} \mathbf{T}^2 , \quad (\text{I.42})$$

La comparaison des formes invariantes (I.38) et (I.42) fait apparaître immédiatement les restrictions dues à l'introduction de l'hypothèse du potentiel plastique :

- perte dans la représentation (I.42) du tenseur générateur  $\mathbf{MT}^2 + \mathbf{T}^2 \mathbf{M}$  ;
- passage des six fonctions arbitraires à valeurs scalaires  $\psi_i$  à cinq dérivées partielles d'une même fonction  $g$ .

A titre comparatif, nous rappelons que, dans le cas d'un milieu isotrope, les formes générales invariantes du critère et de la loi d'écoulement sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{D}}{\sqrt{\text{tr} \mathbf{D}^2}} &= \psi_0 \mathbf{I} + \psi_1 \mathbf{T} + \psi_2 \mathbf{T}^2 , \\ \psi_i &= \psi_i(\text{tr} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{T}^2, \text{tr} \mathbf{T}^3) , \\ f(\text{tr} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{T}^2, \text{tr} \mathbf{T}^3) &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{I.43})$$

L'hypothèse de l'existence d'un potentiel plastique  $g$  résulte en la forme réduite :

$$\begin{aligned} 2\lambda \mathbf{D} &= \left( \frac{\partial g}{\partial \text{tr} \mathbf{T}} \right) \mathbf{I} + 2 \left( \frac{\partial g}{\partial \text{tr} \mathbf{T}^2} \right) \mathbf{T} + 3 \left( \frac{\partial g}{\partial \text{tr} \mathbf{T}^3} \right) \mathbf{T}^2 , \\ f(\text{tr} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{T}^2, \text{tr} \mathbf{T}^3) &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

Nous pouvons observer que, dans le cas de l'isotropie, les restrictions dues à l'hypothèse du potentiel plastique sont moins importantes que dans le cas de l'orthotropie de révolution : tous les tenseurs générateurs sont conservés ; seules les trois fonctions arbitraires  $\psi_i$  sont remplacées par trois dérivées partielles de la fonction potentiel.

L'application de la théorie générale des représentations des fonctions tensorielles anisotropes au comportement plastique parfait d'un matériau orthotrope de révolution permet donc d'établir les formes invariantes les plus générales du critère et de la loi d'écoulement. Les expressions obtenues pour ces formes générales indiquent, de façon claire, le nombre et le type des variables indépendantes, dont les évolutions doivent être mesurées, lors d'essais mécaniques, pour l'identification d'un critère et d'une loi d'écoulement spécifiques. La détermination de la fonction  $f$  du critère (I.36) nécessite le suivi expérimental des variables

$\text{tr} \mathbf{T}$ ,  $\text{tr} \mathbf{T}^2$ ,  $\text{tr} \mathbf{T}^3$ ,  $\text{tr} \mathbf{MT}$  et  $\text{tr} \mathbf{MT}^2$ . Compte tenu de la non coïncidence, en général, des directions principales du tenseur des contraintes  $\mathbf{T}$  et du tenseur des vitesses de déformation  $\mathbf{D}$ , la détermination d'une loi d'écoulement (I.38), c'est-à-dire, en fait, des fonctions  $\psi_i$ , nécessite, pour un état de contraintes  $\mathbf{T}$  connu, la mesure de toutes les composantes du tenseur vitesse de déformation  $\mathbf{D}$ , ainsi que le suivi des arguments  $\text{tr} \mathbf{T}$ ,  $\text{tr} \mathbf{T}^2$ ,  $\text{tr} \mathbf{T}^3$ ,  $\text{tr} \mathbf{MT}$ ,  $\text{tr} \mathbf{MT}^2$ .

### 1.1.4 Conclusions

Les résultats présentés ci-dessus mettent en évidence la puissance et l'efficacité de la théorie des représentations pour l'étude des comportements élastique et plastique parfait d'un milieu orthotrope de révolution.

Des études similaires ont été réalisées pour d'autres types d'anisotropie (en particulier, orthotropie et anisotropie la plus générale : Boehler, 1975, 1978, 1987) et pour des lois de comportement plus complexes. Par exemple, les équations constitutives de l'endommagement anisotrope d'un milieu initialement anisotrope ont été étudiées par Betten (1987) dans le cadre des représentations des fonctions tensorielles polynomiales et une description tout à fait générale de l'écrouissage anisotrope a été développée par Boehler (1985). Une application de cette théorie de l'écrouissage anisotrope a été conduite avec succès pour la modélisation du comportement des tôles d'acier laminées soumises à de grandes déformations irréversibles (Boehler et Koss, 1991).

## 1.2 Aspects théoriques et expérimentaux du comportement mécanique des roches anisotropes

Les études théoriques et expérimentales du comportement mécanique des roches anisotropes et de la corrélation anisotropie de structure / anisotropie mécanique remontent, à notre connaissance, au tout début des années soixante (Jaeger, 1960, Donath, 1961, ...) et se sont développées avec l'amélioration des techniques expérimentales et des modèles mathématiques. Les aspects les plus souvent étudiés concernent la détermination des différents paramètres élastiques et des critères de rupture. Nous présentons, dans ce paragraphe, les résultats les plus caractéristiques de ces études.

### 1.2.1 Comportement élastique

D'une façon générale, le comportement élastique des roches anisotropes est abordé sous forme classique non invariante, le problème posé étant la détermination des composantes de

la matrice du tenseur du quatrième ordre des raideurs ou des complaisances élastiques, à partir de certains coefficients directionnels mesurés au cours d'essais. Les techniques expérimentales couramment mises en oeuvre sont, dans le cas de mesures statiques, les essais de traction ou de compression uniaxiale, de compression sous pression de confinement ou de traction indirecte et, dans le cas de mesures dynamiques, les propagations d'ondes ultrasoniques.

Deux méthodologies peuvent être distinguées selon que le type des symétries élastiques est supposé connu a priori ou ne l'est pas.

### 1.2.1.1 Symétries élastiques a priori inconnues

Dans ce cas l'approche utilisée consiste à réaliser des prélèvements d'éprouvettes selon différentes orientations, dans un bloc de roche dont les caractéristiques géologiques et structurales ont été préalablement repérées (Cf. Figure I.1). Chaque éprouvette est soumise à un essai de compression simple, et un module axial tangent directionnel est mesuré. Les valeurs mesurées du module sont reportées, en fonction de l'orientation des éprouvettes, dans un espace à trois dimensions muni d'un repère lié au bloc. Une analyse statistique des résultats expérimentaux résulte alors, dans cet espace, en la détermination d'une surface représentative des variations spatiales du module directionnel (Peres-Rodrigues, 1966, 1970, 1979, Douglass et Voight, 1969, Peres-Rodrigues et Aires-Barros, 1970). L'équation d'une quartique de type ellipsoïdal est proposée par Peres-Rodrigues (1966, 1979) pour la modélisation de l'anisotropie élastique de granits, de gneiss et de dolérites, une quartique d'équation générale étant proposée pour des roches à foliation marquée, comme les schistes ou les micaschistes (Cf. Figure I.2).

Les résultats obtenus font apparaître un certain parallélisme entre les axes principaux des quartiques calculées et les directions privilégiées du milieu : plans de stratification ou systèmes de joints ou de diaclases (Peres-Rodrigues, 1966), orientations préférentielles des minéraux (Peres-Rodrigues et Aires-Barros, 1970) ou des microfissures (Douglass et Voight, 1969). Les symétries matérielles et les symétries mécaniques élastiques semblent donc bien corrélées.

Cotza et al (1980) proposent de suivre le même protocole expérimental en instrumentant chaque face latérale d'éprouvettes prismatiques par une rosette de trois jauges de déformation, de façon à mesurer l'évolution des différentes composantes du tenseur des déformations au cours de l'essai. Il est alors possible de déterminer les vingt et un coefficients du tenseur du quatrième ordre des complaisances élastiques, exprimés dans un repère lié au bloc initial. Les auteurs ont appliqué cette méthode à un calcaire microcristallin, ne présentant aucune symétrie matérielle apparente, et ont mis en évidence une anisotropie des propriétés élastiques

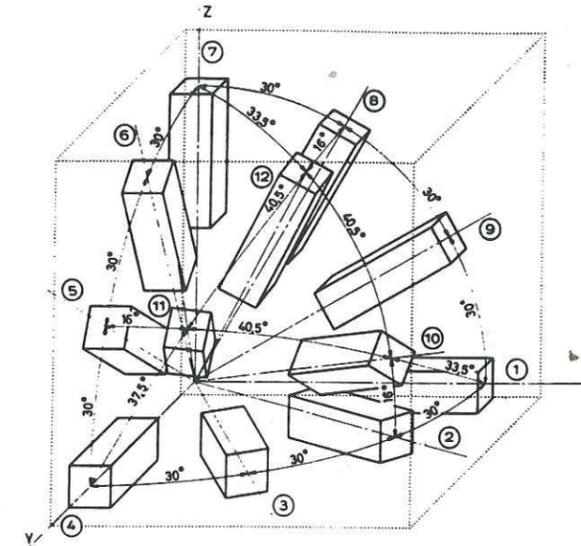


Figure I.1 - Exemple de prélèvement d'éprouvettes (d'après Peres-Rodrigues, 1970).

MODULI OF ELASTICITY, E (10<sup>3</sup> kg/cm<sup>2</sup>)

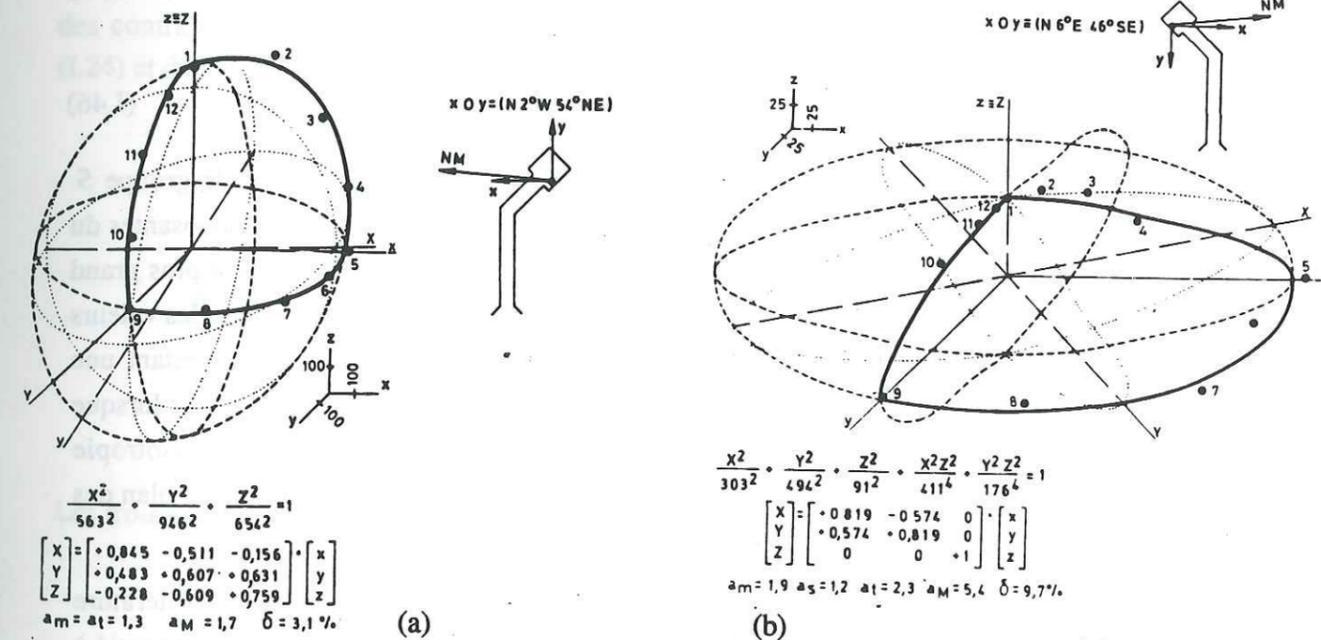


Figure I.2 - Surfaces quartiques des modules élastiques directionnels :  
 (a) grauwacke de Funcho,  
 (b) schiste de Funcho,  
 (d'après Peres - Rodrigues, 1979).

de la roche. Il convient de noter, néanmoins, que la méthode proposée est biaisée par le fait que les vingt et un coefficients élastiques déterminés à partir des résultats expérimentaux ne sont pas nécessairement indépendants et qu'il n'est pas directement possible de conclure sur le type d'anisotropie mécanique constatée.

### 1.2.1.2 Symétries élastiques connues a priori

Lorsque les symétries matérielles d'une roche sont apparentes, à l'échelle de l'observateur ou de la lame mince, il est usuel, dans l'approche classique, de faire l'hypothèse que les symétries élastiques sont de même type. Cette hypothèse peut être justifiée par une généralisation du principe de Neumann (Boehler, 1984, Zheng et Boehler, 1993). Pour la loi de comportement élastique linéaire s'exprimant sous la forme :

$$\mathbf{E} = \mathbf{C} : \mathbf{T} \quad , \quad (\text{I.45})$$

où  $\mathbf{T}$  est le tenseur des contraintes,  $\mathbf{E}$  le tenseur des déformations,  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{E}$  étant des tenseurs du second ordre, et  $\mathbf{C}$  le tenseur du quatrième ordre des complaisances du milieu, si  $S$  est le groupe des transformations orthogonales caractérisant l'anisotropie de la structure interne du milieu et  $G$  le groupe caractérisant l'anisotropie de la loi,  $G$  étant ici le groupe d'invariance de  $\mathbf{C}$ , la généralisation du principe stipule que :

$$S \subseteq G \quad . \quad (\text{I.46})$$

Le plus petit groupe d'invariance possible pour la loi élastique est donc le groupe  $S$  d'invariance de la structure interne. Pour la détermination expérimentale des composantes du tenseur  $\mathbf{C}$ , il convient donc de supposer d'abord que  $S = G$  ; si le groupe  $G$  est plus grand que le groupe  $S$ , certaines relations, exactes ou approximatives, apparaîtront entre les valeurs mesurées des composantes de  $\mathbf{C}$ . Ainsi, par exemple, une roche stratifiée présentant une linéation dans le plan des strates présente, a priori, une élasticité du type orthotrope ; lorsque la linéation est faible, les résultats expérimentaux indiquent souvent que l'anisotropie élastique peut être assimilée à une orthotropie de révolution autour de la normale au plan des strates.

Les deux types d'anisotropie de structure les plus souvent considérés dans la littérature sont l'orthotropie et l'orthotropie de révolution. L'étude du comportement élastique associé à ces structures est réalisée soit par des mesures statiques, soit par des mesures dynamiques.

### Méthodes statiques

Des éprouvettes, prélevées selon différentes orientations par rapport aux directions de symétrie apparente de la roche sont soumises à des essais de traction, de compression simple ou de compression sous pressions de confinement. Pour chaque essai, les modules axial et/ou transversaux directionnels sont mesurés (par exemple : Masure, 1970, Pinto, 1970, Barla et Goffi, 1974, Alliot, 1976, Lerou et al, 1981, Cuxac et al, 1990, Nova et Zaninetti, 1990).

Considérons le problème de la détermination des coefficients élastiques d'une roche orthotrope de révolution, d'axe privilégié  $v_3$ , soumise à un essai uniaxial (Cf. Figure I.3) :  $(v_1, v_2, v_3)$  est le repère privilégié du matériau ;  $(s, t, n)$  est le repère principal du tenseur  $\mathbf{T}$  des contraintes appliquées, tel que  $s \equiv v_1$  ; les contraintes principales appliquées sont  $\sigma_{ss} = \sigma_{tt} = 0$  et  $\sigma_{nn} = \sigma$  ; l'orientation des éprouvettes est repérée par l'angle  $\delta = (v_3, n)$ . La loi de comportement s'écrit sous la forme classique (I.45). Nous rappelons que, dans le cas de l'hyperélasticité linéaire orthotrope de révolution, le tenseur  $\mathbf{C}$  du quatrième ordre des complaisances élastiques du matériau s'exprime, dans le repère privilégié  $(v_1, v_2, v_3)$ , par le Tableau (I.24) (Cf. §1.1.2). Le repère  $(s, t, n)$ , repère principal des contraintes appliquées, se déduisant du repère  $(v_1, v_2, v_3)$  du matériau par une rotation d'angle  $\delta$  autour de  $v_1 \equiv s$ , par simple changement de repère, il est facile d'obtenir les expressions des composantes du tenseur  $\mathbf{E}$  des déformations dans le repère  $(s, t, n)$ , en fonction des composantes du tenseur  $\mathbf{T}$  des contraintes dans ce même repère, des coefficients élastiques intrinsèques du Tableau (I.24) et de l'angle  $\delta$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ss} &= \sigma \left( -\frac{v_1}{E_1} \sin^2 \delta - \frac{v_3}{E_3} \cos^2 \delta \right) \quad , \\ \epsilon_{tt} &= \sigma \left[ \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_3} - \frac{1}{G} \right) \sin^2 \delta \cos^2 \delta - \frac{v_3}{E_3} \left( \cos^4 \delta + \sin^4 \delta \right) \right] \quad , \\ \epsilon_{nn} &= \sigma \left[ \frac{1}{E_1} \sin^4 \delta + \frac{1}{E_3} \cos^4 \delta + \left( \frac{1}{G} - 2 \frac{v_3}{E_3} \right) \cos^2 \delta \sin^2 \delta \right] \quad , \\ \epsilon_{tn} &= \sigma \left[ \frac{1}{E_3} \cos^2 \delta - \frac{1}{E_1} \sin^2 \delta + \left( \frac{v_3}{E_3} - \frac{1}{2G} \right) \left( \cos^2 \delta - \sin^2 \delta \right) \right] \sin \delta \cos \delta \quad , \\ \epsilon_{ns} &= \epsilon_{st} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{I.47})$$

Les trois premières relations peuvent être écrites sous la forme condensée :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ss} &= -\frac{v_{ns}}{E_n} \sigma \quad , \\ \epsilon_{tt} &= -\frac{v_{nt}}{E_n} \sigma \quad , \\ \epsilon_{nn} &= \frac{1}{E_n} \sigma \quad . \end{aligned} \quad (\text{I.48})$$

Les coefficients  $E_n$ ,  $v_{ns}$  et  $v_{nt}$  sont des paramètres directionnels : ils varient avec l'orientation  $\delta$  ; ils ne coïncident avec des modules d'Young et des coefficients de Poisson que

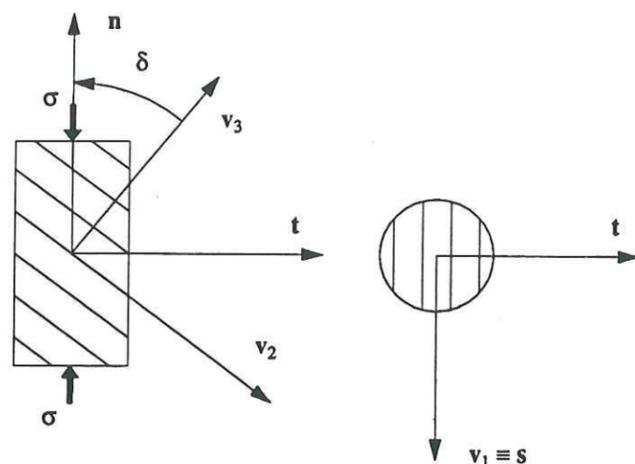


Figure I.3 - Eprouvette orientée d'une roche orthotrope de révolution soumise à un essai de compression uniaxiale;  $v_3$  est l'axe de révolution de l'orthotropie.

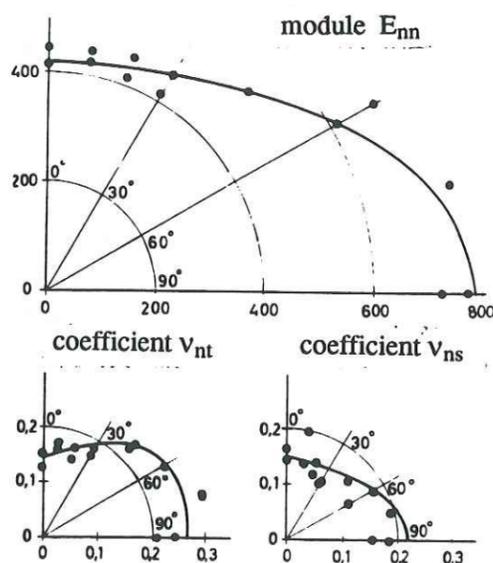


Figure I.4 - Variation des coefficients élastiques apparents en fonction de l'orientation des éprouvettes. Comparaison entre les résultats expérimentaux et les prévisions théoriques :  
 (a) module d'Young apparent  $E_n$  ;  
 (b) coefficient de Poisson apparent  $v_{nt}$  ;  
 (c) coefficient de Poisson apparent  $v_{ns}$   
 (d'après Pinto, 1970).

lorsque  $\delta = 0^\circ$  ou  $90^\circ$  (essais "dans les axes"). Un exemple des variations théoriques et expérimentales de ces trois coefficients élastiques est présenté sur la Figure I.4 : la roche étudiée est un schiste; elle a été soumise à des essais de compression simple.

Les équations (I.46) peuvent être utilisées directement pour déterminer les cinq constantes élastiques intrinsèques  $E_1, E_3, v_1, v_3$  et  $G$  à partir des trois essais uniaxiaux, selon une méthodologie proposée par Fine et Vouille (1970) et schématisée sur la Figure I.5. Il vient :

- pour  $\delta = 0^\circ$ ,

$$\epsilon_{ss} = \epsilon_{tt} = -\frac{v_3}{E_3} \sigma ; \epsilon_{nn} = \frac{\sigma}{E_3} ;$$

les mesures de  $\epsilon_{ss}$  et  $\epsilon_{nn}$  permettent la détermination de  $v_3$  et  $E_3$  ;

- pour  $\delta = 90^\circ$ ,

$$\epsilon_{ss} = -\frac{v_1}{E_1} \sigma ; \epsilon_{nn} = \frac{\sigma}{E_1} ;$$

les mesures de  $\epsilon_{ss}$  et  $\epsilon_{nn}$  permettent la détermination de  $v_1$  et  $E_1$  ;

- pour  $\delta = 45^\circ$ ,

$$\epsilon_{nn} = \left( \frac{1}{4E_1} + \frac{1}{4E_3} - \frac{v_3}{2E_3} + \frac{1}{4G} \right) \sigma ; \epsilon_{tt} = \left( \frac{1}{4E_1} + \frac{1}{E_3} - \frac{v_3}{2E_3} - \frac{1}{4G} \right) \sigma ; \epsilon_{nn} - \epsilon_{tt} = \frac{\sigma}{2G} ;$$

les mesures de  $\epsilon_{tt}$  et  $\epsilon_{nn}$  permettent la détermination directe de  $G$ .

La même méthodologie peut être appliquée au cas d'un matériau orthotrope d'axes privilégiés ( $v_1, v_2, v_3$ ), en étudiant les trois configurations  $s \equiv v_1, s \equiv v_2, s \equiv v_3$ . Lorsque les essais sont réalisés pour plus de trois orientations  $\delta$ , les mesures, surabondantes, sont généralement traitées par le formalisme des moindres carrés.

Une méthode alternative pour la mesure des coefficients élastiques, à partir d'essais de compression diamétrale, a été proposée par Pinto (1979) et Amadei et al (1983). Des disques de section circulaire appartenant aux plans principaux de symétrie de la roche sont soumis à des essais brésiliens. Au cours des essais, les différentes composantes du tenseur des déformations, dans le plan du disque, sont mesurées au centre de la section droite. L'essai de compression diamétrale étant par nature hétérogène, une analyse théorique de l'état de contraintes est nécessaire. La proposition initiale de Pinto (1979) est sujette à caution, du fait de l'hypothèse d'un état de contrainte au centre de la section droite identique, dans le cas d'un matériau anisotrope, à celui déterminé analytiquement pour un matériau isotrope. Une solution analytique approchée de la distribution des contraintes est proposée par Amadei (1983), dans le cas des symétries orthotrope et orthotrope de révolution. L'application des solutions à la mesure des coefficients élastiques est cependant limitée, dans cet article, à des exemples numériques.

Il convient de souligner que, quel que soit le type de symétrie matérielle d'une roche, ses coefficients élastiques ne sont pas des constantes absolues, mais varient généralement avec les déformations irréversibles et avec la partie isotrope des états de contraintes complexes (Sirieys, 1979). Un exemple d'évolution, en fonction de la partie isotrope de l'état de contraintes, des cinq paramètres élastiques d'un schiste, orthotrope de révolution, est présenté sur la Figure I.6. Ce matériau a été étudié par Lerau et al (1981) ; les essais réalisés sont des compressions triaxiales de révolution. Nous pouvons observer, sur cette Figure, une augmentation nette du module  $E_3$  et du coefficient de Poisson  $\nu_3$  avec la pression de confinement, due, selon les auteurs, au serrage des plans de schistosité. Des résultats similaires ont été retrouvés, lors d'une étude sur un autre schiste, par Cuxac et al (1990). Une diminution du module directionnel  $E_n$ , lorsque la pression de confinement croît, a été mise en évidence par Alliot et Boehler (1979), lors d'essais triaxiaux de révolution sur une roche poreuse tendre, la diatomite. Dans tous les cas, les variations des coefficients élastiques en fonction de la partie isotrope de l'état de contraintes correspondent à une atténuation du degré d'anisotropie élastique de la roche.

**Méthodes dynamiques**

Des modules élastiques dynamiques sont calculés à partir de la mesure des vitesses de propagation d'ondes ultrasoniques (P ou S) dans des échantillons prélevés selon différentes orientations par rapport aux directions de symétrie apparente de la roche, ou selon différentes directions sur un même échantillon polyédrique, (par exemple : Mac Williams, 1966, Thill et al, 1969, Stoney et Dhir, 1977, Howarth, 1984, Holt et al, 1987, Cuxac et al, 1990, Cuxac et Homand, 1992).

Les résultats obtenus concernent soit l'anisotropie des vitesses de propagation (Mac Williams, Stoney et Dhir, Thill et al), soit la détermination d'un module dynamique directionnel (Howarth, Holt et al), soit encore la détermination de l'ensemble des coefficients élastiques indépendants de la roche (Cuxac et al). Un des avantages de cette méthode réside en la détermination aisée des modules de cisaillement, détermination qui présente des difficultés expérimentales dans les méthodes statiques. Il convient, cependant, de souligner que les valeurs des coefficients élastiques obtenues par les méthodes dynamiques diffèrent, en général, de celles déterminées par les méthodes statiques ; en particulier, les modules dynamiques sont plus élevés que les modules statiques. Pour un grès, soumis à des essais de compression triaxiaux de révolution, Howarth (1984) a montré que ces différences s'atténuent lorsque la partie isotrope de l'état de contrainte augmente. Le même phénomène a été mis en évidence par Cuxac et al (1990) sur un schiste.

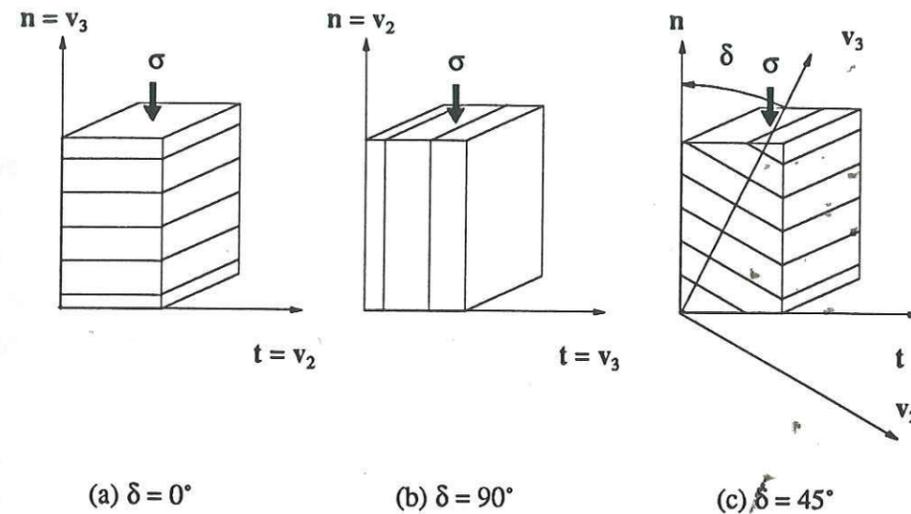


Figure I.5 - Essais de compressions uniaxiales orientées pour la détermination des paramètres élastiques dans le cas d'une roche orthotrope de révolution (d'après Fine et Vouille, 1970).

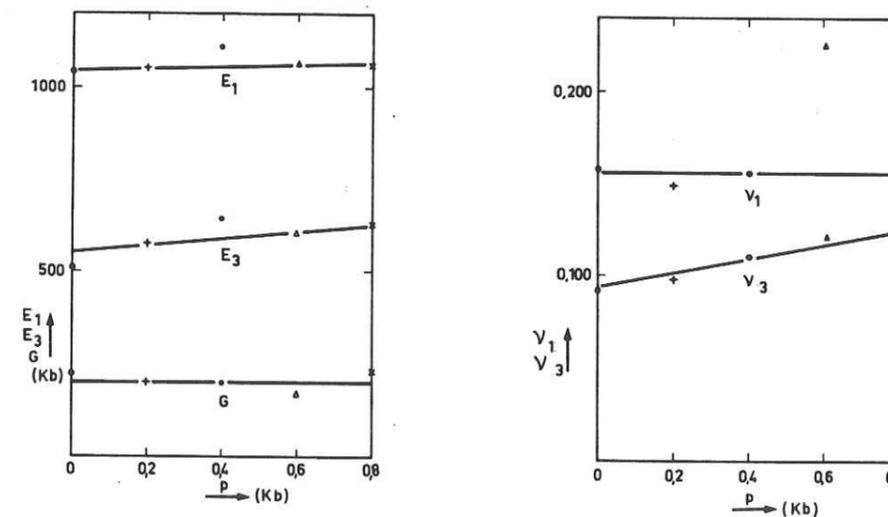


Figure I.6 - Evolution des paramètres élastiques d'un schiste en fonction de la pression de confinement p (d'après Lerau et al, 1981).

### 1.2.2 Comportement dans le domaine des déformations irréversibles

Si, dans le domaine élastique, quelques résultats concernent des roches à symétrie orthotrope ou monoclinique, la complexité des phénomènes liés aux déformations irréversibles (plasticité, écrouissage, endommagement) provoque une réduction des études aux roches à symétrie orthotrope de révolution. Citons, cependant, les travaux de Peres-Rodrigues (1966, 1970, 1979), qui a proposé une modélisation de la variation de la résistance à la rupture en compression uniaxiale de roches à symétries connues ou non a priori, similaire à celle de la variation du module élastique directionnel, ainsi que les travaux de Masure (1970) sur la résistance limite en compression simple d'un schiste à symétrie monoclinique et d'une phyllade à symétrie orthotrope.

Un certain nombre de résultats expérimentaux relatifs à des essais de tractions simples et de compressions triaxiales de révolution sur des roches orthotropes de révolution (grès, schistes, marbres, gneiss) sont actuellement disponibles. Ils concernent essentiellement l'évolution de la résistance limite en fonction de l'orientation des structures internes de la roche par rapport aux sollicitations, et ont conduit à l'élaboration de différents critères de plasticité et de rupture. Seules quelques études concernent la détermination du tenseur des déformations et de l'évolution de ce tenseur en fonction de l'orientation des structures matérielles par rapport aux sollicitations, et des parties isotrope et déviatoire de l'état de contraintes (Allirot et Boehler, 1979, Smith et Cheatam, 1980a, Lerau et al, 1981). Ce manque de résultats rend problématique l'élaboration de lois de comportement dans le domaine des déformations irréversibles.

Le caractère anisotrope du seuil de dilatance a été étudié par Lerau et al sur le schiste de Lacaune, soumis à des essais de compression triaxiale de révolution. Ce seuil peut être corrélé à la microfissuration induite par l'état de contraintes. Les résultats obtenus, présentés sur la Figure I.7, montrent sa forte dépendance directionnelle, ainsi que, comme dans le cas de roches isotropes, son augmentation avec la pression de confinement pour une orientation donnée.

En ce qui concerne la loi d'écoulement plastique, le problème de son caractère, associé ou non à la fonction critère, a été abordé par Smith et Cheatam, lors d'une étude au triaxial vrai menée sur une craie orthotrope de révolution. Les résultats des essais, uniquement effectués dans les axes, indiquent une normalité des déformations plastiques à la surface limite. Evidemment, ce résultat n'est pas directement généralisable aux essais "hors axes" ou à d'autres types de roche.

Une généralisation du modèle élasto-plastique de Cam-Clay aux roches orthotropes de révolution a été proposée par Nova (1991) : le critère isotrope initial est généralisé par l'intro-

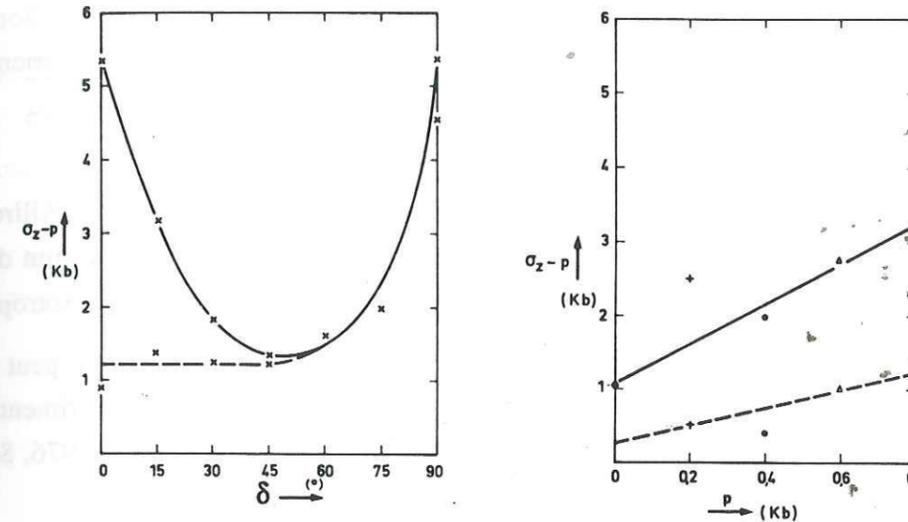


Figure I.7 - Anisotropie du seuil de dilatance :  
 a) seuil de dilatance  $\sigma_0 - p$  et contrainte de rupture  $\sigma_r - p$ , en fonction de l'orientation  $\delta$ , pour  $p = 80$  MPa ;  
 b) seuil de dilatance et contrainte de rupture en fonction de  $p$ , pour  $\delta = 15^\circ$  (d'après Lerau et al, 1981).

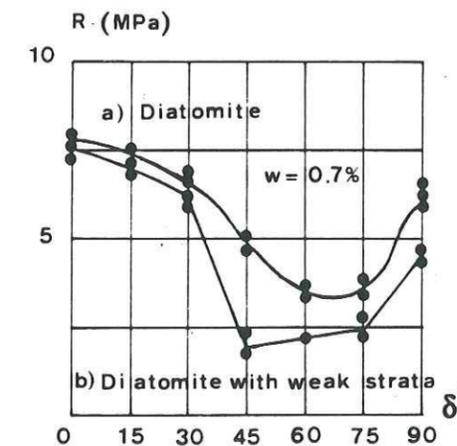


Figure I.8 - Résistance limite directionnelle de la diatomite en compression simple : anisotropie continue et discontinue, (d'après Allirot, Boehler et Sawczuck, 1981).

-duction d'un tenseur orthotrope de révolution du quatrième ordre, et la loi d'écoulement plastique est supposée associée. L'application de ce modèle aux résultats d>Allirot et Boehler (1979) sur la diatomite laisse apparaître un certain accord qualitatif théorie/expérience ; l'accord quantitatif est, par contre, assez mauvais.

L'apparition de déformations irréversibles à déviateur non nul dans une roche orthotrope de révolution soumise à des états de contrainte isotrope a été mise en évidence par Allirot et al (1977) sur la diatomite. Notons que ce phénomène est prévisible par l'application de la théorie des représentations des fonctions tensorielles au comportement plastique anisotrope.

L'anisotropie des résistances limites, en compression triaxiale de révolution, peut être continue ou discontinue (Cf. Figure I.8). Pour les deux cas, les observations expérimentales (par exemple : Mac Lamore et Gray, 1967, Donath, 1972, Attewell et Sandford, 1976, Saint Leu et al, 1978, Allirot et Boehler, 1979) montrent que :

- la résistance limite (surcharge axiale limite) augmente avec la pression de confinement ; cet accroissement dépend de l'orientation des structures internes de la roche par rapport à la direction de la contrainte principale majeure ; pour une orientation donnée, la variation de la résistance en fonction de la pression de confinement est généralement non linéaire ;
- une augmentation de la pression de confinement provoque une atténuation, plus ou moins nette, du degré d'anisotropie des résistances limites ;
- pour toutes les pressions de confinement, le maximum de la résistance est atteint pour  $\delta = 0^\circ$  ou  $\delta = 90^\circ$  ; le minimum est généralement observé pour  $45^\circ \leq \delta \leq 75^\circ$  (rappelons que  $\delta$  est l'angle entre la normale au plan privilégié de la roche et la direction de la contrainte principale majeure).

Un exemple de ces observations est présenté sur les Figures I.9 et I.10. Pour ce type d'essai, les modes de rupture sont fonction de la valeur de la pression de confinement et de l'orientation  $\delta$ . Ce sont, le plus généralement (Sirieys, 1966, 1979, Saint Leu et al, 1978, Allirot et Boehler, 1979) :

- des ruptures par extension, soit structurale pour les orientations  $\delta$  voisines de  $90^\circ$ , soit astructural pour les orientations  $\delta$  voisines de  $0^\circ$ , et pour les essais de compression simple ;
- des ruptures par cisaillement, soit structural pour les orientations  $45^\circ \leq \delta \leq 75^\circ$ , en compression simple et sous pression de confinement modérée, soit astructural pour les autres orientations, sous pression de confinement modérée ;

- des ruptures pseudo-plastique (apparition de multiples plans de cisaillement éventuellement conjugués) sous forte pression de confinement ;
- des ruptures en "kink-bands" sous forte pression de confinement et pour des valeurs élevées de l'angle  $\delta$ .

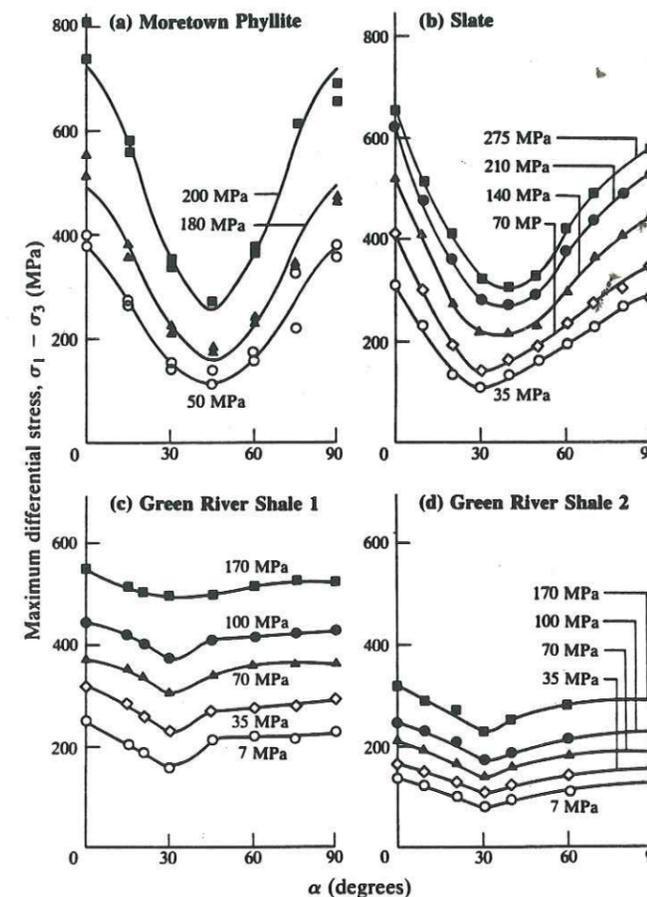


Figure I.9 - Evolution des résistances limites en compression triaxiale de révolution, en fonction de l'angle  $\alpha$  entre le plan privilégié de la roche et la direction de la contrainte principale majeure  $\sigma_1$ , pour différentes pressions de confinement  $\sigma_3$  : a) phyllite (d'après Donath, 1972), b - d) ardoise et schiste (d'après Mac Lamore et Gray, 1967).

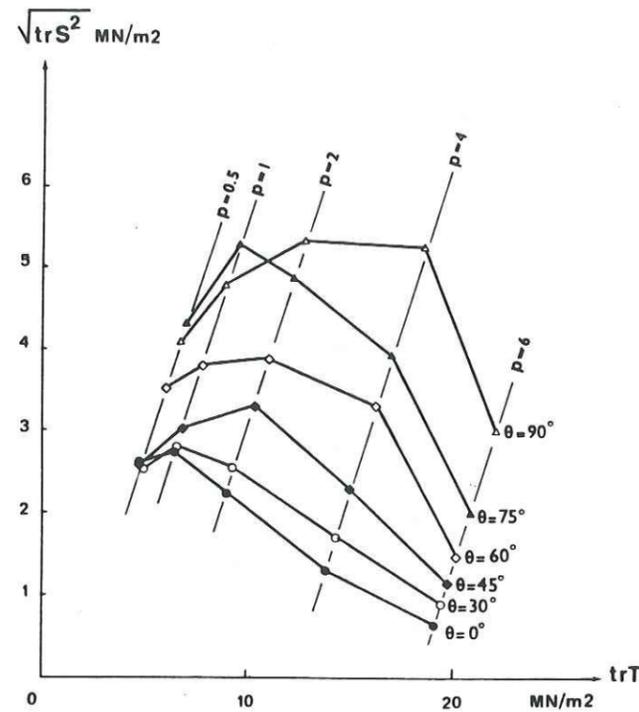


Figure I.10 - Limite élastique de la diatomite soumise à des essais de compressions orientées sous pressions de confinement : représentation dans le plan des invariants ( $trT, \sqrt{trS^2}$ );  $\theta$  est l'angle entre l'axe de révolution de l'orthotropie et la direction de la contrainte principale majeure;  $T$  est le tenseur des contraintes et  $S$  est son déviateur (d'après Alliot et Boehler, (1979).

En traction uniaxiale, les observations expérimentales (par exemple : Youash, 1969, Barla et Goffi, 1974, Nova et Zaninetti, 1990) montrent que :

- la résistance limite varie avec l'orientation des plans privilégiés de la roche par rapport à la direction de la contrainte principale majeure ; le maximum de la résistance est atteint pour  $\delta = 90^\circ$ , le minimum pour  $\delta = 0^\circ$  ;
- le mode de rupture est extensif ; il est structural pour des orientations  $0^\circ \leq \delta \leq 30^\circ$ , astructural pour  $30^\circ < \delta \leq 90^\circ$ .

La modélisation des différents phénomènes observés résulte en la détermination de critères de rupture ou de plasticité. De nombreux critères ont été développés spécifiquement pour les roches orthotropes de révolution. Ils peuvent être classés en quatre groupes principaux :

- les critères empiriques ;
- les critères phénoménologiques tensoriels invariants à une branche ;
- les critères phénoménologiques tensoriels invariants à deux branches ;

- les critères proposés par différentes méthodes de passage micro-macro.

### 1.2.2.1 Critères empiriques

Les critères empiriques présentés sont basés sur des généralisations du critère isotrope de Coulomb.

#### Critère de Jaeger

Les deux critères proposés par Jaeger (1960), présentés ci-dessous, ont été établis pour des états de contraintes planes, sous l'hypothèse que le plan des contraintes contienne la normale au plan privilégié du matériau.

L'approche la plus simple est celle du critère dit "à plan unique de faiblesse". La roche est représentée par une matrice isotrope, de cohésion  $c$  et d'angle de frottement interne  $\phi$ , traversée par une famille de plans de faiblesse parallèles, de cohésion  $c_j$  et d'angle de frottement interne  $\phi_j$ . Le critère s'écrit sous la forme :

• matrice 
$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2(c + \sigma_3 \operatorname{tg}\phi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\phi} - \operatorname{tg}\phi} ; \quad (I.49.a)$$

• plans de faiblesse 
$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2(c_j + \sigma_3 \operatorname{tg}\phi_j)}{\sin 2\psi - \operatorname{tg}\phi_j + \cos 2\psi \operatorname{tg}\phi_j} ; \quad (I.49.b)$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  sont les contraintes principales de l'état de contraintes planes avec  $\sigma_1 > \sigma_3$  (convention des compressions positives), et  $\psi$  l'angle entre les plans de faiblesse et la direction de la contrainte principale majeure  $\sigma_1$ .

La résistance  $\sigma_1$  théorique, calculée pour une orientation  $\psi$  et une contrainte principale mineure  $\sigma_3$  données, est le minimum des deux valeurs obtenues à partir des équations (I.49). La rupture prédite est une rupture par cisaillement, soit selon un ou plusieurs plans de faiblesse, soit dans la matrice, selon la branche active du critère. L'allure de la variation de  $\sigma_1$  en fonction de  $\psi$  et de  $\sigma_3$  est présentée sur la Figure I.11 : l'anisotropie décrite est de type discontinu, et la résistance limite  $\sigma_1$  prédite est constante dans la plage astructural (rupture dans la matrice).

Le second critère proposé consiste en une modification du critère classique de Coulomb, par l'introduction d'une cohésion directionnelle, dont le minimum est atteint sur le plan privilégié du matériau. Sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à la direction de la contrainte principale majeure  $\sigma_1$ , le critère s'écrit :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2(c_1 - c_2 \cos 2(\alpha - \psi) + \sigma_3 \operatorname{tg} \phi)}{\sin 2\alpha - \operatorname{tg} \phi + \cos 2\alpha \operatorname{tg} \phi}; \quad (I.50)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes,  $\phi$  est l'angle de frottement interne,  $\psi$  l'angle entre le plan de cohésion minimum et la direction de la contrainte principale majeure  $\sigma_1$ .

La minimisation du second membre de l'équation (I.50) par rapport à l'angle  $\alpha$  permet de déterminer, pour un angle  $\psi$  et une contrainte principale mineure  $\sigma_3$  donnés, l'orientation  $\alpha_{\text{crit}}$  du plan de rupture, et, par substitution de la valeur  $\alpha = \alpha_{\text{crit}}$  dans l'équation (I.50), la valeur de la résistance limite  $\sigma_1$ . L'anisotropie décrite est de type continu.

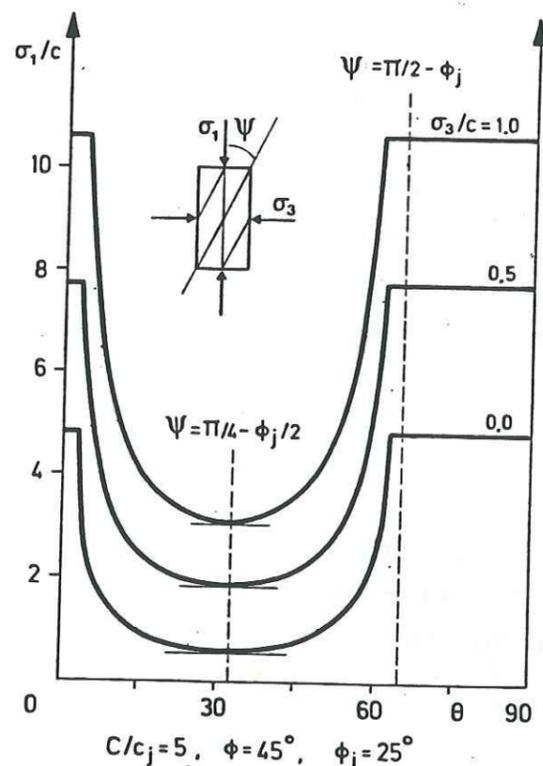


Figure I.11 - Critère de Jaeger : évolution théorique du rapport  $\sigma_1/c$  en fonction de l'orientation  $\psi$  entre le plan de faiblesse et la direction de la contrainte principale majeure  $\sigma_1$ , pour différentes pressions de confinement  $\sigma_3$ .

La théorie développée par Jaeger est une théorie à courbe intrinsèque pour des états de contraintes planes. Telle qu'elle est présentée, elle est directement généralisable à des états de contraintes tridimensionnelles, puisque la contrainte intermédiaire n'intervient pas, mais à condition que le plan des directions principales majeure et mineure des contraintes contienne la normale au plan de faiblesse. Lorsque cette condition n'est pas réalisée, la généralisation à trois dimensions devient complexe, ainsi que le mentionne Jaeger. Il faut cependant noter que

la condition énoncée ci-dessus est automatiquement vérifiée pour les états de contraintes triaxiales de révolution, puisque le plan contenant la direction principale majeure et la normale au plan de faiblesse contient automatiquement une direction du plan principal mineur de l'état de contraintes. Les équations ci-dessus sont donc directement applicables aux états de contraintes triaxiaux de révolution, ainsi qu'il est d'ailleurs couramment pratiqué dans la littérature.

### Critère de Mac Lamore et Gray

La théorie de la cohésion variable a été reprise par Donath (1961) et Mac Lamore et Gray (1967). Ces derniers auteurs proposent, pour des états de contraintes triaxiales de révolution, en compression, un critère s'écrivant sous la forme :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2(c(\psi) + \sigma_3 \operatorname{tg} \phi(\psi))}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi(\psi)} - \operatorname{tg} \phi(\psi)}, \quad (I.51)$$

$$c(\psi) = A_{1,2} - B_{1,2} (\cos 2(\psi_{\min,c} - \psi))^n,$$

$$\operatorname{tg} \phi(\psi) = C_{1,2} - D_{1,2} (\cos 2(\psi_{\min,\phi} - \psi))^m,$$

où :

- $\psi$  est l'angle entre le plan privilégié de la roche orthotrope de révolution et la direction de la contrainte principale majeure  $\sigma_1$ ;
- $\psi_{\min,c}$  et  $\psi_{\min,\phi}$  sont les valeurs de  $\psi$  correspondant au minimum, respectivement, de  $c$  et  $\operatorname{tg} \phi$ ;
- $A_{1,2}$ ,  $B_{1,2}$ ,  $C_{1,2}$ ,  $D_{1,2}$ ,  $n$  et  $m$  sont les constantes du critère ( $A_1$  et  $B_1$  pour  $0 \leq \psi \leq \psi_{\min,c}$ ,  $A_2$  et  $B_2$  pour  $\psi_{\min,c} \leq \psi \leq 90^\circ$ ,  $C_1$  et  $D_1$  pour  $0 \leq \psi \leq \psi_{\min,\phi}$ ,  $C_2$  et  $D_2$  pour  $\psi_{\min,\phi} \leq \psi \leq 90^\circ$ , avec par raison de continuité :  $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$  et  $C_1 - D_1 = C_2 - D_2$ );
- $n$  et  $m$  sont fonction du degré d'anisotropie ( $n$  et  $m = 1,3$  pour une anisotropie liée aux clivages ou à la schistosité, 5 à 6 dans le cas de roches stratifiées).

L'application du critère aux résultats expérimentaux obtenus par ces auteurs sur des schistes est satisfaisante, ainsi que le montre la Figure I.12. Néanmoins, il faut remarquer, pour ce critère purement empirique, le nombre élevé de paramètres indépendants à déterminer, et sa limitation aux états de contraintes triaxiales de révolution en compression.

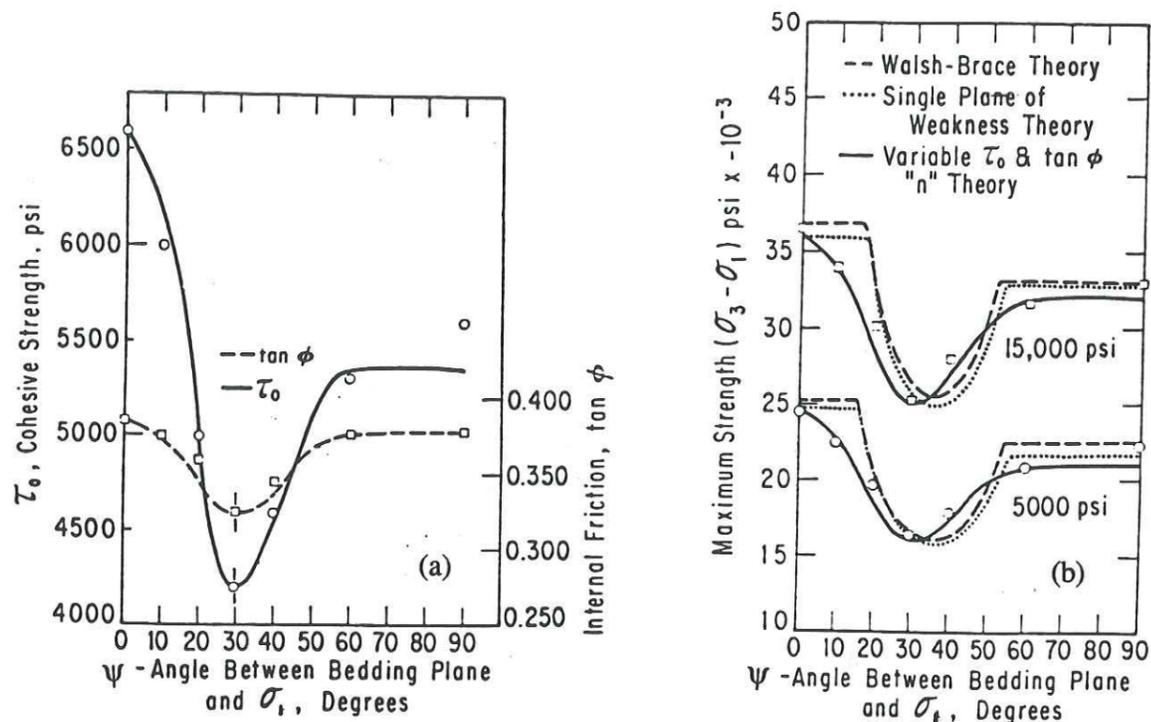


Figure I.12 - Critère de Mac Lamore et Gray : comparaison entre les données expérimentales et les prévisions théoriques du critère, pour un schiste testé en compression triaxiale :  
 a) évolution directionnelle de la cohésion  $c$  et du frottement interne  $\tan \phi$ ,  
 b) évolution directionnelle de la résistance limite,  
 (d'après Mac Lamore et Gray, 1967).

**Critère de Nova et Sacchi**

Une autre généralisation du critère de Coulomb aux milieux orthotropes de révolution, soumis à des étapes de contraintes véritablement triaxiaux a été proposé par Nova et Sacchi (1979). L'hypothèse fondamentale est que la rupture se produit par cisaillement sur un plan de normale  $m$ , lorsque la contrainte de cisaillement  $\sigma_{mn}$  atteint une valeur limite  $S(m)$ , fonction de l'orientation de ce plan, par rapport, d'une part à l'axe de révolution de l'orthotropie, et, d'autre part, aux sollicitations ;  $S(m)$  est la somme des composantes diagonales  $c_{mm}$  et  $f_{mm}$  de deux tenseurs du second ordre  $c$  et  $F$ ,  $c$  étant physiquement relié à la cohésion et  $F$  étant défini par :

$$F = \phi : \sigma \tag{I.52}$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes et  $\phi$  un tenseur du quatrième ordre, physiquement relié au frottement interne. Le critère s'exprime dans le repère principal des contraintes, par le système suivant de trois équations :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| &= \left| \sqrt{(f_{11} + c_{11})(f_{22} + c_{22})} - |f_{12} + c_{12}| \right|, \\ \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right| &= \left| \sqrt{(f_{11} + c_{11})(f_{33} + c_{33})} - |f_{13} + c_{13}| \right|, \\ \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right| &= \left| \sqrt{(f_{22} + c_{22})(f_{33} + c_{33})} - |f_{23} + c_{23}| \right| \end{aligned} \tag{I.53}$$

dont l'une, au moins, doit être satisfaite.

Les symétries des tenseurs  $c$  et  $\phi$  sont, par hypothèse, celles du milieu considéré. Pour une roche orthotrope de révolution, dans un repère  $(., ., z)$ , où  $z$  est l'axe de révolution de l'orthotropie, il vient :

$$c = \begin{pmatrix} c_r & 0 & 0 \\ 0 & c_r & 0 \\ 0 & 0 & c_t \end{pmatrix} \tag{I.54}$$

(., ., z)

et

$$\phi = \begin{pmatrix} 2\mu_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_r & \mu_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_r & \mu_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_n & \mu_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_n & \mu_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_n & \mu_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_n & \mu_n \end{pmatrix} \tag{I.55}$$

(., ., z)

où  $c_r, c_t, \mu_r, \mu_t, \mu_n$  sont des constantes.

Des considérations physiques amènent les auteurs à imposer  $\mu_n = \mu_t$ . Quatre paramètres matériels (deux cohésions  $c_r$  et  $c_t$  et deux frottements internes  $\mu_r$  et  $\mu_t$ ), suffisent donc à définir complètement le critère.

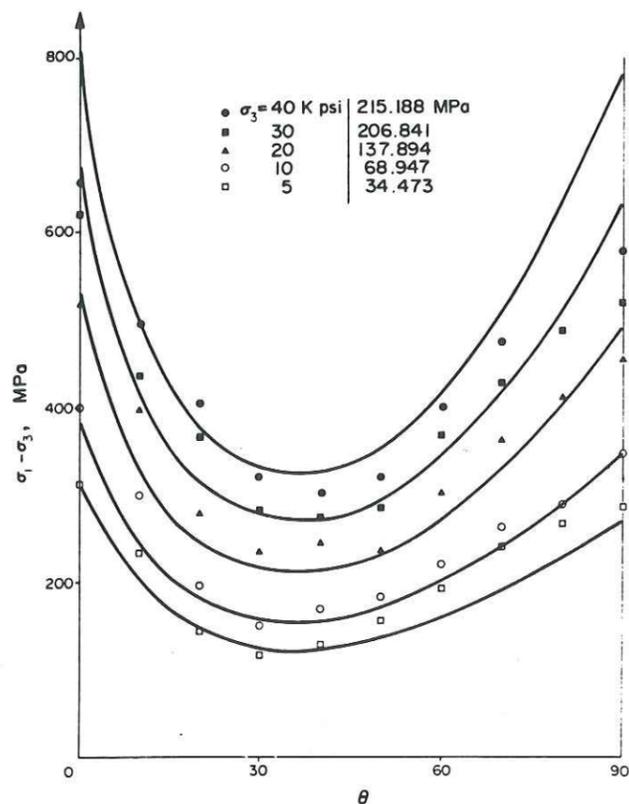


Figure I.13 - Résistances limites directionnelles d'une ardoise en compression sous différentes pressions de confinement : comparaison entre les données expérimentales et les prévisions théoriques du critère de Nova. L'angle  $\theta$  est l'angle entre le plan privilégié de la roche et la direction de la contrainte principale majeure  $\sigma_1$  (d'après Nova, 1980).

Dans une publication ultérieure (Nova, 1980), par manque de données expérimentales sous sollicitations véritablement triaxiales, les performances du critère ont été testées sur la base des résultats d'essais de compressions triaxiales de révolution disponibles dans la littérature. Un exemple de comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux est présenté sur la Figure I.13. Nous pouvons remarquer, sur cette Figure, que l'accord n'est pas toujours satisfaisant, en particulier en ce qui concerne l'évolution du degré de l'anisotropie de la résistance limite en fonction de la pression de confinement ; les résistances limites sont nettement surévaluées pour les essais "dans les axes" sous fort confinement. Il convient également de noter que, pour une pression de confinement donnée, l'évolution théorique prédite de la résistance limite, en fonction de l'orientation  $\theta$  entre le plan privilégié du matériau et la direction de la contrainte principale majeure, fait apparaître des points anguleux au passage des orientations  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 90^\circ$ , ce qui est physiquement irréaliste.

En conclusion, aucun des critères de rupture empiriques présentés ci-dessus n'est réellement satisfaisant. Tous requièrent un long travail d'ajustement empirique de courbes expérimentales, ne prennent pas en compte la loi de comportement du matériau et peuvent difficilement être exprimés sous forme invariante.

### 1.2.2.2 Critères phénoménologiques tensoriels invariants à une branche

Les critères présentés dans ce paragraphe sont des critères de plasticité. Ils sont généralement proposés sous la forme d'une algèbre des composantes du tenseur des contraintes, exprimées dans un repère lié aux axes privilégiés du matériau. Cependant, ces critères peuvent aisément être mis sous forme invariante ; ils satisfont aux restrictions imposées aux lois de comportement plastique parfait par les symétries matérielles et sont applicables à des états de contraintes véritablement triaxiaux.

#### Critère de Pariseau

Le critère de Pariseau (1972) est une généralisation aux roches orthotropes et orthotropes de révolution du critère de Hill (1947) proposé pour les métaux. Le critère de Hill, qui est lui-même une généralisation du critère de Von Mises aux métaux laminés orthotropes, est basé sur les hypothèses essentielles suivantes :

- indépendance du critère par rapport aux signes des contraintes et par rapport à la partie isotrope de l'état de contrainte,
- loi d'écoulement associée incompressible.

Pariseau ajoute au critère de Hill des termes complémentaires prenant en compte certaines spécificités du comportement des matériaux de type rocheux : sensibilité au signe des contraintes normales et à la partie isotrope de l'état de contrainte, loi d'écoulement associée non nécessairement incompressible. Ces termes apparaissent sous la forme de fonctions des composantes normales du tenseur des contraintes.

Pour une roche orthotrope d'axes privilégiés (x, y, z), il vient :

$$\left| F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + L\sigma_{yz}^2 + M\sigma_{xz}^2 + N\sigma_{xy}^2 \right|^{n/2} - (U\sigma_x + V\sigma_y + W\sigma_z) = 1 \quad (I.56)$$

où les neuf coefficients F, G, H, L, M, N, U, V, W, et  $n \geq 1$  sont des constantes matérielles indépendantes. Dans le cas d'une symétrie orthotrope de révolution, d'axe de révolution z, le nombre des coefficients est réduit à cinq :

$$F = G ; L = M ; U = V ; N = 2F + 4H \quad (I.57)$$

Bien que l'auteur ne démontre pas cette propriété, les conditions d'invariance du critère sont respectées pour les deux types de symétries considérées. Par passage au cas isotrope :

$$F = G = H ; L = M = N ; U = V = W ; L = 6F \quad , \quad (I.58)$$

le critère de Pariseau se réduit au critère linéaire de Drucker - Prager pour  $n = 1$ , au critère parabolique de Torre pour  $n = 2$ . Il convient de noter que la théorie proposée par Pariseau résulte, pour un exposant  $n$  donné, en un nombre de coefficients "plastiques" indépendants égal au nombre des coefficients élastiques indépendants caractéristiques des symétries du milieu.

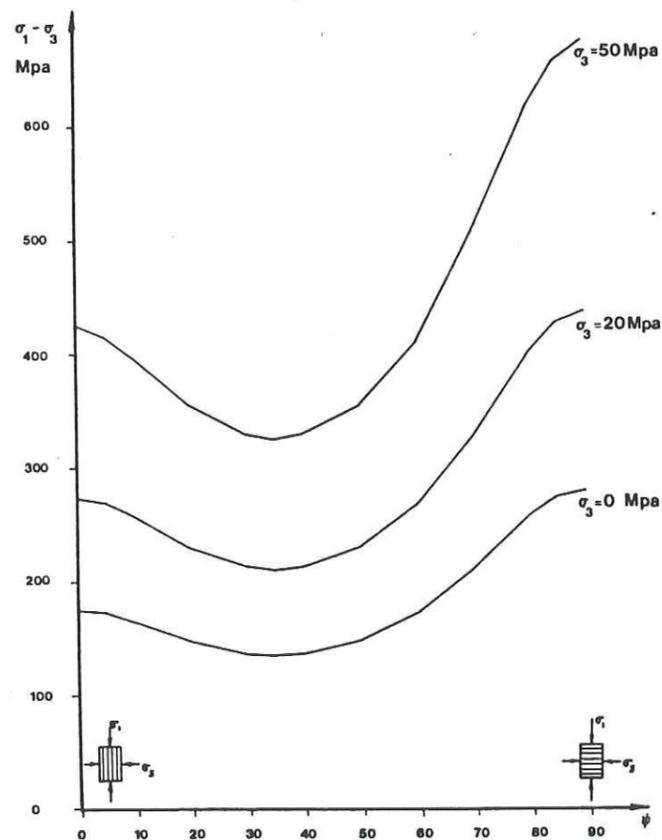


Figure I.14 - Critère de Pariseau : évolution théorique de la résistance limite  $\sigma - p$ , en fonction de l'orientation, pour différentes pressions de confinement  $p$  (d'après Amadei, 1982).

L'application du critère aux essais triaxiaux de révolution sur les matériaux orthotropes de révolution résulte en l'expression suivante :

$$|\sigma - p|^n \left[ F \left[ (\cos^2\delta - \sin^2\delta)^2 + \cos^4\delta \right] + H \sin^4\delta + L \sin^2\delta \cos^2\delta \right]^{n/2} - (\sigma - p) U \sin^2\delta + W \cos^2\delta - (2U + W) p = 1 \quad , \quad (I.59)$$

où  $\sigma$  est la contrainte axiale principale majeure,  $p$  la pression de confinement et  $\delta$  l'angle entre l'axe  $z$  de révolution de l'orthotropie et la direction de la contrainte principale majeure. Il convient de souligner que l'ensemble des coefficients indépendants du critère général (I.56), soumis aux restrictions (I.57), peut être déterminé à partir d'essais de compressions-sous pressions de confinement.

Une étude paramétrique théorique du critère est présentée par l'auteur dans le cas  $n = 1$  ; dans ce cas, pour une orientation  $\delta$  donnée, la résistance limite est une fonction linéaire de la pression de confinement ; un exemple numérique, calculé par Amadei (1982), est présenté sur la Figure I.14. Une application du critère, en supposant a priori  $n = 2$ , à l'analyse plastique du poinçonnement de la glace columnaire a été développée par Reinicke et Ralston (1977) sous l'hypothèse d'une loi d'écoulement associée.

#### Premier critère de Smith et Cheatam

Le point de départ du critère proposé par Smith et Cheatam (1980a) est également le critère de Hill, mais, en plus des termes linéaires introduits par Pariseau, ces auteurs ajoutent des termes quadratiques en contraintes normales, permettant d'assurer la possibilité d'un écoulement plastique sous des états de contraintes isotropes de compression. Une diminution de volume irréversible est possible sous contraintes triaxiales de révolution en faisant l'hypothèse de l'associativité de la loi d'écoulement.

Pour une roche orthotrope d'axes privilégiés  $(x, y, z)$ , les auteurs proposent la forme suivante :

$$F (\sigma_y - \sigma_z)^2 + G (\sigma_x - \sigma_z)^2 + H (\sigma_x - \sigma_y)^2 + L \sigma_{yz}^2 + M \sigma_{xz}^2 + N \sigma_{xy}^2 - (U \sigma_x + V \sigma_y + W \sigma_z) + (X \sigma_x + Y \sigma_y + Z \sigma_z)^2 = 1 \quad , \quad (I.60)$$

où  $F, G, \dots, Z$  sont douze constantes matérielles indépendantes.

Dans le cas d'une symétrie orthotrope de révolution d'axe privilégié  $z$ , les conditions de symétrie imposent les restrictions :

$$F = G ; L = M ; U = V ; X = Y ; N = 2F + 4H \quad ; \quad (I.61)$$

le nombre des coefficients indépendants est ramené à sept et le critère peut encore être écrit sous la forme invariante :

$$\frac{1}{2} \text{tr}S^2 = a + b \text{tr}M T + c \text{tr}^2MT + d (\text{tr}MT^2 - \text{tr}^2MT) + (e + f \text{tr}MT) \text{tr}T + g \text{tr}^2T \quad , \quad (I.62)$$

- où :
- T et S sont, respectivement, le tenseur des contraintes et son déviateur ;
  - M est le tenseur de structure de l'orthotropie de révolution,  $M = z \otimes z$  ;
  - a , b , c , d , e , f , g sont sept constantes matérielles indépendantes, fonctions de F, ..., Z.

L'équation (I.62) est une forme particulière de la forme générale invariante (I.36). Les restrictions dues aux symétries matérielles sont bien respectées. Notons que les auteurs n'ont pas établi l'équation (I.62), mais ont vérifié la propriété d'invariance de leur critère à partir de considérations sur la forme générale invariante des fonctions scalaires polynomiales, et non en partant d'une loi de comportement plastique parfait. Une application du critère a été réalisée par Smith et Cheatam à partir de résultats d'essais triaxiaux vrais sur une craie : un bon accord est trouvé pour l'ensemble des configurations d'essais utilisées, mais tous ces essais ayant été effectués "dans les axes" (l'axe de révolution de l'orthotropie étant une direction principale des contraintes), ce test de la validité du critère est donc largement incomplet.

#### Critère de Ashour

Une autre généralisation du critère de Hill a été proposée par Ashour (1988), dans le cas de l'anisotropie la plus générale, sous la forme :

$$\begin{aligned} A \sigma_x^2 + B \sigma_y^2 + C \sigma_z^2 + D \sigma_x \sigma_y + E \sigma_x \sigma_z + F \sigma_y \sigma_z + G \sigma_{xy}^2 + H \sigma_{xz}^2 + I \sigma_{yz}^2 = \\ = C_0 + C_1 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + C_2 e^{\alpha(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)} \quad , \end{aligned} \quad (I.63)$$

où (x, y, z) est un repère orthornormé et A, B, C, D, ..., c<sub>0</sub>, c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub>, α sont les treize constantes du critère.

Une application directe, sous cette forme, à des résultats expérimentaux sur des schistes et une craie soumis à des compressions triaxiales de révolution, combinées ou non avec de la torsion, semble donner des résultats satisfaisants. Les relations entre certains coefficients, dues aux symétries matérielles, sont retrouvées au terme de calculs d'identification complets pour le schiste, dont la structure est a priori connue. Toutefois, le mode de présentation des résultats ne permet pas de conclure quant à l'adéquation du modèle avec les variations directionnelles de la résistance des roches considérées, et la forme même du critère conduit à la résolution d'équations implicites.

#### Critère de Karr et al

Le critère de Karr et al (1989) est basé sur l'hypothèse d'une valeur limite de l'énergie de distorsion. Ces auteurs utilisent les travaux d'Olszak et Urbanowski (1957) sur l'expression de l'énergie de distorsion pour les matériaux anisotropes dans le domaine élastique. Karr et al reprennent ces expressions, en les considérant valables dans le domaine du comportement plastique. La valeur limite de l'énergie de distorsion est introduite sous forme exponentielle. Finalement, pour un matériau orthotrope de révolution d'axe privilégié z, le critère suivant est proposé :

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1 (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_{xy}^2) + a_3 \sigma_z^2 + a_4 (\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + a_6 (\sigma_x \sigma_y - \sigma_{xy}^2) + a_8 (\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)} + \\ + a_{10} e^{a_{11}(\sigma_x + \sigma_y) + a_{13} \sigma_z} = 1 \quad , \end{aligned} \quad (I.64)$$

où a<sub>1</sub>, a<sub>3</sub>, ..., a<sub>13</sub> sont huit constantes matérielles.

Une application à la description du comportement de la glace colonnaire a été réalisée. Notons, avec les auteurs, que le critère proposé, sous forme implicite comme le critère de Ashour, se réduit, lors du développement en série de Taylor au premier ordre du terme exponentiel, en un critère classique pour les matériaux composites : le critère de Tsai et Wu.

#### 1.2.2.3 Critères phénoménologiques invariants à deux branches

Les critères présentés dans les paragraphes précédents ne permettent pas, malgré leur complexité éventuelle, de modéliser l'ensemble des phénomènes observés lors des essais triaxiaux de révolution sur des roches orthotropes de révolution : la diminution de l'anisotropie des résistances limites pour une pression de confinement croissante est souvent mal décrite, et les différents modes de rupture sont, soit non pris en compte, soit pris en compte de façon non réaliste. Une solution est fournie par l'introduction de critères composés de deux ou plusieurs branches continûment dérivables, chaque branche caractérisant un mode de rupture. Elle été proposée par Sirieys (1966) pour des états de contraintes uniaxiales (extension structurale ou non, cisaillement structural).

#### Second critère de Smith et Cheatam

Adapté à des états de contraintes de compression, pour lesquels la rupture se produit par cisaillement, le critère à deux branches proposé par Smith et Cheatam (1980b) est une combinaison entre le critère "continu" de Smith et Cheatam (I.61) présenté au Paragraphe 1.2.2.2, et le critère de rupture sur le plan de faiblesse de Jaeger (I.48.b), présenté au Paragraphe 1.2.2.1. Les paramètres de chaque critère sont évalués à partir des résultats d'essais, pour lesquels la rupture est soit astructural (critère continu), soit structurale (critère

du plan de faiblesse). Après identification du modèle, la résistance prédite est la valeur minimale obtenue par application des deux critères, et le mode de rupture prédit est le mode relatif au critère actif (à valeur minimale). Une application est présentée pour des résultats d'essais triaxiaux vrais et de révolution sur un schiste. La comparaison théorie/expérience, dont un exemple est présenté sur la Figure I.15, montre une bonne corrélation ; cependant, le nombre des données expérimentales servant à cette comparaison est faible pour chaque type d'essai.

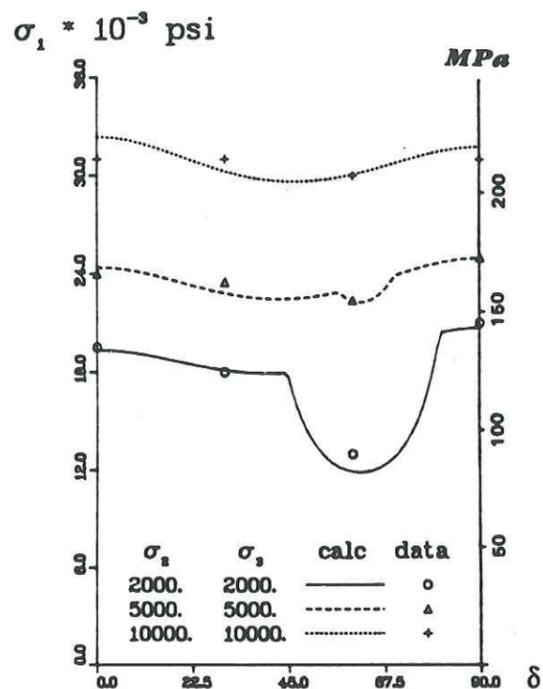


Figure I.15 - Résistances limites directionnelles d'un schiste en compression sous différentes pressions de confinement ; comparaison entre les données expérimentales et les prévisions théoriques du second critère de Smith et Cheatam.

### Critère de Boehler

Le critère à deux branches de Boehler (1981, 1985, 1987) a été initialement proposé pour la modélisation de la rupture d'un composite mat de verre / résine époxyde, orthotrope de révolution. Il est spécifique aux états de contraintes triaxiaux de révolution et se compose de deux fonctions critères continûment dérivables :

- le critère de rupture "parallèle" ou "structurale" est obtenu par une généralisation de la loi de Coulomb sous la forme :

$$(\sigma - p) \sin \delta \cos \delta = (1 + a_0 p + a_1 p^2) (\sigma \cos^2 \delta + p \sin^2 \delta) \operatorname{tg} \phi_0 + (1 + a_2 p + a_3 p^2) c_0 \quad (I.65)$$

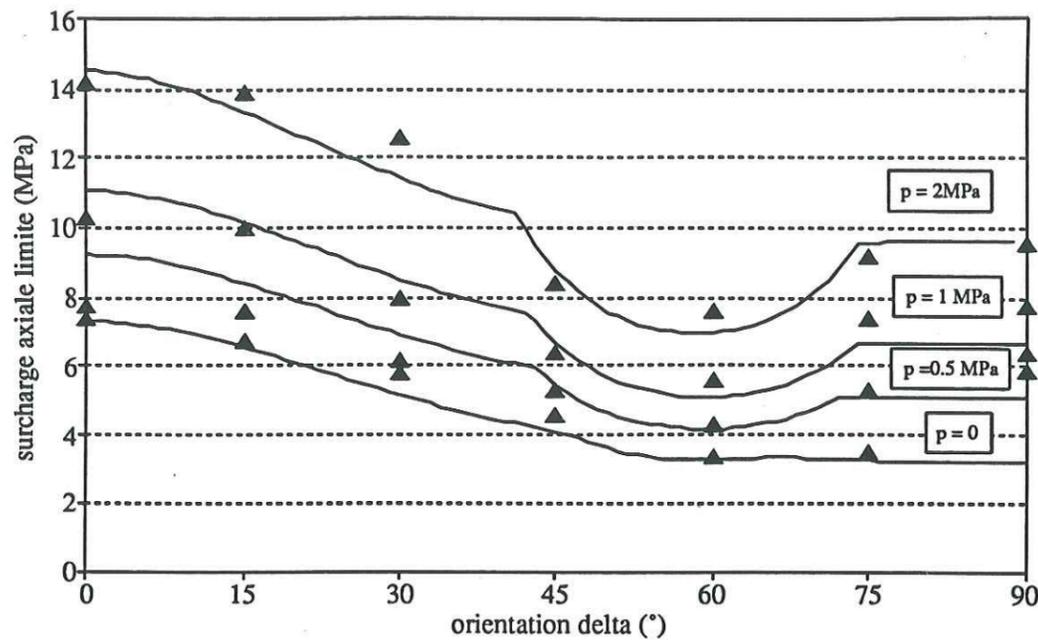
- où : •  $\sigma$  est la contrainte principale majeure,  $p$  la pression de confinement,  $\delta$  l'angle entre l'axe de révolution de l'orthotropie et la direction de la contrainte principale majeure ;
- $\phi_0$  et  $c_0$  sont respectivement l'angle de frottement et la cohésion sur le plan structural pour  $p = 0$  ;
- $a_0, a_1, a_2, a_3$  sont des constantes matérielles spécifiant l'influence de la pression de confinement.

