



Perturbation et excitabilité dans des modèles stochastiques de transmission de l'influx nerveux

Damien Landon

► To cite this version:

Damien Landon. Perturbation et excitabilité dans des modèles stochastiques de transmission de l'influx nerveux. Mathématiques générales [math.GM]. Université d'Orléans, 2012. Français. NNT : 2012ORLE2021 . tel-00752088

HAL Id: tel-00752088

<https://theses.hal.science/tel-00752088v1>

Submitted on 14 Nov 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ D'ORLÉANS



ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Laboratoire de Mathématiques - Analyse, Probabilités, Modélisation - Orléans

THÈSE présentée par :

Damien LANDON

soutenue le : **28 Juin 2012**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline/ Spécialité : **MATHEMATIQUES**

**Perturbation et excitabilité dans des modèles
stochastiques de transmission de l'influx nerveux**

THÈSE dirigée par :

Nils BERGLUND

Professeur, Université d'Orléans

RAPPORTEURS :

Bruno CESSAC

Directeur de recherche, INRIA Sophia Antipolis

Giambattista GIACOMIN

Professeur, Université Paris 7 - Denis Diderot

JURY :

Romain ABRAHAM

Professeur, Université d'Orléans

Nils BERGLUND

Professeur, Université d'Orléans

Bruno CESSAC

Directeur de recherche, INRIA Sophia Antipolis

Barbara GENTZ

Professeur, Université de Bielefeld

Giambattista GIACOMIN

Professeur, Université Paris 7 - Denis Diderot

Samuel HERRMANN

Professeur, Université de Dijon

Simona MANCINI

Maître de conférence, Université d'Orléans

Table des matières

Introduction	5
1 Équation déterministe de FitzHugh-Nagumo	11
1.1 Résultats généraux sur les systèmes lents-rapides	11
1.2 Système découplé : cas $b = 0$	13
1.3 Cas $b \neq 0$	15
1.3.1 Cas particulier où $c = 0$	17
1.3.2 Cas général	21
1.3.3 Changement de coordonnées	23
1.3.4 Intégrale première dans le cas $\mu = \varepsilon = 0$	27
1.4 Conclusion	29
2 Système découplé stochastique	31
2.1 Simulations	32
2.2 Temps de sortie	32
2.2.1 Définition	32
2.2.2 Problèmes aux valeurs propres	34
2.3 Estimation du temps de sortie moyen	36
2.4 Valeurs propres	41
2.4.1 Calculs préliminaires	42
2.4.2 Comportements asymptotiques	45
2.4.3 Estimation des valeurs propres	48
2.5 Densité du temps de sortie τ	53
3 Cas général : étude qualitative des différents régimes	57
3.1 Simulations	57
3.2 Systèmes lents-rapides stochastiques	58
3.3 Limite inférieure du régime bruit fort	62
3.3.1 Étude qualitative du rayon moyen du petit cycle	64
3.3.2 Discussion	65
3.4 Étude qualitative de la transition du bruit fort au bruit faible	66
3.4.1 Transformation de l'équation stochastique	66
3.4.2 Discussion	69
4 Petites oscillations	73
4.1 Définition de la variable aléatoire donnant le nombre de SAOs	73
4.2 Noyaux de Markov sous-stochastiques	75

4.2.1	Résultats généraux	75
4.2.2	Résultats généraux sur le temps d'absorption	79
4.2.3	Bornes sur λ_0 et $\mathbb{E}^{\mu_0} \{N\}$	80
4.3	Résultats généraux sur la distribution des SAOs	82
4.4	Simulations numériques	84
5	Calcul du noyau de la chaîne de Markov	87
5.1	Dynamique près de la ligne séparatrice	89
5.1.1	Processus linéarisé	89
5.1.2	Écart entre (u_t^1, z_t^1) et (u_t^0, z_t^0)	92
5.1.3	Équation non-linéaire	95
5.1.4	Calcul de la première partie du noyau	98
5.2	Dynamique pendant une SAO	99
5.2.1	Propriété de la fonction f du changement de variable	99
5.2.2	Système en coordonnées (K, ϕ)	103
5.2.3	Moyennisation	110
5.2.4	Calcul de la deuxième partie du noyau	113
5.3	Régime de bruit faible et calcul du noyau	117
6	Conclusion	119
	Bibliographie	123

Introduction

Nous allons nous intéresser à un système d'équations différentielles stochastiques qui modélise la propagation de l'information dans un neurone. Avant de présenter ce modèle, nous décrivons succinctement la structure et le fonctionnement d'un neurone. Nous finirons cette introduction en présentant les différentes parties concernant les résultats mathématiques obtenus sur ce système.

Nous pouvons distinguer deux types de cellules dans le système nerveux : les neurones et les cellules gliales. Les neurones sont les seules cellules d'un individu pouvant coder des informations et les transmettre sur de grandes distances. Ils sont organisés en circuits qui traitent les informations spécifiques. Les cellules gliales ne transmettent pas de signaux mais sont indispensables au bon fonctionnement des neurones. Nous nous intéressons à la description d'un neurone.

Un neurone est constitué principalement de quatre éléments : le soma, les dendrites, l'axone et les terminaisons synaptiques. Le soma ou corps cellulaire est le centre métabolique qui permet au neurone de fonctionner. Deux prolongements partent de ce noyau : les dendrites et l'axone. Les dendrites sont des prolongements fins, hautement ramifiés, qui fournissent une surface réceptrice permettant d'intégrer les signaux provenant d'autres neurones. Cette communication a lieu au niveau des synapses. Les dendrites d'un neurone peuvent entrer en contact avec des centaines d'autres neurones par l'intermédiaire des synapses. Il n'y a qu'un seul axone par noyau. Sa fonction principale est de conduire les influx électrochimiques, appelés potentiels d'action, du soma vers les terminaisons synaptiques. Il peut s'étendre sur des grandes distances allant jusqu'à plus d'un mètre et se subdiviser pour aboutir sur un grand nombre de neurones post-synaptiques. En effet, pour qu'un neurone puisse influencer de façon significative un autre neurone et engendrer un potentiel d'action, il doit multiplier ses contacts synaptiques. Nous allons voir comment se propage un potentiel d'action.

Grâce aux propriétés biophysiques de leur membrane et à la différence des concentrations d'ions intra et extra cellulaire, les axones sont électriquement excitables. La membrane d'un neurone est constituée de deux couches lipidiques qui permettent le passage d'ions à travers des pores spécialisées. Le flux d'ions à travers le neurone peut se faire de deux façons : une active, selon le gradient de concentration grâce à des pompes ioniques, et une passive, selon le gradient de concentration par les canaux ioniques. Les ions qui traversent la membrane sont les ions sodium Na^+ et potassium K^+ .

Un neurone classique possède un potentiel membranaire de repos autour de $-60mV$. Il peut y avoir des changements locaux du potentiel de membrane correspondant à une hyperpolarisation ou une dépolarisation suivant le signal reçu par le neurone. Ce signal se propage alors passivement le long de la membrane. Quand ce potentiel franchit un seuil spécifique (autour de $-50mV$), le neurone émet un potentiel d'action (ou spike) qui suit la loi du tout ou rien et qui est d'amplitude constante le long de l'axone jusqu'à la terminaison synaptique. L'information est codée par la variation de fréquence des potentiels d'action. Après l'émission d'un potentiel d'action, la membrane connaît une période réfractaire au cours de laquelle le neurone est incapable d'émettre un potentiel d'action, ce qui assure une propagation unidirectionnelle du signal.

Pour modéliser l'évolution du potentiel d'action, il existe principalement deux approches. La première est basée sur la modélisation de fréquence des potentiels d'action comme les modèles intègre et tire. Le premier modèle de ce genre a été introduit par le français Louis Lapicque en 1907. Quand un courant est appliqué à

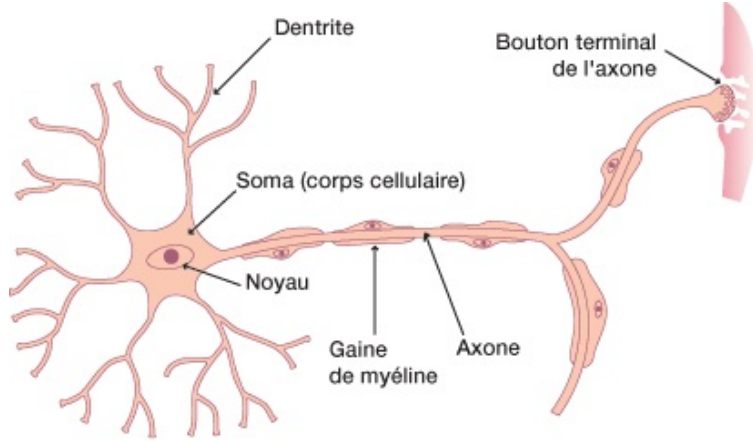


FIGURE 1. Schéma d'un neurone.

un neurone, le potentiel de membrane augmente jusqu'à une valeur seuil. Quand cette valeur est atteinte, il se produit un spike puis le potentiel est remis à sa valeur de repos. La deuxième approche essaie de reproduire ce qui se passe chimiquement au niveau d'un neurone [HH52]. Le modèle le plus connu est celui de Hodgkin-Huxley, introduit en 1952, qui est basé sur les courants ioniques (notamment des ions sodium et potassium) qui circulent à travers la membrane et induisent le déclenchement d'un potentiel d'action. A. Hodgkin et A. Huxley ont reçu le prix-nobel de médecine en 1963 pour ce travail. Ce modèle est un système de quatre équations différentielles non-linéaires

$$\begin{aligned}
 C\dot{V} &= I - g_K n^4 (V - V_K) - g_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) - g_L (V - V_L) \\
 \tau_n(V) \dot{n} &= n^*(V) - m \\
 \tau_m(V) \dot{m} &= m^*(V) - h \\
 \tau_h(V) \dot{h} &= h^*(V) - n
 \end{aligned} \tag{0.0.1}$$

où V est le potentiel de membrane, les g_x , $x \in \{Na, K, L\}$, sont des constantes de conductivité, les V_x des constantes correspondant aux potentiels d'inversion, m , n et h les probabilités d'ouverture ou fermeture des différents canaux ioniques (m activation des canaux pour le sodium, h désactivation des canaux pour le sodium, n activation des canaux pour le potassium), $\tau_x(V)$, $x \in \{n, m, h\}$, des temps caractéristiques, et $x^*(V)$ sont les valeurs d'équilibre. Ce système permet de reproduire les comportements enregistrés et il a donc eu beaucoup de succès. La plupart des recherches a porté sur les effets d'une perturbation déterministe même si l'ajout de perturbations stochastiques remonte au moins à [GM64]. Une revue des différents modèles avec des perturbations stochastiques se trouve dans le livre [Tuc89]. L'effet du bruit sur la distribution des intervalles de temps entre les spikes pour le système Hodgkin-Huxley a été étudié par exemple dans [TP01b, TTP02, Row07].

Le système (0.0.1) est difficile à étudier analytiquement. Il a été simplifié pour se ramener à un système à deux équations. En effet, d'après des mesures expérimentales, la quantité $\tau_m(V)$ est beaucoup plus petite que $\tau_n(V)$ et $\tau_h(V)$. Nous pouvons alors remplacer m par sa valeur à l'équilibre $m^*(V)$. De plus, nous avons une relation linéaire entre h et n . Nous pouvons alors garder une seule de ces variables. Cela nous ramène à un système de dimension deux qui peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \dot{x} &= f(x, y) \\
 \dot{y} &= g(x, y)
 \end{aligned} \tag{0.0.2}$$

où x est proportionnel au potentiel V , et y est proportionnel à la variable n . Le paramètre ε est relativement petit car le temps de relaxation de V est plus petit que $\tau_n(V)$ et $\tau_h(V)$. Les fonctions f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suffisamment régulières. Le champ de vitesse a une composante horizontale nulle le long de la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ alors que la composante verticale est nulle sur la courbe d'équation $g(x, y) = 0$. Si $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont du même ordre, étant donnée que $\varepsilon \ll 1$, nous avons $\dot{x} \gg \dot{y}$. La variable x varie donc beaucoup plus rapidement que y . La variable x est alors appelée variable rapide et y la variable lente. Quand la trajectoire s'éloigne de la courbe d'équation $f(x, y) = 0$, elle est presque parallèle à l'axe des abscisses. Un système de la forme (0.0.2) est appelé système lent-rapide.

Nous avons comme cas particulier pour l'équation (0.0.2) le modèle de Morris-Lecar qui a été introduit en 1981 [ML81] et qui s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} f(x, y) &= c_1 m^*(x)(1 - x) + c_2 y(V_2 - x) + c_3(V_3 - x) \\ g(x, y) &= (w^*(x) - y) \cosh\left(\frac{x - x_3}{x_4}\right) \end{aligned} \quad (0.0.3)$$

où les c_i , V_i et x_i sont des constantes et

$$\begin{aligned} m^*(x) &= \frac{1}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{x - x_1}{x_4}\right) \right] \\ w^*(x) &= \frac{1}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{x - x_3}{x_4}\right) \right] \end{aligned} \quad (0.0.4)$$

Un autre modèle pour une équation du type de (0.0.2) a été introduit par FitzHugh et Nagumo en 1961 [Fit55, Fit61, NAY62]. Il est donné par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x - x^3 + y \\ g(x, y) &= a - bx - cy \end{aligned} \quad (0.0.5)$$

où a , b et c sont des réels. Ce système lent-rapide est une généralisation de l'équation de Van Der Pol et permet de reproduire qualitativement le comportement des solutions du modèle de Hodgkin-Huxley. En effet, ce système est excitable. Si nous nous plaçons dans le cas où le système a un point d'équilibre stable, le comportement de la solution est sensible au choix de la condition initiale (voir figure 2 (3)). Si la condition initiale est choisie suffisamment proche du point d'équilibre, la trajectoire de la solution est attirée par le point d'équilibre P_3 et reste donc au voisinage de ce point. Si la condition initiale est un peu éloignée du point d'équilibre, la trajectoire va faire un grand cycle avant de revenir au voisinage du point d'équilibre. Ce grand cycle représente un spike. Pour induire ce spike, il y a deux approches possibles :

- une déterministe, en ajoutant un terme de courant sur la première équation
- une stochastique, en ajoutant des termes de bruit blanc sur chacune des équations

Dans les deux cas, si l'intensité du courant ou du bruit est suffisamment fort, il permettra à la trajectoire de sortir du voisinage du point d'équilibre et d'induire un spike. Le comportement est similaire dans le cas du modèle de Morris-Lecar. Dans ce travail, nous nous intéresserons à la génération de spikes par l'approche stochastique du modèle de FitzHugh-Nagumo.

L'ajout de bruit aux équations de FitzHugh-Nagumo ou à des systèmes excitables semblables a bien été étudié numériquement [Long93, KP03, KP06, TGOS08, BKLLC11] et en utilisant des approximations fondées sur les équations de Fokker-Planck [LSG99, SK], la méthode des moments [TP01a, TRW03] ou la méthode de Kramer [Long00]. Des résultats sur le régime oscillant ont été obtenus en utilisant le principe des grandes déviations [MVEE05, DT] et par une description des trajectoires au voisinage de solutions canards [Sow08].

Kosmidis et Pakdaman [KP03, KP06] ont observé une relation entre excitabilité et oscillations multimodales (MMOs). Ce lien a été analysé par Muratov et Vanden-Eijnden [MVE08]. Les MMOs sont caractérisées par une alternance de grandes et petites oscillations et sont observables dans plusieurs systèmes chimiques et biologiques [DOP79, DMS00, HHM79, PSS92]. Dans le cas des systèmes déterministes, il faut

au moins trois variables pour reproduire de tels phénomènes (voir [DGK11] pour les mécanismes responsables des MMOs dans le cas déterministe). L'ajout de bruit permet de produire des MMOs avec seulement deux dimensions comme dans le cas du système de FitzHugh-Nagumo. Ceci a été observé dans les articles [KP03, KP06, MVE08]. Nous nous sommes basés sur les idées de [MVE08] pour étudier l'alternance de petites et grandes oscillations pour certains régimes de paramètres dans le système de FitzHugh-Nagumo.

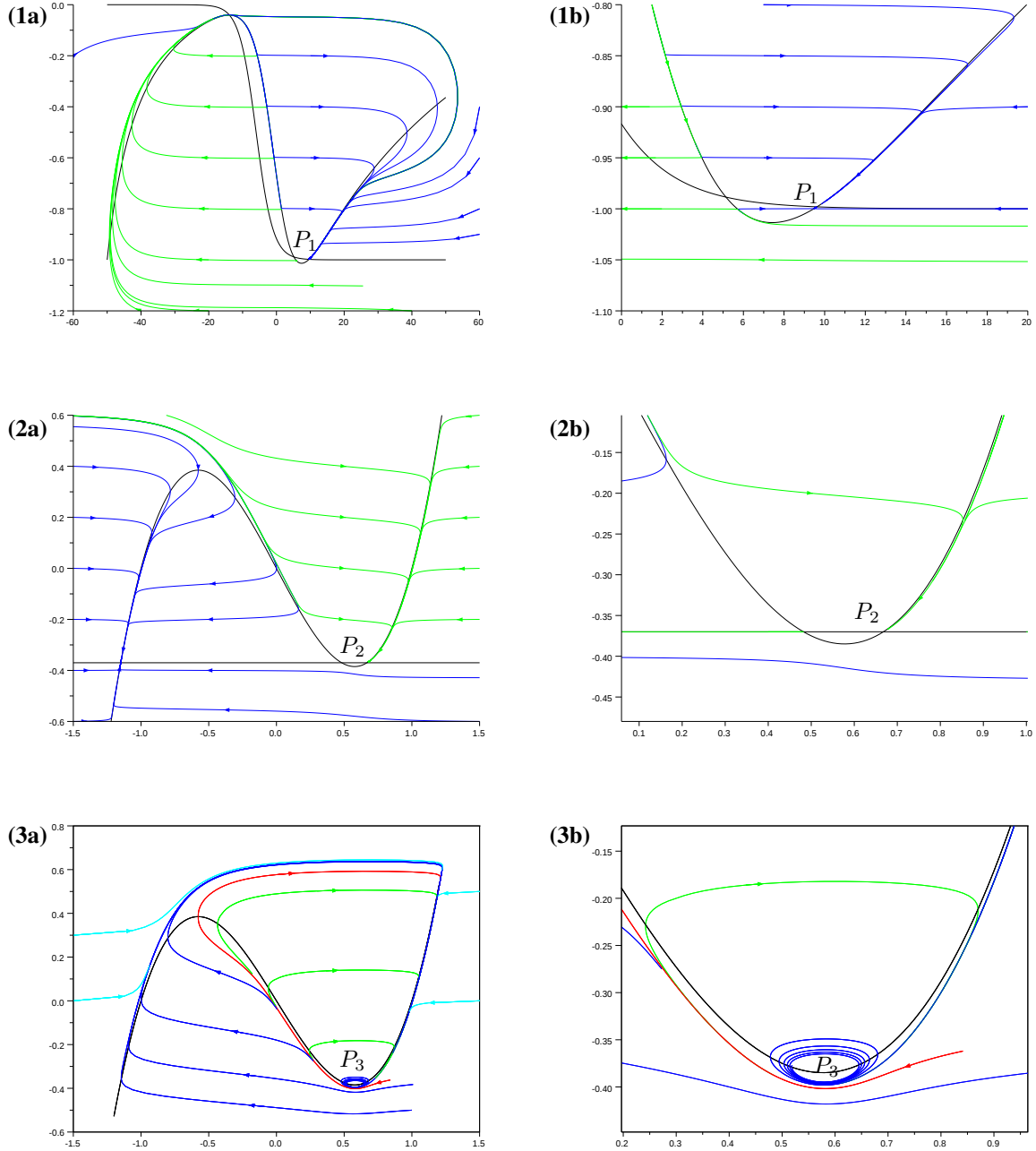


FIGURE 2. Portraits de phases pour le système de Morris-Lecar (a) et celui de FitzHugh-Nagumo (b) (cas $b = 0$) et (c) (cas $b \neq 0$)

Dans le chapitre 1, après avoir donné des résultats généraux sur les équations lent-rapides, nous étudions le

comportement des solutions du système déterministe associé au modèle de FitzHugh-Nagumo en introduisant des coordonnées adaptées que nous utiliserons par la suite.

Dans le chapitre 2, nous étudions le cas particulier où $b = 0$. Dans ce cas, la dynamique générale du système ne permet pas la génération de spikes mais le comportement au voisinage d'un des points d'équilibre est le même que dans le cas du modèle de Morris-Lecar comme le montre le portrait de phase de la figure 2 (1) et (2). Nous pouvons observer sur la figure (1b) et (2b) que les comportements au voisinage des points P_1 et P_2 sont similaires. Ainsi la loi pour sortir du voisinage des points d'équilibre P_1 et P_2 sera la même. Pour trouver cette loi, nous étudions le temps de sortie τ d'un puits de potentiel. Nous obtenons le comportement asymptotique de l'espérance de τ . Nous montrons ensuite que la loi de τ suit une loi asymptotiquement exponentielle de paramètre λ_1 dont nous obtiendrons un développement asymptotique.

Dans le chapitre 3, nous passons à l'étude générale de l'équation de FitzHugh-Nagumo stochastique dans le cas général. Nous justifions d'abord pourquoi nous pouvons étudier le système seulement au voisinage d'un des points de bifurcation en utilisant des résultats généraux sur les systèmes lents-rapides stochastiques. Ensuite, à l'aide de différents changements de variables, nous obtenons des premières approximations pour les frontières entre les différents régimes de comportement des solutions. Nous distinguons trois régimes :

- un régime où les spikes sont isolés et rares, pour un bruit faible,
- un régime où il y a une suite de spikes sans période de repos, pour un bruit fort,
- un régime intermédiaire où il y a des trains de spikes espacés par des période de repos, pour un bruit intermédiaire. La transition entre les régimes de bruit fort et de bruit faible est progressive.

Dans les chapitres 4 et 5, nous étudions le comportement de la trajectoire au voisinage du point de bifurcation proche du point d'équilibre. Nous commençons par définir une petite oscillation (appelée aussi SAO pour Small Amplitude Oscillation), par comparaison avec un spike qui correspond à une grande oscillation, et une chaîne de Markov sous-stochastique associée au nombre de petites oscillations. Ensuite, nous appliquons des théorèmes généraux sur les noyaux de Markov sous-stochastiques pour obtenir des résultats sur la distribution du nombre de SAOs. Nous obtenons dans le chapitre 4 les résultats suivants :

- le noyau de Markov possède une distribution quasi-stationnaire et la valeur propre principale associée est strictement plus petite que 1,
- le nombre de SAOs est presque sûrement fini et sa distribution est asymptotiquement géométrique,
- les moments du nombre de SAOs sont finis.

Nous calculons ensuite le noyau en décomposant la trajectoire autour du point d'équilibre en deux parties et utilisons deux systèmes de coordonnées différents dans chaque partie. Nous retrouvons les frontières du chapitre 3 entre les trois régimes de façon rigoureuse. Nous obtenons les résultats suivants sur le nombre de SAOs dans le cas d'un bruit faible :

- la valeur propre principale est exponentiellement proche de 1,
- l'espérance du nombre de SAOs est exponentiellement grande.

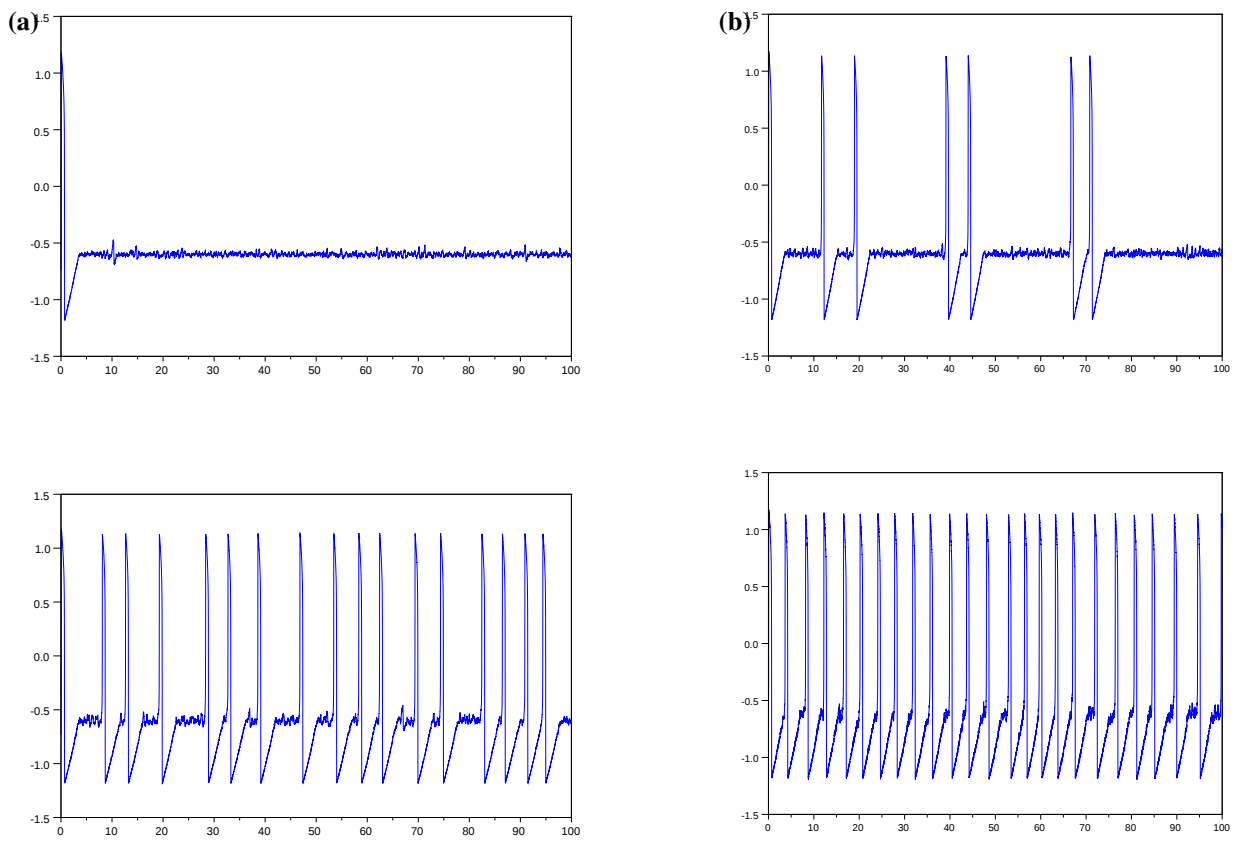


FIGURE 3. Exemples de simulations pour le potentiel de membrane x en fonction du temps pour le système (0.0.5) en ajoutant des termes de bruit blanc sur chaque équation

Chapitre 1

Équation déterministe de FitzHugh-Nagumo

Nous commençons par donner des résultats généraux sur les systèmes d'équations lents-rapides (partie 1.1). Ces résultats décrivent le comportement des solutions au voisinage des branches d'équilibre et des points de bifurcations. Nous appliquerons ces résultats au cas qui nous intéresse.

Nous allons utiliser la notion de système excitable. On dit qu'un système est excitable s'il possède un point d'équilibre asymptotiquement stable et que des orbites peuvent passer proche du point d'équilibre mais faire une grande excursion dans le plan avant de retourner au point d'équilibre.

Nous étudions d'abord le comportement des solutions de l'équation de FitzHugh-Nagumo déterministe, introduite dans les articles [Fit61] et [NAY62], en faisant varier les différents paramètres de l'équation :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{\varepsilon} (x - x^3 + y) \\ \dot{y} &= a - bx - cy\end{aligned}\tag{1.0.1}$$

où a , b et c sont des réels et $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre. Nous supposons $c > 0$ pour avoir des solutions bornées. Pour l'étude de ce système, nous allons différencier les cas $b = 0$ (partie 1.2) et $b \neq 0$ (partie 1.3). Dans ces deux cas, nous étudierons les points d'équilibre. Dans le cas où $b = 0$, le système a entre un et trois points d'équilibre. Quand il y a un seul point d'équilibre, celui-ci est stable et le système n'est pas excitable alors qu'il l'est dans les autres cas. L'équation étant découplée, nous pouvons calculer directement y et le système se ramène alors à l'étude d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 avec potentiel. Dans notre cas, le potentiel peut avoir deux puits et la solution est attirée dans un de ces deux puits.

Dans une troisième partie, nous considérons le cas $b \neq 0$. Nous commençons par étudier le cas particulier où $c = 0$ (section 1.3.1). Dans ce cas, nous pouvons calculer facilement les valeurs propres de la matrice jacobienne au point d'équilibre et dresser les différents cas suivant les valeurs d'un paramètre dépendant de a . Dans le cas général, nous étudierons uniquement le cas où nous avons une bifurcation de Hopf (section 1.3.2). Enfin nous introduirons un système de coordonnées qui permet de calculer une intégrale première du mouvement qui nous servira par la suite (section 1.3.3). Dans ce nouveau système, nous calculons une intégrale première quand le point d'équilibre est au niveau du point de bifurcation et pour $\varepsilon = 0$ (section 1.3.4). Nous l'utiliserons par la suite dans les parties 4 et 5.

On peut trouver une étude plus détaillée des différents cas dans l'article [KRS04].

1.1 Résultats généraux sur les systèmes lents-rapides

Nous considérons le système lent-rapide de dimension deux de la forme

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

avec f et g deux fonctions suffisamment régulières de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et ε un paramètre petit. La variable x est alors la variable rapide et y la variable lente. Nous définissons les branches d'équilibre par

Définition 1.1.1. *Supposons qu'il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction continue $x^* : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall y \in I, f(x^*(y), y) = 0 \quad (1.1.2)$$

On appelle branche d'équilibre du système (1.1.1) l'ensemble

$$\mathcal{M}_0 = \{(x^*(y), y) : y \in I\} \quad (1.1.3)$$

De plus, soit

$$a^*(y) = \partial_x f(x^*(y), y) \quad (1.1.4)$$

la linéarisation du champ de vecteur correspondant à la variable rapide au point $(x^(y), y)$. La branche d'équilibre est dite stable (respectivement instable) si $a^*(y)$ est négatif (respectivement positif), borné et ne s'annule pas, uniformément pour $y \in I$.*

Dans le cas de l'équation de FitzHugh-Nagumo, il est plus simple d'exprimer les branches d'équilibre en fonction de x . Nous avons alors $y^*(x) = x^3 - x$ et $a^*(x) = 1 - 3x^2$. La branche d'équilibre $(x, x^3 - x)$ est donc stable pour $x < -1/\sqrt{3}$ et $x > 1/\sqrt{3}$ et instable pour $x \in]-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}[$.

Nous avons deux résultats sur les orbites qui commencent suffisamment près de la branche d'équilibre stable. Le premier, de Tikhonov [Tik52], dit que les orbites qui commencent suffisamment près de la branche d'équilibre stable, suivent cette branche à distance d'ordre ε . Le deuxième, de Fenichel [Fen79], précise ce résultat en disant que toutes les orbites, commençant près de la branche d'équilibre stable, convergent vers une courbe invariante.

Théorème 1.1.2 ([Tik52]). *Toute orbite commençant dans un voisinage suffisamment proche de la branche d'équilibre stable $\mathcal{M}_0$ est attirée de façon exponentiellement rapide dans un voisinage d'ordre ε de $\mathcal{M}_0$.*

Théorème 1.1.3 ([Fen79]). *Si la branche d'équilibre $\mathcal{M}_0$ est stable, il existe alors une courbe $\mathcal{M}_\varepsilon$, qui est ε -proche de $\mathcal{M}_0$ et invariante sous le flux, c'est à dire que si $(x(0), y(0)) \in \mathcal{M}_\varepsilon$ alors $(x(t), y(t)) \in \mathcal{M}_\varepsilon$ tant que $y(t) \in I$. La courbe $\mathcal{M}_\varepsilon$ attire les orbites voisines exponentiellement rapidement.*

La courbe invariante $\mathcal{M}_\varepsilon$ admet une équation paramétrique de la forme $x = \bar{x}(y, \varepsilon)$, avec $\bar{x}(y, \varepsilon) = x^*(y) + \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Nous étudions ensuite la dynamique au niveau d'un point de bifurcation noeud-col.

Définition 1.1.4. *Un point (x^*, y^*) est un point de bifurcation noeud-col si le champ de vecteurs rapide vérifie les conditions*

$$\begin{aligned} f(x^*, y^*) &= 0, \\ \partial_x f(x^*, y^*) &= 0, \\ \partial_{xx} f(x^*, y^*) &\neq 0, \\ \partial_y f(x^*, y^*) &\neq 0, \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Dans le cas de l'équation (1.0.1), les points selles de bifurcation sont les points B et B' de coordonnées $(1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3})$ et $(-1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$.

Théorème 1.1.5 ([Pon57], [Hab79], [BK99]). *Soit (x^*, y^*) un point de bifurcation noeud-col du système lent-rapide (1.1.1). Supposons, sans perte de généralité, que les coordonnées ont été transformées de telle sorte que $(x^*, y^*) = (0, 0)$, $\partial_{xx} f(0, 0) = -2$, $\partial_y f(0, 0) = -1$ et $g(0, 0) = -1$. En choisissant une condition initiale*

$(x(0), y(0))$ suffisamment proche du point de bifurcation, avec $y(0) > 0$ d'ordre 1 et $x(0) - x^*(y(0)) > 0$ d'ordre ε . Il existe alors des constantes C_1, C_2, C_3, C_4 et c strictement positives telles que l'orbite partant du point $(x(0), y(0))$ satisfait

$$\begin{aligned} C_1 \frac{\varepsilon}{y(t)} &\leq x(t) - x^*(y(t)) \leq C_2 \frac{\varepsilon}{y(t)} \quad \text{pour} \quad c\varepsilon^{2/3} \leq y(t) \leq y(0), \\ C_3 \varepsilon^{1/3} &\leq x(t) \leq C_4 \varepsilon^{1/3} \quad \text{pour} \quad c\varepsilon^{2/3} \leq y(t) \leq y(0), \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

De plus, $x(t)$ atteint les valeurs négatives d'ordre 1 quand $y(t)$ est encore d'ordre $-\varepsilon^{2/3}$.

Après avoir translaté le point de bifurcation $(-1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$ à l'origine, quand x passe de négatif à positif, la courbe invariante $y = \bar{y}(x, \varepsilon)$ coupe l'axe $y = 0$ pour une abscisse x d'ordre $\varepsilon^{1/3}$, puis l'axe $x = 0$ pour un y d'ordre $-\varepsilon^{2/3}$, et atteint finalement une abscisse x d'ordre 1 pour une valeur y d'ordre $-\varepsilon^{2/3}$. Nous avons de la même façon un comportement similaire au point de bifurcation $(1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3})$ en changeant les signes.

1.2 Système découplé : cas $b = 0$

Nous étudions maintenant l'équation de FitzHugh-Nagumo (1.0.1) dans le cas où $b = 0$. Dans le cas où $b = 0$ et $c = 0$, la deuxième équation s'écrit alors $\dot{y} = a$. Si $a \neq 0$, il n'y a pas de point d'équilibre et les trajectoires partent à l'infini le long de la cubique. Si $a = 0$, alors y est constant et il y a entre un et trois points d'équilibre suivant la valeur de y . Les trajectoires sont parallèles à l'axe des abscisses et se terminent en l'un des points d'équilibre. Nous supposons ensuite $c \neq 0$ et nous pouvons donc diviser les deux équations par c , faire le changement de temps $t' = ct$ et définir les constantes a' et ε' telles que $a' = a/c$ et $\varepsilon' = c\varepsilon$. Nous obtenons alors le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{\varepsilon'} (x - x^3 + y) \\ \dot{y} &= a' - y \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

où le point désigne alors la dérivée par rapport au nouveau temps t' . Quitte à faire ce changement de temps et renommer les paramètres, nous pouvons prendre $c = 1$. Nous étudions alors le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{\varepsilon} (x - x^3 + y) \\ \dot{y} &= a - y \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Ce système est découplé. Nous pouvons résoudre la deuxième équation qui ne porte que sur la variable y . Nous remplaçons ensuite y par son expression dans la première équation pour obtenir une équation différentielle non-linéaire sur x . Commençons par étudier les points d'équilibre de ce système.

Proposition 1.2.1. *Le système (1.2.2) a :*

- un point d'équilibre P stable si $a > 2/3\sqrt{3}$ ou $a < -2/3\sqrt{3}$.
- deux points d'équilibres, P et B' ou P et B , si $a = \pm 2/3\sqrt{3}$. Pour $a = -2/3\sqrt{3}$, le point B est dégénéré et l'autre point est un noeud stable. Pour $a = 2/3\sqrt{3}$, le point B' est dégénéré et l'autre point est un noeud stable.
- trois points d'équilibres, P', P_1 et P_2 (voir figure 1.1), si $-2/3\sqrt{3} < a < 2/3\sqrt{3}$. Le point dont l'abscisse (P_1 sur la figure 1.1) est compris entre $-2/3\sqrt{3}$ et $2/3\sqrt{3}$ est dégénéré et les deux autres sont des noeuds stables.

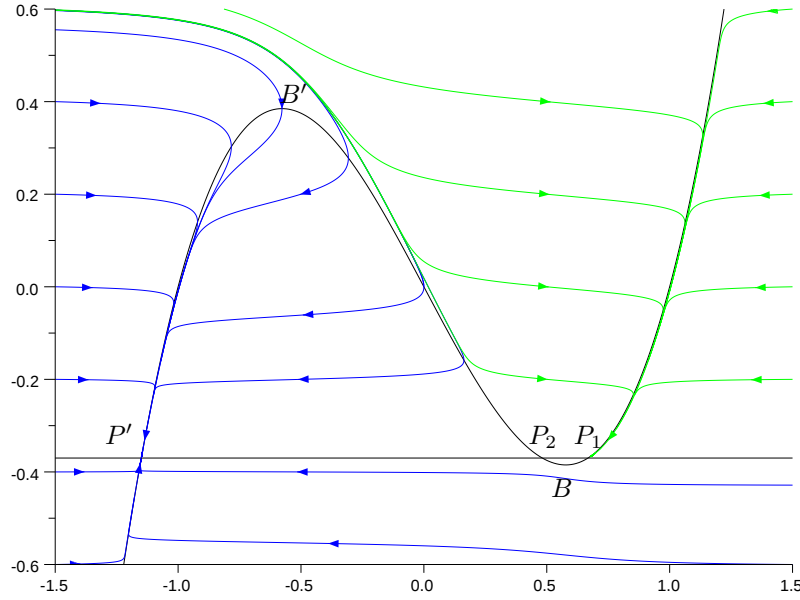


FIGURE 1.1. Quelques trajectoires solution de l'équation (1.2.2) pour différentes conditions initiales et pour $\varepsilon = 0.05$, $a = -0.37$, $b = 0$ et $c = 1$.

PREUVE. Un point d'équilibre (x_*, y_*) vérifie $y_* = a$ et

$$x^3 - x - a = 0 \quad (1.2.3)$$

Utilisons les formules de Cardan pour déterminer le nombre de racines de cette équation. Le discriminant s'écrit

$$\Delta = a^2 - \frac{4}{27} \quad (1.2.4)$$

Nous avons alors les trois cas :

- si $\Delta > 0$, c'est à dire si $a > 2/3\sqrt{3}$ ou $a < -2/3\sqrt{3}$, l'équation (1.2.3) a une seule racine réelle,
- si $\Delta = 0$, c'est à dire si $a = \pm 2/3\sqrt{3}$, l'équation (1.2.3) a deux racines réelles, une racine simple et une racine double,
- si $\Delta < 0$, c'est à dire si $-2/3\sqrt{3} < a < 2/3\sqrt{3}$, l'équation (1.2.3) a trois racines réelles distinctes.

Déterminons ensuite la nature de ces points d'équilibres. La matrice jacobienne à un point d'équilibre s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1 - 3x_*^2}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2.5)$$

Les valeurs propres sont alors $1 - 3x_*^2/\varepsilon$ et -1 . Au moins une des valeurs propres est négative. Nous pouvons alors distinguer trois cas :

- si $1 - 3x_*^2 > 0$, i.e. $-1/\sqrt{3} < x_* < 1/\sqrt{3}$, les deux valeurs propres sont de signes différents et le point d'équilibre est un point selle.
- si $1 - 3x_*^2 < 0$, i.e. $x_* < -1/\sqrt{3}$ ou $x_* > 1/\sqrt{3}$, les deux valeurs propres sont négatives et le point d'équilibre est un noeud stable.

- si $1 - 3x_*^2 = 0$, i.e. $x_* = \pm 1/\sqrt{3}$, une valeur propre est nulle, le cas est dégénéré.

■

Dans le cas où nous avons un unique point d'équilibre, le système n'est pas excitable : si nous prenons une condition initiale un peu éloignée du point d'équilibre, la solution retourne directement vers le point d'équilibre. Dans le cas où nous avons deux ou trois points d'équilibre, nous pouvons diviser le plan en deux parties : si nous prenons une condition initiale dans une première partie, la trajectoire se termine au point d'équilibre stable P et si la condition initiale est dans l'autre partie, la trajectoire tend vers P' , comme sur la figure 1.1. Le comportement au voisinage du point P permet de dire que le système est excitable : si nous prenons une condition initiale d'ordonnée légèrement inférieure à celle de P , la trajectoire tend vers P' . Le système n'est, en revanche, pas excitable en P' qui est un point asymptotiquement stable.

Le système (1.2.2) étant découplé et l'équation portant uniquement sur y étant simple, nous pouvons la résoudre et remplacer y dans la première équation. La solution de $\dot{y} = a - y$ est

$$y(t) = a + (y_0 - a)e^{-t} \quad (1.2.6)$$

où y_0 est l'ordonnée initiale de la trajectoire. En remplaçant dans la première équation de (1.2.2), nous obtenons

$$\dot{x} - \frac{1}{\varepsilon} V'(x) = \frac{y_0 - a}{\varepsilon} e^{-t} \quad (1.2.7)$$

où V est le potentiel

$$V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - ax \quad (1.2.8)$$

Nous avons à nouveau trois cas pour l'allure du potentiel. Si $|a| > 2/3\sqrt{3}$ (figure 1.2 (a)), la dérivée $V'(x)$ s'annule en un seul point et V admet un minimum global qui correspond à un puits de potentiel qui correspond à l'unique point d'équilibre que nous avons vu pour ce cas. Si $|a| = 2/3\sqrt{3}$ (figure 1.2 (b)), la dérivée $V'(x)$ s'annule en deux points, mais en un des points il n'y a pas d'extremum local. Enfin, si $|a| < 2/3\sqrt{3}$ (figure 1.2 (c)), la dérivée $V'(x)$ s'annule en deux points x_{P_-} et x_{P_+} . L'un correspond au minimum global et l'autre à un minimum local. Quand a est négatif, le minimum global est obtenu pour une abscisse négative x_- . Plus a augmente, plus la différence $x_{P_+} - x_{P_-}$ est petite. Pour $a = 0$, les deux minimum sont les mêmes. Quand a devient positif, le minimum global est atteint pour une abscisse positive x_+ .

Sur la représentation graphique du potentiel V de la figure 1.2 (c), nous définissons les points P_- et P_+ de coordonnées respectives $(x_-, V(x_-))$ et $(x_+, V(x_+))$. Le premier correspond au minimum global de la fonction V et le second à un minimum local. Nous avons donc deux puits de potentiel qui correspondent aux deux points d'équilibre du système (1.2.2). Le puits correspondant à P_- est beaucoup plus profond que celui de P_+ . Il est ainsi difficile d'en sortir : si nous prenons une condition initiale x_0 un peu écarté de x_- , nous revenons en x_- . Le puits associé à P_+ est, en revanche, très peu profond sur la gauche : le maximum local et le minimum local sont très proches. Prenons une condition initiale x_0 plus petite que x_+ . Si x_0 est suffisamment proche de x_+ , la faible pente ramène au niveau du point P_+ . Dès que x_0 passe l'abscisse du maximum local, nous tombons dans le puits plus profond vers le point P_- .

1.3 Cas $b \neq 0$

Dans le cas où $b \neq 0$, nous pouvons diviser les deux équations par b , faire le changement de temps $t' = bt$ et définir les constantes a' , c' et ε' telles que $a' = a/b$, $c' = c/b$ et $\varepsilon' = b\varepsilon$. Nous obtenons alors le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{\varepsilon'} (x - x^3 + y) \\ \dot{y} &= a' - x - c'y \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

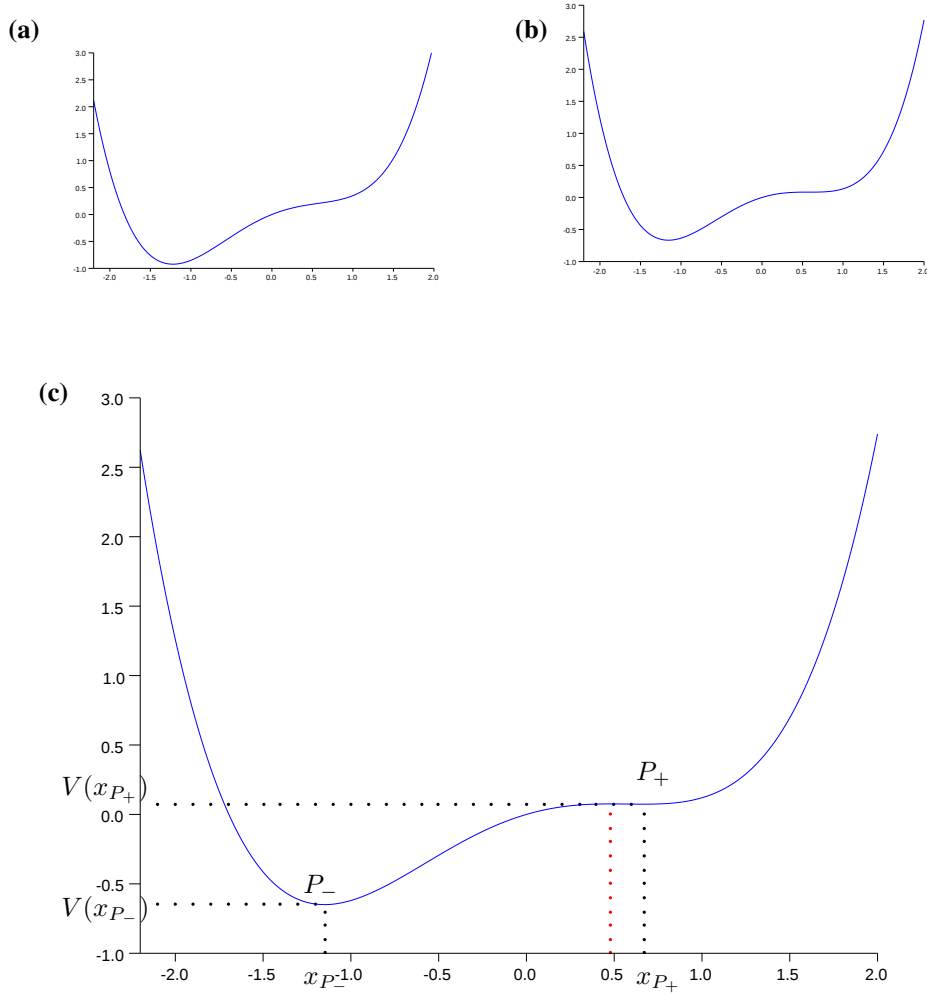


FIGURE 1.2. Graphique du potentiel V défini en (1.2.8) avec $\varepsilon = 0.01$ et en **(a)** $a = -0.6$, en **(b)** $a = -2/3\sqrt{3} \approx -0.38$ et en **(c)** $a = -0.37$.

où le point désigne alors la dérivée par rapport au nouveau temps t' . Quitte à faire ces changements, nous pouvons donc prendre $b = 1$ dans le système (1.0.1) et étudier le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{\varepsilon} (x - x^3 + y) \\ \dot{y} &= a - x - cy \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Nous commençons par étudier le cas $c = 0$ pour que les calculs soient assez simples. Nous pouvons alors donner la nature des points d'équilibre suivant la valeur de a puis étudier le comportement de la solution au voisinage d'un point d'équilibre quand celui-ci est stable. Nous revenons ensuite au cas général. Nous regardons en particulier pour quelles valeurs de paramètres le système (1.3.2) a un point de bifurcation de Hopf. Enfin nous introduisons un système de coordonnées qui nous permettra d'étudier le comportement de la solution au voisinage de ce point de bifurcation.

1.3.1 Cas particulier où $c = 0$

Afin de limiter le nombre de variables, nous fixons dans un premier temps $c = 0$. Nous allons calculer le point d'équilibre et étudier sa nature suivant la valeur des paramètres a et ε .

Proposition 1.3.1. *Le système (1.3.2) a un unique point d'équilibre $P(x^*, y^*)$ qui a pour coordonnées :*

$$(x^*, y^*) = (a, a^3 - a) \quad (1.3.3)$$

Soit

$$\delta = \frac{3a^2 - 1}{2} \quad (1.3.4)$$

- si $\delta < \sqrt{\varepsilon}$, P est un noeud instable.
- si $\sqrt{\varepsilon} < \delta < 0$, P est un foyer instable.
- si $\delta = 0$, P est un point de bifurcation de Hopf.
- si $0 < \delta < -\sqrt{\varepsilon}$, P est un foyer stable.
- si $-\sqrt{\varepsilon} < \delta$, P est un noeud stable.

PREUVE. Nous pouvons réécrire le système sous la forme :

$$\dot{X} = F(X) \quad (1.3.5)$$

où X est le vecteur ligne (x, y) et F une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$F(X) = F(x, y) = \left(\frac{1}{\varepsilon} (x - x^3 + y), a - x \right) \quad (1.3.6)$$

Les points d'équilibre (x^*, y^*) vérifient l'équation $F(x^*, y^*) = 0$. Ce système a une unique solution :

$$(x^*, y^*) = (a, a^3 - a) \quad (1.3.7)$$

Pour déterminer la nature de ce point d'équilibre, nous calculons les valeurs propres de la matrice jacobienne au point d'équilibre. La matrice jacobienne est

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}(1 - 3x^2) & \frac{1}{\varepsilon} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.8)$$

La jacobienne au point d'équilibre est donc

$$DF(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}(1 - 3a^2) & \frac{1}{\varepsilon} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.9)$$

Nous calculons le polynôme caractéristique de la matrice $DF(x^*, y^*)$ puis ses racines pour déterminer les valeurs propres. Le polynôme caractéristique de $DF(x^*, y^*)$ est

$$P(X) = X^2 - \frac{1}{\varepsilon}(1 - 3a^2)X + \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.3.10)$$

Les valeurs propres sont donc

$$\mu_{\pm} = \frac{1 - 3a^2 \pm \sqrt{(1 - 3a^2)^2 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} \quad (1.3.11)$$

Posons

$$\delta = \frac{3a^2 - 1}{2} \quad (1.3.12)$$

Les valeurs propres se réécrivent alors :

$$\mu_{\pm} = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \varepsilon}}{\varepsilon} \quad (1.3.13)$$

Nous avons alors cinq cas différents :

- $\delta \leq \sqrt{\varepsilon}$, les deux valeurs propres sont réelles et positives. Le point d'équilibre est un noeud instable.
- $0 > \delta > \sqrt{\varepsilon}$, les deux valeurs propres sont complexes, à partie réelle positive. Le point d'équilibre est un foyer instable.
- $\delta = 0$, les deux valeurs propres sont imaginaires pures. Le point d'équilibre est un centre.
- $-\sqrt{\varepsilon} > \delta > 0$, les deux valeurs propres sont complexes, à partie réelle négative. Le point d'équilibre est un foyer stable.
- $\delta \geq -\sqrt{\varepsilon}$, les deux valeurs propres sont réelles et négatives. Le point d'équilibre est un noeud stable.

