



HAL
open science

Dynamique des filaments élastiques et visqueux

Pierre-Thomas Brun

► **To cite this version:**

Pierre-Thomas Brun. Dynamique des filaments élastiques et visqueux. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2012. Français. NNT : . tel-00761399

HAL Id: tel-00761399

<https://theses.hal.science/tel-00761399>

Submitted on 5 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie

Spécialité:

Sciences mécaniques, acoustique, électronique & robotique

Présentée par :

Mr. Pierre-Thomas Brun

Pour obtenir le grade de :

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Sujet de thèse :

Dynamique des filaments élastiques et visqueux

Soutenue le :

17 Septembre 2012

devant le jury composé de :

Mr. Basile Audoly
Mr. Neil Ribe
Mr. Christophe Clanet
Mr. John Lister
Mr. Alain Goriely
Mr. Pierre-Yves Lagrée
Mr. Jacques Magnaudet

Directeur de thèse
Directeur de thèse
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur

*À Victoria, mes parents et
ma soeur.*

Avant-propos

Ce manuscrit de thèse a été préparé à l'Institut Jean le Rond d'Alembert (UPMC 4 place Jussieu 75005 Paris) ainsi qu'au laboratoire FAST (Fluides, Automatique et Systèmes Thermiques Bâtiment 502, Rue du Belvédère Campus Universitaire d'Orsay 91405 Orsay). Les travaux qu'il relate ont été faits sous la direction de MM. Neil Ribe et Basile Audoly.

Après un chapitre d'introduction la thèse se divise en deux parties : fluides visqueux (Chap. 2 à 4) puis filaments élastiques (Chap. 5 et 6). On précise ici la participation de chacun à ces travaux. La partie visqueuse est essentiellement numérique. Le code Discrete Viscous Rods a principalement été écrit par Basile Audoly et Nicolas Clauvelin et je n'ai que marginalement participé à son développement (prise en compte fine du traitement des conditions aux limites et maillage adaptatif - voir Chapitre 2). Ces derniers aspects ont permis la validation précise du code que j'ai réalisée (notamment une étude de convergence - Chapitre 3) mais aussi et surtout la simulation de la "machine à coudre fluide" (Chapitre 4). Le code et sa validation ont donné lieu à une publication dont je suis troisième auteur sur six [2]. Les travaux numériques et analytiques sur la machine à coudre visqueuse ont donné lieu à une publication [1] dont je suis premier auteur. La partie élastique débute avec l'étude d'un enroulement. Cette étude comporte un volet expérimental, numérique et analytique. J'ai pris en charge les parties expérimentale et numérique. En particulier j'ai conçu le montage permettant de réaliser l'expérience dans les conditions désirées. La partie numérique a été réalisée avec le code Discrete Elastic Rods développé par Miklòs Bergou dans le groupe d'Eitan Grinspun à l'université de Columbia NY. Ces simulations et leur post-traitement ont permis de construire une compréhension des phénomènes en jeu et finalement de trouver la solution auto-similaire décrivant l'enroulement. Ces travaux ont conduit à une publication dont je suis second auteur [3]. Le manuscrit se conclut par l'étude de la mécanique du lasso, qui combine expérience, simulations numériques et analyse que j'ai menées. Une publication sur ce sujet et dont je suis premier auteur est en préparation.

Remerciements

Ces trois ans ont été une formidable aventure et un accomplissement personnel. Pour ce qui est de l'accomplissement je remercie ma compagne Victoria Campbell qui était elle même en thèse quand je l'ai rencontrée à Cambridge et qui m'a aiguillé vers la recherche. Mon tropisme pour la science était déjà important et elle a su effacer certains doutes et me pousser en douceur vers ce qui s'est avéré un métier où je m'épanouis pleinement. Ce qui est vrai pour Victoria l'est aussi, (certes dans une moindre mesure) pour les membres du Cambridge University Mountainering and Climbing Club. Et si cette aventure a plus ou moins commencé sur les parois du Peak District elle s'est poursuivie à Paris grâce à deux encadrants d'exception que sont Basile Audoly et Neil Ribe. Je me suis récemment amusé à lister les moyens de communication que j'ai utilisé avec Basile, téléphone fixe, portable, SMS, email, Skype, CVS puis SVN, google-docs et même google-wave (il est contre facebook et tweeter). En somme nous avons travaillé en étroite collaboration mais paradoxalement Basile m'a toujours laissé la plus totale liberté de choix et d'action. Pour cela et pour tout ce qu'il m'a appris (cette fois je ne liste pas) je tiens à le remercier tout particulièrement. J'ai côtoyé Neil de façon plus ponctuelle quand je faisais le voyage jusqu'au FAST. Et malgré ce, ses conseils se sont toujours avérés particulièrement subtils et d'une grande justesse. Cette faculté m'a toujours étonné mais je ne désespère pas d'y parvenir un jour. Je le remercie pour cela mais aussi pour son éclairage sur le monde scientifique moderne. Je les remercie aussi conjointement pour m'avoir permis de voyager aux travers des conférences auxquelles j'ai participé et pour m'avoir permis de rencontrer des chercheurs talentueux qui m'ont inspirés et qui continuent de le faire. J'en ai aussi rencontré à d'Alembert et au FAST et je les remercie pour les échanges que l'ont a pu avoir. En particulier je voudrais remercier Arnaud Antkowiak et Thomas Séon avec qui j'ai découvert les joies de la Photron! D'une manière générale je tiens à remercier tout ceux qui m'ont aidé pour la réalisation des expériences que j'ai pu faire ou dans d'autres taches "préparatoires". Je voudrais aussi remercier les membres du jury pour leur participation à la soutenance, Alain Goriely, Pierre Yves Lagrée, Jacques Magnaudet et en particulier Christophe Clanet et John Lister pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Finalement je remercie ma famille et mes amis pour leur soutien et leur générosité. Je leur suis redevable de mon bien être qui me donne toujours plus d'énergie

pour me dépasser.

Résumé

Ce manuscrit porte conjointement sur la dynamique des filaments élastiques et visqueux. Leur dynamique est décrite par les équations de Kirchhoff qui sont très largement discutées dans le manuscrit. La description Lagrangienne des filaments visqueux a conduit au code numérique pour leur simulation : *Discrete Viscous Rods* . Il est validé par l'exemple des enroulements de filaments visqueux similaires à ce qu'on voit en faisant chuter du miel sur une tartine. Nous en étudions ensuite une variante : la machine à coudre fluide. Le filament s'écoule alors sur un tapis roulant dont la vitesse est contrôlée et forme une myriade de motifs complexes ressemblant à ceux d'une véritable machine à coudre. Nous en produisons un diagramme de phase numérique et les décrivons dans un formalisme cinématique unifié. La cinématique de leur contact avec le tapis est d'ailleurs à l'origine de leur formation. Le filament compose avec des fractions exactes de sa fréquence propre pour s'adapter à la vitesse prescrite par le tapis roulant. Les motifs sont une trace de cette adaptation. Ensuite, nous étudions un exemple élastique de dynamique filamentaire : le repliement d'un ressort à courbure constante initialement déposé à plat sur une surface, maintenu par une extrémité, l'autre étant libérée à $t = 0$. L'énergie élastique de flexion est convertie à mesure que le ressort décolle du support. Son enroulement est inertiel et est formé d'une zone de rayon deux fois supérieur à celui du ressort repos. L'enroulement a une forme auto-similaire, et avance à vitesse constante. On finit par l'étude de la dynamique du lasso dont la dynamique est étudiée avec un modèle minimal de chaîne et d'un noeud coulant.

Mots clés : Filaments élastiques, filaments visqueux, tiges, cordes, machine à coudre fluide, motifs, enroulement, lasso, solutions auto-similaires, bifurcations, non linéaire.

Summary

This thesis simultaneously deals with elastic and viscous rods. Their dynamics is ruled by the same set of equations (Kirchhoff equations) despite a difference in their constitutive laws. Using a Lagrangian framework for describing viscous rods lead us to the Discrete Viscous Rods simulator. It was validated against the classic results for the viscous coiling of a filament falling down towards a surface similar to what happens when pouring honey onto a toast. We then studied the fluid mechanical sewing machine. A thin viscous thread falls onto a moving conveyer belt and lays down in a wealth of complex "stitch" patterns depending on the belt speed and the fall height. A numerical phase diagram for the patterns was produced and reproduced the major features of the one found in literature. Fourier analysis of the motion of the thread's contact point with the belt suggests a new classification of the observed patterns, and reveals that the system behaves as a nonlinear oscillator coupling the pendulum modes of the thread. Next we investigate the curling of an initially flat but naturally curved *Elastica* on surface. Combining experiments, simulations and theory, we find novel behaviour, including a constant front velocity and a self-similar shape of the curl at long times after the release of one end of the *Elastica* that converge towards a roll of nearly constant curvature located near the free end. Finally we investigate the dynamics of the lasso and explain the flat loop trick with a minimalist model that includes all the major features of what really a lasso is.

Keywords : Viscous threads, elastic rods, fluid mechanical sewing machine, patterns formation, bifurcations, curling, self-similar solutions, lasso.

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction générale | 1 |
| 1.1 | Des objets du quotidien | 1 |
| 1.2 | Des enjeux technologiques | 3 |
| 1.3 | Des objets fins mais complexes | 4 |
| 1.4 | Élastique ou visqueux : la géométrie est au cœur du problème | 6 |
| 2 | Filaments visqueux et géométrie | 9 |
| 2.1 | Au coeur du problème : la géométrie | 10 |
| 2.1.1 | Cinématique | 10 |
| 2.1.2 | Incompressibilité du fluide | 12 |
| 2.1.3 | Repère matériel et conséquences | 12 |
| 2.2 | Construction des potentiels de dissipation visqueux | 14 |
| 2.2.1 | Taux de déformation | 14 |
| 2.2.2 | Lien entre déplacement $\underline{x}(S,t)$ et torsion | 15 |
| 2.2.3 | Proposition de potentiels de Rayleigh | 16 |
| 2.3 | Équation de la dynamique pour les filaments visqueux | 18 |
| 2.4 | Aspects discrets du code numérique | 18 |
| 2.4.1 | Discrétisation | 19 |
| 2.4.2 | Potentiels de dissipation discrets | 20 |
| 2.4.3 | Fonctionnement général | 23 |
| 2.4.4 | Conditions aux limites | 24 |
| 2.4.5 | Maillage adaptatif | 27 |
| 2.5 | Conclusion | 27 |
| 2.5.1 | Équations de Kirchhoff pour les filaments visqueuses | 27 |
| 2.5.2 | Code DVR (Discrete Visoucs Rods) | 29 |
| 3 | Enroulements visqueux | 31 |
| 3.1 | État de l'art sur les enroulements visqueux | 31 |
| 3.2 | Enroulements stationnaires dans un repère tournant | 32 |
| 3.2.1 | Équations de l'écoulement | 32 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.2.2 | Approche par continuation | 36 |
| 3.3 | Approche tout numérique - Discrete Viscous Rods | 36 |
| 3.3.1 | Convergence du code | 40 |
| 3.3.2 | Validation de la tension de surface tension | 40 |
| 3.4 | Discussion | 41 |
| 3.4.1 | Une succession de régimes différents | 41 |
| 3.4.2 | Morphologie de l'écoulement | 43 |
| 3.5 | Conclusion : Sauts de branches - régimes transitoires | 45 |
| 4 | La machine à coudre fluide | 47 |
| 4.1 | Introduction | 47 |
| 5 | Enroulements Élastiques | 77 |
| 5.1 | Repliement élastique | 77 |
| 5.2 | Étude expérimentale | 78 |
| 5.2.1 | Mise en place | 78 |
| 5.2.2 | Résultats | 80 |
| 5.3 | Étude numérique | 82 |
| 5.3.1 | Gestion du contact | 82 |
| 5.3.2 | Description du problème | 82 |
| 5.3.3 | Résultats | 84 |
| 5.4 | Article | 85 |
| 5.5 | Conclusions | 91 |
| 5.5.1 | Influence de la gravité | 91 |
| 5.5.2 | Rôle du support | 91 |
| 6 | Le lasso | 93 |
| 6.1 | Introduction | 93 |
| 6.1.1 | Bestiaire de boucles | 93 |
| 6.1.2 | Un système assez générique | 95 |
| 6.2 | La dynamique du lasso | 97 |
| 6.2.1 | Enoncé du problème | 97 |
| 6.2.2 | Méthodes de résolution | 99 |
| 6.2.3 | Résultats théoriques | 100 |
| 6.2.4 | Résultats expérimentaux | 103 |
| 6.3 | Rôle du frottement au honda | 105 |
| 6.3.1 | Equilibre au honda | 105 |
| 6.4 | Conclusion | 108 |
| 7 | Perspectives | 111 |
| 7.1 | Vers un petit modèle pour la machine à coudre fluide | 112 |
| 7.2 | Ondes spirales de bulles | 112 |
| 7.3 | Le lasso | 113 |

7.4 Filaments viscoélastiques 114

Introduction générale

1.1 Des objets du quotidien

Sans que nous en soyons particulièrement conscients nous sommes entourés de filaments élastiques et visqueux dans notre quotidien, à commencer par ceux que la plupart des gens portent sur leur crâne : les cheveux. Ces objets sont aussi particulièrement communs dans le règne animal et plus généralement chez tous les organismes vivants. Cela va de la langue du caméléon à l'ADN ou les cils bactériens en passant par les toiles d'araignées. Une idée pour comprendre l'abondance de ces filaments consiste à voir l'utilisation que nous en faisons. Sans doute le meilleur exemple pour cela est celui des cordes. De façon assez abstraite ce sont les objets les plus adaptés pour relier deux points de l'espace Euclidien qui nous entoure. Ils permettent en outre de minimiser la matière utilisée tout en satisfaisant les contraintes géométriques les plus sévères. Voilà sans doute pourquoi on les utilise encore sous une forme très semblable à celle qu'on trouvait dans l'Egypte des pharaons (fig 1.1-3).

Ces filaments sont aussi particulièrement intéressants pour une autre raison peut être plus fondamentale et très importante pour le reste de ce manuscrit. Dans une telle configuration élancée, la matière qu'elle soit fluide ou solide paraît bien similaire. Il suffit pour s'en convaincre d'observer un filament de miel tomber sur une tartine en s'enroulant à la manière d'une corde. Et l'industrie agro-alimentaire est parsemée d'autres exemples de ces filaments visqueux comme le montre cette réclame célèbre de DeleSPAUL-HAVEZ pour son chocolat (fig1.1). Bien ancrés dans notre imaginaire, les filaments ont d'ailleurs inspirés les plus grands artistes comme Jackson Pollock [4] (fig1.1-2). Cet exemple de filaments de peinture nous permet aussi de signaler que si on se restreindra ici à des comportements purement visqueux et élastiques, les fluides aux rhéologies plus complexes ne font pas exception et se retrouvent aussi sous forme filamentaire. A ce titre l'exemple le plus extrême est celui des cheveux de Pélé. Nommées en référence aux cheveux de la déesse Hawaïenne Pélé, ils sont formés lors des éruptions volcaniques sur cette île. Des filaments de lave sont alors projetés et se figent dans cette configuration. On en montre



FIGURE 1.1 – Les objets élançés se cachent partout autour de nous. Ils sont omniprésents dans dans l’alimentaire comme le montre cette réclame pour du chocolat Delespaul-Havez (1). Ils sont depuis longtemps associés à l’idée d’outillage, car c’est bien le seul objet 1D qui permet de se déplacer dans un espace 3D, comme illustré par ces cordes ancestrales visibles au musée Égyptien de la ville de Turin (3). Un outillage que maîtrise à la perfection le caméléon (4). Dans la nature les exemples sont innombrables et on montre ici des cheveux blonds (6) et des cheveux de Pélé (Wikimedia-Commons) (5). Ces derniers sont produits lors d’éruptions volcaniques et ont une structure semblable à la barbe à papa. Finalement certains artistes utilisent des jets de peinture dans leurs processus créatifs. L’exemple le plus criant est sans doute Jackson Pollock et en particulier son oeuvre *Untitled*, 1948–49 (2).

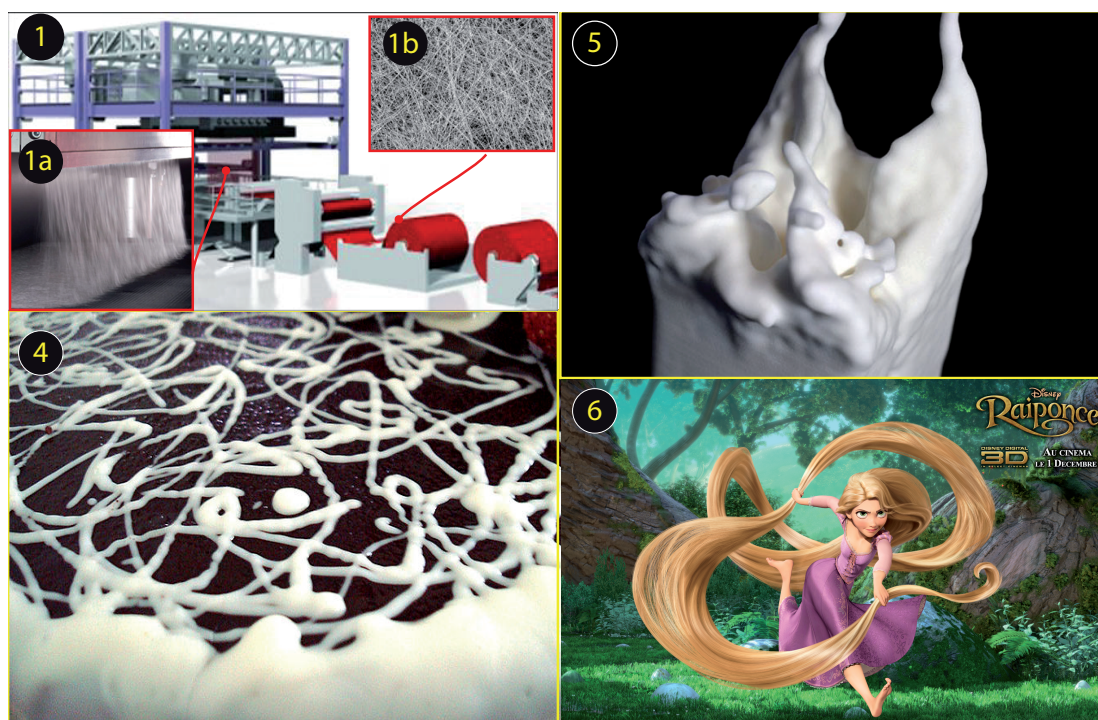


FIGURE 1.2 – Les écoulements de filaments visqueux et viscoélastiques ont des applications techniques. (1) - le procédé de fabrication des matériaux non tissés. Des milliers de filaments de polymères fondus chutent et s’entremêlent en touchant un tapis roulant (1-a). En se vitrifiant ils créent un réseau solide (1-b) qui est utilisé comme un tissu. (4) Glaçage ondulé sur un gâteau au chocolat .(5) Vase fabriqué par impression 3D par Kwok Pan Fung (supabold). La maîtrise de la dynamique des filaments est cruciale dans tous les domaines d’impression 3D, artistique, électronique et biologique/biomédicale.(6) Le film Raiponce de Disney™ utilise la dynamique des tiges élastiques.

une grande quantité en Figure 1.1-5. Leur formation est le résultat de la thermique couplée à une rhéologie complexe et à la dynamique des filaments étudiée ici. Ils sont, à bien des égards, similaires à certaines applications technologiques usant des instabilités de filaments visqueux.

1.2 Des enjeux technologiques

On l’a vu précédemment, les filaments visqueux ou élastiques sont des objets ordinaires avec lesquels nous interagissons consciemment ou non au quotidien. Il n’est donc pas surprenant qu’ils revêtent une importance considérable dans divers processus industriels ou techniques. Plutôt que de faire une liste exhaustive de ces derniers je vais en donner quatre exemples, chacun très différent de l’autre : un exemple historique, un

exemple gourmand, une perspective et un exemple numérique. Un des procédés les plus connus usant d'instabilités de filaments est celui de fabrication de matériau non tissés (non-woven material - fig1.2-1). Dans un tel procédé, des milliers de filaments de polymère fluide ($T > T_g$ où T_g est la température de transition vitreuse) sont extrudés et coulent en direction d'un tapis roulant (fig1.2-1b). En arrivant sur ce tapis ils créent en s'entrelaçant les uns les autres un matériau de faible densité (fig1.2-1c). Bien sûr ceci s'accompagne d'un refroidissement du polymère qui donne au matériau ainsi formé sa résistance mécanique. Ce procédé, à la façon des cheveux de Pélé est complexe et mêle à lui seul plusieurs disciplines scientifiques. Au demeurant la dynamique des filaments joue un rôle prépondérant. On notera par ailleurs qu'ici l'instabilité des filaments est recherchée car elle est le moteur de la "porosité" du matériau final.

Ce genre d'instabilité peut aussi bien se retrouver dans nos cuisines lorsque l'on dépose du glaçage sur un gâteau (fig1.2-4). Plus généralement, on rencontre de multiples exemples de fils visqueux ou visco-élastiques dans l'industrie alimentaire ou la mise en forme des matériaux (filage de la fibre de verre...)

Pour d'autres procédés ces instabilités sont perçues comme nuisibles. On en donne ici un exemple : l'impression de type "jet d'encre". Elle semblait condamnée à disparaître, mais a fait peau neuve au tournant des années 2000 avec la prolifération des imprimantes 3D et autres imprimantes complexes. Une imprimante 3D permet des créations intéressantes comme le vase "fluide" présenté en Figure 1.2-5. De nos jours tout est envisagé de l'impression de protéines à celle de composants électroniques ... Pour en arriver là il faut éviter à tout prix la moindre instabilité et la connaissance de la dynamique des filaments est cruciale pour l'optimisation des procédés.

Pour finir, on donne l'exemple d'un domaine où la prédiction de cette dynamique exacte ou approchée est une fin en soit : il s'agit du domaine des effets spéciaux [5]. Les poils d'un pinceau numérique ou les cheveux de Raiponce dans le film du même nom sont des filaments qui à chaque fois sont animés par des modèles empruntant de plus en plus à la réalité physique.

A travers ces exemples on a pu s'apercevoir que la dynamique filaments élastiques comme visqueux est un enjeu technologique. Au delà de cela, il existe aussi des raisons plus fondamentales et étonnantes qui justifient leur intérêt.

1.3 Des objets fins mais complexes

Dans ce paragraphe on fait le choix de se concentrer uniquement sur les filaments visqueux qui d'ailleurs reçoivent une large attention par la suite. Plus précisément on décrit ce qui est très certainement, sur le plan technique et conceptuel l'expérience la plus "simple" en mécanique des fluides : on propose de faire chuter un filament fluide sur une surface fixe. En dépit de la simplicité recherchée de cette expérience on a la surprise d'observer une myriade de comportements plus ou moins riches.

Plongeons de nouveau dans le quotidien pour observer le ressaut hydraulique que cha-

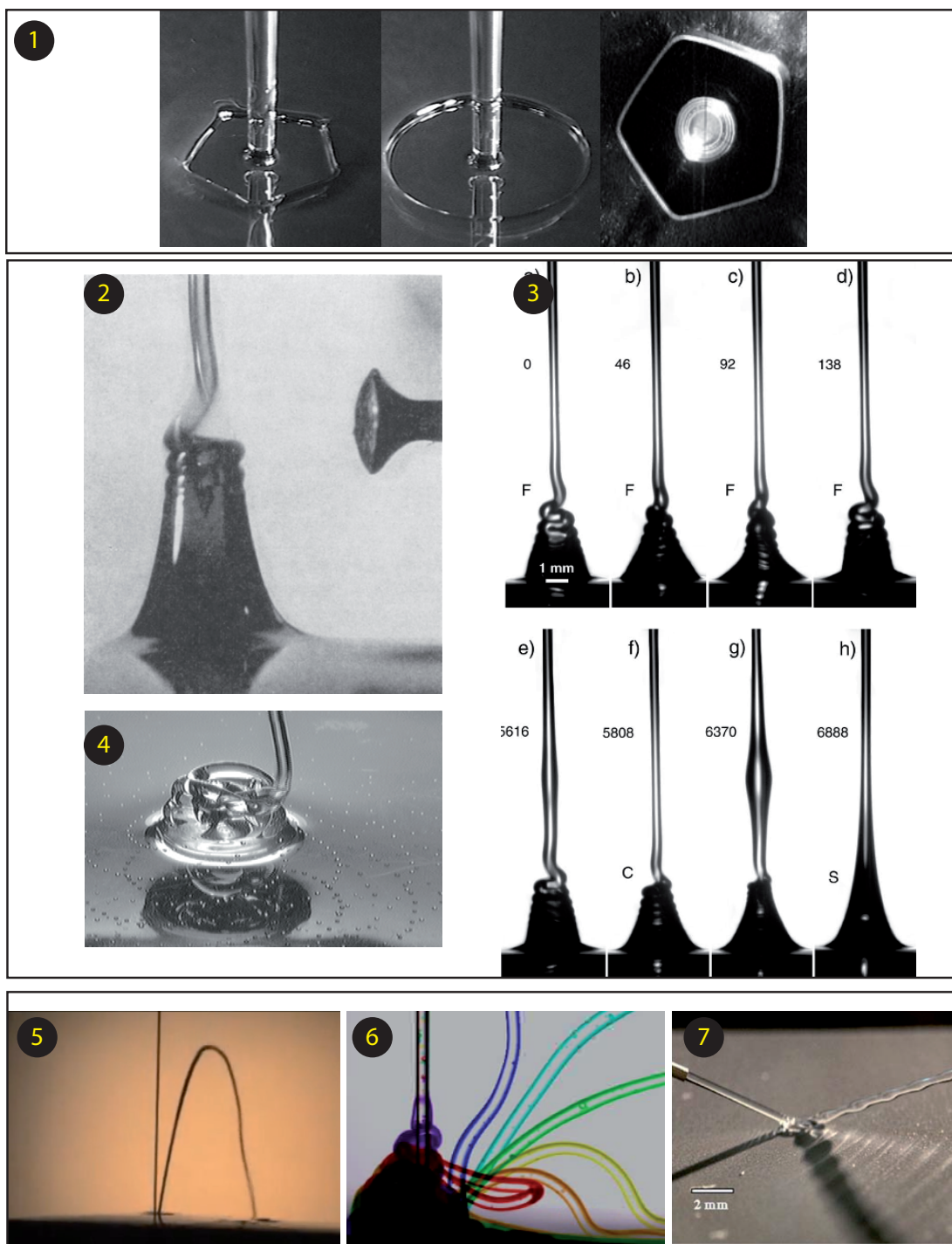


FIGURE 1.3 – L'expérience la plus simple de mécanique des fluide, faire chuter un filament liquide sous l'effet de la gravité sur une surface solide et fixe, est étonnamment riche. (1) Ressauts hydrauliques en tout genre [6]. (2) Transition entre repliements de liquide, enroulements et écoulements simples. (3) Expérience pionnière d'enroulements visqueux [7]. (4) Génération spontanée d'onde spirale de bulles [8] lors d'une expérience d'enroulement visqueux. [8] (5)-(6) Effet Kaye [9, 10] (7) Un ressaut d'eau projeté sur une surface hydrophobe [11]

cun peut voir au fond d'un évier. Habituellement celui-ci est circulaire. Ellegaard et al.[6] ont montré qu'il existait aussi une variété de ressauts aux contours polygonaux. Avec un fluide plus visqueux ces ressauts font place aux piles de fluides qui se forment par accumulation d'enroulements visqueux (le miel sur la tartine évoqué plus haut). Ces "cordes" visqueuses se déforment ainsi à la suite de leur flambage visqueux. Ces derniers peuvent s'enrouler en cercles concentriques comme rapporté par Barnes et Woodcock en 1958 [7] ou bien comme observé plus récemment par Habibi et al.[12] en se repliant sur eux-mêmes tout en tournant. Le Chapitre 3 traite spécialement de ces enroulements circulaires alors que le Chapitre 4 traite d'une variation de ces problèmes particulièrement singulière et intéressante : "la machine à coudre fluide".

De façon encore plus surprenante il existe des situations où le filament peut rebondir sur la surface où il a été projeté sans presque altérer sa forme (on ne parle donc pas d'éclaboussures). L'exemple le plus connu a été mis en évidence par Kaye [9] et a ensuite été expliqué par Versluis et al. [10]. En versant un filament non newtonien (l'expérience fonctionne avec du shampoing) dans un réservoir de ce même fluide on peut, pour certains paramètres, observer ce filament entrer et rejaillir du bain (comme illustré en Figure 1.3). Bien que les mécanismes en jeu soient drastiquement différents, Celestini et al. [11] ont rapporté une observation très semblable en projetant un filet d'eau sur une surface hydrophobe. On notera que pour les deux derniers exemples l'effet a été provoqué en jouant avec la rhéologie ou bien en fonctionnalisant la surface de dépôt. Cependant, les filaments "seuls" peuvent eux aussi naturellement évoluer vers des systèmes très complexes. Prenons l'exemple des enroulements visqueux. Pour certains paramètres l'enroulement entre spontanément en précession. Alors deux cercles déposés consécutivement se coupent en diverses intersections. Des bulles d'air sont capturées à ces intersections, advectées dans la pile fluide et rejetées plus loin dans le bain. Elles forment des ondes spirales [8] comme illustré en Figure 1.3.

Le contraste entre la simplicité¹ des expériences et la beauté et la richesse des résultats constitue à lui seul une raison valable de s'intéresser à ces filaments visqueux et à leur dynamique. Nous allons au prochain paragraphe donner à travers un exemple issu cette fois-ci du domaine des filaments élastiques une piste pour commencer à comprendre la dynamique de ces objets.

1.4 Élastique ou visqueux : la géométrie est au cœur du problème

Du fait de leur rapport d'aspect, les filaments sont des objets quasi-unidimensionnels. Cependant, ils ne sont pas pour autant contraints spatialement et peuvent *a priori* se déformer dans l'espace. Au Chapitre 2 nous montrerons en détail comment ces déformations sont couplées aux contraintes exercées sur la tige. En outre, une expérience volontaire-

1. D'apparence seulement bien sur. On sait bien que mettre en oeuvre une expérience contrôlée peut être affreusement complexe même si celle-ci a l'air simple.

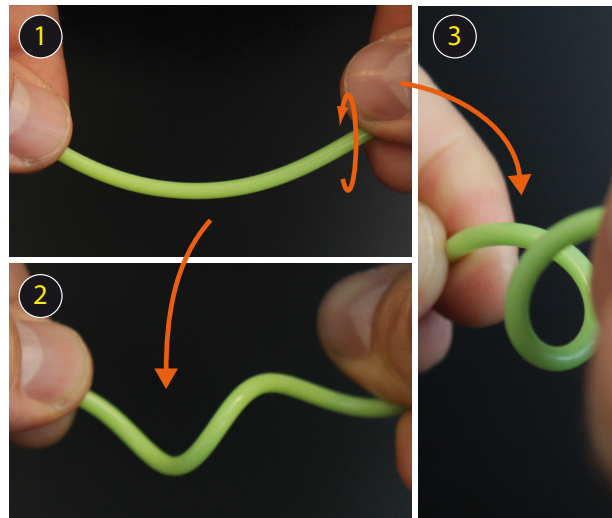


FIGURE 1.4 – Illustration du couplage entre une rotation à un bord et déformation. En partant de l'état (1) on impose une rotation d'ordre π avec la main gauche sans changer la position des mains. On observe en (2) et (3) que la tige élastique prend une forme spirale qui minimise l'énergie élastique : la torsion imposée par l'opérateur est convertie en vrillage

ment simpliste peut nous livrer un début de la réponse. Considérons une tige élastique de longueur donnée qui est maintenue entre les deux mains de l'opérateur avec un léger ventre. Ce dernier exerce alors avec sa main droite une rotation d'angle π dans un sens arbitraire. Ce changement de condition de bord pourrait grossièrement conduire à deux situations. La rotation est absorbée (1) par torsion répartie, sans modification de la ligne neutre ou (2) par une déformation de la ligne neutre ce qui évite de créer de la torsion. La réponse se trouve sur la Figure 1.4. La ligne centrale sort toute entière de son plan initial passant d'une configuration en chaînette à une hélice. La tige toute entière s'est déformée pour satisfaire la rotation appliquée à un de ses bords, elle présente maintenant une forte non linéarité géométrique. La torsion imposée par la rotation a été convertie en vrillage au sens géométrique du terme [13] (voir le Chap 2).

Cet exemple montre bien le couplage qu'il peut y avoir entre efforts et géométrie sur de tels objets : on parle de non-linéarité géométrique. L'importance de la géométrie sera d'ailleurs un thème central dans ce manuscrit au travers de la DYNAMIQUE DES FILAMENTS ÉLASTIQUES ET VISQUEUX.

Filaments visqueux et géométrie

Résumé

Les questions difficiles se cachent parfois dans des lieux insoupçonnés tel que le petit déjeuner. Lorsqu'un filament de miel chute sur une tartine il se forme généralement des boucles circulaires qui en s'accumulant créent cette pile de miel que tout un chacun a certainement déjà eu le loisir d'observer. Bien que communs ces écoulements sont remarquables : on s'attendrait à ce qu'un tel filament coule "droit" puis s'étale au lieu de se comporter comme une corde et de "s'entortiller" pour former une pile. D'ailleurs le problème est rendu difficile par ce type de géométrie. Ce chapitre met en place les outils nécessaires pour traiter la dynamique des filaments visqueux. Nous allons (1) introduire les équations de la dynamique des tiges visqueuses en coordonnée **Lagrangienne**, (2) la discrétisation numérique qui en découle et (3) le fonctionnement général du code numérique dont on se servira par la suite.

For english readers : this chapter mostly relies on an article from the author in [2]

Nota : Je n'ai que marginalement participé au développement du code qui existait dans une version primitive au début de ma thèse. J'ai mis en place d'un protocole de validation et montré qu'un réglage fin des paramètres permettait un bien meilleur accord avec l'expérience que ce qui avait été obtenu antérieurement [14, 15]. J'ai aussi participé à l'élaboration du traitement raffiné des conditions aux limites évoqué ci-après. J'ai développé des modèles de substrats servant à tester la stabilité de ces écoulements. Ces travaux préliminaires, qui n'ont pas abouti, visaient à expliquer les ondes spirales de bulles dont le chapitre d'introduction montre un cliché (Fig. 1.3). J'ai construit ma compréhension de la dynamique des tiges visqueuses en modifiant le code, notamment au travers du lien entre les équations discrètes et continues. Aussi nous débutons le manuscrit par ces mêmes équations.

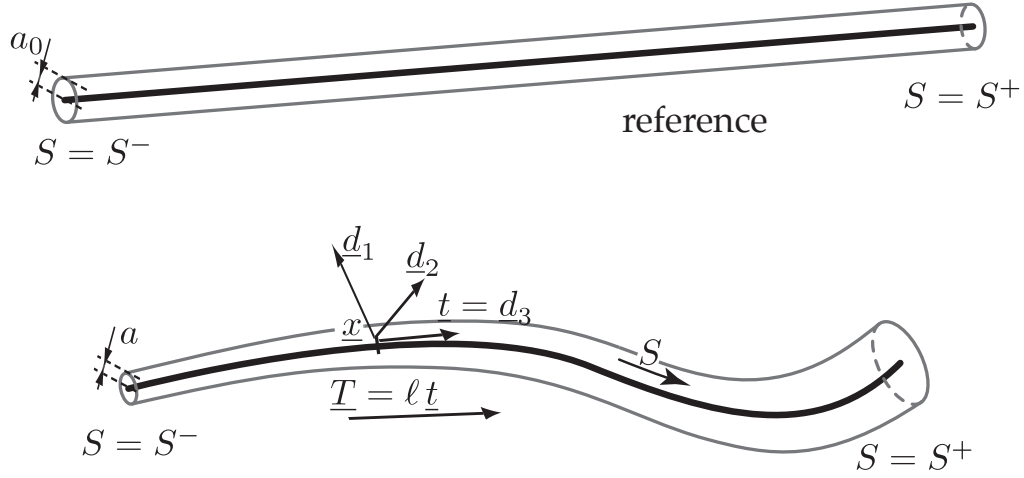


FIGURE 2.1 – Configurations de référence et actuelle du filament visqueux

2.1 Au coeur du problème : la géométrie

Il existe une multitude de possibilités pour décrire la géométrie d'une tige dans l'espace. Nous présentons ici une façon Lagrangienne d'y parvenir qui s'avérera particulièrement utile lors de la discrétisation des équations de la dynamique de ces objets. On introduit s l'abscisse curviligne Eulérienne et S l'abscisse curviligne Lagrangienne associées à la ligne centrale de la tige considérée et t le temps. S est définie sur la configuration de référence suivante : un cylindre de longueur infinie et de rayon uniforme a_0 comme illustré en figure 2.1.

2.1.1 Cinématique

A un temps quelconque t on définit par $\underline{x}(S, t)$ la position de la ligne centrale de la tige (figure 2.1). La tangente matérielle de à la tige est notée $\underline{T}(S, t)$ et définie par :

$$\underline{T}(S, t) = \underline{x}'(S, t). \quad (2.1)$$

où la notation $'$ désigne la dérivée partielle par rapport à S ie $\partial/\partial S$. $\underline{T}(S, t)$ a pour norme $\ell(S, t)$ et mesure le taux d'étirement de la ligne centrale par rapport à la configuration de référence. On note donc que $\underline{T}(S, t)$ n'est pas forcément unitaire.

$$\ell(S, t) = |\underline{T}(S, t)| = \left| \frac{\partial \underline{x}(S, t)}{\partial S} \right|. \quad (2.2)$$

La tangente unitaire est définie quant à elle en normant le vecteur précédent :

$$\underline{t}(S, t) = \frac{\underline{T}(S, t)}{\ell(S, t)}. \quad (2.3)$$

On notera ici la relation suivante :

$$\underline{t} \cdot \dot{\underline{t}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \underline{t}^2}{\partial t} = 0. \quad (2.4)$$

Les vecteurs \underline{t} et $\dot{\underline{t}}$ sont donc orthogonaux.

Dans le formalisme Lagrangien l'abscisse curviligne s est une quantité secondaire. On peut néanmoins la reconstruire en intégrant l'équation suivante : $ds = |d\underline{x}|$, i.e

$$s'(S, t) = \frac{\partial s(S, t)}{\partial S} = \ell(S, t).$$

On définit le taux de déformation Lagrangien d par l'expression suivante :

$$d(S, t) = \frac{\partial \ell(S, t)}{\partial t}, \quad (2.5)$$

$d(S, t)$ mesure le taux d'étirement par unité de temps et permet d'évaluer les efforts visqueux liés à l'étirement du filament.

La vitesse \underline{u} s'exprime simplement par la différentiation de la position par rapport au temps :

$$\underline{u}(S, t) = \frac{\partial \underline{x}(S, t)}{\partial t}, \quad (2.6)$$

de même pour l'accélération :

$$\underline{\gamma}(S, t) = \frac{\partial \underline{u}(S, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \underline{x}(S, t)}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

Le taux de déformation $d(S, t)$ et la vitesse \underline{u} sont liés par la relation suivante :

$$d(S, t) = \frac{\partial \ell}{\partial t} = \frac{1}{2\ell} \frac{\partial (\ell^2)}{\partial t} = \frac{1}{2\ell} \frac{\partial (\underline{T}^2)}{\partial t} = \frac{1}{\ell} \underline{T} \cdot \frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = \underline{t}(S, t) \cdot \frac{\partial \underline{u}(S, t)}{\partial S}. \quad (2.8)$$

La dernière égalité est obtenue par :

$$\frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \underline{u}}{\partial S}.$$

Une autre égalité utile par la suite s'obtient en injectant la définition de ℓ (équation (2.3)), $\underline{T} = \ell \underline{t}$, dans le membre de gauche de l'équation ci-dessus. En développant la dérivation temporelle on obtient $\dot{\ell} \underline{t} + \ell \dot{\underline{t}} = \underline{u}'(S)$. On peut réaliser une projection de l'égalité obtenue sur l'espace orthogonal à \underline{t} par $\underline{P}_\perp(\underline{t}, \cdot)$. De façon générique on définit $\underline{P}_\perp(\underline{q}, \underline{a})$ la projection de \underline{a} sur le plan l'orthogonal à \underline{q} par :

$$\underline{P}_\perp(\underline{q}, \underline{a}) = (\underline{1} - \underline{q} \otimes \underline{q}) \cdot \underline{a} = \underline{a} - (\underline{q} \cdot \underline{a}) \underline{q}, \quad (2.9)$$

Appliqué à notre cas ceci donne $\underline{P}_\perp(\underline{t}, \underline{t}) = \underline{0}$ et $\underline{P}_\perp(\underline{t}, \dot{\underline{t}}) = \dot{\underline{t}}$ (cf eq 2.4), ce qui nous donne finalement :

$$\frac{\partial \underline{t}(S, t)}{\partial t} = \frac{1}{\ell(S, t)} \underline{P}_\perp \left(\underline{t}(S, t), \frac{\partial \underline{u}(S, t)}{\partial S} \right). \quad (2.10)$$

Cette équation permet d'exprimer la dérivée temporelle de la tangente en fonction de la géométrie de la ligne centrale et la vitesse \underline{u} .

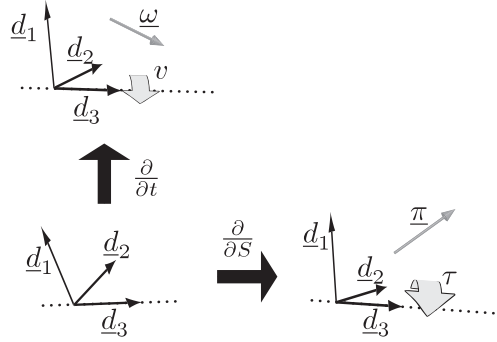


FIGURE 2.2 – Vecteurs de Darboux associés à la dérivation spatiale (Lagrangienne) et temporelle du repère matériel : la vitesse de rotation $\underline{\omega}$ et le vecteur courbure matérielle $\underline{\pi}$. v et τ représentent respectivement leur composante tangentielle.

2.1.2 Incompressibilité du fluide

Le fluide visqueux est considéré comme incompressible et nous allons exprimer la conservation du volume entre la configuration actuelle et celle de référence. En configuration de référence le cylindre a un rayon uniforme a_0 et une section $A_0 = \pi a_0^2$. Le rayon de la tige en configuration actuelle est noté $a(S, t)$, a une section $A(S, t)$ et un moment d'inertie $I(S, t)$. On fait l'hypothèse que la tige reste localement cylindrique ce qui nous permet d'écrire :

$$A(S, t) = \pi a^2(S, t), \quad I(S, t) = \frac{\pi a^4(S, t)}{4}. \quad (2.11)$$

Le volume de fluide contenu dans une portion de tige de longueur infinitésimale ds en configuration actuelle est $A(S, t) ds = A(S, t) \ell(S, t) dS$ et vaut $A_0(S, t) dS$ en configuration de référence (figure 2.1.). La conservation du volume nous conduit aux identités suivantes :

$$a(S, t) = \frac{a_0}{\sqrt{\ell(S, t)}}, \quad A(S, t) = \frac{A_0}{\ell(S, t)}, \quad I(S, t) = \frac{I_0}{\ell^2(S, t)} \quad (2.12)$$

L'indice $_0$ désigne la configuration de référence pour laquelle nous avons fait le choix $\ell_0 = 1$. En particulier le moment d'inertie de celle-ci est donc $I_0 = \pi a_0^4/4$.

2.1.3 Repère matériel et conséquences

L'orientation relative des sections de la tige est une quantité essentielle pour décrire à la dynamique de ces objets. Ceci a succinctement été mis en évidence au Chapitre 1 dans le cas élastique. Dans le cas fluide, la rotation relative des sections matérielles induit un cisaillement visqueux dans la section qui est source de moment interne. Dans le but de suivre ces rotations on introduit le repère matériel $(\underline{d}_1(S, t), \underline{d}_2(S, t), \underline{d}_3(S, t))$, attaché aux sections : ce repère suit donc le déplacement des particules fluides. Nous nous plaçons dans le cadre de l'hypothèse cinématique de Kirchhoff [2] et imposons par la suite : (i)

que le repère matériel soit orthonormal, et (ii) qu'il soit compatible avec la ligne centrale de la tige *i.e*

$$\underline{d}_3(S, t) = \underline{t}(S, t). \quad (2.13)$$

Cette relation cinématique contient l'essentiel de la mécanique des tiges : Il y a un couplage entre les rotations du repère matériel et le déplacement de la ligne centrale. Le vecteur de Darboux associé à la dérivation temporelle du repère matériel est le vecteur vitesse de rotation noté $\underline{\omega}$ défini de façon implicite par :

$$\frac{\partial \underline{d}_i(S, t)}{\partial t} = \underline{\omega}(S, t) \times \underline{d}_i(S, t) \quad (2.14)$$

où $i = 1, 2, 3$. La vitesse angulaire de rotation v est elle définie par la relation suivante :

$$v(S, t) = \underline{\omega}(S, t) \cdot \underline{t}(S, t). \quad (2.15)$$

En prenant le produit vectoriel à gauche de l'équation (2.14) on peut donner une définition explicite du vecteur vitesse de rotation :

$$\underline{\omega}(S, t) = \underline{t}(S, t) \times \dot{\underline{t}}(S, t) + v(S, t) \underline{t}(S, t). \quad (2.16)$$

La dérivation spatiale par S permet de définir un second vecteur de Darboux ; le vecteur de courbure matérielle $\underline{\pi}(S, t)$:

$$\frac{\partial \underline{d}_i(S, t)}{\partial S} = \underline{\pi}(S, t) \times \underline{d}_i(S, t), \quad (2.17)$$

avec $1 \leq i \leq 3$. Sa composante tangentielle notée $\tau(S, t)$ est la torsion cinématique :

$$\tau(S, t) = \underline{\pi}(S, t) \cdot \underline{t}(S, t). \quad (2.18)$$

Elle mesure le taux de rotation du repère autour de la tangente : $\tau(s, t) = \underline{d}'_1 \cdot \underline{d}_2$. On note qu'elle peut être non nulle même lorsque la tige est rectiligne. De même que précédemment on peut donner une expression explicite de $\underline{\pi}$:

$$\underline{\pi}(S, t) = \underline{K}(S, t) + \tau(S, t) \underline{t}(S, t), \quad (2.19)$$

où on a introduit la binormale Lagrangienne $\underline{K}(S, t)$:

$$\underline{K}(S, t) = \underline{t}(S, t) \times \frac{\partial \underline{t}(S, t)}{\partial S}. \quad (2.20)$$

On remarquera que la définition de $\underline{K}(S, t)$ repose uniquement sur la ligne centrale et non sur le repère matériel. Comme dit précédemment il y a un lien entre l'évolution temporelle de la courbe centrale et les rotations du repère matériel. Cette relation s'obtient en s'assurant de la compatibilité des définitions précédentes, à savoir :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \underline{d}_i(t, S)}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial \underline{d}_i(t, S)}{\partial t} \right).$$

En utilisant respectivement (2.14) et (2.17) on a :

$$\frac{\partial(\underline{\pi} \times \underline{d}_i)}{\partial t} = \frac{\partial(\underline{\omega} \times \underline{d}_i)}{\partial S}.$$

Ce qui en développant les deux membres de l'équation précédente donne :

$$\left(\frac{\partial \underline{\pi}}{\partial t} - \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial S} \right) \times \underline{d}_i = -\underline{\pi} \times (\underline{\omega} \times \underline{d}_i) + \underline{\omega} \times (\underline{\pi} \times \underline{d}_i) = (\underline{\omega} \times \underline{\pi}) \times \underline{d}_i.$$

Ce qui nous amène à l'identité suivante :

$$\boxed{\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial S} = \frac{\partial \underline{\pi}}{\partial t} - \underline{\omega} \times \underline{\pi} = \frac{\tilde{\partial} \underline{\pi}(S, t)}{\tilde{\partial} t}}. \quad (2.21)$$

en introduisant l'opérateur dérivée entraînée avec le repère du fil $\frac{\tilde{\partial}}{\partial t}(S, t)$ tel que pour tout vecteur \underline{a} :

$$\frac{\tilde{\partial} \underline{a}(S, t)}{\tilde{\partial} t} = \frac{\partial \underline{a}(S, t)}{\partial t} - \underline{\omega}(S, t) \times \underline{a}(S, t). \quad (2.22)$$

2.2 Construction des potentiels de dissipation visqueux

2.2.1 Taux de déformation

On définit par \underline{e} le vecteur repérant les taux de déformations à prendre en compte pour définir la torsion et la flexion du filament :

$$\underline{e} = \frac{\partial \underline{\omega}(S, t)}{\partial S}. \quad (2.23)$$

On notera que lorsqu'une tige se comporte comme un corps rigide alors par définition $\underline{\omega}$ ne dépend plus de S et on vérifie bien $\underline{e} = \underline{0}$.

Le principe de ligne brisée sera introduit plus tard au paragraphe 2.4, et on aura l'occasion de revenir sur ce qui va être écrit maintenant : j'explique de façon un peu anticipée la raison du travail qui va suivre. La simulation numérique directe des filaments visqueux passe par l'évaluation discrète des efforts visqueux de torsion et flexion. Imaginons que nous cherchons à mettre en place cette simulation. Alors la tige est représentée par une ligne brisée comme une succession de sommets reliés par des segments (voir le § 2.4). D'après (2.23) ceci pourrait se faire par différence finie des vitesses de rotation $\underline{\omega}_i$ entre deux segments adjacents. Cette quantité serait alors définie sur un sommet. Une fois évaluée il s'agirait de reconstruire les forces de flexion et torsion. Cette construction passe par la projection de $\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial S}$ sur la direction tangente (pour évaluer la torsion) au sommet : *problème, cette direction n'est pas définie sur les sommets. On peut s'accommoder de cette difficulté mais ce schéma numérique n'est pas très naturel.* Il faut donc trouver une alternative à l'expression (2.23). C'est ce que l'on commence à mettre en place dans la suite et plus généralement par le truchement des potentiels de dissipation au paragraphe 2.2.3.

