



**HAL**  
open science

# Criticalité quantique et universalité d'un gaz de Bose au voisinage de la transition de Mott

Adam Rançon

► **To cite this version:**

Adam Rançon. Criticalité quantique et universalité d'un gaz de Bose au voisinage de la transition de Mott. Physique [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2012. Français. NNT : . tel-00761694

**HAL Id: tel-00761694**

**<https://theses.hal.science/tel-00761694>**

Submitted on 7 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité Physique

ED107 : École Doctorale de Physique de la Région Parisienne

Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée

Présentée par

**Adam Rançon-Schweiger**

Pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie**

Sujet de la thèse :

**Criticalité quantique et universalité d'un gaz de Bose au  
voisinage de la transition de Mott**

soutenue le 1<sup>er</sup> Octobre 2012

devant le jury composé de :

M. George BATROUNI	Rapporteur
M. Gora SHLYAPNIKOV	Rapporteur
M. Jean DALIBARD	Président
M. Thierry GIAMARCHI	Examineur
M <sup>me</sup> Anna MINGUZZI	Examineur
M. Olivier PARCOLLET	Invité
M. Nicolas DUPUIS	Directeur de thèse

Nous étudions la transition de phase entre un superfluide et un isolant de Mott dans le cadre du modèle de Bose-Hubbard, décrivant des bosons sur réseau avec interactions sur site. Nous implémentons une formulation sur réseau du groupe de renormalisation non-perturbatif, dont la condition initiale est la limite locale (limite de sites découplés). Les résultats obtenus sont en accord quantitatif à la fois pour les quantités universelles (existence de deux classes d'universalité, exposants critiques comparables à ceux attendus) mais aussi non-universelles (diagramme de phase en accord avec les meilleurs approches numériques). La transition de Mott avec changement de densité appartient à la classe d'universalité de la transition vide-superfluide d'un gaz de Bose dilué. En caractérisant les excitations élémentaires au point critique quantique, des quasi-particules bosoniques de masse effective  $m^*$ , de poids de quasi-particule  $Z_{\text{QP}}$  et dont les interactions sont décrites par une "longueur de diffusion" effective  $a^*$ , nous décrivons la thermodynamique universelle à proximité de la transition de Mott grâce aux fonctions d'échelle du gaz dilué. Nous calculons également les fonctions d'échelle, non triviales, en dimension deux et à température finie et les comparons à des expériences récentes, démontrant ainsi l'universalité dans les gaz de Bose dilués avec ou sans réseau optique.

mots-clés : transition de phase quantique, superfluidité, groupe de renormalisation non-perturbatif, équation d'état, universalité, transition de Mott

We study the quantum phase transition from the superfluid to the Mott insulator in the framework of the Bose-Hubbard model, which describes lattice bosons with on-site interactions. We implement a lattice formulation of the non-perturbative renormalization group, whose initial condition is the local limit (limit of decoupled sites). The results are in quantitative agreement for universal quantities (existence of two universality classes, critical exponents consistent with those expected) and non-universal ones (*e.g.* phase diagrams in accordance with the best numerical approaches). The density-driven Mott transition belongs to the universality class of the vacuum-superfluid transition of a dilute Bose gas. By characterizing the elementary excitations at the quantum critical point as bosonic quasiparticles, with effective mass  $m^*$  and quasiparticle weight  $Z_{\text{QP}}$ , whose interactions are given by an effective “scattering length”  $a^*$ , we describe the universal thermodynamics near the Mott transition using the scaling functions of the dilute Bose gas. We also calculate the nontrivial scaling functions in two dimensions at finite temperature and compare them to recent experiments, demonstrating the universality of dilute Bose gases.

keywords : quantum phase transition, superfluidity, non-perturbative renormalization group, equation of state, universality, Mott transition

# Remerciements

à la mémoire de Jean-Baptiste.

---

Je tiens tout d'abord à remercier Nicolas pour avoir bien voulu superviser mon travail durant ces trois années. En acceptant de répondre à toutes mes questions, même les moins pertinentes, en particulier au début de ma thèse, il m'a appris à prendre confiance en mes idées et mon travail. En me laissant gérer mon projet, tout en me guidant dans mes errances, puis en discutant avec moi plus de collègue à collègue que de maître à élève, il a fait de moi, en tout cas je voudrais le croire, un chercheur. Enfin, j'espère que nos discussions sur l'universalité lui ont apporté ne serait-ce qu'un millième de ce qu'il m'a appris sur toute la matière condensée. J'en profite pour remercier Phle de m'avoir conseillé d'aller faire ma thèse avec Nicolas, je lui en suis plus que redevable (j'aurais bien utilisé le terme de "suprafluidité" en ton honneur, mais c'était trop tendancieux...).

Je remercie également tous les membres de mon jury de thèse, et plus particulièrement mes rapporteurs George Batrouni et Gora Shlyapnikov, pour avoir accepté de se pencher sur mon travail.

Je veux aussi salué tous les membres du LPTMC, qui m'ont accueilli il y a trois ans, et je remercie Pascal Viot ainsi que les membres du secrétariat. Je remercie chaleureusement le groupe NPRG pour les nombreuses heures de discussions qu'ils m'ont accordées. Bien entendu, Bertrand Delamotte mérite la première place, pour avoir répondu à toutes mes questions, même les plus bêtes, comme il me l'avait promis, et pour le temps que nous avons passé à discuter de la théorie des champs, du RG et de l'universalité. Je salue également Dominique Mouhanna (qui a peut-être appris en ma présence que le centre existe), Matthieu Tissier et Gilles Tarjus (plus particulièrement pour leurs éclaircissement sur les répliques) et les thésards du groupe : Damien, Karim et Federico. Je remercie également tous mes "physiciens", pour les innombrables discussions (concernant la physique ou non) passées devant une pinte : Gatien, Florian, Gros et Gros, Antoine, Michele, Fred, Demian, Julius et Thomas. Une spéciale dédicace à mes amis du "gaz de fermions" : Pierre, Alex, Med, Chicha et Bastos, avec qui j'ai passé six superbes années à Paris. Merci aussi à "papa" (Félix) pour avoir réussi à m'assurer sans me tuer pendant ces quatre ans de grimpe.

Je remercie également toute ma famille et spécialement mes parents, pour m'avoir donné mes fondamentaux. D'un côté, une passion pour la science-fiction, un amour de la discussion stérile et un appétit pour les sciences sociales. De l'autre, une curiosité scientifique insatiable, une certaine originalité et mes premiers livres de physique des particules, qui ont éduqué mon attrait pour la physique théorique. Le dernier mot pour ma (petite) femme : Una, volim te.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Gaz ultra-froids et modèle de Bose-Hubbard</b>	<b>5</b>
1.1 Atomes ultra-froids et condensat de Bose-Einstein . . . . .	5
1.2 Théories effectives de bosons dilués . . . . .	7
1.3 Transitions de phase quantiques et universalité dans les gaz de Bose	13
1.3.1 Généralités . . . . .	13
1.3.2 Transition de phase quantique du gaz de Bose dilué . . . . .	15
1.4 Comportement infrarouge du gaz de Bose . . . . .	17
1.5 Gaz de Bose en couplage fort : le modèle de Bose-Hubbard . . . . .	20
1.5.1 Atomes froids dans un réseau et modèle de Bose-Hubbard . . . . .	20
1.5.2 Champ moyen et théorie RPA pour le modèle de Bose-Hubbard	23
1.5.3 Transitions de phase quantiques . . . . .	29
1.5.4 Modèle de Bose-Hubbard dans la limite diluée . . . . .	30
<b>II Le groupe de renormalisation non-perturbatif</b>	<b>33</b>
2.1 Principes du groupe de renormalisation à la Wilson . . . . .	33
2.2 Le groupe de renormalisation non-perturbatif : concepts . . . . .	37
2.3 Approximations de l'équation de Wetterich . . . . .	40
2.3.1 Développement en dérivées . . . . .	41
2.3.2 Approximation Blaizot-Méndez-Galain-Wschebor . . . . .	44
2.4 Le groupe de renormalisation non-perturbatif sur réseau . . . . .	46
2.4.1 Conditions initiales du NPRG sur réseau . . . . .	47
2.4.2 Approximations spécifiques au réseau . . . . .	49
<b>III Le groupe de renormalisation appliqué aux superfluides sur réseau</b>	<b>51</b>
3.1 Mise en œuvre du groupe de renormalisation non-perturbatif sur réseau	53
3.1.1 Conditions initiales du flot . . . . .	55
3.1.2 Invariance de jauge et identités de Ward . . . . .	60
3.1.3 Développement en dérivées et comportement infrarouge . . . . .	62
3.1.4 Équations de flot . . . . .	65
3.2 Première application : le diagramme de phase du modèle de Bose-Hubbard . . . . .	68
3.3 Les transitions de phase isolant-superfluide . . . . .	69
3.3.1 Point multicritique . . . . .	70
3.3.2 Transition générique . . . . .	75

<b>IV Thermodynamique universelle à proximité de la transition de Mott</b>	<b>79</b>
4.1 Thermodynamique du gaz de Bose dilué <i>via</i> les transitions de phase quantiques . . . . .	80
4.1.1 La transition vide-superfluide . . . . .	80
4.1.2 Approche de RG à la Wilson . . . . .	81
4.1.3 Thermodynamique universelle et fonctions d'échelle . . . . .	82
4.2 Thermodynamique universelle près de la transition de Mott générique	85
4.2.1 Théorie critique à la transition générique . . . . .	86
4.2.2 Théorie près de la transition générique . . . . .	89
4.2.3 Thermodynamique près de la transition de Mott . . . . .	92
<b>V Thermodynamique universelle du gaz de Bose dilué bidimensionnel</b>	<b>99</b>
5.1 Fonctions d'échelle du gaz de Bose dilué bidimensionnel . . . . .	100
5.1.1 Fonctions d'échelle et universalité . . . . .	100
5.1.2 Universalité dans le modèle de Bose-Hubbard . . . . .	103
5.1.3 Approche de la limite universelle . . . . .	105
5.2 Universalité de la température critique à $d = 2$ . . . . .	108
<b>Conclusion</b>	<b>113</b>
<b>Annexes</b>	<b>i</b>
A Notations et Conventions . . . . .	iii
B Symétries et identités de Ward . . . . .	v
C Physique du modèle local . . . . .	vii
D Étude de la phase superfluide avec le NPRG . . . . .	xi
E Propriétés du régulateur sur le réseau . . . . .	xxiii
F Équations de flot . . . . .	xxvii
G Température finie . . . . .	xxxiii
H Lois d'échelle près du point multicritique . . . . .	xxxv
I Fonctions d'échelle dans la limite classique et en couplage faible . . . . .	xxxix
<b>Bibliographie</b>	<b>xliii</b>

# Introduction

Enthusiasm is followed by disappointment and even depression, and then by renewed enthusiasm.

---

M. Gell-Mann

L'étude de systèmes en fortes corrélations est un des paradigmes de la matière condensée. Un exemple bien connu est l'existence d'isolants de Mott dans les systèmes électroniques : des matériaux que la théorie des bandes prédit être des métaux sont en réalité isolants. Les fortes interactions entre électrons, et les corrélations qui en résultent, localisent les porteurs de charges et empêchent toute conduction dans le système. Si on ajoute les fluctuations anti-ferromagnétiques dues au super-échange, le problème devient quasiment insoluble. La résolution du modèle de Hubbard fermionique (le modèle minimal associé à cette physique), en particulier à deux dimensions, est un des grands défis de la physique du solide.

Un autre grand centre d'intérêt est l'étude des transitions de phases quantiques [1]. Le système change de phase à température nulle lorsqu'un paramètre, tel que la densité de porteurs de charge ou la pression externe, est varié. Ce sont alors les fluctuations quantiques qui gouvernent la transition et impliquent des lois d'échelle, mêlant dynamique et thermodynamique. Le devenir d'un système en corrélations fortes lors d'une transition de phase quantique est une question fondamentale, dont la réponse pourrait révolutionner ce domaine de la physique. En particulier, il semble que les supraconducteurs à haute température critique, dont la compréhension permettrait des innovations technologiques très intéressantes, appartiennent à cette catégorie.

Les atomes ultra-froids semblent être au premier abord loin de ces préoccupations, principalement parce que les gaz doivent être très dilués et sont génériquement en interaction faible. Les premières expériences ont ainsi été très proches de l'optique quantique, se focalisant sur la cohérence des gaz et des mesures d'interférences. Depuis une dizaine d'années, il est possible de réaliser des systèmes en fortes corrélations avec des atomes ultra-froids, et le domaine est de nos jours une composante majeure de la matière condensée. En effet, le confinement spatiale (donnant de manière effective une basse dimensionalité aux gaz) ou l'utilisation de résonance de Feshbach (augmentant la force de l'interaction) renforce les fluctuations et les corrélations des gaz. Il est également possible d'utiliser des potentiels périodiques (analogues aux ré-



seaux cristallins des solides), créés par des ondes lasers stationnaires, qui permettent de diminuer l'énergie cinétique et ainsi augmenter les corrélations. Les expériences sont de plus très bien contrôlées, grâce à l'utilisation de lasers et au savoir hérité de la physique atomique [2]. On peut aussi créer des systèmes nouveaux, permettant même de tester des théories élaborées pour les hautes énergies, tel que les mixtures fermions-bosons (possédant une supersymétrie) ou les gaz de bosons de spin un. Enfin, un des avantages majeurs des atomes froids est que les expériences sont très bien décrites par des hamiltoniens modèles (ayant un petit nombre de paramètres), ce qui, associé à la contrôlabilité des expériences, permet des comparaisons précises avec la théorie. L'idée de "Simulateur Quantique" est d'utiliser les expériences pour "calculer" les propriétés d'un hamiltonien modèle (tel que le modèle de Hubbard) pour "résoudre" ce problème et ainsi désigner les "bonnes" approches théoriques, qu'elles soient numériques ou analytiques.

Lors du travail de thèse exposé dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à un des modèles les plus simples présentant à la fois des corrélations fortes et des transitions de phase quantiques : le modèle de Bose-Hubbard [3], qui décrit des bosons sur réseau avec interactions sur site. La transition de phase quantique entre une phase superfluide et une phase isolante (dite de Mott) a été observée il y a maintenant dix ans dans un système d'atomes bosoniques dans réseau optique [4]. Notons que la présence du réseau est une condition *sine qua non* de la transition.

La transition de Mott est bien décrite par une théorie champ moyen (et ses extensions) se focalisant sur la physique à courte distance. Ce sont en effet les interactions fortes sur site qui imposent aux particules de ne plus se déplacer (le système minimisant plutôt l'énergie d'interaction que l'énergie cinétique). Les fluctuations critiques, impliquant l'existence de lois d'échelle universelles, sont gouvernées par la physique à grande distance (basse énergie) et sont donc difficiles à décrire avec les approches locales, telles que la Théorie de Champ Moyen Dynamique ou les développements de couplage fort.

L'étude des transitions de phase a été révolutionnée dans les années soixante-dix par le groupe de renormalisation (RG) de Wilson, qui a permis de comprendre théoriquement les lois d'échelle universelles observées près de transitions de phase de systèmes *a priori* complètement différents. Le groupe de renormalisation fonctionnel, ou groupe de renormalisation non-perturbatif (NPRG), est une reformulation de ces idées, mais ne se basant pas sur un calcul en puissance de la constante de couplage. Cela ouvre une voie pour étudier les transitions de phase quantiques dans les systèmes en corrélations et couplages forts, en particulier dans le cadre du modèle de Bose-Hubbard. C'est le programme de cette thèse, qui s'organise comme suit.

Nous présentons au chapitre I la physique des atomes ultra-froids en nous focalisant sur les systèmes bosoniques. Après une présentation rapide du domaine, nous exposons les principales approches théoriques. Nous montrons ensuite comment il est possible de réaliser expérimentalement le modèle de Bose-Hubbard, dont nous discutons la physique, en particulier le diagramme de phase et la transition de phase quantique entre le superfluide et l'isolant de Mott.

---

Le chapitre **II** est consacré au groupe de renormalisation non-perturbatif. Après une description des idées de Wilson, nous introduisons le NPRG, ses équations fondamentales et les principales approximations. Nous exposons ensuite une formulation du NPRG sur réseau, qui permet d'inclure le plus précisément possible la physique locale, ingrédient essentiel de la transition de Mott.

Nous nous attaquons au chapitre **III** à l'implémentation du NPRG sur réseau dans le cadre du modèle de Bose-Hubbard. Après une discussion approfondie des conditions initiales (locales) du flot du RG, nous montrons que cette technique nous permet de retrouver un certain nombre de résultats connus. En particulier, nous calculons les diagrammes de phase à deux et trois dimensions, qui sont en très bons accords quantitatifs avec les meilleures approches numériques. Nous verrons que le groupe de renormalisation permet de retrouver les deux classes d'universalité caractérisant la transition de Mott ainsi que les comportements critiques, ce qui est hors de portée de la plupart des autres méthodes.

Nous montrons au chapitre **IV** que la thermodynamique du modèle de Bose-Hubbard est très semblable à celle d'un gaz de Bose dilué, du fait de leur appartenance à la même classe d'universalité (sauf à certains points critiques bien déterminés). Nous verrons ensuite grâce au NPRG que les mêmes fonctions décrivent le système près de la transition de Mott, et un gaz de Bose dilué, une fois qu'un certain nombre de paramètres effectifs, que nous calculerons, sont pris en compte.

Le chapitre **V** est consacré au calcul des fonctions d'échelle thermodynamiques du gaz bidimensionnel dilué, pour lequel la théorie de perturbation échoue. Nous calculerons également la température de transition entre la phase superfluide et le gaz normal, ce qui est hautement non trivial. Nous comparons ces calculs à des expériences récentes dans les atomes froids et montrons qu'il est maintenant possible d'étudier expérimentalement l'universalité dans ces systèmes.

Enfin, nous concluons ce travail de thèse. Les annexes présentent un certain nombre de détails. En particulier, l'annexe **A** donne nos conventions et notations.



# Chapitre I

## Gaz ultra-froids et modèle de Bose-Hubbard

No phenomenon is a real phenomenon until it is an observed phenomenon.

---

J. A. Wheeler

Nous présentons dans ce premier chapitre la physique des atomes ultra-froids. Après une introduction générale, nous nous attacherons plus particulièrement à la description de gaz dans un réseau optique, ce qui nous permettra d'introduire le modèle de Bose-Hubbard, dont nous donnerons les propriétés physiques principales.

### 1.1 Atomes ultra-froids et condensat de Bose-Einstein

En 1924, suite aux remarques qui lui ont été adressées par Bose, Einstein propose le phénomène de la condensation dite de Bose-Einstein. Cet état de la matière d'origine statistique a longtemps été pensé comme non-physique. En effet, seul l'hélium superfluide pouvait correspondre à un condensat, comme le suggérait London, mais ce système étant en interaction forte, la relation entre le condensat de gaz parfait discuté par Einstein et l'hélium était loin d'être évidente.

La condensation arrive à trois dimensions lorsque la longueur d'onde de de Broglie  $\lambda_T = \sqrt{2\pi/mT}$ , avec  $m$  la masse des atomes et  $T$  la température du gaz, est de l'ordre de la distance inter-atomique  $D^{-\frac{1}{3}}$  ( $D$  est la densité du gaz). Ainsi la température de condensation est fixée par la densité. Celle-ci est contrainte par le taux de collision à trois corps entraînant la formation d'états liés (le gaz est métastable à ces températures), taux qui augmente avec la densité. Ainsi, la densité typique  $D \simeq 10^{13}\text{cm}^{-3}$  des condensats atomiques, correspondant à des températures de l'ordre de 500nK, est un compromis entre la limite supérieure de  $10^{15}\text{cm}^{-3}$  au-dessus laquelle les gaz ne sont pas stables et la limite inférieure de  $10^{12}\text{cm}^{-3}$  au-dessous de laquelle les températures de condensation sont inatteignables expérimentalement [5].

Il aura fallu plus de soixante-dix ans pour que les technologies de refroidissements permettent d'obtenir des gaz dilués à des températures suffisamment basses (de l'ordre de la centaine de nanoKelvin) pour que les premiers condensats en interactions faibles soient observés en laboratoire [6, 7]. C'est en particulier l'utilisation de pièges optiques et magnétiques ainsi que des innovations expérimentales, telles que les mélasses optiques ou le refroidissement par évaporation, qui ont permis d'atteindre ces températures ultra-basses. On est également en mesure de manipuler les gaz à l'aide de champs magnétiques ou de lasers, ce qui permet de réaliser par exemple des expériences d'interférences ou des lasers atomiques. Ces expériences sont très proches de celle de l'optique quantique et sont décrites par des théories de couplage faible. En effet, le rapport entre l'énergie d'interaction et l'énergie cinétique

$$\gamma = \frac{E_{\text{int}}}{E_{\text{cin}}} = \frac{Da/m}{D^{2/3}/m} = aD^{1/3}, \quad (1.1)$$

est génériquement petit. Ici  $a \simeq 1\text{-}5$  nm est la longueur de diffusion en onde-s et caractérise l'interaction (voir plus bas) et nous avons estimé l'énergie cinétique grâce à la distance inter-particules  $D^{-1/3}$  [8]. Si on est intéressé par l'étude de systèmes en corrélations et couplages forts, il nous faut augmenter  $\gamma$ . On peut par exemple utiliser une résonance de Feshbach dans la longueur de diffusion ( $a \rightarrow \infty$ ), en variant un champ magnétique qui fait entrer en résonance un état lié et un état de diffusion en onde-s. Une autre façon est de diminuer l'énergie cinétique. On peut pour cela placer le gaz dans un réseau optique, crée par des lasers contrapropageant. Les atomes se placent préférentiellement sur les sites du réseau, et la probabilité tunnel d'aller sur un site voisin décroît exponentiellement avec l'intensité des faisceaux lasers. Le système est alors très bien décrit par le modèle de Bose-Hubbard, modèle très simple car dépendant de très peu de paramètres. Pour une interaction suffisamment forte, le système passe de la phase superfluide à une phase isolante, comme il l'a été observé expérimentalement il y a dix ans [4].

Dans ce chapitre, nous discutons tout d'abord comment il est possible de décrire les gaz ultra-froids. Bien qu'interagissant avec des potentiels compliqués, nous verrons qu'à basse température, seule la longueur de diffusion  $a$  du potentiel est nécessaire pour caractériser l'interaction entre atomes, impliquant une certaine universalité (oubli des détails du potentiel à courte portée). Nous montrons également comment le point de vue des transitions de phase quantiques permet de réinterpréter cette universalité. Nous détaillons ensuite le comportement à basse énergie, pollué par des divergences infrarouges. Nous introduisons enfin le modèle de Bose-Hubbard, qui permet de décrire les gaz froids dans un réseau optique. Nous analysons la physique de ce modèle, et en particulier la transition de phase quantique entre le superfluide et l'isolant de Mott.

## 1.2 Théories effectives de bosons dilués

Le gaz de Bose à température et potentiel chimique nuls est décrit au niveau microscopique par l'action suivante <sup>a</sup>

$$S_{\text{Bose}} = \int_0^\beta d\tau \left\{ \int d\mathbf{x} \psi^*(\mathbf{x}, \tau) \left( \partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi(\mathbf{x}, \tau) + \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \psi^*(\mathbf{x}, \tau) \psi^*(\mathbf{y}, \tau) U(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}, \tau) \psi(\mathbf{x}, \tau) \right\}, \quad (1.2)$$

avec  $\beta = 1/T$  et  $\psi$  est un champ bosonique (complexe) décrivant les atomes. Le potentiel d'interaction à deux corps  $U(\mathbf{r})$  dépend de l'espèce atomique mais est généralement de type van der Waals à grande distance et cœur dur à courte portée. Bien entendu, l'action (1.2) est une action effective, le noyau et les électrons des atomes n'apparaissant pas (leurs effets sont cachés dans la masse  $m$  des atomes et dans la forme du potentiel atomique  $U(\mathbf{r})$ ). On s'attend à ce que ce modèle soit insuffisant pour des énergies plus grandes que l'énergie d'ionisation des atomes, de l'ordre de l'électron-Volt, soit des températures aux alentours de  $10^4\text{K}$ . Mais l'action ci-dessus est déjà bien trop compliquée pour la physique qui nous intéresse. Les gaz d'atomes froids forment des condensats à des températures aux alentours de la centaine de nanoKelvin, soit des énergies d'environ  $10^{-11}\text{eV}$ . Dans ce régime, les atomes ne sondent pas les détails du potentiel  $U(\mathbf{r})$  et ne diffusent plus qu'en onde-s (dès que leur énergie est inférieure au milliKelvin), ce qui permet de simplifier grandement le problème <sup>b</sup>. Il est ainsi possible de développer l'action en puissance des invariants par rapport aux symétries de  $S_{\text{Bose}}$ , à savoir la symétrie  $U(1)$  globale

$$\psi^{(*)}(x) \rightarrow e^{(-)i\theta} \psi^{(*)}(x), \quad (1.3)$$

où  $\theta$  est une phase indépendante de l'espace-temps, et la symétrie galiléenne

$$\psi^{(*)}(\tau, \mathbf{r}) \rightarrow e^{(-)\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2m}\tau - i\mathbf{m}\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}\right)} \psi^{(*)}(\tau, \mathbf{r} - i\mathbf{v}\tau), \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse du nouveau référentiel. Le lagrangien doit donc comporter autant de champs  $\psi$  que  $\psi^*$  et ne peut faire intervenir que des puissances de l'opérateur  $\partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m}$  ou des dérivées spatiales de l'invariant  $|\psi|^2$ . De même, les invariances par parité et renversement du temps doivent être respectées. Ainsi, le lagrangien de basse énergie, à potentiel chimique et température nuls, s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \psi^*(\mathbf{x}, \tau) \left( \partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi(\mathbf{x}, \tau) + \frac{\lambda}{2} |\psi(\mathbf{x}, \tau)|^4 + \frac{\lambda_3}{6} |\psi(\mathbf{x}, \tau)|^6 + h_2 [\nabla |\psi(\mathbf{x}, \tau)|^2]^2 + \dots \quad (1.5)$$

a. Nous travaillons ici à trois dimensions.

b. Notons au passage que cela est un inconvénient technique pour les fermions, car la diffusion en onde-s est grandement diminuée dû au principe de Pauli, ce qui entraîne qu'il est expérimentalement difficile de refroidir les gaz de fermions, en particulier polarisés.

où la somme porte sur un nombre infini d'opérateurs comportant plus de dérivées spatiales ou de champ et respectant les symétries citées précédemment. Nous avons de plus anticipé que le propagateur dans le vide n'est pas renormalisé, impliquant que le seul terme à deux champs est celui que nous avons introduit dans  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ . Il n'est pas possible d'ajouter plus de termes de dérivée temporelle, seuls les gradients de la densité sont possibles<sup>c</sup>. Enfin, notons que notre théorie (1.5) n'est définie que si nous nous donnons un cut-off ultraviolet  $\Lambda$  qui sera de l'ordre de l'inverse de la portée du potentiel atomique<sup>d</sup>, soit typiquement de quelques nanomètres (ou des énergies de l'ordre du micro-eV ou des températures de quelques milliKelvin). Le développement effectué pour écrire  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  n'est valable que dans la limite de basse énergie  $E$  (petite impulsion  $\mathbf{q}$ ), qui est donnée par  $E \ll \Lambda^2/2m$  ( $|\mathbf{q}| \ll \Lambda$ ). De plus, le groupe de renormalisation et les développements des théories des champs effectives nous apprennent qu'un nombre fini d'opérateurs est nécessaire pour un calcul à une précision donnée en  $2mE/\Lambda^2$ <sup>e</sup> [11]. En particulier, le lagrangien  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  est suffisant pour reproduire toute la physique à petit nombre de corps : les amplitudes de diffusion à deux-, trois-,  $n$ -corps sont calculables en fonction des différentes constantes de couplage.

La procédure pour faire un calcul est la suivante. À un ordre donné en  $2mE/\Lambda^2$ , les différents coefficients  $m$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda_3$ ,  $h_2$ , *etc.* sont déterminés. Pour cela, un certain nombre de quantité de basse énergie sont calculées grâce à (1.5), par exemple des amplitudes de diffusion, qui dépendront explicitement des différents coefficients ainsi que de  $\Lambda$ . Pour une valeur du cut-off donnée, on fixe les valeurs des coefficients de sorte que ces observables soient égales à leurs valeurs physiques, connues empiriquement ou calculées *via* l'action microscopique (1.2). Il est ensuite possible de calculer un nombre arbitraire d'autres observables avec la même précision et notre théorie de basse énergie est prédictive (bien que la théorie ne soit pas renormalisable au sens de la théorie des champs en dimension trois). Si l'on veut améliorer le calcul, il suffit d'ajouter un nombre fini de nouveaux opérateurs et de fixer leurs coefficients selon la même procédure<sup>f</sup>. Bien entendu, ce développement a un rayon de convergence fini, au plus de l'ordre de  $\Lambda^2/2m$ , énergie pour laquelle tous les termes de notre

c. En effet, si on ajoute un potentiel chimique dans  $S_{\text{Bose}}$  (soit  $\partial_\tau \rightarrow \partial_\tau - \mu$ ), nous avons, en autorisant le potentiel chimique à dépendre du temps imaginaire, l'invariance de jauge  $U(1)$  :  $\psi(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow e^{i\alpha(\tau)}\psi(\mathbf{x}, \tau)$  et  $\mu(\tau) \rightarrow \mu(\tau) + i\partial_\tau\alpha(\tau)$  (voir aussi annexe B). Cela implique en particulier que seule la dérivée covariante  $\partial_\tau - \mu$  peut apparaître dans  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ . Enfin, pour des processus d'énergie  $E \gg \mu$  nous nous attendons à ce que les atomes soient toujours des excitations bien définies et donc que  $\mu$  agisse sur eux comme un potentiel chimique. Cela implique que le seul terme possible contenant  $\mu$  est  $\mu|\psi|^2$  et donc que le seul terme de dérivée temporelle est  $\psi^*\partial_\tau\psi$ . Pour des énergies plus basse que  $\mu$ , ce raisonnement n'est plus valide (en particulier, des termes comme  $\psi^*(\partial_\tau - \mu - \nabla^2/2m)^2\psi$  apparaissent dans l'action de basse énergie).

d. Dans le cas d'un potentiel de type van der Waals, on peut aussi définir une longueur typique  $l_{\text{vdw}}$ , voir par exemple [9].

e. Pour une introduction aux théories effectives des champs et leurs rapports avec le groupe de renormalisation, voir par exemple [10].

f. Notons néanmoins qu'à deux dimensions, la théorie des champs est renormalisable et que seules les valeurs de  $m$  et  $\lambda$  nécessitent d'être fixées à tout ordre en  $2mE/\Lambda^2$ .

développement sont d'ordre un. Pour sonder la physique à plus haute énergie (mais inférieure à l'électron-Volt), il convient d'utiliser l'action microscopique  $S_{\text{Bose}}$ .

Enfin, dans les cas où le potentiel chimique ou la température sont non nuls,  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  restera une bonne description du problème pour des énergies  $2m\Lambda^2 \gg E \gg \mu, T$ , si on remplace  $\partial_\tau$  par  $\partial_\tau - \mu$  dans l'équation (1.5)<sup>g</sup>.

En résumé, l'action microscopique  $S_{\text{Bose}}$  est suffisante pour décrire toute la physique atomique pour des énergies inférieures à l'électron-Volt, mais bien trop compliqué. Elle ne sera vraiment utile que pour des énergies  $1eV \gg E \gg \Lambda^2/2m$ , où  $\Lambda$  est donné par l'inverse de la portée du potentiel inter-atomique. Pour  $\Lambda^2/2m \gg \mu, T$ , le lagrangien effectif  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  est amplement suffisant pour obtenir la physique à petit nombre de corps d'un gaz d'atome. Nous verrons plus tard qu'il est également suffisant pour comprendre la thermodynamique d'un gaz dilué<sup>h</sup>.

Comme nous l'avons noté plus haut, les atomes ultra-froids ne diffusent qu'en onde-s, permettant de ne garder qu'un petit nombre de terme dans l'action effective de basse énergie. Au vu de la discussion précédente, nous pouvons donc ne garder qu'un nombre minimum de terme dans le lagrangien effectif, le terme cinétique et l'interaction à deux corps (de constante d'interaction que nous notons  $g_3$ ). En passant au formalisme hamiltonien, l'hamiltonien minimal a la forme suivante<sup>i</sup>

$$\hat{H} = \int d\mathbf{x} \left\{ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \left( -\frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \hat{\psi}(\mathbf{x}) + \frac{g_3}{2} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})^2 \hat{\psi}(\mathbf{x})^2 \right\}, \quad (1.6)$$

avec  $\mu$  le potentiel chimique. Cet hamiltonien reproduit bien l'amplitude de diffusion à deux corps à basse énergie

$$f_{3D}(\mathbf{q}) = -\frac{a_3}{1 + i|\mathbf{q}|a_3}, \quad (1.7)$$

où  $a_3$  est la longueur de diffusion en onde-s et est donnée, dans le cadre de l'hamiltonien (1.6), par

$$a_3 = \frac{mg_3}{4\pi + \frac{2}{\pi}mg_3\Lambda}, \quad (1.8)$$

avec  $\Lambda$  le cut-off ultraviolet. Dans le cadre de ce modèle,  $a_3$  est toujours plus petit ou de l'ordre de  $\Lambda^{-1}$ <sup>j</sup>. Si nous voulions étudier le problème à trois corps, il nous faudrait ajouter d'autres termes à  $\hat{H}$  (voir discussion précédente). Notre hamiltonien

g. Ce simple remplacement est garanti par l'invariance de jauge discutée en note c.

h. Pour des énergies plus faibles que  $\mu$  ou  $T$ , d'autres types de lagrangiens effectifs sont nécessaires. Par exemple à  $T > 0$ , c'est le modèle  $O(2)$  classique à  $d$  dimensions qui est pertinent pour décrire la physique à  $E \ll T$ .

i. Nous travaillons maintenant avec des opérateurs de création et d'annihilation bosoniques, qui obéissent aux relations de commutation canoniques ( $[\hat{\psi}(\mathbf{x}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}')] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , etc.).

j. L'équation (1.8) montre que  $a_3$  est toujours positif quand l'interaction est répulsive ( $g_3 > 0$ ), ce qui implique l'existence d'un état lié d'énergie  $E_B = -1/ma_3^2$  [9], résultat qui est physiquement impossible. La contradiction est levée en notant que l'énergie de l'état lié est hors du domaine de validité de notre théorie :  $|E_B| \gtrsim \Lambda^2/2m$ , et donc non physique. Le même problème et sa solution existent aussi en dimension deux.



n'est valide que dans la limite de basse énergie, ce qui implique en particulier que  $\mu, T \ll \Lambda^2/2m$ , équivalent à  $\mu m a_3^2, T m a_3^2 \ll 1$  en l'absence de résonance de Feshbach. Cela revient à dire que le gaz est dilué. Ainsi  $D a_3^3 \ll 1$ , avec  $D$  la densité du gaz, tient lieu de paramètre de développement en perturbation. En pratique, les grandeurs physiques sont indépendantes de la coupure ultraviolette  $\Lambda$ , tandis que les constantes de couplage non incuses dans  $\hat{H}$  (terme à trois corps, *etc.*) ne donnent des contributions qu'à des ordres élevés dans le petit paramètre  $D a_3^3$ . Ainsi, de manière effective, les différentes quantités physiques ne dépendent que de la masse  $m$  et de la longueur de diffusion en onde-s  $a_3$ , ce qui fait dire que cette physique est universelle (dans le sens qu'elle ne dépend pas des détails du potentiel d'interaction  $U(\mathbf{r})$ ). En utilisant le fait que les gaz ultra-froids sont dilués, et en utilisant le point de vue des transitions de phase quantiques, nous allons montrer plus loin qu'il existe une autre forme d'universalité bien plus puissante dans ces systèmes.

### Le gaz de Bose bidimensionnel

Il est possible de réaliser expérimentalement des gaz bidimensionnels. On utilise pour cela un piège optique ou magnétique qui confine les atomes dans une couche mince, rendant le système quasi-2D. L'épaisseur du gaz étant typiquement de l'ordre du micromètre dans les expériences actuelles, l'énergie typique associée au piège est très petite par rapport à  $\Lambda^2/2m$ , défini précédemment. Nous pouvons donc utiliser directement le lagrangien effectif  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  défini à l'équation (1.5) auquel on ajoute un potentiel de piégeage quadratique (très bien réalisé en pratique)  $V_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2$ , où par convention nous avons choisi la direction de piégeage le long de l'axe des  $z$  et où  $\omega_z$  est la raideur du piège, de l'ordre du kiloHertz. Nous obtenons alors une action effective

$$S' = \int d\mathbf{x} \int_0^\beta d\tau \left\{ \psi^*(\mathbf{x}, \tau) \left( \partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 \right) \psi(\mathbf{x}, \tau) + \frac{\lambda}{2} |\psi(\mathbf{x}, \tau)|^4 \right\}, \quad (1.9)$$

pour un potentiel chimique non nul et nous négligeons les effets des autres termes d'interaction qui auront des effets sous-dominant. Il est maintenant utile de définir  $\psi_n(\mathbf{r}, \tau)$  ( $\mathbf{r} = (x, y)$ ), tel que  $\psi(\mathbf{x}, \tau) = \sum_n \psi_n(\mathbf{r}, \tau) \phi_n(z)$ , où  $n$  dénote les valeurs propres de l'opérateur unidimensionnel  $H_{\text{HO}} = -\frac{\partial^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2$ , tel que  $H_{\text{HO}} \phi_n(z) = E_n \phi_n(z)$ .  $E_n = \omega_z(n + \frac{1}{2})$  est l'énergie du mode propre  $\phi_n(z)$  de l'oscillateur harmonique défini par l'hamiltonien  $H_{\text{HO}}$ . Nous obtenons alors

$$S_d = \int d\mathbf{r} \int_0^\beta d\tau \left\{ \sum_n \psi_n^*(\mathbf{r}, \tau) \left( \partial_\tau - \frac{\nabla_\perp^2}{2m} - \mu + n\omega_z \right) \psi_n(\mathbf{r}, \tau) + \sum_{k,l,m,n} \frac{\lambda_{klmn}}{2} \psi_k^*(\mathbf{r}, \tau) \psi_l^*(\mathbf{r}, \tau) \psi_m(\mathbf{r}, \tau) \psi_n(\mathbf{r}, \tau) \right\}, \quad (1.10)$$

où nous avons redéfini le potentiel chimique de  $\mu + \omega_z/2 \rightarrow \mu$  et utilisé l'orthogonalité de la base  $\phi_n$ .  $\nabla_\perp$  n'agit que sur les directions orthogonales à  $z$ . Les

constantes d'interaction  $\lambda_{klmn}$  sont définies par

$$\lambda_{klmn} = \lambda \int_z \phi_k^*(z) \phi_l^*(z) \phi_m(z) \phi_n(z). \quad (1.11)$$

Si le potentiel chimique et la température sont suffisamment faibles, seul le mode  $n = 0$  participe à la physique de basse énergie et la constante de couplage devient  $g_2 \equiv \lambda_{0000} = \sqrt{8\pi} \frac{a_3}{l_z m}$ , où  $l_z = 1/\sqrt{m\omega_z}$  est l'extension caractéristique du gaz dans la direction  $z$ <sup>k</sup>.

En remarquant que  $E, \mu, T \ll \omega_z$  peut se réécrire sous la forme  $E, \mu, T \ll \Lambda_z^2/2m$ , avec  $\Lambda_z \simeq l_z^{-1}$ , nous voyons que  $l_z$  joue le rôle d'un nouveau cut-off microscopique pour notre modèle de basse énergie bidimensionnel. De plus, pour que le raisonnement présenté ci-dessus ait un sens, il faut que  $\Lambda_z \ll \Lambda$  (ce qui se vérifie en pratique). Hors résonance de Feshbach, la longueur de diffusion à trois dimensions  $a_3$  est toujours plus petite ou de l'ordre de  $\Lambda^{-1}$ , ce qui implique directement que  $l_z \gg a_3$ . Nous nous attendons ainsi à ce que la constante de couplage 2D "microscopique"  $g_2$  soit génériquement petite.

Nous voyons donc que le gaz de Bose à deux et trois dimensions peut être décrit par une action de basse énergie minimale de la forme

$$S = \int d\mathbf{x} \int_0^\beta d\tau \left\{ \psi^*(\mathbf{x}, \tau) \left( \partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \psi(\mathbf{x}, \tau) + \frac{g_d}{2} |\psi(\mathbf{x}, \tau)|^4 \right\}, \quad (1.12)$$

avec un cut-off ultraviolet  $\Lambda$  dont l'interprétation physique dépend de la dimension et du système considéré. La constante d'interaction  $g_3$  de cette action effective peut être reliée à la longueur de diffusion à trois dimensions  $a_3$  (voir discussion plus haut) tandis que pour le gaz bidimensionnel,  $mg_2 = \sqrt{8\pi} \frac{a_3}{l_z}$ . L'amplitude de diffusion à  $d = 2$  se calcule aisément et vaut

$$f_{2D}(\mathbf{q}) = -\frac{2\pi}{\ln\left(\frac{|\mathbf{q}|a_2}{2}\right) + C - i\frac{\pi}{2}}, \quad (1.13)$$

où  $C$  est la constante d'Euler et cette équation définit la longueur de diffusion en dimension deux  $a_2$ . Dans le cadre de l'action (1.12), elle vaut

$$a_2 = \frac{2}{\Lambda} \exp\left(-\frac{2\pi}{mg_2} - C\right). \quad (1.14)$$

Il est par ailleurs possible de calculer la longueur de diffusion pour le modèle plus réaliste (1.10) qui donne

$$a_2 = 2\sqrt{\frac{\pi}{B}} l_z \exp\left(-\frac{2\pi}{mg_2} - C\right), \quad (1.15)$$

avec  $B = 0.915$  [12, 13]. Nous voyons donc que le choix  $\Lambda = \sqrt{\frac{B}{\pi}} l_z^{-1}$  permet d'obtenir la bonne longueur de diffusion si nous connaissons  $l_z$  et  $a_3$  (ainsi que la masse  $m$  des atomes).

---

k. En effet, si  $\mu, T \ll \omega_z$ , les niveaux excités de l'oscillateur harmonique ne sont pas peuplés et leurs effets sur le fondamental sont négligeables.

Un traitement champ moyen de l'hamiltonien (1.6), appelé dans ce contexte équation de Gross-Pitaevskii [14, 15], permet de comprendre la grande majorité des expériences d'atomes froids. À un niveau formel, on comprend que les atomes sont tous décrits par une fonction d'onde  $\psi(\mathbf{x}, t) = \langle \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \rangle$ , où  $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$  est l'opérateur d'annihilation d'un atome au point  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$ . ( $\langle \dots \rangle$  représente la valeur moyenne de l'opérateur  $\dots$  par rapport aux fluctuations quantiques et thermiques.) Tout au long de ce manuscrit, nous nous intéresserons à la statique et nous ne parlerons pas de piège atomique, l'utilisation de l'approximation de la densité locale permettant dans la plupart des cas de se passer de sa description théorique pour des mesures de thermodynamique [16]. Nous obtenons, à potentiel chimique positif,  $|\psi(\mathbf{x}, t)| = m\mu/4\pi a_3 = \sqrt{n_0}$ , avec  $n_0$  la densité du condensat. La pression au niveau champ moyen vaut alors

$$P_{\text{CM}} = \frac{m\mu^2}{8\pi a_3}. \quad (1.16)$$

Remarquons que le simple fait que  $\langle \hat{\psi} \rangle$  soit non-nul implique une brisure spontanée de la symétrie  $U(1)$ , représentant la symétrie de l'hamiltonien par rapport à un changement de phase (que nous avons prise nulle) des opérateurs de création et d'annihilation, et associée à la conservation du nombre d'atomes. Le théorème de Goldstone impose alors l'existence d'un mode non-gappé, ici un mode de son, appelé mode de Bogoliubov dans ce contexte [17], dont l'énergie  $E(\mathbf{q})$  pour une impulsion  $\mathbf{q}$  vaut

$$E(\mathbf{q}) = \sqrt{\frac{\mathbf{q}^2}{2m} \left( \frac{\mathbf{q}^2}{2m} + \frac{8\pi a_3 n_0}{m} \right)}. \quad (1.17)$$

Pour  $|\mathbf{q}| \ll \xi_h^{-1}$ , avec  $\xi_h = (8\pi a_3 n_0)^{-1/2}$  la longueur de cicatrisation, nous trouvons que  $E(\mathbf{q}) = c|\mathbf{q}|$ , avec  $c = \sqrt{4\pi a_3 n_0/m^2}$  la vitesse du son. Les modes de Bogoliubov peuvent être trouvés en regardant les fluctuations gaussiennes autour de  $\langle \hat{\psi} \rangle = m\mu/4\pi a_3$ . Pour cela, nous écrivons que  $\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \sqrt{n_0} + \delta\hat{\psi}(\mathbf{x})$  ( $\langle \delta\hat{\psi}(\mathbf{x}) \rangle = 0$ ) et ne gardons que les termes quadratiques en  $\delta\hat{\psi}$  dans l'hamiltonien (1.6), qui devient, dans l'espace réciproque,

$$\hat{H}_2 = P_{\text{CM}} + \sum_{\mathbf{q}} \left( \delta\hat{\psi}_{\mathbf{q}}^\dagger, \delta\hat{\psi}_{-\mathbf{q}} \right) \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{q}^2}{2m} - \mu + \frac{8\pi a_3 n_0}{m} & \frac{4\pi a_3 n_0}{m} \\ \frac{4\pi a_3 n_0}{m} & \frac{\mathbf{q}^2}{2m} - \mu + \frac{8\pi a_3 n_0}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\hat{\psi}_{\mathbf{q}} \\ \delta\hat{\psi}_{-\mathbf{q}}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Les fonctions de Green normale

$$G_{\text{n}}(\mathbf{q}, i\omega) = -\langle \delta\hat{\psi}_{\mathbf{q}}(i\omega) \delta\hat{\psi}_{\mathbf{q}}^\dagger(i\omega) \rangle \quad (1.19)$$

et anormale

$$G_{\text{an}}(\mathbf{q}, i\omega) = -\langle \delta\hat{\psi}_{\mathbf{q}}(i\omega) \delta\hat{\psi}_{-\mathbf{q}}(-i\omega) \rangle \quad (1.20)$$

( $\omega$  est une fréquence de Matsubara bosonique) sont alors données par l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} i\omega - \frac{\mathbf{q}^2}{2m} + \mu - \Sigma_{\text{n}}(i\omega, \mathbf{q}) & -\Sigma_{\text{an}}(i\omega, \mathbf{q}) \\ -\Sigma_{\text{an}}(i\omega, \mathbf{q}) & -i\omega - \frac{\mathbf{q}^2}{2m} + \mu - \Sigma_{\text{n}}(-i\omega, -\mathbf{q}) \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

où  $\Sigma_n(i\omega, \mathbf{q})$  et  $\Sigma_{\text{an}}(i\omega, \mathbf{q})$  sont les self-energies, respectivement normale et anormale, qui, au niveau de l'approximation de Bogoliubov, valent

$$\begin{aligned}\Sigma_n^B(i\omega, \mathbf{q}) &= \frac{8\pi a_3 n_0}{m} \\ \Sigma_{\text{an}}^B(i\omega, \mathbf{q}) &= \frac{4\pi a_3 n_0}{m}.\end{aligned}\tag{1.22}$$

Les énergies des modes de Bogoliubov sont données par les pôles des fonctions de Green, ce qui redonne l'équation (1.17). L'existence de ces modes, dont la dispersion  $E(\mathbf{q})$  a été vérifiée expérimentalement [18], implique, *via* le critère de Landau, la superfluidité du gaz<sup>1</sup>.

L'influence des modes de Bogoliubov sur la thermodynamique, qui correspond à calculer  $\langle \hat{H}_2 \rangle$ , a été donnée par Lee, Huang et Yang [19, 20]. La pression vaut alors

$$P(\mu, T = 0) = \frac{m\mu^2}{8\pi a_3} \left( 1 - \frac{64}{15\pi} \sqrt{\mu m a_3^2} + \dots \right),\tag{1.23}$$

pour  $\mu > 0$  et zéro sinon. La pression ne dépend que de  $m$  et  $a_3$  et est donc indépendante des détails du potentiel d'interaction inter-atomique. Nous allons montrer maintenant que le point de vue des transition de phase permet de comprendre pourquoi cela doit être nécessairement le cas.

## 1.3 Transitions de phase quantiques et universalité dans les gaz de Bose

### 1.3.1 Généralités

Les transitions de phase quantiques ont lieu par définition à température nulle et sont induites par la variation d'un paramètre de contrôle non-thermique, tel que la pression extérieure ou la densité de porteurs de charge [1]. Ce sont les fluctuations quantiques qui gouvernent la transition, contrairement aux transitions de phase à température finie. En effet, seules les fluctuations classiques (à fréquences de Matsubara nulles) pilotent les transitions de phase à température finie, même si l'origine ou la nature de la transition est due à la mécanique quantique. Ainsi, la transition de phase entre un superfluide et un gaz normal dans les gaz de Bose est décrite par la physique du modèle  $O(2)$  classique à  $d$  dimensions. La présence des fluctuations temporelles dans des transitions de phase quantiques, *via* les fréquences de Matsubara, implique l'existence d'un exposant critique  $z$ , appelé exposant dynamique car associé au temps imaginaire (voir ci-dessous). Comme nous le verrons plus bas, il intervient aussi dans les lois d'échelle des différentes grandeurs thermodynamiques.

1. Ce n'est pas le cas du gaz parfait de boson, dont le comportement est de toute façon pathologique dans l'ensemble grand-canonique. Sauf mention contraire, le terme de gaz de Bose se référera toujours au gaz en interaction.

Les transitions de phase classiques du second ordre sont caractérisées par l'existence de comportements universels près de la transition. Deux systèmes microscopiquement très différents (par exemple un aimant (type Ising classique) près de la température de Curie  $T_c$  et un liquide près de son point critique) vont se comporter de manière semblable. Ainsi, la fonction de corrélation se comporte près du point critique comme

$$G(\mathbf{q}, r) = \frac{\mathbf{G}(\mathbf{q} \alpha |r|^{-\nu})}{|\mathbf{q}|^{2-\eta} \beta^{-\eta}}, \quad (1.24)$$

où  $\mathbf{G}(x)$  est une fonction d'échelle (universelle) et  $r$  est l'écart à la criticalité ( $r \propto (T - T_c)/T_c$  pour un aimant) et est un paramètre pertinent au sens du groupe de renormalisation (voir chapitre III). Notons la présence de deux longueurs  $\alpha$  et  $\beta$  non-universelles (*i.e.* dépendant du système considéré), introduites pour garder la bonne dimension physique des diverses quantités et qui permettent à  $\mathbf{G}$  de bien être universel (*i.e.* identique pour tous les systèmes). On en déduit que la longueur de corrélation obéit à la loi d'échelle  $\xi = \alpha|r|^{-\nu}$  ( $G(\mathbf{q}, r)^{-1} \propto \mathbf{q}^2 + \xi^{-2}$  pour  $|\mathbf{q}|\xi \ll 1$ ) et ces relations définissent les exposants critiques  $\nu$  (associé à la divergence de la longueur de corrélation à l'approche du point critique) et  $\eta$  (la dimension anormale). Les exposants critiques sont donnés en champ moyen (dans le cas de théorie simple type Ising classique, paramètre d'ordre à symétrie O(N), sans désordre, *etc.*) par  $\nu = 1/2$  et  $\eta = 0$ . Cette prédiction est correcte quand la dimension de l'espace est supérieure à la dimension critique supérieure  $d > d_c^+ = 4$ . Pour  $d = d_c^+$  on s'attend à ce qu'il y ait des corrections logarithmiques aux fonctions d'échelle, tandis que  $\nu$  et  $\eta$  sont non-triviaux pour  $d < d_c^+$ . Il existe généralement une dimension critique inférieure  $d_c^-$  en-dessous de laquelle la transition de phase n'existe plus ( $d_c^- = 1$  pour le modèle d'Ising). Enfin, notons que pour  $d \geq d_c^+$ , il faut généralement garder une variable de plus dans la relation d'échelle (1.24), généralement l'interaction, que nous notons  $g$ ,

$$G(\mathbf{q}, r, g) \propto \frac{\mathbf{G}(\mathbf{q} \alpha |r|^{-\nu}, g \gamma |r|^{\nu(d-d_c^+)})}{|\mathbf{q}|^{2-\eta} \beta^{-\eta}}, \quad (1.25)$$

car les différentes quantités physiques, comme  $\mathbf{G}$  ou l'énergie libre, peuvent être singulières à l'approche du point critique, *i.e.* dans la limite  $g \gamma |r|^{\nu(d-d_c^+)} \rightarrow 0$  (nous avons introduit une nouvelle grandeur non-universelle  $\gamma$ , dans le même esprit que précédemment). On dit alors que  $g$  est une variable dangereusement "irrelevante" (au sens du groupe de renormalisation).

Dans le cas des transitions de phase quantiques, il n'y a que peu de changement,  $r$  joue maintenant le rôle d'un paramètre non-thermique (par exemple le dopage en porteurs de charge) et la température est un nouveau paramètre pertinent. De plus, il nous faut introduire une fréquence dans les fonctions de corrélation (associée au temps imaginaire, *i.e.* aux fluctuations quantiques) et la loi d'échelle précédente devient

$$G(\mathbf{q}, \omega, r, T) = \mathbf{G}\left(\mathbf{q} \alpha |r|^{-\nu}, \gamma \frac{\omega}{\mathbf{q}^z}, \varsigma \frac{\mathbf{q}^z}{T}\right) / |\mathbf{q}|^{2-\eta} \beta^{-\eta}, \quad (1.26)$$

et l'exposant dynamique  $z$  exprime l'anisotropie entre temps et espace ( $z = 1$  dans le cas isotrope). Le temps joue maintenant le rôle de  $z$  dimensions supplémentaires et les résultats champ moyen décrivent le comportement critique quand la "dimension effective"  $d_{\text{eff}} = d + z$  est plus grande que quatre ( $d_{\text{eff}} \geq 4$ ), ce qui implique que  $d_c^+ = 4 - z$ .

### 1.3.2 Transition de phase quantique du gaz de Bose dilué

À température nulle, le gaz de Bose peut subir plusieurs transitions de phase. Une, que nous discuterons tout au long de ce manuscrit, est la transition de Mott dans le cas de bosons sur réseau. Une autre est la transition entre le vide et le superfluide (avec ou sans réseau). En effet, à température nulle, un système de boson est vide si le potentiel chimique est négatif mais superfluide s'il est positif. Le système change donc de phase au point critique quantique  $T = \mu = 0$ , *via* une transition du second ordre, la pression et la densité variant continument, tandis que la compressibilité est discontinue au point critique. Le système étant vide pour  $\mu \leq 0$  et  $T = 0$ , l'étude de la transition est très simple. En particulier, les excitations au point critique sont des bosons de masse  $m$  et qui interagissent avec une longueur de diffusion  $a_3$ . On justifiera au chapitre IV, en utilisant la proximité du point critique, que la pression d'un gaz de Bose dilué peut s'écrire, en  $d = 3$ , sous la forme

$$P(\mu, T) = T^{5/2} \left( \frac{m}{2\pi} \right)^{3/2} \mathcal{F}_3 \left( \frac{\mu}{T}, \tilde{g}(T) \right), \quad (1.27)$$

où  $\mathcal{F}_3(x, y)$  est une fonction d'échelle (universelle, *i.e.* ne dépendant pas du type d'atomes, de la présence d'un réseau ou non, *etc.*) et nous avons introduit une "interaction renormalisée"  $\tilde{g}(T) = 8\pi\sqrt{2ma_3^2T}$ . Nous voyons que la connaissance des excitations au point critique (nous donnant  $m$  et  $a_3$ ) permet de caractériser entièrement la thermodynamique du gaz de Bose dilué. Étant basée sur un modèle de basse énergie, cette équation n'est valable que dans la limite  $\mu, T \ll \Lambda^2/2m$ , ce qui en l'absence de résonance de Feshbach est équivalent à  $\mu ma_3^2, T ma_3^2 \ll 1^{\text{m}}$ . Nous montrerons que  $z = 1/\nu = 2$  et  $\eta = 0$  pour cette transition, ce qui implique que la dimension critique supérieure est ici  $d_c^+ = 2$ .

Malheureusement, nous ne savons *a priori* pas quelle est la forme de la fonction  $\mathcal{F}_3$  et il faut pour cela faire un calcul explicite. Le fait que  $T \ll \Lambda^2/2m$  implique que l'interaction  $\tilde{g}(T)$  est petite et on peut ainsi espérer pouvoir utiliser une théorie de perturbation. Cela est bien le cas à trois dimensions (et en dimension deux à température nulle), mais pas à température finie pour un système bosonique bidimensionnelle, du fait de divergences infrarouges. Nous traiterons de ce cas lors du chapitre V, en utilisant le groupe de renormalisation non-perturbatif.

---

m. Bien que  $\tilde{g}(T)$  s'annule dans la limite  $T \rightarrow 0$ , on ne peut pas remplacer  $\mathcal{F}_3(x, y)$  par  $\tilde{\mathcal{F}}_3(x) = \mathcal{F}_3(x, 0)$  car  $\tilde{g}$  est une constante dangereusement "irrélevante" (au sens du groupe de renormalisation), c'est-à-dire que  $\mathcal{F}_3$  peut dépendre de  $y$  d'une manière singulière dans la limite  $y \rightarrow 0$ .

Par exemple, à trois dimensions et dans le régime quantique critique ( $|\mu| \ll T$ ), un calcul simple donne

$$P(\mu = 0, T) = \zeta(5/2) \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{3/2} T^{5/2} - \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^3 \zeta(3/2)^2 \frac{4\pi a_3}{m} + \dots, \quad (1.28)$$

avec  $\zeta(z)$  la fonction  $\zeta$  de Riemann. Le champ moyen donnant une contribution nulle dans la phase désordonnée, le premier terme est la contribution à une boucle et le deuxième à deux boucles. On obtient directement

$$\mathcal{F}_3(x, y) = \zeta(5/2) - \frac{\zeta(3/2)^2}{2\sqrt{2}} y + \dots \quad \text{pour } |x|, y \ll 1. \quad (1.29)$$

À basse température, il est préférable de réécrire la pression sous la forme

$$P(\mu, T) = \mu^{5/2} \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{3/2} \mathcal{G}_3\left(\frac{T}{\mu}, \tilde{g}(\mu)\right), \quad (1.30)$$

avec  $\tilde{g}(\mu) = 8\pi\sqrt{2ma_3^2\mu}$ . Ainsi, en comparant avec le résultat donné par le calcul de Lee-Huang-Yang (équation (1.23)), nous lisons directement le comportement de la fonction  $\mathcal{G}_3(x, y)$  à petit  $x$  et  $y$

$$\mathcal{G}_3(x, y) = \frac{4\pi^{3/2}}{y} - \frac{8\sqrt{2}}{15\sqrt{\pi}} + \dots \quad \text{pour } x, y \ll 1. \quad (1.31)$$

Il faut noter que la correction suivante à l'équation (1.23) fait intervenir une nouvelle constante de couplage (correspondant aux interactions à trois corps), ce qui ferait intervenir une nouvelle variable dans la fonction d'échelle [21, 22, 23, 24, 25]<sup>n</sup>. Remarquons enfin qu'un développement en  $\tilde{g}(T)$  ( $\tilde{g}(\mu)$ ) est équivalent à un développement en  $\sqrt{Tma_3^2}$  ( $\sqrt{\mu ma_3^2}$ ), qui correspond également à un développement en  $\sqrt{Da_3^3}$ .

### Universalité de la température critique à la transition superfluide-normal

Nous discutons maintenant l'universalité de la transition entre la phase superfluide et la phase normale. Après la discussion que nous avons eue sur l'universalité de la thermodynamique, nous nous attendons en effet à ce que la température critique soit elle aussi une quantité universelle. À trois dimensions, c'est la présence d'un condensat qui implique la superfluidité du système et on associe donc la transition entre les deux phases avec la disparition du condensat à des températures supérieures à  $T_c$ , définie par  $n_0(T_c) = 0$ . Elle est caractérisée par une non-analyticité de la pression  $P(\mu, T)$ , *i.e.*, pour un potentiel chimique

n. La correction suivante à (1.31) dépend en effet explicitement de l'interaction à trois corps, noté  $\lambda_3$  dans l'équation (1.5).

donné, nous nous attendons à ce que la pression soit non-analytique à une certaine température  $T_c(\mu)$ , ce qui définit la température de transition dans le diagramme de phase. Or nous savons que la pression du gaz de Bose peut se mettre sous la forme universelle donnée à l'équation (1.27). Bien entendu, la partie dimensionnelle de la pression ( $T^{5/2}$ ) est analytique au voisinage de  $T_c$ , et c'est donc  $\mathcal{F}_3(x, y)$  qui, pour un  $y$  donné, doit être non-analytique en un certain  $x_c(y)$ . La fonction  $\mathcal{F}_3$  étant universelle, la relation  $x_c(y)$  l'est aussi<sup>o</sup>, et nous trouvons

$$\mu_c(T) = T \mathcal{H}_3(\tilde{g}(T)), \quad (1.32)$$

où  $\tilde{g}(T)$  est défini après l'équation (1.27). Cette relation est bien sûr inversible et permet d'obtenir  $T_c(\mu)$ . Pour des atomes de masse  $m$  et interagissant avec une longueur de diffusion  $a_3$ , le potentiel chimique critique vaut au premier ordre en  $a_3$

$$\mu_c(T) = \frac{8\pi a_3}{m} D_{\text{BE}}(T), \quad (1.33)$$

où  $D_{\text{BE}}(T)$  est la densité de bosons (libres) à la température  $T$  et au potentiel chimique nul

$$D_{\text{BE}}(T) = \int_{\mathbf{q}} \frac{1}{e^{\beta \mathbf{q}^2 / 2m} - 1}, \quad (1.34)$$

ce qui donne

$$\mu_c(T) = \frac{8\pi a}{m} \zeta(3/2) \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} + \dots, \quad (1.35)$$

avec  $\zeta(z)$  la fonction  $\zeta$  de Riemann. Nous en déduisons

$$\mathcal{H}_3(x) = \frac{\zeta(3/2)}{\sqrt{2} (2\pi)^{3/2}} x + \dots. \quad (1.36)$$

Notons que l'équation (1.32) peut se réécrire sous la forme

$$\mu m a_3^2 = \tilde{\mathcal{H}}_3(T m a_3^2), \quad (1.37)$$

avec  $\tilde{\mathcal{H}}_3(x) = \frac{4\zeta(3/2)}{\sqrt{2\pi}} x^{3/2}$ . Le calcul de la correction suivante à la température critique est un problème compliqué de théorie des champs (voir par exemple [26]) qui donne  $\Delta T_c = T_c - T_c^0 = c a_3 D^{1/3} T_c^0$ , avec  $c \simeq 1.3$  une constante universelle et  $T_c^0 = \frac{2\pi}{m} \left( \frac{D}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3}$  la température critique du gaz de Bose libre. Comme  $a_3 D^{1/3}$  peut se mettre sous la forme d'une loi d'échelle ( $D a_3^3 = (T m a_3^2 / 2\pi)^{3/2} T \partial_\mu \mathcal{F}_3(\mu/T, \tilde{g}(T))$ ), nous voyons que la correction à la température critique respecte elle-aussi la loi d'échelle.

