



**HAL**  
open science

# Etudes sur les risques financiers: risques de crédit et d'information asymétrique

Ying Jiao

► **To cite this version:**

Ying Jiao. Etudes sur les risques financiers: risques de crédit et d'information asymétrique. Probabilités [math.PR]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2012. tel-00759505

**HAL Id: tel-00759505**

**<https://theses.hal.science/tel-00759505>**

Submitted on 30 Nov 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée par

JIAO Ying

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Études sur les risques financiers :  
risques de crédit et d'information asymétrique

Mémoire présenté le 10 décembre 2012 devant la commission d'examen :

|           |           |                                      |
|-----------|-----------|--------------------------------------|
| Luciano   | CAMPI     | Université Paris XIII                |
| Nicole    | EL KAROUI | Université Pierre et Marie Curie     |
| Monique   | JEANBLANC | Université d'Evry-Val-d'Essonne      |
| Jean-Paul | LAURENT   | Université Paris I Panthéon-Sorbonne |
| Huyên     | PHAM      | Université Paris Diderot             |
| Monique   | PONTIER   | Université Paul Sabatier             |

au vu des rapports de :

|             |        |  |
|-------------|--------|--|
| Luciano     | CAMPI  | Université Paris XIII                  |
| Jean-Pierre | FOUQUE | Université de Californie Santa Barbara |
| Huyên       | PHAM   | Université Paris Diderot               |



## Remerciements

Ce mémoire est une synthèse des travaux de recherche que j'ai réalisés depuis la soutenance de ma thèse doctorale, notamment au Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires. Je voudrais remercier tout d'abord le laboratoire LPMA, ainsi que l'UFR de Mathématiques de l'Université Paris Diderot pour les conditions de travail idéales qu'ils ont mises à ma disposition. Je remercie particulièrement tous les membres de l'équipe Mathématiques Financières et Probabilités Numériques pour l'excellente ambiance qui règne au sein de l'équipe.

Je suis très reconnaissante à Luciano Campi, Jean-Pierre Fouque et Huyên Pham d'avoir bien voulu prendre le temps de lire ce mémoire et accompli les tâches de rapporteurs. Je tiens à remercier également les autres membres du jury : Nicole El Karoui, Monique Jeanblanc, Jean-Paul Laurent et Monique Pontier pour avoir accepté d'en faire partie et pour l'intérêt porté à mes travaux.

Je voudrais de plus remercier mes collaborateurs : Lijun Bo, Nicole El Karoui, Caroline Hillairet, Monique Jeanblanc, Idris Kharroubi, David Kurtz, Huyên Pham, Xuewei Yang et Behnaz Zargari pour nos projets de recherche en collaboration et pour les discussions que nous avons eues ensemble. Mes remerciements vont aussi à tous les autres collègues avec qui j'ai eu des échanges scientifiques.

Ces dernières années, j'ai bénéficié des soutiens financiers de projets scientifiques comme Alma Recherche et Institut Europlace de Finance, à qui je souhaite exprimer ma gratitude. Je suis aussi reconnaissante aux centres de recherche qui m'ont accueillie pour des séjours scientifiques, notamment Beijing International Center for Mathematical Research de l'Université de Pékin et Mathematical Sciences Center de l'Université Tsinghua.



## Résumé

Dans ce dossier je présente l'ensemble des travaux de recherche que j'ai réalisés pendant les années 2007–2012. Depuis ma thèse doctorale (soutenue le 11 décembre 2006), mes travaux de recherche portent sur les risques de crédit et d'informations asymétriques, qui peuvent être classifiés dans les quatre thèmes suivants : approche de densité dans la modélisation de défaut, optimisation de portefeuille avec les risques de contrepartie et de contagion, risque d'informations asymétriques sur le défaut, et méthode de Stein. Les études de ces problèmes font intervenir de différentes théories mathématiques, comme par exemple grossissements de filtrations, contrôle stochastique, méthodes numériques probabilistes, et conduisent à des questions mathématiques intéressantes, souvent subtiles. Parmi ces sujets, certains sont issus des motivations d'actualité financière et peuvent avoir des applications dans la pratique ; d'autres sont des problèmes mathématiques inspirés par la finance mais qui ont un caractère théorique.

L'ensemble de ces travaux donne lieu aux publications et prépublications comme ci-dessous.

- [J4] N. EL KAROUI, M. JEANBLANC, Y. JIAO – “What happens after a default : the conditional density approach”, *Stochastic Processes and their Applications*, 120(2010), no.7, 151–180.
- [J5] Y. JIAO, H. PHAM – “Optimal investment with counterparty risk : a default density modeling approach”, *Finance and Stochastics*, 15(2011), no.4, 725–753.
- [J6] C. HILLAIRET, Y. JIAO – “Information asymmetry in pricing of credit derivatives”, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 14(2011), no.5, 611–633.
- [J7] Y. JIAO – “Zero bias transformation and asymptotic expansions”, *Annales de l'IHP (B) Probabilités et Statistiques*, 48(2012), no.1, 258–281.
- [J8] C. HILLAIRET, Y. JIAO – “Credit risk with asymmetric information on the default threshold”, à paraître dans *Stochastics*.
- [J9] N. EL KAROUI, M. JEANBLANC, Y. JIAO, B. ZARGARI – “Conditional probability and density”, à paraître dans *Musiela Festschrift*, T. Zariphopoulou, M. Rutkowski and Y. Kabanov eds., Springer Verlag.
- [J10] Y. JIAO, I. KHARROUBI, H. PHAM – “Optimal investment under multiple defaults risk : a BSDE-decomposition approach”, à paraître dans *Annals of Applied Probability*.
- [J11] L. BO, Y. JIAO, X. YANG – “Credit derivatives pricing based on Lévy field driven term structure”, Prépublication soumise.
- [J12] C. HILLAIRET, Y. JIAO – “Portfolio optimization with insider's initial information and counterparty risk”, Prépublication soumise.
- [J13] N. EL KAROUI, M. JEANBLANC, Y. JIAO – “Modelling successive defaults”, en préparation.



## TABLE DES MATIÈRES

|  |    |
|--|----|
| <b>1. Modélisation du risque de crédit</b> .....                       | 1  |
| 1.1. Cas d'un seul défaut.....   | 2  |
| 1.2. Modélisation explicite de densité de défaut.....                  | 8  |
| 1.3. Cas de multi-défauts.....   | 16 |
| <b>2. Contrôle optimal avec le risque de contrepartie</b> .....        | 25 |
| 2.1. Optimisation avec une seul contrepartie.....                      | 26 |
| 2.2. Investissement optimal avec risque de multi-défauts.....          | 32 |
| <b>3. Risque d'information asymétrique</b> .....                       | 39 |
| 3.1. Défaut et informations.....                                       | 40 |
| 3.2. Évaluation avec l'information asymétrique.....                    | 42 |
| 3.3. Optimisation d'investissement avec l'information asymétrique..... | 46 |
| <b>4. Développement asymptotique avec la méthode de Stein</b> .....    | 53 |
| 4.1. Développement dans le cas gaussien.....                           | 55 |
| 4.2. Le cas poissonnien.....   | 60 |
| <b>Bibliographie</b> .....   | 63 |





## CHAPITRE 1

### MODÉLISATION DU RISQUE DE CRÉDIT

Le risque de crédit au sens classique désigne le risque qu'un particulier ou une entreprise ne rembourse pas sa dette à l'échéance. Du point de vue de mathématiques financières, cette expression peut porter un sens plus large. Elle peut désigner le risque de défaut d'une entreprise, le risque de contagion dans une crise financière, ou le risque lié à un changement brutal de la valeur d'un portefeuille d'actifs, conséquence d'un événement qui n'est pas nécessairement issu de l'activité de transactions financières (comme transition de catégorie dans une note de crédit, catastrophe naturelle, fraude etc.). Un point commun de ces risques est que les flux de prix des produits financiers avant l'événement de contrepartie ne donnent pas toutes les informations du risque de crédit. Il y a deux approches importantes dans la littérature classique : modèles structurels et ceux de forme réduite. Dans l'approche structurelle initialement due à Merton [73] et généralisée par Black et Cox [11], le temps de défaut est modélisé comme le premier passage d'un processus stochastique par une barrière. Le processus peut être la valeur d'un actif, le flux de cash d'une entreprise, ou encore une combinaison des valeurs disponibles dans le marché financier qui sont sensibles à des événements de contrepartie. La barrière est une constante dans [73, 11]. On peut étendre ce modèle au cas où la barrière est une variable aléatoire (voir par exemple le travail de Lando [68]), faisant un lien avec l'approche de forme réduite, où on décrit le temps de défaut comme un temps de saut d'un processus ponctuel et modélise directement les quantités figurant dans la formule d'évaluation des produits financiers liés au risque de crédit, comme notamment le processus d'intensité. Cette approche est plus utilisée en pratique car elle est plus facilement adaptée aux données réelles du marché. Les recherches dans cette direction contiennent par exemple les modèles d'intensité en lien avec les taux d'intérêt comme [23, 80], et les travaux de Bielecki, Jeanblanc et Rutkowski [56, 10, 9] où on utilise la théorie de grossissement progressif de filtrations (cf. [57, 58, 72]) à étudier le risque de crédit dans un contexte très général.

Dans la littérature concernant ces deux approches de modélisation, beaucoup de travaux portent sur les études “avant-défaut”, c’est-à-dire conditionnées aux événements où le défaut n’a pas eu lieu. Cependant, dans l’étude des risques de contrepartie et de contagion et dans la modélisation des risques liés aux plusieurs agents défautables, il est essentiel d’analyser l’impact, éventuellement de long-terme, du défaut d’un agent sur le reste du marché. Les approches classiques ne sont pas adéquates pour ces problèmes car elles imposent des contraintes restrictives sur ce qui se passe après un événement de défaut. Dans une série de travaux en collaboration avec N. El Karoui et M. Jeanblanc [27, 28, 29], nous avons proposé une nouvelle approche de modélisation basée sur la distribution conditionnelle du temps de défaut  $\tau$  par rapport à une filtration de référence  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  qui représente les informations du marché qui ne sont pas directement liées à l’événement de défaut. L’approche de densité s’adapte naturellement dans le cadre de la théorie de grossissement progressif de filtrations en mettant l’accent sur l’ensemble “après-défaut”.

La transaction des produits dérivés de crédit sophistiqués en portefeuille demande une étude des risques liés à plusieurs événements de défaut. La modélisation de la structure de corrélation entre les événements de défaut est un sujet important pour le risque de crédit à multi-noms. On renvoie les lecteurs dans [35] pour un survol. Parmi de nombreux travaux dans la littérature, les modèles top-down comme ceux dans [81, 25, 8, 41, 69] étudient les défauts successifs et les pertes correspondantes. L’approche de densité s’étend naturellement aux plusieurs défauts, dont le cadre général contient au même temps les modèles “bottom-up” pour les défauts non-ordonnés et les modèles “top-down” pour le cas ordonné. L’idée dans [29] est la suivante : si on essaie d’adapter la méthode d’intensité dans le cas de plusieurs défauts, la difficulté majeure est que les produits financiers à considérer peuvent continuer à exister après un ou plusieurs défaut, tandis qu’un modèle d’intensité ne fournit pas assez d’information concernant le comportement après défaut (même si on considère un seul temps de défaut), sauf si l’hypothèse d’immersion est vérifiée. Notre approche consiste à utiliser la loi et la densité conditionnelle du vecteur des temps de défaut par rapport à la filtration de référence  $\mathbb{F}$ , qui est une généralisation naturelle de [27]. La construction des modèles explicites est traitée dans les travaux [29, 13] que je présenterai dans §1.2.

### 1.1. Cas d’un seul défaut

On considère dans ce paragraphe le problème de modélisation d’un marché financier qui contient le risque de défaut d’un actif. Dans ce cadre, on peut déjà observer les idées importantes dans notre approche de modélisation et ses liens avec les modèles classiques. Intuitivement, l’information du défaut de l’actif peut conduire à des modifications brutales des valeurs des produits financiers dans le marché, et donc l’étude de la filtration du marché est souvent plus compliquée que celle dans les problèmes classiques.

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité complet qui modélise le marché financier et  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  une filtration de  $\mathcal{A}$  qui décrit les informations générales du marché qui ne sont pas directement liées à l'événement de défaut. On suppose que la filtration  $\mathbb{F}$  satisfait aux conditions habituelles (continue à droite et complète). Dans la pratique, la filtration  $\mathbb{F}$  est souvent supposée être engendrée par un mouvement brownien ou un processus de Lévy (éventuellement multi-dimensionnels). On désigne par  $\tau$  le temps de défaut de l'actif, qui est une variable aléatoire strictement positive. L'observation à l'instant  $t$  de défaut-ou-non de l'actif est modélisée par la tribu  $\sigma(\tau \wedge t)$ . On désigne par  $\mathbb{D} = (\mathcal{D}_t)_{t \geq 0}$  la filtration  $(\sigma(\tau \wedge t))_{t \geq 0}$  rendue usuelle. L'information du marché est alors modélisée par la filtration  $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ , le grossissement progressif de  $\mathbb{F}$  par  $\mathbb{D}$ . En d'autres termes, on a  $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{D}_t$  pour tout  $t \geq 0$ . Il s'avère que, une fois connaître la distribution conditionnelle du temps de défaut par rapport à la filtration  $\mathbb{F}$  (qui est un processus en mesures aléatoires), l'évaluation des produits financiers ne repose que sur le calcul stochastique par rapport à la filtration  $\mathbb{F}$ . Cette méthode nous donne des souplesses à appliquer des divers outils de mathématiques financières (optimisation, représentation des martingales, etc). Les études classiques sont principalement effectuées sur l'ensemble "avant-défaut"  $\{t < \tau\}$ , on s'intéresse également à celui "après-défaut"  $\{t \geq \tau\}$ .

La théorie de grossissement de filtrations (cf. [58, lemme 4.4]) donne des liens explicites entre les processus  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{G}$ -adaptés (resp. prévisibles). En effet, tout processus  $\mathbb{G}$ -adapté  $X$  s'écrit sous la forme

$$(1.1) \quad X_t = X_t^0 \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + X_t^1(\tau) \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}, \quad t \geq 0,$$

où  $X^0$  est un processus  $\mathbb{F}$ -adapté et  $X^1(\cdot)$  est un processus  $\mathbb{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -adapté,  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$  étant la tribu borélienne de  $\mathbb{R}_+$ . De façon similaire, tout processus  $\mathbb{G}$ -prévisible  $Y$  s'écrit sous la forme

$$(1.2) \quad Y_t = Y_t^0 \mathbb{1}_{\{\tau \geq t\}} + Y_t^1(\tau) \mathbb{1}_{\{\tau < t\}}, \quad t \geq 0,$$

où  $Y^0$  est un processus  $\mathbb{F}$ -prévisible et  $Y_1(\cdot)$  est une fonction  $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurable,  $\mathcal{P}(\mathbb{F})$  étant la tribu prévisible de la filtration  $\mathbb{F}$ .

On étudie d'abord les lois conditionnelles de défaut par rapport aux différentes filtrations. Pour tout  $t \geq 0$ , on désigne par  $\mu_t^{\mathbb{G}}$  la loi conditionnelle de  $\tau$  par rapport à la tribu  $\mathcal{G}_t$ . C'est une  $\mathcal{G}_t$ -mesure aléatoire. Par définition, l'intégrale d'une fonction borélienne bornée ou positive  $f$  par rapport à  $\mu_t^{\mathbb{G}}$  est l'espérance conditionnelle de  $f(\tau)$  par rapport à la tribu  $\mathcal{G}_t$ . En outre, la famille de variables aléatoires  $(\int f d\mu_t^{\mathbb{G}})_{t \geq 0}$  définit une  $\mathbb{G}$ -martingale. On peut ainsi considérer  $(\mu_t^{\mathbb{G}})_{t \geq 0}$  comme une  $\mathbb{G}$ -martingale en mesures aléatoires. De façon similaire, on désigne par  $\mu_t^{\mathbb{F}}$  la loi conditionnelle de  $\tau$  par rapport à  $\mathcal{F}_t$ . On peut établir un lien explicite entre les mesures aléatoires (sur  $\mathbb{R}_+$ )  $\mu_t^{\mathbb{G}}$  et  $\mu_t^{\mathbb{F}}$  :

$$(1.3) \quad \mu_t^{\mathbb{G}}(du) = \frac{\mu_t^{\mathbb{F}}(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot du)}{\mu_t^{\mathbb{F}}(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}})} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} \delta_{\tau}(du)$$

où  $\delta_\tau$  est la mesure de Dirac en  $\tau$ .

Pour calculer les espérances conditionnelles par rapport à  $\mathcal{G}_t$ , il est utile d'étendre  $\mu_t^\mathbb{F}$  en une  $\mathcal{F}_t$ -mesure aléatoire sur l'espace mesurable  $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$  qui envoie toute fonction positive  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurable  $Z_t(\cdot)$  en

$$\int_{\mathbb{R}_+} Z_t(x) \mu_t^\mathbb{F}(dx) = \mathbb{E}[Z_t(\tau) | \mathcal{F}_t].$$

Par abus de langage, on utilise encore l'expression  $\mu_t^\mathbb{F}$  pour désigner la mesure aléatoire étendue. En outre, si  $Y_t(\cdot)$  est une fonction  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurable sur  $\Omega \times \mathbb{R}_+$  qui est positive ou bornée, on désigne par  $\mu_t^\mathbb{F}(Y_t(x) \cdot dx)$  la mesure aléatoire telle que

$$\int_{\mathbb{R}_+} Z_t(x) \mu_t^\mathbb{F}(Y_t(x) \cdot dx) := \int_{\mathbb{R}_+} Z_t(x) Y_t(x) \mu_t^\mathbb{F}(dx).$$

Avec ces notations, nous avons établi le résultat suivant.

**Théorème 1.1.1.** — *Soit  $T > 0$  un nombre réel qui désigne la maturité. Pour toute fonction  $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurable  $Y_T(\cdot)$  qui est positive ou bornée, on a<sup>(1)</sup>*

$$(1.4) \quad \mathbb{E}_\mathbb{P}[Y_T(\tau) | \mathcal{G}_t] = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathbb{E}[\mu_T^\mathbb{F}(Y_T(x) \cdot dx) | \mathcal{F}_t]}{\mu_t^\mathbb{F}(dx)} d\mu_t^\mathbb{G},$$

où le quotient désigne la dérivée au sens de Radon-Nikodym de deux  $\mathcal{F}_t$ -mesures aléatoires sur l'espace mesurable  $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ .

Ce résultat montre que, pour évaluer les prix des produits dérivés sensibles au risque de contrepartie en  $\tau$ , il suffit de modéliser la loi conditionnelle du temps aléatoire par rapport à la filtration  $\mathbb{F}$ , qui est en général plus simple que celle par rapport à la filtration  $\mathbb{G}$ . Dans les sous-paragraphes qui suivent, on présente les rôles joués par ce théorème dans différents contextes, ainsi que la comparaison avec des approches classiques.

**1.1.1. Hypothèse de densité.** — Dans la littérature classique, il est standard de ramener l'étude du  $\mathbb{G}$ -compensateur du processus de défaut  $(\mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}})_{t \geq 0}$  à la décomposition Doob-Meyer de la  $\mathbb{F}$ -surmartingale de survie  $(\mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{F}_t))_{t \geq 0}$ . Basée sur cette idée, la modélisation de la  $\mathbb{F}$ -intensité de défaut est fréquente dans l'étude du risque de crédit, et est particulièrement commode lorsque le produit dérivé considéré s'arrête à l'instant de défaut  $\tau$ . Rappelons que la  $\mathbb{G}$ -intensité de  $\tau$  est par définition le processus  $\mathbb{G}$ -adapté  $\lambda^\mathbb{G}$  tel que  $(\mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} - \int_0^t \lambda_s^\mathbb{G} ds, t \geq 0)$  soit une  $\mathbb{G}$ -martingale. On peut montrer que, si la  $\mathbb{G}$ -intensité existe, alors il existe un processus  $\mathbb{F}$ -adapté  $\lambda^\mathbb{F}$  tel que  $\lambda_t^\mathbb{G} = \mathbb{1}_{\{t < \tau\}} \lambda_t^\mathbb{F}$ . Le processus  $\lambda^\mathbb{F}$  est appelé la  $\mathbb{F}$ -intensité de  $\tau$ . Cependant, la  $\mathbb{F}$ -intensité donne peu d'information sur les impacts de l'événement de défaut sur la filtration  $\mathbb{F}$  après le temps de défaut, sauf si certaines hypothèses d'indépendance

1. Ici on a aussi étendu  $\mu_t^\mathbb{G}$  en une mesure aléatoire sur  $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$  de façon naturelle, comme ce que l'on avait fait pour  $\mu_t^\mathbb{F}$ .

conditionnelle sont exigées. Ainsi ce genre de modèles ne sont pas suffisants pour étudier les produits dérivés qui continuent à exister après le moment de défaut.

Pour surmonter cette difficulté, nous avons proposé dans [27] l'approche de  $\mathbb{F}$ -densité comme une alternative pour la  $\mathbb{F}$ -intensité. Cette approche s'adapte naturellement dans le cadre de mesure aléatoire présenté plus haut. Remarquons que dans les modèles de taux d'intérêt, l'approche de densité est aussi adopté par Brody et Hughston [16]. On suppose que le temps de défaut  $\tau$  vérifie l'hypothèse de densité, c'est-à-dire que la loi conditionnelle de  $\tau$  par rapport à  $\mathcal{F}_t$  admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Autrement dit, il existe une famille de fonctions  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurables  $(\omega, \theta) \mapsto \alpha_t(\theta)$  telles que

$$(1.5) \quad \mathbb{P}(\tau \in d\theta | \mathcal{F}_t) = \alpha_t(\theta) d\theta, \quad t \geq 0.$$

On peut distinguer les densités conditionnelles pour  $t \leq \theta$ , dites "avant-défaut" et celles pour  $t > \theta$ , dites "après-défaut". En effet, il existe un lien étroit entre la densité avant-défaut et la  $\mathbb{F}$ -intensité, tandis que la densité après-défaut joue un rôle particulièrement important sur l'étude du marché après l'événement de défaut.

L'existence de  $\mathbb{F}$ -intensité est vérifiée sous l'hypothèse de densité, et dans ce cas-là la  $\mathbb{F}$ -intensité peut être calculée explicitement comme

$$\lambda_t^{\mathbb{F}} = \frac{\alpha_t(t)}{S_t} = \frac{\alpha_t(t)}{\int_t^\infty \alpha_t(\theta) d\theta}$$

où  $S$  est la surmartingale d'Azéma  $(S_t = \mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{F}_t))_{t \geq 0}$ . En particulier, l'intensité ne dépend que de la partie avant-défaut des densités conditionnelles. Inversement, pour tout  $\theta \geq t$ , la densité conditionnelle avant-défaut est donnée par la relation  $\alpha_t(\theta) = \mathbb{E}[\lambda_\theta^{\mathbb{G}} | \mathcal{F}_t]$ . Cependant, la densité après-défaut ne peut pas être déduite de l'intensité sans hypothèse complémentaire (voir [37]).

Sous l'hypothèse de densité, la mesure aléatoire  $\mu_t^{\mathbb{F}}$  s'écrit comme  $\mu_t^{\mathbb{F}}(dx) = \alpha_t(x) dx$ . En particulier, l'espérance conditionnelle (1.4) admet une forme explicite comme la suite.

**Proposition 1.1.2.** — *Sous l'hypothèse de densité, pour toute fonction  $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurable  $Y_T(\cdot)$  qui est positive ou bornée, on a*

$$(1.6) \quad \mathbb{E}[Y_T(\tau) | \mathcal{G}_t] = \frac{\int_t^\infty \mathbb{E}[Y_T(\theta) \alpha_T(\theta) | \mathcal{F}_t] d\theta}{S_t} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + \frac{\mathbb{E}[Y_T(\theta) \alpha_T(\theta) | \mathcal{F}_t]}{\alpha_t(\theta)} \Big|_{\theta=\tau} \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}},$$

où  $S_t$  est la probabilité conditionnelle de survie  $\mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{F}_t)$ .

La surmartingale  $S$  admet une décomposition de Doob-Meyer multiplicative de la forme  $S_t = \exp(-\int_0^t \lambda_s^{\mathbb{F}} ds) L_t$  où  $L$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale locale. Sous l'hypothèse d'immersion (appelée aussi l'hypothèse (H) dans la littérature) qui assume que toute  $\mathbb{F}$ -martingale est une  $\mathbb{G}$ -martingale, le processus  $S$  est décroissante, et donc on a  $L = 1$ . L'hypothèse d'immersion implique aussi que  $\alpha_t(\theta) = \alpha_\theta(\theta)$  pour tout  $t \geq \theta$ .

En particulier, par (1.6) on a

$$E[Y_T(\tau)|\mathcal{G}_t]\mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} = E[Y_T(\theta)|\mathcal{F}_t]_{\theta=\tau}\mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}.$$

Cette formule sur l'ensemble  $\{\tau \leq t\}$  ignore complètement la loi conditionnelle de  $\tau$ . Ainsi, l'hypothèse d'immersion, qui est souvent supposée dans les études avant-défaut, devient inadéquate pour analyser l'impact d'un défaut sur un produit dérivé qui continue à exister après le défaut.

**1.1.2. Caractérisation des martingales.** — En mathématiques financières, les propriétés de martingale jouent un rôle essentiel pour l'évaluation des produits dérivés et la couverture. Dans ce sous-paragraphe, on discute la caractérisation des  $\mathbb{G}$ -martingales en termes des  $\mathbb{F}$ -martingales.

Soit  $Y$  une  $\mathbb{G}$ -martingale qui se décompose sous la forme

$$Y_t = Y_t^0 \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + Y_t^1(\tau) \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$$

Comme  $\tau$  est un  $\mathbb{G}$ -temps d'arrêt, on peut écrire  $Y$  comme la somme de deux martingales dont l'une est arrêtée en  $\tau$  et l'autre commence en  $\tau$  :

$$Y_t = Y_{t \wedge \tau} + (Y_t - Y_\tau) \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} = Y_t^{\text{bd}} + Y_t^{\text{ad}}$$

où  $Y_t^{\text{bd}} = Y_t^0 \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + Y_\tau^1(\tau) \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$  et  $Y_t^{\text{ad}} = (Y_t^1(\tau) - Y_\tau^1(\tau)) \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$ . Inversement, étant donnés deux processus  $Y^0$  et  $Y^1(\cdot)$  qui sont  $\mathbb{F}$ -adapté et  $\mathbb{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -adapté respectivement, il est naturel de se demander sous quelles conditions les processus  $Y^{\text{bd}}$  et  $Y^{\text{ad}}$  deviennent des  $\mathbb{G}$ -martingales (ou de façon équivalente, le processus  $Y$  devient une  $\mathbb{G}$ -martingale). Nous avons établi le résultat suivant (cf. [27, propositions 5.1 et 5.5])

**Théorème 1.1.3.** — *Soient  $Y^0$  et  $Y^1(\cdot)$  deux processus qui sont  $\mathbb{F}$ -adapté et  $\mathbb{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -adapté respectivement.*

- (1) *Le processus  $\mathbb{G}$ -adapté  $Y^{\text{bd}}$  est une  $\mathbb{G}$ -martingale (locale) si et seulement si le processus  $\mathbb{F}$ -adapté  $(Y_t^0 S_t + \int_0^t Y_s^1(s) \alpha_s(s) ds)_{t \geq 0}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale (locale), ou de façon équivalente,  $(L_t(Y_t^0 + \int_0^t (Y_s^1(s) - Y_s^0) \lambda_s^{\mathbb{F}} ds)_{t \geq 0}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale (locale).*
- (2) *Le processus  $\mathbb{G}$ -adapté  $Y^{\text{ad}}$  est une  $\mathbb{G}$ -martingale (locale) si et seulement si, pour tout  $\theta \geq 0$ , le processus  $\mathbb{F}$ -adapté  $(Y_t^1(\theta) \alpha_t(\theta))_{t \geq \theta}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale (locale).*

Un des éléments importants de la démonstration est de montrer que, sous l'hypothèse de densité, toute  $\mathbb{F}$ -martingale est une  $\mathbb{G}$ -semimartingale. C'est un analogue d'un résultat classique de Jacod [52, théorème 2.1] en théorie de grossissement initial de filtrations (voir aussi [55]). En outre, toute  $\mathbb{F}$ -martingale  $Y^{\mathbb{F}}$  (qui est une  $\mathbb{G}$ -semimartingale) se décompose sous la forme  $Y^{\mathbb{F}} = M^{\mathbb{G}} + A^{\mathbb{G}}$ , où  $M^{\mathbb{G}}$  est une  $\mathbb{G}$ -martingale et  $A^{\mathbb{G}}$  est un processus  $\mathbb{G}$ -adapté de variation finie. On peut exprimer

explicitement le processus  $(A_t^{\mathbb{G}} = A_t \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + A_t(\tau) \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}})_{t \geq 0}$  comme

$$A_t = \int_0^t \frac{d\langle Y^{\mathbb{F}}, S \rangle_u}{S_u}, \quad A_t(\theta) = A_\theta + \int_\theta^t \frac{d\langle Y^{\mathbb{F}}, \alpha(\theta) \rangle_u}{\alpha_u(\theta)}.$$

Ces formules sont utiles dans la démonstration du théorème précédent.

**1.1.3. Changement de probabilités.** — On discute maintenant le problème de changement de probabilités sous l'hypothèse de densité. Comme dans le sous-paragraphe précédent, on suppose que  $\tau$  admet une famille de densités conditionnelles  $(\alpha_t(\cdot))_{t \geq 0}$  par rapport à la filtration  $\mathbb{F}$  sous la probabilité  $\mathbb{P}$ . Soit  $\mathbb{Q}$  une mesure de probabilité équivalente à  $\mathbb{P}$  dont la dérivée de Radon-Nikodym par rapport à  $\mathbb{P}$  sur  $\mathcal{G}_t$  est donnée par une variable aléatoire  $\mathcal{G}_t$ -mesurable  $Q_t^{\mathbb{G}} = q_t \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + q_t(\tau) \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$ . Le processus  $Q^{\mathbb{G}}$  est une  $\mathbb{G}$ -martingale avec  $Q_0^{\mathbb{G}} = 1$ . D'après le théorème 1.1.3, on obtient que le processus  $(q_t S_t + \int_0^t q_s(s) \alpha_s(s) ds)_{t \geq 0}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale et que  $(Y_t(\theta) \alpha_t(\theta))_{t \geq \theta}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale pour tout  $\theta \geq 0$ .

L'hypothèse de densité pour le temps aléatoire  $\tau$  est encore vérifiée sous la nouvelle probabilité  $\mathbb{Q}$ . La densité  $\alpha^{\mathbb{Q}}$  de  $\tau$  conditionnellement à la filtration  $\mathbb{F}$  est donnée par les formules suivantes

$$(1.7) \quad \alpha_t^{\mathbb{Q}}(\theta) = \alpha_t(\theta) \frac{q_t(\theta)}{Q_t^{\mathbb{F}}}, \quad t \geq \theta,$$

$$(1.8) \quad \alpha_t^{\mathbb{Q}}(\theta) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\alpha_\theta^{\mathbb{Q}}(\theta) | \mathcal{F}_t] = \frac{1}{Q_t^{\mathbb{F}}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\alpha_\theta(\theta) q_\theta(\theta)], \quad t < \theta,$$

où  $Q_t^{\mathbb{F}}$  est l'espérance conditionnelle de  $Q_t^{\mathbb{G}}$  par rapport à  $\mathcal{F}_t$  :

$$Q_t^{\mathbb{F}} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Q_t^{\mathbb{G}} | \mathcal{F}_t] = q_t S_t + \int_0^t q_t(u) \alpha_t(u) du.$$

La  $\mathbb{F}$ -intensité de défaut sous la probabilité  $\mathbb{Q}$  est

$$\lambda_t^{\mathbb{F}, \mathbb{Q}} = \lambda_t^{\mathbb{F}} \frac{q_t(t)}{q_t}, \quad t \geq 0,$$

et la surmartingale d'Azéma de survie devient  $S^{\mathbb{Q}} = qS/Q^{\mathbb{F}}$ .