Pour commencer on décompose \underline{e} et introduit sa composante tangente e_t et normale \underline{e}_b :

$$\underline{e}(S, t) = e_t(S, t) \underline{t}(S, t) + \underline{e}_b(S, t), \quad \underline{e}_b(S, t) \cdot \underline{t}(S, t) = 0. \quad (2.24)$$

La première est reliée à la torsion (twist en anglais) et la seconde à la torsion en flexion (bending en anglais). On cherche maintenant à les exprimer en usant du fait que $\underline{e} = \frac{\tilde{\partial}\pi(S, t)}{\tilde{\partial}t}$ par (2.21) et que :

$$e_t(S, t) = \underline{e}(S, t) \cdot \underline{t}(S, t) \quad (2.25a)$$

$$\underline{e}_b(S, t) = \underline{P}_\perp(\underline{t}(S, t), \underline{e}(S, t)) \quad (2.25b)$$

La dérivée entraînée commute avec l'opérateur projection¹ ; la décomposition de $\underline{\pi}$ dans l'équation (2.19) donne donc :

$$e_t(S, t) = \frac{\partial\tau(S, t)}{\partial t} \quad (2.26a)$$

$$\underline{e}_b(S, t) = \frac{\tilde{\partial}\underline{K}(S, t)}{\tilde{\partial}t}. \quad (2.26b)$$

On notera qu'en élasticité on mesure la déformation par τ et \underline{K} alors qu'avec des fluides visqueux, il y a une dérivée (entraînée) de plus. On rappelle ici que la description de l'étirement de la tige est plus simple : (cf. eq (2.8)) :

$$d(S, t) = \frac{\partial\ell(S, t)}{\partial t}. \quad (2.27)$$

2.2.2 Lien entre déplacement $\underline{x}(S, t)$ et torsion

On explique ici – par une identité géométrique – le lien entre le déplacement de la ligne centrale (au travers des dérivées de $\underline{x}(S, t)$) et la torsion mesurée par τ . Dans des travaux antérieurs [14] une identité similaire a été utilisée pour parvenir à une discrétisation naturelle des tiges élastiques. Nous poursuivons ici une stratégie similaire. Revenons dans un premier temps à la définition de e_t , à savoir (2.23). On utilise alors l'expression de $\underline{\omega}$ fournie par la condition de compatibilité (2.21) ce qui donne :

$$e_t = \underline{t} \cdot \frac{\partial\underline{\omega}}{\partial S} = \frac{\partial(\underline{t} \cdot \underline{\omega})}{\partial S} - \frac{\partial\underline{t}}{\partial S} \cdot \underline{\omega}. \quad (2.28)$$

L'équation (2.16), nous donne une expression alternative de $(\underline{t} \cdot \underline{\omega})$ qui n'est autre que la vitesse de rotation ; ce qui donne finalement :

$$e_t = \frac{\partial v(S, t)}{\partial S} - (\underline{\pi} \times \underline{t}) \cdot \underline{\omega}. \quad (2.29)$$

1. Cela dérive du fait que $\frac{\tilde{\partial}\underline{t}_i}{\tilde{\partial}t} = \underline{0}$

On remplace $\underline{\pi}$ dans le membre de droite par sa décomposée $\underline{K} + \tau \underline{t}$. En développant ensuite le produit mixte on montre que :

$$e_t = \frac{\partial v(S, t)}{\partial S} + \underline{K}(S, t) \cdot \frac{\partial \underline{t}(S, t)}{\partial t}. \quad (2.30)$$

Cette équation revêt une importance particulière. D'un point de vue pratique il apparaît que l'on peut paramétriser la tige avec comme variables principales la position $\underline{x}(S, t)$ et la vitesse de rotation scalaire $v(S, t)$ et pour autant construire le taux de déformation en torsion en combinant les relations $\underline{K} = \underline{t} \times \underline{t}'$ et $\underline{t} = \underline{x}'$. Plus important encore l'équation (2.30) démontre le couplage existant entre le déplacement de la ligne centrale et la torsion. La torsion est une fonction de v mais aussi de la courbure et de dérivée la temporelle de \underline{t} par le second membre de (2.30). C'est ce terme qui est responsable de la non linéarité de ces filaments. Cette équation peut être vue comme une variante du théorème de Călugăreanu-White-Füller (CWF) qui n'est pas discuté ici mais dont une revue peut être trouvée dans [16]. Il a particulièrement été utilisé pour décrire l'ADN super-enroulée [17, 18, 19, 20] et la dynamique des filaments élastiques dans un fluide visqueux [21, 22] ou la mécanique des protéines [23].

2.2.3 Proposition de potentiels de Rayleigh

Dans le formalisme Lagrangien on peut décrire la dynamique des tiges visqueuses par l'intermédiaire de potentiels de Rayleigh [24]. Ces potentiels peuvent être exprimés pour une configuration donnée $\underline{x}(S)$ à un temps donné t en fonction des vitesses $\hat{\underline{u}}(S)$ et $\hat{v}(S)$. Ici les notations $\hat{\cdot}$ marquent le fait que ces potentiels peuvent être évalués formellement pour des vitesses virtuelles. Le schéma numérique visera à sélectionner les deux vitesses $\underline{u}(S)$ et $v(S)$ parmi ces vitesses virtuelles permettant de passer de t à $t + \delta t$.

Le potentiel de dissipation a trois contributions dues à l'étirement (s pour "stretching"), à la flexion (b pour "bending") et la torsion (t pour "twist") :

$$\mathcal{D}(\underline{x}; \hat{\underline{u}}, \hat{v}) = \mathcal{D}_s(\underline{x}; \hat{\underline{u}}) + \mathcal{D}_b(\underline{x}; \hat{\underline{u}}, \hat{v}) + \mathcal{D}_t(\underline{x}; \hat{\underline{u}}, \hat{v}). \quad (2.31)$$

Chacune de ces contributions est proportionnelle au carré du taux de déformation qui lui correspond. On commence par donner l'expression des coefficients de proportionnalité qui lient potentiel et déformation ; les expressions complètes des potentiels sont données plus loin en (2.35). Ces coefficients de proportionnalité sont directement dérivés de la loi comportementale newtonienne.

La composante d'étirement (ou de compression) est proportionnelle au module de Trouton [25] :

$$D(\ell) = 3\mu A(\ell) = \frac{D_0}{\ell^2}, \quad (2.32)$$

où on note μ la viscosité dynamique du fluide. Ici $D_0 = 3\mu A_0 = 3\mu(\pi a_0^2)$ est la valeur du coefficient d'étirement de la configuration de référence. Les coefficients de torsion C et de flexion B ont pour expression [26, 27]

$$C(\ell) = 2\mu I(\ell) = \frac{C_0}{\ell^2}, \quad B(\ell) = 3\mu I(\ell) = \frac{B_0}{\ell^2}, \quad (2.33)$$

où $C_0 = 2\mu I_0$ et $B_0 = 3\mu I_0$ sont les modules respectifs de la configuration de référence. Ici $l_0 = 1$. Avant de proposer les expressions des potentiels il est utile de définir les opérateurs \mathcal{V} et \mathcal{W} .

$$\underline{\mathcal{V}}(\underline{x}; \hat{\underline{u}}; S) = \frac{1}{\ell(S)} \underline{P}_\perp (\underline{t}(S), \hat{\underline{u}}'(S)). \quad (2.34a)$$

$$\underline{\mathcal{W}}(\underline{x}; \hat{\underline{u}}, \hat{v}; S) = \hat{v}(S) \underline{t}(S) + \underline{t}(S) \times \underline{\mathcal{V}}(\underline{x}; \hat{\underline{u}}; S). \quad (2.34b)$$

On notera qu'en injectant les vitesses actuelles dans ces opérateurs on retrouve alors \underline{u} et $\underline{\omega}$ respectivement par (2.10) et (2.16).

Nous proposons *a priori* les expressions des potentiels de dissipation de Rayleigh :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_s(\underline{x}; \hat{\underline{u}}) &= \int_{S_-}^{S^+} \frac{D(\ell(S))}{2\ell(S)} \left(\underline{t}(S) \cdot \hat{\underline{u}}'(S) \right)^2 dS \\ &= \int_{S_-}^{S^+} \frac{D(\ell(S))}{2\ell(S)} \left(\mathcal{L}_s(\underline{x}; \hat{\underline{u}}; S) \right)^2 dS, \end{aligned} \quad (2.35a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t(\underline{x}; \hat{\underline{u}}, \hat{v}) &= \int_{S_-}^{S^+} \frac{C(\ell(S))}{2\ell(S)} \left(\underline{t}(S) \cdot \frac{d\underline{\mathcal{W}}(\underline{x}; \hat{\underline{u}}, \hat{v}; S)}{dS} \right)^2 dS \\ &= \int_{S_-}^{S^+} \frac{C(\ell(S))}{2\ell(S)} \left(\mathcal{L}^t(\underline{x}; \hat{\underline{u}}, \hat{v}; S) \right)^2 dS, \end{aligned} \quad (2.35b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_b(\underline{x}; \hat{\underline{u}}, \hat{v}) &= \int_{S_-}^{S^+} \frac{B(\ell(S))}{2\ell(S)} \left(\underline{P}_\perp \left(\underline{t}(S), \frac{d\underline{\mathcal{W}}(\underline{x}; \hat{\underline{u}}, \hat{v}; S)}{dS} \right) \right)^2 dS \\ &= \int_{S_-}^{S^+} \frac{B(\ell(S))}{2\ell(S)} \left(\underline{\mathcal{L}}^b(\underline{x}; \hat{\underline{u}}, \hat{v}; S) \right)^2 dS. \end{aligned} \quad (2.35c)$$

Les notations S^- et S^+ repèrent les coordonnées Lagrangiennes des bords de la tige qui peuvent dépendre du temps. \mathcal{L}_s , \mathcal{L}^t et $\underline{\mathcal{L}}^b$ sont les formes linéaires associées aux trois types de déformations définies implicitement par ce jeu d'équations. Cette formulation permet d'évaluer la dissipation pour tout champ de vitesse $(\hat{\underline{u}}, \hat{v})$, chaque opérateur \mathcal{L} permettant de reconstruire le taux de déformation. On notera que les préfacteurs $1/\ell(S)$ témoignent des aller-retour entre le formalisme Eulérien et Lagrangien.

Cette mise en équation permet de mettre les équations de la dynamique des tiges sous forme variationnelle. Comme l'ont remarqué Batty et Bridson [28] les méthodes variationnelles permettent une discrétisation naturelle dans les problèmes de fluides 3D à surface libre. Le détail de la dérivation de ces potentiels est donné dans [2] on en rappelle ici les principaux résultats.

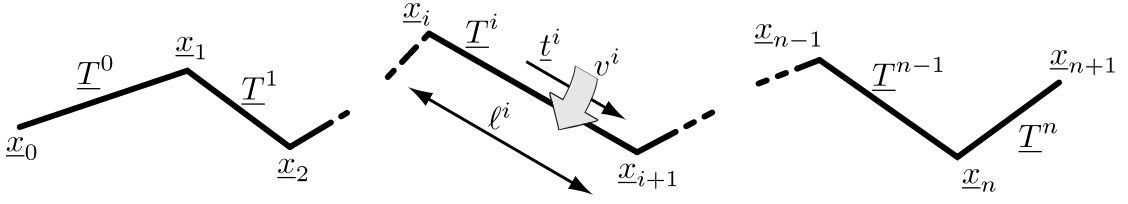


FIGURE 2.3 – Discrétisation : la ligne centrale est représentée par une ligne polygonale. On note que les quantités indicées sont basées sur les sommets alors que celles avec exposants sont basées sur les segments.

2.3 Équation de la dynamique pour les filaments visqueux

La propriété fondamentale des potentiels de Rayleigh est de donner les efforts visqueux par dérivation. Ainsi la résultante interne des efforts visqueux est donnée par :

$$\underline{P}_v(S, t) = - \left. \frac{\partial \mathcal{D}(\underline{x}; \hat{\underline{u}}, \hat{\underline{v}})}{\partial \hat{\underline{u}}(S)} \right|_{(\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{v}}) = (\underline{u}, \underline{v})} \quad (2.36)$$

On note que la dérivée se fait par rapport à la fonction $\hat{\underline{u}}(S)$ et non par sa valeur réelle (sans chapeau). De la même façon on définit le moment interne des efforts de torsion sur la tige :

$$Q_v(S, t) = - \left. \frac{\partial \mathcal{D}(\underline{x}; \hat{\underline{u}}, \hat{\underline{v}})}{\partial \hat{\underline{v}}(S)} \right|_{(\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{v}}) = (\underline{u}, \underline{v})} \quad (2.37)$$

L'équilibre des forces et moments internes s'écrit alors de la façon suivante :

$$\rho A_0 \ddot{\underline{x}}(S, t) = \underline{P}_v(S, t) + \underline{P}(S, t) \quad (2.38a)$$

$$\ell J \dot{v}(S, t) = Q_v(S, t) + Q(S, t). \quad (2.38b)$$

Ici, \underline{P} et Q sont respectivement les densités de forces et moments extérieurs appliqués par unité de longueur dS en configuration actuelle.

L'intérêt des potentiels de dissipation est de faciliter l'implémentation du schéma d'intégration numérique basé sur les équations de la dynamique (2.38). Nous détaillons dans la seconde partie de ce chapitre la discrétisation des tiges visqueuses et la mise en place des conditions aux limites qui ont un impact direct sur les résultats numériques, la vitesse et l'élégance du calcul.

2.4 Aspects discrets du code numérique

Dans le cas discret la tige visqueuse est définie par la ligne polygonale $(\underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{n+1})$ telle que représentée en figure 2.3. La section suivante détaille la construction des différentes quantités physiques. Celles qui suivra met l'accent sur le traitement des conditions aux limites.

2.4.1 Discrétisation

Pour commencer nous cherchons à mettre en place le modèle discret, *il est donc primordial d'assigner de manière cohérente les différentes quantités aux sommets ou aux segments*. Comme mentionné précédemment la ligne polygonale $(\underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{n+1})$ représente la ligne centrale de la tige visqueuse. Le segment qui lie les sommets \underline{x}_i et \underline{x}_{i+1} est noté :

$$\underline{T}^i(t) = \underline{x}_{i+1}(t) - \underline{x}_i(t), \quad (2.39)$$

Par convention les quantités qui ont attrait aux sommets sont notées par des indices i et les quantités relatives aux segments avec un exposant i . La tangente \underline{T}_i ainsi définie n'est pas unitaire et a une norme ℓ^i . On définit donc la tangente unitaire \underline{t}_i comme suit :

$$\ell^i(t) = |\underline{T}^i(t)|, \quad (2.40)$$

$$\underline{t}^i(t) = \frac{\underline{T}^i(t)}{\ell^i(t)}. \quad (2.41)$$

Ces sommets ont par ailleurs une vitesse :

$$\underline{u}_i(t) = \frac{d\underline{x}_i(t)}{dt}. \quad (2.42)$$

En usant de la différence des vitesses entre sommets on peut définir le taux de déformation des segments :

$$d^i(t) = \frac{d\ell^i(t)}{dt} = \underline{t}^i(t) \cdot (\underline{u}_{i+1}(t) - \underline{u}_i(t)), \quad (2.43)$$

Cette définition fait bien sur écho aux équations (2.5) et (2.8). On exprime la dérivation temporelle de la tangente unitaire de façon analogue en usant de la relation (2.10) :

$$\dot{\underline{t}}_i(t) = \frac{1}{\ell^i(t)} \underline{P}_\perp(\underline{t}^i(t), \underline{u}_{i+1}(t) - \underline{u}_i(t)). \quad (2.44)$$

Pour définir les efforts de torsion et flexion nous devons construire une tangente centrée sur les sommets. Nous faisons le choix d'une formulation conservant la norme :

$$\tilde{\underline{t}}_i(\underline{x}_{i-1}, \underline{x}_i, \underline{x}_{i+1}) = \frac{\underline{t}^{i-1} + \underline{t}^i}{|\underline{t}^{i-1} + \underline{t}^i|}. \quad (2.45)$$

La notation tilde sera utilisée ultérieurement pour dénoter les quantités qui, initialement définies sur les segments, sont moyennées pour être définies sur les sommets et *vice-versa*. De la même façon nous faisons le choix de définir la courbure binormale de la façon suivante :

$$\underline{K}_i(t) = \frac{\underline{t}^{i-1} \times \underline{t}^i}{\frac{1}{2}(1 + \underline{t}^{i-1} \cdot \underline{t}^i)}. \quad (2.46)$$

Chaque segment \underline{T}^i transporte un volume de fluide V^i pour une masse m^i . Ces quantités sont réglées à l'initialisation et sont ensuite conservées lors de la simulation sauf dans

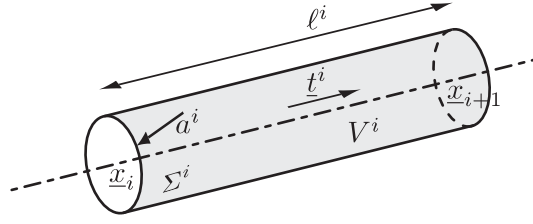


FIGURE 2.4 – Cylindre représentatif d'un segment fluide et quantités associées.

le cas de maillage adaptatif comme décrit au paragraphe (2.4.5). Comme dans le cas continu on définit le rayon de la tige et son aire associée par $a^i(t)$ et $A^i(t)$:

$$A^i(t) = \frac{V^i}{\ell^i(t)}, \quad a^i(t) = \left(\frac{A^i(t)}{\pi} \right)^{1/2}. \quad (2.47)$$

Ces quantités sont basées sur les segments. Nous avons aussi besoin de construire une longueur basée sur les sommets que nous appelons longueur de Voronoï $\tilde{\ell}_i$:

$$\tilde{\ell}_i(t) = \frac{\ell^{i-1}(t) + \ell^i(t)}{2} \quad \text{for } 1 \leq i \leq n. \quad (2.48)$$

Par ailleurs la tangente unitaire \underline{t}^i , définie sur les segments suggère de construire le repère matériel $(\underline{d}_1^i, \underline{d}_2^i, \underline{d}_3^i)$ de façon similaire au cas continu :

$$\underline{d}_3^i(t) = \underline{t}^i(t). \quad (2.49)$$

Ainsi, on obtient le vecteur rotation matérielle discrète $\underline{\omega}^i$:

$$\underline{\omega}^i(t) = v^i(t) \underline{t}^i(t) + \dot{\underline{t}}^i(t) \times \underline{t}^i(t). \quad (2.50)$$

Le premier terme du membre de gauche, $v^i(t)$, est la vitesse de rotation axiale, *ie* la vitesse angulaire du repère autour de la tangente. Le second terme assure la compatibilité avec l'évolution temporelle de repère : $\dot{\underline{t}}^i = \underline{\omega}^i \times \underline{t}^i$.

2.4.2 Potentiels de dissipation discrets

Nous expliquons ici comment construire les potentiels de dissipations discrets à l'aide des quantités introduites ci-dessus et par analogie avec ce qui a été fait dans le cas continu. Nous commençons par introduire les formes linéaires pour l'étirement, la flexion et la torsion. En ce qui concerne l'étirement :

$$\mathcal{L}_s^i(\underline{X}; \hat{\underline{u}}_i, \hat{\underline{u}}_{i+1}) = \underline{t}^i \cdot (\hat{\underline{u}}_{i+1} - \hat{\underline{u}}_i). \quad (2.51)$$

où comme dans le cas continu les notations chapeaux désignent des quantités virtuelles. Dans le cas d'un déplacement réel on vérifie bien : $\mathcal{L}_s^i(\underline{X}; \underline{u}_i, \underline{u}_{i+1}) = \dot{\ell}^i = d^i$. Ensuite on étend les définitions des opérateurs $\underline{\mathcal{V}}$ et $\underline{\mathcal{W}}$ (eq. (2.34)) au cas discret. L'opérateur $\underline{\mathcal{V}}^i$ est attaché aux segments :

$$\underline{\mathcal{V}}^i(\underline{X}; \hat{\underline{u}}_i, \hat{\underline{u}}_{i+1}) = \frac{1}{\ell^i} \underline{P}_\perp(\underline{t}^i, \hat{\underline{u}}_{i+1} - \hat{\underline{u}}_i). \quad (2.52a)$$

Cette définition se comprend bien avec l'équation (2.44). En effet cet opérateur renvoie la dérivée temporelle de la tangente lorsque le déplacement est réel. L'opérateur discret $\underline{\mathcal{W}}^i$ associé au segment \underline{T}^i est défini par l'équation suivante :

$$\underline{\mathcal{W}}^i(\underline{X}; \hat{\underline{u}}_i, \hat{\underline{u}}_{i+1}, \hat{v}^i) = \hat{v}^i \underline{t}^i + \underline{t}^i \times \frac{\hat{\underline{u}}_{i+1} - \hat{\underline{u}}_i}{\ell^i}. \quad (2.52b)$$

Cette définition se comprend à l'aide de l'équation (2.50). Lors d'une déformation réelle $\underline{\mathcal{W}}^i$ renvoie le vecteur rotation angulaire $\underline{\omega}^i$.

Par analogie directe avec la formulation continue nous pouvons définir les opérateurs liés à la torsion et à la flexion :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i^t(\underline{X}; \hat{\underline{u}}_{i-1}, \hat{\underline{u}}_i, \hat{\underline{u}}_{i+1}, \hat{v}^{i-1}, \hat{v}^i) \\ = \hat{v}^i - \hat{v}^{i-1} + \underline{K}_i \cdot \frac{\mathcal{V}^{i-1}(\underline{X}; \hat{\underline{u}}_{i-1}, \hat{\underline{u}}_i) + \mathcal{V}^i(\underline{X}; \hat{\underline{u}}_i, \hat{\underline{u}}_{i+1})}{2}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i^b(\underline{X}; \hat{\underline{u}}_{i-1}, \hat{\underline{u}}_i, \hat{\underline{u}}_{i+1}, \hat{v}^{i-1}, \hat{v}^i) \\ = \underline{P}_\perp \left(\tilde{\underline{t}}_i, \mathcal{W}^i(\underline{X}; \hat{\underline{u}}_i, \hat{\underline{u}}_{i+1}, \hat{v}^i) - \mathcal{W}^{i-1}(\underline{X}; \hat{\underline{u}}_{i-1}, \hat{\underline{u}}_i, \hat{v}^{i-1}) \right). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Pour évaluer ces expressions seules les positions et vitesses (au sens large) sont nécessaires. C'est là tout l'intérêt de cette formulation. Ce vecteur vitesse étendue de dimension $4n + 7$ s'écrit :

$$\underline{U}(t) = \{\underline{u}_0(t), v^0(t), \underline{u}_1(t), v^1(t), \dots, v^n(t), \underline{u}_{n+1}(t)\}. \quad (2.55)$$

Il peut être réel ou bien virtuel :

$$\hat{\underline{U}}(t) = \{\hat{\underline{u}}_0(t), \hat{v}^0(t), \hat{\underline{u}}_1(t), \hat{v}^1(t), \dots, \hat{v}^n(t), \hat{\underline{u}}_{n+1}(t)\}. \quad (2.56)$$

On peut donc par analogie avec le cas continu (eq. (2.35)), en substituant les intégrales par des sommes, définir les potentiels de dissipation discrets suivants :

$$\mathcal{D}_s(\underline{X}; \hat{\underline{U}}) = \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq n} D^i \left(\mathcal{L}_s^i(\underline{X}; \hat{\underline{u}}_i, \hat{\underline{u}}_{i+1}) \right)^2 \quad (2.57a)$$

$$\mathcal{D}_t(\underline{X}; \hat{\underline{U}}) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} C_i \left(\mathcal{L}_i^t(\underline{X}; \hat{\underline{u}}_{i-1}, \hat{\underline{u}}_i, \hat{\underline{u}}_{i+1}, \hat{v}^{i-1}, \hat{v}^i) \right)^2 \quad (2.57b)$$

$$\mathcal{D}_b(\underline{X}; \hat{\underline{U}}) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} B_i \left(\mathcal{L}_i^b(\underline{X}; \hat{\underline{u}}_{i-1}, \hat{\underline{u}}_i, \hat{\underline{u}}_{i+1}, \hat{v}^{i-1}, \hat{v}^i) \right)^2. \quad (2.57c)$$

Ce sont des formes quadratiques par rapport aux vitesses virtuelles, parce que nous considérons une loi de comportement visqueuse linéaire. On notera tout de même la nuance suivante : les indices de sommation de la déformation par étirement concernent tous les sommets alors que celles de torsion et flexion concernent seulement l'intervalle intérieur. Ceci est fait en accord avec les définitions des quantités essentielles à la description des

modes de déformation respectifs. Les lois constitutives dans les équations (2.57), sont exprimées par les différents modules :

$$D^i = \frac{3 \mu^i A^i}{\ell^i} \quad (2.58a)$$

$$C_i = \frac{2 [\widetilde{\mu I}]_i}{\widetilde{\ell}_i} \quad (2.58b)$$

$$B_i = \frac{3 [\widetilde{\mu I}]_i}{\widetilde{\ell}_i}. \quad (2.58c)$$

où μ^i est la viscosité dynamique du fluide, stockée sur les segments. Le facteur $[\widetilde{\mu I}]_i$ est quant à lui défini par interpolation :

$$[\widetilde{\mu I}]_i = \frac{1}{2} \frac{\mu^{i-1} (A^{i-1})^2 + \mu^i (A^i)^2}{4 \pi}. \quad (2.58d)$$

Ces définitions (2.58) sont identiques à celles proposées dans le cas continu (2.32) et (2.33). En particulier, les choix respectifs de ℓ^i ou $\widetilde{\ell}_i$ garantissent la convergence vers le cas continu lorsque la taille des mailles tend vers zéro : $D^i \sim \frac{D}{\ell^i}$, and $\mathcal{L}_s^i \sim \mathcal{L}_s \ell^i$ par (2.51). La convergence s'écrit alors dans le cas de l'étirement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i D^i (\mathcal{L}_s^i)^2 &\sim \frac{1}{2} \sum_i \frac{D}{\ell^i} (\mathcal{L}_s \ell^i)^2 \\ &\sim \frac{1}{2} \sum_i D (\mathcal{L}_s)^2 \ell^i \sim \frac{1}{2} \int_{S_-}^{S_+} D (\mathcal{L}_s)^2 dS \sim \mathcal{D}_s. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Le taux de dissipation total est simplement obtenu en sommant toutes les quantités :

$$\mathcal{D}(\underline{X}; \hat{\underline{U}}) = \mathcal{D}_s(\underline{X}; \hat{\underline{U}}) + \mathcal{D}_t(\underline{X}; \hat{\underline{U}}) + \mathcal{D}_b(\underline{X}; \hat{\underline{U}}). \quad (2.60)$$

Par (2.57) on voit que le potentiel de dissipation peut s'exprimer en introduisant la matrice $\underline{\underline{D}}$:

$$\mathcal{D}(\underline{X}; \hat{\underline{U}}) = \frac{1}{2} \hat{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{D}}(\underline{X}) \cdot \hat{\underline{U}}. \quad (2.61)$$

Cette formulation quadratique $\hat{\underline{U}}$ est le résultat espéré des calculs précédents. En effet, en dérivant par rapport à la vitesse on obtient la force visqueuse qui dérive de ce potentiel, et qui est linéaire en \underline{U} :

$$\underline{F}_v(\underline{X}; \underline{U}) = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \underline{U}} = -\underline{\underline{D}}(\underline{X}) \cdot \underline{U}. \quad (2.62)$$

Cette force visqueuse s'exprime uniquement comme le produit entre une matrice fonction des positions \underline{X} , *a priori* connues au temps au t et le vecteur vitesse \underline{U} qui est l'inconnue principale de la dynamique et qui permettra l'itération vers les positions au temps $t + \epsilon$. La résolution est détaillée au paragraphe suivant.

2.4.3 Fonctionnement général

Nous décrivons ici en quelques lignes le fonctionnement général du code. Plus de détails peuvent être trouvés dans [2]. Pour commencer on précise la teneur des vecteurs \underline{F}_v , \underline{F} , on définit la matrice d'inertie $\underline{\underline{M}}$ et la cartographie des degrés de liberté $\underline{\underline{\Pi}}_n$:

$$\underline{F}_v = (P_0^v, Q_v^0, P_1^v, \dots, Q_v^n, P_{n+1}^v) \quad (2.63a)$$

$$\underline{F} = (P_0, Q^0, P_1, \dots, Q^n, P_{n+1}) \quad (2.63b)$$

$$\underline{\underline{M}} = \text{diag}(\tilde{m}_0 \underline{\underline{1}}, \ell^0 J^0, \tilde{m}_1 \underline{\underline{1}}, \dots, \ell^n J^n, \tilde{m}_{n+1} \underline{\underline{1}}), \quad (2.63c)$$

$$\underline{\underline{\Pi}}_n = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^2 \delta_{3i+j} \otimes \delta_{4i+j} \quad (2.63d)$$

Le problème que nous cherchons à résoudre est le suivant : passer d'un état connu au temps t à l'état suivant au temps $t + \epsilon$ par l'équation de la dynamique (2.38), est représenté dans le cas discret par le système suivant :

$$\underline{\underline{M}} \cdot \frac{\underline{U}_{t+\epsilon} - \underline{U}_t}{\epsilon} = \underline{F}_v(\underline{X}_t, \underline{U}_{t+\epsilon}) + \underline{F}(t) \quad (2.64a)$$

$$\underline{F}_v(\underline{X}_t, \underline{U}_{t+\epsilon}) = - \left. \frac{\partial \mathcal{D}(\underline{X}_t, \hat{\underline{U}})}{\partial \hat{\underline{U}}} \right|_{\hat{\underline{U}}_{t+\epsilon} = \underline{U}_{t+\epsilon}} = -\underline{\underline{D}}(\underline{X}_t) \cdot \underline{U}_{t+\epsilon} \quad (2.64b)$$

$$\underline{X}_{t+\epsilon} = \underline{X}_t + \epsilon \underline{\underline{\Pi}}_n \cdot \underline{U}_{t+\epsilon} \quad (2.64c)$$

auquel il faut ajouter un certain nombre de contraintes cinétiques et conditions des bords que nous traiterons séparément. La première ligne du système est la mise en équation discrète du principe fondamental de la dynamique où la matrice $\underline{\underline{M}}$ est diagonale et rassemble les masses et moments d'inertie. Les vecteurs \underline{F}_v et \underline{F} rassemblent les forces et moments respectivement d'origine visqueuse ou extérieure qui agissent sur chaque sommet. La dernière ligne met simplement en équation la relation d'évolution cinématique entre vitesses et positions par la matrice $\underline{\underline{\Pi}}_n$.

Il est important de noter que le calcul de $\underline{U}_{t+\epsilon}$ (qui est l'inconnue principale du problème) consiste seulement à procéder à une inversion matricielle. Dès lors que ce vecteur vitesse généralisé est connu on calcule le nouveau vecteur position $\underline{X}_{t+\epsilon}$ par (2.64c).

Pour être tout à fait complet et introduire la prochaine section on notera que l'évolution du vecteur vitesse se fait sous un certain nombre de contraintes que répertorient la matrice $\underline{\underline{B}}$ et le vecteur \underline{B}' . En pratique si un degré de liberté est non contraint (régé par la dynamique) il est représenté par un 1 dans la diagonale de $\underline{\underline{B}}$, dans le cas contraire le 1 est remplacé par un 0. On peut alors décomposer $\underline{U}_{t+\epsilon}$ de la sorte :

$$\underline{U}_{t+\epsilon} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{W}_{t+\epsilon} + \underline{B}', \quad (2.65a)$$

$$\underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{B}' = 0 \quad (2.65b)$$

et $\underline{W}_{t+\epsilon}$ est le vecteur vitesse réduit qui est l'inconnue principale du système formé par les équations (2.64a) et (2.64b). On montre en rassemblant (2.64) et (2.65) que :

$$\begin{aligned} & \left[\underline{\underline{B}}^T \cdot (\underline{\underline{M}} + \epsilon \underline{\underline{D}}(\underline{X}_t)) \cdot \underline{\underline{B}} \right] \cdot \underline{W}_{t+\epsilon} \\ &= \underline{\underline{B}}^T \cdot (\epsilon (-\underline{\underline{D}}(\underline{X}_t)) \cdot \underline{B}' + \underline{F}(t)) - \underline{\underline{M}} \cdot (\underline{B}' - \underline{U}_t). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Les détails de l'algorithme sont fournis dans [2]. La section suivante traite de la mise en place des conditions aux limites évoquées ci-dessus.

2.4.4 Conditions aux limites

La mise en place des conditions aux limites est, de prime abord, assez limpide. Il s'agit de spécifier le vecteur \underline{B}' introduit ci-dessus (2.65a). Dans le cas qui nous intéresse un filament visqueux chute sur une surface rigide qui peut avoir une vitesse quelconque. De plus il n'y a pas de glissement ni à l'injecteur, ni sur la surface. Le problème est donc doublement encastré : on considère qu'à chaque instant deux sommets sont en permanence dans l'injecteur et sur la surface ce qui conduit à écrire :

$$\underline{B}' = (\underline{u}_e^1, \omega_e^1, \underline{u}_e^1, 0, 0, \dots, 0, 0, \underline{u}_e^2, \omega_e^2, \underline{u}_e^2). \quad (2.67)$$

et à annuler le calcul dynamique sur les deux premiers et derniers sommets par le biais de \underline{B} (en remplissant les 0 correspondants). Les vitesses \underline{u}_e^1 et \underline{u}_e^2 sont respectivement celles des deux encastresments. De même ω_e^1 et ω_e^2 sont les vitesses de rotations imposées sur les segments extrémaux. En l'absence de glissement (notre cas) on a de plus $\omega_e^1 = \omega_e^2 = 0$. Les autres zéros de la liste indiquent eux une absence de contrainte.

Remarquons maintenant que la chute d'un filament depuis un injecteur vers une surface est un système ouvert. Il est donc nécessaire de mettre à jour la liste des sommets et segments qui représentent le dit filament à chaque itération. En particulier, il faut mettre à jour cette liste (1) à l'injecteur lorsqu'un nouveau sommet entre dans le système et (2) au sol lorsqu'un sommet touche le sol et y est "capturé".

A l'injecteur

Le système mis en place à l'injecteur est détaillé en Figure 2.5. Il en existe deux variantes, une simple (notée (b) sur la même Figure) et une raffinée (notée (c) sur la même Figure). La façon la plus simple d'implémenter l'encastrement consiste à fixer les vitesses et positions des deux points les plus hauts. Ils sont simplement déplacés en fonction de la vitesse du fluide à l'injecteur U_r . Cette méthode fonctionne mais conduit à de légères secousses. En effet, la hauteur de chute effective est déterminée par la position du sommet libre le plus haut. Celle-ci oscille (on le voit bien sur la Figure 2.5) et conduit à des secousses qui sont certes légères (de l'ordre de la discrétisation spatiale) mais peuvent être problématiques lorsque l'on cherche à accéder aux quantités telles que l'accélération (car le niveau de dérivation est élevé). Cette implémentation ne converge

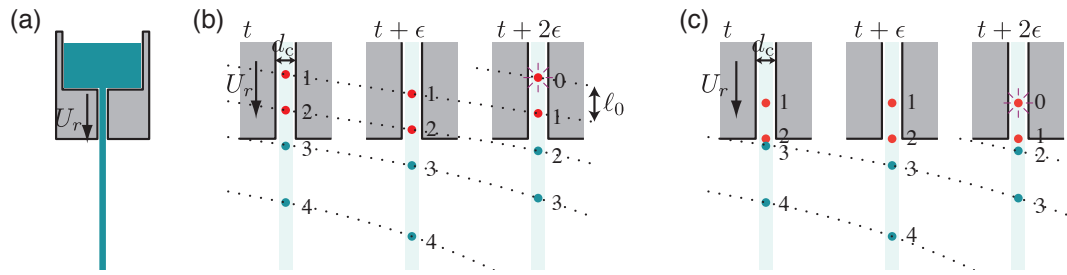


FIGURE 2.5 – Représentation discrète du réservoir d'où le fluide est injecté à travers un injecteur de diamètre d et à une vitesse U_r , (a) représentation de l'injecteur et de son réservoir. (b) Implémentation "simple" de l'encastrement à l'injecteur. Les sommets turquoises représentent la partie non contrainte de l'écoulement alors que les rouges ont leurs vitesse et position prescrites. L'évolution temporelle est montrée par les lignes en pointillés. Dans cette implémentation simple ils transportent tous la même masse de fluide. (c) Implémentation raffinée : les points rouges sont maintenus au repos dans le réservoir et on introduit régulièrement de la masse dans le second segment (celui qui lie le dernier turquoise au premier rouge) jusqu'à ce qu'il atteigne une taille limite à laquelle il est alors libéré. Un autre sommet rouge est alors créé.

pas de façon satisfaisante. L'idée utilisée dans la seconde implémentation est la suivante : le filament chute depuis un fluide au repos (réservoir) jusqu'à son passage par l'injecteur. On fige donc les deux derniers sommets dans l'espace et on autorise le segment reliant le dernier sommet libre au premier encastré à accumuler de la masse, c'est-à-dire à couler avec une vitesse U_r . Un nouveau sommet est créé lorsque le segment atteint la taille de la discrétisation spatiale. Cette implémentation supprime les oscillations de hauteur de chute parasites. Voyons maintenant comment le contact avec la surface est implémenté, c'est-à-dire ce qu'il advient des sommets qui touchent le sol.

Contact à la surface

Physiquement, lorsque le filament touche un obstacle, il colle et est transporté par celui-ci, c'est-à-dire adopte la même position et vitesse que l'obstacle aux temps suivant le contact. Là encore deux implémentations sont possibles nommées (a) capturer et continuer ou (b) rembobiner. Les deux méthodes reposent sur le même principe général en Figure 2.6. A tout temps on conserve une liste des points transportés par le substrat. Après un pas de temps dynamique, les points qui sont entrés en collision avec le substrat sont marqués et s'ajoutent à cette liste. On parcourt alors cette liste et on en garde les deux derniers. C'est sur ces deux points que s'appliquent les conditions de bord au pas de temps suivant. Leur position est conservée et leur vitesse est annulée dans le référentiel du substrat. En particulier cet arrêt équivaut à transmettre une impulsion au filament qui n'est autre que la force de réaction du substrat. Cette méthode fonctionne mais présente un défaut. Les points gelés ne sont jamais exactement sur le substrat mais

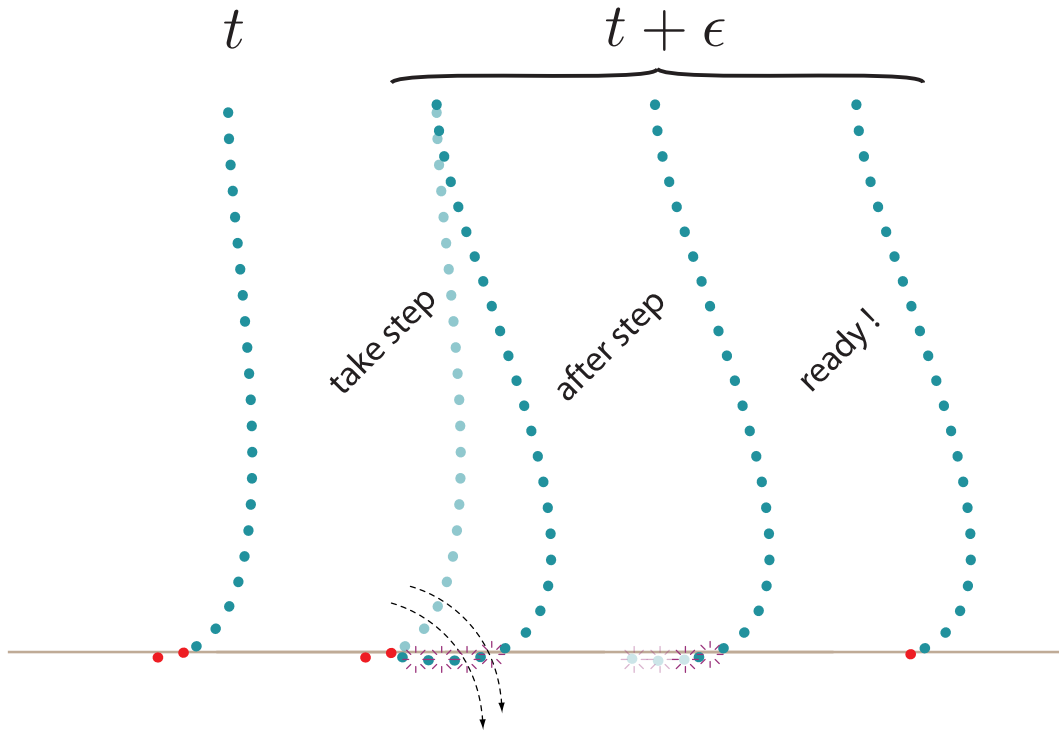


FIGURE 2.6 – Méthode de capture des points qui ont touché le sol et actualisation du filament : On retrouve en rouge les points encastres, en turquoises les points non contraints. Après chaque pas de temps, les points qui sont entrés en contact avec le sol sont marqués. On garde les deux derniers pour y imposer les conditions aux limites lors de l’itération suivante. Leurs position et vitesse sont imposées et la rotation du segment qui les joints est gelée.

en général légèrement en dessous de celui ci, et ce, de façon irrégulière. Ceci introduit une rugosité artificielle dans la surface d’impact. De plus l’impulsion évoquée ci-dessus est toujours transmise au filament avec un pas de temps de retard. Dans notre expérience ceci n’affecte pas la dynamique à grande échelle mais introduit de larges oscillations non contrôlées dans l’accélération.

La méthode (b) permet d’éviter cet écueil. Elle consiste à rembobiner le temps (roll-back). En pratique, si un pas de temps conduit à une collision avec le substrat et que la position du point gelée est trop basse alors on remonte le temps et on recommence en usant d’un pas de temps plus petit dont la durée est estimée pour faire en sorte que la particule arrive exactement sur la surface à la fin de celui-ci. On peut assimiler cela à une méthode de prédicteur-correcteur ou encore à un raffinement itératif sous contrainte [29].

On élimine donc à la fois la rugosité artificielle de la surface et le délais dans le transfert retardé de l'impulsion reportés précédemment.

2.4.5 Maillage adaptatif

Lors de son écoulement le filament s'étire, ce qui se traduit d'un point de vue discret par l'augmentation de taille des segments qui relient les différents sommets $(\underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{n+1})$. Cette taille, si elle devient trop grande, peut s'avérer problématique. Il n'est, par exemple, pas possible de décrire un enroulement avec des segments ayant une taille du même ordre de grandeur que le rayon de courbure de cette zone. En conséquence on maille extrêmement finement le haut de l'écoulement (inutilement) en espérant arriver avec une définition suffisante en bas d'écoulement. Ceci requiert des ressources numériques. Pour palier à cela nous avons mis en place un maillage adaptatif dont on décrit ici le fonctionnement de façon qualitative. L'idée étant de contrôler la taille maximale des segments. Lorsqu'un segment dépasse cette taille limite il est divisé en deux ce qui conduit à créer un nouveau sommet. Les valeurs transportées par les sommets et les segments sont alors mises à jour par interpolation à partir des valeurs mères. Nous avons utilisé deux types types de critères de raffinement :

- Par seuil : le segment s'étire au delà de α fois sa valeur initiale ou forme un angle trop important avec la verticale. Ceci entraîne une division.
- Par zone : le segment dépasse une taille absolue alors qu'il rentre dans une zone prédéterminée. Ceci entraîne autant de division que nécessaire pour satisfaire le critère. On utilise cela en bas de l'écoulement en particulier comme illustré en figure 2.7.

2.5 Conclusion

2.5.1 Équations de Kirchhoff pour les filaments visqueuses

On peut montrer que le formalisme continu introduit dans ce chapitre, en particulier sous la forme présentée en (2.38), est équivalent [2] aux équations de Kirchhoff pour les filaments visqueux.

$$\frac{\partial \underline{n}}{\partial S} + \underline{P} = \rho A_0 \ddot{\underline{x}} \quad (2.68a)$$

$$\frac{\partial \underline{m}}{\partial S} + \underline{T} \times \underline{n} + Q \underline{t} = \ell J \dot{\underline{t}} \quad (2.68b)$$

où

$$\underline{n}(S, t) = n_t \underline{t} + \frac{1}{\ell(S, t)} \underline{t}(S, t) \times \frac{\partial \underline{m}(S, t)}{\partial S}. \quad (2.68c)$$

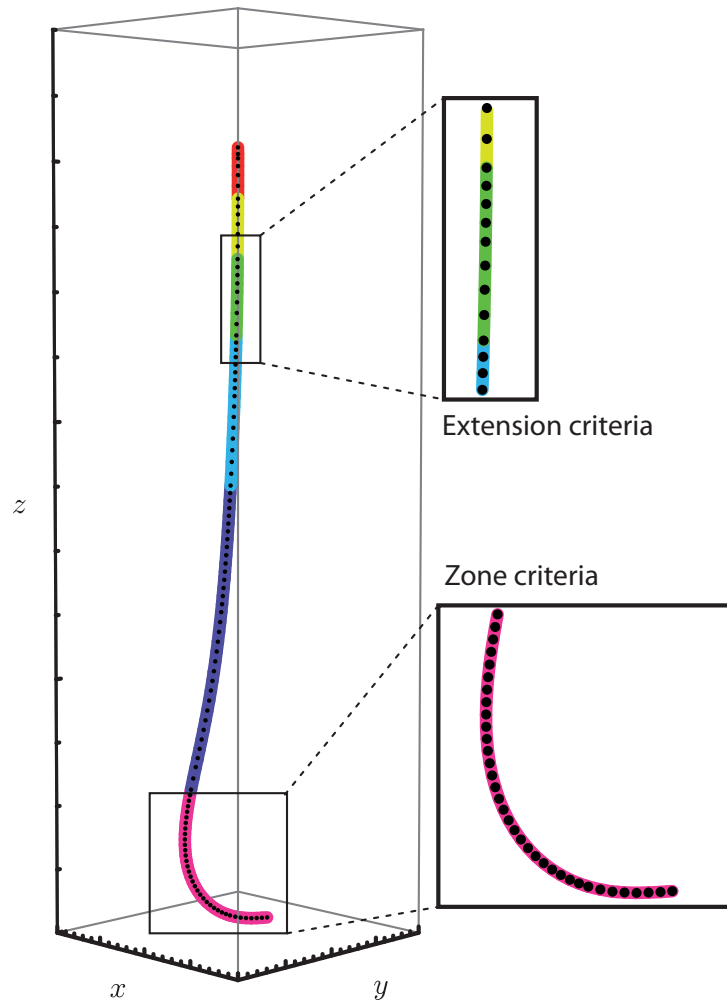


FIGURE 2.7 – Deux modes de raffinement sont à l’oeuvre : la génération 0 (en rouge), arrivée à saturation du critère d’étirement, se divise pour devenir la génération 1 (en jaune). Il en va de même pour la bleu ciel (génération 2) et mauve (génération 3). Dans le carré du bas un autre critère est à l’oeuvre, un taille maximale est requise : cela conduit à la génération 4 (rose).

avec

$$n_t = \frac{D}{l} d. \quad (2.68d)$$

et

$$\underline{m}(S, t) = \frac{1}{\ell} (C e_t \underline{t} + B \underline{e}_b). \quad (2.68e)$$

où \underline{n} est la force interne agissant sur la ligne centrale de la tige, \underline{m} le moment interne associé, $A_0 = \ell A$ est l'aire de la section en configuration de référence et $\underline{T} = \ell \underline{t}$ est la tangente matérielle (non unitaire) définie précédemment (2.1). On peut aussi montrer que ces égalités sont équivalentes aux lois constitutives usuelles en formalisme Eulérien :

$$n_s(S, t) = D d^E \quad (2.69a)$$

$$\underline{m}(S, t) = [C (\underline{t} \otimes \underline{t}) + B (\underline{\underline{1}} - \underline{t} \otimes \underline{t})] \cdot \underline{e}^E, \quad (2.69b)$$

où nous avons introduit les variables Eulérienne suivantes :

$$d^E = \frac{d}{\ell}, \quad \underline{e}^E = \frac{1}{\ell} \underline{e} = \frac{1}{\ell} \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial S} = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial s}. \quad (2.69c)$$

Les équations dites de Kirchoff usuelles s'écrivent en variables Eulériennes :

$$\frac{\partial \underline{n}}{\partial s} + \underline{P}^E = \rho A \underline{\ddot{x}} \quad (2.70a)$$

$$\frac{\partial \underline{m}}{\partial s} + \underline{t} \times \underline{n} + Q^E \underline{t} = J \dot{\underline{t}} \quad (2.70b)$$

Ici, \underline{P}^E et Q^E sont les densités de forces et de moments extérieurs appliquées par unité de longueur ds en configuration actuelle. On remarquera que si on multiplie ces valeurs par $\ell = \frac{\partial s}{\partial S}$, on peut former leur équivalent Lagrangien $\underline{P} = \ell \underline{P}^E$, $Q = \ell Q^E$. En faisant de même avec les équations (2.70a) et (2.70b) on retrouve les équations (2.68).

2.5.2 Code DVR (Discrete Visoucs Rods)

Dans ce chapitre nous avons proposé une vision de la dynamique des filaments visqueux conduisant au principe de fonctionnement du code numérique permettant leur simulation. Ce code est nommé DVR (Discrete Visoucs Rods). Il est validé au chapitre suivant au travers de la simulation des enroulements visqueux stationnaires.

Enroulements visqueux

Résumé

Ce chapitre traite des enroulements obtenus en déversant un filament visqueux sur une surface plane et fixe. Le filament s'étire en chutant et, lorsqu'il touche la surface, flambe et s'enroule en cercles réguliers de rayon R_c avec une fréquence Ω_c . Ces enroulements d'apparence dynamiques sont en fait stationnaires dans un repère tournant à la vitesse Ω_c . Trois possibilités s'offrent alors pour les simuler et les comprendre, c'est-à-dire prédire la fréquence à laquelle ils tournent en fonction de la hauteur de chute et des autres variables du problème :

1. Approche numérique par continuation.
2. Approche analytique.
3. Approche numérique discrète utilisant le code présenté au Chapitre 2.

On montrera que la continuation permet d'isoler le comportement hautement non linéaire de ces filaments qui se traduit par une succession de régimes variés et de branches stables et instables. Ce comportement sera rendu plus palpable par l'analyse de chaque régime. L'approche tout numérique est quant à elle validée en reproduisant les résultats de continuation et montrera une partie de son intérêt en prévoyant les états transitoires de ces écoulements qui par définition échappent aux outils 1 et 2. Ce potentiel sera très largement exploité au prochain Chapitre.

3.1 État de l'art sur les enroulements visqueux

La première référence aux enroulements visqueux dans la littérature date de 1958 et est attribuée à Barnes et Woodcock [7]. Ces enroulements ont ensuite été étudiés expérimentalement pendant plus de 50 ans [7, 30, 31, 32, 33, 34]. Cependant leur formation est demeurée relativement incomprise jusqu'à Taylor qui en 1968 [35] a introduit le concept de flambage visqueux défini par analogie avec la notion de flambage élastique. Il est alors possible de déterminer le seuil et la fréquence de ces instabilités (Cruickshank [36] ;

Tchavdarov et al. [37]). En 1998, Mahadevan et al. [34] ont proposé une loi d'échelle pour prédire la fréquence d'enroulement aux larges hauteurs lorsque l'inertie est dominante. En particulier ils ont introduit l'idée d'un couplage entre deux parties de l'écoulement : le haut de l'écoulement quasi-linéaire où l'étirement fluide est important et le bas où les déformations se font uniquement par torsion et flexion.

C'est Ribe [27] et Ribe et al. [38, 39] qui ont apporté la première explication complète de ces phénomènes, embrassant l'ensemble des régimes envisageables. Ces travaux ont permis de prévoir les valeurs du rayon d'enroulement ainsi que sa fréquence en fonction de la hauteur de chute. Nous aurons l'occasion de revenir en détail sur cela dans la suite du chapitre.

Plus récemment, Blount et Lister [40] ont re-visité ce problème en apportant un éclairage analytique important. Ils ont notamment caractérisé les efforts fournis par la partie basse de l'enroulement. Du haut de ces enseignements ils ont été en mesure de prédire de manière quasi-exacte la fréquence d'enroulement en fonction de la hauteur à l'aide d'une formulation analytique approchée qui s'avère concluante pour les filaments extrêmement étirés. Une revue sur le sujet est d'ailleurs parue [41] récemment.