- le critère de rupture "en travers" ou "astructurale" relie, à travers une généralisation du critère de Von Mises, la surcharge axiale  $\sigma - p$ , la pression de confinement  $p$  et l'orientation  $\delta$  par l'expression :

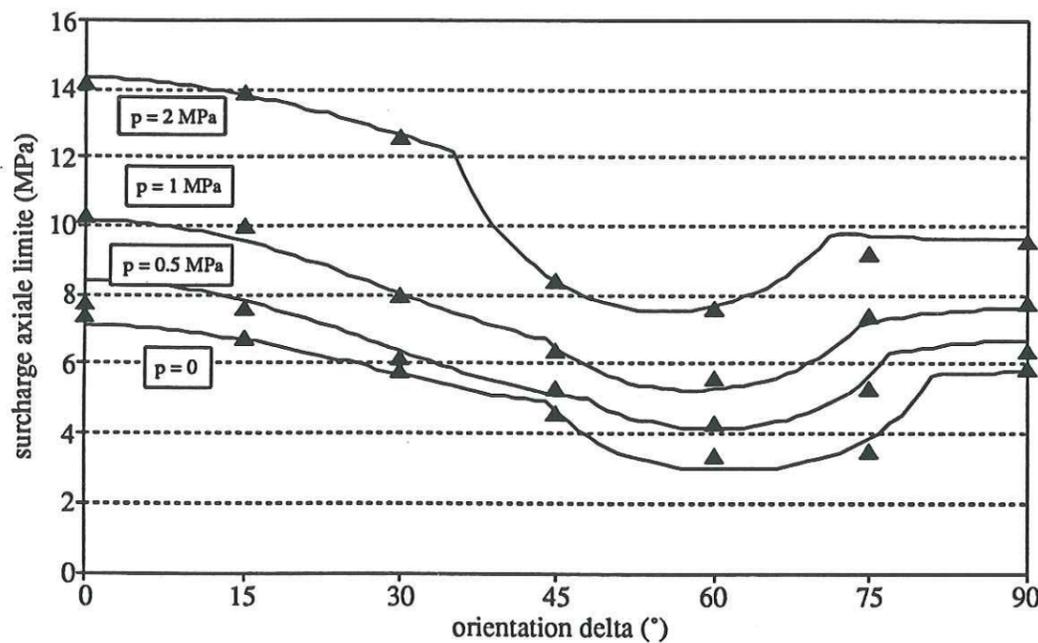
$$(\sigma - p)^2 \left[ (a_0 + a_1 p + a_2 p^2) + (b_0 + b_1 p + b_2 p^2) \cos^2 \delta + (c_0 + c_1 p + c_2 p^2) \cos^4 \delta \right] = K^2 \quad (I.66)$$

- où : •  $a_i, b_i, c_i$ , sont huit constantes matérielles et  $K$  est la constante du critère ;
- $b_0$  et  $c_0$  décrivent le comportement anisotrope en compression ou en traction simple ;
- les six autres constantes spécifient l'influence de la pression de confinement.

Pour les deux fonctions proposées, les conditions d'invariance requises par les symétries matérielles ont été démontrées. Pour chaque pression de confinement, l'enveloppe inférieure des deux critères constitue le critère du matériau ; pour une pression de confinement  $p$  et une orientation  $\delta$  donnée, il prévoit la valeur limite de la surcharge axiale  $\sigma - p$  et le mode de rupture correspondant. Le critère a été testé, parallèlement au critère de Smith et Cheatam, par Dabert (1982), à partir des résultats expérimentaux sur la diatomite (Allirot et Boehler, 1979). Les résultats obtenus, présentés sur la Figure I.16, montrent clairement sa supériorité. Notons cependant, qu'il fait intervenir six et neuf constantes respectivement pour les modes parallèles et en travers, contre deux et sept pour le critère de Smith et Cheatam.



(a)



(b)

Figure I.16 - Résistances limites directionnelles d'une diatomite en compression sous différentes pressions de confinement. Comparaisons prévisions théoriques / données expérimentales :

(a) deuxième critère de Smith et Cheatham ;

(b) critère de Boehler.

### 1.2.2.4 Critères proposés par différentes méthodes de passage micro-macro

Parallèlement à l'approche purement phénoménologique des critères, dont les formes ont été présentées dans les paragraphes précédents, des critères basés sur des considérations micro- ou mésoscopiques ont été développés.

#### Extensions du critère de Griffith

Walsh et Brace (1964) ont proposé, parallèlement à Hoek (1964), une généralisation aux matériaux orthotropes de révolution des travaux de Griffith (1921) et de Mc Clintock et Walsh (1962) sur la rupture fragile par propagation de microfissures. L'extension de la théorie de Griffith aux matériaux anisotropes consiste en l'introduction d'une distribution non aléatoire de microfissures dans une matrice élastique isotrope : une structure planaire est modélisée par un système de microfissures longues orientées prallèlement au plan privilégié, ce système étant superposé au champ des petites microfissures à distribution aléatoire et homogène du matériau de Griffith. Deux modes de chargement sont envisagés : la traction uniaxiale et la compression triaxiale de révolution. En traction, le modèle d'une microfissure elliptique ouverte de Griffith est directement applicable aux deux systèmes de microfissures ; en compression, la fermeture éventuelle des microfissures doit être prise en compte, selon la théorie de Mac Clintock et Walsh, ainsi que le frottement aux lèvres. La rupture est initiée à partir de l'une ou l'autre des deux familles de fissures envisagées, suivant l'orientation du système de fissures longues par rapport à la direction de la contrainte principale majeure. En faisant l'hypothèse que la contrainte de fermeture des petites et des longues microfissures est nulle, Walsh et Bace établissent ls formulations suivantes du critère :

- pour la rupture à partir des petites fissures,

$$\sigma_1 - \sigma_3 = c_{0s} + \frac{2\mu_s \sigma_3}{\sqrt{1 + \mu_s^2} - \mu_s} ; \quad (I.67)$$

- pour la rupture à partir des fissures longues,

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{c_{0l} (\sqrt{1 + \mu_l^2} - \mu_l) + 2\mu_l}{2 \sin\beta \cos\beta (1 - \mu_l \operatorname{tg}\beta)} , \quad (I.68)$$

- où
- $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  sont respectivement la contrainte principale majeure et mineure ;
  - $\mu_s$ ,  $\mu_l$  sont les coefficients de frottement au contact des lèvres pour, respectivement, les petites et les longues fissures ;

- $c_{0s}$  est la résistance en compression simple du matériau ne comportant que les petites fissures,
- $c_{0l}$  la résistance en compression simple pour l'orientation la plus critique du réseau de fissures longues,
- $\beta$  étant l'angle entre le plan d'orientation privilégié des fissures longues et la direction de la contrainte principale majeure.

Pour  $\sigma_3$  et  $\beta$  donnés, la résistance limite à la rupture correspond au minimum des valeurs obtenues à partir des équations (I.67) et (I.68). L'application de la théorie de Walsh et Brace aux essais triaxiaux de révolution aboutit à des résultats similaires à ceux obtenus à partir du critère du plan unique de faiblesse de Jaeger : comportement discontinu, courbes à "plateaux" et, pour  $\beta$  fixé, dépendance linéaire de la résistance limite vis à vis de la pression de confinement. L'obtention d'un comportement continu nécessite une modification de la distribution des microfissures. Un système de fissures, dont la longueur diminue continûment quand leur orientation s'écarte au plan privilégié, a, par exemple, été proposé par Walsh et Brace ; le critère associé à cette distribution a été étudié par Barron (1971). Attewell et Sandford (1976) ont, tenté de relier la distribution effective des microfissures à la résistance en compression triaxiale de révolution d'une ardoise, en introduisant, dans leur critère, des fonctions de texture obtenues par goniométrie X. Leur modèle prend également en compte une contrainte de fermeture non nulle des microfissures.

### Techniques d'homogénéisation

Dans le domaine du comportement plastique, les techniques d'homogénéisation ont été, essentiellement développées par Suquet (1982). Leurs applications à la formulation de critères de rupture et à la résolution de problèmes par la méthode de l'analyse limite concernent essentiellement les matériaux composites et les sols renforcés (par exemple, Salençon, 1984, de Buhan, 1986, de Buhan et Talierco, 1988).

Un critère issu de ces techniques a été proposé par Talierco et Sacchi (1988) pour les roches orthotropes de révolution. Le matériau stratifié est supposé être constitué de deux composants homogènes isotropes, sous la forme de couches alternées périodiques. Chaque composant est caractérisé par son épaisseur et par un critère de Mohr - Coulomb. Les auteurs font l'hypothèse que l'état de contraintes provoquant la rupture est une partie plane de l'état tridimensionnel, le plan considéré contenant l'axe de révolution de l'orthotropie. L'influence des propriétés de l'interface (collée ou non) est étudiée. La forme générale du critère du milieu homogène équivalent, obtenue par les techniques d'homogénéisation des stratifiés périodiques, est explicitée. Elle fait intervenir, dans le cas de l'interface collée, six paramètres indépendants : les épaisseurs relatives  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  des deux constituants par rapport à la cellule de base, ainsi que leurs angles de frottements et cohésion respectives,  $\phi_1, \phi_2, c_1, c_2$ . L'application

aux résultats expérimentaux d'Allirot et Boehler (1979) et de Mac Lamore et Gray (1967) est satisfaisante, sous réserve de ne retenir que les données expérimentales correspondant à un comportement élastoplastique parfait, sans écrouissage.

Il convient néanmoins de noter que la restriction fondamentale, faite par les auteurs, à une partie plane de l'état de contrainte reste à justifier.

## Chapitre II

### Matériau et techniques expérimentales

Dans notre approche expérimentale, nous avons réalisé des essais de compression isotrope, des essais de traction simple et des essais de compression sous différentes pressions de confinement, pour différentes orientations d'éprouvettes d'un grès orthotrope de révolution. Dans ce chapitre, nous présentons le matériau testé, ainsi que les techniques expérimentales et les méthodes de dépouillement des essais, utilisées pour la caractérisation du comportement mécanique anisotrope de la roche et pour l'analyse expérimentale, lors des essais de compression sous pression de confinement, des seuils de localisation.

#### 2.1 Matériau testé

Pour la réalisation de nos essais, nous avons choisi un grès des Vosges, en provenance de la carrière Rauscher à Adamswiller, Alsace. Ce matériau est actuellement utilisé en architecture.

Il s'agit d'un grès triasique appartenant à l'ensemble lithostratigraphique du Buntsandstein. Dans la région d'Adamswiller (située sur les cartes géologiques Bouxwiller et Sarre-Union), la série du Buntsandstein est épaisse d'environ 500 mètres ; elle constitue un ensemble d'origine essentiellement fluviatile, deltaïque dans ses derniers mètres. Le grès sélectionné dans notre étude appartient à la subdivision du Buntsandstein supérieur et correspond au faciès du Grès à Voltzia inférieur ou Grès à Meule, d'une épaisseur d'une vingtaine de mètres, et constitué par des bancs massifs de grès quartzofeldspathiques et micacés, gris à roses, à grain fin. Ce grès est amené à l'affleurement dans le compartiment Est, relevé, de la faille Nord-Sud de Lorentzen-Mackwiller, située au bord du horst vosgien. Sa stratification est faiblement oblique ( $5^{\circ}$  à  $15^{\circ}$ ) à horizontale. Les prélèvements du matériau

utilisé dans notre étude ont été effectués dans une zone où la stratification présente, in situ, un pendage nul.

Ce grès est bien classé : la granulométrie des grains de quartz est relativement homogène, avec une taille moyenne de 0.1 mm. Le ciment, argileux, est très diffus. La densité et la porosité du matériau ont été déterminées par saturation d'eau distillée sous vide, selon les normes ISRM (1979). La densité moyenne mesurée est 2.07 ; la porosité effective moyenne est 23.05% (cf. Annexe A).

La composition minéralogique du grès, a été déterminée par analyse par diffraction X à l'Institut Dolomieu, Grenoble ; elle est donnée dans le Tableau II.1.

Quartz	44 %
Feldspath K	38 %
Mica	12 %
Chlorite	6 %
Epidote	Traces
Hématite	Traces

Tableau II.1 - Composition minéralogique du grès des Vosges étudié (analyse par diffraction X)

Des études de lames minces, prélevées parallèlement et perpendiculairement à la stratigraphie, montrent clairement une organisation des micas parallèlement au plan des strates, ainsi qu'un arrangement préférentiel des grains de quartz, subanguleux, et des pores. Un exemple d'observation est présenté sur la Photo II.1, pour une lame prélevée perpendiculairement à la stratigraphie sous microscope à transmission. L'observation fréquente de grains de quartz engrenés parallèlement à la stratigraphie montre que ce matériau a subi une forte charge lithostatique. Cette hypothèse est confirmée par la présence de nombreux feldspaths cassés ou kinkés. Un comptage de la porosité a été effectué sur des lames minces, prélevées parallèlement et perpendiculairement à la stratigraphie. Compte tenu de la forte porosité initiale du matériau et afin de ne pas perturber la structure initiale, les échantillons servant à la fabrication des lames minces ont préalablement été imprégnés, sous vide, d'une résine époxyde colorée, à très faible retrait (résine IP, Prési), polymérisant à froid. Les mesures ont été effectuées sur une grille de 900 points (30x30), le pas de déplacement étant de 0.2 mm. Les résultats obtenus indiquent une répartition non aléatoire de la structure

*avec vous observez les fissures? s'il y en a leur anisotropie peut être celle en fonction de l'orientation? il devrait y avoir des préférences*

des pores : parallèlement à la stratification, la surface relative des pores est de 26% ; elle est de 17% perpendiculairement à la stratification.

*Orientations de la lame mince?*

*trace de So??*



Photographie II.1 - Observation d'une lame mince sous microscope à transmission (lumière polarisée) ; grossissement x30.

L'anisotropie structurale constatée est de type planaire continue. La roche sera considérée, à l'échelle macroscopique, comme orthotrope de révolution, l'axe de révolution de l'orthotropie, noté  $v_3$ , étant la normale au plan de stratification.

## 2.2 Préparation des éprouvettes

Sept blocs parallélépipédiques de dimensions  $(350 \times 300 \times 250) \text{ mm}^3$  ont été prélevés dans la carrière selon sept orientations  $\delta$  différentes,  $\delta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$  (cf. Figure II.1). Dans chacun de ces blocs, nous avons carotté des éprouvettes cylindriques de diamètre 38.8 mm à l'aide d'un carottier diamanté *Craelius* monté sur une perceuse radiale *GSP*. Nous avons ensuite scié, à partir de ces éprouvettes, des échantillons d'une longueur d'environ 79 mm, puis rectifié les bases de ces échantillons à l'aide d'une rectifieuse plane *Ernault-Somua* jusqu'à obtenir un élargissement final de 2.

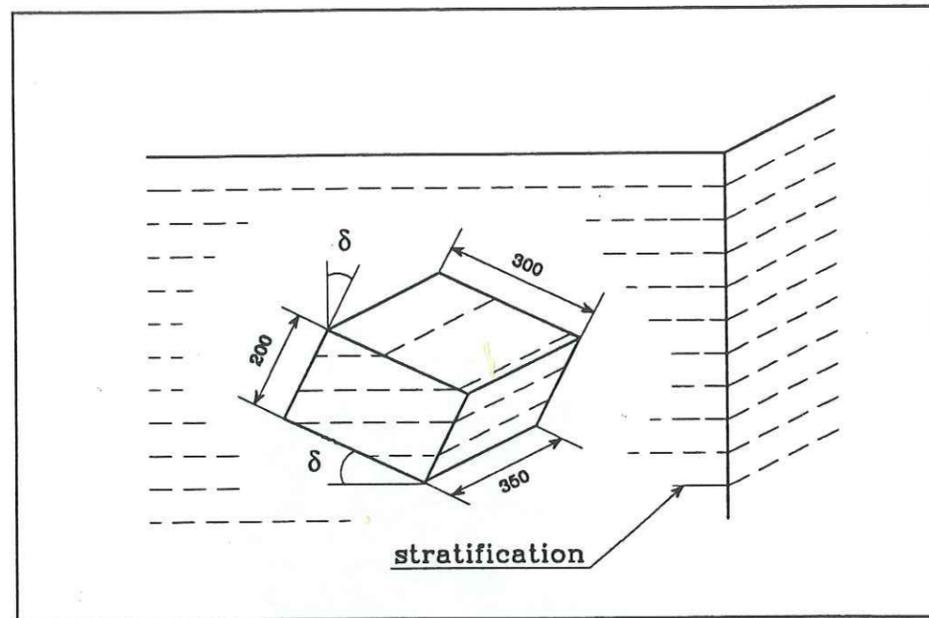


Figure II.1 - Prélèvement des blocs in situ.

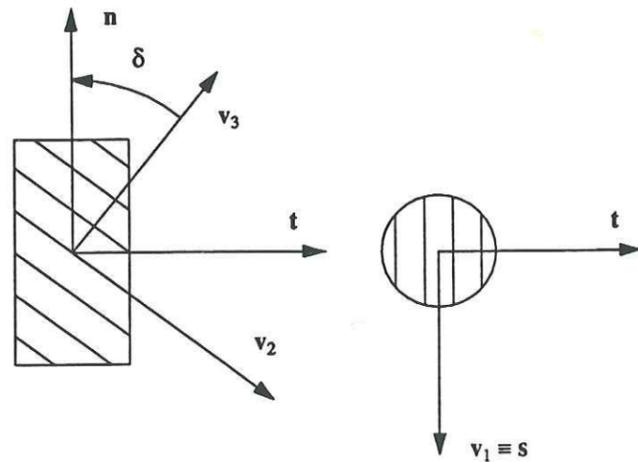


Figure II.2 - Définition de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes.

Chaque éprouvette a été repérée par l'angle  $\delta$  entre l'axe  $v_3$  de révolution de l'orthotropie et l'axe  $n$  de révolution de l'éprouvette ( $\delta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ ) (cf. Figure II.2). Pour les éprouvettes orientées à  $\delta \neq 0^\circ$ , des marques ont systématiquement été portées, après carottage, le long de deux génératrices diamétralement opposées, qui sont les intersections de l'éprouvette cylindrique avec le plan diamétral perpendiculaire au plan  $(n, v_3)$  de symétrie matérielle (cf. Figure II.3) ; ces marques permettent de repérer le plan  $(n, v_3)$  de chaque éprouvette. La direction du plongement du plan des strates a également été repérée.

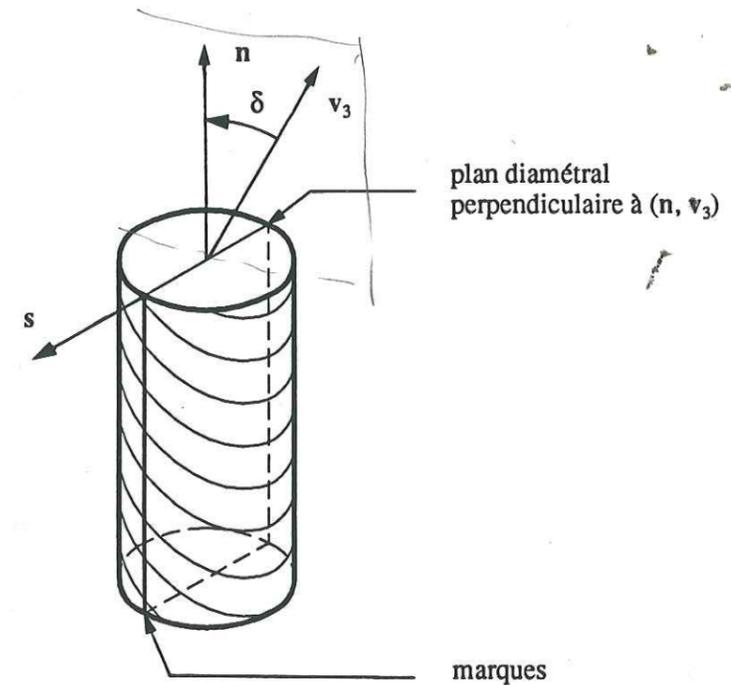
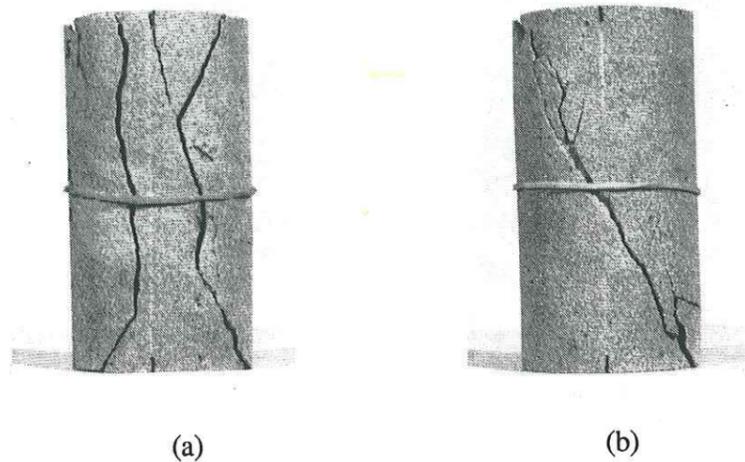


Figure II.3 - Définition des marques portées sur les génératrices des éprouvettes.

Une étude préliminaire (Millien, Boehler, 1990) nous a permis de mettre en évidence que, pour ce matériau, l'obtention de modes de rupture corrects lors d'essais de compression simple est conditionné par un usinage très soigné des éprouvettes, avec, en particulier, un écart de parallélisme entre les bases inférieur à  $\pm 5 \mu\text{m}$ . La photo II.2 présente, pour deux échantillons orientés à  $\delta = 45^\circ$  et soumis à une compression simple, les phénomènes constatés ; le plan de prise de vue est parallèle au plan  $(n, v_3)$  ; les marques portées le long des génératrices sont visibles sur les Photos II.2.a et II.2.b. Pour une rectification de qualité moyenne ( $\pm 10 \mu\text{m}$ ), ce qui correspond à la tolérance supérieure des normes ISRM (1983) pour ce type d'essai, la rupture se produit par écaillage de surface en extension (Photo II.2.a) ; au contraire, pour une rectification plus soignée ( $\pm 4 \mu\text{m}$ ), la rupture se produit par cisaillement, le long d'un plan bien défini (Photo II.2.b). A la suite de ces observations, nous

avons respecté, pour l'ensemble des éprouvettes testées, une tolérance d'écart au parallélisme entre les bases des éprouvettes toujours inférieure à  $\pm 5 \mu\text{m}$ .



Photographie II.2 - Influence de l'écart au parallélisme des bases des éprouvettes sur le mode de rupture en compression simple, pour l'orientation  $\delta = 45^\circ$  :  
 (a) écart de  $\pm 10 \mu\text{m}$  ; rupture par écaillage de surface et extension ;  
 (b) écart de  $\pm 5 \mu\text{m}$  ; rupture selon un plan de cisaillement.

Après usinage, les éprouvettes ont été séchées pendant 24 heures à  $105^\circ\text{C} \pm 2^\circ\text{C}$  dans une étuve ventilée, puis stockées dans un dessiccateur pour refroidissement au moins 24 heures avant les essais. Avant les essais, les dimensions des éprouvettes (diamètre, hauteur) ont été mesurées au pied à coulisse au 1/100ème de mm. Selon les normes ISRM, la hauteur est mesurée suivant deux génératrices perpendiculaires et le diamètre est mesuré trois fois sur les mêmes génératrices : en bas, au milieu et en haut de l'échantillon. Les tolérances d'usinage ont été testées au marbre, à l'aide d'un comparateur mécanique à  $1 \mu\text{m}$ . Le poids des éprouvettes a été mesuré à 0.1 g, afin de contrôler l'homogénéité du matériau.

### 2.3 Instrumentation par jauges

Afin de pouvoir mesurer, au cours des essais de compression isotrope et de compression sous différentes pressions de confinement, l'évolution du tenseur des déformations en fonction de la contrainte axiale  $\sigma$ , de la pression de confinement  $p$  et de l'orientation  $\delta$ , une

instrumentation directe des éprouvettes est indispensable. Compte tenu du type d'essais réalisés, l'emploi de capteurs tel que des extensomètres est à rejeter, les mesures ne pouvant être effectuées qu'à la surface d'une membrane de néoprène de 8/10ème de mm d'épaisseur, utilisée dans nos montages pour protéger l'éprouvette du fluide de confinement (cf § II.5 ci-dessous). Nous avons donc choisi d'utiliser des jauges d'extensométrie. Ceci nécessite une préparation préalable des éprouvettes, le collage direct des jauges sur un matériau poreux pouvant conduire à des mesures erronées, provoquées par le poinçonnement des grilles actives dans les pores lors d'essais sous pression de confinement. C'est pourquoi, les zones destinées à recevoir les jauges ont été préalablement recouvertes d'une sous-couche de colle époxyde GA2 (*Vishay Micromesures*). Les éprouvettes ont été ensuite réusinées jusqu'à retrouver la surface des grains, d'abord au tour jusqu'à une surépaisseur de colle de quelques 1/100ème de mm, puis manuellement au papier abrasif grain 320. Le contrôle de l'épaisseur de la sous-couche est facilité par la charge noire de la colle. La pénétration de la colle à l'intérieur de l'éprouvette a été contrôlée en réalisant des coupes au niveau de zones témoins lors d'essais préliminaires : elle reste négligeable, la viscosité du produit étant importante.

Le collage des jauges peut alors s'effectuer de façon classique. Pour la réalisation d'essais sous pression de confinement, les fabricants de jauges recommandent d'utiliser des jauges pelliculaires et de minimiser l'épaisseur du film de colle, afin de réduire les effets de la pression de confinement sur les mesures. Nous avons sélectionné, pour nos essais, les jauges CEA-06-125UN-120, ainsi que la colle époxyde AE-15 (*Vishay Micromesures*). Ces jauges sont encapsulées, ce qui facilite leur manipulation, et ont une grille de longueur 3.18 mm et de largeur 2.54 mm. L'élongation théorique maximale permise est de  $\pm 5\%$ . La pression de serrage appliquée lors de la polymérisation de la colle est de l'ordre de  $110 \text{ kN/m}^2$ . L'élongation théorique maximale des colles GA2 et AE15 est de  $\pm 15\%$ .

Le choix de la position et du nombre de jauges mises en place dépend de l'orientation  $\delta$  de l'éprouvette. Considérons un essai de compression sous pression de confinement sur un matériau orthotrope de révolution (cf. Figure II.4) :  $(v_1, v_2, v_3)$  est le repère privilégié du matériau,  $v_3$  étant l'axe de révolution de l'orthotropie ;  $(s, t, n)$  est le repère principal du tenseur  $T$  des contraintes appliquées, tel que  $s \equiv v_1$  ; les contraintes principales appliquées sont :  $\sigma_{ss} = \sigma_{tt} = p$  et  $\sigma_{nn} = \sigma$  ; l'orientation des éprouvettes est repérée par l'angle  $\delta = (v_3, n)$  ;  $E$  est le tenseur des déformations pures. L'analyse théorique de cet essai, dans les domaines du comportement élastique et plastique, développée par Boehler (1987), montre que :

- pour les orientations  $\delta = 0^\circ, 90^\circ$  (essais "dans les axes"), les directions principales du tenseur  $E$  des déformations coïncident avec celles du tenseur  $T$  des contraintes et sont donc connues ; pour déterminer entièrement le tenseur  $E$ , il suffit donc de mesurer les déformations principales, c'est-à-dire  $\epsilon_{ss} = \epsilon_{tt}, \epsilon_{nn}$  (deux mesures indépendantes) pour  $\delta = 0^\circ$  et  $\epsilon_{ss}, \epsilon_{tt}, \epsilon_{nn}$  (trois mesures indépendantes) pour  $\delta = 90^\circ$  ;

- pour  $\delta \neq 0^\circ, 90^\circ$  (essais "hors axes"), les directions principales du tenseur  $\mathbf{E}$  des déformations ne coïncident pas, en général, avec celles des contraintes ; dans l'essai triaxial de révolution,  $s \equiv v_1$  est une direction principale commune à  $\mathbf{E}$  et à  $\mathbf{T}$ , mais, dans le plan perpendiculaire à  $s$ , les directions principales de  $\mathbf{E}$  ne sont pas connues a priori, car elles ne coïncident pas avec celles de  $\mathbf{T}$  ; la détermination complète de  $\mathbf{E}$  exige quatre mesures indépendantes : la déformation principale  $\epsilon_{ss}$  et les déformations  $\epsilon_{tt}$ ,  $\epsilon_{nn}$  et  $\epsilon_{nt}$  dans le plan  $(n, t)$ .

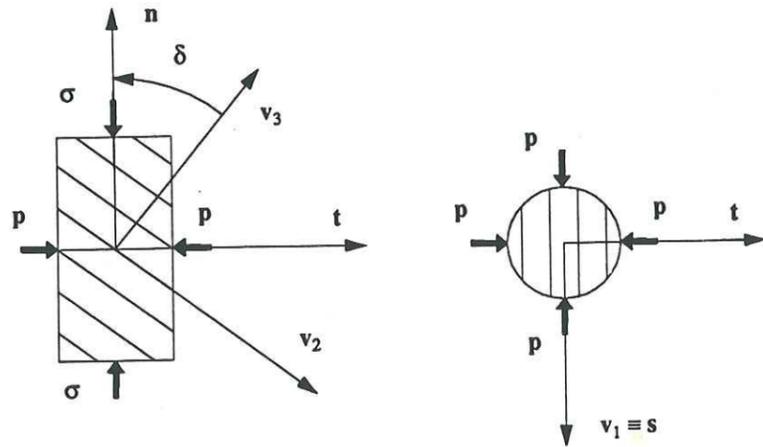


Figure II.4 - Epreuve orientée soumise à une compression axiale  $\sigma$  sous une pression de confinement  $p$

Pour la réalisation des essais sur des éprouvettes instrumentées par jauges, les sept orientations  $\delta$  des éprouvettes,  $\delta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$  ont été sélectionnées. Les jauges ont été positionnées dans les plans tangents  $(t, n)$  et  $(s, n)$  des éprouvettes, à mi-hauteur.

Les dispositions des jauges sont présentées sur la Figure II.5.

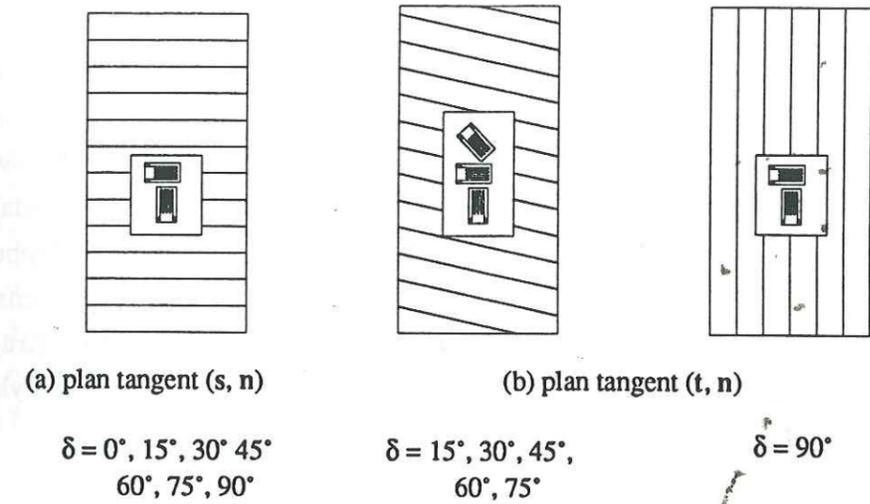


Figure II.5 - Disposition des jauges pour les différentes orientations  $\delta$  des éprouvettes

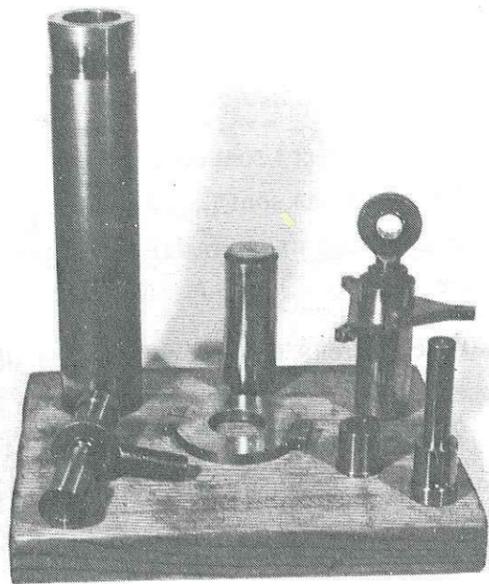
Pour les éprouvettes à  $\delta = 0^\circ$ , les axes  $s$  et  $t$  sont définis à une rotation près autour de  $n$  et les directions principales des déformations sont  $(., ., n)$ . Trois rosettes à  $90^\circ$  (formées unitairement par une jauge axiale et une jauge transversale) sont disposées tous les  $90^\circ$  sur la surface latérale des éprouvettes.

Pour les éprouvettes à  $\delta = 90^\circ$ , le repère  $(s, t, n)$  est parfaitement défini et coïncide avec les directions principales du tenseur des déformations. Deux rosettes à  $90^\circ$  sont disposées dans les deux plans tangents  $(t, n)$  diamétralement opposés, une rosette à  $90^\circ$  est disposée dans un plan tangent  $(s, n)$  et une jauge transversale dans le plan tangent  $(s, n)$  diamétralement opposé.

Pour les éprouvettes à  $\delta \neq 0^\circ$  et  $90^\circ$ , le repère  $(s, t, n)$  est parfaitement défini et la seule direction principale des déformations connue a priori est  $s \equiv v_1$ . Deux rosettes à  $45^\circ$  (formées unitairement par une jauge axiale, une jauge transversale et une jauge à  $45^\circ$ ) sont disposées dans les deux plans tangents  $(t, n)$  diamétralement opposés, l'instrumentation des plans  $(s, n)$  étant identique à celle choisie par  $\delta = 90^\circ$ . Afin d'obtenir des données cohérentes, dans chaque plan tangent nous avons positionné les jauges de sorte que les centres des grilles soient situés sur la génératrice de contact entre l'éprouvette cylindrique et le plan tangent.

## 2.4 Réalisation des essais de traction simple

Afin d'utiliser des éprouvettes cylindriques identiques à celles prévues pour les essais de compression, et pour améliorer l'homogénéité de l'état de contraintes au voisinage de l'amarrage (Barla et Goffi, 1974), les échantillons de traction ont été directement collés sur des pistons, selon les normes ISRM (1979). Pour limiter le développement de moments parasites au cours des essais, il est nécessaire que les deux pistons et l'éprouvette soient correctement alignés. Cet alignement a été obtenu grâce à l'utilisation d'un guidage dans un cylindre creux lors du collage de l'éprouvette sur les deux pistons. Les faces d'appui des deux pistons sont rectifiées et parfaitement perpendiculaires à l'axe du piston. L'ensemble des pièces du montage en traction simple est présenté sur la Photo II.3 (Boehler, Krüger, 1993). La colle utilisée est une colle spéciale béton/acier à base de méthacrylate de méthyle (*Röhm*) à durcissement rapide (3mn).



Photographie II.3 - Vue d'ensemble des pièces du montage de traction simple.

Les essais de traction simple ont été réalisés sur une presse servohydraulique universelle *Schenck* de capacité 1000 kN. La liaison entre les pistons collés sur l'éprouvette et les plateaux de la machine a été réalisée à l'aide de rotules (cf. Figure II.6). Les essais ont été pilotés à l'aide d'un capteur de déplacement inductif *Sensline*, de course  $\pm 1$  mm et de précision 0.05%, placé entre les plateaux de la machine. La vitesse de déplacement a été imposée à 1 mm/h.

1. éprouvette
2. piston de traction
3. cylindre de guidage
4. ouvertures de centrage
5. rotule de commande
6. plateau de mesure des déplacements
7. capteur inductif de déplacement

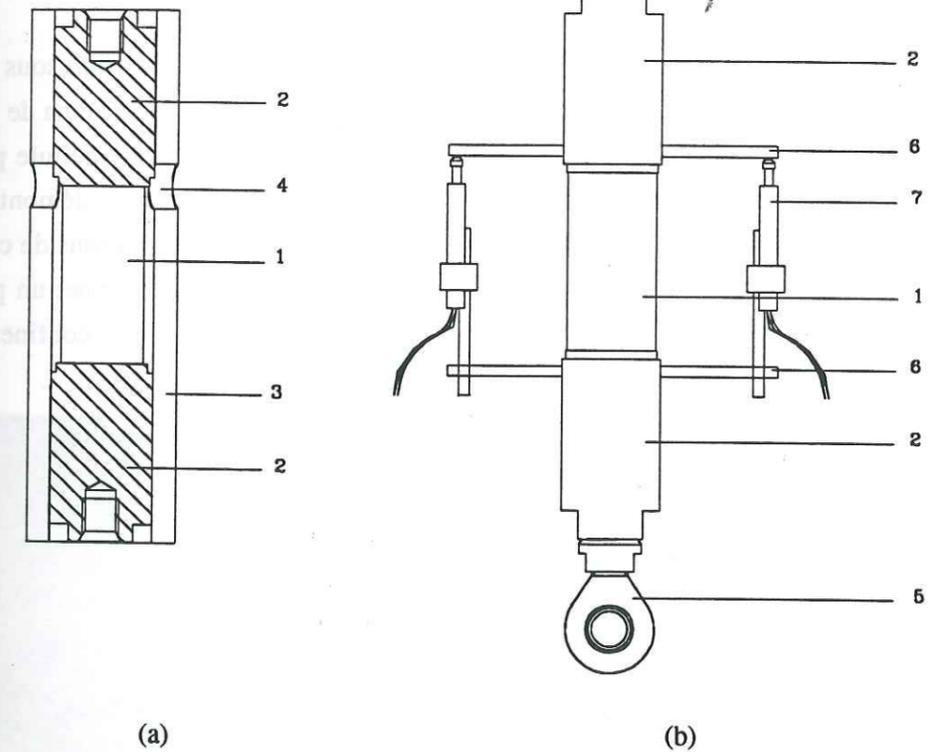
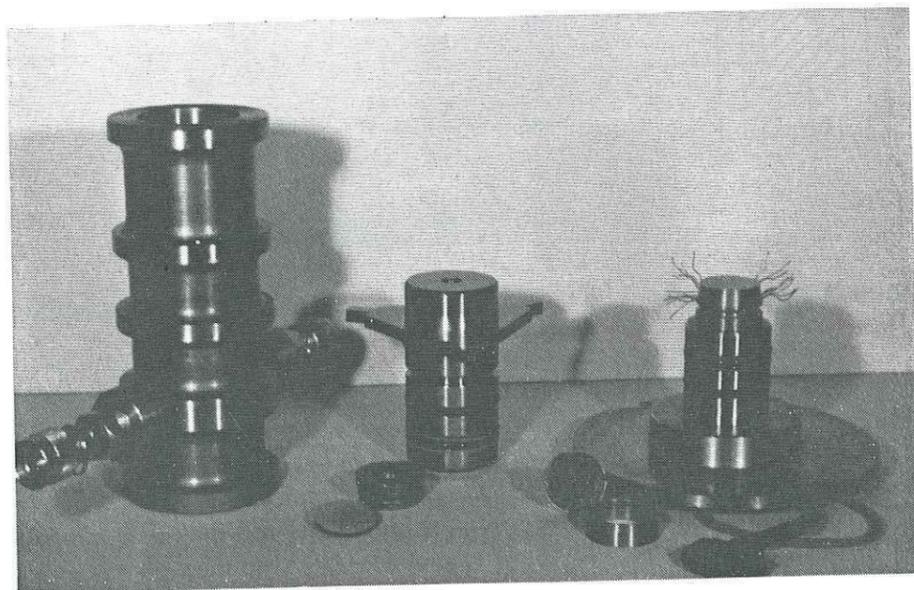


Figure II.6 - Schéma de principe du montage de traction simple :  
 (a) dispositif de guidage lors du collage des bases des éprouvettes sur les pistons de traction ;  
 (b) montage de traction simple et plateaux de mesure des déplacements.

Les efforts ont été mesurés à l'aide du capteur intégré dans la machine d'essai, d'une capacité  $\pm 1000$  kN et d'une précision de 0.02%. La mesure des déplacements axiaux a été effectuée par trois capteurs inductifs RDP, de course  $\pm 1$  mm et de précision 0.1%, fixés entre des plateaux solidaires des pistons de traction, et disposés selon les sommets d'un triangle équilatéral, dont le centre est situé sur l'axe de l'éprouvette (cf. Figure II.6). Ces trois capteurs servent non seulement à mesurer les déplacements axiaux, mais également à évaluer les effets de flexion parasites (cf. §2.7 ci-dessous). Une étude antérieure (Boehler, Krüger, 1993) a montré que les déformations de la colle sont négligeables.

### 2.5 Réalisation des essais de compression sous pression de confinement et de compression isotrope.

Pour la réalisation des essais de compression simple et de compression sous pression de confinement, nous avons utilisé la cellule triaxiale de Boehler, dont un schéma de principe est donné sur la Figure II.7 et une vue d'ensemble sur la Photo II.4. Cette cellule présente les avantages suivants : centrage automatique de l'éprouvette, montage et démontage rapide, bonne maniabilité (poids total 200 N). Elle permet d'appliquer des pressions de confinement jusqu'à 140 MPa ; le piston du bas, modifié pour notre application, permet un passage des câbles de liaison des jauges aux instruments, étanche vis à vis du fluide de confinement.



Photographie II.4 - Vue d'ensemble des éléments de la cellule triaxiale de Boehler.

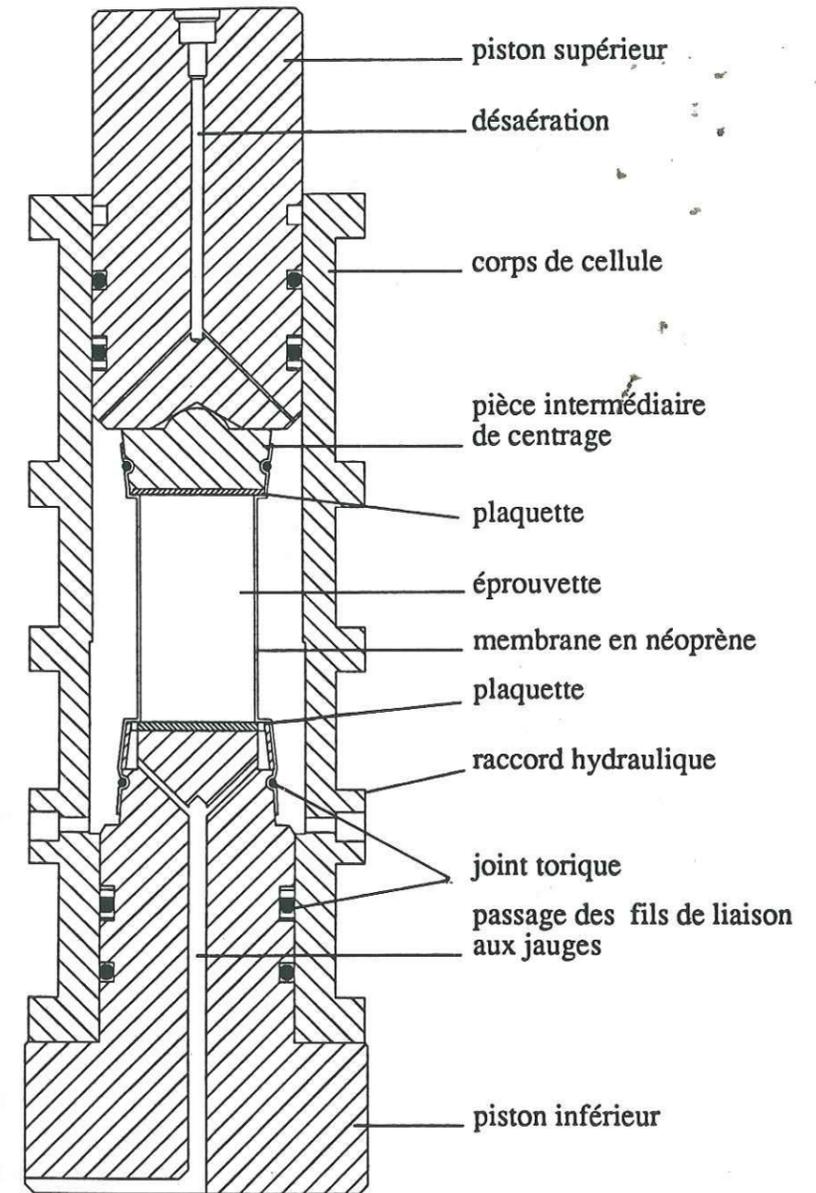


Figure II.7.a - Schéma de principe de la cellule triaxiale de Boehler : vue d'ensemble du montage de compression triaxiale.

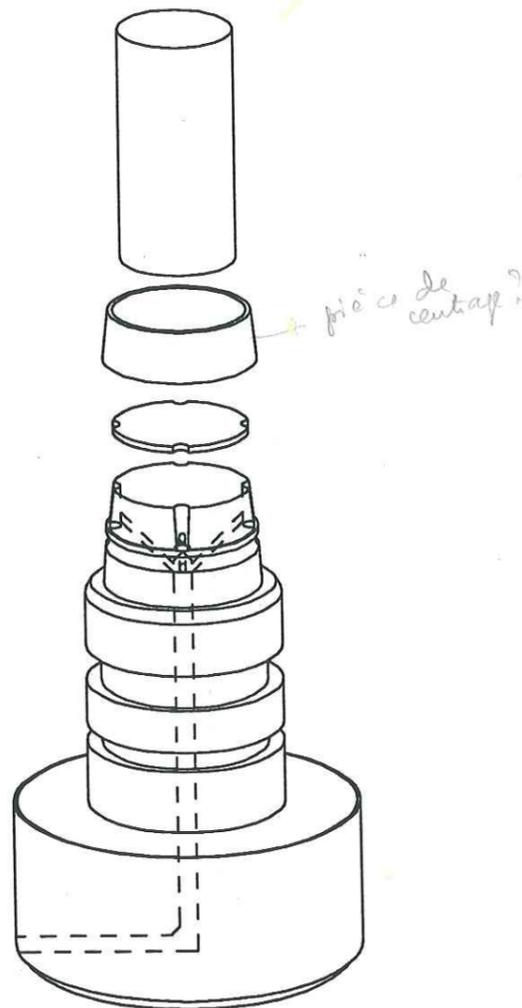


Figure II.7.b - Schéma de principe de la cellule triaxiale de Boehler :  
vue détaillée du piston inférieur.

Pour le montage des essais, les bases des éprouvettes sont enduites d'une fine pellicule de graisse graphitée ; des plaquettes d'acier rectifiées sont placées sur les bases de l'éprouvette, qui est ensuite montée entre le piston du bas et une pièce intermédiaire assurant le centrage automatique avec le piston du haut. Une membrane en néoprène d'épaisseur

8/10ème de mm, de diamètre 35 mm, est disposée autour de l'éprouvette, l'étanchéité vis-à-vis du fluide de confinement étant assurée par des joints toriques au niveau du piston du bas et de la pièce intermédiaire de centrage.

Les essais ont été réalisés sur la presse servohydraulique universelle *Schenck*, une rotule sphérique étant placée entre le piston du haut de la cellule et le plateau de la presse. Les essais ont été pilotés à l'aide du capteur inductif interne de la machine d'essai, de course  $\pm 125$ mm et de précision 1%. La vitesse de déplacement a été imposée à 0.1 mm/mn. La pression de confinement a été appliquée, et réglée à 0.2 MPa près, par un générateur de pression d'huile *Wykeham-Farance* de capacité 140 MPa.

Le protocole des essais est le suivant : contact assuré entre le piston du haut et l'éprouvette, grâce à une faible précharge (1 kN) ; montée de la pression de confinement, l'écart entre les plateaux de la machine étant maintenu fixe ; application des surcharges axiales.

Pour la réalisation des essais de compression isotrope, un montage identique a été utilisé, mais avec suppression du contact entre la pièce de centrage et le piston du haut à l'intérieur de la cellule. Au cours des essais, l'écartement entre les plateaux de la machine est maintenu fixe.

Les efforts ont été mesurés à l'aide du capteur interne de la machine d'essais (cf. §2.4). Les déplacements axiaux ont été mesurés à l'aide de trois capteurs inductifs *RDP*, de course  $\pm 5$  mm et de précision 0.08%, disposés entre des plateaux solidaires des pistons de la cellule et disposés selon les sommets d'un triangle équilatéral ; ces mesures permettent d'évaluer la qualité de l'essai. Au cours des essais, la pression de confinement a été contrôlée par un capteur de pression *Jules Richard*, de capacité 100 MPa et de précision 0.1%, raccordé à la cellule. Pour les éprouvettes instrumentées par des jauges, toutes les composantes du tenseur des déformations ont été mesurées à partir des signaux des jauges.

## 2.6 Acquisition des données

Lors des essais, les signaux des capteurs de force, des capteurs de déplacement inductifs, des jauges d'extensométrie et du capteur de pression, ont été traités et enregistrés en permanence à l'aide d'une chaîne d'acquisition *Vishay Micromesures Système 4000*. Cette chaîne est construite autour d'un micro-ordinateur compatible PC, les données étant stockées sur disquettes. La conversion analogique - numérique est réalisée sur 16 bits, dont 14 sont utilisés pour les valeurs absolues des signaux. Les résolutions correspondant à cette conversion sont, pour les capteurs utilisés :

- 1 à 4. 10<sup>-6</sup> pour les jauges (gamme normale 15 000. 10<sup>-6</sup> ou étendue 60 000.10<sup>-6</sup>) ;
- 6.1 N (essais de traction), 12.21 N (essais de compression simple), 30.5 N (essais sous pression de confinement) pour le capteur de force interne, en fonction du gain choisi ;
- 0.06 μm pour les capteurs inductifs *RDP* ± 1mm, 0.3 μm pour les capteurs inductifs *RDP* ± 5mm ;
- 0.07 MPa pour le capteur de pression.

Les mesures ont été effectuées toutes les 1 à 10 secondes, suivant la durée de l'essai, de façon à obtenir 300 à 1500 points de mesure par essai.

## 2.7 Méthodes de dépouillement des données expérimentales

### 2.7.1 Calcul des contraintes

Pour les essais de compression simple et de traction simple, les contraintes axiales sont calculées par :

$$\sigma_n = \frac{F}{S_0} \quad , \quad (II.1)$$

- où :
- *F* est la force axiale instantanée,
  - *S*<sub>0</sub> la section initiale de l'éprouvette, mesurée avant l'essai.

Pour les essais sous pression de confinement, la surcharge axiale  $\sigma_n - p$  est calculée par :

$$\sigma_n - p = \frac{1}{S_0} \left( F - \frac{F_0 P}{P_0} \right) \quad , \quad (II.2)$$

- où :
- *p*<sub>0</sub> est la pression initiale en début d'essai,
  - *F*<sub>0</sub> la force initiale équilibrant la pression *p*<sub>0</sub>,
  - *p* la pression de confinement instantanée.

La formule (II.2) corrige les effets des faibles variations de pression au cours de l'essai.

Pour les essais de traction simple, les contraintes axiales sont corrigées des effets d'une flexion parasite éventuelle par une méthode proposée dans (Boehler, Krüger, 1993). Le calcul est basé sur l'hypothèse d'un champ de déplacement linéaire dans la section droite supérieure de l'éprouvette. Le torseur des forces appliquées est équivalent à un vecteur glissant unique, équivalent à l'effort normal. Ce vecteur glissant intersecte la section droite supérieure de

l'éprouvette en un point, dont la distance au centre de la section droite, appelée excentricité *e*, est donnée par :

$$e = \frac{D_0}{8} (\epsilon_{\max} - \epsilon_{TP}) \quad , \quad (II.3)$$

- où :
- *D*<sub>0</sub> est le diamètre de l'éprouvette mesuré avant l'essai,
  - $\epsilon_{\max}$  la déformation normale maximale sur le bord de la section droite supérieure de l'éprouvette,
  - $\epsilon_{TP}$  la déformation de traction pure au centre de la section droite.

Les déformations  $\epsilon_{\max}$  et  $\epsilon_{TP}$  sont calculées à partir des mesures fournies par les trois capteurs inductifs *RDP* ± 1mm.

Le taux de flexion, *T<sub>f</sub>* en %, s'exprime par :

$$T_f = 100 \frac{8e}{D_0} \quad ; \quad (II.4)$$

il fournit une mesure directe de la qualité de l'essai.

Finalement, la contrainte normale maximale sur le bord de l'éprouvette est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{cor}} &= \frac{F}{S_0} + \frac{M}{I} \frac{D_0}{2} \quad , \\ &= \left( 1 + \frac{8e}{D_0} \right) \frac{F}{S_0} \quad , \end{aligned} \quad (II.5)$$

- où :
- *M* est le moment de flexion, *M* = *F e* ;
  - *I* est le moment de flexion de la section droite de l'éprouvette par rapport à un axe passant par le centre de cette section, *I* = π *D*<sub>0</sub><sup>4</sup> / 64

Un exemple de dépouillement des données expérimentales en traction simple est présenté sur les Figures II.8 à II.11. La Figure II.8 présente les déplacements mesurés par les trois capteurs inductifs *RDP* ± 1 mm en fonction de la contrainte axiale brute *F/S*<sub>0</sub> : le résultat varie de façon significative suivant la position des capteurs par rapport à l'éprouvette. Les Figures II.9 et II.10 présentent les évolutions correspondantes de l'excentricité *e* et du taux de flexion *T<sub>f</sub>* en fonction de la déformation en traction pure  $\epsilon_{TP}$ . Typiquement, l'excentricité et le taux de flexion diminuent au cours de l'essai, puis croissent rapidement lors de la rupture. Les évolutions de la contrainte axiale brute *F/S*<sub>0</sub> et de la contrainte corrigée  $\sigma_{\text{cor}}$  en fonction de la déformation de traction pure  $\epsilon_{TP}$  sont présentées sur la Figure II.11. On peut observer que la correction de la contrainte normale est importante : les valeurs des résistances limites sont, en particulier, fortement influencées par la flexion parasite. Ces corrections ont été effectuées systématiquement pour tous les essais de traction ; l'ensemble des courbes d'évolution du taux de flexion est présenté dans l'Annexe B.

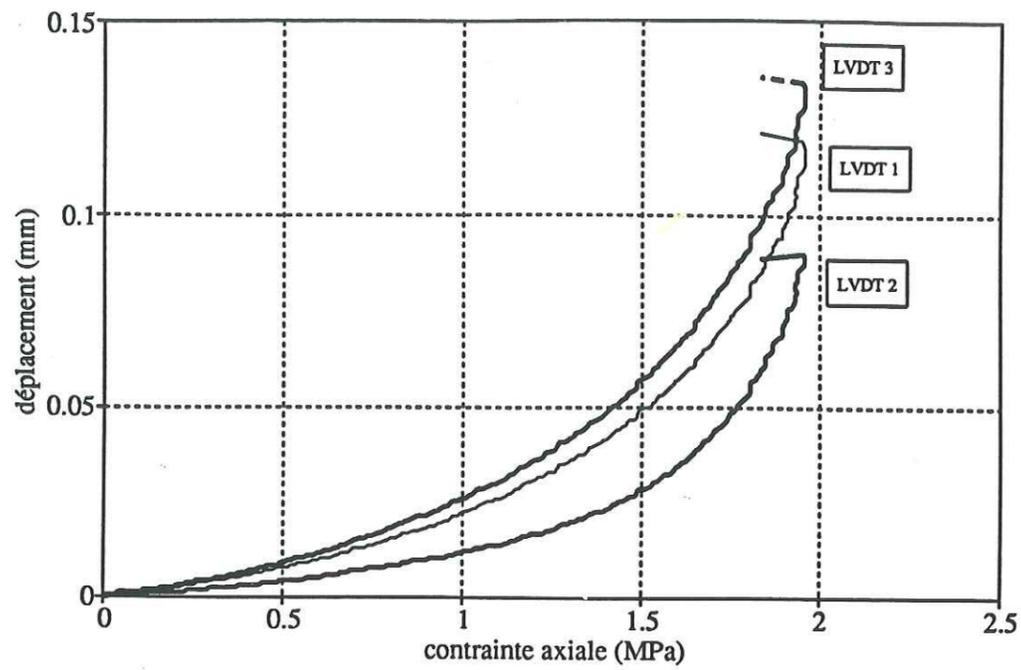


Figure II.8 - Essai de traction simple sur une éprouvette orientée à  $\delta = 45^\circ$  : déplacements relatifs des trois capteurs inductifs placés entre les pistons de traction.

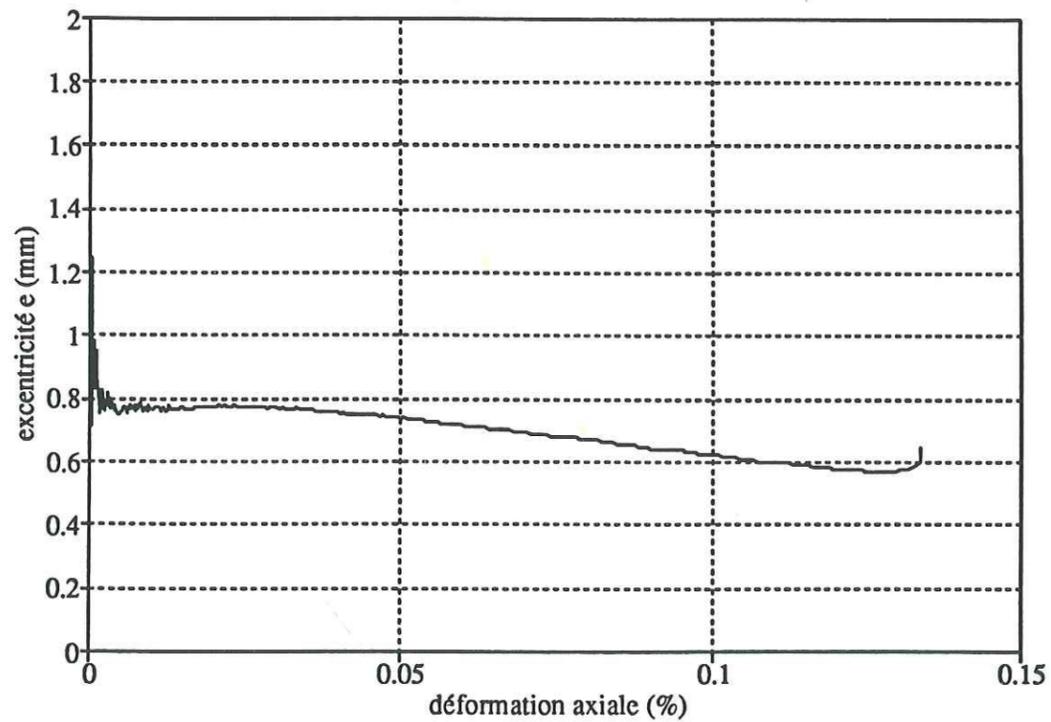


Figure II.9 - Essai de traction simple sur une éprouvette orientée à  $\delta = 45^\circ$  : évolution de l'excentricité  $e$  de la charge en fonction de la déformation de traction pure  $\epsilon_{TP}$ .

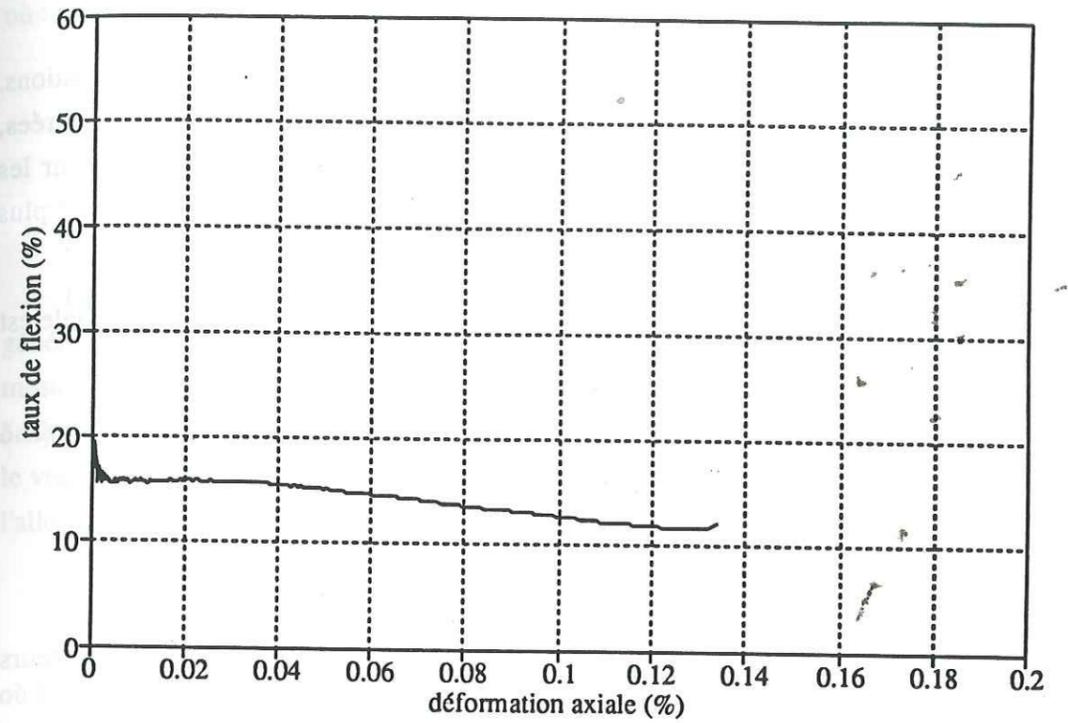


Figure II.10 - Essai de traction simple sur une éprouvette orientée à  $\delta = 45^\circ$  : évolution du taux de flexion  $T_f$  en fonction de la déformation de traction pure  $\epsilon_{TP}$ .

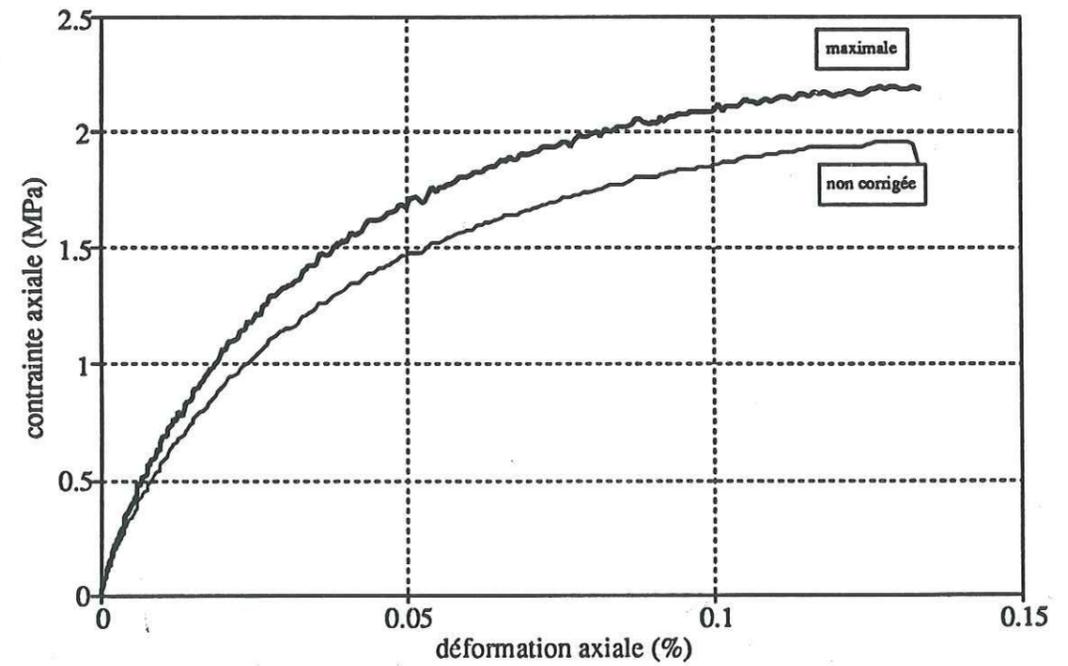


Figure II.11 - Essai de traction simple sur une éprouvette orientée à  $\delta = 45^\circ$  : courbes contraintes/déformation de traction pure.

### 2.7.2 Calcul des déformations

Les mesures des déformations sont traitées dans le formalisme des petites déformations. Cette hypothèse est justifiée par le fait que les déformations totales limites mesurées, correspondant à la résistance maximale atteinte, sont toujours inférieures à 2.5% pour les essais réalisés. Au delà de cette limite, l'homogénéité des champs de déformation n'est plus assurée et les mesures n'ont plus qu'un sens local.

Pour les éprouvettes non munies de jauges (essais de traction), la déformation axiale est calculée par :

$$\epsilon_{nn} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad , \quad (II.6)$$

- où :
- $l_0$  est la hauteur initiale de l'éprouvette mesurée avant l'essai,
  - $\Delta l$  est la variation instantanée du déplacement.

Les variations  $\Delta l$  sont les moyennes arithmétiques des mesures effectuées à l'aide des capteurs inductifs RDP.

Pour les éprouvettes instrumentées par des jauges (essais de compression), les mesures brutes obtenues sont systématiquement corrigées d'un certain nombre d'effets perturbateurs :

- a) non-linéarité du pont de Wheatstone ;
- b) désensibilisation due à la longueur de ligne ;
- c) effets thermiques ;
- d) effets de la pression de confinement ;
- e) erreurs dues à un mauvais alignement des jauges ;
- f) erreurs dues à l'effet transversal (sensibilité de la mesure à la déformation transversale).

Le système d'acquisition utilisé effectue une correction automatique des erreurs a) et b) pour le montage en quart de pont trois fils, qui a été adopté.

Les effets thermiques sont limités par le choix d'une compensation adaptée, en fonction des coefficients de dilatation linéaire de grès, disponibles dans la littérature, et par la faible amplitude des variations de température en cours d'essai (+/- 3°C).

L'effet de la pression de confinement est une augmentation de résistance de la grille de l'ordre de  $20 \mu\Omega/\Omega/10$  MPa pour les jauges pelliculaires en constantan utilisées (Avril, 1984). Les déformations indiquées par le pont d'extensométrie sont corrigées par la formule :

$$m_c = m + \frac{2p}{GF} \quad , \quad (II.7)$$

- où :
- $m$  est la déformation instantanée indiquée (en  $\mu m/m$ ),
  - $p$  la pression instantanée mesurée (en MPa),
  - $m_c$  la déformation corrigée (en  $\mu m/m$ ),
  - $GF$  le facteur de jauge indiqué par le fabricant,
  - les compressions et les raccourcissements étant par convention comptés positivement.

Le positionnement d'une jauge par rapport à la direction théorique prévue est généralement réalisé avec une précision de  $\pm 2^\circ$ . Cette cause d'erreurs peut être corrigée par la mesure, pour chaque jauge, de l'angle exact formé par la direction des brins de la grille et l'axe de l'éprouvette. Soit  $N$  et  $\bar{N}$  respectivement le vecteur unitaire dans la direction axiale et le vecteur unitaire dans la direction transversale de la jauge ; l'allongement axial vrai  $\delta l/l_0$  et l'allongement transversal  $\delta b/b_0$  sont respectivement donnés par :

$$\frac{\delta l}{l_0} = NEN \quad ; \quad \frac{\delta b}{b_0} = \bar{N}E\bar{N} \quad , \quad (II.8)$$

où  $E$  est le tenseur des déformations à mesurer.

La correction de l'effet transversal est réalisée par l'expression suivante (Koss et Boehler, 1990) :

$$m_c = \left( \frac{1}{1-\nu_0 K_t} \right) NEN + \left( \frac{K_t}{1-\nu_0 K_t} \right) \bar{N}E\bar{N} \quad , \quad (II.9)$$

- où :
- $m_c$  est la mesure corrigée des effets de pression de confinement,
  - $K_t$  le coefficient de sensibilité transversale relatif fourni par le fabricant,
  - $\nu_0 = 0.285$  le coefficient de Poisson du matériau servant à l'étalonnage des jauges,
  - $N, \bar{N}, E$  sont exprimés dans le repère  $(s, t, n)$  pour l'application.

A partir des informations d'une rosette  $90^\circ$  (respectivement  $45^\circ$ ), on obtient ainsi un système linéaire de 2 (resp.3) équations à 2 (resp.3) inconnues, qui sont les composantes du tenseur des déformations réelles. Ce système est résolu, pour chaque point de mesure, en fonction de l'orientation initiale de chaque jauge, mesurée, avant les essais, à l'aide d'un cathétomètre, avec une précision de  $0.1^\circ$ . Les résultats des mesures des erreurs d'orientation sont présentés dans l'Annexe C.

### 2.7.3 Incertitude sur les mesures brutes

Des calculs d'erreur simples ont été réalisés, pour chaque type d'essai, à partir des précisions de mesure des caractéristiques géométrique des éprouvettes, de la force axiale, de

la pression de confinement et des déplacements. Les résultats présentés ci-dessous sont des erreurs quadratiques moyennes.

Les mesures brutes des contraintes sont ainsi obtenues avec une précision de :

- 0.17 MPa pour les essais de traction et de compression simple,
- 0.74 MPa pour les essais de compression sous pression de confinement.

Les mesures brutes des déformations axiales, pour les éprouvettes non instrumentées par jauges (essais de traction) sont obtenues avec une précision de  $55 \cdot 10^{-6}$ . Les mesures brutes des déformations par jauges d'extensométrie ont une précision liée à la qualité du pont d'extensométrie utilisé, soit, pour le *Système 4000*,  $3 \cdot 10^{-6}$  en gamme d'utilisation normale (élongation maximale permise  $\pm 15\,000 \cdot 10^{-6}$ , essais de compression simple) et  $12 \cdot 10^{-6}$  en gamme étendue (élongation maximale permise  $\pm 50\,000 \cdot 10^{-6}$ , essais de compression isotrope et de compression sous pression de confinement).

## Chapitre III

# Caractéristiques mécaniques anisotropes du matériau

Bien que les études expérimentales sur le comportement élasto-plastique des roches anisotropes soient assez nombreuses, les données expérimentales actuellement disponibles sont trop souvent partielles dans le domaine des déformations irréversibles, voire même dans le domaine élastique. Afin de pouvoir développer et identifier les lois de comportement élasto-plastiques des roches anisotropes sur des bases solides, il est essentiel de disposer de données expérimentales fiables, obtenues grâce à un programme d'essais cohérent, permettant de quantifier les phénomènes observés dans toute leur complexité. C'est un tel travail expérimental que nous avons essayé de réaliser pour le grès des Vosges.

Ce Chapitre est consacré à la présentation du comportement élasto-plastique anisotrope du grès des Vosges, dont les différents aspects ont été quantifiés dans notre étude expérimentale, grâce à des essais de compression isotropes, ainsi que des essais de compressions sous différentes pressions de confinement et des essais de tractions simples pour différentes orientations  $\delta$  entre la direction de la contrainte principale majeure (en valeur absolue) et l'axe de révolution de l'orthotropie de la roche. Grâce à l'instrumentation des éprouvettes par des jauges de déformation, toutes les composantes du tenseur des déformations élasto-plastiques ont été déterminées jusqu'à la rupture, en fonction à la fois de l'orientation  $\delta$  et de la pression de confinement  $p$ . Les caractéristiques essentielles suivantes ont pu être ainsi quantifiées :

- les cinq coefficients élastiques indépendants, ainsi que leur évolution en fonction de la pression de confinement ;

- pour chaque pression de confinement, l'évolution des différentes composantes du tenseur des déformations élasto-plastiques pour différentes orientations "dans les axes" et "hors-axes" des éprouvettes ;
- dans les essais "hors-axes", la valeur de l'angle  $\phi$  entre les directions principales des contraintes et celles des déformations élasto-plastiques, ainsi que son évolution jusqu'à la rupture des éprouvettes ;
- l'évolution, au cours de la déformation axiale, de la variation de volume, en fonction de l'orientation  $\delta$  et de la pression de confinement  $p$  ;
- les déformations axiales limites en fonction de  $\delta$  et de  $p$ .

Un programme important d'essais de résistance, en fonction des paramètres  $\delta$  et  $p$ , en compressions sous pressions de confinement et en traction simple permet l'identification réaliste d'un nouveau critère de rupture, proposé pour les roches présentant une anisotropie de type continu.

### 3.1 Comportement élasto-plastique anisotrope sous contraintes isotropes

Lorsqu'une roche à porosité non nulle est soumise à des compressions isotropes, non seulement des déformations élastiques, mais également des déformations irréversibles apparaissent. Ce phénomène a déjà été observé dans la littérature, par exemple par Pellegrino et al (1970) sur des tufs et des calcarénites isotropes, par Alliot, Boehler et Sawczuck (1977) sur une diatomite fortement anisotrope, et par Wissler et Simons (1985) sur des grès faiblement anisotropes. Notons que les roches isotropes étudiées par Pellegrino présentent un seuil de contrainte isotrope, au-delà duquel les liens cimenteux entre les grains sont brisés, le matériau cohérent se transformant en un milieu granulaire. Les phénomènes observés pour le grès sont tout à fait différents : jusqu'à la contrainte isotrope maximale appliquée dans notre étude (75 MPa) la structure interne se renforce par diminution de la porosité, résultant en une augmentation de la résistance.

Lorsqu'une roche anisotrope est soumise à des états de contraintes isotropes, à la fois les déformations élastiques et les déformations irréversibles présentent des parties déviatoires non nulles, ce phénomène étant évidemment dû au comportement anisotrope du matériau. Il en résulte qu'une étude sous contraintes isotropes permet de quantifier certaines caractéristiques du comportement élasto-plastique anisotrope, ainsi que leurs évolutions en fonction de la valeur de la contrainte isotrope appliquée. La quantification de ces caractéristiques anisotropes pour le grès des Vosges est l'objet de ce paragraphe.

### 3.1.1 Méthodes expérimentales et mesures brutes

Nous avons réalisé, sur le grès des Vosges, une série d'essais en compressions isotropes sur des éprouvettes orientées à  $\delta = 0^\circ$  et instrumentées par des jauges de déformation : deux jauges axiales diamétralement opposées et deux jauges transversales diamétralement opposées, selon le protocole présenté dans le Chapitre II ; les plans tangents correspondants sont appelés face 1 et face 3.

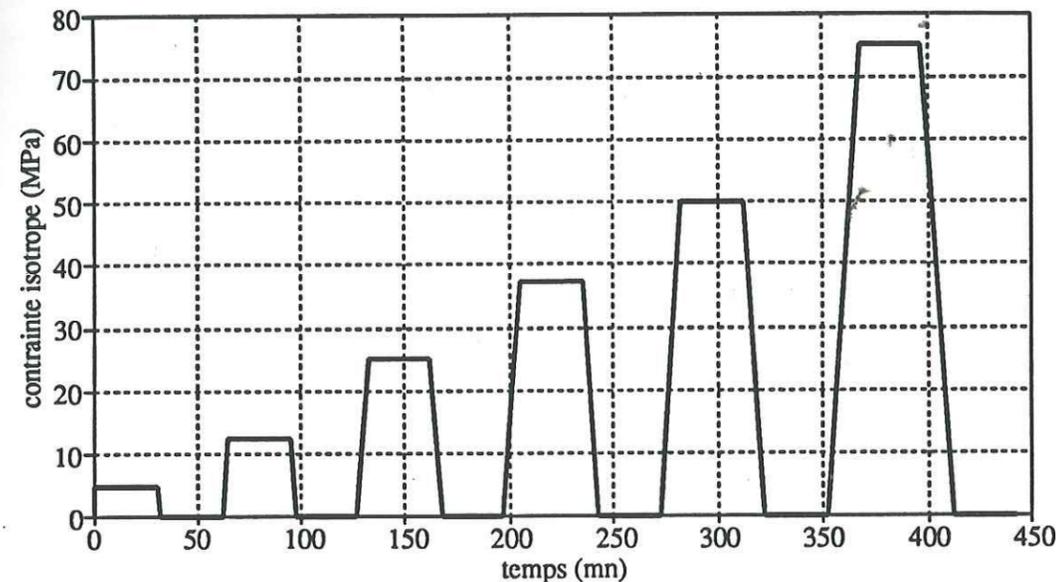


Figure III.1 - Diagramme de charge en compressions isotropes.

