



**HAL**  
open science

# Analyse de stabilité et de performances d'une classe de systèmes non-linéaires à commutations en temps discret

Carlos Alberto Cavichioli Gonzaga

► **To cite this version:**

Carlos Alberto Cavichioli Gonzaga. Analyse de stabilité et de performances d'une classe de systèmes non-linéaires à commutations en temps discret. Automatique. Université de Lorraine, 2012. Français. NNT: . tel-00762854

**HAL Id: tel-00762854**

**<https://theses.hal.science/tel-00762854>**

Submitted on 8 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse de stabilité et de performances d'une classe de systèmes non-linéaires à commutations en temps discret.

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 7 septembre 2012

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université de Lorraine**

**Spécialité Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique**

par

**Carlos Alberto CAVICHIOLI GONZAGA**

### Composition du jury

|                      |                                       |   |
|----------------------|---------------------------------------|---|
| <i>Président :</i>   | F. LAMNABHI-LAGARRIGUE                | DR CNRS, LSS  |
| <i>Rapporteurs :</i> | G. SCORLETTI<br>S. TARBOURIECH        | PU, EC Lyon<br>DR CNRS, LAAS  |
| <i>Examineurs :</i>  | J. DAAFOUZ<br>A. GIRARD<br>M. JUNGERS | PU, UL (Directeur de thèse)<br>MCF, UJF Grenoble<br>CR CNRS, CRAN (Co-directeur de thèse) |



Centre de Recherche en Automatique de Nancy  
UMR 7039 CNRS – Université de Lorraine

---

2, avenue de la forêt de Haye 54516 Vandœuvre-lès-Nancy  
Tél.+33 (0)3 83 59 59 59 Fax +33 (0)3 83 59 56 44

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

Les résultats présentés dans ce mémoire ont été obtenus à partir des travaux de recherche développés au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), une Unité Mixte de Recherche – Université de Lorraine - CNRS-UMR 7039, au sein du groupe thématique Automatique Commande et Observation des Systèmes (ACOS). Je tiens à remercier, tout d’abord, mes directeurs de thèse, M. Jamal DAAFOUZ, professeur de l’Université de Lorraine et M. Marc JUNGERS, chargé de recherches au CRAN, de m’avoir encadré pendant ces trois ans de travaux. Je leur suis reconnaissant de m’avoir accepté comme thésard, le premier brésilien à intégrer le groupe. Aussi, j’exprime mes sincères remerciements pour leur patience, leurs encouragements et leur soutien qui m’ont permis d’obtenir les contributions de ce mémoire.

Je remercie Me. Sophie TARBOURIECH, directrice de recherches au LAAS-CNRS, et M. Gérard SCORLETTI, professeur de EC-Lyon, d’avoir accepté d’être les rapporteurs de mon mémoire. Je remercie Me. Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE, directrice de recherches à LSS, pour avoir présidé le jury de ma soutenance de thèse et M. Antoine GIRARD, pour sa participation au jury. Je tiens à les remercier pour leurs lectures attentives de mon manuscrit, pour leurs remarques, et aussi pour leur profond intérêt pour les résultats de ma thèse.

Je remercie également tout les membres du CRAN, spécialement, ceux situés sur le site à l’ENSEM. Je remercie Me. Carole COURRIER et Me. Christine PIERSON pour leur support vis-à-vis de tous les sujets administratifs. Mes remerciements vont également aux doctorants de l’ENSEM. À mes collègues (et amis) de promo 2012 ACOS-ENSEM, Pascal, aussi collègue de bureau, et Fouad, mon collègue de mission CDC-2011, un gros merci. Merci beaucoup aux doctorants passés au laboratoire, plus particulièrement, Liu, Ricardo, Thomas, Achraf et Anca pour des repas au restoU, sans oublier de Ivan, mon premier ami italien au laboratoire, qui m’a accueilli au sein du groupe de thésards à mon arrivée. Parallèlement, je remercie en particulier celui qui vient d’arriver et est devenu très bon ami, Julien. Merci aux brésiliens qui ont intégré l’ACOS après mon arrivée, en particulier, Vanessa et Marcos qui m’ont accompagné pendant la phase la plus dure de la thèse : la rédaction de ce manuscrit en français.

À l’Agence Nationale de la Recherche et au Centre Nationale de Recherches Scientifique pour leur soutien financier, un grand merci. À propos du CNRS, je ne peux pas oublier de remercier les chercheurs membres du CNRS, (et mes amis) : mon directeur de thèse M. Marc JUNGERS, Samson, Lucian, Mirko et Romain, pour avoir fait de l’heure du repas, une des plus amusantes, en intégrant l’unique thésard du groupe. Je les remercie pour nos conversations techniques qui ont véritablement contribué pour mon côté chercheur. Aux deux avec qui je me suis plus baladé, Mirko, mon deuxième ami italien, et Romain, merci bien pour des nombreuses heures de bonheur (en dehors du laboratoire inclus).

Merci beaucoup à mes amis brésiliens, thésards dans d’autres laboratoires en Europe, Vinícius, Luiz, Rodrigo et Warody, pour avoir gardé le contact (et aussi les par-

tages techniques) en nous aidant à diminuer le manque de notre langue maternelle dans le parcours professionnel. À mes professeurs à l'UFSC, Florianópolis, Eugênio et Ubirajara, merci de m'avoir poussé à partir en France pour ce sujet de thèse au CRAN.

Enfin, je ne peux pas finir sans adresser mes remerciements à mes parents, Armando et Anide, pour leurs encouragements et leur confiance. Merci beaucoup à ma famille en général pour le support, même de loin, et à celles qui étaient présentes lors de ma soutenance : ma sœur Dudu et ma belle-sœur Andi. Pour ces mêmes raisons, pour leur compagnie, pour leur confiance et leur soutien pendant ces trois ans, dont deux en France, j'exprime ma plus sincère gratitude à ma belle Jan, elle qui m'a encouragé dès le départ du Brésil pour vivre cette expérience professionnelle et personnelle.

*Ao Seu Armando e à Dona Anide, meus pais, mes parents  
À linda de ma vie, Janinha.*



# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Notation</b>   | <b>1</b>  |
| <b>Introduction Générale</b>  | <b>3</b>  |
| <b>Chapitre 1 Notions introductives</b>   | <b>7</b>  |
| 1.1 Définition d'un système à commutations en temps discret . . . . .   | 7         |
| 1.1.1 Stabilité des systèmes linéaires à commutations arbitraires . . . . .                                   | 9         |
| 1.1.2 Stabilisation des systèmes linéaires à commutations arbitraires<br>par retour d'état linéaire . . . . . | 10        |
| 1.1.3 Stabilisation des systèmes linéaires à commutations par loi de<br>commutation . . . . .                 | 11        |
| 1.2 Définition des systèmes du type Lur'e . . . . .   | 14        |
| 1.2.1 Le problème de stabilité absolue en temps continu . . . . .   | 15        |
| 1.2.2 Le problème de stabilité absolue en temps discret . . . . .   | 17        |
| 1.2.3 Commande des systèmes Lur'e . . . . .   | 20        |
| 1.3 Conclusion . . . . .  | 22        |
| <b>Chapitre 2 Stabilité et commande des systèmes Lur'e en temps discret</b>                                   | <b>25</b> |
| 2.1 Le problème de Lur'e en temps discret et préliminaires . . . . .  | 26        |
| 2.1.1 Définition du système . . . . .   | 26        |
| 2.1.2 Limite des outils classiques . . . . .  | 27        |
| 2.1.3 Une fonction de Lyapunov adaptée . . . . .  | 28        |
| 2.2 Analyse de stabilité globale . . . . .  | 30        |
| 2.3 Interprétation fréquentielle . . . . .  | 31        |
| 2.4 Systèmes Lur'e avec commande saturée . . . . .  | 37        |
| 2.5 Analyse de stabilité locale . . . . .   | 38        |
| 2.5.1 Discussions concernant l'estimation de $\mathcal{B}_0$ . . . . .  | 45        |
| 2.5.2 Raffinement du problème d'optimisation . . . . .  | 46        |

|  |   |            |
|--|---|------------|
| 2.6  | Synthèse de loi de commande . . . . .   | 49         |
| 2.6.1  | Formulation BMI . . . . .   | 49         |
| 2.6.2  | Une linéarisation fondée sur des conditions suffisantes . . . . .                     | 52         |
| 2.7  | Conclusion . . . . .  | 56         |
| <b>Chapitre 3 Stabilité et commande des systèmes à commutations arbitraires et à modes non-standards</b>   |   | <b>57</b>  |
| 3.1  | Systèmes Lur'e à commutations en temps discret . . . . .                              | 58         |
| 3.1.1  | Définition du système et motivation . . . . .   | 58         |
| 3.1.2  | Justification et définition d'une fonction de Lyapunov Lur'e à commutations . . . . . | 60         |
| 3.2  | Analyse de stabilité globale . . . . .  | 64         |
| 3.3  | Systèmes Lur'e à commutations avec commande saturée . . . . .                         | 66         |
| 3.4  | Analyse de stabilité locale . . . . .   | 67         |
| 3.5  | Synthèse de loi de commande commutée . . . . .  | 74         |
| 3.6  | Conclusion . . . . .  | 79         |
| <b>Chapitre 4 Stabilisation par loi de commutation de systèmes à commutations et à modes non-standards</b> |   | <b>83</b>  |
| 4.1  | Systèmes Lur'e à commutations en temps discret . . . . .                              | 84         |
| 4.2  | Synthèse de loi de commutation stabilisante . . . . .                                 | 85         |
| 4.3  | Aspects relatifs aux régions d'activation des modes . . . . .                         | 90         |
| 4.4  | Systèmes Lur'e à commutations avec commande saturée . . . . .                         | 93         |
| 4.5  | Stabilisation locale par stratégie de commutation . . . . .                           | 95         |
| 4.6  | Conclusion . . . . .  | 103        |
| <b>Chapitre 5 Conclusion Générale</b>  |   | <b>105</b> |
| <b>Bibliographie</b>   |   | <b>109</b> |

# Notation

|  |  |
|--|--|
| $\mathbb{N}$   | - ensemble des nombres naturels  |
| $\mathbb{N}^*$   | - ensemble des nombres naturels strictement positifs                                     |
| $\mathbb{R}$   | - ensemble des nombres réels   |
| $\mathbb{R}_+$   | - ensemble des nombres réels non-négatifs  |
| $\mathbb{R}^{n \times n}$                              | - ensemble des matrices réelles carrées de dimension $n \times n$                        |
| $\mathbb{R}^n$   | - ensemble des vecteurs réels de dimension $n$   |
| $I_n$ ( $0_n$ resp.)                                   | - matrice identité (nulle resp.) de dimension $n \times n$                               |
| $x_{(\ell)}$   | - $\ell$ -ème composante d'un vecteur $x$  |
| $A_{(\ell)}$ ( $A_{i,(\ell)}$ )                        | - $\ell$ -ème ligne d'une matrice $A$ ( $A_i$ resp.).                                    |
| $x - y > 0$  | - inégalité par composante : $x_{(\ell)} - y_{(\ell)} > 0, \forall \ell = 1, \dots, n$ . |
| $P'$   | - la matrice transposée de $P$   |
| $P^\perp$  | - base du noyau associé à la matrice $P$   |
| $x'$   | - le vecteur transposé de $x$  |
| $\ x\ $  | - la norme euclidienne du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$                                   |
| $\mathbf{1}_n$   | - le vecteur unitaire : $(1; \dots; 1)' \in \mathbb{R}^n$                                |
| $M > 0_n$ ( $M < 0_n$ resp.)                           | - matrice définie positive (négative resp.) de dimension $n \times n$                    |
| $\mathbf{He}(M)$                                       | - matrice $M + M'$   |
| $\text{diag}(x)$                                       | - matrice diagonal avec le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ sur la diagonal principale       |
| $\text{diag}(A; B)$                                    | - matrice diagonal avec $A$ et $B$ sur la diagonale principale                           |
| $M = \begin{bmatrix} A & B \\ \star & C \end{bmatrix}$ | - matrice symétrique avec $\star$ désignant $B'$   |
| $\lambda(M)$   | - valeurs propres d'une matrice carrée $M$   |
| $\mathcal{E}(P, \gamma)$                               | - Ellipsoïde $\{x \in \mathbb{R}^n, x'Px \leq \gamma\}$ avec $P > 0_n$                   |
| $\mathcal{E}(P)$                                       | - Ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1)$   |



# Introduction Générale

Actuellement, les systèmes deviennent, de plus en plus, complexes en présentant l'interaction de variables de caractéristique continue et des variables événementielles discrètes. Dans ce contexte, les systèmes dynamiques hybrides s'appliquent, [DBPL00]. La littérature comporte plusieurs études de ces systèmes, qui sont motivés par leur richesse et leur complexité, [Bra98, LLL09]. Une classe importante des systèmes dynamiques hybrides sont les systèmes dynamiques linéaires à commutations [LM99], qui sont composés d'un nombre fini de dynamiques linéaires associées à une loi de commutation qui définit le mode actif à chaque instant. Plusieurs applications se trouvent dans les champs de l'aéronautique, l'industrie automobile, la gestion d'énergie, [PRI08] et la métallurgie, [Mal09, MDI<sup>+</sup>09]. De nombreux outils d'analyse et de commande sont déjà bien établis dans la littérature, [SWM<sup>+</sup>07, BSA04, LL08]. Néanmoins, la plupart des systèmes dynamiques rencontrés en pratique sont non-linéaires. De plus, les entrées de commande sont normalement contraintes par des saturations d'actionneurs. Prendre en compte les phénomènes non-linéaires et la saturation de commande est nécessaire. Il existe peu de résultats traitant les systèmes à commutations plus généraux avec des conditions faciles à tester d'un point de vue numérique.

## Objectifs

L'objectif principal de cette thèse est de traiter plusieurs problèmes d'analyse de stabilité et de synthèse de commande d'une classe de systèmes non-linéaires à commutations en temps discret. Afin d'obtenir de meilleurs résultats par rapport à la littérature, nous proposerons un outil adapté à ces systèmes : une nouvelle fonction de Lyapunov qui dépend de la non-linéarité. Une des caractéristiques remarquables de cette fonction est qu'elle fournit une ligne de niveau qui peut être non-connexe et non-convexe.

Le premier objectif sera alors de montrer que cette fonction est, en réalité, plus appropriée pour résoudre le problème classique de Lur'e en temps discret sur l'analyse de stabilité globale d'un système linéaire en boucle fermée avec une non-linéarité de type secteur. Nos conditions suffisantes sous forme LMI seront formulées en considérant des hypothèses moins restrictives que celles des méthodes de la littérature. Nous proposerons aussi des conditions suffisantes pour traiter l'analyse de stabilité locale d'un système Lur'e en temps discret avec une commande non-linéaire saturée. Ainsi, nous utiliserons la ligne niveau de notre fonction afin d'estimer le bassin d'attraction de ce système. Enfin, la synthèse de commande non-linéaire pour cette classe de systèmes sera résolue en considérant cette nouvelle fonction et sa ligne de niveau comme une estimation du bassin d'attraction.

Les méthodes fondées sur cette nouvelle fonction Lur'e nous serviront de base, ensuite, pour traiter le deuxième objectif de cette thèse : l'analyse et la commande non-linéaire des systèmes Lur'e à commutations et des systèmes Lur'e à commutations avec une commande saturée. Ainsi, cette thèse propose des contributions avec deux points de vue différents sur la loi de commutation. D'une part, elle sera considérée comme une perturbation et nous proposerons des conditions suffisantes pour l'analyse globale des systèmes Lur'e à commutations pour toute loi de commutation. Aussi, des conditions suffisantes seront établies pour résoudre les problèmes d'analyse de stabilité locale et de synthèse de commande. Afin d'assurer la stabilité locale pour toute séquence de commutation, notre estimation du bassin d'attraction sera donnée par l'intersection des lignes de niveau des fonctions de Lur'e dépendantes des modes. Ces ensembles non-connexes et non-convexes seront adaptés à la forme du bassin d'attraction de ce système sous commutations arbitraires. D'autre part, le deuxième point de vue consiste à considérer la loi de commutation comme une commande. Nous proposerons des conditions suffisantes pour la synthèse de lois de commutation globalement stabilisantes pour les systèmes Lur'e et localement stabilisantes pour les systèmes Lur'e avec une commande saturée. Nos conditions seront formulées en se fondant sur deux outils : notre fonction de Lypaunov Lur'e et les inégalités de Lyapunov-Metzler. Nous montrerons qu'un des aspects les plus intéressants de nos méthodes concerne la partition de l'espace d'état qui définit la stratégie d'activation des modes. Cette partition dépend des non-linéarités du système et elle est plus appropriée que les régions coniques données par les méthodes fondées sur les fonctions quadratiques. Aussi, afin d'estimer le bassin d'attraction dans ce cadre, notre ligne de niveau non-connexe et non-convexe sera donnée par l'union des lignes de niveau des fonctions Lur'e dépendantes des modes. Nous montrerons que cette estimation approche bien le bassin d'attraction de ce système.

## **Organisation du mémoire**

Ce manuscrit est organisé en quatre chapitres principaux et une conclusion générale.

### **Chapitre 1**

Le premier chapitre contient les définitions des systèmes linéaires à commutations en temps discret et les rappels sur les problèmes classiques de stabilité qui leur sont associés. Citons notamment les méthodes d'analyse de stabilité et stabilisation de systèmes à commutations. Aussi, nous définirons le problème de Lur'e en rappelant les principales méthodes pour le résoudre. Nous discuterons des méthodes traitant la synthèse de commande non-linéaire pour ce type de systèmes.

### **Chapitre 2**

Dans le deuxième chapitre, nous étudierons les systèmes Lur'e en temps discret. La motivation pour la recherche d'une nouvelle fonction de Lyapunov du type Lur'e

---

adaptée au temps discret sera présentée. Les propriétés de cette fonction seront établies. Ces propriétés nous permettront d'étudier la stabilité globale d'un système Lur'e. Ensuite, l'analyse de stabilité locale et la stabilisation de ces systèmes avec une commande saturée seront traitées à l'aide des conditions suffisantes fondées sur cette fonction. Des exemples numériques indiqueront que la ligne de niveau non-connexe et non-convexe de cette nouvelle fonction est adaptée au bassin d'attraction de ces systèmes.

### **Chapitre 3**

Le troisième chapitre est consacré aux systèmes Lur'e à commutations arbitraires. Une discussion sur la difficulté de traiter les non-linéarités qui commutent permettra de justifier l'extension de la nouvelle fonction au cadre des fonctions de Lyapunov commutées. Une méthode d'analyse de stabilité globale des systèmes Lur'e à commutations arbitraires sera proposée. L'analyse locale et la synthèse de commande non-linéaire commutée pour les systèmes Lur'e à commutations seront traitées dans le cas d'une commande saturée. L'estimation du bassin d'attraction sera donnée par l'intersection des lignes de niveau. Des exemples numériques seront présentés pour illustrer les spécificités de nos méthodes.

### **Chapitre 4**

Le but du quatrième chapitre est d'étudier les systèmes Lur'e à commutations en considérant la loi de commutation comme une variable de commande. Des conditions suffisantes seront proposées afin de synthétiser une loi de commutation stabilisante. En explorant la nouvelle fonction de Lyapunov, les partitions de l'espace d'état ne seront pas restreintes à des régions coniques. L'estimation du bassin d'attraction sera donnée par l'union des lignes de niveau des fonctions Lur'e dépendantes des modes. Des exemples numériques sont proposés pour illustrer nos résultats.

## Références associées à cette thèse

### Revue internationale avec comité de lecture

- C. A. C. Gonzaga, M. Jungers and J. Daafouz. Stability analysis and stabilization of switched non-linear systems. *International Journal of Control*, 85 : 7, pages 822-829, 2012.
- C. A. C. Gonzaga, M. Jungers and J. Daafouz. Stability analysis of discrete-time Lur'e systems. *Automatica*, Vol. 48, Issue 9, pages 2277–2283, 2012.
- M. Jungers, C. A. C. Gonzaga, and J. Daafouz. Min-switching local stabilization for discrete-time switching systems with non-linear modes. 2012, submitted.

### Conférences internationales avec comité de lecture

- C. A. C. Gonzaga, M. Jungers, J. Daafouz and E. B. Castelan. Stabilization of discrete-time non-linear systems subject to input saturation : a new Lyapunov function class. In *18th IFAC World Congress*, pages 3403-3408. Milan, Italy, August 2011.
- C. A. C. Gonzaga, M. Jungers, J. Daafouz and E. B. Castelan. A new class of Lyapunov functions for nonstandard switching systems : the stability analysis problem. In *50th Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC'11)*, pages 411-416. Orlando, Florida, USA, December 2011.
- M. Jungers, C. A. C. Gonzaga, and J. Daafouz. Min-switching stabilization for discrete-time switching systems with non-linear modes. In *4th IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS 2012)*. Eindhoven, the Netherlands, pages 234–239, June 2012.

# Chapitre 1

## Notions introductives

Ce chapitre rappelle des concepts classiques qui permettent la description des problèmes et résultats proposés dans cette thèse. Nous nous concentrerons principalement sur deux classes de systèmes traités dans la littérature qui sont : les systèmes à commutations et les systèmes non-linéaires du type Lur'e.

Pour la première classe de systèmes, nous présenterons sa définition formelle et nous indiquerons les problèmes qui lui sont associés. Cette thèse étant dédiée aux systèmes en temps discret, nous avons fait le choix de ne traiter dans ce chapitre que les systèmes à commutations en temps discret, et nous ferons une synthèse des principaux résultats existants en traitant l'aspect stabilité : analyse de stabilité, stabilisation par retour linéaire d'état et stabilisation par loi de commutation.

L'autre classe d'intérêt sera celle concernant un système linéaire invariant dans le temps en boucle fermée avec une non-linéarité du type secteur borné dans la chaîne de retour. Notre étude portant sur les systèmes en temps discret, nous présenterons les définitions dans ce cadre. Néanmoins, la plupart des résultats de la littérature utilisent des approximations et des outils directement issus du cadre temps continu. Nous présenterons le cadre continu du problème de Lur'e à des fins d'explication et de comparaison.

### 1.1 Définition d'un système à commutations en temps discret

En général, un système à commutations en temps discret est donné par :

$$x_{k+1} = g_{\sigma(k)}(k; x_k; u_k), \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

$$y_k = h_{\sigma(k)}(k; x_k; u_k), \quad (1.2)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ;  $u_k \in \mathbb{R}^m$  et  $y_k \in \mathbb{R}^p$  sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie de ce système. Les fonctions  $g_i(\cdot; \cdot; \cdot)$  et  $h_i(\cdot; \cdot; \cdot)$ ,  $i \in \{1; \dots; N\}$ , correspondent aux dynamiques des sous-systèmes ou modes. La fonction  $\sigma(\cdot)$  est appelée loi de commutation :

$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathcal{I}_N = \{1, \dots, N\}, \\ k & \longmapsto \sigma(k), \end{cases} \quad (1.3)$$

et  $\sigma(k)$  désigne le mode actif du système (1.1)-(1.2) à chaque instant  $k$ .

Un cas particulier, qui présente déjà une complexité intéressante, est celui où les modes sont linéaires :

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + B_{\sigma(k)}u_k, \quad (1.4)$$

$$y_k = C_{\sigma(k)}x_k. \quad (1.5)$$

Les matrices  $(A_i, B_i, C_i)$  ont des dimensions appropriées,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ . Nous pouvons aussi définir la classe des systèmes linéaires à commutations autonomes :

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k, \quad (1.6)$$

$$y_k = C_{\sigma(k)}x_k. \quad (1.7)$$

Le concept de stabilité adopté dans ce mémoire est classique, [Hah67]. Nous allons rappeler les problèmes de stabilité relatifs aux systèmes à commutations. On trouve dans [LM99] trois problèmes de base. Le premier est formulé comme suit :

**Problème 1** *Établir des conditions qui permettent de conclure sur la stabilité asymptotique d'un système à commutations pour toute loi de commutation.*

Dans ce cadre, la loi de commutation est considérée comme une perturbation du système à commutations (loi déterminée par une composante exogène). La stabilité asymptotique dans l'ensemble de cette problématique est directement liée à la notion de stabilité robuste. Une condition nécessaire à la faisabilité du problème 1 est que tout les modes soient stables. Le deuxième problème est défini de la manière suivante :

**Problème 2** *Déterminer le sous-ensemble des lois de commutations tel que la stabilité asymptotique d'un système à commutations soit assurée.*

Après la définition de ce problème, Liberzon ajoute le commentaire qu'il est souvent irraisonnable d'exclure les lois de commutations constantes. Il ajoute de ce fait l'hypothèse que chaque mode est stable. Dans son cadre général, sans aucune hypothèse sur la stabilité des modes, ce problème est très difficile et largement ouvert dans la littérature. Il ne sera pas abordé dans le reste de ce manuscrit. Enfin le dernier problème est le suivant :

**Problème 3** *Construire une séquence de commutations afin de rendre l'origine du système à commutations asymptotiquement stable.*

Cette problématique est plutôt vue comme un aspect de synthèse de lois de commutations. Il faut remarquer que la solution du problème 3 est évidente dans le cas où un mode au moins est stable : il suffit de sélectionner l'un de ces modes et de le conserver actif. De ce fait, la littérature associe souvent à ce problème, l'hypothèse que tous les modes sont instables.

Parmi les résultats existants dans la littérature, qui traitent ces trois problématiques pour la classe des systèmes à commutations linéaires en temps discret, nous nous restreindrons aux problèmes 1 et 3 abordés dans cette thèse. Aussi, nous détaillerons plutôt les méthodes qui sont fondées sur des conditions suffisantes écrites sous forme d'inégalités linéaires en les variables matricielles (LMI en l'anglais), un outil que nous exploiterons dans l'ensemble de ce mémoire.

### 1.1.1 Stabilité des systèmes linéaires à commutations arbitraires

Dans cette section, nous traitons le premier problème de base (problème 1) concernant les systèmes linéaires à commutations. Sous l'hypothèse d'une loi de commutation arbitraire, le système à commutations peut être vu comme un système variant dans le temps, [HI94, LA09]. Plusieurs outils du cadre de la commande robuste s'appliquent. Une des méthodes les plus riches pour traiter la stabilité des systèmes linéaires à commutations autonomes, fait appel au concept de rayon spectral joint appliqué sur un ensemble des matrices, [LLL09]. Les résultats liés à cet outil établissent des conditions nécessaires et suffisantes, [Jun08, LA04, LA05]. En revanche, un défaut est que ces conditions sont extrêmement difficiles à tester numériquement, [TB97]. Dans certains cas, il est possible d'obtenir des approximations du rayon spectral joint, [BN05, BNT04]. L'extension de ces approches pour la stabilisation par retour d'état n'est pas évidente. De plus, nous ne pourrions pas adapter cette approche au cas des systèmes non-linéaires à commutations.

Il est, également, possible d'analyser la stabilité d'un système à commutations arbitraires à l'aide d'une fonction de Lyapunov quadratique :  $x \rightarrow V(x) = x'Px$ . Cette fonction est indépendante du temps, et donc, du mode actif  $\sigma(k)$  et elle conduit au résultat suivant :

**Théorème 4 ([BEFB94])** *Soit le système linéaire à commutations (1.6)-(1.7). S'il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$A_i'PA_i - P < 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N, \quad (1.8)$$

*alors la fonction  $V(x) = x'Px$  est une fonction de Lyapunov pour ce système et son origine est globalement exponentiellement uniformément stable pour toutes les lois de commutations.*

Ce théorème est fondé sur des conditions suffisantes, mais elles offrent l'avantage de s'écrire sous une forme LMI. Pour diminuer le conservatisme des conditions précédentes, on peut aussi utiliser une fonction de Lyapunov qui dépend de la loi de commutation. Le théorème suivant établit des conditions nécessaires et suffisantes sous forme LMI pour l'existence d'une telle fonction de Lyapunov.

**Théorème 5 [DRI02]** *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) *Il existe une fonction de Lyapunov commutée*

$$V(\sigma(k); x_k) = x_k' P_{\sigma(k)} x_k; \quad (1.9)$$

*strictement décroissante le long des trajectoires du système linéaire à commutations (1.6)-(1.7), pour toute loi de commutation  $\sigma$ .*

ii) *Il existe des matrices  $0_n < P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$  telles que les LMIs suivantes soient vérifiées :*

$$\begin{bmatrix} -P_j & P_j A_i \\ \star & -P_i \end{bmatrix} < 0_{2n}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2. \quad (1.10)$$

iii) *Il existe des matrices  $0_n < S_i = S_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , et des matrices  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$  telles que les LMIs suivantes soient vérifiées :*

$$\begin{bmatrix} -S_j & A_i G_j \\ \star & S_i - G_i - G_i' \end{bmatrix} < 0_{2n}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2. \quad (1.11)$$

**Remarque 6** Les conditions de stabilité établies dans le théorème 5 permettent de traiter directement le cas d'analyse de stabilité quadratique, en imposant  $P_i = P, \forall i \in \mathcal{I}_N$ .

Le résultat énoncé est applicable autant dans le cadre de l'analyse de stabilité des systèmes à commutations arbitraires, [DRI02], que de l'analyse de stabilité robuste pour des systèmes linéaires variants de le temps, [DB01]. Ce résultat correspond à une extension de la méthode d'analyse de stabilité robuste établie dans les travaux de [dOBG99].

Notons que les conditions de stabilité du théorème 5 sont moins restrictives que celles du théorème 4 mais restent encore des conditions suffisantes pour la stabilité. Ainsi, afin de déterminer des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité, nous pourrions considérer les fonctions de Lyapunov dépendantes du chemin. Cette approche s'applique autant pour les systèmes à paramètres variants dans le temps, [Lee06], que pour les systèmes linéaires à commutations, [LD06, LD07].

Les résultats sont fondés sur la définition d'une fonction quadratique où la matrice de Lyapunov dépend de la longueur du chemin de commutation. Les conditions de stabilité s'écrivent sous forme LMI. Le nombre d'inégalités est directement défini par la longueur du chemin de commutations. Ainsi, pour des longueurs grandes, la difficulté numérique augmente. De plus, il n'existe pas de méthode systématique pour déterminer cette longueur. Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur la fonction de Lyapunov de chemin de longueur 1, qui correspond à la fonction de Lyapunov commutée (1.9).

### 1.1.2 Stabilisation des systèmes linéaires à commutations arbitraires par retour d'état linéaire

Dans la section précédente, nous avons regardé les principaux résultats sur l'analyse de stabilité d'un système linéaire à commutations arbitraires. En considérant ce même cadre, nous allons discuter le problème de synthèse de commande. De manière générale, ce problème est défini de la manière suivante :

**Problème 7** *Considérons le système linéaire à commutations (1.4)-(1.5). Déterminer une loi de commande  $u_k$  qui rend l'origine de ce système stable, pour toutes les lois de commutations.*

Parmi les différentes classes de lois de commande utilisées dans la littérature, nous considérerons la stabilisation par commande par retour d'état linéaire. Cette loi de commande nous intéressera dans l'ensemble de ce manuscrit. La synthèse de commande est directement donnée dans le théorème suivant :

**Théorème 8** [DRI02] *Considérons le système linéaire à commutations (1.4)-(1.5). S'il existe des matrices symétriques définies positives  $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ; des matrices  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Y_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$  satisfaisant les LMIs suivantes :*

$$\begin{bmatrix} -S_j & A_i G_i + B_i Y_i \\ \star & S_i - G_i - G_i' \end{bmatrix} < 0_{2n}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2, \quad (1.12)$$

alors la loi de commande donnée par le retour d'état linéaire commuté :

$$u_k = K_{\sigma(k)} x_k; \quad (1.13)$$

stabilise le système (1.4)-(1.5) avec les gains de la commande définis par  $K_i = Y_i G_i^{-1}$  et les matrices de Lyapunov associées  $P_i = S_i^{-1}$ ;  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ .

Le théorème 8 suppose que la loi de commutation est inconnue, *a priori*, mais le mode actif  $\sigma(k)$  est disponible en temps réel. En revanche, si la valeur courante de la loi de commutation n'est pas disponible, le même théorème s'applique en imposant  $Y_i = Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $G_i = G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ , dans les inégalités (1.12). Si les LMIs sont faisables, cela implique une stabilisation du système à commutations (1.6)-(1.7) par une loi de commande du type retour d'état linéaire classique, et qui sont plus restrictives. Lorsque la loi de commutation est partiellement connue, la stabilisation par retour linéaire commuté a été traitée dans les travaux de [Het07]. Dans ce cas, le gain commuté est représenté par l'index  $K_{\tilde{i}} = Y_{\tilde{i}} G_{\tilde{i}}^{-1}$ , qui prennent des valeurs dans un sous-ensemble de  $\tilde{i} \in \tilde{\mathcal{I}}_N \subset \mathcal{I}_N$ . Les conditions de stabilisation sont formulées de telle manière que les matrices de Lyapunov s'écrivent sous la forme  $P_{i,\tilde{i}} = S_{i,\tilde{i}}^{-1}$ ,  $\forall (i, \tilde{i}) \in \mathcal{I}_N \times \tilde{\mathcal{I}}_N$ .

### 1.1.3 Stabilisation des systèmes linéaires à commutations par loi de commutation

Dans cette section, nous discuterons le cadre du problème 3 qui traite de l'aspect de synthèse de lois de commutation stabilisantes. Afin d'éliminer les solutions triviales, nous supposerons ici que tous les modes sont instables.

Ainsi, nous rappellerons les résultats principaux proposés dans [Zha01] et [GC06b]. Le problème consiste à chercher une loi de commutation dépendante de l'état du type :

$$\sigma(k) = g(x_k), \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{I}_N, \quad (1.14)$$

qui stabilise asymptotiquement le système (1.6)-(1.7).

Considérons la fonction candidate, associée à un ensemble de matrices symétriques définies positives  $\{P_i\}_{i \in \mathcal{I}_N}$  :

$$v_{\min} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto \min_{i \in \mathcal{I}_N} x' P_i x, \end{cases} \quad (1.15)$$

Cette fonction a été appelée *fonction quadratique composée* par T. Hu, [Hu07]. Sans utiliser directement le terme, J. C. Geromel établit dans [GC06b] des conditions suffisantes sur les matrices  $P_i$ , en utilisant une classe particulière des matrices de Metzler, pour imposer que la fonction (1.15) soit une fonction de Lyapunov pour le système linéaire à commutations (1.6)-(1.7). Rappelons ainsi la définition d'une matrice de Metzler et, ensuite, la sous-classe qui nous intéresse :

**Définition 9** Une matrice  $\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$  est une matrice de Metzler si ses éléments  $\pi_{ij}$  vérifient les propriétés suivantes :

$$\pi_{ij} \geq 0, \quad \forall i \neq j, \forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2. \quad (1.16)$$

Maintenant, définissons la sous-classe des matrices de Metzler en temps discret.

**Définition 10** La classe des matrices de Metzler en temps discret, notée  $\mathcal{M}_d$ , est définie par :

$$\mathcal{M}_d = \left\{ \Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}, \pi_{ii} \geq 0, \sum_{\ell \in \mathcal{I}_N} \pi_{\ell i} = 1, \forall i \in \mathcal{I}_N \right\}. \quad (1.17)$$

Par exemple, les matrices  $0_N$ ;  $I_N$  et  $-I_N$  sont des matrices de Metzler mais seule la matrice  $I_N$  est une matrice de Metzler en temps discret. Par définition, une matrice de Metzler en temps discret admet toujours le vecteur  $\mathbf{1}_N = (1 \dots 1)' \in \mathbb{R}^N$  comme vecteur propre associé à la valeur propre 1, parce que

$$\Pi \mathbf{1}_N = \Pi \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \Pi \in \mathcal{M}_d. \quad (1.18)$$

Une autre propriété intéressante et aussi importante des matrices de Metzler en temps discret provient du théorème de Perron-Fröbenius, [HJ85] : tout vecteur propre associé à la valeur propre maximale 1 d'une matrice de Metzler a des composantes qui sont positives ou nulles. C'est-à-dire, à une normalisation prêt, il existe toujours un vecteur  $\lambda \in \mathbb{R}^N$  appartenant au simplexe qui vérifie :

$$\Pi \lambda = \lambda; \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \sum_{\ell=1}^N \lambda_\ell = 1, \lambda_\ell \geq 0, \forall \ell = 1, \dots, N, \forall \Pi \in \mathcal{M}_d. \quad (1.19)$$

La relation (1.17), en effet, est une conséquence directe de cette dernière propriété en identifiant que chaque colonne de la matrice de Metzler en temps discret appartient au simplexe. Le lemme suivant sera utilisé dans la preuve de la méthode de synthèse de loi de commutation du Chapitre 4.

**Lemme 11** Soit  $N$  scalaires  $\alpha_i, i = 1, \dots, N$ . Alors, la propriété suivante est vérifiée :

$$\min_{i \in \mathcal{I}_N} \alpha_i = \min_{\substack{\lambda \in \mathbb{R}^N; \lambda_i \geq 0; \\ \lambda' \mathbf{1}_N = 1}} \sum_{i \in \mathcal{I}_N} \lambda_i \alpha_i. \quad (1.20)$$

**Preuve 12** La relation (1.20) indique que le minimum sur un polytope de scalaires est atteint sur ses sommets. Les sommets appartenant au polytope, nous avons :

$$\alpha_j \geq \min_{i \in \mathcal{I}_N} \alpha_i \geq \min_{\substack{\lambda \in \mathbb{R}^N; \lambda_i \geq 0; \\ \lambda' \mathbf{1}_N = 1}} \sum_{i \in \mathcal{I}_N} \lambda_i \alpha_i, \quad \forall j \in \mathcal{I}_N. \quad (1.21)$$

Montrons maintenant la réciproque. Soit  $i_0 \in \arg \min_{i \in \mathcal{I}_N} \alpha_i$ , c'est-à-dire que  $\alpha_{i_0} \leq \alpha_i, \forall i \in \mathcal{I}_N$ . Alors, les scalaires  $\lambda_i$  étant positifs ou nuls, nous avons que :

$$\lambda_i (\alpha_i - \alpha_{i_0}) \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N, \lambda_i \geq 0. \quad (1.22)$$

Sommons, maintenant, cette dernière inégalité sur l'ensemble  $\mathcal{I}_N$  :

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_N} \lambda_i (\alpha_i - \alpha_{i_0}) = \sum_{i \in \mathcal{I}_N} \lambda_i \alpha_i - \alpha_{i_0} \sum_{i \in \mathcal{I}_N} \lambda_i = \sum_{i \in \mathcal{I}_N} \lambda_i \alpha_i - \alpha_{i_0} \geq 0, \quad (1.23)$$

car nous savons que  $\lambda' \mathbf{1}_N = 1$  sur le simplexe. Alors, en prenant le minimum de cette dernière relation nous avons que :

$$\min_{i \in \mathcal{I}_N} \alpha_i = \alpha_{i_0} \leq \min_{\substack{\lambda \in \mathbb{R}^N; \lambda_i \geq 0; \\ \lambda' \mathbf{1}_N = 1}} \sum_{i \in \mathcal{I}_N} \lambda_i \alpha_i. \quad (1.24)$$

Le théorème suivant est fondé sur le théorème de Perron-Fröbenius.

**Théorème 13** [GC06b] *Considérons le système (1.6)-(1.7) et supposons qu'il existe une matrice de Metzler  $\Pi \in \mathcal{M}_d$ ; des matrices symétriques définies positives  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  qui vérifient les inégalités de Lyapunov-Metzler suivantes :*

$$A'_i \left( \sum_{j \in \mathcal{I}_N} \pi_{ji} P_j \right) A_i - P_i < 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N, \quad (1.25)$$

alors la loi de commutation

$$\sigma(k) \in \arg \min_{i \in \mathcal{I}_N} x'_k P_i x_k = \arg v_{\min}(x_k), \quad (1.26)$$

où  $v_{\min}$  est définie dans la relation (1.15), rend l'origine du système linéaire à commutations (1.6)-(1.7) globalement exponentiellement stable.

La faisabilité des inégalités (1.25) implique que les matrices  $\pi_{ii}^{\frac{1}{2}} A_i$ , ( $i \in \mathcal{I}_N$ ) sont stables, notant que  $\pi_{ii} \geq 0$  ( $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ) est l'élément de la diagonale principale de  $\Pi$ . Notons que les inégalités de Lyapunov-Metzler (1.25) admettent toujours une solution, avec  $\Pi = I_N$ , lorsque tous les modes du système (1.6)-(1.7) sont stables.

Dans les travaux de [GC06b], un résultat intéressant est établi sur l'existence d'une solution pour les inégalités de Lyapunov-Metzler :

**Lemme 14** [GC06b, Lemme 1] *Supposons qu'il existe un vecteur  $\lambda \in \mathbb{R}^N$  avec  $\lambda' \mathbf{1}_N = 1$  et une matrice  $0_n < P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisfaisant la relation suivante :*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_N} \lambda_i (A'_i P A_i - P) < 0_n, \quad (1.27)$$

alors les inégalités de Lyapunov-Metzler (1.25) admettent une solution.

En se fondant sur ce lemme, nous pouvons formuler le lemme suivant :

**Lemme 15** *Supposons que le système linéaire à commutations (1.6)-(1.7) admette au moins un mode stable, alors les inégalités de Metzler-Lyapunov (1.25) admettent une solution.*

**Preuve 16** *Supposons qu'il existe au moins un mode stable pour le système (1.6)-(1.7). L'ensemble des indices des modes stables n'est pas vide et nous avons l'existence de  $i_0 \in \mathcal{I}_N$  tel que la matrice  $A_{i_0}$  soit du type Schur. Il existe donc une matrice symétrique définie positive  $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  solution de l'inégalité*

$$A'_{i_0} \tilde{P} A_{i_0} - \tilde{P} < 0_n. \quad (1.28)$$

En choisissant le vecteur  $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^N$  tel que  $\tilde{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i_0$ , appartenant au simplexe unité,

nous avons

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_N} \tilde{\lambda}_i (A'_i \tilde{P} A_i - \tilde{P}) = \tilde{\lambda}_{i_0} (A'_{i_0} \tilde{P} A_{i_0} - \tilde{P}) = A'_{i_0} \tilde{P} A_{i_0} - \tilde{P} < 0_n. \quad (1.29)$$

La condition du lemme 14 étant vérifiée avec cette matrice symétrique définie positive  $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , les inégalités de Lyapunov-Metzler (1.25) admettent une solution.

**Remarque 17** La solution donnée par la stratégie de commutation (1.26) n'est pas nécessairement la solution "mode figé".

Les inégalités du théorème 13 s'écrivent sous la forme BMI due à la présence des produits des matrices  $P_i$  et les éléments de la matrice de Metzler. Deux approches sont communément utilisées afin d'éviter ces bilinéarités. En premier, il est supposé que la matrice  $\Pi \in \mathcal{M}_d$  est donnée (comme dans le cas de systèmes à saut markoviens). Sous cette hypothèse, les inégalités de Lyapunov-Metzler deviennent des LMIs. L'autre approche possible consiste à définir une matrice  $\Pi$  avec une structure particulière de manière à réduire le nombre de paramètres autant que possible. Par exemple, en imposant une dépendance en un unique paramètre, il est possible d'appliquer une technique de recherche en ligne sur ce paramètre, [GBC08].

**Remarque 18** Les travaux proposés dans [GBC08, GD09] traitent un problème délicat de stabilisation de systèmes linéaires à commutations en utilisant une approche de commande conjointe. En d'autres termes, la stratégie de commutation (1.14) est combinée avec un contrôleur du type retour linéaire dans l'état et du type retour dynamique de sortie.

Les résultats discutés dans la présente section sont fondés sur des inégalités matricielles, plutôt sous forme LMI. Ils s'appliquent aux systèmes à commutations avec des modes linéaires et, de plus, les fonctions de Lyapunov commutées sont quadratiques en l'état. Nous allons exploiter cet outil afin d'étudier une classe de systèmes non-linéaires à commutations en temps discret. Plus précisément, chacun des modes de notre système sera lié à un problème classique de l'automatique sur l'étude d'un système linéaire invariant dans le temps en boucle fermée avec une non-linéarité du type secteur. Ainsi dans la section suivante, nous définirons formellement cette classe en posant les principaux problèmes de stabilité et rappellerons les principales méthodes d'analyse et synthèse de commande non-linéaire existantes dans la littérature.

## 1.2 Définition des systèmes du type Lur'e

Cette section expose les principaux résultats qui concernent l'étude de la classe des systèmes décrits par un bloc linéaire en boucle fermée avec une non-linéarité dépen-

dante de la sortie. Ce problème fut traité dans les deux domaines du temps. Il est vrai qu'il a été initialement étudié dans le temps continu, [LP44]. Nous nous concentrerons sur les deux fonctions de Lyapunov les plus utilisées dans la littérature pour développer une telle étude : la fonction quadratique en l'état et la fonction de Lyapunov-Lur'e.

### 1.2.1 Le problème de stabilité absolue en temps continu

Considérons la classe des systèmes décrits sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + F\varphi(y(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (1.30)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (1.31)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  sont l'état et la sortie du système (1.30)-(1.31). La fonction  $\varphi(\cdot) \in \mathbb{R}^p$  est une non-linéarité dépendante de la sortie sans mémoire et décentralisée, c'est-à-dire,  $\varphi_{(\ell)}(y(t)) = \tilde{\varphi}(y_{(\ell)}(t))$ ,  $\forall \ell = 1, \dots, p$ , avec  $\tilde{\varphi}(\cdot)$  une non-linéarité scalaire.

**Définition 19** [Kha02] *La non-linéarité vérifie la condition de secteur globale si la relation suivante est satisfaite :*

$$\varphi'(y)\Lambda[\varphi(y) - \Omega y] \leq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^p, \quad (1.32)$$

où  $\Omega \in \mathbb{R}^{p \times p}$  est une matrice diagonale définie positive et la matrice  $\Lambda \in \mathbb{R}^{p \times p}$  est un multiplicateur positif défini diagonal. Dorénavant, cette propriété sera abusivement notée par,  $\varphi(\cdot) \in [0_p; \Omega]$ . Si la relation (1.32) est satisfaite dans un domaine fini  $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ ,  $\varphi(y)$  vérifie uniquement la condition de secteur locale.