■

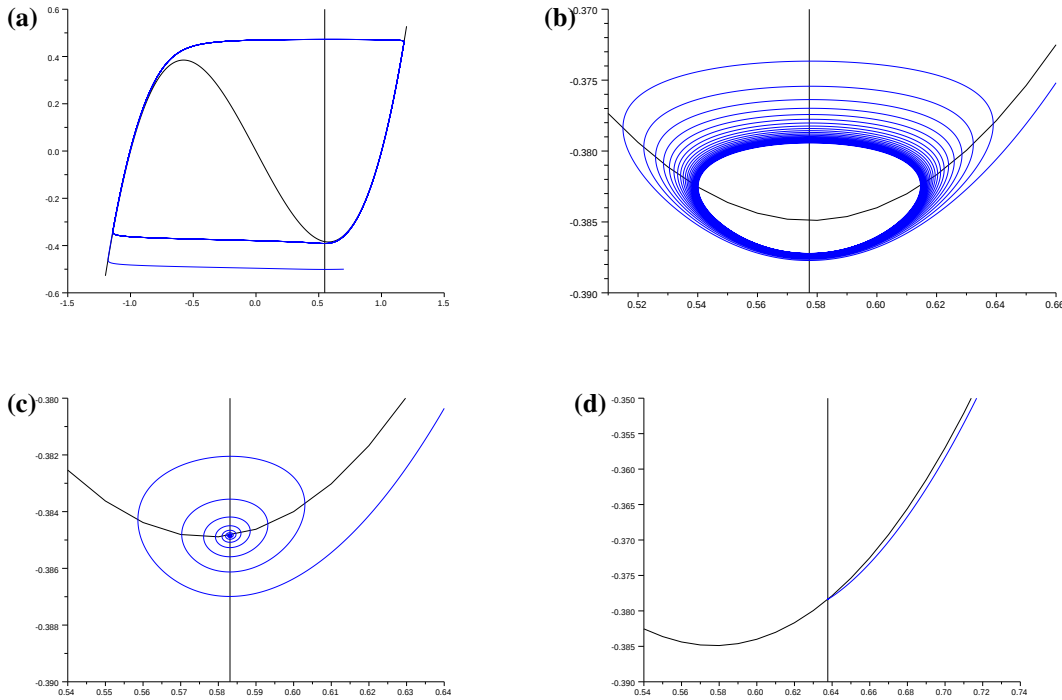


FIGURE 1.3. Exemples de solutions de l'équation de FitzHugh-Nagumo (1.0.1). Les courbes bleues montrent la solution en coordonnées (x, y) et les courbes noires la cubique telle que $\dot{x} = 0$ et la droite telle que $\dot{y} = 0$. Les valeurs de paramètres sont $\varepsilon = 0.01$ et en (a) $\delta = -0.05$, (b) $\delta = 0$, (c) $\delta = 0.01$, (d) $\delta = 0.11$.

Nous illustrons ces résultats sur la figure 1.3. En (a), nous avons toute la trajectoire alors qu'en (b), (c) et (d), nous avons un gros plan sur le comportement au voisinage du point d'équilibre. Quand le point d'équilibre est instable ($\delta < 0$), la trajectoire tend vers un grand cycle limite (figure 1.3 (a)). Nous pouvons voir que la variable x est la variable rapide : quand la trajectoire s'éloigne de la cubique, la courbe est presque parallèle à

l'axe des x . Quand le point d'équilibre est stable ($\delta \geq 0$), nous avons trois comportements différents. Si $\delta = 0$ (figure 1.3 (b)), le point d'équilibre est un point de bifurcation de Hopf et la trajectoire tend vers un petit cycle limite autour du point d'équilibre. Si $0 < \delta < -\sqrt{\varepsilon}$ (figure 1.3 (c)), la trajectoire s'enroule autour du point d'équilibre. Dans le dernier cas, le point d'équilibre est très attractif et la trajectoire va directement sur le point d'équilibre (figure 1.3 (d)).

Nous allons étudier l'allure de la trajectoire au voisinage du point d'équilibre. Nous commençons par translater l'origine des coordonnées au point d'équilibre P de coordonnées (x^*, y^*) . Nous faisons donc le changement de variables :

$$\begin{aligned} x &= x^* + u \\ y &= y^* + v \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Le système (1.3.2) avec $c = 0$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u} &= (1 - 3a^2)u + v - 3a u^2 - u^3 \\ \dot{v} &= -u \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Le point d'équilibre P a alors pour coordonnées $(u, v) = (0, 0)$. Regardons une approximation valable au voisinage du point d'équilibre. Si u et v sont petits, nous pouvons, en première approximation, négliger les termes en u^2 et u^3 car $u^3 \ll u^2 \ll u \ll 1$. Le système (1.3.15) se comporte alors comme le système

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u} &= (1 - 3a^2)u + v \\ \dot{v} &= -u \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Nous allons montrer que dans le cas où la matrice jacobienne $DF(x^*, y^*)$ a deux racines complexes conjuguées avec une partie réelle négative, la solution de (1.3.16) est une spirale logarithmique.

Proposition 1.3.2. *Il existe un changement de variables $(u, v) \mapsto (r, \theta)$ en coordonnées de type polaire tel que le système (1.3.16) avec la condition initiale $r_0 e^{i\theta_0}$ ait pour solution*

$$\begin{aligned} r &= r_0 e^{-\mu_R t} \\ \theta &= \theta_0 + \mu_I t \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

où μ_R et μ_I sont deux réels strictement positifs définis en fonction du paramètre δ par :

$$\mu_R = \frac{\delta}{\varepsilon} \quad (1.3.18)$$

$$\mu_I = \frac{\sqrt{\varepsilon - \delta^2}}{\varepsilon} \quad (1.3.19)$$

PREUVE. La matrice jacobienne $DF(x^*, y^*)$ au point d'équilibre a deux racines réelles complexes avec une partie réelle négative. Nous avons donc

$$0 < \delta < \sqrt{\varepsilon} \quad (1.3.20)$$

Nous pouvons alors écrire les valeurs propres de la matrice $DF(x^*, y^*)$ sous la forme

$$\mu_{\pm} = -\mu_R \pm i\mu_I \quad (1.3.21)$$

Nous avons en particulier la relation entre μ_R et μ_I :

$$\mu_R^2 + \mu_I^2 = \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.3.22)$$

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\mu_{\pm}$ sont les vecteurs :

$$V_{\pm} = \begin{pmatrix} \frac{-\delta \mp i\sqrt{\varepsilon - \delta^2}}{\varepsilon} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.3.23)$$

Prenons alors la matrice de changement de base Q qui permet d'obtenir la réduction de Jordan J de la matrice $DF(x^*, y^*)$ dans $\mathbb{R}$. Q est définie par

$$Q = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} -\delta & \sqrt{\varepsilon - \delta^2} \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_R & \mu_I \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.24)$$

L'inverse de la matrice Q est donnée par :

$$Q^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - \delta^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & -\delta \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_I} \begin{pmatrix} 0 & \mu_I \\ 1 & \mu_R \end{pmatrix} \quad (1.3.25)$$

La matrice $DF(x^*, y^*)$ dans cette base est alors :

$$J = Q^{-1}DF(x^*, y^*)Q = \begin{pmatrix} -\mu_R & -\mu_I \\ \mu_I & -\mu_R \end{pmatrix} \quad (1.3.26)$$

Le système (1.3.16) peut s'écrire

$$\dot{U} = DF(x^*, y^*)U \quad (1.3.27)$$

où U est le vecteur colonne

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1.3.28)$$

Nous pouvons écrire ce système linéaire

$$Q^{-1}\dot{U} = JQ^{-1}U \quad (1.3.29)$$

En faisant le changement de variable

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = Q^{-1}U \quad (1.3.30)$$

Nous obtenons l'équation :

$$\dot{\Xi} = J\Xi \quad (1.3.31)$$

En posant,

$$z = \xi + i\zeta \quad (1.3.32)$$

nous trouvons l'équation

$$\dot{z} = (-\mu_R + i\mu_I)z \quad (1.3.33)$$

La solution générale de cette équation est :

$$z(t) = z_0 e^{-\mu_R t} e^{i\mu_I t} \quad (1.3.34)$$

En coordonnées polaires, si nous posons $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, nous obtenons la courbe donnée par le système (1.3.17). Le réel μ_R est positif et non nul. Nous avons alors une spirale logarithmique.

■

1.3.2 Cas général

Nous revenons maintenant au cas général ($b \neq 0$ et $c \neq 0$) avec l'équation (1.3.2). Les solutions étant moins explicites, nous n'allons pas distinguer les différents cas comme pour $c = 0$. En effet, les racines du polynôme caractéristique ne sont pas faciles à exprimer. Nous commençons par calculer les points d'équilibre. Les coordonnées d'un point d'équilibre (x^*, y^*) vérifient le système

$$\begin{aligned} x^* - (x^*)^3 + y^* &= 0 \\ a - x^* - cy^* &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.35)$$

Ils correspondent à l'intersection d'une cubique avec une droite. Le système (1.3.2) a donc au moins un point d'équilibre. Il peut en avoir de un à trois suivant l'inclinaison de la droite et son ordonnée à l'origine.

Proposition 1.3.3. *Les coordonnées d'un point d'équilibre P peuvent se mettre sous la forme $(\alpha, \alpha^3 - \alpha)$ avec α qui vérifie la relation*

$$\alpha + c(\alpha^3 - \alpha) = a \quad (1.3.36)$$

PREUVE. L'ensemble des points de la cubique peut s'écrire sous la forme $\{(x, x^3 - x), x \in \mathbb{R}\}$. Un point de coordonnées $(\alpha, \alpha^3 - \alpha)$ vérifie la première équation de (1.3.2) et est donc un point d'équilibre si et seulement si il vérifie la deuxième équation, c'est à dire si α vérifie l'équation (1.3.36). ■

Nous allons en particulier regarder les cas où le système (1.3.2) admet un point de bifurcation de Hopf.

Proposition 1.3.4. *Soit*

$$\alpha_* = \sqrt{\frac{1 - c\varepsilon}{3}}. \quad (1.3.37)$$

Si $c^2 < 1/\varepsilon$, le système (1.3.2) admet un point de bifurcation de Hopf pour $\alpha = \pm\alpha_$.*

PREUVE. La matrice jacobienne du champ de vecteur associé au système (1.3.2) au point d'équilibre P est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1 - 3\alpha^2}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \\ -1 & -c \end{pmatrix} \quad (1.3.38)$$

Le déterminant de cette matrice jacobienne J est alors

$$\det J = \frac{1 - c(1 - 3\alpha^2)}{\varepsilon} \quad (1.3.39)$$

et sa trace est

$$\text{Tr} J = \frac{1 - 3\alpha^2 - c\varepsilon}{\varepsilon} \quad (1.3.40)$$

Au niveau d'un point de bifurcation de Hopf, les valeurs propres sont imaginaires pures conjuguées et près de ce point, la partie réelle de ces valeurs propres change de signe. Au niveau de la matrice jacobienne J , cela se traduit par une trace nulle et un déterminant strictement positif. Nous avons donc les conditions

$$\begin{aligned} 1 - 3\alpha^2 - c\varepsilon &= 0 \\ 1 - c(1 - 3\alpha^2) &> 0 \end{aligned} \quad (1.3.41)$$

En utilisant la première ligne, nous pouvons remplacer $1 - 3\alpha^2$ par $c\varepsilon$ dans l'inégalité et nous obtenons la condition

$$c^2 < \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.3.42)$$

L'égalité permet d'obtenir α en fonction de c et ε :

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - c\varepsilon}{3}} \quad (1.3.43)$$

Dans ce cas α est bien réel. En effet, ε étant plus petit que 1, $1/\sqrt{\varepsilon} \leq 1/\varepsilon$ et comme nous sommes dans le cas où $c < 1/\sqrt{\varepsilon}$, nous avons $1 - c\varepsilon > 0$. En utilisant la notation

$$\alpha_* = \sqrt{\frac{1 - c\varepsilon}{3}}, \quad (1.3.44)$$

nous pouvons écrire $\text{Tr}J$ sous la forme

$$\text{Tr}J = \frac{3(\alpha_*^2 - \alpha^2)}{\varepsilon} \quad (1.3.45)$$

Au voisinage de α_* , la partie réelle des valeurs propres est donc de l'ordre de $(\alpha_* - \alpha)/\varepsilon$. Elle change donc de signe en α_* et nous avons bien un point de bifurcation de Hopf.

■

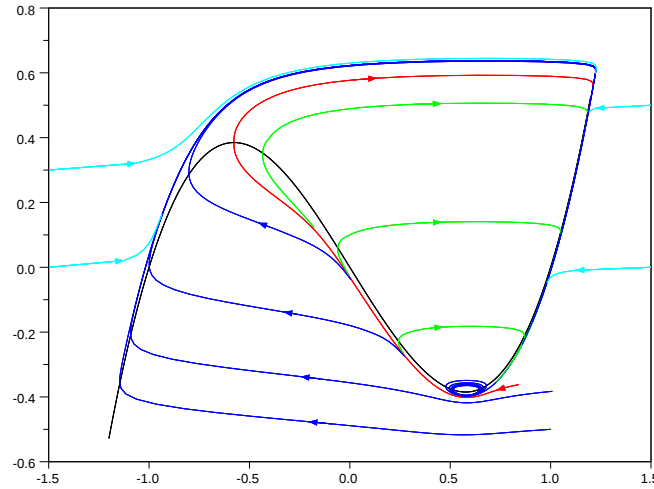


FIGURE 1.4. Quelques orbites de l'équation de FitzHugh-Nagumo déterministe (1.0.1) pour $\varepsilon = 0.05$ et $a = 0.58$, $b = 1$, $c = 0$. L'orbite rouge est la séparatrice.

Nous allons particulièrement étudier le régime où $\alpha - \alpha_*$ est petit et positif ($0 < \alpha - \alpha_* \ll 1$). Dans ce cas, nous sommes proches du point de bifurcation de Hopf et la partie réelle des valeurs propres de la matrice jacobienne est négative. Le point P est alors un foyer stable qui correspond à un neurone au repos. Dans ce régime, le système est dit excitable. En effet, si on perturbe un peu la condition initiale au voisinage du point d'équilibre, en diminuant la coordonnée y , le système fait une grande excursion dans la région où x est négatif avant d'aller au point P . Cette excursion correspond alors à un spike pour le potentiel de la membrane d'un neurone suivi d'un retour au repos en faisant des oscillations de petites amplitudes (SAOs). L'amplitude décroît de façon exponentielle.

1.3.3 Changement de coordonnées

Nous transformons le système initial (1.0.1) sous une forme plus appropriée pour obtenir des résultats quantitatifs. Comme nous l'avons vu dans les sections 1.3.1 et 1.3.2, le voisinage du point de bifurcation joue un rôle important dans la dynamique de la trajectoire.

Proposition 1.3.5. *L'équation de FitzHugh-Nagumo (1.0.1) peut se mettre sous la forme*

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \frac{1}{2} - z + \sqrt{\varepsilon} \left(c\xi - \frac{1}{9\alpha_*^2} \xi^3 \right) \\ \dot{z} &= \mu + 2\xi z + \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{2}{9\alpha_*^2} \xi^4 + c \left(\frac{1}{2} - 3\xi^2 - z \right) \right)\end{aligned}\tag{1.3.46}$$

où μ est une constante définie par

$$\mu = \frac{3\alpha_* (a - \alpha_* - c(\alpha_*^3 - \alpha_*))}{\sqrt{\varepsilon}}\tag{1.3.47}$$

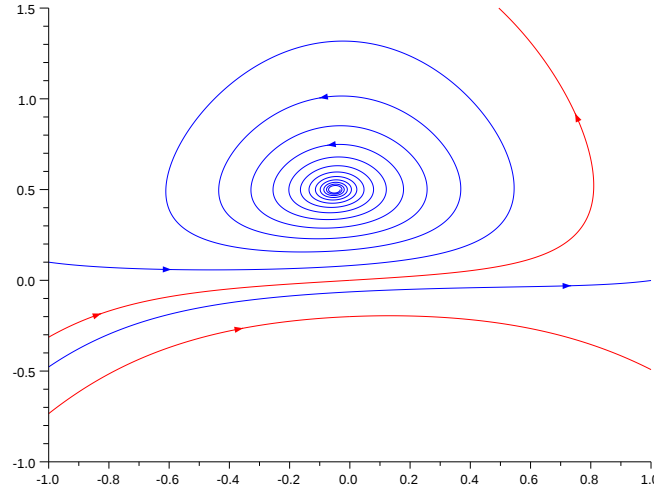


FIGURE 1.5. Quelques orbites de l'équation déterministe (1.3.46) en coordonnées (ξ, z) pour $\varepsilon = 0.01$ et $\mu = 0.05$.

PREUVE. La transformation du système (1.0.1) au système (1.3.46) se décompose en cinq étapes : un changement d'origine, un changement d'échelle, un changement de temps, un changement de variable non-linéaire et un nouveau changement d'échelle.

1. Commençons par la transformation affine

$$\begin{aligned}x &= u + \alpha_* \\ y &= v + \alpha_*^3 - \alpha_*\end{aligned}\tag{1.3.48}$$

Cette transformation correspond à la translation du point de bifurcation à l'origine. Le système (1.0.1) s'écrit en coordonnées (u, v) :

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{u} &= u + \alpha_* - (u + \alpha_*)^3 + v + \alpha_*^3 - \alpha_* \\ \dot{v} &= a - (u + \alpha_*) - c(v + \alpha_*^3 - \alpha_*)\end{aligned}\tag{1.3.49}$$

En développant, simplifiant et regroupant les termes, nous avons

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{u} &= (1 - 3\alpha_*^2)u + v - 3\alpha_* u^2 - u^3 \\ \dot{v} &= a - \alpha_* - c(\alpha_*^3 - \alpha_*) - u - cv\end{aligned}\tag{1.3.50}$$

En utilisant la relation $1 - 3\alpha_*^2 = c\varepsilon$ et en posant

$$\delta = a - \alpha_* - c(\alpha_*^3 - \alpha_*),\tag{1.3.51}$$

nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{u} &= v - 3\alpha_* u^2 - u^3 + c\varepsilon u \\ \dot{v} &= \delta - u - cv\end{aligned}\tag{1.3.52}$$

En utilisant la relation (1.3.36), la constante δ se réécrit sous la forme

$$\delta = \alpha - \alpha_* + c(\alpha^3 - \alpha_*^3 - \alpha + \alpha_*)\tag{1.3.53}$$

Nous pouvons alors mettre $\alpha - \alpha_*$ en facteur et nous obtenons :

$$\delta = (\alpha - \alpha_*) (1 + c(\alpha^2 + \alpha\alpha_* + \alpha_*^2 - 1))\tag{1.3.54}$$

La variable δ est donc d'ordre $\alpha - \alpha_*$ au voisinage du point de bifurcation et mesure la distance entre les abscisses du point d'équilibre et du point de bifurcation.

2. La deuxième transformation est le changement d'échelle suivant :

$$\begin{aligned}u &= \sqrt{\varepsilon} \xi \\ v &= \varepsilon \eta\end{aligned}\tag{1.3.55}$$

Ce changement conduit au système

$$\begin{aligned}\varepsilon^{3/2} \dot{\xi} &= \varepsilon \eta - 3\alpha_* \varepsilon \xi^2 - \varepsilon^{3/2} \xi^3 - c\varepsilon^{3/2} \xi \\ \varepsilon \dot{\eta} &= \delta - \sqrt{\varepsilon} \xi - c\varepsilon \eta\end{aligned}\tag{1.3.56}$$

En divisant la première ligne par ε et la seconde par $\sqrt{\varepsilon}$, nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\sqrt{\varepsilon} \dot{\xi} &= \eta - 3\alpha_* \xi^2 + \sqrt{\varepsilon}(c\xi - \xi^3) \\ \sqrt{\varepsilon} \dot{\eta} &= \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} - \xi - c\sqrt{\varepsilon} \eta\end{aligned}\tag{1.3.57}$$

3. Maintenant que nous avons les mêmes constantes devant les deux dérivées, nous faisons le changement de temps

$$t = \sqrt{\varepsilon} t'\tag{1.3.58}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \eta - 3\alpha_* \xi^2 + \sqrt{\varepsilon}(c\xi - \xi^3) \\ \dot{\eta} &= \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} - \xi - c\sqrt{\varepsilon} \eta\end{aligned}\tag{1.3.59}$$

où les points indiquent maintenant la dérivée par rapport à t' . Nous remarquons que la ligne de niveau $\dot{\xi} = 0$ est proche de la parabole d'équation $\eta = 3\alpha_* \xi^2$.

4. Nous faisons le changement de variable non-linéaire :

$$\eta = 3\alpha_*\xi^2 + z - \frac{1}{6\alpha_*}. \quad (1.3.60)$$

Cette transformation a pour effet de redresser la ligne de niveau évoquée précédemment. La première équation du système (1.3.59) devient alors :

$$\dot{\xi} = z - \frac{1}{6\alpha_*} - \sqrt{\varepsilon}(c\xi + \xi^3) \quad (1.3.61)$$

La deuxième équation portant sur $\dot{z}$ s'obtient en écrivant

$$\dot{z} = \dot{\eta} - 6\alpha_*\xi\dot{\xi} \quad (1.3.62)$$

En remplaçant $\dot{\eta}$ et $\dot{\xi}$ par leur expression, nous avons

$$\dot{z} = \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} - \xi - c\sqrt{\varepsilon}\left(3\alpha_*\xi^2 + z - \frac{1}{6\alpha_*}\right) - 6\alpha_*\xi\left(z - \frac{1}{6\alpha_*} + \sqrt{\varepsilon}(c\xi - \xi^3)\right) \quad (1.3.63)$$

En développant et en regroupant les termes nous obtenons,

$$\dot{z} = \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} - 6\alpha_*\xi z + \sqrt{\varepsilon}\left(-c\left(3\alpha_*\xi^2 + z - \frac{1}{6\alpha_*}\right) - 6\alpha_*\xi(c\xi - \xi^3)\right) \quad (1.3.64)$$

Nous avons donc le système en coordonnées (ξ, z) :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= z - \frac{1}{6\alpha_*} + \sqrt{\varepsilon}(c\xi - \xi^3) \\ \dot{z} &= \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} - 6\alpha_*\xi z + \sqrt{\varepsilon}\left(6\alpha_*\xi^4 + c\left(\frac{1}{6\alpha_*} - 9\alpha_*\xi^2 - z\right)\right) \end{aligned} \quad (1.3.65)$$

5. Pour terminer nous remplaçons ξ par $-\xi/3\alpha_*$ et z par $z/3\alpha_*$. Le changement d'échelle permet d'avoir des constantes qui ne dépendent plus de α_* devant les termes principaux. Le changement de signe pour ξ change le sens de la trajectoire qui est maintenant de la gauche vers la droite. Nous obtenons le système

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{1}{2} - z + \sqrt{\varepsilon}\left(c\xi - \frac{1}{9\alpha_*^2}\xi^3\right) \\ \dot{z} &= \frac{3\alpha_*\delta}{\sqrt{\varepsilon}} + 2\xi z + \sqrt{\varepsilon}\left(\frac{2}{9\alpha_*^2}\xi^4 + c\left(\frac{1}{2} - 3\xi^2 - z\right)\right) \end{aligned} \quad (1.3.66)$$

Pour terminer, nous introduisons le paramètre μ défini par

$$\mu = \frac{3\alpha_*\delta}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (1.3.67)$$

et nous obtenons ainsi le système (1.3.46) de la proposition. ■

Remarque 1. Nous étudions dans un cas particulier la distance entre une ligne séparatrice et le point d'équilibre. Commençons par définir une courbe séparatrice qui permet de distinguer un spike et une période de repos. Nous choisissons la courbe qui passe par l'autre point de bifurcation de la cubique pour l'équation déterministe

(1.0.1), qui est la courbe rouge sur la figure 1.4. Nous considérons que si une trajectoire coupe cette courbe séparatrice, alors nous avons un spike. Nous montrons dans cette partie que la distance entre la courbe séparatrice et le point d'équilibre est de l'ordre de ε .

En prenant le système à l'étape 3 de la Preuve de la proposition 1.3.5 dans le cas où $c = 0$ et où le point d'équilibre et le point de bifurcation de Hopf sont confondus, nous avons alors $\alpha_* = 1/\sqrt{3}$ et $\delta = 0$, le système (1.3.59) s'écrit alors

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \eta - \sqrt{3}\xi^2 - \sqrt{\varepsilon} - \xi^3 \\ \dot{\eta} &= -\xi\end{aligned}\tag{1.3.68}$$

Ainsi les termes jusqu'à l'ordre 2 ne dépendent plus du paramètre ε . Au voisinage du point d'équilibre, le terme en x^3 peut être négligé. La trajectoire coupe l'axe des ordonnées en $-c_1$ et c_2 et l'axe des abscisses en $-c_3$. Les variables c_1 , c_2 et c_3 sont des réels positifs. Nous ne connaissons pas leurs valeurs ou leurs expressions, mais nous savons qu'elles ne dépendent pas de ε . Si nous revenons aux coordonnées (u, v) , qui correspondent aux coordonnées (x, y) après changement d'origine, en faisant les changements de variables dans l'autre sens, nous obtenons que la trajectoire coupe l'axe des ordonnées en $-c_1\varepsilon$ et $c_2\varepsilon$ et l'axe des abscisses en $-c_3\sqrt{\varepsilon}$. Le paramètre ε étant petit, nous obtenons que la distance entre le point d'équilibre et la courbe retour est au moins en $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

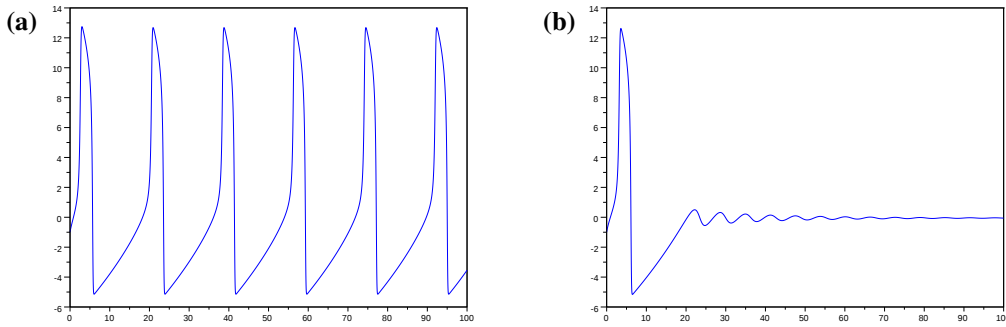


FIGURE 1.6. Deux exemples de représentation de ξ en fonction du temps. Les valeurs des paramètres sont $\varepsilon = 0.01$ et **(a)** $\mu = -0.2$ et **(b)** $\mu = 0.05$

Avant d'étudier analytiquement le système (1.3.46), nous regardons son comportement numériquement. Nous retrouvons les deux comportements que nous avons pour l'équation en coordonnées (x, y) . La variable μ est proportionnelle à δ donc à la distance entre le point d'équilibre et le point de bifurcation. Pour des valeurs de μ telles que $\mu < 0$, nous avons une suite de spikes (figure 1.6 (a)). Pour μ positif, nous avons des petites oscillations amorties. Le coefficient d'amortissement dépend de la valeur de μ . Plus μ est grand, plus l'amortissement est important. La trajectoire peut commencer avec une partie de spike en prenant des conditions initiales particulières (figure 1.6 (b)).

Pour étudier la dynamique autour du point d'équilibre, nous allons négliger dans (1.3.46) les termes en $\sqrt{\varepsilon}$, c'est à dire prendre $\varepsilon = 0$, et prendre $\mu = 0$.

1.3.4 Intégrale première dans le cas $\mu = \varepsilon = 0$

Si nous prenons $\mu = \varepsilon = 0$ dans les équations (1.3.46), nous obtenons le système très simple

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \frac{1}{2} - z \\ \dot{z} &= 2\xi z\end{aligned}\tag{1.3.69}$$

Le point d'équilibre est alors le point de coordonnées $(0, 1/2)$. Nous observons que la ligne $z = 0$ est invariante, c'est à dire que si nous prenons une condition initiale telle que $z_0 = 0$ alors pour tout temps t nous aurons $z(t) = 0$. Les orbites partant avec $\{z < 0\}$ vont vers $-\infty$, ce qui correspond à un spike, alors que les orbites partant avec $z > 0$ tournent autour du point d'équilibre en tendant vers un petit cycle limite, ce qui correspond à des SAOs. La ligne $\{z = 0\}$ est donc la séparatrice entre les deux régimes. Ce sont les termes négligés en $\sqrt{\varepsilon}$ qui permettent à la trajectoire de revenir vers le point d'équilibre.

La simplicité du système (1.3.69) permet de trouver une intégrale première :

Lemme 1.3.6. *L'intégrale première de l'équation (1.3.69) qui prend des valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ pour $z \geq 0$ est donnée par :*

$$K = 2ze^{-2(z+\xi^2+1)}\tag{1.3.70}$$

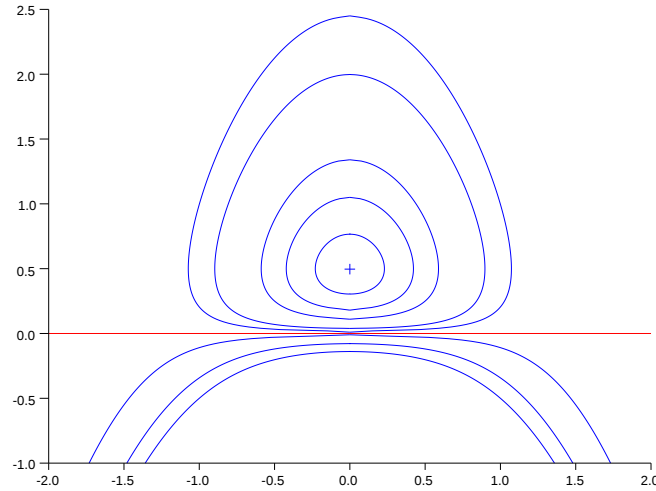


FIGURE 1.7. Quelques lignes de niveau pour K constant. En rouge, la ligne $K = 0$. Pour les z positif, $K = 0.1, 0.2, 0.5, 0.7, 0.9, 1$, de l'extérieur vers le centre. Pour les z négatifs, $K = -0.1, -0.5, -1$.

PREUVE. Calculons $dz/d\xi$ pour trouver une intégrale première du système (1.3.69).

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{2\xi z}{\frac{1}{2} - z}\tag{1.3.71}$$

L'équation différentielle (1.3.71) est à variable séparable, et en intégrant, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \log |z| - z = \xi^2 + C\tag{1.3.72}$$

où C est une constante. En multipliant par deux puis en passant à l'exponentiel, nous obtenons :

$$K_1 = |z|e^{-2(z+\xi^2)} \quad (1.3.73)$$

Pour $z \geq 0$, nous pouvons écrire $K = f(z)g(\xi)$ avec $f(z) = ze^{-2z}$ et $g(\xi) = e^{-\xi^2}$. Étudions les extremum de K . Comme K est positive, g étant bornée et $f(0) = 0$, le minimum est 0. Il est atteint pour $(\xi, z) \in \mathbb{R} \times 0$. La fonction g a pour maximum 1 atteint pour $\xi = 0$. La fonction dérivée de la fonction f est $f'(z) = (1 - 2z)e^{-2z}$. La fonction f atteint donc son maximum pour $z = 1/2$ et $f(1/2) = e^{-1}/2$. Le maximum pour K est donc $e^{-1}/2$, le produit du maximum de f et du maximum de g . Pour que K soit dans l'intervalle $[0, 1]$, nous multiplions l'équation (1.3.73) par 2 e. En prenant K à valeur dans $\mathbb{R}$ tel que $K < 0$ pour $z < 0$ et $K > 0$ pour $z > 0$, nous obtenons le résultat du lemme. ■

Nous distinguons suivant les valeurs de K les quatre cas suivants :

- $K = 1$ correspond au point d'équilibre du système.
- $0 < K < 1$, la ligne de niveau est fermée autour du point d'équilibre.
- $K = 0$, cette ligne de niveau correspond à la séparatrice entre les lignes de niveau qui tournent autour du point d'équilibre ($K > 0$) et celles qui partent à l'infini ($K < 0$).
- $K < 0$

Nous utiliserons cette intégrale première dans la section 5.2 pour définir un autre système de coordonnées qui permet d'étudier la trajectoire quand celle-ci s'enroule autour du point d'équilibre.

Remarque 2. Dans cette remarque, nous ne supposons plus que μ est nul. Nous estimons l'ordonnée du premier passage à l'origine de la trajectoire et montrons qu'elle est d'ordre μ dans le cas où $\sqrt{\varepsilon} \ll \mu^2$. Nous pouvons ainsi négliger les termes en $\sqrt{\varepsilon}$ dans le système (1.3.46). Au voisinage de $\xi = 0$, ξ est borné d'ordre 1. Nous étudions donc le système

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{1}{2} - z + \mathcal{O}(\mu) \\ \dot{z} &= \mu + 2\xi z + \mathcal{O}(\mu) \end{aligned} \quad (1.3.74)$$

L'ordonnée à l'origine $z(\xi = 0)$ du système (1.3.74) pour une condition initiale $(\xi(0), z(0)) = (\xi_0, 0)$, avec ξ_0 d'ordre 1, est de l'ordre de μ .

Si nous considérons que z est petit, nous pouvons négliger z devant $1/2$. Nous avons alors l'approximation

$$\frac{dz}{d\xi} = 2(\mu + 2\xi z) \quad (1.3.75)$$

Nous pouvons réécrire cette équation sous la forme

$$\dot{z} - 4\xi z = 2\mu \quad (1.3.76)$$

où le point désigne ici la dérivée par rapport à ξ . En utilisant la méthode de la variation de la constante, nous obtenons

$$z(\xi) = 2\mu \left(\int_{\xi_0}^{\xi} e^{-2t^2} dt \right) e^{2\xi^2} \quad (1.3.77)$$

Cela nous donne pour ordonnée à l'origine

$$z(0) = 2\mu \int_{\xi_0}^0 e^{-2t^2} dt \quad (1.3.78)$$

L'intégrale $\int_{\xi_0}^0 e^{-2t^2} dt$ étant bornée, nous avons alors que $z(0)$ au premier passage est de l'ordre de μ .

$$z(0) = \mathcal{O}(\mu) \quad (1.3.79)$$

1.4 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre que nous connaissons le comportement général des solutions en dehors du voisinage des points d'équilibre stable. Dans le cas où $b = 0$, nous avons pu distinguer trois cas. Par la suite, nous nous placerons dans le cas où a est compris entre $-2/3\sqrt{3}$ et $-2/3\sqrt{3}$. En effet dans ce cas, le système est excitable : il existe des trajectoires qui passent proche du point d'équilibre P_1 mais se terminent au point d'équilibre P' . L'ajout d'un bruit dans le système pourra donc permettre à une trajectoire de s'échapper du voisinage du point P_2 pour aller vers le point P' . Nous allons étudier dans le chapitre 2 le temps pour sortir du voisinage de P_2 . Ce temps de sortie correspondra au temps pour sortir d'un puits de potentiel introduit dans la figure 1.2.

Dans le cas plus général où $b \neq 0$, nous avons vu que, pour certaines valeurs des paramètres, le système admet un point d'équilibre stable proche du point de bifurcation de Hopf. Dans ce cas, le système est excitable. Dans les chapitres suivants, nous ajouterons des termes de bruit à chaque équation du système. Ceci permettra à la trajectoire de sortir du voisinage du point d'équilibre et de décrire un grand cycle avant de revenir au point d'équilibre, ce qui correspond à un spike. Nous avons également introduit un nouveau système de coordonnées qui nous a permis de calculer une intégrale première de la trajectoire. Nous utiliserons ces résultats pour étudier le comportement des solutions au voisinage du point d'équilibre dans le cas du système stochastique.

Chapitre 2

Système découplé stochastique

Dans ce chapitre nous ajoutons un terme de bruit au système (1.2.2) :

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} (x_t - x_t^3 + y_t) dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t \\ dy_t &= (a - y_t) dt \end{aligned} \quad (2.0.1)$$

où W_t est un mouvement brownien standard et σ_1 est un petit paramètre qui mesure l'intensité du bruit. Nous pouvons résoudre l'équation déterministe portant sur y_t puis remplacer y_t dans la première équation. Nous obtenons ainsi une équation différentielle stochastique unidimensionnelle sur x_t . Les théorèmes généraux (voir par exemple [Oks95, Chapitre 5, théorème 5.2.1]) nous donnent l'existence et l'unicité d'une solution forte $\{x_t\}_{t \in [0, T]}$ presque sûrement continue.

L'équation différentielle stochastique unidimensionnelle en x_t est une équation différentielle avec potentiel, comme dans le cas de l'équation déterministe. Nous pouvons représenter le phénomène par une bille qui glisse le long du potentiel donné en (1.2.8) et représenté sur la figure 1.2. La dynamique du système déterministe emmène la bille dans l'un des puits de potentiels et le bruit correspond à des petites stimulations de la bille. Si ces stimulations sont suffisamment fortes, la bille peut passer d'un puits de potentiel à l'autre. Si un des puits est trop profond ou si il n'y a qu'un seul puits, les petites stimulations seront insuffisantes et nous aurons des petites oscillations dans le fond du puits de potentiel.

Nous commençons par regarder le comportement numérique des solutions du système (2.0.1) suivant les valeurs de a et σ_1 (partie 2.1). Le système (2.0.1) étant découplé, nous le ramenons à l'étude d'une équation différentielle stochastique d'ordre 1 avec potentiel et nous définissons le temps de sortie d'un puits de potentiel τ qui correspond à l'intervalle entre deux spikes (partie 2.2). A l'aide de la formule de Feynman-Kac ([Oks95]), nous introduisons ensuite plusieurs problèmes aux valeurs propres faisant intervenir le temps de sortie τ . Nous étudions d'abord une équation portant sur l'espérance de ce temps de sortie. Cette équation correspond au cas où la valeur propre est nulle. Nous regardons ensuite le cas général avec une valeur propre λ quelconque. Nous étudions les valeurs possibles pour ces valeurs propres, nous estimons la plus petite valeur propre et minorons les autres (partie 2.4). Ensuite, à l'aide d'une transformée de Laplace inverse, nous estimons la densité du temps de sortie τ (partie 2.5). Nous obtenons dans le théorème 2.3.1 que, pour σ_1 petits, le temps moyen $\mathbb{E}(\tau)$ se comporte en

$$\mathbb{E}(\tau) = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{-V''(x_+)V''(x_-)}} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_-) - V(x_+)]\right) [1 + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2)] \quad (2.0.2)$$

avec V le potentiel

$$V(x) = -\delta x + x^3 + \frac{3}{4}x^4. \quad (2.0.3)$$

Dans la proposition 2.5.2, nous montrons que la loi du temps de sortie τ est asymptotiquement exponentielle et admet une densité f

$$f(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} (1 + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2)) . \quad (2.0.4)$$

Les spikes suivent un processus ponctuel de Poisson. Nous obtenons dans le Lemme 2.4.9 le comportement asymptotique de λ_1 , pour σ_1 petit, suivant :

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{|V''(x_+)V''(x_-)|}}{2\pi\varepsilon} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}[V(x_-) - V(x_+)]\right) (1 + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2)) \quad (2.0.5)$$

Le paramètre λ_1 est défini comme la plus petite valeur propre du problème

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - \lambda) u(x) = -1 \\ u(x_-) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (\text{PB1})$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur différentiel

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{\varepsilon} V'(x) \frac{d}{dx} + \frac{\sigma_1^2}{2\varepsilon} \frac{d^2}{dx^2} . \quad (2.0.6)$$

et L est un réel beaucoup plus grand que x_+ .

2.1 Simulations

Nous avons vu que pour $a = 0$, les puits de potentiels (1.2.8) ont la même hauteur. Celle-ci étant assez grande. En effet, nous pouvons calculer les abscisses des deux points critiques qui sont -1 et 1 . Le minimum est donc $-1/4$. Le maximum local étant 0 . La profondeur est alors de $1/4$. Si nous voulons que la trajectoire sorte d'un de ces puits de potentiels, il faut prendre une amplitude de bruit de l'ordre de $1/4$. C'est le cas dans la simulation de la figure 2.1 (1). Le potentiel prend alors alternativement des valeurs autour de $x_{P_-} = -1$ et de $x_{P_+} = 1$. Nous avons choisi de ne pas représenter la trajectoire en coordonnées (x, y) : le bruit étant assez fort, nous ne pouvons pas distinguer les oscillations et n'avons que deux grosses taches autour des points d'équilibre.

Dans le cas où a est proche de $-2/3\sqrt{3}$ ou de $2/3\sqrt{3}$ en respectivement x_- et x_+ , nous avons un puits peu profond. Un bruit faible est suffisant pour permettre au potentiel de basculer de ce puits vers le puits profond. Ce deuxième puits étant d'une hauteur de l'ordre de 1 , il faudrait un bruit de cet ordre pour en sortir ou attendre un temps très long. Le bruit serait alors du même ordre que les termes du système déterministe associé et la dynamique de celui-ci n'interviendrait alors plus. Dans le cas de la figure 2.1 (2), la trajectoire suit la courbe de l'équation déterministe associé jusqu'au premier point d'équilibre P_+ . Elle reste un moment au voisinage de ce point puis saute vers le deuxième point d'équilibre P_- et reste dans son voisinage définitivement. Nous allons étudier le temps que met la trajectoire pour atteindre ce deuxième point d'équilibre, ce qui revient à avoir le temps passé au voisinage du premier point d'équilibre, les temps de parcours entre ces points étant très petits pour un bruit donné.

2.2 Temps de sortie

2.2.1 Définition

Nous commençons par translater l'origine du repère pour la placer à un des extrema de la cubique $\{x - x^3 + y = 0\}$ qui sont définis par

$$\begin{aligned} x_* - x_*^3 + y_* &= 0 \\ 1 - 3x_*^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

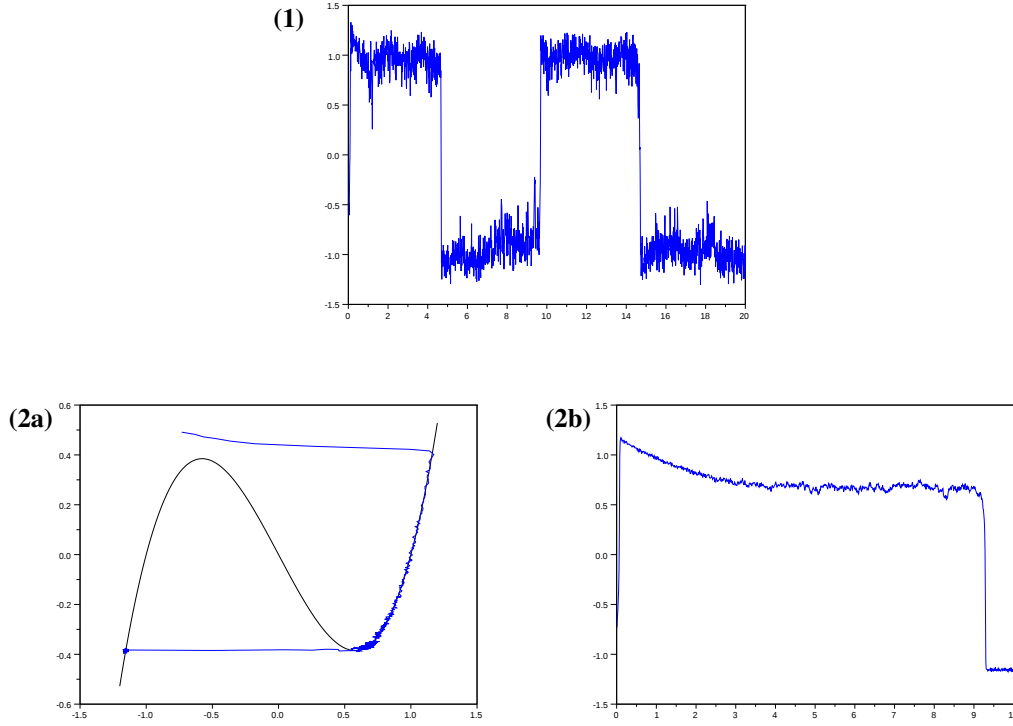


FIGURE 2.1. Exemples de courbes du potentiel x en fonction du temps pour $\varepsilon = 0.01$ avec $a = 0$, $\sigma_1 = 0.2$ en **(1)** et $a = -0.37$, $\sigma_1 = 0.018$ en **(2b)**. La courbe **(2a)** est en coordonnées (x, y) avec les mêmes paramètres qu'en **(2b)**.

Nous distinguerons alors le cas $a < 0$ où nous prendrons $x_* > 0$ et le cas $a > 0$ où nous prendrons $x_* < 0$ pour que l'origine soit proche du premier point d'équilibre.

Lemme 2.2.1. *En faisant un changement d'origine et une renormalisation, le système (1.2.2) se réduit à l'équation différentielle stochastique*

$$dX_t = -\frac{1}{\varepsilon} V'(X_t) dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t \quad (2.2.2)$$

où

$$V(x) = -\delta x + x^3 + \frac{3}{4}x^4 \quad (2.2.3)$$

PREUVE. Nous faisons le changement de variables

$$\begin{aligned} x &= x_* + \frac{X}{x_*} \\ y &= y_* + \frac{Y}{x_*} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

La renormalisation permet d'enlever la dépendance en x_* pour les termes qui dépendent de X_t et Y_t . Le système (1.2.2) devient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_*} dX_t &= \frac{1}{\varepsilon} \left[x_* + \frac{X_t}{x_*} - \left(x_* + \frac{X_t}{x_*} \right)^3 + y_* + \frac{Y_t}{x_*} \right] dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t \\ \frac{1}{x_*} dY_t &= a - y_* - \frac{1}{x_*} Y_t \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

En développant et organisant les termes, nous obtenons

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{1}{\varepsilon} \left[x_* (x_* - x_*^3 + y_*) + (1 - 3x_*^2)X_t - 3X_t^2 - \frac{1}{x_*^2}X_t^3 + Y_t \right] dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t \\ dY_t &= x_*(a - y_*) - Y_t \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

En utilisant les relations (2.2.1) qui définissent (x_*, y_*) , nous avons finalement le système

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{1}{\varepsilon} [-3X_t^2 - 3X_t^3 + Y_t] dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t, \\ dY_t &= \delta - Y_t \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

où nous avons posé

$$\delta = x_*(a - y_*) \quad (2.2.8)$$

La solution de la deuxième équation du système (2.2.7) avec la condition initiale $Y(0) = Y_0$ est

$$Y(t) = \delta - (Y_0 - \delta) e^{-t} \quad (2.2.9)$$

La variable Y tend donc vers δ de façon exponentielle quand t tend vers l'infini. Nous pouvons donc prendre la condition initiale $Y_0 = \delta$ et remplacer Y par δ dans la première équation du système (2.2.7), nous obtenons l'équation en X

$$dX_t = \frac{1}{\varepsilon} [\delta - 3X_t^2 - 3X_t^3] dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t \quad (2.2.10)$$

Nous définissons alors le potentiel

$$V(x) = -\delta x + x^3 + \frac{3}{4}x^4 \quad (2.2.11)$$

■

Nous définissons x_- et x_+ par $V'(x_-) = V'(x_+) = 0$, $x_- < x_+$, $V''(x_-) < 0$ et $V''(x_+) > 0$. x_- correspond donc à l'abscisse du maximum local et x_+ à l'abscisse du minimum local compris entre x_- et L , avec $L \gg x_+$ (voir la figure 2.2). Nous définissons l'abscisse x_-^* tel que $x_+ < x_-^* < L$ et $V(x_-^*) = V(x_-)$.

Nous nous intéressons au premier temps où le potentiel atteindra le deuxième puits. Nous supposons $a < 0$ donc $\delta > 0$. Le potentiel atteint d'abord x_+ . Nous cherchons des résultats sur le premier temps d'atteinte de x_- . Nous définissons le temps de sortie

$$\tau = \inf\{t > 0 : X_t \in \{x_-, L\}\} \quad (2.2.12)$$

où L est un réel fixé que nous choisirons grand ($L \gg x_+$), ainsi la probabilité de sortir par L sera nulle.

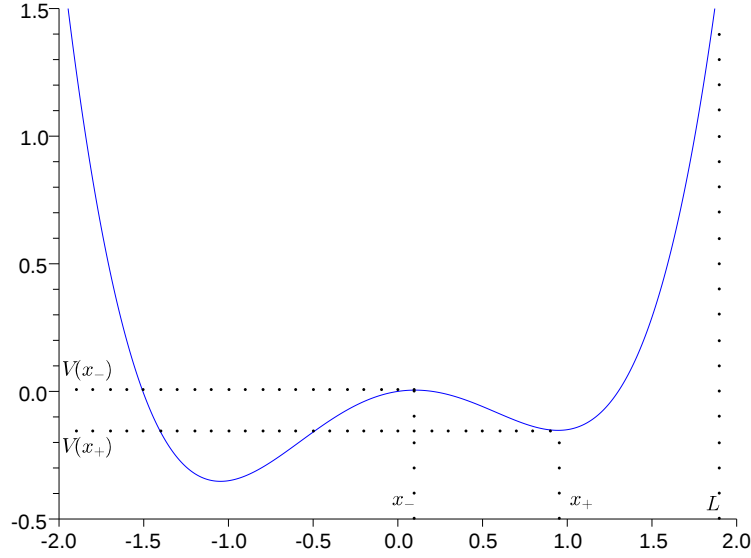
Nous allons nous servir du lien qui existe entre les équations différentielles stochastiques et les équations aux dérivées partielles, qui ici seront dans notre cas des équations différentielles ordinaires.

2.2.2 Problèmes aux valeurs propres

Nous utilisons le théorème de Feynman-Kac (voir par exemple [Oks95, Partie 8.2]) qui permet d'obtenir des problèmes aux limites faisant intervenir le temps de sortie τ .

Si $\tau < \infty$, soient g une fonction continue vérifiant

$$\mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau |g(X_s)| ds \right] < \infty, \quad (2.2.13)$$

FIGURE 2.2. Représentation du potentiel V

ψ une fonction bornée définie en x_- et L et $\lambda \geq 0$. Nous considérons le problème aux limites : trouver $u \in C^2([x_-, L]) \cap C([x_-, L])$ telle que

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - \lambda) u(x) = g(x) & \text{sur }]x_-, L[\\ u(x) = \psi(x) & x \in \{x_-, L\} \end{cases} \quad (2.2.14)$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur différentiel caractéristique du processus X_t et est donné par

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{\varepsilon} V'(x) \frac{d}{dx} + \frac{\sigma_1^2}{2\varepsilon} \frac{d^2}{dx^2} \quad (2.2.15)$$

Si elle existe, une solution bornée u de (2.2.14) vérifie

$$u(x) = \mathbb{E}^x \left[\psi(X_\tau) e^{-\lambda\tau} + \int_0^\tau g(X_t) e^{-\lambda t} dt \right]. \quad (2.2.16)$$

Regardons deux cas particuliers en choisissant des fonctions g et ψ . Prenons d'abord $g = -1$ et $\psi = 0$. Nous obtenons que la fonction

$$u(x) = \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau e^{\lambda t} dt \right] = \frac{\mathbb{E}^x [e^{\lambda\tau}] - 1}{\lambda} \quad (2.2.17)$$

est solution du problème

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - \lambda) u(x) = -1 \\ u(x_-) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (\text{PB1})$$

En particulier pour $\lambda = 0$, étant donné

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda\tau} - 1}{\lambda} = \tau, \quad (2.2.18)$$

la fonction $u(x) = \mathbb{E}^x [\tau]$ est solution du système

$$\begin{cases} (\mathcal{L}u)(x) = -1 \\ u(x_-) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (\text{PB1}') \quad (2.2.18)$$

Pour la suite, nous séparons τ en deux parties τ_{x_-} et τ_L qui correspondent respectivement au temps de première atteinte de x_- et L . Nous obtenons de nouveaux problèmes en prenant $g = 0$ et ψ est définie en x_- et L par $\psi(x_-) = 1$ et $\psi(L) = 0$. La fonction

$$u_\lambda(x) = \mathbb{E}^x \left[e^{\lambda \tau} \mathbf{1}_{\tau_{x_-} < \tau_L} \right] \quad (2.2.19)$$

est solution du problème

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - \lambda) u_\lambda(x) = 0 \\ u_\lambda(x_-) = 1 \\ u_\lambda(L) = 0 \end{cases} \quad (\text{PB2}) \quad (2.2.20)$$

Nous pouvons regarder le cas particulier $\lambda = 0$. Nous avons alors

$$u_0(x) = \mathbb{E}^x \left[\mathbf{1}_{\tau_{x_-} < \tau_L} \right] = \mathbb{P}\{\tau_{x_-} < \tau_L\} \quad (2.2.20)$$

qui est solution de

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_0(x) = 0 \\ u_0(x_-) = 1 \\ u_0(L) = 0 \end{cases} \quad (\text{PB2}') \quad (2.2.21)$$

Le problème (PB1) a une solution si et seulement si λ n'est pas une valeur propre de l'opérateur $\mathcal{L}$ alors que le problème (PB2) a une solution non triviale si et seulement si λ est une valeur propre de l'opérateur $\mathcal{L}$.