Sur la Figure III.1, nous présentons le diagramme de charges en contraintes isotropes  $\sigma$ . Nous avons appliqué des paliers de charge croissants :  $\sigma = 5$  MPa, 12.5 MPa, 25 MPa, 37.5 MPa, 50 MPa et 75 MPa ; chaque palier a été maintenu pendant trente minutes ; après chaque palier, chaque décharge a été maintenue pendant trente minutes ; les charges et les décharges ont été appliquées à la vitesse de 5 MPa/mn. Les signaux des jauges ont été enregistrés de façon continue. Nous présentons les résultats bruts d'un essai pour les deux jauges axiales sur les Figures III.2 et III.3, et pour les deux jauges transversales sur les Figures III.4 et III.5. Nous observons les phénomènes suivants :

- les mesures brutes des déformations, qu'elles soient axiales ou transversales, sont quasiment indépendantes du plan tangent considéré : l'écart maximum mesuré entre les deux faces est de l'ordre de 3 % pour les valeurs des déformations axiales, de 5% pour les valeurs des déformations transversales ;

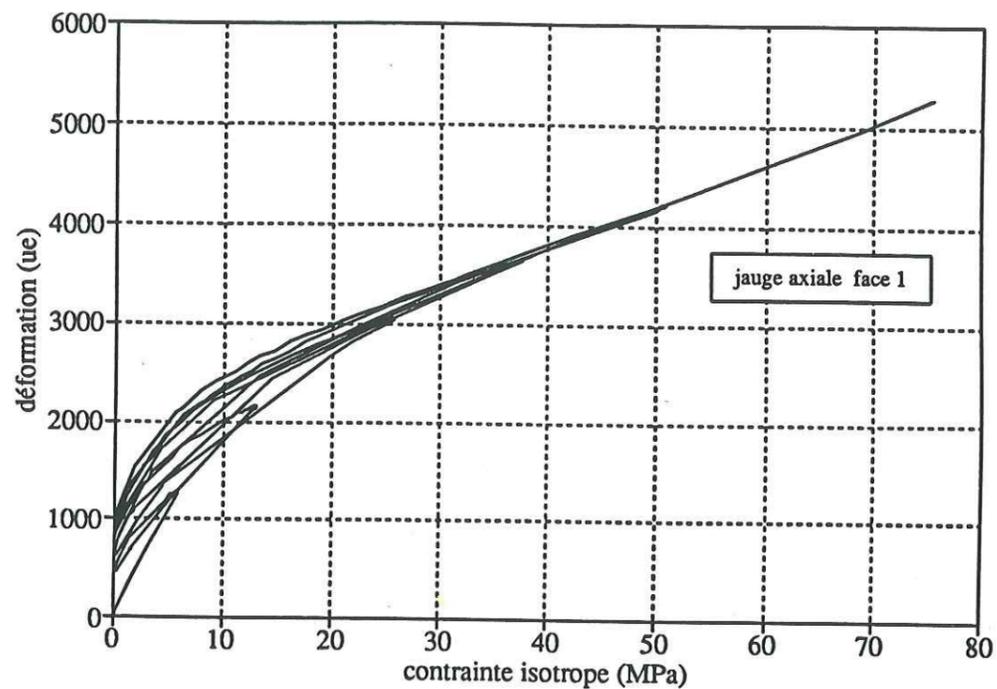


Figure III.2 - Courbes brutes contraintes isotropes - déformations axiales  $\epsilon_{33}$ , face 1.

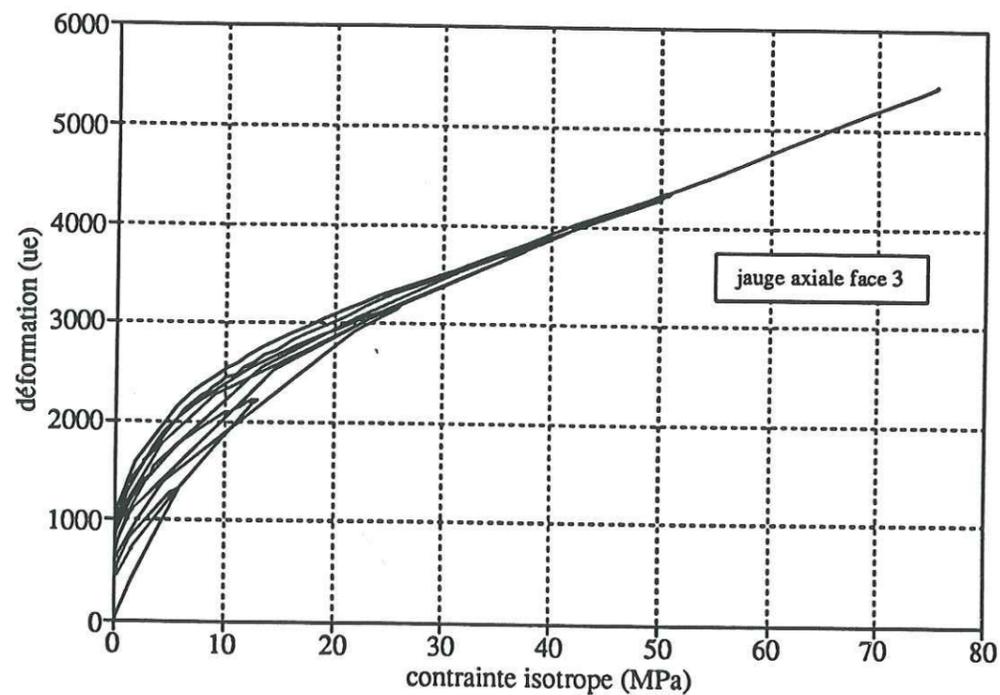


Figure III.3 - Courbes brutes contraintes isotropes - déformations axiales  $\epsilon_{33}$ , face 3.

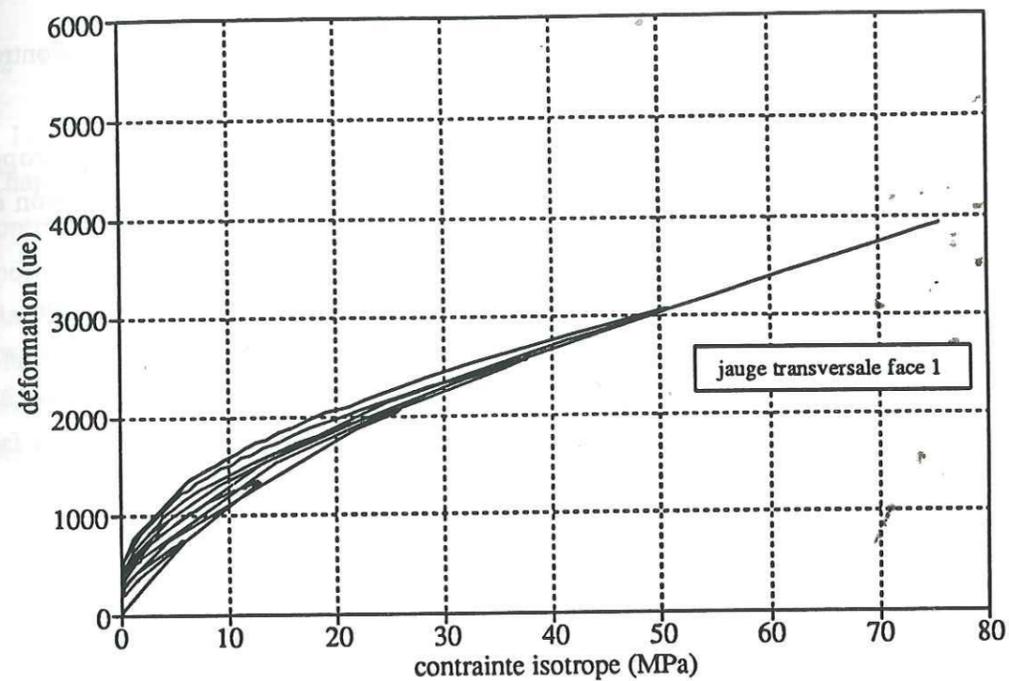


Figure III.4 - Courbes brutes contraintes isotropes - déformations transversales  $\epsilon_{11}$ , face 1.

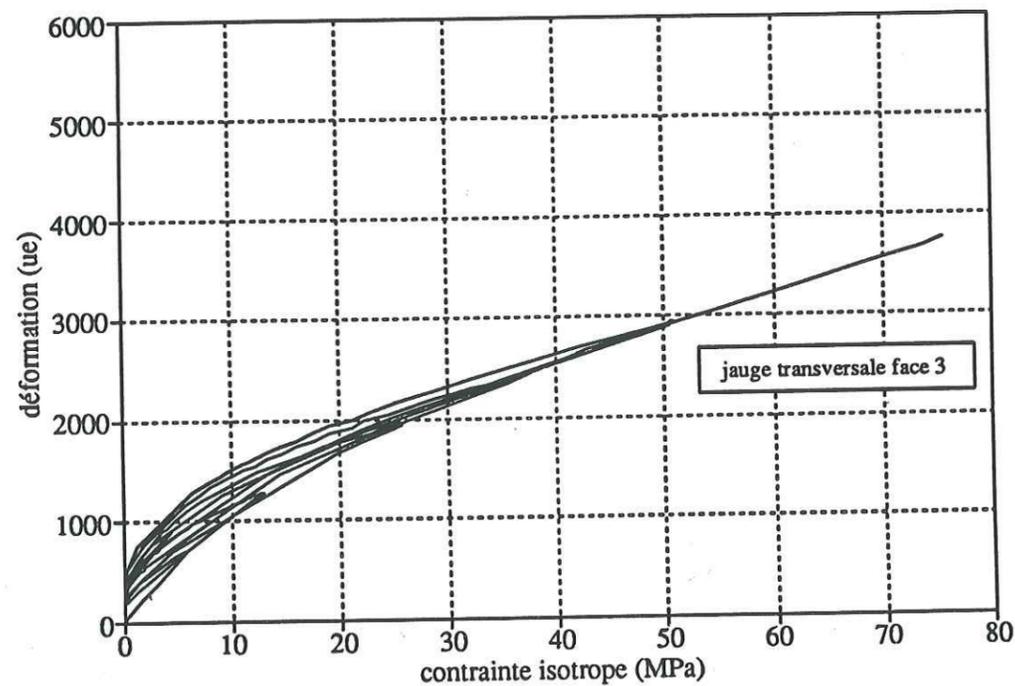


Figure III.5 - Courbes brutes contraintes isotropes - déformations transversales  $\epsilon_{11}$ , face 3.

- pour chaque contrainte isotrope, les valeurs mesurées des déformations axiales sont supérieures aux valeurs mesurées des déformations transversales ;
- à la fin de chaque décharge, les déformations irréversibles croissent avec la contrainte isotrope préalablement appliquée.

L'anisotropie apparente du comportement du matériau est du type orthotrope de révolution, la déformabilité dans la direction perpendiculaire au plan de stratification étant plus grande que dans le plan de stratification.

Au cours du maintien, pendant trente minutes, des paliers de contraintes isotropes, nous n'avons pas observé de déformations retardées. Ce comportement non visqueux de la roche sous contraintes isotropes est montré, par exemple, sur la Figure III.6, où, pour le palier à  $\sigma = 50$  MPa, nous observons que les signaux des jauges axiale et transversale collées sur la face 1 restent constants pendant le maintien de la charge.

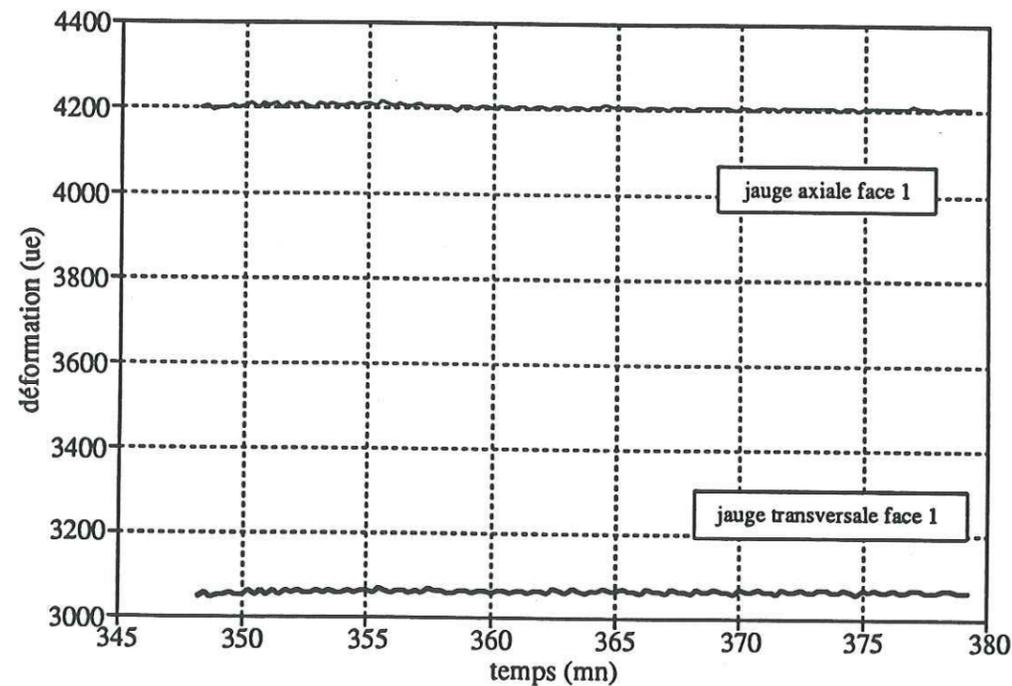


Figure III.6 - Evolution des déformations  $\epsilon_{11}$  et  $\epsilon_{33}$  mesurées sur la face 1 lors du palier de contrainte isotrope  $\sigma$  à 50 MPa.

### 3.1.2 Déformations totales, irréversibles et élastiques

Les mesures brutes des jauges ont été traitées et corrigées selon la procédure présentée au Chapitre II : les erreurs d'orientations et l'effet transversal des jauges, ainsi que les effets de la contrainte isotrope, ont été pris en compte. Suite aux des observations précédentes, dans l'hypothèse d'un comportement orthotrope de révolution, nous avons calculé la moyenne des valeurs corrigées obtenues à partir des signaux des jauges mesurant la même déformation :  $\epsilon_{11}$  est la déformation transversale moyenne,  $\epsilon_{33}$  la déformation axiale moyenne. Les déformations  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$  et  $\epsilon_{33}$  sont les composantes principales du tenseur  $E$  des déformations, exprimé dans les repères privilégiés  $(., ., v_3)$  du matériau :

$$E = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}=\epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (., ., v_3) \quad (III.1)$$

Pour chaque palier de contrainte isotrope  $\sigma$ , les déformations totales  $\epsilon_{ii}$  sont décomposées en la somme d'une partie élastique  $\epsilon_{ii}^{el}$  et d'une partie irréversible  $\epsilon_{ii}^{ir}$  :

$$\epsilon_{ii} = \epsilon_{ii}^{el}(\sigma) + \epsilon_{ii}^{ir}(\sigma) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{sans sommation}) \quad , \quad (III.2)$$

la partie irréversible  $\epsilon_{ii}^{ir}(\sigma)$  étant définie comme la déformation mesurée à la décharge du palier considéré.

Nous présentons, sur la Figure III.7, les déformations  $\epsilon_{33}$  cumulées, totales, élastiques et irréversibles, en fonction de la contrainte isotrope appliquée. Les mêmes courbes sont présentées sur la Figure III.8 pour les déformations transversales  $\epsilon_{11}$  et sur la Figure III.9 pour les déformations volumiques  $trE$ . Les valeurs expérimentales des différentes déformations cumulées sont présentées dans le Tableau III.1. Toutes les déformations sont contractantes.

Pour chaque contrainte isotrope, nous observons à nouveau que les valeurs des déformations axiales totales, élastiques et irréversibles sont supérieures aux valeurs des déformations transversales correspondantes.

Dans le domaine des contraintes isotropes appliquées, les évolutions des déformations irréversibles en fonction de la contrainte isotrope présentent une allure hyperbolique à asymptote parallèle à l'axe de la contrainte isotrope; ceci correspond à l'exigence physique que les déformations irréversibles se stabilisent pour des contraintes isotropes élevées. Les évolutions des déformations élastiques présentent une allure hyperbolique, indiquant que le comportement élastique du matériau varie avec la contrainte isotrope, mais se stabilise pour

des contraintes isotropes élevées. Il en résulte que les évolutions des déformations totales présentent également une allure hyperbolique. Les meilleurs hyperboles d'équation générale :

$$y^2 + 2b \sigma y + 2d y + 2e \sigma = 0$$

$$y = \epsilon_{11}^{irr}, \epsilon_{33}^{irr}, trE^{irr} \quad (III.3)$$

et les meilleurs hyperboles d'équation générale :

$$y^2 + 2b \sigma y + c \sigma^2 + 2d y + 2e \sigma = 0 \quad , \quad b^2 - c > 0 \quad ,$$

$$y = \epsilon_{11}, \epsilon_{33}, trE, \epsilon_{11}^{el}, \epsilon_{33}^{el}, trE^{el} \quad (III.4)$$

approximant les résultats expérimentaux ont été calculées par une méthode des moindres carrés. Elles sont présentées sur les Figures III.7 à III.9; les valeurs calculées des coefficients b, c, d, e sont données dans le Tableau III.2.

### 3.1.3 Degré d'irréversibilité et degré d'anisotropie des déformations

Pour chaque déformation et chaque contrainte isotrope, nous définissons le degré d'irréversibilité par le rapport entre la déformation irréversible et la déformation totale correspondante :

$$\frac{\epsilon^{irr}}{\epsilon^{total}} \quad (III.5)$$

Les évolutions, en fonction de la contrainte isotrope, du degré d'irréversibilité des déformations cumulées axiales  $\epsilon_{33}$  et transversales  $\epsilon_{11}$ , ainsi que de la déformation volumique  $trE$ , sont présentées sur la Figure III.10 ; les valeurs correspondantes sont données dans le Tableau III.3. Pour les trois déformations cumulées, nous observons que le degré d'irréversibilité est élevé pour de faibles contraintes isotropes, domaine où la forte porosité initiale de la roche joue un rôle prépondérant, cf. les zones de serrage observées sur les Figures III.7 à III.9 ; il décroît ensuite lorsque la contrainte isotrope augmente. Notons également que le degré d'irréversibilité des déformations axiales  $\epsilon_{33}$  est, pour chaque contrainte isotrope, plus élevé que celui des déformations transversales  $\epsilon_{11}$ .

Pour chaque contrainte isotrope, un degré d'anisotropie des déformations peut être défini par :

$$\frac{\sqrt{\frac{3trE'^2}{2}}}{trE} \quad (III.6)$$

où  $E$  est le tenseur des déformations et  $E'$  son déviateur.

contrainte isotrope	déformation $\epsilon_{33}$ totale (10 <sup>-6</sup> )	déformation $\epsilon_{11}$ totale (10 <sup>-6</sup> )	déformation $trE$ totale (10 <sup>-6</sup> )
de 0 à 5.7 MPa	1282	713	2707
de 0 à 12.7 MPa	2171	1298	4766
de 0 à 25.7 MPa	3104	2003	7110
de 0 à 37.6 MPa	3710	2503	8715
de 0 à 50.5 MPa	4269	2989	10248
de 0 à 75.5 MPa	5352	3831	13014

contrainte isotrope	déformation $\epsilon_{33}$ irréversible (10 <sup>-6</sup> )	déformation $\epsilon_{11}$ irréversible (10 <sup>-6</sup> )	déformation $trE$ irréversible (10 <sup>-6</sup> )
de 0 à 5.7 MPa	460	210	879
de 0 à 12.7 MPa	628	285	1198
de 0 à 25.7 MPa	768	353	1474
de 0 à 37.6 MPa	888	417	1722
de 0 à 50.5 MPa	968	466	1900
de 0 à 75.5 MPa	1022	491	2005

contrainte isotrope	déformation $\epsilon_{33}$ élastique (10 <sup>-6</sup> )	déformation $\epsilon_{11}$ élastique (10 <sup>-6</sup> )	déformation $trE$ élastique (10 <sup>-6</sup> )
de 0 à 5.7 MPa	822	503	1828
de 0 à 12.7 MPa	1543	1013	3568
de 0 à 25.7 MPa	2337	1650	5636
de 0 à 37.6 MPa	2822	2085	6993
de 0 à 50.5 MPa	3301	2524	8349
de 0 à 75.5 MPa	4330	3340	11009

Tableau III.1 - Déformations cumulées totales, irréversibles, et élastiques sous compressions isotropes.

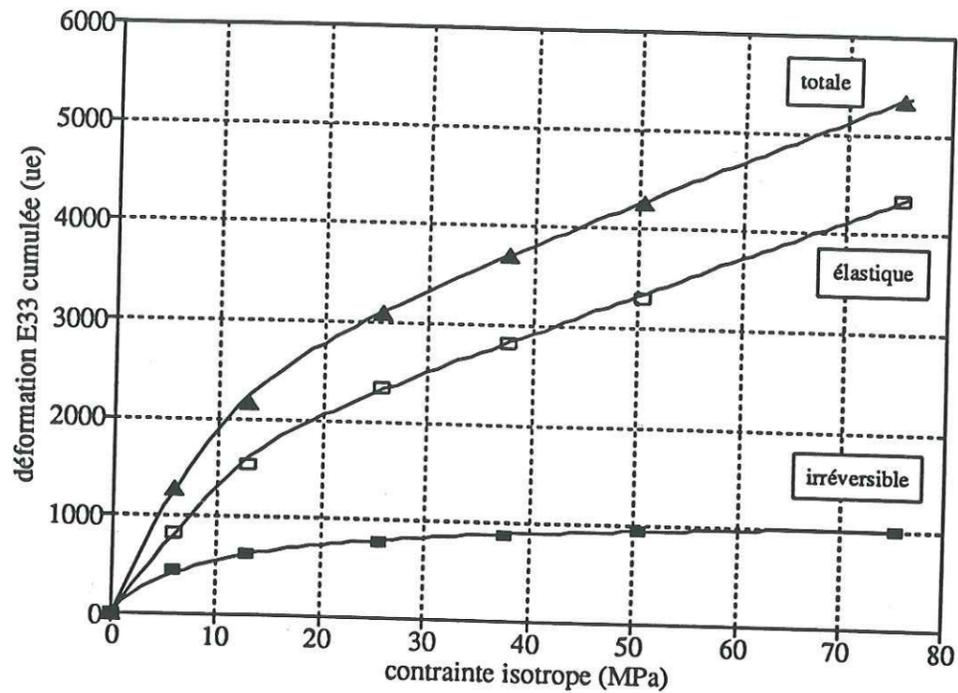


Figure III.7 - Evolution des déformations axiales cumulées  $\epsilon_{33}$  en fonction de la contrainte isotrope.

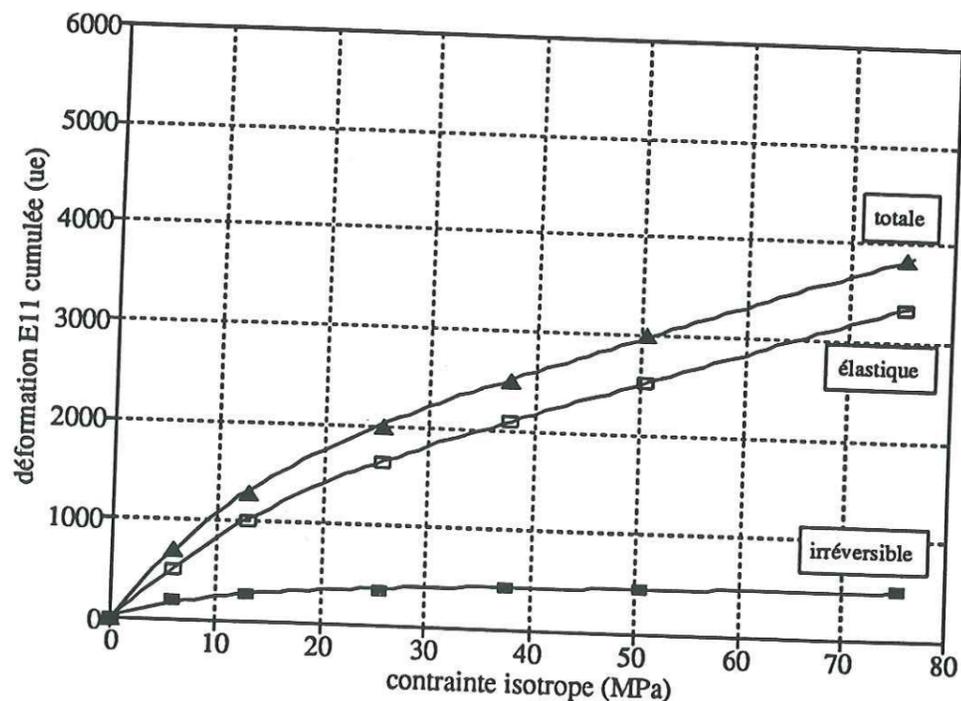


Figure III.8 - Evolution des déformations transversales cumulées  $\epsilon_{11}$  en fonction de la contrainte isotrope.

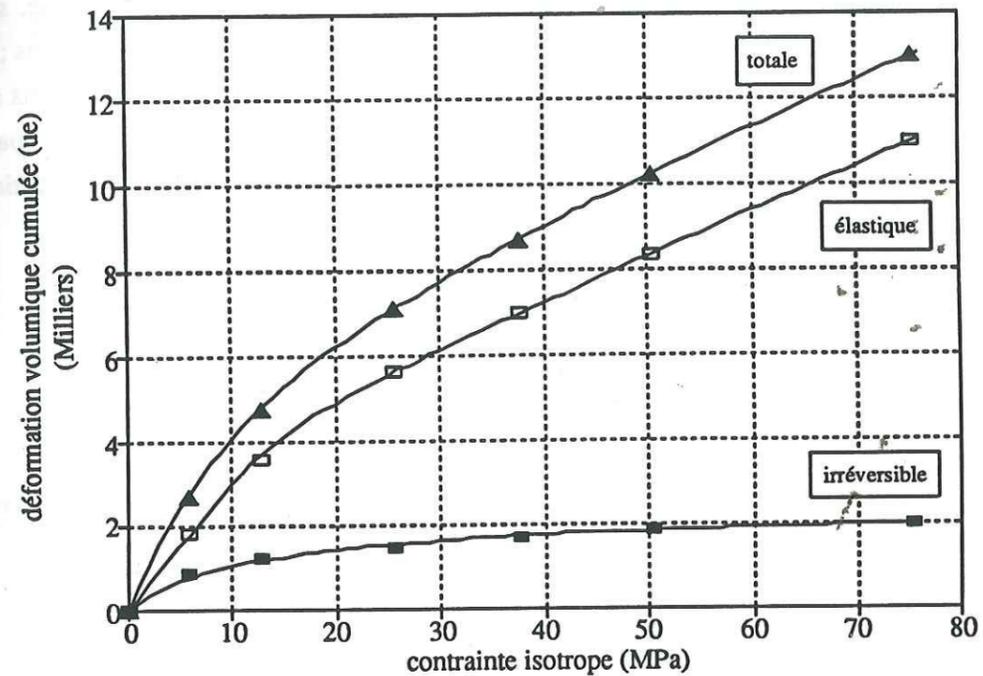


Figure III.9 - Evolution des déformations volumiques cumulées  $trE$  en fonction de la contrainte isotrope.

	b ( $10^{-6} \text{ MPa}^{-1}$ )	c ( $10^{-6} \text{ MPa}^{-2}$ )	d ( $10^{-6}$ )	e ( $10^{-6} \text{ MPa}^{-1}$ )
$\epsilon_{33}$ totale	- 161.41	0,01167	- 1386.08	0.33156
$\epsilon_{11}$ totale	- 112.01	0.00610	- 1196.35	0.16231
$trE$ totale	- 607.58	0.11292	- 6099.52	3.57421
$\epsilon_{33}$ irréversible	74.89	-	621.22	- 0.09206
$\epsilon_{11}$ irréversible	230.01	-	3042.62	- 0.13433
$trE$ irréversible	215.81	-	2265.32	- 0.52024
$\epsilon_{33}$ élastique	- 95.31	0.00591	- 754.60	0.10874
$\epsilon_{11}$ élastique	- 67.76	0.00329	- 585.53	0.05410
$trE$ élastique	- 217.61	0.03462	- 1668.68	0.52943

Tableau III.2 - Coefficients des équations des hyperboles d'approximation des évolutions des déformations cumulées en fonction de la contrainte isotrope.

Les évolutions de ce degré d'anisotropie, en fonction de la contrainte isotrope, sont présentées sur la Figure II.11 pour les parties élastiques et irréversibles des déformations ; les valeurs numériques correspondantes sont données dans le Tableau III.4. Nous observons que le degré d'anisotropie décroît lorsque la contrainte isotrope augmente, puis se stabilise à partir de la valeur  $\sigma = 50$  MPa, ce phénomène étant plus prononcé pour la déformation élastique que pour la déformation irréversible.

### 3.1.4 Modules d'incompressibilité

Le module d'incompressibilité élastique tangent  $K_{el}$  est défini par :

$$\frac{1}{K_{el}} = \frac{\partial \text{tr} E^{el}}{\partial \sigma} \quad (III.7)$$

où  $\sigma$  est la contrainte isotrope appliquée et  $\text{tr}E^{el}$  la déformation volumique élastique. De même, le module d'incompressibilité irréversible tangent  $K_{ir}$  est défini par :

$$\frac{1}{K_{ir}} = \frac{\partial \text{tr}E^{ir}}{\partial \sigma} \quad (III.7)$$

où  $\text{tr}E^{ir}$  est la déformation volumique irréversible. Nous avons déterminé analytiquement les valeurs des modules  $K_{ir}$  et  $K_{el}$  tangents, à partir des équations des meilleures hyperboles approximant les points expérimentaux (cf. §3.1.2). Les résultats obtenus aux points correspondant aux valeurs des paliers de contraintes isotropes appliquées lors des essais sont présentés dans le Tableau III.5. Les évolutions du module élastique tangent  $K_{el}$  et du module irréversible  $K_{ir}$ , en fonction de la contrainte isotrope, sont présentées, respectivement, sur les Figures III.12 et III.13. Nous observons que le module d'incompressibilité élastique  $K_{el}$ , après un palier initial, croît avec la contrainte isotrope, puis se stabilise à partir de 50 MPa. Cette croissance du module élastique est vraisemblablement due à la diminution de la porosité, correspondant à une densification du matériau; la phase de stabilisation correspond à la fermeture de la majorité des espaces intergranulaires. Le module d'incompressibilité irréversible  $K_{ir}$  croît rapidement avec la contrainte isotrope et tend vers une valeur infinie pour des contraintes isotropes élevées, ce qui correspond à l'exigence physique d'une variation de volume irréversible se stabilisant pour des contraintes isotropes élevées.

*à partir de  
pour les essais  
sur des zones  
suffisamment*

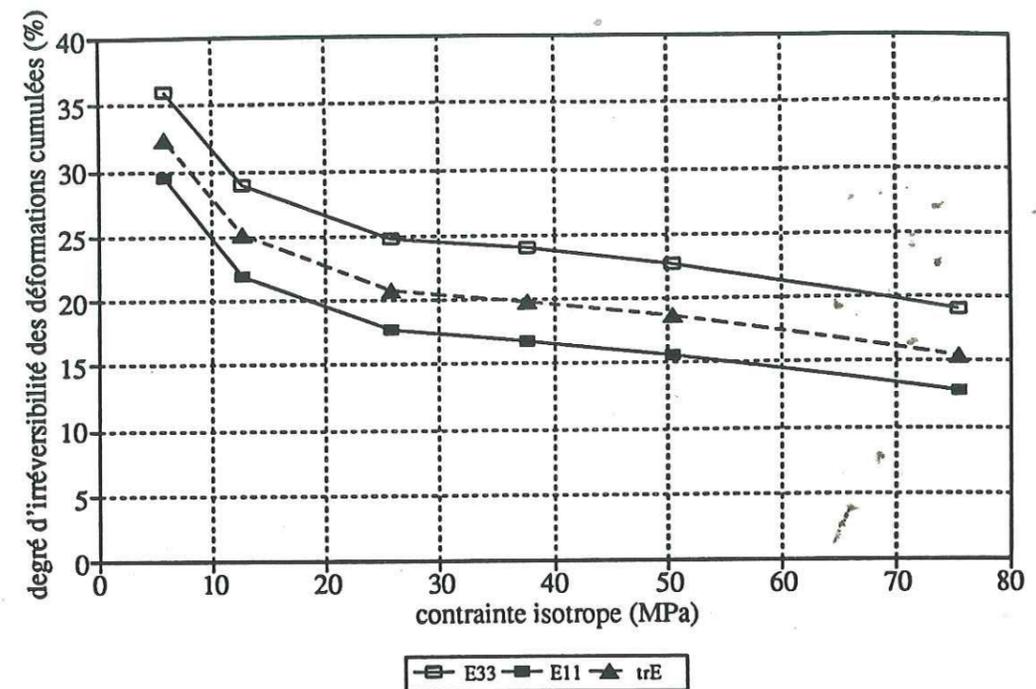


Figure III.10 Evolution du degré d'irréversibilité des déformations en fonction de la contrainte isotrope.

contrainte isotrope	degré d'irréversibilité déformation $\epsilon_{33}$	degré d'irréversibilité déformation $\epsilon_{11}$	degré d'irréversibilité déformation $\text{tr}E$
de 0 à 5.7 MPa	35.88%	29.45%	32.47%
de 0 à 12.7 MPa	28.93%	21.96%	25.14%
de 0 à 25.7 MPa	24.74%	17.62%	20.73%
de 0 à 37.6 MPa	23.94%	16.66%	19.76%
de 0 à 50.5 MPa	22.68%	15.59%	18.54%
de 0 à 75.5 MPa	19.10%	12.82%	15.41%

Tableau III.3 - Degré d'irréversibilité des déformations sous compressions isotropes.

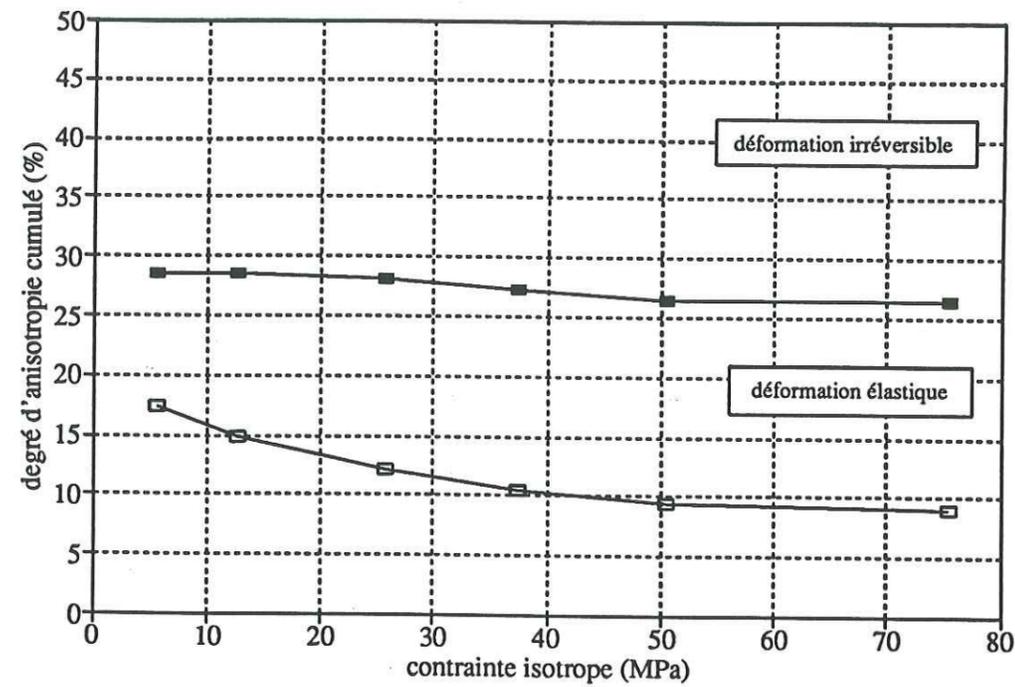


Figure III.11 - Evolution du degré d'anisotropie des déformations en fonction de la contrainte isotrope.

contrainte isotrope	degré d'anisotropie déformations élastiques	degré d'anisotropie déformations irréversibles
de 0 à 5.7 MPa	17.46%	28.44%
de 0 à 12.7 MPa	14.85%	28.61%
de 0 à 25.7 MPa	12.19%	28.12%
de 0 à 37.6 MPa	10.53%	27.34%
de 0 à 50.5 MPa	9.32%	26.42%
de 0 à 75.5 MPa	8.99%	26.49%

Tableau III.4 - Degré d'anisotropie des déformations sous compressions isotropes.

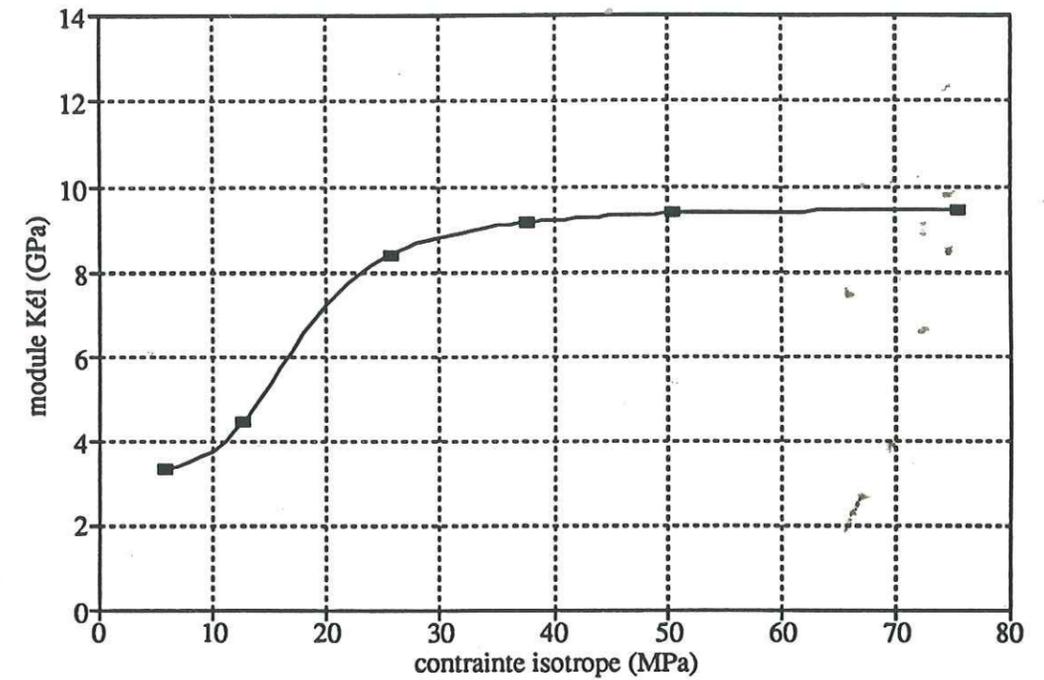


Figure III.12 - Evolution du module d'incompressibilité élastique tangent  $K_e$  en fonction de la contrainte isotrope.

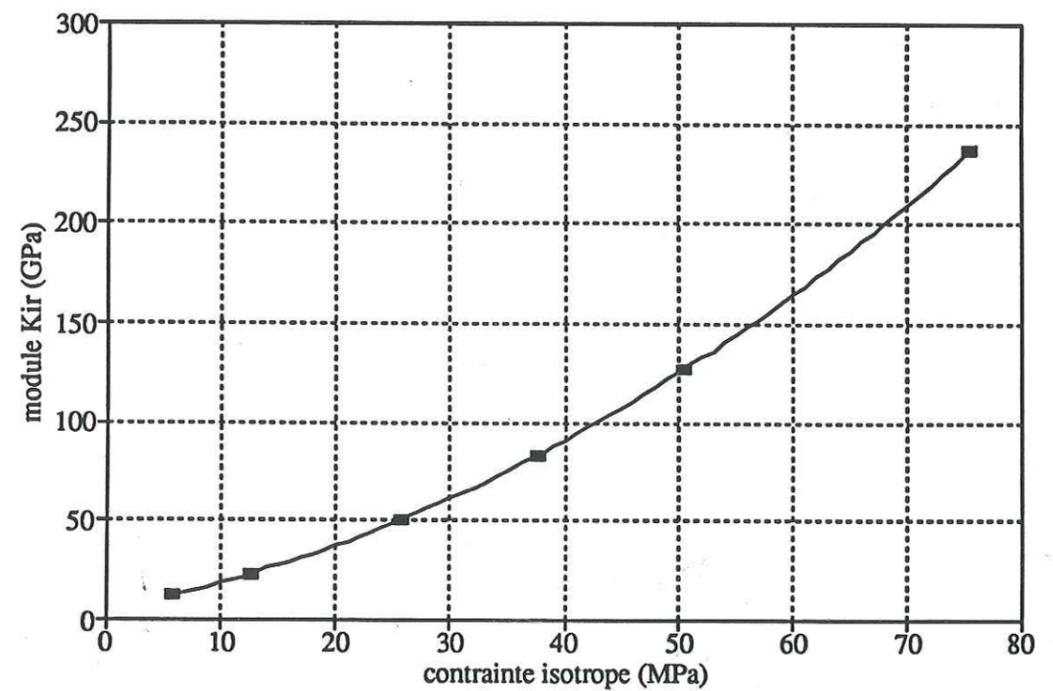


Figure III.13 - Evolution du module d'incompressibilité irréversible tangent  $K_{ir}$  en fonction de la contrainte isotrope.

contrainte isotrope	module tangent $K_{el}$	module tangent $K_{irr}$
5.7 MPa	3.34 GPa	11.99 GPa
12.7 MPa	4.48 GPa	23.31 GPa
25.7 MPa	8.43 GPa	50.82 GPa
37.6 MPa	9.17 GPa	83.60 GPa
50.5 MPa	9.38 GPa	127.36 GPa
75.5 MPa	9.48 GPa	236.58 GPa

Tableau III.5 - Modules d'incompressibilité tangents élastiques et irréversibles.

### 3.2 Comportement élasto-plastique anisotrope en compressions sous pressions de confinement

Nous avons réalisé une série d'essais sur des éprouvettes orientées à  $\delta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ , instrumentées par des jauges selon le protocole défini dans le Chapitre II, et soumises à des compressions simples et à des compressions sous trois pressions de confinement différentes,  $p = 12.5 \text{ MPa}, 25 \text{ MPa}, 50 \text{ MPa}$ . , cf. Figure III.14. Pour chaque éprouvette testée, nous avons déterminé l'évolution de toutes les composantes du tenseur des déformations, en fonction de la contrainte axiale  $\sigma$ , de la pression de confinement  $p$  et de l'orientation  $\delta$ , les différents modules et coefficients élastiques du matériau, ainsi que les déformations axiales limites. Pour la caractérisation des différents modes de rupture, qui seront présentés aux Chapitre IV, et des résistances directionnelles  $\sigma - p$ , nous avons effectué une seconde série d'essais, sans jauges, pour les mêmes orientations des éprouvettes, en compression simple et en compression sous cinq différentes pressions de confinement,  $p = 5 \text{ MPa}, 12.5 \text{ MPa}, 25 \text{ MPa}$  et  $50 \text{ MPa}$ . Dans cette seconde série, trois à six essais ont été effectués pour chaque orientation  $\delta$  et chaque pression de confinement  $p$ .

#### 3.2.1 Courbes contraintes - déformations

Afin de montrer la précision des mesures obtenues grâce au protocole défini dans le Chapitre II, nous présentons, sur la Figure III.15, un exemple de courbes brutes des mesures par jauges, obtenues pour l'éprouvette orientée à  $\delta = 60^\circ$  et testée sous la pression de confinement de  $50 \text{ MPa}$ .

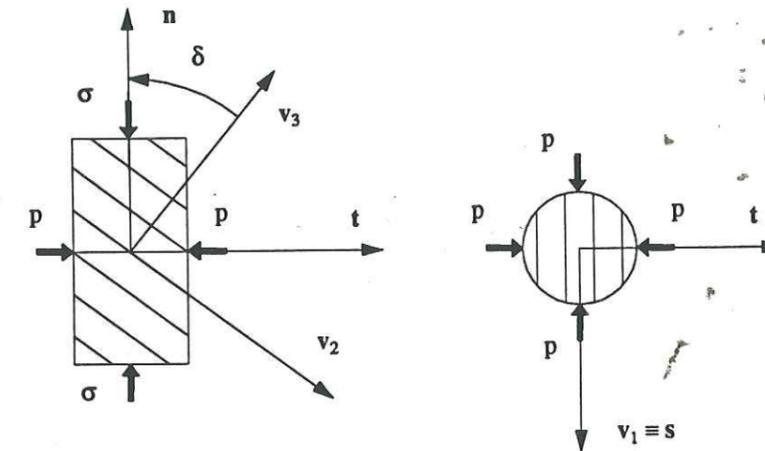


Figure III.14 - Eprouvette orientée soumise à une compression axiale  $\sigma$  sous une pression de confinement  $p$ .

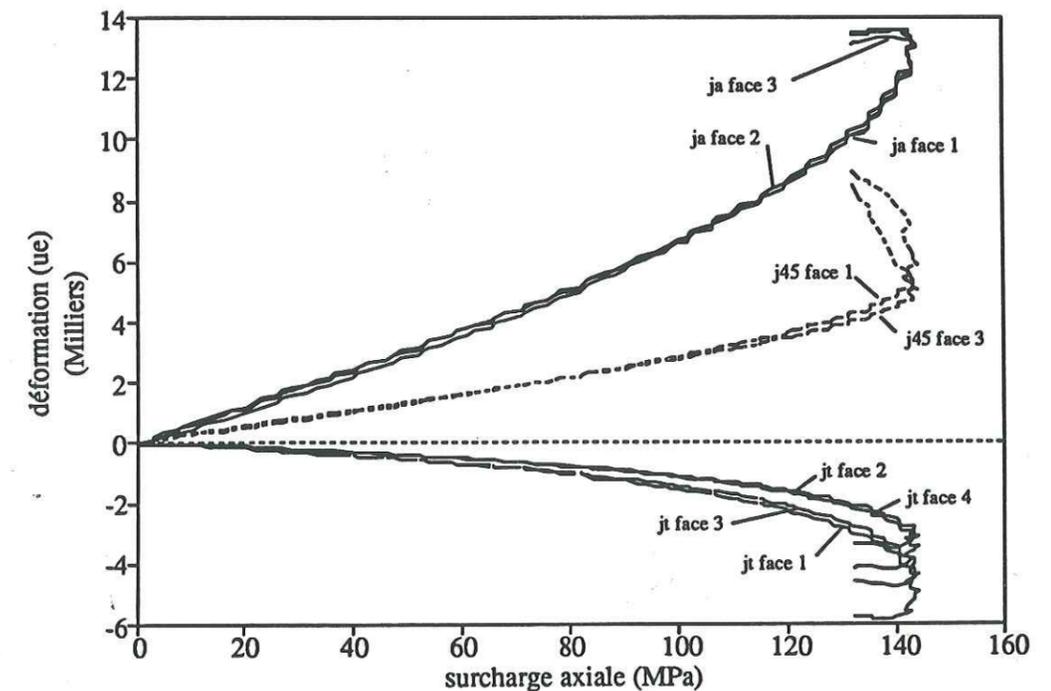


Figure III.15 - Courbes brutes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 60^\circ$  et  $p = 50 \text{ MPa}$ .

Cette éprouvette a été instrumentée par neuf jauges.

Désignons par :

- faces 1 et 3, les deux plans tangents diamétralement opposés et parallèles au plan  $(n, v_3)$  de l'éprouvette ;
- faces 2 et 4, les deux plans tangents diamétralement opposés et perpendiculaires au plan  $(n, v_3)$  de l'éprouvette.

Les emplacements des neuf jauges sont les suivants :

- trois jauges axiales (ja), placées sur les faces 1, 2, 3 ;
- deux jauges (j45) orientées à 45° par rapport à l'axe de l'éprouvette, placées sur les faces 1 et 3 ;
- quatre jauges transversales (jt), placées sur les faces 1, 2, 3, 4.

Nous pouvons observer que les signaux de chaque couple et triplet de jauges mesurant la même déformation, mais placées dans des plans tangents différents, sont pratiquement confondus, ce qui indique l'excellente précision des mesures effectuées. Les crénulations visibles sur les courbes n'indiquent pas un problème de résolution de la chaîne de mesure, mais sont liées aux petites fluctuations ( $\pm 0.2$  MPa) de la pression de confinement au cours de l'essai. Nous rappelons que ces fluctuations sont corrigées au cours du dépouillement (cf. Chapitre II) par la prise en compte de la pression de confinement réelle en chaque point de mesure.

Sur les Figures III.16 à III.43, nous présentons, en fonction des surcharges axiales  $(\sigma - p)$  corrigées, les évolutions des composantes  $\epsilon_{ss}$ ,  $\epsilon_{nn}$  et  $\epsilon_{nt}$  du tenseur  $E$  des déformations, exprimées dans les axes  $(s, t, n)$  de l'éprouvette :

$$E = \begin{pmatrix} \epsilon_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{tt} & \epsilon_{nt} \\ 0 & \epsilon_{nt} & \epsilon_{nn} \end{pmatrix} (s, t, n) \quad (III.9)$$

Chaque courbe représente la moyenne des mesures corrigées, obtenues à partir des signaux des jauges mesurant la même déformation.

En compression simple, après un phase de serrage, dont l'importance décroît lorsque  $\delta$  varie de 0° à 90°, la déformation axiale  $\epsilon_{nn}$  est quasi-linéaire jusqu'au pic des contraintes ; la rupture est de type fragile ; elle est précédée par une faible phase d'écrouissage. Pour les essais "hors axes" ( $\delta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ ), nous observons le développement d'une composante  $\epsilon_{nt}$  non nulle et non négligeable, indiquant la non-coïncidence des directions

principales des contraintes et des déformations et témoignant de l'anisotropie du matériau. Pour toutes les orientations  $\delta \neq 0^\circ$ , les composantes  $\epsilon_{ss}$  et  $\epsilon_{tt}$  mesurées sont distinctes ( $|\epsilon_{tt}| > |\epsilon_{ss}|$ ) et leur écart croît avec  $\delta$  ; ce phénomène témoigne également de l'anisotropie du matériau et indique, comme les essais de compression isotrope l'ont déjà mis en évidence, que la déformabilité de la roche est plus importante dans la direction de l'axe de révolution de l'orthotropie matérielle que dans le plan isotrope.

Lorsque la pression de confinement croît, nous observons les phénomènes suivants :

- pour une orientation  $\delta$  donnée, diminution et disparition progressive de la phase de serrage initiale des courbes  $\epsilon_{nn}$ , augmentation de la déformation axiale limite ;
- développement d'une phase d'écrouissage non linéaire significatif avant la rupture ;
- pour toutes les orientations "hors -axes", nette diminution de la contribution relative de la composante  $\epsilon_{nt}$ , qui est, dans la limite de résolution des mesures, quasiment nulle pour  $p = 50$  MPa ;
- pour chaque orientation  $\delta \neq 0^\circ$ , diminution de la différence entre les composantes  $\epsilon_{tt}$  et  $\epsilon_{ss}$ .

Les deux derniers phénomènes observés témoignent de l'atténuation de l'anisotropie mécanique du matériau lorsque la partie isotrope de l'état de contrainte augmente. Sous la pression de confinement  $p = 50$  MPa, nous observons un écrouissage beaucoup plus marqué pour les orientations  $\delta = 0^\circ, 15^\circ, 75^\circ, 90^\circ$  que pour les orientations  $\delta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  ; ceci peut être expliqué par la différence des modes de rupture observés : rupture pseudo-plastique pour les orientations proches des orientations "dans les axes", bandes de cisaillement pour les autres cas.

### 3.2.2 Coefficients élastiques anisotropes

Pour chaque orientation  $\delta$  et chaque pression de confinement  $p$ , nous avons déterminé, par régression linéaire, à partir des premières phases linéaires des courbes surcharges axiales - déformations, le module tangent directionnel axial  $E_{nn}$  et les modules tangents directionnels croisés  $E_{ss}$  et  $E_{tt}$ . En compression simple, nous avons également déterminé, pour les orientations "hors axes" ( $\delta \neq 0^\circ$  et  $90^\circ$ ), le module tangent directionnel  $E_{nt}$ . Sous pression de confinement, les déformations prises en compte lors du calcul de ces modules sont les déformations associées aux surcharges axiales :

$$\epsilon_i = \epsilon_i(\sigma) - \epsilon_i(p) = \epsilon_i(\sigma - p) \quad , \quad (III.10)$$

où  $i = nn, ss, tt, nt$

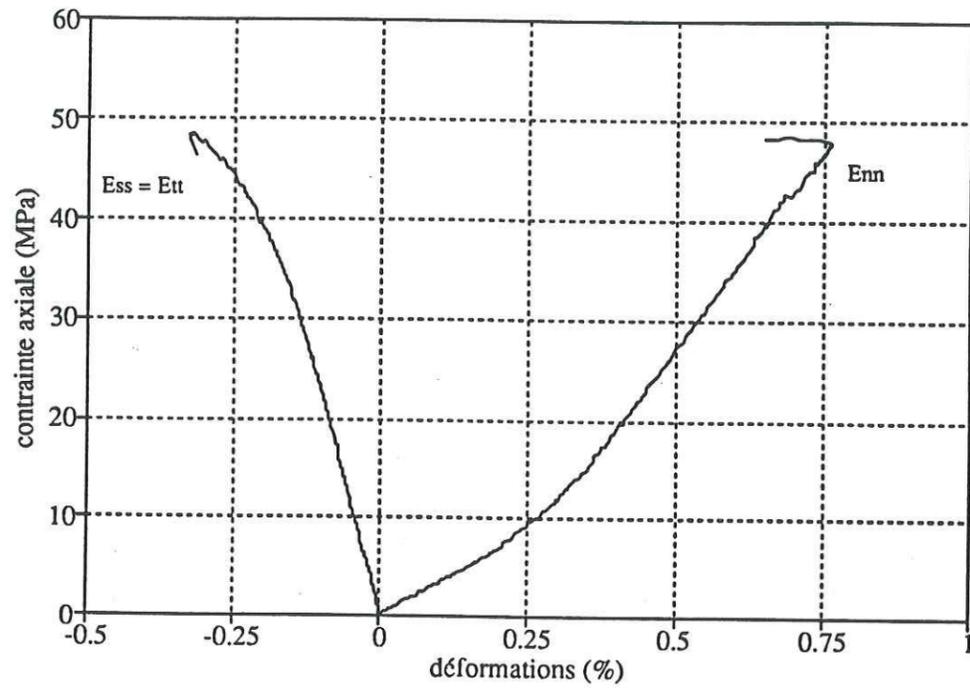


Figure III.16 - Courbes contraintes axiales - déformations pour  $\delta = 0^\circ$  et  $p = 0$ .

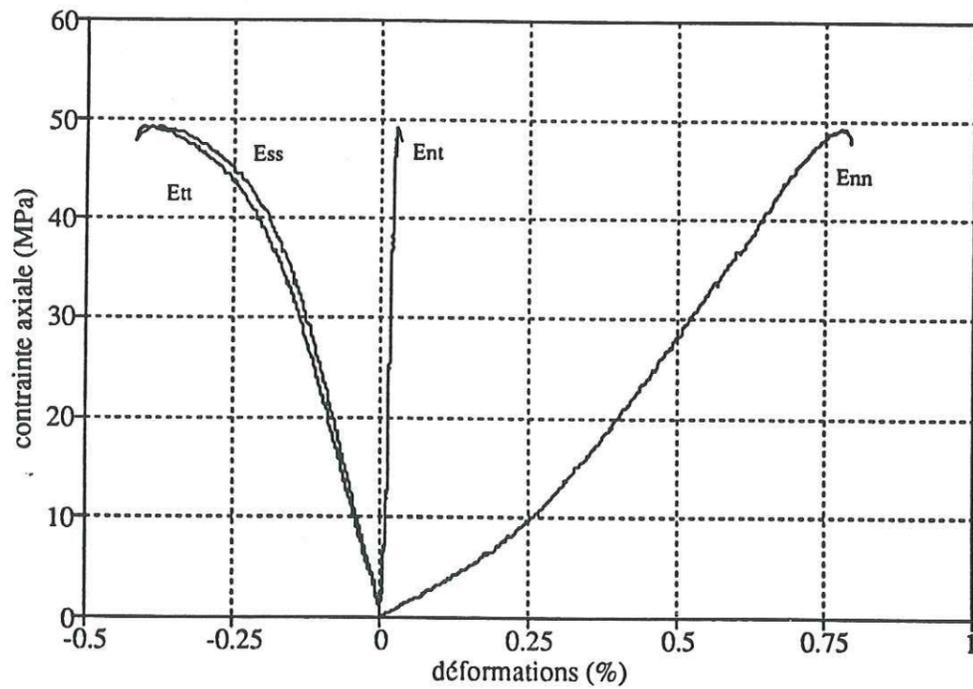


Figure III.17 - Courbes contraintes axiales - déformations pour  $\delta = 15^\circ$  et  $p = 0$ .

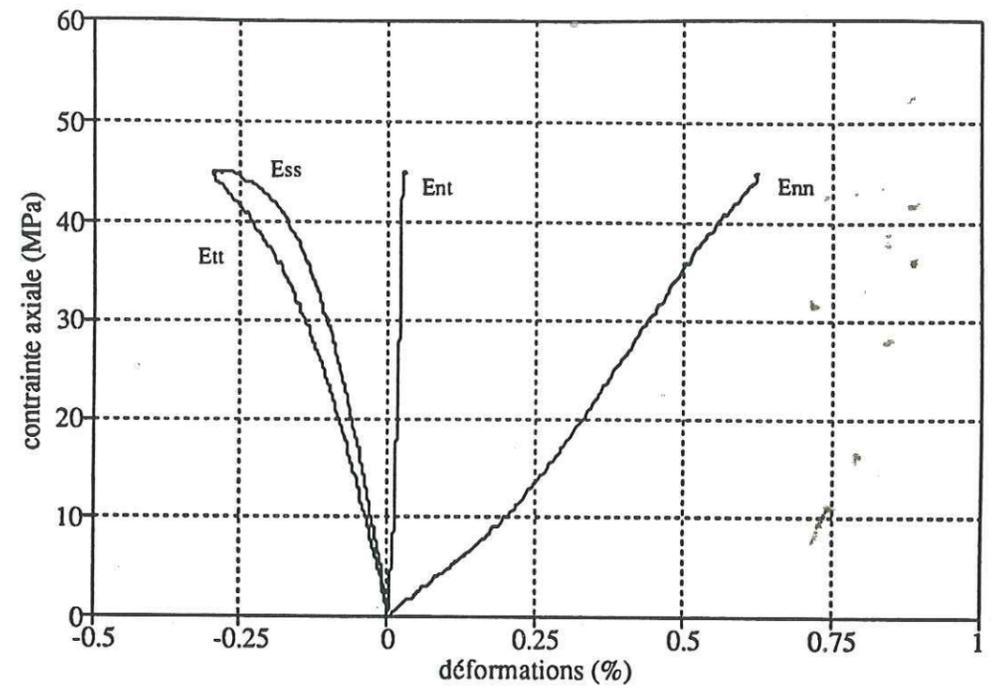


Figure III.18 - Courbes contraintes axiales - déformations pour  $\delta = 30^\circ$  et  $p = 0$ .

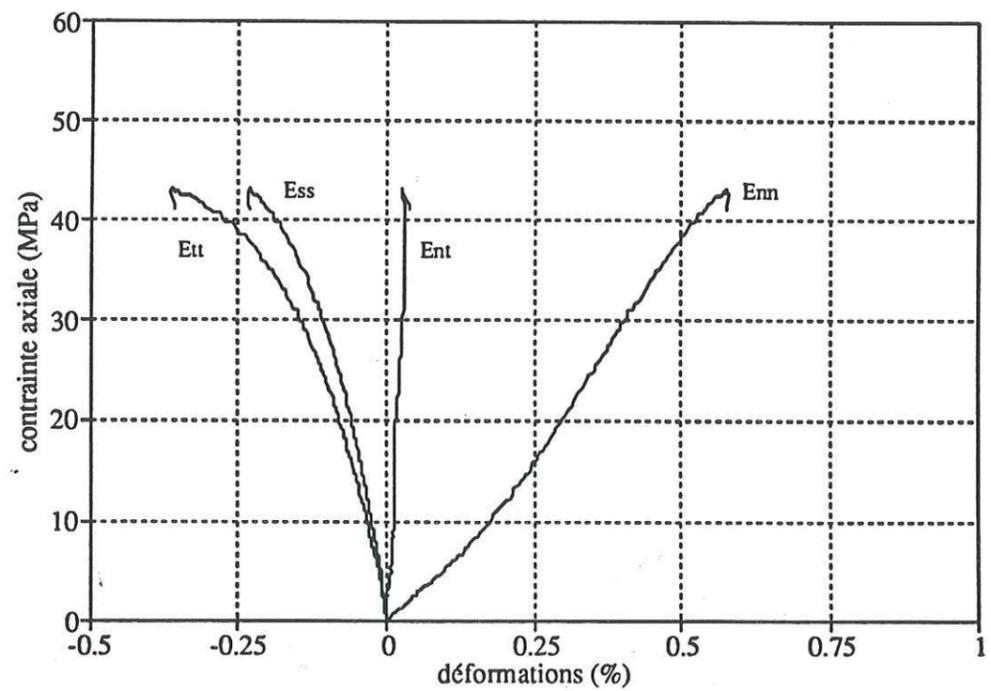


Figure III.19 - Courbes contraintes axiales - déformations pour  $\delta = 45^\circ$  et  $p = 0$ .

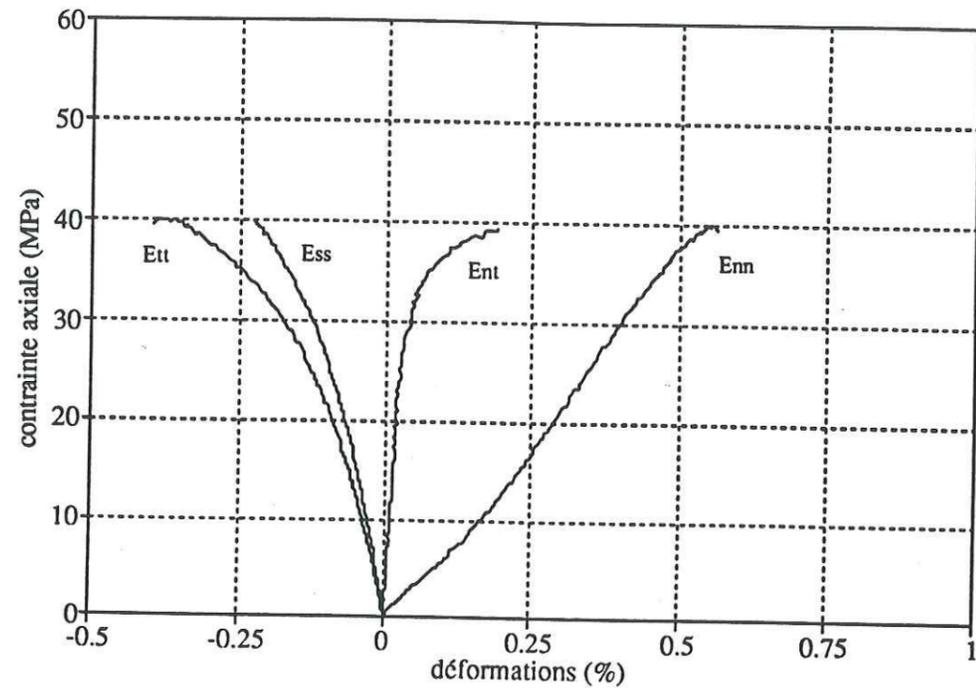


Figure III.20 - Courbes contraintes axiales - déformations pour  $\delta = 60^\circ$  et  $p = 0$ .

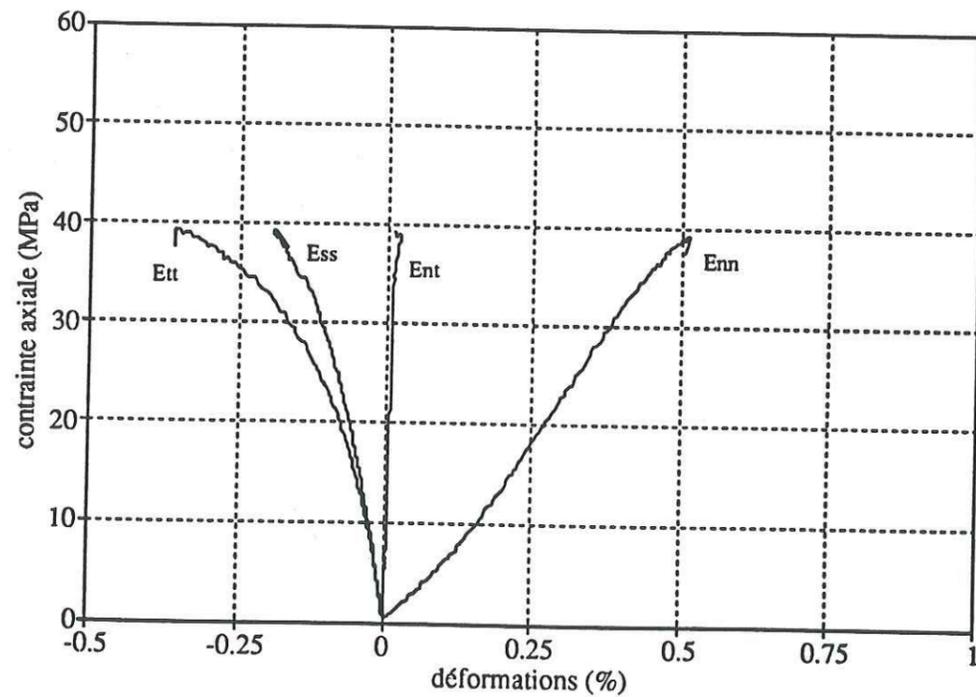


Figure III.21 - Courbes contraintes axiales - déformations pour  $\delta = 75^\circ$  et  $p = 0$ .

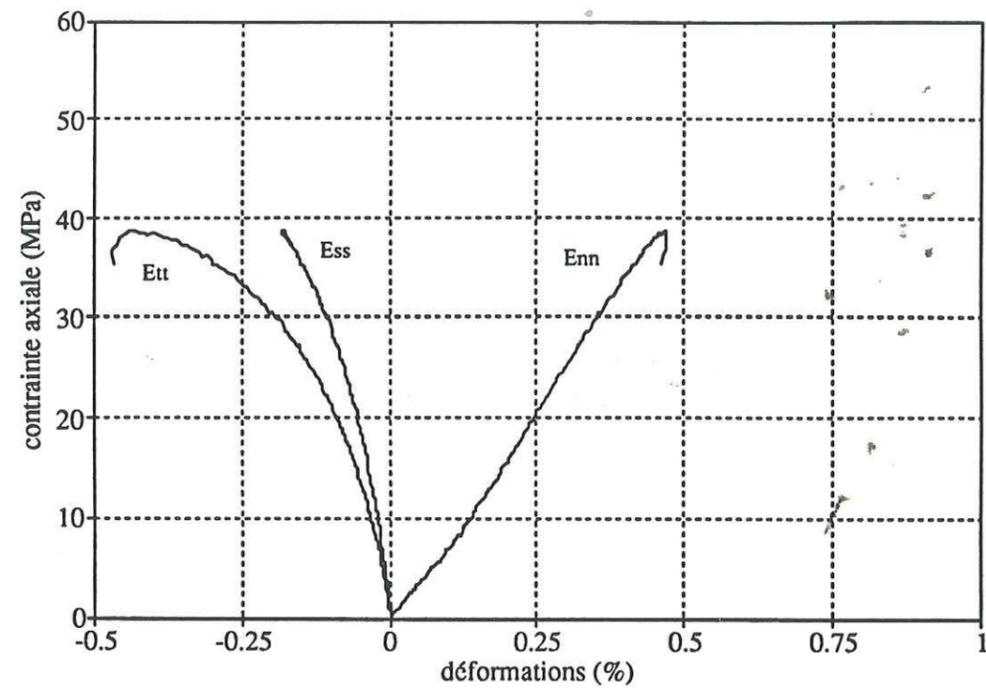


Figure III.22 - Courbes contraintes axiales - déformations pour  $\delta = 90^\circ$  et  $p = 0$ .

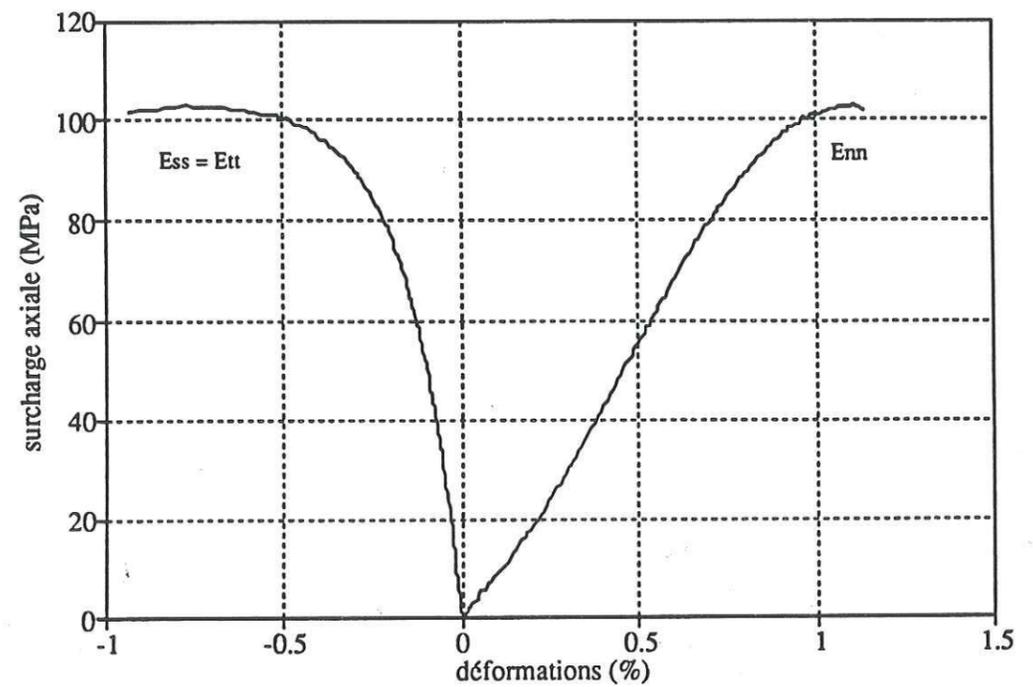


Figure III.23 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 0^\circ$  et  $p = 12.5$  MPa.

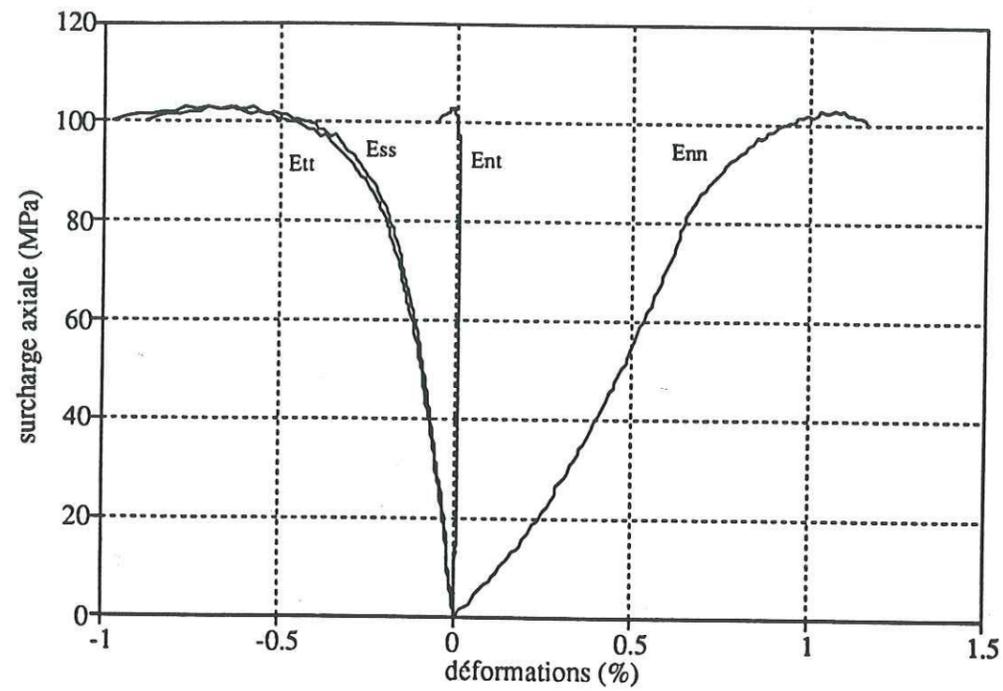


Figure III.24 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 15^\circ$  et  $p = 12.5$  MPa.

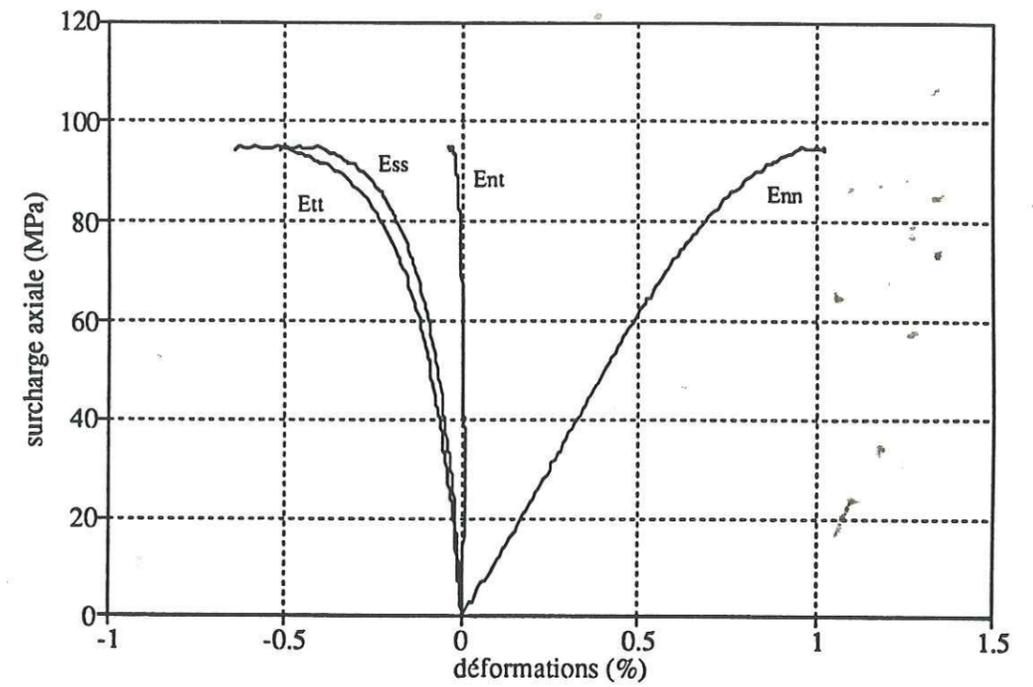


Figure III.26 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 45^\circ$  et  $p = 12.5$  MPa.

