



**HAL**  
open science

# Etude de la diffusion élastique pion-deuton dans un modèles à trois corps relativiste

Noël Giraud

► **To cite this version:**

Noël Giraud. Etude de la diffusion élastique pion-deuton dans un modèles à trois corps relativiste. Physique Nucléaire Théorique [nucl-th]. Université Claude Bernard - Lyon I, 1978. Français. NNT : . tel-00751956

**HAL Id: tel-00751956**

**<https://theses.hal.science/tel-00751956>**

Submitted on 14 Nov 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# thèse

présentée

devant l'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON - I

pour obtenir

le diplôme de DOCTEUR DE SPECIALITE (3<sup>e</sup> cycle) DE PHYSIQUE

PHYSIQUE NUCLEAIRE

par

Noël GIRAUD

\* \* \* \* \*

Etude de la diffusion élastique pion - deuton  
dans un modèle à trois corps relativiste

Soutenue le 16 février 1978

devant la Commission d'Examen

JURY :

Mr E. Elbaz Président

Mme M. Ericson

M. C. Tzara

Y. Avishai

G.H. Lamot

C. Fayard

Examineurs



UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON - 1

Président honoraire : M. le Professeur J. BOLDIN

Président : M. le Professeur D. GERMAIN  
1er Vice-Président : M. le Professeur E. ELBAZ  
2ème Vice-Président : M. B. ROUSSET, Attaché de Recherches  
3ème Vice-Président : M. P. BRULA, Etudiant  
Secrétaire Général : M. J. RAMBAUD, Administrateur Civil

UNITES d'ENSEIGNEMENT et de RECHERCHE

U. E. R. de Médecine Grange-Blanche	M. B. SALLE, Maître de Conférences Agrégé
U. E. R. de Médecine Alexis Carrel	M. le Professeur R. MORNEX
U. E. R. de Médecine Lyon-Nord	M. J. P. NEIDHART, Maître de Conférences Ag.
U. E. R. de Médecine Sud-Ouest	M. le Professeur J. NORMAND
U. E. R. de Sciences Pharmaceutiques	M. le Professeur C. A. BIZOLLON
U. E. R. de Techniques de Réadaptation	M. A. MORGON, Maître de Conférences Agrégé
U. E. R. de Biologie Humaine	M. J. P. REVILLARD, Maître de Conférences Ag.
U. E. R. d'Education Physique et Sportive	M. A. MILLON, Professeur d'E. P. S.
U. E. R. de Sciences Odontologiques	M. le Dr. R. VINCENT
U. E. R. de Mathématiques	M. le Professeur E. COMBET
U. E. R. de Physique	M. le Professeur J. DELMAU
U. E. R. de Chimie-Biochimie	M. le Professeur J. HUET
U. E. R. de Sciences de la Nature	M. le Professeur R. GINET
U. E. R. de Sciences Physiologiques	Mlle le Professeur J. F. WORBE
U. E. R. de Physique Nucléaire	M. le Professeur M. GUSAKOW
Institut Universitaire de Technologie I	M. le Professeur B. POUYET
Institut Universitaire de Technologie II	M. J. GALLET, Directeur E. N. S. A. M.
Observatoire de Lyon	M. G. MONNET, Astronome-Adjoint
U. E. R. de Mécanique	Mlle le Professeur G. COMTE-BELLOT



Une thèse de troisième cycle étant l'aboutissement de plusieurs années d'étude, je ne saurais citer tous ceux qui m'ont amené à la physique théorique. Qu'aucun ne se croit cependant oublié, tous ont droit à ma reconnaissance.

Je remercie tout d'abord Monsieur le Professeur M. Gusakow, Directeur de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon où ce travail a été effectué.

Après m'avoir guidé tout au long de mes études, Monsieur le Professeur E. Elbaz m'a proposé le sujet de cette thèse dont il a présidé le jury. Qu'il reçoive ici l'expression de ma reconnaissance pour les conseils et le soutien qu'il m'a apportés ainsi que pour la bienveillance dont il a toujours fait preuve à mon égard.

En acceptant de faire partie du jury, Madame le Professeur M. Ericson a montré l'intérêt qu'elle portait à ce travail. L'autorité de son jugement fut pour moi un stimulant. Qu'elle en soit ici remerciée.

Que Monsieur C. Tzara, qui a bien voulu se joindre au jury, reçoive l'expression de ma gratitude pour l'attention qu'il a portée à ce travail. Les remarques dont il a bien voulu me faire part pendant sa rédaction me furent précieuses.

Monsieur le Professeur Y. Avishai a bien voulu contribuer à juger cette thèse. Je l'en remercie, ainsi que de m'avoir fait profiter de son expérience au cours de nombreuses discussions.

Ce travail a été accompli avec G. H. Lamot et C. Fayard. Leur profonde connaissance dans ce domaine n'a d'égale que la constante gentillesse avec laquelle ils ont su me guider. Les en remercier ne saurait suffire. Qu'ils trouvent donc ici le témoignage de mon amitié.

Je ne saurais oublier B. Charnomordic qui a longuement participé à ce travail avant son départ. Je l'en remercie de tout coeur en souvenir de l'ambiance que sa présence créait dans notre équipe.

Le soutien amical de tous mes camarades de laboratoire : M. Meyer, J. Meyer et G. Grenet, a grandement facilité l'élaboration de ce travail. Je dois une attention particulière à R. S. Nahabetian qui m'a fait faire mes premiers pas en recherche durant mon D.E.A. . Qu'ils en soient tous remerciés.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont participé à la réalisation pratique de ce mémoire, en particulier Madame L. Chosson qui en a assuré avec célérité la frappe, Z. Hernaus qui en a dessiné avec talent les figures et tout le personnel du Centre de Documentation qui en a assuré le tirage.



## INTRODUCTION

L'obtention, par Faddeev, d'équations décrivant un système quantique de trois particules en interaction a ouvert un vaste domaine d'études théoriques.

L'attention s'est d'abord portée sur le système neutron-deuton en vue d'étudier soit ses états liés, c'est-à-dire le triton, soit ses états de diffusion.

Dès le début, deux approches ont été envisagées :

- l'étude du système à l'aide de potentiels locaux (Reid Soft Core, Hamada-Johnston... ). Malheureusement, les calculs sont alors extrêmement lourds car on doit résoudre des systèmes d'équations intégrales doubles couplées.

- l'utilisation de potentiels non locaux séparables. Lovelace a en effet donné une forme des équations de Faddeev qui, dans ce cas, ne contient plus que des intégrales simples. La résolution numérique en est alors grandement simplifiée, en particulier dans l'étude des états de diffusion.

Les succès obtenus ont amené divers auteurs à l'étude d'autres systèmes, tels  $\alpha$ -N-N (en considérant la particule  $\alpha$  sans structure), K-N-N ou  $\pi$ -N-N. En ce qui concerne ce dernier système, la diffusion pion-deuton offre un vaste domaine d'investigation. Elle sert en effet de modèle pour la diffusion pion-noyau, dont elle est l'exemple le plus simple. D'autre part, l'absorption de pion est principalement un processus mettant en jeu deux nucléons. Une bonne description du comportement de l'ensemble  $\pi$ -N-N est alors nécessaire à sa compréhension.

Ces raisons, ainsi que la perspective de nouvelles expériences auprès des usines à pions, ont motivé de nombreuses études pour améliorer les résultats de calculs faits avec diverses hypothèses simplificatrices (simple ou double diffusion, approximations du facteur de forme, matrices  $t$  pion-nucléon constantes, ...).

Cependant, les équations de Faddeev ne satisfont pas à l'invariance relativiste. La faible masse du pion limite donc les études à très basse énergie.

Une première amélioration a été l'introduction par Thomas d'une cinématique relativiste pour le pion dans les équations. On obtient alors des équations dites R. P. K. .

Une autre approche est l'utilisation d'équations à trois corps relativistes, telles celles données par Freedman, Lovelace et Namyslovski, ou Aaron, Amado et Young.

Malheureusement, on est alors confronté à de grandes difficultés de calcul et les études faites ne peuvent tenir compte que d'un nombre restreint de voies à deux corps ( $^3S_1$  -  $^3D_1$  pour

nucléon-nucléon et  $P_{33}$  pour pion-nucléon).

Dans ce travail, nous consacrerons d'abord un chapitre à l'étude des équations à trois corps relativistes, telles qu'elles ont été données par Aaron, Amado et Young.

Nous envisagerons ensuite leur utilisation pratique. Pour cela, il faut d'abord procéder à la réduction du moment angulaire pour se ramener à des équations radiales. Cette opération nécessite d'abord l'obtention des moments relatifs covariants pour traiter les changements de référentiels deux corps  $\rightarrow$  trois corps. Enfin, pour éviter les difficultés de calcul liées aux équations relativistes, nous en envisagerons une simplification obtenue en considérant les nucléons comme non relativistes. On obtient alors des équations dites (RPK2), très proches des équations RPK obtenues par Thomas.

Après avoir donné une approximation des effets coulombiens (qui ne peuvent en effet pas être traités exactement avec des potentiels non locaux séparables), nous entreprendrons une étude systématique de la diffusion  $\pi$ -d entre 25 et 180 MeV. Nous y avons joint des résultats obtenus à 256 MeV, surtout destinés à toucher les limites du modèle utilisé. Nous terminerons par une étude particulière, à 142 MeV, de divers effets, étude qui est difficilement réalisable dans le cadre d'équations relativistes non simplifiées à cause des difficultés de calcul.

Chapitre IEQUATIONS A TROIS CORPS RELATIVISTESI. INTRODUCTION

Divers auteurs ont proposé des équations susceptibles de décrire un système de trois particules relativistes interagissant par paires. Parmi ceux-ci on retiendra :

- Freedman, Lovelace et Namyslowski <sup>(1)</sup> qui ont obtenu, d'une manière analogue à Lovelace <sup>(2)</sup> dans le cas des particules non relativistes, les équations cherchées sous une forme soluble. Le problème de l'introduction du spin des particules n'y est cependant pas abordé.

- Aaron, Amado et Young <sup>(3)</sup> (AAY) qui, en partant de l'idée de la dominance des isobares, déjà utilisée dans plusieurs problèmes à petit nombre de particules, ont réobtenu les mêmes équations que Freedman et al.

Bien que les deux résultats soient formellement les mêmes, les deux approches sont très différentes. En particulier, AAY considèrent dès le départ des amplitudes sur la couche de masse, alors que Freedman et al. se placent dans le cas général d'amplitudes hors de la couche de masse. En d'autres termes, on a une théorie invariante par transformation de Lorentz dans le premier cas, et covariante dans le deuxième.

Les deux approches font appel à la méthode de Blankenbecler et Sugar <sup>(4)</sup> pour éliminer les énergies relatives dans les intégrales. La démarche suivie ici sera celle de AAY.

Dans le paragraphe II, on exposera le principe général de la méthode dans le cas de trois particules en interaction et on précisera les notations utilisées dans la suite. Les paragraphes III et IV seront consacrés à l'application de cette méthode respectivement aux équations à deux corps, puis aux équations à trois corps dans le cas simplifié de trois particules identiques.

II. DESCRIPTION DE LA METHODE POUR TROIS PARTICULES

a) On suppose d'abord que les équations sont formellement identiques aux équations non relativistes à trois corps :

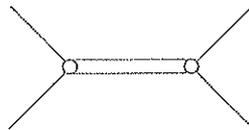
$$X = Z + Z R X$$

- où
- X représente l'amplitude de diffusion d'une des particules sur l'état lié des deux autres,
  - le terme inhomogène Z est un "potentiel" généralisé ou terme de Born,
  - R est le propagateur à deux corps dans l'espace à trois corps.

On suppose ensuite que les particules interagissent par paire, ces interactions étant dominées par la formation de quasi-particules, c'est-à-dire par des états liés (deuton par exemple dans la voie  ${}^3S_1 - {}^3D_1$  nucléon-nucléon), ou des isobares ( $\Delta_{3/2, 3/2}$  par exemple dans la voie  $P_{33}$  pion-nucléon). En d'autres termes, on envisagera uniquement le cas des potentiels à deux corps non locaux séparables de la forme :

$$V_{pq} = g(p^2) \lambda g(q^2)$$

qui se représente par :



p et q désignent respectivement les quadri-moments relatifs dans les voies d'entrée et de sortie et  $p^2, q^2$  leurs invariants.

Le terme de Born à trois corps, représentant l'échange d'une des particules, sera représenté par le graphe suivant :

$$\langle q | Z(s) | q' \rangle =$$

où q et q' sont les 4-moments relatifs de la particule spectatrice et de l'isobare respectivement dans les voies d'entrée et de sortie.

Après projection, l'équation pour trois particules identiques s'écrit :

$$\langle q | X(s) | q' \rangle = \langle q | Z(s) | q' \rangle + \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \langle q | Z(s) | k \rangle R(\sigma_k) \langle k | X(s) | q' \rangle$$



où  $\sigma_k$  désigne l'invariant associé au 4-vecteur  $P-k$ , P étant le 4-moment total :

$$\sigma_k = (P-k)^2$$

ou encore, avec une notation plus "compacte" :

$$X_{qq'}(s) = Z_{qq'}(s) + \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k Z_{qk}(s) R(\sigma_k) X_{kq'}(s)$$

b) On impose alors à ces amplitudes de satisfaire à la condition d'unitarité à deux et trois corps. Cette dernière contrainte fait intervenir l'amplitude de break-up que l'on suppose de forme analogue à l'expression non relativiste écrite à partir de l'amplitude de diffusion élastique :

$$\langle q | X(s) | k_1 k_2 k_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} \sum_{n=1}^3 \langle q | X(s) | k_n \rangle S(\sigma_{k_n}) g(p_n^2)$$



où

- $S$  est le propagateur d'un isobare,
- $s$  est l'invariant du système total,
- $q$  est le 4-moment relatif de la particule spectatrice et de l'isobare,
- $k_1, k_2, k_3$  sont les 4-moments des particules sortantes,
- $\sigma_{k_n}$  est l'invariant de la paire brisée. Par exemple,  $\sigma_{k_1} = (k_2 + k_3)^2 = (P - k_1)^2$  où  $P = k_1 + k_2 + k_3$  est le moment total.
- $p_n$  est le moment relatif de la paire brisée, par exemple  $p_1^2 = \frac{1}{4} (k_2 - k_3)^2$ .

Ces contraintes d'unitarité fournissent une expression de la discontinuité des amplitudes  $X(s)$  sur l'axe réel.

c) On obtient d'autre part une expression de la discontinuité à partir de l'équation formelle. Ces expressions contiennent les discontinuités du terme de Born  $Z(s)$  et du propagateur  $R(s)$ .

d) La comparaison des deux formes conduit à l'expression des discontinuités de  $Z(s)$  et de  $R(s)$ . En supposant alors que ces discontinuités provenant de l'unitarité sont les seules, on peut écrire des relations de dispersion qui donnent les expressions de  $Z(s)$  et  $R(s)$ .

e) L'expression du propagateur contient alors une fonction  $\delta(K^0 - E)$  permettant d'effectuer l'intégration sur  $K^0$  dans l'équation. On est ainsi ramené à un système d'équations intégrales à trois dimensions analogues aux équations non relativistes.

Les points b, c, d et e constituent la méthode de Blankenbecler et Sugar (BS) permettant de ramener une équation relativiste, de type Bethe-Salpeter<sup>(5)</sup>, à une équation tridimensionnelle.

Les caractéristiques fondamentales des équations ainsi obtenues sont les suivantes :

- Par construction elles sont invariantes sous les transformations de Lorentz, tous les calculs ayant été faits dans un cadre relativiste.

- Elles vérifient l'unitarité à deux et trois corps à toutes les énergies.

- Elles se présentent sous une forme proche des équations non relativistes, ce qui permet d'utiliser les mêmes méthodes numériques pour leur résolution.

- Par contre, la symétrie de croisement ne peut pas être vérifiée. D'autre part, on suppose que la coupure donnée pour l'unitarité, à droite de l'axe réel, est la seule. Ce faisant,

on néglige une possible coupure à gauche de l'axe réel, du type de celle que donne une équation de Bethe-Salpeter.

Notations : Dans la suite, les quadri-vecteurs seront notés par une lettre simple, les 3-vecteurs seront fléchés ; on aura ainsi :

$$p = (\epsilon ; \vec{p}) = (p^0 ; \vec{p})$$

La signature de la métrique adoptée est :

$$(+ ; -, -, -)$$

et l'invariant d'un 4-vecteur sera noté  $p^2$ .

Par contre le module d'un 3-vecteur sera noté  $\vec{p}^2$ . Ainsi :

$$p^2 = \epsilon^2 - \vec{p}^2$$

Autant que possible nous définirons les 4-moments comme suit :

- $k_i$  se rapportera à une particule individuelle  $i$ ,
- $q_i$  sera le 4-moment relatif d'une particule spectatrice ( $i$ ) par rapport à une paire ( $j, k$ ),
- $p_i$  sera le 4-moment relatif d'une paire ( $j, k$ ),
- $k$  représentera un 4-moment intermédiaire d'intégration.

Les mêmes définitions seront utilisées pour les 3-vecteurs correspondants.

Enfin, dans le paragraphe IV, on omettra les indices de particules, celles-ci étant supposées identiques.

### III. EQUATIONS A DEUX CORPS PAR LA METHODE BS

Nous considérons ici l'application de la méthode BS au problème à deux corps en suivant point par point la méthode décrite au paragraphe précédent.

#### a) Equation de Bethe-Salpeter à deux corps :

L'équivalent relativiste de l'équation non relativiste de Lippmann-Schwinger pour deux particules en interaction est l'équation de Bethe-Salpeter qui s'écrit de manière formelle :

$$X(s) = V + V G(s) X(s)$$

soit, sous forme explicite :

$$X_{pp'}(s) = V_{pp'} + \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k V_{pk} G_k(s) X_{kp'}(s)$$

#### b) Relation d'unitarité à n corps et à deux corps :

On adopte la normalisation suivante (6)

$$\langle k | k' \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k-k') \quad (\text{I. 3. 1})$$

La mesure invariante d'intégration dans l'espace de phase est alors, pour une particule :

$$d\omega = \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta^+(k^2 - m^2) \quad (\text{I. 3. 2})$$

avec  $\delta^+(k^2 - m^2) = \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0)$  où  $\theta(x)$  est la fonction de Heaviside.

Pour un système de  $n$  particules de 4-moment donné  $P$  :

$$\begin{aligned} d\Omega_n &= (2\pi)^4 \delta(P - \sum_{i=1}^n k_i) \prod_{i=1}^n d\omega_i \\ &= (2\pi)^4 \delta(P - \sum_{i=1}^n k_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^3} \delta^+(k_i^2 - m_i^2) \end{aligned} \quad (\text{I. 3. 3})$$

En utilisant le fait que :

$$\delta^+(k^2 - m^2) = \frac{\delta(k^0 - \epsilon)}{2k^0} \quad \text{avec } \epsilon = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad (\text{I. 3. 4})$$

on a encore :

$$d\omega = \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{2\epsilon} \quad (\text{I. 3. 5})$$

On a d'autre part la relation entre la matrice  $S$  et les amplitudes invariantes  $X$  :

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) X_{fi} \quad (\text{I. 3. 6})$$

Avec ces notations, l'unitarité s'écrit :

$$(S^\dagger S)_{fi} = \sum_n \left( \int d\Omega_n S_{fn}^\dagger S_{ni} \right) = S_{fi} \quad (\text{I. 3. 7})$$

où l'indice  $n$  de sommation indique le nombre de particules de l'état.

On peut écrire également :

$$X_{fi} - X_{fi}^\dagger = i \sum_n \int d\Omega_n X_{fn}^\dagger X_{ni} \quad (\text{I. 3. 8})$$

Pour les équations à deux corps, on écrit la relation précédente avec  $n = 2$ . A partir des 4-moments  $k_1$  et  $k_2$  des deux particules on définit les 4-moments dans le centre de masse :

$$\begin{cases} P = k_1 + k_2 & P = (W; \vec{0}) \\ 2k = k_1 - k_2 & W^2 = s = \text{énergie totale dans le centre de masse} \end{cases}$$

La relation (I. 3. 8) s'écrit alors avec  $s^+ = s + i\epsilon$  et  $s^- = s - i\epsilon$  :

$$\begin{aligned} X_{pp'}(s^+) - X_{pp'}(s^-) &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 k_1 d^4 k_2 \delta^4(P - k_1 - k_2) [(2\pi)^2 \delta^+(k_1^2 - m_1^2) \delta^+(k_2^2 - m_2^2)] \\ &\quad \cdot X_{pk}(s^+) X_{kp'}(s^-) \end{aligned} \quad (\text{I. 3. 9})$$

où  $p'$  et  $p$  sont les 4-moments relatifs des deux particules à l'entrée et à la sortie, ou encore en faisant le changement de variable  $(d^4k_1 d^4k_2) \rightarrow (d^4p d^4k)$  :

$$X_{pp'}(s^+) - X_{pp'}(s^-) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k X_{pk}(s^+) [(2\pi)^2 \delta^+(k_1^2 - m_1^2) \delta^+(k_2^2 - m_2^2)] X_{kp'}(s^-) \quad (\text{I. 3. 10})$$

c) Calcul de la discontinuité à partir de l'équation de Bethe-Salpeter :

Soit l'équation à deux corps du type Bethe-Salpeter :

$$X_{pp'}(s) = V_{pp'} + \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k V_{pk} G_k(s) X_{kp'}(s) \quad (\text{I. 3. 11})$$

où  $V_{pp'}$  représente un potentiel à deux corps supposé réel et symétrique ( $V = V^\dagger$ ) et  $G_k(s)$  le propagateur des deux particules.

On l'écrit sous trois formes différentes pour  $s \rightarrow s + i\epsilon$ , donc  $s^* \rightarrow s - i\epsilon$  :

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad X(s) &= V + V G(s) X(s) \\ (\beta) \quad X(s) &= V + X(s) G(s) V \\ (\gamma) \quad X^\dagger(s) &= V + V G(s^*) X^\dagger(s) \end{aligned} \quad (\text{I. 3. 12})$$

On forme ensuite les combinaisons suivantes :

$$(\beta) - (\gamma) \quad X(s) - X^\dagger(s) = X(s) G(s) V - V G(s^*) X^\dagger(s) \quad (\text{I. 3. 13})$$

$$(\alpha) - (\beta) \quad X(s) G(s) V = V G(s) X(s) \quad (\text{I. 3. 14})$$

ce qui donne :

$$X(s) - X^\dagger(s) = V G(s) [X(s) - X^\dagger(s)] + V [G(s) - G(s^*)] X^\dagger(s) \quad (\text{I. 3. 15})$$

ou, en posant  $\Delta X(s) = X(s) - X^\dagger(s)$  :

$$\Delta X(s) = V [G(s) - G(s^*)] X^\dagger(s) + V G(s) \Delta X(s) \quad (\text{I. 3. 16})$$

En comparant (I. 3. 12 $_\alpha$ ) et (I. 3. 16), on voit que  $X(s)$  et  $\Delta X(s)$  obéissent à des équations de Fredholm qui ont même noyau :  $V G(s)$ . Ils sont donc liés par la même relation que les termes inhomogènes de leurs deux équations. La comparaison de ceux-ci donne alors :

$$\Delta X(s) = X(s) [G(s) - G(s^*)] X^\dagger(s) \quad (\text{I. 3. 17})$$

ou encore, compte-tenu de  $X^\dagger(s) = X(s^*)$  :

$$X(s) - X(s^*) = X(s) [G(s) - G(s^*)] X(s^*) \quad (\text{I. 3. 18})$$

Donc, en revenant aux expressions projetées :

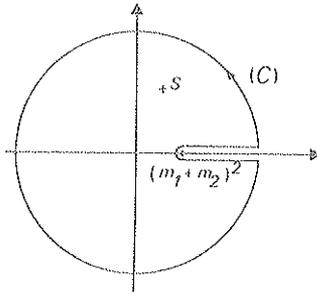
$$X_{pp'}(s^+) - X_{pp'}(s^-) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k X_{pk}(s^+) [G_k(s^+) - G_k(s^-)] X_{kp'}(s^-) \quad (I. 3. 19)$$

d) La comparaison des équations (I. 3.10) et (I. 3. 19) fournit l'expression de la discontinuité du propagateur sur l'axe réel positif :

$$G(s^+) - G(s^-) = i (2\pi)^2 \delta^+(k_1^2 - m_1^2) \delta^+(k_2^2 - m_2^2) \quad (I. 3. 20)$$

On suppose que cette discontinuité, due à l'unitarité, est la seule singularité du propagateur.

On peut alors, pour obtenir  $G$ , écrire une relation de dispersion en appliquant le théorème de Cauchy sur la courbe (C), dans le plan complexe  $s$ .