Afin de simplifier les notations qui suivent dans le reste de ce chapitre, nous supposons que le système (1.30)-(1.31) est mono-entrée mono-sortie (SISO de l'anglais),  $p = 1$  et la matrice de multiplicateur  $\Lambda = I_1$ , comme communément traité dans la littérature. Ainsi, le problème de Lur'e s'écrit sous la forme suivante :

**Problème 20** (Stabilité absolue en temps continu) *Soit le système (1.30)-(1.31) et le secteur donné  $[0_p; \Omega]$ , déterminer les conditions pour lesquelles ce système a son origine globalement asymptotiquement stable pour toute non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  qui vérifie la condition de secteur (1.32),  $\varphi(\cdot) \in [0_p; \Omega]$ .*

En se fondant sur la condition fréquentielle proposée par Popov [Pop61], Yakubovich [Yak62], Kalman [Kal63], ont résolu le problème, en utilisant une formulation LMI, en conduisant au lemme de Kalman-Yakubovich-Popov. Ce lemme est directement lié à la propriété de positivité réelle stricte d'une fonction de transfert. Considérons ainsi la définition de cette propriété (pour  $p = 1$ ) :

**Définition 21** [Kha02] *Soit la fonction de transfert  $\mathcal{Z}(s)$ . La fonction  $\mathcal{Z}(s)$  est dite positive réelle si et seulement si :*

1.  $\mathcal{Z}(s)$  a ses pôles placés dans le demi-plan gauche fermé ;
2. Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $j\theta$  ne soit pas un pôle de  $\mathcal{Z}(s)$ , la partie réelle de  $\mathcal{Z}(j\theta)$  est semi-définie positive.

3. Tout pôle purement imaginaire  $j\theta$  de  $Z(s)$  est un pôle simple et la matrice de résidu  $\lim_{s \rightarrow j\theta} (s - j\theta)Z(s)$  est semi-définie positive Hermitienne.

et une fonction de transfert  $Z(s)$  est appelée strictement positive réelle s'il existe un scalaire  $\epsilon > 0$  tel que  $Z(s - \epsilon)$  est positive réelle.

Alors, une solution pour le problème de Lur'e (problème 20) est établie dans le théorème suivant en considérant la fonction quadratique en l'état. Ce résultat est connu comme le *critère du Cercle*. Il permet aussi de traiter le cas de la non-linéarité variante dans le temps ( $\varphi(y; t)$ ) :

**Théorème 22 ([Kha02])** Soit le système (1.30)-(1.31) et une réalisation minimale  $(A, F, C)$  pour la fonction de transfert  $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}F$ , avec  $A$  du type Hurwitz. Alors, l'origine de ce système est globalement asymptotiquement stable pour toute non-linéarité  $\varphi(\cdot) \in [0_1; \Omega]$  (ou bien  $\varphi(\cdot; t) \in [0_1; \Omega]$ ) si et seulement s'il existe une matrice  $0_n < P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  solution de la LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & C'\Omega + PF \\ \star & -2 \end{bmatrix} < 0_{n+1}. \quad (1.33)$$

De plus, la fonction  $x \rightarrow V(x) = x'Px$  est une fonction de Lyapunov et la fonction de transfert  $1 + \Omega G(s)$  est strictement positive réelle.

Le résultat du théorème 22 s'applique dans le cas de nombreux types de secteurs traitables en adaptant la fonction de transfert par des transformations de boucle, [Kha02], sur laquelle la propriété de positivité réelle stricte doit être assurée. La condition de réalisation minimale est considérée afin d'assurer l'existence d'une solution pour l'inégalité (1.33), [ZDG96]. Le lemme de Kalman-Yakubovich-Popov s'applique même dans le cas où les paires  $(A, F)$  et  $(A, C)$  de la réalisation  $(A, F, C)$  sont stabilisable et détectable respectivement, [Ran96, Kal63]. Le théorème indique que la matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vérifie l'inégalité de Lyapunov mais aussi la contrainte sur la relation entrée-sortie du système. Plus précisément, la contrainte s'applique sur le degré relatif de  $G(s)$ <sup>1</sup> :  $dg_r[1 + \Omega G(s)] \leq 2$ , et ses zéros de transmission sont stables, (phase minimale).

En effet, Lur'e et Positknov envisageaient de trouver une solution dans le cas des non-linéarités vérifiant la condition de secteur  $y\varphi(y) \geq 0$ , ( $\Omega \rightarrow +\infty$ , [LR60, Kal63]), et en utilisant la fonction de Lyapunov Lur'e suivante :

$$v(x) = x'Px + 2\eta \int_0^{Cx} \Omega \varphi(s) ds, \quad (1.34)$$

où  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice symétrique définie positive et  $\eta$  est un scalaire positif. Cette pondération du terme intégral est appelée dans la littérature multiplicateur de Popov, [HHHB94].

Une solution en considérant le secteur  $[0_p; \Omega]$  est établie en faisant appel aussi au lemme de Kalman-Yakubovich-Popov, [Yak65]. Dans ce cas, le lemme est appliqué sur

1. Rappelons que le degré relatif d'une fonction de transfert  $G(s) = \frac{num(s)}{den(s)}$  est donné par la différence  $dg_r[G(s)] = dg[den(s)] - dg[num(s)]$ , où  $dg[f(s)]$  est le degré du polynôme  $f(s)$  défini sur la variable complexe  $s$ .

un système auxiliaire défini à partir des paramètres du système, la borne supérieure pour le secteur  $\Omega$  et la pondération du terme intégral de la fonction Lur'e :

$$\mathcal{A} = A; \mathcal{B}' = F; \mathcal{C} = \Omega C + \eta \Omega C A; \mathcal{D} = 1 + \eta \Omega C F. \quad (1.35)$$

**Remarque 23** Notons que le critère du Cercle, fondé sur la fonction quadratique en l'état, traite de manière naturelle le problème de Lur'e lorsque la non-linéarité varie dans le temps  $\varphi(\cdot; t)$ . En revanche, ce n'est pas le cas de la fonction Lur'e pour laquelle la non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  est communément supposée indépendante du temps dans la littérature. Cette hypothèse est justifiée pour assurer que la fonction  $v(x)$  soit considérée comme une fonction candidate. En effet, elle permet d'éviter la difficulté d'évaluer la dérivée de la fonction (1.34) par rapport au temps lorsque la non-linéarité est variante dans le temps. Plus précisément, en se fondant sur la règle d'intégral de Leibnitz [HC08], la dérivée du terme intégral de la fonction Lur'e par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^{Cx(t)} \Omega \varphi(s; t) ds \right) = \Omega \varphi(Cx(t); t) C \dot{x}(t) + \int_0^{Cx(t)} \Omega \frac{\partial \varphi(s; t)}{\partial t} ds. \quad (1.36)$$

Si la non-linéarité est indépendante du temps, cette dérivée se simplifie car le terme intégral de droite sera nul.

Sous l'hypothèse d'une non-linéarité indépendante du temps, le théorème suivant détermine des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la fonction Lur'e, et s'appelle *critère de Popov* :

**Théorème 24 ([Kha02])** Soit une réalisation minimale  $(A, F, C)$  de la fonction de transfert  $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}F$ . L'origine d'un tel système est globalement asymptotiquement stable pour toute non-linéarité  $\varphi(\cdot) \in [0_1; \Omega]$  si et seulement s'il existe une matrice symétrique positive définie  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et un scalaire  $\eta \geq 0$ , tels que la LMI suivante est satisfaite

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'P + P\mathcal{A} & \mathcal{C}' + P\mathcal{B} \\ \star & -\mathcal{D} - \mathcal{D}' \end{bmatrix} < 0_{n+1}, \quad (1.37)$$

avec  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  définies dans (1.35). Alors, la fonction de Lyapunov Lur'e (1.34) existe et de plus la fonction de transfert  $1 + (1 + s\eta)\Omega G(s)$  est strictement positive réelle.

Dans la section suivante, nous considérons le problème de Lur'e en temps discret et nous rappellerons les principaux résultats concernant les deux fonctions de Lyapunov déjà considérées : la fonction quadratique en l'état et la fonction de Lur'e. Nous indiquerons que la preuve du théorème pour la stabilité absolue fondée sur la fonction de Lyapunov Lur'e requiert des hypothèses supplémentaires en plus de la condition de secteur.

## 1.2.2 Le problème de stabilité absolue en temps discret

Considérons le système en temps discret défini par les relations suivantes :

$$x_{k+1} = Ax_k + F\varphi(y_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.38)$$

$$y_k = Cx_k, \quad (1.39)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^p$  sont respectivement l'état et la sortie du système (1.38)-(1.39). Nous supposons aussi que  $p = 1$ . Sous l'hypothèse de la condition de secteur pour la non-linéarité, qui s'écrit de manière identique à (1.32), le problème de Lur'e en temps discret est défini formellement comme :

**Problème 25** (*Stabilité absolue en temps discret*) Soit le système (1.38)-(1.39) et un secteur borné  $[0_p; \Omega]$ , déterminer les conditions pour lesquelles ce système a son origine globalement asymptotiquement stable pour toute non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  qui vérifie la condition de secteur (1.32),  $\varphi(\cdot) \in [0_p; \Omega]$ .

Plusieurs travaux ont été proposés en essayant d'établir des contre-parties en temps discret pour le critère du Cercle et le critère de Popov. Ces résultats sont, ainsi, formulés en considérant la version en temps discret du lemme de Kalman-Yakubovich. Ce lemme est lié à la propriété de positivité réelle stricte des fonctions de transfert à temps discret. Rappelons la définition de cette propriété, [HC08, Définition 13.16] :

**Définition 26** Une matrice de transfert  $\mathcal{G}(z) = \mathcal{D} + \mathcal{C}(zI_n - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}$  de dimension  $p \times p$  est dite positive réelle si et seulement si :

1.  $\mathcal{G}(z)$  est analytique à l'extérieur du disque unitaire  $\bar{\mathbb{D}} = \{z; |z| > 1\}$  ;
2. la matrice  $\mathcal{G}(z) + \mathcal{G}'(z^*)$  est semi-définie positive sur toute la bordure du cercle unitaire  $z = e^{j\theta}$ , avec  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

et une matrice de transfert  $\mathcal{G}(z)$  est appelée strictement positive réelle s'il existe un scalaire  $\tau > 1$  tel que  $\mathcal{G}(\frac{z}{\tau})$  est positif réel.

La propriété de positivité réelle stricte peut aussi se définir de la façon suivante, [HC08, Théorème 13.31] :

**Définition 27**  $\mathcal{G}(z)$  de dimension  $p \times p$  est dite strictement positive réelle si et seulement si :

1.  $\mathcal{G}(z)$  n'a pas de pôles à l'extérieur du cercle unitaire fermé,  $\bar{\mathbb{D}} = \{z; |z| \geq 1\}$ .
2. la condition  $\mathcal{G}(e^{j\theta}) + \mathcal{G}'(e^{-j\theta}) > 0_p$  est vérifiée pour tout l'intervalle  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

En considérant la fonction quadratique comme la fonction candidate, le critère de Tsytkin, [Tsy62, PJ94], mérite d'être mentionné comme étant le résultat similaire au critère du cercle dans le cadre du temps discret. Ce résultat est donné dans le théorème suivant (ici adapté au cadre traité dans ce mémoire,  $[0_p; \Omega]$  et  $D = 0_p$ , pour  $p = 1$ ) :

**Théorème 28** Soit le système (1.38)-(1.39) et une réalisation minimale  $(A, F, C)$  pour la fonction de transfert  $G(z) = C(zI_n - A)^{-1}F$ , avec  $A$  du type Schur. Alors, l'origine de ce système est globalement asymptotiquement stable pour toute non-linéarité  $\varphi(\cdot) \in [0_1; \Omega]$  si et seulement s'il existe une matrice  $0_n < P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  solution de la LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} A'PA - P & A'PF + C'\Omega \\ \star & F'PF - 2 \end{bmatrix} < 0_{n+1}. \quad (1.40)$$

De plus, la fonction  $x \rightarrow V(x) = x'Px$  est une fonction de Lyapunov et la fonction de transfert  $1 + \Omega G(z)$  est strictement positive réelle.

Comme dans le cadre du temps continu où le *critère du Cercle*, (lié à la fonction quadratique), a été étendu au *critère de Popov* (lié à la fonction de Lur'e), plusieurs tentatives ont été proposées pour étendre le *critère de Tsypkin*. Nous pouvons mentionner les travaux de [PG64] comme le premier qui a employé cette fonction de Lyapunov Lur'e dans le cadre du temps discret, sans passer directement par l'approche fréquentielle.

Parmi différentes hypothèses faites dans la littérature, il y a le fait que la non-linéarité  $\varphi(y)$  ne satisfait pas seulement la condition de secteur (1.32) mais aussi l'hypothèse sur sa variation bornée :

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z} \leq K_{\max} < \infty; \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2, y \neq z; \text{ où } K_{\max} \geq 0. \quad (1.41)$$

**Théorème 29** Soit une réalisation minimale  $(A, F, C)$ , avec  $A$  une matrice Schur, et la non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  vérifiant la condition de secteur ( $\varphi(\cdot) \in [0_1; \Omega]$ ) et la variation bornée (1.41). L'origine du système (1.38)-(1.39) est globalement asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice  $0_n < P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et un scalaire positif  $\eta \in \mathbb{R}$ , solutions de la LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} \Pi_{1,1} & \Pi_{1,2} \\ \Pi'_{1,2} & \Pi_{2,2} \end{bmatrix} < 0_{n+1}, \quad (1.42)$$

où :

$$\Pi_{1,1} = A'PA - P + \eta(A - I_n)'C'K_{\max}\Omega C(A - I_n), \quad (1.43)$$

$$\Pi_{1,2} = A'PF + (1 - \eta)C'\Omega + \frac{1}{2}\eta A'C'\Omega K_{\max}CF - \frac{1}{2}\eta C'\Omega K_{\max}CF + \eta A'C'\Omega \quad (1.44)$$

$$\Pi_{2,2} = -2 + \eta\Omega CF + \eta(\Omega CF)' + \eta F'C'K_{\max}\Omega CF + F'PF. \quad (1.45)$$

Alors, la fonction de Lur'e (1.34) est une fonction de Lyapunov et la fonction de transfert  $\mathcal{G}(z) = 1 + [1 + (z - 1)\eta] \Omega G(z) - \eta \frac{1}{2} \|z - 1\|^2 G^*(z) K_{\max} \Omega G(z)$  est strictement positive réelle.

**Preuve 30** Calculons la différence de la fonction Lur'e (1.34) le long de la trajectoire du système (1.38)-(1.39) :

$$\begin{aligned} v(x_{k+1}) - v(x_k) &= x'_k (A'PA - P) x_k + x' (A'PF) \varphi(y_k) + \varphi'(y_k) F'PF \varphi(y_k) \\ &\quad + \varphi'(y_k) (F'PA) x_k + 2\eta \int_{y_k}^{y_{k+1}} \Omega \varphi(s) ds. \end{aligned} \quad (1.46)$$

En tenant compte de la condition sur la variation bornée de la non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  (1.41), le terme intégral qui reste dans (1.46) est majoré en utilisant la méthode des trapèzes :

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} \Omega \varphi(s) ds \leq \varphi(y_k) \Omega [y_{k+1} - y_k] + \frac{K_{\max}}{2} \Omega [y_{k+1} - y_k]^2. \quad (1.47)$$

Ainsi, l'inégalité (1.37) implique que  $\mathcal{G}(z)$  est strictement positive réelle. Ensuite, la multiplication de l'inégalité (1.42) à droite par le vecteur  $(x'_k \varphi(y_k))' \neq 0$  et à gauche par sa transposée, nous obtenons la relation suivante

$$\begin{aligned} &x'_k (A'PA - P + \eta(A - I_n)'C'K_{\max}\Omega C(A - I_n)) x_k + x'_k \left( \mathbf{He} \left( A'PF + (1 - \eta)C'\Omega \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}\eta A'C'\Omega K_{\max}CF - \frac{1}{2}\eta C'\Omega K_{\max}CF + \eta A'C'\Omega \right) \right) \varphi(y_k) + \varphi(y_k) (-2 + \eta\Omega CF \\ &\quad \left. + \eta(\Omega CF)' + \eta F'C'K_{\max}\Omega CF + F'PF) \varphi(y_k) < 0, \forall x_k \neq 0. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Nous savons que la non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  vérifie la condition de secteur. Cela combiné avec la majoration du terme intégral (1.47) implique que la relation (1.48) définit un majorant pour la différence de la fonction de Lur'e (1.46). Ainsi, nous pouvons conclure sur la stabilité globale asymptotique de l'origine du système (1.38)-(1.39).  $\square$

**Remarque 31** D'après les hypothèses considérées dans plusieurs références [Sze63, JL64a, HB94b, HB94a, KH96, GPC01, JL64b, SS81], la majoration du terme intégral (1.47) est toujours nécessaire dans la preuve. Nous détaillerons ces hypothèses dans le Chapitre 2. Notons, ainsi, que la fonction Lur'e ne permet pas de résoudre le problème de Lur'e en temps discret en se fondant uniquement sur la condition de secteur (définition 19).

Dans la section suivante, nous discuterons du problème de stabilisation des systèmes Lur'e par retour d'état non-linéaire. Plus précisément, nous regarderons le problème plus général de la synthèse de commande des systèmes qui présentent des non-linéarités du type secteur et, de plus, la saturation d'entrée de commande.

### 1.2.3 Commande des systèmes Lur'e

La commande fondée sur le critère du Cercle et le critère de Popov a été abordée dans [ALK03, AK01]. Dans ce cas, la classe des systèmes étudiée est la suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + F\varphi(y(t)) + Bu(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (1.49)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (1.50)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  sont l'état et la sortie du système (1.49)-(1.50),  $\varphi(\cdot)$  est la non-linéarité du type secteur et  $u \in \mathbb{R}^m$  est une entrée de commande. Le problème de stabilisation en boucle fermée a été traité avec la classe de loi de commande non-linéaire suivante :

$$u(t) = Kx(t) + \Gamma\varphi(y(t)), \quad (1.51)$$

où  $K$  est la matrice de gain du retour linéaire de dimension  $m \times n$  et  $\Gamma$  est la matrice de gain du retour de non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  de dimension  $m \times p$ . L'utilisation du gain de retour de non-linéarité  $\Gamma$  est justifiée dans les travaux de [ALK03, Arc00]. Il permet de relaxer la contrainte sur le degré relatif du système (1.49)-(1.50).

Pour un problème de synthèse de commande plus général et aussi plus complexe concernant les systèmes (1.49)-(1.50), les entrées de commande sont communément sujettes à des limites d'actionneur. Ainsi, cet aspect a motivé la considération, dans les travaux de [CTQ08, CTQ05], des systèmes Lur'e plus généraux qui s'écrivent sous la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + F\varphi(y(t)) + B\text{sat}(u(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (1.52)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (1.53)$$

avec  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  l'état, la sortie et l'entrée du système.  $\varphi(\cdot)$  est la non-linéarité du type secteur. La fonction de saturation normalisée est considérée conformément à la définition suivante :

**Définition 32** La fonction saturation normalisée est définie par

$$\text{sat}(u)_{(\ell)} = \text{sign}(u_{(\ell)}) \min(\rho_{(\ell)}, |u_{(\ell)}|), \quad \forall \ell = 1, \dots, m. \quad (1.54)$$

Le scalaire  $\rho_{(\ell)} > 0$  est la limite de saturation symétrique de la  $\ell$ -ème composante de l'entrée de commande. Le vecteur  $\rho \in \mathbb{R}^m$  est supposé connu.

Parmi des différentes manières de traiter la saturation, à l'aide d'inégalités matricielles, il est possible de la considérer comme une incertitude variante dans le temps [SFE01]. La synthèse de commande peut être formulée avec une stratégie de séquençement de gains dépendants du niveau de saturation du signal de commande [SE98].

Une autre approche possible concerne la modélisation d'une saturation par une non-linéarité du type zone-morte  $\Psi(u) = u - \text{sat}(u)$ , qui vérifie une condition de secteur locale [Kha02]. Dans les travaux de [TPG06, GT05], une nouvelle formulation de la condition de secteur généralisée locale pour la zone-morte a été proposée. Rappelons la définition de cette condition de secteur :

**Lemme 33** Si les vecteurs  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $v \in \mathbb{R}^m$  appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{S}(\rho)$  défini par :

$$\mathcal{S}(\rho) = \{u; v \in \mathbb{R}^m; -\rho \leq u - v \leq \rho\}, \quad (1.55)$$

alors la non-linéarité  $\Psi(u) = u - \text{sat}(u)$  satisfait la condition de secteur suivante :

$$\Psi'_{(\ell)}(u) [\Psi(u) - v]_{(\ell)} \leq 0; \quad \forall \ell \in \{1, \dots, m\}. \quad (1.56)$$

Un avantage de cette approche est qu'elle permet de proposer une solution sous forme LMI au problème de synthèse de commande. Une autre modélisation possible de la fonction de saturation, qui mène aussi à une formulation LMI, concerne l'approche décrite par des inclusions linéaires, [HL01, HLC02b, HLC02a, HL03, TGGQ11]. La représentation par des inclusions linéaires permet aussi d'avoir une liaison avec l'approche fondée sur la transformation linéaire fractionnelle (LFT), [ES96]. Il est possible ainsi de traiter le problème de synthèse de lois de commande avec la saturation en formulant une stratégie afin d'éviter que le signal de commande sature.

Les travaux de [CTQ08] proposent des conditions suffisantes sous forme LMI, en considérant la fonction quadratique (critère du Cercle) et la modélisation par la zone-morte avec la condition de secteur généralisée (1.56), afin de résoudre le problème suivant :

**Problème 34** (Stabilisation en boucle-fermée) Calculer les gains de la loi de commande (1.51) qui stabilisent localement le système (1.52)-(1.53) et trouver une région dans l'espace des conditions initiales aussi grande que possible, incluse dans le bassin d'attraction de l'origine  $\mathcal{B}_0$  du système (1.52)-(1.53).

Dans [CTQ08], une comparaison détaillée entre les deux approches de modélisation de la saturation est présentée. De cette comparaison, il ressort que l'approche par des inclusions linéaires requiert plus de capacités numériques. Cela vient du fait que le nombre d'inégalités à vérifier simultanément augmente plus rapidement quand la dimension de l'entrée de commande  $u$  augmente. Ainsi, nous choisissons d'utiliser l'approche fondée sur la condition de secteur (1.56) dans l'ensemble de ce mémoire.

La contre-partie en temps discret du problème de synthèse de commande, avec la classe des lois de commande (1.51), pour des systèmes Lur'e avec une commande saturée a été proposée dans les travaux de [CMdP06]. Les systèmes étudiés sont décrits par :

$$x_{k+1} = Ax_k + F\varphi(y_k) + B\text{sat}(u_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (1.57)$$

$$y_k = Cx_k, \quad (1.58)$$

avec  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^p$  et  $u_k \in \mathbb{R}^m$  l'état, la sortie et l'entrée de ce système. La non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  vérifie la condition de secteur (1.32). La classe des lois de commande considérée est la suivante :

$$u_k = Kx_k + \Gamma\varphi(y_k), \quad (1.59)$$

où  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times p}$ . Ainsi, dans les travaux de [CMdP06], des conditions suffisantes sous forme LMI sont établies afin de garantir la stabilité locale de l'origine. En revanche, les résultats sont établis en se fondant sur la fonction de Lyapunov quadratique.

**Remarque 35** Notons que la synthèse de commande non-linéaire (1.51) fondée sur la fonction Lur'e (critère de Popov) pour les systèmes Lur'e avec la commande saturée reste un problème ouvert dans les deux domaines du temps. Cela est dû au fait que cette fonction pose des difficultés pour obtenir des conditions sous forme LMI. Par exemple, dans les travaux de Arcak, [ALK03], la commande n'est pas sujet à la saturation mais la synthèse fondée sur la fonction de Lur'e est développée en considérant des contraintes sous forme BMI (Bilinear Matrix Inequality en anglais). Comme la pondération du terme intégral n'est qu'un scalaire  $\eta \geq 0$ , cela offre la possibilité d'appliquer une technique de recherche en ligne et éviter l'aspect bilinéaire.

### 1.3 Conclusion

Nous avons rappelé, dans ce chapitre, deux classes de systèmes qui seront étudiés dans les chapitres suivants. Pour les systèmes à commutations en temps discret, les principales méthodes d'analyse de stabilité d'un système linéaire à commutations arbitraires ont été discutées. Aussi, les problèmes de stabilisation des systèmes linéaires à commutations par retour d'état linéaire commuté et par une stratégie de commutation ont été revisités. Nous nous sommes concentré sur les méthodes à base de LMIs.

L'autre classe de systèmes que nous avons défini concerne les systèmes linéaires bouclés par une non-linéarité du type secteur borné : les systèmes Lur'e. Les résultats classiques d'analyse de stabilité globale dans les deux domaines du temps ont été rappelés : la stabilité fondée sur la fonction de Lyapunov quadratique (critère du Cercle) et sur la fonction du type Lur'e (critère de Popov). Pour le temps discret, nous avons mis en évidence le fait que les méthodes, fondées sur la fonction Lur'e avec le terme intégral, requièrent toujours des hypothèses supplémentaires (et restrictifs) sur la non-linéarité. De plus, le problème de synthèse de commande non-linéaire des systèmes Lur'e avec la commande saturée a été discuté. Ainsi, nous notons qu'une méthode de synthèse fondée sur une fonction de Lyapunov du type Lur'e reste un problème ouvert dans la littérature.

Dans le chapitre suivant nous reprendrons le problème de Lur'e en temps discret et aussi les systèmes Lur'e avec une commande saturée. Notre principal outil sera une nouvelle fonction de Lyapunov du type Lur'e adaptée au temps discret. En se fondant sur cette nouvelle fonction, nous proposerons des conditions suffisantes pour résoudre le problème Lur'e en temps discret. Ces conditions sont moins restrictives par rapport aux résultats de la littérature. Aussi, un de nos résultats porte sur la synthèse de lois de commande non-linéaires pour les systèmes Lur'e avec la commande saturée. Cette fonction de Lyapunov et les outils proposés dans le chapitre suivant nous serviront de base pour traiter l'objet d'étude de ce mémoire : les systèmes Lur'e à commutations en temps discret.



## Chapitre 2

# Stabilité et commande des systèmes Lur'e en temps discret

Ce chapitre, de manière générale, concerne les problèmes d'analyse de stabilité et commande des systèmes en temps discret constitués d'une partie linéaire et une non-linéarité du type secteur.

Dans un premier temps, nous reprenons le problème original de Lur'e en temps discret, c'est-à-dire, sur l'analyse de stabilité globale des systèmes décrits par un bloc linéaire connecté à une non-linéarité du type secteur global. Nous montrerons tout d'abord que l'utilisation de la fonction de Lyapunov-Lur'e comportant un terme intégral dans ce cadre nécessite des hypothèses sur la variation de la non-linéarité pour des raisons techniques d'approximation de cette intégrale, alors même que ces hypothèses ne sont pas nécessaires en temps continu. Cette constatation nous a amené à proposer une fonction de Lyapunov dépendant de la non-linéarité qui soit adaptée au problème de Lur'e à temps discret et dont l'utilisation ne requiert que l'hypothèse de la condition de secteur.

Cette fonction nous permettra d'établir des conditions suffisantes pour la stabilité globale des systèmes Lur'e sous la forme LMI. De plus, nous allons démontrer que notre inégalité peut être utilisée pour conclure sur la positivité réelle stricte d'une matrice de transfert liée à une réalisation d'espace d'état d'un système auxiliaire. Par conséquent, cette approche fréquentielle nous offrira la possibilité d'étudier l'existence de notre fonction de Lyapunov.

Ensuite, on indiquera que cette fonction est appropriée pour étudier la stabilité locale de la boucle fermée d'un système Lur'e avec une loi de commande non-linéaire sujet à saturation. La façon la plus classique de résoudre ce problème serait de déterminer le bassin d'attraction  $\mathcal{B}_0$  de l'origine. En revanche, cette tâche est d'une difficulté très élevée et, donc, la ligne de niveau de la fonction de Lyapunov considérée est utilisée pour l'estimer. Nous allons explorer la propriété de non-convexité et non-connexité de la ligne de niveau de notre fonction dans un problème d'optimisation, sous des contraintes LMIs.

Enfin, des conditions suffisantes pour synthétiser une commande non-linéaire seront décrites par des BMIs. Ces inégalités sont utilisées comme contraintes d'un problème d'optimisation non-convexe. Une stratégie de relaxation est proposée avec un algorithme itératif en résolvant à chaque pas des sous-problèmes avec des contraintes

LMIs. De plus, nous présenterons une technique de linéarisation en appliquant le lemme de Finsler qui nous permettra d'arriver à des conditions suffisantes sous forme LMI.

Les travaux de recherche qui seront présentés au cours de ce chapitre ont donné lieu aux publications suivantes : [GJD12b, GJDC11b].

## 2.1 Le problème de Lur'e en temps discret et préliminaires

Dans cette section, nous allons reprendre une classe de systèmes déjà largement étudiée dans la littérature afin de mettre en évidence une limitation des outils classiques que nous proposons de dépasser.

### 2.1.1 Définition du système

Considérons la classe formée par des systèmes linéaires connectés à des non-linéarités dépendantes de la sortie :

$$x_{k+1} = Ax_k + F\varphi(y_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

$$y_k = Cx_k, \quad (2.2)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$  et  $y_k \in \mathbb{R}^p$  sont le vecteur d'état et la sortie du système (2.1)-(2.2) à l'instant  $k$ . Les matrices  $A$ ,  $F$  et  $C$  sont des matrices réelles de dimensions appropriées. Ce système vérifiera l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 36** La non-linéarité  $\varphi(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  vérifie la condition de secteur et est supposée être décentralisée [Kha02].

Cette hypothèse, abusivement notée  $\varphi(\cdot) \in [0_p, \Omega]$  où  $\Omega \in \mathbb{R}^{p \times p}$  est une matrice diagonale positive définie, signifie que  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi_{(\ell)}(y) [\varphi(y) - \Omega y]_{(\ell)} \leq 0, \forall y \in \mathbb{R}^p, \forall \ell = 1, \dots, p$ . L'inégalité

$$SC(\varphi(\cdot), y, \Lambda) = \varphi'(y)\Lambda[\varphi(y) - \Omega y] \leq 0 \quad (2.3)$$

est vérifiée, pour toute matrice diagonale définie positive  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_q\}_{q=1;\dots;p} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Il est important de noter que  $\Omega$  est supposée donnée. L'hypothèse 36 permet de montrer aisément que la relation (2.3) est équivalente à  $[\Omega y]_{(\ell)}' [\varphi(y) - \Omega y]_{(\ell)} \leq 0, \forall \ell = 1, \dots, p; \forall y \in \mathbb{R}^p$ , qui implique, pour  $\Lambda$  diagonale définie positive, que

$$0 \leq \varphi'(y)\Lambda\varphi(y) \leq \varphi'(y)\Lambda\Omega y \leq y'\Omega'\Lambda\Omega y, \quad \forall y \in \mathbb{R}^p. \quad (2.4)$$

Plusieurs classes de fonctions de Lyapunov (quadratique par rapport l'état, Lyapunov-Lur'e) ont été proposées pour étudier la stabilité du système (2.1)-(2.2). L'utilisation de la fonction Lyapunov-Lur'e nécessite ici des hypothèses sur la variation de la non-linéarité qui n'interviennent pas en temps continu et limitent l'ensemble des non-linéarités traitables. Précisons ce point en considérant le cas scalaire.

### 2.1.2 Limite des outils classiques

Considérons le système scalaire du type Lur'e en temps discret

$$x_{k+1} = ax_k + f\varphi(y_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (2.5)$$

$$y_k = cx_k, \quad (2.6)$$

où  $a$ ,  $f$  et  $c$  sont des scalaires. La non-linéarité  $\varphi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie l'hypothèse 36 (c'est-à-dire  $\varphi(y)[\varphi(y) - \omega y] \leq 0, \forall y \in \mathbb{R}$ , avec  $\omega > 0$ ) et est supposée être invariante dans le temps. Comme  $\varphi(0) = 0$ , l'origine est un point d'équilibre.

La fonction de Lyapunov Lur'e classique s'exprime alors par :

$$v(x, \varphi(\cdot)) = \pi x^2 + 2\eta \int_0^y \varphi(s)ds, \quad (2.7)$$

avec  $\pi > 0$  et  $\eta \geq 0$ . De part l'invariance en temps de la non-linéarité  $\varphi(\cdot)$ , l'évaluation de la différence de Lyapunov fait apparaître un terme intégral :

$$\begin{aligned} v(x_{k+1}) - v(x_k) = & x'_k (A'PA - P) x_k + x'_k (A'PF) \varphi(y_k) + \varphi'(y_k) F'PF \varphi(y_k) \\ & + \varphi'(y_k) (F'PA) x_k + 2\eta \int_{y_k}^{y_{k+1}} \varphi(s)ds. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Une abondante littérature est alors obligée de faire des hypothèses sur la variation de la non-linéarité. Parmi celles-ci, citons en particulier les cas suivants :

**A1)** Dans [PG64, Sze63, JL64a], la dérivée maximale est bornée supérieurement :

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} \leq K_{\max} < \infty \quad \forall y \in \mathbb{R}; \text{ où } K_{\max} \geq 0; \quad (2.9)$$

**A2)** Dans [JL64b, SS81], la dérivée minimale est bornée inférieurement :

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} \geq -K_{\max} > -\infty; \quad \forall y \in \mathbb{R}; \text{ où } K_{\max} \geq 0; \quad (2.10)$$

**A3)** Dans [HB94b, HB94a, KH96, GPC01], on suppose que la pente maximale est limitée :

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z} \leq K_{\max} < \infty; \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2, y \neq z; \text{ où } K_{\max} \geq 0. \quad (2.11)$$

Sous ces conditions, il est alors possible d'effectuer la majoration (1.47) du terme intégral restant dans la différence de la fonction (2.8), comme indiqué dans la Section 1.2.2 au Chapitre 1. Cette majoration est nécessaire pour conclure que la différence de Lyapunov est négative, et donc assurer la stabilité de l'origine.

Parmi les références citées, certaines ont traité le problème de Lur'e quand la non-linéarité est la saturation de l'actionneur et, donc, ces hypothèses peuvent sembler intéressantes. Néanmoins, il existe différents types de non-linéarités pour lesquelles la condition de secteur est vérifiée mais les hypothèses supplémentaires sur leur variation ne sont pas respectées. C'est le cas, par exemple, de la non-linéarité impaire suivante (Figure 2.1) :

$$\varphi : \begin{cases} 0, & \text{si } |y| \in [0, 1] \text{ ou } |y| \in [3, +\infty), \\ \sqrt{1 - (|y| - 2)^2}, & \text{si } |y| \in [1, 3], \end{cases} \quad (2.12)$$

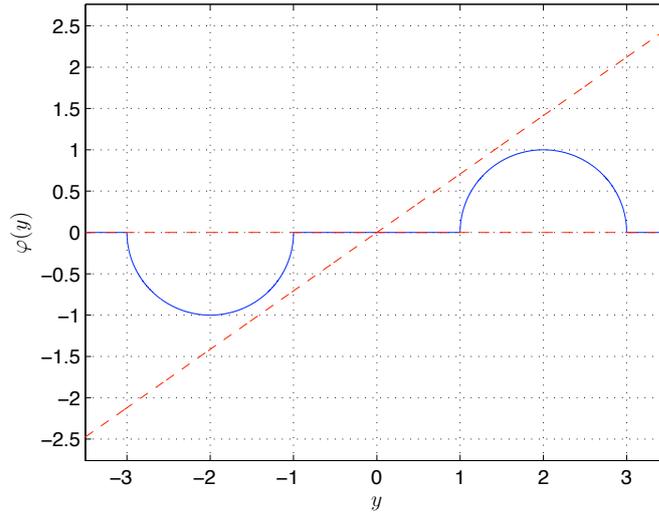


FIGURE 2.1 – Non-linéarité vérifiant la condition de secteur,  $\varphi(\cdot) \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$  sans respecter les hypothèses classiques de la littérature sur sa variation.

Ainsi nous proposons dans la section suivante une fonction de Lyapunov capable d'étudier les problèmes de stabilité liés au système (2.1)-(2.2) en ne considérant que l'hypothèse 36, (condition de secteur de  $\varphi(\cdot)$ ).

### 2.1.3 Une fonction de Lyapunov adaptée

Considérons la fonction candidate composée d'un terme quadratique en l'état et d'un terme croisé entre l'état et la non-linéarité :

$$V : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x; \varphi(Cx)) & \longmapsto x'Px + 2\varphi(Cx)'\Delta\Omega Cx, \end{cases} \quad (2.13)$$

où la matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est symétrique définie positive et la matrice  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$  est diagonale semi-définie positive. Il faut remarquer que la fonction de Lyapunov quadratique est un cas particulier de notre fonction (2.13), obtenue en posant  $\Delta = 0_p$ .

A partir des inégalités (2.4), nous avons l'encadrement de  $V$

$$0 \leq \underline{V}(x) \leq V(x; \varphi(Cx)) \leq \overline{V}(x), \quad (2.14)$$

où  $\underline{V}(x)$  et  $\overline{V}(x)$  sont les fonctions quadratiques :

$$\underline{V} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto x'Px, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\overline{V} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto x'(P + 2C'\Omega'\Delta\Omega C)x. \end{cases} \quad (2.16)$$

La fonction  $V(x; \varphi(Cx))$  peut être considérée comme une fonction candidate parce qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

- $V(x; \varphi(Cx)) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , grâce à (2.14) ;
- $V(x; \varphi(Cx)) = 0$ , si et seulement si  $x = 0$ , à cause de l'inégalité (2.14) et  $P > 0$ .
- $V(x; \varphi(Cx))$  est radialement non bornée.

Dans la Figure 2.2, un exemple de notre fonction candidate est illustré, pour  $n = 2, p = 2$  et avec :

$$P = \text{diag}(0.01; 0.02); \Delta = 0.01I_2; C = I_2; \Omega = I_2; \quad (2.17)$$

$$\varphi(Cx)_{(\ell)} = \Omega_{(\ell)} \frac{(Cx)_{(\ell)}(1 + \cos(2(Cx)_{(\ell)}))}{2}; \ell = 1; 2. \quad (2.18)$$

Il est possible de voir qu'elle est bornée par deux paraboloides liées à  $\underline{V}(x)$  et  $\overline{V}(x)$ . Pour des raisons de clarté, nous ne présentons que la moitié des surfaces (pour  $x_{(2)} \geq x_{(1)}$ ).

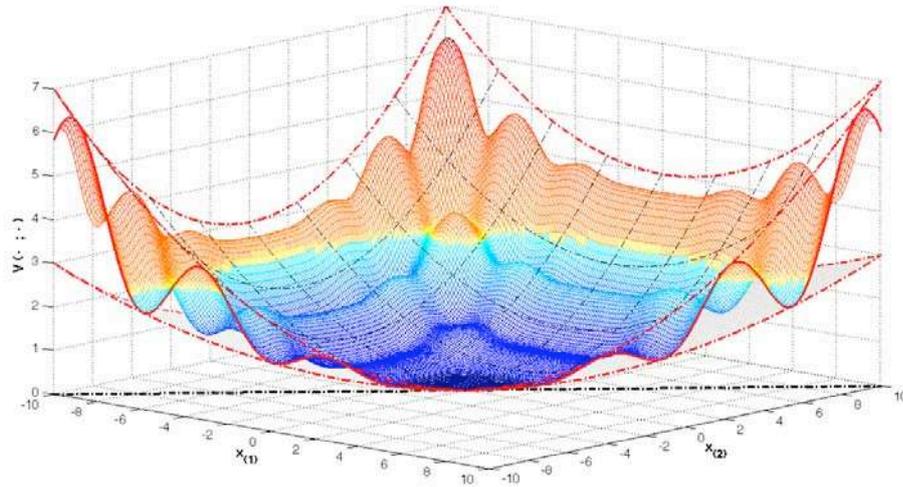


FIGURE 2.2 – Surfaces données par  $V(x; \varphi(Cx))$  (ligne pleine) et ses paraboloides d'encadrement  $\overline{V}(x)$  et  $\underline{V}(x)$  (lignes tirets points).

La ligne de niveau associée à la fonction  $V(x; \varphi(Cx))$  et au scalaire  $\gamma > 0$  est définie par

$$L_V(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x; \varphi(Cx)) \leq \gamma\}, \quad (2.19)$$

qui est, naturellement, liée aux deux ellipsoïdes relatives aux fonctions quadratiques  $\underline{V}(x)$  et  $\overline{V}(x)$

$$\mathcal{E}(P + 2C'\Omega'\Delta\Omega C, \gamma) \subseteq L_V(\gamma) \subseteq \mathcal{E}(P, \gamma). \quad (2.20)$$

La ligne de niveau des fonctions (2.13)-(2.15)-(2.16) illustrées dans la Figure 2.2, et pour un même niveau  $\gamma = 0.7$ , sont représentées dans la Figure 2.3. L'inclusion (2.20) est bien illustrée.

Une des caractéristiques fondamentales de notre fonction de Lyapunov (2.13) est de fournir une ligne de niveau qui est non-convexe et non-connexe. Cette caractéristique sera pleinement explorée par la suite dans l'estimation du bassin d'attraction.

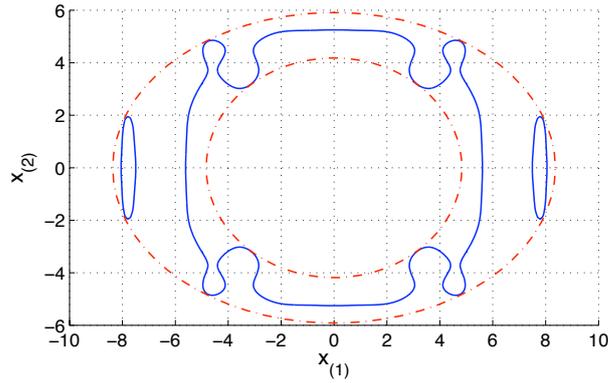


FIGURE 2.3 – Ligne de niveau  $L_V(0.7)$  (lignes pleines), encadrées par les ellipsoïdes  $\mathcal{E}(P + 2C'\Omega'\Delta\Omega C, 0.7)$  et  $\mathcal{E}(P, 0.7)$  (ligne tirets points).

## 2.2 Analyse de stabilité globale

Cette section sera entièrement dédiée à l'étude du problème de stabilité globale d'un système Lur'e en temps discret en utilisant la fonction candidate. La notation pour la différence de Lyapunov utilisée au travers de ce chapitre est définie par

$$\delta_k V = V(x_{k+1}; \varphi(Cx_{k+1})) - V(x_k; \varphi(Cx_k)). \quad (2.21)$$

Nous proposerons des conditions suffisantes sous forme LMI pour résoudre le problème 37.

**Problème 37** (*Analyse de stabilité globale*) Trouver une matrice  $P = P' > 0_n$  et une matrice diagonale  $\Delta \geq 0_p$  telles qu'elles permettent de garantir la stabilité globale de l'origine du système (2.1)-(2.2), pour toute non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  vérifiant l'hypothèse 36.

La proposition suivante donne une condition suffisante pour résoudre le problème 37.

**Théorème 38 ([GJD12b])** Pour la classe des systèmes définis par (2.1)-(2.2), s'il existe une matrice  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , une matrice diagonale semi-définie positive  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et des matrices diagonales définies positives  $T, W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , telles que la LMI suivante

$$\begin{bmatrix} P - G' - G & G'A & G'F & 0_{n \times p} \\ \star & -P & \Pi_1 & A'\Pi_2 \\ \star & \star & -2T & F'\Pi_2 \\ \star & \star & \star & -2W \end{bmatrix} < 0_{2n+2p}, \quad (2.22)$$

est vérifiée, où

$$\Pi_1 = C'\Omega [T - \Delta]; \quad \Pi_2 = C'\Omega [W + \Delta], \quad (2.23)$$

alors, la fonction  $V(x; \varphi(Cx))$  est une fonction de Lyapunov et l'origine du système (2.1)-(2.2) est globalement asymptotiquement stable. ■

**Preuve 39** Si l'inégalité (2.22) est vérifiée, il vient  $P - G' - G < 0$  et  $P > 0$ . Donc,  $G$  est de rang plein et on aura  $-G'P^{-1}G \leq P - G' - G < 0$  (voir [DB01]), ce qui mène à l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix} -G'P^{-1}G & G'A & G'F & 0_{n \times p} \\ \star & -P & C'\Omega[T - \Delta] & A'C'\Omega[W + \Delta] \\ \star & \star & -2T & F'C'\Omega[W + \Delta] \\ \star & \star & \star & -2W \end{bmatrix} < 0_{2n+2p}. \quad (2.24)$$

Ensuite, on applique le changement de base  $\text{diag}(G^{-1}; I_{n+2p})$  suivi d'un complément de Schur par rapport au premier bloc. On obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} A' \\ F' \\ 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A' \\ F' \\ 0 \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} -P & C'\Omega[T - \Delta] & A'C'\Omega[W + \Delta] \\ \star & -2T & F'C'\Omega[W + \Delta] \\ \star & \star & -2W \end{bmatrix} < 0_{n+2p}. \quad (2.25)$$

De part la structure de la non-linéarité  $\varphi(\cdot)$ , le vecteur  $(x'_k \ \varphi'(y_k) \ \varphi'(y_{k+1}))'$  est nul si et seulement si le vecteur  $x_k$  est nul. Alors, en multipliant l'inégalité (2.25) à droite par  $(x'_k \ \varphi'(y_k) \ \varphi'(y_{k+1}))' \neq 0$  et à gauche par sa transposée, on a l'inégalité :

$$\delta_k V - 2\text{SC}(\varphi(\cdot), y_{k+1}, W) - 2\text{SC}(\varphi(\cdot), y_k, T) < 0, \forall x_k \neq 0. \quad (2.26)$$

Comme la non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  vérifie globalement la condition de secteur (2.3), on a  $\delta_k V < 0$  et, donc, la stabilité asymptotique globale de l'origine.  $\square$

**Remarque 40** Les matrices  $A$  et  $A + F\Omega C$  doivent être Schur, c'est-à-dire, la stabilité de ces matrices est nécessaire pour permettre la faisabilité de l'inégalité (2.22). Ces conditions nécessaires sont obtenues en considérant les cas particuliers sur les bornes de la condition de secteur (2.3) :  $\varphi(y_k) = 0$  et  $\varphi(y_k) = \Omega y_k$ .

## 2.3 Interprétation fréquentielle

Nous pouvons établir un lien entre notre condition LMI pour la stabilité globale et le domaine fréquentiel pour des matrices de transfert. Cette liaison sera formulée en se fondant sur l'analyse de la propriété de positivité réelle stricte (voir définition 27). Nous définissons les notations suivantes :

$$\mathcal{A} = A; \mathcal{B}' = \begin{bmatrix} F' \\ 0_{p \times n} \end{bmatrix}; \mathcal{C} = \begin{bmatrix} (\Delta - T)\Omega C \\ -(\Delta + W)\Omega C A \end{bmatrix}; \mathcal{D} = \begin{bmatrix} T & -(\Delta + W)\Omega C F \\ 0_p & W \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Le théorème suivant propose un résultat concernant la connexion entre le cadre fréquentiel et notre condition sur la stabilité globale d'un système Lur'e (théorème 38).