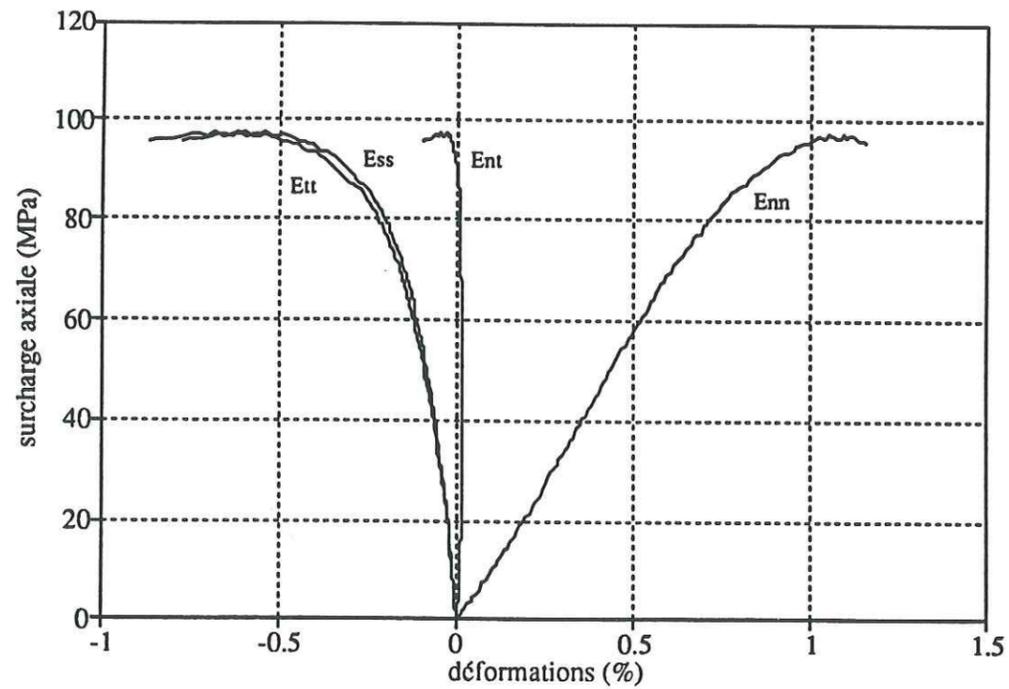


Figure III.25 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 30^\circ$  et  $p = 12.5$  MPa.

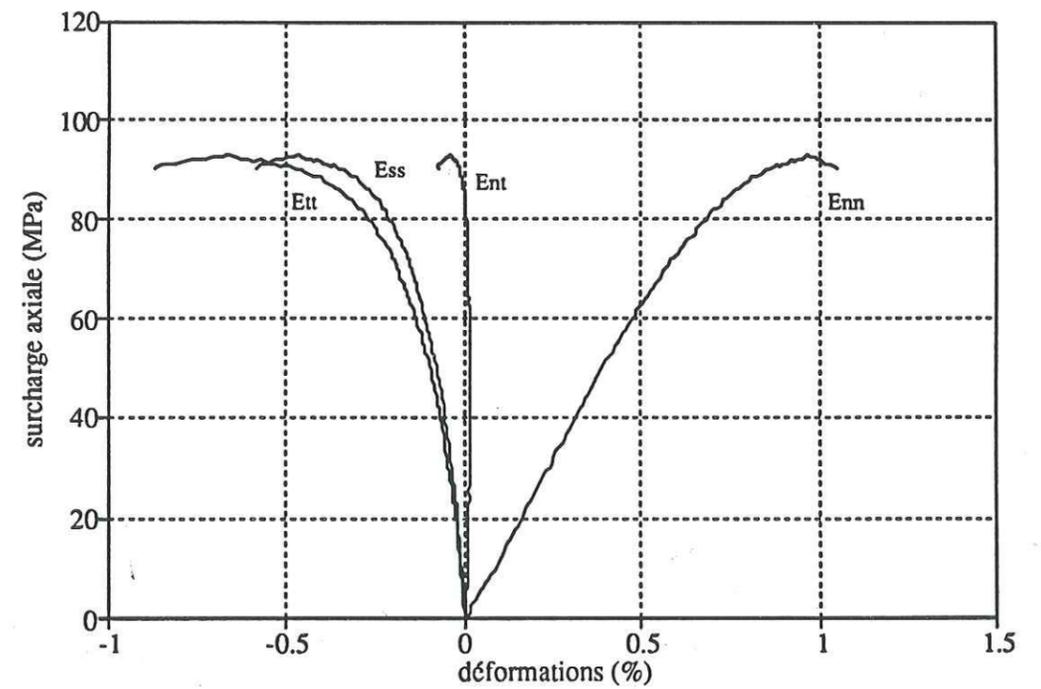


Figure III.27 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 60^\circ$  et  $p = 12.5$  MPa.

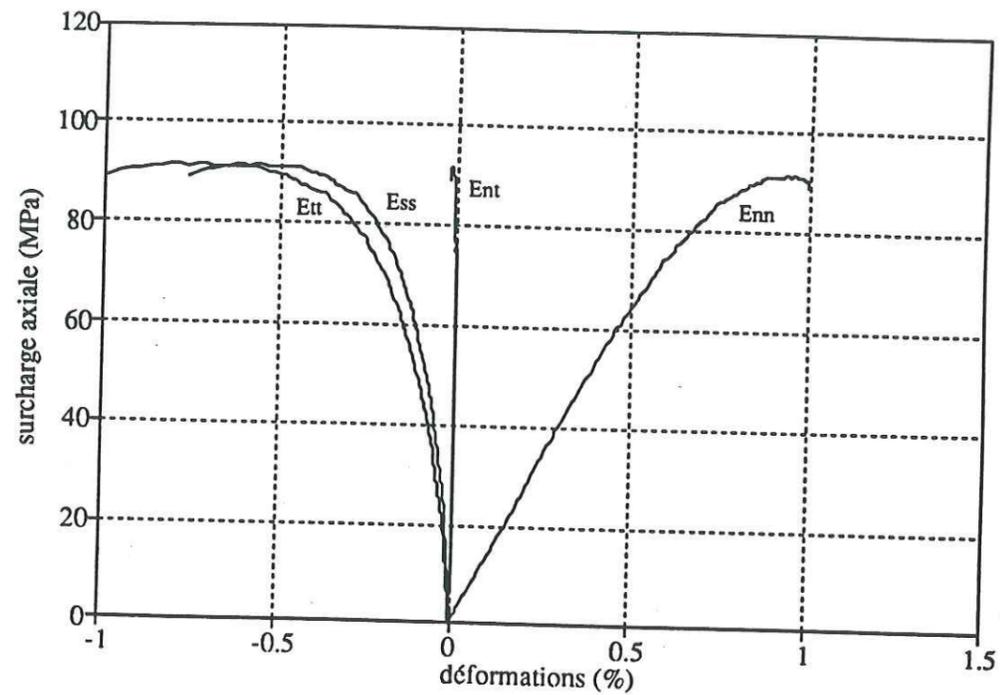


Figure III.28 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 75^\circ$  et  $p = 12.5$  MPa.

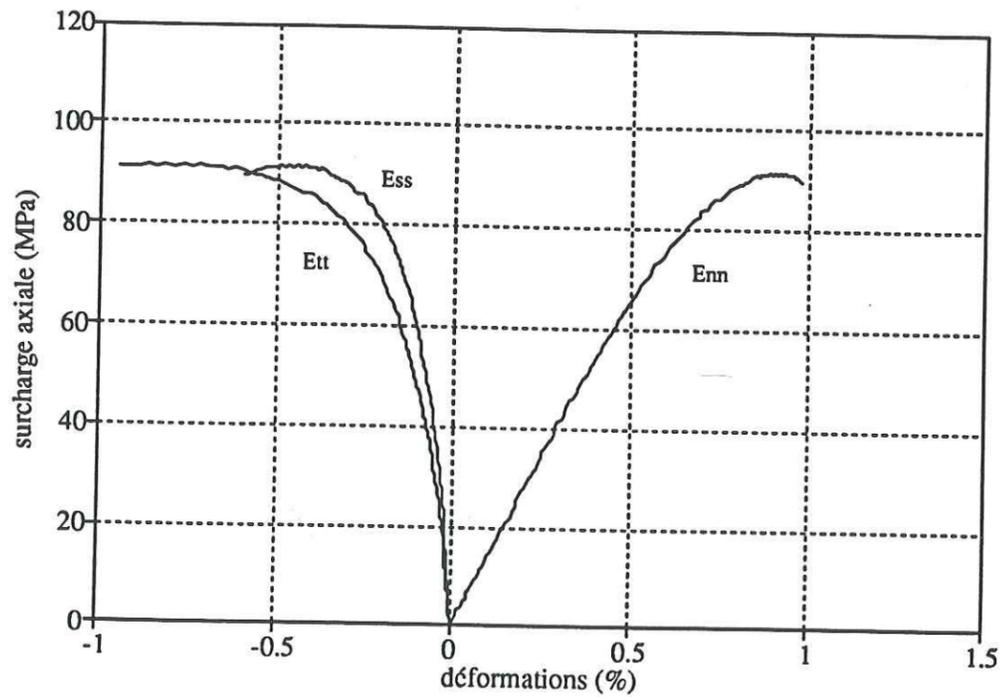


Figure III.29.- Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 90^\circ$  et  $p = 12.5$  MPa.

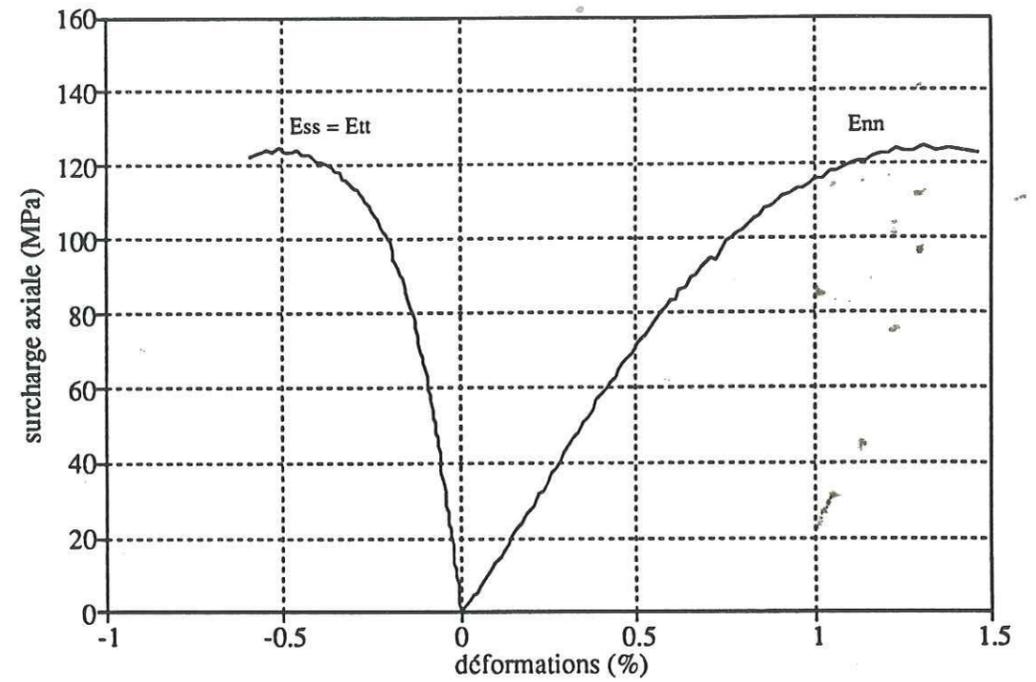


Figure III.30 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 0^\circ$  et  $p = 25$  MPa.

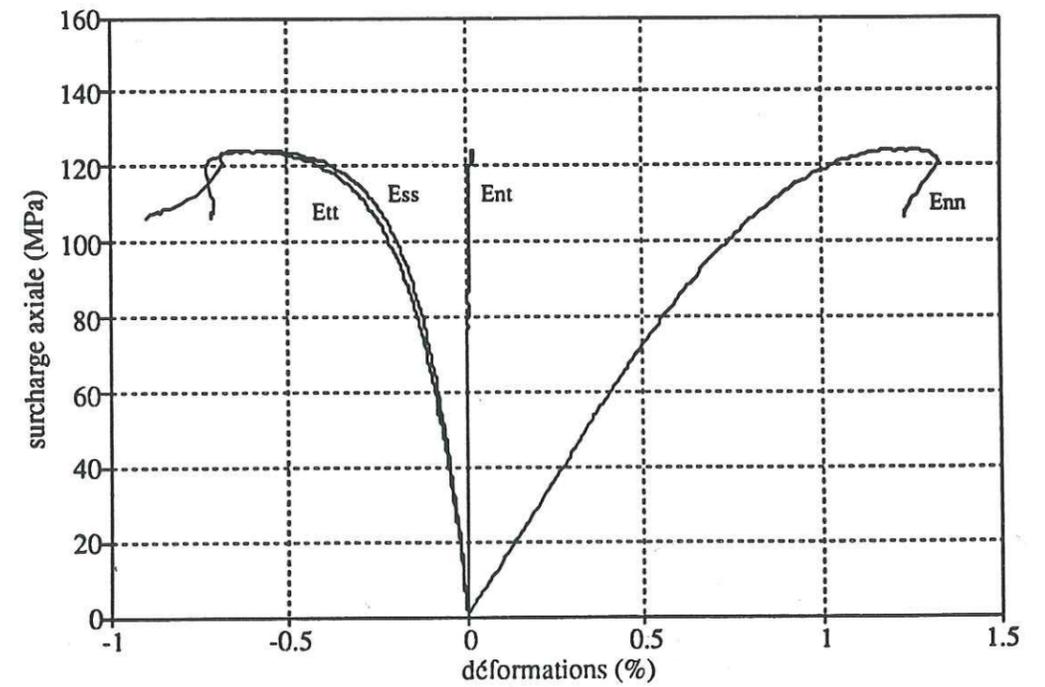


Figure III.31 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 15^\circ$  et  $p = 25$  MPa.

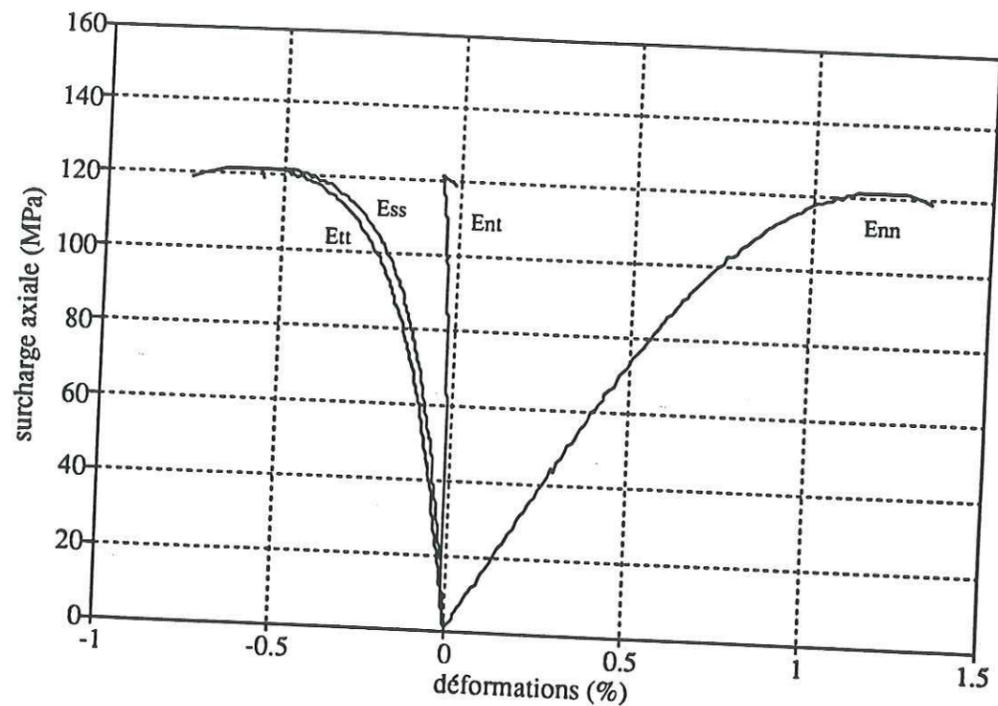


Figure III.32 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 30^\circ$  et  $p = 25$  MPa.

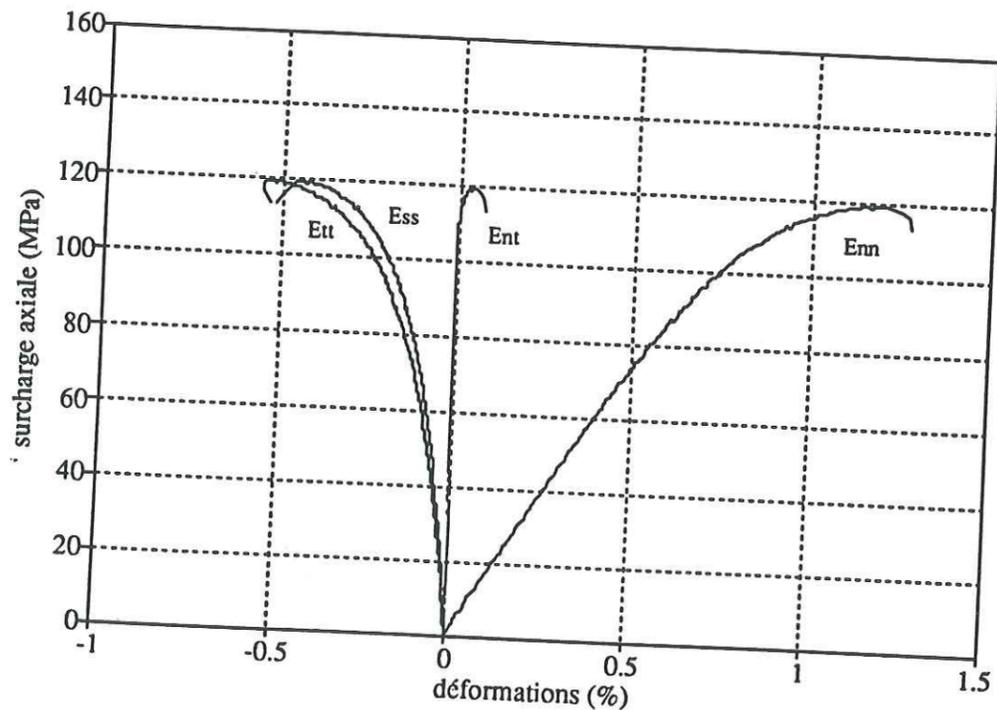


Figure III.33 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 45^\circ$  et  $p = 25$  MPa.

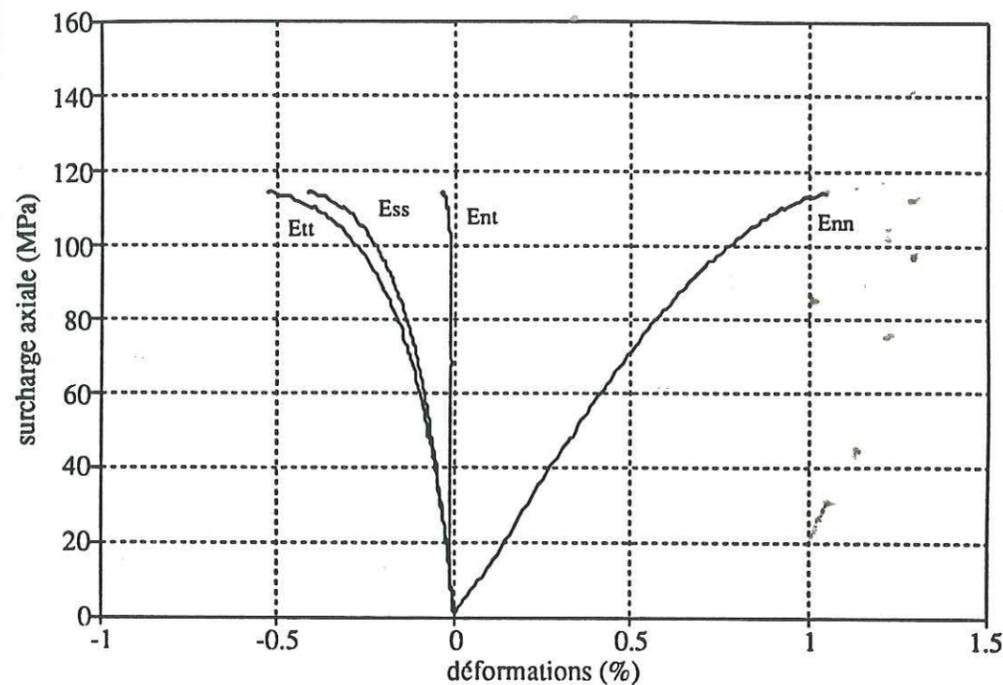


Figure III.34 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 60^\circ$  et  $p = 25$  MPa.

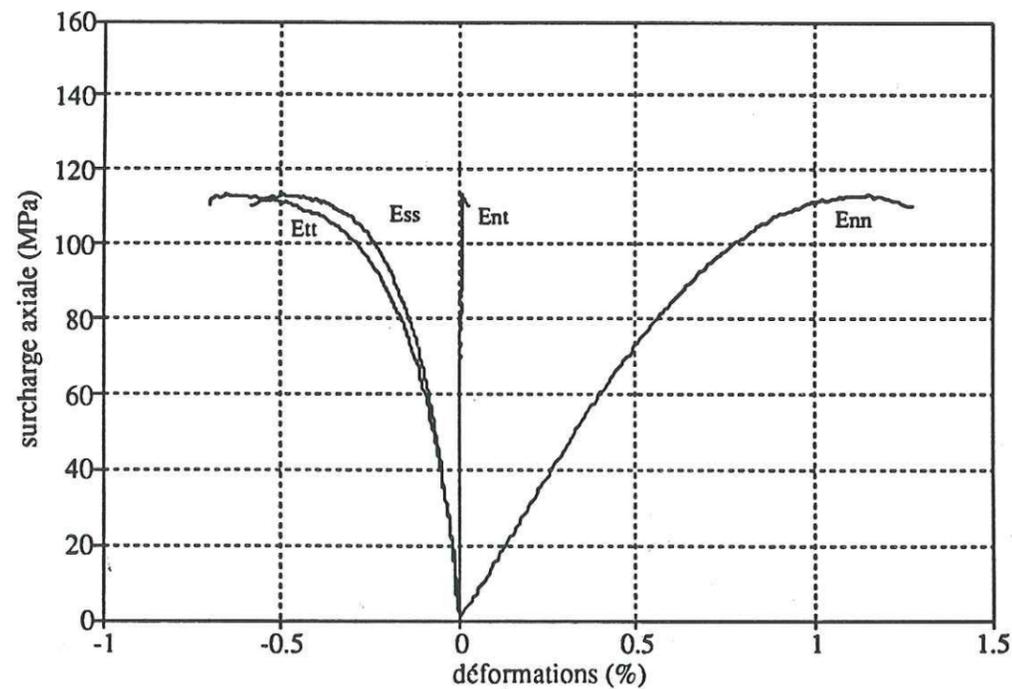


Figure III.35 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 75^\circ$  et  $p = 25$  MPa.

050 035844 6

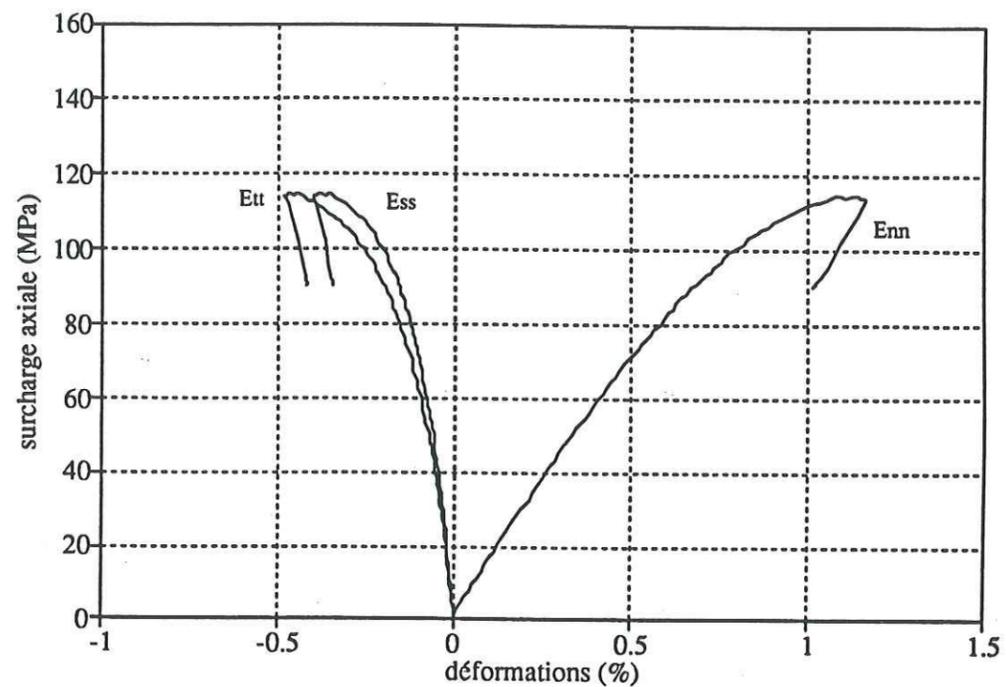


Figure III.36 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 90^\circ$  et  $p = 25$  MPa.

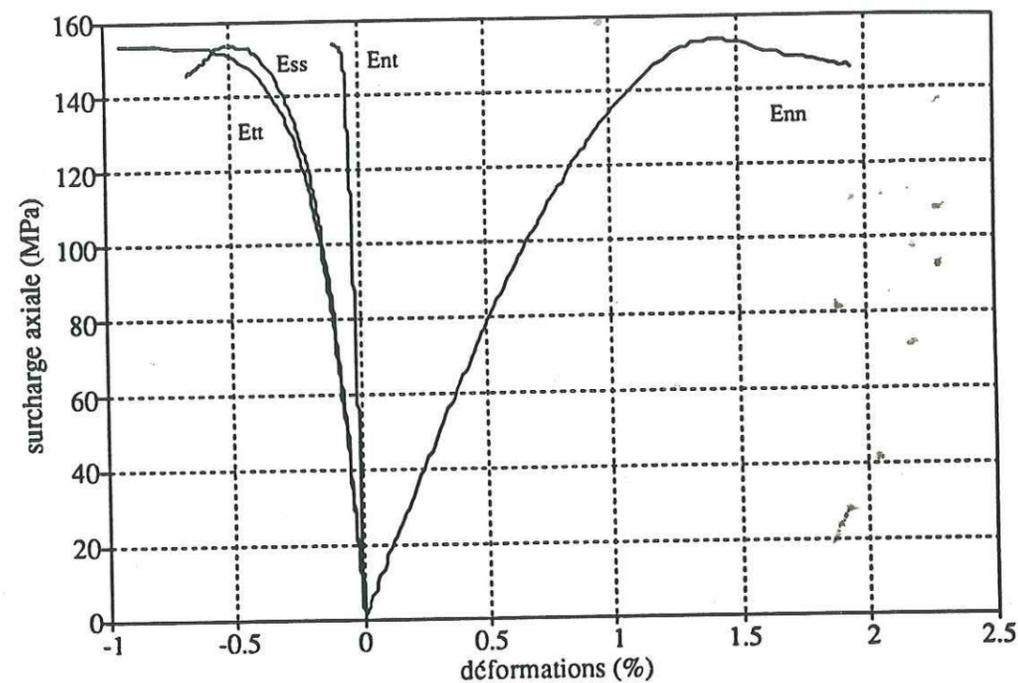


Figure III.38 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 15^\circ$  et  $p = 50$  MPa.

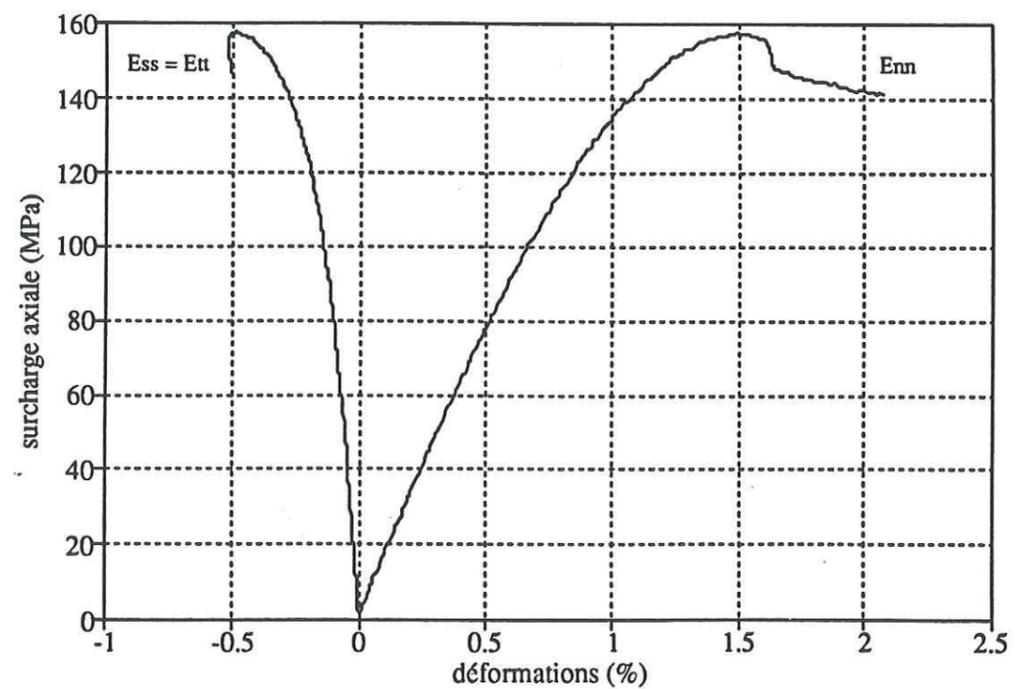


Figure III.37 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 0^\circ$  et  $p = 50$  MPa.

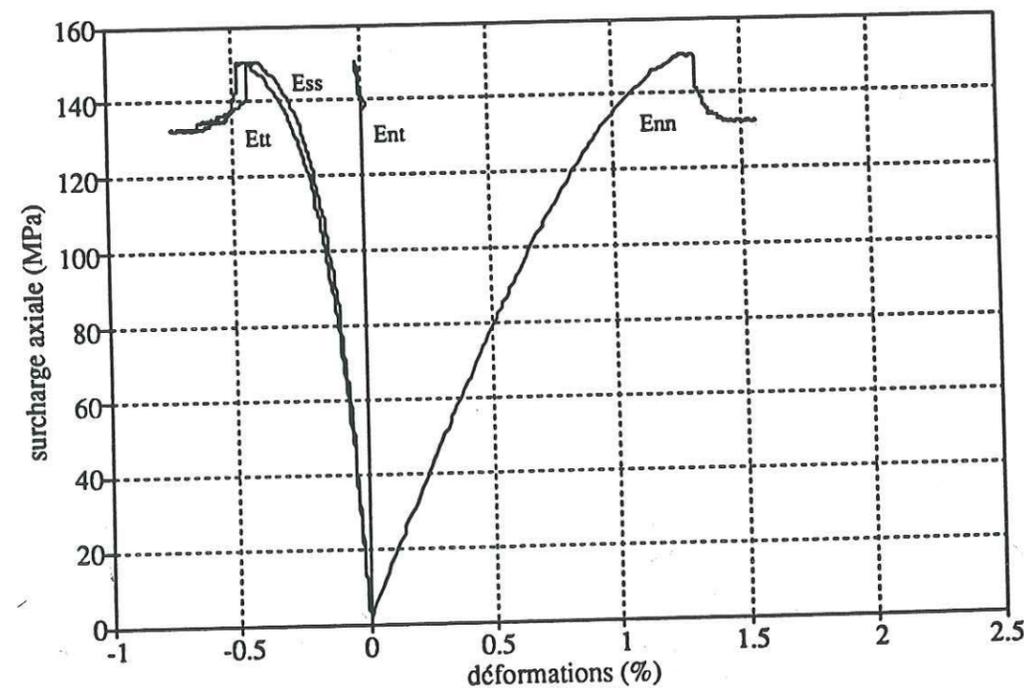


Figure III.39 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 30^\circ$  et  $p = 50$  MPa.

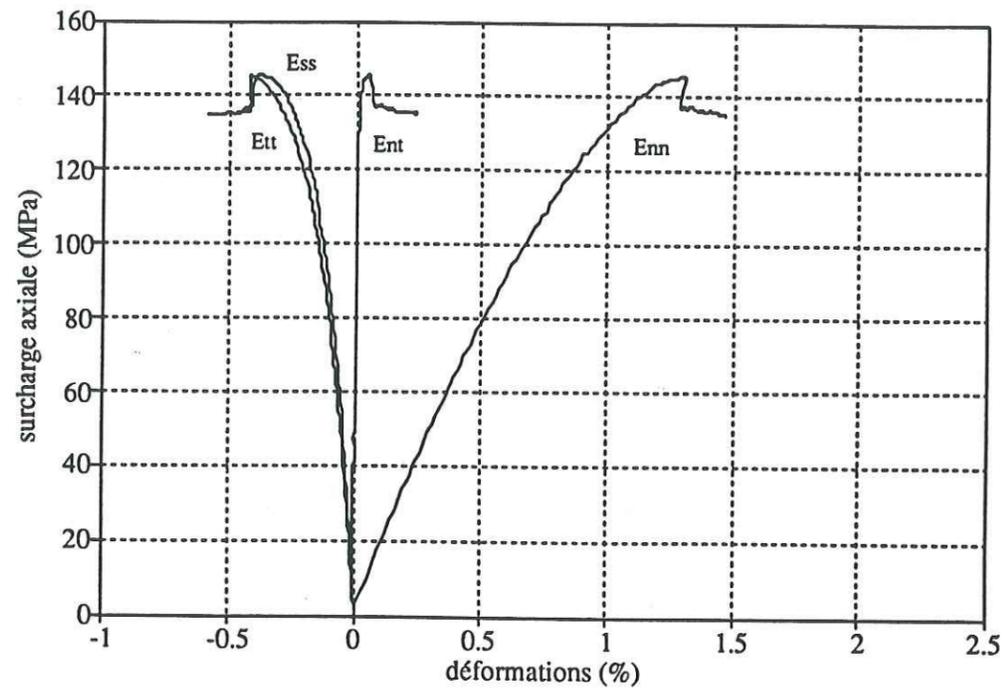


Figure III.40 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 45^\circ$  et  $p = 50$  MPa.

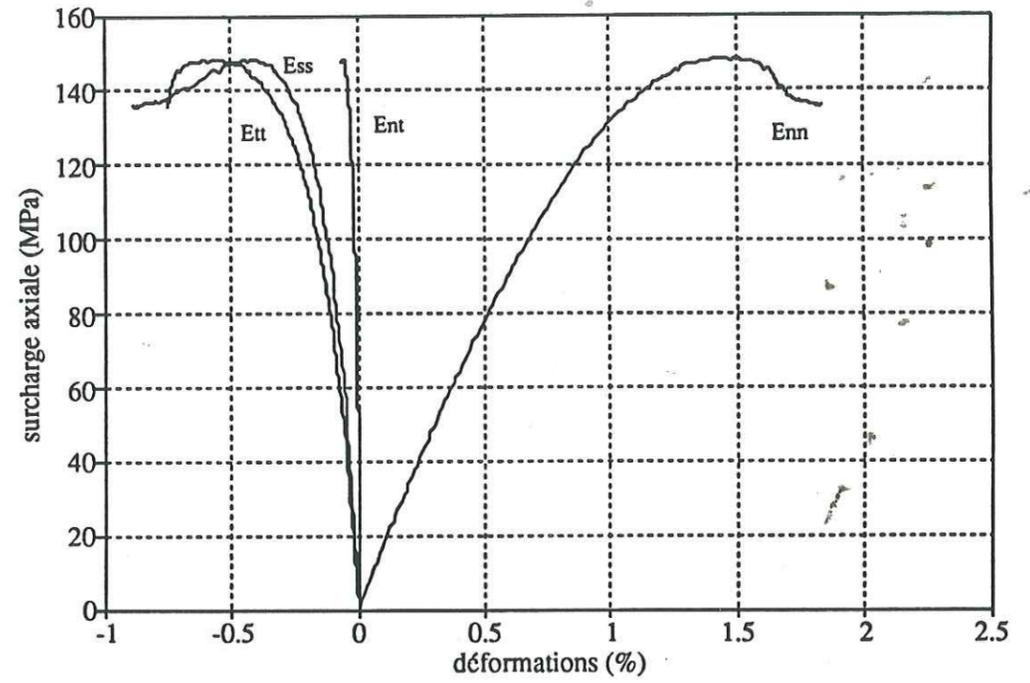


Figure III.42 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 75^\circ$  et  $p = 50$  MPa.

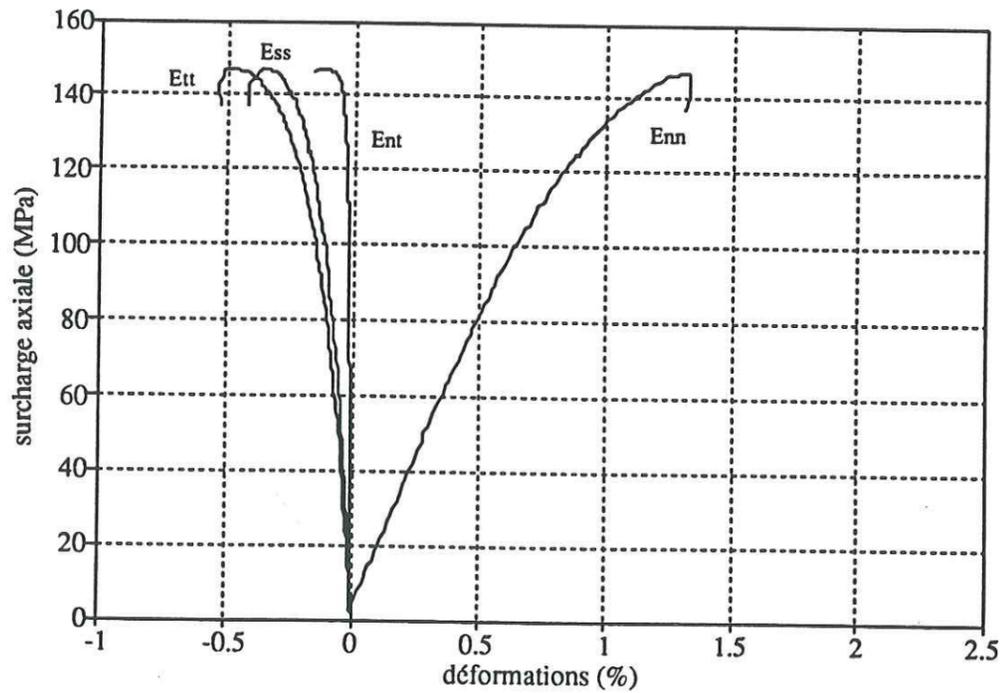


Figure III.41 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 60^\circ$  et  $p = 50$  MPa.

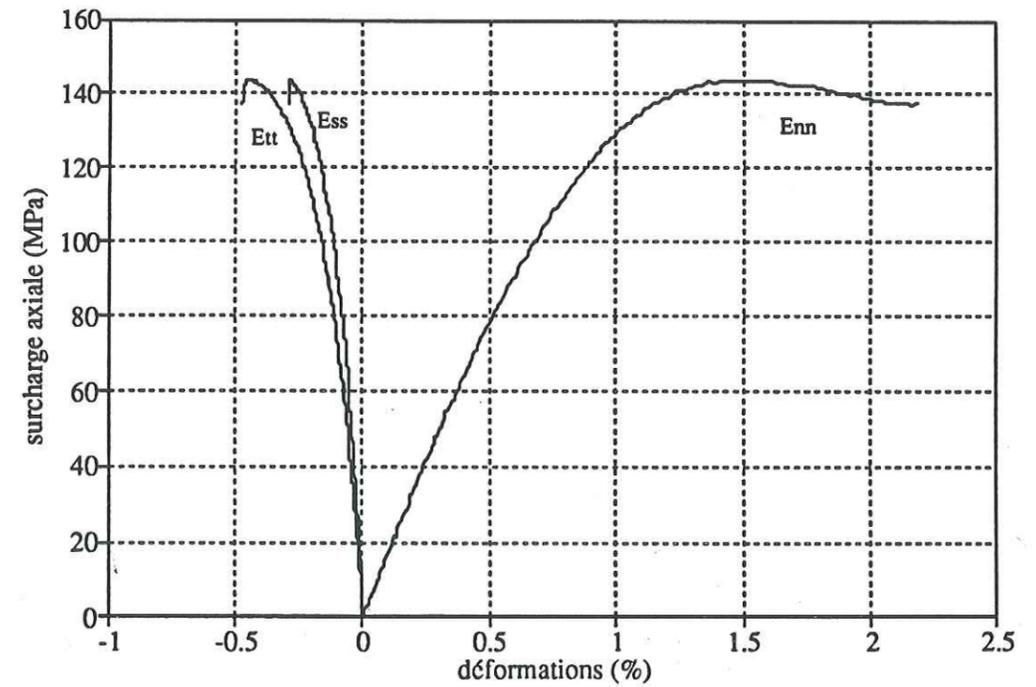


Figure III.43 - Courbes surcharges axiales - déformations pour  $\delta = 90^\circ$  et  $p = 50$  MPa.

Les modules sont définis par :

$$E_i(\delta, p) = \frac{\partial(\sigma - p)}{\partial(\varepsilon_i(\sigma) - \varepsilon_i(p))} ,$$

où  $i = nn, ss, tt, nt$  .

(III.11)

Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau III.6. Nous observons, sur ce Tableau, que les valeurs absolues de tous les modules tangents directionnels croissent avec la pression de confinement, ce qui indique une modification du comportement élastique de la roche sous l'effet des contraintes isotropes, en corrélation avec les phénomènes mis en évidence lors des essais sous contraintes isotropes. Lorsque  $\delta$  varie de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ , pour une pression de confinement donnée, le module  $E_{ss}$  augmente notablement en valeur absolue, le module  $E_{nn}$  augmente également, mais de façon moins marquée, et le module  $E_{tt}$  est quasiment constant.

A partir de ces résultats, nous avons calculé les coefficients élastiques du matériau ; nous nous plaçons dans le cadre de la loi de l'hyperélasticité linéaire orthotrope de révolution (cf. § 1.2, Chapitre I). Cinq coefficients matériels indépendants caractérisent alors le comportement : les deux modules d'Young  $E_1$  et  $E_3$ , les deux coefficients de Poisson  $\nu_1$  et  $\nu_3$  et le module de cisaillement  $G$ . Les relations entre les différents modules directionnels mesurés et les coefficients matériels  $E_1, E_3, \nu_1$  et  $\nu_3$  et  $G$ , utilisées dans nos calculs, sont, d'après (III.11) :

$$\frac{1}{E_{ss}} = -\frac{\nu_1}{E_1} \sin^2\delta - \frac{\nu_3}{E_3} \cos^2\delta ,$$

$$\frac{1}{E_{tt}} = \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_3} - \frac{1}{G} \right) \sin^2\delta \cos^2\delta - \frac{\nu_3}{E_3} (\cos^4\delta + \sin^4\delta) ,$$

$$\frac{1}{E_{nn}} = \left[ \frac{1}{E_1} \sin^4\delta + \frac{1}{E_3} \cos^4\delta + \left( \frac{1}{G} - 2 \frac{\nu_3}{E_3} \right) \cos^2\delta \sin^2\delta \right] ,$$

$$\frac{1}{E_{nt}} = \left[ \frac{1}{E_3} \cos^2\delta - \frac{1}{E_1} \sin^2\delta + \left( \frac{\nu_3}{E_3} - \frac{1}{2G} \right) (\cos^2\delta - \sin^2\delta) \right] \sin\delta \cos\delta .$$

(III.12)

Les résultats antérieurs ayant montré une modification du comportement élastique de la roche sous l'effet d'une contrainte isotrope, nous avons calculé les cinq coefficients matériels de l'orthotropie de révolution pour chaque valeur de la pression de confinement ( $p = 0, 12.5$  MPa,  $25$  MPa et  $50$  MPa, où  $p = 0$  correspond à la compression simple), en utilisant les résultats obtenus pour les sept orientations des éprouvettes. En appliquant les relations (III.12), nous obtenons, en compression simple, un système de vingt-cinq équations à cinq inconnues, et, pour chacune des pressions  $p = 12.5$  MPa,  $25$  MPa et  $50$  MPa, un système de vingt équations à cinq inconnues ( $\varepsilon_{nt}$  étant négligé pour ces pressions, car dans la limite de résolution des mesures dans la partie élastique). Ces systèmes largement surdéterminés sont

	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 15^\circ$	$\delta = 30^\circ$	$\delta = 45^\circ$	$\delta = 60^\circ$	$\delta = 75^\circ$	$\delta = 90^\circ$
$E_{ss}$ (GPa)	- 22.38	- 24.16	- 26.82	- 28.67	- 29.96	- 33.88	- 35.54
$E_{tt}$ (GPa)	- 22.38	- 21.81	- 21.95	- 21.23	- 21.74	- 21.90	- 22.69
$E_{nn}$ (GPa)	7.96	8.05	8.35	8.94	8.98	9.28	9.45
$E_{nt}$ (GPa)	-	303.79	186.29	154.58	134.03	253.42	-

(a)  $p = 0$

	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 15^\circ$	$\delta = 30^\circ$	$\delta = 45^\circ$	$\delta = 60^\circ$	$\delta = 75^\circ$	$\delta = 90^\circ$
$E_{ss}$ (GPa)	- 61.83	- 64.05	- 67.81	- 75.49	- 83.57	- 90.89	- 92.69
$E_{tt}$ (GPa)	- 61.83	- 61.44	- 60.42	- 60.56	- 59.10	- 61.18	- 63.03
$E_{nn}$ (GPa)	12.32	12.43	12.37	12.85	12.92	13.25	13.81

(b)  $p = 12.5$  MPa

	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 15^\circ$	$\delta = 30^\circ$	$\delta = 45^\circ$	$\delta = 60^\circ$	$\delta = 75^\circ$	$\delta = 90^\circ$
$E_{ss}$ (GPa)	- 77.73	- 78.56	- 80.89	- 88.14	- 98.65	- 107.56	- 113.21
$E_{tt}$ (GPa)	- 77.73	- 77.90	- 78.60	- 78.74	- 80.04	- 76.47	- 78.41
$E_{nn}$ (GPa)	14.63	14.74	15.02	15.18	15.29	15.51	15.86

(c)  $p = 25$  MPa

	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 15^\circ$	$\delta = 30^\circ$	$\delta = 45^\circ$	$\delta = 60^\circ$	$\delta = 75^\circ$	$\delta = 90^\circ$
$E_{ss}$ (GPa)	- 90.63	- 95.29	- 104.16	- 112.55	- 122.26	- 124.15	- 127.22
$E_{tt}$ (GPa)	- 90.63	- 89.50	- 92.80	- 94.50	- 93.04	- 90.86	- 89.66
$E_{nn}$ (GPa)	15.83	15.96	16.07	16.20	16.27	16.47	16.49

(d)  $p = 50$  MPa

Tableau III.6 - Modules élastiques tangents directionnels : évolution en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes et de la pression de confinement  $p$ .

résolus par une méthode de moindres carrés. Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau III.7. Nous avons calculé, à partir des coefficients élastiques ainsi déterminés, les évolutions théoriques des modules  $E_{nn}$ ,  $E_{ss}$  et  $E_{tt}$ , en fonction de l'orientation  $\delta$  et pour chaque pression de confinement  $p$ . Une comparaison entre les valeurs calculées et les valeurs expérimentales mesurées est présentée sur les Figures III.44 à III.47, respectivement pour  $E_{nn}$ ,  $E_{ss}$  et  $E_{tt}$  : un bon accord est observé pour l'ensemble des orientations et des pressions de confinement. Pour chaque pression de confinement, nous présentons, dans le Tableau III.8, les écarts relatifs moyens et maximaux, en valeurs absolues, entre les valeurs calculées et les valeurs mesurées des modules directionnels  $E_{nn}$ ,  $E_{ss}$  et  $E_{tt}$ .

	$E_{11}$	$E_3$	$\nu_1$	$\nu_3$	$G$
$p = 0$	9.57 GPa	7.99 GPa	0.268	0.356	3.10 GPa
$p = 12.5$ MPa	13.56 GPa	12.33 GPa	0.145	0.196	5.23 GPa
$p = 25$ MPa	15.67 GPa	14.66 GPa	0.143	0.189	6.36 GPa
$p = 50$ MPa	16.47 GPa	15.87 GPa	0.125	0.173	6.90 GPa

Tableau III.7 - Coefficients élastiques du matériau.

	$p = 0$		$p = 12.5$ MPa	
	écart moyen	écart maximal	écart moyen	écart maximal
$E_{nn}$	1.2%	3.4%	1.0%	1.8%
$E_{tt}$	1.7%	3.5%	1.3%	3.2%
$E_{ss}$	3.2%	7.6%	0.7%	1.7%

	$p = 25$ MPa		$p = 50$ MPa	
	écart moyen	écart maximal	écart moyen	écart maximal
$E_{nn}$	0.5%	1.2%	0.3%	0.5%
$E_{tt}$	1.0%	2.3%	1.5%	3.0%
$E_{ss}$	1.6%	3.2%	3.0%	4.6%

Tableau III.8 - Ecart relatif moyens et maximaux entre les valeurs calculées et les valeurs mesurées des modules directionnels, en fonction de la pression de confinement  $p$ .

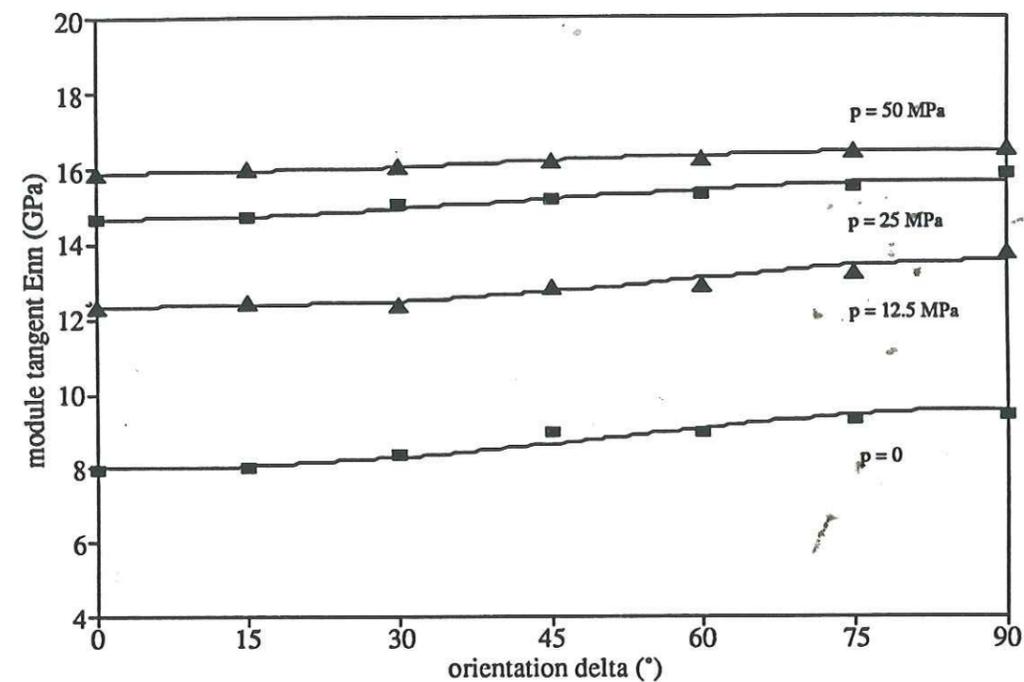


Figure III.44 - Evolution du module directionnel  $E_{nn}$  en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes et de la pression de confinement  $p$  : comparaison entre les valeurs expérimentales mesurées et les valeurs théoriques calculées.

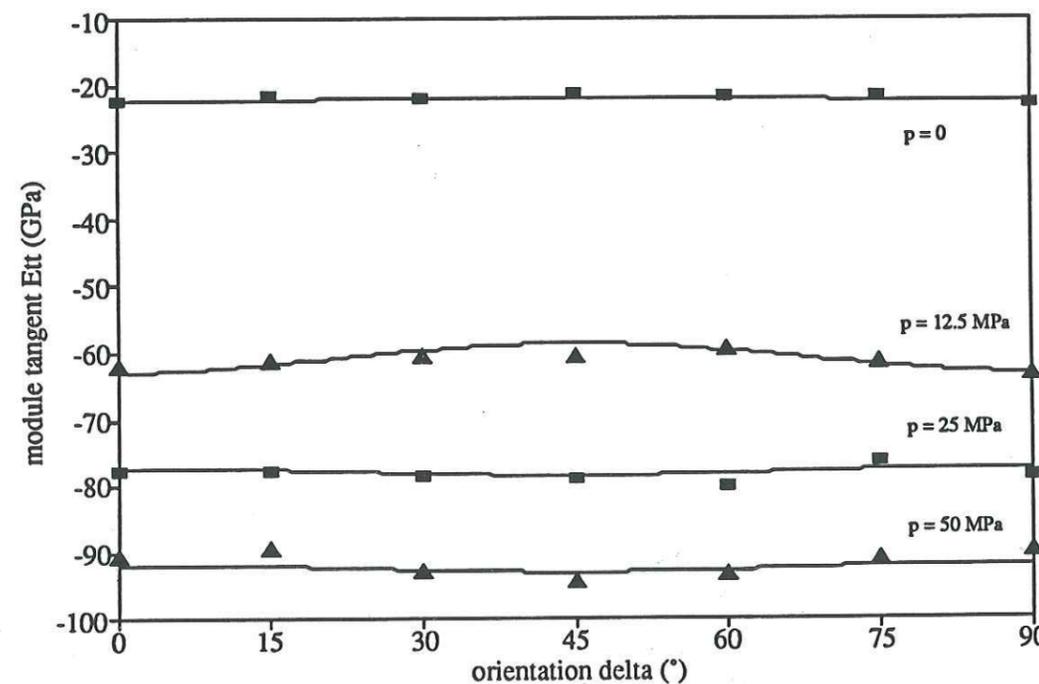


Figure III.45 - Evolution du module directionnel  $E_{tt}$  en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes et de la pression de confinement  $p$  : comparaison entre les valeurs expérimentales mesurées et les valeurs théoriques calculées.

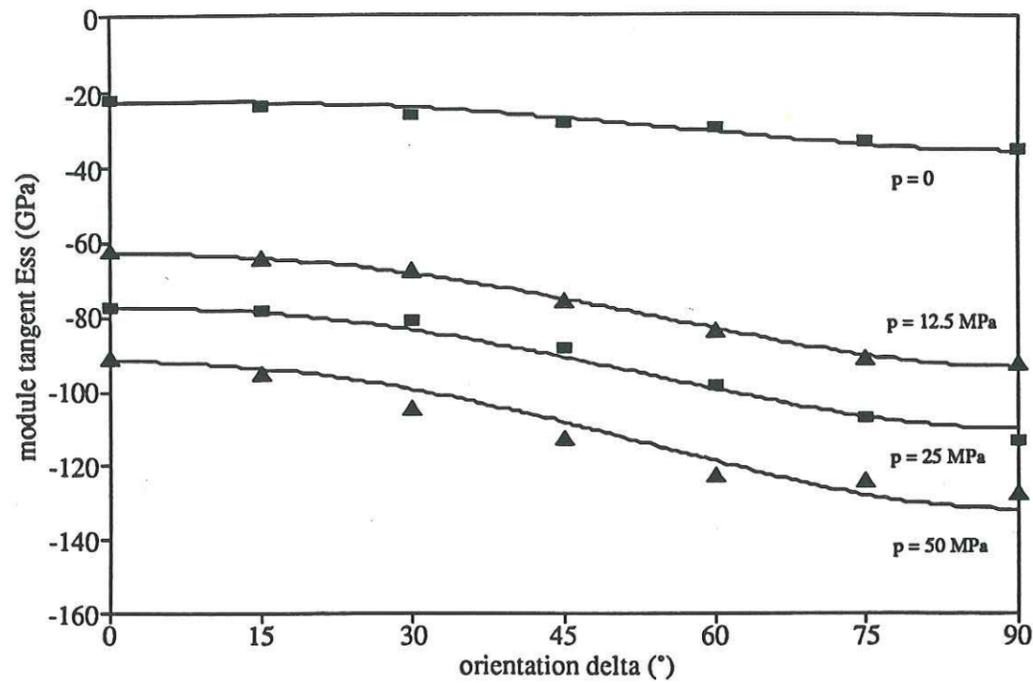


Figure III.46- Evolution du module directionnel  $E_{ss}$  en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes et de la pression de confinement  $p$  : comparaison entre les valeurs expérimentales mesurées et les valeurs théoriques calculées.

Les valeurs présentées dans le Tableau III.7 indiquent clairement l'évolution du comportement élastique de la roche en fonction de la pression de confinement  $p$  : lorsque  $p$  augmente, nous observons une croissance des modules d'Young  $E_1$  et  $E_3$  et du module de cisaillement  $G$ , ainsi qu'une diminution des coefficients  $\nu_1$  et  $\nu_3$ . Les évolutions des modules d'Young  $E_1$ ,  $E_3$  et  $G$  et des coefficients de Poisson  $\nu_1$  et  $\nu_3$  en fonction de la pression de confinement sont présentées respectivement sur les Figures III.47 et III.48 : après avoir subi une variation importante entre 0 et 12.5 MPa, les valeurs des différents coefficients tendent à se stabiliser sous pression de confinement élevée. Ces phénomènes sont vraisemblablement dus à la diminution de la porosité du matériau lorsque la pression de confinement croît, induisant un renforcement de sa structure par l'augmentation du nombre de contacts entre les grains et la diminution des degrés de liberté des grains.

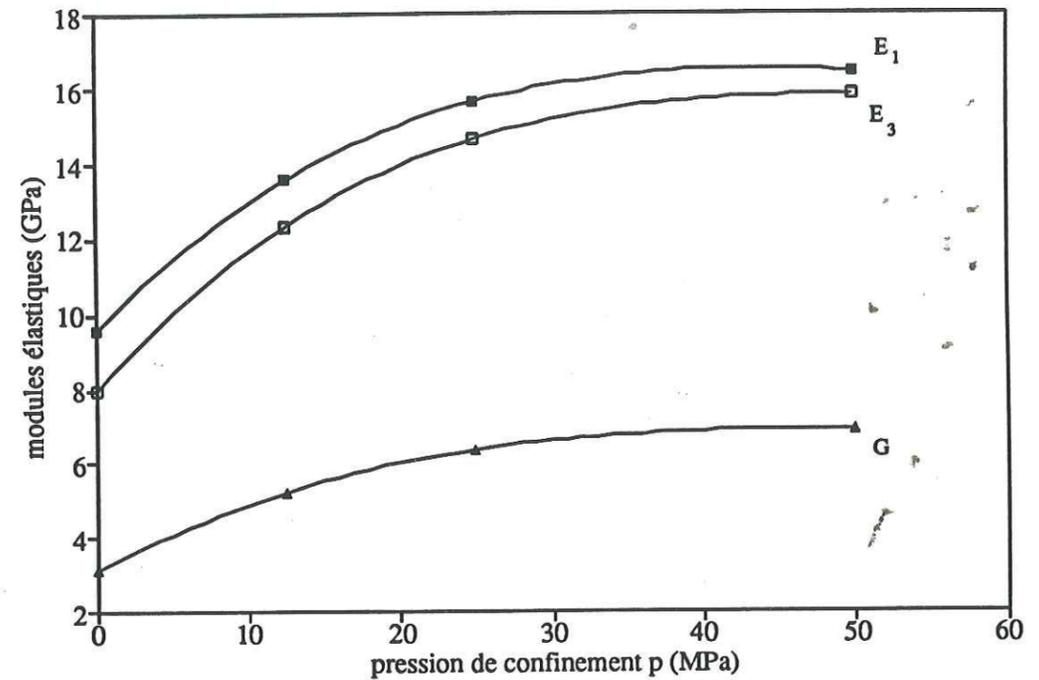


Figure III.47 - Evolution des modules d'Young  $E_1$  et  $E_3$ , et du module de cisaillement  $G$  en fonction de la pression de confinement  $p$ .

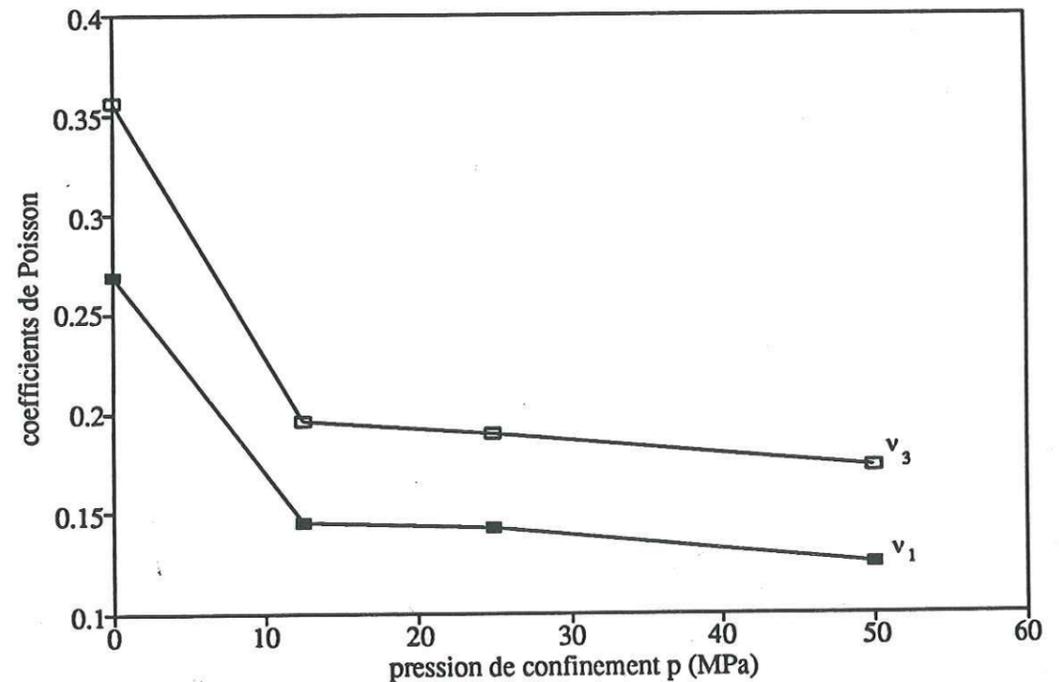


Figure III.48 - Evolution des coefficients de Poisson  $\nu_1$  et  $\nu_3$  en fonction de la pression de confinement  $p$ .

Ces évolutions correspondent à une diminution du degré d'anisotropie élastique de la roche, lorsque la pression de confinement croît. En effet, le degré d'anisotropie élastique peut être évalué, de façon globale, par un paramètre  $e$  d'écart à l'isotropie, défini par (Millien et Boehler, 1991) :

$$e = 1 - \sqrt{\frac{\left(\frac{E_3}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{\nu_1}{\nu_3}\right)^2 + \left(\frac{2G(1+\nu_1)}{E_1}\right)}{3}} \quad \text{(III.13)}$$

L'évolution de l'écart à l'isotropie  $e$  en fonction de la pression de confinement est présenté sur la Figure III.49 ; les valeurs numériques correspondantes sont données dans le Tableau III.9 : l'écart  $e$  diminue nettement lorsque la pression de confinement croît, et semble atteindre un palier sous pression de confinement élevée.

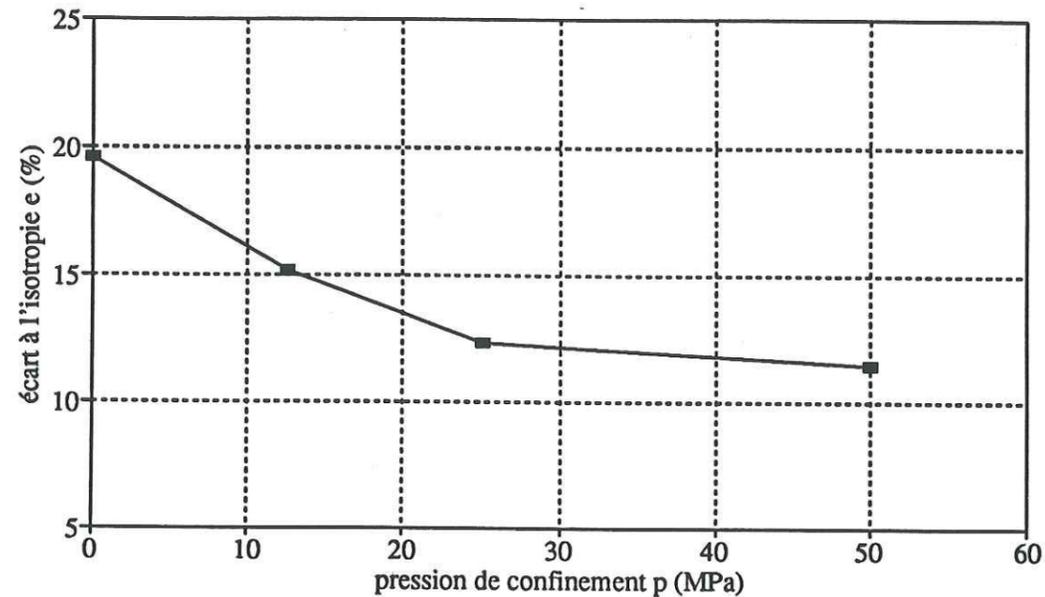


Figure III.49 - Coefficients élastiques : évolution de l'écart  $e$  à l'isotropie en fonction de la pression de confinement.

	$p = 0$	$p = 12.5 \text{ MPa}$	$p = 25 \text{ MPa}$	$p = 50 \text{ MPa}$
$e$	19.63%	15.23%	12.4%	11.63%

Tableau III.9 - Evolution de l'écart à l'isotropie du comportement élastique du matériau, en fonction de la pression de confinement.

### 3.2.3 Directions principales du tenseur des déformations

En compression simple, nous avons observé au §3.2.1 des composantes  $\epsilon_{nt}$  non négligeables du tenseur des déformations dans les essais "hors axes" ( $\delta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ ). Ce phénomène indique la non-coïncidence des directions principales des contraintes et des déformations, due à l'anisotropie de la roche. L'axe  $\mathbf{n}$  des éprouvettes étant la direction principale majeure des contraintes, nous repérons par  $\varphi = (\mathbf{n}, \mathbf{e}_1)$  l'orientation de la direction principale majeure  $\mathbf{e}_1$  des déformations. A partir de nos résultats expérimentaux, cet angle  $\varphi$  peut être calculé à partir de la formule suivante :

$$2\varphi = \text{Arctg} \left( \frac{2\epsilon_{nt}}{\epsilon_{tt} - \epsilon_{nn}} \right) \quad \text{(III.14)}$$

Sur les Figures III.50 à III.54, nous présentons l'évolution de l'angle  $\varphi$  en fonction de la déformation axiale  $\epsilon_{nn}$ , respectivement pour les orientations  $\delta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ .

Pour les très faibles déformations axiales, les perturbations de ces courbes sont dues aux limites de résolution des mesures pour  $\epsilon_{nt}$ . Sur chacune de ces Figures, la droite en trait plein indique la valeur théorique de l'angle  $\varphi$ , calculée à partir des valeurs des coefficients élastiques du §3.2.2. et s'exprimant sous la forme :

$$2\varphi = \text{Arctg} \left( \frac{\frac{2}{E_{nt}}}{\frac{1}{E_{tt}} - \frac{1}{E_{nn}}} \right) \quad \text{(III.15)}$$

En tenant compte du fait que les courbes expérimentales de l'angle  $\varphi$  sont entachées de l'erreur due à la phase de serrage en compression simple, la concordance entre les valeurs théoriques et expérimentales est assez bonne. Nous n'avons pas déterminé l'angle  $\varphi$  pour les essais sous pression de confinement non nulle, en raison de la diminution du degré d'anisotropie de la roche, entraînant des valeurs des composantes  $\epsilon_{nt}$  trop faibles pour être exploitées valablement.

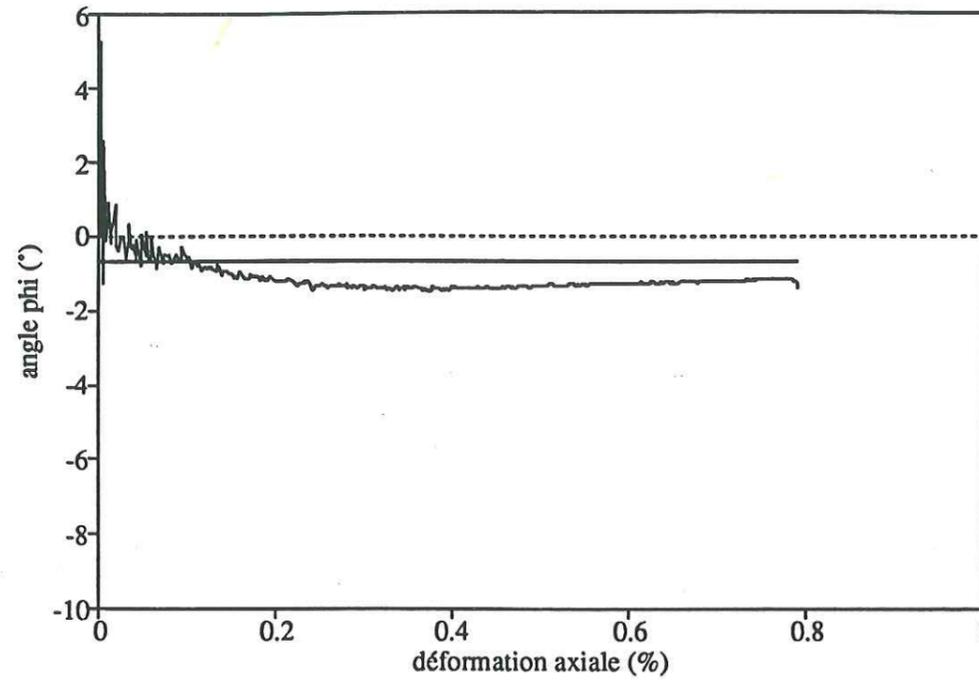


Figure III.50 - Evolution de l'angle  $\phi$  entre les directions principales des contraintes et des déformations pour  $\delta = 15^\circ$  et  $p = 0$ .

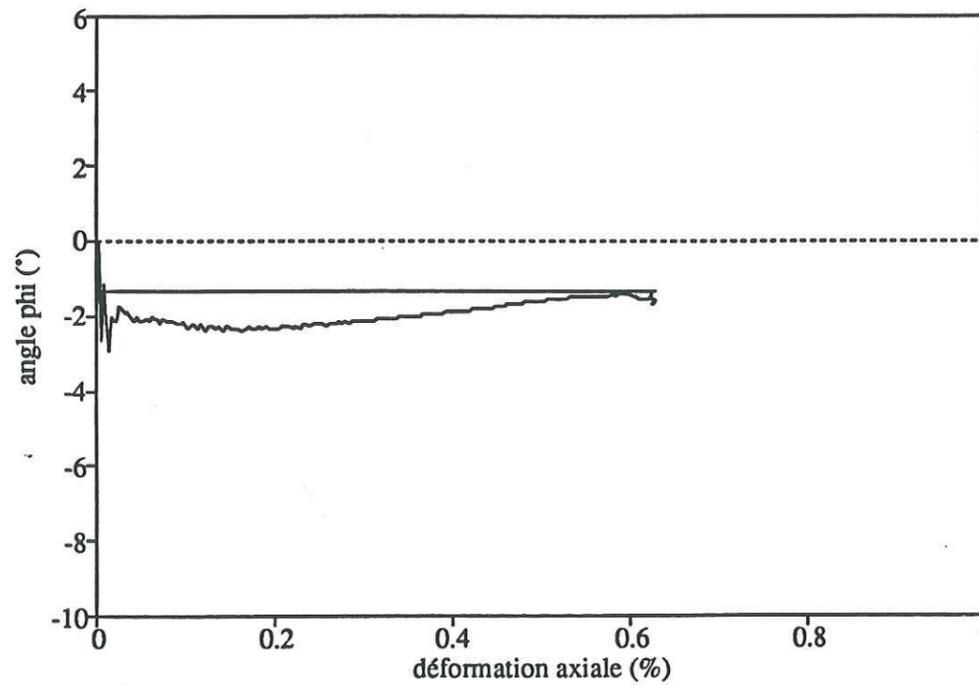


Figure III.51 - Evolution de l'angle  $\phi$  entre les directions principales des contraintes et des déformations pour  $\delta = 30^\circ$  et  $p = 0$ .

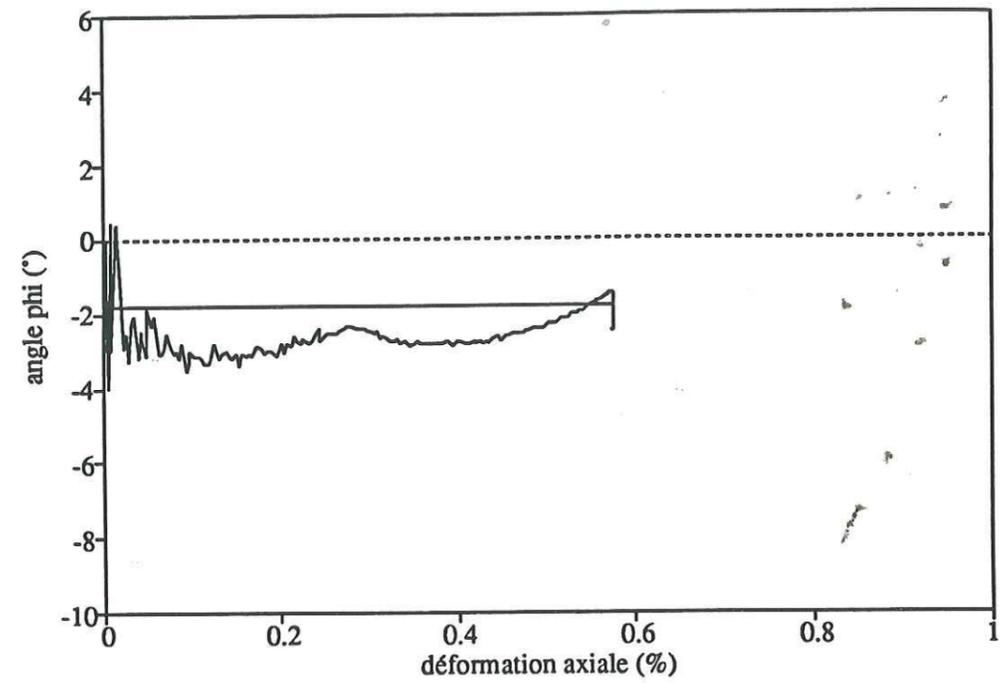


Figure III.52 - Evolution de l'angle  $\phi$  entre les directions principales des contraintes et des déformations pour  $\delta = 45^\circ$  et  $p = 0$ .

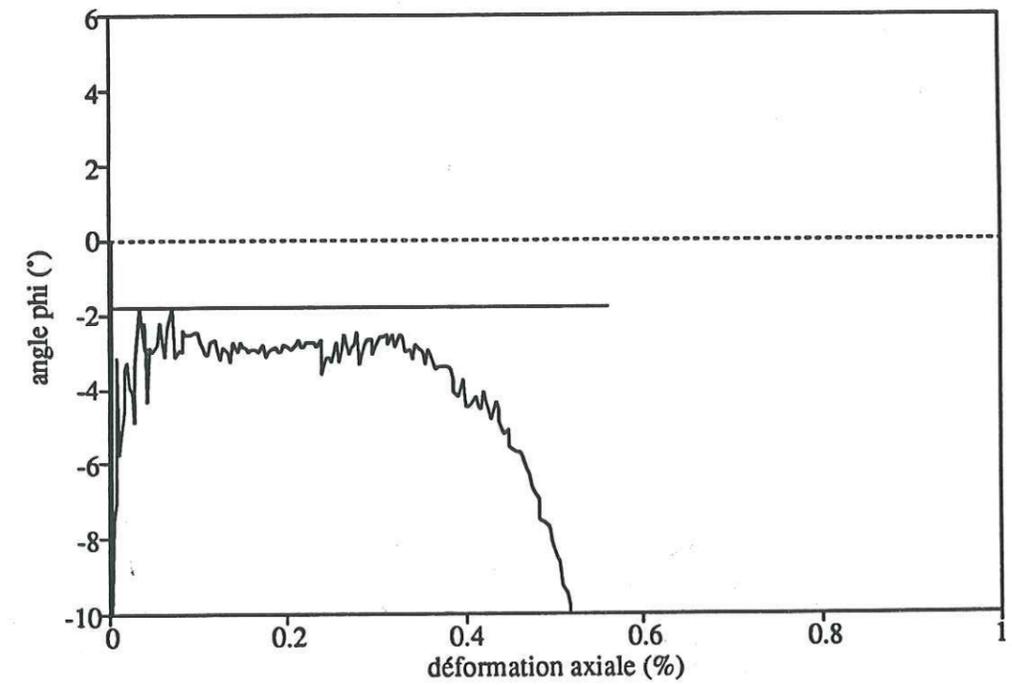


Figure III.53 - Evolution de l'angle  $\phi$  entre les directions principales des contraintes et des déformations pour  $\delta = 60^\circ$  et  $p = 0$ .

