



HAL
open science

Écoulements multi-matériaux et multi-physiques : solveur volumes finis eulérien co-localisé avec capture d'interfaces, analyse et simulations

Daniel Chauveheid

► **To cite this version:**

Daniel Chauveheid. Écoulements multi-matériaux et multi-physiques : solveur volumes finis eulérien co-localisé avec capture d'interfaces, analyse et simulations. Mathématiques générales [math.GM]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2012. Français. NNT : 2012DENS0032 . tel-00749651

HAL Id: tel-00749651

<https://theses.hal.science/tel-00749651>

Submitted on 8 Nov 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN
ECOLE DOCTORALE SCIENCES PRATIQUES

T H E S E D E D O C T O R A T

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE
DE CACHAN**

Specialité : MATHEMATIQUES

Présentée par
Daniel CHAUVEHEID

**Ecoulements multi-matériaux et
multi-physiques : solveur volumes finis
eulérien co-localisé avec capture
d'interfaces, analyse et simulations**

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 2 juillet 2012 devant le jury composé de :

<i>Président du jury :</i>	M. Patrick LE TALLEC	- École Polytechnique
<i>Directeurs de thèse :</i>	M. Jean-Michel GHIDAGLIA	- ENS de Cachan
	M. Mathieu PEYBERNES	- CEA, DAM, DIF
<i>Rapporteurs :</i>	M. Roland MASSON	- Université de Nice
	M. Pierre-Henri MAIRE	- CEA
<i>Examineur :</i>	M. Andrew BARLOW	- AWE (UK)

Centre de Mathématiques et de Leurs Applications
ENS CACHAN/CNRS/UMR 8536
61, avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire n'est pas le fruit de mon seul effort. De nombreuses collaborations m'ont régulièrement permis d'avancer.

En premier lieu, j'adresse mes sincères remerciements à mon directeur de thèse, Jean-Michel Ghidaglia, pour la confiance et l'autonomie qu'il m'a accordées, ainsi que pour sa disponibilité et la grande qualité des échanges scientifiques que nous avons eus. Au même titre, je remercie Mathieu Peybernes, qui a co-dirigé ce travail, pour son dynamisme remarquable et pour son efficacité. Jean-Philippe Braeunig, «l'homme de l'ombre», a joué un rôle particulièrement éclairant du début de mon stage de fin d'études à la fin de ma thèse. Je le remercie pour sa grande disponibilité et son aide remarquable.

Ma reconnaissance va également à Patrick Le Tallec qui a présidé mon jury de thèse, messieurs Pierre-Henri Maire et Roland Masson pour avoir accepté de rapporter mon travail de thèse, ainsi qu'à Andrew Barlow qui a accepté de participer à mon jury de thèse.

Ces quelques années d'initiation à la recherche se sont déroulées à cheval entre le Centre de Mathématiques et de Leurs Applications et le Commissariat à l'Énergie Atomique.

Au CMLA je souhaite remercier particulièrement Florian de Vuyst qui m'a initié aux mathématiques appliquées lors de mes études et avec qui j'ai eu le grand plaisir de travailler dans le cadre de mon enseignement au département de mathématiques. Je remercie également Christophe Labourdette et plus généralement l'ensemble des membres du laboratoire, sans oublier mesdames Pauchont, Brunetti, Almadovar et Doucet pour leur remarquable gentillesse et leur efficacité.

Au CEA, je remercie Eric Van Renthergem pour son soutien et la qualité de ses relectures. Pour les mêmes raisons je remercie Renaud Motte et j'ajoute que j'ai été sensible aux dispositions qu'il a mises en œuvre afin d'assurer une bonne intégration des doctorants à la vie du laboratoire qu'il dirige. À LSI se côtoient en bonne intelligence des numériciens, des informaticiens et des physiciens, de sorte que j'ai toujours été en mesure de trouver le bon interlocuteur pour répondre à une question. Je remercie en particulier Thierry Pougeart-Dulimbert, David Hateau, Laurent Saas, Christophe Fochesato pour leurs relectures, et le temps qu'ils ont consacré à nos échanges scientifiques. Je remercie en général tous les autres membres du laboratoire pour l'atmosphère chaleureuse qui y règne, et bien sûr Claire Boullier pour sa disponibilité, sa gentillesse et son attention.

Il convient également de remercier les doctorants, post-doctorants et stagiaires que j'ai fréquentés au quotidien : Gauthier «c'est grave, mais c'est pas très grave», Laurent pour les quelques fous rires salvateurs que nous avons partagés, Zohra pour le couscous que je n'aurai jamais dégusté, Sarah, Déborah, Yoann et les autres ...

Enfin je remercie ma famille, mes amis pour leur soutien et je félicite Coline pour sa patience incroyable.

Résumé

Ce travail de thèse porte sur l'extension et l'analyse d'un solveur volumes finis eulérien, co-localisé avec capture d'interfaces pour la simulation des écoulements multi-matériaux non miscibles.

Les extensions proposées s'inscrivent dans la volonté d'élaborer un outil de simulation multi-physiques.

Dans le cadre de ce mémoire, le caractère multi-physiques recouvre les champs que nous allons détailler.

Nous traitons le cas des écoulements radiatifs modélisés par un système à deux températures qui couple les phénomènes purement hydrodynamiques aux phénomènes radiatifs.

Nous proposons un solveur permettant la prise en compte des effets de tension superficielle à l'interface entre deux fluides.

Nous développons un solveur implicite permettant la simulation précise d'écoulements faisant intervenir de faibles nombres de Mach par le biais d'une méthode de renormalisation de la diffusion numérique.

Enfin, les effets tri-dimensionnels sont considérés ainsi que la possibilité d'étendre le schéma de base aux écoulements à un nombre quelconque de matériaux.

A chaque étape, les solveurs développés sont validés sur des cas-tests.

Mots clés : Ecoulements multi-matériaux ; Schémas volumes finis co-localisés ; Schémas implicites ; Ecoulements radiatifs ; Faible nombre de Mach ; Tension superficielle.

Abstract

This work is devoted to the extension of a eulerian cell-centered finite volume scheme with interfaces capturing for the simulation of multimaterial fluid flows.

Our purpose is to develop a simulation tool which could be able to handle multi-physics problems in the following sense.

We address the case of radiating flows, modeled by a two temperature system of equations where the hydrodynamics are coupled to radiation transport.

We address a numerical scheme for taking surface tension forces into account.

An implicit scheme is proposed to handle low Mach number fluid flows by means of a renormalization of the numerical diffusion.

Eventually, the scheme is extended to three-dimensional flows and to multimaterial flows, that is with an arbitrary number of materials.

At each step, numerical simulations validate our schemes.

Keywords : Multimaterial flows ; Cell-centered finite volume schemes ; Implicite schemes ; Radiating flows ; Low Mach number ; Surface tension

Table des matières

Notations	11
1 Introduction	13
1.1 Introduction générale	15
1.2 Contenu de ce mémoire	18
1.3 Panorama des méthodes multi-matériaux	20
1.3.1 Méthodes de suivi d’interfaces	20
1.3.2 Méthodes de capture d’interfaces	21
1.4 Méthode des volumes finis	22
1.4.1 Définition et propriétés	23
1.4.2 Discrétisation des flux d’interface, méthode VFFC	25
1.4.3 Discrétisations en temps, conditions de stabilité	28
1.4.4 Discrétisation des conditions aux limites	29
1.5 Description de la méthode VFFC-NIP	30
1.5.1 Maillage et discrétisation de l’interface	31
1.5.2 Splitting directionnel	32
1.5.3 Le modèle du condensat	33
1.5.4 Description 1D du schéma	35
1.5.5 Étape de projection	41
1.5.6 Reconstruction des interfaces	41
1.5.7 Robustesse du schéma	42
1.5.8 Principe de l’algorithme	45
2 Implicitation du schéma, écoulements à faible Mach	47
2.1 Introduction	47
2.2 Renormalisation de la diffusion numérique	50
2.3 Construction du schéma	51
2.3.1 Interfaces eulériennes	52
2.3.2 Interfaces lagrangiennes	55
2.3.3 Robustesse du schéma explicite	57
2.4 Un schéma implicite VFFC-ENIP	57
2.4.1 Introduction et nomenclature	57
2.4.2 Obtention du schéma	58
2.4.3 Renormalisation du schéma implicite	59

2.4.4	Théorème de stabilité	59
2.4.5	Résolution du système non linéaire	59
2.5	Résultats numériques	62
2.5.1	Instabilité de Kelvin-Helmholtz	62
2.5.2	Une goutte de gaz chutant sous l'effet de la gravité	65
2.5.3	Rupture d'un barrage	66
2.6	Conclusion	67
3	Prise en compte de la tension de surface	69
3.1	Introduction	71
3.2	Calcul numérique de la courbure	72
3.3	Terme source et décentrement	73
3.4	Schéma	75
3.4.1	Préliminaires	75
3.4.2	Discrétisation des termes de tension de surface	78
3.5	Résultats	79
3.5.1	Équilibre d'une goutte	80
3.5.2	Perturbation de l'équilibre	82
3.5.3	Un cas-test d'advection	85
3.5.4	Coalescence de deux gouttes	89
3.6	Conclusion	92
4	Écoulements radiatifs	93
4.1	Introduction	95
4.2	Modèle mathématique	96
4.3	Méthode numérique	98
4.3.1	Équation de convection	98
4.3.2	Équation de diffusion/réaction	104
4.3.3	Extension au cas 2D	105
4.3.4	Extension au cas 3D	108
4.3.5	Résolution du système non linéaire	109
4.4	Résultats numériques	111
4.4.1	Chocs radiatifs	111
4.4.2	Étude de convergence	115
4.4.3	Un cas test 1D bi-matériaux	116
4.4.4	Un cas test 2D	119
4.5	Conclusion	121
5	Extensions au 3D et à $Nmat > 2$	123
5.1	Écoulements 3D	123
5.1.1	Méthode	123
5.1.2	Résultats	124
5.2	Écoulements multi-matériaux $Nmat \geq 3$	126
5.2.1	Méthode	127

5.2.2 Résultats	130
5.3 Conclusion	132
6 Conclusion générale	135
A Stabilité du schéma implicite faible Mach	139
B Instabilité de Kelvin-Helmholtz et nombre de Mach	143
C Un résultat d'algèbre linéaire	147
Bibliographie	149
Liste des figures	154

Notations

Voici une liste des notations récurrentes utilisées au cours de ce mémoire. Il arrive qu'un symbole corresponde à deux définitions lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté dans le choix de l'une ou de l'autre.

- χ : fonction caractéristique
- \mathbf{u} : champ de vitesse
- v, v_i, v_i^n : variables conservatives
- $F(v)$: flux physique exprimé dans les variables v
- $S(v)$: terme source
- $\nabla \cdot$: opérateur de divergence
- m : entier désignant la taille des systèmes d'EDP
- d : entier désignant la dimension d'espace
- $F_j(v)$, $1 \leq m$: composantes du flux $F(v)$
- Ω : domaine de calcul
- K, L, K_i : volume de contrôle
- ∂K : frontière du volume K
- \mathcal{T} : recouvrement de Ω en volumes de contrôle
- $\mathcal{N}(K)$: voisinage de K dans \mathcal{T}
- $\nu, \nu_{K,L}$: normale, normale orientée du volume K vers le volume L
- $\phi, \phi(u, v, \nu), \psi, \phi_{i+1/2}, \psi_{i+1/2}$: flux numérique
- $A(v, \nu)$: matrice jacobienne du flux $F(v)$
- $\lambda_k(v, \nu), \ell_k(v, \nu), r_k(v, \nu)$: valeur propre, vecteur propre à gauche, vecteur propre à droite
- Λ, L, R : matrice des valeurs propres, matrice des vecteurs propres à gauche, matrice des vecteurs propres à droite
- $sign$: fonction de signe
- n : indice en temps
- i, j, k : indices en espace
- $\Delta t, \Delta t^n$: pas de temps
- $\Delta x, \Delta x_i, \Delta y, \Delta y_j, \Delta z, \Delta z_k$: pas d'espace
- c : vitesse d'advection, ou vitesse du son
- ρ : masse volumique
- p : pression
- E : énergie totale
- e : énergie interne spécifique
- s : entropie spécifique
- e_x, e_y, e_z : base canonique de \mathbb{R}^3
- T : température
- k : coefficient de Grüneisen (sans ambiguïté par rapport aux indices en espace)
- H : enthalpie totale
- ν_2, \dots, ν_d : base orthonormale complémentaire à ν
- W_k : pseudo-invariant de Riemann
- ξ : variable réduite

- μ : produit ρc
- α, α_i : fractions volumiques
- $p_{i+1/2}, u_{i+1/2}$: pression et vitesse d'interface
- $\mathcal{U}_{i+1/2}$: matrice de décentrement du flux
- G, G_i : fonctions à annuler dans la méthode de Newton
- X : inconnue dans la méthode de Newton
- ε : petit paramètre
- \mathcal{M} : nombre de Mach
- P, Π : matrices de renormalisation
- β : coefficient de renormalisation
- σ : coefficient de tension de surface dans le Chapitre 3, opacité dans le Chapitre 4
- δ : distribution de Dirac, symbole de Kronecker
- Γ : interface
- κ : courbure dans le Chapitre 3, coefficient de diffusion dans le Chapitre 4
- $h, h_{i,j}$: fonction hauteur
- Σ_i^n : discrétisation des termes sources
- \mathcal{P}_0 : nombre sans dimension
- \mathcal{E}_r : énergie radiative
- T_r : température radiative
- \mathcal{S}_r : entropie radiative
- α_R : constante de radiation (sans ambiguïté avec la fraction volumique)
- γ, π : coefficients des lois d'état

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Introduction générale	15
1.2	Contenu de ce mémoire	18
1.3	Panorama des méthodes multi-matériaux	20
1.3.1	Méthodes de suivi d'interfaces	20
1.3.2	Méthodes de capture d'interfaces	21
1.4	Méthode des volumes finis	22
1.4.1	Définition et propriétés	23
1.4.2	Discrétisation des flux d'interface, méthode VFFC	25
1.4.3	Discrétisations en temps, conditions de stabilité	28
1.4.4	Discrétisation des conditions aux limites	29
1.5	Description de la méthode VFFC-NIP	30
1.5.1	Maillage et discrétisation de l'interface	31
1.5.2	Splitting directionnel	32
1.5.3	Le modèle du condensat	33
1.5.4	Description 1D du schéma	35
1.5.5	Étape de projection	41
1.5.6	Reconstruction des interfaces	41
1.5.7	Robustesse du schéma	42
1.5.8	Principe de l'algorithme	45

1.1 Introduction générale

Du fait de la disponibilité d'une très grande capacité de calcul, la simulation numérique est intensivement utilisée, de nos jours, pour prédire et optimiser de nombreux systèmes physiques. Alors qu'historiquement, on a construit des méthodes et solveurs «discipline par discipline», les technologies modernes demandent de plus en plus de maîtriser simultanément plusieurs physiques.

Ce travail de thèse s'inscrit dans ce contexte. Nous nous intéressons en général à la simulation numérique des écoulements multi-matériaux, c'est-à-dire des écoulements faisant intervenir plusieurs fluides, liquides ou gazeux, plusieurs phases d'un même fluide, ou éventuellement des solides.

Nous souhaitons développer un outil de simulation numérique, pour les écoulements multi-matériaux, capable de prendre en compte plusieurs physiques. L'intérêt d'un tel outil se justifie à plusieurs titres au premier rang desquels on trouve, bien sûr, le gain de temps en terme de prise en main et d'exploitation. Le cœur numérique d'un logiciel de calcul représente, en général, un pourcentage infime du nombre de lignes de code qui le composent. L'essentiel correspond alors à l'interface utilisateur et à la représentation, ou structure, des données. Un logiciel multi-physique possède, pour une structure de données et une interface uniques, autant de cœurs numériques que de physiques traitées. Un des soucis actuels, de plus en plus prégnant avec la montée en puissance des ordinateurs, est l'optimisation des codes de calcul (parallélisation massive, notamment). Le plus gros du travail, de ce point de vue, réside en général dans l'adaptation des structures de données. On comprend, dans ce contexte, l'intérêt indéniable que représentent les logiciels multi-physiques.

Dans le cadre de ce travail, nous développons plusieurs schémas sur la base d'une structure de données unique, correspondant à une méthode numérique donnée que nous introduirons plus loin dans cette Section. Le caractère multi-physique recouvre pour nous les champs suivants.

Nous traitons le cas des écoulements radiatifs, modélisés par un système à deux températures couplant les équations d'Euler compressibles à une équation de transport du rayonnement. Ce modèle fait intervenir plusieurs échelles de temps, liées à la variété des phénomènes qu'il implique et présente des termes non conservatifs. Le couplage intervient *via* un terme source, ou de réaction, visant à équilibrer les températures de la matière et du rayonnement. La stratégie adoptée consiste à résoudre successivement les sous-systèmes correspondant à chacune des échelles de temps présentes. Un schéma aux directions alternées est appliqué pour chacun de ces sous-systèmes. En particulier, un schéma original est proposé pour la prise en compte, lors du splitting directionnel, de la contribution du terme source.

Nous considérons également l'introduction des forces de tension de surface dans le modèle des équations d'Euler. Ces forces sont en général difficiles à discrétiser dans un contexte volumes finis du fait qu'elles sont des forces de surface. Nous présentons un schéma permettant de discrétiser ces forces aux interfaces.

Les écoulements à faible nombre de Mach sont étudiés, c'est-à-dire des écoulements qui sont quasi-incompressibles dans tout ou partie du domaine de calcul

considéré. Ce type d'écoulement est très fréquent et pose notoirement un certain nombre de difficultés numériques pour lesquelles nous apportons une solution. La méthode proposée consiste à modifier la matrice de viscosité du schéma dans les régions où l'écoulement est presque incompressible afin d'améliorer la qualité de la solution obtenue. Cette modification a nécessité le développement d'un schéma entièrement implicite afin de garantir la stabilité numérique du schéma.

Nous traitons, enfin, le cas des écoulements tri-dimensionnels, et celui des écoulements faisant intervenir un nombre de matériaux arbitraire.

Pour chacun des items proposés dans ce mémoire, les difficultés sont identifiées afin de proposer une solution adéquate. La validité des méthodes proposées est attestée par de nombreux cas-tests.

Les fondements théoriques des méthodes numériques remontent à des temps anciens. Néanmoins, on peut raisonnablement considérer que les méthodes modernes trouvent leurs origines au milieu du XX^e siècle, avec le développement des ordinateurs. Les premières méthodes ont été introduites dans le but de résoudre numériquement les équations de la dynamique des gaz pour des écoulements mono-fluides : équations de Navier-Stokes, équations d'Euler dans le cas de fluides parfaits. L'étude des écoulements multi-matériaux et leur approximation numérique s'est révélée d'une importance considérable dans bon nombre d'applications industrielles impliquant des systèmes complexes. On peut penser à l'industrie aéronautique, navale, pétro-chimique etc. La simulation de ces systèmes complexes présente des enjeux multiples : compréhension précise des phénomènes, prédiction des comportements des matériaux et bien sûr des considérations économiques importantes, le but étant de s'affranchir dans une certaine mesure des expérimentations.

La description d'un écoulement peut se faire suivant plusieurs approches, parmi lesquelles l'approche lagrangienne qui consiste à se placer dans un référentiel lié au fluide, ou au contraire l'approche eulérienne qui consiste à se placer dans le référentiel de l'observateur. Deux grandes classes de méthodes numériques correspondent alors à ces deux descriptions : les méthodes lagrangiennes et les méthodes eulériennes.

Dans les méthodes lagrangiennes, le maillage «suit» le fluide en conséquence de quoi elles constituent des méthodes naturelles dans un contexte multi-matériaux : la discrétisation du domaine de calcul peut être faite conformément à la répartition physique des fluides, les interfaces les séparant étant données comme des faces des mailles du domaine. Parmi les schémas lagrangiens, on peut citer ceux de Von Neumann et Richtmyer [86] et de Wilkins [87]. La plupart des schémas lagrangiens font intervenir des maillages décalés, la vitesse est définie aux nœuds ou aux faces du maillage, afin de pouvoir le déplacer, tandis que les grandeurs thermodynamiques comme la pression, la masse volumique et l'énergie interne sont «centrées aux mailles». Ces méthodes ne sont pas conservatives en général. En outre, elles connaissent des limitations importantes notamment lors de grandes déformations, ou pour des écoulements fortement rotationnels puisque des pathologies peuvent apparaître comme l'aplatissement des mailles, des volumes négatifs dus au croisement de mailles, etc. Même si des correctifs existent (régularisation de maillage), leur mise en œuvre reste délicate.

Dans les méthodes eulériennes, le maillage est fixe et découplé des matériaux, ce qui autorise à envisager des géométries très complexes. En revanche, la prise en compte des interfaces entre les matériaux n'est pas naturelle dans ce contexte. Parmi les méthodes eulériennes classiques, on trouve les méthodes aux différences finies dans lesquelles les opérateurs différentiels sont approchés par des quotients différentiels [78], l'ordre de précision pouvant être arbitrairement élevé. Ces méthodes sont de mise en œuvre simple, en général. La méthode des éléments finis est une méthode de choix dans l'approximation de problèmes paraboliques. Dans cette méthode, le domaine de calcul est discrétisé en éléments auxquels sont associées des fonctions de base pour un espace fonctionnel discret donné. Les fonctions de base $P1$, par exemple, sont affines par morceaux et permettent de décomposer les approximations discrètes des solutions aux nœuds du maillage éléments finis. Les équations à résoudre sont alors considérées sous leur forme variationnelle. Cette formulation conduit en général à la résolution d'un système linéaire creux. La méthode des éléments finis s'inscrit dans un cadre mathématique rigoureux, qui nécessite notamment de bien définir les espaces fonctionnels que l'on considère. Des outils puissants permettent alors d'énoncer un certain nombre de propriétés des solutions discrètes obtenues, telles que la convergence vers la solution du problème continu ainsi que des estimations d'erreurs. Enfin, les méthodes aux volumes finis jouissent d'une attention particulière dans l'approximation de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles issus de la mécanique des milieux continus : les systèmes de lois de conservation. Contrairement aux méthodes de différences finies, qui approchent des dérivées, les volumes finis approchent des quantités intégrées : des moyennes sur des volumes dits de «contrôle». De fait, elles constituent un cadre naturel dans l'approximation d'équations sur des maillages complexes (conformes ou non), en 2D, comme en 3D. D'autre part, elles ont l'avantage de respecter la physique des modèles étudiés, dans le sens où elles conduisent à des schémas conservatifs. L'intégration d'un système de lois de conservation sur un volume de contrôle conduit, en général, à une équation différentielle ordinaire (EDO) faisant apparaître des termes de flux au travers de la frontière du volume de contrôle. L'approximation numérique de ces flux nécessite, en général, la résolution d'un problème de Riemann exact ou approché (voir, par exemple, Toro [82] pour l'étude du problème de Riemann pour les systèmes hyperboliques de lois de conservation), mais nous y reviendrons plus loin dans cette introduction. Les schémas aux volumes finis les plus célèbres sont ceux de Godunov (solveur de Riemann exact) [35], de van Leer [49], ou de Roe [72].

Naturellement un schéma numérique est construit pour résoudre un modèle physique spécifique, dans un contexte précis. Il y a donc presque autant de schémas que de modèles. On comprend dans ce contexte qu'il peut être avantageux d'envisager de proposer un schéma capable de résoudre une plus grande variété de problèmes physiques et qui ne dépende «pas trop» des propriétés mathématiques des équations considérées, comme par exemple l'hyperbolicité, le caractère conservatif etc.

Le schéma VFFC (Volumes Finis à Flux Caractéristiques, [29]), que nous décrivons et utiliserons tout au long de ce mémoire, est un schéma à capture de choc

initialement introduit pour la résolution de modèles à deux fluides, qui permet justement de traiter une large gamme de modèles physiques, hyperboliques ou non, conservatifs ou non. On réfère notamment aux travaux de Boucker [6] et Rovarch [73].

Dans sa thèse, J.-P. Braeunig [7, 9] étend la méthode VFFC au cas des écoulements multi-matériaux en proposant une méthode hybride eulérienne-lagrangienne : la méthode VFFC-NIP, pour VFFC-Natural Interface Positioning. Les fluides sont supposés non miscibles et sont séparés par une interface. L'essentiel du domaine de calcul, constitué de cellules ne contenant qu'un seul fluide est traité par le schéma VFFC mono-fluide, tandis que seul le voisinage de l'interface bénéficie d'un traitement lagrangien. Les variables sont «centrées aux mailles», et des flux sont calculés le long des interfaces matérielles, par une méthode décentrée amont, qui donnent l'évolution des grandeurs d'intérêt pour les matériaux bordant cette interface. La méthode VFFC-NIP s'est montrée efficace notamment dans le traitement des instabilités hydrodynamiques et pour une grande variété d'écoulements complexes tels que ceux faisant intervenir de l'eau et de l'air. Elle a bénéficié de nombreuses améliorations techniques et théoriques [8, 3, 5, 10]. L'algorithme VFFC-ENIP (pour Enhanced Natural Interface Positioning, [54]), notamment, rend la reconstruction des interfaces plus précise.

Remarque 1 (Terminologie employée) *Dans la suite du mémoire, nous emploierons indifféremment l'abréviation VFFC-NIP ou VFFC-ENIP pour parler de la méthode numérique qui constitue le socle de ce travail de thèse. Seule l'étape de projection distingue ces deux méthodes. Cette étape est transparente vis-à-vis du travail que nous présentons dans ce mémoire.*

1.2 Contenu de ce mémoire

Comme suite à ces travaux, nous nous proposons, dans cette thèse, de répondre à deux objectifs : améliorer la robustesse de la méthode VFFC-ENIP, notamment vis-à-vis des écoulements à faible nombre de Mach (Chapitre 2), et diversifier la physique des problèmes considérés : nous proposons un schéma de prise en compte «naturelle» des forces de tension superficielle (Chapitre 3) et nous étendons le schéma VFFC-ENIP à un modèle d'hydrodynamique radiative (Chapitre 4).

Ce mémoire est organisé de la manière suivante. Ce chapitre introductif est l'occasion de passer en revue un certain nombre de méthodes utilisées pour la simulation des écoulements multi-matériaux. Nous présentons dans un second temps le cadre général des méthodes de types volumes finis et en particulier la méthode VFFC, et enfin introduisons la méthode VFFC-NIP qui constitue le socle de travail de cette thèse.

Le chapitre 2 est consacré à l'extension de la méthode VFFC-NIP aux écoulements compressibles à faible nombre de Mach. Le modèle physique utilisé, dans ce contexte est celui des équations d'Euler. Nous décrivons la méthode de correction (ou plus exactement renormalisation) de la diffusion numérique employée. Un

schéma VFFC-NIP implicite en temps est proposé comme solution aux problèmes de robustesse notoirement liés à ces méthodes de renormalisation. Nous prouvons théoriquement que le schéma ainsi obtenu est linéairement inconditionnellement stable, et proposons un certain nombre de simulations numériques attestant l'efficacité de la méthode dans ce contexte.

Dans le chapitre 3, nous proposons un nouveau schéma de discrétisation des forces de tension de surface dans le cadre de la méthode VFFC-NIP. Les termes de tension de surface sont pris en compte comme termes sources et un décentrement compatible avec la discrétisation des flux numériques leur est appliqué. Ce schéma est validé sur un certain nombre de cas-tests comme celui de Laplace, pour lequel un équilibre doit avoir lieu entre les forces de pression et les forces de tension de surface. Ce cas-test est à la fois un des plus simples et un des plus discriminants car l'équilibre peut être perturbé par la création et l'amplification de «courants parasites» dus à une discrétisation inappropriée de la force de tension de surface vis-à-vis du gradient de pression.

Le chapitre 4 est consacré à l'extension de la méthode VFFC-NIP au modèle classique de l'hydrodynamique radiative (modèle dit «à deux températures»). Nous proposons un schéma Implicite/Explicite pour la résolution séparée des termes de convection et des termes de diffusion radiative. Un schéma aux directions alternées est proposé qui permet de prendre en compte les contributions des termes de couplage dans chaque étape de discrétisation en x et en y . Nous prouvons que le splitting proposé est exact pour le système continu linéarisé. Enfin, la méthode est validée sur des solutions de type choc radiatif 1D mono-matériau pour lesquelles des solutions semi-analytiques existent. Un cas-test 1D avec interface est présenté dont les résultats sont satisfaisants d'un point de vue physique. Enfin, un cas 2D illustre la validité du splitting proposé ainsi que le bon fonctionnement du solveur hydrodynamique.

Dans le chapitre 5, enfin, nous présentons d'autres extensions de la méthode VFFC-NIP. Il y est question des écoulements 3D et des écoulements multi-matériaux avec un nombre de matériaux strictement supérieur à deux.

1.3 Panorama des méthodes multi-matériaux

Les méthodes de simulation multi-matériaux peuvent être en général classées en deux catégories : les méthodes de suivi d'interfaces (*interface tracking methods*), et les méthodes de capture d'interfaces (*interface capturing methods*).

Les méthodes de suivi d'interfaces sont essentiellement lagrangiennes, la position de points matériels x_i situés sur l'interface est suivie par l'intégration des caractéristiques :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathbf{u}_i, \quad (1.1)$$

\mathbf{u}_i étant la vitesse des points en question. Deux catégories se dessinent alors : les méthodes où les points correspondent à une représentation explicite de l'interface (par exemple les méthodes de *front-tracking*) et les méthodes où les points correspondent à des particules individuelles (c'est le cas des méthodes particulières).

Dans les méthodes de capture d'interfaces, l'interface n'est pas suivie explicitement, mais plutôt capturée par une fonction caractéristique des matériaux en présence, notée χ . Cette fonction est en général une fonction de Heaviside et est discrétisée par maille comme constante égale à 1 pour un fluide, et constante égale à 0 pour l'autre fluide, dans le cas de deux fluides. Dans les mailles contenant les deux matériaux, χ prend des valeurs comprises entre 0 et 1 (χ représente, par exemple, la fraction volumique ou la concentration d'un matériau). L'équation décrivant l'évolution de χ est :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \chi = 0, \quad (1.2)$$

traduisant l'invariance lagrangienne. La quantité \mathbf{u} désigne alors la vitesse de l'interface.

Dans un premier temps, nous décrivons succinctement les méthodes de suivi d'interfaces : les méthodes ALE, *front-tracking* et particulières. Dans un second temps, nous décrivons les méthodes de capture d'interfaces : lagrange+projection, les méthodes de suivi de volume (VOF) et de *level-set*.

1.3.1 Méthodes de suivi d'interfaces

Méthode ALE

Les méthodes ALE, pour Arbitrary Lagrangian Eulerian, ont été introduites dans le but de combiner les descriptions eulérienne et lagrangienne en essayant de ne garder de chacune d'elles que les avantages [41, 71, 55, 2]. Dans les méthodes ALE, les nœuds du maillage peuvent être déplacés à la vitesse du fluide, comme dans les méthodes purement lagrangiennes, ou rester fixes comme dans les méthodes purement eulériennes. Ils peuvent également être déplacés à une vitesse quelconque. Ces méthodes allient donc la robustesse des schémas eulériens et la précision des schémas lagrangiens au voisinage des interfaces. Néanmoins, des remaillages doivent être effectués lorsque les maillages sont trop déformés.

Méthode de *front-tracking*

Les méthodes de *front-tracking* tirent leurs origines du schéma MAC (Marker-And-Cell) [40]. L'interface est modélisée par des particules lagrangiennes connectées entre elles de sorte à former un front qui se déplace au travers d'un maillage eulérien fixe. Des particules peuvent être ajoutées ou, au contraire, enlevées de l'interface au fur et à mesure que celle-ci se déplace de sorte à pouvoir prendre en compte des changements de topologie importants. Ces méthodes ne conservent pas la masse en général. De plus amples informations peuvent être trouvées dans [85, 43, 32, 33, 19].

Méthodes particulières

Les méthodes particulières reposent sur la modélisation des fluides par des particules possédant une masse, une quantité de mouvement et une énergie propre. Ces méthodes sont très intéressantes dans un contexte multi-matériaux, puisque la position des particules définit de manière naturelle les interfaces entre les fluides. Elles sont en général très peu diffusives, mais coûteuses en temps de calcul lorsque la taille du problème est importante. Les deux grandes classes de méthodes particulières sont celles où les particules évoluent au sein d'un maillage, et les méthodes sans maillage. Les premières sont représentées par les méthodes de types *Particle-In-Cell* (PIC, [39]), les secondes correspondent aux méthodes de type *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH, [31, 60]).

1.3.2 Méthodes de capture d'interfaces

Schéma lagrange+projection

Les schémas lagrange+projection [17, 16, 62, 89] constituent une approche combinant une étape lagrangienne au cours de laquelle les nœuds du maillage sont déplacés, suivie d'une étape de projection où les grandeurs calculées sur le maillage déplacé sont projetées sur le maillage eulérien fixe. L'étape de projection génère des mailles mixtes dans lesquelles des interfaces peuvent être reconstruites à l'aide des fractions volumiques des matériaux.

Méthodes de suivi de volume

Les méthodes de suivi de volume ont été introduites par Noh et Woodward [62] pour la méthode SLIC (Simple Line Interface Calculation), Hirt et Nichols [42] pour la méthode VOF (Volume Of Fluid). Ces méthodes se basent sur la connaissance d'une interface reconstruite géométriquement, ce qui permet une bonne approximation du terme de convection $\mathbf{u} \cdot \nabla \chi$ dans (1.2). Ces méthodes sont en général faciles à implémenter et robustes vis-à-vis des changements de topologie. De nombreux développements ont été apportés à ces méthodes, qui en font aujourd'hui des méthodes très populaires.

Méthodes *level-set*

Les méthodes *level-set* ont été introduites par Osher et Sethian [64, 76] pour la simulation des écoulements avec interface en dynamique des gaz, notamment. L'idée de base de ces méthodes est de modéliser l'interface entre les matériaux comme la courbe de niveau 0 d'une fonction de distance à l'interface, ϕ , définie par :

$$\phi(x, t = 0) = d, \quad (1.3)$$

d étant la distance algébrique du point x à l'interface à $t = 0$. Cette distance est prise positive si x est à l'intérieur de la surface délimitée par l'interface, négative s'il en est à l'extérieur. Cette fonction est en général advectée à la vitesse du fluide :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0, \quad (1.4)$$

mais des formulations plus complexes existent, basées sur les équations de Hamilton-Jacobi [64] qui permettent de raidir les fronts de la fonction distance ϕ , et donc de positionner l'interface de manière plus précise.

La résolution de (1.4) est en général soumise à la diffusion numérique du schéma employé.

La différence notable avec les méthodes de suivi de volume réside en ce que la fonction ϕ n'est pas une représentation discrète d'une fonction de Heaviside, mais d'une fonction «distance à l'interface» qui est une fonction régulière.

Néanmoins, lorsque les changements de topologie sont importants au voisinage de l'interface, la fonction ϕ ne reste pas forcément une fonction de distance après résolution de (1.4), c'est-à-dire ne vérifie plus $|\nabla \phi| = 1$. Des algorithmes sont alors mis en œuvre régulièrement pour la «réinitialiser» [81, 80].

1.4 Méthode des volumes finis

Nous présentons la méthode des volumes finis. Cette section a vocation à rappeler le formalisme des schémas volumes finis et leurs propriétés élémentaires. De plus amples détails peuvent être trouvés dans quantité d'ouvrages, citons par exemple Godlewski-Raviart [34], ou Leveque [51].

Nous considérons des systèmes de lois de conservation avec terme source de la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot F(v) = S(v), \quad (1.5)$$

où $v \in \mathbb{R}^m$ est défini sur $\Omega \times [0, T] \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. On appelle en général «variables conservatives» les composantes de v . La divergence du flux physique $F(v)$ est notée $\nabla \cdot F(v)$ et définie par :

$$\nabla \cdot F(v) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial F_j(v)}{\partial x_j}, \quad (1.6)$$

chacun des F_j prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^m .

1.4.1 Définition et propriétés

La méthode des volumes finis co-localisés consiste à trouver l'évolution temporelle de la valeur moyenne de v sur un volume, dit «volume de contrôle», $K \subset \Omega$, c'est-à-dire de :

$$v_K \equiv \frac{1}{|K|} \int_K v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

où l'on a noté $|K|$ la mesure du volume K .

L'intégration de (1.5), après utilisation de la formule de Green donne alors :

$$|K| \frac{dv_K}{dt} + \int_{\partial K} F(v(\mathbf{x}, t)) \cdot \nu ds = \int_K S(v(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}, \quad (1.7)$$

où ∂K est la frontière du volume K et ν le vecteur unitaire normal à cette frontière, orienté vers l'extérieur.

L'évolution de v_K résulte donc de la contribution des flux sortant du volume K , et du terme source $S(v)$ dans K .

La formulation (1.7) n'impose aucune contrainte quant à la complexité du volume de contrôle K considéré. Celui-ci peut donc être, *a priori*, quelconque, voir la Figure 1.1. En pratique, on considère des volumes de contrôle polygonaux, et on travaille volontiers sur des maillages dits conformes au sens des éléments finis : on suppose donné un recouvrement \mathcal{T} de Ω par des volumes K polygonaux (des triangles, par exemple, voir Figure 1.2) :

$$\Omega = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} K,$$

tel que, pour deux éléments K et L distincts de \mathcal{T} , l'intersection $K \cap L$ soit : l'ensemble vide, un sommet, ou bien une arête commune à K et à L .

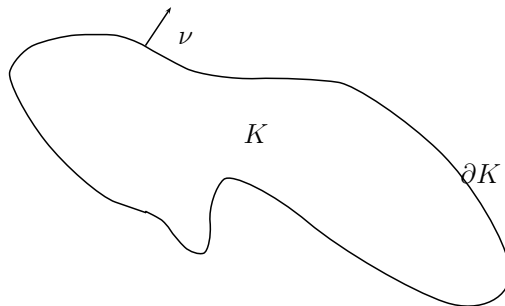


FIGURE 1.1 – Volume de contrôle

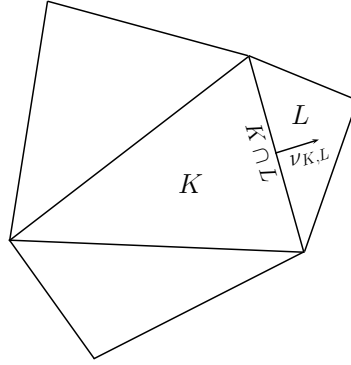


FIGURE 1.2 – Volumes de contrôles triangulaires

La relation (1.7) devient :

$$|K| \frac{dv_K}{dt} + \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{K \cap L} F(v) \cdot \nu_{K,L} ds = \int_K S(v(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}. \quad (1.8)$$

Ici, $\mathcal{N}(K)$ désigne le voisinage du volume K dans le maillage.

La valeur de v sur les interfaces n'étant, en général, pas connue, tout l'art de la méthode des volumes finis consiste à donner une approximation des flux d'interface

$$\int_{K \cap L} F(v) \cdot \nu_{K,L} ds$$

ne dépendant que des valeurs moyennes de v sur les volumes de contrôle de telle sorte à vérifier un certain nombre de « bonnes » propriétés :

1. la consistance (Définition 2 page 25),
2. le caractère conservatif (Définition 1 page 24),
3. la stabilité numérique (Définition 6 page 29),

pour lesquelles nous donnerons un sens plus loin.

Pour ce faire, il est généralement introduit une fonction ϕ , dite de flux numérique, telle que :

$$\int_{K \cap L} F(v) \cdot \nu_{K,L} ds \approx |K \cap L| \phi(v_K, v_L, \nu_{K,L}).$$

On parle alors de fonction de flux à deux points, pour signifier que le flux sur l'interface $K \cap L$ ne dépend que des valeurs de v prises de part et d'autre : v_K et v_L .

On définit la propriété de conservation :

Définition 1 (Propriété de conservation) *La fonction de flux ϕ satisfait la propriété de conservation si, pour tous volumes K et L on a :*

$$\phi(v_K, v_L, \nu_{K,L}) = -\phi(v_L, v_K, -\nu_{K,L}).$$

Imaginons qu'un «observateur» se situe dans le volume K , et un autre dans le volume L . Cette propriété signifie simplement que les deux observateurs «voient» le même flux traverser l'interface $K \cap L$ séparant les volumes K et L . Cette propriété permet notamment de ne définir qu'un flux par interface.

La consistance est définie par :

Définition 2 (Consistance) *La fonction de flux ϕ satisfait la propriété de consistance si, pour tous v et ν on a :*

$$\phi(v, v, \nu) = F(v) \cdot \nu.$$

1.4.2 Discrétisation des flux d'interface, méthode VFFC

Les méthodes volumes finis diffèrent les unes des autres par le choix de l'approximation numérique des flux d'interface. La méthode VFFC (Volumes Finis à Flux Caractéristiques, [29]) est de type «décentrée amont», et donne une valeur sur l'interface, en tenant compte de la direction de propagation des informations de part et d'autre de cette interface.

Nous allons présenter la construction du schéma VFFC, en considérant (1.5) (on laisse de côté le terme source), récrit localement sur une interface (ou une hypersurface en dimension supérieure à deux) de normale ν . L'opérateur de divergence est invariant par changement de repère orthonormal direct (voir, par exemple, Dafermos [20] section 1.3) et possède une contribution suivant ν , ainsi qu'une contribution suivant l'hyperplan orthogonal à ν , noté ν^\perp :

$$\nabla \cdot F(v) = \nu \cdot \nabla(F(v) \cdot \nu) + \nabla_{\nu^\perp} \cdot F(v), \quad (1.9)$$

la seconde contribution pouvant être négligée si l'on considère que v est constant de part et d'autre de l'hypersurface.