3.2 Enroulements stationnaires dans un repère tournant

3.2.1 Équations de l'écoulement

On considère l'écoulement d'un fluide de viscosité cinématique ν , de masse volumique ρ et tension de surface γ qui, injecté avec un débit volumique Q par une ouverture circulaire de diamètre d , chute sous l'effet de la gravité $\underline{g} = -g\underline{e}_z$ vers une surface plane et rigide située à une distance H (ces notations sont toutes portées en Figure 3.1). On notera par la suite la viscosité dynamique μ définie comme telle : $\mu = \rho \times \nu$. On s'attachera à prédire la fréquence d'enroulement Ω_c du filament qui en touchant la surface s'enroule avec un rayon R_c . Le triplet de paramètres adimensionnels qui représente les propriétés du fluide et de l'injecteur est donné par [27, 38] :

$$\Pi_1 = \left(\frac{\nu^5}{g Q^3} \right)^{1/5}, \quad \Pi_2 = \left(\frac{\nu Q}{g d^4} \right)^{1/4}, \quad \Pi_3 = \frac{d^2 \gamma}{Q \mu}, \quad (3.1)$$

En plus de ces derniers on peut définir une longueur et unité de temps de référence notées respectivement L^* et T^* par les relations suivantes :

$$L^* = \left(\frac{\nu^2}{g} \right)^{1/3}, \quad T^* = \left(\frac{\nu}{g^2} \right)^{1/3}. \quad (3.2)$$

On peut interpréter la signification physique de leur expression pour un filament en chute rectiligne. Pour des distances de l'injecteur à la surface de l'ordre L^* la gravité est équilibrée par les efforts visqueux alors que pour des distances grandes devant L^* c'est par l'inertie que l'on équilibre la gravité.

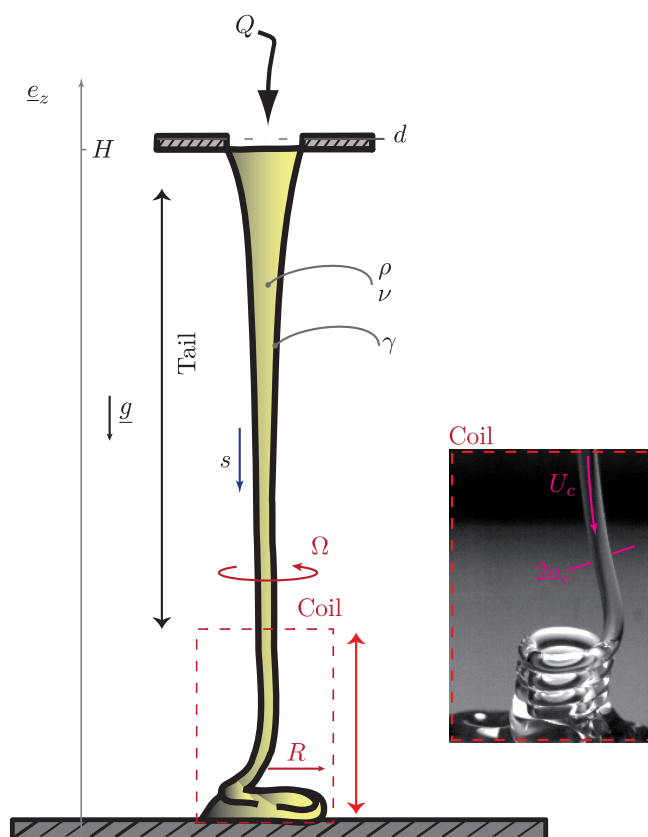


FIGURE 3.1 – Écoulement d'un filament sur une surface fixe et horizontale depuis un injecteur de diamètre d fixé à une hauteur H . Le fluide de masse volumique ρ , viscosité ν et tension de surface γ est extrudé avec un débit volumique Q . Deux régions se dégagent, le haut de l'enroulement (queue) et l'enroulement en bas de l'écoulement. Cet enroulement a un rayon R et est formé à une vitesse Ω . Vignette : photo d'un tel enroulement. Le rayon y est quasiment constant et noté a_c . Il correspond à la vitesse U_c de l'écoulement dans cette zone.

Par une analyse des dimensions on montre que la fréquence d'enroulement adimensionnée $\tilde{\Omega}_c = \Omega_c/T^*$ est une fonction des trois nombres Π_i et de la hauteur de chute adimensionnée $\tilde{H} = H/L^*$. Il en va de même pour le rayon d'enroulement adimensionné $\tilde{R}_c = R_c/L^*$. On insiste sur ce fait important en donnant ces notations formelles :

$$\tilde{\Omega}_c = \tilde{\Omega}_c(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \tilde{H}) \quad (3.3)$$

$$\tilde{R}_c = \tilde{R}_c(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \tilde{H}) \quad (3.4)$$

Pour décrire ces écoulements il est aisé de se placer dans un repère tournant à une fréquence Ω_c *a priori* inconnue mais définie comme celle à laquelle le fluide s'enroule. L'écoulement y est alors stationnaire. On note alors $a(s, t)$ le rayon du filament à l'abscisse

curviligne s et au temps t , de même que U est la composante tangentielle de la vitesse de l'écoulement dans le repère tournant. Une simple observation à l'oeil nu d'un enroulement visqueux permet d'ores et déjà de tirer des conclusions sur sa nature et de trouver une relation entre les deux quantités recherchées Ω_c et R_c . En effet l'écoulement se divise en deux parties distinctes [27] :

1. **La queue** : il s'agit la partie supérieure de l'écoulement qui est quasiment rectiligne et où l'étirement est important, c'est-à-dire que le rayon a diminue avec s au profit de la vitesse qui elle augmente par conservation de la masse.
2. **La zone d'enroulement** : c'est la partie inférieure de l'écoulement qui présente une morphologie très différente. Le rayon a_c du filament y est quasiment uniforme. Il en va de même pour la vitesse U_c . Les déformation se font donc à rayon de filament constant et consistent essentiellement à de la flexion et un "zeste" de torsion¹.

Fort de ces observations on en déduit alors qu'en raison du non glissement du fluide à la surface du support on a la relation suivante :

$$\frac{U_c}{\Omega_c} = R_c \quad (3.5)$$

On se propose maintenant d'écrire les équations de Kirchhoff dans le repère tournant (2.70) :

$$\underline{n}' + \underline{p} = \rho A (\Omega_c \times (\Omega_c \times \underline{x})) + 2\Omega_c \times \underline{u} + u \underline{u}' \quad (3.6)$$

$$\underline{m}' + \underline{t} \times \underline{n} = \underline{0} \quad (3.7)$$

où la vitesse Eulérienne $\underline{u}(s, t)$ est donnée par $\underline{u} = U\underline{t}$. Les lois constitutives sont les suivantes :

$$n_t = \underline{n} \cdot \underline{t} = Dd - \pi \gamma_s a \quad (3.8)$$

$$D = 3\mu A \quad (3.9)$$

$$\underline{m} = \left[B(\underline{1} - \underline{t} \otimes \underline{t}) + C\underline{t} \otimes \underline{t} \right] \cdot \underline{\omega}'_r \quad (3.10)$$

$$B = 3\mu I, \quad C = 2\mu I \quad (3.11)$$

où la vitesse de rotation dans le référentiel tournant est :

$$\underline{\omega}_r = \underline{\omega} - \Omega_c \underline{e}_z = \kappa_1 U \underline{d}_1 + \kappa_2 U \underline{d}_2 + \omega_3 \underline{d}_3 \quad (3.12)$$

On rappelle que $\underline{\omega}$ est le vecteur de Darboux associé à la dérivation temporelle du repère matériel $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$ et on précise que la courbure $\underline{\kappa}$ est celui associé la dérivation par rapport à la coordonnée Eulérienne :

1. Ces observations sont certes quasiment toutes visibles à l'oeil nu mais elles seront vérifiées numériquement par la suite

$$\frac{\partial \underline{d}_i(s, t)}{\partial s} = \underline{\kappa}(s, t) \times \underline{d}_i(s, t). \quad (3.13)$$

On remarquera que les seules différences notables entre ce système d'équation et celui du chapitre précédent (2.70) résident dans l'apparition d'une formulation déterministe de l'accélération due à l'hypothèse de stationnarité dans un repère tournant et au fait que nous avons négligé le terme d'inertie en rotation².

Ces équations forment un problème différentiel du 17ème ordre où deux paramètres sont inconnus : la vitesse de rotation Ω_c et la longueur curviligne du filament entre l'injecteur et le point de contact avec la surface L . Elles doivent donc aller de paire avec 19 **conditions aux limites** [27] qui nous permettront de clore le système. Elles peuvent être rassemblées en deux catégories, celles définies à l'injecteur et celles définies au point de contact avec la surface :

1. A l'injecteur, $s = 0$

(a) La position du filament coïncide avec celle de l'injecteur :

$$\underline{x}(0) = \underline{0}, \quad \mathcal{BC} \times 3 \quad (3.14)$$

(b) L'injection du fluide y est verticale :

$$\underline{t}(0) = -\underline{e}_z, \quad \mathcal{BC} \times 2 \quad (3.15)$$

(c) Le taux de rotation matérielle du vecteur tangent est nul à l'injecteur :

$$\underline{\kappa} \cdot \underline{d}_1 = \underline{\kappa} \cdot \underline{d}_2 = 0, \quad \mathcal{BC} \times 2 \quad (3.16)$$

(d) La vitesse du fluide est prescrite par l'injecteur :

$$U(0) = U_0, \quad \mathcal{BC} \times 1 \quad (3.17)$$

(e) Le jet est extrudé sans rotation dans le repère du laboratoire et donc avec une rotation apparente dans le repère tournant (le signe + vient de l'orientation relative de \underline{e}_z et \underline{d}_3 :

$$\omega_3 = \Omega_c, \quad \mathcal{BC} \times 1 \quad (3.18)$$

2. A la surface, $s = L$

(a) Sans perte de généralité on peut supposer que le point de contact entre le filament et la surface est aligné sur l'axe \underline{e}_x :

$$\underline{x}(L) \cdot \underline{e}_y = 0, \quad \mathcal{BC} \times 1 \quad (3.19)$$

(b) Le point de contact filament/support est à une distance H de l'injecteur :

$$\underline{x}(L) \cdot \underline{e}_z = -H, \quad \mathcal{BC} \times 1 \quad (3.20)$$

2. En effet $J = \mathcal{O}(a^4)$ alors que les autres termes sont au moins des $\mathcal{O}(a^2)$

- (c) Au point de contact, la tangente et la binormale à la ligne centrale doivent être horizontales. Sans perte de généralité on peut prescrire la position du repère matériel au point de contact (ce qui revient à laisser son orientation libre à l'injecteur). Ceci conduit aux relations suivantes :

$$\underline{d}_3 \cdot \underline{e}_y = \underline{d}_2 \cdot \underline{e}_z = \underline{d}_1 \cdot \underline{e}_x = -1, \quad \mathcal{BC} \times 4 \quad (3.21)$$

$$\kappa_1(L) = 0, \quad \mathcal{BC} \times 1 \quad (3.22)$$

$$x_1(L)\kappa_2(L) = 1, \quad \mathcal{BC} \times 1 \quad (3.23)$$

- (d) Au point de contact on impose un contact sans glissement qui signifie que la vitesse du point de contact doit être égale à celle de la surface et que le point ne peut pas tourner sur lui même :

$$\omega_3(L) = 0, \quad \mathcal{BC} \times 1 \quad (3.24)$$

$$\kappa_2(L)U(L) = \Omega_c, \quad \mathcal{BC} \times 1 \quad (3.25)$$

Le nombre de conditions de bord \mathcal{BC} est de 19 et elles closent mathématiquement le problème. Par conséquent nous pouvons le résoudre, ce que nous ferons par continuation au paragraphe suivant.

3.2.2 Approche par continuation

AUTO-07 est un logiciel de continuation qui implémente une méthode de continuation automatique par homotopie [42] et qui permet d'évoluer graduellement d'une solution analytique vérifiant les équations du système mais pas les conditions aux limites vers la solution du système qui vérifie aussi les conditions aux limites. Nous avons choisi pour cela une solution de jet en forme de quart de cercle qui satisfait aux équations du système en l'absence d'inertie et de gravité. Le détail de cette démarche est donné par Ribe [27].

On considère un jeu de paramètres donné fixant les trois nombres adimensionnés Π_i aux valeurs suivantes : $\Pi_1 = 7000$, $\Pi_2 = 7$ et $\Pi_3 = 0$. On fait varier la hauteur de chute sur une fenêtre allant grossièrement de 1% de la longueur L^* à plus de 200% sa valeur. Ces choix conduiront à des étirements fluides significatifs sans être extrêmes (typiquement 50% de réduction du rayon du filament). L'intervalle de hauteur est discrétisé automatiquement par AUTO-07p et nous disposons de la solution complète à chaque point de l'intervalle existant. La solution évoquée est complète, c'est-à-dire qu'elle satisfait les équations du système ainsi que la totalité des conditions aux limites. En pratique on s'intéresse à prédire la fréquence d'enroulement en fonction de la hauteur de chute. La figure 3.2 montre ce résultat lorsqu'un large intervalle de hauteurs est balayé : la courbe est visuellement complexe et nous allons maintenant rapidement la commenter.

3.3 Approche tout numérique - Discrete Viscous Rods

Nous allons maintenant examiner les résultats obtenus avec le modèle discret développé au chapitre 2. Dans cette approche tout numérique *nous ne faisons aucune hypo-*

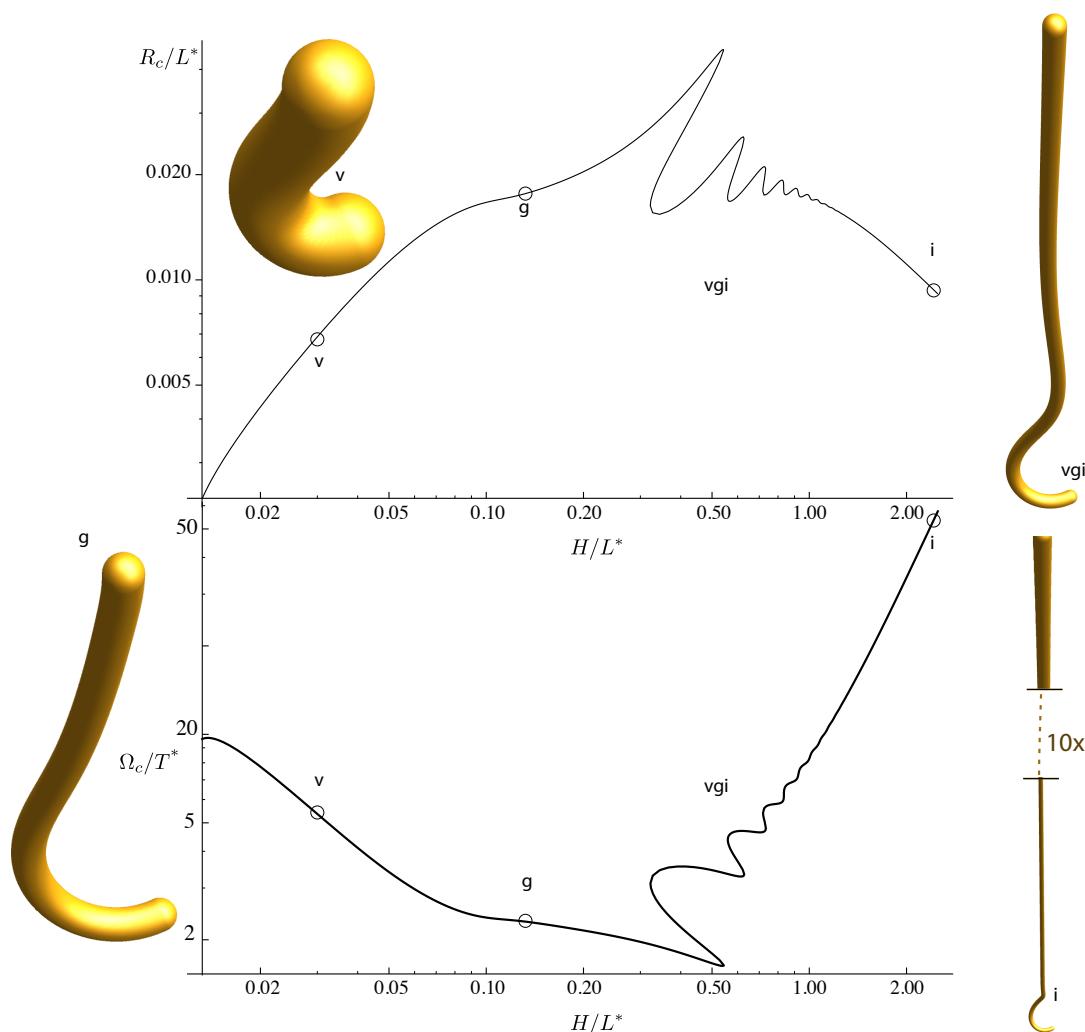


FIGURE 3.2 – Courbe de la fréquence d’enroulement Ω_c/T^* et du rayon d’enroulement R_c/L^* en fonction de la hauteur de chute adimensionnée H/L^* obtenue par continuation à l’aide d’AUTO-07p. Se succèdent un régime visqueux (v), gravitationnel (g), visco-inertio-gravitational (vgi) et inertiel (i), chacun étant illustré par une sortie 3D du code AUTO.

thèse sur la stationnarité des phénomènes obtenus. Bien que numérique, cette approche est en un sens très proche des expériences que l’on peut faire avec ces filaments : la simulation est dynamique. On injecte des points dans le calcul comme on injecte du fluide à l’injecteur et on efface ceux qui sont entrés en collision avec le support. Ceci a des conséquences dont voici un exemple : lorsque la hauteur de chute est changée il faudra laisser le temps au système de retrouver son équilibre avant de "mesurer" la fréquence ou le "rayon" d’enroulement.

On cherche à valider le cas d'un enroulement correspondant aux trois nombres adimensionnés choisis au paragraphe précédent : $\Pi_1 = 7000$, $\Pi_2 = 7$ et $\Pi_3 = 0$. Pour ce faire nous proposons le jeu de paramètres numériques sans dimension suivants³ : viscosité dynamique $\mu = 0.2$, masse volumique $\rho = 5 \cdot 10^{-4}$, gravité $g = 9.81$, aire de l'injecteur $A = 6.44 \cdot 10^{-3}$, débit volumique $Q = 3.96 \cdot 10^{-3}$. La tension de surface γ est quant à elle réglée à zéro pour le moment. On peut aussi d'ores et déjà préciser la valeur des échelles de longueur et temporelles : $L^* = 25.36$ et $T^* = 1.61$. Pour effectuer la simulation il reste à choisir la discretisation spatiale initiale ℓ_c , et temporelle ϵ . Pour les simulations suivantes nous avons fait le choix de $\ell_c = 0.025$ et $\epsilon = 0.02$. On remarquera que cela correspond à injecter une nouvelle particule fluide dans le système tout les deux pas de temps, un compromis raisonnable entre la précision et la vitesse du calcul. Dans le but de reproduire la courbe de continuation produite en figure 3.2 on réalise une simulation en trois étapes. On commence à une faible hauteur de chute initiale entre les temps $t = 0$ et $t = t_1$. La hauteur est gardée constante pour permettre l'établissement d'un régime d'enroulement stationnaire. On note ici qu'il n'est pas forcément nécessaire de commencer à faire couler la totalité du fluide depuis le réservoir (situation physique) pour débiter la simulation. On peut, au contraire, débiter avec un barreau de fluide joignant injecteur et surface à $t = 0$ (situation non physique donc) qui évoluera plus rapidement vers l'équilibre d'enroulement stationnaire. Ceci permet de gagner en temps de calcul et ne change en rien les résultats.

Entre les temps t_1 et t_2 la hauteur de l'injecteur est graduellement augmentée à une vitesse V_i sans qu'aucun autre paramètre ne soit modifié. La vitesse de montée V_i est fixée à une valeur largement inférieure à la vitesse d'extrusion du fluide U_0 ; on opère donc de façon quasi-stationnaire. La dernière étape consiste entre les temps t_2 et t_3 à redescendre l'injecteur jusqu'à sa position initiale et ce à la même vitesse que précédemment. On utilise ici les temps suivants : $t_1 = 30$, $t_2 = 1530$, $t_f = 3030$ et $V_c = 0.02$, qui est donc 30 fois plus petite que la vitesse d'extrusion U_0 . Les résultats de cette démarche numérique sont présentés sur la figure 3.3.

Sur la figure 3.3 nous traçons la distance $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$ du point de contact du fluide sur la surface au point $(0,0)$ qui n'est autre que le point de chute verticale depuis l'injecteur. On peut distinguer plusieurs régimes sur les courbes marron (t_1 à t_2) et bleue (t_2 à t_3) ; des zones rectilignes et des zones de grandes variations. Les premières indiquent un enroulement régulier et circulaire du filament comme dans la zone A du tracé. Cette courbe est à comparer à la solution de référence exhibée au paragraphe précédent qui est ici tracée en noir. Cette dernière présente des points de rebroussements à l'entrée de zones instables, comme indiqué par le point C sur la fig. 3.3 et sur la fig. 3.7. Lorsqu'un tel point est atteint dans la simulation dynamique, le rayon change brutalement et "saute" sur une autre branche stable. Ce saut est visible sur la figure 3.7-gauche où la trace laissée par le filament sur le support est représentée. Ce saut et les perturbations qui l'accompagnent expliquent les oscillations de la courbe marron en fig. 3.3 après le point C ainsi qu'après les

3. Le choix de ces paramètres est arbitraire pourvu qu'ils conduisent aux Π_i désirés.

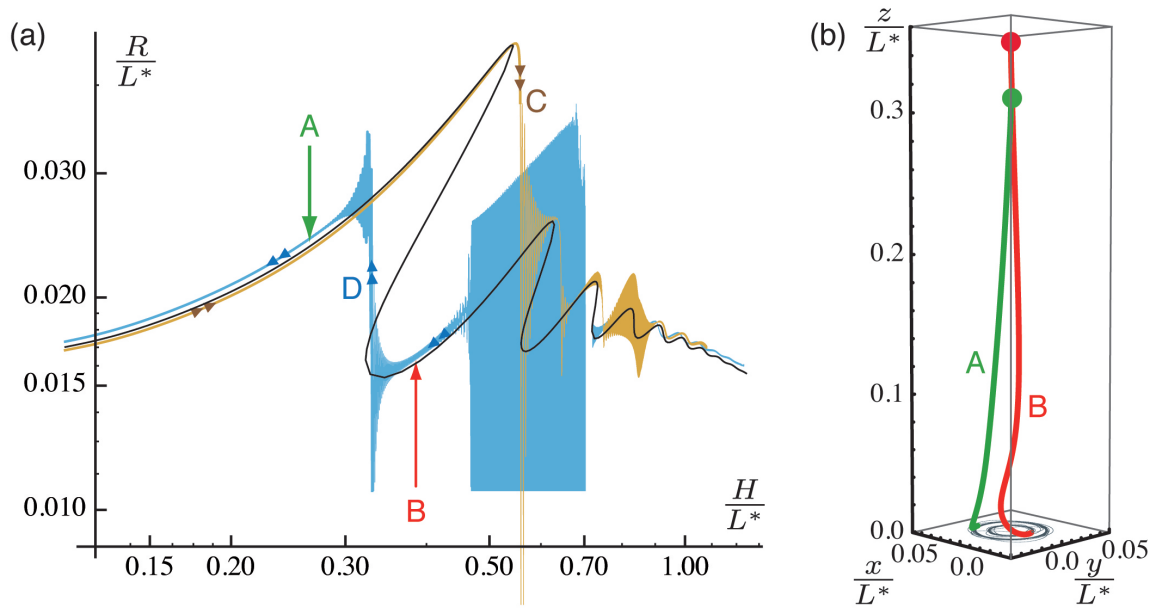


FIGURE 3.3 – Validation des enroulements visqueux avec $\Pi_1 = 7000$, $\Pi_2 = 7$ et $\Pi_3 = 0$ (pas de tension de surface). (a) Le rayon d'enroulement $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$ est enregistré en continu alors que la hauteur de chute H est changée de façon quasi-statique. La montée est indiquée en marron et la descente en bleue. On compare les courbes ainsi obtenues avec la référence calculée avec AUTO et montrée ici en noir. On remarquera les sauts de rayon quand on arrive en bout de branche. Les régions qui semblent "pleines" correspondent à des intervalles où le rayon change rapidement. Ceci correspond soit à une perturbation de l'enroulement circulaire, typiquement après un saut de branche, ou bien à des états de repliement visqueux. (b) Deux configurations typiques correspondant au points indiqués sur le tracé précédent. En 'A' seul le mode fondamental du filament est visible alors qu'en 'B' on note la présence d'harmoniques.

points de rebroussements qui suivent. On retrouve une séquence d'événements similaires quand la hauteur de chute diminue. Toutefois il y a, comme prévu par la courbe de référence, une hystérésis qui est très marquée sur la fig. 3.7. Au delà de cette validation il est intéressant de noter que le filament ne forme pas systématiquement des cercles comme prévu par le calcul stationnaire. En effet pour la gamme de hauteurs $.72 > H/L^* > .47$ le filament a un comportement alternatif, il se replie sur lui même à la manière d'un rideau visqueux. Ceci explique les larges variations de la courbe bleue. Dans son ensemble cette simulation dynamique suit la courbe de référence de façon très satisfaisante et valide ainsi la méthode numérique exposée au chapitre 2. Il existe une légère différence entre les courbes numériques (marron et bleu) et celle de référence (noire). Elle peut être attribuée au caractère fini de la vitesse d'ascension et de descente de l'injecteur.

Un tel calcul numérique a nécessité $t_3/\epsilon \approx 150000$ pas de temps ce qui correspond à 30 min sur un processeur Intel Core i7 cadencé à 2.6 Ghz avec 8 GB de mémoire vive. Au point le plus haut nous avons 460 segments fluides pour environ 1800 degrés de liberté.

3.3.1 Convergence du code

On étudie ici de façon empirique la convergence du code par rapport à la solution de référence calculée par AUTO. En présence de collisions avec une surface nous avons remarqué que la convergence n'était pas triviale et a nécessité un traitement particulier et raffiné du contact et de l'injection (§ 2.4.4). La simulation mise en place pour étudier la convergence est la suivante : on choisit une hauteur de chute particulière et on attend l'établissement d'un état d'enroulement régulier dont on mesure alors le rayon R . Cette démarche est répétée pour diverses valeurs des pas de temps ϵ et d'espace ℓ_c dont le rapport est maintenu constant. La convergence est assurée par le fait que l'erreur résiduelle tend vers zéro. On constate d'ailleurs que cette convergence est linéaire. Dans les simulations précédentes la tension de surface a été volontairement ignorée. Elle est traitée dans le paragraphe suivant de façon indépendante.

3.3.2 Validation de la tension de surface tension

Le calcul du rayon d'enroulement des fils visqueux par continuation peut très bien se faire en tenant compte de la tension de surface. Le terme de tension de surface est "allumé" et graduellement augmenté jusqu'à sa valeur physique ($\Pi_3 = 10.3 \cdot 10^{-3}$). Alors on balaye l'intervalle de hauteurs de chute en traçant le rayon des enroulements obtenus. La courbe ainsi obtenue est reporté en noir sur la Figure 3.5. On montre en pointillés son analogue dans le cas où la tension de surface est nulle : ces deux courbes ne sont pas foncièrement différentes mais seulement décalées. Dans notre calcul dynamique on règle alors la tension de surface à la valeur $\gamma = 10^{-3}$ qui correspond au Π_3 recherché. On obtient alors un bon accord comme illustré par la figure 3.5.

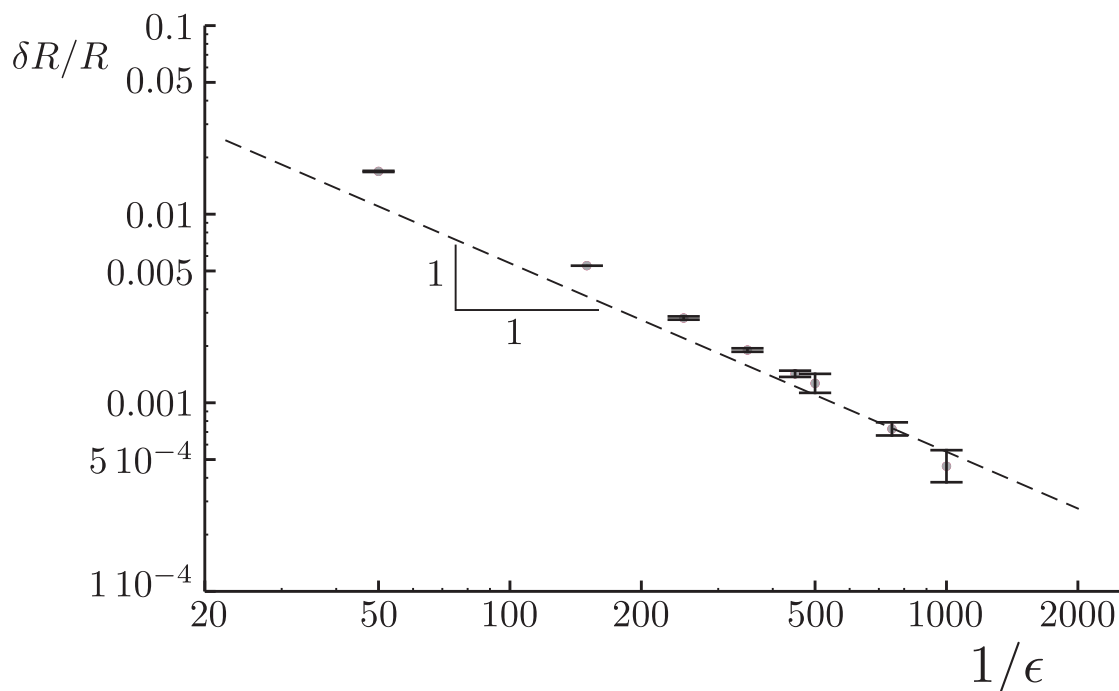


FIGURE 3.4 – Analyse de la convergence vers la solution de référence calculée avec AUTO. On montre l'évolution de la l'erreur relative $\delta R/R$ en fonction du raffinement spatial et temporel. Les paramètres numériques sont identiques à ceux utilisés pour la figure 3.3, seuls les pas d'espace et de temps varient, $.02 \leq \epsilon \leq .2$ et $.025 \leq \ell_c \leq .25$, tout en s'assurant que leur rapport reste constant. La hauteur de chute est fixée à $H = 1.01$.

3.4 Discussion

3.4.1 Une succession de régimes différents

La figure 3.2 montre une succession de pentes et rebroussements comme autant de régimes différents. Ces régimes portent le nom des forces qui les dominent. On les passe en revue à l'instar de ce qui a été fait par Ribe [27] et Ribe et al. [38] et Blount et Lister [40]. On distingue ainsi, en les classant par ordre croissant de hauteur de chute, le régime visqueux ($H/L^* < 0.05$), gravitationnel ($0.1 < H/L^* < 0.2$), le régime visco-gravitationnel-inertiel ($0.4 < H/L^* < 0.9$) et finalement le régime inertiel pour les hauteur $H/L^* > 1.5$. Les hauteurs qui ne sont pas comprises dans ces intervalles correspondent à des zones de transition entre les dits régimes. Pour aller plus en avant dans l'analyse de cette courbe on rappelle que a_c désigne le rayon du filament dans la zone basse de l'écoulement. Ce rayon est considéré comme étant fixe, ce qui par la même occasion fixe la vitesse d'écoulement à une valeur égale à celle de l'enroulement, c'est-à-dire U_c . Dans la partie basse de l'écoulement les forces dominantes ne sont pas celles dues à l'étirement visqueux mais plutôt à la torsion. Dès lors il est aisé d'en estimer l'ordre de grandeur. Par l'équation (3.10) on a $m \simeq \mu I \omega'$. La taille de la couche limite peut être approchée

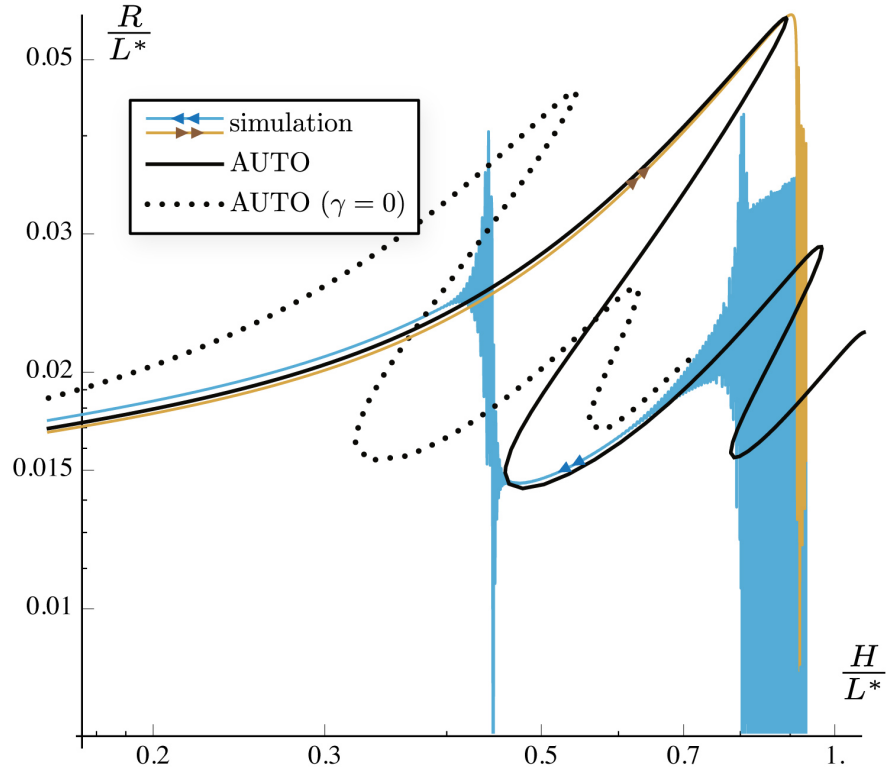


FIGURE 3.5 – Validation de la tension de surface pour un enroulement visqueux ($\Pi_1 = 7000$, $\Pi_2 = 7$, $\Pi_3 = 10.3 \cdot 10^{-3}$). On utilise les mêmes paramètres numériques que ceux de la figure 3.3, seule la tension de surface est ajustée à la valeur $\gamma = 10^{-3}$. On a un bon accord avec la prédiction AUTO (en noir). On a ajouté pour comparaison la courbe obtenue sans tension de surface (pointillés).

par R_c ce qui en remplaçant les autres termes par leur définition conduit à :

$$m \simeq \mu a_c^4 \frac{U_c}{R_c^2} \quad (3.26)$$

Dès lors l'équation de Kirchhoff (3.7) permet d'estimer les efforts visqueux n_\perp qui dérivent de la flexion et de la torsion. En dérivant une fois de plus cette quantité on obtient :

$$n'_\perp \simeq \mu a_c^4 \frac{U_c}{R_c^4} \quad (3.27)$$

On passe maintenant en revue les différents régimes :

- Régime visqueux. Les hauteurs de chutes étant faibles, il n'y a pas d'étirement notable ce qui conduit à $a_c \simeq d/2$ où d est le diamètre de l'injecteur. La seule longueur de référence du problème est la hauteur de chute. On en conclut que :

$$R_c \simeq H. \quad (3.28)$$

$$\Omega_c \simeq QH^{-1}a_c^{-2}. \quad (3.29)$$

C'est ce qui se passe lorsque par exemple on dépose du dentifrice sur une brosse à dent.

- Régime gravitationnel. Il est conditionné par l'équilibre entre les efforts visqueux et gravitationnels qui s'approchent par $\rho g a_c^2$. Par (3.27) on obtient alors :

$$R_c \simeq g^{-1/4} \nu^{1/4} Q^{1/4} = \delta \quad (3.30)$$

$$\Omega_c \simeq g^{1/4} \nu^{-1/4} a_c^{-2} Q^{3/4} = U_c / \delta \quad (3.31)$$

en utilisant l'égalité $\mu = \rho \nu$ et en définissant $U_c = Q/a_c^2$ et $\delta = (\frac{\nu Q}{g})^{1/4}$. Blount et Lister [40] ont apporté une correction à cette formulation en prenant en compte les effets de la partie haute :

$$R_c = \delta \ln(\delta/H) \quad (3.32)$$

$$\Omega_c = \frac{U_c}{\delta} \ln\left(\frac{H}{\delta}\right)^{-1/2} \quad (3.33)$$

- Régime inertiel. Il est conditionné par l'équilibre entre les efforts visqueux et inertiels qui s'approchent par $\rho a_c^2 U_c^2 / R$ par (3.6). On obtient alors :

$$R_c \simeq \nu^{1/3} a_c^{4/3} Q^{-1/3} \quad (3.34)$$

$$\Omega \simeq \nu^{-1/3} a_c^{-10/3} Q^{4/3} \quad (3.35)$$

- Régime gravitatio-inertiel. Ce régime est assez différent des autres, les fréquences que l'on observe trouvent leur origine dans la partie haute de l'écoulement. Ce mode est particulièrement intéressant et est détaillé à la fin de la prochaine section en 3.4.2

3.4.2 Morphologie de l'écoulement

Ce paragraphe a pour but de valider les différentes hypothèses qui ont été avancées ci-dessus.

Découpe haut-bas

Au-delà de l'observation directe, la façon la plus naturelle de distinguer la partie haute de la partie basse de l'écoulement se fait par le tracé des potentiels de dissipations introduits précédemment. On en rappelle ici l'expression formelle :

$$\mathcal{D}(\underline{x}; \hat{\underline{u}}, \hat{v}) = \mathcal{D}_s(\underline{x}; \hat{\underline{u}}) + \mathcal{D}_t(\underline{x}; \hat{\underline{u}}, \hat{v}) + \mathcal{D}_b(\underline{x}; \hat{\underline{u}}, \hat{v}). \quad (3.36)$$

La dissipation visqueuse se décompose en deux composantes majeures, le terme d'étiement \mathcal{D}_s et ceux de flexion et torsion : $\mathcal{D}_b + \mathcal{D}_t$. On trace ces quantités par unité de longueur en fig. 3.6. La dissipation attribuée à l'étiement est très largement dominante sur la zone haute alors que les torsions dominent essentiellement en partie basse. Il demeure cependant une légère zone de compression dans cette partie attribuée à l'appui qu'a le filament sur le support.

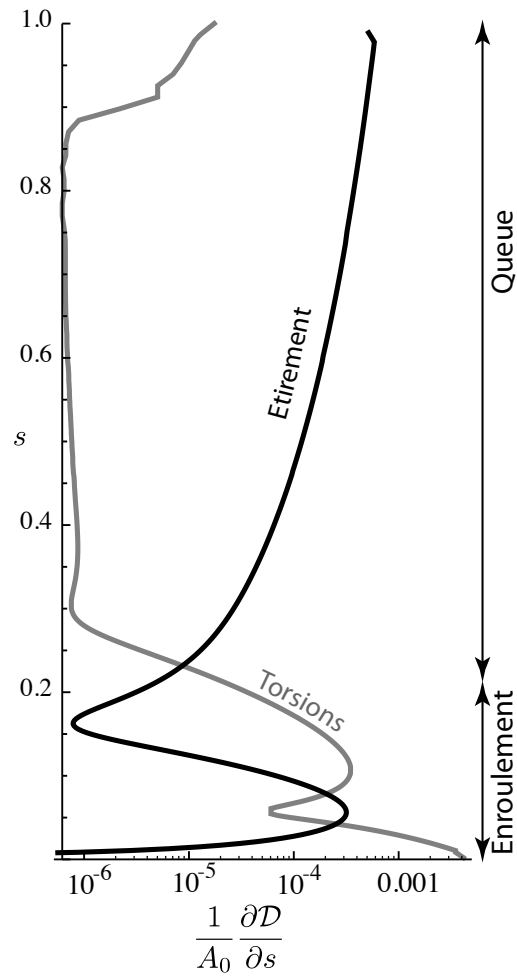


FIGURE 3.6 – Puissance dissipée par les efforts visqueux par unité de longueur : en noir par étirement et en gris par flexion et torsion.

Couplage haut bas

Trois des régimes discutés ci-dessus s'expliquent "uniquement" par un équilibre de forces sur la zone basse⁴. Le régime gravito-inertiel est quant à lui directement issu du couplage haut-bas. Il a fait l'objet d'une étude particulièrement détaillée de Blount et Lister [40]. Ici nous cherchons à l'expliquer en quelques lignes en suivant la méthodologie de Ribe [38]. Il s'agit de considérer la partie haute comme une tige pendante, tout à fait similaire à ce qu'on aurait dans le cas élastique⁵ et qui n'aurait pas de résistance en torsion. L'équilibre entre la force centrifuge et le poids impose par (3.6) :

$$\rho A g \sin \theta = \rho A \Omega_c^2 y, \quad (3.37)$$

où y est la déflexion de la tige par rapport à la verticale, aussi repérée par l'angle θ . En notant que $y \simeq R_c$ et que $\sin(\theta) \simeq R_c/H$ on obtient alors :

$$\Omega_c^{\text{IG}} \simeq \left(\frac{g}{H}\right)^{1/2} \quad (3.38)$$

qui n'est autre que la fréquence du pendule simple. Ce résultat s'accompagne de deux remarques importantes :

- Les points de rebroussement de la courbe $\Omega_c(\tilde{H})$ (Figure 3.2) peuvent alors s'interpréter comme les modes propres de la partie haute de l'écoulement. La réponse $\Omega_c(\tilde{H})$ dans cet intervalle de hauteur est le résultat du couplage entre un oscillateur linéaire, la partie haute, et la partie basse qui elle est hautement non linéaire.
- Un raisonnement analogue fonctionne en prenant en compte la tension de la partie haute et en détaillant la force exercée par la partie basse. Cette méthode [40] permet de s'approcher de façon tout à fait convaincante de la courbe $\Omega_c(\tilde{H})$ lorsque le rapport d'aspect du filament est très faible.

Ondulation de la partie haute

En conséquence directe de ce qui a été dit ci-dessus on comprend que l'aspect visuel de la partie haute peut être le reflet des modes propres évoqués ci-dessus. Ce résultat sera particulièrement intéressant pour la suite : la partie haute ondule au lieu de "couler droit" comme on pourrait s'y attendre. Ceci est visible sur le tracé 3D noté vgi en fig 3.2 comme sur le tracé B en fig 3.3.

3.5 Conclusion : Sauts de branches - régimes transitoires

La figure 3.7 illustre la trace laissée par le filament visqueux lors des sauts de branches C et D de la figure 3.3. On voit bien ici que l'approche numérique discrète permet de

4. On notera tout de même que la valeur "d'entrée" du rayon a_c est cruciale et est par essence le résultat de l'étirement dans la partie haute de l'écoulement.

5. On renvoie au dernier chapitre pour le cas élastique.

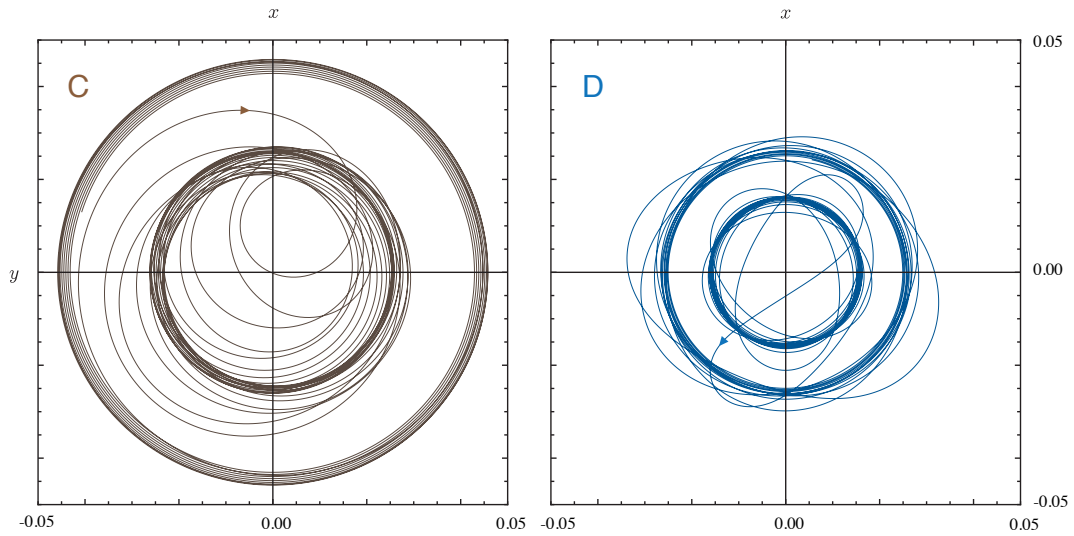


FIGURE 3.7 – Simulation de la trace déposée par le filament en chutant son support lors des régimes transitoires marqués ‘C’ et ‘D’ en figure 3.3. Pour ‘C’, la hauteur de chute est lentement augmentée et le filament saute vers une solution de plus petit rayon. A l’inverse en ‘D’, la hauteur de chute est réduite et le filament saute vers une branche de rayon supérieur. Les paramètres numériques sont identiques utilisés en figure 3.3.

non seulement de répéter les branches prévues par continuation mais aussi de capturer les régimes transitoires qui mènent à ces branches. En particulier il n’y a donc aucun problème à briser la symétrie du problème et sa stationnarité en donnant par exemple une vitesse et direction particulière à la surface, qui devient deviendrait alors un tapis roulant. C’est la propriété fondamentale dont nous avons tiré avantage pour réaliser l’étude présentée au chapitre suivant.

La machine à coudre fluide

Résumé

Ce chapitre traite de la machine à coudre fluide, c'est-à-dire ce qu'il se passe lorsqu'un filament visqueux chute d'une distance sur un tapis roulant à la vitesse V (Figure 4.1). Si cette vitesse est suffisamment faible, *ie* inférieure à la vitesse de chute libre U_f alors le filament se dépose sur le tapis en une myriade de motifs possibles. Ces formes ne sont pas étrangères à ce qui a été présenté au chapitre précédent. Cette filiation est étudiée par la simulation numérique directe de cette machine à coudre fluide. On montre alors que cette diversité de formes peut être unifiée par un formalisme cinématique simple. Ce formalisme permet de donner un éclairage nouveau à ces formes et à en expliquer l'origine physique. L'article qui suit est découpé de la façon suivante :

1. Dans un premier temps on montre que l'on peut obtenir la quasi-totalité des formes rapportées dans la littérature grâce à l'outil numérique mis en place au Chapitre 2.
2. On génère alors un diagramme de phase et le compare aux expériences réalisées par Stephen Morris [43].
3. On utilise cet outil numérique comme un moyen d'analyse et on montre que l'on peut rassembler ces motifs très variés sous un même formalisme.

4.1 Introduction

Dans notre description rapide des applications au Chapitre 1 nous avons évoqué : (a) la fabrication des matériaux non tissés, (b) les peintures de Jackson Pollock. On étudie ici un système modèle proche de ces deux exemples [4] : Un filament unique s'écoule continûment depuis un injecteur jusque sur un tapis roulant qui se déplace dans son plan à une vitesse V (Figure 4.1). Ce système a été étudié pour la première fois par Chiu-Webster et Lister [44] (noté CWL par la suite), qui l'ont baptisé sous le nom de "machine à coudre fluide" s'appuyant sur la ressemblance des motifs laissés par le filament avec

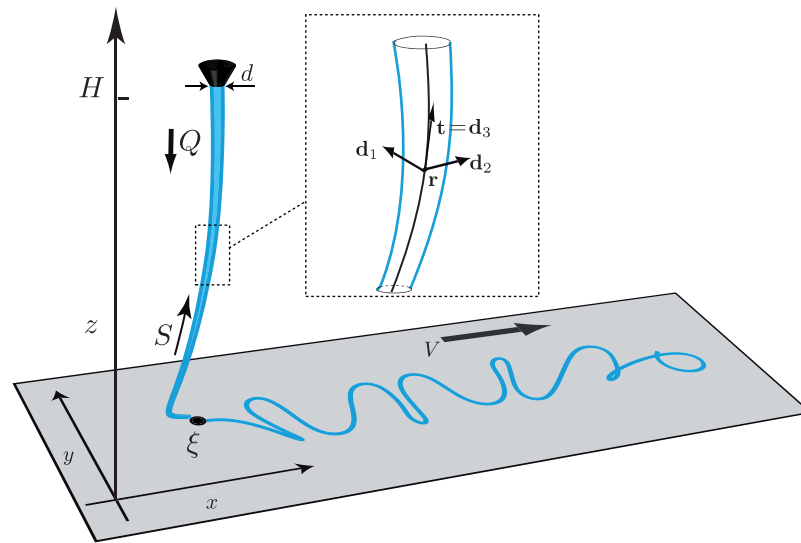


FIGURE 4.1 – La machine à coudre fluide. Un fluide newtonien de masse volumique ρ , viscosité ν , et tension de surface γ est extrudé avec un débit Q à travers un injecteur de diamètre d et d'une hauteur H sur un tapis roulant à une vitesse V . La position du point de contact entre le filament et le tapis est représentée par le nombre complexe $\xi(t) \equiv x(t) + iy(t)$. L'advection du tapis à une vitesse V génère un motif complexe sur le tapis. En médaillon : Géométrie d'un élément fluide du filament. On montre le repère matériel orthonormé \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 , and \mathbf{d}_3 exprimé en fonction de la coordonnée Lagrangienne S repérée sur la ligne centrale.

des motifs de machine à coudre (Figure 4.2). La complexité et la diversité de ces motifs témoignent de la richesse du système étudié en termes de non-linéarités et bifurcations. Au delà de cela, l'intérêt de ce système réside dans le défi théorique et numérique qu'il pose.

