



HAL
open science

Régularité et description des spectres pour les représentations de groupes topologiques

Mathieu Cianfarani

► **To cite this version:**

Mathieu Cianfarani. Régularité et description des spectres pour les représentations de groupes topologiques. Analyse fonctionnelle [math.FA]. Université Pascal Paoli, 2012. Français. NNT : . tel-00762885

HAL Id: tel-00762885

<https://theses.hal.science/tel-00762885>

Submitted on 8 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITE DE CORSE-PASCAL PAOLI
ECOLE DOCTORALE ENVIRONNEMENT ET SOCIETE
UMR CNRS 3140 (SPE)



Thèse présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Soutenue publiquement par

Mathieu CIANFARANI

le 29 novembre 2012

**Régularité et description des spectres pour les représentations
de groupes topologiques**

Directeurs :

Mr Jean-Martin Paoli, Dr-HDR, Université de Corse
Mme Catherine Ducourtieux, Dr, Université de Corse

Rapporteurs :

Mr Jean Esterle, Professeur, Université de Bordeaux
Mr Gilles Godefroy, DR CNRS, Université de Paris VI

Jury

Mr Catalin Badea, Professeur, Université Lille I
Mme Catherine Ducourtieux, MCF, Université de Corse

Mr Jean Esterle, Professeur, Université de Bordeaux
Mr Gilles Godefroy, DR CNRS, Université de Paris VI
Mr Mostafa Mbekhta, Professeur, Université Lille I
Mr Matthias Neufang, Professeur, Université Lille I
Mr Jean-Martin Paoli, MCF-HDR, Université de Corse
Mr Pierre Simonnet, MCF-HDR, Université de Corse

Table des matières

Introduction générale	7
1 Préliminaires	13
1.1 Rappels de topologie	13
1.1.1 Lemme de Baire et notions reliées	13
1.1.2 Parties boréliennes et parties ayant la propriété de Baire	14
1.1.3 Topologie de Vietoris et distance de Hausdorff sur l'espace des compacts d'un espace topologique	16
1.1.4 Espaces angéliques	17
1.2 Algèbres de Banach	18
1.2.1 Généralités	18
1.2.2 Algèbres de Banach commutatives	19
1.2.3 C^* -algèbres (non nécessairement commutatives)	20
1.2.4 Quelques résultats d'analyse fonctionnelle	23
1.3 Théorie des opérateurs	24
1.3.1 Topologie forte d'opérateurs	24
1.3.2 Propriétés du spectre	24
1.3.3 Espaces héréditairement indécomposables	26
1.4 Groupes topologiques, groupes localement compacts et leurs repré- sentations	26
1.4.1 Groupes topologiques, groupes localement compacts, mesure de Haar	27
1.4.2 Représentations de groupes localement compacts	29
1.4.3 Fonctions définies positives sur un groupe	30
1.4.4 Continuité spectrale	33
1.4.5 Décomposition des représentations localement faiblement presque périodiques	33

2	Quelques critères de continuité des représentations et des morphismes de groupes topologiques	35
2.1	Cas des groupes localement compacts	36
2.1.1	Continuité forte des représentations sur les espaces de fonctions continues	36
2.1.2	Applications à la continuité des représentations	38
2.2	Cas polonais (non nécessairement localement compact)	44
2.3	Liens avec la continuité automatique des morphismes de groupes . . .	47
3	Propriétés spectrales des représentations fortement continues de groupes polonais localement compacts : le cas abélien	53
3.1	Propriétés des morphismes d'un groupe topologique dans le groupe multiplicatif complexe	53
3.2	Application à l'étude de la répartition angulaire du spectre pour une représentation fortement continue	61
3.3	Applications	66
3.3.1	Représentations sur des espaces fonctionnels particuliers . . .	66
3.3.2	Loi du $0-\sqrt{3}$	67
4	Caractérisation spectrale de l'uniforme continuité des représentations unitaires fortement continues de groupes localement compacts : le cas non commutatif	71
4.1	Introduction	71
4.2	Points de continuité du spectre dans le cas des représentations unitaires	72
4.3	Caractérisation de l'uniforme continuité	75
4.3.1	Résumé de [PT]	75
4.3.2	Remarques et compléments	76
4.4	Le cas des groupes de Lie	78
4.5	Compléments	80
4.5.1	Application aux représentations unitaires des groupes possédant localement une racine n^{ieme}	80
4.5.2	Application en passant par des groupes quotients	82

Remerciements

Mes premiers remerciements vont naturellement à Jean-Martin Paoli sans qui cette thèse n'existerait pas. Il a su m'intéresser à la recherche à travers sa passion pour les mathématiques et garder cet intérêt intact durant ces quatre années par ses conseils, ses idées, ses encouragements et sa joie de vivre. Nos rendez-vous mathématiques du mercredi qui ont ponctué ces dernières années ont été un véritable plaisir et j'espère qu'ils pourront continuer bien après cette thèse.

Je remercie aussi ma co-directrice Catherine Ducourtieux qui m'a incité à faire cette thèse et a su me donner les moyens de la faire grâce à ses conseils et son appui.

Je remercie très sincèrement Jean Esterle et Gilles Godefroy pour l'honneur qu'ils m'ont fait de rapporter cette thèse ainsi que Catalin Badea, Mostafa Mbektha et Matthias Neufang pour avoir accepté de traverser la mer pour faire partie du Jury.

Je tiens à remercier Jean-Christophe Tomasi sans qui cette thèse n'aurait pas la même saveur. Par ses idées, ses connaissances et sa capacité à trouver des articles pertinents, il a su débloquent bien des situations.

Je remercie aussi les membres de l'équipe de Mathématiques de Corte pour leur accueil chaleureux durant ces quatre années, leur gentillesse et leur bonne humeur inébranlables. Je remercie Pierre Simonnet d'avoir accepté de participer au Jury, Bernard Di Martino, Antoine Grimaldi ainsi que tous les autres.

Je remercie François du Pranzu grâce à qui nous avons toujours pu faire des mathématiques le ventre plein.

Je remercie toute ma famille et principalement mes parents et grand-parents qui ont toujours su m'encourager et me soutenir durant ces longues études.

Enfin je remercie Marie-Hélène pour sa patience et pour avoir accepté de me partager toutes ces années avec les Mathématiques.

Introduction générale

On va s'intéresser ici aux propriétés des représentations de groupes topologiques polonais ou localement compacts. On donne des critères de continuité (chapitre 2) dans le cas où ces représentations sont à valeurs dans une algèbre de Banach. Dans le cas où cette algèbre est celle des opérateurs bornés sur un espace de Banach, on a deux (il y en a d'autres possibles) topologies naturelles à l'arrivée : la topologie usuelle de la norme et la topologie forte (qui est en fait plus faible) d'opérateurs. En fait, dans le cadre des représentations de dimension infinie, c'est cette dernière qui est généralement utilisée. Par exemple, les représentations régulières (celles où le groupe agit par translations) sur les espaces de fonctions naturels sont fortement et non uniformément continues dans la plupart des cas. Or, pour des représentations fortement et non uniformément continues, on obtient pour des classes assez larges de groupes des propriétés géométriques du spectre des éléments de l'image du groupe (en fait de "presque tous" les éléments). Cette description des spectres dans divers cas fait l'objet des chapitres 3 et 4.

Une partie substantielle (premier paragraphe du chapitre 2 et une grande partie du chapitre 3) a fait l'objet d'une collaboration avec Jean-Christophe Tomasi (cf. [CPT]). Cela implique une intersection relativement importante avec un travail de même type qu'il a rédigé. Toutefois, dans les parties qui correspondent à cette collaboration, on s'est attaché, toutes les fois où c'était possible, à donner des démonstrations différentes (pas seulement sur des détails de rédaction). C'est surtout vrai dans le chapitre 2 (à moindre degré pour le chapitre 3) où c'est vraiment l'approche qui est différente pour traiter le cas des groupes localement compacts. On y fait un usage systématique du théorème de décomposition de Glicksberg-De Leeuw au lieu d'utiliser les outils d'analyse de Fourier de [CPT].

Cela ne veut d'ailleurs pas dire que ces nouvelles démonstrations sont plus simples ou meilleures mais chaque démarche a son intérêt propre, ses avantages permettant parfois d'obtenir quelque chose de plus général ou précis et aussi ses inconvénients.

Décrivons à présent le contenu de façon plus détaillée. Après quelques rappels (chapitre 1), le second chapitre est consacré à l'étude de diverses conditions suf-

fisantes de continuité de représentations. Le prototype de ce genre de critère de continuité est, à notre connaissance, dû à Phillips et figure dans le traité classique [HP]. C'est le théorème suivant sur les groupes à un paramètre (en fait énoncé dans le cadre des semi-groupes dans [HP]).

Théorème (Phillips). *Soient A une algèbre de Banach commutative et $\theta : \mathbb{R} \rightarrow A$ un groupe à un paramètre localement borné en norme. En notant \hat{A} le spectre de A (i.e. l'espace des caractères de A), on a*

$$\theta \text{ continue} \Leftrightarrow \forall \chi \in \hat{A}, \chi \circ \theta \text{ continue (de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{C}).$$

Grosso-modo, la démonstration de Phillips se décompose en deux parties dont aucune n'est triviale. La première consiste à montrer une certaine uniformité, plus précisément que :

$$\forall \chi \in \hat{A}, \chi(\theta(t) - 1) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \text{ continue} \Rightarrow \sup_{\chi \in \hat{A}} |\chi \circ \theta(t) - 1| \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

(que l'on peut aussi écrire $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(\theta(t) - 1) = 0$ où ρ est le rayon spectral). Phillips y arrive par des arguments fins d'analyse classique.

La deuxième partie est la preuve que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho(\theta(t) - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \|\theta(t) - 1\| = 0$$

c'est-à-dire que la continuité par rapport à la semi-norme "rayon spectral" implique en fait la continuité. Cela se fait grâce au calcul de Dunford et au théorème de Gelfand-Hille.

Soient, à présent, un groupe abélien localement compact et $\theta : G \rightarrow A$ (A une algèbre de Banach commutative). On peut se demander si le critère de Phillips reste vrai. La seconde partie de la preuve a été généralisée à ce cas par J. Esterle dans [Est]. Si le théorème de Gelfand-Hille joue encore un rôle, il est combiné à d'autres résultats d'analyse harmonique et fonctionnelle (Théorème de structure des groupes abéliens localement compacts, existence des idempotents de Silov,...). On s'intéresse ici à la généralisation de la première partie de la preuve, l'obtention d'une uniformité soit

$$\forall \chi \in \hat{A}, \chi \circ \theta \text{ continue} \Rightarrow \rho(\theta(g) - 1) \xrightarrow[g \rightarrow e]{} 0.$$

Dans [CPT] (et dans le mémoire [Tom2] de J.C. Tomasi), on y arrive en utilisant des arguments d'analyse harmonique commutative (Groupe dual et transformée de Fourier). On donne, ici, une démonstration différente qui consiste à construire, à

partir de θ , une autre représentation du groupe dans une algèbre de fonctions continues et à appliquer le théorème de décomposition de Glicksberg-De Leeuw. Cette approche systématique permet d'obtenir un résultat (plus faible car la condition implique toutes les formes linéaires) dans un cadre non nécessairement commutatif à savoir

Théorème. *Soit G est un groupe localement compact et soit $\theta : G \rightarrow A$ une représentation bornée en norme sur une algèbre de Banach A . (Ni G ni A ne sont supposés commutatifs). En notant A' le dual topologique de A , on a :*

$$\forall \omega \in A', \omega \circ \theta \text{ continue} \Leftrightarrow \theta \text{ continue.}$$

Autrement dit la continuité avec A muni de la topologie faible équivaut à la continuité en norme. Notons (voir chapitre 2) que ce résultat implique le critère donné dans [PT] pour des représentations unitaires :

Théorème. *Si $\theta : G \rightarrow A$ est une représentation unitaire d'un groupe localement compact dans une C^* -algèbre alors on peut "lire la continuité à travers les états (ou les états purs)"*

Notons que toute la difficulté, dans ce cas, consiste à montrer l'uniformité :

$$\forall \omega \in A', \omega \circ \theta \text{ continue} \Rightarrow \sup_{\|\omega\| \leq 1, \omega \in A'} |\omega(\theta(g) - 1)| \xrightarrow{g \rightarrow e} 0$$

On peut aussi remarquer que cette forme générale de théorèmes de continuité où on a

$$\forall \omega \in \Omega, \omega \circ \theta \text{ continue} \Rightarrow \theta \text{ continue.}$$

pour $\Omega \subset A'$ ($\Omega = \hat{A}$ dans le cas commutatif et $\Omega = A'$ tout entier dans le cas ci-dessus) devient une simple application du théorème du graphe souslinien (cf chapitre 1) si G et A sont séparables et que Ω est total (au sens que $\forall \omega \in \Omega, \omega(a) = \omega(a') \Rightarrow a = a'$) car alors le graphe de θ étant fermé et analytique dans $G \times A$ mais c'est justement l'absence de théorème du graphe fermé dans le cas général pour des morphismes de groupes qui fait la difficulté de tous ces résultats (y compris ceux de Phillips et d'Esterle). On donne ensuite une généralisation des résultats précédents à des groupes polonais non nécessairement localement compacts. Ici, la théorie de Glicksberg-De Leeuw ne s'applique pas et on revient à une démonstration proche de celle de [CPT] et [Tom] mais où les techniques d'analyse de Fourier (utilisant la mesure de Haar absente dans le cas non localement compact) sont remplacées par

un résultat d'équicontinuité de suites de fonctions définies positives dû à Banaszczyk. Enfin, dans la dernière partie du chapitre 2, on montre que nos résultats de continuité, outre le fait qu'ils soient utiles dans la suite pour obtenir des informations sur les spectres peuvent aussi servir à l'étude de l'extension au cas non séparable de certains critères (classiques sous des hypothèses de séparabilité) de morphismes de groupes topologiques.

La seconde partie (chapitre 3) est consacrée à l'étude du spectre des éléments de l'image d'une représentation fortement continue d'un groupe localement compact abélien à base dénombrable d'ouverts. En fait, si G est un tel groupe et $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de G dans l'algèbre des opérateurs bornés sur un Banach X , on s'intéresse à la répartition des arguments des nombres complexes dans le spectre $\sigma(\theta(g))$ de l'image de g . A cette fin, on introduit l'ensemble $\sigma^1(\theta(g)) = \{\frac{z}{|z|}, z \in \sigma(\theta(g))\}$ qui est un sous-ensemble bien défini (puisque pour tout $g \in G$, $\theta(g)$ inversible et $0 \notin \sigma(\theta(g))$) du cercle unité. Ici encore, le cas de $G = \mathbb{R}$ traité dans [LPS] a servi de point de départ :

Théorème 0.1 (K. Latrach, J.M. Paoli et P. Simonnet). *Si $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ est un groupe à un paramètre fortement continue alors la représentation est continue en norme ou bien pour t dans un comaire de \mathbb{R} , $\sigma^1(\theta(t)) = \mathbb{T}$.*

Toutefois, l'exemple suivant montre qu'on ne peut avoir de dichotomie aussi simple pour tous les groupes abéliens localement compacts.

Exemple 1. On pose $G = \mathbb{U}_2^{\mathbb{N}}$ (où \mathbb{U}_2 désigne le groupe des racines deuxième de l'unité) muni de la topologie produit et est donc compact, métrisable. $X = \ell^2$ et $\theta((\epsilon_n)) : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ pour $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G$.
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\epsilon_n \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On voit facilement qu'on a une représentation unitaire fortement continue, non continue en norme et que sur $C = \{(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tel que } \{-1, 1\} \subset \{\epsilon_n, n \in \mathbb{N}\}\}$ qui est un comaire de G , on a $\sigma^1(\theta((\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}})) = \sigma(\theta((\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}})) = \{-1, 1\}$.

Cet exemple (et d'autres analogues) ainsi que la lecture de [Est] ont suggéré que les polygones réguliers et les groupes de racines de l'unité pouvaient intervenir dans le cas général. On a le résultat suivant ([CPT]) :

Théorème. *Soient G un groupe topologique localement compact à base dénombrable d'ouverts et $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue sur un Banach X . On a la dichotomie :*

θ est continue en norme ou bien sur un comaire de G , $\sigma^1(\theta(g))$ contient des polygones réguliers non triviaux.

Il faut comprendre polygone régulier comme un sous-ensemble de \mathbb{T} de la forme $z\Gamma$ où $z \in \mathbb{T}$ et Γ est un sous-groupe fermé de \mathbb{T} . \mathbb{T} et un singleton sont donc des polygones et un polygone est non trivial s'il n'est pas réduit à un point. J.C. Tomasi a prouvé un analogue où comaigne est remplacé par "en dehors d'un ensemble Haar-négligeable" (cf. [Tom]).

En fait, si X est séparable, sur un comaigne $\sigma^1(\theta(g))$ est exactement une réunion de polygones réguliers non triviaux (voir chapitre 3). En fait, l'idée qui est derrière ce résultat est assez naturelle. En effet, $\sigma^1(\theta(g)) = \{\frac{\chi \circ \theta}{|\chi \circ \theta|}(g), \chi \in \hat{A}\}$. C'est donc un ensemble d'images de g par des morphismes de G dans le tore et par le critère de continuité vu à travers les morphismes, si θ n'est pas continue en norme, il existe $\chi \in \hat{A}$ tel que $\varphi : g \mapsto \frac{\chi(\theta(g))}{|\chi(\theta(g))|}$ est un morphisme discontinu de G dans \mathbb{T} vérifiant $\varphi(g) \in \sigma^1(\theta(g))$ pour tout $g \in G$. Or ces morphismes ont des propriétés particulières d'oscillation. En effet, on a pour $g \in G$, $\Gamma_\varphi(g) = \{z \in \mathbb{T}, \exists (g_n) \text{ suite dans } G \text{ telle que } g_n \rightarrow e \text{ et } \varphi(g_n) \rightarrow z\}$ est un polygone régulier non trivial qui dépend continûment de g (cf. chapitre 3). En fait, pour $G = \mathbb{R}$, ou un groupe de Lie par exemple, on a pour tout $g \in G$, $\Gamma_\varphi(g) = \mathbb{T}$. D'autre part, par un résultat prouvé dans [LPS] ou dans [Yad], l'application qui à un opérateur associe son spectre est borélienne de $\mathcal{L}(X)$ muni de la topologie forte d'opérateurs dans l'espace des compacts du tore muni de la métrique de Hausdorff. On en déduit que l'application de G dans l'espace des compacts du tore qui à g associe $\sigma^1(\theta(g))$ est aussi borélienne, c'est à dire moralement "presque continue" (plus précisément continue en restriction à un comaigne). C'est la conjonction de cette régularité de l'application à valeurs ensembliste $g \mapsto \sigma^1(\theta(g))$ et de l'oscillation des morphismes discontinus $\varphi : G \rightarrow \mathbb{T}$ astreints à vérifier $\varphi(g) \in \sigma^1(\theta(g))$ qui contraint $\sigma^1(\theta(g))$ à être (au moins sur un comaigne) assez "gros" pour absorber l'oscillation de φ . On donne ici une démonstration plus générale que celle de [CPT] qui permet de traiter, en utilisant la notion de propriété de Steinhaus pour un σ -idéal de parties d'un groupe polonais, de façon unifiée le résultat de [CPT] et celui de J.C. Tomasi [Tom] où "maigre" est remplacé par "de mesure de Haar nulle". Cette approche permet également, dans le cas d'un groupe polonais non localement compact, de montrer que l'ensemble exceptionnel est "Haar-nul" au sens de Christensen.

Dans une troisième partie, on essaie de généraliser en partie les résultats précédents au cas des groupes non commutatifs. On se limite dans ce cas aux représentations unitaires sur un espace de Hilbert. Dans ce cas, J.M. Paoli et J.C. Tomasi ont obtenu un premier résultat (cf. [PT]) :

Théorème. *Si $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(H)$ est une représentation unitaire fortement continue d'un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts alors θ est continue ou bien sur un comaire de G , l'enveloppe convexe du spectre $\sigma(\theta(g))$ contient 0.*

Dans le cas des groupes de Lie, on peut être plus précis (voir chapitre 4) et, au moins au voisinage du neutre, montrer que le spectre de $\theta(g)$, ($g \in G$) est le cercle unité tout entier, en dehors d'un ensemble maigre de valeurs de g si θ est discontinue. Les outils utilisés sont un résultat sur l'existence de "nombreux" (un ensemble comaire) points de continuité de l'application qui à g associe son spectre (dans le cas unitaire) et quelques propriétés classiques de l'application exponentielle qui permet localement au voisinage du neutre de se ramener à une situation commutative. Le voisinage du neutre où, sur un comaire, le spectre est le cercle unité est le groupe entier dans le cas où ce groupe est "faiblement exponentiel" (*i.e.* l'image de l'exponentielle est dense dans le groupe) ce qui couvre le cas des groupes de Lie connexes compacts ou résolubles ou des groupes linéaires complexes $Gl(n, \mathbb{C})$.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Rappels de topologie

1.1.1 Lemme de Baire et notions reliées

On s'inspire ici (ainsi que pour une grande partie de ce paragraphe) de [Kech]. Commençons par quelques notions bien connues.

Définition 1.1. Soient X un espace topologique et $M \subset X$, M est dit maigre s'il est contenu dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

Le complémentaire d'un ensemble maigre est dit comaigne (ou résiduel).

Nous utilisons, à ce propos, la notation usuelle (qui n'est pas celle de Kechris) : une réunion dénombrable de fermés est dite de type F_σ , une intersection dénombrable d'ouverts est dite G_δ .

Proposition-Définition 1.2. *Dans un espace topologique X , les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Tout ouvert non vide de X est non maigre.*
- (ii) *Tout ensemble comaigne de X est dense.*
- (iii) *Toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans X est dense.*

Un espace vérifiant ces propriétés est appelé espace de Baire.

Proposition 1.3. 1. *Si X est un espace de Baire et $U \subset X$ est un ouvert alors U est un espace de Baire.*

2. *(Lemme de Baire) Un espace métrique complet ou un espace topologique localement compact est un espace de Baire.*

On introduit maintenant des classes (d'autres le seront dans la partie 1.1.2) de fonctions plus générales que celle des fonctions continues mais qui en restent relativement proches.

- Définition 1.4.** 1. Soient X un espace métrisable et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application. f est dite semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) si pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in X, f(x) > a\}$ (resp. $\{x \in X, f(x) < a\}$) est ouvert dans X .
2. Soient X et Y des espaces métrisables. Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est dite de première classe de Baire si pour tout ouvert U de X , $f^{-1}(U)$ est un F_σ de X .

On regroupe dans la proposition suivante diverses propriétés de ces différentes classes de fonctions.

- Proposition 1.5.** 1. (Baire) Soient X et Y des espaces métrisables, Y séparable et $f : X \rightarrow Y$ une fonction de première classe de Baire. Alors l'ensemble des points de continuité de f est un G_δ dense.
2. Les fonctions semi-continues sont de première classe de Baire.
3. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, X séparable et f de première classe de Baire, f est limite simple de fonctions continues.

1.1.2 Parties boréliennes et parties ayant la propriété de Baire

- Définition 1.6.** 1. Soit X un espace topologique, on appelle tribu borélienne de X la tribu engendrée par les ouverts de X et parties boréliennes de X les éléments de la tribu borélienne.
2. On dit qu'une partie $A \subset X$ a la propriété de Baire s'il existe un ouvert U de X tel que la différence symétrique $A\Delta U = (A \setminus U) \cup (U \setminus A)$ soit maigre.

- Proposition 1.7.** 1. Les sous-ensembles de X ayant la propriété de Baire forment une tribu qui est engendrée par la réunion des ouverts et des maigres (et qui contient donc les boréliens).
2. Soit $A \subset X$, A ayant la propriété de Baire. Si A est non maigre, il existe un ouvert U de X tel que $A \cap U$ est comaigne dans U .

Définition 1.8. soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. f est borélienne (resp. a la propriété de Baire) si l'image réciproque de tout ouvert de Y est un borélien (resp. a la propriété de Baire) dans X .

Remarque. Par la proposition précédente, les applications boréliennes ont la propriété de Baire.

Bien que, contrairement aux fonctions de première classe, les fonctions boréliennes et *a fortiori* de Baire puissent n'avoir aucun point de continuité (par exemple la fonction caractéristique de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}), elles sont, elles aussi, relativement "proches" des fonctions continues, plus précisément :

Proposition 1.9. *Soient X un espace de Baire, Y un espace topologique à base dénombrable d'ouverts (second countable) et $f : X \rightarrow Y$ une fonction ayant la propriété de Baire. Alors, il existe un ensemble C (muni de la topologie induite par X) qui est un G_δ comaignre tel que $f|_C$ est continue.*

Introduisons enfin une dernière classe d'espaces qui interviendra dans diverses remarques plus que dans le coeur du travail.

Définition 1.10. Soit X un espace topologique. X est analytique (ou souslinien) s'il existe un espace polonais Y et une application continue $f : Y \rightarrow X$ telle que $f(Y) = X$

On rappelle qu'un espace polonais est un espace séparable dont la topologie peut-être définie par une métrique qui le rend complet. On a pris ici la définition de [Bou], celle de [Kech] supposant *a priori* X contenu dans un polonais.

Proposition 1.11. 1. *Les boréliens d'un espace polonais sont analytiques.*

2. *Les analytiques ont la propriété de Baire.*

Remarque. Un fermé ou un borélien n'est analytique *a priori* que s'il est sous-espace d'un polonais et en particulier séparable.

Les analytiques interviennent de façon très sporadique dans ce travail à travers le théorème suivant.

Théorème 1.12 ([Bou]). *Soient G, G' deux groupes topologiques séparés, G de Baire, $\varphi : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupe. Si le graphe de φ est analytique pour la topologie induite par $G \times G'$, φ est continue.*

Remarque. A première vue, on pourrait croire qu'on a, pour des morphismes de groupes un théorème "du graphe fermé" comme dans le cas linéaire entre espaces de Banach ou de Fréchet, or, un analytique étant nécessairement séparable, si le résultat précédent donne bien un "théorème du graphe fermé" entre groupes polonais, ce n'est pas le cas en général.

1.1.3 Topologie de Vietoris et distance de Hausdorff sur l'espace des compacts d'un espace topologique

Définition 1.13. 1. Soit X un espace topologique, on note $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des compacts de X et on appelle topologie de Vietoris sur $\mathcal{K}(X)$ la topologie engendrée par les deux familles d'ensembles

$$\{K \in \mathcal{K}(X), K \subset U\} \text{ et } \{K \in \mathcal{K}(X), K \cap U \neq \emptyset\}$$

où U parcourt l'ensemble des ouverts de X .

2. Si X est un espace métrique muni d'une distance d qu'on supposera bornée, on appelle distance de Hausdorff sur $\mathcal{K}(X)$ la distance définie pour K et L dans $\mathcal{K}(X)$ par

$$d_H(K, L) = \max(\sup_{z \in K} d(z, L), \sup_{z \in L} d(z, K))$$

où $d(z, K) = \inf_{z' \in K} d(z, z')$.