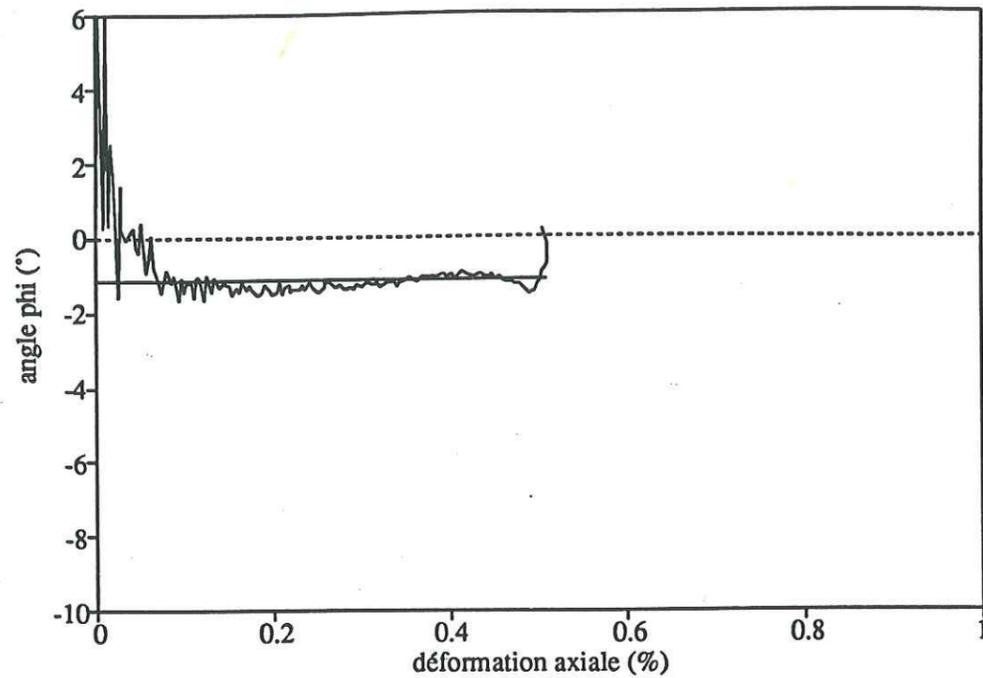


Figure III.54 - Evolution de l'angle  $\phi$  entre les directions principales des contraintes et des déformations pour  $\delta = 75^\circ$  et  $p = 0$ .

### 3.2.4 Variations de volume

Nous présentons, sur les Figures III.55 à III.61, les évolutions de la déformation volumique  $\text{tr}E$ , en fonction des surcharges axiales ( $\sigma - p$ ). Pour chaque courbe, l'évolution de la déformation volumique est présentée jusqu'à la surcharge axiale limite.

En compression simple, les courbes surcharges axiales - déformations volumiques ne présentent aucune partie linéaire, quelle que soit l'orientation  $\delta$  : des déformations volumiques inélastiques apparaissent dès l'application de la charge. La phase de contractance initiale, dont l'importance décroît lorsque  $\delta$  varie de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ , est suivie, avant le pic, d'une longue phase de dilatance.

Lorsque la pression de confinement croît, nous pouvons observer :

- quelle que soit l'orientation  $\delta$ , l'apparition et le développement d'une phase contractante linéaire initiale, ainsi qu'une diminution de l'importance de la phase dilatante ;
- la croissance, pour un angle  $\delta$  donné, de la diminution de volume maximale ;
- la diminution du caractère anisotrope de la phase contractante.

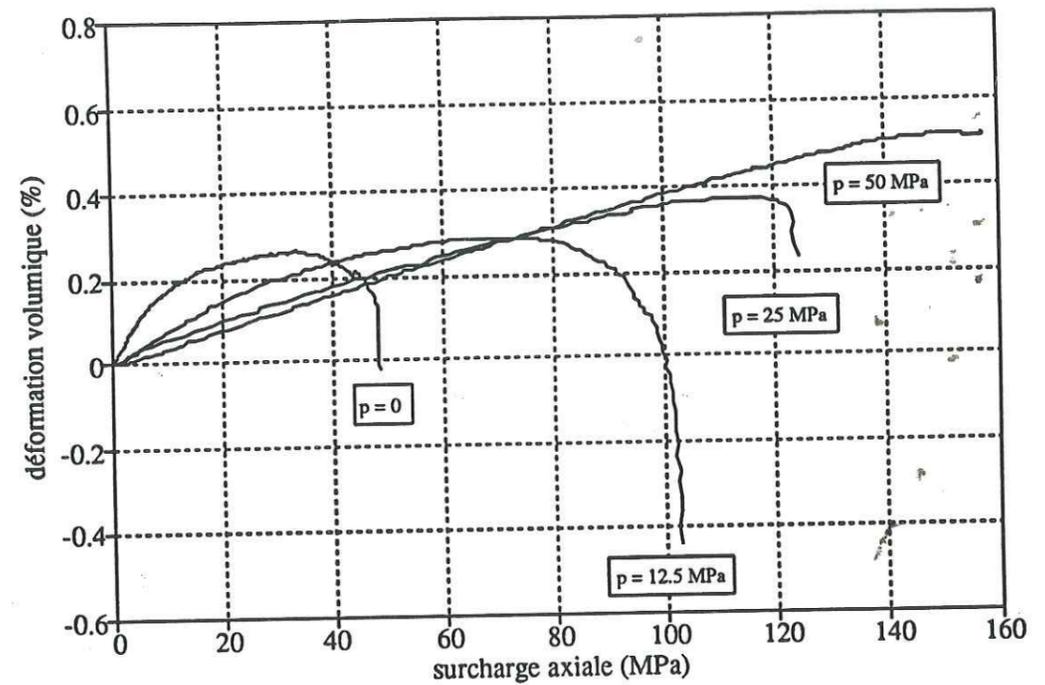


Figure III.55 - Courbes déformations volumiques - surcharges axiales pour  $\delta = 0^\circ$  et pour les différentes pressions de confinement  $p$ .

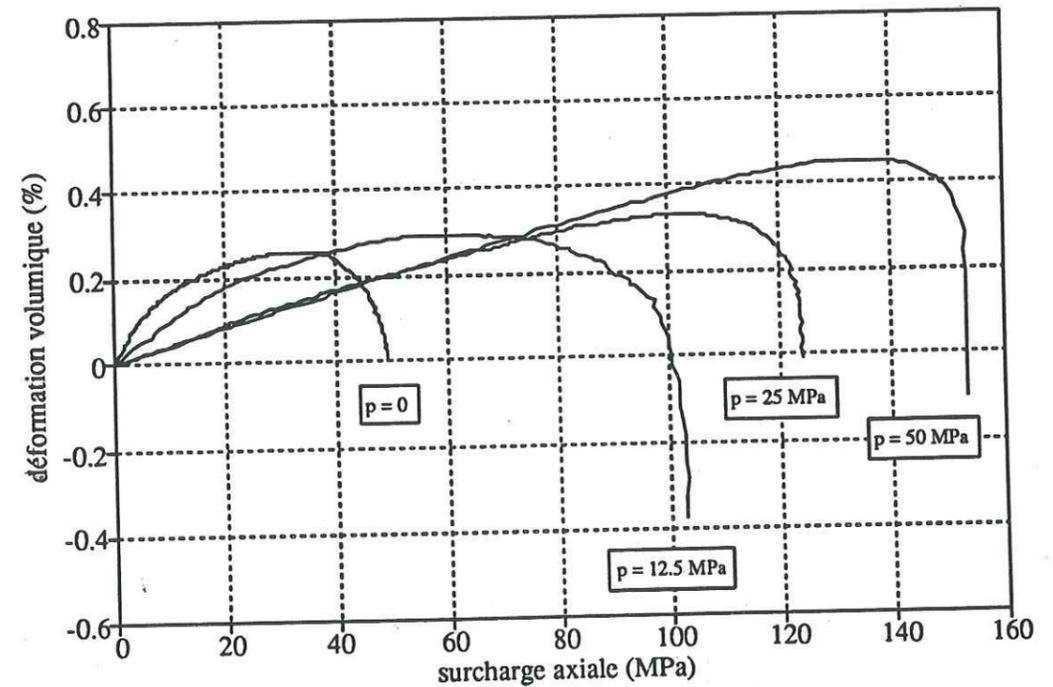


Figure III.56 - Courbes déformations volumiques - surcharges axiales pour  $\delta = 15^\circ$  et pour les différentes pressions de confinement  $p$ .

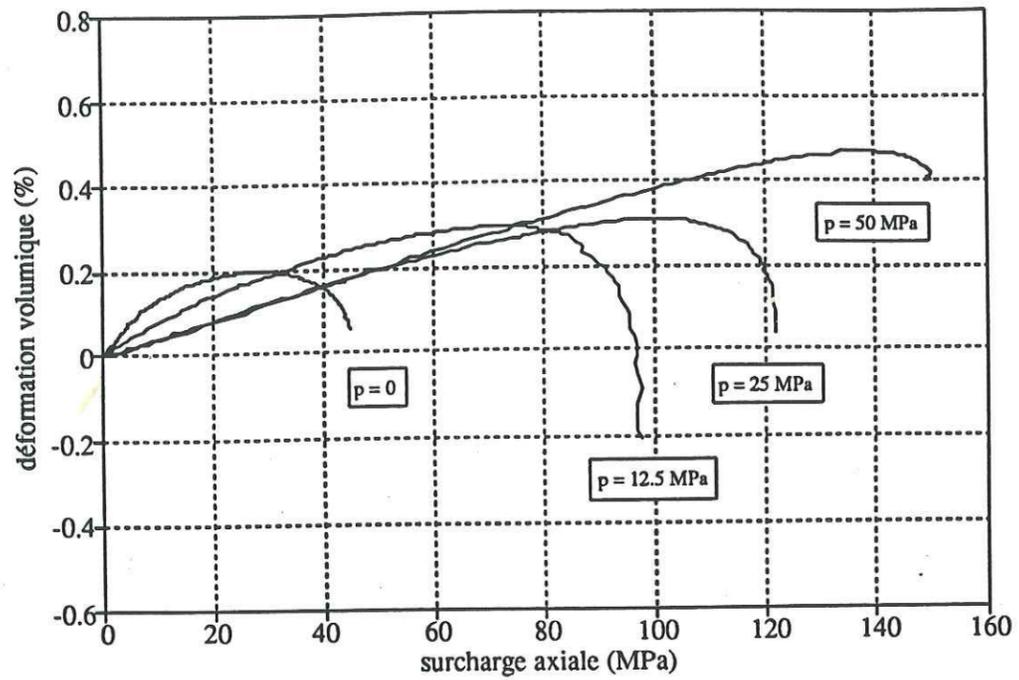


Figure III.57 - Courbes déformations volumiques - surcharges axiales pour  $\delta = 30^\circ$  et pour les différentes pressions de confinement  $p$ .

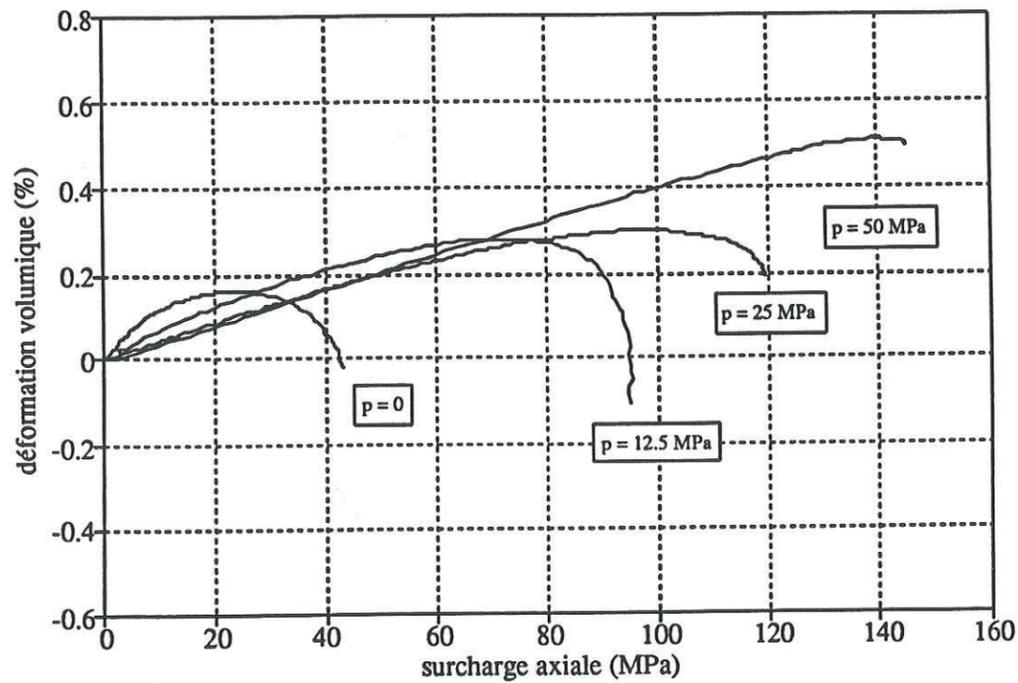


Figure III.58 - Courbes déformations volumiques - surcharges axiales pour  $\delta = 45^\circ$  et pour les différentes pressions de confinement  $p$ .

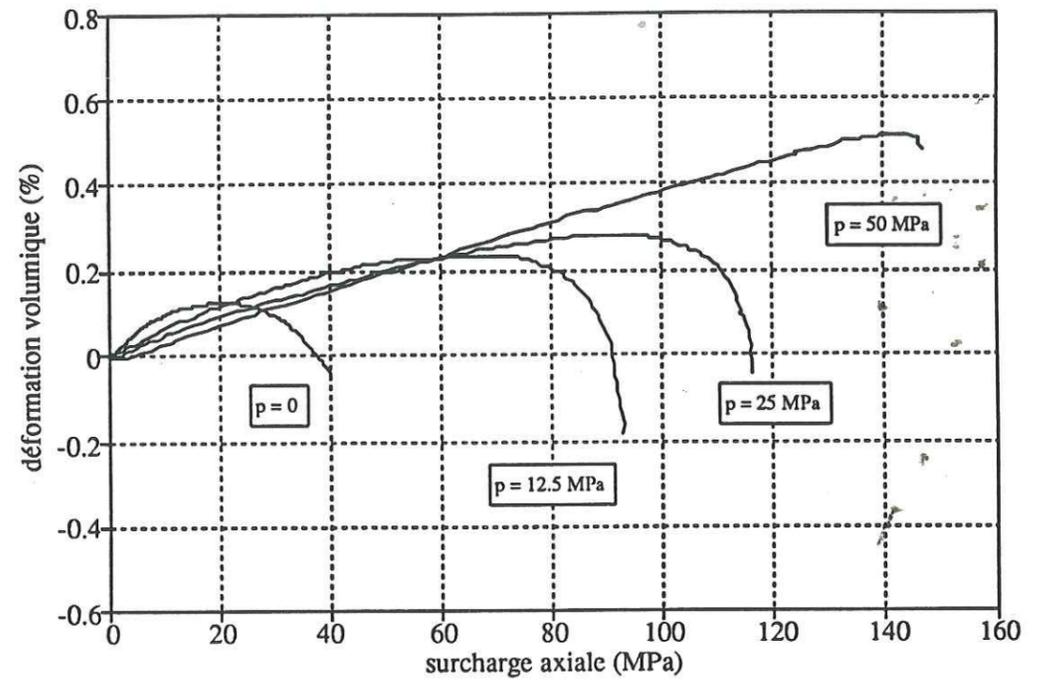


Figure III.59 - Courbes déformations volumiques - surcharges axiales pour  $\delta = 60^\circ$  et pour les différentes pressions de confinement  $p$ .

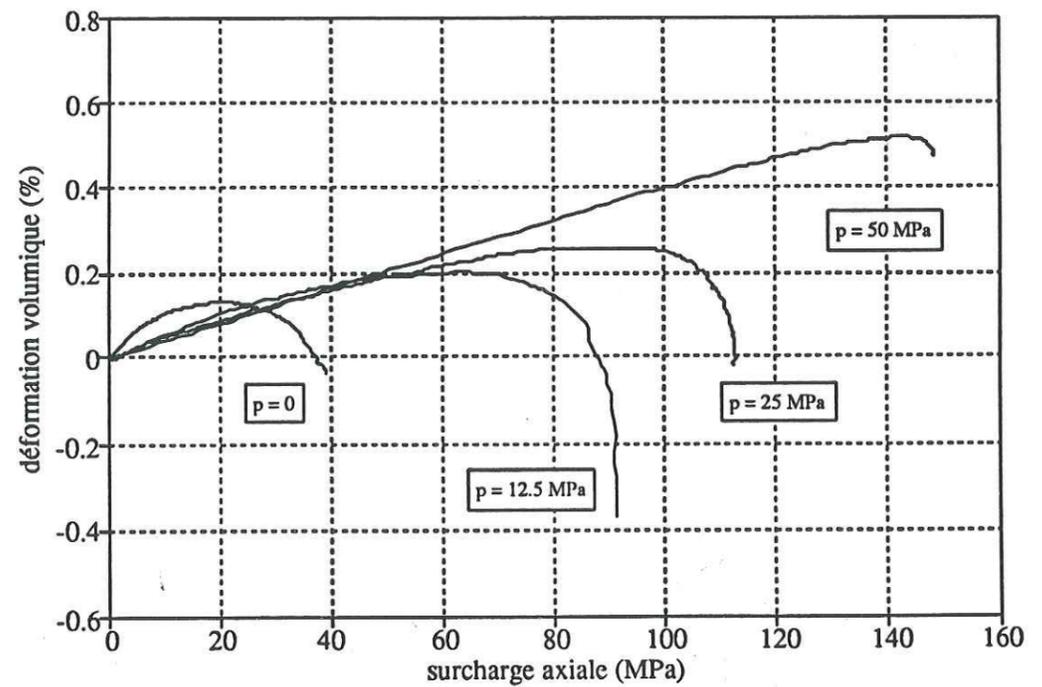


Figure III.60 - Courbes déformations volumiques - surcharges axiales pour  $\delta = 75^\circ$  et pour les différentes pressions de confinement  $p$ .

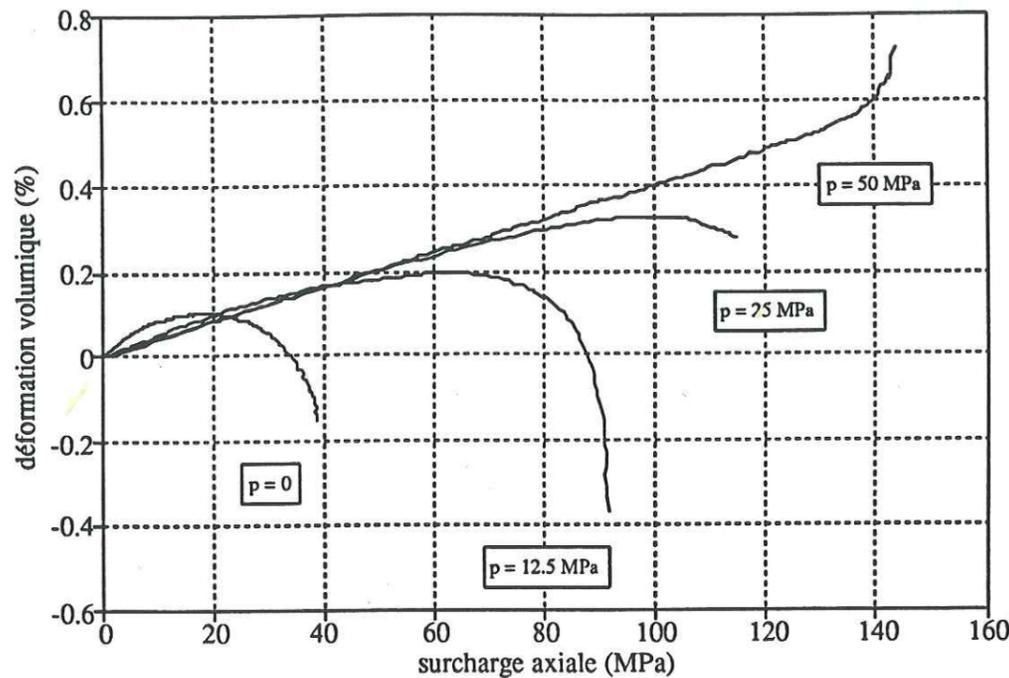


Figure III.61 - Courbes déformations volumiques - surcharges axiales pour  $\delta = 90^\circ$  et pour les différentes pressions de confinement  $p$ .

### 3.2.5 Déformations axiales limites

Nous présentons, dans le Tableau III.10 et sur la Figure III.62, l'évolution des déformations axiales limites  $\epsilon_{nm}$ , mesurées au pic des contraintes, en fonction de la pression de confinement et de l'orientation des éprouvettes. Notons que, lors de l'essai de compression simple, pour l'orientation  $\delta = 0^\circ$ , les signaux des jauges axiales n'ont pas pu être exploités jusqu'au pic des contraintes, en raison de l'apparition de déformations hétérogènes locales. La valeur de la déformation axiale maximale correspond, pour cet essai, à un accroissement "virtuel" de la dernière déformation axiale homogène mesurée, calculé à partir des signaux des capteurs inductifs de déplacement placés entre les pistons de la cellule (cf. Chapitre II, § 2.5).

Pour chaque orientation, nous observons une augmentation de la déformation axiale limite avec la pression de confinement. En compression simple et pour les pressions de confinement  $p = 12.5 \text{ MPa}$  et  $p = 25 \text{ MPa}$ , la déformation axiale limite décroît lorsque  $\delta$  varie de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ ; en compression simple, les fortes valeurs observées à  $\delta = 0^\circ$  et  $\delta = 15^\circ$  peuvent être liées à la différence des modes de rupture associés au pic des contraintes : rupture en

extension à  $\delta = 0^\circ$  et  $\delta = 15^\circ$ , rupture par cisaillement pour  $\delta > 15^\circ$ . Pour la pression de confinement  $p = 50 \text{ MPa}$ , les valeurs élevées observées à  $\delta = 0^\circ, 15^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ , sont liées à la différence des modes de déformations évoquée au §3.2.1 : déformation pseudo-plastique après une phase importante d'écroutissage pour  $\delta = 0^\circ, 15^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ , déformation par bande de cisaillement pour  $\delta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ .

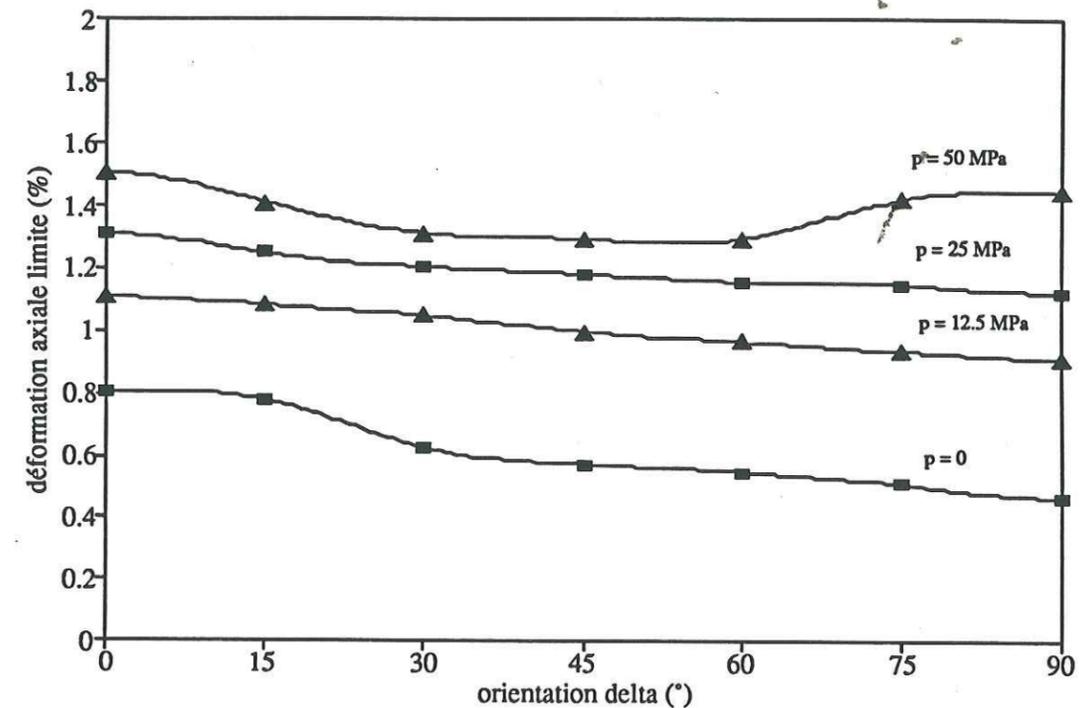


Figure III.62 - Evolution directionnelle de la déformation axiale limite.

	$p = 0$	$p = 12.5 \text{ MPa}$	$p = 25 \text{ MPa}$	$p = 50 \text{ MPa}$
$\delta = 0^\circ$	0.8030%	1.1074%	1.3086%	1.5035%
$\delta = 15^\circ$	0.7807%	1.0829%	1.2488%	1.4101%
$\delta = 30^\circ$	0.6278%	1.0486%	1.2037%	1.3121%
$\delta = 45^\circ$	0.5743%	0.9995%	1.1828%	1.2956%
$\delta = 60^\circ$	0.5485%	0.9681%	1.1582%	1.2957%
$\delta = 75^\circ$	0.5112%	0.9382%	1.1515%	1.4214%
$\delta = 90^\circ$	0.4676%	0.9174%	1.1249%	1.4496%

Tableau III.10 - Déformations axiales limites en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes et de la pression de confinement  $p$ .

Afin d'étudier l'évolution de l'anisotropie des déformations axiales limites en fonction de la pression de confinement, nous avons calculé, pour chaque pression, un écart du comportement du matériau à l'isotropie. Cet écart, adimensionnel, est noté  $e_i$  ; son calcul s'effectue comme suit : pour un niveau de confinement donné, la déformation axiale limite est, compte tenu de la symétrie orthotrope de révolution du matériau, une fonction continue  $f(\delta)$ , de période  $\pi$ , symétrique par rapport à  $\delta = \pi/2$ . Cette fonction est approximée à partir des points expérimentaux par une fonction spline de lissage. L'aire  $A$  définie par la courbe sur l'intervalle d'étude  $[0, \pi/2]$  est calculée par :

$$A = \int_0^{\pi/2} f(\delta) d\delta \quad (III.16)$$

La valeur moyenne  $f_m$  de la fonction  $f$  correspondant au matériau isotrope équivalent est :

$$f_m = \frac{A}{\pi/2} \quad (III.17)$$

La somme  $A^*$  des valeurs absolues des aires comprises entre la droite  $g(\delta) = f_m$  et la fonction  $f(\delta)$  représente une évaluation de l'écart à l'isotropie de  $f$ , et le paramètre adimensionnel  $e_i$  est défini par (Koss et Boehler, 1990) :

$$e_i = \frac{A^*}{A} = \frac{\int_0^{\pi/2} |f(\delta) - f_m| d\delta}{\int_0^{\pi/2} f(\delta) d\delta} \quad (III.18)$$

notons que, pour un matériau isotrope,  $e_i$  est trivialement nul :  $f(\delta) = f_m, \forall \delta \in [0, \pi/2]$ .

Le paramètre  $e_i$  constitue une mesure "empirique" du degré d'anisotropie. Les résultats de nos calculs sont présentés dans le Tableau III.11. Nous observons, sur ce Tableau, une diminution notable du degré d'anisotropie initial des déformations axiales limites dès l'application de la pression de confinement  $p = 12.5$  MPa. Pour des pressions de confinement plus élevées, le degré d'anisotropie tend à se stabiliser.

	$p = 0$	$p = 12.5$ MPa	$p = 25$ MPa	$p = 50$ MPa
$e_i$	15.31%	5.44%	3.41%	4.70%

Tableau III.11 Degré d'anisotropie des déformations axiales limites, en fonction de la pression de confinement  $p$ .

### 3.2.6 Résistances limites directionnelles

Nous définissons comme résistance directionnelle la surcharge axiale ( $\sigma - p$ ) maximale atteinte au cours d'un essai. La détermination des valeurs des résistances présentées ci-dessous est effectuée à partir de la moyenne de trois à six essais réalisés pour chaque orientation  $\delta$  des éprouvettes et chaque valeur  $p$  de la pression de confinement ; la dispersion moyenne des résultats est de  $\pm 2.8\%$ . Les résistances moyennes obtenues sont présentées dans le Tableau III.12 et sur la Figure III.63.

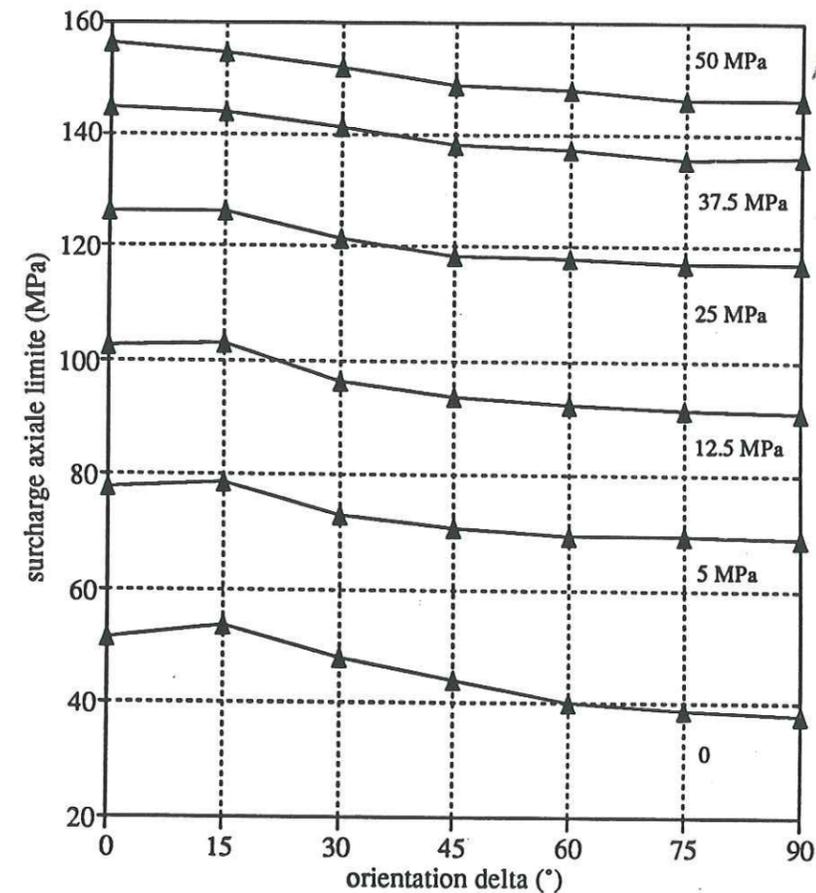


Figure III.63 - Evolution directionnelle de la surcharge axiale limite.

	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 15^\circ$	$\delta = 30^\circ$	$\delta = 45^\circ$	$\delta = 60^\circ$	$\delta = 75^\circ$	$\delta = 90^\circ$
$p = 0$	51.6 MPa	53.8 MPa	48.2 MPa	43.9 MPa	40.0 MPa	38.7 MPa	38.0 MPa
$p = 5$ MPa	77.8 MPa	78.6 MPa	73.2 MPa	71.1 MPa	69.7 MPa	69.4 MPa	69.1 MPa
$p = 12.5$ MPa	102.6 MPa	103.1 MPa	96.5 MPa	93.7 MPa	92.5 MPa	91.6 MPa	91.1 MPa
$p = 25$ MPa	126.5 MPa	126.4 MPa	121.3 MPa	118.4 MPa	117.9 MPa	117.3 MPa	117.1 MPa
$p = 37.5$ MPa	144.6 MPa	143.7 MPa	140.9 MPa	138.1 MPa	137.0 MPa	135.5 MPa	135.9 MPa
$p = 50$ MPa	156.2 MPa	154.2 MPa	152.0 MPa	148.8 MPa	147.6 MPa	146.0 MPa	146.0 MPa

Tableau III.12 - Surcharges axiales limites en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes et de la pression de confinement  $p$ .

Nous observons :

- pour toutes les orientations  $\delta$ , une forte croissance de la résistance avec la pression de confinement ;
- pour chaque orientation  $\delta$ , une variation non linéaire de la résistance limite en fonction de la pression de confinement ;
- une anisotropie assez faible ; la résistance limite varie continûment de  $\delta = 0^\circ$  à  $\delta = 90^\circ$  ; la valeur maximale est atteinte pour une orientation  $\delta$  passant de  $15^\circ$  à  $0^\circ$ , lorsque la pression de confinement croît ; la valeur minimale correspond à l'orientation  $\delta = 90^\circ$ .

L'évolution de l'anisotropie des résistances limites en fonction de la pression de confinement a été étudiée selon la procédure définie au §3.2.5 : pour chaque pression de confinement, nous avons calculé l'écart  $e_i$  du comportement du matériau à l'isotropie. Les résultats de nos calculs sont présentés dans le Tableau III.13 et sur la Figure III.64. Nous observons une forte diminution de l'anisotropie des résistances limites dès l'application d'une pression de confinement, puis une stabilisation sous pression élevée ; ce phénomène a déjà été observé pour les modules élastiques et les déformations axiales limites.

	$p = 0$	$p = 5$ MPa	$p = 12.5$ MPa	$p = 25$ MPa	$p = 37.5$ MPa	$p = 50$ MPa
$e_i$	11.51%	4.31%	4.10%	2.70%	2.07%	2.06%

Tableau III.13 - Degré d'anisotropie des résistances limites, en fonction de la pression de confinement  $p$ .

1 SEP. 2003

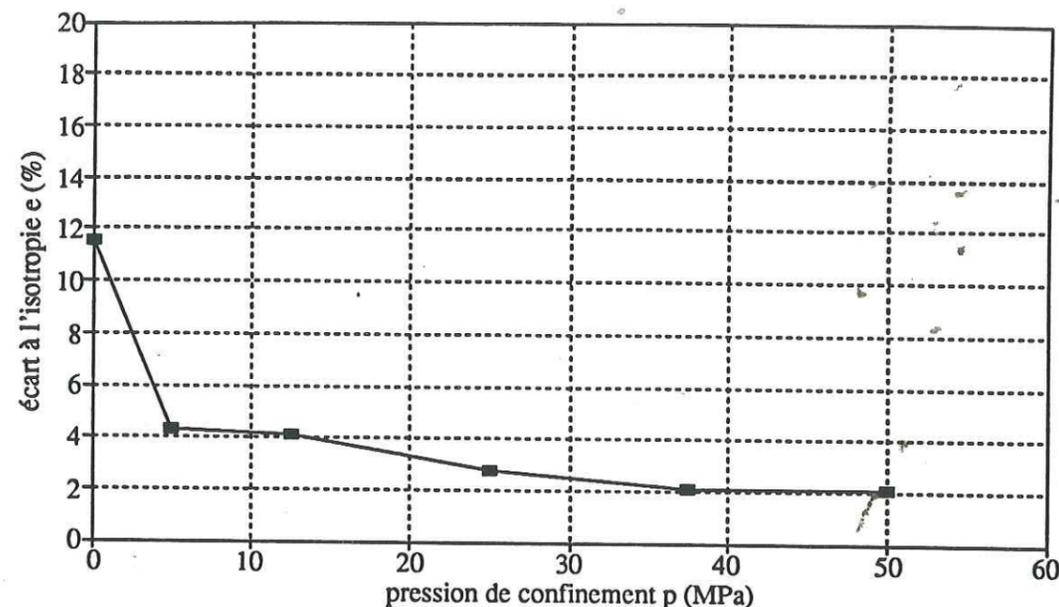


Figure III.64 - Evolution de l'écart à l'isotropie des résistances limites, en fonction de la pression de confinement  $p$ .

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.  
 MAISON DES GEOSCIENCES  
 DOCUMENTATION  
 B.P. 53  
 38041 GRENOBLE CEDEX  
 Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58  
 Mail : ptalour@ujf-grenoble.fr

### 3.3 Comportement anisotrope en traction simple

Nous avons réalisé une série d'essais de tractions simples, sur des éprouvettes orientées à  $\delta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ , non instrumentées par jauges, selon la méthodologie présentée au Chapitre II. Pour chaque orientation  $\delta$ , trois à quatre essais ont été effectués. Les résultats présentés dans ce paragraphe correspondent aux meilleurs essais réalisés : taux de flexion admissible, rupture située dans le tiers central de l'éprouvette.

#### 3.3.1 Courbes contraintes-déformations

Pour les différentes orientations  $\delta$ , nous présentons, sur les Figures III.65 à III.71, les évolutions de la contrainte axiale brute en fonction de la déformation axiale de traction pure, obtenue par la moyenne des déformations mesurées par les trois capteurs placés autour de l'éprouvette. Nous observons que, pour toutes les orientations  $\delta$  des éprouvettes, la variation de la contrainte axiale en fonction de la déformation axiale est fortement non linéaire, dès le début de l'application de la charge : l'endommagement du matériau est immédiat. Ce résultat est vraisemblablement dû à la forte porosité initiale du grès des Vosges.

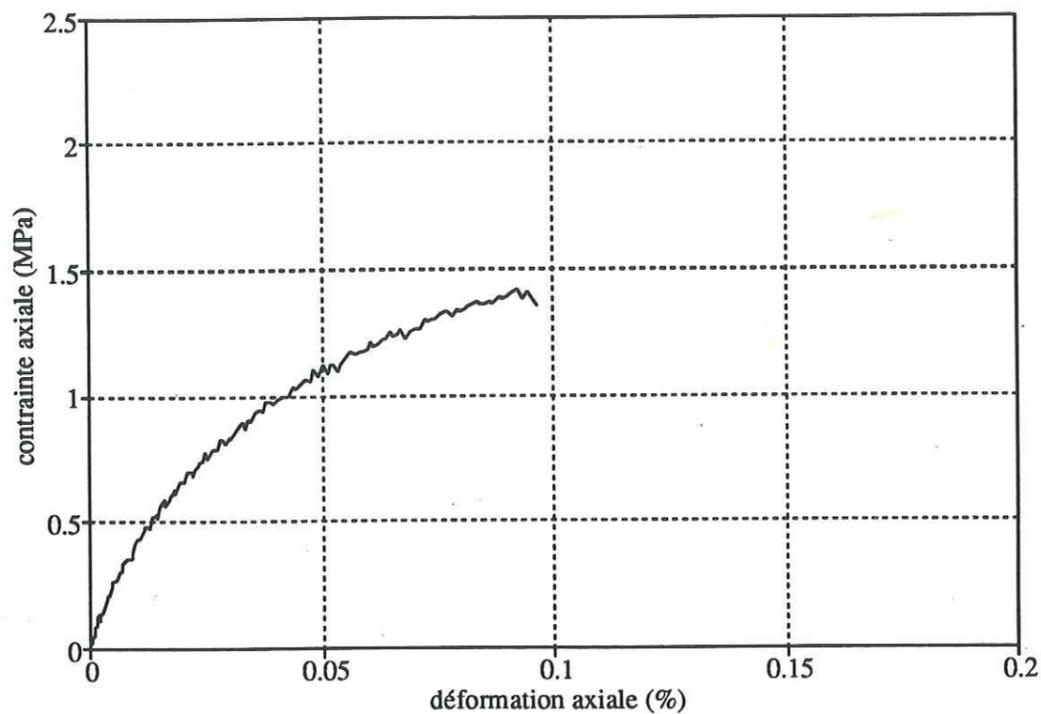


Figure III.65 - Courbe contrainte - déformation pour  $\delta = 0^\circ$

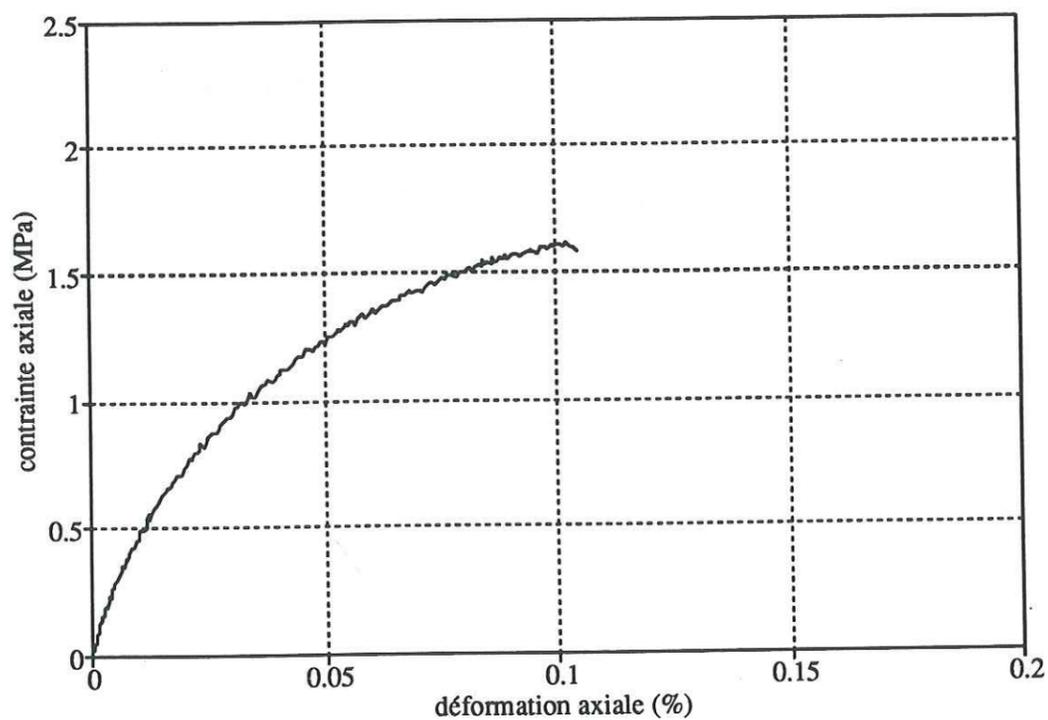


Figure III.66 - Courbe contrainte - déformation pour  $\delta = 15^\circ$

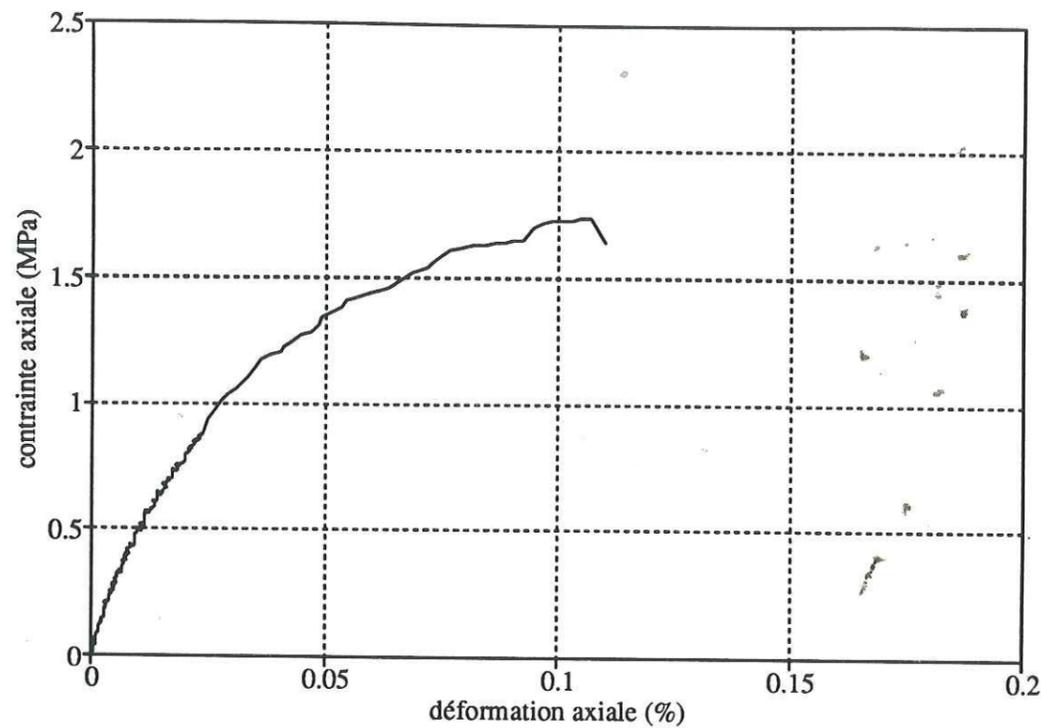


Figure III.67 - Courbe contrainte - déformation pour  $\delta = 30^\circ$

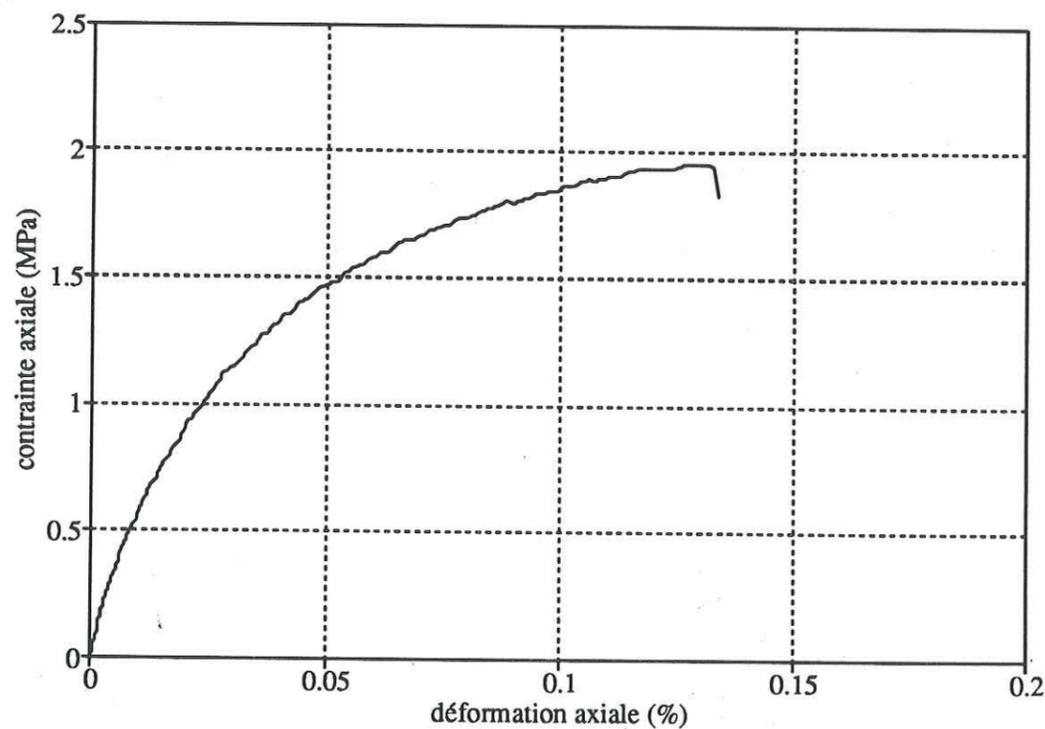


Figure III.68 - Courbe contrainte - déformation pour  $\delta = 45^\circ$

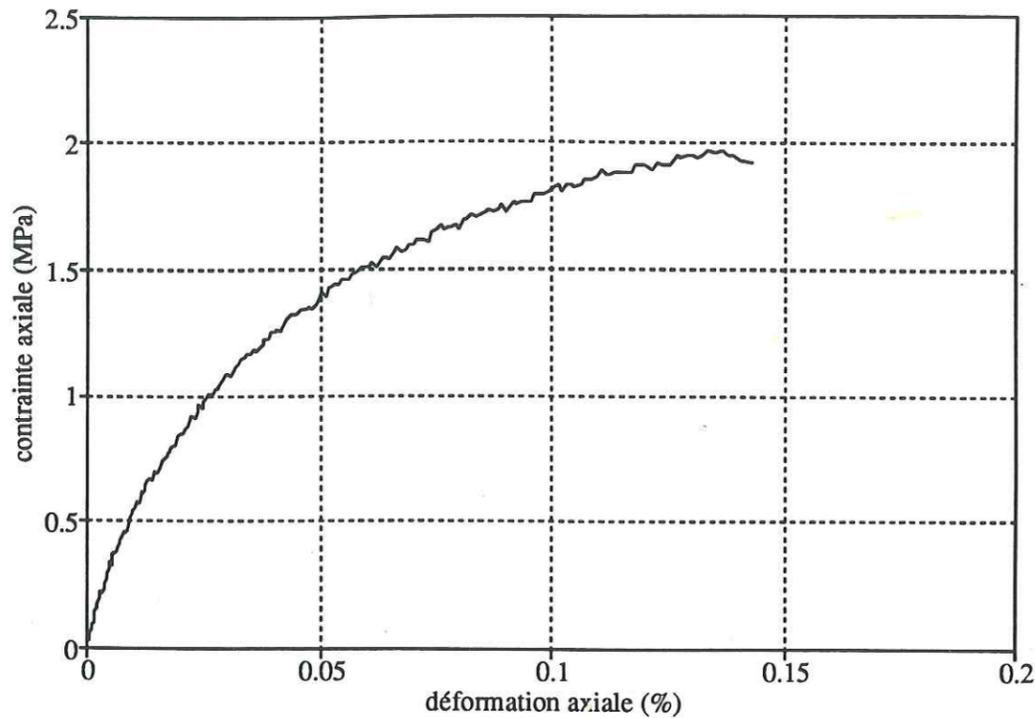


Figure III.69 - Courbe contrainte - déformation pour  $\delta = 60^\circ$

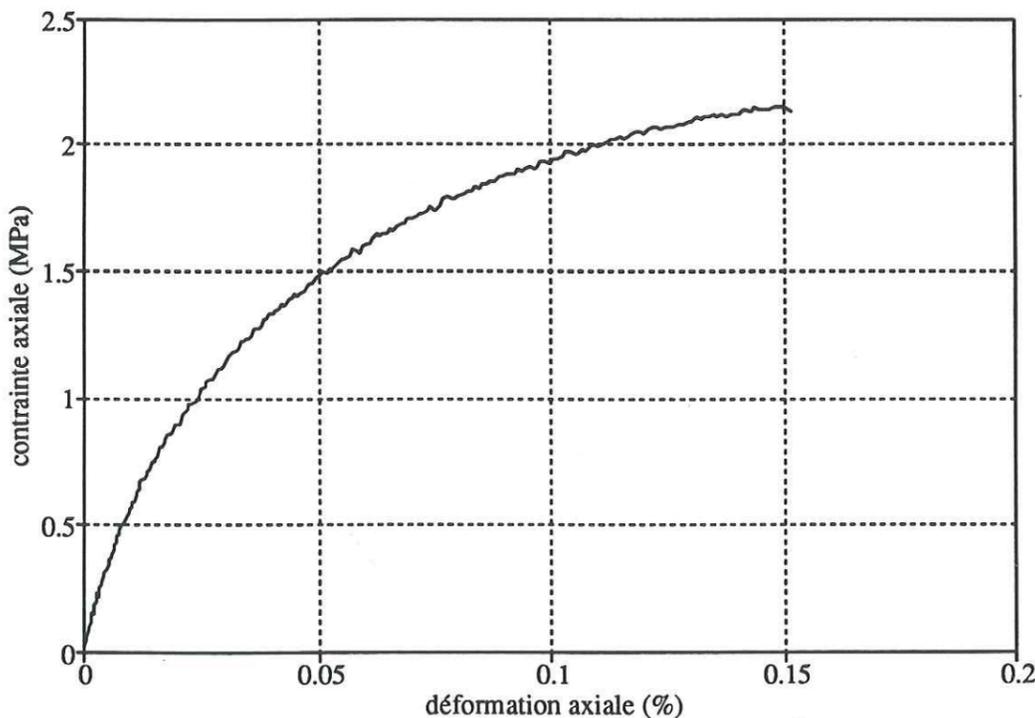


Figure III.70 - Courbe contrainte - déformation pour  $\delta = 75^\circ$

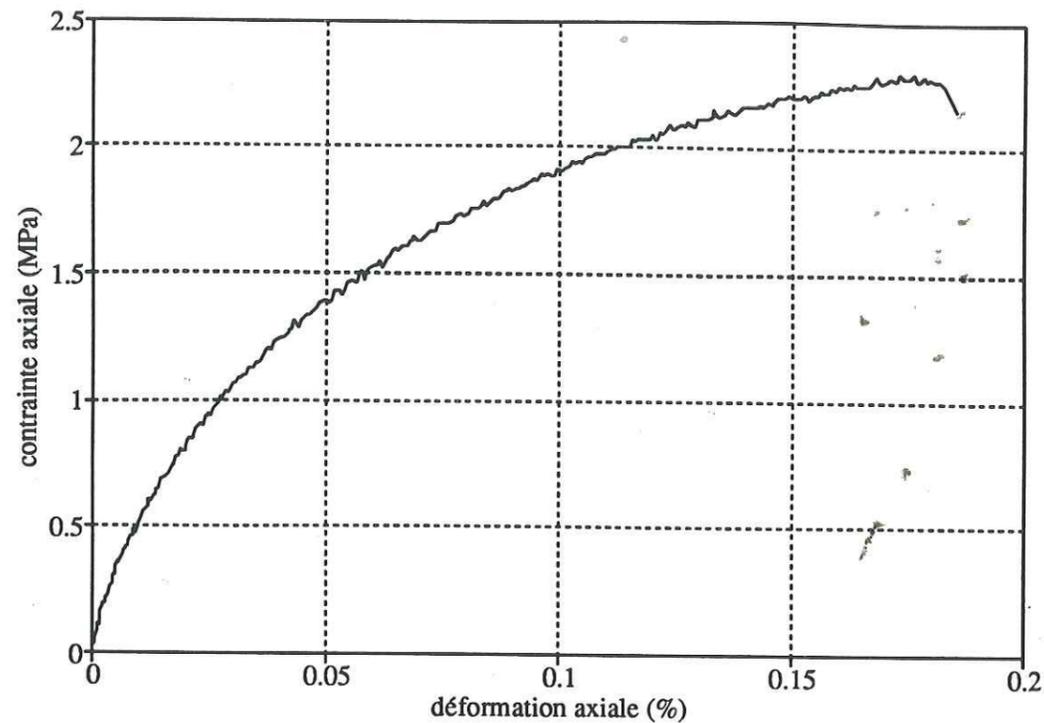


Figure III.71 - Courbe contrainte - déformation pour  $\delta = 90^\circ$

### 3.3.2 Coefficients élastiques anisotropes

Compte tenu de la forte non-linéarité des courbes effort-déformations, la définition d'un module tangent directionnel est problématique. Nous avons choisi de mesurer, pour chaque orientation  $\delta$ , un module axial tangent directionnel initial  $E_{nn}$ . Ce module est calculé analytiquement à partir des coefficients d'une fonction spline de lissage approximant les points expérimentaux. Un exemple d'approximation, pour l'orientation  $\delta = 0^\circ$ , est présenté sur la Figure III.72. Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau III.14. Nous observons, sur ce Tableau, que les valeurs des modules  $E_{nn}$  déterminées en traction simple sont, pour chaque orientation  $\delta$ , inférieures aux valeurs des modules axiaux tangents  $E_{nn}$  déterminée en compression simple. Cette différence peut être expliquée par le mode de mesure des déformations : jauges en compression, capteurs de déplacement inductifs placés entre les pistons de traction, le plus près possible de l'éprouvette, en traction. La mesure effectuée en traction est une mesure de déformation globale de l'éprouvette ; elle intègre les effets d'interface éprouvette-pistons et est, de ce fait, légèrement surévaluée.

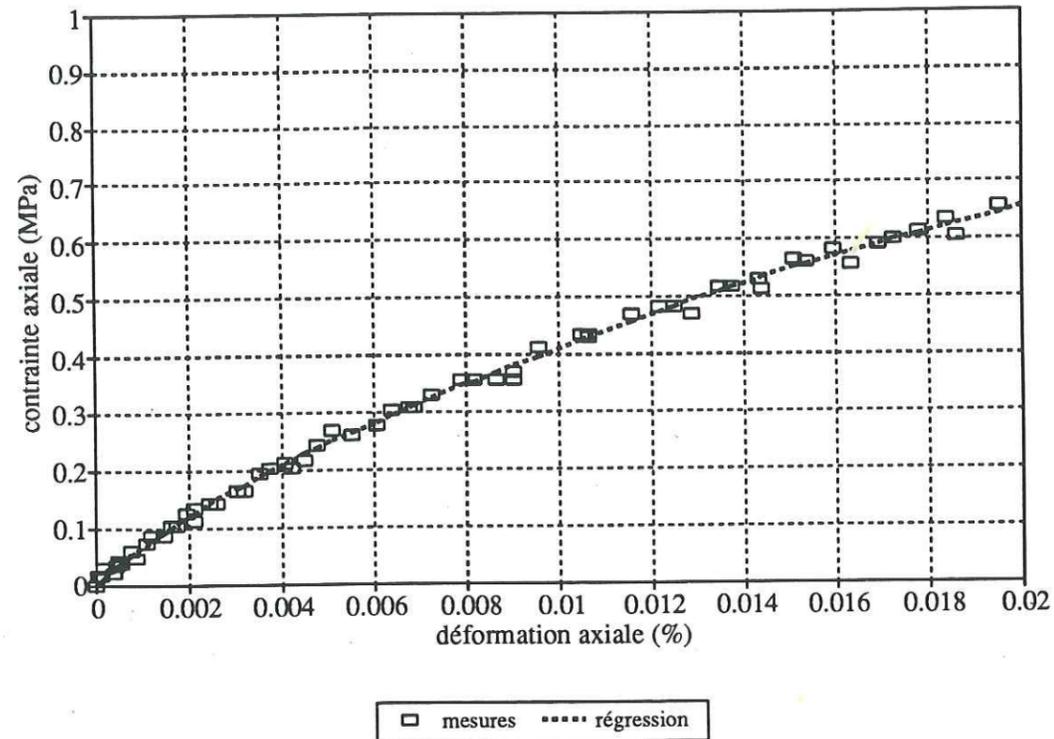


Figure III.72 - Détermination du module élastique directionnel tangent initial à partir de la courbe contrainte - déformation : exemple d'approximation des points expérimentaux par une fonction de lissage, pour  $\delta = 0^\circ$ .

	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 15^\circ$	$\delta = 30^\circ$	$\delta = 45^\circ$	$\delta = 60^\circ$	$\delta = 75^\circ$	$\delta = 90^\circ$
$E_{nn}$	7.07 GPa	7.18 GPa	7.27 GPa	8.02 GPa	8.37 GPa	8.89 GPa	9.17 GPa

Tableau III.15 - Module tangent axial directionnel en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes.

A partir de ces résultats, nous avons calculé, d'après (III.12), les coefficients élastiques  $E_1$  et  $E_3$  et le coefficient  $1/G - 2\nu_3/E_3$ . Les valeurs obtenues sont :

$$E_1 = 9.14 \text{ GPa} \quad ;$$

$$E_3 = 7.06 \text{ GPa} \quad ;$$

$$\frac{1}{G} - \frac{2\nu_3}{E_3} = 0.258 \text{ GPa}^{-1} \quad .$$

A titre de comparaison, nous rappelons que les résultats obtenus à partir des essais de compression simple sont :

$$E_1 = 9.57 \text{ GPa}$$

$$E_3 = 7.99 \text{ GPa}$$

$$\frac{1}{G} - \frac{2\nu_3}{E_3} = 0.233 \text{ GPa}^{-1} \quad .$$

Une comparaison entre l'évolution théorique, en fonction de l'orientation  $\delta$ , du module  $E_{nn}$  calculé à partir des coefficients élastiques  $E_1$ ,  $E_3$  et  $\frac{1}{G} - \frac{2\nu_3}{E_3}$ , relatifs aux essais de traction, et les valeurs expérimentales mesurées est présentée sur la Figure III.73 ; un bon accord est observé pour l'ensemble des orientations  $\delta$ .

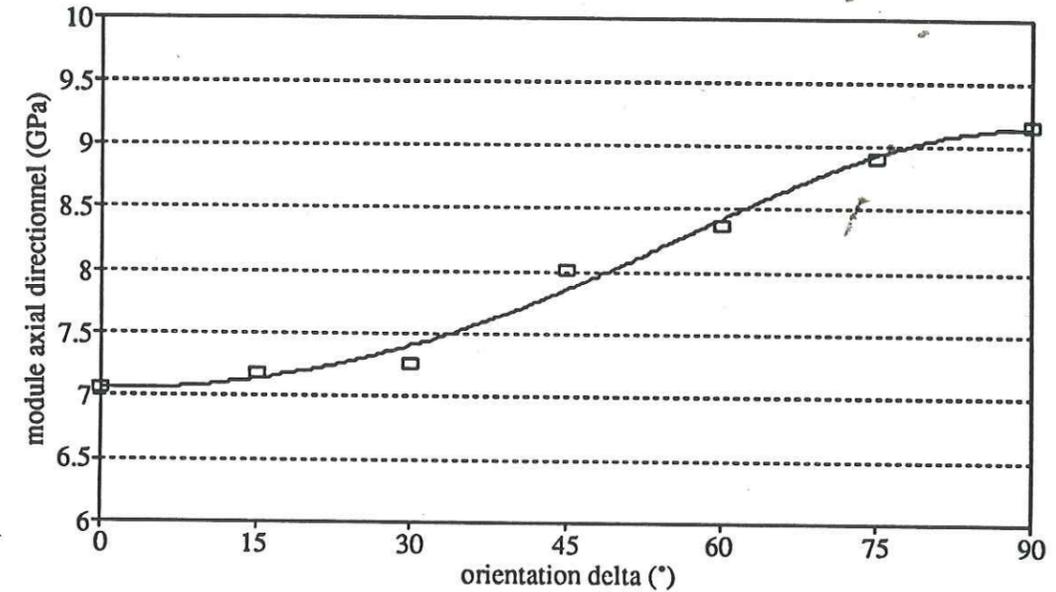


Figure III.73 - Evolution du module directionnel  $E_{nn}$  en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes : comparaison entre les valeurs expérimentales mesurées et les valeurs théoriques calculées.

### 3.3.3 Déformations axiales limites

Nous présentons, dans le Tableau III.15 et sur la Figure III.74, l'évolution des déformations axiales limites  $\epsilon_{nn}$ , mesurées au pic des contraintes, en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes. Pour chaque orientation, nous avons calculé la déformation axiale limite de traction pure, qui est la déformation au centre de la section droite de l'éprouvette, obtenue à partir de la moyenne des déformations mesurées par les capteurs inductifs placés autour de l'éprouvette, ainsi que la déformation axiale limite maximale subie par l'éprouvette du fait de la présence d'une flexion parasite, qui correspond à la déformation maximale au bord de la section droite de l'éprouvette. Les déformations axiales limites de tractions pures et maximales présentent les mêmes variations en fonction de l'orientation  $\delta$  : elles croissent

continûment lorsque  $\delta$  varie de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ . L'écart à l'isotropie des déformations axiales limites maximales a été calculé, selon la procédure définie au §3.2.5. Nous obtenons une valeur de 16.69%, voisine de la valeur obtenue pour les déformations axiales limites en compression simple, qui est 15.31 %.

*Des valeurs de 15*

	déformation axiale limite de traction pure	déformation axiale limite maximale
$\delta = 0^\circ$	0.0923%	0.1089%
$\delta = 15^\circ$	0.1024%	0.1098%
$\delta = 30^\circ$	0.1070%	0.1200%
$\delta = 45^\circ$	0.1296%	0.1449%
$\delta = 60^\circ$	0.1364%	0.1596%
$\delta = 75^\circ$	0.1490%	0.1687%
$\delta = 90^\circ$	0.1758%	0.1876%

Tableau III.15 - Déformations axiales limites de traction pure et déformations axiales limites maximales.

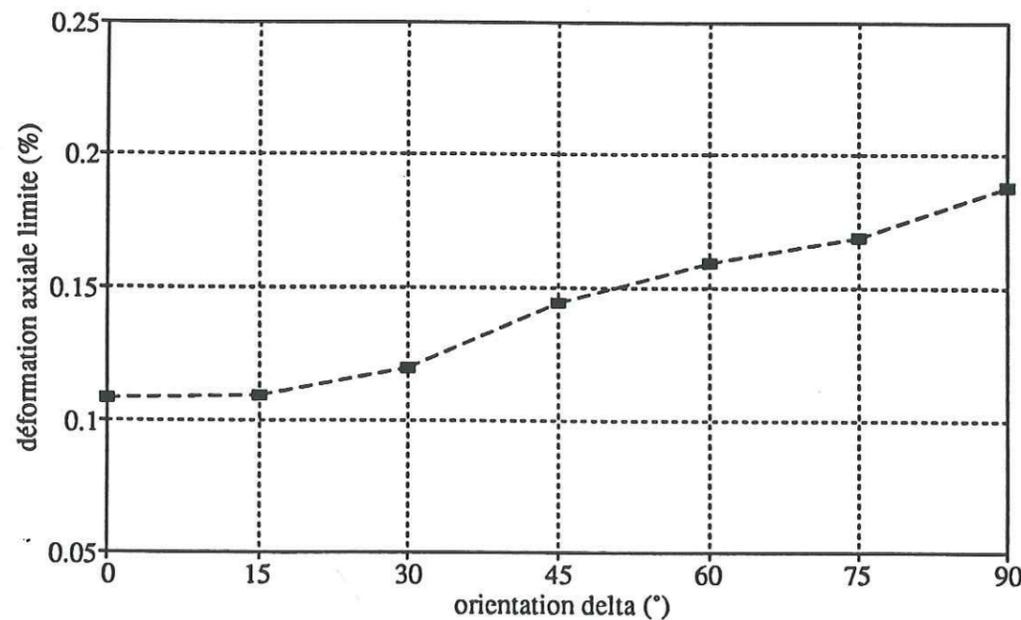


Figure III.74 - Evolution directionnelle de la déformation axiale limite maximale.

### 3.3.4 Contraintes axiales limites

Pour chaque orientation  $\delta$ , nous disposons des valeurs des contraintes axiales limites de traction pure (hors effets de flexion) et les valeurs des contraintes axiales limites maximales (avec prise en compte de la contribution de la flexion parasite éventuelle). Les résultats sont présentés dans le Tableau III.16 et sur la Figure III.76. Nous observons une croissance continue des résistances axiales limites lorsque  $\delta$  varie de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ , ainsi qu'il est observé dans la littérature. L'écart à l'isotropie des contraintes axiales limites, calculé au sens défini au §3.2.5 est de 11.02% pour les contraintes de traction pure, de 11.73% pour les contraintes maximales ; il est voisin de l'écart calculé pour les surcharges axiales limites en compression simple, dont la valeur est 11.52 %.

Afin de comparer les résistances limites en compressions et en traction simples, nous avons calculé, pour chaque orientation  $\delta$ , la valeur absolue  $r(\delta)$  du rapport entre la contraintes axiale limite en compression simple et la contrainte axiale limite maximale en traction simple. Les résultats sont présentés sur la Figure III.76 et dans le Tableau III.16. Nous observons, sur ce Tableau, que, quelle que soit l'orientation  $\delta$  des éprouvettes, la résistance en compression simple est beaucoup plus élevée que celle en traction simple ; le matériau est fortement sensible au signe des contraintes normales. Cette sensibilité a un caractère fortement anisotrope : la valeur de  $r$  diminue quand l'angle  $\delta$  varie de  $0^\circ$  à  $90^\circ$  ; elle est stable pour  $\delta = 0^\circ$  et  $15^\circ$ , puis diminue fortement pour se stabiliser à  $\delta = 75^\circ-90^\circ$ . Ce phénomène est dû à la transition, d'une part, en traction simple, entre la rupture en extension structurale et la rupture en extension astructurale, et d'autre part, en compression simple, entre la rupture en extension astructurale et la rupture sous forme de bande de cisaillement. L'étude des variations du paramètre directionnel  $r$  permet de mettre en évidence l'importance des effets associés à l'orientation du tenseur des contraintes par rapport aux directions privilégiées du matériau.

	contrainte axiale limite de traction pure	contrainte axiale limite maximale
$\delta = 0^\circ$	1.43 MPa	1.69 MPa
$\delta = 15^\circ$	1.62 MPa	1.74 MPa
$\delta = 30^\circ$	1.74 MPa	1.96 MPa
$\delta = 45^\circ$	1.96 MPa	2.19 MPa
$\delta = 60^\circ$	1.98 MPa	2.31 MPa
$\delta = 75^\circ$	2.15 MPa	2.43 MPa
$\delta = 90^\circ$	2.30 MPa	2.45 MPa

Tableau III.15 - Contraintes axiales limites de traction pure et contraintes axiales limites maximales.

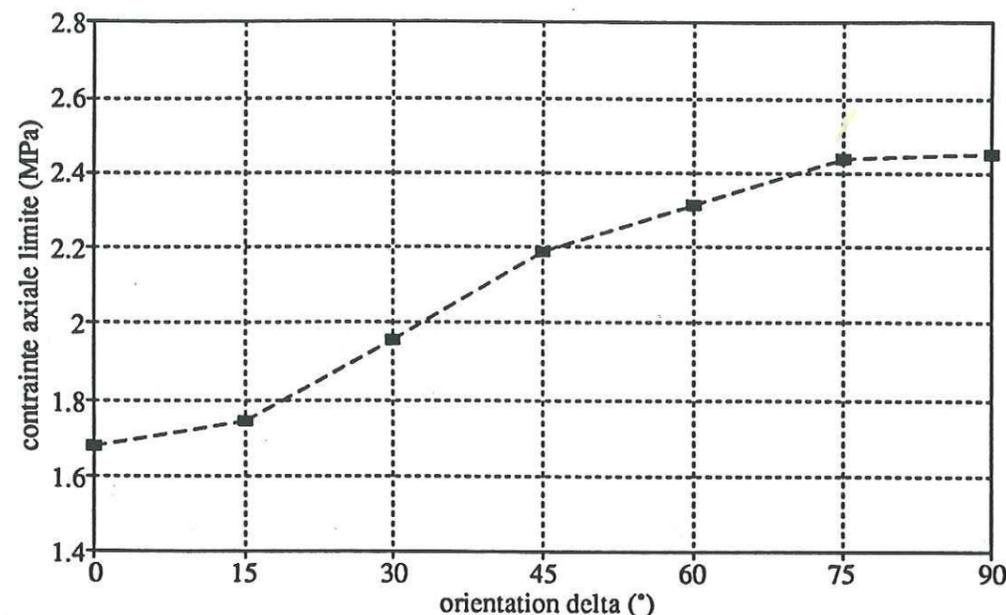


Figure III.75 - Evolution directionnelle de la contrainte axiale limite maximale.

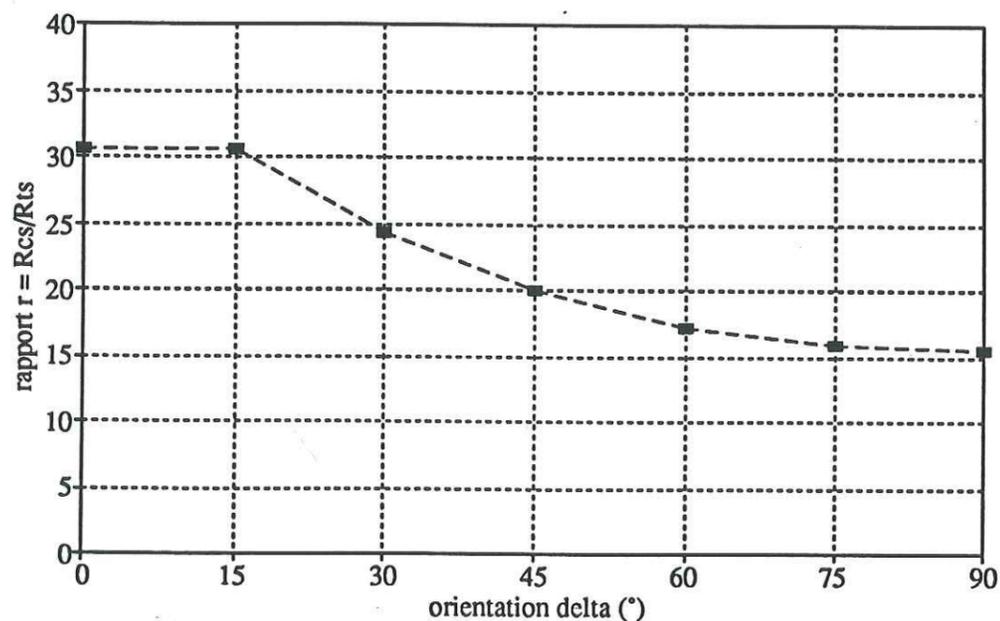


Figure III.76 - Evolution directionnelle du paramètre r, valeur absolue du rapport entre les contraintes axiales limites maximales en compression et en traction simple.

	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 15^\circ$	$\delta = 30^\circ$	$\delta = 45^\circ$	$\delta = 60^\circ$	$\delta = 75^\circ$	$\delta = 90^\circ$
r	30.62	30.67	24.31	20.05	17.24	15.89	15.60

Tableau III.16 - Valeurs du paramètre r, en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes.

### 3.4 Critère de rupture

Nous proposons un nouveau critère de rupture pour les roches orthotropes de révolution, spécifique aux états de contraintes triaxiaux de révolution. Ce critère relie la surcharge axiale  $\sigma - p$ , la pression de confinement  $p$  et l'orientation  $\delta$  par :

$$(\sigma - p)^2 + (\sigma - p) \left[ a_0 + a_1 \cos^2 \delta + a_2 \cos^4 \delta + p (b_0 + b_1 \cos^2 \delta + b_2 \cos^4 \delta) \right] + c_0 + c_1 p + c_2 p^2 = 0 \quad (III.19)$$

où les  $a_i, b_i, c_i$  sont des constantes matérielles.

Nous rappelons que la forme générale invariante du critère de rupture (ou de plasticité) d'un matériau orthotrope de révolution d'axe privilégié  $v_3$  s'exprime par (cf. Chapitre I) :

$$f(\text{tr}T, \text{tr}T^2, \text{tr}T^3, \text{tr}MT, \text{tr}MT^2) = 0 \quad (III.20)$$

ou sous la forme équivalente :

$$g(\text{tr}T, \text{tr}S^2, \text{tr}S^3, \text{tr}MS, \text{tr}MS^2) = 0 \quad (III.21)$$

où  $T$  est le tenseur des contraintes,  $S$  son déviateur et  $M = v_3 \otimes v_3$  le tenseur de structure du matériau.

Pour des états de contrainte triaxiaux de révolution, consistant en des compressions ou des tractions axiales  $\sigma$  sur des éprouvettes orientées par l'angle  $\delta$  entre la direction privilégiée  $v_3$  et la direction de la contrainte axiale, et soumises à des pressions de confinement  $p$ , les arguments du critère (III.20) peuvent s'exprimer en fonction des trois variables  $\sigma, p$  et  $\delta$  par (Boehler et Delafin, 1982) :

$$\begin{aligned} \text{tr}T &= \sigma + 2p & ; & & \text{tr}S^2 &= \frac{2}{3}(\sigma - p)^2 & ; & & \text{tr}S^3 &= \frac{2}{9}(\sigma - p)^3 & ; \\ \text{tr}MS &= \frac{1}{3}(\sigma - p)(3\cos^2 \delta - 1) & ; & & \text{tr}MS^2 &= \frac{1}{9}(\sigma - p)^2(3\cos^2 \delta + 1) & . \end{aligned} \quad (III.22)$$

Dans ce cas, les cinq arguments de la forme générale (III.20) ne sont plus indépendants ; ils sont liés par les relations :

$$\begin{aligned} \text{trMS}^2 &= \frac{1}{3} \text{trS}^2 + \frac{\epsilon}{\sqrt{6}} \text{trMS} \sqrt{\text{trS}^2} ; \\ \text{trS}^3 &= \epsilon \frac{2}{3\sqrt{6}} \sqrt{\text{trS}^2} ; \end{aligned} \quad \text{(III.23)}$$

où :  $\epsilon = 1$  si  $\sigma-p > 0$  ;

$\epsilon = -1$  si  $\sigma-p < 0$  .

Finalement, la forme générale invariante du critère d'un matériau orthotrope de révolution, soumis à des états de contraintes triaxiaux de révolution est réduite à :

$$h(\text{trT}, \text{trS}^2, \text{trMS}) = 0 \quad \text{(III.24)}$$

Pour le critère (III.19) proposé, en utilisant les relations (III.22), il vient :

$$\begin{aligned} \sigma-p &= \epsilon \sqrt{\frac{3}{2} \text{trS}^2} ; \\ p &= \frac{1}{3} \left( \text{trT} - \epsilon \sqrt{\frac{3}{2} \text{trS}^2} \right) ; \\ \cos^2\delta &= \frac{1}{3} + \frac{\text{trMS}}{\epsilon \sqrt{\frac{3}{2} \text{trS}^2}} . \end{aligned} \quad \text{(III.25)}$$

Des expressions (III.25), nous pouvons conclure que le critère proposé est bien une forme spécifique du critère général invariant (III.24). Les quatre constantes  $a_0, a_1, a_2, c_0$  prennent en compte le comportement du matériau en compression et en traction simple, les cinq autres constantes spécifient l'influence de la pression de confinement. La forme (III.19) satisfait également à l'exigence physique de la possibilité de l'apparition de déformations plastiques sous contraintes isotropes : les trois constantes  $c_0, c_1, c_2$ , spécifient le comportement du matériau sous contraintes isotropes.

