



Approche Multi-Modèle pour l'Observation d'état et le Diagnostic des Systèmes Singuliers Non Linéaires

Habib Hamdi

► To cite this version:

Habib Hamdi. Approche Multi-Modèle pour l'Observation d'état et le Diagnostic des Systèmes Singuliers Non Linéaires. Automatique / Robotique. Ecole Polytechnique de Tunis, 2012. Français. NNT: . tel-00757821

HAL Id: tel-00757821

<https://theses.hal.science/tel-00757821>

Submitted on 27 Nov 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Tunis

École Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du
DIPLÔME DE DOCTORAT

en Génie Électrique

Par

Habib HAMDI

Maîtrise en Génie Électrique

Mastère en Automatique - Productique

**Approche Multi-Modèle
pour l'Observation d'État et le Diagnostic
des Systèmes Singuliers non Linéaires**

Soutenue le 24 Novembre 2012 devant le jury d'examen composé de :

M. Farhat FNAIECH	Professeur à l'ESSTT	Président
M. Nabil DERBEL	Professeur à l'ENIS	Rapporteur
M. Fayçal BEN HMIDA	Maître de Conférences à l'ESSTT	Rapporteur
M. Mickael RODRIGUES	Maître de Conférences à UCBL-Lyon1	Examineur
M. Naceur BENHADJ BRAIEK	Professeur à l'ESSTT	Directeur de thèse

à mes parents, mes frères et ma sœur.

Avant Propos

Ce travail a été réalisé au sein de Laboratoire des systèmes avancés (LSA) de l'École Polytechnique de Tunisie.

Je tiens d'abord à remercier Monsieur Naceur Benhadj Braiek, Professeur à l'École Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis et Directeur du LSA à l'École Polytechnique de Tunisie pour m'avoir accueilli au sein de son équipe et pour avoir accepté de diriger ma thèse. Son soutien, ses conseils éclairés et son aide m'ont été d'un grand apport pour la concrétisation de ce travail. Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Je voudrais remercier également Monsieur Michael Rodrigues, Maître de Conférences au Laboratoire d'Automatique et Génie des Procédés (LAGEP) de l'Université de Claude Bernard à Lyon pour l'intérêt qu'il a porté à notre travail de thèse et sa contribution manifeste à son succès. Ses conseils scientifiques et son aide précieuse m'ont été d'un grand apport. Je lui exprime ma reconnaissance et je le remercie d'avoir accepté de faire partie du jury de ma soutenance.

Je tiens aussi à remercier vivement Monsieur Chokri Mechmeche, Maître Assistant à l'École Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis (ESSTT) et membre du Laboratoire LSA pour l'aide qu'il m'a apportée et les conseils qu'il m'a prodigués.

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à Monsieur Farhat Fnaiech, Professeur à l'École Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis (ESSTT) pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ma soutenance.

Monsieur Nabil Derbel, Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax (ENIS), m'a honoré en acceptant d'évaluer mon travail de thèse et d'en être le rapporteur. Qu'il trouve ici l'expression de mes remerciements les plus vifs.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à Monsieur Faycel Ben Hmida, Maître de Conférences à l'École Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis (ESSTT) pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à mon travail, en acceptant d'en être le rapporteur.

Je tiens à rendre hommage à l'esprit d'équipe qui règne au laboratoire LSA et à exprimer à tous ses membres ainsi qu'à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail mes remerciements les plus vifs.

Table des matières

Avant Propos	iii
Notations	xi
Introduction générale	1

Chapitre 1 Sur la représentation et l'analyse des systèmes singuliers
--

1.1	Introduction	9
1.2	Définition d'un système singulier	10
1.3	Exemples de systèmes singuliers	11
1.3.1	Problèmes des Contraintes Variationnelles	11
1.3.2	Systèmes dynamiques singuliers de Leontief	12
1.3.3	Robot manipulateur à trois bras : Skywash	12
1.3.3.1	Description du système :	12
1.3.3.2	Modélisation du système :	13
1.4	Les systèmes singuliers linéaires	16
1.4.1	Régularité et Impulsivité des systèmes singuliers linéaires	17
1.4.2	Equivalence entre systèmes singuliers	18
1.4.2.1	Forme équivalente par décomposition de Kronecker-Weierstrass	18
1.4.2.2	Forme équivalente par décomposition en valeurs singulières	19
1.4.3	Réponse temporelle	20
1.4.3.1	Réponse temporelle du sous-système lent	20
1.4.3.2	Réponse temporelle du sous-système rapide	20
1.4.4	Stabilité des systèmes singuliers linéaires	22
1.4.5	Admissibilité des systèmes singuliers linéaires	23
1.4.6	État atteignable	23

1.4.7	Observabilité des systèmes singuliers	24
1.4.8	Détectabilité des systèmes singuliers	27
1.5	Système singulier linéaire à paramètres variants (LPV)	29
1.5.1	Représentation des systèmes singuliers (LPV)	29
1.5.1.1	Système singulier (LPV) affine	30
1.5.1.2	Système singulier (LPV) polytopique	30
1.5.1.3	Représentation linéaire fractionnaire (LFR)	31
1.6	Système singulier non linéaire	31
1.6.1	Solvabilité des systèmes singuliers	31
1.6.2	Indice des systèmes singuliers	32
1.6.2.1	Indice de différentiation	32
1.6.2.2	Exemple 1 (Indice 1)	32
1.6.2.3	Exemple 2 (Indice 2)	33
1.6.2.4	Indice de perturbation	34
1.6.3	Réduction d'indice	34
1.6.4	Application : Réduction d'indice du modèle singulier qui décrit un Pendule	35
1.7	Stabilité des systèmes singuliers	36
1.7.1	Stabilité aux sens de Lyapunov	36
1.8	Observabilité des systèmes singuliers non linéaires	37
1.9	Conclusion	39

Chapitre 2

Modélisation et observation d'état multi-modèles des systèmes singuliers

2.1	Introduction	43
2.2	Modélisation par approche multi-modèle	44
2.2.1	Zone de fonctionnement	45
2.2.2	Variable de décision	46
2.2.3	Fonction d'activation	46
2.2.4	Structures multi-modèle	46
2.2.4.1	Structure couplée	47
2.2.4.2	Structure découplée	47
2.3	Modèle singulier flou de type Takagi-Sugeno	48
2.4	Méthodes d'obtention des multi-modèles pour les systèmes singuliers	50
2.4.1	Obtention des multi-modèles par linéarisation	50

2.4.2	Obtention des multi-modèles par la méthode de transformation des non linéarités	51
2.4.3	Exemple illustratif : Disque roulant	53
2.5	Représentation polytopique des systèmes singuliers linéaires à paramètres variants	57
2.6	Stabilité des systèmes multi-modèles	59
2.6.1	Stabilité quadratique	59
2.6.2	Stabilité relaxée	60
2.7	Estimation d'état des multi-modèles singuliers	60
2.7.1	Observateur multi-modèle Proportionnel à entrées inconnues	61
2.7.1.1	Structure du multi-observateur	62
2.7.1.2	Conditions d'existence du multi-observateur	64
2.7.1.3	Procédure de synthèse du multi-observateur	64
2.7.2	Estimation des entrées inconnues	67
2.7.3	Multi-Observateur Proportionnel Intégral à entrées inconnues . . .	67
2.7.3.1	Synthèse du multi-observateur PI	68
2.7.3.2	Détermination du multi-observateur PI	70
2.7.4	Exemple illustratif : Estimation des états du disque roulant	71
2.7.4.1	Détermination des paramètres du multi-observateur Proportionnel à entrées inconnues	71
2.7.4.2	Détermination des paramètres du multi-observateur PI . .	71
2.7.4.3	Comparaison des performances des deux multi-observateurs	72
2.7.4.4	Estimation des entrées inconnues	74
2.8	Conclusion	74

Chapitre 3

Approche multi-modèle pour le diagnostic des systèmes singuliers

3.1	Introduction	79
3.2	Terminologies et critères de performance relatifs à un système de diagnostic	80
3.2.1	Les terminologies de diagnostic	80
3.2.2	Critères de performance d'un système de diagnostic	81
3.3	Principe du diagnostic à base de modèles	81
3.3.1	Système multi-modèle singulier avec défauts	82
3.3.1.1	Système multi-modèle singulier avec défauts actionneurs .	82
3.3.1.2	Système multi-modèle singulier avec défauts capteurs . . .	83

3.3.1.3	Système multi-modèle singulier avec défauts système . . .	83
3.3.2	Localisation des défauts	84
3.3.2.1	Localisation des défauts actionneurs	85
3.3.2.2	Localisation des défauts capteurs	86
3.4	Détection et localisation des défauts des systèmes singuliers multi-modèles	86
3.4.1	Génération de résidus par optimisation multi-objectifs	87
3.4.1.1	Synthèse du générateur de résidus	87
3.4.1.2	Formulation des inégalités matricielles linéaires	91
3.4.2	Génération de résidus à base de multi-observateurs	92
3.4.2.1	Conditions de convergence	93
3.4.2.2	Synthèse du générateur de résidus	94
3.4.2.3	Analyse de la stabilité	95
3.4.3	Application : Détection et isolation des défauts d'un robot manipu- lateur à trois bras	100
3.4.3.1	Modèle du robot dans un système de coordonnées carté- siennes	100
3.4.3.2	Représentation multi-modèle	102
3.4.3.3	Estimation des états en présence des défauts	105
3.4.3.4	Génération des résidus par banc de multi-observateurs . .	108
3.5	Méthodes d'estimation de défauts	109
3.5.1	Estimation des défauts par un multi-observateur étendu	110
3.5.2	Estimation des défauts par un multi-observateur à entrées inconnues	112
3.5.3	Application : Estimation des défauts du robot manipulateur	113
3.6	Détection et estimation des défauts des systèmes singuliers LPV	114
3.6.1	Structure polytopique des systèmes singuliers à paramètres variants	114
3.6.2	Structure polytopique de l'observateur proportionnel intégral	115
3.6.2.1	Synthèse de l'OPIEI	116
3.6.2.2	Convergence exponentielle de l'observateur proportionnel intégral polytopique	117
3.6.3	Détection et isolation des défauts pour les systèmes singuliers LPV	120
3.6.3.1	Génération de résidus par l'OPIEI polytopique	120
3.6.3.2	Localisation des défauts actionneurs	122
3.6.4	Exemple illustratif	123
3.6.4.1	Synthèse de l'OPIEI polytopique	124

3.6.4.2	Simulation	125
3.6.4.3	Diagnostic des défauts par l'OPIEI polytopique	126
3.7	Conclusion	129
Conclusion Générale et perspectives		131
Bibliographie		135
Publications personnelles sur les travaux de cette thèse		147

Notations

Les notations suivantes sont définies au fur et a mesure de leur utilisation dans le présent mémoire et sont conservées tout au long de celui-ci.

Matrices et vecteurs

$M > 0$ ($M \geq 0$)	Matrice M symétrique, définie positive (resp. symétrique, semi définie positive)
$M < 0$ ($M \leq 0$)	Matrice M symétrique, définie négative (resp. symétrique, semi définie négative)
$I_n(I)$	Matrice identité de dimension n (resp. de dimension appropriée)
M^T	Le Transposée de la matrice M
M^{-1}	L'Inverse de la matrice M
M^+	Le Pseudo inverse de la matrice M
$\ M\ $	Norme euclidienne de la matrice M
$\ x\ $	Norme euclidienne du vecteur x

Ensembles

$\mathcal{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathcal{R}_+$	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathcal{R}^n$	Espace réel euclidien de dimension n
$\mathcal{R}^{n \times n}$	L'ensemble de toute les matrices de dimension $n \times n$
$\mathcal{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\det(M)$	Déterminant de la matrice M
$\dim(M)$	Dimension de la matrice M
$\text{rang}(M)$	Rang de la matrice M
$\text{tr}(M)$	trace de la matrice M
$\lambda_{\min}(M)$	Valeur propre minimale de la matrice M
$\lambda_{\max}(M)$	Valeur propre maximale de la matrice M
$\sigma_{\min}(M)$	Valeur singulière minimale de la matrice M
$\sigma_{\max}(M)$	Valeur singulière maximale de la matrice M
$(M)^\perp$	Le complément orthogonal de la matrice M
$\text{Im}(M)$	Espace image de la matrice M
$\text{Ker}(M)$	Espace noyau de la matrice M
$\text{span}(M)$	Le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice M

Notations des relations et manipulations

$\implies$	Implique
------------	----------

$\in$	Appartient à
$\subset$	Un sous espace de
$\forall$	Choisie arbitrairement

Notations supplémentaires

$diag(d_1, d_2, \dots, d_n)$ Matrice diagonale avec les éléments $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ sur la diagonale



Fin d'un théorème



Fin d'une démonstration ou d'une définition

Acronyms

<i>EAD</i>	Equation Algèbro-Différentielle
<i>EDO</i>	Equation Différentielle Ordinaire
<i>FDI</i>	Détection et Isolation des Défauts
<i>LMI</i>	Inégalité Matricielle Linéaire
<i>LTI</i>	Linéaire à Temps Invariant
<i>LPV</i>	Linéaire à paramètre variant
<i>PIO</i>	Observateur Proportionnel Integral
<i>UIO</i>	Observateur à Entrées Inconnues

Introduction générale

La recherche sur les systèmes dynamiques exige souvent une modélisation mathématique du comportement du système. La complexité croissante de ces processus conduisent alors, au développement des programmes machine produisant des systèmes d'équations, tels que les systèmes multi-corps, ou à une décomposition du processus global, telle que les systèmes interconnectés. Le comportement dynamique de chaque sous-modèle est régi par des équations différentielles. L'accouplement de ces sous-modèles se fait par des équations algébriques. En effet, le modèle mathématique est représenté par des relations dynamiques, ainsi que des relations statiques. Cette augmentation permet de conserver aux variables d'états leur signification physique ainsi que de modéliser des processus présentant des comportements impulsifs (des dérivées en entrées et en sorties) et plus généralement les systèmes non causaux.

Une grande classe de systèmes physiques peut être modélisée par des Equations Algèbro-Différentielles (EADs). Le papier de *Newcomb* et al. [Newc 89] donne plusieurs exemples pratiques comprenant des réseaux électriques, des robots manipulateurs avec des contraintes, des processus chimiques, etc. A titre d'exemple, dans le cas des processus chimiques, les équations différentielles résultent des équilibres dynamiques de la masse et de l'énergie, alors que les équations algébriques résultent des relations d'équilibre thermique. Pour les systèmes mécaniques, les équations dynamiques sont décrits par les relations des mouvements, alors que les équations algébriques modélisent les contraintes mécaniques. Tous ces systèmes et autres sont décrits par des équations algèbro-différentielles (EADs) non-linéaires.

Selon le domaine d'étude, les systèmes algèbro-différentiels admettent différentes nomenclatures dans différents champs. Par exemple, les théoriciens de commande et les mathématiciens les avaient longtemps appelés les systèmes singuliers [Newc 89], puisque la matrice sur la dérivé des variables d'état est généralement singulière, ou parfois ils emploient par terminologie les systèmes d'espace l'état généralisés [Dai 89]. D' autre part, les systèmes nommés descripteurs sont employés fréquemment dans les systèmes économiques, puisqu'ils donnent une description normale du système, alors que les analystes

numériques appellent leurs descriptions des équations algèbro-différentielles [Mull 00], ou des équations avec contraintes algébriques. Dans le secteur des circuits le nom originel était le pseudo-état [Dai 89].

Il existe plusieurs raisons de considérer les systèmes sous forme algèbro-différentielle ou singulier, plutôt qu'on essaie de les réécrire comme des systèmes ordinaires gouvernés seulement par des équations différentielles. En effet, pour simuler des systèmes physiques, les équations algèbro-différentielles (EADs) représentent un ensemble de relations entre des contraintes algébriques et certains dérivés des variables d'état. Ces variables, ont une signification physique. La transformation de ce type de modèle en un modèle ordinaire peut produire des variables d'état moins significatives. D'autre part, l'utilisation des modèles ordinaires est très utile, mais les variables d'état présentées ne fournissent pas souvent un sens physique [Marx 03], [Mull 00]. En outre, quelques phénomènes physiques, comme l'impulsion et l'hysteresis qui sont importants dans la théorie des circuits, ne peuvent être traités correctement dans les modèles ordinaires [Sjöb 06]. La représentation algèbro-différentielle fournit une manière appropriée de traiter de tels problèmes. Cette représentation est très utilisée dans la modélisation des processus physiques [Boul 08], [Luen 77]. En fait, les modèles algèbro-différentiels semblent plus commodes que les modèles ordinaires dans la description des systèmes à grande échelle, des systèmes économiques, des réseaux électriques, des systèmes neuraux et autres.

L'analyse et la synthèse des systèmes singuliers ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. De ce fait, une théorie d'existence et d'unicité pour les équations algèbro-différentielles non linéaires a été développée par *S.Reich* [Reic 91] en exploitant leurs structure géométrique différentielle. Récemment, *Venkatashubramanian et al.* [Venk 95] ont étudié intensivement les régions de faisabilité pour les systèmes algèbro-différentiels. La notion des régions de faisabilité fournit un passage usuel à la théorie de la stabilité des équations algèbro-différentielles (EADs).

Cependant, la linéarité des études constitue une hypothèse forte qui limite la pertinence des résultats que l'on peut obtenir. L'extension directe des méthodes de commande et d'estimation développées dans le contexte des modèles linéaires au cas des modèles non linéaires est délicate. En revanche pour les systèmes non linéaires sans contraintes algébriques, des résultats intéressants ont été obtenus pour une démarche de modélisation qui s'appuie sur l'utilisation d'une approche globale basée sur un ensemble de modèles

de structures simples, chaque modèle décrit le comportement du système dans une zone de fonctionnement particulière (définie, par exemple, par les valeurs des entrées ou de l'état du système). Cette approche, dite *multi-modèles*, est une représentation polytopique convexe qui peut être obtenue soit directement par une transformation du modèle mathématique non linéaire en un ensemble de modèles affines en l'état [Rodr 05'], [Kard 04], [Chad 02] ou par linéarisation autour de différents points de fonctionnement soit à partir de données sur les entrées et les sorties. Cette approche a produit des résultats intéressants en commande, en observation et diagnostic pour les systèmes non linéaires ordinaires.

Plusieurs catégories de multi-modèles existent dans la littérature, notamment les systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps (LPV) [Zera 09] ou les systèmes quasi LPV, appelés encore systèmes de Takagi-Sugeno (T-S) [Taka 85]. L'approche multi-modèles possède une propriété d'approximation universelle des systèmes affines en la commande et présente l'avantage de pouvoir représenter de manière exacte un modèle de connaissance non linéaire sur un compact de l'espace d'état. De ce fait, la phase de modélisation est donc essentielle pour un processus physique, mais n'est pas une fin en soi. La phase principale pour un processus est de garantir une production en quantité et en qualité. Pour assurer cette production, il faut que toute anomalie de fonctionnement soit rapidement détectée puis prise en compte dans la stratégie de conduite du système considéré. Cette anomalie peut avoir comme origine de défauts de systèmes, de capteurs, d'organes de commande (actionneurs), des bruits, ...

Le diagnostic, suscite depuis les années 1970 un intérêt croissant tant au niveau du monde industriel que de la recherche scientifique. Parce que les systèmes industriels deviennent de plus en plus complexes et sophistiqués, il est légitime de leur associer un module efficace de surveillance afin d'accroître leur fiabilité et leur disponibilité, et d'améliorer la sécurité du personnel. Les méthodes de diagnostic reposent essentiellement sur la connaissance d'un modèle censé représenter le comportement du système physique à surveiller. Elles s'appuient sur la connaissance, entière ou partielle, de l'état d'un système. Ces états sont fournis par un système dynamique auxiliaire appelé observateur d'état (multi-observateur pour les systèmes représentés par des multi-modèles).

Dans ce mémoire, le thème proposé concerne l'observation et le diagnostic des systèmes gouvernés par des équations algèbro-différentielles non linéaires affectées par des défauts et des perturbations. La méthode proposée consiste à utiliser l'approche multi-modèles comme outil d'approximation linéaire de ce type de systèmes. Cette approche est basée sur l'utilisation d'un ensemble de modèles à structures simples ; chaque modèle décrit le

comportement du système dans une zone de fonctionnement particulière. Dans ce mémoire on a pu aussi étudier les systèmes singuliers LPV polytopique. Cette classe de système permet de représenter de manière exacte les modèles non linéaires sur un compact de l'espace d'état. Le comportement dynamique du système singulier LPV est donné sous une forme polytopique, qui permet de décrire le système originel en tant que combinaison convexe de sous-modèles définis par les sommets d'un polyèdre convexe. Ces sous-modèles sont ensuite combinés en utilisant des fonctions de pondération convexes pour décrire le modèle global.

Peu de travaux ont été publiés concernant l'estimation des états des systèmes singuliers multi-modèles. De plus, les travaux existants sont principalement dédiés à l'estimation d'état des multi-modèles à variables de décision mesurables, c'est-à-dire des variables de décision liées aux entrées ou aux sorties des systèmes. Néanmoins, dans beaucoup de situations, ces variables de prémisses sont définies par les variables d'état qui peuvent ne pas être accessibles à la mesure. Ceci nous a conduit à envisager l'étude de la conception d'observateurs pour les systèmes singuliers décrits par des multi-modèles à variables de prémisses mesurables et à variables de prémisses non mesurables et affectés par des entrées inconnues. De même, et dans le cadre d'améliorer la reconstruction des états et des entrées inconnues, nous envisageons d'utiliser l'observateur de type proportionnel intégral qui permet d'opérer une estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues du système.

Par ailleurs, nous nous proposons de considérer la problématique du diagnostic des systèmes singuliers en utilisant le principe de générateurs de résidus à base d'observateurs à entrées inconnues pour le cas des systèmes singuliers multi-modèles à variables de prémisses mesurables et à variables de prémisses non mesurables. Dans ce cadre une approche multi-modèle de détection et d'isolation des défauts des systèmes singuliers non linéaires est développée. Nous proposons aussi d'étendre cette approche de diagnostic aux systèmes singuliers à paramètres variants (LPV). L'observateur conçu dans ce sens comprend en plus de l'action proportionnelle, une action intégrale pour permettre d'estimer conjointement les grandeurs d'état et les défauts éventuels.

L'ensemble de nos contributions est synthétisé dans ce mémoire organisé en trois chapitres :

Le premier chapitre présente un état de l'art sur le sujet traité. Il s'intéresse à introduire la classe des systèmes singuliers. Ces systèmes constituent un puissant outil de

modélisation dans la mesure où ils peuvent décrire des processus régis à la fois par des équations dynamiques et des équations statiques. Ce formalisme est ainsi particulièrement adapté à l'étude des systèmes interconnectés, soumis à des contraintes physiques statiques et présentant des comportements impulsifs. Plusieurs résultats fondamentaux relatifs à la localisation et à l'analyse des systèmes singuliers linéaires, à paramètres variants ou non linéaires sont ainsi rappelés.

Le deuxième chapitre est consacré au problème d'approximation des systèmes singuliers à paramètres variants et non linéaires par une représentation multi-modèle. Cette approche permet de présenter un processus dynamique non linéaire comme une combinaison d'un ensemble de modèles linéaires ou affines valables dans des zones de fonctionnement. Les différentes structures les plus utilisées (modèles locaux couplés et découplés) sont décrites. L'analyse de la stabilité des multi-modèles a été considérée. Une méthode de synthèse de deux types d'observateurs pour les systèmes singuliers multi-modèles et LPV polytopique est aussi introduite.

Le problème de diagnostic des systèmes singuliers non linéaires par approche multi-modèles et des systèmes singuliers à paramètres variants polytopiques est abordé dans le troisième chapitre. Trois méthodes à base d'observateurs sont alors proposées. La première approche repose sur l'utilisation d'un multi-observateur à entrées inconnues assurant un découplage partiel de l'estimation des défauts. La deuxième méthode est inspirée du problème standard de commande H_∞ . Elle est basée sur la minimisation de l'influence des entrées inconnues et la maximisation de l'influence des défauts sur les résidus, ce qui revient à l'étude d'un problème multiobjectifs. La troisième méthode est basée sur l'utilisation d'un multi-observateur Proportionnel Intégral (PI). Cette approche est utilisée avec les systèmes singuliers à paramètres variants. Elle permet moyennant un banc de générateurs de résidus, de fournir directement une estimation des défauts et par suite leur détection et localisation.

Chapitre 1

Sur la représentation et l'analyse des systèmes singuliers

Sommaire

1.1	Introduction	9
1.2	Définition d'un système singulier	10
1.3	Exemples de systèmes singuliers	11
1.3.1	Problèmes des Contraintes Variationnelles	11
1.3.2	Systèmes dynamiques singuliers de Leontief	12
1.3.3	Robot manipulateur à trois bras : Skywash	12
1.3.3.1	Description du système :	12
1.3.3.2	Modélisation du système :	13
1.4	Les systèmes singuliers linéaires	16
1.4.1	Régularité et Impulsivité des systèmes singuliers linéaires	17
1.4.2	Equivalence entre systèmes singuliers	18
1.4.2.1	Forme équivalente par décomposition de Kronecker-Weierstrass	18
1.4.2.2	Forme équivalente par décomposition en valeurs singulières	19
1.4.3	Réponse temporelle	20
1.4.3.1	Réponse temporelle du sous-système lent	20
1.4.3.2	Réponse temporelle du sous-système rapide	20
1.4.4	Stabilité des systèmes singuliers linéaires	22
1.4.5	Admissibilité des systèmes singuliers linéaires	23
1.4.6	État atteignable	23
1.4.7	Observabilité des systèmes singuliers	24
1.4.8	Détectabilité des systèmes singuliers	27
1.5	Système singulier linéaire à paramètres variants (LPV)	29
1.5.1	Représentation des systèmes singuliers (LPV)	29
1.5.1.1	Système singulier (LPV) affine	30
1.5.1.2	Système singulier (LPV) polytopique	30

1.5.1.3	Représentation linéaire fractionnaire (LFR)	31
1.6	Système singulier non linéaire	31
1.6.1	Solvabilité des systèmes singuliers	31
1.6.2	Indice des systèmes singuliers	32
1.6.2.1	Indice de différentiation	32
1.6.2.2	Exemple 1 (Indice 1)	32
1.6.2.3	Exemple 2 (Indice 2)	33
1.6.2.4	Indice de perturbation	34
1.6.3	Réduction d'indice	34
1.6.4	Application : Réduction d'indice du modèle singulier qui décrit un Pendule	35
1.7	Stabilité des systèmes singuliers	36
1.7.1	Stabilité aux sens de Lyapunov	36
1.8	Observabilité des systèmes singuliers non linéaires	37
1.9	Conclusion	39

Les systèmes singuliers ou algèbro-différentiels surgissent dans une variété d'applications. Par conséquent leur analyse et traitement numérique jouent un rôle très important dans les mathématiques modernes. Dans ce chapitre, nous récapitulons quelques définitions de base et des résultats préliminaires qui seront employés ultérieurement. Des exemples de modèles singuliers ou descriptors, sont considérés pour montrer leur importance dans la modélisation des problèmes pratiques. Plusieurs concepts de stabilité et d'observabilité sont introduits.

1.1 Introduction

Les systèmes singuliers désignés également sous le nom de systèmes algèbro-différentiels, implicites, descriptor systems ou singular systems (appellation anglo-saxone) [Marx 03], constituent une classe importante de systèmes d'intérêt théorique et pratique. Ils sont utilisés dans la modélisation des systèmes mécaniques, robotiques avec des contraintes cinématiques [Sjöb 06], des réseaux électriques [Kapr 92] et des applications chimiques [Boul 08]. Ils peuvent être considérés comme une généralisation des systèmes dynamiques ordinaires. L'étude des systèmes algèbro-différentiels a permis de nombreuses recherches depuis le début des années 1970 car ce formalisme permet l'analyse et la commande des systèmes pour lesquels la représentation d'état usuelle n'est pas satisfaisante. D'après *Luenberger 1977* [Luen 77], les principales classes de systèmes relevant de cette approche sont les systèmes interconnectés de grandes dimensions tels que les réseaux électriques ou hydrauliques, les systèmes rectangulaires, et les systèmes non causaux. Depuis une vingtaine d'années, de nombreux points de la théorie de la commande des systèmes dynamiques ont été étendus aux systèmes singuliers tels que le placement robuste de pôles [Xiao 97], la commande optimale [Sjöb 06],... ainsi que la synthèse des observateurs [Mull 99], [Daro 96], [Mull 93] et la détection des défauts [Kim 01]. Le progrès dans l'étude des systèmes singuliers linéaires et les avancées dans l'analyse et la synthèse des systèmes non-linéaires ordinaires [Benh 99], [Boua 06], ont stimulé une activité de recherche croissante sur la commande et l'observation des systèmes singuliers non linéaires. À cet égard, plusieurs propriétés telle que l'existence et l'unicité des solutions, l'analyse de la stabilité en utilisant des techniques de Lyapunov [Tanig 00], la commandabilité [Joha 06] et l'observabilité [Terr 01], ont été étudiées pour cette classe de systèmes non linéaires. Dans ce chapitre, nous définissons d'abord, l'origine des systèmes singuliers. Ensuite, nous rappellerons quelques résultats fondamentaux pour la classe linéaire de ces systèmes ainsi que les systèmes singuliers à paramètres variants. Nous présenterons par la suite la classe

générale des systèmes singuliers non linéaires sur lesquels nous nous focaliserons, tout en passant en revue les concepts de la solubilité, les notions d'indice et de la réduction d'indice. Les propriétés de stabilité et d'observabilité des systèmes singuliers seront aussi étudiées.

1.2 Définition d'un système singulier

La description mathématique d'un système se décompose souvent d'un ensemble d'équations différentielles ou dynamiques, qui font intervenir des variables agissant sur l'évolution du système au cours du temps [Dai 89]. La forme générale du modèle mathématique s'écrit alors, sous la forme suivante :

$$\begin{cases} F(\dot{x}(t), x(t), u(t)) = 0 \\ G(x(t), u(t), y(t)) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

avec $x(t) \in \mathcal{R}^n$ le vecteur des variables d'état du système, $u(t) \in \mathcal{R}^p$ l'entrée de commande et $y(t) \in \mathcal{R}^m$ le vecteur des sorties mesurables. F et G sont deux fonctions différentiable de dimensions appropriées. Les équations (1.1) donnent une représentation d'état d'un système dynamique non linéaire. Une forme spéciale des égalités (1.1) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & Ex(0) \in \text{Im}E \\ y(t) = g(x(t), u(t)), & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

$E = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice singulière et $x = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix}^T \triangleq (x_1, \dots, x_n)^T$ est le vecteur d'état de dimension $n \times 1$. Ce vecteur d'état est dévisé en une partie dynamique et une partie statique. Le modèle décrit par (1.2) représente la forme générale d'un système singulier non linéaire.

Les systèmes singuliers sont capables de décrire les comportements des systèmes qui ne peuvent pas être expliciter par les systèmes ordinaires (les systèmes gouvernés seulement par des équations différentielles). En outre, il y a plusieurs raisons de modéliser les processus physiques sous la forme définie par (1.2), que de les décrire seulement par des équations différentielles ordinaires (EDO). En effet, lors de la simulation des processus physiques, le modèle est souvent régi par des équations différentielles faisant intervenir les variations des variables au cours du temps et des relations algébriques exprimant les relations entre les variables d'état. Cette représentation donne une signification physique [Fang 93] à ces variables d'état.

Au-delà-de ça, plusieurs phénomènes physiques, comme les impulsions et les hysteresis qui sont importants dans la théorie des circuits, ne peuvent pas être traités correctement

dans les modèles ordinaires. La représentation algèbro-différentielle fournit une manière appropriée pour traiter de tels problèmes [Lew 86].

1.3 Exemples de systèmes singuliers

La modélisation par des équations algèbro-différentielles joue un rôle essentiel, entre autre, pour les circuits électriques, les systèmes mécaniques avec contraintes et les processus économiques. Dans cette section, nous donnerons des exemples de processus décrits par des modèles singuliers.

1.3.1 Problèmes des Contraintes Variationnelles

Le premier exemple concerne l'étude d'un problème avec des contraintes variationnelles [Dai 89]. Considérons un système mécanique à contrainte de position $x(t)$, de vitesse $v(t) = \dot{x}(t)$ d'énergie cinétique $T(x(t), v(t))$, sous l'influence d'une force extérieure $f(x(t), v(t), t)$ et sous la contrainte $\phi(x(t)) = 0$. La formulation de Lagrange-Euler du système peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= v(t) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v} T(x(t), v(t)) &= \frac{\partial T(x(t), v(t))}{\partial x} + f(x(t), v(t), t) + \lambda G^T \\ 0 &= \phi(x(t)) \end{cases} \quad (1.3)$$

avec $G = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ et λ est le multiplicateur de Lagrange. Ce système peut être réformulé sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} \dot{v}(t) &= g(x(t), v(t), t) + \lambda G^T \\ \dot{x}(t) &= v(t) \\ 0 &= \phi(x(t)) \end{cases} \quad (1.4)$$

avec

$$g(x(t), v(t), t) \triangleq f(x(t), v(t), t) + \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial v} \dot{x}(t)$$

Dans le cas pratique, la matrice $\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}$ est souvent définie positive. Ensuite, la multiplication de la première équation de (1.4) par $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}\right)^{-1}$ permet de convertir le système précédent en un système algèbro-différentiel de la forme suivante.

$$\begin{cases} \dot{v}(t) &= \left(\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}\right)^{-1} g(x(t), v(t), t) + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}\right)^{-1} \lambda G^T \\ \dot{x}(t) &= v(t) \\ 0 &= \phi(x(t)) \end{cases}$$

1.3.2 Systèmes dynamiques singuliers de Leontief

Le modèle dynamique fondamental de Leontief [Luen 77] des systèmes économiques est un système singulier. Son modèle de description est :

$$x(k) = Ax(k) + B[x(k+1) - x(k)] + d(k) \quad (1.5)$$

avec $x(k)$ un vecteur de dimension n qui correspond au niveau de production de n secteurs au moment k et $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ la matrice d'entrée-sortie appelée aussi matrice de production. $Ax(k)$ représente une partie de la production exigée comme entrée pour la production courante, $B \in \mathcal{R}^{n \times n}$ est la matrice des coefficients de stock. $B[x(k+1) - x(k)]$ est la quantité pour l'expansion des capacités qui apparaît souvent sous la forme de capital. Le vecteur $d(k)$ représente les niveaux de la production qui sont demandés. Les modèles économétriques¹ de ce type ont été examinés par Leontief dans [Leon 53], dans lequel les deux cas temps discret et temps continu ont été considérés.

Généralement, la plupart des éléments dans la matrice B sont nulles d'où B est souvent singulière. C'est parce que les productions dans un secteur n'exigent pas de capital en stock de tous les autres secteurs. La représentation (1.5) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$Bx(k+1) = (I_n - A + B)x(k) - d(k) \quad (1.6)$$

Cette équation (1.6) correspond à la forme d'un système singulier. La représentation singulière peut surgir naturellement en modélisant un système dynamique pratique.

1.3.3 Robot manipulateur à trois bras : Skywash

Dans cette section, on se propose de présenter un modèle singulier d'un robot manipulateur à trois bras, utilisé en tant que robot de nettoyage. Le mouvement de ce robot est limité par la surface de nettoyage, ce qui conduit aux contraintes de singularité.

1.3.3.1 Description du système :

La figure ci-dessous montre un robot manipulateur à trois bras nettoyant la façade d'un haut bâtiment [Wann 86]. Le développement de ce genre de manipulateur fait partie de plusieurs projets de recherche dans lesquels plusieurs institutions de recherche sont impliqués [Wann 90], [Hill 94]. Ce manipulateur mobile appelé Skywash appartient à une

1. L'économétrie est une branche de la science économique qui a pour objectif d'estimer et de tester les modèles économiques, à partir de données issues de l'observation du fonctionnement réel de l'économie ou provenant d'expériences contrôlées.

classe important de robots de service largement utilisés dans la construction, les services publics, et la protection de l'environnement [Schr 93].

La tâche de ce manipulateur est de nettoyer la région entre les points A et B.

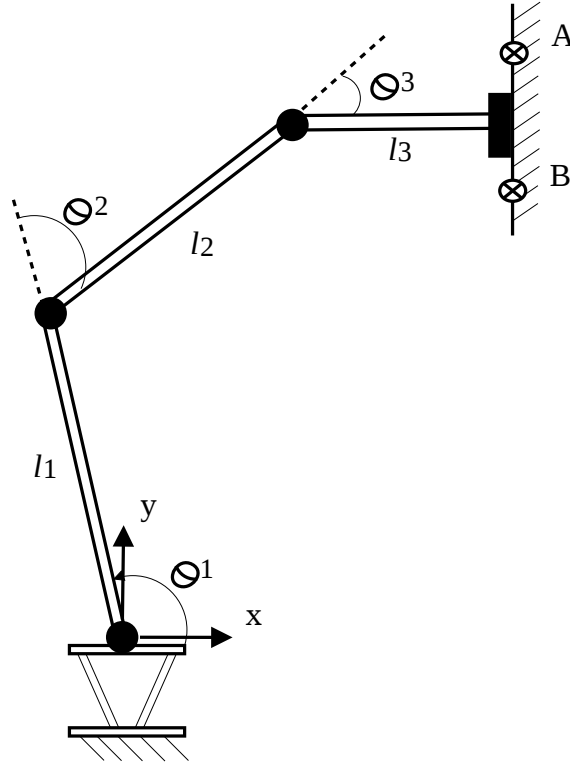


figure 1.1 – Robot manipulateur à trois bras

Ce robot accomplit cette tâche en déplaçant le terminal du manipulateur du point A vers le point B à plusieurs reprises avec une force de contact spécifique.

Avant d'entamer la modélisation, on suppose que la surface plane à nettoyer est un corps rigide et que l'extrémité du troisième bras est plate, lisse et rigide. Ainsi, il y a deux contraintes sur le mouvement du robot :

- La restriction sur le mouvement dans la direction de x , toujours donnée par $x \leq 1$ m/s.
- L'orthogonalité du troisième bras sur la surface de nettoyage peut être décrite par :

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$$

Ces deux contraintes doivent être vérifiées pendant la phase de nettoyage.

1.3.3.2 Modélisation du système :

La dynamique du robot peut être présentée à travers des équations de mouvement en utilisant l'approche de d'Euler-Lagrange [Crai 86]. L'écriture matricielle des équations du

mouvement sous une fonction de contraintes donne le modèle dynamique du manipulateur à trois bras figure 1.1. Ce modèle est décrit par les équations suivantes [Guan 10] :

$$\begin{cases} M_\theta(\theta)\ddot{\theta} = -C_\theta(\theta, \dot{\theta}) - G_\theta(\theta) + F_\theta^T \mu + u_\theta \\ \psi_\theta(\theta) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

avec $\theta \in \mathcal{R}^3$, $\dot{\theta} \in \mathcal{R}^3$, $\ddot{\theta} \in \mathcal{R}^3$ représentent respectivement les positions, les vitesses et les accélérations articulaires, $u_\theta \in \mathcal{R}^3$ désigne le vecteur des couples de commande appliqués aux articulations, $F_\theta = \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}$ est la Jacobienne de la fonction des contraintes $\psi_\theta(\theta)$, $\mu \in \mathcal{R}^2$ représente le vecteur des multiplicateurs lagrangien, $F_\theta^T \mu$ est le vecteur des forces généralisées. La fonction des contraintes $\psi_\theta(\theta)$ est donnée par :

$$\psi_\theta(\theta) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - l \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix}$$

$M_\theta(\theta) \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ est la matrice d'inertie du système, et est donnée par :

$$M_\theta(\theta) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} m_{11}(\theta) &= m_1 l_1^2 + m_2(l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1)) + m_3(l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2)) \\ &\quad + m_3(2l_2 l_3 \cos(\theta_3) + 2l_2 l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)), \\ m_{12}(\theta) &= m_2(l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2)) + m_3(l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2) + 2l_2 l_3 \cos(\theta_3) \\ &\quad + m_3(l_1 l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3))), \\ m_{22}(\theta) &= m_2 l_2^2 + m_3(l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos(\theta_3)), \\ m_{23}(\theta) &= m_3(l_3^2 + l_2 l_3 \cos(\theta_3)), \\ m_{33}(\theta) &= m_3 l_3^2, m_{21} = m_{12}, m_{32} = m_{23}, m_{13} = m_{31} = 0 \end{aligned}$$

$C_\theta(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{R}^3$ est le vecteur des forces et/ou des couples dus aux accélérations centrifuge et de Coriolis, qui est donné par :

$$C_\theta(\theta, \dot{\theta}) = C_I(\theta)\Theta_N + C_{II}(\theta)\Theta_s \quad (1.8)$$

avec : $C_I(\theta)$ est la matrice des couples de Coriolis, $C_{II}(\theta)$ est la matrice des couples centrifuges.

$$\Theta_N = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}, \quad \Theta_s = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \end{bmatrix}$$

et

$$C_I(\theta) = \begin{bmatrix} c_{I,11} & c_{I,12} & c_{I,13} \\ c_{I,21} & c_{I,22} & c_{I,23} \\ c_{I,31} & c_{I,32} & c_{I,33} \end{bmatrix}, C_{II}(\theta) = \begin{bmatrix} c_{II,11} & c_{II,12} & c_{II,13} \\ c_{II,21} & c_{II,22} & c_{II,23} \\ c_{II,31} & c_{II,32} & c_{II,33} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} c_{I,11}(\theta) &= -2m_2l_1l_2 \sin(\theta_2) - 2m_3l_1(l_2 \sin(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)), \\ c_{I,12}(\theta) &= -2m_3l_3(l_2 \sin(\theta_3) + l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3)), \\ c_{I,13}(\theta) &= c_{I,12}(\theta) \\ c_{I,21}(\theta) &= c_{I,32}(\theta) = c_{I,33}(\theta) = 0 \\ c_{I,22}(\theta) &= c_{I,23}(\theta) = -c_{I,31}(\theta) = -2m_3l_2l_3 \sin(\theta_3) \\ c_{II,11}(\theta) &= c_{II,22}(\theta) = c_{I,33}(\theta) = 0 \\ c_{II,21}(\theta) &= -c_{I,12}(\theta) = (m_2 + m_3)l_1l_2 \sin(\theta_2) + m_3l_1l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3), \\ c_{II,31}(\theta) &= -c_{I,13}(\theta) = m_3l_3(l_2 \sin(\theta_3) + l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3)), \\ c_{II,32}(\theta) &= -c_{I,23}(\theta) = m_3l_2l_3 \sin(\theta_3) \end{aligned}$$

et $G_\theta(\theta) \in \mathcal{R}^3$ est le vecteur des forces et/ou couples dus aux forces de gravitation. Il est donnée par :

$$G_\theta^T(\theta) = [g_1(\theta) \quad g_2(\theta) \quad g_3(\theta)]$$

avec :

$$\begin{aligned} g_1(\theta) &= gm_1l_1 \cos(\theta_1) + gm_2(l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \\ &\quad + gm_3(l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)), \\ g_2(\theta) &= gm_2l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + gm_3(l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)), \\ g_3(\theta) &= gm_3l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned}$$

Si l'on choisit comme vecteur d'état, le vecteur défini par :

$$x^T = [\theta^T \quad \dot{\theta}^T \quad \mu^T]^T$$

avec $\theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$ et $\mu = [\mu_1 \quad \mu_2]^T$ et comme vecteur de sorties, le vecteur $y(t) = [\theta_1 \quad \theta_3 \quad \mu_1 \quad \mu_2]^T$, alors le système (1.7) peut être décrit par le modèle singulier non linéaire suivant :

$$\begin{cases} E(\theta)\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.9)$$

où

$$E(\theta) = \begin{bmatrix} I_3 & 0 & 0 \\ 0 & M(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & I_3 & 0 \\ -G_\theta(\theta) & -C_\theta(\theta, \dot{\theta}) & F_\theta^T \\ F_\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}, B(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ I_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notons que plusieurs autres applications et processus peuvent être formulées par des équations algèbro-différentielles ou systèmes singuliers. De ce fait, l'étude et le développement des méthodologies d'analyse et de synthèse des systèmes singuliers est d'une importance grandissante dans divers domaines.