Cela donne :

$$G_k(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} ds' \frac{G(s')}{s' - s} \quad (I. 3. 21)$$

Les contributions sur les cercles interne et externe s'annulent à la limite et on trouve :

$$G_k(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(m_1+m_2)^2}^{+\infty} ds' \frac{G(s'^+) - G(s'^-)}{s' - s} \quad (I. 3. 22)$$

ou encore :

$$G_k(s) = 2\pi \int_{(m_1+m_2)^2}^{+\infty} ds' \frac{\delta^+(k_1^2 - m_1^2) \delta^+(k_2^2 - m_2^2)}{s' - s} \quad (I. 3. 23)$$

Le calcul des fonctions  $\delta^+$  donne successivement :

$$\delta^+(k_1^2 - m_1^2) \delta^+(k_2^2 - m_2^2) = - \frac{4s'}{k^0{}^2 - s'/4} \delta(s_1 - s_2) \delta(s' - s_1) \quad (I. 3. 24)$$

avec

$$\begin{cases} s_1 = 4(\epsilon_1 - k^0)^2 \\ s_2 = 4(\epsilon_2 - k^0)^2 \\ \epsilon_1 = \sqrt{\vec{k}^2 + m_1^2} \\ \epsilon_2 = \sqrt{\vec{k}^2 + m_2^2} \end{cases}$$

$$\delta(s_1 - s_2) = \frac{1}{8(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \delta(k^0 - \bar{k}^0) \quad \text{avec } \bar{k}^0 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

d'où

$$G_k(s) = 2\pi \int_{(m_1+m_2)^2}^{+\infty} ds' \frac{-4s'}{k^0{}^2 - s'/4} \cdot \frac{1}{8(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \delta(k^0 - \bar{k}^0) \delta(s' - s_1) \quad (I. 3. 25)$$

Soit, en effectuant l'intégration :

$$G_k(s) = \frac{\pi}{\epsilon_1 \epsilon_2} \delta(k^0 - \frac{1}{2} \epsilon_1 - \frac{1}{2} \epsilon_2) \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - s} \quad (I. 3. 26)$$

e) Elimination de l'énergie relative :

Il ne reste plus qu'à reporter (I. 3. 26) dans l'équation de départ (I. 3. 11) :

$$X_{pp'}(s) = V_{pp'} + \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k V_{pk} \frac{\pi}{\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - s} X_{kp'}(s) \delta(k^0 - \frac{1}{2} \epsilon_1 - \frac{1}{2} \epsilon_2) \quad (I. 3. 27)$$

Soit, en effectuant l'intégration :

$$X_{pp'}(s) = V_{pp'} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\epsilon_1 \epsilon_2} V_{pk} \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - s} X_{kp'}(s) \quad (I. 3. 28)$$

Ce qui nous fournit une équation à deux corps, invariante sous Lorentz et vérifiant l'unitarité à toutes les énergies.

Résolution avec un potentiel séparable :

Si maintenant on suppose que le potentiel  $V_{pp'}$  a une forme séparable, c'est-à-dire :

$$V_{pp'} = g(p^2) \lambda g(p'^2) \quad (I. 3. 29)$$

l'équation (I. 3. 28) peut être résolue explicitement. En effet, en itérant l'équation, il apparaît que l'amplitude  $X_{pp'}(s)$  est alors aussi séparable :

$$X_{pp'}(s) = g(p^2) D^{-1}(s) g(p'^2) \quad (I. 3. 30)$$

On obtient, en reportant dans (I. 3. 28) :

$$\frac{g(p^2) g(p'^2)}{D(s)} = g(p^2) \lambda g(p'^2) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\epsilon_1 \epsilon_2} g(p^2) \lambda g(k^2) \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - s} \cdot \frac{g(k^2) g(p'^2)}{D(s)} \quad (I. 3. 31)$$

qui fournit la solution cherchée :

$$D(s) = \lambda^{-1} - \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\epsilon_1 \epsilon_2} g^2(k^2) \cdot \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - s} \quad (I. 3. 32)$$

Il est intéressant pour la suite de réécrire l'équation d'unitarité pour  $X$  (I. 3. 10) avec l'expression (I. 3. 30). Après simplification des facteurs de forme on obtient :

$$\frac{1}{D(s^+)} - \frac{1}{D(s^-)} = \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{D(s^+)} \cdot \frac{1}{D(s^-)} \int d^4k g^2(k^2) (2\pi)^2 \delta^+(k_1^2 - m_1^2) \delta^+(k_2^2 - m_2^2) \quad (I. 3. 33)$$

IV. CAS DES EQUATIONS A TROIS CORPS

On peut maintenant passer au cas de trois particules en suivant la méthode analytique décrite au paragraphe II . On donnera également en appendice la transcription graphique des calculs. En effet, l'application des règles de Landau-Cutkovsky<sup>(7)</sup> aux différents graphes permet de suivre plus précisément les différentes étapes et fait apparaître clairement l'origine de chaque terme.

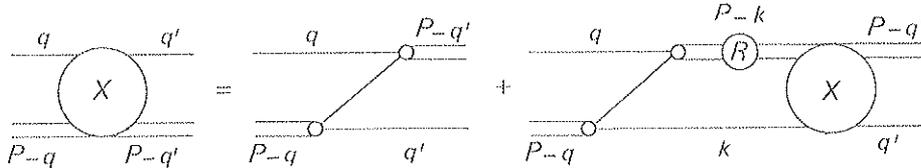
Dans tout ce paragraphe, on se limitera au cas de trois particules identiques afin d'alléger l'écriture. Le retour au cas général se fera, par analogie avec le cas non relativiste, dans le deuxième chapitre.

a) Equations à trois corps :

On suppose que l'interaction se fait par quasi-particules, avec une équation de la forme :

$$\langle q | X(s) | q' \rangle = \langle q | Z(s) | q' \rangle + \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \langle q | Z(s) | k \rangle R(\sigma_k) \langle k | X(s) | q' \rangle \quad (I. 4. 1)$$

ce qui se représente par :



avec les notations déjà indiquées dans l'introduction.

b) Unitarité à deux et trois corps :

On écrit maintenant la relation d'unitarité en se limitant à deux et trois particules :

$$X_{fi} - X_{fi}^+ = i \sum_{n=2}^3 \int d\Omega_n X_{fn}^+ X_{ni} \quad (I. 4. 2)$$

Pour  $n = 2$ , on a une particule de masse  $m$ , de 4-moment  $k$  (dans le centre de masse à trois corps), en présence de l'état lié des deux autres autres, de masse  $\mu$ , d'énergie  $\sigma_k$  où  $\sigma_k = (P - k)^2$  avec  $P = k_1 + k_2 + k_3$ . En utilisant le résultat obtenu pour les équations à deux corps, on trouve :

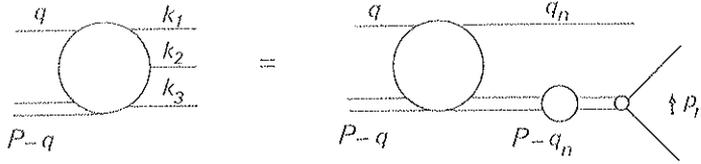
$$i \int d\Omega_2 X_{f2}^+ X_{2i} = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 k \langle q | X(s^+) | k \rangle [(2\pi)^2 \delta^+(k^2 - m^2) \delta^+(\sigma_k - \mu^2)] \langle k | X(s^-) | q' \rangle \quad (I. 4. 3)$$

Pour  $n = 3$ , l'équation fait intervenir l'amplitude de "break-up" (ou de production). On suppose, par analogie avec le cas non relativiste, que celle-ci est reliée à l'amplitude de diffusion élastique par :

$$\langle q | X(s) | k_1 k_2 k_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} \sum_{n=1}^3 \langle q | X(s) | k_n \rangle S(\sigma_{k_n}) g(p_n^2) \quad (I. 4. 4)$$

où  $S$  est le propagateur d'une quasi-particule.

Le terme  $\sqrt{3!}$  provient de l'identité des particules. Cette relation se représente par :



avec  $\sigma_{k_n} = (P - q_n)^2$  et par exemple,  $p_1 = \frac{1}{2} (k_2 - k_3)$ .

D'autre part :

$$d\Omega_3 = (2\pi)^4 \delta^4(P - k_1 - k_2 - k_3) \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta^+(k_1^2 - m^2) \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta^+(k_2^2 - m^2) \cdot \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta^+(k_3^2 - m^2) \quad (I. 4. 5)$$

et le terme donnant l'unitarité à trois corps s'écrit, en utilisant (I. 4. 4) et (I. 4. 5) :

$$i \int d\Omega_3 X_{f3}^+ X_{3i} = \frac{i}{(2\pi)^5} \int \delta^4(P - k_1 - k_2 - k_3) \delta^+(k_1^2 - m^2) \delta^+(k_2^2 - m^2) \delta^+(k_3^2 - m^2) d^4 k_1 d^4 k_2 d^4 k_3 \cdot \frac{1}{3!} \sum_{n, m=1}^3 \langle q | X(s^+) | k_n \rangle S(\sigma_{k_n}^+) g(p_n^2) g(p_m^2) S(\sigma_{k_m}^-) \langle k_m | X(s^-) | q' \rangle \quad (I. 4. 6)$$

Finalement, en reportant (I. 4. 3) et (I. 4. 6) dans (I. 4. 2), on obtient l'expression de l'unitarité à deux et trois corps

$$\begin{aligned} \langle q | X(s^+) | q' \rangle - \langle q | X(s^-) | q' \rangle &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 k \langle q | X(s^+) | q' \rangle [ (2\pi)^2 \delta^+(\sigma_{k-\mu}^2) \delta^+(k^2 - m^2) ] \cdot \\ &\cdot \langle k | X(s^-) | q' \rangle + \frac{i}{(2\pi)^5} \int \delta^4(P - k_1 - k_2 - k_3) \delta^+(k_1^2 - m^2) \delta^+(k_2^2 - m^2) \delta^+(k_3^2 - m^2) \cdot \\ &\cdot d^4 k_1 d^4 k_2 d^4 k_3 \frac{1}{3!} \sum_{n, m=1}^3 \langle q | X(s^+) | k_n \rangle S(\sigma_{k_n}^+) g(p_n^2) g(p_m^2) S(\sigma_{k_m}^-) \langle k_m | X(s^-) | q' \rangle \end{aligned} \quad (I. 4. 7)$$

Remarque :

Le deuxième terme provenant de l'unitarité à trois corps, se sépare en deux contributions :

- l'une, pour  $n = m$ , est en fait une contribution de type "deux corps",
- l'autre, pour  $n \neq m$ , est purement à trois corps.

Ceci se voit beaucoup mieux sur le graphe représentant cette égalité (voir appendice), et sera utilisé par la suite.

c) Calcul de la discontinuité à partir de l'équation à trois corps :

L'équation (I. 4. 1) à trois corps a la forme :

$$\alpha) \quad X = Z + Z R X$$

ou encore, en effectuant le développement perturbatif de  $\alpha)$  et en factorisant  $RZ$  à droite :

$$\beta) \quad X = Z + X R Z$$

En prenant les adjointes de  $\alpha)$  et  $\beta)$ , et en notant  $X^+ = X(s^+)$  et  $X^- = X(s^-)$ , on obtient :

$$\gamma) \quad X^+ = Z^+ + X^+ R^+ Z^+$$

$$\delta) \quad X^- = Z^- + Z^- R^- Z^-$$

ou encore pour cette dernière

$$O = Z^- - X^- + Z^- R^- X^-$$

Donc :

$$\begin{aligned} Z^+ &= Z^+ - O \\ &= Z^+ - Z^- + X^- - Z^- R^- X^- \end{aligned}$$

et, en reportant dans  $\gamma)$  :

$$X^+ = Z^+ + X^+ R^+ (Z^+ - Z^- + X^- - Z^- R^- X^-)$$

d'où :

$$\epsilon) \quad X^+ = Z^+ + X^+ R^+ (Z^+ - Z^-) + X^+ R^+ X^- - X^+ R^+ Z^- R^- X^-$$

De même, on obtient :

$$\eta) \quad X^- = Z^- + (Z^- - Z^+) R^- X^- + X^+ R^- X^- - X^+ R^+ Z^+ R^- X^-$$

Enfin, en faisant  $\epsilon) - \eta)$  et en regroupant les termes, on obtient,  $I$  étant l'opérateur identité :

$$X^+ - X^- = X^+ (R^+ - R^-) X^- + (I + X^+ R^+) (Z^+ - Z^-) (I + R^- X^-) \quad (I. 4. 8)$$

Mais le terme de Born  $Z^-$  n'a pas de coupure quand il est sur couche ou demi-couche. Ceci correspond au fait que l'on n'effectue jamais de coupure sur les lignes externes d'un graphe. Ainsi, les trois termes contenant  $I$  s'annulent et l'on obtient :

$$X^+ - X^- = X^+ (R^+ - R^-) X^- + X^+ R^+ (Z^+ - Z^-) R^- X^- \quad (I. 4. 9)$$

Ou encore, après projection :

$$\begin{aligned} \langle q | X(s^+) | q' \rangle - \langle q | X(s^-) | q' \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \langle q | X(s^+) | k \rangle [R(\sigma_k^+) - R(\sigma_k^-)]. \\ \cdot \langle k | X(s^-) | q' \rangle &+ \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4 k \int d^4 k' \langle q | X(s^+) | k \rangle R(\sigma_k^+) [\langle k | Z(s^+) | k' \rangle - \langle k | Z(s^-) | k' \rangle]. \\ &\cdot R(\sigma_{k'}^-) \langle k' | X(s^-) | q' \rangle \end{aligned} \quad (I. 4. 10)$$

d) Discontinuités de  $Z$  et de  $R$  :

Comme en deux corps, on va comparer les deux expressions de  $X^+ - X^-$  et en tirer les

expressions des discontinuités de  $Z$  et  $R$ . Le premier terme dans (I. 4. 10)  $[X^+(R^+ - R^-)X^-]$  se regroupe alors avec :

- le premier terme de (I. 4. 7)
- la partie  $n = m$  du second (voir remarque à la fin de b)).

Cela donne :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \langle q | X(s^+) | k \rangle [R(\sigma_k^+) - R(\sigma_k^-)] \langle k | X(s^-) | q' \rangle \\
&= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \langle q | X(s^+) | k \rangle [(2\pi)^2 \delta^+(k^2 - m^2) \delta^+(\sigma_k - \mu^2)] \langle k | X(s^-) | q' \rangle \\
&+ \frac{i}{(2\pi)^5} \int \delta^4(p - k_1 - k_2 - k_3) \delta^+(k_1^2 - m^2) \delta^+(k_2^2 - m^2) \delta^+(k_3^2 - m^2) d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 \\
&\quad \cdot \frac{1}{3!} \sum_{n=1}^3 \langle q | X(s^+) | k_n \rangle S(\sigma_{k_n}^+) g^2(p_n^2) S(\sigma_{k_n}^-) \langle k_n | X(s^-) | q' \rangle
\end{aligned} \tag{I. 4. 11}$$

Soit  $J$  le dernier terme; les particules étant identiques, la sommation se simplifie et on peut introduire les variables muettes

$$\begin{cases} P = k_1 + k_2 + k_3 \\ p = 1/2 (k_1 - k_2) \\ k = k_3 \end{cases}$$

Après intégration on obtient :

$$\begin{aligned}
J = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \langle q | X(s^+) | k \rangle \left[ -i \frac{\delta^+(k^2 - m^2)}{2(2\pi)^3} S(\sigma_k^+) S(\sigma_k^-) \int d^4p g^2(p^2) (2\pi)^2 \right. \\
\left. \cdot \delta^+(k_1^2 - m^2) \delta^+(k_2^2 - m^2) \right] \langle k | X(s^-) | q' \rangle
\end{aligned} \tag{I. 4. 12}$$

ce qui donne, dans (I. 4. 11) :

$$\begin{aligned}
R(\sigma_k^+) - R(\sigma_k^-) &= i(2\pi)^2 \delta^+(k^2 - m^2) \delta^+(\sigma_k - \mu^2) \\
&- i \frac{\delta^+(k^2 - m^2)}{2(2\pi)^3} S(\sigma_k^+) S(\sigma_k^-) \int d^4p g^2(p^2) (2\pi)^2 \delta^+(k_1^2 - m^2) \delta^+(k_2^2 - m^2)
\end{aligned} \tag{I. 4. 13}$$

De même, on regroupe le deuxième terme de (I. 4. 10) avec le terme  $m \neq n$  de (I. 4. 7).

La somme se simplifie de la même façon et, avec les changements de variables :

$$\begin{cases} P = k_1 + k_2 + k_3 \\ q = k_1 \\ q' = k_2 \end{cases}$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
 & R(\sigma_q^+) [ \langle q | Z(s^+) | q' \rangle - \langle q | Z(s^-) | q' \rangle ] R(\sigma_{q'}^-) \\
 &= i g \left( \frac{1}{4} (P-q-2q')^2 \right) S(\sigma_q^+) (2\pi)^3 \delta^+(q^2-m^2) \delta^+(q'^2-m^2) \delta^+((P-q-q')^2-m^2) \\
 &\quad \cdot S(\sigma_{q'}^-) g \left( \frac{1}{4} (P-2q-q')^2 \right) \quad (I. 4. 14)
 \end{aligned}$$

e) Elimination de l'énergie relative :

Les deux équations (I. 4. 13) et (I. 4. 14) fournies par l'unitarité vont d'abord nous permettre de construire le propagateur et le terme de Born. En reportant ensuite les expressions obtenues dans (I. 4. 1), on obtiendra l'équation définitive.

e<sub>1</sub>) Calcul du propagateur :

Le propagateur à trois corps  $R(\sigma_k)$  décrit la propagation d'une particule libre de 4-moment  $k$ , et d'une quasi-particule de masse  $\mu$  et de 4-moment  $P-k$ . Il doit donc s'exprimer à partir du propagateur  $S(\sigma_k)$  de la quasi-particule, en isolant la propagation de la particule libre :

$$R(\sigma_k) = 2\pi \delta^+(k^2-m^2) S(\sigma_k) \quad (I. 4. 15)$$

(Pour plus de détails, voir la représentation graphique de (I. 4. 13) dans l'appendice).

En reportant cette forme dans (I. 4. 13), on obtient :

$$\begin{aligned}
 S(\sigma_k^+) - S(\sigma_k^-) &= 2i\pi \delta^+(\sigma_k - \mu^2) - i \frac{S(\sigma_k^+) \cdot S(\sigma_k^-)}{2(2\pi)^4} \int d^4p g^2(p^2) (2\pi)^2 \delta^+(k_1^2-m^2) \delta^+(k_2^2-m^2) \\
 &\quad (I. 4. 16)
 \end{aligned}$$

Il est alors commode de poser :

$$S(\sigma) = -1/D(\sigma) \quad (I. 4. 17)$$

et on trouve :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{D(\sigma_k^+)} - \frac{1}{D(\sigma_k^-)} &= -2i\pi \delta^+(\sigma_k - \mu^2) + \frac{i}{2(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{D(\sigma_k^+)} \cdot \frac{1}{D(\sigma_k^-)} \int d^4p g^2(p^2) (2\pi)^2 \\
 &\quad \cdot \delta^+(k_1^2-m^2) \delta^+(k_2^2-m^2) \quad (I. 4. 18)
 \end{aligned}$$

On peut alors comparer cette équation à celle (I. 3. 33) qui exprime l'unitarité de l'amplitude à deux corps dans le cas d'un potentiel séparable. Ces équations diffèrent par le premier terme de (I. 4. 18) :

$$-2i\pi \delta^+(\sigma_k - \mu^2)$$

(Le facteur 2 au dénominateur du deuxième terme provient de l'identité des deux particules).

Ce terme traduit l'unitarité à un corps pour la quasi-particule de masse  $\mu$ .

En d'autres termes,  $D(\epsilon_k)$  vérifie la même équation que le dénominateur d'une amplitude à deux corps qui vérifierait l'unitarité à deux et à un corps. On peut alors prendre pour  $D(\epsilon_k)$  l'expression obtenue en résolvant l'équation à deux corps (I. 3. 28) avec le potentiel séparable (I. 3. 29), c'est-à-dire :

$$D(s) = \lambda^{-1} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{\epsilon_k} g^2(k^2) \frac{1}{4 \epsilon_k^2 - s} \quad (\text{I. 4. 19})$$

à condition de lui imposer l'existence d'une quasi-particule pour  $s = \mu^2$ , donc :

$$D(\mu^2) = 0 \quad (\text{I. 4. 20})$$

Cela donne :

$$D(s) = (s - \mu^2) \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{\epsilon_k} \cdot \frac{g^2(k^2)}{4 \epsilon_k^2 - s} \quad (\text{I. 4. 21})$$

## e<sub>2</sub>) Calcul du terme de Born :

On utilise l'équation (I. 4. 14) et on y reporte l'expression (I. 4. 15) du propagateur, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \langle q | Z(s^+) | q' \rangle - \langle q | Z(s^-) | q' \rangle &= i g \left( \frac{1}{4} (P - q - 2q')^2 \right) 2\pi \delta^+((P - q - q')^2 - m^2) \\ &\cdot g \left( \frac{1}{4} (P - 2q - q')^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{I. 4. 22})$$

Comme pour le propagateur à deux corps, on suppose que cette discontinuité est la seule du terme de Born que l'on calcule alors à l'aide d'une relation de dispersion :

$$\begin{aligned} \langle q | Z(s) | q' \rangle &= \frac{1}{2i\pi} \int_{4m^2}^{+\infty} ds' \frac{\langle q | Z(s'^+) | q' \rangle - \langle q | Z(s'^-) | q' \rangle}{s' - s} \\ &= \int_{4m^2}^{+\infty} ds' g \left( \frac{1}{4} (P - q - 2q')^2 \right) \delta^+((P - q - q')^2 - m^2) g \left( \frac{1}{4} (P - 2q - q')^2 \right) \cdot \frac{1}{s' - s} \end{aligned} \quad (\text{I. 4. 23})$$

On exprime la fonction  $\delta$  :

$$\delta^+((P - q - q')^2 - m^2) = \frac{\sqrt{s'}}{\sqrt{s' - \epsilon_q - \epsilon_{q'}}} \cdot \delta(s' - s_1) \quad (\text{I. 4. 24})$$

avec  $s_1 = (\epsilon_q + \epsilon_{q'} + \epsilon_{q+q'})^2$ .

En intégrant, on obtient finalement :

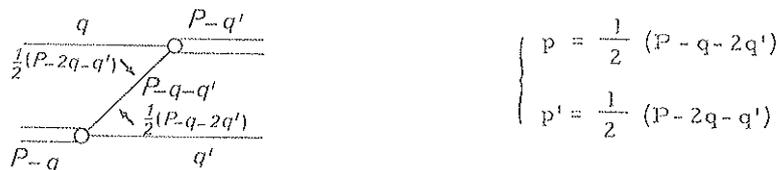
$$\langle q | Z(s) | q' \rangle = g \left( \frac{1}{4} (P - q - 2q')^2 \right) \frac{\epsilon_q + \epsilon_{q'} + \epsilon_{q+q'}}{(\epsilon_q + \epsilon_{q'} + \epsilon_{q+q'})^2 - s} \cdot \frac{1}{\epsilon_{q+q'}} \cdot g \left( \frac{1}{4} (P - 2q - q')^2 \right) \quad (\text{I. 4. 25})$$

e<sub>3</sub>) Equation finale :

En reportant (I. 4. 25) , (I. 4. 15) et (I. 4. 17) dans l'équation de départ (I. 4. 1), on peut effectuer l'intégration sur  $dk^0$  à l'aide de la fonction  $\delta^+(k^2 - m^2)$  du propagateur. Enfin, en changeant  $X$  en  $-X$  pour se conformer à la convention adoptée en modèle statique <sup>(8)</sup>, on obtient l'équation tridimensionnelle :

$$\langle q | X(s) | q' \rangle = \frac{g(p^2) (\epsilon_q + \epsilon_{q'} + \epsilon_{q+q'}) g(p'^2)}{\epsilon_{q+q'} [s - (\epsilon_q + \epsilon_{q'} + \epsilon_{q+q'})^2]} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\epsilon_k} \frac{g(p^2) (\epsilon_q + \epsilon_k + \epsilon_{q+k}) g(k^2)}{\epsilon_{q+k} [s - (\epsilon_q + \epsilon_k + \epsilon_{q+k})^2]} \cdot \frac{\langle k | X(s) | q' \rangle}{D(\sigma_k)} \quad (I. 4. 26)$$

où l'on a introduit les 4-moments relatifs aux vertex :



f) Conclusion :

On a ainsi obtenu des équations décrivant la diffusion d'une particule libre sur l'état lié de deux autres, invariantes sous les transformations de Lorentz et vérifiant l'unitarité à deux et trois corps, à partir d'interactions à deux corps s'effectuant par l'intermédiaire de quasi-particules.

D'autre part, ce sont des équations intégrales tridimensionnelles, présentant une analogie formelle avec les équations non relativistes, ce qui est encourageant quant à leur résolution numérique.

Cette analogie sera exploitée au deuxième chapitre, pour effectuer la réduction du moment angulaire, ce qui nous ramènera à des équations à une dimension. Avant cela, il faudra expliciter les arguments des vertex (moments relatifs et angles de Wick) pour avoir des expressions invariantes.

A P P E N D I C E A

REPRESENTATION GRAPHIQUE DES EQUATIONS

a) Unitarité :

La relation d'unitarité pour X s'écrit :

$$X_{fi}^+ - X_{fi}^- = i \sum_n \int d\Omega_n X_{fn}^+ X_{ni}$$

On peut la représenter, pour  $n = 2$  à  $3$ , par :

en ayant exprimé les  $(2\pi) \delta^+(k_i^2 - m_i^2)$  qui apparaissent dans  $d\Omega_n$ .

Le terme  $(2\pi)^{-4} \delta(P - \sum k_i)$  est implicitement contenu dans la sommation effectuée sur les lignes internes.

Le trait pointillé signifie que l'on prend la discontinuité du graphe sur la coupure.

On obtient ainsi la règle donnant la coupure d'une amplitude. On somme sur tous les états intermédiaires possibles en ajoutant sur chaque ligne interne  $2\pi \delta^+(k^2 - m^2)$ . Ce terme sera juste indiqué dans la suite par un  $\delta^+$ , l'argument devant correspondre à la ligne considérée.