Au voisinage de $K \cap L$, l'équation de conservation (1.5) se réduit donc à :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nu \cdot \nabla(F(v) \cdot \nu) = 0. \quad (1.10)$$

Pour des raisons de facilité de lecture, on récrit (1.10) sous la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(F(v) \cdot \nu)}{\partial x} = 0, \quad (1.11)$$

étant entendu que $\frac{\partial}{\partial x}$ désigne l'opérateur de dérivée suivant la normale ν :

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \nu \cdot \nabla.$$

On définit la matrice jacobienne du système (1.11) :

Définition 3 La matrice jacobienne du système (1.11) est notée $A(v, \nu)$ et est définie par :

$$A(v, \nu) \equiv \frac{\partial(F(v) \cdot \nu)}{\partial v}, \quad (1.12)$$

ou encore :

$$A(v, \nu) \equiv \sum_{j=1}^d \nu_j \frac{\partial F_j(v)}{\partial v}, \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d). \quad (1.13)$$

On peut alors récrire (1.11) sous forme quasi-linéaire :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(v, \nu) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.14)$$

La méthode VFFC consiste essentiellement à remarquer qu'en multipliant (1.11) à gauche par $A(v, \nu)$, on obtient :

$$\frac{\partial(F(v) \cdot \nu)}{\partial t} + A(v, \nu) \frac{\partial(F(v) \cdot \nu)}{\partial x} = 0, \quad (1.15)$$

ce qui signifie que le flux normal $F(v) \cdot \nu$ est convecté, au même titre que la variable v , par la matrice $A(v, \nu)$. Lorsque le système (1.11) est «régulièrement hyperbolique», c'est-à-dire lorsqu'il existe une base $(r_1(v, \nu), r_2(v, \nu), \dots, r_m(v, \nu))$ de \mathbb{R}^m :

$$\forall 1 \leq k \leq m, \quad \exists \lambda_k(v, \nu), \quad A(v, \nu) r_k(v, \nu) = \lambda_k(v, \nu) r_k(v, \nu),$$

où les $\lambda_k(v, \nu)$ et les $r_k(v, \nu)$ sont des fonctions régulières de v , on peut construire une base, dite duale, $(\ell_1(v, \nu), \ell_2(v, \nu), \dots, \ell_m(v, \nu))$ constituée de vecteurs propres à gauche pour $A(v, \nu)$:

$$\forall 1 \leq k \leq m, \quad {}^t A(v, \nu) \ell_k(v, \nu) = \lambda_k(v, \nu) \ell_k(v, \nu),$$

avec la normalisation :

$$\forall 1 \leq k, p \leq m, \quad \ell_k(v, \nu) \cdot r_p(v, \nu) = \delta_{k,p}.$$

On linéarise alors (1.15) autour d'un état μ :

$$\frac{\partial(F(v) \cdot \nu)}{\partial t} + A(\mu, \nu) \frac{\partial(F(v) \cdot \nu)}{\partial x} = 0, \quad (1.16)$$

et posant $f_k(v, \nu) \equiv \ell_k(\mu, \nu)(F(v) \cdot \nu)$, on obtient :

$$\forall 1 \leq k \leq m, \quad \frac{\partial f_k(v, \nu)}{\partial t} + \lambda_k(\mu, \nu) \frac{\partial f_k(v, \nu)}{\partial x} = 0.$$

Chacune de ces équations d'advection 1D scalaires peut être résolue par la méthode des caractéristiques :

- si $\lambda_k(\mu, \nu) > 0$, alors $\ell_k(\mu, \nu) \cdot \phi(v, w, \mu, \nu) = f_k(v, \nu)$;
- si $\lambda_k(\mu, \nu) < 0$, alors $\ell_k(\mu, \nu) \cdot \phi(v, w, \mu, \nu) = f_k(w, \nu)$;

– si $\lambda_k(\mu, \nu) = 0$, alors $\ell_k(\mu, \nu) \cdot \phi(v, w, \mu, \nu) = \frac{f_k(v, \nu) + f_k(w, \nu)}{2}$,
que l'on peut synthétiser en écrivant :

$$\begin{aligned} \phi(v, w, \mu, \nu) &= \sum_{\lambda_k(\mu, \nu) < 0} \ell_k(\mu, \nu) \cdot (F(w) \cdot \nu) r_k(\mu, \nu) \\ &+ \sum_{\lambda_k(\mu, \nu) = 0} \left(\ell_k(\mu, \nu) \cdot \frac{(F(w) \cdot \nu) + (F(v) \cdot \nu)}{2} \right) r_k(\mu, \nu) \\ &+ \sum_{\lambda_k(\mu, \nu) > 0} \ell_k(\mu, \nu) \cdot (F(v) \cdot \nu) r_k(\mu, \nu). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ghidaglia *et al.* [29] récrivent alors cette dernière relation sous la forme :

$$\phi(v_K, v_L, \mu_{K,L}, \nu_{K,L}) = \frac{F(v_K) + F(v_L)}{2} \cdot \nu_{K,L} - \text{sign}(A(\mu_{K,L}, \nu_{K,L})) \frac{F(v_K) - F(v_L)}{2} \cdot \nu_{K,L}, \quad (1.18)$$

la valeur $\mu_{K,L}$ étant une moyenne de v_K et v_L ne dépendant que de la géométrie des volumes K et L , par exemple :

$$\mu_{K,L} = \frac{|K|v_K + |L|v_L}{|K| + |L|}.$$

La matrice signe est définie par :

Définition 4 (Matrice signe) *Si A désigne un élément de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, diagonalisable sur \mathbb{R} , A s'écrit :*

$$A = R\Lambda L,$$

avec R la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres à droite de A , L la matrice dont les lignes sont les vecteurs propres à gauche de A , Λ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice signe de A , $\text{sign}(A)$ est définie par :

$$\text{sign}(A) = R\text{sign}(\Lambda)L,$$

où :

$$\text{sign}(\Lambda) \equiv \begin{pmatrix} \text{sign}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \text{sign}(\lambda_N) \end{pmatrix}.$$

La fonction sign valant $+1$, -1 ou 0 pour un scalaire.

Le schéma VFFC appartient à une classe de schémas plus vastes introduite par Ghidaglia [27] appelée «schémas de flux» conformément à la définition suivante :

Définition 5 (Schéma de flux) *Le flux numérique ϕ correspond à un schéma de flux s'il existe une matrice $U(v, w; K, L)$ telle que :*

$$\phi(u, w; K, L) = \frac{F(v) + F(w)}{2} \cdot \nu_{K,L} - U(v, w; K, L) \frac{F(w) - F(v)}{2} \cdot \nu_{K,L}. \quad (1.19)$$

Le schéma de Roe [72], notamment, est un schéma de flux.

1.4.3 Discrétisations en temps, conditions de stabilité

La donnée d'une fonction de flux ϕ réduit la résolution de (1.5) à celle d'une équation différentielle ordinaire (EDO) pour les inconnues v_K , comme le montre la relation (1.8). Une grande variété de méthodes existent alors pour résoudre (1.8).

Dans ce mémoire, nous ne considérerons que les plus simples d'entre elles : le schéma d'Euler explicite, et le schéma d'Euler implicite.

Le premier donne lieu à :

$$|K| \frac{v_K^{n+1} - v_K^n}{\Delta t^n} + \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \phi(v_K^n, v_L^n, \nu_{K,L}) = S_K^n, \quad (1.20)$$

tandis que le second s'écrit :

$$|K| \frac{v_K^{n+1} - v_K^n}{\Delta t^n} + \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \phi(v_K^{n+1}, v_L^{n+1}, \nu_{K,L}) = S_K^n. \quad (1.21)$$

Chaque schéma (explicite ou implicite) possède ses avantages et ses inconvénients. Les schémas explicites sont en général peu diffusifs, et «simples» à mettre en œuvre dans la mesure où les valeurs de v_K au temps $n + 1$ se déduisent de celles au temps n . Un de leurs inconvénients, en revanche, est qu'ils ne sont stables (voir la Définition 6 page 29) que sous certaines conditions que doit vérifier le pas de temps Δt^n . Les schémas implicites, au contraire, sont plus diffusifs et difficiles à mettre en œuvre puisqu'ils nécessitent l'utilisation d'un solveur non linéaire. Leur atout majeur est d'être plus robustes que les schémas explicites : ils sont en général plus stables.

Pour préciser les idées, donnons la définition suivante :

Définition 6 (Stabilité numérique d'un schéma) *On considère un schéma défini par une donnée initiale v^0 et un opérateur $\mathcal{S}_{\Delta t}$ permettant de passer des valeurs v^n à v^{n+1} en un pas de temps Δt :*

$$v^{n+1} = \mathcal{S}_{\Delta t} v^n. \quad (1.22)$$

On dit que le schéma (1.22) est stable au sens de la norme $\|\cdot\|$ lorsque l'on a :

$$\|\mathcal{S}_{\Delta t}^n\| \leq C, \quad (1.23)$$

pour un scalaire C donné, et ce quel que soit n . On a noté :

$$\mathcal{S}_{\Delta t}^n = \underbrace{\mathcal{S}_{\Delta t} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{\Delta t}}_{n \text{ fois}}. \quad (1.24)$$

Pour des schémas du type (1.20), une analyse de stabilité linéaire (utilisant par exemple l'analyse de Von Neumann (voir [78] pour plus de détails)) mène à une condition de stabilité numérique de la forme :

$$\max \left(|\lambda_k| \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i} \right) \leq CFL. \quad (1.25)$$

Ici, CFL désigne une constante.

Courant et Friedrichs ont montré que dans le cas de l'équation d'advection :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

et de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

qui sont toutes deux redevables du formalisme (1.5), une condition nécessaire pour la stabilité de tout schéma explicite est $CFL \leq 1$ (voir Strikwerda [78]). Par ailleurs, selon le schéma, une condition suffisante de stabilité est en général du type $CFL \leq \theta$, avec $\theta \in]0, 1]$.

1.4.4 Discrétisation des conditions aux limites

Lorsqu'un volume de contrôle K possède une frontière commune avec le bord $\partial\Omega$ du domaine de calcul Ω , la formule (1.18) ne s'applique plus, dans la mesure où K n'a pas de «vis-à-vis» à l'extérieur du domaine. De plus, le fait d'imposer la valeur du flux numérique sur un bord qui correspondrait à un flux physique, ou à une valeur donnée de la variable v conduit la plupart du temps à des instabilités.

Ghidaglia et Pascal [30] décrivent le traitement des conditions aux limites dans le cadre de la méthode VFFC, par une analyse sur les caractéristiques entrantes et sortantes du domaine, pour chaque type de condition aux limites, et pour un certain nombre de systèmes de lois de conservation, en particulier pour les équations d'Euler.

Les principales conditions aux limites traitées dans [30] sont les conditions de type «fluides», lorsque du fluide peut passer à travers la frontière $\partial\Omega$, et «paroi» lorsque $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ le long de $\partial\Omega$.

1.5 Description de la méthode VFFC-NIP

La méthode VFFC-NIP, ou VFFC-ENIP, pour «Volumes Finis à Flux caractéristiques - (Enhanced) Natural Interface Positioning», a été développée à partir de 2007 par J.-P. Braeunig lors de sa thèse [7]. On réfère également à J.-P. Braeunig *et al.* [9].

Dans cette section, nous considérons le contexte originel de développement de la méthode VFFC-ENIP, c'est-à-dire celui d'écoulements de fluides parfaits, vérifiant les équations d'Euler compressibles :

Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.26)$$

Équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pI) = 0. \quad (1.27)$$

Équation de conservation de l'énergie totale :

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p)\mathbf{u}) = 0. \quad (1.28)$$

Les notations utilisées sont les suivantes : ρ désigne la masse volumique, \mathbf{u} le champ de vitesse, E l'énergie spécifique totale, somme de l'énergie interne spécifique e et de l'énergie cinétique spécifique $0.5\|\mathbf{u}\|^2$. La pression p est obtenue par une équation d'état : $EOS(p, \rho, e) = 0$, chaque matériau ayant sa propre équation d'état.

Dans la suite, nous mettrons à profit le formalisme introduit dans la Section 1.4 en récrivant (1.26), (1.27) et (1.28) sous la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot F(v) = 0, \quad (1.29)$$

où v désigne le vecteur des variables «conservées» :

$$v = (\rho, \rho \mathbf{u}, \rho E),$$

et $F(v)$ est la matrice de flux telle que le flux normal dans la direction $\boldsymbol{\nu}$ est donnée par :

$$F(v) \cdot \boldsymbol{\nu} = (\rho(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}), \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}) + p\boldsymbol{\nu}, (\rho E + p)(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu})).$$

Avant d'entrer plus en détail dans les explications, précisons que la méthode est capable de traiter des écoulements 2D et 3D (l'extension au 3D a été implantée dans le cadre de cette thèse, voir le Chapitre 5) sur des maillages cartésiens. La structure de données de la méthode inclut une fonction fraction volumique discrète par matériau qui, dans une cellule (i, j, k) du maillage cartésien indique la proportion de chacun matériau qui y est présent. On parle de cellule, ou maille, pure lorsqu'un matériau et un seul est présent (la fonction fraction volumique du matériau en question vaut 1 et toutes les autres valent strictement 0). Au contraire, les mailles dans lesquelles plusieurs matériaux sont présents s'appellent des cellules, ou mailles, mixtes. A chaque cellule mixte sont alors associés :

- le nombre de matériaux présents ;
- les fractions volumiques correspondantes ;
- la valeur de la variable v pour chaque matériau.

Dans les mailles mixtes, des interfaces sont «reconstruites» par la méthode de Youngs [89], qui séparent les matériaux les uns des autres. L'évolution des grandeurs dans chaque matériau d'une cellule mixte se fait par le calcul de flux numériques, notamment à travers les interfaces séparant les matériaux.

1.5.1 Maillage et discrétisation de l'interface

Le parti adopté dans la méthode VFFC-ENIP est de pouvoir traiter des écoulements à deux matériaux, dans des situations où les matériaux en question ont des géométries arbitraires. En particulier l'interface n'est pas une courbe régulière en général, et ce même lorsque la situation initiale est extrêmement simple. On le constate, entre autres, lors de l'apparition d'instabilités hydrodynamiques, comme sur la Figure 1.3 représentant l'évolution de l'interface due au développement d'une instabilité de type Richtmyer-Meshkov.



FIGURE 1.3 – Evolution de l’interface, instabilité de Richtmyer-Meshkov. Image extraite de [7].

Dans le cadre de la méthode VFFC-ENIP, nous considérons des maillages cartésiens. Dans une maille mixte, les interfaces sont alors représentées par des segments de droite, voir la Figure 1.4.

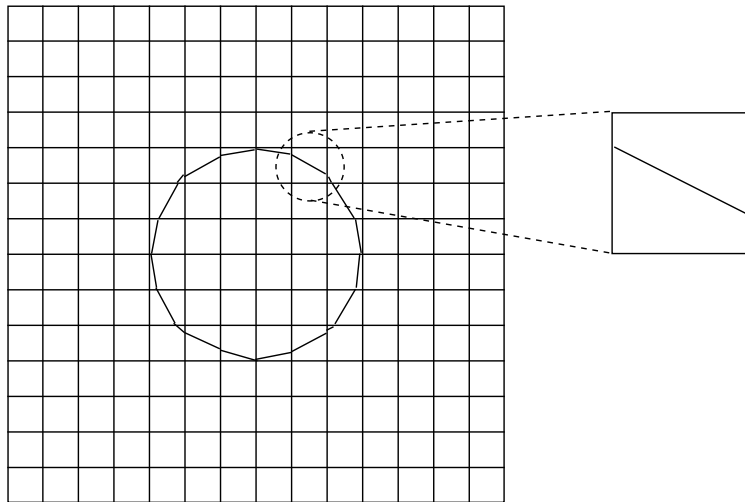


FIGURE 1.4 – Représentation discrète d’un cercle sur un maillage cartésien.

1.5.2 Splitting directionnel

Le schéma VFFC-ENIP tire pleinement parti du caractère cartésien du maillage sur lequel on travaille. Ainsi, le système (1.29) est résolu en 2D par un schéma à pas fractionnaire, qui consiste à décomposer (1.29) sous la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(F(v) \cdot e_x)}{\partial x} + \frac{\partial(F(v) \cdot e_y)}{\partial y} = 0, \quad (1.30)$$

que l'on résout avec un splitting de type Strang (méthode d'ordre 2) :
on note $\mathcal{S}_x^{\Delta t} v^0$ la solution de

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F(v) \cdot e_x}{\partial x} = 0, \quad v(x, y, t = 0) = v^0(x, y), \quad (1.31)$$

au temps Δt , et
 $\mathcal{S}_y^{\Delta t} v^0$ la solution de

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F(v) \cdot e_y}{\partial y} = 0, \quad v(x, y, t = 0) = v^0(x, y), \quad (1.32)$$

au temps Δt .

Le splitting de Strang consiste à approcher la solution $v(x, y, \Delta t)$ de (1.29) au temps Δt par :

$$\tilde{v}(x, y, \Delta t) = \mathcal{S}_x^{\Delta t/2} \mathcal{S}_y^{\Delta t} \mathcal{S}_x^{\Delta t/2} v^0.$$

Cette décomposition permet de se ramener, sans perte de généralité, à une description 1D du schéma dans laquelle l'évolution en temps est calculée ligne par ligne du maillage pour l'opérateur de dérivée par rapport à x , puis colonne par colonne du maillage pour l'opérateur de dérivée en y .

Nous parlerons de «direction x » pour signifier que l'on se situe dans l'étape correspondant à la résolution de (1.31), de «direction y » pour signifier que l'on se situe dans l'étape correspondant à la résolution de (1.32). Le cas échéant, «la direction z » désignera l'étape de résolution de (1.29) correspondant à la dérivée par rapport à z . Enfin, nous parlerons de «direction générique x » pour signifier que l'on se situe dans l'une ou l'autre des directions x , y ou z . Une «ligne générique de la direction x » correspond alors à une ligne pour l'étape de résolution dans la direction x , ou à une colonne pour l'étape de résolution dans la direction y .

La Figure 1.5 illustre la notion de «ligne générique».

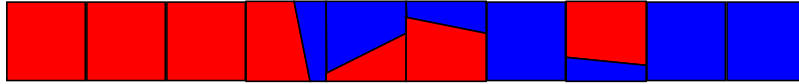


FIGURE 1.5 – Illustration d'une ligne générique, les couleurs représentent des fluides différents

1.5.3 Le modèle du condensat

Nous nous plaçons le long d'une ligne générique dans la direction x . À ce stade, cette ligne consiste en une juxtaposition de mailles pures et de mailles mixtes. Le cahier des charges est alors le suivant :

- permettre l'écriture d'un schéma robuste sans restriction de pas de temps provenant de la taille, éventuellement faible, des volumes partiels des matériaux dans les mailles mixtes ;
- permettre le passage d'une interface d'une maille mixte vers une autre maille (mixte ou non) ;
- permettre la prise en compte de plusieurs mailles mixtes adjacentes.

Le modèle du condensat est la réponse apportée par Braeunig *et al.* [9, 7] à ce cahier des charges.

Un condensat est une structure 1D consistant en la juxtaposition de couches de matériaux alternés, séparés par une interface. La construction d'un condensat s'opère de la manière suivante : on parcourt les mailles dans la ligne générique de la direction x jusqu'à rencontrer une maille mixte. Notons, par exemple i son indice en numérotation locale à la ligne. Au sein de cette maille, chaque matériau présent donne lieu à une couche du condensat. Pour cette couche, le volume sera celui du matériau correspondant et on lui associe la valeur correspondante de la variable v . Le matériau situé le plus à droite dans la maille i (voir la Remarque 2 page 34 sur l'ordre des matériaux dans une maille mixte) est comparé au matériau le plus à gauche dans la maille $i + 1$. Si les matériaux sont distincts, deux couches supplémentaires sont créées dans le condensat. Si, au contraire, les matériaux sont identiques, une seule couche est créée dans le condensat, dont le volume est la somme des volumes correspondants, notons les par exemple Vol_1 et Vol_2 . La valeur de la variable v retenue pour cette couche est alors donnée par :

$$v \equiv \frac{Vol_1 v_1 + Vol_2 v_2}{Vol_1 + Vol_2}.$$

Cette opération s'achève à la première maille pure rencontrée, et le premier condensat est alors créé. On répète le procédé jusqu'à aboutir à la fin de la ligne générique x .

La construction d'un condensat est illustrée sur la Figure 1.6

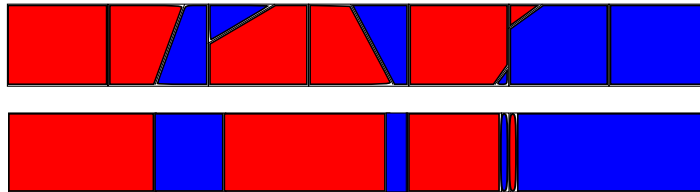


FIGURE 1.6 – Construction d'un condensat

Remarque 2 Lorsque deux matériaux sont présents dans une maille mixte, leur ordre est prescrit par la normale à l'interface les séparant. Dans la direction x , si la normale ν est orientée du matériau 1 vers le matériau 2, le matériau 1 est à gauche lorsque $\nu \cdot e_x \geq 0$, à droite sinon. L'ordre dans la direction y est, quant à lui, donné par le signe de $\nu \cdot e_y$.

Le condensat est donc une représentation dans laquelle les couches sont pures et de volumes variables. A chacune d'entre elles sont associés une valeur de la variable v et un volume. Les interfaces ont une représentation 1D (elles sont «verticales»), mais on leur associe la valeur du vecteur normal 2D (ou 3D) qui leur correspond.

1.5.4 Description 1D du schéma

Nous nous plaçons le long d'une ligne générique de la direction x , et supposons tous les condensats construits, selon la méthode présentée dans le paragraphe précédent, de sorte qu'on aboutit à une situation similaire à celle représentée sur la figure 1.7.



FIGURE 1.7 – Ligne générique. Les condensats ont été construits, les interfaces en trait plein séparent deux couches d'un même fluide, celles en trait pointillé séparent les couches de fluides distincts.

Pour plus de clarté dans les écritures, les indices j et k seront omis : la maille i désignera la maille d'indice i, j, k .

On note N le nombre de volumes de contrôle K_i qui constituent la ligne générique x .

Formulation volumes finis

L'intégration de (1.29) sur un volume $K_i(t)$ donne lieu au système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\frac{dV_{K_i}}{dt} + (A_{i+1/2}\phi(v_{i+1}, v_i) - A_{i-1/2}\phi(v_i, v_{i-1})) = 0, \quad (1.33)$$

où $V_{K_i} = \int_{K_i(t)} v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$, $\phi(v_{i+1}, v_i)$ désigne le flux numérique sur l'interface séparant les volumes K_i et K_{i+1} . La longueur de l'interface située à $x_{i+1/2} \equiv \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ est, elle, notée $A_{i+1/2}$.

On distingue deux types d'interfaces. Les interfaces eulériennes séparent deux couches de la ligne générique x constituées des mêmes matériaux, elle ne se déplacent pas. Les interfaces lagrangiennes, provenant de l'intérieur des condensats, séparent les couches de matériaux distincts, elles peuvent se déplacer au cours du temps. À chacun de ces deux types d'interface correspond un flux numérique : eulérien pour les interfaces eulériennes, et lagrangien pour les interfaces lagrangiennes. Le calcul de ces flux est détaillé à présent.

Calcul des flux eulériens

Le calcul des flux eulériens se fait par la méthode VFFC [29]. Le flux numérique est alors donné par :

$$\phi(v, w, \nu) = \frac{F(v) + F(w)}{2} \cdot \nu - \mathcal{U}(u, v, \nu) \frac{F(w) - F(v)}{2} \cdot \nu. \quad (1.34)$$

Ici, $\nu = e_x$ pour la direction générique x , et $\mathcal{U}(u, v, \nu)$ est la matrice de signe de la jacobienne $\frac{\partial F(v) \cdot \nu}{\partial v}$ au sens de la Définition 4 page 27.

Nous n'entrons pas dans les détails du calcul de la matrice signe intervenant dans (1.34), ils seront maintes fois répétés au cours des chapitres suivants. Notons simplement que, dans le cas des équations d'Euler la matrice jacobienne du flux normal est donnée par :

$$A(v, \nu) = \begin{pmatrix} 0 & \nu & 0 \\ K\nu - (u \cdot \nu)u & u \otimes \nu - k\nu \otimes u + (u \cdot \nu)I & k\nu \\ (K - H)(u \cdot \nu) & H\nu - k(u \cdot \nu)u & (1 + k)(u \cdot \nu) \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

avec $k = \frac{1}{\rho T} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho$, $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$, $H = E + \frac{p}{\rho}$, $K = c^2 + k(\|\mathbf{u}\|^2 - H)$.

Les valeurs propres de $A(v, \nu)$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_1(v, \nu) = (u \cdot \nu) - |\nu|c, \\ \lambda_2(v, \nu) = (u \cdot \nu), \\ \vdots = \vdots \\ \lambda_{d+1}(v, \nu) = (u \cdot \nu), \\ \lambda_{d+2}(v, \nu) = (u \cdot \nu) + |\nu|c. \end{cases} \quad (1.36)$$

Les vecteurs propres à droite peuvent être définis comme suit :

$$\begin{cases} r_1(v, \nu) = {}^t \left(1, u - c \frac{\nu}{|\nu|}, H - u \cdot \frac{\nu}{|\nu|} c \right), \\ r_{d+2}(v, \nu) = {}^t \left(1, u + c \frac{\nu}{|\nu|}, H + u \cdot \frac{\nu}{|\nu|} c \right), \\ r_2(v, \nu) = {}^t \left(1, u, H - \frac{c^2}{k} \right), \\ r_3(v, \nu) = {}^t (0, \nu_2^\perp, u \cdot \nu_2^\perp), \\ \vdots = \vdots \\ r_{d+1}(v, \nu) = {}^t (0, \nu_d^\perp, u \cdot \nu_d^\perp). \end{cases} \quad (1.37)$$

Enfin, la base duale est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_1(v, \nu) = \frac{1}{2c^2} \left(K + \frac{u \cdot \nu}{|\nu|} c, -ku - \frac{\nu}{|\nu|} c, k \right), \\ \ell_{d+2}(v, \nu) = \frac{1}{2c^2} \left(K - \frac{u \cdot \nu}{|\nu|} c, -ku + \frac{\nu}{|\nu|} c, k \right), \\ \ell_2(v, \nu) = \frac{k}{c^2} (H - |u|^2, u, -1), \\ \ell_3(v, \nu) = (-u \cdot \nu_2^\perp, \nu_2^\perp, 0), \\ \vdots = \vdots \\ \ell_{d+1}(v, \nu) = (-u \cdot \nu_d^\perp, \nu_d^\perp, 0), \end{array} \right. \quad (1.38)$$

d étant la dimension de l'espace physique, et $\nu_2^\perp, \dots, \nu_d^\perp$ est une base orthonormale de l'hyperplan orthogonal à ν .

Calcul des flux lagrangiens

Lorsqu'une interface Γ se déplace au cours du temps, le flux correspondant est appelé flux lagrangien et n'est plus $\int_\Gamma F(v) \cdot \nu d\sigma$. En utilisant le théorème de transport de Reynolds (voir par exemple [13]) pour l'intégration de (4.4) sur un volume $K(t)$ dépendant du temps, on obtient :

$$\int_{K(t)} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot F(v) \right) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{K(t)} v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial K(t)} (F(v) \cdot \nu - v(\mathbf{x}, t)(\mathbf{u} \cdot \nu)) d\sigma. \quad (1.39)$$

Dans le cas des équations d'Euler, le flux $F(v) \cdot \nu$ peut se décomposer sous la forme :

$$F(v) \cdot \nu = (\mathbf{u} \cdot \nu)v + p \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \\ \mathbf{u} \cdot \nu \end{pmatrix},$$

si bien que le flux correspondant aux interfaces lagrangiennes se trouve être égal à :

$$p \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \\ \mathbf{u} \cdot \nu \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Une approximation des valeurs pour la pression et la vitesse d'interface doit être donnée.

On considère alors les équations d'Euler isentropiques 1D écrites en variables lagrangiennes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tau}{dt} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \\ \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \\ \frac{ds}{dt} = 0, \end{array} \right. \quad (1.41)$$

où l'on a noté $\tau \equiv \frac{1}{\rho}$ le volume spécifique, $\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial m}$, et introduit la variable de masse m telle que $dm = \rho dx$.

Ce système se réécrit sous forme quasi-linéaire dans les variables (p, u, s) sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} + \rho^2 c^2 \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \\ \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \\ \frac{ds}{dt} = 0, \end{cases} \quad (1.42)$$

soit :

$$\frac{dw}{dt} + A(w) \frac{\partial w}{\partial m} = 0, \quad (1.43)$$

la matrice $A(w)$ étant donnée par :

$$A(w) = \begin{pmatrix} 0 & \rho^2 c^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Avant de continuer, faisons un aparté sur la notion de pseudo-invariant de Riemann. Considérons un système d'équations aux dérivées partielles linéaire de la forme :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A \frac{\partial w}{\partial m} = 0, \quad (1.45)$$

où A est supposée diagonalisable sur \mathbb{R} . On se donne ℓ_k , un vecteur propre à gauche de A , relatif à la valeur propre λ_k , c'est-à-dire :

$$\ell_k \neq 0, \quad {}^t A \ell_k = \lambda_k \ell_k.$$

On note $W_k(m, t) \equiv \ell_k \cdot w(m, t)$, on a alors le résultat suivant :

Proposition 1 *La fonction scalaire W_k satisfait à l'équation d'advection linéaire suivante :*

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial W_k}{\partial m} = 0. \quad (1.46)$$

Par conséquent, W_k est constante le long des courbes $\xi = m - \lambda_k t$:

$$\frac{d\widetilde{W}_k}{d\xi} = 0, \quad (1.47)$$

où l'on a noté $\widetilde{W}_k(\xi) = W_k(m - \lambda_k t)$.

On donne alors la définition :

Définition 7 (pseudo-invariant de Riemann) *La fonction W_k est appelée pseudo-invariant de Riemann.*

Nous allons utiliser cette notion pour approcher les valeurs de la pression et de la vitesse sur une interface. On considère alors une interface lagrangienne située en $x_{i+1/2} \equiv \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, séparant deux volumes i et $i + 1$ de tailles éventuellement différentes. On linéarise (1.43) de part et d'autre de l'interface, dans la cellule i et dans la cellule $i + 1$, de sorte à obtenir dans la couche i :

$$\frac{dw}{dt} + A(w_i) \frac{\partial w}{\partial m} = 0, \quad (1.48)$$

et dans la couche $i + 1$:

$$\frac{dw}{dt} + A(w_{i+1}) \frac{\partial w}{\partial m} = 0. \quad (1.49)$$

L'idée est de construire des invariants de Riemann pour chacun de ces deux systèmes et d'exploiter la relation (1.47) de sorte à en déduire leurs valeurs sur l'interface que l'on considère.

La matrice $A(w)$ donnée en (1.44) possède trois valeurs propres : la valeur propre zéro, la valeur propre négative $-\rho c$ et la valeur propre positive ρc . Nous allons retenir, pour le système (1.48), qui correspond à la linéarisation de (1.43) à gauche de l'interface $i + 1/2$, un pseudo-invariant de Riemann pour la valeur propre positive ρc (associé, donc, aux informations se propageant vers l'interface). Au contraire, pour le système (1.49), qui correspond à la linéarisation de (1.43) à droite de l'interface $i + 1/2$, nous allons retenir un pseudo-invariant de Riemann pour la valeur propre négative $-\rho c$ (associé, donc, aux informations se propageant vers l'interface).

Proposition 2 *Pour le système (1.48), la quantité :*

$$p + \rho_i c_i u$$

est un pseudo-invariant de Riemann correspondant à la valeur propre ρc .

Pour le système (1.49), la quantité :

$$p - \rho_i c_i u$$

est un pseudo-invariant de Riemann correspondant à la valeur propre $-\rho c$.

La quantité $p_i + \rho_i c_i u_i$ est donc advectée de la cellule i vers l'interface, de sorte à obtenir une première relation pour $p_{i+1/2}$ et $u_{i+1/2}$, respectivement pression et vitesse d'interface :

$$p_i + \rho_i c_i u_i = p_{i+1/2} + \rho_i c_i u_{i+1/2}, \quad (1.50)$$

tandis que la quantité $p_{i+1} - \rho_{i+1} c_{i+1} u_{i+1}$ est advectée de la cellule $i + 1$ vers l'interface, donnant une seconde relation :

$$p_{i+1} + \rho_{i+1}c_{i+1}u_{i+1} = p_{i+1/2} - \rho_{i+1}c_{i+1}u_{i+1/2}. \quad (1.51)$$

Les relations (1.50) et (1.51) constituent un système 2×2 linéaire qui se résout en :

$$p_{i+1/2}^n = \frac{\mu_i^n p_{i+1}^n + \mu_{i+1}^n p_i^n}{\mu_i^n + \mu_{i+1}^n} - \mu_i^n \mu_{i+1}^n \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\mu_i^n + \mu_{i+1}^n}, \quad (1.52)$$

et :

$$u_{i+1/2}^n = \frac{\mu_i^n u_i^n + \mu_{i+1}^n u_{i+1}^n}{\mu_i^n + \mu_{i+1}^n} - \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\mu_i^n + \mu_{i+1}^n}, \quad (1.53)$$

où l'on a noté $\mu_i \equiv \rho_i c_i$.

Notons que ces relations correspondent à celle du solveur acoustique de Godunov [70].

Valeur des pressions et des vitesses d'interface en 2D/3D

Le modèle de condensat est entièrement mono-dimensionnel. Les valeurs des pressions (1.52) et des vitesses (1.53) sont elles aussi des valeurs 1D. La prise en compte du caractère multi-dimensionnel de l'écoulement se fait par la réécriture de (1.52) et (1.53) dans la direction de la normale $\nu_{i+1/2}$ à l'interface. Braeunig *et al.* [9, 7] définissent alors, pour la direction générique x , les vitesses et pressions d'interface de la manière suivante :

$$p_{i+1/2}^n = \frac{\mu_i^n p_{i+1}^n + \mu_{i+1}^n p_i^n}{\mu_i^n + \mu_{i+1}^n} - \mu_i^n \mu_{i+1}^n \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\mu_i^n + \mu_{i+1}^n} \cdot \nu_{i+1/2} (\nu_{i+1/2} \cdot e_x), \quad (1.54)$$

et :

$$u_{i+1/2}^n = \frac{\mu_i^n u_i^n + \mu_{i+1}^n u_{i+1}^n}{\mu_i^n + \mu_{i+1}^n} \cdot e_x - \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\mu_i^n + \mu_{i+1}^n} (\nu_{i+1/2} \cdot e_x). \quad (1.55)$$

Équation d'évolution des volumes

En intégrant la fonction constante égale à 1 dans chacun des volumes $K_i(t)$ de la ligne générique x , on trouve l'EDO satisfaite par le volume :

$$\frac{d|K_i|}{dt} + \left(A_{i+1/2} \phi^{vol}(v_{i+1}, v_i) - A_{i-1/2} \phi^{vol}(v_i, v_{i-1}) \right) = 0, \quad (1.56)$$

où $\phi^{vol}(v_{i+1}, v_i)$ vaut zéro le long d'une interface eulérienne, et $-u_{i+1/2}$ le long d'une interface lagrangienne.

Écriture du schéma

Après discrétisation de l'opérateur de dérivée en temps, le schéma peut s'écrire synthétiquement sous la forme :

$$\frac{|K_i|^{n+1}v_i^{n+1} - |K_i|^n v_i^n}{\Delta t^n} + A(\phi(v_{i+1}^n, v_i^n) - \phi(v_i^n, v_{i-1}^n)) = 0, \quad (1.57)$$

$$|K_i|^{n+1} = |K_i|^n + A(u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n), \quad (1.58)$$

ayant posé $A \equiv A_{i+1/2} = A_{i-1/2}$.

La vitesse $u_{i+1/2}^n$ étant définie par (1.53) pour une interface lagrangienne, et valant zéro pour une interface eulérienne.

1.5.5 Étape de projection

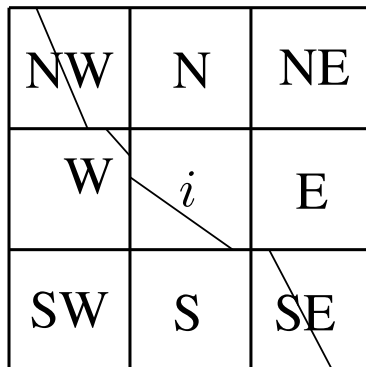
À la fin de chaque pas de temps, une fois l'évolution calculée dans les condensats, ceux-ci sont projetés sur le maillage eulérien d'origine. L'algorithme initial [9, 7] consistait en une projection exacte 1D des valeurs au temps $n + 1$. Néanmoins la méthode souffrait d'un manque de précision pour les simulations 2D, notamment dans des cas d'advection non parallèle au maillage eulérien. Plus récemment, Braeunig, Loubère et Ghidaglia [54] ont proposé une méthode de projection, ENIP pour Enhanced-NIP, qui prend en compte l'orientation des interfaces, améliorant de manière significative les résultats numériques.

1.5.6 Reconstruction des interfaces

Comme il a été précisé dans la description du schéma, la structure de données n'inclut que les informations relatives à la fraction volumique des matériaux dans les cellules. Les normales aux interfaces ne sont reconstruites qu'à la fin de chaque pas de temps par la méthode de Youngs [89], selon la formule :

$$\nu_k = -\frac{\nabla \alpha_i}{\|\nabla \alpha_i\|}, \quad (1.59)$$

où α_i désigne la fraction volumique du matériau donné dans la cellule i .

FIGURE 1.8 – Voisinage de la cellule i

Sur un maillage cartésien, l'approximation du gradient de la fraction volumique est faite selon la formule (avec les notations de la Figure 1.8) :

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \approx \frac{\alpha_E - \alpha_W}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \approx \frac{\alpha_N - \alpha_S}{2\Delta y}, \quad (1.60)$$

Δx et Δy sont les pas en espace dans les directions x et y .

Les valeurs de α_E , α_W , α_N , α_S sont approchées par :

$$\begin{aligned} \alpha_E &\approx \frac{\alpha_{NE} + 2\alpha_E + \alpha_{SE}}{4}, & \alpha_W &\approx \frac{\alpha_{NW} + 2\alpha_W + \alpha_{SW}}{4}, \\ \alpha_N &\approx \frac{\alpha_{NW} + 2\alpha_N + \alpha_{NE}}{4}, & \alpha_S &\approx \frac{\alpha_{SW} + 2\alpha_S + \alpha_{SE}}{4}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

1.5.7 Robustesse du schéma

Comme pour tout schéma explicite, la méthode VFFC-ENIP explicite est soumise à une condition de stabilité du type CFL (1.25), qui implique, entre autres, que le pas de temps assurant la stabilité numérique du schéma soit plus petit que le plus petit des rapports des volumes par les vitesses caractéristiques du système. Dans le contexte de la méthode VFFC-ENIP, il peut arriver que de très petits volumes partiels apparaissent au sein d'une maille mixte (phénomènes de fragmentation, ou plus simplement intersection d'une forme quelconque avec le maillage cartésien). Tenir compte de ces petits volumes dans la condition de stabilité conduirait à des pas de temps très petits, voire rédhibitoires pour la poursuite du calcul. Pour cette raison, le pas de temps est calculé en ne considérant que les volumes des mailles pures, un traitement particulier est alors appliqué aux couches fines des condensats pour lesquelles la condition de stabilité n'est pas vérifiée. Ce traitement s'appelle «algorithme de contrôle», [8, 7]. Nous n'en donnerons pas ici tous les détails techniques, mais simplement les idées directrices.

Initialement, l'algorithme de contrôle consistait à borner l'évolution relative de la pression dans les fines couches du condensat sur un pas de temps Δt , c'est-à-dire faire en sorte que :

$$\left| \frac{p^{n+1} - p^n}{p^n} \right| \leq \varepsilon, \quad (1.62)$$

pour un ε donné, pas trop grand, de l'ordre de 20%, par exemple. On prétend ainsi stabiliser le schéma en le forçant, là où il est numériquement instable, à conserver des valeurs raisonnables au sens de la physique.

Comme il n'y a pas d'équation pour l'évolution de la pression, (1.62) ne peut être satisfaite simplement. L'algorithme de contrôle tire alors parti des identités de la thermodynamique en remarquant que :

$$dp = \left(c^2 - k \frac{p}{\rho} \right) d\rho + \rho k de, \quad (1.63)$$

de sorte que l'évolution relative de la pression peut s'exprimer en fonction de celles de la masse volumique et de l'énergie interne. Ces dernières quantités sont des fonctions de la vitesse et de la pression à l'interface. L'algorithme de contrôle agit donc sur $u_{i+1/2}^n$ et $p_{i+1/2}^n$ pour garantir (1.62). Les conditions imposées étant de garder un schéma strictement conservatif.

Plus récemment, J.-P. Braeunig (travail en préparation) a proposé un nouvel algorithme de contrôle permettant d'assurer la stabilité numérique de la méthode VFFC-ENIP. Nous le décrivons dans ce paragraphe.

Dans une couche i d'un condensat, on peut écrire l'évolution des volumes :

$$|K_i^{n+1}| = |K_i^n| \left(1 + \frac{u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n}{\lambda_i^n} \right), \quad (1.64)$$

où λ_i^n est donné par :

$$\lambda_i^n = \frac{|K_i^n|}{A \Delta t^n}.$$

L'évolution de la vitesse s'écrit, quant à elle :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{p_{i+1/2}^n - p_{i-1/2}^n}{\rho_i^n \lambda_i^n}. \quad (1.65)$$

Lorsque la condition de stabilité n'est pas vérifiée dans cette couche, le nombre λ_i^n est trop petit. L'idée consiste alors à écrire :

$$|K_i^{n+1}| = |K_i^n| \left(1 + \frac{u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n}{\widetilde{\lambda}_i^n} \right), \quad (1.66)$$

et :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{p_{i+1/2}^n - p_{i-1/2}^n}{\rho_i^n \widetilde{\lambda}_i^n}, \quad (1.67)$$

avec :

$$\widetilde{\lambda}_i^n = \max \left\{ \lambda_i^n, (1 - \vartheta) \frac{\Delta x \Delta y}{A \Delta t^n} \right\}. \quad (1.68)$$

Ici, ϑ est donné, par exemple $\vartheta = 1/2$, et $\Delta x \Delta y$ désigne le volume d'une cellule eulérienne pure.

Le schéma ainsi modifié n'est plus conservatif. Néanmoins il est possible de déduire de (1.66) et (1.67) de nouvelles valeurs pour les volumes et les vitesses dans les couches du condensat de sorte à être conservatif à nouveau, tout en conservant de bonnes propriétés de stabilité numérique [8, 9, 7]. Des valeurs correspondantes de $p_{i+1/2}^n$ et $u_{i+1/2}^n$ sont ensuite calculées, desquelles on déduit les masses volumiques et les énergies totales au temps t^{n+1} . On renvoie à [7, 9] pour le détail de cette procédure.

1.5.8 Principe de l'algorithme

Les deux figures suivantes résument l'algorithme. La méthode VFFC-NIP est schématisée sur la Figure 1.9, tandis que la méthode VFFC-ENIP est schématisée sur la Figure 1.10

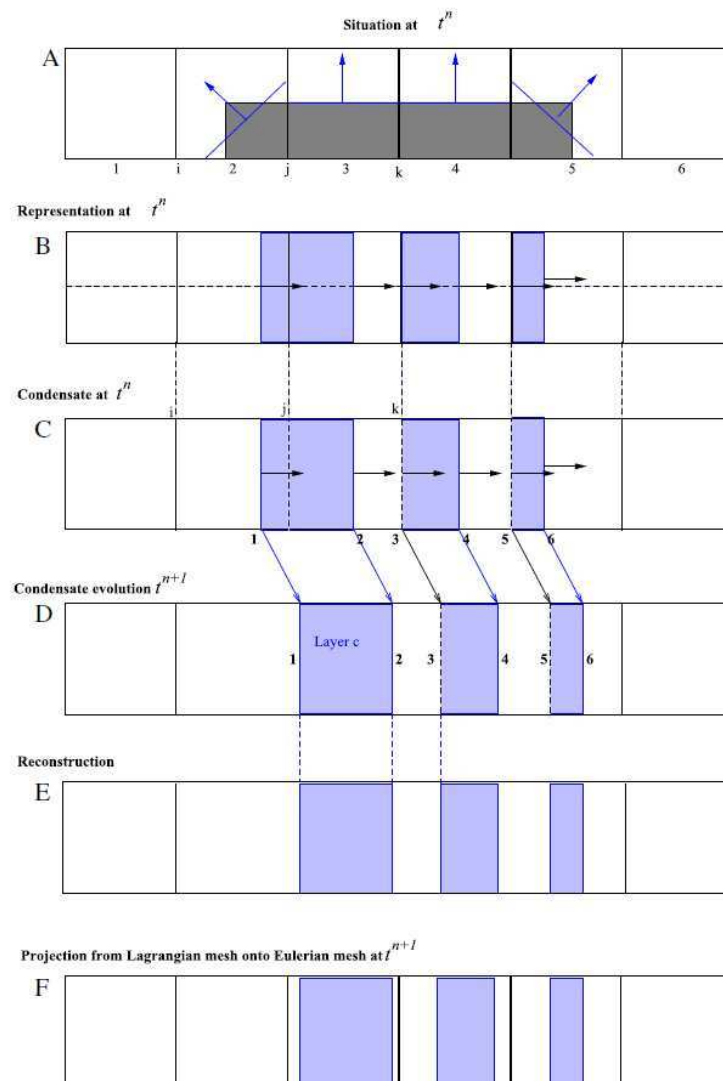


FIGURE 1.9 – Méthode NIP-(A) situation à t^n . (B) représentation des volumes partiels. (C) construction d'un condensat. (D) Évolution du condensat sur un pas de temps Δt . (E) Reconstruction du condensat à t^{n+1} . (F) Projection sur le maillage eulérien d'origine.