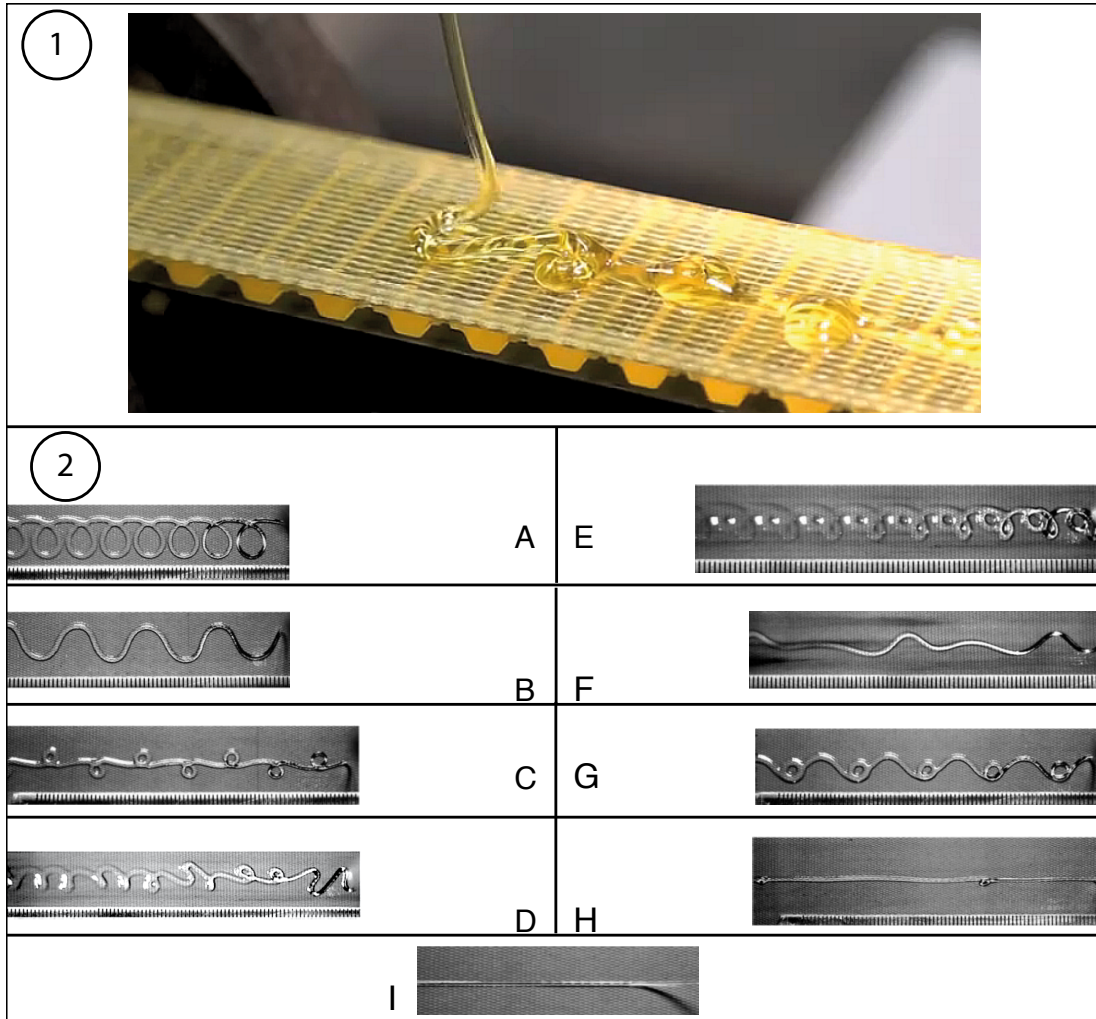


FIGURE 4.2 – (1) La machine à coudre fluide d'après S.Morris <http://vimeo.com/17103088> (2) Quelques motifs de machine à coudre d'après CWL [44]. A - Enroulements circulaires translatsés. B - Méandres. C - Boucles alternées. D - Chaotique. E - Doubles boucles. F - Doubles méandres. G - Motif en W. H - Replis. I - Rectiligne

CWL ont utilisé du sirop pour leur expériences. Ce fluide de masse volumique ρ , tension de surface γ et viscosité ν est éjecté verticalement avec un débit Q depuis un orifice de diamètre d à une distance H d'un tapis roulant à une vitesse V (fig. 4.1). Ces expériences consistent à faire varier la vitesse V ainsi que la hauteur H pour différentes

valeurs de d , Q et ν . Quand V dépasse largement une vitesse critique $V_b(H)$, alors le filament se dépose en formant une ligne droite et le filament a une forme de chaîne pendante. En diminuant la vitesse du tapis et en s'approchant de V_b le filament se déforme et un talon se forme à la base de l'écoulement. Le filament devient instable en atteignant la vitesse critique $V = V_b$. En diminuant encore cette dernière on voit apparaître une série de bifurcations qui évoluent formant des motifs complexes (fig. 4.2) à commencer par des méandres. Lorsque la vitesse du tapis est nulle $V = 0$ on retrouve alors les enroulements circulaires décrits au chapitre précédent. CWL ont prédit avec succès la forme de la chaînette évoquée ci-dessus au moyen d'un modèle de fil visqueux et en négligeant la résistance en torsion du filament. Cependant cette solution diverge lorsque taux de déformation d est nul en bas d'écoulement, ce qui se produit à la transition vers la solution en talon où il existe des efforts de compression dans le bas de l'écoulement. Par analogie avec le flambage d'un objet élastique [45], CWL ont conclu que l'instabilité de méandre était liée au flambage du talon de l'écoulement. Ribe et al. [46] ont poursuivi une analyse de stabilité linéaire numérique de la chaînette évoquée ci-dessus et ont prédit la vitesse critique V_b d'apparition de l'instabilité ainsi que la fréquence ω_b à l'apparition des méandres. Cette étude a été faite en incluant la résistance en torsion du filament visqueux. Les prédictions numériques avaient alors obtenu un bon accord avec les mesures expérimentales de [44]. Ribe et al. [46] ont aussi rendu compte d'une proximité entre la valeur de ω_b et la valeur de la fréquence des enroulements stationnaires Ω_c pour toutes les valeurs de hauteur de chute H . De plus, ils ont noté que $V_b(H)$ a des valeurs proches de la vitesse de chute libre du filament U_f indiquant que le tapis roulant ne se déplace alors plus assez vite pour que le filament continue à se déposer de manière rectiligne.

Des expériences plus poussées ont alors été proposées par Morris et al. [43]. En particulier elles ont été faites sur un montage expérimental évolué et utilisant de l'huile de silicone pour une meilleure reproductibilité des résultats. Ils ont établi un diagramme de phase complet des motifs en fonction de H et V pour un jeu de paramètres donné où la viscosité ν et le débit Q étaient fixés. Ils ont montré que l'amplitude des méandres en fonction de la vitesse du tapis est compatible avec un scénario de bifurcation de Hopf et ont proposé un modèle simple pour l'expliquer.

Plus récemment, Blount et Lister [47] ont conduit une analyse asymptotique détaillée du filament entraîné par le tapis à vitesse $V \geq V_b$ en se concentrant en particulier sur la forme du talon. Ils ont montré que la partie basse du filament pouvait présenter trois types de comportements selon que V était grande devant, proche, ou inférieure à la vitesse de chute libre du filament U_f . Leur analyse de stabilité a montré que l'instabilité de méandres débute lorsque la force de réaction horizontale du support sur le filament commence à s'orienter à contresens du tapis. Alors la situation est instable et le talon perd son équilibre, les méandres apparaissent.

Comme on peut le voir dans le bref résumé exposé ci-dessus, la compréhension de la machine à coudre fluide est pour le moment limitée à celle des bifurcations initiales ainsi qu'à l'étude de la forme du filament pour des vitesses de tapis relativement importantes.

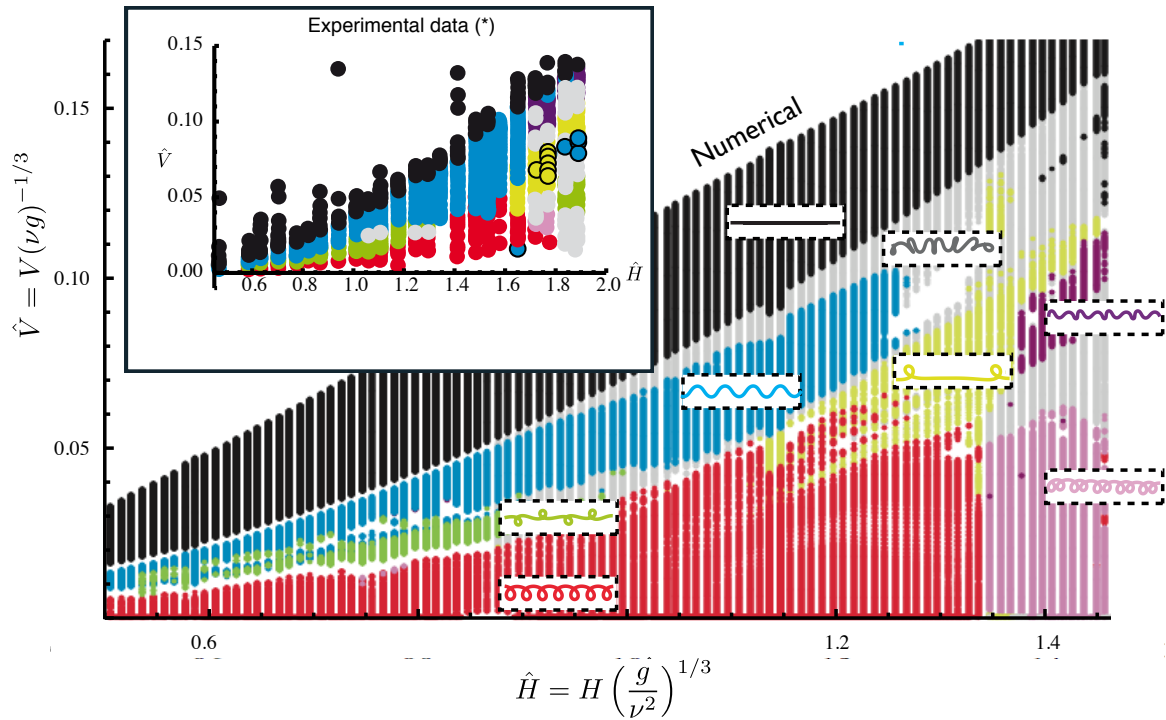


FIGURE 4.3 – Diagramme de phase numérique de la machine à coudre fluide obtenu avec les paramètres $\Pi_1 = 670$, $\Pi_2 = 0.37$ et sans tension de surface ($\Pi_3 = 0$). Les motifs trouvés sont : les boucles circulaires (région A, rouge), les méandres (région B, bleu), les boucles alternées (région C, vert), les doubles boucles circulaires (région E, rose), les boucles étirées (région H, jaune), les doubles méandres (région F, violet), et les motifs désordonnés (région D, gris). Le domaine des motifs rectilignes est marqué en noir, sa frontière nord est artificielle et est due à l’arrêt de la simulation pour les grandes valeurs de \hat{V} . Ce diagramme est très proche de son pendant expérimental reproduit en médaillon à partir des données de Morris et al. [43]

Dans l'article qui suit on pousse l'étude aux régimes complètement non-linéaires grâce au code DVR détaillé au chapitre 2 [2]. En particulier on montre qu'il est possible de générer un diagramme de phase numérique complet rendant compte en détail de la complexité rapportée Morris et al. [43] (Figure 4.3). Fort de cela on propose une analyse novatrice des motifs de machine à coudre visqueuse. Celle-ci nous permettra de conclure quant à leur origine et d'en proposer une nouvelle classification. Le trait le plus marquant de ces motifs et qui jusque là demeurait inconnu est le suivant : les fréquences qui les conditionnent sont des fractions exactes de la fréquence d'enroulement stationnaire Ω_c .

L'analyse détaillée de la machine à coudre fluide est donnée dans l'article qui suit.

A numerical investigation of the fluid mechanical sewing machine

P.-T. Brun,^{1,2,a)} N. M. Ribe,² and B. Audoly¹

¹UPMC Université Paris 06, CNRS UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France

²Laboratoire FAST, UPMC-Paris 6, Université Paris-Sud, CNRS, Bâtiment 502, Campus Universitaire, Orsay 91405, France

(Received 1 November 2011; accepted 15 March 2012; published online 23 April 2012)

A thin thread of viscous fluid falling onto a moving belt generates a surprising variety of patterns depending on the belt speed, fall height, flow rate, and fluid properties. Here, we simulate this experiment numerically using the discrete viscous threads method that can predict the non-steady dynamics of thin viscous filaments, capturing the combined effects of inertia and of deformation by stretching, bending, and twisting. Our simulations successfully reproduce nine out of ten different patterns previously seen in the laboratory and agree closely with the experimental phase diagram of Morris *et al.* [Phys. Rev. E **77**, 066218 (2008)]. We propose a new classification of the patterns based on the Fourier spectra of the longitudinal and transverse motion of the point of contact of the thread with the belt. These frequencies appear to be locked in most cases to simple ratios of the frequency Ω_c of steady coiling obtained in the limit of zero belt speed. In particular, the intriguing “alternating loops” pattern is produced by combining the first five multiples of $\Omega_c/3$. © 2012 American Institute of Physics. [<http://dx.doi.org/10.1063/1.3703316>]

I. INSTABILITIES OF VISCOUS THREADS

A. Introduction

A thin stream or jet of liquid falling onto a fixed surface is one of the simplest situations in fluid mechanics, yet it can generate a remarkable range of phenomena. Fast jets produce hydraulic jumps, which are circular when the viscosity is very low^{1,2} and polygonal when it is somewhat higher.³ Thin streams of very viscous fluid can exhibit steady coiling⁴ or rotatory folding,⁵ and under some conditions coiling produces spiral waves of air bubbles in the thin fluid layer spreading over the surface.⁶ Finally, thin streams of non-Newtonian fluid can exhibit the Kaye (“leaping shampoo”) effect in which the stream rebounds episodically from the pile of previously deposited fluid.⁷

A further degree of complexity is introduced if the source of the jet and the surface onto which it falls are in relative motion. This is the case when a home cook lays down “squiggles” of icing or molten chocolate on a cake, or when an artist lets paint dribble onto a canvas from a moving paintbrush, a technique used to great effect by Jackson Pollock.⁸ An analogous situation involving many interacting jets is the “spunbonding” process of non-woven fabric production, in which thousands of threads of molten polymer solidify and become entangled as they fall onto a moving belt, producing a fabric with a random texture.

Here, we use a numerical approach to study an idealized model for these processes: the continuous fall of a single thread of viscous fluid onto a belt moving with a constant velocity in its own plane (Fig. 1). This system was first studied experimentally by Chiu-Webster and Lister⁹ (henceforth CWL), who called it the “fluid mechanical sewing machine” on account of the stitch-like patterns traced on the belt by the thread. The complexity and diversity of these patterns testifies to a rich

^{a)}Electronic mail: brun@lmm.jussieu.fr.

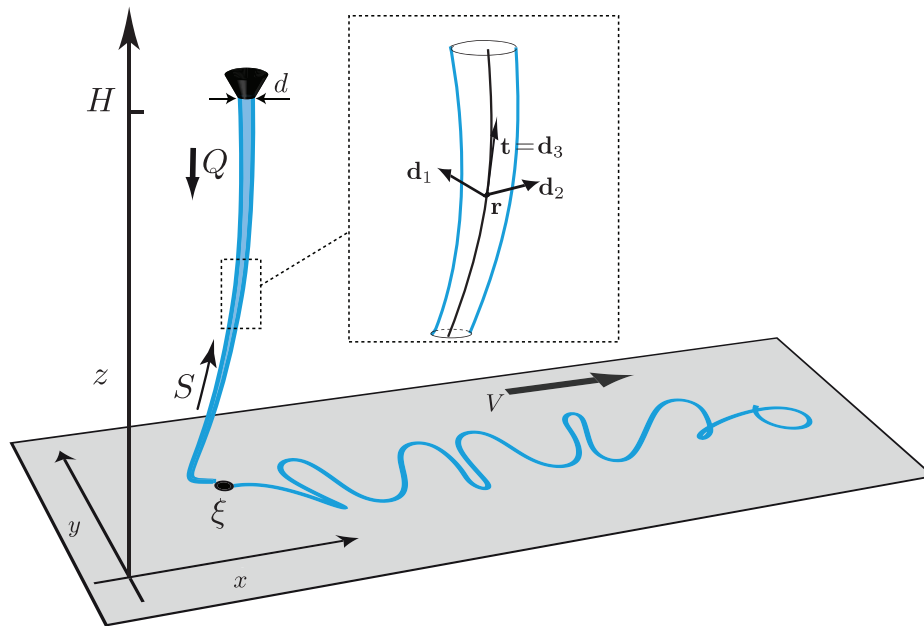


FIG. 1. Configuration of the fluid mechanical sewing machine. Newtonian fluid with constant density ρ , viscosity ν , and surface tension coefficient γ is ejected at a volumetric rate Q through a nozzle of diameter d at a height H above a belt moving in its own plane at constant speed V . The position of the contact point between the thread and the belt is denoted by the complex number $\xi(t) \equiv x(t) + iy(t)$. Lateral advection of the contact point motion at speed V creates complex “stitch” patterns on the belt. (In inset): geometry of an element of the thread, showing the orthonormal triad of basis vectors \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 , and \mathbf{d}_3 as a function of the Lagrangian coordinate S along the center-line.

nonlinear dynamics and bifurcation structure. The appeal of the system is further increased by the theoretical and numerical challenges involved in modeling it.

In CWL’s experiments, viscous fluid (corn syrup) with density ρ , surface tension coefficient γ , and viscosity ν was ejected at a volumetric rate Q from a vertical nozzle of diameter d , from which it fell a distance H onto a belt moving at speed V (Fig. 1). The experiments were conducted by varying V and H for several different combinations of values of d , Q , and ν . When V greatly exceeded a fall height-dependent critical value $V_b(H)$, the fluid thread had the form of a steady dragged catenary. As the belt speed was decreased towards V_b , the lowermost part of the thread evolved into a backward-facing “heel,” which became unstable to periodic meandering when $V = V_b$. Further decrease of the belt speed led to a series of bifurcations to more complex patterns (Fig. 5), ending with the establishment of steady coiling for $V = 0$. CWL successfully predicted the shape of the steady dragged catenary using a “viscous string” model that neglected bending stresses. However, this solution ceases to exist when the extensional axial stress at the bottom of the thread becomes zero, corresponding to the incipient formation of a heel in which the axial stress is compressional. Because a state of axial compressive stress is a necessary condition for the buckling of a slender body,¹⁰ CWL interpreted the onset of meandering as a buckling instability of the heel.

Ribe *et al.*¹¹ carried out a numerical linear stability analysis of the dragged catenary state to predict the critical belt speed V_b and the frequency ω_b for the onset of meandering, using a more complete “viscous rod” theory incorporating bending and twisting of the filament. The numerical predictions of V_b and ω_b thereby obtained agree closely with the experimental measurements of Ref. 9. Ribe *et al.*¹¹ also documented a close correspondence between incipient meandering and finite-amplitude steady coiling on a motionless ($V = 0$) surface, such that ω_b is nearly identical to the steady coiling frequency Ω_c for any given fall height H . Moreover, the critical belt speed $V_b(H)$ is nearly identical to the vertical (free-fall) speed U_f of the fluid at the bottom of the thread, indicating that meandering sets in when the belt is no longer moving fast enough to carry away in a straight line the fluid falling onto it.

More extensive experiments were conducted by Morris *et al.*,¹² using a carefully engineered apparatus with silicone oil as the working fluid for better stability and reproducibility. They determined a complete phase diagram for the patterns as a function of H and V for a particular set of values of

the fluid viscosity ν and the flow rate Q . They showed that the observed amplitude of meandering as a function of the belt speed is consistent with a Hopf bifurcation and proposed a simple model to predict it based on the hypothesis that the contact point moves at constant speed relative to the belt. Finally, they proposed a generic set of amplitude equations which they used to characterize the alternating loops (which they called “figure-of-eight”) and translated coiling patterns.

Most recently, Blount and Lister¹³ performed a detailed asymptotic analysis of a slender dragged viscous thread, focussing on the structure of the heel. They showed that the lowermost part of the thread can exhibit three distinct dynamical regimes depending on whether the belt speed is greater than, nearly equal to, or less than the free-fall speed U_f . Their asymptotic stability analysis of these steady states indicates that meandering sets in when the horizontal reaction force at the belt begins to be slightly against the direction of belt motion, corresponding to the heel “losing its balance.”

As the above summary indicates, our current theoretical understanding of the fluid-mechanical sewing machine is essentially limited to the initial bifurcation from the steady dragged configuration to meandering. In this paper, we push forward into the fully nonlinear regime with the help of a new computational algorithm that permits for the first time robust numerical modeling of arbitrary non-stationary dynamics of viscous threads.¹⁴ After describing the method briefly, we use it to generate a complete phase diagram of sewing-machine patterns that reproduce all the major features of the diagram determined experimentally by Morris *et al.*¹² We then perform a detailed Fourier analysis of the motion of the contact point for each of the patterns simulated and propose a new classification of them based on the spectral content of the motions of the contact point in two orthogonal directions.

For most of the patterns studied, we find that the frequencies present in the spectra of the contact point motion are multiples of the steady coiling frequency Ω_c , indicating that the dynamics of the sewing machine are closely related to those of steady coiling. Accordingly, we set the stage for our study with a brief summary of steady coiling in Sec. I B.

B. Steady coiling

In steady coiling, the contact point of the thread with the surface moves with a constant angular velocity Ω_c along a circle of radius R_c (Fig. 2(a)). In most cases, the thread comprises two distinct parts: a long, roughly vertical “tail” which deforms primarily by stretching under gravity, and a helical “coil” in which the deformation is dominated by bending and (to a lesser extent) twisting. Thus the radius of the thread within the coil a_1 is nearly constant. By conservation of mass, the axial speed of the fluid in the coil is $U_1 = Q/\pi a_1^2$.

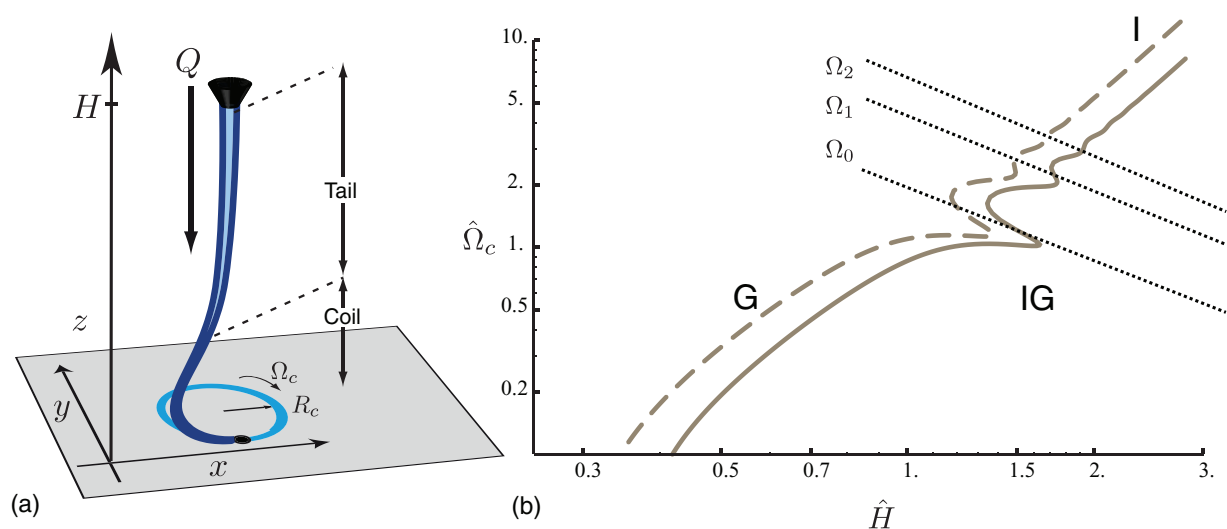


FIG. 2. Steady coiling of a viscous thread. (a) Definition sketch. (b) Coiling frequency as a function of height for the parameters of the experiments of Morris *et al.*,¹² calculated numerically using a continuation method.¹⁵ The solid curve includes the effect of surface tension ($\Pi_3 = 1.84$), while the dashed curve is for zero surface tension ($\Pi_3 = 0$). The portions of the curves corresponding to the gravitational (G), inertio-gravitational (IG), and inertial (I) regimes are indicated. The dotted lines show the first three eigenfrequencies of a free viscous pendulum.

Steady coiling can occur in several distinct dynamical regimes characterized by different balances of the viscous, gravitational, and inertial forces acting on the thread.^{15–17} These regimes appear clearly on plots of the coiling frequency vs. the fall height. For convenience, we define a dimensionless fall height \hat{H} and a dimensionless coiling frequency $\hat{\Omega}_c$,

$$\hat{H} = H \left(\frac{g}{\nu^2} \right)^{1/3}, \quad \hat{\Omega}_c = \Omega_c \left(\frac{\nu}{g^2} \right)^{1/3}. \quad (1)$$

Figure 2(b) shows $\hat{\Omega}_c$ as a function of \hat{H} for the parameters of the experiments of Morris *et al.*,¹² viz., $\nu = 0.0277 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\gamma = 0.0215 \text{ N m}^{-1}$, $d = 8 \text{ mm}$, and $\rho Q = 0.0270 \text{ g s}^{-1}$. For $\hat{H} < 1.2$, coiling occurs in a gravitational (G) regime. Inertia is negligible everywhere in the thread, which is governed by a balance between gravity and the viscous forces that resist stretching (in the tail) and bending (in the coil). At intermediate heights $1.2 \leq \hat{H} \leq 2.2$, a complex inertio-gravitational (IG) regime appears, in which the coiling frequency is a multivalued function of the fall height. The centrifugal force now becomes important in the tail, which behaves as a distributed pendulum with an infinity of eigenmodes whose corresponding eigenfrequencies are proportional to the simple pendulum frequency $(g/H)^{1/2}$. The first three of these frequencies are shown by the dotted lines in Fig. 2(b). When one of these eigenfrequencies is close to the frequency set by the coil, the tail enters into resonance with the latter, giving rise to resonance peaks that appear as rightward-facing “bumps” in the curve $\hat{\Omega}_c(\hat{H})$. For large heights $\hat{H} > 2.2$, coiling occurs in an inertial (I) regime in which the viscous bending force in the coil is balanced by inertia.¹⁶ The tail in this regime is almost perfectly vertical and is controlled by a balance between gravity, the viscous stretching force, and the axial momentum flux. Finally, there is also a viscous (V) regime in which both gravity and inertia are negligible everywhere in the thread, but this is only observed when both H and d are much smaller than in the experiments of CWL and Morris *et al.*

In a typical laboratory experiment on steady coiling, the parameters d and Q and the fluid properties ρ , ν , and γ are held fixed, while H is varied. Each such experiment is completely defined by the values of the three dimensionless groups

$$\Pi_1 = \left(\frac{\nu^5}{g Q^3} \right)^{1/5}, \quad \Pi_2 = \left(\frac{\nu Q}{g d^4} \right)^{1/4}, \quad \Pi_3 = \frac{\gamma d^2}{\rho \nu Q}. \quad (2)$$

As an example, $\Pi_1 = 610$, $\Pi_2 = 0.370$, and $\Pi_3 = 1.84$ for all the experiments of Morris *et al.*¹² The (dimensionless) functional dependence of the coiling frequency on the other parameters now takes the general form

$$\hat{\Omega}_c = \hat{\Omega}_c(\hat{H}, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3). \quad (3)$$

The effect of surface tension is measured by the parameter Π_3 . Surface tension modifies the coiling frequency quantitatively but introduces no essentially new dynamics, as can be seen by comparing the solid ($\Pi_3 = 1.84$) and dashed ($\Pi_3 = 0$) curves in Fig. 2(b).

The continuation method used to generate the curves in Fig. 2(b) can be used for steady coiling because the flow is stationary in a co-rotating reference frame that moves with the contact point. No such reference frame exists for the sewing machine configuration. We therefore require a different numerical method, which is described in Sec. II.

II. NUMERICAL METHOD

Our numerical simulations of the sewing machine were set up using the computational method of discrete viscous threads (henceforth DVT) originally described in a conference paper,¹⁴ and which will be presented in detail in an upcoming journal article. To the best of our knowledge, DVT is the only available numerical method that is fast and robust enough to be applicable to the sewing machine geometry while retaining all the relevant modes of deformation, namely, stretching, twisting, and bending. For a thin thread the stretching modulus varies as the square of the thread’s radius, while the bending and twisting moduli are proportional to the fourth power of the radius. As a result the dynamics of thin threads is a nonlinear and numerically stiff problem. The DVT method

addresses this difficulty by introducing a spatial discretization of the equations based on ideas from differential geometry. The method allows simulations to be run for arbitrary mesh sizes, even very coarse ones, with optimal stability. This contrasts with conventional discretization schemes which are typically stable for sufficiently small mesh sizes only, the maximum mesh size being in practice a small fraction of the smallest length scale in the flow, here the small size of the coiled region at the bottom.

Below we briefly present the principles of the DVT method, introduce adaptive mesh refinement which provides a tremendous speed-up of the calculations when gravity stretches the tail significantly, validate the code against known solutions for steady coiling, explain the details of the numerical procedure, and finally present our numerical results.

A. Smooth case: The equations for thin viscous threads

The numerical code makes use of the Lagrangian approach and the viscous thread is discretized as a polygonal line. A mass is assigned to each vertex, forces are set up on these masses, and the motion of each mass is obtained by time integration of the fundamental law of dynamics. The discrete forces are designed in such a way that the motion of the polygonal line is equivalent to that of a thin viscous thread in the smooth limit. The key element of the numerical method is the expression for the discrete viscous forces. To prepare the derivation, we start by reformulating the smooth case, usually expressed in Eulerian variables, in the Lagrangian framework. We introduce a Lagrangian coordinate S that marks cross-sections and follows them during motion. This Lagrangian coordinate S is defined as the arc-length in an imaginary reference configuration where the thread is a cylindrical tube of constant radius. It plays the same role as the vertex index i in the discrete case.

At a particular time t , the configuration of the thread is defined by its center-line $\mathbf{r}(S, t)$ and an orthonormal triad $(\mathbf{d}_1(S, t), \mathbf{d}_2(S, t), \mathbf{d}_3(S, t))$. This triad allows one to keep track of twisting, because the directions of \mathbf{d}_1 and \mathbf{d}_2 follow the orientation of a cross-section as it spins about the center-line. Thin threads deform in such a way that cross-sections remain approximately planar and perpendicular to the centerline (this assumption is the starting point of the derivation of Kirchhoff equations for thin threads and can itself be justified rigorously from asymptotic analysis, see, e.g., Ref. 18). As a result, the center-line tangent $\mathbf{r}'(S, t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial S}$ and the unit vector $\mathbf{d}_3(S, t)$ are aligned. Denoting by $\ell(S, t)$ the axial stretch factor based on the reference configuration, given by the norm of $\mathbf{r}'(S, t)$, we have

$$\mathbf{r}'(S, t) = \ell(S, t) \mathbf{d}_3(S, t). \quad (4)$$

Since the triad $(\mathbf{d}_i(S, t))_{i=1,2,3}$ is orthonormal, its time evolution defines a rigid-body rotation for any particular value of S . The associated instantaneous angular velocity $\boldsymbol{\omega}(S, t)$ is such that

$$\frac{\partial \mathbf{d}_i(S, t)}{\partial t} = \boldsymbol{\omega}(S, t) \times \mathbf{d}_i(S, t) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5)$$

One can take advantage of the fact that the vectors \mathbf{r}' and \mathbf{d}_3 must remain aligned by Eq. (4) to capture the twisting motion of the thread using a single parameter, the angular spinning velocity $w(S, t)$ defined by $w(S, t) = \boldsymbol{\omega}(S, t) \cdot \mathbf{d}_3(S, t)$. In this view, which we call the centerline/spin representation, the material velocity $\boldsymbol{\omega}$ is a secondary variable which can be reconstructed by the equation

$$\boldsymbol{\omega}(S, t) = \mathbf{d}_3(S, t) \times \dot{\mathbf{d}}_3(S, t) + w(S, t) \mathbf{d}_3(S, t), \quad (6)$$

where the time derivative $\frac{\partial}{\partial t}$ is denoted using a dot. In a viscous thread, the fundamental kinematical quantities are the strain rates, defined by

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{1}{\ell} \frac{\partial \mathbf{u}(S, t)}{\partial S} \cdot \mathbf{d}_3(S, t), \quad \dot{\epsilon}_{\text{tb}} = \frac{1}{\ell} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}(S, t)}{\partial S}, \quad (7)$$

where $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}$ is the center-line velocity. Here, $\dot{\epsilon}_s$ captures the strain rate associated with axial stretching, while the vector $\dot{\epsilon}_{\text{tb}}$ captures in a combined manner the strain rates for the twisting and bending modes. The strain rate for stretching, $\dot{\epsilon}_s$, is related to the Lagrangian time derivative of the center-line stretch ℓ by the formula $\dot{\epsilon}_s = \partial \ln \ell / \partial t$.

For a thin thread, the internal stress is described by the resultant $\mathbf{n}(S, t)$ of the viscous forces over a particular cross-section, and their moment $\mathbf{m}(S, t)$ with respect to the origin of the cross-section. These internal force and moment vectors play the same role as the tensor $\boldsymbol{\sigma}$ in 3D continuum mechanics. For the special case of a thin thread geometry, Stokes's constitutive law states that stress is proportional to the rate of deformation: for the stretching mode, we have

$$\mathbf{n}(S, t) \cdot \mathbf{d}_3(S, t) = 3\mu A \dot{\epsilon}_s. \quad (8)$$

Here $\mu \equiv \rho \nu$ is the dynamic viscosity, and $A = \pi a^2$ is the cross-sectional area. The stretching modulus $3\mu A$ was originally derived by Trouton.¹⁹ For the bending and twisting modes we have

$$\mathbf{m}(S, t) = (3\mu I \mathbf{P}_{12} + 2\mu I \mathbf{P}_3) \cdot \dot{\epsilon}_{tb}, \quad (9)$$

where $I = \pi a^4/4$ is the moment of inertia, a is the radius, $\mathbf{P}_3 = \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3$ is the tangent projection operator, and $\mathbf{P}_{12} = \mathbf{1} - \mathbf{P}_3$ is the normal projection operator. The radius $a(S, t)$ is a dependent variable which is reconstructed by the incompressibility condition

$$a(S, t) = \frac{a_0}{\sqrt{\ell(S, t)}}, \quad (10)$$

where $a_0 = d/2$ is the radius in the configuration of reference (note that $\ell = 1$ in the reference configuration by definition). The expression $3\mu I$ for the bending modulus can be found for instance in Ref. 20.

These equations are complemented by the balance of linear and angular momentum, known as the Kirchhoff equations for thin rods

$$\frac{\partial \mathbf{n}(S, t)}{\partial S} + \mathbf{f}(S, t) = \rho A_0 \frac{\partial^2 \mathbf{r}(S, t)}{\partial t^2}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}(S, t)}{\partial S} + \frac{\partial \mathbf{r}(S, t)}{\partial S} \times \mathbf{n}(S, t) = \mathbf{0}. \quad (12)$$

Following an approximation introduced by Kirchhoff himself which is valid for thin threads, we have neglected the rotational inertia in the second equation. The vector $\mathbf{f}(S, t)$ is the resultant of the external forces per unit *reference* length dS . The weight of the thread and the surface tension are taken into account by setting

$$\mathbf{f}(S, t) = \rho A_0 \mathbf{g} - \frac{\partial(\pi \gamma a(S, t) \mathbf{d}_3(S, t))}{\partial S}, \quad (13)$$

where $A_0 = \pi a_0^2$ is the cross-sectional area in the reference configuration, \mathbf{g} is the acceleration of gravity, and γ is the surface tension at the fluid-air interface. The last term in Eq. (13) is the net force on the center-line due to surface tension at the fluid-air interface, the argument in the derivative being the axial force due to the capillary overpressure $(\pi a^2)(\frac{\gamma}{a})$. Note that there is no need to consider a linear density of applied torque in Eq. (12) for the problem at hand.

With suitable boundary conditions, the set of partial differential equations (4)–(12) constitutes a well-posed mathematical problem governing the dynamics of a viscous thread.

B. A variational view: Rayleigh potentials

The equations of motion (11) and (12) and the constitutive law (8) and (9) can be discretized in a natural manner¹⁴ if they are first re-written in terms of a Rayleigh potential. The Rayleigh potential \mathcal{D} yields the power dissipated by viscous forces as a function of the vertex velocity $\mathbf{u}(S) = \dot{\mathbf{r}}(S)$ and spinning velocity $w(S) = \boldsymbol{\omega}(S) \cdot \mathbf{d}_3(S)$. For a thin thread, it has three contributions corresponding to the stretching, bending, and twisting modes, $\mathcal{D}(\mathbf{u}, w) = \mathcal{D}_s(\mathbf{u}) + \mathcal{D}_t(\mathbf{u}, w) + \mathcal{D}_b(\mathbf{u}, w)$. Note that the Rayleigh potential \mathcal{D} also depends on the current configuration $\mathbf{r}(S, t)$ but this dependence will be implicit in our notations. As an illustration, consider the stretching contribution \mathcal{D}_s . It only depends

on the vertex velocities and reads

$$\mathcal{D}_s(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int 3 \mu A \dot{\epsilon}_s^2 \ell \, dS, \quad (14)$$

where $\dot{\epsilon}_s$ in the integrand is given by Eq. (7), and $\ell \, dS$ is the infinitesimal arc-length in the current configuration.

The Rayleigh dissipation potential is useful as it captures the effect of the internal viscous stress in a compact mathematical form. Indeed in the equations of motion (11) and (12) the net viscous force \mathbf{n}' and the net viscous moment $\mathbf{m}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{n}$ in the left-hand sides can be shown to be equivalent to a density of applied force

$$\mathbf{f}_v(S, t) = - \left. \frac{\partial \mathcal{D}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{w})}{\partial \hat{\mathbf{u}}(S)} \right|_{(\hat{\mathbf{u}}=\dot{\mathbf{x}}(t), \hat{w}=\dot{w}(t))} \quad (15)$$

and a density of applied twisting torque

$$q_v(S, t) = - \left. \frac{\partial \mathcal{D}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{w})}{\partial \hat{w}(S)} \right|_{(\hat{\mathbf{u}}=\dot{\mathbf{x}}(t), \hat{w}=\dot{w}(t))}. \quad (16)$$

In these equations, the right-hand sides denote *functional* derivatives, as the dissipation potential \mathcal{D} takes the functions $\hat{\mathbf{u}}(S)$ and $\hat{w}(S)$ as arguments. The hat notation expresses the fact that the derivatives have to be calculated formally first, and evaluated using the real motion ($\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}, w$) next.

C. Discretization

In the discrete case, the center-line of the thread is represented by a polygonal chain of $n + 2$ particles $\mathbf{R}(t) = \{\mathbf{r}_0(t), \mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_{n+1}(t)\}$. The length $\ell^i(t)$ and unit tangent $\mathbf{d}_3^i(t)$ of an edge i are defined by

$$\mathbf{r}_{i+1}(t) - \mathbf{r}_i(t) = \ell^i(t) \mathbf{d}_3^i(t). \quad (17)$$

We consider viscous threads having a circular cross-section. As a result there is no need to keep track of the absolute orientation of the cross-sections during motion. Twist is taken into account through the instantaneous angular velocity of spin of an edge, noted $w^i(t)$. This is an unknown of the motion, for which we will derive an equation. Representing rotations by a single degree of freedom is beneficial for the simulation. The angular velocity vector $\boldsymbol{\omega}^i$ is a secondary quantity in the simulation, which is reconstructed from the spinning velocity w^i by an equation similar to the smooth equation (6).

The generalized velocity of a viscous thread is obtained by complementing the vertex velocities $\dot{\mathbf{R}}(t) = \{\dot{\mathbf{r}}_0(t), \dots\}$ with the spinning velocities of the edges $\mathbf{W}(t) = \{w^0(t), \dots\}$. The dynamics of the thread is specified by a differential equation involving the position $\mathbf{R}(t)$, the velocities $\dot{\mathbf{R}}(t)$, $\mathbf{W}(t)$, as well as the acceleration $\ddot{\mathbf{R}}(t)$. Rotational inertia is neglected and so $\dot{\mathbf{W}}(t)$ does not enter into the equation. This differential equation is derived next.

As in the smooth case, internal viscous stress is captured by means of a discrete Rayleigh dissipation potential which is the sum of three contributions, $\mathcal{D}(\mathbf{U}, \mathbf{W}) = \mathcal{D}_s(\mathbf{U}) + \mathcal{D}_t(\mathbf{U}, \mathbf{W}) + \mathcal{D}_b(\mathbf{U}, \mathbf{W})$. As an illustration, the stretching contribution is defined in close analogy with Eq. (14) by

$$\mathcal{D}_s(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \sum D^i (\dot{\epsilon}_s^i)^2, \quad (18)$$

where $D^i = 3 \mu A^i \ell^i$ is a discrete stretching modulus defined by analogy with Eq. (8), and $\dot{\epsilon}_s^i = \frac{1}{\ell^i} \mathbf{d}_3^i \cdot (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i)$ is a discrete axial strain rate defined by analogy with Eq. (7). The twist and bending contributions \mathcal{D}_t and \mathcal{D}_b can be defined in a similar manner.¹⁴ They make use of discrete notions of curvature and twist, based on ideas from discrete differential geometry.

In analogy with the smooth case, we write the equations of motion as

$$\mathbf{F}_v(t) + \mathbf{F}(t) = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{R}}(t), \quad (19)$$

$$\mathbf{Q}_v(t) = \mathbf{0}. \quad (20)$$

The first equation is a balance of linear momentum for the vertices and is associated with the positional degrees of freedom $\mathbf{R}(t)$, while the second equation is a balance of twisting torque at each edge, associated with the spinning degrees of freedom $\mathbf{W}(t)$. Here, \mathbf{M} is the diagonal matrix filled with the mass of the vertices, \mathbf{F}_v and \mathbf{Q}_v are the viscous forces and twisting torques representing the internal stress in the thread, and \mathbf{F} combines the weight and the net force on vertices due to surface tension. The discrete surface tension forces derive from a capillary energy equal to the surface tension coefficient, times the sum of the lateral area of the cylinders bounding the volume of fluid in each segment. As in Eq. (12) for the smooth case, we have neglected rotational inertia in the right-hand side of Eq. (20): we have checked numerically that this has negligible effect on the simulation when the thread is thin enough.

Our discretization of the thread is based on the Rayleigh potentials, and the discrete viscous forces and moments are defined as in Eqs. (15) and (16) by

$$\mathbf{F}_v(t) = - \left. \frac{\partial \mathcal{D}(\hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{W}})}{\partial \hat{\mathbf{U}}} \right|_{(\hat{\mathbf{U}}=\hat{\mathbf{R}}(t), \hat{\mathbf{W}}=\hat{\mathbf{W}}(t))}, \quad (21)$$

$$\mathbf{Q}_v(t) = - \left. \frac{\partial \mathcal{D}(\mathbf{U}, \mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} \right|_{(\hat{\mathbf{U}}=\hat{\mathbf{R}}(t), \hat{\mathbf{W}}=\hat{\mathbf{W}}(t))}. \quad (22)$$

The equations of the present section provide a complete system of equations for the dynamics of a discrete viscous thread. For the time discretization, we use a semi-implicit Euler scheme, which provides good stability even for quite large time-steps (by semi-implicit, we mean that we linearize the equations near the current configuration at every time-step, before applying an implicit scheme). The treatment of boundary conditions is explained in Sec. II E.

D. Adaptive mesh refinement

The DVT method uses a Lagrangian grid which is advected by the flow. In sewing machine experiments, gravity can typically stretch the centerline by a factor 5–10 over the course of the descent. In the absence of refinement, this makes the grid very inhomogeneous: to capture the small-scale features near the belt one has to use an extremely fine mesh size near the nozzle. Overall, a large number of degrees of freedom are required and the simulation is inefficient. In addition, important inhomogeneities in edge lengths make the time-stepping problem ill-conditioned and robustness is affected. To overcome these difficulties, we have set up adaptive mesh refinement.

In our implementation of refinement, edges are subdivided whenever their length exceeds a nominal length, which is a prescribed function of the distance to the belt. In the upper part of the belt, this nominal length is equal to twice the initial segment length, defined by the periodic release of new (Lagrangian) vertices from the nozzle. To resolve the coil region better, this nominal segment length is decreased near the belt according to a prescribed exponential profile. This profile was adjusted in such a way that the coil region always includes a sufficient number of vertices, typically 10–30, with a final edge length typically below $0.006(\nu^2/g)^{1/3}$, and that the interval between subsequent subdivisions of a given edge is always larger than two simulation steps.

Whenever an edge was marked as needing subdivision, a new vertex was inserted. We computed the properties of the new vertex and of the two new edges as follows: the Lagrangian coordinate of the new vertex is obtained by linear interpolation, the mass stored in the former edge is equally split among its children, the position and velocity of the new vertex are calculated by an interpolation of order 4, the cross-sectional area A , the spinning velocities, and the viscosities of the new edges are obtained by second-order interpolation. These interpolation orders were chosen in such a way

that the bending and twist forces remain continuous upon subdivision. We used the steady coiling geometry to adjust the subdivision parameters and to validate the subdivision scheme.

E. Emission from the nozzle, capture by the belt

We found that the implementation of boundary conditions was a key point to successfully reproduce the patterns and the phase diagram of the experimental sewing machine. We tried simple implementations first, and could reproduce the curves $\hat{\Omega}_c(\hat{H})$ for the frequency of steady coiling as well as the simplest stitch patterns, but failed to reproduce entire regions of the phase diagram. Further examination revealed the presence of spurious oscillations in the calculated acceleration in the steady coiling geometry ($\hat{V} = 0$), even though the coiling frequency $\hat{\Omega}_c(\hat{H})$ was correctly predicted. We removed these spurious oscillations by a more careful account of the boundary conditions both at the nozzle and at the belt, as explained below. Suppressing these oscillations appeared to be sufficient to bring the numerical predictions in close agreement with the experimental ones.

New vertices need to be emitted periodically from the nozzle. In a first implementation of the clamped boundary conditions there, we considered an infinite string of fluid particles which were moved with the prescribed ejection velocity Q/A_0 , until they passed below the nozzle and were released. The position of the first vertex clamped inside the nozzle varies abruptly as a new vertex is released, and this was the cause of unwanted oscillations. They were suppressed by considering a string of two particles in the nozzle, with a fixed position relative to the nozzle; the injection velocity is then modelled by steadily increasing the length of the second edge, and periodically inserting a new vertex in third position.

Impact with the belt was first handled by detecting penetration of vertices into the belt at the end of every time-step, and constraining their velocity to match the belt's velocity at any subsequent time. This also induces large unwanted fluctuations in the acceleration, which can be interpreted by the fact that the vertical momentum resulting from the collision is not transferred to the thread until the following time step. The oscillations were removed by using a technique known as roll-back. Then, every time-step involves an iteration whose aim is to determine the set of vertices undergoing a collision during the time-step: whenever an unexpected collision takes place, the step is discarded, time is rolled back, and a new time-step is computed, forcing additional vertices to land on the belt at the end of the time-step. An additional difficulty in the implementation of roll-back in the context of a linearized implicit scheme is that only a small number of particles can be captured at every step. We circumvented this difficulty by using adaptive time refinement. Such refinement is presumably not needed if a fully (nonlinear) implicit scheme is used, such as the one presented in Ref. 14.

F. Validation

The numerical code was validated by comparing its predictions of the steady coiling frequency to the predictions of the continuation method of Ribe.¹⁵ The agreement is excellent for all fall heights (Fig. 3). The hysteresis of the dynamic simulation in the range $1.1 \leq \hat{H} \leq 2.2$ is physical, but inaccessible to the continuation method because the latter records all steady-state solutions regardless of their stability.

III. SIMULATION RESULTS

Our dynamic simulations of the sewing machine patterns using the DVT method were carried out with non-dimensional quantities. This is achieved by setting the density ρ , the viscosity μ , and the gravity g to the value 1. This choice implies that both the length scale $(\nu^2/g)^{1/3}$ and the time scale $(\nu/g^2)^{1/3}$ of the problem introduced in Eq. (1) are equal to 1. The three other physical parameters, namely, the nozzle diameter, the flow rate, and the surface tension, were chosen to match the values of $\Pi_1 = 670$, $\Pi_2 = 0.37$, and $\Pi_3 = 1.84$ in the experiments of Morris *et al.*:¹² $d = 0.187$, $Q = 22.9 \cdot 10^{-6}$, and $\gamma = 1.20 \cdot 10^{-3}$. The simulations were initiated from a vertical thread of uniform radius comprising 172 segments of equal length, falling from a height $\hat{H} = 0.86$ (gravitational regime) onto a belt at rest. To avoid dealing with a shock when the thread hits the belt, the simulation

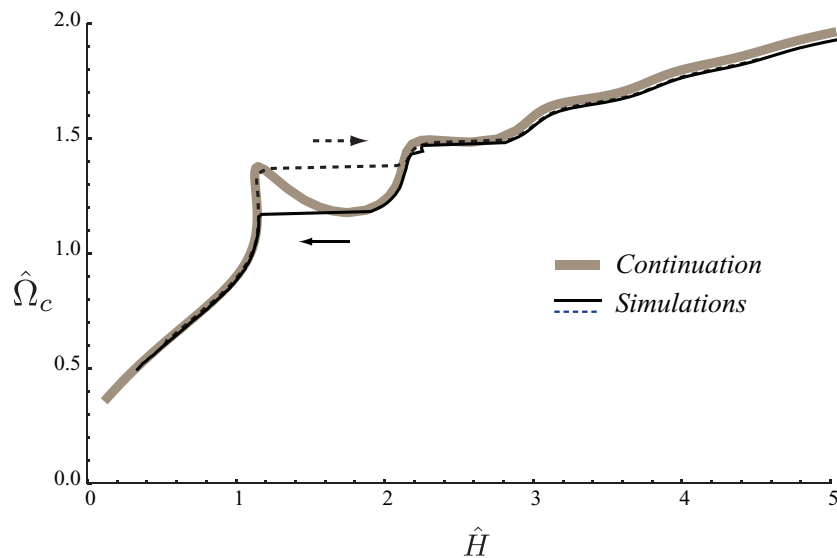


FIG. 3. Validation of the discrete numerical algorithm for a steadily coiling viscous thread with $\Pi_1 = 610$, $\Pi_2 = 0.37$, and $\Pi_3 = 0$. The discrete simulations with the fall height increasing (dashed line) and decreasing (solid line) match closely the solution of the steady-state equations obtained using an independent continuation method.¹⁵ Arrows denote transient regimes observed in the dynamic simulation when the system jumps to a different solution branch after encountering a limit point (by contrast the continuation method records a steady but unstable solution, corresponding to the part of the curve with negative slope).

was started with the bottom end of the thread clamped into the ground. The simulation was run until the radius settled to a steady profile as a function of the elevation, and a steady state of coiling was established. Next the (\hat{H}, \hat{V}) space was sampled by slowly varying \hat{H} or \hat{V} in turn.

To illustrate the capabilities of our numerical technique, Fig. 4 shows a simulation of the “translated coiling” pattern that occurs for relatively low belt speeds. Fig. 4(a) shows a three-dimensional view of the falling thread and the trace it lays down on the belt. The simulation time is 0.73 s for one period of this pattern using a 2.6 Ghz Intel Core i7 processor and 8Go of 1067 Mhz DDR3 memory.

Figure 4(b) shows the trajectory of the contact point in the frame of the nozzle (solid line). Interestingly, the belt motion breaks the symmetry of steady coiling not only in the longitudinal x -direction, but also in the transverse y -direction. Figure 4(b) also shows the velocity of the contact point relative to the moving belt as a function of position along the trajectory (thin lines and arrows). The magnitude of the relative velocity varies significantly over a period, in contrast to the meandering pattern for which it is nearly uniform.¹² The relative speed is maximum at point A where the contact point is moving upstream along the belt, and very small at C where the motion is downstream. Finally, Fig. 4(c) shows the amount of viscous power dissipated by the various modes, as a function of arc-length along the thread. The curves cross each other at a height $z \approx 0.1$ that corresponds to the transition from the bending-dominated coil, to the stretching-dominated tail. Thanks to adaptivity, the coil is well resolved and the curves for the viscous power dissipation remain smooth there, even though they vary rapidly.

In addition to the dimensionless parameters Π_1 , Π_2 , and Π_3 in Eq. (2) that describe the fluid properties and the ejection conditions, the patterns depend on the dimensionless fall height \hat{H} in Eq. (1), and the dimensionless belt speed

$$\hat{V} = V(vg)^{-1/3}. \quad (23)$$

Our simulations were carried out by varying \hat{H} and \hat{V} for fixed values of $\Pi_1 = 610$ and $\Pi_2 = 0.370$ corresponding to the experiments of Morris *et al.*¹² Some of our simulations were done with a surface tension parameter matching the experimental value $\Pi_3 = 1.84$; for reasons of numerical stability, however, most of the simulations used $\Pi_3 = 0$.