2.3 Estimation du temps de sortie moyen

Nous intégrons l'équation du problème (PB1') portant sur l'espérance du temps de sortie et cherchons son comportement pour σ_1 petit et L grand. Le résultat principal de cette section est :

Théorème 2.3.1. *Pour $x \in [x_-, L]$, avec $L > x_+$, le temps de sortie moyen, solution du problème (PB1'), est donné par*

$$\mathbb{E}^x[\tau] = \frac{2\varepsilon}{\sigma_1^2} \int_{x_-}^x \int_t^{b(L)} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(t) - V(\xi)]\right) d\xi dt \quad (2.3.1)$$

où $b(L)$ est un réel défini tel que $u(L) = 0$.

Son comportement asymptotique pour les petites valeurs de σ_1 et pour $x_- \leq x < x_-^*$ est donné par

$$\mathbb{E}^x(\tau(\sigma_1)) = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{-V''(x_+)V''(x_-)}} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_-) - V(x_+)]\right) [1 + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2)]. \quad (2.3.2)$$

Le temps de sortie moyen est donc exponentiellement grand quand σ_1 est petit avec une décroissance exponentielle qui dépend de la différence de hauteur entre les deux puits de potentiel. Pour montrer ce résultat, nous avons besoin des deux lemmes suivants

Lemme 2.3.2. Soit $v_1(x)$ défini par

$$v_1(x) = \int_{x_-}^x \int_t^{x_+} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(t) - V(\xi)]\right) d\xi dt, \quad (2.3.3)$$

nous avons alors le comportement asymptotique pour σ_1 petit

$$v_1(x) = \frac{\pi\sigma_1^2}{4\sqrt{-V''(x_+)V''(x_-)}} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}[V(x_+) - V(x_-)]\right) [1 + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2)]. \quad (2.3.4)$$

PREUVE. Étudions d'abord le comportement de $v_1(x)$ qui est défini par l'intégrale double (2.3.3). La contribution principale de l'intégrale sur ξ est autour de x_+ et de celle sur t autour de x_- . Nous commençons donc par faire les changements de variables $\xi_1 = x_+ - \xi$ et $t_1 = x_- + t$ et nous obtenons

$$v_1(x) = \int_0^{x-x_-} \int_0^{x_+-x_- - t_1} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_- + t_1) - V(x_+ - \xi_1)]\right) d\xi_1 dt_1 \quad (2.3.5)$$

Sur un voisinage $U = [-\eta, \eta]$ de 0, nous avons les développements limités pour $t_1 \in U$ et $\xi_1 \in U$,

$$V(x_- + t_1) = V(x_-) + \frac{1}{2}V''(x_-)t_1^2 + \mathcal{O}(t_1^3) \quad (2.3.6)$$

$$V(x_+ - \xi_1) = V(x_+) + \frac{1}{2}V''(x_+)\xi_1^2 + \mathcal{O}(\xi_1^3) \quad (2.3.7)$$

Pour pouvoir utiliser ces développements, nous découpons l'intégrale double en quatre :

$$\begin{aligned} v_1(x) = & \int_0^\eta \int_0^\eta \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_- + t_1) - V(x_+ - \xi)]\right) d\xi_1 dt_1 \\ & + \int_0^\eta \int_\eta^{x_+-x_- - t_1} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_- + t_1) - V(x_+ - \xi)]\right) d\xi_1 dt_1 \\ & + \int_\eta^{x-x_-} \int_0^\eta \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_- + t_1) - V(x_+ - \xi)]\right) d\xi_1 dt_1 \\ & + \int_\eta^{x-x_-} \int_\eta^{x_+-x_- - t_1} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_- + t_1) - V(x_+ - \xi)]\right) d\xi_1 dt_1 \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Étudions d'abord la première intégrale. Les bornes ne dépendant pas des variables d'intégrations nous pouvons séparer l'intégrale double en deux intégrales simples :

$$I_1 = \left(\int_0^\eta \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}V(x_- + t_1)\right) dt_1\right) \left(\int_0^\eta \exp\left(-\frac{2}{\sigma_1^2}V(x_+ - \xi_1)\right) d\xi_1\right) \quad (2.3.9)$$

Nous posons alors

$$I_1^t = \int_0^\eta \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}V(x_- + t_1)\right) dt_1 \quad (2.3.10)$$

et

$$I_1^\xi = \int_0^\eta \exp\left(-\frac{2}{\sigma_1^2}V(x_+ - \xi_1)\right) d\xi_1 \quad (2.3.11)$$

Nous détaillons le calcul de I_1^t . Nous sommes sur un domaine où on peut approcher $V(x_- + t_1)$ par son développement limité donné en (2.3.6) :

$$I_1^t = \int_0^\eta \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2} \left[V(x_-) + \frac{V''(x_-)}{2}t_1^2 + \mathcal{O}(t_1^3)\right]\right) dt_1 \quad (2.3.12)$$

Nous faisons ensuite le changement de variable $s = g_1(t_1)$ avec $g_1(t_1) = \sqrt{-V''(x_-)}t_1/\sigma_1$ (pour I_1^ξ ce sera $\zeta = g_2(\xi_1)$ avec $g_2(\xi_1) = \sqrt{V''(x_+)}\xi_1/\sigma_1$), nous avons alors :

$$I_1^t = \frac{\sigma_1 \exp(2V(x_-)/\sigma_1^2)}{\sqrt{-V''(x_-)}} \int_0^{g_1(\eta)} \exp(-s^2 + \mathcal{O}(\sigma_1 s^3)) ds \quad (2.3.13)$$

Regardons le comportement de

$$J_1^t = \int_0^{g_1(\eta)} \exp(-s^2 + \mathcal{O}(\sigma_1 s^3)) ds. \quad (2.3.14)$$

$$\begin{aligned} J_1^t &= \int_0^{g_1(\eta)} e^{-s^2} e^{\mathcal{O}(\sigma_1 s^3)} ds = \int_0^{g_1(\eta)} e^{-s^2} [1 + \mathcal{O}(\sigma_1 s^3)] ds \\ &= \int_0^\infty e^{-s^2} ds + \int_0^{g_1(\eta)} \mathcal{O}(\sigma_1 s^3) ds - \int_{g_1(\eta)}^\infty e^{-s^2} ds \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Calculons chacune des trois intégrales :

$$\int_0^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \quad (2.3.16)$$

$$\int_0^{g_1(\eta)} \mathcal{O}(\sigma_1 s^3) ds = \mathcal{O}(\sigma_1 g_1(\eta)^4) = \mathcal{O}\left(\sigma_1 \frac{\eta^4}{\sigma_1^4}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\eta^4}{\sigma_1^3}\right) \quad (2.3.17)$$

Nous cherchons ensuite à majorer la dernière intégrale

$$\begin{aligned} \int_{g_1(\eta)}^\infty e^{-s^2} ds &= e^{-g_1(\eta)^2} \int_{g_1(\eta)}^\infty e^{-[s^2 - g_1(\eta)^2]} ds \\ &= e^{-g_1(\eta)^2} \int_{g_1(\eta)}^\infty e^{-(s - g_1(\eta))(s + g_1(\eta))} ds \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

En faisant le changement de variable $u = s - g_1(\eta)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{g_1(\eta)}^\infty e^{-s^2} ds &= e^{-g_1(\eta)^2} \int_0^\infty e^{-u(u + 2g_1(\eta))} du \\ &\leq e^{-g_1(\eta)^2} \int_0^\infty e^{-u^2} du \leq \sqrt{\frac{\pi}{4}} e^{-g_1(\eta)^2} \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Nous avons donc pour la troisième intégrale la majoration

$$\int_{g_1(\eta)}^\infty e^{-s^2} ds = \mathcal{O}\left(\exp\left(-C \frac{\eta^2}{\sigma_1^2}\right)\right) \quad (2.3.20)$$

En utilisant les résultats (2.3.16), (2.3.17) et (2.3.20), nous obtenons alors pour J_1^t l'estimation :

$$J_1^t = \sqrt{\frac{\pi}{4}} + \mathcal{O}\left(\frac{\eta^4}{\sigma_1^3}\right) + \mathcal{O}\left(\exp\left(-C \frac{\eta^2}{\sigma_1^2}\right)\right) \quad (2.3.21)$$

En choisissant

$$\eta = \alpha \sigma_1 \sqrt{|\log \sigma_1|}, \quad (2.3.22)$$

nous avons alors

$$\frac{\eta^4}{\sigma_1^3} = \alpha^4 \sigma_1 |\log \sigma_1|^2 \quad (2.3.23)$$

et

$$\exp\left(-C\frac{\eta^2}{\sigma_1^2}\right) = \exp(C\alpha^2 \log \sigma_1) = \sigma_1^{C\alpha^2}. \quad (2.3.24)$$

Nous fixons alors α tel que $C\alpha^2 = 1$. Ceci entraîne $\sigma_1^{C\alpha^2} = \sigma_1 = \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2)$. Nous avons finalement pour J_1^t le comportement suivant :

$$J_1^t = \sqrt{\frac{\pi}{4}} + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2) \quad (2.3.25)$$

Nous avons ensuite que I_1^t se comporte suivant

$$I_1^t = \frac{\sigma_1 \exp(2V(x_-)/\sigma_1^2)}{\sqrt{-V''(x_-)}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{4}} + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2) \right). \quad (2.3.26)$$

Nous obtenons de la même façon le comportement asymptotique de I_1^ξ

$$I_1^\xi = \frac{\sigma_1 \exp(-2\sigma_1^2 V(x_+)/\sigma_1^2)}{\sqrt{V''(x_+)}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{4}} + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2) \right). \quad (2.3.27)$$

En utilisant les estimations (2.3.26) et (2.3.27) dans (2.3.9), nous obtenons le comportement asymptotique de I_1 quand σ_1 tend vers 0 :

$$I_1 = \frac{\pi\sigma_1^2}{4\sqrt{|V''(x_+)V''(x_-)|}} \exp\left(-\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_+) - V(x_-)]\right) [1 + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2)] \quad (2.3.28)$$

Regardons maintenant la deuxième intégrale I_2 dans l'expression (2.3.8) de $v_1(x)$

$$I_2 = \int_0^\eta \int_\eta^{x_+ - x_- - t_1} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_- + t_1) - V(x_+ - \xi)]\right) d\xi dt_1 \quad (2.3.29)$$

Nous pouvons majorer cette intégrale en utilisant que pour $t_1 \in [0, \eta]$, $x_+ - x_- - t_1 \leq x_+ - x_-$ et ensuite décomposer ce majorant comme le produit de deux intégrales simples

$$I_2 \leq \left(\int_0^\eta \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_- + t_1)]\right) dt_1 \right) \left(\int_\eta^{x_+ - x_-} \exp\left(-\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_+ - \xi)]\right) d\xi \right) \quad (2.3.30)$$

L'intégrale sur t_1 a déjà été étudiée pour l'approximation de I_1 . Quant à l'intégrale sur ξ , nous allons la majorer pour montrer que finalement I_2 est négligeable devant I_1 . Nous supposons que $\frac{2}{\sigma^2} \geq 1$. Nous avons alors la minoration pour $\xi \in [\eta, x_+ - x_-]$,

$$\frac{2}{\sigma^2}V(x_+ - \xi) = \left(\frac{2}{\sigma^2} - 1\right)V(x_+ - \xi) + V(x_+ - \xi) \geq \left(\frac{2}{\sigma^2} - 1\right)V(x_+ - \eta) + V(x_+ - \xi). \quad (2.3.31)$$

Ceci nous donne pour l'intégrale la majoration

$$\int_\eta^{x_+ - x_-} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}[V(x_+ - \xi)]\right) d\xi \leq C \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}V(x_+ - \eta)\right) \quad (2.3.32)$$

où

$$C = \int_0^{x_+ - x_-} \exp(-V(x_+ - \xi)) d\xi e^{V(x_+ - \eta)} \quad (2.3.33)$$

En remarquant que $V(x_+ - \eta) - V(x_+) < 0$, nous obtenons qu'en divisant l'inégalité (2.3.33) par $C\sigma_1^2 |\log \sigma_1|^2 \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2} V(x_+)\right)$ le majorant tend vers 0 quand σ_1 tend vers 0, l'exponentiel dominant tous les autres termes. Nous avons donc

$$I_2 = \frac{\pi\sigma_1^2}{4\sqrt{|V''(x_+)V''(x_-)|}} \exp\left(-\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_+) - V(x_-)]\right) \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2) \quad (2.3.34)$$

Nous pouvons montrer de la même façon que

$$I_3 = \int_{\eta}^{x_+ - x} \int_0^{\eta} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_- - t) - V(x_+ - \xi)]\right) d\xi dt \quad (2.3.35)$$

et

$$I_4 = \int_{\eta}^{x_+ - x} \int_{\eta}^{2x_+} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_- - t) - V(x_+ - \xi)]\right) d\xi dt \quad (2.3.36)$$

sont négligeables devant le terme de reste de I_1 quand σ_1 tend vers 0. Ce qui donne pour $v_1(x)$ le comportement asymptotique suivant I_1 et nous obtenons donc (2.3.4). ■

Lemme 2.3.3. Soit $v_2(x)$ la fonction définie par

$$v_2(x) = \int_{x_-}^x \int_{x_+}^t \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(t) - V(\xi)]\right) d\xi dt, \quad (2.3.37)$$

le comportement asymptotique de v_2 pour σ_1 petit est donné par

$$v_2(x) = \frac{\pi\sigma_1^2}{4\sqrt{-V''(x_+)V''(x_-)}} \exp\left(-\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_+) - V(x_-)]\right) [1 + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2)]. \quad (2.3.38)$$

PREUVE. Ce sont des calculs similaires à l'estimation de la fonction $v_1(x)$. ■

PREUVE (du théorème 2.3.1). Nous remarquons que la fonction $(t, \xi) \mapsto V(t) - V(\xi)$ définie pour $x_- \leq t \leq x$ et $t \leq \xi \leq b(L)$ atteint son maximum pour $(t, \xi) = (x_+, x_-)$. Oublions la constante devant les intégrales de (2.3.1) et introduisons x_+ pour séparer la première intégrale

$$v(x) = \int_{x_-}^x \int_t^{x_+} e^{2[V(t)-V(\xi)]/\sigma_1^2} d\xi dt + \int_{x_-}^x \int_{x_+}^{b(L)} e^{2[V(t)-V(\xi)]/\sigma_1^2} d\xi dt \quad (2.3.39)$$

Nous remarquons que

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x) \quad (2.3.40)$$

En utilisant les résultats des lemmes 2.3.2 et 2.3.3, nous obtenons l'estimation (2.3.2). ■

2.4 Valeurs propres

Nous étudions les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{\varepsilon} V'(x) \frac{d}{dx} + \frac{\sigma_1^2}{2\varepsilon} \frac{d^2}{dx^2} \quad (2.4.1)$$

et les conditions de bords $u_\lambda(x_-) = u_\lambda(L) = 0$, avec $V(x)$ donné par (2.0.3). Nous ordonnons les valeurs propres λ_i , λ_1 étant la plus petite :

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \quad (2.4.2)$$

Dans cette partie, nous calculons la première valeur propre du problème (PB2) puis nous minorons les suivantes. Nous cherchons donc pour quelles valeurs de λ le problème (PB2) a des solutions. Dans le Lemme 2.4.9, nous estimons la première valeur propre λ_1 pour σ_1 petit par

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{|V''(x_+)V''(x_-)|}}{2\pi\varepsilon} \exp\left(-\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_-) - V(x_+)]\right) (1 + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2)) \quad (2.4.3)$$

et dans le Lemme 2.4.10 nous minorons la deuxième valeur propre λ_2

$$\lambda_2 \geq C\sigma_1^2 \quad (2.4.4)$$

où C est une constante indépendante de σ_1 .

Le problème (PB1) s'écrit

$$\begin{cases} u''(x) - \frac{2}{\sigma_1^2} V'(x) u'(x) + \frac{2\lambda\varepsilon}{\sigma_1^2} u(x) = 0 \\ u(x_-) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (2.4.5)$$

L'équation différentielle du second ordre peut se mettre sous la forme d'un système du premier ordre

$$Y'(x) = A(x)Y(x) \quad (2.4.6)$$

où Y est le vecteur colonne

$$Y(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} \quad (2.4.7)$$

et A est la matrice 2×2

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2\lambda\varepsilon}{\sigma_1^2} & \frac{2}{\sigma_1^2} V'(x) \end{pmatrix} \quad (2.4.8)$$

Nous décomposons la matrice A comme la somme de deux matrices

$$A(x) = A_0(x) + \lambda A_1 \quad (2.4.9)$$

avec A_0 la matrice des termes d'ordre 0 en λ de la matrice A

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sigma_1^2} V'(x) \end{pmatrix} \quad (2.4.10)$$

et A_1 la matrice des termes d'ordre 1 devant λ

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{2\varepsilon}{\sigma_1^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.11)$$

Nous cherchons une solution sous la forme

$$Y(x) = U(x, x_-)Y(x_-) \quad (2.4.12)$$

où U est la matrice

$$U(x, x_-) = \begin{pmatrix} u_{11}(x, x_-) & u_{12}(x, x_-) \\ u_{21}(x, x_-) & u_{22}(x, x_-) \end{pmatrix} \quad (2.4.13)$$

qui vérifie en particulier

$$U(x_-, x_-) = I \quad (2.4.14)$$

où I est la matrice identité. Nous développons la matrice $U(x, x_-)$ en λ sous la forme

$$U(x, x_-) = U_0(x, x_-) + \lambda U_1(x, x_-) + \lambda^2 U_2(x, x_-) + \dots \quad (2.4.15)$$

Nous remplaçons dans l'équation différentielle (2.4.6). Le développement asymptotique en λ étant nul, nous avons que tous les coefficients devant $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \dots$ sont nuls. Nous obtenons ainsi une équation différentielle sur U_0 et une relation de récurrence sur les U_i pour $i \geq 1$:

$$U_0(x, x_-)' = A_0(x)U_0(x, x_-) \quad (2.4.16)$$

$$U_i(x, x_-)' = A_0 U_i(x, x_-) + A_1 U_{i-1}(x, x_-), \text{ pour } i \geq 1 \quad (2.4.17)$$

2.4.1 Calculs préliminaires

Nous allons calculer successivement U_0, U_1 puis U_n pour $n \geq 2$.

Calcul de U_0

Nous cherchons les solutions de l'équation différentielle avec condition initiale

$$\begin{cases} U_0(x, x_-)' = A_0(x)U_0(x, x_-) \\ U_0(x_-, x_-) = I \end{cases} \quad (2.4.18)$$

Nous allons calculer séparément les quatre coefficients $u_{ij}^0(x, x_-)$, avec $1 \leq i, j \leq 2$, de la matrice

$$U_0(x, x_-) = \begin{pmatrix} u_{11}^0(x, x_-) & u_{12}^0(x, x_-) \\ u_{21}^0(x, x_-) & u_{22}^0(x, x_-) \end{pmatrix}. \quad (2.4.19)$$

Les fonctions $u_{21}^0, u_{22}^0, u_{11}^0$ et u_{12}^0 vérifient respectivement les systèmes :

$$\begin{cases} (u_{21}^0)'(x, x_-) = \frac{2}{\sigma_1^2} V'(x) u_{21}^0(x, x_-) \\ u_{21}^0(x_-, x_-) = 0 \end{cases}, \quad (2.4.20)$$

$$\begin{cases} (u_{22}^0)'(x, x_-) = \frac{2}{\sigma_1^2} V'(x) u_{22}^0(x, x_-) \\ u_{22}^0(x_-, x_-) = 1 \end{cases}, \quad (2.4.21)$$

$$\begin{cases} (u_{11}^0)'(x, x_-) = u_{21}^0(x, x_-) \\ u_{11}^0(x_-, x_-) = 1 \end{cases}, \quad (2.4.22)$$

$$\begin{cases} (u_{12}^0)'(x, x_-) = u_{22}^0(x, x_-) \\ u_{12}^0(x_-, x_-) = 0 \end{cases}. \quad (2.4.23)$$

Lemme 2.4.1. *Les solutions des systèmes (2.4.20), (2.4.21), (2.4.22) et (2.4.23) sont*

$$u_{21}^0 = 0, \quad (2.4.24)$$

$$u_{22}^0(x, x_-) = \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x) - V(x_-)]\right) \quad (2.4.25)$$

$$u_{11}^0(x, x_-) = 1, \quad (2.4.26)$$

$$u_{12}^0(x, x_-) = \int_{x_-}^x \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(\xi) - V(x_-)]\right) d\xi. \quad (2.4.27)$$

PREUVE. Les équations (2.4.20) et (2.4.21) sont des équations différentielles ordinaires en u_{21}^0 et u_{22}^0 que nous pouvons intégrer directement. Nous obtenons les solutions (2.4.24) et (2.4.25). En prenant la bonne primitive de ces deux fonctions, nous obtenons (2.4.26) et (2.4.27). ■

La matrice U_0 est donc

$$U_0(x, x_-) = \begin{pmatrix} 1 & \int_{x_-}^x \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(\xi) - V(x_-)]\right) d\xi \\ 0 & \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x) - V(x_-)]\right) \end{pmatrix}. \quad (2.4.28)$$

Nous avons la première matrice de la récurrence (2.4.17) et pouvons donc calculer les matrices suivantes $U_1, U_2, \dots$

Calcul de U_1

La matrice U_1 vérifie le système

$$\begin{cases} U_1(x, x_-)' = A_0 U_1(x, x_-) + A_1 U_0(x, x_-) \\ U_1(x, x_-) = 0 \end{cases}. \quad (2.4.29)$$

Nous allons procéder comme pour U_0 et calculer la matrice U_1 coefficient par coefficient. Nous cherchons U_1

$$U_1(x, x_-) = \begin{pmatrix} u_{11}^1(x, x_-) & u_{12}^1(x, x_-) \\ u_{21}^1(x, x_-) & u_{22}^1(x, x_-) \end{pmatrix}. \quad (2.4.30)$$

En remplaçant dans (2.4.17) avec $i = 1$, nous obtenons à nouveau quatre équations différentielles du premier ordre à résoudre :

$$\begin{cases} (u_{11}^1)'(x, x_-) = u_{21}^1(x, x_-) \\ u_{11}^1(x_-, x_-) = 0 \end{cases} \quad (2.4.31)$$

$$\begin{cases} (u_{12}^1)'(x, x_-) = u_{22}^1(x, x_-) \\ u_{12}^1(x_-, x_-) = 0 \end{cases} \quad (2.4.32)$$

$$\begin{cases} (u_{21}^1)'(x, x_-) = \frac{2}{\sigma_1^2} V'(x) u_{21}^1(x, x_-) - \frac{2\varepsilon}{\sigma_1^2} \\ u_{21}^1(x_-, x_-) = 0 \end{cases} \quad (2.4.33)$$

$$\begin{cases} (u_{22}^1)'(x, x_-) = \frac{2}{\sigma_1^2} V'(x) u_{22}^1(x, x_-) - \frac{2\varepsilon}{\sigma_1^2} \int_{x_-}^x \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2} [V(\xi) - V(x_-)]\right) d\xi \\ u_{22}^1(x_-, x_-) = 0 \end{cases} \quad (2.4.34)$$

Nous intégrons d'abord les équations différentielles sur u_{21}^1 et u_{22}^1 puis celles sur u_{11}^1 et u_{12}^1 .

Lemme 2.4.2. *Les solutions des systèmes (2.4.31)-(2.4.34) sont données respectivement par*

$$u_{21}^1(x, x_-) = -\frac{2\varepsilon}{\sigma_1^2} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2} V(x)\right) \int_{x_-}^x \exp\left(-\frac{2}{\sigma_1^2} V(\xi)\right) d\xi, \quad (2.4.35)$$

$$u_{22}^1(x, x_-) = -\frac{2\varepsilon}{\sigma_1^2} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2} V(x)\right) \int_{x_-}^x \int_{x_-}^\xi \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2} [V(t) - V(\xi) - V(x_-)]\right) dt d\xi, \quad (2.4.36)$$

$$u_{11}^1(x, x_-) = -\frac{2\varepsilon}{\sigma_1^2} \int_{x_-}^x \int_{x_-}^t \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2} [V(t) - V(\xi)]\right) d\xi dt \quad (2.4.37)$$

$$u_{12}^1(x, x_-) = -\frac{2\varepsilon}{\sigma_1^2} \int_{x_-}^x \int_{x_-}^y \int_{x_-}^\xi \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2} [V(t) + V(y) - V(\xi) - V(x_-)]\right) dt d\xi dy. \quad (2.4.38)$$

PREUVE. C'est la même que pour le preuve du lemme 2.4.1. Les équations (2.4.33) et (2.4.34) sont des équations différentielles ordinaires en respectivement u_{21}^1 et u_{22}^1 que nous pouvons intégrer directement. Nous obtenons les solutions (2.4.35) et (2.4.36). En prenant la primitive qui s'annule en x_- de ces deux fonctions, nous obtenons (2.4.37) et (2.4.38). ■

Calcul de U_n

Nous pouvons ensuite exprimer les termes u_{ij}^n par récurrence en utilisant la relation (2.4.17). Nous avons alors les équations différentielles avec condition initiale suivantes

$$\begin{cases} (u_{11}^n)'(x, x_-) = u_{21}^n(x, x_-) \\ u_{11}^n(x_-, x_-) = 0 \end{cases} \quad (2.4.39)$$

$$\begin{cases} (u_{12}^n)'(x, x_-) = u_{22}^n(x, x_-) \\ u_{12}^n(x_-, x_-) = 0 \end{cases} \quad (2.4.40)$$

$$\begin{cases} (u_{21}^n)'(x, x_-) = \frac{2}{\sigma_1^2} V'(x) u_{21}^n(x, x_-) - \frac{2\varepsilon}{\sigma_1^2} u_{11}^{n-1}(x, x_-) \\ u_{21}^n(x_-, x_-) = 0 \end{cases} \quad (2.4.41)$$

$$\begin{cases} (u_{22}^n)'(x, x_-) = \frac{2}{\sigma_1^2} V'(x) u_{22}^n(x, x_-) - \frac{2\varepsilon}{\sigma_1^2} u_{12}^{n-1}(x, x_-) \\ u_{22}^n(x_-, x_-) = 0 \end{cases} \quad (2.4.42)$$

Lemme 2.4.3. *Pour $n \geq 1$, nous avons les relations de récurrences suivantes :*

$$u_{21}^n(x, x_-) = -\frac{2\varepsilon}{\sigma_1^2} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2}V(x)\right) \int_{x_-}^x \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}V(\xi)\right) u_{11}^{n-1}(\xi, x_-) d\xi, \quad (2.4.43)$$

$$u_{22}^n(x, x_-) = -\frac{2\varepsilon}{\sigma_1^2} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2}V(x)\right) \int_{x_-}^x \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}V(\xi)\right) u_{12}^{n-1}(\xi, x_-) d\xi, \quad (2.4.44)$$

$$u_{11}^n(x, x_-) = \int_{x_-}^x u_{21}^n d\xi \quad (2.4.45)$$

$$u_{12}^n(x, x_-) = \int_{x_-}^x u_{22}^n d\xi. \quad (2.4.46)$$

PREUVE. C'est la même que pour la preuve des lemmes 2.4.1 et 2.4.2. ■

2.4.2 Comportements asymptotiques

Nous étudions maintenant le comportement asymptotique de $u_{12}^0(x, x_-)$ et de $u_{12}^1(x, x_-)$. Nous donnerons ensuite une majoration pour u_{12}^n . Nous utiliserons ces résultats pour estimer le temps de sortie dans la partie 2.5.

Lemme 2.4.4. *Quand σ_1 tend vers 0, nous avons*

$$u_{12}^0(x, x_-) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}\sigma_1}{2\sqrt{|V''(x_-)|}} [1 + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2)] & \text{si } x \leq x^* \\ \frac{\sigma_1^2}{2V'(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2}[V(x) - V(x_-)]\right) [1 + \mathcal{O}(\sigma_1^2 |\log(\sigma_1)|^3)] & \text{si } x > x^* \end{cases} \quad (2.4.47)$$

PREUVE. Nous étudions le comportement asymptotique de

$$\begin{aligned} u_{12}^0(x, x_-) &= \int_{x_-}^x \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(\xi) - V(x_-)]\right) d\xi \\ &= \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}V(x_-)\right) \int_{x_-}^x \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(\xi)]\right) d\xi. \end{aligned} \quad (2.4.48)$$

L'abscisse x^* est défini telle que $x^* > x_-$ et $V(x^*) = V(x_-)$. Nous allons distinguer trois cas dans cette preuve :

1. quand $x < x^*$, la fonction $x \mapsto V(x)$ atteint son maximum en x_- ,
2. quand $x = x^*$, la fonction $x \mapsto V(x)$ atteint son maximum en x_- et en x^* ,
3. quand $x > x^*$, la fonction $x \mapsto V(x)$ atteint son maximum en x .

Nous voulons étudier le comportement de

$$I(x) = \int_{x_-}^x \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}V(\xi)\right) d\xi \quad (2.4.49)$$

Dans le cas $x < x^*$, la fonction $\xi \mapsto V(\xi)$ atteint son maximum en x_- . Avec la même démarche que dans la preuve du théorème 2.3.1, nous obtenons

$$I(x) = \frac{\sqrt{\pi}\sigma_1}{2\sqrt{V''(x_-)}} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}V(x_-)\right) [1 + \mathcal{O}(\sigma_1|\log \sigma_1|^2)] \quad (2.4.50)$$

Pour le troisième cas (pour $x > x_*$), ce sont les points au voisinage de x qui contribuent de façon significative à l'intégrale. Avec la même démarche mais en faisant le changement de variable $\xi_1 = x - \xi$ et en utilisant le développement

$$V(x - \xi_1) = V(x) - V'(x)\xi_1 + \mathcal{O}(\xi_1^2), \quad (2.4.51)$$

nous obtenons alors :

$$I_1(x) = \exp\left(\frac{2}{\sigma^2}V(x)\right) \int_0^\eta \exp\left(-\frac{2V'(x)}{\sigma_1^2}\xi_1 + \mathcal{O}\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2}\right)\right) d\xi_1 \quad (2.4.52)$$

Nous faisons alors le changement de variable $\xi_2 = f(\xi_1) = (2V'(x)/\sigma_1^2)\xi_1$, ce qui donne :

$$I_1(x) = \frac{\sigma_1^2 e^{2V(x)/\sigma_1^2}}{2V'(x)} \int_0^{f(\eta)} \exp(-\xi_2 + \mathcal{O}(\sigma_1^2\xi_2^2)) d\xi_2 \quad (2.4.53)$$

Il ne reste plus qu'à estimer l'intégrale $I_{f(\eta)}$ définie par

$$I_{f(\eta)} = \int_0^{f(\eta)} \exp(-\xi_2 + \mathcal{O}(\sigma_1^2\xi_2^2)) d\xi_2. \quad (2.4.54)$$

En faisant le développement limité de $\exp(\mathcal{O}(\sigma_1^2\xi_2^2))$, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_{f(\eta)} &= \int_0^{f(\eta)} e^{-\xi_2} [1 + \mathcal{O}(\sigma_1^2\xi_2^2)] d\xi_2 \\ &= 1 - e^{-f(\eta)} + \mathcal{O}(\sigma_1^2 f(\eta)^3) \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{2V'(x)}{\sigma_1^2}\eta\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\eta^3}{\sigma_1^4}\right) \end{aligned} \quad (2.4.55)$$

Si nous prenons $\eta = -\frac{1}{V'(x)}\sigma_1^2 \log \sigma_1$ (η est positif car $\log \sigma_1$ est négatif et $V'(x)$ positif), nous obtenons

$$I_{f(\eta)} = 1 - \sigma_1^2 + \mathcal{O}(\sigma_1^2 |\log \sigma_1|^3) \quad (2.4.56)$$

et $\sigma_1^2 = \mathcal{O}(\sigma_1^2 |\log \sigma_1|^3)$. Nous pouvons montrer que l'intégrale de η à $x - x_-$ est aussi de l'ordre de $\sigma_1^2 |\log \sigma_1|^3$. Nous obtenons alors pour I_1 le comportement

$$I_1(x) = \frac{\sigma_1^2}{2V'(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2}V(x)\right) [1 + \mathcal{O}(\sigma_1^2 |\log(\sigma_1)|^3)] \quad (2.4.57)$$

Pour le deuxième cas, le maximum est atteint en x_- et x_* , il suffit d'ajouter les résultats des deux autres cas et le terme dominant correspond à l'intégrale autour de x_- .

■

Étudions de la même façon le comportement asymptotique de u_{12}^1 qui est défini par une intégrale triple.

Lemme 2.4.5. *Quand σ_1 tend vers 0, $u_{12}^1(x, x_-)$ se comporte comme*

$$\begin{cases} -\frac{\pi\varepsilon\sigma_1^2}{V'(x)\sqrt{|V''(x_-)V''(x_+)|}} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x) - V(x_+)]\right) [1 + \mathcal{O}(\sigma_1|\log \sigma_1|^2)] & \text{si } x > x_+ \\ -\frac{\varepsilon\sqrt{2\pi}}{\sigma_1\sqrt{|V''(x_-)|}} (x - x_-)^2 [1 + \mathcal{O}(\sigma_1|\log \sigma_1|^2)] & \text{si } x \leq x_+ \end{cases} \quad (2.4.58)$$

PREUVE. Nous cherchons le comportement asymptotique pour σ_1 petit de

$$u_{12}^1(x, x_-) = -\frac{2\varepsilon}{\sigma_1^2} \int_{x_-}^x \int_{x_-}^y \int_{x_-}^\xi \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(t) + V(y) - V(\xi) - V(x_-)]\right) dt d\xi dy. \quad (2.4.59)$$

Ce qui nous intéresse est donc le comportement de l'intégrale triple

$$I = \int_{x_-}^x \int_{x_-}^y \int_{x_-}^\xi \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(t) + V(y) - V(\xi)]\right) dt d\xi dy \quad (2.4.60)$$

Nous intégrons donc sur le domaine Ω défini par

$$\Omega = \{(t, \xi, y) \in \mathbb{R}^3 | x_- \leq t \leq \xi \leq y \leq x\}. \quad (2.4.61)$$

Nous allons ici distinguer deux cas :

1. si $x > x_+$, la fonction $(t, y, \xi) \mapsto V(t) + V(y) - V(\xi)$ atteint son maximum sur Ω pour $(t, y, \xi) = (x_-, x, x_+)$. Dans ce cas

$$I = \frac{\pi\sigma_1^4}{2V'(x)\sqrt{|V''(x_-)V''(x_+)|}} e^{2[V(x_-)+V(x)-V(x_+)]/\sigma_1^2} [1 + \mathcal{O}(\sigma_1|\log \sigma_1|^2)]. \quad (2.4.62)$$

2. si $x \leq x_+$, la fonction $x \mapsto V(x)$ est décroissante sur $[x_-, x_+]$. Nous avons alors $V(y) - V(\xi) \leq 0$ quelque soit y et ξ . La fonction $(t, y, \xi) \mapsto V(t) + V(y) - V(\xi)$ atteint son maximum pour $(t, y, \xi) = (x_-, y, y)$. Nous avons donc

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma_1\sqrt{|V''(x_-)|}} (x - x_-)^2 \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}V(x_-)\right) [1 + \mathcal{O}(\sigma_1|\log \sigma_1|^2)] \quad (2.4.63)$$

Il ne reste plus qu'à multiplier ces résultats par $-2\varepsilon e^{-2V(x_-)/\sigma_1^2} / \sigma_1^2$ pour obtenir le résultat du Lemme. ■

Lemme 2.4.6. *Nous avons la majoration, pour $n \geq 0$:*

$$|u_{12}^{n+1}(x_+, x_-)\sigma_1^{2n}| \leq \frac{\varepsilon^2\sigma_1^2}{V'(L)} (\varepsilon(x_+ - x_-))^{2n} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(L) - V(x_+)]\right) \quad (2.4.64)$$

PREUVE. Par les relations (2.4.46) et (2.4.44), nous avons la relation de récurrence entre u_{12}^n et u_{12}^{n-1}

$$u_{12}^{n+1}(L, x_-) = -\frac{2\varepsilon^2}{\sigma_1^2} \int_{x_-}^L \int_{x_-}^\xi u_{12}^n(t, x_-) \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(\xi) - V(t)]\right) dt d\xi \quad (2.4.65)$$

La fonction $(t, \xi) \mapsto V(\xi) - V(t)$ atteint son maximum sur l'ensemble $\{x_- \leq t \leq \xi \leq L\}$ en $(t, \xi) = (x_-, L)$. Avec la méthode de Laplace, nous obtenons le comportement :

$$u_{12}^{n+1}(L, x_-) = -\frac{2\varepsilon^2}{\sigma_1^2} \frac{\sqrt{\pi}\sigma_1^3}{V'(L)\sqrt{|V''(x_+)|}} u_{12}^n(x_+, x_-) e^{2[V(L)-V(x_+)]/\sigma_1^2} [1 + \mathcal{O}(\sigma_1|\log \sigma_1|)] \quad (2.4.66)$$

Évaluons ensuite $u_{12}^n(x_+, x_-)$

$$u_{12}^n(x_+, x_-) = -\frac{2\varepsilon^2}{\sigma_1^2} \int_{x_-}^{x_+} \int_{x_-}^{\xi} u_{12}^{n-1}(t, x_-) \exp\left(\frac{2}{\sigma^2}[V(\xi) - V(t)]\right) dt d\xi \quad (2.4.67)$$

L'intégrale est sur le domaine $\{x_- \leq t \leq \xi \leq x_+\}$. La fonction V est décroissante sur l'intervalle $[x_-, x_+]$. Nous avons donc $V(\xi) - V(t) \leq 0$ sur le domaine. Nous avons

$$|u_{12}^n(x_+, x_-)| \leq \frac{2\varepsilon^2}{\sigma_1^2} u_{12}^{n-1}(x_+, x_-) \frac{(x_+ - x_-)^2}{2} \quad (2.4.68)$$

Par récurrence, en utilisant le résultat du lemme (2.4.1) pour $x < x_*$, nous obtenons

$$|u_{12}^n(x_+, x_-) \sigma_1^{2n}| \leq (\varepsilon(x_+ - x_-))^{2n} \sigma_1 \quad (2.4.69)$$

Nous obtenons donc pour $u_{12}^{n+1}(x_+, x_-)$ la majoration du lemme 2.4.64.

■

Lemme 2.4.7. *Nous avons la majoration pour $n \geq 0$*

$$|u_{11}^{n+1}(x, x_-) \sigma_1^{2n}| \leq \sigma_1 \varepsilon (\varepsilon(x_+ - x_-))^{2n} \frac{2\sqrt{\pi}}{V'(L) \sqrt{|V''(x_+)|}} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2}[V(L) - V(x_+)]\right) \quad (2.4.70)$$

PREUVE. Par les relations (2.4.43) et (2.4.45), nous avons la relation de récurrence sur u_{11}^n :

$$u_{11}^{n+1}(L, x_-) = -\frac{2\varepsilon}{\sigma_1} \int_{x_-}^L \int_{x_-}^{\xi} e^{2(V(\xi) - V(t))/\sigma_1^2} u_{11}^n(t, x_-) dt d\xi. \quad (2.4.71)$$

et nous avons pour $n = 0$, $u_{11}^0(L, x_-) = 1$. La fonction $(\xi, t) \mapsto V(\xi) - V(t)$ atteint son maximum sur l'ensemble $\{x_- \leq t \leq \xi \leq L\}$ en $(\xi, t) = (L, x_-)$. En utilisant la méthode de Laplace, nous obtenons le comportement pour σ_1 petit :

$$|u_{11}^{n+1}(L, x_-)| \leq 2\varepsilon \sigma_1^2 \frac{\sqrt{\pi}}{V'(L) \sqrt{|V''(x_+)|}} |u_{11}^n(x_+, x_-)| e^{2[V(L) - V(x_+)]/\sigma_1^2} \quad (2.4.72)$$

De la même façon que pour la majoration de $|u_{12}^n(x_+, x_-)|$, nous obtenons

$$|u_{11}^n(x_+, x_-)| \leq (\varepsilon(x_+ - x_-))^{2n} \quad (2.4.73)$$

Nous avons alors la majoration (2.4.70).

■

2.4.3 Estimation des valeurs propres

Revenons à l'équation $Y'(x) = A(x)Y(x)$. Sa solution est $Y(x) = U(x, x_-)Y(x_-)$. Nous avons donc la relation au bord $x = L$,

$$Y(L) = U(L, x_-)Y(x_-) \quad (2.4.74)$$

où $Y(L)$ et $Y(x_-)$ sont sous la forme

$$Y(L) = \begin{pmatrix} u(L) \\ u'(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y(x_-) = \begin{pmatrix} u(x_-) \\ u'(x_-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}. \quad (2.4.75)$$

En notant $U(L, x_-) = [u_{ij}(L, x_-)]_{1 \leq i, j \leq 2}$, nous avons l'égalité

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}(L, x_-) & u_{12}(L, x_-) \\ u_{21}(L, x_-) & u_{22}(L, x_-) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad (2.4.76)$$

Ce qui nous donne les deux égalités

$$\begin{cases} u_{12}(L, x_-)a = 0 \\ u_{22}(L, x_-)a = b \end{cases} \quad (2.4.77)$$

Nous avons donc $au_{12}(L, x_-) = 0$, quelque soit la valeur de a . Cela nous donne la condition

$$u_{12}(L, x_-) = 0. \quad (2.4.78)$$

Nous définissons alors la fonction ϕ_L de λ et σ_1 par

$$\phi_L(\lambda, \sigma_1) = u_{12}(L, x_-) \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_+) - V(L)]\right) \frac{V'(L)}{\sigma_1^2} \quad (2.4.79)$$

Nous écrivons les premiers termes dans le développement en λ de ϕ_L

$$\begin{aligned} \phi_L(\lambda, \sigma_1) &= \frac{c_0(\sigma_1, L)}{\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_-) - V(x_+)]\right) + \frac{c_1(\sigma_1, L)}{\sigma_1^2} \lambda + \frac{c_2(\sigma_1, L)}{\sigma_1^2} \lambda^2 + R_1(\lambda, \sigma_1) \\ &= c'_0 \exp\left(-\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_-) - V(x_+)]\right) - c'_1 \lambda + \frac{c'_2}{\sigma_1^2} \lambda^2 + R_1(\lambda, \sigma_1) \end{aligned} \quad (2.4.80)$$

où c'_0 , c'_1 et c'_2 sont des constantes positives dont le terme dominant est indépendant de σ_1 et de L . Nous faisons alors le changement de variable

$$\lambda = \sigma_1^2 \mu \quad (2.4.81)$$

et posons

$$\widetilde{\phi}_L(\mu, \sigma_1) = \frac{1}{\sigma_1^4} \phi_L(\sigma_1^2 \mu, \sigma_1) \quad (2.4.82)$$

Les premiers termes dans le développement en μ de $\widetilde{\phi}_L$ sont donnés par

$$\widetilde{\phi}_L(\mu, \sigma_1) = c'_0 \frac{e^{-2[V(x_-) - V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^2} - c'_1 \mu + c'_2 \mu^2 + R_1(\sigma_1^2 \mu) \quad (2.4.83)$$

Nous avons les résultats suivants :

Lemme 2.4.8. *La série qui définit $\widetilde{\phi}_L$ converge uniformément en L et σ_1 pour $\mu < (\varepsilon(x_+ - x_-))^{-2}$.*

PREUVE. Regardons la convergence des séries qui définissent ϕ_L et $\widetilde{\phi}_L$:

$$\phi_L(\lambda, \sigma_1) = \frac{V'(L)}{\sigma_1^2} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_+) - V(L)]\right) \sum_{n \geq 0} u_{12}^n(L, x_-) \lambda^n \quad (2.4.84)$$

$$\widetilde{\phi}_L(\mu, \sigma_1) = \frac{V'(L)}{\sigma_1^2} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_+) - V(L)]\right) \sum_{n \geq 0} u_{12}^n(L, x_-) \sigma_1^{2n} \mu^n \quad (2.4.85)$$

Nous posons alors

$$\widetilde{\phi}_L(\mu, \sigma_1) = \frac{1}{\sigma_1^2} \sum_{n \geq 0} v^n(L, x_-) \mu^n \quad (2.4.86)$$

où les termes v^n sont définis par la relation

$$v^n(L, x_-) = \exp\left(\frac{2}{\sigma^2}[V(x_+) - V(L)]\right) V'(L) \sigma_1^{2n} u_{12}^n(L, x_-) \quad (2.4.87)$$

En utilisant la majoration du Lemme 2.4.3, nous obtenons pour v^n

$$|v^n(L, x_-)| \leq C (\varepsilon(x_+ - x_-))^{2n} \sigma_1^2 \quad (2.4.88)$$

Pour $\varepsilon(x_+ - x_-)\sqrt{\mu} < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{v^n(L, x_-)}{\sigma_1^2} \mu^n$ converge donc uniformément en σ_1 et L . ■

Lemme 2.4.9. *Lorsque σ_1 tend vers 0, nous avons pour la première valeur propre λ_1 qui annule $u_{12}(L, x_-)$ l'estimation*

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \frac{\sqrt{|V''(x_+)V''(x_-)|}}{2\pi\varepsilon} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}[V(x_-) - V(x_+)]\right) \\ \times \left(1 + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2) + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-2[V(x_-) - V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^2}\right)\right) \end{aligned} \quad (2.4.89)$$

PREUVE. Calculons d'abord les deux premiers termes dans le développement en μ de $\widetilde{\phi}_L(\mu, \sigma_1)$.

$$\widetilde{\phi}_L(\mu, \sigma_1) = c_0 + c_1 \mu + \dots \quad (2.4.90)$$

Nous utilisons les résultats des Lemmes 2.4.1 et 2.4.2 dans le cas où $x > x^*$. En multipliant par $V'(L) \exp(2[V(x_+) - V(L)])$ nous obtenons

$$c_0 = \frac{e^{2[V(x_+) - V(x_-)]/\sigma_1^2}}{2\sigma_1^2} [1 + \mathcal{O}(\sigma_1^2 |\log \sigma_1|^3)] \quad (2.4.91)$$

et

$$c_1 = -\frac{\pi\varepsilon}{\sqrt{|V''(x_+)V''(x_-)|}} [1 + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2)] \quad (2.4.92)$$

Nous définissons alors c'_0 et c'_1 comme

$$c'_0 = \sigma_1^2 \exp\left(\frac{2}{\sigma^2}[V(x_+) - V(x_-)]\right) c_0 = \frac{1}{2} [1 + \mathcal{O}(\sigma_1^2 |\log \sigma_1|^3)] \quad (2.4.93)$$

$$c'_1 = -c_1 = \frac{\pi\varepsilon}{\sqrt{|V''(x_+)V''(x_-)|}} [1 + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2)] \quad (2.4.94)$$

Nous avons $\widetilde{\phi}_L(0, 0) = 0$ et $\partial_\mu \widetilde{\phi}_L(0, 0) = -c'_1$ avec $c'_1 > 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une unique fonction g et il existe des réels σ_1' et μ' tels que

$$\mu = g(\sigma_1) \quad \text{et} \quad \widetilde{\phi}_L(g(\sigma_1), \sigma_1) = 0 \quad (2.4.95)$$

sur un voisinage de $(0, 0) : [0, \mu'] \times [0, \sigma_1']$. Puisque $\partial_\mu \widetilde{\phi}_L(0, 0) = -c'_1$, avec $c'_1 > 0$, il existe σ_1^* et μ^* tels que $\partial_\mu \widetilde{\phi}_L(\mu, \sigma_1) < 0$ sur $[0, \mu^*] \times [0, \sigma_1^*]$. Il existe donc au plus une solution de $\widetilde{\phi}_L = 0$ dans $[0, \mu^*] \times [0, \sigma_1^*]$:

$$\widetilde{\phi}_L(\mu, \sigma_1) = \frac{e^{-2[V(x_-) - V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^2} c'_0 - c'_1 \mu + \mathcal{O}(\mu^2) \quad (2.4.96)$$

Nous avons donc pour $\widetilde{\phi}_L$ l'encadrement :

$$\frac{e^{-2[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^2} c'_0 - c'_1 \mu - d\mu^2 \leq \widetilde{\phi}_L(\mu, \sigma_1) \leq \frac{e^{-2[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^2} c'_0 - c'_1 \mu + d\mu^2 \quad (2.4.97)$$

où d est une constante positive. En prenant $\mu = g(\sigma_1)$ dans (2.4.97), nous obtenons les deux inégalités :

$$\frac{e^{-2[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^2} c'_0 - c'_1 g(\sigma_1) - dg(\sigma_1)^2 \leq 0 \quad (2.4.98)$$

$$\frac{e^{-2[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^2} c'_0 - c'_1 g(\sigma_1) + dg(\sigma_1)^2 \geq 0 \quad (2.4.99)$$

Regardons d'abord l'inégalité (2.4.98). Nous considérons le polynôme

$$P(X) = \frac{e^{-2[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^2} c'_0 - c'_1 X - dX^2. \quad (2.4.100)$$

Nous avons $P(0) > 0$ et $d > 0$, le polynôme P a donc deux racines réelles distinctes. De plus $g(\sigma_1) \geq 0$ et $\sigma_1 > 0$, cela nous donne que $g(\sigma_1)$ est plus grand que la plus grande des deux racines du polynôme P :

$$g(\sigma_1) \geq \frac{-c'_1 + \sqrt{\Delta_1}}{2d} \quad (2.4.101)$$

où Δ_1 est défini par

$$\Delta_1 = c_1'^2 + 4dc'_0 \frac{e^{-2[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^2}. \quad (2.4.102)$$

En faisant le développement limité à l'ordre 2, nous obtenons pouvons approcher $\sqrt{\Delta_1}$ par

$$\sqrt{\Delta_1} = c'_1 \left(1 + \frac{2dc'_0}{c_1'^2} \frac{e^{-2[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^2} + \mathcal{O} \left(\frac{e^{-4[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^4} \right) \right). \quad (2.4.103)$$

Ceci nous donne la minoration pour $g(\sigma_1)$

$$g(\sigma_1) \geq \frac{c'_0}{c_1' \sigma_1^2} e^{-2[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2} + \mathcal{O} \left(\frac{e^{-4[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^4} \right). \quad (2.4.104)$$

Traisons de façon similaire l'inégalité (2.4.99), nous obtenons

$$g(\sigma_1) \leq \frac{c'_1 - \sqrt{\Delta_2}}{2d} \quad (2.4.105)$$

où

$$\Delta_2 = c_1'^2 - 4c'_0 d \frac{e^{-2[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^2}. \quad (2.4.106)$$

Approchons $\sqrt{\Delta_2}$ de la même façon que $\sqrt{\Delta_1}$:

$$\sqrt{\Delta_2} = c'_1 \left(1 - \frac{2dc'_0}{c_1'^2} \frac{e^{-2[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^2} + \mathcal{O} \left(\frac{e^{-4[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^4} \right) \right). \quad (2.4.107)$$

Ceci nous donne la majoration :

$$g(\sigma_1) \leq \frac{c'_0 e^{-2[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{c'_1 \sigma_1^2} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-4[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^4}\right). \quad (2.4.108)$$

La combinaison des inégalités (2.4.104) et (2.4.108) permet d'obtenir un encadrement de $g(\sigma_1)$. Nous en déduisons que

$$g(\sigma_1) = \frac{c'_0 e^{-2[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{c'_1 \sigma_1^2} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-4[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^4}\right). \quad (2.4.109)$$

En remplaçant c'_0 et c'_1 par les expressions données en (2.4.93) et (2.4.94), nous avons

$$g(\sigma_1) = \frac{\sqrt{|V''(x_+)V''(x_-)|}}{2\pi\varepsilon} \frac{e^{-2[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^2} [1 + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2)] + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-4[V(x_-)-V(x_+)]/\sigma_1^2}}{\sigma_1^4}\right) \quad (2.4.110)$$

Puisque

$$\lambda_1 = \sigma_1^2 \mu_1 = \sigma_1^2 g(\sigma_1), \quad (2.4.111)$$

nous obtenons l'expression de λ_1 donnée en (2.4.89). ■

Nous avons obtenu une estimation de la plus petite des valeurs propres pour les petites valeurs de σ_1 . Nous regardons ensuite les valeurs propres suivantes et en particulier la deuxième valeur propre λ_2 qui est définie par

$$\lambda_2(\sigma_1) = \min\{\lambda > \lambda_1(\sigma_1) \mid \phi_L(\lambda, \sigma_1) = 0\} \quad (2.4.112)$$

Nous pouvons aussi définir λ_2 à l'aide de μ_2 donnée par

$$\mu_2(\sigma_1) = \min\{\mu > \mu_1(\sigma_1) \mid \widetilde{\phi}_L(\mu, \sigma_1) = 0\} \quad (2.4.113)$$

Nous avons alors

$$\lambda_2 = \sigma_1^2 \mu_2 \quad (2.4.114)$$

Lemme 2.4.10. *Lorsque $\sigma_1 \rightarrow 0$, nous avons pour la deuxième valeur λ_2 qui annule $u_{12}(L, x_-)$ la minoration :*

$$\lambda_2 \geq C \sigma_1^2, \quad (2.4.115)$$

où C est une constante indépendante de σ_1 .