Le changement de probabilités est un outil important dans la modélisation de la densité conditionnelle. Avec cette méthode, on peut systématiquement proposer des modèles de  $\mathbb{F}$ -densité conditionnelle à partir d'un modèle qui est relativement simple. On peut commencer par un modèle standard d'intensité (e.g. le modèle de Cox) où l'hypothèse d'immersion est satisfaite sous la probabilité initiale  $\mathbb{P}$ . On cherche à construire une nouvelle mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à  $\mathbb{P}$  et qui coïncide avec  $\mathbb{P}$  sur la tribu  $\mathcal{G}_\tau$ . Ce changement de probabilités ne modifie pas la partie avant-défaut du modèle : la  $\mathbb{F}$ -intensité  $\lambda^{\mathbb{F}}$  ainsi que la densité avant-défaut  $\alpha_t(\theta)$ ,  $t \leq \theta$  restent inchangées. Cela est possible en prenant la dérivée de Radon-Nikodym de la forme

$$Q_t^{\mathbb{G}} = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + q_t(\tau) \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$$



où  $(q_t(\theta), t \geq \theta)$  est une famille de  $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ -martingales positives telles que  $q_\theta(\theta) = 1$  pour tout  $\theta \geq 0$ . Par ailleurs, les processus  $(S_t/S_t^{\mathbb{Q}}, t \geq 0)$  et  $(\alpha_t^{\mathbb{Q}}(\theta)S_t/S_t^{\mathbb{Q}}, t \geq \theta)$  sont des  $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ -martingales. En revanche, la propriété d'immersion n'est plus nécessairement conservée sous la nouvelle probabilité  $\mathbb{Q}$ , comme indiqué par Kusuoka [67].

D'autres exemples de changement de probabilités dans la modélisation de densité conditionnelle seront présentés plus loin dans §1.2.2.

## 1.2. Modélisation explicite de densité de défaut

Dans ce paragraphe, on présente des modèles explicites pour la famille de densité conditionnelle d'un temps aléatoire  $\tau$  par rapport à une filtration de référence  $\mathbb{F}$ . On suppose en outre que  $\mathcal{F}_0$  est la tribu triviale. Le but est de trouver des critères d'existence et des exemples d'une famille de  $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ -martingales positives  $\alpha(\cdot)$  indexée par  $\mathbb{R}_+$  de sorte que, pour tout  $t, \theta \geq 0$ , le processus  $S_t(\theta) := \int_\theta^\infty \alpha_t(u) du$  s'identifie à la  $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ -probabilité conditionnelle<sup>(2)</sup> de survie relativement à  $\theta$ . Une observation immédiate est que, pour tout  $t \geq 0$ , on a

$$(1.9) \quad \int_0^\infty \alpha_t(u) du = 1, \quad \text{p.s.}$$

Bien qu'il est facile de trouver des familles de martingales positives, il est plus difficile d'en construire une qui vérifie cette condition à partir d'une famille  $\beta(\cdot)$  de martingales positives données. Une façon naïve d'assurer la condition (1.9) est d'effectuer un procédé de normalisation en prenant

$$\alpha_t(x) = \frac{\beta_t(x)}{\int_0^\infty \beta_t(u) du}, \quad t \geq 0.$$

Cependant, le processus  $\alpha(x)$  ainsi obtenu n'est pas une martingale en général. Cela montre que la modélisation des densités en martingales est un problème délicat.

On peut aussi considérer le problème de modélisation des densités conditionnelles en plusieurs variables. Autrement dit, on cherche à construire une famille de martingales  $\alpha(\cdot)$  paramétrée par  $\mathbb{R}_+^n$  (où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ ) telle que  $\int_{\mathbb{R}_+^n} \alpha_t(x) dx = 1$  p.s. quel que soit  $t \geq 0$ .

**1.2.1. Densité dans le modèle de Cox généralisé.** — Dans l'approche structurale, le temps aléatoire  $\tau$  est le premier temps de passage d'un processus  $\mathbb{F}$ -adapté  $\Gamma$  par une barrière  $\Theta$  :

$$(1.10) \quad \tau := \inf\{t \geq 0 : \Gamma_t \geq \Theta\}.$$

où la barrière  $\Theta$  est constante dans des modèles classiques. Par conséquent,  $\tau$  est un  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt, et donc la loi conditionnelle de  $\tau$  n'admet pas de densité par rapport

2. Autrement dit, on a  $S_t(\theta) = \mathbb{P}(\tau > \theta | \mathcal{F}_t)$  p.s. quels que soient  $t$  et  $\theta$  positifs.

à la mesure de Lebesgue car  $\mathbb{P}(\tau > \theta | \mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > \theta\}}$  pour  $\theta \leq t$ . Ainsi il faut introduire une barrière aléatoire afin de retrouver un temps de passage qui admet des densités conditionnelles.

Dans le modèle de Cox [68],  $\Gamma$  est un processus croissant, continu à droite et  $\mathbb{F}$ -adapté, la barrière  $\Theta$  est une variable aléatoire qui est indépendante de  $\mathbb{F}$ . On désigne par  $G_\Theta$  la loi de probabilité de survie de  $\Theta$ , i.e.,  $G_\Theta(t) = \mathbb{P}(\Theta > t)$ . Par définition, on a

$$\mathbb{P}(\tau > \theta | \mathcal{F}_t) = G_\Theta(\Gamma_\theta) = \mathbb{P}(\tau > \theta | \mathcal{F}_\infty)$$

pour  $\theta \leq t$ . Donc l'hypothèse d'immersion est vérifiée pour le grossissement progressif de  $\mathbb{F}$  par  $\tau$  sous la probabilité  $\mathbb{P}$ .

Dans le cas où le processus  $\Gamma$  est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue et la fonction  $G_\Theta$  est continûment différentiable, la variable aléatoire  $\tau$  admet une densité conditionnelle  $\alpha$  par rapport à  $\mathbb{F}$ . On a

$$\alpha_t(\theta) = \alpha_\theta(\theta) = -G'_\Theta(\Gamma_\theta)\gamma_\theta$$

pour  $0 \leq \theta \leq t$ , où  $\gamma$  est la dérivée de Radon-Nikodym de  $\Gamma$  par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour  $\theta > t$ , on a

$$\alpha_t(\theta) = \mathbb{E}[\alpha_\theta(\theta) | \mathcal{F}_t] = -\mathbb{E}[G'_\Theta(\Gamma_\theta)\gamma_\theta | \mathcal{F}_t].$$

On peut généraliser ce résultat dans un modèle où la barrière n'est pas nécessairement indépendante de  $\mathbb{F}$  : un temps aléatoire  $\tau$  induit par une barrière  $\Theta$  ayant une densité conditionnelle par rapport à  $\mathbb{F}$  vérifie l'hypothèse de densité.

**Proposition 1.2.1.** — *On suppose qu'il existe une famille  $p_t(\cdot)$  de fonctions  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurables ( $t \geq 0$ ) telle que*

$$G_\Theta(\theta) := \mathbb{P}(\Theta > \theta | \mathcal{F}_t) = \int_\theta^\infty p_t(u) du.$$

*On suppose en outre que le processus  $\Gamma$  est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue et que  $\gamma$  est la densité correspondante, i.e.  $\Gamma_t = \int_0^t \gamma_s ds$  pour tout  $t \geq 0$ . Alors le temps aléatoire  $\tau$  défini dans (1.10) admet une densité conditionnelle  $\alpha(\cdot)$  par rapport à  $\mathbb{F}$  qui vérifie la relation*

$$\alpha_t(\theta) = \gamma_\theta p_t(\Gamma_\theta) \quad \text{pour } \theta \leq t.$$

**1.2.2. Changement de probabilités.** — Le changement de probabilités peut être utilisé à construire des modèles explicites de la densité conditionnelle.

On commence par une variable aléatoire  $\tau$  qui est indépendante de la filtration  $\mathbb{F}$  sous la probabilité initiale  $\mathbb{P}$ , donc la densité conditionnelle de  $\tau$  à  $\mathbb{F}$  est déterministe. Par un changement de probabilités on peut introduire une corrélation non-triviale entre  $\tau$  et  $\mathbb{F}$ . Ainsi la densité conditionnelle de  $\tau$  sous la nouvelle probabilité est une  $\mathbb{F}$ -martingale non-triviale. On suppose que la loi de  $\tau$  admet une densité  $\alpha_0$  par rapport à la mesure de Lebesgue. En d'autres termes,  $\mathbb{P}(\tau > \theta | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(\tau > \theta) = \int_\theta^\infty \alpha_0(u) du$

quels que soient  $t$  et  $\theta$  dans  $\mathbb{R}_+$ . On désigne par  $\mathbb{F}^\tau = (\mathcal{F}_t^\tau)_{t \geq 0}$  le grossissement initial de la filtration  $\mathbb{F}$  par  $\tau$ , défini comme  $\mathcal{F}_t^\tau = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau)$ .

Soit  $\beta(\cdot)$  une famille de  $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ -martingales positives paramétrés par  $\mathbb{R}_+$  telle que  $\beta_0(u) = 1$  quel que soit  $u \geq 0$ . Comme  $\tau$  est indépendant de  $\mathbb{F}$ , on obtient que  $\beta(\tau)$  est une  $(\mathbb{P}, \mathbb{F}^\tau)$ -martingale. On définit une nouvelle mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  sur  $\mathcal{F}_\infty^\tau$  de sorte que

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \beta_t(\tau) \quad \text{p.s. sur } \mathcal{F}_t^\tau.$$

Comme la filtration  $\mathbb{F}$  est contenue dans  $\mathbb{F}^\tau$ , on peut calculer la densité  $m_t$  de  $\mathbb{Q}$  par rapport à  $\mathbb{P}$  sur  $\mathcal{F}_t$  :  $m_t = \mathbb{E}[\beta_t(\tau) | \mathcal{F}_t] = \int_0^\infty \beta_t(u) \alpha_0(u) du$ . La formule de Bayes montre alors que

$$\mathbb{Q}(\tau \in B | \mathcal{F}_t) = \frac{1}{\mathbb{E}[\beta_t(\tau) | \mathcal{F}_t]} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau \in B\}} \beta_t(\tau) | \mathcal{F}_t] = \frac{1}{m_t} \int_B \beta_t(u) \alpha_0(u) du$$

pour tout sous-ensemble borélien  $B$  de  $\mathbb{R}_+$ . On en déduit le résultat suivant.

**Proposition 1.2.2.** — *Soit  $\tau$  une variable aléatoire positive indépendante de  $\mathbb{F}$ , qui admet  $\alpha_0(\cdot)$  comme la densité de sa loi de probabilité. Soit  $\mathbb{Q}$  une mesure de probabilité équivalente à  $\mathbb{P}$  sur  $\mathcal{F}_\infty \vee \sigma(\tau)$  dont la dérivée de Radon-Nikodym par rapport à  $\mathbb{P}$  est égale à  $\beta_t(\tau)$  sur  $\mathcal{F}_t^\tau$  ( $t \geq 0$ ). Alors le  $(\mathbb{Q}, \mathbb{F})$ -processus de densité de  $\tau$  est donné par la formule*

$$(1.11) \quad \alpha_t^\mathbb{Q}(u) = \frac{\beta_t(u) \alpha_0(u)}{\int_{\mathbb{R}_+} \beta_t(u) \alpha_0(u) du}, \quad t \geq 0.$$

Comme  $\beta_0(u) = 1$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , on obtient  $\alpha_0^\mathbb{Q}(\cdot) = \alpha_0(\cdot)$ . Donc la loi de  $\tau$  reste inchangée dans le passage de  $\mathbb{P}$  à  $\mathbb{Q}$ .

**1.2.3. Méthode de Filtrage.** — Le changement de probabilités figure aussi dans la méthode de filtrage comme dans Kallianpur et Striebel [62] par construire des modèles explicites de densité.

Soient  $W$  un  $\mathbb{P}$ -mouvement brownien indépendante de  $\tau$  dont la loi admet une densité  $\alpha_0(\cdot)$  par rapport à la mesure de Lebesgue. On considère un processus d'observation, la solution d'une équation différentielle stochastique de la forme

$$(1.12) \quad dY_t = a(t, Y_t, \tau) dt + b(t, Y_t) dW_t$$

où les fonctions  $a$  et  $b$  sont suffisamment régulières de sorte que (1.12) admette des solutions et où  $b$  ne s'annule pas. La filtration  $\mathbb{F}$  est engendrée par  $Y$ . L'idée consiste à construire une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  sous laquelle  $\tau$  est indépendante de  $\mathbb{F}$ . À l'aide de cette probabilité auxiliaire, on peut calculer la  $\mathbb{F}$ -densité conditionnelle de  $\tau$  sous la probabilité initiale  $\mathbb{P}$ .

On introduit également une filtration auxiliaire  $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \geq 0}$  le grossissement initial de la filtration de  $W$  par la variable aléatoire  $\tau$ . Comme  $\tau$  est indépendante de  $W$ , on

obtient que  $W$  est une  $(\mathbb{P}, \mathbb{H})$ -mouvement brownien. Soit  $p(\tau)$  la  $\mathbb{P}$ -martingale locale, solution de l'équation différentielle stochastique

$$dp_t(\tau) = p_t(\tau)\sigma_t(\tau) dW_t, \quad p_0(\tau) = 1,$$

où  $\sigma_t(\tau) = -a(t, Y_t, \tau)/b(t, Y_t)$ . De façon plus directe, on définit

$$p_t(u) := \exp\left(\int_0^t \sigma_s(u) dW_s - \int_0^t \sigma_s(u)^2 du\right)$$

pour tout  $u \geq 0$  et on suppose que  $p(\cdot)$  est une famille de  $(\mathbb{P}, \mathbb{H})$ -martingales (en supposant par exemple la condition Novikov sur  $\sigma(\cdot)$ ). Par conséquent,  $p(\tau)$  est une  $(\mathbb{P}, \mathbb{H})$ -martingale. On introduit une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  telle que  $d\mathbb{Q} = p_t(\tau) d\mathbb{P}$  sur  $\mathcal{H}_t$ . D'après le théorème de Girsanov, le processus  $\widehat{W}$  défini comme

$$d\widehat{W}_t = dW_t - \sigma_t(\tau) dt = \frac{1}{b(t, Y_t)} dY_t, \quad t \geq 0$$

est un  $(\mathbb{Q}, \mathbb{H})$ -mouvement brownien, d'où  $\widehat{W}$  est indépendant de  $\tau$  sous la probabilité  $\mathbb{Q}$ .

On suppose dans la suite que la filtration engendrée par  $\widehat{W}$  s'identifie à  $\mathbb{F}$ . Cette condition est vérifiée notamment lorsque l'équation différentielle stochastique  $dY_t = b(t, Y_t) d\widehat{W}_t$  admet une solution forte (cela est vrai si par exemple la fonction  $b$  est Lipschitzienne à croissance linéaire). Soit  $\beta(\cdot) := p(\cdot)^{-1}$ . Il s'avère que, pour tout  $u \geq 0$ ,  $\beta(u)$  est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$d\beta_t(u) = -\beta_t(u)\sigma(t, u) d\widehat{W}_t, \quad \beta_0(u) = 1.$$

La variable aléatoire  $\beta_t(u)$  est aussi la dérivée de Radon-Nikodym  $d\mathbb{P}/d\mathbb{Q}$  sur  $\mathcal{F}_t$ . D'après la proposition 1.2.2, on a

$$\mathbb{P}(\tau \in du | \mathcal{F}_t) = \frac{\alpha_0(u)\beta_t(u)}{m_t} du,$$

où  $m_t = \int_0^\infty \alpha_0(u)\beta_t(u) du$ . Soit  $\alpha(\cdot) = \alpha_0(\cdot)\beta(\cdot)/m$ . Par la formule d'Itô, on a

$$d\alpha_t(u) = \alpha_t(u) \left( \frac{a(t, Y_t, u)}{b(t, Y_t)} - \frac{\widehat{a}_t}{b(t, Y_t)} \right) dB_t,$$

où  $\widehat{a}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[a(t, Y_t, \tau) | \mathcal{F}_t] = \int_0^\infty a(t, Y_t, u)\alpha_t(u) du$  et  $B$  est le  $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ -mouvement brownien défini par

$$dB_t = dW_t + \left( \frac{a(t, Y_t, \tau)}{b(t, Y_t)} - \frac{\widehat{a}_t}{b(t, Y_t)} \right) dt.$$

On résume ce résultat dans la proposition suivante.

**Proposition 1.2.3.** — *On suppose que, sous la probabilité  $\mathbb{P}$ , la loi de  $\tau$  admet une densité  $\alpha_0(\cdot)$  par rapport à la mesure de Lebesgue, et que  $\tau$  est indépendante du mouvement brownien  $W$ . Si le processus d'observation  $Y$  vérifie l'équation*

$$dY_t = a(t, Y_t, \tau) dt + b(t, Y_t) dW_t,$$

alors la  $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ -densité conditionnelle de  $\tau$  est

$$\alpha_t(u) = \frac{\alpha_0(u)\beta_t(u)}{m_t},$$

où

$$\beta_t(u) = \exp\left(\int_0^t \frac{a(s, Y_s, u)}{b(s, Y_s)^2} dY_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{a(s, Y_s, u)^2}{b(s, Y_s)^2} ds\right), \quad m_t = \int_0^\infty \beta_t(u)\alpha_0(u) du.$$

**1.2.4. Intensité forward via les champs aléatoires.** — Dans ce sous-paragraphe, on présente un modèle où la densité peut inclure des sauts pour analyser l'impact des changements brutaux de qualité de crédit sur le pricing des produits dérivés. On adopte un modèle similaire au modèle HJM (cf. [46]) et on modélise l'intensité forward de défaut en utilisant les champs aléatoires qui ont été utilisés pour modéliser la courbe de taux d'intérêt dans la littérature (cf. [64, 1]).

On désigne par  $S(\cdot)$  la famille de probabilités conditionnelles de survie de  $\tau : S_t(\theta) = \mathbb{P}(\tau > \theta | \mathcal{F}_t)$ ,  $t, \theta \geq 0$ . On dit que  $\tau$  admet une *intensité forward* si, pour tout  $t \geq 0$ , il existe une fonction  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurable  $\lambda_t(\cdot)$  telle que  $S_t(\theta) = \exp(-\int_0^\theta \lambda_t(u) du)$  quel que soit  $\theta \geq 0$ . Il s'avère que le temps aléatoire  $\tau$  admet une  $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ -intensité forward si et seulement s'il admet une  $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ -densité conditionnelle. En outre, dans le cas où ces conditions sont satisfaites, la  $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ -densité conditionnelle  $\alpha(\cdot)$  vérifie la relation  $\alpha_t(\theta) = S_t(\theta)\lambda_t(\theta)$  pour tous  $t$  et  $\theta$  dans  $\mathbb{R}_+$ . Donc pour la modélisation de la densité conditionnelle, on peut commencer par celle de l'intensité forward.

*Modélisation.* — On modélise l'intensité forward  $\lambda(\cdot)$  de  $\tau$  par un champs aléatoire sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  qui est une combinaison d'un champs aléatoire gaussien  $Y^G$  et une mesure aléatoire de Poisson compensée  $Y^P$  indépendante de  $Y^G$  :

$$(1.13) \quad d\lambda_t(\theta) = \mu_t(\theta) dt + \int_{\mathbb{R}^d} \sigma_t(\theta, \xi) Y^G(dt, d\xi) + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_{t-}(\theta, \xi) Y^P(dt, d\xi).$$

On suppose que la structure de covariance de  $Y^G$  est donnée par une mesure de noyau  $c$  sur  $\mathbb{R}^d$  dont la restriction à  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et telle que  $c(\{0\}) > 0$ . En d'autres termes, pour tout  $(\phi_1, \phi_2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)^2$ , on a  $\mathbb{E}[Y^G(\phi_1)Y^G(\phi_2)] = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi_1(t, \xi_1)\phi_2(t, \xi_2)c(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dt$ , où par abus de langage,  $c(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$  désigne la mesure sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  l'image inverse<sup>(3)</sup> de la mesure  $c$  par l'application  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  qui envoie  $(\xi_1, \xi_2)$  en  $\xi_1 - \xi_2$ . Soient  $\mathbb{F}^G = (\mathcal{F}_t^G)_{t \geq 0}$  la filtration engendrée par  $\sigma(Y^G([0, u] \times A))$ ,  $u \leq t$ ,  $A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ ,  $t \geq 0$ , où  $\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$  désigne l'ensemble des parties boréliennes bornées de  $\mathbb{R}^d$ , et  $\mathcal{P}^G$  la tribu de  $\Omega \times \mathbb{R}_+$  des ensembles prévisibles par rapport à la filtration  $\mathbb{F}^G$ . On désigne

3. En dehors de la diagonale de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  cette mesure admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue qui s'identifie à la densité de la mesure  $c$  composée avec l'application  $(\xi_1, \xi_2) \mapsto \xi_1 - \xi_2$ ; dans la diagonale elle s'identifie à la mesure d'intégration (sur la diagonale) multipliée par  $c(\{0\})$ .

par  $\Phi_c$  l'espace vectoriel des fonctions  $\mathcal{P}^G \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -mesurables  $h$  telles que

$$\|h\|_{c,T} := \mathbb{E} \left[ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2d}} |h(t, \xi_1)h(t, \xi_2)| c(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dt \right]^{1/2} < +\infty$$

pour tout  $T > 0$ . L'intégrale stochastique  $h \cdot Y^G$  est bien définie pour tout  $h \in \Phi_c$ .

On suppose que le champs de Poisson compensé  $Y^P$  a une mesure d'intensité  $\nu(d\xi)dt$ ,  $(t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ , où  $\nu$  est une mesure  $\sigma$ -finie sur  $\mathbb{R}^d$ . Soient  $\mathbb{F}^P = (\mathcal{F}_t^P)_{t \geq 0}$  la filtration engendrée par  $\sigma(Y^P([0, u] \times A))$ ,  $u \leq t$ ,  $A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ ,  $t \geq 0$  et  $\mathcal{P}^P$  la tribu des ensembles prévisibles par rapport à la filtration  $\mathbb{F}^P$ . On désigne par  $\Psi_\nu$  l'espace vectoriel des fonctions  $\mathcal{P}^P \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -mesurables telles que

$$\|g\|_{\nu,T} := \mathbb{E} \left[ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |g(t, \xi)|^2 \nu(d\xi) dt \right] < +\infty$$

pour tout  $T > 0$ . L'intégrale stochastique  $g \cdot Y^P$  est bien définie pour tout  $g \in \Psi_\nu$ .

On définit la filtration de référence  $\mathbb{F}$  comme  $\mathbb{F}^G \vee \mathbb{F}^P$ . Les coefficients dans (1.13) satisfont :

- (1)  $\mu = (\mu_t(\theta))$ ;  $(t, \theta) \in \mathbb{R}_+^2$  est  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurable et tel que  $\int_0^T \mathbb{E}[|\mu_t(\theta)|] dt < \infty$ ,  $\mathcal{P}$  étant la tribu des ensembles  $\mathbb{F}$ -prévisibles,
- (2)  $\sigma = (\sigma_t(\theta, \xi))$ ;  $(t, \theta, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  est  $\mathcal{P}^G \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ -mesurable et tel que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}_+$ ,  $\sigma(\theta, \cdot) \in \Phi_c$ ,
- (3)  $\gamma = (\gamma_t(\theta, \zeta) \geq 0)$ ;  $(t, \theta, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  est  $\mathcal{P}^P \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ -mesurable et tel que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}_+$ ,  $\gamma(\theta, \cdot) \in \Psi_\nu$ .

On introduit les intégrales suivantes :

$$I_\mu(t, \theta) := \int_0^\theta \mu_t(v) dv, \quad I_\sigma(t, \theta, \xi) := \int_0^\theta \sigma_t(v, \xi) dv, \quad \text{et} \quad I_\gamma(t, \theta, \xi) := \int_0^\infty \gamma_t(v, \xi) dv$$

pour tout  $(t, \theta, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ . On peut vérifier que, pour tout  $\theta \geq 0$  et tout  $T > 0$ ,  $\int_0^T \mathbb{E}[|I_\mu(t, \theta)|] dt < +\infty$ . En outre, pour tout  $\theta \geq 0$ , on a

$$I_\sigma(\cdot, \theta, \cdot) \in \Phi_c, \quad I_\gamma(\cdot, \theta, \cdot) \in \Psi_\nu \quad \text{et} \quad \exp(-I_\gamma(\cdot, \theta, \cdot)) - 1 \in \Psi_\nu.$$

La propriété de  $\mathbb{F}$ -martingale de la famille des probabilités de survie  $S(\theta)$  est équivalente à la condition suivante : pour tout  $\theta \geq 0$ ,

(1.14)

$$\mu_t(\theta) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \sigma_t(\theta, \xi_1) I_\sigma(t, \theta, \xi_2) c(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_t(\theta, \xi) (1 - e^{-I_\gamma(t, \theta, \xi)}) \nu(d\xi).$$

C'est une généralisation de la condition de non-arbitrage dans le modèle HJM classique. Avec cette condition, on a

$$(1.15) \quad \frac{dS_t(\theta)}{S_{t-}(\theta)} = - \int_{\mathbb{R}^d} I_\sigma(t, \theta, \xi) Y^G(dt, d\xi) + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-I_\gamma(t-, \theta, \xi)} - 1) Y^P(dt, d\xi),$$

où  $S_0(\theta) = \exp\left(-\int_0^\theta \lambda_0(v) dv\right)$ . La dynamique de la densité conditionnelle est

$$(1.16) \quad \frac{d\alpha_t(\theta)}{\alpha_{t-}(\theta)} = dM_t(\theta) - \frac{1}{\lambda_{t-}(\theta)} dm_t(\theta).$$

où  $M(\cdot)$  et  $m(\cdot)$  sont deux familles de martingales paramétrées :

$$\begin{aligned} dM_t(\theta) &= -\int_{\mathbb{R}^d} I_\sigma(t, \theta, \xi) Y^G(dt, d\xi) + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-I_\gamma(t-, \theta, \xi)} - 1) Y^P(dt, d\xi), \quad M_0(\theta) = 0, \\ dm_t(\theta) &= -\int_{\mathbb{R}^d} \sigma(t, \theta, \xi) Y^G(dt, d\xi) + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_{t-} e^{-I_\gamma(t-, \theta, \xi)} Y^P(dt, d\xi), \quad m_0(\theta) = 0. \end{aligned}$$

On a la relation  $M_t(\theta) = \int_0^\theta m_t(u) du$ .

*Évaluation des obligations défautables.* — On considère une obligation zéro-coupon défautable dont le payoff est 1 euro s'il n'y a pas de défaut avant la maturité  $T$ , le paiement au cas de défaut s'effectue à la maturité et est de la forme  $R_T(\theta)$  où  $R_T(\cdot)$  est  $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurable. Le prix de cette obligation à une date  $t \leq T$  est

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) (\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R_T(\tau) \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}) \mid \mathcal{G}_t\right] \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \left[ \int_T^\infty K_1(t, \theta) d\theta + \int_t^T K_2(t, \theta) \frac{\alpha_t(\theta)}{S_t} d\theta \right] + \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} K_2(t, \tau) \end{aligned}$$

où

$$(1.17) \quad K_1(t, \theta) = \frac{\mathbb{E}[\alpha_T(\theta) \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \mid \mathcal{F}_t]}{S_t},$$

$$(1.18) \quad K_2(t, \theta) = \frac{\mathbb{E}[R_T(\theta) \alpha_T(\theta) \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \mid \mathcal{F}_t]}{\alpha_t(\theta)}.$$

Ces quantités jouent un rôle clé dans l'évaluation des obligations défautables. On modélise le taux d'intérêt  $r$  par un modèle de Vasicek généralisé :

$$(1.19) \quad dr_t = \kappa(\delta - r_t) dt + \int_{\mathbb{R}^d} \rho_t(\xi) Y^G(dt, d\xi) + \int_{\mathbb{R}^d} \psi_t(\xi) Y^P(dt, d\xi),$$

où  $\kappa, \delta$  sont des nombres strictement positifs,  $\rho(\cdot)$  et  $\phi(\cdot)$  sont des fonctions de volatilité déterministes, supposées être dans  $\Phi_c$  et  $\Psi_\nu$  respectivement. On a

$$\begin{aligned} r_t &= r_0 e^{-\kappa t} + \delta(1 - e^{-\kappa t}) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\kappa(t-u)} \rho_u(\xi) Y^G(du, d\xi) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\kappa(t-u)} \phi_u(\xi) Y^P(du, d\xi). \end{aligned}$$

On montre que sous des hypothèses techniques ( $\mathbf{H}_\theta$ ) comme ci-dessous, les deux termes (1.17) et (1.18) peuvent s'exprimer comme la solution unique d'une équation différentiel-intégral parabolique.

**Hypothèse ( $\mathbf{H}_\theta$ ).** — On suppose qu'il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

- (1) les fonctions  $a_{11}(\cdot)$ ,  $a_{22}(\cdot, \theta)$  et  $a_{12}(\cdot, \theta)$  sont  $(\alpha/2)$ -lipschitziennes sur  $[0, T]$ ,  
(2) il existe une fonction borélienne  $J_0$  sur  $\mathbb{R}^d$  telle que

$$\sup_{(t, \theta)} \max(|\phi_t(\xi)|, |\gamma_t(\theta, \xi)|) \leq J_0(\xi) \quad \text{et que} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \frac{J_0(\xi)^2}{1 + J_0(\xi)} \nu(d\xi) < +\infty,$$

- (3) il existe une fonction borélienne  $J_{\alpha, \theta}$  sur  $\mathbb{R}^d$  telle que

$$\forall (s, t) \in [0, T]^2, \quad \max(|\phi_t(\xi) - \phi_s(\xi)|, |\gamma_t(\theta, \xi) - \gamma_s(\theta, \xi)|) \leq J_{\alpha, \theta}(\xi) |t - s|^{\alpha/2}$$

et que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{J_{\alpha, \theta}(\xi)^2}{1 + J_{\alpha, \theta}(\xi)} \nu(d\xi) < +\infty,$$

- (4) il existe une constante  $\beta(\theta) \geq 0$  telle que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et tout  $t \in [0, T]$ , on ait

$$a_{11}(t)x^2 + 2a_{12}(t, \theta)xy + a_{22}(t, \theta)y^2 \geq \beta(\theta)(x^2 + y^2).$$

**Théorème 1.2.4.** — Soient  $\theta \geq 0$  et  $\psi$  une fonction localement lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ . Si l'hypothèse  $(\mathbf{H}_\theta)$  est vérifiée, alors l'équation différentielle-intégrale partielle

$$(1.20) \quad \frac{\partial K}{\partial t}(t, x, y) - xK(t, x, y) + (\mathbf{I}_\theta + \mathbf{D}_\theta)K(t, x, y) = 0, \quad K(T, x, y) = y\psi(y)$$

admet une unique solution  $\check{K}_\psi$ . En outre, on a

$$(1.21) \quad \mathbb{E} \left[ \alpha_T(\theta)\psi(\lambda_T(\theta)) \exp \left( - \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = S_t(\theta)\check{K}_\psi(t, r_t\lambda_t(\theta)).$$

Les deux opérateurs  $\mathbf{I}_\theta$  et  $\mathbf{D}_\theta$  figurant dans le théorème agissent sur l'espace des fonctions en trois variables  $t$ ,  $x$  et  $y$  qui sont différentiables en  $t$  et différentiables à l'ordre deux en  $(x, y)$ . Ils sont définis comme

$$(1.22) \quad \mathbf{I}_\theta K(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \left( K(t, x + \phi_t(\xi), y + \gamma_t(\theta, \xi)) - K(t, x, y) - \phi_t(\xi) \frac{\partial K}{\partial x}(t, x, y) - \gamma_t(\theta, \xi) \frac{\partial K}{\partial y}(t, x, y) \right) \nu(d\xi),$$

$$(1.23) \quad \mathbf{D}_\theta K = a_{11}(t) \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + a_{22}(t, \theta) \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} + a_{12}(t, \theta) \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} + \kappa(\widehat{\delta}_t(\theta) - x) \frac{\partial K}{\partial x} + a(t, \theta) \frac{\partial K}{\partial y},$$



où

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}_t(\theta) &:= \delta + \kappa^{-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \rho_t(\xi) I_\sigma(t, \theta, \xi) c(\zeta - \xi) d\zeta d\xi + \kappa^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_t(\xi) (e^{-I_\gamma(t, \theta, \xi)} - 1) \nu(d\xi), \\ a(t, \theta) &= \mu_t(\theta) - \int_{\mathbb{R}^d} \sigma_t(\theta, \zeta) I_\sigma(t, \theta, \xi) c(\zeta - \xi) d\zeta d\xi - \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_{t-}(\theta, \zeta) (1 - e^{-I_\gamma(t, \theta, \xi)}) \nu(d\xi), \\ a_{11}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \rho_t(\xi_1) \rho_t(\xi_2) c(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \\ a_{22}(t, \theta) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \sigma_t(\theta, \xi_1) \sigma_t(\theta, \xi_2) c(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \\ a_{12}(t, \theta) &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \sigma_t(\theta, \xi_1) \rho_t(\xi_2) c(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.\end{aligned}$$

La preuve du théorème repose largement sur les techniques présentées dans l'ouvrage [38] de Garroni et Menaldi concernant les équations différentiel-intégrales parabolique. La nouvelle difficulté par rapport au cas traité dans [38] est que la condition terminale ici est une fonction non-bornée en général et nous avons utilisé un argument de troncature.