Figure 5 summarizes all the types of patterns that were encountered when scanning the (\hat{H}, \hat{V}) plane in the simulations, together with their experimental equivalents.⁹ The simulation reproduces

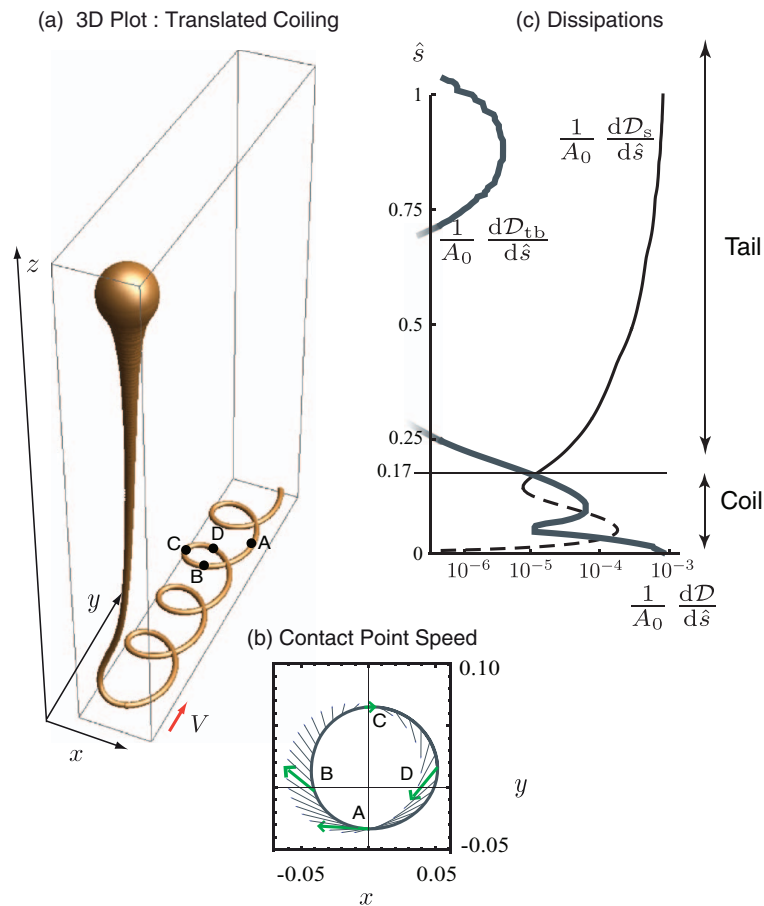


FIG. 4. Simulation of the translated coiling pattern for $\Pi_1 = 670$, $\Pi_2 = 0.37$, $\Pi_3 = 0$, $\hat{H} = 0.98$, and $\hat{V} = 0.022$ using 182 vertices and 181 segments. (a) Three-dimensional perspective view. A–D denote reference points along the thread. (b) Thick gray curve: trajectory of the contact point in the frame of the nozzle. The velocity of the contact point relative to the belt is shown at various times (thin gray lines) and highlighted when the contact point passes the reference points A–D (thick arrows, green). (c) Viscous power dissipated per unit length $d\mathcal{D}/d\hat{s}$ by stretching (thin black line), shortening (thin dashed line), and by bending and twisting (thick gray line) as functions of arc-length \hat{s} , when the contact point is at the apical reference position C. All numerical quantities are dimensionless, as explained in the beginning of Sec. III.

nine out of the ten patterns reported by Morris *et al.*¹² and observed by CWL.⁹ The only missing pattern, the slanted loops, will be discussed later on. We shall refer to the pattern of Fig. 5(C) as “alternating loops,” which we believe is a more accurate description than “figure-of-eight”.^{9,12}

Figure 6 shows a phase diagram of all the simulated patterns encountered in the (\hat{H}, \hat{V}) space for $\hat{H} \leq 0.8$, including the effect of surface tension ($\Pi_3 = 1.84$). For comparison, the patterns observed experimentally by Morris *et al.*¹² are shown by dots. The agreement between the simulations and the experiments is remarkable: the simulation captures all four patterns that were observed experimentally in this region of the parameter space, namely, translated coiling, alternating loops, meanders, and catenary. The locations of the boundaries separating the different patterns are also reproduced accurately.

The inclusion of surface tension gives rise to numerical instabilities for heights above $\hat{H} > 0.70$ approximately, which we have not been able to overcome by decreasing the mesh size or the time-step. This is why there is no simulation data shown in the lower right portion of Fig. 6. Since surface tension is not expected to modify qualitatively the dynamics of threads (see Fig. 2) we investigated the case of larger fall heights without any surface tension ($\Pi_3 = 0$). Five new patterns were observed for larger fall heights, as shown in Fig. 7, namely, double coiling, double meanders, stretched coiling, W-pattern, disordered pattern. The new portion $\hat{H} > 0.8$ of the phase diagram is qualitatively very similar to that reported by Morris *et al.*,¹² shown in the inset in Fig. 7. In both diagrams, the alternating loops pattern disappears at a critical height, beyond which there is a substantial height “window” containing only simple patterns (catenary, translated coiling, and meanders). When the height is increased, three patterns having a complex aspect (disordered pattern, stretched coiling,

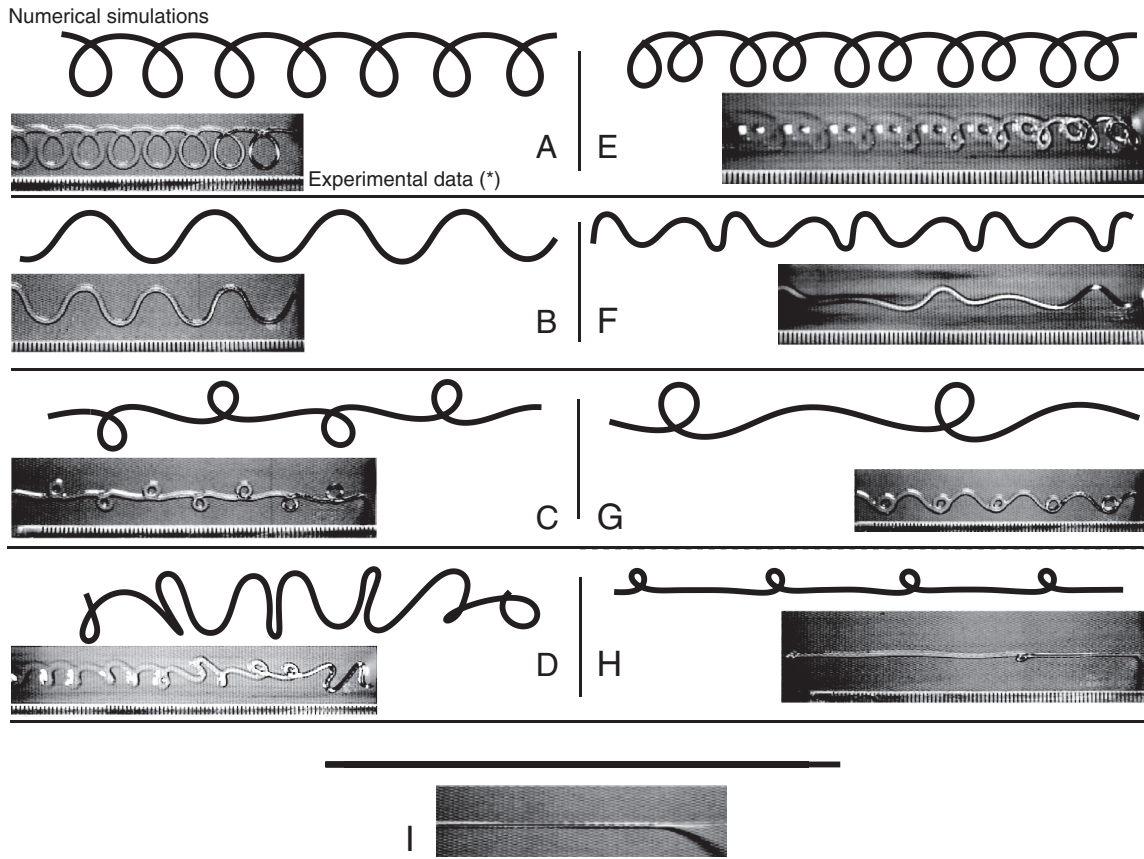


FIG. 5. Qualitative comparison of sewing machine patterns predicted by our simulations (black lines) and observed in the laboratory (photographs⁹). A: Translated coiling, B: Meanders, C: Alternating loops (figure-of-eight) pattern, D: Disorder, E: Double coiling, F: Double meanders, G: W pattern, H: Stretched coiling, I: Catenary. Simulations were performed with the parameter values $\Pi_1 = 670$ and $\Pi_2 = 0.37$ corresponding to the experiments of Morris,¹² but with surface tension neglected, $\Pi_3 = 0$. As the images of the patterns have not been recorded in these experiment, we show here the very similar ones of Chiu-Webster and Lister,⁹ obtained in a series of experiments for which $147.5 < \Pi_1 < 1056.3$, $0.31 < \Pi_2 < 0.47$ and $2.42 < \Pi_3 < 5.39$. (*) Experimental photographs courtesy of S. Chiu-Webster and J. Lister, *J. Fluid Mech.* **567**, 89–111 (2006). Copyright © 2006, Cambridge University Press.

and the double meanders) all appear together at nearly the same height. Finally, for some values of the height, disordered patterns, shown in gray in the diagram, occur in two separate ranges of the belt speed, with stretched coiling in between.

It is instructive to compare the numerical and experimental phase diagrams with the curves $\hat{\Omega}_c(\hat{H})$ of frequency vs. height for steady coiling, calculated with the same value of surface tension

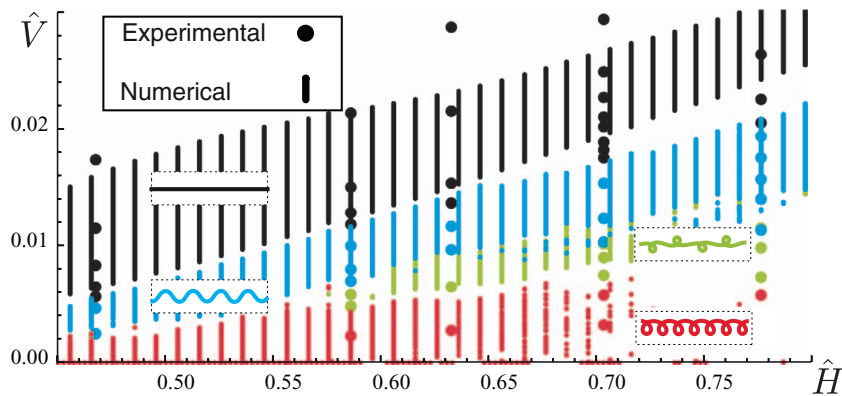


FIG. 6. Phase diagram of the numerically simulated patterns as a function of dimensionless fall height $\hat{H} \leq 0.80$ and dimensionless belt speed \hat{V} , for $\Pi_1 = 670$, $\Pi_2 = 0.37$, and $\Pi_3 = 1.84$. The observations of Morris *et al.*¹² are shown by the various shades of dots for comparison. The typical appearance of each pattern (catenary, meanders, alternating loops, translated coiling) is shown in the insets.

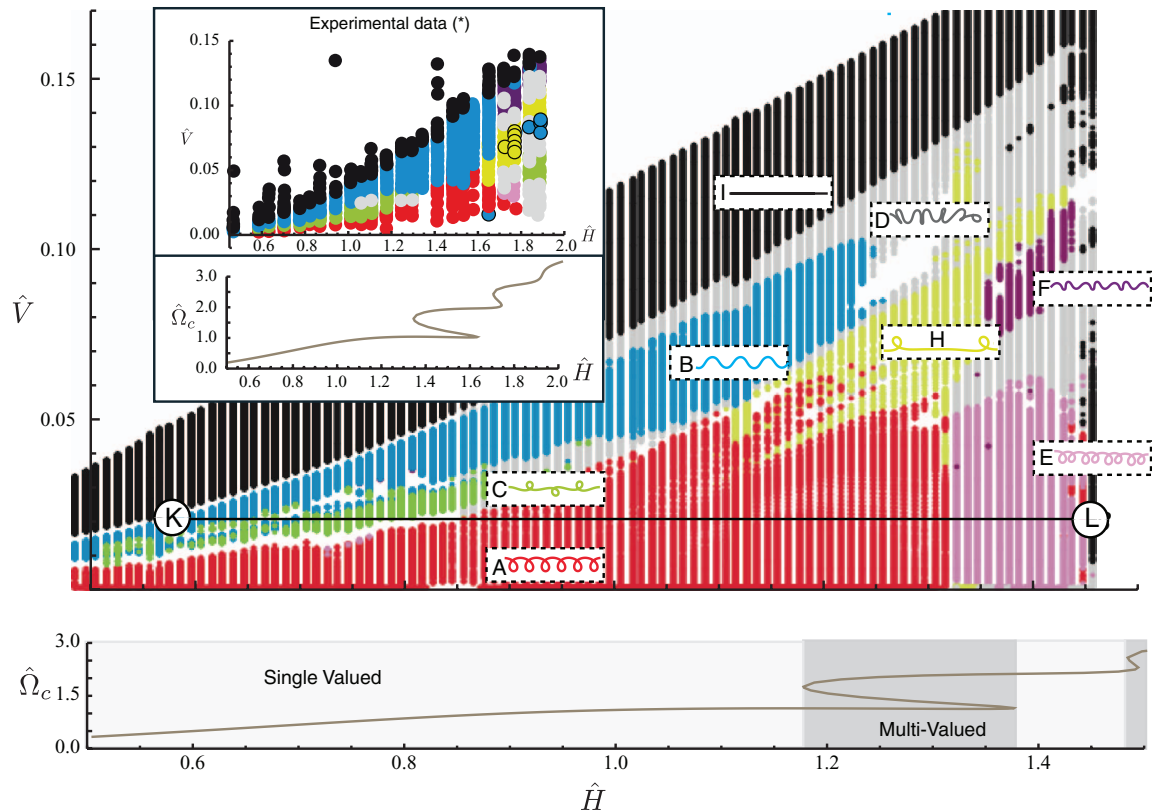


FIG. 7. Phase diagram of sewing machine patterns determined from numerical simulations with $\Pi_1 = 670$, $\Pi_2 = 0.37$, and no surface tension ($\Pi_3 = 0$). The patterns simulated include translated coiling (region A, red), meanders (region B, blue), alternating loops (region C, green), double coiling (region E, pink), stretched coiling (region H, yellow), double meanders (region F, purple), and disordered patterns (region D, gray). The domain of the catenary pattern (region I, black) extends indefinitely upward and appears to end in the figure only because simulations were not performed for larger values of \hat{V} . The horizontal path KL will later be used to construct Fig. 8. The coiling frequency $\hat{\Omega}_c$ for steady coiling is shown as a function of height \hat{H} below the phase diagram. Inset: Phase diagram determined experimentally¹² for $\Pi_1 = 670$, $\Pi_2 = 0.37$, and $\Pi_3 = 1.84$ (top) together with the corresponding curve $\hat{\Omega}_c(\hat{H})$ (bottom). The W-pattern (light gray dots – yellow – circled in black) and slanted loops (gray dots – blue – circled in black) are discussed in Sec. IV B.

($\Pi_3 = 0$ for the simulations, $\Pi_3 = 1.84$ for the experiments). These curves are shown below each phase diagram in Fig. 7. The comparison reveals that some of the more complicated patterns (stretched coiling, W-pattern, disordered pattern) appear at heights close to that for the onset of the multivalued IG regime of steady coiling. In the steady coiling geometry, it is known that the multivalued regime is caused by the competition of several “viscous pendulum” modes. This suggests that the complex patterns of the sewing machine are produced by the nonlinear interaction of those modes.

Despite their similarities, the numerical (ND) and experimental (ED) phase diagrams in Fig. 7 exhibit some systematic differences. In ED, double coiling (pattern E, pink) first appears at the same height as disordered patterns (D, gray) and stretched coiling (H, yellow), whereas in ND it appears at significantly greater heights. Double meanders (F, purple) have a common boundary with the catenary pattern (I, black) in ED, but occur only for significantly lower belt speeds in ND. In ND, the catenary state can transition to disorder (D, gray) over a range of heights, unlike in ED. The range of belt speeds for double coiling is significantly wider in ND than in ED. Finally, in ND the W-pattern is observed sporadically and for greater heights than in the diagram in Fig. 7. Some of these differences are due to the absence of surface tension in the simulations, and to the fact that collisions of the free portion of the viscous thread with the portion already laid down is not accounted for. Another explanation for the discrepancies may be the fact that Morris *et al.*¹² performed their pattern recognition visually, whereas we used a more quantitative automatic procedure based on Fourier decomposition. This is described in Sec. IV, where we review each of the individual patterns in detail and propose a systematic classification of them.

IV. ANALYSIS OF THE PATTERNS

To illustrate our pattern analysis, we fix the belt speed $\hat{V} = 0.02$ and vary the fall height along the horizontal line KL in the phase diagram of Fig. 7. In order of increasing heights, the patterns seen along this line are meanders, alternating loops, translated coiling, and double coiling. We track the spectral content of these patterns continuously as they change smoothly or bifurcate. To do so, we focus on the trajectory of the contact point of the thread with the belt. Let $x(t)$ and $y(t)$ be its longitudinal and transverse coordinates in the laboratory (nozzle) reference frame and define the complex number $\xi(t) = x(t) + iy(t)$. Let $X(t, t^*)$ and $Y(t, t^*)$ be the coordinates (also relative to the nozzle) at time t of a material point that was laid down on the belt at time $t^* < t$, and let $\psi(t, t^*) = X(t, t^*) + iY(t, t^*)$ be a generic point in the trace. The advection by the belt is expressed by

$$\psi(t, t^*) = \xi(t^*) + (t - t^*)V. \quad (24)$$

This equation means that the pattern $\psi(t, t^*)$ seen on the belt is obtained by unfolding the motion of the contact point $\xi(t)$, as illustrated in Fig. 9(a).

The numerical traversal of the line KL in Fig. 7 required about 78 500 time steps of size $\delta t = 0.1(\nu/g^2)^{1/3}$. We performed a Fourier analysis of the motion $\xi(t)$ over a sliding window of 2000 time steps, computing the spectrum every 500 steps using a fast Fourier transform (FFT). The spectra obtained in this way typically comprise several well-defined peaks whose frequencies can be determined precisely (Fig. 9(b)).

Let $\omega_1^{(x)}$, $\omega_2^{(x)}$, etc., be the peak frequencies of the motion in the x -direction, and $\omega_1^{(y)}$, $\omega_2^{(y)}$, etc., be those for the motion in the y -direction. Because the fall height \hat{H} is slowly changing with time during the simulation, each observed frequency $\omega_i^{(x)}$ or $\omega_i^{(y)}$ can be plotted as a function of \hat{H} to provide a ‘‘portrait’’ of the evolving frequency content of the contact point motion. The result is shown in Fig. 8. The principal observed frequencies $\omega_n^{(x)}$ and $\omega_n^{(y)}$ are indicated in gray (red) and

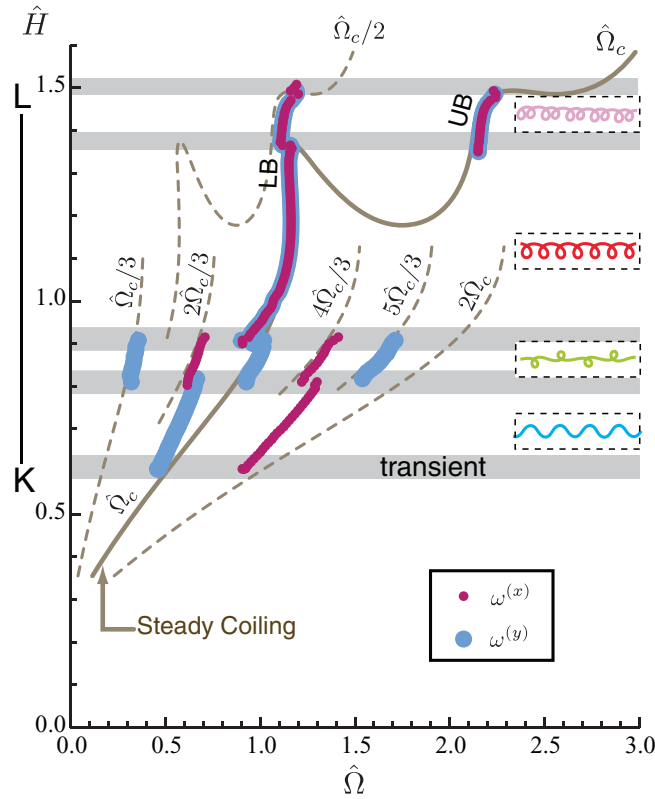


FIG. 8. Frequency content of patterns encountered along the line KL through the phase diagram of Fig. 7. The frequencies of the transverse (y -direction) and longitudinal (x -direction) motion of the contact point are shown with large dots (blue) and small dots (red), respectively. Note that these frequencies are the same in the upper region of the diagram where the two types of dots overlap. In the dashed insets, the patterns are identified using the same color codes as in Fig. 7. Gray bands indicate ranges of heights for which the patterns are transient. Also shown is the frequency $\hat{\Omega}_c$ of steady coiling as a function of height (solid line, brown), together with several multiples of that frequency (dotted lines, brown).

light gray (blue), respectively. Also shown for reference is the steady coiling frequency $\hat{\Omega}_c(\hat{H})$ for the same fluid properties and ejection parameters (solid line), together with several multiples (1/3, 2/3, 1/2, 4/3, 5/3, 2) of that frequency (dashed lines).

The first pattern ($0.62 \leq \hat{H} \leq 0.8$) is meandering, which is characterized by two frequencies with a ratio $\omega_1^{(x)}/\omega_1^{(y)} = 2$. At the lowest height $\hat{H} = 0.62$ where meandering first appears, the meandering frequency $\omega_1^{(x)}$ is very close to the steady coiling frequency $\hat{\Omega}_c$ for the same height, as expected on theoretical grounds.^{13,17} The next pattern ($0.8 \leq \hat{H} \leq 0.9$) is the alternating loops, which has a rich spectrum involving five multiples of $\hat{\Omega}_c/3$. Translated coiling appears next ($0.9 \leq \hat{H} \leq 1.35$) and is characterized by a single frequency $\omega_1^{(x)} = \omega_1^{(y)}$ very close to the steady coiling frequency. Finally, double coiling ($1.35 \leq \hat{H} \leq 1.5$) has two frequencies $\omega_1^{(x)} = \omega_1^{(y)} \approx \hat{\Omega}_c$ and $\omega_2^{(x)} = \omega_2^{(y)} \approx \hat{\Omega}_c/2$.

Figure 8 shows that the stitch patterns are combinations of motions in two orthogonal directions with frequencies closely related to the steady coiling frequency $\hat{\Omega}_c$. Accordingly, we now change our perspective and classify the patterns based on their frequency content rather than on the shape they lay down on the belt. This frequency analysis is used to set up an efficient tool for identifying the patterns and assembling the numerical phase diagram automatically. In addition it leads to a simple kinematic model that provides a unified description of the different patterns.

A. Spectral signature of a pattern

We illustrate our method using the example of meandering, which in most cases is the first pattern to bifurcate from the catenary state as the belt speed decreases. The gray (red) and light gray (blue) peaks in Fig. 9(b) show typical spectra of the motion of the contact point in the longitudinal x and transverse y -directions, respectively. The amplitude of the transverse motion is much greater than that of the longitudinal motion, and the frequency of the latter is exactly twice that of the former, $\omega_1^{(x)} = 2\omega_1^{(y)}$. This suggests that a meander pattern can be synthesized by retaining only the two main frequencies, viz.,

$$\xi(t) = \alpha_1 \cos(2\omega_1^{(y)}t) + i \beta_1 \cos(\omega_1^{(y)}t + \pi/4), \quad (25)$$

where α_1 and β_1 are the amplitudes of the longitudinal and transverse motions, respectively. Here the phase difference $\pi/4$ is required to reproduce the symmetry of the pattern. A similar two-frequency model was used by Morris *et al.*¹² to analyze weakly nonlinear meanders. Figure 9(c1) shows the contact line trajectory in the frame of the nozzle implied by Eq. (25) with $\alpha_1/\beta_1 = 0.2$, and Fig. 9(c2) shows the corresponding meander pattern obtained by advecting the motion (25) in the x -direction with $V = 1.4(vg)^{1/3}$ and $\omega_1^{(y)} = 1$. Based on Fig. 9, we define as a ‘‘meander’’ any pattern whose longitudinal motion, compared to the transverse motion, has twice the frequency, a much smaller amplitude, and a phase shift of $\pi/4$.

Generalizing the above example, we will now show that all the sewing machine patterns can be represented by a superposition of a few harmonic motions of the form

$$x(t) + iy(t) = \sum_{j=1}^{N_x} \alpha_j \cos(\omega_j^x t + \phi_j^x) + i \sum_{j=1}^{N_y} \beta_j \cos(\omega_j^y t + \phi_j^y), \quad (26)$$

where α_j and β_j are the amplitudes of the components of the motion with frequencies $\omega_j^{(x)}$ and $\omega_j^{(y)}$, and ϕ_j^x and ϕ_j^y are the phases relative to the highest frequency mode. We now show that each of the sewing machine patterns can be characterized in terms of the parameters that appear in Eq. (26), retaining no more than two frequencies in each direction ($N_x \leq 2, N_y \leq 2$).

B. Identification of the patterns

The identity of each pattern is determined not by the absolute values of the parameters in Eq. (26), but rather by the dimensionless groups that can be formed from them, namely, frequency ratios, amplitude ratios, and the relative phases ϕ_j . In the following we identify the characteristic

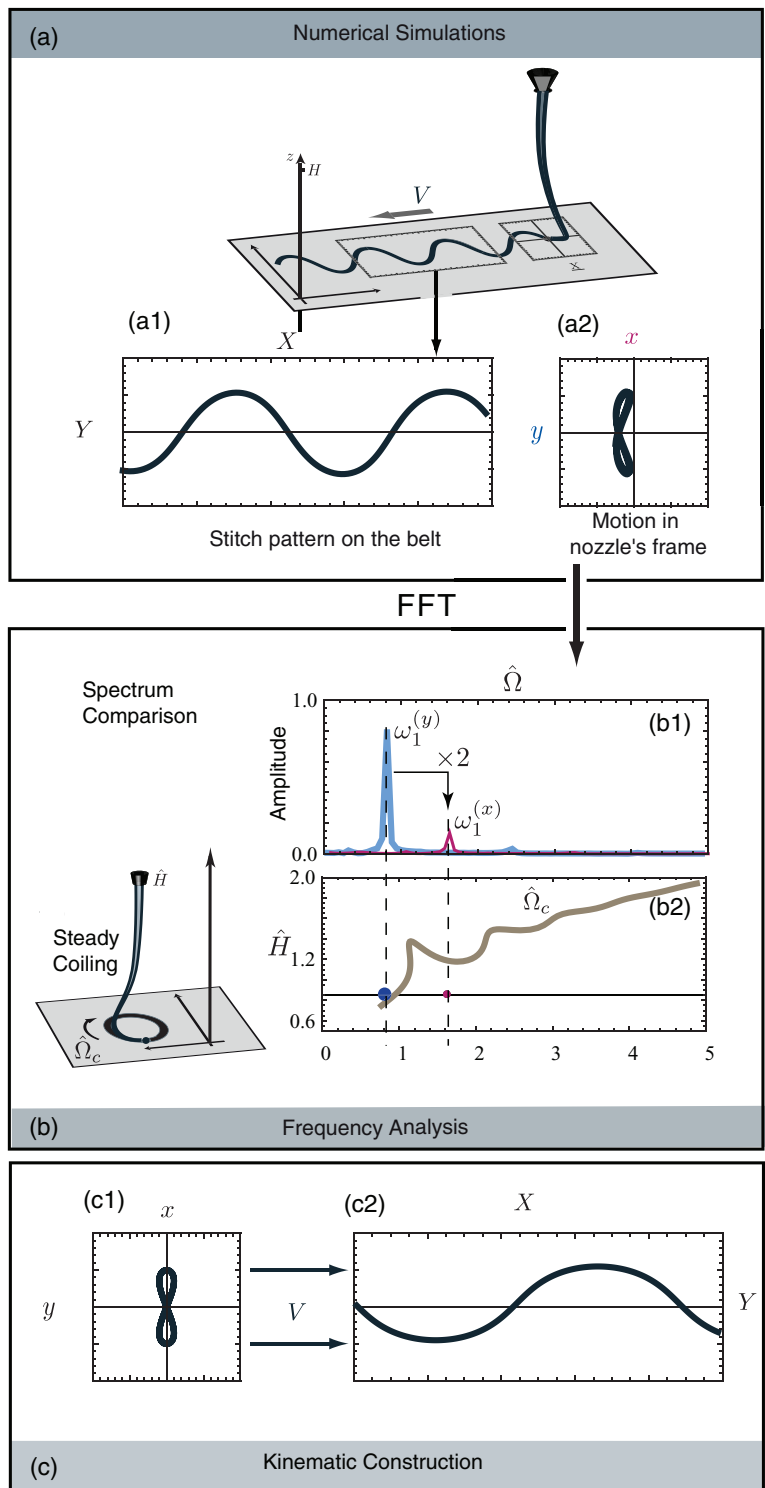


FIG. 9. Three-stage analysis of the patterns, illustrated for the case of meandering. (a) From the trace of the thread on the belt (a1), we extract the trajectory of the contact point in the frame of the nozzle (a2). (b1) Fourier spectra of the longitudinal (thin line, red) and transverse (thick line, blue) components are obtained using the fast Fourier transform and compared to the frequencies $\hat{\Omega}_c$ of steady coiling for the same height: the large (blue) and small (red) dots in (b2) are the main frequencies in the simulation, while the intersection of the horizontal line with the thick black curve is the frequency of steady coiling. In the example shown here the belt speed is close to the critical value for the onset of meandering and the dominant transverse frequency $\omega_1^{(y)}$ is close to the steady coiling frequency $\hat{\Omega}_c$ for the same height. (c) The two main frequencies extracted by FFT are injected into the kinematic model (26) to generate a synthetic motion for the contact point in the nozzle frame (c1), and a synthetic stitch pattern (c2). In the example shown, the motion involves only one transverse frequency $\omega_1^{(y)}$ and one longitudinal frequency $\omega_1^{(x)} = 2\omega_1^{(y)}$.

TABLE I. Parameters of the kinematic model in Eq. (26) used to construct synthetic patterns. Because the patterns are defined by the relative values of the frequencies ω_1^x and ω_1^y , the frequency 1 is assigned by convention to the peak of largest amplitude. The other frequencies are given by ratios of small integer numbers. A star indicates a frequency that is locked to the steady coiling frequency $\hat{\Omega}_c$. Likewise, the amplitudes α_1 , α_2 , β_1 , and β_2 are given relative to each other and correspond to typical values. V indicates the speed of the belt used to unfold the synthetic patterns. A dash indicates that the parameter is not relevant for the pattern in question. The disordered pattern is not reconstructed using the kinematical model as it involves more harmonics.

| Patterns | ω_1^x | ω_2^x | ω_1^y | ω_2^y | ϕ_1^x | ϕ_2^x | ϕ_1^y | ϕ_2^y | α_1 | α_2 | β_1 | β_2 | V |
|--------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|------|
| Translated coiling | 1* | – | 1* | – | 0 | – | 0 | – | 1. | – | 1. | – | .5 |
| Meanders | 2 | – | 1* | – | 0 | – | $\pi/4$ | – | .2 | – | 1. | – | 1.4 |
| Alternating loops | 1 | – | 1/2 | 3/2* | $\pi/2$ | – | 0 | 0 | 1 | – | .5 | .5 | 0.33 |
| Double coiling | 1/2 | 1* | 1/2 | 1* | $\pi/2$ | $\pi/2$ | 0 | 0 | .5 | 1.5 | .1 | 1.5 | .5 |
| Double meanders | 1/2 | – | – | 1* | $\pi/4$ | – | 0 | – | 1. | 0 | 0 | 1.5 | .75 |
| Stretched coiling | 1 | 2* | 1 | 2* | $\pi/2$ | $\pi/2$ | 0 | 0 | 1. | .1 | .5 | .1 | .6 |
| W-pattern | 1 | 2* | 1 | 2* | $\pi/2$ | $\pi/2$ | 0 | 0 | 1. | .2 | .2 | .5 | .7 |
| Catenary | – | – | 0 | – | – | – | 0 | – | – | – | 0 | – | 1 |
| Disorder | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – |

values of these groups for each of the patterns in turn. For ease of reference, the results are summarized in Table I.

1. Translated coiling

This pattern occurs for $0.5 \leq \hat{H} \leq 1.35$ and low belt speeds (Fig. 7). Figure 10(A) shows a simulation of this pattern (upper left) and the corresponding Fourier spectra of the longitudinal and transverse motions of the contact point (upper right), and the steady coiling frequency $\hat{\Omega}_c$. The longitudinal and transverse motions have similar amplitudes and are characterized by a single dominant frequency $\omega_1^{(x)} = \omega_1^{(y)}$ that is very close to the steady coiling frequency $\hat{\Omega}_c(\hat{H})$ for the same fall height \hat{H} . The peak frequency deviates from its original value as the belt speed increases. The amplitudes in both directions remain equal and an almost circular shape is created. The panels at lower left show the reconstructed motion in the frame of the nozzle (right) and on the belt (left), calculated using Eq. (26) with $N_x = N_y = 1$, $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, and $\omega_1^{(x)} = \omega_1^{(y)} = 1$. Note that the experimental pattern shifts upwards or downwards as the belt speed is increased; this shift does not affect the spectral context, but could be taken into account by including a purely imaginary constant in Eq. (26).

2. Meanders

On Fig. 7 this pattern is seen for $0.6 \leq \hat{H} \leq 1.3$ and a range of intermediate belt speeds. The typical Fourier spectra of the meandering pattern were previously shown in Fig. 9. The pattern is a superposition of one longitudinal and one transverse harmonic motion, with frequency ratio $\omega_1^{(x)}/\omega_1^{(y)} = 2$, amplitude ratio $\alpha_1/\beta_1 \ll 1$, and a relative phase $\phi_1^y = \pi/4$ (with the convention $\phi_1^x = 0$). Near the catenary/meander boundary $\omega_1^{(y)} \simeq \hat{\Omega}_c$; farther from the boundary, the meandering frequency departs significantly from $\hat{\Omega}_c$. The regular symmetrical meanders correspond to a phase difference of $\pi/4$ between the two directions (Fig. 9) However, the pattern may deform into a bean-like shape in certain cases. This situation was reproduced kinematically by reducing the phase difference to a value close to $\pi/6$.

3. Alternating loops

This pattern was called “figure-of-eight” by CWL (Ref. 9) and Morris *et al.*,¹² but we prefer to call it “alternating loops.” The domain of this pattern is an elongated “bubble” sandwiched between translated coiling and meandering at relatively low fall heights $\hat{H} \leq 1$ (Fig. 7). This pattern displays a remarkably rich frequency spectrum with five principal peaks (Fig. 10(B)-(c)). In contrast to

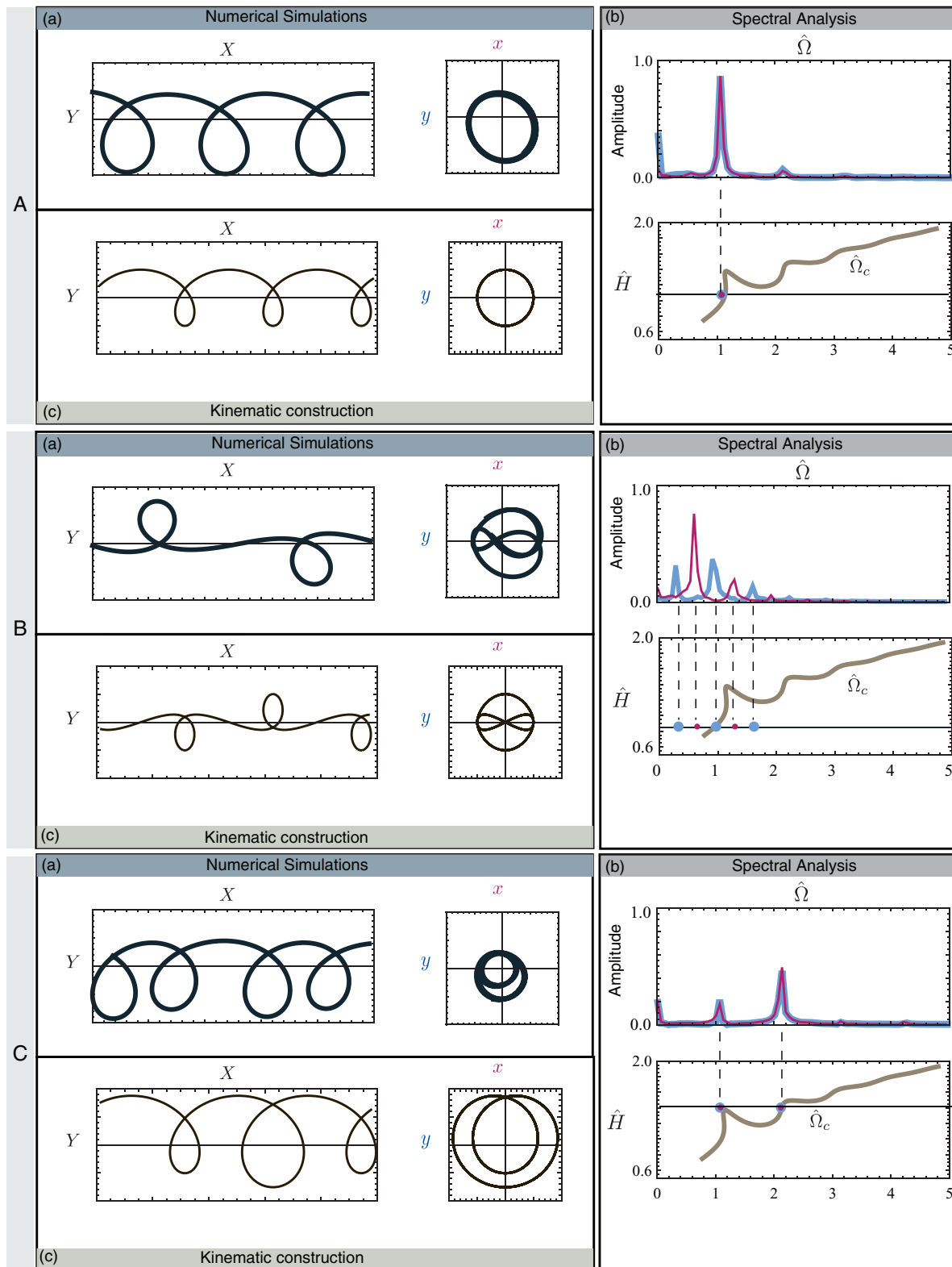


FIG. 10. Kinematic analysis of individual sewing machine patterns. (A) coiling; (B) alternating loops; (C) double coiling. For each pattern, the upper left, right, and lower left panels correspond to parts (a), (b), and (c), respectively, of Fig. 9. The kinematical reconstruction is merely a proof of concept, without any attempt to match the wavelength of the simulations.

meandering, the motion with the largest amplitude is longitudinal, with a frequency $\omega_1^{(x)}$ that locks onto the frequency $2\hat{\Omega}_c/3$ (see also Fig. 8). The next largest peaks correspond to transverse motion with frequencies $\omega_2^{(y)} = \hat{\Omega}_c$ and $\omega_1^{(y)} = \hat{\Omega}_c/3$, both amplitudes being very close. The harmonics $4\hat{\Omega}_c/3$ in the longitudinal direction, and $5\hat{\Omega}_c/3$ in the transverse direction are also visible.

The frequencies of all five peaks can be written compactly as

$$\omega_p^{(y)} = (2p - 1) \frac{\hat{\Omega}_c}{3} \quad (p = 1, 2, 3),$$

$$\omega_p^{(x)} = 2p \frac{\hat{\Omega}_c}{3} \quad (p = 1, 2).$$

Even though the spectra in Fig. 10(B)-(b) shows five peaks, the kinematic model in Eq. (26) generates an almost identical pattern if one retains only the three main contributions $\omega_1^{(x)}$, $\omega_1^{(y)}$, and $\omega_2^{(y)}$ with an amplitude ratio $\beta_1/\alpha_1 \approx .5$, $\beta_1/\alpha_2 \approx .5$, and phases $\phi_1^x = \pi/2$ and $\phi_1^y = \phi_2^y = 0$ (Fig. 10 B-(c)). We used these characteristics of the three main frequencies as a criterion for automatic detection of alternating loops.

4. Double coiling and double meanders

The Fourier spectra for these patterns are shown in Figs. 10(C) and 11(A), respectively. Both the longitudinal and transverse components have peaks at two frequencies $\omega_1^{(x)} = \omega_1^{(y)} = \hat{\Omega}_c/2$ and $\omega_2^{(x)} = \omega_2^{(y)} = \hat{\Omega}_c$. The origin of these frequencies is clear from the uppermost part of Fig. 8, which shows them as functions of fall height for double coiling. The range of fall heights in question is within the inertio-gravitational regime of steady coiling, for which the curve $\hat{\Omega}_c(\hat{H})$ is multivalued in specific height ranges (Fig. 2). The portion $1.2 \leq \hat{H} \leq 1.5$ of that curve has two stable branches corresponding to different ‘‘pendulum’’ modes of the tail: a lower branch (labelled LB in Fig. 8) with $\hat{\Omega}_c \approx 1.15$, and an upper branch (UB) with $\hat{\Omega}_c \approx 2.1$ - 2.2 . Figure 8 shows that the higher double coiling frequency $\omega_2^{(x)} = \omega_2^{(y)}$ stays locked to the upper branch of $\hat{\Omega}_c(\hat{H})$, which is the only stable one when $\hat{H} \geq 1.37$. The lower frequency, by contrast, follows a ‘‘phantom’’ branch with frequency $\hat{\Omega}_c/2$ that is very nearly a direct continuation of the lower branch of $\hat{\Omega}_c(\hat{H})$ to greater fall heights. This behavior is possible because the ratio of the frequencies of the upper and lower branches happens to be quite close to 2.0.

Although double coiling and double meanders have the same frequency content, they are distinguished by the relative amplitudes and phases of the transverse and longitudinal motions. For double coiling, the amplitudes of the two motions are the same at both frequencies ($\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$), and the relative phases are $\phi_1^x = \phi_2^x = \pi/2$ and $\phi_1^y = \phi_2^y = 0$. For double meandering, by contrast, the transverse motion is dominated by the frequency $\omega_2^{(y)} = \hat{\Omega}_c$, while the longitudinal motion is dominated by $\omega_1^{(x)} = \hat{\Omega}_c/2$. The relative phases are $\phi_1^x = \pi/4$, while $\phi_1^y = 0$.

5. Stretched coiling and the W-pattern

These patterns occur predominantly in the range of heights corresponding to inertio-gravitational coiling (right-hand side of Fig. 7). Their typical Fourier spectra are shown in Figs. 11(B) and 11(C), respectively. Like double coiling and double meanders, their characteristic signature is the $(\hat{\Omega}_c/2, \hat{\Omega}_c)$ frequency couple. But whereas double coiling and double meanders are dominated by transverse motion at the frequency $\hat{\Omega}_c$, stretched coiling and the W-pattern are dominated by longitudinal motion at the frequency $\hat{\Omega}_c/2$. The difference between stretched coiling and the W-pattern is only due to the difference δ_A between the amplitudes of the transverse and longitudinal motions (Figs. 11(B)-(b) and 11(C)-(b)). The motion in the x -direction is dominant in both cases but δ_A is much smaller for the W-pattern than for stretched coiling. This difference is responsible for the different invaginations of the two patterns (Figs. 11(B)-(a) and 11(C)-(a)). The phase difference between the longitudinal and transverse motions is $\pi/2$ in both cases.

6. Disorder

Disordered patterns appear in several parts of the phase diagram (gray in Fig. 7), primarily at heights within the inertio-gravitational coiling regime. The typical Fourier spectra of these patterns is very rich, with more than four peaks in both the longitudinal and transverse directions with comparable and strongly time-dependent amplitudes (Fig. 12-(i) and corresponding FFT). Such

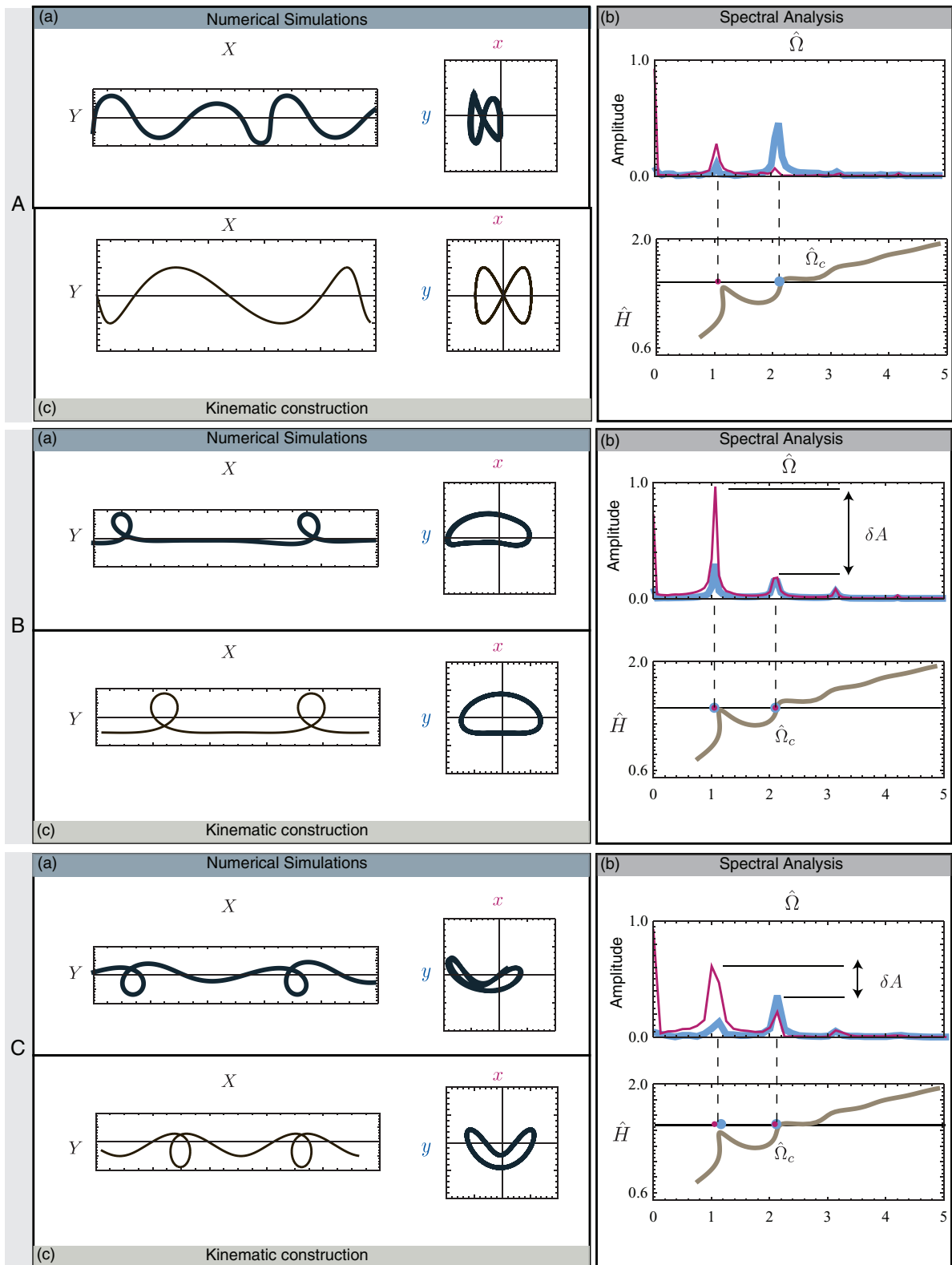


FIG. 11. Same as Fig. 10, but for (A) double meanders, (B) stretched coiling, and (C) the “W-pattern.” δA denotes the difference of amplitude.

patterns are not transient between two steady patterns, as the aperiodic behavior persists indefinitely in time.

7. Catenary

The catenary is obtained when the point of contact is at rest in the nozzle frame, which happens in the upper region of the phase diagram. The FFT spectrum is then empty.

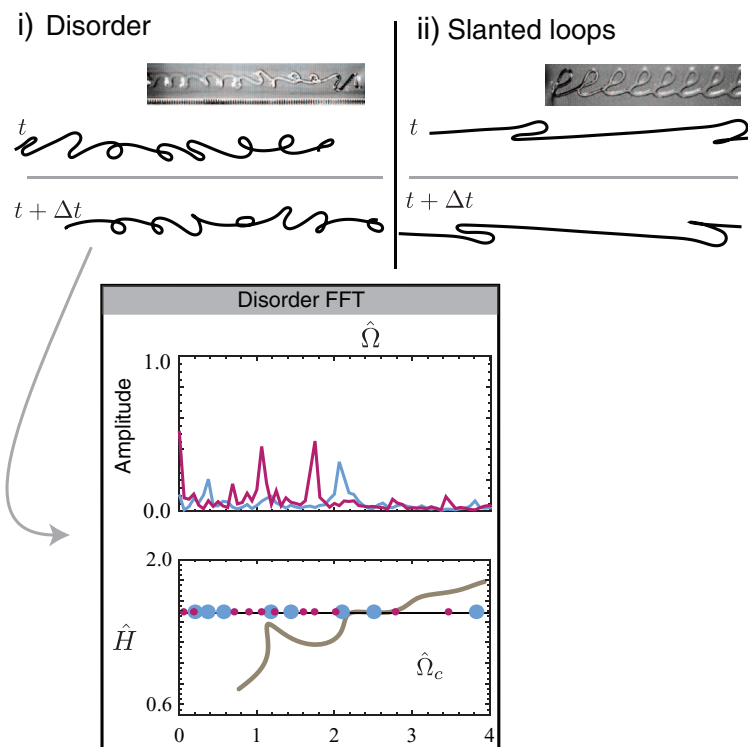


FIG. 12. Unsteady patterns: (i) disordered pattern and (ii) slanted loops. Both patterns are shown at two different times of the simulations and compared to experimental photographs from Ref. 9. The lower part of the figure illustrates the FFT of the disordered patterns.

In addition to the patterns discussed above, slanted loops⁹ were also reported by Morris *et al.*¹² in a very narrow region of their phase diagram. Slanted loops are a pattern wherein a buckle is periodically laid down on the belt, and subsequently closes up into a loop when the thread touches itself and coalesces. Our numerical simulations do not account for self-contact of the thread, nor for surface tension-mediated coalescence. This probably explains why we observed slanted loops transiently only, as shown in Fig. 12-(ii). A similar argument may also explain why the W-pattern is observed for significantly larger fall heights in the simulations than in the experiments: considering self-contact of the thread would certainly favor its existence over the stretched coiling pattern in the simulation.

We observe that CWL (Ref. 9) reported yet another pattern, “side kicks,” which consist of small heaps of fluid regularly spaced along an otherwise perfectly straight trace. We suggest that this pattern is a limiting case of stretched coiling in which the amplitude of the transverse motion becomes very small relative to that of the longitudinal motion. Side kicks have not been reported in the experimental phase diagram of Morris *et al.*,¹² the one we attempted to reproduce numerically; consistently, this pattern appears only transiently in our simulations.