En remplaçant l'amplitude de "break-up" par son expression :

on trouve :

Pour le terme venant de l'unitarité à trois corps, il faut sommer sur tous les états intermédiaires, donc, en particulier, on doit raccorder les lignes internes de toutes les façons possibles. On doit donc avoir :

$$\left[ \text{circle with slash} \right] = i \left[ \begin{aligned} & \left[ \text{circle } + \text{ --- } \delta \text{ --- } \text{circle } - \right] - \left[ \text{circle } + \text{ --- } \delta \text{ --- } \text{circle } - \right] + \\ & \left[ \text{circle } + \text{ --- } \delta \text{ --- } S^+ \text{ --- } \delta \text{ --- } S^- \text{ --- } \text{circle } - \right] + \\ & \left[ \text{circle } + \text{ --- } \delta \text{ --- } S^+ \text{ --- } \delta \text{ --- } S^- \text{ --- } \text{circle } - \right] \end{aligned} \right] \quad (I. A. 4)$$

(le signe - provient du jacobien lorsqu'on change de variable, l'ordre de couplage des moments étant différent).

b) Equation :

L'équation (I. 4. 1) se représente par :

$$\text{circle} = \text{triangle} + \text{triangle with circle} \quad (I. A. 5)$$

On la développe perturbativement :

$$\text{circle} = \text{triangle} + \text{triangle with circle} + \text{triangle with two circles} + \dots \quad (I. A. 6)$$

Pour obtenir la valeur de la discontinuité, il faut sommer en effectuant toutes les coupures possibles sur les lignes internes. On ne coupe pas les graphes les plus externes, supprimés sur couche, donc sans discontinuité. Il apparaît deux sortes de termes :

- les coupures sur le terme de Born avec de chaque côté un propagateur :

$$Z^+ - Z^- = \text{cut on Born term} \quad (I. A. 7)$$

- les coupures sur les propagateurs :

$$R^+ - R^- = \text{cut on propagator} \quad (I. A. 8)$$

Le troisième terme du développement donne alors par exemple trois contributions :

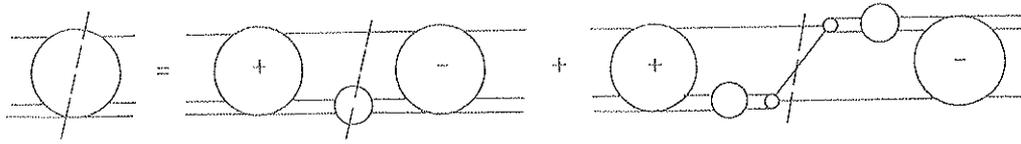
$$\text{cut on third-order term} \quad (I. A. 9)$$

On peut alors mettre en facteur les graphes (I.A. 7) et (I.A. 8) :

$$\text{circle with slash} = \left[ \text{triangle} + \text{triangle with circle} + \dots \right] \left[ \text{cut on Born term} \right] + \left[ \text{cut on propagator} \right] \left[ \text{triangle} + \text{triangle with circle} + \dots \right]$$

et on reconnaît à droite et à gauche le développement perturbatif de  $X$  (I. A. 6) .

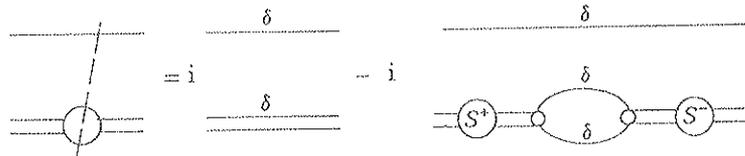
D'où :



(I. A. 10)

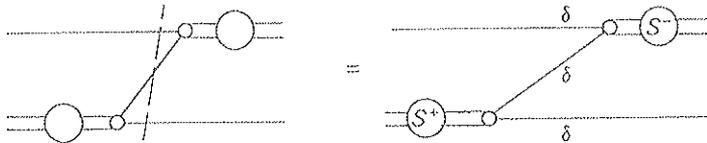
qui représente l'équation (I. 4. 10) .

c) En comparant les graphes (I. A. 4) et (I. A. 10) , on obtient :



(I. A. 11)

et



(I. A. 12)

qui traduisent respectivement (I. 4. 13) et (I. 4. 14) .

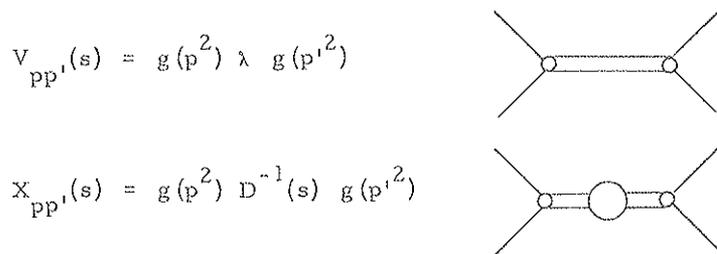
En éliminant la ligne libre sur (I. A. 11), on obtient le graphe donnant la discontinuité du propagateur :



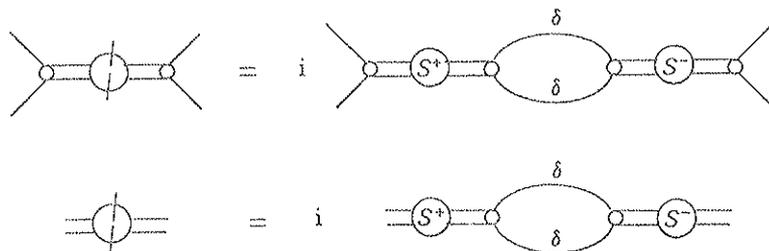
(I. A. 13)

(la coupure sur la ligne libre donne  $2\pi \delta^+(k^2 - m^2)$  qui s'élimine avec les autres).

D'autre part, on a le graphe d'unitarité à deux corps pour l'amplitude à deux corps avec un potentiel séparable :



D'où, pour l'unitarité, de la même façon que (I. A. 1) :



(I. A. 14)

Et, par comparaison avec (I. A. 13), on obtient :

$$S(\sigma) = -D^{-1}(\sigma)$$

à condition d'imposer en plus d'avoir une quasi-particule pour  $\sigma = \frac{2}{\mu}$ .

Enfin, le graphe (I. 4. 18) donne, après simplification, la discontinuité du terme de Born :



(I. A. 15)

Références

- (1) D. Freedman, C. Lovelace et J. Namyslowski , Nuovo Cimento 43 (1966) 248
- (2) C. Lovelace, Phys. Rev. 135 (1964) B 1225
- (3) R. Aaron, R. D. Amado et J. E. Young , Phys. Rev. 174 (1968) 2022
- (4) R. Blankenbecler et R. Sugar , Phys. Rev. 142 (1966) 1051
- (5) E. E. Salpeter et H. A. Bethe , Phys. Rev. 84 (1951) 1232
- (6) H. Pilkuhn, The Interactions of Hadrons (John Wiley and Sons, Inc.), New York (1967)
- (7) L. E. Landau , Nucl. Phys. 13 (1959) 181  
R. Cutkovsky, Phys. Rev. Lett. 4 (1960) 624 et Journ. Math. Phys. 1 (1960) 429
- (8) R. Aaron , Phys. Rev. 151 (1966) 1293

Chapitre II

INTERACTIONS INVARIANTES. APPLICATION A PION-DEUTON

I. INTRODUCTION

Les équations (I. 4. 26) obtenues précédemment contiennent des intégrales tridimensionnelles. Pour obtenir une forme soluble numériquement, il faut effectuer la réduction du moment angulaire, ce qui donnera des intégrales à une dimension. Auparavant, définissons des moments relatifs invariants. En effet, les fonctions de vertex  $g(p)$  font intervenir les moments relatifs  $p$ , ainsi que leur direction, dans le centre de masse à deux corps correspondant. Il faut donc les définir de manière invariante sous les transformations de Lorentz à partir des moments du centre de masse à trois corps. C'est ce qui sera fait dans le deuxième paragraphe. Dans le troisième paragraphe, l'analogie avec le cas non relativiste permettra d'effectuer la réduction du moment angulaire, tout en se plaçant dans le cas plus général de trois particules de masses différentes. Enfin, nous considérerons le cas de la diffusion pion-deuton. Nous donnerons alors la forme finale des équations à résoudre, après antisymétrisation des deux nucléons, ainsi que les approximations envisageables dans un domaine d'énergie où les nucléons peuvent être considérés comme non relativistes. Dans le paragraphe suivant, nous utiliserons par commodité des notations différentes de celles du premier chapitre. Elles seront chaque fois précisées.

II. MOMENTS RELATIFS

Considérons un potentiel à deux corps séparable de la forme :

$$\langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle = g(\vec{p}) \lambda g(\vec{p}') \quad (\text{II. 2. 1})$$

ou, après décomposition sur les harmoniques sphériques, dans le cas non couplé

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle &= \sum_{\ell m} Y_{\ell m}^*(\hat{p}) g_{\ell}(p) \lambda g_{\ell}(p') Y_{\ell m}(\hat{p}') \\ &= 4\pi \sum_{\ell} \frac{1}{2\ell+1} g_{\ell}(p) \lambda g_{\ell}(p') P_{\ell}(\hat{p}, \hat{p}') \end{aligned} \quad (\text{II. 2. 2})$$

$g_{\ell}(p)$  désignant un facteur de forme, ou fonction de vertex, et  $p$  le module du vecteur  $\vec{p}$ .

Dans les équations du chapitre I, tous les 4-moments ont été placés finalement sur

leur couche de masse. Ils sont donc tous de la forme :

$$\underline{p} = (\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} ; \vec{p})$$

et il suffit de noter la dépendance en  $\vec{p}$ . Dans tout ce paragraphe, les 4-vecteurs seront notés :  $x = (x_0 ; \vec{x})$ .

Le potentiel dépend :

- des modules des moments relatifs  $\vec{p}$  et  $\vec{p}'$
- de l'angle relatif de  $\vec{p}$  et  $\vec{p}'$ .

Ces quantités doivent être exprimées dans le centre de masse à deux corps. Mais, dans les équations à trois corps, les fonctions de vertex apparaissent aussi. Il faut donc obtenir ces quantités à partir des moments exprimés dans le centre de masse à trois corps.

On doit donc exprimer  $|\vec{p}|$ ,  $|\vec{p}'|$ ,  $(\hat{p}, \hat{p}')$  de façon invariante sous les transformations de Lorentz. Pour cela, on cherche deux quadri-vecteurs tels que leur 4-produit scalaire se réduise à  $\vec{p} \cdot \vec{p}'$  dans le centre de masse à deux corps. Cette condition les détermine complètement. En effet, on introduit les 4-vecteurs :

$$\underline{P} = \underline{p} - (\underline{p} \cdot \underline{K}) \frac{\underline{K}}{K^2} \quad \text{et} \quad \underline{P}' = \underline{p}' - (\underline{p}' \cdot \underline{K}) \frac{\underline{K}}{K^2} \quad (\text{II. 2. 3})$$

où  $\underline{P}$ ,  $\underline{p}$ ,  $\underline{K}$  désignent des 4-vecteurs,

-  $\underline{K}$  est le 4-moment total des deux particules de moment relatif  $\vec{p}$  dans le centre de masse à deux corps. Si  $\vec{p} = \frac{1}{2} (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$ , on a :  $\underline{K} = (\sqrt{s} ; \vec{k}_1 + \vec{k}_2)$ .

On a alors, dans le centre de masse à deux corps :

$$\underline{P} = (0, \vec{p}), \quad \underline{P}' = (0, \vec{p}') \quad \text{et} \quad \underline{P} \cdot \underline{P}' = -\vec{p} \cdot \vec{p}' \quad (\text{II. 2. 4})$$

Les 4-vecteurs  $\underline{P}$  et  $\underline{P}'$  répondent donc à notre problème.

On va maintenant montrer <sup>(1)</sup> que le 4-produit scalaire  $\underline{P} \cdot \underline{P}'$  peut s'écrire dans tout référentiel sous la forme d'un produit scalaire de tri-vecteurs. En effet, on a dans tout référentiel :

$$\underline{K} \cdot \underline{P} = \underline{K} \cdot \underline{P}' = 0 \quad (\text{II. 2. 5})$$

ce qui entraîne :

$$P_0 = \frac{\vec{K} \cdot \vec{P}}{K_0} \quad P'_0 = \frac{\vec{K} \cdot \vec{P}'}{K_0}$$

Alors :

$$\underline{P} \cdot \underline{P}' = \frac{(\vec{K} \cdot \vec{P}) (\vec{K} \cdot \vec{P}')}{K_0^2} - \vec{P} \cdot \vec{P}' \quad (\text{II. 2. 6})$$

D'après l'expression précédente, ce terme doit pouvoir s'exprimer comme un produit scalaire de 3-vecteurs  $\vec{v}_p$  et  $\vec{v}_{p'}$  ne dépendant que de  $\vec{P}$ ,  $\vec{P}'$  et des produits scalaires  $(\vec{K} \cdot \vec{P})$  et  $(\vec{K} \cdot \vec{P}')$ .

En effet, si l'on introduit les vecteurs

$$\vec{v}_p = \vec{P} - \frac{\vec{P} \cdot \vec{K}}{K_0 (K_0 + w)} \vec{K} \tag{II. 2. 7}$$

$$\vec{v}_{p'} = \vec{P}' - \frac{\vec{P}' \cdot \vec{K}}{K_0 (K_0 + w)} \vec{K}$$

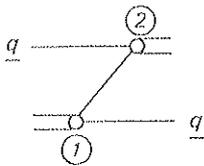
avec  $w^2 = K_0^2 - \vec{K}^2$ , on trouve  $\vec{v}_p \cdot \vec{v}_{p'} = - \underline{P} \cdot \underline{P}'$ .

Ainsi, les modules des vecteurs  $\vec{v}_p$  et  $\vec{v}_{p'}$  et le produit scalaire  $\vec{v}_p \cdot \vec{v}_{p'}$  sont invariants sous les transformations de Lorentz, et  $\vec{v}_p$  et  $\vec{v}_{p'}$  se réduisent respectivement à  $\vec{p}$  et  $\vec{p}'$  dans le centre de masse à deux corps.

Le potentiel s'écrira donc, sous une forme invariante :

$$\langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle = g(\vec{v}_p) \lambda g(\vec{v}_{p'}) \tag{II. 2. 8}$$

Dans les équations à trois corps, les fonctions de vertex interviennent dans le terme de Born :

$$\langle \vec{q} | Z(s) | \vec{q}' \rangle =$$


Il est alors intéressant d'exprimer les moments relatifs  $\vec{v}_p$  et  $\vec{v}_{p'}$  aux vertex 1 et 2 en fonction des moments  $\vec{q}$  et  $\vec{q}'$  des particules spectatrices.

Considérons par exemple le vertex 1. Les deux particules qui en sortent ont pour 4-moments :

$$- \underline{k}_2 = (\epsilon_{q+q'}; -\vec{q} - \vec{q}') \text{ pour la particule échangée} \tag{II. 2. 9}$$

$$- \underline{k}_1 = \underline{q}' = (\epsilon_{q'}; \vec{q}') \text{ pour l'autre} \tag{II. 2. 10}$$

On a alors :

$$\vec{v}_p = \vec{P} - \frac{\vec{P} \cdot \vec{K}}{K_0 (K_0 + w)} \vec{K} \tag{II. 2. 11}$$

avec

$$\underline{P} = \underline{p} - (\underline{p} \cdot \underline{K}) \frac{\underline{K}}{\underline{K}^2} \tag{II. 2. 12}$$

$$\underline{K} = \underline{k}_1 + \underline{k}_2 \tag{II. 2. 13}$$

$$\underline{p} = \frac{1}{2} (\underline{k}_1 - \underline{k}_2) \tag{II. 2. 14}$$

En reportant (II. 2. 13) et (II. 2. 14) dans (II. 2. 12), on trouve alors :

$$\underline{P} = \frac{\underline{k}_1 (\underline{k}_2 \cdot \underline{K}) - \underline{k}_2 (\underline{k}_1 \cdot \underline{K})}{\underline{K}^2} \tag{II. 2. 15}$$

En utilisant les expressions (II. 2. 9) et (II. 2. 10) de  $\underline{k}_1$  et  $\underline{k}_2$ , on obtient les vecteurs :

$$\vec{K} = -\vec{q} \tag{II. 2. 16}$$

et

$$\vec{P} = \vec{q}' + \vec{q} \left( \frac{\epsilon_{q'}^2 + \epsilon_{q'} \epsilon_{q+q'} + \vec{q} \cdot \vec{q}'}{\xi_q} \right) \tag{II. 2. 17}$$

avec  $\xi_q = (\epsilon_{q'} + \epsilon_{q+q'})^2 - \vec{q}^2$ .

Enfin, (II. 2. 16) et (II. 2. 17) donnent, pour  $\vec{v}_p$  :

$$\vec{v}_p = \vec{q}' + \rho(q, q', u) \vec{q} \tag{II. 2. 18}$$

avec  $\rho(q, q', u) = \xi_q^{-1/2} [ \epsilon_{q'} + \vec{q} \cdot \vec{q}' (\epsilon_{q'} + \epsilon_{q+q'} + \xi_q^{1/2})^{-1} ]$

$$u = \cos(\hat{q}, \hat{q}') ; \quad q = |\vec{q}| ; \quad q' = |\vec{q}'|$$

De la même manière, on trouve, pour le vertex 2 :

$$\vec{v}_{p'} = - [ \vec{q} + \rho(q', q, u) \vec{q}' ] \tag{II. 2. 19}$$

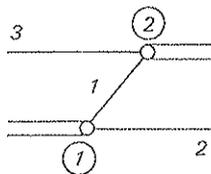
Les formules (II. 2. 18) et (II. 2. 19) fournissent les moments relatifs pour les fonctions de vertex du terme de Born qui s'écrit maintenant :

$$\langle \vec{q} | Z(s) | \vec{q}' \rangle = \frac{g(\vec{v}_p) (\epsilon_q + \epsilon_{q'} + \epsilon_{q+q'}) g(\vec{v}_{p'})}{\epsilon_{q+q'} [s - (\epsilon_q + \epsilon_{q'} + \epsilon_{q+q'})^2]} \tag{II. 2. 20}$$

Remarques :

a) Freedman, Lovelace et Namyslowski utilisent des formes différentes. Au lieu d'utiliser les vecteurs  $\vec{v}_p$  et  $\vec{v}_{p'}$ , ils utilisent directement les modules  $|\vec{p}|$  et  $|\vec{p}'|$  des moments relatifs et les angles de Wick correspondants, c'est-à-dire l'angle entre le moment relatif  $\vec{p}$  de deux particules et le moment relatif  $\vec{q}$  de cette paire par rapport à la particule spectatrice.

Considérons par exemple le vertex 1 et numérotions les particules de la façon suivante :



Le module invariant du moment relatif à ce vertex est, avec les notations précédentes :

$$p_3 = (\underline{P} \cdot \underline{P})^{1/2} \tag{II. 2. 21}$$

En y reportant (II. 2. 3) et en y introduisant les moments  $\vec{k}_i$  des particules, et leurs énergies  $\epsilon_i = \sqrt{\vec{k}_i^2 + m^2}$ , on obtient :

$$p_3 = \frac{\left\{ \left[ \vec{k}_1^2 + \vec{k}_2^2 - \vec{k}_3^2 + 2 \epsilon_1 \epsilon_2 \right]^2 - 4 m^4 \right\}^{1/2}}{2 \left\{ (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - \vec{k}_3^2 \right\}^{1/2}} \quad (\text{II. 2. 22})$$

Enfin, l'angle de Wick correspondant  $\theta_3$  est l'angle (exprimé de manière invariante dans le centre de masse à trois corps) entre le moment relatif  $\vec{v}_{p_3}$  de 1 et 2, et le moment  $(-\vec{k}_3)$  de (1, 2) par rapport à 3. On a donc :

$$\cos \theta_3 = \frac{\vec{v}_{p_3} \cdot (-\vec{k}_3)}{|\vec{v}_{p_3}| \cdot |\vec{k}_3|} \quad (\text{II. 2. 23})$$

On obtient, en remplaçant  $\vec{v}_{p_3}$  par sa valeur :

$$\cos \theta_3 = - \frac{\epsilon_1 (\vec{k}_1^2 - \vec{k}_2^2 - \vec{k}_3^2) + \epsilon_2 (\vec{k}_1^2 - \vec{k}_2^2 + \vec{k}_3^2)}{|\vec{k}_3| \left[ (\vec{k}_1^2 + \vec{k}_2^2 - \vec{k}_3^2 + 2 \epsilon_1 \epsilon_2)^2 - 4 m^4 \right]^{1/2}} \quad (\text{II. 2. 24})$$

b) Nous avons considéré ici le cas d'un potentiel pour lequel le moment angulaire  $l$  était un bon nombre quantique. Dans le cas plus réaliste où le moment cinétique  $J$  ainsi que le spin  $S$  des deux particules et leur isospin  $T$  sont les bons nombres quantiques, le potentiel se projette sous la forme :

$$\langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle = \sum_{c \mu LL' M_T} (\langle \hat{p} | c L \mu M_T \rangle \langle p | g_{cL} \rangle C_{cL}) \wedge (C_{cL'} \langle g_{cL'} | p' \rangle \langle c L' \mu M_T | \hat{p}' \rangle) \quad (\text{II. 2. 25})$$

avec

$$c = \{ J S T \}$$

$\mu$  = projection de  $J$  sur  $Oz$

$M_T$  = projection de  $T$  sur  $Oz$

$$\langle \hat{p} | c L \mu M_T \rangle = i^L \mathcal{Y}_{(LS) J \mu}(\hat{p}) \chi_{T M_T}$$

$\mathcal{Y}_{(LS) J \mu}(\hat{p})$  = harmonique sphérique couplée

$\chi_{T M_T}$  = fonctions propres d'isospin

$\langle p | g_L \rangle$  = facteur de forme du potentiel

$C_{cL}$  et  $\Lambda$  sont des matrices  $N(L) \times N(L)$ ,  $N(L)$  étant le rang du potentiel

$C_{cL}$  contient les paramètres de force et  $\Lambda$  leurs signes.

On a supposé ici une forme de type Mongan séparable en  $L$  et  $L'$ .

La dépendance en  $\vec{p}$ ,  $\vec{p}'$  de ce potentiel n'apparaît plus ici sous forme explicite comme dans le cas précédent. Cependant, les sommations sur les "moments magnétiques" rendent ce potentiel invariant par rotation. Il ne dépend donc que des modules de  $\vec{p}$  et  $\vec{p}'$  ainsi que de leur angle relatif. Les fonctions de vertex invariantes s'écrivent donc simplement :

$$g_{c\mu M_T}(\vec{v}_p) = \langle \vec{v}_p | c_{\mu M_T} \rangle = \sum_L \langle \vec{v}_p | c_{L\mu M_T} \rangle \langle v_p | g_{cL} \rangle C_{cL} \quad (\text{II. 2. 26})$$

### III. COMPARAISON AVEC LE CAS NON RELATIVISTE. REDUCTION DU MOMENT ANGULAIRE

#### a) Notations :

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à la réduction du moment angulaire pour les équations obtenues. Après avoir indiqué les notations utilisées, nous réécrivons les équations, pour trois particules distinctes, dans la représentation non couplée. Ensuite, nous écrirons leurs analogues non relativistes. L'analogie avec ces équations permet enfin de suivre la même démarche pour se ramener à des équations à une dimension.

On considère donc trois particules distinctes :  $i$ ,  $j$  et  $k$ .

On notera :

- $\vec{q}_i$  le moment relatif de la particule  $i$  par rapport à la paire  $(jk)$  dans le centre de masse à trois corps,
- $\vec{p}_i$  le moment relatif de la paire  $(jk)$ , exprimé de manière invariante dans le centre de masse à trois corps, c'est-à-dire ce que l'on appelait  $\vec{v}_p$  dans le paragraphe II.

On a alors, d'après (II.2.18) et (II.2.19) :

$$\begin{cases} \vec{p}_i = \epsilon_{ij} [\rho(q_i, q_j; u) \vec{q}_i + \vec{q}_j] \\ \vec{p}_j = -\epsilon_{ij} [\vec{q}_i + \rho(q_j, q_i; u) \vec{q}_j] \end{cases}$$

$$\rho(q_i, q_j; u) = \xi_{q_i}^{-1/2} [\epsilon_{q_j} + \vec{q}_i \cdot \vec{q}_j (\epsilon_{q_j} + \epsilon_{q_i+q_j} + \xi_{q_i}^{1/2})^{-1}]$$

$$\xi_{q_i} = (\epsilon_{q_j} + \epsilon_{q_i+q_j})^2 - \vec{q}_i^2 \quad (\text{II. 3. 1})$$

$$\epsilon_{q_i} = \sqrt{\vec{q}_i^2 + m_i^2} \quad ; \quad \epsilon_{q_i+q_j} = \sqrt{(\vec{q}_i + \vec{q}_j)^2 + m_k^2} \quad ; \quad \epsilon_{q_j} = \sqrt{\vec{q}_j^2 + m_j^2}$$

$$u = \cos(\hat{q}_i, \hat{q}_j)$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{23} = \epsilon_{31} = 1 = -\epsilon_{21} = -\epsilon_{32} = -\epsilon_{13}$$

Les différents spins et modes de couplage sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \vec{s}_i & \text{ désigne le spin de la particule } i \\ \vec{L}_i & \text{ désigne le moment orbital relatif de la paire } (j k) \\ \vec{S}_i & = \vec{s}_j + \vec{s}_k \\ \vec{J}_i & = \vec{L}_i + \vec{S}_i \text{ est le spin total de la paire } (j k) \\ \vec{\Sigma}_i & = \vec{s}_i + \vec{J}_i \text{ est le spin de la voie } i + (j k) \\ \vec{\ell}_i & \text{ désigne le moment orbital relatif de la particule } i \text{ et de la paire } (j k) \\ \vec{J} & = \vec{\ell}_i + \vec{\Sigma}_i \text{ est le spin total du système.} \end{aligned} \quad (\text{II. 3. 2})$$

Pour l'isospin, on notera :

$$\begin{aligned} \vec{t}_i & \text{ l'isospin de la particule } i \\ \vec{T}_i & = \vec{t}_j + \vec{t}_k \text{ l'isospin de la paire } (jk) \\ \vec{T} & = \vec{t}_i + \vec{T}_i \text{ l'isospin total} \end{aligned} \quad (\text{II. 3. 3})$$

Pour abréger les notations, on désignera par  $c_i = \{ J_i, S_i, T_i \}$  l'ensemble des grandeurs supposées être de bon nombres quantiques pour la paire  $(jk)$  et par  $v_i = \{ c_i, \ell_i, \Sigma_i \}$  la base dans laquelle s'effectue le développement en ondes partielles dans l'espace à trois corps.

b) Equations relativistes :

Considérons le terme de Born sous la forme (II. 2. 20). A cause de la présence des facteurs de forme (II. 2. 26), il apparaît naturellement dans la représentation non couplée  $\{s_i, J_i\}$ . Projeté sur cette base, il donne :

$$\begin{aligned} & \langle s_i \sigma_i ; J_i \mu_i ; \vec{q}_i | Z_{c_i c_j} | s_j \sigma_j ; J_j \mu_j ; \vec{q}_j \rangle \\ & = (1 - \delta_{ij}) \langle s_i \sigma_i | \frac{\langle c_i \mu_i | \vec{p}_i \rangle (e_{q_i} + e_{q_j} + e_{q_i + q_j}) \langle \vec{p}_j | c_j \mu_j \rangle}{e_{q_i + q_j} [s - (e_{q_i} + e_{q_j} + e_{q_i + q_j})^2]} | s_j \sigma_j \rangle \end{aligned} \quad (\text{II. 3. 4})$$

les facteurs de forme étant notés comme en (II. 2. 26) :

$$\langle \vec{p}_j | c_j \mu_j \rangle = \sum_{L_j} \langle \hat{p}_j | c_j L_j \mu_j \rangle \langle p_j | g_{L_j} \rangle C_{L_j}$$

Le facteur  $(1 - \delta_{ij})$  provient de la distinction entre les particules. Le terme de Born s'annule en effet si les voies d'entrée et de sortie sont identiques, puisqu'il n'est pas possible de passer de l'une à l'autre par un simple échange de particule.