PREUVE. Nous nous intéressons à l'évaluation de la deuxième valeur propre qui annule $u_{12}(L, x_-)$ dans son développement en λ . D'après le théorème des fonctions implicites, il existe au plus une solution de $\widetilde{\phi}_L = 0$ dans $[0, \mu_1] \times [0, \sigma_1]$. Nous avons vu que

$$\partial_\mu \widetilde{\phi}_L(0, 0) = -c'_1 < 0 \quad (2.4.116)$$

Ils existent donc σ_1^* et μ^* tels que pour $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_1^*$ et $0 \leq \mu \leq \mu^*$,

$$\partial_\mu \widetilde{\phi}_L(\mu, \sigma_1) < 0. \quad (2.4.117)$$

La fonction $\mu \mapsto \partial_\mu \widetilde{\phi}_L(\mu, \sigma_1)$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \mu^*]$. Elle s'annule donc uniquement en $\mu_1(\sigma_1)$ sur $[0, \mu^*]$. La deuxième valeur propre $\mu_2(\sigma_1)$ est donc strictement plus grande que μ^* :

$$\mu_2(\sigma_1) > \mu^* \quad (2.4.118)$$

et μ^* ne dépend pas de σ_1 . En repassant en variable λ , nous en déduisons que

$$\lambda_2(\sigma_1) \geq \mu^* \sigma_1^2. \quad (2.4.119)$$
■

2.5 Densité du temps de sortie τ

Nous allons utiliser les résultats obtenus sur les estimations des valeurs propres pour lesquelles le problème (PB1) a des solutions afin de calculer les solutions du problème (PB2). Le résultat principal de cette partie est la proposition 2.5.2 qui nous donne que le temps de sortie τ admet, pour σ_1 petit, la densité $f(t)$ asymptotiquement exponentielle donnée par

$$f(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} (1 + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2)) \quad (2.5.1)$$

Ce résultat s'écrit aussi

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} \mathbb{P}\{\tau > s \mathbb{E}[\tau]\} = e^{-s} \quad (2.5.2)$$

avec

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} \lambda_1 \mathbb{E}[\tau] = 1. \quad (2.5.3)$$

De la même façon que pour le problème (PB1), nous pouvons écrire le problème (PB2) sous la forme

$$Y(x) = U^\lambda(x, x_-) Y(x_-) \quad (2.5.4)$$

où Y est le vecteur colonne

$$Y(x) = \begin{pmatrix} u^\lambda(x) \\ (u^\lambda)'(x) \end{pmatrix} \quad (2.5.5)$$

et U^λ la matrice carrée

$$U^\lambda(x) = \begin{pmatrix} u_{11}^\lambda(x, x_-) & u_{12}^\lambda(x, x_-) \\ u_{21}^\lambda(x, x_-) & u_{22}^\lambda(x, x_-) \end{pmatrix}. \quad (2.5.6)$$

Pour le cas particulier où $x = L$, nous avons la relation

$$Y(L) = U^\lambda(L, x_-) Y(x_-), \quad (2.5.7)$$

avec les vecteurs $Y(L)$ et $Y(x_-)$ définis par

$$Y(L) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y(x_-) = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}. \quad (2.5.8)$$

En écrivant la première ligne du système (2.5.7), nous obtenons la relation

$$u_{11}^\lambda(L, x_-) + a u_{12}^\lambda(L, x_-) = 0. \quad (2.5.9)$$

Si $u_{12}^\lambda(L, x_-) \neq 0$, c'est à dire si λ n'est pas valeur propre du problème (PB1), nous pouvons exprimer a par

$$a = -\frac{u_{11}^\lambda(L, x_-)}{u_{12}^\lambda(L, x_-)} \quad \text{pour} \quad \lambda \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\} \quad (2.5.10)$$

En remplaçant a par ce résultat dans l'équation (2.5.5) et en considérant la première ligne, nous obtenons pour u^λ l'expression

$$u^\lambda(x) = u_{11}^\lambda(x, x_-) - \frac{u_{11}^\lambda(L, x_-)}{u_{12}^\lambda(L, x_-)} u_{12}^\lambda(x, x_-) \quad (2.5.11)$$

Nous allons maintenant étudier la fonction

$$\lambda \mapsto u^\lambda(x). \quad (2.5.12)$$

En effet, nous avons vu que la solution du problème (PB2) peut s'exprimer à l'aide d'une espérance

$$u^\lambda(x) = \mathbb{E}[e^{\lambda \tau_{x-}} \mathbf{1}_{\tau_{x-} < \tau_L}]. \quad (2.5.13)$$

Pour $\sigma_1 \ll 1$ et $L \gg 1$, la probabilité de sortir par L plutôt que par x_- est nulle, nous avons donc

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\tau_{x_-} < \tau_L] = 1 \quad (2.5.14)$$

Nous pouvons donc considérer l'approximation

$$u^\lambda(x) = \mathbb{E}[e^{\lambda \tau_{x_-}}] \quad (2.5.15)$$

qui est la transformée de Laplace de τ_{x_-} . En calculant, la transformée de Laplace inverse nous obtiendrons la densité du temps de sortie par x_- . Nous cherchons donc à calculer

$$(\mathcal{L}^{-1}u^\lambda)(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-t\lambda} u^\lambda(x) d\lambda \quad (2.5.16)$$

Nous donnons d'abord une propriété de la fonction $\lambda \mapsto u^\lambda(x)$.

Lemme 2.5.1. *La fonction $\lambda \mapsto u^\lambda(x)$ est méromorphe sur l'ensemble $\Omega = \{a + ib, a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}\}$ et ses pôles sont les valeurs propres du problème (PB1).*

PREUVE. Nous avons vu dans la résolution du problème (PB1) que $u_{12}^\lambda(L, x_-)$ est développable en série entière dans $\Omega = \{a + ib, a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}\}$:

$$u_{12}^\lambda(L, x_-) = \sum_{k \geq 0} u_{12}^k(L, x_-) \lambda^k. \quad (2.5.17)$$

La fonction $\lambda \mapsto u_{12}^\lambda(L, x_-)$ est donc holomorphe. De plus, pour tout x dans $[x_-, L]$, nous avons

$$|u_{12}^k(x, x_-)| \leq |u_{12}^k(L, x_-)| \quad (2.5.18)$$

donc la fonction $\lambda \mapsto u_{12}^\lambda(x, x_-)$ est également développable en série entière et est holomorphe sur Ω .

De la même façon, en utilisant le Lemme 2.4.7, nous avons que la fonction $\lambda \mapsto u_{11}^\lambda(L, x_-)$ est holomorphe sur Ω

■

Nous pouvons alors calculer la transformée de Laplace inverse de $\lambda \mapsto u^\lambda(x)$ pour obtenir la loi de la densité du temps de sortie.

Proposition 2.5.2. *La densité du temps de sortie $f(t)$ pour les σ_1 petits est donnée par la transformée de Laplace inverse de la fonction $\lambda \mapsto u^\lambda(x)$:*

$$f(t) = (\mathcal{L}^{-1}u^\lambda)(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} (1 + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2)) \quad (2.5.19)$$

Le temps de sortie suit donc asymptotiquement une loi exponentielle de paramètre λ_1 .

PREUVE. Soit Γ_R l'ensemble des points du demi cercle de diamètre $[-iR, iR]$ et de partie réelle positive. Soit $\gamma_R : \theta \in]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow Re^{i\theta}$. D'après le théorème des résidus,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} u^\lambda(x) e^{-t\lambda} d\lambda = 2\pi i \sum_{\lambda \in \{\lambda_1, \dots\}} \text{Res}(u^\lambda e^{-t\lambda}, \lambda). \quad (2.5.20)$$

Regardons le membre de droite de cette dernière égalité :

$$\int_{\Gamma_R} u^\lambda(x) e^{-t\lambda} d\lambda = \int_{-iR}^{iR} u^\lambda(x) e^{-t\lambda} d\lambda + \int_{\gamma_R} u^\lambda(x) e^{-t\lambda} d\lambda \quad (2.5.21)$$

La première intégrale va correspondre à la transformée de Laplace inverse quand on prendra la limite $R \rightarrow +\infty$. Calculons la deuxième intégrale :

$$I_2^R = \int_{\gamma_R} u^\lambda(x) e^{-t\lambda} d\lambda \quad (2.5.22)$$

Nous pouvons majorer $|I_2^R|$

$$|I_2^R| \leq \pi R \sup_{\lambda \in \gamma_R} |u^\lambda(x) e^{-t\lambda}| \quad (2.5.23)$$

et pour tout λ appartenant à γ_R , nous avons

$$|e^{-t\lambda}| \leq e^{-tR \cos \theta} \quad (2.5.24)$$

Pour θ dans $] -\pi/2, \pi/2[$, $\cos \theta > 0$ donc

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R \sup_{\lambda \in \gamma_R} |u^\lambda(x) e^{-t\lambda}| = 0 \quad (2.5.25)$$

Nous avons alors :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_2^R = 0. \quad (2.5.26)$$

Au final, en prenant la limite $R \rightarrow +\infty$, nous calculons la transformée de Laplace inverse. Ceci nous donne :

$$\left(\mathfrak{L}^{-1} u^\lambda \right) (t) = \sum_{\lambda \in \{\lambda_1, \dots\}} \text{Res}(u^\lambda e^{-t\lambda}, \lambda) \quad (2.5.27)$$

Les valeurs propres sont croissantes :

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \quad (2.5.28)$$

Nous avons donc pour tout $n \geq 2$,

$$e^{-t\lambda_n} = \mathcal{O}(e^{-t\lambda_2}) \quad (2.5.29)$$

En première approximation nous pouvons considérer que

$$\left(\mathfrak{L}^{-1} u^\lambda \right) (t) = \text{Res}(u^\lambda e^{-t\lambda}, \lambda_1) + \mathcal{O}(e^{-t\lambda_2}) \quad (2.5.30)$$

Calculons le résidu. Nous avons

$$\text{Res}(u^\lambda e^{-t\lambda}, \lambda_1) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \left((\lambda - \lambda_1) u^\lambda e^{-t\lambda} \right) \quad (2.5.31)$$

En utilisant l'égalité (2.5.11), nous avons

$$\text{Res}(u^\lambda e^{-t\lambda}, \lambda_1) = \frac{u_{11}^{\lambda_1}(L, x_-) u_{12}^{\lambda_1}(x, x_-)}{\left. \frac{d}{d\lambda} (u_{12}^\lambda(L, x_-)) \right|_{\lambda=\lambda_1}} e^{-t\lambda_1} \quad (2.5.32)$$

Nous avons

$$u_{11}^{\lambda_1}(L, x_-) = \sum_{n \geq 0} u_{11}^n(L, x_-) \lambda_1^n. \quad (2.5.33)$$

Nous posons alors

$$v_n = u_{11}^n(L, x_-) \lambda_1^n \quad (2.5.34)$$

Nous avons alors que $u_{11}^{\lambda_1}(L, x_-)$ est égale à la somme des v_n . Cette série est alternée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Nous pouvons donc écrire

$$u_{11}^{\lambda_1}(L, x_-) = u_{11}^0(L, x_-) + R_{11}^{\lambda_1}(L, x_-) \quad (2.5.35)$$

où le reste $|R_{11}^{\lambda_1}(L, x_-)|$ est majoré par v_1

$$|R_{11}^{\lambda_1}(L, x_-)| \leq u_{11}^1(L, x_-) \lambda_1 \quad (2.5.36)$$

De la même façon, nous avons

$$u_{12}^{\lambda_1}(x, x_-) = u_{12}^0(x, x_-) + R_{12}^{\lambda_1}(x, x_-) \quad (2.5.37)$$

avec la majoration pour le reste

$$|R_{12}^{\lambda_1}(x, x_-)| \leq u_{12}^1(x, x_-) \lambda_1 \quad (2.5.38)$$

et

$$\frac{d}{d\lambda} \left(u_{12}^{\lambda_1}(L, x_-) \right) = u_{12}^1(x, x_-) + r_{12}^{\lambda_1} \quad (2.5.39)$$

avec

$$|r_{12}^{\lambda_1}| \leq 2|u_{12}^2(L, x_-)| \lambda_1. \quad (2.5.40)$$

Nous pouvons approcher la transformée de Laplace inverse par le terme d'ordre 0 dans le développement en λ , nous obtenons :

$$\left(\mathcal{L}^{-1} u^\lambda \right) (t) = \frac{u_{11}^0(L, x_-) u_{12}^0(x, x_-)}{u_{12}^1(L, x_-)} e^{-\lambda_1 t} \frac{\left(1 + \frac{R_{11}^{\lambda_1}(L, x_-)}{u_{11}^0(L, x_-)} \right) \left(1 + \frac{R_{12}^{\lambda_1}(x, x_-)}{u_{12}^0(x, x_-)} \right)}{1 + \frac{r_{12}^{\lambda_1}(L, x_-)}{u_{12}^1(L, x_-)}} \quad (2.5.41)$$

Étant donnée que $|r_{12}^{\lambda_1}(L, x_-)| \leq |u_{12}^1(L, x_-)|$, nous avons

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{L}^{-1} u^\lambda \right) (t) &= \frac{u_{11}^0(L, x_-) u_{12}^0(x, x_-)}{u_{12}^1(L, x_-)} e^{-\lambda_1 t} \left(1 + \frac{R_{11}^{\lambda_1}(L, x_-)}{u_{11}^0(L, x_-)} \right) \\ &\times \left(1 + \frac{R_{12}^{\lambda_1}(x, x_-)}{u_{12}^0(x, x_-)} \right) \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{r_{12}^{\lambda_1}(L, x_-)}{u_{12}^1(L, x_-)} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.5.42)$$

Nous avons vu que $u_{11}^0(x, x_-) = 1$. En utilisant les comportements asymptotiques de $u_{12}^0(L, x_-)$ et $u_{12}^1(L, x_-)$, obtenus dans la partie 2.4.2, nous avons

$$\frac{u_{11}^0(L, x_-) u_{12}^0(x, x_-)}{u_{12}^1(L, x_-)} = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{|V''(x_-)V''(x_+)|}} e^{-2[V(x_+) - V(x_-)]/\sigma_1^2} \times (1 + \mathcal{O}(\sigma_1 |\log \sigma_1|^2)) \quad (2.5.43)$$

et le terme de reste est donné par

$$\left(1 + \frac{R_{11}^{\lambda_1}(L, x_-)}{u_{11}^0(L, x_-)} \right) \left(1 + \frac{R_{12}^{\lambda_1}(x, x_-)}{u_{12}^0(x, x_-)} \right) \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{r_{12}^{\lambda_1}(L, x_-)}{u_{12}^1(L, x_-)} \right) \right) = 1 + \mathcal{O}(\lambda_1) \quad (2.5.44)$$

■

Chapitre 3

Cas général : étude qualitative des différents régimes

Nous ajoutons maintenant les termes de bruit à l'équation (1.0.1) dans le cas où $b \neq 0$. Nous considérons le système d'équations différentielles stochastiques :

$$\begin{aligned}\varepsilon dx_t &= (x_t - x_t^3 + y_t) dt + \sqrt{\varepsilon} \sigma_1 dW_t^{(1)} \\ dy_t &= (a - x_t - cy_t) dt + \sigma_2 dW_t^{(2)}\end{aligned}\tag{3.0.1}$$

où σ_1 et σ_2 sont deux réels positifs représentant l'intensité du bruit, $W_t^{(1)}$ et $W_t^{(2)}$ sont deux mouvements browniens standards indépendants. D'après les théorèmes généraux [Oks95, Chapitre 5], ce système admet une unique solution forte $\{(x_t, y_t)\}_{t \in [0, T]}$ presque sûrement continue.

Nous commençons par regarder le comportement numérique des solutions du système (3.0.1) pour différentes valeurs des paramètres a , c , σ_1 et σ_2 . Pour ne pas avoir trop de paramètres, nous prendrons $c = 1$. Nous mettons en évidence trois régimes différents :

- des petites oscillation autour du point d'équilibre pour un bruit faible,
- une alternance de petites oscillations et de spikes pour un bruit intermédiaire,
- une suite de spikes sans petites oscillations intermédiaires pour un bruit fort.

Nous donnons le diagramme de bifurcation qui indique pour quelles valeurs des paramètres nous avons ces trois régimes (partie 2.1). Ensuite nous donnerons des résultats généraux sur les systèmes lents-rapides stochastiques qui décrivent le comportement des solutions quand la trajectoire n'est pas proche du point d'équilibre stable (partie 3.2). Ceci nous permet de nous concentrer sur l'étude au voisinage de ce point. Nous faisons une première étude en introduisant des coordonnées semblables à des coordonnées polaires puis nous faisons une étude qualitative pour calculer une valeur approchée du bruit critique faisant la frontière entre les régimes (partie 3.3). Enfin nous transformons le système initiale dans les coordonnées (ξ, z) introduites dans l'étude de l'équation déterministe du chapitre 1. En faisant, une approximation que nous justifierons dans les chapitres suivants, nous résolvons le système approché et en déduisons les différents régimes suivant les valeurs de σ , ε et δ et retrouvons les frontières du diagramme de bifurcation (partie 3.4).

3.1 Simulations

Nous regardons l'influence du bruit dans les différents cas. Pour les valeurs de a qui donnent un point d'équilibre instable, l'ajout du bruit ne modifie pas l'allure générale de la trajectoire. Elle reste proche de la trajectoire déterministe. Nous observons seulement des sauts plus tôt ou plus tardifs hors du voisinage

des branches d'équilibre de la cubique. Les cas intéressants se produisent quand un des points d'équilibre du système déterministe associé est stable. Nous observons sur la figure 3.1 les trois cas suivants l'intensité du bruit :

- quand le bruit est faible, la trajectoire, en coordonnées (x, y) (figure 3.1 **(1a)**), tourne autour du point d'équilibre et reste proche du point d'équilibre. Quand nous observons l'évolution du potentiel en fonction du temps (figure 3.1 **(1b)**), cela se traduit par des petites oscillations autour de la valeur d'équilibre pour x .
- pour un bruit intermédiaire, nous observons une alternance de deux régimes. Si nous regardons le potentiel en fonction du temps (figure 3.1 **(2b)**), nous observons une alternance de spikes ou train de spikes et de périodes de repos où nous avons des petites oscillations autour de la valeurs d'équilibre. En coordonnées (x, y) (figure 3.1 **(2a)**), nous avons une alternance entre des grands cycles et des petits cycles au voisinage du point d'équilibre.
- quand le bruit est fort, la trajectoire est similaire au cas où le point d'équilibre est instable. Cela se traduit en coordonnées (x, y) (figure 3.1 **(3a)**) par de grands cycles. Parfois, la trajectoire fait une petite rotation autour du point d'équilibre. Pour le potentiel en fonction du temps (figure 3.1 **(3b)**), nous avons alors une suite de spikes avec parfois quelques petites oscillations entre deux spikes.

La figure 3.2 est une simplification des résultats du diagramme proposé dans l'article [MVE08, Figure 8]. Elle donne les frontières entre les différents régimes. En particulier pour $\delta < \sqrt{\varepsilon}$, il existe un régime intermédiaire que nous ne retrouvons pas pour $\delta \geq \sqrt{\varepsilon}$. Dans la suite, notre objectif est de comprendre qualitativement l'origine des frontières entre les différents régimes. Nous rendrons une partie de ces résultats rigoureux dans les chapitres 4 et 5.

3.2 Quelques résultats généraux sur les systèmes lents-rapides stochastiques

Dans cette partie nous rappelons des résultats généraux (voir [BG09]) qui s'appliquent pour des systèmes d'EDS de la forme

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} f(x(t), y(t)) dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}} F(x(t), y(t)) dW_t^{(1)} \\ dy_t &= g(x(t), y(t)) dt + \sigma_2 G(x(t), y(t)) dW_t^{(2)} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

où $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $F, G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions suffisamment régulières, $W_t^{(1)}$ et $W_t^{(2)}$ sont deux mouvements Browniens standards indépendants et σ_1 et σ_2 sont deux petits paramètres qui mesurent l'intensité des deux termes de bruit.

Nous introduisons la déviation $\xi(t)$ entre $x(t)$ et la trajectoire invariante $\bar{x}(y(t), \varepsilon)$ introduite dans la partie 1.1.

$$\xi(t) = x(t) - \bar{x}(y(t), \varepsilon). \quad (3.2.2)$$

Nous rappelons que $\bar{x}(y(t), \varepsilon) = x^*(y) + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Nous obtenons alors l'équation

$$\begin{aligned} d\xi(t) &= \frac{1}{\varepsilon} [\bar{a}(y(t), \varepsilon)\xi(t) + \mathcal{O}(\xi(t)^2) + \mathcal{O}(\varepsilon(\sigma_2)^2)] dt \\ &\quad + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}} [F_0(y(t), \varepsilon) + \mathcal{O}(\xi(t))] dW_t^{(1)} \\ &\quad - \sigma_2 \partial_y \bar{x}(y(t), \varepsilon) [G_0(y(t), \varepsilon) + \mathcal{O}(\xi(t))] dW_t^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

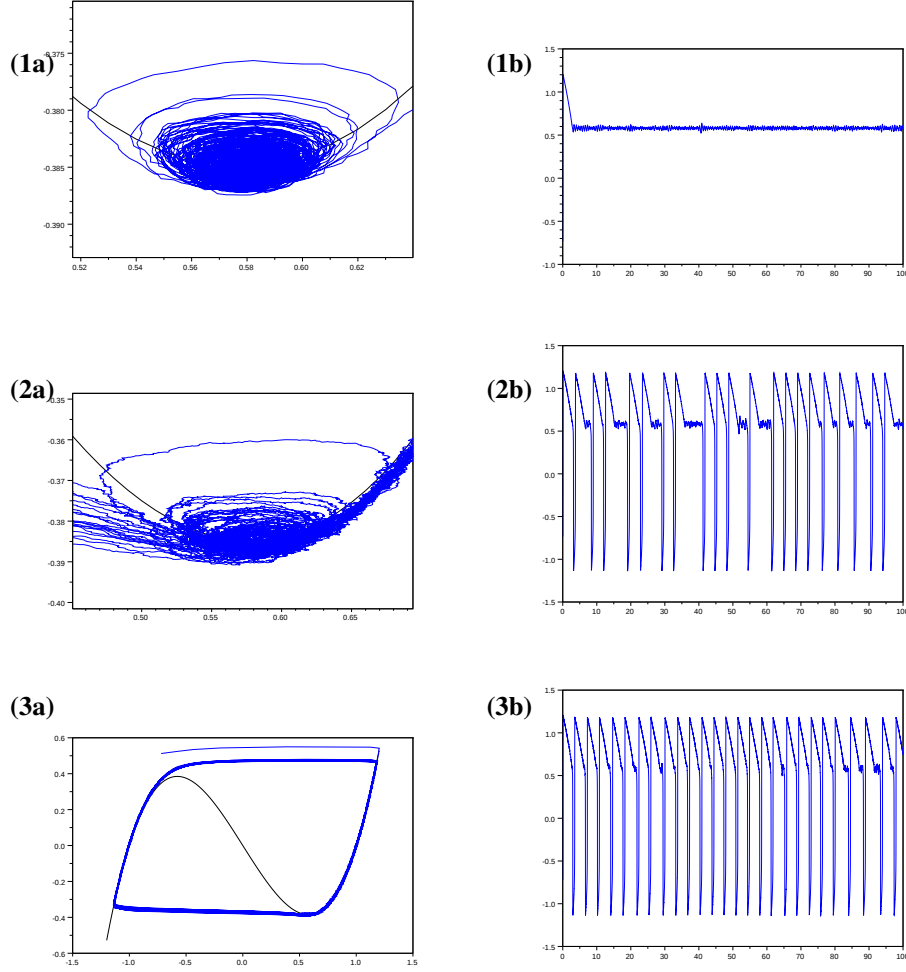


FIGURE 3.1. Exemples de trajectoires de l'équation de Fitzugh-Nagumo (3.0.1) en coordonnées (x, y) (colonne de gauche) et (t, x) (colonne de droite). Les valeurs des paramètres sont $\varepsilon = 0.01$ et $a = 0.58$. L'intensité du bruit est donnée par $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.001, 0.003, 0.007$.

où $\bar{a}$, F_0 et G_0 sont définis par

$$\begin{aligned}\bar{a}(y, \varepsilon) &= \partial_x f(\bar{x}(y, \varepsilon), y) = a^*(y) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ F_0(y, \varepsilon) &= F(\bar{x}(y, \varepsilon), y) = F(x^*(y), y) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ G_0(y, \varepsilon) &= G(\bar{x}(y, \varepsilon), y) = G(x^*(y), y) + \mathcal{O}(\varepsilon).\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

Nous approchons $y(t)$ par $y^0(t)$ solution de l'équation déterministe associée et nous considérons l'approximation linéaire $\xi^0(t)$ de ξ_t . Nous obtenons alors le système

$$\begin{aligned}d\xi^0(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \bar{a}(y^0(t), \varepsilon) \xi^0(t) dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}} F_0(y^0(t), \varepsilon) dW_t^{(1)} \\ &\quad - \sigma_2 \partial_y \bar{x}(y^0(t), \varepsilon) G_0(y^0(t), \varepsilon) dW_t^{(2)} \\ dy^0(t) &= g(\bar{x}(y^0(t), \varepsilon), y^0(t)) dt.\end{aligned}\tag{3.2.5}$$

En supposant que $x(t)$ part de la trajectoire invariante $\bar{x}(y(t), \varepsilon)$ au temps $t = 0$, nous avons alors $\xi(0) = 0$ et nous pouvons supposer $\xi^0(0) = 0$. Le processus $\{\xi^0(t)\}_t$ est Gaussien avec une espérance nulle et une variance

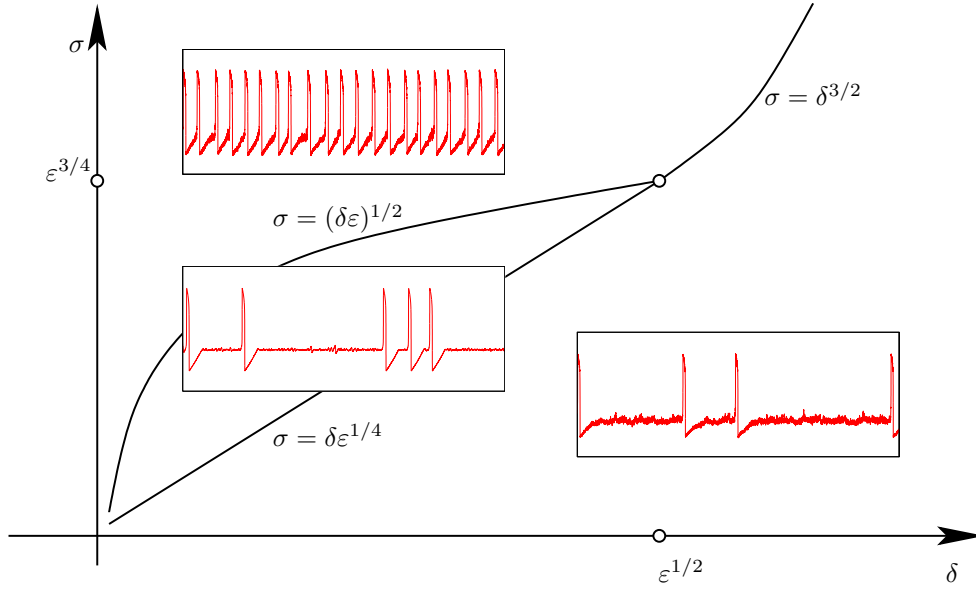


FIGURE 3.2. Diagramme de l'équation stochastique de FitzHugh-Nagumo. Le paramètre δ mesure la distance du point d'équilibre au point de bifurcation de Hopf, σ donne l'intensité du bruit, et ε est le paramètre caractérisant le système lent-rapide. Les trois principaux régimes sont les spikes isolés et rares, les trains de spikes, et les spikes répétitifs.

$\sigma_1^2 v(t)$. La fonction $v(t)$ est solution du système lent-rapide déterministe :

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{v} &= 2\bar{a}(y^0(t), \varepsilon)v(t) + F_0(y^0(t), \varepsilon)^2 + \varepsilon \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \partial_y \bar{x}(y^0(t), \varepsilon) G_0(y^0(t), \varepsilon) \right]^2 \\ \dot{y}^0(t) &= g(\bar{x}(y^0(t), \varepsilon), y^0(t)) . \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Par le théorème de Tikhonov, nous déduisons que $v(t)$ peut être approchée par une fonction $\bar{v}(y^0(t), \varepsilon)$ qui vérifie

$$\bar{v}(y^0(t), \varepsilon) = -\frac{F(\bar{x}(y, \varepsilon), y^0(t))^2}{2\partial_x f(\bar{x}(y, \varepsilon), y^0(t))} + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (3.2.7)$$

Cela signifie que la variance de la déviation $\xi^0(t)$ est proportionnelle à la variance du terme de bruit et inversement proportionnelle à l'attractivité de la branche d'équilibre stable.

Nous introduisons ensuite le domaine

$$\mathcal{B}(h) = \{(x, y) : y \in I, |x - \bar{x}(y, \varepsilon)| < h^2 \bar{v}(y, \varepsilon)\} , \quad (3.2.8)$$

où I est un intervalle sur lequel la branche d'équilibre $x^*(y)$ est stable.

Nous définissons les deux temps de sortie :

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{B}(h)} &= \inf\{t > 0 : (x(t), y(t)) \notin \mathcal{B}(h)\}, \\ \tau_I &= \inf\{t > 0 : y(t) \notin I\}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Le domaine $\mathcal{B}(h)$ est un tube centré autour de la courbe invariante $\bar{x}$ et correspond à l'ensemble dans lequel nous supposons que la trajectoire va rester. Le temps τ_I donne le premier temps pour lequel la variable lente y sort de l'intervalle correspondant à une branche d'équilibre stable. Le temps $\tau_{\mathcal{B}(h)}$ correspond au premier temps de sortie du domaine $\mathcal{B}(h)$. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 3.2.1 ([BG02]). *Supposons que la condition initiale $(x(0), y(0))$ soit sur la courbe invariante, i.e., $x(0) = \bar{x}(y(0), \varepsilon)$ pour un $y(0) \in I$. Il existe alors des constantes $h_0, c, L > 0$ telles que pour tout $h \leq h_0$,*

$$\mathcal{P}\{\tau_{\mathcal{B}(h)} < \min(t, \tau_I)\} \leq C(t, \varepsilon)e^{-\kappa h^2/2\sigma^2} \quad (3.2.10)$$

où l'exposant κ ne dépend pas du temps et vérifie

$$\kappa = 1 - \mathcal{O}(h) - \mathcal{O}(\varepsilon(\sigma_1/h)^2) - \mathcal{O}(e^{-c/\varepsilon}/h) \quad (3.2.11)$$

et le préfacteur est donné par

$$C(t, \varepsilon) = L \frac{(1+t)^2}{h^2 \varepsilon} \left(1 + \frac{h^2}{\sigma^2}\right). \quad (3.2.12)$$

Pour une valeur de h suffisamment grande, pour $h \gg \sigma$, la trajectoire a une probabilité très faible de quitter le domaine $\mathcal{B}(h)$, avant que $y(t)$ ne quitte l'intervalle I sur lequel la branche d'équilibre est définie.

En particulier si nous prenons h suffisamment plus grand que σ , de l'ordre de $\sigma|\log \sigma|$, le majorant de l'inégalité (3.2.10) devient très petit, même si nous attendons un temps assez long. La trajectoire reste donc avec une grande probabilité dans le domaine $\mathcal{B}(\sigma|\log \sigma|)$.

Nous donnons ensuite un résultat pour le comportement au voisinage d'un point de bifurcation noeud-col :

Théorème 3.2.2 ([BG02]). *Soit (x^*, y^*) un point de bifurcation noeud-col du système vérifiant $g(x^*, y^*) \neq 0$. Supposons que les coordonnées ont été transformées de telle sorte que*

$$\begin{aligned} (x^*, y^*) &= (0, 0), \\ \partial_{xx}f(0, 0) &= -2, \\ \partial_y f(0, 0) &= -1, \\ g(0, 0) &= 1, \\ F(0, 0) &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

En prenant une condition initiale $(x(0), y(0))$ suffisamment proche du point de bifurcation, avec $y(0) > 0$ d'ordre 1, et $x(0) - x^*(y(0)) > 0$ d'ordre ε . Alors pour une trajectoire partant de $(x(0), y(0))$ et $\sigma_2 \leq C\sigma_1$, nous avons :

- Si $\sigma_1 \ll \sigma_c = \varepsilon^{1/2}$, la trajectoire reste dans $\mathcal{B}(h)$ avec une probabilité plus grande que $1 - \mathcal{O}(e^{-h^2/2\sigma^2})$ pour tout h jusqu'à l'ordre $\varepsilon^{1/2}$, tant que $y(t) > -c_1\varepsilon^{2/3}$. En particulier, la probabilité que $x(t)$ devienne négative pour ces $y(t)$ est de l'ordre $e^{-\mathcal{O}(\varepsilon/\sigma^2)}$. De plus, $x(t)$ a de grande chance d'atteindre des valeurs négatives d'ordre 1 dès que $y(t)$ atteint des valeurs d'ordre $-\varepsilon^{2/3}|\log \varepsilon|$.
- Si $\sigma_1 \gg \sigma_c = \varepsilon^{1/2}$, la trajectoire a de grandes chances de couper la branche d'équilibre instable et d'atteindre des valeurs négatives d'ordre 1 pour des valeurs de $y(t)$ d'ordre $\sigma^{4/3}$. La probabilité que ceci ne se produise pas est de l'ordre de $e^{-\mathcal{O}(\sigma^2/\varepsilon|\log \sigma|)}$.

Dans le cas où $\sigma \ll \varepsilon^{1/2}$, le comportement est assez similaire à celui du cas déterministe : la trajectoire atteint les y négatifs pour x d'ordre $\varepsilon^{2/3}$ et passe alors rapidement à des valeurs de x négatives d'ordre 1. Dans l'autre cas où $\sigma \gg \varepsilon^{1/2}$, le bruit change le comportement général de la trajectoire : elle peut anticiper le saut vers les x négatifs d'ordre 1 avant que y soit devenu négatif.

En appliquant ces résultats à l'équation de FitzHugh-Nagumo (3.0.1), nous pouvons donner le comportement des solutions en dehors du voisinage du point d'équilibre stable. Si nous prenons une condition proche de la branche d'équilibre $\{(x, x^3 - x), x < -1/\sqrt{3}\}$, la trajectoire reste dans un voisinage de la branche d'équilibre. Quand elle s'approche du point de bifurcation $(-1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$ la trajectoire saute, avant ou après le point de bifurcation suivant l'intensité du bruit, pour atteindre la branche d'équilibre $\{(x, x^3 - x), x > 1/\sqrt{3}\}$. Elle

reste alors dans un tube autour de la branche d'équilibre pour atteindre le point d'équilibre, en supposant que celui-ci soit stable et proche du point de bifurcation $(1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3})$. La trajectoire va rester dans le voisinage du point d'équilibre un temps plus ou moins long suivant les valeurs des paramètres de l'équation (3.0.1), avant de retourner sur la branche d'équilibre stable $\{(x, x^3 - x), x < -1/\sqrt{3}\}$. Nous nous intéressons par la suite au comportement de la trajectoire au voisinage du point d'équilibre pour prévoir le comportement de la solution suivant les valeurs des paramètres.

3.3 Limite inférieure du régime bruit fort

Nous cherchons à déterminer pour quels paramètres nous avons les trois comportements mis en évidence dans les simulations numériques. Nous nous plaçons dans le cas où le point d'équilibre est un foyer, c'est à dire pour $|\delta| \leq \sqrt{\varepsilon}$. Pour cela, nous transformons l'équation de FitzHugh-Nagumo en coordonnées polaires (r, θ) introduites dans la proposition 1.3.2 après avoir transformé le système en coordonnées (ξ, ζ) introduites dans la preuve de cette Proposition. En étudiant l'ordre de grandeur des termes, nous obtenons un premier bruit de coupure σ_c . Il correspond à la limite inférieure du bruit fort et est donné par $\sigma_c = \sqrt{\varepsilon\delta}$.

En faisant les mêmes transformations que pour la partie linéaire dans le cas déterministe, nous obtenons pour l'équation de FitzHugh-Nagumo (3.0.1) le résultat suivant :

Proposition 3.3.1. *En coordonnées (r, θ) , pour $0 \geq \delta \geq -\sqrt{\varepsilon}$, l'équation de FitzHugh-Nagumo (3.0.1) prend la forme*

$$\begin{aligned} dr_t &= \left[-\mu_R r_t - \frac{3a}{\varepsilon\mu_I} r_t^2 \sin \theta_t (\tilde{\Delta}_t)^2 + \frac{1}{\varepsilon\lambda_I} r_t^3 \sin \theta_t (\tilde{\Delta}_t)^3 + \frac{1}{2r_t} \left(\frac{\sigma_1^2}{\varepsilon\lambda_I^2} \cos^2 \theta_t + \sigma_2^2 \sin^2 \theta_t \right) \right] dt \\ &\quad + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}\lambda_I} \sin \theta_t dW_t^{(1)} + \sigma_2 \cos \theta_t dW_t^{(2)} \\ d\theta_t &= \left[\lambda_I - \frac{3a}{\varepsilon\lambda_I} r_t \cos \theta_t (\tilde{\Delta}_t)^2 + \frac{1}{\varepsilon\lambda_I} r_t^2 \cos \theta_t (\tilde{\Delta}_t)^3 \right] dt + \frac{1}{r_t} \left[\frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}\lambda_I} \cos \theta_t dW_t^{(1)} - \sigma_2 \sin \theta_t dW_t^{(2)} \right] \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

où

$$\tilde{\Delta} = -\mu_R \xi - \mu_I \zeta \quad (3.3.2)$$

et nous rappelons la définition de μ_R et μ_I

$$\mu_R = \frac{\delta}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \mu_I = \frac{\sqrt{\varepsilon - \delta^2}}{\varepsilon} \quad (3.3.3)$$

PREUVE. En translatant l'origine au point d'équilibre du système (x^*, y^*) , le système de FitzHugh-Nagumo (3.0.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon du_t &= [(1 - 3a^2)u_t + v_t - 3a u_t^2 - u_t^3] dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma_1 dW_t^{(1)} \\ dv_t &= -u_t dt + \sigma_2 dW_t^{(2)} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Faisons ensuite le changement de variables qui permet d'obtenir la forme de Jordan pour la partie linéaire

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_R & \mu_I \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (3.3.5)$$

nous obtenons alors le système :

$$\begin{aligned} d\xi_t &= [-\mu_R \xi_t - \mu_I \zeta_t] dt + \sigma_2 dW_t^{(2)} \\ d\zeta_t &= \left[\mu_I \xi_t - \mu_R \zeta_t - \frac{3a}{\varepsilon\mu_I} (\Delta_t)^2 + \frac{1}{\varepsilon\mu_I} (\Delta_t)^3 \right] dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}\mu_I} dW_t^{(1)} \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

où

$$\Delta_t = -\mu_R \xi_t - \mu_I \zeta_t. \quad (3.3.7)$$

Passons ensuite en coordonnées polaires en posant

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \theta \\ \zeta &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Nous cherchons un système sous la forme

$$\begin{aligned} dr_t &= \rho_1(r_t, \theta_t) dt + \psi_1^1(r_t, \theta_t) dW_t^{(1)} + \psi_1^2(r_t, \theta_t) dW_t^{(2)} \\ d\theta_t &= \rho_2(r_t, \theta_t) dt + \psi_2^1(r_t, \theta_t) dW_t^{(1)} + \psi_2^2(r_t, \theta_t) dW_t^{(2)} \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

D'après la formule d'Itô, nous avons

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \cos \theta_t dr_t - r_t \sin \theta_t d\theta_t - \frac{1}{2} r_t \cos \theta_t (d\theta_t)^2 \\ d\zeta_t &= \sin \theta_t dr_t + r_t \cos \theta_t d\theta_t - \frac{1}{2} r_t \sin \theta_t (d\theta_t)^2 \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

où

$$\begin{aligned} (d\theta_t)^2 &= \left(\psi_1^2(r_t, \theta_t) dW_t^{(1)} + \psi_2^2(r_t, \theta_t) dW_t^{(2)} \right)^2 \\ &= [\psi_1^2(r_t, \theta_t)^2 + \psi_2^2(r_t, \theta_t)^2] dt \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Par combinaison linéaire, nous obtenons :

$$\begin{aligned} dr_t &= \cos \theta_t d\xi_t + \sin \theta_t d\zeta_t + \frac{1}{2} r_t [\psi_1^2(r_t, \theta_t)^2 + \psi_2^2(r_t, \theta_t)^2] dt \\ r_t d\theta_t &= -\sin \theta_t d\xi_t + \cos \theta_t d\zeta_t \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

En remplaçant $d\xi_t$ et $d\zeta_t$ par les expressions du système (3.3.10), nous avons :

$$\begin{aligned} dr_t &= \left[-\mu_R r_t - \frac{3a}{\varepsilon \mu_I} r_t^2 \sin \theta_t (\tilde{\Delta}_t)^2 + \frac{1}{\varepsilon} r_t^3 \sin \theta_t (\tilde{\Delta}_t)^3 + \frac{1}{2} r_t [\psi_1^2(r_t, \theta_t)^2 + \psi_2^2(r_t, \theta_t)^2] \right] dt \\ &\quad + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon} \mu_I} \sin \theta_t dW_t^{(1)} + \sigma_2 \cos \theta_t dW_t^{(2)} \\ r_t d\theta_t &= \left[\mu_I r_t - \frac{3a}{\varepsilon \mu_I} r_t^2 \cos \theta_t (\tilde{\Delta}_t)^2 + \frac{1}{\varepsilon \mu_I} r_t^3 \cos \theta_t (\tilde{\Delta}_t)^3 \right] dt \\ &\quad + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon} \mu_I} \cos \theta_t dW_t^{(1)} - \sigma_2 \sin \theta_t dW_t^{(2)} \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

où nous avons posé

$$\tilde{\Delta} = -\mu_R \cos \theta - \mu_I \sin \theta. \quad (3.3.14)$$

Par identification entre (3.3.9) et (3.3.13), nous trouvons

$$\begin{aligned} \psi_2^1(r_t, \theta_t) &= \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon} \lambda_I} \frac{\cos \theta_t}{r_t}, \\ \psi_2^2(r_t, \theta_t) &= -\sigma_2 \frac{\sin \theta_t}{r_t}. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Nous n'avons plus qu'à remplacer $\psi_2^1(r_t, \theta_t)$ et $\psi_2^2(r_t, \theta_t)$ dans l'équation (3.3.13), pour obtenir (3.3.1).

■

3.3.1 Étude qualitative du rayon moyen du petit cycle

Nous évaluons et comparons l'ordre de grandeur des différents termes de (3.3.1) pour étudier le comportement des solutions. Les résultats de cette partie ne sont pas rigoureux et seront affinés par la suite dans la partie 5.1. Nous considérons le cas $|\delta| \ll \sqrt{\varepsilon}$. Nous avons alors $\mu_I \gg \mu_R$. Regardons l'ordre de grandeur des autres termes dans l'équation (3.3.1). Comparons μ_I et $3ar \cos \theta (\tilde{\Delta})^2 / (\varepsilon \mu_I)$. La constante $3a$ est proche de $\sqrt{3}$ donc d'ordre 1. Nous avons alors

$$\frac{1}{\mu_I} \frac{3a}{\varepsilon \mu_I} r \cos \theta (\tilde{\Delta})^2 \simeq \frac{1}{\varepsilon \mu_I^2} r (\tilde{\Delta})^2 \quad (3.3.16)$$

Nous considérons que $\cos \theta$ et $\sin \theta$ sont de l'ordre de 1. Cela donne pour $\tilde{\Delta}$ l'estimation :

$$(\tilde{\Delta})^2 \simeq \mu_R^2 + \mu_I^2 = \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.3.17)$$

et donc

$$\frac{3a}{\varepsilon \mu_I^2} r \cos \theta (\tilde{\Delta})^2 \simeq \frac{r}{\varepsilon - \delta^2} \quad (3.3.18)$$

Nous sommes dans le cas $\delta^2 \ll \varepsilon$. Pour que le terme en μ_I soit dominant dans la deuxième équation différentielle qui porte sur θ , c'est à dire $\mu_I \gg 3a r \cos \theta / \varepsilon \mu_I (\tilde{\Delta})^2$, nous devons avoir

$$r \ll \varepsilon \quad (3.3.19)$$

Posons

$$S = \frac{\sigma_1^2}{\varepsilon \mu_I^2} \cos^2 \theta + \sigma_2^2 \sin^2 \theta. \quad (3.3.20)$$

Regardons l'ordre de grandeur de S .

$$S \simeq \frac{4\varepsilon \sigma_1^2}{4\varepsilon - \delta^2} + \sigma_2^2 \quad (3.3.21)$$

Si $\delta^2 \ll \varepsilon$, nous avons alors pour S l'estimation

$$S \simeq \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad (3.3.22)$$

Comparons maintenant les termes $\mu_R r$ et S/r . Dans le cas où $\delta^2 \ll \varepsilon$ et $r \ll \varepsilon$, $\mu_R r \ll \sqrt{\varepsilon}$ et $S/r \gg (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/\varepsilon$. Pour r suffisamment petit, le champ de vecteur est horizontal donc θ varie beaucoup plus vite que r et nous pouvons regarder la moyenne de r sur une période c'est à dire sur $[0, 2\pi]$. Regardons la moyennisation en θ_t sur $[0, 2\pi]$ de l'équation sur dr_t du système (3.3.1),

$$\sin \theta (\tilde{\Delta})^2 = \mu_R^2 \sin \theta \cos^2 \theta - 2\mu_R \mu_I \cos \theta \sin^2 \theta + \mu_I^2 \sin^3 \theta \quad (3.3.23)$$

$$\sin \theta (\tilde{\Delta})^3 = -\mu_R^3 \sin \theta \cos^3 \theta - 3\mu_R^2 \mu_I \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 3\mu_R \mu_I^2 \sin^3 \theta \cos \theta - \mu_I^3 \sin^4 \theta \quad (3.3.24)$$

Calculons les différentes intégrales des termes en θ qui apparaissent dans les développements (3.3.23) et (3.3.24) :

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = 0, \quad (3.3.25)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^2 \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \, d\theta = 0, \quad (3.3.26)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos^3 \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \cos \theta \, d\theta = 0, \quad (3.3.27)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}, \quad (3.3.28)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{4}, \quad (3.3.29)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi. \quad (3.3.30)$$

Nous obtenons alors l'équation différentielle ordinaire portant sur le rayon moyen $\bar{r}$:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = -\mu_R \bar{r} - \frac{3}{8\varepsilon} (\mu_R^2 + \mu_I^2) \bar{r}^3 + \left(\frac{\sigma_1^2}{2\varepsilon\mu_I^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \frac{1}{\bar{r}} + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} dW_t \quad (3.3.31)$$

Nous pouvons un peu simplifier en utilisant $\mu_I^2 \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ et nous posons $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$,

$$d\bar{r} = \left[-\mu_R \bar{r} - \frac{3}{8\varepsilon^2} \bar{r}^3 + \frac{\sigma}{2} \frac{1}{\bar{r}} \right] dt + \sigma dW_t \quad (3.3.32)$$

Calculons la valeur à l'équilibre $\bar{r}_{eq}$ de l'équation différentielle déterministe associée à l'équation (3.3.32). C'est une racine du polynôme P de degré 4 :

$$P(\bar{r}_{eq}) = \mu_R \bar{r}_{eq}^2 - \frac{3}{8\varepsilon^2} \bar{r}_{eq}^4 + \frac{\sigma^2}{2} \quad (3.3.33)$$

Le polynôme P a une unique racine réelle positive $\bar{r}_{eq}$

$$\bar{r}_{eq} = \sqrt{\frac{4\varepsilon^2}{3} \left(\mu_R + \sqrt{\mu_R^2 + \frac{3\sigma^2}{2\varepsilon^2}} \right)} \quad (3.3.34)$$

Regardons l'ordre de grandeur de $\bar{r}_{eq}$ suivant la valeur de μ_R . Nous pouvons distinguer deux cas :

– si $\mu_R^2 \gg \sigma^2/\varepsilon^2$, ce qui revient à $\delta \gg \sigma$ alors

$$\sqrt{\mu_R^2 + \frac{3\sigma^2}{2\varepsilon^2}} \simeq \mu_R \left(1 + \frac{3\sigma^2}{4\varepsilon^2} \right) \quad (3.3.35)$$

ce qui implique pour $\bar{r}_{eq}$

$$\bar{r}_{eq} \simeq \sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu_R}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\sigma^2}{\delta}} \quad (3.3.36)$$

– si $\mu_R^2 \ll \sigma^2/\varepsilon^2$, ce qui revient à $\delta \ll \sigma$ alors

$$\bar{r}_{eq} \simeq \varepsilon^{1/2} \sigma^{1/2}. \quad (3.3.37)$$

3.3.2 Discussion

Nous avons travaillé dans le cas où $|\delta| \leq \sqrt{\varepsilon}$. Nous allons comparer le rayon moyen $\bar{r}_{eq}$ avec ε qui est la distance du point d'équilibre à la ligne séparatrice. Nous considérons que si le rayon moyen est plus petit que ε , nous ne faisons pas (ou rarement) de spike alors que si ce rayon est plus grand que ε nous avons une suite de spikes.

Nous distinguons alors les deux cas que nous avons obtenus pour l'approximation de $\bar{r}_{eq}$:

- pour le cas $\bar{r}_{eq} \simeq \sqrt{\varepsilon\sigma^2/\delta}$, le rayon moyen est égal à ε pour $\sigma_c = \sqrt{\varepsilon\delta}$. Dans ce cas δ est bien plus petit que σ .
- pour le cas $\bar{r}_{eq} \simeq \varepsilon^{1/2}\sigma^{1/2}$ et $\delta \ll \sigma$, le rayon moyen est égal à ε pour $\sigma_c = \varepsilon$.

Nous avons donc

- pour $0 < |\delta| \ll \varepsilon$, $\sigma_c = \varepsilon$
- pour $\varepsilon \gg |\delta| < \sqrt{\varepsilon}$, $\sigma_c = \sqrt{\varepsilon\delta}$.

La valeur σ_c est l'intensité de coupure entre le régime sans spike et le régime avec une suite de spikes : pour $\sigma < \sigma_c$, nous n'avons pas de spike et pour $\sigma > \sigma_c$, nous avons une suite de spikes. Nous allons affiner les frontières dans la partie suivante.