Le critère proposé est adapté à la description d'une anisotropie mécanique continue. Nous l'avons appliqué à l'ensemble de nos résultats expérimentaux en compressions sous pressions de confinement et en traction simple. Une première étape a consisté en la détermination des constantes matérielles  $a_0, a_1, a_2, c_0$  à partir des valeurs des contraintes axiales limites en compression et en traction simple, pour toutes les orientations  $\delta$ . Le système d'équations surdéterminé obtenu a été résolu par une méthode de moindres carrés. Dans une deuxième étape, les valeurs des constantes  $b_0, b_1, b_2, c_1, c_2$  ont été déterminées à partir des résultats des essais de compression sous les pressions de confinement  $p = 5, 12.5, 25, 37.5, 50$  MPa, à nouveau pour toutes les orientations. La résolution du second système d'équations obtenu a également été effectuée par une méthode de moindres carrés. Les valeurs obtenues sont données dans le Tableau III.17.

$a_0$ (MPa)	- 35.31
$a_1$ (MPa)	-10.67
$a_2$ (MPa)	-5.554
$b_0$	-2.005
$b_1$	0.252
$b_2$	-0.119
$c_0$ (MPa <sup>2</sup> )	-92.60
$c_1$ (MPa)	-250.1
$c_2$	4.394

Tableau III.17 - Valeurs expérimentales des constantes matérielles du critère proposé.

Les courbes théoriques obtenues à partir de l'expression du critère (III.19) avec les valeurs du Tableau III.17 sont présentées sur la Figure III.77 pour les sollicitations en traction uniaxiale, et sur la Figure III.78 pour les compressions sous les différentes pressions de confinement ; les points portés sur ces Figures représentent les données expérimentales. Nous observons que, quels que soient le signe des contraintes normales, la valeur de la pression de confinement  $p$  et l'orientation  $\delta$  des éprouvettes, les prévisions théoriques sont en bon accord avec le comportement expérimental. L'écart relatif maximal entre les points expérimentaux et les courbes théoriques est inférieur à 3.6% pour les essais de compression sous pressions de confinement et à 3.4% pour les essais de traction ; l'écart moyen pour l'ensemble des configurations d'essais est 1.5%.

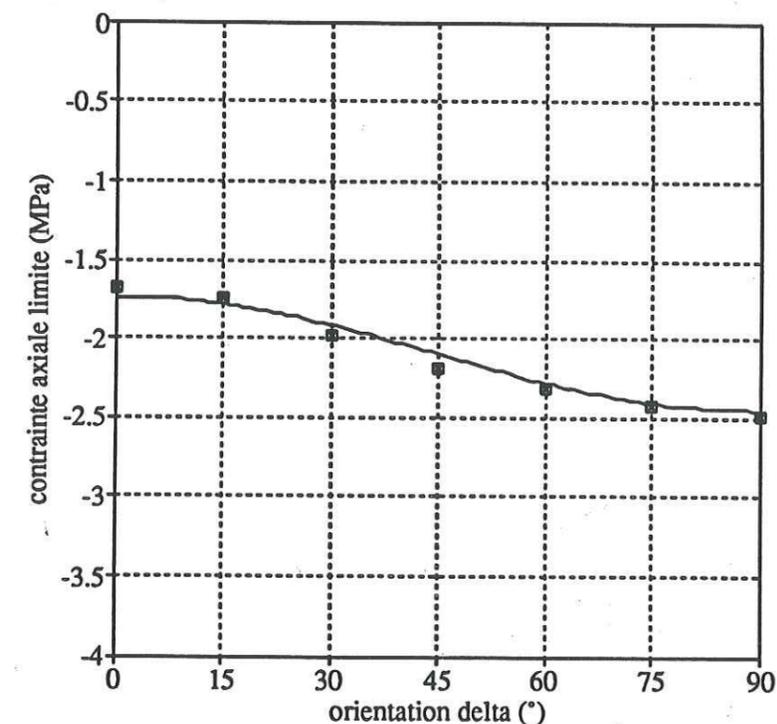


Figure III.77 - Comparaison entre les données expérimentales et les prévisions du critère proposé : essais de traction simple.

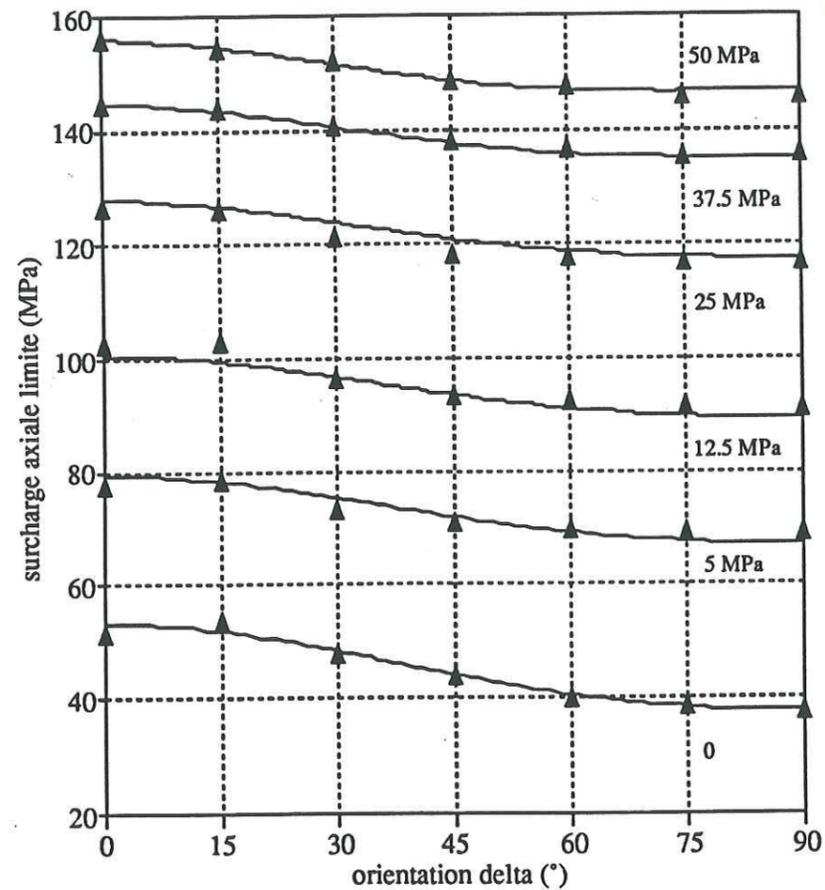


Figure III.78 - Comparaison entre les données expérimentales et les prévisions du critère proposé : essais de compression sous pressions de confinement.

## Chapitre IV

### Bandes de cisaillement dans les roches anisotropes Etude expérimentale

#### 4.1 Orientations privilégiées des bandes de cisaillement et modes de rupture pour le grès des Vosges

La localisation de la rupture dans les roches anisotropes est influencée par les structures internes du matériau. En Mécanique de la Rupture, les travaux d'Henry et al. (1977) ont montré que les facteurs d'intensité de contraintes dépendent de l'orientation des entailles par rapport aux structures internes. En Mécanique des Roches, les travaux expérimentaux de Beynet (1977) ont montré que l'orientation des fissures fragiles dans une roche orthotrope de révolution (la diatomite), soumise à des essais de compressions simples orientées ne suit pas les mêmes règles que pour les roches isotropes, mais dépend de l'orientation des directions principales des contraintes par rapport aux plans structuraux. Une modélisation de ce phénomène a été proposée par Raclin (1977), à partir de la "théorie simplifiée" du comportement plastique anisotrope proposée par Boehler et Sawczuk (1970). De même, une orientation privilégiée des zones de rupture dans des cylindres creux épais d'axe perpendiculaire à l'axe de révolution de l'orthotropie et soumis à des pressions internes et externes a été observée par Ewy et Cook (1990) lors d'essais sur un grès et un calcaire : les zones de fracturation intense sont situées symétriquement de part et d'autre du trou, au niveau où le plan isotrope est tangent au cylindre. Les résultats d'essais en compression triaxiale de révolution sur la diatomite (Allirot et Boehler, 1979) ont montré que les plans de cisaillement

ne présentent pas des orientations quelconques par rapport aux plans des strates. En effet, pour toutes les éprouvettes orientées à  $\delta \neq 0^\circ$ ,  $\delta$  étant l'angle entre la direction de la normale au plan des strates et la direction de la contrainte principale majeure, la ligne de plus grande pente du plan de cisaillement est quasi-systématiquement contenue dans un plan perpendiculaire au plan des strates (ou encore, l'intersection du plan de rupture avec le plan privilégié de la roche est une droite perpendiculaire à la direction de la contrainte axiale); pour un certain intervalle d'orientations, le plan de cisaillement est confondu avec le plan des strates.

A notre connaissance, pour un matériau anisotrope, ce phénomène a été observé pour la première fois par Boehler et Sawczuk (1970) sur une argile: argile de la Croix Rouge, consolidée en laboratoire. Par la suite, il a également été observé par Saint Leu et al. (1978) sur un schiste, et par Boehler et al. (1985) sur un composite mat de verre-résine, toutes ces observations ayant été réalisées à l'aide d'essais de compressions triaxiales de révolution. Ces orientations privilégiées des plans de cisaillement par rapport au plan structural semblent donc être une règle assez générale pour les matériaux orthotropes ou orthotropes de révolution, puisqu'elles ont été observées pour des matériaux assez dissemblables en ce qui concerne leurs constituants, leur porosité, ainsi que leur degré et leur type d'anisotropie (anisotropie continue pour l'argile, fortement discontinue pour le schiste, la diatomite et le composite). Un des objectifs de notre étude sur le grès des Vosges est de déterminer si ces phénomènes existent également pour des roches à faible anisotropie structurale.

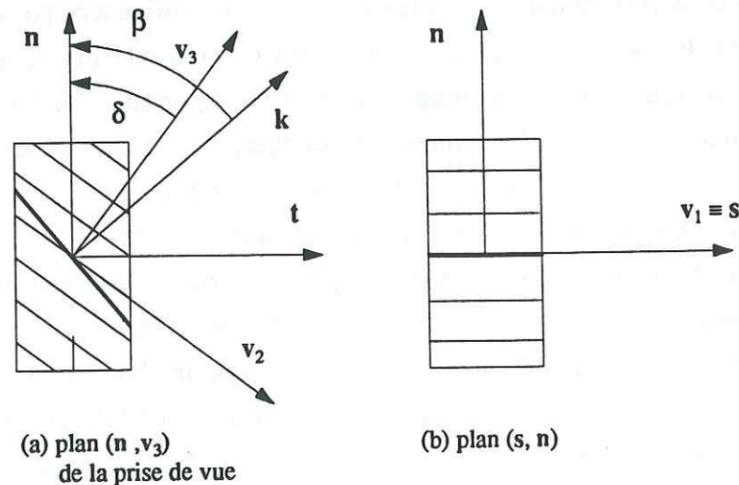


Figure IV.1 - Définition du plan de prise de vue des éprouvettes pour la caractérisation des orientations privilégiées des plans de cisaillement.

Nous présentons sur la Figure IV.2 les photographies des éprouvettes testées, après rupture, pour toutes les orientations de prélèvement  $\delta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$  et toutes les pressions de confinement appliquées:  $p = 0, 5 \text{ MPa}, 12.5 \text{ MPa}, 25 \text{ MPa}, 37.5 \text{ MPa}, 50 \text{ MPa}$ . Pour toutes les éprouvettes orientées à  $\delta \neq 0^\circ$ , le plan de prise de vue est le plan contenant l'axe  $n$  de l'éprouvette et l'axe  $v_3$  de révolution de l'orthotropie; les marques portées le long d'une génératrice des éprouvettes, visibles sur les photos, indiquent l'intersection des bases des éprouvette avec le plan axial perpendiculaire au plan axial de symétrie matérielle  $(n, v_3)$ , cf. Figure IV.1.

En compression simple, la rupture est purement fragile et se produit par extension pour l'orientation  $\delta = 0^\circ$ . Pour toutes les autres orientations, un plan de cisaillement est défini et nous pouvons observer une orientation privilégiée de ce plan de rupture par rapport à la structure matérielle: l'intersection du plan de rupture avec le plan privilégié de la roche est, en effet, une droite perpendiculaire à la direction de la contrainte principale majeure (axe  $n$  de l'éprouvette), c'est à dire que le plan de la photographie contient toujours la ligne de plus grande pente du plan de cisaillement et la normale à ce plan; la direction du glissement est donc toujours dans le plan défini par la direction principale majeure des contraintes et l'axe de l'orthotropie de révolution. Pour l'éprouvette à  $\delta = 90^\circ$ , nous pouvons observer une symétrie assez remarquable des plans de rupture par rapport au plan privilégié, qui, pour cette orientation, est un plan vertical. Pour les orientations  $\delta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  et  $75^\circ$ , les plans de cisaillement sont bien définis dans le tiers central des éprouvettes; ils se redressent aux extrémités des éprouvettes en plans d'extension subverticaux. Ce phénomène est vraisemblablement dû aux effets de frontières et d'interfaces; il a également été observé par Ord et al (1991) lors d'essais biaxiaux en déformation plane sur un grès isotrope.

Pour les pressions de confinement de  $p = 5 \text{ MPa}$  et  $25 \text{ MPa}$ , la rupture se produit, pour toutes les orientations, par cisaillement, généralement le long d'un seul plan; pour toutes les éprouvettes orientées à  $\delta \neq 0^\circ$ , nous retrouvons l'orientation privilégiée précédente.

Pour des pressions de confinement plus élevées ( $p = 25 \text{ MPa}, 37.5 \text{ MPa}$  et  $50 \text{ MPa}$ ), la rupture se produit progressivement par plusieurs familles de plans de cisaillement conjugués; nous pouvons observer, pour les échantillons orientés à  $\delta \neq 0^\circ$ , la vérification de l'orientation préférentielle des plans de cisaillement par rapport au plan privilégié du matériau. Pour la pression de confinement  $p = 50 \text{ MPa}$ , le phénomène de pseudo-plasticité (déformation en tonneau et "bandes de Lüders") se développe de façon très nette pour les éprouvettes orientées à  $\delta = 0^\circ$  et  $90^\circ$ ; ce phénomène est absent pour les éprouvettes orientées à  $\delta = 45^\circ$  et  $60^\circ$ , et beaucoup moins marqué pour les éprouvettes orientées à  $\delta = 15^\circ, 30^\circ, 75^\circ$ .

Pour toutes les orientations des éprouvettes, le redressement des plans de cisaillement au voisinage des têtes s'atténue lorsque la pression de confinement croît

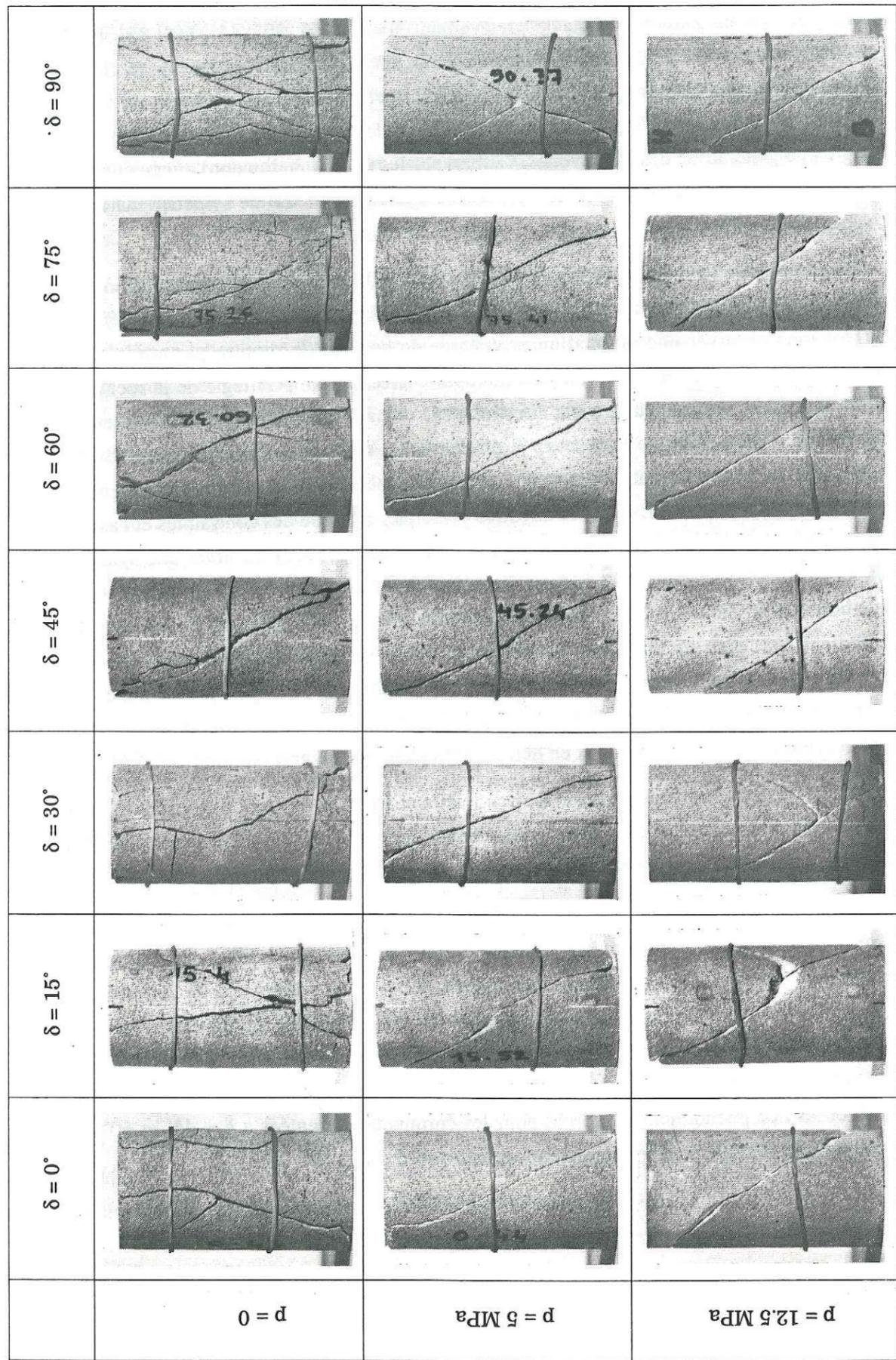


Figure IV.2 - Modes de rupture et orientations des bandes de cisaillement en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes et de la pression de confinement  $p$ .

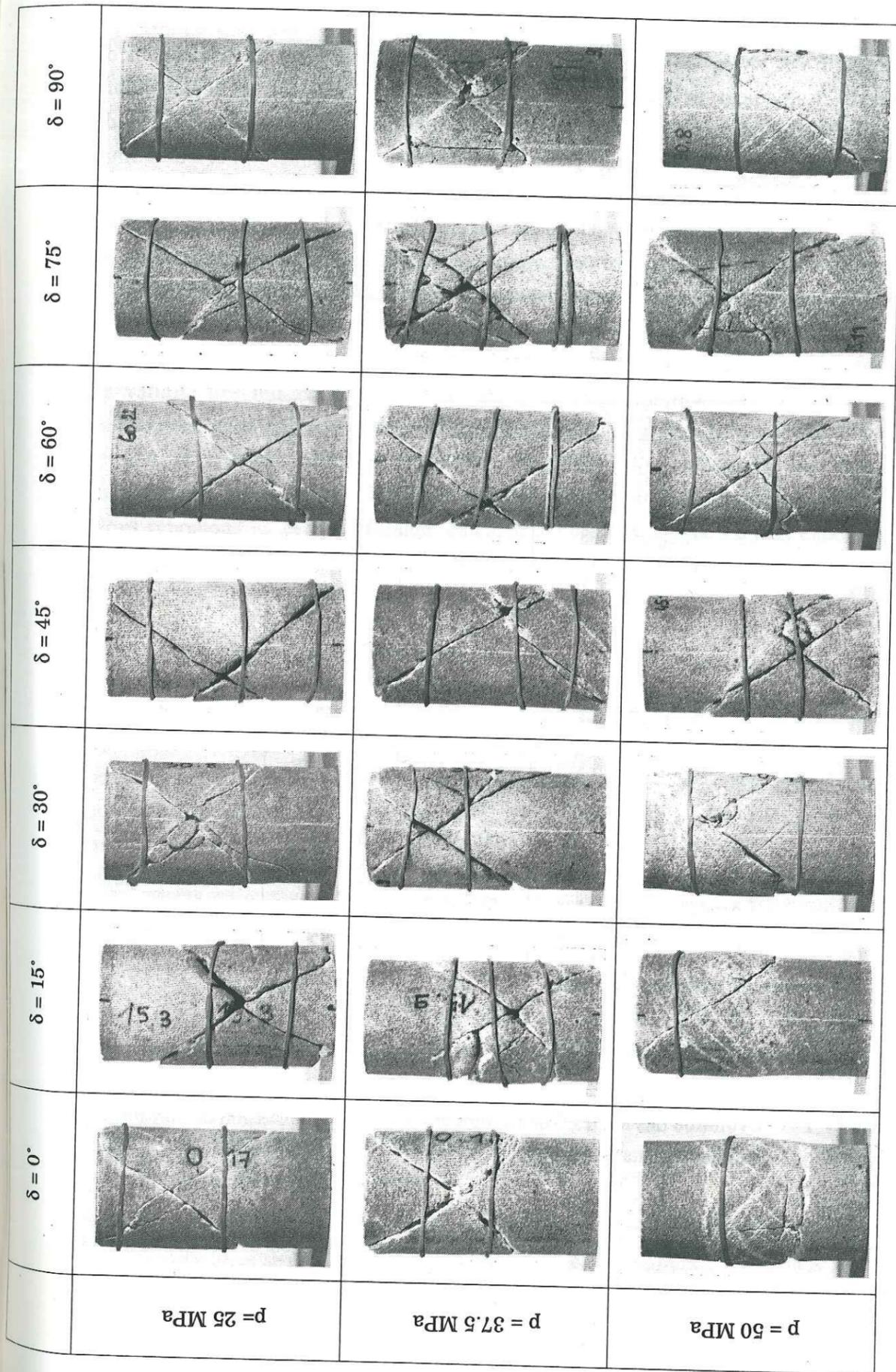


Figure IV.2 - Modes de rupture et orientations des bandes de cisaillement en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes et de la pression de confinement  $p$  (suite).

A partir des photos de la Figure IV.2, nous pouvons caractériser les orientations des bandes de cisaillement, puisque le plan photographié contient à la fois les lignes de plus grande pente des plans privilégié du matériau, la normale  $v_3$  à ces plans, l'axe  $n$  des éprouvettes, ainsi que la ligne de plus grande pente des plans de cisaillement et leur normale  $k$ . Nous avons mesuré, pour toutes les orientations  $\delta$  et toutes les pressions de confinement  $p$ , les angles  $\beta = (k, n)$  entre la normale  $k$  au plan de cisaillement et l'axe  $n$  des éprouvettes qui est la direction principale majeure des contraintes, cf. Figure IV.1. Les mesures ont été effectuées dans la zone centrale des éprouvettes. Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau IV.1.

	p = 0	p = 5 MPa	p = 12.5 MPa
$\delta = 0^\circ$	90°, 81°	65°	58°
$\delta = 15^\circ$	81°, -65°	65°	65°
$\delta = 30^\circ$	65°, -80°	68°	60°, -53°
$\delta = 45^\circ$	64°	67°	56°
$\delta = 60^\circ$	66°, -75°	63°	59°
$\delta = 75^\circ$	70°	66°	59°
$\delta = 90^\circ$	90°, 71°, -69°	61°	60°
$\beta$ moyen	75°	65°	60°

	p = 25 MPa	p = 37.5 MPa	p = 50 MPa
$\delta = 0^\circ$	55°, -57°	54°, -54°	44°, -48°
$\delta = 15^\circ$	59°, -58°	60°, -56°	57°, -47°
$\delta = 30^\circ$	52°, -55°	53°, -58°	51°, -48°
$\delta = 45^\circ$	52°, -58°	56°, -55°	51°, -53°
$\delta = 60^\circ$	56°, -58°	57°, -55°	57°, -54°
$\delta = 75^\circ$	57°, -59°	58°, -53°	56°, -52°
$\delta = 90^\circ$	53°, -51°	48°, -51°	48°, -50°
$\beta$ moyen	55°, -56°	55°, -54°	51°, -49°

Tableau IV.1 - Evolution des angles  $\beta$  de rupture en fonction de la pression de confinement  $p$  et de l'orientation  $\delta$ .

Nous pouvons observer, sur ce Tableau, pour chaque orientation  $\delta$ , une tendance à la diminution de l'angle  $\beta$  lorsque la pression de confinement augmente; cette tendance est

retrouvée pour la valeur moyenne de l'angle  $\beta$ , calculée pour toutes les orientations  $\delta$  à une pression de confinement donnée. Pour une pression de confinement non nulle, il ne semble pas exister de corrélation nette entre les variations des angles  $\beta$  et celles des orientations  $\delta$ .

## 4.2 Méthodes de détection du seuil de localisation.

Les bandes de cisaillement macroscopiques observées dans notre étude sont le résultat d'un processus de localisation de l'endommagement du matériau. Une question fondamentale est de savoir quand se situe, lors du processus de chargement, le passage d'une réponse homogène à un mode localisé : la réponse à cette question conditionne, en effet, le domaine de validité des lois de comportement du matériau. De nombreuses méthodes ont été développées pour la détection du seuil de localisation dans les roches. Santarelli (1989) a fait un inventaire de ces méthodes, les classant selon qu'elles se concentrent sur l'étude de la microfissuration, ou abordent le problème sous l'angle de l'inhomogénéité des déformations. Nous reprenons ici cette discussion, en rappelant les techniques d'études expérimentales actuellement disponibles.

### 4.2.1 Etude de la microfracturation

Une méthode directe est l'observation, sous microscope optique (réflexion ou transmission) ou sous microscope électronique à balayage, de lames minces ou de sections polies confectionnées à partir d'éprouvettes préalablement chargées à différents niveaux de la courbe effort-déformation (Friedmann et al., 1970; Sangha et al., 1974; Wong, 1982). Cette méthode destructive nécessite de nombreux essais ; la dispersion expérimentale, caractéristique en mécanique des roches, peut rendre délicate la détermination exacte du seuil de localisation. Notons également que l'on passe ici d'un phénomène tridimensionnel à une coupe plane : une dimension est perdue. Des méthodes de stéréologie quantitative permettent cependant d'obtenir quelques informations volumiques (par exemple, la surface des fissures par unité de volume) sous certaines conditions ou hypothèses (Wong, 1985). Néanmoins, cette technique permet de visualiser au mieux les phénomènes microstructuraux effectifs, et ce, à différentes échelles.

Les méthodes indirectes, non destructives, regroupent :

- l'étude de l'émission acoustique ;

Chaque microfissure se nucléant ou se propageant peut être considérée comme une petite source sismique, dont l'hypocentre peut être déterminé si le nombre de capteurs

est suffisant. Scholz (1968) est l'un des premiers à avoir mis en évidence par cette technique le phénomène de localisation.

- la mesure de la vitesse de propagation et de l'atténuation des ondes P ou S, parallèlement à l'axe de l'éprouvette ;

La formation de microfissures parallèles à la direction de la contrainte principale majeure de compression, uniformément réparties dans l'échantillon, provoque une augmentation de l'atténuation alors que la vitesse de propagation reste stable. A la localisation, l'atténuation croît brutalement et la vitesse chute (Nur et al, 1969, Shea et al, 1988, pour une discussion des résultats obtenus, respectivement, à partir des propagations d'ondes P ou S).

- la tomodensitométrie.

Cette méthode d'analyse de l'atténuation d'un faisceau de rayons X permet de mesurer l'évolution (résultats en densité radiologique) de la porosité des volumes élémentaires d'étude (typiquement de l'ordre du mm<sup>3</sup>), ainsi que de reconnaître la structure originelle de la roche. La méthode permet donc d'analyser localement l'évolution et l'organisation spatiale de l'endommagement au cours de l'essai, et de corrélérer les imperfections initiales et le développement de la microfissuration induite (Vinegar et al, 1991, Tillard-Ngan, 1992).

#### 4.2.2 Inhomogénéités de la déformation

Les méthodes de mesure de déformations intéressent la surface de l'échantillon. Elles se différencient en méthodes d'analyse complète et méthodes d'analyse ponctuelle.

Les champs complets de déformation sont mesurés par des méthodes optiques sur des éprouvettes en général prismatiques ; des photographies de la surface de l'échantillon étudié sont prises à différents niveaux de la charge. Les méthodes optiques les plus couramment utilisées sont :

- l'interférométrie holographique (par exemple, Spetzler et al, 1974)
- la stéréophotogrammétrie de faux relief (Torrenti et al, 1989, Tillard-Ngan, 1992)

Ces méthodes, bien que séduisantes quant à la précision et l'étendue des résultats possibles, semblent plus adaptées aux essais uniaxiaux ou biaxiaux qu'aux essais classiques triaxiaux de révolution, où se posent les problèmes de protection de l'éprouvette vis à vis du fluide de confinement et de transparence de la cellule d'essai.

Les mesures locales sont faites en instrumentant diamétralement l'échantillon, soit par des jauges d'extensométrie (Hadley, 1975), soit par des capteurs de déplacement (Santarelli,

1989, Kondo et al, 1991, Ord et al, 1991). L'inhomogénéité est détectée par écart à un comportement théorique attendu : écart des mesures à une ellipse pour Hadley, à une relation linéaire entre deux mesures radiales (dans deux directions perpendiculaires) pour Santarelli et Kondo et al. Ces techniques ont l'avantage d'une mise en oeuvre relativement aisée ; leur désavantage réside dans l'aspect local de la mesure et le choix du critère de détection, parfois lié à des hypothèses simplificatrices.

#### 4.2.3 Résultats de la littérature

En récapitulant ces différentes techniques, notons que seules certaines assurent un suivi relativement continu des processus (émission acoustique, capteurs multiples), ou permettent, en plus de la détection du seuil de localisation en termes de contraintes, une étude spatiale complète du phénomène (tomodensitométrie, émission acoustique).

Une comparaison de leurs performances peut être effectuée en utilisant un paramètre commun noté  $S_{loc}$ , qui est le rapport mesuré entre la contrainte principale majeure au seuil de localisation détecté et la contrainte principale majeure maximale atteinte au cours de l'essai.

Nous présentons, dans le Tableau IV.2 ci-dessous, les résultats disponibles dans la littérature et fournis par les méthodes décrites ci-dessus. La première partie de ce Tableau a été présenté par Santarelli (1989) ; il est ici complété par les données postérieures à cette date. Les roches étudiées et les types d'essais interprétés sont divers ; une étude comparative systématique manque encore à ce jour. Cependant, il convient de noter que le seuil de localisation est toujours situé avant le pic (contrainte maximale atteinte). Santarelli (1989) fait également remarquer que la dispersion des valeurs du seuil  $S_{loc}$ , qui varie de 60 à 99 % pour une même roche (le granit de Westerley) et un même type d'essai (compression triaxiale de révolution), ne permet pas de conclure directement quant à la précision des différentes méthodes de mesure employées ; cette dispersion peut, en effet, être due à des problèmes de conditions aux limites lors de l'essai, favorisant ainsi une localisation précoce.

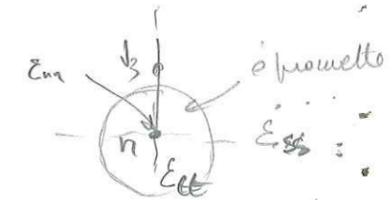
#### 4.3 Seuils de localisation pour le grès des Vosges

Les essais de compression sous pression de confinement, réalisés sur le grès des Vosges et présentés au Chapitre III nécessitent l'emploi d'une cellule "opaque" ; nous avons donc choisi d'étudier l'apparition des bandes de cisaillement, sous l'angle de la localisation des déformations, par les méthodes de mesures locales des déformations, en instrumentant les éprouvettes avec des jauges, cf. §2.3, Chapitre II.

Auteurs	Roche	Type d'essai	Méthode de mesure	S <sub>loc</sub>
Scholz (1968)	Granite	U	Emission acoustique	92%
Friedman et al (1970)	Granite	U	Microscope	99%
	Calcaire	U	Microscope	99%
Thill (1972)	Marbre	T	Vitesse ondes	95%
Brady (1974)	Marbre	T	Microscope	95%
	Granite	T	Microscope	95%
Rao et Ramana (1974)	Pyroxénite	U	Vitesse ondes	78%
	Dunite	U	Vitesse ondes	75%
	Serpentinite	U	Vitesse ondes	76%
Hadley (1975)	Granite	T	Mesure Déformations	90%
	Gabbro	T	Mesure déformations	90%
Liu et Livanos (1976)	Granite	U	Diffraction	92%
Lockner et al (1977)	Granite	T	Vitesse ondes	85%
Sobolev et al (1978)	Granite	B	Vitesse ondes	80%
	Granite	B	Holographie	80%
	Granite	B	Microscope	80%
Soga et al (1978)	Granite	T	Vitesse ondes	60%
	Granite	T	Holographie	60%
Kranz (1979)	Granite	U	Microscope	>87%
Wang (1982)	Granite	T	Microscope	99%
Yanagidani et al (1985)	Granite	U	Emission acoustique	>83%
	Granite	U	Mesure déformations	>83%
Santarelli (1987)	Dolomie	T	Mesure déformations	80-99%
	Grès	T	Mesure déformations	87-99%
Benaija et al (1991)	Grès	U	Stéreo	75%
	Grès	U	Interférométrie	73%
Ord et al (1991)	Grès	B	Mesure déformations	89%
Kondo et al (1992)	Grès	T	Mesures déformations	70-80%
Tillard-Ngan (1992)	Marne	B	Stéreo	93-99%

Tableau IV.2 - Résultats des études sur les seuils de localisation. Le type d'essai est indiqué par U pour les essais uniaxiaux, B pour les essais biaxiaux en déformation plane, et T pour les essais triaxiaux de révolution. Tous les essais sont des essais de compression.

Nous décrivons ci-dessous la méthode de détection des seuils que nous avons adoptée, puis les résultats obtenus concernant les valeurs des contraintes axiales et des déformations axiales au seuil pour toutes les orientations  $\delta$  des éprouvettes et toutes les pressions de confinement  $p$ . Les seuils de localisation sont ensuite corrélés avec les courbes de variation de volume obtenues à partir des essais.



### 4.3.1 Méthode de détection des seuils

En nous inspirant des travaux de Hadley (1975) et Santarelli (1989), nous avons défini, dans notre étude, le seuil de localisation par la perte de linéarité de la relation entre les déformations transversales  $\epsilon_{tt}$  dans le plan de symétrie ( $n, v_3$ ) des éprouvettes et  $\epsilon_{ss}$  dans le plan axial perpendiculaire.

A titre d'exemple, nous présentons, sur la Figure IV.3, la relation entre les déformations transversales  $\epsilon_{tt}$  et  $\epsilon_{ss}$ , pour l'éprouvette orientée à  $\delta = 30^\circ$  et soumis à une compression simple. Il est bien évident que, sur une telle courbe, la perte de linéarité est difficile à détecter de façon précise.

Une analyse statistique de ces mesures peut cependant fournir un élément de réponse: les courbes d'évolution de la déformation transversale  $\epsilon_{tt}$  en fonction de la déformation transversale  $\epsilon_{ss}$  sont approximées par une régression linéaire incrémentale à fenêtre augmentante; pour chaque incrément, l'écart-type des mesures à cette estimation est calculé. En général, cet écart-type est à peu près constant en dessous du seuil de localisation, pour autant que l'on s'affranchisse, en début de régression, de la zone de serrage éventuelle. Le passage du seuil est caractérisé par une déviation rapide de l'écart-type par rapport à sa valeur constante. Un exemple de ce phénomène est présenté sur la Figure IV.4, correspondant à l'essai de la Figure IV.3, où nous représentons la variation de l'écart-type en fonction de la déformation  $\epsilon_{ss}$ . A la suite de ce calcul, nous pouvons identifier, pour chaque essai réalisé, les états de contraintes et de déformations correspondant au seuil mesuré à la première déviation de l'écart-type.

### 4.3.2 Valeurs des déformations axiales et des surcharges axiales au seuil de localisation

Nous présentons, dans le Tableau IV.3 et sur la Figure IV.5, les valeurs des déformations axiales  $\epsilon_{nn}$  correspondant au seuil de localisation détecté, pour toutes les orientations  $\delta$  des éprouvettes et toutes les pressions de confinement  $p$ . Les valeurs des surcharges axiales ( $\sigma - p$ ) correspondant au seuil de localisation sont présentés dans le Tableau IV.4 et sur la Figure IV.6.

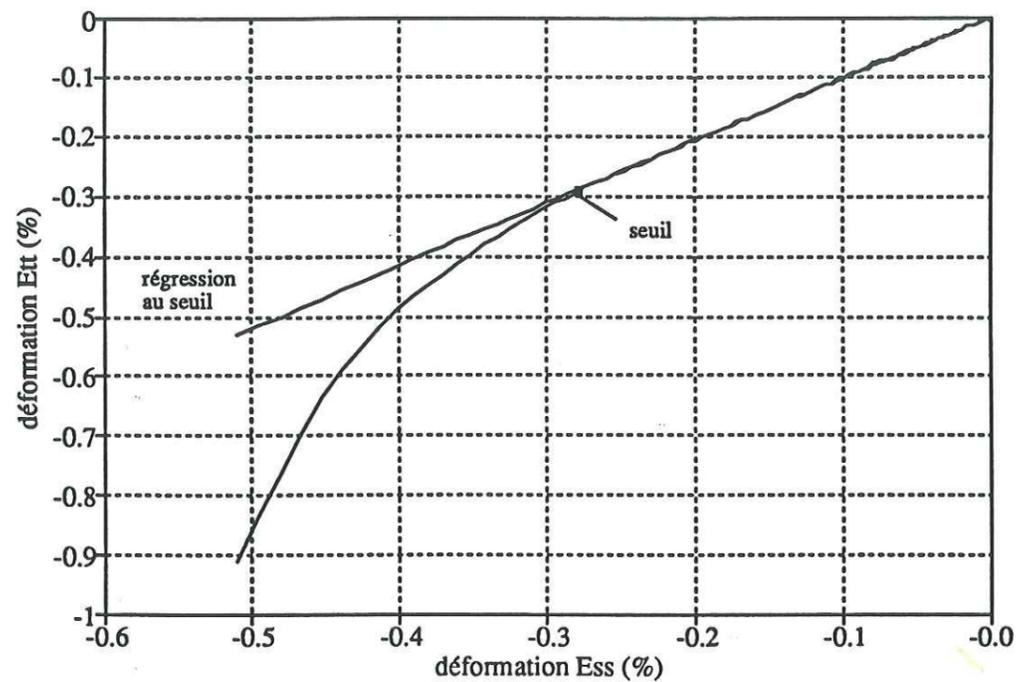


Figure IV.3- Evolution de  $\epsilon_{tt}$  en fonction de  $\epsilon_{ss}$ , lors d'un essai de compression simple pour l'orientation  $\delta = 30^\circ$ .

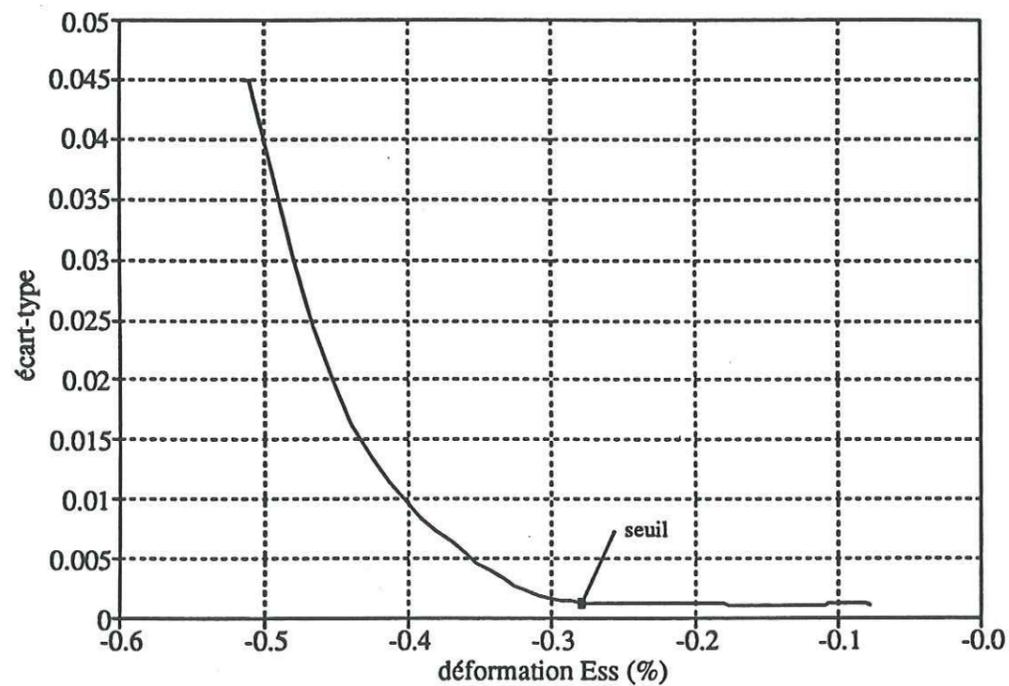


Figure IV.4 - Evolution de l'écart-type de la régression incrémentale lors de l'essai de la Figure IV.3.

Pour toutes les orientations  $\delta$ , les déformations axiales au seuil et les surcharges axiales au seuil croissent avec la pression de confinement. Pour les pressions de confinement  $p = 0, 12.5$  et  $25$  MPa, les déformations axiales au seuil décroissent lorsque l'angle  $\delta$  varie de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ ; pour la pression de confinement  $p = 50$  MPa, elles décroissent lorsque  $\delta$  varie de  $0^\circ$  à  $60^\circ$  puis augmentent pour  $\delta = 75^\circ$  et  $90^\circ$ . Les surcharges axiales au seuil varient également avec l'angle  $\delta$ ; elles passent par un minimum entre  $60^\circ$  et  $75^\circ$ .

	$p = 0$	$p = 12.5$ MPa	$p = 25$ MPa	$p = 50$ MPa
$\delta = 0^\circ$	0.716%	0.842%	0.924%	1.135%
$\delta = 15^\circ$	0.690%	0.796%	0.872%	1.050%
$\delta = 30^\circ$	0.626%	0.767%	0.850%	0.997%
$\delta = 45^\circ$	0.488%	0.723%	0.809%	0.985%
$\delta = 60^\circ$	0.455%	0.682%	0.787%	0.964%
$\delta = 75^\circ$	0.422%	0.666%	0.793%	1.039%
$\delta = 90^\circ$	0.418%	0.685%	0.803%	1.042%

Tableau IV.3 - Seuils de localisation : évolution des déformations axiales au seuil, en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes et de la pression de confinement  $p$ .

	$p = 0$	$p = 12.5$ MPa	$p = 25$ MPa	$p = 50$ MPa
$\delta = 0^\circ$	43.8 MPa	93.1 MPa	114.4 MPa	145.3 MPa
$\delta = 15^\circ$	43.8 MPa	92.4 MPa	111.2 MPa	138.3 MPa
$\delta = 30^\circ$	39.9 MPa	86.6 MPa	109.1 MPa	135.0 MPa
$\delta = 45^\circ$	37.1 MPa	82.6 MPa	105.9 MPa	130.5 MPa
$\delta = 60^\circ$	34.0 MPa	79.7 MPa	100.8 MPa	130.3 MPa
$\delta = 75^\circ$	33.8 MPa	80.2 MPa	101.2 MPa	133.8 MPa
$\delta = 90^\circ$	35.1 MPa	83.5 MPa	105.6 MPa	133.1 MPa

Tableau IV.4 - Seuils de localisation : évolution des surcharges axiales au seuil, en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes et de la pression de confinement  $p$ .

Les écarts à l'isotropie des déformations axiales et des surcharges axiales au seuil ont été calculés selon la procédure décrite dans le Chapitre III, §3.2.4; les évolutions et les valeurs de ces écarts, en fonction de la pression de confinement, sont présentées, respectivement, sur la Figure IV.6 et dans le Tableau IV.5. Nous constatons, encore une fois, que les écarts à l'iso-

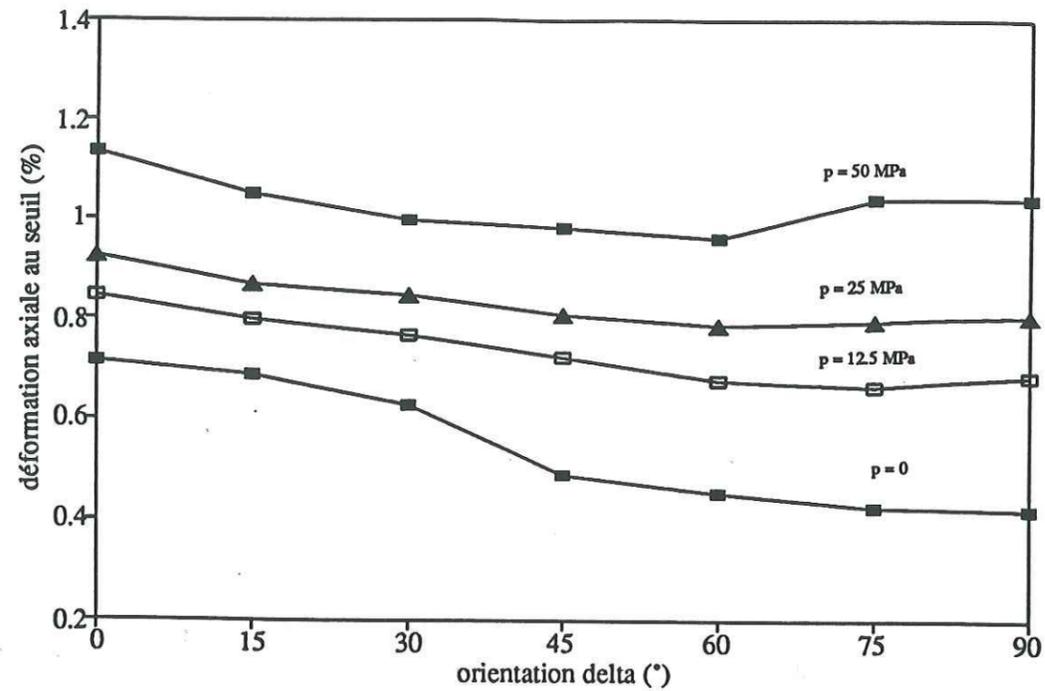


Figure IV.5 - Evolution de la déformation axiale au seuil de localisation en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes.

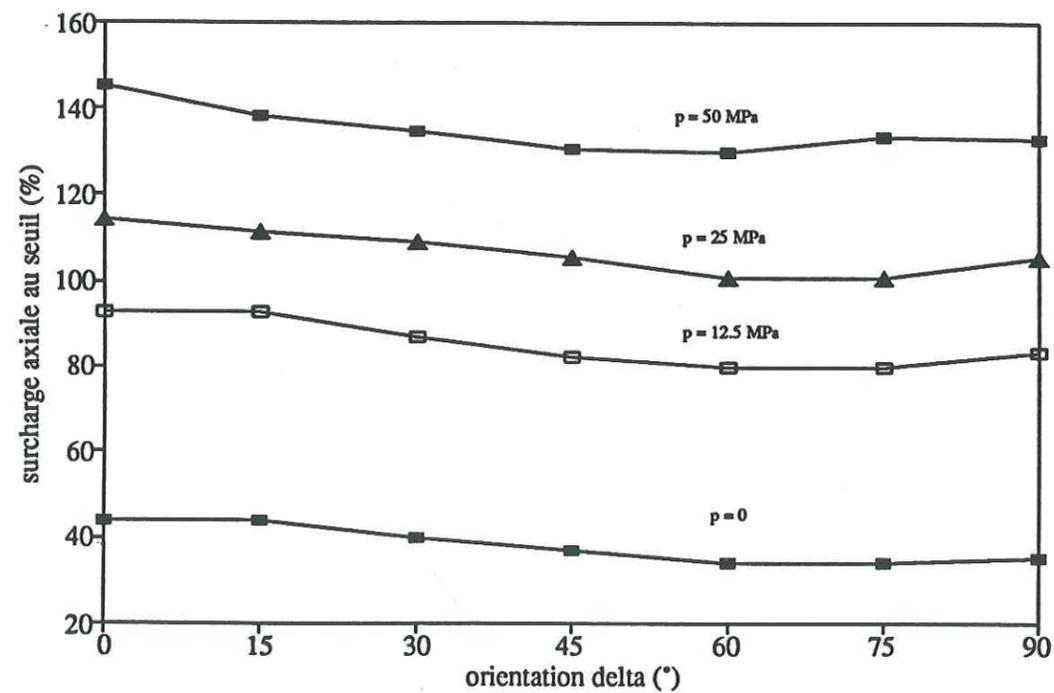


Figure IV.6 - Evolution de la surcharge axiale au seuil de localisation en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes.

-tropie sont faibles et décroissent sensiblement dès l'application d'une pression de confinement faible, pour se stabiliser par la suite.

	$e_d$	$e_s$
$p = 0$	19.32%	9.23%
$p = 12.5 \text{ MPa}$	6.90%	5.12%
$p = 25 \text{ MPa}$	4.40%	3.69%
$p = 50 \text{ MPa}$	3.65%	2.41%

Tableau IV.5 - Valeurs de l'écart à l'isotropie ( $e_d$ ) des déformations axiales au seuil, et ( $e_s$ ) des surcharges axiales au seuil, en fonction de la pression de confinement  $p$ .

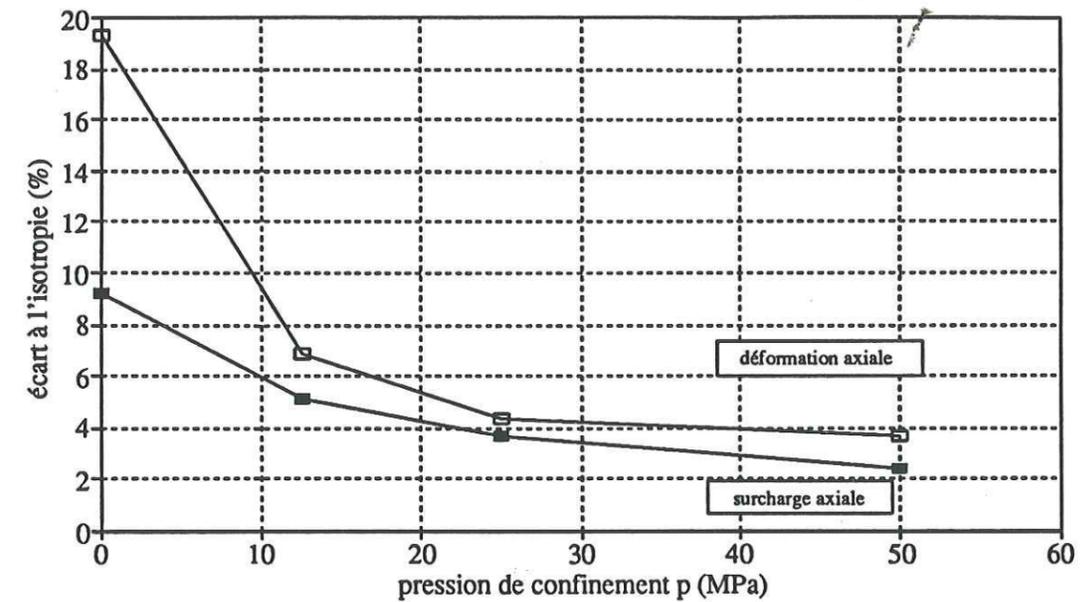


Figure IV.7 - Evolution de l'écart à l'isotropie des déformations axiales au seuil et des surcharges axiales au seuil, en fonction de la pression de confinement  $p$ .

Le seuil de localisation peut également être caractérisé, comme il est pratiqué dans la littérature, par la valeur  $S_{loc}$  du rapport entre la contrainte axiale correspondant au seuil et la contrainte axiale maximale supportée par l'éprouvette. L'ensemble des résultats, obtenus au cours de nos essais de compression sous pressions de confinement sur les différentes éprouvettes, est présenté dans le Tableau IV.6 et sur la Figure IV.8.

Pour une pression de confinement donnée, le seuil de localisation  $S_{loc}$  varie avec l'orientation des éprouvettes, en passant par un minimum pour l'orientation  $\delta = 60^\circ$ , les seuils

étant plus élevés pour les orientations dans les axes que pour les orientations "hors-axes". L'anisotropie du paramètre  $S_{loc}$  est de type discontinue ; elle s'atténue lorsque la pression de confinement croît. Pour chaque orientation, nous observons une augmentation du seuil  $S_{loc}$  lorsque que la pression de confinement croît.

	p = 0	p = 12.5 MPa	p = 25 MPa	p = 50 MPa
$\delta = 0^\circ$	90.2%	91.6%	93.4%	94.1%
$\delta = 15^\circ$	89.0%	90.8%	91.4%	92.6%
$\delta = 30^\circ$	88.6%	90.2%	91.4%	92.3%
$\delta = 45^\circ$	86.0%	88.4%	90.5%	92.3%
$\delta = 60^\circ$	84.9%	87.5%	89.1%	91.4%
$\delta = 75^\circ$	86.2%	89.2%	91.3%	92.7%
$\delta = 90^\circ$	90.4%	92.1%	93.3%	94.4%

Tableau IV.6 - Seuils de localisation : évolution de  $S_{loc}$  en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes et de la pression de confinement p

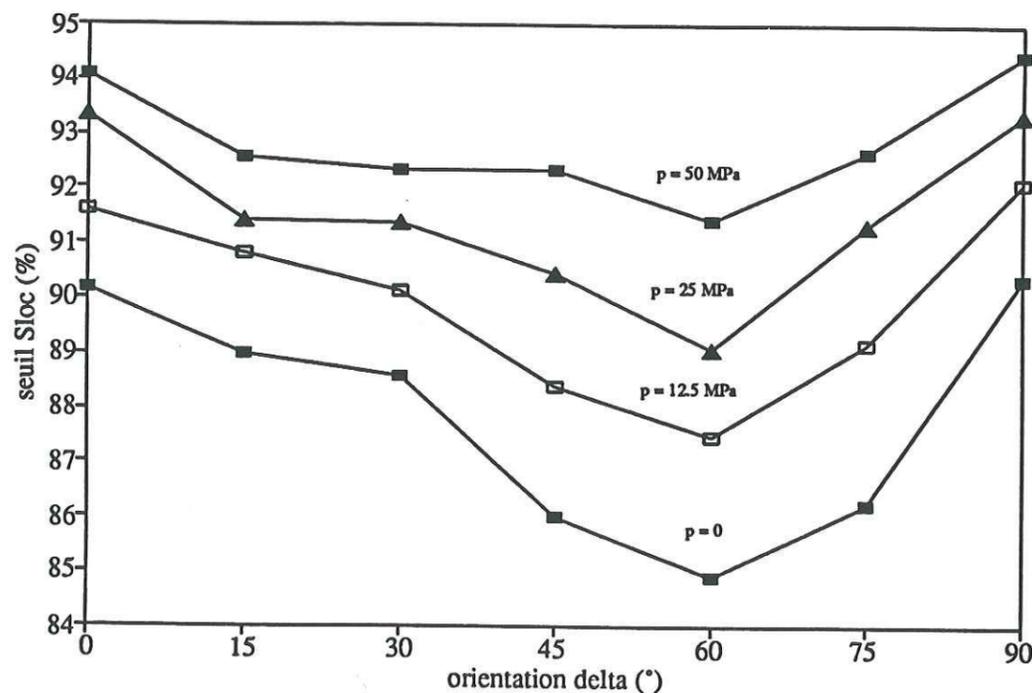


Figure IV.8 - Evolution de  $S_{loc}$  en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes et de la pression de confinement p.

L'influence de la partie isotrope de l'état de contraintes sur le seuil de localisation  $S_{loc}$  a été étudié par Santarelli (1989) et Kondo et al (1992). Les résultats obtenus par ces deux auteurs divergent, puisque Santarelli, pour un grès et une dolomie, observe une légère diminution du rapport  $S_{loc}$  lorsque la pression de confinement croît, alors que Kondo et al, pour un autre grès, observent une augmentation préalable du seuil suivie d'une diminution sous forte pression de confinement. Il est probable que cette influence dépende du matériau considéré.

### 4.3.3 Corrélations entre les seuils de localisation et les variations de volume

Grâce à l'instrumentation de nos éprouvettes par des jauges de déformation, nous avons pu mesurer les variations de volume de ces éprouvettes au cours de nos essais de compression sous pressions de confinement, cf. Chapitre III, §3.2.3. Nous présentons, sur les Figures IV.8 à IV.35, les courbes d'évolution de la déformation volumique en fonction de la surcharge axiale, pour chaque orientation  $\delta$  des éprouvettes et chaque pression de confinement p. Sur chacune de ces courbes, nous avons indiqué par un point le seuil de localisation. Nous observons qu'en compression simple, quelle que soit l'orientation  $\delta$  des éprouvettes, le seuil de localisation est situé dans le domaine de la dilatance des éprouvettes. Sous la pression de confinement de p = 12.5 MPa, les seuils se situent au début du domaine de dilatance ; pour p = 25 MPa, les seuils sont pratiquement situés au point de transition entre les domaines contractant et dilatant ; enfin, pour p = 50 MPa, les seuils sont situés dans le domaine de contractance des éprouvettes. Pour une pression de confinement p variant de 0 à 50 MPa, quelle que soit l'orientation des éprouvettes, nous observons donc un passage progressif des seuils de localisation du domaine dilatant au domaine contractant.

### 4.4 Conclusions

Comme l'ont montré nos résultats expérimentaux de caractérisation mécanique du matériau (cf. Chapitre III), le grès des Vosges étudié est, dans le domaine du comportement élastique-plastique, une roche à anisotropie initiale faible, de type orthotrope de révolution.

Cette anisotropie s'atténue sensiblement sous des pressions de confinement. Malgré ce faible degré d'anisotropie, les bandes de cisaillement observées au cours de nos essais de compressions triaxiales de révolution présentent, quelles que soient les orientations  $\delta \neq 0$  des éprouvettes et la valeur de la pression de confinement p, des orientations privilégiées provoquées par les symétries matérielles de la roche.

Grâce à la technique extensométrique développée pour une roche poreuse soumise à des pressions de confinement et à la méthode statistique proposée pour la détection de la perte de linéarité de la relation entre les déformations transversales, nous avons pu déterminer, pour chaque orientation des éprouvettes et chaque valeur de la pression de confinement, le seuil d'apparition des bandes de cisaillement au cours des essais, ou seuil de localisation. Nous avons ainsi pu mettre en évidence des phénomènes importants, comme la variation du seuil de localisation avec l'orientation des éprouvettes, ces seuils étant plus élevés pour les orientations "dans les axes" que pour les orientations "hors axes", ainsi que l'influence nette de la valeur de la pression de confinement sur la situation des seuils de localisation par rapport aux domaines contractants et dilatants des éprouvettes.

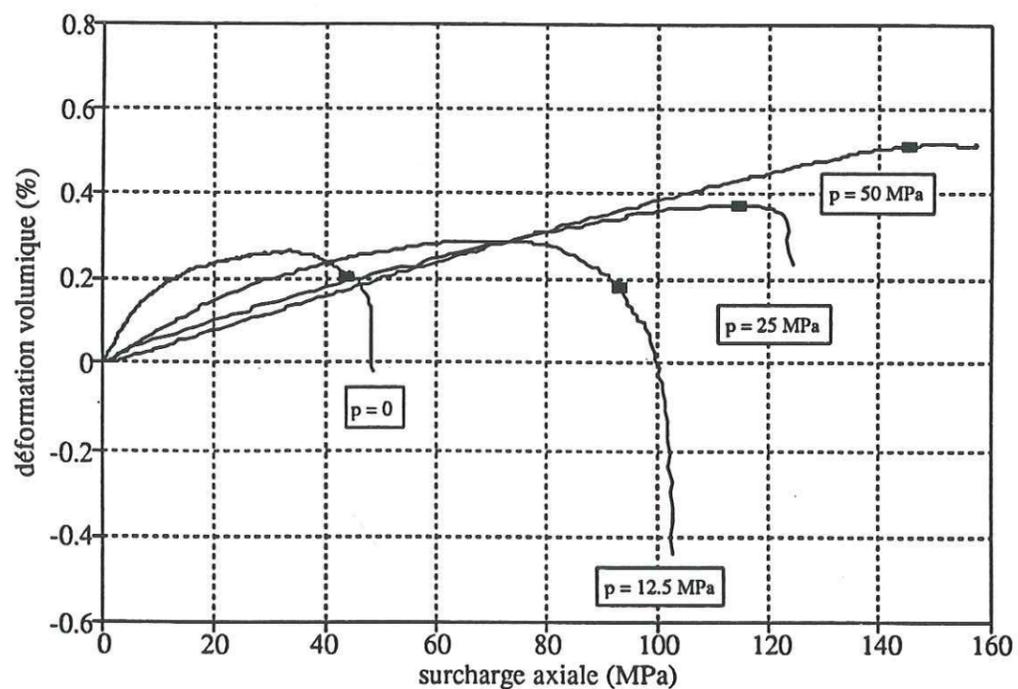


Figure IV.9 - Corrélation entre les seuils de localisation et les variations de volume, en compression sous les différentes pressions de confinement  $p = 0, 12.5 \text{ MPa}, 25 \text{ MPa}$  et  $50 \text{ MPa}$ , pour  $\delta = 0^\circ$ .

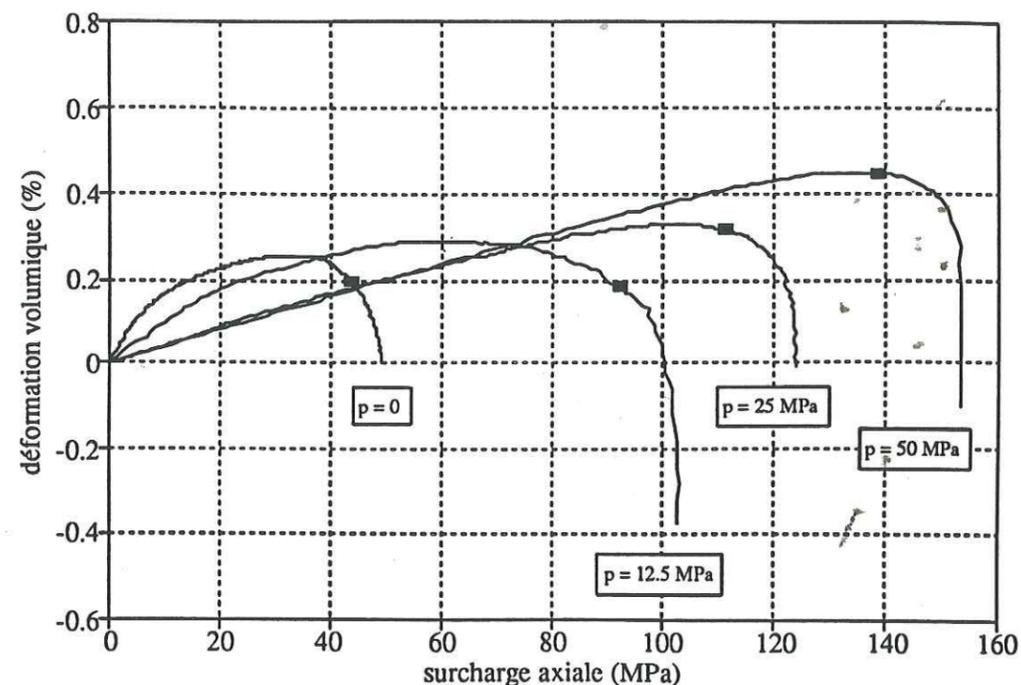


Figure IV.11 - Corrélation entre les seuils de localisation et les variations de volume, en compression sous les différentes pressions de confinement  $p = 0, 12.5 \text{ MPa}, 25 \text{ MPa}$  et  $50 \text{ MPa}$ , pour  $\delta = 15^\circ$ .

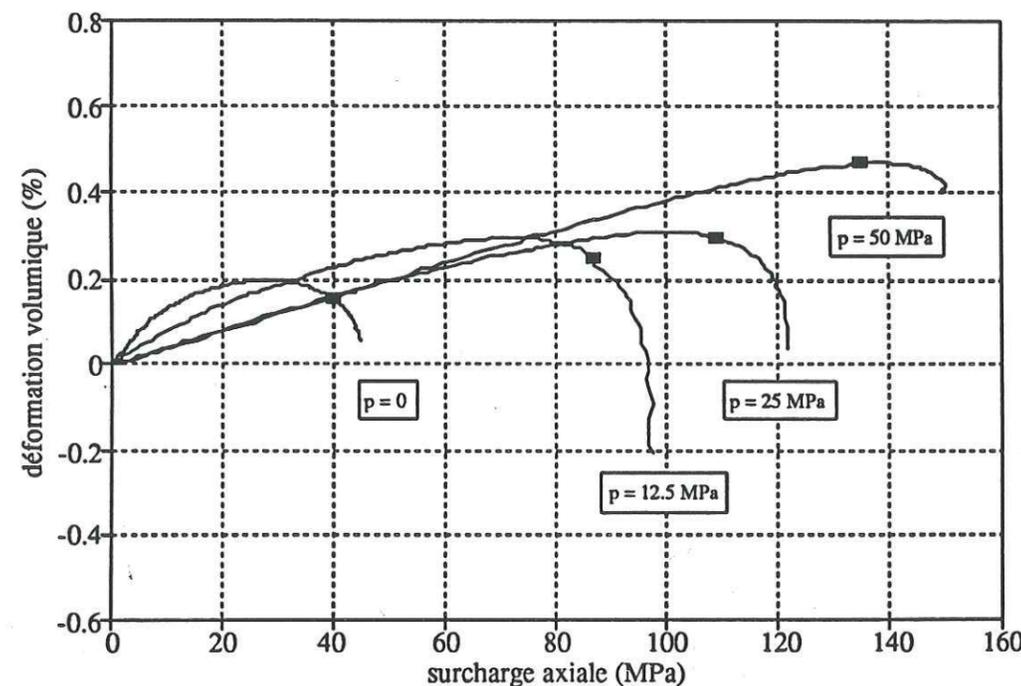


Figure IV.10 - Corrélation entre les seuils de localisation et les variations de volume, en compression sous les différentes pressions de confinement  $p = 0, 12.5 \text{ MPa}, 25 \text{ MPa}$  et  $50 \text{ MPa}$ , pour  $\delta = 30^\circ$ .

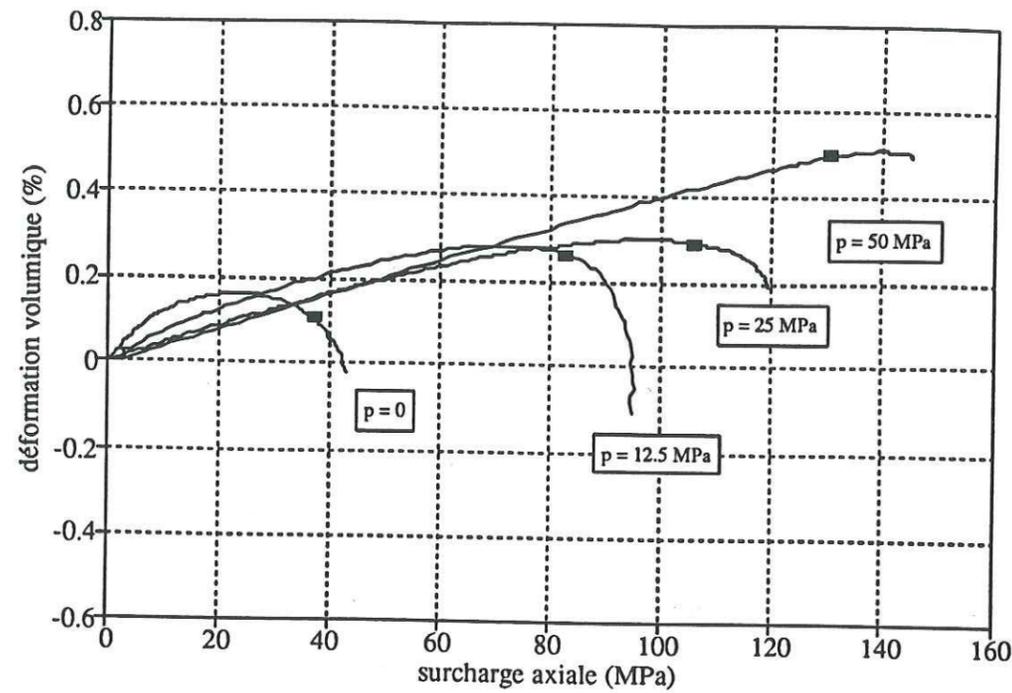


Figure IV.13 - Corrélation entre les seuils de localisation et les variations de volume, en compression sous les différentes pressions de confinement  $p = 0, 12.5 \text{ MPa}, 25 \text{ MPa}$  et  $50 \text{ MPa}$ , pour  $\delta = 45^\circ$ .

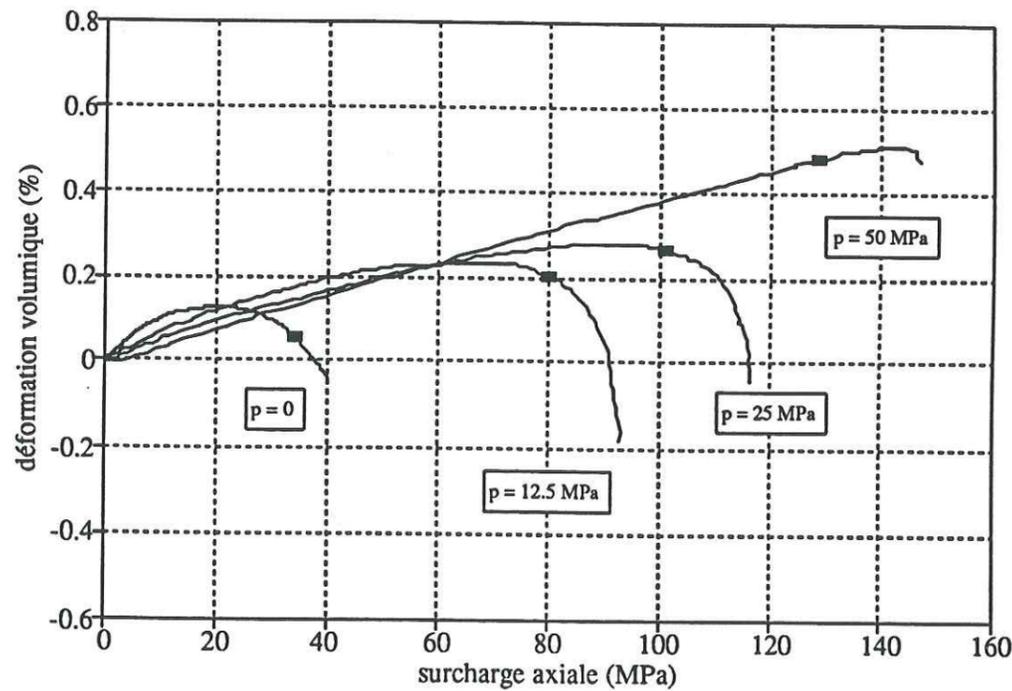


Figure IV.12 - Corrélation entre les seuils de localisation et les variations de volume, en compression sous les différentes pressions de confinement  $p = 0, 12.5 \text{ MPa}, 25 \text{ MPa}$  et  $50 \text{ MPa}$ , pour  $\delta = 60^\circ$ .

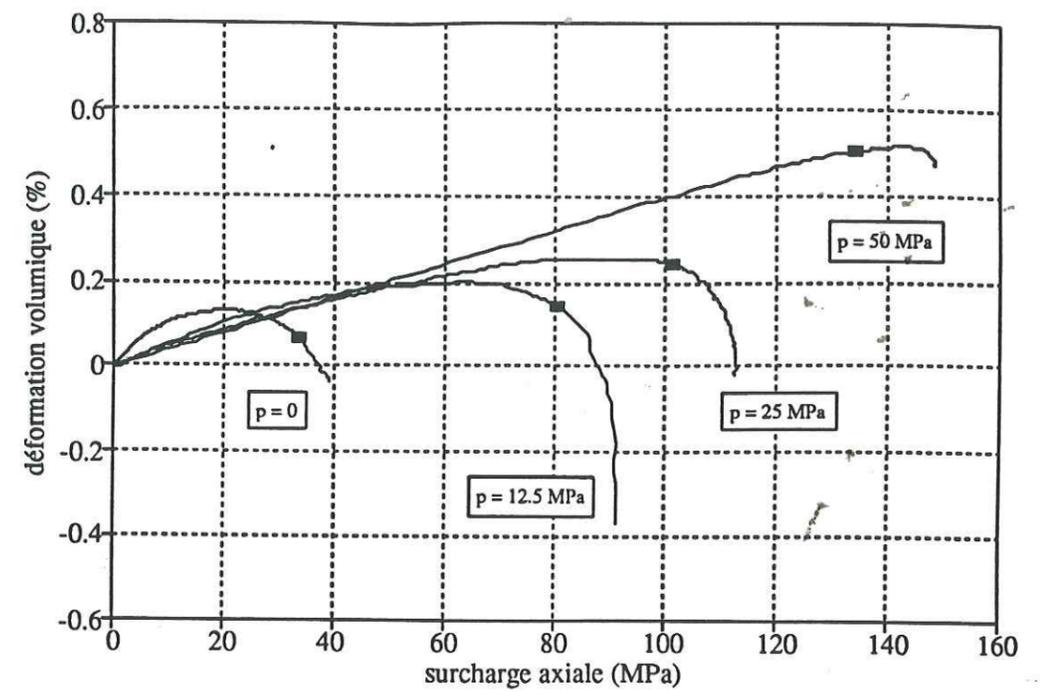


Figure IV.15 - Corrélation entre les seuils de localisation et les variations de volume, en compression sous les différentes pressions de confinement  $p = 0, 12.5 \text{ MPa}, 25 \text{ MPa}$  et  $50 \text{ MPa}$ , pour  $\delta = 75^\circ$ .

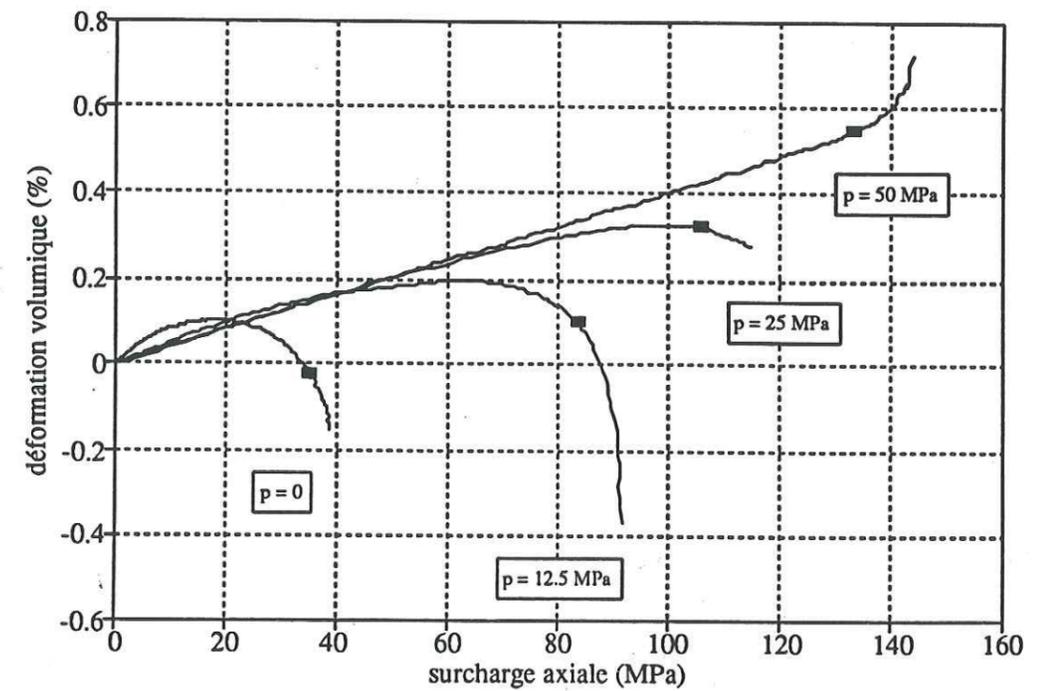


Figure IV.14 - Corrélation entre les seuils de localisation et les variations de volume, en compression sous les différentes pressions de confinement  $p = 0, 12.5 \text{ MPa}, 25 \text{ MPa}$  et  $50 \text{ MPa}$ , pour  $\delta = 90^\circ$ .