## 1.4 Comportement infrarouge du gaz de Bose

Le calcul des corrections au-delà de la théorie de Bogoliubov, entrepris par Beliaev [27, 28] (voir également [29]), est pollué par des divergences infrarouges dues à la

---

o. À trois dimensions, nous savons que pour pousser les calculs à des ordres plus élevés en  $\mu m a^2$  ou  $T m a^2$ , il faut ajouter d'autres constantes de couplage dans les fonctions universelles (par exemple  $\mathcal{F}_3(x, y, z)$  donnera un  $x_c$  de la forme  $x_c(y, z)$ ). Au premier ordre, auquel nous nous arrêterons, seule la dépendance en  $y$  est importante.



présence des modes de Goldstone<sup>p</sup>. Par exemple, la première correction aux self-energies ( $\Sigma_{\text{n/an}} = \Sigma_{\text{n/an}}^B + \Sigma_{\text{n/an}}^{(1)} + \dots$ ) diverge comme

$$\Sigma_{\text{n/an}}^{(1)}(i\omega, \mathbf{q}) \propto \begin{cases} g_d^4 n_0^3 / c^3 |\omega^2 / c^2 + \mathbf{q}^2|^{(d-3)/2} & (d < 3), \\ g_3^4 n_0^3 / c^3 \ln \left( \sqrt{\omega^2 / c^2 + \mathbf{q}^2} \xi_h \right) & (d = 3), \end{cases} \quad (1.38)$$

pour  $(\omega/c, |\mathbf{q}|) \ll \xi_h^{-1}$ , où  $\xi_h = (8\pi a_3 n_0)^{-1/2}$  est la longueur de cicatrisation. On peut définir l'échelle de moment  $p_G$ , appelée échelle de Ginzburg, en-dessous de laquelle la théorie de perturbation n'a plus de sens, par  $\Sigma_{\text{n/an}}^{(1)}(icp_G, p_G) \simeq \Sigma_{\text{n/an}}^B$  (en notant que dans la théorie de Bogoliubov, les self-energies sont constantes (voir équation (1.22))), ce qui donne

$$p_G \propto \begin{cases} (A_d m g_d p_h)^{1/(3-d)} & (d < 3), \\ p_h \exp \left( -\frac{1}{A_3 g_3 m p_h} \right) & (d = 3), \end{cases} \quad (1.39)$$

où nous avons noté  $p_h = \xi_h^{-1}$  et  $A_d$  est une constante dépendant de la dimension de l'espace [30]. Il est possible de tenir compte de la resommation des diagrammes en échelle, ce qui équivaut à remplacer  $g_3$  par  $4\pi a_3/m$  et  $m g_2$  par  $2\pi/\ln(p_h a_2)$  (voir également la discussion de  $p_G$  et  $p_h$  dans le cadre du NPRG en annexe D). Remarquons qu'en couplage faible, nous avons  $p_G \ll p_h$ . Ainsi, pour des impulsions grandes devant  $p_G$ , les corrections aux self-energies de la théorie de Bogoliubov sont petites, et cette théorie est une bonne approximation de la physique des gaz de Bose dilués. Dans la limite opposée ( $|\mathbf{q}| \ll p_G$ ), la théorie de Bogoliubov perd son sens, en tout cas pour le calcul des self-energies. En effet, comme nous l'avons vu plus haut, il est tout à fait possible de calculer des quantités thermodynamiques avec la théorie de Bogoliubov. En règle générale, seules les quantités non-invariantes de jauge sont sensibles aux divergences infrarouges.

Il existe cependant un certain nombre de résultats exacts concernant les self-energies. Par exemple, la présence du mode de son est assurée par le théorème de Hugenholtz et Pines [21]

$$\Sigma_{\text{n}}(0, 0) - \Sigma_{\text{an}}(0, 0) = \mu, \quad (1.40)$$

qui est respecté dans la théorie de Bogoliubov où  $\Sigma_{\text{n}}^B(i\omega, \mathbf{q}) = 8\pi a n_0/m = 2\mu$  et  $\Sigma_{\text{an}}^B(i\omega, \mathbf{q}) = 4\pi a n_0/m = \mu$ . C'est la valeur finie de  $\Sigma_{\text{an}}^B(i\omega, \mathbf{q})$  à impulsion et fréquence nulles qui assure l'existence du mode de son dans cette théorie. Cela contredit par contre un autre théorème imposant  $\Sigma_{\text{an}}(0, 0) = 0$  [31]. Pour avoir une vitesse du son non-nulle, les self-energies doivent être non-analytiques [32], comme nous allons le montrer maintenant en utilisant l'approche hydrodynamique de Popov [33, 34, 35, 36, 37]. L'idée est d'utiliser une représentation phase-amplitude  $\psi(\mathbf{x}, \tau) = \sqrt{D(\mathbf{x}, \tau)} e^{i\theta(\mathbf{x}, \tau)}$  des champs, où  $D$  est la densité de particule. En regardant les fluctuations  $\delta D(\mathbf{x}, \tau)$  autour de la configuration d'équilibre (champ moyen)

p. Cette section est largement inspirée de l'article [30]. Les divergences infrarouges rencontrées ici sont génériques dans le modèle O(N) classique dans la phase basse température.

$D = \mu/g_d$ , l'action du système dans cette représentation s'écrit (à l'ordre quadratique en  $\delta D$  et  $\theta$ )

$$S[\delta D, \theta] = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \left[ i\delta D \partial_\tau \theta + \frac{D}{2m} (\nabla \theta)^2 + \frac{(\nabla \delta D)^2}{8mD} + \frac{g_d}{2} (\delta D)^2 \right]. \quad (1.41)$$

Il est possible de tenir compte des termes d'ordre supérieur en théorie de perturbation, qui ne donnent que des renormalisations finies des coefficients de l'action hydrodynamique (1.41) [37]. La théorie hydrodynamique ne souffre pas de divergences infrarouges et prédit des excitations de type modes de Bogoliubov. En particulier, les fonctions de Green en représentation phase-amplitude valent

$$\begin{aligned} G_{nn}(i\omega, \mathbf{q}) &= \langle \delta n(i\omega, \mathbf{q}) \delta n(-i\omega, -\mathbf{q}) \rangle = \frac{D}{m} \frac{\mathbf{q}^2}{\omega^2 + E_{\mathbf{q}}^2}, \\ G_{n\theta}(i\omega, \mathbf{q}) &= \langle \delta n(i\omega, \mathbf{q}) \theta(-i\omega, -\mathbf{q}) \rangle = -\frac{\omega}{\omega^2 + E_{\mathbf{q}}^2}, \\ G_{\theta\theta}(i\omega, \mathbf{q}) &= \langle \theta(i\omega, \mathbf{q}) \theta(-i\omega, -\mathbf{q}) \rangle = \frac{\frac{\mathbf{q}^2}{4mD} + g_d}{\omega^2 + E_{\mathbf{q}}^2}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

où  $E_{\mathbf{q}}^2 = \frac{\mathbf{q}^2}{2m} \left( \frac{\mathbf{q}^2}{2m} + 2g_d D \right)$  est équivalent à l'équation (1.17) à trois dimensions une fois qu'on prend en compte la resommation des diagrammes en échelle ( $g_d \rightarrow 4\pi a_3/m$ ) et le fait que  $n_0 \simeq D$  en couplage faible. Pour trouver les propagateurs normaux et anormaux (ou de manière équivalente les self-energies), on utilise la décomposition des champs en représentation phase-amplitude

$$\psi(\mathbf{x}, \tau) = \sqrt{n_0 + \delta D(\mathbf{x}, \tau)} e^{i\theta(\mathbf{x}, \tau)}, \quad (1.43)$$

où on utilise qu'en couplage faible et à température nulle  $n_0 \simeq D$  et  $\delta D \ll D$ . On trouve alors

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{an}}(i\omega, \mathbf{q}) &= \Sigma_{\text{n}}(i\omega, \mathbf{q}) - i\omega - \mu + \frac{\mathbf{q}^2}{2m} = \\ &= \begin{cases} \frac{D^2}{2A_d c^{4-d} n_0 m^2} (\omega^2/c^2 + \mathbf{q}^2)^{(3-d)/2} & (d < 3), \\ \frac{D^2}{4A_3 c n_0 m^2} \left[ \ln \left( \frac{\omega^2/c^2 + \mathbf{q}^2}{p_h^2} \right) \right]^{-1} & (d = 3), \end{cases} \end{aligned} \quad (1.44)$$

dans l'infrarouge ( $(i\omega/c, |\mathbf{q}|) \ll p_G$ ), ce qui est bien en accord avec les différents résultats exacts énoncés ci-dessus. Le lien entre l'approche type théorie des champs de Bogoliubov et Beliaev et l'approche hydrodynamique de Popov, d'abord vu en [32], se réinterprète aussi avec le groupe de renormalisation, qui fait l'interpolation entre les deux points de vue [38, 39, 40, 41].

Pour résumer, la théorie de Bogoliubov ( $\Sigma_{\text{an}}(i\omega, \mathbf{q}) \simeq 4\pi a n_0/m$ ) est valide jusqu'à l'échelle d'impulsion  $p_G$ , très petite (et même exponentiellement petite à trois

dimensions) par rapport à  $p_h$  en couplage faible. Dans l'infrarouge, la structure de la théorie change complètement et est dominée par les fluctuations de phase, ce qui redonne les résultats de Popov. Par ailleurs, on trouve un continuum d'excitations dans la fonction spectrale  $\text{Im}G_n(i\omega \rightarrow \omega + i0^+, \mathbf{q})$  (absent de la théorie de Bogoliubov) en plus du mode de son.

## 1.5 Gaz de Bose en couplage fort : le modèle de Bose-Hubbard

Après avoir montré comment le modèle de Bose-Hubbard peut être réalisé expérimentalement dans les atomes froids, nous discutons la transition de phase quantique superfluide-isolant en champ moyen. Nous exposons ensuite la théorie RPA, qui permet de comprendre qualitativement les mécanismes mis en jeu dans la transition de Mott. Nous utilisons enfin une théorie effective de basse énergie pour trouver les classes d'universalité décrivant la transition.

### 1.5.1 Atomes froids dans un réseau et modèle de Bose-Hubbard

L'utilisation d'un potentiel optique périodique permet la réalisation de gaz dans un réseau comme nous allons le montrer rapidement. Des faisceaux lasers contrapropageants créent un potentiel pour les atomes (dans le cas d'un réseau hypercubique)

$$V_{\text{OL}}(\mathbf{x}) = V_0 \sum_{i=1}^d \sin^2(kx_i), \quad (1.45)$$

où  $k = 2\pi/\lambda$  avec  $\lambda$  la longueur d'onde du laser produisant le potentiel. Si l'amplitude du potentiel  $V_0$  est assez grande, les atomes se concentreront préférentiellement dans les minima du potentiel et seront relativement localisés. Il est alors préférable de décomposer les opérateurs  $\hat{\psi}(\mathbf{x})$  sur la base des fonctions de Wannier  $w_{\mathbf{r},n}(\mathbf{x})$ , localisées sur un minimum  $\mathbf{r}$  de  $V_{\text{OL}}(\mathbf{x})$ . Les fonctions  $w_{\mathbf{r},n}(\mathbf{x})$  sont des superpositions de fonctions de Bloch  $\psi_{\mathbf{k},n}(\mathbf{x})$  de quasi-impulsions  $\mathbf{k}$  et de bande  $n$  :

$$w_{\mathbf{r},n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{k},n}(\mathbf{x}), \quad (1.46)$$

avec  $N \rightarrow \infty$  le nombre de minima du potentiel optique.

En supposant que la température et la densité sont suffisamment faibles, critère que nous estimerons plus bas, il est possible de se restreindre à la bande la plus basse (nous omettons à partir de maintenant l'indice de bande), et nous avons

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{r}} w_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) \hat{b}_{\mathbf{r}}, \quad (1.47)$$

où  $\hat{b}_{\mathbf{r}}$  est maintenant un opérateur d'annihilation d'un boson dans l'état de la fonction de Wannier correspondante. Comme nous nous intéresserons toujours à des fonctions

d'onde bien localisées, nous dirons que  $\hat{b}_{\mathbf{r}}$  ( $\hat{b}_{\mathbf{r}}^\dagger$ ) détruit (créé) un atome sur le site  $\mathbf{r}$  du réseau formé par les minima de  $V_{\text{OL}}$ . Nous avons bien entendu les relations de commutation canoniques  $[\hat{b}_{\mathbf{r}}, \hat{b}_{\mathbf{r}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$  (et les autres nulles), assurées par celles de  $\hat{\psi}^{(\dagger)}$  et par l'orthogonalité des fonctions de Wannier.

L'hamiltonien des bosons dans le réseau optique peut alors se réécrire

$$\hat{H} = - \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} (J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} + \mu_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}) \hat{b}_{\mathbf{r}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}'} + \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4} U_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4} \hat{b}_{\mathbf{r}_1}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}_2}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}_3} \hat{b}_{\mathbf{r}_4}, \quad (1.48)$$

où

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} &= - \int d\mathbf{x} w_{\mathbf{r}}^*(\mathbf{x}) \left( -\frac{\nabla^2}{2m} + V_{\text{OL}}(\mathbf{x}) \right) w_{\mathbf{r}'}(\mathbf{x}), \\ \mu_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} &= \mu \int d\mathbf{x} w_{\mathbf{r}}^*(\mathbf{x}) w_{\mathbf{r}'}(\mathbf{x}), \\ U_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4} &= \frac{4\pi a_3}{2m} \int d\mathbf{x} w_{\mathbf{r}_1}^*(\mathbf{x}) w_{\mathbf{r}_2}^*(\mathbf{x}) w_{\mathbf{r}_3}(\mathbf{x}) w_{\mathbf{r}_4}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Ici  $J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$  représente le terme de saut entre les sites  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$ , et  $U_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4}$  l'interaction entre atomes sur différents sites. Si  $V_0$  est assez grand, les fonctions de Wannier sont exponentiellement localisées et on peut considérer que l'interaction et le potentiel chimique sont locaux, tandis que les sauts se font uniquement entre plus proches voisins [42]. Il est alors possible de décrire le système par le modèle de Bose-Hubbard [3], défini par l'hamiltonien

$$\hat{H}_{\text{BH}} = -t \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} (\hat{b}_{\mathbf{r}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}'} + h.c.) + \frac{U}{2} \sum_{\mathbf{r}} \hat{n}_{\mathbf{r}} (\hat{n}_{\mathbf{r}} - 1) - \mu \sum_{\mathbf{r}} \hat{n}_{\mathbf{r}}, \quad (1.50)$$

où  $\hat{n}_{\mathbf{r}} = \hat{b}_{\mathbf{r}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}}$  est l'opérateur nombre sur le site  $\mathbf{r}$ ,  $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle$  indique que la somme est restreinte aux plus proches voisins<sup>q</sup>,  $t = J_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle}$  et  $U = 2U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathbf{r}}$ . Le réseau est composé de  $N$  sites et nous prendrons toujours la limite thermodynamique  $N \rightarrow \infty$ .

Si on approxime les fonctions de Wannier par des gaussiennes (c'est-à-dire les états fondamentaux des puits du potentiel périodique développé à l'ordre  $\mathbf{x}^2$ ,  $V_{\text{OL}}(\mathbf{x}) \approx \sum_i V_0 k^2 (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m \omega_0^2 (\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)^2$ , avec  $\mathbf{r}_i$  les positions des minima de  $V_{\text{OL}}$  et  $\omega_0 = \sqrt{2V_0 k^2 / m}$ ), il est possible de calculer analytiquement  $U$  et  $t$  [43]

$$\begin{aligned} t &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} E_R \left( \frac{V_0}{E_R} \right)^{3/4} \exp \left\{ -2 \sqrt{\frac{V_0}{E_R}} \right\}, \\ U &= \sqrt{\frac{8}{\pi}} k a_3 E_R \left( \frac{V_0}{E_R} \right)^{3/4}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

q. Il faut faire attention aux sommations sur les plus proches voisins, qui sont notées indifféremment dans la littérature  $-t \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} (\hat{b}_{\mathbf{r}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}'} + h.c.)$  et  $-t \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} \hat{b}_{\mathbf{r}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{r}'}$ . Dans l'espace réciproque, nous levons l'ambiguïté en définissant la relation de dispersion associée à des sauts entre premiers voisins par  $-2t \sum_{i=1}^d \cos(q_i)$ .

où  $E_R = k^2/2m$  est l'énergie de recul, c'est-à-dire le changement d'énergie cinétique que provoque l'absorption d'un photon du laser par un atome. Les termes négligés auparavant sont typiquement d'au moins deux ordres de grandeurs plus petits<sup>r</sup>. Observons en particulier qu'en augmentant l'amplitude du potentiel périodique, nous diminuons radicalement le terme de saut, sans trop varier l'interaction, permettant de choisir la valeur de  $t/U$ .

Nous pouvons maintenant donner une estimation des températures et potentiels chimiques minimaux qu'il faut atteindre. Pour se restreindre à une bande, il faut que le potentiel chimique et la température ne puissent pas exciter un atome dans une bande supérieure, ce qui dans l'approximation quadratique du potentiel donne  $\mu, T \ll \omega_0$ . Par ailleurs, il faut que l'énergie d'interaction entre particules ne leur permettent pas de quitter la première bande, et il faut donc  $U \ll \omega_0$ , ce qui est le cas tant que  $ka_3 \ll 1$ . Cette condition est toujours vérifiée en pratique,  $k^{-1} \approx 1\mu m$  tandis que  $a_3 \approx 1nm$ .

La physique du modèle de Bose-Hubbard est très simple à saisir qualitativement. Si l'interaction est très faible ( $U/t \rightarrow 0$ ), il est utile de se placer dans l'espace réciproque (en nous restreignant à la première zone de Brillouin), et  $\hat{H}_{BH}$  devient

$$\hat{H}_{BH} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} (t_{\mathbf{q}} - \mu) \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}} + \frac{U}{2} \sum_{\mathbf{r}} \hat{n}_{\mathbf{r}} (\hat{n}_{\mathbf{r}} - 1) - \mu \sum_{\mathbf{r}} \hat{n}_{\mathbf{r}}, \quad (1.52)$$

où  $t_{\mathbf{q}} = -2t \sum_{i=1}^d \cos(q_i l)$  est la dispersion sur le réseau hypercubique et  $l = \lambda/2$  est le pas du réseau. À basse énergie,  $t_{\mathbf{q}} \simeq -2dt + tl^2 \mathbf{q}^2$  et les atomes ont une masse effective  $m = 1/2tl^2$ . Comme l'interaction est négligeable, les atomes vont de préférence minimiser leur énergie cinétique, c'est-à-dire occuper l'état d'impulsion nulle  $\mathbf{q} = 0$ . Si  $\mu < -2dt$  et  $T = 0$ , le fondamental est le vide de particule. Autrement, en se plaçant dans l'ensemble canonique pour simplifier la discussion et en notant  $M$  le nombre de particules, l'état du système sera décrit en bonne approximation par la fonction d'onde

$$|GS\rangle \propto \left( \hat{b}_{\mathbf{q}=0}^{\dagger} \right)^M |0\rangle. \quad (1.53)$$

Dans la limite opposée ( $t/U \rightarrow 0$ ) et si le nombre d'atomes est commensurable avec le nombre de sites (un nombre entier  $\bar{n}_{loc}$  d'atomes par site), le système va favoriser un état où il y a exactement  $\bar{n}_{loc}$  atomes sur chaque site et geler les fluctuations du nombre d'atomes. Le fondamental va être de la forme

$$|GS\rangle \propto \Pi_{\mathbf{r}} (\hat{b}_{\mathbf{r}}^{\dagger})^{\bar{n}_{loc}} |0\rangle. \quad (1.54)$$

Nous avons alors affaire à un isolant de Mott (car il n'y a pas de transport possible dû à la présence d'un gap dans le spectre) et il n'y a pas de condensat,  $\langle \hat{b} \rangle = 0$ . Nous nous attendons donc à trouver une transition de phase à une valeur donnée de  $t/U$ . Si

r. Notons quand même que pour  $t/U \simeq 0.2$ , les sauts vers les seconds et troisièmes plus proches voisins ne sont pas totalement négligeables, entraînant des corrections pour la masse effective des atomes de l'ordre de 10%.

par contre le nombre d'atomes par site n'est pas entier, les quelques atomes en trop (en moins, c'est-à-dire les trous en plus) vont pouvoir se délocaliser, nous obtenons un superfluide de quasi-particules (quasi-trous) au-dessus d'un isolant de Mott. Cette image, décrite par Fisher *et al.* [3], peut être rendue quantitative et permet de décrire la phase superfluide près de la phase de Mott, comme nous le verrons au chapitre IV. Nous décrivons maintenant les différentes approches théoriques possibles du modèle de Bose-Hubbard.

### 1.5.2 Champ moyen et théorie RPA pour le modèle de Bose-Hubbard

#### Théorie de champ moyen

La physique de la transition de Mott est un problème de fortes corrélations. C'est en effet la présence d'atomes sur les sites voisins qui bloque les sauts inter-sites. La présence du réseau est aussi indispensable : il est possible de prouver qu'un système de bosons invariant par transformation de Galilée est forcément superfluide à  $T = 0$  si la densité est finie<sup>s</sup>. La présence d'un réseau sous-jacent détruit cette invariance et il est possible d'avoir une phase non-superfluide. Reste maintenant à trouver l'approche théorique la plus simple permettant d'avoir accès à la physique de la transition.

Il a été montré que la théorie de Bogoliubov est incapable de décrire la transition de phase isolant-superfluide et prédit un état superfluide pour toute valeur de  $t/U$  finie [44]. La théorie minimale qui permet de trouver qualitativement la physique du modèle de Bose-Hubbard est une théorie de champ moyen différente de celle de Bogoliubov, suivie de l'intégration des fluctuations gaussiennes, qui est appelée "Strong-Coupling Random Phase Approximation" (que nous appellerons simplement RPA dans ce manuscrit) [44, 45, 46, 47, 48].

Dans la théorie de Bogoliubov,  $\hat{b}_{\mathbf{r}}$  est remplacé dans un premier temps par  $\phi_{\mathbf{r}} + \delta\hat{b}_{\mathbf{r}}$  dans  $\hat{H}_{\text{BH}}$ , avec  $\phi_{\mathbf{r}} = \langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle$  minimisant l'énergie libre. Dans un second temps, on étudie les fluctuations gaussiennes (quadratiques en  $\delta\hat{b}_{\mathbf{r}}$ ) autour de ce minimum. Comme nous l'avons dit plus haut, cela ne donne pas la bonne physique. C'est en effet la physique sur site qui est importante, alors qu'elle est traitée en champ moyen dans ce cas. L'idée est alors de faire le remplacement  $\hat{b}_{\mathbf{r}} \rightarrow \phi_{\mathbf{r}} + \delta\hat{b}_{\mathbf{r}}$  uniquement dans le terme de saut (proportionnel à  $t$ ) et de n'y garder que les termes d'ordre  $\delta\hat{b}$  au plus, tandis que la partie locale de l'hamiltonien est traitée exactement. On obtient alors l'hamiltonien champ moyen (en utilisant le fait que  $\phi$  sera constant par invariance par translation discrète, et en le choisissant réel)

$$\hat{H}_{\text{CM}} = \sum_{\mathbf{r}} \left\{ 2dt\phi^2 - 2dt\phi(\hat{b}_{\mathbf{r}}^\dagger + \hat{b}_{\mathbf{r}}) - \mu\hat{n}_{\mathbf{r}} + \frac{U}{2}\hat{n}_{\mathbf{r}}(\hat{n}_{\mathbf{r}} - 1) \right\}, \quad (1.55)$$

qui est maintenant local, *i.e.* ne couple pas les sites entre eux. Il est possible de calculer l'énergie libre du système via une théorie de perturbation en  $t$ , ce qui donne

<sup>s</sup>. On prouve même que la densité superfluide est égale à la densité de particules (contrairement à la densité du condensat qui est plus petite du fait des interactions).

à  $T = 0$

$$E(\phi) = E_0 + E_2\phi^2 + E_4\phi^4 + \dots \quad (1.56)$$

qui à la forme d'une énergie libre à la Ginzburg-Landau, avec  $E_0$  l'énergie dans l'isolant de Mott  $\phi = 0$  (voir aussi annexe C)

$$E_0 = \begin{cases} 0 & (\mu < 0), \\ -\bar{n}_{\text{loc}}\mu + \frac{U}{2}\bar{n}_{\text{loc}}(\bar{n}_{\text{loc}} - 1) & (\bar{n}_{\text{loc}} < \mu < \bar{n}_{\text{loc}} + 1), \end{cases} \quad (1.57)$$

où  $\bar{n}_{\text{loc}}$  est le nombre de bosons du système non-perturbé ( $t = 0$ ). On calcule facilement  $E_2$ , qui vaut

$$E_2 = 2dt + (2dt)^2 \left( \frac{\bar{n}_{\text{loc}} + 1}{\mu - U\bar{n}_{\text{loc}}} - \frac{\bar{n}_{\text{loc}}}{\mu - U(\bar{n}_{\text{loc}} - 1)} \right), \quad (1.58)$$

tandis que  $E_4$  est plus laborieux à obtenir [46], mais on peut montrer que ce terme reste positif près de la transition. L'état du système est donné par la minimisation de  $E(\phi)$ . Si  $E_2$  est positif, l'énergie libre est minimisée par  $\phi = 0$  et le système est isolant ( $\phi = 0 = \langle \hat{b}_{\mathbf{r}} \rangle$ ), tandis que le système est superfluide si  $E_2 < 0$ . La ligne de transition  $t_c(\mu)$  est donnée par la condition  $E_2 = 0$ , soit

$$t_c(\mu) = \frac{(\mu - \bar{n}_{\text{loc}}U)(\bar{n}_{\text{loc}}U - \mu - U)}{2d(\mu + U)}, \quad (1.59)$$

Nous montrons en figure 1.1 le diagramme de phase champ moyen défini par (1.59). Les phases isolantes de Mott avec  $\bar{n}_{\text{loc}}$  bosons par site ont la forme de lobes, dont les extrémités sont situées en  $(\mu_c, t_c(\mu_c))$ , avec  $\mu_c/U = \sqrt{\bar{n}_{\text{loc}}(\bar{n}_{\text{loc}} + 1)} - 1$ , et sont entourées par la phase superfluide. Par ailleurs, la phase de Mott est caractérisée par une compressibilité  $\kappa = \partial^2 E / \partial \mu^2 = \partial^2 E_0 / \partial \mu^2$  nulle (voir équation (1.57)). De plus, la ligne de densité constante et entière ( $\bar{n} = \partial E / \partial \mu = \bar{n}_{\text{loc}}$ ) entre dans le lobe de Mott correspondant par son extrémité<sup>t</sup>. Notons que pour  $\mu = pU$ , avec  $p$  entier, le système est toujours superfluide. Cela est dû à la dégénérescence des états à  $p$  et  $p + 1$  particules, qui implique une brisure spontanée de la symétrie  $U(1)$  même à  $t = 0$ , voir annexe C.

## Théorie RPA

Il est possible d'aller au-delà de l'approximation champ moyen expliquée précédemment en calculant les effets des fluctuations gaussiennes. Nous allons dériver cette théorie RPA en utilisant le formalisme de l'intégrale fonctionnelle, équivalente à la description opératorielle utilisée précédemment. Cette approche à l'avantage de faire le lien avec le groupe de renormalisation non perturbatif que nous utiliserons

<sup>t</sup>. Le fait que la transition à travers l'extrémité du lobe se produit à densité constante peut être compris grâce à l'argument suivant : si la ligne  $\bar{n} = p$  ( $p$  entier) dans le superfluide rejoignait le lobe de Mott correspondant ailleurs qu'à son extrémité, la compressibilité serait alors négative près de l'extrémité du lobe, ce qui est physiquement impossible [3].

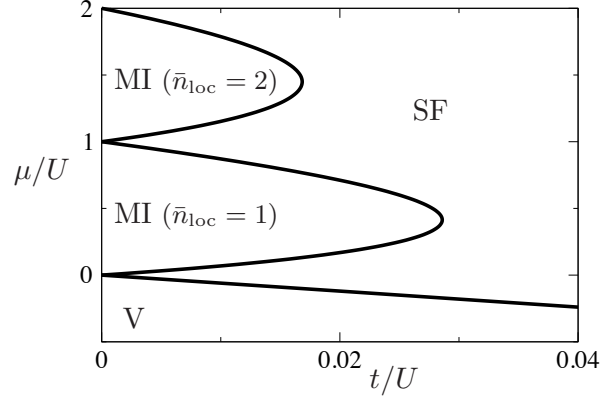


FIGURE 1.1 – Diagramme de phase du modèle de Bose-Hubbard en dimension trois donné par le champ moyen. SF dénote la phase superfluide, V le vide (densité nulle d’atome) et MI la phase isolante de Mott avec  $\bar{n}_{\text{loc}}$  atomes par site.

tout au long du manuscrit. Pour cela, il nous faut passer de l’hamiltonien du modèle de Bose-Hubbard  $\hat{H}_{\text{BH}}$  (voir équation (1.50)) exprimé en fonction d’opérateurs d’annihilation (création) de boson  $\hat{b}_{\mathbf{r}}^{(\dagger)}$  à une action dépendant de champs complexes  $\psi_{\mathbf{r}}^{(*)}(\tau)$ . La procédure passant par les états cohérents est standard, voir par exemple [49], et on obtient l’action

$$\begin{aligned}
 S[\psi^*, \psi] &= \int_0^\beta d\tau \left\{ \sum_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}}^*(\tau) \partial_\tau \psi_{\mathbf{r}}(\tau) + H_{\text{BH}}[\psi^*, \psi] \right\}, \\
 &= \int_0^\beta d\tau \left\{ \sum_{\mathbf{r}} \left[ \psi_{\mathbf{r}}^*(\tau) (\partial_\tau - \mu) \psi_{\mathbf{r}}(\tau) + \frac{U}{2} |\psi_{\mathbf{r}}(\tau)|^4 \right] \right. \\
 &\quad \left. - t \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} (\psi_{\mathbf{r}}^*(\tau) \psi_{\mathbf{r}'}(\tau) + \text{c.c.}) \right\}, \\
 &= S_{\text{loc}}[\psi^*, \psi] - t \int_0^\beta d\tau \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} (\psi_{\mathbf{r}}^*(\tau) \psi_{\mathbf{r}'}(\tau) + \text{c.c.}),
 \end{aligned} \tag{1.60}$$

ce qui définit  $S_{\text{loc}}$ . Ici,  $\psi_{\mathbf{r}}(\tau)$  est un champ complexe dépendant du temps imaginaire  $\tau \in [0, \beta]$ , avec des conditions aux bords périodiques :  $\psi_{\mathbf{r}}(0) = \psi_{\mathbf{r}}(\beta)$  ( $\beta^{-1} = T$ ). Résoudre le problème de Bose-Hubbard est équivalent à calculer la fonctionnelle génératrice

$$Z[J^*, J] = \int \mathcal{D}[\psi, \psi^*] e^{-S[\psi^*, \psi] + J^* \cdot \psi + \psi^* \cdot J}, \tag{1.61}$$



ou, de manière équivalente, à calculer l'action effective, qui est la transformée de Legendre de  $Z$  (énergie libre de Gibbs) et qui dépend de  $\phi_{\mathbf{r}}(\tau) = \langle \psi_{\mathbf{r}}(\tau) \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi^*, \phi] &= J^* \cdot \phi + \phi^* \cdot J - \ln Z[J^*, J], \\ \frac{\delta \Gamma[\phi^*, \phi]}{\delta \phi_{\mathbf{r}}^*(\tau)} &= J_{\mathbf{r}}(\tau). \end{aligned} \quad (1.62)$$

L'état d'équilibre  $\phi_0$ , d'énergie libre  $\Gamma[\phi_0^*, \phi_0]$ , est donné par la minimisation de  $\Gamma$ ,

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_{\mathbf{r}}^*(\tau)}[\phi_0^*, \phi_0] = 0 \quad (1.63)$$

Par ailleurs, le propagateur  $G_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}(\tau, \tau') = -\langle \psi_{\mathbf{r}}(\tau) \psi_{\mathbf{r}'}^*(\tau') \rangle$  est donné par l'inverse de la dérivée (fonctionnelle) de  $\Gamma$  par rapport à deux champs. Dans la phase désordonnée ( $\langle \psi \rangle = 0$ ), cela donne

$$G_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}^{-1}(\tau, \tau') = -\frac{\delta^2 \Gamma[\phi^*, \phi]}{\delta \phi_{\mathbf{r}}(\tau) \delta \phi_{\mathbf{r}'}^*(\tau')} \equiv -\Gamma_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}^{(1,1)}(\tau, \tau'). \quad (1.64)$$

Nous allons maintenant calculer l'action effective dans l'approximation RPA, c'est-à-dire après avoir découpé le terme de saut comme dans l'approximation champ moyen,

$$\psi_{\mathbf{r}}^* \cdot \mathcal{T} \cdot \psi_{\mathbf{r}'} \rightarrow -\phi_{\mathbf{r}}^* \cdot \mathcal{T} \cdot \phi_{\mathbf{r}'} + \phi_{\mathbf{r}}^* \cdot \mathcal{T} \cdot \psi_{\mathbf{r}'} + \psi_{\mathbf{r}}^* \cdot \mathcal{T} \cdot \phi_{\mathbf{r}'} + \mathcal{O}(|\psi - \phi|^2), \quad (1.65)$$

où nous avons introduit la matrice de saut  $\mathcal{T}$  définie par

$$\psi^* \cdot \mathcal{T} \cdot \psi = -t \int_0^\beta d\tau \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} (\psi_{\mathbf{r}}^*(\tau) \psi_{\mathbf{r}'}(\tau) + \text{c.c.}) \quad (1.66)$$

et par définition  $\phi_{\mathbf{r}}(\tau) = \langle \psi_{\mathbf{r}}(\tau) \rangle$ . La fonction de partition en présence de source devient alors

$$\begin{aligned} Z_{\text{RPA}}[J^*, J] &= \int \mathcal{D}[\psi, \psi^*] e^{\phi^* \cdot \mathcal{T} \cdot \phi + (J^* - \phi^* \cdot \mathcal{T}) \cdot \psi + \psi^* \cdot (J - \mathcal{T} \cdot \phi) - S_{\text{loc}}[\psi^*, \psi]}, \\ &= e^{\phi^* \cdot \mathcal{T} \cdot \phi + \sum_{\mathbf{r}} W_{\text{loc}}[J_{\mathbf{r}}^* - \phi^* \cdot \mathcal{T} \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{r}}, J_{\mathbf{r}} - \mathbf{1}_{\mathbf{r}}^* \cdot \mathcal{T} \cdot \phi]}, \\ &= e^{W_{\text{RPA}}[J^*, J]} \end{aligned} \quad (1.67)$$

où  $\mathbf{1}_{\mathbf{r}}^{(*)}$  sélectionne la ligne (colonne)  $\mathbf{r}$  la matrice  $\mathcal{T}$  et  $W_{\text{loc}}$  est la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green locales

$$e^{W_{\text{loc}}[J^*, J]} = \int \mathcal{D}[\psi, \psi^*] e^{-S_{\text{loc}}[\psi^*, \psi] + J^* \cdot \psi + \psi^* \cdot J}. \quad (1.68)$$

La condition d'auto-cohérence se réécrit <sup>u</sup>

$$\phi_{\mathbf{r}}(\tau) = \frac{\delta W_{\text{RPA}}}{\delta J_{\mathbf{r}}^*(\tau)}[J^*, J], \quad (1.70)$$

ce qui permet de définir l'action effective, la fonctionnelle génératrice des vertex et transformée de Legendre de  $W_{\text{RPA}}$ , définie par

$$\Gamma_{\text{RPA}}[\phi^*, \phi] = J^* \cdot \phi + \phi^* \cdot J - W_{\text{RPA}}[J^*, J]. \quad (1.71)$$

En utilisant l'équation (1.67), on montre alors que

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{RPA}}[\phi^*, \phi] &= -t \int_0^\beta d\tau \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} (\phi_{\mathbf{r}}^*(\tau) \phi_{\mathbf{r}'}(\tau) + \text{c.c.}) + \sum_{\mathbf{r}} \Gamma_{\text{loc}}[\phi_{\mathbf{r}}^*, \phi_{\mathbf{r}}], \\ \frac{\delta \Gamma_{\text{RPA}}}{\delta \phi_{\mathbf{r}}^*(\tau)} &= J_{\mathbf{r}}(\tau), \end{aligned} \quad (1.72)$$

où nous avons défini l'action effective locale <sup>v</sup>

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{loc}}[\phi^*, \phi] &= \int_0^\beta d\tau \left\{ J^*(\tau) \phi(\tau) + \phi^*(\tau) J(\tau) \right\} - W_{\text{loc}}[J^*, J], \\ \frac{\delta \Gamma_{\text{loc}}[\phi^*, \phi]}{\delta \phi^*(\tau)} &= J(\tau). \end{aligned} \quad (1.73)$$

Il est maintenant apparent que la RPA revient à calculer exactement la partie locale de l'action locale et à traiter en champ moyen le terme de saut. Ainsi, le propagateur RPA vaut dans l'isolant de Mott et en transformée de Fourier (cf. équations (1.64) et (1.72))

$$\begin{aligned} G_{\text{RPA}}^{-1}(i\omega, \mathbf{q}) &= -t_{\mathbf{q}} - \Gamma_{\text{loc}}^{(1,1)}(i\omega), \\ &= -t_{\mathbf{q}} + G_{\text{loc}}^{-1}(i\omega), \end{aligned} \quad (1.74)$$

où nous avons sous-entendu que les fonctionnelles sont évaluées en champ nul ( $\phi_0 = 0$  dans la phase de Mott). Nous voyons ainsi que la fonction de Green prend une forme RPA (d'où son nom)

$$G_{\text{RPA}}(i\omega, \mathbf{q}) = \frac{G_{\text{loc}}(i\omega)}{1 - t_{\mathbf{q}} G_{\text{loc}}(i\omega)}, \quad (1.75)$$

---

u. Remarquons que l'équation auto-cohérente  $\langle \psi_{\mathbf{r}}(\tau) \rangle = \phi$  (qui sera constant du fait de l'invariance par translation du problème) peut se réécrire

$$\begin{aligned} \phi &= Z_{\text{RPA}}[0, 0]^{-1} \int \mathcal{D}[\psi, \psi^*] \psi_{\mathbf{r}}(\tau) e^{-\sum_{\mathbf{r}} S_{\text{loc}}[\psi_{\mathbf{r}}^*, \psi_{\mathbf{r}}] + 2dt \int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{r}} (\phi^* \psi_{\mathbf{r}}(\tau) + \phi \psi_{\mathbf{r}}^*(\tau))}, \\ &= \left. \frac{\delta \ln Z_{\text{loc}}}{\delta J^*(\tau)} \right|_{J=2dt\phi; J^*=2dt\phi^*}, \end{aligned} \quad (1.69)$$

et est l'équivalent quantique de la théorie de Weiss d'un système de spins où l'on impose un champ magnétique effectif mimant l'aimantation des spins voisins, celle-ci égale à l'aimantation moyenne du spin local.

v. Il y a un certain flottement dans les notations,  $\Gamma_{\text{RPA}}[\phi^*, \phi]$  dépendant de champs  $\phi_{\mathbf{r}}(\tau)$ , fonctions du temps et de l'espace, tandis que les fonctionnelles locales dépendent de champs ne variant que dans le temps.

où  $G_{\text{loc}}(\omega)$  est facilement calculable en source nulle

$$G_{\text{loc}}(i\omega) = \frac{\bar{n}_{\text{loc}} + 1}{i\omega + \mu - U\bar{n}_{\text{loc}}} - \frac{\bar{n}_{\text{loc}}}{i\omega + \mu - U(\bar{n}_{\text{loc}} - 1)}, \quad (1.76)$$

et  $\bar{n}_{\text{loc}}$  dépend du potentiel chimique et est le nombre de particules dans l'isolant de Mott (voir équation (1.57)). Ce propagateur a deux pôles, un de type particule (coût en énergie pour l'ajout d'une particule) d'énergie  $\omega_p = -\mu + U\bar{n}_{\text{loc}}$  et un de type trou  $\omega_h = -\mu + U(\bar{n}_{\text{loc}} - 1)$ . L'instabilité de la phase de Mott est signalée par un pôle à fréquence et impulsion nulles dans le propagateur, soit  $1 - t_{\mathbf{q}=0}G_{\text{loc}}(0) = 0$ , ce qui redonne la ligne de transition champ moyen (équation (1.59)). En particulier, la forme des lobes vient directement de la structure à deux pôles du propagateur local  $G_{\text{loc}}(i\omega)$ , qu'on ne peut retrouver avec la théorie de Bogoliubov.

Analysons maintenant le comportement du propagateur inverse RPA, en particulier sa structure en pôles, à basse énergie quand on s'approche de la transition isolant-superfluide (en restant dans la phase de Mott). Un développement à basses fréquence et impulsion de (1.74) donne (nous prenons le pas du réseau  $l = 1$  et nous faisons la continuation analytique  $i\omega \rightarrow \omega + i0^+$ )

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{RPA}}^{(1,1)}(\omega, \mathbf{q}) &= 2d(t_c(\mu) - t) + t\mathbf{q}^2 + \frac{(\bar{n}_{\text{loc}}^2 + \bar{n}_{\text{loc}} - 1)U^2 - 2U\mu - \mu^2}{(U + \mu)^2}\omega \\ &\quad - \frac{\bar{n}_{\text{loc}}(\bar{n}_{\text{loc}} + 1)U^2}{(U + \mu)^3}\omega^2 + \dots, \\ &= \delta_{\text{RPA}} + t\mathbf{q}^2 - Z_C^{\text{RPA}}\omega - V_A^{\text{RPA}}\omega^2 + \dots, \end{aligned} \quad (1.77)$$

ce qui définit les paramètres effectifs  $\delta_{\text{RPA}}$ , *etc.* comme fonction de  $\mu$ . En particulier, nous voyons qu'à un potentiel chimique donné, le propagateur inverse s'annule bien à  $\mathbf{q} = \omega = 0$  quand  $t \rightarrow t_c(\mu)$ . Remarquons que pour  $\mu = \mu_c = U(\sqrt{\bar{n}_{\text{loc}}(\bar{n}_{\text{loc}} + 1)} - 1)$  (à l'extrémité du lobe de l'isolant à  $\bar{n}_{\text{loc}}$  bosons par site),  $Z_C^{\text{RPA}} = 0$ , ce qui implique un comportement très différent dans le spectre de basse énergie. En effet, dans ce cas, les pôles se trouvent en

$$\omega_{\pm}(\mathbf{q}) = \pm \sqrt{\frac{t\mathbf{q}^2 + \delta_{\text{RPA}}}{V_A^{\text{RPA}}}} \quad (1.78)$$

et le système possède une symétrie particule-trou. Au point critique  $t = t_c(\mu_c)$ , le propagateur inverse se comporte comme

$$\Gamma_{\text{RPA}}^{(1,1)}(\omega, \mathbf{q}) = t\mathbf{q}^2 - V_A^{\text{RPA}}\omega^2, \quad (1.79)$$

impliquant des exposant  $\eta = 0$  et  $z = 1$ . Pour  $t < t_c(\mu_c)$ , le gap s'annule comme  $\sqrt{t_c(\mu_c) - t} = (t_c(\mu_c) - t)^{\nu z}$ , impliquant  $\nu = 1/2$ . Les exposants donnés par la théorie RPA sont de type champ moyen et seront corrigés lorsque les fluctuations spatiales seront incluses, voir discussion plus bas.

Si  $\mu \neq \mu_c$ ,  $Z_C^{\text{RPA}} \neq 0$  et on peut négliger le terme en  $\omega^2$ . On trouve alors un pôle en

$$\omega(\mathbf{q}) = \frac{\delta_{\text{RPA}} + t\mathbf{q}^2}{Z_C^{\text{RPA}}}. \quad (1.80)$$

En remarquant que  $Z_C^{\text{RPA}}$  est positif si  $\mu > \mu_c$  et négatif sinon, nous voyons que les excitations critiques sont de type particule au-dessus de l'extrémité du lobe et de type trou en-dessous<sup>w</sup>. Nous en déduisons directement que  $\eta = 0$  et  $z = 1/\nu = 2$ . Contrairement au cas précédent, ces exposants critiques sont exactes. De plus, les pôles ressemblent à ceux d'un gaz de bosons de masse (effective)  $Z_C^{\text{RPA}}/2t$  et de potentiel chimique (effectif)  $\delta_{\text{RPA}}/Z_C^{\text{RPA}}$ . À une renormalisation près de ces paramètres, l'image donnée par la RPA est la bonne, comme nous le discuterons au chapitre IV.

La physique du modèle de Bose-Hubbard est qualitativement décrite par la théorie RPA. Il est possible d'aller au-delà grâce à des approches de type Monte Carlo quantique [50, 51, 52, 53] ou des développements de type couplage fort (par exemple en puissance de  $t/U$  ou Théorie de Champ Moyen Dynamique) [54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64]. Le groupe de renormalisation non perturbatif sur réseau, dont l'implémentation sera présentée au chapitre III, rentre aussi dans cette deuxième catégorie.

### 1.5.3 Transitions de phase quantiques

Lors du passage de la phase superfluide à la phase isolante, le système subit une transition de phase du second ordre, la densité du condensat s'annulant continuellement. Cette transition ayant lieu à température nulle, ce sont donc les fluctuations quantiques qui détruisent la cohérence de la phase superfluide. Pour caractériser la physique de la transition isolant-superfluide, nous écrivons une action de basse énergie pour le système près de la transition (de manière phénoménologique [3], ou en se basant sur un calcul de type RPA (voir équation (1.77) et [1]))

$$S_{\text{eff}} = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \left\{ \psi^*(\mathbf{x}, \tau) \left( -Z_A \nabla^2 + Z_C \partial_\tau - V_A \partial_\tau^2 + \delta \right) \psi(\mathbf{x}, \tau) + \frac{\lambda}{2} |\psi(\mathbf{x}, \tau)|^4 \right\}, \quad (1.81)$$

après un développement en dérivées à l'ordre  $(\partial_\tau^2, \nabla^2)$  et  $Z_A, Z_C, V_A, \delta$  et  $\lambda$  sont des paramètres effectifs, dépendant a priori de  $\mu, t$  et  $U$ . En champ moyen, la transition a lieu pour  $\delta(\mu, t) = 0$ , définissant ainsi la ligne de transition  $t_c(\mu)$ . Du fait de l'invariance U(1) locale de l'action du modèle de Bose-Hubbard

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, \tau) &\rightarrow e^{i\alpha(\tau)} \psi(\mathbf{x}, \tau) \\ \mu(\tau) &\rightarrow \mu(\tau) + i\partial_\tau \alpha(\tau), \end{aligned} \quad (1.82)$$

il est possible de montrer que  $Z_C = -\partial\delta/\partial\mu$  (voir annexe B) impliquant  $Z_C = 0$  si  $\partial t_c/\partial\mu = 0$ , c'est-à-dire à l'extrémité des lobes de Mott, comme cela se vérifie bien

w. Du fait du développement en fréquence, les excitations de type trou sont invisibles quand  $\mu > \mu_c$  car de hautes énergies, tandis que ce sont les excitations de type particule qui sont gappées quand  $\mu < \mu_c$ .

au niveau RPA (cf. équation (1.77) et [1, 3]). Notons qu'il est *a priori* très difficile de relier les paramètres effectifs ( $Z_A$ ,  $Z_C$ , etc.) aux paramètres du modèle de Bose-Hubbard ( $U$ ,  $\mu$ ,  $t$ ). Nous montrerons au cours des chapitres suivants que le groupe de renormalisation non-perturbatif permet justement de calculer l'action effective en partant directement de l'hamiltonien microscopique.

À l'extrémité des lobes ( $Z_C = 0$ ), l'action effective est celle d'un modèle classique  $O(2)$  en dimension  $d + 1$ , le temps imaginaire jouant le rôle d'une dimension spatiale effective supplémentaire, impliquant un exposant dynamique  $z = 1$ . Nous nous attendons alors à ce que la physique universelle soit celle de ce modèle classique, que ce soit les exposants critiques ou les fonctions d'échelle. La dimension critique supérieure est alors donnée par  $d_{\text{eff}} = d + z = 4$ , soit  $d_c^+ = 3$ . Notons que l'entrée dans la phase de Mott par l'extrémité des lobes se fait à densité constante (et donc entière) et que l'absence de terme  $\partial_\tau$  peut se comprendre comme étant la conséquence d'une symétrie particule-trou (en particulier, les gaps d'excitations de type particule et trou sont tous deux nuls au point critique). Enfin, le point critique est multicritique, car il faut ajuster deux paramètres pour être à la transition : au niveau microscopique, ce sera  $\mu$  et  $t$  tandis que dans l'action de basse énergie, il faut  $\delta = Z_C = 0$ .

Si on s'intéresse à la transition ailleurs sur la ligne critique,  $Z_C$  est non nul et on peut négliger  $\partial_\tau^2$  à basse énergie. L'action effective est alors celle d'un gaz de Bose dilué (voir équation (1.10)) et on s'attend donc à la même phénoménologie. Les champs  $\psi^{(*)}$  décrivent alors un gaz de quasi-particules (quasi-trous), en fonction que l'on soit au-dessus (en dessous) de l'extrémité du lobe et la transition se produit avec un changement de densité (voir sections 1.3 et 1.5.2). L'exposant  $z = 2$  et la dimension critique supérieure est maintenant  $d_c^+ = 2$ . Cela implique que pour les deux dimensions physiques qui nous intéressent dans ce manuscrit,  $d = 2$  ou  $d = 3$ , nous avons toujours une des deux transitions à sa dimension critique supérieure, impliquant des corrections logarithmiques.

Signalons enfin qu'il n'y a eu que très peu d'étude de l'aspect critique du modèle de Bose-Hubbard [3, 1, 50] et que la grande majorité de sa compréhension provient du travail fondateur de Fisher *et al.*. En effet, les approches type développement en couplage fort reviennent souvent à étudier un problème avec un nombre fini de sites (ce qui rend difficile l'étude des fluctuations à grande distance), tandis que le groupe de renormalisation n'est usuellement utilisable qu'en couplage faible (alors que le modèle de Bose-Hubbard est un problème de couplage fort). Ainsi, le Groupe de Renormalisation Non-Perturbatif, que nous présentons dans le chapitre qui suit, est une des seules techniques permettant de montrer *ab initio* que le modèle de Bose-Hubbard possède bien les deux classes d'universalité présentées ci-dessus, comme nous le verrons au chapitre III.

#### 1.5.4 Modèle de Bose-Hubbard dans la limite diluée

Si la densité  $D$  de boson est assez faible ( $\bar{n} = Dl^d \ll 1$  est le nombre de bosons par site), le fondamental est toujours superfluide et nous pouvons oublier la physique de

la transition de Mott. De plus, pour des températures suffisamment basse,  $T \ll t$ , les effets du réseau peuvent être négligés et il est possible de prendre la limite continue de l'action du modèle de Bose-Hubbard, qui se met sous la forme

$$S = \int d\mathbf{x} \int_0^\beta d\tau \left\{ \psi^*(\mathbf{x}, \tau) \left( \partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - (\mu + 2dt) \right) \psi(\mathbf{x}, \tau) + \frac{g_d}{2} |\psi(\mathbf{x}, \tau)|^4 \right\}, \quad (1.83)$$

avec une masse effective  $m = 1/2tl^2$ , une constante d'interaction  $g_d = Ul^d$  et un potentiel chimique  $\mu + 2dt$ <sup>x</sup>. Le cut-off ultraviolet  $\Lambda$  est maintenant d'ordre  $l^{-1}$  et les conditions  $T \ll t$  et  $Dl^d \ll 1$  deviennent  $T \ll \Lambda^2/2m$  et  $D \ll \Lambda^d$ , ce qui est dans cette limite équivalent à  $\mu \ll \Lambda^2/2m$ . Nous voyons donc qu'à basse énergie et dans la limite diluée, un gaz dans un réseau optique se comporte comme un gaz dilué homogène, avec une masse effective  $m$  et une constante d'interaction effective  $g_d$ . Pour s'assurer que notre modèle effectif reproduit bien la bonne physique de basse énergie, nous devons choisir  $\Lambda$  de sorte que nous ayons la même longueur de diffusion que celle du modèle de Bose-Hubbard, qui est (voir calcul détaillé en [65])<sup>y</sup>

$$a_d = \begin{cases} \frac{l}{8\pi t/U + A} & (d=3), \\ \frac{le^{-4\pi t/U-C}}{2\sqrt{2}} & (d=2), \end{cases} \quad (1.84)$$

où  $A \simeq 0.1265$ . Nous prenons donc, en comparant avec les équations (1.8) et (1.14),

$$\Lambda = \begin{cases} \frac{4\pi^2 A}{l} & (d=3), \\ \frac{4\sqrt{2}}{l} & (d=2). \end{cases} \quad (1.85)$$

x. On utilise pour cela  $\hat{\psi}(\mathbf{x}) = l^{-d/2} \hat{b}_{\mathbf{x}}$ , avec  $\mathbf{x} = l\mathbf{r}$ , ainsi que  $\sum_{\mathbf{r}} = l^{-d} \int d^d x$  dans la limite  $l \rightarrow 0$ . Notons que  $t_{\mathbf{q}} = -2dt + tl^2 \mathbf{q}^2$  dans la limite  $|\mathbf{q}| \ll l^{-1}$ .

y. Cette longueur de diffusion est celle des bosons dans le réseau et non la vraie longueur de diffusion des atomes  $a_3$ , bien qu'elle n'en soit pas indépendante,  $U$  dépendant explicitement de  $a_3$ .



## Chapitre II

# Le groupe de renormalisation non-perturbatif

The fundamental laws necessary for the mathematical treatment of a large part of physics and the whole of chemistry are thus completely known, and the difficulty lies only in the fact that application of these laws leads to equations that are too complex to be solved.

---

P. A. Dirac

Nous présentons dans ce chapitre le groupe de renormalisation et en particulier son implémentation non-perturbative formulée par Wetterich. Nous discutons les différentes approximations possibles et leurs implications. Nous décrivons enfin une formulation récente et particulièrement adaptée pour le traitement de systèmes sur réseau. L'exemple du modèle de type Ising classique (théorie des champs avec une symétrie  $\mathbb{Z}_2$ ), la généralisation au cas quantique étant immédiate. Les notations sont données en annexe [A](#) et nous travaillerons avec un système à  $d$  dimensions d'espace.

### 2.1 Principes du groupe de renormalisation à la Wilson

À partir de la seconde moitié des années 60, l'idée de théories effectives permettant de décrire la physique à grande distance, après élimination des fluctuations à courte distance, prend son essor avec la décimation de blocs de spins à la Kadanoff [\[66\]](#). Wilson formalise ensuite l'idée de Groupe de Renormalisation (RG) [\[67, 68\]](#), ce qui lui permet d'expliquer de manière élégante les lois d'échelle rencontrées dans les phénomènes critiques. L'année suivante, Fisher et Wilson expose une technique permettant de contrôler les approximations faites lors d'un calcul de RG, par exemple d'exposants critiques, grâce au fameux développement en  $\epsilon = 4 - d$  [\[69\]](#). Nous exposons rapidement les idées du groupe de renormalisation, en s'inspirant de la revue



de Wilson et Kogut [70]<sup>a</sup>.

Le groupe de renormalisation n'est en soit qu'une manière intelligente de calculer une trace, c'est-à-dire d'obtenir la fonction de partition  $Z$  définie par

$$Z_k = \int \mathcal{D}\varphi e^{-H[\varphi, \{K\}]}, \quad (2.1)$$

où  $\varphi(\mathbf{x})$  est un champ fluctuant (représentant par exemple la magnétisation locale moyenne au point  $\mathbf{x}$  et choisi par simplicité comme étant un scalaire),  $H$  est un hamiltonien (nous avons absorbé la température apparaissant dans le poids de Boltzmann dans les paramètres  $\{K\}$  de  $H$ ). Un hamiltonien à symétrie  $\mathbb{Z}_2$  à la Landau-Ginzburg sera typiquement de la forme

$$H[\varphi, K] = \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{(\nabla\varphi(\mathbf{x}))^2}{2} + \frac{r_0}{2}\varphi(\mathbf{x})^2 + \frac{u_0}{4!}\varphi(\mathbf{x})^4 \right\}. \quad (2.2)$$

Nous voyons que l'ensemble des paramètres  $\{K\}$  caractérisant l'hamiltonien (aussi appelés constantes de couplage) sont ici aux nombres de deux,  $r_0$  et  $u_0$ <sup>b</sup>. En champ moyen, c'est-à-dire en négligeant les fluctuations autour de la configuration minimisant  $H$ ,  $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_0$ , le système change de phase en  $r_0 = 0$ , passant d'une phase symétrique  $\varphi_0 = 0$  si  $r_0 > 0$  à une phase brisant spontanément la symétrie  $\mathbb{Z}_2$  si  $r_0 < 0$ , avec  $\varphi_0 = \pm\sqrt{\frac{6|r_0|}{u_0}}$ .

L'étude de la transition de phase équivaut alors à travailler à  $r_0 = 0$  et l'étape naturelle suivante serait de développer l'exponentielle dans l'équation (2.1) en puissance de  $u_0$  et de calculer les différentes quantités d'intérêt en perturbation. Cela est néanmoins impossible, la théorie de perturbation étant mal définie, du fait de la présence de divergences infrarouges dans le développement en boucle pour  $d \leq 4$ . En particulier, le critère de Ginzburg [72] précise que la théorie de perturbation n'a de sens que pour  $r_0$  grand devant  $u_0^{\frac{2}{4-d}}$  lorsque  $d \leq 4$ . Pour formuler cela autrement, remarquons que  $u_0$  a la dimension d'une longueur à la puissance  $d - 4$  (ce que nous notons par  $[u_0] = 4 - d$ ), tandis que  $[r_0] = 2$ . En champ moyen, on identifie  $\xi \propto r_0^{-1/2}$  comme étant la longueur de corrélation<sup>c</sup>, tandis  $\xi_G \propto u_0^{\frac{1}{d-4}}$  est la longueur de Ginzburg. Le critère de Ginzburg est maintenant  $\xi \ll \xi_G$ . Le régime critique, dans lequel les fluctuations à longue portée gouvernent la physique (et la transition de phase), est déterminé par  $\xi \gg \xi_G$ <sup>d</sup>. Ce problème de divergences infrarouges peut encore être reformulé en disant que les corrections de self-energy des modes  $\varphi(\mathbf{p})$  d'impulsion

a. Pour une introduction aux phénomènes critiques et au groupe de renormalisation, voir le très bon livre de Goldenfeld [71].

b. Le coefficient du gradient est choisi par convention (*i.e.* par normalisation des champs) comme étant égal à  $\frac{1}{2}$ .

c. C'est immédiat ici, mais cela demande plus de précaution dans la phase ordonnée, s'il y a brisure de symétrie continue, voir par exemple [30].

d. Dans la phase ordonnée, et dans le cas de brisure spontanée d'une symétrie continue,  $\xi$  s'identifie à la longueur de Josephson  $\xi_J$  signalant le départ du régime critique pour des longueurs plus grandes que  $\xi_J$  et l'entrée dans un régime dominé par les modes de Goldstone.

$|\mathbf{p}| \ll p_G = \xi_G^{-1}$  sont non-perturbatives, dans le sens que la self-energy ne peut être calculée en puissance de  $u_0$ , tandis que le traitement perturbatif de  $u_0$  est possible pour  $|\mathbf{p}| \gg p_G$ <sup>e</sup>. Nous voyons donc que faire la trace de  $\exp(-H)$  sur tous les modes en développant en puissance de  $u_0$  est une mauvaise idée en dimension inférieure ou égale à quatre.

Wilson propose d'intégrer en premier les modes rapides (grandes impulsions, petites distances), qui ne contribuent finalement qu'assez peu à la physique de la transition de phase et de regarder ce que cela apporte comme modification sur la physique des modes lents (basses impulsions, grandes distances). Il est important de se rappeler que  $H$  est déjà un hamiltonien effectif décrivant la physique de la transition de phase. En particulier, cela signifie que notre modèle n'est valable que pour des distances grandes devant  $\Lambda^{-1}$ , où  $\Lambda$  est un cut-off ultraviolet. L'impulsion des modes  $\varphi(\mathbf{p})$  est donc comprise qu'entre 0 et  $\Lambda$  et nous signalons maintenant ce fait en notant la dépendance de l'Hamiltonien en  $\Lambda$  :  $H[\phi, \{K\}] \rightarrow H_\Lambda[\phi, \{K_\Lambda\}]$ . Le schéma wilsonien du groupe de renormalisation consiste à séparer les modes du champ en parties rapide et lente, *i.e.*

$$\varphi(\mathbf{p}) = \varphi^>(\mathbf{p}) + \varphi^<(\mathbf{p}), \quad (2.3)$$

où par définition

$$\varphi^{\leq}(\mathbf{p}) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{p}) & \text{si } |\mathbf{p}| \leq k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Ici,  $k$  est une échelle d'impulsion *a priori* quelconque. La fonction de partition est indépendante de la façon dont nous intégrons les modes

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\varphi e^{-H_\Lambda[\varphi, \{K_\Lambda\}]}, \\ &= \int \mathcal{D}\varphi^> \mathcal{D}\varphi^< e^{-H_\Lambda[\varphi^< + \varphi^>, \{K_\Lambda\}]}, \\ &= \int \mathcal{D}\varphi^< e^{-H_k[\varphi^<, \{K_k\}]}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

où  $e^{-H_k[\varphi^<, \{K_k\}]} = \int \mathcal{D}\varphi^> e^{-H_\Lambda[\varphi^< + \varphi^>, \{K_\Lambda\}]}$  définit l'hamiltonien effectif des modes lents  $H_k[\varphi^<, \{K_k\}]$ , donc le cut-off est maintenant  $k$ . Nous avons indiqué explicitement que les constantes de couplage  $\{K_k\}$  dépendent *a priori* de l'échelle  $k$  jusqu'à laquelle nous avons intégré les modes. En particulier, même si nous n'avons que deux constantes  $r_0$  et  $u_0$  pour  $k = \Lambda$ , l'intégration des modes rapides générera toutes les constantes de couplage autorisées par les symétries du problème. Enfin, en regardant l'évolution  $H$  entre  $k$  et  $k + dk$ , il est possible de générer des équations de flot pour les constantes de couplages  $K_k$

$$k\partial_k K_k = \beta(\{K_k\}), \quad (2.6)$$

---

e. Remarquons que nous avons rencontré le même type de problème pour les systèmes bosoniques au chapitre précédent.

définissant ainsi les fonctions  $\beta$ . Notons enfin que pour trouver des points fixes  $\{K^*\}$  tels que  $\beta(\{K^*\}) = 0$ , il est nécessaire de redéfinir les champs et les impulsions lors de l'intégration des modes, de sorte que  $k$  soit ramené à sa valeur initiale  $\Lambda$  et que le terme en gradient conserve un facteur  $\frac{1}{2}$ . Si les constantes de couplage s'annulent quand nous intégrons les modes rapides (à terme cinétique constant), elles sont qualifiées d'irrelevantes par rapport au point fixe gaussien (*i.e.* non pertinentes pour la physique de basse énergie, qui sera champ moyen) tandis que si elles atteignent des valeurs finies (ou divergent), la physique est non-triviale (*i.e.* non-gaussienne) et très différente du champ moyen.

Si le flot de RG amène le système à un point fixe, cela implique une invariance d'échelle, c'est-à-dire que la longueur de corrélation du système est infinie : c'est le point critique d'une transition de phase du second ordre<sup>f</sup>. La température du système (entrant dans l'hamiltonien par exemple sous la forme  $r_0 \propto T - T_0$ , avec  $T_0$  la température critique en champ moyen) est un paramètre pertinent : pour être au point critique, il faut ajuster finement la température du système à sa température critique  $T_c$  (avec  $T_c$  la vraie température critique, *i.e.* incluant des corrections à  $T_0$  du fait des fluctuations). Si ce n'est pas le cas, le système est dans une des phases (ordonnée ou désordonnée) et possède une longueur de corrélation finie (c'est-à-dire que la physique à basse énergie n'est pas contrôlée par le point fixe de la transition). Les valeurs de point fixe des constantes de couplage sont indépendantes des conditions initiales du flot (c'est-à-dire des paramètres microscopiques de l'hamiltonien comme  $u_0$ ), ce qui explique l'universalité observée dans les transitions du deuxième ordre : tous les systèmes dont la transition est décrite par un même point fixe possèdent la même physique au voisinage de la transition de phase. Dans la majorité des cas, le point fixe est déterminé par la dimension de l'espace et les symétries du paramètre d'ordre. Enfin, le comportement du flot à proximité du point fixe permet d'extraire les exposants critiques.