Soit  $\check{K}$  la solution de l'équation (1.20) pour le cas de la fonction constante  $\psi \equiv 1$ . On déduit du théorème précédent que

$$(1.24) \quad K_1(t, \theta) = \frac{S_t(\theta)}{S_t} \check{K}(t, r_t, \lambda_t(\theta)).$$

On suppose que le taux de recouvrement  $R_T(\cdot)$  est de la forme

$$R_T(\theta) = w_0 + w_1 e^{-f(\lambda_T(\theta))},$$

où  $\lambda_T(\cdot)$  est l'intensité forward, et  $f$  est une fonction positive localement lipschitzienne. Soit  $\tilde{K}$  la solution de l'équation (1.20) pour  $\psi(y) = e^{-f(y)}$ . Alors on obtient

$$K_2(t, \theta) = \frac{w_0 S_t}{\alpha_t(\theta)} K_1(t, \theta) + \frac{w_1 S_t(\theta)}{\alpha_t(\theta)} \tilde{K}(t, r_t, \lambda_t(\theta)).$$

Des illustrations numériques en résolvant l'équation (1.20) montrent que la valeur des obligations est décroissante par rapport à la probabilité de défaut ainsi que les tailles de sauts figurant dans la densité de défaut.

### 1.3. Cas de multi-défauts

Dans ce paragraphe, on étend notre approche de modélisation à plusieurs temps de défaut. On utilise comme avant un espace de probabilité complet  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  pour modéliser le marché financier et une filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  pour décrire les informations du marché "sans défaut". On considère une famille de temps de défaut modélisés par  $n$  variables aléatoires  $\tau_1, \dots, \tau_n$ .

Soit  $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$  le grossissement progressif de la filtration  $\mathbb{F}$  par les temps aléatoires  $\tau_1, \dots, \tau_n$ . Par définition  $\mathbb{G}$  est la plus petite filtration contenant  $\mathbb{F}$  qui satisfait aux conditions habituelles et telle que les temps aléatoires  $\tau_1, \dots, \tau_n$  soient des  $\mathbb{G}$ -temps d'arrêts. En d'autres termes, la filtration  $\mathbb{G}$  s'identifie à  $(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{N}_t)_{t \geq 0}$  rendue habituelle, où  $\mathcal{N}_t = \sigma(\tau_1 \wedge t, \dots, \tau_n \wedge t)$ . La tribu  $\mathcal{N}_t$  peut aussi être identifiée à celle engendrée par l'application aléatoire  $(I_t, \tau_{I_t})$ , où  $I_t := \{i \mid \tau_i \leq t\}$  et  $\tau_{I_t} := (\tau_i)_{i \in I_t}$ . Toute variable aléatoire  $\mathcal{G}_t$ -mesurable  $Y_t$  s'écrit sous la forme

$$Y_t = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} \mathbb{1}_{\{\tau_I \leq t, \tau_{I^c} > t\}} Y_t^I(\tau_I),$$

où  $Y_t^I(\cdot)$  est une fonction sur  $\Omega \times \mathbb{R}_+^I$  qui est  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^I)$ -mesurable, l'expression  $\tau_I \leq t$  désigne la relation  $\bigwedge_{i \in I} (\tau_i \leq t)$  et l'expression  $\tau_{I^c} > t$  désigne la relation  $\bigwedge_{j \in I^c} (\tau_j > t)$ .

**1.3.1. Loi conditionnelle.** — Soit  $X$  une application mesurable de  $(\Omega, \mathcal{A})$  vers un espace métrique  $E$ , muni de sa tribu borélienne  $\mathcal{B}(E)$ . On suppose que la variable aléatoire  $X$  contient toutes les informations de défauts. En particulier, les temps aléatoires  $\tau_1, \dots, \tau_n$  sont  $\sigma(X)$ -mesurables. En d'autres termes, il existe des fonctions boréliennes  $v_1, \dots, v_n$  sur  $E$  telles que  $\tau_i = v_i(X)$  quel que soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Pour tout  $t \geq 0$ , soit  $\mu_t$  la loi de  $X$  conditionnellement à la tribu  $\mathcal{N}_t$ . C'est une  $\mathcal{N}_t$ -mesure aléatoire sur  $(E, \mathcal{B}(E))$  qui envoie tout ensemble borélien  $A$  de  $E$  en  $\mathbb{P}(X^{-1}(A) \mid \mathcal{N}_t)$ . Par définition, pour toute fonction borélienne bornée  $f$  sur  $E$ , on a

$$\int_E f(x) \mu_t(dx) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X) \mid \mathcal{N}_t].$$

Soit  $\mathcal{A}_0$  une sous-tribu de  $\mathcal{A}$ . Par abus de langage, on utilise encore l'expression  $\mu_t$  pour désigner la  $\mathcal{A}_0 \vee \mathcal{N}_t$ -mesure aléatoire  $\mathbb{1} \otimes \mu_t$  sur  $(\Omega \times E, \mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}(E))$ , où  $\mathbb{1}$  est la  $\mathcal{A}_0$ -mesure aléatoire d'identité sur  $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$ .

On peut écrire la mesure aléatoire  $\mu_t$  sous une forme décomposée. Pour tout sous-ensemble  $I$  de  $\{1, \dots, n\}$ , soit  $\mu_I$  la loi conditionnelle de  $X$  par rapport à  $\tau_I := (\tau_i)_{i \in I}$ . On a

$$(1.25) \quad \mu_t(dx) = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} \mathbb{1}_{\{\tau_I \leq t, \tau_{I^c} > t\}} \frac{\mu_I(\mathbb{1}_{\{\tau_{I^c} > t\}} \cdot dx)}{\mu_I(\mathbb{1}_{\{\tau_{I^c} > t\}})},$$

où  $\mu_I(\mathbb{1}_{\{\tau_{I^c} > t\}} \cdot dx)$  est la mesure aléatoire telle que, pour toute fonction borélienne bornée  $f$  sur  $E$ , on ait

$$\int_E f(x) \mu_I(\mathbb{1}_{\{\tau_{I^c} > t\}} \cdot dx) = \int_E f(x) \mathbb{1}_{\{v_{I^c}(x) > t\}} \mu_I(dx) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X) \mathbb{1}_{\{\tau_{I^c} > t\}} \mid \tau_I],$$

où  $v_{I^c} = (v_i)_{i \in I^c}$ , et  $v_i$  est la fonction de  $E$  vers  $\mathbb{R}_+$  telle que  $v_i(X) = \tau_i$ , introduite plus haut.

La construction au-dessus se généralise naturellement au cas d'une  $\mathcal{G}_t$ -mesure aléatoire. On désigne par  $\mu_t^{\mathbb{G}}$  la loi conditionnelle de  $X$  par rapport à  $\mathcal{G}_t$ . Pour toute

fonction borélienne bornée  $f$  sur  $E$ , on a

$$\mu_t^{\mathbb{G}} = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} \mathbb{1}_{\{\tau_I \leq t, \tau_{I^c} > t\}} \frac{\eta_{I,t}^{\mathbb{F}}(\mathbb{1}_{\{\tau_{I^c} > t\}} \cdot dx)}{\eta_{I,t}^{\mathbb{F}}(\mathbb{1}_{\{\tau_{I^c} > t\}})},$$

où  $\eta_{I,t}^{\mathbb{F}}$  est la loi conditionnelle de  $X$  par rapport à  $\sigma(\tau_I) \vee \mathcal{F}_t$ , et la mesure aléatoire  $\eta_{I,t}^{\mathbb{F}}(\mathbb{1}_{\{\tau_{I^c} > t\}} \cdot dx)$  est définie par la relation

$$\int_E f(x) \eta_{I,t}^{\mathbb{F}}(\mathbb{1}_{\{\tau_{I^c} > t\}} \cdot dx) := \mathbb{E}[f(X) \mathbb{1}_{\{\tau_{I^c} > t\}} | \sigma(\tau_I) \vee \mathcal{F}_t],$$

valable pour toute fonction borélienne bornée sur  $E$ .

Dans le cas particulier où la loi conditionnelle de  $X$  relativement à  $\mathcal{F}_t$  possède une densité<sup>(4)</sup>  $\alpha_t$  par rapport à une mesure déterministe  $\eta$  sur  $(E, \mathcal{B}(E))$ , on a

$$\eta_{I,t}^{\mathbb{F}}(dx) = C_\alpha(\tau_I) \mu_I(\beta_t(x) \cdot dx),$$

où  $\beta_t(x) = \alpha_t(x)/\alpha_0(x)$ , et

$$C_\alpha(x_I) = \left( \int_{\mathbb{R}_+^{I^c}} \alpha_t(x) dx_{I^c} \right) \left( \int_{\mathbb{R}_+^{I^c}} \alpha_0(x) dx_{I^c} \right)^{-1}.$$

Donc on a

$$(1.26) \quad \mu_t^{\mathbb{G}}(dx) = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} \mathbb{1}_{\{\tau_I \leq t, \tau_{I^c} > t\}} \frac{\mu_I(\mathbb{1}_{\{\tau_{I^c} > t\}} \beta_t(x) \cdot dx)}{\mu_I(\mathbb{1}_{\{\tau_{I^c} > t\}} \beta_t(\cdot))} = \frac{\mu_t(\beta_t(x) \cdot dx)}{\mu_t(\beta_t(\cdot))}.$$

**1.3.2. Espérance conditionnelle.** — Soit  $Y_t(\cdot)$  une fonction positive ou bornée sur  $\Omega \times E$  qui est  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(E)$ -mesurable. On peut calculer l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}[Y_t(X) | \mathcal{G}_t]$  en utilisant la formule suivante

$$\mathbb{E}[Y_t(X) | \mathcal{G}_t] = \int_E Y_t(x) \mu_t^{\mathbb{G}}(dx).$$

Cependant, pour évaluer les produits financiers au risque de crédit, il est nécessaire de considérer les espérances conditionnelles de la forme  $\mathbb{E}[Y_T(X) | \mathcal{G}_t]$ , où  $Y_T(\cdot)$  est  $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}(E)$ -mesurable. Pour cela, on peut considérer d'abord l'espérance conditionnelle de  $Y_T(X)$  par rapport à  $\mathcal{F}_t \vee \sigma(X)$ . Pour tout  $t \geq 0$ , soit  $\mu_t^{\mathbb{F}}$  la loi conditionnelle de  $X$  par rapport à  $\mathcal{F}_t$ . C'est une  $\mathcal{F}_t$ -mesure aléatoire sur  $(E, \mathcal{B}(E))$  qui peut être également considérée comme une mesure de probabilité<sup>(5)</sup> sur  $(\Omega \times E, \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(E))$  (probabilité de

4. C'est-à-dire que

$$\mathbb{E}[f(X) | \mathcal{F}_t] = \int_E \alpha_t(x) f(x) \eta(dx)$$

pour toute fonction borélienne bornée  $f$  sur  $(E, \mathcal{B}(E))$ .

5. Elle envoie toute fonction  $g : \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}$  bornée et  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(E)$ -mesurable en

$$\mathbb{E} \left[ \int_E g(\omega, x) \eta_t(dx) \right].$$

transition). On désigne par  $\mathbb{E}[\mu_T^{\mathbb{F}}(Y_T(x) \cdot dx) | \mathcal{F}_t]$  la  $\mathcal{F}_t$ -mesure aléatoire sur  $(E, \mathcal{B}(E))$  qui envoie toute fonction borélienne bornée  $f$  sur  $E$  en

$$\mathbb{E} \left[ \int_E f(x) Y_T(x) \mu_T^{\mathbb{F}}(dx) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

On peut également la considérer comme une mesure de probabilité sur  $(\Omega \times E, \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(E))$ . On a

$$\mathbb{E}[Y_T(X) | \mathcal{F}_t \vee \sigma(X)] = \frac{\mathbb{E}[\mu_T^{\mathbb{F}}(Y_T(x) \cdot dx) | \mathcal{F}_t]}{\mu_t^{\mathbb{F}}(dx)}(X),$$

où le quotient est la dérivée au sens de Radon-Nikodym, qui est une fonction  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(E)$ -mesurable sur  $\Omega \times E$ . On peut alors calculer l'espérance conditionnelle par rapport à  $\mathcal{G}_t$ .

**Théorème 1.3.1.** — *Pour toute fonction  $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}(E)$ -mesurable  $Y_T$  qui est positive ou bornée, on a la relation suivante :*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y_T(X) | \mathcal{G}_t] = \int_E \frac{\mathbb{E}[\mu_T^{\mathbb{F}}(Y_T(x) \cdot dx) | \mathcal{F}_t]}{\mu_t^{\mathbb{F}}(dx)} d\mu_t^{\mathbb{G}}.$$

Dans le cas où  $\mu_t^{\mathbb{F}}$  possède une densité  $\alpha_t(\cdot)$  par rapport à une mesure déterministe  $\eta$  pour chaque  $t \geq 0$ , on a

$$(1.27) \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y_T(X) | \mathcal{G}_t] = \int_E \mathbb{E} \left[ \frac{Y_T(x) \alpha_T(x)}{\alpha_t(x)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \mu_t^{\mathbb{G}}(dx).$$

Une autre façon de calculer l'espérance conditionnelle par rapport à  $\mathcal{G}_t$  est d'introduire pour chaque scénario de défaut une dérivée au sens de Radon-Nikodym. Cette méthode est valable pour une variable aléatoire générale. Soit  $Z$  une variable aléatoire ( $\mathcal{A}$ -mesurable) sur  $\Omega$ . On cherche à calculer l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}[Z | \mathcal{G}_t]$ . Sans perte de généralité, on suppose que  $Z$  est positive. On introduit, pour chaque  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , deux  $\mathcal{F}_t$ -mesures aléatoires  $\xi_{I,t}$  et  $\xi_{I,t}^Z$  sur  $(\mathbb{R}_+^I, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^I))$  telles que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^I} g(s_I) \xi_{I,t}(ds_I) &:= \int_E g(v_I(x)) \mathbb{1}_{\{v_{I^c}(x) > t\}} \eta_t(dx), \\ \int_{\mathbb{R}_+^I} g(s_I) \xi_{I,t}^Z(ds_I) &:= \int_E g(v_I(x)) \mathbb{1}_{\{v_{I^c}(x) > t\}} \eta_t^Z(dx) \end{aligned}$$

pour toute fonction positive et borélienne  $g$  sur  $\mathbb{R}_+^I$ , où  $\eta_t$  est la loi conditionnelle de  $X$  par rapport à  $\mathcal{F}_t$ , et  $\eta_t^Z$  est la  $\mathcal{F}_t$ -mesure aléatoire sur  $(E, \mathcal{B}(E))$  telle que

$$\int_E f(x) \eta_t^Z(dx) = \mathbb{E}[Zf(X) | \mathcal{F}_t]$$

pour toute fonction positive et borélienne  $f$  sur  $E$ .

**Proposition 1.3.2.** — *Pour toute variable aléatoire positive  $Z$ , on a*

$$(1.28) \quad \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_t] = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} \mathbb{1}_{\{\tau_I \leq t < \tau_{I^c}\}} \frac{d\xi_{I,t}^Z}{d\xi_{I,t}}(\tau_I),$$

où les mesures aléatoires  $\xi_{I,t}$  et  $\xi_{I,t}^Z$  sont considérées comme des mesures sur  $(\Omega \times \mathbb{R}_+^I, \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^I))$ , et le quotient désigne la dérivée au sens de Radon-Nikodym.

**1.3.3. Défauts successifs.** — Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité complet muni d'une filtration de référence  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  satisfaisant aux conditions habituelles. On suppose que la tribu  $\mathcal{F}_0$  est engendrée par les ensembles  $\mathbb{P}$ -négligeables. Dans ce paragraphe, on considère des temps aléatoires  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$  ordonnés de sorte que  $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_n$ . Dans ce cas-là, la filtration des défauts est engendrée par le processus de comptage  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  défini comme

$$N_t = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}.$$

En effet, on a  $\mathcal{N}_t := \sigma(\tau_1 \wedge t, \dots, \tau_n \wedge t) = \sigma(N_s; s \leq t)$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $\tau_{(i)} = (\tau_1, \dots, \tau_i)$ . Toute variable aléatoire  $\mathcal{N}_t$ -mesurable  $Y_t$  s'écrit sous la forme<sup>(6)</sup>

$$Y_t = \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{\{\sigma_i \leq t < \sigma_{i+1}\}} y(i, \tau_{(i)}),$$

où  $y(i, \cdot)$  est une fonction  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^i)$ -mesurable pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ . On peut réécrire cette formule sous une forme réduite comme  $Y_t = y(N_t, \tau_{(N_t)})$  et en déduire que la tribu  $\mathcal{N}_t$  s'identifie à  $\sigma(N_t, \tau_{(N_t)})$ . Dans le langage du paragraphe précédent, on peut considérer le vecteur aléatoire  $\tau := (\tau_1, \dots, \tau_n)$  comme une application  $\mathcal{A}$ -mesurable de  $\Omega$  dans le sous-ensemble fermé  $E$  de  $\mathbb{R}_+^n$  qui consiste des vecteurs  $(t_1, \dots, t_n)$  tels que  $t_1 \leq \dots \leq t_n$ . Le temps aléatoire  $\tau_i$  s'identifie à la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de  $\tau$ .

Les résultats présentés dans le paragraphe précédent admettent une forme plus simple dans le cas de défauts successifs. En effet, pour tout sous-ensemble  $I$  de  $\{1, \dots, n\}$ , l'ensemble  $\{\tau_I \leq t, \tau_{I^c} > t\}$  est non-négligeable seulement si  $I$  est de la forme  $\{1, \dots, i\}$  où  $0 \leq i \leq n$ . En outre, dans le cas où  $I = \{1, \dots, i\}$ , on a  $\{\tau_I \leq t, \tau_{I^c} > t\} = \{\tau_i \leq t < \tau_{i+1}\}$ . La formule (1.25) dans le cas de défauts successifs devient

$$(1.29) \quad \mu_t(dx) = \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t < \tau_{i+1}\}} \frac{\mu_{(i)}(\mathbb{1}_{\{\tau_{i+1} > t\}} \cdot dx)}{\mu_{(i)}(\mathbb{1}_{\{\tau_{i+1} > t\}})},$$

où  $\mu_t$  est la loi de  $X$  conditionnellement à  $\mathcal{N}_t$  et  $\mu_{(i)}$  est celle conditionnellement à  $\tau_{(i)}$ ,  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans un espace métrique telle que  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$  soit  $\sigma(X)$ -mesurable.

*Hypothèse de densité.* — Dans le reste du paragraphe, on admet l'hypothèse de densité du vecteur  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$  conditionnellement à la filtration  $\mathbb{F}$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $E$ . Autrement dit, on suppose qu'il existe une famille de

6. par convention  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_{n+1} = +\infty$ ,  $\mathbb{R}_+^0 = \{0\}$  et  $\tau_{(0)}$  est le vecteur vide.

fonctions  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(E)$ -mesurables et strictement positives  $\alpha_t : \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $t \geq 0$ ) telle que, pour toute fonction borélienne bornée  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , on ait

$$\mathbb{E}[f(\tau) | \mathcal{F}_t] = \int_E f(x) \alpha_t(x) dx \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Ici l'expression  $dx$  désigne la mesure de Lebesgue  $dx_1 \cdots dx_n$  sur  $E$ . La famille  $(\alpha_t)_{t \geq 0}$  est appelée la  $\mathbb{F}$ -densité conditionnelle du vecteur  $\boldsymbol{\tau}$  <sup>(7)</sup>. Pour simplifier la notation, on étend le domaine de définition de la fonction  $\alpha_t$  à  $\Omega \times \mathbb{R}_+^n$  de sorte que  $\alpha_t$  prenne la valeur 0 à l'extérieur de  $\Omega \times E$ .

D'après [85, Lemme 1], il existe une version càdlàg de la famille  $\alpha$  (considérée comme un processus aléatoire sur  $\widehat{\Omega} = \Omega \times E$ ) qui est mesurable par rapport à la filtration  $\widehat{\mathbb{F}} = (\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(E))_{t \geq 0}$ . Par abus de langage, on désigne encore par  $\alpha$  la version càdlàg du processus de densité. Pour tout vecteur fixé  $x$  dans  $E$ , le processus  $(\alpha_t(x))_{t \geq 0}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale.

*Espérances conditionnelles.* — Pour tout vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n)$  dans  $E$ , et tous  $k, p \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $k \leq p$ , on désigne par  $x_{(k:p)}$  le segment  $(x_k, \dots, x_p)$ . C'est un élément dans  $\mathbb{R}_+^{p-k+1}$ . Si  $f$  est une fonction intégrable sur  $[t, +\infty[^{p-k+1}$ , où  $t \geq 0$ , on note

$$\int_t^\infty f(x_{(k:p)}) dx_{(k:p)} := \int_t^\infty dx_k \cdots \int_t^\infty dx_n f(x_k, \dots, x_n).$$

Par convention, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_{(i+1,i)}$  désigne le vecteur vide.

Soit  $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$  la filtration  $(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{N}_t)_{t \geq 0}$  rendue habituelle. On s'intéresse à calculer les  $\mathcal{G}_t$ -espérances conditionnelles. D'abord, la loi de  $\boldsymbol{\tau}$  conditionnellement à  $\mathcal{G}_t$  est (voir (1.29))

$$\mu_t^{\mathbb{G}} = \frac{\mu_t(\beta_t(x) \cdot dx)}{\mu_t(\beta_t(x))} = \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t < \tau_{i+1}\}} \frac{\mu_{(i)}(\mathbb{1}_{\{x_{i+1} > t\}} \beta_t(x) \cdot dx)}{\mu_{(i)}(\mathbb{1}_{\{x_{i+1} > t\}} \beta_t(x))},$$

où  $\beta_t(x) = \alpha_t(x)/\alpha_0(x)$ . Comme la loi conditionnelle de  $\boldsymbol{\tau}$  par rapport à  $\tau_{(i)}$  est

$$(1.30) \quad \mu_{(i)}(dx) = \frac{\alpha_0(x) dx_{(i+1:n)} \delta_{\tau_{(i)}}(dx_{(i)})}{\int_E \alpha_0(x) dx_{(i+1:n)} \delta_{\tau_{(i)}}(dx_{(i)})},$$

$\delta$  étant la mesure de Dirac concentrée en  $\tau_{(i)}$ , on obtient

$$(1.31) \quad \mu_t^{\mathbb{G}}(dx) = \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t < \tau_{i+1}\}} \frac{\alpha_t(x) dx_{(i+1:n)} \delta_{\tau_{(i)}}(dx_{(i)})}{\alpha_{t,t}^{(i)}(x_{(i)})},$$

où  $\alpha_{t,t}^{(i)}(x_{(i)})$  désigne l'intégrale

$$\int_t^\infty \alpha_t(x) dx_{(i+1:n)}.$$

---

7. Cette approche est aussi étudiée dans [63].

Si  $Y_T$  est une fonction  $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$ -mesurable qui est positive ou bornée, on a (d'après (1.27) et (1.31))

$$(1.32) \quad \mathbb{E}[Y_T(\tau) | \mathcal{G}_t] = \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t < \tau_{i+1}\}} \int_t^\infty dx_{(i+1:n)} \frac{\mathbb{E}[Y_T(x) \alpha_T(x) | \mathcal{F}_t]}{\alpha_{t,t}^{(i)}(x_{(i)})} \Big|_{x_{(i)} = \tau_{(i)}}.$$

C'est une conséquence directe de (1.27).

*Intensité du processus des pertes.* — On introduit pour chaque  $k \in \{0, \dots, n\}$  une filtration intermédiaire  $\mathbb{G}^{(k)} = (\mathcal{G}_t^{(k)})_{t \geq 0}$ , définie comme  $\mathbb{F} \vee \mathbb{D}^{(k)}$  (rendue habituelle), où  $\mathbb{D}^{(k)}$  désigne la filtration engendrée par le processus

$$N^{(k)} = \left( \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}} \right)_{t \geq 0}.$$

Par définition, on a  $\mathbb{G}^{(0)} = \mathbb{F}$  et  $\mathbb{G}^{(n)} = \mathbb{G}$ . De plus, les filtrations  $\mathbb{G}^{(i)}$  et  $\mathbb{G}$  arrêtées à  $\tau_i$  se coïncident, c'est-à-dire que  $\mathcal{G}_{\tau_i \wedge t}^{(i)} = \mathcal{G}_{\tau_i \wedge t}$  pour tout  $t \geq 0$ . En particulier, on a la propriété suivante : toute  $\mathbb{G}^{(i)}$ -martingale arrêtée à  $\tau_i$  est une  $\mathbb{G}$ -martingale. Cette observation nous permet de ramener le calcul de la  $\mathbb{G}$ -intensité du processus  $N := N^{(n)}$  au calcul des  $\mathbb{G}^{(i)}$ -intensités. Rappelons que la  $\mathbb{G}$ -intensité de  $N$  est par définition un processus  $\mathbb{G}$ -adapté  $\lambda^N$  tel que  $(N_t - \int_0^t \lambda_s^N ds)_{t \geq 0}$  soit une  $\mathbb{G}$ -martingale. La proposition précédente montre que  $\lambda^N$  s'identifie à la somme des  $\lambda^i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ), où pour chaque  $i$ ,  $\lambda^i$  est la  $\mathbb{G}^{(i)}$ -intensité de  $\tau_i$ , c'est-à-dire un processus  $\mathbb{G}^{(i)}$ -adapté tel que  $(\mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}} - \int_0^t \lambda_s^i ds)_{t \geq 0}$  soit une  $\mathbb{G}^{(i)}$ -martingale<sup>(8)</sup>.

Dans [27], un lien explicite entre la densité conditionnelle et l'intensité est établi pour un temps de défaut (cf. §4.2 du *loc. cit.*, voir aussi §1.1.1 *infra*). Cette méthode peut être utilisée à calculer la  $\mathbb{G}^{(i-1)}$ -intensité de  $\tau_i$ . Le point clé est de déterminer la densité conditionnelle de  $\tau_i$  par rapport à la filtration  $\mathbb{G}^{(i-1)}$ . Pour cela, on applique la formule (1.29) à  $(\mathbb{F}, \tau_1, \dots, \tau_{i-1})$  et  $X = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ . En utilisant (1.26), on obtient que la loi conditionnelle  $\mu_t^{\mathbb{G}^{(i-1)}}$  de  $\tau$  par rapport à  $\mathcal{G}_t^{(i-1)}$  est

$$\sum_{0 \leq j < i-1} \mathbb{1}_{\{\tau_j \leq t < \tau_{j+1}\}} \frac{\mu_{(j)}(\beta_t(x) \mathbb{1}_{\{\tau_{j+1} > t\}} \cdot dx)}{\mu_{(j)}(\beta_t(x) \mathbb{1}_{\{\tau_{j+1} > t\}})} + \mathbb{1}_{\{\tau_{i-1} \leq t\}} \frac{\mu_{(i-1)}(\beta_t(x) \mathbb{1}_{\{\tau_i > t\}} \cdot dx)}{\mu_{(i-1)}(\beta_t(x) \mathbb{1}_{\{\tau_i > t\}})},$$

qui est égale à

$$\sum_{0 \leq j < i-1} \mathbb{1}_{\{\tau_j \leq t < \tau_{j+1}\}} \frac{\alpha_t(x) dx_{(j+1:n)}}{\alpha_{t,t}^{(j)}(x_{(j)})} \delta_{\tau_{(j)}}(dx_{(j)}) + \mathbb{1}_{\{\tau_{i-1} \leq t\}} \frac{\alpha_t(x) dx_{(i:n)}}{\alpha_{t,t}^{(i-1)}(x_{(i-1)})} \delta_{\tau_{(i-1)}}(dx_{(i-1)}),$$

8. Comme ce processus est nécessairement arrêté à  $\tau_i$ , on obtient qu'il est une  $\mathbb{G}$ -martingale. Donc  $\lambda^{(i)}$  est aussi la  $\mathbb{G}$ -intensité de  $\tau_i$ .

compte tenu de (1.30). En particulier, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_i > \theta | \mathcal{G}_t^{(i-1)}) &= \sum_{0 \leq j < i-1} \mathbb{1}_{\{\tau_j \leq t < \tau_{j+1}\}} \int_t^\infty dx_{(j+1:n)} \mathbb{1}_{\{x_i > \theta\}} \frac{\alpha_t(\tau(j), x_{(j+1:n)})}{\alpha_{t,t}^{(j)}(\tau(j))} \\ &\quad + \mathbb{1}_{\{\tau_{i-1} \leq t\}} \int_t^\infty dx_{(i:n)} \mathbb{1}_{\{x_i > \theta\}} \frac{\alpha_t(\tau(i-1), x_{(i:n)})}{\alpha_{t,t}^{(i-1)}(\tau(i-1))} \end{aligned}$$

quel que soit  $\theta \geq 0$ . On en déduit que la densité conditionnelle  $\alpha_t^{i|i-1}(\theta)$  de  $\tau_i$  par rapport à  $\mathcal{G}_t^{(i-1)}$  est

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\{\theta > t\}} \sum_{0 \leq j < i-1} \mathbb{1}_{\{\tau_j \leq t < \tau_{j+1}\}} \int_t^\infty dx_{(j+1:i-1)} \int_\theta^\infty dx_{(i+1:n)} \frac{\alpha_t(\tau(j), x_{(j+1:i-1)}, \theta, x_{(i+1:n)})}{\alpha_{t,t}^{(j)}(\tau(j))} \\ + \mathbb{1}_{\{\tau_{i-1} \leq t\}} \int_\theta^\infty dx_{(i+1:n)} \frac{\alpha_t(\tau(i-1), \theta, x_{(i+1:n)})}{\alpha_{t,t}^{(i-1)}(\tau(i-1))}. \end{aligned}$$

D'après [27, proposition 4.4.(1)], la  $\mathbb{G}^{(i)}$ -intensité de  $\tau_i$  est donnée par la formule suivante :

$$\lambda_t^{\mathbb{G}^{(i)}} = \mathbb{1}_{\{\tau_i > t\}} \frac{\alpha_t^{i|i-1}(t)}{\mathbb{P}(\tau_i > t | \mathcal{G}_t^{(i-1)})} = \mathbb{1}_{\{\tau_{i-1} \leq t < \tau_i\}} \frac{\alpha_{t,t}^{(i)}(\tau(i-1), t)}{\alpha_{t,t}^{(i-1)}(\tau(i-1))}.$$

**Proposition 1.3.3.** — La  $\mathbb{G}$ -intensité  $\lambda^N$  du processus des pertes  $N$  est donnée par la formule suivante :

$$\lambda_t^N = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau_{i-1} \leq t < \tau_i\}} \frac{\alpha_{t,t}^{(i)}(\tau(i-1), t)}{\alpha_{t,t}^{(i-1)}(\tau(i-1))}.$$

*Caractérisation des  $\mathbb{G}$ -martingales.* — Soit  $Y_T(\cdot)$  une fonction  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$ -mesurable. On écrit  $\mathbb{E}[Y_T(\tau) | \mathcal{G}_t]$  sous la forme

$$\mathbb{E}[Y_T(\tau) | \mathcal{G}_t] = \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t < \tau_{i+1}\}} y_t^i(\tau(i)),$$

où (cf. (1.32))

$$y_t^i(x(i)) = \int_t^\infty dx_{(i+1:n)} \frac{\mathbb{E}[Y_T(x) \alpha_T(x) | \mathcal{F}_t]}{\alpha_{t,t}^{(i)}(x(i))}.$$

On obtient alors que, pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ,

$$\alpha_{t,t}^{(i)}(x(i)) y_t^i(x(i)) + \int_0^t y_s^{i+1}(x(i), s) \alpha_{s,s}^{(i+1)}(x(i), s) ds$$

s'identifie à

$$\int_0^\infty \mathbb{E}[Y_T(x) \alpha_T(x) | \mathcal{F}_t] dx_{(i+1:n)},$$

qui est la valeur d'une  $\mathbb{F}$ -martingale en  $t$ . De façon similaire, on a

$$y_t^n(x) \alpha_{t,t}^{(n)}(x) = \mathbb{E}[Y_T(x) \alpha_T(x) | \mathcal{F}_t].$$



Basé sur cette observation, on établit le résultat suivant (cf. [28])

**Théorème 1.3.4.** — *Soit  $Y$  un processus  $\mathbb{G}$ -adapté de la forme*

$$Y_t = \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t < \tau_{i+1}\}} y_t^i(\tau_{(i)}),$$

où  $y_t^i(\cdot)$  est  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^i)$ -mesurable. Pour que le processus  $Y$  soit une  $\mathbb{G}$ -martingale, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

- (1) le processus  $(y_t^n(x) \alpha_{t,t}^{(n)}(x))_{t \geq 0}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale quel que soit  $x \in \mathbb{R}_+^n$ ,
- (2) pour tout entier  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  et tout élément  $x_{(i)}$  dans  $\mathbb{R}_+^i$ , le processus

$$\alpha_{t,t}^{(i)}(x_{(i)}) y_t^i(x_{(i)}) + \int_0^t y_s^{i+1}(x_{(i)}, s) \alpha_{s,s}^{(i+1)}(x_{(i)}, s), \quad t \geq 0$$

est une  $\mathbb{F}$ -martingale.