1.4 Les systèmes singuliers linéaires

L'utilisation des lois de la physique qui régissent ou décrivent les comportements des systèmes, sont souvent représentés par des fonctions non linéaires. La linéarisation de ces fonctions autour d'un point d'équilibre permet d'aboutir à un comportement localement linéaire du système originel. En effet, considérant le modèle singulier suivant :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.10)$$

Ce système (1.10), est obtenu après la linéarisation de (1.2) autour d'un point d'équilibre $(x, u) = (0, 0)$ avec :

$$E = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{\substack{x=0 \\ u=0}}, \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ u=0}}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=0 \\ u=0}}, \quad C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ u=0}} \quad \text{et} \quad D = \left. \frac{\partial g}{\partial (u)} \right|_{\substack{x=0 \\ u=0}}$$

Dans la description (1.10); $x(t) \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur des variables d'état, $u(t) \in \mathcal{R}^p$ représente l'entrée de commande et $y(t) \in \mathcal{R}^m$ est le vecteur des sorties mesurables.

$E, A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B \in \mathcal{R}^{n \times p}$, $C \in \mathcal{R}^{n \times m}$ et $D \in \mathcal{R}^{m \times p}$ sont des matrices constantes.

Les systèmes singuliers linéaires ont été étudiés principalement par *L. Dai* [Dai 89] et *F. L. Lewis* [Lewi 86]. Les auteurs ont discuté plusieurs propriétés de cette classe de systèmes telles que les notions de régularité, d'observabilité et de commandabilité ainsi que les différentes stratégies de commande et d'observation. Ces études ont donné naissance à l'analyse numérique des systèmes d'équations algèbro-différentielles.

Avant d'entamer l'étude des propriétés des systèmes singuliers, il est intéressant de noter que ces systèmes peuvent admettre une structure basée sur le concept de la matrice de transfert qui fournit un rapport entre les entrées et les sorties du système. Le concept de la matrice de transfert permet de représenter le comportement dynamique du système (1.10) de manière algébrique tel que :

$$G(s) = C(sE - A)^{-1}B + D \quad (1.11)$$

Pour un système dynamique, la fonction de transfert existe si la matrice $(sE - A)$ est non singulière. La non-singularité de cette matrice est définie par la régularité du système originel. Dans la suite, on se propose d'étudier la régularité et l'impulsivité des

systèmes singuliers linéaires ainsi que les leurs formes équivalentes. Dans les paragraphes qui suivent, certaines caractéristiques particulières des systèmes singuliers linéaires réguliers sont introduites. Il s'agit notamment de la solvabilité, la stabilité, l'atteignabilité ainsi que l'observabilité des systèmes singuliers linéaires.

1.4.1 Régularité et Impulsivité des systèmes singuliers linéaires

La régularité est une propriété très importante pour les systèmes singuliers linéaires. Elle garantit l'existence et l'unicité des solutions pour cette classe de systèmes. Considérant le système singulier linéaire (1.10), la régularité de ce système concerne seulement les matrices E et A .

Définition 1.1 (Régularité) *Le couple matriciel (E, A) du système (1.10) est dit régulier [Dai 89] si et seulement si le polynôme :*

$$\det(sE - A) \neq 0$$

où s désigne l'opérateur de Laplace. □

Dans le cadre des systèmes standards, la notion de régularité est toujours vérifiée dans la mesure où pour toute condition initiale $x(0)$ et une commande $u(t)$ connue sur un intervalle $[0, t]$, la sortie $y(t)$ du système existe et est unique. En revanche, dans le cadre des systèmes singuliers, la sortie est unique pour une condition initiale définie et une loi de commande connue si le couple (E, A) est régulier. De plus, l'impulsivité des systèmes physiques représente un phénomène indésirable et soulève un problème lors de l'étude de la stabilité et de la stabilisation. En effet, il est important de vérifier a priori si le système à étudier n'est pas impulsif. De ce fait, un système est dit non-impulsif « *impulse free* » si sa réponse temporelle reste continue pour toute condition initiale et quelque soit le signal de commande $u(t)$.

Définition 1.2 (Système non impulsif) *Un système est dit non impulsif [Marx 03] c'est-à-dire n'admet pas de modes impulsifs si pour toute condition initiale x_0 et toute commande $u(t)$ de classe κ , la solution $x(t)$ est continue.* □

Le théorème suivant résume certaines conditions de base pour qu'un système singulier linéaire soit non-impulsif.

Théorème 1.1 [Dai 89] *Le système singulier linéaire régulier (1.10) est non-impulsif (le couple (E, A) est non impulsif) si et seulement si la condition suivante est vérifiée :*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E & 0 \\ A & E \end{bmatrix} = n + \text{rang}(E) \quad (1.12)$$

■

1.4.2 Equivalence entre systèmes singuliers

Le choix des variables d'état utilisées pour décrire un processus singulier donné (E, A, B, C) n'est pas généralement unique et par conséquent le modèle qui le décrit n'est pas unique. Il existe deux formes équivalentes de représentation d'état des systèmes singuliers linéaires qui sont :

- La forme de *Kronecker-Weierstrass* qui existe que lorsque la paire (E, A) est régulière.
- La décomposition en valeurs singulières.

Ces formes sont utilisées pour l'analyse et la synthèse des systèmes singuliers.

1.4.2.1 Forme équivalente par décomposition de Kronecker-Weierstrass

La décomposition de *Kronecker-Weierstrass* [Dai 89] est obtenue par l'utilisation du résultat suivant :

Pour tout système de la forme (1.10) qui admet un couple (E, A) régulier, il existe deux matrices non singulières U_1 et U_2 , telles que :

$$U_1 E U_2 = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} \text{ et } U_1 A U_2 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}$$

Le système (1.10) est équivalent à :

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \quad (1.13)$$

$$\Pi \dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2 u(t) \quad (1.14)$$

$$y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \quad (1.15)$$

où $x_1 \in \mathcal{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathcal{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$ et Π est une matrice nilpotente [Guan 10], i.e., toutes ses valeurs propres sont nulles.

Π est d'indice de nilpotence κ ($\kappa \leq \dim(\Pi)$) tel que $\Pi^{\kappa-1} \neq 0$ et $\Pi^\kappa = 0$.

$$U_1 B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C U_2 = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \text{ et } U_2^{-1} x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

La dynamique du sous-système (1.13) est fixée par les valeurs propres de la matrice A_1 . Le modèle (1.13) est appelé souvent sous-système *causal* ou *lent*, tandis que le modèle (1.14) est appelé sous-système *non causal* ou *rapide*.

Définition 1.3 (Système causal) [Marx 03] Le système (1.10) où le triplet (E, A, B) est dit causal si pour chaque condition initiale x_0 et $u(t)$ admissible ($x_0 = x(0)$), le système admet une solution qui peut être écrite sous une forme ne contenant pas la dérivée de $u(t)$.

□

D'une façon générale, les matrices U_1 et U_2 , qui transforment un système singulier en sa forme équivalente définie par (1.13)-(1.15), ne sont pas uniques. Cela revient à dire, qu'il existe d'autres formes équivalentes du système singulier.

1.4.2.2 Forme équivalente par décomposition en valeurs singulières

La seconde forme équivalente est fondée sur la décomposition en valeurs singulières [Guan 10] de la matrice E . En effet, pour toute matrice $E \in \mathcal{R}^{n \times n}$ il existe deux matrices non singulières V_1 et V_2 telle que :

$$V_1 E V_2 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'utilisation de ces deux matrices permet de représenter le système (1.10) sous la forme suivante :

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2 + B_1u(t) \quad (1.16)$$

$$0 = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2 + B_2u(t) \quad (1.17)$$

$$y(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) \quad (1.18)$$

avec $V_1 A V_2 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $V_1 B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, $C V_2 = [C_1 \ C_2]$, $V_2^{-1} x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

$$x_1 \in \mathcal{R}^r \text{ et } x_2 \in \mathcal{R}^{n-r}, \text{ où } r = \text{rang}(E).$$

La description définie par (1.16)-(1.18) représente la deuxième forme équivalente du système singulier (1.10). Dans cette transformation, les matrices V_1 et V_2 ne sont pas uniques, ce qui implique l'existence d'autres formes équivalentes. La décomposition en valeurs singulières, reflète la signification physique des systèmes singuliers. Par conséquent, l'équation (1.16) est une équation différentielle qui constitue la mémoire du système. La relation (1.17) est une équation statique qui évoque l'interconnection des variables d'état. Ainsi, un système singulier peut être représenté comme un système composé de plusieurs sous-systèmes interconnectés.

1.4.3 Réponse temporelle

Nous avons signalé dans la section (1.4.1) qu'un système singulier linéaire a une solution unique pour une certaine condition initiale si et seulement si il est régulier. Dans cette section, nous allons montrer que la réponse d'un système singulier linéaire [Mull 00] est la somme des réponses du sous-système lent (1.13) et du sous-système rapide (1.14). Le développement est basé sur la forme équivalente par décomposition de *Kronecker-Weiestrass* du système singulier (1.10).

1.4.3.1 Réponse temporelle du sous-système lent

La réponse du sous-modèle dynamique (1.13) évoluant sous l'effet d'une entrée $u(t)$ peut être déterminée à partir des conditions initiales données en calculant séparément l'effet des conditions initiales et de l'entrée. En effet, ce sous-système admet une solution unique pour toute entrée $u(t)$ connue sur un intervalle $[0, t]$ et pour toute condition initiale x_{10} . Cette solution est donnée par :

$$x_1(t, u, x_{10}) = x_{1i}(t, x_{10}) + x_{1u}(t, u)$$

avec $x_{1i}(t, x_{10})$ est la réponse due à la condition initiale x_{10} qui est définie par :

$$x_{1i}(t, x_{10}) = e^{A_1 t} x_{10}$$

et $x_{1u}(t, u)$ est la réponse due à l'entrée de commande $u(t)$ qui est définie par :

$$x_{1u}(t, u) = \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau$$

D'où, la solution temporelle devient alors :

$$x_1(t) = e^{A_1 t} x_{10} + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau \quad (1.19)$$

1.4.3.2 Réponse temporelle du sous-système rapide

Le lemme (1) suivant donne la réponse temporelle du sous-modèle rapide (1.14) du système singulier.

Lemme 1 [Dai 89] *Considérons le modèle statique (1.14) $u(t) \in \mathcal{C}^\kappa$ (de classe κ), avec κ est l'indice de nilpotence de la matrice Π . Alors le sous système (1.14) admet une réponse temporelle de la forme :*

$$y_2(t) = -C_2 \sum_{\iota=0}^{\kappa-1} \Pi^\iota B_2 u^{(\iota)}(t) \quad (1.20)$$

Pour garantir la continuité de $x_2(t)$ par rapport au temps t , il faut que la commande $u(t)$ soit au moins de classe κ . Dans ce sens, la quantité κ joue un rôle important dans la théorie des équations algèbro-différentielles linéaires régulières. Pour finir, l'état $x(t)$ et la réponse $y(t)$ du système singulier (1.10) sont donnés par :

$$x(t) = U_2 \begin{bmatrix} I_{n1} \\ 0 \end{bmatrix} x_1(t) + U_2 \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n2} \end{bmatrix} x_2(t)$$

ce qui est équivalent à :

$$x(t) = U_2 \begin{bmatrix} I_{n1} \\ 0 \end{bmatrix} (e^{A_1 \cdot t} x_{10} + \int_0^t e^{A_1 \cdot (t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau) - U_2 \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n2} \end{bmatrix} \sum_{\iota=0}^{\kappa-1} \Pi^\iota B_2 u^{(\iota)}(t) \quad (1.21)$$

et par suite :

$$y(t) = C U_2 \begin{bmatrix} I_{n1} \\ 0 \end{bmatrix} (e^{A_1 \cdot t} x_{10} + \int_0^t e^{A_1 \cdot (t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau) - C U_2 \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n2} \end{bmatrix} \sum_{\iota=0}^{\kappa-1} \Pi^\iota B_2 u^{(\iota)}(t) \quad (1.22)$$

La condition initiale qui vérifie la contrainte suivante :

$$\text{pour } t \longrightarrow 0^+ \quad x(0^+) = U_2 \begin{bmatrix} I_{n1} \\ 0 \end{bmatrix} x_{10} - U_2 \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n2} \end{bmatrix} \sum_{\iota=0}^{\kappa-1} \Pi^\iota B_2 u^{(\iota)}(0^+) \quad (1.23)$$

est appelée condition initiale *admissible*². Donc un système singulier a une trajectoire unique lorsque la condition initiale $x(0)$ est admissible et que la commande $u(t)$ est $(\kappa - 1)$ fois continûment dérivable par morceaux [Marx 03]. Pour s'affranchir des hypothèses portant sur l'entrée de commande $u(t)$ et la condition initiale $x(0)$, les auteurs [Cobb 83] et [Verg 81] ont suggéré que les systèmes singuliers devraient adopter une solution généralisée en utilisant la théorie de distributions. Rappelons que, la dérivée au sens des distributions, notée f' d'une fonction f continue par morceaux, présentant des sauts d'amplitude Δf_i au point τ_i pour $i = 1, \dots, \kappa$ est donnée par [Marx 03] :

$$f'(x) = f_x + \sum_{k=1}^{\kappa} \Delta f_k \delta(x - \tau_k)$$

avec f_x est la dérivée de f par rapport à la variable x et $\delta(t)$ est l'impulsion unitaire. En effet, pour $u(t)$ une fonction continue par morceaux de classe κ , l'équivalence distributionnel du sous système non causal (1.14) devient alors :

$$\Pi \dot{x}_2' - \Pi x_2(0) \delta(t) = x_2(t) + B_2 u(t) \quad (1.24)$$

2. Le terme admissible est utilisé pour décrire les conditions initiales qui donnent naissance à une solution unique.

En utilisant l'expression de l'état $x_2(t)$ de (1.20), on obtient alors :

$$x_2(t) = - \sum_{\iota=1}^{\kappa-1} \delta^{(\iota-1)}(t) \Pi^\iota x_2(0) - \sum_{\iota=0}^{\kappa-1} \Pi^\iota B_2 u^{(\iota)}(t) \quad (1.25)$$

C'est la forme générale de la solution du sous système rapide (1.14) aux sens de distributions. Cette solution est appelée solution de distribution, dans lequel les termes impulsifs apparaissent. Il résulte de (1.19) et (1.25) que la réponse générale de l'état est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) = & U_2 \left[\frac{I_{n1}}{0} \right] (e^{A_1 \cdot t} \begin{bmatrix} I_{n1} & | & 0 \end{bmatrix} U_2^{-1} x(0) + \int_0^t e^{A_1 \cdot (t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau) \\ & - U_2 \left[\frac{0}{I_{n2}} \right] \left(\sum_{\iota=1}^{\kappa-1} \delta^{(\iota-1)}(t) \Pi^\iota \begin{bmatrix} 0 & | & I_{n2} \end{bmatrix} U_2^{-1} x(0) + \sum_{\iota=0}^{\kappa-1} \Pi^\iota B_2 u^{(\iota)}(t) \right) \end{aligned} \quad (1.26)$$

D'après l'expression (1.26), la réponse d'un système singulier admet une forme compliquée. Il comporte non seulement une partie exponentielle, qui dépend des valeurs propres de A_1 , de la condition initiale x_{10} et de l'entrée $u(t)$ sur $[0, t]$ (réponse du sous système causal), mais aussi une partie qui dépend des dérivés de l'entrée de commande (réponse du sous système non causal). Cette différence fondamentale entre les deux sous systèmes est à l'origine des appellations des sous systèmes lent et rapide.

1.4.4 Stabilité des systèmes singuliers linéaires

La stabilité est la propriété qui permet à un système de revenir à son état d'équilibre en un temps fini lorsque l'effet de la perturbation a cessé. Cette propriété est essentielle pour garantir le fonctionnement sûr d'un système dynamique. Dans ce paragraphe, nous étudions la stabilité des systèmes singuliers. Ce concept est une extension de la stabilité des systèmes ordinaires.

Définition 1.4 [Wu 94] Soit $\mathbb{B}_\delta$ une région ouverte de rayon δ , i.e., $\mathbb{B} \triangleq \{x \in \mathcal{R}^n, \|x\| < \delta\}$, et $x = x(t, t_0, Ex(0))$ la solution du système (1.2). Le point d'équilibre $x = 0$ du système (1.2) est dit stable si pour chaque $\epsilon > 0$, et $t_0 \in \mathcal{R}^+$, il existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tel que si $x(0) \in \mathbb{B}_\delta$, alors :

$$\|x(t, t_0, Ex(0))\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0$$

□

Note : La condition initiale est donnée sous la forme de $Ex(0) \in \text{Im } E$, i.e., c'est une condition initiale consistante que satisfait le système singulier correspondant [Wang 06].

Rappelons qu'une condition initiale donnée dans l'espace de E est appelée *consistante*, dans le sens que les solutions seront continuellement dépendantes de celle-ci.

De même, les définitions de la stabilité uniforme et de la stabilité asymptotique pour les systèmes ordinaires peuvent être généralisées aux systèmes singuliers.

Définition 1.5 [Wang 06] *Le point d'équilibre $x = 0$ du système (1.2) est dit asymptotiquement stable si il est stable et, il existe un $\delta_0(t_0) > 0$ tel que si*

$$x(0) \in \mathbb{B}_{\delta_0} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, Ex(0))\| = 0$$

□

La définition mentionnée ci-dessus est aussi valable pour le cas des systèmes singuliers linéaires.

On démontre que dans le cas linéaire un système singulier caractérisé par la paire (E, A) (1.10) est asymptotiquement stable si les pôles de $\det(sE - A) = 0$ sont à partie réelle négative [Wang 06]. Dans ce cas on convient de dire que le couple (E, A) est dit stable.

1.4.5 Admissibilité des systèmes singuliers linéaires

Dans le cadre des modèles singuliers, il est plus adéquat de parler de l'admissibilité plutôt que de la stabilité [Dai 89]. En effet, dans la plupart des situations, les termes impulsifs ne sont pas souhaitables, car ils peuvent saturer la réponse de l'état ou même détruire le système. De ce fait, et pour que le système singulier soit stable et non-impulsif « *impulse free* », on définit une notion supplémentaire appelée *admissibilité*.

Définition 1.6 (Admissibilité) *Le système singulier (1.10) est dit admissible [Wang 06] si et seulement si le couple (E, A) est régulier, non-impulsif et stable.* □

Par la suite, et pour étudier l'observabilité des systèmes singuliers, nous allons commencer par la caractérisation de l'ensemble des états atteignables depuis une condition initiale donnée.

1.4.6 État atteignable

Contrairement aux systèmes ordinaires, un système singulier ne peut atteindre généralement tous les états possibles dans le sous-espace de dimension n . Ce concept est généralisé dans la théorie des systèmes singuliers comme l'ensemble des états accessibles ou atteignables [Dai 89].

Définition 1.7 (État atteignable) [Dai 89] : un état $x_a(t) \in \mathcal{R}^n$ est dit atteignable, s'il existe une condition initiale $x(0)$ et une entrée de commande admissible $u(t)$ et $t_f > 0$ telles que $x(t_f) = x_a(t)$ $\square$

Notons par $R(0)$ l'ensemble des états atteignables depuis une condition initiale nulle $x(0) = 0$. $R(0)$ est alors défini par :

$$R(0) = \text{Im} \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \cdots & A_1^{n_1-1} B_1 \end{bmatrix} \oplus \text{Im} \begin{bmatrix} B_2 & N B_2 & \cdots & N_1^{\kappa-1} B_2 \end{bmatrix}$$

avec $\oplus$ désigne la somme directe des espaces vectoriels.

1.4.7 Observabilité des systèmes singuliers

Le problème fondamental de l'analyse de l'observabilité d'un système physique est de pouvoir dire si l'état du système peut être déterminé en fonction des entrées et des sorties. Dans l'affirmative, la théorie de l'estimation fournit des outils pour reconstruire cet état ; nous rappelons que la connaissance des composantes de l'état non mesurées est en général nécessaire pour régler un système ou pour détecter les défauts d'un système. La valeur initiale de l'état d'un système est en général inconnue. On peut alors se poser la question : sous quelles conditions l'état du système peut-il être déterminé à partir des sorties et des entrées ? Ce problème est appelé problème d'observabilité.

Contrairement aux systèmes ordinaires, il y a plusieurs concept d'observabilité pour les systèmes singuliers. Dans cette section, nous allons rappeler les différents concepts intervenant dans l'analyse de l'observabilité de cette classe des systèmes.

Définition 1.8 (Observabilité) [Marx 03] :

Le système (1.10) est dit observable si la condition initiale $x(0)$ peut être déterminée de manière unique par $u(t)$ et $y(t)$ pour $t \in [0, +\infty[$. $\square$

Le théorème suivant caractérise l'observabilité du système singulier (1.10) avec ses sous-modèles dynamique (1.13) et statique (1.14).

Théorème 1.2 [Dai 89]

1. Le sous-système causal (1.13) est observable si et seulement si

$$\text{rang} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathcal{C}$$

2. Les propositions suivantes sont équivalentes.

2 – a. Le sous-système statique (1.14) est observable.

2 – b. $\text{rang} \begin{bmatrix} C_2^T & \Pi^T C_2^T & \cdots & (\Pi^{\kappa-1})^T C_2^T \end{bmatrix}^T = n_2$.

2 – c. $\text{rang} \begin{bmatrix} \Pi^T & C_2^T \end{bmatrix}^T = n_2$.

2 – d. $\text{rang} [E^T \ C^T]^T = n$.

3. Les propositions suivantes sont équivalentes.

3 – a. Le système singulier est observable.

3 – b. Les sous-systèmes dynamique (1.13) et statique (1.14) sont observables.

3 – c. $\text{rang} \begin{bmatrix} C_1^T & A_1^T C_1^T & \cdots & (A_1^{n_1-1})^T C_1^T \end{bmatrix}^T = n_1$ et $\text{rang} \begin{bmatrix} C_2^T & \Pi^T C_2^T & \cdots & (\Pi^{\kappa-1})^T C_2^T \end{bmatrix}^T = n_2$.

3 – d. $\text{rang} [sE^T - A^T \ C^T]^T = n$ et $\text{rang} [E^T \ C^T]^T = n$.

3 – e. La matrice

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} -A & E & & & & \\ & -A & E & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -A & E & \\ & C & & & -A & \\ & & C & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & C & \end{bmatrix}_{(n+r-1)n \times n^2}$$

est de plein rang colonne. ■

L'observabilité reflète la capacité de reconstruire l'état entier à partir de la sortie mesurée et l'entrée du système. Pour étudier l'observabilité du sous-système causal, on définit le concept de *R-observabilité* qui caractérise la capacité de reconstruire seulement l'état atteignable à partir des données sur les entrées et les sorties.

Définition 1.9 (R-Observabilité) [Marx 03] : Le système (1.10) est dit *R-observable* s'il est observable dans l'ensemble atteignable. □

Théorème 1.3 [Dai 89]

Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. Le système singulier (1.13)- (1.14) est observable.
2. Le sous-système (1.13) est observable
3. $\text{rang} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathcal{C}.$
4. La matrice

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} -A & E & & & & \\ & -A & E & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -A & E & \\ & C & & & -A & \\ & & C & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & C & \end{bmatrix}_{(n+r-1)n \times n^2}$$

est de plein rang colonne. ■

La proposition 3 permet de vérifier la R-observabilité du système singulier linéaire.

La R-observabilité ne concerne que l'état atteignable, donc ne reflète pas l'observabilité des termes impulsifs. L'observabilité de ces termes revient à étudier l'observabilité impulsive ou *Impo-observabilité* [Daro 95].

Définition 1.10 (Observabilité Impulsive) [Dai 89] : Le système (1.10) est dit *Impo-observable* si les termes impulsifs de l'état peuvent être déterminés de manière unique à partir de $y(t)$ et $u(t)$. □

Théorème 1.4 [Dai 89] On considère le modèle de la forme équivalente (1.13)-(1.14), les propositions suivantes sont équivalentes.

1. Le système (1.13)-(1.14) est *Impo-observable*.
2. Le sous modèle non causal (1.14) est *Impo-observable*.

$$3. \text{rang} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \text{rang}(E), \text{ et } \text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n.$$

$$4. \text{Ker } \Pi \cap \text{Ker } C_2 \cap \text{Im } \Pi = \{0\}. \quad \text{■}$$

Pour un système singulier donné, l'observabilité, la R-observabilité et l'observabilité impulsive précisent la capacité de construire les variables d'état. Un système est Impo-observable s'il est observable, l'inverse n'est pas vraie. La relation entre ces trois concepts d'observabilité peut être illustrée par le diagramme suivant :

$$(E, A, C) \text{ observable} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{matrix} (I_{n1}, A_1, C_1) \\ \text{observable} \end{matrix} \Leftrightarrow R - \begin{matrix} (E, A, C) \\ \text{observable} \end{matrix} \\ \begin{matrix} (\Pi, I_{n2}, C_2) \\ \text{observable} \end{matrix} \Rightarrow \text{impo} - \begin{matrix} (E, A, C) \\ \text{observable} \end{matrix} \end{cases}$$

1.4.8 Détectabilité des systèmes singuliers

Pour les systèmes linéaires ordinaires, le concept de détectabilité est plus faible que l'observabilité. La détectabilité est la condition minimale pour qu'un système ordinaire peut avoir un observateur d'état. Ce concept peut également être généralisé au cas des systèmes singuliers linéaires.

La détectabilité assure que les pôles finis instables sont observables, ou les pôles non observables sont stables.

Définition 1.11 (Détectabilité des modes non impulsifs) : [Boul 08] *Les modes non impulsifs du système linéaire singulier (1.10) sont détectables si la relation suivante est satisfaite*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathcal{C} \text{ avec } \text{Re}(s) \geq 0 \quad (1.27)$$

□

Définition 1.12 (Détectabilité des modes impulsifs) : [Boul 08] *Les modes impulsifs du système linéaire singulier (1.10) sont détectables si la relation suivante est satisfaite*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \text{rang} E \quad (1.28)$$

□

Exemple 1 : Circuit électrique :

Considérons le circuit électrique représenté par la figure suivante [Marx 03] :

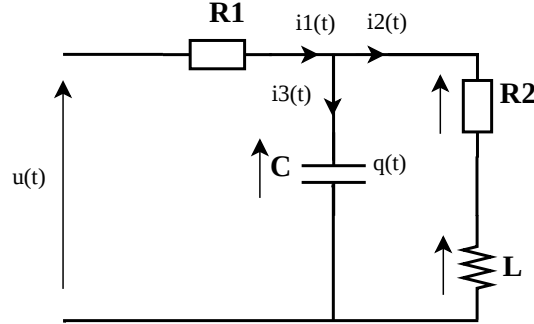


figure 1.2 – circuit électrique

Le circuit est commandé par une tension $u(t)$. Les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ traversant respectivement les deux résistances R_1 et R_2 sont considérés comme des variables de sorties. La charge aux bornes du condensateur de capacité C est notée $q(t)$ et L désigne une inductance pure. Si l'on choisit comme variables d'état $q(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$, on a alors les équations dynamiques et algébriques suivantes :

- $\frac{dq(t)}{dt} = u(t)/R_1 - 1/(CR_1)q(t) - i_2(t)$: $i_3(t)$ l'intensité qui traverse le condensateur.
- $L \frac{di_2(t)}{dt} = \frac{1}{C}q(t) - R_2 i_2(t)$: La tension aux bornes de l'inductance.
- $\frac{1}{C}q(t) + R_1 i_1(t) - u(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C}q(t) + R_1 i_2(t) + R_1 i_3(t) - u(t) = 0$: L'équation algébrique

Ces équations peuvent se mettre sous la forme d'un système singulier comme suit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{i}_2(t) \\ \dot{i}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/(CR_1) & -1 & 0 \\ 1/(LC) & -R_2/L & 0 \\ 1/C & R_1 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/R_1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Le modèle singulier (1.29) peut être écrit sous la forme équivalente de Kronecker-Weierstrass (1.13)-(1.15) avec :

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1/(CR_1) & 1 \\ -1/(LC) & -R_2/L \end{bmatrix}$$

$$\Pi = 0, B_1 = \begin{bmatrix} 1/R_1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = 0, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour étudier l'observabilité du circuit électrique décrit par (1.29), vérifions la condition 3 – c. du théorème (1.2),

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \end{bmatrix} = n_1 = 2 \text{ et } \text{rang}[C_2] = 1.$$

Le système étudié est donc observable.

1.5 Système singulier linéaire à paramètres variants (LPV)

Les systèmes singuliers linéaires à paramètres variants (LPV) [Hamd 09] représentent une généralisation de la classe des systèmes singuliers à temps variant (LTV).

La principale différence provient de la particularité que pour les systèmes LPV, la dépendance temporelle est dissimulée dans les paramètres variables dans le temps $\theta(t) \in \mathcal{R}^l$. Ces systèmes sont décrits par une représentation d'état de la forme suivante :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) = C(\theta(t))x(t) \end{cases} \quad (1.30)$$

L'utilisation du terme LPV suggère que les paramètres peuvent être connus en temps réel alors que le terme LTV signifie que le système est non stationnaire (modèle linéaire à coefficients variables dans le temps). De ce fait, un système singulier LTV est un cas spécial d'un système LPV quand le vecteur des paramètres variants dans le temps est égal au temps, i.e.

$$\theta(t) = t, l = 1$$

D'un point de vue pratique, les systèmes singuliers LPV peuvent être considérés comme étant des systèmes singuliers linéaires à temps-invariant (LTI) affectés par une incertitude paramétrique à temps variant $\theta(t)$ ou des modèles résultant de la linéarisation des processus non linéaires le long d'une trajectoire de paramètre $\theta(t)$.

Il est possible de rapprocher des systèmes singuliers non linéaires par une classe spécifique de systèmes LPV appelé quasi-LPV (qLPV) lorsque certains éléments des paramètres variants $\theta(t)$ sont choisis comme étant des signaux du système. Ces systèmes sont obtenus via une transformation LPV directe [Bria 08] ou en utilisant la représentation de Takagi-Sugeno [Taka 85].

1.5.1 Représentation des systèmes singuliers (LPV)

Les systèmes singuliers LPV peuvent être classés en plusieurs familles selon la façon dont les paramètres agissent sur le système. Parmi la grande variété de ces systèmes LPV, il est possible de distinguer trois types principaux qui sont couramment utilisés pour faire face à des systèmes LPV.

1.5.1.1 Système singulier (LPV) affine

La représentation affine des systèmes singuliers LPV est la forme la plus simple qui peut être rencontrée. Les matrices de l'espace d'état du système (1.30) dépendent des paramètres variants. Leurs expressions générales sont données par :

$$\begin{aligned} A(\theta(t)) &= A_0 + \theta_1(t)A_1 + \dots + \theta_l(t)A_l \\ B(\theta(t)) &= B_0 + \theta_1(t)B_1 + \dots + \theta_l(t)B_l \\ C(\theta(t)) &= C_0 + \theta_1(t)C_1 + \dots + \theta_l(t)C_l \end{aligned} \quad (1.31)$$

Notons que le paramètre $\theta(t)$ varie dans un polytope de sommets θ_i [Rodr 05] tels que $\theta_i \in \Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_l\}$. Chaque paramètre θ_i varie entre les bornes limites connues de $\theta(t)$.

$$\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]$$

1.5.1.2 Système singulier (LPV) polytopique

Le passage entre la représentation affine et polytopique des systèmes singuliers LPV est possible car chaque matrice représentant le système est une combinaison barycentrique de plusieurs matrices :

$$\begin{aligned} A(\theta(t)) &= \mu_1(\theta(t))A_1 + \mu_2(\theta(t))A_2 + \dots + \mu_h(\theta(t))A_h \\ B(\theta(t)) &= \mu_1(\theta(t))B_1 + \mu_2(\theta(t))B_2 + \dots + \mu_h(\theta(t))B_h \\ C(\theta(t)) &= \mu_1(\theta(t))C_1 + \mu_2(\theta(t))C_2 + \dots + \mu_h(\theta(t))C_h \end{aligned} \quad (1.32)$$

La forme polytopique du système singulier LPV est régie par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (1.33)$$

avec :

$$\mu_i(\theta) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t)) = 1 \quad (1.34)$$

et

$$h = 2^l$$

Le terme polytopique vient du fait que le vecteur $\mu(t)$ évolue dans un polytope défini par :

$$\Omega = \left\{ \mu(\theta(t)) \in \mathcal{R}^h, \mu_i(\theta(t)) \geq 0, \forall i, \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t)) = 1 \right\} \quad (1.35)$$

Il est important de noter que tout système à paramètres variants peut être exprimé comme un système polytopique. La modélisation LPV polytopique offre un cadre adéquat pour aborder le problème d'observation et de diagnostic des systèmes singuliers notamment à l'aide de l'outil LMI.

1.5.1.3 Représentation linéaire fractionnaire (LFR)

Cette représentation est l'interconnexion d'un système dynamique linéaire avec une matrice Δ (un système statique) dépendant des paramètres. Tout type de système LPV dont les matrices d'état dépendent rationnellement de paramètres, peut être mis sous la forme de LFR [Bria 08]. Cependant il n'est pas toujours aisé de trouver une représentation LFR d'ordre minimale, c'est à dire avec une matrice Δ de taille minimale.

1.6 Système singulier non linéaire

Un système singulier non linéaire est un ensemble d'équations (différentielles et algébriques) non linéaires, décrivant l'évolution temporelle des variables constitutives d'un processus sous l'action d'un nombre fini de variables indépendantes appelées entrées ou variables de commande, ou simplement commandes, que l'on peut choisir librement pour réaliser certains objectifs. L'équation d'état d'un système singulier non linéaire est :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.36)$$

avec f et g sont deux fonctions non linéaires de dimensions appropriés. Cependant, bien qu'il y ait des théories complètes pour le traitement analytique et numérique des systèmes ordinaires, la situation est beaucoup plus complexe dans le cas des systèmes singuliers non linéaires. En effet, plusieurs problèmes sont encore sans réponse.

Cette section présente quelques propriétés des systèmes singuliers non linéaires concernant la résolution et le concept d'indice [Sjöb 06] pour cette classe de systèmes.

1.6.1 Solvabilité des systèmes singuliers

La solvabilité [Venk 95] signifie qu'il existe une solution qui satisfait les équations dynamiques et statiques du modèle singulier (1.36) pour un état initial donné.

La définition d'une solution classique est adoptée par *He-Sheng Wang et al.* [Wang 06] et est formulée comme suit.

Définition 1.13 *Considérons le modèle singulier (1.2) et soit $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{R}$ un sous-intervalle de temps*

** Le vecteur d'état $x(t) : \mathfrak{T} \mapsto \mathcal{R}^n$ est dit une solution de (1.36), si $x(t)$ est continu et dérivable et satisfait (1.36). $\square$*

Dans la suite, un problème est dit *solvable* s'il admet au moins une solution. Cette définition semble normale mais il convient de noter que dans la majeure partie de la littérature, le terme *solvabilité* est employé seulement pour les systèmes qui ont une solution unique quand les conditions initiales consistantes sont fournies.

1.6.2 Indice des systèmes singuliers

Le traitement analytique et numérique des systèmes singuliers est tout à fait différent et plus compliqué que les systèmes ordinaires. La recherche sur ce type de modèles mathématiques, exige une classification appropriée selon certains degrés de difficulté. Cette condition mène au développement (indépendant) de plusieurs concepts d'indice [Sjöb 06] pour la classification de différents types de systèmes singuliers. Le concept d'indice joue un rôle principal dans l'analyse numérique des systèmes singuliers. L'indice d'un modèle singulier fournit une mesure de difficulté dans l'étude analytique aussi bien que dans la résolution numérique. Les concepts d'indice les plus couramment employés dans la littérature, sont l'indice de différentiation et l'indice de perturbation. Dans la suite nous allons étudier les notions de ces deux types d'indice.

1.6.2.1 Indice de différentiation

L'indice différentiel est le nombre minimal des différentiations requises pour obtenir un système équivalent à base des équations ordinaires.

1.6.2.2 Exemple 1 (Indice 1)

Considérons le système singulier suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f(x_1(t), x_2(t)) \\ 0 = g(x_1(t), x_2(t)) \end{cases} \quad (1.37)$$

avec f et $g : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}^n$

On suppose que $g(x_1(t), x_2(t))$ et $x_2(t)$ sont de mêmes dimensions et que les conditions initiales sont consistantes ($x(0) = 0$ et $g(x_1(0), x_2(0)) = 0$).

Le problème dans le modèle précédent est que la dérivée de l'état $x_2(t)$ n'apparaît pas explicitement, ce qui nous oblige à chercher comment passer d'un système singulier (1.37) à un système ordinaire régi seulement par des équations différentielles. Pour répondre à cette question, on effectue la différentiation des contraintes algébriques par rapport au temps de la façon suivante :

$$g_{x_1}(x_1(t), x_2(t))\dot{x}_1(t) + g_{x_2}(x_1(t), x_2(t))\dot{x}_2(t) = 0$$

$$g_{x_1}(x_1(t), x_2(t))f(x_1(t), x_2(t)) + g_{x_2}(x_1(t), x_2(t))\dot{x}_2(t) = 0 \quad (1.38)$$

avec g_{x_1} et g_{x_2} sont respectivement les matrices Jacobienne définies par rapport aux variables d'état x_1 et x_2 . Si la solution obtenue est inversible, le système singulier (1.37) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f(x_1(t), x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -g_{x_2}^{-1}(x_1(t), x_2(t))g_{x_1}(x_1(t), x_2(t))f(x_1(t), x_2(t)) \end{cases} \quad (1.39)$$

Le système ordinaire (1.39) est obtenu après une seule différentiation par rapport au temps, on dit alors que le système algèbro-différentiel (1.37) est d'indice 1.

1.6.2.3 Exemple 2 (Indice 2)

Considérons le système singulier suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f(x_1(t), x_2(t)) \\ 0 = g(x_1(t)) \end{cases} \quad (1.40)$$

Pour les mêmes conditions initiales de l'exemple 1, si on différencie le système une seule fois, on se ramène à :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f(x_1(t), x_2(t)) \\ 0 = g_{x_1}(x_1(t))f(x_1(t), x_2(t)) \end{cases} \quad (1.41)$$

Le système obtenu est encore de type algèbro-différentiel. On réalise à nouveau la différentiation du système (1.41) on obtient alors :

$$0 = g_{x_1 x_1}(x_1(t))f(x_1(t), x_2(t))f(x_1(t), x_2(t)) + g_{x_1}(x_1(t))f_{x_1}(x_1(t), x_2(t))\dot{x}_1(t) + g_{x_1}(x_1(t))f_{x_2}(x_1(t), x_2(t))\dot{x}_2(t)$$

De la même manière que l'exemple 1, si $g_{x_1}f_{x_2}$ est une matrice inversible, alors le système singulier (1.40) peut s'écrire sous la forme ordinaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f(x_1(t), x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -[g_{x_1}(x_1(t))f_{x_2}(x_1(t), x_2(t))]^{-1}[g_{x_1 x_1}(x_1(t))f(x_1(t), x_2(t))f(x_1(t), x_2(t)) + g_{x_1}(x_1(t))f_{x_1}(x_1(t), x_2(t))\dot{x}_1(t)] \end{cases}$$

La forme du système ordinaire est obtenue après une différentiation double. On dit alors que le système singulier (1.40) est d'indice 2.

Définition 1.14 [Asch 98] *Le système $f(\dot{x}(t), x(t), u(t)) = 0$ a un indice de différentiation égal à ν_d si ν_d est le nombre minimal de différentiations analytiques qu'il faut réaliser de façon que l'on puisse extraire du système singulier un système ordinaire (explicite). $\square$*

La motivation pour cette définition est basée sur le procédé de résolution des équations algébriques (en utilisant leurs dérivés si nécessaire) en transformant le système singulier en un système ordinaire. Il existe aussi un autre type d'indice pour les systèmes algèbro-différentiels ; il s'agit de l'indice de perturbation qui correspond à une mesure de la sensibilité des solutions par rapport aux perturbations du système. L'indice de différentiation et l'indice de perturbation ne sont pas toujours égaux.

1.6.2.4 Indice de perturbation

L'indice de perturbation est une mesure de la sensibilité aux perturbations d'un système singulier de la forme (1.36).

Définition 1.15 [Hair 89] *Soit $x(t)$ une solution de (1.36) sur un intervalle $[t_0, T]$. L'indice de perturbation de (1.36) est le plus petit entier ν_p tel que pour toute fonction $\hat{x}(t)$ de classe $\mathbf{C}^1$ vérifiant :*

$$f(\dot{\hat{x}}(t), \hat{x}(t), u(t)) = \delta(x(t))$$

il existe une majoration de la forme

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq C \left(\|\hat{x}(t_0) - x(t_0)\| + \sup_{\tau \in [t_0, T]} \left\| \int_{t_0}^{\tau} \delta(t) dt \right\| + \sum_{j=0}^{\nu_p-1} \sup_{\tau \in [t_0, T]} \|\delta^{(j)}(\tau)\| \right)$$

valable pour toute fonction δ de dérivées suffisamment petites et où C est une constante ne dépendant que de f et de $t_0 - T$. □

1.6.3 Réduction d'indice

L'indice de différentiation mesure aussi d'une certaine façon la difficulté qu'il y a pour résoudre un système. En effet, la différentiation est une opération qui introduit des instabilités numériques, donc plus on réalisera de différentiations, c'est-à-dire plus l'indice de différentiation sera élevé, plus le système sera numériquement difficile à résoudre.

Les solveurs des systèmes d'équations différentielles implicites et/ou d'équations algèbro-différentielles ne savent en général résoudre que les systèmes d'indice 1 et quelques systèmes d'indice 2. Lorsque l'on a des systèmes d'indice plus élevé, comme dans l'exemple 2 du paragraphe précédent, il faudra réduire l'indice. L'outil principale de réduction d'indice est la différentiation des contraintes algébriques [Kunk 01] pour un système singulier.