## Chapitre V

# Bandes de cisaillement dans les roches anisotropes

## Etude théorique

### 5.1 Introduction

L'apparition de bandes de cisaillement dans les roches élasto-fragiles, soumises à des efforts de compression, résulte d'un processus de localisation : à mesure que la contrainte déviatoire augmente, la population de microfissures induites passe d'une distribution spatiale plus ou moins homogène à une localisation en zone de fracturation intense (Paterson, 1978, Kranz, 1983). Sur le plan théorique, ce phénomène de localisation est étudié principalement par deux approches :

- les processus de propagation et d'interaction de fissures ;
- et les phénomènes de bifurcation, c'est à dire de localisation de la déformation inélastique.

Dans la première approche, des modèles d'instabilité de ponts rocheux (Janach, 1977) et de propagation et d'interaction de fissures (Hori et Nemat-Nasser, 1985) ont été proposés. Dans la deuxième approche, le phénomène de bifurcation a été abordé par Rice et Rudnicki (1975), en considérant une loi élasto-plastique non-standard écrouissable, et par Vardoulakis et al (1988), en considérant un modèle de comportement rigide plastique écrouissable; ce dernier modèle a été modifié par Sulem et al (1989) dans le cadre de la théorie des milieux de Cosserat. Ces modèles ont été développés pour des roches isotropes et ne prennent pas en

compte l'endommagement du matériau. La prise en compte de l'endommagement dans un modèle de bifurcation a été proposée par Ortiz (1987) : le matériau étudié est un béton, dont le comportement mécanique dérive de la loi des mélanges. Pour des solides initialement anisotropes, un certain nombre de travaux ont été développés pour les métaux, soumis à des sollicitations biaxiales, mais, à notre connaissance, il n'existe pas d'études réellement spécifiques aux roches anisotropes. Pourtant, pour les roches, une anisotropie de structure est fréquemment observée et les résultats obtenus pour les métaux ne leur sont, de toute évidence, pas directement transposables. Il convient également de noter que les modèles de bifurcation sont proposés dans le cadre de la Mécanique des Milieux Continus et n'ont de sens physique que lorsqu'ils s'appliquent à des éléments matériels assez grands pour moyenniser les effets des hétérogénéités structurales locales (Wong, 1985).

L'orientation d'un plan de cisaillement peut être définie par deux paramètres angulaires, par exemple les deux angles d'Euler de la normale au plan de cisaillement par rapport au repère principal des contraintes. Dans notre étude expérimentale présentée au Chapitre IV, nous avons observé que, quelles que soient la pression de confinement  $p$  et l'orientation  $\delta \neq 0^\circ$  de la contrainte principale majeure par rapport à l'axe de révolution de l'orthotropie, la valeur d'un de ces deux angles est imposée par la structure interne du matériau, lorsqu'il est soumis à des états de compressions triaxiales de révolution. Ces observations expérimentales peuvent être interprétées par un raisonnement phénoménologique. En effet, quel que soit l'angle  $\delta \neq 0^\circ$  entre l'axe  $n$  des éprouvettes, qui est la direction principale majeure de l'état de contrainte, et l'axe  $v_3$  normal au plan privilégié du matériau orthotrope de révolution, le plan  $(n, v_3)$  est un plan de symétrie à la fois pour la structure interne du matériau, la géométrie de l'éprouvette, et l'état de contrainte; il en résulte que la réponse mécanique des éprouvettes doit nécessairement présenter la même symétrie par rapport au plan  $(n, v_3)$ . Pour un plan de cisaillement, par exemple, cette propriété de symétrie impose que la normale  $k$  à ce plan appartient nécessairement au plan de symétrie  $(n, v_3)$ , c'est à dire que la valeur d'un des angles d'Euler de l'axe  $k$  ne dépend ni de l'orientation  $\delta \neq 0^\circ$ , ni de la pression de confinement  $p$ , ni de la loi de comportement spécifique du matériau orthotrope de révolution; cet angle est donc constant pour des états de contrainte orientés de compression sous pression de confinement.

Ce raisonnement phénoménologique est confirmé par une analyse théorique basée sur le modèle de Rice et Rudnicki (1975) et de Rice (1976), considérant l'apparition d'une bande de cisaillement comme un phénomène de bifurcation. Dans ce Chapitre, l'approche de Rice est généralisée dans le cadre de la théorie des représentations des fonctions tensorielles anisotropes.

## 5.2 Modèle de localisation élasto-plastique de Rice

Le modèle de Rice considère qu'à l'initiation de la localisation, les champs de contraintes et de déformations sont homogènes dans le matériau et que les taux de contraintes et de déformations subissent un saut dans la bande des déformations localisées, la loi de comportement du matériau étant la même à l'intérieur et à l'extérieur de la bande. Le modèle de Rice considère une loi élasto-plastique écrouissable pouvant se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \\ &= \mathbf{C} : \hat{\mathbf{T}} + \frac{1}{h} (\mathbf{Q} : \hat{\mathbf{T}}) \mathbf{P} \end{aligned} \quad (V.1)$$

- où :
- $\mathbf{D}$  est le tenseur des déformations,
  - $\mathbf{D}^e$  sa partie élastique,  $\mathbf{D}^p$  sa partie plastique ;
  - $\hat{\mathbf{T}}$  est la dérivée de Jaumann du tenseur des contraintes  $\mathbf{T}$  :

$$\hat{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{W} \quad ,$$

$\mathbf{W}$  étant le tenseur taux de rotation ,

et  $\dot{\mathbf{T}}$  la dérivée par rapport au temps du tenseur des contraintes ;

- $\mathbf{C}$  est le tenseur du quatrième ordre des complaisances élastiques ;
- $\mathbf{Q}$  est le tenseur normalisé représentant la direction de la normale à la surface de plasticité  $f$  :

$$|\mathbf{Q}| \mathbf{Q} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \quad ,$$

$|\mathbf{Q}|$  étant la norme de  $\mathbf{Q}$  ;

- $\mathbf{P}$  est le tenseur normalisé représentant la direction de l'écoulement plastique et dérivant du potentiel plastique  $g$  :

$$|\mathbf{P}| \mathbf{P} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{T}} \quad ,$$

$|\mathbf{P}|$  étant la norme de  $\mathbf{P}$  ;

- $h$  est le paramètre d'écrouissage ;
- le symbole ":" représente le produit deux fois contracté de tenseurs.

Entre l'extérieur et l'intérieur de la bande de cisaillement, les tenseurs vitesses de déformations et vitesses de contraintes subissent des sauts, désignés respectivement par  $\mathbf{D}^s$  et  $\hat{\mathbf{T}}^s$ ; les tenseurs  $\mathbf{D}^*$  et  $\hat{\mathbf{T}}^*$ , définis à l'intérieur de la bande, sont donc exprimés par :

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{D} + \mathbf{D}^s \quad ; \quad (V.2)$$

$$\hat{\mathbf{T}}^* = \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}^s \quad ; \quad (V.3)$$

avec :

$$D^* = C : \hat{T}^* + \frac{1}{h} (Q : \hat{T}^*) P \quad (V.4)$$

La loi de comportement étant supposée la même à l'intérieur et à l'extérieur de la bande de cisaillement, à partir des équations (V.1) à (V.4), nous obtenons :

$$D^s = C : \hat{T}^s + \frac{1}{h} (Q : \hat{T}^s) P \quad (V.5)$$

Les conditions de compatibilité cinématique et les équations d'équilibre des contraintes imposent les restrictions suivantes sur les tenseurs  $D^s$ ,  $W^s$  et  $\hat{T}^s$  :

$$D^s = \frac{1}{2} (g \otimes k + k \otimes g) \quad ; \quad (V.6)$$

$$W^s = \frac{1}{2} (g \otimes k - k \otimes g) \quad ; \quad (V.7)$$

$$\hat{T}^s k = 0 \quad ; \quad (V.8)$$

- où :
- $k$  est la normale à la bande de cisaillement ;
  - $g$  est le vecteur représentant le gradient de la vitesse dans la direction  $k$ , à l'intérieur de la bande.

En tenant compte des restrictions (V.6) à (V.8), une solution non nulle en  $g$  est cherchée pour l'équation (V.5). Ceci résulte en une expression du paramètre d'érouissage  $h$  en fonction des tenseurs  $C$ ,  $P$ , et  $Q$  de la loi de comportement élasto-plastique, et des deux angles d'Euler de la normale  $k$  au plan de cisaillement par rapport au repère principal des contraintes. Pour une loi élasto-plastique donnée, la valeur critique de  $h$  pour la localisation des déformations correspond à la valeur maximale de  $h$  ; l'orientation de la normale  $k$  au plan de cisaillement est donc obtenue en maximisant la valeur de l'expression de  $h$  par rapport aux deux angles d'Euler de  $k$ .

### 5.3 Généralisation du modèle de Rice pour un matériau orthotrope de révolution

Les formes invariantes des lois de comportement, obtenues par l'application de la théorie des représentations des fonctions tensorielles, constituent les formes les plus générales pour chaque type de comportement et vérifient automatiquement les symétries de la structure interne du matériau considéré (cf. Chapitre I, §1.1). Ces formes invariantes permettent donc la prise en compte de tous les phénomènes mécaniques liés aux symétries matérielles.

Pour un matériau orthotrope de révolution, nous rappelons que la forme générale invariante des critères de plasticité est exprimée par :

$$f(\text{tr}T, \text{tr}S^2, \text{tr}S^3, \text{tr}MS, \text{tr}MS^2) = 0 \quad (V.9)$$

- où :
- $T$  est le tenseur des contraintes ;
  - $S = T - (\frac{1}{3} \text{tr}T) I$  est le tenseur déviatoire des contraintes ;
  - $M = v_3 \otimes v_3$  est le tenseur de structure du matériau orthotrope de révolution,  $v_3$  étant l'axe de révolution de l'orthotropie.

Considérons des états de contraintes de révolution :

$$T = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (s, t, n) \quad (V.10)$$

où  $(s, t, n)$  est à la fois le repère principal des contraintes et le repère des éprouvettes.

Pour cette classe d'états de contraintes, la forme générale invariante des critères de plasticité d'un matériau orthotrope de révolution s'exprime par la forme réduite suivante (cf. Chapitre III, §3.4) :

$$f(\text{tr}T, \text{tr}S^2, \text{tr}MS) = 0 \quad (V.11)$$

En appliquant la règle de la composition des dérivées partielles, et en prenant en compte les expressions suivantes (Boehler, 1988) :

$$\frac{\partial \text{tr}T}{\partial T} = I \quad ; \quad \frac{\partial \text{tr}S^2}{\partial T} = 2S \quad ; \quad \frac{\partial \text{tr}MS}{\partial T} = M - \frac{1}{3} I \quad (V.12)$$

le tenseur normalisé  $Q$  représentant la direction de la normale au critère de plasticité est donné par :

$$Q = \alpha_0 I + \alpha_1 M + \alpha_2 S \quad (V.13)$$

avec :

$$\alpha_0 = \frac{1}{|Q|} \left( \frac{\partial f}{\partial \text{tr}T} - \frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial \text{tr}MS} \right) \quad ; \quad \alpha_1 = \frac{1}{|Q|} \frac{\partial f}{\partial \text{tr}MS} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{2}{|Q|} \frac{\partial f}{\partial \text{tr}S^2} \quad (V.14)$$

Dans le repère privilégié  $(v_1, v_2, v_3)$  du matériau, tel que le repère principal  $(s, t, n)$  des contraintes se déduit du repère  $(v_1, v_2, v_3)$  par la rotation  $\delta$  autour de  $v_1 \equiv s$  (cf. Figure V.1), les tenseurs  $M$  et  $S$  admettent les expressions suivantes :

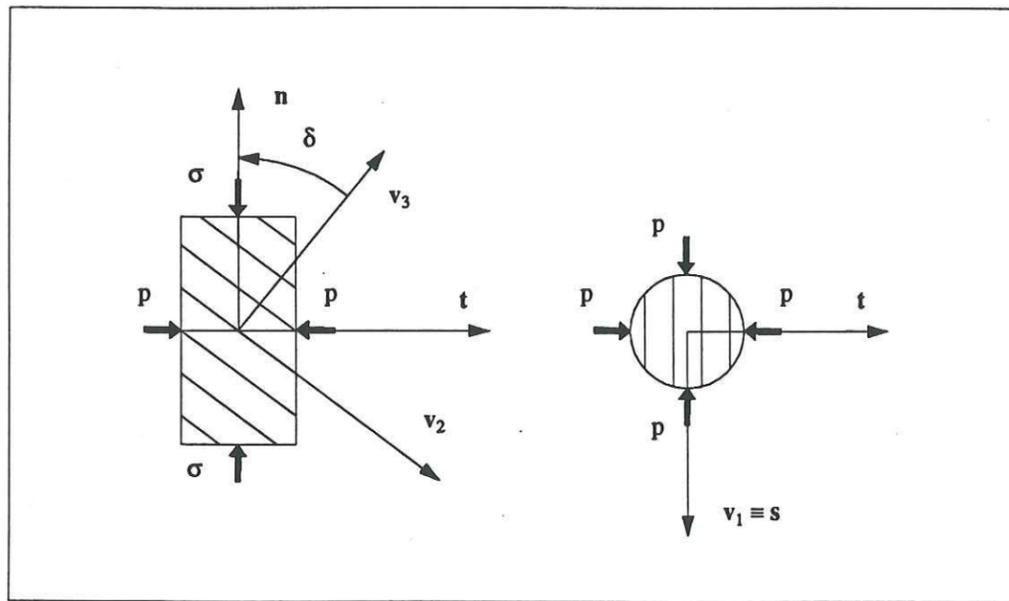


Figure V.1 - Orientation  $\delta$  du repère  $(v_1, v_2, v_3)$  privilégié du matériau par rapport au repère  $(s, t, n)$  principal des contraintes

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} (v_i) ; \quad (V.15)$$

$$S = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}(\sigma - p) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\sigma - p)(2 - 3\cos^2\delta) & -(\sigma - p)\sin\delta\cos\delta \\ 0 & -(\sigma - p)\sin\delta\cos\delta & \frac{1}{3}(\sigma - p)(3\cos^2\delta - 1) \end{vmatrix} (v_i) \quad (V.16)$$

A l'aide de ces expressions, nous obtenons, à partir de l'équation (V.13), les composantes du tenseur  $Q$  dans le repère  $(v_1, v_2, v_3)$  :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= \alpha_0 - \frac{\alpha_2}{3}(\sigma - p) ; \\ \bar{Q}_{22} &= \alpha_0 + \frac{\alpha_2}{3}(\sigma - p)(2 - 3\cos^2\delta) ; \\ \bar{Q}_{33} &= \alpha_0 + \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{3}(\sigma - p)(3\cos^2\delta - 1) ; \\ \bar{Q}_{23} &= -\alpha_2(\sigma - p)\sin\delta\cos\delta ; \\ \bar{Q}_{31} &= \bar{Q}_{12} = 0 \end{aligned} \quad (V.17)$$

La forme générale invariante du potentiel plastique  $g$  d'un matériau orthotrope de révolution, soumis à des états de contraintes triaxiales de révolution, admet la même forme que celle pour le critère  $f$  :

$$g(\text{tr}T, \text{tr}S^2, \text{tr}MS) = 0 \quad (V.18)$$

Une analyse similaire montre que le tenseur normalisé  $P$  représentant la direction de l'écoulement plastique, admet comme composantes dans le repère  $(v_1, v_2, v_3)$  :

$$\begin{aligned} \bar{P}_{11} &= \beta_0 - \frac{\beta_2}{3}(\sigma - p) ; \\ \bar{P}_{22} &= \beta_0 + \frac{\beta_2}{3}(\sigma - p)(2 - 3\cos^2\delta) ; \\ \bar{P}_{33} &= \beta_0 + \beta_1 + \frac{\beta_2}{3}(\sigma - p)(3\cos^2\delta - 1) ; \\ \bar{P}_{23} &= -\beta_2(\sigma - p)\sin\delta\cos\delta ; \\ \bar{P}_{31} &= \bar{P}_{12} = 0 \end{aligned} \quad (V.19)$$

avec :

$$\beta_0 = \frac{1}{|P|} \left( \frac{\partial g}{\partial \text{tr}T} - \frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial \text{tr}MS} \right) ; \quad \beta_1 = \frac{1}{|P|} \frac{\partial g}{\partial \text{tr}MS} ; \quad \beta_2 = \frac{2}{|P|} \frac{\partial g}{\partial \text{tr}S^2} \quad (V.20)$$

et :

$$P = \beta_0 I + \beta_1 M + \beta_2 S \quad (V.21)$$

La loi de l'élasticité linéaire orthotrope de révolution est introduite sous la forme invariante.:

$$C : T = (a \operatorname{tr}T + b \operatorname{tr}MT) I + (b \operatorname{tr}T + c \operatorname{tr}MT) M + d T + f (MT + TM) \quad (V.22)$$

- où :
- C est le tenseur du quatrième ordre des complaisances élastiques ;
  - et où les cinq constantes a, b, c, d, f de la formulation invariante s'expriment en fonction des cinq coefficients élastiques classiques  $E_1, E_3, \nu_1, \nu_3, G$  (cf. Chapitre I, §1.1.2) par :

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\nu_1}{E_1} ; & b &= \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_3}{E_3} ; & c &= \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_3} + \frac{2\nu_3}{E_3} - \frac{1}{G} ; \\ d &= \frac{1}{E_1} + \frac{\nu_1}{E_1} ; & f &= \frac{1}{2G} - \frac{1}{E_1} - \frac{\nu_1}{E_1} \end{aligned} \quad (V.23)$$

### 5.4 Analyse de la localisation des déformations à l'aide du modèle de Rice généralisé

#### 5.4.1 Equations du problème

Dans une éprouvette d'un matériau orthotrope de révolution, repérée dans les axes (s, t, n) se déduisant des axes privilégiés ( $v_1, v_2, v_3$ ) du matériau par la rotation  $\delta$  autour de  $v_1 \equiv s$  (cf. Figure V.1), soumise à l'état de contrainte de révolution (V.10), considérons un plan de cisaillement défini par sa normale k, la direction j du glissement dans le plan, et l'axe i normal à la direction du glissement dans le plan ; le repère orthonormé (i, j, k), appelé repère du plan de cisaillement, se déduit du repère (s, t, n) à l'aide des angles d'Euler  $\psi, \theta$ , et  $\varphi$  (cf. Figure V.2). L'orientation du plan de cisaillement est déterminée par les deux angles  $\psi = (s, u)$  autour de n, où u est l'intersection des plans (s, n) et (i, j), et  $\theta = (n, k)$  autour de u ; dans le plan de cisaillement, la normale i à la direction du glissement j est définie par l'angle  $\varphi = (u, i)$  autour de u. Evidemment, l'axe u n'est plus défini si  $\theta = 0^\circ$ ; comme, dans ce cas, le plan perpendiculaire à  $k = n$  ne peut pas être un plan de cisaillement, puisqu'il est perpendiculaire à la direction n de la contrainte principale majeure, nous considérons par la suite  $\theta \neq 0^\circ$ .

En tenant compte de la restriction (V.6), le tenseur  $D^s$  peut être exprimé dans le repère (i, j, k) du plan de cisaillement par :

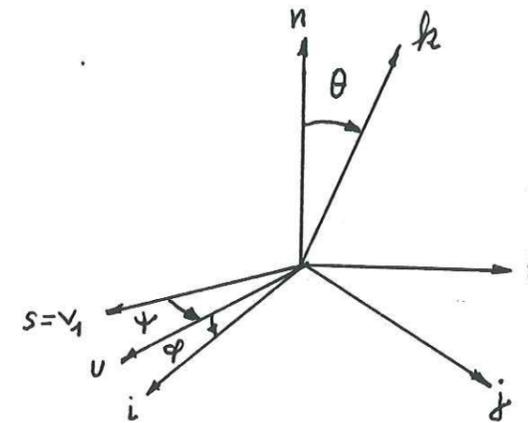


Figure V.2 - Angles d'Euler du repère (i, j, k) du plan de cisaillement par rapport au repère (s, t, n) principal des contraintes.

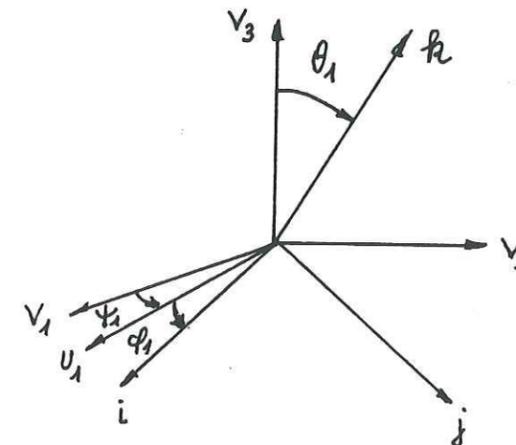


Figure V.3 - Angles d'Euler du repère (i, j, k) du plan de cisaillement par rapport au repère ( $v_1, v_2, v_3$ ) privilégié du matériau.

$$D^s = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}g_2 \\ 0 & \frac{1}{2}g_2 & g_3 \end{vmatrix} \quad , \quad (V.24)$$

(i, j, k)

où la composante  $D_{zz}^s = \frac{1}{2}g_1$  est nulle, en raison de la définition de l'axe j comme direction du glissement.

Pour simplifier les équations du problème, nous nous plaçons dans le cas où les effets rotationnels dans l'expression de la dérivée de Jaumann des contraintes sont négligeables, c'est à dire que, dans la loi de comportement, nous remplaçons la dérivée objective  $\hat{T}^s$  par la dérivée matérielle  $\dot{T}^s$ . Une approche similaire a été utilisée, par exemple, par Rudnicki et Rice (1975) et Rice (1976). Dans ce cas, l'équation (V.5) du saut du tenseur vitesses de déformations, en passant de l'extérieur à l'intérieur de la bande de cisaillement, s'exprime par :

$$D^s = C : \dot{T}^s + \frac{1}{h}(Q : \dot{T}^s) P \quad , \quad (V.25)$$

et la loi de l'élasticité linéaire orthotrope de révolution, appliquée au saut des vitesses de contraintes entre l'extérieur et l'intérieur de la bande de cisaillement, est donnée par :

$$C : \dot{T}^s = (a \operatorname{tr} \dot{T}^s + b \operatorname{tr} M \dot{T}^s) I + (b \operatorname{tr} \dot{T}^s + c \operatorname{tr} M \dot{T}^s) M + d \dot{T}^s + f (M \dot{T}^s + \dot{T}^s M) \quad , (V.26)$$

où les coefficients indépendants a, b, c, d, et f sont donnés par (V.23). En tenant compte de la restriction (V.8), le tenseur  $\dot{T}^s$  peut être exprimé dans le repère (i, j, k) par :

$$\dot{T}^s = \begin{vmatrix} \dot{\sigma}_{xx} & \dot{\sigma}_{xy} & 0 \\ \dot{\sigma}_{xy} & \dot{\sigma}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad (V.27)$$

(i, j, k)

Les composantes des tenseurs C, P et Q de la loi de comportement admettent des expressions complexes dans le repère (i, j, k), déduit du repère (s, t, n) par les angles d'Euler  $\psi$ ,  $\theta$ , et  $\varphi$ . Il est plus adroit d'utiliser comme repère de travail le repère (u<sub>1</sub>, v, k), se déduisant du repère privilégié (v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>, v<sub>3</sub>) par (cf. Figure V.3) :

- la rotation  $\psi_1$  autour de v<sub>3</sub>, constituant le passage du repère (v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>, v<sub>3</sub>) au repère (u<sub>1</sub>, u<sub>2</sub>, v<sub>3</sub>), ces deux repères étant des repères privilégiés du matériau orthotrope de révolution, et l'axe u<sub>1</sub> étant l'intersection des plans (v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>) et (i, j) ;
- la rotation  $\theta_1$  autour de u<sub>1</sub>, faisant passer du repère privilégié (u<sub>1</sub>, u<sub>2</sub>, v<sub>3</sub>) au repère (u<sub>1</sub>, v, k) de travail.

Dans le plan perpendiculaire à k, la direction j du glissement est repérée par l'angle  $\varphi_1 = (\mathbf{v}, \mathbf{j})$ , la rotation d'angle  $\varphi_1$  autour de k amenant le repère (u<sub>1</sub>, v, k) sur le repère (i, j, k) du plan de cisaillement. Si l'angle  $\theta_1$  est nul, l'axe u<sub>1</sub> n'est plus défini ; ce cas correspond à un glissement structural, avec k = v<sub>3</sub> et  $\theta = -\delta$  (cf. Figures V.1 et V.2) ; le cas du glissement structural est analysé ci-dessous.

Dans le cas du glissement astructural, avec  $\theta_1 \neq 0^\circ$ , dans le plan de travail (u<sub>1</sub>, v, k), les tenseurs D<sup>s</sup> et  $\dot{T}^s$  sont exprimés par :

$$D^s = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}g_2 \sin \varphi_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}g_2 \cos \varphi_1 \\ \frac{1}{2}g_2 \sin \varphi_1 & \frac{1}{2}g_2 \cos \varphi_1 & g_3 \end{vmatrix} \quad , \quad (V.28)$$

(u<sub>1</sub>, v, k)

$$\dot{T}^s = \begin{vmatrix} \dot{\sigma}_{xx} \cos^2 \varphi_1 - 2\dot{\sigma}_{xy} \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + \dot{\sigma}_{yy} \sin^2 \varphi_1 & (\dot{\sigma}_{xx} - \dot{\sigma}_{yy}) \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + \dot{\sigma}_{xy} (\cos^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1) & 0 \\ (\dot{\sigma}_{xx} - \dot{\sigma}_{yy}) \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + \dot{\sigma}_{xy} (\cos^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1) & \dot{\sigma}_{xx} \sin^2 \varphi_1 + 2\dot{\sigma}_{xy} \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + \dot{\sigma}_{yy} \cos^2 \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad (V.29)$$

(u<sub>1</sub>, v, k)

Les composantes  $\bar{P}_{ij}$  et  $\bar{Q}_{ij}$  des tenseurs P et Q, dans le repère (v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>, v<sub>3</sub>) privilégié du matériau, sont données par les expressions (V.17) et (V.19). Le passage du repère (v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>, v<sub>3</sub>) au repère de travail (u<sub>1</sub>, v, k) s'effectuant par les rotations  $\psi_1$  autour de v<sub>3</sub> et  $\theta_1$  autour de u<sub>1</sub>, les composantes P<sub>ij</sub> et Q<sub>ij</sub> des tenseurs P et Q dans le repère de travail (u<sub>1</sub>, v, k) sont respectivement données par :

$$\begin{aligned} P_{11} &= \bar{P}_{11} \cos^2 \psi_1 + \bar{P}_{22} \sin^2 \psi_1 \quad ; \\ P_{22} &= (\bar{P}_{11} \sin^2 \psi_1 + \bar{P}_{22} \cos^2 \psi_1) \cos^2 \theta_1 + 2 \bar{P}_{23} \cos \psi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \bar{P}_{33} \sin^2 \theta_1 \quad ; \\ P_{33} &= (\bar{P}_{11} \sin^2 \psi_1 + \bar{P}_{22} \cos^2 \psi_1) \sin^2 \theta_1 - 2 \bar{P}_{23} \cos \psi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \bar{P}_{33} \cos^2 \theta_1 \quad ; \\ P_{23} &= (\bar{P}_{33} - \bar{P}_{11} \sin^2 \psi_1 - \bar{P}_{22} \cos^2 \psi_1) \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \bar{P}_{23} \cos \psi_1 (\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1) \quad ; \\ P_{31} &= ((\bar{P}_{11} - \bar{P}_{22}) \cos \psi_1 \sin \theta_1 + \bar{P}_{23} \cos \theta_1) \sin \psi_1 \quad ; \\ P_{12} &= ((\bar{P}_{22} - \bar{P}_{11}) \cos \psi_1 \cos \theta_1 + \bar{P}_{23} \sin \theta_1) \sin \psi_1 \quad ; \end{aligned} \quad (V.30)$$

et :

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \bar{Q}_{11} \cos^2 \psi_1 + \bar{Q}_{22} \sin^2 \psi_1 ; \\
 Q_{22} &= (\bar{Q}_{11} \sin^2 \psi_1 + \bar{Q}_{22} \cos^2 \psi_1) \cos^2 \theta_1 + 2 \bar{Q}_{23} \cos \psi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \bar{Q}_{33} \sin^2 \theta_1 ; \\
 Q_{33} &= (\bar{Q}_{11} \sin^2 \psi_1 + \bar{Q}_{22} \cos^2 \psi_1) \sin^2 \theta_1 - 2 \bar{Q}_{23} \cos \psi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \bar{Q}_{33} \cos^2 \theta_1 ; \\
 Q_{23} &= (\bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{11} \sin^2 \psi_1 - \bar{Q}_{22} \cos^2 \psi_1) \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \bar{Q}_{23} \cos \psi_1 (\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1) ; \\
 Q_{31} &= ((\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{22}) \cos \psi_1 \sin \theta_1 + \bar{Q}_{23} \cos \theta_1) \sin \psi_1 ; \\
 Q_{12} &= ((\bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{11}) \cos \psi_1 \cos \theta_1 + \bar{Q}_{23} \sin \theta_1) \sin \psi_1 ;
 \end{aligned} \quad (V.31)$$

Le saut des vitesses de déformations élastiques, au passage de l'extérieur à l'intérieur de la bande de cisaillement, est donné par le tenseur  $C : \dot{T}^s$ , cf. éq. (V.26). Les composantes  $\dot{\sigma}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) du tenseur  $\dot{T}^s$  dans le repère  $(u_1, v, k)$  sont données par l'expression (V.29). Les composantes du tenseur de structure  $M = v_3 \otimes v_3$  sont invariantes dans tous les repères privilégiés  $(., ., v_3)$  du matériau ; elles sont donc les mêmes dans le repère  $(u_1, u_2, v_3)$ . Le passage du repère  $(u_1, u_2, v_3)$  au repère de travail  $(u_1, v, k)$  s'effectuant par la rotation  $\theta_1$  autour de  $u_1$ , les composantes du tenseur  $M$ , dans le repère de travail  $(u_1, v, k)$ , sont données par :

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \theta_1 \\ 0 & \cos \theta_1 \sin \theta_1 & \cos^2 \theta_1 \end{vmatrix}_{(u_1, v, k)} \quad (V.32)$$

A partir des expressions (V.29) et (V.32), les composantes du tenseur  $M \dot{T}^s + \dot{T}^s M$  dans le repère  $u_1, v, k)$  sont données par :

$$M \dot{T}^s + \dot{T}^s M = \begin{vmatrix} 0 & \dot{\sigma}_{12} \sin^2 \theta_1 & \dot{\sigma}_{12} \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ \dot{\sigma}_{12} \sin^2 \theta_1 & 2 \dot{\sigma}_{22} \sin^2 \theta_1 & \dot{\sigma}_{22} \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ \dot{\sigma}_{12} \sin \theta_1 \cos \theta_1 & \dot{\sigma}_{22} \sin \theta_1 \cos \theta_1 & 0 \end{vmatrix}_{(u_1, v, k)} \quad (V.33)$$

Il en résulte :

$$\text{tr} \dot{T}^s = \dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} ; \quad \text{tr} M \dot{T}^s = \dot{\sigma}_{22} \sin^2 \theta_1 \quad (V.34)$$

En utilisant (V.29), (V.32), (V.33) et (V.34) dans l'expression (V.26), nous obtenons comme composantes du tenseur  $C : \dot{T}^s$ , dans le repère de travail  $(u_1, v, k)$  :

$$\begin{aligned}
 (C : \dot{T}^s)_{11} &= C_{1111} \dot{\sigma}_{11} + C_{1122} \dot{\sigma}_{22} ; \\
 (C : \dot{T}^s)_{22} &= C_{2211} \dot{\sigma}_{11} + C_{2222} \dot{\sigma}_{22} ; \\
 (C : \dot{T}^s)_{33} &= C_{3311} \dot{\sigma}_{11} + C_{3322} \dot{\sigma}_{22} ; \\
 (C : \dot{T}^s)_{23} &= C_{2311} \dot{\sigma}_{11} + C_{2322} \dot{\sigma}_{22} ; \\
 (C : \dot{T}^s)_{31} &= C_{3112} \dot{\sigma}_{12} ; \\
 (C : \dot{T}^s)_{12} &= C_{1212} \dot{\sigma}_{12} ;
 \end{aligned} \quad (V.35)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 C_{1111} &= a + d ; \\
 C_{1122} &= C_{2211} = a + b \sin^2 \theta_1 ; \\
 C_{2222} &= a + 2 b \sin^2 \theta_1 + c \sin^4 \theta_1 + d + 2 f \sin^2 \theta_1 ; \\
 C_{3311} &= a + b \cos^2 \theta_1 ; \\
 C_{3322} &= a + b + c \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 ; \\
 C_{2311} &= b \sin \theta_1 \cos \theta_1 ; \\
 C_{2322} &= (b + c \sin^2 \theta_1 + f) \sin \theta_1 \cos \theta_1 ; \\
 C_{3112} &= f \sin \theta_1 \cos \theta_1 ; \\
 C_{1212} &= d + f \sin^2 \theta_1 .
 \end{aligned} \quad (V.36)$$

Finalement, en utilisant les composantes (V.28) de  $D^s$ , (V.29) de  $\dot{T}^s$ , (V.30) de  $P$ , (V.31) de  $Q$  et (V.35) de  $C : \dot{T}^s$  dans l'équation (V.25) du saut du tenseur vitesse de déformations, nous obtenons, dans le repère de travail  $(u_1, v, k)$ , le système suivant de six équations :

$$\left( C_{1111} + \frac{1}{h} Q_{11} P_{11} \right) \dot{\sigma}_{11} + \left( C_{1122} + \frac{1}{h} Q_{22} P_{11} \right) \dot{\sigma}_{22} + \frac{2}{h} Q_{12} P_{11} \dot{\sigma}_{12} = 0 \quad ; \quad (V.37.1)$$

$$\left( C_{1122} + \frac{1}{h} Q_{11} P_{22} \right) \dot{\sigma}_{11} + \left( C_{2222} + \frac{1}{h} Q_{22} P_{22} \right) \dot{\sigma}_{22} + \frac{2}{h} Q_{12} P_{22} \dot{\sigma}_{12} = 0 \quad ; \quad (V.37.2)$$

$$\left( C_{3311} + \frac{1}{h} Q_{11} P_{33} \right) \dot{\sigma}_{11} + \left( C_{3322} + \frac{1}{h} Q_{22} P_{33} \right) \dot{\sigma}_{22} + \frac{2}{h} Q_{12} P_{33} \dot{\sigma}_{12} - g_3 = 0 \quad ; \quad (V.37.3)$$

$$\left( C_{2311} + \frac{1}{h} Q_{11} P_{23} \right) \dot{\sigma}_{11} + \left( C_{2322} + \frac{1}{h} Q_{22} P_{23} \right) \dot{\sigma}_{22} + \frac{2}{h} Q_{12} P_{23} \dot{\sigma}_{12} - \frac{1}{2} g_2 \cos \varphi_1 = 0 \quad ; \quad (V.37.4)$$

$$\frac{1}{h} Q_{11} P_{31} \dot{\sigma}_{11} + \frac{1}{h} Q_{22} P_{31} \dot{\sigma}_{22} + 2 \left( C_{3112} + \frac{1}{h} Q_{12} P_{31} \right) \dot{\sigma}_{12} + \frac{1}{2} g_2 \sin \varphi_1 = 0 \quad ; \quad (V.37.5)$$

$$\frac{1}{h} Q_{11} P_{12} \dot{\sigma}_{11} + \frac{1}{h} Q_{22} P_{12} \dot{\sigma}_{22} + 2 \left( C_{1212} + \frac{1}{h} Q_{12} P_{12} \right) \dot{\sigma}_{12} = 0 \quad . \quad (V.37.6)$$

Pour simplifier l'analyse du système (V.37), nous considérons, par la suite, que les angles d'Euler des Figures V.2 et V.3 sont définis à  $\pi$  près.

#### 5.4.2 Cas du glissement astructural

Pour la résolution du système (V.37), nous nous plaçons d'abord dans le cas du glissement astructural  $\theta_1 \neq 0$  (cf. Figure V.3). Considérons les trois équations (V.37.1),

(V.37.2) et (V.37.6), qui constituent un système de trois équations linéaires homogènes par rapport aux inconnues  $\dot{\sigma}_{11}$ ,  $\dot{\sigma}_{22}$  et  $\dot{\sigma}_{12}$ . Pour que ce système admette d'autres solutions que la solution triviale  $\dot{\sigma}_{11} = \dot{\sigma}_{22} = \dot{\sigma}_{12} = 0$ , il faut et il suffit que le déterminant de la matrice des coefficients soit nul :

$$\det \begin{vmatrix} C_{1111} + \frac{1}{h} P_{11} Q_{11} & C_{1122} + \frac{1}{h} P_{11} Q_{22} & \frac{2}{h} P_{11} Q_{12} \\ C_{1122} + \frac{1}{h} P_{22} Q_{11} & C_{2222} + \frac{1}{h} P_{22} Q_{22} & \frac{2}{h} P_{22} Q_{12} \\ \frac{1}{h} P_{12} Q_{11} & \frac{1}{h} P_{12} Q_{22} & 2 (C_{1212} + \frac{1}{h} P_{12} Q_{12}) \end{vmatrix} = 0 \quad (V.38)$$

La résolution de l'équation (V.38) par rapport au paramètre d'écroutissage  $h$  résulte en :

$$h = - \frac{P_{12} Q_{12}}{C_{1212}} - \frac{C_{1111} P_{22} Q_{22} + C_{2222} P_{11} Q_{11} - C_{1122} (P_{11} Q_{22} + P_{22} Q_{11})}{C_{1111} C_{2222} - C_{1122}^2} \quad (V.39)$$

En introduisant (V.39) dans les équations (V.37.1) et (V.37.2), nous obtenons les expressions des vitesses de contraintes  $\dot{\sigma}_{11}$  et  $\dot{\sigma}_{22}$ , en fonction de  $\dot{\sigma}_{12}$ , par :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} &= \frac{2 \dot{\sigma}_{12} (C_{2222} P_{11} - C_{1122} P_{22}) C_{1212}}{P_{12} (C_{1111} C_{2222} - C_{1122}^2)} ; \\ \dot{\sigma}_{22} &= \frac{2 \dot{\sigma}_{12} (C_{1111} P_{22} - C_{1122} P_{11}) C_{1212}}{P_{12} (C_{1111} C_{2222} - C_{1122}^2)} \end{aligned} \quad (V.40)$$

Nous appelons "conditions A" l'ensemble des expressions (V.39) et (V.40).

Dans le système d'équations (V.37), l'équation (V.37.3) donne la valeur de  $g_3$  à partir des valeurs de  $h$ ,  $\dot{\sigma}_{11}$  et  $\dot{\sigma}_{22}$ , et ne présente donc pas de problème de compatibilité avec la "solution A" obtenue ci-dessus; par contre, ces conditions doivent être compatibles avec les équations (V.37.4) et (V.37.5). En observant que ces deux dernières équations fournissent la valeur de  $g_2$ , il convient d'éliminer  $g_2$  entre ces deux équations, avant d'étudier leur compatibilité avec les "conditions A". En remplaçant  $h$ ,  $\dot{\sigma}_{11}$  et  $\dot{\sigma}_{22}$  par leurs expressions de la "condition A", la compatibilité des équations (V.37.4) et (V.37.5) avec la "condition A" s'exprime finalement par la condition d'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{C_{1212}}{P_{12}} (P_{31} \cos \varphi_1 + P_{23} \sin \varphi_1) \dot{\sigma}_{12} \\ \frac{C_{1212}}{P_{12}} L \dot{\sigma}_{12} \sin \varphi_1 + M \dot{\sigma}_{12} \cos \varphi_1 &= \frac{1}{(C_{1111} C_{2222} - C_{1122}^2)} \\ \text{avec : } L &= (C_{2222} P_{11} - C_{1122} P_{22}) C_{2311} + (C_{1111} P_{22} - C_{1122} P_{11}) C_{2322} \\ M &= (C_{1111} C_{2222} - C_{1122}^2) C_{3112} \end{aligned} \quad (V.41)$$

Par des considérations énergétiques dans le domaine du comportement élastique linéaire, il est facile de montrer que :

$$C_{1111} C_{2222} - C_{1122}^2 > 0 \quad (V.42)$$

Il en résulte, en particulier, que le second membre de la condition (V.41) est toujours différent de zéro. Les solutions pour la condition (V.41) peuvent être obtenues en considérant que le membre de gauche est une forme indéterminée pour  $\dot{\sigma}_{12} = 0$  ou  $P_{12} = 0$ .

Si  $\dot{\sigma}_{12} = 0$ , l'équation (V.37.6) s'écrit :

$$\frac{P_{12}}{h} (Q_{11} \dot{\sigma}_{11} + Q_{22} \dot{\sigma}_{22}) = 0 \quad (V.43)$$

Lorsque  $\dot{\sigma}_{12} = 0$ , le facteur  $Q_{11} \dot{\sigma}_{11} + Q_{22} \dot{\sigma}_{22}$  de l'équation (V.42) ne peut pas être nul, sinon tous les termes en  $\frac{1}{h}$  du système (V.37) sont nuls, ce qui est physiquement impossible. Comme  $h$  est nécessairement différent de l'infini, la seule solution de l'équation (V.43) est  $P_{12} = 0$ .

Si  $P_{12} = 0$ , l'équation (V.37.6) devient :

$$C_{1212} \dot{\sigma}_{12} = 0 \quad (V.44)$$

En utilisant les expressions (V.36) et (V.23), la composante  $C_{1212}$  est donnée par :

$$C_{1212} = \frac{1 + \nu_1}{E_1} \cos^2 \theta_1 + \frac{1}{2G} \sin^2 \theta_1 > 0 \quad (V.45)$$

La seule solution de l'équation (V.44) est donc  $\dot{\sigma}_{12} = 0$ .

Finalement, en considérant que le membre de gauche de l'équation (V.39) est une forme indéterminée, nous aboutissons à une seule solution pour la condition de compatibilité (V.41):

$$\dot{\sigma}_{12} = 0 ; P_{12} = 0 \quad (V.46)$$

En utilisant (V.19) dans (V.30), la condition  $P_{12} = 0$  s'exprime par :

$$P_{12} = \beta_2 (\sigma - p) \sin \delta \sin \psi_1 (\sin \delta \cos \psi_1 \cos \theta_1 - \cos \delta \sin \theta_1) = 0 \quad (V.47)$$

Dans la représentation (V.21) du tenseur  $P$ , nous pouvons remarquer que le facteur scalaire  $\beta_2$  du déviateur  $S$  des contraintes est nécessairement différent de zéro; par ailleurs, nous avons  $\sigma > p$ . Donc, finalement, les solutions de l'équation (V.47) sont les suivantes :

$$\bullet \text{ si } \delta \neq \frac{\pi}{2} \quad \delta = 0 \quad ; \quad (\text{V.48.1})$$

$$\psi_1 = 0 \quad ; \quad (\text{V.48.2})$$

$$\cos \psi_1 = \cot \delta \operatorname{tg} \theta_1 \quad ; \quad (\text{V.48.3})$$

$$\bullet \text{ si } \delta = \frac{\pi}{2} \quad \psi_1 = 0 \quad ; \quad (\text{V.49.1})$$

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad (\text{V.49.2})$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad . \quad (\text{V.49.3})$$

En introduisant (V.19) dans (V.30), nous obtenons l'expression suivante de  $P_{31}$  :

$$P_{31} = -\beta_2 (\sigma - p) \sin \delta \sin \psi_1 (\sin \delta \cos \psi_1 \sin \theta_1 + \cos \delta \cos \theta_1) \quad (\text{V.50})$$

A partir de (V.50), nous obtenons :

$$\bullet \delta = 0 \Rightarrow P_{31} = 0 \quad ; \quad (\text{V.51.1})$$

$$\bullet \psi_1 = 0 \Rightarrow P_{31} = 0 \quad . \quad (\text{V.51.2})$$

En introduisant  $P_{12} = 0$  dans (V.39), nous obtenons l'expression suivante pour le paramètre d'érouissage  $h$  :

$$h = - \frac{C_{1111} P_{22} Q_{22} + C_{2222} P_{11} Q_{11} - C_{1122} (P_{11} Q_{22} + P_{22} Q_{11})}{C_{1111} C_{2222} - C_{1122}^2} \quad (\text{V.52})$$

En introduisant  $\dot{\sigma}_{12} = 0$  (cf. éq. (V.46)) et l'expression (V.52) de  $h$  dans le système linéaire homogène (V.37), nous obtenons :

$$\frac{\dot{\sigma}_{11}}{\dot{\sigma}_{22}} = \frac{C_{2211} P_{11} - C_{1122} P_{22}}{C_{1111} P_{22} - C_{1122} P_{11}} \quad (\text{V.53})$$

L'ensemble des équations (V.46), (V.48), (V.49), (V.52), et (V.53) constituent la première solution du système homogène (V.37). Cette solution sera discutée au §5.5 ci-dessous.

Lorsque le membre de gauche de la condition de compatibilité (V.41) n'est pas une forme indéterminée, cette condition admet comme solution :

$$\frac{P_{31} \cos \varphi_1 + P_{23} \sin \varphi_1}{C_{1212} L \sin \varphi_1 + P_{12} M \cos \varphi_1} = \frac{1}{C_{1212} (C_{1111} C_{2222} - C_{1122}^2)} \quad ,$$

$$\text{avec : } M = (C_{2222} P_{11} - C_{1122} P_{22}) C_{2311} + (C_{1111} P_{22} - C_{1122} P_{11}) C_{2322} \quad , \quad (\text{V.54})$$

$$L = (C_{1111} C_{2222} - C_{1122}^2) C_{3112} \quad ,$$

et les expressions du paramètre d'érouissage  $h$  et des vitesses de contraintes  $\dot{\sigma}_{11}$  et  $\dot{\sigma}_{22}$  sont données par (V.39) et (V.40). L'ensemble des équations (V.54), (V.39) et (V.40) constitue la deuxième solution du système linéaire (V.37), qui sera discutée au §5.5 ci-dessous.

### 5.4.3 Glissement structural

Dans le cas du glissement structural ( $\theta_1 = 0$ ), la normale  $\mathbf{k}$  au plan de cisaillement est confondue avec l'axe  $v_3$  de révolution de l'orthotropie (cf. Figure V.3) ; dans ce cas, l'axe  $\mathbf{u}_1$  n'est plus défini et l'angle  $\psi_1$  est arbitraire. En choisissant la valeur  $\psi_1 = 0$ , le repère de travail ( $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}, \mathbf{k}$ ) est confondu avec le repère privilégié ( $v_1, v_2, v_3$ ). Les expressions (V.47) et (V.45), respectivement de  $P_{12}$  et de  $P_{31}$ , résultent en :

$$P_{12} = P_{31} = 0 \quad (\text{V.55})$$

Dans ce cas, les équations (V.37.5) et (V.37.6) du système homogène deviennent :

$$C_{3112} \dot{\sigma}_{12} = \frac{1}{2} g_2 \sin \varphi_1 \quad ; \quad (\text{V.56.1})$$

$$C_{1212} \dot{\sigma}_{12} = 0 \quad . \quad (\text{V.56.2})$$

En tenant compte de (V.45), la solution de l'équation (V.56.2) est :

$$\dot{\sigma}_{12} = 0 \quad (\text{V.57.1})$$

En introduisant (V.57.1) dans (V.56.1), il vient :

$$\varphi_1 = 0 \quad \text{ou} \quad g_2 = 0 \quad (\text{V.57.2})$$

En introduisant  $\dot{\sigma}_{12} = 0$  dans les deux premières équations du système homogène (V.37), nous aboutissons aux valeurs de  $h$  et du rapport  $\dot{\sigma}_{11}/\dot{\sigma}_{22}$  données, respectivement, par les équations (V.52) et (V.53). Cette solution est compatible avec les autres équations du système, puisque l'équation (V.37.3) donne la valeur de  $g_3$  ; l'équation (V.37.4) donne la valeur de  $g_2$ , et les deux équations (V.37.5) et (V.37.6) sont identiquement vérifiées. L'ensemble des équations (V.52), (V.53), (V.55), (V.57.1) et (V.57.2) constitue la solution du système homogène (V.37) dans le cas du glissement structural. Cette solution est analysée ci-dessous au §5.5.

## 5.5 Discussion des résultats

### 5.5.1 Glissement astructural

#### 5.5.1.1 Cas $\delta = 0$

Le cas  $\delta = 0$  est une des conditions de la première solution du système homogène (V.37). Dans ce cas particulier, le repère privilégié ( $v_1, v_2, v_3$ ) du matériau est confondu avec le repère ( $s, t, n$ ) qui est à la fois le repère de l'éprouvette et le repère principal des contraintes (cf. Figure V.1). Les expressions des composantes des tenseurs  $P$  et  $Q$  dans le repère privilégié ( $v_1, v_2, v_3$ ) sont, respectivement, d'après (V.19) et (V.17) :

$$\begin{aligned} \bar{P}_{11} = \bar{P}_{22} &= \beta_0 - \frac{\beta_2}{3}(\sigma - p) \quad , \\ \bar{P}_{33} &= \beta_0 + \beta_1 + \frac{2\beta_2}{3}(\sigma - p) \quad , \\ \bar{P}_{23} = \bar{P}_{31} = \bar{P}_{12} &= 0 \quad ; \end{aligned} \quad (V.58)$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} = \bar{Q}_{22} &= \alpha_0 - \frac{\alpha_2}{3}(\sigma - p) \quad , \\ \bar{Q}_{33} &= \alpha_0 + \alpha_1 + \frac{2\alpha_2}{3}(\sigma - p) \quad , \\ \bar{Q}_{23} = \bar{Q}_{31} = \bar{Q}_{12} &= 0 \quad ; \end{aligned} \quad (V.59)$$

Compte tenu des équations (V.30) et (V.31), les expressions des composantes des tenseurs  $P$  et  $Q$  dans le repère de travail ( $u_1, v, k$ ) sont données par :

$$\begin{aligned} P_{11} &= \beta_0 - \frac{\beta_2}{3}(\sigma - p) \quad , \\ P_{22} &= \left( \beta_0 - \frac{\beta_2}{3}(\sigma - p) \right) \cos^2\theta_1 + \left( \beta_0 + \beta_1 + \frac{2\beta_2}{3}(\sigma - p) \right) \sin^2\theta_1 \quad , \\ P_{33} &= \left( \beta_0 - \frac{\beta_2}{3}(\sigma - p) \right) \sin^2\theta_1 + \left( \beta_0 + \beta_1 + \frac{2\beta_2}{3}(\sigma - p) \right) \cos^2\theta_1 \quad , \\ P_{23} &= \left( \beta_1 + \beta_2(\sigma - p) \right) \sin\theta_1 \cos\theta_1 \quad , \\ P_{31} = P_{12} &= 0 \quad ; \end{aligned} \quad (V.60)$$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \alpha_0 - \frac{\alpha_2}{3}(\sigma - p) \quad , \\ Q_{22} &= \left( \alpha_0 - \frac{\alpha_2}{3}(\sigma - p) \right) \cos^2\theta_1 + \left( \alpha_0 + \alpha_1 + \frac{2\alpha_2}{3}(\sigma - p) \right) \sin^2\theta_1 \quad , \\ Q_{33} &= \left( \alpha_0 - \frac{\alpha_2}{3}(\sigma - p) \right) \sin^2\theta_1 + \left( \alpha_0 + \alpha_1 + \frac{2\alpha_2}{3}(\sigma - p) \right) \cos^2\theta_1 \quad , \\ Q_{23} &= (\alpha_1 + \alpha_2(\sigma - p)) \sin\theta_1 \cos\theta_1 \quad , \\ Q_{31} = Q_{12} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (V.61)$$

Compte tenu des expressions (V.36), (V.60) et (V.61), il apparaît que, dans ce cas, l'angle  $\psi_1$  n'intervient plus dans les équations du système homogène (V.37). En effet, dans le cas des essais à  $\delta = 0$ , où l'état des contraintes est donc de révolution autour de  $v_3$ , les tenseurs  $P$  et  $Q$  sont eux-mêmes de révolution autour de  $v_3$ ; ils admettent donc les mêmes composantes dans tous les repères de révolution autour de  $v_3$ , ce qui signifie qu'elles ne sont plus fonction de la rotation  $\psi_1$  autour de  $v_3$ ; elles ne dépendent plus que de la rotation  $\theta_1$  autour de  $u_1$  (cf. Figure V.3). L'angle  $\psi_1$  est donc arbitraire. En reportant  $P_{31} = P_{12} = 0$  (V.60) dans les équations (V.37.6) et (V.37.5), il vient :

$$2C_{1212} \dot{\sigma}_{12} = 0 \quad , \quad (V.62.1)$$

$$2C_{3112} \dot{\sigma}_{12} + \frac{1}{2} g_2 \sin\varphi_1 = 0 \quad . \quad (V.62.2)$$

Comme  $C_{1212} > 0$  (cf. éq. (V.45)), la seule solution de l'équation (V.62.1) est :

$$\dot{\sigma}_{12} = 0 \quad ; \quad (V.63)$$

par suite, l'équation (V.62.2) devient :

$$\frac{1}{2} g_2 \sin\varphi_1 = 0 \quad . \quad (V.64)$$

Nous considérons, dans cette analyse, des bandes de cisaillement "vraies". Si  $g_2$  est nul, le saut du taux de déformations  $D^s$  entre l'extérieur et l'intérieur de la bande est tel qu'il n'existe aucun cisaillement dans le plan ( $i, j$ ) de la bande, mais uniquement une extension dans la direction de la normale  $k$  à la bande : ceci correspond à une rupture par extension. La nécessité d'un cisaillement non nul dans le plan de la bande impose donc :

$$g_2 \neq 0 \quad . \quad (V.65)$$

L'équation (V.64), soumise à la restriction (V.65), admet pour solution unique :

$$\varphi_1 = 0 \quad . \quad (V.66)$$

Dans le système (V.37), la condition  $\delta = 0$  résulte donc en :

- $\psi_1$  est indéterminé ;
- $\varphi_1 = 0$  ;
- $\dot{\sigma}_{12} = 0$  .

Les équations (V.37.6) et (V.37.5) sont alors identiquement nulles; l'équation (V.37.4) donne la valeur de  $g_2$ ; l'équation (V.37.3) donne la valeur de  $g_3$ ; les équations (V.37.1) et (V.37.2) donnent les valeurs (V.52) et (V.53), respectivement, de  $h$  et de  $\dot{\sigma}_{11}/\dot{\sigma}_{22}$ . La deuxième solution du système (V.37) n'existe plus. La valeur de  $h$  ne dépend que de la loi de comportement et de l'angle  $\theta_1$ . Le seuil de localisation  $h_{crit}$  peut être déterminé, pour une loi de comportement donnée, en maximisant  $h$  par rapport à cet angle :

$$h_{crit} = \max_{\theta_1}(h) \quad , \quad (V.67)$$

c'est à dire en cherchant l'orientation  $\theta_1$  du plan de cisaillement pour laquelle la localisation des déformations se produit pour une déformation plastique minimale.

Enfin, la condition de nullité de  $\dot{\sigma}_{12}$  correspond, d'après (V.29), à :

$$(\dot{\sigma}_{xx} - \dot{\sigma}_{yy}) \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 + \dot{\sigma}_{xy} (\cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_1) = 0 \quad ; \quad (V.68)$$

en introduisant  $\varphi_1 = 0$  dans l'expression (V.68), il vient immédiatement :

$$\dot{\sigma}_{xy} = 0 \quad . \quad (V.69)$$

Les orientations du repère  $(i, j, k)$  de la bande de cisaillement dans le repère privilégié  $(v_1, v_2, v_3)$  sont donc :

- $\psi_1$  arbitraire ;
  - $\varphi_1 = 0$  .
- (V.70)

Les deux repères  $(v_1, v_2, v_3)$  et  $(s, t, n)$  étant confondus dans ce cas précis (cf. Figure V.1), nous avons, de façon triviale :

$$\psi_1 = \psi \quad ; \quad \theta_1 = \theta \quad \text{et} \quad \varphi_1 = \varphi \quad . \quad (V.71)$$

Il en résulte que, pour  $\delta = 0$ , les orientations du repère  $(i, j, k)$  de la bande de cisaillement dans le repère  $(s, t, n)$  sont :

- $\psi$  arbitraire ;
  - $\varphi = 0$  .
- (V.72)

Considérons la condition  $\varphi = 0$ . Elle signifie que l'intersection du plan  $(i, j)$  de cisaillement avec le plan  $(s, t)$  de l'éprouvette est  $i = u$  (cf. Figure V.2) ; l'axe  $i$  appartient donc au plan  $(s, t)$ . Par suite, l'axe  $i$  est perpendiculaire à l'axe  $n$  des éprouvettes ;  $i$  est, par définition, perpendiculaire à la direction  $j$  du glissement dans le plan de cisaillement et à la normale  $k$  à ce plan (cf. Figure V.4a). Il en résulte que les axes  $n, j,$  et  $k$  sont coplanaires, ou encore, que l'intersection du plan  $(n, k)$  avec le plan  $(i, j)$ , qui est la ligne de plus grande pente du plan  $(i, j)$  de cisaillement, est l'axe  $j$ , direction du glissement dans le plan, cf. Figure V.4b.

Le résultat  $\psi$  arbitraire correspond au raisonnement phénoménologique suivant : à la fois l'état de contraintes, les symétries matérielles et la géométrie de l'éprouvette présentant une symétrie rotationnelle autour de l'axe  $n$  de l'éprouvette, la réponse mécanique doit présenter la même symétrie rotationnelle, ce qui, pour l'orientation d'un plan de cisaillement, signifie que  $\psi$ , représentant l'orientation de la normale au plan de cisaillement autour de l'axe  $n$ , est arbitraire.

### 5.5.1.2 Cas $\delta = \frac{\pi}{2}$

Dans le cas  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , la première solution du système homogène (V.37) est composée, en particulier, par les équations :

$$P_{12} = 0 \quad ; \quad \dot{\sigma}_{12} = 0 \quad ; \quad (V.73)$$

et soit  $\psi_1 = 0$  , soit  $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$  , soit  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  .

Considérons  $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$ . Dans ce cas, l'axe  $u_1$  est confondu avec la direction  $v_2$ ; la normale  $k$  au plan de cisaillement, perpendiculaire à  $u_1 = v_2$ , est donc contenue dans le plan  $(v_1, v_3)$  (cf. Figure V.5a). Comme  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , le plan  $(v_1, v_3)$  coïncide avec le plan  $(s, t)$  de l'éprouvette, perpendiculaire à la direction  $n$  de la contrainte principale majeure (cf. Figure V.5b). La condition  $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$  implique donc que le plan de cisaillement contient la direction de la contrainte principale majeure. Cette solution est à rejeter, car elle est incompatible avec la rupture en cisaillement cherchée : elle ne peut correspondre qu'à un mode de rupture en extension.

Dans le cas où  $\psi_1 = 0$ , compte tenu des conditions  $P_{12} = 0$  ,  $\dot{\sigma}_{12} = 0$  (V.73) et  $P_{13} = 0$  (V.51.2), l'équation (V.37.5) du système homogène résulte en :

$$\frac{1}{2} g_2 \sin\varphi_1 = 0 \quad . \quad (V.74)$$

Ainsi que nous l'avons vu dans le paragraphe précédent,  $g_2$  est nécessairement non nul dans l'hypothèse d'un cisaillement dans le plan  $(i, j)$  et l'équation (V.74) équivaut à :

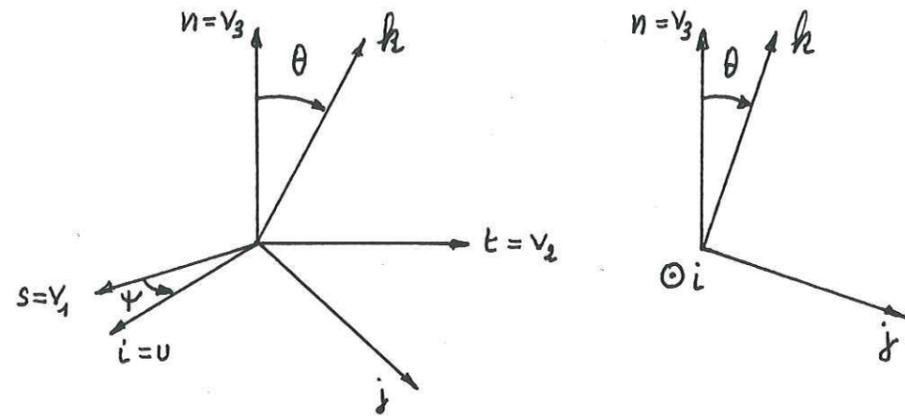


Figure V.4 - Cas  $\delta = 0$  ;  $\varphi = (\mathbf{i}, \mathbf{u}) = 0$  ;  $\psi = (\mathbf{v}_1, \mathbf{u})$  arbitraire .

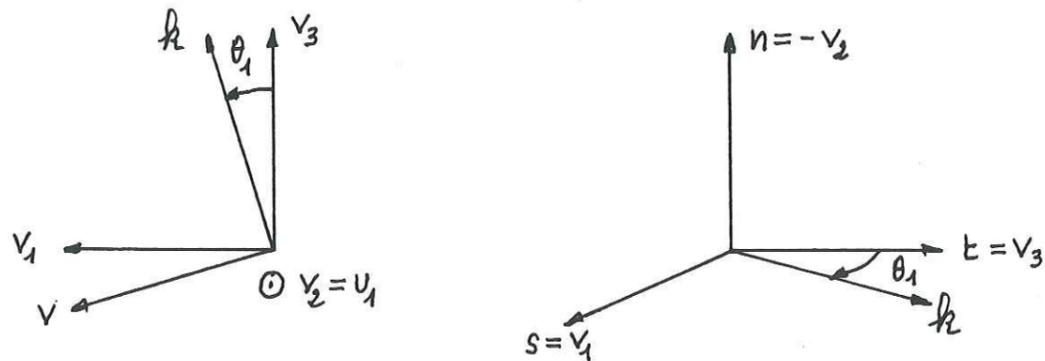


Figure V.5 - Cas  $\delta = \pi/2$  ;  $\psi_1 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1) = \pi/2$  .

$$\varphi_1 = 0 \quad . \quad (V.75)$$

Dans le système homogène (V.37), les équations (5) et (6) sont identiquement vérifiées ; l'équation (4) donne la valeur de  $g_2$  ; l'équation (3) donne la valeur de  $g_3$  ; la résolution des deux premières équations résulte en les mêmes expressions de  $h$  (V.52) et du rapport  $\dot{\sigma}_{11}/\dot{\sigma}_{22}$  (V.53) que les équations du cas  $\delta = 0$ . La valeur de  $h$  obtenue ne dépend que de l'angle  $\theta_1$  et de la loi de comportement. Les conditions  $\varphi_1 = 0$  et  $\dot{\sigma}_{12} = 0$  résultent, comme dans le cas  $\delta = 0$ , en :

$$\dot{\sigma}_{xy} = 0 \quad (V.76)$$

Les orientations du repère  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  de la bande de cisaillement dans le repère privilégié  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  du matériau sont :

- $\psi_1 = 0$  ;
  - $\varphi_1 = 0$  ;
  - $\theta_1^{crit}$  donné par la maximisation de  $h$  par rapport à  $\theta_1$ , selon une procédure identique au cas  $\delta = 0$ .
- (V.77)

L'angle  $\psi_1$  entre  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{u}_1$ , et l'angle  $\varphi_1$  entre  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{i}$  étant tous deux nuls,  $\mathbf{i}$  est confondu avec  $\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{s}$  et également avec  $\mathbf{u}$  (cf. Figure V.2). Nous obtenons donc immédiatement, pour les orientations du repère de la bande de cisaillement dans le repère  $(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{n})$  de l'éprouvette (cf. Figure V.6) :

$$\psi = \varphi = 0 \quad . \quad (V.78)$$

Comme  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , l'axe  $\mathbf{v}_3$  de révolution de l'orthotropie est confondu avec l'axe  $\mathbf{t}$ . Les angles  $\psi$  et  $\varphi$  étant tous deux nuls, les axes  $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ , et  $\mathbf{k}$  sont coplanaires. Il en résulte que l'angle  $\theta_1 = (\mathbf{v}_3, \mathbf{k}) = (\mathbf{t}, \mathbf{k})$  et l'angle  $\theta = (\mathbf{n}, \mathbf{k})$  sont reliés par (cf. Figure V.6) :

$$\theta_1 - \theta = \frac{\pi}{2} \quad . \quad (V.79)$$

Par un raisonnement géométrique similaire à celui développé pour le cas  $\delta = 0$ , la nullité de l'angle  $\varphi$  entraîne que la direction  $\mathbf{j}$  du glissement dans le plan de cisaillement  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  est la ligne de plus grande pente du plan de cisaillement.

Dans le cas  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ , certains coefficients élastiques intervenant dans le système (V.37) sont identiquement nuls. Il vient, à partir des équations (V.36) :

$$C_{2311} = C_{2322} = C_{3112} = 0 \quad . \quad (V.80)$$

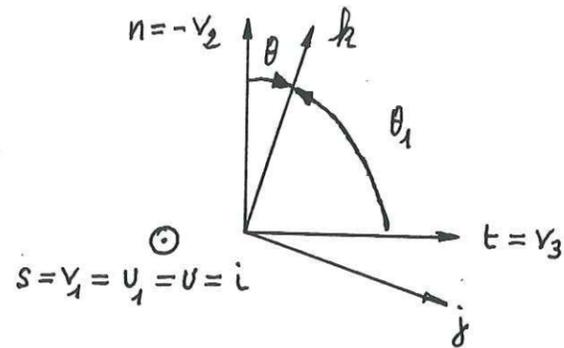


Figure V.6 - Cas  $\delta = \pi/2$  .

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = (v_1, u_1) = 0 \\ \varphi_1 = (u_1, i) = 0 \\ u_1 = u \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi = (v_1, u) = 0 \\ \varphi = (u, i) = 0 \\ \theta_1 - \theta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

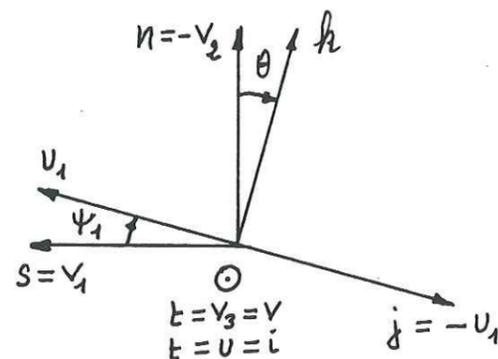
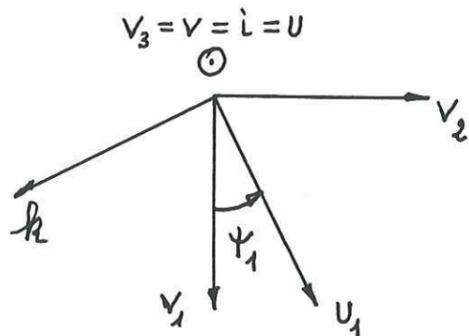


Figure V.7 - Cas  $\delta = \pi/2$  .

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = (v_3, k) = \frac{\pi}{2} \\ \varphi_1 = (u_1, i) = \frac{\pi}{2} \\ i = u \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = (u, i) = 0 \\ \psi = (s, u) = \frac{\pi}{2} \\ \theta = \psi_1 \end{array} \right.$$

De plus, comme  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , nous obtenons, à partir des équations (V.19) :

$$\bar{P}_{23} = 0 \quad (V.81)$$

et, à partir des équations (V.30) :

$$P_{23} = 0 \quad (V.82)$$

Les conditions (V.80) et (V.82), appliquées à l'équation (4) du système homogène (V.37) résultent en :

$$\frac{1}{2} g_2 \cos \varphi_1 = 0 \quad (V.83)$$

Comme  $g_2$  est supposé non nul (cf. éq.(V.65)), l'équation (V.83) admet comme unique solution :

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \quad (V.84)$$

Avec la condition  $\dot{\sigma}_{12} = 0$ , en introduisant la valeur  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  dans l'expression (V.68) de  $\dot{\sigma}_{12}$ , nous obtenons :

$$\dot{\sigma}_{xy} = 0 \quad (V.85)$$

Dans le système (V.37), les équations (6) et (4) sont alors identiquement vérifiées ; l'équation (5) donne la valeur de  $g_2$  ; l'équation (3) donne la valeur de  $g_3$  ; la résolution des deux premières équations fournit les valeurs de  $h$  et du rapport  $\dot{\sigma}_{11}/\dot{\sigma}_{22}$ . Notons que les expressions de  $h$  et de  $\dot{\sigma}_{11}/\dot{\sigma}_{22}$  ainsi déterminées sont identiques aux expressions, respectivement, (V.52) et (V.53). La valeur de  $h$  ne dépend que de l'angle  $\psi_1$  et de la loi de comportement.

Les orientations du repère  $(i, j, k)$  de la bande de cisaillement dans le repère privilégié  $(v_1, v_2, v_3)$  du matériau sont :

$$\begin{aligned} & \bullet \theta_1 = \frac{\pi}{2} ; \\ & \bullet \varphi_1 = \frac{\pi}{2} ; \end{aligned} \quad (V.86)$$

•  $\psi_1^{crit}$  donné par la maximisation de  $h$  par rapport à  $\psi_1$  .

Lorsque l'angle  $\theta_1 = (v_3, k)$  est égal à  $\frac{\pi}{2}$ , ceci signifie que la normale  $k$  à la bande de cisaillement appartient au plan privilégié  $(v_1, v_2)$  ; l'angle  $\varphi_1 = (u_1, i)$  étant lui aussi égal à  $\frac{\pi}{2}$ ,  $i$  est perpendiculaire à  $u_1$ . Le vecteur  $i$  est également, par définition, perpendiculaire à  $k$ . Comme  $u_1$  et  $k$  sont distincts et appartiennent tous deux au plan  $(v_1, v_2)$ ,  $i$  est nécessairement perpendiculaire au plan  $(v_1, v_2)$  (cf. Figure V.7a). Comme  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , le plan  $(v_1, v_2)$  est le plan  $(s, n)$ . Il en résulte que  $i$  est perpendiculaire au plan  $(s, n)$ , c'est à dire que l'axe  $i$  est parallèle à

l'axe  $t$  dans le plan  $(s, t)$  et que l'intersection du plan  $(i, j)$  et du plan  $(s, t)$  est portée par  $u = i = t$  (cf. Figure V.7b). Nous obtenons donc, pour les orientations du repère  $(i, j, k)$  de la bande de cisaillement dans le repère  $(s, t, n)$  de l'éprouvette :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varphi = (u, i) &= 0 & ; \\ \bullet \quad \psi = (s, u) &= \frac{\pi}{2} & . \end{aligned} \quad (V.87)$$

Les axes  $k, u_1, v_1, v_2$  sont coplanaires et, comme  $\delta = \frac{\pi}{2}$ ,  $v_2 = -n$ . L'angle  $\psi_1 = (v_1, u_1)$  est également l'angle  $(-v_2, k)$  (cf. Figure V.7b). La relation entre l'angle  $\psi_1 = (v_1, u_1) = (-v_2, k)$  et l'angle  $\theta = (n, k)$  est alors donnée par :

$$\bullet \quad \theta = (n, k) = (-v_2, k) = \psi_1 \quad . \quad (V.88)$$

Comme l'angle  $\varphi = (u, i)$  est nul, un raisonnement géométrique similaire à celui développé dans le cas  $\delta = 0$ , conduit à :

$$(n, k) \cap (i, j) = j \quad . \quad (V.89)$$

c'est à dire que la direction du glissement  $j$  dans le plan de cisaillement est la ligne de plus grande pente de ce plan.

Pour la première solution de l'équation (V.37), nous obtenons, dans le cas  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , deux solutions pour l'ensemble des deux angles  $\psi$  et  $\varphi$  caractérisant, respectivement, l'orientation de la normale au plan de cisaillement autour de l'axe  $n$  de l'éprouvette et l'orientation de la direction du glissement dans le plan. Ces deux solutions correspondent au raisonnement phénoménologique, car, pour  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , l'état de contrainte, les symétries matérielles et la géométrie de l'éprouvette présentent deux plans de symétrie communs : les plans  $(n, v_3)$  et  $(n, v_1)$  ; la réponse mécanique doit présenter la même symétrie, ce qui, pour un plan de cisaillement, correspond aux solutions  $\varphi = 0$  et  $\psi = 0$  (symétrie par rapport au plan  $(n, v_3)$ ) et  $\varphi = 0$  et  $\psi = \frac{\pi}{2}$  (symétrie par rapport au plan  $(n, v_1)$ ).

La deuxième solution du système des équations homogènes (V.37) est une solution "parasite" ne correspondant pas au raisonnement phénoménologique. La condition (V.54) relie, en fonction de la loi de comportement du matériau, les angles  $\varphi_1, \psi_1$  et  $\theta_1$ . Dans cette deuxième solution, l'expression de  $h$  est donnée par (V.39) ; elle fait intervenir les angles  $\psi_1$  et  $\theta_1$ . La maximisation de  $h$ , par rapport aux variables  $\psi_1$  et  $\theta_1$ , correspond vraisemblablement à un maximum relatif si  $\psi_1 \neq 0$  ; une étude plus complète de cette solution parasite est en cours de développement. Notons que cette deuxième solution disparaît si  $\psi_1 = 0$  ; en effet, dans ce cas, (V.30) donne  $P_{12} = 0$ , et la deuxième solution du système (V.37) est identique à la première.

### 5.5.1.3 Cas $\delta \neq 0$ et $\frac{\pi}{2}$

Lorsque  $\delta \neq 0$  et  $\frac{\pi}{2}$ , la première solution du système homogène (V.37) fournit les conditions :

$$\begin{aligned} P_{12} = 0 & ; \dot{\sigma}_{12} = 0 & ; \\ \text{et soit } \psi_1 = 0 & , \text{ soit } \cos\psi_1 = \cotg\delta \operatorname{tg}\theta_1 & . \end{aligned} \quad (V.90)$$

Comme  $|\cos\psi_1| \leq 1$ , la solution  $\cos\psi_1 = \cotg\delta \operatorname{tg}\theta_1$  implique que, si l'angle  $\delta$  tend vers zéro, c'est à dire si  $\cotg\delta \rightarrow \infty$  ( $n$  est proche de  $v_3$ ), alors l'angle  $\theta_1$  doit tendre vers zéro, c'est à dire que l'axe  $k$ , représentant la normale au plan de cisaillement, tend à devenir parallèle à l'axe  $v_3$  (proche de  $n$ ), ce qui correspond à un plan de cisaillement sub-horizontale, quasi perpendiculaire à la direction  $n$  de la contrainte principale majeure. Ceci n'est pas physiquement acceptable. D'autre part, cette solution n'existe plus au passage à  $\delta = 0$ . Nous la rejetons donc.

Considérons la condition  $\psi_1 = 0$ . D'après (V.51.2), nous obtenons que  $P_{31}$  est nul. L'équation (5) du système homogène (V.37), soumise aux restrictions :

$$P_{12} = 0 ; P_{31} = 0 ; \dot{\sigma}_{12} = 0 \quad , \quad (V.91)$$

s'exprime par :

$$\frac{1}{2} g_2 \sin\varphi_1 = 0 \quad . \quad (V.92)$$

Comme  $g_2$  est supposé non nul (cf. éq.(V.65)), l'équation (V.92) résulte en :

$$\varphi_1 = 0 \quad . \quad (V.93)$$

Les équation (5) et (6) du système homogène (V.37) sont identiquement nulles ; l'équation (4) fournit la valeur de  $g_2$  ; l'équation (3) fournit la valeur de  $g_3$ . La résolution des équations (1) et (2) fournit les expressions de  $h$  et du rapport  $\dot{\sigma}_{11}/\dot{\sigma}_{22}$ , sous les formes, respectivement, (V.52) et (V.53). La valeur de  $h$  ne dépend que de la loi de comportement et de l'angle  $\theta_1$ . Les conditions  $\dot{\sigma}_{12} = 0$  et  $\varphi_1 = 0$  résultent, comme dans le cas  $\delta = 0$ , en :

$$\dot{\sigma}_{xy} = 0 \quad (V.94)$$

Les orientations du repère  $(i, j, k)$  de la bande de cisaillement dans le repère privilégié  $(v_1, v_2, v_3)$  du matériau sont :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \psi_1 &= 0 & ; \\ \bullet \quad \varphi_1 &= 0 & ; \\ \bullet \quad \theta_1^{\text{crit}} & \text{ donné par la maximisation de } h \text{ par rapport à } \theta_1 & . \end{aligned} \quad (V.95)$$

Les angle  $\psi_1 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1)$  et  $\phi_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{i})$  étant tous deux nuls, le vecteur  $\mathbf{i}$  est confondu avec  $\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{s}$  (cf. Figure V.8). Il en résulte, pour les orientations du repère de la bande de cisaillement dans le repère  $(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{n})$  de l'éprouvette :

$$\bullet \quad \phi = \psi = 0 \quad . \quad (V.96)$$

Les axes  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{v}_3$ , et  $\mathbf{k}$  étant dans ce cas coplanaires, les angles  $\theta_1 = (\mathbf{v}_3, \mathbf{k})$  et  $\theta = (\mathbf{n}, \mathbf{k})$  sont reliés par :

$$\bullet \quad \theta = \theta_1 - \delta \quad . \quad (V.97)$$

La nullité de l'angle  $\phi$  entraîne (cf. §5.5.1.1) que la direction  $\mathbf{j}$  du glissement dans le plan de cisaillement est la ligne de plus grande pente de ce plan.