La démonstration consiste à exprimer  $Y - Y_0$  comme la somme de  $n+1$  processus  $Y^i := (Y_{\tau_{i+1} \wedge t} - Y_{\tau_i \wedge t})_{t \geq 0}$ , où  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Le processus  $Y$  est une  $\mathbb{G}$ -martingale si et seulement si chacun des processus  $Y^i$  est une  $\mathbb{G}$ -martingale. Cela revient à dire que chaque processus  $Y^i$  est une  $\mathbb{G}^{(i+1)}$ -martingale<sup>(9)</sup> car le processus est arrêté à  $\tau_{i+1}$ . En utilisant le calcul établi précédemment sur la loi conditionnelle de  $\tau$  relativement à une filtration intermédiaire, le critère des martingales dans le grossissement progressif de filtration par un temps aléatoire démontré dans [27] (cf. la proposition 5.6 du *loc. cit.*) donne le résultat souhaité par la méthode de récurrence.

---

9. Par convention  $\mathbb{G}^{(n+1)} = \mathbb{G}$ .

## CHAPITRE 2

### CONTRÔLE OPTIMAL AVEC LE RISQUE DE CONTREPARTIE

Ce chapitre est consacré à présenter mes travaux en collaboration avec H. Pham et I. Kharroubi sur le problème d'investissement optimal dans le contexte du marché financier à risque de contrepartie. Ces travaux sont motivés par l'observation que le défaut d'un actif peut conduire à des influences (parfois brutales) sur les autres. Dans l'étude des produits financiers du risque de crédit, ce phénomène se reflète comme un saut instantané (appelé saut de contagion dans [54, 15]) de l'intensité de défaut d'un actif lorsqu'une de ses contreparties fait faillite. Cette influence peut aussi être décrite par un saut de la valeur de l'actif au moment de défaut.

Pour pouvoir incorporer le saut induit par le défaut de contagion ou de contrepartie, le marché financier que l'on modélise est un marché incomplet. Le problème d'investissement optimal dans ce contexte (de marché incomplet) a été étudié dans un cadre général par Kramkov et Schachermayer [66]. Concernant le risque de crédit, ce problème a été traité dans les travaux comme [12, 14, 21, 82]. Plus récemment, les auteurs de [71, 4] utilisent l'approche d'équation différentielle stochastique rétrograde appliquée sur la filtration globale du marché et donc fait intervenir des équations différentielles stochastiques rétrogrades à saut (cf. par exemple [74]). Dans un travail en commun avec Pham [61], on s'intéresse à étudier les impacts de défaut sur les stratégies d'investissement, en supposant l'existence de la densité de défaut conditionnellement à la filtration de référence qui représente l'information du marché sans risque de défaut. On décompose le problème initial en deux problèmes d'optimisation, avant et après défaut, par rapport à la filtration de référence et ainsi considérer deux problèmes par rapport au marché complet. Ces deux problèmes d'optimisation peuvent être résolus par des méthodes classiques (méthode de dualité ou programmation dynamique, cf. El Karoui [26]) et conduisent à une solution explicite du problème initial. En outre, cette méthode permet d'analyser le changement brutal de

la stratégie optimale au moment de défaut suggéré par l'expérience du marché financier. Des comparaisons numériques avec l'approche de Merton donnent une explication au phénomène de vente à la découverte près du moment de défaut.

L'approche de décomposition se généralise facilement au cas de plusieurs défauts successifs. Avec Kharroubi et Pham [60], nous avons étudié le problème d'investissement optimal à risque de défauts multiples (voir aussi [76]). En appliquant récursivement l'approche de décomposition, nous avons pu relier le problème d'optimisation à une famille d'équations différentielles stochastiques rétrogrades et ainsi donner une démonstration explicite de l'existence et l'unicité de la solution du problème d'optimisation sous l'hypothèse de densité. Du point de vue théorique, cela donne une nouvelle approche à résoudre une grande famille d'équations différentielles stochastiques rétrogrades à un nombre fini de sauts.

En outre, dans un travail avec Hillairet [50], nous avons adapté l'approche de décomposition dans la théorie des informations asymétriques pour étudier le problème d'investissement optimal dans un marché financier à risque de contrepartie avec différents niveaux d'information. Ce travail sera présenté plus loin dans le chapitre 3.

## 2.1. Optimisation avec une seul contrepartie

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au problème d'investissement optimal dans un marché financier consistant d'un actif sans risque et un actif risqué influencé par un autre actif (la contrepartie) qui peut faire faillite. L'actif risqué continue à exister au marché même si la contrepartie fait faillite. Cependant, si le défaut de ce dernier a lieu, le prix  $S$  de l'actif risqué marque un saut brutal au moment de défaut  $\tau$ .

On modélise le marché financier par un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$  et les différentes informations par des filtrations. Les informations qui ne sont pas directement liées à l'événement de défaut sont représentées par une filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , supposée être engendrée par un mouvement brownien  $W$ . Les informations globales du marché sont donc décrites par le grossissement progressif  $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$  de la filtration  $\mathbb{F}$  par la filtration  $\mathbb{D} = (\mathcal{D}_t)_{t \geq 0}$  engendrée par le processus de défaut  $\mathcal{D}_t = \sigma(\mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}}, s \leq t)$ .

On fixe un temps de maturité fini  $T$  et suppose que le temps de défaut (qui est une variable aléatoire positive sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ ) vérifie l'hypothèse de densité (1.5) sur  $[0, T]$  : il existe une famille de fonctions  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurables  $(\omega, \theta) \mapsto \alpha_t(\theta)$ ,  $t \in [0, T]$  telles que

$$(2.1) \quad \mathbb{P}(\tau \in d\theta | \mathcal{F}_t) = \alpha_t(\theta) d\theta, \quad t \in [0, T].$$

Par définition, pour tout  $\theta \geq 0$ , le processus  $\alpha(\theta)$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale sur  $[0, T]$ .

Le prix  $S$  de l'actif risqué est un processus  $\mathbb{G}$ -adapté sur  $[0, T]$ . Il peut être écrit sous forme décomposée comme (voir (1.1))

$$(2.2) \quad S_t = S_t^0 \mathbb{1}_{\{t < \tau\}} + S_t^1(\tau) \mathbb{1}_{\{t \geq \tau\}}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

où  $S^0$  est un processus  $\mathbb{F}$ -adapté, et  $S^1(\cdot)$  est un processus  $\mathbb{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -adapté sur  $[0, T]$ . On suppose que le processus  $S^0$  vérifie une équation différentielle stochastique de la forme

$$(2.3) \quad dS_t^0 = S_t^0(\mu_t^0 dt + \sigma_t^0 dW_t), \quad S_0^0 = S_{0-} > 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Similairement, on suppose que, pour tout  $\theta \in [0, T]$ , le prix après-défaut  $(S_t^1(\theta), t \in [\theta, T])$  vérifie l'équation suivante

$$(2.4) \quad \begin{aligned} dS_t^1(\theta) &= S_t^1(\theta)(\mu_t^1(\theta) dt + \sigma_t^1(\theta) dW_t), \quad \theta < t \leq T, \\ S_\theta^1(\theta) &= S_{\theta-}^0(1 - \gamma_\theta), \end{aligned}$$

où  $\gamma_\theta$  est le saut proportionnel du prix de l'actif risqué, pourvu que l'événement de défaut a lieu à l'instant  $\theta$ . Le processus  $\gamma$  est supposé être  $\mathbb{F}$ -adapté. On suppose aussi que les contraintes suivantes sur les coefficients figurant dans les équations (2.3) et (2.4) sont vérifiées de sorte que ces équations aient des solutions strictement positives :

- (i) positivité des volatilités :  $\sigma_t^0 > 0$  et  $\sigma_t^1(\cdot) > 0$ ,
- (ii) condition d'intégrabilité

$$(2.5) \quad \int_0^T \left( \left| \frac{\mu_t^0}{\sigma_t^0} \right|^2 + |\sigma_t^0|^2 \right) dt + \int_\theta^T \left( \left| \frac{\mu_t^1(\theta)}{\sigma_t^1(\theta)} \right|^2 + |\sigma_t^1(\theta)|^2 \right) dt < +\infty \quad \text{p.s.}$$

pour tout  $\theta \in [0, T]$ ,

- (iii) positivité du prix :  $\gamma_t < 1$  p.s. pour tout  $t \in [0, T]$ .

Considérons maintenant un agent qui investisse dans un portefeuille qui consiste d'un actif sans risque de prix constant 1 (sans perte de la généralité) et de l'actif risqué de prix  $S$ . La proportion que l'agent investisse dans l'actif risqué à l'instant  $t$  est notée comme  $\pi_t$ , le processus  $\pi$  est  $\mathbb{G}$ -prévisible et donc se décompose comme (voir (1.2))

$$\pi_t = \pi_t^0 \mathbb{1}_{\{t \leq \tau\}} + \pi_t^1(\tau) \mathbb{1}_{\{t > \tau\}}, \quad t \in [0, T],$$

où  $\pi^0$  est un processus  $\mathbb{F}$ -prévisible et  $\pi^1(\cdot)$  est une fonction  $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}([0, T])$ -mesurable sur  $\Omega \times [0, T] \times [0, T]$ . La valeur  $X$  du portefeuille correspondant à la stratégie  $\pi$  vérifie alors l'équation différentielle stochastique suivante

$$dX_t = X_t \pi_t \frac{dS_t}{S_t}, \quad t \in [0, T].$$

En particulier, le processus  $X$  peut se décomposer comme

$$X_t = X_t^0 \mathbb{1}_{\{t < \tau\}} + X_t^1(\tau) \mathbb{1}_{\{t \geq \tau\}}, \quad t \in [0, T],$$

où les fonctions aléatoires  $X^0$  et  $X^1(\cdot)$  vérifient les relations suivantes

$$(2.6) \quad dX_t^0 = X_t^0 \pi_t^0 (\mu_t^0 dt + \sigma_t^0 dW_t), \quad X_0^0 = X_{0-},$$

$$(2.7) \quad dX_t^1(\theta) = X_t^1(\theta) \pi_t^1(\theta) (\mu_t^1(\theta) dt + \sigma_t^1(\theta) dW_t), \quad \theta < t \leq T,$$

$$(2.8) \quad X_\theta^1(\theta) = X_{\theta-}^0(1 - \pi_\theta^0 \gamma_\theta).$$

Pour que les équations différentielle stochastique (2.6)—(2.8) admettent des solutions strictement positives (pourvu que  $X_{0-} > 0$ ), il faut imposer certaines contraintes à la stratégie  $\pi$ . On désigne par  $\mathcal{A}$  l'ensemble des couples  $(\pi^0, \pi^1(\cdot))$  tels que,

- (i) le processus  $\pi^0$  soit  $\mathbb{F}$ -prévisible sur  $[0, T]$ ,
- (ii) la fonction aléatoire  $\pi^1(\cdot)$  soit  $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}([0, T])$ -mesurable,
- (iii) pour tout  $\theta \in [0, T]$

$$\int_0^T |\pi_t^0 \sigma_t^0|^2 dt + \int_\theta^T |\pi_t^1(\theta) \sigma_t^1(\theta)|^2 dt < +\infty \quad \text{et} \quad \pi_\theta^0 \gamma_\theta < 1 \quad \text{a.s.}$$

Tout élément  $(\pi^0, \pi^1(\cdot)) \in \mathcal{A}$  correspond à une stratégie d'investissement  $\pi$  (dite *admissible*) de sorte que  $\pi_t = \pi_t^0 \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} + \pi_t^1(\tau) \mathbf{1}_{\{t > \tau\}}$ , on note  $\pi \in \mathcal{A}$  et on désigne par  $X^\pi$  le processus de valeur correspondant (dont le capital initial  $X_{0-} > 0$  est fixé).

Étant donnée une fonction d'utilité  $U$  définie sur  $]0, +\infty[$  qui vérifie les conditions d'Inada, i.e. la fonction  $U$  est strictement croissante, strictement concave et de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , telle que  $\lim_{t \rightarrow 0+} U'(t) = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} U'(t) = 0$ , le problème d'investissement optimal consiste à déterminer la borne supérieure

$$(2.9) \quad V_0 := \sup_{\pi \in \mathcal{A}} J_0(\pi),$$

où  $J_0(\pi) = \mathbb{E}[U(X_T^\pi)]$ .

Sous l'hypothèse de densité, la valeur d'utilité  $J_0(\pi)$  se calcule comme

$$(2.10) \quad \begin{aligned} J_0(\pi) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(X_T) | \mathcal{F}_T]] \\ &= \mathbb{E}[U(X_T^0) \mathbb{P}(\tau > T | \mathcal{F}_T) + \mathbb{E}[U(X_T^1(\tau)) \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} | \mathcal{F}_T]] \\ &= \mathbb{E}\left[U(X_T^0) G_T + \int_0^T U(X_T^1(\theta)) \alpha_T(\theta) d\theta\right], \end{aligned}$$

où  $G_T = \mathbb{P}(\tau > T | \mathcal{F}_T) = \int_T^\infty \alpha_T(\theta) d\theta$ . Cette formulation nous suggère d'introduire une famille de problème d'optimisation “après défaut” comme dans la suite. Pour tout  $(\theta, x) \in [0, T] \times ]0, +\infty[$ , on désigne par  $\mathcal{A}^1(\theta)$  l'ensemble des processus  $(\mathcal{F}_t)_{\theta < t \leq T}$ -prévisibles  $(\pi_t^1(\theta), t \in ]\theta, T])$  tels que

$$\int_\theta^T |\pi_t^1(\theta) \sigma_t^1(\theta)|^2 dt < +\infty, \quad \text{p.s.}$$

Si  $\pi^1(\theta)$  est un élément dans  $\mathcal{A}^1(\theta)$ , on désigne par  $X^{1,x}(\pi^1(\theta))$  la solution de l'équation différentielle stochastique (2.7) avec la condition initiale  $X_\theta^{1,x}(\pi^1(\theta)) = x$ . On désigne par  $V_\theta^1(x)$  la solution au problème d'optimisation suivant

$$(2.11) \quad V_\theta^1(x) = \text{ess sup}_{\pi^1(\theta) \in \mathcal{A}^1(\theta)} J_\theta^1(x, \pi^1(\theta)),$$

où  $J_\theta^1(x, \pi^1(\theta)) := \mathbb{E}[U(X_T^{1,x}(\pi^1(\theta))) \alpha_T(\theta) | \mathcal{F}_\theta]$ .

On établit le théorème suivant qui est un problème d'optimisation global avant-défaut dépendant de la stratégie  $\pi^0$  et de la richesse initiale  $X^0$  :

**Théorème 2.1.1.** — On désigne par  $\mathcal{A}^0$  la famille des processus  $\mathbb{F}$ -prévisibles  $\pi^0$  sur  $[0, T]$  tels que  $\int_0^T |\pi_t^0 \sigma_t^0|^2 dt < +\infty$  et que  $\pi_\theta^0 \gamma_\theta < 1$  p.s. pour tout  $\theta \in [0, T]$ . Alors on a

$$(2.12) \quad V_0 = \sup_{\pi^0 \in \mathcal{A}^0} \mathbb{E} \left[ U(X_T^0) G_T + \int_0^T V_\theta^1(X_\theta^0 (1 - \pi_\theta^0 \gamma_\theta)) d\theta \right],$$

où  $V^1$  est la solution du problème après-défaut (2.11).

La démonstration de ce résultat repose sur un argument de sélection mesurable (cf. [86]) pour construire une stratégie admissible  $(\pi^0, \pi^1(\cdot))$  dans  $\mathcal{A}$  telle que  $\pi^1(\theta)$  soit quasi-optimale pour tout  $\theta \in [0, T]$  relativement au problème d'optimisation (2.11) et que  $\pi^0$  soit quasi-optimale pour le problème (2.12).

Les problèmes d'optimisation (2.11) et (2.12) étant par rapport à la filtration  $\mathbb{F}$  engendrée par un mouvement brownien, on peut donc les résoudre via des méthodes classiques. En particulier, le cas “après défaut” (2.11) peut être étudié par la méthode de dualité. Pour tout  $\theta \in [0, T]$ , on désigne par  $Z(\theta)$  la martingale locale sur  $[\theta, T]$  définie comme

$$Z_t(\theta) = \exp \left( - \int_\theta^t \frac{\mu_s^1(\theta)}{\sigma_s^1(\theta)} dW_s - \frac{1}{2} \int_\theta^t \left| \frac{\mu_s^1(\theta)}{\sigma_s^1(\theta)} \right|^2 ds \right), \quad \theta \leq t \leq T.$$

On désigne par  $\tilde{U}$  la transformée de Legendre de  $U$ , définie comme

$$\tilde{U}(y) = \sup_{x > 0} (U(x) - xy).$$

On suppose que la condition d'élasticité asymptotique est vérifiée pour la fonction d'utilité  $U$ , autrement dit,

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1.$$

**Théorème 2.1.2.** — Le processus  $V^1(x)$  dans le problème d'optimisation (2.11) vérifie

$$V_\theta^1(x) = \mathbb{E} \left[ U \left( \hat{y}_\theta(x) \frac{Z_T(\theta)}{\alpha_T(\theta)} \right) \alpha_T(\theta) \mid \mathcal{F}_\theta \right],$$

où  $\hat{y}_\theta(x)$  est la variable aléatoire  $\mathcal{F}_\theta \otimes \mathcal{B}(]0, \infty[)$ -mesurable solution de l'équation

$$\mathbb{E} \left[ \frac{Z_T(\theta)}{Z_\theta(\theta)} I \left( \hat{y}_\theta(x) \frac{Z_T(\theta)}{\alpha_T(\theta)} \right) \mid \mathcal{F}_\theta \right] = x$$

et la fonction  $I$  est l'inverse de  $U'$ . De plus, la valeur optimale du portefeuille est

$$\hat{X}_t^{1,x}(\theta) = \mathbb{E} \left[ \frac{Z_T(\theta)}{Z_t(\theta)} I \left( \hat{y}_\theta(x) \frac{Z_T(\theta)}{\alpha_T(\theta)} \right) \mid \mathcal{F}_t \right], \quad \theta \leq t \leq T.$$

Dans le cas où la fonction d'utilité est de la forme (i.e. dans la classe CRRA)

$$U(x) = \frac{x^p}{p}, \quad 0 < p < 1, \quad x > 0,$$

on peut calculer la valeur optimale du portefeuille comme la suite<sup>(1)</sup>

$$\hat{X}_t^{1,x}(\theta) = \frac{x}{\mathbb{E}\left[\alpha_T(\theta)\left(\frac{Z_T(\theta)}{\alpha_T(\theta)}\right)^{-q} \middle| \mathcal{F}_\theta\right]} \cdot \frac{\mathbb{E}\left[\alpha_T(\theta)\left(\frac{Z_T(\theta)}{\alpha_T(\theta)}\right)^{-q} \middle| \mathcal{F}_t\right]}{Z_t(\theta)}, \quad \theta \leq t \leq T,$$

où  $q = p/(1-p)$ . En outre, on a

$$V_\theta^1(x) = \frac{x^p}{p} \left( \mathbb{E}\left[\alpha_T(\theta)\left(\frac{Z_T(\theta)}{\alpha_T(\theta)}\right)^{-q} \middle| \mathcal{F}_\theta\right] \right)^{1-p}, \quad \theta \in [0, T].$$

Il s'avère que  $V_\theta^1(x)$  peut s'écrire sous la forme

$$(2.13) \quad V_\theta^1(x) = U(x)K_\theta^p,$$

où

$$K_\theta = \mathbb{E}\left[\alpha_T(\theta)\left(\frac{Z_T(\theta)}{\alpha_T(\theta)}\right)^{-q} \middle| \mathcal{F}_\theta\right].$$

On peut utiliser la programmation dynamique à étudier le problème d'optimisation "avant défaut". Pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $\nu \in \mathcal{A}^0$ , on désigne par  $\mathcal{A}^0(t, \nu)$  l'ensemble des stratégies  $\pi^0 \in \mathcal{A}^0$  telles que  $\pi_{\cdot \wedge t}^0 = \nu_{\cdot \wedge t}$ . On considère la version dynamique du problème d'optimisation (2.12) comme la suite (où  $t \in [0, T]$ )

$$(2.14) \quad V_t(\nu) = \operatorname{ess\,sup}_{\pi^0 \in \mathcal{A}^0(t, \nu)} \mathbb{E}\left[U(X_T^0(\pi^0))G_T + \int_t^T V_\theta^1(X_\theta^0(\pi^0))(1 - \pi_\theta^0 \gamma_\theta) d\theta \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

où  $X^0(\pi^0)$  est la solution de l'équation différentielle stochastique (2.6) correspondant à la stratégie  $\pi^0$ . Soit  $Y$  le processus càdlàg défini comme  $Y_t = V_t(\nu)/U(X_t^0(\nu))$ , où  $X^0(\nu)$  est la solution de l'équation différentielle stochastique (2.6) pour  $\pi^0 = \nu$ . Grâce à la relation (2.13), le processus  $Y$  peut s'écrire sous la forme

$$(2.15) \quad Y_t = p \operatorname{ess\,sup}_{\pi^0 \in \mathcal{A}^0(\nu, t)} \mathbb{E}\left[U\left(\frac{X^0(\pi^0)}{X_0(\nu)}\right)G_T + \int_t^T U\left(\frac{X_\theta^0(\pi^0)}{X_t^0(\nu)}\right)(1 - \pi_\theta^0 \gamma_\theta)^p K_\theta^p d\theta \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

On désigne par  $L_+^b(\mathbb{F})$  l'ensemble des processus  $\mathbb{F}$ -adaptés, positifs et càdlàg  $\tilde{Y}$  tels que le processus  $\xi^\nu(\tilde{Y})$  défini comme

$$\xi_t^\nu := U(X_t^0(\nu))Y_t + \int_0^t U(X_\theta^0(\nu))(1 - \nu_\theta \gamma_\theta)^p K_\theta^p d\theta, \quad t \in [0, T]$$

1. De façon similaire, on peut aussi calculer explicitement ces processus pour la fonction d'utilité logarithmique  $U(x) = \ln(x)$ . On a

$$\hat{X}_t^{1,x}(\theta) = \frac{x\alpha_t(\theta)}{\alpha_\theta(\theta)Z_t(\theta)}, \quad \theta \leq t \leq T$$

et

$$V_\theta^1(x) = \alpha_\theta(\theta) \ln\left(\frac{x}{\alpha_\theta(\theta)}\right) + \mathbb{E}\left[\alpha_T(\theta) \ln\left(\frac{\alpha_T(\theta)}{Z_T(\theta)}\right) \middle| \mathcal{F}_\theta\right], \quad \theta \in [0, T].$$

soit borné inférieurement par une  $\mathbb{F}$ -martingale. Il s'avère que le processus  $Y$  est dans la classe  $L_+^b(\mathbb{F})$ ; de plus, il est la plus petite solution dans  $L_+^b(\mathbb{F})$  de l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$(2.16) \quad Y_t = G_T + \int_t^T f(\theta, Y_\theta, \phi_\theta) d\theta - \int_t^T \phi_\theta dW_\theta, \quad t \in [0, T],$$

où

$$(2.17) \quad f(t, Y_t, \phi_t) = p \operatorname{ess\,sup}_{\nu \in \mathcal{A}^0} \left[ (\mu_t^0 Y_t + \sigma_t^0 \phi_t) \nu_t - \frac{1-p}{2} Y_t |\nu_t \sigma_t^0|^2 + K_t^p \frac{(1 - \nu_t \gamma_t)^p}{p} \right].$$

**Théorème 2.1.3.** — *La stratégie optimale  $\hat{\pi}^0$  du problème (2.12) s'identifie à l'élément dans  $\mathcal{A}^0$  où la borne supérieure (2.17) est atteinte.*

Si la condition d'intégrabilité suivante est satisfaite :  $\int_0^T \left| \frac{K_t}{\sigma_t^0} \right|^{2p/(1-p)} dt < \infty$  p.s., la borne supérieure dans (2.17) est atteinte ponctuellement. Autrement dit, on a (scénario par scénario)

$$(2.18) \quad f(t, Y_t, \phi_t) = p \sup_{\pi \in \mathbb{R}, \pi \gamma_t < 1} \left[ (\mu_t^0 Y_t + \sigma_t^0 \phi_t) \pi - \frac{1-p}{2} Y_t |\pi \sigma_t^0|^2 + K_t^p \frac{(1 - \pi \gamma_t)^p}{p} \right].$$

Il s'avère que le terme  $f(t, Y_t, \phi_t)$  n'est pas lipschitzienne en général par rapport aux paramètres  $(Y_t, \phi_t)$ . L'existence et l'unicité de la solution pour l'équation (2.16) reposent sur un argument de troncature pour le domaine de  $\pi$  dans (2.18).

Dans les tests numériques, on a comparé la stratégie optimale dans notre modèle avec celle dans le modèle classique de Merton où le risque de défaut n'est pas pris en considération. Quand il y a une perte (resp. gain) au défaut, i.e.  $\gamma > 0$  (resp.  $\gamma < 0$ ), la stratégie optimale est plus petite (resp. grande) que la stratégie de Merton. De plus, la stratégie est décroissante par rapport à  $\gamma$ . Quand le risque de défaut est grand, la stratégie optimale s'éloigne de la stratégie de Merton, plus précisément, pour une valeur de  $\gamma$  fixée, plus la probabilité de défaut est grande, plus l'investissement optimal à l'actif risqué est petit quand  $\gamma > 0$ , et est grand quand  $\gamma < 0$ . La fonction de valeur optimale est en général plus petite de celle dans le modèle de Merton à cause du risque de contrepartie. Il existe néanmoins certaines exceptions :

- 1) quand il y a un gain au défaut, on peut profiter du défaut et obtenir une meilleure fonction de valeur ;
- 2) quand il y a une forte probabilité de défaut et une grand perte au défaut, l'investisseur peut effectuer une stratégie de vente à découverte et faire un pari sur l'arrivée de défaut avant la maturité pour faire du profit.



## 2.2. Investissement optimal avec risque de multi-défauts

On considère un marché financier représenté par un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$  qui est sensible à l'impact de  $n$  événements successifs<sup>(2)</sup> de défaut qui ont lieu aux temps aléatoires finis et strictement positifs  $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_n$  respectivement. Soit  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtration qui représente les informations qui ne sont pas sensibles à ces événements, supposée être engendrée par un mouvement brownien  $W$ . Soit  $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_n)$  un vecteur de  $n$  marques correspondant à ces événements de défaut. Ce sont des variables aléatoires  $\mathcal{G}$ -mesurables prenant valeurs dans un espace polonais  $E$ . Par exemple,  $L_i$  peut représenter la perte d'un portefeuille à cause du défaut à l'instant  $\tau_i$ .

Soit  $\mathbb{G}$  la filtration le grossissement progressif de  $\mathbb{F}$  par les temps aléatoires  $\tau_1, \dots, \tau_n$  et les marques  $L_1, \dots, L_n$ , qui représente les informations totales du marché. En d'autres termes, on note  $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{D}^1 \vee \dots \vee \mathbb{D}^n$ , où  $\mathbb{D}^k = (\mathcal{D}_t^k)_{t \geq 0}$  est la filtration continue à droite associée à la filtration  $(\tilde{\mathcal{D}}_t^k)_{t \geq 0}$  avec

$$\tilde{\mathcal{D}}_t^k = \sigma(L_k \mathbb{1}_{\{\tau_k \leq s\}}, s \leq t) \vee \sigma(\mathbb{1}_{\{\tau_k \leq s\}}, s \leq t).$$

De façon équivalente,  $\mathbb{G}$  est la plus petite filtration continue à droite qui contient  $\mathbb{F}$  et telle que, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\tau_k$  soit un  $\mathbb{G}$ -temps d'arrêt et  $L_k$  est une variable aléatoire  $\mathcal{G}_{\tau_k}$ -mesurable.

Pour tout entier  $k$ , soit  $\Delta_k$  l'ensemble des vecteurs  $(\theta_1, \dots, \theta_k)$  dans  $\mathbb{R}_+^k$  tels que  $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_k$ . Pour tout élément  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \Delta_n$  et tout  $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in E^n$ , on désigne par  $\boldsymbol{\theta}_k$  et  $\boldsymbol{\ell}_k$  les vecteurs tronqués  $(\theta_1, \dots, \theta_k)$  et  $(\ell_1, \dots, \ell_k)$  respectivement ( $k \in \{0, \dots, n\}$ ), où par convention on note  $\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\ell}_0 = \emptyset$ . De façon similaire, on note  $\boldsymbol{\tau}_k = (\tau_1, \dots, \tau_k)$  et  $\mathbf{L}_k = (L_1, \dots, L_k)$ . Pour tout  $t \geq 0$ , on désigne par  $\Omega_t^k$  l'événement  $\{\tau_k \leq t < \tau_{k+1}\}$ , où par convention  $\Omega_t^0 := \{t < \tau_1\}$  et  $\Omega_t^n := \{\tau_n \leq t\}$ . De façon similaire, on note  $\Omega_{t-}^k := \{\tau_k < t \leq \tau_{k+1}\}$  avec les conventions  $\Omega_{t-}^0 := \{t \leq \tau_1\}$  and  $\Omega_{t-}^n := \{\tau_n < t\}$ .

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces polonais. On désigne par  $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(V, W)$  l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times V$  et à valeurs dans  $W$  qui sont  $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(V)$ -mesurables, où  $\mathcal{P}(\mathbb{F})$  désigne la tribu prévisible associée à  $\mathbb{F}$ . Similairement, on désigne par  $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(V, W)$  l'ensemble des fonctions  $Z : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times V \rightarrow W$  telles que, pour tout  $t \geq 0$ , l'application  $(\omega, v) \mapsto Z(t, \omega, v)$  soit  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(V)$ -mesurable. Dans le cas où  $W = \mathbb{R}$ , on utilise l'expression simplifiée  $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(V)$  et  $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(V)$  pour désigner  $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{R})$  et  $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{R})$ .

Rappelons que tout processus  $\mathbb{G}$ -adapté (resp.  $\mathbb{G}$ -prévisible)  $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$  se décompose sous la forme

$$Z_t = \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{\Omega_t^k} Z_t^k(\boldsymbol{\tau}_k, \mathbf{L}_k), \quad (\text{resp. } Z_t = \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{\Omega_{t-}^k} Z_t^k(\boldsymbol{\tau}_k, \mathbf{L}_k)), \quad t \geq 0,$$

2. Quitte à rajouter les statistiques d'ordre dans la famille de marques (et augmenter le domaine  $E$ ), on peut facilement ramener l'étude des événements de défaut généraux au cas des défauts successifs.

où  $Z_t^k$  est un élément dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_k \times E^k)$  (resp.  $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_k \times E^k)$ ).