1.6.4 Application : Réduction d'indice du modèle singulier qui décrit un Pendule

Considérons le modèle mathématique du pendule [Sjöb 06] représenté sur la figure suivante :

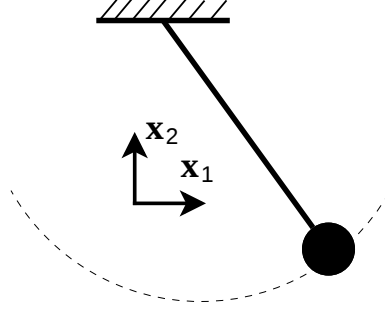


figure 1.3 – Un pendule

Les équations décrivant ce modèle sont :

$$\dot{x}_1(t) = x_3(t) \quad (1.42)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_4(t) \quad (1.43)$$

$$\dot{x}_3(t) = -x_1(t)x_5(t) - bx_3^2(t) \quad (1.44)$$

$$\dot{x}_4(t) = -x_2(t)x_5(t) - bx_4^2(t) - g \quad (1.45)$$

$$0 = x_1^2(t) + x_2^2(t) - L^2 \quad (1.46)$$

Comme il est représenté sur la figure 1.3, x_1 et x_2 sont respectivement les positions horizontale et verticale du pendule. De plus, x_3 et x_4 représentent les vitesses horizontale et verticale du pendule, x_5 est la tension de la tige qui est considérée inextensible et sans masse, la constante b représente la force de frottement avec l'air et g est le champ de pesanteur. L est la longueur de la tige. Dans la suite et à travers l'exemple du pendule, nous développerons le concept de réduction d'indice pour le système d'équations (1.42) - (1.46). La différentiation de l'équation algébrique (1.46) par rapport au temps donne :

$$2x_1(t)\dot{x}_1(t) + 2x_2(t)\dot{x}_2(t) = 0$$

Remplaçons $\dot{x}_1(t)$ par $x_3(t)$ et $\dot{x}_2(t)$ par $x_4(t)$, nous obtenons :

$$x_1(t)x_3(t) + x_2(t)x_4(t) = 0 \quad (1.47)$$

Différencions la dernière équation algébrique (1.47),

$$(\dot{x}_1(t)x_3(t) + x_1(t)\dot{x}_3(t)) + (\dot{x}_2(t)x_4(t) + x_2(t)\dot{x}_4(t)) = 0$$

De la même manière, si l'on remplace $\dot{x}_1(t)$ par $x_3(t)$ et $\dot{x}_2(t)$ par $x_4(t)$, on obtient alors,

$$(x_3^2(t) + x_1(t)\dot{x}_3(t)) + (x_2^2(t) + x_2(t)\dot{x}_4(t)) = 0 \quad (1.48)$$

En substituant une autre fois (1.44) et (1.45) dans (1.48), on obtient :

$$(x_3^2(t) - x_1(t)(x_1(t)x_5(t) + bx_3^2(t)) + (x_2^2(t) - x_2(t)(x_2(t)x_5(t) + bx_4^2(t) + g)) = 0 \quad (1.49)$$

Si l'on remplace l'équation (1.43) par (1.47) et l'équation (1.45) par (1.49) le modèle du pendule devient alors :

$$\dot{x}_1(t) = x_3(t) \quad (1.50)$$

$$0 = x_1(t)x_3(t) + x_2(t)x_4(t) \quad (1.51)$$

$$\dot{x}_3(t) = -x_1(t)x_5(t) - bx_3^2(t) \quad (1.52)$$

$$0 = 1/L^2 [x_3^2(t) - bx_1(t)x_3^2(t) - x_2(t)(bx_4^2(t) + g)] - x_5(t) \quad (1.53)$$

$$0 = x_1^2(t) + x_2^2(t) - L^2 \quad (1.54)$$

Le modèle obtenu, est d'indice 1. Cette réduction prouve que seulement x_1 et x_3 sont déterminées par des équations différentielles. Les autres variables sont données par les équations algébriques. Par conséquent, la dynamique du système est définie par x_1 et x_3 alors que x_2 , x_4 et x_5 sont algébriquement déterminées à partir de x_1 et x_3 . Une autre propriété relative, est que le nombre des équations algébriques a changé d'une, dans l'ensemble originel des équations en trois dans les équations ci-dessus.

Dans l'exemple ci-dessus, il est également possible de choisir x_2 et x_4 comme états dynamiques et x_1 , x_3 et x_5 peuvent être déterminés par des équations algébriques. D'où, une propriété importante des modèles singuliers est que différentes configurations des variables peuvent être choisies comme états dynamiques. L'inconvénient majeur est que les contraintes algébriques ont été changées, par conséquent la résolution peut introduire une instabilité sur les contraintes de départ.

1.7 Stabilité des systèmes singuliers

1.7.1 Stabilité aux sens de Lyapunov

L'outil fondamental pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires est la théorie de Lyapunov. Le concept principal de cette théorie est basé sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov. En effet, dans un certain sens la fonction de Lyapunov est une mesure de distance entre les variables d'états et un point d'équilibre. Si cette mesure de distance

diminue ou est au moins constante, l'état ne diverge pas de l'équilibre et on peut conclure à la stabilité. D'où, pour les systèmes ordinaires, la stabilité des points d'équilibre est couramment caractérisée dans le sens de Lyapunov. Dans ce paragraphe, nous étudions la théorie de stabilité des systèmes singuliers par la méthode de de Lyapunov.

Théorème 1.5 [Wang 06] *Considérons le système singulier (1.2), avec $f(0) = 0$. Pour une condition initiale consistante, on suppose qu'il existe une fonction définie positive de classe C^2 : $\mathbf{V}(x) : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}^+$ qui s'annule en $Ex = 0$ et qui satisfait les propriétés suivantes :*

(i) $\frac{\partial \mathbf{V}(x)}{\partial x} = V^T(x)E$ pour toute fonction $V(x) : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}^n$ de classe C^1 et

(ii) $\dot{\mathbf{V}}(x) = V^T(x)f(x) \leq 0$,

alors, le point d'équilibre $x = 0$ du système (1.2) est (localement) stable.

Si, de plus, la condition suivante est aussi vérifiée

(iii) $\dot{\mathbf{V}}(x) = V^T(x)f(x) < 0$.

alors, le point d'équilibre $x = 0$ est (localement) asymptotiquement stable.

■

Ce théorème est une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyapunov et ne permet pas de conclure si on ne trouve pas une telle fonction. Une fonction candidate de Lyapunov est une fonction définie positive dont on teste la décroissance autour du point d'équilibre.

1.8 Observabilité des systèmes singuliers non linéaires

Ce paragraphe introduit la notion d'observabilité des systèmes singuliers non linéaires. Signalons d'abord que dans le cas des systèmes non linéaires, la notion d'observabilité est liée aux entrées et aux conditions initiales. Il existe alors plusieurs façons de définir la notion d'observabilité. Considérons le modèle singulier avec des entrées de commandes $u(t)$ et des sorties mesurées $y(t)$ défini par :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.55)$$

Les variables $x_i(t)$ dependent implicitement des dérivés de $u(t)$, pour cela, l'entrée est supposée infiniment différentiable. Cette restriction sur l'entrée n'influencera donc pas l'observabilité du système ci-dessus.

Dans cette partie on traite l'observabilité locale faible, cela signifie que la propriété de l'observabilité est étudiée localement. Les définitions suivantes sont employées pour décrire

l'observabilité locale faible. D'abord, considérant $\pi(t, Ex_0, u(t))$ la solution du modèle singulier (1.55) avec Ex_0 est l'état initial consistante.

Définition 1.16 (Distinguabilité - Indistinguabilité) [Gerd 06] *Deux états initiaux consistants Ex_0^1 et Ex_0^2 dans un voisinage $\mathcal{V}$ tel que $Ex_0^1 \neq Ex_0^2$ sont indistinguables dans $\mathcal{V}$ si $\forall t \geq 0$ pour lesquels les trajectoires issues de Ex_0^1 et Ex_0^2 restent dans $\mathcal{V}$ on a :*

$$\pi(t, Ex_0^1, u(t)) = \pi(t, Ex_0^2, u(t)) \quad (1.56)$$

pour toute $u(t)$ infiniment différentiable. Dans le cas contraire, on dit que Ex_0^1 et Ex_0^2 sont distinguables. $\square$

Définition 1.17 (Observabilité locale faible) [Gerd 06] *Le système singulier (1.55) est localement faiblement observable en Ex_0 s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que*

$$I_{\mathcal{V}}(Ex_0) \cap \mathcal{V} = \{Ex_0\}$$

Notons que $I_{\mathcal{V}}(Ex_0)$ est l'ensemble des points non distinguables de x_0 tant que les trajectoires qui en sont issues restent dans $\mathcal{V}$. $\square$

Définition 1.18 (Observabilité) [Coro 02] *Le système singulier (1.55) est observable en $Ex_0^1 \in \mathcal{V}$ si tout autre état $Ex_0^2 \neq Ex_0^1$ est distinguable de Ex_0^1 dans $\mathcal{V}$. Un système est observable s'il est observable en tout point $Ex_0^1 \in \mathcal{V}$.* $\square$

Les systèmes complexes sont caractérisés par un grand nombre de composants qui sont fortement couplés et ont une large plage d'utilisation. Toutefois, en dépit de la recherche mathématique croissante dans la modélisation, la commande et le diagnostic des dernières décennies et la grande utilisation des équipements informatiques puissants, beaucoup de méthodes avancées n'ont pas été régulièrement appliquées à des processus réels dans des conditions normales de travail. C'est souvent le développement théorique est nécessaire pour comprendre ces méthodes. Cependant, la complexité est évidemment un problème difficile en soi. Le principe d'incompatibilité essaie de rendre les implications de la complexité plus précise. Une conséquence de ce principe est évidemment que la modélisation et l'analyse des systèmes complexes seront moins précises que les systèmes simples. Une autre conséquence est que l'on devrait peut-être chercher d'autres modèles et d'outils

de représentation qui peuvent faire usage de moins de connaissances du système précis que les approches traditionnelles qui ont bien fonctionné dans la modélisation et la commande des systèmes à complexité moyenne et basse. C'est en effet la tendance dans le domaine du contrôle intelligent où la logique floue, la modélisation qualitative, réseau de neurones, systèmes experts et le raisonnement probabiliste sont explorées [Smit 97]. Dans la vie quotidienne, ainsi que dans la résolution de problèmes d'ingénierie, l'approche standard pour résoudre des problèmes complexes est de diviser pour mieux gouverner [Smit 97]. Un problème complexe est en quelque sorte divisé en un certain nombre de sous problèmes qui peuvent être résolus de manière indépendante, et dont les solutions individuelles fournissent la solution du problème initial. La clé pour résoudre ce problème avec cette approche est de trouver des axes appropriés le long de laquelle le problème peut être partitionné.

1.9 Conclusion

Ce chapitre a été consacré essentiellement à introduire le concept des systèmes singuliers ou systèmes algèbro-différentiels. Dans ce cadre, plusieurs exemples d'applications qui sont décrites par des modèles singuliers ont été d'abord proposés. Ensuite, des résultats élémentaires concernant les systèmes singuliers, y compris l'observabilité, l'existence et l'unicité de solution pour les systèmes algèbro-différentiels et la notion de stabilité ont été présentés. De plus, la notion d'indice pour les systèmes singuliers a été introduite. Il s'agit d'un concept qui joue un rôle principal dans l'analyse numérique des systèmes algèbro-différentiels. Les concepts présentés dans ce chapitre, nous paraissent suffisants pour pouvoir poursuivre la lecture aisée du présent mémoire.

Chapitre 2

Modélisation et observation d'état multi-modèles des systèmes singuliers

Sommaire

2.1	Introduction	43
2.2	Modélisation par approche multi-modèle	44
2.2.1	Zone de fonctionnement	45
2.2.2	Variable de décision	46
2.2.3	Fonction d'activation	46
2.2.4	Structures multi-modèle	46
2.2.4.1	Structure couplée	47
2.2.4.2	Structure découplée	47
2.3	Modèle singulier flou de type Takagi-Sugeno	48
2.4	Méthodes d'obtention des multi-modèles pour les systèmes singuliers	50
2.4.1	Obtention des multi-modèles par linéarisation	50
2.4.2	Obtention des multi-modèles par la méthode de transformation des non linéarités	51
2.4.3	Exemple illustratif : Disque roulant	53
2.5	Représentation polytopique des systèmes singuliers linéaires à paramètres variants	57
2.6	Stabilité des systèmes multi-modèles	59
2.6.1	Stabilité quadratique	59
2.6.2	Stabilité relaxée	60
2.7	Estimation d'état des multi-modèles singuliers	60
2.7.1	Observateur multi-modèle Proportionnel à entrées inconnues	61
2.7.1.1	Structure du multi-observateur	62
2.7.1.2	Conditions d'existence du multi-observateur	64
2.7.1.3	Procédure de synthèse du multi-observateur	64
2.7.2	Estimation des entrées inconnues	67
2.7.3	Multi-Observateur Proportionnel Intégral à entrées inconnues	67

2.7.3.1	Synthèse du multi-observateur PI	68
2.7.3.2	Détermination du multi-observateur PI	70
2.7.4	Exemple illustratif : Estimation des états du disque roulant . .	71
2.7.4.1	Détermination des paramètres du multi-observateur Pro- portionnel à entrées inconnues	71
2.7.4.2	Détermination des paramètres du multi-observateur PI	71
2.7.4.3	Comparison des performances des deux multi-observateurs	72
2.7.4.4	Estimation des entrées inconnues	74
2.8	Conclusion	74

Les approches multi-modèles sont apparues plus ou moins indépendamment dans plusieurs branches de la science et de la technologie, sous différentes terminologies. Elles s'inspirent des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S) [Smit 97].

2.1 Introduction

Les multi-modèles sont reconnus par leurs capacités à approcher les comportements dynamiques complexes d'une large gamme de systèmes. Ils se révèlent tout à fait adaptés à la modélisation des systèmes à partir de données expérimentales. Leur structure possède des propriétés mathématiques très intéressantes du point de vue de l'automatique. En effet, les multi-modèles facilitent l'extension de certains outils d'analyse développés dans le cadre des systèmes linéaires aux systèmes non linéaires et ce, sans avoir à effectuer d'analyse spécifique sur la non-linéarité du système.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étendre l'approche multi-modèle aux systèmes singuliers. Dans ce sens différentes méthodes de modélisation sont développées. Ces méthodes sont basées sur des modèles mathématiques émanant d'une description phénoménologique du système étudié. Une première méthode d'obtention d'une description multi-modèle est basée sur la technique de linéarisation. Cette technique présente des inconvénients liés à la difficulté du choix du nombre et de la position des différents points de fonctionnement ainsi que la perte d'information due essentiellement à la linéarisation. Une deuxième méthode basée sur la description de Takagi-Sugeno est aussi développée. Cette méthode utilisant l'approche par secteur non linéaire, conduit à une forme multi-modèle traduisant convenablement le comportement du système non linéaire originel.

La modélisation des systèmes singuliers LPV est aussi conduite moyennant le concept polytopique. Cette méthode est basée sur la représentation du système LPV singulier dans un polytope dont les sommets sont fixés par les valeurs limites des paramètres variants. Quant à l'estimation d'état, deux types d'observateurs sont proposés pour les systèmes singuliers multi-modèles et LPV. Le premier est un observateur multi-modèles à gain proportionnel destiné aux systèmes singuliers non linéaires approchés par un système multi-modèle. Ce type d'observateur permet de reconstruire les variables d'état du système même en présence d'entrées inconnues. Le deuxième observateur est de type proportionnel intégral. Il est dédié aux systèmes singuliers multi-modèles affectés par des entrées exogènes. Cet observateur permet d'établir une estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues du systèmes moyennant l'action intégrale.

2.2 Modélisation par approche multi-modèle

La philosophie de l'approche multi-modèle repose sur la fragmentation d'un problème complexe en sous-problèmes plus simples à résoudre et dont les solutions individuelles conduisent à la résolution du problème global d'origine. Pour résoudre des problèmes pratiques, la fragmentation peut se faire selon deux axes [Smit 97] :

- **Décomposition en composants physiques** : Cette technique est basée sur la décomposition du système complexe en éléments, unités ou sous-systèmes qui correspondent aux composants physiques comme les réacteurs chimiques, les compresseurs, etc. Le problème de modélisation peut être résolu en considérant qu'un sous-modèle simple peut être construit pour chaque unité. Ces modèles peuvent être combinés dans un modèle global par établissement des relations entre ces composants.

La difficulté principale de cette approche est d'identifier un ensemble de composants qui sont faiblement connectés. Il ne semble pas plus raisonnable de décomposer un système en composants qui sont fortement couplés, parce qu'ils ne délient pas la complexité.

- **Décomposition en phénomènes** : Une deuxième méthode est de décomposer le comportement du système en un ensemble de phénomènes. Par exemple, dans un réacteur chimique, les phénomènes appropriés peuvent être de diverses réactions chimiques tels que : le transfert de chaleur et les phénomènes thermodynamiques comme la conduction de chaleur, la transition de compression et la transition de phase ou les phénomènes de transfert de masse comme la diffusion et la convection. Les modèles de ces phénomènes peuvent être développés et combinés en tenant compte de leurs interactions.

Pour résoudre les problèmes décrits par des modèles analytiques, l'approche multi-modèle vise à remplacer la recherche d'un modèle unique $F(\cdot)$ souvent difficile à obtenir, par la recherche d'une famille de sous-modèles $f_i(t)$ et de fonctions de pondération $h_i(\xi(t))$ qui assurent la transition entre ces sous-modèles [Tanig 00].

$$F(\cdot) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) f_i(\cdot) \quad (2.1)$$

Un choix judicieux de la structure des sous-modèles $f_i(\cdot)$ et des fonctions de base $h_i(\xi)$ permet d'approcher avec une précision imposée n'importe quel comportement non linéaire dans un large domaine de fonctionnement. Le contexte de la modélisation multi-modèle est basé sur plusieurs termes principaux tels que :

2.2.1 Zone de fonctionnement

Les zones de fonctionnements représentent les domaines de validité des modèles locaux. Chaque domaine est défini autour d'un point de fonctionnement [Rodr 05']. Ces zones de fonctionnements peuvent être disjointes comme l'indique la figure 2.1. Dans ces conditions, les coefficients de pondération sont de type booléen, ils ne peuvent prendre que des valeurs 0 ou 1 et à un instant donné, il n'y a qu'un seul modèle qui est valable [Kard 04].

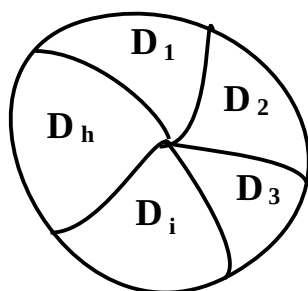


figure 2.1 – Domaines de validité disjointes

Ce type de partitionnement est fréquent dans le cas des systèmes à configurations multiples ou à plusieurs modes de fonctionnement. Ces zones de fonctionnements peuvent aussi présenter un type de chevauchement c'est-à-dire possède des zones communes [Joha 98], [Joha 93], comme le montre la figure 2.2. Le chevauchement entre les zones de validité

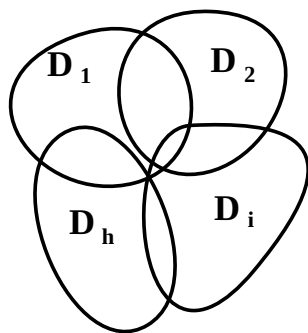


figure 2.2 – Domaines de validité avec recouvrement

des modèles est dû à la substitution des fonctions de commutation à front tendu par des fonctions à pente douce. Dans ce cas, les fonctions de commutation deviennent des fonctions à dérivés continues dont la pente détermine la vitesse de passage d'un modèle à un autre.

2.2.2 Variable de décision

La variable de décision appelée aussi **variable de prémisse**, est une variable vectorielle caractéristique du système qui peut être mesurable ou non mesurable [Orju 08]. Elle peut être par exemple une variable d'état ou un signal de commande du système.

2.2.3 Fonction d'activation

C'est une fonction qui dépend des variables de décision. Elle détermine le degré d'activation du $i^{\text{ème}}$ modèle local associé. Selon la zone où évolue le système, cette fonction indique la contribution plus ou moins importante du modèle local correspondant dans le modèle global (multi-modèle). Elle assure un passage progressif de ce modèle aux modèles locaux voisins. Les fonctions de pondération représentent une normalisation des lois $\mu_i(\xi(t))$ qui sont les poids de pondération [Moré 01] des modèles locaux. Ces fonctions dépendent des variables internes et/ou externes du système non linéaire (variables de décision).

$$h_i(\xi(t)) = \frac{\mu_i(\xi(t))}{\sum_{i=1}^h \mu_i(\xi(t))} \quad (2.2)$$

Ces fonctions sont choisies en général de façon à vérifier les propriétés de la somme convexe :

$$\sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) = 1 \text{ et } 0 \leq h_i(\xi(t)) \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, h$$

Au cours du temps, ces fonctions ont été construites de différentes façons. Elles peuvent être choisies de type booléen, à dérivées discontinues (fonctions triangulaires) ou des fonctions à dérivées continues (fonctions sigmoïdales ou Gaussiennes). Dans le cas continu, la loi exponentielle est souvent utilisée et s'applique aux différentes variables de prémisse [Akhe 04]. Les fonctions de pondération peuvent être aussi construites par l'utilisation des bornes des variables de décision.

La représentation multi-modèle d'un système non linéaire peut être obtenue à partir de différentes structures. Ces structures sont réparties selon la dimension de l'espace d'état et la nature du couplage entre les modèles locaux associés aux zones de fonctionnement.

2.2.4 Structures multi-modèle

Dans ce contexte de modélisation, les sous-modèles peuvent être agrégés de multiples façons, donnant toutes lieu à différentes classes de multi-modèles. Deux grandes familles de multi-modèles sont recensées selon que les sous-modèles partagent le même espace

d'état (multi-modèles couplés ou de *Takagi-Sugeno*) ou un espace d'état différent (multi-modèles découplés).

2.2.4.1 Structure couplée

C'est la structure multi-modèle de *Takagi-Sugeno* [Akhe 04], elle suppose que le multi-modèle possède un vecteur d'état unique et global figure 2.3. L'état global $x(t) \in \mathcal{R}^n$ étant une somme pondérée des états des modèles locaux. La représentation multi-modèle est obtenue par interpolation de h modèles locaux linéaires :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h h(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

Cette structure est la plus couramment utilisée dans le cadre de l'approche multi-modèle. Elle est connue sous différentes appellations : multi-modèle de *Takagi-Sugeno*, réseaux de modèles locaux à mélange de paramètres, multi-modèle à modèles locaux couplés ou à état couplé ou encore multi-modèle à état unique, etc.

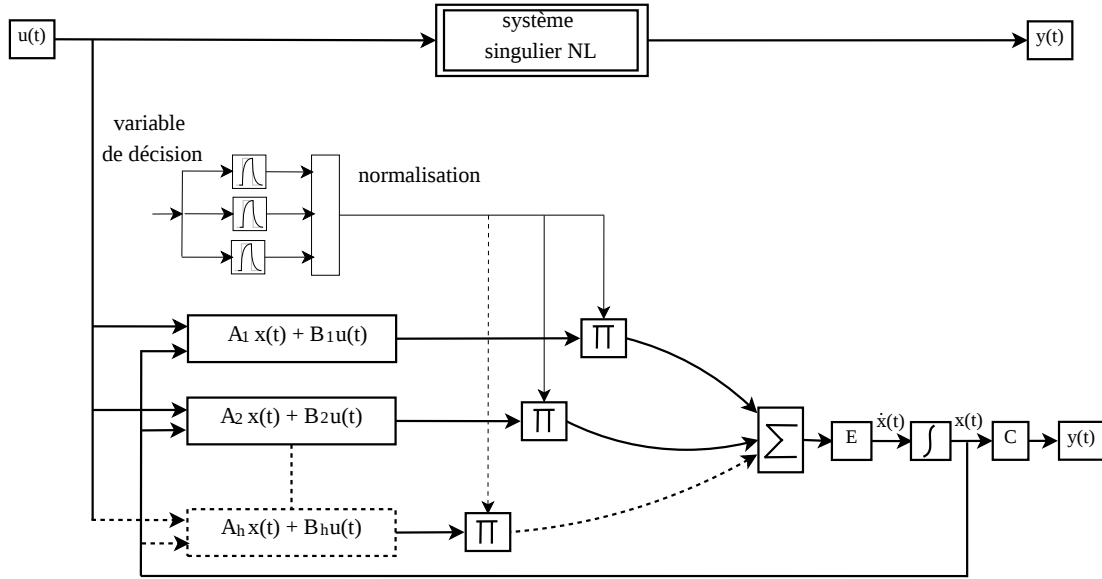


figure 2.3 – Architecture du multi-modèle couplé

2.2.4.2 Structure découplée

La représentation d'état dans cette structure suppose que le processus est composé de modèles locaux découplés et admet des vecteurs d'états indépendants. Cette structure

proposée par *Filev* [File 91], est issue d'une interpolation de sous-modèles à états découplés. En conséquence, chaque sous-modèle est caractérisé par un espace d'état propre à l'intérieur duquel il évolue indépendamment des autres sous-modèles.

Pour le cas des systèmes singuliers le modèle global peut être donné par :

$$\begin{cases} E\dot{x}_i(t) = \sum_{i=1}^h h(\xi(t))(A_i x_i(t) + B_i u(t)) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

Cette structure peut être vue comme la connexion parallèle de h modèles affines pondérés par leurs poids de pondération figure 2.4. Les signaux de sorties $y_i(t)$ des sous-modèles représentent des signaux artificiels de modélisation utilisés seulement pour décrire le comportement non linéaire des systèmes réels [Orju 08].

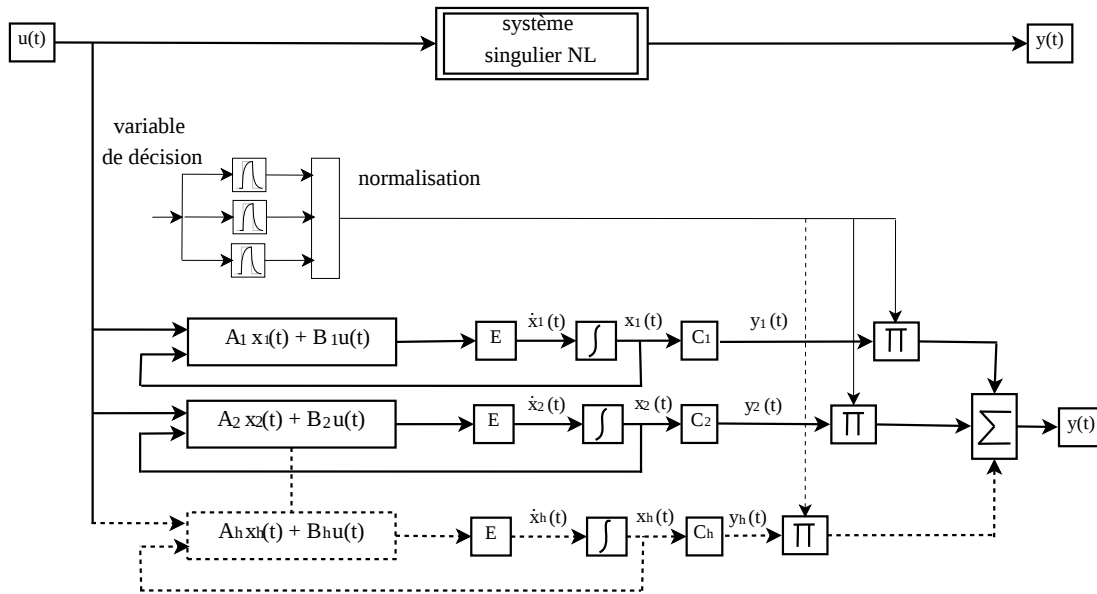


figure 2.4 – Architecture du multi-modèle découplé

2.3 Modèle singulier flou de type Takagi-Sugeno

Le modèle flou proposé par *Takagi-Sugeno* [Taka 85] est décrit par des règles floues : "si prémisse alors conséquence" qui représentent les relations locales d'entrées-sorties linéaires. Cela permet d'approximer la dynamique d'un système non linéaire complexe par une interpolation de modèles linéaires avec une bonne précision. Le formalisme flou intervient dans la détermination de la contribution de chacun de ces sous modèles linéaires locaux dans la représentation du système original.

Les systèmes singuliers flous ont été introduits par *Taniguchi et al* [Tanig 00] qui ont montré que le modèle flou de type *Takagi-Sugeno* est un outil d'approximation universel de tous les systèmes singuliers non linéaires *d'indice 1* (voir cette notion au chapitre 1) [Wang 04]. Partant de ce principe, nous nous proposons de considérer dans ce paragraphe la modélisation des systèmes singuliers non linéaires par une approche floue de type *Takagi-Sugeno* (TS) basée sur un ensemble fini de modèles singuliers. Les modèles singuliers flous de type TS représentés dans l'espace d'état sont décrits par des règles comme suit [Hamd 08] :

Règle $R^{(i)}$:

Si ξ_1 est $\sigma_1^{(i)}$ ET ξ_2 est $\sigma_2^{(i)}$ ET ... ET ξ_k est $\sigma_k^{(i)}$ Alors :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i \in \{1 \dots h\}$$

où h représente le nombre des règles, σ_j^i , $j = 1, \dots, k$ sont les fonctions d'appartenance des ensembles flous, k est le nombre des termes non linéaires. $\xi_1, \dots, \xi_k$ sont les variables de prémisses qui peuvent être des fonctions des variables d'état, des entrées ou une combinaison des deux. Les matrices A_i , B_i , C_i et E sont des matrices de dimensions appropriées. A chaque règle est attribué un poids $W_i(\xi(t))$ qui dépend du vecteur $\xi(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_k(t)]$ et du choix de l'opérateur logique. L'opérateur ET est souvent choisi comme étant un produit, d'où :

$$W_i(\xi(t)) = \prod_{j=1}^K \sigma_j^i(\xi(t)), i = 1, 2, \dots, h \text{ avec } W_i(\xi(t)) \geq 0 \quad \forall t > 0 \quad (2.5)$$

En imposant $h_i(\xi(t)) = \frac{W_i(\xi(t))}{\sum_{i=1}^h W_i(\xi(t))}$

avec $\sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) = 1$ et $h_i(\xi(t)) \geq 0$. Les équations d'état et de sortie peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

La particularité d'un modèle de type TS est que la logique floue est utilisée seulement dans la partie prémisses des règles. La partie conclusion est décrite par des modèles linéaires.

2.4 Méthodes d'obtention des multi-modèles pour les systèmes singuliers

L'approche multi-modèle a connu un intérêt certain dans l'analyse et la synthèse des systèmes non linéaires ordinaires. Seulement quelques résultats [Marx 07], [Tanig 00] ont abordé les systèmes singuliers de *Takagi-Sugeno*. Ceci nous a motivé de généraliser l'approche multi-modèle pour les systèmes singuliers non linéaires [Hamd 11'], [Hamd 10], afin de simplifier les méthodes de synthèses des observateurs et de diagnostic pour cette classe de systèmes. L'idée de cette approche est d'approximer le comportement d'un système singulier non linéaire par un ensemble de modèles locaux caractérisant le comportement du système dans différentes zones de fonctionnement. Le multi-modèle est alors représenté sous forme d'une interpolation d'un ensemble de sous-modèles singuliers linéaires. Chaque modèle local est un système singulier linéaire à temps invariant. Si on dispose du modèle mathématique du système singulier non linéaire, deux méthodes sont étendues du cas ordinaire pour l'obtention des modèles singuliers locaux. La première méthode consiste à linéariser le système autour de différents points de fonctionnement [Chen 01]. La deuxième méthode est basée sur des transformations mathématiques du système singulier non linéaire. Cette méthode est basée sur l'utilisation du lemme de bornitude [Kard 04], [Morè 01].

Une troisième méthode existe et est basée sur l'identification de type boîte noire. Cette approche est utilisée lorsque le système non linéaire n'a pas de forme analytique. Dans ce mémoire, nos études sont focalisées sur la première et la deuxième technique d'obtention du multi-modèle.

2.4.1 Obtention des multi-modèles par linéarisation

Le processus non linéaire peut être représenté par un ensemble de modèles où chaque modèle local est un système singulier linéaire à temps invariant valide autour d'un point de fonctionnement ou défini dans une zone de fonctionnement caractérisée par un changement de mode dû à un événement interne. Dans le cas où l'on dispose d'un modèle non linéaire du processus, ce passage n'est pas unique en fait, car les modèles locaux peuvent être obtenus par linéarisation autour de plusieurs points de fonctionnements [Chad 02]. Considérons le système singulier non linéaire suivant :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & Ex(0) = 0 \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (2.7)$$

avec $(f, g) \in \mathcal{R}^{2n}$ sont des fonctions non linéaires continues, $x(t) \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathcal{R}^p$ l'entrée de commande et $y(t) \in \mathcal{R}^m$ le vecteur de sortie. E est une matrice singulière à paramètre constant. On s'intéresse à linéariser le système autour de différents points de fonctionnements (x_i, u_i) , $i = 1, \dots, h$ judicieusement choisis. Pour chaque point de fonctionnement, le modèle local est défini par le premier terme du développement en série de *Taylor* [Rodr 05'] du système (2.7).

La linéarisation du système singulier (2.7) autour de point de fonctionnement (x_i, u_i) est donnée par :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A_i(x(t) - x_i(t)) + B_i(u(t) - u_i(t)) + f(x_i(t), u_i(t)) \\ y(t) = C_i(x(t) - x_i(t)) + g(x_i(t), u_i(t)) \end{cases} \quad (2.8)$$

Ce modèle local peut s'écrire sous une forme plus simplifiée qui peut être exprimée comme suit :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + \Delta x_i \\ y(t) = C_i x(t) + D_i u(t) + \Delta y_i \end{cases} \quad (2.9)$$

avec

$$\begin{aligned} A_i &= \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, B_i = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \Delta x_i = f(x_i, u_i) - A_i x_i - B_i u_i \\ C_i &= \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, D_i = \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \Delta y_i = g(x_i, u_i) - C_i x_i - D_i u_i \end{aligned}$$

La formulation multi-modèle est obtenu par interpolation des modèles locaux pondérés par des fonctions d'activation $h_i(\xi(t))$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + \Delta x_i) \\ y(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(C_i x(t) + D_i u(t) + \Delta y_i) \end{cases} \quad (2.10)$$

Le nombre de modèles locaux dépend de la précision de la modélisation souhaitée, de la complexité du système non linéaire et du choix de la structure des fonctions de pondération. Un choix adéquat du nombre des points de fonctionnements paraît alors nécessaire pour réaliser un compromis entre la représentation multi-modèle d'un système non linéaire et la charge de calcul.

2.4.2 Obtention des multi-modèles par la méthode de transformation des non linéarités

Cette approche consiste à représenter le système non linéaire de façon exacte dans un espace compact des variables d'état. Considérons le processus singulier non linéaire de la forme :

$$\begin{cases} E(x(t))\dot{x}(t) = f(x(t)) + B(x(t))u(t), \\ y(t) = g(x(t)) + D(x(t))u(t), \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Pour $E(x(t))$ une matrice singulière non constante, le processus singulier non linéaire peut être représenté sous forme de modèles locaux singuliers obtenus après une transformation polytopique basée sur la bornitude des termes non linéaires. Dans la suite, on va étendre le résultat du lemme suivant [Chad 02] pour le cas des systèmes singuliers.

Lemme 2 [Chad 02]

Soit $F(x(t))$ une fonction bornée de $[-a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ pour tout $x \in [-a, b]$, $(a, b) \in \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^+$. Alors il existe deux fonctions :

$$\begin{aligned} h_i(\cdot) : [-a, b] &\rightarrow [0, 1], \forall i = 1, 2 \\ x(t) &\mapsto h_i(x(t)) \end{aligned}$$

avec $h_1(x(t)) + h_2(x(t)) = 1$ et deux scalaires α et β tels que :

$$F(x(t)) = \alpha h_1(x(t)) + \beta h_2(x(t))$$

La fonction $F(x(t))$ peut être décomposée sur $[-a, b]$;

$$\beta \leq F(x(t)) \leq \alpha$$

avec

$$\beta = \min_{x \in [-a, b]} (F(x(t))), \quad \alpha = \max_{x \in [-a, b]} (F(x(t))) \quad (2.12)$$

$$h_1(x(t)) = \frac{F(x(t)) - \beta}{\alpha - \beta}, \quad h_2(x(t)) = \frac{\alpha - F(x(t))}{\alpha - \beta} \quad (2.13)$$

□

Soit $f(x(t))$ et $g(x(t))$ deux fonctions continues et bornées sur un intervalle $\mathbb{I} \subset \mathcal{R}^p$ avec $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$, ces fonctions peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$f(x(t)) = A(x(t))x(t) \text{ et } g(x(t)) = C(x(t))x(t) \quad (2.14)$$

La forme du système singulier non linéaire (2.11) devient alors :

$$\begin{pmatrix} E(x(t))\dot{x}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(x(t)) & B(x(t)) \\ C(x(t)) & D(x(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Si $E(x(t))$ est une fonction matricielle continue et bornée, le Lemme 2 ci-dessus permet de borner chaque terme non constant de $E(x(t))$ et de $\begin{pmatrix} A(x(t)) & B(x(t)) \\ C(x(t)) & D(x(t)) \end{pmatrix}$.

Le système étudié prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^e v_k(\xi(t)) E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (2.16)$$

Les éléments e et h sont respectivement le nombre des règles associées au terme de gauche et de droite du multi-modèle (2.16). $v_k(\xi(t))$ et $h_i(\xi(t))$ sont les fonctions de pondération qui vérifient les propriétés de la somme convexe.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) = 1 & \sum_{k=1}^e v_k(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq h_i(\xi(t)) \leq 1 & 0 \leq v_k(\xi(t)) \leq 1 \end{cases}$$

Le multi-modèle (2.16) représente une forme généralisée qui peut être transformée en une forme d'un système singulier.

La reformulation du système (2.16) permet d'aboutir à :

$$\begin{cases} 0 = \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^e h_i(\xi(t)) v_k(\xi(t)) [A_i x(t) - E_k \dot{x}(t) + B_i u(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (2.17)$$

En posant

$$x^*(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}, \Leftrightarrow \dot{x}^*(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix}$$

Le modèle d'état (2.17) devient alors,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}^*(t) = \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^e h_i(\xi(t)) v_k(\xi(t)) \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_i & -E_k \end{bmatrix} x^*(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \begin{bmatrix} C_i & 0 \end{bmatrix} x^*(t) \end{cases} \quad (2.18)$$

avec

$$\sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^e h_i(\xi(t)) v_k(\xi(t)) = 1$$

Cette structure multi-modèle est liée aux nombres des termes non linéaires dans le système originel. L'inconvénient de cette méthode reste dans le nombre des modèles locaux ainsi que l'accessibilité des variables de décision des fonctions de pondération.

Toutefois d'un point de vue structurel, tous les sous-modèles constituant ce multi-modèle ont la même dimension ; un vecteur d'état unique étant employé. La complexité des sous-modèles est par conséquent constante quelle que soit la complexité du système dans les différentes zones de fonctionnement. Le multi-modèle ainsi obtenu risque alors d'être sur-paramétré et sa complexité inutilement augmentée.

2.4.3 Exemple illustratif : Disque roulant

La figure ci-dessous 2.5, représente un disque roulant sur une surface sans glissement [Sjöb 06]. Ce disque est connecté à un mur par un ressort non linéaire de raideur K et un

amortisseur de coefficient d'amortissement b . Le disque est de rayon r , de masse m et de moment d'inertie J .

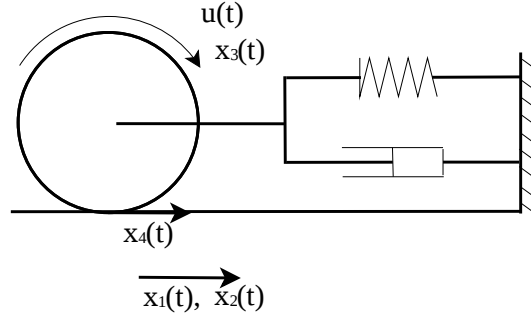


figure 2.5 – Disque roulant

On désigne par :

$x_1(t)$ la position du centre du disque ;

$x_2(t)$ la vitesse de translation du disque ;

$x_3(t)$ la vitesse angulaire du disque ;

$x_4(t)$ la force de frottement entre le disque et le sol et $u(t)$ désigne l'entrée de commande qui est un moment de rotation appliqué au centre du disque.

Les équations algèbro-différentielles qui régissent ce système sont :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -(K/m(1 + x_1^2))x_1(t) - (b/m)x_2(t) + (1/m)x_4(t) + (r/J)u(t) \\ 0 = x_2(t) - rx_3(t) \\ 0 = -(b/m)x_2(t) - (K/m(1 + x_3^2))x_3(t) - (r^2/J + 1/m)x_4(t) - (r/J)u(t) \end{cases}$$

Si on associe un vecteur de distribution à ces équations algèbro-différentielles, ce système peut être décrit par une représentation d'état de la forme suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-K}{m(1+x_1^2)} & \frac{-b}{m} & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 1 & -r & 0 \\ 0 & \frac{-b}{m} & \frac{-K}{m(1+x_3^2)} & \frac{-r^2}{J} + \frac{1}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{-r}{J} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.19)$$

Pour ne pas alourdir la charge de calcul tout en garantissant une bonne approximation, ce modèle non linéaire peut être approximé par un multi-modèle couplé composé de trois

modèles locaux définis autour de 3 points de fonctionnement. Le multi-modèle du système proposé est alors donné par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^3 h_i(x_3(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i d(t) + \Delta x_i) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.20)$$

Les valeurs numériques des matrices de ce multi-modèle sont données par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.508 & -0.75 & 0 & 0.025 \\ 0 & 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & -0.75 & -4.1329 & -0.075 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3.2532 & -0.75 & 0 & 0.025 \\ 0 & 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & -0.75 & -2.8267 & -0.075 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.7147 & -0.75 & 0 & 0.025 \\ 0 & 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & -0.75 & -3.6904 & -0.075 \end{bmatrix}, \Delta x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0002 \\ 0 \\ 0.7578 \end{bmatrix}, \Delta x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1591 \\ 0 \\ -0.6579 \end{bmatrix}$$

$$\Delta x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0242 \\ 0 \\ -0.3163 \end{bmatrix}, B_i = B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.125 \end{bmatrix}, R_i = R = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'activation sont choisies à variables de décision qui dépendent de l'état mesurable $x_3(t)$. Elles sont alors définies comme suit :

$$h_i(x_3(t)) = \frac{\mu_i(x_3(t))}{\sum_{i=1}^3 \mu_i(x_3(t))}$$

où les poids de pondération $\mu_i(x_3(t))$ sont eux-mêmes définis par :

$$\begin{aligned} \mu_1(x_3(t)) &= \exp(-1/2(\frac{x_3 + 5}{2})^2) \\ \mu_2(x_3(t)) &= \exp(-1/2(\frac{x_3}{2})^2) \\ \mu_3(x_3(t)) &= \exp(-1/2(\frac{x_3 - 5}{2})^2) \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{cases} u(t) = 2 & \text{pour } 0 \leq t \leq 2 \\ u(t) = 0 & \text{pour } t > 2 \end{cases}$$

l'entrée de commande et $d(t)$ une entrée inconnue appliquée sur l'intervalle temporel $5 \leq t \leq 10$. Afin de montrer l'efficacité du multi-modèle proposé, nous présentons les résultats de simulation sur les figures 2.6 - 2.8 qui visualisent la dynamique des sorties du système singulier non linéaires et son approximation multi-modèle.