3.4 Étude qualitative de la transition du bruit fort au bruit faible

Nous transformons l'équation (3.0.1) en coordonnées (ξ, z) qui ont été introduites dans la partie sur l'équation déterministe. Ensuite nous nous intéressons à l'approximation de cette équation pour des valeurs de z petites. Nous pouvons ainsi exprimer ξ en fonction du temps et obtenir une EDS portant sur z que nous résolvons. En considérant que nous obtenons un spike quand z devient négatif, nous pouvons calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de spike, c'est à dire que z reste positif. A partir de l'expression de cette probabilité, nous étudions pour quelles valeurs de σ , ε et δ cette probabilité est proche de 0, proche de 1 et proche de 1/2. Nous obtenons trois bruits de coupures : $\sigma_{c_1} = \varepsilon^{1/4}\delta$ qui est la limite supérieure du bruit faible, $\sigma_{c_2} = \varepsilon^{3/4}$ qui est la limite supérieure du bruit fort et une limite intermédiaire $\sigma_{c_3} = \sqrt{\varepsilon\delta}$ pour laquelle nous avons la même probabilité de faire un spike et une petite oscillation. Nous avons alors les trois cas :

- le cas $\sigma \ll \varepsilon^{1/4}\delta$ correspond au régime où il y a de rares spikes isolés
- le cas $\sigma \gg \varepsilon^{3/4}$ correspond au régime il y a une suite de spikes ininterrompus
- le cas $\varepsilon^{1/4}\delta \leq \sigma \leq \varepsilon^{3/4}$ correspond au régime intermédiaire avec des trains de spikes entrecoupés de petites oscillations. Dans ce régime, nous avons le cas particulier $\sigma = \sqrt{\varepsilon\delta}$ où la probabilité de faire un spike est égale à 1/2.

3.4.1 Transformation de l'équation stochastique

Nous écrivons l'équation (3.0.1) dans les coordonnées (ξ, z) introduites dans l'étude du système déterministe 1.0.1 dans la partie 1.3.3. Nous rappelons la définition de la variable $\alpha_* = \sqrt{(1 - c\varepsilon)/3}$ définie en (1.3.44).

Proposition 3.4.1. *Dans les variables (ξ, z) et le temps $t/\sqrt{\varepsilon}$, le système de FitzHugh-Nagumo (3.0.1) prend la forme*

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \left(\frac{1}{2} - z_t - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^3 \right) dt + \tilde{\sigma}_1 d\tilde{W}_t^{(1)} \\ dz_t &= \left(\tilde{\mu} + 2\xi_t z_t + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^4 \right) dt - 2\tilde{\sigma}_1 \xi_t d\tilde{W}_t^{(1)} + \tilde{\sigma}_2 d\tilde{W}_t^{(2)} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

où

$$\tilde{\sigma}_1 = -3\alpha_*\varepsilon^{-3/4}\sigma_1, \quad (3.4.2)$$

$$\tilde{\sigma}_2 = 3\alpha_*\varepsilon^{-3/4}\sigma_2, \quad (3.4.3)$$

$$\tilde{\mu} = \mu - \frac{\tilde{\sigma}_1^2}{3\alpha_*} = \frac{3\alpha_*(\delta - \sigma_1^2/\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (3.4.4)$$

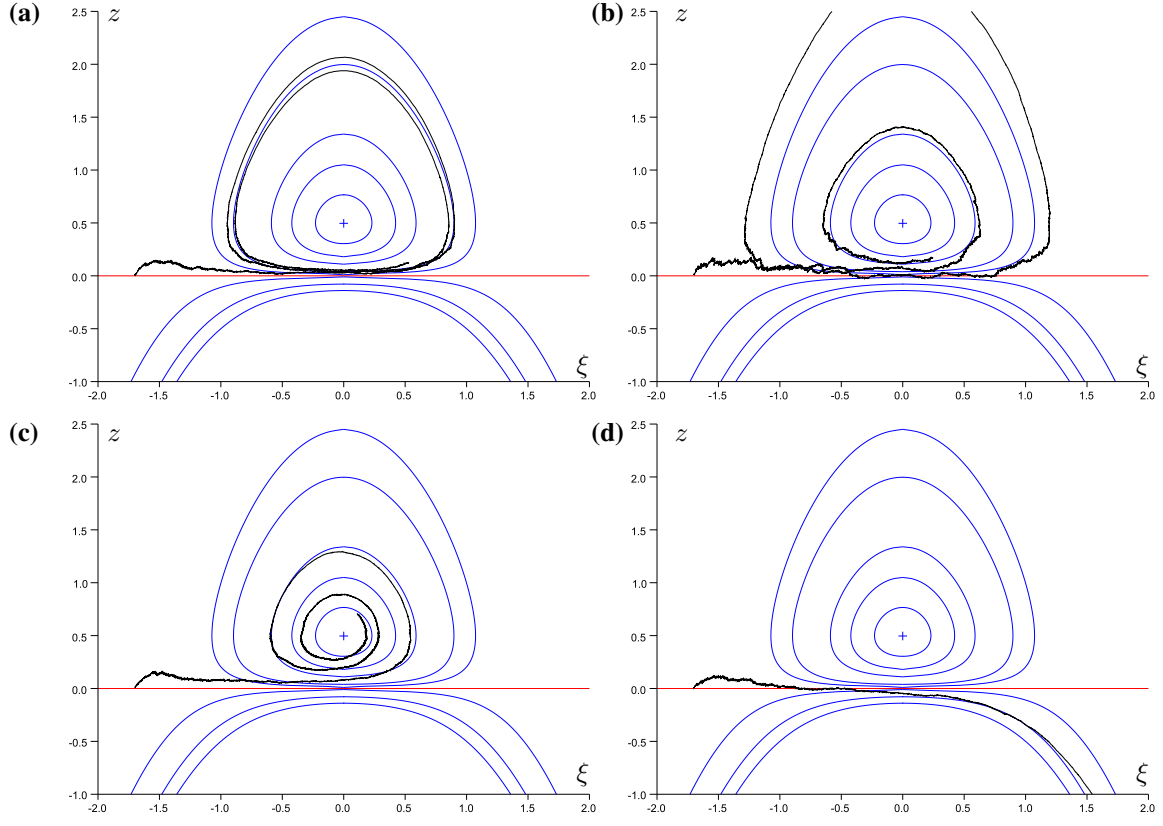


FIGURE 3.3. Trajectoires de l'équation (3.4.1) (courbe noire) avec les lignes de niveaux de l'intégrale première K (courbes bleues). La ligne rouge est la séparatrice dans le cas $\tilde{\mu} = \varepsilon = 0$. Les valeurs des paramètres sont $c = 0, \varepsilon = 0.01$ et $\tilde{\mu} = 0.01, \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2 = 0.01$ (a), $\tilde{\mu} = 0.01, \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2 = 0.03$ (b), $\tilde{\mu} = 0.05, \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2 = 0.01$ (c) et $\tilde{\mu} = -0.05, \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2 = 0.013$ (d).

PREUVE. Nous allons faire les mêmes changements de variables que pour l'équation déterministe dans la proposition 1.3.5.

$$\begin{aligned} \varepsilon dx_t &= (x_t - x_t^3 + y_t) dt + \sigma_1 \sqrt{\varepsilon} dW_t^{(1)} \\ dy_t &= (a - x_t - cy_t) dt + \sigma_2 dW_t^{(2)} \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Le premier changement de variables (1.3.48) qui est le changement d'origine ne modifie pas les termes stochastiques. Nous obtenons le système en coordonnées (u, v) :

$$\begin{aligned} \varepsilon du_t &= (v_t - 3\alpha_* u_t^2 - u_t^3 + c\varepsilon u_t) dt + \sigma_1 \sqrt{\varepsilon} dW_t^{(1)} \\ dv_t &= (\delta - u_t - cv_t) dt + \sigma_2 dW_t^{(2)} \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

où le paramètre δ est défini comme en (1.3.51). A présent nous faisons le changement d'échelle (1.3.55). Les termes stochastiques sont divisés par $\sqrt{\varepsilon}$. Cela donne le système en (ξ, η) :

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon} d\xi_t &= (\eta_t - 3\alpha_* \xi_t^2 + \sqrt{\varepsilon}(c\xi_t - \xi_t^3)) dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t^{(1)} \\ \sqrt{\varepsilon} d\eta_t &= \left(\frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} - \xi_t - c\sqrt{\varepsilon}\eta_t \right) dt + \frac{\sigma_2}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t^{(2)} \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Ensuite nous faisons le changement de temps (1.3.58). Nous avons l'égalité en loi $\sqrt{a}W_{at} \stackrel{\mathcal{L}}{=} W_t$. Dans notre cas nous avons $W_t = W_{\sqrt{\varepsilon}t'} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \varepsilon^{-1/4}W_{t'}$. En notant t à la place de t' pour alléger l'écriture, nous obtenons

$$\begin{aligned} d\xi_t &= (\eta_t - 3\alpha_*\xi_t^2 + \sqrt{\varepsilon}(c\xi_t - \xi_t^3)) dt + \varepsilon^{-3/4}\sigma_1 dW_t^{(1)} \\ d\eta_t &= \left(\frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} - \xi_t - c\sqrt{\varepsilon}\eta_t\right) dt + \varepsilon^{-3/4}\sigma_2 dW_t^{(2)} \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Maintenant nous faisons le quatrième changement :

$$\eta = \xi^2 + z - \frac{1}{2}. \quad (3.4.9)$$

D'après la formule d'Itô,

$$d\eta_t = dz_t + 2\xi_t d\xi_t + (d\xi_t)^2 \quad (3.4.10)$$

et

$$(d\xi_t)^2 = \left((\eta_t - 3\alpha_*\xi_t^2 + \sqrt{\varepsilon}(c\xi_t - \xi_t^3)) dt + \varepsilon^{-3/4}\sigma_1 dW_t^{(1)}\right)^2 \quad (3.4.11)$$

avec les règles de multiplication

$$\begin{aligned} dt^2 &= dt \cdot dW_t^{(1)} = 0 \\ \left(dW_t^{(1)}\right)^2 &= dt \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Dans le calcul du carré dans l'expression (3.4.11), il ne reste donc qu'un terme

$$(d\xi_t)^2 = \varepsilon^{-3/2}\sigma_1^2 dt \quad (3.4.13)$$

Nous avons donc le système :

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \left[z_t - \frac{1}{6\alpha_*} + \sqrt{\varepsilon}(c\xi_t - \xi_t^3)\right] dt + \varepsilon^{-3/4}\sigma_1 dW_t^{(1)} \\ dz_t &= \left[\frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} - \varepsilon^{-3/2}\sigma_1^2 - 6\alpha_*\xi_t z_t + \sqrt{\varepsilon}\left(6\alpha_*\xi_t^4 + c\left(\frac{1}{6\alpha_*} - 9\alpha_*\xi_t^2 - z_t\right)\right)\right] dt \\ &\quad - 2\varepsilon^{-3/4}\sigma_1\xi_t dW_t^{(1)} + \varepsilon^{-3/4}\sigma_2 dW_t^{(2)} \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Nous finissons par deux renormalisations en changeant ξ en $-\xi/3\alpha_*$ et z en $z/3\alpha_*$, nous obtenons

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \left[\frac{1}{2} - z_t + \sqrt{\varepsilon}\left(c\xi_t - \frac{1}{9\alpha_*^2}\xi_t^3\right)\right] dt - 3\alpha_*\varepsilon^{-3/4}\sigma_1 dW_t^{(1)} \\ dz_t &= \left[\frac{3\alpha_*\delta}{\sqrt{\varepsilon}} - 3\alpha_*\varepsilon^{-3/2}\sigma_1^2 + 2\xi_t z_t + \sqrt{\varepsilon}\left(\frac{2}{9\alpha_*^2}\xi_t^4 + c\left(\frac{1}{2} - 3\xi_t^2 - z_t\right)\right)\right] dt \\ &\quad + 6\alpha_*\varepsilon^{-3/4}\sigma_1\xi_t dW_t^{(1)} + 3\alpha_*\varepsilon^{-3/4}\sigma_2 dW_t^{(2)} \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

En définissant, $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$ et $\tilde{\mu}$ comme dans la proposition, nous avons le système d'EDS (3.4.1).

■

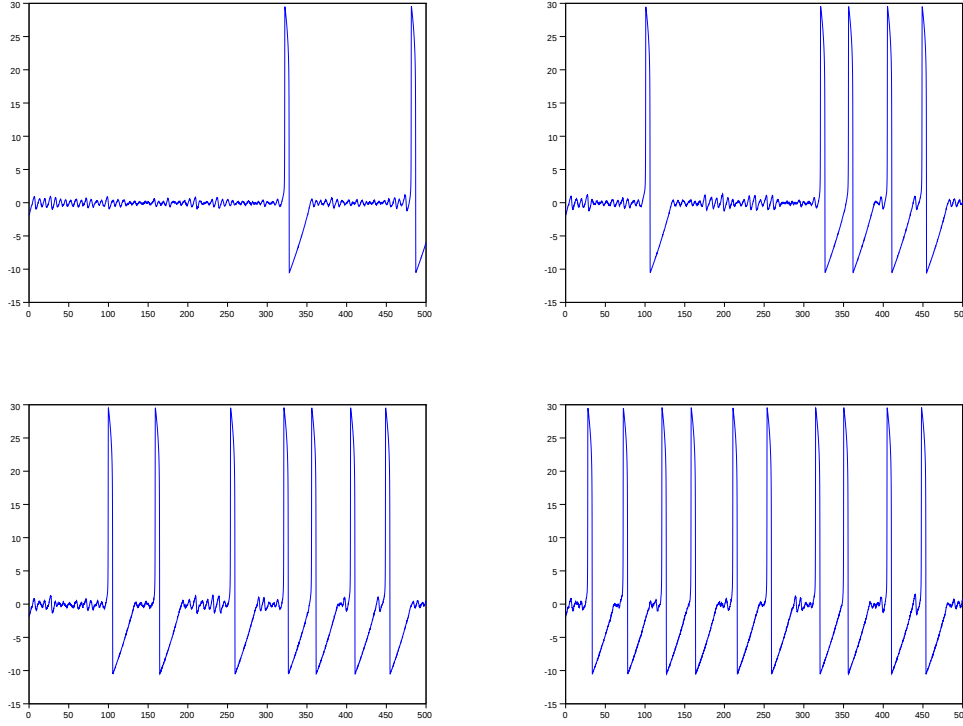


FIGURE 3.4. Exemples de représentation de ξ en fonction du temps. Les paramètres sont $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 3.10^{-3}$ pour la ligne du haut et $\delta = 5.10^{-3}$ pour la ligne du bas. L'intensité du bruit est $\sigma_1 = \sigma_2 = 1,46.10^{-4}$, $1,82.10^{-4}$, $2,73.10^{-4}$ et $3,65.10^{-4}$.

Sur la figure 3.3, nous avons tracé quelques trajectoires en coordonnées (ξ, z) sur les courbes de niveaux de l'intégrale première K définie par 1.3.70. Pour $\tilde{\mu}$ positif et $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ petit, la trajectoire suit les lignes de niveau $K > 0$ en s'enroulant autour du point d'équilibre de coordonnées proches de $(-\tilde{\mu}, 1/2)$. Quand $\tilde{\mu}$ augmente, la trajectoire s'enroule plus vite vers le point d'équilibre. Pour $\tilde{\mu}$ négatif, la trajectoire traverse la séparatrice et s'échappe vers les lignes de niveau $K < 0$. Nous avons la génération d'un spike.

Sur la figure 3.4, nous avons représenté l'évolution de la variable ξ en fonction du temps pour différentes valeurs de δ , σ_1 et σ_2 . Pour un bruit faible, nous avons de rares spikes isolés. Le nombre de spikes augmente ensuite avec le bruit mais leur amplitude est presque constante. Entre deux spikes, nous observons des petites oscillations autour de la valeur d'équilibre qui est proche de $-\tilde{\mu}$. Quand le bruit est faible, il y a un grand nombre de petites oscillations entre deux spikes et ce nombre diminue quand le bruit augmente. L'amplitude de ces petites oscillations n'est pas constante.

3.4.2 Discussion

Nous allons regarder comment évolue le comportement de la solution du système (3.4.1) suivant les valeurs des différents paramètres. Avant d'étudier le système (3.4.1), nous considérons d'abord une approximation de ce système. Nous étudierons dans une autre partie l'écart entre la solution approchée et la solution de (3.4.1) et nous montrerons que cet écart est petit.

Nous pouvons séparer le comportement de la solution en deux parties :

- la trajectoire reste au voisinage du point d'équilibre P . La variable z est alors positive.
- la trajectoire s'éloigne du point d'équilibre en allant dans la région $z < 0$

Nous considérons qu'il y a un spike quand la trajectoire coupe la ligne séparatrice $z = 0$.

Pour z petit, nous pouvons approcher la première équation par $d\xi_t/dt \simeq 1/2$ et nous approchons ξ par

$$\xi_t = \frac{t}{2} + \xi_0. \quad (3.4.16)$$

En prenant $\xi_0 = 0$, nous avons alors pour z_t l'équation approchée :

$$dz_t = [\tilde{\mu} + t z_t] dt - \tilde{\sigma}_1 t d\tilde{W}_t^{(1)} + \tilde{\sigma}_2 d\tilde{W}_t^{(2)} \quad (3.4.17)$$

Par la méthode de la variation de la constante, nous obtenons :

$$z_t = e^{t^2/2} \left(z_0 e^{-t_0^2/2} + \tilde{\mu} \int_{t_0}^t e^{-s^2/2} ds - \tilde{\sigma}_1 \int_{t_0}^t s e^{-s^2/2} d\tilde{W}_s^{(1)} + \tilde{\sigma}_2 \int_{t_0}^t e^{-s^2/2} d\tilde{W}_s^{(2)} \right) \quad (3.4.18)$$

Le processus z_t suit une loi normale $\mathcal{N}(\mathbb{E}(z_t), \text{Var}(z_t))$. Calculons $\mathbb{E}(z_t)$ et $\text{Var}(z_t)$:

$$\mathbb{E}(z_t) = e^{t^2/2} \left(z_0 e^{-t_0^2/2} + \tilde{\mu} \int_{t_0}^t e^{-s^2/2} ds \right) \quad (3.4.19)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(z_t) &= \mathbb{E} \left[(z_t - \mathbb{E}(z_t))^2 \right] \\ &= e^{t^2} \mathbb{E} \left[\left(-\tilde{\sigma}_1 \int_{t_0}^t s e^{-s^2/2} d\tilde{W}_s^{(1)} + \tilde{\sigma}_2 \int_{t_0}^t e^{-s^2/2} d\tilde{W}_s^{(2)} \right)^2 \right] \\ &= e^{t^2} \left(\tilde{\sigma}_1^2 \int_{t_0}^t s^2 e^{-s^2} ds + \tilde{\sigma}_2^2 \int_{t_0}^t e^{-s^2} ds \right) \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

par l'isométrie d'Itô.

Regardons la probabilité qu'il n'y ait pas de spike, c'est à dire que z_t est plus grand qu'une valeur seuil x :

$$\mathbb{P}[z_t > x] = \int_x^\infty \frac{e^{-(y - \mathbb{E}(z_t))^2 / 2\text{Var}(z_t)}}{\sqrt{2\pi \text{Var}(z_t)}} dy \quad (3.4.21)$$

En faisant le changement de variable

$$u = \frac{y - \mathbb{E}(z_t)}{\sqrt{\text{Var}(z_t)}}, \quad (3.4.22)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[z_t > x] &= \int_{(x - \mathbb{E}(z_t))/\sqrt{\text{Var}(z_t)}}^\infty \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du \\ &= 1 - \Phi \left(\frac{x - \mathbb{E}(z_t)}{\sqrt{\text{Var}(z_t)}} \right) \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \quad (3.4.24)$$

Nous prenons $t_0 = 0$, $x = 0$ et $z_0 \ll \tilde{\mu}$ et étudions alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x - \mathbb{E}(z_t)}{\sqrt{\text{Var}(z_t)}}. \quad (3.4.25)$$

Nous avons

$$\int_0^{+\infty} s^2 e^{-s^2} ds = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad (3.4.26)$$

Nous pouvons alors approcher

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\text{Var}(z_t)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{t^2/2} \tilde{\sigma} \quad (3.4.27)$$

Cela nous donne

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\mathbb{E}(z_t)}{\sqrt{\text{Var}(z_t)}} \simeq \frac{-\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}} \pi^{1/4} \quad (3.4.28)$$

La probabilité p de faire un spike est égal à

$$p \simeq \Phi\left(-\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}} \pi^{1/4}\right) = \Phi\left(-(\pi\varepsilon)^{1/4} \frac{\delta - \sigma_1^2/\varepsilon}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) \quad (3.4.29)$$

Nous pouvons distinguer les trois différents régimes suivant la valeur de $\tilde{\mu}/\tilde{\sigma}$:

- $\tilde{\mu} \gg \tilde{\sigma}$, alors la probabilité p est très petite et nous sommes dans le régime où il n'y a pas de spike. Dans les variables de départ, cela donne $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \ll \varepsilon^{1/4} \delta$.
- $\tilde{\mu} \ll -\tilde{\sigma}$, alors la probabilité p est proche de 1. Nous sommes dans le régime où il y a une suite de spikes. $\tilde{\mu} \ll -\tilde{\sigma}$ implique que $\mu^2 \ll \tilde{\sigma}^2$, qui s'écrit dans les variables d'origine $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \gg \varepsilon^{3/4}$.
- $|\tilde{\mu}| = \mathcal{O}(\tilde{\sigma})$, nous avons alors le régime intermédiaire avec une alternance de suite de spikes et de petites oscillations. Cela correspond à $\varepsilon^{1/4} \delta \leq \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \leq \varepsilon^{3/4}$. Dans ce régime, nous avons le cas particulier où $\tilde{\mu} = 0$, c'est à dire $\sigma_1 = \sqrt{\varepsilon \delta}$, où la probabilité de faire un spike est égale à $1/2$.

Nous retrouvons les limites du diagramme de bifurcation de la figure 3.2. Le régime intermédiaire n'est pas aussi net que sur le diagramme. Il y a un glissement progressif du régime sans spike ou avec des spikes rares et isolés au régime avec des spikes successifs quand nous augmentons le bruit : les trains de spikes sont de plus en plus long jusqu'à obtenir une suite sans petite oscillation de spikes.

Nous affinerons ces résultats dans la partie 5.1 avec plus de rigueur.

Chapitre 4

Petites oscillations

Dans ce chapitre, nous étudions le nombre d'oscillations de petites amplitudes (ou SAOs) entre deux spikes consécutifs afin de déterminer la fréquence des spikes. Ces oscillations sont davantage visibles dans les coordonnées (ξ, z) comme nous le voyons en comparant les simulations en coordonnées (x, y) de la figure 3.1 et celles en coordonnées (ξ, z) de la figure 3.4. Nous étudions donc le système d'EDS :

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \left(\frac{1}{2} - z_t - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^3 \right) dt + \tilde{\sigma}_1 d\tilde{W}_t^{(1)} \\ dz_t &= \left(\tilde{\mu} + 2\xi_t z_t + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^4 \right) dt - 2\tilde{\sigma}_1 \xi_t d\tilde{W}_t^{(1)} + \tilde{\sigma}_2 d\tilde{W}_t^{(2)} \end{aligned} \quad (4.0.1)$$

Nous donnerons d'abord une définition du nombre N de petites oscillations. Après avoir rappelé certaines propriétés des noyaux de Markov sous-stochastiques, nous donnerons des résultats rigoureux sur la loi que suit le nombre N dans le théorème 4.3.1.

4.1 Définition de la variable aléatoire donnant le nombre de SAOs

Nous allons définir ici la variable aléatoire à valeur entière N qui donne le nombre d'oscillations de petites amplitudes faites par la solution du système (3.4.1) entre deux spikes consécutifs. Nous commençons par considérer un domaine borné $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, avec un bord régulier $\partial\mathcal{D}$, contenant le point d'équilibre P et un morceau de la séparatrice. Un spike correspond à toute sortie de la trajectoire $(x_t, y_t)_t$ à l'extérieur de $\mathcal{D}$. Le nombre N est défini comme le nombre de fois où la trajectoire tourne autour du point P en restant dans la domaine $\mathcal{D}$ avant de sortir de $\mathcal{D}$ et donc de faire un spike.

Afin de définir plus précisément le nombre N , nous introduisons une petite boule $\mathcal{B}$ de rayon $\rho > 0$ centré sur le point P . Nous dessinons ensuite une courbe régulière $\mathcal{F}$ qui relie un point du bord de la boule $\mathcal{B}$ à un point de $\mathcal{D}$. Nous paramétrons cette courbe $\mathcal{F}$ par une variable $r \in [0, 1]$ proportionnelle à la longueur de l'arc $\mathcal{F}$ (les résultats seront indépendants du choix de $\mathcal{F}$ et de r). Nous étendons ensuite la paramétrisation de $\mathcal{F}$ à une sorte de paramétrisation polaire de l'ensemble $\mathcal{D} \setminus \mathcal{B}$. Nous choisissons pour cela un difféomorphisme T qui à tout point de coordonnées $(x, y) \in \mathcal{D}$ associe des coordonnées (r, ϕ) tel que $r \in [0, 1]$ et $\phi \in [0, 2\pi[$

$$\begin{aligned} T : [0, 1] \times [0, 2\pi[&\rightarrow \mathcal{D} \\ (r, \phi) &\mapsto (x, y) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Le difféomorphisme T est défini tel que l'ensemble des points $\{\phi = 0\}$ correspond à l'ensemble $\mathcal{F}$, $\{r = 0\}$ à $\partial\mathcal{D}$ et $\{r = 1\}$ à $\partial\mathcal{B}$:

$$T^{-1}(\mathcal{F}) = \{\phi = 0\}, \quad T^{-1}(\partial\mathcal{D}) = \{r = 0\} \quad \text{et} \quad T^{-1}(\partial\mathcal{B}) = \{r = 1\} \quad (4.1.2)$$

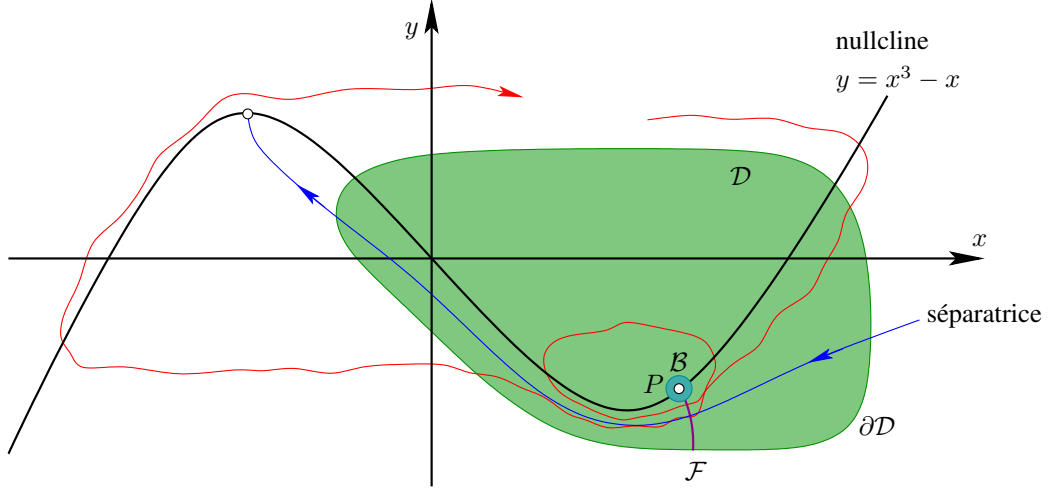


FIGURE 4.1. Définition du nombre de SAOs N . La trajectoire (en rouge) entre dans la région $\mathcal{D}$, et coupe la ligne $\mathcal{F}$ deux fois avant de quitter la zone $\mathcal{D}$, en faisant un autre spike. Dans cette exemple $N = 2$. La séparatrice est représentée en bleue.

Nous faisons également en sorte que $\dot{\phi} > 0$ au voisinage du point P pour le flux déterministe.

Considérons alors le processus $(r_t, \phi_t)_t$ en étendant la définition de l'angle ϕ de $\mathbb{S}^1$ à $\mathbb{R}$. En prenant une condition initiale sur l'arc $\mathcal{F}$ noté $(r_0, 0)$ et un entier $M \geq 1$, nous définissons le temps d'arrêt :

$$\tau = \inf \{ t > 0 : \phi_t \in \{2\pi, -2M\pi\} \text{ ou } r_t \in \{0, 1\} \} . \quad (4.1.3)$$

Nous distinguons alors quatre cas :

- Le cas $r_\tau = 0$ correspond au cas où la trajectoire (x_t, y_t) sort du domaine $\mathcal{D}$ et donc à un spike. Ce cas se produit avec une probabilité strictement positive par l'ellipticité du processus de diffusion (3.0.1). Dans cette situation, nous posons $N = 1$.
- Dans le cas où $\phi_\tau = 2\pi$ et $r_\tau \in (0, 1)$, la trajectoire coupe une nouvelle fois l'arc $\mathcal{F}$ en ayant fait un tour complet autour du point P en restant dans la domaine $\mathcal{D} \setminus \mathcal{B}$. Cela correspond à une SAO ce qui implique que $N \geq 2$.
- Le cas $r_\tau = 1$ correspond au cas où la trajectoire entre dans le domaine $\mathcal{B}$. Nous pouvons considérer que le neurone atteint alors son état d'équilibre. Dans ce cas, nous attendons que la trajectoire sorte de $\mathcal{B}$ pour atteindre $\mathcal{F}$ ou sortir du domaine $\mathcal{D}$.
- Le cas $\phi_\tau = -2M\pi$ et $r_\tau \in (0, 1)$ représente l'événement (rare) où la trajectoire tourne M fois autour du point P dans le mauvais sens. Nous introduisons ce cas uniquement pour des raisons techniques, nous avons besoin que τ soit le premier temps de sortie d'un ensemble borné. Pour simplifier, nous considérerons également ce cas comme une SAO.

Tant que $r_\tau \in (0, 1)$, nous répétons le schéma précédent en augmentant N à chaque itération. Nous construisons ainsi une suite $(R_0, R_1, \dots, R_{N-1})$ de variables aléatoires. Cette séquence donne la position des points d'intersections successifs de la trajectoire avec l'arc $\mathcal{F}$ tant que la trajectoire reste dans le domaine $\mathcal{D}$. Deux éléments de la séquence sont séparés par une rotation autour de P . La séquence s'arrête dès que la trajectoire quitte le domaine $\mathcal{D}$.

La suite $(R_n)_n$ forme une chaîne de Markov sous-stochastique de $E = (0, 1)$ avec le noyau

$$K(R, A) = \mathbb{P} \{ \varphi_\tau = 2\pi, r_\tau \in A \mid \varphi_0 = 0, r_0 = R \} , \quad (4.1.4)$$

avec $R \in E, A \subset E$ un Borélien. La chaîne de Markov est sous-stochastique car la probabilité que la trajectoire sorte de l'ensemble $\mathcal{D}$ est strictement positive, ce qui implique $K(R, E) < 1$. Nous pouvons la transformer en

une chaîne stochastique en ajoutant un état cimetière Δ à l'ensemble E (l'état Δ correspond à un spike), et poser

$$\begin{aligned} K(R, \Delta) &= 1 - K(R, E), \\ K(\Delta, \Delta) &= 1 \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Le nombre de SAOs est alors donné par

$$N = \inf\{n \geq 1 : R_n = \Delta\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \quad (4.1.6)$$

(nous posons $\inf \emptyset = \infty$). En faisant une extension du théorème de Perron-Froebenius, nous pouvons montrer que le noyau K admet une valeur propre maximale λ_0 qui est réelle et simple. Celle-ci est appelée valeur propre principale de K . S'il existe une mesure de probabilité π_0 telle que

$$\pi_0 K = \lambda_0 \pi_0, \quad (4.1.7)$$

celle-ci est appelée la distribution quasi-stationnaires (notée QSD pour "quasi-stationary distribution) du noyau K .

4.2 Noyaux de Markov sous-stochastiques

Nous rappelons dans cette partie les propriétés des chaînes de Markov sous-stochastiques. Pour plus de détails sur la théorie de ces processus voir [Ore71, Num84]. Nous appliquons ensuite ces résultats pour obtenir des propriétés sur le temps d'absorption qui correspond au nombre d'itérations de la chaîne de Markov définie par un noyau sous-stochastique pour atteindre l'état cimetière.

4.2.1 Résultats généraux

Soit E un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{E}$ la σ -algèbre Borélienne sur E . Soit $K : E \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ un noyau de Markov sous-stochastique de $(E, \mathcal{E})$ dans lui-même tel que :

- pour tout $x \in E$, $K(x, \cdot)$ est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$;
- pour tout $A \in \mathcal{E}$, $K(\cdot, A)$ est une application $\mathcal{E}$ -mesurable ;
- K est sous-stochastique, c'est à dire, $K(x, E) \leq 1$ pour tout $x \in E$.

En ajoutant un état cimetière Δ à E et en posant

$$K(x, \Delta) = 1 - K(x, E) \quad \text{et} \quad K(\Delta, E) = 0 \quad (4.2.1)$$

le noyau K devient stochastique.

Définition 4.2.1. Nous définissons une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur l'ensemble $\bar{E} = E \cup \{\Delta\}$ par la relation :

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} \in A | X_n = x\} = K(x, A) \quad \forall n \geq 0. \quad (4.2.2)$$

Nous considérons K comme un opérateur linéaire borné sur $L^\infty(E)$, qui agit sur des fonctions mesurables bornées par

$$f(x) \mapsto (Kf)(x) = \int_E K(x, dy) f(y) = \mathbb{E}^x \{f(X_1)\}, \quad (4.2.3)$$

et comme un opérateur linéaire borné sur $L^1(E)$, qui agit sur des mesures finies μ par

$$\mu(A) \mapsto (\mu K)(A) = \int_E \mu(dx) K(x, A) = \mathbb{P}^\mu \{X_1 \in A\}. \quad (4.2.4)$$

Remarque 3. Comme peuvent le suggérer les notations, nous pouvons voir le noyau K comme une matrice, les mesures comme des vecteurs lignes et les fonctions comme des vecteurs colonnes.

Nous nous intéressons aux propriétés du temps d'absorption

$$N = \inf\{n \geq 1 : X_n = \Delta\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} . \quad (4.2.5)$$

Nous commençons par trouver une expression pour la fonction génératrice des moments de N .

Définition 4.2.2. Nous définissons le n -ième itéré du noyau K^n par :

$$K^0 = \mathbb{1}, \quad (4.2.6)$$

$$K^1 = K, \quad (4.2.7)$$

$$K^{n+1}(x, A) = \int_E K^n(x, dy) K(y, A) \quad \forall n \geq 1, \quad (4.2.8)$$

où $\mathbb{1}$ est le noyau identité définie par $\mathbb{1}(x, A) = 1_{\{x \in A\}}$.

Proposition 4.2.3. La variable aléatoire X_n a la loi de $K^n(x, \cdot)$ donnée par $X_0 = x$ et

$$\mathbb{P}^x\{N > n\} = \mathbb{P}^x\{X_n \in E\} = K^n(x, E) . \quad (4.2.9)$$

De façon plus générale, si X_0 est distribuée suivant une mesure de probabilité μ_0 , alors

$$\mathbb{P}^{\mu_0}\{N > n\} = \mathbb{P}^{\mu_0}\{X_n \in E\} = \mu_0 K^n \mathbf{1} := \int_E \int_E \mu_0(dx) K^n(x, dy) . \quad (4.2.10)$$

où $\mathbf{1}$ est la fonction identiquement égale à 1.

Définition 4.2.4. Pour $r \in \mathbb{C}$, la série génératrice associée au noyau K est définie par

$$G^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n K^n = \mathbb{1} + rK + r^2 K^2 + \dots \quad (4.2.11)$$

Nous savons, par [Num84, théorème 3.2], qu'il existe un rayon de convergence $R \in [0, \infty)$ tel que

$$G^{(r)} f = +\infty \quad \text{pour toute fonction positive } f \text{ si } r > R \quad (4.2.12)$$

et

$$G^{(r)} f < +\infty \quad \text{pour certaines fonctions } f \text{ si } r < R \quad (4.2.13)$$

Remarque 4. Nous remarquons que nous avons la relation suivante

$$G^{(r)} = \mathbb{1} + rK G^{(r)} = \mathbb{1} + G^{(r)} rK . \quad (4.2.14)$$

Lemme 4.2.5. Supposons que N est fini presque sûrement. La fonction génératrice de N est alors donné par

$$\mathbb{E}^{\mu_0} \{r^N\} = 1 + (r - 1) \mu_0 G^{(r)} \mathbf{1} . \quad (4.2.15)$$

PREUVE. Nous remarquons que d'une part

$$\mathbb{P}^{\mu_0}\{N > n\} = \sum_{k \geq n+1} \mathbb{P}^{\mu_0}\{N = k\} \quad (4.2.16)$$

et d'autre part

$$\mu_0 G^{(r)} \mathbf{1} = \sum_{n \geq 0} r^n \mu_0 K^n \mathbf{1} = \sum_{n \geq 0} r^n \mathbb{P}^{\mu_0}\{N > n\}. \quad (4.2.17)$$

En remplaçant $\mathbb{P}^{\mu_0}\{N > n\}$ par la somme (4.2.16), nous avons

$$\mu_0 G^{(r)} \mathbf{1} = \sum_{n \geq 0} r^n \sum_{k \geq n+1} \mathbb{P}^{\mu_0}\{N = k\} \quad (4.2.18)$$

Nous changeons alors l'ordre de sommation et obtenons

$$\mu_0 G^{(r)} \mathbf{1} = \sum_{k \geq 1} \sum_{n=0}^{k-1} r^n \mathbb{P}^{\mu_0}\{N = k\} \quad (4.2.19)$$

Nous pouvons réécrire cette expression

$$\begin{aligned} \mu_0 G^{(r)} \mathbf{1} &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}^{\mu_0}\{N = k\} \sum_{n=0}^{k-1} r^n \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}^{\mu_0}\{N = k\} \frac{1 - r^k}{1 - r} \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Nous réécrivons alors cette expression sous la forme

$$\mu_0 G^{(r)} \mathbf{1} = \frac{1}{1 - r} \left(\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}^{\mu_0}\{N = k\} - \sum_{k \geq 1} r^k \mathbb{P}^{\mu_0}\{N = k\} \right) \quad (4.2.21)$$

μ_0 étant une mesure de probabilité et $N < \infty$ presque sûrement, nous avons

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}^{\mu_0}\{N = k\} = 1 \quad (4.2.22)$$

et

$$\sum_{k \geq 1} r^k \mathbb{P}^{\mu_0}\{N = k\} = \mathbb{E}^{\mu_0} \{r^N\} \quad (4.2.23)$$

Nous obtenons finalement

$$\mu_0 G^{(r)} \mathbf{1} = \frac{1}{1 - r} (1 - \mathbb{E}^{\mu_0} \{r^N\}) \quad (4.2.24)$$

Ce qui nous donne l'égalité du lemme (4.2.5). ■

Si le rayon de convergence R de la série est strictement plus grand que 1, nous pouvons dériver l'expression (4.2.15) par rapport à r et évaluer cette dérivée en $r = 1$, ce qui donne

$$\mathbb{E}^{\mu_0} \{N\} = \mu_0 G^{(1)} \mathbf{1}. \quad (4.2.25)$$

Nous pouvons calculer les moments d'ordre supérieur de la même façon, c'est à dire en calculant les dérivées d'ordre supérieur de l'expression (4.2.15) en $r = 1$.

Nous voulons maintenant montrer que la distribution de N suit une loi asymptotiquement géométrique. Cela est le cas si K a une valeur propre λ_0 qui est simple, maximale et isolée, c'est à dire séparée du reste du spectre par un écart strictement positif. Ce résultat a été démontré par Froebenius et Perron pour les matrices stochastiques, puis par Jentzsch pour des opérateurs intégraux positifs [Jen12], et par Krein et Rutman pour des opérateurs linéaires généraux [KR50].

Dans notre cas, nous pouvons nous placer dans le cadre de la théorie des opérateurs positifs. Les deux espaces $L^\infty(E)$ et $L^1(E)$ sont des cas particuliers d'ensemble de Banach réticulé (Espaces de Banach dans lequel pour toute paire d'éléments f, g , il existe une borne inférieure $f \wedge g$ et une borne supérieure $f \vee g$).

Définition 4.2.6. Soient $s : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et ν une mesure sur $(E, \mathcal{E})$. Nous définissons le noyau produit $s \otimes \nu$ par

$$(s \otimes \nu)(x, A) = s(x)\nu(A) . \quad (4.2.26)$$

Définition 4.2.7. Un noyau K est dit uniformément positif s'il existe une fonction positive s , une mesure finie ν et une constante L telles que

$$s \otimes \nu \leq K \leq L s \otimes \nu . \quad (4.2.27)$$

En utilisant les résultats de [Bir57, Théorème 3 et Lemme 3], nous avons le théorème

Théorème 4.2.8. Tout opérateur linéaire uniformément positif K , défini sur un Banach réticulé L admet un unique vecteur propre unitaire positif h . La valeur propre associée λ_0 est réelle et positive. De plus, pour tout $f \in L$, il existe des constantes $M_1(f)$ et $M_2(f)$ telles que

$$|K^n f - M_1(f)\lambda_0^n h| \leq M_2(f)(\lambda_0 \rho)^n h , \quad (4.2.28)$$

où $\rho < 1$.

En utilisant ce théorème, dans le cas des opérateurs associés au noyau K , $f \mapsto Kf$ et $\mu \mapsto \mu K$, nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 4.2.9. Il existe une valeur propre λ_0 et des vecteurs propres positifs unitaires $\pi_0 > 0$ et $h_0 > 0$ pour le noyau K , respectivement à gauche et à droite. λ_0 , π_0 et h_0 sont alors tels que

$$Kh_0 = \lambda_0 h_0 \quad \pi_0 K = \lambda_0 \pi_0 \quad (4.2.29)$$

et nous pouvons choisir la normalisation

$$\pi_0(E) = \int_E \pi_0(dx) = 1 , \quad \pi_0 h_0 = \int_E \pi_0(dx) h_0(x) = 1 . \quad (4.2.30)$$

Remarque 5.

- Nous remarquons que $\lambda_0 \leq 1$:

$$\lambda_0 = \lambda_0 \pi_0(E) = \int_E \pi_0(dx) K(x, E) \leq \pi_0(E) = 1 , \quad (4.2.31)$$

L'égalité a lieu si et seulement si $K(x, E) = 1$ pour π_0 -presque tout $x \in E$.

- Nous pouvons vérifier que les deux vecteurs propres correspondent bien à la même valeur propre : supposons $\pi_0 K = \lambda'_0 \pi_0$. Alors $\lambda'_0 \pi_0 h_0 = \pi_0 K h_0 = \lambda_0 \pi_0 h_0$, et, comme $\pi_0 h_0 > 0$, $\lambda'_0 = \lambda_0$.

- Pour l'application $f \mapsto Kf$, $M_1(f) = \pi_0 f$. En effet, d'après un lemme de [Bir57, p225], $M_1(f)$ est une fonction positive linéaire et est donc de la forme $M_1(f) = \mu f$ pour une mesure μ . La relation (4.2.28) implique que $M_1(Kf) = \lambda_0 M_1(f)$. μ est donc un multiple de π_0 . Comme $M_1(h_0) = h_0$, cela nous donne $\mu = \pi_0$. Le même argument pour l'application $\mu \mapsto \mu K$ nous permet d'obtenir $M_1(\mu) = \mu h_0$.
- Nous avons $G^{(r)} h_0 = (1 - r\lambda_0)^{-1} h_0$ pour $r < 1/\lambda_0$. Le rayon de convergence R satisfait donc l'inégalité $R \geq 1/\lambda_0$.

4.2.2 Résultats généraux sur le temps d'absorption

Nous pouvons maintenant montrer les résultats sur le nombre N , son comportement asymptotique et sur la fonction génératrice :

Proposition 4.2.10. *Supposons que le noyau K est uniformément positif et que la valeur propre principale λ_0 vérifie $\lambda_0 < 1$. Alors*

1. *N est fini presque sûrement, i.e.,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}^{\mu_0} \{N > n\} = 0. \quad (4.2.32)$$

2. *Le temps d'absorption N est asymptotiquement géométrique et*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}^{\mu_0} \{N = n + 1 | N > n\} = 1 - \lambda_0. \quad (4.2.33)$$

3. *La fonction génératrice de $\mathbb{E}^{\mu_0} \{r^N\}$ est finie pour tout $r < 1/\lambda_0$.*

PREUVE. Pour montrer (4.2.33), nous commençons par écrire la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}^{\mu_0} \{N = n + 1 | N > n\} = \frac{\mathbb{P}^{\mu_0} \{N = n + 1\}}{\mathbb{P}^{\mu_0} \{N > n\}}, \quad (4.2.34)$$

Nous calculons d'abord $\mathbb{P}^{\mu_0} \{N = n + 1\}$. Pour que le temps d'absorption N soit égal à $n + 1$, il faut que la chaîne de Markov $(X_k)_{k \geq 0}$ soit à valeur dans E pour $0 \leq k \leq n + 1$ et que X_{n+2} soit dans Δ . Dans le cas particulier qui nous intéresse, cela correspond à avoir exactement $n + 1$ SAOs, il faut donc que la trajectoire fasse $n + 1$ tours sans sortir puis qu'elle sorte après avoir coupé la courbe $\mathcal{F}$ $n + 1$ fois.

$$\mathbb{P}^{\mu_0} \{N = n + 1\} = \mathbb{P}^{\mu_0} \{X_{n+1} \in E, X_{n+2} \in \Delta\} = \mu_0 K^n k_\Delta \quad (4.2.35)$$

où

$$k_\Delta(x) = K(x, \Delta) = 1 - K(x, E), \text{ i.e., } k_\Delta = \mathbf{1} - K\mathbf{1}. \quad (4.2.36)$$

D'après l'équation (4.2.10) de la proposition 4.2.3,

$$\mathbb{P}^{\mu_0} \{N > n\} = \mu_0 K^n \mathbf{1} \quad (4.2.37)$$

En utilisant l'inégalité (4.2.28), nous obtenons l'encadrement

$$M_1(\mathbf{1})\lambda_0^n h_0 - M_2(\mathbf{1})(\lambda_0 \rho)^n h_0 \leq K^n \mathbf{1} \leq M_1(\mathbf{1})\lambda_0^n h_0 + M_2(\mathbf{1})(\lambda_0 \rho)^n h_0. \quad (4.2.38)$$

En utilisant la remarque 5 et la normalisation de π_0 , nous avons

$$M_1(\mathbf{1}) = \pi_0 \mathbf{1} = 1 \quad (4.2.39)$$

Ensuite en divisant par λ_0^n et en multipliant à gauche par μ_0 , nous obtenons

$$\mu_0 h_0 [1 - M_2(\mathbf{1})\rho^n] \leq \frac{\mu_0 K^n \mathbf{1}}{\lambda_0^n} \leq \mu_0 h_0 [1 + M_2(\mathbf{1})\rho^n]. \quad (4.2.40)$$

De la même façon, nous avons

$$\mu_0 h_0 [M_1(k_\Delta) - M_2(k_\Delta) \rho^n] \leq \frac{\mu_0 K^n k_\Delta}{\lambda_0^n} \leq \mu_0 h_0 [M_1(k_\Delta) + M_2(k_\Delta) \rho^n] . \quad (4.2.41)$$

En divisant (4.2.41) par (4.2.40), nous obtenons l'encadrement :

$$\frac{M_1(k_\Delta) - M_2(k_\Delta) \rho^n}{1 + M_2(\mathbf{1}) \rho^n} \leq \frac{\mu_0 K^n k_\Delta}{\mu_0 K^n \mathbf{1}} \leq \frac{M_1(k_\Delta) + M_2(k_\Delta) \rho^n}{1 + M_2(\mathbf{1}) \rho^n} \quad (4.2.42)$$

En prenant la limite $n \rightarrow \infty$, comme $0 < \rho < 1$, nous obtenons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}^{\mu_0} \{N = n + 1 | N > n\} = M_1(k_\Delta) \quad (4.2.43)$$

Calculons pour finir la valeur de la constante $M_1(k_\Delta)$. En utilisant la remarque 5 et l'équation (4.2.36), nous avons

$$M_1(k_\Delta) = \pi_0 k_\Delta = \pi_0 (\mathbf{1} - K \mathbf{1}) = 1 - \lambda_0 \pi_0 \mathbf{1} = 1 - \lambda_0, \quad (4.2.44)$$

Et nous avons bien l'égalité (4.2.33).

Pour obtenir (4.2.32), nous rappelons que

$$\mathbb{P}^{\mu_0} \{N > n\} = \mu_0 K^n \mathbf{1}, \quad (4.2.45)$$

et nous avons l'encadrement

$$\lambda_0^n \mu_0 h_0 [1 - M_2(\mathbf{1}) \rho^n] \leq \mu_0 K^n \mathbf{1} \leq \lambda_0^n \mu_0 h_0 [1 + M_2(\mathbf{1}) \rho^n] . \quad (4.2.46)$$

Tant donné que $\lambda_0 < 1$, $\mu_0 K^n \mathbf{1}$ converge vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

Nous avons vu dans le Lemme 4.2.5 que l'espérance $\mathbb{E}^{\mu_0} \{r^N\}$ peut être exprimé en fonction de la fonction génératrice $G^{(r)}$:

$$\mathbb{E}^{\mu_0} \{r^N\} = 1 + (r - 1) \mu_0 G^{(r)} \mathbf{1} \quad (4.2.47)$$

et $\mu_0 G^{(r)} \mathbf{1}$ est définie par la série

$$\mu_0 G^{(r)} \mathbf{1} = \sum_{n \geq 0} r^n \mu_0 K^n \mathbf{1} \quad (4.2.48)$$

En utilisant la majoration du terme $\mu_0 K^n \mathbf{1}$ dans l'équation (4.2.46) et en majorant ρ^n par 1, nous avons

$$\mu_0 G^{(r)} \mathbf{1} \geq \mu_0 h_0 [1 + M_2(\mathbf{1})] \sum_{n \geq 0} (\lambda_0 r)^n \quad (4.2.49)$$

La série géométrique $\sum_{n \geq 0} (\lambda_0 r)^n$ converge pour $r < 1/\lambda_0$ d'où l'espérance $\mathbb{E}^{\mu_0} \{r^N\}$ est finie si $r < 1/\lambda_0$. ■

4.2.3 Bornes sur λ_0 et $\mathbb{E}^{\mu_0} \{N\}$

Dans cette partie, nous allons donner des bornes simples pour λ_0 et $\mathbb{E}^{\mu_0} \{N\}$ dans le cas où il existe un sous espace $A \subset E$ d'où la chaîne de Markov a peu de chance de sortir. Nous supposons dans toute cette partie que le noyau K satisfait la condition d'uniforme positivité (4.2.27). Posons

$$\varepsilon_A = \sup_{x \in A} [1 - K(x, A)] \quad (4.2.50)$$

qui est la probabilité maximale de sortir de A en partant dans l'ensemble A .

Lemme 4.2.11. *Pour tout $A \subset E$ avec $\nu(A) > 0$,*

$$\lambda_0 \geq 1 - \varepsilon_A . \quad (4.2.51)$$

PREUVE. La relation $\lambda_0 \pi_0 = \pi_0 K$ entraîne

$$\lambda_0 \pi_0(A) = \int_E \pi_0(dx) K(x, A) \quad (4.2.52)$$

En séparant l'intégrale sur E en deux parties, nous avons

$$\lambda_0 \pi_0(A) = \int_A \pi_0(dx) K(x, A) + \int_{E \setminus A} \pi_0(dx) K(x, A) \quad (4.2.53)$$

En utilisant les minoration $K(x, A) \geq 1 - \varepsilon_A$ et $K \geq s \otimes \nu$, nous avons alors

$$\lambda_0 \pi_0(A) \geq \pi_0(A)(1 - \varepsilon_A) + \int_{E \setminus A} \pi_0(dx) s(x) \nu(A) . \quad (4.2.54)$$

Nous allons distinguer deux cas :

– si $\pi_0(A) = 1$, alors

$$\pi_0(E \setminus A) = 0 \quad (4.2.55)$$

et

$$\int_{E \setminus A} \pi_0(dx) s(x) \nu(A) = 0. \quad (4.2.56)$$

Nous obtenons alors directement la majoration (4.2.51) pour λ_0 ,

– si $\pi_0(A) < 1$, alors $\pi_0(E \setminus A) > 0$, et l'intégrale est strictement positive. Nous en déduisons que $\lambda_0 \pi_0(A) > 0$, nous avons alors $\lambda_0 \pi_0(A) \geq \pi_0(A)(1 - \varepsilon_A)$ et nous obtenons (4.2.51) en divisant par $\pi_0(A)$.