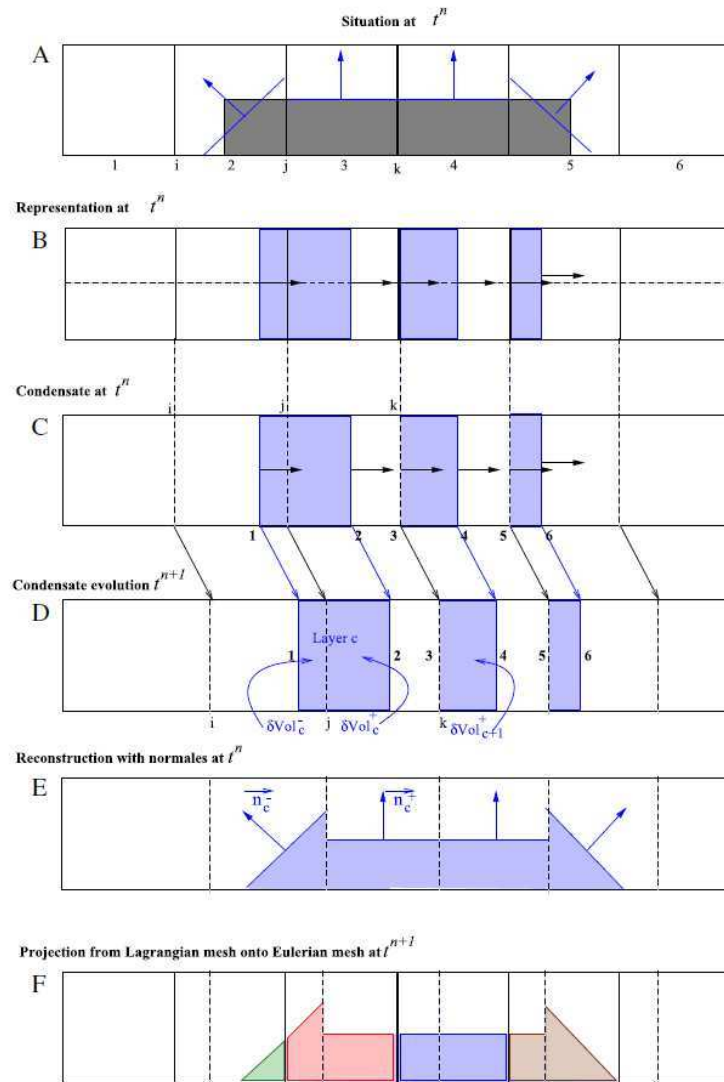


FIGURE 1.10 – Méthode ENIP-(A) situation à t^n . (B) représentation des volumes partiels. (C) construction d'un condensat. (D) Évolution du condensat sur un pas de temps Δt . (E) Reconstruction du condensat à t^{n+1} . (F) Projection sur le maillage eulérien d'origine.

Chapitre 2

Un schéma VFFC-ENIP implicite et son application aux écoulements à faible nombre de Mach

Sommaire

2.1	Introduction	47
2.2	Renormalisation de la diffusion numérique	50
2.3	Construction du schéma	51
2.3.1	Interfaces eulériennes	52
2.3.2	Interfaces lagrangiennes	55
2.3.3	Robustesse du schéma explicite	57
2.4	Un schéma implicite VFFC-ENIP	57
2.4.1	Introduction et nomenclature	57
2.4.2	Obtention du schéma	58
2.4.3	Renormalisation du schéma implicite	59
2.4.4	Théorème de stabilité	59
2.4.5	Résolution du système non linéaire	59
2.5	Résultats numériques	62
2.5.1	Instabilité de Kelvin-Helmholtz	62
2.5.2	Une goutte de gaz chutant sous l'effet de la gravité	65
2.5.3	Rupture d'un barrage	66
2.6	Conclusion	67

2.1 Introduction

Un des enjeux majeurs de la simulation numérique est d'être capable de traiter une grande variété d'écoulements, des plus simples aux plus complexes. Parmi eux, on peut compter les écoulements multi-fluides ou multi-matériaux, mais aussi les écoulements compressibles faisant intervenir de faibles nombres de Mach. C'est le

cas, par exemple, dans des simulations faisant intervenir à la fois de l'air et de l'eau, la compressibilité de l'eau étant très faible devant celle de l'air. De telles situations sont courantes, et posent, bien sûr, de nombreuses difficultés numériques. Un solveur se doit donc de pouvoir traiter à la fois les écoulements à nombres de Mach élevé, modéré et faible.

Il y a alors deux stratégies. La première est d'étendre un solveur incompressible (le nombre de Mach est égal à zéro) aux écoulements à faible nombre de Mach, jusqu'à un nombre de Mach modéré. La seconde consiste à étendre un solveur compressible, éprouvé pour des écoulements à nombre de Mach élevé, jusqu'à des nombres de Mach modérés, aux écoulements à faible nombre Mach, disons pour des nombres de Mach inférieurs à 10^{-1} .

Le second parti, que nous adoptons dans le cadre de ce travail, a pour but de conduire à un outil de simulation plus général, capable de prendre en compte un plus grand nombre de situations.

La plupart des solveurs compressibles, en particulier ceux conçus pour des géométries complexes, sont basés sur des méthodes avec décentrement amont qui leur confèrent de bonnes propriétés de stabilité numérique : le schéma de Godunov (1959) en fait partie, ainsi que le schéma de Roe (1981) (voir, par exemple, [34]).

Cependant, les travaux de Turkel [83, 84], montrent que ce type de décentrement est à l'origine d'inconsistances lorsque le nombre de Mach devient très faible. Ils induisent, en effet, une diffusion numérique trop importante. Ce constat a été confirmé et analysé par la suite par de nombreux auteurs [38, 36], qui ont proposé des modifications du schéma de Roe permettant de calculer convenablement ces écoulements. Turkel a proposé une modification non consistante en temps du schéma de Roe, qui permet néanmoins de calculer les bonnes solutions stationnaires. Guillard *et al.* ont, quant à eux, étendu l'approche de Turkel de sorte à la rendre consistante en temps. Plus récemment, Dellacherie [23] et Li [52] ont étendu ces travaux dans le cadre d'écoulements mono-matériaux.

Un développement asymptotique de ces schémas permet d'identifier les équations continues satisfaites par leurs solutions. Ces équations limites possèdent des fluctuations de pression de l'ordre du nombre de Mach, tandis qu'un développement asymptotique mené sur les équations continues du problème montre qu'en réalité les fluctuations sur la pression sont de l'ordre du carré du nombre de Mach [38, 36, 23, 52]. Les solutions données par les schémas de type Roe, ou Godunov, sont donc peu précises, voire instables, lorsque le nombre de Mach devient faible. La plupart des solutions proposées pour résoudre ce problème se basent sur des méthodes de préconditionnement qui consistent à modifier les flux numériques de sorte à améliorer le nombre de conditionnement de la matrice de viscosité associée [83, 84, 38, 36]. Ces modifications ont, évidemment, des conséquences directes sur la stabilité des schémas considérés. On notera, en particulier, que les schémas explicites utilisant des méthodes de préconditionnement pour traiter les écoulements à faible nombre de Mach sont instables au sens où la condition de Courant-Friedrichs-Lewy est très restrictive, et donne lieu à des pas de temps très faibles de l'ordre du carré du nombre de Mach.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de mettre en œuvre une méthode de renormalisation de la viscosité numérique, dans le cadre du schéma VFFC-ENIP. Nous considérons les équations d'Euler compressibles :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pI) = \rho g, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p)\mathbf{u}) = \rho g \cdot \mathbf{u}, \quad (2.3)$$

que nous écrirons dans la suite sous la forme de lois de conservation avec terme source suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot F(v) = S(v), \quad (2.4)$$

où v désigne le vecteur des variables «conservées» :

$$v = {}^t(\rho, \rho \mathbf{u}, \rho E),$$

$F(v)$ est le flux physique tel que

$$F(v) \cdot \nu = {}^t(\rho(\mathbf{u} \cdot \nu), \rho(\mathbf{u} \cdot \nu)\mathbf{u} + p\nu, (\rho E + p)(\mathbf{u} \cdot \nu))$$

est le flux normal dans la direction $\nu \in \mathbb{S}^{d-1}$, d , où d représente la dimension d'espace. Le terme $S(v)$ correspond aux forces de gravité.

Les notations usuelles sont adoptées dans ce chapitre, rappelons les :

ρ désigne la masse volumique, \mathbf{u} le champ de vitesse, E l'énergie totale spécifique, somme de l'énergie interne spécifique e et l'énergie cinétique spécifique $\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2$.

Le système est fermé par des équations d'état

$$\rho = \mathcal{R}(p, T), \quad e = \mathcal{E}(p, T), \quad s = \mathcal{S}(p, T), \quad (2.5)$$

où p et T désignent respectivement la pression et la température. L'entropie spécifique est noté s et vérifie la relation de Gibbs : $Tds = de - \frac{p}{\rho^2}d\rho$.

Ce chapitre s'organise de la manière suivante : nous présentons, dans un premier temps, le principe des méthodes de renormalisation de la viscosité numérique. Dans la seconde section, la construction du schéma VFFC-ENIP renormalisé est donnée. Le détail du calcul de la matrice de signe modifiée y est notamment présenté. La troisième section, comme réponse aux remarques liminaires sur la stabilité des schémas explicites renormalisés, est consacrée à l'introduction d'un schéma entièrement implicite, basé sur la méthode VFFC-ENIP. Nous appliquons ensuite la renormalisation à ce schéma, et donnons un résultat de stabilité linéaire inconditionnelle, dont la preuve peut être trouvée en Annexe A. La dernière section est consacrée à la présentation de cas-tests validant la méthode. L'un d'entre eux revêt une importance particulière, il s'agit de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz [88]. Concernant ce cas-test, nous prouvons, en Annexe B, que le taux de croissance de l'instabilité ne dépend pas de la valeur du nombre de Mach.

2.2 Renormalisation de la diffusion numérique

Les méthodes de renormalisation de la diffusion numérique, à l'instar des méthodes de préconditionnement pour la résolution de système linéaires, ont pour but d'améliorer le conditionnement du système à résoudre. En l'occurrence, il s'agit de diminuer l'écart entre les valeurs propres de la matrice jacobienne du flux. Ses valeurs propres étant données par $\mathbf{u} \cdot \nu - c$, $\mathbf{u} \cdot \nu$, $\mathbf{u} \cdot \nu + c$, son conditionnement est de l'ordre de $\frac{1}{\mathcal{M}}$ lorsque le nombre de Mach \mathcal{M} tend vers 0.

La méthode de renormalisation de Turkel [83] visait initialement à approcher des solutions stationnaires par un régime transitoire en introduisant une matrice P :

$$P^{-1} \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot F(v) = 0. \quad (2.6)$$

Cette méthode, bien que non consistante en temps, fournit néanmoins les bonnes solutions stationnaires.

Guillard et Viozat [38, 36] ont modifié cette méthode de sorte à la rendre consistante en temps, et l'ont appliquée notamment au schéma de Roe en prenant pour matrice de diffusion $P^{-1}|PA|$, au lieu de $|A|$.

Il y a divers choix possibles pour la matrice de renormalisation P [15, 50, 83], dont la construction se justifie en général par l'écriture des équations dans des variables physiques.

Le choix que nous adoptons est la matrice de Turkel, qui s'exprime dans les variables $w = (p, \mathbf{u}, s)$ de la manière suivante :

$$\Pi = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d+2}(\mathbb{R}), \quad (2.7)$$

β étant un paramètre constant, ou local à l'interface, pris en général de l'ordre de grandeur du nombre de Mach de l'écoulement. La matrice P est alors semblable à la matrice Π par la relation :

$$P = \frac{\partial v}{\partial w} \Pi \frac{\partial w}{\partial v}. \quad (2.8)$$

Guillard et Viozat [37] montrent que la renormalisation améliore effectivement le conditionnement du système, en remarquant que la matrice jacobienne du flux numérique en 2D correspondant à la partie centrée a pour ordre de grandeur (voir également Pascal [65]) :

$$\begin{pmatrix} O(1) & O(1/\mathcal{M}^2) & O(1/\mathcal{M}^2) & 0 \\ O(1) & O(1) & 0 & 0 \\ O(1) & 0 & O(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & O(1) \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

tandis que la matrice de décentrement en 2D a pour ordre de grandeur :

$$\begin{pmatrix} O(1/\mathcal{M}) & O(1/\mathcal{M}) & O(1/\mathcal{M}) & 0 \\ O(1) & O(1/\mathcal{M}) & O(1/\mathcal{M}) & 0 \\ O(\mathcal{M}) & O(1/\mathcal{M}) & O(1/\mathcal{M}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & O(1) \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

La comparaison de ces deux matrices indique que la diffusion numérique est trop faible pour l'équation de pression, mais trop importante pour les équations de conservation de la quantité de mouvement.

Avec la renormalisation par la matrice (2.7), lorsque $\beta = \mathcal{M}$, l'ordre de grandeur de la matrice de diffusion devient :

$$\begin{pmatrix} O(1/\mathcal{M}^2) & O(1/\mathcal{M}^2) & O(1/\mathcal{M}^2) & 0 \\ O(1) & O(1) & O(1) & 0 \\ O(\mathcal{M}) & O(1) & O(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & O(1) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

et la situation est plus équilibrée.

2.3 Construction du schéma

On se place dans l'étape générique x de l'algorithme VFFC-ENIP (voir le chapitre Introduction de ce mémoire), on suppose construits tous les condensats de la ligne générique obtenue, de sorte que le schéma peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{|K_{i,j,k}^{n+1}|V_{i,j,k}^{n+1} - |K_{i,j,k}^n|V_{i,j,k}^n}{\Delta t^n} + (A_{i+1/2,j,k}\phi(v_{i+1,j,k}^n, v_{i,j,k}^n) - A_{i-1/2,j,k}\phi(v_{i,j,k}^n, v_{i-1,j,k}^n)) = S(V_{K_{i,j,k}}^n). \quad (2.12)$$

Le flux $\phi(v_{i+1,j,k}^n, v_{i,j,k}^n)$ correspond au flux numérique sur l'interface située en $x_{i+1/2}$, et est, comme précisé en Introduction, un flux eulérien si l'interface considérée est eulérienne, lagrangien sinon.

Nous détaillons la renormalisation faible Mach du schéma pour les interfaces eulériennes dans un premier temps, puis traitons le cas des interfaces lagrangiennes dans un second temps.

Remarque 3 *Nous nous plaçons dans une étape du splitting directionnel. Pour cette raison, et sans perte de généralité, les schémas seront présentés en 1D et les indices j, k seront omis dans la suite.*

2.3.1 Interfaces eulériennes

Le flux numérique correspondant à la méthode VFFC sur une interface de normale $\nu_{i+1/2}$ séparant deux volumes i et $i + 1$ est donné par :

$$\Phi(v_{i+1}, v_i, \nu) = \frac{F(v_{i+1}) + F(v_i)}{2} \cdot \nu - \text{sgn}(A_{i+1/2}) \frac{F(v_{i+1}) - F(v_i)}{2} \cdot \nu, \quad (2.13)$$

$A_{i+1/2}$ étant la matrice jacobienne du flux $F(v)$, calculé en une moyenne $\mu_{i+1/2}$ de v_{i+1} et v_i à l'interface entre les volumes $i + 1$ et i . La matrice signe $\text{sgn}(A_{i+1/2})$ est la matrice possédant les mêmes vecteurs propres que $A_{i+1/2}$, mais dont les valeurs propres sont les signes de celles de $A_{i+1/2}$.

La renormalisation faible Mach de la méthode VFFC (voir Pascal *et al.* [21, 66]) consiste à prendre $\text{sgn}(A_{i+1/2}P)$ comme matrice de décentrement dans (2.13), au lieu de $\text{sgn}(A_{i+1/2})$, P étant la matrice donnée en (2.8).

Le flux (2.13) s'écrit donc :

$$\Phi(v_{i+1}, v_i, \nu) = \frac{F(v_{i+1}) + F(v_i)}{2} \cdot \nu - \text{sgn}(A_{i+1/2}P) \frac{F(v_{i+1}) - F(v_i)}{2} \cdot \nu. \quad (2.14)$$

La matrice $\text{sgn}(A_{i+1/2}P)$ est déterminée par le calcul des éléments propres de $A_{i+1/2}P$.

Calcul des éléments propres

La matrice Π donnée en (2.7) possède une expression simple (elle est diagonale) dans les variables qui symétrisent les équations d'Euler. Son expression dans les variables conservatives $v = {}^t(\rho, \rho\mathbf{u}, \rho E)$, est nettement moins heureuse, mais facultative pour le calcul des éléments propres de $A_{i+1/2}P$.

Nous procédons de la manière suivante : on note Ψ l'application qui permet de passer des variables conservées v aux variables physiques w ($w = \Psi(v)$), et $\frac{\partial F(w) \cdot \nu}{\partial w}$ la matrice jacobienne du flux exprimée dans les variables w . Les matrices $\frac{\partial F(v) \cdot \nu}{\partial v}P$ et $\frac{\partial F(w) \cdot \nu}{\partial w}\Pi$ sont alors semblables par la relation :

$$\frac{\partial F(v) \cdot \nu}{\partial v}P = \nabla\Psi(v)^{-1} \left(\frac{\partial F(w) \cdot \nu}{\partial w}\Pi \right) \nabla\Psi(v). \quad (2.15)$$

Les matrices $\frac{\partial F(v) \cdot \nu}{\partial v}P$ et $\frac{\partial F(w) \cdot \nu}{\partial w}\Pi$ ont donc les mêmes valeurs propres, et les vecteurs propres à droite r de $\frac{\partial F(v) \cdot \nu}{\partial v}P$ sont reliés aux vecteurs propres à droite R de $\frac{\partial F(w) \cdot \nu}{\partial w}\Pi$ par la relation :

$$r = \nabla\Psi(v)^{-1}R, \quad (2.16)$$

tandis que les vecteurs propres à gauche ℓ de $\frac{\partial F(v) \cdot \nu}{\partial v}P$ sont reliés aux vecteurs propres à gauche L de $\frac{\partial F(w) \cdot \nu}{\partial w}\Pi$ par la relation :

$$\ell = {}^t(\nabla\Psi(v)) L. \quad (2.17)$$

Dans les variables physiques, l'évolution de la masse volumique s'écrit :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.18)$$

l'évolution de la vitesse s'écrit :

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} + \frac{\nabla p}{\rho} = g, \quad (2.19)$$

et finalement, l'évolution de l'entropie spécifique est donnée par :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s = 0. \quad (2.20)$$

La matrice $\frac{\partial F(w) \cdot \nu}{\partial w}$ vaut donc :

$$\frac{\partial F(w) \cdot \nu}{\partial w} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \nu & \rho c^2 \nu & 0 \\ \frac{\nu}{\rho} & \mathbf{u} \cdot \nu & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u} \cdot \nu \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Gradient du changement de variables Ψ

Les relations de la thermodynamique permettent de déterminer les différentielles de l'entropie s et de la pression p par rapport à la variable v , et on obtient la matrice $\nabla\Psi(v)$ (H désigne l'enthalpie totale : $H = E + \frac{p}{\rho}$) :

$$\nabla\Psi(v) = \begin{pmatrix} c^2 + k(\|\mathbf{u}\|^2 - H) & -k\mathbf{u} & k \\ -\frac{\mathbf{u}}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{\|\mathbf{u}\|^2 - H}{\rho T} & -\frac{\mathbf{u}}{\rho T} & \frac{1}{\rho T} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

ainsi que son inverse :

$$\nabla\Psi(v)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} & 0 & \frac{-\rho k T}{c^2} \\ \frac{\mathbf{u}}{\rho} & \rho I & \frac{-\rho k T \mathbf{u}}{c^2} \\ \frac{H}{c^2} & \rho \mathbf{u} & \frac{\rho T (c^2 - k H)}{c^2} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Éléments propres de $\frac{\partial F(v, \nu)}{\partial v} P$

Tous calculs faits, les valeurs propres de $\frac{\partial F(v, \nu)}{\partial v} P$ sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(v, \nu) = \mathbf{u} \cdot \nu \frac{1 + \beta^2}{2} - c_s, \\ \lambda_2(v, \nu) = \mathbf{u} \cdot \nu, \\ \vdots = \vdots \\ \lambda_{d+1}(v, \nu) = \mathbf{u} \cdot \nu, \\ \lambda_{d+2}(v, \nu) = \mathbf{u} \cdot \nu \frac{1 + \beta^2}{2} + c_s. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

La quantité c_s est définie par :

$$c_s \equiv \sqrt{4\beta^2 c^2 + (\mathbf{u} \cdot \nu)^2 (1 - \beta^2)^2}. \quad (2.25)$$

Les vecteurs propres à droite, correspondant à ces valeurs propres, peuvent être pris égaux à :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1(v, \nu) = \left(1, \mathbf{u} - \frac{\beta^2 c^2}{\lambda_{d+2}(v, \nu) - \mathbf{u} \cdot \nu \beta^2} \nu, H - \frac{\beta^2 c^2}{\lambda_{d+2}(v, \nu) - \mathbf{u} \cdot \nu \beta^2} \mathbf{u} \cdot \nu \right), \\ r_{d+1}(v, \nu) = \left(1, \mathbf{u}, H - \frac{c^2}{k} \right), \\ r_{d+2}(v, \nu) = \left(1, \mathbf{u} - \frac{\beta^2 c^2}{\lambda_1(v, \nu) - \mathbf{u} \cdot \nu \beta^2} \nu, H - \frac{\beta^2 c^2}{\lambda_1(v, \nu) - \mathbf{u} \cdot \nu \beta^2} \mathbf{u} \cdot \nu \right), \\ r_2(v, \nu) = (0, \nu_2^\perp, \mathbf{u} \cdot \nu_2^\perp), \\ \vdots = \vdots \\ r_d(v, \nu) = (0, \nu_d^\perp, \mathbf{u} \cdot \nu_d^\perp), \end{array} \right. \quad (2.26)$$

où $\nu_2^\perp \cdots \nu_d^\perp$ est une base orthonormale de l'hyperplan orthogonal à ν .

Finalement la base duale est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_1(v, \nu) = -\frac{\lambda_{d+2} - \mathbf{u} \cdot \nu}{c^2 c_s} \left(K + \frac{c^2}{\lambda_{d+2} - \beta^2 \mathbf{u} \cdot \nu} \mathbf{u} \cdot \nu, -k \mathbf{u} - \frac{c^2}{\lambda_{d+2} - \beta^2 \mathbf{u} \cdot \nu} \nu, k \right), \\ \ell_{d+1}(v, \nu) = \frac{k}{c^2} (H - \|\mathbf{u}\|^2, \mathbf{u}, -1), \\ \ell_{d+2}(v, \nu) = \frac{\lambda_1 - \mathbf{u} \cdot \nu}{c^2 c_s} \left(K + \frac{c^2}{\lambda_1 - \beta^2 \mathbf{u} \cdot \nu} \mathbf{u} \cdot \nu, -k \mathbf{u} - \frac{c^2}{\lambda_1 - \beta^2 \mathbf{u} \cdot \nu} \nu, k \right), \\ \ell_2(v, \nu) = (-\mathbf{u} \cdot \nu_2^\perp, \nu_2^\perp, 0, 0), \\ \vdots = \vdots \\ \ell_d(v, \nu) = (-\mathbf{u} \cdot \nu_d^\perp, \nu_d^\perp, 0, 0), \end{array} \right. \quad (2.27)$$

de sorte que l'on a la normalisation $\ell_i \cdot r_j = \delta_{i,j}$, le calcul de $\text{sgn}(A_{i+1/2}P)$ s'en déduit immédiatement.

2.3.2 Interfaces lagrangiennes

Lorsqu'une interface Γ se déplace au cours du temps, le flux correspondant est appelé flux lagrangien et n'est plus $\int_{\Gamma} F(v) \cdot \nu d\sigma$. En utilisant le théorème de transport de Reynolds pour l'intégration de (2.4) sur un volume $K(t)$ dépendant du temps, on obtient :

$$\int_{K(t)} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot F(v) \right) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{K(t)} v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial K(t)} (F(v) \cdot \nu - v(\mathbf{x}, t)(\mathbf{u} \cdot \nu)) d\sigma, \quad (2.28)$$

Dans le cas des équations d'Euler, le flux physique peut s'écrire :

$$F(v) \cdot \nu = (\mathbf{u} \cdot \nu)v + p \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \\ \mathbf{u} \cdot \nu \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

si bien que le flux lagrangien se trouve être égal à :

$$p \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \\ \mathbf{u} \cdot \nu \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Les valeurs de pression et de vitesse d'interface sont données par (voir l'Introduction de ce mémoire) :

$$p_{i+1/2}^n = \frac{\mu_i^n p_{i+1}^n + \mu_{i+1}^n p_i^n}{\mu_i^n + \mu_{i+1}^n} - \mu_i^n \mu_{i+1}^n \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\mu_i^n + \mu_{i+1}^n}, \quad (2.31)$$

et :

$$u_{i+1/2}^n = \frac{\mu_i^n u_i^n + \mu_{i+1}^n u_{i+1}^n}{\mu_i^n + \mu_{i+1}^n} - \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\mu_i^n + \mu_{i+1}^n}. \quad (2.32)$$

Une fois encore, on a noté $\mu_i \equiv \rho_i^n c_i^n$.

Pour appliquer une méthode de renormalisation de la viscosité numérique sur les interfaces lagrangiennes, on considère donc le système de la dynamique des gaz écrit en 1D en variables lagrangiennes sous la forme suivante :

$$\frac{d\tau}{dt} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad (2.33)$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \quad (2.34)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad (2.35)$$

avec $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial m} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}$.

Dans les variables physiques $w = {}^t(p, u, s)$, le système s'écrit sous la forme quasi-linéaire suivante :

$$\frac{dp}{dt} + \rho^2 c^2 \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad (2.36)$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad (2.38)$$

ou encore :

$$\frac{dw}{dt} + A \frac{\partial w}{\partial m} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \rho^2 c^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Comme pour ce qui est fait dans le cas du schéma explicite non renormalisé, nous allons calculer les valeurs de la pression et de la vitesse à l'interface en advectant les invariants de Riemann linéarisés, cette fois-ci pour le système preconditionné dont la matrice Jacobienne est donnée par :

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & \beta^2 \rho^2 c^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Ses vecteurs propres à gauche fournissent deux invariants de Riemann linéarisés : $p + \beta \rho c u$, correspondant à la valeur propre positive $\beta \rho c$, et $p - \beta \rho c u$ pour la valeur propre négative $-\beta \rho c$.

Les valeurs recherchées sont alors obtenues en résolvant le système 2×2 :

$$\begin{cases} p_i^{n+1} + \beta_i^n \rho_i^n c_{s,i}^n u_i^{n+1} & = p_{i+1/2}^{n+1} + \beta_i^n \rho_i^n c_{s,i}^n u_{i+1/2}^{n+1} \\ p_{i+1}^{n+1} - \beta_{i+1}^n \rho_{i+1}^n c_{s,i+1}^n u_{i+1}^{n+1} & = p_{i+1/2}^{n+1} - \beta_{i+1}^n \rho_{i+1}^n c_{s,i+1}^n u_{i+1/2}^{n+1}, \end{cases} \quad (2.41)$$

qui donne, une fois noté $\mu_i^n = \beta_i^n \rho_i^n c_{s,i}^n$:

$$p_{i+1/2}^{n+1} = \frac{\mu_i^n p_{i+1}^{n+1} + \mu_{i+1}^n p_i^{n+1}}{\mu_i^n + \mu_{i+1}^n} - \mu_i^n \mu_{i+1}^n \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\mu_i^n + \mu_{i+1}^n}, \quad (2.42)$$

et :

$$u_{i+1/2}^{n+1} = \frac{\mu_i^n u_i^{n+1} + \mu_{i+1}^n u_{i+1}^{n+1}}{\mu_i^n + \mu_{i+1}^n} - \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\mu_i^n + \mu_{i+1}^n}. \quad (2.43)$$

2.3.3 Robustesse du schéma explicite

Comme pour tout schéma explicite, le pas de temps dans la méthode VFFC-ENIP est contraint par une condition de stabilité numérique de Courant-Friedrichs-Lewy. Néanmoins, dans les simulations en 2D ou en 3D, des situations pathologiques peuvent apparaître telles que la fragmentation. Dans ces situations, la fraction volumique d'un matériau peut être très faible dans une maille mixte. Le condensat qui en résulte possède alors de très fines couches pour lesquelles la condition de CFL n'est pas satisfaite. Ces couches font l'objet d'un traitement particulier, appelé «algorithme de contrôle» [8].

D'autre part, comme il a été précisé en Introduction de ce chapitre, les méthodes consistant à modifier la matrice de diffusion numérique dans le schéma conduisent à des conditions de stabilité plus restrictives. Le pas de temps doit être de l'ordre du nombre de Mach au carré pour assurer la stabilité numérique du schéma.

2.4 Un schéma implicite VFFC-ENIP

2.4.1 Introduction et nomenclature

La motivation de cette section est de construire un schéma entièrement implicite dans le but de rendre possible l'application de la méthode de renormalisation de la diffusion numérique pour des pas de temps raisonnables. Le but ici n'est pas d'augmenter exagérément le nombre de Courant (CFL) : on entend par «raisonnables» des nombres de Courant de l'ordre de 1, c'est-à-dire correspondant à la condition de stabilité pour le schéma explicite non renormalisé.

Un schéma implicite peut être aisément obtenu à partir de (2.12) en substituant $n+1$ à n dans les flux numériques, ainsi que dans les valeurs de pression et de vitesse aux interfaces :

$$|K_i^{n+1}|v_i^{n+1} - |K_i^n|v_i^n + A\Delta t^n \left(\phi_{i+1/2}^{n+1} - \phi_{i-1/2}^{n+1} \right) = 0, \quad (2.44)$$

avec

$$|K_i^{n+1}| = |K_i^n| + A\Delta t^n \left(u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i-1/2}^{n+1} \right). \quad (2.45)$$

Néanmoins, les expériences numériques montrent que le schéma résultant est instable. Ceci peut être dû à l'approximation faite en utilisant la valeur $p_{i+1/2}^{n+1}u_{i+1/2}^{n+1}$ au lieu de $(pu)_{i+1/2}^{n+1}$ dans le flux d'énergie pour les interfaces lagrangiennes. Puisqu'on ne peut pas, *a priori*, fournir une valeur satisfaisante pour le flux d'énergie sur ces interfaces, un traitement particulier leur est appliqué.

Physiquement, ou mathématiquement, l'interface entre deux matériaux distincts est une discontinuité de contact. La stricte conservation de l'entropie doit être satisfaite pour chaque matériau au voisinage de l'interface. Un fluide compris entre deux interfaces lagrangiennes est donc redevable de l'équation de conservation suivante :

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u}) = 0, \quad (2.46)$$

au lieu de :

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p)\mathbf{u}) = \rho g \cdot \mathbf{u}. \quad (2.47)$$

Dans ce cas, (2.46) remplace l'équation d'énergie dans les couches internes d'un condensat, ce qui conduit au schéma suivant :

$$s_i^{n+1} = s_i^n. \quad (2.48)$$

Bien entendu, la formulation en entropie (2.46) et la formulation en énergie (2.47) ne peuvent être interverties que pour des solutions régulières ou des discontinuités de contact. Il est donc important d'être très attentif aux volumes de contrôle bordés à la fois par une interface lagrangienne et par une interface eulérienne. En particulier, lorsqu'un choc traverse une interface eulérienne, l'entropie doit croître et (2.46) n'a pas lieu.

Nous allons décrire en détail, dans la suite, le schéma implicite proposé. Dès lors pour des raisons de clarté, nous introduisons la nomenclature suivante pour les différents types de volume de contrôle en présence. On note :

- E-E une couche de la ligne générique x comprise entre deux interfaces eulériennes ;
- E-L une couche de la ligne générique x dont l'interface de gauche est eulérienne, et celle de droite lagrangienne ;
- L-L une couche de la ligne générique x comprise entre deux interfaces lagrangiennes ;
- L-E une couche de la ligne générique x dont l'interface de gauche est lagrangienne, et celle de droite eulérienne.

2.4.2 Obtention du schéma

Nous proposons alors le schéma suivant :

le cas E-E

$$|K_i^{n+1}|v_i^{n+1} - |K_i^n|v_i^n + A\Delta t^n \left(\phi_{i+1/2}^{n+1} - \phi_{i-1/2}^{n+1} \right) = 0, \quad (2.49)$$

$$|K_i^{n+1}| = |K_i^n|. \quad (2.50)$$

le cas E-L

$$|K_i^{n+1}|v_i^{n+1}(i) - |K_i^n|v_i^n(i) + A\Delta t^n \left(\psi_{i+1/2}^{n+1}(j) - \phi_{i-1/2}^{n+1}(j) \right) = 0, \quad 1 \leq j \leq 4, \quad (2.51)$$

$$|K_i^{n+1}|(\rho E)_i^{n+1} - |K_i^{n+1}|(\rho E)_i^n + A\Delta t^n \left((pu)_{i+1/2}^{n+1} - \phi_{i-1/2}^{n+1}(5) \right) = 0, \quad (2.52)$$

$$|K_i^{n+1}| = |K_i^n| + A\Delta t^n u_{i+1/2}^{n+1}. \quad (2.53)$$

le cas L-L

$$|K_i^{n+1}|v_i^{n+1}(i) - |K_i^n|v_i^n(i) + A\Delta t^n \left(\psi_{i+1/2}^{n+1}(j) - \psi_{i-1/2}^{n+1}(j) \right) = 0, \quad 1 \leq j \leq 4, \quad (2.54)$$

$$s_i^{n+1} - s_i^n = 0, \quad (2.55)$$

$$|K_i^{n+1}| = |K_i^n| + A\Delta t^n \left(u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i-1/2}^{n+1} \right). \quad (2.56)$$

le cas L-E

Il est obtenu par symétrie avec le cas E-L.

On a noté ici ϕ pour le flux numérique des équations d'Euler dans les variables $(\rho, \rho\mathbf{u}, \rho E)$, et ψ le flux numérique lagrangien dans les variables $(\rho, \rho\mathbf{u}, \rho s)$, c'est-à-dire $\psi \equiv (0, p\nu, 0)$.

2.4.3 Renormalisation du schéma implicite

La renormalisation faible Mach du schéma implicite consiste à prendre dans (2.14) les flux au temps $n+1$. L'évaluation de la matrice de diffusion est, elle, faite au temps n .

De la même manière, les valeurs des pressions et des vitesses en i et en $i+1$ dans (2.42) et (2.43) sont prises au temps $n+1$, et les coefficients α_i , qui proviennent de la matrice de diffusion numérique sont pris au temps n .

2.4.4 Théorème de stabilité

On a le résultat suivant sur la stabilité du schéma implicite avec renormalisation faible Mach :

Théorème 1 *Le schéma implicite avec renormalisation faible Mach est inconditionnellement linéairement stable, et ce pour toute valeur du paramètre β .*

La démonstration de ce résultat est technique et est reportée en Annexe A.

2.4.5 Résolution du système non linéaire

Écriture sous forme canonique

La résolution de (2.49)-(2.56) se fait par la mise en œuvre de la méthode de Newton.

Nous considérons une ligne générique x donnée, de N volumes de contrôle. Les variables dans les volumes de type E-E, L-E et E-L sont les variables conservatives

$v_i^{n+1} = (\rho_i^{n+1}, \rho_i^{n+1} \mathbf{u}_i^{n+1}, \rho E_i^{n+1})$, tandis que les variables utilisées dans les cellules de type L-L sont les variables $w_i^{n+1} = (\rho_i^{n+1}, \rho_i^{n+1} \mathbf{u}_i^{n+1}, s_j^{n+1})$.

On note alors $X^{n+1} = (X_1^{n+1}, X_2^{n+1}, \dots, X_i^{n+1}, \dots, X_N^{n+1}) \in \mathbb{R}^{N(d+2)}$ le vecteur des inconnues. d désigne la dimension d'espace, et X_i^{n+1} vaut :

$$X_i^{n+1} = \begin{cases} v_i^{n+1} & \text{si le volume } i \text{ est de type E-E, L-E ou E-L,} \\ w_i^{n+1} & \text{si le volume } i \text{ est de type L-L.} \end{cases} \quad (2.57)$$

Le schéma (2.49)-(2.56) peut alors s'écrire sous la forme canonique suivante :

$$G(X^{n+1}) = 0. \quad (2.58)$$

Où G est une application de $\mathbb{R}^{N(d+2)}$ dans lui même que l'on peut définir par bloc sous la forme :

$$G(X^{n+1}) = \begin{pmatrix} G_1(X_1^{n+1}, X_2^{n+1}) \\ \vdots \\ G_i(X_{i-1}^{n+1}, X_i^{n+1}, X_{i+1}^{n+1}) \\ \vdots \\ G_N(X_{N-1}^{n+1}, X_N^{n+1}) \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

la définition de chaque bloc étant immédiatement obtenue par identification à (2.49)-(2.56). Notons néanmoins que la mesure des volumes de contrôle n'est pas prise comme inconnue du problème et que l'on préfère l'exprimer, au même titre que les flux numériques, comme une fonction de l'inconnue X^{n+1} .

La méthode de Newton consiste en la donnée d'une initialisation, que nous prendrons égale à X^n , et de l'itération suivante :

$$X^{n+1-1/(k+2)} = X^{n+1-1/(k+1)} - \nabla G(X^{n+1-1/(k+1)})^{-1} G(X^{n+1-1/(k+1)}), \quad k \geq 0, \quad (2.60)$$

que l'on peut encore écrire :

$$\nabla G(X^{n+1-1/(k+1)}) \delta X^{n+1-1/(k+1)} = G(X^{n+1-1/(k+1)}), \quad (2.61)$$

avec

$$\delta X^{n+1-1/(k+1)} = X^{n+1-1/(k+1)} - X^{n+1-1/(k+2)}. \quad (2.62)$$

de sorte que l'on s'attend, lorsque k est suffisamment grand, à ce que $X^{n+1-1/(k+1)}$ soit proche de la solution désirée X^{n+1} .

Numériquement, on considère que l'algorithme a convergé lorsque la norme du résidu normalisé est en deçà d'un certain ε , disons $\varepsilon = 10^{-10}$:

$$\frac{\|\delta X^{n+1-1/(k+1)}\|}{\|X^n\|} \leq \varepsilon.$$

Remarque 4 On a noté $X^{n+1-1/(k+2)}$ pour le k -ième itéré de la méthode de Newton. Lorsque $k = 0$, on retrouve X^n , et lorsque k tend vers l'infini, on retrouve X^{n+1} .

Des méthodes utilisant un calcul approché de la jacobienne $\nabla G(X^{n+1-1/(k+2)})$ de G existent. Nous prenons le parti, dans le cadre de ce travail, de la calculer explicitement. Le système linéaire (2.61) est résolu par l'algorithme GMRES [75].

Assemblage de la matrice jacobienne

On écrit

$$G_i(X_{i-1}, X_i, X_{i+1}) = |K_i(X_{i-1}, X_i, X_{i+1})|X_i - |K_i^n|X_i^n + A\Delta t^n (\phi(X_{i+1}, X_i) - \phi(X_i, X_{i-1})), \quad (2.63)$$

où les exposants $n + 1$ ont été supprimés afin d'alléger les notations.

La matrice jacobienne de G a une structure tridiagonale par blocs $B_{i,j}$ ($1 \leq i, j \leq N$) de taille $d + 2$. Seuls les blocs $B_{i,i-1}$, $B_{i,i}$ et $B_{i,i+1}$ ($1 \leq i \leq N$) sont stockés en mémoire, ils sont définis par

$$B_{i,i-1} = \frac{\partial G_i(X_{i-1}, X_i, X_{i+1})}{\partial X_{i-1}}, \quad (2.64)$$

$$B_{i,i} = \frac{\partial G_i(X_{i-1}, X_i, X_{i+1})}{\partial X_i}, \quad (2.65)$$

$$B_{i,i+1} = \frac{\partial G_i(X_{i-1}, X_i, X_{i+1})}{\partial X_{i+1}}. \quad (2.66)$$

Différentiation des flux eulériens

Les flux eulériens s'écrivent :

$$\phi(X_{i+1}, X_i) = \frac{1}{2} \left(I + \mathcal{U}_{i+1/2}^n \right) F(v_i) \cdot \nu_{i+1/2} + \frac{1}{2} \left(I - \mathcal{U}_{i+1/2}^n \right) F(v_{i+1}) \cdot \nu_{i+1/2}, \quad (2.67)$$

ce qui permet d'obtenir les dérivées :

$$\frac{\partial \phi(X_{i+1}, X_i)}{\partial X_i} = \frac{1}{2} \left(I + \mathcal{U}_{i+1/2}^n \right) A_i, \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial \phi(X_{i+1}, X_i)}{\partial X_{i+1}} = \frac{1}{2} \left(I - \mathcal{U}_{i+1/2}^n \right) A_{i+1}, \quad (2.69)$$

A désignant la matrice jacobienne du flux normal dont l'expression est connue (voir le Chapitre 1).

Différentiation des flux lagrangiens et des volumes

La définition des flux lagrangiens et des volumes au temps $n+1$ ne font intervenir que les valeurs des vitesses $u_{i+1/2}$ et des pressions $p_{i+1/2}$ à l'interface.

Le calcul des dérivées de ces deux valeurs ne nécessite, au vu de leurs définitions respectives (2.42) et (2.43), que la connaissance des dérivées des pressions et des vitesses par rapport à la variable v ou par rapport à la variable w selon la circonstance.

En vertu de la conservation de l'entropie dans les couches $L-L$, on peut écrire la différentielle de la pression sous la forme :

$$dp = c^2 d\rho, \quad (2.70)$$

qui rend immédiat le calcul de la dérivée de la pression par rapport à la variable w .