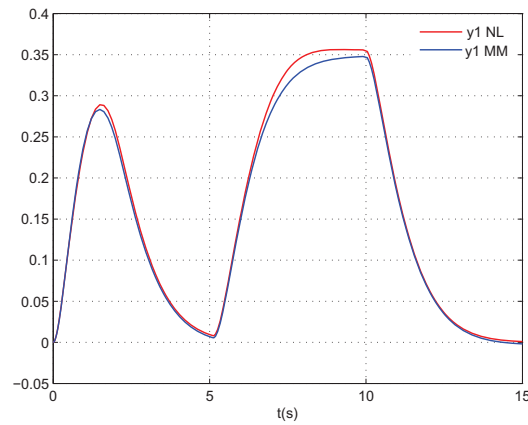


figure 2.6 – $y_1(t)$ du modèle non linéaire et $y_1(t)$ du multi-modèle

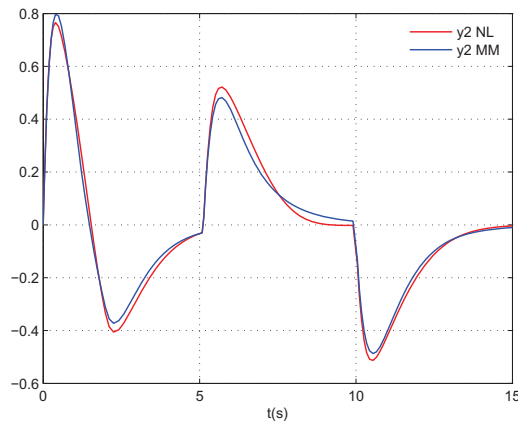


figure 2.7 – $y_2(t)$ du modèle non linéaire et $y_2(t)$ du multi-modèle

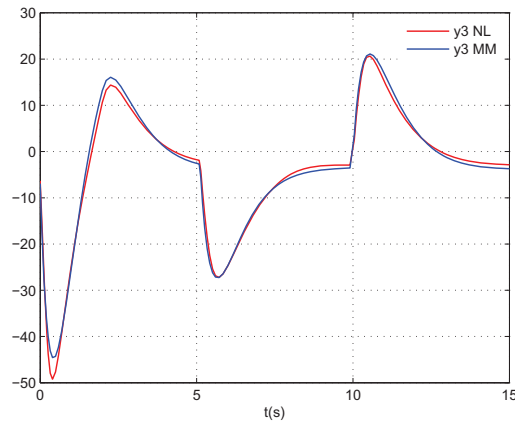


figure 2.8 – $y_3(t)$ du modèle non linéaire et $y_3(t)$ du multi-modèle

Cet exemple montre l'aptitude des multi-modèles à approximer le comportement non linéaire du système singulier. En fait, les simulations sont réalisées pour comparer les sorties du système non linéaire et leurs approximations par l'approche multi-modèle. Il apparaît alors que les sorties du multi-modèle singulier suivent convenablement celles du modèle non linéaires.

Cette section a présenté donc les principales techniques d'obtention d'une représentation multi-modèle. L'adoption d'une démarche similaire à celle exposée au cours de l'exemple précédent, conduit à une représentation multi-modèle d'un système singulier non linéaire. Cette démarche se heurte à un certain nombre de difficultés, telle que le choix du nombre et de la position des différents points de fonctionnements qui reste assez délicat à réaliser. La représentation mathématique des multi-modèles s'apparente aussi à des formes de modélisation de systèmes de type LPV dont les paramètres varient dans le temps.

2.5 Représentation polytopique des systèmes singuliers linéaires à paramètres variants

Comme nous l'avons vu précédemment, la représentation mathématique des multi-modèles est également reliée aux formes de modélisation des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV), dont les paramètres changent en fonction du temps [Bria 08], [Bruz 04]. Certains systèmes LPV sont intéressants à étudier en particulier la classe des modèles dont les paramètres varient dans un domaine polytopique. Plusieurs travaux de recherche ont mis l'accent sur l'analyse et la synthèse de diverses formes de modèles qui peuvent être écrits sous une forme polytopique ordinaire [Rodr 05], [Gern 06] ou singu-

lière [Hamd 09], [Hamd 12']. Considérons la représentation d'état d'un système singulier LPV sous la forme suivante [Hamd 09] :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \tilde{A}(\theta(t))x(t) + \tilde{B}(\theta(t))u(t) + \tilde{R}(\theta(t))d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.21)$$

où $x(t) \in \mathcal{R}^n$ représente le vecteur d'état, $u(t) \in \mathcal{R}^p$ le vecteur des entrées de commande, $d(t) \in \mathcal{R}^q$ le vecteur des entrées inconnues et $y(t) \in \mathcal{R}^m$ la sortie du système. $\tilde{A}(\cdot), \tilde{B}(\cdot), \tilde{R}(\cdot)$ sont des fonctions continues qui dépendent du vecteur à paramètres variants dans le temps $\theta(t) \in \mathcal{R}^l$. Dans le cas d'une dépendance affine, le vecteur $\theta(t)$ est supposé borné et varie dans un hypercube Γ tel que [Wu 95] :

$$\theta(t) \in \Gamma = \{\theta \mid \underline{\theta}_i \leq \theta(t) \leq \bar{\theta}_i\}, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.22)$$

Dans le cas de la dépendance affine par rapport aux paramètres $\theta_i(t)$ (2.22), les éléments de la représentation du système singulier LPV (2.21) doivent vérifier :

$$\Pi(\theta(t)) = \Pi_0 + \sum_{i=1}^l \theta_i(t) \Pi_i. \quad (2.23)$$

avec

$$\Pi(\theta(t)) = \begin{pmatrix} \tilde{A}(\theta) & \tilde{B}(\theta) & \tilde{R}(\theta) \\ C & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \theta(t) \in \Gamma \quad (2.24)$$

Dans cette représentation, on suppose que les composantes du vecteur des paramètres $\theta(t)$ évoluent indépendamment et que chacun d'eux est borné. Autrement dit, le domaine Γ est un hypercube de dimension l , dont les sommets correspondent aux valeurs extrêmes de θ . L'hypercube Γ peut être remplacé par un polytope convexe de sommets $S_i = [E, A_i, B_i, C, R_i]$, $\forall i \in [1, \dots, h]$ avec $h = 2^l$. Le système (2.21) peut alors s'écrire sous la forme polytopique suivante :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i d(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.25)$$

où $\mu_i(\theta(t)) = \mu(\bar{\theta}_i, \underline{\theta}_i, \theta_i(t))$, ($\bar{\theta}_i$ et $\underline{\theta}_i$) représentent respectivement les valeurs maximales et minimales de $\theta_i(t)$. $A_i \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathcal{R}^{n \times p}$, $R_i \in \mathcal{R}^{n \times q}$ et $C \in \mathcal{R}^{m \times n}$ sont des matrices à temps invariant définies pour le $i^{\text{ième}}$ modèle. Pour caractériser le comportement global du système singulier LPV, l'ensemble des sous-modèles polytopiques sont agrégés par des fonctions de pondération $\mu_i(\theta(t))$, $\forall i \in [1, \dots, h]$. Ces fonctions sont choisies en général de façon à vérifier la propriété de la somme convexe.

$$\Omega = \left\{ \mu_i(\theta(t)) \in \mathcal{R}^h, \mu_i(\theta(t)) = [\mu_1(\theta(t)), \dots, \mu_h(\theta(t))]^T, \mu_i(\theta(t)) \geq 0, \forall i, \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t)) = 1 \right\}$$

Dans cette partie, nous avons présenté une méthodologie de modélisation des systèmes singuliers sous forme LPV polytopique. Cette représentation s'avère efficace pour décrire le comportement dynamique de nombreux systèmes avec un nombre limité de paramètres. Elle permet de prendre en compte toutes les variations paramétriques d'un système singulier.

2.6 Stabilité des systèmes multi-modèles

La stabilité des multi-modèles a été traitée dans plusieurs travaux de recherches [Kard 04], [Chad 02]. Elle dépend de l'existence d'une matrice commune, symétrique et définie positive, qui garantit la stabilité de tous les modèles locaux. Ces conditions de stabilité peuvent être exprimées en utilisant des Inégalités Linéaires Matricielles (LMI). La stabilité d'un multi-modèle est assurée si les conditions exprimées sous la forme d'un ensemble d'inégalités linéaires matricielles des théorèmes suivants sont satisfaites. Ils décrivent les conditions suffisantes de stabilité des multi-modèles de la forme suivante :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))A_i x(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (2.26)$$

2.6.1 Stabilité quadratique

Théorème 2.1 [Morè 01] *Le modèle (2.26) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice P symétrique et définie positive telle que les LMIs suivantes sont réalisables.*

$$E^T P = P^T E > 0 \quad (2.27)$$

$$A_i^T P + P A_i < 0, \forall i \in \{1, \dots, h\} \quad (2.28)$$

■

Ce théorème offre une condition suffisante pour assurer la stabilité asymptotique du multi-modèle (2.3). L'inégalité matricielle (2.28) peut être résolue en utilisant des outils numériques LMI. L'existence de la matrice P dépend de deux conditions :

- La première est liée à la stabilité de tous les modèles locaux (chaque matrice A_i doit être de Hurwitz).
- La deuxième condition est relative à l'existence d'une fonction de Lyapunov commune aux h modèles.

2.6.2 Stabilité relaxée

Le théorème 2.1 est utilisé pour étudier la stabilité du multi-modèle (2.3). Il permet d'élaborer des conditions suffisantes mais pas nécessaires. Dans certains cas, ce résultat se montre très conservatif. En effet, le défaut majeur réside dans l'obligation de satisfaire h inégalités linéaires matricielles vis-à-vis de la même matrice P . C'est la raison pour laquelle certains systèmes sont stables alors qu'il n'existe pas de matrices symétrique définie positive commune. Pour remédier à ces inconvénients et d'autres surtout si le nombre de modèles locaux est grand, plusieurs travaux ont été menés [Morè 01], [Chad 02]. Les principales idées qui y sont présentées basées sur la relaxation des conditions de stabilité. Dans ce cadre, *Chadli et al* [Chad 08] ont présenté d'autres conditions de stabilité en utilisant des fonctions de Lyapunov non quadratiques de la forme :

$$V_i(x(t)) = x(t)^T P_i^T E x(t) \quad \forall i = 1, \dots, h$$

$$V(x(t)) = \max(V_1(x(t), V_2(x(t), \dots, V_h(x(t)))$$

où P_i sont des matrices symétriques et définies positives.

Le théorème 2.2 suivant est un des principaux résultats obtenus dans ce sens.

Théorème 2.2 [Chad 08] *Supposons qu'il existe des matrices symétriques et définies positives P_i pour $i = 1, \dots, h$ et des scalaires positifs τ_{ijk} vérifiant les inégalités suivantes :*

$$A_i^T P_j + P_j A_i + \sum_{k=1}^h \tau_{ijk} (P_j - P_k) < 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, h \quad (2.29)$$

alors le multi-modèle (2.3) est globalement asymptotiquement stable. ■

2.7 Estimation d'état des multi-modèles singuliers

Le problème de synthèse d'observateur pour les systèmes singuliers linéaires a fait l'objet de nombreux travaux de recherche [Daro 91], [Daro 95], [Gao 06]. Des approches basées notamment sur la construction d'observateur d'ordre plein ou d'ordre réduit [Daro 96] ont été proposées. D'autres approches développent le concept de la décomposition en valeurs singulières et de la matrice inverse généralisée [Mull 99] afin de reconstruire le vecteur d'état pour cette classe de systèmes.

Toutefois, peu de travaux ont été effectués pour la synthèse d'observateurs pour les systèmes singuliers non linéaires. Dans le papier de [Kapr 92], les auteurs ont notamment suggéré et étendu une technique de linéarisation afin de résoudre le problème d'estimation

du vecteur d'état des systèmes non linéaires singuliers avec une application sur un processus physique (un convertisseur AC-DC). Cependant, la synthèse d'observateurs pour cette classe de systèmes en présence d'entrées inconnues, peut s'avérer très délicate voire impossible vu la complexité du modèle employé, d'où l'importance d'une modélisation multi-modèle du processus qui permet de simplifier notablement la synthèse d'observateurs [Rodr 08]. L'estimation d'état du système multi-modèle s'effectue en général en utilisant un multi-observateur. Peu de travaux ont porté sur l'estimation d'état des systèmes singuliers multi-modèles [Marx 07], [Hamd 10], [Hamd 11'], c'est pourquoi nous nous intéressons dans cette section au sujet de l'observation d'état et des entrées inconnues des processus multi-modèles affectés par des perturbations. Deux types d'observateurs pour les multi-modèles singuliers affectés par des perturbations sont proposés. Le premier, est un multi-observateur proportionnel basé sur le découplage des entrées inconnues pour une unique matrice de distribution ($R_i = R$). Le deuxième multi-observateur est de type proportionnel intégral. Leur synthèse repose sur la résolution d'inégalités LMIs. Pour ces deux cas, les multi-observateurs sont synthétisés sous une forme non singulière afin de faciliter leur mise en œuvre.

2.7.1 Observateur multi-modèle Proportionnel à entrées inconnues

Considérons un système singulier non linéaire approximé par un multi-modèle composé de h modèles locaux avec une matrice de distribution commune $R = R_i$. Ce multi-modèle se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + R d(t) + \Delta x_i) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.30)$$

où $x(t) \in \mathcal{R}^n$ le vecteur d'état, $u(t) \in \mathcal{R}^p$ représente le vecteur des entrées de commande, $d(t) \in \mathcal{R}^q$ le vecteur des entrées inconnues et $y(t) \in \mathcal{R}^m$ la sortie du multi-modèle. Les matrices A_i , B_i , R , C et Δx_i sont de dimensions appropriées. $h_i(\xi(t))$ sont les fonctions de pondération qui assurent la transition entre les sous-modèles et $\xi(t)$ représente le vecteur des variables de décision. La variable de décision $\xi(t)$ est supposée accessible en temps réel, et dépendante des entrées $u(t)$ ou des sorties $y(t)$.

Les matrices E et C sont supposées uniques. Cette hypothèse n'est pas fondamentalement restrictive. En effet les différentes matrices A_i prennent en compte les variations des paramètres ou les changements des points de fonctionnement. La matrice E traduisant la structure du système ; il n'est pas abusif de la considérer constante. De même la matrice

C dépend de la nature et de la localisation des capteurs, lesquelles ne dépendent généralement pas du point de fonctionnement du système.

Tout d'abord, et avant d'expliciter les principaux résultats, les hypothèses suivantes sur le système (2.30) sont supposées vérifiées :

Hypothèse H1 : Le triplet (E, A_i, C) est R-observable, $\forall i = 1, \dots, h$, i.e.,

$$\text{rang} \begin{bmatrix} sE - A_i \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathcal{C}. \quad (2.31)$$

La R-observabilité caractérise la capacité de reconstruire l'état de la partie dynamique.

Hypothèse H2 : Les termes impulsifs du système (2.30) sont observables (le triplet (E, A_i, C) est Impo-Observable), $\forall i = 1, \dots, h$, i.e.,

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E & A_i \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \text{rank}(E) \quad (2.32)$$

ou de manière équivalente

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n \quad (2.33)$$

L'observabilité impulsive garantit la capacité d'estimer l'état de la partie statique.

2.7.1.1 Structure du multi-observateur

La synthèse du multi-observateur est basée sur le concept du découplage des entrées inconnues. L'estimation globale des états est une combinaison non linéaire des différentes sorties des observateurs locaux. L'observateur global sera alors une somme pondérée des différents observateurs linéaires. La structure du multi-observateur proposé est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y(t) + \Delta z_i) \\ \hat{x}(t) = z(t) + T_2 y(t) \end{cases} \quad (2.34)$$

où $\hat{x}(t) \in \mathcal{R}^n$ et $z(t) \in \mathcal{R}^n$ sont respectivement le vecteur d'état estimé et le vecteur d'état du multi-observateur. La fonction de pondération $h_i(\xi(t))$ est la même que celle utilisée dans le modèle global (2.30). L'objectif de la synthèse est de déterminer les matrices $N_i, G_i, \Delta z_i, L_i$ et T_2 afin que l'estimation de l'état $\hat{x}(t)$ converge vers l'état réel du système.

Définition 2.1 Les équations (2.34) définissent un multi-observateur proportionnel à entrées inconnues pour le système (2.30) si pour des conditions initiales arbitraires $Ex(0)$, $z(0)$ et une entrée arbitraire $u(t)$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0 \quad (2.35)$$

□

Soit l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, en utilisant (2.34) et l'égalité $y(t) = Cx(t)$ on obtient :

$$e(t) = (I_n - T_2C)x(t) - z(t) \quad (2.36)$$

D'après le critère d'impo-observabilité (2.33), il existe une matrice réelle $T_1 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ telle que :

$$T_1E = I_n - T_2C \quad (2.37)$$

L'erreur d'estimation (2.36) s'écrit alors sous la forme suivante :

$$e(t) = T_1Ex(t) - z(t) \quad (2.38)$$

La dynamique de cette erreur d'estimation d'état devient alors :

$$\dot{e}(t) = T_1E\dot{x}(t) - \dot{z}(t) \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(T_1A_ix(t) + T_1B_iu(t) + T_1\Delta x_i + T_1Rd(t) - N_iz(t) \\ &\quad - G_iu(t) - \Delta z_i - L_iy(t)) \\ \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))((T_1A_i - L_iC - N_iT_1E)x(t) + (T_1B_i - G_i)u(t) \\ &\quad + T_1\Delta x_i - \Delta z_i + T_1Rd(t) + N_ie(t)) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

$$T_1A_i = N_iT_1E + L_iC \quad (2.41)$$

$$G_i = T_1B_i \quad (2.42)$$

$$\Delta z_i = T_1\Delta x_i \quad (2.43)$$

$$0 = T_1R \quad (2.44)$$

$$I_n = T_1E + T_2C \quad (2.45)$$

l'équation dynamique de l'erreur d'estimation devient alors :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))N_ie(t) \quad (2.46)$$

Si l'équation dynamique de l'erreur d'estimation ci-dessus est asymptotiquement stable, l'état estimé tend asymptotiquement vers l'état réel c'est à dire $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$. Cela signifie que le multi-observateur (2.34) est un multi-observateur proportionnel à entrées inconnues stable pour le système singulier (2.30). La synthèse d'un tel multi-observateur revient à résoudre les équations (2.41)-(2.45) tout en garantissant la stabilité de toutes les matrices N_i (N_i des matrices de Hurwitz). Avant d'entamer la procédure de résolution, on donne les conditions suffisantes d'existences de l'observateur envisagé.

2.7.1.2 Conditions d'existence du multi-observateur

Le multi-observateur proportionnel à entrées inconnues (2.34) existe si les paires $(T_1 A_i, C)$ sont détectables $\forall i = 1, \dots, h$. Les paires $(T_1 A_i, C)$ sont détectables lorsque tous les modes non observables de ces paires sont stables. Le théorème suivant résume ces conditions.

Théorème 2.3 *Sous les hypothèses H1 et H2, un multi-observateur proportionnel à entrées inconnues du type (2.34) pour le système singulier multi-modèle (2.30) existe si la condition suivante est vérifiée $\forall i = 1, \dots, h$*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} sE - A_i & -R \\ 0 & sI_q \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q, \quad \forall s \in \mathcal{C} \text{ et } \text{Re}(s) \geq 0$$

■

Preuve 2.1 *Étant donné que $\text{rang} [T_1 \ T_2] = n$, alors quelque soit s complexe, on a*

$$\begin{aligned} \text{rang} \left(\begin{bmatrix} T_1 & 0 & T_2 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & -sI \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE - A_i & -R \\ 0 & sI_q \\ sC & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \right) &= \text{rang} \begin{bmatrix} sE - A_i & -R \\ 0 & sI_q \\ C & 0 \end{bmatrix} \\ \text{rang} \begin{bmatrix} sE - A_i & -R \\ 0 & sI_q \\ C & 0 \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} sI_n - T_1 A_i & -T_1 R \\ 0 & sI_q \\ C & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à la propriété de détectabilité des paires $(T_1 A_i, C)$. La dernière égalité est obtenue en considérant séparément les cas où $s = 0$ et $s \neq 0$. □

Une fois que la condition d'existence du multi-observateur est vérifiée, il reste à déterminer les paramètres de celui-ci. Ces paramètres sont définis par rapport aux matrices T_1 et K_i pour tout $i = 1, \dots, h$.

2.7.1.3 Procédure de synthèse du multi-observateur

La méthode de synthèse du multi-observateur utilise une technique introduite dans le cadre de synthèse d'observateur de type Luenberger pour les systèmes singuliers linéaires [Daro 95]. De ce fait et à partir des équations (2.44) et (2.45), on écrit :

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & R \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Sous l'hypothèse que les triplets (E, A_i, C) soient imposable-observables et que $\begin{bmatrix} E & R \\ C & 0 \end{bmatrix}$ soit de plein rang colonne, on a :

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & R \\ C & 0 \end{bmatrix}^+ \quad (2.48)$$

le superscript $(+)$ représente la matrice pseudo-inverse [Yana 11].

Cependant, et à cet instant de la synthèse, nous pouvons obtenir les matrices T_1 et T_2 . Les matrices G_i et Δz_i sont données respectivement par les équations (2.42) et (2.43). Pour résoudre l'équation de Sylvester (2.41), et en substituant (2.45) dans l'équation (2.41), il vient :

$$T_1 A_i = N_i (I_n - T_2 C) + L_i C \quad (2.49)$$

$$N_i = T_1 A_i - (L_i - N_i T_2) C \quad (2.50)$$

Soit :

$$K_i = L_i - N_i T_2 \quad (2.51)$$

D'où

$$N_i = T_1 A_i - K_i C \quad (2.52)$$

En utilisant l'expression du gain K_i , il vient :

$$L_i = K_i + N_i T_2 \quad (2.53)$$

Par la suite, il reste à déterminer les gains K_i telle que l'erreur d'estimation (2.46) converge asymptotiquement vers zéro. Aussi, afin de déterminer ces gains, il faut s'assurer de la détectabilité des paires $(T_1 A_i, C)$, $\forall i = 1, \dots, h$.

La stabilité de l'erreur d'estimation (2.46) et la détermination des gains K_i reviennent à résoudre les LMIs du théorème suivant.

Théorème 2.4 *Le multi-observateur à entrées inconnues (2.34) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique et définie positive Q et des matrices $W_i = Q K_i$ remplissant les conditions LMIs suivantes $\forall i = 1, \dots, h$:*

$$(T_1 A_i)^T Q + Q T_1 A_i - (W_i C)^T - (W_i C) < 0 \quad (2.54)$$

■

Preuve 2.2 Considérons la fonction de Lyapunov de la forme quadratique suivante :

$$V(e(t)) = e^T(t)Qe(t)$$

Afin de garantir la stabilité de l'erreur d'estimation (2.46), il faut que la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov soit négative. En utilisant l'équation (2.46), la fonction $\dot{V}(e(t))$ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \dot{e}^T(t)Qe(t) + e^T(t)Q\dot{e}(t) \\ \dot{V}(e(t)) &= \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \{e^T(t)((T_1A_i - K_iC)^TQ + Q(T_1A_i - K_iC))e(t)\} \end{aligned} \quad (2.55)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov est négative si l'inégalité suivante est vraie

$\forall h_i(\xi(t))$, avec $\sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) = 1$, $h_i(\xi(t)) \geq 0$ et $\forall e(t) \neq 0$:

$$\sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) (e^T(t)((T_1A_i - K_iC)^TQ + Q(T_1A_i - K_iC))e(t)) < 0 \quad (2.56)$$

L'inégalité (2.56) est alors vérifiée si

$$(T_1A_i - K_iC)^TQ + Q(T_1A_i - K_iC) < 0, \quad \forall i = 1, \dots, h$$

En posant $W_i = QK_i$, les inégalités ci-dessus deviennent :

$$(T_1A_i)^TQ + QT_1A_i - C^TW_i^T - W_iC < 0, \quad \forall i = 1, \dots, h.$$

Ces inégalités peuvent être résolues à l'aide de la boîte LMI Toolbox afin d'obtenir les matrices W_i et Q adéquates. Les gains du multi-observateur peuvent être calculés de la façon suivante : $K_i = Q^{-1}W_i$. Ainsi, la procédure de synthèse du multi-observateur est terminée et les matrices G_i , Δz_i , T_1 , T_2 , N_i et L_i sont donnés respectivement par (2.42), (2.43), (2.48), (2.52) et (2.53). $\square$

Afin d'augmenter la qualité de l'estimation, on définit une surface S à gauche du plan complexe délimitée par une droite d'abscisse $(-\alpha)$ où $\alpha \in \mathcal{R}^+$. Cette surface assure une certaine bornitude de la partie imaginaire des valeurs propres des matrices du système générant l'erreur d'estimation d'état (2.46) de façon à éviter les comportements oscillatoires et assurer un bon amortissement de cette erreur d'estimation. Les LMIs (2.54) sont alors remplacées par les LMIs suivantes :

$$(T_1A_i)^TQ + QT_1A_i - C^TW_i^T - W_iC + 2\alpha Q < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, h\} \quad (2.57)$$

Le multi-observateur peut être également utilisé pour l'estimation des entrées inconnues lorsque seulement les perturbations sont considérées dans le système originel.

2.7.2 Estimation des entrées inconnues

L'estimation d'état fait appel à des mesures extraites du système destinées à prendre en compte l'évolution courante du système et ce, afin de parvenir à estimer l'évolution de ses variables internes. De ce fait, et lorsqu'il n'y a pas de défaut sur le système, l'état estimé tend vers l'état réel et pour estimer les entrées inconnues, on remplace $x(t)$ par son estimé $\hat{x}(t)$ dans le modèle (2.30). On obtient alors :

$$\begin{cases} E\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(A_i\hat{x}(t) + B_iu(t) + R\hat{d}(t) + \Delta x_i) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.58)$$

L'existence de $\hat{d}(t)$ à un instant t est assurée sous réserve que les entrées inconnues sont linéairement indépendantes, c'est à dire :

$$\text{rang} R = q$$

Si la condition ci-dessus est vérifiée, alors les entrées inconnues peuvent être estimées de la manière suivante :

$$\hat{d}(t) = R^+ \left\{ E\dot{\hat{x}}(t) - \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(A_i\hat{x}(t) + B_iu(t) + \Delta x_i) \right\} \quad (2.59)$$

La construction des entrées inconnues par un multi-observateur proportionnel à entrées inconnues nécessite une procédure complémentaire, qui repose sur la fonction de dérivation du signal $\hat{x}(t)$. La dérivation d'un signal n'est pas une opération triviale du point de vue numérique, car elle est très sensible aux hautes fréquences.

À cette étape, un multi-observateur proportionnel à entrées inconnues permet de reconstruire l'état et les entrées inconnues d'un système singulier multi-modèle. L'estimation des états est basée sur la méthode de découplage des entrées inconnues à l'égard de l'erreur d'estimation. Toutefois, le problème le plus critiquable dans la conception du multi-observateur à entrées inconnues, est de résoudre l'équation (2.44). Ce problème de découplage est restrictif lorsque les matrices de distribution R_i sont différentes pour tous les points de fonctionnement. Cependant, ce problème ne se pose pas pour le cas de conception du multi-observateur proportionnel intégral à entrées inconnues que nous nous proposons de le présenter.

2.7.3 Multi-Observateur Proportionnel Intégral à entrées inconnues

Afin d'améliorer la synthèse de l'observateur en regard des perturbations sur le système, un observateur avec un gain proportionnel intégral peut alors être utilisé. En effet, cet ob-

servateur permet d'intégrer un certain degré de robustesse de l'état estimé grâce à l'action intégrale [Mora 02]. Plusieurs chercheurs ont introduit le terme intégral dans la synthèse des observateurs pour les systèmes singuliers linéaires [Kim 01], [Wu 06], [Koen 04]. En effet, en [Wu 06], une approche paramétrique de synthèse des observateurs proportionnels intégrals dédiés aux systèmes linéaires singuliers à temps continu a été proposée. En [Koen 04], les auteurs ont développé des techniques utilisant des observateurs Proportionnels Intégrals (PI) de type Luenberger d'ordre plein et d'ordre réduit avec des entrées inconnues. Ces méthodes de synthèse ont été étendues ensuite à des classes particulières de systèmes singuliers non linéaires tels que les systèmes Lipschitziens [Koen 06]. Cependant, il n'y a pas de démarche générale pour la conception des observateurs PI pour les systèmes singuliers non linéaires. Ainsi nous avons envisagé de traiter la synthèse d'un observateur PI pour cette classe de systèmes (les systèmes singuliers non linéaires). Dans ce sens nous proposons d'appliquer l'approche multi-modèle pour la caractérisation de multi-observateurs proportionnel intégral (MOPI) à entrées inconnues.

Un observateur MOPI est régi par un système d'équations de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(N_i z(t) + G_i u(t) + \Delta z_i + L_i y(t) + H_i \hat{d}(t)) \\ \hat{x}(t) = z(t) + T_2 y(t) \\ \dot{\hat{d}}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \Phi_i(y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases} \quad (2.60)$$

avec $\hat{x}(t) \in \mathcal{R}^n$, $z(t) \in \mathcal{R}^n$ et $\hat{d}(t) \in \mathcal{R}^q$ sont respectivement le vecteur d'état estimé, le vecteur d'état du multi-observateur et le vecteur des entrées inconnues estimées. $N_i, G_i, \Delta z_i, L_i, H_i, \Phi_i$ et T_2 sont les matrices du MOPI qui doivent être synthétisées.

2.7.3.1 Synthèse du multi-observateur PI

Les équations (2.60) définissent un multi-observateur proportionnel intégral à entrées inconnues pour le système (2.30), si pour des conditions initiales arbitraires $Ex(0)$, $z(0)$ et une entrée arbitraires $u(t)$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0 \quad (2.61)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (d(t) - \hat{d}(t)) = 0, \quad \forall \hat{d}(0) \quad (2.62)$$

Soit $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ l'erreur d'estimation. En utilisant (2.60), (2.30) et l'égalité (2.37) il vient :

$$e(t) = T_1 Ex(t) - z(t) \quad (2.63)$$

La dynamique de cette erreur s'écrit :

$$\dot{e}(t) = T_1 E \dot{x}(t) - \dot{z}(t) \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) (T_1 A_i x(t) + T_1 B_i u(t) + T_1 R_i d(t) + T_1 \Delta x_i \\ &\quad - N_i z(t) - G_i u(t) - \Delta z_i - L_i y(t) - H_i \hat{d}(t)) \\ \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) ((T_1 A_i - L_i C - N_i T_1 E) x(t) + (T_1 B_i - G_i) u(t) \\ &\quad + T_1 \Delta x_i - \Delta z_i + (T_1 R_i - H_i) d(t) + H_i \xi(t) + N_i e(t)) \end{aligned} \quad (2.65)$$

D'autre part, les entrées inconnues figurant dans $d(t)$ sont supposées bornées et à variation lente i.e. $\dot{d}(t) \simeq 0$ [Koen 02]. Ainsi, en posant $\zeta(t) = d(t) - \hat{d}(t)$, il vient :

$$\dot{\zeta}(t) = -\dot{\hat{d}}(t) \quad (2.66)$$

Lorsque les conditions (2.41), (2.42), (2.43) et (2.45) sont vérifiées et

$$H_i = T_1 R_i \quad (2.67)$$

les équations dynamiques de l'erreur d'estimation d'état et des entrées inconnues deviennent :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) (N_i e(t) + H_i \zeta(t)) \quad (2.68)$$

$$\dot{\zeta}(t) = - \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) (\Phi_i C (x(t) - \hat{x}(t))) \quad (2.69)$$

$$\dot{\zeta}(t) = - \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) (\Phi_i C) e(t) \quad (2.70)$$

ce qui peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \begin{bmatrix} N_i & H_i \\ -\Phi_i C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Définissons le vecteur augmenté de l'erreur dynamique d'estimation comme suit :

$$\dot{e}_a(t) = \begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

L'équation augmentée de l'erreur dynamique d'estimation s'écrit alors :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \begin{bmatrix} N_i & H_i \\ -\Phi_i C & 0 \end{bmatrix} e_a(t) \quad (2.73)$$

Comme la relation (2.73) est un système autonome multi-modèle, les critères de stabilité des multi-modèles à variables de décision mesurables étudiés pour le cas de l'observateur proportionnel à entrées inconnues peuvent être appliqués.

Il est important de rappeler que le multi-observateur (2.60) existe si les paires $(T_1 A_i, C)$ sont détectables. La condition de détectabilité est donnée par :

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sE - T_1 A_i & -T_1 R_i \\ 0 & sI_q \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q, \quad \forall s \in \mathcal{C}^+ \quad (2.74)$$

$$\forall i = 1, \dots, h$$

La condition d'existence du multi-observateur PI peut être interprétée comme la R-détectabilité [Koen 02] de l'état du système augmenté par les entrées inconnues.

2.7.3.2 Détermination du multi-observateur PI

Sous l'hypothèse que le triplet (E, A_i, C) est imposable, et à partir de (2.45), on a :

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = I_n \quad (2.75)$$

Une solution pour les matrices T_1 et T_2 est donnée par la pseudo inverse :

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}^+ \quad (2.76)$$

Après obtention de T_1 et T_2 , les matrices G_i et Δz_i sont données respectivement par les mêmes relations (2.42) et (2.43). Les matrices H_i sont déterminées par (2.67). Pour calculer les gains K_i et Φ_i , en utilisant (2.51) et (2.52), écrivons l'équation dynamique de l'erreur d'estimation (2.73) sous la forme suivante :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) (\bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C}) e_a(t) \quad (2.77)$$

avec

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} T_1 A_i & H_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_i = \begin{bmatrix} K_i \\ \Phi_i \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}, \quad e_a(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} \text{ et } H_i = T_1 R_i.$$

Par la suite, la détermination des gains $\bar{K}_i$ revient à garantir la stabilité du système régi par l'équation augmentée de l'erreur dynamique d'estimation (2.77).

En se basant sur le théorème (2.4), les conditions de stabilité sont exprimées en termes d'inégalités linéaires matricielles (LMI) de la forme suivante :

$$\bar{A}_i^T Q + Q \bar{A}_i - \bar{C}^T W_i^T - W_i \bar{C} + 2\alpha Q < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, h\} \quad (2.78)$$

avec $\alpha \in \mathcal{R}^+$ un réel utilisé pour le placement des poles du multi-observateur.

Le MOPI présenté conduit alors à une estimation asymptotique conjointe des états et des entrées inconnues pour différentes matrices de distribution R_i . L'appellation observateur proportionnel-intégral sous laquelle apparaît cet observateur tire son origine de la nature de la correction apportée par les gains K_i et Φ_i . En effet, le gain K_i assure une correction proportionnelle à l'erreur d'estimation de sortie. Quant au gain Φ_i , il assure une correction dans la boucle intégrale. Une telle action intégrale permet d'estimer l'entrée inconnue à condition que cette dernière soit constante au cours du temps ou à dynamique très lente i.e. $\dot{d}(t) \simeq 0$.

2.7.4 Exemple illustratif : Estimation des états du disque roulant

Pour comparer l'efficacité des deux multi-observateurs présentés ci-dessus, on considère la représentation multi-modèle du système disque roulant de l'exemple précédent.

2.7.4.1 Détermination des paramètres du multi-observateur Proportionnel à entrées inconnues

Le multi-observateur à entrées inconnues (2.34) est synthétisé après la vérification des conditions d'existence données par le théorème (2.3) et la résolution des inégalités linéaires matricielles (2.57). Les matrices caractérisant l'observateur sont alors données par :

$$Q=10^3 \begin{bmatrix} 4.851 & -0.527 & -1.957 & 0 \\ -0.527 & 0.091 & 0.263 & 0 \\ -1.957 & 0.263 & 1.916 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.937 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} -18.279 & 43.165 & -0.001 \\ -10.088 & 145.318 & -0.019 \\ -32.102 & 34.654 & 0.0002 \\ 0.002 & -0.003 & -4.5 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -12.963 & 23.798 & -0.001 \\ -42.523 & 112.139 & -0.019 \\ -10.076 & 7.312 & 0.0002 \\ 0.002 & -0.003 & -4.5 \end{bmatrix}, K_3 = \begin{bmatrix} -11.311 & 17.780 & -0.001 \\ -52.985 & 102.215 & -0.019 \\ -3.233 & -1.182 & 0.0002 \\ 0.002 & -0.003 & -4.5 \end{bmatrix}$$

Les autres matrices sont calculées à partir des relations (2.42), (2.43), (2.52), (2.53) et (2.48).

2.7.4.2 Détermination des paramètres du multi-observateur PI

Le multi-observateur proportionnel intégral est de la forme (2.60). La résolution des inégalités matricielles linéaires (2.78) conduisent à :

$$\begin{aligned}
Q=10^3 & \begin{bmatrix} 2.882 & -0.173 & -0.961 & 0.173 & 0.047 \\ -0.173 & 0.497 & 0.086 & 0.464 & -0.006 \\ -0.961 & 0.086 & 1.441 & -0.086 & -0.024 \\ 0.173 & 0.464 & -0.086 & 0.497 & 0.006 \\ 0.047 & -0.006 & -0.024 & 0.006 & 0.002 \end{bmatrix} \\
K_1=10^3 & \begin{bmatrix} 0.028 & -0.038 & -0.0003 \\ 0.456 & -0.651 & -0.008 \\ -0.013 & 0.022 & 0.0001 \\ -0.456 & 0.650 & 0.012 \end{bmatrix}, K_2=10^3 \begin{bmatrix} 0.028 & -0.038 & -0.0003 \\ 0.457 & -0.649 & -0.008 \\ -0.013 & 0.023 & 0.0001 \\ -0.456 & 0.648 & 0.012 \end{bmatrix} \\
K_3=10^3 & \begin{bmatrix} 0.028 & -0.039 & -0.0003 \\ 0.447 & -0.659 & -0.008 \\ -0.012 & 0.022 & 0.0001 \\ -0.447 & 0.659 & 0.012 \end{bmatrix} \\
\Phi_1=10^3 & \begin{bmatrix} 1.588 & -2.261 & -0.034 \end{bmatrix}, \Phi_2=10^3 \begin{bmatrix} 1.592 & -2.256 & -0.034 \end{bmatrix} \\
\Phi_3=10^3 & \begin{bmatrix} 1.557 & -2.292 & -0.034 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

où K_i sont les gains proportionnel et Φ_i sont les gains des actions intégrales. Les autres paramètres sont donnés par (2.42), (2.43), (2.52), (2.53) et (2.76).

2.7.4.3 Comparaison des performances des deux multi-observateurs

Pour évaluer les performances des deux multi-observateurs dans l'estimation des états et des entrées inconnues, nous avons procédé à la simulation des deux observateurs pour des entrées de commande identiques et pour les mêmes conditions initiales.

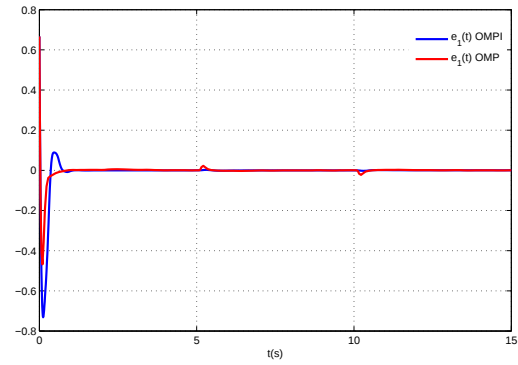
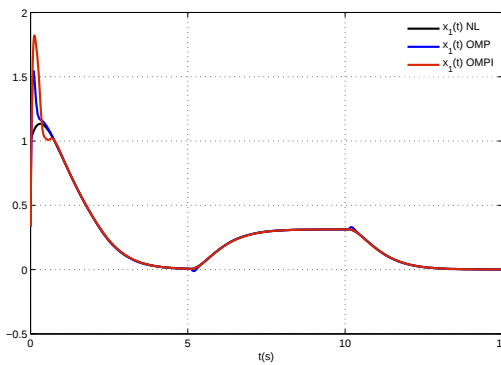


figure 2.9 – $x_1(t)$ et ses estimés $\hat{x}_1(t)$ par les deux multi-observateurs

figure 2.10 – Erreurs d'estimation $e_1(t)$ par les deux multi-observateurs

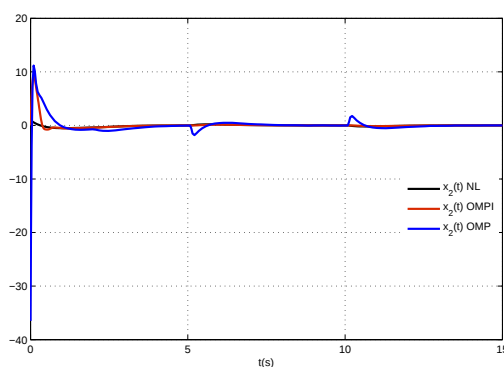


figure 2.11 – $x_2(t)$ et ses estimés $\hat{x}_2(t)$ par les deux multi-observateurs

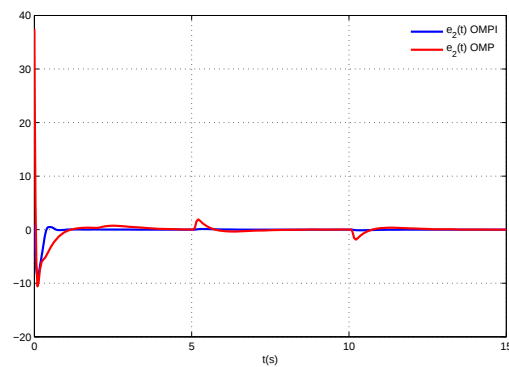


figure 2.12 – Erreurs d'estimation $e_2(t)$ par les deux multi-observateurs

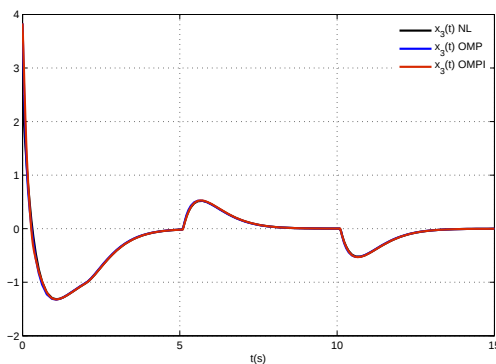


figure 2.13 – $x_3(t)$ et ses estimés $\hat{x}_3(t)$ par les deux multi-observateurs

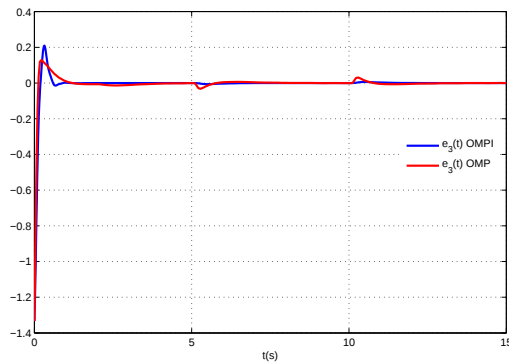


figure 2.14 – Erreurs d'estimation $e_3(t)$ par les deux multi-observateurs

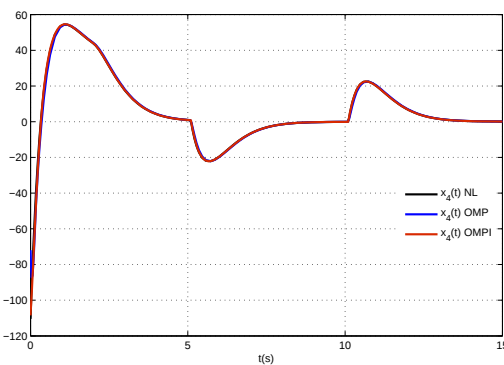


figure 2.15 – $x_4(t)$ et ses estimés $\hat{x}_4(t)$ par les deux multi-observateurs

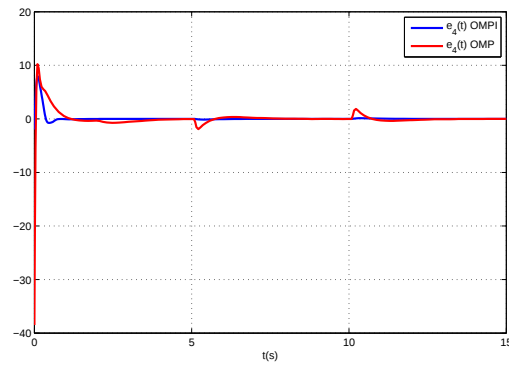


figure 2.16 – Erreurs d'estimation $e_4(t)$ par les deux multi-observateurs

Les résultats de simulation sont présentés sur les figures 2.9 - 2.16. Il y apparaît que les deux multi-observateurs simulés parviennent à la reconstruction des états du système considéré, avec des performances plus appréciables au niveau du multi-observateur PI (notamment au niveau de la vitesse de convergence vers les états réels)

2.7.4.4 Estimation des entrées inconnues

Par ailleurs le multi-observateur PI fournit en parallèle à l'observation des états, une estimation de l'entrée inconnue $d(t)$, sans qu'il ne soit nécessaire de procéder à la dérivation des variables d'état observées telle que c'est fait pour la reconstruction de telles entrées avec un multi-observateur proportionnel. Sur la figure 2.17 l'entrée inconnue $d(t)$ simulée

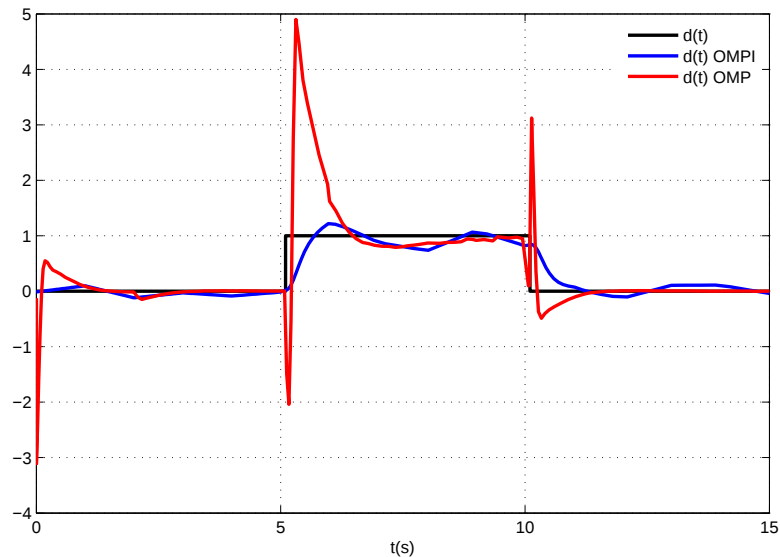


figure 2.17 – L'entrée inconnue $d(t)$ et son estimé $\hat{d}(t)$ par les deux multi-observateurs

est tracée avec son estimation conduite par un multi-observateur PI et celle fournie par un multi-observateur proportionnel. Il se voit clairement que le multi-observateur PI permet une meilleure reconstruction de l'entrée $d(t)$ simulée.