**Théorème 41** S'il existe une matrice diagonale semi-définie positive  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , et des matrices diagonales définies positives  $T, W \in \mathbb{R}^{p \times p}$  telles que l'inégalité (2.22) est satisfaite, alors la matrice de transfert  $\mathcal{G}(z) = \mathcal{C}(zI_n - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$  est strictement positive réelle.  $\blacksquare$

**Preuve 42** Si la LMI (2.22) est vérifiée, elle implique l'inégalité (2.25) qui nous permet de conclure sur l'existence d'une matrice symétrique définie positive  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , une matrice  $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  de rang plein colonne et une matrice  $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{q \times 2p}$  de rang plein colonne vérifiant la relation suivante

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'\mathcal{P}\mathcal{A} - \mathcal{P} & \mathcal{A}'\mathcal{P}\mathcal{B} - \mathcal{C}' \\ \star & -(\mathcal{D} + \mathcal{D}') + \mathcal{B}'\mathcal{P}\mathcal{B} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathcal{L}' \\ \mathcal{W}' \end{bmatrix} [\mathcal{L} \quad \mathcal{W}] < 0_{n+2p}. \quad (2.28)$$

Cela implique  $(\mathcal{D} + \mathcal{D}') - \mathcal{B}'\mathcal{P}\mathcal{B} = \mathcal{W}'\mathcal{W} > 0_{2p}$ .

Par définition, nous avons :

$$\mathcal{G}(z) + \mathcal{G}'(z^*) = \mathcal{C}(zI_n - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D} + \mathcal{B}'(z^*I_n - \mathcal{A}')^{-1}\mathcal{C}' + \mathcal{D}'. \quad (2.29)$$

Nous pouvons remplacer  $\mathcal{C}' = \mathcal{A}'\mathcal{P}\mathcal{B} - \mathcal{L}'\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{n \times 2p}$  pour avoir la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(z) + \mathcal{G}'(z^*) &= \mathcal{W}'\mathcal{W} + \mathcal{B}'\mathcal{P}\mathcal{B} + \mathcal{B}'(z^*I_n - \mathcal{A}')^{-1}(\mathcal{A}'\mathcal{P}\mathcal{B} + \mathcal{L}'\mathcal{W}) \\ &\quad + (\mathcal{B}'\mathcal{P}\mathcal{A} + \mathcal{W}'\mathcal{L})(zI_n - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

qui peut être réécrite sous la forme équivalente :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(z) + \mathcal{G}'(z^*) &= \mathcal{B}'(z^*I_n - \mathcal{A}')^{-1}[(z^*I_n - \mathcal{A}')P(zI_n - \mathcal{A}) + \mathcal{A}'\mathcal{P}(zI_n - \mathcal{A}) + \\ &\quad (z^*I_n - \mathcal{A}')\mathcal{P}\mathcal{A}](zI_n - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{W}'\mathcal{W} + \mathcal{W}'\mathcal{L}(zI_n - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{B}'(z^*I_n - \mathcal{A}')^{-1}\mathcal{L}'\mathcal{W}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

À partir du premier bloc diagonal de l'inégalité (2.28), nous avons l'identité suivante :

$$\begin{aligned} 0_n &< \mathcal{L}'\mathcal{L} = \mathcal{P} - \mathcal{A}'\mathcal{P}\mathcal{A} \\ &= (z^*I_n - \mathcal{A}')P(zI_n - \mathcal{A}) + \mathcal{A}'\mathcal{P}(zI_n - \mathcal{A}) + (z^*I_n - \mathcal{A}')\mathcal{P}\mathcal{A}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

En tenant compte de cette dernière identité, la relation (2.30) est équivalente à :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(z) + \mathcal{G}'(z^*) &= \mathcal{B}'(z^*I_n - \mathcal{A}')^{-1}\mathcal{L}'\mathcal{L}(zI_n - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{W}'\mathcal{W} + \\ &\quad \mathcal{W}'\mathcal{L}(zI_n - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{B}'(z^*I_n - \mathcal{A}')^{-1}\mathcal{L}'\mathcal{W}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Selon la remarque 40, pour que l'inégalité (2.22) soit vérifiée, la matrice  $\mathcal{A}$  doit être du type Schur. Alors, la matrice de transfert  $\mathcal{G}(z)$  n'a pas de pôles à l'extérieur du cercle unitaire fermé. De plus, nous avons, pour tout  $z = e^{j\theta}$  avec  $\theta \in [0; 2\pi]$  :

$$\mathcal{G}(e^{j\theta}) + \mathcal{G}'(e^{-j\theta}) = [\mathcal{W}' + \mathcal{B}'(e^{-j\theta}I_n - \mathcal{A}')^{-1}\mathcal{L}'][\mathcal{W} + \mathcal{L}(e^{j\theta}I_n - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}] > 0_{2p}, \quad (2.34)$$

car la matrice de transfert  $\mathcal{W} + \mathcal{L}(e^{j\theta}I_n - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}$  est de rang plein colonne.  $\square$

Une autre interprétation peut être établie dans le domaine fréquentiel. Les matrices auxiliaires décrivent une réalisation minimale de  $\mathcal{G}(z)$ . Ainsi, la faisabilité de notre condition (théorème 38) est garantie. Il est à noter que la condition de réalisation minimale permet le changement de base entre la matrice de transfert considérée  $\mathcal{G}(z)$  et la matrice de transfert factorisée de la définition de positivité réelle stricte. Elle n'est pas nécessaire dans l'implication réciproque [ZDG96].

**Théorème 43** Soit les matrices  $A, F$  et  $C$  liées au système (2.1)-(2.2). Supposons qu'il existe des matrices diagonales définies positives  $T, W \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et une matrice diagonale semi-définie positive  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$  telles que les matrices  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$  données par la relation (2.27) définissent une fonction de transfert qui soit d'une part strictement positive réelle et d'autre part à réalisation minimale, c'est-à-dire, les paires  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  et  $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$  sont commandable et observable, respectivement. Alors, il existe une matrice symétrique définie positive  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , des matrices  $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  de rang plein colonne et  $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{q \times 2p}$  de rang plein colonne, solutions des égalités :

$$\mathcal{A}'\mathcal{P}\mathcal{A} - \mathcal{P} = -\mathcal{L}'\mathcal{L}; \quad (2.35)$$

$$\mathcal{A}'\mathcal{P}\mathcal{B} - \mathcal{C}' = -\mathcal{L}'\mathcal{W}; \quad (2.36)$$

$$\mathcal{D}' + \mathcal{D} - \mathcal{B}'\mathcal{P}\mathcal{B} = +\mathcal{W}'\mathcal{W}. \quad (2.37)$$

De plus, la fonction (2.13) est une fonction de Lyapunov qui prouve la stabilité globale de l'origine du système (2.1)-(2.2), pour toute non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  qui vérifie la condition de secteur (2.3). ■

**Preuve 44** Soit des matrices diagonales définies positives  $T, W \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et une matrice diagonale semi-définie positive  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$  telles que la matrice de transfert  $\mathcal{G}(z)$  soit strictement positive réelle. Cela implique l'existence d'une matrice de transfert  $\mathcal{H}(z) = \mathcal{D}_1 + \mathcal{C}_1(zI_n - \mathcal{A}_1)^{-1}\mathcal{B}_1$ , avec  $\mathcal{A}_1$  du type Schur, telle que :

$$\mathcal{G}(z) + \mathcal{G}'(z^*) = \mathcal{H}'(z^*)\mathcal{H}(z), \quad (2.38)$$

où  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}$  ont la même dimension et  $\mathcal{H}(z)$  est de rang plein colonne. Développons le terme à droite :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(z^*)\mathcal{H}(z) &= \mathcal{B}'_1(z^*I_n - \mathcal{A}'_1)^{-1}\mathcal{C}'_1\mathcal{C}_1(zI_n - \mathcal{A}_1)^{-1}\mathcal{B}_1 + \mathcal{D}'_1\mathcal{D}_1 + \\ &\quad \mathcal{B}'_1(z^*I_n - \mathcal{A}'_1)^{-1}\mathcal{C}'_1\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}'_1\mathcal{C}_1(zI_n - \mathcal{A}_1)^{-1}\mathcal{B}_1. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ensuite, soit la matrice symétrique définie positive  $\mathcal{P}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  solution de l'égalité de Lyapunov :

$$\mathcal{A}'_1\mathcal{P}_1\mathcal{A}_1 - \mathcal{P}_1 = -\mathcal{C}'_1\mathcal{C}_1, \quad (2.40)$$

et qui permet d'utiliser la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}'_1\mathcal{C}_1 &= \mathcal{P}_1 - \mathcal{A}'_1\mathcal{P}_1\mathcal{A}_1 \\ &= (z^*I_n - \mathcal{A}'_1)\mathcal{P}_1(zI_n - \mathcal{A}_1) + \mathcal{A}'_1\mathcal{P}_1(zI_n - \mathcal{A}_1) + (z^*I_n - \mathcal{A}'_1)\mathcal{P}_1\mathcal{A}_1. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ainsi, en tenant compte de cette identité, la relation (2.39) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(z^*)\mathcal{H}(z) &= \mathcal{B}'_1(z^*I_n - \mathcal{A}'_1)^{-1}[(z^*I_n - \mathcal{A}'_1)\mathcal{P}_1(zI_n - \mathcal{A}_1) + \\ &\quad \mathcal{A}'_1\mathcal{P}_1(zI_n - \mathcal{A}_1) + (z^*I_n - \mathcal{A}'_1)\mathcal{P}_1\mathcal{A}_1](zI_n - \mathcal{A}_1)^{-1}\mathcal{B}_1 + \\ &\quad \mathcal{D}'_1\mathcal{D}_1 + \mathcal{B}'_1(z^*I_n - \mathcal{A}'_1)^{-1}\mathcal{C}'_1\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}'_1\mathcal{C}_1(zI_n - \mathcal{A}_1)^{-1}\mathcal{B}_1, \end{aligned} \quad (2.42)$$

qui est équivalente à :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(z^*)\mathcal{H}(z) &= \mathcal{D}'_1\mathcal{D}_1 + \mathcal{B}'_1\mathcal{P}_1\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}'_1\mathcal{P}_1\mathcal{A}_1(zI_n - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}_1 + \\ &\quad \mathcal{B}'_1(z^*I_n - \mathcal{A}'_1)^{-1}\mathcal{A}'_1\mathcal{P}_1\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}'_1(z^*I_n - \mathcal{A}'_1)^{-1}\mathcal{C}'_1\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}'_1\mathcal{C}_1(zI_n - \mathcal{A}_1)^{-1}\mathcal{B}_1. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Rappelons que la matrice de transfert  $\mathcal{G}(z)$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathcal{G}(z) + \mathcal{G}'(z^*) = \mathcal{D}' + \mathcal{D} + \mathcal{B}'(z^*I_n - \mathcal{A}')^{-1}\mathcal{C}' + \mathcal{C}(zI_n - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}. \quad (2.44)$$

Puisque les matrices  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$  sont une réalisation minimale, il existe une matrice de transformation de similarité non-singulière  $\mathcal{T}$  telle que :

$$\mathcal{A} = \mathcal{T}\mathcal{A}_1\mathcal{T}^{-1}; \quad \mathcal{C} = (\mathcal{B}'_1\mathcal{P}_1\mathcal{A}_1 + \mathcal{D}'_1\mathcal{C}_1)\mathcal{T}^{-1}; \quad (2.45)$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{B}_1; \quad \mathcal{D} + \mathcal{D}' = \mathcal{D}'_1\mathcal{D}_1 + \mathcal{B}'_1\mathcal{P}_1\mathcal{B}_1, \quad (2.46)$$

ce qui implique :

$$\mathcal{P} = (\mathcal{T}^{-1})'\mathcal{P}_1\mathcal{T}^{-1}; \quad \mathcal{L} = \mathcal{C}_1\mathcal{T}^{-1}; \quad \mathcal{W} = \mathcal{D}_1. \quad (2.47)$$

Ainsi, nous avons la garantie que ces matrices  $\mathcal{P} = \mathcal{P}' > 0_n$ ;  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{W}$  vérifient la relation :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'\mathcal{P}\mathcal{A} - \mathcal{P} & \mathcal{A}'\mathcal{P}\mathcal{B} - \mathcal{C}' \\ \star & -(\mathcal{D} + \mathcal{D}') + \mathcal{B}'\mathcal{P}\mathcal{B} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathcal{L}' \\ \mathcal{W}' \end{bmatrix} [\mathcal{L} \quad \mathcal{W}] < 0_{n+2p}. \quad (2.48)$$

Si l'on remplace les matrices du système auxiliaire donnée par (2.27) dans l'inégalité (2.48), on récupère l'inégalité (2.25), en identifiant  $P = \mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Ensuite, la multiplication de l'inégalité (2.28) à droite par le vecteur  $(x' \ \varphi' \ \varphi'_+)' \neq 0$  et à gauche par sa transposée, en considérant  $x_k = x$ ;  $\varphi = \varphi(y_k)$ ;  $\varphi_+ = \varphi(y_{k+1})$ , on aura

$$\begin{aligned} & x'(A'PA - P)x + 2x'(A'PF\varphi + A'C'\Omega'(\Delta + W)\varphi_+ - C'\Omega'(\Delta - T)\varphi) + \\ & 2(\varphi_+)'(\Delta + W)\Omega CF\varphi + \varphi'(F'PF - 2T)\varphi - 2(\varphi_+)'W\varphi_+ < 0, \forall x_k \neq 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

qui n'est rien d'autre que l'inégalité (2.26). Ceci permet de conclure que la fonction (2.13) est une fonction de Lyapunov qui prouve la stabilité globale asymptotique de l'origine du système (2.1)-(2.2) pour toutes les non-linéarités qui vérifient la condition de secteur (2.3).  $\square$

A titre d'illustration, nous présentons deux exemples numériques.

### Exemple 45

Soit le système (2.1)-(2.2) avec  $n = 2$ ;  $p = 1$  et dont les paramètres sont les suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & -0.4 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0].$$

La non-linéarité est le demi-cercle (2.12), qui satisfait bien la condition de secteur pour  $\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , comme illustré dans la Figure 2.1. En revanche, elle ne vérifie aucune des hypothèses faites dans [PG64, Sze63, JL64a, JL64b, SS81, KH96, GPC01]. Les matrices  $A$  et  $A + F\Omega C$  sont du type Schur, avec les valeurs propres  $\lambda(A) = \{-0.4322; 0.5322\}$  et  $\lambda(A + F\Omega C) = \{-0.4325; 0.8770\}$ . Les conditions nécessaires pour appliquer le théorème 38 sont satisfaites. La LMI (2.22) est faisable et on obtient :

$$P = \begin{bmatrix} 0.9825 & -0.0846 \\ -0.0846 & 0.9476 \end{bmatrix}; \Delta = 0.7503; W = 0.5812; T = 0.5989.$$

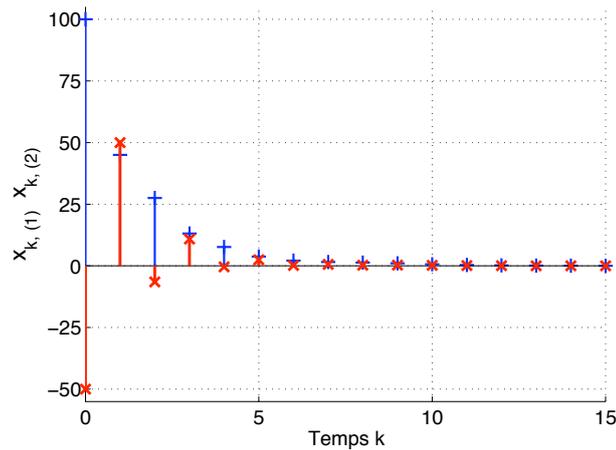


FIGURE 2.4 – Réponse temporelle du système (2.1)-(2.2) pour la condition initiale  $x_0 = (100; -50)$  – les composantes du vecteur d'état sont représentées selon différents styles :  $x_{k,(1)}$  avec '+' et  $x_{k,(2)}$  avec 'x'.

On peut conclure que l'origine de ce système est globalement asymptotiquement stable pour toutes les non-linéarités appartenant au secteur  $[0; \frac{1}{\sqrt{2}}]$ . Considérons une condition initiale  $x_0 = (100; -50)$ . La trajectoire du système (2.1)-(2.2) est illustrée dans la Figure 2.4.

Afin d'illustrer la positivité réelle stricte liée à l'approche fréquentielle, on a évalué les valeurs propres de la matrice de transfert  $\mathcal{G}(z) + \mathcal{G}'(z^*)$  pour  $z = e^{j\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Elles sont présentées dans la Figure 2.5. On peut noter que les deux valeurs propres

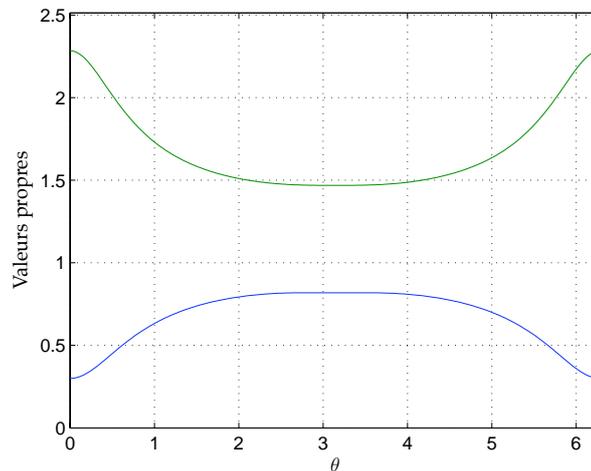


FIGURE 2.5 – Évolution des valeurs propres de la matrice  $\mathcal{G}(z) + \mathcal{G}'(z^*)$  calculées le long du cercle unitaire,  $z = e^{j\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

sont strictement positives.

Les matrices diagonales  $\Delta$ ,  $W$  et  $T$  et la matrice  $P = P' > 0_n$  sont des variables dans notre théorème 38 et sont déterminées en résolvant la condition LMI (2.22). Comme

établi dans le théorème 41, la solution de cette inégalité implique la positivité réelle stricte de la matrice de transfert  $\mathcal{G}(z)$ . En revanche, il serait difficile de proposer une méthode systématique dans l'autre sens, c'est-à-dire, déterminer les matrices  $\Delta$ ,  $W$ ,  $T$  afin d'avoir  $\mathcal{G}(z)$  strictement positive réelle et donc assurer l'existence de la matrice  $P$ . On peut néanmoins présenter l'exemple scalaire suivant :

### Exemple 46

Considérons, maintenant, un système Lur'e scalaire,  $n = 1$ ,  $p = 1$ ;  $A = 0.2$ ;  $F = 0.5$ ;  $C = 1$ ;  $\Omega = 1$ .  $A$  et  $A + F\Omega C$  sont du type Schur. Les matrices du système auxiliaire sont données par

$$A = A = 0.2; \mathcal{B} = [0.5 \ 0]; \mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Delta - T \\ -(\Delta + W)0.2 \end{bmatrix}; \mathcal{D} = \begin{bmatrix} T & -(\Delta + W)0.5 \\ 0 & W \end{bmatrix}.$$

Ainsi, ce système est commandable et pour des matrices  $\Delta$ ,  $T$  et  $W$  non-nulles, il est aussi observable, ce qui implique que cette réalisation est minimale. La matrice de transfert  $\mathcal{G}(z)$  est donnée par :

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{C}(z - A)^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D} = \begin{bmatrix} (\Delta - T)0.5 & 0 \\ -(W + \Delta)0.1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{z - 0.2} + \begin{bmatrix} T & -(W + \Delta)0.5 \\ 0 & W \end{bmatrix}.$$

Calculons :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(z) + \mathcal{G}'(z^*) &= \begin{bmatrix} (\Delta - T)0.5\left(\frac{1}{z-0.2} + \frac{1}{z^*-0.2}\right) & -(W + \Delta)\frac{0.1}{z^*-0.2} \\ -(W + \Delta)\frac{0.1}{z-0.2} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 2T & -(W + \Delta)0.5 \\ -(W + \Delta)0.5 & 2W \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comme les matrices  $\Delta$ ,  $T$  et  $W$  sont libres, pour des raisons de simplicité, on définit  $\Delta = T$  et on obtient :

$$\mathcal{G}(z) + \mathcal{G}'(z^*) = \begin{bmatrix} 2\Delta & -(\Delta + W)\left(\frac{0.1}{z^*-0.2} + 0.5\right) \\ -(\Delta + W)\left(\frac{0.1}{z-0.2} + 0.5\right) & 2W \end{bmatrix}.$$

Le déterminant est donné par :

$$\det(\mathcal{G}(z) + \mathcal{G}'(z^*)) = 4\Delta W - (W + \Delta)^2 \left\| 0.5 + \frac{0.1}{z - 0.2} \right\| \geq 4\Delta W - (W + \Delta)^2 0.64.$$

En tentant  $\Delta = W > 0$ , cette relation sera strictement positive. Ensuite, en prenant  $\Delta = W = T = 1$ , la matrice de transfert  $\mathcal{G}(z)$  est strictement positive réelle et donc la faisabilité des égalités (2.35)-(2.36)-(2.37) est assurée. Ensuite, prenons  $\mathcal{P} = 2$ , par exemple, nous avons :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'\mathcal{P}\mathcal{A} - \mathcal{P} & \mathcal{A}'\mathcal{P}\mathcal{B} - \mathcal{C}' \\ * & -(\mathcal{D} + \mathcal{D}') + \mathcal{B}'\mathcal{P}\mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.92 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & -1.5 & 1 \\ 0.4 & 1 & -2 \end{bmatrix} < 0_{n+2p}.$$

Donc, en appliquant la décomposition de Cholesky, on obtient les matrices  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{W}$  :

$$[\mathcal{L} \quad \mathcal{W}] = \left[ \begin{bmatrix} 1.3856 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -0.1443 & -0.2887 \\ 1.2162 & -0.8565 \\ 0 & 1.0877 \end{bmatrix} \right].$$

À la section suivante, nous étudierons un problème plus général associé aux systèmes Lur'e en temps discret. Nous allons considérer aussi notre nouvelle fonction de Lyapunov comme principal outil.

## 2.4 Systèmes Lur'e avec commande saturée

On va considérer, maintenant, les systèmes non-autonomes : systèmes composés d'une partie linéaire, d'une non-linéarité par rapport à la sortie et d'une entrée saturée :

$$x_{k+1} = Ax_k + F\varphi(y_k) + B\text{sat}(u_k); \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.50)$$

$$y_k = Cx_k, \quad (2.51)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  et  $y_k \in \mathbb{R}^p$  sont respectivement, le vecteur d'état, l'entrée de commande et la sortie du système (2.50)-(2.51) à l'instant  $k$ . Les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $F$  et  $C$  sont des matrices réelles de dimensions appropriées. L'entrée de commande  $u_k$  est contrainte par la fonction saturation normalisée (voir définition 32, relation (1.54)). Le vecteur  $\rho \in \mathbb{R}^m$ , lié aux limites de la saturation, est supposé connu.

Dans l'ensemble de ce chapitre, la classe de lois de commande considérée est celle utilisée dans [CMdP06], qui est similaire à celle initialement proposée dans [ALK03], pour les systèmes Lur'e en temps continu. La structure de ces lois de commande est donnée par :

$$u_k = Kx_k + \Gamma\varphi(y_k), \quad (2.52)$$

où  $K$  est la matrice de gain du retour linéaire et  $\Gamma$  la matrice de gain du retour de non-linéaire. Si  $\Gamma \neq 0_{m \times p}$ , la valeur de la non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  doit être accessible à chaque instant (voir [ALK03] pour plus de détails).

La prise en compte de la saturation se fera à l'aide de la non-linéarité de type zone morte qui vérifie une condition de secteur locale :

$$\Psi(u_k) = u_k - \text{sat}(u_k). \quad (2.53)$$

Cela conduit, en tenant compte de la classe de commande  $u_k$  donnée par (2.52) et (2.53) dans (2.50), au modèle en boucle fermée suivant :

$$x_{k+1} = A_{\text{cl}}x_k + F_{\text{cl}}\varphi(y_k) - B\Psi(u_k), \quad (2.54)$$

où  $A_{\text{cl}} = A + BK$  et  $F_{\text{cl}} = F + B\Gamma$ .

**Remarque 47** De façon similaire au cadre d'analyse de stabilité globale pour le système Lur'e (2.1)-(2.2), il est supposé que les gains de la loi de commande (2.52) sont définis de telle manière que les matrices  $A_{\text{cl}}$  et  $A_{\text{cl}} + F_{\text{cl}}\Omega C$  du modèle (2.54) soient du type Schur.

Définissons maintenant l'ensemble suivant associé à la zone morte, qui vérifie une condition de secteur généralisée locale. Pour une matrice  $L \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$  donnée, l'ensemble  $\mathcal{S}(L, \rho)$  est défini par :

$$\mathcal{S}(L, \rho) = \{\phi \in \mathbb{R}^{n+p}; -\rho \leq L\phi \leq \rho\}. \quad (2.55)$$

**Lemme 48** Notons les matrices  $\widehat{K} = [K \ \Gamma] \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$  et  $\widehat{J} = [J_1 \ J_2]$ , avec  $J_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $J_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}$ . Si le vecteur  $\widehat{x}_k = (x'_k \ \varphi'(y_k))'$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{S}(\widehat{K} - \widehat{J}, \rho)$ , alors la non-linéarité  $\Psi(u_k)$  satisfait la condition de secteur suivante :

$$SC_{u_k,(\ell)} = \Psi'_{(\ell)}(u_k) [\Psi(u_k) - J_1 x_k - J_2 \varphi(y_k)]_{(\ell)} \leq 0, \quad \forall \ell \in \{1, \dots, m\}, \quad (2.56)$$

avec  $u_k$  donnée par l'équation (2.52). ■

**Preuve 49** La preuve suit celle de [TPG06, Lemme 1]. □

La classe des systèmes étudiés étant présentée et les résultats préliminaires donnés, les objectifs envisagés par la suite de ce chapitre sont de proposer des méthodes, en considérant notre fonction de Lyapunov comme principal outil, pour résoudre les deux problèmes suivants :

**Problème 50** (Analyse de stabilité locale) Pour des gains  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times p}$  de la loi de commande (2.52) donnés, déterminer une région dans l'espace des états initiaux, aussi grande que possible, incluse dans le bassin d'attraction  $\mathcal{B}_0$  du système (2.54).

**Problème 51** (Stabilisation en boucle-fermée) Déterminer les gains de la loi de commande (2.52) et une région dans l'espace des conditions initiales aussi grande que possible, incluse dans le bassin d'attraction de l'origine  $\mathcal{B}_0$ , tels que la stabilité asymptotique locale du système en boucle fermée (2.54) soit assurée.

Pour résoudre ces deux problèmes, la caractéristique de non-connexité et non-convexité de la ligne de niveau de notre fonction sera pleinement utilisée par la suite lors de l'estimation du bassin d'attraction.

## 2.5 Analyse de stabilité locale

La stabilité locale de cette classe de systèmes a déjà été étudiée en considérant la fonction de Lyapunov quadratique dans [CMdP06]. Cela conduit à des estimées de bassin d'attraction sous forme ellipsoïdale, non adaptée à la présence de la non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  dans la dynamique du système (2.54). À l'aide du théorème suivant, une méthode fondée sur notre fonction  $V(x; \varphi(Cx))$  et sa ligne de niveau  $L_V(1)$ , est proposée pour résoudre le problème 50.

**Théorème 52 ([GJD12b])** Soient des matrices  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times p}$  données. Considérons comme variables d'optimisation, les matrices  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $J_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $J_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}$ , une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , une matrice diagonale semi-définie positive  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et des matrices diagonales définies positives  $Q, R, T, W \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et un scalaire  $\mu$ . Si le problème d'optimisation suivant

$$\min_{\mu, G, P, J_1, J_2, Q, R, T, W, \Delta} \mu$$

sous des contraintes LMI :

$$\begin{bmatrix} P - G' - G & G' A_{cl} & G' F_{cl} & -G' B & 0_{n \times p} \\ \star & -P & \Pi_1 & J'_1 & A'_{cl} \Pi_2 \\ \star & \star & -2T & J'_2 & F'_{cl} \Pi_2 \\ \star & \star & \star & -2I_m & -B' \Pi_2 \\ \star & \star & \star & \star & -2W \end{bmatrix} < 0_{2n+2p+m}, \quad (2.57)$$

$$\begin{bmatrix} P & \Pi_3 & (K - J_1)'_{(\ell)} \\ \star & 2Q & (\Gamma - J_2)'_{(\ell)} \\ \star & \star & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} > 0_{2n+p+1}, \quad (2.58)$$

$\forall \ell = 1, \dots, m, \text{ et}$

$$\begin{bmatrix} \mu I_n - P & -\Pi_4 \\ \star & 2R \end{bmatrix} > 0_{n+p}, \quad (2.59)$$

où

$$\Pi_1 = C' \Omega [T - \Delta]; \quad \Pi_2 = C' \Omega [W + \Delta], \quad (2.60)$$

$$\Pi_3 = C' \Omega [\Delta - Q]; \quad \Pi_4 = C' \Omega [R + \Delta], \quad (2.61)$$

admet une solution, alors une estimation du bassin d'attraction  $\mathcal{B}_0$  est donnée par la ligne de niveau  $L_V(1)$  de la fonction de Lyapunov (2.13). ■

L'esprit de la preuve est schématisé sur la Figure 2.6. L'inégalité (2.57) assure que la fonction de Lyapunov décroît si la condition de secteur locale (2.56) est vérifiée. Cette condition de secteur est vérifiée sur un ensemble  $\mathcal{S}(\hat{K} - \hat{J}, \rho)$ . L'inclusion  $L_V(1) \subset \mathcal{S}(\hat{K} - \hat{J}, \rho)$  correspond à l'inégalité (2.58) et l'inclusion  $\mathcal{E}(\mu I_n) \subset L_V(1)$  à l'inégalité (2.59). Enfin le problème d'optimisation cherche la plus grande boule  $\mathcal{E}(\mu I_n)$  et donc le plus grand ensemble  $L_V(1)$ .

**Preuve 53** Si l'inégalité (2.57) est vérifiée, elle implique  $P - G' - G < 0$  et  $P > 0$ , tels que  $G$  est de rang plein, et  $-G' P^{-1} G \leq P - G' - G$ , [DB01]. Ceci implique l'inégalité

$$\begin{bmatrix} -G' P^{-1} G & G' A_{cl} & G' F_{cl} & -G' B & 0_{n \times p} \\ \star & -P & \Pi_1 & J'_1 & A'_{cl} \Pi_2 \\ \star & \star & -2T & J'_2 & F'_{cl} \Pi_2 \\ \star & \star & \star & -2I_m & -B' \Pi_2 \\ \star & \star & \star & \star & -2W \end{bmatrix} < 0_{2n+2p+m}. \quad (2.62)$$

En appliquant le changement de base  $\text{diag}(G^{-1}; I_{n+2p+m})$  suivi par un complément de Schur (voir [BEFB94]), nous obtenons l'inégalité

$$\begin{bmatrix} A'_{cl} \\ F'_{cl} \\ -B' \\ 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A'_{cl} \\ F'_{cl} \\ -B' \\ 0 \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} -P & C' \Omega [T - \Delta] & J'_1 & A'_{cl} C' \Omega [W + \Delta] \\ \star & -2T & J'_2 & F'_{cl} C' \Omega [W + \Delta] \\ \star & \star & -2I_m & -B' C' \Omega [W + \Delta] \\ \star & \star & \star & -2W \end{bmatrix} < 0_{n+2p+m}. \quad (2.63)$$

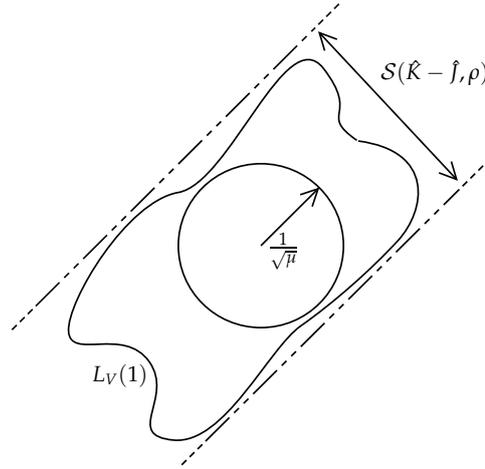


FIGURE 2.6 – Principe de la démonstration

Ensuite, en post-multipliant l'inégalité (2.63) par  $(x'_k \ \varphi'(y_k) \ \Psi'(u_k) \ \varphi'(y_{k+1}))' \neq 0$  et pré-multipliant par sa transposée, nous avons

$$\delta_k V - 2 \sum_{\ell=1}^m SC_{u_k,(\ell)} - 2SC(\varphi(\cdot), y_{k+1}, W) - 2SC(\varphi(\cdot), y_k, T) < 0 \quad \forall x_k \neq 0. \quad (2.64)$$

En appliquant le complément de Schur sur l'inégalité (2.58) par rapport au dernier bloc, nous obtenons l'inégalité

$$\begin{bmatrix} P & \Pi_3 \\ \star & 2Q \end{bmatrix} - \frac{1}{\rho_{(\ell)}^2} \begin{bmatrix} (K - J_1)'_{(\ell)} \\ (\Gamma - J_2)'_{(\ell)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (K - J_1)'_{(\ell)} \\ (\Gamma - J_2)'_{(\ell)} \end{bmatrix} > 0_{n+p}. \quad (2.65)$$

Si nous post-multiplions l'inégalité (2.65) par  $\hat{x}_k = (x'_k \ \varphi'(y_k))'$  et la pré-multiplions par  $\hat{x}_k$ , cela mène à l'inégalité

$$V(x_k; \varphi(y_k)) + 2SC(\varphi(\cdot), y_k, Q) \geq \frac{1}{\rho_{(\ell)}^2} \left\| (\hat{K} - \hat{J})_{(\ell)} \hat{x}_k \right\|^2. \quad (2.66)$$

Comme la non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  vérifie la condition de secteur (2.3) globalement, en identifiant  $\hat{K}$  et  $\hat{J}$  qui sont définis dans le Lemme 48, nous avons

$$V(x_k; \varphi(y_k)) \geq \frac{1}{\rho_{(\ell)}^2} \left\| (\hat{K} - \hat{J})_{(\ell)} \hat{x}_k \right\|^2. \quad (2.67)$$

Cela implique

$$L_V(1) \subset \mathcal{S}(\hat{K} - \hat{J}, \rho). \quad (2.68)$$

Donc, la condition de secteur généralisée (48), liée à la zone-morte, est vérifiée dans l'ensemble  $L_V(1)$ . De la même manière, si l'inégalité (2.59) est post-multipliée par  $\hat{x}_0 = (x'_0 \ \varphi'(Cx_0))'$  et pré-multipliée par sa transposée, nous avons l'inégalité suivante

$$\mu x'_0 x_0 + 2SC(\varphi(\cdot), Cx_0, R) \geq V(x_0; \varphi(Cx_0)). \quad (2.69)$$

Comme la non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  vérifie la condition de secteur (2.3), il vient

$$\mathcal{E}(\mu I_n) \subset L_V(1). \quad (2.70)$$

Grâce à l'inclusion (2.68), la condition de secteur locale  $SC_{u_k} \leq 0$  pour la zone-morte est vérifiée dans l'ensemble  $L_V(1)$ . Cela implique, en considérant aussi l'inégalité (2.64), que  $\delta_k V < 0, \forall x \in L_V(1) (x \neq 0)$ . Ainsi, la stabilité asymptotique locale est prouvée dans l'ensemble  $L_V(1)$ . Finalement, en minimisant  $\mu$ , nous maximisons le rayon de la boule  $\mathcal{E}(\mu I_n)$  incluse dans  $L_V(1)$ , à l'aide de l'inégalité (2.69).  $\square$

**Remarque 54** Le problème d'optimisation du théorème 52 exige une définition de la taille de notre ensemble  $L_V(1)$ . En revanche, cet ensemble dépend de la forme de la non-linéarité  $\varphi(\cdot)$ , comme illustré dans la Figure 2.3, et donc, il serait très difficile d'obtenir une formule qui pourrait être utilisée comme coût à optimiser. Nous choisissons de considérer le rayon d'une boule incluse dans l'ensemble  $L_V(1)$  comme critère. Aussi, on estimera la taille des estimations en calculant son aire approchée, a posteriori, avec les résultats obtenus par les problèmes d'optimisation.

Deux exemples numériques sont maintenant présentés pour mettre en valeur les particularités du théorème 52. On concentrera plutôt notre comparaison avec la méthode basée sur la fonction de Lyapunov quadratique [CMdP06]. De ce fait, on doit adapter le problème d'optimisation proposé dans cette référence de façon à optimiser le même coût, c'est-à-dire, le rayon de la boule incluse dans la ligne de niveau de la fonction de Lyapunov considérée.

### Exemple 55 ([GJD12b])

Considérons le système (2.50)-(2.51) contrôlé par un retour d'état linéaire  $n = 2; p = m = 1; \rho = 1.5, \Omega = 0.9$ , où  $\varphi(y) = \Omega \frac{y(1+\cos(20y))}{2}$ . Les matrices sont :

$$A = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.4 \\ 0.6 & 0.95 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.2 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.2 \end{bmatrix}; C = [-0.5 \quad 0.9].$$

L'ensemble des LMIs de [CMdP06] fournissent  $K = [-0.3324 \quad -1.0006]$  et nous désirons estimer le bassin d'attraction. L'estimation est alors réalisée en considérant d'une part la méthode fondée sur la fonction quadratique [CMdP06], et d'autre part en appliquant le théorème 52 qui génère les résultats numériques suivants :  $\mu = 0.2810, \Delta = W = R = 0.0381; T = 0.2424; Q = 0.2323; J_2 = 0.5188$  :

$$P = \begin{bmatrix} 0.0418 & 0.0173 \\ 0.0173 & 0.2305 \end{bmatrix}; J_1 = [-0.0804 \quad -0.6335].$$

A propos de l'estimation du bassin d'attraction  $\mathcal{B}_0$ , nous pouvons voir, dans la Figure 2.7, que notre estimation présente des ensembles non-connexes (ligne pleine). On reporte aussi sur cette figure les ellipsoïdes extérieure et intérieure (ligne tirets points), l'estimation donnée par la fonction quadratique de [CMdP06] (ligne tirets points en trait forcé) et la plus grande boule  $\mathcal{E}(\mu I_n)$  (ligne tirets). Pour cet exemple, on remarque

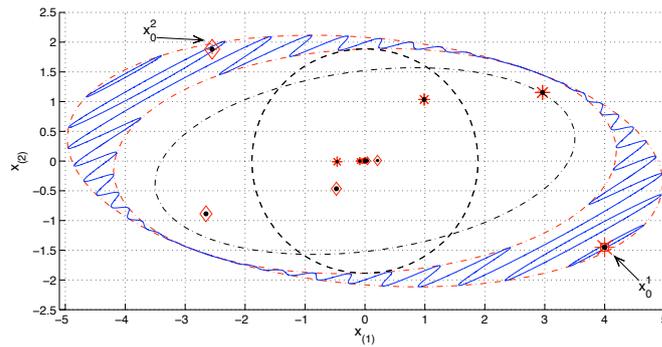


FIGURE 2.7 – L’estimation non-connexe  $L_V(1)$  (ligne pleine) donnée par théorème 52. Ellipsoïde liée à [CMdP06] (ligne tirets points en trait forcé). Deux trajectoires pour deux différentes conditions initiales dans l’ensemble  $L_V(1)$  :  $x_0^1$  et  $x_0^2$ . La plus grande boule  $\mathcal{E}(\mu I_n)$  et les ellipsoïdes extérieures et intérieures de  $L_V(1)$  (ligne tirets points en trait clair).

que l’ellipsoïde liée à la méthode de [CMdP06] est incluse dans notre estimation, l’ensemble  $L_V(1)$ . Si nous calculons l’aire des régions données par les deux méthodes, nous obtenons  $\mathcal{A} = 17.0252$  pour la méthode de [CMdP06] et  $\mathcal{A}_{L_V(1)} = 28.3666$  pour la notre, c’est-à-dire, une amélioration de 67.34% pour l’estimation du bassin d’attraction.

Deux conditions initiales,  $x_0^1 = (4; -1.45)'$  et  $x_0^2 = (-2.55; 1.88)'$ , sont indiquées sur la Figure 2.7. Les deux sont placées dans des sous-ensembles de  $L_V(1)$  ne contenant pas l’origine. Les trajectoires associées sont représentées par des point-étoiles et point-diamants respectivement. Nous signalons que les deux trajectoires sont asymptotiquement stables et que l’ensemble des points de la trajectoire appartient à un des ensembles de  $L_V(1)$ .

Ensuite, pour illustrer la stabilité asymptotique des trajectoires, nous avons tracé les points de la trajectoire de ce système à partir de  $x_0^1$ . De plus, la ligne de niveau de notre fonction :  $L_V(\gamma = V(x_k; \varphi(y_k)))$ ; avec  $k = 1; 2; 3; 4$ , sont donnés sur les Figures : 2.8-2.9-2.10-2.11.

Dans chacune des figures, nous présentons  $L_V(V(x_{k-1}; \varphi(y_{k-1})))$  ( $L_V(1)$  dans la première) avec une ligne en trait claire et  $L_V(V(x_k; \varphi(y_k)))$  avec une ligne en trait forcé. Il est possible de voir qu’à chaque pas, la région de la ligne de niveau diminue et finit par converger vers un ensemble unique autour de l’origine.

Les Figures 2.12 et 2.13 illustrent l’évolution de deux trajectoires :  $x_k^1$  et  $x_k^2$ . De plus, le signal de contrôle et la fonction de saturation sont tracées ainsi que les limites d’actionneur (tirets). Ainsi, la propriété de la stabilité asymptotique est vérifiée. Les composantes du vecteur d’état sont représentées par ‘+’ pour  $x_{k,(1)}$  et ‘x’ pour  $x_{k,(2)}$ .

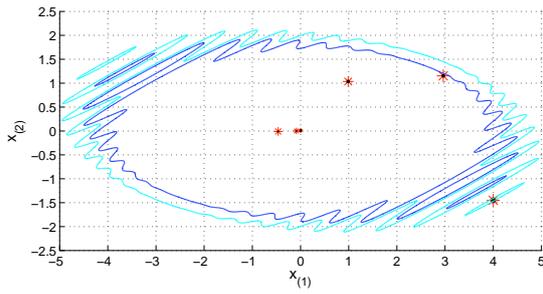


FIGURE 2.8 –  $L_V(V(x_1; \varphi(y_1)))$ ;  $L_V(1)$  (trait clair).

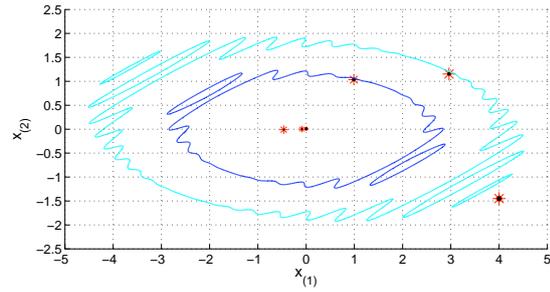


FIGURE 2.9 –  $L_V(V(x_2; \varphi(y_2)))$ ;  $L_V(V(x_1; \varphi(y_1)))$  (trait clair).

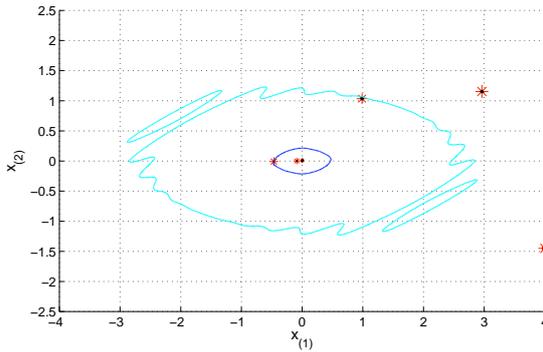


FIGURE 2.10 –  $L_V(V(x_3; \varphi(y_3)))$ ;  $L_V(V(x_2; \varphi(y_2)))$  (trait clair).

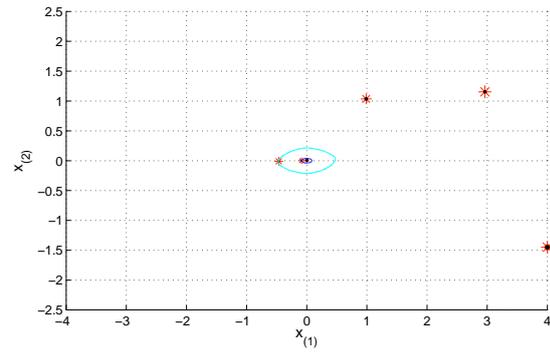


FIGURE 2.11 –  $L_V(V(x_4; \varphi(y_4)))$ ;  $L_V(V(x_3; \varphi(y_3)))$  (trait clair).

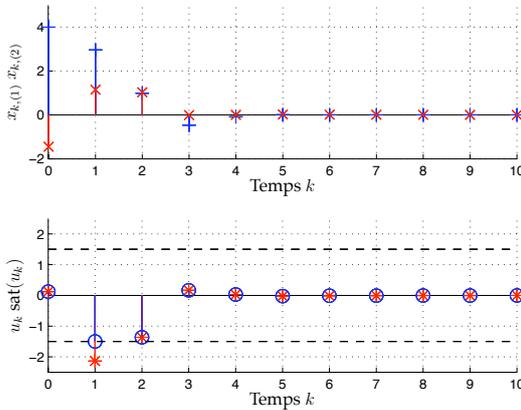


FIGURE 2.12 – Réponse temporelle de la trajectoire  $x_k^1$ ; le signal  $u_k$  (étoile),  $\text{sat}(u_k)$  ('o') et ses limites (tirets).

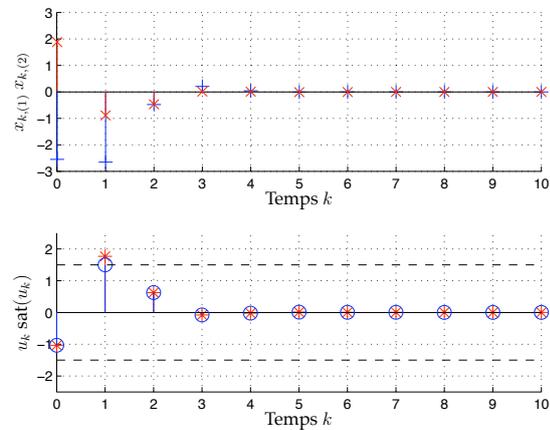


FIGURE 2.13 – Réponse temporelle de la trajectoire  $x_k^2$ ; le signal de contrôle  $u_k$  (étoile), la fonction  $\text{sat}(u_k)$  ('o') et ses limites (tirets).