Proposition 1.14. Dans le cas d'un espace X métrisable à métrique bornée :

1. la topologie de Vietoris est définie par la métrique de Hausdorff.
2. une autre définition possible de d_H , un peu plus géométrique, est

$$d_H(K, L) = \inf\{\epsilon > 0 \mid K \subset L^\epsilon \text{ et } L \subset K^\epsilon\} \quad \text{où } A^\epsilon = \{x \in X \mid d(x, A) < \epsilon\}$$

Citons, parmi les nombreuses propriétés de $\mathcal{K}(X)$, X métrisable à métrique bornée, celles que nous allons utiliser (voir [Kech]) :

Proposition 1.15. Si X est compact, alors $\mathcal{K}(X)$ l'est aussi.

Proposition 1.16. L'application $\text{conv} : \begin{array}{ccc} \mathcal{K}(\mathbb{D}) & \rightarrow & \mathcal{K}(\mathbb{D}) \\ K & \mapsto & \text{conv}(K) \end{array}$ qui donne l'enveloppe convexe est continue.

Proposition 1.17. Dans $\mathcal{K}(C)$, où C est un compact de \mathbb{C} , si C_n est une suite de compacts de C alors $\bigcap_{i=0}^n C_i$ converge vers $\bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$

Démonstration. On pose $F_n = \bigcap_{i=0}^n C_i$ et $F = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$. F_n est alors une suite décroissante pour l'inclusion.

On va raisonner par l'absurde : On suppose que F_n ne converge pas vers F alors, quitte à extraire (toute sous-suite (f_{n_k}) de (F_n) est décroissante et $\bigcap_{k \in \mathbb{N}_{n_k}} F_k = F$), on a

$$\exists \epsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, F_n \not\subset F^{\epsilon_0} \quad \text{ou} \quad F \not\subset F_n^{\epsilon_0}$$

Comme $F \subset F_n \subset F_n^{\epsilon_0}$, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \not\subset F^{\epsilon_0}$. Autrement dit, On peut trouver une suite x_n dans C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F_n$ et $x_n \notin F^{\epsilon_0}$. Or C est compact donc il existe une sous-suite $x_{\varphi(n)}$ qui converge vers x . On remarque que $x \notin F^{\epsilon_0}$ car F^{ϵ_0} est ouvert.

D'autre part, comme (F_n) est une suite décroissante pour l'inclusion, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n, \quad x_{\varphi(m)} \in F_n$$

Donc comme F_n est fermé, $x \in F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $x \in F$. On a donc une contradiction. \square

1.1.4 Espaces angéliques

Nous allons étudier, dans ce paragraphe, des espaces non forcément métrisables mais pour lesquels la compacité est néanmoins définie par l'existence de sous-suites convergentes.

Définition 1.18. Soit X un espace topologique séparé, X est dit "angélique" si

1. Tout sous-ensemble A dénombrablement compact de X (c'est-à-dire tel que tout sous-ensemble dénombrable de A ait un point adhérent dans X) est relativement compact dans X .
2. L'adhérence de tout sous-ensemble A relativement compact coïncide avec les limites de suites d'éléments de A .

Proposition 1.19. Soit X un espace angélique. On a l'équivalence des propriétés suivantes :

- (1) \bar{A} compact
- (2) Toute suite d'éléments de A admet une sous-suite convergente dans \bar{A} .

Outre les espaces métrisables, le théorème d'Eberlein-Smulian montre que les espaces de Banach munis de leur topologie faible sont angéliques ainsi que certains espaces de fonctions continues munis de la topologie de la convergence simple. C'est ce dernier cas qui va nous intéresser dans la suite. On a le théorème suivant :

Théorème 1.20 ([Flo], p.36). Si $X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n}$ où X_n est dénombrablement compact pour $n \in \mathbb{N}$ (i.e. toute suite dans X_n admet un point adhérent) et Z est un espace métrique alors $\mathcal{C}(X, Z)$ (espace de fonctions continues de X dans Z) est angélique pour la topologie de la convergence simple.

En particulier, si X est séparable, $\mathcal{C}(X)$ (espace de fonctions continues de X dans \mathbb{C}) est angélique. C'est ce cas que nous utiliserons dans le chapitre 2.

1.2 Algèbres de Banach

1.2.1 Généralités

On suppose connue la notion d'algèbre de Banach. Malgré l'existence, en particulier dans le contexte de l'analyse sur les groupes localement compacts, de nombreux exemples classiques d'algèbres sans élément unité, celles qui interviendront dans ce travail auront toujours une unité, donc, dans ce qui suit, nos algèbres de Banach sont supposées unitaires avec $\|1\| = 1$ sans qu'il soit nécessaire de le préciser et seront de plus des \mathbb{C} -algèbres.

Définition 1.21. Une algèbre de Banach est dite une C^* -algèbre s'il existe une involution $a \mapsto a^*$ de A dans A vérifiant pour tout a, a' dans A et $\lambda \in \mathbb{C}$,

1. $(a + a')^* = a^* + a'^*$, $(\lambda.a)^* = \bar{\lambda}.a^*$
2. $(aa')^* = a'^*.a^*$
3. $\|a^*a\| = \|a\|^2$

On note de façon usuelle le spectre d'un élément a de A (ensemble des complexes λ tels que $\lambda - a$ soit non inversible dans A) par $\sigma(a)$. C'est toujours un compact de \mathbb{C} .

On va rappeler ici une proposition qui sera utile plus loin.

Proposition 1.22. Soit A une algèbre de Banach, $A' \subset A$ une sous-algèbre de Banach. Pour $a \in A'$, on note $\sigma_{A'}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda - a \text{ non inversible}\}$ le spectre de a relatif à A' . Alors on a

$$\partial\sigma_{A'}(a) \subset \sigma(a) \subset \sigma_{A'}(a)$$

où $\partial\sigma_{A'}(a)$ désigne la frontière de $\sigma_{A'}(a)$

Définition 1.23. Soit A une algèbre de Banach unitaire, on appelle "état" de A toute forme linéaire $\omega \in A'$ telle que $\|\omega\| = \omega(1) = 1$

Les états forment clairement un convexe faible-* compact de A' et donc, par le théorème de Krein-Milman, l'ensemble noté $\Sigma(A)$ des états admet des points extrémaux.

Définition 1.24. On appelle "état pur" tout point extrémal de $\Sigma(A)$

Définition 1.25. Si $a \in A$, on appelle "image numérique" de a l'ensemble $W(a) = \{\omega(a), \omega \in \Sigma(A)\}$

On va regrouper, dans ce qui suit, quelques résultats sur les états et l'image numérique qu'on peut trouver, pour la plupart, dans plusieurs ouvrages classiques. Tous figurent dans les deux livres de Bonsall et Duncan ([BD] et [BD2]).

Propriété 1.26. Soit A une algèbre de Banach unitaire.

1. Si $a \in A$, $W(a)$ est un convexe compact contenant le spectre.
2. Si A' est une sous-algèbre unitaire de A , toute restriction à A' d'un état de A est un état de A' et tout état de A' se prolonge (par Hahn-Banach) en état de A .
3. Si $a \in A'$ (sous-algèbre unitaire de A) alors l'image numérique de a relative à A ou A' est la même.
4. ([BD] p.34) Si on pose, pour $a \in A$, $\rho_N(a) = \sup_{\omega \in \Sigma(A)} |\omega(a)| = \sup |W(a)|$, alors ρ_N est une norme équivalente à la norme de A .
5. Toute forme linéaire continue sur A est combinaison linéaire de (au plus quatre) états de A ([BD2] p.100).

Dans le cas d'une C^* -algèbre ou d'un opérateur sur un Hilbert, on a d'autres définitions cohérentes avec celles qui précèdent, d'états et d'image numérique (voir plus loin).

1.2.2 Algèbres de Banach commutatives

Définition 1.27. Soit A une algèbre de Banach commutative. On appelle caractère toute forme linéaire continue $\chi : A \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ pour tout $a, b \in A$ et $\chi(1) = 1$.

On appelle spectre de A (noté \hat{A}) l'ensemble des caractères sur A .

- Remarque.** 1. La notion de caractère (et donc de spectre) garde un sens pour des algèbres non commutatives mais des exemples (par exemple l'algèbre $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs bornés sur un Hilbert) montrent qu'on peut avoir $\hat{A} = \emptyset$ (ou $\hat{A} = \{0\}$ si on supprime la condition $\chi(1) = 1$ ce qu'on fait naturellement dans le cas non unitaire) alors que ce qui va suivre montre que dans le cas commutatif, on a "assez de caractères" pour obtenir des résultats sur A .
2. En fait la continuité dans le cas unitaire des caractères est automatique avec de plus $\|\chi\| = 1$ pour tout $\chi \in \hat{A}$.

Proposition 1.28. *Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire.*

1. \hat{A} muni de la topologie induite par la topologie faible-* de A' est compact.
2. Pour tout $a \in A$, $\sigma(a) = \{\chi(a), \chi \in \hat{A}\}$
3. \hat{A} s'identifie de façon naturelle (par $\chi \mapsto \ker(\chi)$) à l'ensemble des idéaux maximaux de A .

On a aussi des résultats de représentation des algèbres de Banach commutatives dans les algèbres de fonctions continues

Théorème 1.29 (de représentation de Gelfand). *Si A est une algèbre de Banach commutative, alors :*

1. L'application $\Phi : \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & \mathcal{C}(\hat{A}) \\ a & \mapsto & \hat{a} \end{array}$ où $\hat{a}(\chi) = \chi(a)$ est un homomorphisme continu d'algèbre de Banach appelée transformée de Gelfand.
2. $\|\hat{a}\|_{\mathcal{C}(\hat{A})} = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(a)\} = \rho(a)$ (le rayon spectral de a).
3. Si A est une C^* -algèbre (commutative), Φ est un isomorphisme isométrique. Autrement dit, les algèbres de fonctions continues sont, à isomorphisme près, les seules C^* -algèbres commutatives.

1.2.3 C^* -algèbres (non nécessairement commutatives)

Nous renvoyons à [Tak] ou [Mur] pour les détails de cette partie.

On va définir dans une C^* -algèbre des classes particulières d'éléments et de formes linéaires sur son dual qui vont permettre de construire des représentations dans l'algèbre $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs bornés sur un Hilbert.

Définition 1.30. Dans une C^* -algèbre A , $a \in A$ est dit :

1. normal si $a^*a = aa^*$.

2. auto-adjoint si $a = a^*$.
3. unitaire si $a^*a = aa^* = I$

Il est clair que les unitaires et les auto-adjoints sont normaux et on a de plus :

Propriété 1.31. *Pour un élément a d'une C^* -algèbre, on a :*

- (i) *si a est normal, $\|a\| = \rho(a)$ (le rayon spectral).*
- (ii) *si a est auto-adjoint, $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*
- (iii) *si a est unitaire, alors $\|a\| = 1$ et $\sigma(a)$ est un compact de \mathbb{T} .*

Exemple 1.32. $\mathcal{L}(H)$ où H est un Hilbert muni du passage à l'adjoint $T \mapsto T^*$ est une C^* -algèbre.

Définition 1.33. Un élément $a \in A$ est dit positif si a est auto-adjoint et $\sigma(a) \in \mathbb{R}^+$. On note $a \geq 0$ pour a positif et A^+ l'ensemble des éléments positifs. Une forme linéaire $\omega : A \rightarrow \mathbb{C}$ est dite positive si $\omega(A^+) \subset \mathbb{R}^+$.

Les formes linéaires positives jouant un rôle particulier dans la théorie des représentations hilbertiennes des C^* -algèbres, on regroupe dans la proposition suivante quelques unes de leurs propriétés.

Proposition 1.34.

1. *Une forme linéaire ω est positive si et seulement si ω est continue et $\omega(1) = \|\omega\|$.*
2. *Pour tout $a \in A$ et ω forme linéaire positive, $\omega(a^*) = \overline{\omega(a)}$.*
3. *Toute forme linéaire ω se décompose sous la forme : $\omega = \omega_1 - \omega_2 + i(\omega_3 - \omega_4)$ où les ω_i sont des formes linéaires positives*

Définition 1.35. Soit A une C^* -algèbre. Un état de A est une forme linéaire positive de norme 1. On notera $\Sigma(A)$ l'ensemble des états de A . On vérifie que cette définition est cohérente avec celle donnée dans le cas général (partie 1.2.1).

On a, de plus :

Propriété 1.36.

1. *Pour tout $a \in A$, $V(a)$ est convexe et compact de \mathbb{C} et $\text{Conv}(\sigma(a)) \subset V(a)$ (où Conv désigne l'enveloppe convexe fermée).*
2. *Si a est normal alors $V(a) = \text{Conv}(\sigma(a))$.*

Remarque. On trouve dans la littérature différentes notions d'images numériques qui ne sont pas exactement identiques mais ont, en général, la même enveloppe convexe fermée. Par exemple, si $A = \mathcal{L}(H)$ où H est un espace de Hilbert, l'ensemble $W(T) = \{\langle Th; h \rangle, h \in H\}$ est aussi appelé souvent image numérique. $W(T) \neq V(T)$ en général cependant $\overline{W(T)} = V(T)$.

Enfin, on va donner un résultat important qui peut-être considéré comme un analogue non commutatif du théorème de représentation 1.29 de Gelfand (voir [Tak]). On remarque d'abord que si $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}(H)$ est une $*$ -représentation d'une C^* -algèbre A (c'est-à-dire un morphisme d'algèbres tel que $\pi(a^*) = (\pi(a))^*$, l'involution dans $\mathcal{L}(H)$ étant celle qui à un opérateur associe son adjoint), et $\omega(a) = \langle \pi(a)h, h \rangle$, ($a \in A$), alors ω est une forme linéaire positive qui est un état si $\|h\| = 1$. Inversement, une construction de représentations due à Gelfand, Naimark et Segal (GNS), permet à tout état d'associer une représentation (essentiellement unique) qui permet d'écrire l'état sous cette forme.

Commençons par quelques définitions.

- Définition 1.37.**
1. Soient A une C^* -algèbre et $\pi_1 : A \rightarrow \mathcal{L}(H_1)$ et $\pi_2 : A \rightarrow \mathcal{L}(H_2)$ deux $*$ -représentations de A sur deux espaces de Hilbert H_1 et H_2 . π_1 et π_2 sont dites "unitairement équivalentes" s'il existe un isomorphisme unitaire (*i.e.* échangeant les produits scalaires de H_1 et H_2) U de H_1 sur H_2 tel que pour tout $a \in A$, $\pi_2(a) = U.\pi_1(a).U^{-1}$.
 2. Une $*$ -représentation $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}(H)$ est dite cyclique s'il existe $h \in H$ tel que $\overline{\{\pi(a).h, a \in A\}} = H$ (un tel vecteur h est dit vecteur cyclique pour la représentation).
 3. $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}(H)$ est dite irréductible si pour tout $h \in H \setminus \{0\}$ h est cyclique pour π (*i.e.* il n'existe pas de sous-espace fermé $\pi(A)$ -invariant contenant h).

Théorème 1.38 (Gelfand-Naimark-Segal). *A une C^* -algèbre.*

1. Soit ω un état sur A , il existe une $*$ -représentation cyclique $\pi_\omega : A \rightarrow \mathcal{L}(H_\omega)$ et un vecteur unitaire cyclique h_ω tel que pour tout $a \in A$, $\omega(a) = \langle \pi_\omega(a)h_\omega, h_\omega \rangle$
2. Deux $*$ -représentations cycliques $\pi_1 : A \rightarrow \mathcal{L}(H_1)$ et $\pi_2 : A \rightarrow \mathcal{L}(H_2)$ admettant des vecteurs cycliques unitaires h_1 et h_2 telles que pour tout $a \in A$, $\omega(a) = \langle \pi_1(a)h_1, h_1 \rangle = \langle \pi_2(a)h_2, h_2 \rangle$ sont unitairement équivalentes.
3. La représentation π_ω cyclique associée à $\omega \in \Sigma(A)$ est irréductible si et seulement si ω est un état pur.

1.2.4 Quelques résultats d'analyse fonctionnelle

Nous aurons besoin de la caractérisation suivante des parties relativement faiblement compactes dans les espaces de fonctions continues $\mathcal{C}(\Omega)$, avec Ω compact.

Théorème 1.39 (Grothendieck, [Gro]). *Une partie $A \subset \mathcal{C}(\Omega)$ pour Ω compact est relativement faiblement compacte si et seulement si elle est bornée et relativement compacte dans $\mathcal{C}(\Omega)$ pour la topologie de la convergence simple.*

Définition 1.40. Un Banach X a la propriété de Dunford-Pettis (en abrégé (D.P.)) s'il vérifie une des conditions équivalentes (cf. [Sch])

1. Tout opérateur faiblement compact de X dans un espace de Banach Y envoie les sous-ensembles faiblement compacts sur les compacts (en norme) de Y .
2. Pour tout couple de suite (x_n) dans X , (x_n^*) dans X' telles que (x_n) converge faiblement vers x , (x_n^*) converge faiblement dans X' vers x^* , on a $\langle x_n^*, x_n \rangle \rightarrow \langle x^*, x \rangle$.

Les espaces $\mathcal{C}(\Omega)$ (Ω compact) donc, en particulier les espaces \mathbb{L}^∞ ont la propriété de (D.P.).

Définition 1.41. Un Banach X a la propriété de Grothendieck (en abrégé (G)) si toute suite (x_n^*) dans le dual X' qui converge pour la topologie faible-* converge aussi pour la topologie faible sur X' .

Les espaces réflexifs ont clairement la propriété (G) (et jamais (DP) sauf en dimension finie) mais les espaces $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ où Ω est un espace mesuré muni d'une mesure positive ont aussi (G) et (DP) (voir [Sch]). Dans les espaces de Banach possédant la propriété (DP), on a le résultat suivant (cf. [Lot] p.211) :

Théorème 1.42. *Soit X un espace de Banach ayant la propriété (D.P.) et (T_n) une suite d'opérateurs bornés sur X vérifiant*

1. *pour tout $x^* \in X'$, $\|T_n^* x^*\| \rightarrow 0$*
2. *Pour toute suite (x_n^*) dans X' bornée en norme, $(T_n^* x_n^*)$ converge faiblement vers 0*

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n^2\| = 0$

1.3 Théorie des opérateurs

1.3.1 Topologie forte d'opérateurs

Soit X un espace de Banach, on note $\mathcal{L}(X)$ l'algèbre de Banach des opérateurs bornés sur X . Sur $\mathcal{L}(X)$, on a, en plus de sa topologie d'algèbre de Banach définie par la norme d'opérateurs, quelques autres topologies. Une seule nous concernera ici : la topologie forte d'opérateurs (notée *s.o.t.*). C'est la topologie définie par la famille des semi-normes $p_x(T) = \|Tx\|$ ($T \in \mathcal{L}(X), x \in X$). Une suite généralisée (T_i) de $\mathcal{L}(X)$ converge vers T ($T_i \xrightarrow{s.o.t.} T$) si et seulement si pour tout $x \in X, T_i x \rightarrow Tx$. La topologie forte est moins fine que la topologie de la norme sur $\mathcal{L}(X)$. Si la norme ou le produit dans $\mathcal{L}(X)$ sont continus pour la topologie usuelle, il n'en est pas de même pour la topologie forte. On a toutefois quelques résultats de continuité (ou semi-continuité) qu'on regroupe ici et qu'on peut trouver par exemple dans [Hal] (ils sont démontrés dans un cadre hilbertien mais il est clair que les démonstrations s'étendent telles quelles à un Banach quelconque).

Proposition 1.43. *Soit X un espace de Banach. Si on muni $\mathcal{L}(X)$ de la topologie forte d'opérateurs, on a les propriétés suivantes :*

1. *L'application $T \mapsto \|T\|$ est semi-continue de $(\mathcal{L}(X), s.o.t.)$ dans \mathbb{R}^+*
2. *L'application produit $(A, B) \mapsto AB$ n'est pas continue de $\mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X)$ dans $\mathcal{L}(X)$ avec la topologie forte d'opérateurs mais elle est continue en restriction aux bornés (et séparément continue).*
3. *Si H est un Hilbert, l'involution $A \mapsto A^*$ qui, à un élément de $\mathcal{L}(H)$ associe son adjoint n'est pas continue s.o.t mais elle l'est si on se restreint au sous-espace des opérateurs normaux.*

1.3.2 Propriétés du spectre

Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, on définit le spectre de T comme dans le cas d'une algèbre de Banach générale :

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \text{ non inversible dans } \mathcal{L}(X)\}.$$

Toutefois, dans ce cas particulier, on peut distinguer plusieurs parties de ce spectre correspondant à diverses sortes de non inversibilité (non injectivité, non surjectivité...). Nous n'aurons besoin, dans la suite que de la définition suivante :

Définition 1.44. On appelle spectre approximatif de $T \in \mathcal{L}(X)$, l'ensemble $\sigma_{app}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite dans X avec $\|x_n\| = 1$ et $(\lambda - T)x_n \rightarrow 0\}$.

Il est clair que $\sigma_{app}(T) \subset \sigma(T)$. On donne deux propriétés utiles du spectre approximatif.

Proposition 1.45. 1. $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{app}(T)$.

2. Si $Y \subset X$ est un sous-espace fermé T -invariant (donc on peut voir $T|_Y$ comme appartenant à $\mathcal{L}(Y)$), on a

$$\sigma_{app}(T|_Y) \subset \sigma_{app}(T).$$

Démonstration. Le premier point est classique (voir par exemple [LN]) et le second est clair puisqu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans Y telle que $\|x_n\| = 1$ et $(\lambda - T|_Y)x_n \rightarrow 0$ vérifie aussi $(\lambda - T)x_n \rightarrow 0$. \square

Nous allons maintenant étudier la régularité de la variation du spectre en fonction de l'opérateur qui, dans le cas de la topologie forte d'opérateurs, jouera un grand rôle dans les chapitres 3 et 4.

Toutefois, on traitera d'abord la topologie de la norme. Même dans ce cas, l'application $T \mapsto \sigma(T)$ de $\mathcal{L}(X)$ dans $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ n'est pas continue (cf. [Aup] p.49). On a cependant une semi-continuité supérieure :

Proposition 1.46. [Tak] Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ et U un ouvert de \mathbb{C} tel que $\sigma(T) \subset U$ alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\|T' - T\| < \epsilon \Rightarrow \sigma(T') \subset U$

Cette propriété est d'ailleurs vraie, en général, pour des spectres d'éléments d'algèbre de Banach (cf. [Aup] p.50).

Remarque. L'application $T \mapsto \sigma(T)$, bien que non continue, a toutefois un ensemble de points de continuité qui est un G_δ dense de $\mathcal{L}(X)$.

Par contre, dans le cadre de la topologie forte d'opérateurs, l'application spectre n'est même pas semi-continue (cf [Hal] prob. 119). Toutefois, si le Banach X est séparable, on a (cf. [Yad] ou [LPS]) :

Théorème 1.47. Soit X un Banach séparable, l'application $T \mapsto \sigma(T)$ de $\mathcal{L}(X)$ dans $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ muni de la topologie de Vietoris est borélienne.

1.3.3 Espaces héréditairement indécomposables

On va donner ici la définition d'une classe d'espaces de Banach introduite par Gowers et Maurey, les espaces héréditairement indécomposables (en abrégé : H.I.) pour lesquels la référence historique est [Gow], on peut trouver un résumé clair de la théorie dans [Mau].

- Définition 1.48.**
1. Un espace de Banach de dimension infinie X est dit indécomposable s'il n'admet de décomposition en somme directe topologique $X = X_1 \oplus X_2$ où X_1, X_2 sont des sous-espaces fermés tous deux de dimension infinie.
 2. X est dit héréditairement indécomposable (H.I.) si tous ses sous-espaces fermés de dimension infinie sont indécomposables.

Les espaces H.I. admettent uniquement des opérateurs bornés d'une forme particulière.

Définition 1.49. Soient X et Y deux espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. T est dit strictement singulier s'il n'existe pas de sous-espace fermé de dimension infinie $X_0 \subset X$ tel que la restriction $T|_{X_0}$ soit un isomorphisme sur son image.

Les opérateurs strictement singuliers ont une théorie spectrale semblable à celle des opérateurs compacts.

Proposition 1.50. *Le spectre d'un opérateur strictement singulier est (au plus) dénombrable avec 0 comme seul point d'accumulation possible. Les éléments non nuls du spectre sont des valeurs propres de multiplicité (algébrique) finie.*

On a le résultat suivant sur les opérateurs bornés sur un espace H.I..

Théorème 1.51. *Soient X un espace H.I. et $T \in \mathcal{L}(X)$ alors il existe un nombre complexe λ et un opérateur strictement singulier S dans $\mathcal{L}(X)$ tels que $T = \lambda.Id + S$.*

Ce résultat implique en particulier que tout opérateur borné sur un espace H.I. a un spectre au plus dénombrable avec un seul point d'accumulation possible.

1.4 Groupes topologiques, groupes localement compacts et leurs représentations

Ce paragraphe commence par une partie classique où sont brièvement rappelées les notions usuelles de mesure de Haar, de représentations et leurs principales

propriétés. Pour cette partie, la référence classique est [HR1] mais aussi d'autres ouvrages plus récents comme [Fol] ou [DE].

1.4.1 Groupes topologiques, groupes localement compacts, mesure de Haar

Un groupe topologique est un groupe muni d'une topologie pour laquelle la loi de composition et l'application inverse sont continues. Nous nous intéresserons dans la suite aux groupes localement compacts ou polonais, c'est-à-dire, dont l'espace topologique sous-jacent est localement compact ou polonais. Une mesure borélienne sur un groupe G est dite invariante à gauche si pour tout ensemble mesurable $A \subset G$ et pour tout $g \in G$, gA est mesurable et de même mesure que A .

Théorème 1.52. *Soit G un groupe localement compact, il existe sur G une mesure de Borel régulière non nulle positive invariante à gauche et cette mesure est unique à une constante multiplicative (réelle positive) près dite mesure de Haar sur G .*

On a une propriété de ces mesures :

Propriété 1.53. *Soit G un groupe localement compact, tout ouvert de G est de mesure de Haar strictement positive.*

Par exemple, la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n ou sur \mathbb{T}^n (mesure image par $t \mapsto e^{it}$ de celle de \mathbb{R}) sont les mesures de Haar de ces groupes.

Remarque. Les seuls groupes topologiques polonais admettant un mesure borélienne σ -finie, invariante et non nulle sont localement compacts (cf. [Ros]).

On a cependant une généralisation non pas vraiment de la mesure de Haar mais de la notion de partie négligeable pour cette mesure à des groupes non nécessairement localement compacts. De tels groupes interviennent naturellement en analyse (groupes additifs des espaces vectoriels topologiques de dimension infinie, groupes de Lie de dimension infinie, ...).

Définition 1.54. 1. Une partie d'un espace topologique est dite "universellement mesurable" si elle est mesurable pour toute mesure borélienne complète sur cet espace.