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, l'approximation des systèmes singuliers non linéaires par une représentation multi-modèle a été considérée. Les méthodes de modélisation multi-modèles utilisées telles que l'approche floue de type *Takagi-Sugeno* (T-S) et les approches poly-

topiques, nécessitent la présence d'un modèle explicite sur lequel s'effectuent les linéarisations ou les transformations polytopiques convexes. Une attention particulière a été portée au multi-modèle couplé appelé aussi multi-modèle de *Takagi-Sugeno* qui est le plus utilisé. Le multi-modèle couplé possède une structure appropriée à la modélisation des systèmes complexes de nature non linéaire. Il est basé sur la décomposition du système non linéaire en un ensemble de modèles linéaires. Chaque modèle est défini dans une zone de fonctionnement. Le processus global est obtenu suivant une stratégie de fusion, dans laquelle, le modèle global s'écrit en fusionnant les modèles simples pondérés chacun par son coefficient de pertinence. Cette représentation a permis de contourner les problèmes d'analyse et de synthèse pour les systèmes singuliers non linéaires est en particulier la synthèse d'observateurs.

Nous avons ainsi traité dans ce chapitre la synthèse de multi-observateurs à temps continu pour les systèmes non linéaires parfaitement représentés par des multi-modèles. Deux types de multi-observateurs des systèmes singuliers à entrées inconnues ont été développés : un multi-observateur proportionnel et un multi-observateur proportionnel intégral. Les conditions d'existence de ces deux multi-observateurs ont été établies. Elles sont exprimées en termes d'inégalités matricielles linéaires LMIs.

Une étude comparative au niveau de la conception et des performances des deux estimateurs d'état et des entrées inconnues a été proposée. En effet il a été montré à travers l'étude de l'observation multi-modèle du système du disque roulant que le multi-observateur amélioré avec une action intégrale parvient à une estimation performante des états du système et du signal d'entrée inconnue affectant le système étudié.

Chapitre 3

Approche multi-modèle pour le diagnostic des systèmes singuliers

Sommaire

3.1	Introduction	79
3.2	Terminologies et critères de performance relatifs à un système de diagnostic	80
3.2.1	Les terminologies de diagnostic	80
3.2.2	Critères de performance d'un système de diagnostic	81
3.3	Principe du diagnostic à base de modèles	81
3.3.1	Système multi-modèle singulier avec défauts	82
3.3.1.1	Système multi-modèle singulier avec défauts actionneurs	82
3.3.1.2	Système multi-modèle singulier avec défauts capteurs	83
3.3.1.3	Système multi-modèle singulier avec défauts système .	83
3.3.2	Localisation des défauts	84
3.3.2.1	Localisation des défauts actionneurs	85
3.3.2.2	Localisation des défauts capteurs	86
3.4	Détection et localisation des défauts des systèmes singuliers multi-modèles	86
3.4.1	Génération de résidus par optimisation multi-objectifs	87
3.4.1.1	Synthèse du générateur de résidus	87
3.4.1.2	Formulation des inégalités matricielles linéaires	91
3.4.2	Génération de résidus à base de multi-observateurs	92
3.4.2.1	Conditions de convergence	93
3.4.2.2	Synthèse du générateur de résidus	94
3.4.2.3	Analyse de la stabilité	95
3.4.3	Application : Détection et isolation des défauts d'un robot manipulateur à trois bras	100
3.4.3.1	Modèle du robot dans un système de coordonnées cartésiennes	100
3.4.3.2	Représentation multi-modèle	102

3.4.3.3	Estimation des états en présence des défauts	105
3.4.3.4	Génération des résidus par banc de multi-observateurs	108
3.5	Méthodes d'estimation de défauts	109
3.5.1	Estimation des défauts par un multi-observateur étendu	110
3.5.2	Estimation des défauts par un multi-observateur à entrées incon- nues	112
3.5.3	Application : Estimation des défauts du robot manipulateur	113
3.6	Détection et estimation des défauts des systèmes singuliers LPV	114
3.6.1	Structure polytopique des systèmes singuliers à paramètres va- riants	114
3.6.2	Structure polytopique de l'observateur proportionnel intégral	115
3.6.2.1	Synthèse de l'OPIEI	116
3.6.2.2	Convergence exponentielle de l'observateur proportion- nel intégral polytopique	117
3.6.3	Détection et isolation des défauts pour les systèmes singuliers LPV	120
3.6.3.1	Génération de résidus par l'OPIEI polytopique	120
3.6.3.2	Localisation des défauts actionneurs	122
3.6.4	Exemple illustratif	123
3.6.4.1	Synthèse de l'OPIEI polytopique	124
3.6.4.2	Simulation	125
3.6.4.3	Diagnostic des défauts par l'OPIEI polytopique	126
3.7	Conclusion	129

*Le terme "diagnostic" a été directement associé à la médecine en tant que son champ d'objet des manières d'identification de la maladie en se basant sur les symptômes. Le terme est dérivé du mot Grec : **diagnôsis**, qui signifie l'identification, tandis que les **diagnostikos** représente la capacité de reconnaître . Durant les dernières décennies, le développement technique a causé, d'une part, une croissance de la complexité des moyens techniques, et d'autre part, une croissance de la responsabilité des tâches qui sont effectuées avec l'utilisation de ces moyens. De nos jours, nous sommes témoins de l'établissement et du développement d'un domaine de nouvelles techniques de diagnostic qui surgit comme objet vital des utilisateurs dans le domaine des sciences de l'ingénieur. Le but de ce nouveau domaine est de déterminer l'état du processus et de ses actionneurs/capteurs à un instant donné avec l'utilisation des méthodes et des moyens objectifs. [Korb 04]*

3.1 Introduction

L'intérêt porté à la détection et l'isolation de défauts (FDI) pour les systèmes non linéaires s'est développé considérablement ces dernières années. En effet la conception d'un système FDI est une étape importante vers l'obtention de systèmes de commande insensibles aux défaillances.

Dans ce chapitre, nous proposons des méthodes de diagnostic à base de modèles visant la détection, l'isolation et l'estimation des défauts affectant les systèmes singuliers non linéaires décrits par des multi-modèles ou modèles singuliers LPV.

Ansi, trois méthodologies de détection, d'isolation et d'estimation des défauts sont proposées. La première repose sur la génération de résidus à base d'observateur proportionnel à entrées inconnues. Cet observateur est dédié aux systèmes singuliers multi-modèles affectés par des entrées inconnues ou perturbations. Il est basé sur la minimisation de l'influence des entrées inconnues et la maximisation de l'influence des défauts sur l'erreur d'estimation ; d'où une optimisation multi-objectifs. La deuxième méthodologie consiste en une approche de détection et d'estimation des défauts des systèmes singuliers multi-modèles à variables de décision mesurables ou non mesurables. Ces résultats sont développés d'abord dans le cas des systèmes multi-modèles standards, et étendus ensuite au cas des systèmes multi-modèles singuliers. La troisième méthode proposée est basée sur l'utilisation de l'observateur proportionnel intégral polytopique pour la détection et l'estimation des défauts des systèmes singuliers LPV. Cet observateur permet d'estimer conjointement les grandeurs d'états et les défauts.

3.2 Terminologies et critères de performance relatifs à un système de diagnostic

Nous nous proposons dans cette section de rappeler quelques définitions et terminologies relatives au diagnostic et présenter les critères de performances d'un système de diagnostic.

3.2.1 Les terminologies de diagnostic

Dans plusieurs travaux, la terminologie dans le domaine du diagnostic de défaut n'est pas cohérente. Il est difficile de comprendre les objectifs des contributions spécifiques et de comparer les différentes approches. Pour résoudre ce problème, le comité technique IFAC (International Federation of Automatic Control) SAFEPROCESS (Symposium Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes) a lancé une initiative [Chen 93] visant à définir une terminologie commune [Icha 09], [Marz 09].

Défaut : Écart non acceptable d'au moins une caractéristique d'un système par rapport à sa valeur normales.

Défaillance : Interruption permanente de la capacité d'un système à assurer une fonction requise dans des conditions opérationnelles spécifiées.

Panne : État d'un système incapable d'assurer le service spécifié à la suite d'une défaillance.

Symptôme : Événement ou ensemble de données au travers duquel le système de détection identifie le passage du procédé dans un fonctionnement anormal.

Diagnostic : Le diagnostic est l'identification de la cause probable de la (ou des) défaillance(s) à l'aide d'un raisonnement logique fondé sur un ensemble d'informations provenant d'une inspection, d'un contrôle ou d'un test. Il suit la détection de défauts et inclut la localisation et l'identification.

La détection du défaut : C'est une fonction qui consiste à déterminer l'apparition et l'instant d'occurrence d'un défaut. cette fonction peut être obtenue en utilisant le signal du résidu généré en comparant le comportement du modèle du système à celui du système réel.

La localisation du défaut : Après la détection d'un défaut dans un système, il est important de pouvoir situer le composant affecté. cette étape s'appelle localisation de défauts (en anglais, isolation). Elle est basée sur la génération de résidus de manière à ce qu'un ensemble de ces résidus soit sensible a certains défauts et insensible aux autres défauts.

L'identification ou estimation du défaut : L'identification (ou estimation) de défauts vise à caractériser leurs amplitudes et leurs évolutions temporelles. La connaissance de l'amplitude de la défaillance permet de concevoir un système tolérant aux défauts ou auto adaptatif.

3.2.2 Critères de performance d'un système de diagnostic

D'une manière générale, nous pouvons regrouper les différents critères de performance d'un système de diagnostic [Ripo 99] de la manière suivante :

La détectabilité : est l'aptitude du système de diagnostic à pouvoir détecter la présence d'une défaillance sur le procédé. Elle est fortement liée à la notion d'indicateurs de défauts (résidus). Le générateur de résidu doit, d'une certaine manière, être sensible à la défaillance que l'on souhaite détecter.

L'isolabilité : est la capacité du système de diagnostic à remonter directement à l'origine du défaut. La propriété d'isolabilité est liée à la structure des résidus et à la procédure de détection elle-même.

La sensibilité : caractérise l'aptitude du système à détecter des défauts d'une certaine amplitude. Elle dépend non seulement de la structure des résidus mais aussi du rapport de l'amplitude du bruit de mesure avec celle du défaut.

La robustesse : détermine la capacité du système à détecter des défauts indépendamment des erreurs de modélisation (sensibilité du résidu aux défauts et insensibilité vis-à-vis des perturbations). Généralement, la robustesse est définie par rapport à toutes les entrées inconnues.

3.3 Principe du diagnostic à base de modèles

La méthode du modèle est l'une des approches les plus adoptées pour le diagnostic des défauts des systèmes dynamiques. Plusieurs travaux ont traité cette approche de plusieurs points de vue et pour différentes classes de systèmes [Chen 99], [Hamm 99], [Rodr 05]. Toutefois, peu de travaux ont considéré le diagnostic des systèmes singuliers par la méthode du modèle. En effet les résultats existant ne dépassent le cas linéaires [Marx 03] ou des classes bien particulières de systèmes non linéaires [Vemu 01], [Maqu 93]. Notre contribution au niveau de ce sujet consiste à proposer une approche de diagnostic des systèmes singuliers multi-modèles qui peuvent modéliser un large ensemble de processus physiques non linéaires. L'approche de diagnostic que nous développons dans ce

chapitre étend le principe de diagnostic à base de modèle aux systèmes singuliers multi-modèles.

3.3.1 Système multi-modèle singulier avec défauts

La première étape de la méthode de diagnostic à base de modèle consiste à construire un modèle mathématique du système à surveiller. Dans le cas, une représentation multi-modèle est utilisée pour approcher le comportement du système singulier non linéaire. La figure 3.1 présente les différents types de défauts qui peuvent apparaître sur les systèmes multi-modèles considérés.

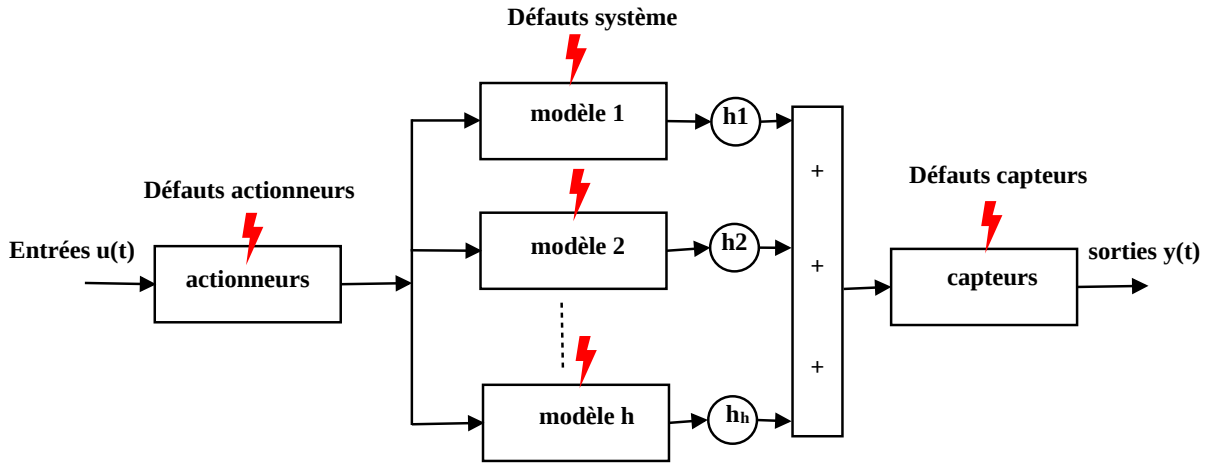


figure 3.1 – Multi-modèle en boucle ouverte avec défauts

3.3.1.1 Système multi-modèle singulier avec défauts actionneurs

Les défauts actionneurs agissent au niveau de la partie opérative et détruisent le signal d'entrée du système. Une partie du système devient incontrôlable et de nouveaux actionneurs doivent être utilisés. Cela peut causer une perte totale ou partielle de l'actionneur. Le système singulier multi-modèle peut être décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i d(t) + F_i f_a(t) + \Delta x_i) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x(t) \in \mathcal{R}^n$ le vecteur d'état, $u(t) \in \mathcal{R}^p$ représente le vecteur des entrées, $d(t) \in \mathcal{R}^q$ le vecteur des entrées inconnues, $f_a(t) \in \mathcal{R}^p$ le vecteur des défauts actionneurs et $y(t) \in \mathcal{R}^m$ représente le vecteur de sortie. Les matrices E, A_i, B_i, F_i, R_i, C et Δx_i sont de dimensions appropriées. $h_i(\xi(t))$ sont les fonctions d'activations des modèles locaux et $\xi(t)$ représente le vecteur des variables de décision.

3.3.1.2 Système multi-modèle singulier avec défauts capteurs

les défauts capteurs caractérisent une mauvaise image de la grandeur physique à mesurer. Un défaut capteur peut aussi être partiel ou total. Un capteur totalement défectueux donne une information qui ne correspond pas du tout à la vraie valeur de la variable à mesurer. Un défaut capteur partiel produit un signal avec plus ou moins d'adéquation avec la vraie valeur de la variable à mesurer. Ceci peut se traduire par une mesure biaisée provoquant un offset au signal de sortie. Mathématiquement, le défaut capteur [Chen 99] peut être modélisé par :

$$y(t) = Cx(t) + f_c(t) \quad (3.2)$$

avec $f_c(t) \in \mathcal{R}^m$ le vecteur des défauts capteur. Par un choix correct du vecteur $f_c(t)$, nous pouvons alors décrire toutes les situations des défauts capteurs.

3.3.1.3 Système multi-modèle singulier avec défauts système

Les défauts systèmes sont des défauts qui apparaissent dans les composants du système lui même, c'est à dire les défauts qui ne peuvent pas être classifiés ni parmi les défauts capteurs, ni parmi les défauts actionneurs. Ils représentent des changements dans les paramètres du système, ce qui induit un changement du comportement dynamique de ce dernier. La représentation dynamique du système avec ce type de défaut peut alors être décrite par :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))[(A_i + \Delta A_i)x(t) + B_i u(t) + R_i d(t) + \Delta x_i] \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

Le défaut système ΔA_i appelé aussi défaut composant représente un changement dans le système qui rend les relations dynamiques et statiques non admissibles. Ces types de défauts sont aussi désignés dans la littérature par les termes de défauts non paramétriques (pour les défauts additifs) et de défauts paramétriques (pour les défauts multiplicatifs) [Iser 05]. Les défauts additifs influencent la moyenne du signal de sortie du système, alors que les défauts multiplicatifs induisent des changements des valeurs des paramètres du système. Dans la suite, nous allons décrire les concepts fondamentaux de la détection et la localisation des défauts en utilisant des générateurs de résidus à base d'observateurs à entrées inconnues.

3.3.2 Localisation des défauts

Lorsqu'un défaut est détecté, une procédure de localisation est utilisée pour déterminer l'origine de celui-ci. A la différence de la détection où un seul résidu est à la limite nécessaire, la procédure de la localisation nécessite un ensemble de résidus. Pour pouvoir localiser efficacement le ou les défauts, on dispose d'un banc de Multi-Observateurs à Entrées Inconnues (MOEI) plutôt qu'un seul [Chen 99]. L'ensemble des p MOEI est soumis au vecteur d'entrées $u(t)$ et au vecteur de sorties $y(t)$. Chaque MOEI du banc de multi-observateurs est synthétisé afin d'être sensible à un sous-ensemble de défauts $f_j(t)$ et insensible aux autres. En effet, l'étape d'isolation doit permettre, à partir des résidus détectés non nuls statistiquement, de localiser les défauts, c'est-à-dire de déterminer le ou les éléments défectueux. La signature d'un défaut représente l'effet de celui-ci sur un ou plusieurs résidus. Si l'on dispose de la signature de chacun des défauts à détecter, il est possible de remonter des effets (résidus non nuls) aux causes (les éléments défectueux). L'élaboration de résidus structurés facilite cette étape. La tâche d'isolation peut être alors, accomplie selon deux architectures :

- Une architecture en bancs de multi-observateurs généralisés GOS (Generalized Observer Scheme) [Chen 99]. Dans ce genre de structure, il s'agit de synthétiser un certain nombre de multi-observateurs où chacun d'entre eux est insensible à un seul défaut. Si un défaut apparaît alors, toutes les estimations d'états seront erronées sauf celles issues du multi-observateur insensible à ce seul défaut. La structure GOS définit une matrice unitaire avec des termes diagonaux nuls conduisant à l'isolation d'un unique défaut. Cette architecture offre plus de degrés de liberté pour la conception du multi-observateur et permet d'augmenter la robustesse.
- Une architecture en bancs de multi-observateurs dédiés DOS (Dedicated Observer Scheme) [Alco 96]. Dans ce type de structure, il est question de construire autant de multi-observateurs que de défauts à détecter, chacun d'entre eux génère un résidu insensible à tous les défauts sauf un. La structure DOS définit une matrice d'incidence équivalente à une matrice d'identité permettant l'isolation de multiples défauts simultanés, chaque observateur étant insensible à $(p - 1)$ défauts. Ainsi le multi-observateur recevant une mesure défectueuse fournit une mauvaise estimation des variables estimées, tandis que les estimations des autres multi-observateurs convergent vers les sorties correspondantes sauf sur la sortie erronée. Cette architecture reste valable même dans le cas de plusieurs défauts simultanés. Mais, si cette

structure donne parfois des bons résultats, sa conception reste très restreinte car elle ne permet pas de s'affranchir des entrées inconnues et des bruits.

3.3.2.1 Localisation des défauts actionneurs

Les défauts actionneurs sont modélisés par un terme additif sur les composantes de la matrice de commande. Deux configurations sont envisagées :

- **Défauts uniques** : Dans ce cas, le banc de multi-observateurs peut être construit suivant l'architecture GOS (Generalized Observer Scheme) présentée sur la figure 3.2. Chaque résidu issu d'un multi-observateur est insensible à un défaut actionneur particulier et sensible à tous les autres. Il est donc possible de détecter et localiser les défauts actionneurs lorsque ceux-ci interviennent séparément.

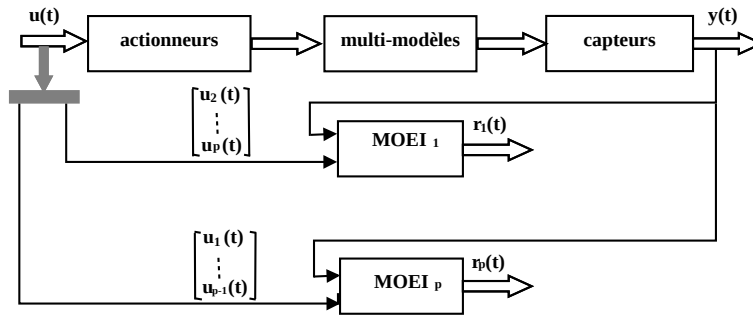


figure 3.2 – Localisation des défauts actionneurs par la structure GOS

- **Défauts multiples** : le banc de multi-observateurs pourra être construit suivant l'architecture DOS (Dedicated Observer Scheme) présentée sur la figure 3.3. Chaque résidu issu d'un multi-observateur est sensible à un seul défaut actionneur ce qui permet de détecter et localiser les défauts même quand ceux-ci surviennent simultanément.

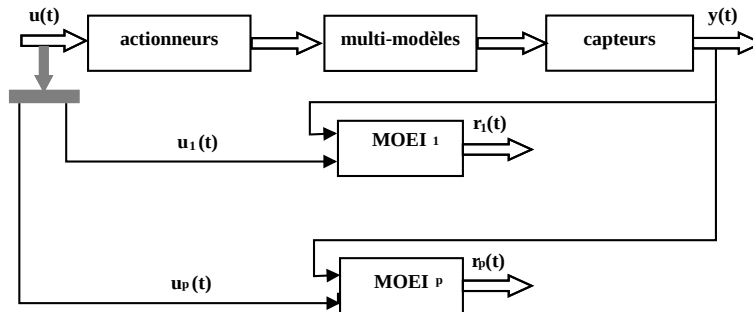


figure 3.3 – Localisation des défauts actionneurs par la structure DOS

3.3.2.2 Localisation des défauts capteurs

Les défauts capteurs sont modélisés par des termes additifs sur les composantes de la matrice de sortie. Deux hypothèses sont encore envisageables pour la construction d'un banc de multi-observateurs suivant que les hypothèses de défauts uniques ou défauts multiples soient retenues.

- **Défaut unique** : dans ce cas, le banc de multi-observateurs peut être construit selon l'architecture GOS. Chaque résidu est insensible à un défaut capteur particulier et sensible à tous les autres. Il est donc possible de détecter et d'isoler les défauts capteurs lorsque ceux-ci interviennent séparément.
- **Défauts multiples** : le banc de multi-observateurs peut être construit selon le schéma DOS. Dans cette architecture, chaque résidu est sensible à un seul défaut capteur ce qui permet de détecter et d'isoler les défauts capteurs même lorsqu'ils surviennent de façon simultanée.

3.4 Détection et localisation des défauts des systèmes singuliers multi-modèles

Le diagnostic à base de modèle est une approche qui a fait l'objet de nombreux travaux pour les systèmes ordinaires [Guo 09], [Min 06], [Henr 05] et les systèmes singuliers, [Gao 06], [Kim 01]. Cette approche est basée sur le modèle analytique de bon fonctionnement du système. Elle consiste à effectuer une estimation d'état à partir de la connaissance des entrées et des sorties du système et à utiliser l'erreur d'estimation de la sortie comme résidu. En fonctionnement normal, ce résidu doit être sensiblement nul et s'écarter significativement de zéro lors de l'occurrence d'un défaut sur le système. Lorsqu'un défaut est détecté, une procédure de localisation est utilisée pour déterminer l'origine de celui-ci. Au contraire de la détection où un seul résidu est à la limite nécessaire, la procédure de localisation nécessite un ensemble (un vecteur) de résidus. Pour pouvoir isoler efficacement le ou les défauts, le vecteur de résidus est engendré par un banc d'observateurs. Ces méthodes ont tout d'abord été développées pour des modèles linéaires. Ensuite, elles ont été étendues au cas des systèmes non linéaires. Cependant, et dans ce cas, la conception des observateurs est beaucoup plus délicate. Les travaux développés sont concentrés sur la conception de méthodes fondées sur des transformations non linéaires, basée sur l'algèbre de Lie, permettant de mettre le système sous une forme canonique quasi-linéaire [Kren 85] et des méthodes basées sur la linéarisation du modèle autour d'un point d'équilibre [Bout 95].

D'autres travaux ont été concentrés sur des classes particulières de systèmes non linéaires tels que les systèmes bilinéaires, polynômiaux, Lipschitziens [Koen 06] et les systèmes LPV [Hamd 12']. Dans cette section, on s'intéresse à la détection et la localisation des défauts des multi-modèles singuliers. Deux méthodes de diagnostic à bases de modèles sont étudiées. La première approche est basée sur le formalisme H_∞ qui consiste à reformuler le problème de la minimisation du transfert des perturbations et la maximisation du transfert des défauts vers les résidus sous la forme d'un problème de minimisation uniquement. Ce formalisme est appliqué pour la cas des multi-modèles à variable de décision mesurable. La deuxième méthode repose sur l'utilisation du multi-observateur à entrées inconnues pour la détection des défauts des multi-modèles à variables de décision mesurable et non mesurable.

3.4.1 Génération de résidus par optimisation multi-objectifs

La tâche principale de la détection de défaut est de produire un résidu robuste aux perturbations afin d'éviter les fausses alarmes. Pour détecter un défaut particulier, le résidu doit être sensible à ce défaut. La conception d'un générateur de résidu qui tient compte des effets des perturbations et des défauts, amène à un compromis entre la sensibilité aux défauts et la robustesse aux entrées inconnues. La synthèse de ce générateur de résidu peut être alors considérée comme un problème *d'optimisation multi-objectifs*, à savoir la maximisation des effets des défauts et la minimisation des effets des perturbations. Le problème d'optimisation multi-objectifs a été étudié dans [Chen 99] pour le diagnostic des systèmes dynamiques ordinaires, dans [Zhan 08] pour la détection des défauts pour les systèmes ordinaires à temps discret et alors [Marx 03] pour le diagnostic des systèmes singuliers linéaires.

Dans cette partie, le résidu est généré par un multi-observateur à entrées inconnues. Le problème d'optimisation multi-objectifs va être résolu par la méthode des inégalités linéaires matricielles. En effet, tous les objectifs sont formulés sous un ensemble de contraintes LMIs.

3.4.1.1 Synthèse du générateur de résidus

Considérons la représentation multi-modèle suivante d'un système singulier non linéaire [Hamd 10] en présence d'entrées inconnues et de défauts actionneurs et capteurs.

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i d(t) + F_i f(t) + \Delta x_i) \\ y(t) = Cx(t) + Hf(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

avec $f(t)$ le vecteur des défauts et F_i et H les matrices de distribution des défauts.

Dans la suite, et pour concevoir un générateur de résidus pour le système multi-modèle singulier (3.4), les hypothèses suivantes sont supposées vérifiées :

Hypothèse H1 : Les vecteurs lignes des matrices C et E constituent une base de l'espace vectoriel de dimension n :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n \quad (3.5)$$

Hypothèse H2 : Chaque modèle local de la description multi-modèle (3.4) doit être observable $\forall i \in \{1, \dots, h\}$.

$$\text{rang} \begin{bmatrix} sE - A_i \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathcal{C}. \quad (3.6)$$

La synthèse du générateur de résidus étudié dans ce paragraphe est basée sur les multi-observateurs à entrées inconnues. Son modèle global est défini de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y(t) + \Delta z_i) \\ \hat{x}(t) = z(t) + T_2 y(t) \\ r(t) = M(y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases} \quad (3.7)$$

avec $z(t) \in \mathcal{R}^n$ le vecteur d'état du multi-observateur et $r(t) \in \mathcal{R}^{n_f}$ le vecteur des résidus. Les matrices N_i , G_i , Δz_i , L_i , T_2 et M sont des matrices inconnues de dimensions appropriées. L'objectif est de trouver les gains du générateur de résidus afin de maximiser le transfert des défauts par rapport à l'erreur d'estimation qui est définie par :

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t) - z(t) - T_2 y(t) \\ e(t) &= (I_n - T_2 C)x(t) - z(t) - T_2 H f(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

En vertu de l'hypothèse **H1**, soit $T_1 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ une matrice non singulière tel que :

$$T_1 E + T_2 C = I_n \quad (3.9)$$

Pour analyser la dynamique de l'erreur d'estimation, on suppose que les défauts sont à évolution lente ou constants, i.e $\dot{f}(t) \simeq 0$. En utilisant (3.4) et (3.7), la dynamique de l'erreur d'estimation devient alors :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= T_1 E \dot{x}(t) - \dot{z}(t) \\ \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) [N_i e(t) + (T_1 A_i - N_i T_1 E - L_i C)x(t) + (T_1 B_i - G_i)u(t) \\ &\quad + T_1 R_i d(t) + (T_1 F_i - L_i H)f(t) + T_1 \Delta x_i - \Delta z_i] \end{aligned} \quad (3.10)$$

De plus, l'équation du résidu peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} r(t) &= M[y(t) - \hat{y}(t)] \\ r(t) &= \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) M [Cx(t) + Hf(t) - C\hat{x}(t)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

En utilisant l'équation de l'erreur d'estimation et le multi-modèle (3.4), le résidu (3.11) peut s'écrire comme suit :

$$r(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) [M Ce(t) + MH f(t)] \quad (3.12)$$

Par suite, si les matrices N_i , G_i , Δz_i , L_i et T_2 sont choisies de telle sorte que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$T_1 A_i - N_i T_1 E - L_i C = 0 \quad (3.13)$$

$$T_1 B_i - G_i = 0 \quad (3.14)$$

$$T_1 \Delta x_i - \Delta z_i = 0 \quad (3.15)$$

les équations de l'erreur dynamique d'estimation (3.10) et du résidu (3.12) deviennent alors :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) [N_i e(t) + T_1 R_i d(t) + (T_1 F_i - L_i H) f(t)] \quad (3.16)$$

$$r(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) [M Ce(t) + MH f(t)] \quad (3.17)$$

Afin de poursuivre cette analyse, la substitution de l'égalité (3.9) dans (3.13) donne :

$$N_i = T_1 A_i + (N_i T_2 - L_i) C \quad (3.18)$$

$$N_i = T_1 A_i + K_i C \quad (3.19)$$

avec

$$K_i = N_i T_2 - L_i \quad (3.20)$$

En utilisant alors, l'expression du paramètre N_i donnée par (3.19), les équations (3.16) et (3.17) peuvent se mettre sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) [(T_1 A_i + K_i C) e(t) + T_1 R_i d(t) \\ &\quad + (T_1 (F_i - A_i T_2 H) - K_i (C T_2 H - H)) f(t)] \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$r(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) ([M Ce(t) + MH f(t)]) \quad (3.22)$$

Par conséquent, le système d'équations (3.21)-(3.22) peut être réécrit sous la forme compacte suivante :

$$r(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) [G_{rd}^i d(t) + G_{rf}^i f(t)] \quad (3.23)$$

où G_{rd}^i est la $i^{\text{ème}}$ matrice de transfert des perturbations $d(t)$ vers le résidu $r(t)$ et G_{rf}^i est la $i^{\text{ème}}$ matrice de transfert de $f(t)$ vers $r(t)$. Pour $i = 1, \dots, h$, ces matrices sont définies par :

$$G_{rf}^i = \left(\begin{array}{c|c} (T_1 A_i + K_i C) & \Upsilon_i \\ \hline MC & MH \end{array} \right) \quad (3.24)$$

$$G_{rd}^i = \left(\begin{array}{c|c} (T_1 A_i + K_i C) & T_1 R_i \\ \hline MC & 0 \end{array} \right) \quad (3.25)$$

avec $\Upsilon_i = T_1(F_i - A_i T_2 H) - K_i(CT_2 H - H)$.

La séparation entre les effets des défauts et des perturbations qui affectent le résidu est difficile. Pour réduire le taux de fausses alarmes, l'effet des défauts sur le résidu doit être maximisé alors que l'effet des perturbations doit être minimisé. Pour éviter ce conflit, l'effet du défaut $f(t)$ sur le résidu $r(t)$ peut être exprimé comme un problème de minimisation. En effet, par l'introduction d'un paramètre de pondération W_f^i et un signal de résidu fictif $\tilde{r}(t)$ [Gren 08], le problème se ramène à la minimisation de l'effet du défaut sur le signal du résidu :

$$\tilde{r}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) (r(t) - W_f^i f(t)) \quad (3.26)$$

où W_f^i est une matrice de pondération qui permet de prendre en compte la connaissance de la distribution des défauts. La détection et la localisation des défauts dépendent de la structure sélectionnée de W_f^i [Stou 00]. En effet, l'isolation des défauts est obtenue lorsque la matrice W_f^i est choisie en forme diagonale et la détection des défauts est considérée quand $W_f^i \in \mathcal{R}^{1 \times nf}$.

Le problème de la détection et la localisation des défauts peut être formulé sous la forme d'un problème d'optimisation multi-objectifs [Liu 08] qui consiste à déterminer les matrices K_i et M qui minimisent $a\gamma_f + (1-a)\gamma_d$ avec $a \in [0 \ 1]$ sous les contraintes suivantes :

$$\|G_{rf}^i - W_f^i\|_{\infty} < \gamma_f \quad (3.27)$$

$$\|G_{rd}^i\|_{\infty} < \gamma_d \quad (3.28)$$

$$\text{Le système (3.21) est stable} \quad (3.29)$$

Notons que, la condition (3.27) représente une mesure de la capacité de localisation des défauts, alors que la condition (3.28) représente le découplage robuste des perturbations sur le résidu.

3.4.1.2 Formulation des inégalités matricielles linéaires

Dans ce paragraphe, l'idée principale est d'exprimer les contraintes (3.27), (3.28) et (3.29) sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMIs où W_f^i est un paramètre de pondération dynamique défini par :

$$W_f^i = \left(\frac{A_{if} | B_{if}}{C_{if} | D_{if}} \right) \quad (3.30)$$

où $W_f^i \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des matrices de transfert stables [Jaim 08] tel que :

$$\|W_f^i\|_- = \inf_{w \in \mathcal{R}} \underline{\sigma}(W_f^i(jw)) \geq 1 \quad (3.31)$$

où $\|W_f^i\|_-$ définit le minimum des valeurs singulières non nulles de la matrice de transfert W_f^i et $\underline{\sigma}$ représente la valeur singulière minimale. Alors, pour $i = 1, \dots, h$ l'expression de $G_{rf}^i - W_f^i$ peut s'écrire sous la forme :

$$G_{rf}^i - W_f^i = \left(\begin{array}{cc|c} (T_1 A_i + K_i C) & 0 & \Upsilon_i \\ 0 & A_{if} & B_{if} \\ \hline MC & -C_{if} & MH - D_{if} \end{array} \right) \quad (3.32)$$

Le problème de synthèse du générateur de résidus (3.7) peut être résolu par le théorème suivant.

Théorème 3.1 [Icha 09] *Pour un réel positif $a \in [0 \ 1]$ et $W_f^i \in \mathfrak{S}$ une matrice de transfert, le générateur de résidu (3.7) du système singulier (3.4) existe, s'il existe deux matrices Q_1 et Q_2 symétriques définies positives, des gains K_i et M et deux réels positifs γ_f et γ_d solution du problème d'optimisation suivant :*

$$\min_{M, K_i, Q_1, Q_2, \gamma_f, \gamma_d} [a\gamma_f + (1-a)\gamma_d] \quad (3.33)$$

sous les contraintes :

$$\left(\begin{array}{cccc} \Pi_i & 0 & \Psi_i & (MC)^T \\ 0 & A_{if}^T Q_2 + Q_2 A_{if} & Q_2 B_{if} & -C_{if}^T \\ \Psi_i^T & B_{if}^T Q_2 & -\gamma_f^2 I & \bar{D}_i^T \\ MC & -C_{if} & \bar{D}_i & -I \end{array} \right) < 0 \quad (3.34)$$

$$(3.35)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \Pi_i & Q_1 T_1 R_i & (MC)^T \\ (T_1 R_i)^T Q_1 & -\gamma_d^2 I & 0 \\ MC & 0 & -I \end{array} \right) < 0$$

avec

$$\Pi_i = (T_1 A_i)^T Q_1 + Q_1 (T_1 A_i) + \Omega_i C + (\Omega_i C)^T \quad (3.36)$$

$$\Psi_i = (Q_1 T_1 (F_i - A_i T_2 H) - \Omega_i (C T_2 H - H)) \quad (3.37)$$

$$\bar{D}_i = M H - D_{if} \quad (3.38)$$

$$\Omega_i = Q_1 K_i \quad (3.39)$$

■

Pour la conception d'un générateur de résidus robuste qui permet de détecter et de localiser les défauts pour les systèmes singuliers multi-modèles, un problème d'optimisation multi-objectifs a été formulé. Tous les objectifs sont donnés sous un ensemble de contraintes à base d'inégalités linéaires matricielles. L'intérêt du formalisme H_∞ est d'apporter une solution standard à un certain nombre de problèmes liés au diagnostic des multi-modèles singuliers tels que la génération robuste de résidus.

3.4.2 Génération de résidus à base de multi-observateurs

Dans ce paragraphe, le multi-observateur à entrées inconnues développé dans le deuxième chapitre est exploité pour construire des bancs de multi-observateurs afin de générer des résidus structurés permettant la détection et la localisation des défauts. Deux cas sont étudiés, le premier cas concerne les multi-modèles à variables de décision mesurables et le second porte sur les multi-modèles à variables de décision non mesurables. La synthèse de ce multi-observateur est basée sur le découplage de l'effet des entrées inconnues.

Considérons le multi-modèle singulier soumis à des perturbations $d(t)$ et sujet du défaut $f(t)$ qui est donné par :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i d(t) + F_i f(t) + \Delta x_i) \\ y(t) = Cx(t) + Hd(t) \end{cases} \quad (3.40)$$

avec $d(t) \in \mathcal{R}^q$ le vecteur de distribution et $f(t) \in \mathcal{R}^p$ le vecteur de défauts. R_i , H et F_i sont respectivement la matrice de distribution des perturbations sur l'équation d'état, la matrice de distribution des perturbations sur la sortie et la matrice de distribution des défauts. Dans la suite de l'étude, nous considérons qu'en plus les hypothèses **H1** et **H2**, les hypothèses **H3** et **H4** suivantes sont vérifiées.

Hypothèse H3 : $\text{rang} \begin{bmatrix} R_i \\ H \end{bmatrix} = q \leq m$

Hypothèse H4 : $\text{rang} \begin{bmatrix} E & 0 \\ C & H \end{bmatrix} = n + q$

Pour produire un résidu robuste (dans le sens de découplage de perturbation), un multi-observateur à entrées inconnues est utilisé. La structure d'un tel multi-observateur est décrite par :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y(t) + \Delta z_i) \\ \hat{x}(t) = z(t) + T_2 y(t) \\ r(t) = M_1 z(t) + M_2 y(t) \end{cases} \quad (3.41)$$

avec $r(t)$ le vecteur de résidu, $z(t) \in \mathcal{R}^n$ le vecteur d'état du multi-observateur et $\hat{x}(t) \in \mathcal{R}^n$ le vecteur d'état estimé. Les matrices N_i , G_i , Δz_i , L_i , M_1 , M_2 et T_2 sont inconnues et de dimensions appropriées.

3.4.2.1 Conditions de convergence

Pour analyser la convergence du multi-observateur (3.41), on définit l'équation de l'erreur d'estimation d'état par :

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

En utilisant la forme du multi-observateur (3.41), on obtient alors :

$$e(t) = z(t) - (I_n - T_2 C)x(t) + T_2 H d(t) \quad (3.42)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation est alors régie par l'équation suivante :

$$\dot{e}(t) = \dot{z}(t) - T_1 E \dot{x}(t) + T_2 H \dot{d}(t) \quad (3.43)$$

soit :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) [N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y(t) + \Delta z_i - T_1 A_i x(t) \\ - T_1 B_i u(t) - T_1 R_i d(t) - T_1 F_i f(t) - T_1 \Delta x_i] \end{aligned} \quad (3.44)$$

avec T_1 une matrice qui vérifie l'équation (3.9).