V. DISCUSSION

The simulations of the fluid-mechanical sewing machine presented here were performed using a new numerical algorithm DVT. The essential idea of DVT is to start from a complete geometrical and kinematical description of the thread in the discrete setting and push the discrete approach as far as possible; in particular a discrete representation of viscous stress is built based on a variational view (Rayleigh potentials). This approach leads to a code that is robust even for quite large mesh size. This numerical method can simulate complex unsteady behavior of a viscous thread and offers good efficiency. As an example, the traversal (78 500 time steps) of the line KL in Fig. 7 required 987 s on a 2.87 GHz Intel Core processor. The accuracy of the method is demonstrated by its ability to reproduce the curve of steady coiling frequency vs. height, as predicted by an independent

continuation method (Fig. 2), and by the close agreement between the calculated and experimentally determined phase diagrams for the sewing machine patterns (Fig. 6).

At each time step in an unsteady DVT simulation, any desired kinematical or dynamical variable can be calculated as a function of arc-length, i.e., at every vertex along the thread's centerline. Examination of these functions provides insights into the thread's dynamics. We saw an example in Fig. 4(c), which showed the local rates of viscous dissipation of energy due to deformation by stretching (or compression), bending, and twisting. The figure reveals that the thread is divided into two distinct parts: a "tail" in which the dissipation is dominated by stretching, and a "coil" in which it is dominated by bending and twisting, but with a significant contribution from compression. The differential equations describing bending are of higher order than those describing stretching, so Fig. 4(c) implies that the coil is an "inner" solution or boundary layer whose presence is required by the need to satisfy all the relevant boundary conditions at the thread's contact point with the belt. While the boundary-layer character of the coil region has long been recognized for steady coiling,^{15,16} our simulations open up the possibility of studying the associated non-steady dynamics.

Another benefit of the simulations is to allow exploration of regions of parameters space that are inaccessible in the real world but provide new insights into the dynamics of the thread. In Fig. 4(c), the rates of viscous dissipation for the bending and twisting modes were added together. Because a real thread is an incompressible fluid, the ratio of the bending to the twisting modulus is always $3/2$ (both moduli being proportional to the fourth power of the thread's radius). In the simulation, it is possible to investigate the relative importance of bending and twisting in the thread's dynamics by setting the twisting modulus to zero, taking $2\mu I = 0$ in Eq. (9), while keeping the bending modulus unchanged. We performed additional DVT simulations for a perfectly twist-compliant sewing machine. The resulting phase diagram shows only minor differences with Fig. 7, showing that twist plays a negligible role, relative to bending, in the selection of the stitch patterns.

The experiments and simulations of the viscous sewing machine reveal in the first instance a great diversity of patterns, whose relations to one another are not evident. Our goal was to characterize the patterns in a more unified way. This is possible by going beyond a visual identification and computing for each pattern the Fourier spectra of the longitudinal and transverse components of the motion of the thread's contact point with the belt. We showed that each pattern has a distinct spectral signature consisting of isolated peaks at a small number of well-defined frequencies. The patterns differ from each other in the values of those frequencies, in their relative amplitudes, and in their distributions among the longitudinal and transverse modes.

A closer look shows that the frequencies in the spectra are closely related to the frequency $\hat{\Omega}_c$ of steady coiling of a thread falling on a motionless ($V = 0$) surface from the same height. The precise nature of the relationship depends on the pattern considered. For meanders, the frequency of the transverse motion $\approx \hat{\Omega}_c$ at onset, but then deviates significantly from $\hat{\Omega}_c$ as the belt speed is decreased beyond the critical value (Fig. 8). In all the other patterns, however, the frequencies are locked to $\hat{\Omega}_c$ in some way. In stretched coiling, the dominant frequency of both the longitudinal and transverse motions is $\hat{\Omega}_c$. Still more complicated are double meanders, double coiling, stretched coiling, and the W-pattern, for which the dominant frequencies are $\hat{\Omega}_c$ and $\hat{\Omega}_c/2$. The presence of these frequencies reflects the nonlinear interaction of the two lowest modes of inertio-gravitational coiling, whose unforced frequencies differ by approximately a factor of 2 (Fig. 8). Among periodic patterns, the richest spectral content is achieved by the alternating loops pattern, for which the five dominant frequencies are multiples of $\hat{\Omega}_c/3$ (Fig. 8).

We proposed a simple kinematic model whereby each pattern is reconstructed by a superposition of a few frequencies, with appropriate amplitudes and relative phases in the longitudinal and transverse directions. This makes it possible to set up automated recognition of the patterns and leads a classification of the patterns within a unified descriptive framework. The next step is to elucidate the physical mechanisms responsible for these simple spectral signatures. In future work we plan to investigate the similarities between the sewing machine and low-dimensional oscillator models with nonlinear forcing, using the direct DVT simulations as a starting point to look into these analogies.

ACKNOWLEDGMENTS

We are very grateful to Miklòs Bergou and Eitan Grinspun, whose collaboration in the development of the DVT method has made the present work possible. Preliminary numerical results concerning the viscous sewing machine have been obtained in collaboration with them (Refs. 14 and 21). We would like to thank E. Grinspun for suggestions on the article. During the preparation of this article, we learned of an independent but related experimental study by R. L. Welch, B. Szeto, and S. W. Morris (Ref. 22).

- ¹ Lord Rayleigh, “On the theory of long waves and bores,” *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **90**(619), 324–328 (1914).
- ² E. Watson, “The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane,” *J. Fluid Mech.* **20**, 481–499 (1964).
- ³ C. Ellegaard, A. E. Hansen, A. Haaning, K. Hansen, A. Marcussen, T. Bohr, J. L. Hansen, and S. Watanabe, “Creating corners in kitchen sink flows,” *Nature (London)* **392**, 767–768 (1998).
- ⁴ G. Barnes and R. Woodcock, “Liquid rope-coil effect,” *Am. J. Phys.* **26**, 205–209 (1958).
- ⁵ M. Habibi, Y. Rahmani, D. Bonn, and N. M. Ribe, “Buckling of liquid columns,” *Phys. Rev. Lett.* **104**, 074301 (2010).
- ⁶ M. Habibi, P. C.F. Møller, N. M. Ribe, and D. Bonn, “Spontaneous generation of spiral waves by a hydrodynamic instability,” *Europhys. Lett.* **81**, 38004 (2008).
- ⁷ A. Kaye, “A bouncing liquid stream,” *Nature (London)* **197**, 1001–1002 (1963).
- ⁸ A. Herczynski, C. Cernuschi, and L. Mahadevan, “Painting with drops, jets, and sheets,” *Phys. Today* **64**(6), 31–36 (2011).
- ⁹ S. Chiu-Webster and J. Lister, “The fall of a viscous thread onto a moving surface: a ‘fluid-mechanical sewing machine’,” *J. Fluid Mech.* **569**, 89–111 (2006).
- ¹⁰ G. I. Taylor, “Instability of jets, threads and sheets of viscous fluid,” in *Proceedings of the 12th International Congress of Applied Mechanics*, edited by M. Hetenyi and W. Vincenti (Springer, Berlin, 1969).
- ¹¹ N. M. Ribe, J. R. Lister, and S. Chiu-Webster, “Stability of a dragged viscous thread: Onset of ‘stitching’ in a fluid-mechanical ‘sewing machine’,” *Phys. Fluids* **18**, 124105 (2006).
- ¹² S. W. Morris, J. Dawes, N. Ribe, and J. Lister, “Meandering instability of a viscous thread,” *Phys. Rev. E* **77**, 066218 (2008).
- ¹³ M. J. Blount and J. R. Lister, “The asymptotic structure of a slender dragged viscous thread,” *J. Fluid Mech.* **674**, 489–521 (2011).
- ¹⁴ M. Bergou, B. Audoly, E. Vouga, M. Wardetzky, and E. Grinspun, “Discrete viscous threads,” *Trans. Graph.* **29**, 116 (2010).
- ¹⁵ N. M. Ribe, “Coiling of viscous jets,” *Proc. R. Soc. London* **460**, 3223–3239 (2004).
- ¹⁶ L. Mahadevan, W. Ryu, and A. Samuel, “Fluid rope trick investigated,” *Nature (London)* **392**, 140 (1998).
- ¹⁷ N. Ribe, H. Huppert, M. Hallworth, M. Habibi, and D. Bonn, “Multiple coexisting states of liquid rope coiling,” *J. Fluid Mech.* **555**, 275–297 (2006).
- ¹⁸ N. M. Ribe, M. Habibi, and D. Bonn, “Stability of liquid rope coiling,” *Phys. Fluids* **18**, 084102 (2006).
- ¹⁹ F. R. S. Trouton, “On the coefficient of viscous traction and its relation to that of viscosity,” *Proc. R. Soc. London A* **77**, 426–440 (1906).
- ²⁰ J. D. Buckmaster, A. Nachman, and L. Ting, “The buckling and stretching of a viscida,” *J. Fluid Mech.* **69**, 1–20 (1975).
- ²¹ M. Bergou, “Discrete geometric dynamics and artistic control of curves and surfaces,” Ph.D. dissertation (Columbia University, 2010).
- ²² R. L. Welch, B. Szeto, and S. W. Morris, “Frequency structure of the nonlinear instability of a dragged viscous thread,” private communication (2011).

Pendant l'élaboration de l'article présenté ci-dessus nous avons appris que le groupe de S.Morris était en train d'élaborer une étude expérimentale complémentaire de la notre. Ces travaux ont récemment été publiés [48].

Enroulements Élastiques

Résumé

Ce chapitre est le premier qui traite uniquement de filaments élastiques et ce par l'intermédiaire d'un objet qui - *stricto sensus* - n'en est pas un ! En effet on considère ici la dynamique d'enroulement d'un ressort à courbure constante qui initialement a été posé à plat sur une surface dure et dont une extrémité est fermement maintenue. On s'intéresse à la dynamique qui suit le lâché de cette extrémité. On s'attend naïvement à ce qu'il s'enroule avec sa courbure naturelle κ_0 mais l'inertie en décide autrement et lui permet d'exhiber un comportement riche. Aux temps courts on retrouve des résultats classiques concernant la dynamique des ondes de flexion dans les poutres. En revanche aux temps longs ce ressort forme une structure complexe. On en décrit les traits principaux visibles en Figure 5.3 :

- Sa taille augmente au court du temps et le ressort monte de plus en plus haut.
- Cependant, au centre de cette structure, le matériau s'enroule en cercles réguliers. On verra par la suite de que la courbure de ce rouleau est constante : $\kappa_r \simeq 0.56 \kappa_0$.
- Ce rouleau se termine par une "languette".

J'ai pris en charge la partie expérimentale et numérique ce projet et ai participé à la partie analytique de ceux-ci.

5.1 Repliement élastique

Il y a une grande variété de problèmes autour du repliement élastique par enroulement d'objets tels que des fils ou plaques. En particulier cela concerne certaines plantes comme la *Bryonia Dioica* qui répond à un stimulus de contact en se repliant sur elle-même [49] (Figure 5.1-1). C'est un comportement qu'on retrouve aussi dans les membranes de globules rouges lors de leur lyse [50] ou bien de la propagation du virus de la Malaria [51]

(Figure 5.1-2&3). Ce type de repliement peut aussi être provoqué de façon artificielle, par exemple en projetant une lumière polarisée sur des films de polymères photosensibles et élaborés dans le but de remplir cette fonction [52]. C'est l'aspect générique de ces repliements ainsi qu'une discussion avec O. Albarran, G. Massiera, and M. Abkarian qui a motivé l'étude qui suit.

Les exemples précédents sont étonnants par la diversité d'échelles et de conditions dans lesquelles les repliements évoquées ci-dessus évoluent. D'un point de vue mécanique tout oppose une plante et un globule rouge. On passe de l'échelle centrimétrique avec ces plantes qui sont des tiges vivant dans l'atmosphère ambiante, à l'échelle micrométrique, dans le sang avec les globules rouges qui sont quant à eux des coques. Puisque ces enroulements sont génériques nous faisons le choix de nous placer dans des conditions volontairement extrêmes et simplificatrices pour comprendre au mieux la dynamique de ce repliement. Idéalement nous souhaitons travailler en 2 dimensions en négligeant tout terme de frottement visqueux ainsi que la gravité, le tout en restant dans un domaine d'élasticité linéaire. L'expérience proposée ci-dessous a pour vocation de répondre à ces besoins.

Ce type de problème s'inscrit de plain-pied dans le domaine de la dynamique des tiges. Dans ce domaine, la théorie linéaire de propagation d'ondes de flexion est connue et utile pour décrire la dynamique du flambage de poutres [53] aussi bien que leur fragmentation [54, 55]. Au delà de cela, peu de solutions dynamiques et non linéaires sont connues. On citera par exemple la propagation de solutions en boucles [56] qui expliquent le claquement des fouets [57]. On notera de plus que le problème d'enroulement possède une frontière mouvante ce qui est similaire à la propagation de fractures [58] ou la délimitation d'un *Elastica* sur une surface adhésive [59].

5.2 Étude expérimentale

5.2.1 Mise en place

Nous considérons le problème suivant : on allonge sur un support fixe (une barre NorcanTM) un ressort dit à force constante (Figure 5.2). Un tel ressort est en fait une bande d'acier de longueur $L = 635$ mm, d'épaisseur $a = .13$ mm, et de largeur $b = 9.5$ mm, qui possède un rayon de courbure naturel $\kappa_0^{-1} = 9.3$ mm¹. Cette bande de métal a une masse linéique $\rho = 9.732 \times 10^{-3}$ kg/m, un module d'Young $E = 193$ GPa, un module de Poisson $\nu = .25$, et un module de flexion $B = E a^3 b / (12(1 - \nu^2)) = 0.358 \times 10^{-3}$ N.m². La position de sa la ligne centrale est repéré par son abscisse curviligne s . Comme indiqué précédemment on étale cette bande sur une barre de NorcanTM de 2 mètres environ qui est installée à l'horizontale. La bande métallique est vissée au support à une extrémité $s = L$ et maintenue en position déroulée par une sorte de gâchette disposée à $s = 0$.

1. On trouve un tel ressort chez Ressort Spec., ref. CF0250043. Il est en acier inoxydable de type 301

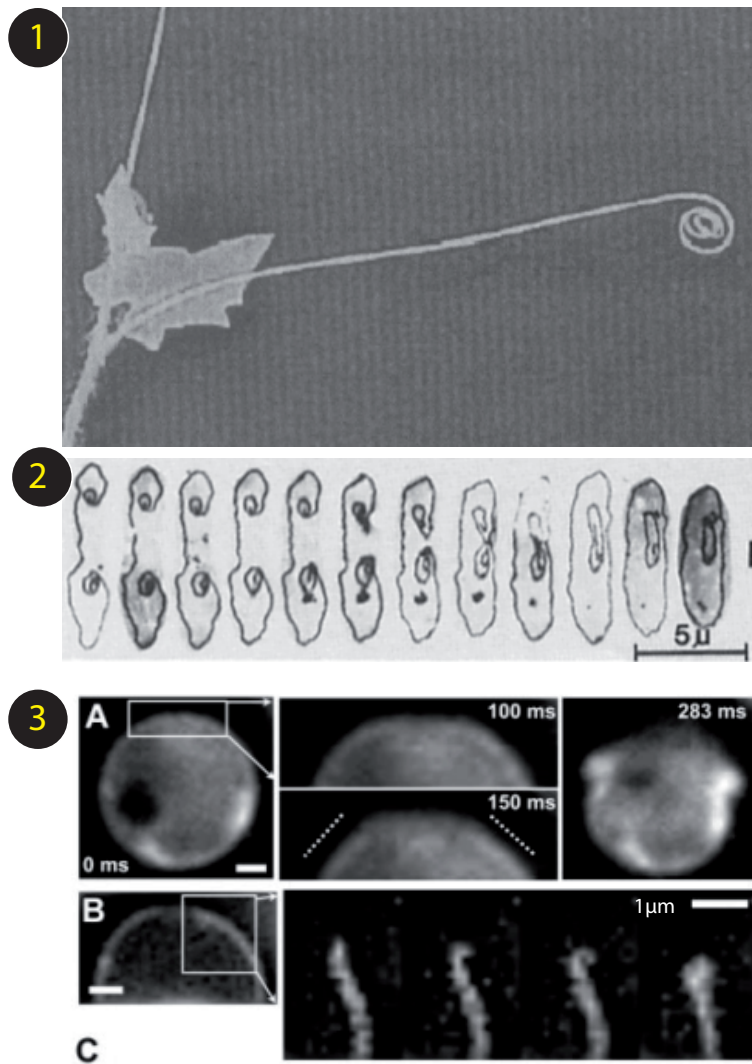


FIGURE 5.1 – Exemples de repliement élastiques. (1) *Bryonia Dioica* d'après [49]. (2) Globules rouges après leur lyse [50]. (3) Globules rouges lors de la propagation du virus de la Malaria [51]

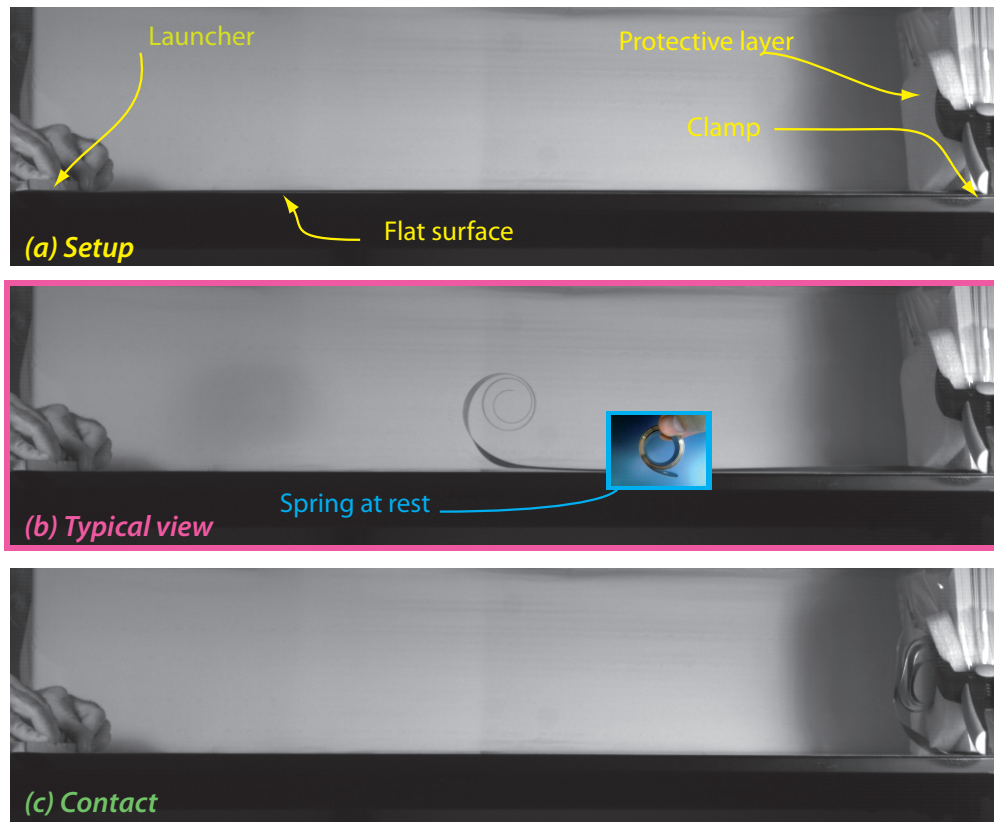


FIGURE 5.2 – (a) Montage expérimental - le ressort est allongé sur une surface plane et est maintenu à droite par une fixation et gauche par le lanceur. (b) Image typique enregistrée montrant la dynamique de l'enroulement après que le lanceur se soit retiré (en vignette : photo à la même échelle du ressort au repos, il est "plus petit"). (c) Contact avec la couche protectrice marquant la fin de l'expérience.

L'expérience démarre à $t = 0$ lorsque la gâchette est retirée et la bande s'enroule sur elle-même en direction de son point d'attache. Le déplacement de la bande se fait dans le plan xy . On enregistre l'action à l'aide d'une caméra PhotronTM réglée à 7000 images par seconde. Une chronophotographie de l'enroulement est montrée en Fig 5.3.

5.2.2 Résultats

On montre expérimentalement que le ressort ne s'enroule pas sur lui-même avec une courbure constante κ_0 comme on aurait pu le penser, mais au contraire forme une structure qui semble spirale. On peut dès lors remarquer quatre points (Figure 5.3) :

1. La structure ne cesse de grandir et sa taille dépasse nettement le rayon du ressort à l'équilibre (Figure 5.2-b).
2. Elle est constituée d'une zone de rouleau où des cercles de courbure constante

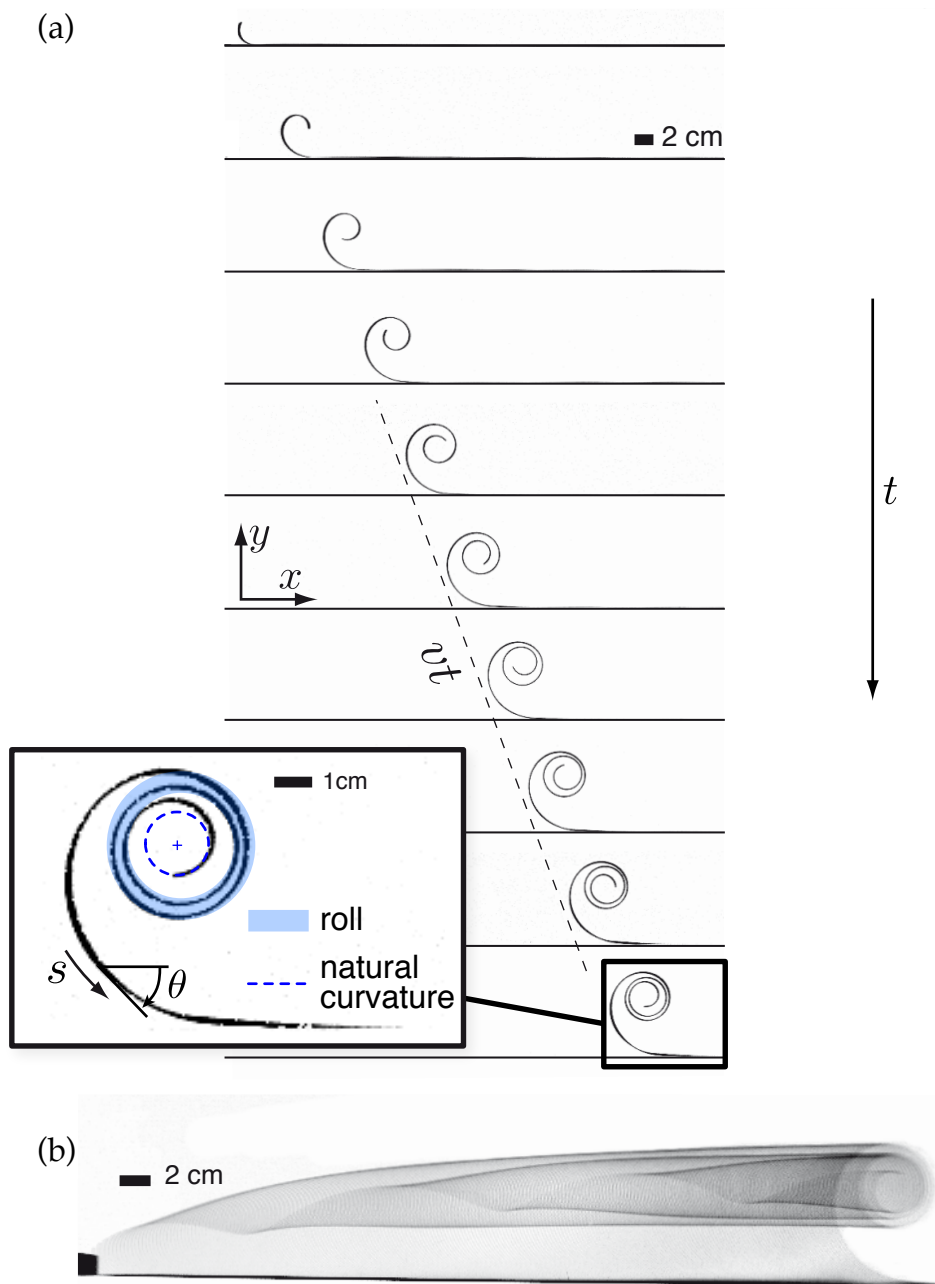


FIGURE 5.3 – Enroulement d'un ressort initialement étalé sur une surface plane. (a) Succession de photos prises 2.85 ms d'intervalle. Le front se déplace à une vitesse de 12.5 m/s (courbe pointillée). La forme de l'enroulement est montrée en détail dans l'encadré : un rouleau de courbure quasi-constante se forme (bleu) et a un rayon plus grand que κ_0^{-1} (cercle en pointillés). (b) Chronophotographie jusqu'au temps $t = 30.85$ ms.

s'amassent.

3. Ces cercles ont une courbure environ deux fois plus faible que celle de l'extrémité libre du ressort.
4. La structure ainsi formée semble avancer à vitesse constante proche de 12.5 m/s.

On peut estimer l'ordre de grandeur des diverses forces en présence pour vérifier que l'on pourra faire les approximations voulues : à savoir négliger la gravité et les forces d'origine aérodynamique. La longueur élasto-gravitationnelle $l_g = (\frac{B}{\rho g})^{1/3}$ mesure la valeur relative des efforts de torsion élastique et de la pesanteur. Elle vaut ici $l_g = 152$ cm. De ce point vue là, le choix du matériau est satisfaisant car on vérifie bien : $L \gg \kappa_0^{-1}$ et $l_g \gg \kappa_0^{-1}$. On aura donc à la fois de nombreux tours et on peut négliger l'influence de la gravité. Estimons maintenant la valeur du coefficient ϵ défini comme étant le rapport des efforts de torsions et les efforts extérieurs d'origine aérodynamique. $\epsilon = \frac{\rho_a C_D v^2 b}{B \kappa_0^3} \simeq 0.004$ où C_D est le coefficient de traînée de la bande et ρ_a la densité de l'air. Cette valeur nous permet d'ignorer les forces d'origine aérodynamique. Cette expérience présente cependant les limitations suivantes. On aimerait voir un très grand nombre de tours mais il apparaît clairement ici que si tel est le cas nous serons rattrapé par la gravité, sans parler des difficultés purement expérimentales, telle que la "sortie de route" du ressort (déformation hors du plan). Ceci nous a conduit à envisager l'approche numérique décrite ci-dessous.

5.3 Étude numérique

5.3.1 Gestion du contact

Au chapitre 2 nous avons décrit en détail le fonctionnement du code DVR pour la simulation des filaments visqueux. Un code similaire mais dédié au cas élastique DER a été mis en place antérieurement à Columbia dans le laboratoire d'Eitan Grinspun notamment par Miklós Bergou[15, 60]. On utilise ici ce code en l'adaptant à ce cas particulier tel qu'expliqué ci-dessous.

5.3.2 Description du problème

Pour simuler la dynamique de la bande métallique nous allons l'assimiler à un filament élastique dont l'élasticité en torsion serait largement plus grande que celle flexion. On décrit alors son mouvement dans le plan (x, y) .

On crée une ligne polygonale $\{\underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n\}$ qui décrit la ligne centrale de la bande métallique. Dès lors la bande est traitée comme étant un filament élastique. Cette ligne polygonale a pour configuration de référence une forme en cercles concentriques de rayon κ_0^{-1} . Ceci permet de rendre compte de la courbure naturelle du ressort. Au temps $t = 0$ cette ligne est allongée à l'horizontale : on impose simplement $\underline{x}_i = (i - 1) \times \delta_x \underline{e}_x$ où δ_x est la discrétisation spatiale. Ces sommets ont par ailleurs une vitesse nulle à $t = 0$.

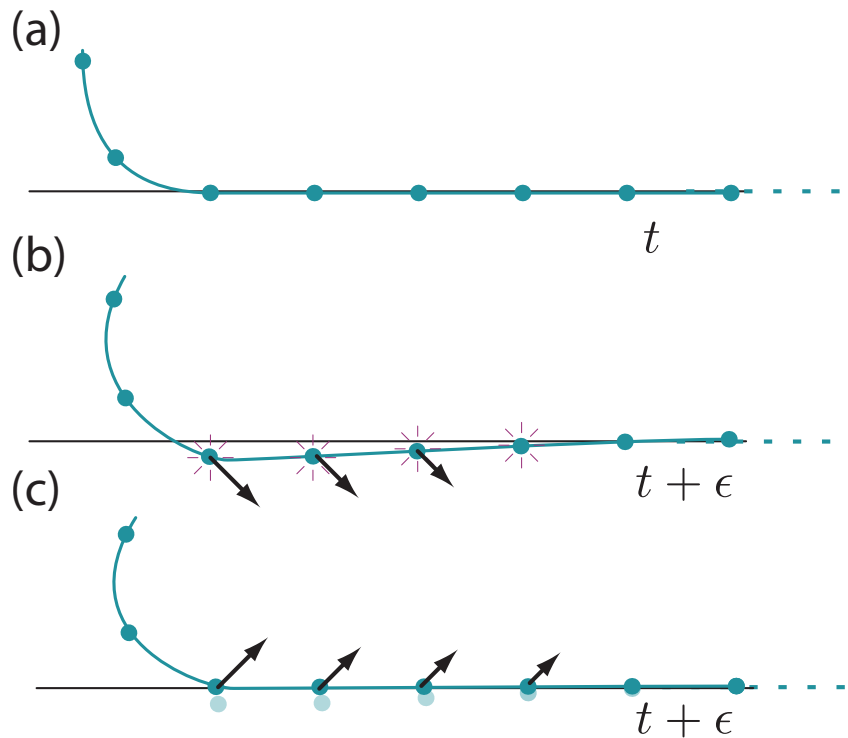


FIGURE 5.4 – Gestion numérique du contact. (a) La configuration départ proposée au temps t . (b) La configuration obtenue après un pas de temps dynamique et ignorant le contact. 4 sommets ont pénétré sous le support avec une vitesse non nulle, ils sont détectés et marqués comme tel. (c) On ramène ces points à la surface et on réfléchit leur vitesse de pénétration. Dans la limite d’une discrétisation appropriée ceci équivaut à la force de contact sans frottement du support. La configuration est prête pour l’itération suivante.

Pour rendre compte de l’encastrement permanent de la partie droite de la bande on définit les positions et vitesses des deux premiers sommets \underline{x}_0 et \underline{x}_1 comme étant nulles à tous temps. De plus la rotation le long du segment qui les relie est interdite. Le paragraphe suivant explique la mise en place du contact avec le support.

L’effet du support est d’empêcher les sommets de la ligne brisée $\{\underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots, \dots, \underline{x}_n\}$ de pénétrer sous son niveau repéré par $y = 0$. D’un point de vue dynamique cette condition de contact est mise en place comme illustré en fig. 5.4. Après chaque pas de temps les points qui sont entrés sous la ligne $y = 0$ sont repérés. Ils sont replacés à la surface du support et leur vitesse est réfléchi. Cette implémentation est équivalente à une force de contact sans friction dans l’hypothèse où le pas de temps est suffisamment petit.

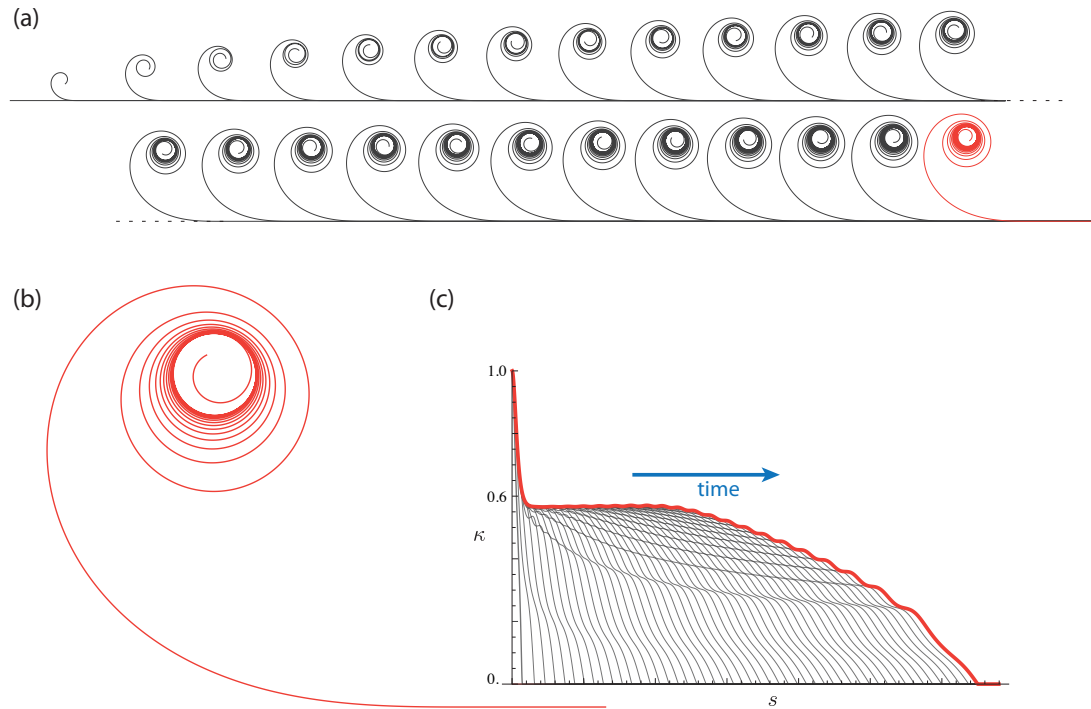


FIGURE 5.5 – Résultats numériques de l’enroulement d’un ressort. (a) augmentation progressive de la zone d’enroulement à intervalles de temps réguliers. (b) Détail de la structure de l’enroulement. (c) Courbure normalisée κ en fonction de l’abscisse curviligne s correspondant aux divers clichés de (a) (en noir) et au détail de (b) en rouge ($s = 0$ repère l’extrémité libre du ressort).

5.3.3 Résultats

On présente ici les résultats de simulations où 3400 sommets ont été utilisés. Ces résultats font l’objet d’une analyse détaillée dans l’article qui suit. Cependant on peut déjà observer un certain nombre de points :

1. Les tracés sont faits à intervalle de temps constants et la distance qui les sépare l’est aussi. La structure avance donc asymptotiquement à vitesse constante et l’abscisse curviligne du point de contact s_c doit donc varier linéairement avec le temps soit $s_c \propto t$.
2. La structure ne cesse de monter avec une pente douce. On verra plus tard que sa hauteur varie en $t^{1/3}$.
3. La structure après un grand nombre de tours est divisible en 4 zones comme on peut le voir en comparant le tracé en rouge sur la fig.5.5 et le tracé de la courbure en fonction de l’abscisse curviligne.

(a) Une zone encore en contact avec le sol qui par conséquent a une courbure

nulle.

- (b) Une zone de décollage où la courbure est une fonction croissante de l'abscisse curviligne présentant des ondulations. On peut comprendre cela en observant le mode de convergence de la spirale vers la zone suivante. La partie supérieure de chaque boucle a une courbure localement plus importante.
- (c) une zone d'accumulation à courbure constante qui forme un plateau à une valeur $\kappa_r \simeq .56 \kappa_0$.
- (d) une couche limite finale assurant la jonction entre le dit plateau et l'extrémité libre de la tige où la courbure retrouve la valeur κ_0 .

5.4 Article

L'article qui suit propose un raisonnement quantitatif montrant le caractère auto-similaire de ces enroulements et permettant de conclure quant aux valeurs respectives de la vitesse d'avancée v , ainsi que la courbure de la zone d'accumulation κ_r . En particulier on montre que :

$$\boxed{v = 0.623508 \sqrt{\frac{B\kappa_0^2}{\rho}}} \quad (5.1)$$

et

$$\boxed{\kappa_r = 0.564244} \quad (5.2)$$

Cette valeur de κ_r inférieure à 1 peut se comprendre par un argument qualitatif : le mouvement est assuré par la conversion progressive de l'énergie élastique du ressort qui s'enroule. Cet enroulement est inertiel et c'est cette inertie qui empêche le ressort de reprendre sa courbure naturelle. Pour aller plus loin dans l'analyse il faut entrer dans le détail des calculs comme on le propose dans la suite.



Self-Similar Curling of a Naturally Curved Elastica

A. C. Callan-Jones,¹ P.-T. Brun,^{2,3} and B. Audoly²

¹Laboratoire Charles Coulomb, CNRS/Université Montpellier II, place Eugène Bataillon, Montpellier, France

²CNRS and UPMC Université Paris 06, UMR 7190, Institut Jean le Rond d'Alembert, Paris, France

³Laboratoire FAST, UPMC-Paris 6, Université Paris-Sud, CNRS, Bâtiment 502, Campus Universitaire, Orsay 91405, France

(Received 7 February 2012; published 27 April 2012)

We consider the curling of an initially flat but naturally curved elastica on a hard, nonadhesive surface. Combining theory, simulations, and experiments, we find novel behavior, including a constant front velocity and a self-similar shape of the curl that scales in size as $t^{1/3}$ at long times after the release of one end of the elastica. The front velocity is selected by matching the self-similar solution with a roll of nearly constant curvature located near the free end.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.174302

PACS numbers: 46.70.De

Curling of an elastic object is a commonplace phenomenon. It occurs after a piece of gift ribbon has been passed over by the blade of a pair of scissors, or when a curly hair has been straightened then released. It arises in the nastic movements of some plants; the tendrils of *Bryonia Dioica* respond to touch stimuli by curling [1]. The membrane of red blood cells curls outwardly after lysis [2] and during egress of malaria parasites [3]. Recently, biologically inspired experiments on plastic strips with natural curvature have been performed [4]. Curling has also recently been exploited as a high-speed temperature- or light-sensitive actuation mechanism at the microscale [5,6]. Given its ubiquity, it is surprising that still very little is known about the dynamics of curling.

The theory of linear bending waves in a naturally straight elastica is classical, and relevant to the dynamic buckling of beams [7] and their fragmentation [8,9]. Only a few dynamically nonlinear solutions are known, such as that for a traveling loop [10] relevant to the problem of a cracking whip [11]. Here, we consider the curling of a naturally curved elastica on a hard surface, driven by elasticity, inertia, and geometric nonlinearity. Curling is a moving boundary problem, and thus shares common features with crack propagation in beams [12] and peeling of an elastica from an adhesive surface [13].

Experiments were performed using a steel strip of length $L = 635$ mm, thickness $a = 0.13$ mm, width $b = 9.5$ mm, and radius of natural curvature $\kappa_0^{-1} = 9.3$ mm [14]. The material properties of the strip are mass per unit length $\rho = 9.732 \times 10^{-3}$ kg/m, Young's modulus $E = 193$ GPa, Poisson's ratio $\nu = 0.25$, and bending modulus $B = Ea^3b/(12(1-\nu^2)) = 0.358 \times 10^{-3}$ N·m². In the following, the centerline position of the strip is parametrized by the arc-length variable s . The spring was laid flat on an approximately 2 m-long Norcan bar, secured at the end $s = L$ and released at the other end, $s = 0$, and its motion was imaged using a Photron fast camera at 7000 frames per second. Curling of the spring occurs in the xy plane, as shown in Fig. 1(a).

In the theoretical description of curling, we consider the case of a long elastica $L \gg \kappa_0^{-1}$, and assume that the effects of gravity are negligible: $\kappa_0^{-1} \ll \ell_g$, where $\ell_g = (B/\rho g)^{1/3}$ is the elastogravitational length (in the experiments $\ell_g = 16.4\kappa_0^{-1}$). In the following we nondimensionalize lengths by κ_0^{-1} , times by $T_1 = \kappa_0^{-2}(\rho/B)^{1/2}$, and masses by $\rho\kappa_0^{-1}$. Denoting the center-line position by $\underline{r}(s, t)$, the tangent vector is $\underline{t}(s, t) = \underline{r}'(s, t)$, where underlines are

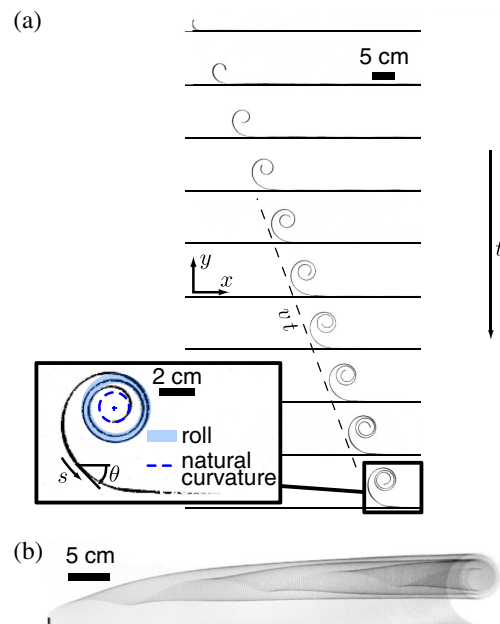


FIG. 1 (color online). Curling of a spring initially laid flat on a hard surface. (a) Sequence of photograph taken with a time interval of 2.85 ms. Translation of the coiling front occurs at 12.5 m/s (dashed curve). Shape of the curled region is shown in close-up of (a): a roll of nearly constant curvature is formed (light, thick circle, blue online) whose radius is larger than κ_0^{-1} (dashed circle). (b) Long-exposure photograph until time $t = 30.85$ ms.

used for vectors, and a prime denotes differentiation with respect to s . The assumed inextensibility of the elastica means that $|\underline{t}(s, t)| = 1$. Let $\theta(s, t)$ be the angle between \underline{t} and the x axis; the curvature of the elastica, $\kappa(s, t) = \theta'(s, t)$, is such that $\underline{t}'(s, t) = \kappa(s, t)\underline{n}(s, t)$, where $\underline{n}(s, t)$ is the normal vector. The stress resultant over a cross section of the elastica at s is written $\underline{f}(s, t)$, its moment is denoted $m(s, t)$, and the external force per unit length is $\underline{p}(s, t)$. To study curling, we solve the nonlinear Kirchhoff equations expressing the balance of linear and angular momentum [15–17], complemented by a linear constitutive law accounting for natural curvature. They read, in dimensionless form,

$$\underline{f}' + \underline{p} = \ddot{\underline{r}} \quad (1)$$

$$m' + \underline{e}_z \cdot (\underline{t} \times \underline{f}) = 0 \quad (2)$$

$$m = \kappa - 1. \quad (3)$$

Here, a dot denotes a time derivative. We note from Eq. (2) that the force can be written as $\underline{f}(s, t) = f_t \underline{t} - \kappa' \underline{n}$, where $f_t(s, t)$ is the tension.

These equations are completed by the initial conditions $\underline{r}(s, 0) = s \underline{e}_x$ and $\dot{\underline{r}}(s, 0) = \underline{0}$ and the following six boundary conditions: the free end is moment and force free, namely, $m(0, t) = 0$, $m'(0, t) = 0$, and $f_t(0, t) = 0$; letting $s_c(t)$ be the yet-unknown front position, the conditions for the contact at a nonadhesive surface [13] read $y(s_c(t), t) = \theta(s_c(t), t) = \kappa(s_c(t), t) = 0$. Together, these boundary conditions allow for the integration of the shape of the elastica in time, including the determination of $s_c(t)$.

In the presence of a line of contact with a flat surface, it is well known that the contact force, $\underline{p}(s, t)$, vanishes in the interior of the contact region $s > s_c(t)$, as can be seen by solving Eqs. (1)–(3) for \underline{p} in the case of a flat configuration. The force of contact only has a Dirac contribution at the point of contact: $\underline{p}_D(s, t) = -\delta(s - s_c(t))\kappa'(s_c(t)^-, t)\underline{e}_y$; see for instance Ref. [18]. In addition, we assume that there is no contact between distant parts of the curled elastica, even at long times. We will check later the validity of this assumption.

Once the flattened elastica is released, the curvature at the free end $s = 0$ varies rapidly from zero to one on a time scale of the order of $t_1 = a\kappa_0/v_s$ where $v_s \gg 1$ is the speed of sound in the material [9]. During this short period, the curvature near $s = 0$ relaxes; the physical description in this regime is beyond the scope of the thin rod approximation underlying Eqs. (1) and (2). For times $t_1 \ll t \ll 1$, $\theta(s, t) \ll 1$, the motion of the contact-free region $s < s_c(t)$ is governed by the linear beam equation $\ddot{y} + y'''' = 0$. The solution to this equation and the initial and boundary conditions reads

$$y(s, t) = t \frac{C(1) - C(\sigma) + \pi\sigma^2[S(1) - S(\sigma)] - \sigma \cos \frac{\pi\sigma^2}{2}}{S(1)}, \quad (4)$$

where $\sigma = s/\sqrt{2\pi t}$ and $C(\sigma) = \int_0^\sigma \cos(\pi\sigma'^2/2)d\sigma'$ and $S(\sigma) = \int_0^\sigma \sin(\pi\sigma'^2/2)d\sigma'$ are the Fresnel cosine and sine integrals. Equation (4) follows from an extension of the analysis of [9] to one-sided contact. It predicts that the y coordinate of the center of mass of the curled elastica scales as t at short times. The front position is given by the root of $y(s_c(t), t) = 0$, namely $s_c(t) = \sqrt{2\pi t}$, and advances as $t^{1/2}$ at short times. This is the same scaling behavior as for crack propagation at early times in a wedged beam [12], a phenomenon also governed by the linear beam equation. The validity of Eq. (4) at short times is confirmed in Fig. 2 by a numerical solution of Eqs. (1)–(3) in time, using the numerical method of discrete elastic rods [19].

This self-similar behavior at early times only applies to the very first frames in the experiments in Fig. 1(a), and breaks down as the deflection angle $\theta(0, t)$ becomes of order 1. For long times $t \gg 1$, the elastica has completed many turns, and we describe the shape of the curl and the front position. Naïvely, one might expect that the curling dynamics is described by a traveling wave solution, in which $(\underline{r} - vt\underline{e}_x)$, \underline{f} , and m are functions of $(s - vt)$, where v is the front velocity. This would imply that the center of mass of the curled elastica simply translates along the x axis, which is incompatible with the presence of a nonzero vertical contact force at the point of contact $s_c(t)$. We thus search for a more general, self-similar solution to Kirchhoff's equations. We first postulate that the position of the point of contact is written in terms of an unknown velocity parameter v and exponent $\alpha > 0$ as $\underline{r}(s_c(t), t) = s_c(t)\underline{e}_x = vt^\alpha \underline{e}_x$ and, second, that the position vector of an

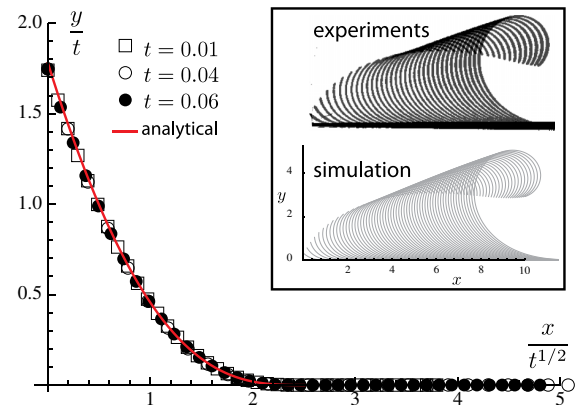


FIG. 2 (color online). Main plot: short time behavior. Vertical component, y , of the curled elastica position versus the self-similar variable $s/\sqrt{t} \approx x/\sqrt{t}$. Self-similar solution from Eq. (4) (red curve) versus numerical solution to Eqs. (1)–(3) using the method of discrete elastic rods [19] (symbols). The curling front position agrees well with the prediction of the linearized theory, $s_c/\sqrt{t} = \sqrt{2\pi} \approx 2.5$, at early times, $t \leq 0.06$. Inset: moderate times, $t \leq 9.90$. Comparison of shapes of elastica in experiments and in simulation at evenly separated times, until the curled region makes approximately one turn.

arbitrary point reads, in the frame moving along with the point of contact,

$$\underline{r}(s, t) - vt^\alpha \underline{e}_x = t^\beta \underline{R}(u). \quad (5)$$

Here $u = (vt^\alpha - s)/t^\beta$ is the self-similar variable, $\beta > 0$ is a second scaling exponent, and $\underline{R}(u)$ is the unknown master curve. By convention, the position of the curling front corresponds to $u = 0$, and $\underline{R}(u) = \underline{0}$. Note that the variable u is an arc-length parameter for the master curve $\underline{R}(u)$ since the tangent vector $\underline{T}(u) \equiv \underline{R}'(u) = -\underline{t}(s, t)$ satisfies $|\underline{T}(u)| = 1$.

An energy argument allows us to find α . Anticipating that the curled part of the elastica dilates slowly compared to its translation velocity ($\beta < \alpha$), the kinetic energy density at late times is proportional to the squared typical velocity $(\alpha t^{\alpha-1})^2$. Balancing this with the density of elastic energy, which is of order 1 in our dimensionless units, we have $\alpha = 1$ and so $\underline{r}(s_c(t), t) = vt \underline{e}_x$: the curling front advances at an asymptotically constant velocity v .

The exponent β can be obtained from momentum conservation along the y direction as follows. By Eqs. (2) and (3), the y component of the force that the flat part of the elastica, $s > s_c$, exerts on the curled part, $s < s_c$, reads $f_y(s_c) = -\kappa' \sim t^{-2\beta}$, while the rate of change of y momentum on the curled part of the elastica scales as $t^{\beta-1}$, by Eq. (5); balancing the two gives $\beta = 1/3$. We thus confirm our assumption that $\beta < \alpha$.

In Fig. 3, we show the results of numerical simulations of the shape of the curled elastica at long times. Figure 3(a) confirms that the elastica includes a slowly dilating, self-similar “outer” region (I). In addition, Fig. 3(b) reveals the existence of an “inner” region consisting of a roll of constant curvature (II) and a small boundary layer near the free end (III) over which the curvature increases to $\kappa(0, t) = 1$, as imposed by the moment-free boundary condition at $s = 0$. In Fig. 3(c) we see that, in the simulations, the point of contact $s_c(t)$ departs from the $t^{1/2}$ scaling valid at short times to a linear scaling t at long times; furthermore, the y coordinate of the center of mass of the curled elastica y_M departs from a linear scaling $y_M \sim t$ at short times to a cube root scaling $t^{1/3}$ at long times. This confirms the validity of the exponents $\alpha = 1$ and $\beta = 1/3$ found by scaling arguments.

The curvature of the curled elastica at long times is described by a differential equation that can be obtained by combining Kirchhoff’s equations with the self-similar ansatz (5), with $\alpha = 1$ and $\beta = 1/3$. First, projecting Eq. (1) along \underline{t} and \underline{n} and using Eqs. (2) and (3) leads to $f'_t + \kappa \kappa' = \ddot{\underline{x}} \cdot \underline{t}$ and $\kappa f_t - \kappa'' = \ddot{\underline{x}} \cdot \underline{n}$. Second, after eliminating the tension, f , in the first equation using the second one, calculating the tangential and normal components of the acceleration at dominant order in t from Eq. (5), and integrating the resulting equation with respect to s , we obtain

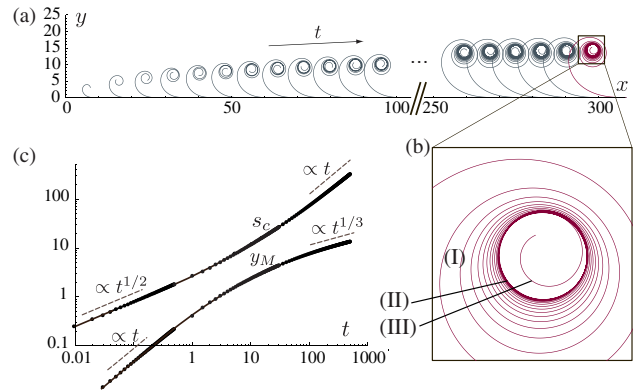


FIG. 3 (color online). Direct numerical solution for the shape of curled elastica at long times, using the method of discrete elastic rods [19]. (a) Slow expansion of the curled region. (b) Close-up view revealing the structure of the curl, made up of an outer region (I), a nearly circular roll (II), and a boundary layer (III). In (c), the contact position $s_c(t)$ and the y coordinate of the center of mass of the curled elastica y_M are plotted on log-log scales, confirming the short and long time behaviors found by scaling arguments.

$$\frac{\kappa''}{\kappa} + \frac{\kappa^2}{2} = \frac{2v^2 w}{3}, \quad (6)$$

where $w = 1 - s/(vt)$ varies between $w = 0$ at the point of contact [$s = s_c(t) \approx vt$] and $w = 1$ near the free end ($s = 0$). An integration constant, equal to $(\kappa''/\kappa)|_{s=s_c(t)}$, has been omitted in the above equation since it goes to zero as $t^{-2/3}$.