Dans cette représentation, les équations (I. 4. 26) s'écrivent :

$$\begin{aligned} & \langle s_i \sigma_i ; J_i \mu_i ; \vec{q}_i | X_{c_i c_j}(s) | s_j \sigma_j ; J_j \mu_j ; \vec{q}_j \rangle \\ & = \langle s_i \sigma_i ; J_i \mu_i ; \vec{q}_i | Z_{c_i c_j}(s) | s_j \sigma_j ; J_j \mu_j ; \vec{q}_j \rangle \\ & + \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_k \sum_{c_k \mu_k \sigma_k} \int \frac{d\vec{q}_k}{2 e_{q_k}} \cdot \langle s_i \sigma_i ; J_i \mu_i ; \vec{q}_i | Z_{c_i c_k}(s) | s_k \sigma_k ; J_k \mu_k ; \vec{q}_k \rangle \cdot \\ & \quad \cdot \frac{1}{D_{c_k}(e_{q_k})} \langle s_k \sigma_k ; J_k \mu_k ; \vec{q}_k | X_{c_k c_j}(s) | s_j \sigma_j ; J_j \mu_j ; \vec{q}_j \rangle \end{aligned} \quad (\text{II. 3. 5})$$

où  $\sigma_{q_k} = (\sqrt{s} - \sqrt{\vec{q}_k^2 + m_k^2})^2 - \vec{q}_k^2$  désigne l'invariant de la paire  $(ij)$ .

c) Equations non relativistes :

Considérons maintenant les équations à trois corps non relativistes décrivant les particules  $i, j, k$ . Avec les notations de (2), on a :

$$\begin{cases} \vec{p}_i = -\epsilon_{ij} (\rho_i \vec{q}_i + \vec{q}_j) \\ \vec{p}_j = \epsilon_{ij} (\vec{q}_i + \rho_j \vec{q}_j) \end{cases} \quad (\text{II. 3. 6})$$

$$\rho_i = \frac{m_j}{m_j + m_k} \quad ; \quad \rho_j = \frac{m_i}{m_i + m_k}$$

Avec les mêmes notations qu'en b) pour les moments, le terme de Born s'écrira, dans la représentation non couplée :

$$\begin{aligned} & \langle s_i \sigma_i ; J_i \mu_i ; \vec{q}_i | Z_{c_i c_j}(\omega) | s_j \sigma_j ; J_j \mu_j ; \vec{q}_j \rangle \\ &= (1 - \delta_{ij}) \langle s_i \sigma_i | \frac{\langle c_i \mu_i | \vec{p}_i \rangle \langle \vec{p}_j | c_j \mu_j \rangle}{\omega - \frac{\vec{q}_i^2}{2m_i} - \frac{\vec{q}_j^2}{2m_j} - \frac{(\vec{q}_i + \vec{q}_j)^2}{2m_k}} | s_j \sigma_j \rangle \end{aligned} \quad (\text{II. 3. 7})$$

où  $\omega$  est l'énergie cinétique totale dans le centre de masse à trois corps.

Quant à l'équation, elle a la forme :

$$\begin{aligned} & \langle s_i \sigma_i ; J_i \mu_i ; \vec{q}_i | X_{c_i c_j}(\omega) | s_j \sigma_j ; J_j \mu_j ; \vec{q}_j \rangle \\ &= \langle s_i \sigma_i ; J_i \mu_i ; \vec{q}_i | Z_{c_i c_j}(\omega) | s_j \sigma_j ; J_j \mu_j ; \vec{q}_j \rangle \\ &+ \sum_k \sum_{c_k \mu_k \sigma_k} \int d\vec{q}_k \langle s_i \sigma_i ; J_i \mu_i ; \vec{q}_i | Z_{c_i c_k}(\omega) | s_k \sigma_k ; J_k \mu_k ; \vec{q}_k \rangle \\ &\quad \cdot D_{c_k}^{-1}(\omega - q_k^2/2\mathcal{M}_k) \langle s_k \sigma_k ; J_k \mu_k ; \vec{q}_k | X_{c_k c_j}(\omega) | s_j \sigma_j ; J_j \mu_j ; \vec{q}_j \rangle \end{aligned} \quad (\text{II. 3. 8})$$

avec  $\mathcal{M}_k^{-1} = m_k^{-1} + (m_i + m_j)^{-1}$ .

$D_{c_k}^{-1}$  est le propagateur de la quasi-particule  $(ij)$  dans l'état  $c_k$ . Il est relié à l'amplitude de diffusion à deux corps  $T_{c_k}^k(s)$  des particules  $(ij)$  par la même relation (1.3.30) que dans le cas relativiste.

Les équations relativistes (II. 3. 5) et non relativistes (II. 3. 8) sont formellement identiques. Cependant, les premières correspondent à des amplitudes fonctions du carré de l'énergie totale  $s$  du système alors que les secondes se rapportent à des amplitudes fonctions de l'énergie cinétique totale  $\omega$  du système. D'autre part, on a dans (II. 3. 5) des amplitudes invariantes reliées à l'opérateur  $S$  par :

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 i \delta^4(P_f - P_i) X_{fi} \quad (II. 3. 9)$$

et dans (II. 3. 8) des amplitudes non invariantes, reliées à S par :

$$S = 1 - 2i\pi\mu k X \quad (II. 3. 10)$$

Les termes de Born, (II. 3. 4) et (II. 3. 7), ont eux aussi la même structure. Ils diffèrent essentiellement par leur partie cinétique.

Enfin, les moments relatifs (II. 3. 1) et (II. 3. 6) s'expriment dans les deux cas comme des combinaisons linéaires de  $\vec{q}_i$  et  $\vec{q}_j$ . Les coefficients, qui sont des constantes dans le cas non relativiste, deviennent des fonctions de  $q_i$ ,  $q_j$  et  $u$  dans le cas relativiste.

d) Réduction du moment angulaire dans le cas relativiste :

Compte-tenu des remarques précédentes, la réduction du moment angulaire est exactement la même que dans le cas classique, la seule différence étant que les coefficients  $\mu$  ne sont plus des constantes, mais dépendent de  $q_i$ ,  $q_j$  et  $u$ .

On ne donnera ici que la démarche générale, et le résultat final, le calcul étant effectué complètement, par exemple dans (2).

On commence par coupler le spin de la particule spectatrice  $\vec{s}_i$  avec le spin de la paire  $\vec{J}_i$  en  $\vec{\Sigma}_i = \vec{s}_i + \vec{J}_i$ . On développe alors les termes obtenus en ondes partielles sur les harmoniques sphériques  $\mathcal{Y}_{\ell_i \Sigma_i}(\hat{q})$ . L'équation radiale obtenue est alors :

$$X_{\nu_i \nu_j}^{JT}(q_i, q_j; s) = Z_{\nu_i \nu_j}^{JT}(q_i, q_j; s) + \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_k \sum_{\nu_k} \int_0^\infty \frac{dq_k \cdot q_k^2}{2\epsilon_{q_k}} Z_{\nu_i \nu_k}^{JT}(q_i, q_k; s) D_{c_k}^{-1}(\sigma_{q_k}) X_{\nu_k \nu_j}^{JT}(q_k, q_j; s) \quad (II. 3. 11)$$

Il ne reste plus qu'à calculer le terme de Born radial  $Z_{\nu_i \nu_j}^{JT}(q_i, q_j; s)$ . Pour cela, on l'exprime d'abord en fonction de sa valeur dans la représentation non couplée,  $\langle s_i \sigma_i; J_i \mu_i; \vec{q}_i | Z_{c_i c_j}(s) | s_j \sigma_j; J_j \mu_j; \vec{q}_j \rangle$ . L'expression (II. 3. 7) de celle-ci étant connue, on y reporte les fonctions de vertex (II. 2. 26). Enfin, en exprimant les moments relatifs  $\vec{p}$  en fonction des moments  $\vec{q}$  à l'aide de (II. 3. 1), on peut effectuer les intégrations et il ne reste qu'une intégrale sur l'angle relatif  $u$  de  $\vec{q}_i$  et  $\vec{q}_j$ . On a finalement :

$$Z_{\nu_i \nu_j}^{JT}(q_i, q_j; s) = (1 - \delta_{ij}) \frac{(-)^{\varphi}}{2} \begin{bmatrix} J_j & S_j & \Sigma_j & \ell_j \\ J_i & S_i & \Sigma_i & \ell_i \end{bmatrix} C(T; T_i, T_j) \cdot \sum_{L_i L_j} [L_i L_j] (-)^{L_i} (\epsilon_{ij})^{L_i + L_j} \int_{-1}^{+1} du \frac{C_{c_i L_i} \langle g_{c_i L_i} | p_i \rangle (\epsilon_{q_i} + \epsilon_{q_j} + \epsilon_{q_i + q_j}) \langle p_j | g_{c_j L_j} \rangle C_{c_j L_j}}{p_i^{L_i} \epsilon_{q_i + q_j} [s - (\epsilon_{q_i} + \epsilon_{q_j} + \epsilon_{q_i + q_j})^2] p_j^{L_j}} \cdot G(q_i, q_j; u)$$

avec :

$$G(q_i, q_j; u) = \sum_{\Lambda_i \Lambda_j} [L_i - \Lambda_i \quad L_j - \Lambda_j] \rho(q_i, q_j; u)^{\Lambda_i} \rho(q_j, q_i; u)^{L_j - \Lambda_j} q_i^{\Lambda_i + \Lambda_j} q_j^{L_i - \Lambda_i + L_j - \Lambda_j} \cdot \left( \frac{2L_i + 1}{2\Lambda_i} \right)^{1/2} \left( \frac{2L_j + 1}{2\Lambda_j} \right)^{1/2} H(u)$$

$$H(u) = \sum_f [f^2] (-)^f \begin{Bmatrix} \Sigma_j & f & \Sigma_i \\ \ell_i & J & \ell_j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Sigma_i & s_i & S_j & L_j \\ J_i & s_k & J_j & f \\ L_i & S_i & s_j & \Sigma_j \end{Bmatrix} \left| 1 \right. \sum_{L_1} [L_1^2] \begin{pmatrix} \Lambda_i & \Lambda_j & L_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{L_2} [L_2^2]$$

$$\cdot \begin{pmatrix} L_i - \Lambda_i & L_j - \Lambda_j & L_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L_i & L_i - \Lambda_i & \Lambda_i \\ L_j & L_j - \Lambda_j & \Lambda_j \\ f & L_2 & L_1 \end{Bmatrix} \sum_{\mathcal{L}} [\mathcal{L}^2] (-)^{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} L_1 & \ell_i & \mathcal{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_2 & \ell_j & \mathcal{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L_2 & L_1 & f \\ \ell_i & \ell_j & \mathcal{L} \end{Bmatrix} \mathcal{L}^P(u)$$

(II. 3. 12)

$$v_i = \{c_i \ell_i \Sigma_i\} = \{J_i S_i T_i \ell_i \Sigma_i\}$$

$$\varphi = 2s_k + s_i + S_j + J$$

$$p_i = |\vec{p}_i| \quad \vec{p}_i \text{ et } \vec{p}_j \text{ sont définis par (II. 3. 1)}$$

$$p_j = |\vec{p}_j|$$

$$C(T; T_i, T_j) = (-)^{2t_i + t_j + t_k + T_i} [T_i T_j] \begin{Bmatrix} t_i & T & T_i \\ t_j & t_k & T_j \end{Bmatrix}$$

Les facteurs de forme  $\langle g_{cL} | p \rangle$  sont définis par (II. 2. 26) .

Ce résultat ne diffère du cas non relativiste que par l'expression de la partie cinétique et la forme plus complexe des facteurs  $\rho(q, q'; u)$  .

Les équations (II. 3. 11) constituent un système d'équations intégrales couplées, à une dimension, décrivant de façon relativiste le système de trois particules  $i, j, k$  . Leur similitude avec les équations non relativistes de Lovelace permet leur résolution par des méthodes identiques. Avant d'envisager leur utilisation dans le chapitre III, nous allons d'abord voir de quelle manière elles se simplifient pour le système pion-deuton.

#### IV. APPLICATION AU SYSTEME PION-DEUTON

Dans ce paragraphe, nous étudierons d'abord comment la présence de deux particules identiques permet de simplifier le système d'équations. Nous envisagerons ensuite les approximations possibles en tenant compte du fait que, jusqu'à des énergies de l'ordre de 200 MeV, les nucléons peuvent être considérés comme non relativistes.

a) Equations avec deux particules identiques :

Nous considérons maintenant le système de trois particules (N-N- $\pi$ ). Nous allons voir qu'en tenant compte des symétries des propagateurs et du terme de Born, il est possible d'antisymétriser les deux nucléons et de réduire ainsi le nombre d'équations couplées <sup>(3)</sup>.

Soient 1, 2, 3 les indices des particules, l'indice 3 étant affecté au pion. On a alors trois types de processus à envisager :

$$3 + (1\ 2) \longrightarrow 3 + (1\ 2) \quad (\text{II. 4. 1})$$

$$\longrightarrow 1 + (2\ 3) \quad (\text{II. 4. 2})$$

$$\longrightarrow 2 + (1\ 3) \quad (\text{II. 4. 3})$$

Quand 1 et 2 sont dans un état relatif  ${}^3S_1 - {}^3D_1$ , le premier décrit la diffusion élastique pion-deuton. Les deux autres décrivent les réactions  $\pi + d \rightarrow N + (\pi - N)$ . Si le pion et le nucléon sont dans un état relatif  $P_{11}$ , ceci représente l'absorption de pions. En effet, la quasi-particule  $(\pi - N)_{P_{11}}$  a les mêmes nombres quantiques qu'un nucléon.

En notant alors n ou m l'état des paires N-N et  $\alpha$  ou  $\beta$  celui des paires N- $\pi$ , les équations correspondantes s'écrivent, en tenant compte de la nullité du terme de Born  $Z_{3n, 3m}$  :

$$\begin{aligned} X_{3n, 3m} &= \sum_{\alpha} (Z_{3n, 1\alpha} R_{1\alpha} X_{1\alpha, 3m} + Z_{3n, 2\alpha} R_{2\alpha} X_{2\alpha, 3m}) \\ X_{1\alpha, 3m} &= Z_{1\alpha, 3m} + \sum_{\beta} (Z_{1\alpha, 2\beta} R_{2\beta} X_{2\beta, 3m} + \sum_n Z_{1\alpha, 3n} R_{3n} X_{3n, 3m}) \\ X_{2\alpha, 3m} &= Z_{2\alpha, 3m} + \sum_{\beta} (Z_{2\alpha, 1\beta} R_{1\beta} X_{1\beta, 3m} + \sum_n Z_{2\alpha, 3n} R_{3n} X_{3n, 3m}) \end{aligned} \quad (\text{II. 4. 4})$$

L'antisymétrie des fonctions d'onde par rapport à l'échange des deux nucléons donne alors :

$$Z_{1\alpha, 3m} = \langle 1\ (2\ 3) | G_0 | 3\ (1\ 2) \rangle = - \langle 2\ (1\ 3) | G_0 | 3\ (1\ 2) \rangle = -Z_{2\alpha, 3m} \quad (\text{II. 4. 5})$$

et

$$Z_{1\alpha, 2\beta} = \langle 1\ (2\ 3) | G_0 | 2\ (1\ 3) \rangle = \langle 2\ (1\ 3) | G_0 | 1\ (2\ 3) \rangle = Z_{2\alpha, 1\beta} \quad (\text{II. 4. 6})$$

Reportées dans (II. 4. 4), les relations (II. 4. 5) et (II. 4. 6) donnent :

$$\begin{aligned} X_{3n, 3m} &= \sum_{\alpha} Z_{3n, 1\alpha} R_{\alpha} (X_{1\alpha, 3m} - X_{2\alpha, 3m}) \\ X_{1\alpha, 3m} &= Z_{1\alpha, 3m} + \sum_{\beta} Z_{1\alpha, 2\beta} R_{\beta} X_{2\beta, 3m} + \sum_n Z_{1\alpha, 3n} R_{3n} X_{3n, 3m} \\ X_{2\alpha, 3m} &= -Z_{1\alpha, 3m} + \sum_{\beta} Z_{1\alpha, 2\beta} R_{\beta} X_{1\beta, 3m} - \sum_n Z_{1\alpha, 3n} R_{3n} X_{3n, 3m} \end{aligned} \quad (\text{II. 4. 7})$$

En introduisant les amplitudes antisymétriques :

$$\begin{aligned} X_{n, m} &= \frac{1}{2} X_{3n, 3m} \\ X_{\alpha, m} &= \frac{1}{2} [X_{1\alpha, 3m} - X_{2\alpha, 3m}] \end{aligned} \quad (\text{II. 4. 8})$$

ainsi que les termes de Born et propagateurs suivants :

$$\begin{aligned}
 Z_{\alpha\beta} &= -Z_{1\alpha, 2\beta} \\
 Z_{n\alpha} &= Z_{3n, 1\alpha} \\
 Z_{\alpha m} &= Z_{1\alpha, 3m} \\
 R_n &= 2R_{3n} \\
 R_\alpha &= R_{1\alpha} = R_{2\beta}
 \end{aligned}
 \tag{II. 4. 9}$$

le système se réduit à un système de deux équations couplées :

$$\begin{cases}
 X_{nm} = \sum_{\alpha} Z_{n\alpha} R_{\alpha} X_{\alpha m} \\
 X_{\alpha m} = Z_{\alpha m} + \sum_{\beta} Z_{\alpha\beta} R_{\beta} X_{\beta m} + \sum_n Z_{\alpha n} R_n X_{nm}
 \end{cases}
 \tag{II. 4. 10}$$

Sa résolution fournit l'amplitude sur couche  $X_{nm}$  et on en déduit l'amplitude physique pour la diffusion  $\pi + d \rightarrow \pi + d$  :

$$X_{3n, 3m} = 2X_{n, m}
 \tag{II. 4. 11}$$

b) Approximations possibles :

b<sub>1</sub>) Un des buts de cette étude étant l'étude de la diffusion  $\pi + d \rightarrow \pi + d$  à basse énergie d'une part (jusqu'à une soixantaine de MeV), et dans la région de la résonance (3,3) d'autre part, il est utile de voir quelles simplifications peuvent éventuellement être faites. En effet, quand on passe des équations non relativistes aux équations relativistes, il apparaît de nombreuses racines carrées, en particulier dans les termes  $\phi(q, q', u)$  (II. 3. 1). Comme on le verra par la suite, les arguments de ces racines carrées sont des nombres complexes. Ces quantités sont particulièrement longues à calculer et elles apparaissent dans la partie la plus interne du programme, à savoir l'intégrale sur l'angle relatif de  $\vec{q}$  et  $\vec{q}'$  dans le terme de Born. Par exemple, l'introduction d'une seule racine carrée dans un terme de Born (II. 3. 12) double le temps de calcul de ce terme. De plus, leur présence complique la forme des intégrales, ce qui nécessite le choix d'un plus grand nombre de points d'intégration. On aboutit ainsi à des temps de calculs prohibitifs pour une étude extensive.

Dans la zone d'énergie indiquée, l'impulsion dans le centre de masse est de l'ordre de  $1 \text{ fm}^{-1}$ , ce qui fait, sur couche, de l'ordre de  $0.5 \text{ fm}^{-1}$  par nucléon. Pour ceux-ci, on a  $v/c \sim 0.1$ .

Il est raisonnable, dans ces conditions, d'utiliser une expression classique pour l'énergie cinétique des nucléons. L'erreur commise est alors inférieure à 0.3 % (donc 0.002 % sur l'énergie totale).

b<sub>2</sub>) Considérons pour commencer le terme de Born (II. 2. 20) :

$$\langle \vec{q} | Z(s) | \vec{q}' \rangle = \frac{g(\vec{v}_p) (\epsilon_q + \epsilon_{q'} + \epsilon_{q+q'}) g(\vec{v}_{p'})}{\epsilon_{q+q'} [s - (\epsilon_q + \epsilon_{q'} + \epsilon_{q+q'})^2]} \quad (\text{II. 4. 12})$$

Supposons par exemple que la particule échangée soit le pion. On a alors :

$$\begin{aligned} \epsilon_q &= \sqrt{m_N^2 + q^2} \sim m_N + T_q && \text{avec } T_q = q^2/2m_N \\ \epsilon_{q'} &= \sqrt{m_N^2 + q'^2} \sim m_N + T_{q'} \\ \epsilon_{q+q'} &= \sqrt{m_\pi^2 + (\vec{q} + \vec{q}')^2} \end{aligned} \quad (\text{II. 4. 13})$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \langle \vec{q} | Z(s) | \vec{q}' \rangle &= \frac{g(\vec{v}_p) (2m_N + T_q + T_{q'} + \epsilon_{q+q'}) g(\vec{v}_{p'})}{\epsilon_{q+q'} [s - (2m_N + T_q + T_{q'} + \epsilon_{q+q'})^2]} \\ &= \frac{g(\vec{v}_p) (2m_N + T_q + T_{q'} + \epsilon_{q+q'}) g(\vec{v}_{p'})}{\epsilon_{q+q'} (s + 2m_N + T_q + T_{q'} + \epsilon_{q+q'}) (s - 2m_N - T_q - T_{q'} - \epsilon_{q+q'})} \end{aligned} \quad (\text{II. 4. 14})$$

On pose alors :

$$\sqrt{s} = 2m_N + m_\pi + \omega \quad (\text{II. 4. 15})$$

où  $\omega$  est l'énergie cinétique totale du système .

D'où :

$$\langle \vec{q} | Z(s) | \vec{q}' \rangle \sim \frac{g(\vec{v}_p) (2m_N + T_q + T_{q'} + \epsilon_{q+q'}) g(\vec{v}_{p'})}{\epsilon_{q+q'} (4m_N + T_q + T_{q'} + \epsilon_{q+q'} + m_\pi + \omega) (\omega - T_q - T_{q'} - (\epsilon_{q+q'} - m_\pi))} \quad (\text{II. 4. 16})$$

Enfin, la masse du nucléon est grande devant les énergies cinétiques mises en jeu. On a ainsi :

$$4m_N + T_q + T_{q'} + \epsilon_{q+q'} + m_\pi + \omega = (2m_N + T_q + T_{q'} + \epsilon_{q+q'}) \left( 1 + \frac{2m_N + m_\pi + \omega}{2m_N + T_q + T_{q'} + \epsilon_{q+q'}} \right) \quad (\text{II. 4. 17})$$

Et, en évaluant ce terme quand toutes les particules sont sur couche, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} k_N &\sim 0,5 \text{ fm}^{-1} && \longrightarrow && T_q = T_{q'} \sim 0,03 \text{ fm}^{-1} \\ k_\pi &\sim 1 \text{ fm}^{-1} && \longrightarrow && \epsilon_{q+q'} \sim 1,2 \text{ fm}^{-1} \\ \omega &\sim 1 \text{ fm}^{-1} \end{aligned}$$

$$\frac{2m_N + m_\pi + \omega}{2m_N + T_q + T_{q'} + \epsilon_{q+q'}} = \frac{1 + \frac{m_\pi}{2m_N} + \frac{\omega}{2m_N}}{1 + \frac{T_q + T_{q'}}{2m_N} + \frac{\epsilon_{q+q'}}{2m_N}} \sim 1.035$$

Finalement :

$$\langle \vec{q} | Z(s) | \vec{q}' \rangle \sim \frac{1}{2 \epsilon_{q+q'}} \frac{g(\vec{v}_p) g(\vec{v}_{p'})}{(\omega - T_q - T_{q'} - (\epsilon_{q+q'} - \frac{m}{\pi}))} \quad (\text{II. 4. 18})$$

Notons que cette évaluation a été faite dans le cas très défavorable où toutes les particules ont l'impulsion maximale possible sur couche.

Comparons maintenant ce terme au terme classique (II. 3. 7) . Il en diffère par :

- la valeur de l'énergie cinétique du pion qui est remplacée par sa valeur relativiste,
- le facteur  $(2 \epsilon_{q+q'})^{-1}$  sur lequel nous reviendrons par la suite.

b<sub>3</sub>) Passons maintenant au propagateur  $D^{-1}$  de l'équation (II. 3. 5) . Il est relié à l'amplitude à deux corps par (I. 3. 30). Considérons d'abord le cas d'une paire N-N . Il faut résoudre l'équation à deux corps (I. 3. 28) qui s'écrit dans ce cas :

$$X_{pp'}(s) = V_{pp'} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\epsilon^2} V_{pk} \frac{2\epsilon}{4\epsilon^2 - s} X_{kp'}(s) \quad \text{avec } \epsilon = \sqrt{k^2 + m_N^2} \quad (\text{II. 4. 19})$$

De la même façon que pour le terme de Born, le facteur  $2\epsilon / (4\epsilon^2 - s)$  se simplifie à l'approximation classique pour les nucléons, et on obtient :

$$X_{pp'}(\omega) = V_{pp'} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{4\epsilon^2} V_{pk} \frac{1}{\frac{k^2}{m_N} - \omega} X_{kp'}(\omega) \quad (\text{II. 4. 20})$$

$\omega$  étant l'énergie cinétique totale du système, cette équation diffère d'une équation de Lippmann-Schwinger par :

- le signe devant l'intégrale. Ceci est dû à des conventions différentes pour le signe des amplitudes  $X$  (ceci ne se passe pas pour l'équation à trois corps où la convention utilisée dans le cas non relativiste a été adoptée pour écrire l'équation (I. 4. 26) ).