Par ailleurs, $\mathbf{u} = \frac{\rho \mathbf{u}}{\rho}$. La dérivée de la vitesse par rapport à la variable v est immédiate.

On obtient les dérivées par rapport à la variable w par dérivation d'une fonction composée.

2.5 Résultats numériques

Les résultats numériques présentés dans cette section utilisent des lois d'état du type gaz parfait ou *stiffened gas* :

$$\rho = \frac{p + \rho_0 c_0^2 - \gamma p_0}{(\gamma - 1) C_0^v T}, \quad e = \frac{T}{C_0^v}, \quad s = \frac{1}{C_0^v} \left\{ \ln \left(\frac{p}{p_0} + \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma p_0} - 1 \right) - \gamma \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right\}, \quad (2.71)$$

où p_0 , ρ_0 , c_0 et C_0^v sont des valeurs de référence constantes, tandis que $\gamma > 1$ est un paramètre. Lorsque $c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$ on retrouve la loi des gaz parfaits, et le cas général redonne l'équation d'état *stiffened gas* : $p + \pi = (\gamma - 1)\rho e$.

2.5.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz

Comme mis en évidence par Youngs et Williams [88], un cas-test de choix dans le contexte des écoulements multi-matériaux à faible nombre de Mach est la simulation de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. En l'absence de diffusion numérique entre deux fluides non-miscibles, il y a un glissement parfait à l'interface. Lorsque l'interface est perturbée, un tel écoulement devient instable et les perturbations croissent exponentiellement au début (phase linéaire) et des vortex sont créés à l'interface. Cette situation est un bon test pour mettre en avant l'efficacité de notre méthode. Il est en effet possible de prouver que le taux de croissance de l'instabilité est indépendante du nombre de Mach (voir annexe B).

Suivant [88], le domaine de calcul est $[0, 1] \times [0, 1]$ avec deux fluides séparés par une interface à $x = 0.5$. L'interface est initialement perturbée avec le champ de vitesses suivant :

$$\begin{cases} u_x = -\sin(2\pi y) \exp(-2\pi|x - 0.5|), \\ u_y = (-0.5 + \cos(2\pi y) \exp(-2\pi|x - 0.5|)) \operatorname{sign}(x - 0.5). \end{cases} \quad (2.72)$$

Nous utilisons une équation d'état de type *stiffened gas*, avec $\gamma = 2$ et π adapté de telle sorte à obtenir différents nombres de Mach. Initialement, la densité est uniformément égale à 1, la pression est égale à 1 dans les deux fluides. Les conditions aux limites sont périodiques sur les frontières $y = 0$ et $y = 1$ et paroi ($\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$) en $x = 0$ et en $x = 1$. La gravité est prise égale à zéro : $g = 0$.

Nous présentons trois simulations. La première, Figure 2.1, correspond à un nombre de Mach égal à 0.2 (ce qui correspond à $\pi = 98$), elle représente la fraction volumique sur un maillage 64×64 . La seconde, Figure 2.2, correspond à un nombre de Mach égal à 0.02 (ce qui correspond à $\pi = 2498$), elle représente la fraction volumique sur un maillage 64×64 . La Figure 2.3 correspond à un nombre de Mach égal à 0.02 (ce qui correspond à $\pi = 2498$), elle représente la fraction volumique sur un maillage 128×128 . Enfin, la Figure 2.4 correspond à un nombre de Mach égal à 0.02 (ce qui correspond à $\pi = 2498$), elle représente la fraction volumique sur un maillage 256×256 .

Pour les trois cas, le nombre de Courant est 0.5, et les valeurs de β sont localement adaptées aux interfaces : $\beta^2 = \min(1, \max(\varepsilon, \mathcal{M}^2))$, ε étant un «petit» paramètre (typiquement $\varepsilon \equiv 10^{-8}$) de sorte à éviter la valeur $\beta = 0$, \mathcal{M} représente le nombre de Mach local à l'interface considérée.

Les résultats sans renormalisation mettent clairement en évidence le manque de précision de la méthode. Lorsque l'on diminue le nombre de Mach, l'enroulement attendu est plus diffusé. Au contraire, avec le schéma renormalisé, le vortex recouvre une forme satisfaisante et est nettement moins diffusé. On note, de plus, qu'un raffinement de maillage n'améliore pas substantiellement la qualité de la solution pour le schéma non renormalisé, tandis que le comportement du schéma renormalisé est satisfaisant de ce point de vue (Figures 2.2, 2.3 et 2.4), conformément aux constats de Pascal [65, 66].

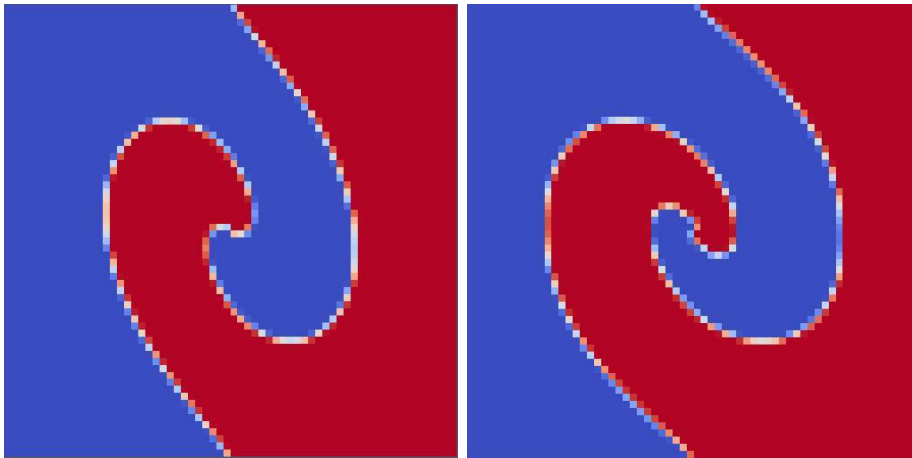


FIGURE 2.1 – A gauche : schéma implicite classique VFFC-ENIP, à droite : schéma implicite VFFC-ENIP renormalisé, $\text{Mach} = 0,2$, $t = 1$, 64×64 mailles.

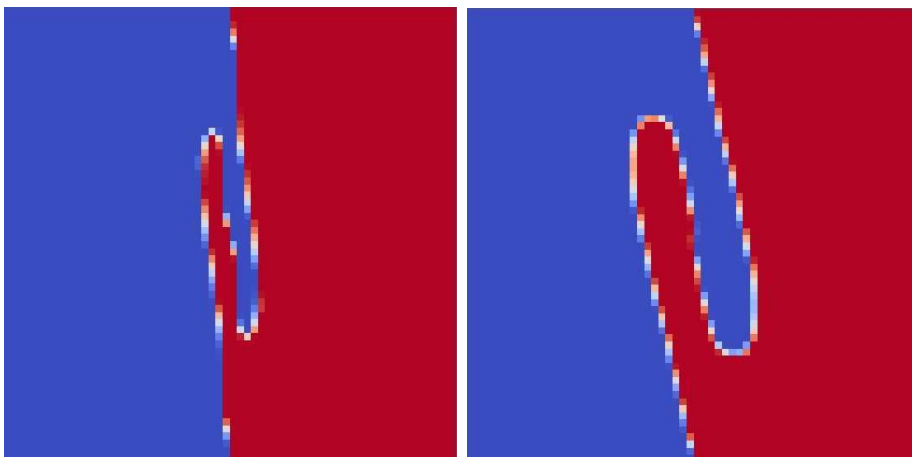


FIGURE 2.2 – A gauche : schéma implicite classique VFFC-ENIP, à droite : schéma implicite VFFC-ENIP renormalisé, $\text{Mach} = 0,02$, $t = 1$, 64×64 mailles.

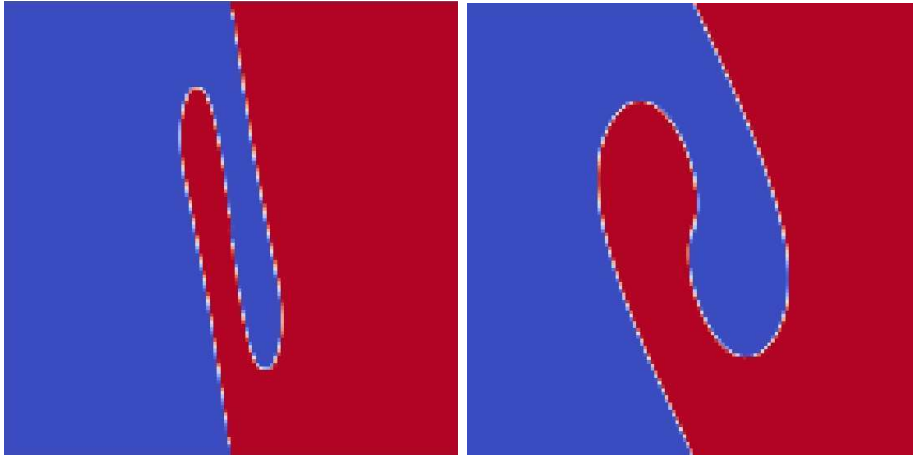


FIGURE 2.3 – A gauche : schéma implicite classique VFFC-ENIP, à droite : schéma implicite VFFC-ENIP renormalisé, Mach = 0,02, $t = 1$, 128×128 mailles.

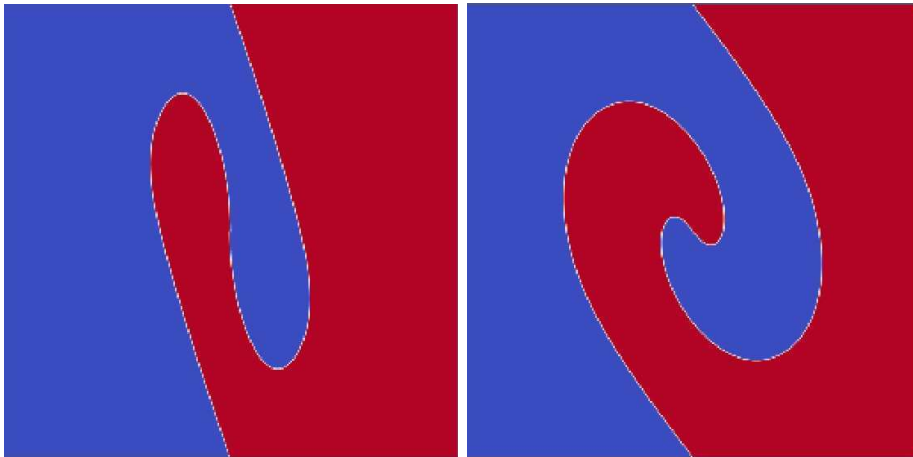


FIGURE 2.4 – A gauche : schéma implicite classique VFFC-ENIP, à droite : schéma implicite VFFC-ENIP renormalisé, Mach = 0,02, $t = 1$, 256×256 mailles.

2.5.2 Une goutte de gaz chutant sous l'effet de la gravité

Le domaine de calcul est $[0, 1] \times [0, 2]$. Une bulle de gaz suivant une équation d'état de gaz parfait avec $\gamma = 1.67$ est initialement en haut du domaine avec une masse volumique $\rho = 4 \text{ kg/m}^3$, une pression de $p = 10^5 \text{ Pa}$, et une vitesse nulle. Le fluide environnant est de l'air, avec $\gamma = 1.4$, $\rho = 1, \text{ kg/m}^3$, $p = 10^5 \text{ Pa}$ et une vitesse nulle. Les deux fluides sont soumis à une gravité $g = -90 \text{ m/s}^2$. Bien que les vitesses du son dans chaque fluide ne soient pas particulièrement élevées, la vitesse de l'écoulement est faible, ce qui rend le nombre de Mach petit (allant de 0 à 0,1 à la fin de la simulation). Comme dans le cas-test précédent, le schéma renormalisé s'avère nettement moins diffusif que le schéma non renormalisé. La Figure 2.5 représente la fraction volumique sur un maillage 128×256 au temps $t = 0,3 \text{ s}$.

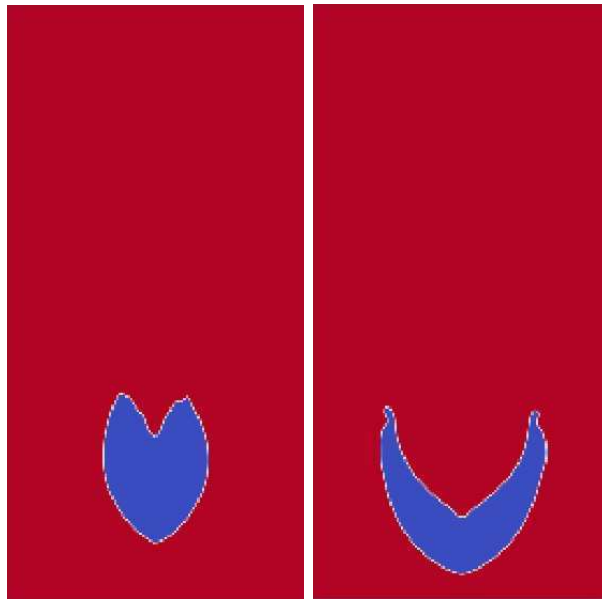


FIGURE 2.5 – À gauche : schéma implicite classique VFFC-ENIP, à droite : schéma implicite VFFC-ENIP renormalisé. Goutte d'un gaz lourd chutant par gravité dans un gaz léger, $t = 0,3$ s.

2.5.3 Rupture d'un barrage

Le domaine de calcul est $[0, 15] \times [0, 10]$. Un bloc d'eau est initialement localisé dans le carré $[0, 5] \times [0, 5]$ et a pour équation d'état *stiffened gas* avec $\gamma = 7$ et $\pi = 2,1 \cdot 10^9 Pa$. Le fluide environnant est de l'air. Les deux fluides sont soumis à une gravité $g = -9.81 m/s^2$. Cette simulation est particulièrement difficile car l'un des deux fluides en présence est presque incompressible : la vitesse du son dans l'eau est de l'ordre de $1500 m/s$. Le nombre de Mach à la fin de la simulation est de l'ordre de 10^{-3} .

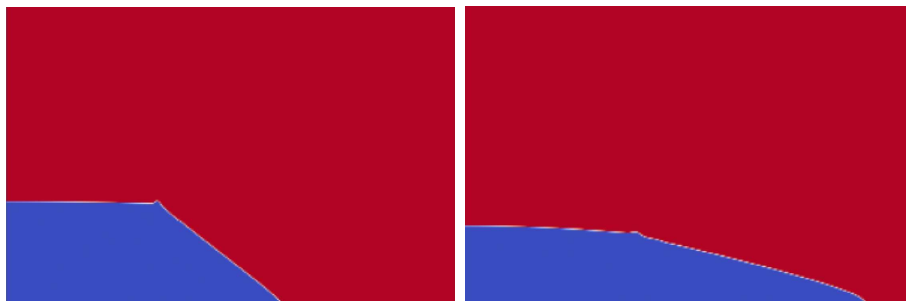


FIGURE 2.6 – À gauche : schéma implicite classique VFFC-ENIP, à droite : schéma implicite VFFC-ENIP renormalisé. Rupture d'un barrage.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé la méthode de renormalisation de la diffusion numérique adoptée dans le contexte du schéma VFFC, et l'avons étendue au traitement des interfaces entre les matériaux. La condition de stabilité pour les schéma explicite renormalisé étant rédhibitoire, il a été nécessaire d'introduire un schéma VFFC-ENIP implicite en temps. Ce schéma tire parti du caractère isentropique des discontinuités de contact entre matériaux.

Le schéma implicite obtenu s'est révélé suffisamment robuste pour le traitement d'écoulements raides tels que des écoulements faisant intervenir de l'eau et de l'air. D'autre part, il a permis de réaliser des simulations avec renormalisation de la diffusion numérique avec des pas de temps raisonnables, c'est-à-dire en considérant des nombres de CFL de l'ordre de ceux que l'on utilise pour les schémas explicites sans renormalisation de la diffusion numérique.

Une preuve théorique est par ailleurs donnée pour la stabilité linéaire inconditionnelle du schéma, et ce pour des coefficients de renormalisation arbitraires.

Les cas-tests présentés, dont celui de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, attestent l'efficacité de la méthode proposée. On constate, en effet, que les cas-tests obtenus par le schéma implicite avec renormalisation sont nettement moins diffusés que ceux obtenus par le schéma implicite classique.

Chapitre 3

Prise en compte de la tension de surface

Sommaire

3.1	Introduction	71
3.2	Calcul numérique de la courbure	72
3.3	Terme source et décentrement	73
3.4	Schéma	75
3.4.1	Préliminaires	75
3.4.2	Discrétisation des termes de tension de surface	78
3.5	Résultats	79
3.5.1	Équilibre d'une goutte	80
3.5.2	Perturbation de l'équilibre	82
3.5.3	Un cas-test d'advection	85
3.5.4	Coalescence de deux gouttes	89
3.6	Conclusion	92

3.1 Introduction

Les écoulements où les phénomènes capillaires interviennent sont fréquents dans les applications industrielles. Une modélisation précise et robuste s'avère à la fois nécessaire et difficile à mettre en œuvre.

La méthode CSF (Continuum Surface Force) introduite par Brackbill *et al.* [44] a été appliquée dans des contextes variés, notamment dans les méthodes VOF [53, 69] et *level-set* [74, 47]. La tension de surface est alors modélisée sous forme de force volumique dans un voisinage de l'interface par le biais d'une approximation de la mesure de Dirac. Une autre méthode populaire a été introduite par Lafaurie *et al.* [48], il s'agit de la méthode CSS (Continuum Surface Stress) qui consiste à exprimer la tension de surface comme la divergence d'un tenseur T donné par :

$$\sigma\kappa\delta_\Gamma\nu = -\nabla \cdot T,$$

où $T = -\sigma(I - \nu \otimes \nu)$. On a noté σ le coefficient de tension de surface, ν la normale à l'interface Γ , δ_Γ la mesure de Dirac portée par cette interface, et κ la courbure de l'interface. Un des inconvénients principaux de ces méthodes est qu'elles génèrent des champs de vitesse «parasites». Elles ne permettent pas, en particulier, de préserver des cas d'équilibre d'une goutte de rayon R donné dans un fluide environnant répondant à la formule de Laplace : $[p] = \frac{\sigma}{R}$, σ désignant le coefficient de tension de surface entre les deux fluides en présence, et $[p]$ le saut de pression à l'interface. Ces courants parasites sont dus au fait que le terme de tension de surface est traité comme un terme source dissocié du gradient de pression à l'interface. De nombreux travaux proposent des solutions permettant de réduire ces courants parasites soit par l'amélioration de la discrétisation des termes de tension superficielle par rapport au gradient de pression [18, 26], soit par l'amélioration de l'estimation de la courbure [58].

La force de tension de surface dépend du coefficient de tension de surface σ supposé constant dans notre étude, et de la courbure κ de l'interface. La précision et la robustesse des schémas dépend alors fortement de la manière dont est calculée la courbure, et de la cohérence de la discrétisation des termes de tension de surface vis-à-vis du gradient de pression.

Les équations d'Euler tenant compte de la tension de surface s'écrivent [1, 14] :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pI) = \sigma\kappa\delta_\Gamma\nu, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p)\mathbf{u}) = \sigma\kappa\delta_\Gamma\nu \cdot \mathbf{u}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Ce Chapitre s'organise de la manière suivante. Nous présentons tout d'abord la méthode de la fonction hauteur [79], que nous avons utilisée pour le calcul numérique de la courbure de l'interface. Dans une seconde Section, nous résumons les travaux

de Alouges *et al.* [25] et Ghidaglia [28] sur la discrétisation des termes source dans un contexte volumes finis avec décentrement amont. La troisième Section est consacrée à la présentation du schéma pour la discrétisation des termes de tension de surface, comme application des travaux de Alouges *et al.* et Ghidaglia [25, 28]. La Section 4 illustre le schéma sur des cas-tests, notamment celui de Laplace. Une Conclusion et une discussion sur les perspectives de ces travaux closent le Chapitre.

3.2 Calcul numérique de la courbure

Le calcul numérique du rayon de courbure peut s'obtenir par différentes méthodes. La plupart d'entre elles exploitent la relation $\kappa = -\nabla \cdot \nu$, ν désignant le vecteur unitaire normal à la surface. La méthode VFFC-ENIP se prête bien à l'emploi du calcul de la courbure par la fonction hauteur [79], le maillage est cartésien et les interfaces reconstruites grâce aux fractions volumiques des matériaux dans les mailles par la méthode de Youngs [89]. La méthode de la fonction hauteur est d'ordre 2.

Une fonction, la fonction hauteur, est calculée dans un voisinage de chaque maille mixte en additionnant les fractions volumiques du fluide de référence sur un stencil donné. Une direction principale est donnée (e_x lors de l'étape x du splitting directionnel, e_y lors de l'étape y), dans laquelle le stencil est de sept mailles. Dans la direction orthogonale, le stencil s'étend sur trois mailles.

La Figure 3.1 illustre la situation.

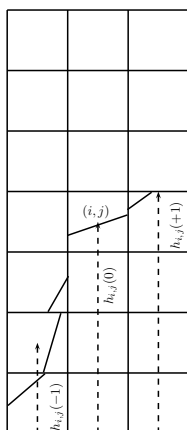


FIGURE 3.1 – Calcul des hauteurs dans le stencil 3×7 entourant la maille (i, j)

Pour la maille (i, j) , détectée comme mixte, on définit les trois hauteurs :

$$h_{i,j}(-1) = \sum_{l=-3}^3 \Delta y_{i-1,j+l} \alpha_{i-1,j+l}, \quad (3.2)$$

$$h_{i,j}(0) = \sum_{l=-3}^3 \Delta y_{i,j+l} \alpha_{i,j+l}, \quad (3.3)$$

$$h_{i,j}(1) = \sum_{l=-3}^3 \Delta y_{i+1,j+l} \alpha_{i+1,j+l}. \quad (3.4)$$

Lorsque la fonction hauteur est «bien définie», c'est-à-dire lorsque la hauteur $h_{i,j}(0)$ est bien située dans la maille (i, j) , la courbure est obtenue par différences finies de la relation :

$$\kappa = \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}}, \quad (3.5)$$

on a donc les approximations suivantes, dans le cas d'un maillage cartésien régulier :

$$h_x \equiv \frac{h_{i,j}(1) - h_{i,j}(-1)}{2\Delta x}, \quad (3.6)$$

$$h_{xx} \equiv \frac{h_{i,j}(1) - 2h_{i,j}(0) + h_{i,j}(-1)}{\Delta x^2} \quad (3.7)$$

Dans le cas où la fonction hauteur n'est pas bien définie dans cette maille, la courbure est prise égale à celle de la maille voisine.

3.3 Terme source et décentrement

Nous présentons ici les travaux de Alouges *et al.* [25], Ghidaglia [28] sur la discrétisation des termes source dans le contexte de schémas aux volumes finis avec décentrement amont pour la résolution de systèmes hyperboliques de la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f(v)}{\partial x} = S(v). \quad (3.8)$$

La discrétisation de (3.8) par un schéma aux volumes finis s'écrit :

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_j} \left(\phi_{j+1/2}^n - \phi_{j-1/2}^n \right) + \Delta t^n \Sigma_j^n, \quad (3.9)$$

où Σ_j^n est une discrétisation du terme source $S(v)$ obtenu par intégration de (3.8) sur le segment $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$:

$$\Sigma_j^n = S_j^n \equiv \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} S(x) dx, \quad (3.10)$$

et $\phi_{j+1/2}^n$ est le flux numérique sur l'interface située en $x_{j+1/2}$, supposé correspondre à un schéma de flux (voir la Définition 5, page 28), c'est-à-dire s'écrivant :

$$\phi_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(I + U_{j+1/2}^n)f_j^n + \frac{1}{2}(I - U_{j+1/2}^n)f_{j+1}^n. \quad (3.11)$$

Ghidaglia [28] montre que le fait que le flux (3.11) soit décentré, contrairement au terme source, peut entraîner des erreurs importantes notamment lorsqu'il s'agit d'obtenir une solution stationnaire. Il introduit alors la notion de «consistance augmentée», en définissant une application $\phi^{conv.}$ comme étant une primitive du terme source S :

$$\phi^{conv.}(x) \equiv \int S(x)dx. \quad (3.12)$$

On dit alors que la discrétisation Σ_j^n du terme source satisfait à la condition de «consistance augmentée» lorsque : si à un pas de temps donné, v_j^n est tel que :

$$f(v_j^n) = \phi^{conv.}(x_j^n), \quad \forall j \quad (3.13)$$

alors v_j^{n+1} , donné par le schéma (3.9) est égal à v_j^n .

En terme d'équations discrètes, cette condition s'écrit :

$$\Sigma_j^n = \frac{\phi_{j+1/2}^n - \phi_{j-1/2}^n}{\Delta x_j}, \quad \text{dès lors que (3.13) a lieu.} \quad (3.14)$$

Ces considérations conduisent à la proposition :

Proposition 3 *La discrétisation Σ_j^n satisfait à la condition de «consistance augmentée» dès lors que l'on choisit :*

$$\Sigma_j^n = \frac{1}{2} \left((I + U_{j-1/2}^n)\Sigma_{j-1/2}^n + (I - U_{j+1/2}^n)\Sigma_{j+1/2}^n \right), \quad (3.15)$$

où $U_{j+1/2}^n$ est la matrice de viscosité définissant le flux (3.11), et $\Sigma_{j+1/2}^n$ est défini comme :

$$\Sigma_{j+1/2}^n = \phi^{conv.}(x_{i+1}) - \phi^{conv.}(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x, t^n)dx. \quad (3.16)$$

Preuve : supposons que (3.13) a lieu et que Σ_j^n est défini par (3.15), montrons alors que

$$\Sigma_j^n = \frac{\phi_{j+1/2}^n - \phi_{j-1/2}^n}{\Delta x_j}. \quad (3.17)$$

On écrit :

$$\phi_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(I + U_{j+1/2}^n)f_j^n + \frac{1}{2}(I - U_{j+1/2}^n)f_{j+1}^n, \quad (3.18)$$

et :

$$\phi_{j-1/2}^n = \frac{1}{2}(I + U_{j-1/2}^n)f_{j-1}^n + \frac{1}{2}(I - U_{j-1/2}^n)f_j^n, \quad (3.19)$$

de sorte que la différence des flux s'obtient par :

$$\phi_{j-1/2}^n - \phi_{j-1/2}^n = \frac{1}{2} \left(I - U_{j+1/2}^n \right) (f_{j+1}^n - f_j^n) + \frac{1}{2} \left(I + U_{j-1/2}^n \right) (f_j^n - f_{j-1}^n). \quad (3.20)$$

En injectant $f_j^n = \phi^{conv.}(x_j)$ et en remarquant que

$$\phi^{conv.}(x_{j+1}) - \phi^{conv.}(x_j) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x, t^n) dx = \Sigma_{j+1/2}^n,$$

on obtient bien

$$\Sigma_j^n = \frac{\phi_{j+1/2}^n - \phi_{j-1/2}^n}{\Delta x_j}.$$

□

3.4 Schéma

Nous présentons dans cette section le schéma pour la discrétisation des termes de tension de surface en prenant en compte le décentrement des flux dans la méthode VFFC-ENIP.

3.4.1 Préliminaires

Conformément à la description du schéma donnée en Introduction de ce mémoire, nous nous plaçons sur une ligne générique de la direction x . Le schéma VFFC-ENIP, pour les équations d'Euler, peut alors s'écrire sous la forme :

$$|K_j^{n+1}|v_j^{n+1} = |K_j^n|v_j^n - A\Delta t^n \left(\phi_{j+1/2}^{n+\alpha} - \phi_{j-1/2}^{n+\alpha} \right), \quad (3.21)$$

et :

$$|K_j^{n+1}| = |K_j^n| + A\Delta t^n (u_{j+1/2}^{n+\alpha} - u_{j-1/2}^{n+\alpha}), \quad (3.22)$$

avec les notations usuelles à ce stade du mémoire.

Remarque 5 On a noté $n+\alpha$ dans les exposants des flux et des vitesses d'interface dans (3.21) et (3.22), avec $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ pour signifier que l'on utilise le schéma explicite ou le schéma implicite (voir Chapitre 2).

Pour se ramener à un schéma du type (3.9), on récrit (3.21) et (3.22) sous la forme :

$$|K_j^{n+1}|\tilde{v}_j^{n+1} = |K_j^n|\tilde{v}_j^n - A\Delta t^n \left(\tilde{\phi}_{j+1/2}^{n+\alpha} - \tilde{\phi}_{j-1/2}^{n+\alpha} \right) + A\Delta t^n \Sigma_j^n, \quad (3.23)$$

où Σ_j^n est une discrétisation des termes de tension de surface, obtenu par intégration de

$$S(x, t) = (0, 0, \sigma\kappa\delta_\Gamma\nu, \sigma\kappa\delta_\Gamma(\mathbf{u} \cdot \nu)). \quad (3.24)$$

sur le volume K_j :

$$A\Sigma_j^n = \int_{\Omega_j^n} S(x, t) dx. \quad (3.25)$$

Ici, on a noté :

$$\tilde{v}_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_j^n \\ \rho_j^n \mathbf{u}_j^n \\ \rho_j^n E_j^n \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

et le flux $\tilde{\phi}_{j+1/2}^{n+\alpha}$ vaut :

$$\tilde{\phi}_{j+1/2}^{n+\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\rho \mathbf{u} \cdot \nu)_{j+1/2}^{n+\alpha} \\ (\rho \mathbf{u} \nu + p)_{j+1/2}^{n+\alpha} \\ ((\rho E + p) \mathbf{u} \cdot \nu)_{j+1/2}^{n+\alpha} \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

pour une interface eulérienne, où les quantités indexées par $j+1/2$ sont calculées par le schéma VFFC, et :

$$\tilde{\phi}_{j+1/2}^{n+\alpha} = \begin{pmatrix} -u_{j+1/2}^{n+\alpha} \\ 0 \\ p_{j+1/2}^{n+\alpha} \\ (pu)_{j+1/2}^{n+\alpha} \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

dans le cas d'une interface lagrangienne, les valeurs de p et de u à l'interface étant calculées par résolution d'un problème de Riemann acoustique. Pour des raisons de robustesse, nous emploierons le schéma implicite présenté dans le Chapitre 2. La dernière composante du flux numérique le long d'une interface lagrangienne correspond donc au flux d'entropie, c'est-à-dire à 0. Par conséquent, le flux pour une interface lagrangienne sera donné par :

$$\tilde{\phi}_{j+1/2}^{n+\alpha} = \begin{pmatrix} -u_{j+1/2}^{n+\alpha} \\ 0 \\ p_{j+1/2}^{n+\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Le terme de tension de surface se réduit alors à :

$$S(x, t) = (0, 0, \sigma \kappa \delta_\Gamma \nu, 0). \quad (3.30)$$

On montre alors que le schéma obtenu rentre dans le cadre des schémas de flux du type (3.11).

Proposition 4 *Le flux numérique $\tilde{\phi}_{j+1/2}^{n+\alpha}$ intervenant dans le schéma (3.23), pour les interfaces eulériennes, peut s'écrire :*

$$\tilde{\phi}_{j+1/2}^{n+\alpha} = \frac{1}{2} \left(I + \tilde{U}_{j+1/2}^n \right) \tilde{f}_j^n + \frac{1}{2} \left(I - \tilde{U}_{j+1/2}^n \right) \tilde{f}_{j+1}^n. \quad (3.31)$$

On a noté $\tilde{U}_{j+1/2}^n$ la matrice :

$$\tilde{U}_{j+1/2}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U_{j+1/2}^n \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

où $U_{j+1/2}^n$ est la matrice de décentrement du flux VFFC, et :

$$\tilde{f}_j^n \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_j^n (\mathbf{u}_j^n \cdot \nu) \\ \rho_j^n \mathbf{u}_j^n (\mathbf{u}_j^n \cdot \nu) + p_j^n \nu \\ (\rho_j^n E_j^n + p_j^n) (\mathbf{u}_j^n \cdot \nu) \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Reprenant les définitions des vitesse et pression le long d'une interface lagrangienne :

$$u_{j+1/2}^{n,n+1} = \frac{\mu_j^n u_j^{n,n+1} + \mu_{j+1}^n u_{j+1}^{n,n+1}}{\mu_j^n + \mu_{j+1}^n} - \frac{p_{j+1}^{n,n+1} - p_j^{n,n+1}}{\mu_j^n + \mu_{j+1}^n}, \quad (3.34)$$

$$p_{j+1/2}^{n,n+1} = \frac{\mu_j^n p_{j+1}^{n,n+1} + \mu_{j+1}^n p_j^{n,n+1}}{\mu_j^n + \mu_{j+1}^n} - \mu_j^n \mu_{j+1}^n \frac{u_{j+1}^{n,n+1} - u_j^{n,n+1}}{\mu_j^n + \mu_{j+1}^n}, \quad (3.35)$$

avec $\mu_j^n \equiv \rho_j^n c_j^n$, on montre alors :

Proposition 5 *Le flux numérique $\tilde{\phi}_{j+1/2}^{n+\alpha}$ intervenant dans le schéma (3.23), pour les interfaces lagrangiennes, peut s'écrire :*

$$\tilde{\phi}_{j+1/2}^{n+\alpha} = \frac{1}{2} \left(I + \tilde{U}_{j+1/2}^n \right) \tilde{f}_j^n + \frac{1}{2} \left(I - \tilde{U}_{j+1/2}^n \right) \tilde{f}_{j+1}^n. \quad (3.36)$$

On a noté $\tilde{U}_{j+1/2}^n$ la matrice :

$$\tilde{U}_{j+1/2}^n = \begin{pmatrix} \mu_j^n - \mu_{j+1}^n & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\mu_j^n \mu_{j+1}^n & 0 & \mu_{j+1}^n - \mu_j^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

et :

$$\tilde{f}_j^n \equiv \begin{pmatrix} -u_j^{n+\alpha} \\ 0 \\ p_j^{n+\alpha} \nu \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

3.4.2 Discrétisation des termes de tension de surface

Au regard de ce qui a été développé dans le paragraphe précédent, nous sommes en mesure de mettre en application la discrétisation décentrée des termes de tension de surface comme termes sources.

La condition de «consistance augmentée» s'écrit, dans ce contexte, sous la forme :

$$\Sigma_j^n = \tilde{\phi}_{j+1/2}^{n+\alpha} - \tilde{\phi}_{j-1/2}^{n+\alpha}, \quad (3.39)$$

dès lors que (3.13) a lieu, soit :

$$\Sigma_j^n = \frac{1}{2} \left((I + \tilde{U}_{j-1/2}^n) \Sigma_{j-1/2}^n + (I - \tilde{U}_{j+1/2}^n) \Sigma_{j+1/2}^n \right), \quad (3.40)$$

où l'on a noté

$$\Sigma_{j+1/2}^n = \phi^{conv.}(x_{j+1}) - \phi^{conv.}(x_j) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} S(x, t^n) dx, \quad (3.41)$$

et les définitions de $\tilde{U}_{j-1/2}^n$ et de $\tilde{U}_{j+1/2}^n$ étant à prendre conformément à la Proposition 4 page 77 ou à la Proposition 5 page 77 selon la nature eulérienne ou lagrangienne de l'interface considérée.

À ce stade, on peut d'ores et déjà remarquer que la contribution de $\Sigma_{j+1/2}^n$ sur une interface lagrangienne vaut

$$\Sigma_{j+1/2}^n = (0, 0, \sigma \kappa_{j+1/2} \nu_{j+1/2}, 0), \quad (3.42)$$

par définition de la masse de Dirac portée par l'interface située en $x_{j+1/2}$, et qu'elle est nulle sur une interface eulérienne.

On démontre alors la proposition :

Proposition 6 *Pour une interface eulérienne la contribution du terme $\Sigma_{j+1/2}^n$ est nulle. Pour une interface lagrangienne la contribution du terme $\Sigma_{j+1/2}^n$ est donnée par :*

$$\Sigma_j^n = \begin{pmatrix} \frac{\sigma \kappa_{j-1/2} \nu_{j-1/2}}{\mu_j^n + \mu_{j-1}^n} - \frac{\sigma \kappa_{j+1/2} \nu_{j+1/2}}{\mu_{j+1}^n + \mu_j^n} \\ 0 \\ - \left(\frac{\sigma \mu_j^n \kappa_{j-1/2} \nu_{j-1/2}}{\mu_j^n + \mu_{j-1}^n} + \frac{\sigma \mu_j^n \kappa_{j+1/2} \nu_{j+1/2}}{\mu_{j+1}^n + \mu_j^n} \right) \nu \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Les termes $\kappa_{j+1/2} \nu_{j+1/2}$ sont à prendre au sens algébrique, suivant la convention de signe adoptée pour l'orientation de la normale et de la courbure.

Par rapport à l'algorithme initial, les modifications dues au terme de tension superficielle s'appliquent à l'équation d'évolution du volume : les vitesses d'interface sont modifiées de la manière suivante :

$$u_{j+1/2}^n \leftarrow u_{j+1/2}^n + \frac{\sigma \kappa_{j+1/2} \nu_{j+1/2}}{\mu_j^n + \mu_{j+1}^n}. \quad (3.44)$$

L'équation d'évolution de la quantité de mouvement est modifiée, elle aussi, de sorte que la différence de flux, correspondant au gradient de pression est modifiée de la manière suivante :

$$p_{j+1/2}^n - p_{j-1/2}^n \leftarrow p_{j+1/2}^n - p_{j-1/2}^n - \left(\frac{\mu_j^n \sigma \kappa_{j-1/2} \nu_{j-1/2}}{\mu_{j-1}^n + \mu_j^n} + \frac{\mu_j^n \sigma \kappa_{j+1/2} \nu_{j+1/2}}{\mu_j^n + \mu_{j+1}^n} \right) \quad (3.45)$$

Remarque 6 *Le modèle utilisé étant celui d'un fluide idéal, il n'y a pas de diffusion physique. La diffusion numérique étant très faible dans le schéma explicite, les erreurs d'arrondi machine sont nettement amplifiées et conduisent à des instabilités. L'algorithme présenté est mis en œuvre avec le schéma implicite introduit dans le Chapitre 2 qui le rend suffisamment robuste pour éliminer ces instabilités.*

Remarque 7 *Certaines situations liées à l'ordre des milieux dans les condensats, conduisent à l'introduction d'interfaces non physiques au sein des condensats. Ces interfaces, qui sont en réalité des faces du maillage cartésien, sont traitées en tant qu'interfaces lagrangiennes dans la méthode VFFC-ENIP.*

Pour ces interfaces, aucune normale n'a été calculée par la méthode de Youngs. Une normale leur est alors arbitrairement attribuée : e_x ou e_y selon l'étape du splitting dans laquelle on se trouve. De la même manière, aucune courbure n'est calculée pour ces interfaces. Une valeur leur est alors attribuée qui correspond à la courbure de l'interface physique la plus proche.

3.5 Résultats

Dans cette section, les grandeurs sont adimensionnées. Nous ne précisons pas les unités.

3.5.1 Équilibre d'une goutte

Comme il a été précisé en Introduction de ce chapitre, ce cas-test, bien que simple, est particulièrement discriminant. Il s'agit d'un cas d'équilibre pour lequel la relation de Laplace doit avoir lieu : $[p] = \sigma\kappa$.

Nous considérons le cas d'une bulle de rayon $R = 0.25$ d'un gaz de densité 1, de pression $p = 1.01$, dans un fluide environnant de même densité mais de pression moindre égale à 1. La vitesse est initialement nulle. Le coefficient de tension de surface est $\sigma = 0,25 \cdot 10^{-2}$, de sorte que la relation $[p] = \sigma/R$ est vérifiée.

Courbure imposée

Nous considérons, ici, le cas où la courbure est imposée égale à sa valeur réelle $\kappa = 4$. Le schéma se comporte parfaitement dans ce cas précis. Aucun courant parasite n'est généré, et l'équilibre est strictement conservé (à la précision machine).

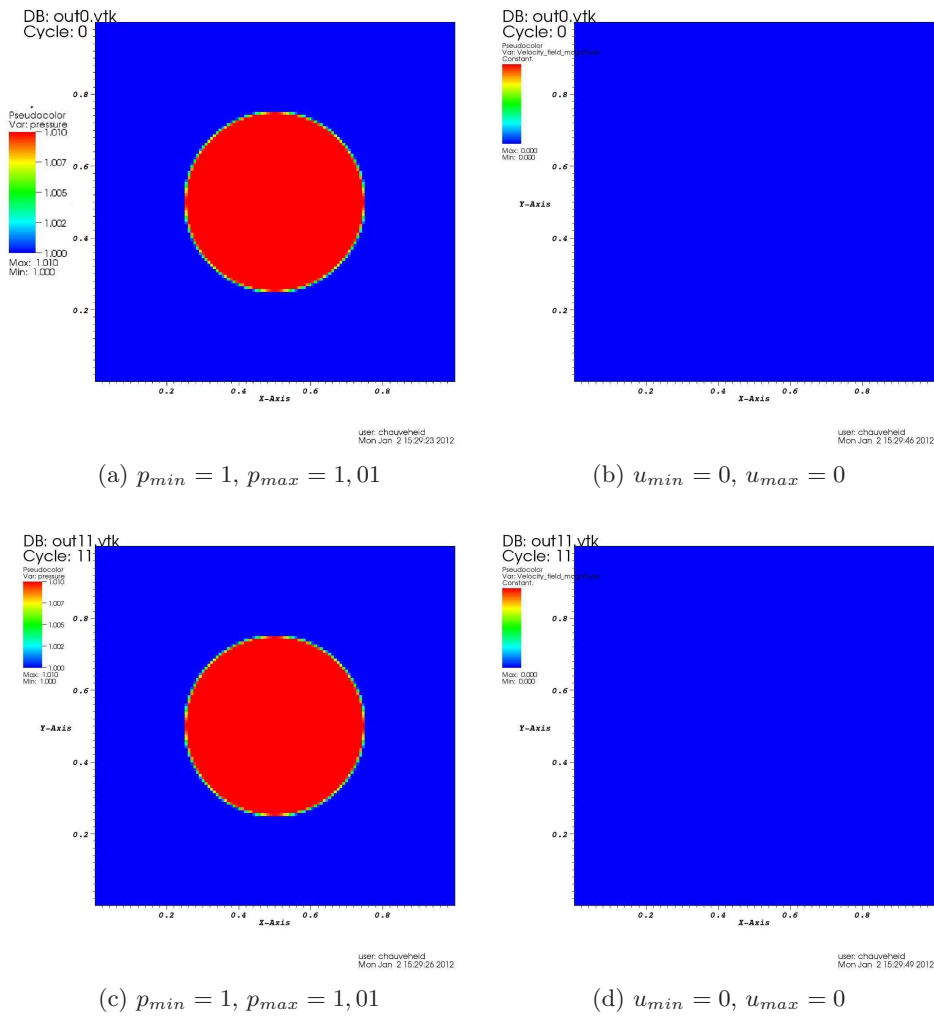


FIGURE 3.2 – Équilibre d’une goutte sur maillage 128×128 , courbure imposée. À gauche : pression, à droite : norme du champ de vitesse. Temps $t = 0$ en haut, et $t = 35$ en bas.