Equation (6) for the self-similar curling is confirmed by the numerical collapse of $\kappa''/\kappa + \kappa^2/2$ in Fig. 4(b). At long times this quantity is seen to vary linearly with w , and not to depend on time. This collapse holds in the self-similar region (I), corresponding to the interval $0 < w < w_r$. At $w = w_r \approx 0.61$, as seen from Fig. 4(b), the elastica enters the roll region (II) and the curvature becomes uniform and time independent, with $\kappa_r \approx 0.56$. Note that self-contact of the elastica has been ignored in the simulation. This is consistent: closer examination reveals that in region (II), the elastica is a non-self-intersecting spiral with a very small but positive step.

The selection of the front velocity v , of the plateau curvature κ_r , and of the relative size w_r of the self-similar region can be explained by solving the inner regions (II) + (III), and then matching with the self-similar solution in the outer region (I). Because the dimensionless formulation of our dynamical problem is free of any parameter, these numbers are universal.

In the inner regions (II) + (III), the elastica behaves as a rigid solid rotating with uniform angular speed $\Omega_r = \dot{\underline{x}} \cdot \underline{n}$. Its shape is governed by Eqs. (1)–(3); in particular, the momentum balance is given by $\underline{f}'(s, t) = -\Omega_r^2 \underline{\tilde{r}}(s, t)$, where $\underline{\tilde{r}}(s, t)$ is the position vector at s measured with

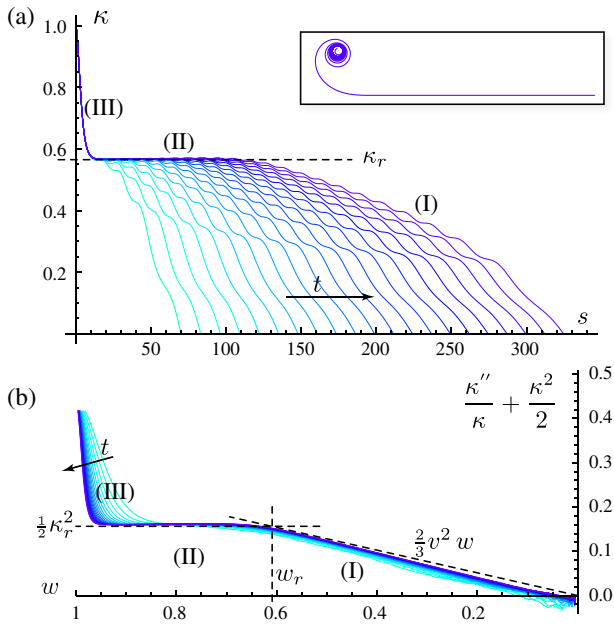


FIG. 4 (color online). Curvature at long time, computed by numerical simulation. (a) $\kappa(s, t)$ is plotted versus s at 21 different times, from $t = 94.25$ to $t = 494.25$. (b) The left-hand side of Eq. (6) is plotted versus $w = 1 - s/(vt)$: the collapse validates the self-similar analysis of the solution over the region (I), $0 < w < w_r$. The position w_r of the boundary between regions (I) and (II), the slope $(2v^2/3)$ of the master curve in the self-similar region (I), and the almost constant value of curvature κ_r in region (II) agree very well with the values predicted by our asymptotic analysis, shown in dashed lines, with no adjustable parameter.

respect to the center of rotation. This centripetal acceleration amounts to a central force, and gives rise to the conservation [20] of the angular momentum flux $I(s) = m(s) + \underline{e}_z \cdot \underline{\tilde{r}}(s) \times \underline{f}(s)$, whose value is $I = 0$ by the stress and moment-free boundary conditions. Enforcing this constraint, the actual values of κ_r and Ω_r are then found by a shooting algorithm with just one free parameter. Requiring that, starting from $s = 0$, the static solution converges to a roll of constant curvature, we find $\kappa_r = 0.564244$ and $\Omega_r = -0.279783$.

At long times, the angular velocity of the self-similar region (I) is, using Eq. (5), $\Omega = \dot{\underline{i}} \cdot \underline{n} = -\kappa v(1 - w/3)$. Matching this velocity with Ω_r implies

$$\left(\frac{\Omega_r}{\kappa_r}\right)^2 = v^2 \left(1 - \frac{w_r}{3}\right)^2. \quad (7)$$

Physically, Ω_r^2/κ_r^2 is the tension that builds up to balance the centripetal acceleration in the roll. The asymptotic behavior of Eq. (6), $\kappa \approx (4v^2 w/3)^{1/2}$, provides another matching condition at $w = w_r$:

$$\kappa_r = (4v^2 w_r/3)^{1/2}. \quad (8)$$

The values of w_r and v can now be found by solving Eqs. (7) and (8). This yields $w_r = 0.614199$ and $v = 0.623508$. Reverting to dimensional form and using the experimental values of B , ρ , and κ_0 , we calculate a front velocity $v\sqrt{\frac{B\kappa_0^2}{\rho}} = 12.8$ m/s, which agrees with the measured value, 12.5 m/s.

The asymptotic solution is shown in Fig. 4(b), and is validated by the numerical solution: our calculations of w_r , κ_r , and the slope of $\kappa''/\kappa + \kappa^2/2$ in the self-similar region yield a prediction for the master curve, shown as dashed lines in Fig. 4(b), onto which the numerical curves collapse with no adjustable parameter.

In summary, we have considered the curling dynamics of an elastica at long times, and have found a novel front solution resulting from inertia, elasticity, and geometric nonlinearities. We have shown that, in neglecting gravity, curling on a surface occurs by self-similar dilation of the elastica, in marked contrast with traveling wave-type solutions of heavy elastica on a surface [21–23]. Future work will concentrate on curling in a viscous environment, as is relevant to bursting red blood cells [2,3] and polymersomes [24], in which it is expected that viscous drag and lubrication forces play a central role.

We thank O. Albarran, G. Massiera, and M. Abkarian for discussions that initiated this work, and for bringing a related work to our attention [4]. A.C.-J. acknowledges J. Dornac and F. Geniet for helpful exchanges. We are grateful to M. Bergou and E. Grinspun for sharing their discrete elastic rods code.

- [1] J. Engelberth, *Adv. Space Res.* **32**, 1611 (2003).
- [2] V.L. Lew, A. Hockaday, C.J. Freeman, and R.M. Bookchin, *J. Cell Biol.* **106**, 1893 (1988).
- [3] M. Abkarian, G. Massiera, L. Berry, M. Roques, and C. Braun-Breton, *Blood* **117**, 4118 (2011).
- [4] O. Albarran, G. Massiera, and M. Abkarian, “Curling and Rolling Dynamics of Elastic Ribbons” (to be published).
- [5] Y. Yu, M. Nakano, and T. Ikeda, *Nature (London)* **425**, 145 (2003).
- [6] S. Park, J. An, J. W. Suk, and R. S. Ruo, *Small* **6**, 210 (2010).
- [7] L. Golubovic, D. Moldovan, and A. Peredera, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3387 (1998).
- [8] J.R. Gladden, N.Z. Handzy, A. Belmonte, and E. Villermaux, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 035503 (2005).
- [9] B. Audoly and S. Neukirch, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 095505 (2005).
- [10] B.D. Coleman and E.H. Dill, *J. Acoust. Soc. Am.* **91**, 2663 (1992).
- [11] A. Goriely and T. McMillen, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 244301 (2002).
- [12] Z.J. Bilek and S.J. Burns, *J. Mech. Phys. Solids* **22**, 85 (1974).
- [13] R. Burridge and J.B. Keller, *SIAM Rev.* **20**, 31 (1978).
- [14] Ressort SPEC, Ref. CF0250043, stainless steel type 301.

- [15] R.E. Caflisch and J.H. Maddocks, *Proc. R. Soc. Edinburgh, Sect. A* **99**, 1 (1984).
- [16] B.D. Coleman, E.H. Dill, M. Lembo, Z. Lu, and I. Tobias, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **121**, 339 (1993).
- [17] A. Goriely and M. Tabor, *Nonlinear Dynamics* **21**, 101 (2000).
- [18] C. Majidi, *Mech. Res. Commun.* **34**, 85 (2007).
- [19] M. Bergou, M. Wardetzky, S. Robinson, B. Audoly, and E. Grinspun, *ACM Trans. Graph.* **27**, 63:1 (2008).
- [20] D.J. Dichmann, Y. Li, and J.H. Maddocks, in *Mathematical Approaches to Biomolecular Structure and Dynamics*, edited by J. Mesirov, K. Schulten, and S. De Witt (Springer, Berlin/Heidelberg, 1996).
- [21] D. Vella, A. Boudaoud, and M. Adda-Bedia, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 174301 (2009).
- [22] J.M. Kolinski, P. Aussillous, and L. Mahadevan, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 174302 (2009).
- [23] P.S. Raux, P.M. Reis, J.W.M. Bush, and C. Clanet, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 044301 (2010).
- [24] E. Mabrouk, D. Cuvelier, F. Brochard-Wyart, P. Nassoy, and M.-H. Li, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **106**, 7294 (2009).

5.5 Conclusions

L'idée de cette étude était de proposer un système modèle pour expliquer les repliements élastiques génériques présentés en introduction. On donne ici deux pistes pour enrichir le modèle présenté et ainsi décrire plus fidèlement les différents systèmes biologiques proposées en introduction (Figure 5.1).

5.5.1 Influence de la gravité

Sans doute le plus simple pour commencer est d'ajouter la gravité au calcul précédent. On montre ici les résultats qualitatifs d'un calcul en gravité fortement exagérée (Figure 5.6). L'enroulement prend une forme très différente de ce qui a été vu auparavant. L'inertie invoquée pour expliquer les formes précédentes est ici combattue par la gravité qui ramène le bout libre au sol.

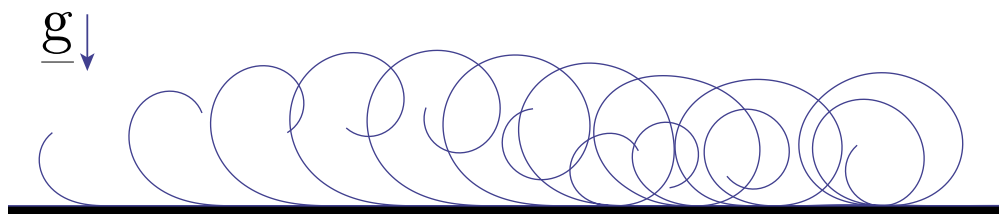


FIGURE 5.6 – Dynamique de l'enroulement élastique sous forte gravité.

5.5.2 Rôle du support

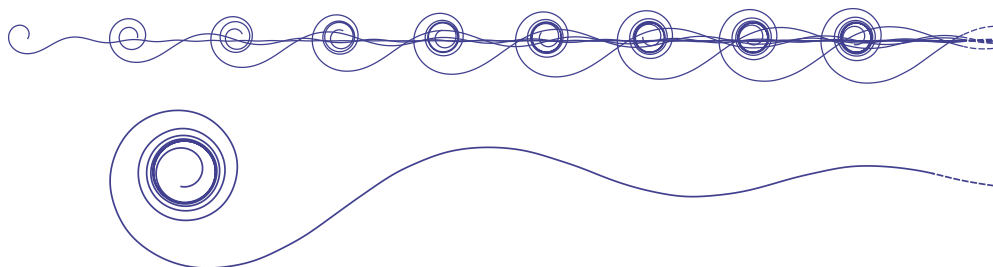


FIGURE 5.7 – Dynamique de l'enroulement sans support.

Pour expliquer la forme de l'enroulement et en particulier son ascension, nous avons

évoqué le rôle actif de la force de réaction du support. Il est légitime de se demander ce qu'il se passe en absence de support. Le ressort serait alors tendu entre deux pinces dont une est libérée à $t = 0$. Une telle expérience avec des matériaux similaires à ceux évoqués est difficile à mettre en place. Nous proposons ici une simulation numérique d'une telle expérience (Figure 5.7). La structure globale de la solution semble conservée en dépit de l'absence de support. Cependant son analyse numérique est rendue difficile par des oscillations élastiques parasites qui se propagent en son long et se réfléchissent sur le bord fixe. Ces dernières étaient atténuées par le support dans notre étude. Elles pourraient être supprimées ici par une condition de bord parfaitement absorbante.

Chapitre 6

Le lasso

6.1 Introduction

Le lasso, dans son acception moderne, désigne un sport basé sur la capacité de ses pratiquants à faire virevolter un corde bouclée sur elle même à l'aide d'un "nœud coulant". Ces numéros d'équilibristes font d'ailleurs fureur en Amérique du Sud comme au Sud des États-Unis où cette discipline est nommée le *trick roping*. Le succès populaire du *trick roping* dans ces régions du globe trouve son origine dans la fonction première du lasso. En effet les *Charros* ou *Vaqueros* Mexicains et les *Cowboys* Américains s'en servaient quotidiennement pour attraper du bétail. Ces aptitudes autrefois essentielles ont évolué vers ce sport. En tant que sport, le lasso a ses experts parmi lesquels on peut citer Will Rogers, Vince Bruce ou encore Jesús Garcilazo. Ce dernier réside en France et nous a fait l'honneur de nous rendre visite pour nous montrer ces meilleurs tours. Ci-dessous, nous dressons rapidement un dictionnaire des figures de lasso et explorons la physique de ce sport centré sur la dynamique des cordes. Rien ne vaut la pratique pour commencer à comprendre le lasso et la lecture de l'ouvrage de Carey Bunks [61], *A rational guide to trick roping* peut s'avérer particulièrement utile à cette fin.

6.1.1 Bestiaire de boucles

Un lasso est composé d'une corde qui se termine par une boucle étroite, appelée le "honda". La corde passe dans ce "honda" qui joue le rôle de ce que l'on a appelé plus haut un "nœud coulant" et forme une large boucle, "loop" en Anglais. La partie de la corde qui part du "honda" et remonte vers la main du cowboy se nomme le "spoke", rayon d'une roue en français (Figure 6.1). Ces cordes sont de nos jours tressées en nylon ou en coton alors que les lassos traditionnels sont fabriqués en fibres de cactus. Par ailleurs les cowboys choisissent avec précaution leur lasso parmi un large éventail de possibilités qui répondent à des besoins particuliers (longueur requise pour faire tel ou tel tour) et aux conditions météo du moment (température et hygrométrie). Le tour de base en lasso

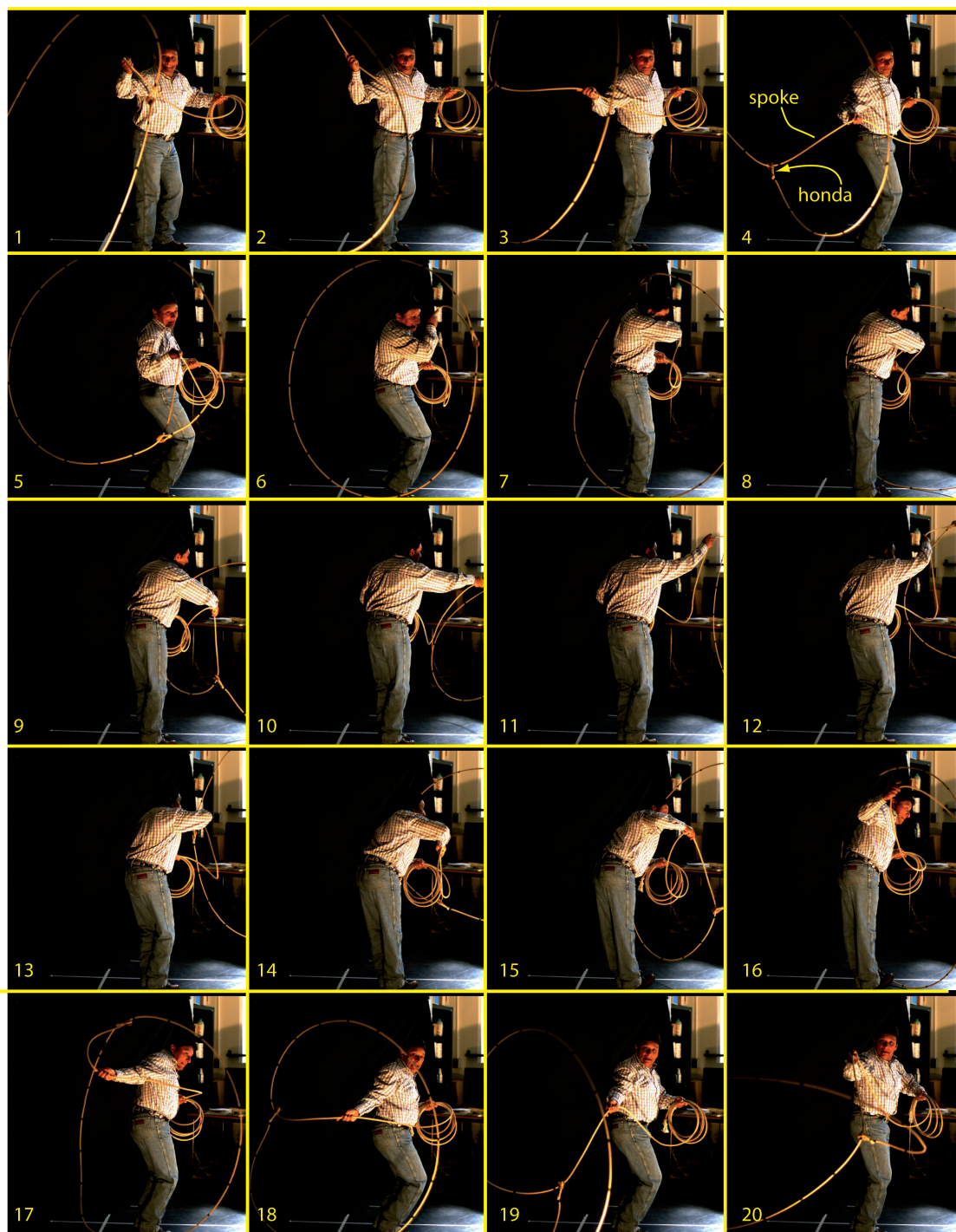


FIGURE 6.1 – Jesús Garcilazo en action : une variante du "Texas skip" de son cru. On donne en image 4 la définition des termes "honda" et "spoke". Noter le passage de la corde sous ses pieds au moyen d'un talon-pointe entre les images 6 et 8.

est la boucle plate ou "flat loop" qui est représenté en Figure 6.3. Le cowboy réalise en effet une large boucle avec son lasso (en général consommant les 2/3 de la corde) qu'il entraîne et stabilise par l'action conjuguée de :

- sa main qui se déplace en cercle à la fréquence Ω ,
- ses doigts, qui à chaque tours dé-vrillent la corde.

La difficulté de la pratique du lasso réside dans la synchronisation de ces deux mouvements à contre sens. Une fois ce tour de base maîtrisé le cowboy peut se permettre plus de fantaisies qui se caractérisent par une grande diversité de tours. Ces tours jouent sur les positions et tailles relatives de la boucle et du cowboy. On peut notamment citer les figures suivantes :

- le "Merry go round" le cowboy fait passer un flat-loop autour de lui, dans son dos, puis d'une main à l'autre.
- le "Wedding ring" Le cowboy forme une boucle suffisamment large et s'y glisse.
- le "Butterfly" Le cowboy oriente une boucle de petite taille à la verticale et la fait osciller à sa droite et sa gauche, imitant le battement des ailes d'un papillon.
- la bicyclette ou chien en laisse. Le cowboy forme une boucle verticale et la fait rouler sur le sol en la suivant.
- le "Texas skip". Le cowboy forme une large boucle verticale qu'il traverse ensuite en sautant. On montre une variante de cette technique où Jesús Garcilazo nous montre l'étendue de son talent. (Figure 6.1).

Au delà de l'habilité des Cowboys le lasso peut se résumer à la réponse d'un objet élané sous un forçage périodique. C'est finalement un système assez générique.

6.1.2 Un système assez générique

La nature comme l'industrie regorgent d'exemples de fils, cordes ou autres filaments en déplacement sous un forçage périodique. On en trouve par ailleurs pas plus loin que dans les cours de récréation avec les cordes à sauter [63]. L'exemple le plus marquant, et pas forcément le plus attendu, est à mon sens celui de l'araignée *Bolas*. Au contraire de ses congénères cette araignée *Bolas* tisse un fil unique qu'elle laisse pendre au bout d'une de ses pattes (Figure 6.2). Ce fil se termine par une goutte de liquide collant qu'elle sécrète. Cet ensemble ressemble à un *Bolas* Argentin, arme de chasse comprenant plusieurs masses réunies par des fils que l'on jette pour capturer des animaux. Sa technique de chasse consiste à émettre des phéromones pour attirer des insectes à sa portée et les attraper en projetant ce fil par un mouvement de patte circulaire (Figure 6.2). On retrouve des systèmes modèles analogues, constitués d'un fil pesant doublé d'un poids à son extrémité, dans l'industrie textile lors du filage notamment. Les fils y sont enroulés, déroulés, autour de bobines et forment de magnifiques instabilités formant des "ballons" textiles [64, 65, 66, 62] (Figure 6.2). Des phénomènes proches [67, 68] existent à des échelles largement inférieures. C'est le cas lors de la répllication de l'ADN [69] ou encore pour la propulsion flagellaire à l'échelle cellulaire [70].

Ces phénomènes existent donc dans des environnements très différents et répondent tous à

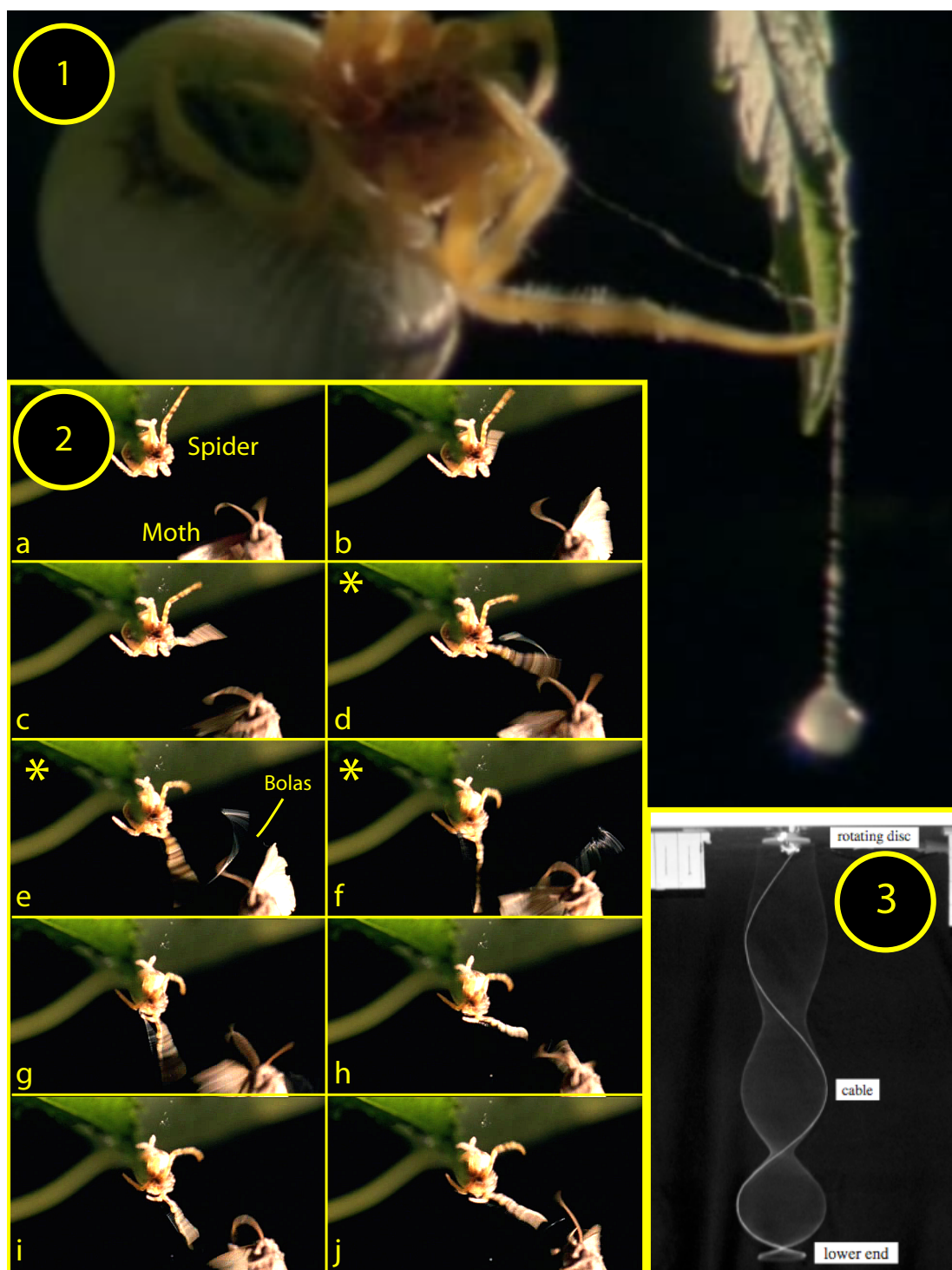


FIGURE 6.2 – Deux exemples de dynamique de filaments visqueux : (1) l'araignée *Bolas* fabrique un fil de soie unique qu'elle projette (2) avec sa patte pour capturer ses proies. Les trois photos étoilées sont celles où l'on voit le fil de soie (Life In The Undergrowth BBC). (3) Visualisation des modes de "whirling" d'un fil sous excitation périodique [62] : un fil est excité par un disque en rotation pour former les formes désarticulées connues sous le nom de "whirling strings".

la dynamique décrite par les équations de Kirchhoff pour les tiges élastiques. Dans chaque cas la résolution se fait en considérant ou négligeant telle ou telle force, en fonction de leur pertinence. Si l'inertie est toujours présente elle peut être équilibrée par différents termes comme la tension, la résistance à la torsion ou bien le frottement visqueux. Dans la suite de ce chapitre on s'attachera à isoler le système minimal qui permettra de décrire le lasso de façon satisfaisante.

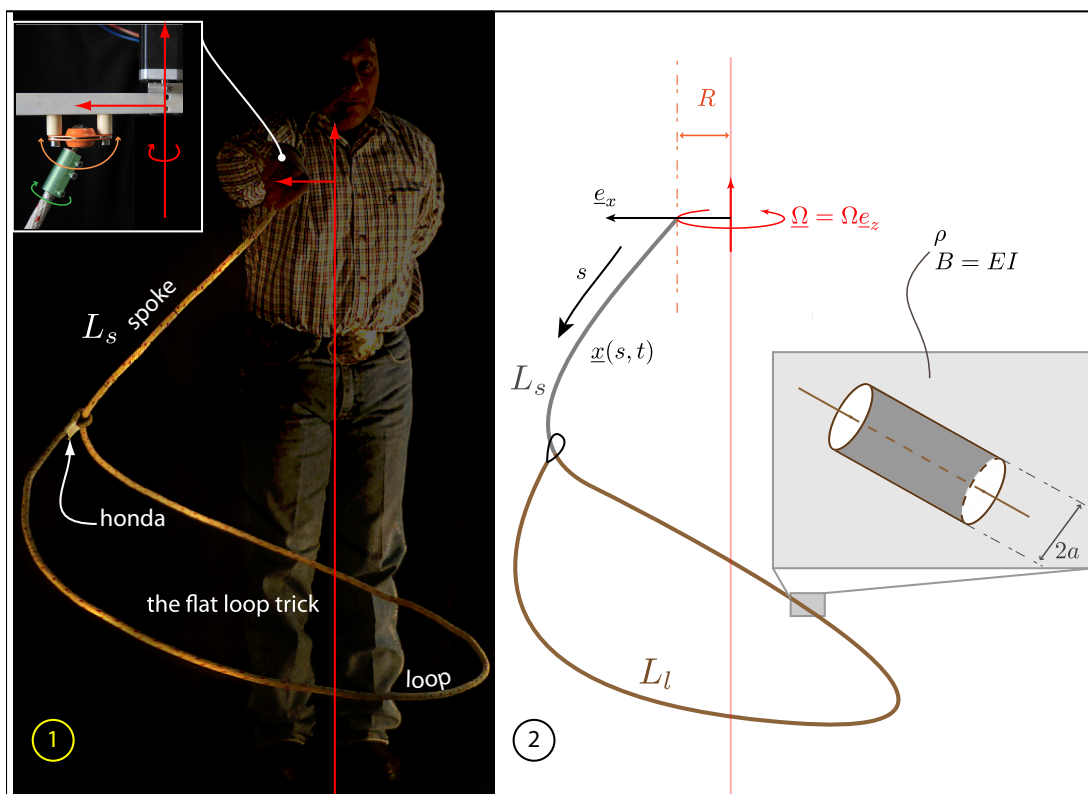


FIGURE 6.3 – (1) Le flat loop trick. Le lasso se divise en trois parties, le spoke $s \in [0, L_s]$, la boucle $s \in [L - L_l, L]$ et le honda. La main du cowboy se déplace en cercles de rayon R à une vitesse Ω . Médaille : robot cowboy "équivalent". (2) Le lasso est formé d'une corde de rayon a de masse volumique ρ et résistance à la flexion $B = EI$. Il est excité à la fréquence Ω avec un rayon R .

6.2 La dynamique du lasso

6.2.1 Énoncé du problème

On considère ici la figure de "flat loop" (Figure 6.3). Le lasso forme une boucle plate et le forçage de la main du cowboy est circulaire avec un rayon R et une vitesse $\underline{\Omega} = \Omega \underline{e}_z$.

Ce lasso est fait d'une corde de longueur L , section $A = \pi a^2$, densité ρ et module de flexion $B = EI$ où E est le module d'Young du matériau et I le moment d'inertie de la corde. La longueur est répartie entre la boucle L_l et le spoke $L_s = L - L_l$. On note par $\underline{x}(s, t)$ les coordonnées cartésiennes repérant le point de corde d'abscisse curviligne s au temps t . Le vecteur tangent à la corde est alors obtenu par simple dérivation $\underline{t}(s, t) = \underline{x}'$, où la notation prime symbolise la dérivation $\partial/\partial s$. Pour étudier le lasso de façon aisée il convient de le traiter en deux problèmes initialement indépendants puis raccordés : (1) : le spoke $s \in [0, L_s]$ (dont les variables seront repérées ultérieurement par l'exposant ¹) et (2) : la boucle $s \in [L - L_l, L]$ (repérée par l'exposant ²). Chacune de ces parties répond aux mêmes équations de la dynamique, les équations de Kirchoff pour les tiges élastiques, avec bien sûr des conditions de bords différentes :

$$\underline{n}' + \underline{\mathcal{P}} = \rho A \underline{\ddot{x}} \quad (6.1)$$

$$\underline{m}' + \underline{t} \times \underline{n} = \underline{0} \quad (6.2)$$

$$\underline{m} = B \underline{\kappa} \quad (6.3)$$

\underline{n} et \underline{m} représentent respectivement la contrainte et les moments agissant sur la corde, alors que $\underline{\mathcal{P}}$ désigne les forces extérieures (gravité ...). Par ailleurs la courbure est notée $\underline{\kappa} = \underline{x}''(s, t)$ et on rappelle qu'un point désigne une dérivation temporelle $\partial/\partial t$. On cherche maintenant à évaluer l'ordre de grandeur des principales forces agissant sur la corde dans le but de résoudre le système d'équation minimal rendant compte de la réalité physique. Dans le "flat loop" la corde est stationnaire dans le repère tournant à la même vitesse que la main du Cowboy. L'accélération (centrifuge) s'écrit donc $\underline{\ddot{x}} = \Omega^2 \underline{e}_z \times (\underline{e}_z \times \underline{x})$. Il est intéressant de noter que les forces d'origine aérodynamique $\underline{\mathcal{P}}_d$ peuvent être négligées devant cette accélération. En effet la rapport entre ces deux forces s'écrit $\epsilon = \frac{\underline{\mathcal{P}}_d}{\underline{\mathcal{P}}_c} = \frac{\rho_a C_D b r}{\rho A} \simeq 0.03$ où ρ_a est la densité de l'air et b désigne le rayon typique de la boucle du lasso. Pour comparaison une corde à sauter conduit à une valeur d' ϵ au moins dix fois supérieure [63]. Vient maintenant une remarque de première importance : à chaque tour de lasso le cowboy dévrille la corde à l'aide de ses doigts ; il évite ainsi l'accumulation de rotations dans la corde. Ceci nous conduit à faire une première approximation : on négligera *a priori* les efforts liés à la torsion. On négligera également la résistance en flexion de la corde. Cette dernière hypothèse devra être vérifiée *a posteriori* : elle ne tient que si les efforts de flexion sont négligeables devant la tension de la corde. Cette dernière quantité peut être assimilée au poids de la corde. Autrement dit le rayon de courbure de la corde doit demeurer en tout point supérieur à la longueur elasto-gravitationnelle de la corde $l_g = (\frac{B}{\rho g})^{1/3}$. On remarquera que dans le cas d'une chaîne cette longueur est nulle et l'hypothèse est donc automatiquement validée. Dans la cas de notre corde en coton l_g a été estimée à 11cm, ce qui est bien faible devant la longueur de la corde ($\simeq 3m$).

En se plaçant dans ce cadre, la dynamique se résume à l'équation suivante :

$$(\underline{n} \underline{x}')' + \rho A \underline{g} = \rho A \Omega^2 \underline{e}_z \times (\underline{e}_z \times \underline{x}) \quad (6.4)$$

Dans un tel cas n définit la tension de la corde. On distingue trois types de conditions de bord allant de paire avec cette équation, les conditions à la frontière main-spoke, celles à la frontière spoke-boucle, et celles au bout de la boucle. Sans nuire à la généralité du problème on peut considérer que le main du cowboy est située sur l'axe \underline{e}_x ce qui revient à imposer la condition $\underline{x}_1(0) = R\underline{e}_x$. A son autre extrémité le "spoke" rejoint la boucle ce qui implique : $\underline{x}_1(L_s) = \underline{x}_2(L - L_l) = \underline{x}_2(L)$. Finalement, le "honda" est à l'équilibre ce qui se traduit par :

$$\underline{n}_s + \underline{n}_l + \underline{n}_h = \underline{0} \quad (6.5)$$

où $\underline{n}_s = \underline{n}_1(L_s)$, $\underline{n}_l = \underline{n}_2(L_s)$ et $\underline{n}_h = \underline{n}_2(L)$. On note que la discontinuité de \underline{n} au passage de $s = L_s^-$ à $s = L_s^+$ s'explique par le fait que le "honda" exerce une force à ce même point comme illustré en Figure 6.7. Malgré cette discontinuité vectorielle la norme n de \underline{n} peut elle être continue. C'est le cas si le contact entre le honda et la corde se fait sans frottement comme on le verra par la suite.

Le lasso peut donc se résumer à ce problème correctement posé au sens des équations différentielles. Il est en particulier régi par les trois paramètres adimensionnés suivants :

$$\pi_1 = \frac{L}{R}, \quad \pi_2 = \frac{L_s}{L}, \quad \pi_3 = \frac{g}{\Omega^2 L}. \quad (6.6)$$

Ceci signifie que chaque triplet (π_1, π_2, π_3) conduit *a priori* à une ou plusieurs solutions. Cette réflexion est étonnante pour quiconque a essayé de faire tourner un lasso. Quand on en fait l'expérience on ne peut pas choisir à la fois la longueur de la boucle, le rayon d'excitation et sa fréquence. Cette contradiction n'est qu'apparente et sera éclairé par la dernière partie de ce chapitre. Mais avant cela nous allons dans un premier temps examiner les résultats obtenus en résolvant les équations proposées ci-dessus. La méthode de résolution est précisée ci-après.

6.2.2 Méthodes de résolution

AUTO

Le système d'équations exposé ci-dessus peut se résoudre par continuation à l'aide d'AUTO par exemple. C'est une option dont nous avons usé pour trouver les solutions en "flat loop" de lasso.

Tir et "contour plot"

En parallèle à la méthode de continuation AUTO, nous avons mis en place un algorithme de tir "standard" doublé d'un `ContourPlot` dans MathematicaTM. En particulier ceci permet de trouver les solutions de boucles plates symétriques et le cas échéant de suivre ces dernières dans un espace à deux paramètres. Cette méthode incorpore donc une hypothèse supplémentaire par rapport au calcul AUTO mais elle est plus pratique dans certains cas. En outre elle conduit aux mêmes résultats que ceux obtenus avec AUTO ; l'hypothèse de symétrie n'est donc pas restrictive. Elle a aussi permis d'exhiber d'autres solutions comme expliqué plus loin. Nous en exposons ici le principe général.

Comme indiqué en Figure 6.4 la résolution se fait en deux étapes : la boucle d'abord avec `ShootAlongLoop` et le spoke en second par `IntegrateAlongSpoke`. Les équations du système sont rappelées en Figure 6.4 dans l'encadré marron sous leur forme algébro-différentielle qui a l'avantage d'être concise. La forme de la boucle recherchée étant symétrique, on ne résoudra que la moitié du problème, l'autre sera construite par symétrie. Le point de départ du problème est noté sur le tracé 3D en Figure 6.4, c'est le milieu de la boucle. On ne connaît pas *a priori* la longueur de boucle que l'on va trouver. On se place dans un repère et un système d'unités tel que ce point là a pour coordonnée $(-1, 0, 0)$ comme indiqué dans l'encadré rouge par le label BC1 en Figure 6.4. Par symétrie encore, la tangente à ce point est $(0, 0, -1)$. On est donc dans un formalisme légèrement différent de celui proposé au paragraphe 6.2.1.

La fonction qui réalise le tir le long de la boucle est nommée `ShootAlongLoop`. En plus de ces conditions de bords préfixées elle reçoit trois arguments sans dimension : la gravité, la tension à mi-boucle, et un dernier argument qui peut être ignoré sans nuire à la compréhension. Le système est complet, on peut intégrer à partir du point de départ : c'est ce que fait le `NDSolve`. On trouve typiquement des solutions telles que montrées par la ligne rouge continue (solution physique) et pointillée (excédant à retirer) dans le tracé 3D en Figure 6.4. Il s'agit justement de trouver où couper cette solution. On le fait en cherchant les zéros de $y(s)$ par la fonction `RootSearch`. La première étape se termine en prenant le symétrique de cette solution représentée ici en bleue, l'ensemble formant la boucle recherchée (Figure 6.4). La seconde étape de la résolution est très similaire. On récupère le jeu de conditions aux limites dont on a besoin pour commencer à intégrer depuis le honda vers la main en se servant de la boucle que l'on vient de trouver. En particulier on connaît la position du honda ainsi que la force exercée par la boucle à ce point là. On les reporte dans `IntegrateAlongSpoke` comme indiqué par le label BC2 dans l'encadré vert. Connaissant la longueur de la boucle et celle de la corde on peut en déduire ce qu'il reste pour le spoke L_s . Nul besoin de tirer, on intègre jusqu'à atteindre L_s . La position en bout de corde (L_s) correspond à la position de la main du Cowboy. On a ainsi formé une solution de lasso "boucle plate". *Stricto sensus* elle n'est pas plane mais incurvée par l'équilibre entre la force inertielle et son poids.

6.2.3 Résultats théoriques

Comme expliqué dans l'introduction il existe une multitude de systèmes où un fil répond à un forçage périodique. Le plus proche du lasso est sans doute le cas des "whirling string", c'est à dire des fils en résonance. Dans ce paragraphe on rapporte les similitudes et différences notables entre les modes de "whirling" habituels et le lasso. Pour ce faire on établit le diagramme de bifurcation du lasso en plaçant la main du cowboy sur l'axe de rotation. On choisit les paramètres numériques suivants :

$$\pi_1 = \infty, \quad \pi_2 = 0.29. \quad (6.7)$$

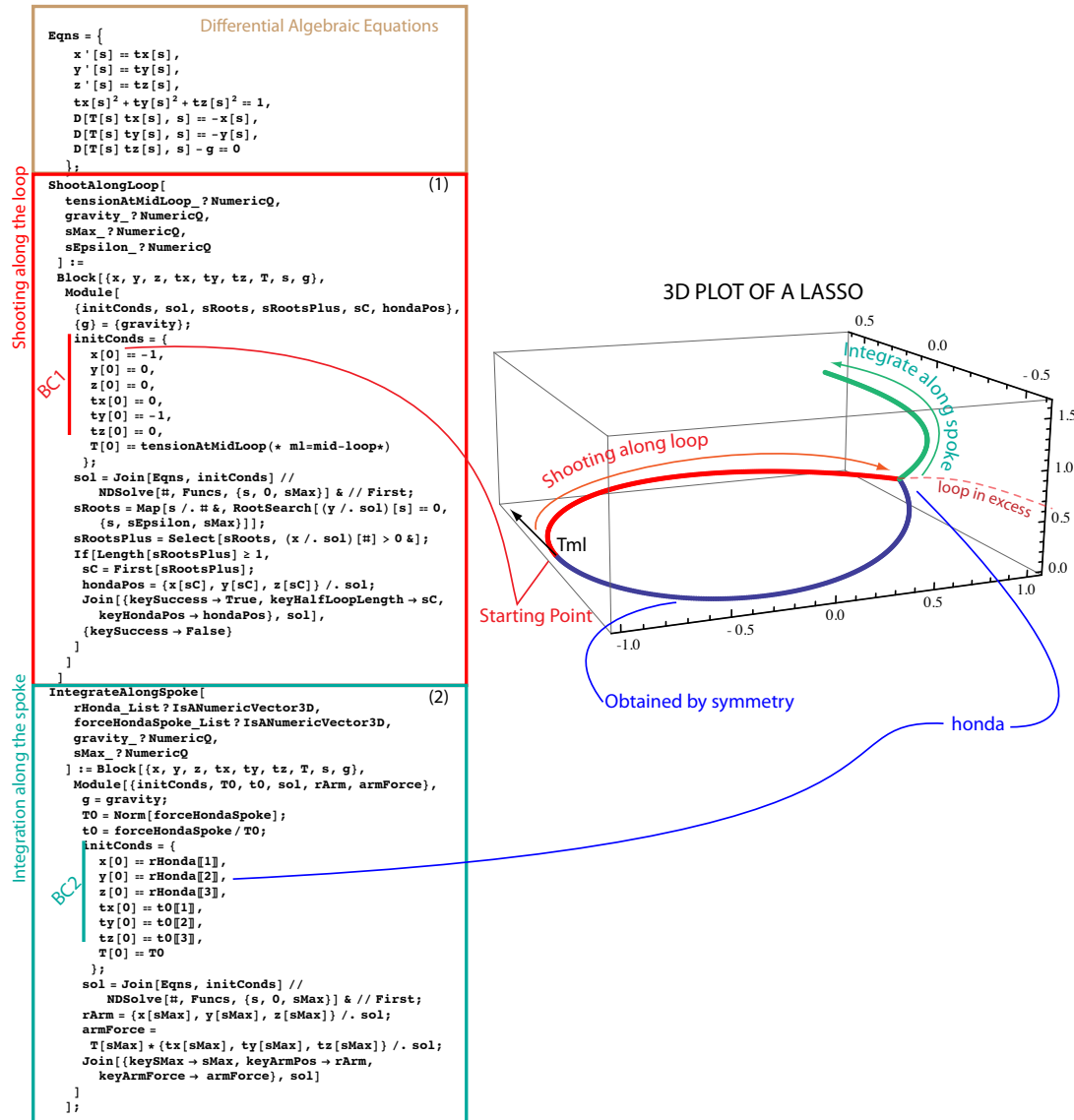


FIGURE 6.4 – Schéma d'intégration du lasso. Les équations algébro-différentielles (DAE) pour un fil (encadré marron), l'algorithme de tir le long de la boucle (encadré rouge) et celui le long du spoke (vert) sont donnés. Le tracé 3D du lasso est représentatif de ces fonctions. La zone bleue de la boucle est obtenue par symétrie.

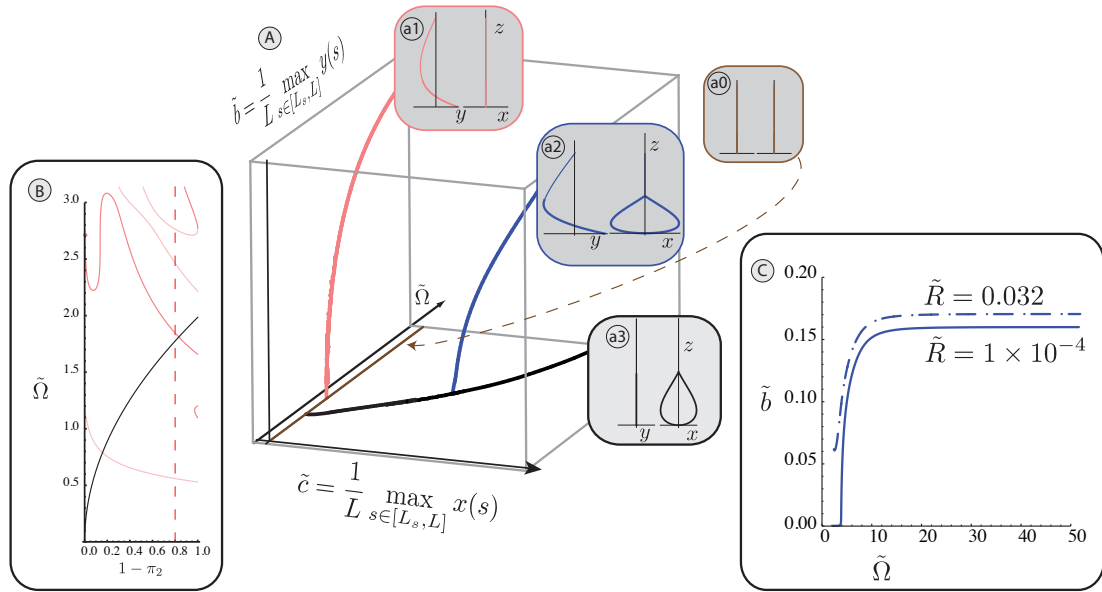


FIGURE 6.5 – (A) Quatre types de solutions au système d'équations du paragraphe (6.2.1) sont obtenues par continuation (lasso) et tirs (autres) : (a0) solution non flambée verticale (la boucle est fermée), (a1) lasso en boucle plate, (a2) solutions de type "whirling" avec la boucle complètement fermée, (a3) solutions en cintres. Diagramme de bifurcation en fonction de la fréquence ($\tilde{\Omega}$, $\tilde{b} = \max_{s \in \text{loop}} x(s)$, $\tilde{c} = \max_{s \in \text{loop}} y(s)$) lorsque la main du cowboy est sur l'axe de rotation ($R = 0$) \tilde{b} et \tilde{c} repèrent l'envergure des solutions respectivement sur l'axe y et x . (B) Fréquences d'apparitions des modes de cintres (noir) et de whirling (rose) à partir de la solution non flambée verticale en fonction de la taille relative de la boucle $1 - \pi_2$. Le ligne en pointillés rouges verticale repère les conditions du diagramme (A). Les branches rose-pale correspondent à d'autres modes de whirling qu'on ne discute pas ici. (C) Branches de solutions du lasso dans le plan ($\tilde{\Omega}$, \tilde{b}) pour deux valeurs de $1/\pi_1$.

Les paramètres de continuation sont :

$$\tilde{\Omega} = 1/\sqrt{\pi_3}, \quad \tilde{b} = \frac{1}{L} \max_{s \in [L_s, L]} y(s), \quad \tilde{c} = \frac{1}{L} \max_{s \in [L_s, L]} x(s) \quad (6.8)$$

En pratique, cela signifie simplement que l'on opère avec un "honda" fixé, avec la main de l'opérateur maintenue sur l'axe de rotation en variant la vitesse de rotation. On rend compte des configurations observées en mesurant les points extrémaux de l'enveloppe de la boucle \tilde{b} (sur y) et \tilde{c} (sur x).

Lorsque l'on résout l'équation (6.4) avec les conditions aux limites spécifiées ci-dessus nous trouvons une zoologie de résultats dont le lasso en "flat loop" fait partie. Ces familles sont exposées en figure 6.5-A. En plus de la boucle de lasso classique (A-a1) il existe des modes très proches du "whirling" (A-a2) où la boucle du lasso est refermée sur elle-même, et des modes dits en cintre (A-a3) où la boucle est plane et ressemble à la partie basse d'un cintre de penderie. Notons que de ces modes dits de "whirling" étaient prévisibles. En effet un lasso fermé peut être vu comme un fil unique de densité ρ sur une sa partie haute puis 2ρ plus loin.

La courbe bleue représente les états de lasso classiques et se trouve encadrée entre les états de "whirling" contraints au plan $(\tilde{\Omega}, \tilde{b})$ et de cintres contraints au plan $(\tilde{\Omega}, \tilde{c})$. La formation du lasso peut être vue comme une combinaison de ces deux instabilités. On montre ici que la bifurcation vers les états de lasso se fait uniquement à partir de ces états en cintre. Dans ce cas particulier la branche des états en cintre bifurque depuis l'axe $(\tilde{\Omega}, 0, 0)$ avant l'apparition des états de "whirling". On note que l'ordre d'apparition relative des bifurcations en cintre et de "whirling" est une fonction de la taille de la boucle. Ces fréquences sont tracées en fonction de $1 - \pi_2$ en figure 6.5-B. La ligne en pointillés rouges repère la valeur de ce paramètre correspondant au diagramme A. Ces solutions sont toutes en compétitions les unes les autres.

Bien sûr il est aussi possible de faire varier la position de la main du cowboy. L'effet de ce déplacement se mesure par la valeur du paramètre $1/\pi_1$ est montré en figure 6.5-C. La courbe obtenue pour $1/\pi_1 = 10^{-4}$ sert de référence et on mesure l'effet de π_1 en observant la branche de solution en ligne pointillée obtenues pour $1/\pi_1 = 3.2 \times 10^{-2}$. En particulier en arrivant des larges vitesses on observe la branche des solutions se finir avant d'atteindre l'axe : à ce point la boucle du lasso se referme et devient une solution en "whirling".

Les résultats exposés ci-dessus sont purement théoriques et numériques. Dans le but de valider notre modèle nous proposons l'expérience suivante.

6.2.4 Résultats expérimentaux

Pour valider notre compréhension du lasso nous avons envisagé trois types d'expériences :

1. Une mesure directe avec entraînement manuel; consistant à filmer à la caméra rapide un cowboy exécutant une figure de "flat-loop".