2. Soit G un groupe topologique abélien, une partie universellement mesurable A de G est dite Haar-nulle s'il existe une mesure de probabilité borélienne μ sur

G telle que pour tout $g \in G$, $\mu(g.A) = 0$.

On a aussi une notion de partie Haar-nulle dans le cas non abélien qui considère, à la fois, les translatés à droite et à gauche de A mais nous n'utiliserons ici que le cas commutatif.

Dans le cas d'un groupe localement compact, on a, pour une partie universellement mesurable, identité entre Haar-nullité au sens de la définition précédente et la notion classique de Haar-nullité (voir [Chri], [Ben-Lin], [Ros]).

Définition 1.55. Soit X un ensemble. Une collection \mathcal{I} de sous-ensembles de X est dite un σ -idéal de parties de X si elle contient l'ensemble vide, est héréditaire ($A \in \mathcal{I}$ et $B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{I}$) et est stable par réunion dénombrable.

On a deux exemples classiques de σ -idéaux :

- (1) Si X est un espace topologique, l'ensemble \mathcal{M} des parties maigres de X est un σ -idéal.
- (2) Si X est un espace mesuré, l'ensemble \mathcal{N} des parties négligeables (contenues dans une partie mesurable de mesure nulle) est un σ -idéal.

On a, à présent, un troisième exemple

- (3) Dans un groupe abélien polonais, l'ensemble des parties Haar-nulles est un σ -idéal (*cf.* [Chri] Théorème 1).

Définition 1.56. Soit G un groupe topologique et \mathcal{T} une tribu sur G invariante par translation. Un idéal \mathcal{I} contenu dans \mathcal{T} possède la propriété forte de Steinhaus (en fait, c'est une propriété du couple $(\mathcal{I}, \mathcal{T})$) si, pour tout A dans $\mathcal{T} \setminus \mathcal{I}$, l'ensemble $\{g \in G, gA \cap A \notin \mathcal{I}\}$ est un voisinage du neutre de G .

Exemples 1.57. 1. Si on considère, dans un groupe polonais G , la tribu \mathcal{T} des ensembles ayant la propriété de Baire, le σ -idéal \mathcal{M} des ensembles maigres possède la propriété forte de Steinhaus. En fait, on a même le résultat plus fort suivant :

Si A a la propriété de Baire et est non maigre, il existe un voisinage W du neutre de G tel que si $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans W alors $A \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} g_n A)$ est non maigre. (Ce résultat est démontré et utilisé dans [Tom2]).

2. Si G est un groupe abélien polonais, \mathcal{T} la tribu des parties universellement mesurables et \mathcal{I} le σ -idéal des ensembles Haar-nuls alors \mathcal{I} a la propriété de Steinhaus (mais pas la propriété plus forte de l'idéal \mathcal{M} de l'exemple précédent [Tom2]).

1.4.2 Représentations de groupes localement compacts

Définition 1.58. 1. On appelle représentation d'un groupe G dans une algèbre de Banach A une application $\theta : G \rightarrow A$ telle que pour tout g et g' dans G ,

$$\theta(gg') = \theta(g)\theta(g') \text{ et } \theta(e) = 1$$

où e désigne le neutre de G . Autrement dit θ est un morphisme de groupes entre G et le groupe des inversibles de A .

2. On appelle représentation d'un groupe G sur un espace de Banach X toute représentation (au sens du (1)) de G dans l'algèbre $\mathcal{L}(X)$.
3. On appelle représentation unitaire de G dans une C^* -algèbre A une représentation $\theta : G \rightarrow A$ telle que pour tout $g \in G$, $\theta(g)$ est un unitaire de A .
4. On appelle représentation unitaire de G sur un Hilbert H une représentation unitaire (au sens du (3)) de G dans la C^* -algèbre $\mathcal{L}(H)$.

Si G est un groupe topologique et A une algèbre de Banach ou une C^* -algèbre, on peut se poser le problème de la continuité d'une représentation. Si dans le cas général ((1) ou (3)), la définition naturelle consiste à prendre, pour la topologie sur A , celle de la norme d'algèbre, lorsque A est $\mathcal{L}(X)$ des opérateurs sur un Banach (ou un Hilbert), on a plusieurs notions possibles correspondant aux différentes topologies (de la norme, *s.o.t.*, etc.). Comme un morphisme de groupes est continu si et seulement si il est continu en e , une condition nécessaire et suffisante de continuité en norme (resp. de continuité forte sur $\mathcal{L}(X)$) est

$$\lim_{g \rightarrow e} \|\theta(g) - 1\| = 0 \text{ (resp. } \forall x \in X, \lim_{g \rightarrow e} \|\theta(g)x - x\| = 0).$$

Les notions de représentations fortement continues et continues en normes sont, en général différentes si X est de dimension infinie.

Si, dans le cas des groupes finis, les représentations de dimension finie suffisent à étudier la structure du groupe, il n'en va pas de même pour les groupes infinis. Par exemple, $SL_2(\mathbb{R})$ n'admet pas de représentation unitaire non triviale (autre que celle qui envoie $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\{Id\}$) de dimension finie (cf. [DE] p.135). Cependant, on a des représentations de G par translation sur les espaces naturels de fonctions sur G . L'existence de la mesure de Haar pour des groupes localement compacts donne, en particulier, une représentation unitaire sur $\mathbb{L}^2(G)$. La plupart du temps, ces représentations sont fortement continues et non continues en norme. En fait, la

notion de continuité en norme est beaucoup trop restrictive dans le cas des groupes topologiques infinis et les représentations utiles sont seulement fortement continues.

Il y a aussi sur $\mathcal{L}(X)$ une troisième topologie (au moins) souvent utilisée : c'est la topologie faible d'opérateurs (*w.o.t.*). C'est la topologie la moins fine rendant continues les applications de $\mathcal{L}(X)$ dans $\mathbb{C} : T \mapsto \langle Tx, x^* \rangle$ pour $x \in X$ et $x^* \in X'$ (dual topologique de X). Cette topologie devrait apparaître dans la suite lors de l'utilisation du théorème de décomposition de Glicksberg-De Leeuw, toutefois comme nous nous restreignons au cas des groupes localement compacts, on peut s'en passer grâce au théorème suivant :

Théorème 1.59 (Glicksberg-De Leeuw). *Soit G un groupe localement compact, toute représentation faible opérateur continue est fortement continue.*

Ce résultat est classique dans le cadre des représentations unitaires sur un Hilbert. Dans le cas général, on peut trouver une démonstration dans [DLG].

1.4.3 Fonctions définies positives sur un groupe

Nous allons définir, sur un groupe, une classe de fonctions liée à la théorie des représentations :

Définition 1.60. Soit G un groupe. Une fonction complexe φ sur G est dite définie positive si

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \forall (g_1, \dots, g_n) \in G^n, \forall (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n, \sum_{i,j=1}^n \mu_i \overline{\mu_j} \varphi(g_j^{-1} g_i) \geq 0.$$

Exemples 1.61. 1. Soit G un groupe, χ un morphisme de groupes de G dans le tore $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \mu_i \overline{\mu_j} \varphi(g_j^{-1} g_i) &= \sum_{i,j=1}^n (\mu_i \chi(g_i)) \overline{\mu_j \chi(g_j)} \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i \chi(g_i) \cdot \overline{\sum_{j=1}^n \mu_j \chi(g_j)} \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \mu_i \chi(g_i) \right|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

donc χ est définie positive.

2. Si G est un groupe, $\theta : G \rightarrow A$ une représentation unitaire de G dans une C^* -algèbre A et ω une forme linéaire positive sur A .

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \mu_i \overline{\mu_j} \omega \circ \theta(g_j^{-1} g_i) &= \omega \left(\sum_{i,j=1}^n \mu_i \overline{\mu_j} \theta(g_j)^* \theta(g_i) \right) \\ &= \omega \left(\left(\sum_{i=1}^n \mu_i \theta(g_i) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \theta(g_j) \right)^* \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Donc $\omega \circ \theta$ est définie positive.

On a le résultat général suivant qui lie les fonctions définies positives sur un groupe aux représentations unitaires de ce groupe :

Théorème 1.62 ([HR1], [Sas]). *Soit $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie positive sur un groupe G .*

1. *On peut construire une représentation cyclique unitaire $\theta_\varphi : G \rightarrow \mathcal{L}(H_\varphi)$ de G sur un espace de Hilbert H_φ de vecteur cyclique x_φ telle que*

$$\forall g \in G, \quad \varphi(g) = \langle \theta_\varphi(g) x_\varphi, x_\varphi \rangle.$$

2. *Si $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(H)$ est une autre représentation unitaire cyclique sur un Hilbert H de vecteur cyclique x telle que*

$$\forall g \in G, \quad \varphi(g) = \langle \theta(g)x, x \rangle$$

alors il existe un isomorphisme unitaire U de H_φ dans H tel que $Ux_\varphi = x$ et pour tout $g \in G$, $\theta(g) = U\theta_\varphi(g)U^{-1}$ (i.e. les représentations θ et θ_φ sont unitairement équivalentes).

On peut déduire de ce résultat un certain nombre de propriétés classiques des fonctions définies positives (cf. [HR1] et [Sas]).

En particulier, en notant e l'élément neutre de G , on a :

1. $\varphi(e) \geq 0$ et $\forall g \in G, |\varphi(g)| \leq \varphi(e)$.
2. Pour tout g_1 et g_2 dans G on a :

$$|\varphi(g_1) + \varphi(g_2)|^2 \leq 2(\varphi(e) + \Re \varphi(g_2^{-1} g_1)) \cdot \varphi(e)$$

et

$$|\varphi(g_1) - \varphi(g_2)|^2 \leq 2(\varphi(e) - \Re \varphi(g_2^{-1} g_1)) \cdot \varphi(e)$$

(Il suffit d'écrire $\varphi(g) = \langle \theta(g)x, x \rangle$ et d'utiliser l'unitarité de $\theta(g)$ pour $g \in G$ et l'inégalité de Cauchy-Schwartz).

De ces deux propriétés, on déduit par exemple que si $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de fonctions définies positives, pour que $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ soit équicontinue, il suffit d'avoir pour tout ϵ positif, l'existence d'un voisinage W_ϵ de e dans G tel que

$$\forall g \in W_\epsilon, \varphi(e) - \Re(\varphi(g)) < \epsilon$$

ou encore, comme

$$\begin{aligned} \Re(\varphi(g)) &\leq |\varphi(g)| \leq \varphi(e), \\ \forall g \in W_\epsilon, \Re(\varphi(g)) &> \varphi(e) - \epsilon. \end{aligned}$$

De même, la continuité en e d'une fonction définie positive implique sa continuité sur G .

On a également le résultat moins classique suivant qui figure dans [Ban] et dont on donne une preuve car il sera utilisé dans le chapitre 2.

Proposition 1.63 (Prop. 3.4 dans [Ban]). *Soient G un groupe topologique de Baire et $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues définies positives sur G telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(e) = 1$ et qui converge simplement vers une fonction φ continue (qui est clairement définie positive et vérifie $\varphi(e) = 1$). Alors $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue.*

Démonstration. Soit ψ définie positive sur un groupe G et g_1, g_2 dans G tels que $\Re(\psi(g_1)) \geq 1 - \epsilon$ et $\Re(\psi(g_2)) \geq 1 - \epsilon$ où $\epsilon \in]0, 1[$.

$$(2(1 - \epsilon))^2 \leq |\psi(g_1) + \psi(g_2)|^2 \leq 2(1 + \Re \psi(g_2^{-1}g_1))$$

et donc

$$\Re \psi(g_2^{-1}g_1) \geq 1 - 4\epsilon + 2\epsilon^2 > 1 - 4\epsilon.$$

Reprenons une suite (φ_n) comme dans l'énoncé de la proposition convergeant simplement vers φ . Pour ϵ fixé dans $]0, 1[$, on pose $X_m = \bigcap_{n \geq m} \{g \in G \mid \Re(\varphi_n(g)) \geq 1 - \epsilon\}$ qui est fermé car les φ_n sont continues.

On pose $V = \{g \in G \mid \Re(\varphi(g)) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}\} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$. Par continuité de φ (et le fait que $\varphi(e) = 1$), V est d'intérieur non vide et puisque G est de Baire, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de X_m est non vide. Notons U cet intérieur. $U^{-1}U$ est un voisinage de e et, d'après le calcul fait plus haut,

$$\forall g \in U^{-1}U, \forall n \in \mathbb{N}, \Re(\varphi_n(g)) > 1 - 4\epsilon$$

ce qui, d'après la remarque précédant la proposition nous donne l'équicontinuité de la suite $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$. \square

1.4.4 Continuité spectrale

Phillips a montré (cf. [HP]) que pour des représentations de \mathbb{R} dans A localement bornées (c'est à dire pour tout $a > 0$, $\sup_{t \in [-a, a]} \|\theta(t)\| < +\infty$), où A est une algèbre de Banach, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho(\theta(t) - 1) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \|\theta(t) - 1\| = 0$$

où ρ désigne le rayon spectral. En fait, les résultats de Phillips sont présentés dans le cadre de semi-groupes fortement continus mais la démonstration donne, telle quelle, le résultat énoncé.

Récemment, des généralisations aux groupes localement compacts sont apparues (cf. [Est], [Dub]). Nous allons commencer par donner une définition.

Définition 1.64. Soit $\theta : G \rightarrow A$ une représentation d'un groupe topologique dans une algèbre de Banach, θ est dite spectralement continue si $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(\theta(t) - 1) = 0$

J. Esterle a obtenu ([Est]) le théorème suivant.

Théorème 1.65. *Si G est un groupe abélien localement compact et $\theta : G \rightarrow A$ une représentation localement bornée (i.e. bornée en norme sur un voisinage du neutre) alors*

$$\theta \text{ spectralement continue} \Leftrightarrow \theta \text{ continue.}$$

S. Dubernet ([Dub], [Dub2]) a donné des généralisations partielles au cas non commutatif. On a en particulier la proposition :

Proposition 1.66 (Dubernet, [Dub2] prop. 4). *Soit G un groupe topologique et A une algèbre de Banach. Si $\theta : G \rightarrow A$ est une représentation bornée en norme alors*

$$\lim_{g \rightarrow e} \rho(\theta(g) - 1) = 0 \Leftrightarrow \lim_{g \rightarrow e} \|\theta(g) - 1\| = 0$$

(La continuité spectrale équivaut à la continuité).

Remarque. Dans [Dub2], la proposition est énoncée pour des groupes compacts, mais la démonstration montre clairement que seul le fait que la représentation soit bornée en norme est nécessaire.

1.4.5 Décomposition des représentations localement faiblement presque périodiques

Considérons un groupe G topologique, un espace de Banach X et $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation (sans autre condition de régularité *a priori*).

Définition 1.67. On dit que θ est localement faiblement presque périodique s'il existe un voisinage V du neutre e de G tel que pour tout $x \in X$, $\theta(V).x = \{\theta(g).x, g \in V\}$ est relativement faiblement compact.

Par exemple, cette condition est vérifiée si θ est localement bornée et X réflexif.

Définition 1.68. On dit que θ se décompose canoniquement si on a une somme directe topologique $X = X_c \oplus X_0$ en sous-espaces fermés G -invariants tels que : $X_c = \{x \in X \mid g \mapsto \theta(g)x \text{ continue de } G \text{ dans } X \text{ muni de sa topologie faible}\}$ et $X_0 = \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}(e), 0 \in \overline{\text{Conv}(\theta(V).x)}\}$.

Dans leur article [DLG], Glicksberg et De Leeuw montrent qu'une représentation localement faiblement presque périodique se décompose canoniquement dans un certain nombre de cas. On va regrouper ici une partie de leurs résultats.

Théorème 1.69 (Glicksberg-De Leeuw). *Soit $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation localement faiblement presque périodique. θ se décompose canoniquement dans les cas suivants :*

1. *Si G est commutatif (sans condition supplémentaire).*
2. *Si X et son dual X' sont strictement convexes (i.e. $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$ pour x, y non colinéaires) et $\lim_{g \rightarrow e} \|\theta(g)\| = 1$.*
3. *Si G est localement compact et si les applications de G dans $\mathbb{C} : g \mapsto \langle \theta(g)x, x^* \rangle$ sont localement (Haar) mesurables pour tout $x \in X$ et tout x^* dans un sous-ensemble total de X' .*

Remarque. Le deuxième cas (qui inclut les représentations unitaires sur un Hilbert) a été utilisé par Glicksberg et De Leeuw pour obtenir une décomposition des fonctions définies positives sur un groupe localement compact en somme de deux fonctions définies positives dont la première est continue et l'autre qui moyenne vers 0.

Chapitre 2

Quelques critères de continuité des représentations et des morphismes de groupes topologiques

Si G est un groupe topologique, A une algèbre de Banach (toutes nos algèbres ont un élément unité de norme un) et $\theta : G \rightarrow A$ une représentation, on s'intéresse dans ce chapitre à des résultats du type suivant :

Si, pour tout élément ω d'un sous-ensemble de A' (dual topologique de A), $\omega \circ \theta$ est continue (de G dans \mathbb{C}) alors θ est elle même continue.

Il est clair que si G est commutatif, on peut (en se restreignant à la sous-algèbre fermée engendrée par l'image $\theta(G)$) supposer que A est commutative. On obtient alors les résultats suivants :

1. Si G est un groupe abélien localement compact et θ une représentation de G dans une algèbre commutative A localement bornée (*i.e.* bornée en norme sur les compacts de G), on a :

$$\forall \omega \in \hat{A} \text{ (spectre de } A), \omega \circ \theta \text{ continue} \Rightarrow \theta \text{ continue.}$$

2. Dans le cas où G (toujours abélien) est polonais (non nécessairement localement compact), on a le même résultat mais seulement pour des représentations bornées en norme sur G tout entier.
3. Dans le cas où G n'est pas commutatif, on peut prendre pour ensemble "test" de formes linéaires le dual topologique A' tout entier ou le sous-ensemble des états (ou des états purs).

Le cas localement compact est traité au paragraphe 1 de façon différente de celle utilisée dans [CPT], [PT] ou [Tom]. On montre d'abord un résultat de continuité forte pour des représentations à valeurs dans l'algèbre des opérateurs sur un espace de fonctions continues auxquelles on peut appliquer le théorème de décomposition de

Glicksberg-De Leeuw. Ensuite, en associant à une représentation de groupe sur une algèbre des représentations auxiliaires du type précédent, on en déduit les résultats cités.

On étudie au paragraphe 2 le cas des groupes polonais sans hypothèse de compacité locale. La méthode de démonstration ici est plus proche de celles de [CPT] ou [PT]. Cependant, les méthodes classiques d'analyse harmonique (transformation de Fourier, théorème de Raikov) de [CPT] et [PT] ne s'appliquent pas ici, faute de mesure de Haar. On utilise donc un résultat d'équicontinuité de suites de fonctions définies positives dû à Banaszczyk [Ban] et démontré dans la première partie (proposition 1.63)

Enfin, au troisième paragraphe, on déduit des résultats précédents des généralisations des théorèmes de continuité automatique classiques des morphismes de groupes de Pettis et Steinhaus-Weil (Continuité des morphismes ayant la propriété de Baire ou Haar-mesurables) au cas où le groupe d'arrivée n'est pas séparable mais est un groupe linéaire ou unitaire.

2.1 Cas des groupes localement compacts

2.1.1 Continuité forte des représentations sur les espaces de fonctions continues

Soient G un groupe localement compact et Ω un espace topologique séparé compact. On a le résultat suivant pour les représentations de G sur le Banach $\mathcal{C}(\Omega)$

Proposition 2.1. *Soit θ une représentation localement bornée de G sur le Banach $\mathcal{C}(\Omega)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Pour tout $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $g \mapsto \theta(g)f$ continue de G dans $\mathcal{C}(\Omega)$ (i.e. θ est fortement continue).*
- (ii) *Pour tout $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $g \mapsto \theta(g)f$ continue de G dans $\mathcal{C}(\Omega)_s$ ($\mathcal{C}(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence simple).*

Démonstration. Il est clair que (i) \Rightarrow (ii).

Pour la réciproque, montrons d'abord que si θ vérifie (ii), elle est localement faiblement presque périodique. Soit V un voisinage compact de e dans G et $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. $\theta(V)f = \{\theta(g)f, g \in V\}$ est compact par hypothèse dans $\mathcal{C}(\Omega)_s$ et borné en norme dans $\mathcal{C}(\Omega)$ puisque θ est localement bornée. Par le théorème 1.39 de Grothendieck,

$\theta(V)f$ est relativement faiblement compact dans $\mathcal{C}(\Omega)$ et donc θ est localement faiblement presque périodique. D'autre part, toujours par l'hypothèse (ii), si on note e_ω l'évaluation (masse de Dirac) en $\omega \in \Omega$ ($e_\omega(f) = f(\omega)$), on a pour $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ et $\omega \in \Omega$, $g \mapsto \langle \theta(g)f, e_\omega \rangle = (\theta(g)f)(\omega)$ continue de G dans \mathbb{C} donc Haar-mesurable. Les $\{e_\omega, \omega \in \Omega\}$ formant un système total dans $(\mathcal{C}(\Omega))'$, on déduit du théorème 1.69 que θ se décompose canoniquement c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)_c \oplus \mathcal{C}(\Omega)_0$$

où $\mathcal{C}(\Omega)_c$ et $\mathcal{C}(\Omega)_0$ sont des sous-espaces fermés $\theta(G)$ invariants, $\theta|_{\mathcal{C}(\Omega)_c}$ faiblement continue et $\theta|_{\mathcal{C}(\Omega)_0}$ moyenne en 0. Pour $f \in \mathcal{C}(\Omega)_0$, on a pour tout $V \in \mathcal{V}(e)$, $0 \in \overline{\text{Conv}(\theta(V)f)}$. En appliquant la forme linéaire continue e_ω pour $\omega \in \Omega$,

$$0 \in \overline{\text{Conv}(e_\omega(\theta(V)f))} = \overline{\text{Conv}((\theta(V)f)(\omega))} = \overline{\text{Conv}\{(\theta(g)f)(\omega), g \in V\}}$$

Or, par continuité de $g \mapsto (\theta(g)f)(\omega)$, on a pour $\omega \in \Omega$

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}(e)} \overline{\text{Conv}((\theta(V)f)(\omega))} = \{f(\omega)\}$$

et donc $f \in \mathcal{C}(\Omega)_0 \Rightarrow f = 0$ et $\mathcal{C}(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)_c$. Finalement, θ est faiblement continue et par le théorème 1.59, elle est fortement continue. \square

Remarque. En utilisant un résultat récent de Pfitzner [Pf] qui répond à une question posée en 1987 par G. Godefroy [God2], on peut généraliser le résultat précédent (mais c'est la forme ci-dessus qui sera utilisée dans la suite). On a, en effet, le théorème suivant qui généralise le critère de compacité faible de Grothendieck :

Théorème 2.2 (Pfitzner). *Soit X un espace de Banach réel et Ω un sous-ensemble de la boule unité du dual topologique X' de X tel que*

$$\forall x \in X, \quad \|x\| = \max_{x^* \in \Omega} \langle x^*, x \rangle$$

(Le maximum est ici effectivement atteint sur Ω) alors la topologie faible de X et la topologie $\sigma(X, \Omega)$ (la topologie la moins fine rendant continue les formes linéaires dans Ω , donc, a priori, moins fine que la topologie faible) ont les mêmes compacts bornés en norme.

De tels ensembles Ω sont dits "frontières de James" pour X et, dans le critère de Grothendieck, l'ensemble des mesures de Dirac est une frontière de James pour un espace de fonctions continues sur un compact. En utilisant le théorème de Pfitzner

à la place du critère de Grothendieck et, avec quelques changements dûs au fait, qu'*a priori*, le théorème de Pfitzner s'applique à l'espace vectoriel réel sous-jacent de l'espace que nous considérons qui est, en général complexe (les deux ont les mêmes bornés et les mêmes compacts faibles), on peut prouver :

Proposition 2.3. *Soient G un groupe localement compact, $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation localement bornée sur un Banach X et Ω un sous-ensemble de la boule unité du dual tel que*

$$\forall x \in X, \quad \|x\| = \max_{x^* \in \Omega} \Re \langle x^*, x \rangle$$

(C'est-à-dire $\Re(\Omega) = \{\Re(x^*) \mid x^* \in \Omega\}$ est une frontière de James pour X muni de sa structure réelle sous-jacente) alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x \in X, g \mapsto \theta(g)x$ continue de G dans X muni de la topologie $\sigma(X, \Omega)$.
2. θ est fortement continue.

2.1.2 Applications à la continuité des représentations

Comme dit dans l'introduction, on s'intéresse à des résultats du type :
 $\forall \omega \in \Omega, \omega \circ \theta$ continue $\Rightarrow \theta$ continue où $\theta : G \rightarrow A$ est une représentation localement bornée du groupe localement compact G dans l'algèbre de Banach A et Ω est un sous-ensemble du dual A' .

En fait, en utilisant dans certains cas le théorème de Hahn-Banach, dans d'autres les théorèmes du type "Continuité spectrale implique continuité" d'Esterle et Dubernet, on se ramène à montrer une certaine uniformité. De façon plus précise, le point capital des démonstrations qui suivent est de montrer que, Ω étant un sous-ensemble de A' , on a

$$\forall \omega \in \Omega, \omega \circ \theta \text{ continue (i.e. } \omega(\theta(g) - 1) \xrightarrow{g \rightarrow e} 0) \Rightarrow \sup_{\omega \in \Omega} |\omega(\theta(g) - 1)| \xrightarrow{g \rightarrow e} 0$$

On traite séparément les cas commutatifs et non commutatifs

Cas Commutatif

On a le résultat suivant :

Théorème 2.4. *Soient G un groupe abélien localement compact, A une algèbre de Banach commutative (ce qui ne restreint pas la généralité comme dit plus haut) et $\theta : G \rightarrow A$ une représentation localement bornée. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) θ est continue.

(2) θ est spectralement continue ($\rho(\theta(g) - 1) \xrightarrow{g \rightarrow e} 0$)

(3) $\forall \omega \in \hat{A}$ (spectre de A), $\omega \circ \theta$ continue.

Démonstration. Il est clair que (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3). D'autre part, (2) \Rightarrow (1) est exactement le théorème de J. Esterle. Il reste donc à montrer (3) \Rightarrow (2) c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \hat{A}, \omega \circ \theta \text{ continue} \Rightarrow \rho(\theta(g) - 1) = \sup_{\omega \in \hat{A}} |\omega(\theta(g) - 1)| \xrightarrow{g \rightarrow e} 0$$

A étant une algèbre avec unité, \hat{A} est compact. Pour $a \in A$, on note \hat{a} sa transformée de Gelfand ($\hat{a}(\omega) = \omega(a)$ pour tout $\omega \in \hat{A}$). On sait que

$$\forall a \in A, \quad \|\hat{a}\|_{\mathcal{C}(\hat{A})} = \rho(a) \leq \|a\|$$

Pour f dans $\mathcal{C}(\hat{A})$, on note M_f l'opérateur de multiplication par f agissant sur $\mathcal{C}(\hat{A})$. Il est bien connu que

$$\|M_f\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(\hat{A}))} = \|f\|_{\mathcal{C}(\hat{A})}$$

En effet, $\|M_f\| \leq \|f\|$ résulte de l'inégalité $\|f \cdot \varphi\| \leq \|f\| \cdot \|\varphi\|$ dans $\mathcal{C}(\hat{A})$ et comme $\|M_f(1)\| = \|f\|$ où 1 est la fonction constante 1, on a l'égalité.