D'autres implémentations des idées de Wilson pour intégrer les modes rapides et calculer l'hamiltonien effectif des modes lents ont été proposées par Wegner et Houghton [73] ainsi que Polchinski [74], qui a été capable de prouver avec cette méthode que la théorie  $\varphi^4$  est renormalisable (au sens de la théorie des champs) en dimension quatre. Ce sont des formulations fonctionnelles du groupe de renormalisation (*i.e.* plus générales que ce que nous avons exposé plus haut) et donc *a priori* assez puissantes. On écrit une équation de RG directement pour l'hamiltonien des modes lent  $H_k[\varphi]$  et non pour les constantes de couplages, ce qui permet de garder une dépendance arbitraire dans les champs. L'implémentation se fait en modifiant le terme cinétique *via* l'introduction d'un régulateur infrarouge. Il a été remarqué que les résultats obtenus sont néanmoins difficilement contrôlables (*i.e.* dépendent de façon trop sévère du régulateur infrarouge), ce qui a entraîné leur abandon de façon plus ou moins effective. L'implémentation du RG à la Wetterich, qui sera décrite de manière approfondie dans le reste de ce chapitre, est elle beaucoup moins sensible à

---

f. L'autre possibilité, moins intéressante pour notre discussion, est que la longueur de corrélation est nulle.

ces problèmes et est donc la meilleure façon de faire du groupe de renormalisation fonctionnel (bien que la méthode de Polchinski soit préférée pour donner des preuves formelles aux propriétés de flots du groupe de renormalisation)

## 2.2 Le groupe de renormalisation non-perturbatif : concepts

Le groupe de renormalisation fonctionnel a connu un renouveau à partir du début des années 90, sous l'impulsion des travaux de Wetterich [75, 76, 77, 78], publiés dans la même période que ceux de Ellwanger [79] et Morris [80, 81, 82]. Nous appellerons cette version du groupe de renormalisation Groupe de Renormalisation Non Perturbatif (NPRG). Il faut aussi noter les travaux, très proches au niveau des idées, de Parola et Reatto [83, 84, 85, 86, 87], publiés quelques années plus tôt, qui visent surtout à des applications en physique des liquides. Une très bonne introduction au NPRG (ainsi qu'à ses relations avec le groupe de renormalisation perturbatif) est donné en [88]. Cette formulation, que nous détaillerons juste après, a été appliquée à un très grand nombre de sujets [89], allant de la gravité quantique [90] à la physique hors d'équilibre [91, 92], en passant par les systèmes désordonnés [93, 94] ou les atomes froids [95, 96, 97, 98, 99, 40, 41, 100, 101].

L'idée est toujours celle de Wilson mais c'est son implémentation qui change. Là où Wilson et Polchinski renormalisaient l'action (ou l'hamiltonien) apparaissant dans l'intégrale fonctionnelle, le but est maintenant d'écrire une équation différentielle pour l'action effective moyenne  $\Gamma_k$  (énergie libre de Gibbs, donnant accès à toutes les fonctions de corrélation) définie comme une transformée de Legendre (légèrement modifiée, voir plus bas) du logarithme de la fonction de partition

$$Z_k[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi - \Delta S_k[\varphi]}, \quad (2.7)$$

où  $J$  est une source externe et  $S$  est l'action du problème (voir par exemple l'hamiltonien de l'équation (2.2))<sup>g</sup>.

Pour réaliser l'intégration des modes rapides tout en bloquant celle des modes lents, nous avons ajouté un terme de régulateur à l'action

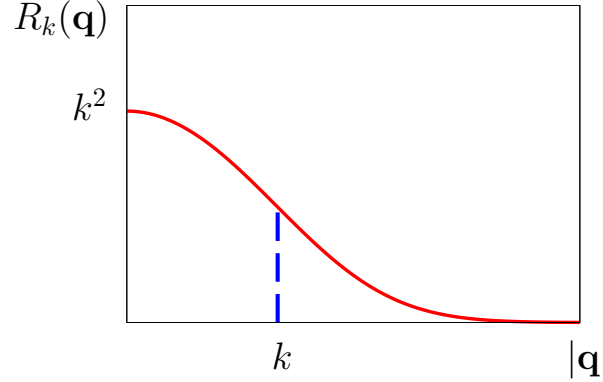
$$\Delta S_k[\varphi] = \frac{1}{2} \varphi \cdot R_k \cdot \varphi, \quad (2.8)$$

dépendant explicitement d'un paramètre d'échelle  $k$ , ayant la dimension d'une impulsion. Cette impulsion caractéristique sépare les champs rapides ( $\varphi(\mathbf{q})$  tel que  $|\mathbf{q}| \gtrsim k$ ) des champs lents ( $\varphi(\mathbf{q})$  tel que  $|\mathbf{q}| \lesssim k$ ).

Pour jouer son rôle, le régulateur infrarouge  $R_k(\mathbf{q})$  doit remplir plusieurs conditions. Premièrement, il doit tendre vers zéro pour des impulsions très grandes devant

---

g. Voir notations en annexe A.

FIGURE 2.1 – Forme typique du régulateur infrarouge à  $k$  fini.

$k$  et avoir une valeur finie pour  $|\mathbf{q}| \ll k$ .  $\Delta S_k[\varphi]$  étant quadratique en champ, le choix

$$R_k(\mathbf{q}) \simeq k^2, \quad (2.9)$$

pour  $q \ll k$ , permet d'interpréter  $R_k(\mathbf{q})$  comme un régulateur infrarouge, c'est-à-dire qu'il empêche les fluctuations à grande distance (*via* l'introduction d'une longueur de corrélation artificielle de l'ordre de  $k^{-1}$ ). Avec une terminologie de théorie des champs, en modifiant l'action avec  $\Delta S_k$ , nous ajoutons donc artificiellement une "masse" d'ordre  $k^2$  aux modes lents, réduisant leurs contributions à l'intégrale fonctionnelle, tandis les champs rapides ne sont pas affectés et sont ainsi intégrés normalement, comme dans le schéma wilsonien. Notons que nous avons le choix de la forme du régulateur, qui peut être une fonction douce (voir figure 2.1) ou dure (comme dans le schéma Wilsonien original).

Pour  $k \rightarrow 0$ , nous voulons retrouver la fonction de partition du modèle original (tous les modes ont été intégrés), ce qui implique  $R_k(\mathbf{q}) \rightarrow 0$  dans cette limite. La forme typique du régulateur en fonction de  $\mathbf{q}$  et  $k$  est donnée en figure 2.1. En faisant varier l'échelle  $k$ , nous allons pouvoir écrire une équation différentielle pour  $Z_k$  (et ainsi pour  $\Gamma_k$ ).

Reste le problème de la condition initiale à  $k = \Lambda$ , c'est-à-dire qu'il faut que nous soyons capables de calculer *exactement* la fonction de partition, en source quelconque, à l'échelle  $k = \Lambda$ . Le choix de cette condition initiale est ce qui fait la grande différence entre le NPRG usuel, que nous allons discuter tout de suite, et le NPRG sur réseau, dont les spécificités seront abordées à la section 2.4.

En choisissant  $R_{k \rightarrow \Lambda}(\mathbf{q}) \rightarrow \infty$ , tous les modes prennent une masse infinie et sont gelés. Le calcul de la fonction de partition est immédiat grâce à une approximation de point selle et nous trouvons

$$Z_\Lambda[J] = e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi - \Delta S_\Lambda[\varphi]}. \quad (2.10)$$

Il est plus intéressant de travailler avec la transformée de Legendre de  $Z_k$ . Nous définissons l'action effective moyenne par

$$\Gamma_k[\phi] = J \cdot \phi - \ln Z_k[J] - \Delta S_k[\phi], \quad (2.11)$$

où  $\phi(x) = \langle \varphi(x) \rangle = \delta \ln Z_k[J] / \delta J(x)$  est le paramètre d'ordre. La transformée de Legendre est légèrement modifiée, principalement pour que  $\Gamma_\Lambda[\phi] = S[\phi]$ , de sorte que le terme infini  $\Delta S_\Lambda[\phi]$  disparaisse et que la condition initiale soit le (vrai) champ moyen. Dans la limite  $k \rightarrow 0$ , nous avons bien  $\Gamma_{k=0} = \Gamma$ , où  $\Gamma[\phi]$  est l'action effective du problème d'origine. Il est facile d'écrire une équation exacte pour l'action effective moyenne, que nous appellerons équation de Wetterich [76]

$$\partial_k \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} \partial_k R_k(\mathbf{q}) G_k[\mathbf{q}, \phi], \quad (2.12)$$

où nous avons noté

$$G_k[\mathbf{q}; \phi] = \left[ \Gamma_k^{(2)}[\mathbf{q}, -\mathbf{q}; \phi] + R_k(\mathbf{q}) \right]^{-1} \quad (2.13)$$

et  $\Gamma_k^{(2)}[\mathbf{q}, -\mathbf{q}; \phi] = \delta^2 \Gamma_k[\phi] / \delta \phi_{-\mathbf{q}} \delta \phi_{\mathbf{q}}$  est le vertex à deux points<sup>h</sup>. Il faut noter que c'est le vrai propagateur (*i.e.* celui associé à la vraie transformée de Legendre de  $\ln Z_k$ ) qui apparait dans l'équation de flot. L'équation de Wetterich peut aussi se réécrire sous la forme

$$\partial_k \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \tilde{\partial}_k \int_{\mathbf{q}} \ln \left[ \Gamma_k^{(2)}[\mathbf{q}, -\mathbf{q}; \phi] + R_k(\mathbf{q}) \right], \quad (2.14)$$

où nous avons utilisé l'opérateur  $\tilde{\partial}_k \equiv \partial_k R_k(\mathbf{q}) \partial_{R_k}$ .

En prenant des dérivées fonctionnelles de l'équation de flot de  $\Gamma$  par rapport à  $n$  champs et en notant les fonctions de vertex à  $n$  points

$$\Gamma_k^{(n)}[\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n; \phi] = \frac{\delta^n \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi_{-\mathbf{q}_1} \dots \delta \phi_{-\mathbf{q}_n}}, \quad (2.15)$$

il est possible d'obtenir pour celles-ci une hiérarchie d'équations

$$\begin{aligned} \partial_k \Gamma_k^{(1)}[\mathbf{p}; \phi] &= \frac{1}{2} \tilde{\partial}_k \int_{\mathbf{q}} G_k[\mathbf{q}; \phi] \Gamma_k^{(3)}[\mathbf{q}, \mathbf{p}, -\mathbf{q}; \phi], \\ \partial_k \Gamma_k^{(2)}[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \phi] &= \frac{1}{2} \tilde{\partial}_k \int_{\mathbf{q}} G_k[\mathbf{q}; \phi] \Gamma_k^{(4)}[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}, -\mathbf{q}; \phi] \\ &\quad - \frac{1}{2} \tilde{\partial}_k \int_{\mathbf{q}} G_k[\mathbf{q}; \phi] \Gamma_k^{(3)}[\mathbf{p}_1, \mathbf{q}, -\mathbf{q}; \phi] G_k[\mathbf{q}; \phi] \Gamma_k^{(3)}[\mathbf{p}_2, \mathbf{q}, -\mathbf{q}; \phi], \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nous voyons que cette hiérarchie n'est pas fermée, l'équation de flot du vertex à  $n$  points faisant intervenir les vertex à  $n+1$  et  $n+2$  points.

---

h.  $\Gamma_k^{(2)}[\mathbf{q}, \mathbf{q}'; \phi]$  est aussi une fonctionnelle du champ  $\phi$ , comme les crochets  $[ ]$  le montre. En champ  $\phi$  constant, nous utiliserons des parenthèses  $( )$  pour dénoter la dépendance en impulsion et en champ, par exemple  $\Gamma_k^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; \phi) \equiv \Gamma_k^{(2)}[\mathbf{q}, \mathbf{q}'; \phi] \Big|_{\phi=\text{const}}$ . Dans ce cas, les impulsions sont conservées dans les fonctions de vertex :  $\Gamma_k^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; \phi) \equiv \delta_{\mathbf{q}, -\mathbf{q}'} \Gamma_k^{(2)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}; \phi)$ , etc.

L'intérêt des équations (2.12) et (2.16) n'est pas tant qu'elles soient exactes (il est facile d'écrire un grand nombre d'équations exactes inutiles ou insolubles), mais qu'il est possible de faire des approximations non-perturbatives par rapport aux constantes de couplage, comme nous allons le discuter dans la section suivante. Il est toutefois intéressant de noter que le simple remplacement  $\Gamma_k^{(2)}[\mathbf{q}, -\mathbf{q}; \phi] \rightarrow S^{(2)}[\mathbf{q}, -\mathbf{q}; \phi] = \delta^2 S[\phi] / \delta\phi_{-\mathbf{q}} \delta\phi_{\mathbf{q}}$  dans le membre de droite de (2.14) redonne un calcul à une boucle. L'équation étant exacte, il est bien entendu possible (au moins en principe) de s'en servir pour faire des calculs perturbatifs à des ordres plus élevés.

### 2.3 Approximations de l'équation de Wetterich

Il existe deux principaux schémas d'approximation des équations de flot du NPRG. Le premier consiste à proposer un ansatz pour l'action effective moyenne, organisé autour d'un développement en dérivées. C'est l'approximation la plus couramment utilisée et elle sera décrite en section 2.3.1. L'autre cherche à refermer la hiérarchie d'équations de flot (2.16) d'une façon ou d'une autre. Par exemple le développement en vertex à un ordre  $n$  donné (communément  $n = 4$ ) revient à poser  $\Gamma_k^{(n+1)} = \Gamma_k^{(n+2)} = 0$ . Une autre méthode proposée par Blaizot, Méndez-Galain et Wschebor (BMW), développée depuis 2006 et très prometteuse, sera décrite en section 2.3.2. Elle sera à la base de notre travail discuté au chapitre III.

Nous tenons à souligner que jusqu'à maintenant, nous n'avons pas donné une forme précise au régulateur infrarouge  $R_k$ . Bien entendu, si nous savions résoudre l'équation de Wetterich exactement, n'importe quelle fonction respectant les quelques recommandations données plus haut donnerait le bon résultat. Dès qu'une approximation est faite, les résultats obtenus dépendent explicitement du régulateur. Nous nous attendons par contre à ce que cette dépendance soit plus faible quand les approximations faites deviennent meilleures.

Pour illustrer cette idée, prenons une famille de régulateurs caractérisée par un paramètre  $\alpha$  (par exemple  $R_k(\mathbf{q}; \alpha) = \alpha(k^2 - \mathbf{q}^2)\theta(k^2 - \mathbf{q}^2)$ , où  $\theta$  est la fonction de Heaviside). La dépendance typique d'une quantité physique  $\eta$  calculée grâce au NPRG (par exemple un exposant critique) en fonction de  $\alpha$  est montrée en figure 2.2. Nous remarquons que  $\eta$  possède une dépendance artificielle en  $\alpha$ . Le principe de sensibilité minimum (PMS) stipule que la valeur optimale de  $\alpha$  doit être un extremum de  $\eta$ . En effet, si nous n'avons pas fait d'approximations,  $\eta$  serait indépendant de  $\alpha$ . Les points où la dépendance est minimum étant les maxima ou les minima, il est raisonnable de choisir un extremum de  $\eta$  comme étant meilleur<sup>i</sup>. La variation des valeurs optimales de  $\eta$  en fonction de l'ordre d'approximation ou de la famille de régulateurs choisie a de bonnes chances de donner l'erreur typique du résultat (voir par exemple [103] pour une étude des PMS pour le modèle  $O(N)$ ). Ces considérations

i. Bien entendu, on s'attend à ce que les valeurs optimales de  $\alpha$  pour différentes quantités physiques soient les mêmes, ou au moins proches. Pour choisir le meilleur extremum, il faut invoquer le principe de convergence rapide. Entre deux ordres successifs d'approximation  $n$  et  $n + 1$ , il faut choisir l'extremum de l'ordre  $n + 1$  le plus près de la valeur optimale à l'ordre  $n$ .

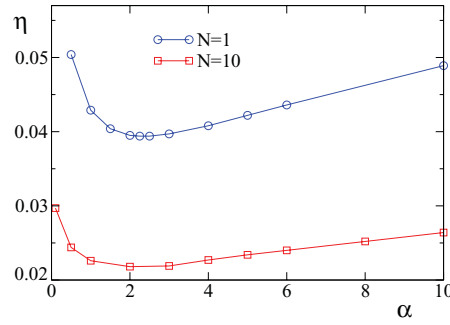


FIGURE 2.2 – Variation typique d’une quantité physique (ici l’exposant critique  $\eta$ ) en fonction du paramètre  $\alpha$  caractérisant une famille de régulateur (voir texte). Figure tirée de [102].

sont valables pour toutes les approximations que nous allons présenter ci-dessous, ainsi que pour les calculs perturbatifs tels que les développements en  $\epsilon$  (où  $\alpha$  est cette fois un paramètre de resommation des séries asymptotiques).

Il existe d’autres moyens de quantifier la qualité d’un résultat obtenu grâce au NPRG. L’étude de cas limites, tels que les développements en grand  $N$  (avec  $N$  le nombre de composantes du champ) ou en  $\epsilon = 4 - d$  et  $\epsilon = d - 2$  ont permis de montrer la validité du développement en dérivées et de l’approximation BMW. Il est aussi possible de tester la convergence d’un résultat en poussant les ordres de l’approximation (développement en champs, en dérivées, *etc.*).

### 2.3.1 Développement en dérivées

En général, le groupe de renormalisation a pour but l’étude des phénomènes à grande distance, ou de manière équivalente à petite impulsion, de par le principe même du “coarse-graining”. Les quantités physiques les plus intéressantes sont souvent celles qui sont uniformes (*i.e.*  $\mathbf{p} = 0$ , comme une magnétisation) ou les fonctions de corrélation à grande distance ( $|\mathbf{p}| \ll \Lambda^{-1}$ ). Dans ce cas, il est possible de postuler un ansatz pour  $\Gamma$  ne prenant en compte que les termes les plus bas en dérivées (en impulsions). L’ordre zéro de ce développement est l’approximation du potentiel local (LPA)

$$\Gamma_k^{\text{LPA}}[\phi] = \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{(\nabla\phi(\mathbf{x}))^2}{2} + U_k(\phi(\mathbf{x})) \right\} \quad (2.17)$$



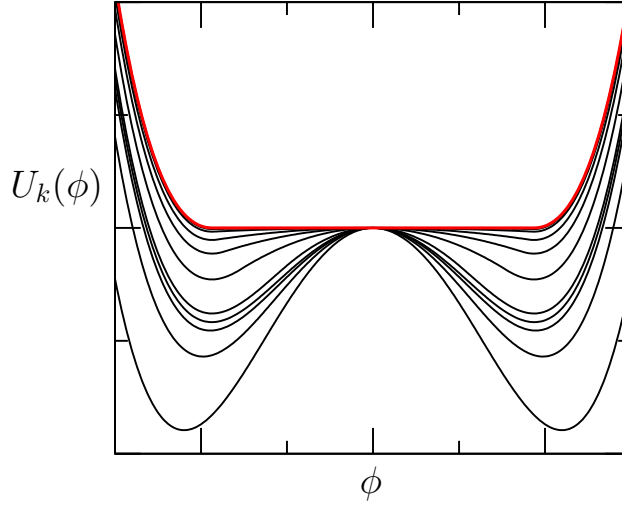


FIGURE 2.3 – Potentiel effectif  $U_k(\phi)$  en fonction de  $\phi$  (en unités arbitraires) pour différentes valeurs de  $k$ . Pour  $k = \Lambda$ , le potentiel prend la forme typique champ moyen en double puits (courbe la plus basse). Au cours du flot, la partie centrale de  $U_k(\phi)$  “s’aplatit” au fur et à mesure que  $k$  diminue (courbes de bas en haut), jusqu’à être convexe en  $k = 0$  (courbe rouge). Figure tirée de [104].

où  $U_k(\phi)$  est le potentiel effectif moyen ( $U_k(\phi) = \frac{1}{V} \Gamma_k[\phi] \Big|_{\phi=\text{const}}$ ,  $V$  est le volume du système)<sup>j</sup>. Ici, la quantité qui varie est la fonction  $U_k$  dont l’équation de flot est

$$\partial_k U_k(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} \frac{\partial_k R_k(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + U_k''(\phi)}, \quad (2.18)$$

qui peut se résoudre numériquement et donne déjà des résultats non triviaux. En particulier, cette équation implique la convexité du potentiel effectif dans la phase brisée, qui est une de ses propriétés principales mais difficile à obtenir dans la plupart des approches<sup>k</sup>. Cela implique aussi que pour  $k \rightarrow 0$ , les dérivées du potentiel effectif moyen deviennent de plus en plus difficiles à calculer numériquement. Nous montrons en figure 2.3 le flot du potentiel effectif  $U_k(\phi)$  dans la phase ordonnée. Au bout d’un certain temps, les minima du potentiel effectif, situés en  $\phi = \pm\phi_0$ , ne bougent plus (ainsi que la partie extérieure du potentiel,  $|\phi| > |\phi_0|$ ), tandis que la partie intérieure ( $|\phi| < |\phi_0|$ ) s’aplatit pour satisfaire la convexité à  $k = 0$ . Pour éviter ce coût numérique, mais en sacrifiant la convexité, il est souvent plus facile de faire

j. Il faut bien entendu garder au moins un terme en dérivée pour ne pas se retrouver avec une approximation n’ayant aucun sens, l’absence de dérivée entraînant l’absence de couplage entre points de l’espace voisins.

k. Le potentiel effectif à l’échelle  $k = 0$  étant une (vraie) transformée de Legendre, il doit être convexe. En phase brisée, le minimum de  $U$  se trouve en une valeur non nulle du champ  $\phi_0$ , ce qui implique que  $U(\phi)$  est une fonction constante pour  $|\phi| < \phi_0$  et croissante pour  $|\phi| > \phi_0$ .

un développement en champ du potentiel effectif autour de son minimum  $\phi_{0,k}$  (ici à l'ordre  $\phi^4$ )

$$U_k(\phi) = \begin{cases} U_{0,k} + \frac{\lambda_k}{8}(\phi^2 - \phi_{0,k}^2)^2 & \text{si } \phi_{0,k} > 0, \\ U_{0,k} + \frac{\delta_k}{2}\phi^2 + \frac{\lambda_k}{8}\phi^4 & \text{si } \phi_{0,k} = 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

et d'étudier le flot de  $U_{0,k}$ ,  $\phi_{0,k}$  (ou  $\delta_k$ ) et  $\lambda_k$ <sup>1</sup>. Par exemple, l'équation de RG de  $U_{0,k}$  en phase brisée est

$$\partial_k U_{0,k} = \frac{1}{2} \int_q \frac{\partial_k R_k(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + \lambda_k \phi_{0,k}^2} \quad (2.20)$$

et montre le coté non-perturbatif du NPRG, le propagateur contenant la constante de couplage dans son dénominateur. L'équation de flot correspond ainsi à une sommation d'un nombre infini de termes en puissance de  $\lambda_k$ .

Une limitation de la LPA est l'absence de dimension anormale  $\eta$  lors de l'étude des phénomènes critiques ( $\Gamma_{k=0}^{(2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}; \phi_0) \propto |\mathbf{p}|^{2-\eta}$  au point critique). Il est possible d'en tenir compte à partir de l'ordre deux du développement en dérivées, dont l'ansatz est

$$\Gamma_k^{\partial^2}[\phi] = \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{Z_k(\phi(\mathbf{x}))}{2} (\nabla\phi(\mathbf{x}))^2 + U_k(\phi(\mathbf{x})) \right\}, \quad (2.21)$$

où  $Z_k(\phi) = \partial_{\mathbf{p}^2} \Gamma_k^{(2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}; \phi)$  tient lieu de renormalisation du champ. Il reste alors à calculer numériquement les flots des deux fonctions  $U_k$  et  $Z_k$ . Le développement en dérivées a été poussé jusqu'à l'ordre quatre [105] dont les résultats rivalisent avec les meilleures estimations (simulations Monte Carlo, séries hautes températures, développements en  $\epsilon$ , *etc.*) en ce qui concerne les exposants critiques du modèle d'Ising.

Il existe enfin une approximation intermédiaire entre l'ordre deux et la LPA, parfois nommée LPA', qui consiste à remplacer dans l'équation (2.21) la fonction de renormalisation du champ par un nombre :  $Z_k \equiv Z_k(\bar{\phi}_k)$ , où  $\bar{\phi}_k$  est la plupart du temps le minimum  $\phi_{0,k}$  du potentiel effectif (c'est-à-dire la valeur physique du paramètre d'ordre). Il est ainsi possible de définir une dimension anormale (dépendant de l'échelle  $k$ )

$$\eta_k = -k \partial_k \ln Z_k, \quad (2.22)$$

qui prend une valeur de point fixe  $\eta^*$  à la criticalité (dans ce cas,  $Z_k \propto k^{-\eta^*}$ ).

Le développement en dérivées est un développement en puissance de  $|\mathbf{p}|/k$  (ou  $|\mathbf{p}|/m$  si le système possède un gap  $m$  fini) et ne donne en réalité que la valeur asymptotique des fonctions de corrélation dans la limite  $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$ . Il est néanmoins possible d'extraire de l'information à impulsion finie  $\mathbf{p}$  des  $\Gamma_{k=0}^{(n)}$  en arrêtant les flots de RG à une échelle  $k \simeq |\mathbf{p}|$ . En effet, les impulsions externes non nulles dans les équations de flot (2.16) ont l'effet d'un gap d'ordre  $|\mathbf{p}|$  dans les boucles ce qui arrête

1. Nous avons supposé ici que le potentiel  $U_k(\phi)$  est paire en  $\phi$ , comme c'est le cas si l'action microscopique  $S[\phi]$  a la symétrie  $\mathbb{Z}_2$ .

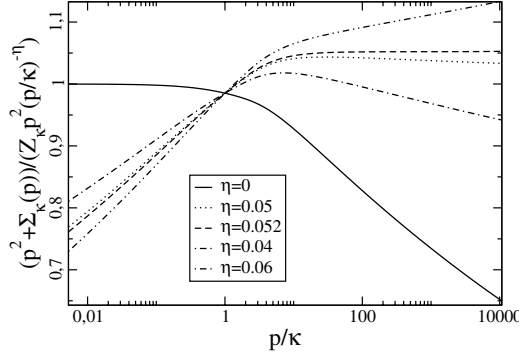


FIGURE 2.4 – Vertex à deux points à l'échelle  $k$  à la criticalité en fonction de  $|\mathbf{p}|/k$ ,  $\Gamma_k^{(2)}(\mathbf{p}, \phi = 0) / (Z_k \mathbf{p}^2 (|\mathbf{p}|/k)^\eta) = (\mathbf{p}^2 + \Sigma_k(\mathbf{p})) / (Z_k \mathbf{p}^2 (|\mathbf{p}|/k)^\eta)$ . Nous retrouvons le comportement décrit par l'équation (2.23) pour  $|\mathbf{p}|/k \ll 1$  ( $\eta = 0$ ) et  $|\mathbf{p}|/k \gg 1$  ( $\eta = \eta^* = 0.052$ ). Figure tirée de [106].

les flots quand  $k \lesssim |\mathbf{p}|$ . Cela a été montré grâce à l'approximation BMW [106], avec laquelle on observe que dans l'infrarouge et à la criticalité

$$\Gamma_k^{(2)}(\mathbf{p}, \phi = 0) \begin{cases} = Z_k \mathbf{p}^2 \propto k^{-\eta^*} \mathbf{p}^2 & \text{si } |\mathbf{p}| \ll k, \\ \propto |\mathbf{p}|^{2-\eta^*} & \text{si } |\mathbf{p}| \gg k, \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $\eta^* = \lim_{k \rightarrow 0} \eta_k$  est la valeur de la dimension anormale  $\eta_k$  au point critique. Le cross-over entre ces deux comportements est clairement visible en figure 2.4.

### 2.3.2 Approximation Blaizot–Méndez-Galain–Wschebor

En 2006, Blaizot, Méndez-Galain et Wschebor (BMW) proposent une nouvelle façon de refermer la hiérarchie d'équations (2.16) pour la fonction à 2 points en champ constant [107, 108, 109, 106, 110]<sup>m</sup>. Cette approximation est basée sur plusieurs observations. i) les équations de flot contiennent toutes un terme  $\partial_k R_k(\mathbf{q})$  dans les boucles (intégrales sur  $\mathbf{q}$ ) qui coupe les intégrales pour  $|\mathbf{q}| \gtrsim k$ . ii) De part la présence d'un terme de régulateur dans l'action, les fonctions de vertex  $\Gamma_k^{(n)}[\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n; \phi]$  sont des fonctions analytiques des impulsions. iii) Le développement en dérivées de l'action effective moyenne donne de bons résultats.

L'approximation BMW revient alors à développer les vertex à 3 et 4 points en fonction de  $|\mathbf{q}|/k$  dans (2.16) et de n'en garder que l'ordre 0, c'est-à-dire à poser

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{(3)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}, -\mathbf{q} - \mathbf{p}_1; \phi) &= \Gamma_k^{(3)}(\mathbf{p}_1, 0, -\mathbf{p}_1; \phi), \\ \Gamma_k^{(4)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}, -\mathbf{q}; \phi) &= \Gamma_k^{(4)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, 0, 0; \phi) \end{aligned} \quad (2.24)$$

m. Les équations que ces auteurs dérivent se trouvent aussi dans les travaux antérieurs de Parola et Reatto mais sans jamais être réellement exploitées [85, 87].

ainsi qu'à noter qu'en champ constant

$$\begin{aligned}\Gamma_k^{(n+1)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, 0; \phi) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{\partial}{\partial \phi} \Gamma_k^{(n)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \phi), \\ \Gamma_k^{(n+2)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, 0, 0; \phi) &= \frac{1}{V} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Gamma_k^{(n)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \phi).\end{aligned}\tag{2.25}$$

L'équation de  $\Gamma_k^{(2)}$  en champ constant devient donc

$$\begin{aligned}\partial_k \Gamma_k^{(2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}; \phi) &= \frac{1}{2} \tilde{\partial}_k \left[ \frac{\partial^2 \Gamma_k^{(2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}; \phi)}{\partial \phi^2} \int_{\mathbf{q}} G_k(\mathbf{q}; \phi) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial \Gamma_k^{(2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}; \phi)}{\partial \phi} \right)^2 \int_{\mathbf{q}} G_k(\mathbf{q}; \phi) G_k(\mathbf{p} + \mathbf{q}; \phi) \right],\end{aligned}\tag{2.26}$$

où nous rappelons que  $G_k(\mathbf{q}; \phi) = \left[ \Gamma_k^{(2)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}; \phi) + R_k(\mathbf{q}) \right]^{-1}$ . L'approximation BMW est relativement lourde numériquement, car elle demande de garder la dépendance à la fois en champ et en impulsion (ce qui fait deux variables pour les systèmes isotropes et invariant par translation, mais en demanderait quatre pour un système défini sur un réseau cubique), ce qui fait que la seule application est pour l'instant le modèle  $O(N)$  classique. Les résultats obtenus sont par contre impressionnants. Le calcul des exposants critiques, par exemple, donne de très bons résultats, mais c'est la possibilité de calculer les fonctions de corrélation pour toutes les impulsions et en source non nulle (par exemple en champ magnétique constant mais fini pour le modèle d'Ising) qui en fait une méthode promise à un bel avenir. Il est aussi possible de calculer les fonctions d'échelle universelles (dépendant d'un vecteur d'onde) [110, 102].

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, le développement en dérivées est en lui-même une bonne approximation dans un grand nombre de cas. Il est donc possible de simplifier la résolution des équations BMW en remplaçant  $G_k(\mathbf{q}; \phi)$  dans le membre de droite de (2.26) non par sa définition (ce qui rend l'équation de flot de  $\Gamma_k^{(2)}$  auto-cohérente) mais par son approximation calculée grâce au développement en dérivées. Nous n'avons ainsi qu'à résoudre les équations de flot du développement en dérivées (plus, par exemple, un développement en champ) et à calculer en plus l'évolution de  $\Gamma_k^{(2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}; \phi)$ . Il est même possible, pour simplifier encore, de ne calculer la fonction à deux points que pour une valeur du champ fixe  $\phi_{0,k}$  (le minimum du potentiel effectif, *i.e.* la configuration physique du champ). Ces approximations supplémentaires ont été utilisées pour le modèle  $O(N)$  [111] ainsi que pour les systèmes de bosons dilués [40, 41, 100, 101] et donnent de très bons résultats.

## 2.4 Le groupe de renormalisation non-perturbatif sur réseau

Lorsqu'on veut calculer des quantités non-universelles, par exemple un diagramme de phase, il est très important de garder l'information contenue dans l'ultraviolet (à courte distance). En effet, des quantités physiques telles que la température critique ou l'énergie du système dépendent fortement de la physique aux échelles microscopiques. Dans le cas de modèles définis sur réseau (comme le modèle de Bose-Hubbard présenté au chapitre I), un nombre fini de paramètres détermine toute la physique du système (l'énergie d'interaction  $U$ , le paramètre de saut  $t$ , le potentiel chimique  $\mu$  ainsi que le pas du réseau (et son type) et la température dans le cas du modèle de Bose-Hubbard). Le calcul du diagramme de phase, mais aussi de la valeur du paramètre d'ordre ou de celle du gap dans la phase désordonnée demande de tenir compte le plus efficacement possible des informations à l'échelle du réseau. Bien entendu, si la physique dans l'infrarouge est gouvernée par un point fixe, comme lors d'une transition de phase ou dans une phase superfluide, un grand nombre de caractéristiques du système sont universelles et peuvent être obtenues avec un modèle défini dans le continu. Par contre, il est à ce moment-là obligatoire d'utiliser une coupure ultraviolet qu'il est difficile de relier à la physique microscopique de manière univoque.

Il a été montré récemment qu'il était possible de modifier légèrement la formulation du NPRG pour tenir compte d'un réseau [112]. Cela a été développé en [113], où un changement de condition initiale de l'action effective moyenne, qui traite de manière exacte les fluctuations locales, a permis de calculer des quantités non-universelles. Cette reformulation du groupe de renormalisation est très intéressante quand la physique à l'échelle du réseau (ou locale) est cruciale pour déterminer le comportement du système, comme c'est le cas du modèle de Bose-Hubbard.

Nous allons présenter rapidement dans cette section le principe du NPRG sur réseau dans le cadre du modèle d'Ising, une étude détaillée est donnée en [113]. L'application aux bosons sur réseau (pour lesquels la physique locale est non triviale), est le sujet principal de cette thèse et sera présentée au chapitre III.

Prenons un système de spins d'Ising sur un réseau (hyper-)cubique, défini par la fonction de partition

$$Z[h] = \text{Tr} e^{J \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} + \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} h_{\mathbf{r}}}, \quad (2.27)$$

où  $S_{\mathbf{r}}$  est la valeur d'un spin sur le site  $\mathbf{r}$  (le système comporte  $N$  sites) et prend les valeurs  $\pm 1$ ,  $\sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle}$  est une somme sur les plus proches voisins et  $h_{\mathbf{r}}$  est la valeur du champ magnétique sur le site  $\mathbf{r}$ . Nous avons absorbé la température dans la constante de couplage  $J$ .

La façon usuelle de traiter ce problème est de faire une transformation d'Hubbard-Stratonovich qui donne une théorie des champs avec pour fonctionnelle génératrice

$$Z[h] = \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} \varphi_{-\mathbf{q}} \epsilon_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}} - \sum_{\mathbf{r}} (U(\varphi_{\mathbf{r}}) - h_{\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{r}})}, \quad (2.28)$$

où  $\varphi_{\mathbf{q}}$  est la transformée de Fourier de  $\varphi_{\mathbf{r}}$ ,  $\epsilon_{\mathbf{q}} = 2\left[d - \sum_{i=1}^d \cos(q_i)\right]$  est la dispersion<sup>n</sup> (avec  $\mathbf{q}$  appartenant à la première zone de Brillouin  $]-\pi, \pi]^d$ ) et  $U(\varphi)$  est un potentiel de la forme  $\ln \cosh(\varphi)$ <sup>o</sup>. En théorie de perturbation, le potentiel  $U$  est développé jusqu'à l'ordre  $\phi^4$  et on prend la limite continue ( $\epsilon_{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{q}^2$  et  $|\mathbf{q}| < \Lambda$ ). Notons l'introduction d'un cut-off ultraviolet  $\Lambda$  qui montre bien que nous perdons alors les informations précises de la physique à l'échelle du réseau. Ces approximations permettent toujours de calculer les exposants critiques de la transition paramagnétique-ferromagnétique, mais empêchent de calculer la température critique.

L'utilisation du NPRG n'impose pas de faire ces approximations (en particulier, il n'y a pas besoin de passer à la limite continue). La version usuelle du NPRG consiste à ajouter à l'action initiale un régulateur de la forme  $R_k(\mathbf{q}) = f_k(\epsilon_{\mathbf{q}}/k^2)$  avec  $\lim_{k \rightarrow \Lambda} R_k(\mathbf{q}) \rightarrow \infty$  et la seule différence avec un modèle défini dans le continu vient du fait que l'impulsion appartient à la première zone de Brillouin. En particulier, l'action effective moyenne au début du flot aurait la forme champ moyen (donnée par l'action microscopique du champ  $\phi$ , voir équation (2.28))

$$\Gamma_{\Lambda}^{\text{NPRG}}[\phi] = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} \phi_{-\mathbf{q}} \epsilon_{\mathbf{q}} \phi_{\mathbf{q}} + \sum_{\mathbf{r}} U(\phi_{\mathbf{r}}). \quad (2.29)$$

Nous présentons maintenant une formulation du NPRG sur réseau dont la condition initiale est différente du champ moyen.

### 2.4.1 Conditions initiales du NPRG sur réseau

Le NPRG sur réseau se propose de partir d'une condition initiale locale, *i.e.* de sites découplés. Bien entendu, un calcul exact serait indépendant de la condition initiale. Avec les approximations qu'il est obligatoire de faire, le choix du point de départ peut être primordial, en particulier pour les systèmes dont la physique est contrôlée par les fluctuations locales. Ce sera particulièrement le cas pour le modèle de Bose-Hubbard. Dans le cas de spins classiques, il peut être montré que le choix NPRG ou NPRG sur réseau donne exactement les mêmes résultats, du fait de la trivialité de la physique sur site [113].

Nous choisissons donc un régulateur qui découple les sites à l'échelle  $k = \Lambda^{\mathbf{p}}$ . De plus, à grande distance (ou petit  $k$ ), le réseau ne compte plus et nous voudrions retrouver les équations du continu, il faut ainsi un régulateur qui ressemble à ceux du continu dans la limite  $k \rightarrow 0$ . De même, il est agréable que  $R_k(\mathbf{q}) \rightarrow k^2$  quand  $q \ll k$ , de sorte que l'échelle  $k$  puisse s'interpréter comme une échelle d'impulsion à

n. Nous prenons le pas du réseau comme unité de longueur.

o. Nous laissons de côté les problèmes tels que l'inversion de la relation de dispersion lors de la transformation de Hubbard-Stratanovich, voir [113].

p. Dans le cadre du NPRG sur réseau,  $\Lambda$  est une échelle d'impulsion finie (de l'ordre de l'inverse du pas du réseau) et non une échelle d'énergie très grande devant toute les autres (comme c'est le cas habituellement en théorie des champs).

basse énergie. En particulier, le régulateur

$$R_k(\mathbf{q}) = Z_k(\epsilon_k - \epsilon_{\mathbf{q}})\theta(\epsilon_k - \epsilon_{\mathbf{q}}) \quad (2.30)$$

avec le choix  $\epsilon_k = k^2$ ,  $\Lambda = \sqrt{4d}$  et  $Z_\Lambda = 1$  ( $Z_k$  sera défini plus loin) remplit ces conditions <sup>q</sup>. À  $k = \Lambda$ , nous avons  $R_\Lambda = \epsilon_\Lambda - \epsilon_{\mathbf{q}}$  et la fonction de partition initiale vaut <sup>r</sup>

$$\begin{aligned} Z_\Lambda[h] &= \int \mathcal{D}\varphi e^{-\sum_{\mathbf{r}}(\frac{1}{2}\varphi_{\mathbf{r}}\epsilon_\Lambda\varphi_{\mathbf{r}}+U(\varphi_{\mathbf{r}})-h_{\mathbf{r}}\varphi_{\mathbf{r}})}, \\ &= \Pi_{\mathbf{r}}Z_{\text{loc}}(h_{\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (2.31)$$

où  $Z_{\text{loc}}(h_{\mathbf{r}})$  est une fonction génératrice locale définie par

$$Z_{\text{loc}}(h) = \int dx e^{-\frac{1}{2}\epsilon_\Lambda x^2+U(x)-hx}, \quad (2.32)$$

et nous avons changé de variable  $\varphi \rightarrow x$  pour souligner le fait que la fonction de partition locale est ici une simple fonction, qu'il faut néanmoins évaluer numériquement. Dans le cas des bosons, ce sera encore une fonctionnelle, l'intégrale se faisant sur des champs variant sur une dimension (le temps imaginaire).

En prenant la définition habituelle de l'action effective moyenne (voir équation (2.11)) <sup>s</sup>, nous obtenons

$$\Gamma_\Lambda[\phi] = \sum_{\mathbf{r}} \Gamma_{\text{loc}}(\phi_{\mathbf{r}}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} \phi_{-\mathbf{q}}\epsilon_{\mathbf{q}}\phi_{\mathbf{q}}, \quad (2.33)$$

où  $\Gamma_{\text{loc}}$  est l'action effective locale définie par

$$\Gamma_{\text{loc}}(\phi) = h\phi - \ln Z_{\text{loc}}(h) - \frac{1}{2}\epsilon_\Lambda\phi^2. \quad (2.34)$$

Nous voyons qu'avec le NPRG sur réseau, la condition initiale est l'action effective locale, que nous avons traitée exactement, à laquelle on a ajouté le couplage inter-site en champ moyen. L'équation de flot de l'action effective est exactement la même que pour les modèles dans le continu. Nous montrons en figure 2.5 la dispersion effective  $\epsilon_{\mathbf{q}} + R_k(\mathbf{q})$  apparaissant dans la fonction de partition pour différentes valeurs de  $k$ .

q. Avec le régulateur donné en (2.30) et le choix  $\Lambda \rightarrow \infty$ , nous retrouvons la condition initiale champ moyen du NPRG (voir [113]).

r. Il est facile de différentier la fonction de partition  $Z_k[h]$  et la renormalisation du champ  $Z_k$  grâce au contexte.

s. Nous pourrions parfaitement prendre une autre définition de l'action effective moyenne, vu qu'il n'y a pas de terme infini à soustraire dans le cadre du NPRG sur réseau. Dans le cas traité ici, il a été montré qu'une autre définition ne change pas les résultats. Nous discuterons pourquoi il est préférable de garder la définition habituelle dans le cas des bosons sur réseau au chapitre III.

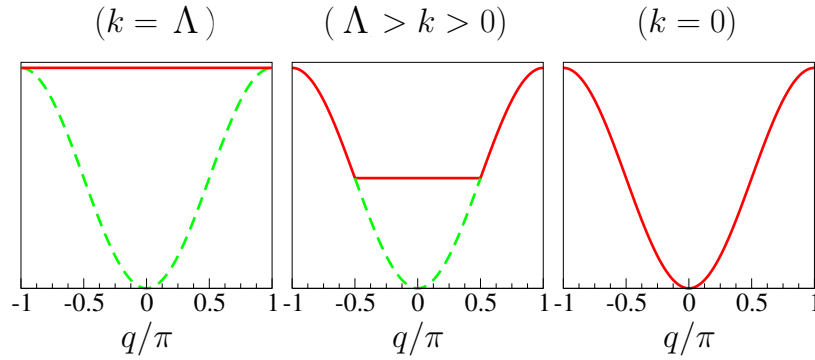


FIGURE 2.5 – Dispersion effective (ligne rouge)  $\epsilon_q + R_k(q)$  pour  $k = \Lambda$ ,  $0 < k < \Lambda$  et  $k = 0$  avec le régulateur (2.30). La ligne (tiret) verte montre la dispersion nue  $\epsilon_q = 2(\cos q - 1)$  à une dimension.

## 2.4.2 Approximations spécifiques au réseau

Il reste maintenant à approximer les équations de flot pour pouvoir les résoudre. L'approximation BMW (ainsi que les approximations supplémentaires que nous avons décrites précédemment en section 2.3.2) se généralise directement au réseau, une fois que les intégrales sur les impulsions sont restreintes à la première zone de Brillouin. Bien entendu, les conditions initiales pour le potentiel et le vertex à deux points seront celles calculées dans la limite locale. Pour le modèle de spin présenté ci-dessus, cela donne

$$\begin{aligned} U_{k=\Lambda}(\phi) &= \Gamma_{\text{loc}}(\phi), \\ \Gamma_{k=\Lambda}^{(2)}(\mathbf{q}; \phi) &= \epsilon_{\mathbf{q}} + U''_{k=\Lambda}(\phi), \end{aligned} \quad (2.35)$$

avec  $U''_k = \frac{\partial^2 U_k}{\partial \phi^2}$ . La méthode BMW n'a pour l'instant jamais été utilisée pour des systèmes sur réseau.

Le développement en dérivées, lui, mérite plus de discussion. En effet, appliqué comme dans le continu, cela revient à travailler avec le développement à petite impulsion de la dispersion,  $\epsilon_{\mathbf{q}} \simeq \mathbf{q}^2$ . Or nous voulons retenir le plus possible la structure du réseau, les quantités non-universelles en dépendant fortement. Pour cela, nous prenons comme ansatz pour l'action effective moyenne [112]

$$\Gamma_k[\phi] = \sum_{\mathbf{r}} \left\{ \frac{1}{2} \phi_{\mathbf{r}} \varepsilon_k(-i\nabla; \phi_{\mathbf{r}}) \phi_{\mathbf{r}} + U_k(\phi_{\mathbf{r}}) \right\}, \quad (2.36)$$

où  $\varepsilon_k(\mathbf{q}; \phi)$  est la dispersion renormalisée et dépendant du champ avec pour condition initiale  $\varepsilon_{\Lambda}(\mathbf{q}; \phi) = \epsilon_{\mathbf{q}}$ . La renormalisation du champ est définie par (voir équation (2.21))

$$Z_k(\phi) = \lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_k(\mathbf{q}; \phi)}{\epsilon_{\mathbf{q}}} = \lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_k(\mathbf{q}; \phi)}{\mathbf{q}^2} \quad (2.37)$$



et permet d'extraire la dimension anormale de la même façon que dans le continu. Une approximation possible serait de négliger la dépendance en champ de  $\varepsilon_k(\mathbf{q}, \phi)$ .

La résolution des équations de flot pour cet ansatz est numériquement lourde, car elle demande de calculer le flot de la fonction  $\varepsilon_k(\mathbf{q})$  pour toutes valeurs de  $\mathbf{q}$  appartenant à la première zone de Brillouin. Il existe deux façons de simplifier les calculs. La première consiste à faire un développement en harmoniques circulaires de  $\varepsilon_k$  <sup>t</sup>,

$$\varepsilon_k(\mathbf{q}) = \sum_{n,m,l=0}^L \epsilon_k^{nml} [\cos(nq_x) \cos(mq_y) \cos(lq_z) - 1] \quad (2.38)$$

à un ordre donné, défini par l'entier  $L$ . Il suffit alors de projeter l'équation de flot de  $\varepsilon_k$  sur les différentes harmoniques pour calculer les flots des paramètres  $\epsilon_k^{nml}$ . On s'attend à ce que l'harmonique  $\cos(nq_i)$  soit générée pour  $k \sim n^{-1}$ . De plus, le flot est coupé pour  $k \sim |\mathbf{q}|$ , ce qui implique que le développement en harmonique n'est valable que dans la limite  $L \gg \min(k^{-1}, |\mathbf{q}|^{-1})$  [112]. Dans la limite  $k \rightarrow 0$ , une troncation du développement ne peut pas décrire la limite  $\mathbf{q} \rightarrow 0$  et donc permettre de calculer une dimension anormale. Ne garder que le sous-ensemble  $\epsilon_k^{100} = \epsilon_k^{010} = \epsilon_k^{001}$  revient à ne renormaliser que l'amplitude du spectre nu  $\epsilon_{\mathbf{q}}$  (voir [113]).

Pour remédier à ce problème, il est possible d'adapter la LPA' au réseau, ce qui équivaut à choisir un ansatz pour  $\varepsilon_k$  de la forme

$$\varepsilon_k(\mathbf{q}) = Z_k \epsilon_{\mathbf{q}}, \quad (2.39)$$

où  $Z_k$  est défini par rapport au bas du spectre :

$$Z_k = \partial_{\mathbf{q}^2} \Gamma_k^{(2)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}; \phi_0) \Big|_{\mathbf{q}=0}, \quad (2.40)$$

et  $\phi_0$  est généralement donné par le minimum du potentiel effectif moyen <sup>u</sup>.  $Z_k$  ne doit pas être confondu avec la renormalisation de l'amplitude de la dispersion nue. Par définition, il reçoit des contributions de toutes les harmoniques, ce qui permet d'extraire une dimension anormale  $\eta_k = -k \partial_k \ln Z_k$ . La définition (2.40) n'est par contre pas cohérente avec l'ansatz (2.39). Dans la première,  $Z_k$  est une renormalisation du champ, tandis que dans la deuxième c'est une renormalisation de toute la dispersion. Il est possible de réconcilier ces deux équations en notant que pour  $k \sim \Lambda$ ,  $Z_k$  reste d'ordre 1, de sorte que l'approximation  $\varepsilon_k(\mathbf{q}) \simeq Z_k \epsilon_{\mathbf{q}}$ , qui n'est valide qu'à petit  $\mathbf{q}$ , reste correcte sur toute la zone de Brillouin. Dans la limite  $k \ll \Lambda$ , le régulateur imposant que  $|\mathbf{q}| \lesssim k$  dans les boucles, nous avons  $\varepsilon_k(\mathbf{q}) \simeq Z_k \epsilon_{\mathbf{q}} \simeq Z_k \mathbf{q}^2$ , avec  $Z_k$  la renormalisation du champ. Nous voyons que  $\varepsilon_k(\mathbf{q}) \simeq Z_k \epsilon_{\mathbf{q}}$  est là aussi une bonne approximation, justifiant donc la définition (2.40) de  $Z_k$  pour tout  $k$  [112]. Cela se vérifie en particulier dans les systèmes de spins [113] mais aussi pour les systèmes bosoniques, comme nous le verrons au chapitre suivant.

t. Nous ne donnons ici que le cas tridimensionnel, qui se généralise directement à  $d$  dimensions.

u. Bien entendu, il est possible de garder la dépendance de  $Z_k$  en  $\phi$ .

## Chapitre III

# Le groupe de renormalisation appliqué aux superfluides sur réseau

The important thing in science is not so much to obtain new facts as to discover new ways of thinking about them.

---

Sir W. L. Bragg

La physique du modèle de Bose-Hubbard est bien décrite par les développements en couplage fort, qui se focalisent par définition sur la physique locale (responsable de l'existence de la phase isolante). En particulier, le champ moyen obtient la transition de phase entre le superfluide et l'isolant de Mott et la théorie RPA donne une vision qualitative des mécanismes mis en jeu à la transition (voir discussion section 1.5.2). Il est par contre difficile de trouver le comportement critique dans ces approches. Le groupe de renormalisation est capable de saisir la physique de basse énergie décrivant le régime critique, mais l'approche usuelle ne peut être utilisée *ab initio* car perturbative. On est alors restreint à une approche effective, dont les paramètres sont difficiles à relier à la physique locale, cf. section 1.5.3.

Le groupe de renormalisation non-perturbatif sur réseau est un outil de choix pour s'attaquer à un problème de couplage fort présentant une transition de phase. En choisissant la condition initiale du flot de RG comme étant la limite de sites découplés, nous pouvons traiter la physique locale exactement. Les équations de flot permettent ensuite de coupler les sites entre eux avec l'avantage que nous retrouvons les équations du groupe de renormalisation dans le continu à basse énergie, donnant l'espoir de bien décrire les transitions de phase, gouvernées par les fluctuations à grande distance (voir chapitre II).

Nous tâchons maintenant d'appliquer le NPRG sur réseau au modèle de Bose-Hubbard, en nous restreignant dans ce chapitre au cas à température nulle. Nous

montrons que pour un régulateur  $R_k(\mathbf{q})$  bien choisi (équation (3.12)), l'action microscopique  $S_k = S + \Delta S_k$  au début du flot ( $k = \Lambda$ ) est locale<sup>a</sup>. Cela implique que l'action effective moyenne au début du flot est égale à l'action effective de la théorie RPA (voir équation (1.72)). La condition initiale du flot du NPRG est donc qualitativement correcte et les fonctions de corrélation ont une dépendance en fréquences non-triviale (provenant de la structure à deux pôles des propagateurs locaux).

Il est toutefois important de noter qu'il n'est pas possible de calculer l'action effective locale exactement (car l'action microscopique locale est celle d'un système en interaction). Néanmoins, en utilisant la représentation opératorielle de la fonction de partition locale (et des propagateurs locaux)<sup>b</sup>, il est possible de calculer l'action effective locale (et ses dérivées) en champ constant. Nous discutons alors en détail les conditions initiales du RG, en particulier le potentiel effectif  $V_\Lambda$  et le vertex à deux points  $\Gamma_\Lambda^{(2)}$  en champ constant (section 3.1.1). Comme nous ne pouvons pas calculer l'action effective locale pour des champs quelconques, c'est-à-dire dépendant du temps imaginaire, il est impossible d'écrire un ansatz pour l'action effective moyenne à  $k = \Lambda$ . Par contre, en nous rappelant que l'approximation BMW (voir section 2.3) ne fait appel qu'à  $V_k$  et  $\Gamma_k^{(2)}$  (en champ constant), nous pouvons écrire des équations de flot approximées cohérentes avec la condition initiale (section 3.1.4).

Pour montrer la puissance de la méthode, nous calculons ensuite les diagrammes de phase en dimension deux et trois, résultats en très bon accord quantitatif avec les simulations Monte Carlo (voir figure 3.5). Nous montrons également que le NPRG sur réseau permet de retrouver les deux classes d'universalité de la transition de Mott et qu'il donne accès aux exposants critiques non-triviaux pour le point multicritique. Par ailleurs, le régime critique est retrouvé dans notre approche et les quantités thermodynamiques obéissent aux bonnes lois d'échelle à l'approche de la transition (section 3.3).

L'annexe D est consacrée à l'étude de la phase superfluide. Nous montrons tout d'abord comment le NPRG retrouve la physique du gaz de Bose dilué (théorie de Bogoliubov), puis nous nous intéressons au comportement infrarouge du flot du groupe de renormalisation. Nous caractérisons par ailleurs l'évolution des échelles caractéristiques  $k_h$  (inverse de la longueur de cicatrisation) et  $k_G$  (inverse de la longueur de Ginzburg, voir chapitre I) à l'approche de la transition de Mott. Enfin, nous discutons les fonctions spectrales en dimension deux et trois.

a.  $S$  est l'action du modèle de Bose-Hubbard et  $\Delta S_k = \psi^* \cdot R_k(\mathbf{q}) \cdot \psi$ .

b. Nous utiliserons le fait que

$$Z_{\text{loc}}(J^*, J) = \int \mathcal{D}[\psi, \psi^*] e^{-S_{\text{loc}}[\psi^*, \psi] + J^* \int_0^\beta d\tau \psi(\tau) + J \int_0^\beta d\tau \psi^*(\tau)} = \text{Tr} \left\{ e^{-\beta (\hat{H}_{\text{BH}} - J^* \hat{b} - J \hat{b}^\dagger)} \right\},$$

où  $J$  et  $J^*$  sont des sources constantes (voir section 1.5 pour la définition des différents termes).

### 3.1 Mise en œuvre du groupe de renormalisation non-perturbatif sur réseau

Nous implémentons le groupe de renormalisation non-perturbatif au modèle de Bose-Hubbard, dont nous rappelons l'action

$$S[\psi^*, \psi] = \int_0^\beta d\tau \left\{ \sum_{\mathbf{r}} \left[ \psi_{\mathbf{r}}^*(\tau) (\partial_\tau - \mu) \psi_{\mathbf{r}}(\tau) + \frac{U}{2} |\psi_{\mathbf{r}}(\tau)|^4 \right] - t \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} (\psi_{\mathbf{r}}^*(\tau) \psi_{\mathbf{r}'}(\tau) + \text{c.c.}) \right\}, \quad (3.1)$$

avec  $\psi_{\mathbf{r}}(\tau)$  un champ complexe dépendant du temps imaginaire  $\tau \in [0, \beta]$ , possédant des conditions aux bords périodiques :  $\psi_{\mathbf{r}}(0) = \psi_{\mathbf{r}}(\beta)$ . Nous travaillons à température nulle  $T = \beta^{-1} \rightarrow 0$  et ce jusqu'au chapitre [IV](#).

Munis de cette action, nous pouvons implémenter les idées du NPRG développées en [2.2](#). Pour cela nous ajoutons à l'action [\(3.1\)](#) un terme dépendant de l'échelle  $k$ ,  $\Delta S_k[\psi^*, \psi] = \psi^* \cdot R_k \cdot \psi$  (les notations sont expliquées en annexe [A](#), et  $R_k$  sera explicité plus loin et sera indépendant du temps imaginaire) ainsi qu'un terme de source  $J^* \cdot \psi + \psi^* \cdot J$ , où les sources externes sont des fonctions des sites et du temps imaginaire  $J_{\mathbf{r}}^{(*)}(\tau)$ . Nous introduisons l'action effective moyenne  $\Gamma_k[\phi^*, \phi]$  définie comme la transformée de Legendre modifiée de la fonctionnelle génératrice  $Z_k[J^*, J]$

$$\Gamma_k[\phi^*, \phi] = J^* \cdot \phi + \phi^* \cdot J - \ln Z_k[J^*, J] - \Delta S_k[\phi^*, \phi], \quad (3.2)$$

où  $\phi_{\mathbf{r}}(\tau) = \frac{\delta \ln Z[J^*, J]}{\delta J_{\mathbf{r}}^*(\tau)} = \langle \psi_{\mathbf{r}}(\tau) \rangle$  est le paramètre d'ordre superfluide. L'évolution de l'action effective moyenne est donnée par l'équation de Wetterich [\(2.12\)](#)

$$\partial_k \Gamma_k[\phi^*, \phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \partial_k R_k \left( \Gamma_k^{(2)}[\phi^*, \phi] + R_k \right)^{-1} \right\}, \quad (3.3)$$

où la trace signifie que nous intégrons sur les impulsions, les fréquences de Matsubara ainsi que sur les indices de champs. L'invariance de l'action [\(3.1\)](#) par une transformation  $U(1)$  des champs bosoniques

$$\psi_{\mathbf{r}}^{(*)}(\tau) \rightarrow e^{(-)i\theta} \psi_{\mathbf{r}}^{(*)}(\tau) \quad (3.4)$$

implique un certain nombre de symétrie de l'action effective moyenne (le régulateur les respectant lui aussi). En particulier, cela implique que le potentiel effectif moyen, définit par

$$V_k(\phi^*, \phi) = \frac{1}{\beta N} \Gamma_k[\phi^*, \phi] \quad (3.5)$$

en champ  $\phi$  constant, doit être inchangé lors d'un changement de phase. Cela n'est possible que s'il ne dépend que de l'invariant  $n = |\phi|^2$  et on le notera  $V_k(n)$ . De même, la structure tensorielle de  $\Gamma_k^{(2)}$  respecte des contraintes, qu'il est utile de donner dans

la base  $(\phi_1, \phi_2) = \sqrt{2}(\text{Re}\phi, \text{Im}\phi)$  ( $n = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2)$ ). Dans cette base, le vertex à deux points en champ  $\phi$  constant s'écrit de manière tout à fait générale ( $q = (i\omega, \mathbf{q})$ )

$$\Gamma_{ij,k}^{(2)}(q; \phi) = \delta_{i,j} \Gamma_{A,k}(q; n) + \phi_i \phi_j \Gamma_{B,k}(q; n) + \epsilon_{ij} \Gamma_{C,k}(q; n). \quad (3.6)$$

Ici  $i, j$  valent 1 ou 2,  $\delta_{i,j}$  est le symbole de Kronecker et  $\epsilon_{ij}$  est le tenseur complètement antisymétrique avec la convention  $\epsilon_{12} = 1$ . De plus,  $\Gamma^{(2)}$  et  $V(n)$  sont reliés par

$$\Gamma_{ij,k}^{(2)}(q = 0; \phi) = \frac{\partial^2 V_k(n)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} = \delta_{i,j} V_k'(n) + \phi_i \phi_j V_k''(n), \quad (3.7)$$

( $V_k'(n) = \partial V_k(n)/\partial n$ , etc.) ce qui donne

$$\begin{aligned} \Gamma_{A,k}(q; n) &= \Delta_{A,k}(q; n) + V_k'(n), \\ \Gamma_{B,k}(q; n) &= \Delta_{B,k}(q; n) + V_k''(n), \\ \Gamma_{C,k}(q; n) &= \Delta_{C,k}(q; n), \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $\Delta_\alpha(q = 0; n) = 0$  (avec  $\alpha = A, B, C$ ) par définition.

L'invariance par parité et par renversement du temps implique [41]

$$\begin{aligned} \Gamma_{A,k}(q; n) &= \Gamma_{A,k}(-q; n) = \Gamma_{A,k}(\mathbf{q}, -i\omega; n), \\ \Gamma_{B,k}(q; n) &= \Gamma_{B,k}(-q; n) = \Gamma_{B,k}(\mathbf{q}, -i\omega; n), \\ \Gamma_{C,k}(q; n) &= -\Gamma_{C,k}(-q; n) = -\Gamma_{C,k}(\mathbf{q}, -i\omega; n). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Le propagateur  $G_k = -\Gamma_k^{(2)-1}$  peut être écrit en champ constant sous une forme analogue à (3.6) ou en termes de ses composantes transverses et longitudinales,

$$G_{k,ij}(q; \phi) = \frac{\phi_i \phi_j}{2n} G_{k,ll}(q; n) + \left( \delta_{ij} - \frac{\phi_i \phi_j}{2n} \right) G_{k,tt}(q; n) + \epsilon_{ij} G_{k,lt}(q; n), \quad (3.10)$$

où

$$\begin{aligned} G_{k,ll}(q; n) &= -\frac{\Gamma_{A,k}(q; n)}{D_k(q; n)}, \\ G_{k,tt}(q; n) &= -\frac{\Gamma_{A,k}(q; n) + 2n\Gamma_{B,k}(q; n)}{D_k(q; n)}, \\ G_{k,lt}(q; n) &= \frac{\Gamma_{C,k}(q; n)}{D_k(q; n)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec  $D_k = \Gamma_{A,k}^2 + 2n\Gamma_{A,k}\Gamma_{B,k} + \Gamma_{C,k}^2$ . Notons que le propagateur apparaissant dans l'équation de flot (3.3) est défini par  $-(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}$ , qui est le propagateur associé à la vraie transformée de Legendre, plutôt que  $-\Gamma_k^{(2)-1}$ .