■

Lemme 4.2.12. *Pour tout $A \subset E$ tel que $\varepsilon_A > 0$,*

$$\mathbb{E}^{\mu_0} \{N\} \geq \frac{\mu_0(A)}{\varepsilon_A} . \quad (4.2.57)$$

PREUVE. Pour $x \in A$, nous définissons

$$\theta(x) = \mathbb{E}^x \{N\} = G^{(1)}(x, E). \quad (4.2.58)$$

Nous avons alors $\theta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(x)$ où

$$\theta_n(x) = \sum_{m=0}^n K^m(x, E) . \quad (4.2.59)$$

Nous avons la relation de récurrence entre θ_{n+1} et θ_n :

$$\theta_{n+1}(x) = 1 + (K\theta_n)(x) \quad (4.2.60)$$

et

$$(K\theta_n)(x) = \int_E K(x, dy) \theta_n(y) \geq \int_A K(x, dy) \theta_n(y). \quad (4.2.61)$$

Ceci nous donne pour $\theta_{n+1}(x)$ la minoration

$$\theta_{n+1}(x) \geq 1 + \int_A K(x, dy) \theta_n(y) \quad (4.2.62)$$

Soit

$$m_n = \inf_{x \in A} \theta_n(x). \quad (4.2.63)$$

Nous avons alors $m_0 = 1$ et nous pouvons établir par récurrence sur n que

$$m_n \geq \sum_{k=0}^n (1 - \varepsilon_A)^k \quad (4.2.64)$$

En calculant la somme de cette série géométrique, nous obtenons

$$m_n \geq \frac{1}{\varepsilon_A} - \frac{(1 - \varepsilon_A)^{n+1}}{\varepsilon_A}, \quad (4.2.65)$$

en passant à la limite $n \rightarrow \infty$, nous avons alors pour tout $x \in A$

$$\mathbb{E}^x \{N\} = \theta(x) \geq 1/\varepsilon_A \quad (4.2.66)$$

Le résultat du lemme s'obtient en intégrant μ_0 sur A .

■

4.3 Résultats généraux sur la distribution des SAOs

Ces premiers résultats sur la distribution de la variable aléatoire N sont valables quelques soient les régimes de paramètres. Ils sont obtenus en appliquant les résultats généraux de la partie 4.2.1 au noyau K défini par la relation (4.1.4).

Théorème 4.3.1 (Propriétés générales de N). *Supposons $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, alors pour toute distribution initiale μ_0 de R_0 sur la courbe $\mathcal{F}$, nous avons*

- le noyau K possède une distribution quasi-stationnaire π_0 ;
- la valeur propre principale associée, qui dépend des paramètres $\varepsilon, \delta, \sigma_1$ et σ_2 , $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon, \delta, \sigma_1, \sigma_2)$ est strictement plus petite que 1 ;
- la variable aléatoire N est presque sûrement finie ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}^{\mu_0} \{N > n\} = 0 ; \quad (4.3.1)$$

- la distribution de N est “asymptotiquement géométrique”, autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}^{\mu_0} \{N = n + 1 \mid N > n\} = 1 - \lambda_0 ; \quad (4.3.2)$$

- l'espérance $\mathbb{E}^{\mu_0} \{r^N\}$ est fini pour $r < 1/\lambda_0$ et en conséquent les moments $\mathbb{E}^{\mu_0} \{N^k\}$ de N sont finis.

PREUVE. Nous notons $K(x, dy)$ le noyau défini en (4.1.4). La variable y représente le point de première sortie du domaine $\mathcal{G} = (0, 1) \times (-2M\pi, 2\pi)$, pour toute condition initiale $(x, 0)$, dans les cas où la sortie se fait sur une des courbes $\varphi = -2M\pi$ ou $\varphi = 2\pi$. En analyse harmonique, $K(x, dy)$ est appelé la mesure harmonique pour le générateur de la diffusion sur $\mathcal{G}$ partant de $(x, 0)$. Dans le cas du mouvement Brownien, il a été montré par

[Dah77] que des ensembles de mesure de Hausdorff positive ont une mesure harmonique positive. Ce résultat a été étendu dans [BAKS84], où les auteurs montrent que pour une classe générale de diffusions hypoelliptiques, la mesure harmonique admet une densité régulière $k(x, y)$ selon la mesure de Lebesgue dy . Notre processus de diffusion étant uniformément elliptique pour $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, il entre dans la classe des processus étudiés dans cet article.

En particulier, [BAKS84, Corollaire 2.11] montre que $k(x, y)$ est régulier et que ces dérivées sont bornées par une fonction dépendante de la distance de x à y . Cette distance étant uniformément bornée inférieurement par une constante positive, il existe une constante $L \in \mathbb{R}^+$ telle que

$$\frac{\sup_{y \in E} k(x, y)}{\inf_{y \in E} k(x, y)} \leq L \quad \forall x \in E. \quad (4.3.3)$$

Nous posons

$$s(x) = \inf_{y \in E} k(x, y). \quad (4.3.4)$$

Nous avons alors l'encadrement suivant

$$s(x) \leq k(x, y) \leq Ls(x) \quad \forall x, y \in E. \quad (4.3.5)$$

Il s'ensuit que le noyau K remplit la condition de positivité uniforme (4.2.30) pour ν donné par la mesure de Lebesgue.

Cette propriété ayant été établie, la suite de la preuve découle des résultats de la partie 4.2. ■

Dans le cas particulier où la distribution initiale μ_0 est égale à la distribution QSD π_0 , la variable aléatoire R_n a la loi $\mu_n = \lambda_0^n \pi_0$, et N suit une loi exponentielle de paramètre $1 - \lambda_0$:

$$\mathbb{P}^{\pi_0} \{N = n\} = \lambda_0^{n-1} (1 - \lambda_0) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^{\pi_0} \{N\} = \frac{1}{1 - \lambda_0}. \quad (4.3.6)$$

En règle générale, la distribution initiale μ_0 après un spike sera éloignée de la distribution QSD π_0 et la distribution de N sera, par conséquent, seulement asymptotiquement géométrique.

Nous pouvons aussi revenir aux trains de spikes évoqués dans la section 3 et dans [MVE08]. Nous devons d'abord pour cela fixer une définition pour les trains de spikes à l'aide du nombre de SAO. Nous pouvons par exemple décider qu'un train de spikes est une suite de spikes entre lesquels il n'y a pas de SAO, i.e. $N = 1$ entre tous les spikes du train considéré. Si la discrétisation en temps n'est pas assez fine, nous pouvons aussi fixer un nombre de SAOs admissible $n_0 \geq 1$. Nous considérerons comme un train de spikes une succession de spikes séparés par moins de n_0 SAOs. Soit $\mu_0^{(n)}$ la distribution sur $\mathcal{F}$ après le n -ième spike. La probabilité d'avoir un train de spikes de longueur k est alors donné par :

$$\mathbb{P}^{\mu_0^{(0)}} \{N \leq n_0\} \mathbb{P}^{\mu_0^{(1)}} \{N \leq n_0\} \dots \mathbb{P}^{\mu_0^{(k-1)}} \{N \leq n_0\} \mathbb{P}^{\mu_0^{(k)}} \{N > n_0\}. \quad (4.3.7)$$

En général, les spikes consécutifs ne sont pas indépendants et la distribution $\mu_0^{(n)}$ sera différente. Par contre, pour un bruit faible, la trajectoire se concentre près de la branche stable après un spike (voir [BG09, Section 3.5.2]), et nous pouvons supposer que tous les $\mu_0^{(n)}$ seront proches d'une distribution commune μ_0 . Dans ce cas, la longueur des trains de spikes suit également approximativement une distribution géométrique :

$$\mathbb{P} \{\text{train de spikes de longueur } k\} \simeq p^k (1 - p) \quad \text{où} \quad p = \mathbb{P}^{\mu_0} \{N \leq n_0\}. \quad (4.3.8)$$

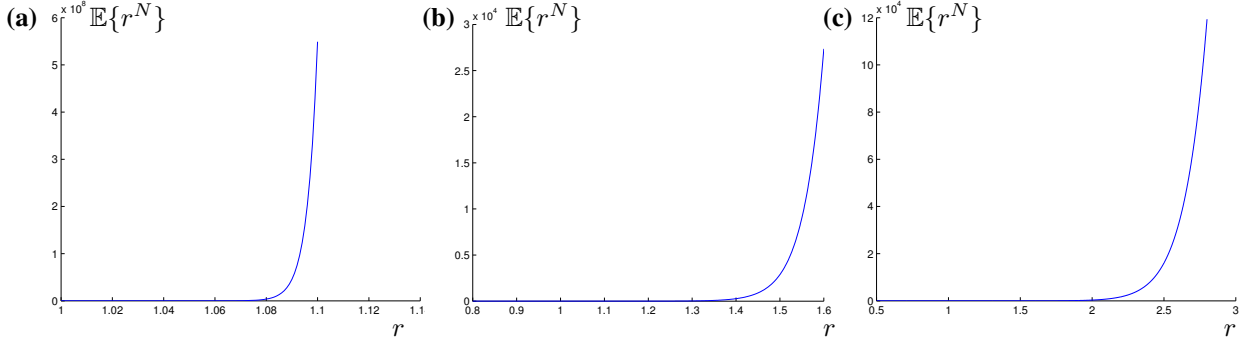


FIGURE 4.2. Simulation de l'espérance de r^N en fonction de r , pour $\tilde{\sigma} = 0.1$, $\varepsilon = 10^{-4}$ et $\tilde{\mu} = 0.05$ (a), $\tilde{\mu} = -0.03$ (b) et $\tilde{\mu} = -0.06$ (c). Les valeurs correspondantes de $-\tilde{\mu}/\tilde{\sigma}$ sont alors 0.5 (a), 0.3 (b) et 0.6 (c). L'asymptote verticale nous indique la position du pôle et nous permet d'estimer $1/\lambda_0$.

4.4 Simulations numériques

Nous allons illustrer, par des simulations numériques, les résultats obtenus dans la partie 4.3. Pour cela, nous avons besoin d'estimer la valeur propre principale de λ_0 . D'après la Proposition 4.2.10, la fonction génératrice de $\mathbb{E}^{\mu_0} \{r^N\}$ est finie pour tout $r < 1/\lambda_0$ et a pour pôle $r = 1/\lambda_0$. La figure 4.2 représente un exemple de l'espérance de r^N en fonction de r pour une valeur de $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\sigma}$. Pour déterminer la valeur du pôle, nous calculons l'approximation numérique de la dérivée et nous obtenons une estimation de $1/\lambda_0$ quand elle dépasse un certain seuil.

Sur la figure 4.3, nous avons tracé les histogrammes de la distribution du nombre de SAO pour un échantillon. Nous avons superposé sur les histogrammes (a) et (b), la distribution géométrique théorique de paramètre λ_0 . Le paramètre λ_0 est obtenue numériquement à l'aide de la méthode décrite dans le paragraphe précédent. Nous pouvons clairement voir la décroissance géométrique sur les deux premiers graphiques. Sur les deux autres, nous n'avons pas assez de SAO de longueur plus grande que deux pour voir clairement la décroissance géométrique et comparer avec la courbe théorique. Nous avons très majoritairement une valeur de N égale à 1 ce qui correspond au cas où il n'y a pas SAO complète entre deux spikes consécutifs. Ce premier pique $N = 1$ augmente quand $\tilde{\mu}/\tilde{\sigma}$ diminue.

Sur la figure 4.4, nous avons représenté la courbe $x \mapsto \phi(-\pi^{1/4}x)$ avec $x = \tilde{\mu}/\tilde{\sigma}$, ainsi que l'inverse de l'espérance de N , la probabilité que $N = 1$ et $1 - \lambda_0$ où la valeur principale λ_0 a été estimée à l'aide de la fonction génératrice comme décrit précédemment. Les échantillons pour $\tilde{\mu} > 0$ ont été obtenus pour des histogrammes contenant 1000 spikes, alors que ceux pour $\tilde{\mu} < 0$ ont été obtenus pour des histogrammes contenant 500 spikes séparés par $N > 1$ SAOs.

Comme prévu par l'estimation (3.4.29), $\mathbb{P}\{N = 1\}$ est proche de la valeur théorique $\Phi(-\pi^{1/4}\tilde{\mu}/\tilde{\sigma})$. D'après l'égalité (4.3.6), $1/\mathbb{E}^{\mu_0} \{N\}$, $\mathbb{P}^{\mu_0}\{N = 1\}$ et $1 - \lambda_0$ devraient être égaux si la distribution initiale μ_0 après un spike est égale à la QSD π_0 . Les simulations montrent que $1/\mathbb{E}\{N\}$ et $1 - \lambda_0$ sont toujours plus petits que $\mathbb{P}\{N = 1\}$. La différence entre $\mathbb{P}\{N = 1\}$ et $1 - \lambda_0$ et entre $1/\mathbb{E}\{N\}$ et $1 - \lambda_0$ dépend de l'éloignement de la mesure initiale numérique μ_0 de la QSD π_0 . $1/\mathbb{E}\{N\}$ et $1 - \lambda_0$ semblent suivre une même courbe, et $\mathbb{P}\{N = 1\}$ semble suivre la courbe $x \mapsto \phi(-\pi^{1/4}x)$. Il semble qu'il y ait une translation de valeur $\tilde{\mu}$ entre ces deux courbes

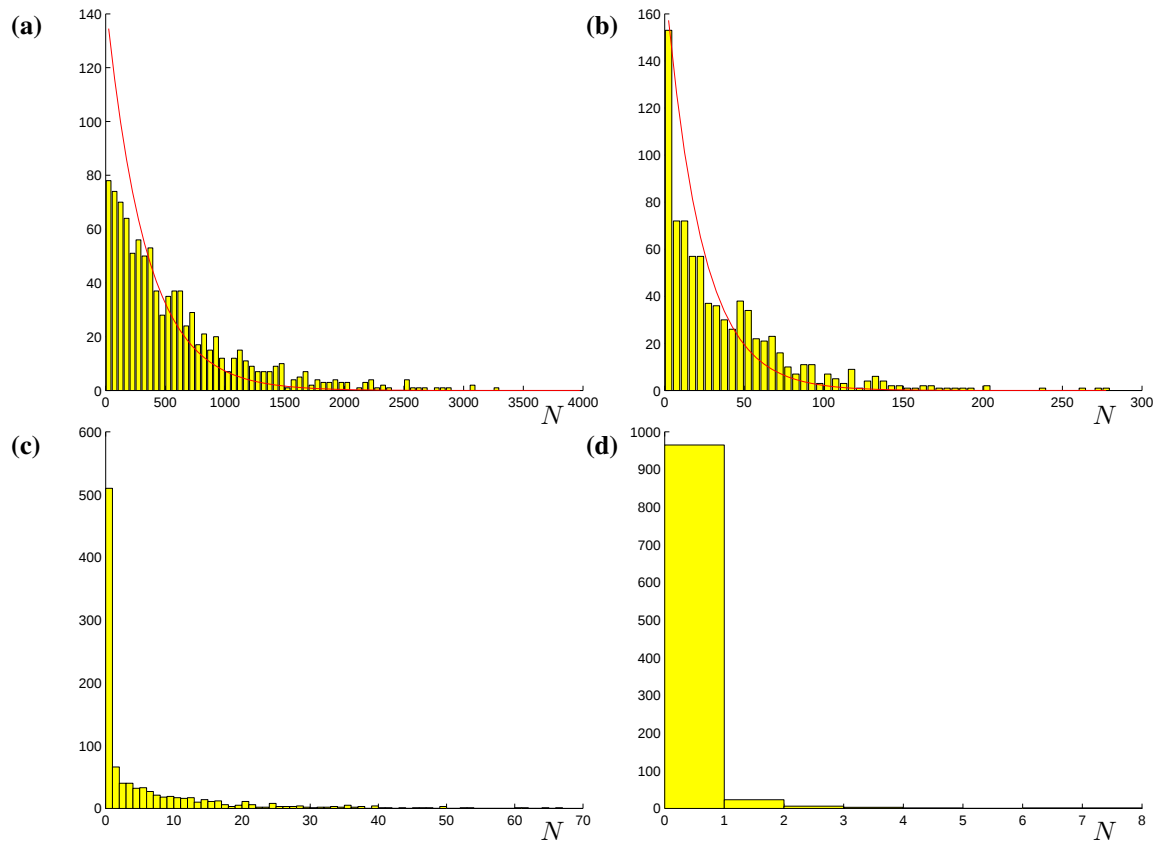


FIGURE 4.3. Histogrammes de distributions du nombre de SAO N , obtenus avec une simulation contenant 1000 spikes pour chaque graphique. La courbe donne la distribution géométrique de paramètre λ_0 théorique, où λ_0 a été estimé avec l'espérance de r^N . Les valeurs des paramètres sont $\varepsilon = 10^{-4}$ et $\tilde{\sigma} = 0.1$ pour tous les cas, et **(a)** $\tilde{\mu} = 0.12$, **(b)** $\tilde{\mu} = 0.05$, **(c)** $\tilde{\mu} = 0.01$, et **(d)** $\tilde{\mu} = -0.09$.

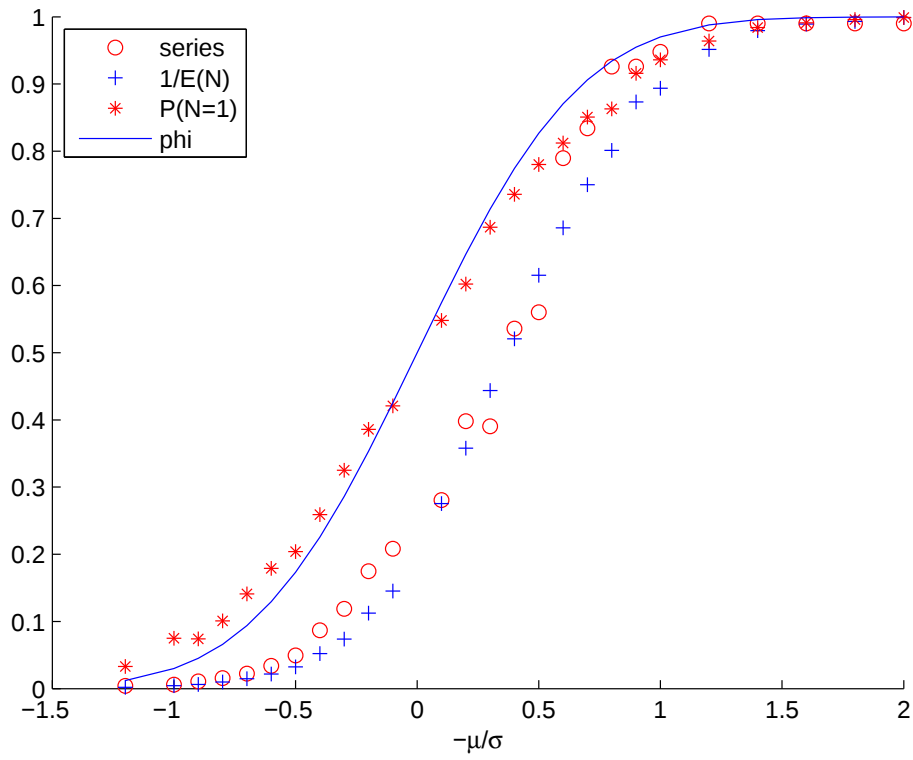


FIGURE 4.4. Représentation de la fonction $\Phi(-\pi^{1/4}\tilde{\mu}/\tilde{\sigma})$ en fonction de $-\tilde{\mu}/\tilde{\sigma}$ (ligne continue), et estimations numériques de $\mathbb{P}\{N = 1\}$ (étoiles), $1/\mathbb{E}\{N\}$ (croix) et $1 - \lambda_0$ (ronds).

Chapitre 5

Calcul du noyau de la chaîne de Markov

Dans ce chapitre, nous allons calculer le noyau introduit dans la partie 4.1 pour définir la variable aléatoire N donnant le nombre de SAO dans le cas d'un bruit faible. Nous pourrions ainsi utiliser les résultats de la partie 4.2.3 qui permettent d'avoir des bornes sur la valeur propre principale λ_0 et le nombre moyen de SAO $\mathbb{E}^{\mu_0}\{N\}$. Pour calculer le noyau, nous allons diviser la trajectoire en deux parties :

- une partie où la trajectoire est proche de la séparatrice où nous travaillerons en coordonnées (ξ, z) ;
- une autre partie où la trajectoire tourne autour du point d'équilibre où nous introduirons un nouveau système de coordonnées (K, ϕ) , où la coordonnée K est liée à l'intégrale première calculée dans la partie 1.3.4 et ϕ un angle.

Nous fixons pour cela une frontière entre ces deux coordonnées. Nous définissons pour cela deux lignes brisées F_- et F_+ définies par

$$F_- = \left\{ \xi = -L \text{ et } z \leq \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ -L \leq \xi \leq 0 \text{ et } z = \frac{1}{2} \right\} \quad (5.0.1)$$

et

$$F_+ = \left\{ \xi = L \text{ et } z \leq \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ 0 \leq \xi \leq L \text{ et } z = \frac{1}{2} \right\}. \quad (5.0.2)$$

où L est un paramètre défini par

$$L^2 = \frac{\gamma}{2} (-\log(c_- \tilde{\mu})) , \quad (5.0.3)$$

où $c_- > 0$ et $\gamma > 0$ sont des constantes qui seront choisies plus tard.

En choisissant une condition initiale $(-L, z_0) \in F_-$, notre but est d'estimer où la trajectoire partant de $(-L, z_0)$ atteint F_+ pour la première fois. Nous verrons que F_+ est atteint en un point de coordonnées (L, z_1) . Pour cela nous travaillerons en coordonnées (ξ, z) et nous obtiendrons ainsi la première partie du noyau de la chaîne de Markov K . Pour obtenir la deuxième partie du noyau, nous chercherons cette fois à estimer où la trajectoire partant de (L, z_1) atteint F_- . Nous utiliserons dans cette partie les coordonnées (K, ϕ) et obtiendrons ainsi la deuxième partie du noyau. Nous obtenons deux principaux résultats. Le premier porte sur z_T^1 qui est une approximation de z^1 et il est montré dans la partie 5.1. :

Proposition 5.0.1. *Pour tout H ,*

$$\mathbb{P}\{z_T^1 \leq -H\} = \Phi \left(-\pi^{1/4} \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}} \left[1 + \mathcal{O}\left((H + z_0)\tilde{\mu}^{\gamma-1}\right) \right] \right) , \quad (5.0.4)$$

où $\tilde{\sigma}^2 = \tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2$ et $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du / \sqrt{2\pi}$ est la fonction de distribution de la loi normale standard.

Nous contrôlons ensuite l'écart entre z_T^1 et z^1 . Nous avons ainsi un résultat rigoureux sur les estimations faites dans la partie 3.4. Nous obtenons ensuite des majorations sur $1 - \lambda_0$, où λ_0 est la plus petite valeur propre

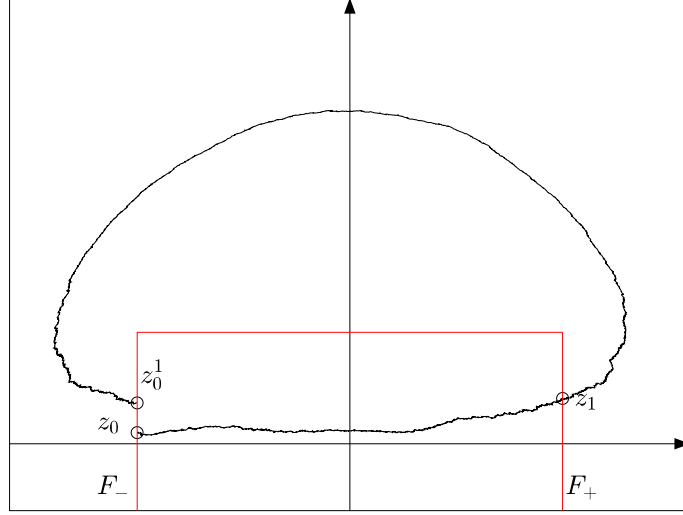


FIGURE 5.1. Définition des lignes F_- et F_+ . Pour calculer le noyau de la chaîne de Markov, nous prenons une condition initiale z_0 sur F_- . Nous déterminons d'abord un intervalle pour le premier point d'atteinte z_1 de F_+ puis un intervalle pour le premier point d'atteinte z_0^1 de F_- partant de z_1 .

de l'opérateur intégrale associé au noyau, et sur $\mathbb{E}^{\mu_0}\{N\}$, l'espérance du nombre de SAOs N , dans le cas où le bruit est faible.

Théorème 5.0.2. *Supposons que ε et $\delta/\sqrt{\varepsilon}$ soient suffisamment petits. Si $c \neq 0$, nous supposons de plus que $\delta \geq |c|\varepsilon^\beta$ pour un $\beta < 1$. Il existe alors une constante $\kappa > 0$ telle que, pour $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \leq (\varepsilon^{1/4}\delta)^2 / \log(\sqrt{\varepsilon}/\delta)$, la première valeur propre λ_0 vérifie*

$$1 - \lambda_0 \leq \exp\left\{-\kappa \frac{(\varepsilon^{1/4}\delta)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right\}. \quad (5.0.5)$$

De plus, pour toute distribution μ_0 de conditions initiales pour les trajectoires, l'espérance du nombre de SAOs vérifie

$$\mathbb{E}^{\mu_0}\{N\} \geq C(\mu_0) \exp\left\{\kappa \frac{(\varepsilon^{1/4}\delta)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right\}. \quad (5.0.6)$$

Ici $C(\mu_0)$ est la probabilité que la trajectoire atteigne $\mathcal{F}$ au-dessus de la ligne séparatrice.

La proposition nous permet de retrouver rigoureusement les frontières de la figure 3.2 pour $\delta < \sqrt{\varepsilon}$. En utilisant les résultats de la partie 4.3, nous obtenons que dans le cas où la distribution initiale μ_0 est la distribution QSD π_0 , $\mathbb{P}^{\pi_0}\{N = n\}$ est exponentiellement proche de 1 alors que $\mathbb{E}^{\pi_0}\{N\}$ est exponentiellement grande. Nous avons donc avec une probabilité exponentiellement proche de 1 un grand nombre de SAOs entre deux spikes quand $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ diminue.

5.1 Dynamique près de la ligne séparatrice

Dans cette partie, nous allons utiliser le système en coordonnées (ξ, z) donné par

$$\begin{cases} d\xi_t &= \left(\frac{1}{2} - z_t - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^3 \right) dt + \tilde{\sigma}_1 dW_t^{(1)}, \\ dz_t &= \left(\tilde{\mu} + 2\xi_t z_t + \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^4 \right) dt - 2\tilde{\sigma}_1 \xi_t dW_t^{(1)} + \tilde{\sigma}_2 dW_t^{(2)}, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Nous supposons que la trajectoire reste dans un voisinage de la ligne séparatrice qui est définie par l'ensemble des points $\{z = 0\}$. Nous supposons donc que z est petit, de l'ordre d'une puissance de μ , et ξ appartient à l'intervalle $[-L, L]$.

Nous étudions dans un premier temps une approximation du système (5.1.1)

5.1.1 Processus linéarisé

Avant de considérer la solution du système complet, nous allons considérer une approximation du système (5.1.1). En effet, z étant petit, nous pouvons approcher la première équation de (5.1.1) par $d\xi_t \simeq 1/2$ et donc $\xi_t \simeq \xi_0 + t/2$. Cela motive le changement de variable

$$\xi = \frac{t}{2} + u, \quad (5.1.2)$$

Lemme 5.1.1. *Le changement de variable (5.1.2) transforme le système (5.1.1) en*

$$\begin{cases} du_t &= (-z_t + \mathcal{O}(\tilde{\varepsilon})) dt + \tilde{\sigma}_1 dW_t^{(1)}, \\ dz_t &= (\tilde{\mu} + tz_t + 2u_t z_t + \mathcal{O}(\tilde{\varepsilon})) dt - 2\tilde{\sigma}_1 t dW_t^{(1)} - \tilde{\sigma}_1 u_t dW_t^{(1)} + \tilde{\sigma}_2 dW_t^{(2)}, \end{cases} \quad (5.1.3)$$

où nous avons posé $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon}L^4$ et choisi une condition initiale $(0, z_0)$ au temps $t_0 = -2L$.

PREUVE. En dérivant (5.1.2), nous avons

$$d\xi_t = \frac{1}{2} dt + du_t \quad (5.1.4)$$

En remplaçant dans (5.1.1), nous avons

$$\begin{cases} \frac{1}{2} dt + du_t &= \left(\frac{1}{2} - z_t - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^3 \right) dt + \tilde{\sigma}_1 dW_t^{(1)}, \\ dz_t &= \left(\tilde{\mu} + 2\left(\frac{1}{2} + u_t\right)z_t + \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^4 \right) dt - 2\tilde{\sigma}_1 \left(\frac{1}{2} + u_t\right) dW_t^{(1)} + \tilde{\sigma}_2 dW_t^{(2)}, \end{cases} \quad (5.1.5)$$

et

$$|\xi_t| \leq L \quad (5.1.6)$$

En supposant que $L > 1$, nous pouvons alors majorer les termes $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^3$ et $\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^4$ par

$$\left| \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^3 \right| \leq C\sqrt{\varepsilon}L^4 \quad \text{et} \quad \left| \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^4 \right| \leq C\sqrt{\varepsilon}L^4 \quad (5.1.7)$$

nous pouvons écrire ces inégalités sous la forme

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^3 = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}L^4) \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^4 = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}L^4) \quad (5.1.8)$$

En simplifiant (5.1.5) et en utilisant (5.1.8), nous obtenons (5.1.3).

Nous choisissons alors une condition initiale $(u(t_0), z(t_0)) = (0, z_0)$ à un temps $t_0 = -2L$. En première approximation, nous considérons le système déterministe :

$$\begin{cases} du_t^0 &= -z_t^0 dt , \\ dz_t^0 &= (\tilde{\mu} + tz_t^0) dt . \end{cases} \quad (5.1.9)$$

Lemme 5.1.2. *La solution de la seconde équation du système (5.1.9)*

$$dz_t^0 = (\tilde{\mu} + tz_t^0) dt \quad (5.1.10)$$

est donnée par

$$z_t^0 = e^{t^2/2} \left[z_0 e^{-t_0^2/2} + \tilde{\mu} \int_{t_0}^t e^{-s^2/2} ds \right] . \quad (5.1.11)$$

PREUVE. Ce résultat s'obtient en utilisant la méthode de la variation de la constante.

Remarque 6. En particulier au temps $T = 2L$, nous avons $\xi_T = L + u_t \simeq L$. Par le choix de L dans (5.0.3), nous avons

$$e^{T^2/2} = e^{2L^2} = (c_- \tilde{\mu})^{-\gamma} . \quad (5.1.12)$$

La position du point de première atteinte de F_+ est approximativement

$$z_T^0 = z_0 + \tilde{\mu} e^{T^2/2} \int_{t_0}^T e^{-s^2/2} ds = z_0 + \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{1-\gamma}) . \quad (5.1.13)$$

En deuxième approximation, nous ajoutons les termes de bruit et considérons l'EDS linéaire

$$\begin{cases} du_t^1 &= -z_t^1 dt + \tilde{\sigma}_1 dW_t^{(1)} , \\ dz_t^1 &= (\tilde{\mu} + tz_t^1) dt - \tilde{\sigma}_1 t dW_t^{(1)} + \tilde{\sigma}_2 dW_t^{(2)} . \end{cases} \quad (5.1.14)$$

Proposition 5.1.3. *Pour tout H ,*

$$\mathbb{P}\{z_T^1 \leq -H\} = \Phi \left(-\pi^{1/4} \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}} \left[1 + \mathcal{O}\left((H + z_0)\tilde{\mu}^{\gamma-1}\right) \right] \right) , \quad (5.1.15)$$

où $\tilde{\sigma}^2 = \tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2$ et $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du / \sqrt{2\pi}$ est la fonction de distribution de la loi normale standard.

PREUVE. En résolvant la deuxième équation du système (5.1.14), en utilisant la méthode de la variation de la constante comme dans la preuve du lemme 5.1.2, nous obtenons

$$z_T^1 = z_0 + e^{T^2/2} \left[\tilde{\mu} \int_{t_0}^T e^{-s^2/2} ds - \tilde{\sigma}_1 \int_{t_0}^T s e^{-s^2/2} dW_s^{(1)} + \tilde{\sigma}_2 \int_{t_0}^T e^{-s^2/2} dW_s^{(2)} \right] . \quad (5.1.16)$$

La variable aléatoire z_T^1 est Gaussienne et suit la loi $\mathcal{N}(\mathbb{E}\{z_T^1\}, \text{Var}(z_T^1))$. En utilisant la linéarité de l'espérance et le fait que l'espérance d'une intégrale d'Itô est nulle, nous avons

$$\mathbb{E}\{z_T^1\} = z_0 + \tilde{\mu} e^{2L^2} \int_{-2L}^{2L} e^{-s^2/2} ds \quad (5.1.17)$$

Calculons maintenant de la variance de z_T^1

$$\text{Var}(z_T^1) = \mathbb{E}\{(z_T^1 - \mathbb{E}\{z_T^1\})^2\} \quad (5.1.18)$$

Le terme sous l'espérance est

$$\begin{aligned} (z_T^1 - \mathbb{E}\{z_T^1\})^2 &= e^{4L^2} \left(-\tilde{\sigma}_1 \int_{-2L}^{2L} s e^{-s^2/2} dW_s^{(1)} + \tilde{\sigma}_2 \int_{-2L}^{2L} e^{-s^2/2} dW_s^{(2)} \right)^2 \\ &= e^{4L^2} \left(\tilde{\sigma}_1^2 \left(\int_{-2L}^{2L} s e^{-s^2/2} dW_s^{(1)} \right)^2 + \tilde{\sigma}_2^2 \left(\int_{-2L}^{2L} e^{-s^2/2} dW_s^{(2)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 \int_{-2L}^{2L} s e^{-s^2/2} dW_s^{(1)} \int_{-2L}^{2L} e^{-s^2/2} dW_s^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

Calculons séparément l'espérance de chacun des termes de (5.1.19). En utilisant l'isométrie d'Itô, nous avons d'abord

$$\mathbb{E}\left\{\left(\int_{-2L}^{2L} s e^{-s^2/2} dW_s^{(1)}\right)^2\right\} = \int_{-2L}^{2L} s^2 e^{-s^2} ds \quad (5.1.20)$$

et

$$\mathbb{E}\left\{\left(\int_{-2L}^{2L} e^{-s^2/2} dW_s^{(2)}\right)^2\right\} = \int_{-2L}^{2L} e^{-s^2} ds \quad (5.1.21)$$

Puis $W^{(1)}$ et $W^{(2)}$ étant deux mouvements Brownien indépendants, nous avons

$$\mathbb{E}\left\{\int_{-2L}^{2L} s e^{-s^2/2} dW_s^{(1)} \int_{-2L}^{2L} e^{-s^2/2} dW_s^{(2)}\right\} = 0 \quad (5.1.22)$$

Nous obtenons finalement pour la variance $\text{Var}(z_T^1)$

$$\text{Var}(z_T^1) = \tilde{\sigma}_1^2 e^{4L^2} \int_{-2L}^{2L} s^2 e^{-s^2} ds + \tilde{\sigma}_2^2 e^{4L^2} \int_{-2L}^{2L} e^{-s^2} ds. \quad (5.1.23)$$

Nous avons alors que la probabilité que z_T^1 soit plus petit qu'une valeur $-H$ est donnée par

$$\mathbb{P}\{z_T^1 \leq -H\} = \int_{-\infty}^{-H} \frac{e^{-(y + \mathbb{E}\{z_T^1\})^2/2 \text{Var}(z_T^1)}}{\sqrt{2\pi \text{Var}(z_T^1)}} dy \quad (5.1.24)$$

En faisant le changement de variable

$$u = \frac{y + \mathbb{E}\{z_T^1\}}{\sqrt{\text{Var}(z_T^1)}}, \quad (5.1.25)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{z_T^1 \leq -H\} &= \int_{-\infty}^{\frac{-H - \mathbb{E}\{z_T^1\}}{\sqrt{\text{Var}(z_T^1)}}} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du \\ &= \Phi\left(-\frac{H + \mathbb{E}\{z_T^1\}}{\sqrt{\text{Var}(z_T^1)}}\right) \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

■

En choisissant γ suffisamment grand, le terme de droite sous la fonction Φ est approximativement constant pour la plupart des valeurs de z_0 et H . Comme $1 - \lambda_0$ est égal à la probabilité de quitter le domaine $\mathcal{D}$ avant de faire la première SAO, en partant de la distribution QSD π_0 , nous attendons que

$$1 - \lambda_0 \simeq \Phi \left(-\pi^{1/4} \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}} \right) = \Phi \left(-\frac{(\pi\varepsilon)^{1/4}(\delta - \sigma_1^2/\varepsilon)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right), \quad (5.1.27)$$

qui vient du fait que π_0 soit concentré près de $z = 0$. Nous pouvons alors distinguer trois régimes principaux, comme dans la partie 3.4, qui dépendent de la valeur de $\tilde{\mu}/\tilde{\sigma}$:

1. **Bruit faible** : quand $\tilde{\mu} \gg \tilde{\sigma}$, ce qui correspond dans les variables de départ à $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \ll \varepsilon^{1/4}\delta$. λ_0 est alors exponentiellement proche de 1 et la probabilité de sortir du domaine de $\mathcal{D}$ est proche de 0. Les spikes sont donc séparés par de longues séquences de SAOs.
2. **Bruit fort** : quand $\tilde{\mu} \gg -\tilde{\sigma}$, ce qui implique $\tilde{\mu} \ll \tilde{\sigma}^2$, et correspond dans les variables de départ à $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \gg \varepsilon^{3/4}$. λ_0 est alors exponentiellement petit, de l'ordre de $e^{-(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/\varepsilon^{3/2}}$. Il y a alors une grande probabilité qu'il n'y ait pas de SAO complète entre deux spikes consécutifs. Le neurone émet des spikes de façon répétée.
3. **Bruit intermédiaire** : $|\tilde{\mu}| = \mathcal{O}(\tilde{\sigma})$, qui correspond à $\varepsilon^{1/4}\delta \leq \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \leq \varepsilon^{3/4}$. Le nombre moyen de SAOs est alors d'ordre 1. En particulier, quand $\sigma_1 = \sqrt{\varepsilon\delta}$, $\tilde{\mu} = 0$ et λ_0 est proche de 1/2. Il y a donc a peu près la même probabilité de faire un spike que de faire une SAO.

Nous remarquons que la transition du bruit faible au bruit fort est progressive et est caractérisée par un changement régulier de la distribution de N en fonction des valeurs des paramètres. Il n'y a pas de coupure claire pour $\sigma_1 = \sqrt{\varepsilon\delta}$, la seule particularité pour ce régime de paramètre est que λ_0 est proche de 1/2.

5.1.2 Écart entre (u_t^1, z_t^1) et (u_t^0, z_t^0)

Nous allons maintenant donner un résultat pour contrôler la distance entre les processus u_t^1 et z_t^1 avec les trajectoires déterministes u_t^0 et z_t^0 .

Proposition 5.1.4. *Soit ζ la fonction définie par*

$$\zeta(s) = e^{s^2} \left[e^{-t_0^2} + \int_{t_0}^s e^{-u^2} du \right]. \quad (5.1.28)$$

Il existe alors une constante $M > 0$ telle que pour tout $t \geq t_0$, tout $h, h_1, h_2 > 0$ et tout $\rho \in (0, \tilde{\mu}^{2\gamma}/M)$,

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t} \frac{|z_s^1 - z_s^0|}{\sqrt{\zeta(s)}} \geq h \right\} \leq \frac{2(t - t_0)}{\rho} \exp \left\{ -\frac{1}{8} \frac{h^2}{\tilde{\sigma}^2} (1 - M\rho \tilde{\mu}^{-2\gamma}) \right\} \quad (5.1.29)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t} |u_s^1 - u_s^0| \geq h_1 + h_2 \int_{t_0}^t \sqrt{\zeta(s)} ds \right\} \\ \leq 2 \exp \left\{ -\frac{h_1^2}{2(t - t_0)\tilde{\sigma}_1^2} \right\} + \frac{2(t - t_0)}{\rho} \exp \left\{ -\frac{1}{8} \frac{h_2^2}{\tilde{\sigma}^2} (1 - M\rho \tilde{\mu}^{-2\gamma}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

PREUVE. Nous commençons par définir (x^1, y^1) comme la différence

$$(x^1, y^1) = (u^1 - u^0, z^1 - z^0) \quad (5.1.31)$$

Le couple (x^1, y^1) vérifie le système

$$\begin{cases} dx_t^1 &= -y_t^1 dt + \tilde{\sigma}_1 dW_t^{(1)} \\ dy_t^1 &= t y_t^1 dt - \tilde{\sigma}_1 t dW_t^{(1)} + \tilde{\sigma}_2 dW_t^{(2)} \end{cases} \quad (5.1.32)$$

En utilisant de nouveau la méthode de la variation de la constante, nous obtenons que la seconde équation du système (5.1.32) admet la solution

$$y_t^1 = \tilde{\sigma}_2 e^{t^2/2} \int_{t_0}^t e^{-s^2/2} dW_s^{(2)} - \tilde{\sigma}_1 e^{t^2/2} \int_{t_0}^t s e^{-s^2/2} dW_s^{(1)}. \quad (5.1.33)$$

Nous posons

$$y_t^1 = y_t^{1,1} + y_t^{1,2} \quad (5.1.34)$$

où

$$y_t^{1,1} = \tilde{\sigma}_2 e^{t^2/2} \int_{t_0}^t e^{-s^2/2} dW_s^{(2)} \quad \text{et} \quad y_t^{1,2} = -\tilde{\sigma}_1 e^{t^2/2} \int_{t_0}^t s e^{-s^2/2} dW_s^{(1)} \quad (5.1.35)$$

Nous estimons d'abord $y_t^{1,1}$. Nous ne pouvons pas utiliser directement l'inégalité de Bernstein à cause du facteur $e^{t^2/2}$ devant l'intégrale d'Itô. Soit $u_0 = t_0 < u_1 < \dots < u_K = t$ une partition de l'intervalle $[t_0, t]$. Nous allons utiliser la même méthode que dans [BG02, Lemma 3.2]. Nous avons pour tout $H_0 > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t} \frac{1}{\sqrt{\zeta(s)}} \tilde{\sigma}_2 \left| \int_{t_0}^s e^{(s^2-u^2)/2} dW_u \right| \geq H_0 \right\} \\ &= \mathbb{P} \left\{ \exists k \in \{1, \dots, K\} : \sup_{u_{k-1} \leq s \leq u_k} \frac{1}{\sqrt{\zeta(s)}} \left| \int_{t_0}^s e^{(s^2-u^2)/2} dW_u \right| \geq \frac{H_0}{\tilde{\sigma}_2} \right\} \end{aligned} \quad (5.1.36)$$

Nous majorons par

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t} \frac{1}{\sqrt{\zeta(s)}} \tilde{\sigma}_2 \left| \int_{t_0}^s e^{(s^2-u^2)/2} dW_u \right| \geq H_0 \right\} \leq 2 \sum_{k=1}^K P_k \quad (5.1.37)$$

où

$$P_k = \mathbb{P} \left\{ \sup_{u_{k-1} \leq s \leq u_k} \int_{t_0}^s e^{-u^2/2} dW_u \geq \frac{H_0}{\tilde{\sigma}_2} \inf_{u_{k-1} \leq s \leq u_k} \sqrt{\zeta(s)} e^{-s^2/2} \right\} \quad (5.1.38)$$

L'inégalité de Bernstein

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^s \phi(u) dW_u \geq \delta \right\} \leq \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{2 \int_0^t \phi(u)^2 du} \right\} \quad (5.1.39)$$

permet de majorer chacun des P_k de la façon suivante

$$P_k \leq \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{H_0^2}{\tilde{\sigma}_2^2} \left(\inf_{u_{k-1} \leq s \leq u_k} \sqrt{\zeta(s)} e^{-s^2/2} \right)^2 \left(\int_{t_0}^{u_k} e^{-s^2} ds \right)^{-1} \right\} \quad (5.1.40)$$

et d'après la définition de la fonction ζ (5.1.28)

$$\int_{t_0}^{u_k} e^{-s^2} ds \leq e^{u_k^2} \zeta(u_k) \quad (5.1.41)$$

Nous obtenons finalement la majoration

$$P_k \leq \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{H_0^2}{\tilde{\sigma}_2^2} \inf_{u_{k-1} \leq s \leq u_k} \frac{\zeta(s)}{\zeta(u_k)} e^{u_k^2 - s^2} \right\}. \quad (5.1.42)$$

La définition $\zeta(s)$ implique

$$\zeta(s) = e^{s^2} \left[e^{-t_0^2} + \int_{t_0}^{u_k} e^{-u^2} du + \int_{u_k}^s e^{-u^2} du \right] \quad (5.1.43)$$

$$= e^{s^2 - u_k^2} \left[\zeta(u_k) + \int_{u_k}^s e^{u_k^2 - u^2} du \right] \quad (5.1.44)$$

Cette écriture nous permet d'obtenir la minoration pour le terme sous l'infimum

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(u_k)} e^{u_k^2 - s^2} = 1 - \frac{1}{\zeta(u_k)} \int_s^{u_k} e^{u_k^2 - u^2} du \geq 1 - \int_s^{u_k} e^{t_0^2 - u^2} du. \quad (5.1.45)$$

En remarquant que t_0 est tel que

$$e^{t_0^2} = e^{4L^2} = \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{-2\gamma}) \quad (5.1.46)$$

Pour une partition uniforme donnée par

$$\forall k \in 1 \dots K-1, u_k - u_{k-1} = \rho \quad (5.1.47)$$

avec $\rho \ll \tilde{\mu}^{2\gamma}$, nous pouvons borner inférieurement l'infimum

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(u_k)} e^{u_k^2 - s^2} \leq 1 - M\rho \tilde{\mu}^{-2\gamma} \quad (5.1.48)$$

pour une certaine constante M . Les P_k sont alors majorées indépendamment de k

$$P_k \leq \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{H_0^2}{\tilde{\sigma}_2^2} (1 - M\rho \tilde{\mu}^{-2\gamma}) \right\} \quad (5.1.49)$$

Pour cette partition, $K \leq (t - t_0)/\rho$, ce qui entraîne

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \frac{|y_s^{1,1}|}{\sqrt{\zeta(s)}} \geq H_0 \right\} \leq \frac{2(t - t_0)}{\rho} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{H_0^2}{\tilde{\sigma}_2^2} (1 - M\rho \tilde{\mu}^{-2\gamma}) \right\}. \quad (5.1.50)$$

En procédant de la même façon pour $y_s^{1,2}$, nous obtenons

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \frac{|y_s^{1,2}|}{\sqrt{\zeta(s)}} \geq H_1 \right\} \leq \frac{2(t - t_0)}{\rho} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{H_1^2}{\tilde{\sigma}_1^2} (1 - M\rho \tilde{\mu}^{-2\gamma}) \right\} \quad (5.1.51)$$

pour tout $H_1 > 0$. Posons $h = H_0 + H_1$ avec $H_0 = H_1 = h/2$, nous obtenons (5.1.29). Nous pouvons maintenant exprimer x_t^1 avec y_t^1 par

$$x_t^1 = - \int_{t_0}^t y_s^1 ds + \tilde{\sigma}_1 \int_{t_0}^t dW_s^{(1)}. \quad (5.1.52)$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t} |x_s^1| \geq h_1 + h_2 \int_{t_0}^t \sqrt{\zeta(s)} \, ds \right\} \\ & \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \tilde{\sigma}_1 \int_{t_0}^t dW_s^{(1)} \right| \geq h_1 \right\} + \mathbb{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t} \int_{t_0}^s |y_s^1| \geq h_2 \int_{t_0}^s \sqrt{\zeta(s)} \, ds \right\}. \end{aligned} \quad (5.1.53)$$

L'inégalité de Bernstein donne

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \tilde{\sigma}_1 \int_{t_0}^s dW_s^{(1)} \right| \geq h_1 \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{h_1^2}{2(t-t_0)\tilde{\sigma}_1^2} \right\} \quad (5.1.54)$$

ce qui conduit à (5.1.30). ■

5.1.3 Équation non-linéaire

Avant de passer à l'étude du système (5.1.1), nous rappelons un résultat qui généralise l'inégalité de Bernstein. Nous aurons besoin de ce lemme à plusieurs reprises par la suite.

Soit W_t un mouvement Brownien standard de dimension n . Nous considérons la martingale

$$M_t = \int_{t_0}^t g(X_s, s) \, dW_s = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t g_i(X_t, t) \, dW_t^{(i)}, \quad (5.1.55)$$

où $g = (g_1, \dots, g_n)$ est à valeur dans $\mathbb{R}^n$ et le processus X_t est supposé adapté à la filtration générée par W_t . Nous avons alors le résultat suivant ([BGK10, Lemma D.8]) :

Lemme 5.1.5 (Bernstein généralisé). *Supposons que $g(X_t, t)$ vérifie*

$$g(X_t, t)g(X_t, t)^T \leq G(t)^2 \quad (5.1.56)$$

presque sûrement, pour une fonction déterministe $G(t)$, et que l'intégrale

$$V(t) = \int_{t_0}^t G(s)^2 \, ds \quad (5.1.57)$$

est finie. Alors

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t} M_s > x \right\} \leq e^{-x^2/2V(t)} \quad (5.1.58)$$

pour tout $x > 0$.

Nous allons maintenant revenir au système complet (5.1.1) et estimer, comme dans le cas du système linéaire, la distance entre le processus stochastique solution de (5.1.1) et la solution du système déterministe associé.