Après développement, l'équation (3.44) devient :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) [N_i e(t) + (N_i T_1 E + L_i C - T_1 A_i)x(t) + (G_i - T_1 B_i)u(t) \\ + (L_i H - N_i T_2 H - T_1 R_i)d(t) - T_1 F_i f(t) + T_2 H \dot{d}(t) + \Delta z_i - T_1 \Delta x_i] \end{aligned} \quad (3.45)$$

D'autre part, en utilisant l'expression générale du vecteur de résidu $r(t)$ défini par (3.41), et d'après l'équation de l'erreur d'estimation (3.42), il vient :

$$r(t) = M_1 e(t) + (M_1 T_1 E + M_2 C)x(t) + (M_2 - M_1 T_2)H d(t) \quad (3.46)$$

Lorsque les matrices N_i , G_i , Δz_i , L_i , M_1 , M_2 et T_2 vérifient les relations suivantes :

$$N_i T_1 E + L_i C - T_1 A_i = 0 \quad (3.47)$$

$$M_1 T_1 E + M_2 C = 0 \quad (3.48)$$

$$M_2 H = 0 \quad (3.49)$$

$$G_i - T_1 B_i = 0 \quad (3.50)$$

$$L_i H - N_i T_2 H - T_1 R_i = 0 \quad (3.51)$$

$$T_2 H = 0 \quad (3.52)$$

$$\Delta z_i - T_1 \Delta x_i = 0 \quad (3.53)$$

L'équation (3.45) et la relation (3.46) se réduisent à :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) [N_i e(t) - T_1 F_i f(t)] \quad (3.54)$$

$$r(t) = M_1 e(t) \quad (3.55)$$

3.4.2.2 Synthèse du générateur de résidus

La conception de ce générateur de résidus (3.41), nécessite la détermination des matrices N_i , L_i , G_i , Δz_i , M_1 , M_2 , T_1 et T_2 en tenant compte des contraintes (3.47) - (3.53).

Pour déterminer les matrices T_1 et T_2 , on considère alors la relation (3.9) qui peut être réécrite en considérant la contrainte (3.52) sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ C & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Une solution $\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}$ existe si et seulement si la matrice $\begin{bmatrix} E & 0 \\ C & H \end{bmatrix}$ est de plein rang colonne [Daro 96]. Ensuite, la solution de l'expression (3.56) est donnée par la technique de la matrice pseudo inverse de telle sorte que :

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ C & H \end{bmatrix}^+ \quad (3.57)$$

Après, et pour établir les matrices M_1 et M_2 , les relations (3.48) et (3.49) peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 E & 0 \\ C & H \end{bmatrix} = 0 \quad (3.58)$$

Cette égalité est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} T_1 E & 0 \\ C & H \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}^T = 0 \quad (3.59)$$

D'où, l'équation (3.59) admet une solution $\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}^T$ dans le noyau de $\begin{bmatrix} T_1 E & 0 \\ C & H \end{bmatrix}^T$ c'est à dire :

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}^T \subseteq \text{Ker} \begin{bmatrix} T_1 E & 0 \\ C & H \end{bmatrix}^T \quad (3.60)$$

Une solution peut donc être choisie comme suit :

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}^T = \text{ker} \begin{bmatrix} T_1 E & 0 \\ C & H \end{bmatrix}^T \quad (3.61)$$

Le problème de synthèse du générateur de résidu se réduit donc à la garantie de la stabilité de l'équation dynamique de l'erreur d'estimation (3.54) pour trouver les matrices de gains K_i de telle sorte que les matrices N_i soient de Hurwitz pour tout $i = 1, \dots, h$.

3.4.2.3 Analyse de la stabilité

Dans cette partie, la stabilité du générateur de résidu est étudiée dans deux cas. Le premier cas, lorsque la variable de décision de la fonction d'activation du multi-modèle singulier dépend de *la variable d'état mesurable*, et le deuxième cas, lorsque cette variable dépend de *l'état non mesurable*.

• Cas A : Variable de décision mesurable :

La variable de décision est mesurable lorsqu'elle dépend des entrées ou des sorties du système. Considérons alors l'équation dynamique de l'erreur suivante :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) [N_i e(t) - T_1 F_i f(t)] \quad (3.62)$$

La substitution de (3.19) permet d'obtenir la forme équivalente suivante :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) [(T_1 A_i + K_i C) e(t) - T_1 F_i f(t)] \quad (3.63)$$

Le théorème suivant [Hamd 12] donne des conditions suffisantes pour lesquelles la stabilité de l'erreur $e(t)$ (3.63).

Théorème 3.2 *L'erreur $e(t)$ régie par l'équation dynamique (3.63) est globalement stable, si le défaut $f(t)$ satisfait $\|f(t)\| \leq \mu$, $\mu > 0$ et s'il existe deux réels α et β , et une matrice commune définie positive Q et des matrices $W_i = QK_i$ telles que, $\forall i = 1, \dots, h$:*

$$\begin{bmatrix} (T_1 A_i)^T Q + Q(T_1 A_i) + \alpha I_n + C^T W_i^T + W_i C & Q(T_1 F_i) \\ (T_1 F_i)^T Q & -\frac{1}{\beta} I_k \end{bmatrix} < 0 \quad (3.64)$$

sous les contraintes :

$$W_i H + Q T_1 R_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, h \quad (3.65)$$

■

Preuve 3.1 Considérons la fonction de Lyapunov de la forme quadratique suivante :

$$V(e(t)) = e^T(t) Q e(t) > 0 \quad (3.66)$$

La condition de stabilité de l'erreur dynamique d'estimation est que la dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov soit définie négative.

En utilisant la relation (3.63), la fonction $\dot{V}(e(t))$ est donnée par :

$$\dot{V}(e(t)) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \{ e^T(t) [N_i^T Q + Q N_i] e(t) - 2 e^T(t) Q (T_1 F_i) f(t) \}$$

Si $\|f(t)\| \leq \mu$, alors

$$\dot{V}(e(t)) \leq \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \{ e^T(t) [N_i^T Q + Q N_i] e(t) - 2\mu \|e^T(t) Q (T_1 F_i)\| \}$$

Pour $\mu > 0$, la dérivée de $V(e(t))$ devient :

$$\dot{V}(e(t)) < \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \{ e^T(t) [N_i^T Q + Q N_i] e(t) + 2\mu \|e^T(t) Q (T_1 F_i)\| \}$$

Pour tout scalaires α positif, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$2\mu \|e^T(t) Q (T_1 F_i)\| \leq \alpha^{-1} \mu^2 \|e^T(t) Q (T_1 F_i)\|^2 + \alpha$$

D'où :

$$\dot{V}(e(t)) < \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \{ e^T(t) [N_i^T Q + Q N_i] e(t) + \alpha^{-1} \mu^2 \|e^T(t) Q (T_1 F_i)\|^2 + \alpha \}$$

Si l'on considère $\beta = \alpha^{-1} \mu^2$ alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &< \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \{ e^T(t) [N_i^T Q + Q N_i] e(t) + \beta e^T(t) Q (T_1 F_i) (T_1 F_i)^T Q e(t) + \alpha \} \\ \dot{V}(e(t)) &< \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \{ e^T(t) [N_i^T Q + Q N_i + \beta Q (T_1 F_i) (T_1 F_i)^T Q] e(t) + \alpha \} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Pour tout $h_i(\xi(t))$, $\sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) = 1$, $h_i(\xi(t)) \geq 0$ et pour tout $e(t) \neq 0$, l'inégalité (3.67) est satisfaite si :

$$N_i^T Q + Q N_i + \beta Q (T_1 F_i) (T_1 F_i)^T Q + \alpha I_n < 0, \quad \forall i = 1, \dots, h$$

En remplaçant N_i par l'expression (3.19), et pour $W_i = QK_i$, la dernière inégalité peut être écrite $\forall i = 1, \dots, h$ sous la forme :

$$(T_1 A_i)^T Q + Q(T_1 A_i) + \alpha I_n + (W_i C)^T + W_i C + \beta Q(T_1 F_i)(T_1 F_i)^T Q < 0 \quad (3.68)$$

En utilisant le complément de Schur [Ghao 94], la dernière inégalité devient, $\forall i = 1, \dots, h$:

$$\begin{bmatrix} (T_1 A_i)^T Q + Q(T_1 A_i) + \alpha I_n + C^T W_i^T + W_i C & Q(T_1 F_i) \\ (T_1 F_i)^T Q & -\frac{1}{\beta} I_k \end{bmatrix} < 0 \quad (3.69)$$

Les gains matriciels K_i obtenus doivent satisfaire les contraintes (3.51) $\forall i = 1, \dots, h$. La relation (3.51) peut s'écrire alors sous la forme :

$$(N_i T_2 - L_i)H + T_1 R_i = 0 \quad (3.70)$$

En utilisant l'égalité (3.20), l'équation (3.70) peut se mettre sous la forme suivante :

$$K_i H + T_1 R_i = 0 \quad (3.71)$$

Pour $K_i = Q^{-1}W_i \forall i = 1, \dots, h$, l'équation (3.71) devient :

$$W_i H + Q T_1 R_i = 0 \quad (3.72)$$

D'où les gains K_i sont obtenus en résolvant les LMIs (3.69) sous les contraintes (3.72). Par conséquent, le théorème (3.2) implique que l'erreur $e(t)$ est stable malgré la présence des défauts qui agissent comme entrées additives. $\square$

• Cas B : Variable de décision non mesurable :

La variable de décision est non mesurable lorsqu'elle dépend des variables d'état non mesurables du système. Dans ce cas, et par analogie avec les systèmes ordinaires [Icha 09] le multi-modèle singulier (3.40) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\hat{\mathbf{x}}(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i d(t) + F_i f(t) + \Delta x_i + w(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Hd(t) \end{cases} \quad (3.73)$$

avec :

$$w(t) = \sum_{i=1}^h (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t)))(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i d(t) + F_i f(t) + \Delta x_i) \quad (3.74)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation devient alors :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\hat{x}(t))(N_i e(t) - T_1 F_i f(t) - T_1 w(t)) \quad (3.75)$$

où $w(t)$ agit comme une entrée de perturbation sur la dynamique de l'erreur d'estimation. Dans ce cas, les conditions de stabilité de l'erreur dynamique d'estimation (3.75) sont données dans le théorème suivant [Hamd 12].

Théorème 3.3 *L'erreur régie par l'équation dynamique (3.75) est globalement stable si le terme $w(t)$ et le défaut $f(t)$ satisfont respectivement :*

$\|w(t)\|_2 \leq \gamma \|e(t)\|_2$ et $\|f(t)\| \leq \mu$ et si les conditions (3.47) à (3.53) sont vérifiées et s'il existe une matrice commune définie positive Q et des matrices $W_i = QK_i$ telles que, $\forall i = 1, \dots, h$:

$$\begin{bmatrix} \Pi_i & Q(T_1 F_i) & -QT_1 \\ (T_1 F_i)^T Q & -\frac{1}{\beta} I_k & 0 \\ -T_1^T Q & 0 & -\delta I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (3.76)$$

sous les contraintes :

$$W_i H + QT_1 R_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, h \quad (3.77)$$

avec

$$\Pi_i = (T_1 A_i)^T Q + Q(T_1 A_i) + \alpha I_n + (W_i C)^T + (W_i C) + I_n \text{ et } \delta = \gamma^2$$

■

Preuve 3.2 *Pour trouver les conditions de convergence, une fonction quadratique de Lyapunov est choisie sous la forme suivante : $V(e(t)) = e^T(t)Qe(t)$, qui en la dérivant conduit à :*

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) \leq \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \{ & e^T(t)[N_i^T Q + QN_i]e(t) + \beta e^T(t)Q(T_1 F_i)(T_1 F_i)^T Qe(t) \\ & + \alpha - e^T(t)QT_1 w(t) - w^T(t)T_1^T Qe(t) \} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Dans l'ordre d'atténuer l'effet de $w(t)$ par rapport à l'erreur d'estimation d'état on utilise l'approche du gain L_2 [Ghao 94]. Cette méthode consiste à écrire la dynamique de l'erreur d'estimation d'état sous la forme d'un système perturbé où la perturbation $w(t)$ est bornée. Les paramètres du générateur de résidu sont alors déterminés de manière à assurer la stabilité du système générant l'erreur d'estimation d'état, tout en assurant une atténuation L_2 du transfert de l'influence de $w(t)$ par rapport à l'erreur d'estimation.

D'où pour $\|w(t)\|_2 \leq \gamma \|e(t)\|_2$, l'erreur d'estimation d'état est stable et la norme L_2 de $w(t)$ par rapport à l'erreur d'estimation $e(t)$ est bornée par γ si :

$$\dot{V}(e(t)) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + e^T(t)e(t) < 0$$

La substitution de l'expression de $\dot{V}(e(t))$ dans l'inégalité (3.78), donne :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \{ & e^T(t)[N_i^T Q + QN_i]e(t) + \beta e^T(t)Q(T_1 F_i)(T_1 F_i)^T Qe(t) + \alpha \\ & - e^T(t)QT_1 w(t) - w^T(t)T_1^T Qe(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + e^T(t)e(t) \} < 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

Pour tout $h_i(\xi(t))$, $\sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) = 1$, $h_i(\xi(t)) \geq 0$ et pour tout $e(t) \neq 0$, l'inégalité (3.79) peut être exprimée sous la forme suivante $\forall i = 1, \dots, h$:

$$\begin{bmatrix} e^T(t) & w^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i^T Q + Q N_i + \alpha I_n + \beta Q(T_1 F_i)(T_1 F_i)^T Q + I_n & -Q T_1 \\ -T_1^T Q & -\gamma^2 I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.80)$$

alors, $\dot{V}(e(t)) < 0$ si, $\forall i = 1, \dots, h$:

$$\begin{bmatrix} N_i^T Q + Q N_i + \alpha I_n + \beta Q(T_1 F_i)(T_1 F_i)^T Q + I_n & -Q T_1 \\ -T_1^T Q & -\gamma^2 I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (3.81)$$

Pour obtenir une contrainte LMI équivalente, on pose le changement de variables :

$W_i = Q K_i$ et en utilisant le complément de Schur, l'inégalité (3.81) devient :

$$\begin{bmatrix} \Pi_i & Q(T_1 F_i) & -Q T_1 \\ (T_1 F_i)^T Q & -\frac{1}{\beta} I_k & 0 \\ -T_1^T Q & 0 & -\delta I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (3.82)$$

avec $\Pi_i = (T_1 A_i)^T Q + Q(T_1 A_i) + \alpha I_n + (W_i C)^T + (W_i C) + I_n$ et $\delta = \gamma^2$.

Comme il a été démontré dans la preuve du théorème (3.2), les gains matriciels obtenus doivent satisfaire les contraintes (3.51) ou leur équivalent (3.72). Les inégalités linéaires en Q et W_i (3.82) peuvent donc être résolues par l'outil numérique LMIs toolbox.

□

L'utilisation de l'approche du gain L_2 et de la théorie de Lyapunov permettent alors l'obtention de conditions de stabilité du système générant l'erreur d'estimation d'état tout en assurant le transfert le plus faible possible des perturbations qui sont dues à la difficulté de mesurer les variables de décision par rapport à l'erreur d'estimation. Les conditions trouvées sont exprimées sous forme LMI.

3.4.3 Application : Détection et isolation des défauts d'un robot manipulateur à trois bras

L'illustration de l'approche de synthèse du multi-observateur proposée, porte sur l'estimation des états en présence des défauts et la génération de résidus pour la détection des défauts actionneurs du système singulier non linéaire "*robot manipulateur à trois bras*" étudié au premier chapitre.

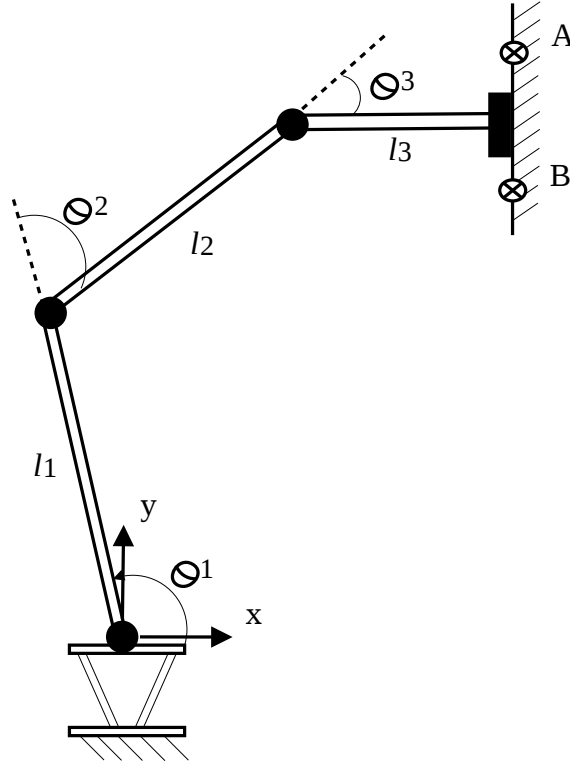


figure 3.4 – Robot manipulateur à trois bras

3.4.3.1 Modèle du robot dans un système de coordonnées cartésiennes

On choisit comme coordonnées opérationnelles les coordonnées (x, y) de la position du bras terminal dans le plan (x, y) et l'angle ϕ l'orientation de ce bras avec l'axe x . Ces équations cinématiques sont définies par :

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123}, \quad y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123} \quad \text{et} \quad \phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

avec

$$\begin{aligned} s_1 &= \sin \theta_1, \quad s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2), \quad s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \\ c_1 &= \cos(\theta_1), \quad c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned}$$

Dans un tel système de coordonnées, les équations du mouvement du robot étudié au chapitre 1 deviennent :

$$\begin{cases} M_\chi(\theta)\ddot{\chi} = -C_\chi(\theta, \dot{\theta}) - G_\chi(\theta) + F_\chi^T \mu + u_\chi \\ \psi_\chi(\theta) = 0 \end{cases} \quad (3.83)$$

avec

$$\begin{aligned} M_\chi(\theta) &= J^{-T}(\theta)M_\theta(\theta)J^{-1}(\theta), \\ G_\chi(\theta) &= J^{-T}(\theta)G_\theta(\theta), \\ C_\chi(\theta, \dot{\theta}) &= J^{-T}(\theta) \left[C_\theta(\theta, \dot{\theta}) - M_\theta(\theta)J^{-1}(\theta)\dot{J}(\theta)\dot{\theta} \right] \end{aligned}$$

et $u_\chi = J^{-T}(\theta)u_\theta$

$J(\theta)$ est la matrice Jacobienne calculée en dérivant les trois équations cinématiques par rapport à θ . Elle satisfait l'équation $\dot{\chi} = J(\theta)\dot{\theta}$ et est donnée par :

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les angles articulaires θ_1 , θ_2 et θ_3 qui correspondent à la position et à l'orientation du bras terminal dans l'espace, sont déterminés en fonction de x , y et ϕ par le procédé de la cinématique inverse³ [Crai 86] du système.

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \text{atan2}((k_1 y_n - k_2 x_n), (k_1 x_n - k_2 y_n)) \\ \theta_2 &= \text{atan2}(\sin(\theta_2), \cos(\theta_2)) \\ \theta_3 &= \phi - \theta_1 - \theta_2 \end{aligned}$$

avec : $k_1 = l_1 + l_2 \cos(\theta_2)$, $k_2 = l_2$, $x_n = x - l_3 \cos(\phi)$ et $y_n = y - l_3 \sin(\phi)$ et

$$\text{atan2}(y, x) = 2 \arctan \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

La fonction $\text{atan2}(y, x)$ fournit l'angle entre le vecteur (x, y) et l'axe x [Shuu 09]. Cette fonction est prédéfinie dans la plupart des langages de programmation, Matlab y compris. Par suite, et avec ces coordonnées cartésiennes le modèle considéré du robot manipulateur possède des contraintes linéaires, ce qui peut s'avérer plus commode au niveau de la linéarisation du modèle.

3. En robotique, la cinématique inverse (souvent abrégée IK, de l'anglais Inverse Kinematics) est un procédé par lequel on peut déterminer les positions et rotations d'articulations d'un modèle afin d'obtenir une pose. Le terme "cinématique inverse" renvoie au fait que l'étude cinématique se fait généralement à partir des paramètres des articulations, afin de déterminer l'évolution de la pose.

3.4.3.2 Représentation multi-modèle

On s'intéresse maintenant à linéariser le système autour d'un ensemble de points de fonctionnement $i = 1, \dots, h$ décrivant le système dans diverses zones opératoires. Par conséquent, le modèle linéarisé de (3.83) peut être obtenu comme suit :

$$\begin{cases} M_i \delta \ddot{\chi} = -\Omega_i \delta \dot{\chi} - \Upsilon_i \delta \chi + F_{\chi_i}^T \delta \mu + S_i \delta u_{\chi} \\ F_{\chi_i} \delta \chi = 0 \end{cases} \quad (3.84)$$

avec

$$\begin{aligned} M_i &= M_{\chi} \Big|_{\chi=\chi_i}, \Omega_i = \frac{\partial C_{\chi}}{\partial \dot{\chi}} \Big|_{\substack{\chi=\chi_i \\ \dot{\chi}=\dot{\chi}_i}}, \Upsilon_i = \frac{\partial C_{\chi}}{\partial \chi} \Big|_{\substack{\chi=\chi_i \\ \dot{\chi}=\dot{\chi}_i}} + \frac{\partial G_{\chi}}{\partial \chi} \Big|_{\chi=\chi_i}, \\ F_{\chi_i} &= \frac{\partial \psi_{\chi}(\chi)}{\partial \chi} \Big|_{\chi=\chi_i}, S_i = J^T \Big|_{\theta=\theta_i} \\ &\begin{cases} \delta \chi = \chi - \chi_i \\ \delta \dot{\chi} = \dot{\chi} - \dot{\chi}_i \\ \delta \ddot{\chi} = \ddot{\chi} - \ddot{\chi}_i \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \delta u = u - u_i \\ \delta \mu = \mu - \mu_i \end{cases} \end{aligned}$$

θ_i est déterminée à partir de χ_i par l'inverse cinématique [Crai 86]. μ_i est un vecteur de dimension 2. Le premier élément de μ_i est choisi pour être égal à la force de contact désirée dans la direction de x , le deuxième élément est choisi nul. Aussi, u_i est déterminé tel que (3.84) reste en équilibre.

On définit le vecteur d'état $\chi(t)$ comme suit :

$$\chi^T(t) = \begin{bmatrix} \bar{\chi}^T & \dot{\bar{\chi}}^T & \mu^T \end{bmatrix}^T$$

avec

$$\bar{\chi} = \begin{bmatrix} x & y & \phi \end{bmatrix}^T \text{ et } \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}^T$$

Choisissons x, ϕ, μ_1 et μ_2 comme sorties, le système (3.84) peut s'écrire alors sous la forme du modèle singulier suivant :

$$\begin{cases} E_k \dot{\chi}(t) = A_i \chi(t) + B_i u(t) + R_i d(t) + \Delta \chi_i \\ y(t) = C \chi(t) + H d(t) \end{cases} \quad (3.85)$$

$$E_k = \begin{bmatrix} I_3 & 0 & 0 \\ 0 & M_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_i = \begin{bmatrix} 0 & I_3 & 0 \\ -\Upsilon_i & -\Omega_i & F_{\chi_i}^T \\ F_{\chi_i} & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ S_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \chi_i = A_i \chi_i - B_i u_i, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les matrices de distribution R_i et H sont associées aux entrées inconnues (perturbations) $d(t) \in \mathcal{R}^q$ agissant sur les entrées et sorties du système. On considérera ici que l'on est

en présence d'incertitudes structurées, c'est-à-dire que les matrices R_i et H sont connues. Pour $m_1 = 20Kg$, $m_2 = 10Kg$, $m_3 = 5Kg$ respectivement les masses des trois bras, $l_1 = 2m$, $l_2 = 1,5m$, $l_3 = 1m$ les longueurs de ces bras et $g = 9,8m/s$ le champ du pesanteur, le choix d'une décomposition en trois modèles linéaires dans trois zones de fonctionnement différentes, paraît plus judicieuse pour réaliser un compromis entre la représentation de ce système singulier non linéaire et la charge de calcul. Le modèle global est obtenu par interpolation des modèles locaux pondérés par deux fonctions d'activations $h_i(\xi(t))$ et $v_k(\xi(t))$. La forme multi-modèle obtenue, s'écrit alors, comme suit :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^3 v_k(\xi(t)) E_k \dot{\chi}(t) = \sum_{k=1}^3 h_i(\xi(t)) (A_i \chi(t)(t) + B_i u(t) + R_i d(t) + \Delta \chi_i) \\ y(t) = C \chi(t)(t) + H d(t) \end{cases} \quad (3.86)$$

avec :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 45.3144 & 16.6296 & -17.3475 \\ 16.6296 & 8.4688 & -3.3468 \\ -17.3475 & -3.3468 & 3.2247 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 48.7359 & 20.2029 & -20.9177 \\ 20.2029 & 13.0540 & -8.0209 \\ -20.9177 & -8.0209 & 7.9877 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 30.2313 & 17.4260 & -19.3686 \\ 17.4260 & 2.9268 & 2.6668 \\ -19.3686 & 2.6668 & -3.2605 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -345.2133 & -8.4971 & 0 & -18.1355 & 14.4467 & 2.6746 & 1 & 0 \\ 42.0321 & -27.5767 & 0 & 2.0633 & -7.5043 & 0.5654 & 0 & 0 \\ -42.0321 & 26.0496 & 0 & -3.5719 & 4.4687 & -0.5654 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -343.4944 & -1.9110 & 0 & -12.2059 & 12.7951 & 1.9403 & 1 & 0 \\ 11.3826 & -7.5337 & 0 & 0.3805 & -1.5852 & 0.0955 & 0 & 0 \\ -11.3826 & 7.2549 & 0 & -0.6584 & 1.0285 & -0.0955 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -366.2301 & -2.5133 & 0 & -14.3655 & 6.8985 & 1.7982 & 1 & 0 \\ 81.9706 & -49.5188 & 0 & 2.8621 & -9.0001 & 0.9785 & 0 & 0 \\ -81.9706 & 47.1938 & 0 & -5.0540 & 4.4832 & -0.9785 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.4943 & 0.4314 & 0.0629 \\ 0.0840 & -0.7496 & 0.6655 \\ -0.0840 & 0.7496 & 0.3345 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.5004 & 0.4293 & 0.0710 \\ 0.0232 & -0.6873 & 0.6641 \\ -0.0232 & 0.6873 & 0.3359 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.5301 & 0.6404 & -0.1103 \\ 0.1620 & -0.8928 & 0.7308 \\ -0.1620 & 0.8928 & 0.2692 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta\chi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6 \\ 0.6 \\ -36.957 \\ -77.152 \\ 100.982 \\ 19.333 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta\chi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ -373.177 \\ -30.728 \\ 27.092 \\ 19 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Delta\chi_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ -749.027 \\ 42.254 \\ 280.304 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix}, R_{1,2,3} = R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 9.0532 & -21.1739 \\ 0.1389 & -25.0322 \\ 0.0695 & 4.0671 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$v_k(\xi(t))$ et $h_i(\xi(t))$ sont des fonctions de pondération qui vérifient les propriétés de la somme convexe. Elles sont choisies à variables de décision qui dépendent de l'état mesurable $\chi_1(t)$. Elles sont alors définies comme suit :

$$v_k(\chi_1(t)) = h_i(\chi_1(t)) = \frac{\mu_i(\chi_1(t))}{\sum_{i=1}^3 \mu_i(\chi_1(t))}$$

où les poids de pondération $\mu_i(\chi_1(t))$ sont eux-mêmes définis par :

$$\begin{aligned}\mu_1(\chi_1(t)) &= \exp(-1/2(\frac{\chi_1 + 5}{2})^2) \\ \mu_2(\chi_1(t)) &= \exp(-1/2(\frac{\chi_1}{2})^2) \\ \mu_3(\chi_1(t)) &= \exp(-1/2(\frac{\chi_1 - 5}{2})^2)\end{aligned}$$

Les équations d'état (3.86) représentant un système généralisé qui peut être ramené sous la forme d'un modèle singulier comme suit :

$$\begin{cases} 0 = \sum_{i=1}^3 h_i(\chi(t)_1(t)) [A_i \chi(t) - E_i \dot{\chi}(t) + B_i u(t) + R d(t) + \Delta \chi_i] \\ y(t) = C \chi(t) + H d(t) \end{cases} \quad (3.87)$$

En posant

$$\chi^*(t) = \begin{bmatrix} \chi(t) \\ \dot{\chi}(t) \end{bmatrix}, \Leftrightarrow \dot{\chi}^*(t) = \begin{bmatrix} \dot{\chi}(t) \\ \ddot{\chi}(t) \end{bmatrix}$$

Le modèle d'état (3.87) devient alors,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\chi}^*(t) = \sum_{i=1}^3 h_i(\chi_1(t)) \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_i & -E_i \end{bmatrix} \chi^*(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} d(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \chi_i \end{bmatrix} \\ y(t) = [C \quad 0] \chi^*(t) + [H \quad 0] \begin{bmatrix} d(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.88)$$

Le vecteur de commande $u(t)$ représente les moments de forces appliqués au niveau des trois articulations. Il est défini par :

$$\begin{cases} u_1(t) = u_2(t) = 10 \text{ Newton} \\ u_3(t) = 15 \sin(t) \end{cases}$$

$d(t)$ est un signal aléatoire dont la valeur maximale correspond à 10% de l'amplitude maximale de $u_3(t)$.

3.4.3.3 Estimation des états en présence des défauts

On considère que le multi-modèle singulier (3.88) est affecté par des défauts actionneurs. Ce modèle est alors de la forme suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\chi}^*(t) = \sum_{i=1}^3 h_i(\chi_1(t)) \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_i & -E_i \end{bmatrix} \chi^*(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} d(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ F_i \end{bmatrix} f(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \chi_i \end{bmatrix} \\ y(t) = [C \quad 0] \chi^*(t) + [H \quad 0] \begin{bmatrix} d(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.89)$$

Les défauts actionneurs sont définis comme suit :

$$f_1(t) = \begin{cases} 0,35u_1(t) & \text{pour } 5 \leq t \leq 10 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0,4u_2(t) & \text{pour } 15 \leq t \leq 25 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et $f_3(t) = \begin{cases} 0,25u_3(t) & \text{pour } 30 \leq t \leq 35 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Les matrices du multi-observateur (3.41) obtenues après vérification des conditions d'existence et la résolution des LMIs du théorème (3.2) avec $\alpha = 3$ et $\beta = 0,5$ sont les suivantes :

$$Q = 10^4 \begin{bmatrix} 1.05 & -0.0600 & 0.2299 & -0.081 & -0.0078 & -0.0155 & 0 & 0 \\ -0.06 & 0.0237 & -0.0287 & 0.0042 & 0.0034 & 0.0085 & 0 & 0 \\ 0.23 & -0.0287 & 1.4215 & 0.0074 & -0.0111 & -0.0561 & 0 & 0 \\ -0.08 & 0.0042 & 0.0074 & 0.0091 & -0.0002 & -0.0011 & 0 & 0 \\ -0.008 & 0.0034 & -0.0111 & -0.0002 & 0.0009 & 0.002 & 0 & 0 \\ -0.0155 & 0.0085 & -0.0561 & -0.0011 & 0.002 & 0.0058 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.17 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 0.018 & 0.011 & -0.00001 & -0.00003 \\ -0.138 & -0.463 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.017 & 0.073 & -0.00002 & -0.00001 \\ 0.278 & 0.508 & -0.0002 & -0.0005 \\ -0.696 & -3.697 & 0.0007 & 0.0005 \\ 0.758 & 2.848 & -0.0008 & -0.0008 \\ 0.00001 & 0.00002 & 0.0035 & 0 \\ 0.000031 & 0.000015 & 0 & 0.0035 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = 10^3 \begin{bmatrix} 0.018 & 0.0107 & -0.00001 & -0.00003 \\ -0.118 & -0.436 & 0.00013 & 0.0001 \\ 0.013 & 0.068 & -0.00002 & -0.00001 \\ 0.263 & 0.484 & -0.00022 & -0.0005 \\ -0.412 & -3.382 & 0.0007 & 0.00053 \\ 0.589 & 2.652 & -0.0008 & -0.0008 \\ 0.00001 & 0.00002 & 0.0035 & 0 \\ 0.00003 & 0.00002 & 0 & 0.0035 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = 10^3 \begin{bmatrix} 0.0198 & 0.0085 & -0.00001 & -0.000031 \\ 0.0128 & -0.223 & 0.00012 & 0.00015 \\ -0.0064 & 0.0383 & -0.00001 & -0.000014 \\ 0.1643 & 0.2841 & -0.00022 & -0.00052 \\ 0.7726 & -1.6587 & 0.0007 & 0.00052 \\ -0.2042 & 1.4094 & -0.0008 & -0.00078 \\ 0.00001 & 0.00002 & 0.0035 & 0 \\ 0.00003 & 0.00002 & 0 & 0.0035 \end{bmatrix}$$

Pour $\chi_0 = [0.1 \ 1 \ 10 \ 0.3 \ 1 \ 10 \ 0.15 \ -5]^T$, les figures suivantes présentent l'évolution des états réels et leurs estimés du système singulier étudié en présence de défauts.

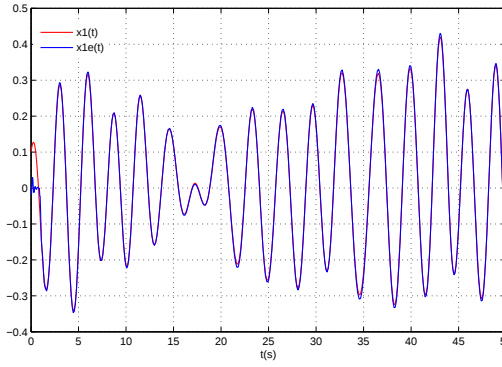


figure 3.5 – $\chi_1(t)$ et son estimé $\hat{\chi}_1(t)$

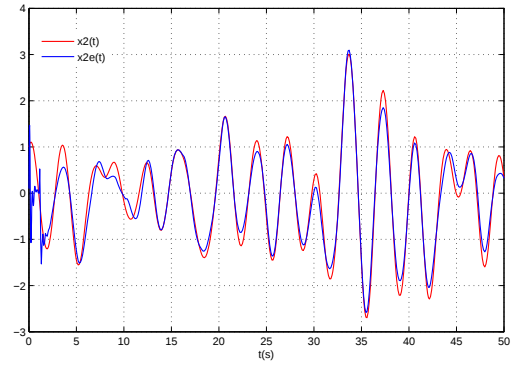


figure 3.6 – $\chi_2(t)$ et son estimé $\hat{\chi}_2(t)$

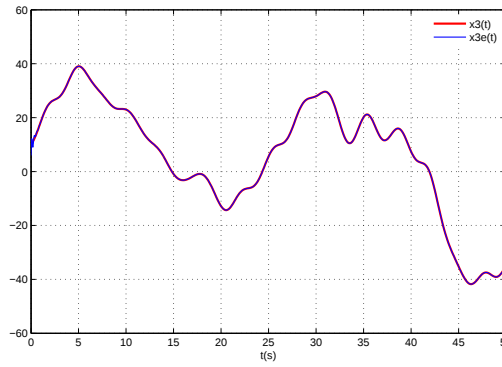


figure 3.7 – $\chi_3(t)$ et son estimé $\hat{\chi}_3(t)$

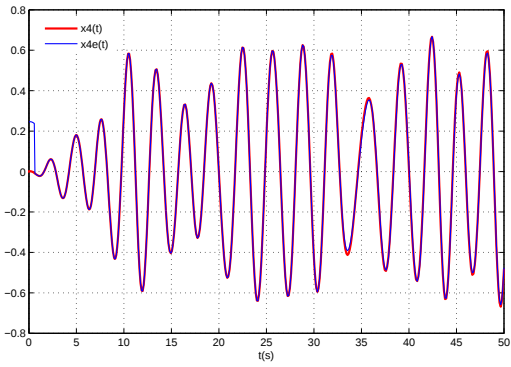


figure 3.8 – $\chi_4(t)$ et son estimé $\hat{\chi}_4(t)$

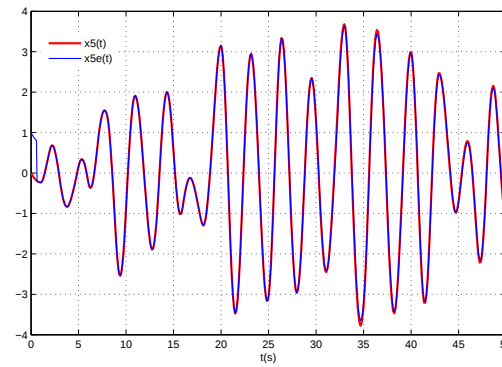


figure 3.9 – $\chi_5(t)$ et son estimé $\hat{\chi}_5(t)$

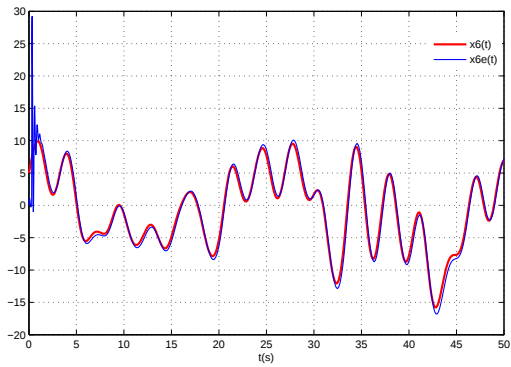


figure 3.10 – $\chi_6(t)$ et son estimé $\hat{\chi}_6(t)$

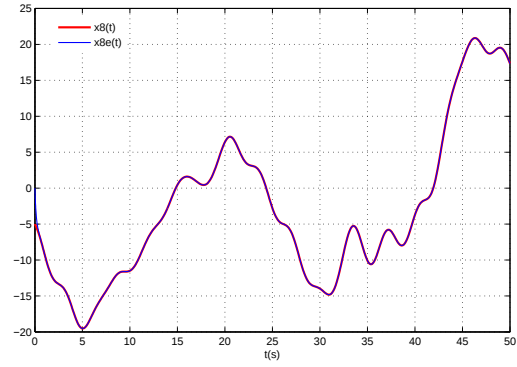
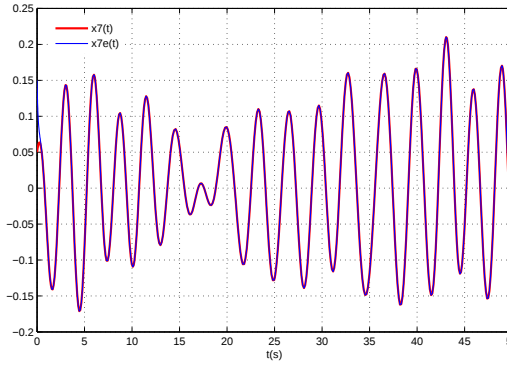


figure 3.11 – $\chi_7(t)$ et son estimé $\hat{\chi}_7(t)$ figure 3.12 – $\chi_8(t)$ et son estimé $\hat{\chi}_8(t)$

D'après ces simulations, il apparaît que le multi-observateur proposé conduit à une estimation des variables d'état du robot malgré la présence d'entrées inconnues et de défauts affectent le système.

3.4.3.4 Génération des résidus par banc de multi-observateurs

La génération de résidus à base d'observateurs consiste à reconstruire les sorties du système à partir des mesures et des entrées du système, puis à comparer les signaux mesurés et leur estimation. Les résidus correspondent alors aux différences $r(t) = y(t) - \hat{y}(t)$.

Dans ce paragraphe, on considère que chaque résidu est sensible à un seul défaut actionneur et insensible aux autres. Cela revient à utiliser une structure de multi-observateurs dédiés (DOS). Dans ce cas, si l'on considère un vecteur de commande unique et trois défauts actionneurs, le multi-modèle singulier (3.89) du robot manipulateur peut se mettre sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\chi}^*(t) = \sum_{i=1}^3 h_i(x_1(t)) \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A_i & -E_i \end{bmatrix} \chi^*(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ R & F^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ f_d(t) \end{bmatrix} \\ \quad + \begin{bmatrix} 0 \\ F^j \end{bmatrix} f_j(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta\chi_i \end{bmatrix} \\ y(t) = [C \ 0] \chi^*(t) + [H \ 0] \begin{bmatrix} d(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3.90)$$

où F^j est le $j^{ième}$ colonne de la matrice de commande B , F^r est une matrice formée par les colonnes restantes de la matrice B et $j \in [1, \dots, 3]$. $f_j(t)$ représente le défaut qui va être isolé et estimé et $f_d(t)$ est considéré comme entrée inconnue.

En utilisant le modèle ci-dessus (3.90), un banc de trois multi-observateurs de la même forme que (3.41) doit être synthétisé afin de générer le signal résidu. les résidus associés

aux trois défauts sont représentés sur les figures 3.13-3.15 suivantes. D'après ces résultats de simulations, le système de FDI proposé parvient à assurer d'une manière fiable la détection des défauts et la localisation des actionneurs défectueux et ce malgré la présence d'entrées inconnues affectant le système.

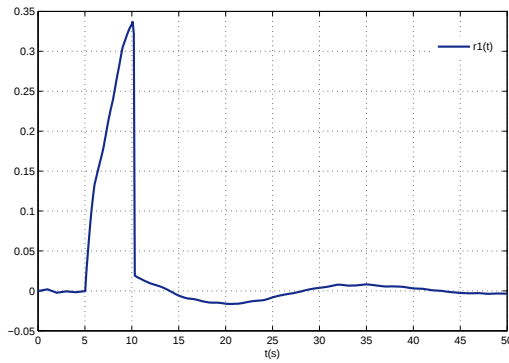


figure 3.13 – résidu $r_1(t)$ associé au défaut $f_1(t)$

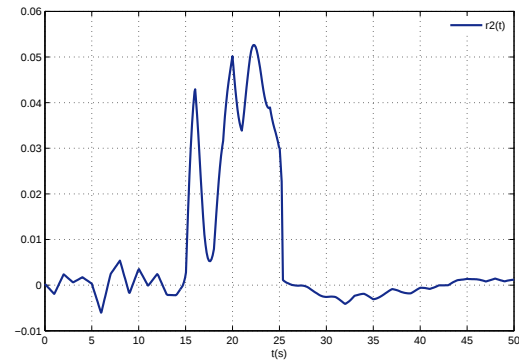


figure 3.14 – résidu $r_2(t)$ associé au défaut $f_2(t)$

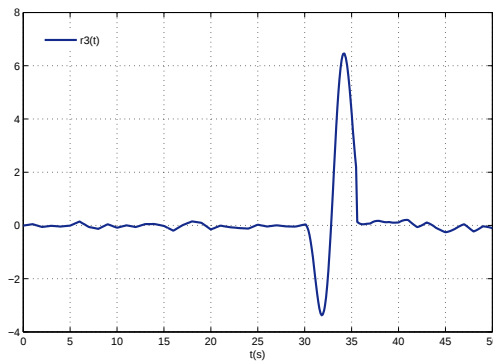


figure 3.15 – résidu $r_3(t)$ associé au défaut $f_3(t)$

L'analyse de la configuration des résidus $r_1(t)$, $r_2(t)$, et $r_3(t)$ générés par le banc des multi-observateurs et illustrés dans les figures ci-dessus, permet la détection et la localisation des défauts actionneurs. Ces résidus sont nuls en absence des défauts.