### 3.1.1 Conditions initiales du flot

Nous explicitons maintenant notre régulateur et discutons les conditions initiales du flot de renormalisation. Nous montrerons que le point de départ du flot de RG est la limite locale, dans l'esprit de la section 2.4, dans laquelle tous les sites sont découplés et que l'action effective moyenne à l'échelle  $k = \Lambda$  est équivalente à la théorie RPA du modèle de Bose-Hubbard (voir section 1.5.2).

#### Régulateur et action effective à l'échelle $k = \Lambda$

Comme nous l'avons discuté dans le premier chapitre, l'existence même du réseau est capitale pour l'apparition de la phase de Mott. Nous avons également vu en section 1.5.2 qu'une théorie champ moyen du type Bogoliubov, *i.e.* champ moyen sur toute l'action, est incapable de trouver la transition de phase, tandis qu'une théorie de type RPA, champ moyen sur le terme de saut mais exacte pour la partie locale de l'action, décrit de manière qualitative le diagramme de phase du modèle de Bose-Hubbard. Le NPRG sur réseau est donc la bonne manière d'implémenter le NPRG pour décrire au mieux la physique du modèle de Bose-Hubbard. Bien entendu, si nous étions capables de résoudre exactement l'équation de flot, la condition initiale, tout comme le choix du régulateur, ne devrait pas changer le résultat. Mais à partir du moment où nous faisons des approximations, parfois brutales, le choix éclairé d'une approche ou d'une autre est crucial.

Nous choisissons le régulateur suivant

$$R_k(\mathbf{q}) = -Z_{A,k} t k^2 \text{sgn}(t_{\mathbf{q}}) (1 - y_{\mathbf{q}}) \theta(1 - y_{\mathbf{q}}), \quad (3.12)$$

où  $\theta$  est la fonction de Heaviside et  $y_{\mathbf{q}} = (2dt - |t_{\mathbf{q}}|)/tk^2$  ( $Z_{A,k}$  sera défini plus loin), et  $t_{\mathbf{q}} = -2t \sum_{i=1}^d \cos(q_i)$  est la dispersion sur le réseau carré :

$$\int_0^\beta d\tau \left\{ -t \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} \left[ \psi_{\mathbf{r}}^*(\tau) \psi_{\mathbf{r}'}(\tau) + \text{c.c.} \right] \right\} = \int_q \psi^*(q) t_{\mathbf{q}} \psi(q), \quad (3.13)$$

En notant  $k = \Lambda$  la valeur initiale de  $k$ , le choix  $\Lambda = \sqrt{2d}$  (et  $Z_{A,\Lambda} = 1$ ) implique que  $R_\Lambda(\mathbf{q}) = -t_{\mathbf{q}}$ , et la condition initiale du flot de RG est

$$S_\Lambda = S + \Delta S_\Lambda = S_{\text{loc}}, \quad (3.14)$$

avec

$$S_{\text{loc}}[\psi^*, \psi] = \sum_{\mathbf{r}} \int_0^\beta d\tau \left\{ \psi_{\mathbf{r}}^*(\tau) (\partial_\tau - \mu) \psi_{\mathbf{r}}(\tau) + \frac{U}{2} |\psi_{\mathbf{r}}(\tau)|^4 \right\}, \quad (3.15)$$

et la condition initiale du flot du NPRG sur réseau est locale. Comme  $R_{k=0}(\mathbf{q}) = 0$ , nous retrouvons bien l'action du modèle de Bose-Hubbard dans la limite  $k \rightarrow 0$ . Notons que  $R_k(\mathbf{q})$  ne dépend pas du temps imaginaire, de sorte que toutes les fluctuations locales sont intégrées dans la condition initiale. De plus, à longue distance,

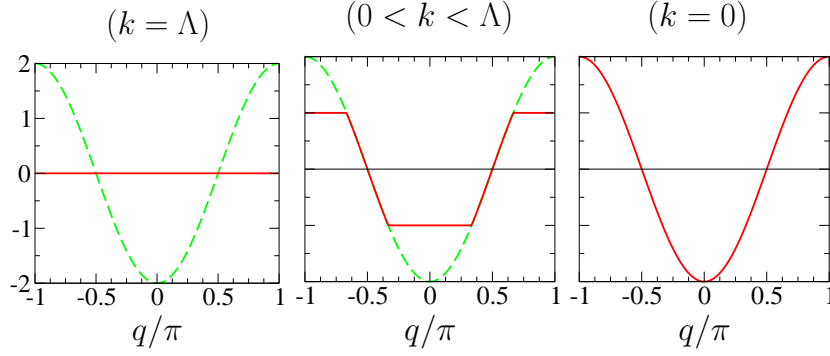


FIGURE 3.1 – Dispersion effective (nue)  $t_q + R_k(q)$  pour  $k = \Lambda$ ,  $0 < k < \Lambda$  et  $k = 0$  avec le régulateur (3.12). La ligne (tiret) verte montre la dispersion nue  $t_q = -2t \cos q$ .  $d = 1$  et  $t$  est pris comme unité d'énergie.

c'est-à-dire dans la limite  $k \rightarrow 0$ , les détails microscopiques, comme l'existence d'un réseau, ne sont plus apparents et nous retrouvons les équations du NPRG dans le continu, comme cela est discuté en annexe E. Nous montrons en figure 3.1 l'action du régulateur sur le terme de dispersion de l'action microscopique à l'échelle  $k$ , c'est-à-dire  $t_{\mathbf{q}} + R_k(\mathbf{q})$ .

Nous devons maintenant calculer l'action effective moyenne à l'échelle  $k = \Lambda$ . La fonction de partition correspondante s'écrit

$$Z_{\Lambda}[J^*, J] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* e^{-\sum_{\mathbf{r}} S_{\text{loc}}[\psi^*, \psi] + J^* \cdot \psi + \psi^* \cdot J}. \quad (3.16)$$

Nous avons  $N$  sites découplés et la fonctionnelle génératrice devient<sup>c</sup>

$$Z_{\Lambda}[J^*, J] = \prod_{\mathbf{r}} Z_{\text{loc}}[J_{\mathbf{r}}^*, J_{\mathbf{r}}], \quad (3.17)$$

où  $Z_{\text{loc}}$  est la fonctionnelle génératrice du problème à un site ayant pour action (3.15). L'action effective locale est donnée par sa transformée de Legendre

$$\Gamma_{\text{loc}}[\phi_{\mathbf{r}}^*, \phi_{\mathbf{r}}] = \int_0^{\beta} d\tau [J_{\mathbf{r}}^*(\tau) \phi_{\mathbf{r}}(\tau) + \text{c.c.}] - \ln Z_{\text{loc}}[J_{\mathbf{r}}^*, J_{\mathbf{r}}], \quad (3.18)$$

avec  $\phi_{\mathbf{r}}(\tau) = \frac{\delta \ln Z_{\text{loc}}[J_{\mathbf{r}}^*, J_{\mathbf{r}}]}{\delta J_{\mathbf{r}}^*(\tau)}$ . L'action effective moyenne à l'échelle  $\Lambda$  se réécrit, d'après la définition de la transformée de Legendre modifiée (2.11),

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Lambda}[\phi^*, \phi] &= J^* \cdot \phi + \phi^* \cdot J - \sum_{\mathbf{r}} \ln Z_{\text{loc}}[J_{\mathbf{r}}^*, J_{\mathbf{r}}] + \phi^* \cdot R_{\Lambda} \cdot \phi, \\ &= \sum_{\mathbf{r}} \Gamma_{\text{loc}}[\phi_{\mathbf{r}}^*, \phi_{\mathbf{r}}] - t \int_0^{\beta} d\tau \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} (\phi_{\mathbf{r}}^*(\tau) \phi_{\mathbf{r}'}(\tau) + \text{c.c.}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

c. Nous faisons dans les quelques lignes qui suivent un abus de notation pour les fonctionnelles locales par rapport au reste du manuscrit. Nous notons explicitement l'indice de site des sources et/ou champs dans les arguments des fonctionnelles "locales".

Remarquons que l'action effective moyenne  $\Gamma_\Lambda$  est égale à  $\Gamma_{\text{RPA}}$ , l'action effective de la théorie RPA (équation (1.72)), présentée au chapitre I.

### Calcul des conditions initiales

Reste le calcul de l'action effective locale. Le problème à un site est un problème compliqué dans la formulation en intégrale fonctionnelle du fait de la présence d'une interaction quartique dans l'action locale (3.15). En se rappelant que l'opérateur hamiltonien local en seconde quantification s'écrit

$$\hat{H}_{\text{loc}} = -\mu\hat{n} + \frac{U}{2}\hat{n}(\hat{n}-1), \quad (3.20)$$

nous voyons que le problème est par contre soluble trivialement dans la base de Fock  $\hat{n}|m\rangle = m|m\rangle$  avec  $m$  entier positif. Nous rappelons en annexe C la physique de ce modèle.

En présence de sources se couplant à  $\hat{b}$  et  $\hat{b}^\dagger$ , la matrice n'est plus diagonale dans l'espace de Fock et nous devons nous en remettre à une diagonalisation numérique après troncation de l'espace de Hilbert. Nous ne pouvons évaluer numériquement la fonctionnelle génératrice qu'en source constante, qui devient

$$Z_{\text{loc}}(J^*, J) = \sum_n \langle n | e^{-\beta[-\mu\hat{n} + \frac{U}{2}\hat{n}(\hat{n}-1) - J^*\hat{b} - \hat{b}^\dagger J]} | n \rangle, \quad (3.21)$$

et nous ne pourrons faire que la transformée de Legendre en champ constant, c'est-à-dire le calcul du potentiel effectif local

$$\begin{aligned} V_{\text{loc}}(n) &= \frac{1}{\beta} \Gamma_{\text{loc}}[\phi^*, \phi], \\ &= J^* \phi + J \phi^* - \frac{1}{\beta} \ln Z_{\text{loc}}(J^*, J), \\ &\stackrel{\beta \rightarrow \infty}{=} J^* \phi + J \phi^* + E_0(J^*, J), \end{aligned} \quad (3.22)$$

où  $\phi = \langle \hat{b} \rangle = \frac{\partial \ln Z_{\text{loc}}[J^*, J]}{\beta \partial J^*}$  est constant,  $n = |\phi|^2$  et  $E_0(J^*, J)$  est l'énergie du fondamental en présence de sources. Nous montrons en figure 3.2  $\phi(J)$  et  $V_{\text{loc}}(n)$  pour différentes valeurs du potentiel chimique. Le cas où le fondamental est dégénéré (quand  $\mu$  est un multiple entier de  $U$ ) est traité en annexe C.

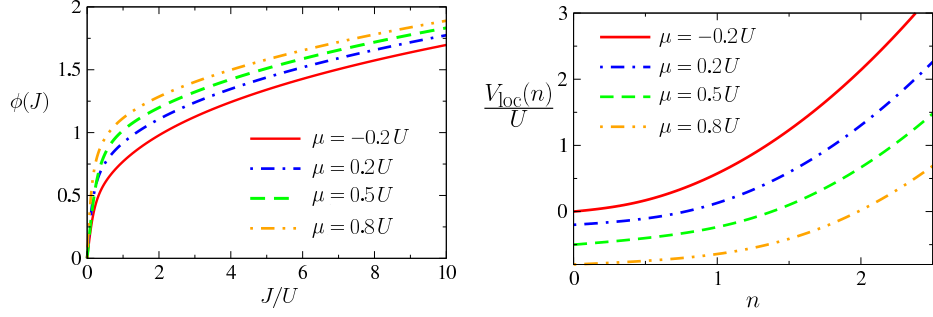
Il est aussi possible de calculer les fonctions de corrélation en source constante, *a priori* avec un nombre de champs arbitraire  $\langle \psi^m \psi^{*n} \rangle$ , en utilisant leurs expressions en représentation opératorielle  $\langle \hat{b}^m \hat{b}^{\dagger n} \rangle$ . Comme nous n'aurons besoin que du potentiel effectif et du vertex à deux points (voir discussion plus haut), nous ne donnons que l'expression des fonctions de Green à deux points connectés<sup>d</sup>

$$G_n(\tau) = -\langle T_\tau \hat{b}(\tau) \hat{b}^\dagger(0) \rangle, \quad (3.23)$$

$$G_{\text{an}}(\tau) = -\langle T_\tau \hat{b}(\tau) \hat{b}(0) \rangle, \quad (3.24)$$

d. Rappelons que  $\langle \hat{b} \hat{b} \rangle$  n'est pas forcément nul en présence de sources.





(a)  $\phi(J)$  pour quatre valeurs du potentiel chimique.  $J$  et donc  $\phi$  sont réels. (b)  $V_{\text{loc}}(n)$  pour quatre valeurs du potentiel chimique.

FIGURE 3.2 – Potentiel effectif local et moyenne du champ pour différentes valeurs du potentiel chimique.

où les indices  $n$  et  $an$  sont pour normal et anormal respectivement et  $T_\tau$  est l'opérateur d'ordonnement dans le temps (imaginaire). En présence de source, il faut diagonaliser numériquement l'hamiltonien. Nous introduisons la base  $|\alpha\rangle$  de valeur propre  $\lambda_\alpha$  et dénotons l'état fondamental par  $|\nu\rangle$ , d'énergie  $\lambda_\nu = E_0$ . Dans l'espace de Fourier, les fonctions de corrélation connectées à température nulle s'écrivent

$$G_n(i\omega; J^*, J) = \sum_{\alpha, \lambda_\nu \neq \lambda_\alpha} \left[ \frac{\langle \nu | \hat{b} | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{b}^\dagger | \nu \rangle}{i\omega + \lambda_\nu - \lambda_\alpha} - \frac{\langle \nu | \hat{b}^\dagger | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{b} | \nu \rangle}{i\omega - \lambda_\nu + \lambda_\alpha} \right], \quad (3.25)$$

$$G_{\text{an}}(i\omega; J^*, J) = \sum_{\alpha, \lambda_\mu \neq \lambda_\alpha} \left[ \frac{\langle \nu | \hat{b} | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{b} | \nu \rangle}{i\omega + \lambda_\nu - \lambda_\alpha} - \frac{\langle \nu | \hat{b} | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{b} | \nu \rangle}{i\omega - \lambda_\nu + \lambda_\alpha} \right]. \quad (3.26)$$

En source nulle (*i.e.*  $|\alpha\rangle = |m\rangle$  la base de Fock), nous retrouvons les résultats connus

$$G_{\text{n,loc}}(i\omega) = \frac{\bar{n}_{\text{loc}} + 1}{i\omega + \mu - U\bar{n}_{\text{loc}}} - \frac{\bar{n}_{\text{loc}}}{i\omega + \mu - U(\bar{n}_{\text{loc}} - 1)}, \quad (3.27)$$

$$G_{\text{an,loc}}(i\omega) = 0, \quad (3.28)$$

avec  $\bar{n}_{\text{loc}}$  le nombre de bosons dans la limite locale :  $\bar{n}_{\text{loc}} - 1 \leq \mu/U \leq \bar{n}_{\text{loc}}$  si  $\mu > 0$  et  $\bar{n}_{\text{loc}} = 0$  sinon.

Pour avoir accès au vertex à deux points local en champ constant  $\Gamma_{\text{loc}}^{(2)}(i\omega; \phi^*, \phi)$ , il ne nous reste plus qu'à connaître la relation  $J^{(*)}(\phi, \phi^*)$ , par exemple en utilisant  $\partial V_{\text{loc}}/\partial \phi = J^*$ , et à inverser le propagateur. Cela se fait aisément numériquement, et donne dans la base  $(\phi_1, \phi_2)$

$$\Gamma_{\text{loc,A}}^{(2)}(i\omega; n) = -\frac{1}{2D} [G_n(i\omega) + G_n(-i\omega) + 2G_{\text{an}}(i\omega)], \quad (3.29)$$

$$\Gamma_{\text{loc,B}}^{(2)}(i\omega; n) = -\frac{G_{\text{an}}(i\omega)}{nD}, \quad (3.30)$$

$$\Gamma_{\text{loc,12}}^{(2)}(i\omega; n) = \frac{i}{2D} [G_n(i\omega) - G_n(-i\omega)], \quad (3.31)$$

où pour alléger les notations, nous n'avons pas écrit la dépendance en champ (*via* les sources) des propagateurs et  $D = G_n(i\omega)G_n(-i\omega) - G_{\text{an}}(i\omega)^2$ .

### Discussion des conditions initiales

Nous avons montré que l'action effective à l'échelle  $\Lambda$  est l'action effective RPA (voir équation (3.19)), ce qui donne, pour le potentiel effectif et pour  $\Gamma_\Lambda^{(2)}$

$$V_\Lambda(n) = V_{\text{loc}}(n) - 2dt n, \quad (3.32)$$

$$\Gamma_{\Lambda,ij}^{(2)}(i\omega, \mathbf{q}; n) = \Gamma_{\text{loc},ij}^{(2)}(i\omega; n) + \delta_{i,j} t_{\mathbf{q}}. \quad (3.33)$$

Pour finir nous réécrivons le propagateur inverse à l'échelle  $\Lambda$  sous la forme

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Lambda,ij}^{(2)}(i\omega, \mathbf{q}; n) &= \Delta_{\text{loc},ij}(i\omega; n) + \delta_{i,j} V'_{\text{loc}}(n) + \phi_i \phi_j V''_{\text{loc}}(n) + \delta_{i,j} t_{\mathbf{q}} \\ &= \Delta_{\text{loc},ij}(i\omega; n) + \delta_{i,j} V'_\Lambda(n) + \phi_i \phi_j V''_\Lambda(n) + \delta_{i,j} \epsilon_{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

où  $\Delta_{\text{loc},ij}(i\omega; n) = \Gamma_{\Lambda,ij}^{(2)}(i\omega, \mathbf{q}; n) - \Gamma_{\Lambda,ij}^{(2)}(0, \mathbf{q}; n)$  a la même structure tensorielle que  $\Gamma_{ij}^{(2)}$  (voir (3.6)) et  $\epsilon_{\mathbf{q}} = t_{\mathbf{q}} + 2dt$ . Nous faisons ainsi directement ressortir la structure générale de  $\Gamma^{(2)}$  donné en (3.6) et (3.8), ce qui nous donne comme conditions initiales en termes des  $\Gamma_{A,k}$ ,  $\Gamma_{B,k}$  et  $\Gamma_{C,k}$

$$\begin{aligned} \Gamma_{A,\Lambda}(q; n) &= \Delta_{\text{loc},A}(i\omega; n) + \epsilon_{\mathbf{q}} + V'_\Lambda(n), \\ \Gamma_{B,\Lambda}(q; n) &= \Delta_{\text{loc},B}(i\omega; n) + V''_\Lambda(n), \\ \Gamma_{C,\Lambda}(q; n) &= \Delta_{\text{loc},C}(q; n), \end{aligned} \quad (3.35)$$

montrant bien le traitement exact des fluctuations locales, mais champ moyen des fluctuations spatiales. Nous voyons ici la grande différence entre le NPRG sur réseau et l'approche standard. Du fait de l'intégration des fluctuations locales, les conditions initiales du flot sont non-triviales par rapport au champ moyen, car fonctionnelles et correspondent à la resommation d'un nombre infini de diagrammes. L'approche standard nous aurait fait partir des conditions champ moyen, c'est-à-dire la théorie de Bogoliubov, voir tableau III.1. Nous partons donc de conditions initiales bien meilleures que le champ moyen et cela nous permettra d'obtenir des résultats comparables aux meilleures approches numériques<sup>e</sup>.

Nous montrons en figures 3.3 et 3.4  $\Delta_{\text{loc},A}(i\omega; n)$  et  $\Delta_{\text{loc},C}(i\omega; n)$  pour différentes valeurs de  $\mu/U$  et de  $n$ , ainsi que leurs comportements à grande fréquence [41]

$$\begin{aligned} \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \Gamma_{\text{loc},A}(i\omega; n) &= -\mu - U \langle \psi_{\mathbf{r}}^2 \rangle + 2U \langle \psi_{\mathbf{r}}^* \psi_{\mathbf{r}} \rangle, \\ \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \Gamma_{\text{loc},B}(i\omega; n) &= U \frac{\langle \psi_{\mathbf{r}}^2 \rangle}{n}, \\ \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \Gamma_{\text{loc},C}(i\omega; n) &= \omega, \end{aligned} \quad (3.36)$$

e. Pour cette même raison, le choix d'un régulateur différent, qui par exemple vaudrait  $-t_{\mathbf{q}} + \delta\mu$ , nous éloignerait trop du "bon" point de départ et pourrait donner des résultats non pertinents.

Conditions initiales	Bogoliubov	RPA
$V_\Lambda(n)$	$-(\mu + 2dt)n + \frac{U}{2}n^2$	$V_{\text{loc}}(n) - 2dt n$
$\Gamma_{A,\Lambda}(q; n)$	$\epsilon_{\mathbf{q}} - (\mu + 2dt) + Un$	$\Delta_{\text{loc},A}(i\omega; n) + \epsilon_{\mathbf{q}} + V'_\Lambda(n)$
$\Gamma_{B,\Lambda}(q; n)$	$U$	$\Delta_{\text{loc},B}(i\omega; n) + V''_\Lambda(n)$
$\Gamma_{C,\Lambda}(q; n)$	$\omega$	$\Delta_{\text{loc},C}(i\omega; n)$

TABLE III.1 – Comparaison des conditions initiales du flot entre l’approche standard (champ moyen, *i.e.* théorie de Bogoliubov) et le NPRG sur réseau (RPA).

où  $\langle \psi_{\mathbf{r}} \rangle = \phi$  et  $\langle \psi_{\mathbf{r}}^2 \rangle$  sont pris réels (correspondant à une source  $J$  réelle),

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\mathbf{r}}^* \psi_{\mathbf{r}} \rangle &= -G_{\mathbf{n}}(\tau = 0^-) + |\phi|^2 \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G_{\mathbf{n}}(i\omega) e^{i\omega 0^+} + |\phi|^2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

et

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\mathbf{r}}^2 \rangle &= -G_{\text{an}}(\tau = 0^-) + \phi^2 \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G_{\text{an}}(i\omega) e^{i\omega 0^+} + \phi^2. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ces comportements asymptotiques (3.36) sont atteints pour  $|\omega| \gg U$ .

Soulignons enfin que la vraie transformée de Legendre est  $\Gamma_{\text{loc}}$  pour  $k = \Lambda$  puisque l’action  $S_\Lambda = S + \Delta S_\Lambda = S_{\text{loc}}$  est locale. Le NPRG sur réseau est un développement autour de la limite locale. Cependant, l’action effective moyenne  $\Gamma_k$  est la bonne quantité à utiliser pour analyser les propriétés physiques du système avec l’action  $S$  (sans terme de régulateur). Dans  $\Gamma_k$ , le terme de régulateur  $\Delta S_k$  est compensé, en champ moyen, en soustrayant  $\Delta S_k[\phi^*, \phi]$  à la vraie action effective. Il suit que les quantités physiques à l’échelle  $k$ , comme la densité du condensat  $n_{0,k}$ , sont obtenues d’après  $\Gamma_k$  plutôt que d’après la vraie transformée de Legendre.

### 3.1.2 Invariance de jauge et identités de Ward

L’invariance de l’action  $S + \Delta S_k$  dans la transformation de jauge (dépendante du temps)  $\psi_{\mathbf{r}} \rightarrow e^{i\alpha} \psi_{\mathbf{r}}$ ,  $\psi_{\mathbf{r}}^* \rightarrow e^{-i\alpha} \psi_{\mathbf{r}}^*$  et  $\mu \rightarrow \mu + i\partial_\tau \alpha$  impose d’importantes contraintes sur l’action effective  $\Gamma_k$  à température nulle. Dans la phase superfluide, cela implique

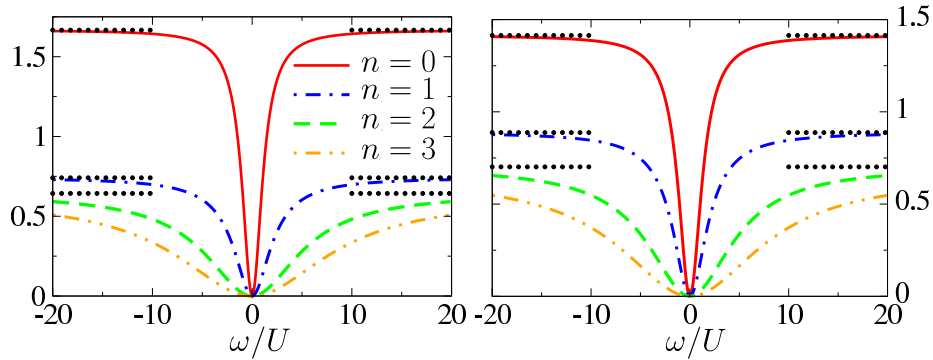


FIGURE 3.3 – (Color online)  $\Gamma_{\text{loc},A}(i\omega; n) - V'_{\text{loc}}(n)$  en fonction de  $\omega$  pour différentes valeurs de  $n$ .  $\mu/U = 0.2$  (gauche) et  $\mu/U = \sqrt{2} - 1$  (droite). Les lignes pointillées représentent le comportement à haute fréquence, voir équations (3.36).

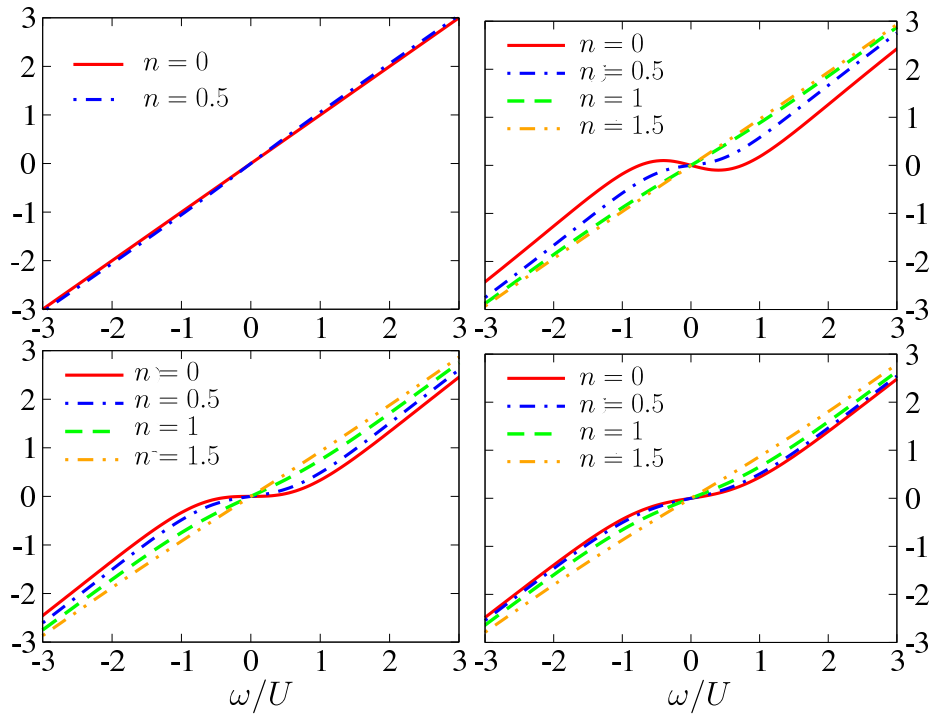


FIGURE 3.4 – (Color online)  $\Gamma_{\text{loc},C}(i\omega; n)$  en fonction de  $\omega$  pour différentes valeurs de  $n$ .  $\mu/U = -0.2, 0.2, \sqrt{2} - 1$  et  $0.6$  (de gauche à droite et de haut en bas). À grande fréquence,  $\Gamma_{\text{loc},C}(i\omega; n) = \omega$ , (équations (3.36)).

que le vertex à deux points satisfait l'identité de Ward [41] (voir annexe B)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \omega} \Gamma_{C,k}(q; n_{0,k}) \right|_{q=0} &= - \left. \frac{\partial^2 V_k}{\partial n \partial \mu} \right|_{n_{0,k}}, \\ \left. \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \Gamma_{A,k}(q; n_{0,k}) \right|_{q=0} &= - \frac{1}{2n_{0,k}} \left. \frac{\partial^2 V_k}{\partial \mu^2} \right|_{n_{0,k}}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

où le potentiel effectif  $V_k(n, \mu)$  est considéré comme une fonction de  $n$  et  $\mu$ , la densité du condensat  $n_{0,k} \equiv n_{0,k}(\mu)$  étant définie par

$$\left. \frac{\partial V_k(n, \mu)}{\partial n} \right|_{n_{0,k}} = 0. \quad (3.40)$$

Puisque l'équation (3.40) est vraie pour tout  $\mu$ , nous en déduisons la relation

$$0 = \left. \frac{d}{d\mu} \frac{\partial V_k}{\partial n} \right|_{n_{0,k}} = \left. \frac{\partial^2 V_k}{\partial n \partial \mu} \right|_{n_{0,k}} + \left. \frac{\partial^2 V_k}{\partial n^2} \right|_{n_{0,k}} \frac{dn_{0,k}}{d\mu}, \quad (3.41)$$

qui sera utilisée plus tard avec (3.39).

Dans la phase de Mott ( $n_{0,k} = 0$ ), l'identité de Ward (3.39) devient

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \omega} \Gamma_{C,k}(q; n=0) \right|_{q=0} &= - \left. \frac{\partial^2 V_k}{\partial n \partial \mu} \right|_{n=0}, \\ \left. \frac{\partial^2 V_{0,k}}{\partial \mu^2} \right|_{n=0} &= \frac{d^2 V_{0,k}}{d\mu^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

et implique que la compressibilité

$$\kappa_k = \frac{d\bar{n}_k}{d\mu} = - \frac{d^2 V_{0,k}}{d\mu^2} \quad (3.43)$$

s'annule.  $\bar{n}_k = -dV_{0,k}/d\mu$  est la densité de bosons (le nombre moyen de bosons par site).

### 3.1.3 Développement en dérivées et comportement infrarouge

Le comportement à basse énergie du système est mieux cerné en considérant le développement en dérivées du vertex à deux points. Du fait du régulateur (3.12),  $\Gamma_k^{(2)}(q; n)$  est une fonction régulière de  $q$  pour  $q \rightarrow 0$ . Profondément dans l'infrarouge, nous pouvons donc utiliser un développement en dérivées

$$\begin{aligned} \Gamma_{A,k}(q; n) &= Z_{A,k}(n) t \mathbf{q}^2 + V_{A,k}(n) \omega^2 + V'_k(n), \\ \Gamma_{B,k}(q; n) &= V''_k(n), \\ \Gamma_{C,k}(q; n) &= Z_{C,k}(n) \omega, \end{aligned} \quad (3.44)$$

( $V'_k(n) = \partial V_k / \partial n$ , etc.) en accord avec les symétries (3.9). Pour la discussion qui suit, il est pratique de définir

$$\delta_k = \left. \frac{\partial V_k}{\partial n} \right|_{n_{0,k}}, \quad \lambda_k = \left. \frac{\partial^2 V_k}{\partial n^2} \right|_{n_{0,k}}, \quad (3.45)$$

avec  $\delta_k$  nul dans la phase superfluide. Si le spectre est gappé, les équations (3.44) seront toujours valides pour des échelles d'énergies inférieures au gap. Autrement, leurs validités requièrent  $|\mathbf{q}| \lesssim k$  et  $|\omega| \lesssim \omega_k^-$  où  $\omega_k^-$  est la plus petite énergie d'excitation pour  $|\mathbf{q}| \sim k$  (voir section 3.1.4).

### Phase superfluide

En utilisant (3.40) et (3.41), nous pouvons réécrire les identités de Ward (3.39) sous la forme

$$\begin{aligned} Z_{C,k}(n_{0,k}) &= \lambda_k \frac{dn_{0,k}}{d\mu}, \\ V_{A,k}(n_{0,k}) &= - \left. \frac{1}{2n_{0,k}} \frac{\partial^2 V_k}{\partial \mu^2} \right|_{n_{0,k}}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

tandis que la compressibilité (3.43) s'écrit

$$\begin{aligned} \kappa_k &= - \left. \frac{\partial^2 V_{0,k}}{\partial \mu^2} \right|_{n_{0,k}} - \left. \frac{\partial^2 V_{0,k}}{\partial n \partial \mu} \right|_{n_{0,k}} \frac{dn_{0,k}}{d\mu} \\ &= 2n_{0,k} V_{A,k} + \frac{Z_{C,k}^2}{\lambda_k}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

La raideur superfluide  $\rho_{s,k}$ , définie comme la rigidité par rapport une variation de la phase du paramètre d'ordre, se déduit de la partie transverse du vertex à deux points [41]

$$\Gamma_{A,k}(\mathbf{q}, \omega = 0; n_{0,k}) = \frac{\rho_{s,k}}{2n_{0,k}} \mathbf{q}^2 \quad (\mathbf{q} \rightarrow 0), \quad (3.48)$$

ce qui donne

$$\rho_{s,k} = 2t Z_{A,k}(n_{0,k}) n_{0,k}. \quad (3.49)$$

Le spectre d'excitation est donné par les zéros du déterminant de la matrice  $2 \times 2$   $\Gamma_k^{(2)}(q; n_{0,k})$  (après continuation analytique  $i\omega \rightarrow \omega + i0^+$ ),

$$\begin{aligned} \det \Gamma_k^{(2)}(q) &= \Gamma_{A,k}(q) [\Gamma_{A,k}(q) + 2n_{0,k} \Gamma_{B,k}(q)] + \Gamma_{C,k}(q)^2 \\ &\simeq 2\lambda_k n_{0,k} (Z_{A,k} t \mathbf{q}^2 + V_{A,k} \omega^2) + (Z_{C,k} \omega)^2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

(toutes les quantités sont définies pour  $n = n_{0,k}$ ) pour  $|\mathbf{q}|, |\omega| \rightarrow 0$ . Cette équation donne un mode non-gappé (ou mode de Goldstone)  $\omega = c_k |\mathbf{q}|$  avec une vitesse

$$\begin{aligned} c_k &= \left( \frac{Z_{A,k}(n_{0,k})t}{V_{A,k}(n_{0,k}) + Z_{C,k}(n_{0,k})^2/(2\lambda_k n_{0,k})} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{\rho_{s,k}}{\kappa_k} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.51)$$

qui peut être exprimée en termes de la compressibilité et de la raideur superfluide [3]. L'existence d'un mode non-gappé est une conséquence du théorème de Hugenholtz-Pines [21] qui, dans notre formalisme, s'exprime sous la forme [41]

$$\Gamma_{A,k}(q = 0; n_{0,k}) = V_k'(n_{0,k}) = 0. \quad (3.52)$$

Les équations (3.49, 3.51) sont identiques à celles obtenues dans les modèles dans le continu si nous identifions  $1/2t$  avec la masse (effective)  $m$  des bosons dans le potentiel du réseau. D'après  $\det \Gamma_k^{(2)}(\mathbf{q}, \omega + i0^+) = 0$ , nous obtenons aussi un mode gappé, avec cependant un gap plus grand que  $\omega_k^- \sim c_k k$ , et donc au-delà du domaine de validité du développement en dérivées ( $|\mathbf{q}|, |\omega|/c_k \ll k$ ). L'existence de ces deux modes dans la phase superfluide vient du fait que  $\det \Gamma_k^{(2)}(q)$  est d'ordre  $\omega^4$ . Si nous poussions le développement en dérivées à des ordres plus élevés en  $\omega^2$  nous obtiendrions des modes non-physiques supplémentaires. Ceux-ci seraient en dehors du domaine de validité du développement en dérivées et seraient invisibles dans la fonction spectrale [40, 101].

### Isolant de Mott

Dans la phase de Mott ( $n_{0,k} = 0$ ), l'identité de Ward (3.42) donne

$$Z_{C,k} = -\frac{d\delta_k}{d\mu}. \quad (3.53)$$

Puisque  $G_{\text{an},k}(q) = 0$ , le spectre d'excitation est obtenu à partir de  $G_{\text{n},k}^{-1}(q) = -\Gamma_{A,k}(q) + i\Gamma_{C,k}(q) = 0$  après continuation analytique  $i\omega \rightarrow \omega + i0^+$ . Nous trouvons deux modes gappés

$$\begin{aligned} \omega_{\pm}(\mathbf{q}) &= -\frac{Z_{C,k}}{2V_{A,k}} \pm \frac{1}{2V_{A,k}} [Z_{C,k}^2 + 4V_{A,k}(Z_{A,k}t\mathbf{q}^2 + \delta_k)]^{1/2} \\ &= \Delta_{k\pm} \pm \frac{Z_{A,k}t\mathbf{q}^2}{(Z_{C,k}^2 + 4V_{A,k}\delta_k)^{1/2}} + \mathcal{O}(|\mathbf{q}|^4), \end{aligned} \quad (3.54)$$

où

$$\Delta_{k\pm} = -\frac{Z_{C,k}}{2V_{A,k}} \pm \frac{1}{2V_{A,k}} (Z_{C,k}^2 + 4V_{A,k}\delta_k)^{1/2}. \quad (3.55)$$

Quand  $Z_{C,k} \neq 0$ , les deux modes ont une dispersion quadratique à petit  $\mathbf{q}$ . Les modes  $\omega_+(\mathbf{q}) > 0$  et  $\omega_-(\mathbf{q}) < 0$  ont des masses effectives positives et négatives, respectivement. Donc  $\omega_+(\mathbf{q})$  ( $\omega_-(\mathbf{q})$ ) correspond à une excitation de type particule (trou). À la transition vers la phase superfluide ( $\delta_{k=0} \rightarrow 0$ ),  $\Delta_{k=0,+}$  ( $\Delta_{k=0,-}$ ) s'annule si  $Z_{C,k=0} > 0$  ( $Z_{C,k=0} < 0$ ), mais le gap d'excitation particule-trou  $\Delta_{k=0} = \Delta_{k=0,+} - \Delta_{k=0,-}$  reste fini. L'énergie du mode critique  $\omega \sim \mathbf{q}^2$  étant quadratique en  $\mathbf{q}$ , l'exposant dynamique critique vaut  $z = 2$ .

Pour  $Z_{C,k} = 0$ , le spectre d'excitation possède une symétrie particule-trou

$$\begin{aligned}\omega_{\pm}(\mathbf{q}) &= \pm \left( \frac{Z_{A,k} t \mathbf{q}^2 + \delta_k}{V_{A,k}} \right)^{1/2} \\ &= \pm (c_k^2 \mathbf{q}^2 + \Delta_k^2)^{1/2},\end{aligned}\tag{3.56}$$

où

$$\begin{aligned}\Delta_k &= \left( \frac{\delta_k}{V_{A,k}} \right)^{1/2}, \\ c_k &= \left( \frac{Z_{A,k} t}{V_{A,k}} \right)^{1/2}.\end{aligned}\tag{3.57}$$

À la transition ( $\delta_{k=0} = 0$ ), le gap d'excitation particule-trou  $2\Delta_{k=0}$  s'annule et la dispersion  $\omega_{\pm}(\mathbf{q}) = \pm c_{k=0} |\mathbf{q}|$  devient linéaire, impliquant que l'exposant critique dynamique prend la valeur  $z = 1$ . Cela peut aussi se comprendre comme une conséquence directe de l'invariance relativiste du vertex  $\Gamma_{k=0,ij}^{(2)}$  [Eq. (3.44)] quand  $Z_{C,k=0}$  s'annule. Le point critique quantique  $\delta_{k=0} = 0$  coïncide alors avec le point critique du modèle XY en dimension  $(d+1)$ <sup>f</sup>.

### 3.1.4 Équations de flot

Comme nous ne savons pas calculer l'action effective à l'échelle  $\Lambda$ , même sous une forme approximée, nous ne pouvons pas utiliser l'approximation la plus courante qui consiste à écrire un ansatz pour l'action effective (voir section 2.2). (Nous n'avons accès qu'aux vertex en champ constant.) Nous pouvons néanmoins obtenir des équations de RG fermées pour le potentiel effectif et les vertex à deux points  $\Gamma_k^{(2)}(q; n)$  en champ constant grâce à l'approximation de Blaizot–Méndez-Galain–Wschebor (BMW), voir section 2.3.2.

L'équation (3.3) donne les équations de flot (nous généralisons l'équation (2.16) au cas avec fréquences et indices de champ)

$$\partial_l V_k(n) = -\frac{1}{2} \int_q \partial_l R_k(\mathbf{q}) [G_{k,\Pi}(q; n) + G_{k,tt}(q; n)]\tag{3.58}$$

f. Cela sous-entend que  $V_{A,k} \sim Z_{A,k}$  pour  $k \rightarrow 0$ , comme cela se confirmera en section 3.3.



et

$$\begin{aligned} \partial_l \Gamma_{k,ij}^{(2)}(p; \phi) &= -\frac{1}{2} \sum_{q, i_1, i_2} \tilde{\partial}_l G_{k, i_1 i_2}(q; \phi) \Gamma_{k, ij i_2 i_1}^{(4)}(p, -p, q, -q; \phi) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{q, i_1 \dots i_4} \left\{ \Gamma_{k, i i_2 i_3}^{(3)}(p, q, -p - q; \phi) \Gamma_{k, j i_4 i_1}^{(3)}(-p, p + q, -q; \phi) \right. \\ &\quad \left. \times [\tilde{\partial}_l G_{k, i_1 i_2}(q; \phi)] G_{k, i_3 i_4}(p + q; \phi) + (p \leftrightarrow -p, i \leftrightarrow j) \right\} \quad (3.59) \end{aligned}$$

( $l = \ln(k/\Lambda)$ ) pour le potentiel effectif et le vertex à deux points en champ  $\phi$  constant.  $G_k = -(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}$  est le propagateur. Nous utilisons la notation

$$\frac{1}{\beta N} \sum_q \equiv \int_q = \int_{\mathbf{q}} \int_{\omega} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (3.60)$$

où les intégrales sur les impulsions sont restreintes à la première zone de Brillouin  $]-\pi, \pi]^d$ . L'opérateur  $\tilde{\partial}_l = (\partial_l R_k) \partial_{R_k}$  agit seulement sur la dépendance en  $l$  du régulateur  $R_k$ . L'approximation BMW est basée sur les deux approximations suivantes :  
i) Pour une impulsion  $\mathbf{q}$  donnée, l'intégrale sur la fréquence interne de (3.59) est dominée par la région  $|\omega| \lesssim \omega_k^-(\mathbf{q})$  où  $\omega_k^-(\mathbf{q})$  est l'énergie d'excitation la plus faible du propagateur  $G_k$ . Puisque la fonction  $\tilde{\partial}_l G_{ij}(q; \phi)$  est proportionnelle à  $\partial_l R_k(\mathbf{q})$ , l'intégrale sur l'impulsion interne  $\mathbf{q}$  dans (3.59) est dominée par les valeurs de  $|\mathbf{q}|$  de l'ordre, ou plus petite que  $k$ . Il suit que le domaine d'intégration dans les boucles est donné par  $|\omega| \lesssim \omega_k^-$  où  $\omega_k^-$  est la valeur typique de  $\omega_k^-(\mathbf{q})$  pour  $|\mathbf{q}| \sim k$ . Dans la phase superfluide  $\omega_k^- \sim c_k k$  ( $c_k$  est la vitesse du mode de Goldstone), tandis que dans la phase de Mott  $\omega_k^-$  est déduit de (3.54, 3.56).  
ii) À cause du régulateur  $R_k(\mathbf{q})$ , les vertex  $\Gamma_k^{(n)}(q_1 \dots q_n)$  sont des fonctions douces des impulsions et des fréquences  $|\mathbf{q}_i|/k, |\omega_i|/\omega_k^- \ll 1$ . Ces deux propriétés nous permettent de développer les vertex dans la partie droite de l'égalité (3.59) en puissance de  $\mathbf{q}^2/k^2$  et  $\omega^2/\omega_k^{-2}$ . À l'ordre dominant, nous posons simplement  $q = 0$  dans les vertex à trois et quatre points de l'équation (3.59). Nous obtenons alors une équation fermée pour  $\Gamma_k^{(2)}$  en remarquant que [107]

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,ijl}^{(3)}(p, -p, 0; \phi) &= \frac{1}{\sqrt{\beta N}} \frac{\partial}{\partial \phi_l} \Gamma_{k,ij}^{(2)}(p; \phi), \\ \Gamma_{k,ijklm}^{(4)}(p, -p, 0, 0; \phi) &= \frac{1}{\beta N} \frac{\partial^2}{\partial \phi_l \partial \phi_m} \Gamma_{k,ij}^{(2)}(p; \phi). \end{aligned} \quad (3.61)$$

De plus, les propriétés (i) et (ii) nous permettent de faire un développement en dérivées de la fonction à deux points  $\Gamma_k^{(2)}$  [Eq. (3.44)] pour obtenir le  $G_k$  utilisé dans les équations de flot (3.58, 3.59). Puisqu'il est crucial de retenir entièrement la structure du réseau au début du flot ( $k \simeq \Lambda$ ), nous prenons

$$\Gamma_{A,k}(q; n) = Z_{A,k}(n) \epsilon_{\mathbf{q}} + V_{A,k}(n) \omega^2 + V'_k(n), \quad (3.62)$$

qui coïncide avec (3.44) pour  $|\mathbf{q}| \ll \Lambda$ . Comme expliqué en 2.4.2, nous définissons  $Z_{A,k}(n)$  comme

$$Z_{A,k}(n) = \frac{1}{t} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^2} \Gamma_{A,k}(q; n), \quad (3.63)$$

de sorte que  $Z_{A,k}(n_{0,k})$  est une renormalisation du champ et non une renormalisation de l'amplitude du spectre.

Au niveau de la dépendance en impulsions des vertex, notre approximation BMW (avec le développement en dérivées de  $\Gamma_k^{(2)}$  pour obtenir  $G_k$ ) est aussi légitime que l'original [107, 110, 111]. Il est cependant nécessaire de justifier avec plus de précautions l'approximation en ce qui concerne les fréquences. Contrairement à l'intégrale sur les impulsions, celle sur les fréquences dans (3.59) n'est pas coupée exponentiellement par le régulateur  $R_k(\mathbf{q})$ . L'intégrand décroît typiquement comme une puissance de  $1/|\omega|$  pour  $|\omega| \gg \omega_-(\mathbf{q})$ , de sorte que la contribution des grandes fréquences est petite mais non négligeable. La raison pour laquelle notre approximation BMW donne néanmoins de bons résultats peut être comprise comme suit. Dans la limite de couplage faible, la dépendance en fréquence des vertex  $\Gamma_k^{(3)}$  et  $\Gamma_k^{(4)}$  est faible, de sorte que mettre la fréquence interne  $\omega$  à zéro dans les  $\Gamma_k^{(3)}$  et  $\Gamma_k^{(4)}$ , de même que l'utilisation du développement en dérivées de  $\Gamma_k^{(2)}$ , est justifié. Dans la limite de couplage fort, les  $\Gamma_k^{(3)}$  et  $\Gamma_k^{(4)}$  dépendent des fréquences, mais cette dépendance est contrôlée par  $U$  dans la limite locale. Puisque  $U \gg \omega_-(\mathbf{q})$ , sauf profondément dans la phase de Mott, où la RPA est déjà une bonne approximation du résultat à  $k = 0$ , il est de nouveau justifié de mettre la fréquence interne à zéro dans les vertex à trois et quatre points et d'utiliser le développement en dérivées. L'utilisation d'un régulateur  $R_k(q)$  agissant sur les impulsions et sur les fréquences donnerait une meilleure base à notre approximation BMW, mais un tel régulateur serait incompatible avec une condition initiale  $S + \Delta S_\Lambda = S_{\text{loc}}$ , comme le veut le principe même du NPRG sur réseau<sup>g</sup>.

La résolution numérique des équations de flot peut être encore simplifiée en approximant  $V_{A,k}(n)$  et  $Z_{A,k}(n)$  par  $V_{A,k} \equiv V_{A,k}(n_{0,k})$  et  $Z_{A,k} \equiv Z_{A,k}(n_{0,k})$ . Pour obtenir une description précise du diagramme de phase, ainsi que le comportement attendu au point XY, il est néanmoins nécessaire de garder la dépendance en champ de  $Z_{C,k}(n)$  et  $V_k(n)$ , voir sections 3.2 et 3.3. Loin du point multicritique, et quand la précision n'est pas le but premier, il est possible d'approximer  $Z_{C,k}(n)$  par  $Z_{C,k}(n_{0,k})$ , et de développer le potentiel effectif autour de son minimum,

$$V_k(n) = \begin{cases} V_{0,k} + \frac{\lambda_k}{2}(n - n_{0,k})^2 & \text{si } n_{0,k} > 0, \\ V_{0,k} + \delta_k n + \frac{\lambda_k}{2}n^2 & \text{si } n_{0,k} = 0, \end{cases} \quad (3.64)$$

où  $\delta_k$  et  $\lambda_k$  sont définis par (3.45). Les équations BMW et leurs différentes approximations sont données en annexe F.

g. De plus, l'utilisation de ces deux types de régulateur dans le continu et en couplage faible donne qualitativement les mêmes résultats.

### 3.2 Première application : le diagramme de phase du modèle de Bose-Hubbard

Munis des équations de flot et des conditions initiales, nous pouvons maintenant nous attaquer à leurs résolutions et leurs implications. Nous commençons par déterminer le diagramme de phase du modèle de Bose-Hubbard. Pour une valeur donnée de  $t$ ,  $U$  et  $\mu$ , nous résolvons les équations de flot jusqu'à un temps de RG maximum de l'ordre de  $-10$ , *i.e.*  $k_{\min} \simeq \sqrt{2d} e^{-10}$ , ce qui est suffisant pour la précision voulue. Les valeurs de  $n_{0,k=k_{\min}}$  et de  $\delta_{k=k_{\min}}$  nous permettent de caractériser l'état fondamental du système. La ligne de transition est quant à elle définie par  $n_{0,k=0} = \delta_{k=0} = 0$ . Nous utilisons, pour avoir une bonne précision,  $Z_{C,k}(n)$  et  $V_k(n)$  fonctionnels. Dans ce cas, le calcul du diagramme de phase prend quelques dizaines de minutes (il faut quelques minutes si on développe le potentiel effectif et on approxime  $Z_{C,k}(n)$  par  $Z_{C,k}(n_0)$ ). La figure 3.5 montre les diagrammes de phase à deux et trois dimensions sur un réseau hypercubique calculés par le NPRG et comparés aux résultats Monte Carlo [53, 52] et Théorie de Champ Moyen Dynamique (DMFT) [63]. Nous montrons également le résultat champ moyen. La figure 3.6 montre les diagrammes de phase obtenus avec trois approximations différentes : (i) le potentiel effectif est développé en puissance de  $n$  [Eq (3.64)] et la dépendance en champ de  $Z_{C,k}(n)$  est négligée ; (ii) la dépendance en champ de  $Z_{C,k}(n)$  est prise en compte ; (iii) la dépendance en champ de  $V_k(n)$  et  $Z_{C,k}(n)$  est prise en compte. En augmentant le caractère fonctionnelle de notre analyse (*i.e.* en allant de (i) à (iii)) nous observons une convergence de nos résultats, dont nous nous attendons à ce qu'ils s'approchent du résultat exact, avec une erreur typique, estimée par la différence entre (ii) et (iii), de l'ordre de 3% au bout du lobe.

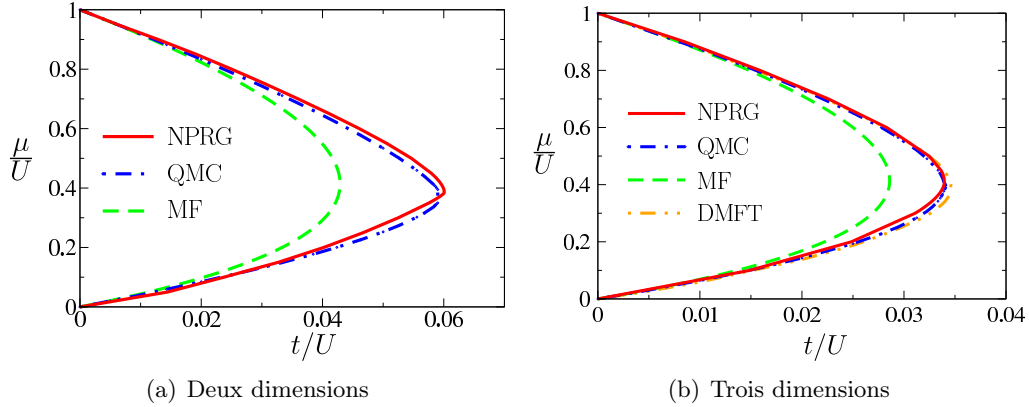


FIGURE 3.5 – Diagramme de phase (a) à deux dimensions, avec comparaison au calcul Monte Carlo (QMC)[53] et champ moyen (MF). (b)  $d = 3$ , avec comparaison aux calculs Monte Carlo (QMC), champ moyen (MF) et Dynamic Mean Field Theory (DMFT) [52, 63].

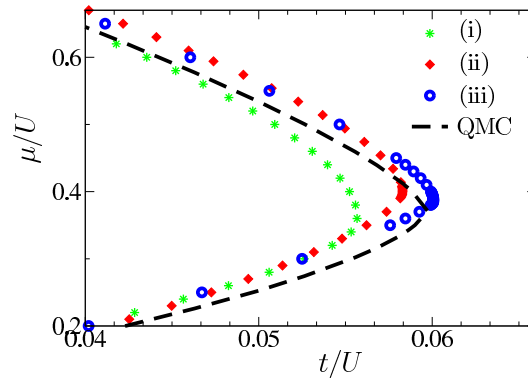


FIGURE 3.6 – Comparaison du diagramme de phase ( $d = 2$ ) après trois approximations successives : (i) pas de fonctionnel, (ii)  $Z_{C,k}(n)$  fonctionnel, (iii)  $Z_{C,k}(n)$  et  $V(n)$  fonctionnels. L'écart entre les approximations successives, au voisinage de la pointe du lobe, est de l'ordre de 3.5%.

Une caractéristique importante de l'isolant de Mott est son incompressibilité  $\kappa = 0$ , qu'on peut déduire des identités de Ward, voir section 3.1.2. L'équation (3.47) permet de calculer la densité  $\bar{n}$  directement à partir de  $n_{0,k=0}$ ,  $V_{A,k=0}$ ,  $Z_{C,k=0}$  et  $\lambda_{k=0}$  en intégrant  $d\bar{n}/d\mu$ . La constante d'intégration est connue puisque que nous savons que la densité s'annule pour  $\mu = -2dt$ . Cette méthode nous permet de ne pas calculer la densité à partir de  $dV_{0,k=0}/d\mu$ , ce qui nécessite de résoudre les équations de flot pour des  $\mu$  voisins et qui est plus sensible aux erreurs numériques<sup>h</sup>. La figure 3.7 montre la densité  $\bar{n}$  en fonction du potentiel chimique  $\mu$  pour différentes valeurs de  $t/U$  à deux dimensions. L'annulation de la compressibilité  $\kappa = 0$  est clairement visible dans la phase de Mott. Si nous utilisons la condition  $\bar{n}(\mu - 2dt) = 0$  nous obtenons  $\bar{n} = 1 \pm 0.03$  ( $\bar{n} = 1 \pm 0.045$ ) dans le lobe de Mott  $\bar{n} = 1$  à trois (deux) dimensions. L'erreur est plus prononcée au bout du lobe.

### 3.3 Les transitions de phase isolant-superfluide

En sections 1.5.3 et 3.1.3, nous avons vu que la classe d'universalité de la transition isolant-superfluide dépend de la valeur de  $Z_C(n = 0)$ . Nous devons donc déterminer  $Z_C(n = 0)$  à la transition. Considérons le paramètre  $\delta(t, \mu) = V'(0)$  comme une fonction de  $t$  et  $\mu$  (en unité de  $U$ ). Dans l'isolant de Mott, l'identité de Ward (3.53) devient

$$Z_C \equiv Z_C(0) = - \left. \frac{\partial \delta}{\partial \mu} \right|_t. \quad (3.65)$$

Puisque la ligne de transition est définie par  $\delta(t, \mu) = 0$ ,  $Z_C$  s'annule au bout du lobe ( $\mu = \mu_c$ ) où la tangente à la ligne de transition est verticale. De plus, puisque

h. Dans le cas à température finie, nous serons obligés de faire des dérivées numériques, voir annexe G.

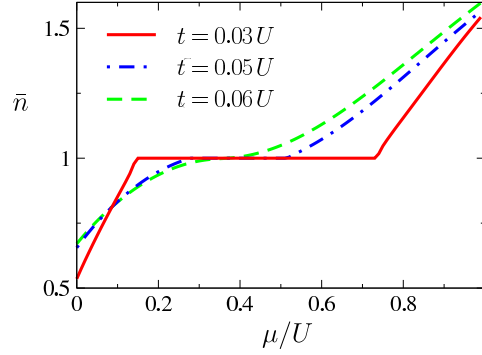


FIGURE 3.7 – Densité  $\bar{n}$  en fonction de  $\mu/U$  pour différentes valeurs de  $t/U$ .

$\delta(t, \mu) \geq 0$  dans la phase de Mott,  $Z_C$  est positif (négatif) sur la ligne de transition pour  $\mu > \mu_c$  ( $< \mu_c$ ). Nous en déduisons qu'au bout du lobe, le point critique coïncide avec le point critique du modèle XY en  $d + 1$  dimensions. L'exposant critique dynamique vaut  $z = 1$ , en accord avec la symétrie relativiste de l'action effective quand  $Z_C = 0$  (Sec. 3.1.3). Les dimensions critiques supérieure et inférieure sont donc respectivement  $d_c^+ = 3$  et  $d_c^- = 1$  (voir la discussion de la section 1.3). La transition de l'isolant de Mott vers le superfluide est dirigée par l'annulation du gap d'excitation particule-trou et la densité est conservée.

Ce point critique est multicritique, vu qu'il faut fixer deux paramètres pour l'atteindre ( $t$  et  $\mu$ ). Ailleurs,  $Z_C$  est non nul et l'exposant critique dynamique vaut  $z = 2$ . La transition, qui ne conserve pas la densité, est de type champ moyen pour  $d \geq 2$ , avec des corrections logarithmiques à la dimension critique supérieure  $d_c^+ = 2$ . Elle est de plus très similaire à la transition vide-superfluide, ce qui nous amènera à formuler d'intéressantes analogies entre ces deux transitions au chapitre IV (voir section 1.5.3).

### 3.3.1 Point multicritique

Le comportement critique à la pointe du lobe de Mott peut être compris en linéarisant les équations de flot. Si nous posons  $Z_{C,k}(n) = 0$ , nous retrouvons les équations de flot du modèle XY en  $d + 1$  dimensions (avec un régulateur anisotrope, voir annexe F.3.1) avec une direction pertinente dans l'espace des paramètres de l'action effective. Le flot du paramètre correspondant, que nous noterons  $r$ , détermine l'exposant  $\nu$ . Puisque  $Z_{C,k}(n)$  est toujours au carré dans les équations de flot (sauf la sienne), il n'entre pas dans les équations de flot linéarisées (sauf la sienne). Donc  $Z_{C,k}(n_{0,k})$  correspond à la seconde direction pertinente, qui est orthogonale (dans l'espace des paramètres de l'action) à la surface critique.

Le comportement du système près du point multicritique  $(t_c, \mu_c)$  est mieux compris en considérant la partie singulière du potentiel effectif  $V_s(r, Z_C)$  ( $Z_C \equiv Z_C(n_0)$ )

	point multicritique	transition générique
$\tilde{\mathbf{q}}$	$\mathbf{q}/k$	$\mathbf{q}/k$
$\tilde{\omega}$	$\left(\frac{V_{A,k}}{Z_{A,k}\epsilon_k}\right)^{1/2} \omega$	$\left(\frac{Z_{C,k}}{Z_{A,k}\epsilon_k}\right) \omega$
$\tilde{n}$	$k^{-d}(V_{A,k}Z_{A,k}\epsilon_k)^{1/2}n$	$k^{-d}Z_{C,k}n$
$\tilde{V}_k(\tilde{n})$	$k^{-d}\left(\frac{V_{A,k}}{Z_{A,k}\epsilon_k}\right)^{1/2}V_k(n)$	$k^{-d}\left(\frac{Z_{C,k}}{Z_{A,k}\epsilon_k}\right)V_k(n)$
$\tilde{\delta}_k$	$(Z_{A,k}\epsilon_k)^{-1}\delta_k$	$(Z_{A,k}\epsilon_k)^{-1}\delta_k$
$\tilde{\lambda}_k$	$k^dV_{A,k}^{-1/2}(Z_{A,k}\epsilon_k)^{-3/2}\lambda_k$	$k^d(Z_{C,k}Z_{A,k}\epsilon_k)^{-1}\lambda_k$
$\tilde{Z}_{C,k}(\tilde{n})$	$(V_{A,k}Z_{A,k}\epsilon_k)^{-1/2}Z_{C,k}(n)$	
$\tilde{V}_{A,k}$		$Z_{A,k}\epsilon_k Z_{C,k}^{-2}V_{A,k}$

TABLE III.2 – Variables adimensionnées ( $Z_{C,k} \equiv Z_{C,k}(n_{0,k})$ ).

[3]. À petit  $r$  et  $Z_C$ , et  $d < 3$  :

$$\begin{aligned} V_s(r, Z_C) &= s^{-d-z}V_s(s^{1/\nu}r, sZ_C) \\ &= |r|^{\nu(d+z)}\tilde{V}_s(|r|^{-\nu}Z_C). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Nous anticipons ici que la valeur propre associée à  $Z_C$  est égale à un (voir plus bas).  $V_s$  étant fini et non nul dans la limite  $r \rightarrow 0$  et  $Z_C \rightarrow 0$ ,  $\tilde{V}_s(x)$  doit être constant pour  $x \rightarrow 0$  et se comporter comme  $x^{d+z}$  pour  $x \rightarrow \infty$ . De plus,  $r$  et  $Z_C$  sont supposés être des fonctions analytiques de  $t - t_c$  et  $\mu - \mu_c$ , et doivent s'annuler linéairement avec  $t - t_c$  quand on s'approche du point multicritique sur un chemin typique, *i.e.* non vertical dans le plan  $(t/U, \mu/U)$ . Puisque l'exposant  $\nu$  du modèle XY est inférieur à un pour tout  $d + 1 \geq 3$ , l'argument de  $\tilde{V}_s$  dans (3.66) s'annule comme  $t - t_c \rightarrow 0$ . Vu que  $\tilde{V}_s(x) \rightarrow \text{const}$  pour  $x \rightarrow 0$ , nous en concluons que  $Z_C$  disparaît de la relation d'échelle (3.66) et le point multicritique ressemble à un point critique XY ordinaire, comme nous le montrerons explicitement plus bas. Nous donnons en annexe H une analyse plus poussée des lois d'échelle au point multicritique, en particulier le long d'une trajectoire parallèle à l'axe des  $\mu$ .

Pour rendre le point fixe explicite quand le système est critique, nous utilisons des variables adimensionnées, définies en table III.2. Notons qu'il faut un adimensionnement différent dans le cas de la transition générique, l'exposant  $z$  n'étant pas le même<sup>i</sup>. Les dimensions anormales sont données par

$$\begin{aligned} \eta_{A,k} &= -\partial_l \ln Z_{A,k}, \\ \eta_{V,k} &= -\partial_l \ln V_{A,k}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

i. Dans le cas du point multicritique, on veut que  $\tilde{\omega}^2 + \tilde{\mathbf{q}}^2$  reste constant ( $z = 1$ ), tandis que dans le cas de la transition générique, c'est  $-i\tilde{\omega} + \tilde{\mathbf{q}}^2$  qui ne varie pas ( $z = 2$ ).