- le facteur  $(4\epsilon^2)^{-1}$  dans l'intégrale. L'équation relativiste (II. 4. 20) se rapporte en effet à des amplitudes invariantes. Or celles-ci sont de la forme :

$$X_{pp'} = (2\pi)^3 \sqrt{2\epsilon_{1,p} 2\epsilon_{2,p}} X'_{pp'} \sqrt{2\epsilon_{1,p'} 2\epsilon_{2,p'}} \quad \text{avec } \epsilon_{1,p} = \sqrt{m_1^2 + p^2} \quad (\text{II. 4. 21})$$

(le facteur  $(2\pi)^3$  provient simplement de la relation différente avec la matrice  $S$  ).

En introduisant aussi le potentiel :

$$V_{pp'} = (2\pi)^3 \sqrt{2\epsilon_{1,p}^2 \epsilon_{2,p}^2} V'_{pp'} \sqrt{2\epsilon_{1,p'}^2 \epsilon_{2,p'}^2} \quad (\text{II. 4. 22})$$

on obtient cette fois l'équation classique :

$$X'_{pp'}(\omega) = V'_{pp'} + \int d^3k V'_{pk} \frac{1}{\frac{k^2}{m_N} - \omega} X'_{kp'}(\omega) \quad (\text{II. 4. 23})$$

Elle permet de déterminer le propagateur  $D^{-1}(s)$ . Il reste à calculer l'argument  $\sigma_{q_\pi}$  de celui-ci. On a (II. 3. 5) :

$$\sigma_{q_\pi} = (\sqrt{s} - \sqrt{q_\pi^2 + m_\pi^2})^2 - q_\pi^2 \quad (\text{II. 4. 24})$$

Comme précédemment, on pose  $\sqrt{s} = \omega + 2m_N + m_\pi$  et on obtient

$$\sigma_{q_\pi} = 4m_N^2 \left[ \left( 1 + \frac{\omega + m_\pi - \epsilon_\pi}{2m_N} \right)^2 - \frac{q^2}{4m_N^2} \right] \quad (\text{II. 4. 25})$$

et, considérant que  $2m_N$  est grand devant  $\omega + m_\pi + \epsilon_\pi$ , on trouve :

$$\sigma_{q_\pi} = 4m_N^2 \left[ 1 + \frac{\omega + m_\pi - \epsilon_\pi}{m_N} - \frac{q^2}{4m_N^2} \right] \quad (\text{II. 4. 26})$$

Enfin, l'argument intervenant classiquement dans le propagateur n'étant pas l'invariant  $\sigma_{q_\pi}$  de la paire, mais son énergie cinétique  $E = \sqrt{\sigma_{q_\pi}} - 2m_N$ , on trouve :

$$E = 2m_N \left( 1 + \frac{\omega + m_\pi - \epsilon_\pi}{m_N} - \frac{q^2}{4m_N^2} \right)^{1/2} - 2m_N \quad (\text{II. 4. 27})$$

soit, en développant au premier ordre la racine carrée :

$$E = \omega + m_\pi - \epsilon_\pi - \frac{q^2}{4m_N} \quad (\text{II. 4. 28})$$

Le propagateur de la paire N-N sera donc :

$$D^{-1} \left( \omega + m_\pi - \epsilon_\pi - \frac{q^2}{4m_N} \right) \quad (\text{II. 4. 29})$$

Considérons maintenant le cas du propagateur  $\pi$ -N. L'équation à deux corps correspondante se simplifie de façon analogue à (II. 4. 23), mais en gardant une expression relativiste pour l'énergie cinétique du pion. On trouve :

$$X'_{pp'}(\omega) = V'_{pp'} + \int d^3k V'_{pk} \frac{1}{\frac{k^2}{2m_N} + \sqrt{k^2 + m_\pi^2} - m_\pi - \omega} X'_{kp'}(\omega) \quad (\text{II. 4. 30})$$

Pour l'argument de  $D^{-1}$ , on a maintenant :

$$\begin{aligned} \sigma_{q_N} &= \left( \sqrt{s} - \sqrt{\vec{q}_N^2 + m_N^2} \right)^2 - q_N^2 \\ &\sim \left( \sqrt{s} - m_N - \frac{q_N^2}{2m_N} \right)^2 - q_N^2 \end{aligned} \quad (\text{II. 4. 31})$$

et, de la même manière que pour le propagateur N-N, on trouve :

$$E = \omega - \frac{q_N^2}{2} \left( \frac{1}{m_N} + \frac{1}{m_N + m_\pi + \omega} \right) \quad (\text{II. 4. 32})$$

Notons que, pour des énergies assez basses, on peut prendre :

$$E' = \omega - \frac{q_N^2}{2\mu_{N, \pi N}} \quad \text{avec } \mu_{N, \pi N} = \left( m_N^{-1} + (m_N + m_\pi)^{-1} \right)^{-1} \quad (\text{II. 4. 33})$$

Vers 50 MeV par exemple, E et E' diffèrent de 2% .

b<sub>4</sub>) Considérons maintenant les coefficients  $\rho(q, q', u)$  (II. 3. 1) . Trois cas se présentent :

- le pion est la particule i :

On a alors :

$$\begin{aligned} \xi_{q_i} &= \left( \epsilon_{q_i}^\pi + \epsilon_{q_k}^N \right)^2 - q_i^2 \quad \text{avec } \vec{q}_k = \vec{q}_i + \vec{q}_j \\ \rho(q_i, q_j, u) &= \frac{\epsilon_{q_j}^N}{\xi_{q_i}^{1/2}} + \frac{\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j}{\xi_{q_i}^{1/2} \left( \epsilon_{q_j}^N + \epsilon_{q_k}^N + \xi_{q_i}^{1/2} \right)} \end{aligned} \quad (\text{II. 4. 34})$$

On l'approxime en prenant :

$$\begin{aligned} \epsilon_q^N &= m_N + \frac{q^2}{2m_N} \\ \epsilon_q^\pi &= \sqrt{m_\pi^2 + q^2} \end{aligned}$$

et en développant tout au premier ordre en  $q^2/m_N$  . On trouve alors :

$$\rho(q_i, q_j, u) \sim \frac{m_N + q_j^2/2m_N}{2m_N + (\sqrt{2}\vec{q}_j + \vec{q}_i/\sqrt{2})^2/2m_N} + \frac{\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j}{[2m_N + (\sqrt{2}\vec{q}_j + \vec{q}_i/\sqrt{2})^2/2m_N][4m_N((2\vec{q}_j + \vec{q}_i)^2 + q_i^2/2)/2m_N]} \quad (\text{II. 4. 35})$$

On évalue ces termes dans les mêmes conditions que précédemment, au voisinage de la résonance. Le premier terme est alors de l'ordre de 0.5, le second de 0.003. Enfin, dans le premier terme, les énergies cinétiques ne contribuent que pour 1.5%. Donc, en prenant :

$$\rho(q_i, q_j, u) \sim \frac{1}{2} \quad (\text{II. 4. 36})$$

on ne commet qu'une erreur de l'ordre de 2 % .

- le pion est la particule j :

Un calcul identique conduit à :

$$\rho(q_i, q_j, u) \sim \frac{e^{\pi} q_j}{m_N + e^{\pi} q_j + \frac{q_j^2 + 2\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j}{2m_N}} + \frac{\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j}{[m_N + e^{\pi} + \frac{q_j^2 + 2\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j}{2m_N}] [3m_N + e^{\pi} + \frac{(\vec{q}_i + \vec{q}_j)^2 - 4\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j}{2m_N}]} \quad (\text{II. 4. 37})$$

Et, en tolérant une erreur de 4% sur ce terme (qui est toutefois plus petit que le précédent d'un facteur 2.5), on trouve :

$$\rho(q_i, q_j, u) \sim \frac{e^{\pi} q_j}{m_N + e^{\pi} q_j} \quad (\text{II. 4. 38})$$

- le pion est la particule k :

Toujours de la même façon, on obtient :

$$\rho(q_i, q_j, u) \sim \frac{m_N + q_j^2 / 2m_N}{m_N + e^{\pi} q_k + \frac{q_j^2 + 2\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j}{2m_N}} + \frac{\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j}{[m_N + e^{\pi} q_k + \frac{q_j^2 + 2\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j}{2m_N}] [2m_N + 2e^{\pi} + \frac{(\vec{q}_i + \vec{q}_j)^2}{2m_N}]} \quad (\text{II. 4. 39})$$

puis, avec une précision de 1 % :

$$\rho(q_i, q_j, u) = \frac{m_N}{m_N + e^{\pi} q_k} \quad (\text{II. 4. 40})$$

Les formules (II. 4. 36), (II. 4. 38), (II. 4. 40) nous fournissent des expressions beaucoup plus simples qu'auparavant, avec une précision satisfaisante.

De plus, pour des calculs à basse énergie, il sera possible d'utiliser à la place de (II. 4. 38) et (II. 4. 40) les expressions classiques correspondantes :

$$\rho(q_i, q_j, u) = \frac{m_\pi}{m_\pi + m_N} \quad \text{et} \quad \rho(q_i, q_j, u) = \frac{m_N}{m_\pi + m_N} \quad (\text{II. 4. 41})$$

b<sub>5</sub>) Il reste enfin à voir ce que devient l'équation à trois corps (II. 3. 11). Elle diffère de l'équation classique par le facteur  $1/2 \epsilon_{qk}$  dans l'intégrale. L'origine de ce terme est la même que dans l'équation à deux corps. En effet, l'équation relativiste s'applique à des amplitudes invariantes. L'équation a la forme :

$$\text{Diagram} = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \quad (\text{II. 4. 42})$$

En extrayant les facteurs cinématiques  $\sqrt{2 \epsilon_j}$  sur les lignes des fonctions de vertex et des amplitudes, il reste, après simplification :

- un facteur  $2 \epsilon_{q+q'}$  dans le terme de Born correspondant à celui  $(2 \epsilon_{q+q'})^{-1}$  restant dans (II. 4. 18),
- un facteur  $2 \epsilon_k$  dans l'équation proprement dite où il se simplifie,
- le facteur  $(2 \pi)^{-3}$  s'élimine comme dans l'équation à deux corps. (II. 4. 43)

Les deux termes  $(2 \epsilon_{q+q'})^{-1}$  dans le terme de Born et  $(2 \epsilon_k)^{-1}$  dans l'équation sont donc liés au caractère invariant des amplitudes. Voyons ce que l'utilisation d'amplitudes classiques peut introduire comme erreur (4). Le problème se pose au niveau de l'amplitude à deux corps que l'on utilise dans le centre de masse à trois corps. Dans le cas des nucléons, le facteur de Lorentz correspondant :

$$\sqrt{\frac{(e_N)_{\pi d}}{(e_N)_{\pi N}}}$$

est certainement négligeable ( $\pi N$  et  $\pi d$  indiquent le référentiel où l'on se place).

Dans le cas du pion, le facteur de Lorentz est :

$$f = \sqrt{\frac{(e_\pi)_{\pi d}}{(e_\pi)_{\pi N}}}$$

Considérons par exemple un pion d'impulsion  $0.5 \text{ fm}^{-1}$ , ce qui donne, pour chaque nucléon, une impulsion de  $-0.25 \text{ fm}^{-1}$ . Dans la voie incidente, on trouve, en effectuant la transformation de Lorentz :

$$f_i \sim 0.985$$

Si le pion diffuse à l'avant, on trouve, dans la voie finale :

$$f_f \sim 0.99$$

ce qui donne :

$$f = f_i f_f \sim 0.975$$

et on a une erreur de l'ordre de 2 à 3 % en négligeant  $f$ .

Si le pion diffuse à l'arrière, on a :

$$f_f \sim 1.015$$

et on obtient :

$$f \sim 0.9997$$

l'erreur étant alors de 0.03 % .

Enfin, on peut introduire le mouvement de Fermi des nucléons. Pour une impulsion de  $1 \text{ fm}^{-1}$  dans le deuton, on trouve :

$$f_i \sim 1.03 \text{ quand le nucléon se dirige vers le pion}$$

$$f_i \sim 0.94 \text{ quand il s'en éloigne.}$$

En moyennant ces deux valeurs, on obtient une valeur

$$f_i \sim 0.98 - 0.99$$

identique au cas statique.

Finalement, négliger le facteur  $f$  n'introduit qu'une erreur de quelques pour-cent. Cette erreur varie assez peu quand l'énergie augmente et dans tous les cas on négligera ce facteur, en omettant les facteurs  $s$  (II. 4. 43) dans les équations.

b<sub>6</sub>) En conclusion, il paraît raisonnable d'utiliser dans la gamme d'énergie considérée, les équations avec des amplitudes non invariantes, c'est-à-dire en y omettant le facteur  $(2 \epsilon_k)^{-1}$ , et celui  $(2 \epsilon_{q+k})^{-1}$  du terme de Born, avec, pour ce dernier, l'expression " semi-relativiste " (II. 4. 18), les coefficients  $\rho$  : (II. 4. 36), (II. 4. 38) et (II. 4. 40), et enfin les propagateurs (II. 4. 29) pour les paires N-N et (II. 4. 32) pour les paires  $\pi$ -N.

Pour terminer, nous donnerons la relation entre l'amplitude  $X$  et la matrice  $S$  sur couche. On a, hors couche, la relation générale (I. 3. 6). Pour obtenir l'amplitude physique, on intègre cette relation sur l'espace de phase avec la densité invariante  $d\Omega_2$ . Soit, en utilisant l'expression (I. 3. 3) de  $d\Omega_2$  et en effectuant les intégrations à l'aide des fonctions  $\delta$  :

$$\hat{d}k S(\vec{q}, \vec{q}' ; s) = (\delta(\hat{k}) - \frac{i k_0}{(4\pi)^2 \sqrt{s}} X(\vec{q}, \vec{q}' ; s)) \hat{d}k \quad (|\vec{q}| = |\vec{q}'| = k_0)$$

(II. 4. 44)

- où
- $k_0$  est le module de l'impulsion sur couche
  - $X(\vec{q}, \vec{q}'; s)$  est l'amplitude prise sur couche
  - $\sqrt{s} = \epsilon_1 + \epsilon_2$  est l'énergie totale du système
  - $\vec{k} = 1/2 (\vec{q} - \vec{q}')$

En introduisant les amplitudes non invariantes  $X'$  définies par (II.4.21), on obtient :

$$S(\vec{q}, \vec{q}'; s) = 1 - 2i\pi k_0 \left( \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right) X'(\vec{q}, \vec{q}'; s) \quad (\text{II.4.45})$$

En considérant le deuton comme non relativiste, on obtient alors :

$$S(\vec{q}, \vec{q}'; s) = 1 - 2i\pi k_0 \mu_{\pi d} X(\vec{q}, \vec{q}'; s) \quad (\text{II.4.46})$$

avec  $\mu_{\pi d}^{-1} = m_d^{-1} + \sqrt{k_0^2 + m_{\pi}^2}^{-1}$ .

Références

- (1) R. Aaron, R. D. Amado et J. B. Young, Phys. Rev. 174 (1968) 2022
- (2) C. Fayard, Thèse de Doctorat d'Etat (Université Lyon-I), LYCEN 75. 75
- (3) B. Charnomordic, Thèse de Doctorat de Troisième Cycle (Université Lyon-I), LYCEN 76. 54 et A. W. Thomas et I. R. Afnan, Phys. Rev. C 10 (1974) 109
- (4) A. W. Thomas, Nucl. Phys. A 258 (1976) 417



### Chapitre III

#### ETUDE DE LA DIFFUSION PION DEUTON

##### I. INTRODUCTION

Les premières utilisations des équations à trois corps pour l'étude du système  $\pi$ -N-N remontent à 1973. Il faut citer en premier lieu les calculs de longueur de diffusion  $\pi$ -d de Afnan-Thomas<sup>(1)</sup> et Peresypkin-Petrov<sup>(2)</sup>.

Les premiers calculs en diffusion  $\pi$ -d sont dus à Myhrer et Koltun<sup>(3)</sup> tandis qu'Afnan et Thomas<sup>(4)</sup> s'attachaient à l'étude de la production ( $N + N \rightarrow \pi + d$ ) et de l'absorption ( $\pi + d \rightarrow N + N$ ) du pion. Tous ces calculs reposent sur l'utilisation d'équations à trois corps non relativistes, sous la forme donnée par Lovelace.

L'étape suivante est, en 1975, la modification des équations non relativistes par Thomas<sup>(5)</sup> en y introduisant une cinématique relativiste pour le pion (RPK). A cet effet, dans le terme de Born et les propagateurs, l'énergie cinétique du pion est remplacée par son expression relativiste. Les équations obtenues sont alors utilisées pour l'étude de la diffusion pion-deuton à basse énergie (à 47,7 MeV). Dans le calcul de chaque amplitude, l'importance des différentes voies à deux corps est testée sur le terme de simple diffusion, les voies n'apportant qu'une contribution négligeable, étant ensuite omises dans le calcul complet. Enfin, parmi les amplitudes  $X_{LL'}^J$  (avec les notations du chapitre II), avec  $L, L' = J, J \pm 1$ , seules celles avec  $L = L' = J$  et  $L = L' = J \pm 1$  sont retenues.

Tous ces calculs visent l'étude du système  $\pi$ -N-N à basse énergie et ont en commun :

- l'utilisation d'équations non relativistes (éventuellement modifiées),
- l'inclusion d'un nombre élevé de voies à deux corps ( ${}^3S_1 + {}^3D_1$  et éventuellement  ${}^1S_0$  pour N-N, et les voies S et P pour  $\pi$ -N).

D'autre part, plusieurs calculs ont été effectués aux environs de la résonance (3,3), essentiellement aux énergies de 142 MeV, 180 MeV et 256 MeV, pour lesquelles des résultats expérimentaux sont disponibles.

- Le premier de ces calculs est celui de Mandelzweig, Garcilazo et Eisenberg<sup>(6)</sup>

utilisant des équations relativistes sous une forme donnée par Alessandrini et Omnès <sup>(7)</sup>, mais en négligeant toutefois les transformations relativistes entre les centres de masse à deux et trois corps. D'autre part, seule la voie  $P_{33}$   $\pi$ -N est retenue et les voies N-N sont négligées dans les états intermédiaires.

- Woloshyn, Moniz et Aaron <sup>(8)</sup> ont effectué un calcul relativiste en y incluant les voies  $^3S_1$  pour N-N et  $P_{33}$  pour  $\pi$ -N, mais sans tenir compte du spin des nucléons.

- Riviera et Garcilazo <sup>(9)</sup> ont ensuite amélioré le calcul de Mandelzweig et al. en y supprimant les simplifications qui avaient été faites et en faisant intervenir la voie  $^1S_0$ .

- Enfin, Rinat et Thomas <sup>(10)</sup> ont effectué des calculs à 142, 180 et 256 MeV en utilisant des équations relativistes sous la forme donnée par Aaron, Amado et Young, avec deux choix possibles pour les moments relatifs ( $p_i$ ) et en traitant complètement le spin et l'isospin des particules.

Ces calculs ont tous en commun :

- l'utilisation d'équations relativistes (éventuellement simplifiées),
- la prise en compte d'une seule voie  $\pi$ -N ( $P_{33}$ ) et d'une ou deux voies N-N ( $^3S_1 + ^3D_1$  et éventuellement  $^1S_0$ ).

Ce dernier point est imposé par le volume prohibitif des calculs qu'implique la résolution des équations relativistes.

Du point de vue expérimental, on dispose :

- d'une part des résultats d'Axen <sup>(11)</sup> à 47,7 MeV en  $\pi^+ d$ ,
- d'autre part, des expériences de haute précision en cours à l'A. L. S. à Saclay <sup>(12)</sup> à 25 et 47,7 MeV pour l'instant et en  $\pi^+ d$  et  $\pi^- d$ ,
- enfin, autour de la résonance (3,3), des résultats à 142, 180 et 256 MeV <sup>(13)</sup>.

Le modèle décrit ici dans les chapitres I et II semble raisonnablement pouvoir s'appliquer jusqu'à une énergie de l'ordre de 140 à 180 MeV. Nous envisagerons donc deux domaines d'étude :

- d'une part une étude systématique entre 25 et 256 MeV en y recherchant si possible une grande précision en vue d'une comparaison avec les résultats expérimentaux et éventuellement une confrontation avec d'autres modèles ;
- d'autre part une étude à 142 MeV visant l'étude d'effets qui, à cause des difficultés de calcul, peut difficilement être entreprise avec des équations relativistes.

Dans une première partie, nous précisons les conditions de calcul. D'abord, nous donnerons les facteurs de forme et les paramétrisations des potentiels à deux corps utilisés. Nous rappellerons ensuite brièvement la méthode de calcul des observables. Puis, nous envisagerons la question délicate du traitement de l'interaction coulombienne. Enfin, nous donnerons un test du programme de calcul utilisé, par comparaison à un calcul de Thomas effectué dans

des conditions similaires à 142 MeV. Dans une deuxième partie, nous décrirons les résultats généraux obtenus et nous essayerons de voir dans quelle mesure ceux-ci peuvent être améliorés. Enfin, nous terminerons par une étude à 142 MeV, énergie à laquelle nous avons étudié un certain nombre d'effets, en particulier :

- l'effet des voies  $\pi$ -N autres que la voie de résonance  $\Delta_{33}$ ,
- l'effet des ondes N-N autres que  ${}^3S_1$  -  ${}^3D_1$ ,
- certains effets relativistes,
- l'effet de la rediffusion des particules dans les états intermédiaires.

Finalement on trouvera en appendice quelques indications sur les méthodes numériques de résolution.

## II. CONDITIONS DE CALCUL

### a) Voies à deux corps et trois corps :

Le nombre de voies à deux corps prises en compte dans le calcul est limité par les possibilités pratiques (taille mémoire, temps de calcul). Dans tous les calculs qui suivent, on se limitera, pour les voies nucléon-nucléon, aux voies S et P, ainsi qu'à la voie  ${}^3D_1$  couplée à la  ${}^3S_1$ , et, pour les voies pion-nucléon, aux voies S et P, ces limitations semblant raisonnables tant que l'on considère des énergies assez basses. Précisons d'abord les voies à trois corps intervenant alors dans le calcul. En notant  $L'$ ,  $S'$ ,  $J'$ ,  $T'$  les nombres quantiques de la paire en interaction,  $\Sigma = s + J'$  le spin total de la voie,  $\ell$  le moment orbital de la particule spectatrice par rapport à la paire et  $J = \ell + \Sigma$  le moment cinétique total du système, on a :

$$|s - J'| < \Sigma < s + J'$$

$$|J - \Sigma| < \ell < J + \Sigma$$

Le moment cinétique total  $J$  et la parité  $\pi$  du système étant conservés, on a, pour une valeur fixée de  $J$ , un ensemble de valeurs possibles de  $\ell$  qui se séparent en deux groupes  $\ell_A$  et  $\ell_B$  de parités  $\pi_A$  et  $\pi_B$  opposées, avec  $\pi = (-)^{\ell + L' + 1}$ .

Pour les paires nucléon-nucléon, on a les voies suivantes, en tenant compte de l'identité des deux nucléons :

$$- {}^3S_1 - {}^3D_1$$

$$- {}^1S_0$$

$$- {}^3P_0; {}^1P_1; {}^3P_1; {}^3P_2$$

et, pour les paires pion-nucléon :

Voies	L	S	J	T	$\Sigma$	$\ell_a$	$\ell_b$	
1S0 - $\pi$	0	0	0	1	0	J		
3S1-3D1 - $\pi$	0,2	1	1	0	1	J	J-1	
							J+1	
3P0 - $\pi$	1	1	0	1	0		J	
1P1 - $\pi$	1	0	1	0	1	J-1	J	
						J+1		
3P1 - $\pi$	1	1	1	1	1	J-1	J	
						J+1		
3P2 - $\pi$	1	1	2	1	2	J-1	J-2	
						J+1	J	
							J+2	
S11 - N	0	1/2	1/2	1/2	0	J		
						1	J	J-1
							J+1	
S31 - N	0	1/2	1/2	3/2	0	J		
						1	J	J-1
							J+1	
P11 - N	1	1/2	1/2	1/2	0		J	
						1	J-1	J
							J+1	
P31 - N	1	1/2	1/2	3/2	0		J	
						1	J-1	J
							J+1	
P13 - N	1	1/2	3/2	1/2	1	J-1	J	
							J+1	
						2	J-1	J-2
							J+1	J
								J+2
P33 - N	1	1/2	3/2	3/2	1	J-1	J	
							J+1	
						2	J-1	J-2
							J+1	J
								J+2

Tableau I : Voies à trois corps pour pion-deuton.

$$\begin{aligned}
 & - S_{11} ; S_{31} \\
 & - P_{11} ; P_{13} ; P_{31} ; P_{33}
 \end{aligned}$$

Les voies à trois corps correspondantes sont données dans le Tableau I .

b) Interactions séparables à deux corps :

Il reste à préciser les paramétrisations utilisées pour les diverses voies à deux corps. Pour une première étude, nous avons choisi des potentiels simples à un terme qui s'écrivent dans le cas général d'ondes couplées :

$$V_{LL'}(p, p') = A C_L g_L(p) C_{L'} g_{L'}(p')$$

$C_L$ ,  $C_{L'}$  sont les paramètres de force,  $A = +1$  ( $-1$ ) si l'onde partielle est répulsive (attractive), et  $g_L(p)$  et  $g_{L'}(p')$  sont les facteurs de forme. Dans le cas non couplé, il suffit de faire  $L = L'$ . Dans la suite, les potentiels sont exprimés en  $\text{MeV} \cdot \text{fm}^3$ .