**Exemple 56 ([GJD12b])**

Considérons, maintenant, le système (2.50)-(2.51) avec  $n = p = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\rho = 5$ ,  $\Omega_{(1)} = 1.5$ ,  $\Omega_{(2)} = 1$  et  $\varphi_{(\ell)}(y) = \Omega_{(\ell)} \frac{y_{(\ell)}(1+\cos(30y_{(\ell)}))}{2} \forall \ell = 1, 2$ . Les matrices sont :

$$A = \begin{bmatrix} -0.5222 & -1.1556 \\ -1.0111 & 0.9222 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} 0.0798 & 0.6812 \\ -0.7494 & 1.1863 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.2873 & -1.6615 \\ -0.9935 & -1.1436 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.0489 \\ -1.0918 \end{bmatrix}.$$

Les gains de la commande  $K = [-1.2209 \quad 0.4497]$  et  $\Gamma = [-0.7030 \quad 1.5212]$  sont donnés par la méthode de [CMdP06], associés à la valeur pour le critère  $\mu = 1.2018$ . Nous appliquons alors le Théorème 52. On obtient  $\mu = 1.1433$  comme solution du problème d'optimisation. Les valeurs numériques trouvées sont données par :

$$P = G = \begin{bmatrix} 0.1982 & 0.1935 \\ 0.1935 & 0.5204 \end{bmatrix}; \Delta = W = R = \begin{bmatrix} 0.0069 & 0 \\ 0 & 0.1036 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0578 & 0 \\ 0 & 0.1767 \end{bmatrix}; T = \begin{bmatrix} 0.0032 & 0 \\ 0 & 0.1174 \end{bmatrix}.$$

Notre estimation du bassin d'attraction  $\mathcal{B}_0$  est tracée dans la Figure 2.14 (ligne pleine), ainsi que la solution de [CMdP06] (ligne tirets points) et la plus grande boule  $\mathcal{E}(\mu I_n)$  (ligne tirets). L'aire des deux régions sont  $\mathcal{A}_\varepsilon = 7.69$  pour [CMdP06] et  $\mathcal{A}_{L_V(1)} = 9.7299$ , ce qui signifie une augmentation de 26.53% de l'estimation de  $\mathcal{B}_0$  en appliquant notre méthode.

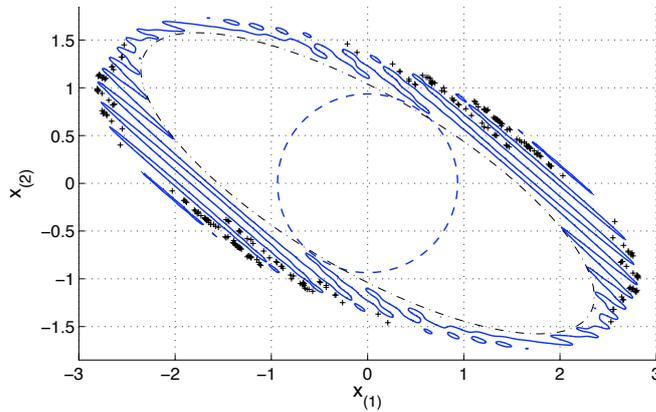


FIGURE 2.14 –  $L_V(1)$  (ligne pleine) obtenue par le Théorème 52; Ellipsoïde liée à la méthode de [CMdP06] (ligne tirets points) et la plus grande boule  $\mathcal{E}(\mu I_n)$  incluse dans  $L_V(1)$  (ligne tirets). Les marqueurs '+' indiquent des conditions initiales  $x_0 = (x_{0,(1)}; x_{0,(2)})'$  pour lesquelles les trajectoires associées sont instables.

Le théorème 52 établit des conditions suffisantes pour la stabilité. La question de l'écart entre l'estimation donnée par  $L_V(1)$  et le bassin d'attraction se pose. En d'autres termes, existe-t-il une meilleure estimation (par exemple, l'ellipsoïde extérieure  $\mathcal{E}(P)$ ) ?

Pour tenter une réponse à cette question, nous avons analysé différentes trajectoires issues de conditions initiales  $x_0 \in \mathcal{E}(P)$  sur une grille de pas 0.01. Les conditions initiales associées à des trajectoires instables sont représentées par des marqueurs '+' sur la Figure 2.14. De nombreux points  $x_0 \in \mathcal{E}(P)/L_V(1)$  engendrent une trajectoire instable. L'ensemble  $\mathcal{E}(P)$  n'est donc pas une estimation du bassin d'attraction pour cette non-linéarité  $\varphi(\cdot)$ . De plus on voit bien que l'ensemble  $L_V(1)$  entoure de façon adaptée ces états initiaux générant des trajectoires instables.

### 2.5.1 Discussions concernant l'estimation de $\mathcal{B}_0$

Le théorème 52 établit que l'ensemble  $L_V(1)$  est une estimation du bassin d'attraction du système (2.50)-(2.51) en considérant la non-linéarité  $\varphi(Cx)$ . Cet ensemble dépend de la non-linéarité et des matrices  $P$  et  $\Delta$ , qui sont obtenues par le problème d'optimisation proposé dans ce théorème.

En revanche, il est important de noter que les conditions sous forme LMI considérées comme contraintes de notre problème ne dépendent pas de la non-linéarité. Elles prennent en compte uniquement la limite du secteur qui la borne c'est-à-dire la matrice  $\Omega$ . Par conséquent, le théorème 52 est aussi capable de résoudre le problème 50 en fournissant une estimation du bassin d'attraction, l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(P + 2C'\Omega'\Delta\Omega C, 1)$ , même dans le cas où la non-linéarité  $\varphi(Cx)$  est inconnue. Pour améliorer cette estimation, il faudrait connaître la non-linéarité et, ainsi, pouvoir tracer l'ensemble  $L_V(1)$ .

Nous allons illustrer ce point en reprenant l'exemple 55 avec les mêmes paramètres : les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $F$ ,  $C$ ,  $\Omega$  et la limite de saturation. Ainsi, les valeurs numériques solutions du problème d'optimisation sont les mêmes que celles présentées antérieurement. En revanche, nous supposons différents cas où le système est sujet à d'autres fonctions non-linéaires qui vérifient la même condition de secteur :

- 1) le demi-cercle (2.12) qui vérifie la condition de secteur pour  $\Omega = 0.9$  ;
- 2)  $\varphi(y) = 0.5\Omega y(1 + e^{-\frac{y^2}{2}})$  ;
- 3)  $\varphi(y) = 0$  ;
- 4)  $\varphi(y) = \Omega y$ .
- 5)  $\varphi(y) = 0.5\Omega y(1 + \cos(20y))$  considérée dans l'exemple ;

Dans les Figures 2.15, 2.16, 2.17, 2.18 et 2.19, nous avons tracé l'ensemble  $L_V(1)$ , correspondants à chacune des non-linéarités  $\varphi(y)$  listées précédemment : 1), 2), 3), 4), 5), respectivement. Dans cet ensemble de figures, nous avons représenté l'ensemble  $L_V(1)$  par une ligne pleine et les ellipsoïdes extérieure  $\mathcal{E}(P, 1)$  et intérieure  $\mathcal{E}(P + 2C'\Omega'\Delta\Omega C, 1)$  par des lignes tirets points.

Afin d'indiquer que le bassin d'attraction de ce système change pour des non-linéarités différentes, nous avons évalué les trajectoires générées à partir des conditions initiales dans la région de l'espace d'état :  $-5 \leq x_{0,(1)} \leq 5$  et  $-3.5 \leq x_{0,(2)} \leq 3.5$  dans chacun des cas. Nous avons utilisé une grille de pas 0.01, et les conditions initiales générant des trajectoires instables ont été signalées par un marqueur '+'.

Comme attendu, les conditions initiales associées à des trajectoires instables changent en fonction des non-linéarités. Il est important de noter que l'analyse en considérant la

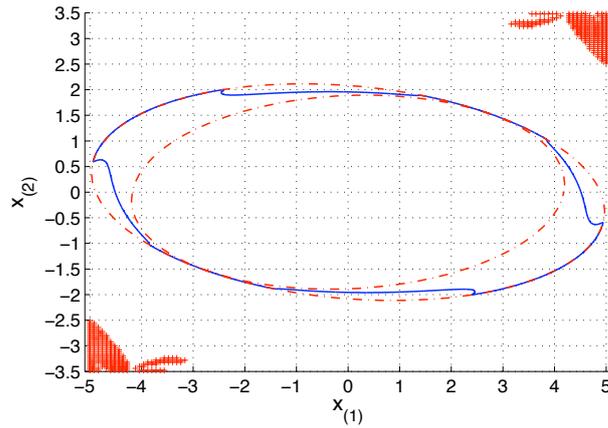


FIGURE 2.15 –  $L_V(1)$  pour  $\varphi(y)$  du type **1**, le demi-cercle, et des conditions initiales menant à des trajectoires instables.

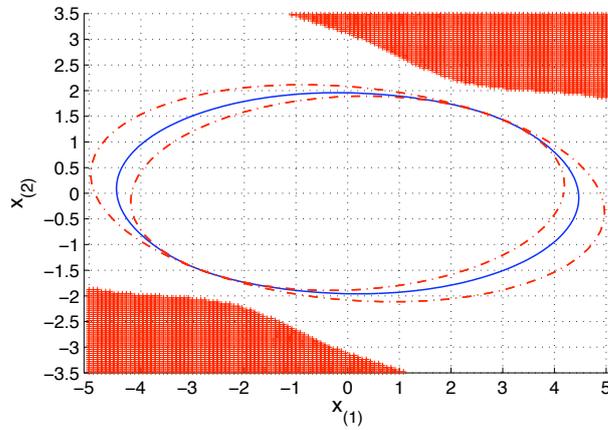


FIGURE 2.16 –  $L_V(1)$  et pour  $\varphi(y)$  du type **2**, et des conditions initiales menant à des trajectoires instables.

non-linéarité du type **5**) indique des conditions initiales  $x_0$  appartenant à l'ellipsoïde extérieure  $\mathcal{E}(P, 1)$  qui se situent entre les sous-ensembles non-connectés de  $L_V(1)$ . De plus, nous pouvons regarder qu'une estimation du bassin d'attraction pour ce système est toujours donnée, au moins, par l'ellipsoïde intérieure  $\mathcal{E}(P + 2C'\Omega'\Delta\Omega C, 1)$ .

## 2.5.2 Raffinement du problème d'optimisation

L'ensemble des conditions LMIs du théorème 52 est obtenu en considérant une pondération unitaire pour chacune des conditions de secteur de la zone morte  $\text{SC}_{u_k,(\ell)}$  ( $\forall \ell = 1, \dots, m$ ). On aurait pu aussi associer une variable scalaire  $\alpha_{(\ell)} > 0 \in \mathbb{R}, \forall \ell \in \{1, \dots, m\}$  à chacune de ces conditions. Ainsi, nous avons que la somme de ces conditions de secteur est équivalente à :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^m \alpha_{(\ell)} \text{SC}_{u_k,(\ell)} &= \sum_{\ell=1}^m \alpha_{(\ell)} \Psi'_{(\ell)}(u_k) [\Psi(u_k) - J_1 x_k - J_2 \varphi(y_k)]_{(\ell)} \\ &= \Psi'(u_k) U^{-1} [\Psi(u_k) - J_1 x_k - J_2 \varphi(y_k)] \leq 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

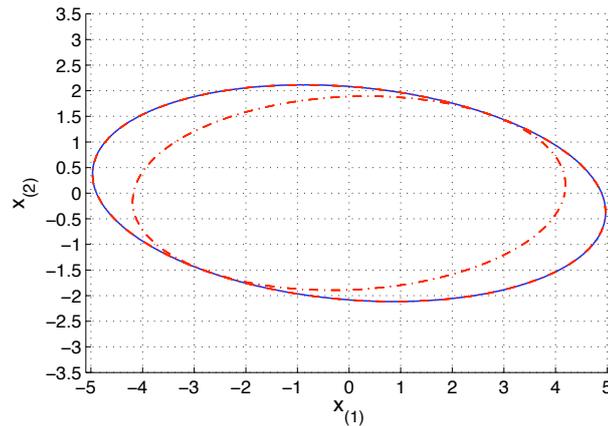


FIGURE 2.17 –  $L_V(1)$  pour  $\varphi(y)$  du type **3**), et des conditions initiales menant à des trajectoires instables.

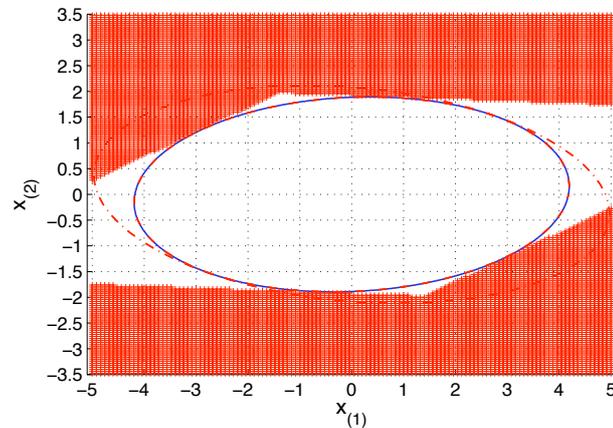


FIGURE 2.18 –  $L_V(1)$  pour  $\varphi(y)$  du type **4**), et des conditions initiales menant à des trajectoires instables.

Dans ce cas, l'inégalité (2.57) devient une inégalité bilinéaire en les variables matricielles (BMI). Deux approches pourraient être considérées afin de traiter ce problème :

- Imposer un scalaire commun  $\alpha_{(\ell)} = \alpha, \forall \ell = 1, \dots, m$ , qui est équivalent à  $U^{-1} = \alpha I_m$ , et réaliser une recherche en ligne sur ce paramètre.
- utiliser cette forme matricielle  $U^{-1} = \text{diag}((\alpha_{(1)} \dots \alpha_{(m)})) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et appliquer un algorithme itératif, [GPC01].

Dans le cas scalaire ( $m = 1$ ), ces deux méthodes sont identiques. Une comparaison est effectuée avec les résultats indiqués précédemment. La Figure 2.20 reporte la valeur  $\mu$  comme fonction du paramètre  $\alpha \in [0.1, 20]$ . Notons que pour  $\alpha \in [0.1, 0.5]$ , le problème d'optimisation n'est pas faisable. La valeur minimale  $\mu = 0.2789$  est obtenue pour  $\alpha = 1.23$ .

Nous présentons, dans la table 2.1, la valeur du critère et l'aire estimée de  $L_V(1)$ , données par le problème d'optimisation du théorème 52 et les valeurs associées à la pondération  $\alpha = 1.23$ . Dans ce cas, le choix de considérer  $\alpha = 1$  n'est pas très conser-

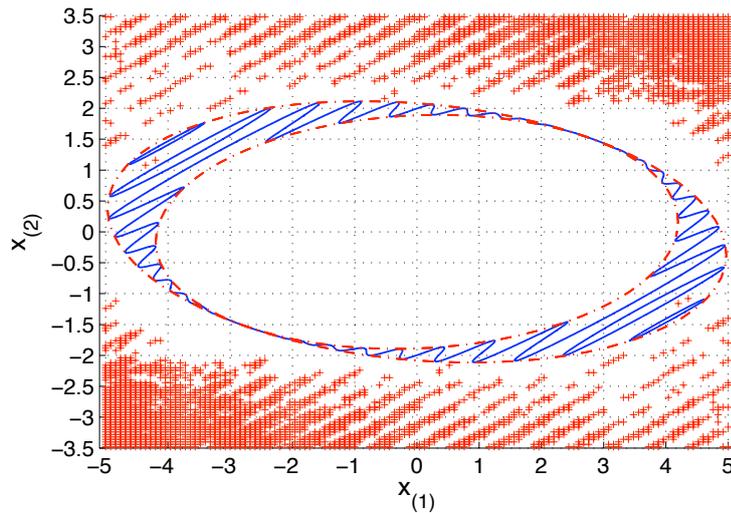


FIGURE 2.19 –  $L_V(1)$  pour  $\varphi(y)$  du type 5) et des conditions initiales menant à des trajectoires instables.

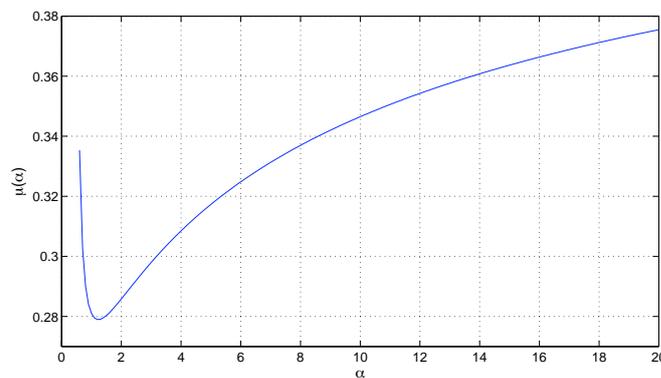


FIGURE 2.20 – Le rayon  $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$  de la boule  $\mathcal{E}(\mu I_n)$  fonction du paramètre  $\alpha$ .

vatif. Le rapport relatif entre les valeurs données par les deux méthodes a été calculé en considérant la relation suivante :

$$r = \frac{|\text{théorème } 52_{\alpha=1.23} - \text{théorème } 52_{\alpha=1}|}{\text{théorème } 52_{\alpha=1}} \times 100$$

|                             | théorème 52  |                 |            |
|-----------------------------|--------------|-----------------|------------|
|                             | $\alpha = 1$ | $\alpha = 1.23$ | Rapport r% |
| $\mu$                       | 0.2810       | 0.2789          | 0.75%      |
| Aire $\mathcal{A}_{L_V(1)}$ | 28.3666      | 26.6061         | 6.21%      |

TABLE 2.1 – Les résultats du théorème 52 ( $\alpha = 1$ ) et la solution obtenue avec  $\alpha = 1.23$ . La valeur  $\mu$  est liée à la taille de la boule  $\mathcal{E}(\mu I_n)$  et  $\mathcal{A}_{L_V(1)}$  est l'aire de  $L_V(1)$ .

Dans la section suivante, on aborde le problème de synthèse de commande pour la classe de systèmes (2.50)-(2.51). Dans ce cas, nous utiliserons la forme matricielle pour les pondérations :  $U^{-1} = \text{diag}((\alpha_{(1)} \dots \alpha_{(m)})) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et donc les contraintes seront sous forme bilinéaire. Dans un premier temps, nous les considérons avec des variables duales et un algorithme itératif. Nous proposerons, aussi, une technique de linéarisation qui nous mènera à des conditions suffisantes sous forme LMI.

## 2.6 Synthèse de loi de commande

Dans le théorème 52, on a établi des conditions suffisantes pour traiter le problème d'analyse de stabilité locale en considérant les gains de la loi de commande donnés. Néanmoins, on s'intéresse aussi à développer une méthode fondée sur la nouvelle fonction de Lyapunov proposée pour faire la synthèse de commande pour cette même classe de systèmes.

### 2.6.1 Formulation BMI

Le théorème suivant propose des conditions suffisantes pour résoudre le problème 51.

**Théorème 57 ([GJDC11b])** *Considérons les variables d'optimisation suivantes : une matrice symétrique définie positive  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , des matrices diagonales définies positives  $H, E \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , une matrice diagonale semi-définie positive  $O \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , des matrices  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_1$  and  $Z_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $Y_2$  et  $Z_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}$  et un scalaire  $\mu$ . Si le problème d'optimisation*

$$\min_{\mu, G, S, O, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, U, H, E} \mu$$

sous les contraintes :

$$\begin{bmatrix} \mu I_n & -C'\Omega [I_p + O] & I_n \\ \star & 2E & 0_{p \times n} \\ \star & \star & S \end{bmatrix} > 0_{2n+p}, \quad (2.72)$$

$$\begin{bmatrix} G + G' - S & G'C'\Omega [O - H] & (Y_1 - Z_1)'_{(\ell)} \\ \star & 2EH & (Y_2 - Z_2)'_{(\ell)} \\ \star & \star & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} > 0_{n+p+1}, \forall \ell = 1, \dots, m \quad (2.73)$$

$$\begin{bmatrix} -S & AG + BY_1 & FE + BY_2 & -BU & 0_{n \times p} \\ \star & S - G' - G & G'C'\Omega [H - O] & Z_1' & (AG_i + BY_1)'C'\Omega [I_p + O] \\ \star & \star & -2EH & Z_2' & (FE + BY_2)'C'\Omega [I_p + O] \\ \star & \star & \star & -2U & -UB'C'\Omega [I_p + O] \\ \star & \star & \star & \star & -2E \end{bmatrix} < 0_{2n+2p+m}, \quad (2.74)$$

a une solution alors une solution du problème 51 est donnée par :

$$K = Y_1 G^{-1}; \Gamma = Y_2 E^{-1} \quad (2.75)$$

et une estimation du bassin d'attraction  $\mathcal{B}_0$  est donnée par l'ensemble  $L_V(1)$ , induit par la fonction de Lyapunov (2.13). ■

**Preuve 58** De façon similaire à la preuve du théorème 52, si l'inégalité (2.74) est satisfaite, en considérant le changement des variables (2.75),  $P = S^{-1}$ ,  $\Delta = OE^{-1}$ ,  $T = HE^{-1}$ ,  $W = E^{-1}$ ,  $J_1 = Z_1G^{-1}$ ,  $J_2 = Z_2E^{-1}$  et si l'on applique le changement de base  $\text{diag}(I_n; G^{-1}; E^{-1}; U^{-1}; E^{-1})$  et le complément de Schur, l'inégalité (2.74) est équivalente à l'inégalité :

$$\begin{bmatrix} A'_{\text{cl}} \\ F'_{\text{cl}} \\ -B' \\ 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A'_{\text{cl}} \\ F'_{\text{cl}} \\ -B' \\ 0 \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} -P & C'\Omega [T - \Delta] & (U^{-1}J_1)' & A'_{\text{cl}}C'\Omega [W + \Delta] \\ \star & -2T & (U^{-1}J_2)' & F'_{\text{cl}}C'\Omega [W + \Delta] \\ \star & \star & -2U^{-1} & -B'C'\Omega [W + \Delta] \\ \star & \star & \star & -2W \end{bmatrix} < 0_{n+2p+m}. \quad (2.76)$$

Cela implique l'inégalité (2.64) redéfinie avec la matrice  $U^{-1} = \text{diag}((\alpha_{(1)} \dots \alpha_{(m)})) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  associée aux pondérations de la condition de secteur de la zone morte :

$$\delta_k V - 2 \sum_{\ell=1}^m \alpha_{(\ell)} \text{SC}_{u_k,(\ell)} - 2\text{SC}(\varphi(\cdot), y_{k+1}, W) - 2\text{SC}(\varphi(\cdot), y_k, T) < 0 \quad \forall x_k \neq 0. \quad (2.77)$$

De plus, si l'inégalité (2.72) est satisfaite, les changements de variables précités et le changement de base  $\text{diag}(I_n; E^{-1}; S^{-1})$ , mène à l'inégalité (2.59), avec  $W$  la pondération de la condition de secteur (2.3). Cela implique l'inclusion  $\mathcal{E}(\mu I_n) \subset L_V(1)$ . Enfin, l'inégalité (2.73) étant vérifiée et la matrice  $G$  étant de rang plein, cela permet d'appliquer le changement de base  $\text{diag}(G^{-1}; E^{-1}; 1)$  et on obtient l'inégalité (2.58), avec une matrice de pondération  $T$ , en assurant l'inclusion (2.68). On termine la preuve de la même façon que celle du théorème 52.  $\square$

Une façon de résoudre un problème d'optimisation BMI avec un certain conservatisme consiste à fixer des variables et résoudre des LMIs. La solution obtenue est utilisée comme entrée pour des sous-problèmes successifs (schémas itératifs), [TGGQ11]. Dans cette direction, on propose un algorithme itératif décrit comme suit, [GJDC11b] :

1. Considérons donnés une matrice définie positive  $H$ , une matrice semi-définie positive  $O$  et un scalaire  $\epsilon > 0$ ;
2. Résoudre, pour toutes les autres variables, le problème d'optimisation du théorème 57 ;
3. Associer les variables  $G$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $E$  et  $U$  aux valeurs du résultat numérique trouvées au 2-ème pas. Résoudre le problème d'optimisation du Théorème 57, en considérant  $H > 0_p$ ,  $O \geq 0_p$  et les variables d'optimisation restantes.
4. Fixer  $O$  et  $H$  avec la valeur de la solution du pas 3, et répéter à partir du deuxième pas avant que le critère d'arrêt  $|\mu^{(h+1)} - \mu^{(h)}| \leq \epsilon$  ne soit vérifié ( $\mu^{(h)}$  étant la solution du problème associé à la  $h$ -ème itération) ou que le nombre maximum d'itérations  $h_{\max}$ , pré-défini, soit atteint.

Nous présentons un exemple numérique pour mettre en évidence les avantages de notre méthode pour résoudre le problème 51. Malgré la formulation non-convexe et le manque de garantie de convergence pour la solution optimale globale, on pourra illustrer la richesse de notre fonction par rapport la fonction quadratique.

**Exemple 59 ([GJDC11b])**

Considérons l'exemple donné par :  $n = 2$  ;  $p = m = 1$  ;  $\rho = 1$  et

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.7 \\ 0.5 & 1.1 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; C = [0 \quad 0.8] ; \Omega = 0.9,$$

La non-linéarité est donnée par  $\varphi(y) = 0.5\Omega y(1 + \cos(20y))$ . On indique que la matrice  $A$  n'est pas Schur,  $\lambda(A) = \{0.4; 1.6\}$ . Il en est de même pour la matrice  $A + F\Omega C$ ,  $\lambda(A + F\Omega C) = \{0.1515; 1.8455\}$ . On applique l'algorithme itératif avec  $\epsilon = 1.10^{-4}$ ,  $H = 5I_p$ ,  $O = I_p$  et les résultats numériques sont obtenus après  $i = 13 < 100 = i_{\max}$  itérations :  $U = 1.1104$  ;  $H = 4.8085$  ;  $O = 0.9788$  ;  $E = 5.4691$  ;

$$S = \begin{bmatrix} 16.6839 & -9.3905 \\ -9.3905 & 5.6991 \end{bmatrix} ; Y_1 = [-4.7098 \quad 1.6271] ; Y_2 = -4.7121 ;$$

$$G = \begin{bmatrix} 16.7107 & -9.4072 \\ -9.4074 & 5.7096 \end{bmatrix} ; Z_1 = [-2.6294 \quad 0.9882] ; Z_2 = -2.209.$$

Notre méthode donne  $\mu = 3.3397$  comme valeur du critère (une petite amélioration de 0.6219% par rapport à celle de [CMdP06],  $\mu = 3.3606$ ). En revanche, comme présenté dans la Figure 2.21, l'estimation donnée par notre méthode est meilleur (l'ensemble  $L_V(1)$  contient la plus grande ellipsoïde déterminée par la méthode de [CMdP06]). On peut conclure que l'aire de l'estimation du bassin d'attraction a été augmentée d'environ 55%,  $\mathcal{A}_{L_V(1)} = 6.89$  et  $\mathcal{A}_E = 4.39$ . L'efficacité de notre méthode de syn-

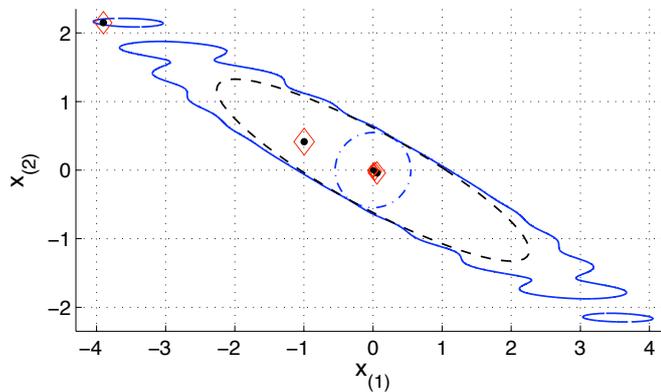


FIGURE 2.21 – L'ensemble  $L_V(1)$  non-connexe (ligne pleine), une estimation de  $\mathcal{B}_0$ , la plus grande boule (ligne tirets points) liée à la solution du problème d'optimisation, et la plus grande ellipsoïde donnée par la synthèse fondée sur la fonction quadratique (ligne tirets). La trajectoire du système pour la condition initiale,  $x_0 = (-3.9; 2.15)'$ , dans l'ensemble non-connexe  $L_V(1)$ .

thèse est aussi démontrée dans la Figure 2.21, en considérant une condition initiale  $x_0 = (-3.9; 2.15)'$  située dans un des ensembles non-connexes de  $L_V(1)$ . La trajectoire générée pour cette condition initiale est alors asymptotiquement stable et tous les

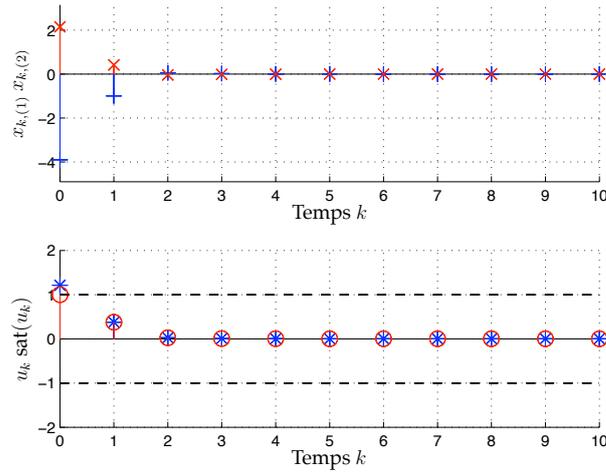


FIGURE 2.22 – Réponse temporelle  $x_k$  (en haut) :  $x_{k,(1)}$  en '+' et  $x_{k,(2)}$  en '×'. En bas, le signal de contrôle  $u_k$  (étoile) et la fonction  $\text{sat}(u_k)$  ('o').

points de la trajectoire appartiennent à notre estimation  $L_V(1)$ . La réponse temporelle et le signal de contrôle  $u_k$  sujet à la saturation  $\text{sat}(u_k)$  sont tracés dans la Figure 2.22.

La réponse temporelle est asymptotiquement stable et le signal de contrôle  $u_k$  sujet à la saturation  $\text{sat}(u_k)$  sont tracés dans la Figure 2.22.

## 2.6.2 Une linéarisation fondée sur des conditions suffisantes

Nous avons proposé une méthode pour faire la synthèse directement sous forme BMI. Nous allons, dans cette section, développer une méthode fondée sur des conditions suffisantes sous forme LMI car elles sont plus faciles à tester d'un point de vue numérique. En s'inspirant des travaux de [TQT09], nous ferons appel au lemme de Finsler, [dOS01].

**Lemme 60** (Lemme de Finsler [SIG97]) Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice symétrique et une matrice  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de rang strictement inférieur à  $n$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i)  $x^T Q x < 0, \forall Bx = 0, x \neq 0$ .
- ii)  $(B^\perp)^T Q B^\perp < 0$ .
- iii)  $\exists \mu \in \mathbb{R}$  tel que  $Q - \mu B^T B < 0$ .
- iv)  $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tel que  $Q + \mathcal{X} B + B^T \mathcal{X}^T < 0$ .

La recherche de la meilleure linéarisation a été guidée par les objectifs suivants : choisir les variables ou leurs duales ; choisir les inégalités ou leurs duales afin de réduire le nombre de produits des variables et d'éviter l'augmentation de la dimension des inégalités matricielles. Ainsi, nous travaillerons sur l'ensemble des inégalités du

théorème 52 et nous définissons les notations suivantes :

$$\mathcal{M}_0 = \begin{bmatrix} P & 0_n & 0_{n \times p} & 0_{n \times m} & 0_{n \times p} \\ \star & -P & C'\Omega[T - \Delta] & J'_1 & 0_{n \times p} \\ \star & \star & -2T & J'_2 & 0_p \\ \star & \star & \star & -2U & 0_{m \times p} \\ \star & \star & \star & \star & 2\Delta \end{bmatrix}; \mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} I_n \\ -(A + BK)' \\ -(F + B\Gamma)' \\ U'B' \\ 0_{p \times n} \end{bmatrix}; \quad (2.78)$$

$$\mathcal{M}'_2 = [0_{p \times n} \quad -\Omega C(A + BK) \quad -\Omega C(F + B\Gamma) \quad \Omega CBU \quad I_p], \quad (2.79)$$

qui seront considérées pour décrire la méthode de linéarisation proposée dans le théorème suivant :

**Théorème 61** *Considérons les variables d'optimisation suivantes : les matrices  $\mathcal{F}_G, X_G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K, J_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\Gamma, J_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}$ , une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice diagonale semi-définie positive  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , des matrices diagonales définies positive  $X_\Theta, \mathcal{F}_\Theta, R, Q, T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et un scalaire  $\mu$ . Si le problème d'optimisation convexe*

$$\min_{\mu, \mathcal{F}_G, X_G, P, K, J_1, \Gamma, J_2, Q, R, T, U, \mathcal{F}_\Theta, X_\Theta, \Delta} \mu$$

sous les contraintes LMIs : (2.58), (2.59) et

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_0 - \mathbf{He}(\text{diag}[X_G; 0_{(n+p+m)}; X_\Theta]) & \star & \star \\ \mathcal{M}'_1 - (X_G + \mathcal{F}'_G) \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times (n+2p+m)} \end{bmatrix} & -\mathbf{He}(\mathcal{F}_G) & \star \\ \mathcal{M}'_2 - (X_\Theta + \mathcal{F}'_\Theta) \begin{bmatrix} 0_{(2n+2p+m) \times p} & I_p \end{bmatrix} & 0_{p \times n} & -\mathbf{He}(\mathcal{F}_\Theta) \end{bmatrix} < 0_{3n+3p+m}, \quad (2.80)$$

admet une solution. On obtient directement les gains de la loi de commande (2.52) et donc une solution pour le problème 51, où l'ensemble  $L_V(1)$  est une estimation du bassin d'attraction de l'origine  $\mathcal{B}_0$  du système (2.50)-(2.51). ■

**Preuve 62** *Les inégalités (2.58) et (2.59) dans le théorème 52 sont déjà sous la forme LMI et, donc, on les considère dans notre approche de synthèse directement sous cette forme. Elles impliquent, respectivement, les inclusions (2.68) et (2.70).*

Ensuite, en supposant que la LMI (2.80) est vérifiée, cela implique l'existence d'un multiplicateur :

$$\mathcal{F} = \left[ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{(n+2p+m) \times n} \\ I_n \\ 0_{p \times n} \end{bmatrix} \mathcal{F}_G \\ \begin{bmatrix} 0_{(2n+p+m) \times p} \\ I_p \\ 0_{n \times p} \\ I_p \end{bmatrix} \mathcal{F}_\Theta \end{array} \right], \quad (2.81)$$

où la matrice  $\mathcal{F}_G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est de rang plein, et la matrice  $\mathcal{F}_\Theta \in \mathbb{R}^{p \times p}$  a une structure diagonale et est définie positive, de telle manière que l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_0 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}'_1 & 0_n & 0_{n \times p} \\ \mathcal{M}'_2 & 0_{p \times n} & 0_p \end{bmatrix} + \mathbf{He} \left( \mathcal{F} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_G & -I_n & 0_{n \times p} \\ \mathcal{N}_\Theta & 0_{p \times n} & -I_p \end{bmatrix} \right) < 0_{3n+3p+m}, \quad (2.82)$$

est satisfaite, avec la notation  $\mathcal{N}_G = [-G; 0_{n \times (m+2p+n)}]$ ;  $\mathcal{N}_\Theta = [0_{p \times (m+2n+p)}; -\Theta]$ . On

observe que la matrice  $\begin{bmatrix} I_{2n+2p+m} \\ \mathcal{N}_G \\ \mathcal{N}_\Theta \end{bmatrix}$  vérifie la propriété suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_G & -I_n & 0_{n \times p} \\ \mathcal{N}_\Theta & 0_{p \times n} & -I_p \end{bmatrix}^\perp = \begin{bmatrix} I_{2n+2p+m} \\ \mathcal{N}_G \\ \mathcal{N}_\Theta \end{bmatrix}. \quad (2.83)$$

Donc, d'après le lemme de Finsler, l'inégalité (2.82) implique que :

$$\begin{bmatrix} I_{2n+2p+m} & \mathcal{N}'_G & \mathcal{N}'_\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{M}_0 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}'_1 & 0_n & 0_{n \times p} \\ \mathcal{M}'_2 & 0_{p \times n} & 0_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n+2p+m} \\ \mathcal{N}_G \\ \mathcal{N}_\Theta \end{bmatrix} < 0_{2n+2p+m}. \quad (2.84)$$

Si l'on remplace les matrices par bloc comme définies dans les relations (2.78)-(2.79), on identifie que l'inégalité (2.84) est la suivante :

$$\begin{bmatrix} P - G - G' & G'(A + BK) & G'(F + B\Gamma) & -G'BU & 0_{n \times p} \\ * & -P & C'\Omega [T - \Delta] & J'_1 & (A + BK)'C'\Omega\Theta \\ * & * & -2T & J'_2 & (F + B\Gamma)'C'\Omega\Theta \\ * & * & * & -2U & -UB'C'\Omega\Theta \\ * & * & * & * & -2[\Theta - \Delta] \end{bmatrix} < 0_{2n+2p+m}. \quad (2.85)$$

Celle-ci implique que la matrice diagonale  $\Theta - \Delta > 0_p$  est définie positive et nous avons  $W = \Theta - \Delta > 0_p$ . Ensuite, le changement de base  $\text{diag}(I_{2n+p}; U^{-1}; I_p)$  permet d'obtenir l'inégalité :

$$\begin{bmatrix} P - G - G' & G'(A + BK) & G'(F + B\Gamma) & -G'B & 0_{n \times p} \\ * & -P & C'\Omega [T - \Delta] & (U^{-1}J_1)' & (A + BK)'C'\Omega [W + \Delta] \\ * & * & -2T & (U^{-1}J_2)' & (F + B\Gamma)'C'\Omega [W + \Delta] \\ * & * & * & -2U^{-1} & -B'C'\Omega [W + \Delta] \\ * & * & * & * & -2W \end{bmatrix} < 0_{2n+2p+m}, \quad (2.86)$$

qui n'est rien d'autre que l'inégalité (2.57) (en considérant les pondérations scalaires pour les conditions de secteur  $SC_{u_k,(\ell)}$  ( $\forall \ell = 1, \dots, m$ ), représentées par  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ). Alors cette inégalité implique la relation (2.77). La preuve du théorème 61 se termine de manière similaire à celle du théorème 52.  $\square$

Un exemple numérique est proposé pour illustrer les deux méthodes proposées au cours de cette section. Nous comparons les résultats obtenus avec ceux de la méthode fondée sur la fonction quadratique.

### Exemple 63

Soit le système (2.50)-(2.51) avec les données suivantes :  $n = 2$ ;  $p = m = 1$ ;  $\rho = 1.5$ ;

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \end{bmatrix}; C = [0.6 \quad 0.5]; \Omega = 0.9.$$

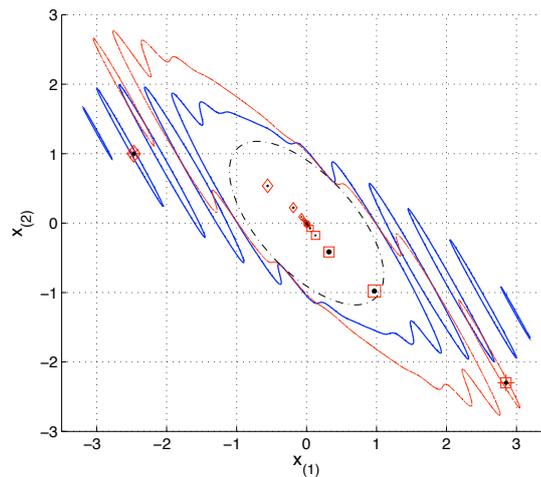


FIGURE 2.23 – L’ensemble  $L_V(1)$  donné par les deux méthodes de synthèse proposées : théorème 57 (ligne points en trait clair) et théorème 61 (ligne pleine en trait forcé). La plus grande ellipsoïde donnée par la synthèse fondée sur la fonction quadratique (ligne points tirets). Deux trajectoires pour des conditions initiales situées dans les estimations données par le théorème 61 (marqueur losange-étoile) et le théorème 57 (marqueur carrée-croix).

La non-linéarité est la même que celle considérée dans l’exemple 56. Pour faire la synthèse de la commande pour ce système, la méthode fondée sur la fonction quadratique nous donne  $\mu = 2.1256$ . Nous appliquons les deux méthodes proposées dans cette section. L’algorithme itératif et le problème d’optimisation du théorème 57 sont considérés avec  $\epsilon = 1.10^{-4}$ ,  $H = 5I_p$ ,  $O = I_p$ . On obtient  $\mu = 2.0986$  comme valeur optimale du critère et les gains de la loi de commande sont :  $K = [-0.3306 \quad -1.0977]$  ;  $\Gamma = -2.4586$ .

La résolution du problème d’optimisation convexe proposé dans le théorème 61 permet d’obtenir les résultats suivants :  $\mu = 2.1275$  ;  $U = 0.6123$  ;  $T = 0.6274$  ;  $Q = 0.9239$  ;  $\Delta = R = 0.561$  ;  $X_\Theta = 1.1035$  ;  $\mathcal{F}_\Theta = 0.9816$

$$P = \begin{bmatrix} 0.3380 & 0.4409 \\ 0.4409 & 0.8428 \end{bmatrix} ; K = [-0.5054 \quad -1.1853] ; \Gamma = -1.9222 ; J_2 = -0.4724 ;$$

$$\mathcal{F}_G = \begin{bmatrix} 1.3670 & 0.0117 \\ -0.6310 & 1.1279 \end{bmatrix} ; X_G = \begin{bmatrix} 0.6949 & 0.4526 \\ -0.1902 & 0.9708 \end{bmatrix} ; J_1 = [-0.2506 \quad -0.3808] .$$

Nous présentons, dans la Figure 2.23, l’estimation donnée par nos deux méthodes ainsi que l’ellipsoïde de la méthode fondée sur la fonction quadratique, [CMdP06]. Il est possible de voir que nos deux estimations contiennent cette ellipsoïde. Calculons l’aire des différentes estimations :  $\mathcal{A}_\mathcal{E} = 3.21$  ;  $\mathcal{A}_{L_V(1)} = 6.6204$  pour le théorème 61 et qui représente une augmentation de 110%. La méthode avec des conditions sous forme BMI donne  $\mathcal{A}_{L_V(1)} = 8.2083$ , soit une augmentation de 23% par rapport à la méthode du théorème 61 (fondée sur des conditions suffisantes sous forme LMI).

Dans la Figure 2.23, deux différentes trajectoires sont représentées. Nous avons considéré deux conditions initiales différentes :  $x_0^1 = (2.85; -2.3)'$  (carré-croix) et  $x_0^2 =$

$(-2.47; 1)'$  (losange-étoile). Chacune se situe dans un des ensembles non-connexes appartenant à des estimations de  $\mathcal{B}_0$  associées à nos méthodes (théorèmes 57 et 61). Ainsi, nous pouvons constater que les deux trajectoires convergent asymptotiquement vers l'origine.

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une fonction de Lyapunov adaptée à l'étude des systèmes Lur'e en temps discret. Elle permet d'établir des conditions de stabilité en ne recourant qu'à la condition de secteur de la non-linéarité et sans devoir restreindre sa variation. Nous avons considéré cette fonction pour traiter le problème de Lur'e en temps discret, le théorème 38.

Nous avons traité aussi le problème d'analyse de stabilité locale des systèmes Lur'e avec une commande non-linéaire saturée. Un problème d'optimisation convexe sous contraintes LMIs est proposé pour maximiser l'estimation du bassin d'attraction de ce système, le théorème 52. La ligne de niveau de la fonction proposée fut considérée comme l'estimation. Nous indiquons que les ensembles non-convexes et non-connexes de notre estimation sont adaptés au bassin d'attraction de ce système.

La synthèse de commande est directement décrite comme un problème sous forme BMI, le théorème 57, qui a été combiné avec des stratégies itératives et des relaxations sous forme LMI. Aussi, en se fondant sur le lemme de Finsler, on a obtenu des conditions suffisantes sous forme LMI. Elles furent considérées comme contraintes dans un problème d'optimisation convexe, le théorème 61.

Dans les chapitres suivants, on s'intéressera à des problèmes plus généraux des systèmes à commutations en temps discret. On introduira l'extension du problème de Lur'e en temps discret dans ce cadre-là. C'est-à-dire, chacun des modes du système est décrit par une partie linéaire et une non-linéarité. Alors, la non-linéarité active est variante dans le temps selon la loi de commutation. Le chapitre suivant, en particulier, sera dédié à l'étude des systèmes Lur'e à commutations, dont la loi de commutation est arbitraire et considérée comme une perturbation du système.

## Chapitre 3

# Stabilité et commande des systèmes à commutations arbitraires et à modes non-standards

Dans le Chapitre 2, le problème de Lur'e en temps discret a été revisité afin d'illustrer les principaux points qui permettent de conclure que la fonction de Lyapunov-Lur'e provenant du temps continu n'est pas appropriée pour le résoudre. Comme principale contribution dans ce cadre-là, nous avons proposé une fonction Lur'e adaptée au temps discret. De plus, on a indiqué que cette fonction est capable de nous apporter de meilleures estimations du bassin d'attraction des systèmes Lur'e sujets à une commande non-linéaire saturée. En se fondant sur les résultats obtenus, nous traiterons maintenant des systèmes à commutations en temps discret avec des modes non-linéaires.

En premier lieu, nous allons définir le problème de Lur'e dans le cadre des systèmes à commutations. Les systèmes de type Lur'e à commutations désignent dans cette thèse une structure bouclée dont la boucle ouverte (ou mode) commute entre plusieurs systèmes linéaires dans la chaîne directe et entre plusieurs non-linéarités de type secteur borné dans la chaîne de retour. Dans ce chapitre, nous effectuons l'hypothèse que la loi de commutation gérant la structure bouclée active est arbitraire et est donc considérée comme une perturbation.

Une méthode d'analyse de stabilité globale de l'origine sera proposée en utilisant une extension commutée de cette nouvelle fonction de Lyapunov de type Lur'e. Comme dans le chapitre précédent, nous nous limiterons pour atteindre ce résultat à la seule contrainte que la non-linéarité de chaque mode vérifie sa propre condition de secteur, sans restriction sur sa variation.