On suppose que l'hypothèse de densité est vérifiée pour le couple  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{L})$ , i.e., il existe une fonction  $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_n \times E^n)$  telle que, pour toute fonction borélienne  $f$  sur  $\Delta_n \times E^n$  et tout  $t \geq 0$ , on ait

$$(2.19) \quad \mathbb{E}[f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{L}) | \mathcal{F}_t] = \int_{\Delta_n \times E^n} f(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell}) \alpha_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell}) d\boldsymbol{\theta} \eta(d\boldsymbol{\ell}), \quad \text{p.s.},$$

où  $d\boldsymbol{\theta} = d\theta_1 \dots d\theta_n$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ , et  $\eta(d\boldsymbol{\ell})$  est une mesure borélienne sur  $E^n$  de la forme

$$\eta(d\boldsymbol{\ell}) = \eta_1(d\ell_1) \prod_{k=1}^{n-1} \eta_{k+1}(\boldsymbol{\ell}_k, d\ell_{k+1}),$$

où  $\eta_1$  est une mesure borélienne non-négative sur  $E$  et  $\eta_{k+1}(\boldsymbol{\ell}_k, d\ell_{k+1})$  est un noyau de transition sur  $E^k \times E$ .

Considérons un portefeuille qui consiste de  $d$  actifs dont le processus de valeur est décrit par un processus  $\mathbb{G}$ -adapté  $S$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ). On peut l'exprimer sous forme décomposée comme

$$S_t = \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{\Omega_t^k} S_t^k(\boldsymbol{\tau}_k, \mathbf{L}_k),$$

où  $S^k$  est un élément dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_k \times E^k)$ . On suppose que le processus  $S_t^k$  vérifie l'équation différentielle stochastique suivante<sup>(3)</sup>

$$(2.20) \quad dS_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) = S_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) * (b_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) dt + \sigma_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) dW_t), \quad t \geq \theta_k$$

pour tout  $\boldsymbol{\theta}_k = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in \Delta_k$  et tout  $\boldsymbol{\ell}_k = (\ell_1, \dots, \ell_k) \in E^k$ , où  $W$  est un mouvement brownien  $m$ -dimensionnel par rapport à la filtration  $\mathbb{F}$  et  $b^k$  et  $\sigma^k$  sont des vecteurs en fonctions qui consistent de  $d$  éléments et  $dm$  éléments dans  $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_k \times E^k)$ , respectivement. On suppose aussi que les prix des actifs marquent des sauts à chaque instant de défaut. Autrement dit, on suppose que  $\gamma^k$  ( $k \in \{0, \dots, n\}$ ) sont des éléments dans  $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_k \times E^{k+1})$  tels que, pour tout  $\boldsymbol{\theta}_{k+1} = (\theta_1, \dots, \theta_{k+1}) \in \Delta_{k+1}$  et tout  $\boldsymbol{\ell}_{k+1} = (\ell_1, \dots, \ell_{k+1}) \in E^{k+1}$ , on ait

$$(2.21) \quad S_{\theta_{k+1}}^{k+1}(\boldsymbol{\theta}_{k+1}, \boldsymbol{\ell}_{k+1}) = S_{\theta_{k+1}}^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) * (\mathbf{1}_d + \gamma_{\theta_{k+1}}^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_{k+1})),$$

où  $\mathbf{1}_d$  est le vecteur dans  $\mathbb{R}^d$  dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

Soit  $T < +\infty$  une date de maturité fixée. Une stratégie d'investissement à la maturité  $T$  s'écrit comme un processus  $\mathbb{G}$ -prévisible  $\pi$  de la forme

$$\pi_t = \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{\Omega_{t-}^k} \pi_t^k(\boldsymbol{\tau}_k, \mathbf{L}_k), \quad t \in [0, T],$$

3. Si  $x = (x_1, \dots, x_d)$  et  $y = (y_1, \dots, y_d)$  sont deux vecteurs dans  $\mathbb{R}^d$ , l'expression  $x * y$  désigne le vecteur  $(x_1 y_1, \dots, x_d y_d) \in \mathbb{R}^d$ .

où  $\pi^k$  est un élément dans  $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_k \times E^k, \mathbb{R}^d)$ . Le processus  $\pi$  représente les richesses que l'investisseur met dans les  $d$  actifs respectivement. Par abus de langage, on confond  $\pi$  à la famille  $(\pi^k)_{k=0}^n$ . On suppose que toute stratégie d'investissement satisfait à la condition d'intégrabilité suivante : pour tout  $(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \in \Delta_k \times E^k$ , on a

$$(2.22) \quad \int_0^T \left( |\pi_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \cdot b_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)| + |\pi_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \cdot \sigma_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)|^2 \right) dt < +\infty, \quad \text{p.s.}$$

Ainsi la valeur du portefeuille  $X^\pi$  associée à la stratégie  $\pi$  est bien définie et vérifie les relations suivantes :

$$(2.23) \quad X_t^\pi = \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{\Omega_t^k} X_t^{\pi, k}(\boldsymbol{\tau}_k, \mathbf{L}_k), \quad t \in [0, T],$$

$$(2.24) \quad dX_t^{\pi, k}(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) = \pi_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \cdot (b_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) dt + \sigma_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) dW_t), \quad t \in ]\theta_k, T],$$

$$(2.25) \quad X_{\theta_{k+1}}^{\pi, k+1}(\boldsymbol{\theta}_{k+1}, \boldsymbol{\ell}_{k+1}) = X_{\theta_{k+1}}^{\pi, k}(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) + \pi_{\theta_{k+1}}^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \cdot \gamma_{\theta_{k+1}}^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_{k+1}).$$

Pour simplifier les notations, dans le cas où il n'y a aucune ambiguïté sur la stratégie d'investissement  $\pi$ , on utilise les expressions  $X$  et  $X^k$  pour désigner  $X^\pi$  et  $X^{\pi, k}$ , respectivement.

Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$  et tout  $(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \in \Delta_k(T) \times E^k$ , on fixe un sous-ensemble fermé et convexe  $A^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)$ , où  $\Delta_k(T)$  désigne l'intersection de  $\Delta_k$  avec  $[0, T]^k$ . Soient  $p > 0$  un nombre réel et  $U$  la fonction d'utilité exponentielle de la forme

$$U(x) = -\exp(-px), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On désigne par  $\mathcal{A}$  la famille des stratégies d'investissement  $\pi = (\pi^k)_{k=0}^n$  qui vérifient les conditions suivantes :

- (i) pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$  et tout  $(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \in \Delta_k(T) \times E^k$ , le processus  $\pi^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)$  prend valeurs dans  $A^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)$ ;
- (ii) pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$  et tout  $(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \in \Delta_k(T) \times E^k$ , le processus  $U(X^{\pi, k}(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k))$  est de classe  $(D)$ ;
- (iii) pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  et tout  $(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \in \Delta_k(T) \times E^k$ , on a

$$\mathbb{E} \left[ \int_{\theta_k}^T \int_E U(X_s^{\pi, k}(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) + \pi_s^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \cdot \gamma_s^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k, \boldsymbol{\ell})) \eta_{k+1}(\boldsymbol{\ell}_k, d\boldsymbol{\ell}) ds \right].$$

Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on désigne par  $\mathcal{A}^k$  l'ensemble des processus  $\pi^k$  qui figurent comme la  $k^{\text{ième}}$  composante dans l'une des stratégies dans la famille  $\mathcal{A}$ .

On introduit une famille de processus auxiliaires  $\alpha^k \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_k \times E^k)$ , où  $k \in \{0, \dots, n\}$ , issue du processus de densité  $\alpha$  défini dans (2.19). On pose  $\alpha^n = \alpha$  et on définit de façon récursive les processus  $\alpha^k$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ) comme

$$(2.26) \quad \alpha_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) = \int_t^\infty \int_E \alpha_t^{k+1}(\boldsymbol{\theta}_{k+1}, \boldsymbol{\ell}_{k+1}) d\boldsymbol{\theta}_{k+1} \eta_{k+1}(\boldsymbol{\ell}_k, d\boldsymbol{\ell}_{k+1}).$$

Par définition, on vérifie que

$$\mathbb{P}(\tau_{k+1} > t \mid \mathcal{F}_t) = \int_{\Delta_k \times E^k} \alpha_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) d\boldsymbol{\theta}_k \eta(d\boldsymbol{\ell}_k), \quad \mathbb{P}(\tau_1 > t \mid \mathcal{F}_t) = \alpha_t^0,$$

où  $d\boldsymbol{\theta}_k = d\theta_1 \cdots d\theta_k$ ,  $\eta(d\boldsymbol{\ell}_k) = \eta_1(d\ell_1) \cdots \eta_k(\ell_{k-1}, d\ell_k)$ .

Le problème d'investissement optimal dans le contexte décrit au-dessus consiste à déterminer la borne supérieure comme la suite

$$(2.27) \quad V^0(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[U(X_T(x) - H_T)],$$

où  $X_T(x)$  est la solution aux équations différentielles stochastiques (2.24)–(2.25) à condition initiale  $X_{0-}^\pi = x$ , et

$$H_T = \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{\Omega_T^k} H_T^k$$

est une variable aléatoire  $\mathcal{G}_T$ -mesurable et bornée qui représente le payoff d'un actif que l'investisseur devrait délivrer à la maturité  $T$ . Notre méthode consiste à décomposer ce problème d'optimisation en  $n + 1$  problèmes par rapport à la filtration  $\mathbb{F}$  et puis les résoudre récursivement. Pour cela on introduit une famille de problèmes d'optimisation comme la suite. On pose

$$(2.28) \quad V^n(x, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell}) := \operatorname{ess\,sup}_{\pi^n \in \mathcal{A}^n} \mathbb{E}[U(X_T^n(x) - H_T^n) \alpha_T^n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell}) \mid \mathcal{F}_{\theta_n}].$$

En outre, pour  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , on définit (de façon récursive en  $k$ )

$$(2.29) \quad V^k(x, \boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) := \operatorname{ess\,sup}_{\pi^k \in \mathcal{A}^k} \mathbb{E} \left[ U(X_T^k(x) - H_T^k) \alpha_T^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) + \int_{\theta_k}^T \int_E V^{k+1}(X_{\theta_{k+1}}^k(x) + \pi_{\theta_{k+1}}^k; \gamma_{\theta_{k+1}}^k(\ell_{k+1}), \boldsymbol{\theta}_{k+1}, \boldsymbol{\ell}_{k+1}) \eta_{k+1}(\boldsymbol{\ell}_k, d\boldsymbol{\ell}_{k+1}) d\boldsymbol{\theta}_{k+1} \mid \mathcal{F}_{\theta_k} \right],$$

où  $x > 0$  et  $(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \in \Delta_k(T) \times E^k$ .

Les problèmes d'optimisation (2.28) et (2.29) peuvent être résolus par la méthode de programmation dynamique. Soient  $k$  un indice dans  $\{0, \dots, n\}$  et  $\nu^k$  un élément de  $\mathcal{A}^k$ . Pour tout  $t \in [0, T]$  on désigne par  $\mathcal{A}^k(t, \nu^k)$  l'ensemble des processus  $\pi^k \in \mathcal{A}^k$  tels que  $\pi_{\wedge t}^k = \nu_{\wedge t}^k$ . On introduit la version dynamique des problèmes d'optimisation (2.28) et (2.29) comme

$$(2.30) \quad V_t^n(x, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell}, \nu^n) := \operatorname{ess\,sup}_{\pi^n \in \mathcal{A}^n(t, \nu^n)} \mathbb{E}[U(X_T^n(x) - \tilde{H}_T^n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell})) \mid \mathcal{F}_t], \quad t \in [\theta_n, T],$$

où  $\tilde{H}_T^n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell}) + p^{-1} \ln \alpha_T(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell})$ , et

(2.31)

$$V_t^k(x, \boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k, \nu^k) = \operatorname{ess\,sup}_{\pi^k \in \mathcal{A}^k(t, \nu^k)} \mathbb{E} \left[ U(X_T^k(x) - \tilde{H}_T^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \alpha_T^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) + \int_t^T \int_E V_{\boldsymbol{\theta}_{k+1}}^{k+1}(X_{\boldsymbol{\theta}_{k+1}}^{k+1}(x) + \pi_{\boldsymbol{\theta}_{k+1}}^k \cdot \gamma_{\boldsymbol{\theta}_{k+1}}^k(\boldsymbol{\ell}_{k+1}), \boldsymbol{\theta}_{k+1}, \boldsymbol{\ell}_{k+1}) \eta_{k+1}(\boldsymbol{\ell}_k, d\boldsymbol{\ell}_{k+1}) d\boldsymbol{\theta}_{k+1} \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

où  $t \in [\theta_k, T]$ , et  $\tilde{H}_T^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) := H_T^k + p^{-1} \ln \alpha_T^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)$ .

Le fait que  $U$  est la fonction d'utilité exponentielle suggère que le processus de valeur  $V^n$  devrait s'écrire sous la forme

$$V_t^n(x, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell}, \nu^n) = U(X_t^n(x) - Y^n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell})), \quad t \in [\theta_n, T],$$

où  $Y^n \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_n \times E^n, \mathbb{R}^m)$  est indépendant de  $\nu^n$ . En outre, par définition (2.28) le processus  $(V_t^n(x, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell}, \nu^n))_{t \in [\theta_n, T]}$  est une sur-martingale, et elle est une martingale lorsque la borne supérieure essentielle est atteinte. Cela montre que le processus  $Y^n$  (s'il existe) doit vérifier l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$(2.32) \quad \begin{aligned} Y_t^n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell}) &= H_T^n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell}) + \frac{1}{p} \ln \alpha_T(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell}) \\ &+ \int_t^T f^n(r, Z_r^n, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell}) dr - \int_t^T Z_r^n \cdot dW_r, \quad t \in [\theta_n, T], \end{aligned}$$

le générateur  $f^n$  étant un processus dans  $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}^m \times \Delta_n \times E^n)$  défini comme

$$(2.33) \quad \begin{aligned} f^n(t, z, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell}) &= \inf_{\pi \in A^n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell})} \left\{ \frac{p}{2} |z - \sigma_t^n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell})' \pi|^2 - b^n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell}) \cdot \pi \right\} \\ &= -\lambda_t^n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell}) \cdot z - \frac{1}{2p} |\lambda_t^n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell})|^2 + \frac{p}{2} \inf_{\pi \in A^n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell})} \left| z + \frac{1}{p} \lambda_t^n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell}) - \sigma_t^n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\ell})' \pi \right|^2, \end{aligned}$$

où  $\lambda^n$  est un élément<sup>(4)</sup> dans  $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_n \times E^n, \mathbb{R}^m)$  tel que  $\sigma^n \lambda^n = b^n$ . Dans le cas du marché financier sans risque de défaut, des équations différentielles stochastiques rétrogrades de forme similaire à (2.33) ont été étudiées dans [79, 51].

Similairement, pour  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , le processus de valeur  $V^k$  devrait s'écrire sous la forme

$$V_t^k(x, \boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k, \nu^k) = U(X_t^k(x) - Y_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)), \quad t \in [\theta_k, T],$$

où le processus  $Y^k \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_k \times E^k)$  ne dépend pas de  $\nu^k$ . En outre, si un tel processus  $Y^k$  existe, il doit vérifier l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante :

$$(2.34) \quad \begin{aligned} Y_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) &= H_T^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) + \frac{1}{p} \ln \alpha_T^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \\ &+ \int_t^T f^k(s, Y_s^k, Z_s^k, \boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) ds - \int_t^T Z_s^k \cdot dW_s, \quad t \in [\theta_k, T], \end{aligned}$$

4. On suppose ici l'existence d'un tel processus. C'est une conséquence de l'hypothèse de non-arbitrage sur  $S$ .

le générateur  $f^k \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}^{m+1} \times \Delta_k \times E^k)$  étant défini comme ( $\lambda^k$  est un élément dans  $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_k \times E^k, \mathbb{R}^m)$  tel que  $\sigma^k \lambda^k = b^k$ )

(2.35)

$$\begin{aligned} f^k(t, y, z, \boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) &= \inf_{\pi \in A^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)} \left\{ \frac{p}{2} |z - \sigma_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)' \pi|^2 - b_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)' \pi \right. \\ &+ \left. \frac{1}{p} U(y) \int_E U(\pi \cdot \gamma_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k, \ell) - Y_t^{k+1}(\boldsymbol{\theta}_k, t, \boldsymbol{\ell}_k, \ell)) \eta_{k+1}(\boldsymbol{\ell}_k, d\ell) \right\} \\ &= -\lambda_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \cdot z - \frac{1}{2p} |\lambda_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)|^2 + \inf_{\pi \in A^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)} \left\{ \frac{p}{2} \left| z + \frac{1}{p} \lambda_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) - \sigma_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)' \pi \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{p} U(y) \int_E U(\pi \cdot \gamma_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k, \ell) - Y_t^{k+1}(\boldsymbol{\theta}_k, t, \boldsymbol{\ell}_k, \ell)) \eta_{k+1}(\boldsymbol{\ell}_k, d\ell) \right\}. \end{aligned}$$

L'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques rétrogrades (2.32) et (2.34) sont délicates car les générateurs  $f^k$  ne satisfont pas à la condition lipschitzienne ou celle de croissance quadratique en général. Pour surmonter cette difficulté, on choisit soigneusement une famille d'espaces fonctionnels et considère la résolubilité des équations rétrogrades dans ces espaces fonctionnels. Pour tout  $t \in [0, T]$  on désigne par  $\mathcal{S}_c^\infty([t, T])$  l'espace des processus continus  $\mathbb{F}$ -adaptés  $m$ -dimensionnels sur  $[t, T]$  qui sont essentiellement bornés. L'espace  $\mathcal{S}_c^\infty([t, T])$  est naturellement muni d'une semi-norme telle que

$$\|Y\|_{\mathcal{S}_c^\infty([t, T])} := \operatorname{ess\,sup}_{(s, \omega) \in [t, T] \times \Omega} |Y_s(\omega)|.$$

En outre, on désigne par  $L_W^2([t, T])$  l'ensemble des processus  $\mathbb{F}$ -prévisibles  $m$ -dimensionnels tels que

$$\mathbb{E} \left[ \int_t^T |Z_s|^2 ds \right] < +\infty.$$

Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on désigne par  $S_c^\infty(\Delta_k \times E^k)$  l'ensemble des éléments  $Y^k \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_k \times E^k)$  tels que

$$\|Y^k\|_{S_c^\infty(\Delta_k, E^k)} := \sup_{(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \in \Delta_k(T) \times E^k} \operatorname{ess\,sup}_{(t, \omega) \in [\boldsymbol{\theta}_k, T] \times \Omega} |Y_t^k(\omega, \boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)| < +\infty.$$

On désigne par  $L_W^2(\Delta_k \times E^k)$  l'espace des processus  $Z^k$  dans  $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_k \times E^k, \mathbb{R}^m)$  tels que, pour tout  $(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \in \Delta_k(T) \times E^k$ , on ait

$$\mathbb{E} \left[ \int_{\boldsymbol{\theta}_k}^T |Z_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)|^2 dt \right] < +\infty.$$

**Théorème 2.2.1.** — *On suppose qu'il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , tout  $(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k) \in \Delta_k(T) \times E^k$  et tout  $t \in [\boldsymbol{\theta}_k, T]$ , on ait*

$$(2.36) \quad |\lambda_t^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)| \leq C \quad p.s.,$$

$$(2.37) \quad |H_T^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)| + |\ln \alpha_T^k(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\ell}_k)| \leq C \quad p.s.,$$

alors il existe une unique solution

$$(Y^k, Z^k)_{k=0}^n \in \prod_{k=0}^n \mathcal{S}_c^\infty(\Delta_k \times E^k) \times L_W^2(\Delta_k \times E^k)$$

du système d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (2.32) et (2.34). En outre, pour toute stratégie  $\pi \in \mathcal{A}$  on a  $V_t^k(x, \theta_k, \ell_k, \pi^k) = U(X_t^{\pi, k} - Y_t^k(\theta_k, \ell_k))$  quels que soient  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $(\theta_k, \ell_k) \in \Delta_k \times E^k$ . Les bornes supérieures essentielles qui définissent  $(V^k)_{k=0}^n$  sont atteintes en toute stratégie  $\hat{\pi} = (\hat{\pi}^k)_{k=0}^n$  qui réalise ponctuellement les bornes inférieures figurant dans (2.33) et (2.35).

La démonstration de l'existence de la solution  $(Y^k, Z^k)_{k=0}^n$  repose sur un argument de troncature de la fonction d'utilité  $U$  par

$$U_N(y) = U(\max(-N), y),$$

où  $N \in \mathbb{N}$ . Pour cette fonction tronquée, on peut appliquer les résultats dans [65] pour obtenir l'existence d'une solution au système tronqué d'équations différentielles stochastiques d'une façon récursive (rétrogradement par rapport à  $k \in \{0, \dots, n\}$ ). On conclut par passage à la limite lorsque  $N \rightarrow +\infty$ . Une fois l'existence est établie, l'unicité de la solution provient du lien entre la solution du système d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (2.32) et (2.34) et les fonctions de valeur  $(V^k)_{k=0}^n$  des problèmes d'optimisation, en s'appuyant sur le fait que le processus

$$(2.38) \quad \int_{\theta_k}^t Z_s^k(\theta_k, \ell_k) \cdot dW_s, \quad t \in [\theta_k, T]$$

est une BMO-martingale quels que soient  $k \in \{0, \dots, n\}$  et  $(\theta_k, \ell_k) \in \Delta_k(T) \times E^k$ .

## CHAPITRE 3

### RISQUE D'INFORMATION ASYMÉTRIQUE

Dans la pratique du marché financier, il est bien connu que l'asymétrie de l'accessibilité aux informations du marché a une grande influence au choix de la stratégie d'investissement et à l'évaluation des produits dérivés. L'étude des informations d'initié devient ainsi un sujet important des mathématiques financières. Des recherches dans cette direction sont menées dans les travaux comme [44, 22, 47, 39], basées sur la théorie de grossissement initial de filtrations (cf. [53, 52, 2]). Par exemple, dans Amendinger et al. [3], l'objectif est de déterminer analytiquement le "coût" de l'information supplémentaire qu'un investisseur est prêt de payer en utilisant la méthode de pricing d'indifférence.

Le rôle des informations asymétriques dans un marché financier à risque de crédit est étudié dans différents articles comme [24, 18, 40, 17, 20, 45, 36]. Ces travaux se concentrent souvent en l'impact des informations partielles ou incomplètes sur l'évaluation et la couverture des produits financiers.

Dans une série de travaux en collaboration avec Hillairet [48, 49, 50], on étudie le risque d'information asymétrique dans la modélisation des risques de défaut et de contrepartie. Le temps de défaut  $\tau$  est modélisé comme le premier temps qu'un processus stochastique atteint une barrière aléatoire  $L$ . On considère un initié qui possède l'information privée sur  $L$  par rapport à un investisseur standard au marché et on s'intéresse à l'impact de cette information supplémentaire sur la gestion du risque de défaut.

Dans la suite, on présente d'abord notre cadre de modélisation. Ensuite, on compare les probabilités de défaut estimées par les deux types d'investisseurs ayant différents niveaux d'information, ainsi que les prix des produits dérivés de crédit correspondants. Enfin, dans un contexte de risque de contrepartie, on cherche des stratégies optimales d'investissement pour un initié qui connaît l'information privée sur le défaut d'une contrepartie où le défaut peut induire une perte brutale au portefeuille d'investissement.



### 3.1. Défaut et informations

On fixe un espace de probabilité complet  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$  muni d'une filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , supposée d'être engendrée par un mouvement brownien  $(W_t)_{t \geq 0}$ . Soient  $X$  un processus aléatoire  $\mathbb{F}$ -adapté et  $X^*$  le processus d'infimum de  $X$ , c'est-à-dire que  $X_t^* := \inf_{0 \leq s \leq t} X_s$  quel que soit  $t \geq 0$ . Le temps de défaut  $\tau$  est défini comme

$$(3.1) \quad \tau := \inf\{t \geq 0 : X_t^* \leq L\},$$

où  $L$  est une variable aléatoire positive. C'est une modélisation très générale. En particulier, si la variable aléatoire  $L$  est indépendante de  $\mathbb{F}$  et si elle suit la loi uni-exponentielle, alors (3.1) devient le modèle de Cox [68]. Ce modèle est largement utilisé dans la pratique. Dans notre approche, la barrière aléatoire  $L$  n'est pas nécessairement indépendante de  $\mathbb{F}$ . En effet, la densité conditionnelle de  $L$  par rapport à  $\mathbb{F}$  joue un rôle important.

**3.1.1. Structures d'information.** — Les investisseurs ont de différents niveaux d'observation sur  $\mathbb{F}$  et  $L$  respectivement. On précise au-dessous les structures d'information pour les différents investisseurs au marché.

- (1) *L'information complète des initiés.* On suppose qu'un initié (par exemple, un gestionnaire de l'entreprise) possède des informations complètes sur  $\mathbb{F}$  et  $L$ . La filtration correspondant  $\mathbb{G}^M = (\mathcal{G}_t^M)_{t \geq 0}$  est alors le grossissement initial de  $\mathbb{F}$  par la variable aléatoire  $L$ . Autrement dit, on a  $\mathcal{G}_t^M := \mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$  pour tout  $t \geq 0$ .
- (2) *L'information standard des investisseurs.* L'information des investisseurs normaux est modélisée par le grossissement progressif de la filtration  $\mathbb{F}$  par l'information de  $\tau$ , comme proposé par Bielecki et Rutkowski [10]. Autrement dit, la filtration des investisseurs  $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$  est  $(\mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau \vee t))_{t \geq 0}$  rendue usuelle.
- (3) *L'information décalée des investisseurs.* On suppose que les investisseurs possède une connaissance décalée de  $\mathbb{F}$  et l'information sur l'événement de défaut. Plus précisément, la filtration décalée des investisseurs  $\mathbb{G}^D = (\mathcal{G}_t^D)_{t \geq 0}$  est le grossissement progressif de la filtration décalée  $\mathbb{F}^D = (\mathcal{F}_t^D)_{t \geq 0}$  par l'information de  $\tau$ , où la tribu  $\mathcal{F}_t^D$  est de la forme  $\mathcal{F}_{t-\delta(t)}$ ,  $\delta$  étant une fonction telle que  $0 \leq \delta(t) \leq t$  et que  $t \mapsto t - \delta(t)$  soit croissante.
- (4) *L'information bruitée des initiés.* On considère des initiés qui possède une observation perturbée sur la barrière  $L$ . Plus précisément, la filtration des initiés  $\mathbb{G}^I = (\mathcal{G}_t^I)_{t \geq 0}$  est

$$\mathcal{F}_t \vee \sigma(L_s, s \leq t) \vee \sigma(\tau \wedge t), \quad t \geq 0$$

rendue habituelle, où  $L_t$  est de la forme  $f(L, \epsilon_t)$ , le processus  $\epsilon$  étant un bruit qui est indépendant de  $L$ .

D'après la définition des structures d'information présentées plus haut, on a la relation  $\mathbb{G}^D \subset \mathbb{G} \subset \mathbb{G}^M$  et  $\mathbb{G} \subset \mathbb{G}^I$ . Cependant, les filtrations  $\mathbb{G}^I$  et  $\mathbb{G}^M$  ne sont pas comparables car le bruit  $\epsilon$  n'est pas observable par le gestionnaire.

Pour étudier les informations des initiés, on adopte l'hypothèse de Jacod [52] dans la théorie de grossissement initial de filtrations. On suppose que, pour tout  $t \geq 0$ , la loi de  $L$  conditionnellement à  $\mathcal{F}_t$  est équivalente à la loi de  $L$ . On désigne par  $p(\cdot)$  la version càdlàg et mesurable de la densité conditionnelle :

$$(3.2) \quad p_t(x) = \frac{\mathbb{P}(L \in dx \mid \mathcal{F}_t)}{\mathbb{P}(L \in dx)}.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , le processus  $p(x)$  est une  $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$ -martingale, donc peut s'écrire sous la forme

$$(3.3) \quad p_t(x) = p_0(x) + \int_0^t \beta_s(x) dW_s, \quad t \geq 0,$$

où  $\beta(x)$  est un processus  $\mathbb{F}$ -prévisible. En outre, la condition

$$(3.4) \quad \mathbb{P}(L \in dx \mid \mathcal{F}_t) \sim \mathbb{P}(L \in dx)$$

entraîne que, pour tout  $t \geq 0$ , on a  $p_t(L) > 0$  presque sûrement. On suppose que, pour tout  $x$ , les trajectoires du processus  $\rho(x) := \beta(x)/p(x)$  sont  $\mathbb{P}$ -p.s. localement intégrables.

**3.1.2. Probabilité de défaut.** — Les investisseurs ayant différentes structures d'information peuvent avoir des estimées des probabilités de défaut ou de survie assez diversifiées. Soit  $T > 0$  la maturité. On cherche à calculer la probabilité conditionnelle de l'événement de défaut  $\{\tau \leq \theta\}$  (ou de survie  $\{\tau > \theta\}$ ) par rapport à l'information correspondante  $\mathcal{H}_t$  à une date précédente  $t \leq \theta \leq T$ .

1) Si  $\mathcal{H}_t = \mathcal{G}_t^M$  est la tribu des informations complètes à l'instant  $t$ , alors sous l'hypothèse (3.2), on a

$$(3.5) \quad \mathbb{P}(\tau > \theta \mid \mathcal{G}_t^M) = \frac{1}{p_t(L)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[p_\theta(l) \mathbf{1}_{\{X_\theta^* > l\}} \mid \mathcal{F}_t]_{l=L}$$

2) Si  $\mathcal{H}_t = \mathcal{G}_t$  représente les informations progressives d'un investisseur standard, alors

$$\mathbb{P}(\tau > \theta \mid \mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[P_\theta^L(X_\theta^*) \mid \mathcal{F}_t]}{P_t^L(X_t^*)}$$

où  $P_t^L(dx)$  est une version régulière de la loi conditionnelle de  $L$  par rapport à  $\mathcal{F}_t$ .

3) Si  $\mathcal{H}_t = \mathcal{G}_t^D$  représente les informations décalées, alors

$$(3.6) \quad \mathbb{P}(\tau > \theta \mid \mathcal{G}_t^D) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[P_\theta^L(X_\theta^*) \mid \mathcal{F}_t^D]}{\mathbb{E}[P_t^L(X_t^*) \mid \mathcal{F}_t^D]}$$

- 4) Si  $\mathcal{H}_t = \mathcal{G}_t^I$  est la tribu des informations bruitées où  $L_t = L + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t = Z_{T-t}$ ,  $Z$  étant un processus continu d'accroissement indépendant dont la densité marginale est  $q_t$ , alors

$$(3.7) \quad \mathbb{P}(\tau > \theta | \mathcal{G}_t^I) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p_t(l)} E_{\mathbb{P}}[p_{\theta}(l) \mathbb{1}_{\{X_{\theta}^* > l\}} | \mathcal{F}_t] q_{T-t}(L_t - l) P_t^L(dl)}{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{X_t^* > l\}} q_{T-t}(L_t - l) P_t^L(dl)}$$

### 3.2. Évaluation avec l'information asymétrique

Suivant Bielecki et Rutkowski [10], on décrit un produit dérivé à maturité  $T$  sensible au risque de crédit par un triplet  $(C, G, Z)$ , où  $C$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_T$ -mesurable représentant le paiement à la maturité si l'événement de défaut ne s'est pas produit,  $G$  est un processus  $\mathbb{F}$ -adapté, de variation finie et tel que  $G_0 = 0$ , représentant les paiements de dividendes, et  $Z$  est un processus  $\mathbb{F}$ -prévisible dont la valeur en  $\tau$  représente le taux de recouvrement. La valeur du produit à l'instant  $t < \tau \wedge T$  est

$$(3.8) \quad V_t^{\mathbb{Q}, \mathbb{H}} = B_t E_{\mathbb{Q}} \left[ C B_T^{-1} \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + \int_t^T \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} B_u^{-1} dG_u + Z_{\tau} \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} B_{\tau}^{-1} \middle| \mathcal{H}_t \right],$$

où  $\mathbb{Q}$  est une mesure de probabilité équivalente à  $\mathbb{P}$  sous laquelle le produit est évalué,  $B$  est un processus  $\mathbb{F}$ -adapté représentant le facteur d'actualisation, et  $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \geq 0}$  est une filtration contenant  $\mathbb{F}$  qui représente le flux d'informations observées par l'agent.