Courbure numérique

La courbure est à présent calculée numériquement par la méthode de la fonction hauteur de la Section 3.2. Bien que des vitesses parasites soient générées, dues au fait que la courbure numérique n’est pas strictement constante le long de l’interface, ces courants sont relativement faibles, et diffusés par la nature implicite du schéma. On constate qu’en raffinant le maillage les résultats s’améliorent comme il se doit (Figure 3.3).

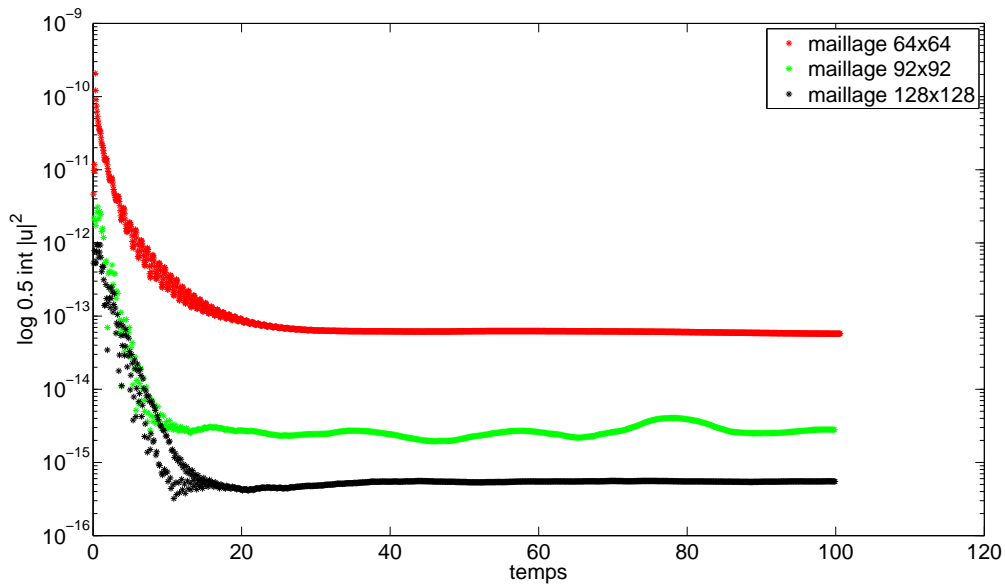


FIGURE 3.3 – Logarithme de la norme 1 de l'énergie cinétique sur un maillage 64×64 , 96×96 puis sur un maillage 128×128 .

3.5.2 Perturbation de l'équilibre

La goutte du cas-test précédent est perturbée de sorte à former une ellipse de même volume (ou plutôt de même surface). On attend du code qu'un retour à l'équilibre, dû à la viscosité numérique, s'opère après un certain nombre d'oscillations de l'ellipse. Les résultats numériques sont satisfaisants sur ce cas-test. On constate en outre qu'en raffinant le maillage, l'ellipse oscille plus longtemps avant de se stabiliser sur la solution d'équilibre du problème.

La Figure 3.4 montre le résultat du calcul sur un maillage 64×64 à des temps intermédiaires : la phase initiale ($t = 0$), le début de la première phase d'oscillation ($t = 1,48$), la demi-période d'oscillation ($t = 7,74$) et la stabilisation finale de l'ellipse ($t = 11,98$).

Les Figures 3.5 et 3.6 montrent le résultat du calcul sur un maillage 256×256 à des temps intermédiaires : la phase initiale ($t = 0$), la première demi-période d'oscillation ($t = 5,2$), le second passage par la configuration circulaire ($t = 8,1$), le début de la seconde période d'oscillation ($t = 11,2$), la fin de la seconde période d'oscillation ($t = 16,4$) et enfin, la stabilisation finale ($t = 45$).

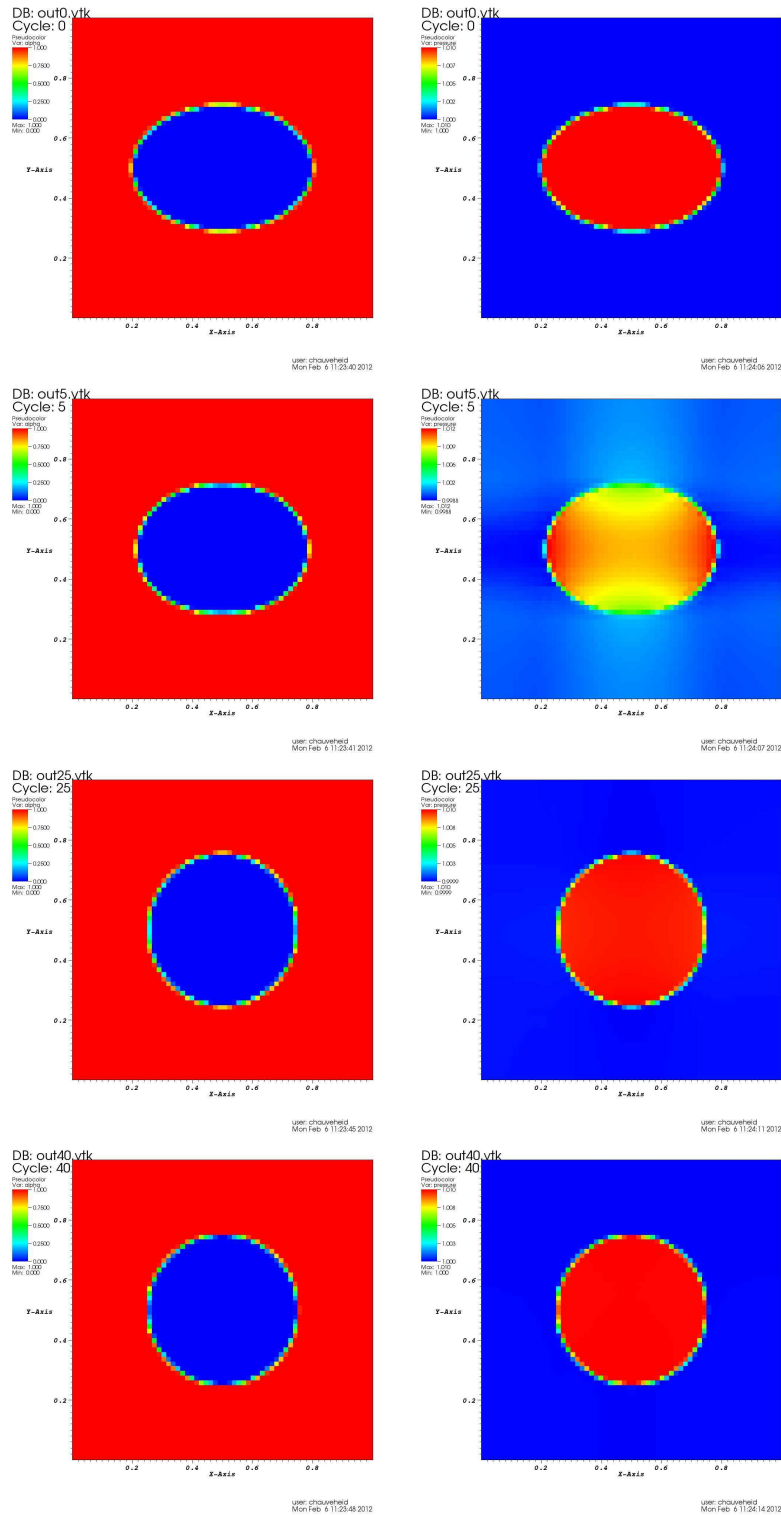
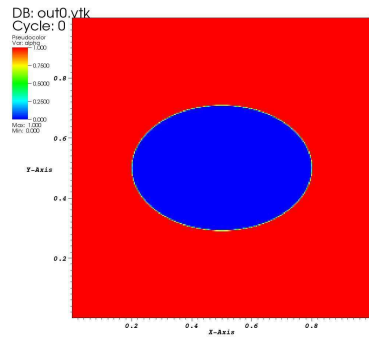
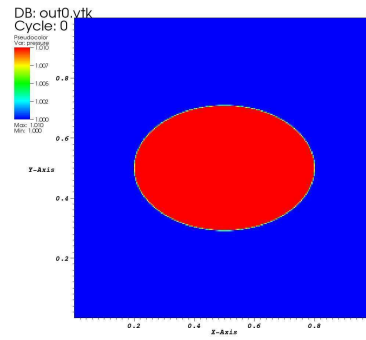
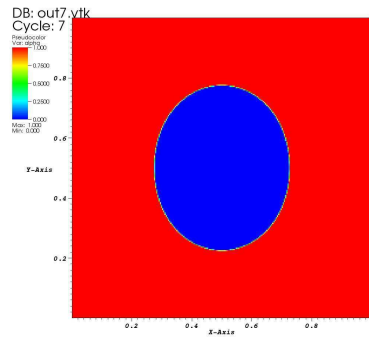


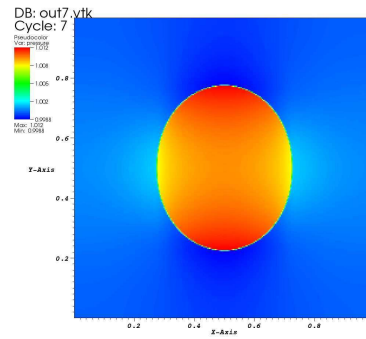
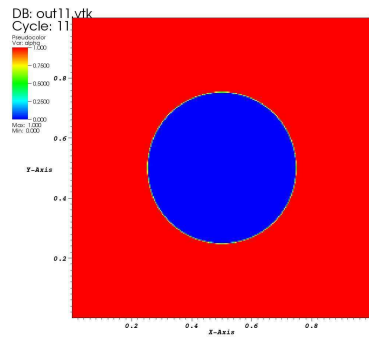
FIGURE 3.4 – Stabilisation d'une ellipse sur maillage 64×64 . A gauche : fraction volumique, à droite : pression. Temps $t = 0$, $t = 1,48$, $t = 11,98$. Echelle de pression : $p_{min} = 0,9988$, $p_{max} = 1,012$.



(a) Fraction volumique

(b) $p_{min} = 1, p_{max} = 1,01$ 

(c) Fraction volumique

(d) $p_{min} = 0,9988, p_{max} = 1,012$ 

(e) Fraction volumique

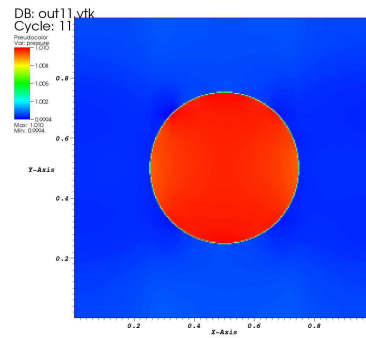
(f) $p_{min} = 0,9994, p_{max} = 1,012$

FIGURE 3.5 – Stabilisation d'une ellipse sur maillage 256×256 . A gauche : fraction volumique, à droite : pression. Temps : $t = 0, t = 5, 2, t = 8, 1$.

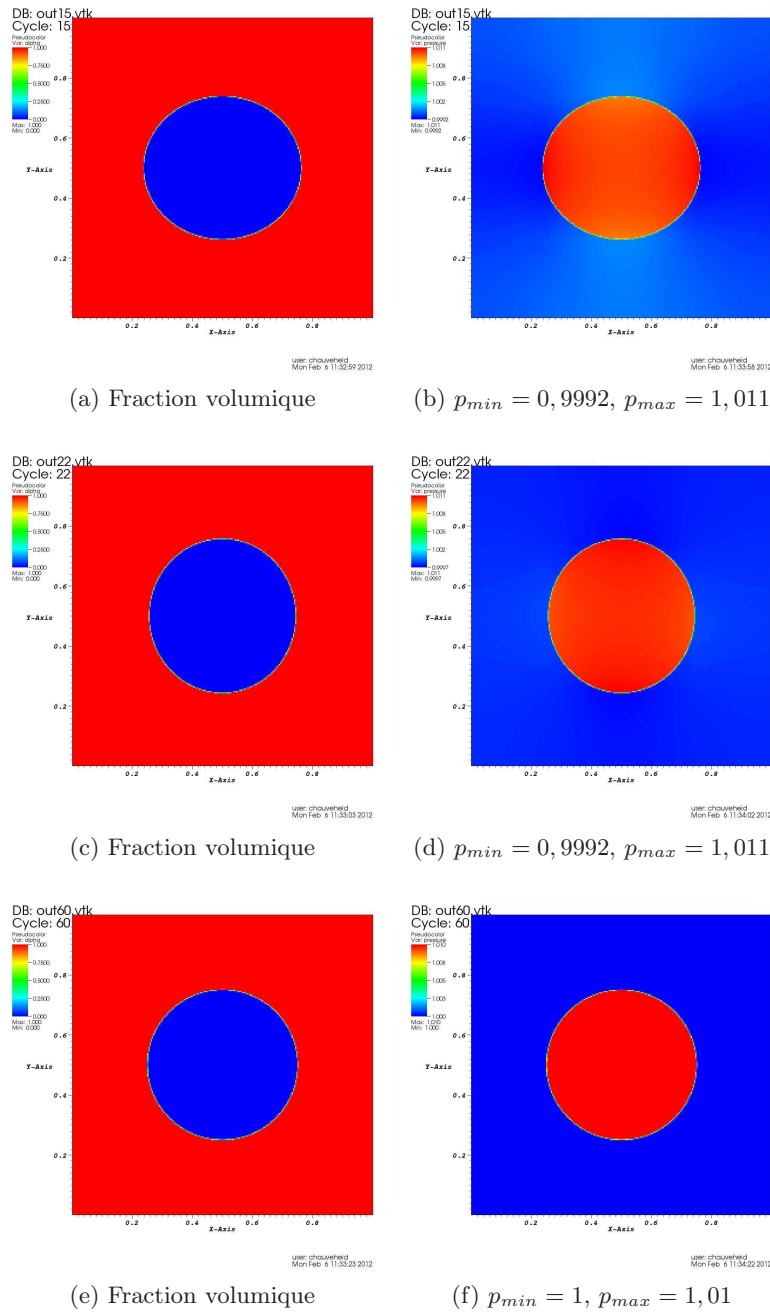


FIGURE 3.6 – Stabilisation d’une ellipse sur maillage 256×256 , suite. A gauche : fraction volumique, à droite : pression. Temps : $t = 11,2$, $t = 16,4$, $t = 45$.

3.5.3 Un cas-test d’advection

Ce cas-test présente l’advection d’une bulle d’un fluide dans un autre fluide. Les pressions et densités sont initialisées de la même manière que dans le cas présenté

dans le Paragraphe 3.5.1. Le champ de vitesse est initialisé de manière uniforme par $u_x = 1$, $u_y = 1$.

Dans ce cas-test, comme dans le cas-test présenté dans le Paragraphe 3.5.1, la bulle doit être advectée exactement dans la diagonale du domaine de simulation. En effet, cette solution est stationnaire dans le référentiel se déplaçant à la vitesse de la bulle.

Le domaine de calcul est $[0, 3] \times [0, 3]$. La Figure 3.7 montre le résultat de la simulation sur une maillage 128×128 . On constate que des vitesses «parasites» sont créées au voisinage de l'interface, mais restent bornées. L'écart à la valeur théorique est de de l'ordre de 1%. La Figure 3.8 montre le résultat de la simulation sur une maillage 256×256 . Là encore, on constate que des vitesses «parasites» sont créées au voisinage de l'interface, mais restent bornées. L'écart à la valeur théorique est de de l'ordre de 1%. Dans les deux cas, ces vitesses parasites ne sont pas suffisantes, du moins durant le temps que dure la simulation, pour déstabiliser l'interface. Celle-ci reste circulaire.

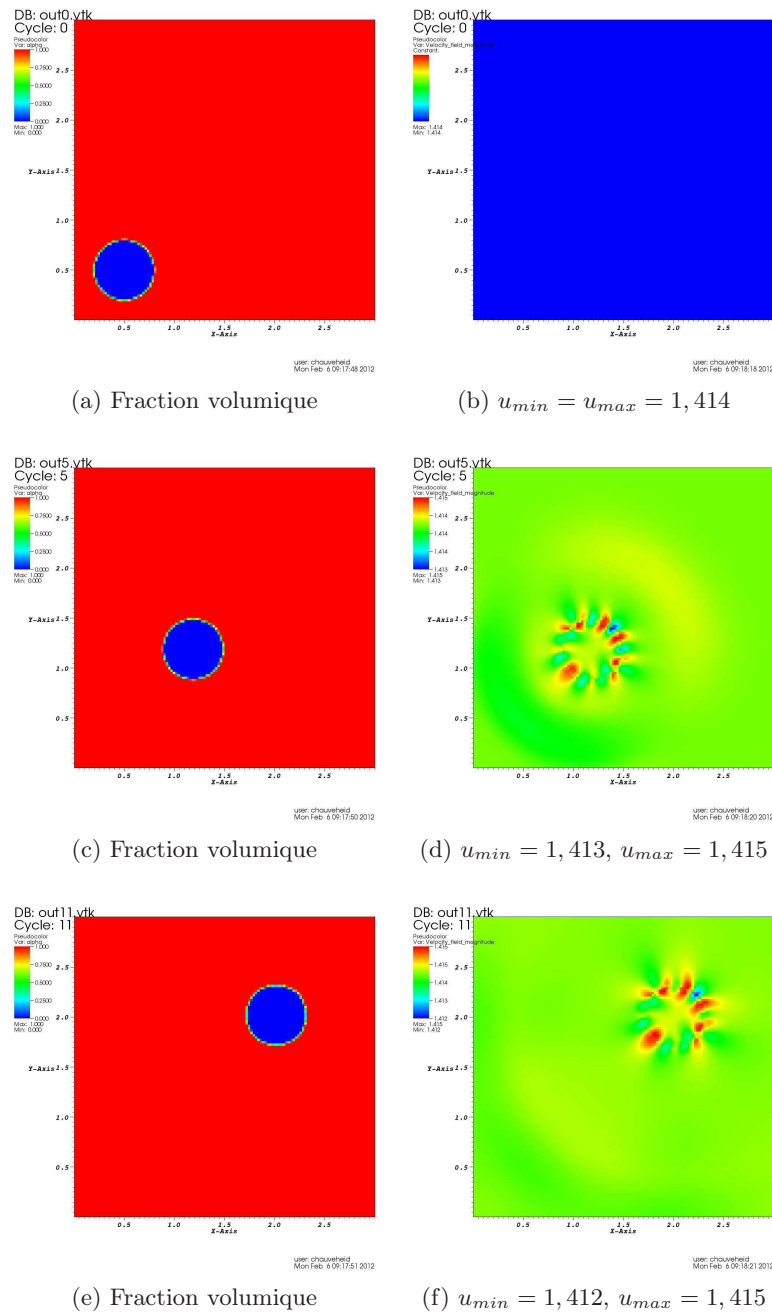


FIGURE 3.7 – Un cas-test d’advection, 128×128 mailles. A gauche : fraction volumique, à droite : norme du champ de vitesses. De haut en bas : $t = 0, t = 0,7, t = 1,5$.

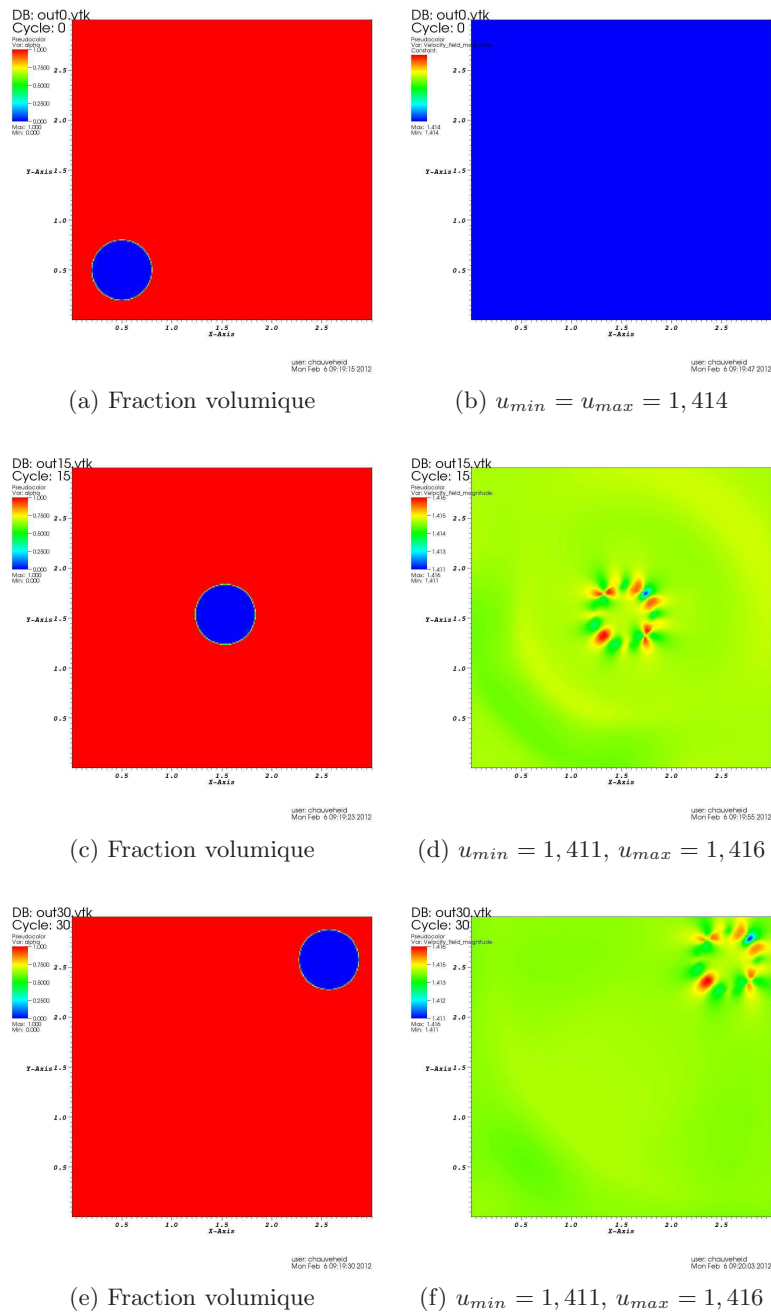


FIGURE 3.8 – Un cas-test d’advection, 256×256 mailles. A gauche : fraction volumique, à droite : norme du champ de vitesses. De haut en bas : $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$.

3.5.4 Coalescence de deux gouttes

Dans ce cas-test, deux bulles de fluide sont initialement en contact (intersection non vide), et évoluent vers une situation d'équilibre. La situation d'équilibre est la surface de même aire que les deux gouttes initiales et de périmètre minimal c'est-à-dire un cercle.

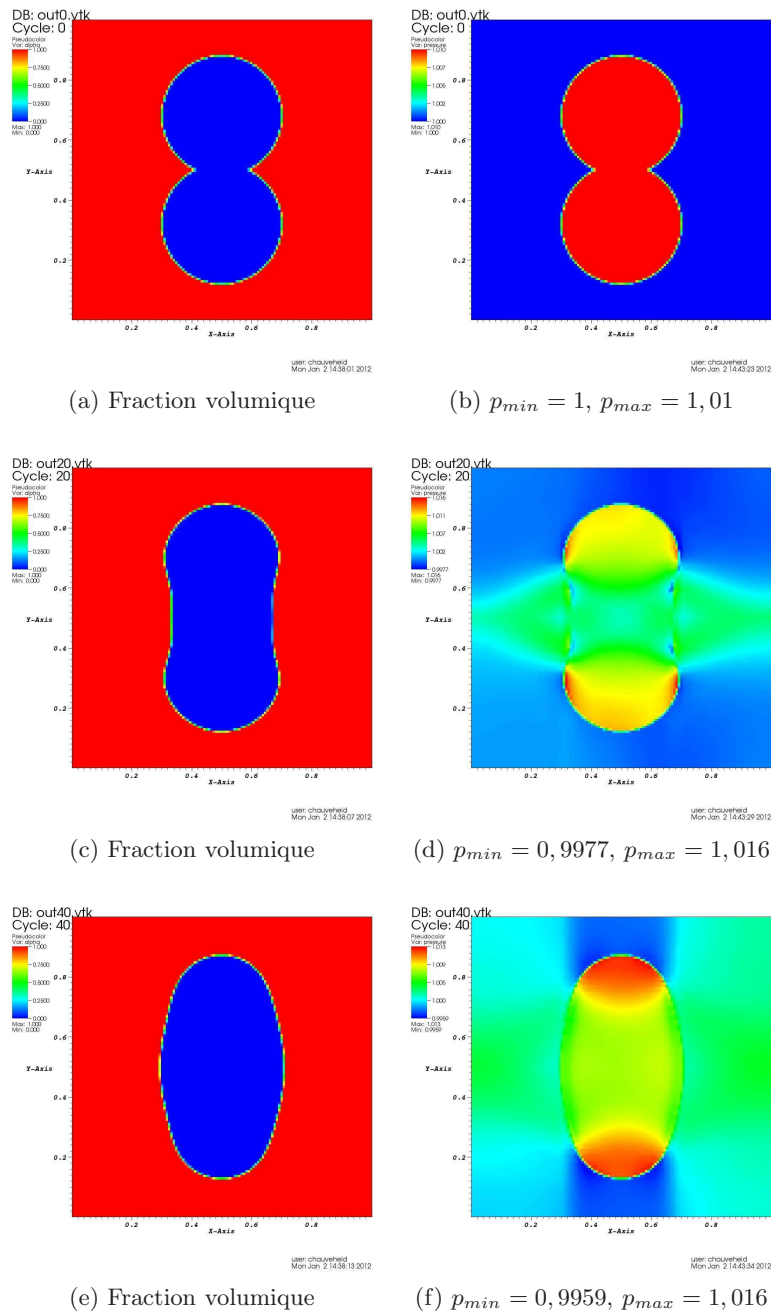


FIGURE 3.9 – Coalescence de deux gouttes sur maillage 128×128 . A droite : pression, à gauche : fraction volumique.

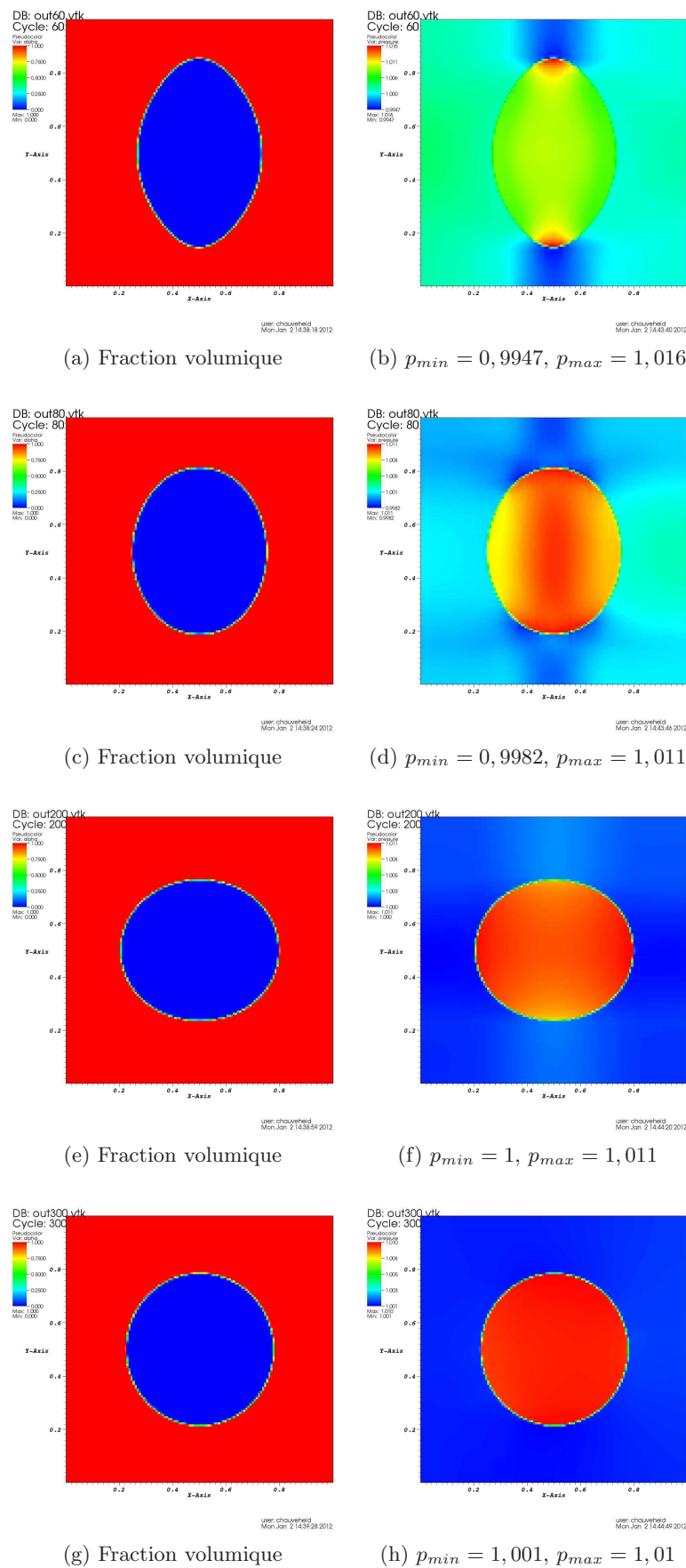


FIGURE 3.10 – Coalescence de deux gouttes sur maillage 128×128 . A droite : pression, à gauche : fraction volumique.

3.6 Conclusion

Nous avons obtenu un schéma robuste et précis pour la discrétisation des termes de tension de surface. Ce schéma a pour point de départ le schéma implicite introduit dans le Chapitre 2 et les travaux de Alouges *et al.* [25] et Ghidaglia [28] sur la discrétisation décentrée des termes sources dans l'approximation numérique des systèmes de lois de conservation.

La discrétisation obtenue est naturelle, puisqu'elle agit directement sur les interfaces, là où est définie la force de tension superficielle.

Les résultats numériques sont très probants, notamment sur le cas-test d'équilibre de Laplace.

Par construction de la méthode, les courants parasites engendrés proviennent uniquement de l'approximation numérique de la courbure et de la qualité de la reconstruction d'interface, mais pas *a priori* de la discrétisation à proprement parler de la force de tension de surface.

Chapitre 4

Écoulements radiatifs

Sommaire

4.1	Introduction	95
4.2	Modèle mathématique	96
4.3	Méthode numérique	98
4.3.1	Équation de convection	98
4.3.2	Équation de diffusion/réaction	104
4.3.3	Extension au cas 2D	105
4.3.4	Extension au cas 3D	108
4.3.5	Résolution du système non linéaire	109
4.4	Résultats numériques	111
4.4.1	Chocs radiatifs	111
4.4.2	Étude de convergence	115
4.4.3	Un cas test 1D bi-matériaux	116
4.4.4	Un cas test 2D	119
4.5	Conclusion	121

4.1 Introduction

Les modèles d'hydrodynamique radiative interviennent dans bon nombre d'applications physiques telles que l'astrophysique, la fusion par confinement inertiel (FCI) ou plus généralement dans les écoulements faisant intervenir de très hautes températures. Dans ce cas, la matière émet des photons dont les effets doivent être couplés à ceux de l'hydrodynamique. Ces problèmes multi-physiques impliquent en général diverses échelles de temps : des petites échelles provenant du transport radiatif, ainsi que des grandes échelles provenant des phénomènes purement hydrodynamiques. Les difficultés numériques rencontrées lors de la résolution de tels problèmes proviennent essentiellement de la présence de ces différentes échelles de temps. Une méthode usuelle dans ce contexte consiste à séparer la résolution de l'hydrodynamique de celle des phénomènes radiatifs. La première se fait par le biais d'un schéma explicite en temps, tandis que la seconde emploie généralement des schémas implicites en temps afin de prendre en compte les petites échelles de temps et d'assurer la stabilité numérique des schémas. Ce type de technique est appelé, dans la littérature, méthode IMEX pour IMplicit-EXplicit [45, 46].

Dans ce chapitre, nous considérons les équations de l'hydrodynamique radiative dans la limite de diffusion grise (indépendance vis-à-vis de la fréquence des photons) [59, 67]. Ce système est composé des équations d'Euler compressibles auxquelles on ajoute une équation pour le transport radiatif, ces équations étant couplées entre elles par des termes réactifs.

Nous nous plaçons dans un contexte multi-matériaux où les fluides sont supposés non miscibles. La partie hydrodynamique des équations est traitée par une extension de la méthode VFFC-ENIP explicite en temps. Le transport radiatif est résolu, quant à lui, par un schéma volumes finis co-localisé implicite en temps. Le modèle du condensat (voir le chapitre Introduction de ce mémoire) impose que la résolution du système se fasse par un schéma aux directions alternées. Nous procédons de la sorte pour la résolution de l'équation de transport radiatif en proposant un schéma capable de prendre en compte les termes de réaction dans chaque étape du splitting directionnel.

La stratégie consistant à résoudre par un schéma volumes finis la partie hydrodynamique des équations est classique. Néanmoins plusieurs choix sont possibles pour l'écriture sous forme conservative des équations. Dans [45, 46], par exemple, la résolution des termes non conservatifs qui apparaissent dans l'opérateur de convection sont reportées lors de l'étape implicite du schéma. Au contraire, Després et Buet [12, 11] proposent une forme conservative pour l'ensemble de l'opérateur de convection en introduisant l'énergie totale du système et l'entropie radiative. Cette stratégie, que nous adoptons dans le cadre de ce travail, permet de s'affranchir de la discrétisation des termes non conservatifs qui peuvent s'avérer difficiles à approcher correctement.

Dans la première section de ce Chapitre, nous introduisons les équations du modèle, et la réécriture sous forme conservative proposée par [12, 11].

La seconde Section est consacrée à la présentation des méthodes numériques :

extension de la méthode VFFC-ENIP pour la partie conservative des équations et présentation du schéma 1D pour la résolution de l'équation de diffusion/réaction. L'extension aux cas 2D et 3D y est donnée avec l'introduction du splitting permettant de prendre en compte les termes de réaction dans chacune des direction x et y . Une preuve est donnée que ce splitting est exact pour les équations linéarisées. Dans la dernière Section, des résultats numériques sont présentés.

4.2 Modèle mathématique

Nous considérons les équations de l'hydrodynamique radiative dans la limite de diffusion hors équilibre [67, 59], dont une forme sans dimension peut s'écrire [57, 56] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \left(p + \mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_r}{3} \right) Id \right) = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p) \mathbf{u}) = -\mathcal{P}_0 \left(\sigma(T^4 - \mathcal{E}_r) + \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{\mathcal{E}_r}{3} \right), \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{E}_r \mathbf{u}) + \frac{\mathcal{E}_r}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\kappa \nabla \mathcal{E}_r) + \sigma(T^4 - \mathcal{E}_r). \quad (4.4)$$

Les notations sont les suivantes : ρ désigne la masse volumique, \mathbf{u} le champ de vitesses, p la pression hydrodynamique, reliée à la masse volumique ρ et à l'énergie interne spécifique e par une équation d'état : $EOS(p, \rho, e) = 0$. L'énergie spécifique de la matière est $E = e + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2$, somme de l'énergie interne spécifique et de l'énergie cinétique spécifique, T est la température de la matière. L'énergie radiative adimensionnée est notée \mathcal{E}_r . On définit la température radiative par $T_r^4 = \mathcal{E}_r$ et la pression radiative par $p_r = \mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_r}{3}$. La section efficace d'absorption est notée σ et le coefficient de diffusion est noté κ .

Le nombre sans dimension \mathcal{P}_0 mesure l'effet de la radiation sur l'écoulement, et représente le quotient de la pression radiative par la pression hydrodynamique :

$$\mathcal{P}_0 = \frac{\widetilde{\alpha}_R \widetilde{T}_0^4}{\widetilde{\rho}_0 \widetilde{a}_0^2}, \quad (4.5)$$

où $\widetilde{\alpha}_R$ est la constante de radiation. Cette constante est liée à celle de Stefan-Boltzmann \mathcal{S} par :

$$\widetilde{\alpha}_R = \frac{4}{c} \mathcal{S}.$$

La quantité $\widetilde{\rho}_0$ dénote une masse volumique de référence et \widetilde{a}_0 une vitesse du son de référence.

Les quantités sans dimension sont définies à partir des quantités dimensionnées de la manière suivante :

$$\begin{array}{l|l}
x = \frac{\tilde{x}}{L} & T = \frac{\tilde{T}}{T_0} \\
t = \frac{\tilde{a}_0 \tilde{t}}{L} & T_r = \frac{\tilde{T}_r}{T_0} \\
\rho = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} & \sigma = \frac{\tilde{\sigma} L \tilde{c}}{a_0} \\
\mathbf{u} = \frac{\tilde{\mathbf{u}}}{a_0} & \kappa = \frac{\tilde{c}}{3\tilde{\sigma} a_0 L} \\
e = \frac{\tilde{e}}{a_0^2} & p = \frac{\tilde{p}}{\rho_0 a_0^2}
\end{array} \quad (4.6)$$

où \tilde{c} est la vitesse de la lumière, \tilde{T}_0 une température de référence et \tilde{L} une longueur de référence.

Le choix de l'adimensionnement intervient aussi dans les équations d'état. Dans un contexte mono-fluide pour une équation d'état de type gaz parfait : $\tilde{p} = (\gamma - 1)\tilde{\rho}\tilde{e}$, si la vitesse du son de référence \tilde{a}_0 est donnée par :

$$\tilde{a}_0^2 = \gamma \tilde{R} \tilde{T}_0, \quad (4.7)$$

où \tilde{R} est la constante spécifique du gaz, alors les équations d'état adimensionnées sont données par :

$$\rho = \frac{\gamma p}{T}, \quad e = \frac{T}{\gamma(\gamma - 1)}. \quad (4.8)$$

Remarque 8 *Lorsque plusieurs fluides sont en présence, les grandeurs de référence seront choisies relativement à un seul fluide. Les équations d'état relatives à ce fluide seront données par (4.8), tandis que celle des autres fluides seront adaptées en conséquence.*

Bien que des termes non conservatifs interviennent dans (4.1)-(4.4), on obtient un bilan d'énergie totale en sommant (4.3) et \mathcal{P}_0 (4.4) :

$$\frac{\partial(\rho E + \mathcal{P}_0 \mathcal{E}_r)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\left(\rho E + p + 4\mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_r}{3} \right) \mathbf{u} \right) = \mathcal{P}_0 \nabla \cdot (\kappa \nabla \mathcal{E}_r). \quad (4.9)$$

En considérant l'entropie radiative $\mathcal{S}_r \equiv T_r^3$ [12, 11], on obtient finalement une formulation conservative pour l'équation d'évolution de l'énergie radiative (4.4) :

$$\frac{\partial \mathcal{S}_r}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{S}_r \mathbf{u}) = \frac{3}{4T_r} [\nabla \cdot (\kappa \nabla \mathcal{E}_r) + \sigma(T^4 - \mathcal{E}_r)]. \quad (4.10)$$

Le système (4.1), (4.2), (4.9), (4.10) est conservatif pour ce qui est des termes convectifs et se prête plus volontiers à l'application d'une discrétisation de type volumes finis.

La stratégie adoptée pour résoudre (4.1), (4.2), (4.9), (4.10) est alors la suivante : la partie convective, qui correspond aux membres de gauche est résolue par le schéma VFFC-ENIP explicite, et l'on résout, dans un second temps, les termes de diffusion/réaction par un schéma volumes finis implicite en temps. Par ailleurs, dans [45] et [46], une boucle est réalisée à chaque pas de temps entre les parties explicite et implicite du schéma de sorte à satisfaire un critère de convergence non linéaire et

d'obtenir des solutions d'ordre élevé en temps. Nous prenons le parti, dans le cadre de ce travail, de ne considérer qu'une résolution des systèmes explicite et implicite par pas de temps.

4.3 Méthode numérique

Nous présentons, dans cette section, les méthodes numériques développées pour la résolution de (4.1), (4.2), (4.9), (4.10). Le formalisme utilisé est celui de la méthode VFFC-ENIP présentée dans l'Introduction de ce mémoire.

Dans les paragraphes 4.3.1 et 4.3.2, nous considérons une ligne générique x obtenue après création de tous les condensats d'une ligne ou d'une colonne extraite du domaine 2D de résolution, lors de l'étape x du splitting directionnel.

Une fois n'est pas coutume, nous présentons une description 1D des schémas, les indices j et k seront omis dans la suite. Néanmoins, le splitting en espace des termes de réaction dans (4.9) et (4.10) n'est pas immédiat. Il est traité en détail dans le paragraphe 4.3.3.

4.3.1 Équation de convection

La partie convective des équations (4.1), (4.2), (4.9), (4.10) correspond aux membres de gauche :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \left(p + \mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_r}{3} \right) Id \right) = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial(\rho E + \mathcal{P}_0 \mathcal{E}_r)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\left(\rho E + p + 4\mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_r}{3} \right) \mathbf{u} \right) = 0, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial t} + \nabla \cdot (S_r \mathbf{u}) = 0, \quad (4.14)$$

et peut se récrire sous la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot F(v) = 0, \quad (4.15)$$

une fois noté : $v = (\rho, \rho \mathbf{u}, \rho E + \mathcal{P}_0 \mathcal{E}_r, S_r)$ le vecteur des variables conservées, et $F(v)$ la matrice du flux physique telle que

$$F(v) \cdot \nu = \left(\rho(\mathbf{u} \cdot \nu), \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \nu) + \left(p + \mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_r}{3} \right) \nu, \left(\rho E + p + 4\mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_r}{3} \right) (\mathbf{u} \cdot \nu), S_r(\mathbf{u} \cdot \nu) \right), \quad (4.16)$$

est le flux normal dans la direction $\nu \in \mathbb{S}^{d-1}$, où d représente la dimension de l'espace physique.

Nous nous plaçons le long d'une ligne générique de la direction x , conformément aux définitions adoptées en Introduction de ce mémoire, et supposons tous les condensats de cette ligne construits. La ligne générique obtenue consiste alors en une juxtaposition de cellules dont les volumes dépendent du temps.

De l'intégration de (4.15) sur un volume de contrôle dépendant du temps $K_i(t) = [x_i(t), x_{i+1}(t)]$ résulte le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\frac{dV_{K_i}}{dt} + (A_{i+1/2}\phi(v_{i+1}, v_i) - A_{i-1/2}\phi(v_i, v_{i-1})) = 0, \quad (4.17)$$

où $V_{K_i} = \int_{K_i(t)} v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$, $\phi(v_{i+1}, v_i)$ désigne le flux numérique sur l'interface séparant les volumes K_i et K_{i+1} . La longueur de l'interface située à $x_{i+1/2} \equiv \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ est, elle, notée $A_{i+1/2}$.

Il y a deux types d'interfaces en présence. Les interfaces eulériennes séparent deux couches de la ligne générique x de mêmes matériaux, elles ne se déplacent pas. Les interfaces lagrangiennes, provenant de l'intérieur des condensats, séparent les couches de matériaux distincts, elles peuvent se déplacer au cours du temps. A chacun de ces deux types d'interface correspond un flux numérique : eulérien pour les interfaces eulériennes, et lagrangien pour les interfaces lagrangiennes. Le calcul de ces flux est détaillé à présent.