Ondes nucléon-nucléon. Nous avons utilisé des facteurs de forme de Yamaguchi du type suivant, pour une onde partielle  $L$  :

$$g_L(p) = \frac{p^L}{(p^2 + \beta^2)^{L+1}}$$

Pour les ondes couplées  ${}^3S_1 - {}^3D_1$ , nous avons  $A = -1$  et les paramètres  $C_0$ ,  $C_2$ ,  $\beta_0$ ,  $\beta_2$  sont ajustés de manière à reproduire les paramètres basse énergie triplet  $a_t$  et  $r_t$ , ainsi que les caractéristiques statiques du deuton  $E_D$ ,  $P_D$  et  $Q$ .

Dans la suite, nous avons choisi deux paramétrisations de Phillips<sup>(14)</sup> avec respectivement  $P_D = 4\%$  et  $7\%$ . Les paramètres et les caractéristiques de ces potentiels sont donnés dans le Tableau II.

$C_0$	$C_2$	$\beta_0$	$\beta_2$	$a_t$	$r_t$	$E_D$	$P_D$	$Q$
$(\text{MeV} \cdot \text{fm}^{-1})^{1/2}$		$(\text{fm}^{-1})$		$(\text{fm})$	$(\text{fm})$	$(\text{MeV})$		$(\text{fm}^2)$
11.2555	19.0151	1.3134	1.5283	5.397	1.727	2.224	4%	0.282
8.6324	38.8019	1.2413	1.9477	5.397	1.727	2.224	7%	0.283

Tableau II : Caractéristiques des paramétrisations  ${}^3S_1$ - ${}^3D_1$  de Phillips.

Dans le cas de l'onde  $^1S_0$ , on a  $\Lambda = -1$  et les paramètres  $C$  et  $\beta$  sont fixés par le choix des paramètres basse énergie singlet  $a_s$  et  $r_s$ . Nous avons choisi  $a_s = -20.31$  fm et  $r_s = 2.7$  fm, ce qui donne  $C = 8.8702$  MeV. fm $^{-1}$  et  $\beta = 1.1733$  fm $^{-1}$ .

Pour les ondes  $P$ , les paramètres  $C$  et  $\beta$  sont ajustés de manière à reproduire les déphasages. En fait, comme il n'y a que deux paramètres ajustables pour les potentiels à un terme, seuls les déphasages à basse énergie sont reproduits correctement. Nous donnons dans le Tableau II' les paramètres que nous avons utilisés.

Voie	$C$ (MeV. fm $^{-1}$ )	$\beta$ (fm $^{-1}$ )
1P1 ( $\Lambda = +1$ )	51.629	1.74
3P0 ( $\Lambda = -1$ )	11.413	1.13
3P1 ( $\Lambda = +1$ )	56.416	1.795
3P2 ( $\Lambda = -1$ )	101.484	2.541

Tableau II' : Paramètres des ondes  $P$  (N-N).

Ondes pion-nucléon. Nous avons utilisé les mêmes paramétrisations que Thomas (5) pour les voies  $S$  et  $P$  ( $\pi N$ ). Ce sont des interactions à un terme avec des facteurs de forme qui sont des sommes de deux termes :

$$\begin{aligned}
 \text{- pour les ondes } S : \quad g(p) &= \frac{S_1}{p^2 + \alpha_1^2} + \frac{S_2}{p^2 + \alpha_2^2} \\
 \text{- pour les ondes } P : \quad g(p) &= \frac{S_1 p}{(p^2 + \alpha_1^2)^2} + \frac{S_2 p^3}{(p^2 + \alpha_2^2)^2}
 \end{aligned}$$

Les paramètres sont ajustés sur les déphasages et les longueurs (ou volumes) de diffusion  $\pi N$ . Les valeurs des paramètres pour les ondes  $S$  et  $P$  sont résumées dans le Tableau III, ainsi que les longueurs (ou volumes) de diffusion correspondantes. Avec nos notations, on doit prendre  $C_L^2 = \hbar c = 197.3286$  MeV. fm pour toutes les paramétrisations de manière à avoir les potentiels en MeV. fm $^3$ .

Les déphasages obtenus sont comparés aux déphasages expérimentaux sur la figure 1

Les difficultés pour l'obtention de ces valeurs, liées à certaines ambiguïtés sur les résultats expérimentaux, ont été discutées par Thomas dans la référence (5).

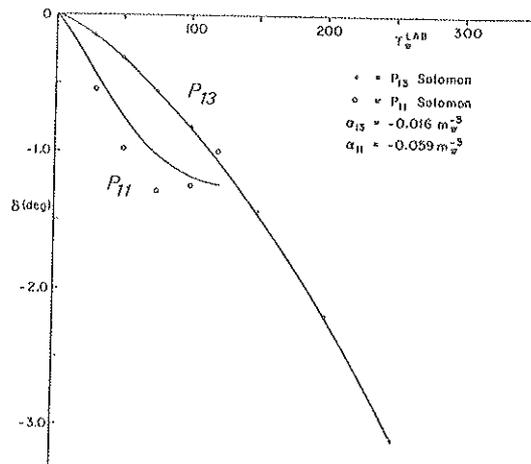
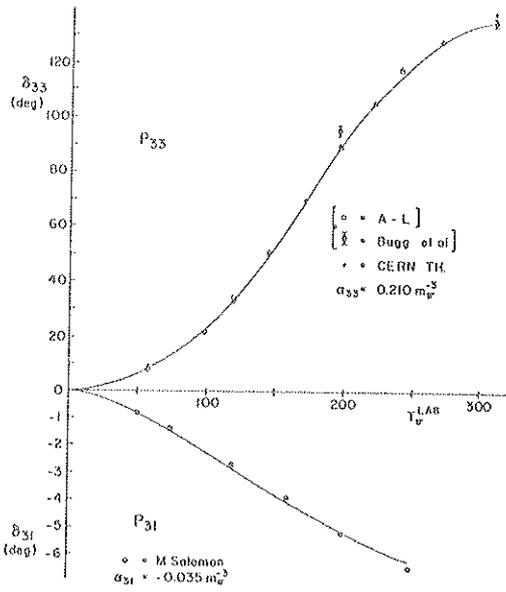
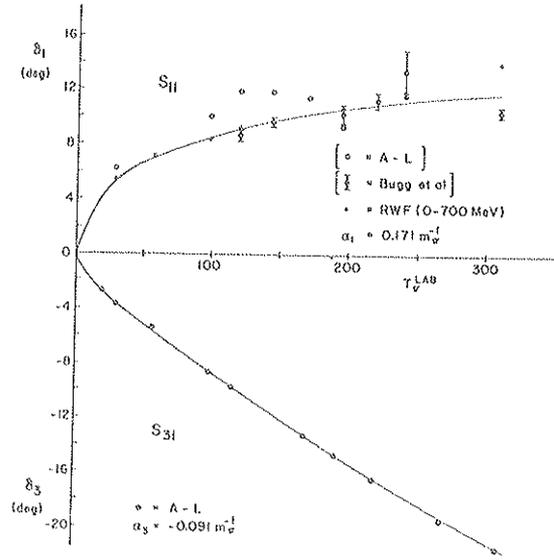


Fig. 1 : Déphasages pion-nucléon (extraits de la Réf. 5).

Voies	$S_1$	$\alpha_1$ (fm <sup>-1</sup> )	$S_2$	$\alpha_2$ (fm <sup>-1</sup> )	Longueur (ou volume) de diffusion
$S_{11}$ ( $\Lambda = -1$ )	1.7826	3.188	0.0894	0.8225	0.171 m <sub><math>\pi</math></sub> <sup>-1</sup>
$S_{31}$ ( $\Lambda = +1$ )	6.0786	3.382	-1.1661	1.107	-0.091 m <sub><math>\pi</math></sub> <sup>-1</sup>
$P_{33}$ ( $\Lambda = -1$ )	0.5403	1.475	1.0583	3.400	0.210 m <sub><math>\pi</math></sub> <sup>-3</sup>
$P_{31}$ ( $\Lambda = +1$ )	4.290	2.059			-0.035 m <sub><math>\pi</math></sub> <sup>-3</sup>
$P_{13}$ ( $\Lambda = +1$ )	1.557	1.244	3.659	1.945	-0.016 m <sub><math>\pi</math></sub> <sup>-3</sup>
$P_{11}$ ( $\Lambda = +1$ )	0.3959	1.074			-0.059 m <sub><math>\pi</math></sub> <sup>-3</sup>

Tableau III : Paramètres et longueurs de diffusion des potentiels pion-nucléon utilisés. Pour les ondes S,  $S_1$  et  $S_2$  sont en fm<sup>-1</sup>. Pour les ondes P,  $S_1$  est en fm<sup>-2</sup> et  $S_2$  est sans dimension.

c) Calcul des observables :

La résolution des équations à trois corps fournit les amplitudes de diffusion  $X_{\ell \ell'}^J(q, q')$  ( $\nu$  et  $\nu'$  étant l'ensemble des nombres quantiques du système) invariante par rotation. Pour le calcul des observables, il faut d'abord reconstruire la matrice de diffusion  $M(\theta) = X(\vec{q}, \vec{q}')$ . On l'obtient par (15) :

$$\langle \Sigma \nu | M(\theta) | \Sigma' \nu' \rangle = \frac{1}{4\pi} (-)^{\frac{\nu' - \nu + |\nu' - \nu|}{2}} \sum_{J \ell \ell'} [ \ell \ell' J^2 ] (-)^{\ell + \Sigma + J} \left[ \frac{(\ell - |\nu' - \nu|)!}{(\ell + |\nu' - \nu|)!} \right]^{1/2} P_{\ell}^{|\nu' - \nu|}(\cos \theta) \begin{pmatrix} \Sigma & \ell & J \\ -\nu & \nu - \nu' & \nu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma' & \ell' & J \\ \nu' & 0 & -\nu \end{pmatrix} X_{\ell \ell'}^J(q, q')$$

$\Sigma$  est le spin total de la voie, soit ici, pour le système  $\pi$ -d,  $\Sigma = 1$ , et  $\nu$  sa projection sur l'axe Oz, choisi ici suivant la direction de la particule incidente. La matrice  $M(\theta)$  est donc une matrice (3 x 3) correspondant à  $\nu, \nu' = 0; \pm 1$ .

La section efficace différentielle est alors simplement obtenue par la technique des traces, soit :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{10}{3} (4\pi^2 \mu_{\pi d}(k))^2 \text{Tr} \{ MM^+ \}$$

où  $\mu_{\pi d}(k)$  est la masse réduite relativiste ( $\pi d$ ) définie en (II, 4, 46).

Dans la pratique, la sommation sur  $J, l, l'$  dans le calcul de  $M(\theta)$  est tronquée quand les amplitudes correspondantes n'apportent plus qu'une contribution négligeable.

On peut aussi calculer les observables de polarisations à partir de la matrice  $M(\theta)$  et des tenseurs sphériques habituels  $\nu_{kq}$  associés au deuton à l'aide des formules suivantes :

- Pouvoirs d'analyse  $T_{kq}$  dans la diffusion  $\pi + d \rightarrow \pi + d$  :

$$T_{kq} = \frac{\text{Tr} \left\{ M \nu_{kq} M^\dagger \right\}}{\text{Tr} \left\{ M M^\dagger \right\}} \quad (\text{Oz suivant } \vec{k} \text{ initial})$$

- Polarisation  $t_{kq}$  dans la diffusion  $\pi + d \rightarrow \pi + d$  :

$$t_{kq} = \frac{\text{Tr} \left\{ M M^\dagger \nu_{kq} \right\}}{\text{Tr} \left\{ M M^\dagger \right\}} \quad (\text{Oz suivant } \vec{k} \text{ final})$$

À notre connaissance, il n'existe actuellement aucun résultat expérimental concernant de telles observables.

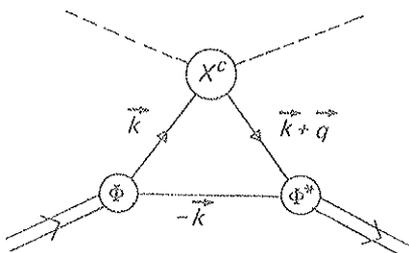
d) Corrections coulombiennes :

Dans le domaine des basses énergies (vers 50 MeV), l'interaction coulombienne joue un rôle très important. La structure de la distribution angulaire à l'avant est en particulier due à l'interférence entre les interactions forte et coulombienne. Il est donc essentiel d'en tenir compte pour une comparaison avec les résultats expérimentaux. Le potentiel coulombien n'étant bien sûr pas séparable et ne pouvant pas non plus être approximé par un potentiel séparable, son introduction <sup>(16)</sup> dans les équations à trois corps pose des problèmes difficilement surmontables. Nous nous limiterons dans ce travail à l'introduction des effets coulombiens au premier ordre. À cet effet, on approxime l'amplitude de diffusion complète  $X_{\pi d}$  par la somme de l'amplitude de diffusion  $X_{\pi d}^S$  provenant des équations à trois corps, donc sans potentiel coulombien, et de l'amplitude coulombienne pure  $X_{\pi d}^C$ .

$$X_{\pi d} = X_{\pi d}^S + X_{\pi d}^C$$

Pour calculer  $X^C$ , on considère l'amplitude de simple diffusion

$$X_{\pi d}^C = \int dk \phi^*(\vec{k} + \vec{q}/2) X_{\pi p}^C \phi(\vec{k})$$



$\phi$  étant la fonction d'onde du deuton et  $X_{\pi p}^C$  l'amplitude de diffusion coulombienne pion-proton.

On l'exprime en utilisant l'approximation du facteur de forme

$$X_{\pi d}^c \sim X_{\pi p}^c \int d\vec{k} \phi^*(\vec{k} + \vec{q}/2) \phi(\vec{k})$$

En ne considérant que la composante  ${}^3S_1$  du deuton, l'intégrale se réduit au facteur de forme  $F(1/2 q)$  du deuton. Enfin, pour l'amplitude coulombienne pion-proton, on se limite au premier ordre par rapport à la constante de structure fine <sup>(17)</sup>

$$f_{\pi p}^c = -2\alpha \frac{\omega_k E_k + k^2}{\omega_k + E_k} \cdot \frac{1}{q^2} \quad \begin{aligned} \omega_k &= \sqrt{k^2 + m_\pi^2} \\ E_k &= \sqrt{k^2 + m_N^2} \end{aligned}$$

ceci en négligeant le changement de référentiel ( $\pi$ -p  $\rightarrow$   $\pi$ -d) pour l'impulsion  $k$ . Ce qui donne pour l'amplitude  $X_{\pi p}^c$  :

$$X_{\pi p}^c = -\frac{1}{\pi} \frac{\omega_k + E_k}{\omega_k E_k} f_{\pi p}^c$$

En négligeant le facteur de Lorentz transformant  $X_{\pi p}^c$  du centre de masse de  $\pi$ -p à celui de  $\pi$ -d, on trouve finalement :

$$X_{\pi d}^c = 2\alpha \cdot \frac{(\omega_k E_k + k^2)}{\omega_k E_k} \cdot \frac{1}{q^2} \cdot F(1/2 q) \cdot \frac{1 + \omega_k/E_k}{1 + \omega_k/E_{dk}} \quad ,$$

$$E_{dk} = \sqrt{k^2 + m_d^2}$$

e) Test du calcul à 142 MeV :

Les calculs envisagés sont particulièrement lourds. Aucun des calculs existants n'a jusqu'à présent été fait par deux groupes dans des conditions équivalentes. Notre premier soin a donc été de tester notre programme en le comparant à un calcul existant. Nous avons choisi le calcul de Thomas à 142 MeV <sup>(18)</sup> intitulé " RPK ". Nous nous sommes placés dans des conditions identiques, à savoir :

- voies N-N :  ${}^3S_1$  -  ${}^3D_1$  et  $\pi$ -N :  $P_{33}$ , avec les paramétrisations indiquées précédemment,
- calcul effectué en ne tenant pas compte du couplage  $L \neq L'$  provenant des deux voies  ${}^3S_1$  possibles ( $L, L' = J \pm 1$ ) dans le calcul trois corps,
- calcul des ondes partielles jusqu'à  $L = L' = 5$  incluses,
- pas de corrections coulombiennes.

Par contre, la conception des programmes n'est pas la même, entre autres, Thomas résout le système directement (par une méthode de Gauss), tandis que nous utilisons la méthode des approximants de Padé.

Dans ces conditions, les amplitudes  $X_{LL}^J$  obtenues diffèrent d'environ 0.5 % (Tableau IV), ce qui est de l'ordre de grandeur de la précision numérique escomptée.

J	$\ell$	$\ell'$	Thomas	Nous
0	1	1	0.0586 + i 0.0372	0.0584 + i 0.0371
1	1	1	0.1427 + i 0.1179	0.1423 + i 0.1172
1	0	0	0.1358 + i 0.1262	0.1350 + i 0.1263
1	0	2	0	0.0179 + i 0.0184
1	2	2	0.0205 + i 0.0172	0.0204 + i 0.0173
2	2	2	0.0789 + i 0.0625	0.0787 + i 0.0622
2	1	1	0.3037 + i 0.4015	0.3001 + i 0.4080
2	1	3	0	0.0066 + i 0.0088
2	3	3	0.0079 + i 0.0067	0.0078 + i 0.0067
3	3	3	0.0234 + i 0.0188	0.0233 + i 0.0187
3	2	2	0.1107 + i 0.0901	0.1106 + i 0.0899
3	2	4	0	0.0034 + i 0.0033
3	4	4	0.0027 + i 0.0023	0.0027 + i 0.0024

Tableau IV :

Comparaison de quelques amplitudes à 142 MeV avec celles de Thomas dans les mêmes conditions de calcul.

Nous avons ensuite envisagé l'étude de l'effet des termes de couplage  $L \neq L'$ . Dans les conditions précédentes, l'inclusion de ce couplage dans la résolution du système ne change pratiquement pas les termes diagonaux  $L = L'$ ; par contre, les termes non diagonaux sont du même ordre de grandeur que le terme diagonal  $L = L' = J+1$  (Tableau IV). L'inclusion de ces termes dans le calcul de la section efficace remonte celle-ci à l'arrière d'environ 7%, ce qui n'est pas négligeable. Ce couplage sera donc inclus dans tous les calculs ultérieurs. Enfin, nous avons étudié la convergence du développement en ondes partielles et constaté que la section efficace se stabilise en prenant  $L_{\max} = 7$ .

### III. RESULTATS GENERAUX

Dans le chapitre II, nous avons obtenu deux types d'équations à partir des équations relativistes, selon le type d'approximations utilisées,

- d'une part, des équations que nous appellerons RPK2, qui se déduisent des équations relativistes en y omettant les termes de l'ordre de  $K^2/m_N$ ;

- d'autre part, une simplification de ces équations pour des énergies assez basses, différent de RPK2 par le choix (II.4.41) au lieu de (II.4.36), (II.4.38) et (II.4.40) pour les coefficients  $\rho$  et  $\rho'$  et par la valeur (II.4.33) au lieu de (II.4.32) de l'énergie à laquelle est calculé le propagateur pion-nucléon. Nous appellerons ces équations RPK. Remarquons

qu'elles peuvent se déduire des équations classiques en y remplaçant partout où elle apparaît, l'énergie cinétique du pion par son expression relativiste.

Les dernières équations semblent bien convenir à une étude à basse énergie de la diffusion pion-deuton. Bien qu'il n'y ait pour le moment que peu de résultats expérimentaux à basse énergie (ceux d'Axen à 47.7 MeV), des expériences très précises sont en cours à l'A. L. S. à Saclay. Une confrontation avec de tels résultats permettra de comparer les calculs de type RPK avec ceux utilisant d'autres méthodes telles que l'approximation de simple ou double diffusion, ou la méthode de diffusion multiple.

Nous présenterons d'abord un calcul à 47.7 MeV. Nous discuterons à cette énergie l'effet du pourcentage d'état D du deuton ( $P_D$ ) et pourrons effectuer une comparaison avec les résultats expérimentaux d'Axen. A cette même énergie, nous donnerons les résultats obtenus en ajoutant les voies  $^1S_0$  et P nucléon-nucléon. Tout ceci nous fixera les conditions de calcul pour une étude systématique des distributions angulaires dans une zone d'énergie de 25 à 120 MeV.

Quoique les équations RPK conviennent certainement moins bien à cette région, nous avons ensuite effectué trois calculs aux énergies de 142, 180 et 256 MeV encadrant la région de la résonance. Ce choix est guidé par l'existence d'expériences à ces énergies.

Nous présenterons finalement dans tout le domaine considéré, une analyse en déphasages des résultats, puis les calculs des sections efficaces totales élastiques, totales de réaction et totales. Enfin, nous envisagerons les améliorations possibles de tous ces calculs.

#### a) Calcul à 47.7 MeV :

Pour une étude systématique, nous nous sommes placés dans les conditions de calcul suivantes :

- Nous utilisons les équations " RPK " qui, jusqu'à une énergie de 120 MeV, semblent très suffisantes.
- Nous tenons compte dans le calcul du couplage entre les voies  $\pi d$  avec  $\ell = J \pm 1$ , déjà discuté lors de la comparaison avec les résultats de Thomas.
- Nous incluons :
  - . la voie  $^3S_1 - ^3D_1$  nucléon-nucléon, avec  $P_D = 4$  ou  $7\%$ ,
  - . les voies S et P pion-nucléon.
- Pour le calcul de la section efficace, le développement en ondes partielles est tronqué à  $\ell = 5$ .
- Enfin, pour chaque énergie, on effectue le calcul d'une part sans correction coulombienne, d'autre part avec une correction coulombienne pour une charge positive, puis négative.

D'autre part, pour faciliter une comparaison avec les résultats expérimentaux, les courbes sont données en fonction des angles dans le laboratoire en utilisant :

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} = J \left( \frac{\delta \Omega}{\delta \Omega} \frac{C.M.}{\text{lab}} \right) \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{C.M.}$$

où le jacobien  $J(\delta \Omega_{C.M.} / \delta \Omega_{lab})$  est donné pour exemple dans la référence (19).

Notons pour terminer que ces calculs diffèrent de ceux de Thomas (5) essentiellement par la prise en compte de toutes les voies S et P pion-nucléon, et du couplage entre les voies  $k = J^{\pm} 1$ .

Nous avons d'abord dans ces conditions effectué deux calculs pour  $P_D = 4$  et  $7\%$ . Les résultats pour  $\pi^+$  d sont portés sur la figure 2.

La première constatation est le désaccord, déjà noté par Thomas, entre l'effet observé et celui obtenu par d'autres auteurs, en particulier Landau et McMillan (20). Dans nos calculs, l'augmentation de  $P_D$  se traduit par une diminution à tous les angles de la section efficace. Dans les calculs de diffusion simple et double de Landau et McMillan, cela reste vrai à l'avant, mais les courbes se croisent vers  $\theta_{lab} = 100^\circ$  et, à l'arrière, l'augmentation de  $P_D$  se traduit par une très nette augmentation de la section efficace. Bien que ces différences soient mal comprises, on peut penser que la forte sensibilité de la section efficace aux angles arrière est reliée au comportement hors couche des amplitudes pion-nucléon.

Si on compare maintenant nos résultats avec les résultats expérimentaux d'Axen, on constate en général un bon accord. Sans que cela permette de trancher entre les deux courbes, celle avec  $P_D = 4\%$  semble plus proche de l'expérience.

La seule région mal reproduite est celle du pic vers  $40^\circ$ . Sa structure étant due à l'interférence entre la force coulombienne attractive et la force nucléaire répulsive, notre traitement simplifié de l'interaction coulombienne est certainement insuffisant.

Notons enfin que l'incertitude sur les potentiels pion-nucléon utilisés peut aussi être une cause non négligeable d'erreur. Cependant l'erreur est probablement plus faible que ce que donnent les estimations à partir des calculs en "impulse". En effet, les amplitudes  $\pi N$  sont moyennées dans les intégrales, sur le domaine  $[-\infty, E_{C.M.}]$ . A cause du comportement des facteurs de forme, seule la partie  $[0, E_{C.M.}]$  intervient fortement et cette région est en général bien décrite par les potentiels utilisés.

Nous avons de plus testé l'influence des voies  $^1S_0$  et P nucléon-nucléon. Elles ont été incluses dans les mêmes conditions que pour les calculs précédents, avec  $P_D = 4\%$ . L'effet obtenu est assez faible et consiste en une légère augmentation de la section efficace à tous les angles. L'augmentation atteint son maximum vers  $90^\circ$ , où elle vaut environ  $2\%$ .

#### b) Distributions angulaires de 25 à 120 MeV :

Les résultats à 47.7 MeV étant satisfaisants, nous avons décidé de faire une série de calculs, pour 7 énergies échelonnées entre 25 et 120 MeV.

Les conditions de calculs restent les mêmes que dans a) et d'après la comparaison avec les résultats d'Axen, nous avons choisi de calculer avec  $P_D = 4\%$ . Vu le peu d'effet observé à 47.7 MeV, les voies  $^1S_0$  et P nucléon-nucléon ne sont pas prises en compte. Les résultats obtenus sont présentés sur les fig. 3, 4. En l'absence provisoire de résultats expérimentaux, ces courbes n'appellent pas de commentaires particuliers. Notons simplement l'affai-

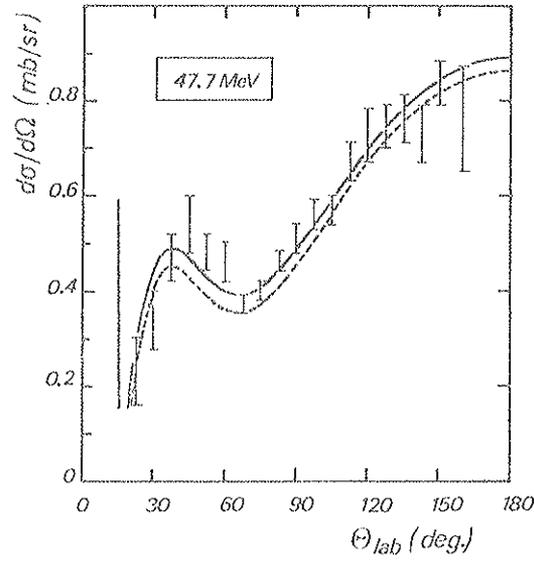


Fig. 2 : Section efficace différentielle à 47.7 MeV  
pour  $P_D = 4\%$  (—) et  $P_D = 7\%$  (---).  
Points expérimentaux : Réf. 11.