L'étude de l'information du gestionnaire repose largement sur la théorie de grossissement initial de filtrations. D'après Jacod [52, théorème 1.1], toute  $\mathbb{F}$ -martingale est une  $\mathbb{G}^M$ -semi-martingale. En outre, le processus

$$(3.9) \quad W^M := \left( W_t - \int_0^t \rho_s(L) ds, t \geq 0 \right)$$

est un  $(\mathbb{G}^M, \mathbb{P})$ -mouvement brownien, où  $\rho(\cdot) := \beta(\cdot)/p(\cdot)$ . Cela provient de l'équation différentielle stochastique

$$dp_t(L) = p_t(L) \rho_t(L) dW_t$$

vérifiée par le processus  $p(L)$  (cf. (3.3)). Ghorud et Pontier [44, Lemma 3.4] ont montré que la condition (3.3) est satisfaite si et seulement s'il existe une mesure de probabilité équivalente à  $\mathbb{P}$  telle que les tribus  $\mathcal{F}_{\infty} := \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$  et  $\sigma(L)$  soient indépendantes. Parmi les mesures de probabilité équivalentes ayant cette propriété il existe une unique qui coïncide avec  $\mathbb{P}$  sur  $\mathcal{F}_{\infty}$ , que l'on notera  $\mathbb{P}^L$ . Les densités de Radon-Nikodym  $d\mathbb{P}^L/d\mathbb{P}$  sur  $\mathcal{G}_t^M$  ( $t \geq 0$ ) forment une  $(\mathbb{G}^M, \mathbb{P})$ -martingale qui s'identifie à l'exponentielle de Doléans-Dade

$$(3.10) \quad Y^M := \mathcal{E} \left( - \int_0^t \rho_s(L) dW_s^M, t \geq 0 \right).$$

On peut vérifier que  $Y^M$  et  $p(L)^{-1}$  se coïncident. On s'intéresse au calcul du processus de valeurs  $V^M = V^{\mathbb{P}, \mathbb{G}^M}$  (suivant la notation de (3.8)).

**Proposition 3.2.1.** — *Le processus de valeurs  $V^M$  sous la probabilité  $\mathbb{P}$  du produit financier  $(C, G, Z)$  par rapport à la filtration du gestionnaire  $\mathbb{G}^M$  est*

$$(3.11) \quad V_t^M = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{V_t^{\mathbb{F}}(L)}{p_t(L)}, \quad t \geq 0,$$

où  $V_t^{\mathbb{F}}(x) = V_t^{\mathbb{P}, \mathbb{F}}(x)$  est défini comme

$$(3.12) \quad B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ C B_T^{-1} F_T(x) + \int_t^T F_s(x) B_s^{-1} dG_s - \int_t^T Z_s B_s^{-1} dF_s(x) \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

et  $F_t(x) := p_t(x) \mathbb{1}_{\{X_t^* > x\}}$ .

Le point clé de la démonstration est d'effectuer un changement de probabilités à  $\mathbb{P}^L$  sous laquelle la variable aléatoire  $L$  est indépendante de  $\mathcal{F}_{\infty}$  pour simplifier le calcul, puis faire un changement de probabilités au sens inverse.

**3.2.1. Évaluation avec l'information des investisseurs.** — L'évaluation des produits financiers sensibles au risque de crédit avec l'information des investisseurs est bien connue dans la littérature (cf. [10, 9]). Elle repose sur la théorie des grossissements progressifs de filtrations (cf. [57, 58, 34]). On désigne par  $S$  le processus de survie (ou de façon équivalente, la surmartingale d'Azéma) de  $\tau$ , défini comme

$$S_t := \mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_t^* > L | \mathcal{F}_t).$$

**Proposition 3.2.2.** — *Le processus de valeurs  $V$  du produit financier  $(C, G, Z)$  sous la probabilité  $\mathbb{P}$  par rapport à la filtration des investisseurs  $\mathbb{G}$  est*

$$(3.13) \quad \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{B_t}{S_t} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ B_T^{-1} S_T C + \int_t^T B_u^{-1} S_u dG_u - \int_t^T B_u^{-1} Z_u dS_u \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad t \geq 0.$$

L'évaluation du produit avec l'information décalée est très similaire. La seule difficulté supplémentaire est que les processus  $S$  et  $B$  ne sont pas  $\mathbb{F}^D$ -adaptés.

**Proposition 3.2.3.** — *Le processus de valeurs  $V^D$  du produit financier  $(C, G, Z)$  sous la probabilité  $\mathbb{P}$  par rapport à la filtration décalée des investisseurs  $\mathbb{G}^D$  est*

$$(3.14) \quad \frac{\mathbb{1}_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_t^D]} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \frac{B_t}{B_T} S_T C + \int_t^T \frac{B_t}{B_u} S_u dG_u - \int_t^T \frac{B_t}{B_u} Z_u dS_u \middle| \mathcal{F}_t^D \right].$$

**3.2.2. Évaluation avec l'information des initiés.** — Comparée aux résultats présentés dans les deux sous-paragraphes précédents, l'évaluation des produits financiers sensibles au risque de crédit avec l'information des initiés est plus délicate. La méthode consiste à introduire une filtration auxiliaire  $\mathbb{F}^I = (\mathcal{F}_t^I)_{t \geq 0}$  définie comme

$$\mathcal{F}_t \vee \sigma(L_s, s \leq t), \quad t \geq 0$$

rendue habituelle, et puis considérer les grossissements successifs de filtrations  $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}^I \subset \mathbb{G}^I$ . Il s'avère que  $\mathbb{G}^I$  est le grossissement progressif de la filtration  $\mathbb{F}^I$  par l'information de  $\tau$ . On peut alors appliquer la proposition 3.2.2 pour obtenir que

le processus de valeurs  $V^I$  du produit financier  $(C, G, Z)$  sous la probabilité  $\mathbb{P}$  par rapport à la filtration  $\mathbb{G}^I$  vérifie

$$(3.15) \quad V_t^I = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{B_t}{S_t^I} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ B_t^{-1} S_T^I C + \int_t^T B_u^{-1} S_u^I dG_u - \int_t^T B_u^{-1} Z_u dS_u^I \middle| \mathcal{F}_t^I \right],$$

où  $S_t^I := \mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{F}_t^I)$ . On se ramène donc au calcul des  $\mathcal{F}_t^I$ -espérances conditionnelles.

On suppose dans la suite que l'observation perturbée par l'initié de la barrière est

$$L_t = L + \epsilon_t, \quad t \geq 0,$$

où  $\epsilon$  est un processus continu indépendant de  $\mathcal{F}_\infty \vee \sigma(L)$  qui est *rétrogradement d'accroissements indépendants*. Autrement dit, pour tous les nombres positifs  $s, t$  et  $\theta$  tels que  $0 \leq s \leq t \leq \theta$ , l'accroissement  $\epsilon_s - \epsilon_t$  est indépendant de  $\epsilon_\theta$ . On suppose en outre que, pour chaque  $t \geq 0$ , la loi de  $\epsilon_t$  admet une densité  $q_t(\cdot)$  par rapport à la mesure de Lebesgue.

Un calcul direct montre que

$$S_t^I = \frac{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{X_t^* > \ell\}} p_t(\ell) q_t(L_t - \ell) \mu^L(d\ell)}{\int_{\mathbb{R}} p_t(\ell) q_t(L_t - \ell) \mu^L(d\ell)},$$

où  $\mu^L$  est la loi de  $L$ . On en déduit le résultat suivant.

**Théorème 3.2.4.** — *Le processus de valeurs  $V^I$  du produit financier  $(C, G, Z)$  sous la probabilité  $\mathbb{P}$  par rapport à la filtration des initiés  $\mathbb{G}^I$  vérifie la relation*

$$V_t^I = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\int_{\mathbb{R}} V_t^{\mathbb{F}}(\ell) q_t(L_t - \ell) \mu^L(d\ell)}{\int_{\mathbb{R}} F_t(\ell) q_t(L_t - \ell) \mu^L(d\ell)},$$

où les processus  $V^{\mathbb{F}}$  et  $F$  sont définis dans la proposition 3.2.1.

**3.2.3. Évaluation sous probabilité risque-neutre.** — Dans ce sous-paragraphe, on suppose que  $\mathbb{P}$  est la probabilité risque-neutre du marché ambiant décrit par la filtration  $\mathbb{F}$ . Le but est de déterminer les probabilités risque-neutres par rapport aux différentes filtrations définies dans §3.1.1 et de discuter les évaluations du produit financier correspondantes.

Rappelons qu'une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à  $\mathbb{P}$  est une probabilité risque-neutre pour la filtration  $\mathbb{G}^M$  si et seulement si la restriction de  $\mathbb{Q}$  à  $\mathcal{F}_\infty$  coïncide avec  $\mathbb{P}$  et si toute  $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$ -martingale locale est une  $(\mathbb{G}^M, \mathbb{Q})$ -martingale locale. Il s'avère que la seule mesure de probabilité vérifiant cette condition est  $\mathbb{P}^L$  dont la densité par rapport à  $\mathbb{P}$  sur  $\mathcal{G}_t^M$  est  $p_t(L)^{-1}$  (cf. §3.2). Le processus de valeur  $V^{\mathbb{Q}, M}$  du produit financier  $(C, G, Z)$  sous la probabilité  $\mathbb{Q}$  par rapport à la filtration du gestionnaire  $\mathbb{G}^M$  est

$$\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ C B_T^{-1} F_T^M(x) + \int_t^T F_s^M(x) B_s^{-1} dG_s - \int_t^T Z_s B_s^{-1} dF_s^M(x) \middle| \mathcal{F}_t \right]_{x=L},$$

où  $F_t^M(x) := \mathbb{1}_{\{X_t^* > x\}}$ .

Comme la filtration  $\mathbb{G}$  est contenue dans  $\mathbb{G}^M$ , toute  $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$ -martingale locale est nécessairement une  $(\mathbb{G}, \mathbb{Q})$ -martingale locale. Par conséquent,  $\mathbb{Q}$  est une probabilité risque-neutre pour la filtration  $\mathbb{G}$ . On a

$$S_t^{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q}(\tau > t | \mathcal{F}_t) = \mathbb{Q}(X_t^* > L | \mathcal{F}_t) = \mathbb{Q}(X_t^* > L) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_{\{X_t^* > L\}} p_t(L)^{-1}].$$

Le processus de valeurs  $V^{\mathbb{Q}}$  du produit financier  $(C, G, Z)$  sous la probabilité  $\mathbb{Q}$  par rapport à la filtration des investisseurs  $\mathbb{G}$  est

$$(3.16) \quad \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{B_t}{S_t^{\mathbb{Q}}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ B_T^{-1} S_T^{\mathbb{Q}} C + \int_t^T B_u^{-1} S_u^{\mathbb{Q}} dG_u - \int_t^T B_u^{-1} Z_u dS_u^{\mathbb{Q}} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad t \geq 0.$$

De même, le processus de valeurs  $V^{\mathbb{Q}, D}$  du produit financier  $(C, G, Z)$  sous la probabilité  $\mathbb{Q}$  par rapport à la filtration décalée des investisseurs  $\mathbb{G}^D$  est

$$(3.17) \quad \frac{\mathbb{1}_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{E}[S_t^{\mathbb{Q}} | \mathcal{F}_t^D]} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \frac{B_t}{B_T} S_T^{\mathbb{Q}} C + \int_t^T \frac{B_t}{B_u} S_u^{\mathbb{Q}} dG_u - \int_t^T \frac{B_t}{B_u} Z_u dS_u^{\mathbb{Q}} \middle| \mathcal{F}_t^D \right].$$

Dans la suite, on discute l'évaluation du produit financier  $(C, G, Z)$  avec l'information des initiés sous la probabilité risque-neutre. Soit  $\tilde{\mathbb{G}}^I = (\tilde{\mathcal{G}}_t^I)_{t \geq 0}$  la filtration définie comme

$$\tilde{\mathcal{G}}_t^I := \mathcal{G}_t^I \vee \sigma(L), \quad t \geq 0.$$

Rappelons que l'observation de la barrière  $L$  par l'initié à l'instant  $t$  est supposée être  $L + \epsilon_t$  (cf. §3.2.2), où  $\epsilon_t$  est indépendant à  $\mathcal{F}_{\infty} \vee \sigma(L)$ , on obtient que la filtration  $\tilde{\mathbb{G}}^I$  s'identifie à

$$\mathcal{G}_t^M \vee \sigma(\epsilon_s, s \leq t), \quad t \geq 0$$

rendue habituelle. On en déduit que le processus  $W^M$  défini dans (3.9) est un  $(\tilde{\mathbb{G}}^I, \mathbb{P})$ -mouvement brownien. On introduit une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}^I$  sur  $\tilde{\mathcal{G}}_{\infty}^I$  telle que

$$\frac{d\mathbb{Q}^I}{d\mathbb{P}} = Y_t^M \quad \text{p.s. sur } \tilde{\mathcal{G}}_t^I,$$

où  $Y^M$  est l'exponentielle de Doléans-Dade introduite dans (3.10). Par définition, la restriction de  $\mathbb{Q}^I$  à  $\mathcal{G}_{\infty}^M$  coïncide avec  $\mathbb{Q}$ . Dans la suite, par abus de notation, on désigne par  $\mathbb{Q}$  la probabilité  $\mathbb{Q}^I$  sur  $\tilde{\mathcal{G}}_{\infty}^I$ . Comme le processus  $\epsilon$  est indépendant de  $\mathcal{G}_{\infty}^M$ , toute  $(\mathbb{G}^M, \mathbb{Q})$ -martingale locale est nécessairement une  $(\tilde{\mathbb{G}}^I, \mathbb{Q})$ -martingale locale. On en déduit que  $\mathbb{Q}$  est la probabilité risque-neutre pour la filtration  $\mathbb{G}^I$ .

**Théorème 3.2.5.** — *Le processus de valeurs  $V^{\mathbb{Q}, I}$  du produit financier  $(C, G, Z)$  sous la probabilité  $\mathbb{Q}$  par rapport à la filtration des initiés  $\mathbb{G}^I$  vérifie la relation suivante :*

$$V_t^{\mathbb{Q}, I} = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\int_{\mathbb{R}} V_t^{\mathbb{Q}, \mathbb{F}^I}(\ell) q_t(L_t - \ell) \mu^L(d\ell)}{\int_{\mathbb{R}} F_t^M(\ell) q_t(L_t - \ell) \mu^L(d\ell)},$$

où  $F_t^M(x) := \mathbb{1}_{\{X_t^* > x\}}$ , et  $V_t^{\mathbb{Q}, \mathbb{F}^I}$  est défini comme

$$B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ C B_T^{-1} F_{t, T}^{\ell}(u, \ell) + \int_t^T F_{t, \theta}^I(u, \ell) B_{\theta}^{-1} dG_{\theta} - \int_t^T B_{\theta}^{-1} Z_{\theta} dF_{t, \theta}^I(u, \ell) \middle| \mathcal{F}_t \right]_{u=L_t}$$

avec

$$F_{t,\theta}^I(u, \ell) := \mathcal{E} \left( \int_t^s \int_{\mathbb{R}} \rho_s^I(u+y) \mu_{t,\theta}(dy) dB_s \right)^{-1} F_{\theta}^M(\ell),$$

$\mu_{t,\theta}$  étant la loi de probabilité de  $\epsilon_{\theta} - \epsilon_t$ .

La méthode de la démonstration consiste à ramener le calcul des  $\mathbb{Q}$ -espérances conditionnelles par rapport à  $\mathcal{F}_t^I$  à celui des  $\mathbb{P}$ -espérances conditionnelles par rapport à  $\mathcal{F}_t$ . Soit  $\rho^I$  un processus càdlàg tel que

$$\rho_t^I = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\rho_t(L) | \mathcal{F}_t^I] \quad \text{p.s.}$$

quel que soit  $t \geq 0$ , où le processus  $\rho(\cdot)$  est défini dans §3.2. Le processus  $W^I$  défini comme

$$W_t^I := W_t - \int_0^t \rho_s^I ds$$

est alors un  $(\mathbb{F}^I, \mathbb{P})$ -mouvement brownien. On désigne par  $Y^I$  l'exponentielle de Doléans-Dade

$$\mathcal{E} \left( - \int_0^t \rho_s^I dW_s^I, t \geq 0 \right).$$

C'est une  $(\mathbb{F}^I, \mathbb{P})$ -martingale locale. Il s'avère que  $Y_t^I$  est la dérivée de Radon-Nikodym de  $\mathbb{Q}$  par rapport à  $\mathbb{P}$  sur la tribu  $\mathcal{F}_t^I$ . A l'aide de ce changement de probabilités, on peut exprimer  $V_t^{\mathbb{Q}, \mathbb{F}^I}$  comme une  $\mathbb{P}$ -espérance conditionnelle par rapport à  $\mathcal{F}_t^I$ . Enfin, en utilisant le fait que le processus  $\epsilon$  est rétrogradement à accroissements indépendants, on obtient le résultat souhaité.

### 3.3. Optimisation d'investissement avec l'information asymétrique

Dans ce paragraphe, on revient au problème de l'optimisation d'investissement avec le risque d'une contrepartie comme traité dans §2.1. Au lieu d'un investisseur standard, on considère un initié avec l'information supplémentaire sur le défaut de la contrepartie. On s'intéresse à analyser l'impact de l'information asymétrique dans l'optimisation du portefeuille, plus précisément, le profit de l'initié par rapport à l'investisseur standard.

L'initié observe sur le marché le même prix, comme un investisseur standard, de l'actif risqué  $S$  qui est un processus  $\mathbb{G}$ -adapté et qui subit une perte proportionnelle  $\gamma$  au moment de défaut  $\tau$  de la contrepartie, donc la dynamique de  $S$  est donné par (2.2), (2.3) et (2.4). Par contre, l'initié possède l'information privée sur le défaut de la contrepartie, plus précisément, sur la barrière de défaut  $L$ . Son ensemble de stratégie est donc plus large par rapport au investisseur standard, notamment, la stratégie d'investissement de l'initié est caractérisée par un processus  $\mathbb{G}^M$ -prévisible  $\bar{\pi}$  sous la forme  $\bar{\pi}_t = \mathbb{1}_{\{t \leq \tau\}} \bar{\pi}_t^0(L) + \mathbb{1}_{\{t > \tau\}} \bar{\pi}_t^1(\tau)$  qui représente la proportion de richesse investie

sur  $S$ , où  $\bar{\pi}^0(\cdot)$  et  $\bar{\pi}^1(\cdot)$  sont  $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurables. La richesse du portefeuille est ainsi un processus  $\mathbb{G}^M$ -adapté  $\bar{X}$  où  $\bar{X}_t = \mathbb{1}_{\{t < \tau\}} \bar{X}_t^0(L) + \mathbb{1}_{\{t \geq \tau\}} \bar{X}_t^1(\tau)$  qui satisfait

$$\begin{aligned} d\bar{X}_t^0(L) &= \bar{X}_t^0(L) \bar{\pi}_t^0(L) (\mu_t^0 dt + \sigma_t^0 dW_t), \quad t \in [0, T], \\ d\bar{X}_t^1(\tau) &= \bar{X}_t^1(\tau) \bar{\pi}_t^1(\tau) (\mu_t^1(\tau) dt + \sigma_t^1(\tau) dW_t), \quad t \in [\tau, T], \\ \bar{X}_\tau^1(\tau) &= \bar{X}_{\tau-}^0 (1 - \bar{\pi}_\tau^0(L) \gamma_\tau). \end{aligned}$$

On suppose  $\bar{\pi}_\tau^0(L) \gamma_\tau < 1$  de sorte que la richesse est strictement positive.

**3.3.1. Problème d'optimisation.** — Notre objective est de maximiser l'espérance d'une fonction d'utilité  $U$  évaluée en la richesse terminale du portefeuille et de chercher la stratégie optimale  $\hat{\bar{\pi}}$  pour l'initié qui atteint

$$(3.18) \quad \bar{V}_0 = \sup_{\bar{\pi} \in \mathcal{A}_L} \mathbb{E}[U(\bar{X}_T)]$$

où  $\mathcal{A}_L$  est l'ensemble des stratégies admissibles pour  $\bar{\pi} = (\bar{\pi}^0(\cdot), \bar{\pi}^1(\cdot))$ , où  $\bar{\pi}^0(\cdot)$  et  $\bar{\pi}^1(\cdot)$  sont des processus  $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurable tels que

$$(3.19) \quad \forall l > 0, \left( \int_0^{\tau_l \wedge T} |\bar{\pi}_t^0(l) \sigma_t^0|^2 dt + \int_{\tau_l \wedge T}^T |\bar{\pi}_t^1(\tau_l) \sigma_t^1(\tau_l)|^2 dt \right) < \infty \text{ et } \bar{\pi}_{\tau_l}^0(l) \gamma_{\tau_l} < 1, \text{ p.s.,}$$

et  $\tau_l$  est le  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt

$$\tau_l := \inf\{t : \Lambda_t \geq l\}.$$

Par la relation d'inclusion  $\mathbb{G} \subset \mathbb{G}^M$ , la fonction de valeur  $\bar{V}_0$  de l'initié est plus grande que celle de l'investisseur : on a  $\bar{V}_0 \geq V_0$ , où  $V_0$  est définie dans (2.9). Pourtant, sur une trajectoire, il est possible que  $U(\bar{X}_T) \leq U(X_T)$ . On reviendra sur cette comparaison à la fin du paragraphe.

La décomposition canonique des processus  $\mathbb{G}^M$ -adaptés dans le grossissement initial (cf. Jeulin [58, lemmes 3.13 et 4.4]) suggère de décomposer le problème d'optimisation en deux parties : avant-défaut  $\{t < \tau\}$  et après-défaut  $\{t \geq \tau\}$ . Plus précisément, on écrit  $\mathbb{E}[U(\bar{X}_T)]$  sous la forme

$$(3.20) \quad \mathbb{E}[U(\bar{X}_T)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T < \tau\}} U(\bar{X}_T^0(L)) + \mathbb{1}_{\{T \geq \tau\}} U(\bar{X}_T^1(\tau))].$$

La situation est similaire à celle dans §2.1. La différence principale est que, pour l'initié qui connaît  $L$  à l'instant initial, le temps de défaut  $\tau$  n'admet pas de densité conditionnelle par rapport à la filtration  $\mathbb{F}$ , donc l'approche de densité n'est plus valable. Pour surmonter cette difficulté, on adopte une approche alternative comme dans [3]. On considère d'abord le problème conditionnellement à la tribu initiale de l'initié :

$$\text{ess sup}_{\bar{\pi} \in \mathcal{A}_L} \mathbb{E}[U(\bar{X}_T) | \mathcal{G}_0^M],$$

où  $\mathcal{G}_0^M = \sigma(L)$ . Sous l'hypothèse (3.2), on a

$$(3.21) \quad \mathbb{E}[U(\bar{X}_T) | \mathcal{G}_0^M] = \mathbb{E} [p_T(l) (\mathbb{1}_{\{T < \tau_l\}} U(\bar{X}_T^0(l)) + \mathbb{1}_{\{T \geq \tau_l\}} U(\bar{X}_T^1(\tau_l))) ]_{l=L}$$



et par conséquent

$$\mathbb{E}[U(\bar{X}_T)] = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{E} [p_T(l) (\mathbb{1}_{\{T < \tau_l\}} U(\bar{X}_T^0(l)) + \mathbb{1}_{\{T \geq \tau_l\}} U(\bar{X}_T^1(\tau_l)))] P^L(dl)$$

où  $P^L$  désigne la loi de probabilité de  $L$ . Il suffit alors de maximiser ponctuellement (pour chaque  $l$ ) l'espérance

$$\mathbb{E} \left[ p_T(l) (\mathbb{1}_{\{T < \tau_l\}} U(\bar{X}_T^0(l)) + \mathbb{1}_{\{T \geq \tau_l\}} U(\bar{X}_T^1(\tau_l)) \right].$$

**3.3.2. Contrainte sur la vente à découverte.** — Pour l'initié, il est important d'imposer certaine contrainte sur ses stratégies d'investissement, notamment, sur la quantité de vente à découverte de l'actif risqué  $S$  car en profitant de son information privée, l'initié peut atteindre une richesse terminale non-bornée dans  $L^1$ . Plus précisément, sous des conditions assez faibles, on obtient les résultats suivants :

**Théorème 3.3.1.** — *On suppose les conditions suivantes :*

- (1) le processus  $\Lambda$  est strictement croissant p.s. sur  $[0, T]$ ,
- (2) pour tout  $l$  dans le support de la loi de  $L$ , on a  $\mathbb{P}(\Lambda_T \geq l) > 0$ .

Alors on a

$$\operatorname{ess\,sup}_{\bar{\pi} \in \mathcal{A}_L} \mathbb{E}[\bar{X}_T | \mathcal{G}_0^M] = +\infty \quad p.s.$$

En outre, pour toute fonction d'utilité  $U$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty$ , on a

$$\operatorname{ess\,sup}_{\bar{\pi} \in \mathcal{A}_L} \mathbb{E}[U(\bar{X}_T) | \mathcal{G}_0^M] = +\infty \quad p.s.$$

Le théorème précédent nous suggère de considérer, au lieu de  $\mathcal{A}_L$  défini par (3.19), l'ensemble de stratégies admissibles avec contrainte pour l'initié :

$$(3.22) \quad \mathcal{A}_L^\delta = \{(\bar{\pi}^0(\cdot), \bar{\pi}^1(\cdot)) \in \mathcal{A}_L \text{ tel que } \bar{\pi}^0 \geq -\delta\}, \quad \delta \geq 0$$

et de quantifier l'impact de la borne  $\delta$  dans l'optimisation

$$(3.23) \quad \operatorname{ess\,sup}_{\bar{\pi} \in \mathcal{A}_L^\delta} \mathbb{E}[U(\bar{X}_T) | \mathcal{G}_0^M].$$

On introduit

$$\mathcal{A}_l^\delta = \{(\bar{\pi}^0, \bar{\pi}^1(\cdot)) \in \mathcal{A}_l \text{ tel que } \bar{\pi}^0 \geq -\delta\}, \quad \delta \geq 0$$

et considère la fonction de valeur suivante dépendant d'un paramètre  $l \in \mathbb{R}_+$  :

$$(3.24) \quad V_0^\delta(l) := \sup_{\bar{\pi} \in \mathcal{A}_l^\delta} \mathbb{E} [p_T(l) (\mathbb{1}_{\{T < \tau_l\}} U(\bar{X}_T^0(l)) + \mathbb{1}_{\{T \geq \tau_l\}} U(\bar{X}_T^1(\tau_l)))] .$$

Par un théorème de sélection mesurable ([7, Lemme 1]), on peut montrer que

$$V_0^\delta(L) = \operatorname{ess\,sup}_{\bar{\pi} \in \mathcal{A}_L^\delta} \mathbb{E}[U(\bar{X}_T) | \mathcal{G}_0^M] \quad p.s.$$

**3.3.3. Résolution du problème.** — Dans la suite, on résout le problème (3.24) en deux étapes, similairement à §2.1 : le problème après-défaut qui dépend de la stratégie  $\bar{\pi}^1(\cdot)$  et la richesse  $\bar{X}^1(\cdot)$  :

$$(3.25) \quad V_{\tau_l}^1(x_l) = \operatorname{ess\,sup}_{\bar{\pi}^1 \in \mathcal{A}_l^1} \mathbb{E}[p_T(l)U(\bar{X}_T^1(x_l)) | \mathcal{F}_{\tau_l}],$$

où  $\mathcal{A}_l^1$  est l'ensemble des stratégies prévisibles admissibles  $(\bar{\pi}_t^1(\tau_l), t \in ]\tau_l, T])$  tel que

$$\int_{\tau_l}^{\tau_l \vee T} |\bar{\pi}_t^1(\tau_l) \sigma_t^1(\tau_l)|^2 dt < \infty \quad \text{p.s.}$$

et le problème global avant-défaut

$$(3.26) \quad V_0^\delta(l) = \sup_{\bar{\pi}^0 \in \mathcal{A}_l^{0,\delta}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T < \tau_l\}} p_T(l)U(\bar{X}_T^0(l)) + \mathbb{1}_{\{T \geq \tau_l\}} V_{\tau_l}^1(\bar{X}_{\tau_l}^0(l)(1 - \pi_{\tau_l}^0(l)\gamma_{\tau_l}))]$$

qui dépend de la stratégie  $\bar{\pi}^0(\cdot)$ , la richesse  $\bar{X}^0(\cdot)$  et la solution  $V^1$  du problème après-défaut introduit au-dessus, où  $\mathcal{A}_l^{0,\delta}$  est l'ensemble des stratégies  $(\bar{\pi}_t^0(l), t \in ]0, \tau_l \wedge T])$  qui sont admissibles avec la contrainte sur la vente à découverte i.e., telles que presque sûrement

$$\int_0^{\tau_l \wedge T} |\bar{\pi}_t^0(l) \sigma_t^0|^2 dt < \infty, \quad \bar{\pi}_t^0(l) \geq -\delta \quad \text{et} \quad 1 > \bar{\pi}_{\tau_l}^0(l)\gamma_{\tau_l}.$$

Sur l'ensemble après-défaut, l'initié et l'investisseur standard ont la même information sur le temps de défaut, donc la solution de (3.25) est similaire à celle de (2.11). Ici la dérivée de Radon-Nikodym  $p(\cdot)$  joue un rôle analogue à la densité de défaut. La différence est que le  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt  $\tau_l$  intervient dans le problème d'optimisation de l'initié. Soit

$$Z_t(\tau_l) = \exp\left(-\int_{\tau_l}^{\tau_l \vee t} \frac{\mu_u^1(\tau_l)}{\sigma_u^1(\tau_l)} dW_u - \frac{1}{2} \int_{\tau_l}^{\tau_l \vee t} \left| \frac{\mu_u^1(\tau_l)}{\sigma_u^1(\tau_l)} \right|^2 du\right), \quad t \in [0, T].$$

On suppose que, pour tout  $l \geq 0$ ,  $\mu_u^1(\tau_l)$  et  $\sigma_u^1(\tau_l)$  satisfont au critère de Novikov :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2} \int_{\tau_l}^{\tau_l \vee T} \left| \frac{\mu_s^1(\tau_l)}{\sigma_s^1(\tau_l)} \right|^2 ds\right)\right] < +\infty.$$

En particulier, le processus  $(Z_t(\tau_l))_{t \in [0, T]}$  est une  $(\mathcal{F}_{\tau_l \vee t})_{t \in [0, T]}$ -martingale. Le résultat suivant est comparable au théorème 2.1.2.