La fréquence adimensionnée  $\tilde{\omega}$  (Table III.2) nous permet de définir un exposant dynamique critique (dépendant de l'échelle  $k$ , mais aussi du type d'adimensionnement)  $z_k = [\omega]$  à partir de  $[Z_{A,k}] = -\eta_{A,k}$ ,  $[V_{A,k}] = -\eta_{V,k}$ , et  $[\tilde{\omega}] = 0$ , ce qui donne

$$z_k = 1 - \frac{\eta_{A,k} - \eta_{V,k}}{2}. \quad (3.68)$$

Ici  $[X]$  représente la dimension d'échelle de la variable  $X$  (les impulsions ayant la dimension 1). Au point multicritique, nous nous attendons à avoir  $\eta_A = \eta_V$  et  $z = 1$ . Il est cependant possible que le régulateur  $R_k(\mathbf{q})$ , qui ne respecte pas l'invariance relativiste de l'action effective au point multicritique, modifie le comportement critique attendu. En posant  $Z_{C,k}(n) = 0$  dans les équations de flot on trouve (annexe F)

$$\eta_{V,k} = \eta_{A,k} - \frac{\eta_{A,k}^2}{d+2}. \quad (3.69)$$

Étant donné la faible valeur de la dimension anormale du modèle XY en  $(d+1)$  dimension ( $d=2,3$ ), les résultats  $\eta_A = \eta_V$  et  $z = 1$  sont néanmoins respectés avec une bonne précision, voir plus bas.

### Point multicritique $d=2$

Nous commençons par discuter le cas bidimensionnel. Nous trouvons que  $Z_C(n)$  s'annule pour  $\mu = 0.382$ , soit une valeur légèrement différente que la position du bout du lobe, situé à  $\mu = 0.387$  (nous nous concentrons sur l'étude du lobe  $\bar{n} = 1$ ). Cette petite erreur provient vraisemblablement du fait que l'invariance de jauge locale, (voir section 3.1.2), qui donne l'identité de Ward (3.65), n'est pas strictement satisfaite dans notre approche, car violée à la fois par l'approximation BMW et par le développement en dérivées. D'un autre côté, le fait que le point multicritique se trouve très proche de la pointe du lobe montre que la violation est faible et sans grandes conséquences.

La figure 3.8 montre le flot de RG au point multicritique. Les plateaux de la densité du condensat  $\tilde{n}_{0,k}$  et de la constante de couplage  $\tilde{\lambda}_k$  adimensionnées, ainsi que ceux des dimensions anormales  $\eta_{A,k}$  et  $\eta_{V,k}$ , sont caractéristiques d'un comportement critique. Nous voyons clairement l'émergence de l'invariance relativiste à mesure que  $k$  décroît :  $\tilde{Z}_{C,k}(\tilde{n}_{0,k}) \sim k$  s'annule tandis que  $\eta_{A,k}$  et  $\eta_{V,k}$  deviennent quasiment égales (impliquant  $z_k \simeq 1$ ). Nous trouvons les exposants critiques  $\nu = 0.699$ ,  $\eta_A = 0.049$ ,  $\eta_V = \eta_A(1 - \eta_A/4) = 0.049$  et  $z = 1.000$ , à comparer aux meilleures estimations  $\nu = 0.671$  et  $\eta = 0.038$  pour le modèle XY à trois dimensions [114]. Il serait possible d'améliorer le calcul des exposants critiques en augmentant le caractère fonctionnel de notre ansatz (*i.e.* garder  $V_{A,k}(n)$  et  $Z_{A,k}(n)$  et non les approximer par leurs valeurs en  $n_{0,k}$ ), ou en poussant le développement en dérivées jusqu'à l'ordre 4. Le but de notre travail n'est néanmoins pas de calculer ces exposants critiques, mais de montrer que l'on retrouve bien le comportement critique du modèle XY.

La figure 3.9 montre  $|\tilde{Z}_{C,k}(\tilde{n}_{0,k})|$  près du point multicritique. Il s'annule lors de l'approche du point multicritique avant de croître comme  $|\tilde{Z}_{C,k}(\tilde{n}_{0,k})| \sim 1/k \sim e^{-l}$

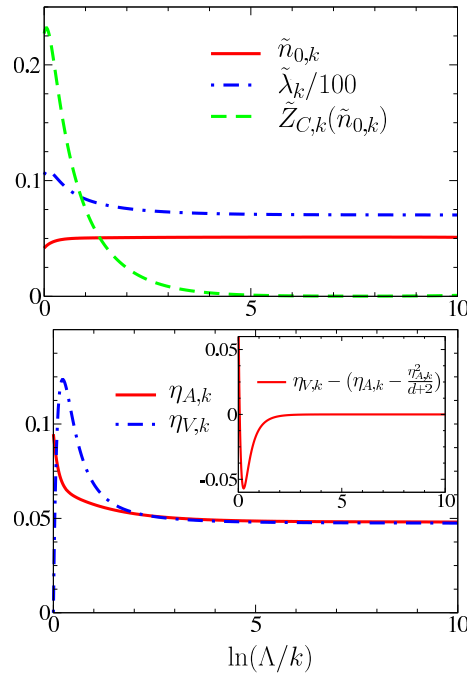


FIGURE 3.8 – (Haut) Densité du condensat  $\tilde{n}_{0,k}$ , constante de couplage  $\tilde{\lambda}_k$  et  $\tilde{Z}_{C,k}(\tilde{n}_{0,k})$  adimensionnés vs  $\ln(\Lambda/k)$  au point multicritique  $\bar{n} = 1$  en  $d = 2$ . (Bas) Dimensions anormales  $\eta_{A,k}$  et  $\eta_{V,k}$  en fonction  $\ln(\Lambda/k)$ . L'encart montre que l'équation (3.69) est satisfaite pour  $k \rightarrow 0$ .

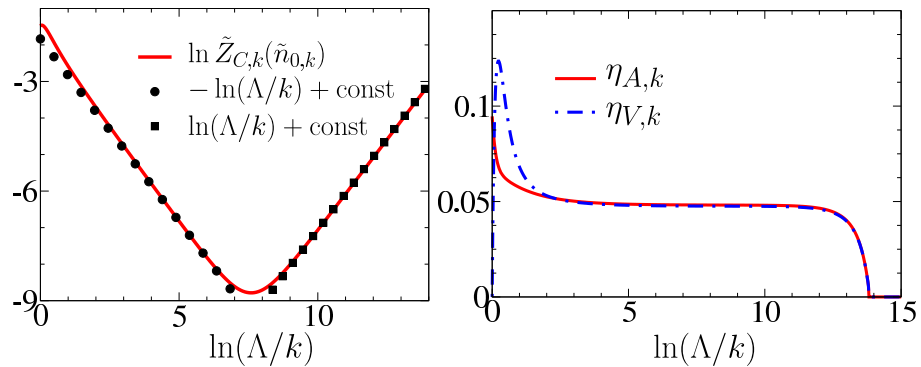


FIGURE 3.9 – (Gauche)  $\ln \tilde{Z}_{C,k}(\tilde{n}_{0,k})$  en fonction de  $\ln(\Lambda/k)$  près du point multicritique. (Droite) Dimensions anormales  $\eta_{A,k}$  et  $\eta_{V,k}$ . La fin des plateaux détermine la longueur de Josephson  $\xi_J = k_J^{-1}$ .  $d = 2$  dans les deux cas.



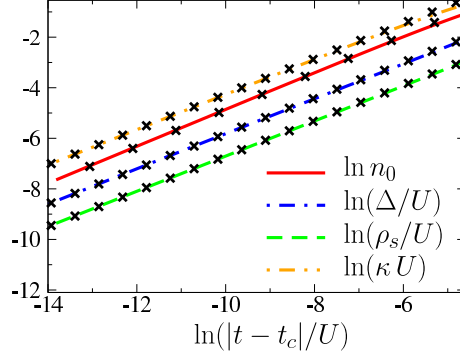


FIGURE 3.10 – Densité du condensat  $n_0$ , raideur superfluide  $\rho_s$ , compressibilité  $\kappa$  et gap de Mott  $\Delta$  en fonction de  $|t - t_c|$  près du point multicritique  $(t_c, \mu_c)$  [ $d = 2$ ]. Les croix montrent les comportements donnés par les équations (3.70-3.72) avec  $\nu \simeq 0.699$  et  $\eta \simeq 0.049$ .

lorsque le flot s'écarte de la surface critique, de sorte que l'exposant critique associé à  $\tilde{Z}_{C,k}(\tilde{n}_{0,k})$  est égale à un, comme prédit par des arguments d'échelle [3]. Les plateaux des dimensions anormales  $\eta_{A,k}$  et  $\eta_{V,k}$  montrent l'intervalle d'impulsion durant lequel le flot est contrôlé par le point multicritique. La fin des plateaux détermine la longueur de Josephson  $\xi_J \equiv k_J^{-1} = k^{-1}$  [115]<sup>j</sup>, voir figure 3.9.

Nous discutons maintenant le comportement du système pour  $\mu = \mu_c$  et  $t \rightarrow t_c^+$ . La densité du condensat s'annule avec l'exposant critique  $2\beta = \nu(d + z - 2 + \eta)$ ,

$$n_0 \sim (t - t_c)^{\nu(d+z-2+\eta)}. \quad (3.70)$$

À partir de la dimension d'échelle  $[\rho_s] = d + z - 2$  de la raideur superfluide et le fait que la vitesse du mode de Goldstone  $c = \sqrt{\rho_s/\kappa}$  reste finie à cause de l'invariance relativiste de l'action effective  $\Gamma_k$  dans la limite  $k \rightarrow 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} \rho_s &\sim (t - t_c)^{\nu(d+z-2)}, \\ \kappa &\sim (t - t_c)^{\nu(d+z-2)}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Les équations (3.70,3.71) sont en accord avec les résultats obtenus numériquement avec les équations de flots (figure 3.10). Dans la phase de Mott, nous avons  $[\Delta] = z$  et le gap s'annule comme

$$\Delta \sim (t_c - t)^{\nu z} \quad (3.72)$$

pour  $t \rightarrow t_c^-$ , de nouveau en accord avec les équations de flot (figure 3.10). Les courbes de la figure 3.10 donnent  $\nu \sim 0.696$  et  $2\beta = \nu(1 + \eta) \sim 0.7338$ , ce qui donne

j. La longueur de Josephson n'est définie que dans la phase basse température. Pour des impulsions  $\xi_G^{-1} \gg |\mathbf{q}| \gg \xi_J^{-1}$  ( $\xi_G$  est la longueur de Ginzburg, voir section 2.1), les fonctions de corrélation sont celles du système critique  $G(\mathbf{q}) \propto |\mathbf{q}|^{-2+\eta}$ , tandis que pour  $|\mathbf{q}| \ll \xi_J^{-1}$ , les fonctions de corrélation ne sont plus critiques mais sont dominées par les modes de Goldstone (la fonction de corrélation transverse se comporte comme  $G_t(\mathbf{q}) \propto |\mathbf{q}|^{-2}$  et la fonction de corrélation longitudinale comme  $G_l(\mathbf{q}) \propto |\mathbf{q}|^{d-4}$  pour un système classique [30]).

$\eta = 0.053$ , en très bon accord avec les exposants déduit à partir des flots de RG, voir ci-dessus.

### Point multicritique à $d = 3$

La dimension critique supérieure étant trois ( $d + z = 4$ ), la transition au point multicritique est dans ce cas gouvernée par le point fixe gaussien avec des corrections logarithmiques dues à la constante de couplage marginalement non pertinente  $\tilde{\lambda}_k$ . La résolution numérique des équations de flots montre que  $\tilde{\lambda}_k \sim 1/|\ln k|$ ,  $\tilde{Z}_{C,k}(\tilde{n}_{0,k}) \sim k/|\ln k|$  et  $\eta_{A,k}, \eta_{V,k} \sim 1/|\ln k|^2$ , tandis que  $\tilde{n}_{0,k}$  va vers sa valeur de point fixe  $\tilde{n}_0^*$  logarithmiquement (Fig. 3.11)<sup>k</sup>. La figure 3.12 montre  $\rho_s, \kappa$  et  $c$  en fonction de  $t - t_c$ .

### 3.3.2 Transition générique

Pour tous les points de la ligne de transition différents de l'extrémité du lobe, le terme  $V_{A,k} \omega^2$  est non pertinent par rapport à  $Z_{C,k} \omega$ . L'exposant critique dynamique est  $z = 2$  et une analyse dimensionnelle montre que  $d_c^+ = 2$ . La transition est donc contrôlée par le point fixe gaussien (avec des corrections logarithmiques pour  $d = 2$ ) défini par  $\tilde{n}_0^* = \tilde{\lambda}^* = \tilde{V}_A^* = 0^1$  et  $\eta_A^* = \eta_C^* = 0$  où

$$\eta_{C,k} = -\partial_l \ln Z_{C,k}(n_{0,k}). \quad (3.73)$$

Les variables adimensionnées à utiliser dans ce cas sont données en table III.2. Déterminant l'exposant critique dynamique comme en section 3.3.1, nous trouvons

$$z_k = 2 - \eta_{A,k} + \eta_{C,k}. \quad (3.74)$$

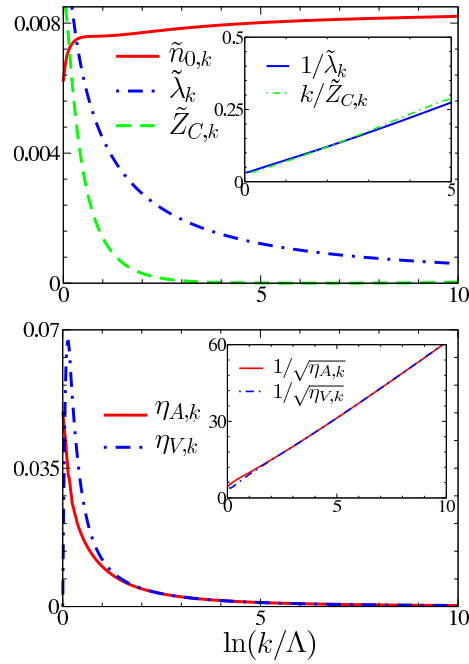
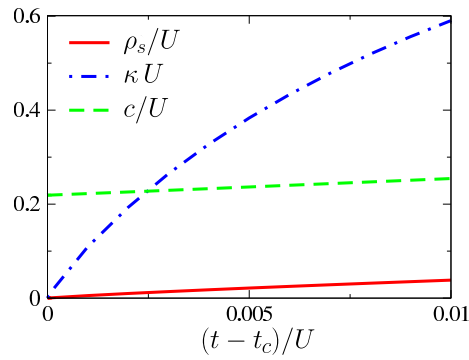
À trois dimensions, la linéarisation des équations de flot autour du point fixe gaussien donne (voir F.3.2)

$$\begin{aligned} \partial_l \tilde{n}_{0,k} &= -3\tilde{n}_{0,k} + \frac{4}{3\pi^2} \tilde{V}_A \\ \partial_l \tilde{\lambda}_k &= \tilde{\lambda}_k, \\ \partial_l \tilde{V}_{A,k} &= 2\tilde{V}_{A,k}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

et  $\eta_{A,k} = \eta_{C,k} = 0$ . Nous en déduisons que  $\tilde{\lambda}_k \sim k$ ,  $\tilde{V}_{A,k} \sim k^2$  au point fixe, en accord avec la résolution numérique des équations de flot (Fig. 3.13). La figure 3.13 montre

k. Dans le formalisme du NPRG, on peut montrer, en tout cas numériquement et pour une théorie  $\phi^4$  (qui donne des équations similaires à celles du point multicritique) que pour tout  $k$  non nul, le potentiel sur la surface critique possède un minimum non nul, même en dimensions supérieures ou égales à la dimension critique supérieure. Cela est réminiscent du fait qu'en faisant un développement en  $4 - \epsilon$ , le terme de masse  $r$  et le terme d'interaction  $\lambda$  sont d'ordre  $\epsilon$ , de sorte que le minimum du potentiel semble se trouver en  $-r/\lambda \sim 1$ , même pour  $\epsilon = 0$ . Bien entendu, exactement au point fixe gaussien, *i.e.* à  $k = 0$ , le potentiel est nul et ne possède donc plus à proprement parler de minimum.

l. La valeur de point fixe de  $\tilde{n}_{0,k}$  est nulle au point fixe gaussien de la transition générique, contrairement au cas du point multicritique, voir note k. Cela est dû à l'anisotropie entre espace et temps imaginaire (*i.e.* dérivée première en temps à opposer aux dérivées secondes en espace).

FIGURE 3.11 – Pareil qu'en figure 3.8 mais pour  $d = 3$ .FIGURE 3.12 – Raideur superfluide  $\rho_s$ , compressibilité  $\kappa$  et vitesse du mode de Goldstone  $c$  en fonction de  $t - t_c$  ( $d = 3$ ).

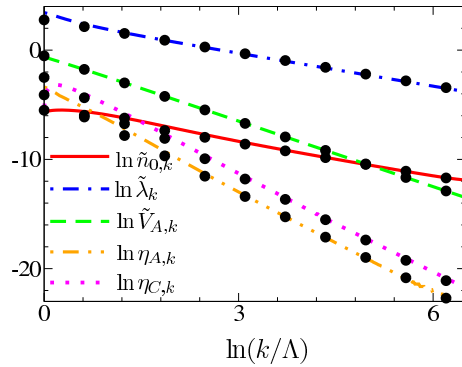


FIGURE 3.13 – Flot de RG à la transition générique ( $d = 3$ ). Les pointillés montrent des fits  $\tilde{n}_{0,k} \sim k$ ,  $\tilde{\lambda}_k \sim k$ ,  $\tilde{V}_{A,k} \sim k^2$  et  $\eta_{A,k}, \eta_{C,k} \sim k^3$ .

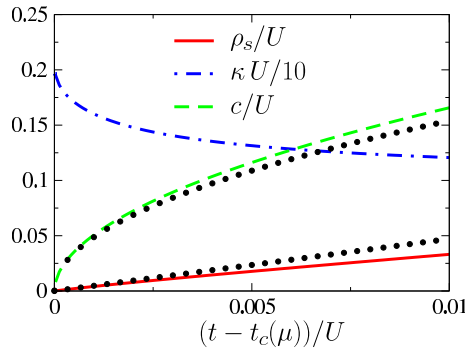


FIGURE 3.14 – Raideur superfluide  $\rho_s$ , compressibilité  $\kappa$  et vitesse du mode de Goldstone  $c = \sqrt{\rho_s/\kappa}$  en fonction de  $t - t_c(\mu)$  près de la transition générique ( $t_c(\mu), \mu$ ) [ $\mu = 0.7$ ,  $t_c(\mu) = 0.0219$  et  $d = 3$ ]. Les pointillés montrent le comportement critique champ moyen, voir équation (3.76).

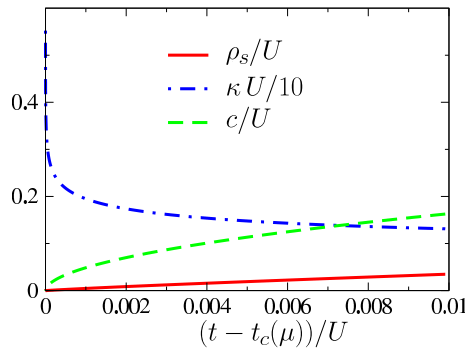


FIGURE 3.15 – Pareil qu'en figure 3.14 mais à la dimension critique supérieure  $d_c^+ = 2$ . La compressibilité diverge pour  $t \rightarrow t_c(\mu)$ .

	$Z_{A,k}$	$V_{A,k}$	$Z_{C,k}$	$\lambda_k$	$n_{0,k}$
superfluide	$Z_A^*$	$V_A^*$	$k$	$k$	$n_0^*$
point multicritique	$k^{-\eta}$	$k^{-\eta}$	$k$	$k^{1-2\eta}$	$k^{1+\eta}$
transition générique	$Z_A^*$	$V_A^*$	$Z_C^*$	$ \ln k ^{-1}$	$k^2  \ln k ^{-1}$
isolant	$Z_A^*$	$V_A^*$	$Z_C^*$	$\lambda^*$	0

TABLE III.3 – Comportement infrarouge du modèle de Bose-Hubbard à deux dimensions. Les quantités avec des étoiles représente des valeurs non nulles de point fixe et  $\eta$  est la dimension anormale du point critique  $XY$  tridimensionnel.  $Z_{C,k}$  signifie  $Z_{C,k}(n_{0,k})$ .

aussi que  $\eta_{A,k}, \eta_{V,k} \sim k^3$  tandis que la variable pertinente  $\tilde{n}_{0,k}$  s'annule comme  $k$  au point critique.

Quand un point de la transition générique  $(t_c(\mu), \mu)$  est approché le long d'un chemin à potentiel chimique constant  $\mu$  en variant  $t - t_c(\mu)$ , nous observons le comportement champ moyen

$$\begin{aligned} \rho_s &\sim t - t_c(\mu), \\ \kappa &\sim \text{const}, \end{aligned} \tag{3.76}$$

pour  $t \rightarrow t_c(\mu)$  (Fig. 3.14). La compressibilité  $\kappa$  reste finie à la transition tandis que la vitesse  $c$  s'annule.

À la dimension critique supérieure ( $d = d_c^+ = 2$ ), il y a des corrections logarithmiques au champ moyen. La variable marginalement pertinente  $\tilde{\lambda}_k$  s'annule comme  $|\ln k|^{-1}$ , tandis que la variable pertinente  $\tilde{n}_{0,k}$  s'annule comme  $|\ln k|^{-1}$  au point critique. Nous observons une divergence de la compressibilité  $\kappa$  quand on s'approche de la transition ( $t \rightarrow t_c(\mu)$ ) (Fig. 3.15).

Il est intéressant de comparer le comportement infrarouge dans la phase superfluide ou dans la phase de Mott avec le comportement critique à la transition entre les deux phases (Table III.3). Dans la phase superfluide et aux points multicritiques, le comportement infrarouge est caractérisé par une invariance relativiste.

## Chapitre IV

# Thermodynamique universelle à proximité de la transition de Mott

The most exciting phrase to hear in science, the one that heralds new discoveries, is not “Eureka!” but “That’s funny...”.

---

I. Asimov

Nous discutons dans ce chapitre la thermodynamique d’un gaz de Bose avec le point de vue des transitions de phase quantiques. En particulier, nous montrons comment l’existence du point critique quantique de la transition vide-superfluide implique que les fonctions thermodynamiques s’écrivent sous forme de fonctions d’échelle. Celles-ci sont des fonctions universelles (ne dépendant pas du système), mais dont les arguments sont non-universels et dont les paramètres caractérisent les excitations au point quantique critique, ici la masse  $m$  des bosons et leur longueur de diffusion en onde- $s$   $a$ .

Nous avons vu au cours des chapitres précédents que la transition de Mott avec changement de densité est décrite par le même point fixe (gaussien en dimension  $d \geq 2$ ) que la transition vide-superfluide. Cela implique en particulier que la thermodynamique universelle de la phase superfluide près de la transition de Mott générique doit être donnée par les fonctions d’échelle, universelles, du gaz de Bose dilué, mais avec des arguments dépendant des caractéristiques du point quantique critique : la masse effective  $m^*$  des quasi-particules et la ‘longueur de diffusion’ effective  $a^*$ <sup>a</sup>. En utilisant le NPRG sur réseau, nous calculons ces paramètres et montrons que la thermodynamique de la phase superfluide près de la transition de Mott générique est bien donnée par celle d’un gaz de Bose dilué. La généralisation du NPRG au cas à température finie, dont nous aurons besoin, est discutée en annexe G. Nous survolons en annexe H les lois d’échelle dans le cas du point multicritique.

---

a. Le même genre d’approche a été utilisé pour comprendre la ‘condensation’ de triplon (se comportant comme des bosons de cœur dur) dans certains systèmes magnétiques quantiques, voir par exemple [116].

## 4.1 Thermodynamique du gaz de Bose dilué *via* les transitions de phase quantiques

### 4.1.1 La transition vide-superfluide

Nous exposons maintenant comment le point de vue des transitions de phase quantiques permet de montrer l'universalité de la thermodynamique du gaz de Bose dilué [1] et détaillons la discussion donnée au chapitre I. Nous rappelons que l'action minimale pour décrire un gaz de Bose dilué est

$$S = \int d\mathbf{x} \int_0^\beta d\tau \left\{ \psi^*(\mathbf{x}, \tau) \left( \partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \psi(\mathbf{x}, \tau) + \frac{g_d}{2} |\psi(\mathbf{x}, \tau)|^4 \right\}, \quad (4.1)$$

avec  $g_d$  l'interaction "microscopique" et  $m$  la masse des bosons.

À température nulle, un système de boson est vide si le potentiel chimique  $\mu$  est négatif et superfluide s'il est positif. Le système change donc de phase au point critique quantique  $T = \mu = 0$ , via une transition du second ordre, la pression et la densité variant continument, tandis que la compressibilité est discontinue au point critique. Cette transition de phase est relativement simple à décrire, et le point critique à caractériser, vu que le système est vide à  $\mu = T = 0$ . En particulier, la fonction de Green est trivialement donnée par

$$G(\mathbf{q}, i\omega)^{-1} = i\omega - \frac{\mathbf{q}^2}{2m}, \quad (4.2)$$

et ce pour toute valeur de la constante de couplage nue  $g_d$ . En effet, le système étant vide, une particule ajoutée ne peut interagir avec aucune autre. Pour les mêmes raisons,  $G$  vaut pour  $\mu < 0$

$$G(\mathbf{q}, i\omega)^{-1} = i\omega - \frac{\mathbf{q}^2}{2m} + \mu. \quad (4.3)$$

Nous en déduisons que l'exposant dynamique  $z = 2$  et que la dimension anormale  $\eta = 0$ , tandis que la longueur de corrélation  $\xi^{-1} = \sqrt{2m\mu}$  nous donne l'exposant  $\nu = \frac{1}{2}$ <sup>b</sup>.

De la même façon, la renormalisation de la constante de couplage est donnée par la matrice  $T$ , qui dans ce cas revient à regarder la diffusion de deux particules dans le vide (resommation des diagrammes en échelle). À basse énergie, elle va vers une constante en dimensions supérieures à deux, et s'annule pour  $d \leq 2$  (logarithmiquement ( $\propto 1/\ln(|\mathbf{q}|)$ ) en  $d = 2$  et comme  $|\mathbf{q}|$  en  $d = 1$ , où  $\mathbf{q}$  est l'impulsion d'une des particules qui diffuse, dans le repère du centre de masse). De même, il est en principe possible de calculer les fonctions de Green à 3,4,...-corps, ce qui revient à résoudre un problème de diffusion à 3,4,...-corps<sup>c</sup>.

b. Dans le cadre du modèle de Bose-Hubbard, le potentiel chimique devient  $\mu \rightarrow \mu + 2dt$ , la transition de phase vide-superfluide ne se trouve plus en  $\mu = 0$  mais en  $\mu = \mu_c = -2dt$ .

c. Cela reste un problème (très) compliqué de mécanique quantique.

### 4.1.2 Approche de RG à la Wilson

Le problème de la transition vide-superfluide étant relativement simple, un calcul de RG à la Wilson suffit à expliquer la plupart des résultats qui nous intéressent. Nous intégrons donc les modes rapides, d'impulsions comprises entre  $\Lambda$  et  $\Lambda/s$  ( $s > 1$ ), comme présenté en section 2.1, et nous redéfinissons les champs, impulsions et fréquences de sorte à garder le même cut-off  $\Lambda$ . Nous obtenons alors un hamiltonien pour les modes lents avec des constantes d'interaction renormalisées.

Au point critique quantique  $\mu = T = 0$ , la partie quadratique de l'hamiltonien n'est pas renormalisée, en accord avec le fait que l'équation (4.2) est exacte. L'interaction adimensionnée  $\tilde{g}(s) = 2m\Lambda^{d-2}g(s)$ <sup>d</sup> obéit à l'équation de RG

$$s \frac{d\tilde{g}(s)}{ds} = (2-d)\tilde{g}(s) - \frac{K_d}{2}\tilde{g}(s)^2, \quad (4.4)$$

où  $K_d = [2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)]^{-1}$  et avec comme condition initiale  $\tilde{g}(1) = 2m\Lambda^{d-2}g_d = \tilde{g}_d$ . Au-dessus de la dimension critique supérieure  $d_c^+ = 2$ ,  $\tilde{g}(s)$  s'annule pour  $s \rightarrow \infty$  et l'unique point fixe est le gaussien  $\tilde{g} = 0$  qui gouverne donc la physique de la transition vide-superfluide. En dimension plus petite que deux, il existe un point fixe non-trivial. Il faut noter que l'équation précédente est exacte et ce peu importe la valeur de la constante de couplage nue (à  $s = 1$ ). Sauf mention contraire, nous nous intéresserons toujours au cas  $d \geq 2$ . En intégrant l'équation de  $\tilde{g}$ , nous obtenons

$$\tilde{g}(s) = \begin{cases} \frac{8\pi\Lambda a_3}{s} & \text{si } d = 3, \\ -\frac{4\pi}{\ln\left(\frac{\Lambda a_2}{2s}\right) + C} & \text{si } d = 2, \end{cases} \quad (4.5)$$

qui est valide pour  $s \gg 1$ . Notons, qu'à deux dimensions, la décroissance de  $\tilde{g}$  est logarithmique.

Il y a deux perturbations pertinentes par rapport au point fixe gaussien  $\mu = T = \tilde{g} = 0$  : le potentiel chimique  $\mu$  et la température  $T$ . (Pour le modèle de Bose-Hubbard,  $\mu$  doit s'interpréter comme  $\mu - \mu_c \equiv \mu + 2dt$ , c'est-à-dire l'écart à la criticalité.) Lors d'une transformation du groupe de renormalisation, elles se transforment comme

$$\tilde{T}(s) = s^z \tilde{T}, \quad \tilde{\mu}(s) = s^{1/\nu} \tilde{\mu}, \quad (4.6)$$

où nous avons introduit les variables adimensionnées<sup>e</sup>

$$\tilde{T} = \frac{2mT}{\Lambda^z}, \quad \tilde{\mu} = \frac{2m\mu}{\Lambda^{1/\nu}}. \quad (4.7)$$

L'équation (4.6) n'est valable qu'à proximité du point fixe gaussien, c'est-à-dire pour  $\tilde{T}(s), |\tilde{\mu}(s)| \lesssim 1$ , ce qui est le cas au début du flot, les hamiltoniens modèles que

d.  $mg$  a la dimension d'une longueur à la puissance  $d - 2$ .

e. Nous utilisons pour cela que  $z = 1/\nu = 2$  et que l'utilisation de la masse donne bien des variables adimensionnées.



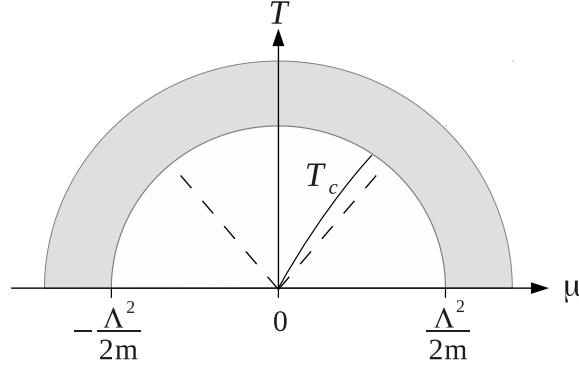


FIGURE 4.1 – Diagramme de phase du gaz de Bose dilué ( $d \geq 2$ ). Les tirets montrent les cross-overs  $|\mu| \sim T$  et la ligne pleine la transition superfluide-normale (de type BKT à  $d = 2$ ). La partie grisée montre la région “non-universelle”, *i.e.* dans laquelle nos modèles de basse énergie ne sont pas valables, voir section 1.2.

nous utilisons n’étant valides que dans cette limite (voir discussions du chapitre I). (Notons encore que nous n’avons pas de contrainte sur la valeur initiale de  $\tilde{g}$ .) Quand  $\tilde{T}(s)$  ou  $|\tilde{\mu}(s)|$  deviennent d’ordre un, les équations (4.4) et (4.6) ne sont plus valables et le comportement à plus basse énergie dépend de la condition  $|\tilde{\mu}(s)| = 1$  ou  $\tilde{T}(s) = 1$  qui est la première à être satisfaite. Cela donne deux lignes de cross-over définies par  $|\tilde{\mu}| \sim \tilde{T}$  (*i.e.*  $|\mu| \sim T$ ), en accord avec le diagramme de phase générique à proximité d’un point quantique critique, voir figure 4.1. Pour  $\mu > 0$  et  $\mu \gg T$ , le système est superfluide, tandis que  $\mu < 0$  et  $|\mu| \gg T$  nous nous attendons à avoir un gaz classique. Enfin, la limite  $T \gg |\mu|$  est appelée régime quantique critique, où la physique est contrôlée par le point quantique critique et ses excitations thermiques.

### 4.1.3 Thermodynamique universelle et fonctions d’échelle

Considérons la pression adimensionnée

$$\tilde{P}(\tilde{\mu}, \tilde{T}, \tilde{g}_d) = \frac{2m}{\Lambda^{d+z}} P(\mu, T), \quad (4.8)$$

fonction des variables adimensionnées  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{g}$ . Lors d’une transformation du groupe de renormalisation,  $\tilde{P}$  se transforme comme

$$\tilde{P}(\tilde{\mu}, \tilde{T}, \tilde{g}_d) = s^{-d-z} \tilde{P}(s^{1/\nu} \tilde{\mu}, s^z \tilde{T}, \tilde{g}(s)), \quad (4.9)$$

tant que  $\tilde{T}(s) \ll 1$  et  $|\tilde{\mu}(s)| \ll 1$ . L’équation précédente est correcte pour la pression totale,  $\tilde{P}$  étant nulle pour tout  $\mu < 0$  à  $T = 0$ , ce qui implique qu’il n’y a pas de partie régulière pour la pression. Nous ne prenons en compte que la constante de couplage  $\tilde{g}$ , qui est dangereusement irrélègente et doit donc être gardée ( $\tilde{P}(x, y, w)$  peut être singulier dans la limite  $w \rightarrow 0$ ), tandis que les effets des autres termes

possibles dans l'action microscopique (voir chapitre I) donneront des corrections sous-dominantes (voir [11] pour une discussion en  $d = 3$ ). À deux dimensions, la théorie est renormalisable au sens de la théorie des champs (absorptions de divergences ultraviolettes dans les constantes de couplage, *etc.*), voir [117], ce qui implique que  $\tilde{g}$  est la *seule* constante de couplage qu'il est nécessaire de garder pour complètement caractériser le système quand  $T, \mu \ll \Lambda^2/2m$ .

Posons maintenant  $s = \tilde{T}^{-1/z}$  dans l'équation (4.9), ce qui donne<sup>f</sup>

$$\tilde{P}(\tilde{\mu}, \tilde{T}, \tilde{g}_d) = \frac{\tilde{T}^{d/z+1}}{(4\pi)^{d/2}} \mathcal{F}_d\left(\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{T}^{1/\nu z}}, \tilde{g}(\tilde{T})\right), \quad (4.10)$$

où nous avons utilisé la notation  $\tilde{g}(\tilde{T})$  pour  $\tilde{g}(s = \tilde{T}^{-1/z})$ . Avec des variables dimensionnées et en posant  $z = 1/\nu = 2$ , nous obtenons

$$P(\mu, T) = T^{d/2+1} \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{d/2} \mathcal{F}_d\left(\frac{\mu}{T}, \tilde{g}(T)\right), \quad (4.11)$$

où la "constante" d'interaction effective, dépendant de l'énergie, est maintenant définie par

$$\tilde{g}(\epsilon) = \begin{cases} 8\pi \sqrt{2ma_3^2\epsilon} & \text{si } d = 3, \\ -\frac{4\pi}{\ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2ma_2^2\epsilon}\right) + C} & \text{si } d = 2, \end{cases} \quad (4.12)$$

Nous voyons que la connaissance des excitations au point quantique critique (nous donnant  $m$  et  $a_d$ ) permet de caractériser entièrement la thermodynamique du gaz de Bose dilué. À deux dimensions et en couplage faible ( $mg_2 \ll 1$ ), la longueur de diffusion  $a_2$  est exponentiellement petite (voir équation (1.14)), ce qui implique que  $\tilde{g}(T) \simeq \tilde{g}_d$  est de manière effective indépendant de la température<sup>g</sup>. Si nous avons choisi  $s = \tilde{\mu}^{-\nu}$ , nous aurions obtenu

$$P(\mu, T) = \mu^{d/2+1} \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{d/2} \mathcal{G}_d\left(\frac{T}{\mu}, \tilde{g}(\mu)\right), \quad (4.13)$$

qui est plus approprié dans la limite de température nulle. Il est néanmoins facile de relier  $\mathcal{G}_d$  et  $\mathcal{F}_d$  en notant que  $\tilde{g}(\epsilon)$  est une fonction de  $ma_d^2\epsilon$  uniquement. Notons que  $\mathcal{G}_d$  et  $\mathcal{F}_d$  sont des fonctions universelles caractérisant la classe d'universalité du gaz de Bose dilué en  $d$  dimensions. Elles sont indépendantes des paramètres non-universels tel que la masse  $m$  ou la longueur de diffusion  $a_d$ , qui changent en fonction du système. Les facteurs  $1/(2\pi)^{d/2}$  sont introduits pour simplifier les notations ultérieurement.

f. Nous définissons la fonction  $\mathcal{F}_d(x, y) = (4\pi)^{d/2} \tilde{P}(x, 1, y)$ .

g.  $\tilde{g}(T)$  est significativement réduit en couplage faible pour des températures exponentiellement petites. Par exemple,  $\tilde{g}(T) = \tilde{g}_d/2$  pour  $T = (2/ma_2^2) \exp(-2C - 8\pi/mg_2)$ .

En utilisant les équations (4.11) ou (4.13), il est possible d'exprimer toute quantité thermodynamique sous une forme d'échelle. Par exemple, la densité  $D = \partial P / \partial \mu$  s'écrit

$$D(\mu, T) = \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{d/2} \mathcal{F}_d^{(1,0)} \left( \frac{\mu}{T}, \tilde{g}(T) \right), \quad (4.14)$$

où  $\mathcal{F}_d^{(i,j)}(x, y) = \partial_x^i \partial_y^j \mathcal{F}_d(x, y)$ . On utilise souvent les termes de pression et densité réduites, respectivement  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{D}$ , qui sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mu, T) &= P(\mu, T) \frac{\lambda_{\text{dB}}^d}{T} = \mathcal{F}_d \left( \frac{\mu}{T}, \tilde{g}(T) \right), \\ \mathcal{D}(\mu, T) &= D(\mu, T) \lambda_{\text{dB}}^d = \mathcal{F}_d^{(1,0)} \left( \frac{\mu}{T}, \tilde{g}(T) \right), \end{aligned} \quad (4.15)$$

où  $\lambda_{\text{dB}} = \sqrt{2\pi/mT}$  est la longueur d'onde thermique de de Broglie. Ainsi,  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{D}$  donnent un accès direct à  $\mathcal{F}_d$  et sa dérivée  $\mathcal{F}_d^{(1,0)}$ . Il est aussi possible d'exprimer l'entropie par particule  $\mathcal{S} = D^{-1} \partial P / \partial T$  sous la forme

$$\mathcal{S}(\mu, T) = -\frac{\mu}{T} + \left( \frac{d}{2} + 1 \right) \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}^{(1,0)}} + T \tilde{g}'(T) \frac{\mathcal{F}^{(0,1)}}{\mathcal{F}^{(1,0)}}, \quad (4.16)$$

où nous avons utilisé les notations  $\tilde{g}'(T) = d\tilde{g}/dT$  et  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mu/T, \tilde{g}(T))$ , etc.<sup>h</sup>.

L'avantage de cette écriture utilisant les fonctions d'échelle est que l'on voit directement quelles quantités sont universelles. Par contre, il faut pouvoir les calculer d'une manière ou d'une autre, ce qui n'est pas toujours aisé. Néanmoins, nous savons qu'à basse température (faible potentiel chimique), ou plus précisément  $Tma_d^2 \ll 1$  ( $\mu ma_d^2 \ll 1$ ), l'interaction renormalisée  $\tilde{g}(T)$  ( $\tilde{g}(\mu)$ ) sera petite, et ce peu importe la valeur de l'interaction nue  $mg_d$ . Comme discuté au chapitre I, il est par exemple possible d'utiliser la théorie de Bogoliubov en dimension trois pour calculer les fonctions d'échelle dans diverses limites, dont nous rappelons les principaux résultats :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_3(x, y) &= \frac{4\pi^{3/2}}{y} - \frac{16\sqrt{2}}{15\sqrt{\pi}} + \dots \quad \text{pour } x, y \ll 1, \\ \mathcal{F}_3(x, y) &= \zeta(5/2) + \dots \quad \text{pour } |x|, y \ll 1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Le cas bidimensionnel sera étudié en détails au chapitre suivant. Enfin, il est important de noter qu'au-dessous de la dimension critique supérieure  $d_c^+ = 2$ , les différentes grandeurs thermodynamiques discutées précédemment prennent une forme totalement universelle (une fois la masse des bosons fixée). En effet, la constante de couplage atteint une valeur de point fixe non triviale  $\tilde{g}(s) \rightarrow g^*$  et l'équation (4.11) devient dans ce cas

$$P(\mu, T) = \mu^{d/2+1} \left( \frac{m}{2\pi} \right)^{d/2} \mathfrak{G}_d \left( \frac{T}{\mu} \right), \quad (4.18)$$

h. Il faut noter que  $\mathcal{S}$  est bien une fonction d'échelle universelle de  $\mu/T$  et  $\tilde{g}(T)$  car  $T\tilde{g}'(T) = \frac{d-2}{2}\tilde{g}(T)$  pour  $d > 2$  et  $T\tilde{g}'(T) = \tilde{g}(T)^2/8\pi$  pour  $d = 2$ .

où  $\mathfrak{G}_d(T/\mu) = \mathcal{G}_d(T/\mu, g^*)$  est une fonction universelle à un argument mais hautement non triviale (dans le sens qu'un calcul en perturbation partant du gaz parfait est impossible). Une conséquence de l'équation précédente est que dans le régime quantique critique la pression dans l'espace des phases prend la valeur universelle  $\mathfrak{G}_d(0)$  qui est un nombre pur caractérisant la classe d'universalité du gaz dilué (en particulier,  $\mathfrak{G}_1(0) = 4/3\sqrt{\pi}$ , voir références données en [118]).

Nous discutons en annexe D comment la physique du gaz de Bose dilué est retrouvé avec le NPRG, et nous décrivons la phase superfluide (en particulier les longueurs caractéristiques) dans le régime de couplage fort (c'est-à-dire au voisinage de la transition de Mott).

## 4.2 Thermodynamique universelle près de la transition de Mott générique

Nous discutons maintenant la thermodynamique d'un gaz de Bose près de la transition de Mott avec changement de densité (transition générique). Comme nous l'avons vu lors des chapitres précédents, cette transition de phase est dans la même classe d'universalité que la transition de phase vide-superfluide. On s'attend alors à ce que la physique de la phase superfluide près de la transition de Mott ressemble à celle d'un gaz de Bose dilué. Fisher *et al.* ont proposé l'analogie suivante : quand le nombre de particules par site  $\bar{n}$  diffère légèrement de la densité entière  $\bar{n}_c$  de l'isolant de Mott, l'excès de bosons (ou de trous)  $|\bar{n} - \bar{n}_c|$  se comporte comme un gaz de quasi-particules qui peut condenser [3]. Nous allons montrer que cette image est la bonne pour appréhender la physique de basse énergie d'un gaz de boson à proximité de la transition de Mott. Nous savons déjà que les exposants critiques sont les mêmes que ceux de la transition vide-superfluide ( $z = 1/\nu = 2$  et  $\eta = 0$ ) et que la thermodynamique est contrôlée par les excitations de basse énergie au point critique quantique. Si nous connaissons les paramètres effectifs décrivant ces excitations, c'est-à-dire leur masse effective  $m^*$  et leur "longueur de diffusion" effective  $a^*$  (que nous calculons plus bas), nous en concluons directement que l'équation d'état près de la phase de Mott est donnée par

$$P(\mu, T) = P_c + D_c \delta\mu + \left(\frac{m^*}{2\pi}\right)^{d/2} T^{d/2+1} \mathcal{F}_d\left(\pm \frac{\delta\mu}{T}, \tilde{g}(T)\right), \quad (4.19)$$

où  $P_c$  et  $D_c = \bar{n}_c/t^d$  (avec  $\bar{n}_c$  le nombre de particules par site de l'isolant de Mott correspondant) sont la pression et la densité au point critique quantique  $\mu = \mu_c$  et  $T = 0$ , avec  $\delta\mu = \mu - \mu_c$ .  $\mathcal{F}_d(x, y)$  est la fonction d'échelle de la classe d'universalité du gaz de Bose dilué à  $d$  dimensions (voir discussion des sections précédentes). Le signe  $+$  ( $-$ ) correspond au dopage en particules (trous) et  $\tilde{g}(T) = 8\pi\sqrt{2m^*a^{*2}T}$  est l'interaction renormalisée. Cette expression est valable près de la transition de Mott, sauf aux points multicritiques (aux extrémités des lobes) où la transition se passe à densité constante et est décrite par la classe d'universalité du modèle XY

en dimension  $d + 1$ . Pour  $\mu_c = -2dt$  et  $P_c = \bar{n}_c = 0$ , nous retrouvons le cas de la transition vide-superfluide du modèle de Bose-Hubbard, qui reproduit le développement à basse densité du gaz dilué, avec une masse  $m = 1/2tl^2$  et une longueur de diffusion  $a_d$  donnée à l'équation (1.84). Le vide peut donc être considéré comme un isolant de Mott particulier, de densité nulle (bien entendu, on ne peut pas le doper en trou). Notons que la partie régulière de la pression  $P_c + D_c \delta\mu$  est exacte. En effet, la compressibilité  $\kappa(\mu, T) = \partial^2 P / \partial \mu^2$  est nulle dans l'isolant de Mott à  $T = 0$ , mais finie dans la phase superfluide. Elle est donc proportionnelle à  $\theta(\pm\delta\mu)$ , qui est singulier, impliquant l'absence de partie régulière, *i.e.*

$$\kappa(\mu, T) = \left(\frac{m^*}{2\pi}\right)^{d/2} T^{d/2-1} \mathcal{F}_d^{(2,0)}\left(\pm \frac{\delta\mu}{T}, \tilde{g}(T)\right). \quad (4.20)$$

Une double intégration donne directement l'équation (4.19).

Nous travaillons maintenant en  $d = 3$ , avec une courte discussion du cas bidimensionnel en fin de chapitre.

#### 4.2.1 Théorie critique à la transition générique

Si nous ajustons les paramètres microscopiques pour être à la transition de phase générique, nous savons qu'après un temps de RG donné (caractérisé par  $k = k_c$  qui est l'inverse de la longueur de Ginzburg (au sens des transitions de phase, c'est-à-dire la longueur au-delà de laquelle le système est critique, voir chapitre II)), l'action effective moyenne prendra sa valeur de point fixe, *i.e.*  $\Gamma_{k \ll k_c}[\phi^*, \phi] \simeq \Gamma^*[\phi^*, \phi]$ . En termes des constantes de couplage et des champs adimensionnés (voir table III.2), l'action effective de point fixe est gaussienne, *i.e.*

$$\tilde{\Gamma}^*[\tilde{\phi}^*, \tilde{\phi}] = \int d\tilde{\tau} \int d\tilde{\mathbf{x}} \tilde{\phi}^*(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}}) \left( -\tilde{\nabla}^2 + \partial_{\tilde{\tau}} \right) \tilde{\phi}(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}}), \quad (4.21)$$

où l'intégrale sur  $\tilde{\tau}$  se fait sur  $[0, +\infty[$  ( $T = 0$  au point critique quantique) et nous avons négligé une constante proportionnelle à la pression au point critique. Tous les autres termes s'annulent au point fixe (le point fixe étant gaussien, leurs dimensions d'échelle sont leurs dimensions canoniques). Par exemple

$$\tilde{\lambda} \propto k^{d+z-4}, \quad (4.22)$$

avec  $z = 2$  (l'annulation serait logarithmique en  $d = 2$ ). L'action effective dimensionnée vaut au point critique

$$\begin{aligned} \Gamma^*[\phi^*, \phi] &= -\beta N P_c + \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \left[ \phi^*(\tau, \mathbf{x}) \left( -\frac{Z_A^*}{2m} \nabla^2 + Z_C^* \partial_\tau \right) \phi(\tau, \mathbf{x}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^*}{2} |\phi(\tau, \mathbf{x})|^4 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

$Z_A^*$  et  $Z_C^*$  représentent la renormalisation (finie) des termes de dérivées en temps et en espace et  $m = 1/2tl^2$  est la masse effective sur le réseau. Nous avons ajouté le

terme indépendant des champs  $P_c$  et nous avons négligé les termes d'ordre plus élevé en champs ou dérivées, qui auront des effets sous-dominants dans les calculs que nous ferons [11]. Nous avons développé l'action effective autour de la configuration en champ nul, celle d'équilibre, et le terme proportionnel à  $|\phi|^2$  est nul car la théorie est critique. Nous montrons en figure 4.2 les flots des constantes de couplage au point critique, où l'échelle  $k_c$  est visible. Les paramètres  $P_c$ ,  $m$ ,  $Z_A^*$ ,  $Z_C^*$  et  $\lambda^*$  dépendent a priori de  $\mu_c(t/U)/U$  et  $t/U$ , *i.e.* du point critique sur la ligne de transition. Notons qu'il y a peu de renormalisation au-delà de la RPA pour la valeur de  $t/U = 0.02$  choisie pour cette figure, ce qui n'est pas le cas près de l'extrémité du lobe (où  $Z_C$  doit être fortement renormalisé de sorte à être nul au bout du lobe).

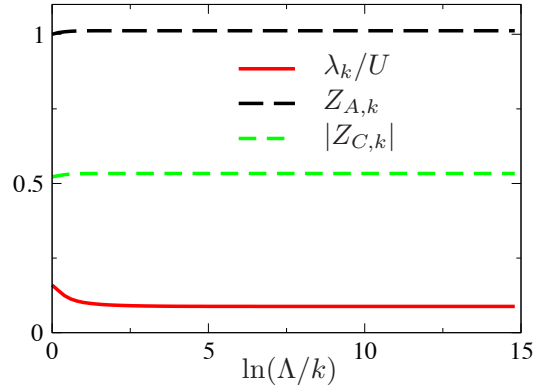


FIGURE 4.2 – Flot de  $\lambda_k$ ,  $Z_{A,k}$  et  $Z_{C,k}$  au point critique ( $\mu = \mu_c$  et  $T = 0$ ) du côté trou ( $Z_{C,k} < 0$ ) pour  $t = 0.02U$ . Pour  $k \lesssim k_c \simeq \Lambda e^{-2}$ , les constantes de couplage atteignent leur valeur de point fixe  $\lambda^*$ ,  $Z_C^*$  et  $Z_A^*$ .

À partir de l'action effective (4.23), nous pouvons identifier les excitations élémentaires au point quantique critique.  $Z_C^*$  étant négatif sur la partie inférieure de la ligne de transition d'un lobe donné (cf. chapitre III), il est préférable dans ce cas de faire une transformation de type particule-trou  $\phi \leftrightarrow \phi^*$  (qui change juste le signe du terme en  $\partial_\tau$  dans l'action effective critique). On peut alors définir un champ de quasi-particule  $\bar{\phi} = |Z_C^*|^{1/2}\phi$  et réécrire l'action effective ( $\beta \rightarrow \infty$ )

$$\Gamma^*[\bar{\phi}^*, \bar{\phi}] = -\beta N P_c + \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \left[ \bar{\phi}^*(\tau, \mathbf{x}) \left( -\frac{\nabla^2}{2m^*} + \partial_\tau \right) \bar{\phi}(\tau, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \frac{4\pi a^*}{m} |\bar{\phi}(\tau, \mathbf{x})|^4 + \dots \right], \quad (4.24)$$

où

$$m^* = \frac{|Z_C^*|}{Z_A^* 2t l^2} = m \frac{|Z_C^*|}{Z_A^*}, \quad a^* = \frac{m^* \lambda^*}{4\pi Z_C^{*2}}. \quad (4.25)$$

Les excitations élémentaires sont des quasi-particules bosoniques ayant une disper-

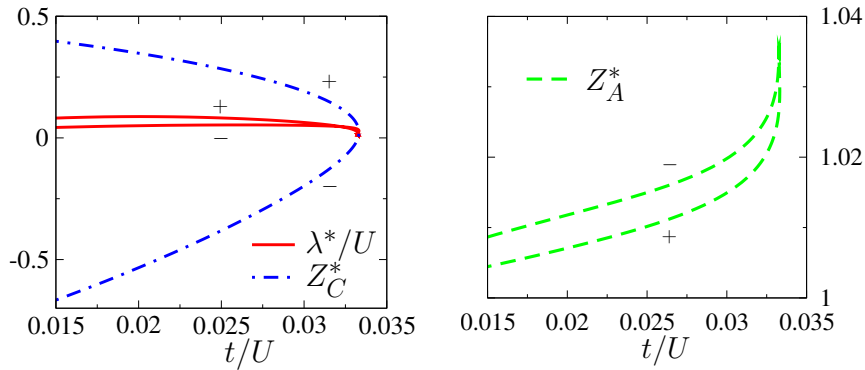


FIGURE 4.3 –  $Z_C^*$ ,  $\lambda^*$  et  $Z_A^*$  en fonction de  $t/U$  au point critique quantique entre la phase superfluide et l'isolant de Mott  $\bar{n}_c = 1$  [ $d = 3$ ]. Les signes + et - se réfèrent au haut et bas de la ligne de transition par rapport à l'extrémité du lobe.

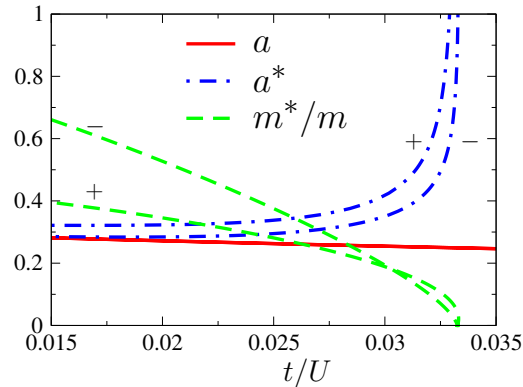


FIGURE 4.4 – Masse effective  $m^*$  et longueur de diffusion effective  $a^*$  en fonction de  $t/U$  au point critique quantique entre la phase superfluide et l'isolant de Mott  $\bar{n}_c = 1$  [ $d = 3$ ]. La ligne rouge se réfère à la longueur de diffusion dans le vide  $a_3 = [8\pi(t/U + A)]^{-1}$ . ( $l = 1$  dans cette figure.)

sion quadratique avec une masse  $m^*$  et un poids de quasi-particules

$$Z_{\text{QP}} = |Z_C^*|^{-1}. \quad (4.26)$$

Comme nous nous y attendions, elles sont de type particule sur le haut du lobe ( $Z_C^* > 0$ ) et les excitations de type trou sont gappées et invisibles dans notre action de basse énergie, tandis qu'elles sont de type trou sur le bas du lobe ( $Z_C^* < 0$ ) où l'ajout d'une particule demande trop d'énergie et n'apparaît donc pas dans l'action effective. Les quasi-particules interagissent avec une "longueur de diffusion" effective  $a^*$  (définie de manière *ad hoc*, mais nous permettant de réutiliser directement les fonctions d'échelle du gaz de Bose dilué).

Au point critique entre le vide et le superfluide,  $Z_C^* = Z_A^* = 1$ , de sorte que  $m^* = m = 1/2tl^2$  et la constante d'interaction vaut  $\lambda^* = 4\pi a_3/m$  ( $a_3$  est donnée à l'équation (1.84)), et donc  $a^* = a_3$ . Pour un point critique quantique d'un isolant de Mott  $\bar{n}_c = 1, 2, \dots$ , la détermination de  $m^*$  et  $a^*$  est bien plus difficile car cela requiert la résolution d'un problème à N corps. Néanmoins,  $Z_A^*$ ,  $Z_C^*$  et  $\lambda^*$  peuvent être calculés avec le NPRG (voir chapitre III) et sont montrés en figure 4.3, tandis que la figure 4.4 montre la masse effective  $m^*$  et la longueur de diffusion effective  $a^*$  sur le premier lobe de Mott ( $\bar{n}_c = 1$ )<sup>i</sup>. L'annulation de  $Z_C^*$  au point multicritique (à l'extrémité du lobe) implique une divergence de  $a^*$  et  $Z_{\text{QP}}$  et l'annulation de  $m^*$ . On s'attend en particulier que le domaine de validité de la description en terme de quasi-particules se réduisent au fur et à mesure que l'on s'approche du point multicritique. Pour s'en rendre compte, ajoutons à l'action effective de la théorie critique (équation (4.23)) un terme en  $-V_A^* \partial_\tau^2 |\phi|^2$ . Dans ce cas, le propagateur se comporte comme  $(V_A^* \omega^2 + Z_A^* \mathbf{q}^2/2m)^{-1}$ , c'est-à-dire qu'il est dominé par le point multicritique, pour  $\omega \gg \omega_c = Z_C^*/V_A^*$  et nous ne retrouvons le comportement de quasi-particules que pour des énergies  $\omega \ll \omega_c$ . Ainsi, à l'approche du point multicritique, la thermodynamique sera contrôlée par la physique du gaz de Bose dilué à des énergies de plus en plus basses.

### 4.2.2 Théorie près de la transition générique

Si nous nous écartons légèrement du point quantique critique ( $T \neq 0$  ou  $\mu \neq \mu_c$ ), il nous faut comprendre comment l'action effective (4.24) est modifiée. La température ne méritant pas de commentaire particulier (elle n'est pas touchée par la redéfinition des champs  $\phi \rightarrow \bar{\phi}$ ), nous nous concentrons sur le cas du potentiel chimique qui est plus subtile. En effet, un changement  $\delta\mu = \mu - \mu_c$  du potentiel chimique implique une variation de l'action (microscopique)

$$\delta S = -\delta\mu \int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}}^*(\tau) \psi_{\mathbf{r}}(\tau). \quad (4.27)$$

i. À cause de difficultés numériques (provenant de la dégénérescence de niveaux à  $t = 0$  pour  $\mu = pU$  avec  $p$  entier), nous ne montrons pas les différents paramètres pour  $t/U \lesssim 0.015$ .



Pour  $\delta\mu$  et  $T$ , suffisamment petit (voir discussion ci-dessous) nous pouvons traiter  $\delta S$  en perturbation, ce qui va contribuer au premier ordre à  $\Gamma^*$  sous la forme

$$\delta\Gamma[\phi^*, \phi] = -Z_\mu \delta\mu \int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{r}} \phi_{\mathbf{r}}^*(\tau) \phi_{\mathbf{r}}(\tau), \quad (4.28)$$

où  $Z_\mu$  est la renormalisation du potentiel chimique, égale à  $Z_C$  du fait de la symétrie  $U(1)$ <sup>j</sup>. Ainsi, nous trouvons que le potentiel chimique se couple aux quasi-particules sous la forme

$$\delta\Gamma[\bar{\phi}^*, \bar{\phi}] = -\text{sgn}(Z_C) \delta\mu \int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{r}} \bar{\phi}_{\mathbf{r}}^*(\tau) \bar{\phi}_{\mathbf{r}}(\tau), \quad (4.29)$$

c'est-à-dire que  $\delta\mu$  agit comme un potentiel chimique pour les excitations de type particule (pour  $\mu > \mu_c$  (haut du lobe) la phase sera superfluide et isolante pour  $\mu < \mu_c$ ), tandis que pour les excitations de type trou, c'est  $-\delta\mu$  qui joue le rôle de potentiel chimique (pour  $\mu < \mu_c$  (bas du lobe) la phase sera superfluide et isolante sinon).

Une condition importante pour la description en terme de quasi-particules est  $T, \delta\mu \ll t$ , pour pouvoir être dans le régime universel (pour pouvoir ne garder que le terme en  $\mathbf{q}^2$  dans l'action). De plus, il est vraisemblable qu'il faille que  $ka^* \ll 1$  pour être assez près du point fixe (*i.e.* comme dans le cas du gaz dilué), ce qui implique que  $T m^* a^{*2}, \delta\mu m^* a^{*2} \ll 1$ . Cela est équivalent à  $\sqrt{|\bar{n} - \bar{n}_c|} a^{*3} \ll 1$ , c'est-à-dire que notre approche n'est valide que dans la limite où les quasi-particules sont diluées.

Il faut interpréter  $\delta\Gamma$ , équation (4.28), comme l'effet à l'ordre zéro du potentiel chimique (nous voyons juste comment les quasi-particules s'y couplent) et nous ne pouvons pas dire que  $\Gamma^* + \delta\Gamma$  est l'action effective de basse énergie du système près du point quantique critique. En effet, dans la phase superfluide, nous savons que l'action effective de basse énergie est totalement différente (voir annexe D),  $Z_{C,k}$  et  $\lambda_k$  s'annulant. Du point de vue du RG, il faut comprendre  $\Gamma^* + \delta\Gamma$  comme étant l'action effective moyenne à une échelle  $k$  qui est petite devant  $k_c$  (le système est bien décrit par le point fixe) mais plus grande que  $\sqrt{2m^*|\delta\mu|}$ , c'est-à-dire que le système est critique et ne "sait" pas encore s'il est dans la phase désordonnée ou superfluide (la même chose vaut pour la température et la longueur associée  $\sqrt{2m^*T}$ ).

Nous voyons qu'une fois l'échelle  $k_c$  passée, nous pouvons oublier le système de référence (le modèle de Bose-Hubbard près de la transition de Mott) et faire comme si nous avions juste affaire à un gaz de Bose dilué, avec un cut-off  $k_c$ , une masse  $m^*$  et une longueur de diffusion  $a^*$  à une température  $T$  et un potentiel chimique  $\text{sgn}(Z_C)\delta\mu$ , et il ne reste donc plus qu'à exploiter nos connaissances des gaz de bosons. À température nulle, nous savons par exemple que  $k_h^* = \sqrt{2m^*|\delta\mu|}$  est l'inverse de la longueur de cicatrisation, qui nous donne l'échelle à laquelle les modes de son apparaissent (de vitesse  $\sqrt{|\delta\mu|/m^*}$ ). Nous savons aussi qu'à plus basse énergie, la

j. La contribution de  $\delta\mu$  au potentiel effectif du point critique ( $V^*(|\phi|^2)$ ) peut s'écrire sous la forme  $r|\phi|^2$  avec  $r = -Z_\mu \delta\mu$ . L'identité de Ward donnée à l'équation (3.39) implique que  $\partial r / \partial \mu = -Z_C = -Z_\mu$ .

(a) Dilute superfluid:

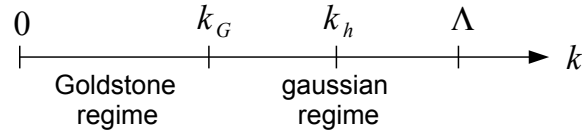
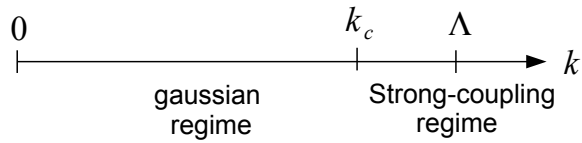
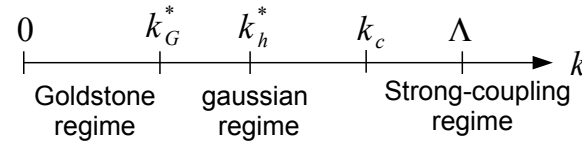
(b) Generic Mott transition:  $\mu = \mu_c$ (c) Superfluide close to Mott transition:  $\mu > \mu_c$ 

FIGURE 4.5 – Longueurs caractéristiques près de la transition de Mott générique à température nulle. (a) Vide (isolant de Mott  $\bar{n}_c = 0$ ),  $k_h$  et  $k_G$  sont respectivement l'inverse de la longueur de cicatrisation et de la longueur de Ginzburg (voir chapitre I). (b) Transition de Mott ( $\bar{n}_c \neq 0$ ).  $k_c$  sépare le régime N-corps et le régime gaussien (critique). (c) superfluide près de la transition de Mott ( $\bar{n}_c \neq 0$ ).  $k_h^*$  et  $k_G^*$  sont les inverses des longueurs de cicatrisation et de Ginzburg effectives (voir texte).

longueur de Ginzburg (celle des superfluides, voir section 1.4) apparaît et indique la fin de la validité de la théorie de Bogolibov (effective). Nous montrons en figure 4.5 les longueurs caractéristiques du gaz de Bose dans la limite diluée et près de la transition de Mott. La limite universelle dans laquelle notre description du problème en tant que gaz de quasi-particules dilué est correcte quand  $k_h^* \ll k_c$ . La figure 4.6 montre le flot des constantes de couplage dans la phase superfluide proche du point critique. Après un flot rapide pour  $k \in [\Lambda, k_c]$ ,  $\lambda_k$  et  $Z_{C,k}$  prennent leur valeur de point fixe  $\lambda^*$  et  $Z_C^*$ . Le système ressent ensuite l'effet du condensat quand  $k \simeq k_h^*$ , ce qui est clairement visible dans les flots. L'échelle  $k_G^*$  étant exponentiellement faible à trois dimensions, on ne la voit pas sur cette figure.