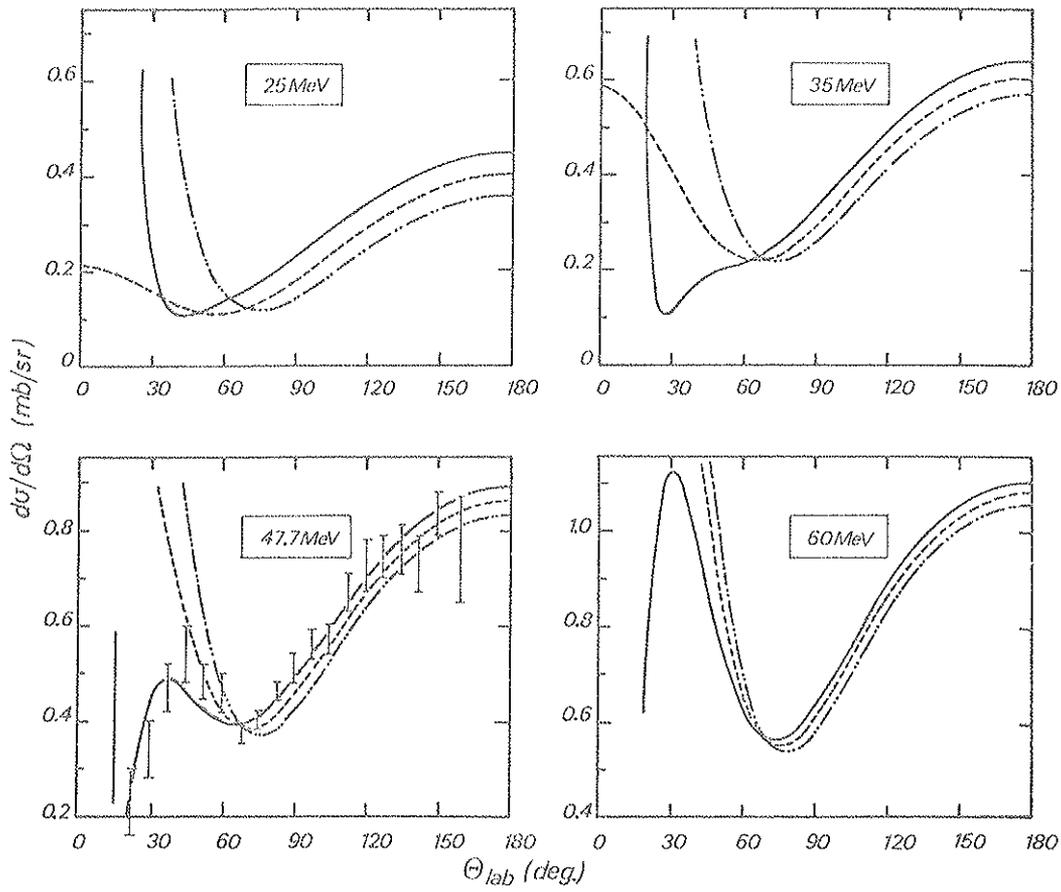


Fig. 3 : Sections efficaces différentielles  $\pi^+d$  (—),  $\pi^-d$  (---),  
et sans correction coulombienne (-.-).

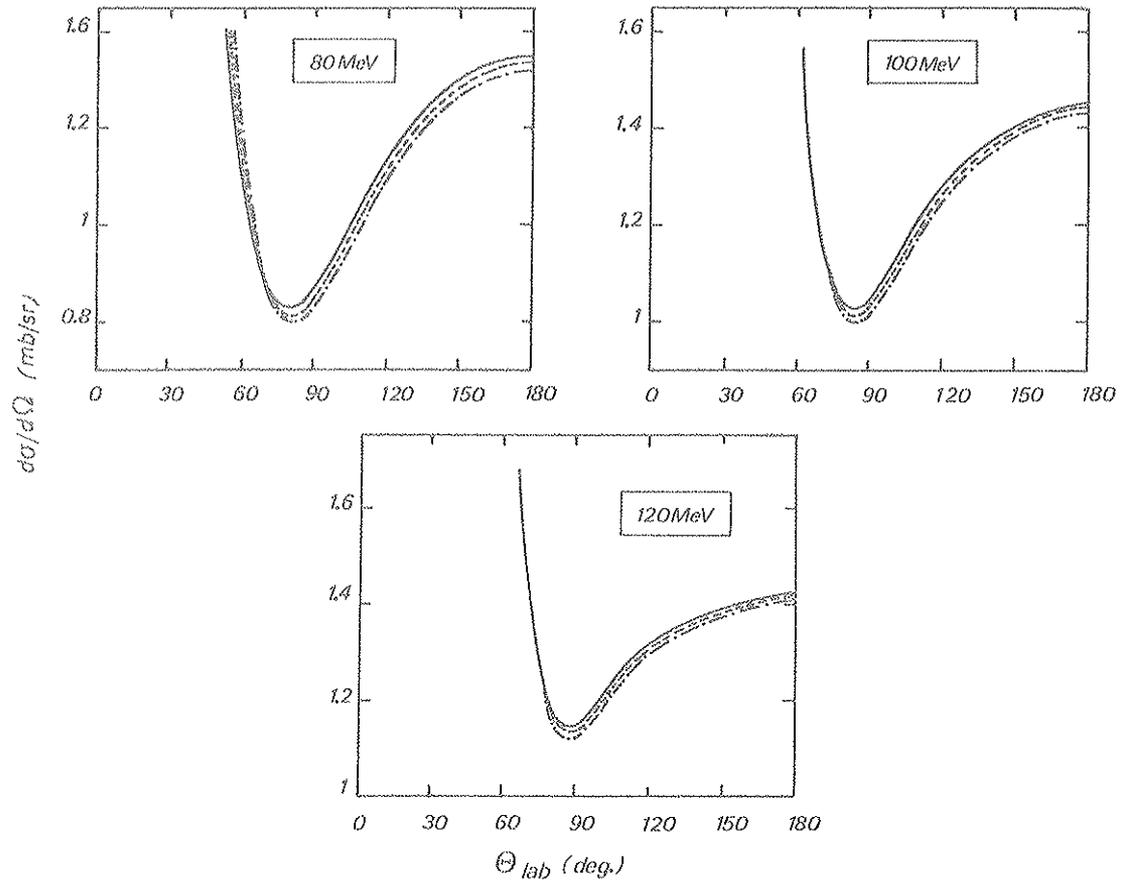


Fig. 4 : Sections efficaces différentielles  $\pi^+$  d (—),  $\pi^-$  d (---), et sans correction coulombienne (-.-).

blissement des effets coulombiens quand l'énergie augmente, ce qui justifiera la suppression des corrections coulombiennes pour les calculs à plus haute énergie.

c) Calculs au voisinage de la résonance :

Il existe des résultats expérimentaux pour les distributions angulaires  $\pi^+d$  à 142 MeV<sup>(13)</sup>, 180 MeV<sup>(13')</sup> et 256 MeV<sup>(13'')</sup>. Dans cette zone d'énergie, les équations relativistes sont certainement mieux adaptées que les équations semi-relativistes, et ceci d'autant plus que l'énergie augmente. Toutefois, les calculs relativistes qui ont été effectués à ces énergies<sup>(6, 8, 9, 10)</sup> ne tiennent compte que de l'onde  $P_{33}$   $\pi N$  et de l'onde  $3S1 - 3D1$   $NN$ . Dans le paragraphe IV, nous ferons dans le cadre semi-relativiste une étude extensive à 142 MeV qui montrera en particulier que les ondes partielles  $\pi N$  autres que  $P_{33}$  ne peuvent pas être négligées. Ces considérations nous ont donc incité à effectuer les calculs semi-relativistes à 142, 180 et 256 MeV. Comme dans a) et b), nous utilisons les équations RPK en tenant compte du couplage  $\ell = J - 1$  et en incluant les voies à deux corps suivantes :

- ${}^3S_1 - {}^3D_1$  nucléon-nucléon avec  $P_D = 4\%$ ,
- toutes les ondes S et P pion-nucléon.

Cependant, le développement en ondes partielles converge moins vite et nous avons, après quelques tests, décidé de le tronquer à  $\ell = 7$ . Enfin, conformément aux conclusions du paragraphe b), nous n'avons pas effectué de corrections coulombiennes. Les résultats obtenus sont portés, avec les points expérimentaux correspondants, sur la figure 5.

Les résultats à 142 MeV seront analysés en détail dans le paragraphe IV.

A 180 MeV, l'accord avec l'expérience est satisfaisant bien que les effets relativistes commencent à intervenir plus fortement.

Par contre, à 256 MeV, non seulement le calcul donne une valeur trop forte pour la section efficace, mais il rend mal compte du large creux observé autour de  $\theta_{CM} = 110^\circ$ . Cette structure a d'ailleurs été confirmée par des expériences plus récentes<sup>(21)</sup>. Notons enfin que les calculs menés avec des équations relativistes ne rendent pas compte non plus de cette structure<sup>(10)</sup>.

d) Analyse en déphasages :

A partir des amplitudes obtenues dans le calcul à trois corps, nous avons effectué une analyse en déphasages des voies  $S_1$  à  $H_4$ , entre 25 et 256 MeV.

Nos amplitudes sont reliées à la matrice S par la relation (II.4.46).

Dans le cas d'amplitudes non couplées, on a simplement :

$$S_{J,J}^J = e^{2i\delta_J^J} = \eta_J^J e^{2i\text{Re}\delta_J^J}$$

d'où :

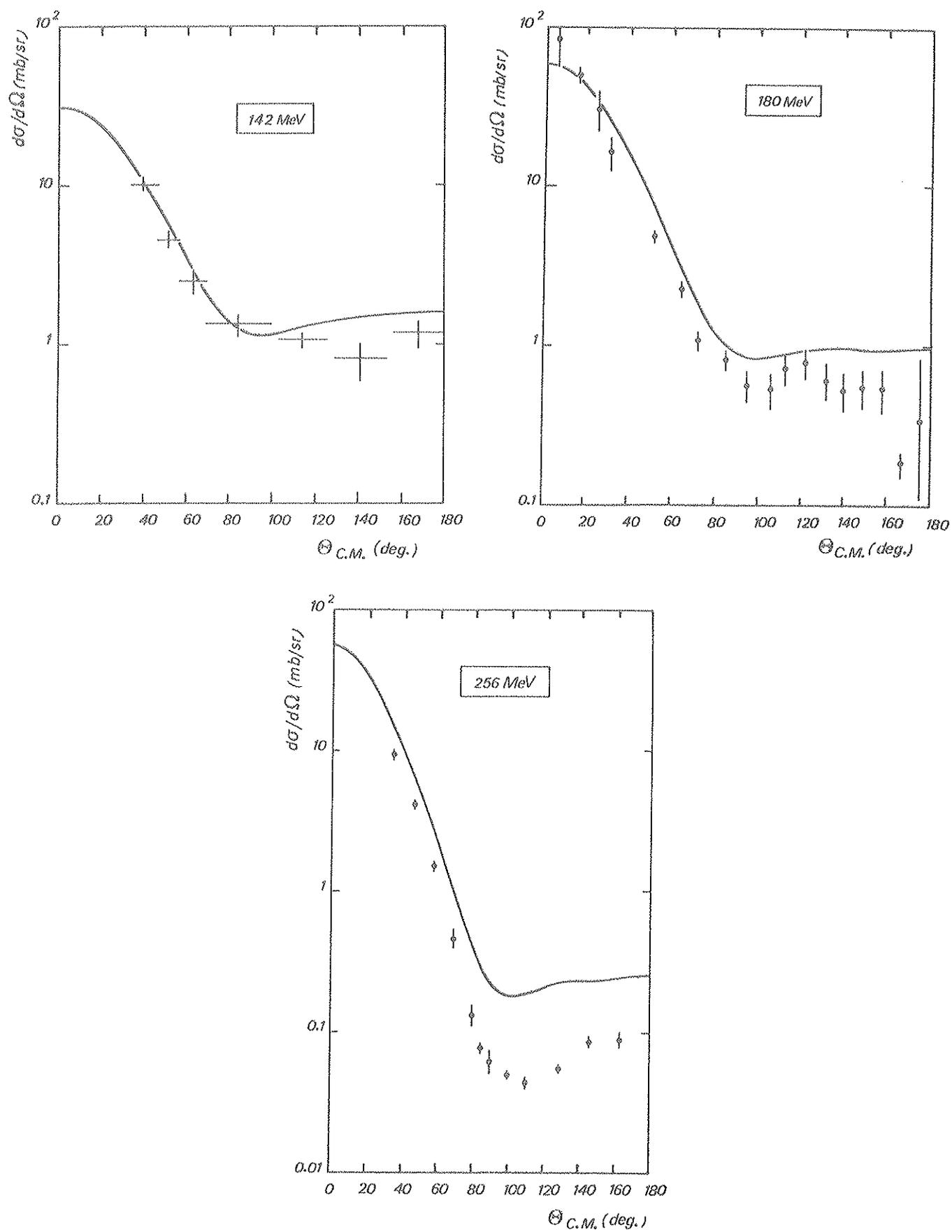


Fig. 5 : Sections efficaces différentielles dans la zone de la résonance (3. 3).  
Points expérimentaux : Réf. 13, 13' et 13''.

$$\operatorname{Re} \delta_J^J = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( - \frac{2\pi \mu_{\pi d} k \operatorname{Re} T_J^J}{1 + 2\pi \mu_{\pi d} k \operatorname{Im} T_J^J} \right)$$

$$\eta_J^J = \frac{1 + 2\pi \mu_{\pi d} k \operatorname{Im} T_J^J}{\cos(2 \operatorname{Re} \delta_J^J)}$$

Dans le cas d'amplitudes couplées, on utilise la paramétrisation de Blatt-Biedenharn. Pour ceci, on diagonalise la matrice  $S$  par une transformation unitaire :

$$S = \begin{pmatrix} S_{J-1, J-1}^J & S_{J-1, J+1}^J \\ S_{J+1, J-1}^J & S_{J+1, J+1}^J \end{pmatrix} = u^J \begin{pmatrix} e^{2i \delta_{J-1}^J} & 0 \\ 0 & e^{2i \delta_{J+1}^J} \end{pmatrix} u^{J+}$$

avec

$$u^J = \begin{pmatrix} \cos \epsilon & -\sin \epsilon \\ \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix}$$

où  $\delta_{J-1}^J$  et  $\delta_{J+1}^J$  sont les déphasages propres et  $\epsilon$  le coefficient de mixage.

Par inversion de ces relations, on obtient :

$$\epsilon = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{2 S_{J-1, J+1}^J}{S_{J-1, J-1}^J - S_{J+1, J+1}^J} \right)$$

$$e^{2i \delta_{J-1}^J} = \frac{1}{2} \left[ S_{J-1, J-1}^J + S_{J+1, J+1}^J \right] + \frac{S_{J-1, J+1}^J}{\sin 2\epsilon}$$

$$e^{2i \delta_{J+1}^J} = \frac{1}{2} \left[ S_{J-1, J-1}^J + S_{J+1, J+1}^J \right] - \frac{S_{J-1, J+1}^J}{\sin 2\epsilon}$$

Seules les voies  $S_1 - D_1$  ( $J^\pi = 1^-$ ) et  $P_2 - F_2$  ( $J^\pi = 2^+$ ) ont été analysées avec leur couplage, les autres n'étant que faiblement couplées ou non couplées.

Les résultats obtenus dans les mêmes conditions que a) sont présentés dans le Tableau V.

#### e) Sections efficaces totales :

Nous avons enfin calculé, entre 25 et 256 MeV, les sections efficaces totales élastiques, les sections efficaces totales de réaction, et les sections efficaces totales.

La section efficace totale élastique  $\sigma_{el}^J(E)$  est calculée par intégration de la distribution angulaire,

$T_{\pi}$	25	35	47.7	60	80	100	120	142	180	256	
$P_0$	-0.58	-0.85	-1.16	-1.38	-1.55	-1.41	-1.06	-0.67	-1.24	-8.94	$\delta(\text{deg})$
	0.999	0.999	0.998	0.997	0.991	0.979	0.957	0.910	0.785	0.744	$\eta$
$S_1$	-1.48	-1.80	-2.03	-2.05	-1.61	-0.35	1.19	2.30	-4.62	-28.09	$\delta(\text{deg})$
	0.998	0.995	0.989	0.979	0.953	0.907	0.823	0.680	0.380	0.604	$\eta$
$D_1$	-0.02	-0.03	-0.04	-0.04	0.01	-0.06	-0.08	-0.10	-0.52	-3.70	$\delta(\text{deg})$
	1.000	1.000	0.999	0.998	0.993	0.983	0.977	0.959	0.911	0.899	$\eta$
$\epsilon_1$	-0.88	-1.84	-3.57	-5.79	-8.37	3.47	8.94	8.54	7.25	5.64	$\text{Re } \epsilon(\text{deg})$
	-0.05	-0.24	-0.89	-2.52	-10.26	-18.11	-10.60	-6.33	-3.29	-0.76	$\text{Im } \epsilon(\text{deg})$
$P_1$	0.33	0.55	0.91	1.34	2.23	3.43	4.74	5.77	2.73	-16.82	$\delta(\text{deg})$
	0.998	0.996	0.991	0.984	0.963	0.927	0.869	0.760	0.522	0.613	$\eta$
$P_2$	2.34	3.83	6.04	8.43	12.87	17.97	23.82	31.85	51.54	-40.66	$\delta(\text{deg})$
	0.998	0.995	0.989	0.979	0.948	0.895	0.816	0.653	0.342	0.367	$\eta$
$F_2$	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.08	0.14	0.18	0.07	-1.61	$\delta(\text{deg})$
	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.994	0.985	0.958	0.950	$\eta$
$\epsilon_2$	-0.31	-0.42	-0.55	-0.67	-0.85	-1.03	-1.23	-1.42	-1.67	-2.06	$\text{Re } \epsilon(\text{deg})$
	-0.01	-0.01	-0.02	-0.03	-0.04	-0.08	-0.12	-0.17	-0.37	-0.35	$\text{Im } \epsilon(\text{deg})$
$D_2$	0.7	0.17	0.36	0.62	1.24	2.16	3.22	4.30	3.64	-9.26	$\delta(\text{deg})$
	1.000	1.000	0.999	0.997	0.989	0.973	0.941	0.872	0.693	0.694	$\eta$
$D_3$	0.16	0.35	0.72	1.21	2.32	3.86	5.64	7.56	7.65	-10.63	$\delta(\text{deg})$
	1.000	1.000	0.999	0.996	0.986	0.964	0.922	0.831	0.600	0.604	$\eta$
$G_3$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.05	0.06	0.06	-7.00	$\delta(\text{deg})$
	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.995	0.984	0.978	$\eta$
$F_3$	0.01	0.02	0.05	0.11	0.26	0.53	0.85	1.15	1.05	-3.13	$\delta(\text{deg})$
	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.993	0.983	0.959	0.891	0.865	$\eta$
$F_4$	0.01	0.00	0.00	0.18	0.43	0.82	1.28	1.73	1.69	-3.08	$\delta(\text{deg})$
	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.991	0.978	0.948	0.868	0.844	$\eta$
$G_4$	0.00	0.00	0.01	0.02	0.06	0.14	0.23	0.32	0.35	-1.24	$\delta(\text{deg})$
	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.996	0.987	0.962	0.947	$\eta$
$H_4$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	-0.02	0.03	0.33	$\delta(\text{deg})$
	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.993	0.991	$\eta$

Tableau V : Analyse en déphasages.

Pour la section efficace totale de réaction, on utilise <sup>(28)</sup> :

$$\sigma_R(E) = \frac{4\pi}{3k^2} \sum_{LL'J} (2J+1) (\text{Im } C_{LL'}^J \delta_{LL'} - |C_{LL'}^J|^2)$$

où  $C_{LL'}^J = -\pi \mu_{\pi d} k T_{LL'}^J \cdot \delta_{LL'}$  est ici le symbole de Kronecker.

La section efficace totale est simplement obtenue en ajoutant  $\sigma_{e\ell}$  et  $\sigma_R(E)$ . Les résultats sont présentés sur la figure 6 et comparés aux résultats obtenus récemment au SIN <sup>(22)</sup> pour la section efficace totale (en fait, nous avons reporté la moyenne des sections efficaces totales expérimentales  $\pi^+d$  et  $\pi^-d$ ).

En tenant compte de la simplicité des données à deux corps utilisées, l'accord dans le domaine d'énergie considéré est satisfaisant.

#### f) Améliorations possibles du calcul :

Dans l'état actuel, les calculs précédents donnent des résultats satisfaisants, sauf à 256 MeV. Plusieurs améliorations sont cependant souhaitables, en particulier pour une confrontation avec les résultats d'expériences à venir.

Le premier point est l'amélioration du traitement de l'interaction coulombienne. En effet, si son introduction au niveau du calcul trois corps paraît difficilement réalisable, on peut tout de même facilement améliorer le calcul de l'amplitude coulombienne ajoutée à la fin du calcul. Celle-ci est en effet simplement calculée au premier ordre, en ne considérant que l'état S du deuton, avec une expression non relativiste. Ces trois points peuvent être améliorés par un traitement du genre de celui de Landau - McMillan.

D'autre part, tous les potentiels utilisés dans cette première approche sont excessivement simples (un seul terme avec des facteurs de forme de type Yamaguchi). Pour ce qui concerne les potentiels nucléon-nucléon, les calculs trois corps en n-d ont permis de sélectionner des potentiels séparables donnant des résultats similaires à ceux obtenus avec des potentiels locaux. En particulier, il serait intéressant d'utiliser dans la voie  $^3S_1 - ^3D_1$  les potentiels de Pieper dont les paramètres sont déterminés à partir du potentiel Reid Soft-Core. Pour les potentiels pion-nucléon, il serait aussi souhaitable de faire des déterminations plus précises des paramètres, en particulier en utilisant les résultats récemment obtenus à Saclay, à l'A. L. S., pour les voies d'isospin 3/2.

Il serait de plus intéressant de pouvoir tenir compte de l'absorption du pion dans le calcul. A cet effet, Afnan et Thomas <sup>(4)</sup> avaient proposé d'introduire un pôle dans la voie  $P_{11}$  pour  $E = -m_\pi$ . Cette voie ayant les mêmes nombres quantiques que le nucléon, la présence d'un état lié ayant pour énergie de liaison la masse du pion y simule la possibilité d'absorber le pion. Cependant, ceci pose quelques problèmes, en particulier la difficulté d'avoir un état lié alors que le potentiel est, à basse énergie, légèrement répulsif, et les problèmes d'antisymétrisation entre le nucléon " composite " (nucléon + pion) et le nucléon spectateur.

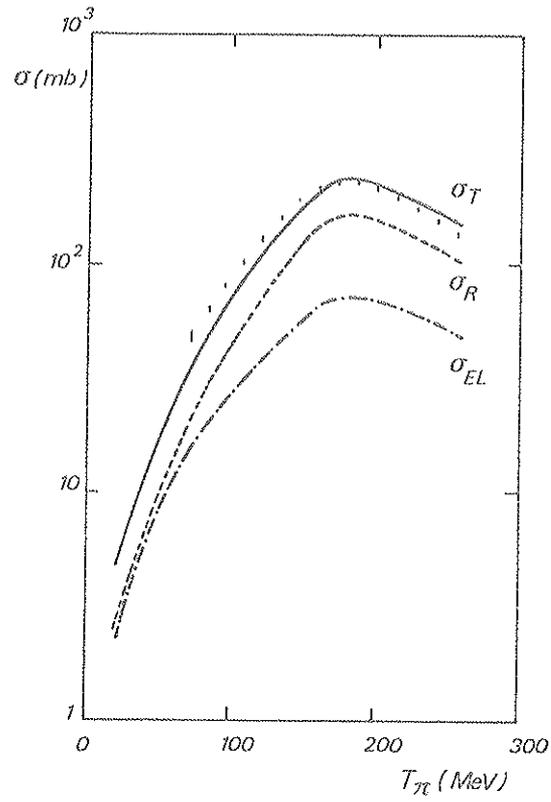


Fig. 6 : Sections efficaces élastique, de réaction et totale.  
 $T_\pi$  est l'énergie cinétique du pion dans le laboratoire.

Mizutani et Koltun <sup>(23)</sup> ont de leur côté proposé une manière très élégante d'introduire l'absorption du pion en couplant, à l'aide d'opérateurs de création et de destruction de pion, les équations de la diffusion  $\pi$ -d à celles de la diffusion nucléon-nucléon.

Terminons en signalant une difficulté inhérente au calcul : pour ne pas multiplier le nombre d'équations, on considère que les interactions sont invariantes par rotation dans l'espace d'isospin. On ne distingue pas de cette manière les différents pions, ainsi que le proton et le neutron. On perd ainsi la possibilité de tenir compte d'effets tels que l'échange de charge ( $p(\pi^+n) \rightarrow p(\pi^0p)$ ) dans les processus intermédiaires.

#### IV. ETUDE A 142 MEV

Dans le paragraphe précédent, nous avons donné les résultats généraux obtenus entre 25 et 256 MeV avec les équations semi-relativistes. Dans ce paragraphe, nous nous proposons de faire dans la zone de la résonance une analyse détaillée de certains points tels que l'importance des voies à deux corps prises en compte, l'effet du pourcentage d'état D et les effets de diffusion multiple. Nous nous sommes limités à des calculs à 142 MeV car à cette énergie, les effets relativistes sont encore assez faibles pour que les équations semi-relativistes puissent être utilisées.