**Théorème 3.3.2.** — *La fonction de valeur optimale de (3.25) est p.s. finie et est donnée par la relation*

$$(3.27) \quad \hat{V}_{\tau_l}^1(x_l) = \mathbb{E}\left[p_T(l)U\left(I\left(\hat{y}_{\tau_l}(x_l) \frac{Z_T(\tau_l)}{p_T(l)}\right)\right) \middle| \mathcal{F}_{\tau_l}\right]$$

où  $I := (U')^{-1}$ , et le multiplicateur de Lagrange  $\hat{y}_{\tau_l}(\cdot)$  est la unique solution  $\mathcal{F}_{\tau_l} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurable de l'équation

$$\frac{1}{Z_t(\tau_l)} \mathbb{E}\left[Z_T(\tau_l) I\left(\hat{y}_{\tau_l}(x_l) \frac{Z_T(\tau_l)}{p_T(l)}\right) \middle| \mathcal{F}_{\tau_l}\right] = x_l.$$

La richesse optimale est donnée par la formule suivante

$$(3.28) \quad \hat{X}_t^{1,x_l}(\tau_l) = \frac{1}{Z_t(\tau_l)} \mathbb{E} \left[ Z_T(\tau_l) I \left( \hat{y}_{\tau_l}(x_l) \frac{Z_T(\tau_l)}{p_T(l)} \right) \middle| \mathcal{F}_t^1 \right], \quad t \in \llbracket \tau_l, T \rrbracket.$$

Pour la fonction d'utilité  $U(x) = \frac{x^p}{p}$  dans la classe CRRA, où  $0 < p < 1$ , on a  $I(x) = x^{\frac{1}{p-1}}$ . Par le théorème précédent, la richesse optimale est

$$\hat{X}_t^{1,x_l}(\tau_l) = \frac{x_l}{Z_t(\tau_l)} \frac{\mathbb{E} \left[ p_T(l) \left( \frac{Z_T(\tau_l)}{p_T(l)} \right)^{\frac{p}{p-1}} \middle| \mathcal{F}_{\tau_l \vee t} \right]}{\mathbb{E} \left[ p_T(l) \left( \frac{Z_T(\tau_l)}{p_T(l)} \right)^{\frac{p}{p-1}} \middle| \mathcal{F}_{\tau_l} \right]}, \quad t \in \llbracket \tau_l, T \rrbracket$$

et la fonction de valeur optimale est

$$(3.29) \quad \hat{V}_{\tau_l}^1(x_l) = \frac{x_l^p}{p} \left( \mathbb{E} \left[ p_T(l) \left( \frac{Z_T(\tau_l)}{p_T(l)} \right)^{\frac{p}{p-1}} \middle| \mathcal{F}_{\tau_l} \right] \right)^{1-p} =: \frac{x_l^p}{p} K_{\tau_l}$$

Le problème global (3.26) s'écrit comme

$$(3.30) \quad V_0^\delta(l) = \sup_{\bar{\pi}^0 \in \mathcal{A}_l^{0,\delta}} \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{T < \tau_l\}} p_T(l) U(\bar{X}_T^0(l)) + \mathbb{1}_{\{T \geq \tau_l\}} K_{\tau_l} U(\bar{X}_{\tau_l}^0(l)(1 - \bar{\pi}_{\tau_l}^0(l)\gamma_{\tau_l})) \right],$$

où la variable aléatoire  $\mathcal{F}_{\tau_l}$ -mesurable  $K_{\tau_l}$  ne dépend pas du processus de contrôle  $\bar{\pi}^0 \in \mathcal{A}_l^{0,\delta}$ . Ce problème d'optimisation pour l'initié est plus compliqué que (2.12) pour l'investisseur standard à cause de la contrainte sur la vente à découverte. On utilise la programmation dynamique et introduit pour toute  $\nu \in \mathcal{A}_l^{0,\delta}$  le processus  $\mathbb{F}^0 := (\mathcal{F}_{\tau_l \wedge t})_{0 \leq t \leq T}$ -adapté

$$\mathcal{X}_t(\nu) = \text{ess sup}_{\bar{\pi}^0 \in \mathcal{A}_l^{0,\delta}(t,\nu)} \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{T < \tau_l\}} p_T(l) U(\bar{X}_T^0(l)) + \mathbb{1}_{\{t < \tau_l \leq T\}} K_{\tau_l} U(\bar{X}_{\tau_l}^0(l)(1 - \bar{\pi}_{\tau_l}^0(l)\gamma_{\tau_l})) \middle| \mathcal{F}_{\tau_l \wedge t} \right]$$

où  $\mathcal{A}_l^{0,\delta}(t,\nu)$  est l'ensemble des stratégies qui coïncident avec  $\nu$  jusqu'à la date  $t$ . On a  $V_0^\delta(l) = \mathcal{X}_0(\nu)$  pour toute  $\nu \in \mathcal{A}_l^{0,\delta}$ . On peut montrer que, pour toute stratégie  $\bar{\pi}^0 \in \mathcal{A}_l^{0,\delta}$ , il existe une suite de stratégies  $(\bar{\pi}_n^0 \in \mathcal{A}_l^{0,\delta})_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\bar{\pi}_{n,\tau_l}^0 = -\delta$  et que

$$(3.31) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{X}_0(\bar{\pi}_n^0) \geq \mathcal{X}_0(\bar{\pi}^0).$$

Cela suggère que la stratégie optimale, si elle existe dans  $\mathcal{A}_l^{0,\delta}$ , consiste à effectuer la vente à découverte au moment de défaut  $\tau_l$  avec la quantité maximale.

Par un résultat classique de El Karoui et Quenez [33], la stratégie optimale  $\hat{\bar{\pi}}^0$  est caractérisée par la condition que la  $\mathbb{F}^0$ -surmartingale

$$\xi_t^\nu := \mathcal{X}_t(\nu) + \mathbb{1}_{t \geq \tau_l} K_{\tau_l} U(\bar{X}_{\tau_l}^{\nu,0}(l)(1 - \nu_{\tau_l}(l)\gamma_{\tau_l})), \quad 0 \leq t \leq T,$$

est une martingale. Soit

$$(3.32) \quad \begin{aligned} \bar{Y}_t &:= \frac{\mathcal{X}_t(\nu)}{U(\bar{X}_t^{\nu,0}(l))} \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\bar{\pi}^0 \in \mathcal{A}_t^{0,\delta}(s,\nu)} \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{T < \tau_l} p_T(l) \left( \frac{\bar{X}_T^0(l)}{\bar{X}_t^{\nu,0}(l)} \right)^p + \mathbb{1}_{t < \tau_l \leq T} K_{\tau_l} \left( \frac{\bar{X}_{\tau_l}^0(l)}{\bar{X}_t^{\nu,0}(l)} \right)^p (1 - \bar{\pi}_{\tau_l}^0(l) \gamma_{\tau_l}) | \mathcal{F}_{\tau_l \wedge t} \right] \end{aligned}$$

Le processus  $\bar{Y}$  ne dépend pas de  $\nu \in \mathcal{A}_l^{0,\delta}$  et est positif sur  $\llbracket 0, \tau_l \llbracket$  et égal à 0 après  $\tau_l$ . On donne une caractérisation de  $\bar{Y}$  en terme d'une équation différentielle stochastique rétrograde.

**Théorème 3.3.3.** — *Le processus  $\bar{Y}$  défini dans (3.32) est la plus petite solution dans l'espace*

$$L_l^+(\mathbb{F}^0) := \{ \tilde{Y} : \mathbb{F}^0\text{-adapté t.q. } \tilde{Y}_t > 0 \text{ si } t \in \llbracket 0, \tau_l \llbracket \text{ et } \tilde{Y}_t = 0 \text{ si } t \in \llbracket \tau_l, \infty \llbracket \}.$$

de l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$(3.33) \quad \bar{Y}_t = \mathbb{1}_{T < \tau_l} p_T(l) + \mathbb{1}_{\tau_l \leq T} K_{\tau_l} \frac{(1 + \delta \gamma_{\tau_l})^p}{p} + \int_t^{T \wedge \tau_l} f(\theta, \bar{Y}_\theta, \phi_\theta) d\theta - \int_t^{T \wedge \tau_l} \phi_\theta dW_\theta,$$

où  $t \in \llbracket 0, T \wedge \tau_l \llbracket$ ,  $\phi \in L_{loc}^2(W)$ , et

$$(3.34) \quad f(s, \bar{Y}_s, \phi_s) := p \operatorname{ess\,sup}_{\nu \in \mathcal{A}_t^{0,\delta}, s.t. \nu_{\tau_l} = -\delta} \left[ (\mu_s^0 \bar{Y}_s + \sigma_s^0 \phi_s) \nu_s - \frac{1-p}{2} \bar{Y}_s |\nu_s \sigma_s^0|^2 \right].$$

La fonction de valeur optimale se réalise comme la limite des fonctions de valeur d'une suite de stratégies admissibles qui réalisent asymptotiquement le supremum essentiel dans (3.34).

La différence entre les équations différentielles stochastiques rétrogrades (2.16) et (3.33) pour l'investisseur standard et l'initié respectivement figure dans les conditions terminales. En effet, il y a un terme de saut en  $\tau_l$  dans (3.33). Une approche naïve d'optimiser (3.32) via l'équation différentielle stochastique rétrograde (3.33) est de choisir d'abord  $\bar{\pi}_{\tau_l}^0 = -\delta$ , et puis de maximiser pour  $t < \tau_l$ . Cependant la stratégie  $\mathbb{1}_{\llbracket 0, \tau_l \llbracket} \hat{\pi}^0 - \delta \mathbb{1}_{\tau_l}$  ainsi obtenue n'est pas un processus prévisible et donc n'appartient pas à  $\mathcal{A}_l^{0,\delta}$ . Il est donc nécessaire d'introduire une suite de stratégies prévisibles qui convergent vers la "stratégie optimale".

**Proposition 3.3.4.** — *Soit  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille croissante de  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt qui convergent vers  $\tau_l$ . La stratégie  $(\bar{\pi}_n^0 = \mathbb{1}_{\llbracket 0, \tau_n \llbracket} \hat{\pi}^0 - \mathbb{1}_{\llbracket \tau_n, \tau_l \llbracket} \delta)$  où  $\hat{\pi}^0$  est le processus optimal pour*

$$f^0(s, \bar{Y}_s^0, \phi_s^0) = p \operatorname{ess\,sup}_{\nu \in \mathcal{A}_t^{0,\delta}} \left[ (\mu_s^0 \bar{Y}_s^0 + \sigma_s^0 \phi_s^0) \nu_s - \frac{1-p}{2} \bar{Y}_s^0 |\nu_s \sigma_s^0|^2 \right]$$

est dans  $\mathcal{A}_l^{0,\delta}$  et satisfait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{X}_0(\bar{\pi}_n^0) = V(l) = \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{T < \tau_l} p_T(l) U(\bar{X}_T^{\bar{\pi}_n^0}(l)) + \mathbb{1}_{T \geq \tau_l} K_{\tau_l} U(\bar{X}_{\tau_l}^{\bar{\pi}_n^0}(l)(1 + \delta\gamma_{\tau_l})) \right]$$

où

$$(3.35) \quad \mathcal{X}_0(\bar{\pi}^0) = \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{T < \tau_l} p_T(l) U(\bar{X}_T^{\bar{\pi}^0}(l)) + \mathbb{1}_{T \geq \tau_l} K_{\tau_l} U(\bar{X}_{\tau_l}^{\bar{\pi}^0}(l)(1 - \pi_{\tau_l}^0(l)\gamma_{\tau_l})) \right].$$

On effectue dans [50] des simulations numériques pour comparer les stratégies optimales de l'initié et de l'investisseur standard (cette dernière est obtenue dans [61]) et on analyse aussi l'impact des différents paramètres. Les observations sont les suivantes :

- 1) Au moment de défaut, les deux types d'investisseurs souffrent une perte brutale dans leurs fonctions de valeur d'optimisation. Dans la plupart des cas, l'initié surperforme que l'investisseur standard avant et après le défaut.
- 2) Dans des situations extrêmement risquées où la probabilité de défaut et les pertes correspondantes sont très élevées, l'investisseur standard peut obtenir une plus grande fonction de valeur en effectuant des stratégies de vente à découverte de grande quantité (que l'initié ne peut pas faire à cause de la contrainte), qui fait ainsi un pari sur l'arrivée de défaut avant la maturité et prend le risque d'une perte importante si le défaut a lieu après la maturité.
- 3) La fonction de valeur de l'initié est croissante par rapport au paramètre  $\delta$  la contrainte de la vente à découverte. Quand on fixe  $\delta$ , la performance de l'initié et de l'investisseur standard sont croissantes par rapport à la perte au défaut  $\gamma$ , qui est une conséquence des stratégies de vente à découverte.

## CHAPITRE 4

### DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE AVEC LA MÉTHODE DE STEIN

La loi asymptotique des sommes de variables aléatoires est un sujet central de la théorie des probabilités. Depuis le travail fondamental de Laplace, il est standard d'utiliser la transformée de Laplace (ou de Fourier) à démontrer le théorème central limite. La méthode de Laplace a été raffinée par Berry et Esseen pour obtenir une borne supérieure de la vitesse de convergence du théorème centrale limite.

Soient  $(X_i)_{i=1}^n$  une famille de variables aléatoires indépendantes et  $W$  leur somme (éventuellement normalisée). Du point de vu numérique, le théorème central limite cherche à approximer la fonctionnelle  $h \mapsto \mathbb{E}[h(W)]$  par une fonctionnelle qui est plus facile à calculer. Le théorème central limite sous forme classique propose d'approximer  $\mathbb{E}[h(W)]$  par l'espérance de  $h$  par rapport à la loi gaussienne ayant les mêmes moments d'ordre 1 et d'ordre 2 de  $W$ . En général la vitesse de convergence (la somme  $W$  étant normalisée par un facteur de  $1/\sqrt{n}$ ) est  $O(1/\sqrt{n})$  lorsque les variables aléatoires ont la même loi et admettent le moment d'ordre 3. Cependant, sous certaines conditions sur les lois de probabilités de  $X_i$  ou sur la fonction  $h$ , on peut améliorer la qualité d'approximation en introduisant des termes de correcteur. Par exemple, dans le cas où les lois de probabilité des  $X_i$  sont lisses, des développements asymptotiques sont proposés dans la littérature où les moments d'ordre supérieurs des  $X_i$  interviennent. On renvoie les lecteurs dans l'ouvrage de Petrov [75] pour un survol panoramique dans cette direction.

Dans une série de travaux sur les méthodes numériques dans l'évaluation de CDOs [31, 32, 30], nous avons observé que, dans le cas où  $f$  est une fonction Call, i.e.  $h(x) = (x - K)_+$ , on peut améliorer l'approximation gaussienne ou poissonnienne de  $\mathbb{E}[h(W)]$  par un terme de correcteur explicite. La démonstration de ce résultat repose sur la méthode de Stein (cf. [83, 84]), qui est basée sur l'observation qu'une variable aléatoire  $X$  d'espérance nulle suit la loi normale  $N(0, \sigma^2)$  si et seulement si l'égalité  $\mathbb{E}[Xf(X)] = \sigma^2\mathbb{E}[f'(X)]$  est vérifiée pour toute fonction différentiable  $f$  telle que les deux côtés de la formule au-dessus sont bien définis. On renvoie les lecteurs dans [19]

pour une exposition détaillée sur la méthode de Stein et ses applications dans les approximations gaussienne et poissonnienne.

L'avantage de la méthode de Stein est que l'on n'utilise pas explicitement la transformée de Fourier de la fonction  $h$ . Cela est particulièrement commode lorsque l'on étudie l'approximation d'ordre supérieur de  $\mathbb{E}[h(W)]$  lorsque la fonction  $h$  est lisse. Dans cette direction Barbour [5, 6] a proposé des formules de développement asymptotique pour les approximations gaussienne et poissonnienne, voir aussi [78]. L'approche de Barbour est une combinaison de la méthode de Stein et un argument de développement par les cumulants. Il a aussi obtenu des estimées explicites pour les termes d'erreur. Cependant, ces estimations demandent des conditions fines sur la régularité de la fonction  $h$  ou sur l'existence des moments à un grand ordre pour les variables aléatoires  $X_i$ . Dans le cas d'approximation gaussienne, l'estimation de Barbour ne permet pas de retrouver l'inégalité de Berry-Esseen ou l'estimée du terme d'erreur dans [30] pour la fonction Call.

Pour rendre la méthode de Stein plus symétrique, Goldstein et Reinert [42] ont proposé la transformation de biais zéro pour les variables aléatoires centrées. Étant donnée une variable aléatoire  $X$  d'espérance nulle, on dit qu'une variable aléatoire  $X^*$  admet la loi de biais zéro de  $X$  si, pour toute fonction différentiable on a  $\mathbb{E}[Xf(X)] = \sigma^2\mathbb{E}[f'(X^*)]$ , où  $\sigma^2$  est la variance de  $X$ . Par la transformation de biais zéro, la différence entre la loi de  $X$  et la loi normale  $N(0, \sigma^2)$  peut être mesurée par la distance entre les lois de  $X$  et de sa transformée de biais zéro  $X^*$ . Dans l'étude de la loi de probabilité de la somme de variable aléatoire indépendantes  $W = X_1 + \dots + X_n$ , le choix de la structure de corrélation entre  $W$  et  $W^*$  est le point clé dans la démonstration du théorème central limite par la méthode de Stein. En effet, si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $X_i^*$  désigne une variable aléatoire indépendante des  $(X_j)_{j=1}^n$  et ayant la loi de biais zéro de  $X_i$ , alors la variable aléatoire  $W^* = W^{(I)} + X_I^*$  est une transformée de biais zéro de  $W$ , où  $W^{(i)} := W - X_i$  et  $I$  est un indice aléatoire indépendant de  $\{X_i, X_i^*\}_{i=1}^n$ , qui prend valeurs dans  $\{1, \dots, n\}$  équiprobablement. Donc les lois de  $W$  et de  $W^*$  sont proches lorsque  $n$  est grand. Cette méthode est similaire à l'approche de Lindeberg où on substitue progressivement les  $X_i$  par des variables aléatoires suivant les lois gaussiennes.

Dans le travail [59], j'ai étudié le problème de développement dans les approximations gaussienne et poissonnienne en utilisant une combinaison de la méthode de Stein et de la transformée de biais zéro. L'idée consiste à appliquer directement le développement de Taylor à  $\mathbb{E}[f(W)]$  et  $\mathbb{E}[f(W^*)]$ , où  $f$  est la solution d'une équation de Stein itérée. Dans la formule de développement asymptotique, il apparaît les moments des  $X_i$  au lieu des cumulants. Mais le lien entre les moments et les cumulants montre que ma formule est équivalente à celle de Barbour. L'avancement majeur est dans l'estimation du terme d'erreur. On décrit soigneusement les espaces fonctionnels contenant les solutions des équations de Stein itérées. Cela nous permet d'obtenir les

estimés plus fines sur les termes d'erreur sous des conditions plus souples. La difficulté principale de cette méthode est la corrélation entre  $W$  et  $X_i$  (et celle entre  $W^*$  et  $X_i^*$ ). Si on applique directement l'opérateur d'espérance à la formule de Taylor, ces structures de corrélation produisent des termes d'erreurs supplémentaires à l'ordre non-négligeable. Pour surmonter cette difficulté, j'ai proposé une formule de Taylor inversée (4.2). C'est un résultat de nature combinatoire : le terme d'erreur de cette formule peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des termes d'erreur de la formule de Taylor classique (cf. (4.3)). Cette formule, ainsi que son analogue poissonnien, jouent un rôle essentiel dans mon approche à l'étude du développement asymptotique des approximations gaussienne et poissonnienne.

#### 4.1. Développement dans le cas gaussien

Dans ce paragraphe, on présente la formule de développement dans le cas gaussien.

**4.1.1. Espaces de fonctions.** — On introduit une famille d'espaces de fonctions sur lesquels on discute le développement de l'approximation gaussienne. Ces espaces de fonctions sont liés à l'équation de Stein. Plus précisément, on montre dans la proposition 4.1.2 que, si  $h$  appartient à l'un des espaces de fonctions, alors il en est de même de la solution  $f_h$  de l'équation de Stein (4.8).

Si  $g$  est une fonction localement de variation finie, elle peut être décomposée de façon unique en la somme d'une fonction de saut pure  $g_d$  et une fonction continue  $g_c$  qui est localement de variation finie et nulle à l'origine. Les fonctions  $g_c$  et  $g_d$  sont appelées respectivement la partie continue et la partie de saut pure de  $g$ .

Soient  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $p \geq 0$ . Suivant Barbour [5], on définit pour toute fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  la valeur suivante dans  $[0, +\infty]$

$$\|f\|_{\alpha,p} := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha (1 + |x|^p + |y|^p)}.$$

L'ensemble des fonction  $f$  telle que  $\|f\|_{\alpha,p} < +\infty$  forme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Il s'avère que  $\|\cdot\|_{\alpha,p}$  est une semi-norme sur cet espace vectoriel. En outre,  $\|f\|_{\alpha,p} < +\infty$  entraîne que  $f$  est localement  $\alpha$ -lipschitzienne et qu'elle ne croît pas plus vite que  $|x|^{\alpha+p}$  à l'infini.

**Définition 4.1.1.** — Soient  $N$  un entier positif,  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $p \geq 0$ . On désigne par  $\mathcal{H}_{\alpha,p}^N$  l'espace vectoriel des fonctions boréliennes  $h$  sur  $\mathbb{R}$  qui vérifient les conditions suivantes :

- (a)  $h$  est  $N$  fois dérivable et  $h^{(N)}$  est une fonction localement de variation fini et qui n'admet qu'un nombre fini de sauts,
- (b) la partie continue de  $h^{(N)}$  satisfait à la relation  $\|h_c^{(N)}\|_{\alpha,p} < +\infty$ .

Les espaces  $\mathcal{H}_{\alpha,p}^N$  ont les propriétés suivantes :



- (1) Lorsque  $N \geq 1$ , une fonction  $h$  est dans  $\mathcal{H}_{\alpha,p}^N$  si et seulement si  $h' \in \mathcal{H}_{\alpha,p}^{N-1}$ .
- (2) Si  $p \leq q$ , alors  $\mathcal{H}_{\alpha,p}^N \subset \mathcal{H}_{\alpha,q}^N$ .
- (3) Si  $\alpha \leq \beta$ , alors  $\mathcal{H}_{\beta,p}^N \subset \mathcal{H}_{\alpha,p+\beta-\alpha}^N$ .
- (4) Si  $N \geq 1$ , alors  $\mathcal{H}_{\alpha,p}^N \subset \mathcal{H}_{1,\alpha+p}^{N-1} \subset \mathcal{H}_{\alpha,p+1}^{N-1}$ .
- (5) Si  $h \in \mathcal{H}_{\alpha,p}^N$  et si  $P$  est un polynôme de degré  $d$ , on a  $Ph \in \mathcal{H}_{\alpha,p+d}$ .

La proposition suivante est cruciale dans l'étude de l'équation de Stein :

**Proposition 4.1.2.** — Soient  $N$  un entier positif,  $\alpha \in ]0, 1]$ ,  $p \geq 0$  et  $\sigma > 0$ . Si  $h \in \mathcal{H}_{\alpha,p}^N$ , alors l'équation de Stein

$$xf(x) - \sigma^2 f'(x) = h(x) - \Phi_\sigma(h)$$

a une solution. De plus, la solution  $f_h$  de cette équation de la forme

$$(4.1) \quad f_h(x) = \frac{1}{\sigma^2 \phi_\sigma(x)} \int_x^\infty (h(t) - \Phi_\sigma(h)) \phi_\sigma(t) dt$$

appartient à  $\mathcal{H}_{\alpha,p}^{N+1}$ , où  $\phi_\sigma(\cdot)$  désigne la fonction de densité de la loi normale  $N(0, \sigma^2)$  et  $\Phi_\sigma(\cdot)$  désigne l'opérateur d'espérance par rapport à la loi de  $N(0, \sigma^2)$ .

**4.1.2. Formule de développement.** — Soient  $N$  un entier positif,  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendants et  $f$  une fonction sur  $\mathbb{R}$  qui est  $N$  fois dérivable. On suppose que  $\mathbb{E}[|Y|^N] < +\infty$  et que les variables aléatoires  $f^{(k)}(X)$  et  $f^{(k)}(X+Y)$  sont intégrables ( $k \in \{0, \dots, N\}$ ). Pour tout  $k$ , on désigne par  $m_Y^{(k)}$  le moment d'ordre  $k$  de  $Y$ , normalisé comme

$$m_Y^{(k)} := \frac{\mathbb{E}[Y^k]}{k!},$$

où  $k \in \{0, \dots, N\}$ . On désigne par  $\delta_N(f, X, Y)$  le terme d'erreur du développement de Taylor d'ordre  $N$  de l'espérance  $\mathbb{E}[f(X+Y)]$  en  $X$ . Autrement dit,

$$\delta_N(f, X, Y) := \mathbb{E}[f(X+Y)] - \sum_{k=0}^N m_Y^{(k)} \mathbb{E}[f^{(k)}(X)].$$

La valeur  $\delta_N(f, X, Y)$  peut s'écrire sous forme intégrale comme

$$\delta_N(f, X, Y) = \frac{1}{(N-1)!} \int_0^1 (1-t)^{N-1} \mathbb{E} \left[ (f^{(N)}(X+tY) - f^{(N)}(X)) Y^N \right] dt$$

pourvu que le terme à droite est bien défini.

Dans le problème de développement de l'approximation gaussienne, on considère une espérance de la forme  $\mathbb{E}[h(W)]$ , où  $W = X_1 + \dots + X_n$  est une somme de variables aléatoires indépendantes. Si on applique le développement de Taylor à  $h(W) = h(W^{(i)} + X_i)$ , il apparaît dans la formule de développement des espérances conditionnelles de la forme  $\mathbb{E}[h^{(k)}(W^{(i)})]$  que l'on ne peut pas appliquer directement la méthode de récurrence pour approximer (à un ordre adéquat). Pour surmonter cette difficulté, j'ai proposé une formule de Taylor inversée comme la suite.

On veut développer  $\mathbb{E}[f(X)]$  comme une somme de Taylor dont les coefficients sont des espérances de la forme  $\mathbb{E}[f^{(k)}(X + Y)]$ . Cependant, cela ne peut pas se faire naïvement en prenant le développement de Taylor de  $\mathbb{E}[f(X)]$  en  $X + Y$  car les variables aléatoires  $X + Y$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes. On désigne par  $\mathbb{N}_*$  l'ensemble des entiers strictement positifs. Si  $d \geq 1$  est un entier et si  $\mathbf{J} = (j_\ell)_{\ell=1}^d$  est un élément dans  $\mathbb{N}_*^d$ , l'expression  $|\mathbf{J}|$  désigne la somme des coordonnées  $j_1 + \dots + j_d$  et  $m_Y^{(\mathbf{J})}$  désigne  $m_Y^{(j_1)} \dots m_Y^{(j_d)}$ . Par convention,  $\mathbb{N}_*^0 := \{\emptyset\}$  est l'ensemble du vecteur vide,  $|\emptyset| = 0$  et  $m_Y^{(\emptyset)} = 1$ .

**Théorème 4.1.3 (Formule de Taylor inversée).** — *On a*

$$(4.2) \quad \mathbb{E}[f(X)] = \sum_{d \geq 0} (-1)^d \sum_{\substack{\mathbf{J} \in \mathbb{N}_*^d \\ |\mathbf{J}| \leq N}} m_Y^{(\mathbf{J})} \mathbb{E}[f^{(|\mathbf{J}|)}(X + Y)] + \varepsilon_N(f, X, Y),$$

où

$$(4.3) \quad \varepsilon_N(f, X, Y) = - \sum_{d \geq 0} (-1)^d \sum_{\substack{\mathbf{J} \in \mathbb{N}_*^d \\ |\mathbf{J}| \leq N}} m_Y^{(\mathbf{J})} \delta_{N-|\mathbf{J}|}(f^{|\mathbf{J}|}, X, Y).$$

**4.1.3. Estimation fondamentale.** — Ce sous-paragraphe est consacré à majorer les termes d'erreur dans les formules de Taylor présentées dans le sous-paragraphe précédent.

**Proposition 4.1.4.** — *Soient  $N \geq 0$  un entier,  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $p \geq 0$ . Soit  $X$  une variable aléatoire ayant le moment d'ordre  $N + \alpha + p$  et qui satisfait à l'inégalité de concentration suivante :*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b, \quad \mathbb{P}(a \leq X \leq b) \leq c(b - a)^\alpha + r,$$

où  $c$  et  $r$  sont deux constantes positives. Soit en outre  $Y$  une variable aléatoire indépendante de  $X$  et qui admet le moment d'ordre  $N + \alpha + p$ . Pour toute fonction  $g \in \mathcal{H}_{\alpha, p}$  et tout  $k \in \{0, \dots, N\}$ , on a

$$(4.4) \quad |\delta_{N-k}(g^{(k)}, X, Y)| \leq V(g_d^{(N)}) \left( c m_{|Y|}^{(N-k+\alpha)} + r m_{|Y|}^{(N-k)} \right) + \|g_c^{(N)}\|_{\alpha, p} \left( u_{\alpha, p, X} m_{|Y|}^{(N-k+\alpha)} + v_{\alpha, p} m_{|Y|}^{(N-k+\alpha+p)} \right),$$

où  $V(g_d^{(N)})$  est la variation totale de  $g_d^{(N)}$ ,

$$u_{\alpha, p, X} := (1 + (1 + 2^p) \mathbb{E}[|X|^p] \Gamma(\alpha + 1)) \quad \text{et} \quad v_{\alpha, p} := 2^p \Gamma(\alpha + p + 1).$$

On en déduit une majoration de  $|\varepsilon_{N-k}(g^{(k)}, X, Y)|$  comme la suite

$$(4.5) \quad |\varepsilon_{N-k}(g^{(k)}, X, Y)| \leq \sum_{d \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{J} \in \mathbb{N}_*^d \\ |\mathbf{J}| \leq N-k}} m_{|Y|}^{(\mathbf{J})} \left[ V(g_d^{(N)}) \left( c m_{|Y|}^{(N-k-|\mathbf{J}|+\alpha)} + r m_{|Y|}^{(N-k-|\mathbf{J}|)} \right) + \|g_c^{(N)}\|_{\alpha, p} \left( u_{\alpha, p, X} m_{|Y|}^{(N-k-|\mathbf{J}|+\alpha)} + v_{\alpha, p} m_{|Y|}^{(N-k-|\mathbf{J}|+\alpha+p)} \right) \right].$$

On peut appliquer la proposition aux sommes de variables indépendantes. Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi que  $X/\sqrt{n}$ , où  $X$  est une variable aléatoire d'espérance nulle et qui admet le moment d'ordre  $N + \alpha + p + 2$ . Pour tout  $g \in \mathcal{H}_{\alpha,p}^N$  et tout  $k \in \{0, \dots, N\}$ , on a

$$(4.6) \quad \delta_{N-k}(g^{(k)}, W^{(i)}, X_i^*) = O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{(N-k+\alpha)/2}\right),$$

$$(4.7) \quad \varepsilon_{N-k}(g^{(k)}, W^{(i)}, X_i) = O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{(N-k+\alpha)/2}\right),$$

où les constantes implicites dépendent de  $V(g_d^{(N)})$ ,  $\|g_c^{(N)}\|_{\alpha,p}$  et les moments de  $X$  d'ordre au plus  $N - k + \alpha + p + 2$ .

**4.1.4. Transformation de biais zéro.** — Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance nulle et de variance finie  $\sigma^2 > 0$ . On définit la *loi de biais zéro* de  $X$  l'unique mesure de probabilité borélienne  $\mu_X^*$  sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour toute fonction différentiable  $f$  dont la dérivée  $f'$  est une fonction bornée, on a

$$\mathbb{E}[Xf(X)] = \int_{\mathbb{R}} f'(x) \mu_X^*(dx).$$

On appelle l'équation de Stein toute équation différentielle ordinaire de la forme

$$(4.8) \quad xf(x) - \sigma^2 f'(x) = h(x) - \Phi_\sigma(h),$$

où  $h$  est une fonction localement de variation finie et de croissance polynomiale à l'infini qui n'admet qu'un nombre fini de sauts, et  $\Phi_\sigma(h)$  est l'espérance de  $h$  par rapport à la loi normale  $N(0, \sigma^2)$ . Si  $f_h$  est une solution de l'équation de Stein et si  $X^*$  est une variable aléatoire qui suit la loi de biais zéro  $\mu_X^*$ , alors on a

$$\mathbb{E}[h(X)] - \Phi_\sigma(h) = \sigma^2 (\mathbb{E}[f_h'(X)] - \mathbb{E}[f_h'(X^*)]),$$

pourvu que les espérances figurant dans la formule sont bien définies. Cela montre que la différence entre la loi de  $X$  et la loi normale  $N(0, \sigma^2)$  peut être mesurée par la distance entre la loi de  $X$  et sa loi de biais zéro.

On considère une famille de variables aléatoires indépendantes  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). On suppose que chaque variable aléatoire  $X_i$  est d'espérance nulle et de variance finie  $\sigma_i^2 > 0$ . Soient  $W = X_1 + \dots + X_n$  et  $\sigma_W^2 = \text{Var}(W) = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $X_i^*$  une variable aléatoire qui suit la loi de biais zéro de  $X_i$  et qui est indépendante de  $W^{(i)} = W - X_i$ .