Proposition 5.1.6. *Supposons $z_0 = \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{1-\gamma})$. Il existe des constantes $C, \kappa, M > 0$ telles que pour $t_0 \leq t \leq T + \mathcal{O}(|\log \tilde{\mu}|^{-1/2})$, pour tout $\tilde{\sigma} \leq \tilde{\mu}$ et pour tout $H > 0$,*

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t} \frac{|z_s - z_s^0|}{\sqrt{\zeta(s)}} \geq H \right\} \leq \frac{CT}{\tilde{\mu}^{2\gamma}} \left(\exp \left\{ -\kappa \frac{[H - M(T^2 \tilde{\mu}^{2-4\gamma} + T\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}^{-2\gamma})]^2}{\tilde{\sigma}^2} \right\} + e^{-\kappa \tilde{\mu}^2 / \tilde{\sigma}^2} \right) \quad (5.1.59)$$

et pour tout $H' > 0$,

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t} |u_s - u_s^0| \geq H' \right\} \leq \frac{CT}{\tilde{\mu}^{2\gamma}} \left(\exp \left\{ -\kappa \frac{[H' - M(T^2 \tilde{\mu}^{2-4\gamma} + T\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}^{-2\gamma})]^2}{\tilde{\sigma}^2 \tilde{\mu}^{-2\gamma}} \right\} + e^{-\kappa \tilde{\mu}^2 / \tilde{\sigma}^2} \right). \quad (5.1.60)$$

PREUVE. La borne supérieure sur t implique que

$$e^{t^2/2} = \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{-\gamma}). \quad (5.1.61)$$

Nous avons de plus

$$z_0 e^{-t_0^2/2} = \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{1-\gamma}) e^{-2L^2} = \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{1-\gamma}) (c_- \tilde{\mu})^\gamma = \mathcal{O}(\tilde{\mu}) \quad (5.1.62)$$

et

$$\tilde{\mu} \int_{t_0}^t e^{-s^2/2} ds = \mathcal{O}(\tilde{\mu}), \quad (5.1.63)$$

l'intégrale étant bornée. Il vient en utilisant (5.1.10) puis (5.1.11) que

$$z_s^0 = \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{1-\gamma}) \quad \text{et} \quad u_s^0 = \mathcal{O}(T \tilde{\mu}^{1-\gamma}) \quad (5.1.64)$$

pour $t_0 \leq s \leq t$. Étant donnés $h, h_1, h_2 > 0$, nous introduisons les temps d'arrêt

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \inf \left\{ s \geq t_0 : |z_s^1 - z_s^0| \geq h \sqrt{\zeta(s)} \right\}, \\ \tau_2 &= \inf \left\{ s \geq t_0 : |u_s^1 - u_s^0| \geq h_1 + h_2 \int_{t_0}^s \sqrt{\zeta(s)} ds \right\}. \end{aligned} \quad (5.1.65)$$

Regardons alors l'ordre de $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{-2\gamma}) [\mathcal{O}(\tilde{\mu}^{2\gamma}) + \mathcal{O}(1)] = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{-2\gamma}) \quad (5.1.66)$$

Ceci nous donne alors

$$\sqrt{\zeta(s)} = \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{-\gamma}) \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^t \sqrt{\zeta(s)} ds = \mathcal{O}(T \tilde{\mu}^{-\gamma}) \quad (5.1.67)$$

Si $t_0 \leq s \leq t \wedge \tau_1$, nous avons $|z_s^1 - z_s^0| \leq h \sqrt{\zeta(s)}$, que nous pouvons écrire sous la forme

$$z_s^0 - h \sqrt{\zeta(s)} \leq z_s^1 \leq z_s^0 + h \sqrt{\zeta(s)} \quad (5.1.68)$$

De même si $t_0 \leq s \leq t \wedge \tau_2$,

$$u_s^0 - h_1 - h_2 \int_{t_0}^s \sqrt{\zeta(s)} ds \leq u_s^1 \leq u_s^0 + h_1 + h_2 \int_{t_0}^s \sqrt{\zeta(s)} ds \quad (5.1.69)$$

Le choix de $h = h_1 = h_2 = \tilde{\mu}$ nous assure alors que

$$z_s^1 = \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{1-\gamma}) \quad \text{et} \quad u_s^1 = \mathcal{O}(T \tilde{\mu}^{1-\gamma}) \quad (5.1.70)$$

pour $t_0 \leq s \leq t \wedge \tau_1 \wedge \tau_2$. Pour ces valeurs de h, h_1 et h_2 , la Proposition 5.1.4 implique

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\tau_1 < t\} &\leq cT \tilde{\mu}^{-2\gamma} e^{-\kappa \tilde{\mu}^2 / \tilde{\sigma}^2}, \\ \mathbb{P}\{\tau_2 < t\} &\leq cT \tilde{\mu}^{-2\gamma} e^{-\kappa \tilde{\mu}^2 / \tilde{\sigma}^2} \end{aligned} \quad (5.1.71)$$

pour des constantes $\kappa, c > 0$. Nous considérons ensuite la différence $(x_t^2, y_t^2) = (u_t, z_t) - (u_t^1, z_t^1)$, qui vérifie le système d'EDSs

$$\begin{cases} dx_t^2 &= (-y_t^2 + \mathcal{O}(\tilde{\varepsilon})) dt, \\ dy_t^2 &= [ty_t^2 + 2(u_t^1 + x_t^2)(z_t^1 + y_t^2) + \mathcal{O}(\tilde{\varepsilon})] dt - 2\tilde{\sigma}_1(u_t^1 + x_t^2) dW_t^{(1)}. \end{cases} \quad (5.1.72)$$

Nous introduisons la fonction de Lyapunov $U_t > 0$ définie par

$$(U_t - C_0)^2 = \frac{(x_t^2)^2 + (y_t^2)^2}{2}. \quad (5.1.73)$$

La constante C_0 sera choisie pour faire disparaître le terme de second ordre qui vient de la formule d'Itô. En dérivant, en utilisant la formule d'Itô, nous obtenons

$$2(U_t - C_0) dU_t = x_t^2 dx_t^2 + y_t^2 dy_t^2 + \frac{1}{2}(dy_t^2)^2 \quad (5.1.74)$$

En remplaçant dx_t^2 et dy_t^2 par les expressions de (5.1.72) et en calculant le terme d'Itô, nous avons

$$\begin{aligned} 2(U_t - C_0) dU_t = & [-x_t^2 y_t^2 + t(y_t^2)^2 + 2u_t^1 z_t^1 y_t^2 + 2u_t^1 (y_t^2)^2 + 2x_t^2 z_t^1 \\ & + 2x_t^2 (y_t^2)^2 + 4\tilde{\sigma}_1^2 (u_t^1 + x_t^2)^2 + \mathcal{O}(\tilde{\varepsilon})(x_t^2 + y_t^2)] dt - 2\tilde{\sigma}_1 y_t^2 (u_t^1 + x_t^2) dW_t^{(1)} \end{aligned} \quad (5.1.75)$$

En utilisant les inégalités

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \quad \text{et} \quad x \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.1.76)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} 2(U_t - C_0) dU_t \leq & [(U_t - C_0)^2 + 2t(U_t - C_0)^2 + (U_t - C_0)\mathcal{O}(T\tilde{\mu}^{2-2\gamma}) \\ & + (U_t - C_0)^2\mathcal{O}(T\tilde{\mu}^{1-\gamma}) + (U_t - C_0)\mathcal{O}(\tilde{\mu}^{1-\gamma}) + (U_t - C_0)^3 + \\ & \mathcal{O}(\tilde{\varepsilon})(U_t - C_0)] dt + 2\tilde{\sigma}_1 [(U_t - C_0)\mathcal{O}(\tilde{\mu}^{1-\gamma}) + (U_t - C_0)^2] dW_t^{(1)} \end{aligned} \quad (5.1.77)$$

Soit le nouveau temps d'arrêt τ^* défini par

$$\tau^* = \inf\{t \geq t_0 : U_t = 1\}. \quad (5.1.78)$$

Pour $t \leq \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau^*$, en choisissant C_0 de l'ordre de $\tilde{\sigma}_1^2 \tilde{\mu}^{-(1-\gamma)}$, nous avons alors

$$dU_t \leq [C_1 + C_2(t)U_t] dt + \tilde{\sigma}_1 g(t) dW_t^1, \quad (5.1.79)$$

où, en utilisant que $\tilde{\sigma} \leq \tilde{\mu}$,

$$\begin{aligned} C_1 &= \mathcal{O}(T\tilde{\mu}^{2-2\gamma}) + \mathcal{O}(\tilde{\varepsilon}), \\ C_2(t) &= t \vee 0 + \mathcal{O}(T\tilde{\mu}^{1-\gamma}), \end{aligned} \quad (5.1.80)$$

et $g(t)$ est au plus d'ordre 1. En intégrant entre t_0 et $t \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau^*$,

$$U_{t \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau^*} \leq U_{t_0} + C_1(t - t_0) + \int_{t_0}^{t \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau^*} C_2(s)U_s ds + \tilde{\sigma}_1 \int_{t_0}^{t \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau^*} g(s) dW_s^1. \quad (5.1.81)$$

Nous introduisons le dernier temps d'arrêt τ_3 :

$$\tau_3 = \inf\left\{t \geq t_0 : \left| \tilde{\sigma}_1 \int_0^{t \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau^*} g(s) dW_s^1 \right| \geq h_3\right\}. \quad (5.1.82)$$

Le Lemme 5.1.5 implique alors que

$$\mathbb{P}\{\tau_3 < t\} \leq e^{-\kappa_3 h_3^2 / \tilde{\sigma}_1^2} \quad (5.1.83)$$

pour un $\kappa_3 > 0$. En appliquant le lemme de Gronwall à (5.1.81), nous obtenons

$$\begin{aligned} U_{t \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau_3 \wedge \tau^*} &\leq [U_{t_0} + C_1(t - t_0) + h_3] \exp \left\{ \int_{t_0}^{t \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau_3 \wedge \tau^*} C_2(u) du \right\} \\ &= \mathcal{O}(T^2 \tilde{\mu}^{2-3\gamma}) + \mathcal{O}(\tilde{\sigma}^2 T^2 \tilde{\mu}^{1-2\gamma}) + \mathcal{O}(\tilde{\varepsilon} T \tilde{\mu}^{-\gamma}). \end{aligned} \quad (5.1.84)$$

Cela montre en particulier que si nous prenons γ suffisamment petit $\tau^* > t$. L'équation (5.1.59) découle alors de la décomposition

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t} \frac{|z_s - z_s^0|}{\sqrt{\zeta(s)}} \geq H \right\} &\leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau_3} \frac{|z_s^1 - z_s^0|}{\sqrt{\zeta(s)}} \geq H - \sup_{t_0 \leq s \leq t \wedge \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau_3} \frac{U_s}{\sqrt{\zeta(s)}} \right\} \\ &\quad + \mathbb{P}\{\tau_1 > t\} + \mathbb{P}\{\tau_2 > t\} + \mathbb{P}\{\tau_3 > t\}, \end{aligned} \quad (5.1.85)$$

et (5.1.60) est obtenu d'une façon similaire. ■

5.1.4 Calcul de la première partie du noyau

Nous pouvons à présent caculer la contribution de la dynamique le long de la ligne séparatrice dans le noyau de la chaîne de Markov.

Proposition 5.1.7. *Fixons $\gamma \in (0, 1/3)$ et une condition initiale $(\xi_0, z_0) = (-L, z_0) \in F_-$ avec $|z_0| = \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{1-\gamma})$.*

1. *Supposons $\sqrt{\varepsilon} \leq \tilde{\mu}^{2-2\gamma}$. Il existe alors des constantes $C, \kappa_1, h_0 > 0$ telles que la trajectoire partant du point de coordonnées (ξ_0, z_0) atteindra F_+ pour la première fois au point (ξ_1, z_1) tel que*

$$\mathbb{P} \left\{ |z_1 - z_T^0| \geq h \text{ ou } \xi_1 \neq L \right\} \leq \frac{C}{\tilde{\mu}^{2\gamma}} \left(\exp \left\{ -\kappa_1 \frac{h^2}{\tilde{\sigma}_1^2 \tilde{\mu}^{-2\gamma}} \right\} + \exp \left\{ -\kappa_1 \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\sigma}^2} \right\} \right) \quad (5.1.86)$$

pour tout $h \leq h_0 \tilde{\sigma}_1^2 \tilde{\mu}^{-2\gamma}$.

2. *Si $\sqrt{\varepsilon} > \tilde{\mu}^{2-2\gamma}$, le premier point d'atteinte de F_+ satisfait*

$$\mathbb{P} \left\{ z_1 \leq z_T^0 - h \right\} \leq \frac{C}{\tilde{\mu}^{2\gamma}} \left(\exp \left\{ -\kappa_1 \frac{h^2}{\tilde{\sigma}_1^2 \tilde{\mu}^{-2\gamma}} \right\} + \exp \left\{ -\kappa_1 \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\sigma}^2} \right\} \right) \quad (5.1.87)$$

pour tout $h \leq h_0 \tilde{\sigma}_1^2 \tilde{\mu}^{-2\gamma}$.

PREUVE. Nous considérons d'abord le cas $\sqrt{\varepsilon} \leq \tilde{\mu}^{2-2\gamma}$. Appliquons (5.1.60) avec $H' = \tilde{\mu}^{1-\gamma}$. Le terme de la première exponentielle devient alors

$$-\kappa \frac{[H' - M(T^2 \tilde{\mu}^{2-4\gamma} + T \tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}^{-2\gamma})]^2}{\tilde{\sigma}^2 \tilde{\mu}^{-2\gamma}} \leq -\kappa \frac{[\tilde{\mu}^{1-\gamma} - M(T^2 \tilde{\mu}^{2-4\gamma} + T \gamma^2 \tilde{\mu}^{2-4\gamma} \log(c_- \tilde{\mu})^2/4)]^2}{\tilde{\sigma}^2 \tilde{\mu}^{-2\gamma}} \quad (5.1.88)$$

En prenant $\gamma < 1/3$, le terme dominant du numérateur est $\tilde{\mu}^{1-\gamma}$ et le terme d'erreur est négligeable

$$-\kappa \frac{[H' - M(T^2 \tilde{\mu}^{2-4\gamma} + T \tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}^{-2\gamma})]^2}{\tilde{\sigma}^2 \tilde{\mu}^{-2\gamma}} \leq -\kappa \frac{\tilde{\mu}^{2-2\gamma}}{\tilde{\sigma}^2 \tilde{\mu}^{-2\gamma}} \leq -\kappa \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\sigma}^2} \quad (5.1.89)$$

Nous avons alors que

$$1 - \frac{C}{\tilde{\mu}^{2\gamma}} e^{-\kappa \tilde{\mu}^2 / (2\tilde{\sigma}^2)}, \quad (5.1.90)$$

avec une probabilité supérieure ou égale à, $|u_t - u_t^0|$ reste bornée par $\tilde{\mu}^{1-\gamma}$ jusqu'au temps $T + \mathcal{O}(|\log \tilde{\mu}|^{-1/2})$. Comme u_T^0 est d'ordre $\tilde{\mu}^{1-\gamma}$ et

$$\xi_\tau = L = \tau/2 + u_\tau \quad (5.1.91)$$

cela implique que le premier temps d'atteinte τ de F_+ vérifie $\tau = T + \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{1-\gamma})$ avec une probabilité bornée par (5.1.90).

Pour toute décomposition $h = h_0 + h_1$, nous pouvons écrire

$$\mathbb{P}\{|z_\tau - z_T^0| \geq h\} \leq \mathbb{P}\{|z_\tau - z_\tau^0| \geq h_0\} + \mathbb{P}\{|z_\tau^0 - z_T^0| \geq h_1\} . \quad (5.1.92)$$

Le premier terme de droite de l'inégalité est borné par (5.1.59). Nous pouvons exprimer le second en fonction de la probabilité de $\tau - T$ d'être grand. La borne optimale est obtenue en choisissant h_0 et h_1 tels que $h_0 = h_1 \tilde{\mu}^{-\gamma}$, et cela conduit à (5.1.86).

Dans le cas où $\sqrt{\varepsilon} \leq \tilde{\mu}^{2-2\gamma}$, nous pouvons conclure de la même façon en observant que z_t est borné inférieurement par sa valeur pour $\varepsilon = 0$, le terme ε -dépendant de dz_t dans (5.1.1) étant positif. ■

5.2 Dynamique pendant une SAO

Nous allons maintenant étudier le noyau sur la deuxième partie d'une petite oscillation, lorsque la trajectoire tourne autour du point d'équilibre en partant de F_+ pour revenir en F_- . Pour cela nous commençons par introduire un nouveau système de coordonnées. Nous introduisons un angle ϕ et utilisons l'intégrale première K définie en (1.3.4). Nous définissons alors la transformation de $(0, 1] \times \mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ par

$$\begin{aligned} \xi &= -\sqrt{\frac{-\log K}{2}} \sin \phi \\ z &= \frac{1}{2} \left(1 + f \left(\sqrt{\frac{-\log K}{2}} \cos \phi \right) \right) . \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Ici la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, +\infty)$ est définie implicitement comme la solution de

$$\log(1 + f(u)) - f(u) = -2u^2 \quad (5.2.2)$$

telle que

$$\text{sign } f(u) = \text{sign } u . \quad (5.2.3)$$

Avant d'utiliser ce changement de variable, nous commençons par donner quelques propriétés de la fonction f dont nous aurons besoin par la suite.

5.2.1 Propriété de la fonction f du changement de variable

Lemme 5.2.1. *La fonction f a les propriétés suivantes :*

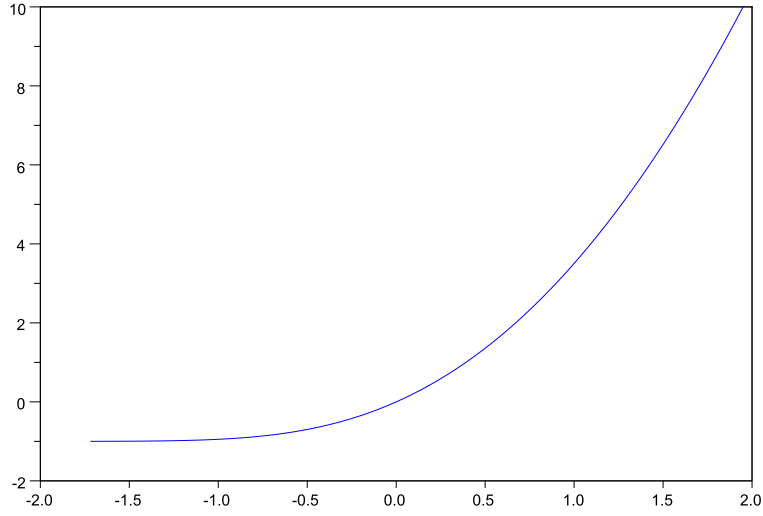
– *Bornes inférieures :*

$$f(u) > -1 \quad \text{et} \quad f(u) \geq 2u \quad \forall u \in \mathbb{R} . \quad (5.2.4)$$

– *Bornes supérieures :* *Il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ et une fonction $r : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$, avec $0 \leq r(u) \leq C_1 e^{-1-2u^2}$, telles que*

$$f(u) \leq C_2 u + 2u^2 \quad \forall u \geq 0 , \quad (5.2.5)$$

$$f(u) = -1 + e^{-1-2u^2} [1 + r(u)] \quad \forall u \leq 0 . \quad (5.2.6)$$

FIGURE 5.2. Représentation graphique de la fonction f .

– Dérivation : $f \in \mathcal{C}^\infty$ et

$$f'(u) = 4u \frac{1+f(u)}{f(u)} \text{ pour } u \neq 0, \quad f'(0) = 2 \quad (5.2.7)$$

$$f''(u) = 4 \frac{1+f(u)}{f(u)} \left(1 - 4 \frac{u^2}{f(u)^2} \right) \text{ pour } u \neq 0, \quad f''(0) = \frac{4}{3}. \quad (5.2.8)$$

– Il existe une constante $M > 0$ telle que

$$0 < f''(u) \leq M \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (5.2.9)$$

PREUVE. D'après la relation définissant la fonction f (5.2.2), nous avons

$$1 + f(u) > 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (5.2.10)$$

Montrons ensuite que

$$f(u) \geq 2u, \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (5.2.11)$$

Nous allons procéder en deux temps. D'abord, si $u \geq 0$ ce qui est équivalent à $f(u) \geq 0$. Montrer que $f(u) \geq 2u$ revient à établir que $f(u)^2 \geq 4u^2$. D'après la relation implicite définissant la fonction f ,

$$4u^2 = 2f(u) - 2\log(1 + f(u)). \quad (5.2.12)$$

C'est à dire qu'il faut montrer que $f(u)^2 - 2f(u) + 2\log(1 + f(u)) \geq 0$ pour tout $f(u) \geq 0$. Étudions la fonction h définie pour $x \geq 0$ par

$$h(x) = x^2 - 2x + 2\log(1 + x). \quad (5.2.13)$$

La dérivée de h est

$$h'(x) = 2x - 2 + \frac{2}{1+x} = 2 \frac{x^2}{1+x} \quad (5.2.14)$$

La fonction h est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $h(0) = 0$. Nous avons donc $\forall x \geq 0, h(x) \geq 0$ D'où,

$$\text{si } u \geq 0, f(u) \geq 2u \quad (5.2.15)$$

Nous regardons maintenant le deuxième cas où $u \leq 0$, i.e., $-1 < f(u) \leq 0$. Nous pouvons développer $\log(1 + f(u))$:

$$\log(1 + f(u)) = f(u) - \frac{f(u)^2}{2} + \frac{f(u)^3}{3} - \dots \quad (5.2.16)$$

d'où

$$f(u) - \log(1 + f(u)) = \frac{f(u)^2}{2} - \frac{f(u)^3}{3} + \dots \quad (5.2.17)$$

Nous avons $f(u) \leq 0$ donc la série est à termes positifs donc

$$f(u) - \log(1 + f(u)) \geq \frac{f(u)^2}{2} \quad (5.2.18)$$

En utilisant (5.2.2), nous avons la majoration

$$f(u)^2 \leq 4u^2 \quad (5.2.19)$$

Or $f(u) \leq 0$ et $u \leq 0$, en utilisant la décroissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^-$, nous avons finalement l'inégalité :

$$f(u) \geq 2u \text{ pour } u \leq 0 \quad (5.2.20)$$

Nous avons donc bien (5.2.4).

Montrons ensuite le point (5.2.6). Pour $u \leq 0$, nous avons $-1 < f(u) \leq 0$. Nous pouvons alors écrire f sous la forme $f(u) = -1 + R(u)$ avec $0 < R(u) \leq 1$. $R(u)$ vérifie alors la relation $\log R(u) - R(u) = -1 - 2u^2$. Le terme dominant étant $\log R(u)$ nous avons en première approximation que $R(u)$ se comporte comme e^{-1-2u^2} . Ceci justifie que nous cherchions f sous la forme

$$f(u) = -1 + e^{-1-2u^2} [1 + r(u)] \quad (5.2.21)$$

En remplaçant dans l'équation (5.2.2), nous avons

$$\frac{\log(1 + r(u))}{1 + r(u)} = e^{-1-2u^2} \quad (5.2.22)$$

Cette relation impose que $\log(1 + r(u)) > 0$, ce qui entraîne

$$r(u) > 0 \quad (5.2.23)$$

Il reste à trouver une borne supérieure pour $r(u)$. Nous définissons la fonction h

$$h(x) = \frac{\log(1 + x)}{1 + x} \quad (5.2.24)$$

La dérivée de h est $h'(x) = (1 - \log(1 + x))/(1 + x)^2$. La fonction h est donc croissante sur $[0, e - 1]$ et décroissante sur $[e - 1, +\infty)$. Nous allons montrer que r est à valeur dans l'intervalle $[0, e - 1]$. Nous remarquons d'abord que, comme $f(0) = 0$ (0 est l'unique solution de l'équation $x = \log(1 + x)$), $r(0) = e - 1$. En calculant le développement limité de f au voisinage de 0, nous obtenons

$$f(u) = 2u + \frac{2}{3}u^2 + \mathcal{O}(u^3) \quad (5.2.25)$$

Il existe alors $u_0 < 0$ tel que

$$f(u) \leq u \text{ pour } u_0 < u \leq 0 \quad (5.2.26)$$

Ce qui conduit à

$$\begin{aligned} r(u) &\leq e^{1+2u^2}(1+u) - 1 \\ &\leq e(1+u + \mathcal{O}(u^2)) - 1 \\ &\leq e-1 \quad \text{pour } u_0 < u \leq 0 \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

En utilisant la décroissance de $h(r(u)) = e^{-1-2u^2}$ quand u diminue, nous obtenons que

$$r(u) \leq e-1 \quad \forall u \in \mathbb{R}_- \quad (5.2.28)$$

Si $0 \leq x \leq e-1$, $\log(1+x) \geq x - x^2/2$ et donc

$$h(x) \geq x \frac{1-x/2}{1+x} \quad (5.2.29)$$

La fonction $x \mapsto (1-x/2)/(1+x)$ est décroissante sur $[0, e-1]$ d'où

$$h(x) \geq Cx \quad \text{où } C = \frac{3}{2}e^{-1} - 1 \quad (5.2.30)$$

En prenant $x = r(u)$, nous obtenons

$$C_1 e^{-1-2u^2} \geq r(u) \quad (5.2.31)$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites à $\log(1+y) - y + 2u^2 = 0$, nous avons que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. En dérivant par rapport à u la relation (5.1.1), nous avons

$$\frac{f'(u)}{1+f(u)} - f'(u) = -4u \quad (5.2.32)$$

En isolant $f'(u)$, nous obtenons (5.2.7). En dérivant une seconde fois, nous avons

$$f''(u) = 4 \frac{1+f(u)}{f(u)} + 4u \left(-\frac{f'(u)}{f(u)^2} \right) \quad (5.2.33)$$

En remplaçant $f'(u)$ par son expression en fonction de $f(u)$ et en factorisant, nous obtenons

$$f''(u) = 4 \frac{1+f(u)}{f(u)} \left(1 - 4 \frac{u^2}{f(u)^2} \right) \quad (5.2.34)$$

Montrons que $f(u)$ est strictement convexe puis que f'' est majorée. Pour la convexité, nous distinguons les cas $f(u) > 0$, $f(u) < 0$ et $f(u) = 0$:

- si $f(u) > 0$, $f(u) > 2u > 0$ alors $\frac{1+f(u)}{f(u)} > 0$ et $f(u)^2 > 4u^2$ d'où $1 - \frac{4u^2}{f(u)^2} > 0$. D'où $f''(u) > 0$ pour $u \geq 0$.
- si $-1 < f(u) < 0$, $0 > f(u) > 2u$ alors $\frac{1+f(u)}{f(u)} < 0$ et $f(u)^2 < 4u^2$ d'où $1 - \frac{4u^2}{f(u)^2} < 0$. Nous en déduisons $f''(u) > 0$ quand $u < 0$.
- si $f(u) = 0$, en utilisant le développement limité de f en 0, nous obtenons $f''(u) = 2/3$.

Montrons maintenant que f'' est majorée sur $\mathbb{R}$. Nous distinguons alors trois cas :

- si $f(u) \geq 1$, $1 \leq 1 + \frac{1}{f(u)} \leq 2$ et $0 \leq 1 - 4 \frac{u^2}{f(u)^2} \leq 1$, d'où $f''(u) \leq 4$.

- si $0 \leq f(u) < 1$, nous pouvons développer $\log(1 + f(u))$ en série alternée. Nous avons donc la majoration :

$$\log(1 + f(u)) \leq f(u) - \frac{f(u)^2}{2} + \frac{f(u)^3}{3} \quad (5.2.35)$$

Ceci entraîne

$$f(u)^2 - 4u^2 \leq \frac{2}{3}f(u)^3 \quad (5.2.36)$$

et f'' peut aussi se mettre sous la forme

$$f''(u) = 4 \frac{(1 + f(u))(f(u)^2 - 4u^2)}{f(u)^3} \quad (5.2.37)$$

d'où

$$f''(u) \leq \frac{16}{3} \quad (5.2.38)$$

- si $-1 < f(u) \leq 0$, étudions le signe de

$$af(u)^3 - f(u)^2 + 4u^2 = af(u)^3 - f(u)^2 + 2f(u) - 2\log(1 + f(u))$$

Étudions la fonction

$$j(x) = ax^3 - x^2 + 2x - 2\log(1 + x) \text{ pour } x \in]-1, 0] \quad (5.2.39)$$

Nous avons les limites

$$\lim_{x \rightarrow -1} j(x) = +\infty \quad \text{et} \quad j(0) = 0 \quad (5.2.40)$$

Nous allons choisir a tel que $j(x) \geq 0$ sur l'intervalle $] -1, 0]$. Étudions pour cela les variations de j . Sa dérivée est

$$j'(x) = \frac{x^2}{1+x} (3ax + 3a - 2)$$

En prenant $a = \frac{2}{3}$, nous avons $j'(x) = \frac{2x^3}{1+x}$ et $\forall x \in]-1, 0], j'(x) \leq 0$ donc la fonction j est strictement décroissante sur l'intervalle $] -1, 0]$ et $j(0) = 0$, d'où $j(x) \geq 0$. Cela nous donne alors la majoration

$$f(u)^2 - 4u^2 \geq \frac{2}{3}f(u)^3 \quad (5.2.41)$$

Ce qui conduit à la majoration

$$f''(u) \leq \frac{8}{3} (1 + f(u)) \leq \frac{8}{3} \quad (5.2.42)$$

Nous avons donc f'' qui est bornée sur $\mathbb{R}$.

■

5.2.2 Système en coordonnées (K, ϕ)

Nous allons exprimer le système (5.1.1) en coordonnées (K, ϕ) . Pour simplifier les écritures, nous introduisons la fonction

$$X = X(K, \phi) = \sqrt{\frac{-\log K}{2}} \cos \phi, \quad (5.2.43)$$

le paramètre $\tilde{\sigma} > 0$ défini par

$$\tilde{\sigma}^2 = \tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2, \quad (5.2.44)$$

et le mouvement Brownien de dimension deux $dW_t = (d\tilde{W}_t^{(1)}, d\tilde{W}_t^{(2)})^T$.

Proposition 5.2.2. *Pour $z > 0$, le système d'EDSs (3.4.1) est équivalent au système*

$$\begin{aligned} dK_t &= \tilde{\mu} f_1(K_t, \phi_t) dt + \tilde{\sigma} \psi_1(K_t, \phi_t) dW_t \\ d\phi_t &= f_2(K_t, \phi_t) dt + \tilde{\sigma} \psi_2(K_t, \phi_t) dW_t, \end{aligned} \quad (5.2.45)$$

où nous avons introduit les notations suivantes :

– les nouveaux termes de dérives sont de la forme

$$f_1(K, \phi) = -2K \frac{f(X)}{1+f(X)} \left[1 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\tilde{\mu}} R_{K,\varepsilon}(K, \phi) + \frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{\mu}} R_{K,\sigma}(K, \phi) \right], \quad (5.2.46)$$

$$f_2(K, \phi) = \frac{f(X)}{2X} \left[1 + \frac{2\tilde{\mu} \tan \phi}{\log K (1+f(X))} + \sqrt{\varepsilon} R_{\phi,\varepsilon}(K, \phi) + \tilde{\sigma}^2 R_{\phi,\sigma}(K, \phi) \right]. \quad (5.2.47)$$

– les termes de reste dans les termes de dérives sont bornés comme suit. Soit

$$\rho(K, \phi) = \begin{cases} \sqrt{|\log K|} & \text{si } \cos \phi \geq 0, \\ K^{-\cos^2 \phi} & \text{si } \cos \phi < 0. \end{cases} \quad (5.2.48)$$

Il existe alors une constante $M_1 > 0$ telle que pour tout $K \in (0, 1)$ et tout $\phi \in \mathbb{S}^1$,

$$\begin{aligned} |R_{K,\varepsilon}(K, \phi)| &\leq M_1 |\log K|^2, & |R_{K,\sigma}(K, \phi)| &\leq M_1 \rho(K, \phi), \\ |R_{\phi,\varepsilon}(K, \phi)| &\leq M_1 |\log K|^{3/2} \rho(K, \phi), & |R_{\phi,\sigma}(K, \phi)| &\leq M_1 \rho(K, \phi)^2 / |\log K|. \end{aligned} \quad (5.2.49)$$

De plus, $-f(X)R_{K,\varepsilon}(K, \phi) \geq 0$.

– Les coefficients des termes de diffusion sont données par

$$\begin{aligned} \psi_1(K, \phi) &= \left(2\sqrt{2} \frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}} K \left[\sqrt{-\log K} - \frac{f(X)}{1+f(X)} \right] \sin \phi, -2 \frac{\tilde{\sigma}_2}{\tilde{\sigma}} K \frac{f(X)}{1+f(X)} \right), \\ \psi_2(K, \phi) &= \left(-\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}} \sqrt{\frac{2}{-\log K}} \frac{1+f(X) \cos \phi}{[1+f(X)] \cos \phi}, \frac{\tilde{\sigma}_2}{\tilde{\sigma}} \frac{1}{\log K} \frac{f(X)}{1+f(X)} \tan \phi \right). \end{aligned} \quad (5.2.50)$$

– Il existe une constante $M_2 > 0$ telle que pour tout $K \in (0, 1)$ et tout $\phi \in \mathbb{S}^1$,

$$\|\psi_1(K, \phi)\|^2 \leq M_2 K^2 \rho(K, \phi)^2, \quad \|\psi_2(K, \phi)\|^2 \leq M_2 \frac{\rho(K, \phi)^2}{|\log K|^2}. \quad (5.2.51)$$

PREUVE. La démonstration de ces résultats est longue et calculatoire. Elle repose sur la formule d'Itô et les résultats de majorations obtenus dans le lemme (5.2.1).

Nous cherchons le système d'EDS vérifié par les variables (K, ϕ) sous la forme :

$$\begin{cases} dK_t = f_1(K_t, \phi_t) + \psi_{11}(K_t, \phi_t) d\tilde{W}_t^{(1)} + \psi_{12}(K_t, \phi_t) d\tilde{W}_t^{(2)} \\ d\phi_t = f_2(K_t, \phi_t) + \psi_{21}(K_t, \phi_t) d\tilde{W}_t^{(1)} + \psi_{22}(K_t, \phi_t) d\tilde{W}_t^{(2)} \end{cases} \quad (5.2.52)$$

D'après la formule d'Itô,

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{K_t \sqrt{-\log K_t}} \sin \phi_t dK_t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\log K_t} \cos \phi_t d\phi_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{K_t^2 \sqrt{-\log K_t}} \left(1 - \frac{1}{2 \log K_t} \right) \sin \phi_t dK_t^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{-1}{K_t \sqrt{-\log K_t}} \cos \phi_t dK_t d\phi_t \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\log K_t} \sin \phi_t d\phi_t^2 \right] \end{aligned} \quad (5.2.53)$$

$$\begin{aligned}
dz_t = & -\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1}{K_t \sqrt{-\log K_t}} f'(X_t) \cos \phi_t dK_t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{-\log K_t} f'(X_t) \sin \phi_t d\phi_t \\
& + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \cos(\phi_t) \left[\frac{1}{K_t^2 \sqrt{-\log K_t}} \left(1 - \frac{1}{2 \log K_t}\right) f'(X_t) + \frac{1}{2\sqrt{2} - K_t^2 \log K_t} f''(X_t) \right] dK_t^2 \right. \\
& + \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{-1}{K_t \sqrt{-\log K_t}} [\sin \phi_t f'(X_t) - \cos \phi_t \sin \phi_t \sqrt{\frac{-\log K_t}{2}} f''(X_t)] dK_t d\phi_t \\
& \left. - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\log K_t}{2}} [\cos \phi_t f'(X_t) - \sin^2 \phi_t \sqrt{\frac{-\log K_t}{2}} f''(X_t)] d\phi_t^2 \right] \quad (5.2.54)
\end{aligned}$$

Et nous avons les relations

$$\begin{aligned}
dK_t^2 &= (\psi_{11}(K_t, \phi_t)^2 + \psi_{12}(K_t, \phi_t)^2) dt \\
d\phi_t^2 &= (\psi_{21}(K_t, \phi_t)^2 + \psi_{22}(K_t, \phi_t)^2) dt \\
dK_t d\phi_t &= (\psi_{11}(K_t, \phi_t)\psi_{21}(K_t, \phi_t) + \psi_{12}(K_t, \phi_t)\psi_{22}(K_t, \phi_t)) dt
\end{aligned} \quad (5.2.55)$$

Cela nous donne alors

$$\begin{cases} d\xi_t = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{K_t \sqrt{-\log K_t}} \sin \phi_t dK_t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\log K_t} \cos \phi_t d\phi_t + g_1(K_t, \phi_t) dt \\ dz_t = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1}{K_t \sqrt{-\log K_t}} f'(X_t) \cos \phi_t dK_t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{-\log K_t} f'(X_t) d\phi_t + g_2(K_t, \phi_t) dt \end{cases} \quad (5.2.56)$$

où les fonctions g_1 et g_2 sont définies par :

$$\begin{aligned}
g_1(K_t, \phi_t) = & \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1}{K_t^2 \sqrt{-\log K_t}} \left(1 - \frac{1}{2 \log K_t}\right) \sin \phi_t (\psi_{11}(K_t, \phi_t)^2 + \psi_{12}(K_t, \phi_t)^2) \\
& + \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{-1}{K_t \sqrt{-\log K_t}} \cos \phi_t (\psi_{11}(K_t, \phi_t)\psi_{21}(K_t, \phi_t) + \psi_{12}(K_t, \phi_t)\psi_{22}(K_t, \phi_t)) \\
& - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{-\log K_t} \sin \phi_t (\psi_{21}(K_t, \phi_t)^2 + \psi_{22}(K_t, \phi_t)^2)
\end{aligned} \quad (5.2.57)$$

$$\begin{aligned}
g_2(K_t, \phi_t) = & \frac{1}{8\sqrt{2}} \cos \phi_t \left[\frac{1}{K_t^2 \sqrt{-\log K_t}} \left(1 - \frac{1}{2 \log K_t}\right) f'(X_t) + \frac{1}{2\sqrt{2} - K_t^2 \log K_t} f''(X_t) \right] \\
& (\psi_{11}(K_t, \phi_t)^2 + \psi_{12}(K_t, \phi_t)^2) \\
& + \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{-1}{K_t \sqrt{-\log K_t}} \left[\sin \phi_t f'(X_t) - \cos \phi_t \sin \phi_t \sqrt{\frac{-\log K_t}{2}} f''(X_t) \right] \\
& (\psi_{11}(K_t, \phi_t)\psi_{21}(K_t, \phi_t) + \psi_{12}(K_t, \phi_t)\psi_{22}(K_t, \phi_t)) \\
& - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{-\log K_t}{2}} \left[\cos \phi_t f'(X_t) - \sin^2 \phi_t \sqrt{\frac{-\log K_t}{2}} f''(X_t) \right] (\psi_{21}(K_t, \phi_t)^2 + \psi_{22}(K_t, \phi_t)^2) \quad (5.2.58)
\end{aligned}$$

Par combinaisons linéaires des équations (5.2.56) sur $d\xi_t$ et dz_t pour obtenir $d\phi_t$ et dK_t , nous avons alors

$$\begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1}{K_t \sqrt{-\log K_t}} f'(X_t) dK_t = \frac{1}{2} \sin \phi_t f'(X_t) d\xi_t - \cos \phi_t dz_t + F_K(K_t, \phi_t) dt \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{-\log K_t} f'(X_t) d\phi_t = \frac{1}{2} \cos \phi_t f'(X_t) d\xi_t + \sin \phi_t dz_t + F_\phi(K_t, \phi_t) dt \end{cases} \quad (5.2.59)$$

où les fonctions F_K et F_ϕ sont définies par

$$\begin{cases} F_K(K_t, \phi_t) = \frac{1}{2} \sin \phi_t f'(X_t) g_1(K_t, \phi_t) - \cos \phi_t g_2(K_t, \phi_t) \\ F_\phi(K_t, \phi_t) = \frac{1}{2} \cos \phi_t f'(X_t) g_1(K_t, \phi_t) + \sin \phi_t g_2(K_t, \phi_t) \end{cases} \quad (5.2.60)$$

Nous remplaçons ensuite $d\xi_t$ et dz_t par leur expression en z_t et K_t :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1}{K_t \sqrt{-\log K_t}} f'(X_t) dK_t = \\ & \left[\frac{1}{2} \sin \phi_t f'(X_t) \left(-\frac{1}{2} + z_t - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^3 \right) - \cos \phi_t \left(\tilde{\mu} - 2\xi_t z_t + \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^4 \right) + F_K(K_t, \phi_t) \right] dt \\ & + \left[\frac{1}{2} \sin \phi_t f'(X_t) \tilde{\sigma}_1 - 2 \cos \phi_t \xi_t \tilde{\sigma}_1 \right] d\tilde{W}_t^{(1)} - \cos \phi_t \tilde{\sigma}_2 d\tilde{W}_t^{(2)} \\ & - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{-\log K_t} f'(X_t) d\phi_t = \\ & \left[\frac{1}{2} \cos \phi_t f'(X_t) \left(-\frac{1}{2} + z_t - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^3 \right) + \sin \phi_t \left(\tilde{\mu} - 2\xi_t z_t + \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{3} \xi_t^4 \right) + F_\phi(K_t, \phi_t) \right] dt \\ & + \left[\frac{1}{2} \cos \phi_t f'(X_t) \tilde{\sigma}_1 - 2 \sin \phi_t \xi_t \tilde{\sigma}_1 \right] d\tilde{W}_t^{(1)} + \tilde{\sigma}_2 \sin \phi_t d\tilde{W}_t^{(2)} \end{aligned} \quad (5.2.61)$$

Puis z_t et ξ_t par leurs expressions en K_t et ϕ_t :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1}{K_t \sqrt{-\log K_t}} f'(X_t) dK_t = \\ & \left[-\frac{1}{4} \sin \phi_t f'(X_t) f(X_t) + F_K(K_t, \phi_t) + \cos \phi_t \left(\tilde{\mu} - \sqrt{\frac{-\log K_t}{2}} \sin \phi_t (1 + f(X_t)) \right) \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{\varepsilon} \left(-\frac{1}{12\sqrt{2}} \sin^4 \phi_t f'(X_t) (-\log K_t)^{3/2} - \frac{1}{6} \cos \phi_t \sin^4 \phi_t (\log K_t)^2 \right) \right] dt \\ & + \tilde{\sigma}_1 \left[\frac{1}{2} \sin \phi_t f'(X_t) - 2 \cos \phi_t \sin \phi_t \sqrt{\frac{-\log K_t}{2}} \right] d\tilde{W}_t^{(1)} + \tilde{\sigma}_2 \cos \phi_t d\tilde{W}_t^{(2)} \end{aligned} \quad (5.2.62)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{-\log K_t} f'(X_t) d\phi_t = \\ & \left[\frac{1}{4} \cos \phi_t f'(X_t) f(X_t) + F_\phi(K_t, \phi_t) - \sin \phi_t \left(\tilde{\mu} - \sqrt{\frac{-\log K_t}{2}} \sin \phi_t (1 + f(X_t)) \right) \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{\varepsilon} \left(-\frac{1}{12\sqrt{2}} \cos \phi_t \sin^3 \phi_t f'(X_t) (-\log K_t)^{3/2} - \frac{1}{6} \sin^5 \phi_t (\log K_t)^2 \right) \right] dt \\ & + \tilde{\sigma}_1 \left[\frac{1}{2} \cos \phi_t f'(X_t) + 2 \sin^2 \phi_t \sqrt{\frac{-\log K_t}{2}} \right] d\tilde{W}_t^{(1)} - \sin \phi_t \tilde{\sigma}_2 d\tilde{W}_t^{(2)} \end{aligned} \quad (5.2.63)$$

Nous utilisons ensuite l'expression de f' en fonction de f :

$$f'(X) = 4\sqrt{\frac{-\log K}{2}} \cos \phi \frac{1+f(X)}{f(X)} \quad (5.2.64)$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\cos \phi_t}{K_t} \frac{1+f(X_t)}{f(X_t)} dK_t = & \left[-\tilde{\mu} \cos \phi_t + F_K(K_t, \phi_t) \right. \\ & + \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{1}{6} \cos \phi_t \sin^4 \phi_t \frac{1+f(X_t)}{f(X_t)} (\log K_t)^2 - \frac{1}{6} \cos \phi_t \sin^4 \phi_t (\log K_t)^2 \right) \Big] dt \\ & + \tilde{\sigma}_1 \left[2 \cos \phi_t \sin \phi_t \sqrt{\frac{-\log K_t}{2}} \frac{1+f(X_t)}{f(X_t)} - 2 \cos \phi_t \sin \phi_t \sqrt{\frac{-\log K_t}{2}} \right] d\tilde{W}_t^{(1)} \\ & - \cos \phi_t \tilde{\sigma}_2 d\tilde{W}_t^{(2)} \end{aligned} \quad (5.2.65)$$

$$\begin{aligned} -\log K_t \cos \phi_t \frac{1+f(X_t)}{f(X_t)} d\phi_t = & \left[-\tilde{\mu} \cos \phi_t + \sqrt{\frac{-\log K_t}{2}} (1+f(X_t)) + F_\phi(K_t, \phi_t) \right. \\ & + \sqrt{\varepsilon} \left(-\frac{1}{6} \cos^2 \phi_t \sin^3 \phi_t \frac{1+f(X_t)}{f(X_t)} (\log K_t)^2 - \frac{1}{6} \sin^5 \phi_t (\log K_t)^2 \right) \Big] dt \\ & + \tilde{\sigma}_1 \left[2 \cos^2 \phi_t \sqrt{\frac{-\log K_t}{2}} \frac{1+f(X_t)}{f(X_t)} + 2 \sin^2 \phi_t \sqrt{\frac{-\log K_t}{2}} \right] d\tilde{W}_t^{(1)} - \sin \phi_t \tilde{\sigma}_2 d\tilde{W}_t^{(2)} \end{aligned} \quad (5.2.66)$$

Après simplifications, nous obtenons finalement le système en coordonnées (K, ϕ)

$$\begin{aligned} dK_t = & \left[-2\tilde{\mu}K_t \frac{f(X_t)}{1+f(X_t)} + 2 \frac{K_t}{\cos \phi_t} \frac{f(X_t)}{1+f(X_t)} F_K(K_t, \phi_t) + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \sin^4 \phi_t \frac{K_t (\log K_t)^2}{1+f(X_t)} \right] dt \\ & + 2\sqrt{2}\tilde{\sigma}_1 \frac{K_t \sqrt{-\log K_t}}{1+f(X_t)} \sin \phi_t d\tilde{W}_t^{(1)} - 2\tilde{\sigma}_2 K_t \frac{f(X_t)}{1+f(X_t)} d\tilde{W}_t^{(2)} \end{aligned} \quad (5.2.67)$$

$$\begin{aligned} d\phi_t = & \left[\tilde{\mu} \frac{\tan \phi_t}{\log K_t} \frac{f(X_t)}{1+f(X_t)} + \frac{f(X_t)}{\sqrt{-2\log K_t}} \frac{1}{\cos \phi_t} - 2 \frac{1}{\cos \phi_t \log K_t} \frac{f(X_t)}{1+f(X_t)} F_\phi(K_t, \phi_t) \right. \\ & + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{6} \sin^2 \tan \phi_t (\log K_t)^2 \frac{f(X_t) + \cos^2 \phi_t}{1+f(X_t)} \Big] dt \\ & - \tilde{\sigma}_1 \sqrt{\frac{2}{-\log K_t}} \frac{\cos^2 \phi_t + f(X_t)}{[1+f(X_t)] \cos \phi_t} d\tilde{W}_t^{(1)} - \frac{\tan \phi_t}{\log K_t} \frac{f(X_t)}{1+f(X_t)} \tilde{\sigma}_2 d\tilde{W}_t^{(2)} \end{aligned} \quad (5.2.68)$$

Nous pouvons identifier les fonctions $\psi_{ij}(K_t, \phi_t)$:

$$\begin{cases} \psi_{11}(K, \phi) = 2\sqrt{2}\tilde{\sigma}_1 \frac{K\sqrt{-\log K}}{1+f(X)} \sin \phi \\ \psi_{12}(K, \phi) = -2\tilde{\sigma}_2 K \frac{f(X)}{1+f(X)} \\ \psi_{21}(K, \phi) = -\tilde{\sigma}_1 \sqrt{\frac{2}{-\log K}} \frac{\cos^2 \phi + f(X)}{[1+f(X)] \cos \phi} \\ \psi_{22}(K, \phi) = -\tilde{\sigma}_2 \frac{\tan \phi}{\log K} \frac{f(X)}{1+f(X)} \end{cases} \quad (5.2.69)$$

Nous posons alors

$$\psi_1(K, \phi) = \left(2\sqrt{2}\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}} \frac{K\sqrt{-\log K}}{1+f(X)} \sin \phi, -2\frac{\tilde{\sigma}_2}{\tilde{\sigma}} K \frac{f(X)}{1+f(X)} \right), \quad (5.2.70)$$

$$\psi_2(K, \phi) = \left(-\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}} \sqrt{\frac{2}{-\log K}} \frac{\cos^2 \phi + f(X)}{[1+f(X)] \cos \phi}, -\frac{\tilde{\sigma}_2}{\tilde{\sigma}} \frac{\tan \phi}{\log K} \frac{f(X)}{1+f(X)} \right) \quad (5.2.71)$$

Les termes de bruit dans les équations (5.2.67) et (5.2.68) s'écrivent alors $\tilde{\sigma}\psi_1(K, \phi) dW_t$ et $\tilde{\sigma}\psi_2(K, \phi) dW_t$. Majorons chacun des termes ψ_{ij} afin de trouver des majorations pour $\|\psi_i\|^2$. Nous avons d'abord

$$\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{\sigma}_2}{\tilde{\sigma}} \leq 1 \quad (5.2.72)$$

Distinguons ensuite les cas $X \geq 0$ et $X < 0$ pour pouvoir utiliser les majorations de f établies dans le lemme 5.2.1.

– si $X \geq 0$, nous avons les majorations suivantes

$$0 \leq \frac{f(X)}{1+f(X)} \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{1}{1+f(X)} \leq 1 \quad (5.2.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \phi + f(X)}{[1+f(X)] \cos \phi} &\leq \frac{\cos^2 \phi + C_2 \sqrt{|\log K|} \cos \phi + 2|\log K| \cos^2 \phi}{\cos \phi} \\ &\leq C(1 + |\log K|) \end{aligned} \quad (5.2.74)$$

$$\begin{aligned} \tan \phi \frac{f(X)}{1+f(X)} &\leq \frac{\sin \phi}{\cos \phi} (C_2 \sqrt{|\log K|} \cos \phi + 2|\log K| \cos^2 \phi) \\ &\leq C \sqrt{|\log K|} (1 + \sqrt{|\log K|}) \end{aligned} \quad (5.2.75)$$

– si $X < 0$, nous avons alors les majorations

$$\frac{1}{1+f(X)} = \frac{e^{1+2X^2}}{1+r(X)} \leq CK^{-\cos^2 \phi} \quad (5.2.76)$$

$$|f(X)| \leq 2|X| \leq C|\cos \phi| \sqrt{|\log K|} \quad (5.2.77)$$

$$\left| \frac{\cos^2 \phi + f(X)}{[1+f(X)] \cos \phi} \right| \leq C(1 + \sqrt{|\log K|}) K^{-\cos^2 \phi} \quad (5.2.78)$$

$$\left| \tan \phi \frac{f(X)}{1+f(X)} \right| \leq C \sqrt{|\log K|} K^{-\cos^2 \phi} \quad (5.2.79)$$

Nous utilisons ces résultats pour majorer les $|\psi_{ij}|^2$:

$$|\psi_{11}|^2 \leq \begin{cases} CK^2 |\log K|^2 & \text{si } \cos \phi \geq 0 \\ CK^2 |\log K|^2 K^{-2 \cos^2 \phi} & \text{si } \cos \phi < 0 \end{cases} \quad (5.2.80)$$

$$|\psi_{12}|^2 \leq \begin{cases} CK^2 & \text{si } \cos \phi \geq 0 \\ CK^2 K^{-2 \cos^2 \phi} & \text{si } \cos \phi < 0 \end{cases} \quad (5.2.81)$$

$$|\psi_{21}|^2 \leq \begin{cases} C \frac{1 + |\log K|^2}{|\log K|} & \text{si } \cos \phi \geq 0 \\ C \frac{1 + |\log K|}{|\log K|} K^{-2 \cos^2 \phi} & \text{si } \cos \phi < 0 \end{cases} \quad (5.2.82)$$

$$|\psi_{22}|^2 \leq \begin{cases} C \frac{1 + |\log K|^2}{|\log K|^2} & \text{si } \cos \phi \geq 0 \\ C \frac{1 + |\log K|}{|\log K|^2} K^{-2 \cos^2 \phi} & \text{si } \cos \phi < 0 \end{cases} \quad (5.2.83)$$

Nous avons finalement pour $\|\psi_i\|^2$ les majorations

$$\|\psi_1\|^2 \leq \begin{cases} M_1 K^2 & \text{si } \cos \phi \geq 0 \\ M_1 K^2 K^{-2 \cos^2 \phi} & \text{si } \cos \phi < 0 \end{cases} \quad (5.2.84)$$

$$\|\psi_2\|^2 \leq \begin{cases} M_2 \frac{1 + |\log K|^3}{|\log K|^2} & \text{si } \cos \phi \geq 0 \\ M_2 \frac{1 + |\log K|^3}{|\log K|^2} K^{-2 \cos^2 \phi} & \text{si } \cos \phi < 0 \end{cases} \quad (5.2.85)$$

Nous introduisons alors la fonction ρ définie par

$$\rho(K, \phi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \cos \phi \geq 0, \\ K^{-\cos^2 \phi} & \text{si } \cos \phi < 0. \end{cases} \quad (5.2.86)$$

afin de pouvoir écrire les équations (5.2.84) et (5.2.85) sur une ligne

$$\|\psi_1\|^2 \leq M_1 K^2 \rho(K, \phi)^2, \quad \|\psi_2\|^2 \leq M_2 \frac{1 + |\log K|^3}{|\log K|^2} \rho(K, \phi)^2 \quad (5.2.87)$$

Nous allons à présent passer à l'étude des termes de dérivées dans les équations (5.2.67) et (5.2.68). Nous posons

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} f_1(K, \phi) = & -2\tilde{\mu} K \frac{f(X)}{1 + f(X)} - 2 \frac{K}{\cos \phi} \frac{f(X)}{1 + f(X)} F_K(K_t, \phi_t) \\ & + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \sin^4 \phi \frac{K (\log K)^2}{1 + f(X)} \end{aligned} \quad (5.2.88)$$

$$\begin{aligned} f_2(K, \phi) = & \tilde{\mu} \frac{\tan \phi}{\log K} \frac{f(X)}{1 + f(X)} + \frac{1}{\sqrt{-2 \log K}} f(X) \frac{1}{\cos \phi} \\ & - \frac{2}{\cos \phi \log K} \frac{f(X)}{1 + f(X)} F_\phi(K, \phi) + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{6} \sin^2 \phi \tan \phi \log K \frac{f(X) + \cos^2 \phi}{f(X) + 1} \end{aligned} \quad (5.2.89)$$

Nous réécrivons f_1 et f_2 en mettant en facteur le terme dominant.

$$f_1(K, \phi) = -2K \frac{f(X)}{1+f(X)} \left[1 + \frac{1}{\tilde{\mu} \cos \phi} F_K(K_t, \phi_t) - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{6\tilde{\mu}} \sin^4 \phi \frac{(\log K)^2}{f(X)} \right] \quad (5.2.90)$$

$$f_2(K, \phi) = \frac{f(X)}{2X} \left[1 + \frac{\tilde{\mu} \sin \phi}{\sqrt{-2 \log K}(1+f(X))} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{-\log K}(1+f(X))} F_\phi(K, \phi) \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3\sqrt{2}\tilde{\mu}} \sin^3 \phi |\log K|^{3/2} \frac{f(X) + \cos^2 \phi}{f(X)(f(X) + 1)} \right] \quad (5.2.91)$$

Pour étudier f_1 et f_2 et simplifier les écritures, nous définissons les termes de restes

$$R_{K,\varepsilon}(K, \phi) = -\frac{1}{6} \sin^4 \phi \frac{(\log K)^2}{f(X)} \quad (5.2.92)$$

$$R_{K,\sigma}(K, \phi) = \frac{1}{\tilde{\sigma}^2 \cos \phi} F_K(K, \phi) \quad (5.2.93)$$

$$R_{\phi,\varepsilon}(K, \phi) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \sin^3 \phi |\log K|^{3/2} \frac{f(X) + \cos^2 \phi}{f(X)(f(X) + 1)} \quad (5.2.94)$$

$$R_{\phi,\sigma}(K, \phi) = -\frac{2\sqrt{2}}{\tilde{\sigma}^2 \sqrt{-\log K}(1+f(X))} F_\phi(K, \phi) \quad (5.2.95)$$

Nous cherchons à majorer chacun de ces termes. Nous avons directement pour $|R_{K,\varepsilon}(K, \phi)|$

$$|R_{K,\varepsilon}(K, \phi)| \leq M_1 \frac{|\log K|^2}{f(X)} \quad (5.2.96)$$

Nous regardons ensuite $|R_{\phi,\varepsilon}(K, \phi)|$. En utilisant que $f(u) \geq 2u$ pour tout u , nous avons

$$\left| \frac{f(X) + \cos^2 \phi}{f(X)} \right| \leq 1 + \left| \frac{\cos^2 \phi}{f(X)} \right| \leq 1 + \frac{|\cos \phi|}{\sqrt{-2 \log K}} \quad (5.2.97)$$

Nous obtenons alors

$$|R_{\phi,\varepsilon}(K, \phi)| \leq M_1 |\log K| (1 + |\log K|^{1/2}) \rho(K, \phi), \quad (5.2.98)$$

Pour les deux autres termes, nous commençons par majorer g_1 et g_2 puis F_K et F_ϕ .