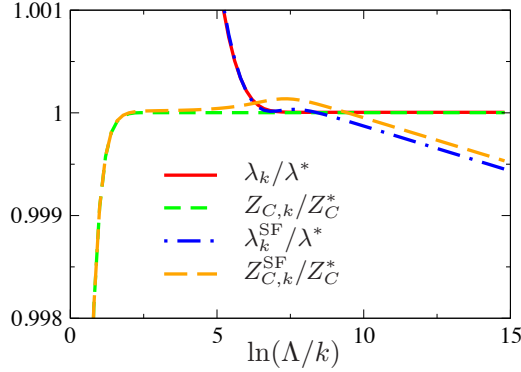


FIGURE 4.6 – Flot de  $\lambda_k$  et  $Z_{C,k}$  au point critique ( $|\delta\mu| = 0$  et  $T = 0$ ) ainsi que  $\lambda_k^{\text{SF}}$  et  $Z_{C,k}^{\text{SF}}$  dans la phase superfluide ( $|\delta\mu| \neq 0$  et  $T = 0$ ) pour  $t = 0.02U$ . Pour  $k \lesssim k_c \simeq \Lambda e^{-2}$ , les constantes de couplage atteignent leurs valeurs de point fixe  $\lambda^*$  et  $Z_C^*$ . Dans la phase superfluide, elles quittent le point fixe gaussien pour  $k \simeq k_h^* \simeq \Lambda e^{-7}$  et rentre dans le régime non-perturbatif pour  $k \simeq k_G^*$ . Le flot est à ce moment-là logarithmiquement lent à trois dimensions et  $k_G^*$  est exponentiellement petit et donc invisible sur cette figure (voir discussion en D.5).

### 4.2.3 Thermodynamique près de la transition de Mott

Nous avons vu que les flots du groupe de renormalisation près de la transition de Mott générique sont identiques, après un régime transitoire, à ceux du gaz de Bose dilué. Nous pouvons donc directement utiliser les fonctions d'échelle données précédemment (en section 4.1) en remplaçant  $m$  par  $m^*$ ,  $a$  par  $a^*$  et  $\mu$  par  $\pm\delta\mu$ . Nous allons comparer les différentes fonctions d'échelle à des résolutions numériques des équations de NPRG, en commençant par le cas à température nulle. La figure 4.7 montre le diagramme de phase à trois dimensions près du lobe de Mott  $\bar{n}_c = 1$  et spécifie les points que nous étudierons plus particulièrement. La pression est donnée par l'équation (4.19), qui donne à température nulle

$$P(\mu, T = 0) = P_c + D_c \delta\mu + \frac{m^*}{8\pi a^*} (\delta\mu)^2 \left( 1 - \frac{64}{15\pi} \sqrt{m^* a^{*2} |\delta\mu|} \right), \quad (4.30)$$

où la correction au “champ moyen”  $\frac{m^*}{8\pi a^*} (\delta\mu)^2$  est une correction de Lee-Huang-Yang effective [19, 20]. Nous comparons cette formule à une résolution numérique du NPRG en figure 4.8 le long de la ligne AB ( $t/U = 0.02$ , voir figure 4.7). Près des phases isolantes de Mott  $\bar{n}_c = 0$  et  $\bar{n}_c = 1$ , nous trouvons un très bon accord entre le calcul numérique et l'équation (1.23), jusqu'à  $\mu \simeq t$ , comme nous nous y attendons ( $1/m^* a^{*2} \gg t$ ,  $t$  est donc l'échelle caractéristique pour le comportement universel). Notons que l'accord est bien meilleur quand la correction de Lee-Huang-Yang est prise en compte.

Notre approche nous permet aussi de calculer la densité du condensat  $n_0$  dans

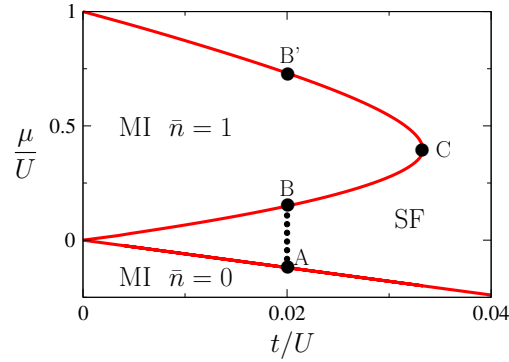


FIGURE 4.7 – Diagramme de phase du modèle de Bose-Hubbard ( $d = 3$ ) montrant les isolants de Mott (MI)  $\bar{n}_c = 0$  (vide) et  $\bar{n}_c = 1$  ainsi que la phase superfluide (SF). Les points A, B et B' sont les points critiques de la transition générique (respectivement de type particules près du vide, trous près de l'isolant  $\bar{n}_c = 1$  et de type particules près de l'isolant  $\bar{n}_c = 1$ ) tandis que le point C est le point multicritique appartenant à la classe d'universalité du modèle XY en dimension  $d + 1$ .

la phase superfluide, dont l'équation à température nulle (donnée par la théorie de Bogoliubov) est

$$n_0(\mu, T = 0) = \frac{1}{|Z_C^*|} \frac{m^* |\delta\mu|}{4\pi a^*} \left( 1 - \frac{20}{3\pi} \sqrt{m^* a^{*2} |\delta\mu|} + \dots \right). \quad (4.31)$$

La comparaison avec le calcul numérique est très bonne, voir figure 4.9. Remarquons que le poids des quasi-particules ( $|Z_C^*|^{-1}$ ) apparaît dans l'expression de  $n_0$ , c'est-à-dire que seule la partie cohérente des excitations (*i.e.* les quasi-particules) peut condenser. Mathématiquement, cela vient du fait que  $n_0 = |\langle \psi \rangle|^2 = |\phi|^2 = \frac{1}{|Z_C^*|} |\bar{\phi}|^2$ .

Nous pouvons également déduire des résultats précédents la vitesse du son  $c$  près de la transition de Mott.  $c = \sqrt{\rho_s / \kappa}$  est fonction de la compressibilité  $\kappa$  et de la raideur superfluide  $\rho_s = 2tZ_A n_0$  (voir équations (3.51) et (3.49)). Si nous approximations  $Z_A$  par sa valeur au point critique quantique  $Z_A^*$ , nous obtenons au premier ordre en  $m^* a^{*2} \delta\mu$

$$c = \sqrt{\frac{|\delta\mu|}{m^*}}. \quad (4.32)$$

Nous montrons la vitesse du son près de la transition de Mott en figure 4.10. Il est possible de retrouver ce résultat en notant que la raideur superfluide se réécrit

$$\rho_s = \frac{|D - D_c|}{m^*}, \quad (4.33)$$

en analogie directe avec le résultat du gaz dilué  $\rho_s = D/m$  [41]. L'équation (4.32) se déduit alors de  $|D - D_c| = \partial/P \partial\mu = m^* \delta\mu / 4\pi a^*$  et  $\kappa = \partial^2 P / \partial\mu^2 = m^* / 4\pi a^*$  au premier ordre en  $\sqrt{|\delta\mu| m^* a^{*2}}$ .

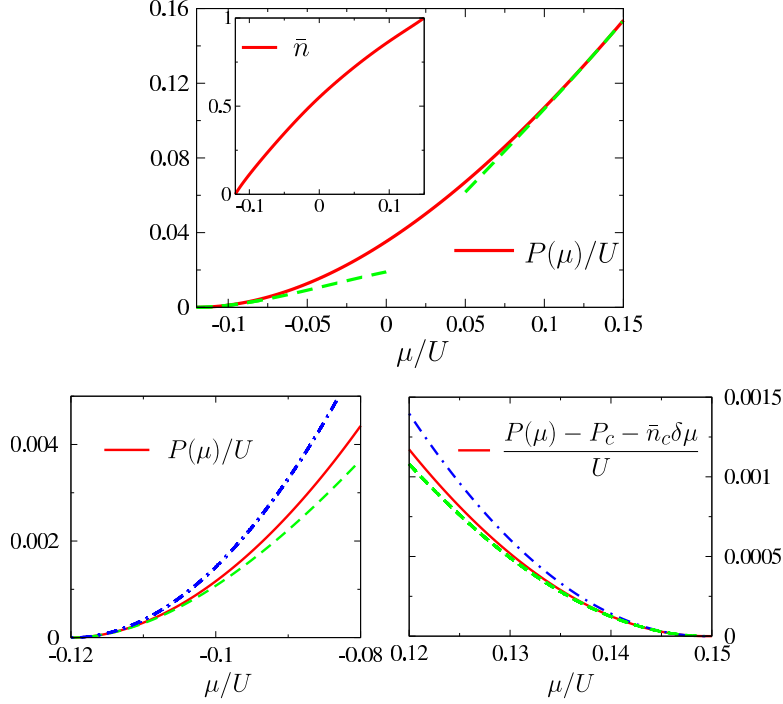


FIGURE 4.8 – Pression  $P(\mu, T = 0)$  en fonction du potentiel chimique  $\mu$  le long de la ligne AB ( $t/U = 0.02$ ), obtenue avec le NPRG (l’encart montre la densité  $\bar{n} = dP/d\mu$ ). Les figures du bas montrent le comportement près des isolants de Mott  $\bar{n}_c = 0$  et  $\bar{n}_c = 1$ . La ligne en tirets verts correspond à l’équation (4.30) et la ligne en point-tirets bleus au résultat “champ moyen”  $P = P_c + \bar{n}_c \delta\mu + (\delta\mu^2)m^*/8\pi a^*$ . (Nous prenons  $l = 1$  dans cette figure.)

À température non-nulle, un régime intéressant est le régime quantique critique  $\mu = \mu_c$ . À trois dimensions, la pression dans ce régime prend la forme (voir équation (1.28))

$$P(\mu_c, T) = P_c + \zeta(5/2) \left( \frac{m^*}{2\pi} \right)^{3/2} T^{5/2} + \dots, \quad (4.34)$$

pour des températures plus petites que  $t$ . La figure 4.11 montre un bon accord entre l’expression précédente et une résolution numérique des équations de RG. Comme nous le discuterons en 5.1.3, nous nous attendons à ce que l’approche à la limite universelle soit limitée par des dépendances résiduelles dans le réseau, ce qui ne devrait pas empêcher d’extraire expérimentalement la valeur de  $m^*$  à partir de la pression.

Pour finir, nous pouvons vérifier que la température critique au-dessus de laquelle la superfluidité disparaît est bien universelle (cf. section 1.3.2 et la discussion associée). Nous voyons en figure 4.12 que la température critique en unité de  $1/m^* a^{*2}$  est bien une fonction universelle de  $|\delta\mu| m a^{*2}$ , que ce soit du côté particule (densité

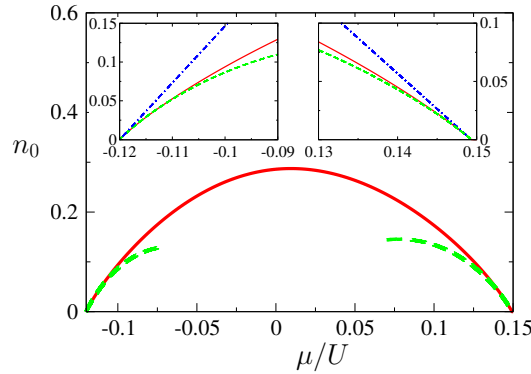


FIGURE 4.9 – Densité du condensat  $n_0(\mu, T = 0)$  en fonction de  $\mu$  le long de AB. Les encarts montrent le comportement près des phases de Mott  $\bar{n} = 0$  et  $\bar{n} = 1$ . La ligne en tirets verts correspond à l'équation (4.31) et la ligne en tiret-points bleus au résultat “champ moyen”  $n_0 = |Z_C^*|^{-1} m^* |\delta\mu| / 4\pi a^*$ . Ici, la correction au champ moyen est indispensable pour correctement décrire la densité du condensat près des points quantique critiques. (Nous prenons  $l = 1$  dans cette figure.)

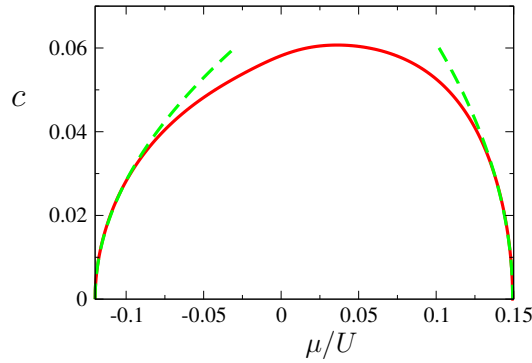


FIGURE 4.10 – Vitesse du mode de son  $c$  le long de la ligne AB. La ligne en tirets verts montre le résultat attendu près de la transition de Mott, voir équation (4.32). (Nous prenons  $l = 1$  dans cette figure.)

supérieure à une particule par site) ou du côté trou (densité inférieure à un).

**Cas bidimensionnel.** Il est possible de généraliser la discussion précédente à la transition de Mott générique à deux dimensions de façon assez directe, une fois que l'annulation logarithmique de la constante de couplage est prise en compte. En effet, la dimension deux étant la dimension critique supérieure de la transition générique, le terme  $\lambda$  de l'action effective au point critique quantique, équation (4.23), est strictement nulle. Néanmoins, comme nous l'avons vu précédemment, il faut plus comprendre l'action effective comme une action effective moyenne à une échelle  $k \ll k_c$ . Or dans ce régime, nous savons que  $\lambda_k$  décroît logarithmiquement, ce qui nous

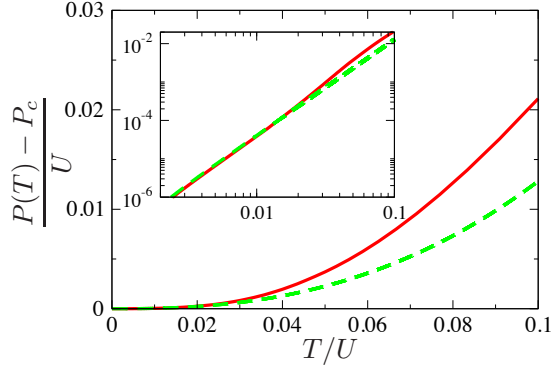


FIGURE 4.11 – Pression  $P(\mu_c, T) - P_c$  en fonction de la température  $T$  (point B,  $t = 0.02U$ ). La ligne en tirets verts est la courbe donnée par l'équation (4.34). L'encart montre en échelles log-log et montre la dépendance en  $T^{5/2}$ . (Nous prenons  $l = 1$  dans cette figure.)

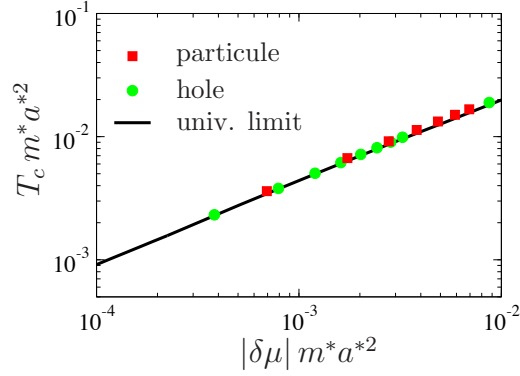


FIGURE 4.12 – Température critique  $T_c$  en fonction du potentiel chimique  $\mu$  pour  $t/U = 0.02$  près du lobe de Mott  $\bar{n} = 1$ . Les carrés rouges correspondent aux excitations de type particule (phase superfluide près de B', voir figure 4.7) et les cercles verts aux trous (phase superfluide près du point B). Notons que  $m_B^* \neq m_{B'}^*$  et  $a_B^* \neq a_{B'}^*$ . La ligne noire est la limite universelle calculée grâce au NPRG pour le gaz dilué. À petit potentiel chimique, on retrouve le résultat du gaz libre :  $T_c m^* a^{*2} = (\sqrt{2\pi} |\delta\mu| m^* a^{*2} / 4\zeta(3/2))^{2/3}$ .

permet de définir une longueur de diffusion 2D effective  $a^*$  tel que  $\lambda_k \propto 1/\ln(ka^*)$  pour  $\sqrt{2m^*|\delta\mu|}, \sqrt{2m^*T} \ll k \ll k_c$ . Les définitions de  $m^*$  et  $\delta\mu$  sont les mêmes que précédemment,  $Z_A^*$  et  $Z_C^*$  prenant des valeurs de point fixe comme en  $d = 3$  et la formulation en termes de quasi-particules n'est pas changée. Les fonctions universelles définies en section 4.1 sont donc directement transposables à la physique près de la transition de Mott, comme à trois dimensions. La figure 4.13 montre le flot de RG de  $\lambda_k$  et  $Z_{C,k}$  près dans la phase superfluide près de la transition de Mott, où les échelles  $k_c$ ,  $k_h^*$  et  $k_G^*$  sont clairement visibles.

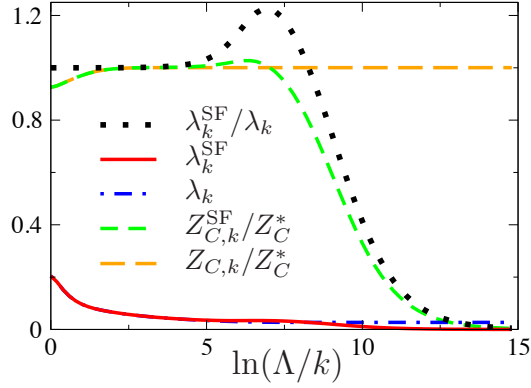


FIGURE 4.13 – Flot de  $\lambda_k$  et  $Z_{C,k}$  au point critique ( $|\delta\mu| = 0$  et  $T = 0$ ) ainsi que  $\lambda_k^{\text{SF}}$  et  $Z_{C,k}^{\text{SF}}$  dans la phase superfluide ( $|\delta\mu| \neq 0$  et  $T = 0$ ) pour  $t = 0.02U$ . Pour  $k \lesssim k_c \simeq \Lambda e^{-2}$ ,  $Z_{C,k}$  atteint sa valeur de point fixe  $Z_C^*$  tandis que le flot de  $\lambda_k$  est logarithmique. Dans la phase superfluide, elles quittent le flot gaussien pour  $k \simeq k_h^* \simeq \Lambda e^{-7}$  et rentre dans le régime non-perturbatif pour  $k \simeq k_G^* \simeq \Lambda e^{-10}$ .  $\lambda_k^{\text{SF}}/\lambda_k$  est aussi montré, soulignant bien que  $\lambda_k^{\text{SF}} \simeq \lambda_k$  pour  $k \gg k_h^*$  et montrant clairement les échelles  $k_h^*$  et  $k_G^*$ .

L'étude détaillée de la thermodynamique au voisinage de la transition de Mott reste à faire en dimension deux, dont le calcul de  $m^*$  et  $a^*$  le long de la transition. La comparaison entre les calculs NPRG et la théorie de Bogoliubov (effective) devrait être immédiate à température nulle. Néanmoins, comme nous le discuterons au chapitre V, les fonctions d'échelle du gaz dilué bidimensionnel sont non-triviales à température finie, ce qui demande en premier lieu de bien comprendre la physique près de la transition vide-superfluide avant de s'attaquer à la transition de Mott.





## Chapitre V

# Thermodynamique universelle du gaz de Bose dilué bidimensionnel

There are two possible outcomes : if the result confirms the hypothesis, then you've made a measurement. If the result is contrary to the hypothesis, then you've made a discovery.

---

E. Fermi

Nous avons vu au chapitre précédent que la thermodynamique du gaz de Bose près de la transition de Mott (avec changement de densité) est décrite par les lois d'échelle du gaz de Bose dilué. Nous nous sommes alors limité au cas tridimensionnel, ce qui appelle bien entendu à réaliser la même étude pour le gaz en deux dimensions. Si le cas à température nulle est facilement décrit en  $d = 2$ , la présence divergences infrarouges à  $T \neq 0$  (associées à l'absence de condensat en dimension  $d \leq 2$ ) détruit tout espoir d'utiliser la théorie de Bogoliubov. Les fonctions d'échelle doivent donc être calculées par des méthodes plus sophistiquées comme le NPRG (des simulations Monte Carlo ont également été réalisées il y a une dizaine d'année, voir par exemple [119, 120]). Nous devons donc commencer par l'étude du gaz de Bose dilué à température finie avant de nous attaquer à la transition de Mott. Par ailleurs, un certain nombre d'expériences récentes se sont intéressées à la thermodynamique du gaz bidimensionnel dilué, ce qui va nous permettre de comparer nos calculs de fonctions d'échelle directement à l'expérience, et ainsi discuter l'universalité de la physique dans les superfluides. En couplage faible, nous trouvons une invariance d'échelle, qui a été observé expérimentalement [121] mais qui disparaît en couplage fort. Nous comparons ensuite nos calculs à des données expérimentales, obtenues dans des expériences de couplage faible ou de couplage fort (quand le gaz est placé dans un réseau). Nous obtenons un très bon accord théorie-expérience. Enfin, nous montrons qu'il est possible de retrouver avec le NPRG la température critique de la transition superfluide-normal sous la forme d'une équation d'échelle.

## 5.1 Fonctions d'échelle du gaz de Bose dilué bidimensionnel

### 5.1.1 Fonctions d'échelle et universalité

Nous étudions les fonctions d'échelle bidimensionnelles  $\mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{G}_2$  définies au chapitre précédent :

$$P(\mu, T) = \frac{mT^2}{2\pi} \mathcal{P}(\mu, T) = \begin{cases} \frac{mT^2}{2\pi} \mathcal{F}_2(\mu/T, \tilde{g}(T)), \\ \frac{m\mu^2}{2\pi} \mathcal{G}_2(T/\mu, \tilde{g}(\mu)), \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $\tilde{g}(\epsilon)$  est l'interaction renormalisée (voir équation (4.12)) et  $\mathcal{P}$  est la pression réduite (cf. définitions du chapitre IV). Nous montrons en annexe I comment la pression prend une forme d'échelle  $f(X)$  dans la limite classique et en couplage faible [120], avec  $X = (\mu - \mu_{\text{BKT}})/T\tilde{g}(T)$ , où  $\mu_{\text{BKT}}$  est le potentiel chimique à la transition superfluide-normal, dépendant de la température  $T$  de façon universelle (voir plus bas). Nos calculs sont en très bon accord avec les simulations Monte Carlo.

Dans la limite de potentiel chimique négatif et grand ( $|\mu| \gg T$ ), le système se comporte comme un gaz classique (le large gap  $|\mu|$  gèle les fluctuations) et on trouve (en dimension  $d$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mu, T) &= \mathcal{D}(\mu, T) = e^{-|\mu|/T}, \\ \mathcal{S}(\mu, T) &= \frac{d+2}{2} - \frac{\mu}{T}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_d(x, y) = e^x \quad \text{pour } x < 0 \quad \text{et } |x| \gg 1, \quad (5.3)$$

qui peut se réécrire sous la forme  $\mathcal{G}_d(x, y) = x^{d/2+1} e^{1/x}$  dans la même limite.

À deux dimensions, la théorie de perturbation n'est possible qu'à température nulle. La pression a été calculée par Schick [122] et Popov [34, 37]<sup>a</sup>

$$P(\mu, T = 0) = -\frac{m\mu^2}{4\pi} \left[ \ln \left( \frac{1}{2} \sqrt{ma_2^2 \mu} \right) + C + \frac{1}{4} + \dots \right], \quad (5.4)$$

ce qui implique

$$\mathcal{G}_2(x, y) = \frac{2\pi}{y} + \frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{8} + \dots \quad \text{pour } x \ll 1. \quad (5.5)$$

a. La théorie étant renormalisable (au sens de la théorie des champs) à deux dimensions [117], seule la longueur de diffusion (en plus de la masse) est nécessaire pour caractériser le système. Cela implique en particulier que la fonction d'échelle  $\mathcal{G}_2$  (respectivement  $\mathcal{F}_2$ ) est en toute généralité une fonction ne dépendant que de deux variables,  $T/\mu$  et  $\tilde{g}(\mu)$  (respectivement  $\mu/T$  et  $\tilde{g}(T)$ ), comme cela a été vérifié récemment par le calcul explicite de la correction suivante pour la pression à  $T = 0$  [123]. En  $d = 3$ , la théorie n'est pas renormalisable et les fonctions d'échelle dépendent d'une infinité de variables (mais peuvent être développées ordre par ordre en un petit paramètre,  $Tma_3^2$  ou  $\mu ma_3^2$ ).

À température finie, les intégrales sont divergentes dans l'infrarouge et la théorie de perturbation n'est plus valide. En particulier, la phase superfluide n'a plus de condensat mais est décrite par la théorie de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless [124, 125, 126, 127]. La transition de phase superfluide - gaz normal est pilotée par la prolifération de vortex, ce qui est au-delà d'un simple traitement en perturbation. Il est néanmoins possible de calculer un certain nombre de quantités physiques en utilisant le groupe de renormalisation, par exemple la température critique en fonction du potentiel chimique [128] (voir également plus bas). Dans le régime quantique critique  $|\mu| \ll T$ , la thermodynamique est accessible avec un calcul de RG à une boucle (voir le calcul détaillé en Ref. [129])

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2(0, y) = \mathcal{P}(0, T) &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{y}{2\pi} \ln^2\left(\frac{2\pi}{y}\right) + \dots, \\ \mathcal{F}_2^{(1,0)}(0, y) = \mathcal{D}(0, T) &= \ln\left(\frac{2\pi}{y}\right) + \dots,\end{aligned}\tag{5.6}$$

où la correction suivante à  $\mathcal{F}_2(0, y)$  est d'ordre  $y \ln y$ . Le résultat  $\mathcal{F}_2(0, 0) = \pi^2/6$  est exacte, comme le montre le calcul de la pression du gaz de Bose parfait. Notons que l'équation (5.6) est en contradiction avec le calcul de Sachdev *et al.* [118], qui prédit une densité dans l'espace des phases dans le même régime s'annulant comme  $\tilde{g}(T)^4$  (là où nous trouvons une divergence en  $-\ln \tilde{g}(T)$ ). Leur calcul est infirmé par une résolution numérique des équations de flot, tandis que notre résultat est confirmé.

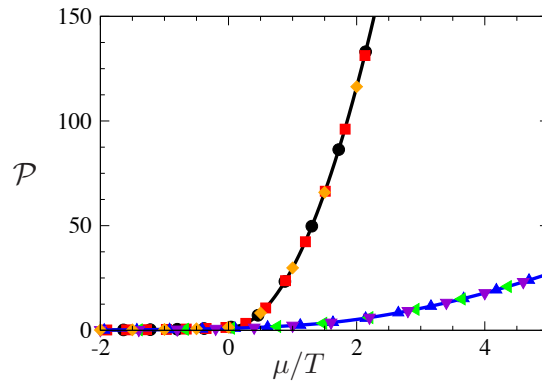


FIGURE 5.1 – Pression réduite bidimensionnelle  $\mathcal{P}(\mu, T)$  en fonction de  $\mu/T$  à  $\tilde{g}(T)$  fixe. La courbe du haut est obtenue pour  $\tilde{g}(T) = 0.22$  avec  $T = 0.1\Lambda^2/2m$  et  $2m = 1$ . Carrés rouges :  $(T, g_2, m, \Lambda)$ , cercles noirs  $(T/2, g_2, m, \Lambda)$ , losanges oranges :  $(T, 2g_2, m/2, \Lambda)$ . La courbe du bas est obtenue pour  $\tilde{g}(T) = 5$ . Triangles bleus :  $(T, g_2, m, \Lambda)$ , triangles verts :  $(2T, g_2, m, \Lambda/\sqrt{2})$ , triangles violets  $(2T, 2g_2, m/2, \Lambda)$ . Les lignes pleines sont tracées pour plus de clarté.

En couplage faible à deux dimensions, la constante de couplage peut être considérée comme indépendante de l'énergie (sauf pour des températures exponentielle-

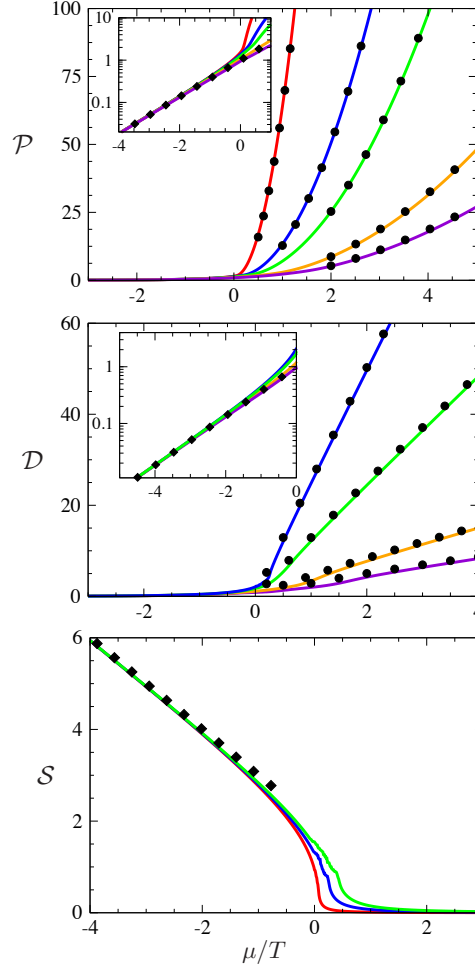


FIGURE 5.2 – Pression réduite  $\mathcal{P}(\mu, T)$ , densité réduite  $\mathcal{D}(\mu, T)$  et entropie par particule  $\mathcal{S}(\mu, T)$  en fonction de  $\mu/T$ . Du haut vers le bas, les courbes correspondent à  $\tilde{g}(T) = 0.1, 0.5, 1, 3, 5$  pour  $\mathcal{P}$ ,  $\tilde{g}(T) = 0.5, 1, 3, 5$  pour  $\mathcal{D}$  et  $\tilde{g}(T) = 0.1, 0.5, 1$  pour  $\mathcal{S}$ . Les cercles noirs correspondent au comportement (5.7) pour  $\mu \gg T$  et les losanges au gaz classique (5.2).

ment petites, et donc inatteignables en pratique). Cela implique en particulier que la fonction d'échelle  $\mathcal{F}_2(\mu/T, \tilde{g}(T)) = \mathcal{F}_2(\mu/T, \tilde{g}_2)$  (avec  $\tilde{g}_2 = 2mg_2$ ) ne dépend plus que d'une seule variable et est donc invariante d'échelle. La figure 5.1 montre la pression réduite en couplage faible et en couplage fort pour différentes valeurs des paramètres, telles que la température  $T$ , la masse  $m$  et l'interaction nue  $g_2$ . En couplage faible ( $\tilde{g}(T) = 0.22 \simeq \text{const.}$ ), la pression réduite est bien invariante d'échelle : si la température et le potentiel chimique sont divisés par deux,  $\mathcal{P}(\mu, T)$  ne change pas ( $\tilde{g}(T) \simeq \tilde{g}(T/2) \simeq 2mg_2$  en très bonne approximation) et de même si la masse est divisée par deux à  $mg_2$  constant. En couplage fort ( $\tilde{g}(T) = 5$ ), il faut changer au

moins deux quantités (à  $\mu/T$  fixe) de manière concertée pour garder  $\tilde{g}(T)$  constant, on perd donc l'invariance d'échelle.

Nous montrons en figure 5.2 la pression réduite, la densité réduite et l'entropie par particule en fonction de  $\mu/T$  pour différentes valeurs de  $\tilde{g}(T)$ . À grand potentiel chimique négatif ( $|\mu| \gg T$ ), nous retrouvons bien le comportement du gaz classique (équation (5.2)). Dans la limite opposée ( $\mu \gg T$ ), ces fonctions sont bien approximées par leurs valeurs à température nulle. D'après l'expression (5.4), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mu, T) &= \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \left(\frac{2\pi}{\tilde{g}(\mu)} + \frac{1}{4} \ln 2 - \frac{1}{8}\right), \\ \mathcal{D}(\mu, T) &= \frac{\mu}{T} \left(\frac{4\pi}{\tilde{g}(\mu)} + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2}\right), \\ \mathcal{S}(\mu, T) &= 0,\end{aligned}\tag{5.7}$$

En couplage faible, il est possible de négliger les constantes  $\ln(2)/4 - 1/8$  et on retrouve le résultat champ moyen avec le remplacement de l'interaction nue par l'interaction renormalisée  $\tilde{g}(\mu)$ . De façon remarquable, les comportements limites sont correctes non seulement en couplage faible (cf. [119, 120]), mais également en couplage fort ( $\tilde{g}(T) \gtrsim 1$ ).

Le NPRG donne également des résultats directement comparables aux expériences. Une a été réalisée récemment à l'École Normale Supérieure (ENS) avec du Rubidium 87 en couplage faible ( $mg_2 = 0.11$ ) [121] et a mesuré la pression réduite, la densité réduite et l'entropie par particule. Les mesures présentent une belle démonstration de l'invariance d'échelle du gaz de Bose bidimensionnelle en interaction faible. La figure 5.3 montre l'accord quantitatif entre les mesures expérimentales et le calcul NPRG (sans paramètre ajustable).

### 5.1.2 Universalité dans le modèle de Bose-Hubbard

Le gaz de Bose dilué dans un réseau optique peut être décrit par une théorie des champs semblable à celle du gaz de Bose homogène, mais dont la masse et l'interaction sont renormalisées, voir section 1.5.4. La thermodynamique du modèle de Bose-Hubbard dans la limite diluée est donc décrite par les fonctions d'échelle introduites précédemment, quand les conditions  $T \ll t$  et  $\delta\mu = \mu + 2dt \ll t$  (équivalent à  $Dl^d \ll 1$ , avec  $l$  le pas du réseau). Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les fonctions d'échelles décrivent aussi la thermodynamique de la phase superfluide près de la transition de Mott générique.

Une expérience récente de bosons dans un réseau carré a été réalisée à Chicago [130] (expérience Chicago II), où les auteurs ont étudié le comportement quantique critique de la transition de phase vide-superfluide. Du fait du réseau, il est possible d'atteindre le régime de couplage fort  $2mg_2 = U/t \simeq 6$  et l'expérience étant réalisée à des températures relativement élevées ( $T \in [2t, 15t]$ ), l'interaction renormalisée reste elle aussi grande ( $\tilde{g}(T) \simeq 4$ ). Il est possible de comparer les mesures expérimentales aux calculs NPRG, avec un bon accord théorie-expérience, comme montré en figure

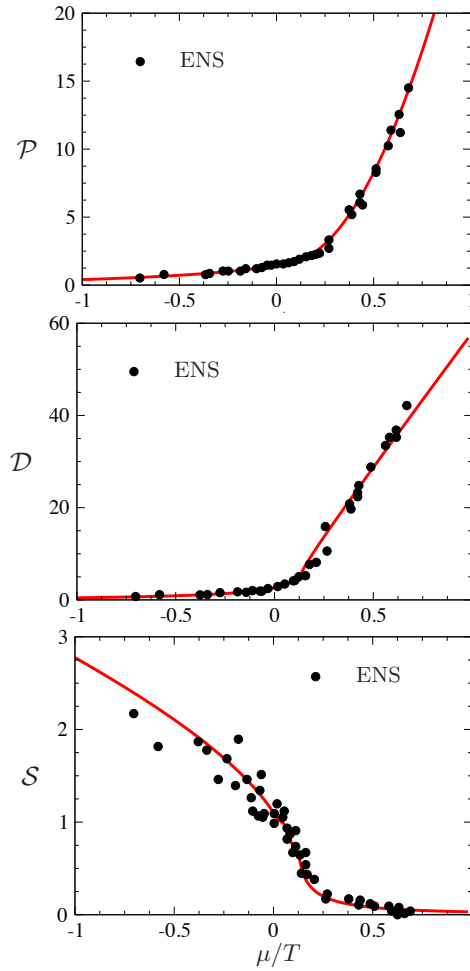


FIGURE 5.3 – Pression réduite  $\mathcal{P}(\mu, T)$ , densité réduite  $\mathcal{D}(\mu, T)$  et entropie par particule  $\mathcal{S}(\mu, T)$  en fonction de  $\mu/T$  mesurées dans l'expérience ENS [121] (points noirs). Les courbes rouges montrent les résultats NPRG.

5.4. Cela démontre qu'on peut utiliser le NPRG pour des comparaisons quantitatives avec les expériences.

Enfin, il est possible d'explorer l'universalité de la thermodynamique du gaz de Bose dilué en comparant les données expérimentales pour différentes valeurs des paramètres microscopiques. La figure 5.5 présente la pression réduite, la densité réduite ainsi que l'entropie par particule au point quantique critique de la transition vide-superfluide en fonction de la température, calculées avec le NPRG. Nous montrons aussi des données expérimentales tirées de trois expériences différentes de gaz de Bose dilués bidimensionnels : celle réalisée à l'École Normale Supérieure (ENS) avec du Rubidium 87 [121] (voir ci-dessus) ; l'expérience Chicago I du groupe de Chin avec du Césium 133 en couplage faible [131] ; nous montrons également les résultats

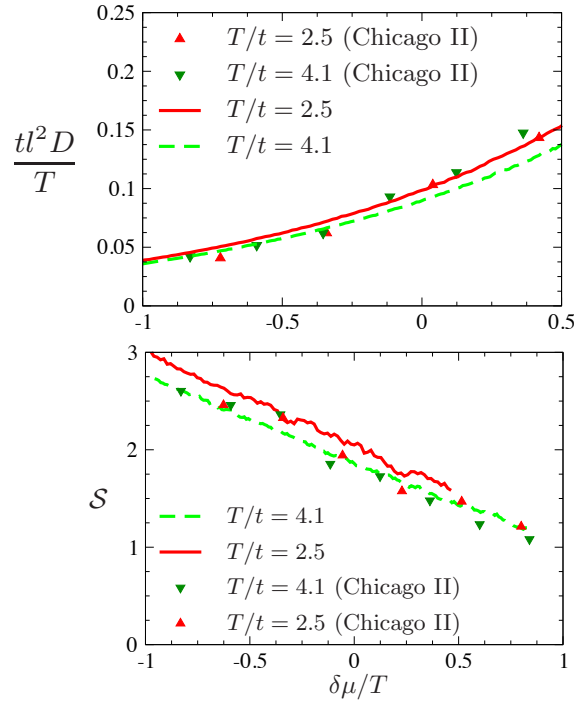


FIGURE 5.4 – Densité réduite  $\mathcal{D}(\mu, T)$  et entropie par particule  $\mathcal{S}(\mu, T)$  en fonction de  $\delta\mu/T$  à  $T = 6.7\text{nK}$  et  $T = 11\text{nK}$  dans l'expérience Chicago II [130]. Les lignes pleines et en tiret montrent les résultats NPRG obtenus pour le modèle de Bose-Hubbard.

de l'expérience Chicago II (voir ci-dessus) [130]. Nous voyons que ces données expérimentales se mettent toutes sur une unique courbe, du fait de l'universalité de la physique du gaz de Bose dilué.

### 5.1.3 Approche de la limite universelle

Un point important à étudier concerne l'approche à la limite universelle. Les modèles sans réseau que nous avons évoqués plus haut ont l'agréable caractéristique de n'être valable que dans leur régime d'universalité, voir figure 4.1. Cela n'est pas le cas du modèle de Bose-Hubbard dans la limite diluée, pour lequel le régime universel est défini approximativement par  $|\mu - \mu_c|, T \ll t$ . Nous allons préciser ces critères maintenant. C'est en particulier important concernant les expériences, car il est encore difficile de refroidir les gaz sur réseau à des températures inférieures à  $2t$  [130, 132].

La figure 5.6 montre le comportement de la pression réduite des phases dans le régime quantique critique  $\mu = \mu_c$  sur un réseau carré. Nous voyons clairement que  $\mathcal{P}(\mu_c, T)$  ne rejoint la courbe universelle  $\mathcal{F}(0, \tilde{g}(T))$  qu'à très basse température  $T \simeq t/10$  et que la courbe présente un maximum pour  $T = 2t$ . Cette bosse est due



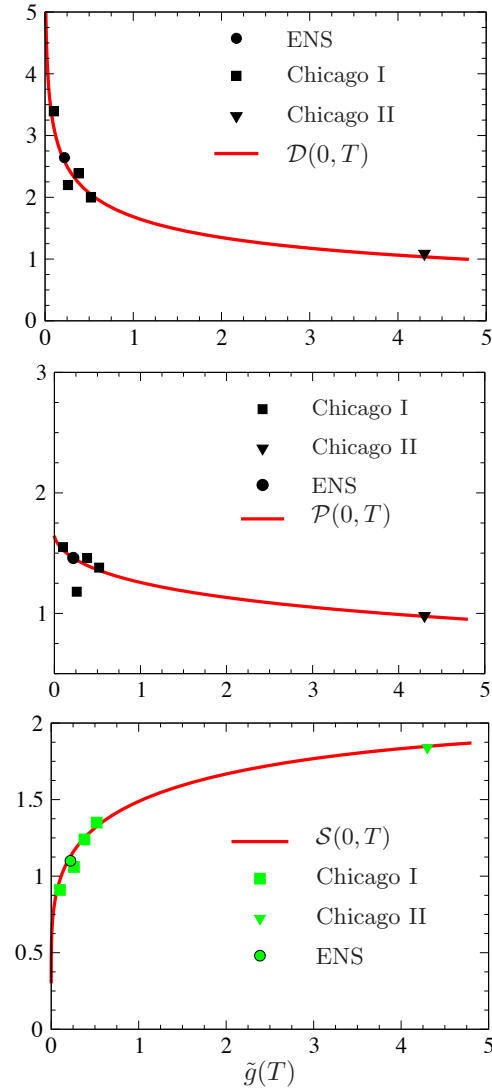


FIGURE 5.5 – Pression réduite  $\mathcal{P}(0, T)$ , densité réduite  $\mathcal{D}(0, T)$  et entropie par particule  $\mathcal{S}(0, T)$  en fonction de  $\tilde{g}(T)$ . Les symboles se réfèrent aux expériences, voir texte. ( $\mu = \mu_c = -2dt$  dans le cadre l'expérience Chicago II.)

au fait que la densité d'état sur le réseau carré a bien plus d'états en centre de bande (pour des énergies de l'ordre de  $4t$ ) que sur ses bords<sup>b</sup>. En particulier, une densité

b. Nous avons par ailleurs vérifié que cette bosse n'était pas due à la présence de la singularité de van Hove à énergie  $\epsilon = 4t$  dans la densité d'état mais uniquement au nombre d'états en centre de bande. Nous avons par exemple utilisé une densité d'état de la forme  $DOS(\epsilon) = \frac{1}{8t} + \frac{2-\pi}{8\pi t} \cos(\epsilon\pi/4t)$  qui a les bonnes propriétés  $\int_0^{8t} d\epsilon DOS(\epsilon) = 1$  et  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} DOS(\epsilon) = 1/4\pi t$  et qui donne le même type de bosse pour la pression.

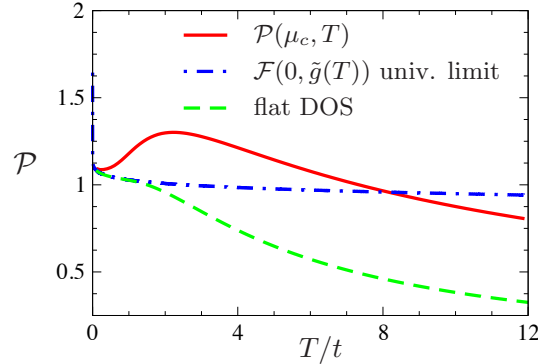


FIGURE 5.6 – Pression réduite bidimensionnelle  $\mathcal{P}(\mu_c, T)$  sur un réseau carré (courbe pleine rouge) en fonction de  $T/t$  pour  $t/U = 0.16$  (correspondant à la valeur expérimentale de la référence [130]). La courbe point-tiret bleu correspond à la limite universelle  $\mathcal{F}_2(0, \tilde{g}(T))$  et la courbe tiret verte à la même pression calculée avec une densité d'état constante sur l'intervalle  $[0, 8t]$ .

d'état plate  $DOS(\epsilon) = \theta(\epsilon)\theta(8t - \epsilon)/4\pi t$  (qui n'est pas normalisée mais correspond à un modèle de bande plate avec une masse  $m = 1/2tl^2$ ) ne présente pas de bosse et rejoint la courbe universelle à plus haute température que sur le réseau :  $T \simeq t$  (figure 5.6). Ces résultats sont en contradiction avec les travaux de Fang *et al.* [133], qui affirment trouver un régime critique (mal défini car ne tenant pas compte du flot de  $\tilde{g}$  en  $d = d_c^+ = 2$ ) allant jusqu'à des températures de l'ordre de  $6t$ . Pour cela, ils se placent au point critique quantique<sup>c</sup> et observent, à partir de simulations Monte Carlo, l'évolution de la compressibilité  $\kappa$  à mesure que la température diminue de  $6t$  à  $0.6t$  et trouvent que  $\kappa$  est constant sur cette plage de température. Cela est en désaccord avec les résultats de RG à une boucle qui donne

$$\frac{m}{\kappa(\mu_c, T)} = \tilde{g}(T) \ln \left( \frac{2\pi}{\tilde{g}(T)} \right). \quad (5.8)$$

Nous voyons que la compressibilité diverge au point critique  $\mu = \mu_c$  et  $T \rightarrow 0$ , en accord avec un calcul à température nulle  $T = 0$  et  $\mu \rightarrow \mu_c$  qui donne (voir équation (5.4))

$$\frac{m}{\kappa(\delta\mu = \mu - \mu_c, T = 0)} = \tilde{g}(\delta\mu)/2. \quad (5.9)$$

La divergence ne se voyant que pour  $T \ll t$ , il n'est pas étonnant que Fang *et al.* ne trouvent pas de signe de la divergence de la compressibilité dans l'intervalle température étudiée. Il n'en reste pas moins que leur affirmation concernant l'observation d'un régime critique est erronée.

<sup>c</sup>. Ils étudient la transition superfluide-isolant de Mott induite par un changement de densité. Comme nous l'avons vu précédemment, les résultats obtenus pour cette transition s'exportent facilement pour la transition vide-superfluide (et vice versa).

Il faut néanmoins nuancer nos propos en notant qu’au niveau pratique, *i.e.* si on regarde la pression totale, la température de cross-over vers le régime universel est proche de  $t$ , comme illustré en figure 5.7. On peut donc espérer extraire la valeur de

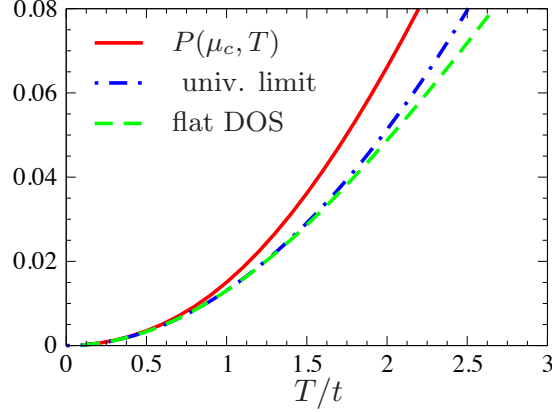


FIGURE 5.7 – Pression totale bidimensionnelle  $P(\mu_c, T)$  sur un réseau carré (courbe pleine rouge) en fonction de  $T/t$  pour  $t/U = 0.16$  (correspondant à la valeur expérimentale de la référence [130]). La courbe point-tiret bleu correspond à la limite universelle  $mT^2\mathcal{F}_2(0, \tilde{g}(T))/2\pi$  et la courbe tiret verte à la même pression calculée avec une densité d’état constante sur l’intervalle  $[0, 8t]$ .

$m^*$  expérimentalement en mesurant la partie proportionnelle à  $T^2$  de la pression à  $\mu = \mu_c$ .

## 5.2 Universalité de la température critique à $d = 2$

Nous discutons maintenant la température critique de la transition normal - superfluide à deux dimensions. Ici, le condensat n’existe qu’à température nulle, mais la phase superfluide subsiste tout de même, malgré l’absence d’ordre à longue portée. Les fonctions de corrélation à un corps décroissent néanmoins algébriquement tant que la densité superfluide  $n_s \neq 0$ , on parle alors d’ordre à quasi-longue portée. La transition vers la phase normale est due à l’apparition de défauts topologiques (vortex) libres, via le mécanisme de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) [124, 125, 126, 127]. Une transition de phase est caractérisée par une non-analyticité dans les fonctions thermodynamiques, telles que l’énergie libre ou la densité. Dans le cas de la transition Berezinskii-Kosterlitz-Thouless, il est connu que l’énergie libre et toutes ses dérivées sont analytiques (c’est une transition d’ordre “infini”) et c’est la densité superfluide qui a un saut universel à la transition. Nous écrivons donc une loi d’échelle pour  $n_s$ , en l’adimensionnant grâce à  $\Lambda^{-d-z+2}$  et en utilisant sa dimension d’échelle  $[n_s] = d + z - 2$  (cf. la discussion après l’équation (3.70)),

$$\tilde{n}_s(\tilde{\mu}, T) = s^{2-d-z} \tilde{n}_s(\tilde{\mu}s^{1/\nu}, \tilde{T}s^z, \tilde{g}(s)), \quad (5.10)$$

ce qui, dans le même esprit que précédemment, donne pour  $s = \tilde{T}^{-1/z}$

$$\begin{aligned} n_s(\mu, T) &= (mT)^{\frac{d+z-2}{z}} \mathcal{R}_d(\mu/T^{1/z\nu}, \tilde{g}(T^{-1/z})), \\ &= (mT)^{d/2} \mathcal{R}_d(\mu/T, \tilde{g}(T)), \end{aligned} \quad (5.11)$$

avec  $\mathcal{R}(x, y) = 2^{d/2} \tilde{n}_s(x, 1, y)$  et où nous avons utilisé  $z\nu = 1$  et la définition (4.12) de  $\tilde{g}(\epsilon)$ . Il existe bien entendu une relation inversant le rôle de  $T$  et  $\mu$ ,

$$n_s(\mu, T) = (m\mu)^{d/2} \mathcal{T}_d(T/\mu, \tilde{g}(\mu)). \quad (5.12)$$

Remarquons que pour retrouver le bon comportement à  $T = 0$  de la densité superfluide, il faut faire attention au comportement de  $\mathcal{T}(x, y)$  à petit  $y$ , la constante de couplage étant dangereusement “irrelevante” en dimension  $d \geq d_c^+ = 2$  ( $\mathcal{T}(0, y) \rightarrow 1/y$  pour  $y \rightarrow 0$ ). Une non-analyticité dans la fonction  $R_2(x, y)$  pour  $x = x_c(y)$  implique

$$\left(\frac{\mu}{T}\right)_{\text{BKT}} = \mathcal{H}_2(\tilde{g}(T)), \quad (5.13)$$

dont la forme en couplage faible est [37, 128, 119, 120]

$$\mathcal{H}_2(x) = \frac{x}{2\pi} \ln\left(\frac{2\zeta}{x}\right), \quad (5.14)$$

où  $\zeta \simeq 13.2 \pm 0.4$  a été obtenu par simulations Monte Carlo [119, 120]. Il est aussi possible de retrouver ce résultat non-trivial avec le NPRG, comme nous allons le montrer maintenant.

### Calcul de $T_{\text{BKT}}$ avec le NPRG

La température  $T_{\text{BKT}}$  de la transition BKT peut être estimée grâce au NPRG. Pour le modèle classique  $O(2)$ , le NPRG reproduit la plupart des propriétés universelles de la transition BKT [134, 135]. En particulier, on trouve une valeur du paramètre d'ordre adimensionné  $\tilde{\rho}_0^*$  ( $\tilde{\rho}_0$  est la raideur de spin, dont l'équivalent pour les modèles de bosons serait la densité superfluide  $n_s = Z_A n_0$ <sup>d</sup>) tel que la fonction beta  $\beta(\tilde{\rho}_{0,k}) = k\partial_k \tilde{\rho}_{0,k}$  s'annule quasiment pour  $\tilde{\rho}_{0,k} \geq \tilde{\rho}_0^*$ . Cela implique l'existence d'une ligne de quasi-points fixes et permet de trouver la phase de basse température ( $T < T_{\text{BKT}}$ ) où le flot de la raideur (dépendant de  $k$ ) devient très lent, après un régime transitoire rapide, impliquant une longueur de corrélation  $\xi$  très grande (mais pas strictement infinie comme on s'y attendrait dans la phase basse température de la transition BKT). Dans cette phase basse température, la dimension anormale  $\eta_k$  dépend de la raideur  $\tilde{\rho}_{0,k}$  (qui décroît lentement). Elle prend sa valeur la plus grande  $\sim 1/4$  quand le flot de RG passe du régime “basse température”  $\tilde{\rho}_{0,k} \geq \tilde{\rho}_0^*$  ( $k \gg \xi^{-1}$ ) à un régime désordonné  $\tilde{\rho}_{0,k} = 0$  ( $k \ll \xi^{-1}$ ), où  $\eta_k = 0$ . Néanmoins, la fonction beta est bien approximée par  $\beta(\tilde{\rho}_{0,k}) = \text{const} \times (\tilde{\rho}_0^* - \tilde{\rho}_{0,k})^{3/2}$  pour  $\tilde{\rho}_{0,k} \leq \tilde{\rho}_0^*$ , et la loi

d. Rappelons que la raideur superfluide  $\rho_s$  utilisée au chapitre III est définie par  $\rho_s = n_s/m$  dans le continu et  $\rho_s = 2tn_s$  sur le réseau.

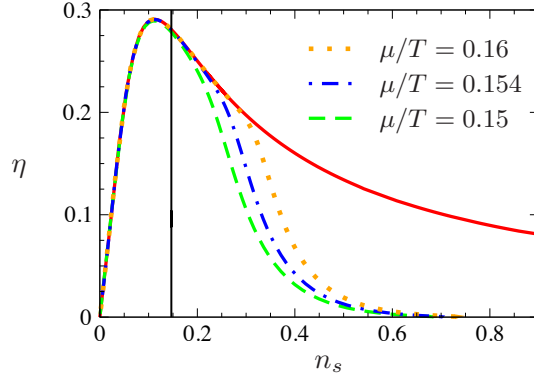


FIGURE 5.8 – Trajectoire du flot de RG dans le plan  $(n_s, \eta)$  pour le gaz de Bose bidimensionnel avec une constante d'interaction  $\tilde{g} = 0.22$ . La ligne verticale indique la valeur de  $n_s^*$ . La ligne rouge montre la ligne de quasi-points fixes pour  $n_s \geq n_s^*$ . La trajectoire critique (qui rejoint la ligne de quasi-points fixes à  $n_s = n_s^*$ ) correspond à  $\mu/T \simeq 0.154$ .

$\xi \sim e^{\text{const}/(T-T_{\text{BKT}})^{1/2}}$  de la longueur de corrélation au-dessus de la température de transition  $T_{\text{BKT}}$  est bien reproduite [135]. Ainsi, bien que le NPRG ne reproduise pas une longueur de corrélation infinie dans la phase basse température (en tout cas, au niveau des approximations utilisées jusqu'à maintenant), il permet tout de même d'estimer la température de transition  $T_{\text{BKT}}$  d'après la valeur de  $\tilde{\rho}_0^*$ . Une estimation raisonnable a été donnée pour le modèle XY classique en utilisant le NPRG sur réseau [113]. Nous allons appliquer la même méthode pour calculer la température de transition BKT dans le cas du gaz de Bose bidimensionnel (voir également [99]).

Les flots dans le plan  $(n_s, \eta)$  sont montrés en figure 5.8 pour un modèle dans le continu avec  $\tilde{g} = 0.22$ . À suffisamment basse température, les flots rejoignent une ligne de quasi-points fixes où ils deviennent très lents avant d'aller vers la phase normale ( $n_s \rightarrow 0$ ). La valeur de  $n_s^{\text{qpf}}$  à laquelle le flot rejoint la ligne de quasi-points fixes dépend à la fois de la température et du potentiel chimique du gaz de Bose. Nous estimons la température de transition  $T_{\text{BKT}}$  en identifiant la valeur  $n_s^{\text{qpf}}(T_{\text{BKT}}, \mu)$  correspondant à  $n_s^*$  (analogue à  $\tilde{\rho}_0^*$  du modèle classique O(2)). Une bonne détermination de  $n_s^*$  est par contre difficile car cela nécessite un ansatz de l'action effective moyenne contenant l'ordre  $\mathcal{O}(\partial^2)$  en entier, alors que nous utilisons une approximation bien plus brutale (potentiel effectif développé à l'ordre quadratique et LPA'). Néanmoins, puisque la transition BKT du gaz de Bose est contrôlé par le même point fixe que celui du modèle O(2) classique, on s'attend à ce que le rapport  $n_s^*/n_s^{\text{max}}$ , avec  $n_s^{\text{max}}$  la valeur de  $n_s$  à laquelle  $\eta$  est maximum (figure 5.8), soit le même que  $\tilde{\rho}_0^*/\tilde{\rho}_0^{\text{max}}$ . En utilisant cette méthode (qui a fait ses preuves pour le modèle XY), nous avons vérifié que  $(T/\mu)_{\text{BKT}}$  suit bien la loi d'échelle (5.13). Cette loi est bien respectée en

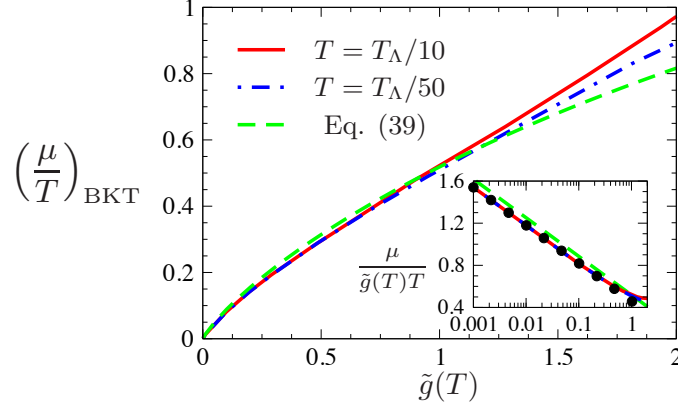


FIGURE 5.9 – Rapport  $(\mu/T)_{\text{BKT}}$  en fonction de  $\tilde{g}(T)$  pour  $T = T_\Lambda/10$  et  $T = T_\Lambda/50$ , où  $T_\Lambda = \Lambda^2/2m$ . La ligne en tirets verts correspond à la formule (5.16) avec le résultat Monte Carlo  $\zeta = 13.2$  [119, 120]. Les cercles noirs dans l’insert montre le fit donné à l’équation (5.15).

couplage faible ( $\tilde{g}(T) \simeq \tilde{g} \lesssim 1$ ). Dans cette limite, nous trouvons

$$\left(\frac{\mu}{T}\right)_{\text{BKT}} \simeq \frac{0.982}{2\pi} \tilde{g} \ln \left( \frac{2 \times 9.48}{\tilde{g}} \right), \quad (5.15)$$

en bon accord avec les résultat Monte-Carlo [119, 120]

$$\left(\frac{\mu}{T}\right)_{\text{BKT}} = \frac{1}{2\pi} \tilde{g} \ln \left( \frac{2\zeta}{\tilde{g}} \right), \quad (5.16)$$

avec  $\zeta \simeq 13.2 \pm 0.4$ . La violation de l’universalité en couplage fort, visible en figure 5.9, est sûrement due à la mauvaise description de la transition BKT par le NPRG dans ce cas (la fonction bêta de  $n_s$  s’annule presque en couplage faible, mais sa valeur devient significativement plus grande pour  $\tilde{g}(T) > 1$ ). Bien que l’on puisse calculer  $T_{\text{BKT}}$  de la même façon pour le modèle de Bose-Hubbard, on ne peut pas comparer cela aux mesures expérimentales de l’expérience Chicago II [130], qui est en couplage fort ( $\tilde{g} \sim 4.3$ )



# Conclusion

We are driven by the usual insatiable curiosity of the scientist, and our work is a delightful game.

---

M. Gell-Mann

Le travail de thèse présenté dans ce manuscrit concerne l'étude des transitions de phase quantiques dans des systèmes en corrélations fortes. Les atomes ultra-froids sont un des domaines en pointe sur ce sujet, notamment grâce au contrôle extrême des expériences. En particulier, le modèle de Bose-Hubbard est l'un des modèles les plus simples présentant toutes les caractéristiques voulues : fortes interactions sur site impliquant une phase isolante et présence d'une transition vers un état superfluide. Il a de plus l'avantage d'être réalisable facilement en laboratoire, ce qui n'est pas encore le cas pour les systèmes fermioniques sur réseau.

Tout au long du manuscrit, nous avons cherché à donner une description simple d'un système fortement corrélé tel que le modèle de Bose-Hubbard. L'utilisation de longueurs caractéristiques permet de séparer les échelles d'énergies, ce qui ensuite autorise à développer des modèles effectifs capturant l'essentiel de la physique. Nous avons ainsi pu décrire la physique de basse énergie à l'approche de la transition de Mott à l'aide de quelques paramètres, caractérisant les excitations élémentaires au point critique. Enfin, la présence même d'un point quantique critique nous assure l'universalité et donc l'existence de fonctions d'échelle, réunissant tous les systèmes de bosons dilués (gaz de Bose, superfluides près de la transition de Mott générique, certains systèmes magnétiques quantiques [116], *etc.*) dans une même classe d'universalité.

Nous avons vu que le groupe de renormalisation sur réseau est un outil de choix pour étudier les systèmes en corrélations fortes à l'approche d'une transition de phase quantique. C'est en effet une des seules techniques qui traite de manière égale les fluctuations à toutes les échelles de longueurs. Par sa condition initiale, il inclut les corrélations locales (sur site) qui sont indispensables à l'existence même de la transition de Mott. Étant une approche de groupe de renormalisation, il prend en compte les fluctuations critiques (à grande distance). Le NPRG nous permet ainsi de retrouver les deux classes d'universalité de la transition de Mott tout en donnant accès à des exposants critiques non triviaux, ce qui est très difficile pour la plupart des approches de couplages forts (locales). Enfin, le NPRG sur réseau est parfait



pour étudier la phase superfluide (il respecte un grand nombre de résultats exacts, par exemple le théorème de Hugenholtz et Pines). Nous avons de plus vu que le NPRG est en mesure de donner des résultats en très bon accord avec les meilleures approches numériques : les diagrammes de phase calculés ainsi sont quantitativement comparables aux résultats Monte Carlo et pour un coût numérique très faible.