Nous présenterons aussi au cours de ce chapitre des résultats sur des systèmes Lur'e à commutations arbitraires en boucle fermée avec une loi de commande non-linéaire commutée contrainte par saturation. La présence d'une entrée saturée engendre que la stabilité de ces systèmes ne peut généralement être que locale. Cette classe de systèmes a été introduite dans [JCTD09, JCTD11], où elle a été traitée à l'aide de fonctions de Lyapunov quadratiques commutées. L'estimation du bassin d'attraction, caractérisant l'aspect local de la stabilité est alors donnée par une intersection d'ellipsoïdes. Nous montrerons que l'utilisation de notre fonction de Lyapunov de type

Lur'e commutée permettra de déterminer des estimations du bassin d'attraction moins restrictives mais aussi de forme plus adaptée à l'aide d'une ligne de niveau de notre fonction qui ne sera pas nécessairement convexe ou connexe.

L'aspect de la synthèse de commande non-linéaire commutée sera aussi traité au cours de ce chapitre. Ce problème s'écrit initialement sous forme BMI. Nous présenterons une méthode de synthèse formulée en appliquant le lemme de Finsler afin d'obtenir des conditions suffisantes sous forme LMI. Cette technique peut être vue comme l'extension de celle présentée dans la Section 2.6.2.

Dans l'ensemble de ce chapitre, nous présenterons des travaux de recherche développés dans les publications suivantes : [GJD12a] et [GJDC11a].

## 3.1 Systèmes Lur'e à commutations en temps discret

Cette section est dédiée à l'étude des systèmes à commutations arbitraires où chacun des modes présente un terme linéaire par rapport l'état et une non-linéarité. La non-linéarité active sera définie par la loi de commutation. Cette classe de systèmes peut être vue comme l'extension des systèmes Lur'e au cadre des systèmes à commutations. Dorénavant, nous utiliserons la définition "systèmes Lur'e à commutations" pour effectivement les distinguer des systèmes linéaires à commutations.

### 3.1.1 Définition du système et motivation

Considérons le système à commutations en temps discret composé de modes non-linéaires :

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + F_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k), \quad (3.1)$$

$$y_k = C_{\sigma(k)}x_k, \quad (3.2)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^p$  sont respectivement l'état et la sortie du système (3.1)-(3.2) à l'instant  $k \in \mathbb{N}$ .  $\varphi_{\sigma(k)}(y_k) \in \mathbb{R}^p$  est une non-linéarité par rapport à l'état. Ce système à commutations satisfera dans l'ensemble de ce chapitre l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 64** La loi de commutation  $\sigma(\cdot)$  est définie de la forme suivante :

$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathcal{I}_N = \{1, \dots, N\}, \\ k & \longmapsto \sigma(k), \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $\mathcal{I}_N$  est un ensemble fini. Cette fonction  $\sigma(\cdot)$  est supposée inconnue, a priori, mais sa valeur actuelle  $\sigma(k)$  est disponible en temps réel.

Cette hypothèse signifie que la loi de commutation  $\sigma$  sera considérée comme une perturbation du système (3.1)-(3.2). Ainsi, les propriétés étudiées dans ce chapitre devront être assurées pour toutes les séquences de commutations possibles, [LM99].

La notation  $M_{\sigma(k)}$  signifie qu'à chaque instant  $k$  la matrice  $M_{\sigma(k)}$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{M_1, \dots, M_N\}$ , représentée par la valeur  $\sigma(k)$ . Les matrices  $A_i, F_i, C_i$  ont des dimensions appropriées,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ .

Le système (3.1)-(3.2) a une particularité intéressante liée au fait que chacun des modes  $i \in \mathcal{I}_N$  présente une non-linéarité  $\varphi_i(\cdot)$ . La motivation pour traiter ce problème peut être illustrée si, par exemple, nous considérons pour  $N = 2$  des non-linéarités représentées dans la Figure 3.1. Effectivement dans ce cas générique, les non-linéarités  $\varphi_1(\cdot)$  et  $\varphi_2(\cdot)$  sont indépendantes et n'ont *a priori* aucun lien entre elles.

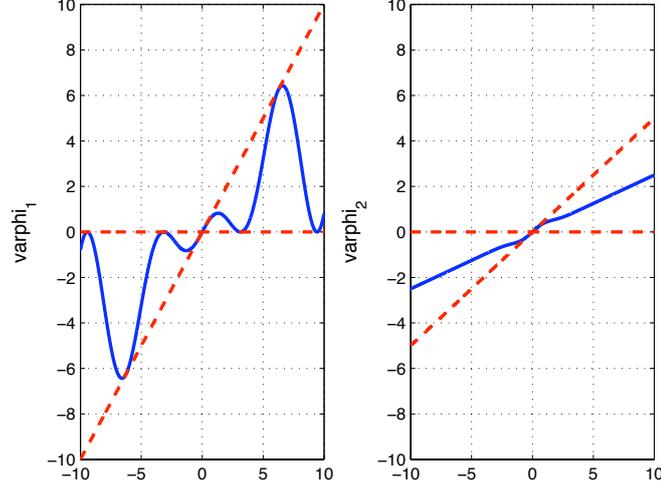


FIGURE 3.1 – Un exemple des non-linéarités  $\varphi_i(\cdot)$  modales,  $i \in \mathcal{I}_2$ , avec des allures différentes.

Par la suite, nous supposons que les non-linéarités  $\varphi_i(\cdot)$ , ( $i \in \mathcal{I}_N$ ), satisferont chacune indépendamment l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 65** Les  $N$  non-linéarités  $\varphi_i(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  associées aux modes  $i \in \mathcal{I}_N$  vérifient chacune sa propre condition de secteur et elles seront considérées décentralisées [Kha02].

Les non-linéarités du système ont les propriétés suivantes [Kha02] :  $\varphi_i(\cdot)$  appartient au secteur  $[0_p, \Omega_i]$ , c'est-à-dire,  $\varphi_i(0) = 0$  et il existe  $N$  matrices diagonales positive définies  $\Omega_i = \Omega'_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$  telles que  $\forall y \in \mathbb{R}^p, \forall \ell = 1, \dots, p$ , la relation  $\varphi'_{i,(\ell)}(y) [\varphi_i(y) - \Omega_i y]_{(\ell)} \leq 0$  est satisfaite. Alors, on a que l'inégalité suivante est vraie,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ,

$$\text{SC}(\varphi_i(\cdot), y, \Lambda_i) = \varphi'_i(y) \Lambda_i [\varphi_i(y) - \Omega_i y] \leq 0, \forall y \in \mathbb{R}^p, \quad (3.4)$$

où  $\Lambda_i \triangleq \text{diag}\{\lambda_{q,i}\}_{q=1;\dots;p} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  sont des matrices diagonales semi-définies positives. Il faut remarquer que les matrices  $\Omega_i$  définissant les secteurs sont considérées déterminées par l'opérateur et, au-delà, seront supposées données pour tout les modes  $i \in \mathcal{I}_N$ .

Cette hypothèse est facilement justifiée en regardant la Figure 3.1 où nous pouvons noter que les non-linéarités sont bornées par différents secteurs. Nous avons aussi que  $\varphi_2(\cdot) \in [0_p, \Omega_1]$  et donc, il serait possible de considérer un secteur commun entre tous les modes du système, mais cela nous mènerait à des résultats plus restrictifs.

Nous pouvons suivre l'idée présentée dans la Section 2.1.1, et montrer, à partir de l'hypothèse 65, que la relation (3.4) est équivalente à

$$[\Omega_i y]'_{(\ell)} [\varphi_i(y) - \Omega_i y]_{(\ell)} \leq 0, \quad (3.5)$$

$\forall l = 1, \dots, p; \forall y \in \mathbb{R}^p; \forall i \in \mathcal{I}_N$ , qui implique, avec  $\Lambda_i$  diagonale semi-définie positive,

$$0 \leq \varphi'_i(y) \Lambda_i \varphi_i(y) \leq \varphi'_i(y) \Lambda_i \Omega_i y \leq y' \Omega'_i \Lambda_i \Omega_i y, \quad \forall y \in \mathbb{R}^p, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N. \quad (3.6)$$

Après avoir défini les systèmes (3.1)-(3.2) qui nous intéressent dans ce chapitre, nous allons étudier la stabilité globale de l'origine sous l'hypothèse 64 et l'hypothèse 65. Dans la section suivante, nous allons mettre en évidence les difficultés inhérentes à la fonction Lyapunov-Lur'e classique, même dans le cas où nous nous restreindrons à l'ensemble des non-linéarités  $\varphi_i(\cdot)$  avec ses variations bornées. Nous présentons ensuite l'extension de notre fonction au cadre des systèmes à commutations.

### 3.1.2 Justification et définition d'une fonction de Lyapunov Lur'e à commutations

Supposons que les non-linéarités du système (3.1)-(3.2) vérifient les hypothèses faites dans la littérature classique, détaillées à la Section 2.1.2. Même ainsi, on ne pourrait pas étendre de façon directe les méthodes fondées sur la fonction de Lyapunov-Lur'e classique parce que les non-linéarités  $\varphi_\sigma(\cdot)$  sont dépendantes du mode et, donc, du temps. Considérons le cas de non-linéarités du type scalaire ( $p = 1$ ) pour illustrer ce point. Pour évaluer le terme intégral de la fonction Lyapunov-Lur'e classique à l'instant  $k$ , nous pourrions tenter deux approches possibles.

En premier, nous aurions besoin de connaître toutes les valeurs passées de la sortie  $\{y_l\}_{l=0;\dots;k}$  et, de plus, les valeurs passées de la loi de commutation  $\{\sigma(l)\}_{l=0;\dots;k}$

$$v(x_k, \{y_l\}_{l=0;\dots;k}, \{\sigma(l)\}_{l=0;\dots;k}) = \pi_{\sigma(k)} x_k^2 + \sum_{l=0}^{k-1} \int_{y_l}^{y_{l+1}} \eta_{\sigma(l)} \varphi_{\sigma(l)}(s) ds, \quad (3.7)$$

où les scalaires  $\pi_i$  et  $\eta_i$  ( $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ) sont strictement positifs. Nous obtiendrons donc dans la différence de Lyapunov

$$\begin{aligned} v(x_{k+1}, \{y_l\}_{l=0;\dots;k+1}, \{\sigma(l)\}_{l=0;\dots;k+1}) - v(x_k, \{y_l\}_{l=0;\dots;k}, \{\sigma(l)\}_{l=0;\dots;k}) = \\ \pi_{\sigma(k+1)} x_{k+1}^2 - \pi_{\sigma(k)} x_k^2 + \int_{y_k}^{y_{k+1}} \eta_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(s) ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Afin de majorer ce terme intégral, nous devrions utiliser l'information sur la variation bornée de la non-linéarité active à l'instant  $k$ ,  $\varphi_{\sigma(k)}(y_k)$  associée à la valeur de la sortie  $y_k$ . En revanche, dans le cas générique, la non-linéarité active à l'instant  $k + 1$ ,  $\varphi_{\sigma(k+1)}(y_{k+1})$  associée à  $y_{k+1}$ , peut être différente et, par conséquent, la borne de la variation aussi. Ainsi, nous pouvons conclure que les difficultés de cette approche sont la nécessité de l'historique et la majoration du terme intégral.

Une autre manière d'évaluer la fonction Lyapunov-Lur'e serait de supposer que ce système est sujet uniquement à une non-linéarité active  $\varphi_{\sigma(k)}(\cdot)$ , jusqu'à l'instant  $k$ ,

$$v(x_k, y_k, \sigma(k)) = \pi_{\sigma(k)} x_k^2 + \int_0^{y_k} \eta_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(s) ds. \quad (3.9)$$

En tenant compte d'une autre non-linéarité  $\varphi_{\sigma(k+1)}(\cdot)$ , jusqu'à l'instant  $k + 1$ , nous éliminerons la nécessité de connaître les valeurs passées de la loi de commutation. Pour la différence de Lyapunov, nous aurions la relation suivante

$$\begin{aligned} v(x_{k+1}, \sigma(k+1)) - v(x_k, \sigma(k)) &= \pi_{\sigma(k+1)} x_{k+1}^2 - \pi_{\sigma(k)} x_k^2 \\ &+ \int_0^{y_{k+1}} \eta_{\sigma(k+1)} \varphi_{\sigma(k+1)}(s) ds - \int_0^{y_k} \eta_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(s) ds. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pour conclure sur la stabilité asymptotique du système à commutations, la majoration de cette différence serait difficile aussi car les non-linéarités sont indépendantes, *a priori*, les unes des autres. Donc, la difficulté de cette approche concerne la majoration du terme intégral.

Nous pouvons affirmer, donc, que pour utiliser la fonction Lyapunov-Lur'e, avec le terme intégral, nous serions forcés d'imposer des hypothèses supplémentaires à part celles communément faites sur la variation des non-linéarités. Par conséquent, une approche fondée sur cette fonction nous mènerait à des résultats encore plus restrictifs que ceux discutés dans le cadre du Chapitre 2. En revanche, par le biais de notre nouvelle fonction de Lyapunov Lur'e, une extension pour traiter des systèmes à commutations est possible car elle est appropriée pour prendre en compte la commutation de ce système non-linéaire. Par la suite, on considère la fonction dépendante du mode :

$$V : \begin{cases} \mathcal{I}_N \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (i; x; \varphi_i(C_i x)) & \longmapsto x' P_i x + 2\varphi_i'(C_i x) \Delta_i \Omega_i C_i x, \end{cases} \quad (3.11)$$

où les matrices  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont symétriques définies positives et  $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$  sont des matrices diagonales semi-définies positives ( $i \in \mathcal{I}_N$ ). Il faut noter qu'en posant  $\Delta_i = 0_p$  ( $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ), on retrouve la fonction de Lyapunov quadratique commutée. On peut donc la considérer comme un cas particulier de notre fonction (3.11).

À partir des inégalités (3.6), il est possible de définir des fonctions minorantes et majorantes pour notre fonction et qui sont données par des fonctions quadratiques commutées :

$$\underline{V}(i; x) \leq V(i; x; \varphi_i(C_i x)) \leq \overline{V}(i; x), \quad \forall i \in \mathcal{I}_N, \quad (3.12)$$

où,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ,

$$\underline{V} : \begin{cases} \mathcal{I}_N \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (i; x) & \longmapsto x' P_i x, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\overline{V} : \begin{cases} \mathcal{I}_N \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (i; x) & \longmapsto x'(P_i + 2C_i' \Omega_i' \Delta_i \Omega_i C_i)x. \end{cases} \quad (3.14)$$

La fonction  $V(i; x; \varphi_i(C_i x))$  peut être considérée comme une fonction candidate parce qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

- $V(i; x; \varphi_i(C_i x)) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ , grâce à l'inégalité (3.12);
- $V(i; x; \varphi_i(C_i x)) = 0$ , si et seulement si  $x = 0$ , car on a  $P_i > 0_n$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ;
- $V(i; x; \varphi_i(C_i x))$  est radialement non-bornée, c'est-à-dire,  $V(i; x; \varphi_i(C_i x)) \rightarrow +\infty$  pour  $\|x\| \rightarrow +\infty$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ , car on a l'inégalité (3.12).

Le raccourci suivant sera utilisé pour noter la différence de Lyapunov :

$$\delta_k V = V(\sigma(k+1); x_{k+1}; \varphi_{\sigma(k+1)}(y_{k+1})) - V(\sigma(k); x_k; \varphi_{\sigma(k)}(y_k)). \quad (3.15)$$

Dans le cadre de ce chapitre, considérant une loi de commutation arbitraire, nous définissons la ligne de niveau  $L_V(\gamma)$  associée à notre fonction  $V(i; x; \varphi_i(C_i x))$  et à un certain niveau  $\gamma > 0$  par :

$$\begin{aligned} L_V(\gamma) &= \{x \in \mathbb{R}^n; V(i; x; \varphi_i(C_i x)) \leq \gamma, \forall i \in \mathcal{I}_N\} \\ &= \bigcap_{i \in \mathcal{I}_N} \{x \in \mathbb{R}^n; V(i; x; \varphi_i(C_i x)) \leq \gamma\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Elle est naturellement liée aux intersections des ellipsoïdes extérieures et intérieures, associées aux fonctions quadratiques commutées majorantes  $\bar{V}(i; x)$  et minorantes  $\underline{V}(i; x)$  de la fonction (3.11), par les inclusions

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}_N} \mathcal{E}(P_i, \gamma) \supseteq L_V(\gamma) \supseteq \bigcap_{i \in \mathcal{I}_N} \mathcal{E}(P_i + 2C_i' \Omega_i' \Delta_i \Omega_i C_i, \gamma). \quad (3.17)$$

Nous avons considéré un exemple de la ligne de niveau relative à des fonctions (3.11)-(3.13)-(3.14) et un scalaire  $\gamma = 7$  ( $N = n = 2, p = 1$ ). Cet exemple a comme paramètres :

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{bmatrix} 3 & -0.4 \\ -0.4 & 1.18 \end{bmatrix}; C_1 = [0.9 \quad 0.5]; \Omega_1 = 1.8; \Delta_1 = 0.6; \\ P_2 &= \begin{bmatrix} 1.256 & 1.04 \\ 1.04 & 1.76 \end{bmatrix}; C_2 = [1.5 \quad 0.5]; \Omega_2 = 1; \Delta_2 = 0.4; \end{aligned}$$

et les non-linéarités sont définies par :

$$\begin{aligned} \varphi_1(C_1 x) &= 0.5 \Omega_1 (C_1 x) (1 + \cos(40(C_1 x))); \\ \varphi_2(C_2 x) &= 0.5 \Omega_2 (C_2 x) (1 + e^{-(C_2 x)^2}). \end{aligned}$$

Dans les Figures 3.2 et 3.3, nous avons représenté la ligne de niveau de la fonction  $V$  associée aux modes 1 et 2 indépendamment (ligne pleine). Il est possible de noter que l'allure de chacun des ensembles dépend directement des non-linéarités des modes  $\varphi_i(\cdot), i \in \mathcal{I}_2$ . Les ellipsoïdes extérieures et intérieures de chacune des lignes de niveau,  $\mathcal{E}(P_i, 7)$  et  $\mathcal{E}(P_i + 2C_i' \Omega_i' \Delta_i \Omega_i C_i, 7)$  ( $i \in \mathcal{I}_2$ ), sont représentées aussi dans les deux figures (lignes tirets points).

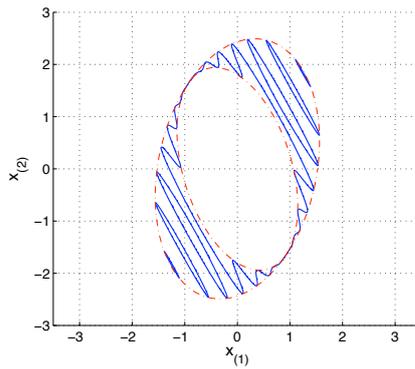


FIGURE 3.2 – Ligne de niveau  $\{x \in \mathbb{R}^n; V(1; x; \varphi_1(C_1x) \leq 7\}$  et les ellipsoïdes extérieure  $\mathcal{E}(P_1, 7)$  et intérieure  $\mathcal{E}(P_1 + 2C_1'\Omega_1\Delta_1\Omega_1C_1, 7)$  (lignes tirets points).

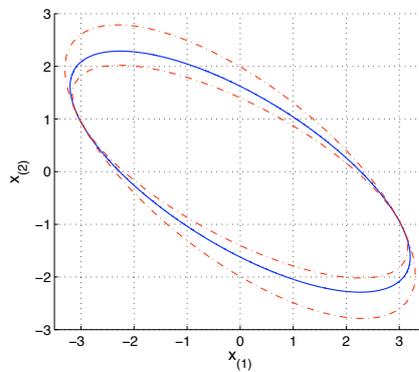


FIGURE 3.3 – Ligne de niveau  $\{x \in \mathbb{R}^n; V(2; x; \varphi_2(C_2x) \leq 7\}$  et les ellipsoïdes extérieure  $\mathcal{E}(P_2, 7)$  et intérieure  $\mathcal{E}(P_2 + 2C_2'\Omega_2\Delta_2\Omega_2C_2, 7)$  (lignes tirets points).

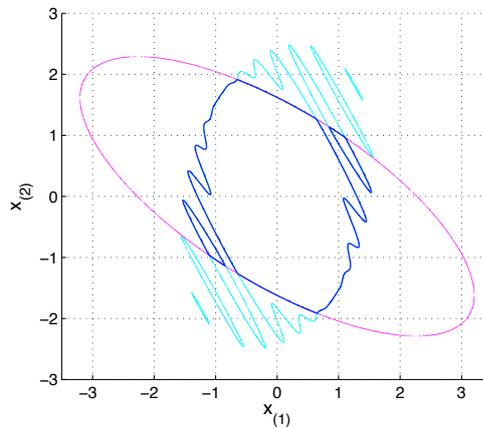


FIGURE 3.4 – La ligne de niveau de notre fonction  $L_V(7)$  (trait forcé) et chacun des ensembles associés aux modes (trait clair).

Nous pouvons noter, en regardant la Figure 3.4, que l'ensemble  $L_V(7)$  (ligne en trait forcé) est défini par l'intersection des ensembles (lignes en trait clair)

$$\{x \in \mathbb{R}^n; V(1; x; \varphi_1(C_1x) \leq 7\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n; V(2; x; \varphi_2(C_2x) \leq 7\}. \quad (3.18)$$

Comme au Chapitre 2, la fonction (3.11) est caractérisée par une ligne de niveau non-connexe et non-convexe.

En s'appuyant sur notre fonction  $V(i; x; \varphi_i(C_i x))$ , à la section suivante, nous pourrions proposer une méthode afin de trouver une solution au problème d'analyse de stabilité globale suivant :

**Problème 66** (*Analyse de stabilité globale*) Déterminer des matrices  $P_i = P'_i > 0_n$  et des matrices diagonales  $\Delta_i \geq 0_p$  afin de garantir que l'origine du système Lur'e à commutations en temps discret, sous les hypothèses 64 et 65, soit globalement asymptotiquement stable, pour toutes les lois de commutation  $\sigma$  et pour toutes les non-linéarités vérifiant  $\varphi_i(\cdot) \in [0, \Omega_i]$ .

## 3.2 Analyse de stabilité globale

Dans cette partie, nous proposons des conditions suffisantes fondées sur notre fonction  $V(i; x; \varphi_i(C_i x))$  pour traiter le problème 66. Elles sont établies dans le théorème suivant :

**Théorème 67 ([GJDC11a])** *Considérons le système Lur'e à commutations en temps discret. S'il existe des matrices  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , des matrices symétriques définies positives  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , des matrices diagonales semi-définies positives  $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et des matrices diagonales définies positives  $T_i, W_i, \in \mathbb{R}^{p \times p}$  qui vérifient les LMIs :*

$$\begin{bmatrix} P_j - G'_j - G_j & G'_j A_i & G'_j F_i & 0_{n \times p} \\ \star & -P_i & C'_i \Omega_i [T_i - \Delta_i] & A'_i C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & -2T_i & F'_i C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & \star & -2W_j \end{bmatrix} < 0_{2n+2p}, \quad (3.19)$$

$\forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2$ , alors, la fonction (3.11) est une fonction de Lyapunov pour le système (3.1)-(3.2) et l'origine est globalement asymptotiquement stable pour toute séquence de commutation  $\sigma$  et pour toutes les non-linéarités  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in \mathcal{I}_N$ , qui vérifient la condition de secteur,  $\varphi_i(\cdot) \in [0, \Omega_i]$ . ■

**Preuve 68** Si les inégalités (3.19) sont satisfaites, nous avons les relations  $P_j - G'_j - G_j < 0$  et  $P_i > 0$ ,  $\forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2$ . Donc, la matrice  $G_j$  est de rang plein et on a :

$$\begin{bmatrix} -G'_j P_j^{-1} G_j & G'_j A_i & G'_j F_i & 0_{n \times p} \\ \star & -P_i & C'_i \Omega_i [T_i - \Delta_i] & A'_i C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & -2T_i & F'_i C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & \star & -2W_j \end{bmatrix} < 0_{2n+2p}. \quad (3.20)$$

Si l'on applique le changement de base  $\text{diag}(G_j^{-1}; I_{n+2p})$  suivi d'un complément de Schur [BEFB94], on obtient l'inégalité

$$\begin{bmatrix} A'_i \\ F'_i \\ 0 \end{bmatrix} P_j \begin{bmatrix} A'_i \\ F'_i \\ 0 \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} -P_i & C'_i \Omega_i [T_i - \Delta_i] & A'_i C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & -2T_i & F'_i C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & -2W_j \end{bmatrix} < 0_{n+2p}. \quad (3.21)$$

Notons que le vecteur  $(x'_k \varphi'_i(y_k) \varphi'_j(y_{k+1}))'$ , de part la nature des non-linéarités  $\varphi_i(\cdot)$  ( $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ), n'est nul que pour  $x_k = 0$ . Multiplions l'inégalité (3.21) à droite par le vecteur  $(x'_k \varphi'_i(y_k) \varphi'_j(y_{k+1}))'$ , à gauche par sa transposée, et en notant  $i = \sigma(k)$  et  $j = \sigma(k+1)$ , il vient alors :

$$\delta_k V - 2\text{SC}(\varphi_{\sigma(k+1)}(\cdot), y_{k+1}, W_{\sigma(k+1)}) - 2\text{SC}(\varphi_{\sigma(k)}(\cdot), y_k, T_{\sigma(k)}) < 0, \forall x_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (3.22)$$

Comme les non-linéarités  $\varphi_{\sigma(k+1)}(y_{k+1})$  et  $\varphi_{\sigma(k)}(y_k)$  vérifient la condition de secteur globale, l'inégalité (3.22) définit un majorant pour la différence de Lyapunov. Cela implique :  $\delta_k V < 0$ , c'est-à-dire, la stabilité asymptotique de l'origine.  $\square$

Des conditions nécessaires pour la faisabilité des inégalités (3.19) sont établies dans le théorème suivant.

**Théorème 69** Si les inégalités (3.19) sont satisfaites, alors, les systèmes  $x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k$  et  $x_{k+1} = (A_{\sigma(k)} + F_{\sigma(k)}\Omega_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)})x_k$  sont stables quelle que soit la loi de commutation  $\sigma$ .

**Preuve 70** Supposons que les inégalités (3.19) sont vérifiées,  $\forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2$ . Elles impliquent alors les inégalités (3.21). Ensuite, si l'on multiplie ces inégalités à droite par  $(I_n \ 0_{p \times n} \ 0_{p \times n})'$  et à gauche par sa transposée, il vient

$$A'_i P_j A_i - P_i < 0_n, \forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2, \quad (3.23)$$

en identifiant  $i = \sigma(k)$  et  $j = \sigma(k+1)$ , cela implique alors

$$A'_{\sigma(k)} P_{\sigma(k+1)} A_{\sigma(k)} - P_{\sigma(k)} < 0_n. \quad (3.24)$$

La condition (3.24) est une condition suffisante pour la stabilité du système  $x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k$  pour toute loi de commutation  $\sigma$ , [DRI02].

Pour le deuxième cas particulier :  $\varphi_i(C_i x) = \Omega_i C_i x$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ , on multiplie les inégalités (3.21) par  $(I_n \ (\Omega_i C_i)' \ (\Omega_j C_j (A_i + F_i \Omega_i C_i))')$  à droite et à gauche par sa transposée, et on obtient,  $\forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2$ ,

$$\begin{aligned} & (A_i + F_i \Omega_i C_i)' P_j (A_i + F_i \Omega_i C_i) - P_i + \\ & 2(A_i + F_i \Omega_i C_i)' C'_j \Omega'_j \Delta_j \Omega_j C_j (A_i + F_i \Omega_i C_i) - 2C'_i \Omega'_i \Delta_i \Omega_i C_i < 0_n. \end{aligned} \quad (3.25)$$

En identifiant  $i = \sigma(k)$  et  $j = \sigma(k+1)$  et en utilisant le raccourci  $\tilde{P}_j = P_j + 2C'_j \Omega'_j \Delta_j \Omega_j C_j$ , nous avons :

$$(A_{\sigma(k)} + F_{\sigma(k)} \Omega_{\sigma(k)} C_{\sigma(k)})' \tilde{P}_{\sigma(k+1)} (A_{\sigma(k)} + F_{\sigma(k)} \Omega_{\sigma(k)} C_{\sigma(k)}) - \tilde{P}_{\sigma(k)} < 0_n. \quad (3.26)$$

Cela implique que le système  $x_{k+1} = (A_{\sigma(k)} + F_{\sigma(k)} \Omega_{\sigma(k)} C_{\sigma(k)})x_k$  est stable, pour toute loi de commutation  $\sigma$ .  $\square$

Dans le même esprit que le Chapitre 2, nous nous intéressons dans la section suivante à l'étude d'une classe de systèmes plus générale.

### 3.3 Systèmes Lur'e à commutations avec commande saturée

Considérons le système à commutations défini par le modèle suivante :

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + F_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k) + B_{\sigma(k)}\text{sat}(u_k), \quad (3.27)$$

$$y_k = C_{\sigma(k)}x_k, \quad (3.28)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^p$  et  $\varphi_{\sigma(k)}(y_k) \in \mathbb{R}^p$  sont respectivement le vecteur d'état, l'entrée de commande, la sortie, et la non-linéarité du système (3.27)-(3.28). Les matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  et  $F_i$  ont des dimensions appropriées,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ . On suppose que les hypothèses 64 et 65 sont satisfaites.

Concernant la limite des actionneurs, nous considérons la fonction de la saturation normalisée, (définition 32, relation (1.54)). En outre, l'information sur le vecteur  $\rho \in \mathbb{R}^m$  sera supposée disponible.

La classe de loi de commande considérée pour le reste de ce chapitre est décrite par :

$$u_k = K_{\sigma(k)}x_k + \Gamma_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k), \quad (3.29)$$

où  $K_{\sigma(k)}$  est le gain de retour d'état linéaire commuté de dimension  $m \times n$  et  $\Gamma_{\sigma(k)}$  est le gain de retour de la non-linéarité active  $\varphi_{\sigma(k)}$  commuté de dimension  $m \times p$ . La valeur du signal de la non-linéarité active  $\varphi_{\sigma(k)}(y_k)$  sera supposée connue, [ALK03].

Nous suivrons la méthodologie utilisée au Chapitre 2 de manière à ce que la saturation d'entrée soit exprimée par une zone-morte :  $\Psi(u_k) = u_k - \text{sat}(u_k)$ . Le modèle en boucle fermée est donné par :

$$x_{k+1} = A_{\text{cl},\sigma(k)}x_k + F_{\text{cl},\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k) - B_{\sigma(k)}\Psi(u_k), \quad (3.30)$$

où  $A_{\text{cl},i} = A_i + B_iK_i$  et  $F_{\text{cl},i} = F_i + B_i\Gamma_i$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ .

**Remarque 71** Les gains de la loi de commande (3.29) sont considérés être calculés afin de garantir que les matrices des modes  $A_{\text{cl},i}$  et  $(A_{\text{cl},i} + F_{\text{cl},i}\Omega_iC_i)$  soient stables,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ .

Ces conditions impliquent la stabilité asymptotique locale de chacun des modes indépendamment. Il est connu que ces conditions sont uniquement nécessaires pour étudier la stabilité asymptotique des systèmes à commutations arbitraires.

Définissons maintenant un ensemble dans lequel la zone morte  $\Psi(\cdot) \in \mathbb{R}^m$  vérifie une condition de secteur généralisée locale. Pour des matrices  $L_i \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ , considérons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{S}(\{L_i\}_{i \in \mathcal{I}_N}, \rho) = \{\phi \in \mathbb{R}^{n+p}; -\rho \leq L_i\phi \leq \rho, \forall i \in \mathcal{I}_N\}. \quad (3.31)$$

**Lemme 72** Soient les matrices de dimension  $m \times (n+p)$  :  $\widehat{K}_\sigma = [K_\sigma \ \Gamma_\sigma]$  et  $\widehat{J}_\sigma = [J_{1,\sigma} \ J_{2,\sigma}]$ ,  $\sigma \in \mathcal{I}_N$ , et le signal  $u_k$  est la loi de commande définie par (3.29). Si le vecteur  $\widehat{x}_k = (x'_k \ \varphi'_\sigma(y_k))'$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{S}(\{\widehat{K}_\sigma - \widehat{J}_\sigma\}_{\sigma \in \mathcal{I}_N}, \rho)$ , alors la non-linéarité du type zone-morte  $\Psi(u_k)$  satisfait la condition de secteur suivante

$$SC_{u_k} = \Psi'(u_k)U_{\sigma(k)}^{-1} [\Psi(u_k) - J_{1,\sigma(k)}x_k - J_{2,\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k)] \leq 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{I}_N, \quad (3.32)$$

pour des matrices diagonales définies positives  $U_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ .

**Preuve 73** La preuve est une extension directe de [TPG06, Lemma 1].

Une fois que l'on a établi la formulation en boucle fermée des systèmes Lur'e à commutations avec la commande saturée, nous présentons des méthodes fondées sur des conditions suffisantes pour traiter les deux problèmes suivants :

**Problème 74** (Analyse de stabilité locale) Étant donnés les gains  $K_i$  et  $\Gamma_i$  ( $i \in \mathcal{I}_N$ ) de la loi de commande (3.29), et sous les hypothèses 64 et 65, déterminer une région dans l'espace d'état, aussi grande que possible, incluse dans le bassin d'attraction  $\mathcal{B}_0$  du système (3.30), afin de conclure sur la stabilité asymptotique locale des lois de commutations quelconques.

**Problème 75** (Commande en boucle fermée) Déterminer les gains de la loi de commande (3.29) tels que le système Lur'e à commutations en boucle fermée avec la saturation (3.30) soit localement asymptotiquement stable pour toutes les lois de commutations, dans une région de l'espace d'états initiaux aussi grande que possible incluse dans son bassin d'attraction  $\mathcal{B}_0$ .

Ces problèmes ont déjà été traités dans la littérature, en particulier avec une fonction de Lyapunov quadratique commutée [JCTD09, JCTD11]. Dans cette thèse, nous allons utiliser la nouvelle fonction de Lyapunov introduite précédemment. Ainsi, l'estimation du bassin d'attraction ne sera plus donnée par une ellipsoïde ou l'intersection d'ellipsoïdes, mais par la ligne de niveau  $L_V(1)$ , plus adaptée dans le cadre discret.

### 3.4 Analyse de stabilité locale

Cette section est dédiée à l'étude du problème 74.

**Théorème 76** ([GJD12a]) Pour des matrices  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$ , les gains de la loi de commande (3.29), et pour des matrices diagonales définies positives  $D_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  données ( $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ), considérons comme variables : les matrices  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $J_{1,i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $J_{2,i} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ , les matrices symétriques définies positives  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , les matrices diagonales semi-définies positives  $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , les matrices diagonales définies positives  $R_i, Q_i, T_i, W_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , et un scalaire  $\mu$ . Si le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\mu, G_i, P_i, J_{1,i}, J_{2,i}, Q_i, R_i, T_i, W_i, \Delta_i} \mu$$

sous les contraintes LMIs :

$$\begin{bmatrix} P_j - G'_j - G_j & G'_j A_{cl,i} & G'_j F_{cl,i} & -G'_j B_i & 0_{n \times p} \\ \star & -P_i & C'_i \Omega_i [T_i - \Delta_i] & J'_{1,i} D_i & A'_{cl,i} C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & -2T_i & J'_{2,i} D_i & F'_{cl,i} C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & \star & -2D_i & -B'_i C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & \star & \star & -2W_j \end{bmatrix} < 0_{2n+2p+m}, \quad (3.33)$$

$$\forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2,$$

$$\begin{bmatrix} P_i & C'_i \Omega_i [\Delta_i - Q_i] & (K_i - J_{1,i})'_{(\ell)} \\ \star & 2Q_i & (\Gamma_i - J_{2,i})'_{(\ell)} \\ \star & \star & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} > 0_{n+p+1}, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N; \forall \ell = 1, \dots, m; \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} \mu I_n - P_i & -C'_i \Omega_i [R_i + \Delta_i] \\ \star & 2R_i \end{bmatrix} > 0_{n+p}, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N, \quad (3.35)$$

admet une solution, alors, le système (3.30) est localement asymptotiquement stable pour toutes les séquences de commutations et une estimation du bassin d'attraction  $\mathcal{B}_0$  du système (3.30) est donnée par l'ensemble  $L_V(1)$ . ■

**Preuve 77** Supposons que les inégalités (3.33) sont vérifiées. On a  $P_j - G'_j - G_j < 0$  et  $P_i > 0$ . Donc, la matrice  $G_j$  est de rang plein et  $-G'_j P_j^{-1} G_j \leq P_j - G'_j - G_j$  (voir [DB01]). Cela implique :

$$\begin{bmatrix} -G'_j P_j^{-1} G_j & G'_j A_{cl,i} & G'_j F_{cl,i} & -G'_j B_i & 0_{n \times p} \\ \star & -P_i & C'_i \Omega_i [T_i - \Delta_i] & J'_{1,i} D_i & A'_{cl,i} C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & -2T_i & J'_{2,i} D_i & F'_{cl,i} C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & \star & -2D_i & -B'_i C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & \star & \star & -2W_j \end{bmatrix} < 0_{2n+2p+m}. \quad (3.36)$$

Si l'on applique un changement de base  $\text{diag}(G_j^{-1}; I_{n+2p+m})$  et en notant les variables  $U_i^{-1} = D_i$ , suivi d'un complément de Schur, [BEFB94], on arrive à l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix} A'_{cl,i} \\ F'_{cl,i} \\ -B'_i \\ 0_{p,n} \end{bmatrix} P_j \begin{bmatrix} A'_{cl,i} \\ F'_{cl,i} \\ -B'_i \\ 0_{p,n} \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} -P_i & C'_i \Omega_i [T_i - \Delta_i] & J'_{1,i} U_i^{-1} & A'_{cl,i} C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & -2T_i & J'_{2,i} U_i^{-1} & F'_{cl,i} C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & -2U_i^{-1} & -B'_i C'_j \Omega_j [W_j + \Delta_j] \\ \star & \star & \star & -2W_j \end{bmatrix} < 0_{n+2p+m}. \quad (3.37)$$

En multipliant ces inégalités (3.37) à droite par  $(x'_k \ \varphi'_i(y_k) \ \Psi'(u_k) \ \varphi'_j(y_{k+1}))' \neq 0, \forall x_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et à gauche par sa transposée, en identifiant  $i = \sigma(k)$  et  $j = \sigma(k+1)$ , il vient pour tout  $x_k \neq 0$

$$\delta_k V - 2\text{SC}_{u_k} - 2\text{SC}(\varphi_{\sigma(k+1)}(\cdot), y_{k+1}, W_{\sigma(k+1)}) - 2\text{SC}(\varphi_{\sigma(k)}(\cdot), y_k, T_{\sigma(k)}) < 0. \quad (3.38)$$

Ensuite, on applique le complément de Schur sur les inégalités (3.34) par rapport au dernier bloc et on obtient :

$$\begin{bmatrix} P_i & C'_i \Omega_i [\Delta_i - Q_i] \\ \star & 2Q_i \end{bmatrix} - \frac{1}{\rho_{(\ell)}^2} \begin{bmatrix} (K_i - J_{1,i})_{(\ell)} \\ (\Gamma_i - J_{2,i})_{(\ell)} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} (K_i - J_{1,i})_{(\ell)} & (\Gamma_i - J_{2,i})_{(\ell)} \end{bmatrix} > 0_{n+p}. \quad (3.39)$$

On identifie  $\widehat{K}_i$  et  $\widehat{J}_i$  comme définis dans le lemme 72, et on a ainsi :

$$\begin{bmatrix} P_i & C'_i \Omega_i [\Delta_i - Q_i] \\ \star & 2Q_i \end{bmatrix} - \frac{1}{\rho_{(\ell)}^2} (\widehat{K}_i - \widehat{J}_i)'_{(\ell)} (\widehat{K}_i - \widehat{J}_i)_{(\ell)} > 0_{n+p}. \quad (3.40)$$

On multiplie ces inégalités à droite par  $\widehat{x}_k = (x'_k \ \varphi'_i(y_k))'$  et à gauche par sa transposée, en tenant compte de  $i = \sigma(k)$ , nous obtenons

$$V(\sigma(k); x_k; \varphi_{\sigma(k)}(y_k)) + 2\text{SC}(\varphi_{\sigma(k)}(\cdot), y_k, Q_{\sigma(k)}) \geq \frac{1}{\rho_{(\ell)}^2} \left\| (\widehat{K}_{\sigma(k)} - \widehat{J}_{\sigma(k)})_{(\ell)} \widehat{x}_k \right\|^2. \quad (3.41)$$

Comme la non-linéarité active  $\varphi_{\sigma(k)}(y_k)$  vérifie la condition de secteur, on a

$$V(\sigma(k); x_k; \varphi_{\sigma(k)}(y_k)) \geq \frac{1}{\rho_{(\ell)}^2} \left\| (\widehat{K}_{\sigma(k)} - \widehat{J}_{\sigma(k)}_{(\ell)}) \widehat{x}_k \right\|^2, \quad (3.42)$$

qui induit l'inclusion

$$L_V(1) \subset \mathcal{S} \left( \left\{ (\widehat{K}_\sigma - \widehat{J}_\sigma) \right\}_{\sigma \in \mathcal{I}_N}, \rho \right). \quad (3.43)$$

Par conséquent, la condition de secteur généralisée (3.32), liée à la non-linéarité de type zone-morte, est vérifiée dans l'ensemble  $L_V(1)$ .

En multipliant les inégalités (3.35) à gauche par le vecteur  $\widehat{x}_0 = (x'_0 \ \varphi'_i(C_i x_0))'$  et à droite par sa transposée, avec  $i = \sigma(0)$ , nous avons

$$\mu x'_0 x_0 + 2\text{SC}(\varphi_{\sigma(0)}(\cdot), C_{\sigma(0)} x_0, R_{\sigma(0)}) \geq V(\sigma(0); x_0; \varphi_{\sigma(0)}(C_{\sigma(0)} x_0)). \quad (3.44)$$

La non-linéarité  $\varphi_{\sigma(0)}(\cdot)$  vérifie la condition de secteur (3.4), et ainsi elle nous permet de conclure l'inclusion suivante :

$$\mathcal{E}(\mu I_n) \subset L_V(1). \quad (3.45)$$

L'inclusion (3.43) implique donc que la condition de secteur locale  $\text{SC}_{u_k} \leq 0$  pour la zone morte est vérifiée à l'intérieur  $L_V(1)$ . Cette condition, combinée avec l'inégalité (3.38), implique  $\delta_k V < 0$  ( $\forall x_k \neq 0$ ). De là, la stabilité asymptotique est prouvée dans l'ensemble  $L_V(1)$ .

Finalement, en minimisant le scalaire  $\mu$ , on a la maximisation du rayon de la boule  $\mathcal{E}(\mu I_n)$  incluse dans  $L_V(1)$ , grâce à l'inégalité (3.44).  $\square$

**Remarque 78** Comme les matrices  $D_i$  sont fixées,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ , les inégalités (3.33) sont linéaires en les variables d'optimisation,  $\forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2$ . Les valeurs des matrices  $D_i$  peuvent être définies avec celles obtenues par l'algorithme de synthèse de commande,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ , par exemple dans les travaux de [JCTD09]. Un autre choix pourrait être de définir  $D_i = \alpha_i I_m$  avec  $\alpha_i > 0$  fixées,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ .

Pour réduire le conservatisme du théorème 76, considérer les matrices  $D_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  comme des variables d'optimisation est une possibilité. Cependant, les inégalités (3.33) deviennent des BMIs qui sont non-convexes et présentent une complexité de calcul plus élevée.

Il faut noter que, contrairement à la section 2.5.2, la technique de recherche en ligne ne peut pas être appliquée directement car, dans le cas ici traité, nous avons  $N$  scalaires  $\alpha_i$ . Définir les matrices  $D_i = \alpha I_m$  en considérant  $\alpha > 0$  commun entre tous les  $N$  sommets serait possible mais le conservatisme apporté deviendrait plus élevé.

Une autre méthode capable de traiter des cas plus généraux en considérant les matrices  $D_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  comme des variables d'optimisation ( $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ) est la méthode que nous présenterons dans la section suivante. Nous traiterons le problème de synthèse de commande avec une approche fondée sur des conditions suffisantes sous forme LMI. Cette méthode pourrait être appliquée pour résoudre le problème 74.

Des exemples numériques sont présentés pour illustrer que le théorème 76 est capable d'estimer le bassin d'attraction du système (3.27)-(3.28), pour une loi de commande fixée. Nous considérons que les gains de la loi de commande sont donnés par la solution optimale de l'algorithme fondé sur la fonction quadratique commuté [JCTD09]. Cette méthode a considéré le rayon d'une boule  $\mathcal{E}(\mu I_n)$  incluse dans l'intersection des ellipsoïdes comme le critère à optimiser. Nous pourrions comparer plus facilement les valeurs obtenues.

**Exemple 79**

Nous considérons le système (3.30) avec deux modes et  $n = 2$ ,  $p = m = 1$ ,  $\rho = 1.5$ ,  $\Omega_1 = 0.9$ ,  $\Omega_2 = 1.9$ , et

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.3 \\ 0.5 & -1.4 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.4 \\ 0.6 & 0.95 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.3 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.2 \end{bmatrix}; \\ F_1' = [1.2 \quad 1.3]'; F_2' = [1.3 \quad 1.2]'; C_1 = [1 \quad -0.9]; C_2 = [-0.5 \quad 0.9].$$

Les non-linéarités sont définies par :

$$\varphi_1(y) = \Omega_1 \frac{y(1 + \cos(20y))}{2}; \quad \varphi_2(y) = \Omega_2 \frac{y(1 + e^{-0.5y^2})}{2}.$$

L'algorithme proposé par [JCTD09], utilisant la fonction quadratique commutée, donne  $\mu = 1.6573$  avec les gains de la loi de commande suivants :

$$K_1 = [-0.4774 \quad 1.1616]; \Gamma_1 = -0.7476; \\ K_2 = [-0.3928 \quad -0.9251]; \Gamma_2 = -0.792.$$

Ainsi, nous souhaitons estimer le bassin d'attraction de ce système en considérant la méthode du théorème 76, en tenant compte des valeurs des matrices  $D_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  obtenues par [JCTD09],  $D_1 = 0.5185$  et  $D_2 = 0.6253$ . La valeur du critère  $\mu = 1.1676$  est associée aux résultats numériques pour des variables :  $\Delta_1 = W_1 = 0.075$ ;  $R_1 = 0.0893$ ;  $Q_1 = 0.2246$ ;  $T_1 = 0.2238$ ;  $J_{2,1} = -0.1065$ ;  $\Delta_2 = 2.5374 \cdot 10^{-9}$ ;  $W_2 = 2.5255 \cdot 10^{-9}$ ;  $R_2 = 2.4529 \cdot 10^{-9}$ ;  $Q_2 = 0.2741$ ;  $T_2 = 0.2471$ ;  $J_{2,2} = -0.1502$ ;

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.1958 & -0.2844 \\ -0.2844 & 0.8665 \end{bmatrix}; G_1 = \begin{bmatrix} 0.2233 & -0.194 \\ -0.2681 & 0.9195 \end{bmatrix}; J_{1,1} = [-0.2370 \quad 0.3967]; \\ P_2 = \begin{bmatrix} 0.1238 & -0.2152 \\ -0.2152 & 1.1232 \end{bmatrix}; G_2 = \begin{bmatrix} 0.1240 & -0.2153 \\ -0.2160 & 1.1237 \end{bmatrix}; J_{1,2} = [-0.0772 \quad -0.4333].$$

Si l'on compare des valeurs obtenues pour les critères d'optimisation des deux méthodes, on souligne une amélioration de 40% par notre méthode. De plus, les deux estimations sont tracées dans la Figure 3.5.  $L_V(1)$  est représentée en ligne pleine et l'intersection des ellipsoïdes de [JCTD09] en ligne tirets points. Aussi, nous avons tracé les boules  $\mathcal{E}(\mu I_n)$  avec les rayons relatifs à chacune des valeurs des critères. Notre méthode est représentée en ligne tirets et la méthode de la fonction quadratique commutée en ligne tirets points.