■

5.2.3 Moyennisation

Dans le système (5.2.45), $f_2(K, \phi)$ est plus grand que $\tilde{\mu} f_1(K, \phi)$. La variable K change donc plus lentement que la variable ϕ . C'est une conséquence de la définition de K comme première intégrale du mouvement quand $\tilde{\mu} = \varepsilon = \tilde{\sigma} = 0$. Nous allons donc étudier la moyennisation pour étudier la dynamique du système (5.2.45) comme nous l'avons fait dans la partie 3.3.1. Nous avons déjà étudié le comportement de la trajectoire pour ϕ proche de π dans la section précédente en utilisant les coordonnées (ξ, z) . Nous pouvons donc restreindre l'étude à $\phi \in [\phi_0, \phi_1]$ avec $-\pi < \phi_0 < 0 < \phi_1 < \pi$.

Nous cherchons un changement de variable de la forme

$$\bar{K} = K + \tilde{\mu} w(K, \phi) \quad (5.2.99)$$

pour éliminer le terme d'ordre $\tilde{\mu}$ dans l'équation sur dK_t du système (5.2.45). La formule d'Itô entraîne

$$d\bar{K}_t = dK_t + \tilde{\mu} \frac{\partial w}{\partial \phi} d\phi_t + \tilde{\mu} \frac{\partial w}{\partial K} dK_t + \frac{1}{2} \tilde{\mu} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial K^2} dK_t^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial K \partial \phi} dK_t d\phi_t + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} d\phi_t^2 \right). \quad (5.2.100)$$

En remplaçant dK_t et $d\phi_t$ par leurs expressions de (5.2.45), nous obtenons

$$d\bar{K}_t = \tilde{\mu} \left(f_1 + \frac{\partial w}{\partial \phi} f_2 + \mathcal{O}(\tilde{\mu}) + \mathcal{O}(\tilde{\sigma}^2) \right) dt + \tilde{\sigma} \left(\psi_1 + \tilde{\mu} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \psi_2 + \frac{\partial w}{\partial K} \psi_1 \right) \right) dW_t. \quad (5.2.101)$$

En choisissant la fonction w de telle sorte que

$$f_1 + \frac{\partial w}{\partial \phi} f_2 = 0, \quad (5.2.102)$$

nous faisons décroître l'ordre du terme de dérivée dans (5.2.101). Nous définissons alors la fonction w par l'intégrale

$$w(K, \phi) = - \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{f_1(K, \theta)}{f_2(K, \theta)} d\theta. \quad (5.2.103)$$

Cette intégrale est bien définie : étant donnée la définition de $f_2(K, \phi)$ (5.2.47), nous obtenons en utilisant la majoration de f (5.2.4) que $f_2(K, \phi)$ est minorée par une constante positive pour des paramètres $\tilde{\mu}$, ε et $\tilde{\sigma}$ suffisamment petits.

Lemme 5.2.3. Soient $\phi_0 \in (-\pi, -\pi/2)$ et $\phi_1 \in (\pi/2, \pi)$ tels que $\cos^2(\phi_0), \cos^2(\phi_1) \leq b$ pour un $b \in (0, 1)$. Alors

$$w(K, \phi_1) = - \frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{-\log K}} \left[\frac{K^{\sin^2 \phi_0}}{-\sin \phi_0} + \frac{K^{\sin^2 \phi_1}}{\sin \phi_1} + r_1(K) \right] \left(1 + r_2(K) + r_\varepsilon(K) \right), \quad (5.2.104)$$

où les termes de reste vérifient

$$\begin{aligned} r_1(K) &= \mathcal{O}(K \log(|\log K|)), \\ r_2(K) &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\log K|} + \tilde{\mu} K^{-b} + \tilde{\sigma}^2 \left(\frac{K^{-b}}{\tilde{\mu}} + \frac{K^{-2b}}{|\log K|} \right) \right), \\ 0 \leq r_\varepsilon(K) &\leq \sqrt{\varepsilon} \mathcal{O}\left(\frac{|\log K|^2}{\tilde{\mu}} + K^{-b} |\log K|^{3/2} \right). \end{aligned} \quad (5.2.105)$$

De plus, les dérivées partielles de w sont alors bornées par

$$\frac{\partial w}{\partial K}(K, \phi) = \mathcal{O}\left(\frac{K^{-b}}{\sqrt{|\log K|}} \right), \quad \frac{\partial w}{\partial \phi}(K, \phi) = \mathcal{O}(K^{1-b} \sqrt{|\log K|}), \quad (5.2.106)$$

et

$$\frac{\partial^2 w}{\partial K^2} = \mathcal{O}\left(\frac{K^{-1-b}}{\sqrt{|\log K|}} \right), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial K \partial \phi} = \mathcal{O}\left(\frac{K^{-b}}{\sqrt{|\log K|}} \right), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} = \mathcal{O}(K^{1-b} \sqrt{|\log K|}). \quad (5.2.107)$$

PREUVE. Nous coupons l'intégrale (5.2.103) en trois parties.

$$w(K, \phi_1) = - \int_{\phi_0}^{-\pi/2} \frac{f_1(K, \theta)}{f_2(K, \theta)} d\theta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f_1(K, \theta)}{f_2(K, \theta)} d\theta - \int_{\pi/2}^{\phi_1} \frac{f_1(K, \theta)}{f_2(K, \theta)} d\theta \quad (5.2.108)$$

En faisant le changement de variable $t = \sin \phi$ et une décomposition en éléments simples, nous trouvons que le terme dominant $4KX/(1 + f(X))$ de l'intégrale sur $[-\pi/2, \pi/2]$, vérifie

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4KX(K, \phi)}{1 + f(X(K, \phi))} d\phi = \mathcal{O}\left(K \frac{\log(|\log K|)}{\sqrt{|\log K|}}\right). \quad (5.2.109)$$

Nous considérons ensuite l'intégrale sur l'intervalle $[\phi_0, -\pi/2]$. Le changement de variables $u = \sqrt{-2 \log K} \sin \phi$, le comportement de $f(x)$ pour x négatif (5.2.6) et le comportement asymptotique de la fonction d'erreur entraînent

$$\begin{aligned} \int_{\phi_0}^{-\pi/2} \frac{4KX}{1 + f(X)} d\phi &= 2K \int_{\sin \phi_0 \sqrt{-2 \log K}}^{-\sqrt{-2 \log K}} \frac{du}{1 + f\left(-\sqrt{\frac{-\log K}{2} - \frac{u^2}{4}}\right)} \\ &= 2e \int_{\sin \phi_0 \sqrt{-2 \log K}}^{-\sqrt{-2 \log K}} e^{-u^2/2} [1 + \mathcal{O}(K e^{-u^2/2})] du \\ &= -2e \frac{K^{\sin^2 \phi_0}}{\sqrt{-2 \log K} (-\sin \phi_0)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\log K|}\right) + \mathcal{O}(K^{\cos^2 \phi_0})\right]. \end{aligned} \quad (5.2.110)$$

Nous pouvons calculer de la même façon le terme dominant de l'intégrale sur $[\pi/2, \phi_1]$ pour obtenir

$$\int_{\pi/2}^{\phi_1} \frac{4KX}{1 + f(X)} d\phi = -2e \frac{K^{\sin^2 \phi_0}}{\sqrt{-2 \log K} (\sin \phi_1)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\log K|}\right) + \mathcal{O}(K^{\cos^2 \phi_1})\right]. \quad (5.2.111)$$

Nous obtenons alors le terme dominant de (5.2.104) et les termes de reste viennent de (5.2.49) avec $\rho = K^{-b}$. La borne sur $\partial w / \partial \phi$ vient directement de la définition de la fonction w (5.2.102). Pour la borne sur $\partial w / \partial K$ est obtenue en calculant la dérivée de f_1/f_2 . Nous utilisons

$$\frac{\partial X(K, \phi)}{\partial K} = -\frac{1}{2K\sqrt{-2 \log K}} \quad (5.2.112)$$

pour calculer

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial K} \left(\frac{f_1}{f_2} \right) &= \frac{4X}{1 + f(X)} + 4K \left(\frac{\partial_K X}{(1 + f(X))} - \frac{X \partial_K X f'(X)}{(1 + f(X))^2} \right) \\ &= \frac{4X}{1 + f(X)} + 4K \left(\frac{\partial_K X}{(1 + f(X))} - \frac{4X^2 \partial_K X}{f(X)(1 + f(X))} \right) \\ &= \frac{4X}{1 + f(X)} + \frac{-2}{\sqrt{-2 \log K} (1 + f(X))} + \frac{1}{2\sqrt{-2 \log K} f(X)(1 + f(X))} \end{aligned} \quad (5.2.113)$$

Le terme dominant est $4X/(1 + f(X))$ et son comportement est obtenu en divisant par K le comportement de w (5.2.104) en $\mathcal{O}\left(K^{\min(\sin^2 \phi_0, \sin^2 \phi) - 1} / \sqrt{-\log K}\right)$ et $\min(\sin^2 \phi_0, \sin^2 \phi) - 1 = -\max(\cos^2 \phi_0, \cos^2 \phi) \geq -b$. Nous en déduisons le comportement (5.2.106). Nous obtenons de façon similaire les bornes sur les dérivées secondes (5.2.107). ■

Pour que le terme $r_2(K)$ soit négligeable, nous devons avoir $K^b \gg \tilde{\mu}$ et $K^b \gg \tilde{\sigma}^2/\tilde{\mu}$. De plus le terme $r_\varepsilon(K)$ est d'ordre $\sqrt{\varepsilon} |\log \tilde{\mu}|^2 / \tilde{\mu}$ qui est petit pour $\tilde{\mu}/|\log \tilde{\mu}|^2 \gg \sqrt{\varepsilon}$. Dans ce cas, $w(K, \phi_1)$ est de l'ordre de $K^{1-b}/\sqrt{|\log K|}$. Sinon, $w(K, \phi_1)$ est d'ordre $\sqrt{\varepsilon} K^{1-b} |\log K|^{3/2} / \tilde{\mu}$.

5.2.4 Calcul de la deuxième partie du noyau

Nous pouvons maintenant calculer la partie où la trajectoire tourne autour du point d'équilibre du noyau de la chaîne de Markov. Nous avons déjà calculé l'autre partie dans la section 5.1.4. Nous utilisons les frontières $F_{\pm}$ introduite au début de ce chapitre, (5.0.1) et (5.0.2). Nous prenons une condition initiale $(L, z_0) \in F_+$. Nous définissons le temps de première atteinte de F_- par la trajectoire partant de (L, z_0)

$$\tau = \inf\{t > 0 : (\xi_t, z_t) \in F_-\} \quad (5.2.114)$$

et nous voulons calculer les coordonnées du point (ξ_τ, z_τ)

Nous supposons qu'il existe $\beta \in (0, 1]$ tel que

$$(c_- \tilde{\mu})^\beta \leq z_0 \leq z_{\max} < \frac{1}{2}. \quad (5.2.115)$$

La condition initiale en coordonnées (K, ϕ) s'écrit

$$\begin{aligned} K_0 &= 2z_0 e^{1-2z_0} e^{-2L^2} \geq 2(c_- \tilde{\mu})^{\beta+\gamma}, \\ \sin^2 \phi_0 &= \frac{2L^2}{-\log K_0} \geq \frac{\gamma}{\beta + \gamma}, \end{aligned} \quad (5.2.116)$$

avec $\phi_0 \in (-\pi, -\pi/2)$. Nous pouvons alors appliquer le Lemme 5.2.3 avec $b = \beta/(\beta + \gamma) < 1$. Nous remarquons

$$K_0^{\cos^2 \phi_0} \geq 2^b (c_- \tilde{\mu})^\beta. \quad (5.2.117)$$

Proposition 5.2.4. *Supposons que z_0 vérifie (5.2.115) pour $\beta < 1$. Il existe alors une constante $\kappa > 0$ telle que, pour $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\sigma}$ suffisamment petit, nous ayons*

1. *Si $\sqrt{\varepsilon} \leq \tilde{\mu}/|\log \tilde{\mu}|^2$, la trajectoire (ξ_t, z_t) atteint F_- pour la première fois au point $(-L, z_1)$ avec z_1 vérifiant*

$$z_1 = z_0 + \tilde{\mu}A(z_0) + \frac{z_0}{1-2z_0} \left[\tilde{\sigma}V(z_0) + \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{2(1-\beta)} + \tilde{\sigma}^2 \tilde{\mu}^{-2\beta}) \right]. \quad (5.2.118)$$

avec une probabilité plus grande que

$$1 - e^{-\kappa \tilde{\mu}^2 / \tilde{\sigma}^2}, \quad (5.2.119)$$

La fonction $A(z_0)$ est donnée par

$$A(z_0) = \frac{e^{2z_0}}{L(1-2z_0)} \left[1 + \mathcal{O}(z_0 \log |\log \tilde{\mu}|) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\log z_0|}\right) \right], \quad (5.2.120)$$

et $V(z_0)$ est une variable aléatoire vérifiant

$$\mathbb{P}\{\tilde{\sigma}|V(z_0)| \geq h\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{\kappa h^2 \tilde{\mu}^{2\beta}}{\tilde{\sigma}^2}\right\} \quad \forall h > 0. \quad (5.2.121)$$

2. *Si $\sqrt{\varepsilon} > \tilde{\mu}/|\log \tilde{\mu}|^2$, alors (ξ_t, z_t) coupe F_- pour la première fois soit à un point $(-L, z_1)$ tel que z_1 est supérieur ou égal au membre de droite de l'équation (5.2.118), soit à un point $(\xi_1, 1/2)$ avec $-L \leq \xi_1 \leq 0$, avec une probabilité plus grande que (5.2.119).*

PREUVE. Nous considérons d'abord le cas $\sqrt{\varepsilon} \leq \tilde{\mu}/|\log \tilde{\mu}|^2$. La démonstration est longue et nous la décomposons en six étapes. Nous commençons par restreindre le domaine d'étude dans étapes 1 et 2. Dans les étapes 3 et 4, nous montrons que, sur le domaine restreint, la trajectoire atteint pour la première fois la ligne F_- sur la partie $\{\xi = -L \text{ et } z \leq 1/2\}$

- **Étape 1 :** Pour obtenir des bornes sur les termes d'erreur, nous avons besoin que K soit minorée. Nous introduisons alors le temps d'arrêt

$$\tau_1 = \inf\{t > 0: \cos \phi < 0, K^{\cos^2 \phi} < (c_- \tilde{\mu})^\beta\}. \quad (5.2.122)$$

Nous commençons par montrer que $\tau \wedge \tau_1$ est fini avec une grande probabilité. La Proposition 5.2.2 entraîne l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$d\phi_t \geq C dt + \tilde{\sigma} \psi_2(K_t, \phi_t) dW_t. \quad (5.2.123)$$

En intégrant cette relation entre 0 et t , nous obtenons

$$\phi_t \geq \phi_0 + Ct + \tilde{\sigma} \int_0^t \psi_2(K_s, \phi_s) dW_s. \quad (5.2.124)$$

Le Lemme 5.1.5 et (5.2.51) nous donne la majoration

$$\mathbb{P}\left\{\left|\tilde{\sigma} \int_0^{t \wedge \tau_1} \psi_2(K_s, \phi_s) dW_s\right| \geq h\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\kappa h^2 \tilde{\mu}^{2\beta}}{\tilde{\sigma}^2}\right\} \quad (5.2.125)$$

pour un $\kappa > 0$. Nous pouvons alors écrire en prenant $t = \tau$

$$\mathbb{P}\left\{\left|\phi_{\tau \wedge \tau_1} - \phi_0 - C\tau \wedge \tau_1\right| \geq h\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\kappa h^2 \tilde{\mu}^{2\beta}}{\tilde{\sigma}^2}\right\} \quad (5.2.126)$$

Par définition, $\phi_{\tau \wedge \tau_1} - \phi_0 < 2\pi$, nous obtenons alors

$$\mathbb{P}\left\{\tau \wedge \tau_1 > \frac{2\pi + h}{C}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\kappa h^2 \tilde{\mu}^{2\beta}}{\tilde{\sigma}^2}\right\}. \quad (5.2.127)$$

Par la suite, nous travaillerons sur le domaine $\Omega_1 = \{\tau \wedge \tau_1 \leq (2\pi + 1)/C\}$, dans lequel nous sommes avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - e^{-\kappa \tilde{\mu}^{2\beta}/\tilde{\sigma}^2}$.

- **Étape 2 :** L'EDS (5.2.100) sur $\bar{K}_t$ peut se mettre sous la forme

$$d\bar{K}_t = \bar{K}_t \bar{f}(\bar{K}_t, \phi_t) dt + \tilde{\sigma} \bar{K}_t \bar{\psi}(\bar{K}_t, \phi_t) dW_t, \quad (5.2.128)$$

avec, en utilisant la Proposition 5.2.2 et le Lemme 5.2.3, les majorations

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{K}, \phi) &= \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{2(1-\beta)} + \tilde{\sigma}^2 \tilde{\mu}^{1-3\beta}), \\ \|\bar{\psi}(\bar{K}, \phi)\|^2 &= \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{-2\beta}). \end{aligned} \quad (5.2.129)$$

D'après la formule d'Itô, la variable $Q_t = \log \bar{K}_t$ vérifie l'EDS

$$dQ_t = \tilde{f}(Q_t, \phi_t) dt + \tilde{\sigma} \tilde{\psi}(Q_t, \phi_t) dW_t, \quad (5.2.130)$$

où $\tilde{f}(Q, \phi) = \bar{f}(e^Q, \phi) + \mathcal{O}(\tilde{\sigma}^2 \tilde{\mu}^{-2\beta})$ et $\tilde{\psi}(Q, \phi) = \bar{\psi}(e^Q, \phi)$. Nous posons

$$V_t = \int_0^t \tilde{\psi}(Q_s, \phi_s) dW_s, \quad (5.2.131)$$

en intégrant (5.2.130) et en utilisant que $\tilde{\mu}^{1-3\beta} \leq \tilde{\mu}^{-2\beta}$, nous obtenons alors

$$Q_t = Q_0 + \tilde{\sigma} V + \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{2(1-\beta)} + \tilde{\sigma}^2 \tilde{\mu}^{-2\beta}). \quad (5.2.132)$$

En appliquant une nouvelle fois le Lemme 5.1.5, nous obtenons

$$\mathbb{P}\{\tilde{\sigma}|V_{t \wedge \tau_1}| \geq h_1\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{\kappa_1 h_1^2 \tilde{\mu}^{2\beta}}{\tilde{\sigma}^2}\right\} \quad (5.2.133)$$

avec $\kappa_1 > 0$. Nous choisissons $h_1 = \tilde{\mu}^{1-\beta}$ pour simplifier le majorant. A partir d'ici, nous travaillerons sur le domaine $\Omega_1 \cap \Omega_2$, où $\Omega_2 = \{\tilde{\sigma}V_{t \wedge \tau_1} < \tilde{\mu}^{1-\beta}\}$ vérifie $\mathbb{P}(\Omega_2) \geq 1 - e^{-\kappa_1 \tilde{\mu}^2 / \tilde{\sigma}^2}$.

– **Étape 3 :** Nous revenons à la variable $\bar{K}$, nous obtenons

$$\bar{K}_t = K_0 e^{\tilde{\sigma}V_t} \left[1 + \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{2(1-\beta)} + \tilde{\sigma}^2 \tilde{\mu}^{-2\beta})\right], \quad (5.2.134)$$

et nous avons pour K

$$K_t = K_0 e^{\tilde{\sigma}V_t} \left[1 + \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{2(1-\beta)} + \tilde{\sigma}^2 \tilde{\mu}^{-2\beta})\right] - \tilde{\mu}w(K_t, \phi_t). \quad (5.2.135)$$

En utilisant le théorème des fonctions implicites et la borne supérieure de w , nous obtenons l'estimation à priori

$$\frac{|K_t - K_0|}{K_0} = \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{1-\beta} + \tilde{\sigma}^2 \tilde{\mu}^{-2\beta}). \quad (5.2.136)$$

– **Étape 4 :** L'estimation à priori (5.2.136) entraîne que sur le domaine $\Omega_1 \cap \Omega_2$, la trajectoire ne peut pas atteindre F_- sur la partie $\{-L \leq \xi \leq 0, z = 1/2\}$. En effet, cela impliquerait $K_\tau \geq (c_- \tilde{\mu})^\gamma$, et $K_0 \leq a(c_- \tilde{\mu})^\gamma$ avec $a = 2z_{\max} e^{1-2z_{\max}} < 1$. Nous aurions alors $(K_\tau - K_0)/K_0 > (1-a)/a$, ce qui contredit (5.2.136).

Montrons maintenant que nous avons $\tau_1 \geq \tau$ sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Raisonnons par l'absurde en supposant $\tau_1 < \tau$. Nous avons alors $K_{\tau_1} = (c_- \tilde{\mu})^\beta$ et $\cos^2 \phi_{\tau_1} < \beta/(\beta + \gamma)$, nous avons donc $K_{\tau_1} = \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{\beta+\gamma})$. Cela induit que $\tilde{\mu}w(K_{\tau_1}, \phi_{\tau_1}) = \mathcal{O}(K_{\tau_1} \tilde{\mu}^{1-\beta}) = \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{1+\gamma})$. En prenant en compte la minoration (5.2.116) sur K_0 , cela entraîne que le membre de droite de (5.2.135) est plus grand qu'une constante multipliée par $\tilde{\mu}^{\beta+\gamma}$ au temps $t = \tau_1$. Mais ceci contredit le fait que $K_{\tau_1} = \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{\beta+\gamma})$.

– **Étape 5 :** L'étape précédente implique que $\xi_t = -L$ sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Nous pouvons alors écrire

$$\phi_\tau = g(K_\tau) \quad \text{où} \quad \sin(g(K)) = \sqrt{\frac{2}{-\log K}} L, \quad (5.2.137)$$

avec $g(K) \in (\pi/2, \pi)$. Nous remarquons $g(K_0) = -\phi_0$. De plus, nous avons

$$g'(K) = \frac{L}{\sqrt{2}K(-\log K)^{3/2} \cos(g(K))}, \quad (5.2.138)$$

et donc $K_\tau g'(K_\tau) = \mathcal{O}(1/|\log \tilde{\mu}|)$. En utilisant la formule de Taylor

$$w(K_\tau, \phi_\tau) = w(K_0, -\phi_0) + (K_\tau - K_0) \left[\frac{\partial w}{\partial K}(K_\theta, g(K_\theta)) + \frac{\partial w}{\partial \phi}(K_\theta, g(K_\theta)) g'(K_\theta) \right], \quad (5.2.139)$$

pour un $K_\theta \in (K_0, K_\tau)$, ce qui conduit à

$$\frac{w(Q_\tau, \phi_\tau)}{Q_0} = \frac{w(Q_0, -\phi_0)}{Q_0} + \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{1-2\beta} + \tilde{\sigma}^2 \tilde{\mu}^{-3\beta}). \quad (5.2.140)$$

En substituant dans (5.2.135), nous obtenons l'estimation

$$K_1 = K_0 \left[e^{\tilde{\sigma}V_\tau} - \tilde{\mu} \frac{w(K_0, -\phi_0)}{K_0} + \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{2(1-\beta)} + \tilde{\sigma}^2 \tilde{\mu}^{1-3\beta}) \right]. \quad (5.2.141)$$

- **Étape 6 :** Finalement, nous revenons à la variable $z_1 = z_\tau$. En éliminant ϕ de l'équation (5.2.1), nous pouvons exprimer z_1 en fonction de K_τ

$$z_1 = G(K_\tau) := \frac{1}{2} \left[1 + f \left(-\sqrt{\frac{-\log K_\tau}{2} - L^2} \right) \right]. \quad (5.2.142)$$

Nous avons alors $G(K_0) = z_0$,

$$G'(K_0) = -\frac{1}{2K_0} \frac{1 + f \left(-\sqrt{\frac{-\log K_0}{2} - L^2} \right)}{f \left(-\sqrt{\frac{-\log K_0}{2} - L^2} \right)} = \frac{z_0}{K_0(1 - 2z_0)}, \quad (5.2.143)$$

et

$$G''(Q) = \frac{1}{2Q^2} \frac{1 + f \left(-\sqrt{\frac{-\log Q}{2} - L^2} \right)}{f \left(-\sqrt{\frac{-\log Q}{2} - L^2} \right)} \left[1 - \frac{1}{f \left(-\sqrt{\frac{-\log Q}{2} - L^2} \right)^2} \right], \quad (5.2.144)$$

qui est d'ordre z_0^2/Q_0^2 . Par un développement de Taylor, nous obtenons

$$z_1 = G(K_0) + (K_1 - K_0)G'(K_0) + \frac{(K_1 - K_0)^2}{2}G''(K_\theta) \quad (5.2.145)$$

qui devient

$$z_1 = z_0 + \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0} \frac{z_0}{1 - 2z_0} + \mathcal{O} \left(\left[\frac{Q_1 - Q_0}{Q_0} z_0 \right]^2 \right). \quad (5.2.146)$$

D'après l'égalité (5.2.141), nous avons

$$\frac{K_1 - K_0}{K_0} = \tilde{\sigma} V_\tau - \tilde{\mu} \frac{w(K_0, -\phi_0)}{K_0} + \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{2(1-\beta)} + \tilde{\sigma}^2 \tilde{\mu}^{-2\beta}), \quad (5.2.147)$$

et le Lemme 5.2.3 conduit à

$$-\mu \frac{w(K_0, -\phi_0)}{K_0} = \frac{2e}{L} \left[K_0^{-\cos^2 \phi_0} + \mathcal{O}(\log |\log K_0|) \right] \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{|\log K_0|} \right) \right]. \quad (5.2.148)$$

Ensuite l'égalité (5.2.116) implique que $K_0^{-\cos^2 \phi_0} = e^{2z_0} (2e z_0)^{-1}$ et $c_1 |\log z_0| \leq |\log K_0| \leq c_2 |\log \tilde{\mu}|$.

Ceci achève la preuve dans le cas $\sqrt{\varepsilon} \leq \tilde{\mu}/|\log \tilde{\mu}|^2$.

Dans l'autre cas, $\sqrt{\varepsilon} > \tilde{\mu}/|\log \tilde{\mu}|^2$, nous utilisons simplement que K_t est minorée par la valeur du cas précédent en conséquence de (5.2.106). ■

Corollaire 5.2.5. *Supposons que nous ayons $c = 0$ ou $\sqrt{\varepsilon} \leq \tilde{\mu}/|\log \tilde{\mu}|^2$. Il existe un $\kappa_2 > 0$ tel que pour la condition initiale $(L, z_1) \in F_+$ avec $z_1 \geq (c_- \tilde{\mu})^{1-\gamma}$, la première atteinte de F_- se produit à une hauteur $z_0^1 \geq z_1$ avec une probabilité supérieure à $1 - e^{-\kappa_2 \tilde{\mu}^2 / \tilde{\sigma}^2}$.*

PREUVE. Nous appliquons le résultat précédent avec $\beta = 1 - \gamma$ et h d'ordre $\tilde{\mu}^\gamma$. ■

5.3 Régime de bruit faible et calcul du noyau

Nous pouvons à présent mettre bout à bout les deux études des parties 5.1.4 et 5.2.4. La première partie nous donne des informations sur l'application de F_- dans F_+ , $z_0 \mapsto z_1$ et la deuxième sur l'application de F_- dans F_+ , $z_1 \mapsto z_0^1$. En composant ces applications, nous obtenons une application de F_- dans F_- , $z_0 \mapsto z_0^1$ et nous donne le noyau de la chaîne de Markov sous-stochastique associé au nombre de SAOs N .

Théorème 5.3.1. *Supposons que ε et $\delta/\sqrt{\varepsilon}$ soient suffisamment petits. Si $c \neq 0$, nous supposons de plus que $\delta \geq |c|\varepsilon^\beta$ pour un $\beta < 1$. Il existe alors une constante $\kappa > 0$ telle que, pour $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \leq (\varepsilon^{1/4}\delta)^2 / \log(\sqrt{\varepsilon}/\delta)$, la première valeur propre λ_0 vérifie*

$$1 - \lambda_0 \leq \exp \left\{ -\kappa \frac{(\varepsilon^{1/4}\delta)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right\}. \quad (5.3.1)$$

De plus, pour toute distribution μ_0 de conditions initiales pour les trajectoires, l'espérance du nombre de SAOs vérifie

$$\mathbb{E}^{\mu_0} \{N\} \geq C(\mu_0) \exp \left\{ \kappa \frac{(\varepsilon^{1/4}\delta)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right\}. \quad (5.3.2)$$

Ici $C(\mu_0)$ est la probabilité que la trajectoire atteigne $\mathcal{F}$ au-dessus de la ligne séparatrice.

PREUVE. Pour montrer ce théorème, nous utilisons les Lemmes 4.2.11 et 4.2.12. Nous allons calculer le noyau et construire un sous-ensemble A de l'intervalle E sur lequel la chaîne de Markov est définie, et tel que si $X_0 \in A$, alors $X_1 \in A$ avec une grande probabilité.

Nous prenons pour la courbe $\mathcal{F}$, qui permet de définir la chaîne de Markov, la courbe F_- en coordonnées (ξ, z) . Soit $(-L, z_0) \in F_-$ une condition initiale avec $|z_0| = \mathcal{O}(\tilde{\mu}^{1-\gamma})$. L'approximation de la trajectoire par la solution déterministe partant de ce point atteint F_+ à un point de coordonnées (L, z_T^0) tel que $z_T^0 \geq c_0 \tilde{\mu}^{1-\gamma}$ pour un $c_0 > 0$ (cf. (5.1.13)). En appliquant la Proposition 5.1.7 avec h d'ordre $\tilde{\mu}^{1-\gamma}$, nous obtenons que la probabilité que la trajectoire solution du système déterministe partant de $(-L, z_0)$ atteigne F_+ à un point de coordonnées (L, z_1) tel que $z_1 \geq c_1 \tilde{\mu}^{1-\gamma}$ pour un $c_1 \in (0, c_0)$ est minorée par

$$1 - \frac{C}{\tilde{\mu}^{2\gamma}} \exp \left\{ -\kappa_2 \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\sigma}^2} \right\} \quad (5.3.3)$$

pour un $\kappa_2 > 0$.

Nous pouvons alors appliquer la Proposition 5.2.4 avec $\beta = 1 - \gamma$ pour montrer que la trajectoire partant de $(L, z_1) \in F_+$ atteint F_- en un point $(-L, z_2)$, où (5.2.121) avec $h = \tilde{\mu}^{1-\beta}$ entraîne que $z_2 \geq z_1$ avec une probabilité supérieure ou égale à

$$1 - 2 \exp \left\{ -\kappa_3 \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\sigma}^2} \right\} \quad (5.3.4)$$

pour un $\kappa_3 > 0$. Cela montre que l'ensemble $A = \{(\xi, z) \in F_- : z \geq z_0\}$ est invariant avec une grande probabilité. De plus, nous avons montré que cela est vrai pour une valeur initiale de z d'ordre $\tilde{\mu}^{1-\gamma}$, et la trajectoire partant d'un z plus grand ne peut pas arriver en dessous sans couper le domaine où nous contrôlons la dynamique.

Finalement, le préfacteur $C\tilde{\mu}^{-2\gamma}$ in (5.3.3) peut être intégré dans l'exponentiel, grâce à l'inégalité $\tilde{\sigma}^2 \leq \tilde{\mu}^2 / |\log \tilde{\mu}|$.

■

Chapitre 6

Conclusion

Cette thèse est consacrée à l'étude du système de FitzHugh-Nagumo stochastique qui a été introduit pour modéliser la transmission de l'influx nerveux dans un neurone. Nous avons commencé par rappeler des résultats sur le système déterministe associé afin de trouver les valeurs des paramètres intéressantes pour notre étude. Celles-ci correspondent aux cas où le système admet au moins un point d'équilibre stable et où le système est excitable.

Nous avons ensuite étudié le cas particulier où $b = 0$. Dans ce cas, le système ne génère pas de spikes mais, au voisinage d'un des points d'équilibre, il se comporte comme le modèle de Morris-Lecar qui est un autre modèle pour la transmission de l'influx nerveux. Le système étant découplé, nous nous ramenons à l'étude d'une équation différentielle ordinaire du second ordre portant sur le temps de sortie τ d'un puits de potentiel. Nous avons obtenu le comportement asymptotique de l'espérance de τ

$$\mathbb{E}(\tau) = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{-V''(x_+)V''(x_-)}} \exp\left(\frac{2}{\sigma_1^2}[V(x_-) - V(x_+)]\right) [1 + \mathcal{O}(\sigma_1|\log \sigma_1|^2)] \quad (6.0.1)$$

puis que la loi de τ suit une loi asymptotiquement géométrique exponentielle de paramètre λ_1 dont le développement asymptotique est donné par

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{|V''(x_+)V''(x_-)|}}{2\pi\varepsilon} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}[V(x_-) - V(x_+)]\right) (1 + \mathcal{O}(\sigma_1|\log \sigma_1|^2)). \quad (6.0.2)$$

Dans le cas où $b \neq 0$, le système stochastique est caractérisé par une alternance de petites et de grandes oscillations, ces dernières correspondant à des spikes. Le temps entre deux spikes est corrélé avec le nombre de petites oscillations qui séparent deux spikes consécutifs. Nous avons mis en évidence numériquement trois régimes différents dans le comportement des solutions. Nous avons vu le comportement général des solutions à l'exception du voisinage d'un point d'équilibre stable du système déterministe associé. Nous avons alors introduit un système de coordonnées pour étudier la trajectoire au voisinage d'un point d'équilibre stable. Nous avons construit une chaîne de Markov sous-stochastique et nous avons montré que le nombre de petites oscillations est presque sûrement fini et a une distribution asymptotiquement géométrique de paramètre $1 - \lambda_0$, où λ_0 est la valeur propre principale de la chaîne de Markov. Nous avons ensuite calculé les frontières entre les différents régimes suivant les valeurs de paramètres. Enfin, nous avons obtenu des bornes sur cette valeur propre dans le cas du régime de bruit faible dans le cas où $\delta \gg \sqrt{\varepsilon}$ et l'exponentielle de $(\varepsilon^{1/4}\delta^2)/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ est grand. Ces conditions permettent de dominer le terme d'erreur en $\sqrt{\varepsilon}$. Nous pourrions peut-être obtenir des résultats dans le cas où $\delta \leq \sqrt{\varepsilon}$ en trouvant un nouveau changement de variables qui permette de contrôler les termes non-linéaires. Pour les régimes intermédiaires et de bruit fort, il semble que numériquement nous ayons une bonne approximation de $\mathbb{P}\{N = 1\}$, qui correspond à la probabilité de faire un spike directement, par la fonction de répartition de la loi normale standard. Cependant, nous n'avons pas de borne rigoureuse sur

λ_0 et sur l'espérance du nombre de petites oscillations. Nous pourrions obtenir des résultats en décomposant la distribution quasi-stationnaire sur le spectre de la chaîne de Markov sous-stochastique.

Enfin, les méthodes utilisées pourraient s'appliquer à d'autres systèmes excitables qui produisent des oscillations comme par exemple dans le cas du système de Morris-Lecar pour certains régimes de paramètres.

Bibliographie

- [BAKS84] Gérard Ben Arous, Shigeo Kusuoka, and Daniel W. Stroock, *The Poisson kernel for certain degenerate elliptic operators*, J. Funct. Anal. **56** (1984), no. 2, 171–209.
- [BE86] S.M. Baer and T. Erneux, *Singular Hopf bifurcation to relaxation oscillations I*, SIAM J. Appl. Math. **46** (1986), no. 5, 721–739.
- [BE92] S.M. Baer and T. Erneux, *Singular Hopf bifurcation to relaxation oscillations II*, SIAM J. Appl. Math. **52** (1992), no. 6, 1651–1664.
- [BG11] Peter H. Baxendale and Priscilla E. Greenwood, *Sustained oscillations for density dependent Markov processes*, J. Math. Biol., **63** (2011), no. 3, 433–457.
- [BG02] Nils Berglund and Barbara Gentz, *Pathwise description of dynamic pitchfork bifurcations with additive noise*, Probab. Theory Related Fields **122** (2002), no. 3, 341–388.
- [BG09] Nils Berglund and Barbara Gentz, *Stochastic dynamic bifurcations and excitability*, Stochastic Methods in Neuroscience (Carlo Laing and Gabriel Lord, eds.), Oxford University Press, 2009, pp. 64–93.
- [BGK10] Nils Berglund, Barbara Gentz, and Christian Kuehn, *Hunting french ducks in a noisy environment*, J. Differential Equations, **252** (2012), 4786–4841.
- [BK99] Nils Berglund and Hervé Kunz, *Memory effects and scaling laws in slowly driven systems*, J. Phys. A, textbf32, 1999, 15–39.
- [Bir57] Garrett Birkhoff, *Extensions of Jentzsch’s theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 219–227.
- [BKLLC11] Peter Borowski, Rachel Kuske, Yue-Xian Li, and Juan Luis Cabrera, *Characterizing mixed mode oscillations shaped by noise and bifurcation structure*, Chaos **20** (2011), no. 4, 043117.
- [Bra98] B. Braaksma, *Singular Hopf bifurcation in systems with fast and slow variables*, Journal of Non-linear Science **8** (1998), no. 5, 457–490.
- [CR71] R. M. Capocelli and L. M. Ricciardi, *Diffusion approximation and first passage time problem for a model neuron*, Kybernetik (Berlin) **8** (1971), no. 6, 214–223.
- [Dah77] Björn E. J. Dahlberg, *Estimates of harmonic measure*, Arch. Rational Mech. Anal. **65** (1977), no. 3, 275–288.
- [DG11] Susanne Ditlevsen and Priscilla Greenwood, *The Morris-Lecar neuron model embeds a leaky integrate-and-fire model*, Preprint arXiv :1108.0073, 2011.
- [DGK11] M. Desroches, J. Guckenheimer, C. Kuehn, B. Krauskopf, H. Osinga, and M. Wechselberger, *Mixed-mode oscillations with multiple time scales*, SIAM Review, in press (2011).
- [DMS00] C.T. Dickson and J. Magistretti and M.H. Shalinsky and E. Fransen and M.E. Hasselmo and A. Alonso, *Properties and role of I_h in the pacing of subthreshold oscillations in entorhinal cortex layer II neurons*, J. Neurophysiol. (2000), **83**, 2562–2579.

- [DOP79] H. Degn, L.F. Olsen and J.W. Perram, *Bistability, oscillation and chaos in an enzyme reaction*, *Annals of the New York Academy of sciences* **316** (1979), no. 1, 623–637.
- [DT] Catherine Doss and Michèle Thieullen, *Oscillations and random perturbations of a FitzHugh-Nagumo system*, Preprint hal-00395284 (2009).
- [GM64] George L. Gerstein and Benoît E. Mandelbrot, *Random walk models for the spike activity of a single neuron*, *Biophys. J.* **4** (1964), 41–68.
- [Fen79] N. Fenichel, *Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations*, *J. Differential Equations* **31** (1979), no. 1, 53–98.
- [Fit55] R. FitzHugh, *Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane*, *Bull. Math. Biophysics* **17** (1955), 257–269.
- [Fit61] R. FitzHugh, *Impulses and physiological states in models of nerve membrane*, *Biophys. J.* **1** (1961), 445–466.
- [Hab79] R. Haberman, *Slowly varying jump and transition phenomena associated with algebraic bifurcation problems*, *SIAM J. Appl. Math.* **37** (1979), 69–106.
- [HH52] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, *A quantitative description of ion currents and its applications to conduction and excitation in nerve membranes*, *J. Physiol. (Lond.)* **117** (1952), 500–544.
- [HHM79] J.L. Hudson, M. Hart and D. Marinko, *An experimental study of multiple peak periodic and nonperiodic oscillations in the Belousov-Zhabotinskii reaction*, *J. Chem. Phys.* **71** (1979), no. 4, 1601–1606.
- [HM09] Pawel Hinczenko and Georgi S. Medvedev, *Bursting oscillations induced by small noise*, *SIAM J. Appl. Math.* **69** (2009), no. 5, 1359–1392.
- [Izh00] Eugene M. Izhikevich, *Neural excitability, spiking and bursting*, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **10** (2000), no. 6, 1171–1266.
- [Jen12] Robert Jentzsch, *Über Integralgleichungen mit positivem Kern*, *J. f. d. reine und angew. Math.* **141** (1912), 235–244.
- [KP03] Efstratios K. Kosmidis and K. Pakdaman, *An analysis of the reliability phenomenon in the FitzHugh-Nagumo model*, *J. Comput. Neuroscience* **14** (2003), 5–22.
- [KP06] Efstratios K. Kosmidis and K. Pakdaman, *Stochastic chaos in a neuronal model*, *Internat. J. Bifur. Chaos* **16** (2006), no. 2, 395–410.
- [KR50] M. G. Kreĭn and M. A. Rutman, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, *Amer. Math. Soc. Translation* **1950** (1950), no. 26, 128.
- [KRS04] T. Kostova, R. Ravindran and M. Schonbek, *FitzHugh-Nagumo Revisited*, *International J. Bifurcation and Chaos* **14** (3) (2004), 913–925.
- [LSG99] Benjamin Lindner and Lutz Schimansky-Geier, *Analytical approach to the stochastic FitzHugh-Nagumo system and coherence resonance*, *Physical Review E* **60** (1999), no. 6, 7270–7276.
- [Long93] André Longtin, *Stochastic resonance in neuron models*, *J. Stat. Phys.* **70** (1993), 309–327.
- [Long00] André Longtin, *Effect of noise on the tuning properties of excitable systems*, *Chaos, Solitons and Fractals* **11** (2000), 1835–1848.
- [ML81] Morris C. and Lecar H., *Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber*, *Biophys. J.* (1981), 193–213.
- [MVE08] Cyrill B. Muratov and Eric Vanden-Eijnden, *Noise-induced mixed-mode oscillations in a relaxation oscillator near the onset of a limit cycle*, *Chaos* **18** (2008), 015111.

- [MVEE05] C.B. Muratov, E. Vanden-Eijnden, and W. E. *Self-induced stochastic resonance in excitable systems*, Physica D **210** (2005), 227–240.
- [NAY62] J. S. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa, *An active pulse transmission line simulating nerve axon*, Proc. IRE **50** (1962), 2061–2070.
- [Num84] Esa Nummelin, *General irreducible Markov chains and nonnegative operators*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 83, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [Ore71] Steven Orey, *Lecture notes on limit theorems for Markov chain transition probabilities*, Van Nostrand Reinhold Co., London, 1971, Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies, No. 34.
- [Oks95] Bernt Oksendal, *Stochastic differential equation, An introduction with application*, fourth edition, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [Olv74] Frank W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*, Academic press, 1974.
- [Pon57] L.S. Pontryagin, *Asymptotic behavior of solutions of systems of differential equations with small parameter in the derivatives of highest order*, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., **21** (1957), 605–626.
- [PSS92] V. Petrov, S.K. Scott and K. Showalter, *Mixed-mode oscillations in chemical systems*, J. Chem. Phys. **97** (1992), no. 9, 6191–6198.
- [Row07] Peter Rowat, *Interspike interval statistics in the stochastic Hodgkin-Huxley model : Coexistence of gamma frequency bursts and highly irregular firing*, Neural Computation **19** (2007), 1215–1250.
- [SK] David W. J Simpson and Rachel Kuske, *Mixed-mode oscillations in a stochastic, piecewise-linear system*, arXiv :1010.1504 (2010).
- [Sow08] Richard B. Sowers, *Random perturbations of canards*, J. Theoret. Probab. **21** (2008), no. 4, 824–889.
- [SVJ66] E. Seneta and D. Vere-Jones, *On quasi-stationary distributions in discrete-time Markov chains with a denumerable infinity of states*, J. Appl. Probability **3** (1966), 403–434.
- [TGOS08] Marc Turcotte, Jordi Garcia-Ojalvo, and Gurol M. Suel, *A genetic timer through noise-induced stabilization of an unstable state*, PNAS **105** (2008), no. 41, 15732–15737.
- [Tik52] A. N. Tikhonov, *Systems of differential equations containing small parameters multiplying the derivatives*, Mat. Sborn. **31** (1952), 575–586.
- [TP01a] Seiji Tanabe and K. Pakdaman, *Dynamics of moments of FitzHugh–Nagumo neuronal models and stochastic bifurcations*, Phys. Rev. E **63** (2001), 031911.
- [TP01b] Seiji Tanabe and K. Pakdaman, *Noise-induced transition in excitable neuron models*, Biol. Cybern. **85** (2001), 269–280.
- [TRW03] Henry C. Tuckwell, Roger Rodriguez and Frederic Y. M. Wan, *Determination of firing times for stochastic FitzHugh–Nagumo neuronal model*, Neural Computation, **15** (2003), 143–159.
- [TTP02] Takayuki Takahata, Seiji Tanabe, and K. Pakdaman, *White-noise stimulation of the Hodgkin Huxley model*, Biol. Cybern. **86** (2002), 403–417.
- [Tuc75] Henry C. Tuckwell, *Determination of the inter-spike times of neurons receiving randomly arriving post-synaptic potentials*, Biol. Cybern. **18** (1975), 225–237.
- [Tuc77] Henry C. Tuckwell, *On stochastic models of the activity of single neurons*, J. Theor. Biol. **65** (1977), 783–785.
- [Tuc89] Henry C. Tuckwell, *Stochastic Processes in the Neurosciences*, SIAM (1989).

Damien LANDON

Perturbation et excitabilité dans des modèles stochastiques de transmission de l'influx nerveux

Le système de FitzHugh-Nagumo stochastique est un modèle qualitatif pour la propagation de l'influx nerveux dans un neurone. Ce système lent-rapide s'écrit

$$\begin{aligned}\varepsilon dx_t &= (x_t - x_t^3 + y_t) dt + \sqrt{\varepsilon} \sigma_1 dW_t^{(1)} \\ dy_t &= (a - bx_t - cy_t) dt + \sigma_2 dW_t^{(2)}\end{aligned}$$

où a , b et c sont des réels, ε est un petit réel positif, σ_1 et σ_2 sont deux réels positifs représentant l'intensité du bruit, $W_t^{(1)}$ et $W_t^{(2)}$ sont deux mouvements browniens standards indépendants.

Dans cette thèse, nous étudions d'abord le système déterministe associé ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) et montrons qu'il est excitable. Nous regardons ensuite le cas particulier où $b = 0$. Dans ce cas, le comportement au voisinage du point d'équilibre est le même que celui d'un autre modèle, celui de Morris-Lecar. Nous étudions alors la loi du temps de sortie de ce voisinage. Dans le cas général, après avoir mis en évidence trois principaux régimes, nous montrons des résultats généraux sur la distribution du nombre de petites oscillations N entre deux spikes consécutifs en introduisant une chaîne de Markov. Puis nous étudions le cas particulier du régime de bruit faible.

Mots clés : équations différentielles stochastiques, oscillations multimodales, chaînes de Markov sous-stochastiques, comportement asymptotique, temps de sortie, système lent-rapide, bifurcation, valeur propre principale.

Perturbation and excitability in stochastic models of transmission of nerve impulses

The stochastic FitzHugh-Nagumo equations is a qualitative model for the dynamics of neuronal action potential. This slow-fast system is written

$$\begin{aligned}\varepsilon dx_t &= (x_t - x_t^3 + y_t) dt + \sqrt{\varepsilon} \sigma_1 dW_t^{(1)} \\ dy_t &= (a - bx_t - cy_t) dt + \sigma_2 dW_t^{(2)}\end{aligned}$$

where a , b and c are real numbers, ε is a small positive real number, σ_1 et σ_2 are two positive real number representing the intensity of noise, $W_t^{(1)}$ et $W_t^{(2)}$ are two standard Brownian motion independent.

In this thesis, we first study the associated deterministic system ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) and we show this system is excitable. Then we are interested in the particular case $b = 0$. In this case, the behavior in the neighborhood of the equilibrium is the same as the Morris-Lecar model. We study the law of the exit time of this neighborhood. In the general case, we show there are three main regimes. We study the distribution of the number of small oscillations N between two consecutive spikes using a substochastic Markov chain. Then we obtain results in the case of the weak-noise regime.

Keywords : stochastic differential equations, Mixed-mode oscillation, substochastic Markov chain, asymptotic behavior, exit time, slow-fast system, dynamic bifurcation, principal eigenvalue.



Université d'Orléans, UFR Sciences
Bâtiment de mathématiques - Rue de Chartres
B.P. 6759 - 45067 Orléans cedex 2 FRANCE