Cette solution correspond, encore une fois, au raisonnement phénoménologique, car, pour  $\delta \neq 0$  et  $\frac{\pi}{2}$ , l'état de contrainte, les symétries matérielles et la géométrie de l'éprouvette admettent un seul plan de symétrie commun, qui est le plan  $(\mathbf{n}, \mathbf{v}_3)$ . La réponse mécanique doit présenter la même symétrie, ce qui correspond, pour un plan de cisaillement, à  $\psi = 0$  et  $\phi = 0$ .

La deuxième solution du système homogène (V.37) apparaît, dans le cas  $\delta \neq 0$  et  $\frac{\pi}{2}$ , comme une solution "parasite". Elle ne correspond pas au raisonnement phénoménologique et mène à la condition (V.54) reliant les angles  $\phi_1$ ,  $\psi_1$  et  $\theta_1$ , ainsi qu'à l'expression (V.39) de  $h$  et aux expressions (V.40) des valeurs de  $\dot{\sigma}_{11}$  et  $\dot{\sigma}_{22}$  en fonction de  $\dot{\sigma}_{12}$ . Le paramètre d'écrouissage  $h$  (V.39) est fonction des angles  $\psi_1$  et  $\theta_1$ . Comme dans le cas  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , il est vraisemblable que la maximisation de  $h$  sous la forme (V.39) par rapport à l'ensemble des variables  $\psi_1$  et  $\theta_1$  aboutisse à un maximum relatif si  $\psi_1 \neq 0$  ; la solution parasite doit alors être rejetée, puisque, dans le cas  $\psi_1 = 0$ , elle n'existe plus et la maximisation de l'expression de  $h$  dans la première solution conduit au maximum absolu. Cette hypothèse doit être confirmée par un développement ultérieur de l'étude.

### 5.5.2 Glissement structural

Les résultats obtenus au §5.5.4.3, pour un glissement structural ( $\mathbf{k} = \mathbf{v}_3$ ), sont identiques aux résultats du cas du glissement astructural dans le cas  $\psi_1 = 0$ . Nous obtenons donc comme conditions

$$\begin{aligned} P_{12} = P_{31} &= 0 & ; \\ \dot{\sigma}_{12} &= 0 & ; \\ \text{avec } \psi_1 = \phi_1 &= 0 & . \end{aligned} \quad (V.98)$$

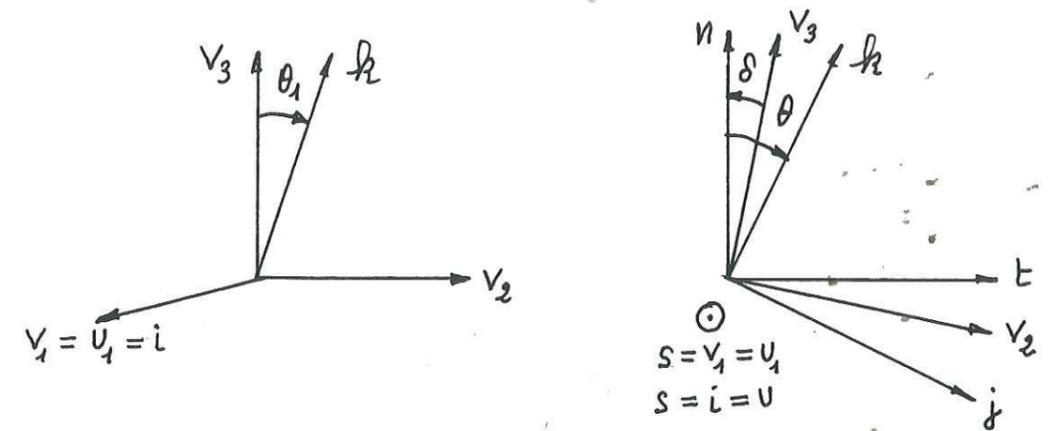


Figure V.8 - Cas  $\delta \neq 0, \pi/2$  .

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_1 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1) &= 0 \\ \phi_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{i}) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mathbf{v}_1 = \mathbf{i} = \mathbf{u} \\ \psi = (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}) &= 0 \\ \phi = (\mathbf{u}, \mathbf{i}) &= 0 \end{aligned} \right.$$

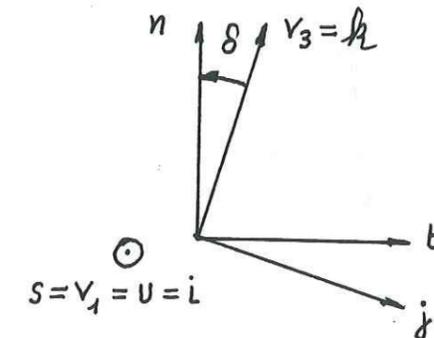


Figure V.9 - Glissement structural  $\theta = -\delta$  .

$$\begin{aligned} \phi &= (\mathbf{u}, \mathbf{i}) = 0 \\ \psi &= (\mathbf{s}, \mathbf{u}) = 0 \end{aligned}$$

Les équations (5) et (6) du système d'équations homogènes (V.37) sont identiquement nulles ; l'équation (4) fournit la valeur de  $g_2$  ; l'équation (3) fournit la valeur de  $g_3$ . La résolution des équations (1) et (2) fournit l'expression (V.52) de la valeur de  $h$  et l'expression (V.53) de la valeur du rapport  $\dot{\sigma}_{11}/\dot{\sigma}_{22}$ . Comme il a été montré ci-dessus, les conditions  $\dot{\sigma}_{12} = 0$  et  $\varphi_1 = 0$  résultent en :

$$\dot{\sigma}_{xy} = 0 \quad , \quad (V.99)$$

et les conditions  $\varphi_1 = 0$  et  $\psi_1 = 0$  impliquent que les orientations du plan de cisaillement, par rapport au repère (s, t, n) de l'éprouvette, sont :

$$\psi = \varphi = 0 \quad , \quad (V.100)$$

l'hypothèse d'un glissement structural ( $\theta_1 = 0$ ) impliquant directement :

$$\theta = -\delta \quad . \quad (V.101)$$

L'angle  $\varphi$  étant nul, la direction  $j$  du glissement dans le plan de cisaillement est la ligne de plus grande pente de ce plan (cf. §5.5.1.1), c'est à dire dans le cas du glissement structural, la direction privilégiée  $v_2$  du matériau, cf Figure V.9.

### 5.6 Présentation des résultats et conclusions

En rejetant la "solution parasite" du système d'équations homogènes (V.37), l'ensemble des résultats obtenus est, quelle que soit l'orientation  $\delta$  des éprouvettes :

- pour l'expression de la valeur du paramètre d'écroûissage  $h$  ,

$$h = - \frac{C_{1111}P_{22}Q_{22} + C_{2222}P_{11}Q_{11} - C_{1122}(P_{11}Q_{22} + P_{22}Q_{11})}{C_{1111}C_{2222} - C_{1122}^2} \quad ; \quad (V.102)$$

- pour l'expression de la valeur du rapport  $\dot{\sigma}_{11}/\dot{\sigma}_{22}$  ,

$$\frac{\dot{\sigma}_{11}}{\dot{\sigma}_{22}} = \frac{C_{2211}P_{11} - C_{1122}P_{22}}{C_{1111}P_{22} - C_{1122}P_{11}} \quad ; \quad (V.103)$$

- pour l'expression de la valeur de  $\dot{\sigma}_{xy}$  ,

$$\dot{\sigma}_{xy} = 0 \quad . \quad (V.104)$$

Par passage au cas isotrope, les expressions des composantes du tenseur élastique  $C$  du quatrième ordre sont :

$$C_{1111} = C_{2222} = \frac{1}{E} \quad ; \quad C_{1122} = -\frac{\nu}{E} \quad . \quad (V.105)$$

et l'expression (V.102) de  $h$  devient :

$$\frac{h}{E} = -\frac{1}{1-\nu^2} (P_{22} Q_{22} + P_{11} Q_{11}) - \frac{\nu}{1-\nu^2} (P_{11} Q_{22} + P_{22} Q_{11}) \quad . \quad (V.106)$$

Cette expression correspond à la solution obtenue par Peters et al (1986), en considérant une loi élasto-plastique de la forme (V.1) et en négligeant les effets rotationnels dans les expressions de la dérivée objective du tenseur des sauts de contraintes  $\dot{T}^s$ .

Dans le cas orthotrope de révolution, pour l'ensemble des orientations  $\delta$ , l'expression de  $h$  (V.102) est uniquement fonction de la loi de comportement et de l'angle  $\theta = (\mathbf{n}, \mathbf{k})$ . Nous présentons, dans le Tableau (V.1), les conditions obtenues sur les angles d'Euler  $\varphi$  et  $\psi$  caractérisant le repère (i, j, k) de la bande de cisaillement par rapport au repère (s, t, n) de l'éprouvette.

$\delta = 0$	$\varphi = 0$	$\psi$ indéterminé
$\delta = \frac{\pi}{2}$	$\varphi = 0$	$\psi = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$
$\delta \neq 0$ et $\frac{\pi}{2}$	$\varphi = 0$	$\psi = 0$

Tableau V.1-Orientations des bandes de cisaillement dans des roches orthotropes de révolution soumises à des essais de compression triaxiale de révolution : valeurs des angles d'Euler  $\varphi$  et  $\psi$  en fonction de l'orientation  $\delta$  des éprouvettes

Nous rappelons que la condition  $\varphi = 0$  , obtenue pour toutes les orientations  $\delta$ , signifie que la ligne de glissement , dans le plan de cisaillement, est la ligne de plus grande pente de ce plan. La condition  $\psi = 0$  ou  $\frac{\pi}{2}$  signifie que l'une des orientation de la normale au plan de cisaillement est imposée par les symétries matérielles. Lorsque  $\psi = 0$ , la direction  $j$  du glissement appartient au plan défini par la direction  $\mathbf{n}$  principale majeure des contraintes et l'axe  $v_3$  de révolution de l'orthotropie du matériau ; cette orientation privilégiée est observée pour le grès des Vosges, et pour les géomatériaux (cf. Figure V.13.a et V.13.b). Pour  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , la solution  $\psi = \frac{\pi}{2}$  implique que la direction  $j$  du glissement appartient au plan perpendiculaire à l'axe  $v_3$  de l'orthotropie du matériau (cf. Figure V.13.c); cette solution n'est pas généralement observée pour les géomatériaux ; elle a été observée sur un autre matériau orthotrope de révolution : un composite mat de verre / résine époxyde étudié par Boehler et al (1981).

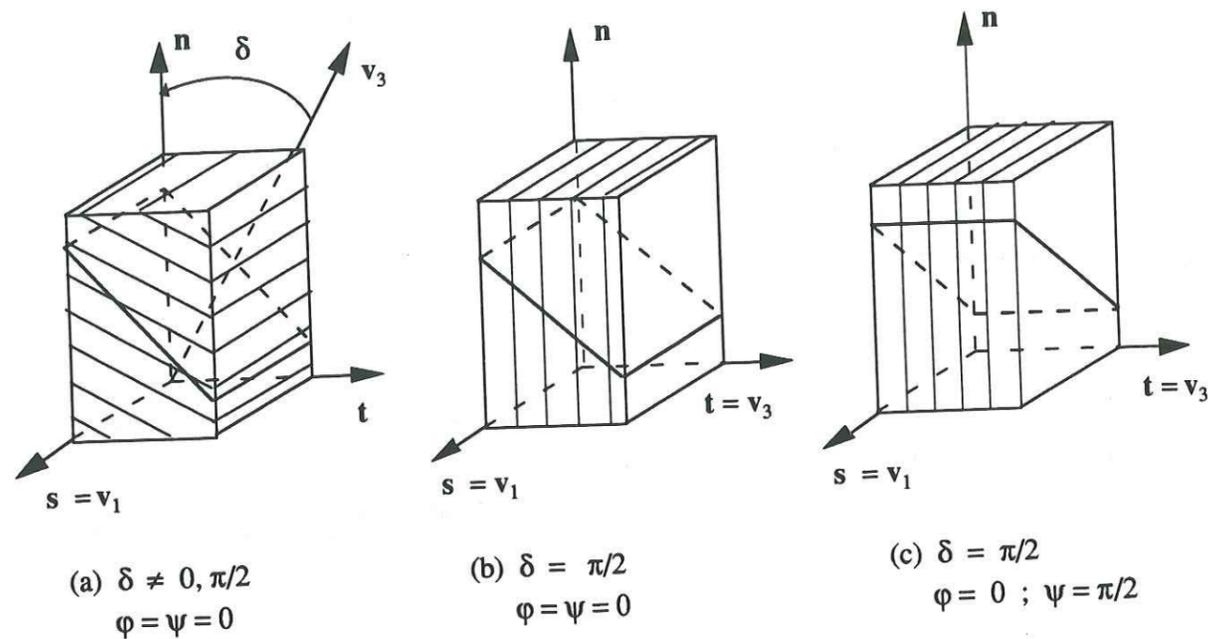


Figure V.10 -Orientations privilégiées des bandes de cisaillement dans les matériaux orthotropes de révolution, soumis à des états de contraintes triaxiales de révolution.

Nous retrouvons donc, au terme de cette analyse théorique, une orientation privilégiée des bandes de cisaillement pour les matériaux orthotropes de révolution soumis à des états de contraintes de compressions triaxiales de révolution. Cette orientation privilégiée fixe la valeur d'un des deux angles d'Euler de la normale au plan de glissement par rapport au repère principal des contraintes ; elle est uniquement due aux symétries de la loi de comportement orthotrope de révolution, introduite dans l'analyse théorique sous sa forme invariante la plus générale par l'application des théorèmes de représentations des fonctions tensorielles. Pour un matériau orthotrope de révolution donné, c'est à dire pour une loi de comportement spécifique, la maximisation du paramètre d'érouissage résulte en la détermination du deuxième angle d'Euler de la normale au plan de glissement.

## Conclusions

Le travail présenté dans ce mémoire avait deux objectifs majeurs :

- obtenir, pour une roche orthotrope de révolution (le grès des Vosges), un ensemble de données expérimentales fiables et suffisamment complètes dans les domaines de l'élasticité, des déformations irréversibles, de la localisation et de la rupture ;
- analyser, sur les plans expérimental et théorique, les orientations privilégiées des bandes de cisaillement, ainsi que l'orientation de la direction du glissement, dues aux structures internes orientées du matériau.

Il était également important de contrôler si les phénomènes mécaniques généralement observés pour les roches anisotropes apparaissent également pour le grès des Vosges, dont l'orthotropie de révolution est relativement faible, tant sur le plan structural, que sur le plan du comportement mécanique. En effet, il s'agit là d'une question importante sur le plan des applications : peut-on, sans introduire dans les calculs de prévision des erreurs inacceptables, associer à une roche présentant un faible degré d'anisotropie un comportement mécanique isotrope ? Les résultats obtenus dans ce travail montrent que cette approximation n'est pas acceptable, en particulier pour l'orientation des directions principales des déformations, qui ne coïncident pas, en général, avec celles des contraintes, pour les orientations privilégiées des bandes de cisaillement, ainsi que pour les modes de rupture.

Dans la définition et le développement du protocole expérimental pour la réalisation d'essais sous contraintes isotropes, en compressions sous pressions de confinement, ainsi qu'en traction simple, le souci constant était d'obtenir des données expérimentales correctes et fiables, c'est à dire de développer des techniques permettant d'éviter le plus grand nombre possible d'incertitudes expérimentales, ainsi que des méthodes pour la correction des incertitudes inévitables. Ce protocole concerne en particulier :

- une procédure de préparation d'éprouvettes de roche poreuse, évitant le poinçonnement dans les pores des fils de jauges lors des essais de compression isotrope et de compression sous pressions de confinement ;
- l'instrumentation des éprouvettes par un nombre suffisant de jauges, avec des emplacements bien définis, afin de pouvoir mesurer toutes les composantes du tenseur des déformations élastoplastiques, aussi bien pour les essais "dans les axes" que pour les essais "hors axes" ;

- le développement d'une méthode de dépouillement des signaux bruts des jauges, permettant de corriger les erreurs dues à l'effet transversal des jauges, les incertitudes d'orientations des jauges, et les effets de la pression isotrope ou de confinement.

Au cours du développement de ce protocole, un résultat important concernant le mode de rupture des roches en compression simple a été obtenu. En préparant les éprouvettes avec une tolérance de +/-10 µm pour le parallélisme entre les bases, correspondant à la norme ISRM, la rupture en compression simple est de type classique : double cône séparé par une zone en extension; en adoptant une norme plus rigoureuse de +/-5 µm, la rupture se produit par un cisaillement suivant un plan bien défini.

Sur le plan du comportement élastoplastique orthotrope de révolution, les essais de compressions isotropes, de compressions sous pressions de confinement et de traction simple, pour différentes orientations "dans les axes" et "hors axes" des éprouvettes, ont mis en évidence les phénomènes suivants :

- un degré d'anisotropie élastique supérieur au degré d'anisotropie dans le domaine des déformation irréversibles ;
- l'apparition, sous contraintes isotropes, de déformations irréversibles à déviateur non nul ;
- en compression simple, non-coïncidence entre les directions principales des déformations élastoplastiques et les directions principales des contraintes, cette orientation relative variant avec l'orientation de la contrainte de compression par rapport à la structure interne du matériau ;
- évolution du degré d'anisotropie des déformations élastiques d'une part, des déformations élastoplastiques d'autre part, avec la partie isotrope de l'état de contrainte : lorsque la contrainte isotrope croît, le degré d'anisotropie diminue, puis se stabilise pour des contraintes isotropes élevées ;
- évolution des variations de volume, à la fois par rapport à la pression de confinement et par rapport à l'orientation entre les directions principales des contraintes et la structure interne du matériau ;
- augmentation des surcharges axiales limites et diminution du degré d'anisotropie des surcharges axiales limites lorsque la pression de confinement croît ;
- influence du signe des contraintes normales sur le comportement anisotrope à la rupture.

Dans le cadre de la formulation invariante des lois de comportement anisotrope, un nouveau critère de rupture est proposé pour les roches orthotropes de révolution, présentant une anisotropie de type continue. Aussi bien en traction simple qu'en compression sous pressions de confinement, les prévisions du critère sont en bon accord avec les données expérimentales pour toutes les orientations d'éprouvettes testées.

La méthode statistique, qui a été développée dans ce travail pour la détection de la perte de linéarité de l'évolution relative de deux déformations transversales, constitue un outil très efficace pour la définition expérimentale des seuils de localisation. Pour le grès des Vosges, les seuils ainsi déterminés dépendent, évidemment, de la pression de confinement, mais également de l'orientation des contraintes par rapport à la structure interne du matériau, c'est à dire qu'ils présentent un caractère anisotrope. Grâce aux mesures fines des variations de volume, il a pu être mis en évidence que, pour une pression de confinement donnée, le domaine de variation de volume correspondant aux seuils de localisation ne dépend pas de l'orientation des éprouvettes, mais passe progressivement d'une phase dilatante à une phase contractante lorsque la pression de confinement croît.

La réalisation du deuxième objectif principal de ce travail a mis clairement en évidence que, d'une part, la direction du glissement dans une bande de cisaillement est toujours la ligne de plus grande pente, et que, d'autre part, lorsque la direction principale majeure de l'état de contrainte ne coïncide pas avec l'axe de révolution de l'orthotropie de la roche, les plans de cisaillement présentent une orientation privilégiée, uniquement due aux symétries de la structure interne du matériau : le plan de cisaillement est systématiquement perpendiculaire au plan défini par l'axe de révolution de l'orthotropie et la direction de la contrainte principale majeure. Ce phénomène a été observé pour toutes les pressions de confinement appliquées et a pu être mis en évidence grâce au repérage, sur chaque éprouvette, du plan privilégié de l'orthotropie.

Ces observations expérimentales étaient prévisibles, tant par un raisonnement phénoménologique, que par une analyse théorique. Pour cette dernière analyse, le modèle de Rice de la localisation des déformations élastoplastiques sous forme de bandes de cisaillement a été généralisé par l'introduction de la forme générale invariante des lois de comportement élastoplastique orthotrope de révolution. La résolution analytique du problème résulte, d'une part, en une solution parasite, et d'autre part en une solution en conformité avec les observations expérimentales, à la fois en ce qui concerne l'orientation privilégiée de la direction du glissement, que l'orientation privilégiée des plans de cisaillement. Il convient de souligner ici la puissance de la théorie des représentations des fonctions tensorielles, permettant d'établir la formulation invariante des lois de comportement anisotrope. En effet, si ces formes générales invariantes n'étaient pas établies, le résultat de l'analyse théorique ne pourrait pas être établi, puisqu'il aurait dû être vérifié pour toutes les lois élastoplastiques orthotropes de révolution, ce qui est impossible.

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Un angle d'orientation des bandes de cisaillement dans les roches orthotropes de révolution soumises à des états de compression triaxiale de révolution étant fixé par la structure interne de la roche, l'orientation de ces bandes sera entièrement définie par la détermination du deuxième angle d'orientation, nécessitant la connaissance de la loi de

comportement élastoplastique spécifique à la roche considérée. Pour l'identification d'une telle loi, à la fois la méthodologie et les résultats présentés dans ce travail constituent une approche efficace ; cependant, il est encore nécessaire, dans les mesures de toutes les composantes du tenseur des déformations, de séparer les parties élastiques et les parties irréversibles à l'aide d'essais cycliques en traction et en compression sous pressions de confinement. La loi de comportement ainsi établie pourra être intégrée dans des programmes numériques tridimensionnels en éléments finis, afin de simuler les phénomènes de déformations élastoplastiques, d'écrouissage anisotrope, de localisation et de rupture dans les applications de la Mécanique des Roches.

Un autre axe de recherche à développer est l'analyse des mécanismes microstructuraux des déformations irréversibles et de la localisation. Pour le grès des Vosges, cette analyse présente certaines difficultés, car les rotations des grains de quartz sont difficilement perceptibles en raison de l'isotropie statistique de leur forme.

Evidemment, il est également nécessaire de reprendre ce travail pour une roche anisotrope à porosité très faible et pour laquelle les mécanismes de déformations irréversibles sont différents de ceux du grès des Vosges.



Nous espérons que le travail présenté dans ce mémoire pourra être utile pour les géologues, les ingénieurs et les mécaniciens des roches.

## Références

- 1921 GRIFFITH, A.A., "The phenomena of flow and rupture and flow in solids", *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol 221, 163.
- 1947 HILL, R., "A theory of yielding and plastic flow for anisotropic metals", *Proc. Roy. Soc. A*, vol.193, p. 281-297.
- 1955 RIVLIN, R.S. "Further remarks on the stress-deformation relations for isotropic materials", *J. Rat. Mech. An.*, vol.4, p. 681-702
- 1955 RIVLIN, R.S. et ERICKSEN, J.L., "Stress-deformation relations for isotropic materials" *J. Rat. Mech. An.*, vol.4, p. 323-425.
- 1957 OSLAK, W. et URBANOWSKI, W., "The generalized distortion energy in the theory of anisotropic bodies", *Bull. Acad. Polon. Sci.*, vol.5, p. 29-38.
- 1960 ADKINS, J.E., "Symmetric relations for orthotropic and transversely isotropic materials", *Arch. Rat. Mech. An.*, vol.4, p. 193-213.
- 1960 JAEGER, J.C., "Shear failure of anisotropic rocks", *Geol. Magazine*, vol.97, n°1, p. 65-72.
- 1961 DONATH, F.A., "Experimental study of shear failure in anisotropic rocks", *Bull. Geol. Soc. Am*, vol.72, p. 985-990.
- 1962 Mac CLINTOCK, F.A., et WALSH, J., "Friction on Griffith cracks in rocks under pressure", *Proc. 4th U.S. Nat. Cong. Ap. Mech.*, Berkeley, vol.2, p.1015-1021.
- 1962 GOLDENBLAT, I.I., "*Some problems of the mechanics of deformable media* ", Noordhoff, Groningen.
- 1964 DONATH, F.A., "Strength variation and deformational behaviour in anisotropic rocks", dans "*State of Stress in the Earth's Crust* ", Elsevier, New York, p. 281-298.

- 1964 HOEK, E., "Fracture of anisotropic rock", *J. South Af. Inst. Min. Metall.*, vol.64, n°10, p. 501-517
- 1964 WALSH, J.B., et BRACE, W.F., "A fracture criterion for brittle anisotropic rock", *J. of Geophys. Res.*, vol.69, n°16, p. 3449-3456.
- 1965 SMITH, G.F., "On isotropic integrity bases", *Arch. Rat. Mech. An.*, vol.18, p. 282-292.
- 1966 Mc WILLIAMS, J.R., "The role of microstructure in the physical properties of rocks", dans "*Testing Techniques for Rock Mechanics*", ASTM STP 402, Am. Soc. Testing Mats., p. 175-189.
- 1966 PERES-RODRIGUES, F., "Anisotropy of granites. Modulus of elasticity and ultimate strength ellipsoïdes, joint systems, slopes attitude and their correlations", Proc. 1er Cong. I.S.R.M., Lisbonne, vol.1, p. 721-731.
- 1966 SIRIEYS, P., "Contribution à l'étude des lois de comportement des structures rocheuses", Thèse de Doctorat ès Sciences, Grenoble.
- 1967 Mac LAMORE, R., et GRAY, K.E., "The mechanical behavior of anisotropic sedimentary rocks", *J. of Engng. for Industry*, Trans. of the A.S.M.E., vol.89, p. 62-73.
- 1968 BOEHLER, J.P., "Contributions à l'étude de l'équilibre limite des sols anisotropes", Thèse de 3ème Cycle, USMG, Grenoble
- 1968 SAWCZUK, A. et STUTZ, P., "On formulation of stress-strain relations for soils at failure", *ZAMP.*, vol.19, n°5, p. 770-778.
- 1968 SCHOLZ, C.H., "Experimental study of the fracturing process in brittle rock", *J. Geophys. Res.*, vol.73, p. 1775-1784.
- 1969 DOUGLASS, P.M., et VOIGHT, B., "Anisotropy of granites : a reflexion of microscopic fabric", *Géotechnique*, vol.19, p. 376-398.
- 1969 NUR, A., et SIMMONS, G., "Stress induced velocity anisotropy in rock. An experimental study", *J. Geophys. Res.*, vol.74, p. 6667-6674.
- 1969 THILL, R.E., WILLARD, R.J., et BUR, T.R., "Correlation of longitudinal velocity variation with rock fabric", *J. Geophys. Res.*, vol.74, p.4897-5009.

- 1969 YOUASH, Y.Y., "Tension tests on layered rocks", *Geological Society of America Bull.*, vol.80, p. 303-306.
- 1970 BOEHLER, J.P., et SAWCZUK, A., "Equilibre limite des sols anisotropes", *J. Mécanique*, vol.9, n°1, p. 439-451.
- 1970 FINE, J. et VOUILLE, G., "L'anisotropie des roches. Influence sur l'essai brésilien", *Revue de l'Industrie minière*, p. 5-12.
- 1970 FRIEDMAN, M., PERKINS, R.D., et GREEN, S.J., "Observation of brittle deformation features at the maximum stress of Westerly granite and Solenhofen limestone", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.7, p. 297-306.
- 1970 MASURE, P., "Comportement mécanique des roches à anisotropie planaire discontinue", Proc. 2nd. Cong. I.S.R.M., Belgrade, vol.1, p. 197-207.
- 1970 PELLEGRINO, A., "Mechanical behaviour of soft rocks under high stresses", Proc. 2nd Cong. ISRM, Belgrade, vol.1, p. 173-180.
- 1970 PERES-RODRIGUES, F., "Anisotropy of rocks. Most probable surfaces of the ultimate stresses and of the modulus of elasticity", Proc. 2nd Cong. I.S.R.M., Belgrade, vol.1, p. 133-142.
- 1970 PERES-RODRIGUES, F., et AIRES-BARROS, L., "Anisotropy of endogenetic rocks. Correlation between micropetrographic index, ultimate strength and modulus of elasticity ellipsoïds", Proc. 2nd Cong. I.S.R.M., Belgrade, vol.1, p. 161-164.
- 1970 PICKERING, D.J., "Anisotropic elastic parameters for soils", *Géotechnique*, vol.3, n°20, p. 271-276.
- 1970 PINTO, J.L., "Deformability of schistous rocks", Proc. 2nd Cong. I.S.R.M., Belgrade, vol.1, p. 491-496.
- 1970 WANG, C.C., "A new representation theorem for isotropic functions", *Arch. Rat. Mech. An.*, vol.36, p. 166-223.
- 1971 BARRON, K., "Brittle fracture initiation in and ultimate failure of rocks", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.8, n°6, p.553-563.
- 1971 SPENCER, A.J.M., "Theory of invariants", dans "*Continuum Physics*", éd. par C. ERINGEN, Academic Press, p. 293-353.

- 1971 SMITH, G.F., "On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors", *Int. J. Engng. Sci.*, vol.9, p. 879-916.
- 1972 DONATH, F.A., "Effects of cohesion and granularity on deformational behavior of anisotropic rocks", *Geological Society of America*, Mémoire n°135, p. 95-128.
- 1972 PARISEAU, W.G., "Plasticity theory for anisotropic rocks and soils", Proc. 10th Annual Symp. on Rock Mech., AIME, éd. par K.E. GRAY, Port City Press, Baltimore, p. 267-295.
- 1972 THILL, R.E., "Acoustic methods for monitoring failure in rock", New horizons in rock mechanics, Proc. 14th U.S. Symp. Rock Mech., éd. par H.R. HARDY et R. STEPHANKO, Am. Soc. Civ. Engrs., p. 649-687.
- 1973 GARNIER, J., "Tassements et contraintes : influence de la rigidité de la fondation et de l'anisotropie du massif", Thèse de Doctorat de Spécialité, USMG, Grenoble.
- 1974 BARLA, G. et GOFFI, L., "Direct tensile testing of anisotropic rocks", Proc. 3ème Cong. I.S.R.M., Denver, Colorado, vol.2, p. 93-98.
- 1974 BRADY, B.T., "Theory of earthquakes. -I A scale independant theory of rock failure", *Pure Appl. Geophys.*, vol.112, p. 701-725.
- 1974 KIRAL, E., et SMITH, G.F., "On the constitutive relations for anisotropic materials", *Int. J. Engng. Sci.*, vol.12, p. 471-490.
- 1974 SANGHA, C.M., TALBOT, C.J., et DHIR, R.K., "Microfracturing of a sandstone in uniaxial compression", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.11, p. 107-113.
- 1974 SPETZLER, H., SCHOLZ, C.H., et LIU, C.J., "Strain and creep measurements on rocks by holographic interferometry", *Pure App. Geophys.*, vol.112, p. 571-581.
- 1974 RAO, M.V.M.S., et RAMANA, V.M., "Dilatant behaviour of ultra-mafic rocks during fracture", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.11, p. 193-203.
- 1975 BOEHLER, J.P., "Contributions théoriques et expérimentales à l'étude des milieux plastiques anisotropes", Thèse de Doctorat ès Sciences, USMG, Grenoble.
- 1975 HADLEY, K., "Azimuthal variation of dilatancy", *J. Geophys. Res.*, vol.80, n°35, p. 4845-4850.

- 1975 RUDNICKI, J.W., RICE, J.R., "Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials", *J. Mech. Phys. Solids*, vol.28, p. 371-394.
- ✓ 1976 ALLIROT, D., "Contribution à l'étude de l'anisotropie des déformations et de la rupture d'une roche stratifiée", Thèse Spéc., USMG, Grenoble.
- 1976 ATTEWELL, P.B., et SANDFORD, M.R., "Intrinsic shear strength of a brittle anisotropic rock. Parts I, II, III", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol.11, n°11, p. 423-451.
- 1976 BOEHLER, J.P., et SAWCZUK, A., "Application of representation theorems to describe yielding of transversely isotropic solids", *Mech. Res. Comm.*, vol.3, p. 277-283.
- 1976 LIU, H.P., et LIVANOS, A.C.R., "Dilatancy and precursory bulging along incipient fracture zones in uniaxially compressed Westerly granite", *J. Geophys. Res.*, vol.80, p. 3495-3510.
- 1976 RICE, J.R., Chapitre "The localization of plastic deformation", dans "*Theoretical and applied mechanics*", North Holland.
- 1977 ALLIROT, D., BOEHLER, J.P., SAWCZUK, A., "Irreversible deformations of an anisotropic rock under hydrostatic pressure", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol.14, p. 77-83.
- 1977 BEYNET, J.M., "Contribution à l'étude de la déformation plastique, de la fissuration et de la force portante des milieux stratifiés", Thèse de Doctorat de Spécialité, USTMG, Grenoble.
- 1977 BOEHLER, J.P., "On irreducible representations for isotropic scalar functions", *ZAMM*, vol.57, p. 323-327.
- 1977 HENRY, J.P., PAQUET, J., et TANCRES, J.P., "Experimental study of crack propagation in calcite rocks", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.14, p. 85-91.
- 1977 JANACH, V., "Failure of granite under compression", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.14, p. 209-215.
- 1977 LOCKNER, D.A., WALSH, J.B., et BYERLEE, J.D., "Changes in seismic velocity and attenuation during deformation of granite", *J. Geophys. Res.*, vol.82, p. 5374-5378.

- 1977 RACLIN, J., "Sur l'orientation des fissures fragiles dans un milieu anisotrope", *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol.285, p. 345-348.
- 1977 REINICKE, K.M. et RALSTON, T.D., "Plastic limit analysis with an anisotropic parabolic yield function", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol.14, p. 147-154.
- 1977 STONEY, S.M., et DHIR, R.K., "Problems in measurements of anisotropy in rocks", Proc. of Conf. on Rock Engng., éd. par ATTEWELL, P.B., p. 137-154.
- ✓1978 BOEHLER, J.P., "Lois de comportement anisotrope des milieux continus", *Journal de Mécanique*, vol.17, n°2, p. 153-190.
- 1978 ISRM, "Suggested methods for determining the tensile strength of rock materials", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.15, n°3, p. 99-104.
- 1978 PATERSON, M.S., "*Experimental rock deformation: the brittle field*", Springer Verlag, 254p.
- 1978 SAINT-LEU, C., LERAU, J., et SIRIEYS, P., "Mécanismes de rupture des schistes de Lacaune (Tarn). Influence de la pression isotrope", *Bull. Minéral.*, vol.101, p. 437-441.
- 1978 SOBOLEV, G., SPETZLER, H., et SALOV, B., "Precursors to failure in rocks while undergoing anelastic deformations", *J. Geophys. Res.*, vol.83, p. 1775-1784.
- 1978 SOGA, N., MIZUTANI, H., SPETZLER, H., et MARTIN, R.J., "The effect of dilatancy on velocity anisotropy in Westerly granite", *J. Geophys. Res.*, vol.83, p. 4451-4458.
- 1979 ALLIROT, D., BOEHLER, J.P., "Evolutions des propriétés mécaniques d'une roche stratifiée sous pression de confinement", Proc. 4ème Cong. I.S.R.M., Montreux, vol.1, p. 15-22.
- 1979 BOEHLER, J.P., "A simple derivation of representations for non polynomial constitutive equations in some cases of anisotropy", *ZAMM*, vol.59, n°4, p. 157-167.
- 1979 ISRM, "Suggested methods for determining the uniaxial compressive strength and deformability of rock materials", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.16, n°2, p. 137-140.

- 1979 ISRM, "Suggested methods for determining water content, porosity, density, absorption and related properties", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.16, n°2, p. 141-156.
- 1979 KRANZ, R.L., "Crack growth and development during creep of Barre granite", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.16, p. 23-35.
- 1979 NOVA, R., et SACCHI, G., "A generalized failure condition for orthotropic solids", dans "*Mechanical Behavior of Anisotropic Solids*", Proc. Euromech Colloquium, Colloque international du CNRS, Villard de Lans, 1979, éd. par J.P. BOEHLER, Presses Editions du CNRS (Paris) et Martinus Nijhoff Publishers (La Haye), p. 623-641.
- 1979 PERES-RODRIGUES, F., "The anisotropy of the moduli of elasticity and the ultimate stresses in rocks and rock masses", Proc. 4ème Cong. I.S.R.M., Montreux, vol.2, p. 517-523.
- 1979 PINTO, J.L., "Determination of the elastic constants of anisotropic bodies by diametral compression tests", Proc. 4th Cong. I.S.R.M., Montreux, p. 359-363.
- ✓1979 SIRIEYS, P., "Anisotropie mécanique des roches", dans "*Mechanical Behavior of Anisotropic Solids*", Proc. Euromech Colloquium, Colloque international du CNRS, Villard de Lans, 1979, éd. par J.P. BOEHLER, Presses Editions du CNRS (Paris) et Martinus Nijhoff Publishers (La Haye), p. 481-532.
- 1980 COTZA, R., MANCA, P.P., et VIVANET, C., "Measurement of the elastic tensor in rock-like anisotropic materials", Proc. 21 st U.S. Symp. on Rock Mechanic, Rolla, Missouri, p. 249-255.
- 1980 NOVA, R., "The failure of transversely isotropic rocks in triaxial compression", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol.17, p.325-332.
- 1980 a SMITH, M.B., et CHEATAM, J.B., "An anisotropic compacting yield condition applied to porous limestone", *Int. J. Rock, Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol.17, p. 159-165.
- 1980 b SMITH, M.B., et CHEATAM, J.B., "A three dimensional anisotropic yield condition for Green River shale", *J. of Energy Res. Tech.*, Trans of A.S.M.E., vol.102, p. 184-189.

- 1981 BOEHLER, J.P., RACLIN, J., et DELAFIN, M., "Comportement des composites verre-résine à l'état critique", Rapport du contrat DGRST n°78.7.0610,78.7.0611.
- 1981 LERAU, J., SAINT LEU, C., et SIRIEYS, P., "Anisotropie de la dilatance des roches shisteuses", *Rock Mechanics*, vol.13, n°3, p. 185-196.
- 1982 AMADEI, B., "Rock anisotropy and the theory of stress measurements", collection "Lecture notes in Engineering", n°2, éd. par C.A. Brebbia et S.A. Orszag, Springer-Verlag Wien, 478p.
- 1982 BOEHLER, J.P., et DELAFIN, M., "Failure criteria for unidirectional fiber reinforced composites under confining pressure", Proc. du Colloque International n°295 du CNRS - Euromech Colloquium 115 "Mechanical behavior of anisotropic solids", Villard de Lans, juin 1979, éd. par J.P. BOEHLER, Editions du CNRS, P. 449-470.
- 1982 DABERT, J.L., "Déformations plastiques et rupture des roches anisotropes", Mémoire de DEA, UJF, Grenoble.
- 1982 SUQUET, P., "Plasticité et homogénéisation", Thèse de Doctorat ès Sciences, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.
- 1982 WONG, T.F., "Micromechanics of faulting in Westerly granite", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.19, p. 49-64.
- 1983 AMADEI, B., ROGERS, J.D., et GOODMAN, R.E., "Elastic constants and tensile strength of anisotropic rocks", Proc 5th Cong. I.S.R.M., Melbourne, Balkema éd., vol.1, p. A189-A196.
- 1983 ISRM, "Suggested methods for determining the strength of rock materials in triaxial compression : revised version", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 20 (6), p. 285-289.
- 1983 KRANZ, R.L., "Microcracks in rocks : a review", *Tectonophysics*, vol.100, p. 449-480.
- 1984 AVRIL, J., "Encyclopédie d'analyse des contraintes", Micromesures Malakoff.
- 1984 BOEHLER, J.P., "Anisotropie et comportement rhéologique des matériaux" dans "Rhéologie des matériaux anisotropes", éd. par C. HUET et al., 19ème Colloque du G.F.R. (Paris, 1983), Editions CEPADUES, Toulouse, p. 19-50.

- 1984 HOWARTH, D.F., "Apparatus to determine static and dynamic elastic moduli", *Rock Mech. and Rock Engng.*, vol.17, p.255-264.
- 1984 SALENCON, J., "Yield strength of anisotropic soils", Proc. XVIème I.C.T.A.M., Lyngby, p. 369-386.
- 1985 BOEHLER, J.P., "Formulation of isotropic and anisotropic hardening", dans "Plasticity today", éd. par A. SAWCZUK et G. BIANCHI, Elsevier Applied Science Publishers, London, p. 483-502.
- 1985 BOEHLER, J.P., et RACLIN, J., "Failure criteria for glass-fiber reinforced composites under confining pressure", *J. of Struct. Mech.*, vol.13, n°3-4, p.371-393.
- 1985 HORII, H., NEMAT-NASSER, S., "Compression-induced microcrack growth in brittle solids : axial splitting and shear failure", *J. Geophys. Res.*, vol.90, n°B4, p. 3105-3125.
- 1985 WISSLER, T.M., SIMMONS, G., "The physical properties of a set of sandstones -Part II. Permanent and elastic strains during hydrostatic compression to 200 MPa", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.22, n°6, p. 393-406.
- 1985 WONG, T.F., "Development of stress-induced anisotropy and localized deformation in brittle rocks", dans "Plastic behavior of anisotropic solids", éd. par J.P. BOEHLER, Actes du Colloque International n°319 du CNRS (juin 1981), Editions du CNRS, Paris.
- 1985 YANAGIDANI, T., EHARA, S., NISHIZAWA, O., et KUSONOSE, K., "Localization of dilatancy in Oshima granite under constant uniaxial stress", *J. Geophys. Res.*, vol.90, p. 6840-6858.
- 1986 DE BUHAN, P., "Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés", Thèse de Doctorat ès Sciences, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.
- 1987 BETTEN, J., "Formulation of anisotropic constitutive equations", dans "Applications of tensor functions in solid mechanics", éd. par J.P. BOEHLER, Springer-Verlag, Wien, New York, p. 227-250.
- 1987 BOEHLER, J.P., Chapitre 1 à 7 dans "Applications of tensor functions in solid mechanics", éd. par J.P. BOEHLER, Springer-Verlag, Wien, New York, 299p.

- 1987 HOLT, R.M., BERGEM, J., et HANSSSEN, T.H. "Anisotropic mechanical properties of weakly consolidated sandstone", Proc. 6th Int. Cong. I.S.R.M., Montréal, éd. Balkema, vol.1, p. 959-964.
- 1987 ORTIZ, M., "An analytical study of the localized failure modes of concrete", *Mech. Mat.*, vol.6, n°2, p. 159-174.
- 1987 SANTARELLI, F.J., "Theoretical and experimental investigation of the stability of axisymmetric wellbore", Ph. D. Thesis, Imperial College, Londres.
- 1988 ASHOUR, H.A., "A compressive strength criterion for anisotropic rock materials", *Can. Geotech. J.*, vol.25, p. 233-237.
- 1988 DE BUHAN, P., et TALIERCO, A., "Critère de résistance macroscopique pour les matériaux composites à fibres", *C.R. Ac. Sc*, vol.304, Série II.
- 1988 PETERS, J.F., LADE, P.V., et BRO, A., "Shear band formation in triaxial and plane strain tests", dans "Advanced triaxial testing of soil and rock", ASTM STP 977, éd. par R.T. DONAGHE, R.C. CHANEY et L.S. SILVER, ASTM, Philadelphia, p. 604-627.
- 1988 SHEA, V.R., et HANSON, D.R., "Elastic wave velocity and attenuation as used to define phases of loading and failure in coal", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.25, n°6, p. 431-437.
- 1988 TALIERCO, A., et SACCHI, G., "A failure condition for layered rock", *Int. J. Rock, Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol.25, n°5, p. 299-305.
- 1988 VARDOULAKIS, I., SULEM, J., et GUENOT, A., "Borehole instabilities as bifurcation phenomena", *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.*, vol.25, n°3, p. 159-170.
- 1989 TORRENTI, J.M., DESRUES, J., ACKER, P., et BOULAY, C., "Application of stereophotogrammetry to the strain localization in concrete compression", dans "Cracking and damage : strain localization and size effects", éd. par J. MAZARS et J.R. BAZANT, Elsevier Applied Science, p. 30-41.
- 1989 KARR, D.G., LAW, F.P., et FATT, M.H., "Asymptotic and quadratic failure criteria for anisotropic materials", *Int. J. of Plasticity*, vol.5, p. 303-336.

- 1989 SANTARELLI, F.J., et BROWN, E.T., "Failure of three sedimentary rocks in triaxial and hollow cylinder compression tests", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.26, n°5, p. 401-413.
- 1989 SULEM, J., et VARDOULAKIS, I., "Bifurcation analysis of triaxial tests on rock specimens", dans "Cracking and damage : strain localization and size effects", éd. par J. MAZARS et J.R. BAZANT, Elsevier Applied Science, p. 308-322.
- 1990 BENAIJA, E.H., BOULAY, G., DELAHOUSSE, DUBUET, TORRENTI, J.M., BERTHAUD, Y., et FOND, C., "Etude de la localisation dans un grès des Vosges", Rapport d'activités, GRECO Géomatériaux.
- 1990 CUXAC, P., HOMAND, F., HAMMADE, E., et MOREL, E., "Comportement mécanique d'un schiste ardoisier", Proc. 25ème colloque du G.F.R., Grenoble, p. 101-112.
- 1990 EWY, R.T., et COOK, N.G.W., "Deformation and fracture around cylindrical openings in rock. -II. Initiation, growth and interaction of fractures", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.27, n°5, p. 409-427.
- 1990 NOVA, R., et ZANINETTI, A., "An investigation into the tensile behaviour of a schistose rock", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol.27, n°4, p. 231-242.
- 1990 KOSS, S., et BOEHLER, J.P., "Les jauges grandes elongations", dans *Journée d'étude "Extensométrie"*, Editions Ampère, Paris.
- 1991 BOEHLER, J.P., et KOSS, S., "Evolution of anisotropy in sheet-steels submitted to off-axes large deformations", dans "Advances in Continuum Mechanics", éd. par O. BRÜLLER et al, Springer-Verlag, Heidelberg, New York, p. 143-158.
- 1991 KONDO, D., HAIED, A., et HENRY, J.P., "Détection expérimentale de l'apparition de bandes de cisaillement dans les roches", Rapport d'études du Groupement Scientifique "Géomécanique des Roches Profondes".
- 1991 MILLIEN, A., et BOEHLER, J.P., "Etude expérimentale et théorique de l'apparition des bandes de cisaillement dans les roches anisotropes", Rapport d'études, GDR Géomécanique des Roches Profondes.
- 1991 NOVA, R., "An extended cam-clay model for soft anisotropic rocks", Proc. 3rd Int. Conf. on Constitutive Law for Engng. Mat., Tucson, p. 266-285.

- 1991 ORD, A., VARDOULAKIS, I., et KAJEWSKI, R., "Shear band formation in Gosford sandstone", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.28, n°5, p. 397-409.
- 1991 VINEGAR, H.J., de WAAL, J.A., et WELLINGTON, S.L., "CT studies of brittle failure in Castlegate sandstone", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol.28, n°5, p. 441-448.
- 1992 CUXAC, P., et HOMAND, F., "Propagation d'ondes ultrasismiques dans les roches anisotropes", *Rev. Franç. Géotech.*, n°59, p. 49-55.
- 1992 THEOCARIS, P.S., et PHILIPPIDIS, T.P., "True bounds on Poisson's ratios for transversely isotropic solids", *J. of Strain Analysis*, vol.27, n°1, p. 43-44.
- 1992 TILLARD-NGAN, D., "Etude de la rupture dans les géomatériaux cohésifs. Application à la marne de Beaucaire.", Thèse de Doctorat, UJF, Grenoble.
- 1993 ZHENG, Q.S., et BOEHLER, J.P., "The description, classification, and reality of material and physical symmetries", *Acta Mechanica*, (sous presse).

## Annexe A

### Mesures de la densité et de la porosité

La densité et la porosité effective du grès des Vosges ont été déterminées selon les normes ISRM (1979). Les éprouvettes, préalablement séchées à l'étuve à 105°C pendant 24 heures, sont désaérées puis saturées lentement d'eau distillée, sous vide. Après 48 heures, de mise en saturation, elles sont pesées et mises en étuve à 105°C. Des pesées sont effectuées toutes les 6 heures jusqu'à l'obtention d'un poids constant. Le volume de chaque éprouvette est ensuite déterminé à l'aide d'une cuve à mercure.

n° d'éprouvette	Poids saturé (g)	Poids sec (g)	Volume total (cm <sup>3</sup> )	Volume vides (cm <sup>3</sup> )	densité	porosité (%)
15.10	101.96	92.08	44.59	9.88	2.06	22.15
60.1	106.78	95.95	45.92	10.84	2.09	23.60
60.2	95.07	85.49	41.66	9.58	2.05	23.01
60.3	105.89	95.23	45.77	10.67	2.08	23.30
75.4	101.81	91.45	44.59	10.36	2.05	23.24
75.5	103.46	93.07	45.17	10.39	2.06	23.00

Tableau A1 - Mesures de la densité et de la porosité effective du grès des Vosges

## **Annexe B**

### **Courbes d'évolution du taux de flexion lors des essais de traction simple**

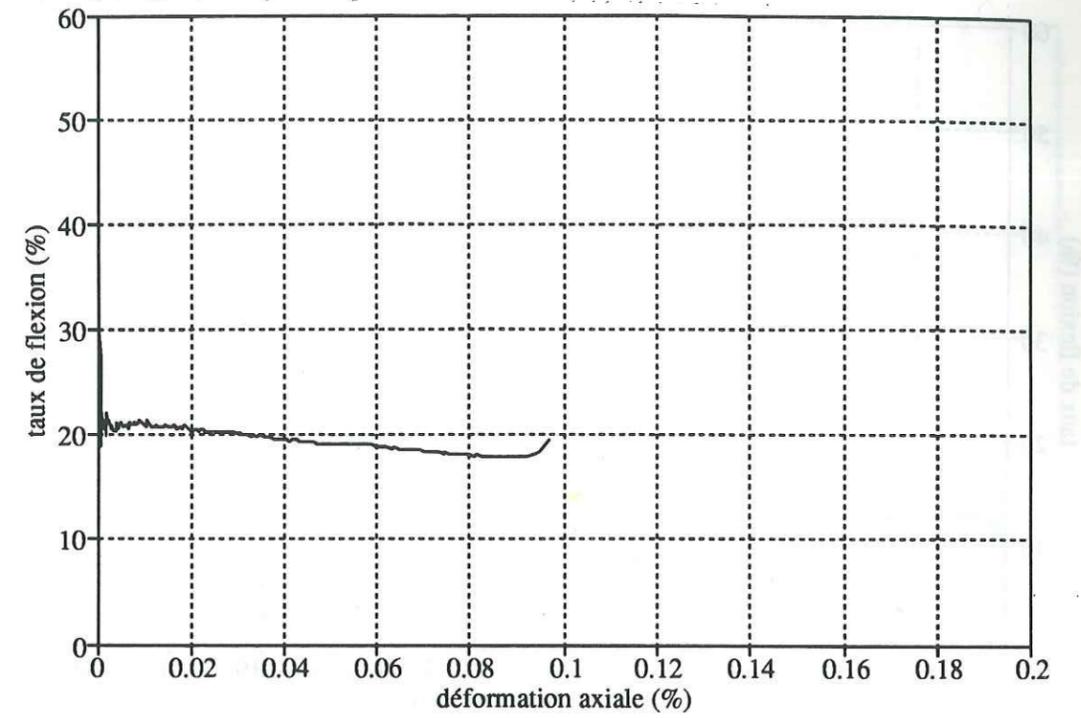


Figure B1 - Essai de traction simple sur une éprouvette orientée à  $\delta = 0^\circ$  : évolution du taux de flexion  $T_f$  en fonction de la déformation de traction pure  $\epsilon_{TP}$ .

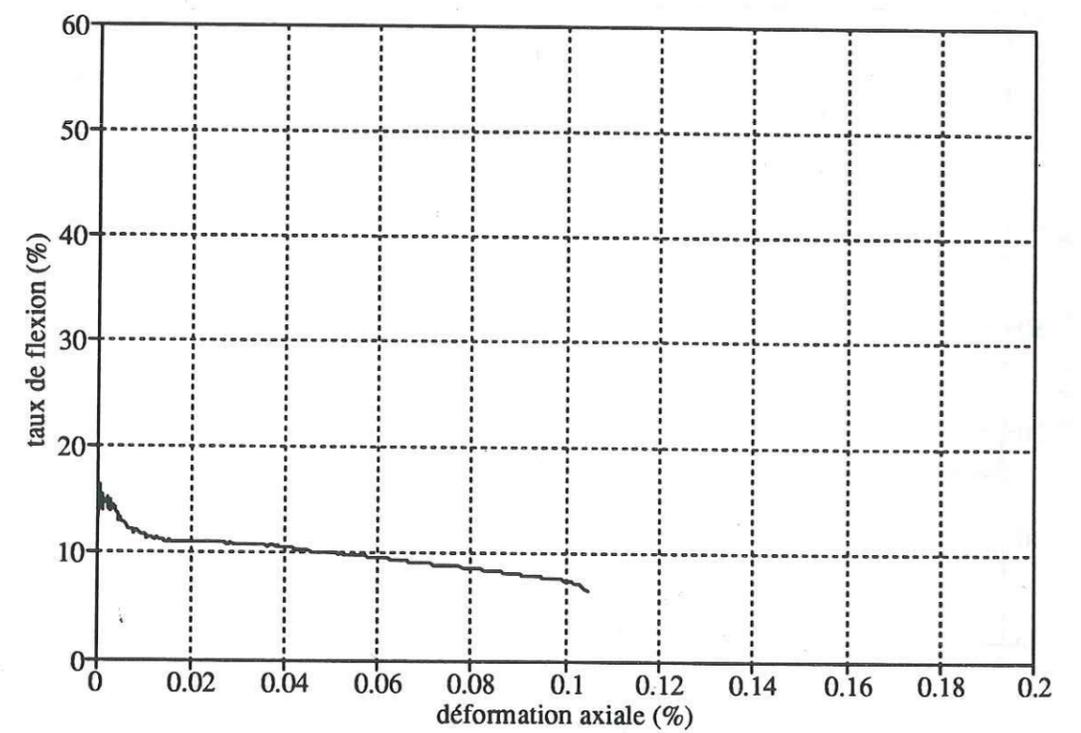


Figure B2 - Essai de traction simple sur une éprouvette orientée à  $\delta = 15^\circ$  : évolution du taux de flexion  $T_f$  en fonction de la déformation de traction pure  $\epsilon_{TP}$ .

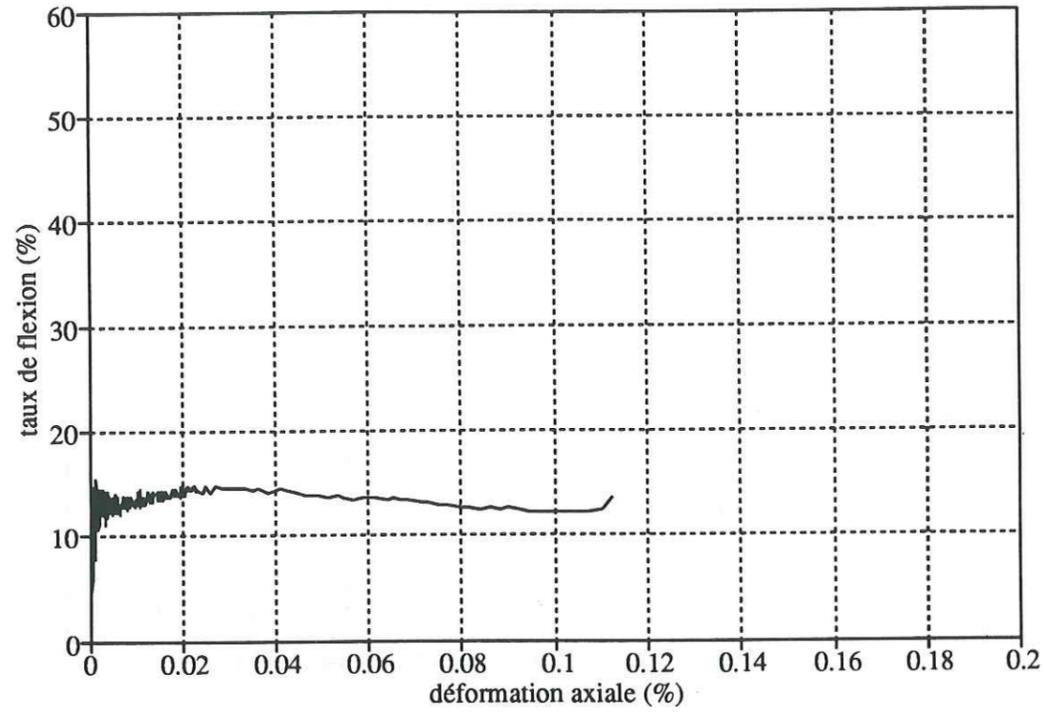


Figure B3 - Essai de traction simple sur une éprouvette orientée à  $\delta = 30^\circ$  : évolution du taux de flexion  $T_f$  en fonction de la déformation de traction pure  $\epsilon_{TP}$ .

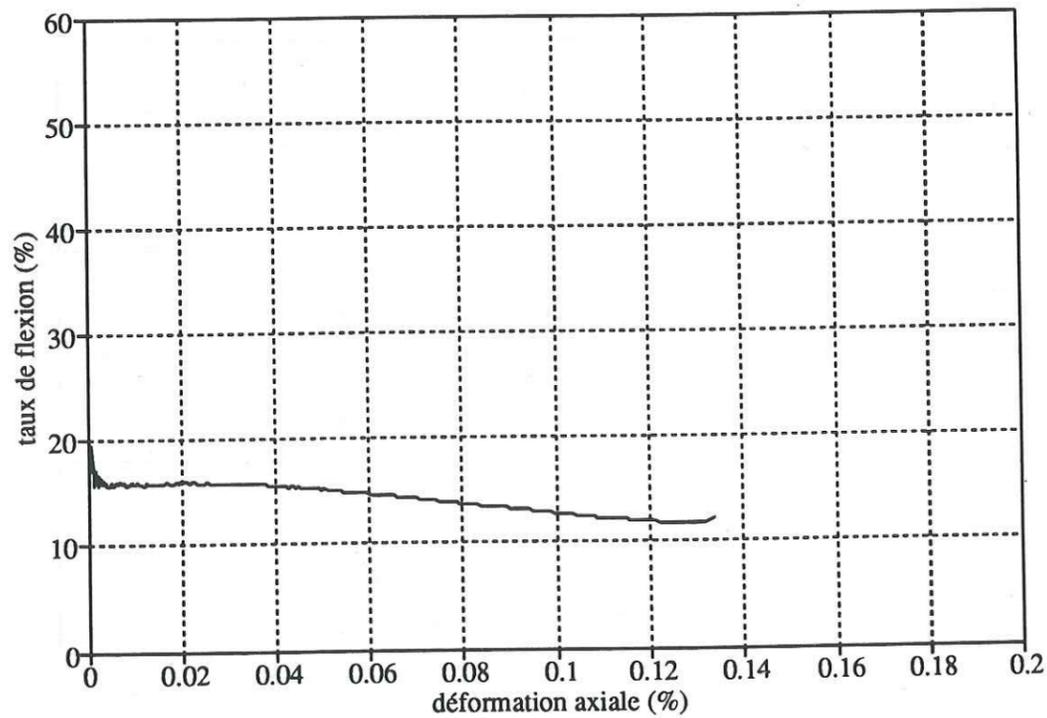


Figure B4 - Essai de traction simple sur une éprouvette orientée à  $\delta = 45^\circ$  : évolution du taux de flexion  $T_f$  en fonction de la déformation de traction pure  $\epsilon_{TP}$ .

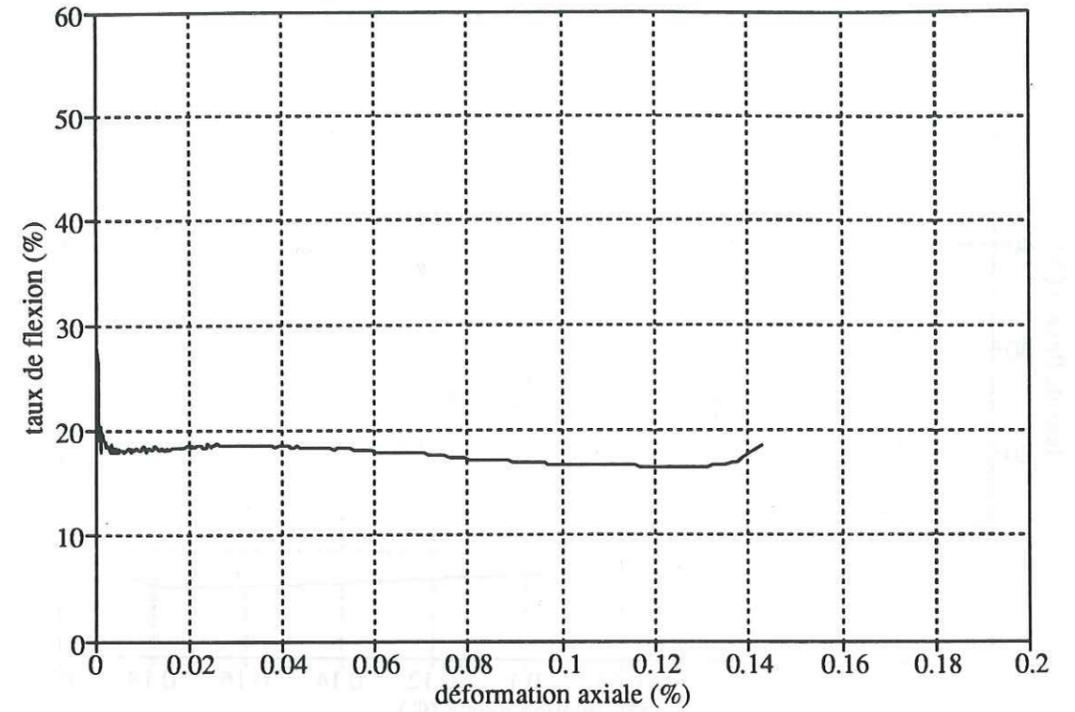


Figure B5 - Essai de traction simple sur une éprouvette orientée à  $\delta = 60^\circ$  : évolution du taux de flexion  $T_f$  en fonction de la déformation de traction pure  $\epsilon_{TP}$ .

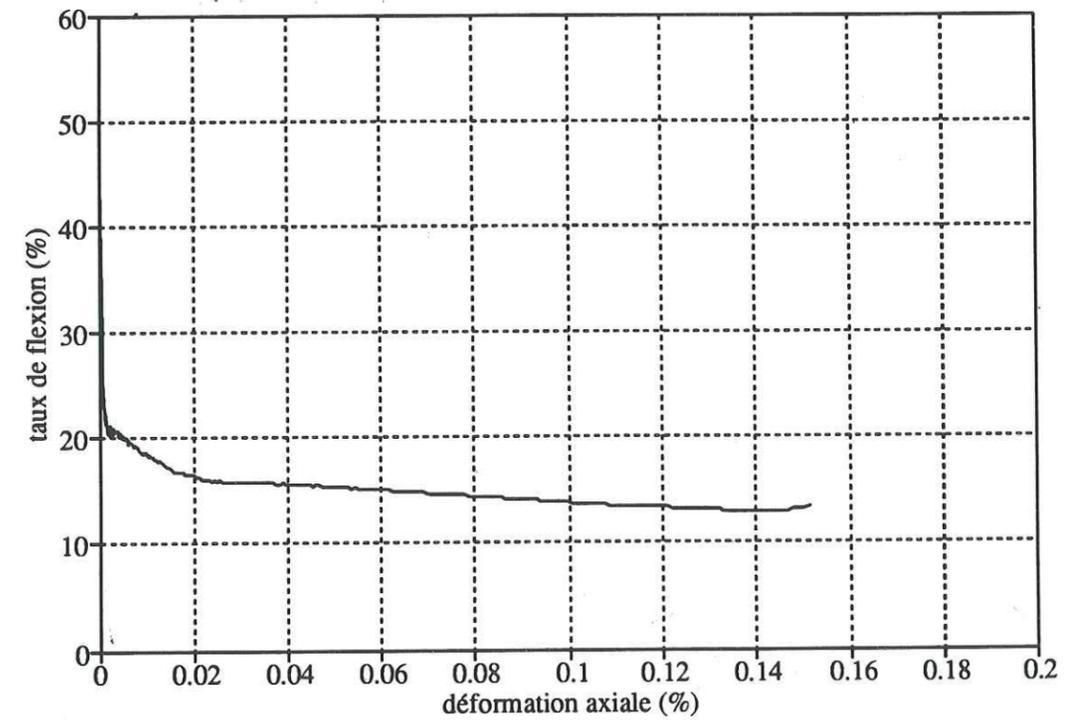


Figure B6 - Essai de traction simple sur une éprouvette orientée à  $\delta = 75^\circ$  : évolution du taux de flexion  $T_f$  en fonction de la déformation de traction pure  $\epsilon_{TP}$ .

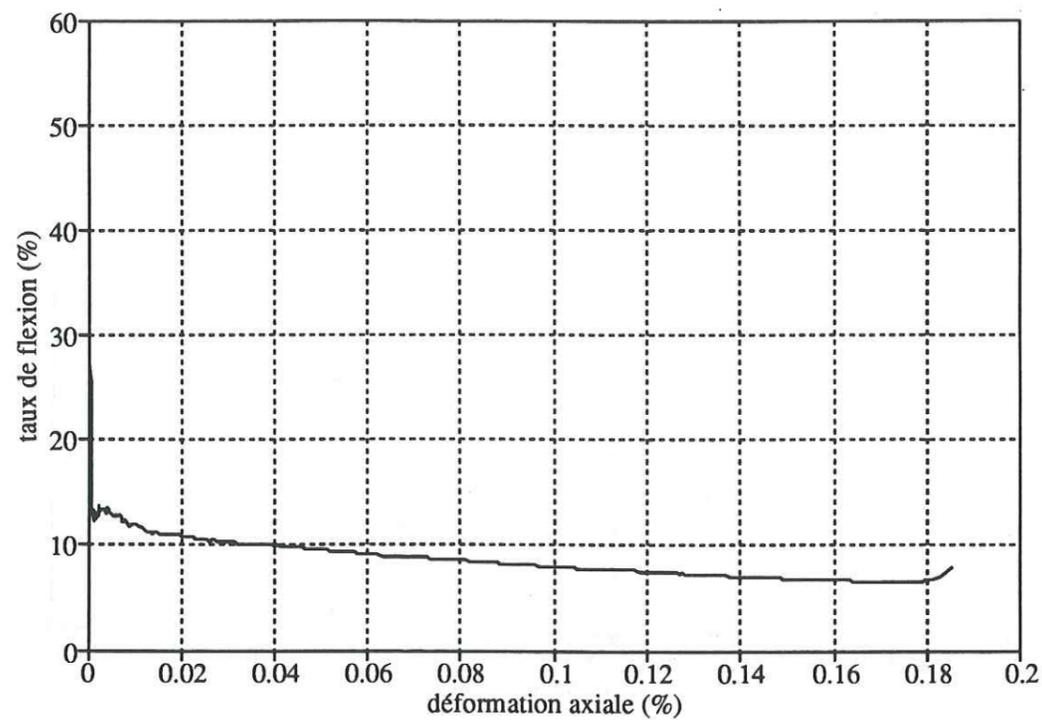


Figure B7 - Essai de traction simple sur une éprouvette orientée à  $\delta = 90^\circ$  : évolution du taux de flexion  $T_f$  en fonction de la déformation de traction pure  $\epsilon_{TP}$ .

## Annexe C

### Erreurs d'orientation des jauges

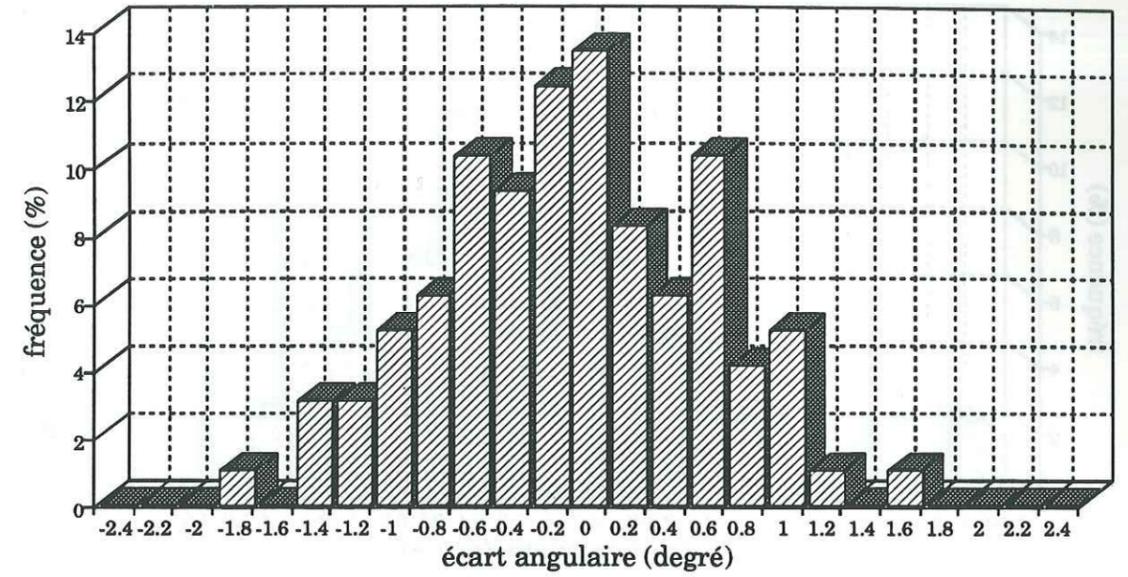


Figure C1 - Histogramme des fréquences des déviations angulaires des jauges par rapport à la direction théorique : cas des jauges axiales

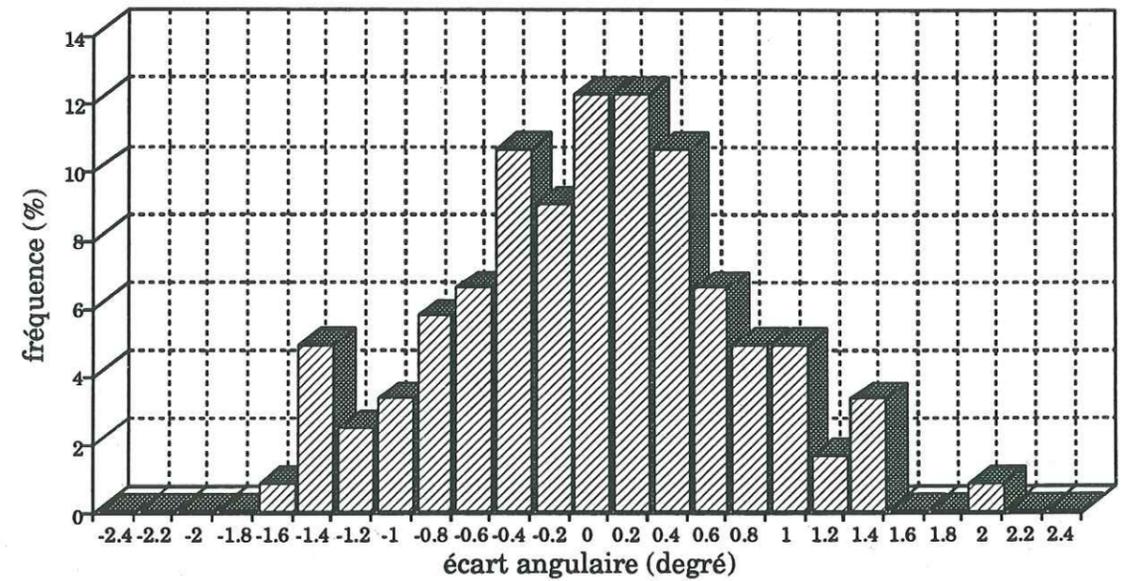


Figure C2 - Histogramme des fréquences des déviations angulaires des jauges par rapport à la direction théorique : cas des jauges transversales

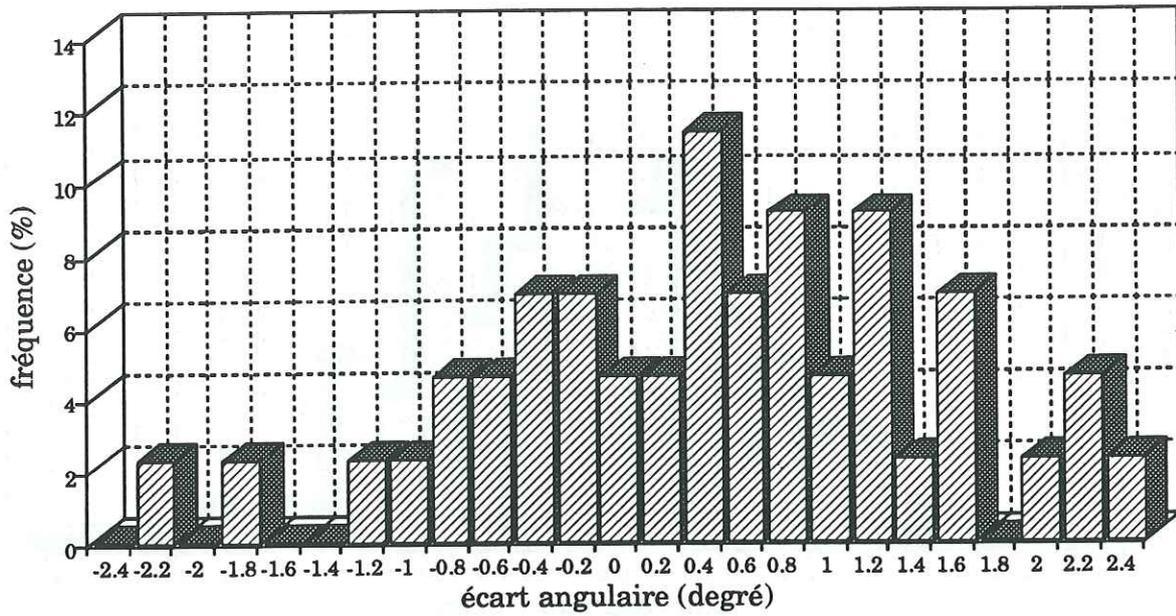


Figure C3 - Histogramme des fréquences des déviations angulaires des jauges par rapport à la direction théorique : cas des jauges inclinées à 45°



**THESE de DOCTORAT de  
l'Université Joseph Fourier - Grenoble I  
(application de l'arrêté ministériel du 30 mars 1992)**

*Titre de l'ouvrage:*

**Comportement anisotrope du grès des Vosges :  
élasto-plasticité, localisation, rupture**

*Nom de l'auteur:*

**Anne MILLIEN**

*Etablissement:*

**Université Joseph Fourier - Grenoble I**

**RESUME**

L'objet de ce travail est l'analyse expérimentale et théorique du comportement mécanique anisotrope d'un grès des Vosges, dans les domaines des déformations élasto-plastiques, de la localisation des déformations et de la rupture.

Un intérêt particulier porte sur l'influence de l'orthotropie de révolution initiale du matériau sur l'orientation des bandes de cisaillement apparaissant pour des états de compressions sous pressions de confinement.

Un programme expérimental a été développé pour la caractérisation mécanique du comportement de la roche sous compressions isotropes, compressions orientées sous pressions de confinement et tractions simples orientées. Des méthodes expérimentales spécifiques pour les mesures de toutes les composantes du tenseur des déformations élasto-plastiques d'une roche poreuse sous pressions de confinement ont été conçues et développées dans le souci permanent d'obtenir des données expérimentales fiables. Les essais réalisés ont permis, d'une part, d'obtenir un ensemble de résultats réalistes et cohérents sur les caractéristiques élasto-plastiques orthotropes de révolution de la roche, et d'autre part, de mettre en évidence l'orientation privilégiée des bandes de cisaillement par rapport aux structures internes orientées du matériau. Une méthode de détection du seuil de localisation des déformations a également été développée.

Parallèlement, l'orientation privilégiée des bandes de cisaillement apparaissant dans des roches orthotropes de révolution soumises à des compressions triaxiales de révolution a été modélisée. Cette modélisation a été réalisée par l'introduction des structures matérielles dans l'analyse de Rice de la localisation des déformations élasto-plastiques, grâce aux formes générales invariantes des lois de comportement anisotrope.

**MOTS CLES**

Grès des Vosges - Orthotropie de révolution - Déformations élasto-plastiques - Critère de rupture - Modes de rupture - Localisation des déformations - Orientations des bandes de cisaillement - Essais triaxiaux de révolution - Compressions isotropes - Variations de volume