Il est possible de voir que notre estimation est donnée par des ensembles non-connexes avec une aire globale  $\mathcal{A}_{L_V(1)} = 7.7459$ . Nous voyons que l'intersection des ellipsoïdes donnée par [JCTD09] est incluse dans l'ensemble  $L_V(1)$ . Son aire calculée est de  $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} = 4.5608$  et cela représente une amélioration par notre méthode d'environ 69.84% pour l'estimation de  $\mathcal{B}_0$ .

Dans la Figure 3.5, nous avons représenté aussi une trajectoire du système (3.27)-(3.28) en considérant une réalisation de loi de commutation arbitraire. La condition initiale  $x_0$  (marqueur étoile-carré) se situe dans un des sous-ensembles de  $L_V(1)$  non-connecté à celui contenant l'origine. Il est possible de voir que cette trajectoire converge vers l'origine.

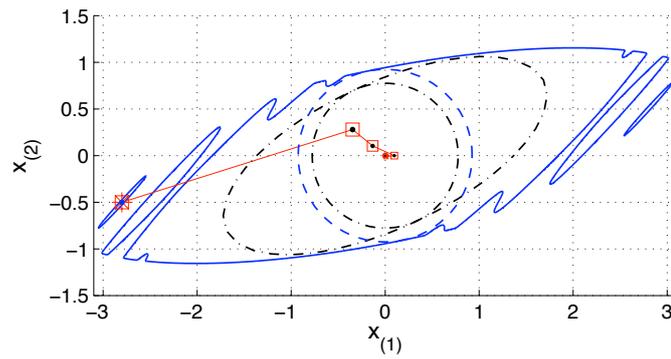


FIGURE 3.5 – Les ensembles non-connexes de  $L_V(1)$  (ligne pleine) obtenue par le théorème 76, l'intersection des ellipsoïdes de la méthode [JCTD09] (ligne tirets points). Les boules  $\mathcal{E}(\mu I_n)$  relatives aux critères du théorème 76 (ligne tirets) et [JCTD09] (ligne tirets points). Une trajectoire stable sous une réalisation de commutation arbitraire.

En adoptant la même idée que celle développée dans le Chapitre 2, nous allons illustrer plus clairement la stabilité asymptotique liée à notre fonction de Lyapunov (3.11). Dans une séquence des Figures 3.6-3.7-3.8-3.9, nous présentons respectivement la ligne de niveau :

$$L_V(\gamma = \max\{V(1; x_k; \varphi_1(y_k)); V(2; x_k; \varphi_2(y_k))\}); \quad \text{pour } k = 1; 2; 3; 4.$$

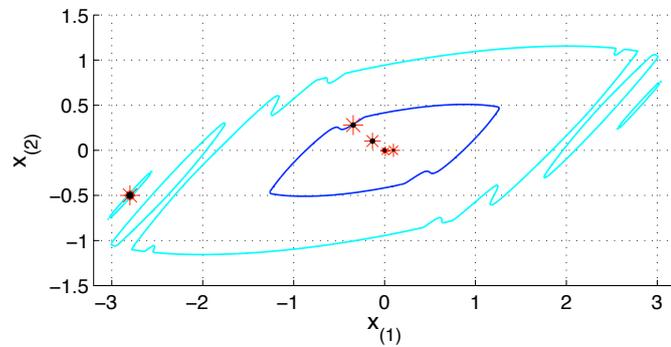


FIGURE 3.6 – L'ensemble  $L_V(1)$  (trait clair) et la ligne de niveau  $L_V(\max\{V(1; x_1; \varphi_1(y_1)); V(2; x_1; \varphi_2(y_1))\})$ .

Pour mieux illustrer la stabilité asymptotique, chacune des figures contient la ligne de niveau relative aux instants de temps concernés et son précédent :

- $L_V(\max\{V(1; x_k; \varphi_1(y_k)); V(2; x_k; \varphi_2(y_k))\})$  avec une ligne en trait forcé
- $L_V(\max\{V(1; x_{k-1}; \varphi_1(y_{k-1})); V(2; x_{k-1}; \varphi_2(y_{k-1}))\})$  ( $L_V(1)$  dans la Figure 3.6) avec une ligne en trait clair.

Nous pouvons noter la caractéristique des régions qui diminuent et convergent vers un ensemble unique autour de l'origine.

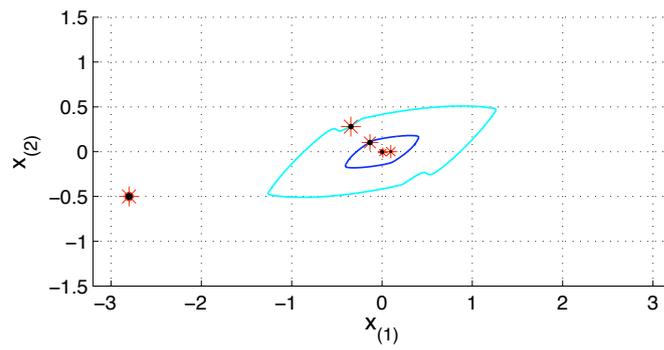


FIGURE 3.7 – la ligne niveau :  $L_V(\max\{V(1; x_2; \varphi_1(y_2)); V(2; x_2; \varphi_2(y_2))\})$  et  $L_V(\max\{V(1; x_1; \varphi_1(y_1)); V(2; x_1; \varphi_2(y_1))\})$  (trait clair).

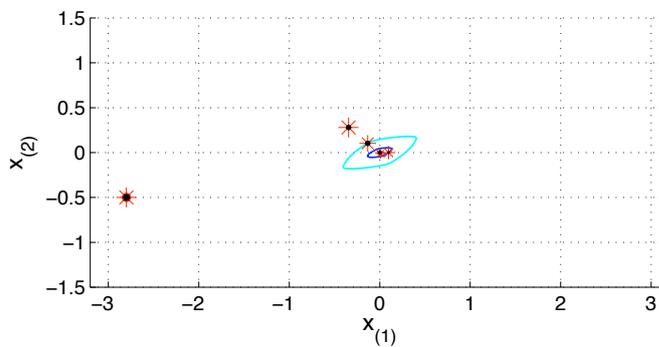


FIGURE 3.8 – la ligne niveau :  $L_V(\max\{V(1; x_3; \varphi_1(y_3)); V(2; x_3; \varphi_2(y_3))\})$  et  $L_V(\max\{V(1; x_2; \varphi_1(y_2)); V(2; x_2; \varphi_2(y_2))\})$  (trait clair).

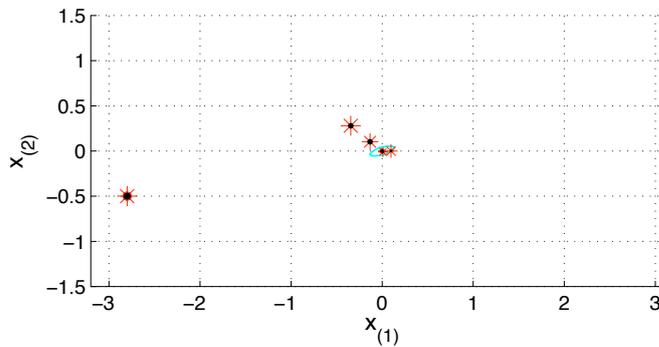


FIGURE 3.9 – la ligne niveau :  $L_V(\max\{V(1; x_4; \varphi_1(y_4)); V(2; x_4; \varphi_2(y_4))\})$  et  $L_V(\max\{V(1; x_3; \varphi_1(y_3)); V(2; x_3; \varphi_2(y_3))\})$  (trait clair).

**Exemple 80**

Prenons, ensuite, le système Lur'e avec deux modes et  $n = 2; p = m = 1; \rho = 1.5; \Omega_1 = 0.7; \Omega_2 = 1.3;$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}; F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \end{bmatrix}; C_1 = [0.9 \quad 0.5];$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.5 \end{bmatrix}; F_2 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1 \end{bmatrix}; C_2 = [1 \quad -0.7].$$

Les non-linéarités sont les suivantes :

$$\varphi_1(y) = 0.5\Omega_1 y(1 + \sin(30y)); \varphi_2(y) = 0.5\Omega_2 y(1 + \cos(\frac{100y}{3})).$$

La méthode pour la synthèse de commande de [JCTD09] fournit  $\mu = 2.7140$  et des gains :

$$K_1 = [-0.9267 \quad -0.9892]; \Gamma_1 = -1.1409;$$

$$K_2 = [-1.7246 \quad -0.5039]; \Gamma_2 = -1.1890.$$

Nous allons trouver une estimation du bassin d'attraction en appliquant la méthode du théorème 76. Les matrices  $D_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  sont fixées avec les valeurs de l'algorithme de synthèse de base :  $D_1 = 1.3999; D_2 = 1.5667.$

Nous obtenons ainsi  $\mu = 2.3789$  pour notre critère et les valeurs numériques suivantes sont trouvées :  $\Delta_1 = 1.6873 \cdot 10^{-4}; W_1 = 1.6898 \cdot 10^{-4}; R_1 = 0.7544; Q_1 = 0.3398; T_1 = 2.2586; \Delta_2 = 3.2434 \cdot 10^{-9}; W_2 = 3.3328 \cdot 10^{-9}; R_2 = 3.1983 \cdot 10^{-9}; Q_2 = 0.8020; T_2 = 0.2471; J_{2,1} = -0.8298; J_{2,2} = -0.1745;$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.7160 & 0.3875 \\ 0.3875 & 0.6847 \end{bmatrix}; G_1 = \begin{bmatrix} 0.7164 & 0.3873 \\ 0.3872 & 0.6849 \end{bmatrix}; J_{1,1} = [-0.0957 \quad 0.0654];$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2.2972 & -0.4086 \\ -0.4086 & 0.3347 \end{bmatrix}; G_2 = \begin{bmatrix} 2.2981 & -0.4107 \\ -0.4091 & 0.3359 \end{bmatrix}; J_{1,2} = [-0.7702 \quad 0.0233].$$

Notre estimation (ligne pleine) et celle de la fonction quadratique commutée (ligne tirets points) sont indiquées dans la Figure 3.10, ainsi que la plus grande boule  $\mathcal{E}(\mu I_n)$  (ligne tirets), solution de notre problème d'optimisation. Aussi, nous avons représenté les ellipsoïdes extérieure et intérieure :  $\mathcal{E}(P_i, 1), \mathcal{E}(P_i + 2C_i' \Omega_i' \Delta_i \Omega_i C_i, 1)$ , pour  $i \in \mathcal{I}_2$ . On observe que les valeurs numériques des matrices  $\Delta_i, (i = \{1; 2\})$  nous mènent à une estimation  $L_V(1)$  qui correspond à l'intersection de ces ellipsoïdes.

Si l'on calcule l'aire des deux régions :  $\mathcal{A}_{L_V(1)} = 2.6135$  et  $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} = 1.8957$  pour [JCTD09], on peut conclure que l'estimation du bassin d'attraction a augmenté d'environ 37.87%. De plus, nous avons considéré la trajectoire de ce système sous une réalisation de loi de commutation arbitraire. La condition initiale  $x_0 = (-0.23; 1)'$  n'appartient pas à l'estimation de [JCTD09]. Il est possible de voir que la trajectoire converge vers l'origine. Donc, cela indique que notre méthode peut être aussi employée pour améliorer une estimation obtenue par l'intersection des ellipsoïdes.

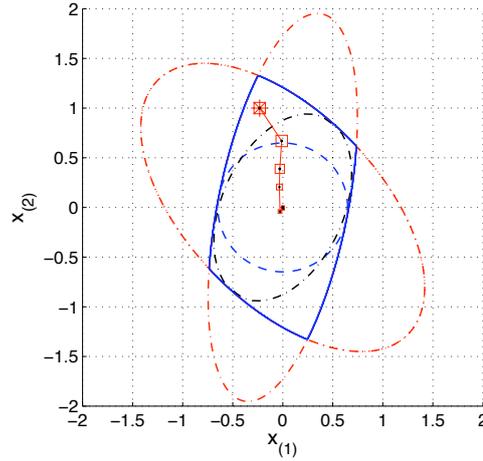


FIGURE 3.10 – L'ensemble  $L_V(1)$  donné par le théorème 76 (ligne pleine) contenant l'estimation donné par la méthode de [JCTD09] (ligne tirets points en trait forcé). Les ellipsoïdes extérieures et intérieures et la boule  $\mathcal{E}(\mu I_n) \subset L_V(1)$ . Une trajectoire associée à  $x_0 = (-0.23; 1)'$ , située en dehors de l'estimation [JCTD09].

### 3.5 Synthèse de loi de commande commutée

Cette section développe une méthode pour résoudre le problème 75. Cette méthode utilise la fonction  $V(i; x; \varphi_i(C_i x))$  et permet de fournir une estimation du bassin d'attraction. Selon la remarque 78, ce problème est directement donné sous une forme BMI. Ainsi, nous allons étendre la technique de linéarisation de la Section 2.6.2 au cadre des systèmes à commutations afin d'obtenir des conditions suffisantes sous forme LMI. Introduisons les notations :

$$\mathcal{M}'_{2,i,j} = \begin{bmatrix} 0_{p \times n} & -\Omega_j C_j (A_i + B_i K_i) & -\Omega_j C_j (F_i + B_i \Gamma_i) & \Omega_j C_j B_i U_i & I_p \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

$$\mathcal{M}_{0,i,j} = \begin{bmatrix} P_j & 0_n & 0_{n \times p} & 0_{n \times m} & 0_{n \times p} \\ \star & -P_i & C'_i \Omega_i [T_i - \Delta_i] & J'_{1,i} & 0_{n \times p} \\ \star & \star & -2T_i & J'_{2,i} & 0_p \\ \star & \star & \star & -2U_i & 0_{m \times p} \\ \star & \star & \star & \star & 2\Delta_j \end{bmatrix}; \mathcal{M}_{1,i} = \begin{bmatrix} I_n \\ -(A_i + B_i K_i)' \\ -(F_i + B_i \Gamma_i)' \\ U'_i B'_i \\ 0_{p \times n} \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

**Théorème 81 ([GJD12a])** *S'il existe des matrices  $\mathcal{F}_{G,i}, X_{G,i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K_i, J_{1,i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\Gamma_i, J_{2,i} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ , des matrices symétriques définies positives  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , des matrices diagonales semi-définies positives  $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ; des matrices diagonales définies positives  $X_{\Theta,i}, \mathcal{F}_{\Theta,i}, R_i, Q_i, T_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $U_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ , et un scalaire  $\mu$  solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\min_{\mu, \mathcal{F}_{G,i}, X_{G,i}, P_i, K_i, J_{1,i}, \Gamma_i, J_{2,i}, Q_i, R_i, T_i, U_i, \mathcal{F}_{\Theta,i}, X_{\Theta,i}, \Delta_i} \mu$$

sous les contraintes LMIs : (3.34), (3.35) et

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{0,i,j} - \mathbf{He}(\text{diag}[X_{G,j}; 0_{(n+p+m)}; X_{\Theta,j}]) & \star & \star \\ \mathcal{M}'_{1,i} - (X_{G,j} + \mathcal{F}'_{G,j}) \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times (n+2p+m)} \end{bmatrix} & -\mathbf{He}(\mathcal{F}_{G,j}) & \star \\ \mathcal{M}'_{2,i,j} - (X_{\Theta,j} + \mathcal{F}'_{\Theta,j}) \begin{bmatrix} 0_{(2n+2p+m) \times p} & I_p \end{bmatrix} & 0_{p \times n} & -\mathbf{He}(\mathcal{F}_{\Theta,j}) \end{bmatrix} < 0_{3n+3p+m}, \quad (3.48)$$

$\forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2$ , alors les gains de la loi de commande (3.29) sont directement déterminés, et l'ensemble  $L_V(1)$  est une estimation du bassin d'attraction  $\mathcal{B}_0$  en assurant la stabilité locale asymptotique pour toutes lois de commutations possibles. ■

**Preuve 82** On note que les inégalités (3.34), (3.35) sont déjà des LMIs et restent les mêmes que celles du théorème 76. Donc, nous les reconsidérons dans notre méthode pour faire la synthèse de commande. Elles impliquent alors les inclusions (3.43)-(3.45), respectivement.

Supposons, maintenant, que les inégalités (3.48) sont vérifiées,  $\forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2$ . Donc, cela signifie qu'il existe des multiplieurs matriciels avec la structure particulière

$$\mathcal{F}_j = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{(n+2p+m) \times n} \\ I_n \\ 0_{p \times n} \end{bmatrix} \mathcal{F}_{G,j} & \begin{bmatrix} 0_{(2n+p+m) \times p} \\ I_p \\ 0_{n \times p} \\ I_p \end{bmatrix} \mathcal{F}_{\Theta,j} \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

où nous choisissons des matrices  $\mathcal{F}_{G,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de rang plein, et des matrices  $\mathcal{F}_{\Theta,j} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  diagonales définies positives,  $\forall j \in \mathcal{I}_N$ . Ces multiplieurs alors vérifient,  $\forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2$ , les inégalités

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{0,i,j} & \star & \star \\ \mathcal{M}'_{1,i} & 0_n & \star \\ \mathcal{M}'_{2,i,j} & 0_{p \times n} & 0_p \end{bmatrix} + \mathbf{He} \left( \mathcal{F}_j \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{G_j} & -I_n & 0_{n \times p} \\ \mathcal{N}_{\Theta_j} & 0_{p \times n} & -I_p \end{bmatrix} \right) < 0_{3n+3p+m}, \quad (3.50)$$

avec la notation  $\mathcal{N}_{G_j} = [-G_j; 0_{n \times (m+2p+n)}]$ ;  $\mathcal{N}_{\Theta_j} = [0_{p \times (m+2n+p)}; -\Theta_j]$ .

En se fondant sur le lemme de Finsler (voir lemme 60), l'existence des multiplieurs solutions des inégalités (3.50),  $\forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2$ , implique

$$\begin{bmatrix} I_{2n+2p+m} & \mathcal{N}'_{G_j} & \mathcal{N}'_{\Theta_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{0,i,j} & \star & \star \\ \mathcal{M}'_{1,i} & 0_n & \star \\ \mathcal{M}'_{2,i,j} & 0_{p \times n} & 0_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n+2p+m} \\ \mathcal{N}_{G_j} \\ \mathcal{N}_{\Theta_j} \end{bmatrix} < 0_{2n+2p+m}. \quad (3.51)$$

Cette relation est obtenue grâce à la propriété :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_{G_j} & -I_n & 0_{n \times p} \\ \mathcal{N}_{\Theta_j} & 0_{p \times n} & -I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n+2p+m} \\ \mathcal{N}_{G_j} \\ \mathcal{N}_{\Theta_j} \end{bmatrix} = 0_{(n+p) \times (2n+2p+m)}, \forall j \in \mathcal{I}_N. \quad (3.52)$$

Ensuite, les inégalités (3.51) peuvent être réécrites sous la forme :

$$\mathcal{M}_{0,i,j} + \mathcal{M}_{1,i} \mathcal{N}_{G_j} + \mathcal{N}'_{G_j} \mathcal{M}'_{1,i} + \mathcal{M}_{2,i,j} \mathcal{N}_{\Theta_j} + \mathcal{N}'_{\Theta_j} \mathcal{M}'_{2,i,j} < 0_{2n+2p+m}. \quad (3.53)$$

Si l'on remplace les matrices par bloc comme définies dans les relations (3.46)-(3.47), nous pouvons identifier que les inégalités (3.53) sont équivalentes,  $\forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2$  à

$$\begin{bmatrix} P_j - G_j - G'_j & G'_j A_{cl,i} & G'_j F_{cl,i} & -G'_j B_i U_i & 0_{n \times p} \\ \star & -P_i & C'_i \Omega_i [T_i - \Delta_i] & J'_{1,i} & A'_{cl,i} C'_j \Omega_j \Theta_j \\ \star & \star & -2T_i & J'_{2,i} & F'_{cl,i} C'_j \Omega_j \Theta_j \\ \star & \star & \star & -2U_i & -U_i B'_i C'_j \Omega_j \Theta_j \\ \star & \star & \star & \star & -2[\Theta_j - \Delta_j] \end{bmatrix} < 0_{2n+2p+m}. \quad (3.54)$$

Nous avons, donc, que le dernier bloc diagonal  $\Theta_j - \Delta_j$  est défini positif, cela implique  $W_j > 0_p, \forall j \in \mathcal{I}_N$ .

Enfin, si nous appliquons le changement de base  $\text{diag}(I_{2n+p}; U_i^{-1}; I_p)$  sur (3.54), nous récupérons l'inégalité (3.33). Nous pouvons conclure que le théorème 81 fournit une solution pour le problème 75 en considérant que cette preuve se termine de la même manière que celle du théorème 76.  $\square$

**Remarque 83** Pour linéariser nos inégalités matricielles, nous avons utilisé le lemme de Finsler. Pour cela, nous avons choisi une structure particulière pour les matrices des multiplieurs. Il est important de noter que ce lemme originalement devrait être appliqué sur chacune des inégalités (3.54) de notre problème de synthèse. Donc, nous aurions dû considérer l'existence de  $2^N$  multiplieurs  $\mathcal{F}_{i,j} \in \mathbb{R}^{(3n+3p+m) \times (n+p)}$ . En revanche, pour obtenir des conditions suffisantes sous une forme LMI, nous avons eu besoin d'un nombre plus petit de multiplieurs,  $N$ , qui sont représentés dans le théorème 81 par l'index  $j \in \mathcal{I}_N, \mathcal{F}_j \in \mathbb{R}^{(3n+3p+m) \times (n+p)}$ .

On reprend l'exemple 80 de la section 3.4, où on s'intéresse, maintenant, à développer la synthèse de commande. Nous utiliserons notre résultat établi dans le théorème 81 et nous pourrions ainsi illustrer des caractéristiques intéressantes de notre fonction de Lyapunov quand elle est employée dans ce cadre-là.

#### Exemple 84 Synthèse de commande sur l'exemple 80

Nous avons résolu le problème d'optimisation proposé dans le théorème 81, en obtenant la valeur numérique pour le critère  $\mu = 2.5616$ . Les gains de la loi de commande sont donnés par :

$$K_1 = [-0.7629 \quad -1.0419]; \Gamma_1 = -1.2636;$$

$$K_2 = [-1.2708 \quad -0.7399]; \Gamma_2 = -1.4744.$$

Pour les autres variables d'optimisation, les valeurs suivantes sont trouvées :  $U_1 = 0.6573; T_1 = 1.3481; Q_1 = 0.0560; \Delta_1 = 0.3926; R_1 = 0.8436; X_{\Theta,1} = 0.8770; \mathcal{F}_{\Theta,1} = 1.0867; J_{1,1} = [0.0378 \quad 0.0319]; J_{2,1} = -0.8559; U_2 = 0.6253; T_2 = 0.4331; Q_2 = 0.5132; \Delta_2 = R_2 = 0.3977; X_{\Theta,2} = 0.8021; \mathcal{F}_{\Theta,2} = 1.0068; J_{2,2} = -0.4219; J_{1,2} = [-0.3270 \quad -0.1857];$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.4909 & 0.1829 \\ 0.1829 & 0.6736 \end{bmatrix}; \mathcal{F}_{G,1} = \begin{bmatrix} 1.2252 & -0.000 \\ -0.1631 & 1.1369 \end{bmatrix}; X_{G,1} = \begin{bmatrix} 0.7164 & 0.1828 \\ 0.0094 & 0.8106 \end{bmatrix};$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1.0390 & 0.3913 \\ 0.3913 & 0.2105 \end{bmatrix}; \mathcal{F}_{G,2} = \begin{bmatrix} 0.9562 & -0.1607 \\ -0.2312 & 1.3810 \end{bmatrix}; X_{G,2} = \begin{bmatrix} 0.9951 & 0.2307 \\ 0.1603 & 0.5910 \end{bmatrix}.$$

Dans les Figures 3.11, 3.12, nous pouvons illustrer le rapport entre les ensembles  $\{x \in \mathbb{R}^n; V(i; x; \varphi_i(C_i x) \leq 1\}; i = 1; 2$ ; et notre estimation  $L_V(1)$ . La ligne de niveau relative à chacune des fonctions indépendamment est représentée par une ligne en trait forcé et notre ensemble  $L_V(1)$  par une ligne en trait clair.

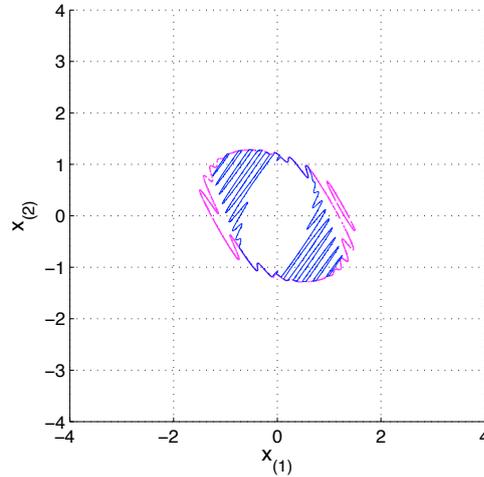


FIGURE 3.11 – La ligne de niveau de notre fonction associée au mode 1 :  $\{x \in \mathbb{R}^n; V(1; x; \varphi_1(C_1 x) \leq 1\}$  et l'ensemble  $L_V(1)$  (trait clair).

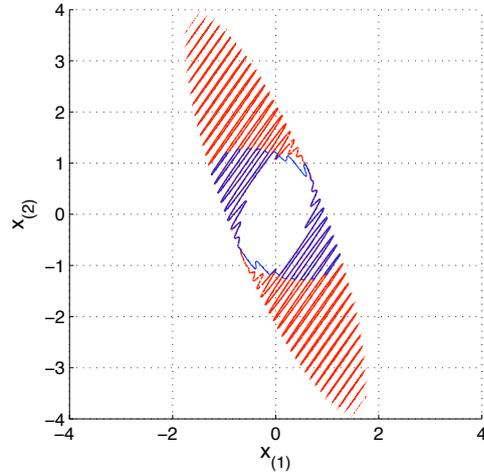


FIGURE 3.12 – La ligne de niveau de notre fonction associée au mode 2 :  $\{x \in \mathbb{R}^n; V(2; x; \varphi_2(C_2 x) \leq 1\}$  et l'ensemble  $L_V(1)$  (trait clair).

L'ensemble  $L_V(1)$  est ainsi déterminé par l'intersection des ensembles suivants :

$$\{x \in \mathbb{R}^n; V(1; x; \varphi_1(C_1 x) \leq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n; V(2; x; \varphi_2(C_2 x) \leq 1\}.$$

Notre estimation du bassin d'attraction qui dépend des non-linéarités est représentée par une ligne pleine dans la Figure 3.13. Les lignes en trait clair décrivent chacun des ensembles relatifs à des fonctions associées aux modes.

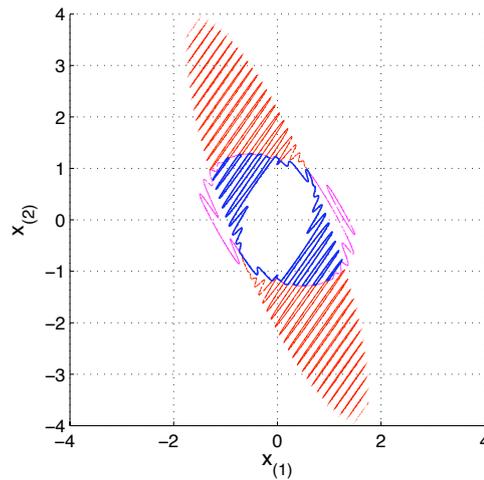


FIGURE 3.13 – L’ensemble  $L_V(1)$  (trait forcé) résultant de l’intersection des deux lignes de niveau :  $\{x \in \mathbb{R}^n; V(1; x; \varphi_1(C_1x) \leq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n; V(2; x; \varphi_2(C_2x) \leq 1\}$ .

Nous calculons l’aire de notre estimation  $\mathcal{A}_{L_V(1)} = 3.1516$ . Cela représente une augmentation d’environ 66% par rapport à la région donnée par la synthèse de [JCTD09] et 24% par rapport à notre estimation donnée par le théorème 76.

Ensuite, afin de mettre en évidence l’efficacité de notre méthode de synthèse, nous considérons deux différentes conditions initiales  $x_0^1 = (-1.05; 1.05)'$  et  $x_0^2 = (1.17; -0.62)'$  situées dans les sous-ensembles de  $L_V(1)$  non-connexes. Chacune des trajectoires est sujet à deux réalisations différentes de loi de commutation arbitraire, et elles sont représentées dans la Figure 3.14. La plus grande boule  $\mathcal{E}(\mu I_n) \subset L_V(1)$  (ligne tirets) associée à notre critère d’optimisation est aussi tracée.

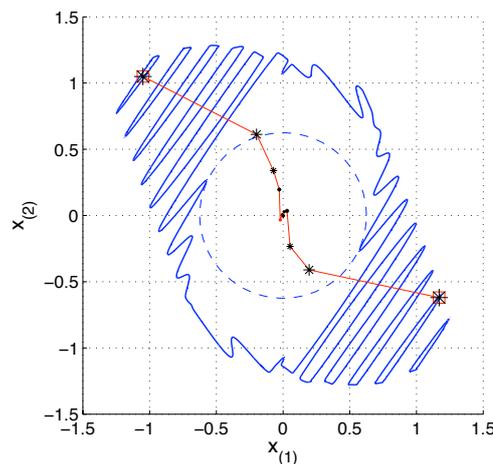


FIGURE 3.14 – L’ensemble  $L_V(1)$  déterminé dans la méthode du théorème 81. Deux trajectoires asymptotiquement stables sous deux réalisations de commutation arbitraire.

Nous évaluons les trajectoires générées par le système (3.30) à partir de conditions initiales appartenant à une région d’espace d’état :  $-2.5 \leq x_{0,(1)} \leq 2.5$  et  $-2.5 \leq x_{0,(2)} \leq 2.5$  (même l’ensemble  $L_V(1)$ ). Nous avons utilisé une grille de pas 0.01 sur cette région

pour évaluer les trajectoires. Nous avons réalisé cette analyse en considérant des lois de commutations particulières :

- 1)  $\sigma(2k) = 1; \sigma(2k + 1) = 2; \forall k \in \mathbb{N}$ , une commutation périodique qui commence par le mode 1 ;
- 2)  $\sigma(k) = 1 \forall k \in \mathbb{N}$ , une situation dans laquelle seulement le mode 1 reste actif ;
- 3)  $\sigma(2k) = 2; \sigma(2k + 1) = 1; \forall k \in \mathbb{N}$ , une commutation périodique qui débute par le mode 2 ;
- 4)  $\sigma(k) = 2 \forall k \in \mathbb{N}$ , où nous n'avons que le mode 2 actif.

Le résultat de ce quadrillage est donné dans les Figures 3.15, 3.16 et 3.17. Il est pos-

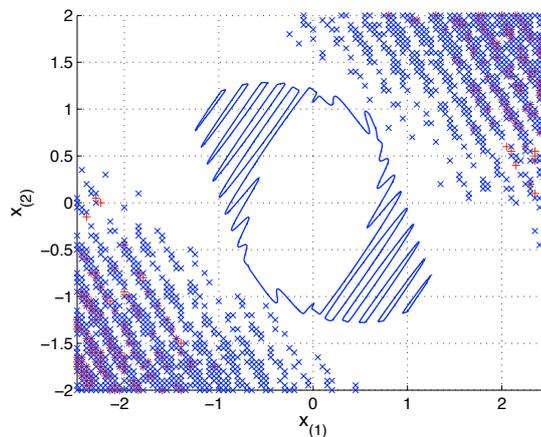


FIGURE 3.15 – L'ensemble  $L_V(1)$  (ligne pleine) et des conditions initiales  $x_0 = (x_{0,(1)}; x_{0,(2)})'$  associées à des trajectoires instables pour les lois de commutation : **1** ('+') et **2** ('x').

sible de voir que les lois de commutation qui activent le mode 2 ont plusieurs conditions initiales pour lesquelles le système est instable. En effet, notre intérêt à tenter de répondre à la question sur le conservatisme de notre estimation est mis en évidence dans la Figure 3.17. Nous remarquons qu'il existe plusieurs points associés à différentes lois de commutation se situant entre les ensembles non-connexes de  $L_V(1)$  déterminé par le théorème 81.

Les points qui remplissent les régions non-connexes de notre estimation indiquent que notre fonction  $V(i; x; \varphi_i(C_i x))$  est appropriée pour estimer le bassin d'attraction du système considéré. Ainsi, nous avons illustré une caractéristique remarquable de notre fonction et sa ligne de niveau  $L_V(1)$  qui est de fournir une estimation de  $\mathcal{B}_0$  bien adaptée à la forme du bassin d'attraction de ce système sous une commutation arbitraire.

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré plusieurs classes des systèmes non-linéaires à commutations arbitraires en temps discret. En premier, nous avons étudié des systèmes à commutations où chacun des modes est un sous-système du type Lur'e. Par

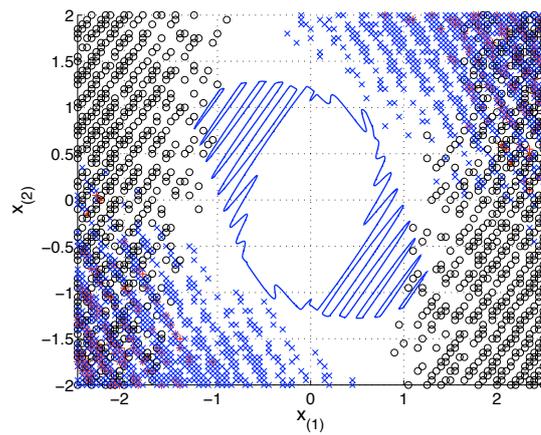


FIGURE 3.16 – L'ensemble  $L_V(1)$  (ligne pleine) et des conditions initiales  $x_0 = (x_{0,(1)}; x_{0,(2)})'$  associées à des trajectoires instables pour les lois de commutation : **1)** ('+'); **2)** ('x') et **3)** ('o').

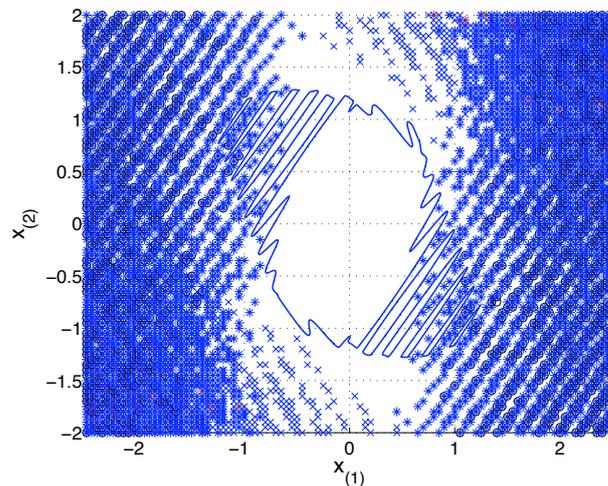


FIGURE 3.17 – L'ensemble  $L_V(1)$  (ligne pleine) et la région ombreuse décrit toutes les conditions initiales  $x_0 = (x_{0,(1)}; x_{0,(2)})'$  associées à des trajectoires instables pour les 4 lois de commutation considérées : **1)** ('+'); **2)** ('x'); **3)** ('o') et **4)** (étoile).

conséquent, ce système présente des non-linéarités du type secteur qui commutent aussi. Ainsi, nous avons proposé des résultats concernant l'analyse de stabilité globale, le théorème 67, pour toutes les lois de commutation possibles. Ce problème peut être vu comme l'extension du problème Lur'e en temps discret traité dans le Chapitre 2 au cadre des systèmes à commutations.

Notre fonction de Lyapunov nous a servi aussi pour traiter le problème d'analyse de stabilité locale quand le système Lur'e à commutations arbitraires est contraint par une commande saturée. Nous avons proposé une méthode, le théorème 76, fondée sur notre fonction, afin d'obtenir une estimation du bassin d'attraction de ces systèmes moins conservative que celle fondée sur les travaux de [JCTD09].

Enfin, nous avons étudié le problème de synthèse de commande pour cette classe de systèmes. Le résultat est donné sous forme BMI. Nous avons présenté l'extension

de la technique de linéarisation dans la Section 3.5. Ainsi, nous avons réussi à obtenir des conditions suffisantes sous forme LMI en appliquant le lemme de Finsler. Ces conditions ont été, ensuite, considérées comme contraintes d'un problème d'optimisation convexe proposé dans le théorème 81. Nous avons mis en évidence un aspect intéressant de notre fonction de Lyapunov. L'estimation donnée par la ligne de niveau de notre fonction est bien adaptée au bassin d'attraction des systèmes Lur'e à commutations arbitraires avec la commande saturée.

Le chapitre suivant traitera des mêmes classes de systèmes Lur'e à commutations mais sous une autre hypothèse pour la loi de commutation. Elle sera alors considérée comme une composante des entrées de commande.



## Chapitre 4

# Stabilisation par loi de commutation de systèmes à commutations et à modes non-standards

Dans le Chapitre 3, nous avons introduit le problème de Lur'e dans le cadre des systèmes à commutations. Nous allons maintenant supposer que la loi de commutation est une variable de commande. Ainsi, nous utiliserons la stratégie de commutation du type "*min-switching*", introduite dans [WD97, Lib03]. Elle sera fondée sur les inégalités de Lyapunov-Metzler déjà utilisée dans la littérature pour garantir qu'un système linéaire à commutations vérifie certaines propriétés comme la stabilité et des aspects de performance, [GC06a, GC06b, GBC08, GD09, DGD10a, DGD10b, DGD11]. Les approches proposées dans ces références se sont toujours fondées sur les fonctions quadratiques commutées. Nous, en revanche, avons fait le choix de développer une méthode de stabilisation d'une famille de systèmes Lur'e qui commutent en explorant notre nouvelle fonction de Lyapunov du type Lur'e, car elle tient compte des non-linéarités modales et donc, est plus adaptée à la nature non-linéaire de ces systèmes.

Le deuxième problème étudié dans l'ensemble de ce chapitre sera la synthèse de loi de commutation en présence de saturations. La stabilisation des systèmes à commutations avec des contraintes de saturation fut traitée plutôt lorsque les modes sont linéaires avec un retour linéaire commuté, [LL08]. La stratégie de commutation est fondée sur les fonctions quadratiques composées (en anglais *composite quadratic functions*). Cette approche peut aussi être vue comme une stratégie du type "*min-switching*". Cette référence modélise la saturation d'un retour linéaire commuté comme étant incluse dans l'enveloppe convexe défini par les gains de la commande et des gains auxiliaires, une formulation qui est aussi utilisée dans la littérature [HL01, HLC02b, HLC02a, CL03]. En revanche, nous garderons la méthodologie de ce manuscrit en modélisant la saturation par une zone-morte qui vérifie une condition de secteur généralisée, [CTQ08]. Ainsi, nous allons résoudre notre problème de stabilisation locale en explorant notre fonction de Lyapunov du type Lur'e commutée. Une méthode de synthèse de loi de commutation sera proposée afin de maximiser une estimation du bassin d'attraction. Dans ce cadre, nos résultats s'avèrent intéressants sur deux aspects. D'une part, notre estimation sera définie par l'union des lignes de niveau des fonctions Lur'e modales, et elle pourra être composée par des ensembles non-connexes

et non-convexes. D'autre part, notre stratégie de commutation sera capable de rendre l'origine de ce système asymptotiquement stable même dans le cas où chaque mode n'est pas stable en boucle fermée.

Dans l'ensemble de ce chapitre, nous présenterons des travaux de recherche développés dans les publications suivantes : [JGD12b] et [JGD12a].

## 4.1 Systèmes Lur'e à commutations en temps discret

Dans cette section, nous rappelons la définition d'un système Lur'e à commutations en temps discret, composé par  $N$  modes, ( $N \geq 1$ ) :

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + F_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k), \quad (4.1)$$

$$y_k = C_{\sigma(k)}x_k, \quad (4.2)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$  et  $y_k \in \mathbb{R}^p$  sont respectivement l'état et la sortie du système (4.1)-(4.2). Les matrices  $A_i$ ,  $F_i$  et  $C_i$  ont des dimensions appropriées,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ .

Les fonctions  $\varphi_i(\cdot)$  sont les non-linéarités associées à chacun des modes  $i \in \mathcal{I}_N$ . La valeur actuelle de la non-linéarité active  $\varphi_{\sigma(k)}(y_k)$  est supposée disponible comme un signal, [ALK03]. De plus, les non-linéarités modales vérifient l'hypothèse 65, et donc, chacune satisfait sa propre condition de secteur,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$  :

$$SC(\varphi_i(\cdot), y, \Lambda_i) = \varphi_i'(y)\Lambda_i[\varphi_i(y) - \Omega_i y] \leq 0, \forall y \in \mathbb{R}^p. \quad (4.3)$$

Dans le cadre de ce chapitre, la loi de commutation  $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathcal{I}_N$  sera considérée comme une composante de la variable de commande, en choisissant le mode actif à chaque instant de temps. Nous nous trouvons dans le cadre du troisième problème de base de systèmes à commutations, [LM99]. Ainsi, la première partie de ce chapitre s'attache à proposer une méthode pour trouver une solution pour le problème suivant :

**Problème 85** *Considérons le système Lur'e à commutations (4.1)-(4.2). Sous l'hypothèse 65, pour les non-linéarités modales, synthétiser une loi de commutation dépendante de l'état*

$$\sigma(k) = g(x_k) \quad (4.4)$$

qui garantit que l'origine est globalement asymptotiquement stable.

La synthèse de loi de commutation stabilisante sera, au cours de ce chapitre, principalement fondée sur une stratégie du type "min-switching", [GC06b, DGD10a, Ger10], et en utilisant une fonction de Lyapunov du type Lur'e :

$$V_{\min} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto \min_{i \in \mathcal{I}_N} V(i; x; \varphi_i(C_i x)). \end{cases} \quad (4.5)$$

Cette fonction  $V_{\min}$  est déterminée en considérant le minimum des fonctions modales  $V(i; x; \varphi_i(C_i x))$  sur tous les modes. Du fait du nombre fini de modes, elle hérite de toutes les propriétés basiques de notre fonction du type Lur'e commutée, listées dans la Section 3.1.2, c'est-à-dire :

- $V_{\min}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n,$
- $V_{\min}(x) = 0$  implique  $x = 0,$
- $V_{\min}$  est radialement non-bornée.

Nous introduisons la ligne de niveau de la fonction  $V_{\min}(\cdot)$ , associée à un certain  $\gamma > 0$ , en définissant

$$L_{V_{\min}}(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n; V_{\min}(x) \leq \gamma\}. \quad (4.6)$$

Cette ligne de niveau  $L_{V_{\min}}(\gamma)$  peut être reformulée comme l'union suivante [HL03] :

$$L_{V_{\min}}(\gamma) = \bigcup_{j \in \mathcal{I}_N} \{x \in \mathbb{R}^n; V(j; x; \varphi_j(C_j x)) \leq \gamma\}. \quad (4.7)$$

**Remarque 86** Cette ligne de niveau  $L_{V_{\min}}$  sera explorée par la suite dans le cadre de l'estimation du bassin d'attraction de systèmes Lur'e à commutations avec un retour non-linéaire saturé. Il est important de noter que l'union des lignes de niveau des fonctions modales (4.7) peut être utilisée dans le cas où la loi de commutation  $\sigma$  est une commande. Cette approche ne peut pas être appliquée dans le cadre du Chapitre 3, quand la commutation est arbitraire. Dans ce cadre-là, nous devons toujours considérer la ligne de niveau donnée par l'intersection définie dans la relation (3.16) et qui est directement liée à la valeur maximale des fonctions modales  $V_{\max}(x) = \max_{i \in \mathcal{I}_N} V(i; x; \varphi_i(C_i x))$ .

Parmi la classe de matrices de Metzler définie dans le Chapitre 1 (définition 9), nous rappelons la sous-classe qui nous intéresse pour formuler nos méthodes de synthèse de loi de commutation :

$$\mathcal{M}_d = \left\{ \Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}, \pi_{ii} \geq 0, \sum_{\ell \in \mathcal{I}_N} \pi_{\ell i} = 1, \forall i \in \mathcal{I}_N \right\}. \quad (4.8)$$

Nous utiliserons, aussi, la notation suivante  $(P)_{p,i} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_N} \pi_{\ell i} P_\ell$ , pour la combinaison convexe des matrices définies positives  $P_i$  où les pondérations sont des éléments de la matrice de Metzler  $\Pi \in \mathcal{M}_d$ .

Dans la section suivante, nous proposerons des conditions suffisantes pour assurer que notre fonction  $V_{\min}$  soit décroissante le long des trajectoires du système Lur'e à commutations.

## 4.2 Synthèse de loi de commutation stabilisante

Cette section propose des méthodes fondées sur des conditions suffisantes afin de résoudre le problème 85 en s'appuyant sur notre fonction  $V_{\min}$ .