Calcul des flux eulériens

Le calcul des flux eulériens se fait par la méthode VFFC [29]. Le flux numérique est alors donné par :

$$\phi(v, w, \nu) = \frac{F(v) + F(w)}{2} \cdot \nu - \mathcal{U}(u, v, \nu) \frac{F(w) - F(v)}{2} \cdot \nu. \quad (4.18)$$

Ici, $\nu = e_x$ pour la direction générique x , et $\mathcal{U}(u, v, \nu)$ est la matrice de signe de la jacobienne $\frac{\partial F(v) \cdot \nu}{\partial v}$ au sens de la définition 4, page 27.

Le calcul de la matrice de signe passe par celui des éléments propres de la jacobienne du flux normal dont l'expression dépend des variables considérées.

Si l'on note Ψ l'application qui permet de passer des variables conservées v à des variables w ($w = \Psi(v)$), et $\frac{\partial F(v) \cdot \nu}{\partial v}$ la matrice jacobienne du flux exprimée dans les variables v . Les matrices $\frac{\partial F(v) \cdot \nu}{\partial v}$ et $\frac{\partial F(w) \cdot \nu}{\partial w}$ sont alors équivalentes par la relation :

$$\frac{\partial F(v) \cdot \nu}{\partial v} = \nabla \Psi(v)^{-1} \left(\frac{\partial F(w) \cdot \nu}{\partial w} \right) \nabla \Psi(v). \quad (4.19)$$

Les matrices $\frac{\partial F(v) \cdot \nu}{\partial v}$ et $\frac{\partial F(w) \cdot \nu}{\partial w}$ ont donc les mêmes valeurs propres, et les vecteurs propres à droite r de $\frac{\partial F(v) \cdot \nu}{\partial v}$ sont reliés aux vecteurs propres à droite R de $\frac{\partial F(w) \cdot \nu}{\partial w}$ par :

$$r = \nabla \Psi(v)^{-1} R, \quad (4.20)$$

tandis que les vecteurs propres à gauche ℓ de $\frac{\partial F(v) \cdot \nu}{\partial v}$ sont reliés aux vecteurs propres à gauche L de $\frac{\partial F(w) \cdot \nu}{\partial w}$ par :

$$\ell = {}^t(\nabla\Psi(v)) L. \quad (4.21)$$

Comme souvent, l'expression de la jacobienne est plus simple dans les variables «physiques» du problème. On pose $w = (p, \mathbf{u}, s, \mathcal{S}_r)$, où l'on a noté s l'entropie de la matière, et l'on peut récrire (4.1), (4.2), (4.9), (4.10) de la manière suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{\nabla p}{\rho} + \mathcal{P}_0 \frac{4T_r}{9\rho} \nabla \mathcal{S}_r = 0, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}_r}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathcal{S}_r \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.25)$$

La matrice jacobienne du flux dans les variables w est donc donnée par :

$$\frac{\partial F(w) \cdot \nu}{\partial w} = \begin{pmatrix} (\mathbf{u} \cdot \nu) & \rho c^2 \nu & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{\rho} & (\mathbf{u} \cdot \nu) I & 0 & \frac{4}{9} \frac{\mathcal{P}_0 T_r \nu}{\rho} \\ 0 & 0 & (\mathbf{u} \cdot \nu) & 0 \\ 0 & T_r^3 \nu & 0 & (\mathbf{u} \cdot \nu) \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

On obtient, par un calcul, la jacobienne du changement de variable Ψ :

$$\nabla \Psi(v) = \begin{pmatrix} c^2 + k(\|\mathbf{u}\|^2 - H) & -k\mathbf{u} & k & -\frac{4}{3} \mathcal{P}_0 k T_r \\ -\frac{\mathbf{u}}{\rho} & \frac{1}{\rho} I & 0 & 0 \\ \frac{\|\mathbf{u}\|^2 - H}{\rho T} & -\frac{\mathbf{u}}{\rho T} & \frac{1}{\rho T} & -\frac{4}{3} \frac{\mathcal{P}_0 T_r}{\rho T} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

ainsi que son inverse :

$$\nabla \Psi(v)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} & 0 & -\frac{\rho k T}{c^2} & 0 \\ \frac{\mathbf{u}}{c^2} & \rho I & -\frac{\mathbf{u} \rho k T}{c^2} & 0 \\ \frac{H}{c^2} & \rho \mathbf{u} & \frac{\rho T (c^2 - kH)}{c^2} & \frac{4}{3} \mathcal{P}_0 T_r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Tous calculs faits, les valeurs propres de $\frac{\partial F(v) \cdot \nu}{\partial v}$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(v, \nu) = \mathbf{u} \cdot \nu - c_s, \\ \lambda_2(v, \nu) = \mathbf{u} \cdot \nu, \\ \vdots = \vdots \\ \lambda_{d+2}(v, \nu) = \mathbf{u} \cdot \nu, \\ \lambda_{d+3}(v, \nu) = \mathbf{u} \cdot \nu + c_s, \end{array} \right. \quad (4.29)$$

avec $k = \frac{1}{\rho T} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho$, $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$, $H = E + \frac{p}{\rho}$, $K = c^2 + k(\|\mathbf{u}\|^2 - H)$ et $c_s^2 \equiv c^2 + \mathcal{P}_0 \frac{4\mathcal{E}_r}{9\rho}$.

Les vecteurs propres à droite de $\frac{\partial F(v) \cdot \nu}{\partial v}$ sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1(v, \nu) = \left(1, \mathbf{u} - c_s \nu, H + \frac{4\mathcal{P}_0 \mathcal{E}_r}{3\rho} - c_s \mathbf{u} \cdot \nu, \frac{T_r^3}{\rho} \right), \\ r_{d+1}(v, \nu) = \left(1, \mathbf{u}, H - \frac{c^2}{k}, 0 \right), \\ r_{d+2}(v, \nu) = \left(\mathcal{P}_0 T_r, \mathcal{P}_0 T_r \mathbf{u}, \mathcal{P}_0 T_r (H - 3c^2), -\frac{9}{4} c^2 \right), \\ r_{d+3}(v, \nu) = \left(1, \mathbf{u} + c_s \nu, H + \frac{4\mathcal{P}_0 \mathcal{E}_r}{3\rho} + c_s \mathbf{u} \cdot \nu, \frac{T_r^3}{\rho} \right), \\ r_2(v, \nu) = \left(0, \nu_2^\perp, \mathbf{u} \cdot \nu_2^\perp \right), \\ \vdots = \vdots \\ r_d(v, \nu) = \left(0, \nu_d^\perp, \mathbf{u} \cdot \nu_d^\perp \right), \end{array} \right. \quad (4.30)$$

où $\nu_2^\perp \cdots \nu_d^\perp$ est une base orthonormale de l'hyperplan orthogonal à ν .

La base duale est :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\ell_1(v, \nu) = \frac{1}{2c_s^2} \left(K + c_s \mathbf{u} \cdot \nu, -k \mathbf{u} - c_s \nu, k, \frac{4}{9} \mathcal{P}_0 T_r (1 - 3k) \right), \\
\ell_{d+1}(v, \nu) = \frac{k}{c^2} \left(H - \|\mathbf{u}\|^2, \mathbf{u}, -1, \frac{4}{9} \mathcal{P}_0 T_r \right), \\
\ell_{d+2}(v, \nu) = \frac{4}{9\rho c^2 c_s^2} \left(T_r^3 K, -k T_r^3 \mathbf{u}, k T_r^3, -\rho c^2 - \frac{4}{9} \mathcal{P}_0 k \mathcal{E}_r \right), \\
\ell_{d+3}(v, \nu) = \frac{1}{2c_s^2} \left(K - c_s \mathbf{u} \cdot \nu, -k \mathbf{u} + c_s \nu, k, \frac{4}{9} \mathcal{P}_0 T_r (1 - 3k) \right), \\
\ell_2(v, \nu) = \left(-\mathbf{u} \cdot \nu_2^\perp, \nu_2^\perp, 0, 0 \right) \\
\vdots = \vdots \\
\ell_d(v, \nu) = \left(-\mathbf{u} \cdot \nu_d^\perp, \nu_d^\perp, 0, 0 \right),
\end{array} \right. \quad (4.31)$$

de sorte que l'on a la normalisation $\ell_i \cdot r_j = \delta_{i,j}$, le calcul de $\text{sgn}(A_{i+1/2} P)$ s'en déduit immédiatement.

Calcul des flux lagrangiens

Lorsqu'une interface Γ se déplace au cours du temps, le flux correspondant est appelé flux lagrangien et n'est plus $\int_\Gamma F(v) \cdot \nu d\sigma$. En utilisant le théorème de transport de Reynolds pour l'intégration de (4.4) sur un volume $K(t)$ dépendant du temps, on obtient :

$$\int_{K(t)} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot F(v) \right) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{K(t)} v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial K(t)} (F(v) \cdot \nu - v(\mathbf{x}, t)(\mathbf{u} \cdot \nu)) d\sigma. \quad (4.32)$$

Dans le cas des équations de l'hydrodynamique radiative (4.11)-(4.14), le flux physique peut s'écrire :

$$F(v) \cdot \nu = (\mathbf{u} \cdot \nu)v + \left(p + \mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_r}{3} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \\ \mathbf{u} \cdot \nu \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

si bien que le flux lagrangien se trouve être égal à :

$$\left(p + \mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_r}{3} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \\ \mathbf{u} \cdot \nu \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Des valeurs pour la pression et pour la vitesse doivent être données sur les interfaces. On considère alors la formulation de (4.11)-(4.14) en variables lagrangiennes et en 1D :

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\
\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mathcal{P}_0}{3\rho} \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial x} &= 0, \\
\frac{ds}{dt} &= 0, \\
\frac{d\mathcal{E}_r}{dt} + \frac{4}{3} \mathcal{E}_r \frac{\partial u}{\partial x} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.35}$$

où s est l'entropie de la matière, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$.

Le système (4.35) se récrit :

$$\frac{dw}{dt} + A(w) \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{4.36}$$

où l'on a noté :

$$w = (p, u, s, \mathcal{E}_r),$$

et la matrice $A(w)$ est donnée par :

$$A(w) = \begin{pmatrix} 0 & \rho c^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & \frac{\mathcal{P}_0}{3\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \mathcal{E}_r & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.37}$$

Les valeurs propres non nulles de $A(w)$ sont $+c_s$ et $-c_s$, et zéro est valeur propre double. La matrice $A(w)$ fournit deux pseudo-invariants (voir Définition 7 page 39) de Riemann :

$$p + \mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_r}{3} + \rho c_s u, \tag{4.38}$$

pour la valeur propre positive c_s , et :

$$p + \mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_r}{3} - \rho c_s u, \tag{4.39}$$

pour la valeur propre négative $-c_s$. On se place le long d'une interface située en $x_{i+1/2}$ entre les cellules i et $i+1$. L'invariant donné en (4.38) est advecté de la cellule i vers l'interface, de sorte à obtenir :

$$p_i + \mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_{r,i}}{3} + \rho_i c_{s,i} u_i = p_{i+1/2} + \mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_{r,i+1/2}}{3} + \rho_i c_{s,i} u_{i+1/2}, \tag{4.40}$$

tandis que l'invariant donné en (4.39) est advecté de la cellule $i+1$ vers l'interface, de sorte à obtenir :

$$p_{i+1} + \mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_{r,i+1}}{3} - \rho_{i+1} c_{s,i+1} u_{i+1} = p_{i+1/2} + \mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_{r,i+1/2}}{3} - \rho_{i+1} c_{s,i+1} u_{i+1/2}. \quad (4.41)$$

Le système (4.40)-(4.41) est de taille 2×2 pour les inconnues $u_{i+1/2}$ et $p_{i+1/2} + \mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_{r,i+1/2}}{3}$, et se résout en :

$$p_{i+1/2} + \mathcal{P}_0 \frac{\mathcal{E}_{r,i+1/2}}{3} = \frac{\mu_i(p_{i+1} + \mathcal{P}_0 \mathcal{E}_{r,i+1}/3) + \mu_{i+1}(p_i + \mathcal{P}_0 \mathcal{E}_{r,i}/3)}{\mu_i + \mu_{i+1}} - \mu_i \mu_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{\mu_i + \mu_{i+1}}, \quad (4.42)$$

et :

$$u_{i+1/2}^{n+1} = \frac{\mu_i u_i + \mu_{i+1} u_{i+1}}{\mu_i + \mu_{i+1}} - \frac{(p_{i+1} + \mathcal{P}_0 \mathcal{E}_{r,i+1}/3) - (p_i + \mathcal{P}_0 \mathcal{E}_{r,i}/3)}{\mu_i + \mu_{i+1}}, \quad (4.43)$$

où l'on a noté $\mu_i \equiv \rho_i c_{s,i}$.

4.3.2 Équation de diffusion/réaction

Le système de réaction diffusion s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} = 0, \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = -\mathcal{P}_0 \sigma (T^4 - \mathcal{E}_r), \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla \mathcal{E}_r) + \sigma (T^4 - \mathcal{E}_r). \quad (4.47)$$

Puisque (4.47) est une équation de la chaleur pour l'énergie radiative \mathcal{E}_r , l'emploi d'un schéma implicite en temps s'avère nécessaire si l'on veut utiliser un pas de temps raisonnable.

En écrivant $E = C_v T + \|\mathbf{u}\|^2/2$, et en utilisant (4.44) et (4.45), on montre que (4.46) se réduit à une équation différentielle ordinaire pour la température matière T :

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\mathcal{P}_0 \sigma (T^4 - \mathcal{E}_r). \quad (4.48)$$

On se place alors sur un maillage volumes finis 1D illustré sur la Figure 4.1.

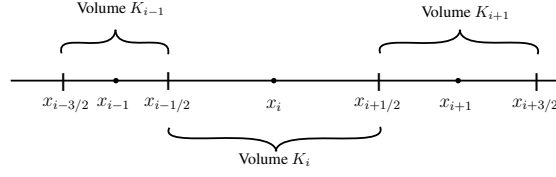


FIGURE 4.1 – Domaine de discrétisation

L'équation (4.48) est discrétisée par le schéma d'Euler implicite :

$$\rho_i^n C_v \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t^n} = -\mathcal{P}_0 \sigma_i^n ((T_i^{n+1})^4 - \mathcal{E}_{r,i}^{n+1}), \quad (4.49)$$

tandis que l'intégration sur le volume K_i de (4.47) conduit au schéma :

$$\frac{\mathcal{E}_{r,i}^{n+1} - \mathcal{E}_{r,i}^n}{\Delta t^n} - \frac{\kappa_{i+1/2}^n \frac{\mathcal{E}_{r,i+1}^{n+1} - \mathcal{E}_{r,i}^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} - \kappa_{i-1/2}^n \frac{\mathcal{E}_{r,i}^{n+1} - \mathcal{E}_{r,i-1}^{n+1}}{x_i - x_{i-1}}}{(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})} = \sigma_i^n ((T_i^{n+1})^4 - \mathcal{E}_{r,i}^{n+1}), \quad (4.50)$$

où $\kappa_{i+1/2}^n$ est une moyenne harmonique pondérée de κ_i^n et κ_{i+1}^n . Les notations sont celles correspondant à la Figure 4.1.

On peut encore écrire (4.50) sous la forme :

$$(x_{i+1/2} - x_{i-1/2}) \left(\frac{\mathcal{E}_{r,i}^{n+1} - \mathcal{E}_{r,i}^n}{\Delta t^n} - \sigma_i^n ((T_i^{n+1})^4 - \mathcal{E}_{r,i}^{n+1}) \right) - \frac{\kappa_{i+1/2}^n}{\Delta x_{i+1/2}} (\mathcal{E}_{r,i+1}^{n+1} - \mathcal{E}_{r,i}^{n+1}) + \frac{\kappa_{i-1/2}^n}{\Delta x_{i-1/2}} (\mathcal{E}_{r,i}^{n+1} - \mathcal{E}_{r,i-1}^{n+1}) = 0, \quad (4.51)$$

une fois posé :

$$\Delta x_{i+1/2} \equiv x_{i+1} - x_i$$

4.3.3 Extension au cas 2D

Le schéma présenté dans le paragraphe 4.3.2 tire pleinement parti du caractère 1D que confère la structure de condensat. Comme il a été précisé plusieurs fois dans ce mémoire, le système initial, qui est multi-dimensionnel, est résolu par une méthode de splitting directionnel. Les contributions des opérateurs différentiels à chaque étape de la résolution sont aisées à déterminer : on résout en x les termes correspondant aux dérivées partielles par rapport à x , et en y ceux correspondant aux dérivées partielles par rapport à y . Ce n'est plus le cas pour le terme de réaction dans (4.48)-(4.47).

Une première idée consiste à fractionner, une fois de plus, le système (4.47)-(4.48) de telle sorte à résoudre l'opérateur de diffusion par un schéma ADI (Alternating Direction Implicit), puis finalement résoudre une simple équation différentielle ordinaire sur la température T et l'énergie radiative \mathcal{E}_r dans tout le domaine.

Cependant, les expériences numériques sur certains cas-tests (chocs radiatifs) montrent qu'un couplage suffisant entre les effets de diffusion et de réaction est nécessaire pour capturer les bonnes solutions du problème.

Nous présentons alors, dans ce paragraphe, une généralisation de (4.49)-(4.50) en 2D, permettant de résoudre simultanément, dans chaque direction du splitting en espace, les termes de diffusion et de réaction. L'idée est de déterminer la contribution du terme de réaction à chaque étape du splitting, de telle sorte à obtenir :

1. Un schéma consistant avec (4.47)-(4.48),
2. Un splitting exact du terme source.

Un système modèle

Nous allons travailler sur le système (4.47)-(4.48) linéarisé de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -\lambda(\beta T - \mathcal{E}_r), \\ \frac{d\mathcal{E}_r}{dt} = (a_1 + a_2)\mathcal{E}_r + \mu(\beta T - \mathcal{E}_r), \end{cases} \quad (4.52)$$

avec $\beta T \equiv T^4$, $\lambda, \mu \equiv \sigma$ et $a_1 \equiv \frac{1}{\Delta x^2}$, $a_2 \equiv \frac{1}{\Delta y^2}$.

Nous cherchons des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ qui permettent de remplacer la résolution de (4.52) par la résolution successive ($i = 1$, puis $i = 2$) des deux systèmes :

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -\lambda_i(\beta T - \mathcal{E}_r), \\ \frac{d\mathcal{E}_r}{dt} = a_i\mathcal{E}_r + \mu_i(\beta T - \mathcal{E}_r), \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (4.53)$$

Nous démontrons alors le

Théorème 2 *Le splitting (4.53) est exact pour le choix suivant des paramètres λ_i et μ_i :*

$$\lambda_i = \frac{a_i\lambda}{a_1 + a_2}, \quad \mu_i = \frac{a_i\mu}{a_1 + a_2}, \quad i = 1, 2. \quad (4.54)$$

Preuve

On note :

$$M_i = \begin{pmatrix} -\lambda_i\beta & \lambda_i \\ \mu_i\beta & a_i - \mu_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (4.55)$$

et :

$$M = \begin{pmatrix} -\lambda\beta & \lambda \\ \mu\beta & a - \mu \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

On récrit alors (4.53) :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T \\ \mathcal{E}_r \end{pmatrix} = M_i \begin{pmatrix} T \\ \mathcal{E}_r \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (4.57)$$

et (4.52) :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T \\ \mathcal{E}_r \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} T \\ \mathcal{E}_r \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

La solution de (4.58) est donnée par :

$$\begin{pmatrix} T(t) \\ \mathcal{E}_r(t) \end{pmatrix} = e^{Mt} \begin{pmatrix} T(0) \\ \mathcal{E}_r(0) \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

tandis qu'en résolvant successivement (4.57) pour $i = 1$ et pour $i = 2$, on trouve :

$$\begin{pmatrix} T(t) \\ \mathcal{E}_r(t) \end{pmatrix} = e^{M_2 t} e^{M_1 t} \begin{pmatrix} T(0) \\ \mathcal{E}_r(0) \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

On impose alors sur les matrices M_1 et M_2 de commuter, c'est-à-dire :

$$M_1 M_2 - M_2 M_1 = 0, \quad (4.61)$$

ce qui constitue une condition suffisante pour que $e^{M_2 t} e^{M_1 t} = e^{(M_1 + M_2)t}$. On impose ensuite que :

$$M_1 + M_2 = M. \quad (4.62)$$

De la relation (4.62), on tire :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda, \\ \mu_1 + \mu_2 = \mu. \end{cases} \quad (4.63)$$

La propriété de commutation fournir les trois relations suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 0, \\ \lambda_1 a_2 - \lambda_2 a_1 = 0, \\ \mu_2 a_1 - \mu_1 a_2 = 0. \end{cases} \quad (4.64)$$

La première se déduisant des deux dernières, dès lors que $a_1 \neq 0$ et $a_2 \neq 0$.

On obtient donc quatre relations qui permettent de déterminer les valeurs des quatre coefficients cherchés. \square

Application au schéma

Les équations splittées en 2D s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\mathcal{P}_0 \sigma_x (T^4 - \mathcal{E}_r), \\ \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial x} \right) + \sigma_x (T^4 - \mathcal{E}_r), \end{cases} \quad (4.65)$$

puis :

$$\begin{cases} \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\mathcal{P}_0 \sigma_y (T^4 - \mathcal{E}_r), \\ \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial y} \right) + \sigma_y (T^4 - \mathcal{E}_r), \end{cases} \quad (4.66)$$

avec

$$\sigma_x \equiv \frac{\Delta y_j^2}{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2} \sigma, \quad \sigma_y \equiv \frac{\Delta x_i^2}{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2} \sigma.$$

4.3.4 Extension au cas 3D

Nous ne présenterons, dans la suite, que des simulations 1D ou 2D. Il convient néanmoins, dans un souci de complétude, de préciser que le Théorème 2 se généralise en 3D :

Théorème 3 *En 3D, le splitting (4.53) est exact pour le choix suivant des paramètres λ_i et μ_i :*

$$\lambda_i = \frac{a_i \lambda}{a_1 + a_2 + a_3}, \quad \mu_i = \frac{a_i \mu}{a_1 + a_2 + a_3}, \quad i = 1, 3. \quad (4.67)$$

La preuve n'apporte rien de plus que celle du Théorème 2 page 106, les arguments sont similaires, seuls les calculs effectifs diffèrent. Il s'agit d'imposer que les matrices M_1, M_2, M_3 commutent deux à deux, ainsi qu'une relation du type (4.62).

Application au schéma

Les équations splittées en 3D s'écrivent alors alors :

$$\begin{cases} \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\mathcal{P}_0 \sigma_x (T^4 - \mathcal{E}_r), \\ \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial x} \right) + \sigma_x (T^4 - \mathcal{E}_r), \end{cases} \quad (4.68)$$

puis :

$$\begin{cases} \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\mathcal{P}_0 \sigma_y (T^4 - \mathcal{E}_r), \\ \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial y} \right) + \sigma_y (T^4 - \mathcal{E}_r), \end{cases} \quad (4.69)$$

puis :

$$\begin{cases} \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\mathcal{P}_0 \sigma_z (T^4 - \mathcal{E}_r), \\ \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial z} \right) + \sigma_z (T^4 - \mathcal{E}_r). \end{cases} \quad (4.70)$$

avec :

$$\begin{aligned} \sigma_x &\equiv \frac{\Delta y_j^2 \Delta z_k^2}{\Delta y_j^2 \Delta z_k^2 + \Delta x_i^2 \Delta z_k^2 + \Delta x_i^2 \Delta y_j^2} \sigma, & \sigma_y &\equiv \frac{\Delta x_i^2 \Delta z_k^2}{\Delta y_j^2 \Delta z_k^2 + \Delta x_i^2 \Delta z_k^2 + \Delta x_i^2 \Delta y_j^2} \sigma, \\ \sigma_y &\equiv \frac{\Delta x_i^2 \Delta y_j k^2}{\Delta y_j^2 \Delta z_k^2 + \Delta x_i^2 \Delta z_k^2 + \Delta x_i^2 \Delta y_j^2} \sigma. \end{aligned}$$

4.3.5 Résolution du système non linéaire

Le schéma (4.49)-(4.51) conduit à la résolution d'un système non linéaire. Nous considérons une ligne générique x constituée de N volumes de contrôle.

Les inconnues du problème sont les valeurs T_i^{n+1} et $\mathcal{E}_{r,i}^{n+1}$, pour $1 \leq i \leq N$. On note $X^{n+1} = (T_1^{n+1}, \dots, T_N^{n+1}, \mathcal{E}_{r,1}, \dots, \mathcal{E}_{r,N}) \in \mathbb{R}^{2N}$ le vecteur des inconnues.

Le schéma (4.49)-(4.51) peut alors s'écrire sous la forme canonique suivante :

$$G(X^{n+1}) = 0, \quad (4.71)$$

où G est une application de \mathbb{R}^{2N} dans lui même que l'on peut définir par bloc sous la forme :

$$G(X^{n+1}) = \begin{pmatrix} G_T(X^{n+1}) \\ G_{\mathcal{E}_r}(X^{n+1}) \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

La définition des fonctions G_T et $G_{\mathcal{E}_r}$ de \mathbb{R}^{2N} dans \mathbb{R}^N se déduisent immédiatement par identification avec (4.49)-(4.51).

La méthode de Newton consiste en la donnée d'un premier terme, que nous prendrons égal à X^n , et de l'itération suivante :

$$X^{n+1-1/(k+2)} = X^{n+1-1/(k+1)} - \nabla G(X^{n+1-1/(k+1)})^{-1} G(X^{n+1-1/(k+1)}), \quad k \geq 0 \quad (4.73)$$

que l'on peut encore écrire :

$$\nabla G(X^{n+1-1/(k+1)}) \delta X^{n+1-1/(k+1)} = G(X^{n+1-1/(k+1)}), \quad (4.74)$$

avec :

$$\delta X^{n+1-1/(k+1)} = X^{n+1-1/(k+1)} - X^{n+1-1/(k+2)}. \quad (4.75)$$

de sorte que l'on s'attend, lorsque k est suffisamment grand, à ce que $X^{n+1-1/(k+1)}$ soit proche de la solution désirée X^{n+1} .

Numériquement, on considère que l'algorithme a convergé lorsque la norme du résidu normalisé est en deçà d'un certain ε , disons $\varepsilon = 10^{-10}$:

$$\frac{\|\delta X^{n+1-1/(k+1)}\|}{\|X^n\|} \leq \varepsilon.$$

Remarque 9 On a noté $X^{n+1-1/(k+2)}$ pour le k -ième itéré de la méthode de Newton. Lorsque $k = 0$, on retrouve X^n , et lorsque k tend vers l'infini, on retrouve X^{n+1} .

La matrice jacobienne ∇G est de la forme :

$$\nabla G = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & D_2 \\ \hline D_3 & \Delta \end{array} \right), \quad (4.76)$$

où D_1 est la matrice diagonale de taille N dont les éléments sont donnés par :

$$D_1^{i,i} = \frac{C_{v,i}\rho_i^n}{\Delta t^n} + 4\mathcal{P}_0\sigma_i^n T_i^3, \quad 1 \leq i \leq N,$$

D_2 est la matrice diagonale de taille N dont les éléments sont donnés par :

$$D_2^{i,i} = -\mathcal{P}_0\sigma_i^n, \quad 1 \leq i \leq N,$$

D_3 est la matrice diagonale de taille N dont les éléments sont donnés par :

$$D_3^{i,i} = -4\sigma_i^n T_i^3 (x_{i+1/2} - x_{i-1/2}), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Enfin, Δ est la matrice tridiagonale de taille N dont les éléments diagonaux sont donnés par :

$$\Delta^{i,i} = \left(\sigma_i^n + \frac{1}{\Delta t^n} \right) (\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}) + \frac{\kappa_{i+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\kappa_{i-1/2}}{\Delta x_{i-1/2}}, \quad 1 \leq i \leq N$$

les éléments de la sur-diagonale sont donnés par :

$$\Delta^{i,i+1} = -\frac{\kappa_{i+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}}, \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

les éléments de la sous-diagonale sont donnés par :

$$\Delta^{i+1,i} = -\frac{\kappa_{i+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}}, \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

Si l'on note δT^k (resp. $\delta \mathcal{E}_r^k$) l'incrément sur la température matière (resp. sur l'énergie radiative) à l'itération k de la méthode de Newton, on voit qu'avec la relation (4.76), (4.74) s'écrit :

$$\left(\begin{array}{c|c} D_1 & D_2 \\ \hline D_3 & \Delta \end{array} \right) \begin{pmatrix} \delta T^k \\ \delta \mathcal{E}_r^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_T^k \\ G_{\mathcal{E}_r}^k \end{pmatrix}, \quad (4.77)$$

ou encore, composante par composante :

$$\begin{cases} D_1 \delta T^k + D_2 \delta \mathcal{E}_r^k = G_T^k, & (4.78a) \\ D_3 \delta T^k + \Delta \delta \mathcal{E}_r^k = G_{\mathcal{E}_r}^k. & (4.78b) \end{cases}$$

On tire de (4.78a) l'expression de δT^k en fonction de celle de $\delta \mathcal{E}_r^k$:

$$\delta T^k = D_1^{-1} \left(G_T^k - D_2 \delta \mathcal{E}_r^k \right), \quad (4.79)$$

ce qui permet d'obtenir, en injectant dans (4.78b) :

$$(\Delta - D_3 D_1^{-1} D_2) \delta \mathcal{E}_r^k = G_{\mathcal{E}_r}^k - D_3 D_1^{-1} G_T^k. \quad (4.80)$$

On peut alors démontrer la :

Proposition 7 $\Delta - D_3 D_1^{-1} D_2$ est une matrice symétrique, définie positive.

Preuve :

La matrice $D_3 D_1^{-1} D_2$ étant diagonale, la symétrie de $\Delta - D_3 D_1^{-1} D_2$ découle de celle de Δ . D'autre part, les coefficients diagonaux de $\Delta - D_3 D_1^{-1} D_2$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} (\Delta - D_3 D_1^{-1} D_2)_{i,i} &= \frac{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}{\Delta t^n} \cdot \frac{\sigma_i^n \Delta t^n \rho_i^n C_{v,i} + \rho_i^n C_{v,i} + 4\mathcal{P}_0 \sigma_i^n \Delta t^n T_i^3}{\rho_i^n C_{v,i} + 4\mathcal{P}_0 \sigma_i^n \Delta t^n T_i^3} \\ &\quad + \frac{\kappa_{i+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\kappa_{i-1/2}}{\Delta x_{i-1/2}}. \end{aligned}$$

Ces coefficients sont strictement supérieurs à la somme :

$$\frac{\kappa_{i+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\kappa_{i-1/2}}{\Delta x_{i-1/2}},$$

ce qui permet d'affirmer que $\Delta - D_3 D_1^{-1} D_2$ est à diagonale strictement dominante, donc inversible. Le caractère positif provient de ce que la matrice $\Delta - D_3 D_1^{-1} D_2$ est redevable du Lemme 2, démontré en Annexe C page 147. \square

4.4 Résultats numériques

Cette section est consacrée à la présentation des résultats numériques illustrant le schéma proposé. Les premiers résultats sont des chocs radiatifs 1D, mono-matériaux pour lesquels l'on peut se comparer à des solutions semi-analytiques. Le second test est 1D également, mais fait intervenir deux matériaux distincts séparés par une interface, et correspondant à une situation physique concrète.

Le troisième cas test est 2D et illustre la capacité de la méthode à résoudre correctement le déplacement des interfaces.

4.4.1 Chocs radiatifs

Les chocs radiatifs et les chocs hydrodynamiques correspondent à des phénomènes physiques différents. Les chocs dits hydrodynamiques se manifestent au sein d'un fluide lorsque ses caractéristiques subissent des variations importantes sur des distances très faibles (de l'ordre du libre parcours moyen des molécules dans le fluide) [13]. La variation des pression, densité et vitesse du fluide se faisant sur des distances très faibles, elles apparaissent sous la forme d'une discontinuité entre deux états : amont et aval, dont les grandeurs sont reliées entre elles par les relations de saut de Rankine Hugoniot.

Lorsque la température dans le choc est très élevée, les atomes et les molécules présents émettent des photons qui se propagent à une vitesse supérieure à celle de la discontinuité et lorsqu'ils sont réabsorbés par la matière, ils la chauffent et modifient ainsi les états amont et aval.

Les chocs radiatifs constituent des cas-tests 1D de choix puisqu'ils sont intéressants d'un point de vue physique. D'autre part, ils offrent un intérêt dans la validation des méthodes numériques puisque Lowrie et Morel [57] montrent qu'on peut les réaliser comme solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires, et indiquent la marche à suivre pour résoudre ce système numériquement. Le système en question possède des singularités et est particulièrement raide, les méthodes classiques s'appliquent donc difficilement dans ce contexte.

Les résultats numériques présentés sont obtenus par l'initialisation d'un problème de Riemann, c'est-à-dire d'une discontinuité initialement située au milieu du domaine de calcul. Les grandeurs sont adimensionnées. Les états à gauche (indexés par 0) sont :

$$\rho_0 = 1, T_{r,0} = 1, T_0 = 1, u_0 = \mathcal{M},$$

le nombre \mathcal{M} étant le nombre de Mach, paramètre laissé libre pour obtenir différents types de chocs. L'état à droite est déterminé par la résolution de conditions de saut [57], les températures matière et radiative étant prises égales :

$$\rho_0 u_0 = \rho_1 u_1, \quad (4.81)$$

$$\rho_0 u_0^2 + p_0 + \mathcal{P}_0 \frac{T_{r,0}^4}{3} = \rho_1 u_1^2 + p_1 + \mathcal{P}_0 \frac{T_{r,1}^4}{3}, \quad (4.82)$$

$$u_0(\rho_0 E_0 + p_0 + \frac{4}{3} \mathcal{P}_0 T_{r,0}^4) = u_1(\rho_1 E_1 + p_1 + \frac{4}{3} \mathcal{P}_0 T_{r,1}^4). \quad (4.83)$$

Ici, la section efficace d'absorption σ et le coefficient de diffusion κ sont pris constants : $\sigma = 10^6$ et $\kappa = 1$. Le nombre sans dimension \mathcal{P}_0 vaut 10^{-4} . Le fluide est supposé satisfaire une équation d'état de type gaz parfait, avec $\gamma = \frac{5}{3}$. Les calculs sont lancés jusqu'à obtention d'une solution stationnaire.

La Figure 4.2 représente la solution obtenue pour $\mathcal{M} = 1.06$ sur un domaine de 128 mailles. Les profils de densité, température radiative et température matière sont réguliers et ne présentent pas de discontinuité. Les courbes se superposent à celles de solutions semi-analytiques.

La Figure 4.3 représente la solution obtenue pour $\mathcal{M} = 1.2$ sur un domaine de 256 mailles. Les grandeurs hydrodynamiques : la densité et la température matière présentent, cette fois ci, des discontinuités qui sont bien capturées par le schéma, au vu des solutions semi-analytiques. La température radiative, quant à elle, présente un profil régulier, conformément à ce que l'on pouvait attendre.

La figure 4.4 représente la solution obtenue pour $\mathcal{M} = 1.4$ sur un domaine de 512 mailles. Qualitativement, les résultats obtenus sont semblables à ceux présentés dans la Figure 4.3, une fois encore les résultats numériques sont en bonne adéquation avec les résultats théoriques correspondant aux solutions semi-analytiques.

La Figure 4.5 représente la solution obtenue pour $\mathcal{M} = 3$ sur un domaine de 1024 mailles. Ce cas test se distingue des trois autres présentés précédemment dans la mesure où la température matière présente un profil non monotone. Un pic apparaît que le schéma capture bien.

La Figure 4.6 représente la zone du pic observé dans le cas $\mathcal{M} = 3$, sur un domaine de 1024 mailles d'une part, et sur un domaine de 2048 mailles de l'autre. On constate qu'avec le raffinement, la précision sur le calcul de ce pic s'améliore comme il se doit.

La Figure 4.7 représente la solution obtenue pour $\mathcal{M} = 5$ sur un domaine de 2048 mailles. Cette solution n'est pas mise en regard de la solution semi-analytique correspondante. Le but est de montrer que la discontinuité constatée sur la température matière (que l'on appelle pic de Zel'dovich [90, 91]) est très bien représentée sur 2048 mailles.

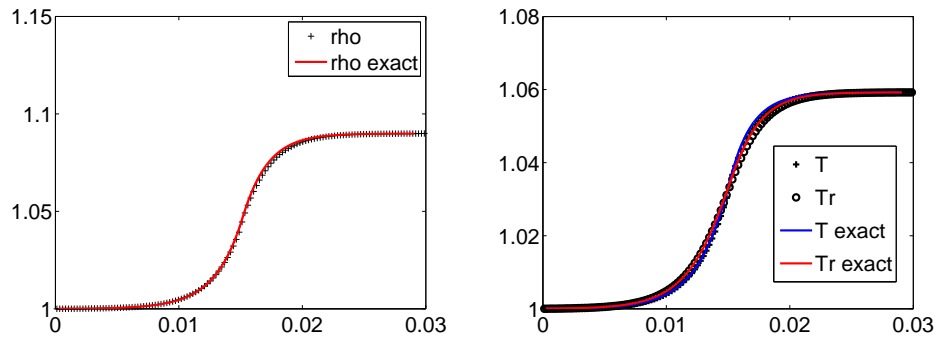


FIGURE 4.2 – A gauche : densité, à droite : températures matière et radiative pour $\mathcal{M} = 1.06$. Comparaison avec les solutions exactes (128 mailles).

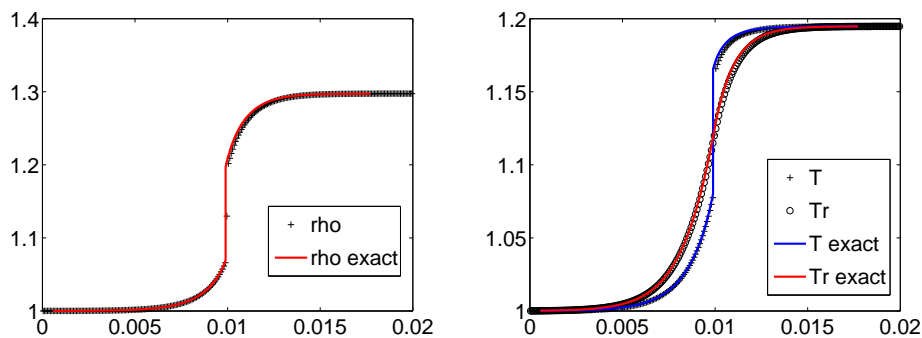


FIGURE 4.3 – A gauche : densité, à droite : températures matière et radiative pour $\mathcal{M} = 1.2$. Comparaison avec les solutions exactes (256 mailles).

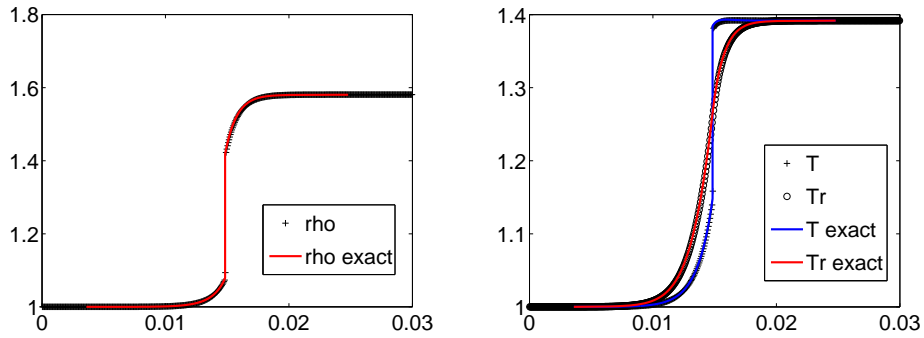


FIGURE 4.4 – A gauche : densité, à droite : températures matière et radiative pour $\mathcal{M} = 1.4$. Comparaison avec les solutions exactes (512 mailles).

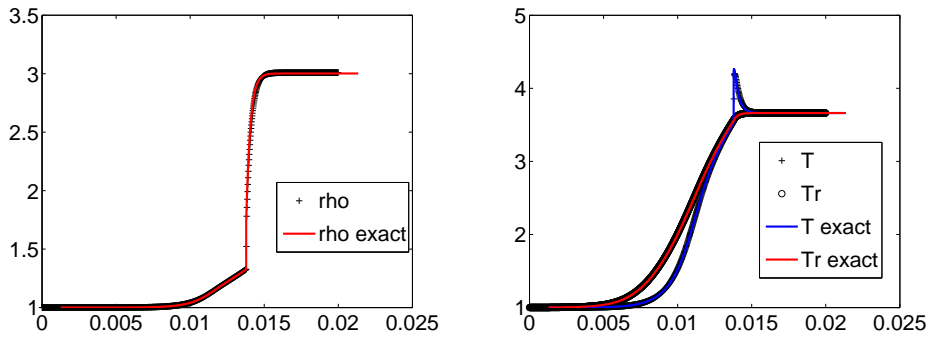


FIGURE 4.5 – A gauche : densité, à droite : températures matière et radiative pour $\mathcal{M} = 3$. Comparaison avec les solutions exactes (1024 mailles).

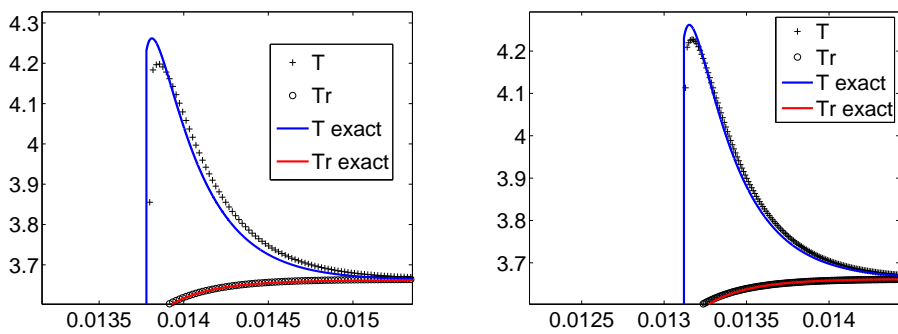


FIGURE 4.6 – Zoom sur la région du pic : températures matière et radiative pour $\mathcal{M} = 3$. Comparaison avec les solutions exactes. A gauche : 1024 mailles, à droite : 2048 mailles.

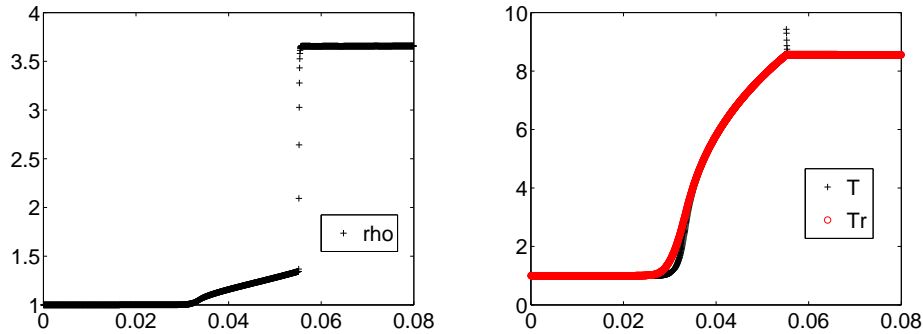


FIGURE 4.7 – En haut : densité, en bas : températures matière et radiative pour $\mathcal{M} = 5$ (2048 mailles).