3.5 Méthodes d'estimation de défauts

À travers les approches de détection de défauts, une alarme peut être générée en cas de panne. Cependant, l'amplitude du défaut ne peut être fournie par ces méthodes de

FDI. Le processus d'estimation des amplitudes des défauts est appelé restructeur de défauts. Si le défaut peut être reconstruit, on peut facilement synthétiser une commande tolérante aux défauts. Toutefois, jusqu'à présent peu de résultats ont été obtenus sur la reconstruction de défaut pour les systèmes singuliers non linéaires. Très récemment, des approches intéressantes de reconstruction simultanée des états et des défauts ont été proposées en [Gao 07], [Gao 06'] pour les systèmes singuliers de Lipschitz. Le travail de [Gao 06'] centralise l'estimation des défauts capteurs, tandis que le résultat de [Gao 07] concerne l'estimation des défauts actionneurs seulement. Dans [Hamd 09], une méthode d'estimation des défauts actionneurs à base d'observateur à entrées inconnues pour les systèmes singuliers LPV polytopiques a été développée. Dans cette section, deux méthodes d'estimation de défauts sont proposées. La première technique est basée sur l'utilisation du multi-observateur étendu pour estimer un défaut à temps variant tandis que la deuxième méthode repose sur l'usage de la dérivée de l'état estimée pour reconstruire le défaut.

3.5.1 Estimation des défauts par un multi-observateur étendu

Pour estimer le défaut après la génération du signal alarme, on considère le système singulier multi-modèle avec défaut $f(t)$ et une perturbation $d(t)$ défini par :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\hat{x}(t)) [A_i x(t) + B_i u(t) + R_i d(t) + F_i f_a(t) + \Delta x_i] + w(t) \\ y(t) = Cx(t) + Hd(t) \end{cases} \quad (3.91)$$

avec $h_i(\hat{x}(t))$ la fonction de pondération qui dépend de l'état non mesurable pour tous $i = 1, \dots, h$. Supposons que $f_a(t)$ est dérivable suffisamment de fois que l'on veut et posons :

$$\zeta_j(t) = f_a^{(l-j)}(t) \quad (3.92)$$

où l est la classe de $f_a(t)$ et $j = 1, \dots, l$ est la $j^{\text{ième}}$ dérivée de ce défaut.

Le système suivant [Gao 08] est vérifiée :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1(t) = f_a^{(l)}(t) \\ \dot{\zeta}_2(t) = f_a^{(l-1)}(t) = \zeta_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_l(t) = f_a(t) = \zeta_{l-1}(t) \end{cases} \quad (3.93)$$

Le multi-modèle singulier (3.91) et le système d'équations (3.93) peuvent être écrits sous la forme augmentée suivante :

$$\begin{cases} \bar{E}\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\hat{x}(t)) (\bar{A}_i \bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{R}_i \bar{d}(t) + \bar{\Delta} \bar{x}_i + \bar{w}(t)) \\ y(t) = \bar{C} \bar{x}(t) + \bar{H} \bar{d}(t) \end{cases} \quad (3.94)$$

avec $\bar{x}^T(t) = [x^T(t) \quad \zeta_1^T(t) \quad \dots \quad \zeta_l^T(t)]^T \in R^{\bar{n}}, \bar{n} = n + kl$

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I_k \end{bmatrix}, \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 & \dots & 0 & F_i \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & I_k & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_k & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{R}_i = \begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & I_k \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\Delta}x_i = \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{w}(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{d}(t) = \begin{bmatrix} d(t) \\ f_a^{(l)}(t) \end{bmatrix}, \bar{H} = [H \ 0 \dots 0] \text{ and } \bar{C} = [C \ 0 \dots 0]$$

Le multi-observateur à entrées inconnues associé au système singulier (3.94) est défini par :

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\hat{x}(t))(\bar{N}_i \bar{z}(t) + \bar{G}_i u(t) + \bar{L}_i y(t) + \bar{\Delta} \bar{z}_i) \\ \hat{\bar{x}}(t) = \bar{z}(t) + \bar{T}_2 y(t) \end{cases} \quad (3.95)$$

où $\bar{z}(t) \in \mathcal{R}^{\bar{n}}$ est le vecteur d'état du multi-observateur et $\hat{\bar{x}}(t) \in \mathcal{R}^{\bar{n}}$ le vecteur d'état estimé du système singulier. Les matrices $\bar{N}_i$, $\bar{L}_i$, $\bar{G}_i$ et $\bar{T}_2$ sont de dimensions appropriées. Les conditions de convergence de l'erreur d'observation peuvent être établies par :

$$\bar{T}_1 \bar{A}_i = \bar{N}_i \bar{T}_1 \bar{E} + \bar{L}_i \bar{C} \quad (3.96)$$

$$\bar{G}_i = \bar{T}_1 \bar{B}_i \quad (3.97)$$

$$\bar{\Delta} \bar{z}_i = \bar{T}_1 \bar{\Delta} \bar{x}_i \quad (3.98)$$

$$(\bar{L}_i - \bar{N}_i \bar{T}_2) \bar{H} - \bar{T}_1 \bar{R}_i = 0 \quad (3.99)$$

$$\bar{T}_2 \bar{H} = 0 \quad (3.100)$$

$$I_{\bar{n}} = \bar{T}_1 \bar{E} + \bar{T}_2 \bar{C} \quad (3.101)$$

On définit l'erreur d'estimation par :

$$\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(t)$$

La dynamique de $\bar{e}(t)$ est alors décrite par l'équation suivante :

$$\dot{\bar{e}}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\hat{x}(t))[\bar{N}_i \bar{e}(t) - \bar{T}_1 \bar{R}_i \bar{d}(t) - \bar{T}_2 \bar{w}(t)] \quad (3.102)$$

Le théorème 3.4 suivant donne les conditions de convergence de $\bar{e}(t)$ i.e. les conditions pour que le système (3.95) soit un observateur du système singulier (3.94).

Théorème 3.4 [Hamd 12] Pour $\bar{d}(t)$ et $\bar{w}(t)$ bornées, la description multi-modèle (3.95) est un multi-observateur pour le système singulier (3.94) tel que :

$$\|\bar{e}(t)\|_2 \leq \eta \|\bar{d}(t)\|_2 \quad (3.103)$$

s'il existe une matrice commune symétrique définie positive $\bar{Q}$ et des matrices $\bar{W}_i = \bar{Q}\bar{K}_i$ tels que, $\forall i = 1, \dots, h$:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Pi}_i & \bar{Q}(\bar{T}_1\bar{R}_i) & -\bar{Q}\bar{T}_1 \\ (\bar{T}_1\bar{R}_i)^T\bar{Q} & -\frac{1}{\eta_1}I_{q+k} & 0 \\ -\bar{T}_1^T\bar{Q} & 0 & I_{\bar{n}} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.104)$$

sous contraintes :

$$\bar{W}_i\bar{H} + \bar{Q}\bar{T}_1\bar{R}_i = 0 \quad (3.105)$$

avec

$$\bar{\Pi}_i = (\bar{T}_1\bar{A}_i)^T\bar{Q} + \bar{Q}(\bar{T}_1\bar{A}_i) + (\alpha - \gamma^2)I_{\bar{n}} + (\bar{W}_i\bar{C})^T + (\bar{W}_i\bar{C})$$

et $\eta_1 = \alpha^{-1}\eta^2$ ■

Preuve 3.3 La démonstration de ce théorème suit la même démarche que la preuve (3.2) du théorème (3.3). □

Le défaut estimé $\hat{f}_a(t)$ est un composant du vecteur d'état augmenté $\hat{x}(t)$.

3.5.2 Estimation des défauts par un multi-observateur à entrées inconnues

Considérons le système singulier multi-modèle (3.106) où la matrice de commande est la même pour tous les sous modèles ; $B_i = B$

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) [A_i x(t) + Bu(t) + R_0^j f_d(t) + F_0 f(t) + \Delta x_i] \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.106)$$

où ξ est la variable de décision, R_0^j est la $j^{ième}$ colonne de la matrice B et F_0 est égale à la matrice B sans la colonne j . L'amplitude du défaut estimé est extraite directement par le $j^{ième}$ multi-observateur à entrées inconnues qui est conçu pour être insensible au $j^{ième}$ défaut ($f(t) = 0$).

En régime permanent, l'erreur d'estimation d'état tend vers zéro, on a alors $x(t) \cong \hat{x}(t)$.

En remplaçant $x(t)$ par $\hat{x}(t)$ et $f_d(t)$ par $\hat{f}_d(t)$ dans le multi-modèle (3.106) et en supposant que l'on a pas d'autres défauts, il vient :

$$\begin{cases} E\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) [A_i \hat{x}(t) + Bu(t) + R_0^j \hat{f}_d(t) + \Delta x_i] \\ y(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.107)$$

où $\hat{f}_d(t)$ représente l'estimation du $j^{ième}$ défaut actionneur. Sous réserve de l'existence de la pseudo-inverse de la matrice R_0^j , i.e. R_0^j est de plein rang colonne, on peut exprimer le vecteur du défaut estimé sous la forme :

$$\hat{f}_d(t) = (R_0^j)^+ \left[E\dot{\hat{x}}(t) - \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + Bu(t) + \Delta x_i) \right] \quad (3.108)$$

3.5.3 Application : Estimation des défauts du robot manipulateur

Reprenons l'exemple du robot manipulateur étudié dans les paragraphes précédents. Les défauts actionneurs peuvent être estimés à l'aide du multi-observateur (3.41) et en utilisant la relation (3.108) ci-dessus. Les défauts estimés sont alors représentés dans les figures suivantes 3.16-3.18.

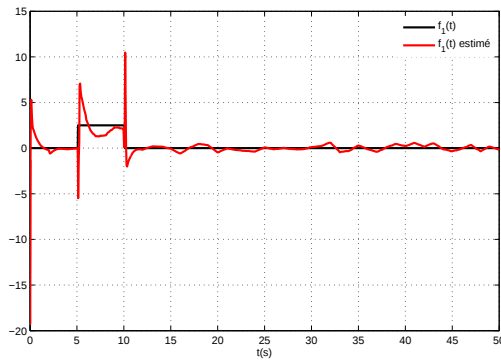


figure 3.16 – le défaut $f_1(t)$ et son estimé $\hat{f}_1(t)$

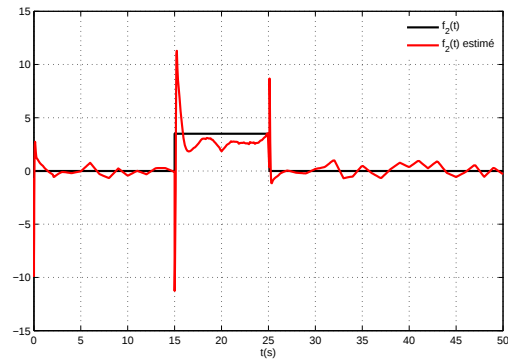


figure 3.17 – le défaut $f_2(t)$ et son estimé $\hat{f}_2(t)$

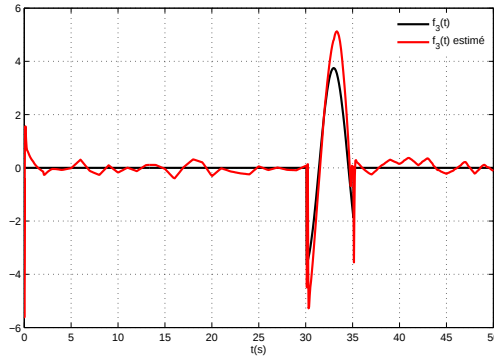


figure 3.18 – le défaut $f_3(t)$ et son estimé $\hat{f}_3(t)$

Il y apparait alors que l'algorithme de reconstruction des défauts proposé est efficace quant à l'estimation du comportement des défauts qui peuvent affecter un système multi-modèle singulier. Un tel algorithme est valable pour une large classe de défauts tels que les signaux invariants dans le temps et les signaux variant dans le temps.

3.6 Détection et estimation des défauts des systèmes singuliers LPV

La contribution principale de cette section concerne la conception d'un Observateur Proportionnel-Intégral à Entrées Inconnues (OPIEI) polytopique pour les systèmes singuliers LPV. Dans ce cadre de modélisation, le comportement dynamique du système singulier LPV est donné sous une forme polytopique, qui permet de décrire le système comme une combinaison convexe de sous-systèmes définis par les sommets d'un polytope convexe. Ces sous-modèles sont ensuite combinés par des fonctions de pondération convexe. Nous envisageons de présenter une méthode de conception d'un OPIEI polytopique pour les systèmes LPV singuliers soumis à des perturbations exogènes. L'observateur obtenu est utilisé pour l'estimation des états et des entrées inconnues. Il est également utilisé pour la détection et la localisation ainsi que l'estimation des défauts actionneurs.

3.6.1 Structure polytopique des systèmes singuliers à paramètres variants

Considérons le modèle d'état d'un système singulier LPV de la forme suivante :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \tilde{A}(\theta(t))x(t) + \tilde{B}(\theta(t))u(t) + \tilde{R}(\theta(t))d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.109)$$

où $x(t) \in \mathcal{R}^n$, $u(t) \in \mathcal{R}^p$ et $y(t) \in \mathcal{R}^m$. $d(t) \in \mathcal{R}^q$ représente le vecteur des entrées inconnues. $\tilde{A}(\cdot), \tilde{B}(\cdot), \tilde{R}(\cdot)$ sont des fonctions continues qui dépendent du vecteur $\theta(t)$. Comme il a été détaillé dans le deuxième chapitre, le système singulier (3.109) peut s'écrire sous la forme polytopique suivante :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i d(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.110)$$

avec $A_i \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathcal{R}^{n \times p}$, $R_i \in \mathcal{R}^{n \times q}$ et $C \in \mathcal{R}^{m \times n}$ sont des matrices à temps invariants définies pour le $i^{\text{ième}}$ modèle. $E \in \mathcal{R}^{n \times n}$ est une matrice constante singulière. $\mu_i(\theta(t))$ sont des fonctions de pondération qui satisfont les propriétés de la somme convexe dans l'ensemble suivant :

$$\Omega = \left\{ \mu(\theta(t)) \in \mathcal{R}^h, \mu(\theta(t)) = [\mu_1(\theta(t)), \dots, \mu_h(\theta(t))]^T, \mu_i(\theta(t)) \geq 0, \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t)) = 1 \right\} \quad (3.111)$$

Dans la suite, on présente la procédure générale de la conception d'observateur polytopique proportionnel intégral à entrées inconnues (OPIEI) pour les systèmes singuliers LPV. Cet observateur est construit par l'interpolation d'un ensemble d'OPIEI.

3.6.2 Structure polytopique de l'observateur proportionnel intégral

La structure de l'observateur proportionnel intégral du système singulier polytopique (3.110) est décrite par :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(N_i z(t) + G_i u(t) + \Delta z_i + L_i y(t) + H_i \hat{d}(t)) \\ \hat{x}(t) = z(t) + T_2 y(t) \\ \dot{\hat{d}}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))\Phi_i(y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases} \quad (3.112)$$

avec $\hat{x}(t) \in \mathcal{R}^n$, $z(t) \in \mathcal{R}^n$ et $\hat{d}(t) \in \mathcal{R}^q$ sont respectivement le vecteur d'état estimé, le vecteur d'état de l'observateur polytopique et l'estimé des entrées inconnues. $N_i, G_i, \Delta z_i, L_i, H_i, \Phi_i$ et T_2 sont les matrices inconnues du l'OPIEI qui doivent être synthétisées de sorte que l'erreur d'observation (2.63) soit stable. Comme nous l'avons expliqué

au second chapitre, lorsque les conditions suivantes sont vérifiées $\forall i = 1, \dots, h$:

$$T_1 A_i = N_i T_1 E + L_i C \quad (3.113)$$

$$G_i = T_1 B_i \quad (3.114)$$

$$\Delta z_i = T_1 \Delta x_i \quad (3.115)$$

$$0 = T_1 R \quad (3.116)$$

$$H_i = T_1 R_i \quad (3.117)$$

$$I_n = T_1 E + T_2 C \quad (3.118)$$

la dynamique des erreurs d'estimation d'état et des entrées inconnues peut alors être décrite par l'équation d'état augmentée suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \begin{bmatrix} N_i & H_i \\ -\Phi_i C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

3.6.2.1 Synthèse de l'OPIEI

Afin de déterminer les matrices de l'OPIEI et d'étudier la stabilité de l'erreur dynamique (3.119), on suppose que les triplets (E, A_i, C) sont imo-observables, et que $\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$. De ce fait et à partir de (3.118), on a :

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = I_n \quad (3.120)$$

Une solution de l'équation (3.120) peut être déterminée par la technique de la pseudo inverse de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}^+ \quad (3.121)$$

La substitution de l'égalité (3.118) dans (3.113), permet d'écrire pour $i = 1, \dots, h$:

$$T_1 A_i = N_i (I_n - T_2 C) + L_i C \quad (3.122)$$

Les équations (3.122) peuvent être mises sous la forme :

$$N_i = T_1 A_i - K_i C \quad (3.123)$$

avec

$$K_i = L_i - N_i T_2 \quad (3.124)$$

Les matrices L_i peuvent être déduites de l'équation (3.124) pour $i = 1, \dots, h$

$$L_i = K_i + N_i T_2 \quad (3.125)$$

Par suite, l'équation de l'erreur d'estimation (3.119) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) (\bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C}) \begin{bmatrix} e(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

ou de manière équivalente :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) (\bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C}) e_a(t) \quad (3.127)$$

avec

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} T_1 A_i & H_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{K}_i = \begin{bmatrix} K_i \\ \Phi_i \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}, e_a(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} \text{ et } H_i = T_1 R_i.$$

Évidemment, la stabilité de (3.127) est assurée si et seulement si les paires $(\bar{A}_i, \bar{C})$ sont détectables $\forall i = 1, \dots, h$, ce qui revient à :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} sE - T_1 A_i & -T_1 R_i \\ 0 & sI_q \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q, \quad \forall s \in \mathcal{C}^+. \quad (3.128)$$

La contrainte (3.128) généralise la *R-détectabilité* [Koen 02], [Hamd 12'] des systèmes singuliers polytopiques.

3.6.2.2 Convergence exponentielle de l'observateur proportionnel intégral polytopique

La convergence exponentielle (α -stabilité) de l'observateur se caractérise par une vitesse de convergence fixée (arbitraire) de l'erreur d'estimation, ce qui permet alors de fixer les performances de l'observateur à synthétiser. Le théorème suivant fournit des conditions suffisantes pour assurer la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation (3.127).

Théorème 3.5 [Hamd 12'] *Considérons le système singulier polytopique LPV (3.110) et l'OPIEI polytopique (3.112), la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation (3.127) est garantie, s'il existe une matrice symétrique et définie positive Q , des matrices $W_i = Q\bar{K}_i$ et un scalaire positif α , pour tout $\mu_i(\theta(t))$ tels que :*

$$\bar{A}_i^T Q + Q \bar{A}_i - \bar{C}^T W_i^T - W_i \bar{C} + 2\alpha Q < 0, \quad \forall i = 1, \dots, h \quad (3.129)$$

■

Preuve 3.4 La preuve de ce théorème découle de l'utilisation de la fonction quadratique de Lyapunov suivante :

$$V(t) = e_a^T(t)Qe_a(t), \quad Q = Q^T > 0 \quad (3.130)$$

La convergence exponentielle de l'erreur d'estimation est garantie si :

$$\exists Q = Q^T > 0 : \quad \dot{V}(t) + 2\alpha V(t) < 0 \quad (3.131)$$

avec α est le taux de décroissance choisi. En effet, une solution de l'équation (3.131) est donnée par :

$$V(t) \leq V(0)\exp(-2\alpha t), \forall t \geq 0 \quad (3.132)$$

Du fait que : $\lambda_{\min}(Q) \|e_a(t)\|^2 \leq V(t) \leq \lambda_{\max}(Q) \|e_a(t)\|^2$, la norme de l'erreur d'estimation peut être bornée par :

$$\|e_a(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)}} \exp(-\alpha t) \|e_a(0)\|, \forall t \geq 0 \quad (3.133)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov (3.130) par rapport au temps s'écrit :

$$\dot{V}(t) = \dot{e}_a^T(t)Qe_a(t) + e_a^T(t)Q\dot{e}_a(t) \quad (3.134)$$

qui devient en utilisant l'équation (3.127) :

$$\dot{V}(t) = e_a(t)^T \{ \mathcal{A}(t)^T Q + Q \mathcal{A}(t) \} e_a(t) \quad (3.135)$$

En utilisant (3.130) et (3.135), l'inégalité (3.131) devient :

$$e_a(t)^T \{ \mathcal{A}(t)^T Q + Q \mathcal{A}(t) + 2\alpha Q \} e_a(t) < 0 \quad (3.136)$$

qui est une forme quadratique en $e_a(t)$. L'inégalité ci-dessus est donc satisfaite lorsque la condition suivante est vérifiée :

$$\mathcal{A}(t)^T Q + Q \mathcal{A}(t) + 2\alpha Q < 0 \quad (3.137)$$

La relation (3.137) est une condition suffisante qui assure la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation $e_a(t)$. En considérant que la matrice Q est définie positive et que $\mathcal{A}(t)$ est une fonction continue pour $\mu \in \Omega$, et Ω un ensemble compact : il est clair qu'il existe une matrice symétrique définie positive Q ce qui implique que la partie gauche de

la relation (3.137) est uniformément définie négative [Wu 95].

D'où, de l'équation (3.127), en remplaçant $\mathcal{A}(t)$ par $\sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t)) (\bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C}) = \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t)) \Psi_i$.
L'inégalité (3.137) devient pour tout $\mu_i(\theta(t)) \in \Omega$:

$$\sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t)) \Psi_i^T Q + Q \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t)) \Psi_i + 2\alpha Q < 0 \quad (3.138)$$

En utilisant les propriétés de l'ensemble compact Ω , l'inégalité précédente (3.138) devient :

$$\sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t)) \Psi_i^T Q + Q \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t)) \Psi_i + \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t)) 2\alpha Q < 0 \quad (3.139)$$

L'inégalité (3.139) est donc vérifiée si les inégalités suivantes sont satisfaites

$\forall \mu_i(\theta(t)) \in \Omega$:

$$\Psi_i^T Q + Q \Psi_i + 2\alpha Q < 0, \quad \forall i = 1, \dots, h \quad (3.140)$$

Ce qui, après substitution de Ψ_i , devient équivalent à :

$$\bar{A}_i^T Q + Q \bar{A}_i - Q \bar{K}_i \bar{C} - (\bar{K}_i \bar{C})^T Q + 2\alpha Q < 0, \forall i = 1, \dots, h \quad (3.141)$$

Il convient de signaler que les inégalités précédentes (3.141) sont des inégalités bilinéaires par rapport à $\bar{K}_i$, Q et α . Leur résolution directe par des algorithmes d'optimisation standard est donc difficile. Afin de résoudre ce problème, nous utilisons le changement de variables suivant : $W_i = Q \bar{K}_i$. Ces inégalités peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\bar{A}_i^T Q + Q \bar{A}_i - \bar{C}^T W_i^T - W_i \bar{C} + 2\alpha Q < 0, \forall i = 1, \dots, h \quad (3.142)$$

qui sont linéaires par rapport aux matrices Q et W_i . De ce fait, une solution peut être obtenue en utilisant des outils LMI classiques et les gains sont alors donnés par :

$$\bar{K}_i = Q^{-1} W_i, \forall i = 1, \dots, h$$

□

La convergence exponentielle de l'erreur d'estimation (3.127), étudiée dans le paragraphe précédent, permet de garantir une certaine vitesse de décroissance de la fonction de Lyapunov et de forcer ainsi la vitesse de convergence de l'erreur d'estimation. En effet, la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation est obtenue en considérant un taux de décroissance nul ($\alpha = 0$).

3.6.3 Détection et isolation des défauts pour les systèmes singuliers LPV

Plusieurs méthodologies de diagnostic des systèmes LPV ordinaires ont été étudiées. *Abdalla et al.* [Abda 01] et *Henry et al.* [Henr 04] ont présenté une approche de détection et d'isolation des défauts pour cette classe de systèmes. Cette approche est directement inspirée des méthodes développées pour la commande robuste des systèmes LPV. Dans la présente étude, l'OPIEI polytopique proposé est spécifiquement conçu pour la détection, l'isolation et l'estimation des défauts actionneurs.

3.6.3.1 Génération de résidus par l'OPIEI polytopique

La génération de résidus à l'aide d'une estimation d'état consiste à reconstruire l'état ou plus généralement la sortie du processus à l'aide d'un observateur polytopique et à utiliser l'erreur d'estimation comme résidu. Cette méthode s'est beaucoup développée car elle donne lieu à la conception de générateurs de résidus flexibles. Dans cette partie, l'algorithme de génération de résidus obtenu par l'utilisation d'un observateur proportionnel intégral polytopique, est rendu sensible au vecteur de défaut actionneur $f_a \in \mathcal{R}^f$ et insensible aux perturbations $d(t)$ [Thei 02]. Considérons le système singulier polytopique suivant avec une unique matrice de commande B_i , soit $B_i = B$, une unique matrice de distribution $R_i = R$ et un défaut actionneur $f_a(t)$ pour tous les modèles locaux :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t))(A_i x(t) + Bu(t) + Rd(t) + Ff_a(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.143)$$

Afin de concevoir le générateur de résidus pour le système singulier (3.143), la forme générale de l'observateur proportionnel intégral polytopique s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t))(N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y(t) + H\hat{f}_a(t)) \\ \hat{x}(t) = z(t) + T_2 y(t) \\ r(t) = y(t) - \hat{y}(t) \\ \dot{\hat{f}}_a(t) = \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t))\Phi_i(y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases} \quad (3.144)$$

où $r(t)$ est le signal du résidu généré par la comparaison des sorties mesurées et estimées. Les différentes matrices du modèle (3.144) seront déterminées afin d'assurer la convergence des erreurs d'estimation des états et des défauts. En exprimant l'erreur d'estimation d'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ entre l'observateur polytopique (3.144) et le système singulier (3.143),

on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t)) [N_i e(t) + (T_1 A_i - N_i T_1 E - L_i C)x(t) + (T_1 B - G)u(t) \\ + T_1 R d(t) + (T_1 F - H)f_a(t) + H\zeta_{f_a}(t)] \end{aligned} \quad (3.145)$$

avec

$$\zeta_{f_a}(t) = f_a(t) - \hat{f}_a(t) \quad (3.146)$$

Si les conditions (3.113) à (3.116) sont vérifiées, et :

$$H = T_1 F \quad (3.147)$$

$$T_1 R = 0 \quad (3.148)$$

l'équation de l'erreur d'estimation devient alors :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t)) (N_i e(t) + H\zeta_{f_a}(t)) \quad (3.149)$$

Pour un défaut f_a à variation lente, on a :

$$\dot{\zeta}_{f_a}(t) = -\dot{\hat{f}}_a(t) \quad (3.150)$$

Soit, en se référant au modèle de l'observateur (3.144) :

$$\dot{\zeta}_{f_a}(t) = - \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t)) \Phi_i C e(t) \quad (3.151)$$

Les équations (3.149) et (3.151) peuvent être combinées sous une forme augmentée comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\zeta}_{f_a}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t)) \begin{bmatrix} N_i & H \\ -\Phi_i C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \zeta_{f_a}(t) \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

La conception de l'observateur polytopique (3.144) revient alors à résoudre les équations (3.113) à (3.116) sous la contrainte (3.148) dans le but d'assurer la convergence et la stabilité de l'erreur d'estimation (3.152). D'abord, et à partir des contraintes (3.118) et (3.148) on peut déterminer les matrices T_1 et T_2 . Les contraintes (3.118) et (3.148) conduisent à la forme augmentée suivante :

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & R \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

Une solution $\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}$ existe si : [Koen 05]

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E & R \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + \text{rang}(R) \quad (3.154)$$

Lorsque cette condition, la solution générale de (3.153) est donnée par :

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & R \\ C & 0 \end{bmatrix}^+ \quad (3.155)$$

Les autres matrices G_i , N_i et L_i caractérisant l'observateur proportionnel intégral polytopique (3.144) sont données respectivement par (3.114), (3.123) et (3.125).

Le résidu généré par cet observateur n'est autre que l'erreur de reconstruction de la sortie. Il sert à fournir un signal significatif permettant de mettre en évidence l'occurrence des défauts. L'observateur utilisé, peut fournir aussi une estimation des variables d'états et des défauts appliqués.

3.6.3.2 Localisation des défauts actionneurs

La localisation des défauts consiste à distinguer l'occurrence d'un défaut particulier des autres défauts possibles. Si un simple résidu, sensible à tous les défauts, est suffisant pour la détection, un ensemble de résidus structurés est nécessaire afin d'isoler un ou plusieurs défauts. Ainsi les résidus structurés sont conçus pour être sensibles à un certain type de défaut et insensibles à d'autres. Dans ce paragraphe, l'idée consiste à rendre chaque résidu sensible à un seul défaut actionneur (résidu dédié) et insensible aux autres [Rodr 08]. Cela conduit à considérer à chaque fois, qu'un seul composant de l'entrée de commande $u(t)$ est défectueux et les autres sont intégrés dans la matrice des entrées inconnues. Pour chaque défaut actionneur, le système singulier polytopique défectueux est exprimé par :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t))(A_i x(t) + Bu(t) + \begin{bmatrix} R & F^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ f_{ad}(t) \end{bmatrix} + F^j f_{aj}(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.156)$$

où F^j est la $j^{ième}$ colonne de la matrice de commande B , F^r est une matrice formée par les colonnes restantes de la matrice B et $j \in [1, \dots, p]$. $f_{aj}(t)$ représente le défaut qui va être isolé et estimé et $f_{ad}(t)$ est considéré comme une entrée inconnue. $\begin{bmatrix} R & F^r \end{bmatrix}$ est la nouvelle matrice de distribution composée par la matrice R et la matrice F^r . En se basant sur le modèle de description ci-dessus (3.156), un banc de p observateurs PI polytopiques doit être synthétisé afin de générer un résidu porteur d'information sur un défaut spécifique. Pour $j \in [1, \dots, p]$, ce banc d'observateurs est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{z}^j(t) = \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t))(N_i^j z(t) + G_i^j u(t) + L_i^j y(t) + H \hat{f}_{aj}(t)) \\ r^j(t) = y(t) - \hat{y}(t) \\ \dot{\hat{f}}_{aj}(t) = \sum_{i=1}^h \mu_i(\theta(t))\Phi_i^j(y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases} \quad (3.157)$$

Les matrices de tels observateurs (3.157) doivent satisfaire les équations (3.114), (3.123), (3.124) et (3.155) où la matrice R est remplacée par $\begin{bmatrix} R & F^r \end{bmatrix}$. Chaque vecteur de résidu $r^j(t)$ obtenu, est utilisé pour isoler un défaut selon un test statistique [Rodr 05]. Le banc d'observateurs utilisé pour l'isolation ne peut isoler qu'un seul défaut en même temps. Ceci est basé sur le fait que la probabilité pour que deux ou plusieurs défauts se produisent en même temps est très faible dans la situation réelle.

3.6.4 Exemple illustratif

Considérons le système singulier à paramètres variants décrit par :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \tilde{A}(\theta(t))x(t) + \tilde{B}(\theta(t))u(t) + \tilde{R}(\theta(t))d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

avec

$$\tilde{A}(\theta) = \begin{bmatrix} -1.75 + \theta_2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 + \theta_1 & 0 & 0 \\ -1.8 & -1 & -0.75 + \theta_1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 + \theta_2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 + \theta_1 & 1 \\ 1 & 0.5 + \theta_2 \\ 1 & 0 \\ \theta_2 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{R}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6 + \theta_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans cet exemple, la représentation polytopique du système singulier LPV est traité, les variables θ_i varient en fonction de $\theta_1 \in [-0.05, 0.05]$ et $\theta_2 \in [-0.1, 0.1]$, $l = 2$. Dans ce cas, la représentation polytopique peut être écrite comme suit :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(\theta(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i d(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Le système obtenu évolue dans un polytope à quatre sommets correspondant aux valeurs limites des paramètres θ_1 et θ_2 . Les matrices décrivant ce système sont les suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.85 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1.05 & 0 & 0 \\ -1.8 & -1 & -0.8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1.1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1.65 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1.05 & 0 & 0 \\ -1.8 & -1 & -0.8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1.85 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0.95 & 0 & 0 \\ -1.8 & -1 & -0.7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1.1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -1.65 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0.95 & 0 & 0 \\ -1.8 & -1 & -0.7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.95 & 1 \\ 1 & 0.4 \\ 1 & 0 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.95 & 1 \\ 1 & 0.6 \\ 1 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1.05 & 1 \\ 1 & 0.4 \\ 1 & 0 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 1.05 & 1 \\ 1 & 0.6 \\ 0 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = R_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.55 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, R_3 = R_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.65 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les fonctions de pondération $\mu_i(\theta(t))$ sont telles que :

$$\mu_1(\theta(t)) = \frac{\theta_1(t) - \underline{\theta}_1}{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1} \frac{\theta_2(t) - \underline{\theta}_2}{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2} = \frac{(\theta_1(t) + 0.05)(\theta_2(t) + 0.1)}{0.02}$$

$$\mu_2(\theta(t)) = \frac{\theta_1(t) - \underline{\theta}_1}{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1} \frac{\bar{\theta}_2 - \theta_2(t)}{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2} = \frac{(\theta_1(t) + 0.05)(0.1 - \theta_2(t))}{0.02}$$

$$\mu_3(\theta(t)) = \frac{\bar{\theta}_1 - \theta_1(t)}{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1} \frac{\theta_2(t) - \underline{\theta}_2}{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2} = \frac{(0.05 - \theta_1(t))(\theta_2(t) + 0.1)}{0.02}$$

$$\mu_4(\theta(t)) = \frac{\bar{\theta}_1 - \theta_1(t)}{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1} \frac{\bar{\theta}_2 - \theta_2(t)}{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2} = \frac{(0.05 - \theta_1(t))(0.1 - \theta_2(t))}{0.02}$$

3.6.4.1 Synthèse de l'OPIEI polytopique

L'observateur polytopique proportionnel intégral est représenté par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(\theta(t)) (N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y(t) + H_i \hat{d}(t)) \\ \hat{x}(t) = z(t) + M y(t) \\ \dot{\hat{d}}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(\theta(t)) \Phi_i (y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases} \quad (3.158)$$

La procédure de conception de l'OPIEI polytopique est établie par :

Etape 1 : En se basant sur les matrices du système singulier polytopique, les hypothèses $H1$ et $H2$ sont satisfaites.

Etape 2 : Les matrices T_1 et T_2 sont déterminées par (3.121) par la pseudo-inverse.

Etape 3 : En utilisant la contrainte (3.117), les LMIs (3.129) sont résolues par l'outil numérique LMI toolbox pour conduire aux gains matriciels suivants :

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.167 & 2.798 & -2.208 \\ 5.135 & -5.868 & 6.978 \\ 3.917 & 5.608 & -5.170 \\ -8.414 & 9.848 & 0.105 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -1.117 & 2.716 & -2.105 \\ 5.095 & -5.697 & 6.760 \\ 2.715 & 6.790 & -5.991 \\ -7.618 & 8.876 & 0.878 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -1.282 & 2.920 & -2.319 \\ 5.582 & -6.337 & 7.388 \\ 4.200 & 5.308 & -4.958 \\ -8.875 & 10.362 & -0.329 \end{bmatrix}, K_4 = \begin{bmatrix} -1.230 & 2.836 & -2.216 \\ 5.533 & -6.160 & 7.170 \\ 2.992 & 6.492 & -5.775 \\ -8.068 & 9.387 & 0.439 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 38.200 & -37.145 & 31.637 \end{bmatrix}, \Phi_2 = \begin{bmatrix} 37.011 & -35.204 & 29.807 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_3 = \begin{bmatrix} 42.286 & -41.425 & 35.127 \end{bmatrix}, \Phi_4 = \begin{bmatrix} 41.001 & -39.431 & 33.304 \end{bmatrix}$$

où $K_{i,i=1,\dots,4}$ sont les gains proportionnels et $\Phi_{i,i=1,\dots,4}$ sont les gains des actions intégrales.

Etape 4 : Les autres matrices de l'OPIEI polytopique G_i , N_i et L_i peuvent être déterminées respectivement à partir de (3.114), (3.123) et (3.124).

3.6.4.2 Simulation

Les signaux d'entrées sont choisis constants, $u_1(t) = u_2(t) = 2$, la distribution $d(t)$ est un signal rectangulaire appliqué pour $7 \leq t \leq 10$. Les valeurs initiales de l'état $x(t)$ et de l'entrée inconnues $d(t)$ sont choisies nulles. Pour $\hat{x}(0)$ distinct de $x(0)$; $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}^T$, l'OPIEI synthétisé dans le paragraphe précédent permet de reconstituer les états du système et les entrées inconnues. Les figures 3.19-3.22 montrent les grandeurs estimées.

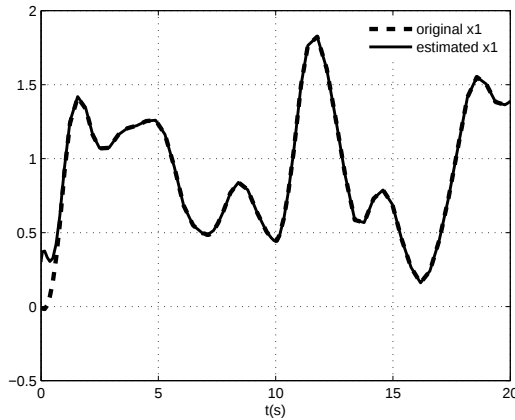


figure 3.19 – $x_1(t)$ et son estimé $\hat{x}_1(t)$

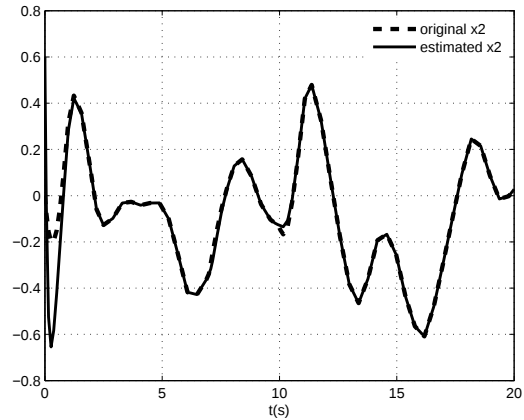
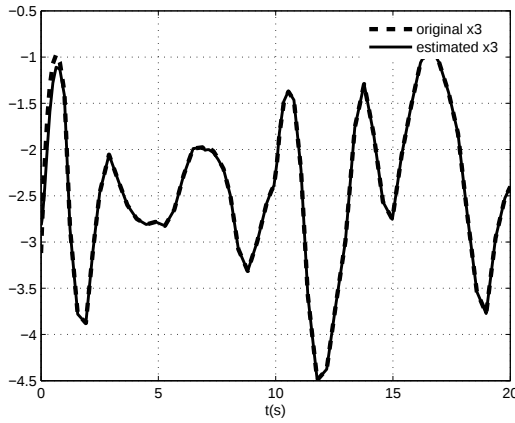
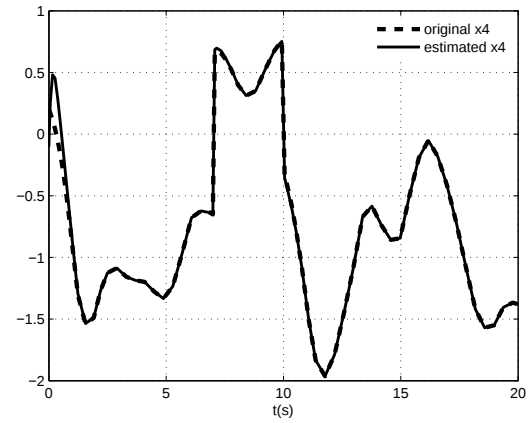
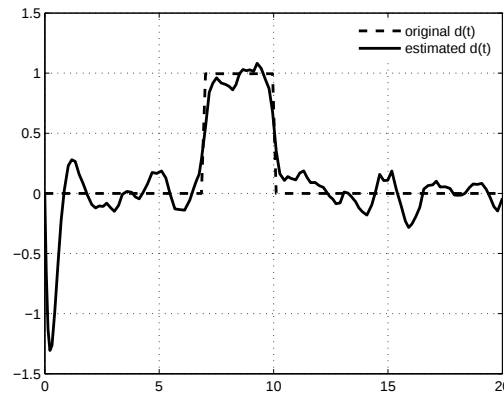


figure 3.20 – $x_2(t)$ et son estimé $\hat{x}_2(t)$

figure 3.21 – $x_3(t)$ et son estimé $\hat{x}_3(t)$ figure 3.22 – $x_4(t)$ et son estimé $\hat{x}_4(t)$

Il est clair que les états estimés convergent rapidement vers les états réels et reproduisent qua-si parfaitement leur comportement, et ce malgré l'entrée inconnue $d(t)$ qui affecte le système et le bruit rajouté au niveau des sorties (un bruit blanc de variance 0.01).

figure 3.23 – l'entrée inconnue $d(t)$ et son estimé $\hat{d}(t)$

Par ailleurs, l'OPIEI proposé pour le système étudié permet de reconstruire d'une manière satisfaisante le signal de l'entrée inconnue comme le montre la figure 3.23

3.6.4.3 Diagnostic des défauts par l'OPIEI polytopique

Dans ce paragraphe, on considère un vecteur de commande constant et deux défauts actionneurs avec amplitude constante. Considérons le modèle (3.156) avec des matrices

de commande et de distribution uniques :

$$\tilde{B}(\theta) = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ et } R(\theta) = R = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

. Afin de détecter et d'isoler les défauts actionneurs, deux OPIEI polytopiques sont prévus ; un OPIEI pour chaque défaut actionneur.

Les OPIEI correspondant à ces deux défauts sont caractérisés par un système de la forme (3.157) polytopique.

Les paramètres des deux OPIEI synthétisés sont :

• **Pour l'OPIEI associé au défaut f_{a1} affectant l'entrée u_1 :**

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -8.4080 & -24.5427 & 34.6983 \\ 18.1580 & 35.0427 & -44.1983 \\ 17.7830 & 24.5427 & -35.1983 \\ -18.5330 & -24.0427 & 44.6983 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 1.3770 & -19.4795 & 26.5497 \\ 9.2480 & 29.4795 & -37.0497 \\ 9.3730 & 18.9795 & -27.5497 \\ -9.4980 & -18.9795 & 37.5497 \end{bmatrix} \\ K_3 &= \begin{bmatrix} 5.9597 & -18.9927 & 24.0461 \\ 4.0403 & 28.9927 & -34.0461 \\ 4.9153 & 18.4927 & -24.5461 \\ -4.9153 & -18.4927 & 34.0461 \end{bmatrix}, K_4 = \begin{bmatrix} 4.6207 & -17.0069 & 23.5631 \\ 5.0043 & 27.5069 & -33.0631 \\ 5.1293 & 17.5069 & -23.5631 \\ -5.7543 & -16.5069 & 33.5631 \end{bmatrix} \\ \Phi_1 &= \begin{bmatrix} -6.1165 & -1.8236 & 6.1770 \end{bmatrix}, \Phi_2 = \begin{bmatrix} -0.1893 & 0.5461 & 0.7043 \end{bmatrix} \\ \Phi_3 &= \begin{bmatrix} -1.4298 & 0.1247 & 0.4567 \end{bmatrix}, \Phi_4 = \begin{bmatrix} -0.2174 & -0.2830 & 0.9767 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les autres matrices de l'OPIEI polytopique G_i , N_i et L_i peuvent être déterminées respectivement à partir de (3.114), (3.123) et (3.124).