On associe à la représentation $\theta : G \rightarrow A$ la représentation $\tilde{\theta} : G \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}(\hat{A}))$ définie par $\tilde{\theta}(g) = M_{\widehat{\theta(g)}}$.

(On a bien, pour g, g' dans G ,

$$\tilde{\theta}(gg') = M_{\widehat{\theta(gg')}} = M_{\widehat{\theta(g)\theta(g')}} = M_{\widehat{\theta(g)}} M_{\widehat{\theta(g')}} = \tilde{\theta}(g)\tilde{\theta}(g')$$

donc une représentation de G sur $\mathcal{C}(\hat{A})$.)

On a pour tout g dans G :

$$\|\tilde{\theta}(g)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(\hat{A}))} = \|M_{\widehat{\theta(g)}}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(\hat{A}))} = \|\widehat{\theta(g)}\|_{\mathcal{C}(\hat{A})} = \rho(\theta(g)) \leq \|\theta(g)\|$$

et donc θ étant localement bornée, $\tilde{\theta}$ l'est aussi.

Soit $f \in \mathcal{C}(\hat{A})$, pour tout ω dans \hat{A} , on a

$$(\tilde{\theta}(g)f)(\omega) = (\widehat{\theta(g)})(\omega) \cdot f(\omega) = (\omega \circ \theta)(g) \cdot f(\omega)$$

et donc, sous l'hypothèse que pour tout ω dans \hat{A} , $\omega \circ \theta$ est continue, on a la continuité, pour tout ω dans \hat{A} , de l'application $g \mapsto (\tilde{\theta}(g)f)(\omega)$ autrement dit, $g \mapsto \tilde{\theta}(g)f$ est

continue dans $\mathcal{C}(\hat{A})$ muni de la topologie de la convergence simple. Par la proposition précédente, $\tilde{\theta}$ est fortement continue, soit

$$\forall f \in \mathcal{C}(\hat{A}), \quad \|\tilde{\theta}(g)f - f\| \xrightarrow{g \rightarrow e} 0$$

En prenant $f = 1$, on a

$$\|\tilde{\theta}(g)1 - 1\|_{\mathcal{C}(\hat{A})} = \|\widehat{\theta(g)} - 1\|_{\mathcal{C}(\hat{A})} = \rho(\theta(g) - 1) \xrightarrow{g \rightarrow e} 0$$

Finalement, θ est spectralement continue. \square

Cas borné non commutatif

Soit A une algèbre de Banach. Pour $a \in A$, on note L_a la multiplication à gauche par A : $L_a(x) = ax$. $L_a \in \mathcal{L}(A)$ et $\|L_a\| = \|a\|$. Pour tout $a \in A$, $L_a^* : A' \rightarrow A'$ (adjoint de L_a est défini par $(L_a^*\omega)(x) = \omega(ax)$ pour $x \in A$ et $\omega \in A'$. Soit $a \in A$, on a si (ω_i) est une suite généralisée dans A' telle que $\omega_i \xrightarrow{w^*} \omega$ alors pour tout $x \in A$

$$(L_a^*\omega_i)(x) = \omega_i(ax) \rightarrow \omega(ax) = (L_a^*\omega)(x)$$

d'où L_a^* de A' dans A' est continue pour la topologie faible-étoile.

Soit $\theta : G \rightarrow A$ une représentation et Ω un compact faible-* de A' stable par $\{L_{\theta(g)}^*, g \in G\}$. On définit $\tilde{\theta} : G \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}(\Omega))$ par $\tilde{\theta}(g)f = f \circ L_{\theta(g)}^*$. On remarque d'après l'hypothèse sur Ω , pour tout $g \in G$, $L_{\theta(g)}^*$ induit un homéomorphisme sur Ω et donc

$$\|\tilde{\theta}(g)f\|_{\mathcal{C}(\Omega)} = \sup_{\omega \in \Omega} |f(L_{\theta(g)}^*\omega)| = \|f\|_{\mathcal{C}(\Omega)}$$

donc $\tilde{\theta}(g)$ est une isométrie de $\mathcal{C}(\Omega)$.

D'autre part, on vérifie que $\tilde{\theta} : G \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}(\Omega))$ est une représentation qu'on appellera "représentation associée" à θ sur Ω . Pour $\Omega \subset A'$ un compact faible-*, on note pour $a \in A$, $\rho_\Omega(a) = \sup_{\omega \in \Omega} |\omega(a)|$.

On a la proposition suivante :

Proposition 2.5. *Soit $\theta : G \rightarrow A$ une représentation d'un groupe localement compact dans une algèbre de Banach A telle que*

1. *pour tout $g \in G$, $\|\theta(g)\| = 1$*
2. *A est engendrée (comme algèbre de Banach) par $\theta(G)$.*

Alors, si Ω est un compact faible- de A' stable par $L_{\theta(g)}^*$ pour tout $g \in G$, on a*

$$\forall \omega \in \Omega, \omega \circ \theta \text{ continue} \Rightarrow \lim_{g \rightarrow e} \rho_\Omega(\theta(g) - 1) = 0.$$

Démonstration. Montrons que pour tout $\omega \in \Omega$, $g \mapsto L_{\theta(g)}^* \omega$ est continue de G dans Ω (muni de la topologie induite par la topologie faible-* de A'). Considérons $\omega \in \Omega$ fixée. Soit $h \in G$, $g \mapsto (L_{\theta(g)}^* \omega)(\theta(h)) = \omega \circ \theta(gh)$ est continue de G dans \mathbb{C} . Par linéarité, on a, en posant $V = \text{vect}(\theta(G))$

Pour tout $a \in V$, $g \mapsto (L_{\theta(g)}^* \omega)(a)$ continue.

Comme par hypothèse, $A = \overline{V}$, si $a \in A$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a' \in V$ tel que $\|a - a'\| < \frac{\epsilon}{3\|\omega\|}$ ($\omega \neq 0$ sinon la continuité serait triviale). Soit $(g_i)_{i \in I}$ une suite généralisée dans G telle que $g_i \rightarrow g$. Par hypothèse, il existe $i_0 \in I$ tel que

$$i \geq i_0 \Rightarrow |\omega(\theta(g_i)a') - \omega(\theta(g)a')| < \frac{\epsilon}{3}.$$

D'où pour $i \geq i_0$,

$$\begin{aligned} |\omega(\theta(g_i)a) - \omega(\theta(g)a)| &\leq |\omega(\theta(g_i)a) - \omega(\theta(g_i)a')| + |\omega(\theta(g_i)a') - \omega(\theta(g)a')| \\ &\quad + |\omega(\theta(g)a') - \omega(\theta(g)a)| \\ &\leq \|L_{\theta(g_i)}^*\| \|\omega\| \|a - a'\| + \frac{\epsilon}{3} + \|L_{\theta(g)}^*\| \|\omega\| \|a - a'\| \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

car $\|L_{\theta(g)}^*\| = \|\theta(g)\| = 1$. D'où pour tout $a \in A$, $g \mapsto (L_{\theta(g)}^* \omega)(a)$ continue. Ceci étant vrai pour tout $\omega \in \Omega$, $g \mapsto L_{\theta(g)}^* \omega$ est continue de G dans (Ω, w^*) . On en déduit que pour tout $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ et $\omega \in \Omega$, $g \mapsto f(L_{\theta(g)}^* \omega)$ continue de G dans \mathbb{C} et donc $g \mapsto \tilde{\theta}(g)f$ continue de G dans $\mathcal{C}(\Omega)_s$. Par la proposition précédente, $\tilde{\theta}$ est donc fortement continue soit

$$\forall f \in \mathcal{C}(\Omega), \quad \lim_{g \rightarrow e} \|\tilde{\theta}(g)f - f\|_{\mathcal{C}(\Omega)} = 0$$

En particulier pour $f = \hat{1}$ (où $\hat{1}(\omega) = \omega(1)$) on a

$$\begin{aligned} \lim_{g \rightarrow e} \|\tilde{\theta}(g)\hat{1} - \hat{1}\|_{\mathcal{C}(\Omega)} &= \lim_{g \rightarrow e} (\sup_{\omega \in \Omega} |\omega(\theta(g)) - \omega(1)|) \\ &= \lim_{g \rightarrow e} \rho_{\Omega}(\theta(g) - 1) = 0 \end{aligned}$$

□

Théorème 2.6. Soit $\theta : G \rightarrow A$ une représentation d'un groupe localement compact G dans une algèbre de Banach A telle que

1. pour tout $g \in G$, $\|\theta(g)\| = 1$
2. pour tout $\omega \in A'$, $\omega \circ \theta$ continue (i.e. θ continue pour la topologie faible sur A).

Alors θ est continue.

Démonstration. Soit A_G l'algèbre de Banach engendrée par $\theta(G)$ et $\omega \in A'_G$. Par le théorème de Hahn-Banach, ω se prolonge en $\tilde{\omega} \in A'$ tel que pour tout $g \in G$, $(\omega \circ \theta)(g) = (\tilde{\omega} \circ \theta)(g)$ donc (2) implique que pour tout $\omega \in A'_G$, $\omega \circ \theta$ continue et on peut donc supposer que A est engendrée comme algèbre de Banach par $\theta(G)$. Si on prend pour Ω dans la proposition précédente la boule unité fermée de A' (qui est bien invariante par les $L_{\theta(g)}^*$ qui sont des isométries de A'), on a

$$\begin{aligned} \lim_{g \rightarrow e} \rho_{\Omega}(\theta(g) - 1) &= \lim_{g \rightarrow e} (\sup_{\|\omega\| \leq 1} |\omega(\theta(g) - 1)|) \\ &= \lim_{g \rightarrow e} \|\theta(g) - 1\| = 0 \end{aligned}$$

et donc θ est continue. □

Remarque. Si l'algèbre et le groupe sont séparables, ce résultat est vrai sans l'hypothèse (1) par des théorèmes de type "graphe fermé" (voir le paragraphe suivant).

Corollaire 2.7. Soit $\theta : G \rightarrow A$ une représentation bornée (i.e. $\sup_{g \in G} \|\theta(g)\| < +\infty$) d'un groupe localement compact dans une algèbre de Banach alors :

$$\forall \omega \in A', \omega \circ \theta \text{ continue} \Leftrightarrow \theta \text{ continue.}$$

Démonstration. On pose $M = \sup_{g \in G} \|\theta(g)\|$ et on définit sur A :

$$\| \|a\| \| = \sup_{g \in G} \|\theta(g)a\|$$

$\| \| \cdot \| \|$ est une norme et on a $\|a\| \leq \| \|a\| \| \leq M \|a\|$. De plus, pour a et a' dans A

$$\begin{aligned} \| \|aa'\| \| &= \sup_{g \in G} \|\theta(g)aa'\| \\ &\leq \sup_{g \in G} \|\theta(g)a\| \| \|a'\| \| \\ &\leq \| \|a\| \| \cdot \| \|a'\| \| \end{aligned}$$

$\| \| \cdot \| \|$ est donc une norme d'algèbre de Banach. Or, pour tout $g \in G$ et $a \in A$, $\| \|\theta(g)a\| \| = \| \|a\| \|$. On pose alors $\|a\|_G = \sup_{\| \|a'\| \| \leq 1} \| \|aa'\| \| \leq \| \|a\| \|$ et en prenant $a' = \frac{1}{M}$ ($\| \|\frac{1}{M}\| \| = 1$), on a

$$\|a\|_G \geq \frac{1}{M} \| \|a\| \|$$

$\| \cdot \|_G$ est donc une norme d'algèbre de Banach équivalente à la norme initiale. De plus, pour tout $g \in G$, $\|\theta(g)\|_G = 1$. On est donc ramené au théorème précédent. □

Corollaire 2.8. *Soit G un groupe localement compact, A une algèbre de Banach et $\theta : G \rightarrow A$ une représentation bornée en norme. Si on note $\Sigma(A)$ l'ensemble des états de A , on a*

$$\forall \omega \in \Sigma(A), \omega \circ \theta \text{ continue} \Leftrightarrow \theta \text{ continue.}$$

Démonstration. D'après la proposition 5, toute forme linéaire continue sur A est combinaison linéaire de (au plus) 4 états et donc si $\omega \circ \theta$ est continue pour tout état ω , il l'est aussi pour tout ω dans A' . Le corollaire résulte alors du corollaire précédent. \square

Remarques. – Ce résultat généralise celui de [PT] qui s'appliquait uniquement aux représentations unitaires à valeurs dans une C^* -algèbre.
 – Si, dans G , tout point admet un système dénombrable d'ouverts, on peut montrer exactement comme dans [PT], en utilisant le théorème de représentation intégrale de Choquet-Bishop-De Leeuw et une démonstration du type "continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre", le même résultat que le corollaire précédent en prenant comme formes linéaires "tests" les états purs au lieu de tous les états.

Dans le cas unitaire, on peut aussi déduire un critère de continuité à travers les représentations de Gelfand-Naimark-Segal (implicite dans [PT]).

Corollaire 2.9. *Soit $\theta : G \rightarrow A$ une représentation unitaire d'un groupe localement compact dans une C^* -algèbre; si ω est un état, on note $\pi_\omega : A \rightarrow \mathcal{L}(H_\omega)$ la représentation hilbertienne associée à ω par la construction GNS (voir la partie 1.38). Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) θ est continue.
- (ii) $\forall \omega \in \Sigma(A), \pi_\omega \circ \theta : G \rightarrow \mathcal{L}(H_\omega)$ est fortement continue

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) est évident car $\pi_\omega : A \rightarrow \mathcal{L}(H_\omega)$ continue.

Inversement, Soit x_ω un vecteur cyclique associé à π_ω (c'est-à-dire tel que pour tout $a \in A, \omega(a) = \langle \pi_\omega(a)x_\omega, x_\omega \rangle$). Alors pour tout $g \in G, \omega \circ \theta(g) = \langle \pi_\omega(\theta(g))x_\omega, x_\omega \rangle$ est continue car les $\pi_\omega \circ \theta$ le sont. La continuité de θ se déduit donc du corollaire 2.8 \square

Remarque. Si G est à système fondamental dénombrable d'ouverts, on peut se limiter (en utilisant la remarque précédente) aux représentations irréductibles associées aux états purs.

2.2 Cas polonais (non nécessairement localement compact)

On considère, dans ce paragraphe, l'analogie des résultats précédents pour des groupes topologiques polonais mais non nécessairement localement compacts. On perd alors la "faible presque périodicité" qui permet l'application de la décomposition de Glicksberg-De Leeuw. *A priori*, les techniques utilisées dans [CPT] utilisant le groupe dual et la transformation de Fourier, semblent inopérantes en l'absence de mesure de Haar. Toutefois, on peut, grâce au résultat d'équicontinuité de Banachyck (proposition 1.63) obtenir des généralisations partielles.

Montrons d'abord un lemme préliminaire.

Lemme 2.10 ("de la couronne"). *Soit θ une représentation localement bornée d'un groupe topologique G sur une algèbre de Banach A . Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $V_\epsilon \in \mathcal{V}(e)$ tel que pour tout $g \in V_\epsilon$, $\sigma(\theta(g)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid 1 - \epsilon \leq |z| \leq 1 + \epsilon\}$.*

Démonstration. Puisque θ est localement bornée, il existe $M > 1$ et $V \in \mathcal{V}(e)$ tel que pour tout $g \in V$, $\|\theta(g)\| \leq M$. En utilisant la continuité du produit de groupe, on obtient que pour tout $n \geq 1$, il existe $V_n \in \mathcal{V}(e)$ tel que pour tout $g \in V_n$, $\|\theta(g^n)\| \leq M$ et $\|\theta(g^{-n})\| \leq M$. Comme $\sigma(\theta(g^{-n})) = \{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma(\theta(g^n))\}$, on obtient $\sigma(\theta(g^n)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{M} \leq |z| \leq M\}$ et puisque $\sigma(\theta(g^n)) = (\sigma(\theta(g)))^n$, on a pour tout $g \in V_n$ et $z \in \sigma(\theta(g))$, $\frac{1}{M^n} \leq |z| \leq M^n$. Finalement, on peut bien conclure que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $V_\epsilon \in \mathcal{V}(e)$ tel que pour tout $g \in V_\epsilon$, $\sigma(\theta(g)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid 1 - \epsilon \leq |z| \leq 1 + \epsilon\}$. \square

Théorème 2.11. *Soient G un groupe abélien polonais, A une algèbre de Banach (commutative) et $\theta : G \rightarrow A$ une représentation localement bornée. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\forall \chi \in \hat{A}$, $\chi \circ \theta$ continue.

(2) θ est spectralement continue.

Si, de plus, θ est bornée sur G , alors (1) et (2) sont équivalentes à la continuité de θ .

Démonstration. (2) \Rightarrow (1) est clair.

(1) \Rightarrow (2). Si θ n'est pas spectralement continue alors il existe $\epsilon > 0$ et une suite

$(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers le neutre dans G avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho(\theta(g_n) - 1) > \epsilon$. Donc il existe une suite de nombres complexes $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\lambda_n - 1| > \epsilon \text{ et } \lambda_n \in \sigma(\theta(g_n))$$

Pour tout entier n , il existe $\chi_n \in \hat{A}$ tel que $\lambda_n = \chi_n(\theta(g_n))$.

D'autre part, \hat{A} étant compact, par définition de la topologie sur \hat{A} , $\{\chi \circ \theta, \chi \in \hat{A}\}$ est compact dans l'ensemble des fonctions continues $(\mathcal{C}(G))_p$ muni de la topologie de la convergence simple. G étant polonais, $(\mathcal{C}(G))_p$ est angélique et donc $\{\chi \circ \theta, \chi \in \hat{A}\}$ est séquentiellement compact. On peut donc, après extraction, supposer que $(\chi_n \circ \theta)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain $\chi \circ \theta$, $\chi \in \hat{A}$. De ce qui précède et du lemme de la couronne, on peut déduire (quitte à modifier ϵ , que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} - 1 \right| > \epsilon.$$

Posons alors

$$\varphi_n = \frac{\chi_n \circ \theta}{|\chi_n \circ \theta|}, \quad \varphi = \frac{\chi \circ \theta}{|\chi \circ \theta|} \text{ et } \mu_n = \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|}.$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_n(g_n) = \mu_n.$$

Les φ_n et φ sont des morphismes de G dans le tore donc des fonctions définies positives (exemple 1.61) qui, de plus, sont continues par hypothèse et φ_n converge simplement vers φ . Par le résultat de Banach (prop. 1.63), la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue. Écrivons son équicontinuité en e (neutre de G) avec le ϵ du début de la preuve : Il existe W voisinage de e tel que pour tout entier n , on ait

$$\forall g \in W, \quad |(\varphi_n(g) - 1)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Donc, pour tous les n assez grands pour que g_n appartienne à W , on a

$$|\varphi_n(g_n) - 1| = |\mu_n - 1| < \frac{\epsilon}{2}$$

ce qui contredit les définitions des (λ_n) et ϵ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\mu_n - 1| > \epsilon.$$

On a donc bien (1) \Rightarrow (2).

Dans le cas d'une représentation bornée, le théorème de Dubernet (théorème 1.66) donne l'équivalence entre continuité spectrale et continuité. \square

On peut traiter de même le cas des représentations unitaires d'un groupe polonais non nécessairement commutatif et on a le résultat suivant :

Théorème 2.12. *Soit θ une représentation unitaire d'un groupe polonais G sur une C^* -algèbre A , les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\forall \omega \in P\Sigma(A)$, $\omega \circ \theta$ continue.
- (2) $\forall \omega \in \Sigma(A)$, $\omega \circ \theta$ continue.
- (3) θ continue.

Démonstration. (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) est clair.

(1) \Rightarrow (2). Le raisonnement est le même que dans [PT] et [Tom] (voir la seconde remarque qui suit le corollaire 2.8).

(2) \Rightarrow (3). Il est connu que sur une algèbre de Banach, le rayon numérique $\rho_\Sigma(a) = \sup_{\omega \in \Sigma(A)} |\omega(a)|$ est une norme équivalente à la norme de A (cf. [BD] p. 34) donc il suffit, la encore de montrer

$$\forall \omega \in \Sigma(A), \omega \circ \theta \text{ continue} \Rightarrow \rho_{\Sigma(A)}(\theta(g) - 1) \xrightarrow{g \rightarrow e} 0$$

Supposons que $\forall \omega \in \Sigma(A)$, $\omega \circ \theta$ continue et $\rho_{\Sigma(A)}(\theta(g) - 1) \not\xrightarrow{g \rightarrow e} 0$ alors il existe une suite (g_n) convergeant vers e dans G et un réel strictement positif ϵ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \rho_{\Sigma(A)}(\theta(g_n) - 1) > \epsilon.$$

On en déduit qu'il existe une suite (ω_n) dans $\Sigma(A)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\omega_n(\theta(g_n)) - 1| > \epsilon.$$

L'ensemble $\{\omega \circ \theta, \omega \in \Sigma(A)\}$ est un sous-ensemble compact de $(\mathcal{C}(G))_p$ (muni de la topologie de la convergence simple). Comme $(\mathcal{C}(G))_p$ est angélique, on déduit, comme dans la démonstration du théorème précédent, qu'il existe une sous-suite de (ω_n) telle que $\omega_n \circ \theta$ converge simplement sur G vers $\omega \circ \theta$ pour un certain $\omega \in \Sigma(A)$. Quitte à extraire, on a donc une suite de fonctions continues définies positives sur G qui converge simplement vers une fonction continue. On déduit, de nouveau grâce au théorème de Banach-Saks, que $\{\omega_n \circ \theta, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue.

On en déduit qu'il existe un voisinage W du neutre de G tel que

$$g \in W \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |\omega_n(\theta(g)) - 1| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Or, pour n assez grand, les g_n sont dans W , on a donc une contradiction avec $|\omega_n(\theta(g_n)) - 1| > \epsilon$. □

Remarque. Les seules propriétés de G utilisées sont le fait qu'il est métrisable (ou en tout cas, à système fondamental dénombrable de voisinages) et que $\mathcal{C}(G)$ est angélique, ce qui est vrai pour des classes d'espaces plus étendues que celle des polonais (*cf.* [Or]).

2.3 Liens avec la continuité automatique des morphismes de groupes

Des résultats dus d'abord à Banach, Steinhaus puis généralisés par Pettis, Weil, etc. montrent qu'un morphisme de groupes vérifiant certaines propriétés plus faibles que la continuité (Propriété de Baire, Haar-mesurabilité, etc.) est en fait continu. On va en énoncer trois qu'on peut considérer comme classiques (voir [Ros] pour des résultats plus récents) :

Théorème 2.13 (théorème 9.10 dans [Kech] ou [Ros]). *Soient G et H des groupes topologiques et $\varphi : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes. Si G est de Baire, H séparable et φ a la propriété de Baire, alors φ est continu.*

Le second est de même type mais avec une hypothèse de Haar-mesurabilité.

Théorème 2.14 ([Kech] ou [Ros]). *Soient G et H des groupes topologiques et $\varphi : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes. Si G est localement compact, H est séparable et φ Haar-mesurable, alors φ est continu.*

Remarque. En fait, les démonstrations des deux théorèmes qui précèdent (du moins celles données dans les références citées) ont beaucoup en commun : elles sont basées sur le fait que si une partie A d'un groupe de Baire a la propriété de Baire et est non maigre, AA^{-1} est un voisinage du neutre et idem pour une partie Haar-mesurable de mesure non nulle d'un groupe localement compact et sur des raisonnements utilisant la séparabilité.

On a un troisième résultat qui généralise en partie au cas des groupes topologiques, le théorème du graphe fermé :

Théorème 2.15 (p. 69 de [Bou]). *Soient G, H deux groupes topologiques séparés et $\varphi : G \rightarrow H$ un morphisme de groupe. Si G est de Baire et le graphe de φ est analytique (dans $G \times H$) alors φ est continu.*

On remarque que si les groupes sont polonais, le cas d'un morphisme à graphe fermé résulte de ce qui précède. En général, un analytique étant par définition séparable, le fait que le graphe de φ soit fermé dans $G \times H$ n'implique pas la continuité comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.16. Soit $G = \mathbb{R}$, $H = \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}))$ (groupe unitaire de $L^2(\mathbb{R})$) et φ la représentation (unitaire) régulière (par translation) de \mathbb{R} sur $L^2(\mathbb{R})$. φ est fortement continue, ce qui implique facilement qu'elle est à graphe fermé mais elle n'est pas continue.

Par contre, pour certains morphismes d'un groupe localement compact dans le groupe des inversibles d'une algèbre de Banach (non forcément séparable), les critères de continuité des chapitres précédents peuvent donner des extensions des théorèmes 2.13 et 2.14.

Théorème 2.17. *Soit G un groupe abélien localement compact, $G(A)$ le groupe des inversibles d'une algèbre de Banach (muni de la topologie induite). $\varphi : G \rightarrow G(A)$ un morphisme de groupes .*

Si φ est Haar-mesurable ou bien possède la propriété de Baire alors φ est continu.

Commençons par un lemme :

Lemme 2.18. *Soit G un groupe de Baire (resp. un groupe localement compact) et $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant $\varphi(gg') \leq \varphi(g) + \varphi(g')$ (i.e. φ est sous-additive) alors si φ a la propriété de Baire (resp. est Haar-mesurable), φ est localement borné. On a le même résultat si φ vérifie $\varphi(gg') \leq \varphi(g)\varphi(g')$ (i.e. φ est sous-multiplicative).*

Démonstration. Traitons le cas sous-additif et de Baire (le cas Haar-mesurable est exactement le même). On a $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ où $V_n = \{g \in G \mid \varphi(g) \leq n \text{ et } \varphi(g^{-1}) \leq n\}$. φ ayant la propriété de Baire, tous les V_n ont la propriété de Baire et l'un au moins soit V_{n_0} (et donc tous les V_n , $n \geq n_0$ qui le contiennent) est non maigre. Par un résultat classique de Pettis (cf. [Kech] th. 9.9), on a l'existence d'un voisinage V du neutre tel que $V \subset V_{n_0}.V_{n_0}^{-1}$ et donc, pour $h \in V$, on a $h = gg'^{-1}$ où g et g' sont dans V_{n_0} et donc $\varphi(h) \leq 2n_0$. Par translation, pour $g \in G$, on $\varphi(gh) \leq \varphi(g) + 2n_0$ sur le voisinage gV de g et par compacité, φ est borné sur tout compact de G .