4.4.2 Étude de convergence

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, une étude de convergence pour une solution de type choc radiatif avec $\mathcal{M} = 1,06$. La solution de référence est obtenue par le schéma proposé sur un maillage de 2^{15} cellules. Les solutions semi-analytiques proposées étant trop peu précises pour se prêter à un test de convergence.

La Figure 4.8 représente la courbes d'erreur obtenue en norme L^2 pour la température radiative T_r . L'axe des abscisses représente l'intervalle en espace Δx utilisé, tandis que la valeur correspondante de l'erreur se lit sur l'axe des ordonnées.

Pour un nombre de mailles N fixé, la solution de référence est interpolée linéairement sur les points x_i , $1 \leq i \leq N$ du maillage.

La norme est alors calculée par une somme de Riemann :

$$\|T_r - T_r^{cv}\|_2 = \sqrt{\Delta x \sum_{i=1}^N (T_{r,i} - T_r^{cv}(x_i))^2}. \quad (4.84)$$

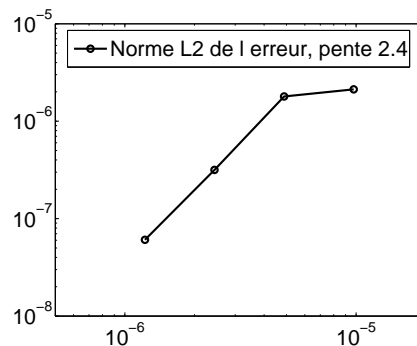


FIGURE 4.8 – Graphe de convergence pour la solution $\mathcal{M} = 1,06$: norme 2.

4.4.3 Un cas test 1D bi-matériaux

Ce cas-test est de type tube à choc 1D mettant en jeu deux matériaux distincts. Il est extrait des travaux de Starinshak [77]. On initialise une discontinuité située au milieu d'un segment de longueur $0,16\text{ cm}$.

Le milieu 1 (celui de gauche) est un gaz parfait de coefficient adiabatique $\gamma = \frac{5}{4}$, de densité initiale $\rho = 0,006\text{ g/cm}^3$, initialement au repos : $u = 0\text{ cm/s}$. Les températures matière et radiative sont toutes deux égales à $T = T_r = 100\text{ eV}$, tandis que la pression matière est prise égale à $p = 0,048\text{ Mbar}$.

Le milieu 2 (celui de droite) est un gaz parfait de coefficient adiabatique $\gamma = \frac{5}{3}$, de densité initiale $\rho = 1,85\text{ g/cm}^3$, initialement au repos : $u = 0\text{ cm/s}$. Les températures matière et radiative sont toutes deux égales à $T = T_r = 1\text{ eV}$, tandis que la pression matière est prise égale à $p = 0.983\text{ Mbar}$.

Remarque 10 *L'électronvolt (eV) est une unité d'énergie dont la valeur en Joule est donnée par :*

$$1\text{ eV} \approx 1,602176487 \times 10^{-19}\text{ J}.$$

En physique des plasmas, notamment, l'électronvolt est employé comme unité de température. Il est relié au kelvin par la constante de Boltzmann :

$$k_B \approx 1,3806488 \times 10^{-23}\text{ J/K},$$

de la manière suivante :

$$T(\text{en eV}) \equiv k_B \times T(\text{en K}).$$

Ainsi, 1eV correspond à une température approximative de 11604,5K.

Les sections efficaces d'absorption pour les deux fluides sont de la forme :

$$\sigma(\rho, T) = \sigma_0 \rho^2 T^{-7/2}, \quad (4.85)$$

où σ_0 vaut $\sigma_0 = 3,1 \times 10^8\text{ cm}^{-1}$ pour le fluide 1, et $\sigma_0 = 4,2 \times 10^9\text{ cm}^{-1}$ pour le fluide 2.

Les coefficients de diffusion sont alors donnés par la relation :

$$\kappa(\rho, T) = \frac{c}{3\sigma(\rho, T)}, \quad (4.86)$$

où $c \approx 3 \times 10^{10}\text{ cm/s}$ est la vitesse de la lumière.

Conformément à ce qui a été annoncé dans la Section 4.2, nous considérons des équations adimensionnées. Nous faisons le choix d'adimensionner en prenant les valeurs du fluide 2 comme valeurs de référence, de sorte que l'initialisation est la suivante :

Milieu 1	Milieu 2	
$\rho = 3,4324 \times 10^{-3}$	$\rho = 1$	(4.87)
$u = 0$	$u = 0$	
$T = T_r = 100$	$T = T_r = 1$	
$p = 2,9298 \times 10^{-2}$	$p = 0,6$	
$\gamma = \frac{5}{4}$	$\gamma = \frac{5}{3}$	
$C_v = 0,3613438281$	$C_v = 0,9$	
$\sigma(\rho, T) = 3,38 \times 10^{13} \rho^2 T^{-7/2}$	$\sigma(\rho, T) = 4,58 \times 10^{14} \rho^2 T^{-7/2}$	
$\kappa(\rho, T) = 10^{-5} \rho^{-2} T^{7/2}$	$\kappa(\rho, T) = 7,39 \times 10^{-7} \rho^{-2} T^{7/2}$	

La Figure 4.9 donne les résultats obtenus sur un maillage constitué de 2000 mailles. L'interface est représentée par un segment de droite (en bleu) vertical. La structure de la solution est complexe. Bien qu'il ne soit *a priori* pas possible d'exhiber une solution analytique ou semi-analytique pour ce cas test, les résultats sont comparables, qualitativement, à ceux obtenus par Starinshak dans un contexte *level-set* [77].

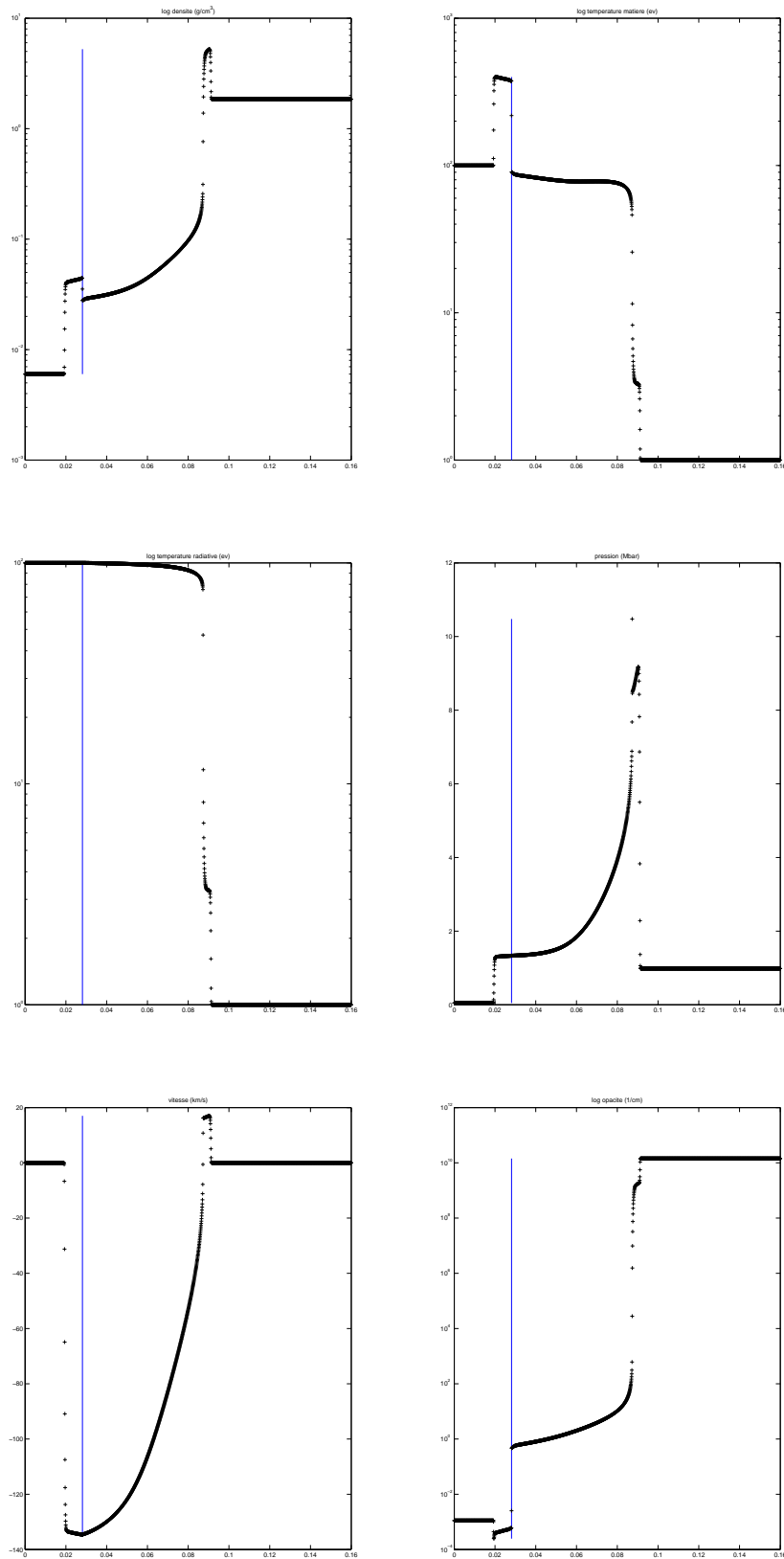


FIGURE 4.9 – Dans l'ordre de lecture : densité en g/cm^3 (échelle logarithmique), température matière en eV (échelle logarithmique), température radiative en eV (échelle logarithmique), pression en Mbar , vitesse en km/s et section efficace d'absorption σ (échelle logarithmique)

4.4.4 Un cas test 2D

Ce dernier cas test est extrait de Mousseau et Knoll [61]. Deux matériaux sont présents, conformément à ce qui est représenté sur la Figure 4.10. Le domaine de calcul est $[0, 1] \times [0, 1]$ pour un maillage de 128×128 mailles. Dans ce cas test, l'hydrodynamique est «figée», en d'autres termes nous ne résolvons que la partie diffusion/réaction des équations.

Les sections efficaces d'absorption sont de la forme

$$\sigma(T) \equiv \left(\frac{z}{T}\right)^3,$$

où $z = 1$ dans le milieu représenté en rouge sur la figure 4.10, et $z = 4$ dans le milieu représenté en bleu sur la Figure 4.10.

Les températures matière et radiative sont initialement à l'équilibre, et sont données par une distribution exponentiellement décroissante :

$$T_r(x, y, t = 0) = \left(0,001 + 100 \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{0.1} \right)^2 \right] \right)^{0.25}.$$

La Figure 4.11 représente les solutions pour la température matière et pour la température radiative à l'instant $t = 0.5$. Une fois de plus, on ne peut pas *a priori* exhiber de solution explicite pour ce cas test. Nous pouvons néanmoins remarquer que les résultats obtenus sont conformes à l'intuition, et ce à plusieurs titres. La condition initiale étant une distribution radiale, on s'attend à ce que la solution conserve une symétrie par rapport à la bissectrice du premier quadrant, ce qui est le cas. D'autre part, le milieu de plus forte opacité, représenté en bleu sur la Figure 4.10 doit moins laisser passer l'onde, relativement au milieu environnant, ce qui se confirme sur la Figure 4.11 à droite. Le rayonnement passant moins à travers ce fluide, il a tendance à chauffer légèrement plus que le fluide environnant situé approximativement à la même distance de l'origine, ce que montre la Figure 4.11 à gauche.

La figure 4.12 présente les résultats obtenus sur ce cas test, en résolvant le système complet. En d'autres termes, l'hydrodynamique n'est plus «figée» dans ce cas test. Les mêmes analyses qualitatives que celles proposées pour les résultats de la Figure 4.11 peuvent être faites dans ce contexte concernant les températures radiative et matière. L'intérêt est surtout de montrer que la méthode multi-matériaux est opérante pour les aspects hydrodynamiques.

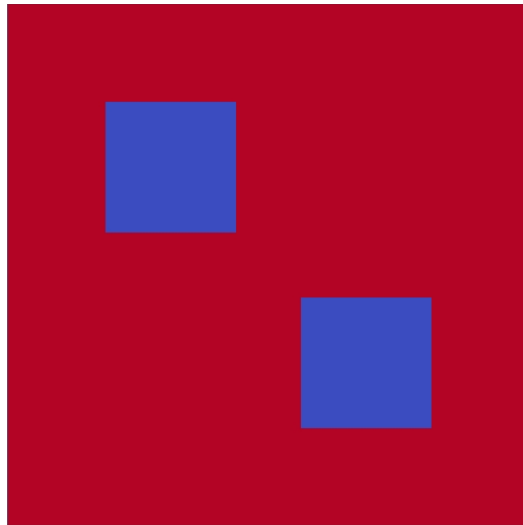
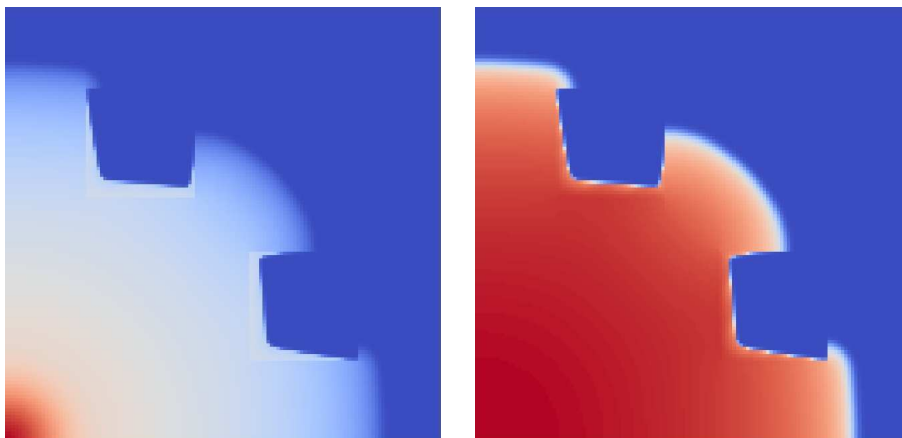
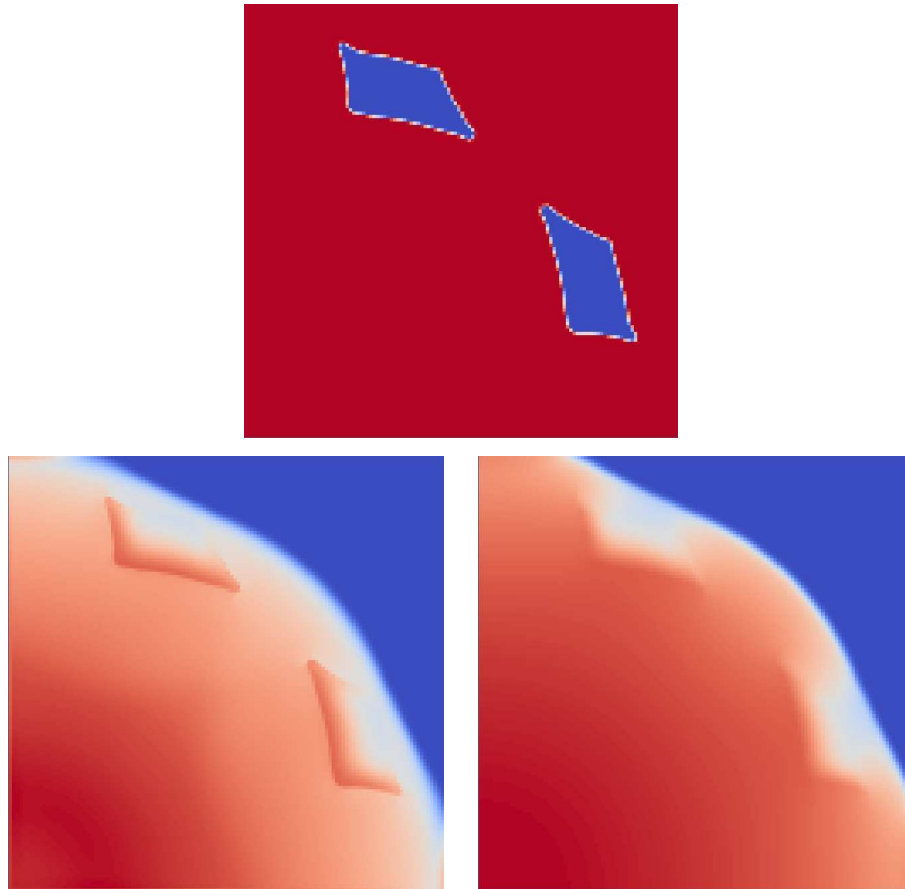


FIGURE 4.10 – Géométrie initiale

FIGURE 4.11 – Températures matière et radiative à $t = 0.5$

FIGURE 4.12 – Géométrie, températures matière et radiative à $t = 0.5$

4.5 Conclusion

Nous avons développé, dans ce chapitre, un schéma pour la résolution des équations de l'hydrodynamique radiative à deux températures dans la limite de diffusion grise.

Le schéma consiste à résoudre successivement les termes de convection et les termes de diffusion-réaction correspondant au transport du rayonnement. L'hydrodynamique est résolue par une extension de la méthode VFFC-ENIP explicite, tandis que le transport de la diffusion est résolu par un schéma volumes finis co-localisé implicite. Un splitting directionnel original est proposé, dans chaque étape duquel les termes réactifs peuvent être pris en compte.

Nous avons validé le schéma proposé sur des cas-tests de type choc radiatif, pour lesquelles des solutions semi-analytiques existent. Un cas-test 1D bi-matériau a été passé dont les résultats peuvent être comparés à ceux de D. Starinshak [77]. Enfin des cas-tests multi-matériaux en 2D montrent que la méthode est opérante.

Chapitre 5

Extensions au 3D et à un nombre quelconque de matériaux

L'objet de ce chapitre est de présenter les autres extensions de la méthode VFFC-ENIP effectuées dans le cadre de cette thèse : les écoulements 3D et les écoulements faisant intervenir trois matériaux ou plus.

5.1 Écoulements 3D

Nous proposons dans cette section une extension de la méthode VFFC-ENIP, telle que présentée en Introduction de ce mémoire, aux écoulements tridimensionnels.

5.1.1 Méthode

La résolution par splitting directionnel des équations d'Euler rend naturelle l'extension en 3D. On comprend, à ce stade que les seules étapes de l'algorithme qu'il convient de modifier sont :

- la succession des étapes x , y , z dans le splitting, avec éventuellement extension du splitting de Strang 2D pour augmenter l'ordre en temps du schéma,
- l'étape de reconstruction des interfaces.

Le schéma de directions alternées s'écrit :

1. étape x , sur un pas de temps $\Delta t/2$,
2. étape y , sur un pas de temps $\Delta t/2$,
3. étape z , sur un pas de temps Δt ,
4. étape y , sur un pas de temps $\Delta t/2$,
5. étape x , sur un pas de temps $\Delta t/2$.

On procède, au pas de temps suivant, à une permutation circulaire sur les directions : $xyzyx$ est suivi de $yzxzy$ puis de $zxyxz$, de sorte qu'en trois pas de temps la symétrie dans le traitement des directions est assurée.

Les interfaces sont reconstruites par la méthode de Youngs [89] en 3D, la normale est calculée par la formule :

$$\nu = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}, \quad (5.1)$$

et le gradient de la fraction volumique de présence des matériaux, pour un maillage cartésien, est approché de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_x f = \frac{f_e - f_w}{2\Delta x}, \\ \partial_y f = \frac{f_n - f_s}{2\Delta y}, \\ \partial_z f = \frac{f_u - f_d}{2\Delta z}, \end{cases} \quad (5.2)$$

avec des approximations *ad hoc* de $f_e, f_w, f_n, f_s, f_u, f_d$ dans le même esprit que celles faites en 2D.

5.1.2 Résultats

Les Figures 5.1 à 5.3 donnent les solutions pour un tube à choc où l'on a initialisé des données de type Sod dans la diagonale principale :

$x + y + z < \sqrt{3}/2$	$x + y + z > \sqrt{3}/2$	(5.3)
$p = 1$	$p = 0.1$	
$\rho = 1$	$\rho = 0.125$	
$u = 0$	$u = 0$	

Le domaine de calcul est $[0; 1]^3$, discrétisé sur un maillage $150 \times 150 \times 150$. Les résultats numériques sont comparés à la solution exacte 1D calculée sur l'intervalle $[0, \sqrt{3}]$. L'interface est représentée en bleu par un segment de droite. Les deux fluides sont des gaz parfaits avec $\gamma = 1.4$.

La Figure 5.4 représente les iso-valeurs de la fraction volumique d'un bloc d'air lors de son ascension dans de l'eau. L'air est de densité $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, de vitesse initiale $u = 0 \text{ m/s}$ et de pression initiale $p = 10^5 \text{ Pa}$, d'équation d'état de gaz parfait avec $\gamma = 1, 4$. L'eau, quant à elle, est de densité initiale $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, de vitesse initiale $u = 0 \text{ m/s}$ et de pression initiale $p = 10^5 \text{ Pa}$. L'équation d'état pour l'eau est de type *stiffened gaz* : $p = (\gamma - 1)\rho e - \gamma\pi$, avec $\gamma = 7$ et $\pi = 6 \times 10^8$. Le domaine de discrétisation est $[0; 1] \times [0; 1] \times [0; 1, 5]$, le maillage contient $40 \times 40 \times 60$ mailles.

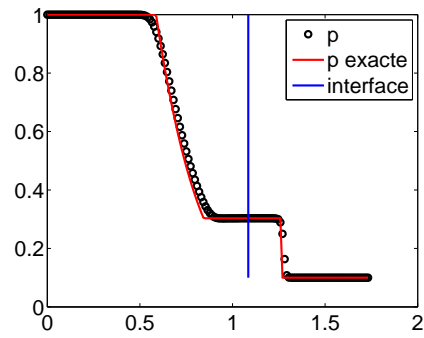


FIGURE 5.1 – Tube à choc de Sod. Pression : valeur numérique et valeur exacte.

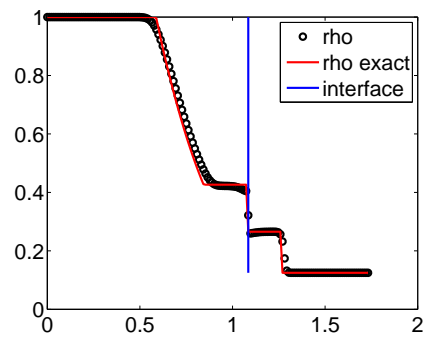


FIGURE 5.2 – Tube à choc de Sod. Densité : valeur numérique et valeur exacte.

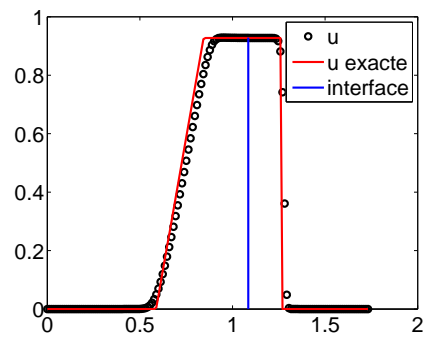


FIGURE 5.3 – Tube à choc de Sod. Vitesse : valeur numérique et valeur exacte.

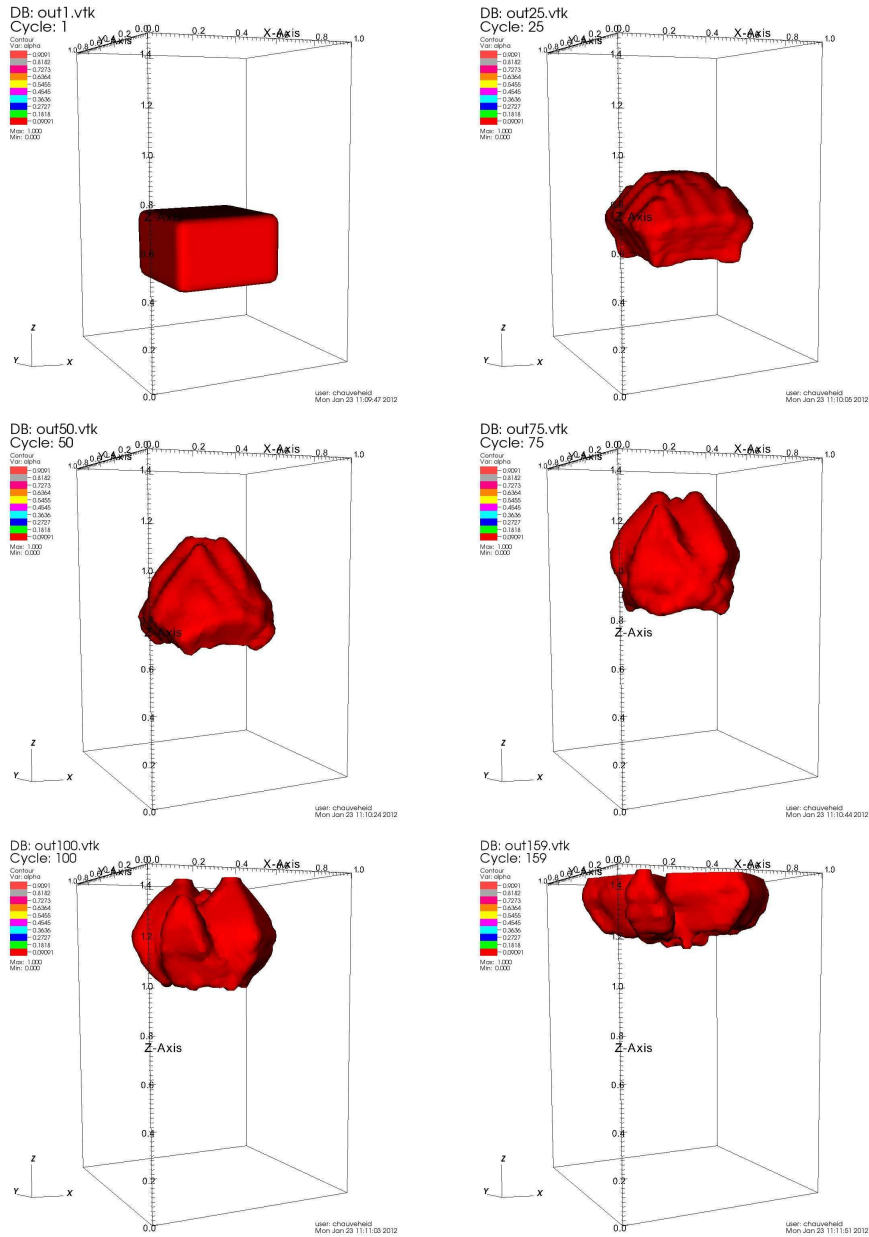


FIGURE 5.4 – Ascension d'un bloc d'air dans de l'eau

5.2 Écoulements multi-matériaux $Nmat \geq 3$

Lorsque l'on considère des écoulements à deux matériaux, la modélisation des mailles mixtes, c'est-à-dire contenant deux matériaux est en général simple. Dans ces mailles, une interface sépare les deux fluides, que l'on peut reconstruire par exemple par la méthode de Youngs [89]. L'ordre des matériaux est prescrit dans chaque étape du splitting par le signe de la composante correspondante du vecteur normal.

L'ajout d'un troisième matériau complexifie notablement ces deux aspects. Une maille contenant trois matériaux possède deux interfaces. Leur orientation ne suffit plus à déterminer l'ordre dans lequel les matériaux apparaissent dans la maille.

Pour ce qui est de la méthode VFFC-ENIP, les modifications entraînées par l'ajout d'un ou plusieurs matériaux interviennent à plusieurs étapes. La notion de condensat, sur le principe, n'est pas remise en cause. Elle se généralise aisément à un nombre quelconque de matériaux, pourvu qu'on soit capable d'ordonner les matériaux dans chaque étape du *splitting* directionnel. Le schéma numérique prescrivant l'évolution des quantités d'intérêt au sein d'un condensat reste valide lui aussi : deux couches adjacentes ne communiquent entre elles que par le flux traversant l'interface qui les sépare. Ce flux étant obtenu par la résolution d'un problème de Riemann acoustique. Le principe de la méthode de projection employée n'est pas remis en cause, du moins pour ce qui est de la projection NIP. Des difficultés sont à envisager, en revanche, pour la projection ENIP. Enfin, l'étape de reconstruction des interfaces est, elle, profondément remise en cause.

Les modifications à apporter à la méthode concernent donc :

1. l'ordre des matériaux à prescrire lors de chaque étape du *splitting* directionnel ;
2. la reconstruction des interfaces.

Elles relèvent de choix de modélisation, et dépassent donc les cadres purement technique et informatique.

Pour chacun des deux points cités, il existe un grand nombre de possibilités, parmi lesquelles il faut évaluer les points forts, ou au contraire les défauts.

5.2.1 Méthode

Plusieurs méthodes de la littérature ont été mises en œuvre, toutes basées sur une modélisation de type «pelure d'oignon», où les matériaux au sein d'une maille multiple sont modélisés comme des couches séparés par des interfaces parallèles entre elles (voir Figure 5.5) ou non (voir Figure 5.6), mais ne s'intersectant pas.

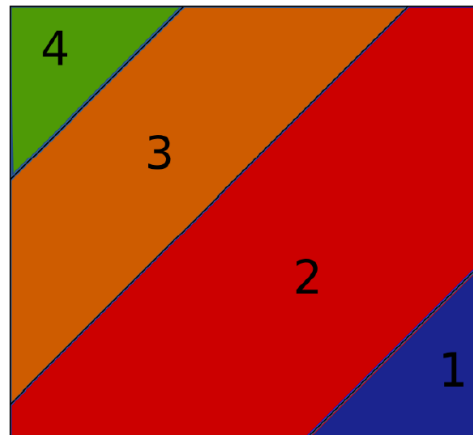


FIGURE 5.5 – Représentation en «pelure d’oignon», interfaces parallèles

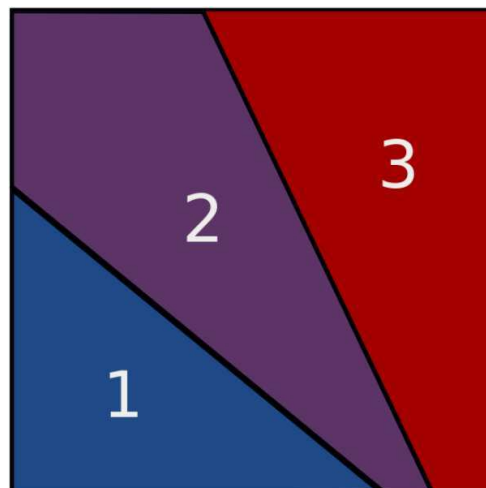


FIGURE 5.6 – Représentation en «pelure d’oignon», interfaces non parallèles

Dans ces méthodes les interfaces sont reconstruites par la méthode de Youngs étendue au cadre où plus de trois matériaux sont présents.

Dans le cas d’une modélisation où les interfaces sont deux à deux parallèles, la question qui se pose est celle du choix du matériau de référence pour le calcul de la normale. Le matériau en question peut être celui dont la fraction volumique dans la maille, ou dans le stencil 3×3 de calcul, est la plus élevée. On peut également calculer les normales à partir d’un seul et même matériau, indépendamment de la fraction volumique correspondante, pourvu qu’il soit présent dans la maille. Dans cette approche, on utilise par défaut le matériau d’indice le plus faible présent dans la maille. Ce procédé est arbitraire et dépend bien sûr de la numérotation choisie pour les matériaux. Les travaux de B. Blais montrent que parmi ces méthodes, aucune n’emporte l’approbation unanime. B. Blais [5] propose alors une méthode

qui prescrit une normale «acceptable au sens de l'orientation», qu'il justifie par une approche mathématique. Cette méthode consiste à choisir, parmi toutes les normales qu'il est possible de calculer par la méthode de Youngs au sein d'une maille multiple, celle qui est la plus cohérente en un sens que nous explicitons à présent.

Dans une maille contenant k matériaux, les fractions volumiques se somment à 1 :

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \quad (5.4)$$

et les gradients des fractions volumiques se somment à 0 :

$$\sum_{i=1}^n \nabla \alpha_i = 0, \quad (5.5)$$

de sorte que pour ℓ donné, compris entre 1 et k , on peut écrire :

$$\frac{\nabla \alpha_\ell}{\|\nabla \alpha_\ell\|} + \frac{\sum_{j \neq \ell} \nabla \alpha_j}{\|\sum_{j \neq \ell} \nabla \alpha_j\|} = 0. \quad (5.6)$$

Pour les gradients discrets, cette égalité n'est plus vraie au sens strict. On choisira alors la normale $\nabla \alpha_\ell / \|\nabla \alpha_\ell\|$, de sorte que la quantité :

$$\frac{\nabla \alpha_\ell}{\|\nabla \alpha_\ell\|} \wedge \frac{\sum_{j \neq \ell} \nabla \alpha_j}{\|\sum_{j \neq \ell} \nabla \alpha_j\|}, \quad (5.7)$$

soit la plus petite. Ce choix améliore certains cas d'advection.

La méthode retenue pour ordonner les matériaux utilise un calcul de centroïdes pour chacun des matériaux présents dans une maille multiple. Dans chaque étape du splitting, l'ordre est alors prescrit par les coordonnées des centroïdes calculés.

Le centroïde noté x_i^k d'un matériau k présent dans un volume de contrôle K_i est défini par :

$$x_i^k \equiv \frac{\int_{K_i} x f^k(x) dx}{\int_{K_i} f^k(x) dx}, \quad (5.8)$$

où f^k est la fonction fraction volumique du matériau k . Cette dernière fonction est approchée par un développement limité d'ordre 1 :

$$f^k(x) \approx \alpha_k + \nabla \alpha_k \cdot (x - x_c), \quad (5.9)$$

où x_c est le centre de la maille K_i . On notera que la valeur de $\nabla \alpha_k$ est connue, puisqu'elle a servi au calcul des normales par la méthode de Youngs.

B. Blais donne alors les formules correspondant à un maillage cartésien, et met en œuvre un limiteur de pente pour le gradient $\nabla \alpha_k$.

L'algorithme proposé par B. Blais [5] est alors le suivant :

1. Calcul des fractions volumiques α_i^k pour les matériaux k présents dans la maille i ,

2. pour chacune des mailles multiples :
 - (a) calcul des normales,
 - (b) détermination de la normale la plus cohérente,
 - (c) calcul des centroïdes, limitation des gradients,
 - (d) détermination de l'ordre des matériaux,
3. construction des condensats et déroulement de la méthode VFFC-NIP.

5.2.2 Résultats

Nous présentons quelques résultats numériques, dans des cas favorables. L'ensemble des résultats, les discussions et comparaisons des diverses méthodes employées pouvant être trouvées dans [5].

La Figure 5.7 présente l'advection dans la diagonale d'un carré d'un matériau, entouré d'une couche d'un second matériau au sein d'un troisième matériau. Les pressions valent 1, les densités 1 et ceci dans l'ensemble des matériaux, supposés être des gaz parfaits de mêmes lois d'état. La vitesse initiale et commune aux trois matériaux est $u = (1, 1)$. Le domaine est $[0; 4] \times [0; 4]$ discrétisé par un maillage 200×200 .

La Figure 5.9 présente un cas test de point triple, initialisé conformément à la Figure 5.8. Le domaine de calcul est $[0; 7] \times [0; 3]$, discrétisé par un maillage 560×240 .

La Figure 5.10 présente l'impact d'un projectile sur un mur. Le projectile et le mur satisfont une équation d'état de type *stiffened gas* : $p = (\gamma - 1)\rho e - \gamma\pi$, avec $\gamma = 7$, $\pi = 6 \times 10^8$. Le fluide environnant est de l'air, supposé être un gaz parfait avec $\gamma = 1.4$. Le domaine de calcul est $[0; 0, 1] \times [0; 0, 05]$, discrétisé par un maillage 200×100 .

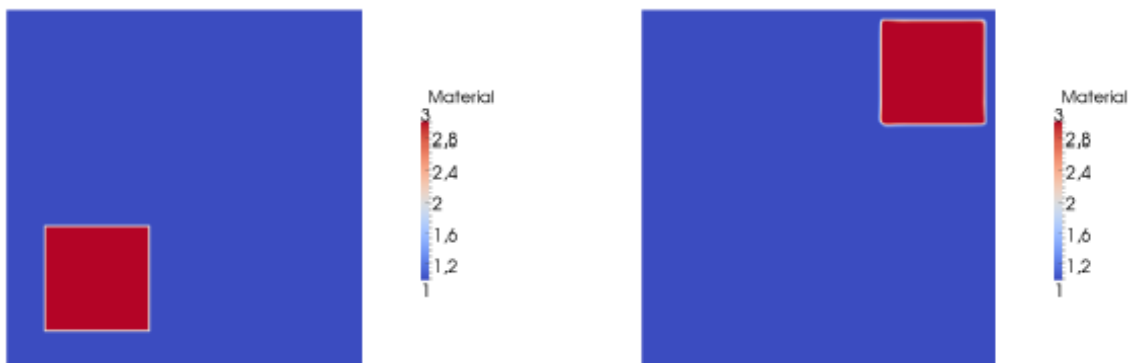


FIGURE 5.7 – Fractions volumiques dans l'advection d'un carré dans la diagonale. Ordonnancement par centroïdes. Normales «acceptables au sens de l'orientation».

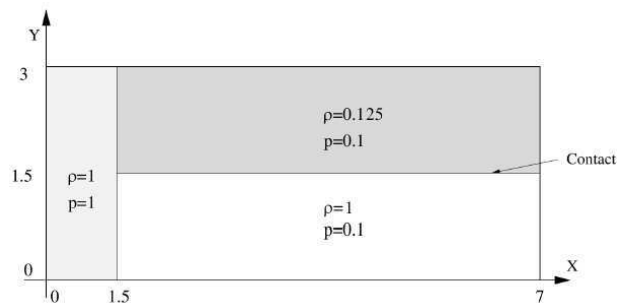


FIGURE 5.8 – Initialisation du cas test de la Figure 5.9

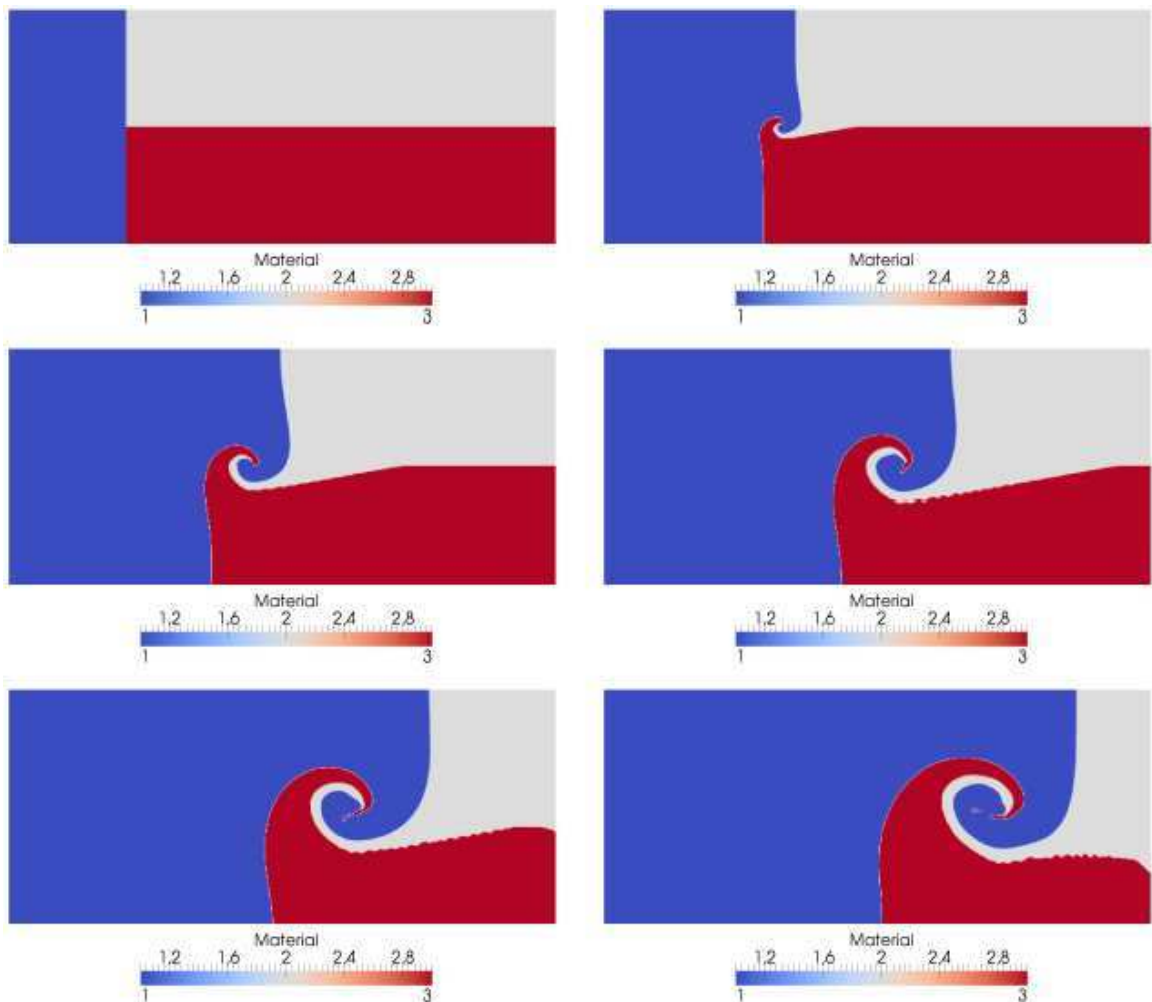


FIGURE 5.9 – Fractions volumiques dans le cas-test de type point triple.