• **Pour l'OPIEI associé au défaut f_{a2} affectant l'entrée u_2 :**

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} 5.7045 & 1.7695 & -2.9652 \\ 11.8856 & 11.1484 & -11.7936 \\ 6.7284 & -1.2375 & 1.8729 \\ -8.6938 & 0.6527 & 9.4016 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 5.6618 & 1.7056 & -2.8783 \\ 11.0172 & 10.4399 & -10.8880 \\ 6.3361 & -1.5349 & 2.2503 \\ -8.0191 & 1.1835 & 8.7191 \end{bmatrix} \\ K_3 &= \begin{bmatrix} 5.6632 & 1.7479 & -2.9350 \\ 11.6580 & 11.0614 & -11.5620 \\ 6.6546 & -1.2630 & 1.9623 \\ -8.5445 & 0.7100 & 9.2383 \end{bmatrix}, K_4 = \begin{bmatrix} 5.6025 & 1.6583 & -2.8188 \\ 10.6798 & 10.2005 & -10.4795 \\ 6.2294 & -1.6049 & 2.3922 \\ -7.7961 & 1.3424 & 8.4372 \end{bmatrix} \\ \Phi_1 &= \begin{bmatrix} -0.0053 & -0.0128 & -0.0084 \end{bmatrix}, \Phi_2 = \begin{bmatrix} -0.0044 & -0.0121 & -0.0094 \end{bmatrix} \\ \Phi_3 &= \begin{bmatrix} -0.0050 & -0.0126 & -0.0088 \end{bmatrix}, \Phi_4 = \begin{bmatrix} -0.0040 & -0.0118 & -0.0099 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les autres matrices de l'OPIEI polytopique G_i , N_i et L_i peuvent être déterminées respectivement à partir de (3.114), (3.123) et (3.124).

La performance du système de diagnostic des défauts est illustrée en considérant le cas des deux dysfonctionnements suivants :

- Un premier dysfonctionnement causé par le défaut f_{a1} défini par :

$$f_{a1}(t) = \begin{cases} 0.25u_1(t) & \text{pour } 10 \leq t \leq 14 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Un deuxième dysfonctionnement causé par le défaut f_{a2} défini par :

$$f_{a2}(t) = \begin{cases} 0.4u_2(t) & \text{pour } 15 \leq t \leq 19 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Les résidus associés à ces deux défauts générés par l'observateur polytopique proportionnel integral sont donnés par les figures 3.24 et 3.25.

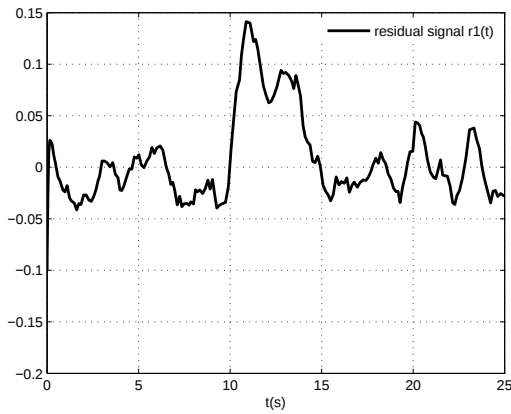


figure 3.24 – le signal du résidu $r_1(t)$

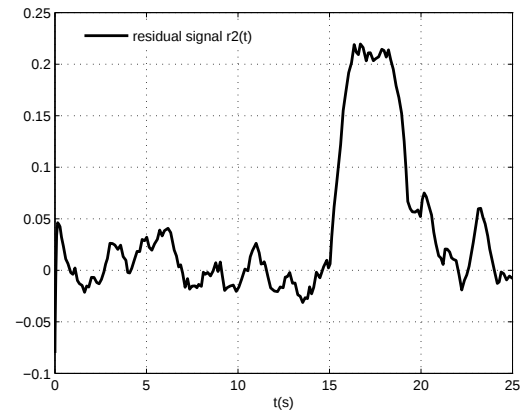


figure 3.25 – le signal du résidu $r_2(t)$

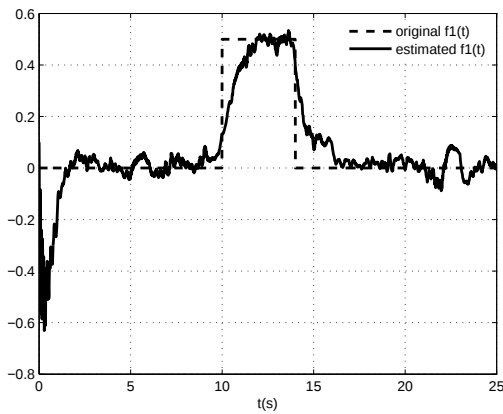


figure 3.26 – le défaut actionneur $f_{a1}(t)$ et son estimé $\hat{f}_{a1}(t)$

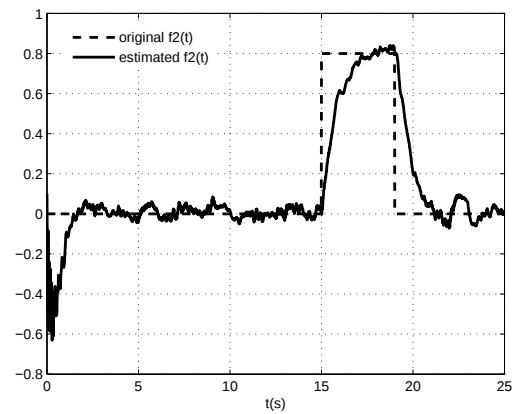


figure 3.27 – le défaut actionneur $f_{a2}(t)$ et son estimé $\hat{f}_{a2}(t)$

On peut y voir que les résidus $r_1(t)$ et $r_2(t)$ restent très proche de zéro en absence de défauts. (Les petites fluctuations sont dues à l'environnement bruité du système). L'amplitude des résidus change d'une manière considérable en présence d'un défaut actionneur qui affecte l'actionneur correspondant. Les signaux fournis par le générateur de résidus permettent l'isolation des défauts en question.

L'estimation des défauts étudiés $f_{a1}(t)$ et $f_{a2}(t)$ est conduite le même observateur polytopique. Les défauts estimés sont reportés sur les figures 3.26 et 3.27. Il apparaît une reproduction performante des signaux $f_{a1}(t)$ et $f_{a2}(t)$. Néanmoins on peut remarquer une légère différence de forme qui est due à la constante du temps de l'observateur.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, le problème de diagnostic des systèmes singuliers multi-modèles a été considéré. Nous nous sommes basés sur la structure des approches à base de modèles pour la conception de générateurs de résidus ainsi que de multi-observateurs proportionnels à action intégrale pour la détection, l'isolation et l'estimation des défauts actionneurs. Le générateur de résidus reprend la technique de banc de multi-observateurs à entrées inconnues par découplage afin de générer des résidus structurés dans le but de localiser des défauts actionneurs.

L'inconvénient de cette approche réside dans la contrainte de découplage des entrées inconnues. En effet, lors du découplage des entrées inconnues, l'effet des défauts peut être éliminé au niveau des signaux des résidus. Ce problème a été contourné par la conception d'un générateur de résidus qui assure un compromis entre la minimisation de l'influence des entrées inconnues et la maximisation de l'impact des défauts sur les résidus.

Par ailleurs, l'estimation des défauts dans le cas des systèmes singuliers multi-modèles à variables de décision non mesurables a été considéré par une approche appropriée utilisant un observateur à gain proportionnel.

En outre, une méthode d'estimation des états et des défauts spécifique aux systèmes LPV a été mise au point, moyennant l'utilisation d'un observateur à actions proportionnelle et intégrale.

Les différentes approches proposées dans ce chapitre ont été illustrées par différents exemples de simulations.

Conclusion Générale et perspectives

Le développement mené dans cette thèse constitue une contribution relative à la modélisation multi-modèle, l'estimation d'état et des entrées inconnues et leur application au diagnostic des systèmes singuliers non linéaires et à paramètres variants. Dans le contexte de modélisation, des techniques de représentation multi-modèle ont été choisies pour les avantages qu'elles apportent aux niveaux de l'analyse de la stabilité, de synthèse des observateurs et des générateurs de résidus pour les systèmes singuliers non linéaires. En effet, la structure multi-modèle a fait l'objet de nombreuses études dans le domaine d'identification, de commande ou d'observation pour les systèmes à représentation d'état standard. En revanche cette approche constitue un sujet d'étude encore ouvert pour le cas des systèmes singuliers ou algèbro-différentiels.

L'étude proposée offre aussi une méthode de modélisation des systèmes singuliers à paramètres variants (LPV). Cette approche est basée sur une représentation polytopique du système singulier LPV. La structure polytopique obtenue est adoptée pour la reconstruction d'état, des entrées inconnues et des défauts des systèmes algèbro-différentiels LPV. Elle représente un point peu évoqué dans la littérature. Ce résultat représente l'une des contributions de notre travail [Hamd 12']. Le choix de la structure multi-modèle ainsi que l'approche polytopique est justifié par son aspect usé concernant l'obtention des modèles locaux qui permettent d'approximer le comportement des systèmes non linéaires.

Après avoir rappelé dans le premier chapitre certaines notions, utiles à la compréhension du mémoire, concernant cette classe de systèmes, et avoir montré l'intérêt particulier de son étude, nous avons orienté nos travaux selon trois grands axes qui portent sur la modélisation multi-modèle, l'estimation des états et le diagnostic à base de modèles des systèmes singuliers LPV polytopique et multi-modèles.

Dans le contexte de la modélisation, nous avons étendu dans le second chapitre l'approche multi-modèle pour le cas des systèmes singuliers. Différentes méthodes ont été développées, ces méthodes sont basées sur des modèles mathématiques provenant d'une description phénoménologique du système à étudier. Une première méthode d'obtention du multi-modèle est basée sur la technique de linéarisation. Cette technique présente cer-

tains inconvénients tels que la difficulté du choix du nombre et de la position des différents points de fonctionnement ainsi que la perte d'information qui est due essentiellement au calcul des dérivées lors de la linéarisation. Une deuxième méthode basée sur des modèles de type Takagi-Sugeno est aussi développée. Cette méthode utilise l'approche par secteur non linéaire qui permet d'obtenir une forme multi-modèle équivalente au système non linéaire initial. Les systèmes singuliers LPV ont été aussi modélisés par l'approche polytopique. Cette méthode est basée sur la représentation du système LPV singulier dans un polytope dont les sommets sont fixés par les valeurs limites des paramètres variants.

Le processus de modélisation multi-modèle, constitue une étape préliminaire pour aborder le problème d'estimation des variables d'état des systèmes singuliers non linéaires et LPV. En ce qui concerne l'estimation d'état, deux types d'observateurs pour les systèmes singuliers multi-modèles et LPV ont été développés également dans le deuxième chapitre de ce mémoire. Le premier observateur multi-modèle à gain proportionnel est destiné pour les systèmes singuliers non linéaires représenté par un multi-modèle. Lorsque de tels systèmes sont affectés par des entrées inconnues, le multi-observateur obtenu, permet de procéder à leur estimation. Le deuxième observateur est de type proportionnel intégral. Il est dédié aux systèmes singuliers multi-modèles affectés par des entrées exogènes. Cet observateur permet d'établir une estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues du système par le biais de son action intégrale.

La phase de diagnostic suit couramment celle de l'estimation d'état, qui permet de générer des symptômes de défaillance du système singulier à partir d'une comparaison des signaux extraits du système et des signaux estimés. Les écarts entre ces signaux soulignent la présence d'un défaut dans le système qu'il convient d'isoler et d'estimer.

Par ailleurs, trois méthodologies de détection, d'isolation et d'estimation des défauts ont été proposées dans le troisième chapitre. La première repose sur la génération de résidus à base d'observateur à entrées inconnues. Cet observateur est dédié aux systèmes singuliers multi-modèles affectés par des entrées inconnues ou par des perturbations. Il assure un compromis entre la minimisation de l'influence des entrées inconnues et la maximisation de l'influence des défauts sur l'erreur d'estimation. La deuxième méthodologie concerne la détection et l'estimation des défauts des systèmes singuliers multi-modèles dans le cas de multi-modèles à variables de décision mesurables et non mesurables. La troisième méthode est basée sur l'utilisation de l'observateur proportionnel intégral polytopique pour la détection et l'estimation des défauts des systèmes singuliers LPV. Cet observateur permet d'estimer conjointement l'état et le défaut.

Les différentes approches proposées et formulées dans cette thèse ont été validées et illustrées sur différents exemples de modèles de processus singuliers non linéaires.

Il est à noter que les résultats proposés dans ce mémoire ouvrent plusieurs perspectives aussi bien sur le plan méthodologique que sur le plan appliqué. En particulier, il serait intéressant d'une part de considérer le problème de commande tolérante aux défauts des systèmes singuliers, et d'envisager d'autre part la mise en oeuvre des techniques développées pour des processus physiques décrits par des modèles algèbro-différentiels, et c'est dans ce sens que nous envisageons de poursuivre nos travaux.

Bibliographie

- [Abda 01] M. O. Abdalla, E. G. Nobrega and K. M. Grigoriadis, "Fault detection and isolation filter design for linear parameter varying systems", *Proceedings of the American control conference*, Arlington, June 25-27, pp 3890-3895, 2001.
- [Akhe 04] A. Akhenak, M. Chadli, D. Maquin and J. Ragot, "State estimation of uncertain multiple model with unknown inputs", *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp 3563-3568, 2004.
- [Akhe 04'] A. Akhenak, "Conception d'observateurs non linéaires par approche multi-modèle : application au diagnostic", *Ph.D. thèse*, l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 2004.
- [Alco 96] G. E. Alcorta and P. M. Frank, "Analysis of a class of dedicated observer schemes to sensor fault isolation", *UKACC International Conference on Control*, pp 60-65, 1996.
- [Anst 09] F. Anstett, G. Millerioux and G. Bloch, "Polytopic observer design for LPV systems based on minimal convex polytope finding", *Journal of Algorithms and Computational Technology*, vol 3, no. 1 , pp 23-43, 2009.
- [Asch 98] U. M. Ascher and L. R. Petzold, "Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations", *SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics*, University City Science Center, Philadelphia, 1998.
- [Bass 93] M. Basseville, I.V. Nikiforov, "Detection of Abrupt Changes : Theory and Application", *Prentice Hall, Inc.*, 1993.
- [Benh 95] N. Benhadj.Braiek and F. Rotella, "State observer design for a class of non linear systems, systems analysis modelling and simulation", *SIAM 17*, pp 265-277, 1995.
- [Benh 99] N. Benhadj.Braiek and C. Mechmeche, "Fault detection observer design for a class of non-linear systems", *International Conference on Computation Intelligence for Modelling, Control and Automation*, CIMCA, Vienna, Austria, February 1999.

- [Boua 06] F. Bouani, K. Laabidi and M. Ksouri, "Constrained Nonlinear Multi-objective Predictive Control", *IMACS Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications (CESA)*, Beijing, China, pp 1558-1565, October 4-6, 2006.
- [Boul 08] B. Boulkroune, "Estimation de l'état des systèmes non linéaires à temps discret. Application à une station d'épuration", *Ph.D. thèse*, l'université de Henri Poincaré - Nancy 1 Département de formation doctorale en automatique UFR STMIA, 2008.
- [Bout 95] M. Boutayeb and M. Darouach, "Observers design for non linear descriptor systems", *Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control New Orleans*, pp 2369-2374, LA - December 1995.
- [Bria 08] C. Briat, "Robust Control and Observation of LPV Time-delay Systems", *Thèse de Doctorat*, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2008.
- [Bruz 04] F. Bruzelius, "Linear Parameter-Varying Systems an approach to gain scheduling", *PhD Thesis*, Department of Signals and Systems, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 2004.
- [Chad 08] M. Chadli, J. Daafouz and M. Darouach, "Stabilisation of Singular LPV Systems", *Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control*, Seoul, Korea, July 6-11, pp 9999-10002, 2008.
- [Chad 02] M. Chadli, "Stabilité et Commande des Systèmes Décrits par des Multimodèles", *Thèse de Doctorat*, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2002.
- [Chen 07] W. Chen, "Model based fault diagnosis in complex control systems—robustes and adaptive approaches", *school of engineering science Simon Frazer university*, Burnaby, BC, Canada , 2007.
- [Chen 01] Z. Chen and J. Huang, "Robust output regulation of singular nonlinear systems", *Communications in information and systems Press*, vol. 1, no. 4, pp. 381-394, December 2001.
- [Chen 99] J. Chen and R. J. Patton, "Robust model-based fault diagnosis for dynamic Systems", *Kluwer Acadmic Publishers*, Boston / Dordrecht / London , 1999.
- [Chen 93] J. Chen, R. J. Patton and H. Y. Zhang, "A multi-criteria optimization approach to the design of robust fault detection algorithm", *Proceedings of the International Conference on Fault Diagnosis, TOOLDIAG'93*, Toulouse, France, 1993.
- [Cobb 83] D. Cobb, "Descriptor Variable System and Optimal State Regulation", *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 28, pp 601-611, 1983.

-
- [Coro 02] L. A. C. Corona, "Quelques contributions aux observateurs non linéaires à horizon glissant", *Thèse de Doctorat*, Institut national polytechnique de Grenoble, 2002.
- [Crai 86] J. J. Craig, "Introduction to robotics : mechanics and control", *Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass* , 1986.
- [Dai 89] L. Dai, "Singular Control Systems", *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer, Germany, 1989.
- [Daro 91] M. Darouach and M. Zasadzinski, "Data reconciliation in generalized linear dynamic systems", *AIChE journal*, vol. 37, pp 193-201, 1991.
- [Daro 95] M. Darouach and M. Boutayeb, "Design of Observers for Descriptor Systems", *BEE transactions on automatic control*, vol. 40. nO. 7, July 1995.
- [Daro 96] M. Darouach, M. Zasadzinski, and M. Hayar, "Reduced-Order Observer Design for Descriptor Systems with Unknown Inputs", *IEEE transactions on automatic control*, vol. 41. no. 7, july 1996.
- [Daro 08] M. Darouach and L. Boutat-Baddas, "Observers for a class of nonlinear singular systems", *IEEE transactions on automatic control*, vol. 53, pp 2627-2633, 2008.
- [Fang 93] C. H. Fang and F. R. Chang, "Analysis of Stability Robustness for Generalized State-Space Systems with Structured Perturbations", *Systems and Control Letters*, vol. 21, No. 2, pp 109-114, 1993.
- [File 91] D. Filev, "modelling of complexe systems", *International Journal of Approximate Res.*, vol. 5, pp 281-290, 1991.
- [Frag 08] D. Fragkoulis "Détection et localisation des défauts provenant des actionneurs et des capteurs : application sur un système non linéaire", *Ph.D. thèse*, l'Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2008.
- [Gao 08] Z. Gao and S. X. Ding, "Fault Reconstruction for Lipschitz Nonlinear Descriptor Systems via Linear Matrix Inequality Approach", *Circuits Syst Signal Process*, vol. 27, pp 295-308, 2008.
- [Gao 07] Z. Gao and S. X. Ding, "Actuator fault robust estimation and fault-tolerant control for a class of nonlinear descriptor systems", *Automatica*, Vol. 43, pp 912-920, 2007.
- [Gao 06] Z. Gao and H. Wang, "Descriptor observer approaches for multivariable systems with measurement noises and application in fault detection and diagnosis", *Systems and Control Letters* , vol. 55, pp 304 - 313, 2006.

- [Gao 06'] Z. Gao and D. W. C. Ho, "State/noise estimator for descriptor systems with application to sensor fault diagnosis", *IEEE Trans. Signal Process*, vol. 54, pp 1316-1326, 2006.
- [Gerd 06] M. Gerdin, "Local Identifiability and Observability of Nonlinear Differential-Algebraic Equations", *14th IFAC Symposium on System Identification, SYSID*, 2006.
- [Gren 08] S. Grenaille, D. Henry and A. Zolghadri, "A method for designing FDI filters for LPV polytopic models", *Journal of Control Science and Engineering*, volume 2008.
- [Gern 06'] M. S. Grenaille, "Synthèse de filtre de diagnostic pour les systèmes modélisés sous forme LPV", *thèse de l'université de bordeaux1*, école doctorale des sciences physiques et de l'ingénieur. 2006.
- [Guan 10] G. R. Duan, "Analys and Design of Descriptor Linear Systems", *Library of Congress Control*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010.
- [Ghao 94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory", *SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics*, University City Science Center, Philadelphia, Pennsylvania, 1994.
- [Guo 09] J. Guo, X. Huang and Y. Cui, "Design and analysis of robust fault detection filter using LMI tools", *Computers and Mathematics with Applications*, vol.57, pp. 1743-1747, 2009.
- [Hair 89] E. Hairer, C. Lubich, and M. Roche, "The Numerical Solution of Differential Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods", *Springer-Verlag*, Lecture Notes in Mathematics 1409, 1989.
- [Hamd 12] **H. Hamdi**, M. Rodrigues, C. Mechmeche and N. BenHadj Braiek, "Fault detection and isolation in linear parameter-varying descriptor systems via proportional integral observer", *International Journal of Control, Automation and Systems*, (IJCAS), Volume 10, Number 6, December 2012.
- [Hamd 12'] **H. Hamdi**, M. Rodrigues, C. Mechmeche, D. Theilliol and N. BenHadj Braiek, "Fault detection and isolation in linear parameter-varying descriptor systems via proportional integral observer", *International journal of adaptive control and signal processing*, Vol. 26, pp 224-240, 2012.
- [Hamd 11'] **H. Hamdi**, C. Mechmeche, M. Rodrigues and N. BenHadj Braiek, "State and unknown inputs estimations for Multi-Model Descriptor Systems", *8th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*, IEEE, March 22-25, 2011.

-
- [Hamd 10] **H. Hamdi**, M. Rodrigues, C. Mechmeche and N. BenHadj Braiek, "Robust H_∞ Fault Diagnosis for Multi-Model Descriptor Systems : A Multi-Objective Approach", *18th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Congress Palace Hotel, Marrakech, Morocco, pp 438-443, June 23-25, 2010.
- [Hamd 10'] **H. Hamdi**, M. Rodrigues, C. Mechmeche and N. BenHadj Braiek, "Synthèse d'un observateur proportionnel intégral à entrées inconnues pour les systèmes singuliers représentés par des multi-modèles", *Sixième Conférence Internationale Francophone d'Automatique CIEA 2010*, Nancy, France, 2-4 juin 2010.
- [Hamd 09] **H. Hamdi**, M. Rodrigues, C. Mechmeche, D. Theilliol and N. BenHadj Braiek, "State Estimation for Polytopic LPV Descriptor Systems : Application to Fault Diagnosis", *the 7th IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety of Technical Processes*, Barcelona, Spain, pp 438-443, 2009.
- [Hamd 08] **H. Hamdi**, C. Mechmeche, et N. BenHadj Braiek, "Synthèse d'observateurs flous pour les systèmes singuliers non linéaires", *La cinquième Conférence Internationale d'Electrotechnique et d'Automatique*, Hammamet, Tunisie, pp 110-115, 02-04 Mai 2008.
- [Hamm 99] H. Hammouri, M. Kinnaert, and E. H. El Yaagoubi, "Observer-Based Approach to Fault Detection and Isolation for Nonlinear Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 10, pp 1879-1884, October 1999.
- [Henr 05] D. Henry and A. Zolghadri, "Design of fault diagnosis filters : A multi-objective approach", *Journal of the Franklin Institute*, 342, pp 421-446, 2005.
- [Henr 04] D. Henry and A. Zolghadri, "Robust fault diagnosis in uncertain linear parameter varying systems", *IEEE international conference on systems, Man and Cybrenetics*, The Hagues, Netherlands, pp 5165-5170, 2004.
- [Hill 94] M. Hiller, "What technical developments are on the horizon?", *In Proc. 11th ISARC'94*, Brighton England, 1994.
- [Icha 09] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot and D. Maquin, "Fault diagnosis for Takagi-Sugeno nonlinear systems", *the 7th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, Barcelona, Spain, June 30 - July 3, pp 504-509, 2009.
- [Iser 06] R. Isermann, "Fault diagnosis Systems An Introduction from Fault Detection to Fault Tolerance", *Springer*, 2006.
- [Iser 05] R. Isermann, "Model-based fault-detection and diagnosis - status and applications", *Annual Reviews in Control*, Vol. 29, pp 71-85, 2005.

- [Jaim 08] E. Mazars, I. M. Jaimoukha and Z. Li, "Computation of a reference model for robust fault detection and isolation residual generation", *Journal of Control Science and Engineering*, 2008.
- [Joha 06] S. Johan and G. Torkel, "Computing the Controllability Function for Nonlinear Descriptor systems", *Proceedings of the 2006 American Control Conference Minneapolis, Minnesota, USA*, June 14-16, 2006.
- [Joha 98] T.A. Johansen, K. J. Hunt, P.J. Gawthrop and H. Fritz, "Off-equilibrium linearisation and design of gain-scheduled control with application to vehicle speed control", *Control Engineering Practice*, 6, pp 167-180, 1998.
- [Joha 93] T.A. Johansen and B.A. Foss, "State-space modeling using operating regime decomposition and local models", *In : IFAC 12th Triennial World Congress, Australia*, 1993.
- [Kapr 92] S. Kaprielian and J. Turi, "An observer for a non linear descriptor system", *CDC Tucson, Arizona*, pp 975-976, 1992.
- [Kard 04] Z. Kardous, "Sur la Modélisation et la Commande Multimodèle des Processus Complexes et/ou Incertains", *Thèse de Doctorat*, Ecole Centrale de Lille, Université des Sciences Technologiques de Lille, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, 2004.
- [Kim 01] H. S. Kim, T. K. Yeu and S. Kawaji, "Fault Detection in Linear Descriptor Systems Via Unknown Input PI Observer", *Transaction on Control, Automation and Systems Engineering*, vol.3, no. 2, pp 77-82, 2001.
- [Kren 85] A. Krener et W. Respondek, "Nonlinear observer with linearizable error dynamics", *SIAM Journal on Control and Optimization*, tome 23, no 2, pp 197-216, 1985.
- [Koen 06] D. Koenig, "an Observer Design for Unknown Input Nonlinear Descriptor Systems via Convex Optimization", *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 51, no. 6, pp 1047- 1052, June 2006.
- [Koen 05] D. Koenig, "Unknown Input Proportional Multiple-Integral Observer Design for Linear Descriptor Systems : Application to State and Fault Estimation", *IEEE Transactions on Automatic control*, vol 50, no. 2, pp 212-217, February 2005.
- [Koen 04] D. Koenig, B. Marx and O. Sename, "Unknown Inputs Proportional Integral Observers for Descriptor Systems with Multiple Delays and Unknown Inputs", *Proceeding of the American Control Conference Boston. Massachusetts*, June 30. July 2, 2004.

-
- [Koen 02] D. Koenig and S. Mammar, "Design of Proportional-Integral Observer for Unknown Input Descriptor Systems", *IEEE transactions on automatic control*, vol 47, no. 12, pp 2057-2062, december 2002.
- [Korb 04] J. Korbicz, Jan M. Koscielny, Z. Kowalczyk and W. Cholewa, "Fault Diagnosis : Models, Artificial Intelligence, Applications", *Springer 1 edition*, ISBN-10 : 3540407677, February 12, 2004.
- [Kunk 01] P. Kunkel and V. Mehrmann, "Analysis of over and underdetermined nonlinear differential-algebraic systems with application to nonlinear control problems", *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 14, no. 3, pp 233-256, 2001.
- [Leon 53] W. W. Leontief, "Static and Dynamic Theory, in Studies in the Structure of the American Economy", *ed : W. W. Leontief*, Oxford University Press, NewYork, 1953.
- [Lewi 86] F. L. Lewis, "A Survey of Linear Singular Systems", *Circuits, Systems, and Signal Process*, vol. 5, no. 1, pp. 3-36, 1986.
- [Liu 08] N. Liu and K. Zhou, "Optimal Robust Fault Detection for Linear Discrete Time Systems", *Journal of Control Science and Engineering*, 16 pages, 2008.
- [Luen 77] D. G. Luenberger, "Dynamic Equations in Descriptor Form", *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 22, pp 312-321, 1977.
- [Marx 07] B. Marx , D. Koenig and J. Ragot, "Design of observers for Takagi-Sugeno descriptor systems with unknown inputs and application to fault diagnosis", *IET Control Theory Appl.*, vol. 1, No. 5, September 2007.
- [Marx 03] B. Marx, "Contribution à la Commande et au Diagnostic des Systèmes Algébro-différentiels Linéaires", *thèse de l'institut national polytechnique de Grenoble*, 2003, Laboratoire d'Automatique de Grenoble dans le cadre de l'École Doctorale Électronique, Électrotechnique, Automatique, Télécommunications et Signal.
- [Marx 03'] B. Marx D. Koenig and D. Georges, "Robust Fault Diagnosis for Linear Descriptor Systems using Proportional Integral Observers", *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii USA, pp 457- 462, December 2003.
- [Marz 09] J. Marzat, "Diagnostic des systèmes aéronautiques et réglage automatique pour la comparaison de méthodes", *thèse de l'Ecole doctorale "Sciences et Technologies de l'Information, des Télécommunications et des Systèmes"*, Université Paris-Sud XI, Faculté des Sciences d'Orsay, 2011, Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S).

- [Maso 07] P. Mason, M. Sigalotti and J. Daafouz, "On stability analysis of linear discrete-time switched systems using quadratic Lyapunov Functions", *Proceedings of 46th IEEE Conference Decision and Control*, New Orleans, LA, pp 5629-5633, 2007.
- [Masu 04] I. Masubuchi, J. Kato, M. Saeki and A. Ohara, "Gain-Scheduled Controller Design Based on Descriptor Representation of LPV Systems : Application to Flight Vehicle Control", *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, December 14-17, pp 815-820, 2004.
- [Masu 08] I. Masubuchi and A. Suzuki, "Gain-Scheduled Controller Synthesis Based on New LMIs for Dissipativity of Descriptor LPV Systems", *The International Federation of Automatic Control*, Proceedings of the 17th World Congress, Seoul, Korea, July 6-11, pp 9993-9998, 2008.
- [Maqu 93] D. Maquin, B. Gaddouna and J. Ragot, "Generation of Parity Equations for Singular Systems Application to Diagnosis", *Proc. of the IEEE System, Man and Cybernetics*, pp 400-405, 1993.
- [Min 06] D. Min and L. Cai, "Design of Fault Diagnosis Observer for HAGC System on Strip Rolling Mill", *Journal of Iron and steel research, international*, Vol. 13, no. 4, pp 27-31, 2006.
- [Mora 02] A. Morales, and J. A. Ramirez, "A PI observer for a class of nonlinear oscillators", *Elsevier Science Physics Letters*, 297, pp 205-209, 2002.
- [Morè 01] Y. Morère, "Mise en oeuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi Sugeno", *thèse de l'université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis*, 2001.
- [Mull 00] P. C. Muller, "Descriptor systems : pros and cons of system modelling by differential-algebraic equations", *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 53, pp 273-279, 2000.
- [Mull 99] H. Muller, P. C. Muller, "Observer Design for Descriptor Systems", *IEEE transactions on automatic control*, vol. 44, no. 1, january 1999.
- [Mull 93] P. C. Muller and M. Hou, "On the observer design for descriptor systems", *IEEE transactions on automatic control*, vol. 38, no. 11, pp 1666-1671, 1993.
- [Newc 89] R. W. Newcomb and B. Dziurla, "Some Circuits and Systems Applications of Semistate Theory", *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 8, no. 3, pp. 235-260, 1989.

-
- [Orju 08] R. Orjuela, B. Marx, J. Ragot and D. Maquin, "State estimation for non-linear systems using a decoupled multiple model", *International Journal of Modelling, Identification and Control*, vol. 4, no. 1, pp.59 - 67, 2008.
- [Orju 08'] R. Orjuela, "Contribution à l'estimation d'état et au diagnostic des systèmes représentés par des multi-modèles", *thèse Doctorat*, Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine. 2008.
- [Oudg 08] M. Oudghiri, "Commande multi-modèles tolérante aux défauts : Application au contrôle de la dynamique d'un véhicule automobile", *Thèse de Doctorat*, L'Université de Picardie Jules Verne, 2008.
- [Reic 91] S. Reich, "On an Existence and Uniqueness Theory for Nonlinear Differential-Algebraic Equations", *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 10, no. 3, pp 343-395, 1991.
- [Ripo 99] P. Ripoll "Conception d'un système de diagnostic flou appliqué au moteur automobile", *Ph.D. thèse*, l'université de Savoie, 1999.
- [Rodr 08] M. Rodrigues, M. Adam-Medina, D. Theilliol and D. Sauter, "A Fault Detection and Isolation Scheme for Industrial Systems based on Multiple Operating Models", *Control Engineering Practice*, Vol 16, p 225-239, 2008.
- [Rodr 05] M. Rodrigues, D. Theilliol and D. Sauter, "Design of a Robust Polytopic Unknown Input Observer for FDI : Application to Nonlinear Systems described by a Multi-Models Representation", *44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC, Sevilla, Spain*, pp 6268-6273, December 2005.
- [Rodr 05'] M. Rodrigues, "Diagnostic et commande active tolérante aux défauts appliqués aux systèmes décrits par des multi-modèles linéaires", *thèse Doctorat*, Doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1. 2005.
- [Schr 93] R. D. Schraft and M. C. Wanner, "The aircraft cleaning robot skywash", *Industrial Robot*, Vol. 20, pp 21-24, 1993.
- [Schr 04] D. V. Schrick, "PI-Observer-based Reconstruction of Effect-variables and Construction of characteristic Curves", *Proc. 5th Asian Control Conference (ASCC '04)*, Melbourne, Australia, July 20-23, pp 936-941, 2004.
- [Shuu 09] S. Kajita, H. Hirukawa, K. Harada and K. Yokoi, "Introduction à la commande des robots humanoïdes De la modélisation à la génération du mouvement" *ISBN : 978-2-287-87715-5 Springer Paris Berlin Heidelberg New York. Publié par Ohmsha, Ltd 3-1 Kanda Nishikicho, Chiyodaku Tokyo, Japon 2005*. Ouvrage traduit et adapté du

- japonais en 2009 par Sophie Sakka Laboratoire de mécanique des solides SP2 MI, Téléport 2, BP 30179 Boulevard Marie et Pierre Curie 86962 Chasseneuil Cedex
- [Sjöb 06] J. Sjöberg, "Some Results on Optimal Control for Nonlinear Descriptor Systems", *Thèse de Doctorat*, Department of Electrical Engineering Linköping University, SE-581 83 Linköping, Sweden Linköping 2006.
- [Smit 97] R. M. Smith and T. A. Johansen, "Multiple Model Approaches to Modelling and Control", *British Library Cataloguing in Publication*, Taylor & Francis, 1997.
- [Stou 00] J. Stoustrup and H. Niemann, "Application of an H_∞ based FDI and control scheme for the three tank system", *In 4th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes*, Budapest, Hungary, 2000.
- [Taka 85] T. Takagi et M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control", *IEEE Trans. on Systems Man and cybernetics*, vol. 15 no. 1, pp. 116-132, 1985.
- [Tana 04] W. Tana, H. J. Marquez, T. Chenb, J. Liua, "Multi-model analysis and controller design for nonlinear processes", *Computers and Chemical Engineering* no. 28, pp 2667-2675, 2004.
- [Tanig 00] T. Taniguchi, K. Tanaka, and H. O. Wang, "Fuzzy Descriptor Systems and Nonlinear Model Following Control", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 8, no. 4, August 2000.
- [Terr 01] W. J. Terrell, "Local observability of Nonlinear Differential-Algebraic Equations (DAEs) From the Linearization Along a Trajectory", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 12, pp 1947-1950, December 2001.
- [Terr 98] W. J. Terrell, "A Computational Linearization Principle for observability of Nonlinear DAE near a Trajectory", *Proceedings of the American Control Conference Philadelphia, Pennsylvania*, pp 2515-2521, June 1998.
- [Thei 02] D. Theilliol, H. Noura and J.C. Ponsart, "Fault diagnosis and accommodation of three-tank system based on analytical redundancy", *ISA Transactions*, Vol N° 41, pp 365-382, 2002.
- [Vemu 01] A. T. Vemuri, M. M. Polycarpou, and A. R. Ciric, "Fault Diagnosis of Differential-Algebraic Systems", *IEEE Transactions on Systems, man, and Cybernetics-Part A : Systems and Humans*, vol. 31, no. 2, pp 143-151, March 2001.
- [Venk 95] V. Venkatasubramanian, H. Schättler, and J. Zaborszky, "Local Bifurcations and Feasibility Regions in Differential-Algebraic Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-40, no. 12, pp 1992-2013, 1995.

-
- [Verg 81] G. C. Verghese, B. C. Levy and T. Kailath, "A Generalized State-space for Singular Systems", *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 26, pp 811-831, 1981.
- [Wang 06] H. S. Wang, Ch. F. Yung and F. R. Chang, " H_∞ Control for Nonlinear Descriptor Systems", *Lecture notes in control and information sciences*, Springer-Verlag London, 2006.
- [Wang 04] Y. Wang, Z. Q. Sun and F. Ch. Sun, "Robust Fuzzy Control of a Class of Nonlinear Descriptor Systems with Time-Varying Delay", *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 2, no. 1, pp 76-82, March 2004.
- [Wann 86] M. C. Wanner, K. Baumeister, G. W. Kohler, and H. Walze, "Hochflexible hand-habungssysteme", *Ergebnisse Einer Einsatzfalluntersuchung Robotersysteme*, vol. 2, no. 4, pp 217-224, 1986.
- [Wann 90] M. C. Wanner and R. Kong, "Roboter auBerhalb der fertigungstechnik, in industrieroboter : handbuch fur industrie und wissenschaft", *H.-J. Warnecke and R. D. Schraft (Eds), Springer*, Berlin, 1990.
- [Wu 08] A. G. Wu and G. R. Duan, "Generalized PI observer design for linear systems", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, vol. 25, pp 239-250, 2008.
- [Wu 06] A. G. Wu and G. R. Duan, "Design of PI Observers for Continuous-Time Descriptor Linear Systems", *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics-part b : cybernetics*, vol. 36, no. 6, december 2006.
- [Wu 95] F. Wu, "Control of Parameter Varying Systems", *PhD Thesis*, University of california at berkeley, USA, 1995.
- [Wu 94] H. Wu and K. Mizukami, "stability and robust stabilization of nonlinear descriptor systems with uncertainties", *Division of Mathematical and Information Sciences Faculty of Integrated Arts and Sciences Hiroshima University*, Conference on W. and Control lake Buena Vita, FL - December 1994.
- [Xiao 97] L. Xiaoping and S. Celikovskâ, "Feedback control of affine nonlinear singular control systems", *Department of Automatic Control Northeastern University, Shenyang, 110006, P R China. Int. J. Control*, vol. 68, no. 4, pp 753 - 774, 1997.
- [Yana 11] H. Yanai, K. Takeuchi and Y. Takane, "Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition", *Springer New York Dordrecht Heidelberg London*, ISBN 978-1-4419-9886-6 e-ISBN 978-1-4419-9887-3 DOI 10.1007/978-1-4419-9887-3, 2011.

-
- [Zasa 90] M. Zasadzinski, "Contribution à l'Estimation de l'Etat des Systèmes Singuliers. Application à la Validation de Données des Systèmes Dynamiques Linéaires", *PhD thesis*, Université Henri Poincaré-Nancy I, France, 1990.
- [Zera 09] M. Zerar, F. Cazaurang and A. Zolghadri, Coupled LPV and Flatness-based Approach for Space Reentry Vehicles Guidance ", *Control Theory and Applications* , Vol. 3 no. 8, pp 1081-1092, 2009.
- [Zhan 08] P. Zhang and S. X. Ding , "On Fault Detection in Linear Discrete-Time, Periodic, and Sampled-Data Systems", *Journal of Control Science and Engineering*, 18 pages 2008.
- [Zolg 08] A. Zolghadri, D. Henry and S. Grenaille, "Fault diagnosis for LPV systems", *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, MED'08, Ajaccio, 2008,

Publications personnelles sur les travaux de cette thèse

Revue internationale avec comité de lecture

1. **H. Hamdi**, M. Rodrigues, C. Mechmeche, D. Theilliol and N. BenHadj Braiek, "Fault detection and isolation in linear parameter-varying descriptor systems via proportional integral observer", *International journal of adaptive control and signal processing*, Vol. 26, pp 224-240, 2012.
2. **H. Hamdi**, M. Rodrigues, C. Mechmeche and N. BenHadj Braiek, "Fault detection and isolation in linear parameter-varying descriptor systems via proportional integral observer", *International Journal of Control, Automation and Systems*, Volume 10, Number 6, December 2012.
3. C. Mechmeche, **H. Hamdi**, M. Rodrigues and N. BenHadj Braiek, "State and Unknown Inputs Estimations for Multi-Models Descriptor Systems", *American Journal of Computational and Applied Mathematics*, (AJCAM) Vol. 3, No. 2, June 2012.

Conférences internationales avec comité de lecture

1. M. Rodrigues, **H. Hamdi**, C. Mechmeche, D. Theilliol and N. BenHadj Braiek, "Fault Diagnosis Based on Adaptive Polytopic Observer for LPV Descriptor Systems", *the 8th IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety of Technical Processes*, National Autonomous University of Mexico, Mexico City, Mexico, August 29-31, 2012.

2. **H. Hamdi**, C. Mechmeche, M. Rodrigues and N. BenHadj Braiek, "State and unknown inputs estimations for Multi-Model Descriptor Systems", *8th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*, IEEE, March 22-25, 2011.
3. **H. Hamdi**, M. Rodrigues, C. Mechmeche and N. BenHadj Braiek, "Robust H_∞ Fault Diagnosis for Multi-Model Descriptor Systems : A Multi-Objective Approach", *18th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Congress Palace Hotel, Marrakech, Morocco, pp 438-443, June 23-25, 2010.
4. **H. Hamdi**, M. Rodrigues, C. Mechmeche and N. BenHadj Braiek, "Synthèse d'un observateur proportionnel intégral à entrées inconnues pour les systèmes singuliers représentés par des multi-modèles", *Sixième Conférence Internationale Francophone d'Automatique CIEA 2010*, Nancy, France, 2-4 juin 2010.
5. **H. Hamdi**, M. Rodrigues, C. Mechmeche, D. Theilliol and N. BenHadj Braiek, "State Estimation for Polytopic LPV Descriptor Systems : Application to Fault Diagnosis", *the 7th IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety of Technical Processes*, Barcelona, Spain, pp 438-443, 2009.
6. **H. Hamdi**, C. Mechmeche, et N. BenHadj Braiek, "Synthèse d'observateurs flous pour les systèmes singuliers non linéaires", *La cinquième Conférence Internationale d'Electrotechnique et d'Automatique*, Hammamet, Tunisie, pp 110-115, 02-04 Mai 2008.