Nous avons ensuite montré comment utiliser la présence d'une transition de phase quantique pour décrire la thermodynamique d'un système fortement corrélé. En utilisant nos connaissances de la physique du gaz de Bose dilué, *i.e.* près de la transition vide-superfluide, et en remarquant que la transition de Mott générique appartient à la même classe d'universalité, nous avons directement pu importer les fonctions d'échelle d'un cas à l'autre. Nous en avons profité pour comparer ces fonctions, non triviales à deux dimensions et à température finie, à des expériences récentes sur des gaz dilués bidimensionnels, ce qui nous a permis de montrer explicitement l'universalité dans ces gaz. Dans le cas de la transition de Mott, nous avons calculé les paramètres effectifs caractérisant les quasi-particules au point quantique critique, la masse effective  $m^*$ , la longueur de diffusion effective  $a^*$  ainsi que le poids des quasi-particules  $Z_{QP}$ . L'expérience du groupe de Cheng Chin à Chicago [130], un gaz dilué dans un réseau carré, montre qu'il sera possible d'explorer la physique critique près de la transition de Mott dans un futur proche. Les paramètres effectifs ainsi que les fonctions d'échelle, qui doivent prendre la même forme que celles du gaz de Bose dilué, pourront ainsi être mesurés expérimentalement. Cela donnera alors une belle preuve de l'universalité dans les fluides quantiques en interactions fortes.

Nous pouvons maintenant ouvrir des perspectives pour de futurs travaux. Il serait intéressant de calculer la dépendance des fonctions de vertex en impulsions et en fréquences grâce à la méthode BMW, comme cela a déjà été fait dans le cas des bosons en couplage faible [40, 100]. Cela ouvre la possibilité de calculer la fonction spectrale dans le régime en fortes corrélations. En particulier, la RPA prédit, dans la phase superfluide, l'existence d'un mode gappé en plus du mode de son [46, 48], mode qui est retrouvé par d'autres approches [136, 60]. Il serait intéressant de voir ce que le NPRG peut nous apporter à ce sujet.

L'étude de la thermodynamique aux points multicritiques serait aussi très intéressante. La physique du point multicritique a récemment été explorée expérimentalement en se focalisant sur le gap du mode d'amplitude [137], *i.e.* par des mesures de fonctions de réponse. Il nous semble néanmoins que des mesures de thermodynamique, dans le même esprit que celles des groupes de l'ENS et de Chicago, seraient plus aisées et moins difficiles à interpréter. Comme nous l'avons montré, le NPRG permet d'obtenir les fonctions d'échelle thermodynamiques facilement. Leur étude dans le cadre du modèle  $O(N)$  quantique est un sujet intéressant en soit, et permettrait de comparer avec des calculs aux points multicritiques (à l'extrémité des lobes de Mott). Le modèle de Bose-Hubbard est à ce niveau singulier, car comportant un grand nombre de points critiques (non triviaux en dimension deux) appartenant à la même classe d'universalité, ce qui permettrait là encore un test de l'universalité.

Enfin, le devenir des phases isolante et superfluide en présence de désordre, ainsi

que l'apparition d'une phase de verre de Bose, est un des grands problèmes qu'il reste à résoudre [3]. Si le cas unidimensionnel est relativement bien compris [138], il reste un grand nombre de controverses pour les dimensions supérieures. En particulier, la valeur des exposants critiques fait encore débat, de même que l'existence d'une dimension critique supérieure ou encore la caractérisation de la phase verre de Bose. Les approches de type groupe de renormalisation (voir par exemple [139]) n'ont pas permis pour le moment de répondre à ces questions. La réussite du NPRG dans le cas des systèmes désordonnés (en particulier dans le cadre du modèle d'Ising en champ aléatoire [94]) peut laisser penser que le NPRG a des réponses à apporter au sujet des verres de Bose.



# Annexes



# Annexe A

## Notations et Conventions

Someone told me that each equation I included in the book would halve the sales.

---

S. Hawking

La dimension de l'espace sera toujours notée  $d$  et nous travaillons en unités telles que  $\hbar = k_B = 1$ . Nous noterons les vecteurs dans l'espace réel ou réciproque par des lettres en gras  $\mathbf{x}$  et nous utiliserons parfois la notation  $q = (i\omega, \mathbf{q})$ .

De manière générale, les arguments des fonctionnelles seront notés entre crochets ( $F[\phi]$  est une fonctionnelle du champ  $\phi(\mathbf{x})$ ), tandis que les arguments des fonctions seront entre parenthèses ( $f(\mathbf{x})$  est une fonction du vecteur  $\mathbf{x}$ ). Pour finir  $G[\mathbf{x}; \phi]$  signifie que la fonctionnelle  $G$  dépend à la fois du vecteur  $\mathbf{x}$  comme une fonction, mais est aussi une fonctionnelle de  $\phi(\mathbf{x})$ .

Nous adoptons les conventions suivantes pour les transformés de Fourier (et leurs inverses) :

$$f_{\mathbf{r}}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{N\beta}} \sum_{\mathbf{q}, n} e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega_n \tau)} f(i\omega_n, \mathbf{q}), \quad (\text{A.1})$$

$$f(i\omega_n, \mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{N\beta}} \int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{r}} e^{-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega_n \tau)} f_{\mathbf{r}}(\tau). \quad (\text{A.2})$$

A la limite thermodynamique,  $N \rightarrow \infty$ , et à température nulle,  $\beta \rightarrow \infty$ , la première de ces équations devient :

$$f_{\mathbf{r}}(\tau) = \sqrt{N\beta} \int_q e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega_n \tau)} f(i\omega_n, \mathbf{q}) = \sqrt{N\beta} \int_q e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega_n \tau)} f(q), \quad (\text{A.3})$$

où  $\int_q = \int_{\mathbf{q}, \omega}$  et :

$$\int_{\mathbf{q}} = \int_{BZ} \frac{d^d q}{(2\pi)^d}, \quad \int_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (\text{A.4})$$

Ici,  $\mathcal{BZ}$  est la première zone de Brillouin dans le cas d'une théorie définie sur réseau et vaut  $]-\infty, \infty[^d$  dans le cas d'une théorie dans le continu. Pour des tenseurs dépendant de  $n$  variables, on choisit la convention suivante :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{N\beta}^n \int_{q_1, \dots, q_n} e^{i(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \omega_1 \tau_1 + \dots + \mathbf{q}_n \cdot \mathbf{r}_n - \omega_n \tau_n)} f(q_1, \dots, q_n), \quad (\text{A.5})$$

avec  $x = (\tau, \mathbf{r})$ .

Pour alléger les notations, nous utiliserons aussi les notations matricielles qui suivent. Dans le cas de champs complexes, nous aurons :

$$\psi^* \cdot A \cdot \psi = \int_{x, x'} \psi^*(x) A(x; x') \psi(x') = \frac{1}{N\beta} \sum_{q, q'} \psi^*(q) A(q; -q') \psi(q'), \quad (\text{A.6})$$

avec  $\psi(x) = \psi_{\mathbf{r}}(\tau)$  et  $\int_x = \int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{r}}$ . On définit aussi un produit scalaire

$$J^* \cdot \psi = \int_x J^*(x) \psi(x) = \sum_q J^*(q) \psi(q). \quad (\text{A.7})$$

Dans le cas de champs réels, le seul changement se fera dans l'espace réciproque :

$$\phi \cdot A \cdot \phi = \int_{x, x'} \phi(x) A(x; x') \phi(x') = \frac{1}{N\beta} \sum_{q, q'} \phi(q) A(-q; -q') \phi(q'), \quad (\text{A.8})$$

$$J \cdot \phi = \int_x J(x) \phi(x) = \sum_q J(q) \phi(-q). \quad (\text{A.9})$$

Enfin, nous noterons parfois les dérivées fonctionnelles, dans le cas de champs complexes, sous la forme

$$\Gamma^{(n, m)}[x_1, \dots, x_n; x'_1, \dots, x'_m; \phi, \phi^*] = \frac{\delta^{n+m} \Gamma[\phi, \phi^*]}{\delta \phi^*(x_1) \dots \delta \phi^*(x_n) \delta \phi(x'_1) \dots \delta \phi(x'_m)}. \quad (\text{A.10})$$

## Annexe B

# Symétries et identités de Ward

Nous reproduisons ici la dérivation des identités de Ward données en [41].

Considérons l'action microscopique locale (l'ajout du terme de saut ne change absolument rien à la dérivation des résultats suivants)

$$S = \int_0^\beta d\tau \left[ \psi^*(\tau) (\partial_\tau - \mu(\tau)) \psi(\tau) + \frac{g}{2} |\psi(\tau)|^4 \right]$$

en présence de la source externe  $\mu(\tau)$ .  $S$  est invariante de jauge sous les transformations

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &\rightarrow \psi(\tau) e^{i\alpha(\tau)}, \\ \psi^*(\tau) &\rightarrow \psi^*(\tau) e^{-i\alpha(\tau)}, \\ \mu(\tau) &\rightarrow \mu(\tau) + i\partial_\tau \alpha(\tau) \end{aligned} \tag{B.1}$$

où  $\alpha(\tau)$  est une fonction réelle arbitraire. Cela implique pour l'action effective (et pour l'action effective moyenne, notre régulateur ne modifiant pas cette symétrie)

$$\Gamma[R(\alpha)\phi, \mu + i\partial_\tau \alpha] = \Gamma[\phi, \mu], \tag{B.2}$$

où  $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$  et

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

est une matrice de rotation de dimension deux. En dérivant (B.2) par rapport à  $\alpha(\tau)$ , nous obtenons

$$\sum_{i,j} \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_i(\tau)} \epsilon_{ij} \phi_j(\tau) + i\partial_\tau \frac{\delta \Gamma}{\delta \mu(\tau)} = 0. \tag{B.4}$$

En dérivant maintenant par rapport à  $\phi_l(\tau_2)$  et  $\mu(\tau_2)$  et en prenant  $\phi = \phi_0 = (\sqrt{2n_0}, 0)$  et  $\mu(\tau) = \mu$ , cela donne

$$\begin{aligned} -\sqrt{2n_0} \bar{\Gamma}_{l2}^{(2)}(\tau_2, \tau_1) + i\partial_{\tau_1} \bar{\Gamma}_{l;0}^{(2)}(\tau_2, \tau_1) &= 0, \\ -\sqrt{2n_0} \bar{\Gamma}_{2;0}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) + i\partial_{\tau_1} \bar{\Gamma}_{;00}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) &= 0, \end{aligned} \tag{B.5}$$



où nous avons introduit

$$\begin{aligned}\Gamma_{l;0}^{(2)}(\tau_2, \tau_1) &= \frac{\delta^{(2)}\Gamma}{\delta\phi_l(\tau_2)\delta\mu(\tau_1)}, \\ \Gamma_{;00}^{(2)}(\tau_2, \tau_1) &= \frac{\delta^{(2)}\Gamma}{\delta\mu(\tau_2)\delta\mu(\tau_1)},\end{aligned}\tag{B.6}$$

et  $\bar{\Gamma}^{(n)} = \Gamma^{(n)}|_{\phi=\phi_0}$ . Avec le choix  $\phi = (\sqrt{2n_0}, 0)$ , nous pouvons identifier  $\bar{\Gamma}_{12}^{(2)}$  avec  $\bar{\Gamma}_C$ , et  $\bar{\Gamma}_{22}^{(2)}$  avec  $\bar{\Gamma}_A$ . Dans l'espace de Fourier, (B.5) donnent les identités de Ward

$$\sqrt{2n_0}\bar{\Gamma}_{12}^{(2)}(\omega) + \omega\bar{\Gamma}_{1;0}^{(2)}(\omega) = 0,\tag{B.7}$$

$$\sqrt{2n_0}\bar{\Gamma}_{22}^{(2)}(\omega) + \omega\bar{\Gamma}_{2;0}^{(2)}(\omega) = 0,\tag{B.8}$$

$$\sqrt{2n_0}\bar{\Gamma}_{2;0}^{(2)}(\omega) - \omega\bar{\Gamma}_{;00}^{(2)}(\omega) = 0.\tag{B.9}$$

De (B.7), nous déduisons

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\omega}\bar{\Gamma}_{12}^{(2)}(\omega)\Big|_{\omega=0} &= -\frac{1}{\sqrt{2n_0}}\bar{\Gamma}_{1;0}^{(2)}(\omega=0), \\ Z_{C,k} &= -\frac{1}{\sqrt{2n_0}}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_1\partial\mu}\Big|_{n_0} = -\frac{\partial^2 V}{\partial n\partial\mu}\Big|_{n_0},\end{aligned}\tag{B.10}$$

où le potentiel effectif  $V(n, \mu)$  est une fonction de  $n$  et  $\mu$ . De (B.8) et (B.9), nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\omega^2}\bar{\Gamma}_{22}^{(2)}(\omega)\Big|_{\omega=0} &= -\frac{1}{\sqrt{2n_0}}\frac{\partial}{\partial\omega}\bar{\Gamma}_{2;0}^{(2)}(\omega)\Big|_{\omega=0}, \\ \frac{\partial}{\partial\omega}\bar{\Gamma}_{2;0}^{(2)}(\omega)\Big|_{\omega=0} &= \frac{1}{\sqrt{2n_0}}\bar{\Gamma}_{;00}^{(2)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2n_0}}\frac{\partial^2 V}{\partial\mu^2}\Big|_{n_0}\end{aligned}\tag{B.11}$$

et donc

$$V_{A,k} = \frac{\partial}{\partial\omega^2}\bar{\Gamma}_{22}^{(2)}(\omega)\Big|_{\omega=0} = -\frac{1}{2n_0}\frac{\partial^2 V}{\partial\mu^2}\Big|_{n_0}.\tag{B.12}$$

## Annexe C

# Physique du modèle local

Nous discutons ici plus longuement les propriétés à température nulle, et en particulier quand l'état fondamental est dégénéré, de l'hamiltonien local

$$\hat{H}_{\text{loc}} = -\mu\hat{n} + \frac{U}{2}\hat{n}(\hat{n} - 1), \quad (\text{C.1})$$

où  $\hat{n} = \hat{b}^\dagger\hat{b}$  est l'opérateur nombre. Tant que le potentiel chimique est négatif, le système est vide de particule et son état fondamental est  $|0\rangle$ , d'énergie  $E_0 = 0$ . Pour les valeurs  $p < \mu/U < p + 1$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , le fondamental est l'état à  $p$  particule(s)  $|p\rangle$  d'énergie  $E_0 = -p\mu + \frac{U}{2}p(p - 1)$ . Le système a une densité fixée à  $\bar{n} = \langle\hat{n}\rangle = p$ . Nous montrons en figure C.1 l'évolution de l'énergie du fondamental et de la densité en fonction du potentiel chimique. Enfin, pour les valeurs de  $\mu/U = p$  entières, le

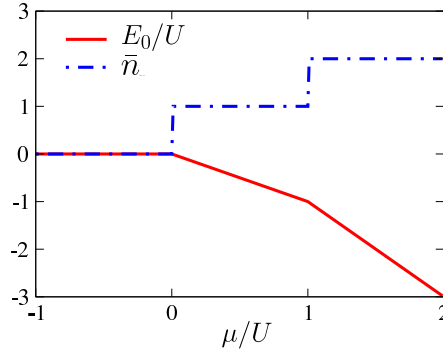


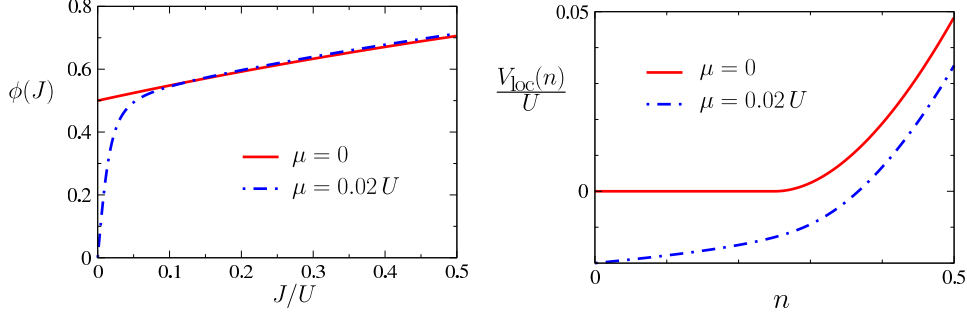
FIGURE C.1 – Évolution de l'énergie du fondamental et de la densité du problème local en fonction du potentiel chimique

fondamental est dégénéré entre les états  $|p\rangle$  et  $|p + 1\rangle$ . Ces points du diagramme de phase sont très particuliers, car ils sont à la fois le lieu d'une transition du premier ordre (dû au croisement des niveaux  $|p\rangle$  et  $|p + 1\rangle$ ), mais sont aussi dans une "phase" à symétrie brisée car  $\langle\hat{b}\rangle \neq 0$ , comme nous le montrons ci-dessous.

Il semble au premier abord que le paramètre d'ordre  $\langle \hat{b} \rangle$  doit être nul car

$$\langle \hat{b} \rangle = \frac{1}{Z_{\text{loc}}} \text{Tr} \{ e^{-\beta \hat{H} \hat{b}} \} \rightarrow \frac{1}{2} (\langle p | \hat{b} | p \rangle + \langle p+1 | \hat{b} | p+1 \rangle) = 0. \quad (\text{C.2})$$

Pour savoir si cela est vraiment le cas, il faut utiliser la procédure habituelle dans les



(a)  $\phi(J) = \langle \hat{b} \rangle$  pour deux valeurs du potentiel chimique.  $J$  et donc  $\phi$  sont réels. (b)  $V_{\text{loc}}(n)$  pour deux valeurs du potentiel chimique.

FIGURE C.2 – Potentiel effectif local et moyenne du champ en phase brisée ( $\mu = 0$ ) et non brisée ( $\mu = 0.02U$ ) avec une densité de une particule sur le site.

systèmes à brisure spontanée de symétrie. On ajoute un terme de source (de champ magnétique dans les systèmes de spins) à l'hamiltonien qui brise ainsi explicitement la symétrie  $U(1)$ . On calcule ensuite  $\langle \hat{b} \rangle$ . Si, dans la limite où la source tend vers zéro, le paramètre d'ordre garde une valeur finie  $\langle \hat{b} \rangle \neq 0$ , alors on a brisure spontanée de symétrie. Si on ajoute le terme  $J\hat{b}^\dagger + \hat{b}J^*$  (avec  $J$  un nombre complexe), les valeurs propres de l'hamiltonien dans le sous-espace  $|p\rangle$  et  $|p+1\rangle$ <sup>a</sup> sont

$$\begin{aligned} E_- &= E_0 - |J|\sqrt{p+1} & \text{pour l'état } |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle + e^{i\theta}|p+1\rangle), \\ E_+ &= E_0 + |J|\sqrt{p+1} & \text{pour l'état } |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle - e^{i\theta}|p+1\rangle), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

où on a noté  $\theta = \arg J$ . L'ajout de la source lève la dégénérescence et sélectionne l'état  $|-\rangle$ . Toutes les moyennes sont calculées dans cet état puis on prend la limite  $J \rightarrow 0$ . Nous obtenons une densité du condensat  $|\langle \hat{b} \rangle|^2 = |\langle - | \hat{b} | - \rangle|^2 = \frac{p+1}{4}$  qui est finie même en source nulle, nous sommes donc bien en présence d'une "phase" à symétrie brisée. Le calcul de la densité est direct et donne  $\langle \hat{n} \rangle = \frac{2p+1}{2}$ .

Si nous nous étions placés dans les cas  $\mu \neq pU$ , *i.e.* avec un fondamental non-dégénéré, l'ajout d'une source infinitésimale n'aurait dans ce cas pas changé l'état fondamental et il n'y aurait pas eu brisure de symétrie.

Nous montrons en figure C.2 le paramètre d'ordre, ainsi que le potentiel effectif local, après diagonalisation numérique de l'hamiltonien local (3.20). Pour  $\mu/U = 0$ ,

a. Dans la limite de sources infinitésimales, il est toujours possible de se restreindre à ce sous-espace.

nous trouvons que  $\phi(J = 0) = \langle \hat{b} \rangle = 1/2$  comme attendu tandis que  $V_{\text{loc}}(n)$  prend la forme typique d'un système avec brisure spontanée de symétrie, avec une partie plate pour  $n < |\phi(J = 0)|^2$ . Pour  $\mu/U = 0.02$ , nous avons  $\phi(J = 0^+) = 0$  et le potentiel local est croissant pour tout  $n$ .



## Annexe D

# Étude de la phase superfluide avec le NPRG

Nous étudions la phase superfluide *via* le NPRG, dans le cadre du modèle de Bose-Hubbard. Nous commençons par montrer comment la physique du gaz dilué est retrouvée, puis nous nous concentrons sur le comportement infrarouge du flot de RG et au régime de couplage fort. Nous discutons principalement les propriétés du gaz en deux dimensions. Le cas tridimensionnel sera rapidement abordé en section [D.5](#). Nous travaillons dans cet annexe dans des unités tel que  $l = 1$  (avec  $l$  le pas du réseau).

### D.1 La limite diluée dans le NPRG

Nous montrons maintenant comment le NPRG retrouve la limite du gaz de Bose dilué dans le cadre du modèle de Bose-Hubbard. Considérons en premier lieu le point quantique critique  $T = 0$  et  $\mu = -2dt$ . On a alors  $\bar{n}_k = n_{0,k} = 0$  et l'équation de RG ([F.11](#)) donne

$$\begin{aligned} Z_{A,k}^{(\text{vac})} &= Z_{C,k}^{(\text{vac})} = 1, \\ V_{A,k}^{(\text{vac})} &= 0, \end{aligned} \tag{D.1}$$

en accord avec le fait que le propagateur (normal) n'est pas renormalisé :  $G_{n,k}(q) = (i\omega + \mu - t_{\mathbf{q}})^{-1}$ . La constante de couplage  $\lambda_k^{(\text{vac})}$  est donnée par

$$\lambda_k^{(\text{vac})} = \begin{cases} \frac{8\pi t a_3}{1 - \frac{4}{3\pi} k a_3} & (d = 3), \\ -\frac{4\pi t}{\ln\left(\frac{k a_2}{2}\right) + C - \frac{1}{2}} & (d = 2), \end{cases} \tag{D.2}$$

pour  $k \ll \Lambda$ , où  $C$  est la constante d'Euler et  $a_d$  la longueur de diffusion en onde-s du modèle de Bose-Hubbard (donnée au chapitre I)

$$a_d = \begin{cases} \frac{1}{8\pi} \frac{1}{t/U + A} & (d = 3), \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-4\pi t/U - C} & (d = 2), \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

avec  $A \simeq 0.1264$ . La constante de couplage sans dimension  $\tilde{\lambda}_k^{(\text{vac})} = \lambda_k^{(\text{vac})} k^d / \epsilon_k$  s'annule pour  $k \rightarrow 0$  quand  $d \geq 2$  et le point critique quantique gouvernant la transition de phase vide-superfluide est gaussien. L'annulation logarithmique de  $\tilde{\lambda}_k^{(\text{vac})}$  à deux dimensions est en accord avec le fait que  $d = 2$  est la dimension critique supérieure (voir les discussions des chapitres I, III et IV).

Pour  $\mu > -2dt$ , le potentiel chimique crée une nouvelle échelle d'énergie (associée au condensat  $n_{0,\Lambda} = (\mu + 2dt)/\lambda_\Lambda$ ). On en déduit l'existence d'une échelle caractéristique  $k_h$ , définie par  $\epsilon_{k_h} = 2\lambda_{k_h} n_{0,k_h}$ , soit

$$k_h \simeq \left( \frac{\lambda_{k_h}}{t} n_{0,k_h} \right)^{1/2}, \quad (\text{D.4})$$

qui n'est rien d'autre que l'inverse de la longueur de cicatrisation du superfluide :  $k_h = \xi_h^{-1}$ . Le flot est piloté par le point fixe gaussien  $\tilde{n}_0 = \tilde{\lambda} = 0$  pour  $k \gg k_h$  (*i.e.*  $n_{0,k}$  peut être ignoré tant que  $k \gg k_h$ ), puis quitte le point fixe quand  $k \ll k_h$  à cause de la densité finie de bosons. Pour  $k \gg k_h$ , on peut montrer que

$$\partial_k(\lambda_k n_{0,k}) = 0, \quad (\text{D.5})$$

dont nous déduisons

$$\mu + 2dt \simeq \lambda_\Lambda n_{0,\Lambda} \simeq \lambda_{k_h} n_{0,k_h} \quad (\text{D.6})$$

pour  $\mu + 2dt \geq 0$ . (Nous avons utilisé le fait que pour  $\mu + 2dt$  assez petit,  $n_{0,\Lambda} \simeq (\mu + 2dt)/\lambda_\Lambda$ , résultat équivalent au traitement champ moyen de l'action microscopique.) Cela implique que

$$k_h \simeq \sqrt{\frac{\mu + 2dt}{t}}, \quad (\text{D.7})$$

comme prédit par la théorie de Bogoliubov.

Pour  $k$  inférieur à  $k_h$ , la densité du condensat ne peut plus être ignorée. L'approximation de Bogoliubov revient à négliger toute autre renormalisation entre  $k = k_h$  et  $k = 0$ , ce qui équivaut à poser  $\Gamma = \Gamma_{k=k_h}$  (*i.e.* faire un champ moyen avec l'action "microscopique"  $\Gamma_{k_h}$ ). La valeur initiale de  $\lambda_\Lambda$  et la première partie du flot ( $k \gg k_h$ ) revient à prendre en compte la renormalisation de la constante de couplage  $\lambda_k$  par les diagrammes en échelle (qui est généralement incluse dans la théorie de Bogoliubov). C'est équivalent à exprimer les résultats finaux en fonction de la longueur de diffusion  $a_d$  au lieu de l'interaction nue  $U$ . Nous nous attendons à ce que l'approximation

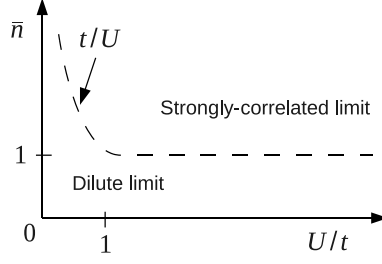


FIGURE D.1 – Ligne de crossover entre le régime dilué ( $\gamma \ll 1$  et  $k_h \ll \Lambda$ ) et la limite de couplage fort.

de Bogoliubov soit valide si le rapport entre l'énergie moyenne d'interaction entre particules est plus petite que l'énergie cinétique typique, *i.e.* si

$$\gamma = \frac{\lambda_{k_h} \bar{n}}{t \bar{n}^{2/d}} = \frac{\lambda_{k_h}}{t} \bar{n}^{1-2/d}, \quad (\text{D.8})$$

est plus petit que un [8]. Nous soulignons que dans cette équation nous considérons la constante de couplage  $\lambda_{k_h}$  à l'échelle  $k_h$ . Nous pouvons alors définir la limite diluée (ou de couplage faible) par la condition  $\gamma \ll 1$  et  $k_h \ll \Lambda$ . La dernière inégalité nous assure que la longueur caractéristique associée au comportement superfluide est bien plus grande que le pas du réseau (rendant les propriétés du superfluide indépendante du réseau).

Nous pouvons maintenant retrouver les résultats standards du gaz de bosons dilué. À trois dimensions, puisque  $a_3 \lesssim 0.31$  [Eq. (D.3)], la constante de couplage  $\lambda_k \simeq 8\pi t a_3$  est quasiment constante pour  $k \ll \Lambda$  et on retrouve le résultat connu  $\gamma \simeq a_3 \bar{n}^{1/3}$ . Étant donné que  $k_h \ll \Lambda$  dans la limite diluée, nous en déduisons

$$\begin{aligned} k_h &\simeq \sqrt{8\pi a_3 \bar{n}}, \\ \lambda_{k_h} &\simeq 8\pi a_3 t, \\ \mu + 2dt &\simeq 8\pi a_3 t \bar{n}, \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

tandis que la vitesse du mode de son prend la forme

$$c \simeq \sqrt{2t \lambda_{k_h} n_{0,k_h}} \simeq 2t \sqrt{4\pi a_3 \bar{n}}. \quad (\text{D.10})$$

Puisque  $Z_{A,k_h} \simeq 1$ , la raideur superfluide est donnée par

$$\rho_s \simeq 2t n_{0,k_h} \simeq 2t \bar{n}. \quad (\text{D.11})$$

Nous avons utilisé le fait que  $n_{0,k_h} = \bar{n}$  à l'ordre dominant dans le développement du paramètre du gaz  $\gamma \sim a_3 \bar{n}^{1/3}$  du gaz de bosons dilué tridimensionnel. Dans la limite  $U/t \ll 1$ , où  $a_3 \sim U/8\pi t$  (la renormalisation de la constante de couplage est



négligeable), nous obtenons

$$\begin{aligned}\lambda_{k_h} &\simeq U, \\ k_h &\simeq \sqrt{\frac{U}{t}\bar{n}}, \\ \mu + 2dt &\simeq U\bar{n}, \\ c &\simeq \sqrt{2tU\bar{n}}.\end{aligned}\tag{D.12}$$

Le domaine de validité de la limite diluée est donné en figure [D.1](#)<sup>a</sup>.

À deux dimensions, l'annulation logarithmique de  $\lambda_k^{(\text{vac})}$  joue un rôle crucial. Nous trouvons

$$\begin{aligned}k_h &\simeq \left(\frac{4\pi\bar{n}}{|\ln k_h a_2|}\right)^{1/2} \simeq \left(\frac{4\pi\bar{n}}{|\ln \sqrt{\bar{n}} a_2|}\right)^{1/2}, \\ \lambda_{k_h} &\simeq \frac{4\pi t}{|\ln k_h a_2|} \simeq \frac{4\pi t}{|\ln \sqrt{\bar{n}} a_2|},\end{aligned}\tag{D.13}$$

et

$$\begin{aligned}\mu + 2dt &\simeq \frac{4\pi t\bar{n}}{|\ln \sqrt{\bar{n}} a_2|}, \\ c &\simeq t \left(\frac{8\pi\bar{n}}{|\ln \sqrt{\bar{n}} a_2|}\right)^{1/2},\end{aligned}\tag{D.14}$$

en accord avec les résultats obtenus par Schick pour le gaz de bosons dilué bidimensionnel [[122](#), [128](#)]. En particulier, le petit paramètre  $\gamma \sim 1/|\ln \sqrt{\bar{n}} a_2|$ . Pour  $U/t \ll 1$ , la longueur de diffusion  $a_2 \sim e^{-4\pi t/U}$  est exponentiellement faible (équation [\(D.3\)](#)) et nous retrouvons les équations [\(D.12\)](#). La limite diluée est alors simplement déterminée par  $k_h \sim \sqrt{(U/t)\bar{n}} \ll \Lambda$  (figure [D.1](#)).

Même dans la limite  $\gamma \ll 1$  et  $k_h \ll \Lambda$ , la théorie de Bogoliubov cesse d'être valide à l'échelle de Ginzburg  $k_G$  (voir la discussion au chapitre [I](#)). En utilisant les résultats donnés en [[39](#), [40](#), [41](#)] (ou l'équation [\(1.39\)](#)) avec l'interaction nue  $U$  remplacée par  $\lambda_{k_h}$  pour prendre en compte les fluctuations aux échelles d'impulsion plus grande que  $k_h$ , nous obtenons

$$k_G \sim \begin{cases} k_h \exp\left(-\text{const}/\sqrt{\bar{n}} a_2^3\right) & (d=3), \\ \frac{k_h}{|\ln \sqrt{\bar{n}} a_2|} & (d=2). \end{cases}\tag{D.15}$$

Pour  $U \ll t$ , les équations [\(D.15\)](#) deviennent

$$k_G \sim \begin{cases} k_h \exp\left[-\text{const}/\sqrt{\bar{n}}(U/t)^{3/2}\right] & (d=3), \\ \frac{U}{t} k_h & (d=2). \end{cases}\tag{D.16}$$

La limite diluée comme nous l'avons définie plus haut est donc équivalente à la condition  $\bar{n}a^d \ll 1$  pour  $d > 2$  ( $1/\ln(\bar{n}a^2) \ll 1$  pour  $d = 2$ ) ou encore à  $k_h \ll \Lambda$

<sup>a</sup>. Dans la limite  $U/t \ll 1$ , la condition  $k_h/\Lambda \ll 1$  implique que  $\gamma \ll 1$ , ce qui donne une densité de cross-over de l'ordre de  $t/U$ .

et  $k_G \ll k_h$ . Dans cette limite, l'approximation de Bogoliubov reste valide dans une grande partie de l'intervalle d'impulsion  $0 \leq |\mathbf{q}| \ll k_h$  où le spectre est linéaire, et ne marche plus seulement quand  $|\mathbf{q}| \ll k_G \ll k_h$ . Les quantités thermodynamiques ( $n_{0,k}$ ,  $\rho_{s,k}$ ,  $c_k$ , etc.) sont néanmoins insensibles à l'échelle de Ginzburg et peuvent être obtenues grâce à la théorie de Bogoliubov [39, 40, 41].

## D.2 Flot du groupe de renormalisation à deux dimensions

Le flot du RG est montré en figure D.2 pour  $t/U = 10$  et  $\bar{n} = 1$  ( $d = 2$ ). Pour ces valeurs de  $t/U$  et  $\bar{n}$ , la condition initiale est bien approximée par la théorie de Bogoliubov (voir section D.1),

$$\begin{aligned} n_{0,\Lambda} &\simeq \bar{n}, & \rho_{s,\Lambda} &\simeq 2t\bar{n}, & c_\Lambda &\simeq (2Ut\bar{n})^{1/2}, \\ \lambda_\Lambda &\simeq U, & Z_{C,\Lambda} &\simeq 1, & V_{A,\Lambda} &\simeq 0, \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

et la renormalisation de  $\lambda_k$  pour  $k \gg k_h$  est négligeable. La longueur de cicatrisation est déduite des résultats numériques et de

$$Z_{A,k_h} t k_h^2 = \lambda_{k_h} n_{0,k_h}, \quad (\text{D.18})$$

qui généralise la définition (D.4) aux cas où  $Z_{A,k_h}$  est différent de un. Les quantités thermodynamiques telles que  $n_{0,k}$ ,  $\rho_{s,k}$  et  $c_k$  varient peu avec  $k$  et restent proches de leur valeurs initiales (D.17). Par contre, l'échelle de Ginzburg  $k_G$  se manifeste par une forte variation avec  $k$  de  $\lambda_k$ ,  $Z_{C,k}$  et  $V_{A,k}$ . Nous déterminons  $k_G$  à partir du point d'inflexion de  $V_{A,k}$ <sup>b</sup>

$$\partial_l^2 V_{A,k} \Big|_{k=k_G} = 0. \quad (\text{D.19})$$

$k_h$  et  $k_G$  [Eqs. (D.18,D.19)] sont en bon accord avec  $k_h \sim \sqrt{(U/t)\bar{n}}$  et  $k_G \sim (U/t)k_h$ .

Dans le régime de Bogoliubov (*i.e.* perturbatif)  $k_G \ll k \leq \Lambda$ ,  $\lambda_k$ ,  $Z_{C,k}$  et  $V_{A,k}$  restent presque égaux à leurs valeurs initiales (D.17). Nous nous attendons donc à ce que les propagateurs à  $k = 0$  aient la forme

$$\begin{aligned} G_{\text{ll}}(q) &= -\frac{\epsilon_{\mathbf{q}}}{\omega^2 + E_{\mathbf{q}}^2}, \\ G_{\text{tt}}(q) &= -\frac{\epsilon_{\mathbf{q}} + 2U\bar{n}}{\omega^2 + E_{\mathbf{q}}^2}, \\ G_{\text{lt}}(q) &= \frac{\omega}{\omega^2 + E_{\mathbf{q}}^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

pour  $|\mathbf{q}| \gg k_G$  avec  $E_{\mathbf{q}} = [\epsilon_{\mathbf{q}}(\epsilon_{\mathbf{q}} + 2U\bar{n})]^{1/2}$  l'énergie du mode de Bogoliubov. Le spectre passe d'une dispersion quadratique à une dispersion linéaire à l'échelle de cicatrisation  $k_h$ . Pour  $k_G \ll |\mathbf{q}| \ll k_h$ ,  $E_{\mathbf{q}} \simeq c_\Lambda |\mathbf{q}|$  avec  $c_\Lambda \simeq (2U\bar{n}t)^{1/2}$ .

b. Nous pouvons aussi utiliser les conditions  $\partial_l^2 Z_{C,k} \Big|_{k=k_G} = 0$  ou  $\partial_l^2 \lambda_k \Big|_{k=k_G} = 0$ , qui donnent des résultats comparables.

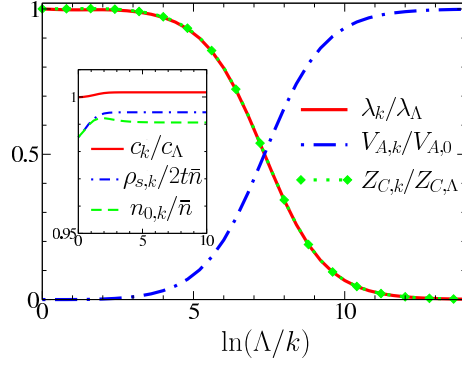


FIGURE D.2 – Flot de RG dans la phase superfluide,  $t/U = 10$  et  $\bar{n} = 1$  ( $d = 2$ ).

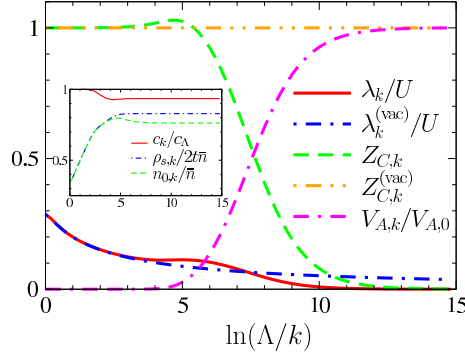


FIGURE D.3 – Identique à la figure D.2, mais pour  $t/U = 0.05$  et  $\bar{n} \simeq 10^{-4}$ . Les flots de  $\lambda_k^{(\text{vac})}$  et  $Z_{C,k}^{(\text{vac})}$  dans le vide ( $\bar{n} = n_{0,k} = 0$ ) sont aussi montrés.

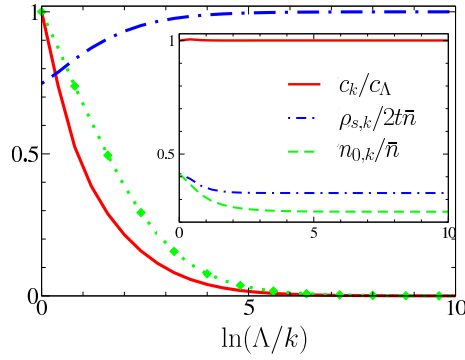


FIGURE D.4 – Identique à la figure D.2, mais pour  $t/U \simeq 0.062$  et  $\bar{n} = 1$ .

Dans le régime de Goldstone (non-perturbatif)  $k \ll k_G$ ,  $\lambda_k$ ,  $Z_{C,k} \sim k$  s'annule pour  $k \rightarrow 0$  tandis que  $V_{A,k} \simeq V_{A,k=0}$  prend une valeur finie. Ce régime est dominé par les fluctuations de phase, et est caractérisé par une annulation de la self-energy anormale  $\Sigma_{\text{an},k}(q=0) = \lambda_k n_{0,k} \sim k$  (voir discussion du chapitre I) et la divergence du propagateur longitudinal (voir équation (D.21) ci-dessous) [31, 32, 30]. Les propagateurs à  $k=0$  (3.11) sont donnés par

$$\begin{aligned} G_{\parallel}(q) &= -\frac{1}{2\lambda n_0} = -\frac{1}{2n_0 C \sqrt{\omega^2 + c^2 \mathbf{q}^2}}, \\ G_{\text{tt}}(q) &= -\frac{1}{V_A(\omega^2 + c^2 \mathbf{q}^2)} = -\frac{2n_0 c^2}{\rho_s} \frac{1}{\omega^2 + c^2 \mathbf{q}^2}, \\ G_{\text{lt}}(q) &= \frac{Z_C \omega}{2\lambda n_0 V_A(\omega^2 + c^2 \mathbf{q}^2)} = \frac{c^2}{\rho_s} \frac{dn_0}{d\mu} \frac{\omega}{\omega^2 + c^2 \mathbf{q}^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

pour  $|\mathbf{q}|/|\omega|/c \ll k_G$ , où nous avons utilisé  $c = (Z_A t/V_A)^{1/2}$ ,  $\kappa = 2n_0 V_A$ ,  $\rho_s = 2t Z_A n_0$  et  $\lim_{k \rightarrow 0} Z_{C,k}/\lambda_k = dn_0/d\mu$  (voir section 3.1.3). Le propagateur longitudinal est obtenu à partir de  $G_{\parallel,k}(q=0) = -1/(2\lambda_k n_{0,k})$  en remplaçant  $\lambda_k \sim k$  par  $C\sqrt{\omega^2 + c^2 \mathbf{q}^2}$  [41]. Dans le régime de Goldstone, l'existence d'un spectre linéaire à basse énergie est due à l'invariance relativiste de  $\Gamma^{(2)}$  ( $Z_{C,k} \rightarrow 0$  tandis que  $V_{A,k} \rightarrow V_A > 0$ ) et non à la valeur finie de la self-energy anormale  $\Sigma_{\text{an}}(q=0)$  comme dans le régime de Bogoliubov. De façon remarquable, la valeur de la vitesse du mode de son est insensible à  $k_G$ . Ces résultats sont en accord avec les études précédentes sur les bosons en interaction dans le continu [40, 41, 100, 101].

En figure D.3, nous montrons le flot de RG pour  $t/U = 0.05$  et  $\bar{n} \simeq 10^{-4}$ . Bien que  $t/U \ll 1$ , la très petite valeur de la densité nous assure que nous sommes bien dans la limite diluée, avec  $k_G \ll k_h \ll \Lambda$  ( $l_h \simeq -3$  et  $l_G \simeq -8$ ). Pour  $k \gg k_h$ , le flot de la constante de couplage  $\lambda_k$  coïncide avec le flot dans le vide ( $\lambda_k \simeq \lambda_k^{(\text{vac})}$ , voir équation (D.2)). Pour  $k_G \ll k \ll k_h$ , la variation de  $\lambda_k$  est faible : dans l'intervalle d'impulsion  $k_G \ll |\mathbf{q}| \ll k_h$ , le comportement du système est bien décrit par la théorie de Bogoliubov mais avec des paramètres renormalisés ( $\lambda_{k_h}$ ,  $n_{0,k_h}$ , etc.). Dans le régime de Goldstone,  $k \ll k_G$ , nous retrouvons le comportement infrarouge discuté ci-dessus.

À mesure que  $t/U$  décroît (à densité  $\bar{n}$  fixe), la constante de couplage sans dimension  $\gamma$  augmente et finit par devenir d'ordre un. Un flot typique dans le régime de fort couplage  $\gamma \gg 1$  est montré en figure D.4 pour  $t/U \simeq 0.062$  et  $\bar{n} = 1$ . Il n'y a plus de régime de Bogoliubov,  $k_h \sim k_G \sim \Lambda$ , et la densité du condensat  $n_{0,k}$  et la raideur superfluide  $\rho_{s,k}$ , sont fortement réduites.

### D.3 Les échelles d'impulsion caractéristiques : $k_h$ et $k_G$

La figure D.5 montre  $k_G$ ,  $k_h$ ,  $n_0$ ,  $\kappa$ ,  $\rho_s$  et  $c$  en fonction de  $t/U$  à densité fixe  $\bar{n} = 1$ . Nous voyons un cross-over rapide entre un régime de faibles corrélations ( $k_G \ll k_h$ ,  $n_0 \simeq \bar{n}$  et  $\rho_s \simeq 2t\bar{n}$ ) et un régime de corrélations fortes ( $k_h \sim k_G \sim \Lambda$ ,

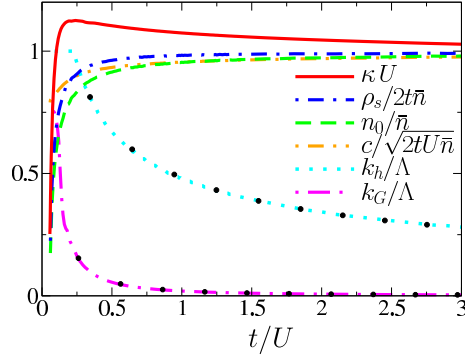
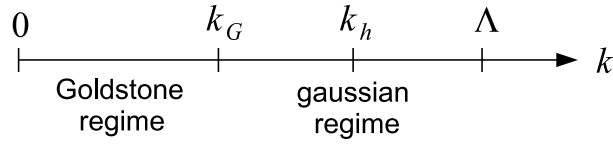
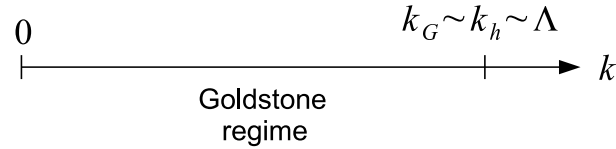


FIGURE D.5 – Densité du condensat  $n_0$ , raideur superfluide  $\rho_s$ , compressibilité  $\kappa$ , vitesse  $c$ , et échelles caractéristiques  $k_h$  et  $k_G$  en fonction de  $t/U$  à densité fixe  $\bar{n} = 1$  ( $d = 2$ ). Les points noirs sont des fits  $k_h \propto \sqrt{\bar{n}U/t}$  et  $k_G \propto \sqrt{\bar{n}(U/t)^3}$ .

(a) Dilute limit :  $t/U \gg 1$



(b) Strong Coupling regime :  $t/U \ll 1$



(c) Critical regime :  $t \sim t_c, \mu \sim \mu_c$

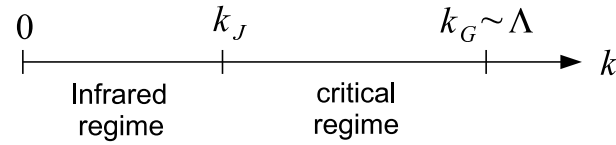


FIGURE D.6 – Comportement de la phase superfluide en fonction de l'échelle d'impulsion  $k$  à densité constante  $\bar{n}$  entière.  $k_h$  : échelle de cicatrization,  $k_G$  : échelle de Ginzburg,  $k_J$  : échelle de Josephson (voir section 3.3).

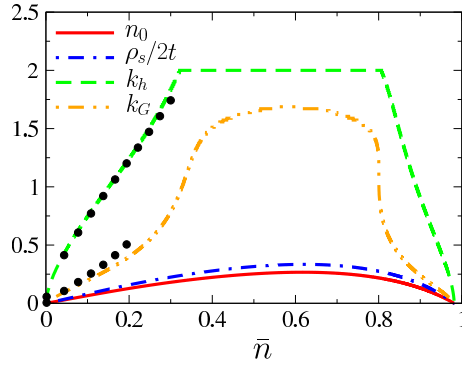


FIGURE D.7 – Densité du condensat  $n_0$ , raideur superfluide  $\rho_s$  et échelles caractéristiques  $k_h$  et  $k_G$  en fonction de la densité  $\bar{n}$  pour  $t/U = 0.04$  ( $d = 2$ ). Les points noirs sont des fits  $k_h \propto (\bar{n}/|\ln \sqrt{\bar{n}a}|)^{1/2}$  et  $k_G \propto k_h \lambda_{k_h}/t$  [Eq. (D.15,D.13)].

$n_0 \ll \bar{n}$  et  $\rho_s \ll 2t\bar{n}$ ) quand  $t/U$  décroît. Près du point muticritique, il y a un régime critique où  $\tilde{n}_{0,k}$ ,  $\tilde{\lambda}_k$ ,  $\eta_{A,k}$  et  $\eta_{V,k}$  vont vers leurs valeurs de point fixe, comportement caractéristique d'un système critique (voir section 3.3). Le comportement critique cesse à l'échelle d'impulsion de Josephson  $k_J$  (section 3.3.1), et pour  $k \ll k_J$  nous retrouvons le régime de Goldstone de la phase superfluide. Le comportement de la phase superfluide à densité fixe et entière est résumé en figure D.6. Excepté pour des effets de réseau (qui oblige  $k_h$ ,  $k_G$  et  $k_J$  à être au plus d'ordre  $\Lambda$ ) nous retrouvons le comportement du modèle  $O(N)$  en  $d+1$  dimensions [30] (voir également chapitre I).

La figure D.7 montre  $k_h$  et  $k_G$  à  $t/U$  fixe pour  $\bar{n}$  variant entre 0 et 1. Dans la limite de basse densité  $\gamma \ll 1$ , nos résultats numériques pour  $k_h$  et  $k_G$  sont en accord avec les équations (D.4, D.13). Pour  $\bar{n} \sim 0.5$ ,  $k_G$  et  $k_h$  sont du même ordre et  $\gamma \gg 1$  comme on s'y attend pour une phase superfluide en corrélations fortes. Le comportement près de la phase de Mott ( $1 - \bar{n} \ll 1$ ) est similaire à la limite de basse densité et reflète le fait que les transitions entre le vide et le superfluide et celle entre isolant de Mott et superfluide appartiennent à la même classe d'universalité. En particulier, près de la phase isolante, le système est dans un régime de faibles corrélations ( $\gamma = \lambda_{k_h}/t \ll 1$ ), en accord avec le fait que le point quantique critique est gaussien pour  $d \geq 2$ . L'analogie entre les deux limites  $\bar{n} \ll 1$  et  $1 - \bar{n} \ll 1$  amène à des conséquences intéressantes qui sont discutées au chapitre IV.

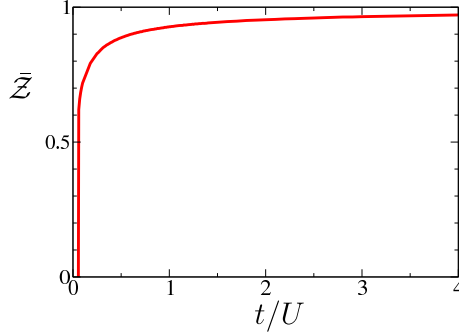


FIGURE D.8 – Poids spectral normalisé  $\bar{Z}$  du mode de son [Eq. (D.24)] en fonction de  $t/U$  ( $\bar{n} = 1$  et  $d = 2$ ).

## D.4 Le spectre de basse énergie

La connaissance de la limite infrarouge de la fonction de Green à un corps permet d'obtenir la fonction spectrale [40]

$$\begin{aligned} A(\mathbf{q}, \omega) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_n(\mathbf{q}, \omega + i0^+) \\ &\simeq -\frac{1}{2\pi} \text{Im} [G_{\parallel}(\mathbf{q}, \omega + i0^+) + G_{\text{tt}}(\mathbf{q}, \omega + i0^+)] \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

dans la limite de basse énergie. À partir des équations (D.21) nous déduisons

$$\begin{aligned} A(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{n_0 c}{2\rho_s |\mathbf{q}|} [\delta(\omega - c|\mathbf{q}|) - \delta(\omega + c|\mathbf{q}|)] \\ &\quad + \frac{\text{sgn}(\omega)}{4\pi n_0 C} \frac{\Theta(\omega - c|\mathbf{q}|)}{\sqrt{\omega^2 - c^2 \mathbf{q}^2}} \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

pour  $|\mathbf{q}|, |\omega|/c \ll k_G$ . En plus du pic delta dû au mode de Goldstone, la fonction spectrale possède un spectre d'excitation continu, conséquence directe de la singularité du propagateur longitudinal  $G_{\parallel}$ . Tandis que le mode de son existe jusqu'à  $|\mathbf{q}| \sim k_h$ , le continuum n'est observé que pour des impulsions et des énergies  $|\mathbf{q}|, |\omega|/c \lesssim k_G$ . Dans la limite de couplage faible, où le réseau ne joue pas de rôle, ces résultats sont en accord avec la théorie hydrodynamique de Popov [140, 30]. Cette dernière donne  $C = (4t\bar{n}/cn_0)^{1/2}$  de sorte que le rapport entre le poids spectral porté par le continuum et le mode de son est très faible dans la limite de couplage faible [41].

Il n'y a pas de différence qualitative entre les phases superfluides en couplage faible ou fort, en ce qui concerne la fonction spectrale à basse énergie [Eq. (D.23)]. Cependant, en couplage fort, le continuum d'excitation dû au comportement singulier du propagateur longitudinal s'étend certainement jusqu'à des impulsions d'ordre  $k_G \sim \Lambda$  (*i.e.* sur la plus grande partie de la zone de Brillouin) et porte une partie significative du poids spectral. Cela est confirmé par la diminution du poids spectral du mode de son à mesure que le rapport  $t/U$  décroît à densité fixe. La figure D.8

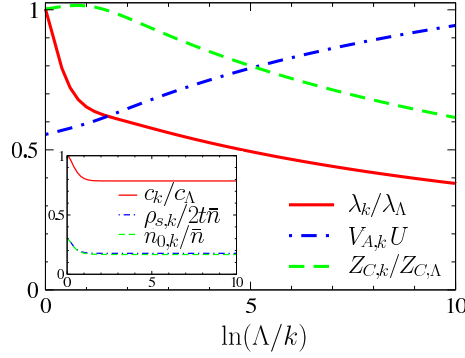


FIGURE D.9 – Flot de RG dans la phase superfluide pour  $t/U = 0.034$  et  $\bar{n} = 1$  ( $d = 3$ ).

montre le poids spectral  $\mathcal{Z}_{\mathbf{q}} = n_0 c / 2\rho_s |\mathbf{q}|$  du mode de son pour  $\bar{n} = 1$ , normalisé à sa valeur dans la limite de couplage faible  $t \gg U$ ,

$$\bar{\mathcal{Z}} = 2|\mathbf{q}|\mathcal{Z}_{\mathbf{q}}\sqrt{\frac{2t}{U\bar{n}}} = \frac{n_0 c}{\rho_s}\sqrt{\frac{2t}{U\bar{n}}}. \quad (\text{D.24})$$

$\bar{\mathcal{Z}}$  reste proche de un dans la limite de couplage faible mais diminue fortement dans le régime de forte corrélation. Il s'annule à la transition vers l'isolant de Mott ( $t = t_c$ ) avec un exposant critique  $2\beta - \nu(d + z - 2) = \nu\eta$ ,

$$\bar{\mathcal{Z}} \sim (t - t_c)^{\nu\eta} \quad (\text{D.25})$$

pour  $t \rightarrow t_c^+$ , voir section 3.3.

Étant équivalent à la RPA, l'action effective initiale  $\Gamma_\Lambda$  prédit aussi l'existence d'un mode gappé en plus du mode de son habituel [46, 47, 48, 136]. Le devenir de ce mode gappé est cependant hors de portée de notre développement en dérivées et requiert une implémentation plus subtile du NPRG [40, 41, 100, 101].

## D.5 La phase superfluide tridimensionnelle

Dans la limite diluée  $\gamma \ll 1$  et en couplage faible (section D.1), les conditions initiales du flot de RG sont données par

$$\begin{aligned} n_{0,\Lambda} &\simeq \bar{n}, & \rho_{s,\Lambda} &\simeq 2t\bar{n}, & c_\Lambda &\simeq 2t\sqrt{4\pi a_3 \bar{n}}, \\ \lambda_\Lambda &\simeq 8\pi a_3 t, & Z_{C,\Lambda}(n) &\simeq 1, & V_{A,\Lambda}(n) &\simeq 0, \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

et redonne l'approximation de Bogoliubov. Le flot pour  $k \leq k_h$  est logarithmique et donc très lent [41]. Cela explique pourquoi la longueur de Ginzburg est exponentiellement petite dans la limite diluée [Eq. (D.15)] et non pertinente la plupart du



temps. Dans la limite infrarouge,  $G_{tt}$  et  $G_{lt}$  sont donnés par (D.21), tandis que le propagateur longitudinal

$$G_{ll}(q) \sim \ln \left( \frac{ck_h}{\sqrt{\omega^2 + c^2\mathbf{q}^2}} \right) \quad (\text{D.27})$$

diverge logarithmiquement.

Un flot typique dans la limite de couplage fort, où  $k_h, k_G \sim \Lambda$ , est montré en figure D.9 pour  $\bar{n} = 1$ . Les quantités thermodynamiques convergent rapidement vers leurs valeurs à  $k = 0$ . Par contre, les flots de  $\lambda_k, Z_{C,k} \sim |\ln k|^{-1}$  et  $V_{A,k}$  sont logarithmiques.

## Annexe E

# Propriétés du régulateur sur le réseau

Le régulateur sur le réseau (3.12) diffère de ceux utilisés dans le continu, en particulier à cause du traitement symétrique du haut et du bas de bande (Fig. 3.1). On peut réécrire  $R_k(\mathbf{q})$  sous la forme

$$R_k(\mathbf{q}) = -Z_{A,k}\epsilon_k \operatorname{sgn}(t_{\mathbf{q}}) y_{\mathbf{q}} r(y_{\mathbf{q}}), \quad (\text{E.1})$$

où

$$r(y) = \frac{1-y}{y} \Theta(1-y) \quad (\text{E.2})$$

et

$$y_{\mathbf{q}} = \begin{cases} \frac{\epsilon_{\mathbf{q}}}{\epsilon_k} & \text{si } t_{\mathbf{q}} < 0, \\ \frac{4dt - \epsilon_{\mathbf{q}}}{\epsilon_k} & \text{si } t_{\mathbf{q}} > 0. \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \partial_l R_k(\mathbf{q}) &= Z_{A,k}\epsilon_k \operatorname{sgn}(t_{\mathbf{q}}) y_{\mathbf{q}} [\eta_{A,k} r(y_{\mathbf{q}}) + 2y_{\mathbf{q}} r'(y_{\mathbf{q}})] \\ &= Z_{A,k}\epsilon_k \operatorname{sgn}(t_{\mathbf{q}}) \Theta(1-y_{\mathbf{q}}) [\eta_{A,k}(1-y_{\mathbf{q}}) - 2]. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

$R_k(\mathbf{q})$  apparaît toujours dans les équations de flot avec  $\Gamma_{A,k}$

$$\Gamma_{A,k}(q; n) + R_k(\mathbf{q}) = Z_{A,k}\epsilon_{\mathbf{q}} + V_{A,k}\omega^2 + V_k'(n) + R_k(\mathbf{q}), \quad (\text{E.5})$$

où

$$Z_{A,k}\epsilon_{\mathbf{q}} + R_k(\mathbf{q}) = \begin{cases} Z_{A,k}\epsilon_k & \text{si } \epsilon_{\mathbf{q}} \leq \epsilon_k, \\ Z_{A,k}\epsilon_{\mathbf{q}} & \text{si } \epsilon_{\mathbf{q}} \geq \epsilon_k \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

pour  $t_{\mathbf{q}} < 0$ , et

$$Z_{A,k}\epsilon_{\mathbf{q}} + R_k(\mathbf{q}) = \begin{cases} Z_{A,k}(4dt - \epsilon_k) & \text{si } \epsilon_{\mathbf{q}} \geq 4dt - \epsilon_k, \\ Z_{A,k}\epsilon_{\mathbf{q}} & \text{si } \epsilon_{\mathbf{q}} \leq 4dt - \epsilon_k \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

pour  $t_{\mathbf{q}} > 0$ . Les équations (E.4,E.6,E.7) simplifient significativement les coefficients  $I_{\alpha}(n)$  et  $J_{\alpha\beta}(q; n)$  (voir annexe F). Une contribution typique à  $I_{\alpha}$  ou à  $J_{\alpha\beta}$  est

$$F_k = \int_{\mathbf{q}} \int_{\omega} \partial_l R_k(\mathbf{q}) f(Z_{A,k}\epsilon_{\mathbf{q}} + R_k(\mathbf{q}), \omega), \quad (\text{E.8})$$

où  $\partial_l = k\partial_k$  et  $f$  est le produit de propagateurs  $G_k = -(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}$ . Puisque  $\partial_l R_k(\mathbf{q})$  réduit les intégrales sur les impulsions à  $y_{\mathbf{q}} \leq 1$  où  $Z_{A,k}\epsilon_{\mathbf{q}} + R_k(\mathbf{q})$  est indépendant de  $\mathbf{q}$ ,

$$\begin{aligned} F_k &= \int_{\mathbf{q}} \Theta(-t_{\mathbf{q}}) \partial_l R_k(\mathbf{q}) \int_{\omega} f(Z_{A,k}\epsilon_k, \omega) \\ &\quad + \int_{\mathbf{q}} \Theta(t_{\mathbf{q}}) \partial_l R_k(\mathbf{q}) \int_{\omega} f(Z_{A,k}(4dt - \epsilon_k), \omega). \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

En utilisant la densité d'état sur le réseau

$$\mathcal{D}(\epsilon) = \int_{\mathbf{q}} \delta(\epsilon - \epsilon_{\mathbf{q}}) \quad (0 \leq \epsilon \leq 4dt), \quad (\text{E.10})$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{q}} \Theta(-t_{\mathbf{q}}) \partial_l R_k(\mathbf{q}) &= \int_0^{2dt} d\epsilon \mathcal{D}(\epsilon) \partial_l R_k(\mathbf{q}) \\ &= -Z_{A,k}\epsilon_k \int_0^{\epsilon_k} d\epsilon \mathcal{D}(\epsilon) \left[ \eta_{A,k} \left( 1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_k} \right) - 2 \right] \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{q}} \Theta(t_{\mathbf{q}}) \partial_l R_k(\mathbf{q}) &= \int_{2dt}^{4dt} d\epsilon \mathcal{D}(\epsilon) \partial_l R_k(\mathbf{q}) \\ &= Z_{A,k}\epsilon_k \int_{4dt-\epsilon_k}^{4dt} d\epsilon \mathcal{D}(\epsilon) \left[ \eta_{A,k} \left( 1 - \frac{4dt - \epsilon}{\epsilon_k} \right) - 2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

La densité d'état d'un réseau hypercubique étant symétrique,  $\mathcal{D}(\epsilon) = \mathcal{D}(4dt - \epsilon)$ , l'équation précédente donne

$$\int_{\mathbf{q}} \Theta(t_{\mathbf{q}}) \partial_l R_k(\mathbf{q}) = - \int_{\mathbf{q}} \Theta(-t_{\mathbf{q}}) \partial_l R_k(\mathbf{q}) \quad (\text{E.13})$$

ce qui nous permet d'écrire (E.9) sous la forme

$$F_k = \int_{\mathbf{q}} \Theta(-t_{\mathbf{q}}) \partial_l R_k(\mathbf{q}) \int_{\omega} [f(Z_{A,k}\epsilon_k, \omega) - f(Z_{A,k}(4dt - \epsilon_k), \omega)], \quad (\text{E.14})$$

avec l'intégrale sur les moments donnée par (E.11).

Dans la limite  $k \ll \Lambda$  (ou  $\epsilon_k \ll 2dt$ ), la fonction  $f(Z_{A,k}(4dt - \epsilon_k), \omega)$  contient des propagateurs ayant un large gap et est donc négligeable par rapport à  $f(Z_{A,k}\epsilon_k, \omega)$  et le flot n'est alors gouverné que par les modes de basse énergie. De plus, pour  $\epsilon_{\mathbf{q}} \leq \epsilon_k \ll 2dt$ , le réseau ne compte plus et nous pouvons approximer  $\epsilon_{\mathbf{q}} \simeq t\mathbf{q}^2$ , ce qui donne

$$\mathcal{D}(\epsilon) = 2v_d \frac{\epsilon^{d/2-1}}{t^{d/2}} \quad (\epsilon \ll 2dt) \quad (\text{E.15})$$

et

$$\int_{\mathbf{q}} \Theta(-t_{\mathbf{q}}) \partial_l R_k(\mathbf{q}) = 8 \frac{v_d}{d} Z_{A,k} \epsilon_k k^d \left( 1 - \frac{\eta_{A,k}}{d+2} \right), \quad (\text{E.16})$$

où  $v_d^{-1} = 2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2)$ . Nous obtenons donc

$$F_k = 8 \frac{v_d}{d} Z_{A,k} \epsilon_k k^d \left( 1 - \frac{\eta_{A,k}}{d+2} \right) \int_{\omega} f(Z_{A,k}\epsilon_k, \omega), \quad (\text{E.17})$$

qui est la forme habituelle pour des modèles dans le continu avec un régulateur en  $\theta$  [141].