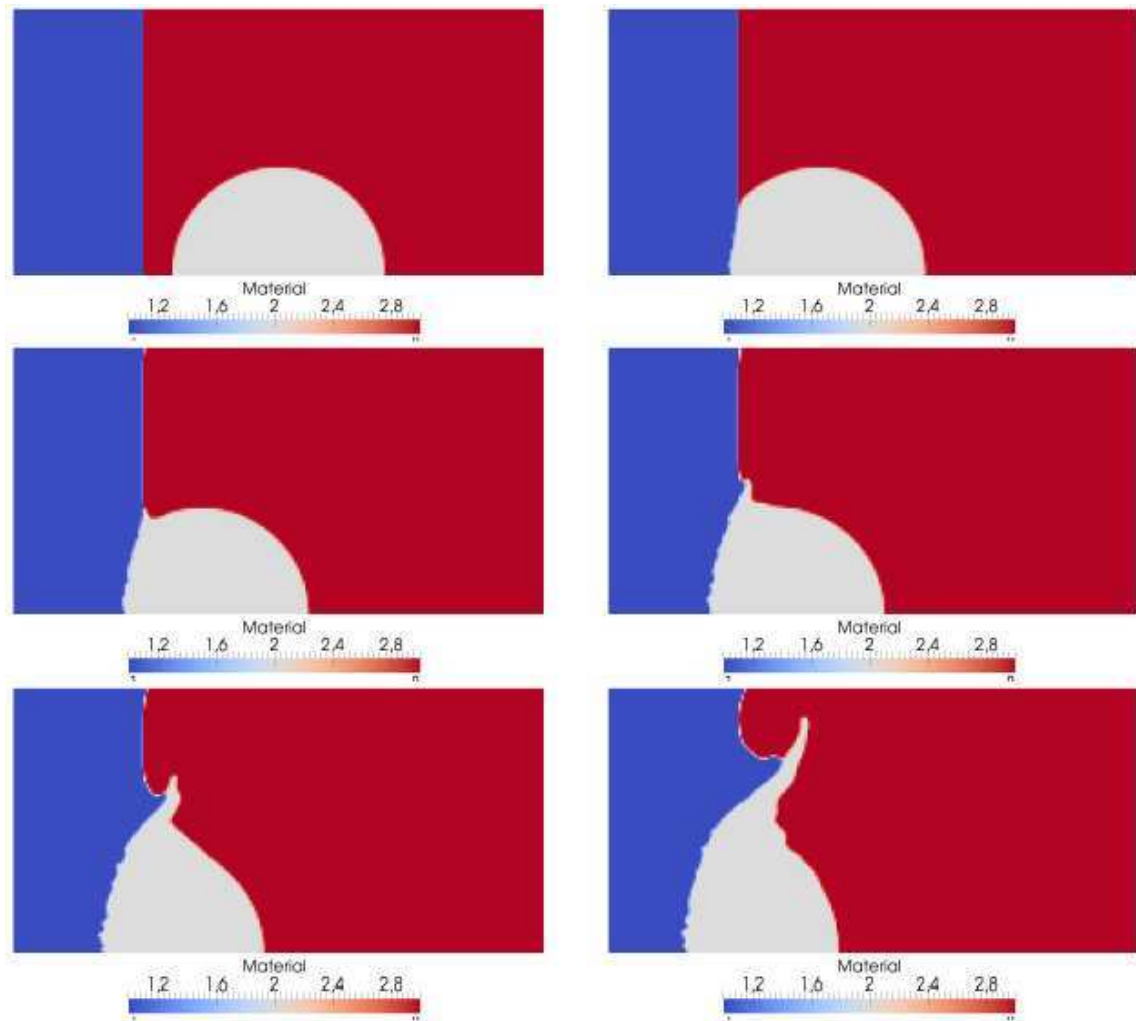


FIGURE 5.10 – Fractions volumiques dans le cas-test de l’impact d’un projectile sur un mur.

5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que le traitement des écoulements tridimensionnels se fait par une extension naturelle de la méthode VFFC-ENIP 2D, en généralisant la reconstruction d’interface, et le *splitting* directionnel au cas 3D.

L’extension à un nombre de matériaux strictement plus grand que deux peut se faire indépendamment du «cœur» de l’algorithme VFFC-ENIP. Le schéma, la notion de condensat ou encore la phase de projection n’ont pas à être remis en question. Néanmoins, nous avons rencontré des difficultés de modélisation liées à l’ordonnancement des matériaux au sein d’une maille multiple et à la reconstruction des interfaces. Plusieurs possibilités ont été envisagées, mais aucune ne présente un

caractère universel.

Cette extension à un nombre de matériaux supérieur ou égal à trois a été réalisée en collaboration avec B. Blais, J.-P. Braeunig, R. Loubère et J.-M. Ghidaglia. Elle correspondait au stage de B. Blais au CMLA [5].

Les travaux présentés ici sont le début d'études qui seront menées ultérieurement.

Chapitre 6

Conclusion générale

Lors de cette thèse, nous avons étendu la méthode VFFC-ENIP à un contexte multi-physique. Nous avons abordé la question des écoulements à faible nombre de Mach, traité le cas d'écoulements où les forces de tension superficielle interviennent, considéré un modèle d'hydrodynamique radiative et enfin avons étendu la méthode aux écoulements tri-dimensionnels et multi-matériaux au sens large, c'est-à-dire faisant intervenir un nombre arbitraire de matériaux.

Les écoulements à faible nombre de Mach sont notoirement difficiles à simuler numériquement par des méthodes de volumes finis avec décentrement. Nous avons mis en œuvre une méthode de renormalisation de la diffusion numérique du schéma VFFC, pour ce qui est des parties pures du domaine de calcul et étendu les valeurs de pression et de la vitesse d'interface de la méthode VFFC-NIP pour ce qui est des parties mixtes du domaine de calcul. Cette renormalisation consiste en la modification de la matrice de viscosité intervenant dans la partie décentrée des flux. Elle provoque un défaut de stabilité. Plus précisément la condition de stabilité du schéma renormalisé explicite est très contraignante pour le pas de temps. Nous avons donc introduit un schéma entièrement implicite sur la base du schéma VFFC-ENIP. Dans ce nouveau schéma, une conservation stricte de l'entropie est satisfaite dans les couches internes du condensat, conformément à la définition physique du contact entre deux matériaux. Nous avons proposé une preuve de la stabilité linéaire de ce schéma justifiant ainsi l'avancée qu'il constitue par rapport au schéma explicite. L'algorithme a été confronté à divers cas-tests, notamment celui de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, pour lequel un comportement qualitatif (indépendance du taux de croissance de l'instabilité vis-à-vis du nombre de Mach) a été justifié par une analyse linéaire de l'instabilité. D'un point de vue technologique, ce schéma peut encore être amélioré en considérant, par exemple, une version semi-implicite du schéma, réputée moins diffusive que la version entièrement implicite, ou encore la montée en ordre par des techniques de type MUSCL.

La force de tension de surface a été introduite dans le modèle des équations d'Euler compressibles. Cette force a été discrétisée comme terme source de manière consistante avec la discrétisation décentrée des flux numériques. Ce nouveau schéma est «naturel» dans le sens où les termes de tension de surface sont discrétisés direc-

tement sur les interfaces physiques entre les matériaux. Aucune approximation n'est faite de la masse de Dirac portée par l'interface, et aucun artifice numérique n'a été utilisé pour équilibrer les forces de tension de surface discrètes avec le gradient de pression discret à l'interface. La précision de l'algorithme a été démontrée sur le cas-test d'équilibre de Laplace, dans lequel la différence de pression entre une goutte circulaire et un milieu environnant compense strictement la force de tension de surface. Ce cas test est particulièrement discriminant, la plupart des publications sur la question faisant état de l'apparition de courants parasites déstabilisant la solution discrète obtenue. Notre méthode présente également des courants parasites, mais leur apparition n'est due *a priori* qu'à l'approximation numérique de la courbure de l'interface. Néanmoins, notre schéma est suffisamment robuste pour annihiler ces courants parasites. Nous constatons, de plus, que leur amplitude diminue lorsque le maillage est raffiné.

La méthode VFFC-ENIP a été étendue à un système modélisant l'hydrodynamique radiative. Ce système comporte des termes correspondant à des échelles de temps diverses : des grandes échelles pour les termes de convection et des petites échelles pour les termes propres au transport du rayonnement. Nous avons donc mis en œuvre un algorithme par *splitting* d'opérateurs consistant à résoudre successivement l'équation de convection par une extension de la méthode VFFC-ENIP explicite en temps, puis les termes de diffusion et de réaction par un schéma volumes finis co-localisé implicite en temps. Pour ce dernier point, nous avons proposé un nouveau schéma aux directions alternées qui permet la prise en compte des termes de réaction dans chaque étape directionnelle du *splitting*. Ce schéma consiste à ne considérer que la «juste» contribution des termes réactifs dans chaque étape directionnelle du *splitting* et nous l'avons justifié par l'étude d'un système modèle linéaire 2D. Nous avons également proposé une extension possible de schéma au cas 3D. Le code résultant de ce schéma a été confronté à des solutions 1D mono-matériau de type chocs radiatifs pour lesquels nous avons pu nous comparer à des solutions semi-analytiques. Un cas test 1D avec deux matériaux, signifiant d'un point de vue de la physique, a été passé. Les résultats sont en bon accord avec ceux présentés dans la littérature. Enfin, une simulation 2D permet de montrer que la méthode est opérante pour ce qui est de la gestion des interfaces. La validation sur un cas-test physique en 2D est encore un travail en cours. Des améliorations du schéma sont possibles, notamment concernant le couplage entre les systèmes explicite et implicite.

Nous avons enfin proposé deux améliorations supplémentaires : l'extension aux écoulements tri-dimensionnels et aux écoulements multi-matériaux pour un nombre de matériaux strictement plus grand que 2. La première extension s'est révélée naturelle en ajoutant une étape correspondant à la direction selon z dans le *splitting* directionnel initialement existant. La reconstruction des interfaces se fait alors par une approximation du gradient 3D de la fonction de fraction volumique des matériaux. L'extension de la méthode aux écoulements à plus de trois matériaux présente des difficultés de modélisation liées essentiellement à l'ordonnement des matériaux dans les mailles multiples, à la représentation des matériaux dans ces mêmes mailles ainsi qu'à la reconstruction des interfaces. Néanmoins, l'extension proposée

ne modifie pas les caractéristiques de la méthode VFFC-NIP : la définition d'un condensat s'étend naturellement à un nombre quelconque de matériaux. Le schéma en lui-même ne faisant intervenir que des flux d'interface entre deux matériaux distincts des couches d'un condensat, il n'est pas modifié par l'ajout de matériaux dans la simulation. Diverses méthodes ont été testées, mais aucune ne semble l'emporter sur l'autre. En d'autres termes, il semble que l'on puisse toujours trouver un cas-test pour lequel le choix de la méthode est décisif pour ce qui est de la qualité de la solution obtenue.

Annexe A

Stabilité du schéma implicite faible Mach

Nous démontrons dans cette annexe le Théorème 1 page 59 sur la stabilité du schéma implicite renormalisé faible Mach, que nous rappelons :

Le schéma implicite avec renormalisation faible Mach est inconditionnellement linéaire stable, et ce pour toute valeur du paramètre β .

Nous allons procéder par une analyse de Von Neumann du schéma (voir par exemple [78]) pour les équations d'Euler isentropiques en 1D dans le cas mono-matériaux :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f(v)}{\partial x} = 0, \quad v = (\rho, \rho u), \quad f(v) = (\rho u, \rho u^2 + p). \quad (\text{A.1})$$

La matrice jacobienne du système est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

et la matrice signe pour le schéma VFFC est donnée (pour un nombre de Mach compris entre 0 et 1) par :

$$\text{sign}(A) = \begin{pmatrix} -u/c & c^{-1} \\ (c^2 - u^2)/c & u/c \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Nous calculons ensuite la matrice de préconditionnement P : $P = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 \\ u(\beta^2 - 1) & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $0 \leq \mathcal{M} \leq 1$, la matrice de signe du schéma VFFC est remplacée par :

$$\text{sign}(AP) = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} u(-3 + \beta^2) & 2 \\ 2u^2 (\beta^2 (1 + \frac{1}{\mathcal{M}^2}) - 2) & u(3 - \beta^2) \end{pmatrix}, \quad \tau = |u| \sqrt{(\beta^2 - 1)^2 + 4 \frac{\beta^2}{\mathcal{M}^2}}. \quad (\text{A.4})$$

Nous écrivons finalement le schéma implicite linéaire suivant :

$$v_i^{n+1} + \nu \left(f_{i+1/2}^{n+1} - f_{i-1/2}^{n+1} \right) = v_i^n, \quad (\text{A.5})$$

avec :

$$\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

et :

$$f_{i+1/2}^{n+1} = U_3 f_i^{n+1} + U_4 f_{i+1}^{n+1}.$$

Tous calculs faits, on peut obtenir la matrice d'amplification du système discret. La stabilité numérique du schéma dépend des valeurs propres de la matrice $H_1(\theta)$:

$$H_1(\theta)G(\theta) = Id, \quad (\text{A.6})$$

avec :

$$H_1(\theta) = Id - \nu \left(1 - e^{i\theta} \right) (e^{-i\theta} U_3 + U_4) A, \quad (\text{A.7})$$

$$U_3 = \frac{1}{2} (Id + \text{sign}(AP)), \quad (\text{A.8})$$

$$U_4 = \frac{1}{2} (Id - \text{sign}(AP)). \quad (\text{A.9})$$

$$H_1(\theta) = Id + 2\nu i \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) Id - i \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \text{sign}(AP) \right) A. \quad (\text{A.10})$$

Nous utiliserons le lemme suivant (issu de [78]) :

Lemme 1 *Le schéma est stable si, et seulement si :*

$$|\det(H_1)|^2 \geq 1 + |\overline{\text{tr}(H_1)} \det(H_1) - \text{tr}(H_1)|. \quad (\text{A.11})$$

La preuve du Théorème 1 page 59 repose sur la vérification de la condition du lemme précédent. La preuve est assez technique et nécessite quelques calculs préliminaires.

On note $B = \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) Id - i \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \text{sign}(AP) \right) A$, et $\alpha = -2i\nu \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$, de sorte que $H_1 = Id - \alpha B$.

On a alors :

$$\text{tr}(H_1) = 2 - \alpha \text{tr}(B), \quad (\text{A.12})$$

$$\det(H_1) = \text{tr}(H_1) - 1 + \alpha^2 \det(B). \quad (\text{A.13})$$

Le déterminant de la matrice B peut être aisément calculé :

$$\det(B) = u^2 - c^2 = c^2 (\mathcal{M}^2 - 1). \quad (\text{A.14})$$

Le plan de la démonstration est alors le suivant. Nous simplifions dans un premier temps la condition de stabilité en exprimant (A.11) en fonction des parties

réelle et imaginaire du déterminant de H_1 . Dans un second temps, nous calculons effectivement ces nombres et montrons que (A.11) se réduit à déterminer le signe d'un polynôme de degré deux dont les coefficients seront donnés. Une discussion sur le signe de ces coefficients nous conduira finalement à la conclusion de la démonstration.

Simplification de (A.11)

On écrit $\det(H_1)$ sous la forme $\det(H_1) = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2 + 1 = 0$. D'après la définition de α et la valeur de $\det(B)$, nous trouvons que la partie réelle de la trace de H_1 , $\operatorname{tr}(H_1)$, est : $x + 1 - \alpha^2|B|$, et que sa partie imaginaire est donnée par y .

Ainsi, en considérant (A.11) une fois de plus, on a :

$$(A.11) \Leftrightarrow (|\det(H_1)|^2 - 1)^2 \geq |\overline{\operatorname{tr}(H_1)} \det(H_1) - \operatorname{tr}(H_1)|^2, \quad (A.15)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)^2 \geq |(x^2 + y^2 - 1 + \alpha^2|B|(1-x)) - iy\alpha^2|B||^2 \quad (A.16)$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq \alpha^2|B|(\alpha^2|B|(y^2 + (1-x)^2) + 2(1-x)(x^2 + y^2)). \quad (A.17)$$

En remarquant que $\alpha^2|B|$ est positif lorsque $\mathcal{M} \leq 1$, on obtient finalement :

$$(A.11) \Leftrightarrow 0 \geq \alpha^2|B|(y^2 + (1-x)^2) + 2(1-x)(x^2 + y^2). \quad (A.18)$$

Ces simplifications étant faites, nous en venons à présent au calcul de x et de y :

$$\operatorname{tr}(B) = 2u \cos(1/2\theta) - 2i \sin(1/2\theta) c^2 (1 + \beta^2) \frac{1}{\tau}, \quad (A.19)$$

$$\operatorname{tr}(H_1) = 2 + 4 \frac{\nu c^2 (1 + \beta^2) (\sin(1/2\theta))^2}{\tau} + 4i\nu u \sin(1/2\theta) \cos(1/2\theta), \quad (A.20)$$

$$\begin{aligned} \det(H_1) = 1 + 4 \frac{\nu c^2 (1 + \beta^2) (\sin(1/2\theta))^2}{\tau} + 4i\nu u \sin(1/2\theta) \cos(1/2\theta) \\ - 4\nu^2 (\sin(1/2\theta))^2 (-c^2 + u^2), \end{aligned}$$

$$\det(H_1) = 1 + 4\nu^2 c^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \left(\frac{1 + \beta^2}{\nu\tau} + (1 - \mathcal{M}^2)\right) + i4\nu u \sin(\theta/2) \cos(\theta/2). \quad (A.21)$$

On pose $X = 2\nu c \sin(\theta/2) \sqrt{1 - \mathcal{M}^2}$, de sorte que :

$$(A.11) \Leftrightarrow 0 \geq X^2(y^2 + (1-x)^2) + 2(1-x)(x^2 + y^2), \quad (A.22)$$

et les valeurs de x et de y^2 sont données par :

$$x = 1 + X^2 \left(1 + \frac{1 + \beta^2}{\tau\nu(1 - \mathcal{M}^2)} \right), \quad y^2 = \frac{4\mathcal{M}^2 X^2}{1 - \mathcal{M}^2} \left(1 - \frac{X^2}{4\nu^2 c^2 (1 - \mathcal{M}^2)} \right). \quad (\text{A.23})$$

Des manipulations algébriques montrent que la condition (A.22) est équivalente à :

$$c_1 X^2 + c_2 \leq 0, \quad (\text{A.24})$$

avec :

$$c_1 = - \frac{(\tau\nu(\mathcal{M}^2 - 1) - 2(1 + \beta^2))(\tau\nu c(\mathcal{M}^2 - 1) - c(1 + \beta^2) - \mathcal{M}\tau)(\tau\nu c(\mathcal{M}^2 - 1) - c(1 + \beta^2) + \mathcal{M}\tau)}{\tau^3 \nu^3 (\mathcal{M} - 1)^3 (\mathcal{M} + 1)^3 c^2}, \quad (\text{A.25})$$

et

$$c_2 = \frac{4(\tau\nu(\mathcal{M} + 1) + 1 + \beta^2)(\tau\nu(\mathcal{M} - 1) - 1 - \beta^2)}{\tau^2 \nu^2 (\mathcal{M} + 1)^2 (\mathcal{M} - 1)^2}. \quad (\text{A.26})$$

La relation (A.24) doit être satisfaite pour toute valeur de θ , c'est-à-dire :

$$4c^2 \nu^2 (1 - \mathcal{M}^2) c_1 + c_2 \leq 0. \quad (\text{A.27})$$

Une fois de plus, un calcul montre que

$$4c^2 \nu^2 (1 - \mathcal{M}^2) c_1 + c_2 = \frac{4(1 + \beta^2 + \tau\nu(\mathcal{M} + 1))(\tau\nu(\mathcal{M} - 1) - (1 + \beta^2))}{\tau^2 \nu^2 (\mathcal{M}^2 - 1)^2}, \quad (\text{A.28})$$

qui est trivialement négatif dès lors que $\mathcal{M} \leq 1$, ce qui achève la preuve.

Annexe B

Instabilité de Kelvin-Helmholtz et nombre de Mach

On considère un écoulement 2D, le plan est séparé par une hypersurface Γ donnée par :

$$\Gamma: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y - \xi(x, t) = 0\}. \quad (\text{B.1})$$

On suppose que le fluide satisfait aux équations d'Euler isentropiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

de part et d'autre de Γ .

Le long de Γ la condition de contact s'écrit :

$$\begin{cases} \xi'_t = \mathbf{u}^+ \cdot \nu = \mathbf{u}^- \cdot \nu, \\ p^+ = p^-. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Ici, $p = p(\rho)$, on réécrit donc (B.2) en substituant $c^2 \nabla \rho$ à ∇p :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{c^2}{\rho} \nabla \rho = 0. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

On ramène ensuite la discontinuité en 0 en opérant le changement de coordonnées suivant :

$$(x, y, t) \mapsto (x', y', t') = (x, y - \xi(x, t), t). \quad (\text{B.5})$$

Nous allons récrire (B.4) dans ces coordonnées, en remarquant que pour une application f donnée, on a (formellement) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x'} dx' + \frac{\partial f}{\partial y'} dy' + \frac{\partial f}{\partial t'} dt'. \quad (\text{B.6})$$

D'autre part, $dx' = dx$, $dt' = dt$ et $dy' = dy - \xi'_x dx - \xi'_t dt$, ce qui donne en réinjectant dans la relation précédente :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x'} - \xi'_x \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx + \frac{\partial f}{\partial y'} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial t'} - \xi'_t \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dt, \quad (\text{B.7})$$

on identifie ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} - \xi'_x \frac{\partial f}{\partial y'}, \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y'}, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t'} - \xi'_t \frac{\partial f}{\partial y'}. \quad (\text{B.10})$$

Le système (B.4) se récrit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} - (\xi'_t + u \xi'_x) \frac{\partial \rho}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \xi'_x \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - (\xi'_t + u \xi'_x) \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c^2}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} - \xi'_x \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} - (\xi'_t + u \xi'_x) \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y}. \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

On linéarise (B.11) autour de la solution :

$$\begin{pmatrix} \rho^- \\ u^- \\ v^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -u_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho^+ \\ u^+ \\ v^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ u_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = 0. \quad (\text{B.12})$$

Après suppressions des termes d'ordre plus grand que 1, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} \pm u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} \pm u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} \pm u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

pour $y > 0$ ou $y < 0$, ainsi que les conditions de saut linéarisées :

$$\begin{cases} \xi'_t + u_0 \xi'_x - v^+ = 0, \\ \xi'_t - u_0 \xi'_x - v^- = 0, \\ \rho^+ = \rho^-, \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

pour $y = 0$.

On cherche alors des solutions de la forme :

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\rho} \\ \widehat{u} \\ \widehat{v} \\ \widehat{\xi} \end{pmatrix} e^{ikx + \lambda y + \omega t}, \quad (\text{B.15})$$

avec $Re(\omega) > 0$ et $Re(\lambda) < 0$ pour des instabilités d'amplitude nulle loin de l'interface :

$$\begin{cases} (\omega + iku_0)\widehat{\rho} + \rho_0 ik\widehat{u} + \rho_0 \lambda \widehat{v} = 0, \\ \frac{c_0^2}{\rho_0} ik\widehat{\rho} + (\omega + iku_0)\widehat{u} = 0, \\ \frac{c_0^2}{\rho_0} \lambda \widehat{\rho} + (\omega + iku_0)\widehat{v} = 0, \end{cases} \quad y > 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{cases} (\omega - iku_0)\widehat{\rho} + \rho_0 ik\widehat{u} + \rho_0 \lambda \widehat{v} = 0, \\ \frac{c_0^2}{\rho_0} ik\widehat{\rho} + (\omega - iku_0)\widehat{u} = 0, \\ \frac{c_0^2}{\rho_0} \lambda \widehat{\rho} + (\omega - iku_0)\widehat{v} = 0, \end{cases} \quad y < 0 \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{cases} (\omega + iku_0)\widehat{\xi} - \widehat{v}^+ = 0, \\ (\omega - iku_0)\widehat{\xi} - \widehat{v}^- = 0, \\ \widehat{\rho}^+ = \widehat{\rho}^-, \end{cases} \quad y = 0. \quad (\text{B.18})$$

(B.16) possède des solutions non triviales si, et seulement si :

$$\lambda^2 = \frac{1}{c_0^2} (k^2 + (\omega + iu_0k)^2). \quad (\text{B.19})$$

On appelle λ^+ la solution de (B.19) dont la partie réelle est négative.

Les solutions de (B.16), avec $\lambda = \lambda^+$ sont alors données par :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\rho} \\ \widehat{u} \\ \widehat{v} \end{pmatrix} = \alpha^+ \begin{pmatrix} \rho_0(\omega + iku_0) \\ -c_0^2 ik \\ -c_0^2 \lambda \end{pmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

De la même manière, on note λ_- la solution de partie réelle négative de :

$$\lambda^2 = \frac{1}{c_0^2} (k^2 + (\omega - iu_0k)^2). \quad (\text{B.21})$$

Les solutions de (B.16), avec $\lambda = \lambda^-$ sont données par :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\rho} \\ \widehat{u} \\ \widehat{v} \end{pmatrix} = \alpha^- \begin{pmatrix} \rho_0(\omega - iku_0) \\ -c_0^2 ik \\ -c_0^2 \lambda \end{pmatrix}. \quad (\text{B.22})$$

On injecte dans (B.18) afin de trouver un triplet non trivial $(\widehat{\xi}, \alpha^-, \alpha^+)$ solution de :

$$\begin{cases} (\omega + iku_0)\widehat{\xi} + \alpha^+ c_0^2 \lambda^+ = 0, \\ (\omega - iku_0)\widehat{\xi} + \alpha^- c_0^2 \lambda^- = 0, \\ \alpha^+(\omega + iku_0) - \alpha^-(\omega - iku_0) = 0. \end{cases} \quad . \quad (\text{B.23})$$

Des solutions existent si, et seulement si :

$$\lambda^+(\omega - iku_0)^2 + \lambda^-(\omega + iku_0)^2 = 0. \quad (\text{B.24})$$

En particulier, la relation $\omega = f(k)$ ne dépend pas du nombre de Mach $\mathcal{M} = u_0/c_0$.

Annexe C

Un résultat d'algèbre linéaire

Le résultat suivant est utilisé dans le Chapitre 4.

Lemme 2 *On considère une matrice carrée symétrique M de taille n de la forme :*

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 & -b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -b_1 & a_2 + b_1 + b_2 & -b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & -b_{i-1} & a_i + b_i + b_{i-1} & -b_i & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & & & -b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -b_{n-1} & a_n + b_{n-1} \end{pmatrix},$$

où a_1, \dots, a_n sont des réels positifs, b_1, \dots, b_{n-1} sont des réels positifs.

Alors M est une matrice positive.

Preuve :

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On calcule :

$$\langle Mx, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i (-b_{i-1}x_{i-1} + (a_i + b_i + b_{i-1})x_i - b_i x_{i+1}),$$

où l'on a adopté la convention : $x_0 = x_{n+1} = 0$ et $b_0 = b_n = 0$.

$$\begin{aligned}
\langle Mx, x \rangle &= \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i b_i (x_i - x_{i+1}) + \sum_{i=1}^n x_i b_{i-1} (x_i - x_{i-1}), \\
&\stackrel{b_n, b_0=0}{=} \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i b_i (x_i - x_{i+1}) + \sum_{i=2}^n x_i b_{i-1} (x_i - x_{i-1}), \\
&\stackrel{i \leftarrow i-1}{=} \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i b_i (x_i - x_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} b_i (x_{i+1} - x_i), \\
&= \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i b_i (x_i - x_{i+1}) - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} b_i (x_i - x_{i+1}), \\
&= \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} b_i (x_i - x_{i+1})^2, \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Donc M est une matrice positive. \square

Bibliographie

- [1] G.K. Batchelor. *An introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1970.
- [2] D.J. Benson. An efficient, accurate, simple ale method for nonlinear finite element programs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 72 :305–350, 1989.
- [3] A. Bernard-Champmartin and J.-M. Ghidaglia. Finite volume solvers for multi-material 3d compressible Euler equations with cylindrical symmetry. In *International Conference on numerical Methods For Multi-Material Fluid Flows, MULTIMAT, Arcachon, France sept. 5-9th 2011*.
- [4] P. Birken and A. Meister. Stability of preconditioned finite volume schemes at low mach numbers. *BIT*, 45 :463–480, 2005.
- [5] B. Blais. *Reconstruction d’interfaces dans les écoulements parfaits et compressibles à multiples matériaux*. Mémoire de M1, ENS Cachan, encadré par J.-M. Ghidaglia et D. Chauveheid, 2011.
- [6] M. Boucker. *Modélisation numérique multidimensionnelle d’écoulements diphasiques liquide-gaz en régimes transitoire et permanent : méthodes et applications*. Thèse de Doctorat, ENS Cachan, 1998.
- [7] J.-P. Braeunig. Sur la simulation d’écoulements multi-matériaux par une méthode eulérienne directe avec capture d’interfaces en dimensions 1, 2 et 3. *PhD Thesis, École Normale Supérieure de Cachan*, 2007.
- [8] J.-P. Braeunig. An algorithm to control the pressure evolution for the fvcf-nip method for multi-material compressible fluid flows. *IJFV*, 7 :101–132, 2010.
- [9] J.-P. Braeunig, B. Desjardins, and J.-M. Ghidaglia. A totally Eulerian finite volume solver for multi-material fluid flow. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 28 :475–485, 2009.
- [10] J.-P. Braeunig and M. Peybernes. Parallélisation mpi par transposition d’un solveur vf eulérien pour les écoulements hydrodynamiques multi-fluides. *Rapport CEA*, 2011.
- [11] C. Buet and B. Despres. Asymptotic analysis of fluid models for the coupling of radiation and hydrodynamics. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, 84 :385–418, 2004.

-
- [12] C. Buet and B. Despres. Asymptotic preserving and positive schemes for radiation hydrodynamic. *J. Comput. Phys.*, 215 :717–740, 2006.
- [13] S. Candel. *Mécanique des fluides*. Dunod, 1990.
- [14] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover, New York, 1981.
- [15] H. Choi and C. Merkle. The application of preconditioning the viscous flows. *J. Comput. Phys.*, 105 :207–223, 1993.
- [16] P. Colella and P.R. Woodward. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *J. Comput. Phys.*, 54 :115–173, 1984.
- [17] P. Colella and P.R. Woodward. The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations. *J. Comput. Phys.*, 54 :174–201, 1984.
- [18] D. Torres D. Jamet and J.U.Brackbill. On the theory and computation of surface tension : The elimination of parasitic currents through energy conservation in the second-gradient method. *J. Comput. Phys*, 182 :262–276, 2002.
- [19] C.M. Dafermos. Polygonal approximations of solutions of the initial value problem for conservation law. *J. Math. Anal. Appl.*, 38 :33–41, 1972.
- [20] C.M. Dafermos. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*. Springer, 2002.
- [21] F. Dauvergne, J.-M. Ghidaglia, F. Pascal, and J.-M. Rovarch. Renormalization of the numerical diffusion for an upwind finite volume method. application to the simulation of Kelvin-Helmholtz instability. In R. Eymard and Herard J.-M., editors, *Proceedings of the Fifth International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications*, Wiley, pages 321–328, 2008.
- [22] P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quéré. *Capillarity and Wetting Phenomena, Drops, Bubbles, Pearls, Waves*. Springer, 2004.
- [23] S. Dellacherie. Analysis of Godunov type schemes applied to the compressible Euler system at low mach number. *J. Comput. Phys.*, 229 :978–1016, 2010.
- [24] D. Enright, R.P. Fedkiw, J.H. Ferziger, and I. Mitchell. A hybrid particle level set method for improved interface capturing. *J. Comput. Phys.*, 183 :83–116, 2002.
- [25] M. Tajchman F. Alouges, J.-M. Ghidaglia. On the interaction of upwinding and forcing for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. *Preprint CMLA*.
- [26] M.M. Francois, S.J. Cummins, E.D. Dendy, D.B Kothe, J.M. Sicilian, and M.W. Williams. A balanced-force algorithm for continuous and sharp interfacial surface tension models within a volume tracking framework. *J. Comput. Phys*, 213 :141–173, 2006.
- [27] J.-M. Ghidaglia. Flux schemes for solving nonlinear systems of conservation laws. In J.-J. Chattot and M. Hafez, editors, *Innovative Methods for Numerical Solutions of PDEs. Proceedings of the symposium on progress in numerical solutions of PDEs, Arcachon, France, July 11-13 1998, Singapore : World Scientific*, pages 232–242, 1998.

- [28] J.-M. Ghidaglia. Numerical computation of 3d two phase flow by finite volumes methods using flux schemes. In D. Hanel R. Vilsmeir, F. Benkhaldoun, editor, *Proceedings of the Second International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications*, Hermes, pages 69–94, 1999.
- [29] J.-M. Ghidaglia, A. Kumbaro, and G. Le Coq. On the numerical solution to two fluid models *via* a cell centered finite volume method. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 20 :841–867, 2001.
- [30] J.-M. Ghidaglia and F. Pascal. The normal flux method at the boundary for multidimensional finite volume approximations in cfd. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 24 :1–17, 2005.
- [31] R.A. Gingold and J.J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics : Theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181 :375–389, 1977.
- [32] J. Glimm, J.W. Grove, X.L. Li, W. Oh, and D.H. Sharp. A critical analysis of rayleigh-taylor growth rates. *J. Comput. Phys.*, 169 :652–677, 2001.
- [33] J. Glimm, J.W. Grove, X.L. Li, K.-M. Shyue, Y. Zeng, and Q. Zhang. Three dimensional front tracking. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1995.
- [34] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*. Springer, New-York, 1996.
- [35] S.K. Godunov. A finite difference method for the numerical computation and discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Math. Sbornik*, 47 :271–306, 1959.
- [36] H. Guillard and A. Murrone. On the behaviour of upwind schemes in the low mach number limit : Ii. godunov type schemes. *Computers and fluids*, 33 :655–675, 2004.
- [37] H. Guillard and C. Viozat. On the behavior of upwind scheme in the low mach number limit, technical report 3160 , inria. 1999.
- [38] H. Guillard and C. Viozat. On the behaviour of upwind schemes in the low mach number limit. *Computers and fluids*, 28 :63–86, 1999.
- [39] F.H. Harlow. Pic and its progeny. *Computer Physics Communications*, 48 :1–11, 1988.
- [40] F.H. Harlow and J.E. Welch. Numerical calculation of time-dependant viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8 :2182–2189, 1965.
- [41] C.W. Hirt, A.A. Amsden, and J.L. Cook. An arbitrary Lagrangian Eulerian computing method for all flow speeds. *J. Comput. Phys.*, 14 :227–253, 1974.
- [42] C.W. Hirt and B.D. Nichols. Volume of fluid (vof) methods for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.*, 39 :201–225, 1981.
- [43] H. Holden and N. H. Risebro. *Front Tracking for Hyperbolic Conservation Laws*. Springer, New York, 2002.

- [44] C.Zemach J.U.Brackbill, D.B.Kothe. A continuum method for modeling surface tension. *J. Comput. Phys.*, 100 :335–354, 1992.
- [45] S.Y. Kadioglu and D. A. Knoll. A fully second ordre implicit/explicit time integration technique for hydrodynamics plus nonlinear heat conduction problems. *J. Comput. Phys.*, 229 :3237–3249, 2010.
- [46] S.Y. Kadioglu, D. A. Knoll, R.B. Lowrie, and R.M. Rauezahn. A second order self-consistent imex method for radiation hydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 229 :9313–8332, 2010.
- [47] M. Kang, R.P. Fedkiw, and X.-D. Liu. A boundary condition capturing method for multiphase incompressible flow. *J. Sci. Comput.*, 15 :323–360, 2000.
- [48] B. Lafaurie, C. Nardone, R. Scardovelli, S. Zaleski, and G. Zanetti. Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER. *J. Comput. Phys.*, 113 :134–147, 1994.
- [49] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme : Iv. a new approach to numerical convection. *J. Comput. Phys.*, 27 :276–299, 1977.
- [50] B. Van Leer, B. Lee, and P. Roe. Characteristic time-stepping or local preconditioning of the Euler equations. *AIAA Paper 91*, 1991.
- [51] R.J. Leveque. *Finite-Volume methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [52] X. Li and C. Gu. An all-speed roe-type scheme and its asymptotic analysis of low mach number behaviour. *J. Comput. Phys.*, 229 :978–1016, 2010.
- [53] D. Lorstad, M.M. Francois, W. Shyy, and L. Fuchs. Assessment of volume of fluid and immersed boundary methods for droplet computations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 46 :109–125, 2004.
- [54] R. Loubère, J.-P. Braeunig, and J.-M. Ghidaglia. A totally Eulerian finite volume solver for multi-material fluid flows : Enhanced natural interface positioning (enip). *Eur. J. Mech. B/Fluids*, *article in press*, 28, 2011.
- [55] R. Loubère and M.J. Shashkov. A subcell remapping method on staggered polygonal grids for arbitrary-Lagrangian-Eulerian methods. *J. Comput. Phys.*, 209 :105–138, 2005.
- [56] R.B. Lowrie and J.D. Edwards. Radiative shock solutions with grey nonequilibrium diffusion. *Shock Waves*, 18 :129–143, 2008.
- [57] R.B. Lowrie and J.E. Morel. The coupling of radiation and hydrodynamics. *Astrophys. J.*, 521 :423–450, 1999.
- [58] M. Meier, G. Yadigaroglu, and B.L. Smith. A novel technique for including surface tension in plic-vof methods. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 21 :61–73, 2002.
- [59] D. Mihalas and B. W. Mihalas. *Foundations of Radiation Hydrodynamics*. Oxford University Press, New York, NY, 1984.
- [60] J.J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Reviews in Astronomy and Astrophysics*, 30 :543–574, 1992.

- [61] V.A. Mousseau and D.A. Knoll. Temporal accuracy of the nonequilibrium radiation diffusion equations applied to two-dimensional multimaterial simulations. *Nuclear Science and Engineering*, 154 :174–189, 2006.
- [62] W.F. Noh and P. Woodward. Slic (simple line interface calculation). *Lecture notes in Physics 59*. Eds Springer, Berlin, 1976.
- [63] S. Osher and R.P. Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, 2002.
- [64] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79 :12–49, 1988.
- [65] F. Pascal. *Passerelles VFFC-Éléments finis PID : application aux écoulements à faible Mach*. Rapport CMLA, 2000.
- [66] F. Pascal. *Sur des méthodes d'approximation effectives et d'analyse numérique pour les équations de la mécanique des fluides*. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université d'Orsay, 2002.
- [67] G.C. Pomraning. *The Equations of Radiation Hydrodynamics*. Dover Publications, 1973.
- [68] Lord Rayleigh. On the capillary phenomena of jets. *Proc. Roy. Soc.*, 138 :41–48, 1879.
- [69] Y. Renardy and M. Renardy. Prost : a parabolic reconstruction of surface tension for the volume-of-fluid method. *J. Comput. Phys.*, 183 :400–421, 2002.
- [70] R.D. Richtmeyer and K.W. Morton. *Difference methods for initial-value problems*. John Wiley, 1967.
- [71] R.K.-C.Chan. Generalized arbitrary langrangian Eulerian method for incompressible flows with sharp interfaces. *J. Comput. Phys.*, 17 :311–331, 1975.
- [72] P.L. Roe. Characteristic-based schemes for the Euler equations. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 18 :337, 1986.
- [73] J.-M. Rovarch. *Solveurs tridimensionnels pour les écoulements diphasiques avec transferts d'énergie*. Thèse de Doctorat, ENS Cachan, 2006.
- [74] M. Rudman. Volume tracking methods for interfacial flow calculations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 24 :671–691, 1998.
- [75] Y. Saad and M.H. Schultz. Gmres : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *J. Sci. Stat. Comput.*, 7 :856–869, 1986.
- [76] J.A. Sethian. *Level set methods*. Cambridge University Press, 1996.
- [77] D. Starinshak and S. Karni. A level-set method for multimaterial radiative shock hydrodynamics. In *International Conference on numerical Methods For Multi-Material Fluid Flows, MULTIMAT, Arcachon, France sept. 5-9th*, 2011.
- [78] J. C. Strikwerda. *Finite differences and partial differential equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2004.

-
- [79] M. Sussman. A second order coupled level set and volume-of-fluid method for computing growth and collapse of vapor bubbles. *J. Comput. Phys.*, 187 :110–136, 2003.
- [80] M. Sussman and P. Smereka. Axisymmetric free boundary problems. *J. Fluid. Mech.*, 341 :269–294, 1997.
- [81] M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.*, 114 :146–159, 1994.
- [82] E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics 2nd edition*. Springer, 1999.
- [83] E. Turkel. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *J. Comput. Phys.*, 72 :277–298, 1987.
- [84] E. Turkel. Review of preconditioning methods for fluid dynamics. *App. Num. Math.*, 12 :257–285, 1993.
- [85] S.O. Unverdi and G. Tryggvason. A front tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *J. Comput. Phys.*, 100 :25–37, 1992.
- [86] J. VonNeumann and R.D. Richtmeyer. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of Applied Physics*, 21, 1950.
- [87] M.L. Wilkins. Calculation of elastic-plastic flow. *Methods in Computational Physics*, 3 :211–262, 1964.
- [88] D. Youngs and R. Williams. Turbulent mixing in spherical implosions. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 56 :1597–1603, 2008.
- [89] D.L. Youngs. Time-dependant multi-material flow with large fluid distortion. *Numerical Methods for Fluid Dynamics, edited by K.W. Morton and M.J. Baines*, pages 279–285, 1982.
- [90] Y.B. Zel’dovich. Shock waves of large amplitude air. *Soviet Phys. JETP*, 5 :919–927, 1957.
- [91] Y.B. Zel’dovich and Y.P. Raizer. *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*. Dover, New York, 2002.

Table des figures

1.1	Volume de contrôle	23
1.2	Triangulation éléments finis	24
1.3	Evolution de l'interface, instabilité de Richtmeyer-Meshkov	32
1.4	Représentation discrète d'un cercle sur un maillage cartésien.	32
1.5	Ligne générique	33
1.6	Construction d'un condensat	34
1.7	Ligne générique après la construction des condensats	35
1.8	Voisinage de la cellule i	42
1.9	Méthode NIP	45
1.10	Méthode ENIP	46
2.1	Instabilité KH, $\mathcal{M} = 0, 2$	64
2.2	Instabilité KH, $\mathcal{M} = 0, 02$, maillage grossier	64
2.3	Instabilité KH, $\mathcal{M} = 0, 02$, maillage grossier	65
2.4	Instabilité KH, $\mathcal{M} = 0, 02$, maillage grossier	65
2.5	Chute d'une goutte	66
2.6	Rupture d'un barrage	66
3.1	Fonction hauteur	72
3.2	Cas-test de Laplace	81
3.3	Évolution des courants parasites	82
3.4	Perturbation du cas-test de Laplace (1)	83
3.5	Perturbation du cas-test de Laplace (2)	84
3.6	Perturbation du cas-test de Laplace (2-suite)	85
3.7	Un cas-test d'advection, 128×128 mailles	87
3.8	Un cas-test d'advection, 256×256 mailles	88
3.9	Coalescence de deux gouttes	90
3.10	Coalescence de deux gouttes	91
4.1	Domaine de discrétisation	105
4.2	Choc radiatif 1	113
4.3	Choc radiatif 2	113
4.4	Choc radiatif 3	114
4.5	Choc radiatif 4	114

4.6	Choc radiatif 4-zoom	114
4.7	Choc radiatif 5	115
4.8	Graphe de convergence	115
4.9	Cas 1D bi-matériau	118
4.10	Géométrie initiale	120
4.11	Températures matière et radiative à $t = 0.5$	120
4.12	Géométrie, températures matière et radiative à $t = 0.5$	121
5.1	Tube à choc de Sod. Pression : valeur numérique et valeur exacte. . .	125
5.2	Tube à choc de Sod. Densité : valeur numérique et valeur exacte. . .	125
5.3	Tube à choc de Sod. Vitesse : valeur numérique et valeur exacte. . .	125
5.4	Ascension d'un bloc d'air dans de l'eau	126
5.5	Représentation en «pelure d'oignon», interfaces parallèles	128
5.6	Représentation en «pelure d'oignon», interfaces non parallèles	128
5.7	Advection d'un carré dans la diagonale	130
5.8	Initialisation du cas test de la Figure 5.9	131
5.9	Fractions volumiques dans le cas-test de type point triple.	131
5.10	Impact d'un projectile sur un mur	132