Dans un premier temps, nous allons étudier l'effet d'interférence des ondes pion-nucléon autres que  $P_{33}$  en utilisant les mêmes équations (RPK) que pour l'étude à basse énergie. Ensuite, nous verrons de quelle façon l'utilisation des équations (RPK2) obtenues à la fin du second chapitre peut modifier les résultats. Dans leur calcul relativiste, Rinat et Thomas <sup>(10)</sup> avaient noté une très grande sensibilité des distributions angulaires au pourcentage d'état D du deuton. Ceci semblant a priori surprenant, nous ferons donc des calculs similaires. Ensuite, nous étudierons l'importance de la rediffusion des particules dans les états intermédiaires. Enfin, nous donnerons les résultats obtenus en incluant cette fois les voies S et P aussi bien pour les voies nucléon-nucléon que pion-nucléon.

##### a) Effet des voies $\pi$ -N autres que $P_{33}$ :

Commençons par préciser les conditions de calcul :

- Nous utiliserons d'abord les mêmes équations (RPK) que pour l'étude à basse énergie, c'est-à-dire que les coefficients  $\rho_i$  seront pris comme étant simplement des rapports de masse.

- Pour chaque J, les équations sont résolues en tenant compte de tous les couplages possibles entre les différentes voies.

- Ces équations sont résolues jusqu'à J = 8 inclus, et ainsi la matrice  $M(\theta)$  est calculée en tronquant la sommation à  $\ell$ ,  $\ell' = 7$  inclus.

- Les calculs sont effectués avec les potentiels présentés en I., avec pour la voie  ${}^3S_1$ - ${}^3D_1$  le potentiel qui donne  $P_D = 4\%$ .

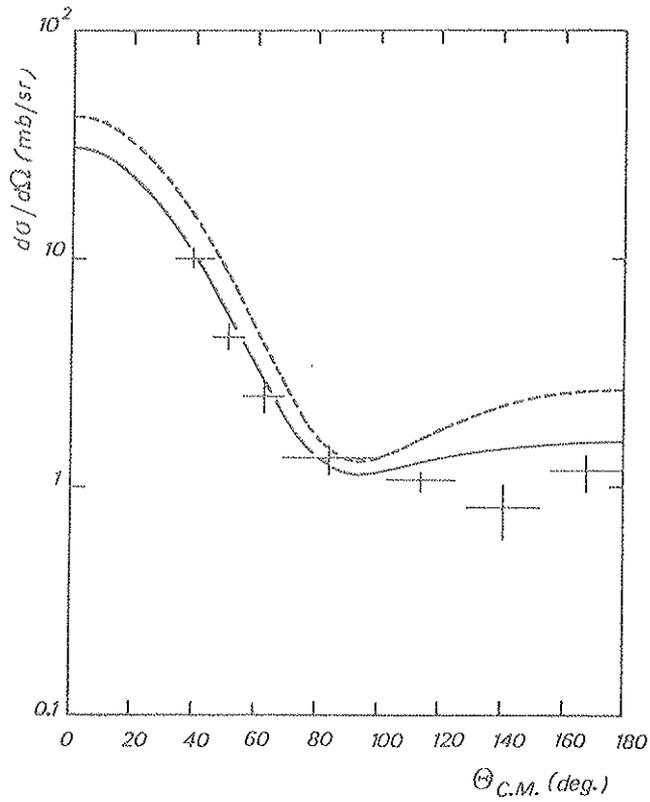


Fig. 7 : Sections efficaces différentielles à 142 MeV, avec l'onde  $P_{33}$  seule (---) et avec toutes les ondes partielles  $\pi N$  (—).

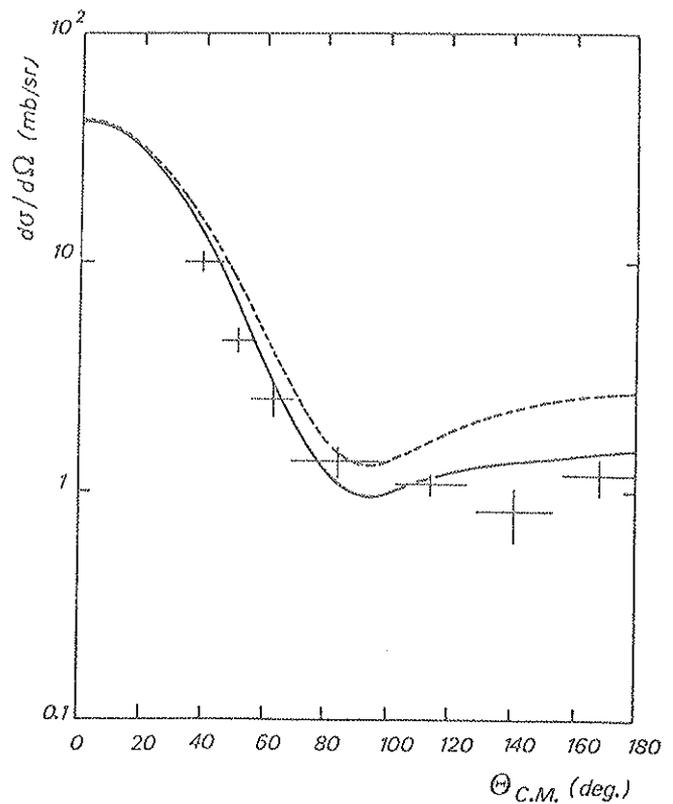


Fig. 8 : Sections efficaces différentielles à 142 MeV calculées avec l'onde  $P_{33}$  seule. La courbe (---) est le calcul RPK, et la courbe (—) est le calcul de Rinat-Thomas avec les équations complètement relativistes.

- Aucune correction coulombienne n'a été effectuée pour le calcul de la section efficace.

Dans ces conditions, nous avons effectué tout d'abord un calcul avec :

- la voie  ${}^3S_1 - {}^3D_1$  pour N-N ,
- la voie  $P_{33}$  pour  $\pi$ -N .

C'est le calcul qui nous a servi de test par comparaison avec celui de Thomas (voir paragraphe II, d) ). Puis, nous avons refait ce calcul, en incluant cette fois les six voies S et P possibles pour  $\pi$ -N .

Les deux distributions angulaires obtenues sont présentées sur la figure 7 . Nous y avons de plus reporté les résultats expérimentaux de Pewitt et al. <sup>(13)</sup> .

L'inclusion de ces voies S et P apporte de grandes modifications à la section efficace. Celle-ci est abaissée dans tout le domaine angulaire et l'accord avec l'expérience devient satisfaisant. La variation dépasse 40 % à l'arrière, et pour les angles avant, les voies S et P abaissent la courbe d'environ 20 % . Ce dernier résultat semble confirmer celui de Rinat et Thomas obtenu par un calcul perturbatif avec les équations relativistes <sup>(24)</sup>. Cependant, ce dernier calcul semble ne pas donner de correction aux angles arrière. Nous reviendrons lors de l'étude de la rediffusion sur les causes possibles de ce désaccord.

Il semble maintenant nécessaire d'essayer de confirmer nos résultats en utilisant les équations (RPK2) déduites à la fin du chapitre II . Rappelons que les équations RPK2 décrivent mieux les effets relativistes que les équations RPK dont elles diffèrent par :

- la modification des coefficients  $\rho_i$  dans lesquels la masse du pion est remplacée par son énergie totale  $\epsilon = \sqrt{m_\pi^2 + k^2}$  ,
- la modification de l'énergie à laquelle le propagateur pion-nucléon est calculé.

Si cette dernière modification n'apporte aucun problème, la première double le temps de calcul, qui passe alors à environ 45 minutes sur une CDC 6600 .

Rappelons enfin que ces équations sont déduites des équations relativistes en y négligeant les termes d'ordre supérieur à deux en  $K^2/m_N$  .

Nous avons donc refait les deux calculs précédents avec les équations RPK2 . Les résultats sont présentés pour  $\theta_{CM} = 0^\circ$  ,  $90^\circ$  et  $180^\circ$  dans le Tableau VI .

$\theta_{CM}$	P <sub>33</sub> seule		S et P	
	RPK	RPK2	RPK	RPK2
0°	42.15	41.48	30.58	30.63
90°	1.32	1.25	1.15	1.19
180°	2.71	2.41	1.59	1.50

Tableau VI : Effet du calcul RPK2 sur la distribution angulaire avec la voie P<sub>33</sub> seule et les voies S et P pion-nucléon .

D'une façon générale, l'effet de RPK2 est d'abaisser encore la section efficace à l'arrière. L'effet obtenu est maximum à l'arrière où, dans le cas de la voie  $P_{33}$  seule, il atteint 11 % et, dans le cas des ondes S et P, 6 %.

En ce qui concerne l'effet de l'inclusion des ondes S et P avec RPK2, on a toujours un effet très important, atteignant son maximum aux angles arrière. Toutefois, l'effet est légèrement plus faible qu'avec RPK.

Si maintenant on compare un calcul fait avec la voie  $P_{33}$  seule, d'une part avec les équations RPK et d'autre part avec les équations relativistes <sup>(10)</sup> (Figure 8), on constate encore un abaissement de la section efficace avec le traitement complètement relativiste.

Dans ces conditions, il paraît raisonnable de conclure que l'introduction des ondes S et P pion-nucléon apporte une diminution significative de la section efficace. Dans un calcul mené avec des équations relativistes, cet effet sera certes plus faible qu'avec les équations RPK, mais, au vu des résultats obtenus avec les équations "intermédiaires" RPK2, on peut penser qu'il sera aussi significatif et pourra donner un excellent accord avec les résultats expérimentaux.

b) Effet du pourcentage d'état D du deuton :

Rinat et Thomas ont testé l'influence du  $P_D$  en construisant des potentiels relativistes donnant  $P_D = 0,4$  et 7 %. Ils ont obtenu un effet très important sur la distribution angulaire  $\pi$ -d. A 142 MeV, celle-ci est abaissée de 20 % à l'arrière quand  $P_D$  passe de 4% à 7%. Nous avons donc décidé d'effectuer des calculs similaires avec les équations RPK. Nous avons effectué les calculs avec des potentiels donnant respectivement 4% et 7% et en faisant intervenir la voie  $P_{33}$  seule, puis toutes les voies S et P  $\pi$ -N (Tableau VII). Dans tous les cas, nous obtenons un abaissement de la distribution angulaire à l'arrière. Toutefois, la diminution est beaucoup plus faible qu'avec les équations relativistes. Elle atteint en effet au plus 5% à 90°.

$\theta_{CM}$	$P_{33}$		S et P	
	4%	7%	4%	7%
0°	42.15	41.48	30.58	29.96
90°	1.32	1.26	1.15	1.09
180°	2.71	2.67	1.59	1.60

Tableau VII : Effet du  $P_D$  sur la distribution angulaire avec la voie  $P_{33}$  seule et les voies S et P pion-nucléon.

Ces différences ne sont cependant probablement pas dues aux différences entre les équations utilisées, mais plutôt aux différences de paramétrisations de la voie  ${}^3S_1 - {}^3D_1$ . Celles-ci sont en effet difficilement comparables, la détermination des paramètres étant faite de façon différente, en particulier avec une équation non relativiste de Lippman - Schwinger dans un cas, et relativiste, de type Bethe-Salpeter dans l'autre cas.

Enfin, remarquons que les potentiels utilisés sont beaucoup trop simples. La modification du  $P_D$  entraîne ainsi une modification des phases obtenues et l'effet observé sur la diffusion  $\pi$ -d n'est pas un effet pur de  $P_D$ .

En conclusion, il serait sans doute intéressant de reprendre ces calculs avec des potentiels plus élaborés, en particulier un potentiel de Pieper.

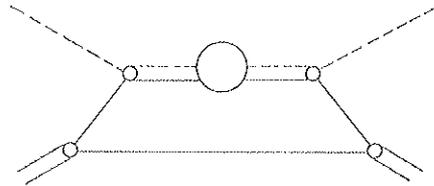
c) Effets de diffusion multiple :

En dehors de son intérêt intrinsèque, l'étude de la convergence de la série de rediffusion a un intérêt pratique. En effet, tant que le terme de simple diffusion est dominant, on peut envisager l'étude de certains effets en les introduisant de façon perturbative.

Nous avons donc calculé, avec les équations RPK, pour  $P_D = 4\%$ , le terme de simple diffusion en tenant compte, d'une part de la voie  $P_{33}$  seule, d'autre part de toutes les voies S et  $P_{\pi-N}$ . Ce terme est obtenu en itérant les équations au premier ordre, soit :

$$X_{n,m}^{SD} = \sum_{\alpha} Z_{n\alpha} R_{\alpha} Z_{\alpha m}$$

ce qui correspond au graphe " triangle " :



Les résultats obtenus (SD) sont comparés à ceux provenant de la résolution complète (RC) des équations dans le Tableau VIII, pour la distribution angulaire à  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $180^\circ$ .

$\theta_{CM}$	$P_{33}$		S et P	
	SD	RC	SD	RC
$0^\circ$	42.15	42.15	34.36	30.58
$90^\circ$	1.20	1.32	1.50	1.15
$180^\circ$	2.60	2.71	2.58	1.59

Tableau VIII : Comparaison du calcul de simple diffusion (SD) et de la résolution complète (RC) pour la voie  $P_{33}$  seule et les voies S et P pion-nucléon.

De ces résultats il ressort que, si dans le cas de la voie  $P_{33}$  seule, le terme de simple diffusion donne une bonne approximation du résultat complet, dans le cas où l'on inclut les autres voies S et P pion-nucléon, les termes de diffusion multiple apportent une modification considérable du résultat, tout particulièrement aux angles arrière où l'écart dépasse 40%.

On peut donc en conclure que les " petites " voies S et P interviennent fortement dans les termes d'ordre élevé. Si, à l'avant, leur effet apparaît bien dans le terme de simple diffusion,

à l'arrière il n'apparaît que dans la résolution exacte du système. Ce dernier point peut expliquer la différence obtenue pour cet effet entre, d'une part, notre calcul RPK avec une résolution complète, et d'autre part le calcul de Rinat et Thomas avec des équations relativistes, mais par une méthode perturbative.

d) Effet des voies S et P nucléon-nucléon :

Jusqu'à présent, tous les calculs effectués ne contenaient, comme voie nucléon-nucléon, que la voie  ${}^3S_1 - {}^3D_1$  et, éventuellement, dans le cas de Mandelzweig, la voie  ${}^1S_0$ . Cependant, la rediffusion de nucléon peut, à cette énergie, devenir importante dans les ondes P (25).

Malgré les difficultés numériques qu'amène leur introduction, nous avons envisagé un calcul avec les équations RPK2, faisant intervenir les ondes S et P nucléon-nucléon (avec la voie  ${}^3D_1$  bien entendu) ainsi que les ondes S et P pion-nucléon. On est confronté alors à la résolution de systèmes de 24 équations intégrales couplées. Avec les moyens de calcul dont nous disposons, leur résolution pose des problèmes et nous avons été obligés de réduire le nombre de points d'intégration. Cette réduction entraîne une perte de précision qui atteint 10% sur la section efficace.

Dans ces conditions, avec les voies indiquées, la modification apportée au résultat par l'inclusion des voies  ${}^1S_0$  et P nucléon-nucléon est inférieure à 5%. L'effet est donc plus petit que la précision du calcul effectué et on ne peut qu'en conclure que l'effet de ces voies est faible.

e) Conclusion :

De tout ce qui vient d'être exposé, on peut conclure que :

i) Le couplage des voies  $\ell = J - 1$  n'est pas négligeable et amène une diminution de la section efficace d'environ 7% aux angles arrière.

ii) L'inclusion des voies  $\pi - N$  autres que la  $P_{33}$  dans les équations RPK' réduit considérablement la section efficace, en particulier aux angles arrière, conduisant ainsi à un bien meilleur accord avec les résultats expérimentaux.

iii) L'effet du pourcentage d'état D est faible et, quand il passe de 4% à 7%, la section efficace est diminuée d'environ 6%.

iv) Malgré la faible précision de notre calcul dans ce cas, l'effet de la rediffusion des nucléons dans les voies  ${}^1S_0$  et P semble faible.

v) Enfin, une meilleure description des effets relativistes pour le pion, c'est-à-dire l'utilisation des équations RPK2 au lieu de RPK, n'apporte que de faibles modifications sur la section efficace.

APPENDICE BMETHODE DE CALCUL

Numériquement, nous avons à résoudre un système d'équations intégrales couplées (jusqu'à 24 équations). Le noyau de ces équations contient diverses singularités, provenant du terme de Born et du propagateur. Ces singularités sont traitées par la méthode maintenant classique du contour déformé<sup>(26)</sup>. Rappelons qu'alors les intégrales sont toutes dans le plan complexe. Les intégrales sont discrétisées avec les pas de Gauss-Gegenbauer d'ordre 5/2 qui donnent, à nombre de pas égal, une meilleure précision que les pas de Gauss-Legendre pour ce type d'intégrales. Les tests de convergences ont été faits jusqu'à 32 pas. Dans les calculs pratiques, 20 pas semblent suffisants.

On est alors ramené à la résolution d'un système linéaire ayant la structure des équations (II.4.10), soit :

$$\begin{aligned} f &= Z_1 R_2 g \\ g &= g_0 + Z_2 R_1 f + Z_3 R_2 g \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & Z_1 \\ Z_2 & Z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

où  $f$  est l'amplitude  $\pi + (NN) \rightarrow \pi + (NN)$  et  $g$  l'amplitude  $N + (\pi N) \rightarrow \pi + (NN)$ .

Ce système linéaire peut bien sûr être résolu par une méthode habituelle. Malheureusement la taille de la matrice (de l'ordre de  $400 \times 400$ ) conduit, avec une méthode de Gauss par exemple, à environ  $10^7$  multiplications complexes.

Nous préférons donc utiliser la méthode des approximants de Padé<sup>(27)</sup>. A cet effet, on itère cette équation  $(2n-1)$  fois par exemple, et on calcule le Padé  $[n/n]$  de la suite obtenue. La suite des itérés étant convergente, on obtient très rapidement la solution (avec pour le même exemple environ  $5 \times 10^5$  multiplications).

En fait, à cause de la nullité d'un des termes de Born ( $f_0$ ), on ne peut pas utiliser directement cette méthode<sup>(27)</sup>. On reporte alors la première équation dans la seconde et on obtient :

$$g = g_0 + (Z_2 R_1 Z_1 + Z_3) R_2 g$$

que l'on résoud par la méthode indiquée. Quelques tests de convergence montrent que :

- jusqu'à  $J = 3$ , un padé  $[3/3]$  est suffisant,
- au-delà, le terme du premier ordre  $g = g_0$ , donc  $f = Z_1 R_2 g_0$  est suffisant.

Il ne reste alors qu'à reporter dans la première équation pour obtenir  $f$ .

De plus, la matrice  $Z_2 R_1 Z_1 + Z_3$  est symétrique (à cause de la symétrie du terme de Born). On ne calcule donc que la moitié de cette matrice et on effectue l'itération sur  $R_2 g$  au lieu de  $g$ . On gagne ainsi un temps appréciable (le calcul des éléments de matrice est très long) ainsi que de la place dans les mémoires.

On obtient finalement de cette façon des temps de calcul raisonnables (environ 1/2 heure pour un calcul complet à une énergie donnée, avec une CDC 6600).

Références

- (1) A. W. Thomas et I. R. Afnan, *Phys. Let.* 45 B (1973) 437
- (2) V. V. Peresypkin et N. M. Petrov, *Nucl. Phys.* A 220 (1970) 277
- (3) F. Myhrer et D. S. Koltun, *Nucl. Phys.* B 86 (1975) 441
- (4) A. W. Thomas et I. R. Afnan, *Phys. Rev.* C 10 (1974) 109
- (5) A. W. Thomas, *Nucl. Phys.* A 258 (1976) 417
- (6) V. B. Mandelzweig, H. Garcilazo et J. M. Eisenberg, *Nucl. Phys.* A 256 (1976) 461  
et *Nucl. Phys.* A 264 (1976) 531
- (7) V. A. Alessandrini et R. L. Omnès, *Phys. Rev.* 139 (1965) B 167
- (8) R. M. Woloshyn, J. Moniz et R. Aaron, *Phys. Rev.* C 13 (1976) 286
- (9) J. M. Riviera et H. Garcilazo, *Nucl. Phys.* A 285 (1977) 505
- (10) A. S. Rinat et A. W. Thomas, *Nucl. Phys.* A 282 (1977) 365
- (11) D. Axen et al., *Nucl. Phys.* A 256 (1976) 387
- (12) Expérience en cours à l'Accélérateur Linéaire de Saclay
- (13) E. G. Pewitt et al., *Phys. Rev.* 131 (1963) 1826
- (13') J. H. Norem et al., *Nucl. Phys.* B 33 (1971) 512
- (13'') K. Gabathuler et al., *Nucl. Phys.* B 55 (1973) 397
- (14) A. C. Phillips, *Nucl. Phys.* A 107 (1968) 209
- (15) C. Fayard, Thèse de Doctorat d'Etat (Université Lyon-I), LYCEN 75.75
- (16) D. R. Harrington, *Phys. Rev.* 139 (1965) B 691
- (17) J. H. Foote et al., *Phys. Rev.* 122 (1961) 959
- (18) A. W. Thomas, Communication privée
- (19) M. L. Goldberger et K. M. Watson, *Collision Theory* (Wiley, New York, 1964), p. 221-226
- (20) M. McMillan et R. H. Landau, TRIUMPH Report TRI-74-1 (1974)
- (21) R. C. Minehart et al., 7<sup>th</sup> International Conference on High Energy Physics and Nuclear Structure, Zürich, 1977
- (22) E. Pedroni et al., SIN Report, PR-77-004 (1977)
- (23) T. Mizutani et D. S. Koltun, *An. of Phys.* 109 (1977) 1
- (24) A. W. Thomas et A. S. Rinat, 7<sup>th</sup> International Conference on High Energy Physics and Nuclear Structure, Zürich, 1977

- (25) A. W. Thomas, TRIUMPH Report TRI-PP-77-7 (1977)
- (26) J. H. Hetherington et L. H. Schick, Phys. Rev. 137 (1965) B 935  
G. H. Lamot, Thèse de Doctorat d'Etat (Université Lyon-I), LYCEN 75.74
- (27) B. Charnomordic, Thèse de Doctorat de Troisième Cycle (Université Lyon-I),  
LYCEN 76.54
- (28) J. Raynal, Thèse de Doctorat d'Etat (1965), Rapport C. E. A. R 2511



## C O N C L U S I O N

Les équations à trois corps relativistes d'Aaron, Amado et Young fournissent, sous forme d'un système d'équations intégrales couplées à trois dimensions, le moyen de traiter complètement un système de trois particules relativistes interagissant par des potentiels non locaux séparables. Leur dérivation, basée sur la méthode de Blankenbecler et Sugar, garantit le respect de l'unitarité à deux et trois corps. Leur utilisation pratique nécessite tout d'abord la réduction du moment angulaire pour se ramener à des équations à une dimension. Grâce à l'introduction de moments relatifs adaptés, cette réduction peut être effectuée aisément par analogie avec le cas non relativiste.

Finalement, si on se limite à une zone d'énergie où les nucléons sont très faiblement relativistes, des simplifications peuvent être faites, conduisant à des équations dont la résolution numérique est plus aisée.

Une comparaison avec les résultats de Thomas nous a alors permis de tester la validité du programme utilisé pour leur résolution.

Une étude particulière à 142 MeV a, dans ces conditions, mis en évidence plusieurs effets :

- d'une part, l'importance du couplage des voies  $l = J \pm 1$  et, surtout, l'effet des voies à deux corps  $\pi$ -N autres que  $P_{33}$ . Ce dernier point n'apparaît que dans les termes de diffusion multiple, ce qui tend à montrer la nécessité d'équations traitant exactement cette série de diffusion multiple. Des mesures de polarisation, en général plus sensibles aux effets de couplage et aux voies à deux corps introduites, seraient certainement cruciales dans ce cas.

- d'autre part, une faible sensibilité en pourcentage d'état  $D$  de l'interaction  ${}^3S_1$ - ${}^3D_1$  nucléon-nucléon utilisée.

- Enfin, une faible importance de la rediffusion des nucléons dans les états  ${}^1S_0$  et  $P$ .

L'étude générale effectuée entre 25 et 180 MeV montre un bon accord avec les quelques résultats expérimentaux existants.

Le seul point délicat semble la zone d'interférence avec l'interaction coulombienne. La simplicité du modèle employé explique facilement ces difficultés. En prévision des expériences en cours à Saclay, il est donc impératif d'améliorer ce point. Des comparaisons entre  $\pi^+$ d et  $\pi^-$ d seraient alors possibles.

Dans le même but, une amélioration des potentiels à deux corps est souhaitable. En ce qui concerne l'interaction N-N, le potentiel de Pieper semble le meilleur choix actuel. Pour les voies  $\pi$ -N, les déphasages pour l'isospin  $3/2$ , obtenus à l'A. L. S., devraient permettre d'obtenir des paramètres plus précis.

Il reste le problème de la voie  $P_{11}$  pion-nucléon. La forme complexe du déphasage nécessiterait un potentiel à deux termes. D'autre part, l'absorption du pion se manifeste dans cette voie et son traitement, avec le modèle proposé par Mizutani et Koltun pour le calcul de la longueur de diffusion, ouvre un domaine nouveau de recherche.

## T A B L E   D E S   M A T I E R E S

<u>Chapitre I</u> : Equations à trois corps relativistes	Pages
1. Introduction .....	I. 1
2. Description de la méthode pour trois particules .....	I. 1
3. Equations à deux corps par la méthode de Blankenbecler et Sugar .....	I. 4
4. Cas des équations à trois corps .....	I. 9
Appendice: Représentation graphique des équations .....	I. 16
<u>Chapitre II</u> : Interactions invariantes. Application à pion-deuton	
1. Introduction .....	II. 1
2. Moments relatifs .....	II. 1
3. Comparaison avec le cas non relativiste. Réduction du moment angulaire .....	II. 6
4. Application au système pion-deuton .....	II. 10
<u>Chapitre III</u> : Etude de la diffusion pion-deuton	
1. Introduction .....	III. 1
2. Conditions de calcul .....	III. 3
3. Résultats généraux .....	III. 11
4. Résultats à 142 MeV .....	III. 22
Appendice : Méthode de calcul .....	III. 28