Si on a maintenant φ sous-multiplicative, on pose $\tilde{\varphi}(g) = \max(\varphi(g), 1)$ qui est encore sous-multiplicative et donc en posant $\psi(g) = \ln(\tilde{\varphi}(g))$, on peut appliquer le résultat pour le cas sous-additif d'où ψ , $\tilde{\varphi}$ et finalement φ sont localement bornés sur G . □

Démonstration du théorème 2.17. Traitons le cas Haar-mesurable, celui Baire-mesurable est exactement semblable. La représentation $\varphi : G \rightarrow A$ est supposée donc Haar-mesurable. L'application $g \mapsto \|\varphi(g)\|$ étant sous-multiplicative, φ est localement bornée d'après le lemme précédent.

Si $V \subset A$ et A_G est la sous-algèbre de Banach (commutative) engendrée par $\varphi(G)$, on a $\varphi^{-1}(V \cap A_G) = \varphi^{-1}(V)$ puisque $\varphi(G) \subset A_G$. Soit U un ouvert de A_G , $U = A_G \cap V$ pour un ouvert V de A et donc $\varphi^{-1}(U) = \varphi^{-1}(V)$ ce qui montre que la représentation (restreinte en image) $\varphi : G \rightarrow A_G$ est Haar-mesurable.

Pour tout $\chi \in \widehat{A_G}$, on a $\chi \circ \varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ Haar-mesurable (puisque χ est continue) et $\chi \circ \varphi$ est un morphisme de G dans (\mathbb{C}^*, \times) donc par le théorème 2.14, $\chi \circ \varphi$ est continue. On en déduit que la représentation φ (et le morphisme φ) est continue. \square

On ne peut pas traiter directement de la même manière le cas des morphismes dans le groupe unitaire d'une C^* -algèbre à partir du résultat donnant la continuité à travers les formes linéaires ou les états. La composée d'une représentation par un état n'est pas un morphisme et on n'a pas (à notre connaissance) de résultats de continuité automatique pour ce type d'applications. On peut toutefois donner un résultat du type "mesurabilité implique continuité" en combinant le corollaire 2.9 avec un théorème de J. Kuznetsova (voir [Kuz]).

Théorème 2.19 (Kuznetsova). *Soit G un groupe localement compact, H un espace de Hilbert et $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(H)$ une représentation unitaire. Si θ est mesurable (pour la mesure de Haar) lorsqu'on munit $\mathcal{L}(H)$ de la topologie faible d'opérateurs alors θ est fortement continue.*

Ce résultat appelle tout d'abord quelques commentaires

1. Si H est séparable, on sait (voir théorème V.7.3 dans [Gaal]) que la faible mesurabilité de θ (i.e. pour tout $(x, y) \in H^2$, $g \mapsto \langle \theta(g)x, y \rangle$ mesurable) implique la continuité forte
2. La condition de faible mesurabilité du (1) est moins forte que la mesurabilité pour la topologie faible d'opérateurs. En effet, la faible mesurabilité est la condition que les images réciproques des ouverts de \mathbb{C} par les $g \mapsto \langle \theta(g)x, y \rangle$ (c'est-à-dire les images réciproques par θ des images réciproques dans $\mathcal{L}(H)$ des ouverts de \mathbb{C} par $T \mapsto \langle Tx, y \rangle$) soient Haar-mesurables alors que la mesurabilité faible-opérateur est la mesurabilité des images réciproques par θ de la topologie engendrée par les $T \mapsto \langle Tx, y \rangle$ sur $\mathcal{L}(H)$.

D'ailleurs l'exemple (donné par Kuznetsova) de la représentation régulière de G sur l'espace $\ell^2(G)$ des familles de carré sommable indexées par G qui est faiblement mesurable mais discontinue si G non discret montre que le résultat n'est pas vrai avec l'hypothèse de faible mesurabilité.

A partir du théorème de Kuznetsova, on peut montrer le résultat suivant de continuité automatique.

Proposition 2.20. *Soit G un groupe localement compact, H un Hilbert et $\varphi : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ un morphisme. Si φ est mesurable pour la norme alors φ est continu.*

Démonstration. Comme dans le cas abélien, φ induit une représentation unitaire de G sur la C^* -algèbre $\mathcal{L}(H)$ qui est mesurable si φ l'est. Si ω est un état de $\mathcal{L}(H)$ et π_ω la représentation GNS associée $\pi_\omega \circ \varphi$ est une représentation de G sur $\mathcal{L}(H_\omega)$ qui est aussi mesurable puisque π_ω est continu et donc faible-opérateur mesurable puisque la topologie faible-opérateur est moins fine que celle de la norme sur $\mathcal{L}(H_\omega)$. Par le théorème de Kuznetsova, elle est fortement continue et on déduit du corollaire 2.9 que φ est continu. \square

On peut déduire de la proposition 2.19 une démonstration rapide du théorème suivant dû à A. Kleppner [Kle].

Théorème 2.21 (Kleppner). *Si G, H sont deux groupes localement compacts (sans hypothèse de séparabilité) et $\varphi : G \rightarrow H$ un morphisme. Si φ est Haar-mesurable alors φ est continu.*

Notre démonstration repose sur le lemme suivant (qui est plus une remarque et est utilisé aussi dans celle de Kleppner).

Lemme 2.22. *Soit G un groupe localement compact et $\rho : G \rightarrow \mathcal{L}(L^2(G))$ la représentation régulière gauche (i.e. $(\rho(g)f)(h) = f(g^{-1}h)$) alors ρ est un homéomorphisme sur son image munie de la topologie induite par la topologie forte de $\mathcal{L}(L^2(G))$*

Ce lemme est démontré dans [Kle] et était très probablement déjà bien connu avant, nous allons toutefois en donner rapidement la preuve.

Démonstration du lemme. ρ étant continue et injective, il suffit de montrer que son inverse (en se restreignant à l'image) est aussi continu, ce qui revient à montrer que si V_g est un voisinage de g dans G , $\rho(V_g)$ est un voisinage de $\rho(g)$ dans $\rho(G)$

(muni de la topologie induite par la topologie forte de $\mathcal{L}(H)$). En composant par des translations, on peut se ramener au cas où $g = e$. Il suffit alors de prouver que si (g_i) est une suite généralisée ne convergeant pas vers e , $(\rho(g_i))$ ne converge pas vers $1 \in \mathcal{L}(H)$. On peut, si $\rho_i \not\rightarrow e$, supposer (quitte à extraire) qu'il existe un voisinage V de e tel que pour tout $i \in I$, $g_i \notin V$. Soit alors W un voisinage de e tel que $W^{-1}W \subset V$ et χ_W la fonction caractéristique de W (qui est dans $L^2(G)$). On a

$$\langle \rho(g_i)\chi_W, \chi_W \rangle = \int_G \chi_W(g_i^{-1}h)\overline{\chi_W(h)}dg = 0$$

car si $h \in W$ et $g_i^{-1}h \in W$ alors $g_i^{-1} \in WW^{-1}$ et $g_i \in V$.

Or si $\rho(g_i) \rightarrow 1$ (fortement) alors $\langle \rho(g_i)\chi_W, \chi_W \rangle \rightarrow \|\chi_W\|^2 \neq 0$. \square

Démonstration du théorème de Kleppner. Soient G, H localement compacts, $\varphi : G \rightarrow H$ un morphisme Haar-mesurable, on considère $\rho_H : H \rightarrow \mathcal{L}(L^2(H))$ la représentation régulière gauche de H et $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(L(H))$ tel que $\theta = \rho \circ \varphi$. ρ étant fortement continu et φ mesurable, θ est fortement mesurable donc fortement continue (par le Théorème 2.19) Soit V ouvert de H , $\varphi^{-1}(V) = \theta^{-1}(\rho(V))$. $\rho(V)$ est un ouvert (fort) relatif de $\rho(H)$ donc il existe U ouvert fort (et donc aussi uniforme) de $\mathcal{L}(L^2(H))$ tel que

$$\varphi^{-1}(V) = \theta^{-1}(\rho(V)) = \theta^{-1}(U \cap \rho(H)) = \theta^{-1}(U)$$

puisque $\theta(G) \subset \rho(H)$ et donc $\varphi^{-1}(V)$ ouvert dans G par continuité de θ . \square

Remarques. 1. Cette démonstration, du fait que pour un morphisme de $\varphi : G \rightarrow H$ entre un groupe localement compact et un groupe topologique la mesurabilité implique la continuité s'étend à tous les groupes H admettant une représentation unitaire ρ fidèle et telle que pour tout ouvert V de H , $\rho(V)$ soit un ouvert relatif dans $\rho(H)$ par rapport à la topologie forte. Nous ignorons s'il existe des cas autres que les groupes localement compacts (par ce qui précède) et le groupe unitaire d'un Hilbert (par la représentation triviale) où on peut l'appliquer.

2. De façon exactement similaire à la démonstration de [Kuz], on peut montrer qu'une représentation unitaire d'un groupe polonais sur un Hilbert H ayant la propriété de Baire (avec toujours $\mathcal{L}(H)$ muni de la topologie faible opérateur) est fortement continue. C'est même plus simple que la démonstration de [Kuz] où on traite d'abord le cas localement compact polonais mais où il faut, de plus, des arguments de passage à la limite projective pour traiter le cas général.

On peut alors en déduire, comme plus haut, qu'un morphisme mesurable d'un groupe polonais dans un groupe localement compact est continu.

3. Les résultats de continuité automatique du genre théorème de Kleppner ont un statut un peu particulier. En effet, il est prouvé dans la deuxième partie de [Kuz] que si on admet l'axiome de Martin (ou disons, l'hypothèse du continu) alors tout morphisme d'un groupe localement compact dans un groupe topologique Haar-mesurable est continu.

Chapitre 3

Propriétés spectrales des représentations fortement continues de groupes polonais localement compacts : le cas abélien

Dans cette partie, on s'intéresse à la répartition des arguments des éléments du spectre dans l'image d'une représentation fortement continue d'un groupe abélien polonais. Or l'étude de cette répartition repose, grâce au critère de continuité à travers les caractères (théorème 2.4) sur l'étude des morphismes discontinus d'un groupe topologique dans le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* ou dans le tore \mathbb{T} .

La première partie du chapitre est consacrée à l'étude de ces morphismes. Certains des résultats énoncés sont connus (voir [HP]), d'autres semblent nouveaux. On donne pour tous une démonstration (rapide pour ceux qui sont plus ou moins classiques et qu'on regroupe en début de paragraphe).

3.1 Propriétés des morphismes d'un groupe topologique dans le groupe multiplicatif complexe

On s'intéresse ici aux applications φ d'un groupe topologique G dans \mathbb{C} vérifiant

$$\varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g'), \quad g, g' \in G$$

Il est clair que si φ s'annule en un point alors φ s'annule partout. On va s'intéresser, dans ce qui suit, au cas où $\varphi \neq 0$, c'est-à-dire aux morphismes de G dans le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* . On va imposer une restriction supplémentaire au type de morphismes étudiés, on s'intéressera uniquement aux morphismes localement bornés *i.e.* tel qu'il existe un voisinage V du neutre e de G tel que $|\varphi(g)|$ est borné sur V . Si G est localement compact, le fait d'être localement borné est d'ailleurs une condition

3.1. Propriétés des morphismes d'un groupe topologique dans le groupe multiplicatif complexe

nécessaire de continuité.

On va introduire pour ces morphismes une famille de compacts de \mathbb{C} qui seront utiles dans l'étude de leur continuité (ou de leur discontinuité).

Soient G un groupe topologique, $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ un morphisme. Pour $g \in G$, on note $\Gamma_\varphi(g) = \bigcap_{V \in \mathcal{V}(g)} \overline{\varphi(V)}$ (où $\mathcal{V}(g)$ désigne l'ensemble des voisinages de g dans G). On remarque que $\Gamma_\varphi(g) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{ il existe une suite généralisée } (g_i) \text{ de } G \text{ telle que } g_i \rightarrow g \text{ et } \varphi(g_i) \rightarrow \lambda\}$.

On note simplement Γ_φ pour $\Gamma_\varphi(e)$ et à partir de la définition, il est clair que pour tout $g \in G$, $\Gamma_\varphi(g) = \varphi(g)\Gamma_\varphi$.

Enfin, on dit qu'un groupe topologique G admet une division locale continue par n (entier naturel non nul) s'il existe $V_n \in \mathcal{V}(e)$ et $\psi_n : V_n \rightarrow G$ continue telle que $\psi_n(e) = e$ et $(\psi_n(g))^n = g$ pour $g \in V_n$.

On va donner une liste de propriétés de Γ_φ et des morphismes associés.

Proposition 3.1. *Soit G un groupe topologique et $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ un morphisme localement borné :*

- (i) Γ_φ est un sous-groupe compact de \mathbb{C}^* (c'est-à-dire le tore \mathbb{T} ou un groupe des racines de l'unité).
- (ii) φ continu $\Leftrightarrow \Gamma_\varphi = \{1\}$.
- (iii) $|\varphi|$ (défini par $|\varphi|(g) = |\varphi(g)|$) est un morphisme continu (à valeur dans \mathbb{R}^+) de G dans \mathbb{C}^* .
- (iv) Pour tout entier n non nul, si G admet une division locale continue par n alors $\Gamma_\varphi = \{1\}$ (i.e. φ continu) ou $\Gamma_\varphi = \mathbb{T}$ pour tout morphisme localement borné de G dans \mathbb{C} .

Démonstration. (i) Γ_φ est clairement fermé (intersection de fermés) et borné (puisque par hypothèse, un au moins des $\varphi(V)$ est borné) dans \mathbb{C} . D'autre part, pour λ, λ' dans Γ_φ , on a (g_i) et (g'_i) suites généralisées qui tendent vers e et telles que $\varphi(g_i) \rightarrow \lambda$ et $\varphi(g'_i) \rightarrow \lambda'$ (les deux suites généralisées pouvant être indexées par le même ensemble filtrant qui pourrait être un système fondamental de voisinages de e). Alors $g''_i = g_i g'^{-1}_i \rightarrow e$ et $\varphi(g''_i) \rightarrow \lambda \lambda'^{-1} \in \Gamma_\varphi$ qui est donc un sous-groupe de \mathbb{C} .

- (ii) φ continue $\Rightarrow \Gamma_\varphi = \{1\}$ est clair.
 φ étant un morphisme, sa continuité équivaut à sa continuité en e . Soit (g_i) une suite généralisée qui tend vers e . φ étant localement borné, on peut donc

3.1. Propriétés des morphismes d'un groupe topologique dans le groupe multiplicatif complexe

supposer (quitte à extraire) que $(\varphi(g_i))$ est convergente, sa limite est dans Γ_φ et vaut donc 1. φ est donc continu.

(iii) $|\varphi|$ est un morphisme localement borné et $\Gamma_{|\varphi|}$ est un sous-groupe compact de \mathbb{C} contenu dans \mathbb{R}^{+*} donc $\Gamma_{|\varphi|} = \{1\}$ et $|\varphi|$ est continu.

(iv) Soit ψ_n une division locale par n et $\lambda \in \Gamma_\varphi$. Soit (g_i) telle que $g_i \rightarrow e$, $\varphi(g_i) \rightarrow \lambda$. $\psi_n(g_i) \rightarrow e$, on peut donc supposer $\varphi(\psi_n(g_i))$ borné (quitte à extraire) et donc (quitte à re-extraire), on peut supposer $\varphi(\psi_n(g_i))$ convergente vers un certain $\lambda_n \in \Gamma_\varphi$. Or

$$(\varphi(\psi_n(g_i)))^n = \varphi(g_i) \rightarrow \lambda$$

donc $\lambda_n^n = \lambda$. Donc pour tout entier non nul, pour tout $\lambda \in \Gamma_\varphi$, on peut trouver $\lambda_n \in \Gamma_\varphi$ tel que $\lambda_n^n = \lambda$. Γ_φ est donc un sous-groupe fermé divisible de \mathbb{T} c'est donc $\{1\}$ ou \mathbb{T} .

□

Remarque. (a) De ce qui précède, on déduit que si φ est un morphisme localement borné de G dans (\mathbb{C}^*, \times) , la continuité de φ est équivalente à celle du morphisme à valeur dans le tore $g \rightarrow \frac{\varphi(g)}{|\varphi(g)|}$ (puisque $|\varphi|$ est continu, non nul).

(b) $\Gamma_\varphi(g) = |\varphi(g)| \cdot \Gamma_{\frac{\varphi}{|\varphi|}}(g)$ (et en particulier $\Gamma_\varphi = \Gamma_{\frac{\varphi}{|\varphi|}}$). C'est clair en écrivant, pour une suite généralisée (g_i) telle que $g_i \rightarrow e$, $\varphi(g_i) = |\varphi(g_i)| \cdot \frac{\varphi}{|\varphi|}(g_i)$ et en remarquant ($|\varphi|$ étant continu) que $|\varphi(g_i)| \rightarrow |\varphi(g)|$.

On va montrer à présent une propriété de continuité. Si $\omega : G \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C})$ est une application continue (pour la distance de Hausdorff sur $\mathcal{K}(\mathbb{C})$) et $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, on voit facilement que $g \rightarrow f(g)\omega(g) = \{f(g).x, x \in \omega(g)\}$ est aussi continue de G dans $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ si f est continue.

Pour un morphisme localement borné, $g \rightarrow \Gamma_\varphi(g) = \varphi(g)\Gamma_\varphi$ est continue même si φ ne l'est pas.

Proposition 3.2. *Soit G un groupe topologique, $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ un morphisme localement borné.*

Alors l'application $\Gamma_\varphi : \begin{array}{l} G \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C}) \\ g \mapsto \Gamma_\varphi(g) \end{array}$ est continue.

Démonstration. Montrons tout d'abord que le théorème est vrai pour un morphisme $\varphi : G \rightarrow \mathbb{T}$. Dans ce cas, pour tout $g \in G$, $\Gamma_\varphi(g) \in \mathcal{K}(\mathbb{T})$.

Soient $g \in G$ et $g_i \rightarrow g$. En utilisant la notation $A^\epsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, A) < \epsilon\}$, on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists i_0 \in I, \forall i \geq i_0, \quad \varphi(g_i g^{-1}) \in \Gamma_\varphi^\epsilon.$$

3.1. Propriétés des morphismes d'un groupe topologique dans le groupe multiplicatif complexe

En effet, c'est évident si $\mathbb{T} \subset \Gamma_\varphi^\epsilon$ et sinon, en raisonnant par contraposée, on peut alors construire une suite généralisée $(\varphi(g_j g^{-1}))_{j \in J}$ dans $\mathbb{T} - \Gamma_\varphi^\epsilon$ qui est compact. On peut donc extraire une sous-suite qui converge vers un $\lambda \in \mathbb{T} - \Gamma_\varphi^\epsilon$ or par définition de Γ_φ , $\lambda \in \Gamma_\varphi$ ce qui est impossible.

Soient $\epsilon > 0$ et $i \geq i_0$. On a alors

$$\varphi(g_i) \in \varphi(g)\Gamma_\varphi^\epsilon.$$

D'où, comme Γ_φ est un sous-groupe et que si $\lambda \in \mathbb{T}$, $z \mapsto \lambda z$ est une isométrie,

$$\forall \lambda \in \Gamma_\varphi, \quad \lambda \varphi(g_i) \in \varphi(g)\Gamma_\varphi^\epsilon.$$

Donc

$$\varphi(g_i)\Gamma_\varphi \subset \varphi(g)\Gamma_\varphi^\epsilon.$$

De plus, si $\varphi(g_i g^{-1}) \in \Gamma_\varphi^\epsilon$ alors $\varphi(g_i^{-1}g) \in \Gamma_\varphi^\epsilon$. D'où

$$\varphi(g) \in \varphi(g_i)\Gamma_\varphi^\epsilon.$$

Et donc de même

$$\varphi(g)\Gamma_\varphi \subset \varphi(g_i)\Gamma_\varphi^\epsilon$$

Autrement dit,

$$\forall \epsilon > 0, \exists i_0 \in I, \forall i \geq i_0 \quad d_H(\varphi(g_i)\Gamma_\varphi, \varphi(g)\Gamma_\varphi) < \epsilon.$$

On déduit la continuité de Γ_φ du premier point de la propriété 3.1.

Revenons maintenant au cas où $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ est localement borné. $\frac{\varphi}{|\varphi|}$ est un morphisme de $G \rightarrow \mathbb{T}$. La propriété 3.1 montre que $|\varphi|$ est continu et que $\Gamma_\varphi(g) = |\varphi(g)| \cdot \Gamma_{\frac{\varphi}{|\varphi|}}(g)$. On en déduit la continuité de Γ_φ . \square

On va s'intéresser à présent aux propriétés spécifiques des morphismes discontinus. Un morphisme φ de groupes localement borné à valeur dans \mathbb{C} a son module $|\varphi|$ continu, la discontinuité éventuelle étant contenue dans le morphisme $\frac{\varphi}{|\varphi|}$ à valeur dans le tore. C'est pourquoi on se restreindra à des morphismes à valeur dans le tore.

Une propriété classique (voir [HP]) des morphismes de \mathbb{R} à valeur dans le tore $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ est le résultat de densité suivant : Soit V un ouvert non vide de \mathbb{T} , U un ouvert non vide de $\mathbb{R} : \varphi^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset$ (l'image réciproque de tout ouvert non vide est dense dans \mathbb{R}).

3.1. Propriétés des morphismes d'un groupe topologique dans le groupe multiplicatif complexe

En fait (bien que ce ne soit pas énoncé explicitement sous cette forme dans leur article [LPS]), Latrach, Paoli et Simonnet ont montré que $\varphi^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$ pour tout ouvert V non vide de \mathbb{T} et tout sous-ensemble de \mathbb{R} ayant la propriété de Baire et non maigre, ce qui est une forme plus forte de densité. On a aussi des résultats de ce type avec A Lebesgue-mesurable et de mesure non nulle (cf. [God] pour le cas de morphismes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ou [Tom] pour le cas de \mathbb{R} dans le tore).

Si on remplace \mathbb{R} par d'autres groupes, on n'a pas de généralisations immédiates de ces propriétés. On trouve, par exemple dans [Est], un exemple de morphisme discontinu de $\mathbb{U}_3^{\mathbb{N}}$ à valeur dans le tore ($\mathbb{U}_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\}$). Or tous les éléments de $\mathbb{U}_3^{\mathbb{N}}$ vérifiant $g^3 = 1$, l'image de ce morphisme est contenue dans \mathbb{U}_3 et donc l'image réciproque de tout ouvert du tore ne contenant pas de racine cubique de l'unité est vide.

Nous allons montrer néanmoins, que pour certains types d'ouverts de \mathbb{T} , l'image réciproque rencontre encore les non-maigres. En fait, on peut démontrer que l'image réciproque de certains ouverts rencontrent tous les ensembles qui sont à la fois assez réguliers et assez gros. C'est ce qu'on va montrer à présent.

Montrons d'abord un lemme sur les sous-ensembles du tore.

Lemme 3.3. *Soit $\Gamma \subset \mathbb{T}$ et V ouvert de \mathbb{T} tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda V \cap \Gamma \neq \emptyset$. Alors*

1. *Il existe $K \subset V$, K compact tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda K \cap \Gamma \neq \emptyset$.*
2. *Il existe V_0 voisinage ouvert symétrique de 1 dans \mathbb{T} et V_1 ouvert de \mathbb{T} tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda V_1 \cap \Gamma \neq \emptyset$ et $V_0.V_1 \subset V$.*

Démonstration. 1. V ouvert de \mathbb{T} , donc il existe une suite $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts relativement compacts dans V tels que $\overline{O_n} \subset O_{n+1}$, ($n \in \mathbb{N}$) et $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$ (on peut prendre par exemple $O_n = \{z \in \mathbb{T}, d(z, \mathbb{T} \setminus V) > \frac{1}{n}\}$ où d est la distance usuelle sur \mathbb{T}). Supposons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \lambda_n \in \mathbb{T} \text{ tel que } \lambda_n \Gamma \cap O_{n+1} = \emptyset$$

alors $\lambda_n \Gamma \subset \mathbb{T} \setminus \overline{O_n} \subset \mathbb{T} \setminus O_n$. En posant $F_n = \mathbb{T} \setminus O_n$, la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \mathbb{T} \setminus V$. \mathbb{T} étant compact, on peut supposer (λ_n) convergente vers un certain λ de \mathbb{T} . Pour $\mu \in \Gamma$ et $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $k \geq n$

$$\lambda_k \mu \in \lambda_k \Gamma \subset F_k \subset F_n$$

3.1. Propriétés des morphismes d'un groupe topologique dans le groupe multiplicatif complexe

d'où $\lambda\mu \in \overline{F_n} = F_n$ puisque F_n fermé. Donc $\lambda\Gamma \subset F_n$ pour tout n et donc $\lambda\Gamma \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \mathbb{T} \setminus V$ ce qui contredit $\lambda\Gamma \cap V \neq \emptyset$ et donc contredit l'hypothèse.

Il existe donc un entier n tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda\Gamma \cap O_n \neq \emptyset$ et $K = \overline{O_n}$ vérifie $K \subset V$ et $\lambda^{-1}K \cap \Gamma \neq \emptyset$.

2. D'après (1), il existe un compact K contenu dans V tel que

$$\forall \lambda \in \mathbb{T}, \lambda K \cap \Gamma \neq \emptyset.$$

Soit $\pi : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ l'application $\pi(\lambda, \lambda') = \lambda\lambda'$. Comme $\{1\} \times K$ est un compact de \mathbb{T}^2 et $\pi(\{1\} \times K) = K \subset V$, on a $\{1\} \times K \subset \pi^{-1}(V)$. On peut donc trouver un ouvert symétrique V_0 contenant 1 et un ouvert V_1 contenant K tels que $V_0 \times V_1 \subset \pi^{-1}(V)$ soit $V_0.V_1 \subset V$.

□

Théorème 3.4. Soient G un groupe topologique abélien, $\varphi : G \rightarrow \mathbb{T}$ un morphisme et \mathcal{I} un idéal de parties de G possédant la propriété forte de Steinhaus relativement à une tribu \mathcal{T} contenant les boréliens (qui peut être la tribu engendrée par \mathcal{I} et les boréliens) alors si V est un ouvert de \mathbb{T} tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda V \cap \Gamma_\varphi \neq \emptyset$ et $A \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{I}$, on a $\varphi^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$.