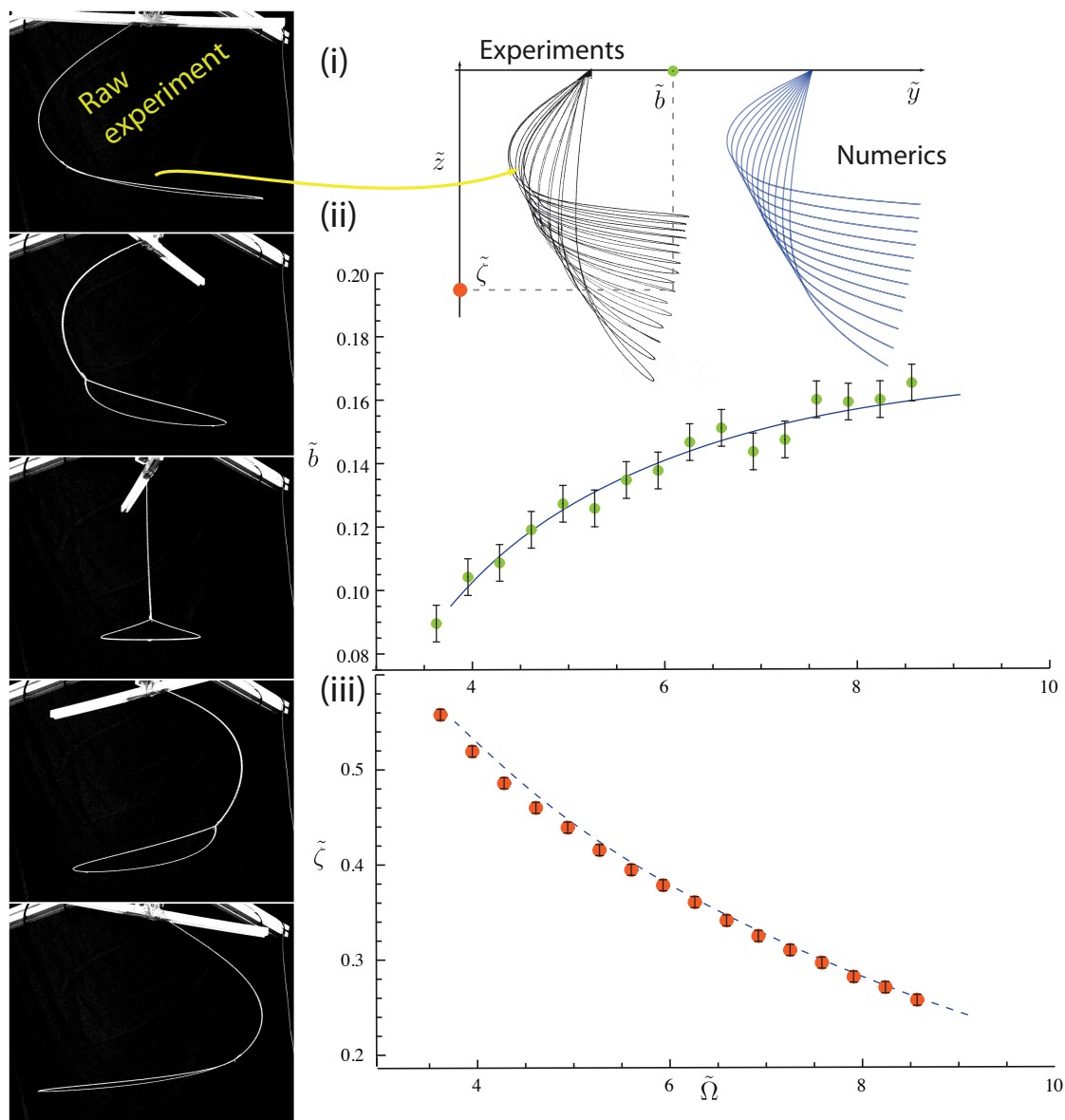


FIGURE 6.6 – (i)- Comparaison visuelle entre l'étude expérimentale et numérique : superposition de vues de côté des lassos en mode boucle plate. (ii) - Les coordonnées du point le plus bas sont notées $(\tilde{b}, \tilde{\zeta})$ dans le plan (y, z) . Elles sont respectivement tracées et comparées aux prédictions théoriques en (ii) et (iii).

2. La mise en place d'un "robot cowboy" où la main de l'opérateur est remplacée par une liaison rotule montée sur bras, lui même actionné par un moteur électrique (Figure 6.3). La liaison rotule permet de se placer dans des conditions parfaites de non accumulation du vrillage. Le lasso, lui, est inchangé.
3. Un montage similaire au point 2 mais en utilisant une chaînette à billes plutôt

qu'une corde. La chaînette est semblable à celles qu'on trouve dans nos baignoires, et elle est scotchée sur elle-même pour former une boucle. C'est la représentation d'un "honda" à friction infinie.

La première nous a essentiellement servi à nous construire une intuition et une compréhension des phénomènes en jeu. La seconde sera discuté plus tard dans ce chapitre. Nous commençons par valider nos calculs à l'aide de la troisième expérience et les paramètres expérimentaux suivants :

$$\pi_1 = 1/\tilde{R} = 31.25, \quad \pi_2 = 0.29. \quad (6.9)$$

Pour caractériser les formes observées nous traçons la position du point le plus bas de la boucle à savoir $\tilde{b}(\tilde{\Omega})$ pour la position sur \underline{e}_y et $\tilde{\zeta}(\tilde{\Omega})$ pour celle sur \underline{e}_z . Les mesures ainsi faites et les prédictions théoriques, sans paramètre ajustable, qui leur correspondent sont présentées en figure 6.6. Les comparaisons qualitatives et quantitatives sont satisfaisantes. Le modèle proposé est correct et approprié pour décrire la dynamique du lasso dans son ensemble. En revanche les cowboys n'utilisent pas de scotch pour faire tenir leur boucles : voyons ce qui s'y substitue.

6.3 Rôle du frottement au honda

6.3.1 Equilibre au honda

Dans ce paragraphe nous nous penchons sur le rôle du frottement dans la mécanique du lasso. Jusqu'ici la boucle était maintenue par un "bout de scotch", c'est-à-dire que toutes les forces exercées par le honda sur la corde étaient admissibles. Maintenant on remplace ce "bout de scotch" par un noeud coulant : le honda est donc libre de bouger si le frottement n'est pas suffisant pour l'en empêcher.

Avant d'aller plus en avant dans cette démarche il nous faut remarquer que la prise en compte du frottement nous oblige à considérer la raideur en flexion de la corde. Raisonnons par l'absurde pour le démontrer : on considère une corde de rayon fini qui n'a pas de résistance en flexion. Cette corde serait en appui sur elle-même au niveau du honda, où la courbure de l'ordre de $1/r$ est bien supérieure au seuil $1/l_g$ fixé précédemment. On doit donc considérer la résistance en flexion de la corde. En revanche, cette résistance ne sera utile que dans une région de taille faible $\sigma \simeq l_g$ limitée autour du noeud coulant ($l_g \ll L$). Pour résoudre ce problème nous mettons en place un développement asymptotique raccordé dont la solution externe est celle calculée avec le modèle précédent (voir fig.6.7-A). Elle fixe le comportement asymptotique du problème interne (voir fig.6.7-B) que l'on va maintenant résoudre. Notons que la résolution du contact ne change pas la dynamique globale du lasso mais on s'attend à ce qu'il autorise ou interdise un certain nombre de ces configurations¹.

1. C'est d'ailleurs le rôle habituel du frottement. Par exemple lorsqu'une charge est posée sur un plan incliné, seul un intervalle d'angles d'inclinaison est admissible au sens de la statique.

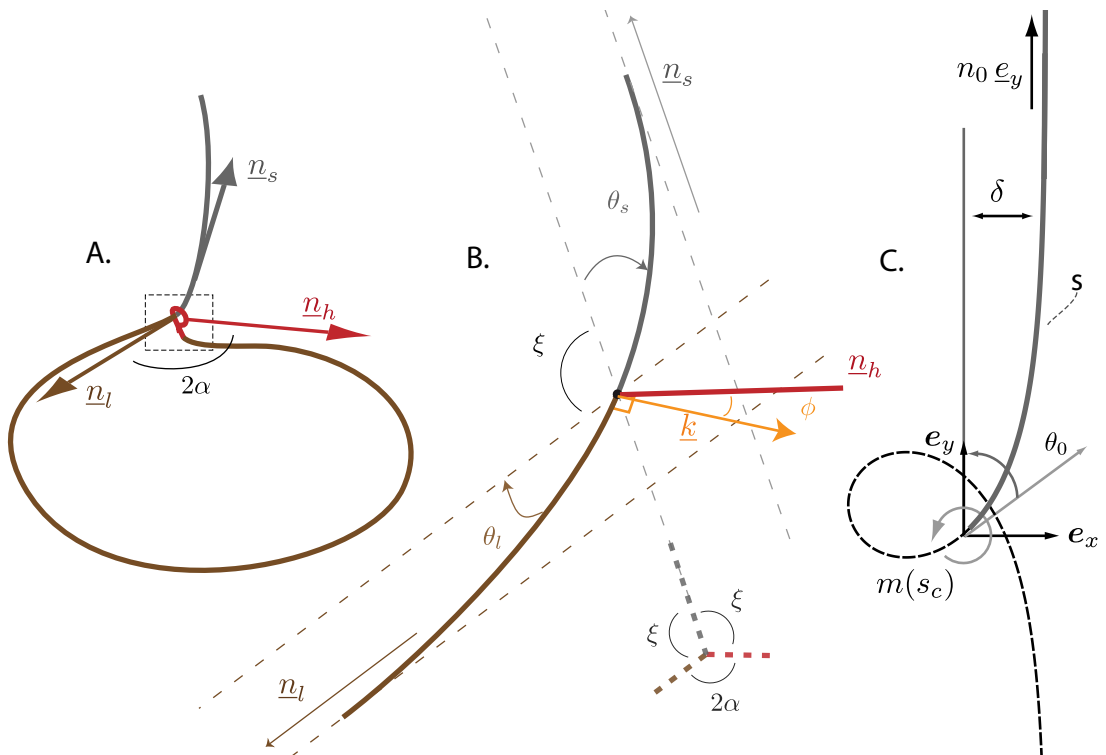


FIGURE 6.7 – (A)- Equilibre des forces au honda pour une solution donnée. La boucle est représentée en marron et le spoke en gris. La force exercée par le honda est notée en rouge. L'angle 2α sépare les directions respectives des forces \underline{n}_l et \underline{n}_h imposées par la solution externe. (B)- Zoom sur la région du honda. Le contact est ponctuel et la normale à ce point là \underline{k} est calculée en résolvant la forme détaillée de la corde passant à travers le honda. Ce calcul est fait en se basant sur la solution externe $\underline{n}_l, \underline{n}_s$ connue. Alors ϕ indique l'angle de contact. (C) Chaque bout de la corde de (B) (marron et gris) est décrit par la solution de pendule homocline pour l'Elastica dont on rappelle ici la forme. On introduit les variables essentielles à la résolution.

Le problème interne est celui d'un Elastica soumis à deux tensions données à ses extrémités \underline{n}_l et \underline{n}_s (voir fig.6.7-B). Pour le résoudre il nous faut encore le séparer en deux problèmes indépendants qui seront raccordés ultérieurement. Pour se faire on résout le problème modèle suivant. Considérons un Elastica semi-infini encastré à une extrémité et dont l'autre extrémité située à l'infini subit une force imposée. Le choix de la taille infinie se justifie par le fait que la couche limite a une taille très inférieure à la dimension du lasso. La force appliquée à l'infini est notée de façon générique $n_0 \underline{e}_y$ (Fig 6.7-C). Elle joue en fait alternativement le rôle de \underline{n}_l ou \underline{n}_s selon quelle branche on considère. Notons que pour la résolution et sans que ceci n'est de conséquence physique on a fait le choix d'orienter cette force le long de l'axe \underline{e}_y . On introduit $\theta(s)$ comme l'angle séparant la tangente à l'Elastica et \underline{e}_y . On donne alors les équations de ce nouveau problème :

$$x_{,s} = \sin \theta \quad (6.10)$$

$$y_{,s} = \cos \theta \quad (6.11)$$

$$-EI\theta_{,s} = m \quad (6.12)$$

$$m_{,s} + n \sin \theta = 0 \quad (6.13)$$

où n représente l'effort interne qui a été imposé par la solution externe et m le moment interne agissant sur la tige. Ce problème s'accompagne des conditions de bord suivantes : $\underline{n}(\infty) = n_0 \underline{e}_y$ et $m(\infty) = 0$ ce qui en faisant usage de (6.10) et (6.12) donne :

$$\theta(\infty) = 0 \quad (6.14)$$

$$\theta'(\infty) = 0 \quad (6.15)$$

On note que l'on a pas d'information sur $\theta_0 = \theta(0)$ qui une inconnue du problème (fig.6.7-C). En combinant les équations (6.12) et (6.13) on retrouve celle décrivant le mouvement d'un pendule :

$$\bar{\theta}_{,ss} - \sin \bar{\theta} = 0 \quad (6.16)$$

avec les paramètres d'adimensionnement suivants $\bar{s} = \sqrt{EI/m}$, $\bar{m} = \sqrt{mEI}$ et $\bar{N} = n$. Les notations surmontées d'une barre telles que \bar{x} correspondent aux variables adimensionnées ainsi formées. Par intégration on parvient à l'intégrale première de l'énergie :

$$\frac{1}{2} \bar{\theta}_{,s}^2 + \cos \bar{\theta} = 1 \quad (6.17)$$

qui satisfait les conditions aux limites (6.14) et (6.15). Cette solution est donc conditionnée pour satisfaire aux conditions de raccord entre solution interne et externe. Cette équation se résout analytiquement, et on donne :

$$\bar{\theta}(\bar{s}) = 4 \arctan(\exp(\bar{s} - \bar{s}_0)) \quad (6.18)$$

où \bar{s}_0 encapsule l'inconnue $\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}(\bar{s} = 0)$. Il s'agit maintenant d'identifier cette inconnue. On le fait en raccordant les deux demi-problèmes internes (respectivement gris et marron en Figure 6.7-B). En effet au point de raccordement entre ces deux solutions il y a une

discontinuité de forces (égale à la force ponctuelle exercée par le honda), mais il ne doit subsister aucune discontinuité de moments. Ceci équivaut à écrire $EI[[\theta_s]] = 0$ ce qui par (6.17) et en restaurant les dimensions donne :

$$n_l(1 - \cos \theta_l) = n_s(1 - \cos \theta_s) \quad (6.19)$$

On a introduit les notations θ_l et θ_s qui sont les angles θ_0 respectifs des côtés spoke et loop (fig.6.7-C). En ajoutant le fait que $n_s/n_l = 2 \cos \alpha$ on transforme cette équation en :

$$(1 - \cos \theta_l) = 2 \cos \alpha (1 - \cos \theta_s) \quad (6.20)$$

On peut obtenir une deuxième équation indépendante liant ces trois angles. Par construction l'angle ξ qui sépare \underline{n}_s et \underline{n}_l est égal à $\pi - \alpha$ (rappel en figure 6.7-B). La courbure au point raccord est elle continue ce qui conduit à la relation $\theta_s + \xi + \theta_l = \pi$. En combinant les deux dernières équations on obtient :

$$\theta_s + \theta_l = \alpha \quad (6.21)$$

En pratique on s'intéresse à l'angle de contact ϕ entre la normale à la corde au point de contact et la force \underline{n}_h (Figure 6.7-B). Cet angle s'obtient par $\phi = 2\alpha - \pi/2 - \theta_l$ (Figure 6.7-B). Combiné au couple d'équations (6.20) et (6.21) il s'exprime de la sorte :

$$\boxed{\phi = \arccos(2 \cos \alpha - 1) - \pi/2} \quad (6.22)$$

Cet angle n'est autre que l'angle de friction tel que défini en Figure 6.7-B. Dans une situation physique sa tangente doit être inférieure au coefficient de friction entre deux brins de corde. On a donc un critère pour évaluer la viabilité d'une configuration de lasso que l'on peut formaliser de la sorte :

$$\tan \phi < \mu_{rr} \quad (6.23)$$

avec μ_{rr} le coefficient de friction de la corde sur elle même. Ce critère va nous permettre de clore ce chapitre.

6.4 Conclusion

En suivant la méthode proposée au paragraphe précédent on obtient une formulation exacte de l'angle de friction ϕ en fonction de l'angle que forme la boucle du lasso au passage du honda 2α . En particulier ceci nous donne une expression analytique du coefficient de friction minimum requis pour soutenir une configuration donnée en fonction de ce même angle 2α :

$$\mu_{min}^{rr} = \tan(\pi/2 - \arccos(2 \cos \alpha - 1)) \quad (6.24)$$

Cette fonction ainsi que deux solutions particulières du problème interne sont tracées en fig. 6.8. Sans surprise on remarque que pour une valeur finie de μ^{rr} certaines zones sont

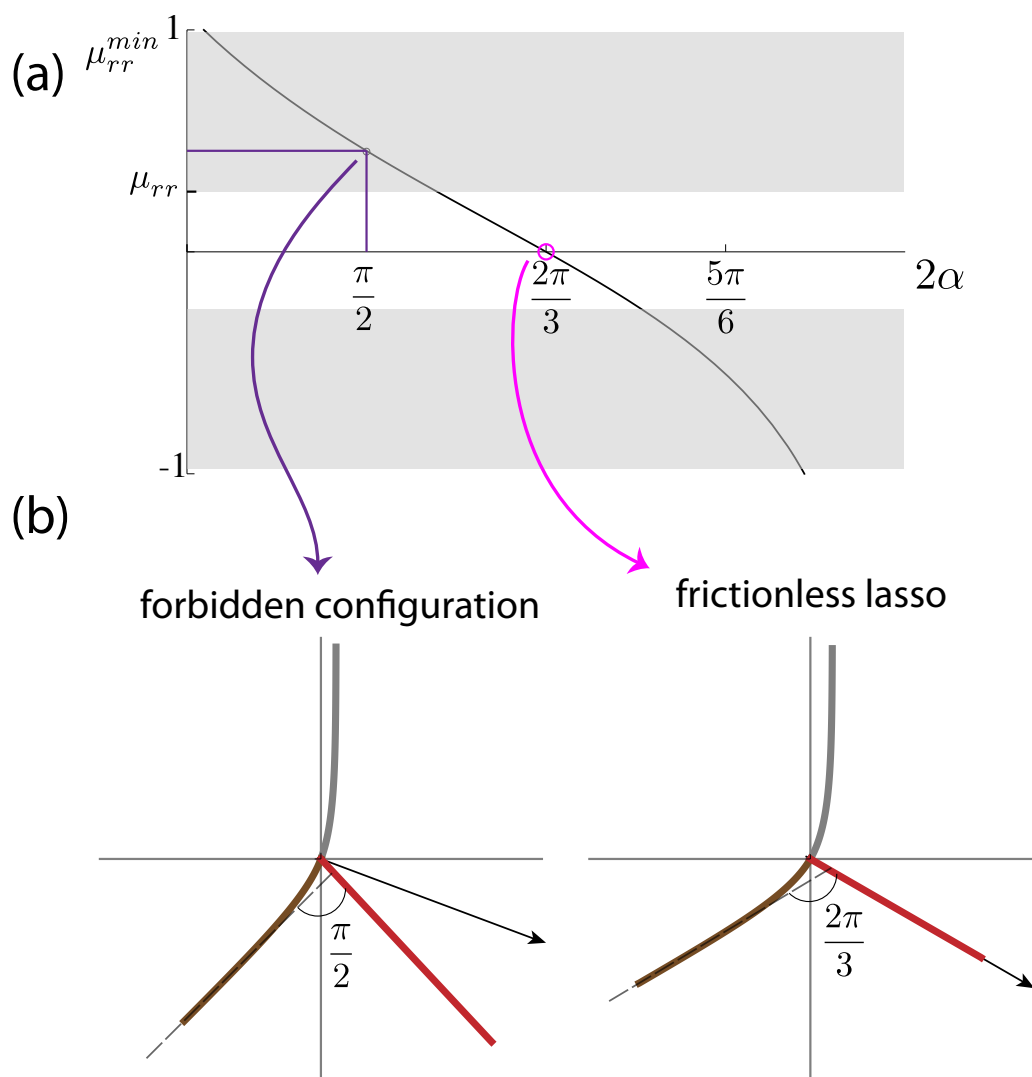


FIGURE 6.8 – (a)-Viabilité des configurations initialement calculées par rapport à la condition de frottement bloqué. μ_{rr}^{min} est le plus petit coefficient de friction requis pour soutenir les configurations repérées par l'angle au honda 2α . (b) certaines sont interdites. Une seule est possible en l'absence de frottement. Ces configurations sont produites par la résolution complète de la forme de la corde dans la couche limite du honda.

interdites. Toutes les configurations initialement calculées ne sont pas viables. Ceci était attendu, mais on a aussi un résultat singulier : *il existe une configuration de lasso pour laquelle aucune friction n'est requise!* Celle-ci correspond à la seconde configuration tracée en figure 6.8 où l'angle $2\alpha = 2\pi/3$. En particulier cela signifie qu'il y a une discontinuité de la force interne au passage du honda mais pas de sa norme. On peut donc faire du lasso avec une corde parfaitement glissante!

Chapitre 7

Perspectives

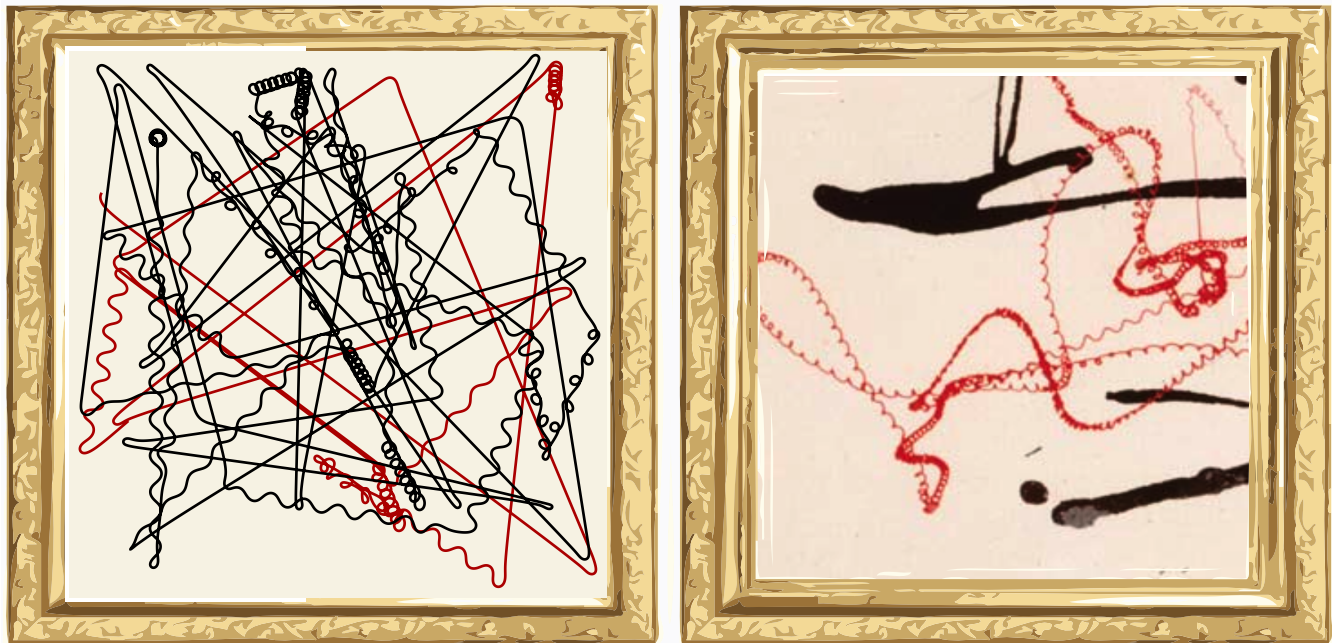


FIGURE 7.1 – Quand l'ordinateur se prend pour un artiste. Résultat d'une marche aléatoire à hauteur de chute fixée et vitesse variable. "Comparaison" avec une zone du tableau *Untitled*, 1948–49 de Jackson Pollock.

J'aimerais commencer cette conclusion par une illustration produite avec le code DVR pour la simulation des filaments visqueux. J'ai, sans prétention, écrit un "simulateur de Jackson Pollock". On considère un injecteur de fluide newtonien réglé avec un débit fixe Q et à une distance H d'une surface fixe : la toile. On lui fait parcourir une marche aléatoire rectiligne dans la surface délimitée par la toile et ce à vitesse aléatoire elle aussi. Le résultat obtenu avec un temps de calcul de l'ordre 5 min est présenté en Figure 7.1.

La ressemblance est assez intéressante mais on se rend rapidement compte que Jackson Pollock, lui ne bougeait pas en lignes droites ! Le point le plus important est que le code est assez fidèle à la réalité et particulièrement flexible. Dans cette conclusion on propose quelques pistes pour en profiter. Certaines sont celles que je suis en train de poursuivre, d'autres plus complexes sont celles que j'aimerais poursuivre un jour ou voir poursuivies.

7.1 Vers un petit modèle pour la machine à coudre fluide

Une façon de traiter les équations de la dynamique des filaments visqueux a été exposée dans ce manuscrit et s'est concrétisée par la simulation de la machine à coudre fluide et son étude détaillée présentée au Chapitre 4. Cependant, une autre possibilité s'offre à nous. Nous avons clamé que la partie haute de ces écoulements était presque linéaire et pouvait dès lors être vue comme un oscillateur. Cet oscillateur serait alors forcé par un terme non linéaire englobant les effets de la partie basse. C'est une piste que nous poursuivons actuellement pour construire un modèle réduit et qui puisqu'inachevée ne sera pas discutée en détail. Néanmoins le principe est simple : puisque le code est validé et est fonctionnel rien n'empêche de s'en servir pour mesurer la proportion prise par chaque type de forces : étirement, torsions, inertie, gravité ... et tester les diverses hypothèses nécessaires à l'établissement d'un petit modèle.

7.2 Ondes spirales de bulles

Habibi et al.[8] ont mis en évidence des ondes spirales de bulles apparaissant lorsque les enroulements de filaments visqueux entrent en précession. Ces précessions spontanées trouvent leur origine dans le couplage complexe entre l'enroulement du filament et la dynamique de la pile de fluide qu'il génère (Figure 7.2). J'ai mis en place un certain nombre de simulations de filaments visqueux pour essayer d'expliquer la précession et la capture de bulles qui en découle. J'ai par exemple simulé la chute d'un filament visqueux sur un tore sensé reproduire de la géométrie de pile de fluide. Il apparaît assez clairement qu'un substrat fixe n'est pas suffisant, il faut en plus que le fluide dans la pile s'écoule en s'éloignant. Nous n'avons pas trouvé de modèle prédictif satisfaisant pour capturer la cinématique de la pile malgré des résultats préliminaires intéressants. Le plus rigoureux est sans doute d'envisager une résolution numérique couplée entre DVR et code de fluide à surface libre 3D (dans l'hypothèse où c'est bien l'interaction avec le bain qui explique la précession). Cette démarche est sans doute intéressante à bien des égards et j'espère la voir un jour poursuivie. En particulier elle pourrait en plus avoir un effet collatéral sympathique : permettre de simuler les derniers motifs de machine à coudre manquants. On soupçonne ces derniers de trouver leur origine dans le couplage entre la dynamique des tiges visqueuses (prise en charge par DVR) et la dynamique de l'étalement sur le tapis de la partie du fil déposée lors des périodes précédentes (non prise en charge).

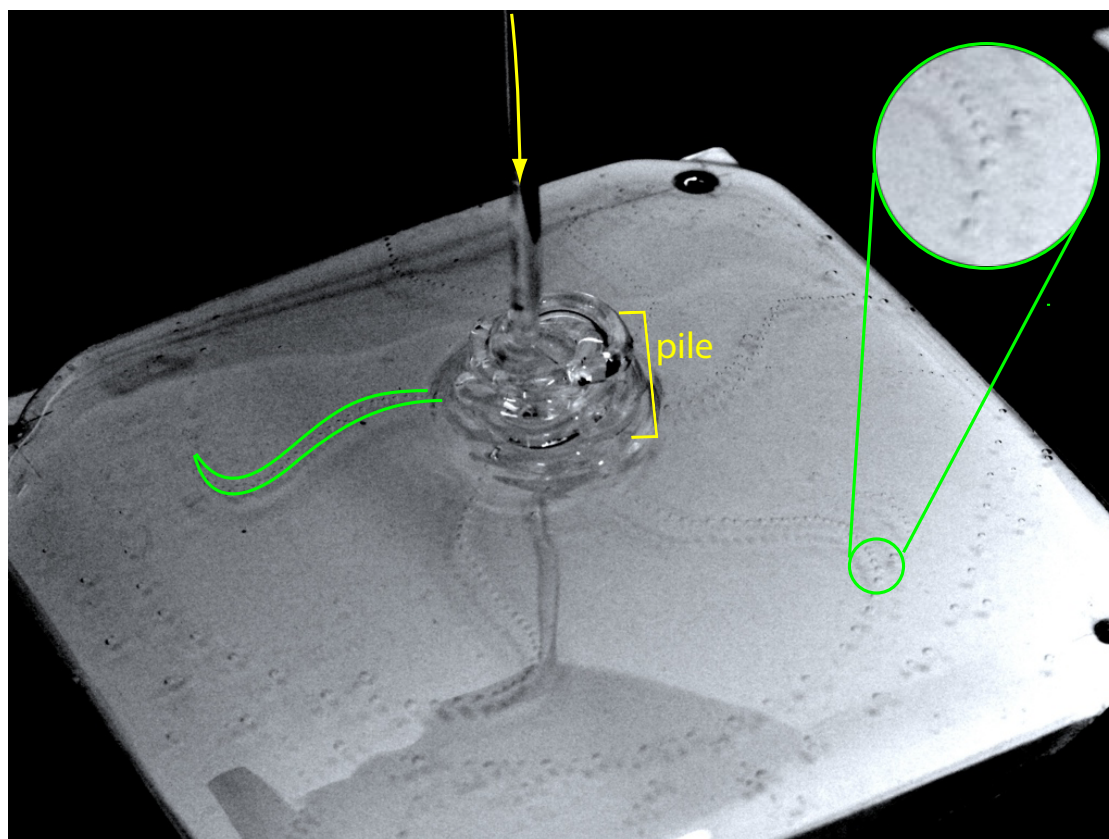


FIGURE 7.2 – Lorsqu'un enroulement entre en précession il peut capturer des bulles aux intersections de ses trajectoires. Elles sont advectées dans la pile de fluide ainsi créée et rejaillissent dans le bain sous forme d'ondes spirales de bulles. Une de ces spirales est soulignée par des traits verts pour aider la lecture. Elles ont ici des formes tentaculaires à cause des bords carrés du support. En vignette : détail des bulles.

7.3 Le lasso

En ce qui concerne la thématique des filaments élastiques nous avons déjà évoqué les possibilités de se rapprocher de cas plus réels dans le cas des enroulements (Chap. 5). Le lasso quant à lui est un sujet particulièrement ouvert. Nous nous sommes contentés de travailler sur les boucles dites plates. Elles sont représentatives de ce qu'est le lasso mais elles ont aussi le bon goût d'être stationnaires dans le repère tournant avec la main du cowboy. La simulation de figures plus complexes est un challenge intéressant. Il y a deux raisons à cela : (1) les figures sont dynamiques et il faudrait apprendre au code numérique à reproduire ces figures et y parvenir expérimentalement, (2) dans ces figures-ci la corde utilisée est largement plus raide et les effets de torsion et flexion seront sans doute à prendre en compte. C'est une problématique que je trouve très attirante car elle combine mécanique et "humain" et donc se posent entre autres les questions de stratégies

et d'apprentissage.

7.4 Filaments viscoélastiques

Ce manuscrit est divisé en deux parties distinctes : la première centrée sur les filaments visqueux (fluide de Stokes), l'autre sur les filaments élastiques. Entre ces deux cas "idéaux" il existe toute une gamme de comportements comme autant de rhéologies. Ces fluides "intermédiaires" sont très représentatifs de ce que l'on trouve en industrie : plastiques, verre, chocolat, glace... L'intérêt pour ces derniers est donc vif. Dans cette perspective j'ai initié une collaboration avec C. Ligoure et S. Mora du LCVN¹. L'idée était d'exploiter un fluide de leur création à base de micro-émulsions pontées [71] qui a un comportement visco-élastique à rhéologie parfaitement contrôlée. En particulier, ce fluide coule comme un filament visqueux mais casse à la manière d'un solide (Figure 7.3).

Ces filaments posent un problème fondamental : écrire les équations des tiges ayant un comportement visco-élastique. Prenons l'exemple d'une solution de polymères. Pour illustrer cela prenons l'exemple d'un fluide ayant un comportement de type Olroyd-B². Alors le tenseur des efforts de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ rend compte de la composante de visqueuse et élastique. Il s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\mathcal{T}}} \quad (7.1)$$

où la pression p a deux contributions $p = p_s + p_p$ qui respectivement représentent le solvant et le polymère. Le solvant a une viscosité μ , et $\underline{\underline{\mathcal{T}}}$ est le tenseur des efforts du polymère qui suit la relation :

$$\lambda\underline{\underline{\mathcal{T}}}^\nabla + \underline{\underline{\mathcal{T}}} = \bar{g}\underline{\underline{1}} \quad (7.2)$$

où la dérivée convective permet une mesure invariante de la déformation :

$$\underline{\underline{f}}^\nabla = \frac{D\underline{\underline{f}}}{Dt} - \underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{f}} - \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}}^T$$

L'équation (7.2) traduit la propension du tenseur des efforts du polymère à relaxer vers un état isotrope $\bar{g}\underline{\underline{1}}$ avec la constante de temps $1/\lambda$. On peut judicieusement introduire le tenseur $\underline{\underline{\zeta}}$:

$$\underline{\underline{\zeta}} = \underline{\underline{\mathcal{T}}} - \bar{g}\underline{\underline{1}} \quad (7.3)$$

$$\lambda\underline{\underline{\zeta}}^\nabla + \underline{\underline{\zeta}} = 2\bar{g}\lambda\underline{\underline{d}} = -2\eta_0\underline{\underline{d}} \quad (7.4)$$

où η_0 est défini comme la viscosité du polymère. Le tenseur de Cauchy s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\hat{p}\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\zeta}} \quad (7.5)$$

1. Lab. Charles Coulomb - Laboratoire des Colloïdes, Verres et Nanomatériaux, UMR CNRS-UM2 5587, University Montpellier 2, France

2. Similaire à celui de "upper convected Maxwell" mais prenant en compte la viscosité du solvant.

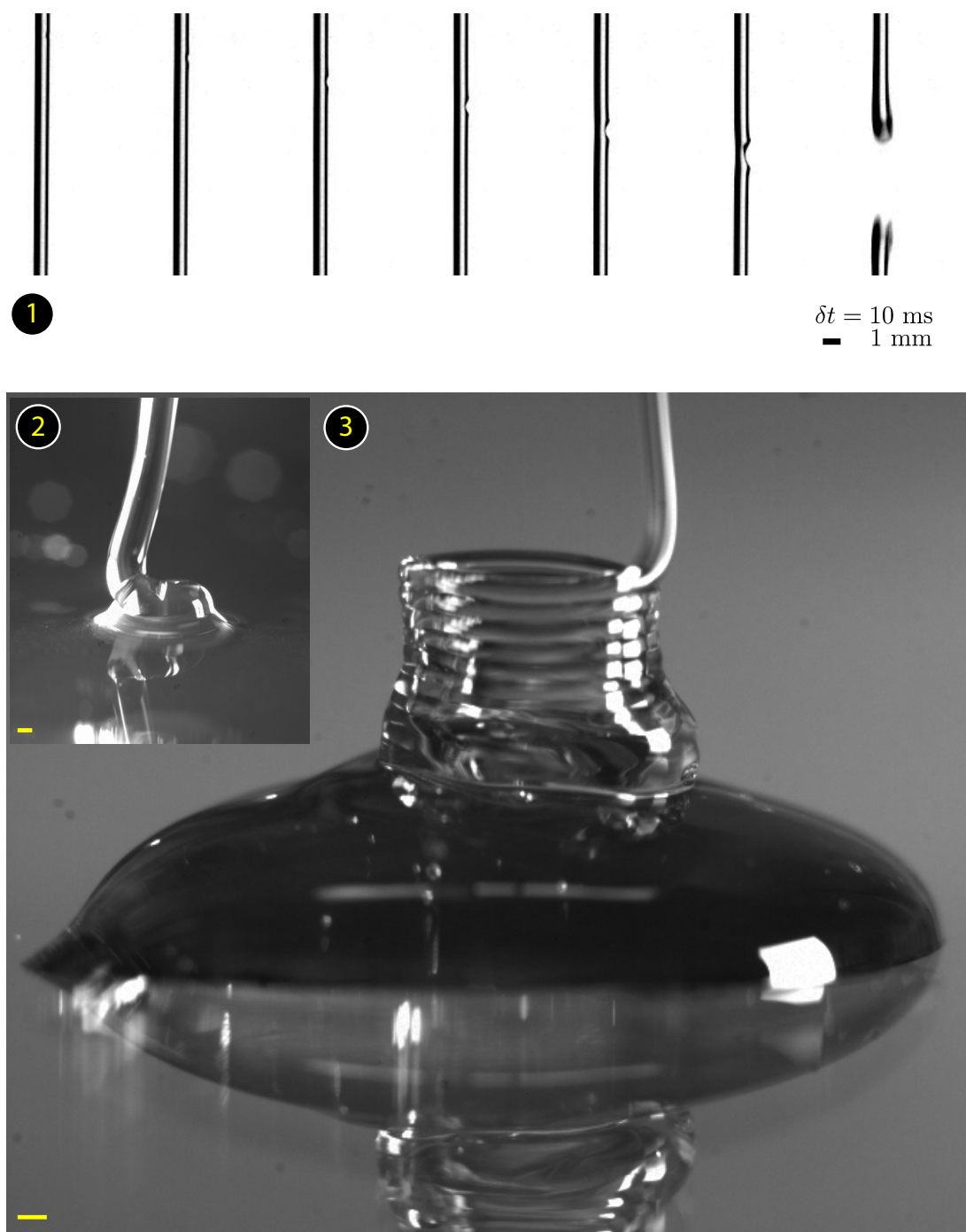


FIGURE 7.3 – Trois situations avec des micro-émulsions pontées fabriquées au LCVN – Un fluide "parfaitement visco-élastique" [71]. (1) un filament peut "casser" sous son propre poids alors même qu'il s'enroule aussi (2)-(3) à la façon d'un fluide très visqueux.

où la pression \hat{p} est définie comme la différence $\hat{p} = p - \bar{g}$. Cette dernière équation traduit bien le couplage hautement non linéaire entre les effets visqueux et élastiques et la richesse qui pourrait en ressortir. On peut pousser les efforts sur cette piste jusqu'à écrire une formulation réduite pour les tiges. Il reste cependant à faire résoudre et tester tout cela avec des expériences contrôlées, ce qui s'avère particulièrement difficile, à la fois numériquement et expérimentalement.

Quelques mots pour finir

J'aimerais clore ce manuscrit sur une touche plus personnelle. J'ai beaucoup aimé travailler sur la dynamique des filaments visqueux et élastiques car ce sont des objets communs mais souvent singuliers de part leur géométrie. J'aimerais poursuivre dans cette voie, mélangeant fluides et solides, tout en changeant d'échelle : voici la raison pour laquelle je me tourne maintenant vers la micro-fluidique !

Bibliographie

- [1] P.-T. Brun, N. M. Ribe, and B. Audoly. A numerical investigation of the fluid mechanical sewing machine. *Physics of Fluids*, 24(4) :043102, 2012.
- [2] B Audoly, N Clauvelin, P-T Brun, M Bergou, E Grinspun, and M Wardetzky. A discrete geometric approach for simulating the dynamics of thin viscous threads. *Arxiv*, Jan 2012.
- [3] A. C. Callan-Jones, P.-T. Brun, and B. Audoly. Self-similar curling of a naturally curved elastica. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :174302, Apr 2012.
- [4] A. Herczynski, C. Cernuschi, and L. Mahadevan. Painting with drops, jets, and sheets. *Physics Today*, 31(31) :32–36, June 2011.
- [5] Patricia Cohen. Perfecting animation, via science @NYT. *The New-York Times*, page <http://www.nytimes.com/2010/12/30/movies/30animate.html>, Dec 2010.
- [6] Clive Ellegaard, Adam Espe Hansen, Anders Haaning, Kim Hansen, Anders Marcussen, Tomas Bor, Jonas Lundbek Hansen, and Shinya Watanabe. Creating corners in kitchen sink flows. *Nature*, 392 :767–768, 1998.
- [7] G Barnes and R Woodcock. Liquid rope-coil effect. *American Journal of Physics*, Jan 1958.
- [8] M. Habibi, P. C. F. Moller, N. M. Ribe, and D. Bonn. Spontaneous generation of spiral waves by a hydrodynamic instability. *Europhys. Lett.*, 81 :38004, 2008.
- [9] A Kaye. A bouncing liquid stream. *nature.com*, 1963.
- [10] Michel Versluis, Cor Blom, Devaraj van der Meer, Ko van der Weele, and Detlef Lohse. Leaping shampoo. *Physics of Fluids*, 19(9) :091106, 2007.
- [11] F. Celestini, R. Kofman, X. Noblin, and M. Pellegrin. Water jet rebounds on hydrophobic surfaces : a first step to jet micro-fluidics. *Soft Matter*, 6 :5872–5876, 2010.
- [12] M Habibi, Y Rahmani, D Bonn, and NM Ribe. Buckling of liquid columns. *Phys Rev Lett*, 104(7) :74301, 2010.
- [13] F. Brock Fuller. The writhing number of a space curve. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 68(4) :815–819, 1971.

- [14] Miklós Bergou, Max Wardetzky, Stephen Robinson, Basile Audoly, and Eitan Grinspun. Discrete elastic rods. *ACM Transactions on Graphics*, 27(3) :63, 2008.
- [15] M. Bergou. *Discrete Geometric Dynamics and Artistic Control of Curves and Surfaces*. PhD thesis, Columbia University, 2010.
- [16] J. Langer and D. A. Singer. Lagrangian aspects of the Kirchhoff elastic rod. *SIAM Review*, 38(4) :605–618, 1996.
- [17] F. Tanaka and H. Takahashi. Elastic theory of supercoiled DNA. *Journal of Chemical Physics*, 83(11) :6017, 1985.
- [18] J. H. White and W. R. Bauer. Calculation of the twist and the writhe for representative models of dna. *Journal of Molecular Biology*, 189(2) :329–341, 1986.
- [19] Irwin Tobias, Bernard D. Coleman, and Wilma K. Olson. The dependence of DNA tertiary structure on end conditions : Theory and implications for topological transitions. *The Journal of Chemical Physics*, 101(12) :10990–10996, 1994.
- [20] Konstantin Klenin and Jörg Langowski. Computation of writhe in modeling of supercoiled DNA. *Biopolymers*, 54(5) :307–317, 2000.
- [21] Raymond E. Goldstein, Thomas R. Powers, and Chris H. Wiggins. Viscous nonlinear dynamics of twist and writhe. *Phys. Rev. Lett.*, 80(23) :5232–5235, Jun 1998.
- [22] Charles W. Wolgemuth, Thomas R. Powers, and Raymond E. Goldstein. Twirling and whirling : Viscous dynamics of rotating elastic filaments. *Phys. Rev. Lett.*, 84(7) :1623–1626, Feb 2000.
- [23] M. Levitt. Protein folding by restrained energy minimization and molecular dynamics. *Journal of Molecular Biology*, 170(3) :723–764, 1983.
- [24] B. Torby. *Advanced Dynamics for Engineers*. HRW series in mechanical engineering. Holt Rinehart and Winston, 1984.
- [25] F. R. S. Trouton. On the coefficient of viscous traction and its relation to that of viscosity. *Proceedings of the Royal Society of London, A*, 77 :426–440, 1906.
- [26] A. L. Yarin. *Free Liquid Jets and Films : Hydrodynamics and Rheology*. Longman, New York, New York, 1993.
- [27] Neil M Ribe. Coiling of viscous jets. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 460(2051) :3223–3239, 2004.
- [28] Christopher Batty and Robert Bridson. Accurate viscous free surfaces for buckling, coiling, and rotating liquids. In *Proceedings of the 2008 ACM/Eurographics Symposium on Computer Animation*, pages 219–228, July 2008.
- [29] M. A. Otaduy, R. Tamstorf, D. Steinemann, and M. Gross. Implicit contact handling for deformable objects. *Computer Graphics Forum*, 28(2) :559–568, 2009.
- [30] G. Barnes and J Mackenzie. Height of fall versus frequency in liquid rope-coil effect. *American Journal of Physics*, Jan 1959.
- [31] J. O. Cruickshank and B. R. Munson. Viscous fluid buckling of plane and axisymmetric jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 113 :221–239, 1981.

- [32] Herbert E. Huppert. The intrusion of fluid mechanics into geology. *Journal of Fluid Mechanics*, 173 :557–594, 1986.
- [33] R. W. Griffiths and J. S. Turner. Folding of viscous plumes impinging on a density or viscosity interface. *Geophysical Journal*, 95(2) :397–419, 1988.
- [34] L Mahadevan, WS Ryu, and ADT Samuel. Fluid rope trick investigated. *Nature*, 392(6672) :140, 1998.
- [35] G I Taylor. Instability of jets, threads and sheets of viscous fluid. *Proc. 12th Int. Cong. Applied Mathematics .*, 1968.
- [36] J. O. Cruickshank. Low-reynolds-number instabilities in stagnating jet flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 193 :111–127, 1988.
- [37] B. Tchavdarov, A. L. Yarin, and S. Radev. Buckling of thin liquid jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 253 :593–615, 1993.
- [38] NM Ribe, HE Huppert, MA Hallworth, M Habibi, and D Bonn. Multiple coexisting states of liquid rope coiling. *Journal of Fluid Mechanics*, 555 :275–297, Jan 2006.
- [39] N M Ribe, M Habibi, and Daniel Bonn. Stability of liquid rope coiling. *Physics of Fluids*, 18(8) :084102, 2006.
- [40] M. Blount. *Bending and buckling of a falling viscous thread*. PhD thesis, Cambridge University, 2010.
- [41] Neil M. Ribe, Mehdi Habibi, and Daniel Bonn. Liquid rope coiling. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 44(1) :249–266, 2012.
- [42] E Doedel, A Champneys, T Kuznetsov, Y Sandstede, and Wang. Auto 97 - continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. Available at <http://indy.cs.concordia.ca/auto/>, Jan 1997.
- [43] S Morris, J Dawes, N Ribe, and J Lister. Meandering instability of a viscous thread. *Physical Review E*, Jan 2008.
- [44] S Chiu-Webster and J Lister. The fall of a viscous thread onto a moving surface : a 'fluid-mechanical sewing machine'. *Journal of Fluid Mechanics*, 569 :89–111, Jan 2006.
- [45] G. I. Taylor. Instability of jets, threads and sheets of viscous fluid. In *Proceedings of the 12th International Congress of Applied Mechanics*, 1968.
- [46] Neil M Ribe, John R Lister, and Sunny Chiu-Webster. Stability of a dragged viscous thread : Onset of "stitching" in a fluid-mechanical "sewing machine". *Physics of Fluids*, 18(12) :124105, Jan 2006.
- [47] M. J. Blount and J. R. Lister. The asymptotic structure of a slender dragged viscous thread. *J. Fluid Mech.*, 674 :489–521, 2011.
- [48] Robert L. Welch, Billy Szeto, and Stephen W. Morris. Frequency structure of the nonlinear instability of a dragged viscous thread. *Phys. Rev. E*, 85 :066209, Jun 2012.

- [49] J Engelberth. Mechanosensing and signaltransduction in tendrils. *Advances in Space Research*, Jan 2003.
- [50] V L Lew, A Hockaday, C J Freeman, and R M Bookchin. Mechanism of spontaneous inside-out vesiculation of red cell membranes. *The Journal of Cell Biology*, 106(6) :1893–1901, 1988.
- [51] Manouk Abkarian, Gladys Massiera, Laurence Berry, Magali Roques, and Catherine Braun-Breton. A novel mechanism for egress of malarial parasites from red blood cells. *Blood*, 117(15) :4118–4124, 2011.
- [52] M Nakano and T Ikeda. Directed bending of a polymer film by light. *Nature*, Jan 2003.
- [53] L. Golubovic, D. Moldovan, and A. Peredera. Dynamics of the euler buckling instability. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :3387, 1998.
- [54] J R Gladden, N Z Handzy, A Belmonte, and E Villermaux. Dynamic buckling and fragmentation in brittle rods. *Phys Rev Lett*, 94(3) :035503, 2005.
- [55] Basile Audoly and Sébastien Neukirch. Fragmentation of rods by cascading cracks : why spaghetti does not break in half. *Phys Rev Lett*, 95(9) :095505, 2005.
- [56] B. D. Coleman and E. H. Dill. Flexure waves in elastic rods. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91 :2663, 1992.
- [57] Alain Goriely and Tyler McMillen. Shape of a cracking whip. *Phys Rev Lett*, 88(24) :244301, Jun 2002.
- [58] Z. J. Bilek and S. J. Burns. Crack propagation in wedged double cantilevered beams. *J. Mech. Phys. Solids*, 22 :85, 1974.
- [59] R. Burridge and J. B. Keller. Peeling, slipping and cracking—some one-dimensional free-boundary problems in mechanics. *SIAM Review*, 20(1) :pp. 31–61, 1978.
- [60] M. Bergou, B. Audoly, E. Vouga, M. Wardetzky, and E. Grinspun. Discrete viscous threads. *Transactions on Graphics*, 29(4) :116, 2010.
- [61] C. Bunks. *A rational guide to trick roping*. GPL-type licence - <http://www.juggling.org/books/lasso/>, 1996.
- [62] JD Clark, WB Fraser, CD Rahn, and A Rajamani. Limit-cycle oscillations of a heavy whirling cable subject to aerodynamic drag. *Proceedings : Mathematics, Physical and Engineering*, pages 875–893, 2005.
- [63] J. M Aristoff and H. A Stone. The aerodynamics of jumping rope. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 468(2139) :720–730, Mar 2012.
- [64] F. Zhu and C.D. Rahn. Stability analysis of a circularly towed cable-body system. *Journal of Sound and Vibration*, 217(3) :435 – 452, 1998.
- [65] J Coomer, M Lazarus, RW Tucker, D Kershaw, and A Tegman. A non-linear eigenvalue problem associated with inextensible whirling strings. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5) :969–982, 2001.

-
- [66] G. Lemon and W.B. Fraser. Steady-state bifurcations and dynamical stability of a heavy whirling cable acted on by aerodynamic drag. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 457(2009) :1021–1041, 2001.
- [67] TR Powers. Dynamics of filaments and membranes in a viscous fluid. *Reviews of Modern Physics*, 82(2) :1607–1631, 2010.
- [68] Charles W. Wolgemuth, Thomas R. Powers, and Raymond E. Goldstein. Twirling and whirling : Viscous dynamics of rotating elastic filaments. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :1623–1626, Feb 2000.
- [69] Philip Nelson. Transport of torsional stress in dna. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 96(25) :14342–14347, 1999.
- [70] Keiichi Namba and Ferenc Vonderviszt. Molecular architecture of bacterial flagellum. *Quarterly Reviews of Biophysics*, 30(01) :1–65, 1997.
- [71] S Mora, L Ramos, G Porte, and C Ligoure. Ductility versus brittleness in self-assembled transient networks. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 175 :47–53, Jan 2008.