**Théorème 4.1.5.** — Soient  $N$  un entier positif,  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $p \geq 0$ . On suppose que  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires indépendantes ayant des moments d'ordre  $N + \max(\alpha + p, 2)$ . Pour toute fonction  $h \in \mathcal{H}_{\alpha,p}^N$ , l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}[h(W)]$  peut s'écrire comme la somme de deux termes  $C_N(h)$  et  $e_N(h)$  qui sont définis de

façon récursive comme  $C_0(h) = \Phi_{\sigma_W}(h)$ ,  $e_0(h) = \mathbb{E}[h(W)] - \Phi_{\sigma_W}(h)$  et

$$(4.9) \quad C_N(h) = C_0(h) + \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \sum_{d \geq 1} (-1)^{d-1} \sum_{\substack{\mathbf{J} \in \mathbb{N}_*^d \\ |\mathbf{J}| \leq N}} m_{X_i}^{(\mathbf{J}^\circ)} (m_{X_i^*}^{(\mathbf{J}^\dagger)} - m_{X_i}^{(\mathbf{J}^\dagger)}) C_{N-|\mathbf{J}|}(f_h^{(|\mathbf{J}|+1)}),$$

$$(4.10) \quad e_N(h) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \left[ \sum_{d \geq 1} (-1)^{d-1} \sum_{\substack{\mathbf{J} \in \mathbb{N}_*^d \\ |\mathbf{J}| \leq N}} m_{X_i}^{(\mathbf{J}^\circ)} (m_{X_i^*}^{(\mathbf{J}^\dagger)} - m_{X_i}^{(\mathbf{J}^\dagger)}) e_{N-|\mathbf{J}|}(f_h^{(|\mathbf{J}|+1)}) \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^N \varepsilon_{N-k}(f_h^{(k+1)}, W^{(i)}, X_i) m_{X_i^*}^{(k)} + \delta_N(f_h', W^{(i)}, X_i^*) \right],$$

où pour tout  $\mathbf{J} \in \mathbb{N}_*^d$ , l'expression  $\mathbf{J}^\dagger$  désigne la dernière coordonnée de  $\mathbf{J}$ , et  $\mathbf{J}^\circ$  désigne le vecteur dans  $\mathbb{N}_*^{d-1}$  consistant des  $d-1$  premières coordonnées de  $\mathbf{J}$ .

Les moments de  $X_i^*$  peuvent s'exprimer comme des fonctions des moments des  $X_i$ . En effet, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbb{E}[(X_i^*)^k]$  soit bien défini, on a

$$\mathbb{E}[(X_i^*)^k] = \frac{\mathbb{E}[X_i^{k+2}]}{\sigma_i^2(k+1)}.$$

En d'autres termes, on a  $m_{X_i^*}^{(k)} = \sigma_i^{-2}(k+2)m_{X_i}^{(k+2)}$ .

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  et tout entier positif  $r$ , soit  $\kappa_i^{(r)}$  le cumulants d'ordre  $r$  de  $X_i$ . On a la relation suivante.

$$(4.11) \quad \frac{\kappa_i^{(r)}}{(r-1)!} = r m_{X_i}^{(r)} - \sum_{j=1}^{r-1} m_{X_i}^{(j)} \frac{\kappa_i^{(r-j)}}{(r-j-1)!}.$$

On peut vérifier que

$$\kappa_i^{(r)} = (r-1)! \sum_{\substack{\mathbf{K} \in \bigcup_{d \geq 1} \mathbb{N}_*^d \\ |\mathbf{K}|=r}} (-1)^{\ell(\mathbf{K})-1} \mathbf{K}^\dagger m_{X_i}^{(\mathbf{K})},$$

où  $\ell(\mathbf{K})$  est la longueur du vecteur  $\mathbf{K}$ , qui est égale à  $d$  si  $\mathbf{K} \in \mathbb{N}_*^d$ . On vérifie alors que

$$(4.12) \quad C_N(h) = C_0(h) + \sum_{r=1}^N C_{N-r}(f_h^{(r+1)}) \frac{\kappa^{(r+2)}(W)}{(r+1)!},$$

où  $\kappa^{(r)}(W)$  désigne le cumulants d'ordre  $r$  de  $W$ . Ainsi on retrouve la formule de développement de Barbour [5, (8)].

**4.1.5. Majoration du terme d'erreur.** — Les estimées des termes d'erreur des formules de Taylor obtenues dans §4.1.3 conduisent naturellement aux estimations suivantes.

**Proposition 4.1.6.** — Soient  $N \geq 0$  un entier,  $\alpha \in ]0, 1]$ ,  $p \geq 0$  et  $h \in \mathcal{H}_{\alpha, p}^N$ . Supposons que  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi que  $X/\sqrt{n}$ , où  $X$  est une variable aléatoire dont l'espérance est nulle et qui admet le moment d'ordre  $N + 2 + \alpha + p$ . Alors on a

$$(4.13) \quad e_N(h) = O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{N+\alpha}\right),$$

où la constante implicite dépend des moments d'ordre  $\leq N + \alpha + p + 2$  de  $X$ .

On peut comparer ce résultat au théorème principal de Barbour (cf. [5, page 294]). Ici on demande moins de régularité sur la fonction  $h$ . Par exemple, dans le cas où la fonction  $h$  est de la forme  $h(x) = \mathbb{1}_{\{x \leq k\}}$ , on a  $h \in \mathcal{H}_{\alpha, 0}^0$  pour tout  $\alpha \in ]0, 1]$ . Par conséquent, si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi ayant un moment d'ordre  $2 + \alpha$ , alors on a  $e_0(h) = O((1/\sqrt{n})^\alpha)$  où la constante implicite dépend des moments d'ordre  $\leq 2 + \alpha$  des  $X_i$ . Cela nous permet de retrouver l'estimée dans [75, théorème V.3.6].

## 4.2. Le cas poissonnien

Soit  $Z$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . La variable aléatoire  $Z$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  si et seulement si l'inégalité  $\mathbb{E}[Zf(Z)] = \lambda\mathbb{E}[f(Z+1)]$  est vérifiée pour toute fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que les deux côtés de la formule soient bien définis. L'analogue de l'équation de Stein dans le cas poissonnien est

$$(4.14) \quad xf(x) - \lambda f(x+1) = h(x) - \mathcal{P}_\lambda(h),$$

où  $\mathcal{P}_\lambda(h)$  désigne l'espérance de  $h$  par rapport à la loi poissonnienne de paramètre  $\lambda$ . Si  $X$  est une variable aléatoire à valeur dans  $\mathbb{N}$  dont l'espérance est  $\lambda$ , alors on a

$$\mathbb{E}[h(X)] - \mathcal{P}_\lambda(h) = \mathbb{E}[Xf_h(X)] - \mathbb{E}[f_h(X+1)],$$

où  $f_h$  est une solution de l'équation (4.14) qui se calcule de façon explicite comme

$$(4.15) \quad f_h(x) = \frac{(x-1)!}{\lambda^x} \sum_{i \geq x} \frac{\lambda^i}{i!} (h(i) - \mathcal{P}_\lambda(h)),$$

où la valeur de  $f_h(0)$  peut être choisie arbitrairement.

Pour toute variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et tout  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbb{E}[|X|^k] < +\infty$ , on note

$$m_X^{(k)} := \mathbb{E}\left[\binom{X}{k}\right].$$

On désigne par  $\mu_X^*$  la mesure de probabilité sur  $\mathbb{N}$  telle que

$$\mu_X^*(x) = (x+1)\mathbb{P}(X = x+1)/\lambda,$$

appelée la loi de biais zéro de  $X$  (cf. Goldstein et Reinert [43]). D'après l'équation de Stein, si  $X^*$  est une variable aléatoire qui suit la loi  $\mu_{X^*}^*$ , alors on a

$$(4.16) \quad \mathbb{E}[h(X)] - \mathcal{P}_\lambda(h) = \lambda \mathbb{E}[f_h(X^* + 1) - f_h(X + 1)]$$

D'après la définition de la loi de biais zéro, si  $X^*$  suit la loi de biais zéro de  $X$ , alors on a

$$\lambda m_{X^*}^{(k)} = (k + 1)m_X^{(k+1)}.$$

Dans le cas discret, l'analogie de la formule de Taylor est le développement de Newton :

$$f(x + y) = \sum_{j=0}^N \binom{y}{j} \Delta^j f(x) + \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_{N+1} < y} \Delta^{N+1} f(x + j_1),$$

où  $\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x)$ . Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\Delta^k f(X)$  et  $\Delta^k f(X + Y)$  soient intégrables pour tout  $k \in \{0, \dots, N\}$ . On a

$$\mathbb{E}[f(X + Y)] = \sum_{k=0}^N m_Y^{(k)} \mathbb{E}[\Delta^k f(X)] + \delta_N(f, X, Y),$$

où

$$(4.17) \quad \delta_N(f, X, Y) = \mathbb{E} \left[ \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_{N+1} < Y} \Delta^{N+1} f(X + j_1) \right].$$

Pour tout  $p \in \mathbb{R}$ , soit  $\mathcal{H}_p$  l'espace des fonctions  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $h(x) = O(x^p)$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ . On peut vérifier que, si  $h \in \mathcal{H}_p$ , alors  $\Delta h \in \mathcal{H}_p$ , l'équation (4.14) admet une solution  $f_h$  qui est dans  $\mathcal{H}_{p-1}$ .

Soient  $\mathbb{N} \geq 0$  un entier et  $p \geq 0$ . Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes qui admettent des moments d'ordre  $N + \max(p, 1)$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $\lambda_i$  l'espérance de  $X_i$ . Soient  $W$  la somme des  $X_i$  et  $\lambda_W = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ . Pour toute fonction  $h \in \mathcal{H}_p$ , on peut écrire formellement  $\mathbb{E}[h(W)]$  comme la somme de deux termes  $C_N(h)$  et  $e_N(h)$ , où  $C_0(h) = \mathcal{P}_W(h)$ ,  $e_0(h) = \mathbb{E}[h(W)] - C_0(h)$ , et par récurrence

$$\begin{aligned} C_N(h) &= C_0(h) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{d \geq 1} (-1)^{d-1} \sum_{\substack{\mathbf{J} \in \mathbb{N}_*^d \\ |\mathbf{J}| \leq N}} m_{X_i}^{(\mathbf{J}^\circ)} (m_{X_i^*}^{\mathbf{J}^\dagger} - m_{X_i}^{\mathbf{J}^\dagger}) C_{N-|\mathbf{J}|}(\Delta^{|\mathbf{J}|} f_h(x + 1)), \\ e_N(h) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left[ \sum_{d \geq 1} (-1)^{d-1} \sum_{\substack{\mathbf{J} \in \mathbb{N}_*^d \\ |\mathbf{J}| \leq N}} m_{X_i}^{(\mathbf{J}^\circ)} (m_{X_i^*}^{\mathbf{J}^\dagger} - m_{X_i}^{\mathbf{J}^\dagger}) e_{N-|\mathbf{J}|}(\Delta^{|\mathbf{J}|} f_h(x + 1)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^N m_{X_i^*}^{(k)} \varepsilon_{N-k}(\Delta^k f_h(x + 1), W^{(i)}, X_i) + \delta_N(f_h(x + 1), W^{(i)}, X_i^*) \right], \end{aligned}$$

où pour  $\mathbf{J} \in \mathbb{N}_*^d$ , l'expression  $\mathbf{J}^\dagger$  désigne la dernière coordonnée de  $\mathbf{J}$ , et  $\mathbf{J}^\circ$  désigne le vecteur dans  $\mathbb{N}_*^{d-1}$  formé des  $d-1$  premiers coordonnées de  $\mathbf{J}$ .

On peut vérifier que

$$\eta_i^{(r+1)} := \frac{\lambda_i}{r} \sum_{d \geq 1} (-1)^{d-1} \sum_{\substack{\mathbf{J} \in \mathbb{N}_*^d \\ |\mathbf{J}|=r}} m_{X_i}^{\mathbf{J}^\circ} (m_{X_i}^{\mathbf{J}^\dagger} - m_{X_i}^{(\mathbf{J}^\dagger)})$$

est le coefficient du terme  $t^r$  dans le développement de Taylor de  $\ln \mathbb{E}[(1+t)^{X_i}]$ .

Pour estimer le terme d'erreur, on considère la norme  $\|\cdot\|_{N,p}$  définie sur  $\mathcal{H}_p$  comme

$$\|h\|_{N,p} := \sup_{x \in \mathbb{N}_*} \frac{|\Delta^{N+1}h(x)|}{x^p}.$$

**Lemme 4.2.1.** — Soient  $N \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \{0, \dots, N\}$  et  $p \geq 0$ . Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que  $X$  admet le moment d'ordre  $p$  et que  $Y$  admet le moment d'ordre  $N-k+p+1$ . Alors, pour toute  $f \in \mathcal{H}_p$ , on a

$$|\delta_{N-k}(\Delta^k f(x+1), X, Y)| \leq \max(2^{p-1}, 1) \|f\|_{N,p} (\mathbb{E}[X^p] m_Y^{(N-k+1)} + m_Y^{(N-k+1),p}),$$

où

$$m_Y^{(N-k+1),p} := \mathbb{E} \left[ \binom{Y}{N-k+1} Y^p \right].$$

On déduit du lemme précédent que  $|\varepsilon_{N-k}(\Delta^k f(x+1), X, Y)|$  est majoré par

$$\max(2^{p-1}, 1) \|f\|_{N,p} \sum_{\substack{d \geq 0, \mathbf{J} \in \mathbb{N}_*^d \\ |\mathbf{J}| \leq N-k}} m_Y^{(\mathbf{J})} (\mathbb{E}[X^p] m_Y^{(N-k-|\mathbf{J}|+1)} + m_Y^{(N-k-|\mathbf{J}|+1),p}).$$

Enfin, par la méthode de récurrence on obtient le résultat suivant.

**Théorème 4.2.2.** — Soient  $N \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 0$  et  $h \in \mathcal{H}_p$ . Soient  $\{X_1, \dots, X_n\}$  une famille indépendante de variables aléatoires qui suivent la même loi que  $X/n$ , où  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  qui admet le moment d'ordre  $N+p+2$ . Alors on a

$$e_N(h) = O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{N+1}\right),$$

où la constante implicite dépend des moments d'ordre  $\leq N+p+2$  de  $X$ .

La formule de développement pour l'approximation poissonnienne est obtenue d'une façon très similaire au cas gaussien. Cependant, dans le cas poissonnien, la régularité de la fonction  $h$  n'a pas de sens. On se concentre ainsi sur sa croissance à l'infini (correspondant au paramètre  $p$ ). Cela rend l'estimation du terme d'erreur moins délicate que dans le cas gaussien. On peut envisager que la même méthode conduira à des distributions compatibles aux d'autres opérateurs fonctionnels et des formules de développement plus générales.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. ALBEVERIO, E. LYTVYNOV & A. MAHNIG – « A model of the term structure of interest rates based on Lévy fields », *Stochastic Processes and their Applications* **114** (2004), no. 2, p. 251–263.
- [2] J. AMENDINGER – « Martingale representation theorems for initially enlarged filtrations », *Stochastic Processes and their Applications* **89** (2000), no. 1, p. 101–116.
- [3] J. AMENDINGER, D. BECHERER & M. SCHWEIZER – « A monetary value for initial information in portfolio optimization », *Finance and Stochastics* **7** (2003), no. 1, p. 29–46.
- [4] S. ANKIRCHNER, C. BLANCHET-SCALLIET & A. EYRAUD-LOISEL – « Credit risk premia and quadratic BSDEs with a single jump », *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **13** (2010), no. 7, p. 1103–1129.
- [5] A. D. BARBOUR – « Asymptotic expansions based on smooth functions in the central limit theorem », *Probability Theory and Related Fields* **72** (1986), no. 2, p. 289–303.
- [6] ———, « Asymptotic expansions in the Poisson limit theorem », *The Annals of Probability* **15** (1987), no. 2, p. 748–766.
- [7] V. E. BENEŠ – « Existence of optimal strategies based on specified information, for a class of stochastic decision problems », *SIAM Journal on Control and Optimization* **8** (1970), p. 179–188.
- [8] T. R. BIELECKI, S. CRÉPEY & M. JEANBLANC – « Up and down credit risk », *Quantitative Finance* **10** (2010), no. 10, p. 1137–1151.



- [9] T. R. BIELECKI, M. JEANBLANC & M. RUTKOWSKI , « Pricing and trading credit default swaps in a hazard process model », *The Annals of Applied Probability* **18** (2008), no. 6, p. 2495–2529.
- [10] T. R. BIELECKI & M. RUTKOWSKI – *Credit risk : modelling, valuation and hedging*, Springer Finance, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [11] F. BLACK & J. C. COX – « Valuing corporate securities : Some effects of bond indenture provisions », *Journal of Finance* **31** (1976), p. 351–367.
- [12] C. BLANCHET-SCALLIET, N. EL KAROUI, M. JEANBLANC & L. MARTELLINI – « Optimal investment decisions when time-horizon is uncertain », *Journal of Mathematical Economics* **44** (2008), no. 11, p. 1100–1113.
- [13] L. BO, Y. JIAO & X. YANG – « Credit derivatives pricing based on Lévy field driven term structure », Prépublication soumise, 2011.
- [14] B. BOUCHARD & H. PHAM – « Wealth-path dependent utility maximization in incomplete markets », *Finance and Stochastics* **8** (2004), no. 4, p. 579–603.
- [15] D. BRIGO & A. CAPPONI – « Bilateral counterparty risk with application to CDSs’ risk », à paraître dans *Risk*, 2010.
- [16] D. C. BRODY & L. P. HUGHSTON – « Entropy and information in the interest rate term structure », *Quantitative Finance* **2** (2002), no. 1, p. 70–80, Special issue on volatility modelling.
- [17] L. CAMPI & U. ÇETIN – « Insider trading in an equilibrium model with default : a passage from reduced-form to structural modelling », *Finance and Stochastics* **11** (2007), no. 4, p. 591–602.
- [18] U. ÇETIN, R. JARROW, P. PROTTER & Y. YILDIRIM – « Modeling credit risk with partial information », *The Annals of Applied Probability* **14** (2004), no. 3, p. 1167–1178.
- [19] L. H. Y. CHEN & Q.-M. SHAO – « Stein’s method for normal approximation », in *An introduction to Stein’s method*, Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap., vol. 4, Singapore Univ. Press, Singapore, 2005, p. 1–59.
- [20] D. COCULESCU, H. GEMAN & M. JEANBLANC – « Valuation of default-sensitive claims under imperfect information », *Finance and Stochastics* **12** (2008), no. 2, p. 195–218.

- [21] P. COLLIN-DUFRESNE & J. HUGONNIER – « Pricing and hedging in the presence of extraneous risks », *Stochastic Processes and their Applications* **117** (2007), no. 6, p. 742–765.
- [22] J. M. CORCUERA, P. IMKELLER, A. KOHATSU-HIGA & D. NUALART – « Additional utility of insiders with imperfect dynamical information », *Finance and Stochastics* **8** (2004), no. 3, p. 437–450.
- [23] D. DUFFIE – « Credit risk modeling with affine processes », *Journal of Banking and Finance* **29** (2005), p. 2751–2802, Cattedra Calileana Lectures, Scuola Normale de Pisa.
- [24] D. DUFFIE & D. LANDO – « Term structures of credit spreads with incomplete accounting information », *Econometrica* **69** (2001), no. 3, p. 633–664.
- [25] P. EHLERS & P. J. SCHÖNBUCHER – « Background filtrations and canonical loss processes for top-down models of portfolio credit risk », *Finance and Stochastics* **13** (2009), no. 1, p. 79–103.
- [26] N. EL KAROUI – « Les aspects probabilistes du contrôle stochastique », in *Ninth Saint Flour Probability Summer School—1979 (Saint Flour, 1979)*, Lecture Notes in Math., vol. 876, Springer, Berlin, 1981, p. 73–238.
- [27] N. EL KAROUI, M. JEANBLANC & Y. JIAO – « What happens after a default : the conditional density approach », *Stochastic Processes and their Applications* **120** (2010), no. 7, p. 1011–1032.
- [28] ———, « Modelling successive defaults », en préparation.
- [29] N. EL KAROUI, M. JEANBLANC, Y. JIAO & B. ZARGARI – « Conditional default probability and density », à paraître dans *Musiela Festschrift*, Springer, 2011.
- [30] N. EL KAROUI & Y. JIAO – « Stein’s method and zero bias transformation for CDO tranche pricing », *Finance and Stochastics* **13** (2009), no. 2, p. 151–180.
- [31] N. EL KAROUI, Y. JIAO & D. KURTZ – « Gaussian and Poisson approximation : applications to CDO tranche pricing », *Journal of Computational Finance* **12** (2008), no. 2, p. 31–58.
- [32] ———, « Valuation and VaR computation for CDOs using Stein’s method », in *Applied Quantitative Finance*, Springer, Berlin, 2008, p. 161–189.
- [33] N. EL KAROUI & M.-C. QUENEZ – « Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market », *SIAM Journal on Control and Optimization* **33** (1995), no. 1, p. 29–66.

- [34] R. J. ELLIOTT, M. JEANBLANC & M. YOR – « On models of default risk », *Mathematical Finance* **10** (2000), no. 2, p. 179–195.
- [35] R. FREY & A. MCNEIL – « Dependent defaults in models of portfolio credit risk », *Journal of Risk* **6** (2003), no. 1, p. 59–92.
- [36] R. FREY & W. RUNGALDIER – « Pricing credit derivatives under incomplete information : a nonlinear-filtering approach », *Finance and Stochastics* **14** (2010), no. 4, p. 495–526.
- [37] P. GAPEEV, M. JEANBLANC, L. LI & M. RUTKOWSKI – « Constructing random times with given survival processes and applications to valuation of credit derivatives », in *Contemporary quantitative finance*, Springer, Berlin, 2010, p. 255–280.
- [38] M. G. GARRONI & J.-L. MENALDI – *Green functions for second order parabolic integro-differential problems*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 275, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992.
- [39] D. GASBARRA, E. VALKEILA & L. VOSTRIKOVA – « Enlargement of filtration and additional information in pricing models : Bayesian approach », in *From stochastic calculus to mathematical finance*, Springer, Berlin, 2006, p. 257–285.
- [40] K. GIESECKE – « Default and information », *Journal of Economic Dynamics & Control* **30** (2006), no. 11, p. 2281–2303.
- [41] K. GIESECKE, L. R. GOLDBERG & X. DING – « A top-down approach to multiname credit », *Operations Research* **59** (2011), no. 2, p. 283–300.
- [42] L. GOLDSTEIN & G. REINERT – « Stein’s method and the zero bias transformation with application to simple random sampling », *The Annals of Applied Probability* **7** (1997), no. 4, p. 935–952.
- [43] ———, « Distributional transformations, orthogonal polynomials, and Stein characterizations », *Journal of Theoretical Probability* **18** (2005), no. 1, p. 237–260.
- [44] A. GRORUD & M. PONTIER – « Insider trading in a continuous time market model », *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **1** (1998), no. 3, p. 331–347.
- [45] X. GUO, R. A. JARROW & Y. ZENG – « Credit risk models with incomplete information », *Mathematics of Operations Research* **34** (2009), no. 2, p. 320–332.

- [46] D. HEATH, R. JARROW & A. MORTON – « Bond pricing and the term structure of interest rates », *Econometrica* **60** (1992), no. 1, p. 77–106.
- [47] C. HILLAIRET – « Comparison of insiders' optimal strategies depending on the type of side-information », *Stochastic Processes and their Applications* **115** (2005), no. 10, p. 1603–1627.
- [48] C. HILLAIRET & Y. JIAO – « Information asymmetry in pricing of credit derivatives », *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **14** (2011), no. 5, p. 611–633.
- [49] ———, « Credit risk with asymmetric information on the default threshold », à paraître dans *Stochastics*.
- [50] ———, « Portfolio optimization with insider's initial information and counterparty risk », Prépublication soumise, 2012.
- [51] Y. HU, P. IMKELLER & M. MÜLLER – « Utility maximization in incomplete markets », *The Annals of Applied Probability* **15** (2005), no. 3, p. 1691–1712.
- [52] J. JACOD – « Grossissement initial, hypothèse ( $H'$ ) et théorème de girsanov », in *Grossissements de filtrations : exemples et applications*, Lecture Notes in Math., vol. 1118, Springer, Berlin, 1985, p. 15–35.
- [53] J. JACOD – *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 714, Springer, Berlin, 1979.
- [54] R. JARROW & F. YU – « Counterparty risk and the pricing of defaultable securities », *Journal of Finance* **56** (2001), no. 5, p. 1765–1799.
- [55] M. JEANBLANC & Y. LE CAM – « Progressive enlargement of filtrations with initial times », *Stochastic Processes and their Applications* **119** (2009), no. 8, p. 2523–2543.
- [56] M. JEANBLANC & M. RUTKOWSKI – « Default risk and hazard process », in *Mathematical finance—Bachelier Congress, 2000 (Paris)*, Springer Finance, Springer, Berlin, 2002, p. 281–312.
- [57] T. JEULIN & M. YOR – « Grossissement d'une filtration et semi-martingales : formules explicites », in *Séminaire de Probabilités, XII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1976/1977)*, Lecture Notes in Math., vol. 649, Springer, Berlin, 1978, p. 78–97.

- [58] T. JEULIN – *Semi-martingales et grossissement d'une filtration*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 833, Springer, Berlin, 1980.
- [59] Y. JIAO – « Zero bias transformation and asymptotic expansions », *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques* **48** (2012), no. 1, p. 258–281.
- [60] Y. JIAO, I. KHARROUBI & H. PHAM – « Optimal investment under multiple defaults risk : a BSDE-decomposition approach », à paraître dans *Annals of Applied Probability*, 2011.
- [61] Y. JIAO & H. PHAM – « Optimal investment with counterparty risk : a default-density model approach », *Finance and Stochastics* **15** (2011), no. 4, p. 725–753.
- [62] G. KALLIANPUR & C. STRIEBEL – « Estimation of stochastic systems : Arbitrary system process with additive white noise observation errors », *Annals of Mathematical Statistics* **39** (1968), p. 785–801.
- [63] Y. KCHIA – *Semimartingales et problématiques récentes en finance quantitative*, Thèse doctorale, École Polytechnique, 2011.
- [64] D. P. KENNEDY – « The term structure of interest rates as a Gaussian random field », *Mathematical Finance* **4** (1994), no. 3, p. 247–258.
- [65] M. KOBYLANSKI – « Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth », *The Annals of Probability* **28** (2000), no. 2, p. 558–602.
- [66] D. KRAMKOV & W. SCHACHERMAYER – « The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets », *The Annals of Applied Probability* **9** (1999), no. 3, p. 904–950.
- [67] S. KUSUOKA – « A remark on default risk models », in *Advances in mathematical economics, Vol. 1 (Tokyo, 1997)*, Adv. Math. Econ., vol. 1, Springer, Tokyo, 1999, p. 69–82.
- [68] D. LANDO – « On Cox processes and credit risky securities », *Review of Derivatives Research* **2** (1998), no. 2-3, p. 99–120.
- [69] J.-P. LAURENT, A. COUSIN & J.-D. FERMANIAN – « Hedging default risks of CDOs in Markovian contagion models », *Quantitative Finance* **11** (2011), no. 12, p. 1773–1791.
- [70] D. LI – « On default correlation : a copula function approach », *Journal of Fixed Income* **9** (2001), p. 43–54.

- [71] T. LIM & M.-C. QUENEZ – « Exponential utility maximization in an incomplete market with defaults », *Electronic Journal of Probability* **16** (2011), p. 1434–1464.
- [72] R. MANSUY & M. YOR – *Random times and enlargements of filtrations in a Brownian setting*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1873, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [73] R. MERTON – « On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates », *Journal of Finance* **29** (1974), p. 449–470.
- [74] M.-A. MORLAIS – « Utility maximization in a jump market model », *Stochastics* **81** (2009), no. 1, p. 1–27.
- [75] V. V. PETROV – *Sums of independent random variables*, Springer-Verlag, New York, 1975, Translated from the Russian by A. A. Brown, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 82*.
- [76] H. PHAM – « Stochastic control under progressive enlargement of filtrations and applications to multiple defaults risk management », *Stochastic Processes and their Applications* **120** (2010), no. 9, p. 1795–1820.
- [77] P. E. PROTTER – *Stochastic integration and differential equations*, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [78] V. ROTAR – « Stein’s method, Edgeworth’s expansions and a formula of Barbour », in *Stein’s method and applications*, Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap., vol. 5, Singapore Univ. Press, Singapore, 2005, p. 59–84.
- [79] R. ROUGE & N. EL KAROUI – « Pricing via utility maximization and entropy », *Mathematical Finance* **10** (2000), no. 2, p. 259–276, INFORMS Applied Probability Conference (Ulm, 1999).
- [80] P. J. SCHÖNBUCHER – *Credit derivatives pricing models, models, pricing and implementation*, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, 2003.
- [81] J. SIDENIUS, V. PITERBARG & L. ANDERSEN – « A new framework for dynamic credit portfolio loss modelling », *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **11** (2008), no. 2, p. 163–197.
- [82] R. SIRCAR & T. ZARIPHOULOU – « Utility valuation of multi-name credit derivatives and application to CDOs », *Quantitative Finance* **10** (2010), no. 2, p. 195–208.

- [83] C. STEIN – « A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables », in *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. II : Probability theory* (Berkeley, Calif.), Univ. California Press, 1972, p. 583–602.
- [84] ———, *Approximate computation of expectations*, Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes—Monograph Series, 7, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1986.
- [85] C. STRICKER & M. YOR – « Calcul stochastique dépendant d'un paramètre », *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* **45** (1978), no. 2, p. 109–133.
- [86] D. H. WAGNER – « Survey of measurable selection theorems : an update », in *Measure theory, Oberwolfach 1979 (Proc. Conf., Oberwolfach, 1979)*, Lecture Notes in Math., vol. 794, Springer, Berlin, 1980, p. 176–219.

## Liste complète des publications

### Les publications issues de ma thèse doctorale.

- [J1] N. EL KAROUI, Y. JIAO, D. KURTZ – “Gaussian and Poisson approximation : applications to CDO tranche pricing”, *Journal of Computational Finance* **12** (2008), no. 2, 31–58.
- [J2] N. EL KAROUI, Y. JIAO – “Stein’s method and zero bias transformation for CDO tranche pricing”, *Finance and Stochastics* **13** (2009), no. 2, 151–180.
- [J3] N. EL KAROUI, Y. JIAO, D. KURTZ – “Valuation and VaR computation for CDOs using Stein’s method”, dans *Applied Quantitative Finance*, Springer, Berlin, 2008, 161–189.

### Les publications présentées dans ce mémoire.

- [J4] N. EL KAROUI, M. JEANBLANC, Y. JIAO – “What happens after a default : the conditional density approach”, *Stochastic Processes and their Applications*, 120(2010), no.7, 151–180.
- [J5] Y. JIAO, H. PHAM – “Optimal investment with counterparty risk : a default density modeling approach”, *Finance and Stochastics*, 15(2011), no.4, 725–753.
- [J6] C. HILLAIRET, Y. JIAO – “Information asymmetry in pricing of credit derivatives”, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 14(2011), no.5, 611–633.
- [J7] Y. JIAO – “Zero bias transformation and asymptotic expansions”, *Annales de l’IHP (B) Probabilités et Statistiques*, 48(2012), no.1, 258–281.
- [J8] C. HILLAIRET, Y. JIAO – “Credit risk with asymmetric information on the default threshold”, à paraître dans *Stochastics*.
- [J9] N. EL KAROUI, M. JEANBLANC, Y. JIAO, B. ZARGARI – “Conditional probability and density”, à paraître dans *Musiela Festschrift*, T. Zariphopoulou, M. Rutkowski and Y. Kabanov eds., Springer Verlag.
- [J10] Y. JIAO, I. KHARROUBI, H. PHAM – “Optimal investment under multiple defaults risk : a BSDE-decomposition approach”, à paraître dans *Annals of Applied Probability*.
- [J11] L. BO, Y. JIAO, X. YANG – “Credit derivatives pricing based on Lévy field driven term structure”, prépublication soumise.
- [J12] C. HILLAIRET, Y. JIAO – “Portfolio optimization with insider’s initial information and counterparty risk”, prépublication soumise.
- [J13] N. EL KAROUI, M. JEANBLANC, Y. JIAO – “Modelling successive defaults”, en préparation.