**Théorème 87** [JGD12b] Considérons le système (4.1)-(4.2) et supposons qu'il existe une matrice de Metzler  $\Pi \in \mathcal{M}_d$ ; des matrices symétriques définies positives  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , des matrices diagonales semi-définies positives  $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et des matrices diagonales définies positives  $T_i$ ,

$W_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , ( $i \in \mathcal{I}_N$ ), telles que les inégalités de Lyapunov-Metzler

$$\begin{aligned} \mathbb{A}'_i(P)_{p,i} \mathbb{A}_i + \mathbf{He}(\mathbb{A}'_i(C' \Omega \Delta \mathbb{E})_{p,i}) - \sum_{q \in \mathcal{I}_N} \left( 2\mathbb{E}'_q W_q \mathbb{E}_q - \mathbf{He}(\mathbb{E}'_q W_q \Omega_q C_q \mathbb{A}_i) \right) \\ - \begin{bmatrix} P_i & \star & \star \\ (\Delta_i - T_i) \Omega_i C_i & 2T_i & \star \\ 0_{Np \times n} & 0_{Np \times p} & 0_{Np} \end{bmatrix} < 0_{n+(N+1)p}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

sont satisfaites  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ , avec les notations suivantes :

$$\mathbb{A}_i = [ A_i \quad F_i \quad 0_{n \times Np} ]; \quad (4.10)$$

$$\mathbb{E}_i = [ 0_{p \times (n+ip)} \quad I_p \quad 0_{p \times (N-i)p} ]; \quad (4.11)$$

alors la fonction  $V_{\min}$  est une fonction de Lyapunov pour le système Lur'e à commutations (4.1)-(4.2) et la stratégie de commutation du type :

$$\sigma(k) \in \arg \min_{i \in \mathcal{I}_N} V(i; x_k; \varphi_i(C_i x_k)) \quad (4.12)$$

garantit que l'origine est globalement asymptotiquement stable. ■

**Preuve 88** La preuve de la stabilité globale asymptotique consiste à montrer que la fonction  $V_{\min}$  est strictement décroissante le long des trajectoires du système Lur'e à commutations (4.1)-(4.2). Donc, notons le vecteur d'état augmenté

$$z_k = \begin{pmatrix} x_k \\ \varphi_i(C_i x_k) \\ \varphi_1(C_1 x_{k+1}) \\ \vdots \\ \varphi_N(C_N x_{k+1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+(N+1)p)}. \quad (4.13)$$

Le vecteur  $z_k$  est composé de l'état du système à l'instant courant  $k$ , de la non-linéarité active en  $k$  et de toutes les non-linéarités possibles à l'instant  $k+1$ .

En tenant compte de la notation auxiliaire (4.10), le système (4.1)-(4.2) peut être réécrit sans perte de généralité sous la forme suivante

$$x_{k+1} = \mathbb{A}_{\sigma(k)} z_k. \quad (4.14)$$

De part la structure des matrices (4.11), nous avons aussi que les non-linéarités modales évaluées à l'instant  $k+1$  sont directement données par la relation  $\varphi_j(C_j x_{k+1}) = \mathbb{E}_j z_k, \forall j \in \mathcal{I}_N$ .

Nous pouvons, par conséquent, réécrire la condition de secteur évaluée à l'instant  $k+1$ , relative à des non-linéarités pour les modes  $q \in \mathcal{I}_N$

$$-2\varphi'_q(C_q x_{k+1}) W_q [\varphi_q(C_q x_{k+1}) - \Omega_q C_q x_{k+1}] \geq 0, \quad (4.15)$$

sous la forme équivalente suivante

$$-2z'_k \mathbb{E}'_q W_q (\mathbb{E}_q - \Omega_q C_q \mathbb{A}_i) z_k = -z'_k (2\mathbb{E}'_q W_q \mathbb{E}_q - \mathbf{He}(\mathbb{E}'_q W_q \Omega_q C_q \mathbb{A}_i)) z_k \geq 0, \quad (4.16)$$

où  $W_q$  sont des matrices diagonales définies positives  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ .

Ensuite, considérons la fonction  $V_{\min}(x_{k+1})$

$$\begin{aligned} V_{\min}(x_{k+1}) &= \min_{j \in \mathcal{I}_N} V(j; x_{k+1}; \varphi_j(C_j x_{k+1})) \\ &= \min_{j \in \mathcal{I}_N} z'_k (\mathbb{A}'_i P_j \mathbb{A}_i + \mathbf{He}(\mathbb{A}'_i C'_j \Omega_j \Delta_j \mathbb{E}_j)) z_k; \end{aligned} \quad (4.17)$$

et pour laquelle, nous pouvons définir un majorant à l'aide de toutes les conditions de secteur (4.15), celui-ci est alors donné par :

$$\begin{aligned} V_{\min}(x_{k+1}) &\leq \min_{j \in \mathcal{I}_N} z'_k \left( \mathbb{A}'_i P_j \mathbb{A}_i + \mathbf{He}(\mathbb{A}'_i C'_j \Omega_j \Delta_j \mathbb{E}_j) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{q \in \mathcal{I}_N} \left( 2\mathbb{E}'_q W_q \mathbb{E}_q - \mathbf{He}(\mathbb{E}'_q W_q \Omega_q C_q \mathbb{A}_i) \right) \right) z_k. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Il est important de noter que les minima des relations (4.17) et (4.18) sont atteints par le même ensemble des modes parmi ceux appartenant à  $\mathcal{I}_N$ . Ainsi, en tenant compte du lemme 11, ce dernier minimum est équivalent à :

$$\begin{aligned} V_{\min}(x_{k+1}) &\leq \min_{\substack{\lambda \in \mathbb{R}^N \\ \lambda_j \geq 0; \\ \lambda' \mathbf{1}_N = 1}} \sum_{j \in \mathcal{I}_N} \lambda_j z'_k \left( \mathbb{A}'_i P_j \mathbb{A}_i + \mathbf{He}(\mathbb{A}'_i C'_j \Omega_j \Delta_j \mathbb{E}_j) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{q \in \mathcal{I}_N} \left( 2\mathbb{E}'_q W_q \mathbb{E}_q - \mathbf{He}(\mathbb{E}'_q W_q \Omega_q C_q \mathbb{A}_i) \right) \right) z_k. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nous savons que chacune des colonnes de la matrice de Metzler  $\Pi \in \mathcal{M}_d$  appartient au simplex unité, nous avons que l'inégalité suivante est satisfaite

$$\begin{aligned} V_{\min}(x_{k+1}) &\leq z'_k \left( \mathbb{A}'_i (P)_{p,i} \mathbb{A}_i + \mathbf{He}(\mathbb{A}'_i (C' \Omega \Delta \mathbb{E})_{p,i}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{q \in \mathcal{I}_N} \left( 2\mathbb{E}'_q W_q \mathbb{E}_q - \mathbf{He}(\mathbb{E}'_q W_q \Omega_q C_q \mathbb{A}_i) \right) \right) z_k. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ainsi, grâce à la propriété des matrices de Metzler  $\Pi$  et les inégalités (4.9), le majorant pour la fonction  $V_{\min}(x_{k+1})$  devient

$$V_{\min}(x_{k+1}) < z'_k \begin{bmatrix} P_i & \star & \star \\ (\Delta_i - T_i) \Omega_i C_i & 2T_i & \star \\ 0_{Np \times n} & 0_{Np \times p} & 0_{Np} \end{bmatrix} z_k,$$

qui peut être reformulé sous la forme suivante

$$V_{\min}(x_{k+1}) - V_{\min}(x_k) - 2\text{SC}(\varphi_{\sigma(k)}(y_k), y_k, T_{\sigma(k)}) < 0. \quad (4.21)$$

Pour tous les modes qui peuvent être actifs à l'instant  $k + 1$ , la stratégie de commutation (4.12) assure que la différence  $V_{\min}(x_{k+1}) - V_{\min}(x_k)$  est strictement négative et donc la stabilité asymptotique est prouvée.  $\square$

**Remarque 89** La stratégie de commutation (4.12) définit, à chaque instant de temps  $k$ , l'ensemble des modes relatifs à  $\arg \min_{i \in \mathcal{I}_N} V(i; \cdot; \cdot)$ , un sous-ensemble de  $\mathcal{I}_N$ . Si ce sous-ensemble n'est pas réduit à un singleton, nous avons plusieurs possibilités. Il est possible de choisir comme mode actif n'importe quel mode appartenant à ce sous-ensemble.

Dans le même esprit que la Section 3.2, nous pouvons extraire des conditions nécessaires pour la faisabilité des inégalités de Lyapunov-Metzler (4.9) du théorème 87. Elles sont décrites en considérant les cas particuliers relatifs aux non-linéarités modales pour chacun des modes  $i \in \mathcal{I}_N$  :  $\varphi_i(C_i x) = \Omega_i C_i x$  et  $\varphi_i(C_i x) = 0$  ( $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ).

**Théorème 90** Supposons que les inégalités de Lyapunov-Metzler (4.9) sont vérifiées  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ . Donc nous avons que les matrices  $\pi_{ii}^{\frac{1}{2}} A_i$  et  $\pi_{ii}^{\frac{1}{2}} (A_i + B_i \Omega_i C_i)$  sont du type Schur,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ . ■

**Preuve 91** Du premier bloc diagonal de nos inégalités (4.9), il vient

$$A'_i(P)_{p,i} A_i - P_i < 0_n, \quad (4.22)$$

qui peut être réécrite comme

$$\left( \pi_{ii}^{\frac{1}{2}} A_i \right)' P_i \left( \pi_{ii}^{\frac{1}{2}} A_i \right) - P_i < -A'_i \left( \sum_{j \in \mathcal{I}_N, j \neq i} \pi_{ji} P_j \right) A_i \leq 0_n. \quad (4.23)$$

Cela implique alors la stabilité asymptotique de chacun des sous-systèmes  $x_{k+1} = \pi_{ii}^{\frac{1}{2}} A_i x_k$  ( $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ) en notant que  $\pi_{ii}$  est un élément de la matrice de Metzler  $\Pi \in \mathcal{M}_d$ . Ce cadre peut être considéré comme le cas particulier pour toutes les non-linéarités modales :  $\varphi_i(C_i x) = 0$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ .

Ensuite nous considérerons l'autre cas particulier qui correspond à la borne supérieure pour les conditions de secteurs modales ( $\varphi_i(C_i x) = \Omega_i C_i x$ ). Donc, nous définissons le vecteur suivant :

$$z_k = \overline{\mathbb{M}}_i x_k = \begin{bmatrix} I_n \\ \Omega_i C_i \\ \Omega_1 C_1 (A_i + F_i \Omega_i C_i) \\ \vdots \\ \Omega_N C_N (A_i + F_i \Omega_i C_i) \end{bmatrix} x_k. \quad (4.24)$$

Nous multiplions l'inégalité (4.9) à droite par la matrice  $\overline{\mathbb{M}}_i$  de (4.24) et à gauche par sa transposée et nous obtenons

$$(A_i + F_i \Omega_i C_i)' (P + 2C'_i \Omega \Delta \Omega C)_{p,i} (A_i + F_i \Omega_i C_i) - (P_i + 2C'_i \Omega_i \Delta_i \Omega_i C_i) < 0_n. \quad (4.25)$$

De là, il vient

$$(A_i + F_i \Omega_i C_i)' (\pi_{ii} (P_i + 2C'_i \Omega_i \Delta_i \Omega_i C_i)) (A_i + F_i \Omega_i C_i) - (P_i + 2C'_i \Omega_i \Delta_i \Omega_i C_i) < \\ - (A_i + F_i \Omega_i C_i)' \times \sum_{j \in \mathcal{I}_N, j \neq i} \pi_{ji} (P_j + 2C'_j \Omega_j \Delta_j \Omega_j C_j) \times (A_i + F_i \Omega_i C_i) \leq 0_n, \quad (4.26)$$

et donc,

$$(\pi_{ii}^{\frac{1}{2}}(A_i + F_i\Omega_i C_i))'(P_i + 2C_i'\Omega_i\Delta_i\Omega_i C_i)(\pi_{ii}^{\frac{1}{2}}(A_i + F_i\Omega_i C_i)) - (P_i + 2C_i'\Omega_i\Delta_i\Omega_i C_i) < 0_n. \quad (4.27)$$

Ainsi, nous pouvons conclure que les sous-systèmes  $x_{k+1} = \pi_{ii}^{\frac{1}{2}}(A_i + F_i\Omega_i C_i)x_k$  sont stables  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ . Le scalaire  $\pi_{ii}$  est l'élément de la diagonale principale de la matrice de Metzler  $\Pi \in \mathcal{M}_d$ .  $\square$

**Remarque 92** En tenant compte des conditions du théorème 90, il est important de noter que la stabilité de chacun des cas particuliers pour les non-linéarités modales des sous-systèmes,  $A_i$  et  $(A_i + F_i\Omega_i C_i)$  ( $i \in \mathcal{I}_N$ ), n'est pas nécessaire. Nous pourrions alors stabiliser un système Lur'e à commutations, avec des modes instables, en appliquant notre stratégie de commutation.

Les inégalités de Lyapunov-Metzler (4.9) sont des BMIs, [AKFIJ03]. Elles deviennent des LMIs si l'on fixe la matrice de Metzler, [CFM05, CF93]. Ce choix est conservatif. Une approche considérée dans la littérature consiste à définir la matrice de Metzler de manière à ce que chacune de ses colonnes ne dépende que d'un petit nombre de paramètres  $\gamma_i$ , [GD09, DGD10a]. Certaines références traitent des aspects de performance comme le gain induit  $\mathcal{L}_2$ , (abusivement appelé par  $\mathcal{H}_\infty$ ), pour des systèmes linéaires à commutations en imposant un paramètre commun  $\gamma_i = \gamma$  ( $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ) et en appliquant la technique de recherche en ligne sur ce paramètre, [DGD10a, DGD10b, DGD11]. En tenant compte de ce choix pour la matrice de Metzler, nous proposons le théorème suivant :

**Théorème 93** Considérons l'existence des scalaires  $0 \leq \gamma_i < 1$ , ( $i \in \mathcal{I}_N$ ), avec  $0 \leq \gamma_i < 1$ , et des ensembles de matrices : symétriques définies positives  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , diagonales semi-définies positives  $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , diagonales définies positives  $T_i, W_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , ( $i \in \mathcal{I}_N$ ); tels que les inégalités suivantes sont vérifiées,  $\forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2, j \neq i$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}'_i(\gamma_i P_i + (1 - \gamma_i)P_j)\mathbb{A}_i + \mathbf{He}(\mathbb{A}'_i(\gamma_i C'_i \Omega_i \Delta_i \mathbb{E}_i + (1 - \gamma_i)C'_j \Omega_j \Delta_j \mathbb{E}_j)) \\ & - \sum_{q \in \mathcal{I}_N} \left( 2\mathbb{E}'_q W_q \mathbb{E}_q - \mathbf{He}(\mathbb{E}'_q W_q \Omega_q C_q \mathbb{A}_i) \right) - \begin{bmatrix} P_i & \star & \star \\ (\Delta_i - T_i)\Omega_i C_i & 2T_i & \star \\ 0_{Np \times n} & 0_{Np \times p} & 0_{Np} \end{bmatrix} < 0_{n+(N+1)p}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

alors, les inégalités de Lyapunov-Metzler (4.9) sont satisfaites avec un choix approprié pour la matrice de Metzler  $\Pi$  dépendante des scalaires  $\gamma_i, i \in \mathcal{I}_N$ .  $\blacksquare$

**Preuve 94** La preuve est présentée d'une manière constructive et est fondée sur la définition de la matrice de Metzler  $\Pi \in \mathcal{M}_d$  de la forme suivante.

Considérons les éléments de la diagonale principale de la matrice de Metzler :

$$\pi_{ii} = \gamma_i \in [0, 1), \forall i \in \mathcal{I}_N \quad (4.29)$$

et tous les autres éléments non diagonaux  $\pi_{ji} \geq 0, j \neq i$  tels que la relation suivante soit vraie

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_N, j \neq i} \pi_{ji} = (1 - \gamma_i). \quad (4.30)$$

En tenant compte de ce choix, nous multiplions les inégalités (4.28) par  $\pi_{ji}$ , et nous les sommons sur tout l'ensemble  $j \in \mathcal{I}_N$  tel que  $j \neq i$ . Cela induit la relation suivante

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}'_i \left( \pi_{ii}(1 - \gamma_i)P_i + (1 - \gamma_i) \sum_{j \in \mathcal{I}_N, j \neq i} \pi_{ji}P_j \right) \mathbb{A}_i \\ & + (1 - \gamma_i) \mathbf{He} \left( \mathbb{A}'_i \left( \pi_{ii}C'_i \Omega_i \Delta_i \mathbb{E}_i + \sum_{j \in \mathcal{I}_N, j \neq i} \pi_{ji}C'_j \Omega_j \Delta_j \mathbb{E}_j \right) \right) \\ & - (1 - \gamma_i) \sum_{q \in \mathcal{I}_N} \left( 2\mathbb{E}'_q W_q \mathbb{E}_q - \mathbf{He}(\mathbb{E}'_q W_q \Omega_q C_q \mathbb{A}_i) \right) \\ & - (1 - \gamma_i) \begin{bmatrix} P_i & \star & \star \\ (\Delta_i - T_i) \Omega_i C_i & 2T_i & \star \\ 0_{Np \times n} & 0_{Np \times p} & 0_{Np} \end{bmatrix} < 0_{n+(N+1)p}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Enfin, en multipliant l'ensemble des inégalités (4.31) par  $(1 - \gamma_i)^{-1}$ , ( $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ), cela nous permet de trouver une solution pour les inégalités de Lyapunov-Metzler (4.9).  $\square$

### 4.3 Aspects relatifs aux régions d'activation des modes

Les ensembles  $\mathcal{S}_i$  relatifs à l'activation d'un mode  $i \in \mathcal{I}_N$  peuvent être définis par

$$\mathcal{S}_i = \{x \in \mathbb{R}^n, V_{\min}(x) = V(i; x; \varphi_i(C_i x))\}, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N. \quad (4.32)$$

Notre fonction du type Lur'e  $V_{\min}$  et ses propriétés basiques appellent quelques commentaires concernant les ensembles  $\mathcal{S}_i$  liés à la partition de l'espace d'état

- $0 \in \mathcal{S}_i, \forall i \in \mathcal{I}_N$
- $\cup_{i \in \mathcal{I}_N} \mathcal{S}_i = \mathbb{R}^n$ , parce que le minimum sera toujours atteint au moins par une des fonctions  $V$  modales du fait que le nombre de modes  $N$  est fini. Ainsi, la partition de l'espace d'état induite par les ensembles  $\mathcal{S}_i$  couvre tout l'espace d'état  $\mathbb{R}^n$ .
- Le minimum peut être atteint par plusieurs modes, cela implique que les ensembles  $\mathcal{S}_i$  ne sont pas nécessairement disjoints.

Par la suite, nous présenterons des exemples numériques de systèmes à commutations entre deux modes ( $N = 2$ ) et de dimension  $n = 2$ . Quelques propriétés spécifiques de ce cas peuvent alors être discutées. En premier, la sous-classe des matrices de Metzler de dimension 2 qui vérifie les conditions (4.29)-(4.30) est alors réduite à la matrice suivante :

$$\Pi = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 1 - \gamma_2 \\ 1 - \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Comme nous avons annoncé antérieurement, les ensembles  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont cruciaux dans notre approche. Par conséquent, leur intersection  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  a aussi un rôle important. Nous la définissons dans la relation suivante :

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^2, V(1; x; \varphi_1(C_1 x)) = V(2; x; \varphi_2(C_2 x))\}. \quad (4.34)$$

L'expression analytique de l'intersection  $\mathcal{S}$  est difficile à obtenir en présence des non-linéarités. Nous pouvons néanmoins l'approcher par la ligne de niveau 0 de la

fonction donnée par  $x \rightarrow V(1; x; \varphi_1(C_1x)) - V(2; x; \varphi_2(C_2x))$  et des techniques de grille. Il est important de noter que cet ensemble n'est jamais vide car il contient au moins le singleton  $\{0\}$ .

Nous notons qu'en posant les matrices  $\Delta_1 = 0_p$  et  $\Delta_2 = 0_p$ , c'est-à-dire, en considérant la fonction quadratique commutée, l'ensemble  $\mathcal{S}$  est donné par des lignes droites dans les directions relatives aux solutions de  $x'(P_1 - P_2)x = 0$ . En revanche, il est important de mentionner que, lorsque nous avons au moins  $\Delta_1$  ou  $\Delta_2$  non-nulle, l'ensemble  $\mathcal{S}$  sera composé par des fonctions  $V(1; x; \varphi_1(C_1x)) - V(2; x; \varphi_2(C_2x))$  vérifiant les encadrements définis par

$$\underline{V}(1; x) - \overline{V}(2; x) \leq V(1; x; \varphi_1(C_1x)) - V(2; x; \varphi_2(C_2x))$$

et

$$V(1; x; \varphi_1(C_1x)) - V(2; x; \varphi_2(C_2x)) \leq \overline{V}(1; x) - \underline{V}(2; x).$$

Les courbes de l'ensemble  $\mathcal{S}$  sont encadrées par des lignes droites relatives aux inégalités induites par les fonctions quadratiques modales bornant la fonction  $V(i; x; \varphi_i(C_ix))$ , selon la relation (3.12). Elles sont données par des régions coniques suivantes :

$$C_1 = \{x \in \mathbb{R}^2; x'(P_1 - P_2 - 2C_2'\Omega_2\Delta_2\Omega_2C_2)x = 0\}$$

et

$$C_2 = \{x \in \mathbb{R}^2; x'(P_1 + 2C_1'\Omega_1\Delta_1\Omega_1C_1 - P_2)x = 0\}.$$

Dans la suite, nous présenterons un exemple numérique afin de mettre en évidence des particularités de notre méthode.

### Exemple 95

Considérons le système Lur'e à commutations entre deux modes,  $N = 2$ , et ses dimensions  $n = 2, p = 1 : \Omega_1 = 0.6 ; \Omega_2 = 0.4 ;$

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1.0800 & 0 \\ 0 & -0.7200 \end{bmatrix}; F_1 = \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 0.2000 \end{bmatrix}; C_1 = [ 1.0000 \quad 0.4000 ]; \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -0.4800 & 0.8000 \\ 0 & 0.8000 \end{bmatrix}; F_2 = \begin{bmatrix} 0.2000 \\ 0.5000 \end{bmatrix}; C_2 = [ 0.4000 \quad 1.1000 ]. \end{aligned}$$

Les non-linéarités  $\varphi_i(y)$  sont définies,  $\forall y \in \mathbb{R}$ , par

$$\varphi_1(y) = \Omega_1 y \left( \frac{1 + \cos(2y)}{2} \right); \quad \varphi_2(y) = \Omega_2 y \left( \frac{1 - \sin(2.5y)}{2} \right).$$

Il faut noter que la matrice  $A_2$  est du type Schur, mais les matrices  $A_1, (A_1 + B_1\Omega_1C_1)$  et  $(A_2 + B_2\Omega_2C_2)$  sont instables. Nous avons considéré le choix particulier pour la matrice de Metzler  $\Pi$  donnée par (4.33) où  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.2$ . Donc, nous avons que les quatre matrices suivantes sont Schur :

$$\gamma_1^{\frac{1}{2}} A_1; \quad \gamma_1^{\frac{1}{2}} (A_1 + B_1\Omega_1C_1); \quad \gamma_2^{\frac{1}{2}} A_2; \quad \gamma_2^{\frac{1}{2}} (A_2 + B_2\Omega_2C_2).$$

Les conditions nécessaires pour la faisabilité des inégalités de Lyapunov-Metzler (4.28) présentées dans le théorème 93 sont vérifiées. Numériquement, nous avons obtenu les valeurs suivantes comme solution :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.1490 & -0.0832 \\ -0.0832 & 1.9764 \end{bmatrix}; \Delta_1 = 0.2585; T_1 = 0.6359; W_1 = 0.3413;$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.3508 & -0.4489 \\ -0.4489 & 3.1440 \end{bmatrix}; \Delta_2 = 1.0509; T_2 = 1.3177; W_2 = 0.5584.$$

Pour cet exemple, l'ensemble  $\mathcal{S}$ , relatif à l'intersection des régions d'activation des modes est tracé en ligne pleine dans la Figure 4.1. Notons que cet ensemble n'est pas composé de droites car les matrices  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  ne sont pas nulles. Nous remarquons, comme il est attendu, que l'origine appartient à l'ensemble  $\mathcal{S}$ .

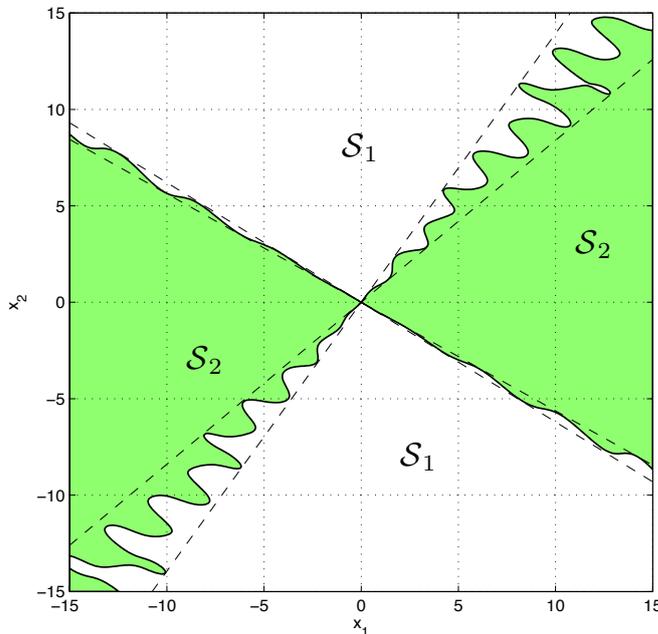


FIGURE 4.1 – L'ensemble  $\mathcal{S}$  en ligne pleine et ses cônes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  en ligne tirets.

Les courbes traduisent la présence des non-linéarités modales dans notre fonction  $V(i; x; \varphi_i(C_i x))$ . Nous observons que les vagues ont des amplitudes bornées ce qui est dû aux propriétés de notre fonction. Ces bornes sont liées aux cônes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , illustrés par des lignes tirets dans la Figure 4.1.

Une trajectoire de l'état du système à partir de  $x_0 = (14; 11)'$  est tracée dans l'espace d'état dans la Figure 4.2. Les points de la trajectoire  $x_k$  sont représentés dans la Figure 4.2 avec des marqueurs différents selon le mode choisi  $\sigma(k)$  : un cercle indique que le mode 1 est activé et une étoile noire indique que le mode 2 est activé. L'évolution temporelle de cette trajectoire est tracée dans la Figure 4.3 et la loi de commutation qui est dépendante de l'état est tracée dans la Figure 4.4.

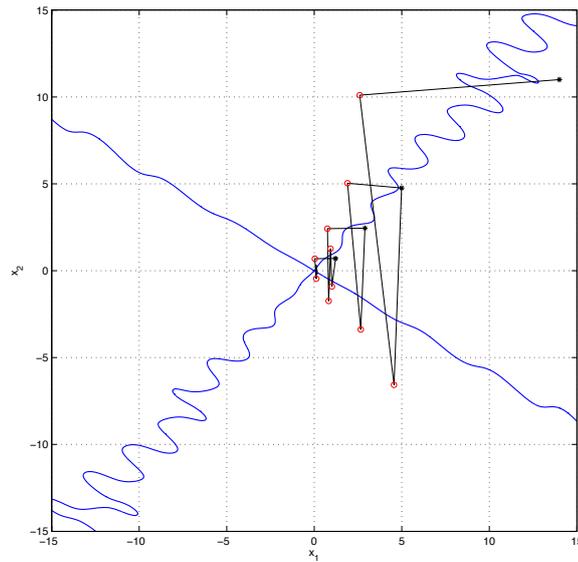


FIGURE 4.2 – L'ensemble  $\mathcal{S}$  (courbes avec des lignes pleines) et la trajectoire générée à partir de  $x_0 = (14; 11)'$ . À chaque état  $x_k$ , un cercle (resp. une étoile noire) représente que le mode 1 (resp. 2) est choisi.

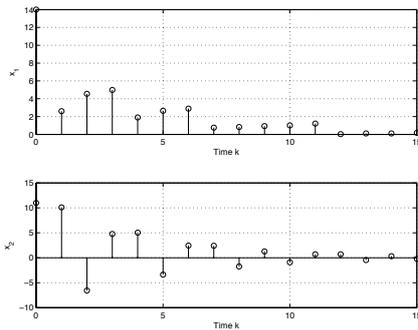


FIGURE 4.3 – La réponse temporelle  $x_k$ .

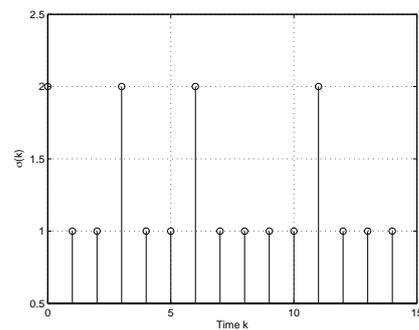


FIGURE 4.4 – La loi de commutation  $\sigma(k)$ .

## 4.4 Systèmes Lur'e à commutations avec commande saturée

Rappelons la définition d'un système Lur'e à commutations avec une commande saturée :

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + F_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k) + B_{\sigma(k)}\text{sat}(u_k), \quad (4.35)$$

$$y_k = C_{\sigma(k)}x_k, \quad (4.36)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $y_k \in \mathbb{R}^p$  est la sortie,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  est l'entrée du système (4.35)-(4.36). Les fonctions  $\varphi_i(\cdot)$  sont les non-linéarités associées à chacun des modes  $i \in \mathcal{I}_N$ . Les matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  et  $F_i$  ont des dimensions appropriées, ( $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ). L'entrée  $u_k$  est contrainte par les limites d'actionneur et donc la fonction saturation normalisée

sera considérée, (voir définition 32, relation (1.54)). Les non-linéarités modales  $\varphi_i(\cdot)$  vérifierons l'hypothèse 65 sur les conditions de secteur modales.

Nous considérons le cadre où la loi de commutation est une commande. Nous ferons appel à la classe de commandes déjà utilisée dans cette thèse :

$$u_k = K_{\sigma(k)}x_k + \Gamma_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k), \quad (4.37)$$

où la matrice  $K_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est le gain de retour linéaire commuté et la matrice  $\Gamma_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{m \times p}$  est le gain de retour commuté relatif à la non-linéarité modale active. Ainsi, nous supposons que la valeur de  $\varphi_{\sigma(k)}(y_k)$  est connue comme un signal à l'instant de temps  $k$ , [ALK03].

Suivant l'approche considérée dans ce mémoire, nous modéliserons la saturation par la non-linéarité du type zone-morte  $\Psi(u_k) = u_k - \text{sat}(u_k)$ . Ainsi, si l'on remplace  $u_k$  défini dans la relation (4.37) et la zone-morte  $\Psi(u_k)$  dans (4.35), le modèle en boucle fermée est donné par :

$$x_{k+1} = A_{\text{cl},\sigma(k)}x_k + F_{\text{cl},\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k) - B_{\sigma(k)}\Psi(u_k), \quad (4.38)$$

où  $A_{\text{cl},i} = A_i + B_iK_i$  et  $F_{\text{cl},i} = F_i + B_i\Gamma_i$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ .

Nous allons définir les ensembles dépendants du mode  $\mathcal{T}_i$ , ( $i \in \mathcal{I}_N$ ) qui caractérisent la zone-morte  $\Psi(u_k)$  comme satisfaisant une condition de secteur généralisée locale dépendante du mode. Pour des matrices données  $H_i \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$ ,  $i \in \mathcal{I}_N$ , considérons les ensembles

$$\mathcal{T}_i(H_i, \rho) = \{ \phi \in \mathbb{R}^{n+p}; -\rho \leq H_i\phi \leq \rho \}. \quad (4.39)$$

**Lemme 96** Soit le mode  $i \in \mathcal{I}_N$  et les matrices  $m \times (n+p)$   $\widehat{K}_i = [K_i \ \Gamma_i]$  et  $\widehat{J}_i = [J_{1,i} \ J_{2,i}]$ . Si le vecteur  $\widehat{x}_k = [x'_k \ \varphi'_i(y_k)]'$  est un élément de l'ensemble  $\mathcal{T}_i(\widehat{K}_i - \widehat{J}_i, \rho)$ , alors la non-linéarité  $\Psi(u_k)$  satisfait la condition de secteur modale suivante :

$$SC_{u_k} = \Psi'(u_k)U_i^{-1} [\Psi(u_k) - J_{1,i}x_k - J_{2,i}\varphi_i(y_k)] \leq 0, \quad (4.40)$$

où  $u_k$  est la loi de commande définie dans (4.37), pour une matrice diagonale définie positive  $U_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  quelconque.

**Preuve 97** La preuve s'obtient de la même manière que celle de [TPG06, Lemma 1].

**Remarque 98** Il est important de noter que la relation (4.40) n'est vraie que pour le mode actif  $i \in \mathcal{I}_N$  relatif à l'ensemble modal  $\mathcal{T}_i(H_i, \rho)$ . Elle n'est pas nécessairement vérifiée pour tous les autres modes.

Une fois que nous avons défini le système étudié et explicité les résultats préliminaires considérés dans le cadre de cette section, nous envisageons de proposer une méthode pour résoudre le problème suivant

**Problème 99** Soit le système Lur'e à commutations avec la commande saturée (4.35)-(4.36), sous l'hypothèse 65. Déterminer une loi de commutation dépendante de l'état du type

$$\sigma(k) = g(x_k) \quad (4.41)$$

qui garantit que l'origine de ce système est localement asymptotiquement stable dans une région aussi grande que possible incluse dans le bassin d'attraction  $\mathcal{B}_0$ .

## 4.5 Stabilisation locale par stratégie de commutation

Dans le théorème suivant, nous proposons notre principal résultat de cette section afin de résoudre le problème 99.

**Théorème 100** [JGD12a] *Considérons le système à commutations en boucle fermée (4.38). Supposons l'existence d'une matrice  $\Pi \in \mathcal{M}_d$ ; des matrices symétriques définies positives  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , des matrices diagonales définies positives  $Q_i, T_i, W_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $U_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , des matrices diagonales semi-définies positives  $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et des matrices  $J_{1,i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $J_{2,i} \in \mathbb{R}^{m \times p}$  ( $i \in \mathcal{I}_N$ ), telles que les inégalités de Lyapunov-Metzler sont satisfaites  $\forall i \in \mathcal{I}_N$  :*

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbb{A}}_i'(P)_{p,i} \tilde{\mathbb{A}}_i + \mathbf{He}(\tilde{\mathbb{A}}_i'(C' \Omega \Delta)_{p,i} \tilde{\mathbb{E}}_i) - \sum_{q \in \mathcal{I}_N} \left( 2 \tilde{\mathbb{E}}_q' W_q \tilde{\mathbb{E}}_q - \mathbf{He}(\tilde{\mathbb{E}}_q' W_q \Omega_q C_q \tilde{\mathbb{A}}_i) \right) \\ & - \begin{bmatrix} P_i & \star & \star & \star \\ (\Delta_i - T_i) \Omega_i C_i & 2T_i & \star & \star \\ -U_i^{-1} J_{1,i} & -U_i^{-1} J_{2,i} & 2U_i^{-1} & \star \\ 0_{Np \times n} & 0_{Np \times p} & 0_{Np \times m} & 0_{Np} \end{bmatrix} < 0_{\hat{n}}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

et les LMIs,  $\forall (i, \ell) \in \mathcal{I}_N \times \{1, \dots, m\}$ ,

$$\begin{bmatrix} P_i & \star & \star \\ (\Delta_i - Q_i) \Omega_i C_i & 2Q_i & \star \\ (K_i - J_{1,i})_{(\ell)} & (\Gamma_i - J_{2,i})_{(\ell)} & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} > 0_{n+p+1} \quad (4.43)$$

où  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ , nous considérons les matrices auxiliaires suivantes

$$\tilde{\mathbb{A}}_i = \begin{bmatrix} A_{cl,i} & F_{cl,i} & -B_i & 0_{n \times Np} \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

$$\tilde{\mathbb{E}}_i = \begin{bmatrix} 0_{p \times (n+p+m)} & 0_{p \times ip} & I_p & 0_{p \times (N-i-1)p} \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

et avec  $\hat{n} = n + m + (N + 1)p$ , alors la loi de commutation

$$\sigma(k) \in \arg \min_{i \in \mathcal{I}_N} V(i; x_k; \varphi_i(C_i x_k)) \quad (4.46)$$

assure la stabilité locale asymptotique de l'origine du système (4.35)-(4.36) dans l'ensemble  $L_{V_{\min}}(1)$ .  $\blacksquare$

**Preuve 101** *La preuve suit la même idée que celle du théorème 87 et consiste à garantir que sous les conditions du théorème 100, la fonction candidate  $V_{\min}$  est strictement décroissante le long de la trajectoire du système (4.38) dans l'ensemble  $L_{V_{\min}}(1)$ .*

Nous définissons le vecteur d'état étendu du système étudié :

$$z_k = \begin{pmatrix} x_k \\ \varphi_i(C_i x_k) \\ \Psi(u_k) \\ \varphi_1(C_1 x_{k+1}) \\ \vdots \\ \varphi_N(C_N x_{k+1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\hat{n}}. \quad (4.47)$$

Notons que due à la structure des non-linéarités modales  $\varphi_i(C_i x_k)$  et  $\Psi(u_k)$  ( $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ), le vecteur  $z_k$  est nul si et seulement si  $x_k = 0$ .

En tenant compte des notations auxiliaires (4.44)-(4.45), le modèle en boucle fermée du système (4.38) peut être redéfini par  $x_{k+1} = \tilde{\mathbb{A}}_{\sigma(k)} x_k$  et la non-linéarité modale relative à l'instant  $k+1$  s'écrit  $\varphi_j(C_j x_{k+1}) = \tilde{\mathbb{E}}_j z_k$ .

De plus, la condition de secteur des non-linéarités à l'instant  $k+1$ , définie dans l'équation (4.15), peut être aussi réécrite sous une forme équivalente

$$-z'_k \left( 2\tilde{\mathbb{E}}'_q W_q \tilde{\mathbb{E}}_q - \mathbf{He}(\tilde{\mathbb{E}}'_q W_q \Omega_q C_q \tilde{\mathbb{A}}_i) \right) z_k \geq 0. \quad (4.48)$$

Ensuite, considérons la fonction candidate évaluée à l'instant  $k+1$ ,  $V_{\min}(x_{k+1})$

$$\begin{aligned} V_{\min}(x_{k+1}) &= \min_{j \in \mathcal{I}_N} V(j; x_{k+1}; \varphi_j(C_j x_{k+1})), \\ &= \min_{j \in \mathcal{I}_N} z'_k \left( \tilde{\mathbb{A}}'_i P_j \tilde{\mathbb{A}}_i + \mathbf{He}(\tilde{\mathbb{A}}'_i C'_j \Omega_j \Delta_j \tilde{\mathbb{E}}_j) \right) z_k, \end{aligned} \quad (4.49)$$

pour laquelle nous voudrions définir un majorant. Il est donné par l'ajout des conditions de secteurs (4.48) relatives à toutes les non-linéarités modales à l'instant  $k+1$ ,  $q \in \mathcal{I}_N$  :

$$\begin{aligned} V_{\min}(x_{k+1}) &\leq \min_{j \in \mathcal{I}_N} z'_k \left( \tilde{\mathbb{A}}'_i P_j \tilde{\mathbb{A}}_i + \mathbf{He}(\tilde{\mathbb{A}}'_i C'_j \Omega_j \Delta_j \tilde{\mathbb{E}}_j) \right) \\ &\quad - \sum_{q \in \mathcal{I}_N} \left( 2\tilde{\mathbb{E}}'_q W_q \tilde{\mathbb{E}}_q - \mathbf{He}(\tilde{\mathbb{E}}'_q W_q \Omega_q C_q \tilde{\mathbb{A}}_i) \right) z_k. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Le majorant (4.50) est le minimum d'un nombre fini des valeurs positives et, d'après le lemme 11, il est identique à :

$$\begin{aligned} V_{\min}(x_{k+1}) &\leq \min_{0 \leq \lambda \in \mathbb{R}^N, \lambda' \mathbf{1}_N = 1} \sum_{j \in \mathcal{I}_N} \lambda_j z'_k \left( \tilde{\mathbb{A}}'_i P_j \tilde{\mathbb{A}}_i + \mathbf{He}(\tilde{\mathbb{A}}'_i C'_j \Omega_j \Delta_j \tilde{\mathbb{E}}_j) \right) \\ &\quad - \sum_{q \in \mathcal{I}_N} \left( 2\tilde{\mathbb{E}}'_q W_q \tilde{\mathbb{E}}_q - \mathbf{He}(\tilde{\mathbb{E}}'_q W_q \Omega_q C_q \tilde{\mathbb{A}}_i) \right) z_k. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Nous savons, par définition, que chaque colonne de la matrice de Metzler  $\Pi \in \mathcal{M}_d$  appartient au simplex unitaire. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} V_{\min}(x_{k+1}) &\leq \sum_{j \in \mathcal{I}_N} \pi_{ji} z'_k \left( \tilde{\mathbb{A}}'_i P_j \tilde{\mathbb{A}}_i + \mathbf{He}(\tilde{\mathbb{A}}'_i C'_j \Omega_j \Delta_j \tilde{\mathbb{E}}_j) \right) \\ &\quad - \sum_{q \in \mathcal{I}_N} \left( 2\tilde{\mathbb{E}}'_q W_q \tilde{\mathbb{E}}_q - \mathbf{He}(\tilde{\mathbb{E}}'_q W_q \Omega_q C_q \tilde{\mathbb{A}}_i) \right) z_k, \end{aligned} \quad (4.52)$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned} V_{\min}(x_{k+1}) &\leq z'_k \left( \tilde{\mathbb{A}}'_i (P)_{p,i} \tilde{\mathbb{A}}_i + \mathbf{He}(\tilde{\mathbb{A}}'_i (C' \Omega \Delta \tilde{\mathbb{E}})_{p,i}) \right) \\ &\quad - \sum_{q \in \mathcal{I}_N} \left( 2\tilde{\mathbb{E}}'_q W_q \tilde{\mathbb{E}}_q - \mathbf{He}(\tilde{\mathbb{E}}'_q W_q \Omega_q C_q \tilde{\mathbb{A}}_i) \right) z_k. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Grâce à l'inégalité (4.42), nous avons la relation suivante qui est satisfaite

$$V_{\min}(x_{k+1}) \leq z'_k \begin{bmatrix} P_i & \star & \star & \star \\ (\Delta_i - T_i)\Omega_i C_i & 2T_i & \star & \star \\ -U_i^{-1}J_{1,i} & -U_i^{-1}J_{2,i} & 2U_i^{-1} & \star \\ 0_{Np \times n} & 0_{Np \times p} & 0_{Np \times m} & 0_{Np} \end{bmatrix} z_k.$$

En tenant compte de  $i = \sigma(k) \in \arg \min_{j \in \mathcal{I}_N} V(j; x_k; \varphi_j(C_j x_k))$ , il vient

$$V_{\min}(x_{k+1}) \leq V_{\min}(x_k) + 2\varphi'_i(C_i x_k)T_i[\varphi_i(C_i x_k) - \Omega_i C_i x_k] + 2\Psi'(u_k)U_i^{-1}[\Psi(u_k) - J_{1,i}x_k - J_{2,i}\varphi_i(y_k)], \quad (4.54)$$

qui implique

$$V_{\min}(x_{k+1}) - V_{\min}(x_k) \leq 2\Psi'(u_k)U_i^{-1}[\Psi(u_k) - J_{1,i}x_k - J_{2,i}\varphi_i(y_k)]. \quad (4.55)$$

Rappelons que la condition de secteur n'est vérifiée que dans les ensembles modaux  $\mathcal{T}_i(\widehat{K}_i - \widehat{J}_i, \rho)$ . Nous utilisons l'inégalité (4.43), afin d'assurer que cette condition de secteur soit un majorant pour la différence de notre fonction candidate  $V_{\min}(x_{k+1}) - V_{\min}(x_k)$ .

Nous appliquons le complément de Schur sur l'inégalité (4.43), et nous obtenons

$$\begin{bmatrix} P_i & \star \\ (\Delta_i - Q_i)\Omega_i C_i & 2Q_i \end{bmatrix} > \frac{1}{\rho_{(\ell)}^2} ([K_i \ \Gamma_i] - [J_{1,i} \ J_{2,i}]'_{(\ell)}) ([K_i \ \Gamma_i] - [J_{1,i} \ J_{2,i}]_{(\ell)}). \quad (4.56)$$

Ensuite, en multipliant l'inégalité (4.56) à droite par  $\widehat{x}_k = (x'_k \ \varphi'_i(C_i x_k))'$  et à gauche par sa transposée, il vient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} V(i; x_k; \varphi_i(C_i x_k)) &\geq V(i; x_k; \varphi_i(C_i x_k)) + 2\varphi'_i(C_i x_k)Q_i[\varphi_i(C_i x_k) - \Omega_i C_i x_k], \\ &\geq \frac{1}{\rho_{(\ell)}^2} \|([K_i \ \Gamma_i] - [J_{1,i} \ J_{2,i}]'_{(\ell)})\widehat{x}_k\|^2. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Pour  $x_k \in L_{V_{\min}}(1)$ , le mode actif, qui sera choisi par la loi de commutation  $\sigma(k) = g(x_k)$  donnée par (4.46), vérifiera  $V(\sigma(k); x_k; \varphi_{\sigma(k)}(C_{\sigma(k)} x_k)) \leq 1$ . Notons que cette relation sera assurée pour les modes relatifs à  $\arg \min_{j \in \mathcal{I}_N} V(j; x_k; \varphi_j(C_j x_k))$ . Nous ne requérons pas que la propriété soit vérifiée pour les autres modes.

L'inégalité (4.57) induit que la condition de secteur, pour la zone-morte  $\Psi(u_k)$ , soit vérifiée pour le mode actif  $\sigma(k)$ . Par conséquent, l'inégalité (4.55) implique que

$$V_{\min}(x_{k+1}) - V_{\min}(x_k) < 0, \quad (4.58)$$

et donc, la stabilité asymptotique est prouvée dans l'ensemble  $L_{V_{\min}}(1)$ .  $\square$

**Remarque 102** Soulignons que les matrices en boucle fermée  $A_{cl,i}$  et  $(A_{cl,i} + F_{cl,i}\Omega_i C_i)$  des modes du système ne sont pas nécessairement du type Schur. Il sera possible de stabiliser, en utilisant un choix approprié de loi de commutation, le système Lur'e à commutations (4.35)-(4.36) même dans le cas où ses modes sont instables.

Grâce à notre théorème 100, nous pourrions considérer notre ensemble  $L_{V_{\min}}(1)$  comme une estimation du bassin d'attraction  $\mathcal{B}_0$  de l'origine du système Lur'e à commutations (4.35)-(4.36) commandé par la stratégie (4.46). Il est important de noter que cette ligne de niveau  $L_{V_{\min}}(1)$  est une fonction des non-linéarités modales et peut être composée par des ensembles non-convexes et non-connexes. Ainsi, la difficulté d'obtenir une formule pour définir la taille d'un tel ensemble est évidente. Nous reconsidérons le choix d'une boule comme forme de référence dans le problème d'optimisation.