## Annexe F

# Équations de flot

### F.1 Équations BMW pour $\Gamma_{A,k}$ , $\Gamma_{B,k}$ et $\Gamma_{C,k}$

Nous donnons ici les équations de flot dans l'approximation BMW, prises de [41]. Dans cette approximation, l'équation de flot du vertex à deux points est

$$\begin{aligned} \partial_l \Gamma_{ij}^{(2)}(p; \phi) &= -\frac{1}{2} \sum_{q, i_1, i_2} \tilde{\partial}_l G_{i_1 i_2}(q; \phi) \Gamma_{ij i_2 i_1}^{(4)}(p, -p, 0, 0; \phi) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{q, i_1 \dots i_4} \left\{ \Gamma_{i_2 i_3}^{(3)}(p, 0, -p; \phi) \Gamma_{j i_4 i_1}^{(3)}(-p, p, 0; \phi) [\tilde{\partial}_l G_{i_1 i_2}(q; \phi)] G_{i_3 i_4}(p+q; \phi) + (p \leftrightarrow -p, i \leftrightarrow j) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

où les vertex à trois et quatre points dans (F.1) sont obtenus par différentiation du vertex à deux points par rapport aux champs. De (3.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} G_{ij}(p; \phi) &= \delta_{i,j} [\delta_{i,1} G_{\text{ll}}(p; n) + \delta_{i,2} G_{\text{tt}}(p; n)] + \epsilon_{ij} G_{\text{lt}}(p; n), \\ \Gamma_{ij}^{(2)}(p; \phi) &= \delta_{i,j} [\Gamma_A(p; n) + \delta_{i,1} 2n \Gamma_B(p; n)] + \epsilon_{ij} \Gamma_C(p; n), \\ \Gamma_{ijl}^{(3)}(p, -p, 0; \phi) &= \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{\beta V}} \left\{ \delta_{i,j} \delta_{l,1} [\Gamma'_A(p; n) + \delta_{i,1} 2n \Gamma'_B(p; n)] \right. \\ &\quad \left. + (\delta_{i,l} \delta_{j,1} + \delta_{j,l} \delta_{i,1}) \Gamma_B(p; n) + \epsilon_{ij} \delta_{l,1} \Gamma'_C(p; n) \right\}, \\ \Gamma_{ijlm}^{(4)}(p, -p, 0, 0; \phi) &= \frac{1}{\beta V} \left\{ \delta_{i,j} \delta_{l,m} [\Gamma'_A(p; n) + \delta_{l,1} 2n \Gamma''_A(p; n)] + (\delta_{i,l} \delta_{j,m} + \delta_{j,l} \delta_{i,m}) \Gamma_B(p; n) \right. \\ &\quad \left. + [\delta_{i,1} (\delta_{j,m} \delta_{l,1} + \delta_{l,m} \delta_{j,1}) + \delta_{m,1} (\delta_{i,l} \delta_{j,1} + \delta_{j,l} \delta_{i,1}) + \delta_{i,m} \delta_{j,1} \delta_{l,1}] 2n \Gamma'_B(p; n) \right. \\ &\quad \left. + \delta_{i,1} \delta_{j,1} \delta_{l,1} \delta_{m,1} 4n^2 \Gamma''_B(p; n) + \delta_{l,m} \epsilon_{ij} [\Gamma'_C(p; n) + \delta_{l,1} 2n \Gamma''_C(p; n)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

( $\Gamma'_\alpha(p; n) = \partial_n \Gamma_\alpha(p; n)$ , etc.) pour la configuration de champ  $\phi = (\sqrt{2n}, 0)$ . L'équation de flot (F.1) donne alors

$$\begin{aligned} \partial_l \Gamma_A(p; n) = & -\frac{1}{2} I_{\parallel\parallel}(n) [\Gamma'_A(p; n) + 2n \Gamma''_A(p; n)] - \frac{1}{2} I_{\text{tt}}(n) [\Gamma'_A(p; n) + 2\Gamma_B(p; n)] \\ & - 2n [J_{\parallel\text{tt}}(p; n) \Gamma'_A(p; n)^2 + J_{\text{tt}\parallel}(p; n) \Gamma_B(p; n)^2 \\ & + 2J_{\text{lt}\parallel}(p; n) \Gamma'_A(p; n) \Gamma_B(p; n) - J_{\parallel\parallel}(p; n) \Gamma'_C(p; n)^2 \\ & - 2J_{\parallel\text{lt}}(p; n) \Gamma'_A(p; n) \Gamma'_C(p; n) + 2J_{\text{lt}\parallel}(p; n) \Gamma_B(p; n) \Gamma'_C(p; n)], \quad (\text{F.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_l \Gamma_B(p; n) = & \frac{1}{2n} [I_{\text{tt}}(n) - I_{\parallel\parallel}(n)] \Gamma_B(p; n) - I_{\parallel\parallel}(n) \left[ \frac{5}{2} \Gamma'_B(p; n) + n \Gamma''_B(p; n) \right] \\ & - \frac{1}{2} I_{\text{tt}}(n) \Gamma'_B(p; n) - J_{\parallel\parallel}(p; n) [X(n)^2 + \Gamma'_C(p; n)^2] \\ & + J_{\parallel\text{tt}}(p; n) [\Gamma'_A(p; n)^2 + \Gamma'_C(p; n)^2] \\ & + [J_{\text{tt}\parallel}(p; n) - J_{\text{tt}\text{tt}}(p; n)] \Gamma_B(p; n)^2 \\ & + 2J_{\text{lt}\parallel}(p; n) \Gamma_B(p; n) [X(n) + \Gamma'_A(p; n)] \\ & + 2J_{\parallel\text{lt}}(p; n) [X(n) - \Gamma'_A(p; n)] \Gamma'_C(p; n) \\ & + 2J_{\text{lt}\parallel}(p; n) \Gamma_B(p; n) \Gamma'_C(p; n) + 2J_{\text{tt}\text{tt}}(p; n) \Gamma_B(p; n) \Gamma'_C(p; n), \quad (\text{F.4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_l \Gamma_C(p; n) = & -\frac{1}{2} I_{\parallel\parallel}(n) [\Gamma'_C(p; n) + 2n \Gamma''_C(p; n)] - \frac{1}{2} I_{\text{tt}}(n) \Gamma'_C(p; n) \\ & - 2n \left\{ J_{\parallel\parallel}(p; n) X(n) \Gamma'_C(p; n) + J_{\parallel\text{tt}}(p; n) \Gamma'_A(p; n) \Gamma'_C(p; n) \right. \\ & - J_{\text{tt}\parallel}(p; n) \Gamma_B(p; n)^2 + J_{\text{lt}\parallel}(p; n) \Gamma_B(p; n) \Gamma'_A(p; n) \\ & \left. + J_{\parallel\text{lt}}(p; n) [X(n) \Gamma'_A(p; n) - \Gamma'_C(p; n)^2] - J_{\text{lt}\parallel}(p; n) X(n) \Gamma_B(p; n) \right\}, \quad (\text{F.5}) \end{aligned}$$

où  $X = \Gamma'_A + 2\Gamma_B + 2n\Gamma'_B$ . Les coefficients  $I_\alpha(n)$  et  $J_{\alpha\beta}(n; p)$  sont définis en (F.12).

## F.2 Équations de flot avec le développement en dérivée

Après développement en dérivées du vertex à deux points (équations (3.44) et (3.62)) et dans le cas où  $Z_{A,k}(n)$  et  $V_{A,k}(n)$  sont approximés par leurs valeurs en  $n_{0,k}$ , le minimum du potentiel effectif, les équations précédentes se simplifient en

$$\partial_l V_k(n) = -\frac{1}{2} \int_q \partial_l R_k(\mathbf{q}) [G_{\parallel}(q; n) + G_{\text{tt}}(q; n)], \quad (\text{F.6})$$

$$\begin{aligned} \partial_l Z_{C,k}(n) &= -2nV_k''(n)^2 \partial_\omega [3J_{\parallel,\text{lt}}(q, n) - 3J_{\text{lt},\parallel}(q, n) + J_{\text{lt},\text{tt}}(q, n) - J_{\text{tt},\text{lt}}(q, n)]_{q=0} \\ &\quad - 4n^2 V_k^{(3)}(n) V_k''(n) \partial_\omega [J_{\parallel,\text{lt}}(q, n) - J_{\text{lt},\parallel}(q, n)]_{q=0} \\ &\quad - 4n^2 V_k^{(3)}(n) Z'_{C,k}(n) J_{\parallel,\parallel}(q, n) - \frac{1}{2} Z'_{C,k}(n) [I_{\text{tt}}(n) + I_{\parallel}(n)] \\ &\quad - I_{\parallel}(n) n Z''_{C,k}(n) - 2n V_k''(n) Z'_{C,k}(n) J_{\parallel,\text{tt}}(0, n) \\ &\quad - 6n V_k''(n) Z'_{C,k}(n) J_{\parallel,\parallel}(0, n) \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

$$\begin{aligned} \partial_l V_{A,k} &= -n_{0,k} \lambda_k^2 \partial_\omega^2 [\bar{J}_{\parallel,\text{tt}}(q) + 2\bar{J}_{\text{lt},\parallel}(q) + \bar{J}_{\text{tt},\parallel}(q)]_{q=0} + 2n_{0,k} \bar{J}_{\parallel,\parallel}(0) Z'_{C,k}(n_{0,k})^2 \\ &\quad + 4n_{0,k} \lambda_k Z'_{C,k}(n_{0,k}) \partial_\omega [\bar{J}_{\parallel,\text{lt}}(q) - \bar{J}_{\text{lt},\parallel}(q)]_{q=0}, \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

$$\begin{aligned} \eta_{A,k} &= 2\lambda_k^2 n_{0,k} Z_{A,k} \epsilon_k k^2 \left\{ \frac{\delta_{d,2}}{2\pi} + \int_{\mathbf{q}} \theta(\epsilon_k - \epsilon_{\mathbf{q}}) \left[ \frac{\partial_{q_x}^2 \epsilon_{\mathbf{q}}}{\epsilon_{\mathbf{q}}} - \frac{(\partial_{q_x} \epsilon_{\mathbf{q}})^2}{\epsilon_{\mathbf{q}}^2} \right] \right\} \\ &\quad \times \int_\omega \left( \frac{1}{D_-^2} + \frac{1}{D_+^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

où

$$\begin{aligned} D_- &= (Z_{A,k} \epsilon_k + V_{A,k} \omega^2)(Z_{A,k} \epsilon_k + V_{A,k} \omega^2 + 2n_{0,k} \lambda_k) + Z_{C,k}(n_{0,k})^2 \omega^2, \\ D_+ &= [Z_{A,k}(4dt - \epsilon_k) + V_{A,k} \omega^2][Z_{A,k}(4dt - \epsilon_k) + V_{A,k} \omega^2 + 2n_{0,k} \lambda_k] + Z_{C,k}(n_{0,k})^2 \omega^2, \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

$Z_{A,k} \equiv Z_{A,k}(n_{0,k})$ ,  $V_{A,k} \equiv V_{A,k}(n_{0,k})$ ,  $\eta_{A,k} = -k \partial_k \ln Z_{A,k}$ , et  $l = \ln(k/\Lambda)$ .

Quand  $Z_{C,k}(n)$  est approximé par  $Z_{C,k}(n_{0,k}) \equiv Z_{C,k}$  et  $V_k(n)$  est tronqué à l'ordre quadratique [Eq. (3.64)], nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_l V_{0,k} &= -\frac{1}{2} \int_q \partial_l R_k(\mathbf{q}) [\bar{G}_{\parallel}(q) + \bar{G}_{\text{tt}}(q)], \\ \partial_l n_{0,k} &= \frac{3}{2} \bar{I}_{\parallel} + \frac{1}{2} \bar{I}_{\text{tt}} \quad \text{if } n_{0,k} > 0, \\ \partial_l \delta_k &= -2\lambda_k \bar{I}_{\parallel} \quad \text{if } n_{0,k} = 0, \\ \partial_l \lambda_k &= -\lambda_k^2 [9\bar{J}_{\parallel,\parallel}(0) - 6\bar{J}_{\text{lt},\parallel}(0) + \bar{J}_{\text{tt},\text{tt}}(0)], \\ \partial_l Z_{C,k} &= 2\lambda_k^2 n_{0,k} \frac{\partial}{\partial \omega} [\bar{J}_{\text{tt},\text{lt}}(q) - \bar{J}_{\text{lt},\text{tt}}(q) - 3\bar{J}_{\parallel,\text{lt}}(q) + 3\bar{J}_{\text{lt},\parallel}(q)]_{q=0} \\ \partial_l V_{A,k} &= -2\lambda_k^2 n_{0,k} \frac{\partial}{\partial \omega^2} [\bar{J}_{\parallel,\text{tt}}(q) + \bar{J}_{\text{tt},\parallel}(q) + 2\bar{J}_{\text{lt},\parallel}(q)]_{q=0}, \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

avec  $\eta_{A,k}$  donné par (F.9). Nous définissons les coefficients

$$\begin{aligned} I_\alpha(n) &= \int_q \tilde{\partial}_l G_\alpha(q; n), \\ J_{\alpha\beta}(q; n) &= \int_{q'} [\tilde{\partial}_l G_\alpha(q'; n)] G_\beta(q + q'; n), \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$



où  $\alpha, \beta = ll, tt, lt$ . Pour alléger les notations, nous avons omis les indices  $k$  dans  $I_\alpha$  et  $J_{\alpha\beta}$ . Les notations  $\bar{I}_\alpha, \bar{J}_{\alpha\beta}$  et  $\bar{G}$  signifient que ces quantités sont évaluées en  $n = n_{0,k}$ .

### F.3 Équations de flot près des points critiques

#### F.3.1 Point multicritique

Pour étudier les équations de flot, ainsi que leur linéarisation, près du point multicritique, nous posons  $Z_{C,k}(n) = 0$  dans (F.11) ce qui donne, dans les variables adimensionnées *ad hoc* (voir table III.2),

$$\begin{aligned}
\partial_l \tilde{n}_{0,k} &= \left(1 - d - \frac{\eta_A + \eta_V}{2}\right) \tilde{n}_{0,k} \\
&\quad + \frac{8v_d}{d} \left(1 - \frac{\eta_A}{d+2}\right) \frac{\left(2\tilde{n}_{0,k}\tilde{\lambda}_k + \frac{3}{\sqrt{1+2\tilde{n}_{0,k}\tilde{\lambda}_k}} + 1\right)}{8(1+2\tilde{n}_{0,k}\tilde{\lambda}_k)}, \\
\partial_l \tilde{\lambda}_k &= \left(\frac{3\eta_A}{2} + \frac{\eta_V}{2} + d - 3\right) \tilde{\lambda}_k \\
&\quad + \frac{8v_d}{d} \left(1 - \frac{\eta_A}{d+2}\right) \frac{3\tilde{\lambda}_k^2 \left(\frac{9}{(1+2\tilde{n}_{0,k}\tilde{\lambda}_k)^{5/2}} + 1\right)}{16}, \\
\eta_{A,k} &= \frac{16v_d}{d} \frac{\tilde{n}_{0,k}\tilde{\lambda}_k \left(2\tilde{n}_{0,k}\tilde{\lambda}_k + \frac{5}{\sqrt{1+2\tilde{n}_{0,k}\tilde{\lambda}_k}} - 3\right) + \frac{2}{\sqrt{1+2\tilde{n}_{0,k}\tilde{\lambda}_k}} - 2}{16\tilde{n}_{0,k}^2\tilde{\lambda}_k(1+2\tilde{n}_{0,k}\tilde{\lambda}_k)}, \\
\eta_{V,k} &= \frac{16v_d}{d} \left(1 - \frac{\eta_A}{d+2}\right) \frac{\tilde{n}_{0,k}\tilde{\lambda}_k \left(2\tilde{n}_{0,k}\tilde{\lambda}_k + \frac{5}{\sqrt{1+2\tilde{n}_{0,k}\tilde{\lambda}_k}} - 3\right) + \frac{2}{\sqrt{1+2\tilde{n}_{0,k}\tilde{\lambda}_k}} - 2}{16\tilde{n}_{0,k}^2\tilde{\lambda}_k(1+2\tilde{n}_{0,k}\tilde{\lambda}_k)},
\end{aligned} \tag{F.13}$$

dont on obtient directement l'équation (3.69).

### F.3.2 Transition générique

Pour étudier le flot près de la transition générique, nous pouvons poser  $V_{A,k} = 0$  dans (F.11), ce qui donne, dans les variables adimensionnées *ad hoc* (voir table III.2),

$$\begin{aligned}
\partial_t \tilde{n}_0 &= (-d - \eta_C) \tilde{n}_0 \\
&\quad + \frac{4v_d}{d} \left(1 - \frac{\eta_A}{d+2}\right) \frac{\tilde{n}_0 \tilde{\lambda} (\tilde{n}_0 \tilde{\lambda} - 1)}{(1 + 2\tilde{n}_0 \tilde{\lambda})^{3/2}}, \\
\partial_t \tilde{\lambda} &= (d - 2 + \eta_{A,k} + \eta_C) \tilde{\lambda} \\
&\quad + \frac{4v_d}{d} \left(1 - \frac{\eta_A}{d+2}\right) \frac{\tilde{\lambda}^2 (1 - \tilde{n}_0 \tilde{\lambda}) (1 - \tilde{n}_0 \tilde{\lambda} (4 + 3\tilde{n}_0 \tilde{\lambda}))}{(1 + 2\tilde{n}_0 \tilde{\lambda})^{5/2}}, \\
\eta_{A,k} &= \frac{4v_d}{d} \frac{\tilde{n}_0 \tilde{\lambda}^2}{(1 + 2\tilde{n}_0 \tilde{\lambda})^{3/2}}, \\
\eta_C &= \frac{4v_d}{d} \left(1 - \frac{\eta_A}{d+2}\right) \frac{\tilde{\lambda}^2 (\tilde{n}_0 \tilde{\lambda} (2 + 3\tilde{n}_0 \tilde{\lambda}) - 2)}{(1 + 2\tilde{n}_0 \tilde{\lambda})^{5/2}}, \\
\partial_t \tilde{V}_A &= (2 - \eta_{A,k} + 2\eta_C) \tilde{V}_A \\
&\quad - \frac{6v_d}{d} \left(1 - \frac{\eta_A}{d+2}\right) \frac{\tilde{\lambda}^2 (1 + \tilde{n}_0 \tilde{\lambda})}{(1 + 2\tilde{n}_0 \tilde{\lambda})^{5/2}},
\end{aligned} \tag{F.14}$$

dont la linéarisation à  $d = 3$  donne l'équation (3.75).



## Annexe G

# Température finie

Nous décrivons ici les différences qu'induit la température ( $T \neq 0$ ) dans notre approche de NPRG sur réseau. La modification de la théorie des champs se résume au fait que le temps imaginaire varie maintenant sur un intervalle fini  $[0, \beta]$ . Dans l'espace réciproque, les champs se décomposent alors en séries de Fourier, les champs bosoniques étant périodiques (de période  $\beta$ ), ce qui implique que les fréquences sont discrètes  $\omega_n = 2\pi Tn$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Ce formalisme a déjà été utilisé dans le cadre du NPRG pour des bosons dilués, voir [98, 142].

### Conditions initiales

Lorsque que la température est non-nulle, la différence principale dans les conditions initiales est que l'opérateur  $\exp(-\beta\hat{H}_{\text{loc}})$  n'est plus le projecteur dans l'état fondamental ( $\exp(-\beta\hat{H}_{\text{loc}}) \rightarrow \exp(-\beta E_0)|0\rangle\langle 0|$  pour  $\beta \rightarrow \infty$ ). La fonction de partition s'écrit

$$\begin{aligned} Z_{\text{loc}}(J, J^*) &= \text{Tr} \left( e^{-\beta(\hat{H}_{\text{loc}} - J^*\hat{b} - J\hat{b}^\dagger)} \right), \\ &= \sum_{\nu} e^{-\beta\lambda_{\nu}}, \end{aligned} \tag{G.1}$$

où  $\lambda_{\nu}$  est la valeur propre de l'opérateur  $\hat{H}_{\text{loc}} - J^*\hat{b} - J\hat{b}^\dagger$  associée à l'état  $|\nu\rangle$ . La valeur moyenne de  $\hat{b}$  est définie par

$$\phi = \langle \hat{b} \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z_{\text{loc}}(J, J^*)}{\partial J^*} \tag{G.2}$$

et le potentiel effectif est la transformée de Legendre de la fonction de partition

$$V_{\text{loc}}(n) = -\beta^{-1} \ln Z_{\text{loc}}(J, J^*) + J^*\phi + J\phi^*. \tag{G.3}$$

Bien entendu, nous retrouvons les résultats de la section 3.1.1 dans la limite de température nulle. Le calcul des fonctions de Green locales se généralise aussi directement au cas à température finie.

Notons qu'à température finie, l'isolant de Mott n'existe plus, la compressibilité n'étant plus nulle.

### Identités de Ward

Les identités de Ward obtenues en **B** pour les fonctions  $\Gamma_{A,B,C}$  se généralisent directement en notant toutefois que les fréquences sont discrètes,

$$\sqrt{2n_0} \bar{\Gamma}_{12}^{(2)}(\omega_n) + \omega_n \bar{\Gamma}_{1;0}^{(2)}(\omega_n) = 0, \quad (\text{G.4})$$

$$\sqrt{2n_0} \bar{\Gamma}_{22}^{(2)}(\omega_n) + \omega_n \bar{\Gamma}_{2;0}^{(2)}(\omega_n) = 0, \quad (\text{G.5})$$

$$\sqrt{2n_0} \bar{\Gamma}_{2;0}^{(2)}(\omega_n) - \omega_n \bar{\Gamma}_{;00}^{(2)}(\omega_n) = 0. \quad (\text{G.6})$$

Il n'est par contre pas possible d'utiliser ces identités pour obtenir des contraintes sur les différents paramètres de la théorie ( $V_A$ ,  $Z_C$ , etc.). En effet, nous n'avons plus le continuum de fréquences qui nous permettait de prendre facilement les dérivées par rapport aux fréquences des  $\Gamma^{(2)}$ . En particulier, les identités de la section 3.1.2, qui ont été utilisées tout au long du chapitre III, ne sont plus vraies à température finie, ce qui complique l'analyse numérique de la thermodynamique des chapitres IV et V, où nous sommes obligés de faire des dérivées numériques pour obtenir, par exemple, la densité.

### Équations de flot

Les équations de flots, voir annexe F, se généralisent directement au cas à température finie, une fois que les intégrales sur les fréquences sont remplacées par des sommes de Matsubara :

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \rightarrow T \sum_n. \quad (\text{G.7})$$

Notons que les arguments des sommes de Matsubara s'écrivent, si  $V_A \neq 0$ , sous la forme

$$\frac{\omega_n^a}{[(\omega_k^+ + \omega_n^2)(\omega_k^- + \omega_n^2)]^b}, \quad (\text{G.8})$$

où  $a$  et  $b$  sont des entiers positifs et  $\omega_k^+$  et  $\omega_k^-$  sont les pôles des fonctions de Green, voir section 3.1.3. Si  $\omega_k^\pm \gg T$ , nous sommes de manière effective à température nulle, et le flot de RG est le même qu'à  $T = 0$ . Dans la limite opposée, nous nous trouvons dans le régime classique (température infinie) et seule la fréquence de Matsubara  $n = 0$  participe au flot et nous retrouvons alors les équations de flot du problème  $O(2)$  classique. Le cross-over entre ces deux régimes définit une échelle caractéristique  $k_T$ . Typiquement,  $k_T = \sqrt{2mT}$  pour  $z = 2$  ou  $k_T = T/c$  si  $z = 1$ .

## Annexe H

# Lois d'échelle près du point multicritique

Nous exposons dans cette annexe les lois d'échelle près du point multicritique, en particulier dans la direction perpendiculaire au lobe (*i.e.* le long d'une trajectoire parallèle à l'axe  $\mu/U$ ). Pour étudier le comportement critique près du point XY, il est possible d'écrire une action de basse énergie (qui est justifiable à la RPA, voir plus bas)

$$S_{\text{eff}} = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \left\{ \phi^*(\mathbf{x}, \tau) \left( -\nabla^2 - c^{-2}(\partial_\tau - \delta\mu)^2 + \alpha\delta t \right) \phi(\mathbf{x}, \tau) + \frac{g}{2} |\phi(\mathbf{x}, \tau)|^4 \right\}, \quad (\text{H.1})$$

où  $\delta\mu = \mu - \mu_c$  et  $\delta t = t_c - t$ . Ici,  $\mu_c$  et  $t_c$  sont les valeurs du potentiel chimique et de  $t$  à l'extrémité du lobe.  $\alpha$  est un coefficient de proportionnalité et  $c$  est la vitesse des excitations au point multicritique. Pour  $\delta\mu = 0$ , nous avons bien l'action d'un modèle O(2) en dimension  $d + 1$  et la combinaison  $\partial_\tau - \delta\mu$  est la seule autorisée par l'invariance de jauge de l'action microscopique.

Si  $\delta t$  et  $\delta\mu$  sont tous deux nuls, le modèle est critique XY, caractérisé par les exposants  $\eta_{\text{XY}}$  et  $\nu_{\text{XY}}$  du modèle XY en dimension  $d + 1$  et  $z = 1$ . Si  $\delta t \neq 0$ , nous conservons la symétrie relativiste et ce paramètre pertinent grandit avec l'exposant  $\nu_{\text{XY}}$  sous une transformation de RG. Enfin, si  $\delta\mu \neq 0$ , l'invariance lorentzienne est brisée. Cette variable pertinente doit par contre se renormaliser comme  $\partial_\tau$ , du fait de la symétrie U(1) (voir par exemple [143]), c'est-à-dire avec l'exposant  $1/\nu_\perp = z = 1$ . Ainsi, lors d'une transformation de RG, la partie singulière de la pression obéit à la loi d'échelle<sup>a</sup>

$$P_s(\delta t, \delta\mu, T, g) = s^{-d-z} P_s(\delta t s^{1/\nu_{\text{XY}}}, \delta\mu s^{1/\nu_\perp}, T s^z, g(s)). \quad (\text{H.2})$$

Si  $d < d_c^+ = 3$ , la constante de couplage va vers une valeur de point fixe non triviale  $g^*$ . Le choix  $s = \delta t^{-\nu_{\text{XY}}}$  redonne les résultats de la partie 3.3, en notant que  $P_s = -V_s$ .

---

a. Il faudrait en toute rigueur travailler avec des grandeurs adimensionnées, comme nous l'avons fait au chapitre IV.

Le choix  $s = \mu^{-\nu_\perp}$  donne

$$P_s(\delta t, \delta\mu, T, g) = \mu^{(d+z)\nu_\perp} \mathfrak{P}_d\left(\frac{\delta t}{\delta\mu^{\nu_\perp/\nu_{XY}}}, \frac{T}{\delta\mu^{z\nu_\perp}}\right) \quad (\text{H.3})$$

où  $\mathfrak{P}_d(x, y) = P_s(x, 1, y, g^*)$ . Le long d'une trajectoire parallèle à l'axe des  $\mu$ , *i.e.*  $\delta t = 0$ , et à température nulle, nous avons donc

$$P_s(\delta t = 0, \delta\mu, T = 0, g) = \mathbf{c}_d \delta\mu^{(d+z)\nu_\perp}, \quad (\text{H.4})$$

où  $\mathbf{c}_d = \mathfrak{P}_d(0, 0)$  est un nombre universel. La partie singulière de la compressibilité se comporte donc comme  $\delta\mu^{(d+z-2)\nu_\perp} = \delta\mu^{d-1}$  le long de cette trajectoire, en accord avec les arguments d'échelle de Fisher *et al.* [3].

Si  $d \geq d_c^+ = 3$ , nous nous attendons à trouver une brisure des lois d'hyperscaling. Pour cela, il faut noter que  $g$  est maintenant dangereusement irrelevant :  $g(s) \propto s^{4-d-z}$  et  $P_s(u, v, w) \propto 1/w$  quand  $w \rightarrow 0$ . On trouve alors, en prenant  $s = \mu^{-\nu_\perp}$  et  $\delta t = T = 0$ ,

$$P_s(\delta t = 0, \delta\mu, T = 0, g) \propto \delta\mu^{4/z} \propto \delta\mu^4, \quad (\text{H.5})$$

avec des corrections logarithmiques en dimension  $d = 3$ , ce qui donne la loi d'échelle  $\delta\mu^2$  pour la compressibilité, comme argumenté en [3].

Nous pouvons calculer l'action de basse énergie  $S_{\text{eff}}$  à l'approximation RPA. Pour garder une action invariante sous la transformation de jauge locale, il faut développer l'action effective locale  $\Gamma_{\text{loc}}^{(n)}(i\omega; \mu)$  en fonction de  $i\omega + \delta\mu$  autour de  $\mu = \mu_c$ . À la RPA, nous avons

$$\begin{aligned} \mu_c/U &= \sqrt{\bar{n}_{\text{loc}}(\bar{n}_{\text{loc}} + 1)} - 1, \\ t_c &= \frac{(n_{\text{loc}}U - \mu)(U + \mu - n_{\text{loc}}U)}{2d(U + \mu)}, \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$

pour l'isolant de Mott  $\bar{n}_{\text{loc}}$ . Le vertex à deux points RPA vaut, dans la limite  $l|\mathbf{q}| \ll 1$  et  $i\omega + \delta\mu \ll U$ ,

$$\Gamma_{\text{RPA}}^{(2)}(i\omega; \mu_c) = tl^2\mathbf{q}^2 + 2d\delta t - \frac{(i\omega + \delta\mu)^2}{\sqrt{\bar{n}_{\text{loc}}(\bar{n}_{\text{loc}} + 1)}U}, \quad (\text{H.7})$$

ce qui donne

$$c^2 = \sqrt{\bar{n}_{\text{loc}}(\bar{n}_{\text{loc}} + 1)}tUl^2. \quad (\text{H.8})$$

Il est intéressant de comparer la vitesse  $c$  à la RPA avec les calculs Monte Carlo Quantique [52, 53] et NPRG, pour le premier lobe en dimensions deux et trois, voir table H.1. Remarquons que les résultats NPRG et Monte Carlo sont en très bon accord et que la RPA est relativement correcte.

Il est également possible de calculer  $\Gamma_{\text{RPA}}^{(4)}(\{i\omega = 0\})$  à la RPA, qui a une expression compliquée (voir la référence [46]), et vaut au point multicritique du lobe  $\bar{n}_{\text{loc}} = 1$  :

$$\Gamma_{\text{RPA}}^{(4)}(\{i\omega = 0\}) = \frac{2(48\sqrt{2} - 67)}{17}l^dU \equiv \lambda l^dU. \quad (\text{H.9})$$

---

$d$	2	3
$(c/lt_c)_{\text{RPA}}$	5.7	7.0
$(c/lt_c)_{\text{QMC}}$	$4.8 \pm 0.2$	$6.3 \pm 0.4$
$(c/lt_c)_{\text{NPRG}}$	4.9	6.4

---

TABLE H.1 – Vitesse  $c$  au point multicritique du lobe  $\bar{n}_{\text{loc}} = 1$  en dimension deux et trois calculée en Monte Carlo Quantique (QMC) [52, 53], à la RPA et avec le NPRG. Nous avons utilisé le  $t_c$  donnée par la RPA pour  $(c/lt_c)_{\text{RPA}}$ , *etc.*

Enfin, il est possible de réécrire l’action de basse énergie en  $\mu = \mu_c$  et  $T = 0$  sous la forme d’une théorie classique des champs en utilisant une dimension supplémentaire  $x = (\mathbf{x}, c\tau)$  et nous obtenons

$$S_{\text{eff}} = \int d^{d+1}x \left\{ \phi^*(x) \left( -\nabla^2 + 2d \frac{\delta t}{t^2} \right) \phi(x) + \frac{1}{2} \frac{\lambda U l^{d-4} c}{t^2} |\phi(x)|^4 \right\}, \quad (\text{H.10})$$

où  $2d \delta t/t$  joue le rôle d’un terme de “masse” et  $\lambda U l^{d-4} c/t^2 \equiv u_0$  est la constante d’interaction. La théorie est en couplage fort quand  $l^{3-d} u_0 \gtrsim 1$  à  $t = t_c$ . Il est facile de vérifier que  $l^{3-d} u_0 \gg 1$  pour le premier lobe de Mott en toute dimension.





# Annexe I

## Fonctions d'échelle dans la limite classique et en couplage faible

Nous justifions dans cette annexe que les différentes quantités thermodynamiques peuvent s'écrire en couplage faible et dans la limite  $|\mu| \ll T$  comme des fonctions universelles de la variable  $X = (\mu - \mu_{\text{BKT}})/T\tilde{g}(T)$  en dimension deux [119, 120], où  $\mu_{\text{BKT}}/T = \mathcal{H}_2(\tilde{g}(T))$  est une fonction universelle de  $\tilde{g}(T)$  (voir section 5.2). Notons en passant que la pression réduite peut toujours s'écrire sous la forme<sup>a</sup>

$$\mathcal{P}(\mu, T) = \mathcal{F}_d\left(\frac{\mu - \mu_c}{T}, \tilde{g}(T)\right) = \mathcal{F}_d\left(\frac{\mu}{T} - \mathcal{H}_d(\tilde{g}(T)), \tilde{g}(T)\right), \quad (\text{I.1})$$

car  $\mathcal{F}_d(x - \mathcal{H}_d(y), y)$  est bien une fonction universelle. Ici,  $\mu_c$  est la température critique en dimension  $d$  ( $\mu_{\text{BKT}}$  en  $d = 2$ ).

Nous allons montrer qu'en couplage faible  $\tilde{g}(T) \ll 1$  et dans le régime classique  $|\mu| \ll T$ , la pression réduite  $\mathcal{P}$  se réécrit en dimension  $d$  quelconque

$$\mathcal{P}(\mu, T) = \mathcal{P}_0\left(\frac{\mu - \mu_c}{T}, \tilde{g}(T)\right) + \tilde{g}(T)^{\frac{2}{4-d}} \tilde{\mathcal{F}}_d\left(\frac{\mu - \mu_c}{T\tilde{g}(T)^{\frac{2}{4-d}}}\right), \quad (\text{I.2})$$

où  $\mathcal{P}_0$  est la partie “quantique” de la pression (dont nous avons omis la dépendance en dimension) et  $\tilde{\mathcal{F}}_d$  est une fonction d'échelle classique (voir plus bas).

Comme nous nous intéressons au régime classique  $|\mu| \ll T$  en couplage faible  $\tilde{g}(T) \ll 1$ , nous pouvons directement travailler avec l'action classique (dépendant uniquement des modes du champs indépendants du temps imaginaire, c'est-à-dire que nous avons intégré tous les modes “quantiques”)

$$S_T = \frac{1}{T} \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{|\nabla\phi(\mathbf{x})|^2}{2m} - \mu'|\phi(\mathbf{x})|^2 + \frac{g'}{2}|\phi(\mathbf{x})|^4 \right\} + P_0(\mu, T), \quad (\text{I.3})$$

---

a. Dans cette annexe, nous absorbons les coefficients  $(2\pi)^d$  dans les fonctions d'échelle, par rapport aux définitions données au chapitre IV.

où  $\mu'$  est le potentiel chimique effectif des modes classiques (dépendant du système, *i.e.* c'est une quantité non-universelle) et  $g'$  est l'interaction effective ( $g' = 4\pi a_3/m$  en  $d = 3$  et  $g' = \tilde{g}(T)/2m$  en  $d = 2$ ). Ici,  $P_0$  est la contribution de la pression des modes "quantiques" et nous avons

$$P_0(\mu, T) = T \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{d/2} \mathcal{P}_0 \left( \frac{\mu - \mu_c}{T}, \tilde{g}(T) \right), \quad (\text{I.4})$$

où  $\mathcal{P}_0$  a été introduit à l'équation (I.2)<sup>b</sup>. Notons que l'action classique n'est définie qu'en présence d'un cut-off  $\Lambda_T \simeq \sqrt{2mT}$  (nous avons intégré tous les modes d'énergie  $\omega \gtrsim T$  et d'impulsion  $|\mathbf{q}| \gtrsim \Lambda_T$ ).

Pour réaliser une transformation du groupe de renormalisation, nous avons besoin de travailler avec des quantités adimensionnées, comme vu en section 4.1. Nous utilisons pour cela le cut-off  $\Lambda_T$  pour les distances et  $\Lambda_T^2/2m = T$  pour les énergies. En fonction des variables  $\tilde{\mathbf{x}} = \Lambda_T \mathbf{x}$ ,  $\tilde{\phi} = \Lambda_T^{-d/2} \phi$ ,  $\tilde{\mu}' = \mu'/T$  et  $\tilde{g}' = 2m\Lambda_T^{d-2}g' = \tilde{g}(T)$ , l'action classique devient<sup>c</sup>

$$S_T = \int d\tilde{\mathbf{x}} \left\{ |\tilde{\nabla} \tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}})|^2 - \tilde{\mu}' |\tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}})|^2 + \frac{\tilde{g}'}{2} |\tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}})|^4 \right\} \quad (\text{I.5})$$

tandis que la pression adimensionnée due aux modes classiques s'écrit

$$\tilde{P}_s(\tilde{T}, \tilde{\mu}', \tilde{g}') = \frac{P_s(\mu, T)}{T\Lambda_T^d}. \quad (\text{I.6})$$

Notons que nos hypothèses de couplage faible et de régime classique se réécrivent sous la forme  $\tilde{g}' \ll 1$  et  $|\tilde{\mu}'| \ll 1$ .

Lors d'une transformation de RG,  $\Lambda_T \rightarrow \Lambda_T/s$ , les constantes de couplages deviennent dépendantes de  $s$ ,  $\tilde{\mu}' \rightarrow \tilde{\mu}'(s)$  et  $\tilde{g}' \rightarrow \tilde{g}'(s)$ . D'après nos hypothèses, le flot démarre près du point fixe gaussien  $\tilde{\mu}' = \tilde{g}' = 0$ , et c'est donc ce point fixe qui va le gouverner tant que  $|\tilde{\mu}'(s)|, \tilde{g}'(s) \ll 1$ , avec les exposants critiques (champ moyen) associés :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}'(s) &= \tilde{\mu}' s^{1/\nu_G}, \\ \tilde{g}'(s) &= \tilde{g}' s^\epsilon, \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

avec  $\nu_G = 1/2$  et  $\epsilon = 4 - d$ . La partie classique de la pression  $P_s$  (*i.e.* la contribution des modes classiques à la pression) obéit à la relation d'échelle

$$\frac{P_s(\mu, T)}{T\Lambda_T^d} = s^{-d} \tilde{P}_s(\tilde{\mu}'(s), \tilde{g}'(s)), \quad (\text{I.8})$$

b. La contribution quantique de la pression peut s'écrire sous cette forme d'échelle grâce au point critique quantique discuté au chapitre IV.

c. Nous avons omis  $P_0$  car il n'est pas renormalisé. Nous n'aurons qu'à l'ajouter à la partie classique de la pression.

qui, avec le choix  $s = \tilde{g}'^{-1/\epsilon}$  (et en réarrangeant les termes), donne

$$P_s(\mu, T) = T(mT)^{d/2} \tilde{g}(T)^{d/\epsilon} F_d \left( \frac{\mu'}{T \tilde{g}(T)^{2/\epsilon}} \right). \quad (\text{I.9})$$

Cette expression n'est pas encore tout à fait satisfaisante car non-universelle : elle s'exprime en fonction de  $\mu'$  qui dépend explicitement des détails microscopiques (c'est-à-dire que la relation entre  $\mu$ , le vrai paramètre physique, et  $\mu'$  n'est pas universelle). La fonction  $F_d(x)$  étant universelle, la transition de phase sera donnée par une non-analyticité en un certain  $x_c$ , ce qui définit alors  $\mu'_c = x_c T \tilde{g}(T)^{2/\epsilon}$ . Nous pouvons donc réécrire la fonction  $F_d$  sous la forme

$$F_d \left( \frac{\mu'}{T \tilde{g}(T)^{2/\epsilon}} \right) = \tilde{\mathcal{F}}_d \left( \frac{\mu' - \mu'_c}{T \tilde{g}(T)^{2/\epsilon}} \right). \quad (\text{I.10})$$

La fonction  $\tilde{\mathcal{F}}_d(x)$  est elle aussi universelle car  $\tilde{\mathcal{F}}_d(x) = F_d(x + x_c)$ . Par contre, il est *a priori* compliqué de relier  $\mu'_c$  à  $\mu_c$  (et  $\mu'$  à  $\mu$ ). Nous allons maintenant justifier que  $\mu' - \mu'_c = \mu - \mu_c$  dans le régime classique, ce qui va nous permettre d'écrire la pression sous une forme d'échelle universelle. Le potentiel chimique renormalisé peut s'écrire

$$\mu' = \mu + \delta\mu(T, \mu, \tilde{g}(T), \{K\}), \quad (\text{I.11})$$

où  $K$  représente tous les autres détails non-universels du système (par exemple, la forme du réseau si il y en a un, *etc.*). Dans le régime classique, le potentiel chimique ne joue pas de rôle dans la renormalisation des diverses constantes de couplage et donc  $\delta\mu(T, \mu, \tilde{g}(T), \{K\}) \simeq \delta\mu(T, \tilde{g}(T), \{K\})$ . Le même raisonnement nous amène à

$$\mu'_c = \mu_c + \delta\mu(T, \mu_c, \tilde{g}(T), \{K\}) \simeq \mu_c + \delta\mu(T, \tilde{g}(T), \{K\}), \quad (\text{I.12})$$

c'est-à-dire que pour un système donné, la fonction  $\delta\mu(T, \tilde{g}(T), \{K\})$  est la même pour  $\mu$  et  $\mu_c$ . Nous obtenons donc que dans le régime classique  $\mu' - \mu'_c = \mu - \mu_c$ .

La pression réduite peut donc s'écrire, en n'oubliant pas d'ajouter la contribution des modes quantiques (la partie "régulière" de la pression),

$$\mathcal{P}(\mu, T) = \mathcal{P}_0 \left( \frac{\mu - \mu_c}{T}, \tilde{g}(T) \right) + \tilde{g}(T)^{\frac{d}{4-d}} \tilde{\mathcal{F}}_d \left( \frac{\mu - \mu_c}{T \tilde{g}(T)^{\frac{2}{4-d}}} \right). \quad (\text{I.13})$$

Dans le régime classique,  $|\mu|, |\mu_c| \ll T$ , nous pouvons développer  $\mathcal{P}_0$  et nous obtenons

$$\mathcal{P}(\mu, T) = \mathcal{P}_c(T) + \frac{\mu - \mu_c}{T} \mathcal{D}_c(T) + \tilde{g}(T)^{\frac{d}{4-d}} \tilde{\mathcal{F}}_d \left( \frac{\mu - \mu_c}{T \tilde{g}(T)^{\frac{2}{4-d}}} \right), \quad (\text{I.14})$$

où maintenant  $\tilde{\mathcal{F}}_d(0) = 0$  et  $\tilde{\mathcal{F}}'_d(0) = 0$ , *i.e.* nous avons défini

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c(T) &= \mathcal{P}_0(0, \tilde{g}(T)) + \tilde{g}(T)^{\frac{d}{4-d}} \tilde{\mathcal{F}}_d(0), \\ \mathcal{D}_c(T) &= \mathcal{P}_0^{(1,0)}(0, \tilde{g}(T)) + \tilde{g}(T)^{\frac{d-2}{4-d}} \tilde{\mathcal{F}}'_d(0), \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

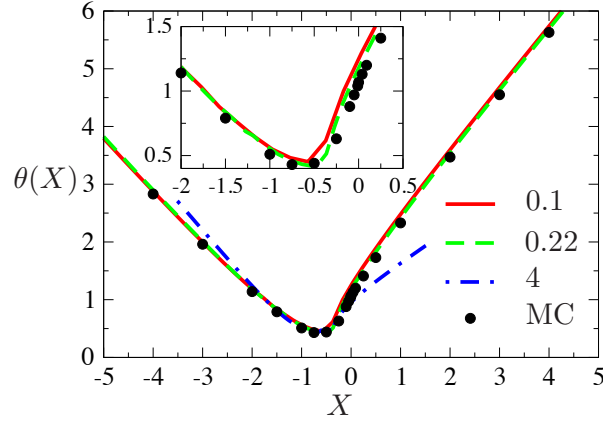


FIGURE I.1 – Fonction d'échelle  $\theta(X)$  ( $X = (\mu - \mu_c)/T\tilde{g}(T)$ ), calculée par Monte Carlo classique (MC) et NPRG pour  $\tilde{g}(T) = 0.1, 0.22$  et  $4$ . En couplage fort ( $\tilde{g}(T) \gtrsim 1$ ), la densité réduite ne respecte plus la loi d'échelle.

qui sont bien des fonction universelles de  $\tilde{g}(T)$  uniquement. L'équation (I.14) est en accord les résultats des références [119, 120, 29]<sup>d</sup>. Nous comparons en figure I.1 les calculs Monte Carlo classique [120] (*i.e.* utilisant l'action (I.3)) et nos calculs NPRG. Nous montrons pour cela la fonction  $\theta(X)$  utilisée en [120] ( $X = (\mu - \mu_c)/T\tilde{g}(T)$ ), définie par

$$\mathcal{D}(\mu, T) = \mathcal{D}_c + 2\pi(\theta(X) - \theta_0 - X), \quad (\text{I.16})$$

avec  $\theta_0 \simeq 1.07$ . Il y a un bon accord entre nos calculs et le Monte Carlo en couplage faible, mais la loi d'échelle (I.14) n'est plus valable en couplage fort, comme attendu. Nous rappelons que les fonctions d'échelle décrites dans les chapitres IV et V, voir équation (I.1), sont plus générales et sont valides en couplage fort.

d. En dimension deux, les auteurs de [119, 120, 29] utilisent  $\tilde{g}(D/m)$ , avec  $D$  la densité du système, au lieu de  $\tilde{g}(T)$ . Cela ne change pas les résultats, vu la dépendance logarithmique de  $\tilde{g}$  de son argument.

# Bibliographie

- [1] S. SACHDEV. *Quantum Phase Transitions* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2011), 2nd edition.
- [2] I. BLOCH, J. DALIBARD, and W. ZWERGER. *Rev. Mod. Phys.*, **80**, 885 (2008).
- [3] M. P. A. FISHER, P. B. WEICHMAN, G. GRINSTEIN, and D. S. FISHER. *Phys. Rev. B*, **40**, 546 (1989).
- [4] M. GREINER, O. MANDEL, T. ESSLINGER, T. W. HANSCH, and I. BLOCH. *Nature*, **415**, 39 (2002).
- [5] D. M. STAMPER-KURN and J. H. THYWISEN. *arXiv : 1111.6196* (2011).
- [6] M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN, and E. A. CORNELL. *Science*, **269**, 198 (1995).
- [7] K. B. DAVIS, M.-O. MEWES, M. A. JOFFE, M. R. ANDREWS, and W. KETTERLE. *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 5202 (1995).
- [8] D. PETROV, D. GANGARDT, and G. SHLYAPNIKOV. *J. Phys. IV France*, **116**, 5 (2004).
- [9] E. BRAATEN and H.-W. HAMMER. *Physics Reports*, **428**, 259 (2006).
- [10] G. LEPAGE. *arXiv*, p. 0506.330 (1989).
- [11] E. BRAATEN, H.-W. HAMMER, and S. HERMANS. *Phys. Rev. A*, **63**, 063609 (2001).
- [12] L.-K. LIM, C. M. SMITH, and H. T. C. STOOF. *Phys. Rev. A*, **78**, 013634 (2008).
- [13] D. S. PETROV and G. V. SHLYAPNIKOV. *Phys. Rev. A*, **64**, 012706 (2001).
- [14] E. GROSS. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, **20**, 454 (1961).
- [15] L. P. PITAEVSKII. *Soviet Physics JETP*, **13**, 451–454 (1961).
- [16] T.-L. HO and Q. ZHOU. *Nat Phys*, **6**, 131 (2010).
- [17] N. N. BOGOLIUBOV. *J. Phys. (Moscow)*, **11**, 23 (1947).
- [18] J. STEINHAEUER, R. OZERI, N. KATZ, and N. DAVIDSON. *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 120407 (2002).
- [19] T. D. LEE and C. N. YANG. *Phys. Rev.*, **105**, 1119 (1957).
- [20] T. D. LEE, K. HUANG, and C. N. YANG. *Phys. Rev.*, **106**, 1135 (1957).

- 
- [21] N. M. HUGENHOLTZ and D. PINES. *Phys. Rev.*, **116**, 489 (1959).
- [22] T. T. WU. *Phys. Rev.*, **115**, 1390 (1959).
- [23] K. SAWADA. *Phys. Rev.*, **116**, 1344 (1959).
- [24] E. BRAATEN and A. NIETO. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, **11**, 143 (1999).
- [25] E. BRAATEN, H.-W. HAMMER, and T. MEHEN. *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 040401 (2002).
- [26] J.-P. BLAIZOT. *arXiv : 0801.0009* (2008).
- [27] S. T. BELIAEV. *Sov. Phys. JETP*, **7**, 289 (1958).
- [28] S. T. BELIAEV. *Sov. Phys. JETP*, **7**, 299 (1958).
- [29] B. CAPOGROSSO-SANSONE, S. GIORGINI, S. PILATI, L. POLLET, N. PROKOF'EV, B. SVISTUNOV, and M. TROYER. *New Journal of Physics*, **12**, 043010 (2010).
- [30] N. DUPUIS. *Phys. Rev. E*, **83**, 031120 (2011).
- [31] A. A. NEPOMNYASHCHII and Y. A. NEPOMNYASHCHII. *JETP Lett.*, **21**, 1 (1975).
- [32] Y. A. NEPOMNYASHCHII and A. A. NEPOMNYASHCHII. *Sov. Phys. JETP*, **48**, 493 (1978).
- [33] V. N. POPOV. *Theor. and Math. Phys. (Sov.)*, **6**, 90 (1971).
- [34] V. N. POPOV. *Theor. and Math. Phys. (Sov.)*, **11**, 236 (1972).
- [35] V. N. POPOV. *Theor. and Math. Phys. (Sov.)*, **11**, 354 (1972).
- [36] V. N. POPOV. *Functional Integrals and Collective Excitations* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1987).
- [37] V. N. POPOV. *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics* (Reidel, Dordrecht, Holland, 1983).
- [38] C. CASTELLANI, C. DI CASTRO, F. PISTOLESI, and G. C. STRINATI. *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 1612 (1997).
- [39] F. PISTOLESI, C. CASTELLANI, C. DI CASTRO, and G. C. STRINATI. *Phys. Rev. B*, **69**, 024513 (2004).
- [40] N. DUPUIS. *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 190401 (2009).
- [41] N. DUPUIS. *Phys. Rev. A*, **80**, 043627 (2009).
- [42] D. JAKSCH, C. BRUDER, J. I. CIRAC, C. W. GARDINER, and P. ZOLLER. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 3108 (1998).
- [43] W. ZWERGER. *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics*, **5**, S9 (2003).
- [44] D. VAN OOSTEN, P. VAN DER STRATEN, and H. T. C. STOOF. *Phys. Rev. A*, **63**, 053601 (2001).

- 
- [45] K. SHESHADRI, H. R. KRISHNAMURTHY, R. PANDIT, and T. V. RAMAKRISHNAN. *EPL (Europhysics Letters)*, **22**, 257 (1993).
- [46] K. SENGUPTA and N. DUPUIS. *Phys. Rev. A*, **71**, 033629 (2005).
- [47] Y. OHASHI, M. KITaura, and H. MATSUMOTO. *Phys. Rev. A*, **73**, 033617 (2006).
- [48] C. MENOTTI and N. TRIVEDI. *Phys. Rev. B*, **77**, 235120 (2008).
- [49] H. T. C. STOOF, D. B. M. DICKERSCHIED, and K. GUBBELS. *Ultracold Quantum Field* (Springer/Canopus Publishing Limited, 2009).
- [50] W. KRAUTH and N. TRIVEDI. *EPL (Europhysics Letters)*, **14**, 627 (1991).
- [51] S. WESSEL, F. ALET, M. TROYER, and G. G. BATROUNI. *Phys. Rev. A*, **70**, 053615 (2004).
- [52] B. CAPOGROSSO-SANSONE, N. V. PROKOF'EV, and B. V. SVISTUNOV. *Phys. Rev. B*, **75**, 134302 (2007).
- [53] B. CAPOGROSSO-SANSONE, S. G. SÖYLER, N. PROKOF'EV, and B. SVISTUNOV. *Phys. Rev. A*, **77**, 015602 (2008).
- [54] J. K. FREERICKS and H. MONIEN. *EPL (Europhysics Letters)*, **26**, 545 (1994).
- [55] J. K. FREERICKS and H. MONIEN. *Phys. Rev. B*, **53**, 2691 (1996).
- [56] J. K. FREERICKS, H. R. KRISHNAMURTHY, Y. KATO, N. KAWASHIMA, and N. TRIVEDI. *Phys. Rev. A*, **79**, 053631 (2009).
- [57] F. E. A. DOS SANTOS and A. PELSTER. *Phys. Rev. A*, **79**, 013614 (2009).
- [58] N. TEICHMANN, D. HINRICHS, M. HOLTHAUS, and A. ECKARDT. *Phys. Rev. B*, **79**, 100503 (2009).
- [59] N. TEICHMANN, D. HINRICHS, M. HOLTHAUS, and A. ECKARDT. *Phys. Rev. B*, **79**, 224515 (2009).
- [60] M. KNAP, E. ARRIGONI, and W. VON DER LINDEN. *Phys. Rev. B*, **81**, 024301 (2010).
- [61] M. KNAP, E. ARRIGONI, and W. VON DER LINDEN. *Phys. Rev. B*, **83**, 134507 (2011).
- [62] E. ARRIGONI, M. KNAP, and W. VON DER LINDEN. *Phys. Rev. B*, **84**, 014535 (2011).
- [63] P. ANDERS, E. GULL, L. POLLET, M. TROYER, and P. WERNER. *Phys. Rev. Lett.*, **105**, 096402 (2010).
- [64] P. ANDERS, E. GULL, L. POLLET, M. TROYER, and P. WERNER. *New Journal of Physics*, **13**, 075013 (2011).
- [65] A. RANÇON and N. DUPUIS. *Phys. Rev. B*, **84**, 174513 (2011).
- [66] L. P. KADANOFF. *Physics*, **2**, 263 (1966).
- [67] K. G. WILSON. *Phys. Rev. B*, **4**, 3174 (1971).
- [68] K. G. WILSON. *Phys. Rev. B*, **4**, 3184 (1971).



- [69] K. G. WILSON and M. E. FISHER. *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 240 (1972).
- [70] K. G. WILSON and J. KOGUT. *Physics Reports*, **12**, 75 (1974).
- [71] N. D. GOLDENFELD. *Lectures on Phase Transitions and the Renormalisation Group* (Addison-Wesley, 1992).
- [72] V. L. GINZBURG. *Soviet Physics-Solid State*, **2**, 1824 (1960).
- [73] F. J. WEGNER and A. HOUGHTON. *Phys. Rev. A*, **8**, 401 (1973).
- [74] J. POLCHINSKI. *Nuclear Physics B*, **231**, 269 (1984).
- [75] C. WETTERICH. *Nuclear Physics B*, **352**, 529 (1991).
- [76] C. WETTERICH. *Physics Letters B*, **301**, 90 (1993).
- [77] C. WETTERICH. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, **60**, 461 (1993).
- [78] C. WETTERICH. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, **57**, 451 (1993).
- [79] U. ELLWANGER. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, **62**, 503 (1994).
- [80] T. MORRIS. *Int. J. Mod. Phys. A*, **9**, 2411 (1994).
- [81] T. R. MORRIS. *Physics Letters B*, **329**, 241 (1994).
- [82] T. R. MORRIS. *Physics Letters B*, **334**, 355 (1994).
- [83] A. PAROLA and L. REATTO. *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 2417 (1984).
- [84] A. PAROLA. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, **19**, 5071 (1986).
- [85] A. PAROLA, D. PINI, and L. REATTO. *Phys. Rev. E*, **48**, 3321 (1993).
- [86] D. PINI, A. PAROLA, and L. REATTO. *Journal of Statistical Physics*, **72**, 1179 (1993).
- [87] A. PAROLA and L. REATTO. *Advances in Physics*, **44**, 211 (1995).
- [88] B. DELAMOTTE. *arXiv : 0702.365* (2007).
- [89] J. BERGES, N. TETRADIS, and C. WETTERICH. *Physics Reports*, **363**, 223 (2002).
- [90] M. REUTER. *Phys. Rev. D*, **57**, 971 (1998).
- [91] L. CANET, B. DELAMOTTE, O. DELOUBRIÈRE, and N. WSCHEBOR. *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 195703 (2004).
- [92] L. CANET, H. CHATÉ, B. DELAMOTTE, and N. WSCHEBOR. *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 150601 (2010).
- [93] G. TARJUS and M. TISSIER. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 267008 (2004).
- [94] M. TISSIER and G. TARJUS. *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 041601 (2011).
- [95] N. DUPUIS and K. SENGUPTA. *EPL (Europhysics Letters)*, **80**, 50007 (2007).
- [96] C. WETTERICH. *Phys. Rev. B*, **77**, 064504 (2008).
- [97] S. FLOERCHINGER and C. WETTERICH. *Phys. Rev. A*, **77**, 053603 (2008).
- [98] S. FLOERCHINGER and C. WETTERICH. *Phys. Rev. A*, **79**, 063602 (2009).
- [99] S. FLOERCHINGER and C. WETTERICH. *Phys. Rev. A*, **79**, 013601 (2009).

- 
- [100] A. SINNER, N. HASSELMANN, and P. KOPIETZ. *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 120601 (2009).
- [101] A. SINNER, N. HASSELMANN, and P. KOPIETZ. *Phys. Rev. A*, **82**, 063632 (2010).
- [102] F. BENITEZ, J.-P. BLAIZOT, H. CHATÉ, B. DELAMOTTE, R. MÉNDEZ-GALAIN, and N. WSCHEBOR. *Phys. Rev. E*, **85**, 026707 (2012).
- [103] L. CANET, B. DELAMOTTE, D. MOUHANNA, and J. VIDAL. *Phys. Rev. D*, **67**, 065004 (2003).
- [104] J.-M. CAILLOL. *Nuclear Physics B*, **855**, 854 (2012).
- [105] L. CANET, B. DELAMOTTE, D. MOUHANNA, and J. VIDAL. *Phys. Rev. B*, **68**, 064421 (2003).
- [106] J.-P. BLAIZOT, R. MÉNDEZ-GALAIN, and N. WSCHEBOR. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, **58**, 297 (2007).
- [107] J.-P. BLAIZOT, R. MÉNDEZ-GALAIN, and N. WSCHEBOR. *Physics Letters B*, **632**, 571 (2006).
- [108] J.-P. BLAIZOT, R. MÉNDEZ-GALAIN, and N. WSCHEBOR. *Phys. Rev. E*, **74**, 051116 (2006).
- [109] J.-P. BLAIZOT, R. MÉNDEZ-GALAIN, and N. WSCHEBOR. *Phys. Rev. E*, **74**, 051117 (2006).
- [110] F. BENITEZ, J.-P. BLAIZOT, H. CHATÉ, B. DELAMOTTE, R. MÉNDEZ-GALAIN, and N. WSCHEBOR. *Phys. Rev. E*, **80**, 030103 (2009).
- [111] F. BENITEZ, R. MÉNDEZ-GALAIN, and N. WSCHEBOR. *Phys. Rev. B*, **77**, 024431 (2008).
- [112] N. DUPUIS and K. SENGUPTA. *Eur. Phys. J. B*, **66**, 271 (2008).
- [113] T. MACHADO and N. DUPUIS. *Phys. Rev. E*, **82**, 041128 (2010).
- [114] M. CAMPOSTRINI, M. HASENBUSCH, A. PELISSETTO, P. ROSSI, and E. VICARI. *Phys. Rev. B*, **63**, 214503 (2001).
- [115] B. D. JOSEPHSON. *Physics Letters*, **21**, 608 (1966).
- [116] T. GIAMARCHI, C. RUEGG, and O. TCHERNYSHYOV. *Nat Phys*, **4**, 198 (2008).
- [117] S. K. ADHIKARI, T. FREDERICO, and I. D. GOLDMAN. *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 487 (1995).
- [118] S. SACHDEV, T. SENTHIL, and R. SHANKAR. *Phys. Rev. B*, **50**, 258 (1994).
- [119] N. PROKOF'EV, O. RUEBENACKER, and B. SVISTUNOV. *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 270402 (2001).
- [120] N. PROKOF'EV and B. SVISTUNOV. *Phys. Rev. A*, **66**, 043608 (2002).
- [121] T. YEFSAH, R. DESBUQUOIS, L. CHOMAZ, K. J. GÜNTER, and J. DALIBARD. *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 130401 (2011).
- [122] M. SCHICK. *Phys. Rev. A*, **3**, 1067 (1971).

- 
- [123] C. MORA and Y. CASTIN. *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 180404 (2009).
- [124] V. L. BEREZINSKII. *Sov. Phys. JETP*, **32**, 493 (1970).
- [125] V. L. BEREZINSKII. *Sov. Phys. JETP*, **34**, 610 (1971).
- [126] J. M. KOSTERLITZ and D. J. THOULESS. *J. of Phys. C*, **6**, 1181 (1973).
- [127] J. M. KOSTERLITZ and D. J. THOULESS. *J. Phys. C*, **7**, 1046 (1974).
- [128] D. S. FISHER and P. C. HOHENBERG. *Phys. Rev. B*, **37**, 4936 (1988).
- [129] A. RANÇON and N. DUPUIS. *Phys. Rev. A*, **85**, 011602 (2012).
- [130] X. ZHANG, C.-L. HUNG, S.-K. TUNG, and C. CHIN. *Science* (2012).
- [131] C.-L. HUNG, X. ZHANG, N. GEMELKE, and C. CHIN. *Nature*, **470**, 236 (2011).
- [132] S. TROTZKY, L. POLLET, F. GERBIER, U. SCHNORRBERGER, I. BLOCH, N. V. PROKOF'EV, B. SVISTUNOV, and M. TROYER. *Nat Phys*, p. 998–1004 (2010).
- [133] S. FANG, C.-M. CHUNG, P. N. MA, P. CHEN, and D.-W. WANG. *Phys. Rev. A*, **83**, 031605 (2011).
- [134] M. GRÄTER and C. WETTERICH. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 378 (1995).
- [135] G. v. GERSDORFF and C. WETTERICH. *Phys. Rev. B*, **64**, 054513 (2001).
- [136] S. D. HUBER, E. ALTMAN, H. P. BÜCHLER, and G. BLATTER. *Phys. Rev. B*, **75**, 085106 (2007).
- [137] M. ENDRES, T. FUKUHARA, D. PEKKER, M. CHENEAU, P. SCHAUSS, C. GROSS, E. DEMLER, S. KUHR, and I. BLOCH. *ArXiv e-prints* (2012).
- [138] T. GIAMARCHI and H. J. SCHULZ. *Phys. Rev. B*, **37**, 325 (1988).
- [139] P. B. WEICHMAN and R. MUKHOPADHYAY. *Phys. Rev. B*, **77**, 214516 (2008).
- [140] V. N. POPOV and A. V. SEREDNIAKOV. *Sov. Phys. JETP*, **50**, 193 (1979).
- [141] D. F. LITIM. *Physics Letters B*, **486**, 92 (2000).
- [142] C. EICHLER, N. HASSELMANN, and P. KOPIETZ. *Phys. Rev. E*, **80**, 051129 (2009).
- [143] S. SACHDEV. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, **94**, 469 (1994).