Démonstration. D'après le (2) du lemme précédent, il existe un voisinage symétrique V_0 de 1 et un ouvert V_1 contenu dans V tels que $V_0V_1 \subset V$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda V_1 \cap \Gamma_\varphi \neq \emptyset$ i.e. $\forall \lambda \in \mathbb{T}, \exists v \in V_1$ et $\mu \in \Gamma_\varphi$ tels que $\lambda v = \mu$, $\lambda v \mu^{-1} = 1$ et $\lambda^{-1} = v \mu^{-1}$ or $\mu^{-1} \in \Gamma_\varphi$ (qui est un sous-groupe de \mathbb{T}) donc $\forall \lambda \in \mathbb{T}, \lambda^{-1} \in \Gamma_\varphi.V_1$ i.e $\mathbb{T} = \Gamma_\varphi.V_1 = \bigcup_{\mu \in \Gamma_\varphi} \mu V_1$. Par compacité de \mathbb{T} , il existe $N \in \mathbb{N}$ et μ_1, \dots, μ_N dans Γ_φ tels que

$$\mathbb{T} = \bigcup_{1 \leq i \leq N} \mu_i.V_1$$

et

$$G = \bigcup_{1 \leq i \leq N} \varphi^{-1}(\mu_i.V_1)$$

D'autre part, soit A dans $\mathcal{T} \setminus \mathcal{I}$, $U_A = \{g \in G, A \cap gA \notin \mathcal{I}\}$ est un voisinage de e d'où $\Gamma_\varphi \subset \overline{\varphi(U_A)}$ et donc pour $i \in \{1, \dots, N\}$, il existe $g_i \in U_A$ tel que $\mu_i(\varphi(g_i))^{-1} \in V_0$. D'où $\mu_i \in \varphi(g_i)V_0$ et $\mu_i V_1 \subset \varphi(g_i)V_0V_1 \subset \varphi(g_i)V$. On en déduit

$$\varphi^{-1}(\mu_i V_1) \subset \varphi^{-1}(\varphi(g_i)V) = g_i.\varphi^{-1}V.$$

En particulier, si $(A \cap g_i A) \cap \varphi^{-1}(\mu_i.V_1) \neq \emptyset$, prenons $g \in (A \cap g_i A) \cap \varphi^{-1}(\mu_i.V_1)$ alors $g_i^{-1}g \in A$ et $g_i^{-1}g \in \varphi^{-1}(V)$. Donc $A \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$.

3.1. Propriétés des morphismes d'un groupe topologique dans le groupe multiplicatif complexe

Autrement dit, si $i \in \{1, \dots, N\}$, pour tout $A \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{I}$, on peut choisir $g_{i,A} \in G$ tel que $A \cap g_{i,A}A \notin \mathcal{I}$ et $\varphi^{-1}(\mu_i V) \subset g_{i,A}\varphi^{-1}(V)$ et pour un tel $g_{i,A}$,

$$(A \cap g_{i,A}) \cap \varphi^{-1}(\mu_i V_1) \neq \emptyset \Rightarrow A \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

On va alors montrer que toute partie J de $\{1, \dots, N\}$ possède la propriété (P) suivante :

$$\text{Si } A \subset \bigcup_{i \in J} \varphi^{-1}(\mu_i V_1) \text{ et } A \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{I} \text{ alors } A \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Le théorème à démontrer correspond au cas où $J = \{1, \dots, N\}$. Procédons par récurrence sur le cardinal $|J|$ de la partie J .

- Si $|J| = 1$, $J = \{i\}$, ($1 \leq i \leq n$). Si $A \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{I}$ et $A \subset \varphi^{-1}(\mu_i V_1)$ alors, en définissant $g_{i,A}$ comme plus haut,

$$(A \cap g_{i,A}A) \cap \varphi^{-1}(\mu_i V_1) = A \cap g_{i,A}A \notin \mathcal{I}$$

et est donc non vide par le choix de $g_{i,A}$ et, par le raisonnement fait plus haut $A \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$.

- Soit $n \in \{2, \dots, N\}$ et (P) vérifiée pour toute partie de cardinal plus petit que n . Soit $J \subset \{1, \dots, N\}$ telle que $|J| = n$ alors choisissons $i_0 \in J$. Soit $A \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{I}$ avec $A \subset \bigcup_{i \in J} \varphi^{-1}(\mu_i V_1)$, on a deux cas possibles : $(A \cap g_{i_0,A}A) \cap \varphi^{-1}(\mu_{i_0} V_1)$ est vide ou non.

Dans le premier cas, $A \cap g_{i_0,A}A \notin \mathcal{I}$ et $A \cap g_{i_0,A}A \subset \bigcup_{i \in J - \{i_0\}} \varphi^{-1}(\mu_i V_1)$ et par hypothèse de récurrence, $(A \cap g_{i_0,A}A) \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$ et donc $A \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$. Dans le second cas, $A \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$ comme plus haut.

□

Remarque. Il se peut que, pour les parties de $\{1, \dots, N\}$ différentes de $\{1, \dots, N\}$ tout entier, $\bigcup_{i \in J} \varphi^{-1}(\mu_i V_1)$ ne contienne aucune partie dans $\mathcal{T} \setminus \mathcal{I}$. (P) serait alors trivialement vérifiée pour $J \neq \{1, \dots, N\}$.

Corollaire 3.5. Soit G un groupe abélien polonais. \mathcal{T} une tribu sur G contenant les boréliens. \mathcal{I} un σ -idéal de \mathcal{T} tel que \mathcal{T} possède la propriété de Steinhaus forte relativement à \mathcal{I} . Soit ω une application de G dans $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ (espace des compacts du tore) \mathcal{T} -mesurable et $\varphi : G \rightarrow \mathbb{T}$ un morphisme tel que pour tout $g \in G$, $\varphi(g) \in \omega(g)$ alors si $\Omega_\varphi = \{g \in G, \Gamma_\varphi(g) \not\subset \omega(g)\}$, on a $\Omega_\varphi \in \mathcal{I}$.

3.1. Propriétés des morphismes d'un groupe topologique dans le groupe multiplicatif complexe

Démonstration. On a $\Omega_\varphi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{g \in G \mid V_n \cap \Gamma_\varphi(g) \neq \emptyset \text{ et } V_n \cap \omega(g) = \emptyset\}$ où les (V_n) forment une base d'ouverts de la topologie de G .

Si $\Omega_\varphi \notin \mathcal{I}$ alors il existe n_0 tel que $\{g \in G \mid V_{n_0} \cap \Gamma_\varphi(g) \neq \emptyset \text{ et } V_{n_0} \cap \omega(g) = \emptyset\} = \{g \in G \mid V_{n_0} \cap \Gamma_\varphi(g) \neq \emptyset\} \cap \{g \in G \mid V_{n_0} \cap \omega(g) = \emptyset\}$ n'est pas dans \mathcal{I} .

L'ensemble $\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{T}) \mid K \cap V_{n_0} \neq \emptyset\}$ est ouvert dans $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ et $g \mapsto \Gamma_\varphi(g)$ est continue (Prop. 3.2) donc $\{g \in G \mid V_{n_0} \cap \Gamma_\varphi(g) \neq \emptyset\}$ est ouvert dans G . D'autre part, $\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{T}) \mid K \cap V_{n_0} = \emptyset\}$ est fermé et donc puisque $g \mapsto \omega(g)$ est \mathcal{T} -mesurable, $\{g \in G \mid \omega(g) \cap V_{n_0} = \emptyset\} \in \mathcal{T}$. On en déduit que $A_{n_0} = \{g \in G \mid V_{n_0} \cap \Gamma_\varphi(g) \neq \emptyset \text{ et } V_{n_0} \cap \omega(g) = \emptyset\}$ est dans $\mathcal{T} \setminus \mathcal{I}$.

D'autre part, si $g \in A_{n_0}$, on a $\varphi(g) \in \omega(g)$ et donc $\varphi(g) \notin V_{n_0}$ puisque $V_{n_0} \cap \omega(g) = \emptyset$ pour $g \in A_{n_0}$ soit $\varphi^{-1}(V_{n_0}) \cap A_{n_0} = \emptyset$ ce qui contredit le théorème précédent. \square

On peut généraliser le résultat précédent à des familles de morphismes.

Corollaire 3.6. *Soient $G, \mathcal{T}, \mathcal{I}$ et $\omega : G \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{T})$ vérifiant les mêmes hypothèses que dans le corollaire précédent et $(\varphi_i)_{i \in I}$ une famille de morphismes de G dans \mathbb{T} tels que pour tout $i \in I$ et tout $g \in G$, $\varphi_i(g) \in \omega(g)$. Posons $\Lambda_I = \bigcup_{i \in I} \Gamma_{\varphi_i}$. On a :*

1. *Si Λ_I infini alors $\{g \in G \mid \omega(g) \neq \mathbb{T}\} \in \mathcal{I}$.*
2. *si Λ_I fini alors il existe un entier non nul N , et des éléments i_1, \dots, i_N de I tels que*

$$\Lambda_I = \bigcup_{1 \leq k \leq N} \Gamma_{\varphi_{i_k}} \text{ et } \{g \in G \mid \bigcup_{1 \leq k \leq N} \Gamma_{\varphi_{i_k}}(g) \not\subset \omega(g)\} \text{ est dans } \mathcal{I}.$$

(Dans le second cas, il est clair que chacun des Γ_{φ_i} est un groupe fini de racine de l'unité.)

Démonstration. Commençons par le cas (2). Λ_I étant fini, il est clair qu'on a alors qu'un nombre fini de Γ_{φ_i} distincts, tous finis, pour $i \in I$. On a donc $\Lambda_I = \bigcup_{1 \leq k \leq n} \Gamma_{\varphi_{i_k}}$ pour un certain entier N et des i_1, \dots, i_N dans I . Appliquons le corollaire précédent à chacun des φ_{i_k} pour $1 \leq k \leq N$, on a alors

$$\{g \in G \mid \Gamma_{\varphi_{i_k}}(g) \not\subset \omega(g)\} \in \mathcal{I}$$

et donc

$$\{g \in G \mid \bigcup_{1 \leq k \leq N} \Gamma_{\varphi_{i_k}}(g) \not\subset \omega(g)\} = \bigcup_{1 \leq k \leq N} \{g \in G \mid \Gamma_{\varphi_{i_k}}(g) \not\subset \omega(g)\} \in \mathcal{I}$$

Considérons à présent le cas (1). Si $\Lambda_I = \bigcup_{i \in I} \Gamma_{\varphi_i}$ est infini alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un $i \in I$ tel que $\Gamma_{\varphi_i} = \mathbb{T}$, où Γ_{φ_i} est un groupe des racines de l'unité d'ordre plus grand que n . On en déduit que si U est un ouvert non vide quelconque de \mathbb{T} , il existe $i \in I$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda \Gamma_{\varphi_i} \cap U \neq \emptyset$. (i dépend de U bien sûr sauf s'il existe $i \in I$ tel que $\Gamma_{\varphi_i} = \mathbb{T}$).

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base d'ouverts non vides de la topologie de \mathbb{T} . Alors $\{g \in G \mid \omega(g) \neq \mathbb{T}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ où $A_n = \{g \in G \mid \omega(g) \cap V_n = \emptyset\}$. Tous les A_n sont dans \mathcal{T} comme images réciproques de fermés de $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ par ω et $\{g \in G \mid \omega(g) \neq \mathbb{T}\}$ y est, à la fois comme réunion des A_n et image réciproque d'un ouvert.

$$\{g \in G \mid \omega(g) \neq \mathbb{T}\} \notin \mathcal{I} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } A_{n_0} \notin \mathcal{I}.$$

D'après ce qui a été dit plus haut, $\bigcup_{i \in I} \Gamma_{\varphi_i}$ étant infini, il existe i_0 tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda V_{n_0} \cap \Gamma_{\varphi_{i_0}} \neq \emptyset$. Mais pour tout $g \in G$, $\varphi_{i_0}(g) \in \omega(g)$ et donc si $g \in A_{n_0}$, $\varphi_{i_0}(g) \notin V_{n_0}$ et $\varphi^{-1}(V_{n_0}) \cap A_{n_0} = \emptyset$ ce qui contredit le théorème 3.4 donc on a bien $\{g \in G \mid \omega(g) \neq \mathbb{T}\} \in \mathcal{I}$. \square

Remarque. Des exemples classiques de tribus et de σ -idéaux sur des groupes abéliens polonais auxquels les résultats précédents s'appliquent sont les suivants :

- La tribu des parties ayant la propriété de Baire et le σ -idéal des parties maigres de G .
- Si G est, de plus, localement compact, on peut prendre pour \mathcal{T} la tribu des parties Haar-mesurables de G et pour \mathcal{I} le σ -idéal des parties de mesure de Haar nulle.
- Si G n'est pas nécessairement localement compact, la tribu des parties universellement mesurables de G et le σ -idéal des parties Haar-nulles au sens de Christensen.

3.2 Application à l'étude de la répartition angulaire du spectre pour une représentation fortement continue

On va maintenant s'intéresser aux arguments des éléments du spectre $\sigma(\theta(g))$ de l'image $\theta(g)$ d'un élément g d'un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts par une représentation θ de G dans un espace de Banach qui est fortement continue.

3.2. Application à l'étude de la répartition angulaire du spectre pour une
représentation fortement continue

Pour $A \subset \mathbb{C} - \{0\}$, on note $A^1 = \{\frac{z}{|z|}, z \in A\}$. Si T est un opérateur borné inversible sur un Banach X ou plus généralement un inversible dans une algèbre de Banach, le spectre $\sigma(T)$ est contenu dans $\mathbb{C} - \{0\}$ et on pose $\sigma^1(T) = (\sigma(T))^1$.

On considère un groupe G abélien localement compact à base dénombrable d'ouverts et $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation de G sur un Banach X . L'ensemble $\theta(G)$ est une partie commutative de $\mathcal{L}(X)$ et si A est une sous-algèbre de Banach quelconque (qui peut être prise commutative, par exemple la sous-algèbre de Banach engendrée par $\theta(G)$) contenant $\theta(G)$, on a $\sigma_A^1(\theta(g)) = \sigma^1(g)$, ($g \in G$) où σ_A désigne le spectre relatif à l'algèbre A . En effet, si $g \in G$, $\theta(g)$ est inversible dans A d'inverse $\theta(g^{-1})$ donc $0 \notin \sigma_A(\theta(g))$. Il est clair que $\sigma(\theta(g)) \subset \sigma_A(\theta(g))$ et connu que $\partial\sigma_A(\theta(g)) \subset \sigma(\theta(g))$. On a donc $\sigma^1(\theta(g)) \subset \sigma_A^1(\theta(g))$ et $(\partial\sigma_A(\theta(g)))^1 \subset \sigma^1(\theta(g))$ mais toute demi-droite de \mathbb{C} d'origine 0 qui rencontre $\sigma_A(\theta(g))$ rencontre $\partial\sigma_A(\theta(g))$ (puisque $0 \notin \sigma_A(\theta(g))$) et par un argument de connexité d'où $\sigma_A^1(\theta(g)) = (\partial\sigma_A(\theta(g)))^1$.

Soit A une sous-algèbre commutative contenant $\theta(G)$, \hat{A} son spectre et A^* l'ensemble des inversibles de A . Si $\chi \in \hat{A}$, on peut définir $\chi^1 : A^* \rightarrow \mathbb{T}$ par $\chi^1(a) = \frac{\chi(a)}{|\chi(a)|}$ ($a \in A^*$ et donc $\chi(a) \neq 0$) et clairement pour tout $a \in A^*$, $\sigma_A^1(a) = \{\chi^1(a), \chi \in \hat{A}\}$. D'autre part, pour tout $g \in G$, $\theta(g) \in A^*$ et donc on peut définir pour $\chi \in \hat{A}$, $\chi^1 \circ \theta : G \rightarrow \mathbb{T}$ qui est un morphisme de groupes.

Enfin, on a une régularité de la variation de $\sigma^1(\theta(g))$ en fonction de g (dans le cas où θ est fortement continue et X séparable) exprimée par le lemme suivant :

Lemme 3.7. *Soient G un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts, X un Banach séparable et $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue. Alors l'application $g \mapsto \sigma^1(\theta(g))$ de G dans $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ muni de la métrique de Hausdorff est borélienne.*

Démonstration. L'application de $(\mathcal{L}(X), s.o.t.)$ dans $\mathcal{K}(\mathbb{C}) : T \mapsto \sigma(T)$ est borélienne (d'après 1.47) et $g \mapsto \theta(g)$ de G dans $(\mathcal{L}(X), s.o.t.)$ est continue donc $g \mapsto \sigma(\theta(g))$ est borélienne de G dans $\mathcal{K}(\mathbb{C} - \{0\})$. D'autre part, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ étant continue de $\mathbb{C} - \{0\}$ dans \mathbb{T} . L'application associée de $\mathcal{K}(\mathbb{C} - \{0\})$ dans $\mathcal{K}(\mathbb{T}) : A \mapsto A^1$ est continue pour les topologies de Hausdorff (cf [Kech] ex.4.29 p.27) donc $g \mapsto \sigma^1(\theta(g))$ est borélienne. □

Nous pouvons à présent énoncer un théorème qui nous donne précisément la répartition angulaire du spectre de $\theta(g)$ pour un ensemble résiduel d'éléments g de G .

Proposition 3.8. *Soient G un groupe abélien polonais, $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue sur un Banach séparable X et A une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(X)$ contenant $\theta(G)$. Alors $\{g \in G \mid \sigma^1(\theta(g)) \neq \bigcup_{\chi \in \hat{A}} \Gamma_{\chi^1 \circ \theta}(g)\}$ est maigre et Haar-nul dans G (où \hat{A} est le spectre de Gelfand de A).*

Démonstration. Comme $\sigma^1(\theta(g)) = \{(\chi^1 \circ \theta)(g), \chi \in \hat{A}\}$ et que pour tout $g \in G$, $(\chi^1 \circ \theta)(g) \in \Gamma_{\chi^1 \circ \theta}(g)$, l'inclusion $\sigma^1(\theta(g)) \subset \bigcup_{\chi \in \hat{A}} \Gamma_{\chi^1 \circ \theta}(g)$ est clairement vérifiée pour tout $g \in G$ et ne dépend d'ailleurs d'aucune des restrictions faites sur G ou θ .

La réciproque résulte du corollaire 3.6 appliqué à la famille $\{\chi^1 \circ \theta, \chi \in \hat{A}\}$ de morphismes de G dans \mathbb{T} et à l'application borélienne (et donc universellement mesurable et ayant la propriété de Baire) $g \mapsto \sigma^1(\theta(g))$ de G dans $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ et le σ -idéal \mathcal{I} étant celui des parties maigres ou Haar-nulles de G . \square

Remarques. 1. Si θ est continue en norme, la proposition précédente se réduit à $\sigma^1(\theta(g)) = \{(\chi^1 \circ \theta)(g), \chi \in \hat{A}\}$ et n'apporte strictement rien (en effet, dans ce cas, pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi^1 \circ \theta$ continue et $\Gamma_{\chi^1 \circ \theta}(g) = \{\chi^1 \circ \theta(g)\}$).

2. On rappelle que tous les $\Gamma_{\chi^1 \circ \theta}(g)$ ($= (\chi^1 \circ \theta)(g) \Gamma_{\chi^1 \circ \theta}$) sont des polygones réguliers (pouvant être réduit à un point ou être le cercle tout entier) donc l'intérêt de la proposition précédente apparaît quand certains des $\chi^1 \circ \theta$ sont discontinus, ce qui est le cas, d'après les résultats du chapitre 2, si θ est discontinue en norme. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 3.9. *Soient G un groupe abélien polonais, $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de G sur un Banach alors on a les dichotomies suivantes :*

1. *Si G est localement compact, alors θ est continue en norme ou l'ensemble des g dans G tel que $\sigma^1(\theta(g))$ ne contienne aucun polygone régulier non trivial est maigre et de mesure de Haar nulle.*
2. *Si G n'est pas localement compact mais θ est, de plus, borné en norme, on a la même dichotomie où "de mesure de Haar nulle" est remplacé par "Haar nul au sens de Christensen".*

Démonstration. Supposons d'abord X séparable. D'après le théorème 2.4 pour le premier cas et le théorème 2.11 si G n'est pas localement compact mais θ borné, si A est une sous-algèbre de Banach commutative contenant $\theta(G)$, il existe un caractère $\chi \in \hat{A}$ tel que $\chi \circ \theta$ est discontinue et donc d'après la remarque (a) qui suit la proposition 3.1, $\chi^1 \circ \theta$ est discontinu et donc $\Gamma_{\chi^1 \circ \theta} \neq \{1\}$. On déduit de ce qui précède qu'en dehors d'un ensemble maigre et Haar nul, $\Gamma_{\chi^1 \circ \theta}(g) = \chi^1 \circ \theta(g) \cdot \Gamma_{\chi^1 \circ \theta} \subset \sigma^1(\theta(g))$.

3.2. Application à l'étude de la répartition angulaire du spectre pour une
représentation fortement continue

Supposons maintenant X non nécessairement séparable et θ non continue en norme. On va montrer qu'il existe un sous-espace séparable de X , invariant par l'image de G et tel que la restriction de la représentation à ce sous-espace est aussi discontinue.

En effet, si θ n'est pas continue en norme, il existe $\delta > 0$ et une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans G tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n) = e \text{ et } \|\theta(g_n) - 1\| > \delta.$$

Il existe donc une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires de X vérifiant pour tout entier n : $\|\theta(g_n)x_n - x_n\| > \delta$.

On pose $Y = \overline{\text{vect}\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \theta(g_n)x_n, g \in G\}}$. Comme G est séparable et θ fortement continue, $\{\theta(g)x_n, g \in G\}$ est séparable et donc Y est aussi séparable. Y est clairement $\theta(G)$ -invariant et comme pour tout entier n , $\|x_n\| = 1$, $x_n \in Y$, $\|\theta(g_n)x_n - x_n\| > \delta$, on a $g_n \rightarrow e$ et $\theta(g_n) \not\rightarrow 1$ dans $\mathcal{L}(Y)$ muni de la topologie de la norme. La représentation restreinte $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(Y)$ qui à g associe $\theta(g)|_Y$ n'est donc pas continue en norme et est bien fortement continue.

D'autre part, par le lemme 1.45, on a pour tout $g \in G$, $\sigma_{app}(\theta(g)|_Y) \subset \sigma_{app}(\theta(g))$. Or, comme pour tout $g \in G$, $\sigma^1(\theta(g)) = (\partial\sigma(\theta(g)))^1$, on a

$$\sigma^1(\theta(g)) \subset (\partial\sigma(\theta(g)))^1 \subset (\sigma_{app}(\theta(g)))^1 \subset \sigma^1(\theta(g)).$$

D'où $(\sigma_{app}(\theta(g)))^1 = \sigma^1(\theta(g))$ et de même $(\sigma_{app}(\theta(g)|_Y))^1 = \sigma^1(\theta(g)|_Y)$ et finalement $\sigma^1(\theta(g)|_Y) \subset \sigma^1(\theta(g))$. Par le théorème précédent, $\sigma^1(\theta(g)|_Y)$ contient au moins un polygone non trivial pour g dans un comaire de G et donc, sur ce même comaire, $\sigma^1(\theta(g))$ contient ce même polygone.

D'autre part, si θ est continue en norme, la semi-continuité supérieure du spectre par rapport à la norme montre que sur un voisinage ouvert de e , le spectre de $\theta(g)$ est contenu dans le demi-plan droit de \mathbb{C} et donc $\sigma^1(\theta(g))$ contenu dans un demi-cercle ne contient aucun polygone régulier non trivial. □

Remarques. 1. En fait, si A est la sous-algèbre de Banach engendrée par $\theta(G)|_Y$ dans $\mathcal{L}(Y)$, on a montré que sur un comaire $\sigma^1(\theta(g))$ contient $\bigcup_{\chi \in \hat{A}} \chi^1 \circ \theta(g) \Gamma_{\chi^1 \circ \theta}$.

C'est-à-dire qu'on a une réunion de polygones variant de façon continue en fonction de g qui est contenue, sur un comaire de G , dans $\sigma^1(\theta(g))$.

2. La rotation continue du polygone $\Gamma_{\chi^1 \circ \theta}(g)$ en fonction de g n'est pas identique pour chacun des polygones qui apparaissent comme le montre l'exemple suivant :

3.2. Application à l'étude de la répartition angulaire du spectre pour une
représentation fortement continue

On considère $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{U}_2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{U}_3^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{R}) \times \ell^2(\mathbb{R}))$ définie par

$$\theta(t, (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}) : ((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \mapsto (e^{it}(\lambda_n u_n)_{n \in \mathbb{N}}, e^{2it}(\mu_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

On a clairement pour les éléments $(t, (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}})$ tels que $\mathbb{U}_2 \subset \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\mathbb{U}_3 \subset \{\mu_n, n \in \mathbb{N}\}$ (qui forment un ensemble comaigne de $\mathbb{R} \times \mathbb{U}_2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{U}_3^{\mathbb{N}}$) on a

$$\sigma(\theta(t, (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}})) = e^{it}\mathbb{U}_2 \cup e^{2it}\mathbb{U}_3.$$

On a donc deux polygones réguliers qui "tournent" l'un à vitesse double de l'autre quand g varie.

Remarque. Le théorème précédent nous fournit un ensemble exceptionnel Σ_θ sur lequel $\sigma \circ \theta(g)$ ne contienne aucun polygone non trivial. Dans le cas non localement compact pour une mesure bornée, puisque cet ensemble exceptionnel Σ_θ est Haar-nul, on sait qu'il existe une mesure de probabilité μ borélienne sur G telle que pour tout $g \in G$, $\mu(g.\Sigma_\theta) = 0$. L'espace des mesures de probabilité boréliennes sur G polonais étant lui-même polonais si on le munit de la topologie engendrée par les évaluations sur les fonctions continues bornées sur G (*cf.* [Kech] th. 17-23), on peut se poser la question de la structure topologique et de la taille dans cet espace de l'ensemble (non vide) des "mesures-tests" pour Σ_θ . La densité de cet ensemble pour une partie Haar-nulle d'un groupe abélien polonais est implicitement prouvée dans [Chri] (th. 1). On peut en dire un peu plus, comme Σ_θ est borélien Haar-nul alors l'ensemble des mesures-tests est maigre ou comaigne dans l'espace des mesures de probabilité sur G (*cf.* [Dod] cor. 6). Nous ignorons, pour l'instant, si les deux cas peuvent se présenter.

Exemples 3.10. Dans le cas des représentations régulières sur $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbb{L}(\mathbb{T})$), l'ensemble exceptionnel $\sigma(\theta(t)) \neq \mathbb{T}$ est réduit à 0 (resp. $\mathbb{Q}.\pi$). Dans le cas de $\mu_3^{\mathbb{N}}$ agissant par multiplication terme à terme sur $\ell^2(\mathbb{N})$ (*cf.* Exemple 1 dans l'introduction), l'ensemble exceptionnel est l'ensemble des suites de $\mu_3^{\mathbb{N}}$ qui ne contiennent pas toutes les racines de l'unité parmi leurs termes (ce qui montre que cet ensemble peut être non dénombrable).