Dans le cadre de ce chapitre, notre estimation  $L_{V_{\min}}(1)$  est donnée par l'union des lignes de niveau des fonctions modales  $V(i; x; \varphi_i(C_i x))$ . Ainsi, nous avons intérêt à considérer  $N$  boules de rayon  $\frac{1}{\sqrt{\mu_i}}$  ( $i \in \mathcal{I}_N$ ), chacune incluse dans les lignes de niveau de nos  $N$  fonctions modales. Nous allons maximiser le rayon de toutes ces boules  $\mathcal{E}(\mu_i I_n, 1)$ . Cette approche nous permet de trouver la plus grande boule incluse dans  $L_{V_{\min}}(1)$ . Pour résoudre le problème 99 et trouver le plus grand ensemble  $L_{V_{\min}}(1)$ , nous considérons les inégalités (4.42)-(4.43) dans le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \min_{\Pi, P_i, U_i, Q_i, T_i, W_i, R_i, \Delta_i, J_{1,i}, J_{2,i}, \mu_i} \sum_{j \in \mathcal{I}_N} \mu_j \\ & \text{sous les contraintes (4.42)-(4.43)} \end{aligned}$$

et, pour des matrices diagonales définies positives  $R_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$  :

$$\begin{bmatrix} \mu_i I_n - P_i & \star \\ -(\Delta_i + R_i) \Omega_i C_i & 2R_i \end{bmatrix} > 0_{n+p}. \quad (4.59)$$

En pré- et post-multipliant l'inégalité (4.59) par  $(x'_0 \varphi'_i(C_i x_0))'$  et sa transposée, il vient

$$\begin{aligned} \mu_i x'_0 x_0 & \geq V(i, x_0, \varphi_i(C_i x_0)) - 2\varphi'_i(C_i x_0) R_i [\varphi_i(C_i x_0) - R_i \Omega_i C_i x_0], \\ & \geq V(i; x_0; \varphi_i(C_i x_0)), \end{aligned} \quad (4.60)$$

qui peut être interprété comme l'inclusion suivante

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}_N} \mathcal{E}(\mu_i I_n, 1) \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}_N} \{x \in \mathbb{R}^n; V(i; x; \varphi_i(C_i x)) \leq 1\} = L_{V_{\min}}(1). \quad (4.61)$$

De manière similaire à la section 4.2, les inégalités du théorème 100 sont sous forme BMI. Nous pouvons établir des conditions suffisantes en considérant le choix particulier de faire dépendre d'un seul paramètre  $\gamma_i$  la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice de Metzler. Nous allons considérer les paramètres  $\gamma_i = \gamma$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$  fixés. Notons qu'une technique de recherche en ligne est possible en imposant que tous les paramètres  $\gamma_i$  sont les mêmes. Ainsi, en suivant la même preuve que celle du théorème 93, on pourra calculer une loi de commutation de la forme (4.46) qui garantit la stabilité locale du système (4.35)-(4.36) dans l'ensemble  $L_{V_{\min}}(1)$  en remplaçant les inégalités (4.42) du

théorème 100 par :

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbb{A}}'_i(\gamma_i P_i + (1 - \gamma_i) P_j) \tilde{\mathbb{A}}_i + \mathbf{He} \left( \tilde{\mathbb{A}}'_i(\gamma_i C'_i \Omega_i \Delta_i \tilde{\mathbb{E}}_i) + (1 - \gamma_i) C'_j \Omega_j \Delta_j \tilde{\mathbb{E}}_j \right) \\ & - \sum_{q \in \mathcal{I}_N} \left( 2 \tilde{\mathbb{E}}'_q W_q \tilde{\mathbb{E}}_q - \mathbf{He}(\tilde{\mathbb{E}}'_q W_q \Omega_q C_q \tilde{\mathbb{A}}_i) \right) \\ & - \begin{bmatrix} P_i & \star & \star & \star \\ (\Delta_i - T_i) \Omega_i C_i & 2T_i & \star & \star \\ -U_i^{-1} J_{1,i} & -U_i^{-1} J_{2,i} & 2U_i^{-1} & \star \\ 0_{Np \times n} & 0_{Np \times p} & 0_{Np \times m} & 0_{Np} \end{bmatrix} < 0_{\hat{n}}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2, i \neq j. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Par ailleurs, les matrices de pondération,  $U_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , de la condition de secteur pour la zone-morte  $\text{SC}_{u_k}$ , nous mènent à des inégalités sous forme BMI. Afin d'éviter cet aspect bilinéaire, nous suivons l'approche de la Section 3.4 du Chapitre 3, en les considérant comme étant données.

La ligne de niveau  $L_{V_{\min}}(1)$  de notre fonction  $V_{\min}$  est naturellement liée à l'union des ellipsoïdes extérieures et intérieures relatives à des fonctions quadratiques commutées définies dans la relation (3.12) :

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}_N} \{x \in \mathbb{R}^n, \bar{V}(i; x) \leq 1\} \subset L_{V_{\min}}(1) \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}_N} \{x \in \mathbb{R}^n, \underline{V}(i; x) \leq 1\}, \quad (4.63)$$

qui est équivalent à

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}_N} \mathcal{E}(P_i + 2C'_i \Omega_i \Delta_i \Omega_i C_i, 1) \subset L_{V_{\min}}(1) \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}_N} \mathcal{E}(P_i, 1). \quad (4.64)$$

Nous allons présenter un exemple numérique afin d'exposer des points intéressants quand notre méthode est appliquée pour stabiliser localement le système (4.38).

### Exemple 103

Nous allons considérer le système (4.35)-(4.36) décrit par 2 modes,  $N = 2$ ,  $n = 2$ ,  $m = p = 1$ ,  $\rho = 5$  et les paramètres :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1.4 & 0.4 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}; F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \end{bmatrix}; C_1 = [0.9 \quad 0.5]; \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1.1 & 0.6 \\ 0.3 & 1.5 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.5 \end{bmatrix}; F_2 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1 \end{bmatrix}; C_2 = [1 \quad 0.7]. \end{aligned}$$

Les bornes des conditions de secteur modales sont  $\Omega_1 = 0.7$  et  $\Omega_2 = 0.5$ , et les deux non-linéarités sont données par :

$$\varphi_1(y) = \Omega_1 \frac{y(1 - \sin(25y))}{2}; \quad \varphi_2(y) = \Omega_2 \frac{y(1 + \cos(\frac{100}{3}y))}{2}.$$

Tout d'abord, notons que les gains données par :

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -0.7168 & -1.0136 \end{bmatrix}; \quad \Gamma_1 = -1.2923; \\ K'_2 &= \begin{bmatrix} -1.2581 & -0.7326 \end{bmatrix}; \quad \Gamma_2 = -1.4650; \end{aligned}$$

ne rendent pas les matrices en boucle fermée  $A_{cl,i}$  et  $A_{cl,i} + F_{cl,i}\Omega_i C_i$  du type Schur,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ . Alors les modes du système (4.35)-(4.36) ne sont pas stables.

Néanmoins, en tenant compte du choix particulier pour la matrice de Metzler (4.29)-(4.30), avec  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0.5$ , les matrices  $\gamma^{\frac{1}{2}}A_{cl,i}$  et  $\gamma^{\frac{1}{2}}(A_{cl,i} + F_{cl,i}\Omega_i C_i)$  sont du type Schur ( $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ). Donc les conditions nécessaires pour la faisabilité des inégalités (4.62) sont satisfaites.

Nous appliquons le problème d'optimisation proposé et les inégalités (4.42)-(4.43)-(4.59) sont faisables en imposant la pondération pour la condition de secteur de la zone-morte  $SC_{u_k}$ ,  $U_1 = U_2 = 0.1$ .

Les valeurs numériques suivantes sont obtenues :  $\mu_1 = 0.7984$ ;  $\mu_2 = 0.4706$ ;  $Q_1 = 0.4694$ ;  $R_1 = 1.1466 \times 10^{-6}$ ;  $T_1 = 0.3617$ ;  $W_1 = 5.6416 \times 10^{-7}$ ;  $J_{2,1} = 0.0578$ ;  $Q_2 = 0.0914$ ;  $R_2 = 0.1045$ ;  $T_2 = 0.1547$ ;  $W_2 = 0.0522$ ;  $J_{2,2} = -0.1288$ .

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.8294 & 0.0318 \\ 0.0318 & 0.1395 \end{bmatrix}; J_{1,1} = \begin{bmatrix} -0.0037 & -0.0092 \end{bmatrix}; \Delta_1 = 1.1466 \times 10^{-6};$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.1536 & -0.1084 \\ -0.1084 & 0.4255 \end{bmatrix}; J_{1,2} = \begin{bmatrix} -0.0955 & 0.0874 \end{bmatrix}; \Delta_2 = 0.1045.$$

Dans la Figure 4.5, nous avons tracé notre estimation du bassin d'attraction : l'ensemble  $L_{V_{\min}}(1)$ . Il est possible de voir que cet ensemble est donné par l'union des

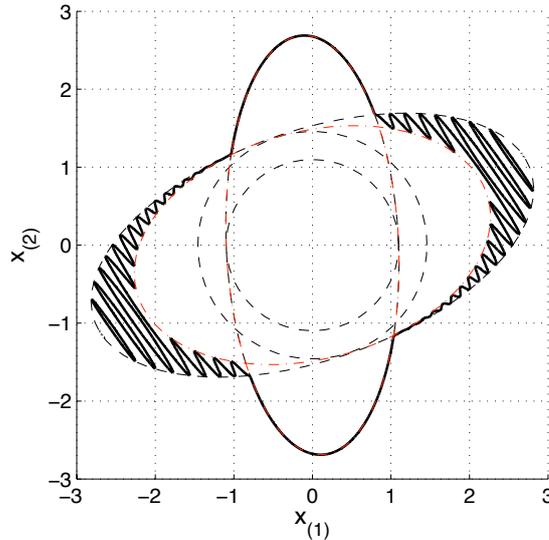


FIGURE 4.5 –  $L_{V_{\min}}(1)$  est tracée en la ligne pleine.  $\mathcal{E}(\mu_i I_n, 1)$  et  $\mathcal{E}(P_i, 1)$ , ( $i \in \mathcal{I}_2$ ) sont tracées par lignes tirets.  $\mathcal{E}(P_i + 2C'_i \Omega_i \Delta_i \Omega_i C_i, 1)$  sont tracées par lignes tirets points en trait clair, ( $i \in \mathcal{I}_2$ ).

régions distinctes, relatives à chacun des modes, et de plus, pour cet exemple, elles sont non-connexes et non-convexes.

Nous pouvons noter aussi les inclusions (4.64) de telle manière que  $L_{V_{\min}}(1)$  appartient à l'union des ellipsoïdes  $\mathcal{E}(P_i, 1)$  et il contient l'union des ellipsoïdes  $\mathcal{E}(P_i + 2C'_i \Omega_i \Delta_i \Omega_i C_i, 1)$ . Nous illustrons aussi les boules  $\mathcal{E}(\mu_i I_2, 1)$ ,  $i \in \mathcal{I}_2$ , relatives à notre fonction coût à optimiser.

Dans notre ensemble  $L_{V_{\min}}(1)$ , la partition de l'espace d'état est soulignée dans la Figure 4.6. Elle est liée à la synthèse de la loi de commutation  $\sigma(k) = g(x_k)$  donnée par (4.46). Notons aussi les bornes pour les zones d'activation des modes, c'est-à-dire  $\{x \in \mathbb{R}^n, V(1; x; \varphi_1(C_1x)) = V(2; x; \varphi_2(C_2x))\}$ , qui ne sont pas composées uniquement par des droites.

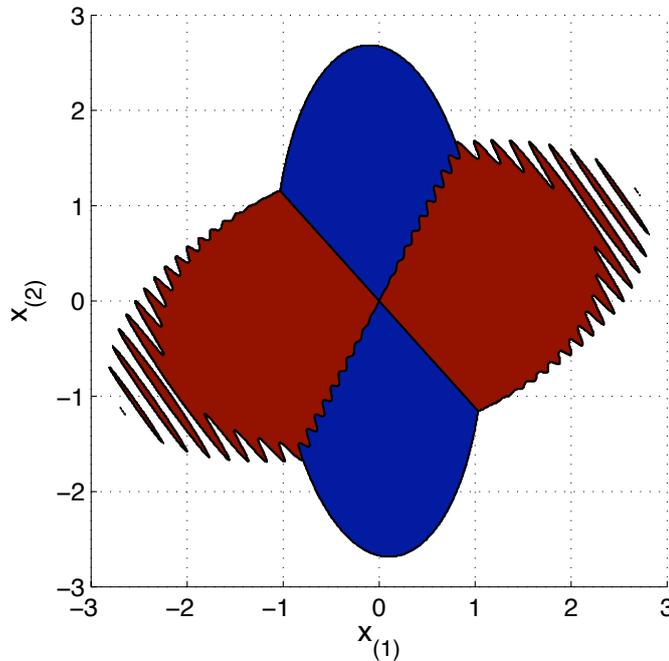


FIGURE 4.6 – La partition de l'espace d'état relative à l'activation des modes dans  $L_{V_{\min}}(1)$ . La région noire connexe concerne le mode 1 et les régions grises non-convexes concernent le mode 2.

Nous avons calculé deux trajectoires associées à des conditions initiales qui sont placées chacune dans une des zones d'activation des modes différentes,  $x_0^1 = (2.34 \ 1.36)'$  et  $x_0^2 = (-0.35 \ 2.6)'$ . Elles sont tracées dans la Figure 4.7.

Notons qu'une des conditions initiales  $x_0^1$  est placée dans un des sous-ensembles de notre ligne de niveau  $L_{V_{\min}}(1)$  qui n'est pas connecté à celui de l'origine. La réponse temporelle de cette trajectoire est tracée dans la Figure 4.8. La loi de commutation induite  $\sigma(k)$  et l'entrée de commande sont tracées dans la Figure 4.9. Comme la trajectoire est stable, le signal  $u_k$  converge aussi vers la valeur nulle.

Dans le même esprit que les chapitres antérieurs, nos résultats sont fondées sur de conditions suffisantes pour la stabilité locale. Donc, nous voudrions analyser l'écart entre notre estimation  $L_{V_{\min}}(1)$  et le bassin d'attraction de ce système à commutations. Pour cela, nous avons évalué les trajectoires générées à partir des conditions initiales appartenant à une région de l'espace d'état autour de l'origine :  $-3 \leq x_{0,(1)} \leq 3$  et  $-3 \leq x_{0,(2)} \leq 3$  (l'ensemble  $L_{V_{\min}}(1)$  inclus). Nous avons utilisé une grille de pas 0.01 pour faire cette étude.

Chaque condition initiale, qui est associée à une trajectoire instable, est signalée par un marqueur sur la Figure 4.10. Il est possible de noter que notre estimation est proche des conditions initiales relatives à des trajectoires instables. Par conséquent,

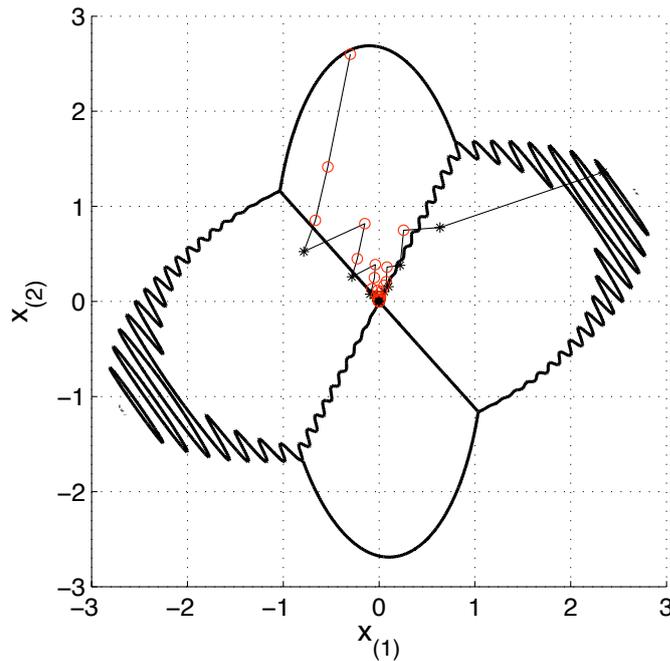


FIGURE 4.7 – L'ensemble  $L_{V_{\min}}(1)$  et la loi de commutation choisie sont tracés par une ligne pleine en trait forcé. Des trajectoires à partir de  $x_0^1$  et  $x_0^2$ . Un cercle (une étoile noire resp.) signifie que le mode 1 (2 resp.) est activé.

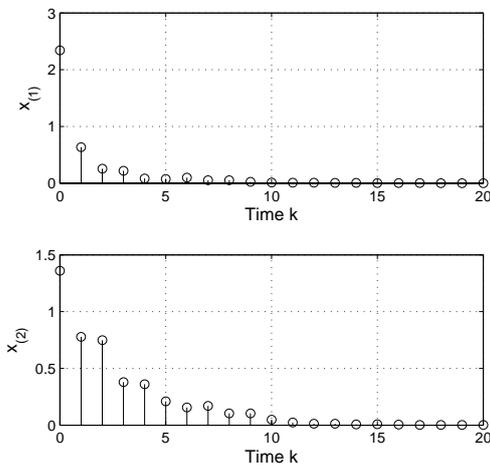


FIGURE 4.8 – La trajectoire  $x_k$  associée à condition initiale  $x_0^1$ .

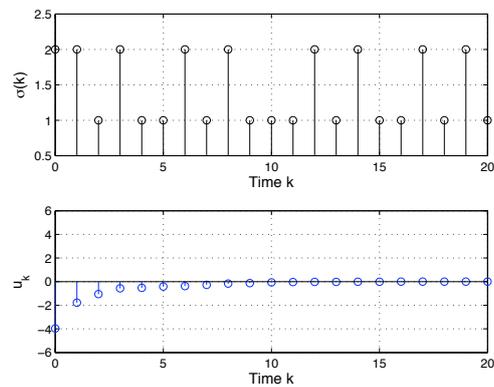


FIGURE 4.9 – Loi de commutation  $\sigma(k)$  et l'entrée  $u_k$ .

cette analyse souligne que notre ensemble  $L_{V_{\min}}(1)$  non-connexe et non-convexe est adapté à l'allure des régions avec des conditions initiales associées à des trajectoires instables.

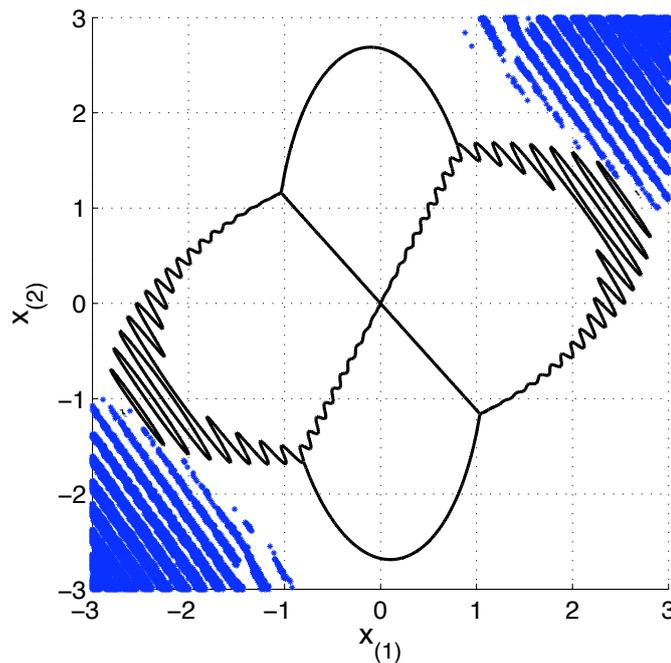


FIGURE 4.10 –  $L_{V_{\min}}(1)$  et les conditions initiales menant le système Lur’e à commutations avec la commande saturée à des trajectoires instables en considérant la loi de commutation  $\sigma(k)$  définie par (4.46).

## 4.6 Conclusion

Nous avons traité au cours de ce chapitre le problème relatif aux systèmes Lur’e à commutations à propos de la stabilisation par loi de commutation. Nous avons formulé une stratégie de commutation fondée sur la résolution d’inégalités de Lyapunov-Metzler. Nous avons considéré la nouvelle fonction de Lyapunov du type Lur’e commutée comme principal outil. Par rapport aux résultats fondés sur les fonctions quadratiques commutées, les partitions de l’espace d’état, relatives à l’activation des modes, données par notre méthode ne sont pas uniquement des régions coniques. Nous avons pu explorer l’allure des non-linéarités modales et ainsi apporter des partitions qui sont plus adaptées à la nature non-linéaire de ces systèmes.

Nous avons aussi étudié la classe des systèmes Lur’e à commutations avec la commande saturée. En se fondant sur notre fonction, nous avons proposé des conditions suffisantes afin de stabiliser localement et asymptotiquement l’origine de ce système grâce au choix de la loi de commutation. Dans ce cadre, notre méthode apporte des résultats intéressants principalement sur deux aspects. D’une part, elle explore aussi la capacité de notre fonction d’apporter une partition de l’espace d’états qui dépend directement des non-linéarités modales du système. D’autre part, l’estimation du bassin d’attraction est donnée par l’union des lignes de niveau associées aux fonctions Lur’e dépendantes des modes, et elle peut être non-convexe et non-connexe. En outre, nous avons indiqué que cette estimation exhibe des allures qui sont adaptées à la forme du bassin d’attraction de ce système.



# Chapitre 5

## Conclusion Générale

Les travaux de cette thèse ont été consacrés à l'étude de plusieurs problèmes de Lur'e en temps discret, et tout particulièrement les problèmes de Lur'e commutés. Le problème de Lur'e consiste à analyser la stabilité d'une interconnexion entre un système linéaire et une non-linéarité vérifiant une condition de secteur. Il a été abondamment traité dans la littérature notamment en temps continu à l'aide des critères du Cercle ou de Popov et d'une fonction de Lyapunov dite de Lur'e contenant un terme intégral de la non-linéarité.

La principale contribution de cette thèse est de fournir une nouvelle fonction de Lyapunov de type Lur'e qui soit dépendante d'une part de l'état du système et d'autre part de la non-linéarité. Cette nouvelle fonction est particulièrement adaptée pour les problèmes de Lur'e en temps discret, car contrairement aux approximations issues du domaine en temps continu, elle ne nécessite pas d'hypothèse supplémentaire par rapport aux restrictions de variation de la non-linéarité. La ligne de niveau de cette fonction n'est pas nécessairement connexe ou convexe, ce qui est particulièrement adapté à la nature non-linéaire de ce système. Aussi, la structure de cette nouvelle fonction évitant le terme intégral autorise l'extension avec une dépendance en temps. Elle permet d'étudier les systèmes de Lur'e à commutations.

De manière plus détaillée, les principaux résultats développés dans cette thèse et associés à l'introduction de cette nouvelle fonction de Lyapunov Lur'e sont les suivants :

- Pour le problème de Lur'e classique en temps discret, nous avons mis en avant la pertinence de cette nouvelle fonction de Lyapunov Lur'e, qui est moins restrictive qu'une fonction de Lyapunov quadratique et bien adaptée à la nature de la non-linéarité. Des conditions suffisantes ont été proposées sous forme LMI pour la stabilité globale et ont été interprétées dans le domaine fréquentiel à l'aide d'une fonction de transfert strictement positive réelle. Pour le problème de Lur'e avec commande saturée, la stabilité locale peut être obtenue tout en proposant une estimée du bassin d'attraction qui puisse être non-connexe et non-convexe.
- Pour les problèmes de Lur'e dans le cadre des systèmes à commutations en temps discret, deux hypothèses sur la loi de commutation ont été considérées : la loi de commutation étant supposée arbitraire ou bien être une composante de la commande. Pour une loi de commutation quelconque, des LMIs ont été proposées

comme conditions suffisantes de la stabilité globale. Aussi l'analyse de stabilité locale et la synthèse de commande ont été traitées à l'aide de conditions suffisantes LMI pour le problème de Lur'e avec commande saturée. Ici, l'estimation du bassin d'attraction est donnée par l'intersection de lignes de niveau des fonctions de Lur'e modales et elle peut donc être non-connexe et non-convexe.

- Pour le cas de la stabilisation par loi de commutation, nous avons choisi d'utiliser une stratégie de commutation sur les fonctions de Lyapunov Lur'e modales. Des conditions suffisantes de stabilisation sont proposées à l'aide d'inégalités de Lyapunov-Metzler. La partition de l'espace d'état associée à la stratégie utilisée dépend des non-linéarités modales et n'est pas limitée à des partitions coniques. C'est encore une fois particulièrement pertinent et adapté à la nature non-linéaire du problème de Lur'e.

Cette thèse, en reprenant l'étude des problèmes de Lur'e en temps discret et en proposant une nouvelle fonction de Lyapunov tout à fait adaptée au problème, a permis l'étude de deux problèmes de Lur'e commutés. Bien que certaines réponses positives et encourageantes aient été formulées, un large nombre de questions ouvertes restent posées. Voici quelques pistes à étudier à partir des résultats de cette thèse :

- Tout d'abord tout au long de cette thèse nous avons considéré que l'état du système était accessible, en particulier pour réaliser des commandes comprenant des retours d'état. Une perspective possible est de relaxer cette hypothèse en supposant uniquement que la sortie du système est disponible pour réaliser le contrôleur du type retour dynamique de sortie. Dans ce cadre, les techniques utilisées sont plus délicates à traiter. Ce problème n'a été étudié qu'en considérant les modes linéaires et une fonction de Lyapunov quadratique commutée, [MJDI10] (pour la commutation arbitraire) et [DGD10a, DGD11] (pour la commutation comme commande).
- Dans le cadre où la loi de commutation est une partie de la loi de commande, nous nous sommes jusqu'à présent restreint au cas où la loi de commutation est la seule commande possible. La commande conjointe, c'est-à-dire la détermination simultanée de la loi de commutation et du contrôleur délivrant  $u_k$  est une extension possible des résultats de cette thèse. Il suivrait plutôt la direction des résultats de [GD09, DGD10a, DGD11], qui ont été formulés avec une fonction quadratique commutée.
- Le système de Lur'e (avec ou sans saturation de commande additionnelle) peut être étendu en tenant compte d'un bruit additif sur la dynamique. La performance du système pourrait alors être définie comme le gain  $\mathcal{L}_2$  induit. Une telle étude étendrait les résultats existants pour les systèmes à modes linéaires fondés sur les fonctions quadratiques : pour la commutation arbitraire, [JCTD11], et dans le cadre de synthèse de lois de commutation, [DGD10a, DGD11].
- La ou les non-linéarité(s) intervenant dans les fonctions de Lyapunov-Lur'e que nous avons proposé ont toujours satisfait des conditions de secteur globales. Néanmoins, pour beaucoup de non-linéarités (comme par exemple la zone morte), il est intéressant pour avoir des degrés supplémentaires de ne tenir compte que des conditions de secteur locales. Le cadre des fonctions de Lyapunov contenant des non-linéarités vérifiant une condition de secteur locale reste à étudier.

- 
- Enfin d'autres pistes d'extension portent sur la nature et les caractéristiques de la loi de commutation. Ici, nous n'avons effectivement considéré que des cas extrêmes : loi de commutation arbitraire ou loi de commutation sans contrainte. Néanmoins en pratique, la loi de commutation présente certaines contraintes comme par exemple un temps de maintien (*dwell-time* en anglais) ou bien une persistance imposant de régulièrement repasser par tous les modes. Bien que ces questions soient mures dans le cadre linéaire, [GC06b, DO12], elles restent très largement ouvertes dans le cas non-linéaire. De la même manière, la loi de commutation peut être issue d'un processus stochastique (loi de Markov, par exemple). Des résultats spécifiques peuvent être alors envisagés pour la notion de stabilité en moyenne par exemple, plutôt établie dans le cadre des systèmes linéaires à sauts markoviens, [CFM05, CF93].



# Bibliographie

- [AK01] M. Arcak and P. Kokotovic. Feasibility conditions for circle criterion designs. *Systems & Control Letters*, 42 :405–412, 2001.
- [AKFIJ03] H. Abou-Kandil, G. Freiling, V. Ionescu, and G. Jank. *Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory*. Birkhäuser, 2003.
- [ALK03] M. Arcak, M. Larsen, and P. Kokotovic. Circle and Popov criteria as tools for nonlinear feedback designs. *Automatica*, 39 :643–650, 2003.
- [Arc00] M. Arcak. *Unmodeled Dynamics in Robust Nonlinear Control*. PhD thesis, University of California Santa Barbara, 2000.
- [BEFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [BN05] V. D. Blondel and Y. Nesterov. Computationally efficient approximations of the joint spectral radius. *SIAM Journal of Matrix Analysis*, 27(1) :256–272, 2005.
- [BNT04] V. Blondel, Y. Nesterov, and J. Theys. *Approximations of the rate of growth of switched linear systems*, volume 2993 of *Hybrid Systems : Computation and Control, HSCC*, chapter of Lecture Notes in Computer Science, pages 173–186. Springer-Verlag, Heidelberg, 2004.
- [Bra98] M. S. Branicky. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43 :475–482, 1998.
- [BSA04] A. Benzaouia, L. Saydy, and O. Akhrif. Stability and control synthesis of switched systems subject to actuator saturation. In *American Control Conference*, pages 5818–5823. Boston, Massachusetts, USA, June 2004.
- [CF93] O.L.V. Costa and M.D. Fragoso. Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 179 :154–178, 1993.
- [CFM05] O.L.V. Costa, M.D. Fragoso, and R.P. Marques. *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*. Probability and its Applications. Springer, 2005.
- [CL03] Yong-Yan Cao and Z. Lin. Stability analysis of discrete-time systems with actuator saturation by a saturation-dependent lyapunov funtion. *Automatica*, 39(7) :1235–1241, 2003.

- [CMdP06] E. B. Castelan, U. Moreno, and E. R. de Pieri. Absolute stabilization of discrete-time systems with a sector bounded nonlinearity under control saturations. In *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS 2006)*, pages 3105–3108, Greece, 2006.
- [CTQ05] E. B. Castelan, S. Tarbouriech, and I. Queinnec. Stability and stabilization of a class of nonlinear systems with saturating actuators. In *Proceedings of 16th IFAC World Congress in Automatic Control*, Prague, 2005.
- [CTQ08] E. B. Castelan, S. Tarbouriech, and I. Queinnec. Control design for a class of nonlinear continuous-time systems. *Automatica*, 44(8) :2034–2039, August 2008.
- [DB01] J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems and Control Letters*, 43 :355–359, August 2001.
- [DBPL00] R.A. Decarlo, M.S. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson. Perspective and results on the stability and stabilization of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE : Special issue on hybrid systems*, 88 :1069–1082, 2000.
- [DGD10a] G. S. Deaecto, J. C. Geromel, and J. Daafouz. Full order dynamic output feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control design for discrete-time switched linear systems. In *In proceedings of the 18th Mediterranean Conference on Control & Automation*, pages 1212–1217, 2010.
- [DGD10b] G. S. Deaecto, J. C. Geromel, and J. Daafouz. On  $\mathcal{H}_\infty$  control design of continuous-time switched linear systems. In *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, GA, USA, 2010.
- [DGD11] G. S. Deaecto, J. C. Geromel, and J. Daafouz. Dynamic output feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control of switched linear systems. *Automatica*, 47 :1713–1720, 2011.
- [DO12] M. Dehghan and C. J. Ong. Discrete-time switching linear systems with constraints : characterization and computation of invariant sets under dwell-time consideration. *Automatica*, 48(5) :964–969, May 2012.
- [dOBG99] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel. A new robust stability analysis condition. *System and Control Letters*, 36 :261–265, 1999.
- [dOS01] M. C. de Oliveira and R.E. Skelton. Stability tests for constrained linear systems. In S. O. Reza Moheimani, editor, *Perspectives in Robust Control*, Lectures Notes in Control and Information Sciences, pages 241–257. Springer-Verlag, 2001.
- [DRI02] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung. Stability analysis and control synthesis for switched systems : a switched lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :1883–1887, November 2002.
- [ES96] L. El Ghaoui and G. Scorletti. Control of rational systems using linear-fractional representations and linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(9) :1273–1284, 1996.
- [GBC08] J. C. Geromel, P. Bolzern, and P. Colaneri. Dynamic output feedback control of switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53 :720–733, 2008.

- 
- [GC06a] J. C. Geromel and P. Colaneri. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 45(5) :1915–1930, 2006.
- [GC06b] J. C. Geromel and P. Colaneri. Stability and stabilization of discrete-time switched systems. *International Journal of Control*, 79(7) :719–728, July 2006.
- [GD09] J.C. Geromel and G. S. Deaecto. Switched state feedback control for continuous-time uncertain systems. *Automatica*, 45 :593–597, 2009.
- [Ger10] J.C. Geromel. Sur la stabilité, commande et optimisation des systèmes dynamiques hybrides. In *Conférence Internationale Francophone d’Automatique*. Nancy, France, 2010.
- [GJD12a] C. A. C. Gonzaga, M. Jungers, and J. Daafouz. Stability analysis and stabilisation of switched nonlinear systems. *International Journal of Control*, 85(7) :822–829, 2012.
- [GJD12b] C. A. C. Gonzaga, M. Jungers, and J. Daafouz. Stability analysis of discrete-time Lur’e systems. *Automatica*, 48(9) :2277–2283, 2012.
- [GJDC11a] C. A. C. Gonzaga, M. Jungers, J. Daafouz, and E. B. Castelan. A new class of Lyapunov functions for nonstandard switching systems : the stability analysis problem. In *50th Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 411–416, December 2011.
- [GJDC11b] C. A. C. Gonzaga, M. Jungers, J. Daafouz, and E. B. Castelan. Stabilization of discrete-time nonlinear systems subject to input saturations : a new Lyapunov function class. In *18th IFAC World Congress*, pages 3403–3408. Milan, Italy, August 2011.
- [GPC01] J. M. Gomes da Silva Jr., C. Paim, and E. B. Castelan. Stability and stabilization of linear discrete-time subject to control saturation. In *1st IFAC Symp. on System Structure and Control (SSSC’01)*, Prague, 2001.
- [GT05] J. M. Gomes da Silva Jr. and S. Tarbouriech. Anti-windup design with guaranteed regions of stability : An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1) :106–111, January 2005.
- [Hah67] W. Hahn. *Stability of Motion*. Sprindler-Verlag, 1967.
- [HB94a] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Explicit construction of quadratic Lyapunov functions for the small gain, positivity, circle and Popov theorems and their application to robust stability. part II : discrete-time theory. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4(2) :249–265, 1994.
- [HB94b] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Parameter-dependent Lyapunov functions and the discrete-time Popov criterion for robust analysis. *Automatica*, 30 :1015–1021, 1994.
- [HC08] W. M. Haddad and V. Chellaboina. *Nonlinear dynamical systems and control : A Lyapunov-based approach*. Princeton University Press, January 2008.
- [Het07] L. Hetel. *Stabilité et commande robuste des systèmes linéaires commutés*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2007.

- [HHHB94] W. M. Haddad, J. How, S. R. Hall, and D. Bernstein. Extensions of mixed- $\mu$  bounds to monotonic and odd monotonic nonlinearities using absolute stability theory. *International Journal of Control*, 60(5) :905–951, 1994.
- [HI94] A. Halany and V. Ionescu. *Time-varying discrete linear systems : input-output operators, Riccati equations, disturbance attenuation*. Birkhäuser, 1994.
- [HJ85] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [HL01] T. Hu and Z. Lin. *Control systems with actuator saturation : analysis and design*. Birkhäuser, 2001.
- [HL03] T. Hu and Z. Lin. Composite quadratic Lyapunov functions for constrained control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3) :440–450, 2003.
- [HLC02a] T. Hu, Z. Lin, and B. M. Chen. Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation. *Systems and control letters*, 45(2) :97–112, February 2002.
- [HLC02b] T. Hu, Z. Lin, and B. M. Chen. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. *Automatica*, 38 :351–359, 2002.
- [Hu07] T. Hu. Switching law construction for discrete-time systems via composite quadratic functions. In *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, New York City, USA, 2007.
- [JCTD09] M. Jungers, E. B. Castelan, S. Tarbouriech, and J. Daafouz. Stabilization of discrete-time switching systems including modal nonlinearities and saturation actuators. In *3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*. Zaragoza, Spain, 2009.
- [JCTD11] M. Jungers, E. B. Castelan, S. Tarbouriech, and J. Daafouz. Finite  $\mathcal{L}_2$ -induced gain and  $\lambda$ -contractivity of discrete-time switching systems including modal nonlinearities and actuator saturations. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 5(2) :289–300, May 2011.
- [JGD12a] M. Jungers, C. A. C. Gonzaga, and J. Daafouz. Min-switching local stabilization for discrete-time switching systems with nonlinear modes. to be submitted, 2012.
- [JGD12b] M. Jungers, C. A. C. Gonzaga, and J. Daafouz. Min-switching stabilization for discrete-time switching systems with nonlinear modes. In *4th IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*. Eindhoven, Netherlands, June 2012.
- [JL64a] E. I. Jury and B. W. Lee. On the absolute stability of a certain class of nonlinear sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9(1) :51–61, January 1964.
- [JL64b] E. I. Jury and B. W. Lee. On the absolute stability of nonlinear sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9(4) :551–554, October 1964.

- 
- [Jun08] R. M. Jungers. *Infinite Matrix Products. From the joint spectral radius to combinatorics*. PhD thesis, Université Catholique de Leuven, 2008.
- [Kal63] R.E. Kalman. Lyapunov functions for the problem of lur'e in automatic control. *Proceedings of National Academy of Sciences*, (49) :201–205, 1963.
- [KH96] V. Kapila and W. M. Haddad. A multivariable extension of the Tsypkin criterion using a Lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30 :149–152, 1996.
- [Kha02] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems - Third Edition*. Prentice Hall, 2002.
- [LA04] H. Lin and P. J. Antsaklis. Persistent disturbance attenuation properties of networked control systems. In *Proceedings of the 43th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 953–958, 2004.
- [LA05] H. Lin and P. J. Antsaklis. Stability and persistent disturbance attenuation properties for networked control systems : Switched systems approach. *International Journal of Control*, 78(18) :1447–1458, 2005.
- [LA09] H. Lin and P. J. Antsaklis. Stability and stabilizability of switched linear systems : A survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(2) :308–322, 2009.
- [LD06] J.W. Lee and G.E. Dullerud. Uniform stabilization of discrete-time switched and markovian jump linear systems. *Automatica*, 42 :205–218, 2006.
- [LD07] J. W. Lee and G. E. Dullerud. Uniformly stabilizing sets of switching sequences for switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52 :868–874, 2007.
- [Lee06] J. W. Lee. On uniform stabilization of discrete-time linear parameter-varying control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(10) :1714–1721, 2006.
- [Lib03] D. Liberzon. *Switching in Systems and Control*, volume in series Systems and Control : Foundations and Applications. Birkhauser, Boston, MA, 2003.
- [LL08] L. Lu and Z. Lin. Design of switched linear systems in the presence of actuator saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(6) :1536–1542, July 2008.
- [LLL09] J. Lunze and F. Lamnabhi-Lagarrigue, editors. *Handbook of Hybrid Systems Control : Theory, Tools, Applications*. Cambridge, 2009.
- [LM99] D. Liberzon and A. S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19(5) :59–70, October 1999.
- [LP44] A. I. Lur'e and V. N. Postnikov. On the theory of stability of control systems. *Applied mathematics and mechanics*, 8(3) :246–248, 1944. In Russian.
- [LR60] A. I. Lur'e and E. N. Rozenvaser. On the methods of constructing liapunov functions in theory on non-linear control systems. In *IFAC*, volume 30, pages 1356–1359, June 1960.
- [Mal09] I. Mallocci. *Two time scale switched systems : An application to steering control in hot strip mills*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2009.

- [MDI<sup>+</sup>09] I. Mallocci, J. Daafouz, C. Iung, R. Bonidal, and P. Szczepanski. Switched system modeling and robust steering control of the tail end phase in a hot strip mill. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 3(3) :239–250, 2009.
- [MJDI10] J. Melin, M. Jungers, J. Daafouz, and C. Iung. Performance analysis and design of dynamic output feedback control for switched systems. *International Journal of Control*, 84(2) :253–260, February 2010.
- [PG64] J. B. Pearson and J. E. Gibson. On the asymptotic stability of a class of saturating sampled-data systems. *IEEE Transactions on Industry Applications*, AI-83 :81–86, March 1964.
- [PJ94] K. Premaratne and E. I. Jury. Discrete-time Positive-Real lemma revisited : the discrete-time counterpart Kalman-Yakubovich lemma. *IEEE transactions on Circuits and Systems I : Fundamental, Theory and Applications*, 41(11) :747–750, November 1994.
- [Pop61] V.M. Popov. Absolute stability of nonlinear systems of automatic control. *Avtomatika i Telemekhanika*, 22(8) :961–979, 1961.
- [PRI08] D. Patino, P. Riedinger, and C. Iung. Predictive control approach for multicellular converters. In *34th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. Orlando, USA, 2008.
- [Ran96] A. Rantzer. On the Kalman-Yakubovich-Lemma. *System and Control Letters*, 28(1) :7–10, 1996.
- [SE98] G. Scorletti and L. El Ghaoui. Improved LMI conditions for gain scheduling and related control problems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8 :845–877, 1998.
- [SFE01] G. Scorletti, J. P. Folcher, and L. El Ghaoui. Output feedback control with input saturations : LMI design approaches. *European Journal of Control*, 7(6) :567–579, 2001.
- [SIG97] R.E. Skelton, T. Iwasaki, and K. Grigoriadis. *A unified algebraic approach for linear control design*. Taylor and Francis, 1997.
- [SS81] T. N. Sharma and V. Singh. On the absolute stability of multivariable discrete-time nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26 :51–61, 1981.
- [SWM<sup>+</sup>07] R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff, and C. King. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Review*, 49(7) :545–592, 2007.
- [Sze63] GP Szegö. On the absolute stability of a certain class of sampled-data control systems. *Proceedings of National Academy of Sciences*, (50) :558–560, 1963.
- [TB97] J. Tsitsiklis and V. Blondel. The Lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard – when not impossible – to compute and to approximate. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 10 :31–40, 1997.
- [TGGQ11] S. Tarbouriech, G. Garcia, J.M. Gomes da Silva Jr, and I. Queinnec. *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. Springer Verlag, 1st edition edition, 2011.

- 
- [TPG06] S. Tarbouriech, C. Prieur, and J. M. Gomes da Silva Jr. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(8) :1364–1371, 2006.
- [TQT09] S. Tarbouriech, I. Queinnec, and M.C. Turner. Anti-windup design with rate and magnitude actuator and sensor saturations. In *European Control Conference, ECC09*, pages 330–335, August 2009.
- [Tsy62] Y. Z. Tsytkin. The absolute stability of large-scale nonlinear sampled-data systems. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 145 :52–55, 1962.
- [WD97] M. Wicks and R. DeCarlo. Solution of coupled Lyapunov equations for the stabilization of multimodal linear systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1709–1713, 1997.
- [Yak62] V. A. Yakubovich. Solution of some matrix inequalities encountered in the automatic control theory. *Doklady Akademii Nak*, 43 :1304–1307, 1962.
- [Yak65] V. A. Yakubovich. The matrix-inequality method in the theory of the stability of nonlinear control systems : Parts I-III. *Automation and Remote Control*, 25 :905–923, 1965.
- [ZDG96] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and optimal control*. Prentice Hall, 1996.
- [Zha01] G. Zhai. Quadratic stability of discrete-time switched systems via state and output feedback. In *40th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2165–2166. Orlando, USA, 2001.





## Résumé

Les travaux de cette thèse portent sur les problèmes d'analyse de stabilité et de synthèse de commande de systèmes non-linéaires à commutations en temps discret. Nos résultats obtenus sont fondés sur une nouvelle fonction de Lyapunov-Lur'e adaptée au temps discret. Nous reprenons le problème classique d'analyse de stabilité globale de systèmes linéaires connectés à une non-linéarité du type secteur borné. Notre fonction permet de traiter une classe de non-linéarités plus générale que celle des approches fondées sur la fonction de Lur'e classique. Ensuite, la stabilité locale et la synthèse de commande de ces systèmes avec une loi de commande non-linéaire saturée sont résolues en considérant les lignes de niveau de notre fonction de Lyapunov comme estimation du bassin d'attraction de l'origine. Notre estimation est composée par des ensembles non-connexes et non-convexes qui s'adaptent bien à l'allure du bassin d'attraction et donc est moins conservatrice que les ensembles ellipsoïdaux. Nous étendons nos résultats pour étudier les systèmes à commutations lorsque chacun des modes présente une non-linéarité du type secteur et la saturation. D'une part, en supposant que la loi de commutation est arbitraire, nous obtenons des conditions suffisantes pour assurer la propriété de stabilité pour toute loi de commutation. Dans ce cadre, notre fonction s'avère intéressante afin de fournir une estimation bien adaptée au bassin d'attraction. D'autre part, en considérant la loi de commutation comme une variable de commande, nous proposons une stratégie de commutation sur le minimum des fonctions de Lyapunov modales. Cette stratégie définit des partitions de l'espace d'état relatives à l'activation des modes qui ne sont pas uniquement des régions coniques, normalement exhibées par des approches fondées sur les fonctions quadratiques commutées.

**Mots-clés :** fonction de Lyapunov, systèmes à commutations, non-linéarité du type secteur borné, commande non-linéaire, saturation, bassin d'attraction.

## Abstract

In this PhD thesis, several problems of stability analysis and control design of discrete-time switched nonlinear systems are addressed. As main contribution, a new class of Lyapunov functions which takes the nonlinearity into account has been proposed. We show that these functions are suitable to solve the classical stability analysis problem of linear systems connected to a cone bounded nonlinearity. Instead of the original Lyapunov Lur'e function, the assumptions about the nonlinearity variation are not required. Furthermore, the local stability analysis and control synthesis problems of Lur'e systems subject to control saturation are tackled by considering the level set of our function as an estimate of the basin of attraction. We expose that this estimate, which is given by non-convex and disconnected sets, is less conservative than ellipsoidal sets. We extend these results in order to deal with the problems of stability analysis and stabilization of discrete-time switched nonlinear systems. On one hand, we consider the case of arbitrary switching such that our sufficient conditions assure the properties of stability for all possible switching rules. In this framework, we highlight that our function is able to provide a suitable estimate of the basin of attraction. On the other hand, we tackle the problem of switching rule design aiming at the stabilization of discrete-time switched systems with nonlinear modes. We propose a switching strategy depending on the minimum of our switched Lyapunov Lur'e function. Hence, our framework leads to state space partitions, related to the mode activation, which are not restricted to conic sets, commonly exhibited by the switched quadratic functions approaches.

**Keywords :** Lyapunov functions, switched systems, sector condition, nonlinear control, saturation, basin of attraction.