Corollaire 3.11. *Si, en plus des hypothèses du théorème précédent, G admet une division locale continue à tout ordre au voisinage du neutre (cas des groupes de Lie commutatifs par exemple en utilisant l'exponentielle), la dichotomie devient : θ est continue en norme ou bien $\sigma^1(\theta(g)) = \mathbb{T}$ pour g dans un comaigne Haar nul de G .*

Démonstration. Il suffit de remarquer que, dans ce cas, pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\Gamma_{\chi^1 \circ \theta} = \mathbb{T}$ ou $\{1\}$ (voir la proposition 3.1) donc tous les polygones réguliers non triviaux qui apparaissent si θ est discontinue sont égaux à \mathbb{T} . \square

3.3 Applications

3.3.1 Représentations sur des espaces fonctionnels particuliers

Proposition 3.12. *Si X est un espace H.I., et G un groupe localement compact, abélien, à base dénombrable d'ouverts, admettant une division locale à tout ordre au voisinage du neutre, alors pour une représentation $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$, on a*

$$\theta \text{ fortement continue} \Rightarrow \theta \text{ continue en norme.}$$

Démonstration. Par 1.51, $\sigma(\theta(g))$ dénombrable et donc $\sigma^1(\theta(g))$ est dénombrable et on ne peut donc pas avoir de comaire de G avec $\sigma^1(\theta(g)) = \mathbb{T}$ et donc d'après le corollaire précédent, θ est continue en norme. \square

Lotz a montré (cf. [Lot]) que sur un espace de Banach possédant les propriétés (G) (de Grothendieck) et (DP) (de Dunford-Pettis) (voir la partie 1.2.4), tout semi-groupe à un paramètre fortement continu est continu, l'exemple type, parmi les Banachs de l'analyse, d'espaces possédant à la fois les propriétés (G) et (DP) est $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ où Ω est un espace mesuré muni d'une mesure positive. En combinant sa méthode, la proposition 1.69 et les résultats sur la continuité spectrale de [Est] et [Dub], on arrive à la généralisation suivante qui, du point de vue des représentations fortement continue rapproche \mathbb{L}^∞ des espaces H.I.

Proposition 3.13. *Soit X un espace ayant (D.P.) et (G) (par exemple de la forme $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$), G un groupe abélien localement compact à base dénombrable d'ouverts (ou compact à base dénombrable d'ouverts) et θ une représentation de G dans $\mathcal{L}(X)$, on a*

$$\theta \text{ fortement continue} \Leftrightarrow \theta \text{ continue en norme.}$$

Démonstration. Supposons θ fortement continue. Soit (g_n) une suite tendant vers e dans G . $\theta(g_n)x \rightarrow x$ et donc pour tout $x^* \in X'$, $x \in X$,

$$\langle \theta(g_n)^* x^*, x \rangle = \langle x^*, \theta(g_n)x \rangle \rightarrow \langle x^*, x \rangle$$

donc $\theta(g_n)^*x^* \xrightarrow{w^*} x^*$ dans X' d'où par la propriété (G) $\theta(g_n)^*x^* \xrightarrow{w} x^*$ dans X' et donc la représentation $g \mapsto \theta(g)^*$ de G dans $\mathcal{L}(X')$ est faiblement continue. Par la proposition 1.59, elle est aussi fortement continue donc $\theta(g)^*x^* \rightarrow x^*$ en norme dans X' .

D'autre part, si (x_n^*) est une suite bornée en norme dans X' , on a pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} |\langle (\theta(g_n) - 1)^*x_n^*, x \rangle| &= |\langle x_n^*, (\theta(g_n) - 1)x \rangle| \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\| \cdot \|(\theta(g_n) - 1)x\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

puisque $\theta(g_n)x \rightarrow x$. D'où $(\theta(g_n) - 1)^*x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ et par (G), $(\theta(g_n) - 1)^*x_n^* \xrightarrow{w} 0$.

Par le théorème 1.42 de Lotz, $\|(\theta(g_n) - 1)^2\| \rightarrow 0$ et donc $\rho((\theta(g) - 1)^2) \xrightarrow{g \rightarrow e} 0$. Par le théorème de l'application spectrale, $\rho(\theta(g) - 1) \xrightarrow{g \rightarrow e} 0$ et par le théorème 1.65 dans le cas abélien (on renvoie à [Dub] ou [Dub2] pour le cas compact), θ est continue en norme. \square

3.3.2 Loi du $0-\sqrt{3}$

Dans [Est], l'auteur montre que si G est un groupe topologique abélien localement compact et $\theta : G \rightarrow A$ une représentation de G dans une algèbre de Banach A on a

$$\theta \text{ continue ou bien } \limsup_{g \rightarrow e} \|\theta(g) - 1\| \geq \sqrt{3}$$

$\sqrt{3}$ étant remplacé par 2 si le groupe admet des divisions locales à tout ordre. Ce résultat a d'ailleurs été généralisé au cas non commutatif dans [Dub]. Si on se restreint au cas où G est à base dénombrable d'ouverts, A est l'algèbre $\mathcal{L}(X)$ des opérateurs sur un Banach X et θ est fortement continue, on a un résultat un peu plus précis :

Corollaire 3.14. *Soient G un groupe abélien polonais et $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de G sur un Banach X , alors si G est localement compact ou si θ est borné en norme, on a :*

θ est continue en norme ou bien il existe un comaire C de G de complémentaire Haar-nul tel que $\liminf_{g \rightarrow e, g \in C} \|\theta(g) - 1\| \geq \sqrt{3}$ (≥ 2 si G admet des divisions locales continues à tout ordre).

Démonstration. Supposons θ non continue. Soit Y un sous-espace séparable de X $\theta(G)$ -invariant tel que $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(Y)$ soit discontinue (qui existe par la démonstration

du théorème 3.9) et A la sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(Y)$ engendrée par $\theta(G)|_Y$. On a d'après la proposition 3.8, dans $\mathcal{L}(Y)$ et pour g dans un comaire C de G :

$$(\sigma_Y(\theta(g)))^1 = \bigcup_{\chi \in \hat{A}} (\chi^1 \circ \theta)(g) \Gamma_{\chi^1 \circ \theta}$$

On a toujours, comme dans la démonstration du théorème 3.9,

$$\sigma_Y(\theta(g))^1 \subset \sigma^1(\theta(g))$$

D'où, pour $g \in C$,

$$\bigcup_{\chi \in \hat{A}} (\chi^1 \circ \theta)(g) \Gamma_{\chi^1 \circ \theta} \subset \sigma^1(\theta(g))$$

Si $\chi \in \hat{A}$ est tel que $\chi \circ \theta$ soit discontinu, alors pour $g \in C$

$$\sup_{z \in \sigma^1(\theta(g))} |z - 1| \geq \sup_{z \in \chi^1 \circ \theta(g) \cdot \Gamma_{\chi^1 \circ \theta}} |z - 1|$$

D'autre part, il est clair que l'application $K \mapsto \sup_{z \in K} |z - 1|$ de $\mathcal{K}(\mathbb{T}) \rightarrow [0, +\infty[$ est continue. Comme $\chi^1 \circ \theta(g) \Gamma_{\chi^1 \circ \theta} \rightarrow \Gamma_{\chi^1 \circ \theta}$ dans $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ (proposition 3.2), on a

$$\liminf_{g \rightarrow e} \left(\sup_{z \in \sigma^1(\theta(g))} |z - 1| \right) \geq \sup_{z \in \Gamma_{\chi^1 \circ \theta}} |z - 1|$$

et $\Gamma_{\chi^1 \circ \theta}$ étant un polygone régulier non trivial dont un des sommets est en 1, un raisonnement géométrique fait dans [Est] montre que la plus petite valeur possible pour $\sup_{z \in \Gamma_{\chi^1 \circ \theta}} |z - 1|$ est $\sqrt{3}$ (atteinte dans le cas du triangle équilatéral) on a donc

$$\liminf_{g \rightarrow e} \left(\sup_{z \in \sigma^1(\theta(g))} |z - 1| \right) \geq \sqrt{3}$$

Enfin, θ étant localement bornée, il existe $M > 0$ et un voisinage V de e tels que pour tout $g \in V$, $\|\theta(g)\| \leq M$. Par continuité de la loi de groupe, pour tout entier n , on peut trouver un voisinage V_n de e tel que pour tout $g \in V_n$, $\|\theta(g^n)\| \leq M$ et $\|\theta(g^{-n})\| \leq M$. Or $\sigma(\theta(g^{-n})) = \{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma(\theta(g^n))\}$ donc pour tout $g \in V_n$ on a $\sigma(\theta(g^n)) \subset \{z \in \mathbb{C}, \frac{1}{M} \leq |z| \leq M\}$. Comme $\sigma(\theta(g^n)) = (\sigma(\theta(g)))^n$, on a pour tout $g \in V_n$, et tout $z \in \sigma(\theta(g))$, $(\frac{1}{M})^{\frac{1}{n}} \leq |z| \leq M^{\frac{1}{n}}$. D'où pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un voisinage V_ϵ de e tel que pour tout $g \in V_\epsilon$, $\sigma(\theta(g)) \subset \{z \in \mathbb{C}, 1 - \epsilon \leq |z| \leq 1 + \epsilon\}$. On en déduit que pour tout $z \in \sigma(\theta(g))$, $d(z, \sigma^1(\theta(g))) < \epsilon$ et donc pour tout $g \in V_\epsilon$,

$$\sup_{z \in \sigma(\theta(g))} |z - 1| \geq \sup_{z \in \sigma^1(\theta(g))} |z - 1| - \epsilon. \text{ Comme}$$

$$\|\theta(g) - 1\| \geq \rho(\theta(g) - 1) = \sup_{z \in \sigma(\theta(g))} |z - 1|,$$

on en déduit que pour $g \in C$,

$$\liminf_{g \rightarrow e} \|\theta(g) - 1\| \geq \sqrt{3}.$$

□

Remarque. Dans [CPT], on avait seulement θ continue ou bien $\liminf_{g \rightarrow e} \|\theta(g) - 1\| \geq \sqrt{2}$. Ce qui manquait, à ce moment là, était simplement la continuité de $\Gamma_{\chi^1 \circ \theta}(g)$ en fonction de g . En effet, sachant que, sur un comaigre, le spectre ramené au cercle unité contenait un polygone non trivial, il ne pouvait être contenu dans un demi-plan d'où forcément $\sup_{z \in \sigma^1(\theta(g))} |z - 1| \geq \sqrt{2}$ mais comme on ignorait que quand g tend vers e , ce polygone tendait vers un groupe des racines de l'unité (avec 1 parmi les sommets). On aurait pu avoir par exemple $\sigma^1(\theta(g)) = \{i; -i\}$ sur un comaigre et donc seulement $\liminf_{g \rightarrow e} \rho(\theta(g) - 1) = \sqrt{2}$ sur ce comaigre.

Chapitre 4

Caractérisation spectrale de l'uniforme continuité des représentations unitaires fortement continues de groupes localement compacts : le cas non commutatif

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté une caractérisation à l'aide de propriétés géométriques du spectre, de l'uniforme continuité d'une représentation fortement continue d'un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts abélien. Nous allons à présent étudier dans quelle mesure on peut obtenir des résultats similaires dans le cas où le groupe n'est plus supposé abélien. Dans ce cadre, J.M. Paoli et J.C. Tomasi ([PT]) ont obtenu un résultat du même type que dans le cas commutatif mais avec une description moins détaillée du spectre et sous l'hypothèse que la représentation est unitaire sur un Hilbert. Plus précisément, on a (cf. [PT])

Théorème 4.1. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts et $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(H)$ une représentation unitaire fortement continue de G sur un Hilbert H , on a la dichotomie :*

θ continue en norme ou bien sur un comaire de G , le spectre $\sigma(\theta(g))$ contient 0 dans son enveloppe convexe.

Dans le cas où G est un groupe de Lie, on obtient une description plus précise de ces spectres qui se rapproche du résultat sur les groupes à un paramètre. On a : θ continue ou bien il existe un voisinage V du neutre e de G et un sous-ensemble comaire C de V tel que pour tout $g \in C$, $\sigma(\theta(g)) = \mathbb{T}$.

Décrivons à présent plus en détail le contenu de ce chapitre. Le premier paragraphe donne un résultat de régularité de l'application de G dans $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ qui à g associe $\sigma(\theta(g))$ avec θ unitaire et fortement continue. On savait que cette application est borélienne, on montre à présent qu'elle admet un ensemble comaigne de points de continuité. Il est facile de voir qu'aucune de ces régularités n'implique l'autre en général.

Le second paragraphe donne une description rapide des résultats de [PT] utilisés dans la suite, le résultat du premier paragraphe permet de préciser légèrement la description du spectre donné dans [PT].

Enfin, dans le troisième paragraphe, on combine le théorème de continuité du premier avec le théorème de dichotomie de [PT] et les propriétés classiques de l'exponentielle sur les groupes de Lie pour obtenir la description du spectre dans le cas non continu.

4.2 Points de continuité du spectre dans le cas des représentations unitaires

Nous savons, d'après [Yad], que $\sigma : (\mathcal{L}(X), s.o.t.) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{D})$ avec X un espace de Banach séparable, est borélienne et donc pour une représentation unitaire $\theta : G \rightarrow \mathcal{U}(X)$ fortement continue, $\sigma \circ \theta$ est aussi borélienne. On peut donc trouver un ensemble comaigne C de G tel que $\sigma \circ \theta|_C$ soit continue. Nous allons montrer dans cette partie que dans le cas d'une représentation unitaire sur un Hilbert (pas nécessairement séparable), $\sigma \circ \theta$ est beaucoup plus régulière : son ensemble des points de continuité est comaigne dans G .

Notation. Soient X un espace topologique et $\Phi : X \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{T})$ une application. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et $x \in X$, on note :

$$\hat{f}(x) = \sup_{z \in \Phi(x)} |f(z)|$$

De plus, on notera $Cont(f)$ l'ensemble des points de continuité d'une application f .

Lemme 4.2. Soient $\Phi : X \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{T})$ une application, $x \in X$ et p_n une suite dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Alors

$$\Phi \text{ continue en } x \Leftrightarrow \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \hat{p}_n \text{ continue en } x$$

Autrement dit :

$$Cont(\Phi) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Cont(\hat{p}_n)$$

Démonstration.

Si Φ est continue en x .

$\forall n \in \mathbb{N}$, p_n est uniformément continue sur \mathbb{T} donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall z, z' \in \mathbb{T}, |z - z'| < \alpha \Rightarrow |p_n(z) - p_n(z')| < \epsilon$$

La continuité de Φ en x donne :

$$\forall \alpha > 0, \forall x_i \xrightarrow{i \in I} x, \exists j \in I, \forall i \geq j \text{ tel que } d(\Phi(x_i), \Phi(x)) < \alpha$$

$$i.e. \quad \forall z \in \Phi(x), \forall z_i \in \Phi(x_i) \quad d(z, \Phi(x_i)) < \alpha \text{ et } d(z_i, \Phi(x)) < \alpha$$

Si on pose $z_0 \in \Phi(x)$ et $z_{i0} \in \Phi(x_i)$ tels que $\hat{p}_n(x) = |p_n(z_0)|$ et $\hat{p}_n(x_i) = |p_n(z_{i0})|$, alors

$$\exists z'_i \in \Phi(x_i), \exists z' \in \Phi(x) \text{ tels que } d(z_0, z'_i) < \alpha \text{ et } d(z_{i0}, z') < \alpha$$

Donc $|p_n(z_0) - p_n(z'_i)| < \epsilon$ et $|p_n(z_{i0}) - p_n(z')| < \epsilon$.

D'où $\hat{p}_n(x) < |p_n(z'_i)| + \epsilon \leq \hat{p}_n(x_i) + \epsilon$ et de même $\hat{p}_n(x_i) < \hat{p}_n(x) + \epsilon$.

On en déduit que $|\hat{p}_n(x) - \hat{p}_n(x_i)| < \epsilon$ et ainsi la continuité pour tout entier n de \hat{p}_n en x .

Réciproquement, si Φ n'est pas continue en x . Alors

$$\exists x_i \xrightarrow{i \in I} x \text{ et } \exists r > 0 \text{ tel que } \delta(\Phi(x_i), \Phi(x)) > r$$

. On a alors deux cas :

1. Si $\sup_{z \in \Phi(x)} d(z, \Phi(x_i)) > r$, on a alors $z_i \in \Phi(x)$ tel que $d(z_i, \Phi(x_i)) > r$. Comme $\Phi(x)$ est compact, quitte à extraire, on peut supposer que (z_i) tend vers $z \in \Phi(x)$ et pour tout $i \in I$, $|z_i - z| < \frac{r}{2}$. D'où $\forall i \in I$, $d(z, \Phi(x_i)) > \frac{r}{2}$ i.e. $\forall i \in I$, $D(z, \frac{r}{2}) \cap \Phi(x_i) = \emptyset$. D'après le lemme d'Urysohn, $\exists f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tel que $f(z) = 1$ et $f|_{\mathbb{T} \setminus D(z, \frac{r}{2})} = 0$. Par densité des p_n , on en déduit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|p_n(z)| \geq \frac{2}{3}$ et $|p_n| \leq \frac{1}{3}$ sur $\mathbb{T} \setminus D(z, \frac{r}{2})$. D'où $\hat{p}_n(x) \geq p_n(z) \geq \frac{2}{3}$ et pour tout $i \in I$, $|\hat{p}_n(x_i)| \leq \frac{1}{3}$. x est donc point de discontinuité de \hat{p}_n .
2. Si $\sup_{z \in \Phi(x_i)} d(z, \Phi(x)) > r$, on a alors $z_i \in \Phi(x_i)$ tel que $d(z_i, \Phi(x)) > r$. Comme \mathbb{T} est compact, quitte à extraire, on peut supposer que (z_i) tend vers $z \in \mathbb{T}$. D'où $d(z, \Phi(x)) \geq r$ et donc $D(z, \frac{r}{2}) \cap \Phi(x) = \emptyset$. D'après le lemme d'Urysohn, $\exists f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tel que $f(z) = 1$ et $f|_{\mathbb{T} \setminus D(z, \frac{r}{2})} = 0$. Quitte à extraire de nouveau, on a pour tout $i \in I$, $|f(z_i)| > \frac{3}{4}$. Par densité des p_n , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in I$, $|p_n(z_i)| > \frac{1}{2}$ et $|p_n| < \frac{1}{4}$ sur $\mathbb{T} \setminus D(z, \frac{r}{2})$. D'où pour tout $i \in I$, $\hat{p}_n(x_i) > \frac{1}{2}$ et $\hat{p}_n(x) < \frac{1}{4}$. Dans ce cas aussi, x est donc un point de discontinuité de \hat{p}_n .

□

Lemme 4.3. Soient H un Hilbert et $p(z) = \sum_{n=-N}^N a_n z^n$ un polynôme trigonométrique sur \mathbb{T} .

Alors $\tilde{p} : \begin{array}{ccc} (\mathcal{U}(H), s.o.t.) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ T & \mapsto & \sup_{z \in \sigma(T)} |p(z)| \end{array}$ est semi-continue inférieurement.

Démonstration. En utilisant le théorème de l'application spectrale puis en remarquant que $p(T)$ est un opérateur normal si T est unitaire, on a :

$$\tilde{p}(T) = \sup_{z \in \sigma(T)} |p(z)| = \sup_{z \in \sigma(p(T))} |z| = \rho(p(T)) = \|p(T)\|.$$

On a $(\mathcal{U}(H), s.o.t.), T \mapsto T^{-1}$ et $(U, V) \mapsto UV$ continues d'après la proposition 1.43. On en déduit que si $p(z) = \sum_{n=-N}^N a_n z^n$ est un polynôme trigonométrique alors

$p : \begin{array}{ccc} (\mathcal{U}(H), s.o.t.) & \longrightarrow & (\mathcal{L}(H), s.o.t.) \\ T & \mapsto & p(T) = \sum_{n=-N}^N a_n T^n \end{array}$ est continue.

De plus, $\begin{array}{ccc} (\mathcal{L}(H), s.o.t.) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ T & \mapsto & \|T\| \end{array}$ est semi-continue inférieurement d'après la proposition 1.43. \tilde{p} est donc semi-continue comme composée d'une application continue avec une application semi-continue. □

Théorème 4.4. Soit G un groupe topologique métrisable ayant la propriété de Baire. $\theta : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire fortement continue de G dans un espace de Hilbert H .

On pose $\Phi : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & \mathcal{K}(\mathbb{T}) \\ g & \mapsto & \sigma(\theta(g)) \end{array}$

Alors Φ admet un ensemble comaigne dans G de points de continuité.

Démonstration. Considérons une suite p_n de polynômes trigonométriques denses dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. D'après le premier lemme, $Cont(\Phi) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Cont(\hat{p}_n)$. On remarque que $\hat{p}_n(g) = \tilde{p}_n(\theta(g))$. Donc \hat{p}_n est la composée de θ qui est continue pour la topologie forte et de \tilde{p}_n qui est semi-continue. On en déduit que \hat{p}_n est semi-continue et comme G est métrisable, elle est de première classe de Baire et donc possède un ensemble comaigne de point de continuité. Finalement, $Cont(\Phi)$ contient une intersection dénombrable d'ensemble comaigne, il est donc comaigne. □

Remarque. Il est possible que ce genre de technique pour montrer la continuité de fonctions à valeurs ensemblistes soit familier, sous une forme ou une autre, aux

personnes qui pratiquent l'analyse multi-valuée. En ce qui nous concerne, ce qui précède nous a été suggéré par la démonstration de l'existence analogue d'un ensemble comaigne de points de continuité du spectre pour la topologie uniforme dans [Aup].

4.3 Caractérisation de l'uniforme continuité

Dans ce paragraphe, on résume les résultats de [PT] dans une première partie, on applique ensuite le théorème 4.4 pour obtenir quelques précisions supplémentaires.

4.3.1 Résumé de [PT]

Définition 4.5. Un morphisme $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ moyenne vers 0 si $\forall V \in \mathcal{V}(e)$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists g_1, \dots, g_n \in V$, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \text{ et } \forall g \in G \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(gg_i) \mid < \epsilon$$

On rappelle que $\Sigma(A)$ désigne l'ensemble des états de la C^* -algèbre A et $P\Sigma(A)$ l'ensemble des états purs.

Théorème 4.6. *Soit θ une représentation unitaire d'un groupe G localement compact et métrisable sur une C^* -algèbre A , on a alors les équivalences :*

1. θ est uniformément continue.
2. $\forall \omega \in \Sigma(A)$, $\omega \circ \theta$ est continue.
3. $\forall \omega \in P\Sigma(A)$, $\omega \circ \theta$ est continue.

On pourrait déduire ce théorème des résultats du chapitre 2 (corollaire 2.8). La démonstration de [PT] est basée sur le fait que les fonctions $\omega \circ \theta$ sont définies positives et de type positif lorsqu'elles sont continues. La décomposition de Glicksberg-De Leeuw et la construction GNS permettant dans [PT] de montrer le lemme suivant :

Lemme 4.7. *Soit θ est une représentation unitaire d'un groupe G localement compact à base dénombrable d'ouverts sur la C^* -algèbre A engendrée par $\theta(G)$.*

Si θ n'est pas uniformément continue, alors il existe $\omega \in P\Sigma(A)$ tel que $\omega \circ \theta$ soit moyennable vers zéro.

et en déduire le théorème

Théorème 4.8. *Soit θ une représentation unitaire fortement continue d'un groupe G localement compact à base dénombrable d'ouverts dans un espace de Hilbert H . Alors on a l'équivalence :*

- (i) θ n'est pas uniformément continue.
- (ii) $\Sigma = \{g \in G \mid 0 \in \text{conv}(\sigma \circ \theta(g))\}$ est comaigne.

4.3.2 Remarques et compléments

Dans [PT] le passage du lemme au théorème utilise le fait que $g \mapsto \sigma(\theta(g))$ est borélienne. En utilisant le théorème 4.4, on peut préciser un peu plus le rapport entre les fonctions définies positives $\omega \circ \theta$ données par le lemme 4.7 et le spectre $\sigma(\theta(g))$ sur un comaigne. Ce qui suit n'est pas utilisé dans la suite.

Soit G un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts et $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie positive sur G et $g \in G$. On note $\Gamma_\varphi(g) = \bigcap_{V \in \mathcal{V}(g)} \overline{\varphi(V)}$. On va donner quelques résultats sur la variation de $\Gamma_\varphi(g)$ en fonction de g qu'on va énoncer dans un cadre un peu plus général.

Lemme 4.9. *Soit X un espace métrisable et T un compact de \mathbb{C} .*

Soit $\Phi : X \rightarrow \mathcal{K}(T)$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in X, \exists V \in \mathcal{V}(x), \forall y \in V, \quad \Phi(y) \subset \Phi(x)^\epsilon$$

où $A^\epsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, A) < \epsilon\}$.

Alors l'ensemble des points de continuité de Φ est comaigne dans X .

Démonstration. Soit p_n une suite dense dans $\mathcal{C}(T)$. Soient $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$; p_n est uniformément continue sur T donc

$$\exists \alpha_n, \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z_1 - z_2| < \alpha_n \Rightarrow |p_n(z_1) - p_n(z_2)| < \epsilon$$

Par hypothèse, $\exists V \in \mathcal{V}(x), \forall y \in V, \Phi(y) \subset \Phi(x)^{\alpha_n}$. D'où

$$\hat{p}_n(y) = \sup_{z \in \Phi(y)} |p_n(z)| \leq \sup_{z \in \Phi(x)^{\alpha_n}} |p_n(z)| \leq \sup_{z \in \Phi(x)} |p_n(z)| + \epsilon = \hat{p}_n(x) + \epsilon.$$

Donc \hat{p}_n est semi-continue et comme X est métrisable, elle est de première classe de Baire. Son ensemble de points de continuité est donc comaigne dans X . Comme d'après le lemme 4.2, $\text{Cont}(\Phi) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Cont}(\hat{p}_n)$, Φ possède un ensemble comaigne de points de continuité. □

Proposition 4.10. Soient X un espace métrisable et $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ bornée.

Alors $\Gamma_\varphi : x \mapsto \bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} \overline{\varphi(V)}$ possède un ensemble comeaigre de points de continuité.

Démonstration. Il suffit de montrer que Γ_φ vérifie les hypothèses du lemme précédent.

Soit $\epsilon > 0$. D'après le lemme 1.17, dans $\mathcal{K}(\overline{B(0, \|\varphi\|_\infty)})$, pour tout $x \in X$, $\bigcap_{i=1}^n \overline{\varphi(B(x, \frac{1}{i}))} = \overline{\varphi(B(x, \frac{1}{n}))}$ converge vers $\bigcap_{i=1}^\infty \overline{\varphi(B(x, \frac{1}{i}))} = \Gamma_\varphi(x)$. Il existe donc $n_0 \geq 1$ tel que $\overline{\varphi(B(x, \frac{1}{n_0}))} \subset \Gamma_\varphi(x)^\epsilon$. Or, on a pour tout $y \in B(x, \frac{1}{n_0})$,

$$\Gamma_\varphi(y) = \bigcap_{V \in \mathcal{V}(y)} \overline{\varphi(V)} \subset \overline{\varphi\left(B\left(x, \frac{1}{n_0}\right)\right)} \subset \Gamma_\varphi(x)^\epsilon.$$

Γ_φ vérifie donc les hypothèses du théorème précédent. \square

Proposition 4.11. Soit G un groupe topologique métrisable ayant la propriété de Baire et soit $\theta : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire fortement continue de G dans un espace de Hilbert H .

Il existe un ensemble comeaigre \mathcal{C} de G tel que pour tout $g \in \mathcal{C}$,

$$\bigcup_{\omega \in \Sigma(A_\theta)} \Gamma_{\omega \circ \theta}(g) = \text{conv}((\sigma \circ \theta)(g))$$

où A_θ est l'algèbre de Banach engendré par $\theta(G)$.

Démonstration. D'après le théorème 1.36, on a pour tout $g \in G$, on a

$$\bigcup_{\omega \in \Sigma(A_\theta)} \Gamma_{\omega \circ \theta}(g) \supset \text{conv}((\sigma \circ \theta)(g)).$$

D'après la proposition 1.16 et le théorème 4.4, il existe un ensemble comeaigre \mathcal{C} de G de points de continuité pour $\text{conv}((\sigma \circ \theta))$. Soient $g \in \mathcal{C}$ et $\omega \in \Sigma(A_\theta)$. Pour tout ouvert U de \mathbb{D} contenant $\text{conv}((\sigma \circ \theta)(g))$, on peut trouver un ouvert V tel que $\text{conv}((\sigma \circ \theta)(g)) \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Or $\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{D}) | K \subset V\}$ est un ouvert de $\mathcal{K}(\mathbb{D})$ donc, comme $\text{conv}(\sigma \circ \theta)$ est continue en g , il existe $W \in \mathcal{V}(g)$ tel que $\text{conv}((\sigma \circ \theta)(W)) \subset V$. On en déduit que $(\omega \circ \theta)(W) \subset V$ et donc $\Gamma_{\omega \circ \theta}(g) \subset \overline{V} \subset U$. On a donc montré que pour tout ouvert U contenant $\text{conv}((\sigma \circ \theta)(g))$, U contient $\Gamma_{\omega \circ \theta}(g)$. Donc pour tout $g \in \mathcal{C}$, et tout $\omega \in \Sigma(A_\theta)$, $\Gamma_{\omega \circ \theta}(g) \subset \text{conv}((\sigma \circ \theta)(g))$. \square

4.4 Le cas des groupes de Lie

Nous allons nous intéresser à présent au cas particulier des groupes de Lie. En effet, nous allons montrer que l'existence d'une exponentielle permet de prouver que pour une représentation unitaire non uniformément continue, le spectre est "souvent" le tore tout entier sur un voisinage du neutre. Plus précisément :

Théorème 4.12. *Soient G un groupe de Lie et $\theta : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire fortement continue de G dans un espace de Hilbert H .*

On pose $\Sigma := \{g \in G \mid \sigma(\theta(g)) = \mathbb{T}\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue

\Downarrow

il existe U voisinage ouvert de e dans G tel que $\Sigma \cap U$ est comaigne.

Commençons par un court rappel des propriétés des groupes de Lie qui nous seront utiles.

Dans un groupe de Lie, on peut définir une application $exp : T_e G \rightarrow G$
 $v \mapsto exp(v)$
 vérifiant :

- $\forall v \in T_e G, \quad exp(\cdot.v) : \mathbb{R} \rightarrow G$
 $t \mapsto exp(t.v)$ est un morphisme continu.
- exp est un difféomorphisme entre un voisinage V de 0 dans $T_e G$ et un voisinage U de e dans G .

Conséquences :

- Si $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(H)$ est une représentation de G fortement continue, alors $\theta \circ exp(\cdot.v)$ est une représentation de \mathbb{R} fortement continue.
- On peut définir "la racine n^{ieme} " : pour tout $n \in \mathbb{N}, \rho_n : U \rightarrow U_n$
 $g \mapsto exp(\frac{1}{n} exp^{-1}(g))$
 est un homéomorphisme vérifiant

$$\forall g \in U, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n(g) = e.$$

Démonstration. Si θ est uniformément continue alors e est un point de continuité pour $\sigma \circ \theta$ et donc pour tout voisinage ouvert U de e , $\Sigma \cap U$ ne peut pas être comaigne.

Réciproquement, si θ n'est pas uniformément continue, d'après le théorème 4.8, il existe un ensemble comaigne C_0 tel que pour tout élément $g, 0 \in Conv(\sigma \circ \theta(g))$. On note $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \rho_n^{-1}(C_0 \cap \rho_n(U))$, ρ_n et U étant ceux définis plus haut. C est comaigne dans U .

Prenons $g \in C$. $\theta_g : t \mapsto \theta \circ \exp(t.\exp^{-1}(g))$ est une représentation de \mathbb{R} fortement continue. Si θ_g est uniformément continue alors 0 est un point de continuité pour $\sigma \circ \theta_g$. Or, comme $g \in C$, pour tout entier non nul n , on a $0 \in \text{Conv}(\sigma \circ \theta_g(\frac{1}{n}))$. Donc θ_g n'est pas uniformément continue. On peut donc appliquer le théorème 0.1 qui nous donne un ensemble C_r comaigne (et donc dense) de \mathbb{R} tel que pour tout $t \in C_r$, $\sigma \circ \theta_g(t) = \mathbb{T}$. On a alors pour $t_n \rightarrow 1$ avec $t_n \in C_r$, $g_n = \exp(t_n.\exp^{-1}(g)) \rightarrow g$ avec $\sigma \circ \theta(g_n) = \mathbb{T}$. Si on suppose, de plus, que g est un point de continuité de $\sigma \circ \theta$, on a $\sigma \circ \theta(g) = \mathbb{T}$. Donc $C \cap \text{Cont}(\sigma \circ \theta) \subset \{g \in U \mid \sigma \circ \theta(g) = \mathbb{T}\}$ et comme $C \cap \text{Cont}(\sigma \circ \theta)$ est comaigne dans U d'après ce qui précède, on a donc bien trouvé U tel que $\Sigma \cap U$ est comaigne. \square

Corollaire 4.13. *Soient G un groupe de Lie tel que l'exponentielle est à image dense dans G et $\theta : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire fortement continue de G dans un espace de Hilbert H .*

On pose $\Sigma := \{g \in G \mid \sigma(\theta(g)) = \mathbb{T}\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \Sigma$ est comaigne.

Démonstration. Supposons que θ n'est pas uniformément continue. Soit $g \in \text{Cont}(\sigma \circ \theta)$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists g_n \in B(g, \frac{1}{n}) \cap \exp(T_e G)$. D'où $\exists u_n \in T_e G$ tel que $g_n = \exp(u_n)$. On a alors $k_n \in \mathbb{N}$ tel que $\exp(\frac{1}{k_n}.u_n) \in U$ où U désigne l'ouvert du théorème précédent. Or $\phi_{k_n} : g \mapsto g^{k_n}$ est continue donc $\phi_{k_n}^{-1}(B(g, \frac{1}{n})) \cap U$ est un ouvert non vide car $\exp(\frac{1}{k_n}.u_n)$ est dedans. Cet ouvert contient donc h_n tel que $\sigma \circ \theta(h_n) = \mathbb{T}$ d'après le théorème précédent. D'où $h_n^{k_n} \in B(g, \frac{1}{n})$ et $\sigma \circ \theta(h_n^{k_n}) = \mathbb{T}$. On a donc une suite $(h_n^{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers g et telle que $\sigma \circ \theta(h_n^{k_n}) = \mathbb{T}$. Comme g est un point de continuité de $\sigma \circ \theta$ on en déduit que $\sigma \circ \theta(g) = \mathbb{T}$. Σ contient donc l'ensemble comaigne d'après le théorème 4.4 des points de continuité de $\sigma \circ \theta$, il est donc comaigne. \square

Remarque. – On vient de montrer, sous les hypothèses du théorème, que si $g \in \text{Cont}(\sigma \circ \theta)$ alors $\sigma \circ \theta(g) = \mathbb{T}$. La réciproque est vraie dans un cadre beaucoup plus général : Soit $T_0 \in \mathcal{U}(H)$ tel que $\sigma(T_0) = \mathbb{T}$, alors T_0 est point de continuité de $\sigma : (\mathcal{U}(H), s.o.t.) \rightarrow K(\mathbb{T})$. En effet, si p_n désigne une suite dense de polynômes trigonométriques, d'après le lemme 4.3, \tilde{p}_n est semi-continue inférieurement *i.e.* pour tout $\alpha > 0$, $\{T \in \mathcal{U}(H) \mid \tilde{p}_n(T) > \alpha\}$ est un ouvert fort. De plus, par définition des \tilde{p}_n , on a $\forall n \in \mathbb{N}, \forall T \in \mathcal{U}(H), \tilde{p}_n(T) \leq \tilde{p}_n(T_0)$ donc pour tout $\alpha > 0$, $\{T \in \mathcal{U}(H) \mid \tilde{p}_n(T) < \tilde{p}_n(T_0) + \alpha\} = \mathcal{U}(H)$ qui est ouvert. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, \tilde{p}_n est donc continue en T_0 . En appliquant le lemme 4.2 à σ on en déduit que T_0 est point de continuité de σ .

- Un groupe de Lie dont l'exponentielle est à image dense (parfois appelé groupe de Lie faiblement exponentiel) est nécessairement connexe. Comme exemples de tels groupes, on peut citer ceux dont l'exponentielle est surjective comme pour $GL(n, \mathbb{C})$ ou pour les groupes de Lie compacts connexes (voir [Sep] théorème 5-12). Les groupes de Lie résolubles sont faiblement exponentiels (voir [Dix2], [Pat]).
- On montre dans [Est] que pour un groupe abélien localement compact G , toute représentation θ localement bornée non continue en norme de G dans une algèbre de Banach vérifie $\limsup_{g \rightarrow e} \|\theta(g) - 1\| \geq \sqrt{3}$. De plus, si G admet localement, pour tout ordre, une division continue, alors $\limsup_{g \rightarrow e} \|\theta(g) - 1\| \geq 2$. Ces résultats sont généralisés à des groupes non abéliens dans [Dub2]. Pour une représentation unitaire fortement continue d'un groupe de Lie, nous avons un résultat plus précis, conséquence du théorème 4.12 : Si θ n'est pas continue en norme, il existe un voisinage ouvert U de e tel que $\|\theta(g) - 1\| = 2$ sur un ensemble comaigne de U , U étant tout le groupe dans le cas où le groupe est faiblement exponentiel.
- D'après le théorème de similarité de Dixmier (voir [Dix1]), le résultat s'étend aux représentations hilbertiennes bornées de groupes de Lie moyennables.
- On ignore si le résultat local s'étend à tout le groupe dans le cas général des groupes non faiblement exponentiels.

4.5 Compléments

4.5.1 Application aux représentations unitaires des groupes possédant localement une racine n^{ieme}

Commençons par un petit lemme.

Lemme 4.14. *Soient G un groupe topologique et θ une représentation. Soient g point de continuité de $\sigma \circ \theta$ et (g_i) une suite d'éléments de G qui tend vers g et telle que pour tout i , il existe un polygone régulier contenu dans $\sigma \circ \theta(g_i)$. Alors, $\sigma \circ \theta(g)$ contient aussi un polygone régulier.*

Démonstration. Nous avons 2 possibilités :

- Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel qu'on peut extraire une sous-suite (g_j) de (g_i) vérifiant pour chaque g_j , $\sigma \circ \theta(g_j)$ contient un polygone régulier à p cotés. Dans ce cas, si on note $e^{\frac{2ki\pi}{p} + \theta_j}$, $k \in \{1, \dots, p\}$ les sommets du j^e polygone, on peut, quitte

- à extraire, supposer que θ_j converge vers θ . Le polygone de sommet $e^{\frac{2ki\pi}{p} + \theta}$, $k \in \{1, \dots, p\}$ est alors dans $\sigma \circ \theta(g)$ par continuité.
- Sinon, on peut trouver une sous-suite (g_j) de (g_i) ayant un polygone régulier \mathcal{P}_j dans $\sigma \circ \theta(g_j)$ avec un nombre de cotés strictement croissant avec j . Les \mathcal{P}_j tendent vers \mathbb{T} pour la distance de Hausdorff et sont contenus dans les $\sigma \circ \theta(g_j)$ qui tendent vers $\sigma \circ \theta(g)$ par continuité en g . On a donc dans ce cas, $\sigma \circ \theta(g) = \mathbb{T}$.

□

Théorème 4.15. *Soit G un groupe localement compact, à base d'ouverts dénombrable tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $\rho_n : g \mapsto g^n$ est un homéomorphisme d'un voisinage ouvert V de e dans un ouvert U contenant V . On suppose de plus que pour tout $g \in U$ on a une suite croissante d'entiers (k_i) telle que $\lim_{i \rightarrow +\infty} \rho_n^{-k_i}(g) = e$.*

Soit $\theta : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire fortement continue.

On pose $\Sigma := \{g \in G \mid \sigma(\theta(g)) \text{ contient un polygone régulier}\}$. On a alors :

$$\theta \text{ n'est pas uniformément continue} \Leftrightarrow \Sigma \cap U \text{ est comeaigre.}$$

Démonstration. Si θ est uniformément continue alors e est un point de continuité pour $\sigma \circ \theta$ et donc $\Sigma \cap U$ ne peut pas être comeaigre.

Réciproquement, si θ n'est pas uniformément continue, d'après le théorème 4.8, il existe un ensemble comeaigre C_0 tel que pour tout élément $g \in C_0$, $0 \in \text{Conv}(\sigma \circ \theta(g))$. On note $C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \rho_n^k(C_0 \cap \rho_n^{-k}(U))$. C est comeaigre dans U .

Prenons $g \in C$. On note H_g le sous-groupe fermé engendré par les $\rho_n^k(g)$, $k \in \mathbb{Z}$. H_g est commutatif. En effet, on a :

$$\forall k, k' \in \mathbb{N}, k \geq k', \quad \rho_n^{-k'} = \rho_n^{k-k'} \circ \rho_n^{-k}(g) = (\rho_n^{-k}(g))^{n^{k-k'}}.$$

Donc $\rho_n^{-k}(g)$ et $\rho_n^{-k'}(g)$ commutent pour tout $k, k' \in \mathbb{N}$. En particulier, pour $k' = 0$, $\rho_n^{-k}(g)$ commute avec g et donc avec les puissances de g .

De plus, on remarque que $\theta|_{H_g}$ n'est pas uniformément continue car on a

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \rho_n^{-k_i}(g) = e$$

et, comme $g \in C$, $0 \in \text{conv}(\sigma \circ \theta(\rho_n^{-k_i}(g)))$. Donc d'après le théorème 3.9, $\Sigma \cap H_g$ est comeaigre dans H_g donc dense.

D'où, si on prend $g \in \text{Cont}(\sigma \circ \theta) \cap C$, on peut trouver une suite g_i dans Σ qui tend vers g . D'après le lemme 4.14, g est dans Σ . Σ contient donc $\text{Cont}(\sigma \circ \theta) \cap C$ qui est comeaigre dans U , il est donc comeaigre dans U . □

Corollaire 4.16. *Si, dans les hypothèses du théorème précédent, on suppose de plus que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \rho_n^k(U)$ est dense dans G , alors*

$$\theta \text{ n'est pas uniformément continue} \Leftrightarrow \Sigma \text{ est comaigne.}$$

4.5.2 Application en passant par des groupes quotients

Ce qui suit est plus une remarque qui pourrait être utile qu'un résultat réellement car cela permet, en théorie, d'appliquer à une classe de groupes plus large (mais pas à toutes leurs représentations) les caractérisations de l'uniforme continuité présentes dans cette thèse. De manière plus intuitive, si la représentation ne prend en compte que la "partie" commutative ou compacte du groupe, alors on aura les mêmes résultats que si le groupe était effectivement commutatif ou compact.

Nous allons considérer dans cette partie un groupe topologique G , une représentation θ de G dans un espace de Banach X et H un sous-groupe distingué de G contenu dans $\text{Ker } \theta$. On peut alors construire une représentation $\tilde{\theta} : G/H \rightarrow \mathcal{L}(X)$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{s} & G/H \\ \downarrow \theta & \swarrow \tilde{\theta} & \\ \mathcal{L}(X) & & \end{array}$$

Lemme 4.17. *Soit O un ouvert de G/H . Si \mathcal{C} est un ensemble comaigne de O alors $s^{-1}(\mathcal{C})$ est un ensemble comaigne de $s^{-1}(O)$.*

Démonstration. \mathcal{C} contient une intersection dénombrable d'ouverts O_n denses dans O . s étant une application continue, $s^{-1}(\mathcal{C})$ contient donc une intersection dénombrable d'ouverts qui est $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} s^{-1}(O_n)$. Reste donc à montrer que les $s^{-1}(O_n)$ sont denses dans $s^{-1}(O)$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et U un ouvert de O . s est une application ouverte donc $s(U)$ est ouvert dans O . D'où $s(U) \cap O_n \neq \emptyset$ et la surjectivité de s entraîne l'existence de $g \in s^{-1}(s(U) \cap O_n)$. On remarque que pour tout $h \in H$, $gh \in s^{-1}(O_n)$ or il existe $h_0 \in H$ tel que $gh_0 \in U$. Donc il existe h_0 tel que $gh_0 \in s^{-1}(O_n) \cap U$. $s^{-1}(O_n)$ est donc dense dans $s^{-1}(O)$. \square

Exemple 4.18. Si θ n'est pas uniformément continue et $\text{ker } \theta$ contient le groupe dérivé de G alors $G/\text{ker } \theta$ est commutatif et donc d'après le lemme précédent, $\Sigma_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid \sigma^1(\theta(g)) \text{ contient une réunion de polygones réguliers non triviaux}\} = s^{-1}(\Sigma)$ est comaigne dans G où Σ est défini dans le théorème 3.9 appliqué à $G/\text{ker } \theta$.

On peut faire exactement le même raisonnement si $G/\text{Ker } \theta$ est un groupe de Lie ou compact et appliquer alors les théorèmes correspondants à $\tilde{\theta}$ pour en déduire les mêmes conclusions mais pour θ . On pourrait résumer cela sous la forme :

Proposition 4.19. *Si $\tilde{\theta} : G/\ker \theta \rightarrow \mathcal{L}(X)$ vérifie les hypothèses du théorème 3.9 (resp. 4.12; 4.13), alors $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ en vérifie les conclusions.*

Bibliographie

- [Aup] B. AUPETIT, *A primer of spectral theory*, Universitext Springer, 1990.
- [Ban] BANASZCZYK, *The Levy continuity theorem for nuclear groups*, *Studia Mathematica* 136(2), 1999.
- [BD] F. BONSALL, J. DUNCAN, *Numerical range of operators on normed spaces and of elements of normed algebras*, Cambridge University Press, 1971.
- [BD2] F. BONSALL, J. DUNCAN, *Numerical range of operators on normed spaces and of elements of normed algebras II*, Cambridge University Press, 1971.
- [Ben-Lin] BENYAMINI-LINDENSTRAUSS, *Geometric nonlinear functional analysis*, AMS colloquium Publ. (vol 48), 2000.
- [Bou] N. BOURBAKI, *Topologie générale, chapitre IX*, Hermann, 1974.
- [Chri] CHRISTENSEN, *On sets of Haar measure zero in abelian polish groups*, *Israel J. Math.* 13, 1972 p. 255-260.
- [CP] M. CIANFARANI, J.M. PAOLI, *Spectra of elements in the range of strongly continuous unitary representations of Lie groups*, *Arch. Math.*, 98 (2012), p. 561-569.
- [CPT] M. CIANFARANI, J.M. PAOLI, J.C. TOMASI, *Spectral properties of strongly continuous representations of groups*, *Arch. Der Math.* 96, 2011 p. 253-262.
- [CPT2] M. CIANFARANI, J.M. PAOLI, J.C. TOMASI *Some results on automatic continuity of group representations and morphisms*, *Extracta Math.*, Vol. 27, n° 1 p. 59-74 (2012).
- [DAELW] H. G. DALES, P. AIENA, J. ESCHMEIER, K. LAURSEN, G. WILLIS, *Introduction to Banach Algebras, Operators and Harmonic Analysis*, London Math. Soc., Student Texts 57.
- [DE] A. DEITMAR, S. ECHTERHOFF, *Principles of harmonic analysis*, Springer-Verlag, 2009.
- [DLG] K. DE LEEUW, I. GLICKSBERG, *The decomposition of certain group representations*, *J. Analyse Math.* 15, 1965, p. 135-192.

- [Dix1] DIXMIER, *Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications*, Acta. Sc. math. Szeged 12, 1950 p. 213-227.
- [Dod] P. DODOS, *Dichotomies of the set of tests measures of haar null set*, Israel J. Math. 144, 2004 p. 15-28.
- [Dix2] DIXMIER, *L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles*, Bull. Soc. Math. France 85, 1957.
- [Dub] S. DUBERNET, *Représentations de groupes topologiques et étude spectrale d'opérateurs de décalage unilatéraux et bilatéraux*, Thèse de doctorat présentée à l'Université de Bordeaux I, 2006.
- [Dub2] S. DUBERNET, *Dichotomy laws for the behaviour near the unit element of group representations*, Arch. Math. 86 n°5, 2006 p. 430-436.
- [Est] J. ESTERLE, *The zero- $\sqrt{3}$ and zero-two laws for representations of locally abelian groups*, Izv.Nats.Akad.Nauk.Armenii Mat.38 (2003), n°5, 11-22 ; translation in J.Contemp.Math.Anal.38 (2003), n°5, 9-19, 2004.
- [Flo] K. FLORET, *Weakly compact sets*, Lecture notes in Maths 801, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [Fol] G. FOLLAND, *A course in abstract harmonic analysis*, CRC Press, 1995.
- [Gaal] S.A. GAAL, *Linear analysis and representation theory*, Springer, 1973.
- [God] G. GODEFROY, *Communication privée*.
- [God2] G. GODEFROY, *Boundaries of a convex set and interpolation sets*, Math. Annalen 277 (1987) p.173-184.
- [Gow] W.T. GOWERS, B. MAUREY, *The unconditional basic sequence problem*, J. AMS, 6, 851-874, 1993.
- [Gro] A. GROTHENDIECK, *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*, American Journal of Math. 74 n°1, 1952.
- [Hal] P. HALMOS, *A Hilbert space problem book*, Springer Verlag, 1991.
- [HR1] E. HEWITT, K.A. ROSS, *Abstract harmonic analysis I*, Springer-Verlag, 1979.
- [HR2] E. HEWITT, K.A. ROSS, *Abstract harmonic analysis II*, Springer-Verlag, 1979.
- [HP] E. HILLE, R.S. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups.*, AMS Colloque. Publ. 31, Providence, RI, 1957.

- [Kech] A.S. KECHRIS, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, 1994.
- [Kle] A. KLEPPNER, *Measurable homomorphisms of locally compact groups*, Proc AMS vol 106 n°2, Juin 1989.
- [Kuz] J KUZNETSOVA, *On continuity of measurable group representations and homomorphisms*, Arxiv 10100999v2[math FA] 15 nov 2010.
- [LPS] K. LATRACH, J.M. PAOLI AND P. SIMONNET, *Some facts from descriptive set theory concerning essential spectra and applications*, Studia Math. 171, 2005, 207-225.
- [LN] K.B. LAURSEN, M.M. NEUMANN, *An introduction to local spectral theory*, Oxford science publication, 2000.
- [Lot] H.P. LOTZ, *Uniform Convergence of operators on L^∞ and similar spaces*, Mathematische Zeitschrift, Springer-Verlag, 1985.
- [Mau] B. MAUREY, *Banach spaces with few operators*, in Handbook of Banach Spaces, Elsevier, Amsterdam, 2003 p. 1247-1297.
- [Mur] G.J. MURPHY, *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, 1990.
- [Or] J. ORIHUELA, *Pointwise compactness on sets of continuous functions*, J. London Math. Soc. (2) 36, 1987, p.143-152.
- [PT] J.M. PAOLI, J.C. TOMASI, *Unitary representations of groups, continuity and spectrum*, Arch. Math., 97 (2011) p.157-165.
- [Pat] A. L.T.PATERSON, *Amenability*, AMS, 1988.
- [Pfi] H. Pfitzner, *Boundaries for Banach spaces determine weak-compactness*, Inventiones Mathematicae, 2010 Vol. 182 n°3 p.585-604.
- [Ros] C. ROSENDAL, *Automatic continuity of group homomorphisms*, The bulletin of symbolic logic, vol 15 n°2, juin 2009.
- [Sch] H.H. SCHAEFER, *Banach lattices and positive operators*, Springer-Verlag, 1974.
- [Sep] SEPANSKI, *Compact Lie Groups*, Springer, 2006.
- [Sas] Z. SASVARI, *Positive definite and definitizable functions*, Akademic Verlag, 1994.
- [Tak] M. TAKESAKI, *Theory of Operator Algebra 1*, Springer, 2002.
- [Tom] J.C. TOMASI, *Strongly continuous representations of groups and Haar measure*, Stud. Math., 206(1), 2011 p. 25-35.

- [Tom2] J.C. TOMASI, *Continuité et propriétés spectrales des représentations de groupes localement compacts*, Thèse de doctorat présentée à l'Université de Corse, 2011.
- [Yad] M. YADHI, *Borel spectrum of operators on banach spaces*, arXiv, arxiv.org/abs/0912.5396, 2009, e-print.
- [Yad2] M. YADHI, *Theorie descriptive des ensembles en géométrie des espaces de Banach ; Exemples*, Thèse de Doctorat à Paris VI, 1998.

Résumé

Dans ce travail, on commence par donner des critères de continuité automatique pour des représentations de groupes topologiques dans des algèbres de Banach. Deux approches différentes sont présentées : l'une utilisant la décomposition de Glicksberg-De Leeuw s'applique aux groupes localement compacts, l'autre, basée sur un résultat d'équicontinuité de suites de fonctions de type positif, aux groupes polonais (non forcément localement compacts). Typiquement, on exprime la continuité d'une représentation par celle de ses composées par des formes linéaires continues sur l'algèbre de représentation. On déduit de ce qui précède des résultats de continuité automatique de morphismes de groupes topologiques.

Dans une seconde partie, on applique les résultats de la première pour obtenir des propriétés d'étalement du spectre des éléments de l'image de la représentation en dehors d'un sous-ensemble « petit » en divers sens du groupe dans le cas abélien.

La troisième partie généralise partiellement les résultats de la seconde au cas des groupes de Lie (non abéliens en précisant ainsi, dans ce cas, un théorème obtenu par J.M. Paoli et J.C. Tomasi.

Mots clefs : Groupes localement compacts, groupes polonais, groupes de Lie, Algèbres de Banach, représentations de groupes, continuité automatique, spectre d'opérateurs.

Abstract

In the first part of this work, we give some criteria of automatic continuity for representations from topological groups in Banach algebras. Two different approaches are used : the first one, based on the Glicksberg-De Leeuw decomposition, applies to locally compact groups; the second one, based using an equicontinuity result for sequences of positive definite functions applies to Polish (perhaps non locally compact) groups. Typically, the continuity of a representation is expressed through the continuity of the composition of this representation with some functionals on the representation algebra. Some results for group morphisms are deduced.

In the second part, the results of the first part are applied to obtain properties of the spectra of the elements in the range of the representation outside a "small" (in various sense) subset of the group in the abelian case.

The third section of this work partially generalizes the results of the second part to Lie groups (non abelian in general) refining a theorem obtained by J.M. Paoli and J.C. Tomasi in a previous work.

Keywords: locally compact groups, Polish groups, Lie groups, Banach algebras, group representation, automatic continuity, Spectrum of operators.